Mr. MILENA JELIĆ

PRESLIKAVANJA I DIMENZIJE U BITOPOLOŠKIM PROSTORIMA

- Doktorska disertacija -

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

BEOGRAD, 1978. GODINE

S a d r ž a j

U V O D

Ovaj rad je usmeren ka ispitivanju osobina bitopoloških prostora pomoću poluotvorenih skupova. Dat je pregled dosadašnjih rezultata i dokaz nekih osobina ovih prostora koje do sada nisu bile proučene.

Kelly je 1962. godine definisao bitopološki prostor i proučio neke njegove osobine. Dalja proučavanja ovih prostora vršili su, pored ostalih, Kim, Swart, Pervin, Dvališvili, Singal.

Sve date definicije i osobine ovih prostora se, u slučaju poklapanja zadanih topologija, svode na poznate definicije i osobine topoloških prostora.

Levine je 1963. godine definisao poluotvoren skup i proučio neke njegove osobine. Intenzivnijem proučavanju osobina ovih skupova i osobina topoloških prostora pomoću ovih skupova, pristupilo se od 1970. godine. Osobine topoloških i bitopoloških prostora i njihovih preslikavanja pomoću ovih skupova proučavali su: Noiri, Prasad, Maheswari, Singal i drugi.

Dimenzija, kao važna topološka invarijanta, proučena je detaljno za topološke prostore. U ovom radu detaljnije je proučena dimenziona funkcija dmX topološkog prostora X kao i dimenziona funkcija $\mathcal{P}$-dmX, definisana pomoću $\mathcal{P}$-graničnog pokrivača prostora X. U radu je dat i pregled definicija, osobina i medjusobnih odnosa dimenzionih funkcija bitopoloških prostora. Dimenzije ovih prostora proučili su pored ostalih Reilly i Dvališvili.

I

NEKE OSOBINE TOPOLOŠKIH I BITOPOLOŠKIH PROSTORA

1. TOPOLOŠKI PROSTORI

U ovom poglavlju ukazaće se na neke pojmove opšte topologije koji se koriste u daljem radu. Dokazi pojedinih osobina topoloških prostora mogu se videti u radovima Aleksandrova, Kuratovskog i Kelly-a.

Posmatrajmo konačne familije podskupova nekog skupa X. Za familije skupova $A_1,\dots,A_n$ i $B_1,\dots,B_n$ kaže se da su slične u kombinatornom smislu, ako je $\{A_{i_1}\cap\dots\cap A_{i_k}=\emptyset\}\equiv\{B_{i_1}\cap\dots\cap B_{i_k}=\emptyset\}$ za proizvoljan skup indeksa ($\leq n$).

Neka je $F_1,\dots,F_n$ konačna familija zatvorenih skupova u normalnom prostoru $(X,\mathcal{T})$. Tada se svaki skup F_i $(1\leq i\leq n)$ nalazi u nekom otvorenom skupu G_i, pri čemu je familija skupova $\mathrm{cl}G_1,\dots,\mathrm{cl}G_n$ slična datoj familiji u kombinatornom smislu.

Posmatrajmo sada normalan prostor $(X,\mathcal{T})$. Svaki F_σ skup X_0 normalnog prostora X je njegov normalan podprostor. Neka je $X_0\subseteq X$, F_σ skup u prostoru X i F_0 zatvoren skup u podprostoru X_0. Tada se može dokazati da je F_0 F_σ skup u prostoru X.

1.1. L E M A (čeh). Neka je A podprostor nasledno normalnog prostora X. Tada za proizvoljan, otvoren u A, konačan pokrivač $\mathcal{U}=\{U_i \mid i=1,\dots k\}$ prostora A postoji familija skupova $\mathcal{V}=\{V_i \mid i=1\dots k\}$, takva da je $V_i\subset U_i$ za $i=1,\dots,k$. Skupovi V_i su otvoreni u prostoru X i familija skupova $\mathcal{V}$ je slična familiji skupova $\mathcal{U}$.

Kaže se da je topološki prostor $(X,\mathcal{T})$ potpuno normalan, ako za svaki par disjunktnih zatvorenih skupova $A, B\subset X$, postoji neprekidna funkcija $f: X\to I$ takva da je $(f(x)=0)\Leftrightarrow(x\in A)$ i $(f(x)=1)\Leftrightarrow(x\in B)$. Može se pokazati da je normalan prostor, u kome je svaki otvoren skup tipa F_σ, potpuno normalan prostor.

Podprostor X_0 normalnog prostora X je normalno rasporedjen u X, ako u proizvoljnoj okolini O skupa X_0 postoji skup $X_1 \supset X_0$, tipa F_σ u prostoru X.

Posmatrajmo sada pokrivače topološkog prostora X. Neka svaki elemenat pokrivača $\mathcal{U}$ metričkog prostora X ima dijametar manji od ε. Tada se pokrivač $\mathcal{U}$ naziva ε-pokrivač.

Topološki prostor X je finalno kompaktan, ako se u svaki otvoren pokrivač tog prostora može upisati prebrojiv otvoren pokrivač.

Topološko razbijanje prostora X je lokalno konačan pokrivač, čiji su elementi kanonski zatvoreni skupovi sa disjunktnim unutrašnjostima. Skup je kanonski zatvoren ($\mathcal{K}a$-skup) ako je jednak zatvorenosti otvorenog skupa; tj. $A = \mathrm{cl}G$, gde je G otvoren skup u prostoru X. Tada je $G \subset \mathrm{Int}\, A \subset A$ i $A = \mathrm{cl}G \subset \mathrm{cl}\ \mathrm{Int}\, A \subset A$ tj. $A = \mathrm{cl}\ \mathrm{Int}\, A$.

Skupovno razbijanje prostora X je familija njegovih disjunktnih podskupova, takvih da je njihova unija čitav skup X.

1.2. D E F I N I C I J A. Neka je data familija X_α, $\alpha \in \mathcal{U}$, topoloških prostora. Diskretna suma $d\bigcup_\alpha X_\alpha$ prostora X_α je disjunktna suma $\bigcup_\alpha X_\alpha = X$ skupova X_α snabdevena sledećom topologijom: Skup O je otvoren u prostoru X, ako i samo ako je otvoren svaki skup $O \cap X_\alpha$ u topologiji prostora X_α za $\alpha \in \mathcal{U}$.

Posmatramo sada preslikavanje topoloških prostora. Neprekidno preslikavanje $f\colon X \to Y$ topološkog prostora X u topološki prostor Y, naziva se ε-preslikavanje, ako inverzna slika svake tačke $y \in Y$, $f^{-1}(y)$, ima dijametar manji od ε.

Preslikavanje $f\colon X \to Y$ topološkog prostora X u topološki prostor Y je faktorno preslikavanje, ako je skup $V \subset Y$ otvoren u prostoru Y, tada i samo tada, kada je $f^{-1}(V)$ otvoren skup u prostoru X.

Za primenu algebarskih metoda u topologiji potrebno je proučiti simplicijalne komplekse. Skup K čiji su elementi simpleksi Euklidovog prostora E_n, naziva se simplicijalni kompleks ako su ispunjeni sledeći uslovi:

a) Broj simpleksa u skupu K je konačan.

b) Ako simpleks s_p pripada skupu K a simpleks s_q je strana simpleksa s_p, onda i simpleks s_q pripada skupu K.

c) Dva različita simpleksa skupa K nemaju zajedničkih tačaka.

Ovako definisan kompleks naziva se potpun. Potpun konačan kompleks, čiji su elementi disjunktni otvoreni simpleksi datog prostora E_n, naziva se triangulacija kompleksa K.

Kombinatorna zvezda bilo kog simpleksa s kompleksa K je skup svih simpleksa kompleksa K, koji imaju simpleks s kao svoju stranu tj. $st(s) = \{t: s \leq t \in K\}$. Otvorene zvezde vrhova date triangulacije nazivaju se glavne zvezde. Može se pokazati da je triangulacija K nerv sistema svojih glavnih zvezda.

Neka je $\mathcal{U} = \{U_i \mid i = 1,\dots s\}$ konačan otovren pokrivač topološkog prostora X. Svakom elementu U_i pokrivača dodelimo vrh x_i. Svi vrhovi x_i odredjuju kompleks $\mathcal{N}(\mathcal{U})$, s tim što vrhovi $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots x_{i_p}$ odredju simpleks kompleksa $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ onda i samo onda, kada je $U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_p} \neq \emptyset$. Ovako dobijen kompleks $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ je nerv pokrivača $\mathcal{U}$. Nerv pokrivača $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ je delimično uredjen skup relacijom $\leq$. Neka su T_1 i T_2 simpleksi kompleksa $\mathcal{N}(\mathcal{U})$. Tada je $T_1 \leq T_2$, kad god je simpleks T_1 strana simpleksa T_2. U slučaju kada je simpleks T_1 prava strana simpleksa T_2, biće $T_1 < T_2$.

Definišimo sada osnovne dimenzione invarijante topološkog prostora X i navedimo neke njihove osobine. To su mala induktivna dimenzija indX, velika induktivna dimenzija IndX i kombinatorna dimenzija dim X.

$ind\emptyset = -1$. Neka je definisano ind $X \leq n-1$. ind $X \leq n$, ako za proizvoljnu tačku $x \in X$ prostora X i njenu okolinu O postoji okolina O_1, tako da je $cl(O_1) \subset O$ i ind $Fr(O_1) \leq n-1$. ind $X = n$ kada je ind $X \leq n$ a ind $X \leq n-1$ nema smisla. Ako za svako $n \geq 0$ nije ind $X \leq n$, tada je ind $X = \infty$.

Ind $\emptyset = -1$. Neka je definisano Ind $X \leq n-1$. Tada je Ind $X \leq n$, ako za bilo koji zatvoren skup $F \subset X$ prostora X i proizvoljnu njegovu okolinu OF, postoji okolina $O_1 F$, tako da je $cl(O_1F) \subset OF$ i Ind Fr $(O_1 F) \leq n-1$. Ind $X = n$, ako je Ind $X \leq n$ a Ind $X \leq n-1$ nema smisla. Ako za svako $n \geq 0$ nije Ind $X \leq n$, tada je Ind$X = \infty$.

Dimenzija dim X topološkog prostora X je najmanji ceo broj $n \geq 0$, takav da se u svaki konačan otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ prostora X, može upisati konačan otvoren pokrivač $\mathcal{V}$, takav da je ord $\mathcal{V} \leq n+1$. Ako za svako n postoji takav konačan otvoren pokrivač $\mathcal{U}$, da svaki upisan u njega, otvoren pokrivač $\mathcal{V}$ ima ord $\mathcal{V} > n+1$, tada je dim $X = \infty$. dim $\emptyset = -1$.

$\dim X = n$ ako je $\dim X \leq n$ a nije $\dim X \leq n - 1$.

Ovako definisane dimenzione funkcije Ind X i dim X su monotone po zatvorenim skupovima prostora X, a ind X je monotona po svakom skupu prostora X.

Za Euklidski prostor E_n, može se pokazati da je $\operatorname{Ind} E_n = \operatorname{ind} E_n = \dim E_n = n$.

Neka je $\{F_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ lokalno prebrojiv zatvoren pokrivač prostora X, takav da je $\operatorname{Ind} F_\gamma \leq n$, za svako $\gamma \in \Gamma$. Tada je $\operatorname{Ind} X \leq n$.

Može se dokazati teorema razlaganja, tj. $\operatorname{Ind} X \leq n$, ako i samo ako je $X = \cup A_i$, $i = 1, \ldots, n + 1$ takvih da je $\operatorname{Ind} A_i \leq 0$ za $i = 1, \ldots, n + 1$.

Navedene osobine važe i za dimenzionu funkciju dim X za sve metričke prostore, jer je za te prostore $\operatorname{Ind} X = \dim X$.

Topološki prostor X ima dimenziju $\dim X \leq n$, ako i samo ako, postoji σ-lokalno konačna otvorena baza $\mathcal{B}$, takva da je $\operatorname{ord} \operatorname{Fr}(\mathcal{B}) \leq n$.

Neka je $\mathcal{U} = \{U_i \mid i = 1, \ldots, k\}$ familija otvorenih skupova, a $\mathcal{F} = \{F_i \mid i = 1, \ldots, k\}$ familija zatvorenih skupova u normalnom prostoru X, takvih da je $F_i \subset U_i$ za $i = 1, \ldots, k$. Tada je $\dim X \leq n$, ako i samo ako za svaku familiju $\mathcal{U}$ i svaku familiju $\mathcal{F}$, postoji familija otvorenih skupova $\mathcal{V} = \{V_i \mid i = 1, \ldots k\}$ takva da je $F_i \subset V_i \subset U_i$ za $i = 1, \ldots k$ i $\operatorname{ord}\{\operatorname{Fr}(V_i) \mid i = 1, \ldots, k\} \leq n$.

Definisaćemo sada dimenziju ds $(X, \leq)$ delimično uredjenog skupa $(X, \leq)$.

Linearno proširenje delimično uredjenog skupa $(X, \leq)$ je linearno uredjen skup $(X, \leq_\alpha)$ koji ima osobinu: za dva proizvoljna elementa $x, y \in X$ za koje je $x < y$ važi i $x <_\alpha y, \alpha \in A$.

Familija $\mathcal{F}$ linearnih proširenja $(X, \leq_\alpha), \alpha \in A$ definiše delimično uredjen skup ako su ispunjeni uslovi:

a) AKo je $x < y$, onda je $x <_\alpha y$ za svako $\alpha \in A$, $x, y \in X$

b) Ako $x \nless y$, onda postoji bar jedno $\alpha \in A$ za koje je $x <_\alpha y$ i bar jedno $\beta \in A$ za koje je $y <_\beta x$.

Za svaki delimično uredjen skup $(X, \leq)$ može se naći familija linearnih proširenja koja ga definiše.

1.3. D E F I N I C I J A (v [19]) Dimenzija ds $(X, \leq)$ delimično uredjenog skupa $(X, \leq)$ jednaka je μ, ako je μ najmanji kardinalni broj, takav da postoji familija $\mathcal{F}$ lineranih proširenja skupa $(X, \leq)$ koja ga definiše i čiji je kardinalni broj μ.

Za dva delimično uredjena skupa $(P, \leq)$, $(Q, \leq)$ takva da je $(Q, \leq) \subset (P, \leq)$, važi nejednakost $ds(Q, \leq) \leq ds(P, \leq)$.

Dimenzija kardinalnog proizvoda $(X_1 \times X_2, \leq)$ je $ds\,(X_1 \times X_2, \leq) \leq 2 \max(m_1, m_2)$, gde je dimenzija $ds\,(X_i, \leq i)$ delimično uredjenog skupa $(X_i, \leq_i)$ jednaka m_i, $i = 1,2$. (v. [3])

Dimenzija $ds\mathcal{N}(\mathcal{W})$ nerva sistema $\mathcal{W} = \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$, gde su $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ sistemi podskupova prostora X ispunjava vezu $ds\mathcal{N}(\mathcal{W}) \leq ds\mathcal{N}(\mathcal{U}) + ds\mathcal{N}(\mathcal{V})$.

Neka su $(E_\alpha, \leq_\alpha)$, $E_\alpha \cap E_\beta = \emptyset$, delimično uredjeni skupovi $ds\,E_\alpha \leq n$, $n > 1$. Tada je $ds(E, \leq) \leq n$, gde je $E = \cup E_\alpha$, a uredjenje $\leq$ je takvo da je:

a) $x \leq y \iff x \leq_\alpha y$, $x, y \in E$

b) $x \| \leq y$, $x \in E_\alpha$, $y \in E_\beta$, $\alpha \neq \beta$. (v. [5])

Posmatraćemo sada metrizabilne prostore. Neka je $\mathcal{P}$ topološki zatvorena familija prostora i n prirodan broj. Ispitaćemo osobine prostora X za koji postoji ekstenzija $Y \in \mathcal{P}$, takva da je $\dim(Y \setminus X) \leq n$. Neka je $\mathcal{P}$ klasa kompaktnih prostora ili klasa kompletnih prostora. (v. [1])

Nazovimo otvorenu kolekciju $\mathcal{V}$ takvu da je $(X \setminus \cup \mathcal{V}) \in \mathcal{P}$, $\mathcal{P}$-granični pokrivač prostora X. Tada se mogu definisati dimenzione funkcije $\mathcal{P}$-dim X i $\mathcal{P}$-Dim X na sledeći način:

$\mathcal{P}$-dim $X \leq n$, ako za svaki konačan $\mathcal{P}$-granični pokrivač $\mathcal{U}$ prostora X, postoji $\mathcal{P}$-granični pokrivač $\mathcal{V}$ takav da je $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ i ord $\mathcal{V} \leq n+1$.

$\mathcal{P}$-Dim $X \leq n$, ako za svaki $\mathcal{P}$-granični pokrivač $\mathcal{U}$ prostora X postoji $\mathcal{P}$-granični pokrivač $\mathcal{V}$ takav da je $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ i ord $\mathcal{V} \leq n + 1$.

$\mathcal{P}$-dim $X = -1$ ($\mathcal{P}$-Dim $X = -1$) ako i samo ako je $X \in \mathcal{P}$. Neka je $\mathcal{P} = \{\emptyset\}$. Tada je $\mathcal{P}$-dim X = dim X.

Kada je $\mathcal{P} \equiv \mathcal{M}$ klasa metrizabilnih prostora, onda je $\mathcal{P}$-dim X = $\mathcal{P}$-Dim X. Za svaki prostor X je ispunjen uslov $\mathcal{P}$-dim $X \leq \mathcal{P}$-Dim $X \leq$ $\leq$ dim X.

Neka je $\mathcal{P}$ zatvoreno monotona klasa i F zatvoren podskup u prostoru X. Tada je $\mathcal{P}$-dim $F \leq \mathcal{P}$-dim X i $\mathcal{P}$-Dim $F \leq \mathcal{P}$-Dim X.

Neka je $\mathcal{K}$ klasa kompaktnih prostora i $E_n (n \geq 1)$ Euklidov prostor. Tada je $\mathcal{K}$-dim $E_n = \mathcal{K}$-Dim $E_n = n$.

Pored navedenih može se pokazati i sledeća osobina ove dimenzione funkcije. Neka je $\{F_i \mid i = 1,\dots\}$ prebrojiv zatvoren pokrivač od X, takav da je $\mathcal{P}$-dim $F_i \leq n$ za $i = 1,2,\dots$ Tada je $\mathcal{P}$-dim $X \leq n$, gde je $\mathcal{P}$ zatvoreno monotona i prebrojivo zatvoreno aditivna klasa. (v. [1]).

2. BITOPOLOŠKI PROSTORI

Pojavi bitopoloških prostora prethodilo je proučavanje kvazimetričkih funkcija.

Neka je na skupu X definisana kvazimetrička funkcija p, tj. funkcija koja preslikava $X \times X$ u skup nenegativnih realnih brojeva i ispunjava sledeće uslove:

a) $p(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
b) $p(x, y) \leq p(x, z) + p(z, y)$

gde su $x, y, z \in X$. Tada je moguće definisati funkciju q tako da je $p(x, y) = q(y, x)$ gde su $x, y \in X$. Kao što je poznato, tako definisana funkcija je kvazimetrička. Kako funkcije p i q definišu na skupu X dve topologije, mogu se definisati bitopološki prostori. Ove prostore je 1962. godine definisao Kelly a proučavali su ih pored ostalih Birsan, Dvališvili, Pervin, Reilly, Swart, Kim, Ćirić.

U ovom delu rada navedene su samo neke osobine bitopoloških prostora koje se kasnije koriste.

Neka je X skup na kome su definisane dve topologije $\mathcal{P}$ i $\mathcal{Q}$. Uredjena trojka $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ naziva se bitopološki prostor.

Posmatrajmo sada familiju $\{(X_i, \mathcal{P}_i, \mathcal{Q}_i) \mid i \in I\}$ bitopoloških prosotra. Neka je $\mathcal{P}$ direktan proizvod topologija $\mathcal{P}_i$ definisan na $\prod X_i$ tako da za podbazu ima familiju skupova oblika $p_i^{-1}(G)$ gde je $G \in \mathcal{P}_i$ a p_i su projekcije. Neka je $\mathcal{Q}$ direktan proizvod topologija na $\prod X_i$ definisan (na isti način) topologijama $\mathcal{Q}_i$. Tada se uredjena trojka $(\prod X_i, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ naziva proizvod bitopoloških prostora generisan familijom $\{(X_i, \mathcal{P}_i, \mathcal{Q}_i)\}$.

Neka su $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ i $(Y, \mathcal{U}, \mathcal{V})$ bitopološki prostori. Na skupu $X \times Y$ uvodi se bitopološka struktura, sa oznakom $(X \times Y, \mathcal{R}, \mathcal{W})$, na sledeći način: kaže se da je skup $A \subset X \times Y$ $\mathcal{R}$-otvoren u prostoru $X \times Y$, ako je unija skupova oblika $G \times H$, gde je G $\mathcal{P}$-otvoren skup u prostoru X, a H $\mathcal{U}$-otvoren skup u prostoru Y. Skup $B \subset X \times Y$ je $\mathcal{W}$-otvoren u prostoru $X \times Y$, ako je unija skupova oblika $P \times Q$ gde je P $\mathcal{Q}$-otvoren skup u prostoru X a Q $\mathcal{V}$-otvoren skup u prostoru Y.

Posmatrajmo preslikavanja bitopoloških prostora. Za preslikavanje $f\colon X \to Y$ bitopološkog prostora $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ u bitopološki prostor $(Y,\mathcal{U},\mathcal{V})$ kaže se da je bineprekidno u tački $x \in X$ ako za svaku $\mathcal{U}$-okolinu U i svaku $\mathcal{V}$-okolinu V tačke $f(x)$ postoje $\mathcal{P}$-okolina P i $\mathcal{Q}$-okolina Q tačke x, takve da je $f(P) \subset U$ i $f(Q) \subset V$. U slučaju kada je preslikavanje f bineprekidno u svakoj tački prostora X, naziva se bineprekidno preslikavanje. Bijektivno i obostrano bineprekidno preslikavanje bitopološkog prostora $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ u bitopolopki prostor $(Y,\mathcal{U},\mathcal{V})$ naziva se bihomeomorfizam.

Neka su $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$, $(Y,\mathcal{U},\mathcal{V})$ i $(Z,\mathcal{R},\mathcal{T})$ dati bitopološki prostori. Definisaćemo preslikavanje $h\colon Z \to X \times Y$ na sledeći način: $h(z) = (h_1(z), h_2(z))$, gde je $h_1(z) \in X$, $h_2(z) \in Y$. Za ovako definisano preslikavanje h kaže se da je bineprekidno, ako i samo ako su preslikavanja $h_1\colon Z \to X$ i $h_2\colon Z \to Y$ bineprekidna.

Definišimo sada normalnost bitopološkog prostora.

2.1. D E F I N I C I J A. Bitopološki prostor $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$, je uzajamno normalan, ako za ma koji $\mathcal{P}$-zatvoren skup F_0 i ma koji $\mathcal{Q}$-zatvoren skup F_1, koji su takvi da je $F_0 \cap F_1 = \emptyset$, postoje $\mathcal{Q}$-otvoren skup G_0 i $\mathcal{P}$-otvoren skup G_1, takvi da je $F_0 \subset G_0$, $F_1 \subset G_1$ i $G_0 \cap G_1 = \emptyset$

2.2. D E F I N I C I J A. Bitopološki prostor $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ je uzajamno potpuno normalan, ako za svaki $\mathcal{Q}$-zatvoren skup A i svaki $\mathcal{P}$-zatvoren skup B, koji su takvi da je $A \cap B = \emptyset$, postoji bineprekidna funkcija $f\colon X \to I$ takva da je $(f(x) = 0) \Leftrightarrow (x \in A)$ i $(f(x) = 1) \Leftrightarrow (x \in F)$

2.3. D E F I N I C I J A. Bitopološki prostor $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ je uzajamno nasledno normalan ako je svaki njegov podskup uzajamno normalan.

2.4. D E F I N I C I J A. Podskup A bitopološkog prostora $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ je p - otvoren, ako se može predstaviti u obliku unije $A = H_1 \cup H_2$, gde je H_1 $\mathcal{P}$-otvoren a H_2 $\mathcal{Q}$-otvoren skup u prostoru X i $H_i \neq \emptyset$ za $i = 1,2$. Komplement p - otvorenog skupa je p-zatvoren skup.

Posmatraćemo sada par (A, B) podskupova bitopološkog prostora $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$. A je podprostor topološkog prostora $(X,\mathcal{P})$ a B podprostor topološkog prostora $(X,\mathcal{Q})$. Za par (A, B) kaže se da je normalan par ako su A i B disjunktni, A je $\mathcal{P}$-zatvoren, B $\mathcal{Q}$-zatvoren skup u prostoru X.

Neka je B skup koji se sastoji od jedne tačke i nije sadržan u skupu A koji je $\mathcal{P}$-zatvoren u prostoru X, ili je A skup koji se sastoji od jedne tačke i nije sadržan u $\mathcal{Q}$-zatvorenom skupu B. Tada je par (A, B) regularan. U slučaju kada su skupovi A i B različiti, a sastoje se od po jedne tačke, par (A, B) naziva se Hausdorffov par.

Neka je (A_0, B_0) normalan par bitopološkog prostora $(X_0, \mathcal{P}^*, \mathcal{Q}^*)$ gde je X_0 p-zatvoren skup u bitopološkom prostoru $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ a $\mathcal{P}^*, \mathcal{Q}^*$ indukovane topologije. Može se pokazati da tada postoji normalan par (A, B) takav da je $A_0 = A \cap X$ i $B_0 = B \cap X$.

2.5. D E F I N I C I J A. $\mathcal{P}$-granica u odnosu na $\mathcal{Q}$ proizvoljnog skupa A bitopološkog prostora $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$, $\mathcal{PQ}$- $\mathrm{Fr}A$, je skup $\mathcal{P}\text{-cl}\,A \cap \mathcal{Q}\text{-cl}\,(X \setminus A)$.
$\mathcal{Q}$-granica u odnosu na $\mathcal{P}$ proizvoljnog podskupa A bitopološkog prostora $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$, $\mathcal{QP}\text{-}\mathrm{Fr}A$, je $\mathcal{Q}\text{-cl}A \cap \mathcal{P}\text{-cl}(X \setminus A)$.

2.6. D E F I N I C I J A. Pregrada normalnog (regularnog) para (P, Q) u bitopološkom prostoru X je p-zatvoren skup B, takav da je $X \setminus B$ nepovezan prostor, tj. $X \setminus B = H_1 \cup H_2$, gde je H_1 $\mathcal{P}$-otvoren a H_2 $\mathcal{Q}$-otvoren skup u prostoru X, $H_1 \cap H_2 = \emptyset$ i $P \subset H_2$ i $Q \subset H_1$.

Mogu se dokazati sledeće osobine normalnog para bitopološkog prostora: (v. [16])

Neka je (P,Q) normalan par bitopološkog prostora $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ i $\mathcal{P}$-okolina OQ ($\mathcal{Q}$-okolina OP) skupa Q (skupa P) takva da je $\mathcal{Q}\text{-cl}OQ \subset X \setminus P$ ($\mathcal{P}\text{-cl}OP \subset X \setminus Q$). Tada je $\mathcal{QP}\text{-Fr}OQ$ ($\mathcal{PQ}\text{-Fr}OP$) pregrada para (P,Q).

Neka je (P,Q) normalan par uzajamno normalnog bitopološkog prostora $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$. Tada postoje $\mathcal{Q}$-okolina OP i $\mathcal{P}$-okolina OQ takve da je $\mathcal{P}\text{-cl}\ OP \cap \mathcal{Q}\text{-cl}OQ = \emptyset$.

2.7. D E F I N I C I J A. Bitopološki prostor $(X,\mathcal{P},\mathcal{L})$ je povezan, ako ne može da se predstavi kao unija dva neprazna, disjunktna skupa A i B takva da je $(A\cap\mathcal{P}\text{-cl}B)\cup(\mathcal{L}\text{-cl}A\cap B)=\emptyset$. (V. [40])

2.8. D E F I N I C I J A. U bitopološkom prostoru $(X,\mathcal{P},\mathcal{L})$ $\mathcal{P}$ je regularno u odnosu na $\mathcal{L}$, ako za svaku tačku $x\in X$ postoji $\mathcal{P}$-okolinska baza $\mathcal{L}$-zatvorenih skupova.

