

UNIVERZITET U BEOGRADU  
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET

RADIOVOJE R. MILOŠEVIĆ

DO 254

O NEKIM PRIMENAMA DIFERENCIJALNIH NEJEDNAČINA

DOKTORSKA DISERTACIJA

БИБЛИОТЕКА  
БИБЛИОТЕКА ЗА МАТЕМАТИЧНО-МЕХАНИЧКО ПИШЕ  
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКОГ ФАКУЛТЕТА  
Број инвентарног Форм. 42/1  
20. II. 1976.  
Београд

БЕОГРАД

1975.

## U V O D

Poznato je da se Košijev problem

$$(1) \quad y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

za obične diferencijalne jednačine prvog reda ne može, u opštem slučaju, rešiti pomoću kvadratura. Tim pre to važi za diferencijalne jednačine višeg reda. Zbog toga, kada se utvrdi egzistencija i jedinstvenost rešenja problema (1), potrebno je razraditi metode za njegovo približno rešavanje. Pored toga, često je korisno uporediti traženo rešenje zadatka (1) sa poznatim rešenjem neke druge diferencijalne jednačine. Isto tako je korisno uporediti funkciju  $u(x)$ , koja zadovoljava diferencijalnu nejednačinu

$$(2) \quad u'(x) \leq f(x, u(x)), \quad u(x_0) = y_0,$$

sa odgovarajućim rešenjem diferencijalne jednačine (1).

Sovjetski matematičar S.A.Čapligin dokazao je 1919.godine jednu teoremu o diferencijalnim nejednačinama koja leži u osnovi jedne približne metode za rešavanje diferencijalne jednačine (1).\*) Ta teorema omogućuje upoređivanje rešenja zadatka (1) sa funkcijom  $u(x)$ , koja zadovoljava diferencijalnu nejednačinu (2). Tačnije, ako važi (2) za  $x \geq x_0$ , pod određenim uslovima za funkciju  $f(x, y)$ , važi i nejednačina

$$(3) \quad u(x) \leq y(x), \quad (x \geq x_0),$$

gde je  $y(x)$  rešenje problema (1).

Ako se radi o običnim diferencijalnim jednačinama prvog reda, nejednačina (3) sledi iz diferencijalne nejednačine (2) za svako  $x \geq x_0$  za koje važi (2). Međutim, ako se radi o sistemu diferencijalnih jednačina, pa prema tome i o jednačinama višeg reda, važenje diferencijalne nejednačine odlika (2) ne povlači važenje odgovarajuće nejednačine oblika (3) za svako  $x > x_0$ . Na nekom intervalu

\*) Interesantno je napomenuti da je prvi dokazao teoremu o diferencijalnim nejednačinama G.Peano još 1886.godine [32].

$(x_0, x_1)$  nejednačina (3) važi. Jedan od značajnih problema u teoriji diferencijalnih nejednačina je određivanje maksimalnog intervala na kome važi pomenuta nejednačina (3). Tom problematikom bavilo se više matematičara. Pomenimo sovjetskog matematičara V.N. Azbeleva i njegove saradnike. Istom problematikom bavio se i naš matematičar M. Bertolino.

U drugu grupu problema možemo svrstati probleme za čije se rešavanje koristi teorema o diferencijalnim nejednačinama. Tu se najčešće radi o određivanju približnih rešenja zadatka (1), o ispitivanju monotonosti niza približnih rešenja, utvrđivanje konvergencije tog niza i procene brzine te konvergencije. Pored toga, diferencijalne nejednačine koriste se pri ispitivanju stabilnosti rešenja diferencijalnih jednačina.

Profesor Bertolino ukazao mi je 1965. godine na problematiku vezanu sa diferencijalnim nejednačinama i pod njegovim rukovodstvom radio sam magistarski rad, u kome je tretirana pomenuta problematika.

Magistarski rad, [29], bio je posvećen, uglavnom, određivanju maksimalnog intervala važenja nejednačine (3). U radovima [30], [31], pored primene, ispitivanja je i mogućnost primene teoreme o diferencijalnim nejednačinama.

U ovom radu bavićemo se problemima primene Čapliginove teoreme i nekih drugih teorema o diferencijalnim nejednačinama (teorema Važevskog). Ispituje se monotonost niza približnih rešenja zadatka (1), utvrđuje se konvergencija toga niza i vrši procena brzine konvergencije za obične diferencijalne jednačine, za sistem diferencijalnih jednačina i za diferencijalne jednačine u Banahovim prostorima.

Prilikom rada na pomenutim problemima, pored rezultata koji

se odnose direktno na njih, uspelo mi je da dobijem neke nove rezultate druge vrste. To se, pre svega, odnosi na uopštenje rezultata R.Zubera, [13], [14]. Isto tako, uz pomoć rezultata K.P.Orlova, [17], dao sam jedan postupak za izračunavanje približnih rešenja problema (1), kada je desna strana analitička funkcija.

Na ideju da se pozabavim pomenutim pitanjima došao sam proučavajući rad N.B.Babkina, [1], koji se bavi pitanjem monotonosti niza Pikarovih aproksimacija za zadatak (1) i rad R.Belmona, [9], koji se bavi istom problematikom za Njutn-Kantorovičev postupak.

Rad je podeljen na dve glave, čiju sadržinu ukratko izlažem.

U prvoj glavi izloženi su rezultati koji su vezani za obične diferencijalne jednačine prvog reda. Neki od tih rezultata mogu da se prenesu na sistem diferencijalnih jednačina. Prva glava počinje Čapliginovom teoremom o diferencijalnim nejednačinama, čija se formulacija i dokaz razlikuje od onih u [2], [3], [5] i [28]. Naime, u tim dokazima jedinstvenost se obezbeđuje preko Lipšicovog uslova sa konstantom L. Ako se, pak, to ne pretpostavlja onda u (2) i (3) stoji stroga nejednakost za  $x > x_0$ . U formulaciji teoreme 1 se pretpostavlja da zadatak (1) ima jedinstveno rešenje i dokazuje se da (2) povlači (3) za  $x \geq x_0$ .

Teorema 2 omogućuje da se uporede rešenja zadatka

$$(4) \quad y' = g(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

i zadatka (1), ako se mogu da uporede funkcije  $f(x,y)$  i  $g(x,y)$ .

Posle teoreme 1 i 2, na osnovu kojih se radi, dokazuje se niz lema, od kojih su neke poznate a neke nove. Lema 1, [3], služi za dokaz jedinstvenosti rešenja zadatka (1). Sadržaj sledećih lema izložićemo nešto detaljnije.

Lema 2 nalazi se u poznatoj knjizi, [2], i može se korisno upotrebiti u mnogim pitanjima teorije diferencijalnih jednačina.

Polazi se od diferencijabilne funkcije  $\delta(x) \geq 0$ , koja na intervalu  $[x_0, x_0+a]$  zadovoljava diferencijalnu nejednačinu

$$(5) \quad \delta'(x) \leq 2L\delta(x) + 2\varepsilon\sqrt{\delta(x)},$$

gde su  $\varepsilon$  i  $L$  pozitivne konstante. Dokazuje se da važi nejednačina

$$(6) \quad \delta(x) \leq \left[ \sqrt{\delta(x_0)} e^{L(x-x_0)} + \frac{\varepsilon}{L} (e^{L(x-x_0)} - 1) \right]^2$$

na intervalu  $[x_0, x_0+a]$ . Pri primeni leme 2 pokazala se potreba za dokazivanjem opštije leme. Naime, pri rešavanju odgovarajućih problema dobijale su se nejednačine oblika

$$(7) \quad \delta'(x) \leq p(x)\delta(x) + q(x)\sqrt{\delta(x)},$$

gde su  $p(x)$  i  $q(x)$  neprekidne funkcije i  $q(x) \geq 0$  na  $[x_0, x_0+a]$ .

Polazeći od (7) dokazao sam da važi

$$\delta(x) \leq \left[ \sqrt{\delta(x_0)} e^{\frac{1}{2} \int_{x_0}^x p(r) dr} + \frac{1}{2} \int_{x_0}^x q(s) e^{\frac{1}{2} \int_s^x p(r) dr} ds \right]^2,$$

što i čini sadržaj leme II. Dokazao sam lemu I koja je sama po sebi interesantna a služi za dokaz leme II.