Bitopološki prostor je uzajamno regularan ako je $\mathcal{P}$ regularno u odnosu na $\mathcal{L}$ i $\mathcal{L}$ regularno u odnosu na $\mathcal{P}$. (V. [29])

2.9. D E F I N I C I J A. U bitopološkom prostoru $(X,\mathcal{P},\mathcal{L})$ $\mathcal{P}$ je potpuno regularno u odnosu na $\mathcal{L}$, ako za svaku tačku $p\in X$ i svaki $\mathcal{P}$-zatvoren skup F, takav da je $p\notin F$, postoji bineprekidna funkcija $f: X\to I$ takva da je $f(p)=0$ i $f(x)=1$ za $x\in F$.

Koristeći definiciju dokazuje se da je bitopološki prostor $(X,\mathcal{P},\mathcal{L})$ uzajamno regularan, tada i samo tada, kada se za proizvoljnu tačku $x\in X$ i proizvoljnu njenu $\mathcal{P}$-okolinu O ($\mathcal{L}$-okolinu V) može naći $\mathcal{P}$-okolina O_1 ($\mathcal{L}$-okolina V_1) takva da je $\mathcal{L}\text{-cl}O_1\subset O$ ($\mathcal{P}\text{-cl}V_1\subset V$).

2.10. D E F I N I C I J A. Bitopološki prostor $(X,\mathcal{P},\mathcal{L})$ je uzajamno T_0 ako za svki par različitih tačaka prostora X, postoji skup koji je ili $\mathcal{P}$-otvoren ili $\mathcal{L}$-otvoren i sadrži jednu ali ne i drugu tačku. (MN - PT_0 - prostor).

2.11. D E F I N I C I J A. Bitopološki prostor $(X,\mathcal{P},\mathcal{L})$ je uzajamno T_0, ako za svaki par različitih tačaka x i y prostora X postoji, ili $\mathcal{P}$-otvoren skup U takav da $x\in U$ i $y\notin U$, ili $\mathcal{L}$-otvoren skup V takav da $y\in V$, $x\notin V$. (FHP - PT_0 - prostor).

2.12. D E F I N I C I J A. Bitopološki prostor $(X,\mathcal{P},\mathcal{L})$ je uzajamno T_1, ako za svaki par različitih taka x i y prostora X, postoje $\mathcal{P}$-otvoren skup U i $\mathcal{L}$-otvoren skup V, takvi da je $x\in U$, $y\notin U$ i $x\notin V$, $y\in V$. (PT_1 - prostor).

2.13. D E F I N I C I J A. Bitopološki prostor $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ je uzajamno Hausdorffov, ako za svake dve različite tačke x i y prostora X, postoje $\mathcal{P}$-okolina U tačke x i $\mathcal{Q}$-okolina V tačke y, takve da je $U \cap V = \emptyset$.

Za bitopološki prostor $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ kaže se da je $\mathcal{P}$ R_0 u odnosu na $\mathcal{Q}$, ako je za svaki $\mathcal{P}$-otvoren skup G prostora X, takav da je $x \in G$ ispunjeno $\mathcal{Q}\text{cl}\{x\} \subset G$. Bitopološki prostor se naziva PR_0-prostor ako je $\mathcal{P}$ R_0 u odnosu na $\mathcal{Q}$ i $\mathcal{Q}$ R_0 u odnosu na $\mathcal{P}$.

Može se pokazati da je svaki uzajamno regularan bitopološki prostor PR_0 - prostor.

Posmatraćemo sada pokrivač bitopološkog prostora i u vezi s tim neke osobine ovog prostora.

Za pokrivač $\mathcal{U}$ bitopološkog prostora $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ kaže se da je $\mathcal{P}\mathcal{Q}$-otvoren, ako je $\mathcal{U} \subset \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$. Neka je sada pokrivač $\mathcal{U}$ bitopološkog prostora $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ takav da je $\mathcal{U} \subset \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ i $\mathcal{U}$ sadrži najmanje jedan neprazan skup topologije $\mathcal{P}$ i najmanje jedan neprazan skup topologije $\mathcal{Q}$. Tada se pokrivač $\mathcal{U}$ naziva uzajamno otvoren pokrivač.

U vezi sa ovim definicijama pokrivača bitopološkog prostora, može se na razne načine definisati kompaktnost ovog prostora.

Bitopološki prostor naziva se uzajamno kompaktan ako za svaki uzajamno otvoren pokrivač prostora X postoji konačan podpokrivač.

2.14. D E F I N I C I J A. Bitopološki prostor $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ je polukompaktan, ako za svaki $\mathcal{P}\mathcal{Q}$-otvoren pokrivač prostora X postoji konačan podpokrivač. (v. [49])

2.15. D E F I N I C I J A. Bitopološki prostor $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ je $\mathcal{P}$-kompaktan u odnosu na $\mathcal{Q}$, ako za svaki $\mathcal{P}$-otvoren pokrivač prostora X postoji konačan $\mathcal{Q}$-otvoren podpokrivač.

Bitopološki prostor je B-kompaktan ako je $\mathcal{P}$-kompaktan u odnosu na $\mathcal{Q}$ i $\mathcal{Q}$-kompaktan u odnosu na $\mathcal{P}$.

U slučaju kada se topologije $\mathcal{P}$ i $\mathcal{Q}$ poklapaju sve ove definicije i osobine svode se na dobro poznate definicije i osobine topoloških prostora. Neki od slučajeva, u kojima se može pokazati da se topologije $\mathcal{P}$ i $\mathcal{Q}$ poklapaju su sledeći:

Neka su $(X, \mathcal{P})$ i $(X, \mathcal{Q})$ Hausdorffovi prostori i neka je $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ uzajamno kompaktan prostor. Tada je $\mathcal{P} = \mathcal{Q}$.

Neka je $(X; \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ uzajamno Hausdorffov prostor i neka su $(X, \mathcal{P})$ i $(X, \mathcal{Q})$ kompaktni prostori. Može se pokazati da se i tada topologije $\mathcal{P}$ i $\mathcal{Q}$ poklapaju.

Neka je $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ uzajamno Hausdorffov i B-kompaktan bitopološki prostor. Tada je $\mathcal{P} = \mathcal{Q}$.

Neka za svaki $\mathcal{P}$-otvoren pokrivač prostora $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ postoji finiji $\mathcal{Q}$-otvoren pokrivač, i za svaki $\mathcal{Q}$-otvoren pokrivač postoji finiji $\mathcal{P}$-otvoren pokrivač tog prostora. Neka je $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ uzajamno Hausdorffov prostor. Tada se topologije $\mathcal{P}$ i $\mathcal{Q}$ poklapaju (V.[20]).

Proučimo neke osobine bitopoloških prostora.

2.16. S T A V Neka je $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ bitopološki prostor. Tada su sledeća tvrdjena ekvivalentna:

a) za svaki $\mathcal{Q}$-zatvoren skup F i $\mathcal{P}$-otvoren skup U koji sadrži F, postoji $\mathcal{P}$-otvoren skup N, takav da je $F \subset N \subset \mathcal{Q}\text{-cl}N \subset U$;

b) za svaki par disjunktnih skupova, $\mathcal{P}$-zatvoren F_0 i $\mathcal{Q}$-zatvoren F_1, postoje $\mathcal{Q}$-otvoren skup G_0 i $\mathcal{P}$-otvoren skup G_1 takvi da je $F_0 \subset G_0$, $F_1 \subset G_1$ i $G_0 \cap G_1 = \emptyset$.

D o k a z a) $\Rightarrow$ b). Neka su $\mathcal{P}$-zatvoren skup F_0 i $\mathcal{Q}$-zatvoren skup F_1 u bitopološkom prostoru $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ takvi da je $F_0 \cap F_1 = \emptyset$. Prema tvrdjenju a), postoji $\mathcal{P}$-otvoren skup N takav da je $F_1 \subset N \subset \mathcal{Q}\text{-cl}N \subset X \setminus F_0$. Neka je $G_0 = X \setminus \mathcal{Q}\text{-cl}N$ $\mathcal{Q}$-otvoren skup a $G_1 = N$ $\mathcal{P}$-otvoren skup u prostoru X. Tada je $F_0 \subset G_0$, $F_1 \subset G_1$ i $G_0 \cap G_1 = \emptyset$.

b) $\Rightarrow$ a). Neka je F $\mathcal{Q}$-zatvoren skup, a U $\mathcal{P}$-otvoren skup koji sadrži F. Prema tvrdjenju b) postoje $\mathcal{P}$-otvoren skup G_1 i $\mathcal{Q}$-otvoren skup G_0, takvi da je $F \subset G_1$, $X \setminus U \subset G_0$ i $G_0 \cap G_1 = \emptyset$. Ponovo prema tvrdjenju b) postoje, $\mathcal{P}$-otvoren skup W_1 i $\mathcal{Q}$-otvoren skup W_2, takvi da je $F \subset W_1$, $X \setminus G \subset W_2$ i $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Neka je $N = W_1$ $\mathcal{P}$-otvoren skup. Tada je $F \subset N$ i $N = W_1 \subset X \setminus W_2 \subset G_1 \subset X \setminus G_0 \subset U$.

Kako je $X \setminus G_0$ $\mathcal{Q}$-zatvoren skup u prostoru X, biće $\mathcal{Q}\text{cl}N \subset X \setminus G_0 \subset V$. Tada je $F \subset N \subset \mathcal{Q}\text{cl}N \subset U$. □

2.17. S T A V . Za svaki biotvoren, tačkasto konačan pokrivač $\mathcal{G} = \{G_\alpha | \alpha \in A\}$ uzajamno normalnog bitopološkog prostora $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ postoji finiji $\mathcal{Q}$-zatvoren pokrivač $\mathcal{H} = \{H_\alpha | \alpha \in A\}$ takav da je $H_\alpha \subset G_\alpha$ za svako $\alpha \in A$.

D o k a z: Neka je A uredjen skup indeksa. Kako je $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ uzajamno normalan prostor, postoje $\mathcal{P}$-otvoren skup U_0 i $\mathcal{Q}$-zatvoren skup H_0, takvi da je $X \setminus \bigcup_{0 < \alpha} G_\alpha \subset U_0 \subset H_0 \subset G_0$. Tada je $\{U_0, G_1, G_2, \ldots\}$ $\mathcal{P}$-otvoren pokrivač prostora X. Pretpostavimo da su za $0 < \alpha \in A$, $\mathcal{P}$-otvoreni skupovi U_β i $\mathcal{Q}$-zatvoreni skupovi H_β za $\beta < \alpha$ definisani tako da je $U_\beta \subset H_\beta \subset G_\beta$. Tada je $\{U_0, \ldots U_\beta, G_{\beta+1}, G_{\beta+2}, \ldots\}$ $\mathcal{P}$-otvoren pokrivač prostora X za $\beta < \alpha$. Kako je pokrivač $\mathcal{G}$ tačkasto konačan, $\{U_\beta\}$ pokriva X. Biće $U_\beta \subset H_\beta$ za svako β i $\{H_\beta\}$ je $\mathcal{Q}$-zatvoren pokrivač prostora X. □

2.18. S T A V: Neka je $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ uzajamno normalan bitopološki prostor. Neka je $\{G_\alpha | \alpha \in A\}$ lokalno konačna kolekcija $\mathcal{P}$-otvorenih skupova u prostoru X i $\{F_\alpha | \alpha \in A\}$ konačna kolekcija $\mathcal{P}$ i $\mathcal{Q}$-zatvorenih skupova u prostoru X, takvih da je $F_\alpha \subset G_\alpha$ za svako $\alpha \in A$. Tada postoji kolekcija $\mathcal{Q}$-zatvorenih skupova $\{H_\alpha | \alpha \in A\}$ takvih da je $F_\alpha \subset H_\alpha \subset G_\alpha$ za svako $\alpha \in A$.

D o k a z: Neka je A uredjen skup indeksa. Neka je F unija svih konačnih preseka elemenata familije $\{F_\alpha | \alpha \in A\}$ takva da nesadrži prvi elemenat F_0. Kako je $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ uzajamno normalan prostor, postoje skupovi H_0, $\mathcal{Q}$-zatvoren i U_0 $\mathcal{P}$-otvoren takvi da je $F_0 \subset U_0 \subset H_0 \subset (X \setminus F) \cap G_0$. Tada je familija skupova $\{H_0, F_1, F_2 \ldots\}$ slična familiji $\{F_\alpha | \alpha \in A\}$. Nastavljajući postupak dalje, dobija se familija $\{H_\alpha | \alpha \in A\}$ $\mathcal{Q}$-zatvorenih skupova. □

2.19. S T A V: Bitopološki prostor $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ je tada i samo tada uzajamno normalan, kada se za bilo koji $\mathcal{P}$-zatvoren skup F u prostoru X, i bilo koju njegovu $\mathcal{Q}$-okolinu OF, može naći $\mathcal{Q}$-okolina O_1F za koju je $\mathcal{P}\text{-cl}(O_1F) \subset OF$. (v. [17])

D O K A Z: Neka je $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ uzajamno normalan prostor i neka je F $\mathcal{P}$-zatvoren skup a OF njegova $\mathcal{Q}$-okolina u prostoru X. Tada $\mathcal{P}$-zatvoren skup F i $\mathcal{Q}$-zatvoren skup $F_1 = X \setminus OF$ imaju disjunktne, i to $\mathcal{Q}$-okolinu O_1F i $\mathcal{P}$-okolinu $O_1 F_1 \supset X \setminus OF$. Tada je $\mathcal{P}\text{-cl}\,(O_1F) \cap O_1 F_1 = \emptyset$ tj. $\mathcal{P}\text{-cl}(O_1F) \subset X \setminus O_1F_1 \subset X \setminus F_1 = OF$.

Neka su sada F_1 proizvoljan $\mathcal{P}$-zatvoren i F_2 $\mathcal{Q}$-zatvoren skup u prostoru X, takvi da je $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Neka je $OF_1 = X \setminus F_2$ $\mathcal{Q}$-okolina skupa F_1. Izaberimo takvu okolinu O_1F_1 da je $\mathcal{P}\text{-cl}(O_1F_1) \subset OF_1$ i neka je $OF_2 = X \setminus \mathcal{P}\text{-cl}(O_1F_1)$ i $O_1 F_1 \cap O_1 F_2 = \emptyset$. Prostor X je tada uzajamno normalan. □

2.20. D E F I N I C I J A: Skupovi A i B u bitopološkom prostoru $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ su $\mathcal{P}\mathcal{Q}$-razdvojeni, ako je $\mathcal{P}\text{-cl}A \cap B = \emptyset = A \cap \mathcal{Q}\text{-cl}B$. Skup $X \setminus (A \cup B)$ je $\mathcal{P}\mathcal{Q}$-razdvajanje skupa A od skupa B.

Slično se definiše $\mathcal{Q}\mathcal{P}$-razdvojenost skupova A i B (V. [13]).

Skupovi A i B nazivaju se uzajamno razdvojeni u bitopološkom prostoru $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ ako su $\mathcal{P}\mathcal{Q}$-razdvojeni i $\mathcal{Q}\mathcal{P}$-razdvojeni u prostoru X.

2.21. S T A V: Da bi bitopološki prostor $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ bio uzajamno nasledno normalan neophodno je i dovoljno, da u njemu svaka dva uzajamno razdvojena skupa P i Q imaju disjunktne okoline.

D O K A Z: Neka je $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ uzajamno nasledno normalan prostor a P i Q dva $\mathcal{P}\mathcal{Q}$-razdvojena skupa prostora X. Neka je $X_0 = X \setminus (\mathcal{P}\text{-cl}P \cap \mathcal{Q}\text{-cl}Q)$ podprostor prostora X. Kako je po pretpostavci $P \cap \mathcal{Q}\text{-cl}Q = \emptyset$, biće i $P \cap (\mathcal{P}\text{-cl}P \cap \mathcal{Q}\text{-cl}Q) = \emptyset$, tj. $P \subset X_0$. Analogno se pokazuje da je i $Q \subset X_0$. Neka je $A = X_0 \cap \mathcal{P}\text{-cl}P$ $\mathcal{P}$-zatvoren skup u X_0 a $B = X_0 \cap \mathcal{Q}\text{-cl}Q$ $\mathcal{Q}$-zatvoren skup u X_0. Sada je $A \cap B = X_0 \cap (\mathcal{P}\text{-cl}P \cap \mathcal{Q}\text{-cl}Q) = \emptyset$. Kako je X_0 uzajamno normalan prostor, to u njemu postoje $\mathcal{Q}$-okolina OA skupa A i $\mathcal{P}$-okolina OB skupa B, takva da je $OA \cap OB = \emptyset$. X_0 je biotvoren skup u prostoru X, i OA i OB su $\mathcal{Q}$-otvorena, odnosno $\mathcal{P}$-otvorena okolina u prostoru X. Kako je poznato $P \subset X_0$, biće $P \subset X_0 \cap \mathcal{P}\text{-cl}P = A \subset OA$ i $Q \subset OB$ i $OA \cap OB = \emptyset$ u prostoru X. Slično se dokazuje tvrdjenje za $\mathcal{Q}\mathcal{P}$-razdvojene skupove.

Neka je sada P $\mathcal{P}$-zatvoren a Q $\mathcal{Q}$-zatvoren skup u prostoru X_0, tako da je $P \cap Q = \emptyset$ i $X_0 \subset X$ podprostor prostora $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$. Tada je $(\mathcal{P}\text{-cl}P \cap Q) \cup (P \cap \mathcal{Q}\text{-cl}Q) = \emptyset$ i prema pretpostavci P i Q imaju disjunktne okoline OA $\mathcal{Q}$-otvorenu i OB $\mathcal{P}$-otvorenu u prostoru X. Sada je $O_1A = OA \cap X_0$ i $O_1B = OB \cap X_0$, $\mathcal{Q}$-otvorena, odnosno $\mathcal{P}$-otvorena, okolina skupa P, odnosno skupa Q, u prostoru X_0. Prostor X_0 je uzajamno normalan, a time je dokazana i uzajamno nasledna normalnost prostora X. □

2.22. P O S L E D I C A: Neka je $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ uzajamno nasledno normalan prostor i A podskup skupa X. Neka je H_1 $\mathcal{P}$-otvoren a H_2 $\mathcal{Q}$-otvoren skup u podprostoru A i $H_1 \cap H_2 = \emptyset$. Tada postoje $\mathcal{P}$-otvoren u X skup V_1 i $\mathcal{Q}$-otvoren u X skup V_2, takvi da je $V_1 \cap A = H_1$, $V_2 \cap A = H_2$ i $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

D O K A Z: Kako su skupovi H_1 i H_2 $\mathcal{P}\mathcal{Q}$-razdvojeni, dokaz sledi iz 2.21. stava.

2.23. S T A V: Neka je B-kompaktan prostor X_0 podprostor uzajamno Hausdorffovog prostora $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$. Tada je skup X_0 $\mathcal{P}$-zatvoren u prostoru X.

D O K A Z: Neka je y proizvoljna tačka skupa $X \setminus X_0$. Kako je prostor X uzajamno Hausdorffov, za svaku tačku $x \in X_0$, postoji $\mathcal{P}$-otvoren u X skup $O_x y$ i $\mathcal{Q}$-otvoren u X skup O_x, tako da je $y \in O_x y$, $x \in O_x$ i $O_x y \cap O_x = \emptyset$. Za sve tačke x skupa X_0 odgovarajući skupovi O_x pokrivaju skup X_0. To je $\mathcal{Q}$-otvoren pokrivač η. Tada postoji $\mathcal{P}$-otvoren podpokrivač upisan u pokrivač η. $\mathcal{P}$-otvorena okolina $OX_0 = O_{x_1} \cup \ldots \cup O_{x_s}$ i $\mathcal{P}$-otvorena okolina $O_y = O_{x_1}y \cap \ldots \cap O_{x_s}y$ se ne seku i biće $O_y \cap \mathcal{P}\text{-cl}(OX_0) = \emptyset$. Zato y nije $\mathcal{P}$-adherentna tačka skupa X_0 u prostoru X. Kako je y proizvoljna tačka skupa $X \setminus X_0$, X_0 je $\mathcal{P}$-zatvoren skup u prostoru X. □

2.24. S T A V: Neka je AB-kompaktan podskup uzajamno Hausdorffovog prostora X i $x \in X \setminus A$. Tada postoje disjunktne okoline U i V $\mathcal{Q}$-otvorene, takve da je $x \in U$, $A \subset V$.

D O K A Z: Kako je X uzajamno Hausdorffov prostor, postoji $\mathcal{P}$-okolina U_y svake tačke $y \in A$ takva da $x \notin \mathcal{P}\text{-cl}\ U_y$. Kako je A B-kompaktan, postoji konačna familija $\mathcal{Q}$-otvorenih skupova $V_0, V_1, \ldots, V_n$ koja pokriva A, tako da $x \notin \mathcal{Q}\text{-cl}\ V_i$, $i = 0,1,\ldots n$. Neka je $V = \cup\{V_i \mid i=0,1,\ldots n\}$. Tada je $A \subset V$ i $x \notin \mathcal{Q}\text{-cl}V$. Zato je $x \in X \setminus \mathcal{Q}\text{-cl}V$, $A \subset V$, $(X \setminus \mathcal{Q}\text{-cl}V) \cap V = \emptyset$ i to su tražene okoline. □

II

POLUNEPREKIDNA I POLUBINEPREKIDNA PRESLIKAVANJA

1. POLUOTVORENI SKUPOVI

Levine je definisao poluotvoren skup na sledeći način.

1.1 D E F I N I C I J A. Podskup A topološkog prostora X je poluotvoren, ako postoji, otvoren u X, skup O takav da je $O \subset A \subset \mathrm{cl}O$.

Osobine ovako definisanog skupa proučavali su pored Levina Noiri, Prasad, Singal, i dr.

1.2. T E O R E M A: Podskup A u topološkom prostoru X je poluotvoren, ako i samo ako je $A \subset \mathrm{cl}\ \mathrm{Int}A$.

D O K A Z: Neka je $A \subset \mathrm{cl}\ \mathrm{Int}A$. Tada je za $O = \mathrm{Int}A$, $O \subset A \subset \mathrm{cl}O$, tj. A je poluotovren skup u prostoru X. Neka je sada A poluotvoren skup u prostoru X. Tada je za neki otvoren u X skup O, $O \subset \mathrm{Int}A$ i $\mathrm{cl}O \subset \mathrm{cl}\ \mathrm{Int}A$. Zato je $A \subset \mathrm{cl}O \subset \mathrm{cl}\ \mathrm{Int}A$. □

Na osnovu ove osobine može se pokazati da je podskup A poluotvoren u topološkom prostoru X, ako i samo ako je $\mathrm{cl}A = \mathrm{cl}\ \mathrm{Int}A$ i da, kada god je A neprazan poluotvoren skup u prostoru X, mora biti $\mathrm{Int}A \neq \emptyset$.

Prema definiciji poluotvorenog skupa jasno je da je svaki otvoren skup poluotvoren u topološkom prostoru X, a da svaki poluotvoren skup ne mora biti otvoren u prostoru X.

Neka je A, $A \subset B \subset \mathrm{cl}A$, poluotvoren skup u prostoru X. Tada je i B poluotvoren skup u prostoru X.

Neka je U otvoren a A poluotvoren skup u prostoru X. Tada je $U \cap A$ poluotvoren skup u prostoru X. Zaista, kako je A poluotvoren skup, postoji otvoren u prostoru X skup O takav da je $O \subset A \subset \mathrm{cl}O$. Kako je U otvoren skup u prostoru X, biće $U \cap \mathrm{cl}O \subset \mathrm{cl}(U \cap O)$. Zato je $O \cap A \subset A \cap U \subset \mathrm{cl}(O \cap U)$ tj. $A \cap U$ je poluotvoren skup u prostoru X.

Neka je data familija $\mathcal{A} = \{ A_\alpha | \alpha \in \Delta \}$ poluotvorenih skupova u topološkom prostoru X. Tada se može pokazati da je $\bigcup_\alpha A_\alpha$ poluotvoren skup u prostoru X. Medjutim, presek dva poluotvorena skupa nemora biti poluotvoren skup u prostoru X.

Neka je X topološki prostor i $\mathcal{B} = \{ B_\alpha | \alpha \in \Delta \}$ familija podskupova od X. Tada je $\mathrm{Int}\mathcal{B} = \{ \mathrm{Int}B_\alpha | \alpha \in \Delta \}$.

Neka je SO(X) klasa svih poluotvorenih skupova a $\mathcal{T}$ klasa otvorenih skupova topološkog prostora X. Tada je $\mathcal{T} \subset SO(X)$ i $\mathcal{T} \equiv \mathrm{Int}SO(X)$. Neka je $O \in \mathcal{T}$ otvoren skup u prostoru X. Tada je $O \in SO(X)$ i kako je $O = \mathrm{Int}O$ biće $O \in \mathrm{Int}SO(X)$. Neka je sada $O \in \mathrm{Int}SO(X)$. Tada je $O = \mathrm{Int}A$ za neki skup $A \in SO(X)$. Zato je $O \in \mathcal{T}$, otvoren skup u prostoru X.

Posmatrajmo sada dve topologije $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}^*$ na skupu X takve da je $SO(X,\mathcal{T}) \subset SO(X,\mathcal{T}^*)$. Tada je $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}^*$, jer je $\mathcal{T} = \mathrm{Int}SO(X,\mathcal{T}) \subset \subset \mathrm{Int}SO(X,\mathcal{T}^*) = \mathcal{T}^*$.

Sledeći primer pokazuje da kada je $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}^*$ nemora da bude $SO(X,\mathcal{T}) \subset SO(X,\mathcal{T}^*)$.

Neka je $X = R$ i $\mathcal{T}$ topologija generisana skupovima oblika (x, y), gde je x manje od y. Neka je $\mathcal{T}^*$ topologija generisana skupovima oblika $[x, y)$, gde je x manje od y. Tada je $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}^*$, ali $SO(X,\mathcal{T}) \not\subset SO(X,\mathcal{T}^*)$ jer $(x, y] \in SO(X,\mathcal{T})$, ali $(x, y] \notin SO(X,\mathcal{T}^*)$.

1.3.T E O R E M A: Neka je $A \subseteq Y \subseteq X$, gde je Y podprostor topološkog prostora X. Neka je $A \in SO(X)$. Tada je $A \in SO(Y)$.

D O K A Z: Kako je A poluotvoren skup u prostoru X, postoji otvoren u X skup O, takav da je $O \subset A \subset cl_X O$. Tada je $O \subset Y$ $O = O \cap Y \subset \subset A \cap Y \subset Y \cap cl_X O$ i $O \subset A \subset cl_Y O$. Kako je $O \cap Y = O$, skup O je poluotvoren u podprostoru Y. □

Može se pokazati da u slučaju kada je skup A, $A \subset Y \subset X$, poluotvoren u podprostoru Y prostora X, on ne mora biti poluotvoren u prostoru X.

Neka su sada A i X_0 takvi podskupovi u prostoru X da je $A \subset X_0$ i X_0 poluotvoren skup. Tada je A poluotvoren skup u prostoru X, ako i samo ako je poluotvoren skup u podprostoru X_0.

Veoma je važan pojam okoline neke tačke u topološkom prostoru X. Na sličan način može se definisati poluokolina neke tačke topološkog prostora.

1.4. D E F I N I C I J A: Skup $M \subset X$ je poluokolina tačke $x \in X$, ako postoji poluotvoren skup A u prostoru X, takav da je $x \in A \subset M$

T E O R E M A: Skup A je poluotvoren u prostoru X, ako i samo ako je, A poluokolina svake tačke $x \in A$.

Može se pokazati da je poluokolina A tačke $x \in Y$, poluokolina tačke $x \in X$, ako i samo ako je Y poluotvoren skup u prostoru X.

Za dalja proučavanja osobina topološkog prostora neophodno je definisati i proučiti osobine poluzatvorenih skupova.