Teorema I je u vezi sa pomenutim Babkinovim rezultatima, [1], koji iz nje i proizilaze. Naime, Babkin pretpostavlja da u odgovarajućoj oblasti  $D \subset \mathbb{R}^2$  funkcija  $f(x,y)$  ima neprekidan pozitivan izvod  $f_y(x,y)$ , isto je dovoljno da funkcija  $f(x,y)$  raste po drugom argumentu.

Teorema I dokazana je pod pretpostavkom da je  $f(x,y)$  rastuća funkcija po drugom argumentu, ne pretpostavljajući ništa o egzistenciji izvoda  $f_y(x,y)$ .

U daljem radu naveo sam i dokazao teoremu A, koja je navedena u [12] bez dokaza a potiče od S.M.Ložinskog. Na žalost, nisam mogao da nađem dokaz Ložinskog da bih ga uporedio sa mojim dokazom. Teorema A predstavlja uopštenje Pikarove teoreme. U njoj su date dve ocene odstupanja tačnog od približnog rešenja. Jednu od tih ocena dobijam pomoću leme II i ukazujem na to da se pomenuta teorema može da dokaže pod slabijim pretpostavkama. U drugoj glavi

daje se bolja ocena iz koje sledi pomenuta ocena Lozinskog.

Medjutim, glavni razlog zbog koga dokazujem teoremu A jeste mogućnost da se ona iskoristi za uopštavanje nekih drugih rezultata.

Slično Babkinu, R. Belman, [9], je raspravio pitanje monotonosti niza približnih rešenja zadatka (1), dobijenih Njutn-Kantorovičevim postupkom. Taj postupak se sastoji u sledećem: ako je poznato približno rešenje  $y_n(x)$  zadatka (1), to se naredno dobija kao rešenje linearne jednačine

$$(9) \quad y'_{n+1} = f_y(x, y_n(x)) (y_{n+1} - y_n(x)) + f(x, y_n(x)).$$

Belmin je pretpostavio da je funkcija  $f(x, y)$  konveksna po  $y$ , uniformno po  $x$  i pokazao da Njutn-Kantorovičev postupak daje monoton niz približnih rešenja zadatka (1). Mamedov navodi u [10] drugi postupak za odredjivanje niza približnih rešenja zadatka (1). Po njemu, u jednačini (9) mesto funkcije  $f_y(x, y_n(x))$  uzima se funkcija  $f_y(x, y_0(x))$ , gde je funkcija  $y_0(x)$  unapred izabrana i ostaje ista za svako  $n$ . Taj postupak se zove modifikovan Njutn-Kantorovičev postupak. Dokazao sam teoremu III, koja daje dovoljne uslove pod kojima je poslednji postupak monoton.

U teoremi A, mesto Lipšicovog uslova sa konstantom  $L$ , koristi se uslov

$$(10) \quad |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq k(x) |y_1 - y_2|,$$

gde je  $k(x)$  nenegativna i integrabilna funkcija na intervalu  $[x_0, x_0 + a]$ .

Neka su članovi niza  $(y_n(x))$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) odredjeni kao rešenja niza zadataka

$$(11) \quad y'_{n+1} = -k(x) (y_{n+1} - y_n(x)) + f(x, y_n(x)),$$

$$y_{n+1}(x_0) = y_0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

U teoremi IV dokazao sam pod kojim uslovima je ovaj niz monoton.

U daljem izlaganju iznose se neki rezultati poljskog matematičara R. Zuberera, koje sam uopštavao i koristio za dobijanje nekih drugih novih rezultata. Naime, Zuber, polazeći od zadatka (1), definiše niz novih zadataka.

$$y' = F_n(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

takvih da rešenja toga niza definišu niz funkcija  $(y_n(x))$  koji konvergira ka rešenju zadatka (1), [13],. Navešću Zuberovu teoremu, da mogu rezultate te teoreme da uporedim sa mojim rezultatima.

Zuberova teorema. Neka su funkcije  $f(x, y)$  i  $F_n(x, y)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) definisane i neprekidne u pravougaoniku

$$(12) \quad R = \left\{ (x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b \right\}.$$

Pored toga, neka te funkcije zadovoljavaju Lipšicov uslov sa konstantom  $L$ :

$$(13) \quad |f(x, y) - f(x, \bar{y})| \leq L |y - \bar{y}|,$$

$$(14) \quad |F_n(x, y) - F_n(x, \bar{y})| \leq L |y - \bar{y}|.$$

Za funkcije  $y_n(x)$  čine se sledeće pretpostavke:

1° grafik svake od njih leži u  $R$ ;

2° za svako  $n$  funkcija  $y_{n+1}(x)$  zadovoljava sledeći zadatak.

$$(15) \quad y'_{n+1} = F_n(x, y_{n+1}), \quad y_{n+1}(x_0) = y_0$$

za  $|x - x_0| \leq a$ ;

3° na kraju, imamo da je

$$(16) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sup_{|x - x_0| \leq a} |F_n(x, y_n(x)) - f(x, y_n)| < +\infty.$$

Tada niz  $(y_n(x))$  uniformno konvergira na dosta malom intervalu

$|x - x_0| \leq h$  ka rešenju  $y(x)$  zadatka (1)

Lako se vidi da Zuberov postupak obuhvata Pikarov i Njutn-Kantorovičev postupak.

Polazeći od Zuberove teoreme, izvršio sam generalizaciju

u dva pravca. Prvi pravac se sastoji u tome da se oblast definisanosti proširi i mesto uslova (13) i (14) uzmu uslovi oblika (10). Da je to moguće, pokazuje teorema V. Medjutim, interesantniji je drugi pravac, koji se sastoji u odbacivanju ili slabljenju nekih od uslova iz Zuberove teoreme. To je takodje moguće, što se vidi iz teorema VI i VII. U teoremi VI odbacio sam uslov (13) i dobio sam teoremu Peanovog tipa: pokazao sam egzistenciju rešenja zadatka (1). Za razliku od Zuberera, interval egzistencije je ceo interval  $|x - x_0| \leq a$ . Pored toga, uslov (16) zamenio sam uslovom

$$(17) \quad \sup_{|x-x_0| \leq a} |F_n(x, y_n(x)) - f(x, y_n(x))| = \delta_n$$

gde  $\delta_n \rightarrow 0$  kada  $n \rightarrow \infty$ . Dakle, nije potrebno da red  $\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n$  konvergira, već je dovoljno da  $(\delta_n)$  bude nula niz. Pod izmenjenim uslovima, zadržavajući i uslov (14), dokazao sam teoremu VII. Konvergencija važi i u ovoj teoremi na celom intervalu. Uz pomoć leme II dokazana je i ocena greške.

Onako kao što su Babkin i Belman postavili pitanje monotonosti Pikarovog i Njutn-Kantorovičevog postupka za rešavanje zadatka (1), prirodno je postaviti pitanje monotonosti Zuberovog postupka. Dokazao sam dve teoreme u vezi sa tim pitanjem. To su teoreme VIII i IX. Teorema IX, kod koje je zadatak (1) nema jedinstveno rešenje, omogućuje da se dokaže da taj zadatak ima minimalno(maksimalno) rešenje.

Uslovi (13) i (14) mogu se zameniti sledećim uslovima

$$(18) \quad |f(x, y) - f(x, \bar{y})| \leq \varphi(x, |y - \bar{y}|)$$

$$(19) \quad |F_n(x, y) - F_n(x, \bar{y})| \leq \varphi(x, |y - \bar{y}|),$$

gde je  $\varphi(x, u)$  neprekidna funkcija definisana za  $|x - x_0| \leq a$ ,  $0 \leq u \leq 2b$  i takva da zadatak

$$(20) \quad u' = \varphi(x, u), \quad u(x_0) = 0$$

ima samo nulto rešenje. Sa uslovima iz teoreme VI, (18) i (19)

dokazuje se teorema X. Ako se izostavi uslov (18), može se dokazati teorema analogna teoremi VI. Napominjem da sam pri dokazu teoreme koristio teoremu 3 o diferencijalnim nejednačinama koja je opštija od teoreme 1.

Neke od ovih teorema, kao na primer teoreme VI, VII i X, mogu se dokazati za sistem diferencijalnih jednačina.