1.6. D E F I N I C I J A: Skup A je poluzatvoren u topološkom prostoru X ako postoji zatvoren u X skup F, takav da je $\mathrm{Int}F \subset A \subset F$

Na osnovu definicije poluzatvorenog skupa u topološkom prostoru X, lako se vidi da je skup A poluzatvoren ako i samo ako je $X \setminus A$ poluotvoren skup u prostoru X. Skup A je poluzatvoren u prostoru X, ako i samo ako je $\mathrm{Int}\ \mathrm{cl}A \subset A$.

Neka je A poluzatvoren skup u prostoru X i $\mathrm{Int}A \subset B \subset A$. Tada je skup B poluzatvoren u prostoru X, jer je $X \setminus A \subset X \setminus B \subset X \setminus \mathrm{Int}A = \mathrm{cl}(X \setminus A)$

Neka je F zatvoren a F_0 poluzatvoren skup u topološkom prostoru X. Tada je $F \cup F_0$ poluzatvoren skup u prostoru X. Može se pokazati da je presek poluzatvorenih skupova poluzatvoren skup. tj, $\bigcap_\alpha A_\alpha$ je poluzatvoren skup ako je $\mathcal{A} = \{A_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$ familija poluzatvorenih skupova.

Na osnovu navedenih osobina poluzatvorenih skupova može se pokazati i sledeće tvrdjenje. Neka je Y podprostor topološkog prostora X i A poluzatvoren skup u prostoru Y. Skup A je poluzatvoren u prostoru X, ako i samo ako je Y poluzatvoren skup u prostoru X. (v. [41]).

Koristeći definiciju poluzatvorenog skupa može se definisati poluzatvorenost nekog skupa u topološkom prostoru.

1.7. D E F I N I C I J A: Poluzatvorenost skupa A je presek svih poluzatvorenih skupova koji sadrže skup A.

Poluzatvorenost skupa A označava se sa sclA. Na osnovu definicije je jasno da je to poluzatvoren skup u prostoru X i da je $\mathrm{scl}A \subset \mathrm{cl}A$.

Za proizvod topoloških prostora važi

1.8.T E O R E M A: Neka su X_1 i X_2 topološki prostori a $X = X_1 \times X_2$ topološki proizvod. Neka je A_1 poluotvoren skup u prostoru X_1 i A_2 poluotvoren skup u prostoru X_2. Tada je $A_1 \times A_2$ poluotvoren skup u prostoru $X_1 \times X_2$. (v. [33])

2. POLUNEPREKIDNA I IREZOLUTNA PRESLIKAVANJA

2.1. D E F I N I C I J A: Neka je $f: X \to Y$ jednoznačno preslikavanje topološkog prostora X u topološki prostor Y. Preslikavanje f je poluneprekidno, ako i samo ako je $f^{-1}(O)$ poluotvoren skup u prostoru X, za svaki otvoren skup O u prostoru Y.

Svako neprekidno preslikavanje topoloških prostora je poluneprekidno preslikavanje, a poluneprekidno preslikavanje ne mora biti neprekidno preslikavanje, što lako sledi iz definicije.

Neka je $f: X \to Y$ jednoznačno preslikavanje topološkog prostora X u topološki prostor Y. Preslikavanje f je poluneprekidno, ako i samo ako za svaku tačku $p \in X$ i otvoren skup $O \subset Y$ u prostoru Y, takav da je $f(p) \in O$, postoji u prostoru X poluotvoren skup A takav da je $p \in A$ i $f(A) \subset O$.

Osobine ovako definisanog prelikavanja topoloških prostora proučavali su Levine, Noiri. (V. [33], [38]).

2.2 T E O R E M A: Neka je $f: X \to Y$ jednoznačno preslikavanje topološkog prostora X u topološki prostor Y. Tada su sledeća tvrdjenja ekvivalentna:

a) funkcija f je poluneprekidna

b) inverzna slika svakog otvorenog skupa u prostoru Y je poluotvoren skup u prostoru X

c) inverzna slika svakog zatvorenog skupa u prostoru Y je poluzatvoren skup u prostoru X

d) za svaku tačku $p \in X$, inverzna slika svake okoline tačke $f(p) \in Y$ je poluokolina tačke p

e) za svaku tačku $x \in X$ i svaku okolinu U tačke $f(x)$, postoji poluokolina V tačke x, takva da je $f(V) \subset U$

f) za svaki podskup $A \subset X$ je $f(\mathrm{scl}A) \subset \mathrm{cl}(f(A))$

g) za svaki podskup $B \subset Y$ je $\mathrm{scl}(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(\mathrm{cl}B)$

Posmatraćemo sada poluotvoren pokrivač $\mathcal{A} = \{A_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$ prostora X i preslikavanje f: $X \to Y$ topološkog prostora X u topološki prostor Y. Tada je, za svako $\alpha \in \Delta$, A_α poluotvoren skup u prostoru X i $\bigcup_{\alpha \in \Delta} A_\alpha = X$. Neka je restrikcija $f \mid A_\alpha : A_\alpha \to Y$ poluneprekidno preslikavanje za svako $\alpha \in \Delta$. Tada je f poluneprekidno preslikavanje. Neka je V proizvoljan otvoren skup u prostoru Y. Tada je, za svako $\alpha \in \Delta$, $(f \mid A_\alpha)^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap A_\alpha \in SO(A_\alpha)$, jer je $f \mid A_\alpha$ poluneprekidno preslikavanje. Na osnovu osobina poluotvorenih skupova je $f^{-1}(V) \cap A_\alpha \in SO(X)$ i $\bigcup_{\alpha \in \Delta}(f^{-1}(V) \cap A_\alpha) = f^{-1}(V) \in SO(X)$.

Neka je f: $X \to Y$ poluneprekidno preslikavanje topološkog prostora X u topološki prostor Y i X_0 otvoren skup u prostoru X. Tada je restrikcija $f \mid X_0 : X_0 \to Y$ poluneprekidno preslikavanje.

Na osnovu svega do sada izloženog može se poluneprekidno preslikavanje topoloških prostora definisati i na sledeći način:

2.3.D E F I N I C I J A: Funkcija f: $X \to Y$ koja preslikava topološki prostor X u topološki prostor Y je poluneprekidna u tački $x \in X$, ako je za svako $x \in X$ i svaku okolinu N tačke $f(x)$, $f^{-1}(N)$ poluokolina tačke x.

Funkcija f je poluneprekidna na X ako je poluneprekidna u svakoj tački x prostora X.

Posmatrajmo sada poluneprekidno preslikavanje i proizvod topoloških prostora.

Neka je $f_i : X_i \to Y_i$ za $i = 1,2$ poluneprekidno preslikavanje topološkog prostora X_i u topološki prostor Y_i. Neka je preslikavanje f: $X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ definisano na sledeći način: $f(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$. Tada je f: $X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ poluneprekidno preslikavanje proizvoda topoloških prostora X_1 i X_2 u proizvod topoloških prostora Y_1 i Y_2.

Neka su X, X_1 i X_2 topološki prostori i h: $X \to X_1 \times X_2$ poluneprekidno preslikavanje topološkog prostora X u proizvod topoloških prostora X_1 i X_2 definisano na sledeći način: za $x \in X$ $h(x) = (x_1, x_2)$ i neka je $f_i : X \to X_i$ preslikavanje topološkog prostora X u topološki prostor X_i za $i=1,2$ definisano sa $f_i(x) = x_i$. Tada je $f_i : X \to X_i$ za $i=1,2$ poluneprekidno preslikavanje. Ovako definisano preslikavanje h ne mora biti poluneprekidno ako su poluneprekidna preslikavanja f_i za $i=1,2$.

Neka je f: $X \to Y$ preslikavanje topološkog prostora X u topološki prostor Y i neka je preslikavanje g: $X \to X \times Y$ definisano na sledeći način: $g(x)=(x,f(x))$. Tada je f poluneprekidno preslikavanje, ako i samo ako je g poluneprekidno preslikavanje.

Neka je f: $X \to Y$ otvoreno i poluneprekidno preslikavanje topološkog prostora X u topološki prostor Y. Tada je $f^{-1}(B)$ poluotvoren skup u prostoru X za svaki poluotvoren skup B u prostoru Y.

Neka je f: $X \to Y$ otvoreno poluneprekidno preslikavanje topološkog prostora X u topološki prostor Y i g: $Y \to Z$ poluneprekidno preslikavanje topološkog prostora Y u topološki prostor Z. Tada je $g \circ f$: $X \to Z$ poluneprekidno preslikavanje.

Posmatraćemo sada poluotvorena i skoro otvorena preslikavanja topoloških prostora.

2.4.D E F I N I C I J A: Funkcija f: $X \to Y$ je poluotvorena ako je, za svaki poluotvoren skup A prostora X, skup f(A) poluotvoren u prostoru Y.

Neka je f: $X \to Y$ neprekidna i otvorena funkcija topološkog prostora X u topološki prostor Y. Tada je f poluotvorena funkcija i f^{-1} poluneprekidno.(ne mora biti funkcija).

2.5.D E F I N I C I J A: Funkcija f: $X \to Y$ je skoro otvorena, ako je za svaki otvoren u Y skup V, $f^{-1}(\mathrm{cl}V) \subset \mathrm{cl}(f^{-1}(V))$.

Može se pokazati da kada je f: $X \to Y$ poluneprekidna i skoro otvorena funkcija topološkog prostora X u topološki prostor Y, tada je $f^{-1}(V)$ poluotvoren skup u prostoru X, za svaki poluotvoren skup V u prostoru Y (V.[29]).

Posmatrajući samo poluotvorene skupove u topološkom prostoru X moguće je definisati irezolutno preslikavanje.

2.6.D E F I N I C I J A: Preslikavanje f: $X \to Y$ topološkog prostora X u topološki prostor Y je irezolutno preslikavanje, ako je za svaki poluotvoren skup S u prostoru Y, $f^{-1}(S)$ poluotvoren skup u prostoru X.

Na osnovu navedenih osobina otvorenih i neprekidnih preslikavanja, može se pokazati da je svako otvoreno, bijektivno neprekidno preslikavanje topološkog prostora X u topološki prostor Y irezolutno preslikavanje. Neprekidno, irezolutno preslikavanje topoloških prostora ne mora da bude otvoreno preslikavanje.

Koristeći definiciju irezolutnog preslikavanja mogu se pokazati i sledeće osobine ovog preslikavanja.

Funkcija $f: X \to Y$ je irezolutna, ako i samo ako, za svaki poluzatvoren skup H u prostoru Y, $f^{-1}(H)$ je poluzatvoren skup u prostoru X.

Funkcija $f: X \to Y$ topološkog prostora X u topološki prostor Y je irezolutna ako i samo ako je:

a) $f(\mathrm{scl}A) \subset \mathrm{scl}(f(A))$ za svaki podskup $A \subset X$

b) $\mathrm{scl}(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(\mathrm{scl}B)$ za svaki podskup $B \subset Y$.

Neka su funkcije $f: X \to Y$, topološkog prostora X u topološki prostor Y, i $g: Y \to Z$, topološkog prostora Y u topološki prostor Z, irezolutne. Tada je i funkcija $g \circ f : X \to Z$ irezolutna funkcija.

Označimo sada sa $C(X,Y)$, $SC(X,Y)$ i $I(X,Y)$ klase neprekidnih, poluneprekidnih i irezolutnih funkcija topološkog prostora X u topološki prostor Y. Tada je $C(X, Y) \subset SC(X, Y)$ i $I(X, Y) \subset SC(X, Y)$, što neposredno sledi iz definicija ovih preslikavanja. (v. [21]),

3. POLUBINEPREKIDNA I BIIREZOLUTNA PRESLIKAVANJA

3.1. D E F I N I C I J A: Neka je $f: X \to Y$ preslikavanje bitopološkog prostora $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ u bitopološki prostor $(Y, \mathcal{U}, \mathcal{V})$. Preslikavanje f je polubineprekidno ako je, $f^{-1}(U)$ $\mathcal{P}$-poluotvoren skup u prostoru X, za svaki $\mathcal{U}$-otvoren u Y skup U i $f^{-1}(V)$ $\mathcal{Q}$-poluotvoren skup u prostoru X, za svaki $\mathcal{V}$-otvoren u Y skup V.

3.2. S T A V: Neka je $f: X \to Y$ preslikavanje bitopološkog prostora $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ u bitopološki prostor $(Y, \mathcal{U}, \mathcal{V})$. Preslikavanje f je plubineprekidno, ako i samo ako, za $f(p) \in U$ i $f(p) \in V$, gde je U $\mathcal{U}$-otvoren a V $\mathcal{V}$-otvoren skup u prostoru Y, postoje $\mathcal{P}$-poluotvoren u X skup A i $\mathcal{Q}$-poluotvoren u X skup B takvi da je $p \in A$, $p \in B$ i $f(A) \subset U$, $f(B) \subset V$.

D O K A Z: Neka je U $\mathcal{U}$-otvoren skup, V $\mathcal{V}$-otvoren skup u prostoru Y i $p \in f^{-1}(U)$, $p \in f^{-1}(V)$. Tada je $f(p) \in U$, $f(p) \in V$ i postoje skupovi A_p $\mathcal{P}$-poluotvoren i B_p $\mathcal{Q}$-poluotvoren u prostoru X, takvi da je $p \in A_p$, $p \in B_p$ i $f(A_p) \subset U$, $f(B_p) \subset V$. Tada je $p \in A_p \subset f^{-1}(U)$ i $p \in B_p \subset f^{-1}(V)$. Neka je $f^{-1}(U) = \bigcup_{p \in X} A_p$ i $f^{-1}(V) = \bigcup_{p \in X} B_p$. Tada je $f^{-1}(U)$ $\mathcal{P}$-poluotvoren i $f^{-1}(V)$ $\mathcal{Q}$-poluotvoren skup u prostoru X.

Neka je sada $f(p) \in U \in \mathcal{U}$ i $f(p) \in V \in \mathcal{V}$. Tada je $p \in f^{-1}(U)$ $\mathcal{P}$-poluotvoren skup u prostoru X i $p \in f^{-1}(V)$ $\mathcal{Q}$-poluotvoren skup u prostoru X, jer je preslikavanje f poluneprekidno. Neka je $A = f^{-1}(U)$ i $B = f^{-1}(V)$. Tada je $p \in A$, $p \in B$ i $f(A) \subset U$, $f(B) \subset V$. □

3.3. S T A V: Neka je $f: X \to Y$ polubineprekidno preslikavanje bitopološkog prostora $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ u bitopološki prostor $(Y, \mathcal{U}, \mathcal{V})$. Neka je X_0 biotvoren skup u prostoru X. Tada je $f | X_0 : X_0 \to Y$ polubineprekidno preslikavanje.

D O K A Z: Neka je $f: X \to Y$ polubineprekidno preslikavanje. Tada je, za svaki $\mathcal{V}$-otvoren skup V u prostoru Y, $f^{-1}(V)$ $\mathcal{Q}$-poluotvoren skup u prostoru X. Zato je $f^{-1}(V) \cap X_0$ $\mathcal{Q}$-poluotvoren skup u prostoru X. Biće $f^{-1}(V) \cap X_0 = (f^{-1} | X_0)^{-1}(V)$ $\mathcal{Q}$-poluotvoren skup u prostoru X_0. Slično se pokazuje da je $(f^{-1} | X_0)^{-1}(U)$ $\mathcal{P}$-poluotvoren skup u X_0, za svaki $\mathcal{U}$-otvoren u Y, skup U. □

3.4. S T A V: Neka je $f: X \to Y$ polubineprekidno preslikavanje bitopološkog prostora $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ u bitopološki prostor $(Y, \mathcal{U}, \mathcal{V})$. Tada je inverzna slika svakog člana podbaze topologije $\mathcal{U}$, odnosno $\mathcal{V}$, na Y, $\mathcal{P}$, odnosno $\mathcal{Q}$ poluotvoren skup u prostoru X.

D O K A Z: Neka je f polubineprekidno preslikavanje. Inverzna slika svakog člana podbaze topologije $\mathcal{U}$ na Y je $\mathcal{P}$-poluotvoren skup, jer su svi članovi podbaze topologije $\mathcal{U}$ $\mathcal{U}$-otvoreni skupovi. Slično se pokazuje tvrdjenje za članove podbaze topologije $\mathcal{V}$. □

3.5. P R I M E D B A: Obrnuto tvrdjenje tvrdjenju 3.4. stava nije tačno. Svaki $\mathcal{U}$-otvoren skup U prostora Y je unija preseka konačno mnogo članova podbaze topologije $\mathcal{U}$ i $f^{-1}(U)$ je unija konačnog preseka inverznih slika članova podbaze. Inverzne slike ovih članova su $\mathcal{P}$-poluotvoreni skupovi u prostoru X a njihov presek ne mora da bude $\mathcal{P}$-poluotvoren skup. Slično se pokazuje tvrdjenje za elemente podbaze topologije $\mathcal{V}$.

3.6. S T A V: Preslikavanje $f: X \to Y$ bitopološkog prostora $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ u bitopološki prostor $(Y, \mathcal{U}, \mathcal{V})$ je polubineprekidno, ako i samo ako je, $f^{-1}(F)$ $\mathcal{P}$-poluzatvoren skup u prostoru X, za svaki $\mathcal{U}$-zatvoren u Y skup F i $f^{-1}(Q)$ $\mathcal{Q}$-poluzatvoren skup u prostoru X, za svaki $\mathcal{V}$-zatvoren u Y skup Q.

D O K A Z: Lako sledi iz 3.1. definicije i osobina poluzatvorenog skupa.

3.7. S T A V: Neka je $f: X \to Y$ jednoznačno preslikavanje bitopološkog prostora $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ u bitopološki prostor $(Y, \mathcal{U}, \mathcal{V})$. Tada su sledeća tvrdjenja ekvivalentna:

a) f je polubineprekidno preslikavanje

b) za svako $x \in X$, inverzna slika svake $\mathcal{U}$-okoline tačke $f(x) \in Y$ je $\mathcal{P}$-poluokolina tačke x u prostoru X, i inverzna slika svake $\mathcal{V}$-okoline tačke $f(x) \in Y$ je $\mathcal{Q}$-poluokolina tačke x u prostoru Y

c) za svako $x \in X$ i za svaku $\mathcal{U}$-okolinu U tačke $f(x) \in \mathcal{Y}$, postoji $\mathcal{P}$-poluokolina V tačke $x \in X$ tako da je $f(V) \subset U$, za svaku $\mathcal{V}$-okolinu W tačke $f(x) \in Y$ postoji $\mathcal{Q}$-poluokolina D tačke $x \in X$ takva da je $f(D) \subset W$.

D O K A Z: a) $\Rightarrow$ b). Neka je tačka $x \in X$ i U $\mathcal{U}$-okolina tačke $f(x) \in Y$. Tada je $x \in f^{-1}(U)$ $\mathcal{P}$-poluotvoren skup u prostoru X. Kako je U $\mathcal{U}$-okolina tačke $f(x)$ to postoji $\mathcal{U}$-otvoren u Y skup G, takav da je $f(x) \in G \subset U$. Biće $x \in f^{-1}(G) \subset f^{-1}(U)$ i $f^{-1}(U)$ je $\mathcal{P}$-poluokolina tačke $x \in X$. Slično se pokazuje tvrdjenje za $\mathcal{Q}$-poluokolinu tačke $x \in X$.

b) $\Rightarrow$ c). Neka je tačka $x \in X$ i U $\mathcal{U}$-okolina tačke $f(x) \in Y$. Tada je $V = f^{-1}(U)$ $\mathcal{P}$-poluokolina tačke $x \in X$. Biće $f(V) = f(f^{-1}(U)) \subset U$. Slično se pokazuje tvrdjenje za $\mathcal{V}$-okolinu tačke $f(x) \in Y$.

c) $\Rightarrow$ a). Neka je tačka $x \in X$ i U $\mathcal{U}$-okolina tačke $f(x) \in Y$. Tada postoji $\mathcal{P}$-poluokolina V tačke $x \in X$, tako da je $f(V) \subset U$. Tada postoji i $\mathcal{P}$-poluotvoren u X skup A, takav da je $x \in A \subset V$, i biće $f(A) \subset f(V) \subset U$. Slično se pokazuje tvrdjenje za $\mathcal{V}$-okolinu tačke $f(x) \in Y$. Prema 3.2. stavu, f je polubineprekidno preslikavanje. □

3.8. S T A V <u>Svako bineprekidno preslikavanje bitopološkog prostora je polubineprekidno preslikavanje.</u>

D O K A Z: sledi iz 3.1. definicije.

3.9. P R I M E D B A. Tvrdjenje obrnuto tvrdjenju 3.8. stava nije tačno, što pokazuje i sledeći primer:

Neka je $X=Y=[0,1]=I$ $\mathcal{P}=\{\emptyset, I, (0,a) \mid a \in I\}$, $\mathcal{Q}=\{\emptyset, I, (b,1) \mid b \in I\}$. Neka je preslikavanje $f: (X,\mathcal{P},\mathcal{Q}) \to (Y,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ /$(Y,\mathcal{Q},\mathcal{P})$/ definisano na sledeći način: $f(x) = 0$ za $0 \leq x \leq 1/2$ i $f(x) = 1$ za $1/2 < x \leq 1$. Tada je f polubineprekidno preslikavanje, ali nije bineprekidno preslikavanje.

3.10. S T A V <u>Neka je $f_i: X_i \to Y_i$ polubineprekidno preslikavanje bitopološkog prostora $(X_i, \mathcal{P}_i, \mathcal{Q}_i)$ u bitopološki prostor $(Y_i, \mathcal{U}_i, \mathcal{V}_i)$ za $i = 1,2$. Neka je preslikavanje $f: X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ definisano na sledeći način: $f(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$. Tada je f polubineprekidno preslikavanje.</u>

D O K A Z: Neka je $O_1 \times O_2 \subset Y_1 \times Y_2$, gde je O_i $\mathcal{U}_i$-otvoren skup u prostoru Y_i, $i = 1,2$ i $S_1 \times S_2 \subset X_1 \times X_2$, gde je S_i $\mathcal{V}_i$-otvoren skup u prostoru Y_i, $i = 1,2$. Tada je $f^{-1}(O_1 \times O_2) = f_1^{-1}(O_1) \times f_2^{-1}(O_2)$. Tako je $f_i^{-1}(O_i)$ $\mathcal{P}_i$-poluotvoren skup u prostoru X_i, $i = 1,2$, biće $f_1^{-1}(O_1) \times f_2^{-1}(O_2)$ Ω-poluotvoren skup u prostoru $(X_1 \times X_2, \Omega, \mathcal{W})$. Slično se pokazuje da je

$f^{-1}(S_1) \times f^{-1}(S_2)$ $\mathcal{W}$-poluotvoren skup u prostoru $(X_1 \times X_2, \Omega, \mathcal{W})$. Neka je O Ω'-otvoren skup u prostoru $Y_1 \times Y_2$. Tada je $f^{-1}(O) = f^{-1}(\bigcup_\alpha O_\alpha) = \bigcup_\alpha f^{-1}(O_\alpha)$, gde je O_α oblika $O_{\alpha_1} \times O_{\alpha_2}$ Ω- poluotvoren skup u prostoru $X_1 \times X_2$. Slično se pokazuje da je $f^{-1}(W)$ $\mathcal{W}$-poluotvoren skup u prostoru $X_1 \times X_2$, za svaki $\mathcal{W}'$-otvoren skup W u prostoru $(Y_1 \times Y_2, \Omega', \mathcal{W}')$. □

3.11. S T A V. Neka je $h: X \to X_1 \times X_2$ polubineprekidno preslikavanje bitopološkog prostora $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ u proizvod bitopoloških prostora $(X_1 \times X_2, \Omega, \mathcal{W})$ definisano na sledeći način: za $x \in X$, $h(x) = (x_1, x_2)$; gde je prelikavanje $f_i: X \to X_i$, $i=1,2$ definisano na sledeći način: za $x \in X$, $f_i(x) = x_i$, $i = 1,2$. Tada je f_i, $i = 1,2$ polubineprekidno preslikavanje.

D O K A Z: Dovoljno je dokazati da je $f_1: X \to X_1$ polubineprekidno preslikavanje bitopološkog prostora $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ u bitopološki prostor $(X_1, \mathcal{P}_1, \mathcal{Q}_1)$. Neka je O_1 $\mathcal{P}_1$-otvoren skup u prostoru X_1 i S_1 $\mathcal{Q}_1$-otvoren skup u prostoru X_1. Tada je $O_1 \times X_2$ Ω-otvoren skup u prostoru $X_1 \times X_2$ a $S_1 \times X_2$ $\mathcal{W}$-otvoren skup u prostoru $X_1 \times X_2$. Kako je $h^{-1}(O_1 \times X_2)$ $\mathcal{P}$-poluotvoren skup u prostoru X a $h^{-1}(S_1 \times X_2)$ $\mathcal{Q}$-poluotvoren skup u prostoru X, i $f_1^{-1}(O_1) = h^{-1}(O_1 \times X_2)$, $f_1^{-1}(S_1) = h^{-1}(S_1 \times X_2)$, to je f_1 polubineprekidno preslikavanje. □

3.12. P R I M E D B A: Tvrdjenje obrnuto tvrdjenju 3.11. stava uvek nije tačno, što pokazuje i sledeći primer:

Neka je $X = X_1 = X_2 = [0,1] = I$. $\mathcal{P} = \{\emptyset, I, [0,a) \mid a \in I\}$, $\mathcal{Q} = \{\emptyset, I, (b,1] \mid b \in I\}$ a $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$, $(X_1, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ i $(X_2, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ bitopološki prostori. Neka je $f_1: X \to X_1$ definisano tako da je $f_1(x) = 1$ za $0 \le x \le 1/2$ i $f_1(x) = 0$ za $1/2 < x \le 1$. Neka je $f_2: X \to X_2$ definisano tako da je $f_2(x) = 1$ za $0 \le x < 1/2$ i $f_2(x) = 0$ za $1/2 \le x \le 1$. Tada je $f_i: X \to X_i$ polubineprekidno preslikavanje za $i=1,2$. Preslikavanje $h: X \to X_1 \times X_2$, definisano na sledeći način: $h(x) = (f_1(x), f_2(x))$ nije polubineprekidno.

3.13. S T A V. Neka je $f: X \to Y$ preslikavanje bitopološkog prostora $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ u bitopološki prostor $(Y, \mathcal{U}, \mathcal{V})$. Neka je $g: X \to X \times Y$, preslikavanje bitopološkog prostora $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ u proizvod prostora $(X \times Y, \Omega, \mathcal{W})$, definisano na sledeći način: $g(x) = (x, f(x))$. Tada je f polubineprekidno preslikavanje, ako i samo ako je g polubineprekidno preslikavanje.

D O K A Z: Neka je f polubineprekidno preslikavanje i x proizvoljna tačka prostora X. Neka je W Ω-otvoren skup u prostoru $X \times Y$ koji sadrži tačku $g(x)=(x,f(x))$. Tada postoji $\mathcal{P}$- otvoren u X skup G i $\mathcal{U}$-otvoren u Y skup V takav da je $(x,f(x)) \in G \times V \subset W$. Kako je f polubineprekidno preslikavanje postoji $\mathcal{P}$-poluotvoren u X skup U_0 takav da je $x \in U_0$ i $f(U_0) \subset V$. Neka je $U=U_0 \cap G$. Biće $x \in U$ $\mathcal{P}$-poluotvoren u X skup i $g(U) \subset G \times V \subset W$. Slično se dokazuje tvrdjenje za $\mathcal{V}$-otvoren skup u prostoru $X \times Y$. Zato je g polubineprekidno preslikavanje.

Neka je g polubineprekidno preslikavanje i x proizvoljna tačka prostora X. Neka je U $\mathcal{U}$-otvoren skup u prostoru Y koji sadrži tačku f(x). Tada je $X \times U$ Ω-otvoren skup u prostoru $X \times Y$ i $g \in X \times U$. Kako je g polubineprekidno preslikavanje, postoji $\mathcal{P}$- poluotvoren u X skup U_0 takav da je $x \in U_0$ i $g(U_0) \subset X \times U$. Zato je $f(U_0) \subset U$ i f polubineprekidno preslikavanje.□

3.14.S T A V. Neka je $f: X \to Y$ polubineprekidno biotvoreno preslikavanje bitopološkog prostora $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ u bitopološki prostor$(Y,\mathcal{U},\mathcal{V})$. Tada je $f^{-1}(B)$ polubiotvoren skup u prostoru X, za svaki polubiotvoren skup B u prostoru Y.

D O K A Z: Za proizvoljan skup B polubiotvoren u prostoru Y, postoji $\mathcal{U}$-otvoren u Y skup U i $\mathcal{V}$-otvoren u Y skup V takav da je $U \subset B \subset \mathcal{U}\text{-}cl\,U$ i $V \subset B \subset \mathcal{V}\text{-}cl\,V$. Kako je f biotvoreno preslikavanje biće:

$$f^{-1}(U) \subset f^{-1}(B) \subset f^{-1}(clU) \subset cl(f^{-1}(U)) \text{ i}$$

$$f^{-1}(V) \subset f^{-1}(B) \subset f^{-1}(clV) \subset cl(f^{-1}(V)).$$

Kako je f polubineprekidno preslikavanje, $f^{-1}(U)$ je $\mathcal{P}$- poluotvoren a $f^{-1}(V)$ $\mathcal{Q}$-poluotvoren skup u prostoru X. Zato je $f^{-1}(B)$ polubiotvoren skup u prostoru X. □

3.15. D E F I N I C I J A: Preslikavanje $f: X \to Y$ bitopološkog prostora $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ u bitopološki prostor $(Y,\mathcal{U},\mathcal{V})$ je polubiotvoreno, ako je f(A) $\mathcal{U}$-poluotvoren skup u prostoru Y, za svaki $\mathcal{P}$-poluotvoren skup A u prostoru X i f(B) $\mathcal{V}$-poluotvoren skup u prostoru Y, za svaki $\mathcal{Q}$-poluotvoren skup B u prostoru X.

Skup A je polubiotvoren u bitopološkom prostoru $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ ako i samo ako je $\mathcal{P}$-poluotvoren i $\mathcal{Q}$-poluotvoren skup u prostoru X.

3.16. S T A V. Neka je f bineprekidno, biotvoreno preslikavanje bitopološkog prostora $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ u bitopološki prostor $(Y,\mathcal{U},\mathcal{V})$. Tada su f i f^{-1} polubiotvorena preslikavanja.

D O K A Z: Iz 3.8.stava i 3.14.stava sledi da je f^{-1} polubiotvoreno preslikavanje. (ne mora da bude 1-1). Dokažimo da je f polubiotvoreno preslikavanje. Neka je A polubiotvoren skup u prostoru X. Tada postoje $\mathcal{P}$-otvoren u X skup U i $\mathcal{Q}$-otvoren u X skup V takvi da je $U\subset A\subset\mathcal{P}\text{-cl}U$ i $V\subset A\subset\mathcal{Q}\text{-cl}V$. Biće $f(U)\subset f(A)\subset f(\mathrm{cl}U)\subset \mathrm{cl}f(U)$ i $f(V)\subset f(A)\subset f(\mathrm{cl}V)\subset \mathrm{cl}(f(V))$. Kako je $f(U)$ $\mathcal{U}$-otvoren a $f(V)$ $\mathcal{V}$-otvoren skup u prostoru Y, to je f polubiotvoreno preslikavanje. □

3.17. D E F I N I C I J A: Preslikavanje $f\colon X\to Y$ bitopološkog prostora $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ u bitopološki prostor $(Y,\mathcal{U},\mathcal{V})$ je birezolutno, ako je za svaki $\mathcal{U}$-poluotvoren skup U u prostoru Y, $f^{-1}(U)$ $\mathcal{P}$-poluotvoren skup u prostoru X, i za svaki $\mathcal{V}$-poluotvoren skup V u prostoru Y, $f^{-1}(V)$ je $\mathcal{Q}$-poluotvoren skup u prostoru X.

3.18. S T A V. Neka je $f\colon X\to Y$ bineprekidno, biotvoreno preslikavanje bitopološkog prostora $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ u bitopološki prostor $(Y,\mathcal{U},\mathcal{V})$. Tada je f birezolutno preslikavanje.

D O K A Z sledi iz 3.16.stava i 3.17.definicije.

3.19. S T A V. Preslikavanje $f\colon X\to Y$ bitopološkog prostora $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ u bitopološki prostor $(Y,\mathcal{U},\mathcal{V})$ je birezolutno, ako i samo ako je, $f^{-1}(H)$ $\mathcal{P}$-poluzatvoren skup u prostoru X, za svaki $\mathcal{U}$-poluzatvoren skup H u prostoru Y i $f^{-1}(B)$ je $\mathcal{Q}$-poluzatvoren skup u prostoru X, za svaki $\mathcal{V}$-poluzatvoren skup B u prostoru Y.

D O K A Z: Neka je $f\colon X\to Y$ birezolutno preslikavanje. Neka je H $\mathcal{U}$-poluzatvoren skup u prostoru Y. Tada je $f^{-1}(Y\setminus H)$ $\mathcal{P}$-poluotvoren skup u prostoru X. Kako je $f^{-1}(Y\setminus H)=X\setminus f^{-1}(H)$, to je $f^{-1}(H)$ $\mathcal{P}$-poluzatvoren skup u prostoru X. Slično je, za $\mathcal{V}$-poluzatvoren u Y skup R, $f^{-1}(R)$ $\mathcal{Q}$-poluzatvoren skup u prostoru X.

Neka je sada, za svaki $\mathcal{U}$-poluzatvoren u Y skup H, $f^{-1}(H)$ $\mathcal{P}$-poluzatvoren skup u prostoru X i za svaki $\mathcal{V}$-poluzatvoren u Y skup F, $f^{-1}(F)$ $\mathcal{Q}$-poluzatvoren skup u prostoru X. Neka je Q $\mathcal{U}$-poluotvoren skup u prostoru Y. Tada je $f^{-1}(Y\setminus Q)=X\setminus f^{-1}(Q)$ i $f^{-1}(Q)$ je $\mathcal{P}$-poluotvoren skup u prostoru X. Slično je, $f^{-1}(R)$ $\mathcal{Q}$-poluotvoren skup u prostoru X, za svaki $\mathcal{V}$-poluotvoren u Y skup R. Zato je f birezolutno preslikavanje. □

3.20. S T A V. <u>Svako birezolutno preslikavanje bitopoloških prostora je polubineprekidno preslikavanje.</u>

D O K A Z sledi iz definicija 3.1. i 3.17.

3.21. P R I M E R. Neka je $X = \{a, b, c\}$, $\mathcal{P}=\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a,c\}, X\}$ i $\mathcal{Q}=\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\}$. Neka je preslikavanje $f: (X, \mathcal{P}, \mathcal{Q}) \to (X, \mathcal{Q}, \mathcal{P})$ definisano na sledeći način: Za svako $x \in X$ je $f(x)=x$. Tada je f birezolutno i bineprekidno preslikavanje.

3.22. P R I M E R. Neka je $X=I=[0,1]=Y$. $\mathcal{P}=\{\emptyset,X\} \cup \{[0,a) \mid 0<a\leq 1\}$ i $\mathcal{Q}=\{X, \emptyset\} \cup \{[0,2^{-n}) \mid n=1,2\ldots\}$. Neka je preslikavanje $f: (X,\mathcal{P},\mathcal{Q}) \to (Y, \mathcal{Q}, \mathcal{P})$ definisano na sledeći način: za svako $x \in X$ je $f(x)=x$. Tada je f birezolutno preslikavanje.

3.23. S T A V: <u>Neka je $f: X \to Y$ birezolutno preslikavanje bitopološkog prostora $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ u bitopološki prostor $(Y, \mathcal{U}, \mathcal{V})$ i $g: Y \to Z$ birezolutno preslikavanje bitopološkog prostora $(Y, \mathcal{U}, \mathcal{V})$ u bitopološki prostor $(Z, \mathcal{R}, \mathcal{T})$. Tada je $g\circ f: X \to Z$ birezolutno preslikavanje bitopološkog prostora $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ u bitopološki prostor $(Z, \mathcal{R}, \mathcal{T})$.</u>

D O K A Z: Neka je A $\mathcal{R}$-poluotvoren skup u prostoru Z. Tada je $g^{-1}(A)$ $\mathcal{U}$-poluotvoren skup u prostoru Y i $f^{-1}(g^{-1}(A))$ $\mathcal{P}$-poluotvoren skup u prostoru X. Tada je $(g(f))^{-1}(A)=f^{-1}(g^{-1}(A))$ $\mathcal{P}$-poluotvoren skup u prostoru X. Slično se pokazuje da je $(g\circ f)^{-1}(B)$ $\mathcal{Q}$-poluotvoren skup u prostoru X, za svaki $\mathcal{T}$-poluotvoren skup u prostoru Z. □

3.24. S T A V: <u>Preslikavanje $f: X \to Y$ bitopološkog prostora $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ u bitopološki prostor $(Y, \mathcal{U}, \mathcal{V})$ je birezolutno, ako i samo ako je, za svaki podskup A u X, $f(\mathcal{P}\text{-scl}A) \subset \mathcal{U}\text{-scl}(f(A))$ i $f(\mathcal{Q}\text{-scl}A) \subset \mathcal{V}\text{-scl}(f(A))$.</u>

D O K A Z. Neka je $A \subset X$. Tada je $\mathcal{U}\text{-scl}(f(A))$ $\mathcal{U}$-poluzatvoren skup u prostoru X. Prema 3.19. stavu $f^{-1}(\mathcal{U}\text{-scl}\, f(A))$ je $\mathcal{P}$-poluzatvoren skup u prostoru X. Biće $A\subset f^{-1}(f(A))\subset f^{-1}(\mathcal{U}\text{-scl}(f(A)))$ a $f(\mathcal{P}\text{-scl}A)\subset f(f^{-1}(\mathcal{U}\text{-scl}(f(A))) \subset \mathcal{U}\text{-scl}(f(A))$. Analogno se dokazuje da je $f(\mathcal{Q}\text{-scl}A)\subset \mathcal{V}\text{-scl}(f(A))$.

Neka je sada H $\mathcal{U}$-poluzatvoren skup u prostoru Y i posmatrajmo $f^{-1}(H)$. Biće $f(\mathcal{P}\text{-scl}(f^{-1}(H)))\subset \mathcal{U}\text{-scl}(f(f^{-1}(H)))=\mathcal{U}\text{-scl}(H \cap f(X))=\mathcal{U}\text{-scl}H=H$. Zato je $\mathcal{P}\text{-scl}(f^{-1}(H))\subset f^{-1}(H)$ i $f^{-1}(H)= \mathcal{P}\text{-scl}(f^{-1}(H))$. Analogno se dokazuje da je $f^{-1}(F)$ $\mathcal{Q}$-poluzatvoren skup u prostoru X, za svaki $\mathcal{V}$-poluzatvoren skup F u prostoru Y. □

3.25. S T A V. Preslikavanje $f\colon X\to Y$ bitopološkog prostora $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ u bitopološki prostor $(Y,\mathcal{U},\mathcal{V})$ je biirezolutno, ako i samo ako je, za svaki podskup B prostora Y, $\mathcal{P}\text{-}scl(f^{-1}(B))\subset f^{-1}(\mathcal{U}\text{-}sclB)$ i $\mathcal{Q}\text{-}scl(f^{-1}(B))\subset f^{-1}(\mathcal{V}\text{-}sclB)$.

D O K A Z. Neka je $B\subset Y$. Tada je $\mathcal{U}\text{-}sclB$, $\mathcal{U}$-poluzatvoren skup u prostoru Y, a kako je f biirezolutno preslikavanje, $f^{-1}(\mathcal{U}\text{-}sclB)$ je $\mathcal{P}$-poluzatvoren skup u prostoru X. Kako je $f^{-1}(B)\subset f^{-1}(\mathcal{U}\text{-}sclB)$ biće $\mathcal{P}\text{-}scl\, f^{-1}(B)\subset f^{-1}(\mathcal{U}\text{-}sclB)$. Analogno se dokazuje da je $\mathcal{Q}\text{-}scl(f^{-1}(B))\subset f^{-1}(\mathcal{V}\text{-}sclB)$.

Neka je sada B $\mathcal{U}$-poluzatvoren skup u prostoru Y, tj. $B=\mathcal{U}\text{-}sclB$. Po pretpostavci je tada $f^{-1}(B)\subset\mathcal{P}\text{-}scl\, f^{-1}(B)\subset f^{-1}(\mathcal{U}\text{-}sclB)\subset f^{-1}(B)$, pa je $f^{-1}(B)=\mathcal{P}\text{-}scl\, f^{-1}(B)$. Neka je sada A $\mathcal{V}$-poluzatvoren skup u prostoru Y. Analogno se dokazuje da je $f^{-1}(A)$ $\mathcal{Q}$-poluzatvoren skup u prostoru X. □

3.26. D E F I N I C I J A. Preslikavanje $f\colon X\to Y$ bitopološkog prostora $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ u bitopološki prostor $(Y,\mathcal{U},\mathcal{V})$ je skoro biotvoreno, ako je za svaki $\mathcal{U}$-otvoren skup U prostora Y, $f^{-1}(\mathcal{U}\text{-}cl\,U)\subset\mathcal{P}\text{-}cl(f^{-1}(U))$ i za svaki $\mathcal{V}$-otvoren skup V prostora Y, $f^{-1}(\mathcal{V}\text{-}cl\,V)\subset\mathcal{Q}\text{-}cl(f^{-1}(V))$.

3.27. S T A V. Neka je $f\colon X\to Y$ polubineprekidno i skoro biotvoreno preslikavanje bitopološkog prostora $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ u bitopološki prostor $(Y,\mathcal{U},\mathcal{V})$. Tada je $f^{-1}(U)$ polubiotvoren skup u prostoru X, za svaki polubiotvoren skup U u prostoru Y.

D O K A Z. Neka je U polubiotvoren skup u prostoru Y. Tada postoje $\mathcal{U}$-otvoren u Y skup G i $\mathcal{V}$-otvoren u Y skup D, takvi da je $G\subset U\subset\mathcal{U}clG$ i $D\subset U\subset\mathcal{V}clD$. Kako je f skoro biotvoreno prelikavanje biće $f^{-1}(G)\subset f^{-1}(U)\subset f^{-1}(\mathcal{U}\text{-}clG)\subset\mathcal{P}\text{-}cl(f^{-1}(G))$ i $f^{-1}(D)\subset f^{-1}(U)\subset f^{-1}(\mathcal{V}\text{-}clD)\subset\mathcal{Q}\text{-}cl(f^{-1}(D))$. Kako je preslikavanje f i polubineprekidno, to je $f^{-1}(G)$ $\mathcal{P}$-poluotvoren a $f^{-1}(D)$ $\mathcal{Q}$-poluotvoren skup u prostoru X. Zato je $f^{-1}(U)$ polubiotvoren skup u prostoru X. □

3.28. S T A V. Svako biotvoreno preslikavanje bitopoloških prostora je skoro biotvoreno preslikavanje.

D O K A Z sledi iz 3.26. definicije i definicije biotvorenog preslikavanja.

3.29. P O S L E D I C A. Neka je $f\colon X\to Y$ biotvoreno i bineprekidno preslikavanje bitopološkog prostora $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ u bitopološki prostor $(Y,\mathcal{U},\mathcal{V})$. Tada je $f^{-1}(U)$ polubiotvoren skup u prostoru X, za svaki polubiotvoren skup U u prostoru Y.

D O K A Z sledi iz 3.26. stava i 3.28. definicije.

3.30. P O S L E D I C A. Neka je $f: X \to Y$ polubineprekidno i skoro biotvoreno preslikavanje bitopološkog prostora $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ u bitopološki prostor $(Y, \mathcal{U}, \mathcal{V})$. Tada je f birezolutno preslikavanje.

D O K A Z sledi iz 3.27. stava i definicije birezolutnog preslikavanja.

4. AKCIOME SEPARACIJE U TOPOLOŠKIM I BITOPOLOŠKIM PROSTORIMA

U ovom delu rada navedene su aksiome separacije u topološkim i bitopološkim prostorima koristeći definicije i osobine poluotvorenih skupova.

4.1. D E F I N I C I J A. Topološki prostor X je semi T_0, ako za svaki par različitih tačaka x i y prostora X, postoji poluotvoren skup A u prostoru X koji sadrži tačku x ali ne sadrži tačku y, ili poluotvoren skup B u prostoru X, koji sadrži tački y a ne sadrži tačku x. (ST_0-prostor)

Svaki otvoren prostor ST_0-prostora je ST_0-prostor. Topološki prostor X je ST_0-prostor, ako i samo ako je, za svaki par različitih tačaka x i y prostora X, $scl\{x\} \neq scl\{y\}$. (V. [41])

4.2. D E F I N I C I J A. Topološki prostor X je semi T_1, ako za svaki par različitih tačaka x i y prostora X, postoji poluotvoren u X skup A koji sadrži tačku x ali ne i tačku y, i poluotvoren u X, skup B koji sadrži tačku y ali ne i tačku x. (ST_1-prostor)

Svaki otvoren podprostor ST_1-prostora je ST_1-prostor. Može se pokazati da je topološki prostor X ST_1-prostor, ako i samo ako je, svaki jednočlan skup poluzatvoren. (V.[41]).

4.3. D E F I N I C I J A. Topološki prostor X je semi T_2, ako za svaki par različitih tačaka x i y prostora X postoje, poluotvoreni u X, skupovi A i B takvi da je $x \in A$, $y \in V$ i $A \cap B = \emptyset$. (ST_2-prostor)

Može se pokazati da je svaki otvoren podprostor ST_2-prostora ST_2-prostor, i da je proizvod dva ST_2-prostora ST_2-prostor. Neka je X topološki prostor i Y ST_2-prostor. Neka je f: $X \to Y$ otvoreno, bijektivno i neprekidno preslikavanje prostora X u prostor Y. Tada je prostor X, ST_2-prostor. Na osnovu osobina poluneprekidnog preslikavanja, lako se vidi da je prostor X ST_2-prostor i u slučaju kada je f: $X \to Y$ poluneprekidno, bijektivno preslikavanje topološkog prostora X u T_2-prostor Y.

Topološki prostor X je ST_2 ako i samo ako, za svaki par različitih tačaka x i y prostora X, postoji poluneprekidno i skoro otvoreno preslikavanje f: $X \to Y$ prostora X u ST_2-prostor Y, tako da je $f(x) \neq f(y)$.(V[41]).

Neka je $f: X \to Y$ poluneprekidno i skoro otvoreno injektivno preslikavanje prostora X u ST_1 (ST_0) prostor Y. Tada je prostor X ST_1(ST_0) prostor. (V. [34], [36]).

Proučimo sada neke osobine bitopoloških prostora posmatrajući poluotvorene skupove.

4.4 D E F I N I C I J A. Bitopološki prostor $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ je uzajamno semi T_0, ako za svaki par različitih tačaka prostora X, postoji skup koji je ili $\mathcal{P}$-poluotvoren ili $\mathcal{Q}$-poluotvoren, a sadrži jednu od ovih tačaka ali ne i drugu. (PST_0-prostor)

Svaki PT_0 bitopološki prostor je PST_0-prostor.

Sledeći primer pokazuje da svaki PST_0-prostor nije PT_0-prostor:

Neka je $X=\{a,b,c\}$, $\mathcal{P}=\{\emptyset, X\}$ i $\mathcal{Q}=\{\emptyset, X, \{a\}\}$. $\cdots$ *
Tada je $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ PST_0-prostor ali nije PT_0-prostor. Tada $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ nije par ST_0 topologija.

Svaki biotvoren podprostor PST_0-prostora je PST_0-prostor. Poznato je da je bitopološki prostor $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ PST_0, ako i samo ako za date dve različite tačke prostora X, ili su njihova $\mathcal{P}$-poluzatvorenja ili $\mathcal{Q}$-poluzatvorenja disjunktna, tj. za date tačke $x, y \in X$, $x \neq y$ je ili $\mathcal{P}\text{-scl}\,\{x\} \neq \mathcal{P}\text{-scl}\,\{y\}$ ili $\mathcal{Q}\text{-scl}\,\{x\} \neq \mathcal{Q}\text{-scl}\,\{y\}$. (V. [42]).

4.5. D E F I N I C I J A. Bitopološki prostor $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ je uzajamno semi T_1, ako za svaki par različitih tačaka x i y prostora X, postoji $\mathcal{P}$-poluotvoren u X, skup U i $\mathcal{Q}$-poluotvoren u X skup V, takav da je $x \in U$, $y \notin U$ i $y \in V$, $x \notin V$. (PST_1-prostor)

Lako se vidi da je svaki PST_1-prostor i PST_0-prostor ali PST_0-prostor nije PST_1-prostor.

Svaki PT_1 bitopološki prostor je PST_1-prostor. Sledeći primer pokazuje da nije svaki PST_1-prostor i PT_1-prostor:

Neka je $X=\{a,b,c\}$, $\mathcal{P}=\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, X\}$ i $\mathcal{Q}=\{\{c\}, \emptyset, X\}$.
Tada je $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ PST_1-prostor ali nije PT_1-prostor.

Svaki biotvoren podprostor PST_1-prostora je PST_1-prostor.

Sledeći primeri pokazuju da su PST_1 i PT_0 prostori medjusobno nezavisni:

1) Neka je $X = \{a,b,c\}$, $\mathcal{P} = \{X, \{a,b\}, \emptyset\}$ i $\mathcal{Q} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, X\}$. Tada je $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ PT_0-prostor ali nije PST_1-prostor.

2) Neka je $X = \{a,b,c,d,e\}$, $\mathcal{P} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, X\}$ i $\mathcal{Q} = \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b,c\}, X\}$. Tada je $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ PST_1-prostor ali nije PT_0-prostor (V. [37]).

4.6. T E O R E M A. Bitopološki prostor $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ je PST_1-prostor, ako i samo ako je, svaki jednočlan skup ili $\mathcal{P}$-poluzatvoren ili $\mathcal{Q}$-poluzatvoren u prostoru X.

D O K A Z. Neka je X PST_1-prostor. Neka je $x \in X$ i $y \in X \setminus \{x\}$. Tada je $y \neq x$ i postoje $\mathcal{P}$-poluotvoren u X skup O_x i $\mathcal{Q}$-poluotvoren u X skup O_y, takvi da je $x \in O_x$, $y \notin O_x$ i $y \in O_y$, $x \notin O_y$. Kako je $y \in O_y \subset X \setminus \{x\}$ biće $\{x\}$ $\mathcal{Q}$-poluzatvoren skup u prostoru X. Dovoljnost tvrdjenja lako sledi. □

4.7. S T A V. Neka je $f\colon X \to Y$ injektivno, polubineprekidno i skoro biotvoreno preslikavanje bitopološkog prostora $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ u bitopološki prostor $(Y,\mathcal{U},\mathcal{V})$. Neka je Y PST_1 (PST_0) prostor. Tada je X PST_1 (PST_0) prostor.

D O K A Z. Neka je Y PST_1-prostor i neka su x i y dve različite tačke u prostoru X. Kako je f injektivno preslikavanje, postoje u prostoru Y, $\mathcal{U}$-poluotvoren skup V_x i $\mathcal{V}$-poluotvren skup V_y, takvi da je $x \in V_x$, $x \notin V_y$ i $y \in V_y$, $y \notin V_x$. Kako je f polubineprekidno i skoro biotvoreno preslikavanje, $f^{-1}(V_x)$ je $\mathcal{P}$-poluotvoren a $f^{-1}(V_y)$ je $\mathcal{Q}$-poluotvoren skup u prostoru X. Tada je $x \in f^{-1}(V_x)$, $y \notin f^{-1}(V_x)$ i $y \in f^{-1}(V_y)$, $x \notin f^{-1}(V_y)$ tj. $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ je PST_1-prostor.

Lako se dokazuje odgovarajuće tvrdjenje za PST_0-prostor. □

4.8. D E F I N I C I J A. Bitopološki prostor $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ je uzajamno semi T_2-prostor, ako za svaki par različitih tačaka x i y u prostoru X, postoje $\mathcal{P}$-poluotvoren u X skup U i $\mathcal{Q}$-poluotvoren u X skup V, takvi da je $x \in U$, $y \in V$ i $U \cap V = \emptyset$. (PST_2-prostor)

Može se pokazati da je svaki PT_2-prostor i PST_2-prostor, ali svaki PST_2-prostor nije i PT_2-prostor što pokazuje i primer *.

Svaki biotvoren podprostor PST_2-prostora je PST_2-prostor.

Za bitopološki prostor $(X,\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2)$ su sledeća tvrdjenja ekvivalentna:

a) $(X,\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2)$ je PST_2-prostor.

b) za svake dve različite tačke x i y u prostoru X, postoji $\mathcal{P}_i$-poluotvoren skup U takav da $x\in U$ i $y\notin \mathcal{P}_j$-$scl\,U$, za $i\neq j$, $i,j=1,2$

c) za svako $x\in X$ je $\{x\}=\cap\{\mathcal{P}_j\text{-}scl\,U \mid x\in U,\ U$ je $\mathcal{P}_i$-poluotvoren skup, $i\neq j$, $i, j=1,2.\}$ (V. [42]).

4.9. S T A V. Bitopološki prostor $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ je PST_2-prostor, ako i samo ako, za svaki par različitih tačaka x i y prostora X, postoji polubineprekidna i skoro biotvorena funkcija f: $X\to Y$ prostora X u PST_2-prostor$(Y,\mathcal{U},\mathcal{V})$, takva da je $f(x)\neq f(y)$.

D O K A Z. Neka su x i y dve različite tačke u prostoru X. Prema pretpostavci postoji polubineprekidna i skoro biotovrena funkcija f: $X\to Y$ prostora X u PST_2-prostor Y, takva da je $f(x)\neq f(y)$. Tada u prostoru Y postoje $\mathcal{U}$-poluotvoren skup V_x i $\mathcal{V}$-poluotvoren skup V_y takvi da je $f(x)\in V_x$, $f(y)\in V_y$ i $V_x\cap V_y=\emptyset$. Kako je f polubineprekidna i skoro biotvorena funkcija, $f^{-1}(V_x)$ je $\mathcal{P}$-poluotvoren skup a $f^{-1}(V_y)$ je $\mathcal{Q}$-poluotvoren skup u prostoru X i $f^{-1}(V_x)\cap f^{-1}(V_y)=\emptyset$. Tada je $x\in f^{-1}(V_x)$, $y\in f^{-1}(V_y)$ i X je PST_2-prostor.

U slučaju kada je f indentična funkcija lako sledi da je tvrdjenje stava neophodno. □

4.10. P O S L E D I C A. Neka je $(Y,\mathcal{U},\mathcal{V})$ PST_2-prostor i f: $X\to Y$ polubineprekidna i skoro biotvorena injekcija bitopološkog prostora $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ u bitopološki prostor $(Y,\mathcal{U},\mathcal{V})$. Tada je X PST_2-prostor.

4.11. P O S L E D I C A. Neka je $(Y,\mathcal{U},\mathcal{V})$ PST_2-prostor i $f: X \to Y$ biotvorena i bineprekidna funkcija bitopološkog prostora $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ u bitopološki prostor $(Y,\mathcal{U},\mathcal{V})$. Tada je X PT_2-prostor.

4.12. T E O R E M A. Neka je $f: X \to Y$ polubineprekidna i skoro biotvrena funkcija bitopološkog prostora $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ u PST_2-prostor $(Y,\mathcal{U},\mathcal{V})$. Tada je $\{(x_1, x_2) \mid f(x_1) = f(x_2)\}$ poluzatvoren skup u $(X \times X, \mathcal{P}\times\mathcal{Q})$.

D O K A Z. Neka je $A = \{(x_1, x_2) \mid f(x_1)=f(x_2)\}$ i $(x_1,x_2) \in X \times X \setminus A$. Tada je $f(x_1) \neq f(x_2)$ i kako je Y PST_2-prostor, postoje $\mathcal{U}$-poluotvoren skup V_1 i $\mathcal{V}$-poluotvoren skup V_2 u prostoru Y, takvi da je $f(x) \in V_1$, $f(y) \in V_2$ i $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Kako je f polubineprekidna i skoro biotvorena funkcija, biće $f^{-1}(V_1)$ $\mathcal{P}$-poluotvoren skup, a $f^{-1}(V_2)$ $\mathcal{Q}$-poluotvoren skup u prostoru X. Tada je $x_1 \in f^{-1}(V_1)$, $x_2 \in f^{-1}(V_2)$ i $f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) = \emptyset$. Tada je $(x_1, x_2) \in f^{-1}(V_1) \times f^{-1}(V_2) \subset X \times X \setminus A$ i A je poluzatvoren skup u prostoru $(X \times X, \mathcal{P}\times\mathcal{Q})$. □

Na osnovu definicije i osobina PST_0, PST_1 i PST_2 prostora vidi se da izmedju njih postoji sledeći odnos:

$$
\begin{array}{ccc}
PT_2 & \Rightarrow & PST_2 \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
PT_1 & \Rightarrow & PST_1 \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
PT_0 & \Rightarrow & PST_0
\end{array}
$$

Proučimo sada nekoliko osobina PSR_0-prostora.

4.13. D E F I N I C I J A. Bitopološki prostor $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ je $\mathcal{P}$ semi R_0 u odnosu na $\mathcal{Q}$, ako je za svaki $\mathcal{P}$-poluotvoren u X, skup G i svaku tačku $x \in G$, $\mathcal{Q}\text{-scl}\{x\} \subset G$.

Ekvivalentna ovoj je i sledeća

4.14. D E F I N I C I J A. Bitopološki prostor $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ je $\mathcal{P}$ semi R_0 u odnosu na $\mathcal{Q}$ ako za svaki $\mathcal{P}$-poluzatvoren u X skup F i za svaku tačku $x \in X$ koja ne pripada skupu F, postoji $\mathcal{Q}$-poluotvoren u X skup U, takav da je $F \subset U$ i $x \notin U$.

Bitopološki prostor $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ je PSR_0 ako je $\mathcal{P}$ R_0 u odnosu na $\mathcal{Q}$ i $\mathcal{Q}$ R_0 u odnosu na $\mathcal{P}$.

Može se pokazati da je svaki PR_0-prostor i PSR_0-prostor.

4.15. S T A V. Bitopološki prostor $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ je PSR_0, ako i samo ako je, za svako $x, y \in X$, $x \neq y$, $\mathcal{P}\text{-scl}\{x\} \cap \mathcal{Q}\text{-scl}\{y\} = \emptyset$ ili $\{x, y\} \subset \mathcal{P}\text{-xcl}\{x\} \cap \mathcal{Q}\text{-scl}\{y\}$.

D O K A Z. Pretpostavimo da je $\mathcal{P}\text{-scl}\{x\} \cap \mathcal{Q}\text{-scl}\{y\} \neq \phi$ i da $\{x,y\} \not\subset \mathcal{P}\text{-scl}\{x\} \cap \mathcal{Q}\text{-scl}\{y\}$. Neka je $z \in \mathcal{P}\text{-scl}\{x\} \cap \mathcal{Q}\text{-scl}\{y\}$ i neka $x \notin \mathcal{Q}\text{-scl}\{y\} \cap \mathcal{P}\text{-scl}\{x\}$. Tada $x \notin \mathcal{Q}\text{-scl}\{y\}$ i $x \in X \setminus \mathcal{Q}\text{-scl}\{y\}$, a ovo je $\mathcal{Q}$-poluotvoren skup u prostoru X. Tada je $\mathcal{P}\text{-scl}\{x\} \not\subset X \setminus \mathcal{Q}\text{-scl}\{y\}$, jer je $z \in \mathcal{Q}\text{-scl}\{y\}$ i zato $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ nije $\mathcal{Q}$ semi R_0 u odnosu na $\mathcal{P}$.

Neka je sada G $\mathcal{P}$-poluotvoren skup i $x \in G$. Pretpostavimo da $\mathcal{Q}\text{-scl}\{x\} \not\subset G$. Tada postoji tačka $y \in \mathcal{Q}\text{-scl}\{x\}$ tako da $y \notin G$ i $\mathcal{P}\text{-scl}\{y\} \cap G = \emptyset$, jer je $X \setminus G$ $\mathcal{P}$-poluzatvoren skup i $y \in X \setminus G$. Zato $\{x,y\} \not\subset \mathcal{P}\text{-scl}\{x\} \cap \mathcal{Q}\text{-scl}\{y\}$, $\mathcal{P}\text{-scl}\{x\} \cap \mathcal{Q}\text{-scl}\{y\} \neq \phi$ i za svako $x \in G$, $\mathcal{Q}\text{-scl}\{x\} \subset G$.
Slično se pokazuje da je prostor $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ $\mathcal{Q}$-semi R_0 u odnosu na $\mathcal{P}$.

Na osnovu navedenih definicija lako se pokazuju i sledeća tvrdjenja:

Neka je $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ PST_2-prostor. Tada su prostori $(X,\mathcal{P})$ i $(X,\mathcal{Q})$ SR_0-prostori.

Neka je $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ PST_2-prostor. Tada su prostori $(X,\mathcal{P})$ i $(X,\mathcal{Q})$ ST_1-prostori.

III.

NEKE DIMENZIONE FUNKCIJE U TOPOLOŠKIM I BITOPOLOŠKIM PROSTORIMA

1. DIMENZIJA dm u TOPOLOŠKIM PROSTORIMA

Dimenziona funkcija dm zasniva se na pojmovima nerva pokrivača prostora X, posmatranog kao delimično uredjen skup i dimenzione funkcije ds delimično uredjenog skupa, čije su osobine date u prvom delu ovog rada.

Dimenzionu funkciju dm uveo je Adnadjević 1965. godine, a kasnije su je proučavali Zambahidze i Tovodros, Pasynkov, Ćirić,

1.1. D E F I N I C I J A. Dimenzija dm topološkog prostora X, definiše se na sledeći način:

$\mathrm{dm}\, \emptyset = -1$,

$\mathrm{dm}\, X = 0$, ako se u svaki konačan otvoren pokrivač prostora X može upisati pokrivač, čiji je nerv potpuno neuredjen skup;

$\mathrm{dm}\, X \leq n$ $(n > 0)$ ako se u svaki konačan otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ prostora X, može upisati otvoren pokrivač $\mathcal{V}$ takav da je $\mathrm{ds}\, \mathcal{N}(\mathcal{V}) \leq n+1$.

$\mathrm{dm}\, X = n$, ako je $\mathrm{dm}\, X \leq n$ a nije $\mathrm{dm}\, X \leq n-1$

$\mathrm{dm}\, X = \infty$, kada za proizvoljno konačno n postoji pokrivač $\mathcal{U}$ prostora X, u koji se ne može upisati bar jedan pokrivač $\mathcal{V}$, tako da je $\mathrm{ds}\, \mathcal{N}(\mathcal{V}) \leq n + 1$.

Iz ovako date definicije lako sledi da je dimenzija dm X prostora X topološka invarijanta. Može se pokazati da kada je F zatvoren podskup prostora X, $\mathrm{dm}\, F \leq \mathrm{dm}\, X$. (v. [3])

Posmatrajmo sada normalan prostor X. Neka je $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_p\}$ pokrivač normalnog prostora X i neka zatvoren podskup F prostora X ima $\mathrm{dm}\, F = n$. Tada postoji familija $\mathcal{W} = \{W_1, \ldots W_r\}$ skupova koji su otvoreni u X, pokrivaju F, upisani su u $\mathcal{U}$ i

$$\mathrm{ds}\, \mathcal{N}(\mathcal{W}) \leq \begin{cases} n+1, & n > 0 \\ 2, & n = 0. \end{cases}$$

Neka je za svaki otvoren skup G normalnog prostora X $\dim G \leq n$. Tada je za svako $A \subset X$, $\dim A \leq n$. Neka je A proizvoljan skup normalnog prostora X, dimenzije $\dim A \leq n$. Neka je F proizvoljan zatvoren skup prostora $X \setminus A$, dimenzije $\dim F \leq m$. Može se pokazati da je tada $\dim(\mathrm{cl}A) \leq m + n + 1$.

Posmatrajmo normalan prostor X kao uniju skupova A i B. Neka je $\dim A \leq m$ a $\dim B \leq n$. Tada je $\dim X \leq 2(m+n) + 3$. U slučaju kada je jedan od ovih skupova zatvoren, dimenzija prostora X je $\dim X \leq m+n+1$. Pored ovog i u sledećim slučajevima je moguće smanjiti navedenu ocenu dimenzije unije prostora.

Neka je normalan prostor X jednak $X = A \cup B$ i neka je A otvoren skup u prostoru X sa $\dim A \leq n$ i $\dim B \leq n$. Tada je $\dim X \leq 2n+1$.

Neka je F zatvoren skup u normalnom prostoru X i $k = \max\{\dim F, \dim(X \setminus F)\}$. Tada je $\dim X \leq 2k + 1$. Neka je $X = A \cup B$ nasledno normalan prostor i $\dim A \leq m$, $\dim B \leq n$. Tada je $\dim X \leq m+n+1$.

Pokazuje se da za dimenziju dm teorema o zbiru zatvorenih skupova ne važi, već za konačno mnogo skupova, ali se može dokazati sledeća osobina:

Neka je normalan prostor $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$, gde su svi skupovi X_i zatvoreni u prostoru X i neka je $\dim X_i \leq n$ za svako i. Tada je $\dim X \leq 2n+1$.

Neka su A_i, $i=1,2,\ldots r$ otvoreni i zatvoreni skupovi prostora $X = \cup A_i$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ i $\dim A_i \leq n$. Tada je $\dim X \leq n$.

Dimenzija Euklidovog prostora E_n je $\dim E_n = n$, a dimenzija kružne linije S^1 je $\dim S^1 = 2$.

U slučaju kada je X kompaktan metrički prostor mogu se pokazati sledeće osobine dimenzije $\dim X$.

Nejednakost $\dim X \leq n$ je ispunjena tada i samo tada, kada za proizvoljno $\varepsilon > 0$, postoji takav otvoren ε-pokrivač $\mathcal{W}$ da je $\mathrm{ds}\mathcal{N}(\mathcal{W}) \leq n+1$, za $n > 0$ i $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ je potpuno neuredjen skup za $n=0$.

Neka za svako $\varepsilon > 0$ postoji ε-preslikavanje kompaktnog metričkog prostora X u neki kompaktan metrički prostor Y_ε dimenzije $\dim Y_\varepsilon \leq n$. Tada je $\dim X \leq n$.

Neka su X i Y bikompaktni metrički prostori i $m = \max\{\dim X, \dim Y\}$. Tada je $\dim(X \times Y) \leq 2m + 1$.

Za normalne i bikompaktne prostore mogu se pokazati sledeća tvrdjenja.

1.2. S T A V. Neka je X normalan prostor. Tada je $dmX = dm\,\beta X$, gde je βX Stoun-Čehova bikompaktifikacija prostora X. (v. [51])

D O K A Z. $dmX \leq dm\,\beta X$. Neka je $dm\,\beta X \leq n$. Za proizvoljan otvoren skup H prostora X sa $O_\beta H$ označimo najveći, otvoren u βX, skup koji u preseku sa X daje skup H. Neka je $\mathcal{W} = \{H_1, \ldots, H_s\}$ proizvoljan otvoren pokrivač prostora X. Skupovi $O_\beta H_1, \ldots, O_\beta H_s$ obrazuju pokrivač Ω prostora βX. Kako je $dm\,\beta X \leq n$, to se u pokrivač Ω može upisati otovren pokrivač $\mathcal{V} = \{G_1, \ldots, G_r\}$ prostora βX, takav da je $ds\mathcal{N}(\mathcal{V}) \leq n+1$. Tada skupovi $X \cap G_1, \ldots, X \cap G_r$ obrazuju pokrivač $\mathcal{U}$ prostora X upisan u $\mathcal{W}$ takav da je $ds\mathcal{N}(\mathcal{U}) \leq n+1$. Zato je $dmX \leq n$.

$dm\,\beta X \leq dm\,X$. Neka je $dmX \leq n$ i $\Omega = \{O_1, \ldots, O_s\}$ otvoren pokrivač bikomapkta βX. U pokrivač Ω može se kombinatorno upisati /v. [8], .1.10/ zatvoren pokrivač $\{F_1, \ldots F_s\}$ prostora βX. Za svako $i = 1, \ldots s$ neka je V_i okolina skupa F_i, takva da je $\beta X - clV_i \subset O_i$. U otvoren pokrivač $\gamma = \{X \cap V_1, \ldots, X \cap V_s\}$ prostora X može se upisati konačan zatvoren pokrivač $\mathcal{V} = \{\phi_1, \ldots, \phi_s\}$ takav da je $ds\mathcal{N}(\mathcal{V}) \leq n+1$. Familija skupova $cl(\mathcal{V}) = \{\beta X - cl\,\phi_1, \ldots, \beta X - cl\,\phi_s\}$ je slična familiji $\mathcal{V}$ i $ds\mathcal{N}(cl\,\mathcal{V}) \leq n+1$. Kako je $\bigcup_i (\beta X - cl\,\phi_i) = \beta X - cl(\bigcup_i \phi_i) = \beta X - clX = \beta X$, to je familija skupova $cl(\mathcal{V})$ pokrivač prostora βX. Svaki element pokrivača $cl(\mathcal{V})$ sadržan je u jednom od skupova $\beta X - cl(V_i \cap X) \subseteq \beta X - cl(V_i) \subseteq O_i$ te je pokrivač $cl(\mathcal{V})$ upisan u pokrivač $\mathcal{W}$ i zato je $dm\,\beta X \leq n$. □

Posmatraćemo sada preslikavanja bikompaktnih prostora i njihove dimenzije.

Neka je $f: X \to Y$ neprekidno preslikavanje bikompakta X na bikompakt Y, pri čemu je $dmX \leq n$ a $w(Y) \leq \tau$. Tada postoji takav bikompakt Z i takva neprekidna preslikavanja $g: X \to Z$ i $h: Z \to Y$, da je $dmZ \leq n$, $w(Z) \leq \tau$ i $f = hg$.

U klasi normalnih prostora može se dokazati sledeći odnos dimenzija $dimX$ i dmX. Za ove prostore je ispunjena veza:

$dim\,X \leq dmX \leq 2dim\,X + 1$. U slučaju kada je $dimX = 1$, biće $1 \leq dmX \leq 3$. Pokazuje se da su već u klasi lokalno povezanih kontinuuma moguća sva tri značenja koja može imati funkcija dmX.

Neka je X jednodimenzioni (u smislu dim) lokalno povezan kontinuum. $dmX = 1$, tada i samo tada, kada je X homeomorfno odsečku $[0, 1]$. (v. [51])

Neka je X jednodimenzioni (u smislu dim) lokalno povezan kontinuum. Nejednakost $dmX \le 2$ je ispunjena tada i samo tada, kada za proizvoljno $\varepsilon > 0$, postoji ε-preslikavanje prostora X u Euklidovu ravan E_2. $dmX=2$, tada i samo tada, kada X nije homeomorfno odsečku $[0,1]$ i za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji ε-preslikavanje u ravan.

Lokalno povezani kontinuumi za koje ne postoji ε-preslikavanje u ravan za neko $\varepsilon > 0$(napr.kontinuumi Kurtovskog, v.[3.2]) imaju $dmX=3$.

Pored ovih, mogu se dokazati i sledeće osobine dimenzije dm topoloških prostora.

1.3.L E M A. Neka je okolina O podskupa X_0 normalnog prostora X pokrivena, otvorenim u X, skupovima O_i, $i = 1,\dots,s$ i neka postoji takav normalan podprostor X_1 prostora X da je $X_0 \subset X_1 \subset O$ i $dmX_1 \le n$. Tada se u pokrivač $\mathcal{V} = \{O_i \cap X_0 \mid i = 1,\dots,s\}$ skupa X_0 može upisati, otvoren u X_0, pokrivač $\mathcal{U}$ takav da je $ds\mathcal{N}(\mathcal{U}) \le n + 1$.

D O K A Z. Upišimo u otvoren pokrivač $\mathcal{V} = \{O_i \cap X_0 \mid i=1,\dots,s\}$ konačan otvoren pokrivač $\mathcal{V}' = \{V_j \mid j=1,\dots,k\}$ takav da je $ds\mathcal{N}(\mathcal{V}') \le n + 1$. Tada je pokrivač $\mathcal{U} = \{V_j \cap X_0 \mid j = 1,\dots,k\}$ skupa X_0, otvoren u X_0, upisan u pokrivač $\mathcal{V}$ i $ds\mathcal{N}(\mathcal{U}) \le n + 1$. □

1.4. S T A V. Neka je $X_0 \subset X$ normalan podprostor normalnog prostora X. Tada je $dmX_0 \le dmX$, ako za bilo koju okolinu O skupa X_0, postoji normalan podprostor $X_1 = X_1(O)$ prostora X, takav da je $X_0 \subset X_1 \subset O$ i $dmX_1 \le dmX_0$.

D O K A Z. Neka je $\mathcal{V} = \{G_i \mid i=1,\dots,s\}$ normalan otvoren pokrivač skupa X_0. Izaberimo u X takve otvorene skupove V_i da je $G_i = V_i \cap X_0$, $i = 1,\dots,s$. Tada familija skupova $\mathcal{V}' = \{V_i \mid i=1,\dots,s\}$ pokriva okolinu $O = \bigcup_1^s V_i$ skupa X_0. Prema 1.3.lemi sledi da se u pokrivač $\mathcal{V}$ može upisati otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ takav da je $ds\mathcal{N}(\mathcal{U}) \le dmX + 1$, tj. $dmX_0 \le dmX$. □

1.5.S T A V. Sledeće osobine normalnog prostora X su ekvivalentne:

1) Postoji otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ prostora X, takav da je $ds\mathcal{N}(\mathcal{U}) \le n+1$.

2) Postoji zatvoren pokrivač $\mathcal{V}$ prostora X, takav da je $ds\mathcal{N}(\mathcal{V}) \le n+1$.

3) Postoji konačno razbijanje $\mathcal{W}$ prostora X, takvo da je $ds\mathcal{N}(\mathcal{W}) \le n+1$. $(n > 0)$.

Ove osobine karakterišu dimenziju dmX.

D O K A Z. 1) $\Rightarrow$ 3). Neka je Ω proizvoljan otvoren pokrivač prostora X. Prema tvrdjenju 1) u pokrivač Ω se može upisati pokrivač $\mathcal{U}$ takav da je $ds\mathcal{N}(\mathcal{U}) \leq n+1$. Saglasno dopuni teoreme 14/v.[8], 1.10/ u pokrivač $\mathcal{U}$ se može kombinatorno upisati razbijanje $\mathcal{W}$. Biće $ds\mathcal{N}(\mathcal{W}) \leq ds\mathcal{N}(\mathcal{U}) \leq n+1$.

2) $\Rightarrow$ 1). Neka je $\Omega = \{O_1, \dots, O_s\}$ proizvoljan konačan otvoren pokrivač prostora X. Prema tvrdjenju 2) postoji zatvoren pokrivač $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_s\}$ prostora X upisan u pokrivač Ω, takav da je $ds\mathcal{N}(\mathcal{V}) \leq n+1$. Saglasno teoremi o razbijanju postoje okoline OV_j skupova $V_j \in \mathcal{V}$ koje obrazuju pokrivač $\mathcal{W}$ sličan pokrivaču $\mathcal{V}$, takav da je $ds\mathcal{N}(\mathcal{W}) \leq n+1$. Kako je pokrivač $\mathcal{V}$ upisan u pokrivač Ω, to svako $V_j \in \mathcal{V}$ leži u nekom $O_{i(j)} \in \Omega$. Neka je, za svako $j=1,2,\dots,s$, $O_j = OV_j \cap O_{i(j)}$. Tada je $\mathcal{W} = \{O_1, \dots, O_s\}$ pokrivač prostora X, takav da je $ds\mathcal{N}(\mathcal{W}) \leq n+1$, upisan u pokrivač Ω.

Lako sledi da 3) $\Rightarrow$ 2). $\square$

1.6. S T A V. Za diskretnu sumu normalnih prostora $d \bigcup_\alpha X_\alpha, \alpha \in A$ ispunjeno je $dm(d \bigcup_\alpha X_\alpha) \leq \sup_{\alpha \in A} dm X_\alpha$

D O K A Z. Neka je $dmX_\alpha \leq n$, za svako $\alpha \in A$ i $\mathcal{U} = \{W_i \mid i=1,\dots,s\}$ konačan otvoren pokrivač prostora $X = d \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$. Za svako $\alpha \in A$ u pokrivač $\{W_i \cap X_\alpha \mid i=1,\dots,s\}$ upišimo, otvoren u X, porkivač $\mathcal{V}_\alpha$ prostora X_α, takav da je $ds\mathcal{N}(\mathcal{V}_\alpha) \leq n+1$. Familija $\mathcal{V} = \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{V}_\alpha$ je otvoren pokrivač prostora X, upisan u pokrivač $\mathcal{W}$. Biće $ds\mathcal{N}(\mathcal{V}) \leq n+1$ (jer su X_α disjunktni) i $dmX \leq n$. $\square$

1.7. S T A V. Neka je podskup A normalnog prostora X, F_σ skup. Tada je $dmA \leq 2dmX+1$.

D O K A Z. Neka je normalan podprostor A predstavljen u obliku prebrojive unije zatvorenih skupova A_i, $i=1,2,\dots$ Tada je $dmA_i \leq dmX$ za $i=1,2,\dots$ i biće $dmA \leq 2dmX+1$.

1.8. S T A V. Neka je podprostor X_0 normalno rasporedjen u prostoru X. Tada je $dmX_0 \leq 2dmX+1$.

Dokaz sledi iz 1.7. stava.

1.9. S T A V. Neka je X_0 proizvoljan podprostor potpuno normalnog prostora X, tada je $dmX_0 \leq 2dmX+1$.

D O K AZ. Kako je svaki podprostor potpuno normalnog prostora X normalno rasporedjen u prostoru X dokaz sledi iz 1.8. stava.

1.10. S T A V. Neka je $X=A\cup B$ normalan prostor. Neka je A zatvoren skup u prostoru X, $\dim A\leq n (n>0)$ i $\dim B=0$. Tada je $\dim X\leq n+2$.

D O K A Z. Neka je $\mathcal{U}=\{U_i \mid i=1,\ldots,s\}$ konačan otvoren pokrivač prostora X. Tada $\mathcal{U}'=\{U_i\cap A \mid i=1,\ldots,s\}$ pokriva A i kako je $\dim A\leq n$, to se u ovaj pokrivač može upisati konačan, otvoren u X, pokrivač $\mathcal{V}'=\{V_i' \mid i=1,\ldots,s\}$ takav da je $\mathrm{ds}\mathcal{N}(\mathcal{V}')\leq n+1$. Označimo sa $F=X\setminus \bigcup_1^s V_i'$ zatvoren podskup skupa B. Tada je $\dim F=0$ i postoji familija $\mathcal{W}=\{W_i \mid i=1,\ldots,r\}$ tako da je $B\subset \bigcup_1^r W_i$, W_i su otvoreni u X, $\mathcal{W}$ je upisano u $\mathcal{U}$ i $\mathrm{ds}\mathcal{N}(\mathcal{W})\leq 2$. Označimo sa $\mathcal{Y}=\{W_1,\ldots, W_r, V_1',\ldots,V_s'\}$ otvoren konačan pokrivač prostora X, upisan u pokrivač $\mathcal{U}$. Biće $\mathrm{ds}\mathcal{N}(\mathcal{Y})\leq n+1+2$ i $\dim X\leq n+2$. □

1.11. S T A V. Neka je $X=A\cup B$, $A\cap B=\emptyset$ nasledno normalan prostor. Neka je A zatvoren potprostor prostora X i $\dim A\leq n$. Neka je B otvoren potprostor prostora X i $\dim B\leq n$. Tada je $\dim X\leq n$ $(n>0)$.

D O K A Z. Neka je $\mathcal{U}=\{U_i \mid i=1,\ldots,r\}$ konačan otvoren pokrivač prostora X. Tada $\mathcal{U}'=\{U_i\cap B \mid i=1,\ldots,r\}$ pokriva B a $\mathcal{U}''=\{U_i\cap A \mid i=1\ldots,r\}$ pokriva A. Kako je $\dim A\leq n$ i $\dim B\leq n$, u pokrivač $\mathcal{U}'$ se može upisati konačan otvoren pokrivač $\mathcal{V}'$ takav da je $\mathrm{ds}\mathcal{N}(\mathcal{V}')\leq n+1$, a u pokrivač $\mathcal{U}''$ se može upisati konačan otvoren pokrivač $\mathcal{V}''$ takav da je $\mathrm{ds}\mathcal{N}(\mathcal{V}'')\leq n+1$. Prema lemi Čeha postoje familije $\mathcal{V}=\{V_i \mid i=1,\ldots,r\}$ i $\mathcal{W}=\{W_j \mid j=1,\ldots,s\}$ takve da su V_i i W_j otvoreni skupovi u prostoru X, $V_i\subset V_i'$, $W_j\subset W_j'$ i $\mathrm{ds}\mathcal{N}(\mathcal{V})\leq n+1$ a $\mathrm{ds}\mathcal{N}(\mathcal{W})\leq n+1$. Kako je $V_i\cap W_j=\emptyset$, za svako i,j biće $\mathrm{ds}\mathcal{N}\{V_1,\ldots,V_r,W_1,\ldots,W_s\}\leq n+1$ i $\dim X\leq n$. □

1.12. S T A V. Neka je X finalno kompaktan prostor i neka je $\mathrm{ind}X=0$. Tada je $\dim X=0$.

D O K A Z. Neka je $\mathrm{ind}X=0$ i $\mathcal{U}=\{U_1,\ldots,U_n\}$ otvoren pokrivač prostora X. Treba naći upisan u njega, konačan otvoren pokrivač čiji je nerv potpuno neuredjen skup. Svaka tačka $x\in X$ nalazi se u nekom $U_i\in\mathcal{U}$. Kako je $\mathrm{ind}X=0$, postoji otvoreno-zatvorena okolina V_x takva da je $x\in V_x\subset U_i$. Kako je X finalno kompaktan prostor, to je iz skupa svih V_x moguće izdvojiti prebrojiv pokrivač $\{V_1=V_{x_1},\ldots, V_k=V_{x_k},\ldots\}$ upisan u $\mathcal{U}$. Neka je sada $O_1=V_1$, $O_2=V_2\setminus V_1,\ldots,O_k=V_k\setminus \bigcup_{j<k} V_j,\ldots$ Kako su skupovi V_k otvoreno-zatvoreni, to su takvi skupovi O_k. Osim toga oni su disjunktni, i obrazuju pokrivač $\mathcal{W}'=\{O_1, O_2,\ldots O_k,\ldots\}$ upisan u pokrivač $\mathcal{U}$. Nerv ovog pokrivača je potpuno neuredjen skup i $\dim X=0$. □

1.13. S T A V. Neka je X topološki prostor. $\dim X=0$, ako i samo ako je $\mathrm{Ind}X=0$ (prostor X je tada normalan).

D O K A Z. Kako je $\mathrm{Ind}X \leq \dim X$ i $\dim X \leq \mathrm{dm}X$ biće $\mathrm{Ind}X \leq \mathrm{dm}X$.

Neka je $\mathrm{Ind}X=0$. Tada je X normalan prostor. Neka je $\mathcal{U}=\{U_1,\dots,U_s\}$ proizvoljan otvoren pokrivač prostora X. Postoji, kombinatorno upisan u $\mathcal{U}$, zatvoren pokrivač $\mathcal{V}=\{V_1,\dots V_s\}$. Kako je $\mathrm{Ind}X=0$, to za svako $V_i \in \mathcal{V}$ postoji takav otvoreno-zatvoren skup O_i, da je $V_i \subset O_i \subset U_i$, tj. u pokrivač $\mathcal{U}$ je upisan pokrivač $\mathcal{O}=\{O_1,\dots,O_s\}$ koji se sastoji od otvoreno-zatvorenih skupova. Neka je $A_1=O_1, A_2=O_2 \setminus O_1, \dots, A_i = O_i \setminus \bigcup_{j<i} O_j$, $i=3,\dots,s$. Pokrivač $\mathcal{A}=\{A_1,\dots,A_s\}$ disjunktnih otvoreno-zatvorenih skupova, upisan je u pokrivač $\mathcal{U}$, a njegov nerv je potpuno neuredjen skup. Zato je $\mathrm{dm}X=0$. □

1.14. S T A V. Neka je X topološki prostor i $\mathrm{dm}X=0$. Tada je X potpuno nepovezan prostor.

D O K A Z sledi iz 1.13. stava i tvrdjenja 2 (v. [δ], 2, 3)

1.15. S T A V. Sistem $\mathcal{W}=\{Oe_i\}$ otvorenih zvezda triangulacije K poliedra $P=\widetilde{K}$, je otvoren pokrivač poliedra P. Tada je $\mathrm{ds}\mathcal{N}(\mathcal{W}) \leq n+1$, $n=\mathrm{dm}K$, $n>0$.

D O K A Z sledi iz T.1 (v. [δ], 3, 2).

1.16. S T A V. Dimenzija poliedra P^n je $\mathrm{dm}P^n \leq n$ $(n>0)$.

D O K A Z. Dovoljno je pokazati da poliedar ima, za bilo koje $\varepsilon>0$, otvoren ε-pokrivač $\mathcal{W}$ čiji je nerv takav da je $\mathrm{ds}\mathcal{N}(\mathcal{W}) \leq n+1$. Da bismo dobili taj pokrivač uzmimo triangulaciju K poliedra, čiji su simpleksi dijametra manjeg od $\varepsilon/3$. Otvorene zvezde Oe_i vrhova te triangulacije, imaju dijametar manji od ε i obrazuju pokrivač $\mathcal{W}$ poliedra $P^n=\widetilde{K}$, takav da je $\mathrm{ds}\mathcal{N}(\mathcal{W}) \leq n+1$. □

1.17. S T A V. Svaki kompakt Φ koji se nalazi u n-mernom Euklidovom prostoru E_n, ima $\mathrm{dm}\Phi \leq n$.

D O K A Z. Kompakt $\Phi \subset E_n$, kako je ograničen zatvoren skup, nalazi se u nekom zatvorenom simpleksu $\overline{T}^n$, i čini zatvoren podprostor toga simpleksa. Tada je $\mathrm{dm}\Phi \leq \mathrm{dm}\overline{T}^n \leq n$.

2. DIMENZIJA $\mathcal{P}$-dm TOPOLOŠKIH PROSTORA

Aarts i Nishiura su definisali pojam realtivne dimenzije.

Neka je $\mathcal{M}$ klasa metrizabilnih prostora. Podklasa $\mathcal{P}$ klase $\mathcal{M}$ je topološki zatvorena, ako sa svakim svojim elementom sadrži i sve elemente koji su mu homeomorfni. Po definiciji je $\emptyset \in \mathcal{P}$.

Klasa $\mathcal{P}$ je monotona, ako podskup svakog elementa klase $\mathcal{P}$ pripada klasi $\mathcal{P}$ (tj. $Y \subset X$, $X \in \mathcal{P} \Rightarrow Y \in \mathcal{P}$).

Neka je $\mathcal{P}$ klasa prostora. Prostor Y je $\mathcal{P}$-jezgro prostora X, ako je $Y \subset X$ i $Y \in \mathcal{P}$. Klasa $\mathcal{P}$ je slabo aditivna, ako je $Z \in \mathcal{P}$ kad god je $Z = X \cup Y$, $X \in \mathcal{P}$, $Y \in \mathcal{P}$ i X je zatvoren.

Neka su X, $Y \subset Z$ podskupovi skupa Z. Prostori X i Y su komplementarni u Z, ako je $Z = X \cup Y$ i $X \cap Y = \emptyset$.

Neka su $\mathcal{P}$ i $\mathcal{Q}$ dve klase prostora. Pκostor Z je neodredjen u odnosu na $\mathcal{P}$ i $\mathcal{Q}$, ako ispunjava uslov: $X \in \mathcal{P}$, ako i samo ako je $Y \in \mathcal{Q}$, gde su X i Y komplementarni u Z. (v.[1]).

2.1.D E F I N I C I J A. Neka je $\mathcal{P}$ topološki zatvorena klasa prostora. $\mathcal{P}$-granični pokrivač prostora X je otvorena kolekcija $\mathcal{V} = \{V\}$ takva da je $(X \setminus \cup \mathcal{V}) \in \mathcal{P}$. Skup X je zatvoreno $\mathcal{P}$-jezgro $\mathcal{P}$-graničnog pokrivača. (v. [1])

Nerv $\mathcal{P}$-graničnog pokrivača definiše se na isti način kao i nerv pokrivača.

2.2.L E M A. Neka su $\mathcal{P}$ i $\mathcal{Q}$ klase prostora monotone po zatvorenim skupovima. Neka je prostor Z neodredjen u odnosu na $\mathcal{P}$ i $\mathcal{Q}$ i neka su X i Y komplementarni u Z. Neka je $\mathcal{U}$ otvorena kolekcija u prostoru Z. Tada je $\mathcal{U}|X$ $\mathcal{P}$-granični pokrivač prostora X, ako i samo ako je, $\mathcal{U}|Y$ $\mathcal{Q}$-granični pokrivač prostora Y. (v. [1])

Posmatrajamo sada klasu $\mathcal{P}$ kompaktnih prostora.

2.3.D E F I N I C I J A. Neka je $\mathcal{P}$ topološki zatvorena klasa prostora i X topološki prostor. $\mathcal{P}$-dm$X=-1$, ako je $X \in \mathcal{P}$.

$\mathcal{P}$-dm$X=0$, ako se u svaki konačan $\mathcal{P}$-granični pokrivač $\mathcal{U}$ prostora X, može upisati konačan $\mathcal{P}$-granični pokrivač $\mathcal{V}$, čiji je nerv potpuno neuredjen skup.

$\mathcal{P}$-dm$X \leq n$ $(n > 0)$, ako se u svaki konačan $\mathcal{P}$-granični pokrivač $\mathcal{U}$ prostora X može upisati konačan $\mathcal{P}$-granični pokrivač $\mathcal{V}$, takav da je ds$\mathcal{N}(\mathcal{V}) \leq n+1$.

$\mathcal{P}$-dmX=n, ako je $\mathcal{P}$-dmX$\leq$n, a nije $\mathcal{P}$-dmX$\leq$n-1.

U slučaju kada je $\mathcal{P}=\{\emptyset\}$, onda je $\mathcal{P}$- dmX=dmX.

2.4.S T A V. Dimenziona funkcija $\mathcal{P}$-dmX je topološka invarijanta.

2.5.S T A V. Neka je $\mathcal{P}$ klasa prostora, monotona po zatvorenim skupovima. Za svaki zatvoren podskup F prostora X, je $\mathcal{P}$-dmF$\leq$ $\mathcal{P}$-dmX.

D O K A Z. Dokažimo stav za $\mathcal{P}$-dmX$\geq$1. Neka je $\{U_\gamma | \gamma\in\Gamma\}$ konačan $\mathcal{P}$- granični pokrivač podskupa F sa zatvorenim $\mathcal{P}$-jezgrom G. Tada je $\mathcal{U}=\{U^*_\gamma|\gamma\in\Gamma\}\cup\{X\setminus F\}$, gde je $U^*_\gamma\cap F = U_\gamma$ za svako $\gamma\in\Gamma$, konačan otvoren $\mathcal{P}$-granični pokrivač prostora X. Tada postoji konačan $\mathcal{P}$-granični pokrivač $\mathcal{V}$ prostora X sa zatvorenim $\mathcal{P}$-jezgrom H, takav da je $\mathcal{V}\subset\mathcal{U}$ i ds$\mathcal{N}(\mathcal{V})\leq$ $\mathcal{P}$-dmX+1. Tada je $\mathcal{V}'=\mathcal{V}|F$ $\mathcal{P}$-granični pokrivač podskupa F, sa zatvorenim $\mathcal{P}$-jezgrom $H\cap F$ i ds$\mathcal{N}(\mathcal{V}')\leq$ ds$\mathcal{N}(\mathcal{V})\leq$ $\mathcal{P}$-dmX+1. □

2.6. S T A V. Neka je klasa $\mathcal{P}$ slabo aditivna, monotona po otvorenim skupovima i neka je F zatvoreno $\mathcal{P}$-jezgro prostora X. Tada je $\mathcal{P}$-dmX= $\mathcal{P}$-dm(X$\setminus$F).

D O K A Z. Dokažimo prvo nejednakost $\mathcal{P}$-dmX$\leq$ $\mathcal{P}$-dm(X$\setminus$F), za $\mathcal{P}$-dm(X$\setminus$F)$\geq$1. Neka je $\mathcal{U}$ $\mathcal{P}$-granični pokrivač prostora X sa zatvorenim $\mathcal{P}$-jezgrom G. Kako je F zatvoreno $\mathcal{P}$-jezgro, klasa $\mathcal{P}$ monotona po otvorenim skupovima, $\mathcal{U}|X\setminus F$ je $\mathcal{P}$-granični pokrivač prostora X$\setminus$F sa zatvorenim $\mathcal{P}$-jezgrom G$\setminus$F. Neka je $\mathcal{V}$ $\mathcal{P}$-granični pokrivač prostora X$\setminus$F, upisan u pokrivač $\mathcal{U}|X\setminus F$ sa ds$\mathcal{N}(\mathcal{V})\leq$ $\mathcal{P}$-dm(X$\setminus$F)+1, i zatvorenim $\mathcal{P}$-jezgrom H. Kako je H zatvoren skup u prostoru X$\setminus$F, H$\cup$F je zatvoren skup u prostoru X. Kako je $\mathcal{P}$ slabo aditivna klasa, to je $\mathcal{V}$ $\mathcal{P}$-granični pokrivač prostora X sa zatvorenim $\mathcal{P}$-jezgrom F$\cup$H.

Dokažimo sada nejednakost $\mathcal{P}$-dm(X$\setminus$F)$\leq$ $\mathcal{P}$-dmX za $\mathcal{P}$-dmX$\geq$1. Neka je $\mathcal{V}$ $\mathcal{P}$-granični pokrivač prostora X$\setminus$F sa zatvorenim $\mathcal{P}$-jezgrom G. Tada je G$\cup$F zatvoreno $\mathcal{P}$-jezgro prostora X i $\mathcal{V}$ je $\mathcal{P}$-granični pokrivač prostora X, sa zatvorenim $\mathcal{P}$-jezgrom G$\cup$F. Neka je $\mathcal{U}$ $\mathcal{P}$-granični pokrivač prostora X upisan u pokrivač $\mathcal{V}$, takav da je ds$\mathcal{N}(\mathcal{U})\leq$ $\mathcal{P}$-dmX+1, sa zatvorenim $\mathcal{P}$-jezgrom H. Kako je $\mathcal{P}$ klasa prostora monotona po otvorenim skupovima, to je $\mathcal{U}'=\mathcal{U}|X\setminus F$ $\mathcal{P}$-granični pokrivač prostora X$\setminus$F sa zatvorenim $\mathcal{P}$-jezgrom H$\setminus$F i ds$\mathcal{N}(\mathcal{U}')\leq$ $\mathcal{P}$-dmX+1. □

2.7.S T A V. Neka su $\mathcal{P}$ i $\mathcal{Q}$ klase prostora monotone po zatvorenim skupovima. Neka je prostor Z neodredjen u odnosu na $\mathcal{P}$ i $\mathcal{Q}$. Tada je $\mathcal{P}$-dm$X$= $\mathcal{Q}$-dm$Y$, gde su X i Y komplementarni u prostoru Z.

D O K A Z. Dovoljno je dokazati nejednakost $\mathcal{P}$-dm$X \leq \mathcal{Q}$-dm$Y$ za $\mathcal{Q}$-dm$Y \geq 1$, gde su X i Y komplementarni u prostoru Z. Neka je $\mathcal{Q}$-dm$Y \leq n$ i $\{U_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ $\mathcal{P}$-granični pokrivač prostora X. Za svako $\gamma \in \Gamma$ neka je U_γ^* otvoren podskup u prostoru Z, takav da je $U_\gamma^* \cap X = U_\gamma$ za svako $\gamma \in \Gamma$. Prema lemi 2.2. $\{U_\gamma^* | \gamma \in \Gamma\}|Y$ je $\mathcal{Q}$-granični pokrivač prostora Y. Kako je $\mathcal{Q}$-dm$Y \leq n$, to se u ovaj $\mathcal{Q}$-granični pokrivač može upisati $\mathcal{Q}$-granični pokrivač $\mathcal{V} = \{V_\delta | \delta \in \Delta\}$ sa ds$\mathcal{N}(\mathcal{V}) \leq n+1$. Sada se može formirati otvorena kolekcija $\{V_\delta^* | \delta \in \Delta\}$ takva da je $\{V_\delta^* | \delta \in \Delta\}|Y = \{V_\delta | \delta \in \Delta\}$. Biće $\mathcal{V}^* = \{V_\delta^* | \delta \in \Delta\} \subset \{U_\gamma^* | \gamma \in \Gamma\}$ i ds$\mathcal{N}(\mathcal{V}^*) \leq n+1$. Sada je $\eta = \{V_\delta^* | \delta \in \Delta\} | X$ $\mathcal{P}$-granični pokrivač prostora X sa ds$\mathcal{N}(\eta) \leq n+1$. Zato je $\mathcal{P}$-dm$X \leq n$. □

2.8.S T A V. Neka je $\mathcal{P}$ klasa prostora monotona po zatvorenim skupovima i konačno zatvoreno aditivna. Neka je $X = Y \cup Z$, gde su Z i Y zatvoreni skupovi u prostoru X. Tada je $\mathcal{P}$-dm$X$=max $\{\mathcal{P}$-dm$Y$, $\mathcal{P}$-dm$Z\}$.

D O K A Z. Neka je n=max $\{\mathcal{P}$-dm$Y$, $\mathcal{P}$-dm$Z\}$. Prema stavu 2.5. je $\mathcal{P}$-dm$X \geq n$. Dokažimo samo nejednakost $\mathcal{P}$-dm$X \leq n$, za $n \geq 1$. Neka je $\mathcal{U} = \{U_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ $\mathcal{P}$-granični pokrivač prostora X, sa zatvorenim $\mathcal{P}$-jezgrom F. Tada je $\mathcal{U}|Z$ $\mathcal{P}$-granični pokrivač prostora Z sa zatvorenim $\mathcal{P}$-jezgrom $F \cap Z$. Neka je $\mathcal{V} = \{V_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ $\mathcal{P}$-granični pokrivač prostora Z sa zatvorenim $\mathcal{P}$-jezgrom G, upisan u $\mathcal{U}|Z$ i ds$\mathcal{N}(\mathcal{V}) \leq n+1$. Sada je $V_\gamma \subset U_\gamma$, $V_\gamma = V_{\gamma'}$, kad god je $U_\gamma = U_{\gamma'}$; a V_γ i $V_{\gamma'}$ su neprazni kad god je $U_\gamma \neq U_{\gamma'}$. Skup G je zatvoren u prostoru X i $G \cup F$ je zatvoreno $\mathcal{P}$-jezgro. Neka je $W_\gamma = (U_\gamma | Z) \cup V_\gamma$ za svako $\gamma \in \Gamma$. Tada je $\mathcal{W} = \{W_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$ $\mathcal{P}$-granični pokrivač prostora X, sa zatvorenim $\mathcal{P}$-jezgrom $G \cup F$, takav da je ds$\mathcal{N}(\mathcal{W}|Z) \leq n+1$ i $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}$. Slično važi za $\mathcal{U}|Y$. Tada je $\mathcal{W}$ $\mathcal{P}$-granični pokrivač prostora X sa ds$\mathcal{N}(\mathcal{W}) \leq n+1$. □

2.9.S T A V. Za proizvoljan topološki prostor X je $\mathcal{P}$-dm$X \leq$ dm$X$.

2.10.S T A V. Za svaki konačan $\mathcal{P}$-granični pokrivač $\mathcal{U} = \{O_1, \ldots, O_s\}$ normalnog prostora X, postoji kombinatorno upisan u njega, zatvoren $\mathcal{P}$-granični pokrivač $\mathcal{F} = \{F_1, \ldots, F_s\}$.

D O K A Z. Za familiju zatvorenih skupova $\mathfrak{S}=\{X\setminus O_1,\dots,X\setminus O_s\}$ prema T.13/v[8]/ postoje takvi otvoreni skupovi $O_1',\dots,O_s'$ da je $X\setminus O_1 \subset O_1',\dots,X\setminus O_s\subset O_s'$; $X\setminus O_1'\subset O_1,\dots,X\setminus O_s'\subset O_s$ i familija skupova $\{\mathrm{cl}\,O_1',\dots,\mathrm{cl}\,O_s'\}$ je slična familiji $\mathfrak{S}$. Kako je $\{O_1,\dots,O_s\}$ $\mathcal{P}$-granični pokrivač prostora X, to je $X\setminus \bigcup_1^s O_i\in\mathcal{P}$, $(X\setminus O_1)\cap\dots\cap(X\setminus O_s)\in\mathcal{P}$. Znači i $\mathrm{cl}\,O_1'\cap\dots\cap\mathrm{cl}\,O_s'\in\mathcal{P}$ tj. skupovi $O_1''=X\setminus\mathrm{cl}\,O_1',\dots,O_s''=X\setminus\mathrm{cl}\,O_s'$ obrazuju $\mathcal{P}$-granični pokrivač prostora X. □

2.11. S T A V. Neka je F zatvoren podskup normalnog prostora X, $\mathcal{P}\text{-}\mathrm{dm}F\le n$ i $\mathcal{U}=\{U_1,\dots,U_r\}$ $\mathcal{P}$-granični pokrivač prostora X sa zatvorenim $\mathcal{P}$-jezgrom H. Tada postoji familija $\mathcal{W}=\{W_1,\dots,W_r\}$ skupova koji su otvoreni u X, a W_i su upisani u U_i za $i=1,2,\dots,r$. Familija $\mathcal{W}$ je $\mathcal{P}$-granični pokrivač skupa F sa zatvorenim $\mathcal{P}$-jezgrom G i

$$\mathrm{ds}\mathcal{N}(\mathcal{W})\le\begin{cases} n+1, & n>0\\ 2, & n=0.\end{cases}$$

D O K A Z. (za $n>0$). Iz $\mathcal{P}$-graničnog pokrivača $\mathcal{U}$ prostora X dobijamo $\mathcal{P}$-granični pokrivač $\mathcal{U}^*=\{U_1\cap F,\dots,U_r\cap F\}$ skupa F sa zatvorenim $\mathcal{P}$-jezgrom $H\cap F$. U ovaj $\mathcal{P}$-granični pokrivač upišimo $\mathcal{P}$-granični pokrivač $\mathcal{V}=\{V_1,\dots,V_r\}$ sa zatvorenim $\mathcal{P}$-jezgrom G, tako da je $\mathrm{ds}\mathcal{N}(\mathcal{V})\le n+1$. Kako je F normalan prostor, to se u svaki njegov konačan $\mathcal{P}$-granični pokrivač može upisati $\mathcal{P}$-granični zatvoren pokrivač $\mathcal{K}=\{K_1,\dots,K_s\}$ sa zatvorenim $\mathcal{P}$-jezgrom H. Za svaku familiju zatvorenih skupova normalnog prostora, postoji familija otvorenih skupova $\mathcal{W}=\{W_1,\dots,W_r\}$ prostora X upisanih u $\mathcal{U}$. Sada je $K_i\subset W_i$ za svako $i=1,\dots,r$ i $K_i\cap\dots\cap K_j=\emptyset\Rightarrow W_i\cap\dots\cap W_j=\emptyset$. $\mathcal{W}$ je tražena familija skupova. □

2.12. S T A V. Neka je X normalan prostor i $\mathcal{P}$ klasa prostora monotona po zatvorenim skupovima. Neka je $X=A\cup B$, gde je A zatvoren podskup od X sa $\mathcal{P}\text{-}\mathrm{dm}A\le m$ i $\mathcal{P}\text{-}\mathrm{dm}B\le n$. Tada je $\mathcal{P}\text{-}\mathrm{dm}X\le m+n+1$.

D O K A Z. (za $n>0$ i $m>0$). Neka je A zatvoren podskup prostora X i $\mathcal{U}=\{U_i \mid i=1,\dots,k\}$ $\mathcal{P}$-granični pokrivač prostora X sa zatvorenim $\mathcal{P}$-jezgrom H. U pokrivač $\mathcal{U}$ može se upisati familija $\mathcal{V}=\{V_i \mid i=1,\dots,p\}$ takva da je

1) $\mathcal{V}$ $\mathcal{P}$-granični pokrivač skupa A sa zatvorenim $\mathcal{P}$-jezgrom $H_1=H\cap A$, gde su skupovi V_i otvoreni u prostoru X i $\mathrm{ds}\mathcal{N}(\mathcal{V})\le m+1$.

Na isti način se u pokrivač $\mathcal{U}$ može upisati familija $\mathcal{W} = \{W_i \mid i=1,\dots,r\}$ sa osobinom

1) $\mathcal{W}$ je $\mathcal{P}$-granični pokrivač skupa $F = X \setminus \bigcup_1^p V_p$ sa zatvorenim $\mathcal{P}$-jezgrom $H_2 = H \cap F$.

2) W_i su otvoreni skupovi u prostoru X i $ds\mathcal{N}(\mathcal{W}) \leq n+1$.

Sada je familija $\mathcal{X} = \{V_1,\dots,V_p,W_1,\dots,W_r\}$ upisana u $\mathcal{U}$ i otvorena u prostoru X. To je $\mathcal{P}$-granični pokrivač prostora X sa $ds\mathcal{N}(\mathcal{X}) \leq m+n+2$ i zatvorenim $\mathcal{P}$-jezgrom $H_1 \cup H_2$. Zato je $\mathcal{P}$-$\dim X \leq m+n+1$. $\square$

3. NEKE DIMENZIONE FUNKCIJE U BITOPOLOŠKIM PROSTORIMA

3.1.D E F I N I C I J A. U bitopološkom prostoru $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ $\mathcal{P}$ je nula dimenzionalno u odnosu na $\mathcal{Q}$, ako topologija $\mathcal{P}$ ima bazu od $\mathcal{Q}$-zatvorenih skupova, tj. za svaku tačku x prostora X i $\mathcal{P}$-otvoren skup U koji sadrži tu tačku, postoji $\mathcal{Q}$-zatvoren i $\mathcal{P}$-otvoren skup G, takav da je $x \in G \subset U$.

Prostor $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ je uzajamno nula dimenzionalan, ako je $\mathcal{P}$ nula dimenzionalno u odnosu na $\mathcal{Q}$ i $\mathcal{Q}$ nula dimenzionalno u odnosu na $\mathcal{P}$.

Navedimo neke osobine uzajamno nula dimenzionalnog prostora.

Neka je $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ FHP uzajamno T_0 prostor i uzajamno nula dimenzionalan prostor. Tada je bitopološki prostor X totalno diskoneksan. Zaista, neka su x i y dve različite tačke prostora X. Tada postoji $\mathcal{P}$-otvoren skup U takav da je $x \in U$ i $y \notin U$, ili $\mathcal{Q}$-otvoren skup V takav da $x \notin V$ i $y \in V$. Kako je prostor X $\mathcal{P}$ nula dimenzionalan u odnosu na $\mathcal{Q}$, u prvom slučaju postoji $\mathcal{P}$-otvoren i $\mathcal{Q}$-zatvoren skup G takav da je $x \in G \subset U$. Tada je $X=G \mid X\setminus G$ razdvajanje prostora X i $x \in G$ a $y \in X\setminus G$. Za drugi slučaj dokaz je sličan. Zato je prostor X totalno diskoneksan.

Može se pokazati da kada je $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ totalno diskoneksan prostor i $\mathcal{P}$ lokalno kompaktan u odnosu na $\mathcal{Q}$, tada je prostor X $\mathcal{P}$-nula dimenzionalan u odnosu na $\mathcal{Q}$. Neka je $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ totalno diskoneksan i uzajamno lokalno kompaktan prostor. Tada je prostor X uzajamno nula dimenzionalan. (v. [39])

3.2.D E F I N I C I J A. Neka je $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ bitopološki prostor. Dimenziona funkcija $\mathcal{P}\mathcal{Q}$-indX definiše se na sledeći način:

$\mathcal{P}\mathcal{Q}$-indX=-1, ako je $X=\emptyset$

$\mathcal{P}\mathcal{Q}$-indX$\leq$n, ako za svaku tačku $p \in X$ i njenu $\mathcal{P}$-okolinu U postoji $\mathcal{P}$-otvoren skup V takav da je $p \in V \subset \mathcal{Q}\text{-cl}V \subset U$ i

$\mathcal{Q}$-ind($\mathcal{Q}$-FrV) $\leq$ n-1.

$\mathcal{PQ}$-ind$X=n$, ako je $\mathcal{PQ}$-ind$X\leq n$, a nije $\mathcal{PQ}$-ind$X\leq n-1$.

$\mathcal{PQ}$-ind$X=\infty$, ako nepostoji prirodan broj n takav da je $\mathcal{PQ}$-ind$X\leq n$.

Neka za datu tačku p i $\mathcal{P}$-zatvoren skup $F\subset X\setminus\{p\}$ u bitopološkom prostoru $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ postoji $\mathcal{P}$-otvoren skup V, takav da je $p\in V\subset\mathcal{Q}\text{-cl}V\subset X\setminus F$ i $\mathcal{Q}$-ind($\mathcal{Q}$-FrV)$\leq n-1$. Tada je $\mathcal{PQ}$-ind$_p$ $X\leq n$ i jasno je da je $\mathcal{PQ}$-ind$X=\sup_p(\mathcal{PQ}\text{-ind}_p\, X)$.

Analogno definiciji dimenzione funkcije $\mathcal{PQ}$-indX može se definisati i dimenziona funkcija $\mathcal{QP}$-indX. Bitopološki prostor $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ ima dimenziju B-ind$X\leq n$, ako je $\mathcal{PQ}$-ind$X\leq n$ i $\mathcal{QP}$-ind$X\leq n$, za svako $n\in N$.

Poznate su sledeće osobine ovako definisane dimenzione funkcije B-indX.

Funkcija B-indX je invarijanta bihomeomorfsnih preslikavanja na. Neka je Y podprostor bitopološkog prostora X. Tada je B-ind$Y\leq$B-indX. (v. [14])

3.3.D E F I N I C I J A. Neka je $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ bitopološki prostor

$\mathcal{PQ}$-Ind$X=-1$, ako je $X=\emptyset$.

$\mathcal{PQ}$-Ind$X\leq n$, ako za svaki $\mathcal{Q}$-zatvoren skup F i $\mathcal{P}$-zatvoren skup G u prostoru X, takve da je $F\cap G=\emptyset$, postoji $\mathcal{P}$-otvoren skup U takav da je $F\subset U\subset\mathcal{Q}\text{-cl}U\subset X\setminus G$ i $\mathcal{Q}$-Ind($\mathcal{Q}$-FrU)$\leq n-1$.

$\mathcal{PQ}$-Ind$X=n$, ako je $\mathcal{PQ}$-Ind$X\leq n$, a nije $\mathcal{PQ}$-Ind$X\leq n-1$.

$\mathcal{PQ}$-Ind$X=\infty$, ako nepostoji $n\in N$ tako da je $\mathcal{PQ}$-Ind$X\leq n$.

Analogna ovoj je definicija dimenzione funkcije $\mathcal{QP}$-IndX bitopološkog prostora X. Bitopološki prostor ima B-Ind$X\leq n$, ako je $\mathcal{PQ}$-Ind$X\leq n$ i $\mathcal{QP}$-Ind$X\leq n$.

Proučimo sledeće osobine dimenzione funkcije B-IndX.

Neka je dimenzija $\mathcal{PQ}$-IndX bitopološkog prostora X konačna. Tada je X uzajamno normalan prostor. Dimenziona funkcija $\mathcal{PQ}$-IndX je monotona po zatvorenim skupovima u obe topologije. Neka je $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ PT_1 bitopološki prostor i B-Ind$X\leq 0$. Tada su topologije $\mathcal{P}$ i $\mathcal{Q}$ identične. (v. [14])

Neka je $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ kvazimetrizabilan bitopološki prostor i A i B su podskupovi od X takvi da je $X=A\cup B$. Neka je B-Ind$A\leq n$, B-Ind$B\leq 0$, $\mathcal{P}$-Ind$A\leq n$ i $\mathcal{Q}$-Ind$A\leq n$. Tada je B-Ind$X\leq n+1$.

Izmedju navedenih dimenzionih funkcija bitopološkog prostora postoje sledeće veze.

Za bitopološki prostor $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ je $\mathcal{PQ}$-Ind$X\leq\mathcal{Q}$-IndX. Neka je $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ bitopološki prostor i $\mathcal{Q}\,T_1$ topologija. Tada je $\mathcal{QP}$-ind$X\leq\mathcal{PQ}$-IndX. /v.[14]/

Induktivne dimenzione funkcije u bitopološkim prostorima mogu se definisati i na sledeći način.

3.4. D E F I N I C I J A. p-ind$X=-1$, ako je $X=\emptyset$.

p-ind$X\leq n$, ako za bilo koji regularan par (P,Q) prostora X postoji pregrada B za koju je p-ind$B\leq n-1$.

p-ind$X=n$, ako je p-ind$X\leq n$, a nije p-ind$X\leq n-1$.

p-ind$X=\infty$, ako nejednakost p-ind$X\leq n$ nije ispunjena ni za jedno $n\geq -1$.

Za proizvoljan podskup A prostora X je p-ind$A\leq$p-indX. Neka je p-indX konačan broj. Tada je bitopološki prostor uzajamno regularan.

Poznate su sledeće osobine dimenzione funkcije p-indX:

Neka je bitopološki prostor X uzajamno regularan. Tada je p-ind$X\leq n$ tada i samo tada, kada su ispunjeni sledeći uslovi:

a) za proizvoljnu tačku $x\in X$ i proizvoljnu njenu $\mathcal{P}$-okolinu O_x postoji $\mathcal{P}$-okolina O_{1x}, takva da je $\mathcal{Q}$-cl$O_{1x}\subset O_x$ i p-ind$(\mathcal{QP}$-Fr$(O_{1x}))\leq n-1$.

b) za proizvoljnu tačku $x\in X$ i proizvoljnu njenu $\mathcal{Q}$-okolinu V_x postoji $\mathcal{Q}$-okolina V_{1x} takva da je $\mathcal{P}$-cl$V_{1x}\subset V_x$ i p-ind$(\mathcal{PQ}$-Fr$(V_{1x}))\leq n-1$.

Na osnovu ovog tvrdjenja jasno je da je p-ind$X=0$, tada i samo tada, kada je X nula dimenzionalan prostor u smislu 3.1. definicije.

Neka je u nasledno uzajamno normalnom bitopološkom prostoru $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ dat skup X_0 i u njemu tačka $x_0\in X_0$. p-ind$_{x_0}X_0\leq n$, tada i samo tada kada se:

a) u proizvoljnoj $\mathcal{P}$-okolini O_{x_0} sadrži $\mathcal{P}$-okolina O_{1x_0} za koju je p-ind$(X_0 \cap \mathcal{Q}\mathcal{P}\text{-Fr}O_{1x_0}) \leq n-1$.

b) u proizvoljnoj $\mathcal{Q}$-okolini V_{x_0} sadrži $\mathcal{Q}$-okolina V_{1x_0} za koju je p-ind$(X_0 \cap \mathcal{P}\mathcal{Q}\text{-Fr}V_{1x_0}) \leq n-1$.

Neka je X nasledno uzajamno normalan bitopološki prostor. Za proizvoljna dva podskupa M, N $\subset$ X ispunjeno je p-ind$(M \cup N) \leq$ p-indM+p-indN+1. (v. [16])

3.5.D E F I N I C I J A. Neka je $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ bitopološki prostor. p-IndX=-1, ako je $X=\emptyset$.

p-IndX$\leq$n, kada za bilo koji normalan par (P,Q) prostora X postoji pregrada B za koju je p-IndB$\leq$n-1.

p-IndX=n, ako je p-IndX$\leq$n, a nije p-IndX$\leq$n-1.

p-IndX= ∞, ako nije ispunjena nejednakost p-IndX$\leq$n ni za jedno $n \geq -1$.

U slučaju kada je p-IndX konačno, bitopološki prostor je uzajamno normalan. Dimenziona funkcija p-IndX je monotona po p-zatvorenim skupovima bitopološkog prostora X.

Neka je bitopološki prostor X uzajamno normalan. Tada je p-IndX$\leq$n, onda i samo onda, kada su ispunjeni sledeći uslovi:

a) za proizvoljan $\mathcal{Q}$-zatvoren skup F i za bilo koju njegovu $\mathcal{P}$-okolinu OF postoji $\mathcal{P}$-okolina O_1F takva da je $\mathcal{Q}$-cl$O_1F \subset OF$ i p-Ind$(\mathcal{Q}\mathcal{P}\text{-Fr}(O_1F)) \leq n-1$.

b) za proizvoljan $\mathcal{P}$-zatvoren skup Φ i za proizvoljnu $\mathcal{Q}$-okolinu $V\Phi$ postoji $\mathcal{Q}$-okolina $V_1\Phi$, takva da je $\mathcal{P}$-cl$V_1\Phi \subset V\Phi$ i p-Ind$(\mathcal{P}\mathcal{Q}\text{-Fr}V_1\Phi) \leq n-1$.

Neka je X nasledno uzajamno normalan bitopološki prostor i $X=A \cup B$, gde je p-IndA$\leq$n i p-IndB$\leq$0. Tada je p-IndX$\leq$n+1.

Neka je nasledno uzajamno normalan bitopološki prostor $X=\bigcup_{0}^{n} X_i$ i p-Ind$X_i \leq 0$ za i=0,...,n. Tada je p-IndX$\leq$n. (v.[16])

Sledeće dimenzione funkcije definisane su koristeći pojam pokrivača bitopološkog prostora. Kako je moguće na razne načine definisati pokrivače ovih prostora, definisano je i proučeno nekoliko različitih dimenzionih funkcija.

3.6. D E F I N I C I J A. Neka je $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ bitopološki prostor. $B\text{-}\dim X \leq n$, ako za svaki konačan, uzajamno otvoren pokrivač Ω prostora X, postoji konačan uzajamno otvoren finiji pokrivač $\mathcal{U}$ takav da je $\operatorname{ord}\mathcal{U} \leq n+1$.

$B\text{-}\dim X = n$, ako je $B\text{-}\dim X \leq n$, a nije $B\text{-}\dim X \leq n-1$.

$B\text{-}\dim X = -1$, ako je $X=\emptyset$.

$B\text{-}\dim X = \infty$, ako nije $B\text{-}\dim X \leq n$ za svako $n>0$.

Može se dokazati da je, kada su X i Y bihomeomorfni bitopološki prostori, $B\text{-}\dim X = B\text{-}\dim Y$. Neka je $B\text{-}\dim X \leq n$ i X_0 zatvoren, u obe topologije, podskup prostora X. Tada je $B\text{-}\dim X_0 \leq n$. Neka je za bitopološki prostor X $B\text{-}\dim X=0$. Tada je prostor X uzajamno normalan i $B\text{-}\operatorname{Ind} X=0$. /V. [14]/

3.7. D E F I N I C I J A. Neka je $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ bitopološki prostor. $p\text{-}\dim X \leq n$, ako su ispunjeni sledeći uslovi:

a) za proizvoljnu familiju $\mathcal{Q}$-zatvorenih skupova $\{F_i \mid i=1,\dots,k\}$ i proizvoljnu familiju $\mathcal{P}$-otvorenih skupova $\{U_i \mid i=1,\dots,k\}$ takvu da je $F_i \subset U_i$, $i=1,\dots,k$, postoji familija $\mathcal{P}$-otvorenih skupova $\{O_i \mid i=1,\dots,k\}$ takva da je $F_i \subset O_i \subset U_i$, $i=1,\dots,k$ i $\operatorname{ord}\{\mathcal{Q}\mathcal{P}\text{-}\operatorname{Fr} O_i \mid i=1,\dots,k\} \leq n$

b) za proizvoljnu familiju $\mathcal{P}$-zatvorenih skupova $\{\Phi_i \mid i=1,\dots,k\}$ i proizvoljnu familiju $\mathcal{Q}$-otvorenih skupova $\{V_i \mid i=1,\dots,k\}$ takvu da je $\Phi_i \subset V_i$, $i=1,\dots,k$, postoji familija $\mathcal{Q}$-otvorenih skupova $\{W_i \mid i=1,\dots,k\}$ takva da je $\Phi_i \subset W_i \subset V_i$, $i=1,\dots,k$, i $\operatorname{ord}\{\mathcal{P}\mathcal{Q}\text{-}\operatorname{Fr} W_i \mid i=1,\dots,k\} \leq n$.

Neka je $p\text{-}\dim X \leq n$ i $X_0 \subset X$ p-zatvoren podskup bitopološkog prostora X. Tada je $p\text{-}\dim X_0 \leq n$. Neka je za bitopološki prostor X $p\text{-}\dim X=0$. Tada je X uzajamno normalan prostor. (V. [16])

3.8. D E F I N I C I J A. Dimenziona funkcija $B\text{-}dmX$ za bitopološki prostor $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ definiše se na sledeći način:

$B\text{-}dmX=-1$, ako je $X=\emptyset$.

$B\text{-}dmX=0$, ako se u svaki uzajamno otvoren pokrivač prostora X može upisati uzajamno otvoren pokrivač čiji je nerv potpuno neuredjen skup.

$B\text{-}dmX = ds\,\mathcal{N}(X)-1$, ako se može naći bar jedan uzajamno otvoren pokrivač u koji se ne može upisati uzajamno otvoren pokrivač čiji je nerv potpuno neuredjen skup i ako je $ds\,\mathcal{N}(X)$ konačno.

($ds\mathcal{N}(X)=\sup\limits_{\mathcal{U}\in\mathcal{A}} ds\mathcal{N}(\mathcal{U})$, gde je $\mathcal{A}$ familija svih konačnih uzajamno otvorenih pokrivača prostora X, a nerv uzajamno otvorenog pokrivača se definiše na isti način kao i nerv pokrivača topološkog prostora X).

B-dimX$=\infty$, ako za svako $n\in N$, postoji uzajamno otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ takav da je $ds\mathcal{N}(\mathcal{U})>n$.

Funkcija B-dmX je monotona po zatvorenim skupovima u obe topologije. Neka su X i Y bihomeomorfni prostori. Tada je B-dmX=B-dmY.

Izmedju ovako definisanih dimenzionih funkcija B-dmX i B-dimX za bitopološki prostor X postoji sledeća veza: B-dimX$\leq$B-dmX. (V.[14])

3.9.D E F I N I C I J A. Neka je $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ bitopološki prostor.

$\mathcal{P}\mathcal{Q}$-dimX$=-1$, ako je $X=\emptyset$.

$\mathcal{P}\mathcal{Q}$-dimX$\leq n$, ako se u svaki $\mathcal{P}$-otvoren konačan pokrivač $\mathcal{U}$ prostora X može upisati konačan $\mathcal{Q}$-otvoren pokrivač $\mathcal{V}$, takav da je ord $\mathcal{V}\leq n+1$.

$\mathcal{P}\mathcal{Q}$-dimX$=n$, ako je $\mathcal{P}\mathcal{Q}$dimX$\leq n$, a nije $\mathcal{P}\mathcal{Q}$dimX$\leq n-1$.

$\mathcal{P}\mathcal{Q}$-dimX$=\infty$, ako ne postoji ceo broj $n\geq 0$ takav da je $\mathcal{P}\mathcal{Q}$-dimX$\leq n$.

3.10.S T A V. Neka je F $\mathcal{P}$-zatvoren podskup bitopološkog prostora $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$. Tada je $\mathcal{P}\mathcal{Q}$-dimF$\leq\mathcal{P}\mathcal{Q}$-dimX.

D O K A Z. Neka je $\mathcal{P}\mathcal{Q}$-dimX$\leq n$. i neka je $\mathcal{U}=\{U_\alpha|\alpha\in A\}$ $\mathcal{P}$-otvoren pokrivač podskupa F. Formirajmo pokrivač $\mathcal{U}'$ prostora X na sledeći način:

$\mathcal{U}'=\{U'_\alpha|\alpha\in A\}\cup\{X\setminus F\}$, gde je $U_\alpha=U'_\alpha\cap F$. Sada je $\mathcal{U}'$ $\mathcal{P}$-otvoren konačan pokrivač prostora X. Kako je $\mathcal{P}\mathcal{Q}$-dimX$\leq n$, to se u ovaj pokrivač može upisati $\mathcal{Q}$-otvoren konačan pokrivač $\mathcal{V}'=\{V'_\alpha|\alpha\in A\}$ takav da je ord$\mathcal{V}'\leq n+1$. Tada je za svako $\alpha\in A$, $V_\alpha=V'_\alpha\cap F$ i $\mathcal{V}=\{V_\alpha|\alpha\in A\}$ $\mathcal{Q}$-otvoren konačan pokrivač od F. Kako je $\mathcal{V}\subset\mathcal{V}'$ biće ord$\mathcal{V}\leq$ ord$\mathcal{V}'\leq n+1$ i $\mathcal{P}\mathcal{Q}$-dimF$\leq n$. □

3.11.S T A V. Neka je $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ bitopološki prostor, $X=A\cup B$ gde su A i B $\mathcal{Q}$-otvoreni skupovi u prostoru X. Neka je $\mathcal{P}\mathcal{Q}$-dimA$\leq n$ i $\mathcal{P}\mathcal{Q}$-dimB$=0$. Tada je $\mathcal{P}\mathcal{Q}$-dimX$\leq n+1$.

D O K A Z. Neka je $\mathcal{U}=\{U_\alpha|\alpha\in M\}$ $\mathcal{P}$-otvoren konačan pokrivač prostora X. Tada je $\mathcal{U}'=\{U_\alpha\cap A|\alpha\in M\}$ $\mathcal{P}$-otvoren konačan pokrivač od A a $\mathcal{U}''=\{U_\alpha\cap B|\alpha\in M\}$ $\mathcal{P}$-otvoren konačan pokrivač od B. Kako je $\mathcal{P}\mathcal{Q}$-dimA$\leq n$, to se u pokrivač $\mathcal{U}'$ može upisati $\mathcal{Q}$-otvoren konačan pokrivač $\mathcal{V}'=\{V'_\alpha|\alpha\in M\}$ takav da je ord $\mathcal{V}'\leq n+1$. Kako je $\mathcal{PQ}$-dimB=0, to se u pokrivač $\mathcal{U}''$ može upisati $\mathcal{Q}$-otvoren konačan pokrivač $\mathcal{V}''=\{V''_\alpha|\alpha\in M\}$ takav da je ord$\mathcal{V}''\leq 1$. Tada je $\mathcal{V}=\{V'_\alpha, V''_\alpha|\alpha\in M\}$ $\mathcal{Q}$-otvoren konačan pokrivač prostora X, upisan u $\mathcal{P}$-otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ prostora X. Tada je ord $\mathcal{V}\leq n+2$ i $\mathcal{PQ}$-dimX$\leq$n+1. □

Označimo sa $\mathcal{P}$-dimX ($\mathcal{Q}$-dimX) dimenziju dimX u topologiji $\mathcal{P}$ ($\mathcal{Q}$).

3.13. S T A V. Neka je $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ bitopološki prostor. i $\mathcal{P}\subset\mathcal{Q}$. Tada je $\mathcal{PQ}$-dimX$\leq\mathcal{Q}$-dimX.

D O K A Z je neposredan.

3.14. S T A V. Neka je $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ uzajamno Hausdorffov prostor i neka su $(X,\mathcal{P})$ i $(X,\mathcal{Q})$ kompakti. Tada je $\mathcal{PQ}$-dimX= $\mathcal{P}$-dimX=$\mathcal{Q}$-dimX.

D O K A Z je neposredan, jer je tada $\mathcal{P}=\mathcal{Q}$.

3. 14. S T A V. Neka su $(X,\mathcal{P})$ i $(X,\mathcal{Q})$ Hausdorffovi prostori a $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ uzajamno kompaktan prostor. Tada je $\mathcal{PQ}$-dimX=$\mathcal{P}$-dimX=$\mathcal{Q}$dimX

D O K A Z je neposredan

3.15. S T A V. Neka je $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$uzajamno Hausdorffov prostor. Neka za svaki $\mathcal{P}$-otvoren pokrivač prostora X, postoji finiji $\mathcal{Q}$-otvoren pokrivač, i za svaki $\mathcal{Q}$-otvoren pokrivač prostora X, postoji finiji $\mathcal{P}$-otvoren pokrivač. Tada je $\mathcal{P}$-dimX=$\mathcal{Q}$-dimX=$\mathcal{PQ}$-dimX.

D O K A Z je neposredan, jer je tada $\mathcal{P}=\mathcal{Q}$.

3.16. S T A V. Neka je $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ bitopološki prostor i neka se u svaki $\mathcal{P}$-otvoren pokrivač prostora X može upisati $\mathcal{Q}$-otvoren pokrivač. Tada je $\mathcal{PQ}$-dimX$\leq\mathcal{Q}$-dimX.

D O K A Z. Neka je $\mathcal{U}$ $\mathcal{P}$-otvoren konačan pokrivač prostora X. Prema uslovu stava, u ovaj pokrivač se može upisati $\mathcal{Q}$-otvoren pokrivač $\mathcal{V}$. Neka je $\mathcal{Q}$-dimX$\leq$n. Tada se u pokrivač $\mathcal{V}$ može upisati $\mathcal{Q}$-otvoren pokrivač $\mathcal{W}$, takav da je ord$\mathcal{W}\leq$n+1. Pokrivač $\mathcal{W}$ je upisan i u $\mathcal{P}$-otvoren pokrivač $\mathcal{U}$, ord$\mathcal{W}\leq$ n+1 i zato je $\mathcal{PQ}$-dimX$\leq$n. □

3.17. S T A V. Neka je $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ bitopološki prostor i neka se u svaki $\mathcal{Q}$-otvoren pokrivač prostora X može upisati $\mathcal{P}$-otvoren pokrivač. Neka je F $\mathcal{Q}$-zatvoren podskup prostora X. Tada je $\mathcal{PQ}$-dimF$\leq\mathcal{PQ}$-dimX.

D O K A Z. Neka je $\mathcal{U}'=\{U'_\alpha|\alpha\in A\}$ $\mathcal{Q}$-otvoren konačan pokrivač podskupa F. Formirajmo pokrivač $\mathcal{U}$ prostora X na sledeći način:

$\mathcal{U} = \{U_\alpha | \alpha\in A\} \cup \{X \setminus F\}$, gde je $U_\alpha^1 = U_\alpha \cap F$. Tada je $\mathcal{U}$ $\mathcal{Q}$-otvoren konačan pokrivač prostora X i prema uslovu stava može se u njega upisati $\mathcal{P}$-otvoren konačan pokrivač $\mathcal{V} = \{V_\alpha | \alpha\in A\}$ prostora X. Kako je $\mathcal{P}\mathcal{Q}$-dim$X \leq n$, to se ovaj pokrivač može upisati $\mathcal{Q}$-otvoren pokrivač $\mathcal{W} = \{W_\alpha | \alpha\in A\}$ takav da je ord$\mathcal{W} \leq n+1$. Sada je $\mathcal{W}' = \{W_\alpha' | \alpha\in A\}$ $\mathcal{Q}$-otvoren pokrivač od F, gde je za svako $\alpha\in A$ $W_\alpha' = W_\alpha \cap F$. Pokrivač $\mathcal{W}'$ je upisan u $\mathcal{P}$-otvoren pokrivač $\mathcal{V}' = \{V_\alpha' | \alpha\in A\}$ gde je $V_\alpha' = V_\alpha \cap F$ za svako $\alpha\in A$. Kako je $\mathcal{W}' \subset \mathcal{W}$ biće ord$\mathcal{W}' \leq$ ord$\mathcal{W} \leq n+1$ i $\mathcal{P}\mathcal{Q}$-dim$F \leq n$. □

3.18. S T A V. <u>Neka je $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ uzajamno Hausdorffov i B-kompaktan bitopološki prostor. Tada je $\mathcal{P}$-dim$X$=$\mathcal{Q}$-dim$X$= $\mathcal{P}\mathcal{Q}$-dim$X$.</u>

D O K A Z je neposredan.

3.19. P R I M E R. Neka su $(X,\mathcal{P})$ i $(X,\mathcal{Q})$ T_0-prostori. Neka je $\mathcal{P}=\{X, \{a\}, \emptyset\}$, $\mathcal{Q}= \{X, \{b\}, \emptyset\}$ i $X= \{a,b\}$. Neka je $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ bitopološki prostor, $\mathcal{U} = \{X, \{a\}\}$ $\mathcal{P}$-otvoren a $\mathcal{V}= \{X, \{b\}\}$ $\mathcal{Q}$-otvoren pokrivač prostora X. Tada je $\mathcal{P}\mathcal{Q}$-dim$X$=2 a $\mathcal{P}$-dim$X$=$\mathcal{Q}$-dim$X$=1.

3.20. S T A V. <u>Neka je F $\mathcal{Q}$-zatvoren podskup $\mathcal{Q}\mathcal{P}$-kompaktnog bitopološkog prostora $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$. Tada je $\mathcal{Q}$-dim$F \leq \mathcal{P}\mathcal{Q}dimX$.</u>

D O K A Z. Neka je $\mathcal{U}= \{U_i \mid i=1,\dots,k\}$ $\mathcal{Q}$-otvoren pokrivač stkupa F. Tada je $\mathcal{U}^1 = \{U_i^1 \mid i=1,\dots,k\} \cup \{X \setminus F\}$ $\mathcal{Q}$-otvoren pokrivač prostora X gde je $U_i=U_i^1 \cap F$ za svako $i=1,\dots,k$. Kako je prostor X $\mathcal{Q}\mathcal{P}$-kompaktan, to postoji konačan $\mathcal{P}$-otvoren podpokrivač $\mathcal{V}^1$ pokrivača $\mathcal{U}^1$. Kako je $\mathcal{P}\mathcal{Q}$-dim$X \leq n$, u ovaj pokrivač $\mathcal{V}'$ može se upisati konačan $\mathcal{Q}$-otvoren pokrivač $\mathcal{W}' = \{W_i \mid i=1,\dots,k\}$ takav da je ord$\mathcal{W}' \leq n+1$. Tada je $\mathcal{W}'|F = \mathcal{W}$, $\mathcal{Q}$-otvoren pokrivač od F, $\mathcal{W} \subset \mathcal{W}'$ i ord$\mathcal{W} \leq n+1$. Zato je $\mathcal{Q}$-dim$F \leq n$. □

3.21. S T A V. <u>Neka je $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ uzajamno normalan bitopološki prostor. Tada je $\mathcal{P}\mathcal{Q}$-dim$X \leq n$, ako za svaku biotvorenu kolekciju $\{U_i \mid i=1,\dots,k\}$ i $\mathcal{Q}$-zatvorenu kolekciju $\{F_i \mid i=1,\dots,k\}$, takve da je $F_i \subset U_i$ za $i=1,\dots,k$, postoji $\mathcal{P}$-otvorena kolekcija $\{V_i \mid i=1,\dots,k\}$ takva da je $F_i \subset V_i \subset U_i$, $i=1,\dots,k$ i ord $\{\mathcal{Q}\text{-Fr}(V_i) \mid i=1,\dots,k\} \leq n$.</u>

D O K A Z. Posmatrajmo konačnu $\mathcal{P}$-otvorenu kolekciju $\{U_i \mid i=1,\dots,k\}$ i $\mathcal{Q}$-zatvorenu kolekciju $\{F_i \mid i=1,\dots,k\}$ sa $F_i \subset U_i$. Kako je X uzajamno normalan prostor, postoji $\mathcal{P}$-otvorena kolekcija $\{V_i \mid i=1,\dots,k\}$ takva da je $F_i \subset V_i \subset \mathcal{Q}\text{-cl}V_i \subset U_i$ i ord$\{\mathcal{Q}\text{-Fr}(V_i) \mid i=1,\dots,k\} \leq n$. Neka je $G_i = \mathcal{Q}\text{-cl}V_i \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} V_j$. Tada je ord $\{G_i \mid i=1,\dots,k\} \leq n+1$ i $\{G_i \mid i=1,\dots,k\}$ je

$\mathcal{Q}$-zatvoren pokrivač reda $\leq n+1$ i $G_i \subset U_i$. Može se izabrati $\mathcal{Q}$-otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ takav da za svaku tačku $p \in X$, $S(p,\mathcal{U}) = \cup\{U \mid p \in U \in \mathcal{U}\}$ seče najviše $n+1$ članova familije $\{G_i \mid i=1,\dots,k\}$ takav da je $\mathcal{U} < \bigwedge_1^k \mathcal{U}_i$, gde je $\mathcal{U}_i = \{U_i, X \setminus G_i\}$ i $\bigwedge \mathcal{U}_i = \{\cap\{U_i \mid i=1,\dots,k\} \mid U_i \in \mathcal{U}_i$ za svako $i=1,\dots,k\}$. Neka je $W_i = S(G_i,\mathcal{U}) = \cup\{U \mid U \in \mathcal{U}, U \cap G_i = \emptyset\}$.
Biće $W_i \subset U_i$, $i=1,\dots,k$ i $\operatorname{ord}\mathcal{W} \leq n+1$, $\mathcal{W} = \{W_i \mid i=1,\dots,k\}$.
Sada je $\mathcal{Q}$-otvoren pokrivač $\mathcal{W}$ upisan u $\mathcal{P}$ otvoren pokrivač $\{V_i \mid i=1,\dots,k\}$ i $\mathcal{PQ}$-dim$X \leq n$ ($\mathcal{Q}$-dim$X \leq n$). □

3.22. D E F I N I C I J A. Neka je $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ bitopološki prostor. $\mathcal{PQ}$-dm$X=-1$, ako je $X=\emptyset$.

$\mathcal{PQ}$-dm$X=0$, ako se u svaki konačan $\mathcal{P}$-otvoren pokrivač prostora X može upisati konačan $\mathcal{Q}$-otvoren pokrivač čiji je nerv potpuno neuredjen skup.

$\mathcal{PQ}$-dm$X \leq n$ $(n>0)$, ako se u svaki konačan $\mathcal{P}$-otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ prostora X može upisati konačan $\mathcal{Q}$-otvoren pokrivač $\mathcal{V}$ takav da je $\operatorname{ds}\mathcal{N}(\mathcal{V}) \leq n+1$.

$\mathcal{PQ}$-dm$X=n$, ako je $\mathcal{PQ}$-dm$X \leq n$, a nije $\mathcal{PQ}$-dm$X \leq n-1$.

$\mathcal{PQ}$-dm$X=\infty$, ako ne postoji ceo broj $n>0$ takav da je $\mathcal{PQ}$-dm$X \leq n$.

3.23. S T A V. Neka je F $\mathcal{P}$-zatvoren podskup bitopološkog prostora $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$. Tada je $\mathcal{PQ}$dm$F \leq \mathcal{PQ}$dm$X$.

D O K A Z. Neka je $\mathcal{PQ}$-dm$X \leq n$ $(n>0)$ i neka je $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ konačan $\mathcal{P}$-otvoren pokrivač podskupa F. Formirajmo konačan $\mathcal{P}$-otvoren pokrivač $\mathcal{U}'$ prostora X na sledeći način:

$\mathcal{U}' = \{U'_\alpha \mid \alpha \in A\} \cup \{X \setminus F\}$, gde je $U_\alpha = U'_\alpha \cap F$ za svako $\alpha \in A$. Kako je $\mathcal{PQ}$-dm$X \leq n$, u pokrivač $\mathcal{U}'$ može da se upiše konačan $\mathcal{Q}$-otvoren pokrivač $\mathcal{V}' = \{V'_\alpha \mid \alpha \in A\}$ takav da je $\operatorname{ds}\mathcal{N}(\mathcal{V}') \leq n+1$. Tada je $\mathcal{V} = \{V_\alpha \mid \alpha \in A\}$, gde je $V_\alpha = V'_\alpha \cap F$ za svako $\alpha \in A$, konačan $\mathcal{Q}$-otvoren pokrivač podskupa F i biće $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$, $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}'$ i $\mathcal{N}(\mathcal{V}) \subset \mathcal{N}(\mathcal{V}')$. Zato je $\operatorname{ds}\mathcal{N}(\mathcal{V}) \leq \operatorname{ds}\mathcal{N}(\mathcal{V}') \leq n+1$ i $\mathcal{PQ}$-dm$X \leq n$. □

3.24. S T A V. Neka je F $\mathcal{Q}$-zatvoren podskup bitopološkog prostora $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$. Neka se u svaki $\mathcal{Q}$-otvoren pokrivač prostora X može upisati $\mathcal{P}$-otvoren pokrivač. Tada je $\mathcal{PQ}$dm$F \leq \mathcal{PQ}$-dm$X$.

Neka je $\mathcal{P}\mathcal{Q}$-dm$X\le n$ $(n>0)$ i neka je $\mathcal{U}'=\{U'_\alpha \mid \alpha\in A\}$ $\mathcal{Q}$-otvoren pokrivač podskupa F. Formirajmo $\mathcal{Q}$-otvoren pokrivač prostora X na sledeći način: $\mathcal{U}=\{U_\alpha \mid \alpha\in A\}\cup\{X\setminus F\}$, gde je $U'_\alpha=U_\alpha\cap F$ za svako $\alpha\in A$. Prema pretpostavci u ovaj $\mathcal{Q}$-otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ može se upisati $\mathcal{P}$-otvoren pokrivač $\mathcal{V}=\{V_\alpha \mid \alpha\in A\}$. Kako je $\mathcal{P}\mathcal{Q}$-dm$X\le n$, to se u pokrivač $\mathcal{V}$ prostora X može upisati konačan $\mathcal{Q}$-otvoren pokrivač $\mathcal{W}=\{W_\alpha \mid \alpha\in A\}$, takav da je $\mathrm{ds}\mathcal{N}(\mathcal{W})\le n+1$. Tada je $\mathcal{W}'=\{W'_\alpha \mid \alpha\in A\}$, gde je $W'_\alpha=W_\alpha\cap F$ za svako $\alpha\in A$, $\mathcal{Q}$-otvoren pokrivač podskupa F, upisan u $\mathcal{P}$-otvoren pokrivač $\mathcal{V}'=\{V'_\alpha \mid \alpha\in A\}$, gde je $V'_\alpha=V_\alpha\cap F$ za svako $\alpha\in A$. Kako je $\mathcal{W}'\subset\mathcal{W}$ biće $\mathrm{ds}\mathcal{N}(\mathcal{W}')\le\mathrm{ds}\mathcal{N}(\mathcal{W})\le n+1$ i $\mathcal{P}\mathcal{Q}$-dm$F\le n$. □

3.25. S T A V. Neka je $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ bitopološki prostor i $\mathcal{P}\mathcal{Q}$-dm$X\le n$. Neka je F $\mathcal{Q}$-zatvoren podskup prostora X. Neka se u svaki $\mathcal{Q}$-otvoren pokrivač prostora X može upisati $\mathcal{P}$-otvoren pokrivač. Tada je $\mathcal{Q}$-dm$F\le\mathcal{P}\mathcal{Q}$-dm$X$.

D O K A Z je neposredan.

3.26. S T A V. Neka je F $\mathcal{Q}$-zatvoren podskup $\mathcal{P}\mathcal{Q}$-kompaktnog bitopološkog prostora $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$. Tada je $\mathcal{Q}$-dm$F\le\mathcal{P}\mathcal{Q}$-dm$X$.

D O K A Z lako sledi iz definicije $\mathcal{P}\mathcal{Q}$-kompaktnog prostora.

3.27. S T A V. Neka je $\mathcal{P}\mathcal{Q}$-dm$G\le n$, za svaki $\mathcal{P}$-otvoren skup G bitopološkog prostora $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$. Tada je $\mathcal{P}\mathcal{Q}$-dm$A\le n$, za svaki podprostor A prostora X.

D O K A Z. Neka je $\mathcal{U}=\{U_j \mid j=1,\dots,p\}$ $\mathcal{P}$-otvoren pokrivač podprostora A. Za svako U_j, $j=1,\dots,p$ postoji $\mathcal{P}$-otvoren u X, skup V_j, takav da je $U_j=A\cap V_j$. Kako je $\bigcup_1^p V_j$ $\mathcal{P}$-otvoren skup i $\mathcal{P}\mathcal{Q}$-dm$(\bigcup_1^p V_j)\le n$, postoji familija $\mathcal{W}=\{W_i \mid i=1,\dots,r\}$ upisana u $\{V_j \mid j=1,\dots,p\}$. Familija $\mathcal{W}$ je $\mathcal{Q}$-otvorena i $\mathrm{ds}\mathcal{N}(\mathcal{W})\le n+1$. Sada $\mathcal{W}^*=\{W_i\cap A \mid i=1,\dots,r\}$ pokriva A, $\mathcal{Q}$-otvoren je, upisan u $\mathcal{U}$ i $\mathrm{ds}\mathcal{N}(\mathcal{W}^*)\le\mathrm{ds}\mathcal{N}(\mathcal{W})\le n+1$. Zato je $\mathcal{P}\mathcal{Q}$-dm$A\le n$. □

3.28. L E M A. Neka je $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ bitopološki prostor i F $\mathcal{Q}$-zatvoren podskup od X. Neka je $(X,\mathcal{Q})$ normalan prostor i $\mathcal{P}\mathcal{Q}$-dm$F\le n$. Neka je $\mathcal{U}=\{U_1,\dots,U_p\}$ $\mathcal{P}$-otvoren pokrivač prostora X. Tada postoji familija $\mathcal{W}=\{W_1,\dots,W_r\}$ skupova koji su $\mathcal{Q}$-otvoreni u prostoru X, pokrivaju F, upisana u $\mathcal{U}$ i $\mathrm{ds}\mathcal{N}(\mathcal{W})\le n+1$. $(n>0)$

D O K A Z. Neka je $\mathcal{U}^* = \{U_1\cap F,\dots,U_p\cap F\}$ $\mathcal{P}$-otvoren konačan pokrivač podskupa F. Kako je $\mathcal{P}\mathcal{Q}$-dm$F\le n$, u ovaj se pokrivač može upisati $\mathcal{Q}$-otvoren pokrivač $\mathcal{V}=\{V_1,\dots,V_r\}$ takav da je $ds\mathcal{N}(\mathcal{V})\le n+1$ $(n>0)$. Kako je $(X,\mathcal{Q})$ normalan prostor, može se upisati u pokrivač $\mathcal{V}$, $\mathcal{Q}$-otvoren pokrivač $\mathcal{V}'=\{V'_1,\dots,V'_r\}$ takav da je $\mathrm{cl}V'_i\subset V_i$ za svako $i=1,\dots,r$. $\mathcal{Q}$-zatvoren pokrivač $\{\mathrm{cl}V'_1,\dots \mathrm{cl}V'_r\}$ podskupa F je i $\mathcal{Q}$-zatvorena familija skupova u prostoru X. Za svaku familiju $\mathcal{Q}$-zatvorenih skupova normalnog prostora $(X,\mathcal{Q})$ postoji familija $\mathcal{W}=\{W_i \mid i=1,\dots,r\}$ $\mathcal{Q}$-otvorenih skupova, takva da je $\mathrm{cl}V_i\subset W_i$, $i=1,\dots,r$ i $\mathrm{cl}V'_1\cap\dots\cap \mathrm{cl}V'_r=\emptyset=W_1\cap\dots\cap W_r=\emptyset$. Familija $\mathcal{W}=\{W_1,\dots,W_r\}$ ispunjava uslove leme. □

3.29. S T A V. *Neka je $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ bitopološki prostor i $X=A\cup B$, gde je A $\mathcal{Q}$-zatvoren podskup od X a $(X,\mathcal{Q})$ normalan prostor. Neka je $\mathcal{P}\mathcal{Q}$-dm$A\le m$, $\mathcal{P}\mathcal{Q}$-dm$B\le n$ i neka se u svaki $\mathcal{Q}$-otvoren pokrivač prostora X može upisati $\mathcal{P}$-otvoren pokrivač. Tada je $\mathcal{P}\mathcal{Q}$-dm$X\le m+n+1$.*

D O K A Z. Neka je $\mathcal{U}=\{U_i \mid i=1,\dots,k\}$ $\mathcal{P}$-otvoren pokrivač prostora X i A $\mathcal{Q}$-zatvoren podskup od X. Tada postoji familija $\mathcal{W}=\{W_i \mid i=1,\dots,r\}$ $\mathcal{Q}$-otvorenih skupova u prostoru X, koja pokriva A upisana je u $\mathcal{U}$ i $ds\mathcal{N}(\mathcal{W})\le n+1$. Označimo sa $F=X\setminus\bigcup_i W_i$, $\mathcal{Q}$-zatvoren skup. Tada je $F\subset B$ i $\mathcal{P}\mathcal{Q}$-dm$F\le n$. Postoji familija $\mathcal{Q}$-otvorenih skupova u prostoru X, $\mathcal{D}=\{D_i \mid i=1,\dots,k\}$ koja pokriva F, upisana je u $\mathcal{U}$, takva da je $ds\mathcal{N}(\mathcal{D})\le n+1$. Tada je $\eta=\{W_1,\dots,W_r, D_1,\dots,D_k\}$ $\mathcal{Q}$-otvoren pokrivač prostora X, upisan u $\mathcal{P}$-otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ i $ds\mathcal{N}(\eta)\le n+m+2$. $(m>0,\ n>0)$. Zato je $\mathcal{P}\mathcal{Q}$-dm$X\le m+n+1$. □

3.30. S T A V. *Neka je $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ bitopološki prostor i $X=A\cup B$. Neka je $(X,\mathcal{Q})$ nasledno normalan prostor i $\mathcal{P}\mathcal{Q}$-dm$A\le m$, $\mathcal{P}\mathcal{Q}$-dm$B\le n$. Tada je $\mathcal{P}\mathcal{Q}$-dm$X\le m+n+1$.*

D O K A Z. Neka je $\mathcal{U}=\{U_i \mid i=1,\dots,p\}$ $\mathcal{P}$-otvoren pokrivač prostora X. Tada je $\mathcal{U}'=\{U_i\cap A \mid i=1,\dots,p\}$ $\mathcal{P}$-otvoren pokrivač od A i $\mathcal{U}''=\{U_i\cap B \mid i=1,\dots,p\}$ $\mathcal{P}$-otvoren pokrivač od B. Kako je $\mathcal{P}\mathcal{Q}$-dm$A\le m$, u pokrivač $\mathcal{U}'$ može se upisati $\mathcal{Q}$-otvoren pokrivač $\mathcal{V}'=\{V'_i \mid i=1,\dots,p\}$ takav da je $ds\mathcal{N}(\mathcal{V}'')\le m+1$ $(m>0)$, Kako je $\mathcal{P}\mathcal{Q}$-dm$B\le n$, postoji $\mathcal{Q}$-otvoren pokrivač $\mathcal{W}'=\{W'_i \mid i=1,\dots,p\}$ upisan u pokrivač $\mathcal{U}''$, takav da je $ds\mathcal{N}(\mathcal{W}')\le n+1$ $(n>0)$. Prema lemi Čeha postoje $\mathcal{Q}$-otvoreni pokrivači $\mathcal{V}=\{V_i \mid i=1,\dots,r\}$ i $\mathcal{W}=\{W_j \mid j=1,\dots,s\}$ takvi da je $V'_i\subset V_i$, $W'_j\subset W_j$ gde su V_i i W_j $\mathcal{Q}$-otvoreni skupovi u prostoru X za $i=1,\dots,r.$; $j=1,\dots,s$. Tada je $ds\mathcal{N}(\mathcal{V})\le m+1$, $ds\mathcal{N}(\mathcal{W})\le n+1$ i $ds\mathcal{N}\{V_1,\dots,V_r, W_1,\dots W_s\}\le m+n+2$. Pokrivač $\eta=\{V_1,\dots,V_r,W_1,\dots,W_s\}$ je $\mathcal{Q}$-otvoren pokrivač prostora X, upisan u $\mathcal{P}$-otvoren pokrivač $\mathcal{U}$

i biće $\mathcal{P}\mathcal{Q}$-dm$X\le m+n+1$. □

3.31. S T A V. Neka je F $\mathcal{Q}$-zatvoren podskup bitopološkog prostora $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ sa $\mathcal{P}\mathcal{Q}$-dm$F\le n$ i $(X,\mathcal{Q})$ normalan prostor. Neka je $\mathcal{P}\mathcal{Q}$-dm$K\le n$, za svaki $\mathcal{Q}$-zatvoren podskup K prostora X, takav da je $K\cap F=\emptyset$. Tada je $\mathcal{P}\mathcal{Q}$-dm$X\le 2n+1$.

D O K A Z. Neka je $\mathcal{U}=\{U_1,\dots,U_s\}$ $\mathcal{P}$-otvoren pokrivač prostora X. Tada se može upisati u pokrivač $\mathcal{U}$ familija $\mathcal{V}=\{V_1,\dots,V_r\}$, takva da $\mathcal{V}$ pokriva F, V_i su $\mathcal{Q}$-otvoreni u prostoru X i ds$\mathcal{N}(\mathcal{V})\le n+1$. Neka je $A=V_1\cup\dots\cup V_r$ $\mathcal{Q}$-otvoren podskup prostora X. Za $\mathcal{Q}$-zatvorene skupove F i $X\setminus A$ postoje $\mathcal{Q}$-otvoreni u X, skupovi P i Q takvi da je $F\subset P$, $X\setminus A\subset Q$ i $\mathcal{Q}$-cl$P\cap\mathcal{Q}$-cl$Q=\emptyset$. Kako je $X\setminus P$ $\mathcal{Q}$-zatvoren skup u X i $(X\setminus P)\cap F=\emptyset$. Tada je, prema pretpostavci, $\mathcal{P}\mathcal{Q}$dm$(X\setminus F)\le n$. Tada se u $\mathcal{P}$-otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ prostora X može upisati familija $\mathcal{W}=\{W_1,\dots,W_k\}$ $\mathcal{Q}$-otvorenih u X skupova, takva da je ds$\mathcal{N}(\mathcal{W})\le n+1$. Sada je familija $\mathcal{T}=\{V_1,\dots,V_r,W_1,\dots,W_k\}$ $\mathcal{Q}$-otvoren pokrivač prostora X, upisan u $\mathcal{P}$-otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ i ds$\mathcal{N}(\mathcal{T})\le 2n+2$. Zato je $\mathcal{P}\mathcal{Q}$-dm$X\le 2n+1$. □

3.32. S T A V. Neka je $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ bitopološki prostor, $X=A\cup B$, gde je $(X,\mathcal{Q})$ normalan prostor, A $\mathcal{Q}$-zatvoren podskup od X sa $\mathcal{Q}$-dm$A\le m$ i $\mathcal{Q}$-dm$B\le n$. Neka je moguće u svaki $\mathcal{P}$-otvoren pokrivač prostora X upisati $\mathcal{Q}$-otvoren pokrivač. Tada je $\mathcal{P}\mathcal{Q}$dm$X\le m+n+1$.

D O K A Z. Neka je $\mathcal{U}=\{U_i \mid i=1,\dots,k\}$ konačan $\mathcal{P}$-otvoren pokrivač prostora X. Upišimo u $\mathcal{U}$ $\mathcal{Q}$-otvoren pokrivač $\mathcal{V}$. Prema osobinama dimenzije $\mathcal{Q}$-dmX može se konstruisati $\mathcal{Q}$-otvoren pokrivač $\mathcal{W}$ prostora X, upisan u $\mathcal{V}$ i u $\mathcal{P}$-otvoren pokrivač $\mathcal{U}$ prostora X, takav da je ds$\mathcal{N}(\mathcal{W})\le m+n+2$. Zato je $\mathcal{P}\mathcal{Q}$-dm$X\le m+n+1$. □

3.33. S T A V. Neka su A_i, $i=1,\dots,s$ $\mathcal{P}$-zatvoreni i $\mathcal{Q}$-otvoreni podskupovi bitopološkog prostora $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$. Ako je $X=\bigcup_1^s A_i$, $A_i\cap A_j=\emptyset$ za $i\ne j$ i $\mathcal{P}\mathcal{Q}$-dm$A_i\le n$, $i=1,\dots,s$, Tada je $\mathcal{P}\mathcal{Q}$-dm$X\le n$.

D O K A Z. Neka je $\mathcal{U}=\{U_s \mid s=1,\dots,l\}$ konačan $\mathcal{P}$-otvoren pokrivač prostora X. Tada su $\mathcal{U}^i=\{U_s\cap A_i \mid s=1,\dots,l\}$ $\mathcal{P}$-otvoreni pokrivači prostora A_i, $i=1,\dots,s$ u koje se mogu upisati $\mathcal{Q}$-otvoreni pokrivači $\mathcal{V}^i=\{V_j \mid j=1,\dots,q_i\}$ takvi da je ds$\mathcal{N}(\mathcal{V}^i)\le n+1$ $(n>0)$. Familija $\mathcal{W}=\{V_j^i \mid j=1,\dots,q_i,\ i=1,\dots,r\}$ je $\mathcal{Q}$-otvoren pokrivač prostora X, upisan u $\mathcal{P}$-otvoren pokrivač $\mathcal{U}$. Tada je $\mathcal{N}(\mathcal{V}^i)\cap\mathcal{N}(\mathcal{V}^l)=\emptyset$, $i\ne l$ i ds$\mathcal{N}(\mathcal{W})\le n+1$. Zato je

$\mathcal{PQ}$-dm$X \leq n$. □

3.34. D E F I N I C I J A. Neka je $(X_\alpha, \mathcal{P}_\alpha, \mathcal{Q}_\alpha)$ $\alpha \in A$ familija bitopoloških prostora. Diskretna suma $d \cup X_\alpha$ prostora X_α je disjunktna suma $\cup X_\alpha$ skupova X_α snabdevena sledećim topologijama: skup O je $\mathcal{P}$-otvoren u $d \cup X_\alpha$ ako i samo ako je svaki skup $O \cap X_\alpha$ $\mathcal{P}_\alpha$-otvoren u prostoru X_α, $\alpha \in A$ i skup V $\mathcal{Q}$-otvoren u $d \cup X_\alpha$ ako i samo ako je svaki skup $V \cap X_\alpha$ $\mathcal{Q}_\alpha$-otvoren u prostoru X_α za svako $\alpha \in A$.

3.35. S T A V. Neka je $d \cup X_\alpha$ diskretna suma bitopoloških prostora $(X_\alpha, \mathcal{P}_\alpha, \mathcal{Q}_\alpha)$ i $(X_\alpha, \mathcal{Q}_\alpha)$ normalan prostor za svako $\alpha \in A$. Tada je $\mathcal{PQ}$-dm$(d \underset{\alpha}{\cup} X_\alpha) \leq \sup_\alpha \mathcal{PQ}$-dm$X_\alpha$ ($\mathcal{PQ}$-dim$(d \underset{\alpha}{\cup} X_\alpha) \leq \sup_\alpha \mathcal{PQ}$-dim$X_\alpha$).

D O K A Z. Neka je $\mathcal{PQ}$-dm$X_\alpha \leq n$, $\alpha \in A$, $n > 0$. Neka je $\mathcal{W} = \{W_i \mid i=1,\dots,s\}$ konačan $\mathcal{P}$-otvoren pokrivač prostora $X = d \underset{\alpha \in A}{\cup} X_\alpha$. Za svako $\alpha \in A$ u pokrivač $\{W_i \cap X_\alpha \mid i=1,\dots,s\}$ upišimo $\mathcal{Q}$-otvoren pokrivač $\mathcal{V}_\alpha$ prostora X_α, takav da je ds$\mathcal{N}(\mathcal{V}_\alpha) \leq n+1$. Familija $\mathcal{V} = \underset{\alpha}{\cup} \mathcal{V}_\alpha$ je $\mathcal{Q}$-otvoren pokrivač prostora X, upisan u pokrivač $\mathcal{W}$ i ds$\mathcal{N}(\mathcal{V}) \leq n+1$. Zato je $\mathcal{PQ}$-dm$X \leq n$.

Slično se dokazuje tvrdjenje sa $\mathcal{PQ}$-dim$X$. □

3.36. S T A V. Neka je $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ $\mathcal{QP}$-kompaktan bitopološki prostor i neka skup $A \subset X$ ima oblik F_σ u normalanom prostoru $(X, \mathcal{Q})$. Tada je $\mathcal{Q}$-dim$A \leq \mathcal{PQ}$-dim$X$.

D O K A Z. Neka je skup A prebrojiva suma $\mathcal{Q}$-zatvorenih skupova A_i, $i=1,2\dots$ Tada je $\mathcal{Q}$-dim$A_i \leq \mathcal{PQ}$-dim$X$, $i=1,2\dots$ Prema teoremi zbira za dimenzionu funkciju dim je $\mathcal{Q}$-dim$A \leq \sup_i \mathcal{Q}$-dim$A_i \leq \mathcal{PQ}$-dim$X$.

LITERATURA

[1] Aarts M.J. and Nishiura T. "Covering dimension a class of spaces, Fund. Math. LXXVIII 1973. (75-97)

[2] Aarts M.J. and Nishiura T. "Kernel in dimension theory", Amer. Mat. Soc. v.178. 1973. (237-240)

[3] Adnađević D. "O dimenziji proizvoda delimično uređenih skupova", Mat. vesnik 1 (16) 1964. (9-12)

[4] Adnađević D. " O jednoj vrsti dimenzije topoloških prostora", Mat. vesnik 2 (17) 2 1965. (137-146)

[5] Adnađevic D. "Neka svojstva jedne vrste dimenzije topoloških prostora", Mat. vesnik 2 (17) 4 1965. ((239-243)

[6] Adnađević D. "Некоторые свойства размерности dm нормальных пространств", Мат.весник 3 (18) 4 1966. (261-264)

[7] Александров С.П. "Введение в теорию множеств и общую топологию", Наука, Москва 1977.

[8] Александров С.П. и Пасынков А.Б. "Введение в теорию размерности", Наука, Москва 1973.

[9] Anderson R.D. and Jensen A.J. "Semi continuity on topological spaces", Lincei Rend. Sc.fis. mat. e nat. XLII 1967. (782-783)

[10] Birsan T. "Sur les espaces bitopologiqes connexes", Anal. St. Univ. Al I Cuza Jasi sc. mat. XIV 1968. (293-296)

[11] Biswas N. "On characterizations of semi-continuous functions", Lincei Rend. Sc. fis. mat. e nat. XLVIII (4) 1970. (399-402)

[12] Bohn E. and Lee J. "Semi-topological groups", Amer. Math. Monthly (72) 1965. (996-998)

[13] Ćirić D. "Bitopološki prostori", magistarski rad, Beograd, 1973.

[14] Ćirić D. "Dimension of bitopological spaces", Mat. Balkanika 4.18. 1974. (99-1o5)

[15] Двалишвили П.Б. "Отделимость в битопологических пространствах", Сооб. АН ГССР 73. № 2 1974. (285-288)

[16] Двалишвили П.Б. " О размерности битопологических пространств", Сооб. АН ГССР 76 1 № 1 1974. (49- 52)

[17] Двалишвили П.Б. "О некоторых типах компактности и аксиомах отделимости битопологических пространств", Сооб. АН ГССР 80 № 2 1975. (289-292)

[18] Двалишвили П.Б. "Об отображениях битопологических пространств", Сооб. АН ГССР 80 № 3 1975. (553-556)

[19] Dushnik - Miller "Partially ordered sets", Amer. J. Math. 72 195o. (191-194)

[2o] Fletcher P. and Hoyle B.A. and Patty W.C. "The composition of topologies", Duke Math. J. 36 1969. (325-331)

[21] Hilderbrand K.S. and Crossley G.S. "Semi-topological properties", Fund. Mat. LXXIV 1972. (233-254)

[22] Hu T.S. "Introduction tu general topology", Holden-Day J.N.C. 1966.

[23] Jelić M. "Neke dimenzione funkcije u topologiji", magistarski rad, Beograd 1973.

[24] Jelić M. "Neke dimenzione funkcije u bitopološkim prostorima", Mat. vesnik 11 (26) 1974. (38-42)

[25] Jelić M. " Некоторые свойства размерностных функций в битопологических пространствах", Мат. Балканика 4.54. 1974. (309-311)

[26] Jelić M. "O dimenziji $\tilde{P}$-dm topoloških prostora", Mat. vesnik 13 (28) 1976. (279-283)

[27] Jelić M. "Polubineprekidna i bbirezolutna preslikavanja bitopoloških prostora", Mat. vesnik 1 (14) 29 1977. (393-397)

[28] Jelić M. "Neke osobine dimenzije dm normalnih prostora", (u štampi)

[29] Kelly C.J. "General topology", GTM 27

[30] Kelly C.J. "Bitopological spaces", Proc. London Mat. Soc. 13 1963. (71-89)

[31] Kim W.Y. "Pairwise compactnes", Publ. Math. 15 1968. (87-90)

[32] Куратовский К. "Топология", том 1, Мир, Москва 1966. том 2, Мир, Москва 1969.

[33] Levine N. "Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces", Amer. Math. Monthly 70 1963. (36-41)

[34] Misra D.N. and Dube K.K. "Pairwise R_0-spaces", Ann. Soc. Sci. Bruxelles T.87 I 1973. (3-15)

[35] Nagami K. "Dimension theory", AP 1970.

[36] Nagata J. "Modern dimension theory", Amsterdam, Noth-Holland Publiching Co 1965.

[37] Noiri T. "On semi-continuons mappings", Lincei Rend. Sc. fis. mat. e nat. LIV 1973. (210-214)

[38] Noiri T. "A note on semi-continuons mappings", Lincei. Rend. Sc. fis. mat. e nat. LV 1973. (400-403)

[39] Noiri T."On semi T_2-spaces", Ann. Soc. Sci. Bruxelles T. 90 II 1976. (215-220)

[40] Pervin J.W. "Connectedness in bitopological spaces", Indag. Math. 29 1967. (369-372)

[41] Prasad R. and Maheshwari N.S. "Some new separation axioms", Ann. Soc. Sci. Bruxelles T. 89 III 1975. (395-402)

[42] Prasad R. and Maheswari N.S. "Some new separation axioms in bitopological spaces", Mat. vesnik 12 (27) 1975. (159-162)

[43] Reilly I. "Bitopological local compactness", Ind. Math. 34 (5) 1972. (407-411)

[44] Reilly I. "Zero dimensional bitopological spaces", Ind. Math. 35 (2) 1973. (127-131)

[45] Reilly I. and Cooke I. "On bitopological compactness", J. London Math. Soc. 2 (9) 1975. (518-522)

[46] Seagrove M. "Pairwise complete regularity and compactification in bitopological spaces", J. London Math. Soc. 2 (7) 1973. (286-290)

[47] Sedmak V. "Neke primene parcijalno uređenih skupova", Vesnik Društva mat. i fis. 1-2, 3-4, 1954.

[48] Singal K.M. and Singal R.A. "Some more separation axioms in bitopological spaces", Ann. Soc. Sci Bruxelles, T.84 II 1970. (207-230)

[49] Swart J. "Total disconnectedness in bitopological spaces and product bitopological spaces", Ind. Math. 33 (2) 1970. (135-145)

[50] Wilansky A. "Topics in Functional Analysis", Springer, Berlin 1967.

[51] Замбахидзе Г.Л. и Тодорос Ф.С. "О размерности Ind и её применениях в классификации локально связных континуумов", Сооб. АН ГССР 84 № 1 1976. (49-51)

[52] Žižović M. "Neke osobine bitopoloških prostora", Mat. vesnik 11 (26) 1974. (253-257)

POPIS POJMOVA