Druga glava počinje izlaganjem jedne teoreme iz [2], gde se vidi kao se odgovarajući problem, vezan za sistem diferencijalnih jednačina može svesti na diferencijalnu nejednačinu koju zadovoljava odgovarajuća realna funkcija.

U daljem izlaganju daje se jedan nov dokaz teoreme K.P.Orlova, [17], koja se odnosi na jednačinu (1) kada je desna strana analitička funkcija. Iskoristivši tu teoremu dao sam jednu metodu za određivanje koeficijenata analitičkog rešenja zadatka (1). Korisnost ove metode dolazi do izražaja kod onih diferencijalnih jednačina kod kojih je glomazno izračunavanje parcijalnih izvoda funkcije  $f(x,y)$ . Sve je to ilustrovano odgovarajućim primerima. Medjutim, glavni rezultat jeste ocena greške kod metode K.P.Orlova. Problem sam sveo na rešavanje odgovarajuće diferencijalne nejednačine. Objasnićemo to detaljnije.

Neka je  $x_n(t)$  približno a  $x(t)$  tačno rešenje sistema

$$(18) \quad x' = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0$$

gde se pretpostavlja da funkcija zadovoljava Lipšicov uslov sa konstantom L. Stavimo da je

$$(19) \quad \alpha_n(t) = \|f(t, x_n(t)) - x'_n(t)\|,$$

Dokazuje se da se problem svodi na diferencijalnu nejednačinu

$$(20) \quad D_+ \delta_n(t) \leq 2L \delta_n(t) + 2\alpha_n(t) \sqrt{\delta_n(t)}, \quad \delta_n(0) = 0,$$

gde je  $\delta_n(t) = \|x(t) - x_n(t)\|^2$  a  $D_+ \delta_n(t)$  desni izvodni broj funkcije  $\delta_n(t)$  u tački t. Za rešavanje poslednje nejednačine ne može

se koristiti lema II iz prve glave. Radi toga je bilo potrebno da se dokaže lema III, koja uopštava lemu II. Dokazuje da važi ocena

$$(21) \quad \|x_n(t) - x(t)\| \leq \int_{t_0}^t \alpha_n(\xi) e^{L(t-\xi)} d\xi.$$

Problem se svodi na procenu funkcije  $\alpha_n(t)$ : kod Pikarove metode imamo da je  $\alpha_n(t) \leq \|x_n(t) - x_{n-1}(t)\|$ , pa iz (21) sledi procena Lozinskog, o kojoj je bilo reči u teoremi A. Kod Njutn-Kantorovičevog postupka važi ocena  $\alpha_n(t) \leq 2 \|x_n(t) - x_{n-1}(t)\|$ . U nekim slučajevima, kao što je slučaj sa metodom K.P.Orlova, [18], [19], izračunavaju se razlike

$$\delta_n(t) = x'_n(t) - f(t, x_n(t))$$

pa se zbog toga (2), u ovom slučaju, koristi vrlo lako.

Za sistem (18) dobijena je, preko odgovarajuće diferencijalne nejednačine, sledeća procena

$$\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\| + \int_{t_0}^t e^{L(t-s)} \|X(s, x_0)\| ds.$$

Neka, odgovarajuća, pitanja razmatrana su za jednačine u Banahovim prostorima.

Na kraju rada daje se jedna teorema Mamedova, [24]. To je teorema 6. Dokaz te teoreme je dobra ilustracija kako se mogu diferencijalne nejednačine primeniti pri dokazivanju jedinstvenosti rešenja diferencijalnih jednačina i konvergenciji pojedinih postupaka.

Inspirisan teoremom 6, formulisao sam i dokazao teoremu XIII za jednačine u Banahovim prostorima. Dokaz teoreme XIII takodje pokazuje koliko su korisni stavovi u vezi sa diferencijalnim nejednačinama.

Sve integrabilne funkcije koje se pominju u radu su integrabilne u Rimanovom smislu.

Na kraju, napominjem da su teoreme drugih autora numerisane arapskim ciframa. Teoreme drugih autora, koje sam na nov način dokazao, numerisane su velikim štampanim slovima latinice. Teoreme koje sam formulisao i dokazao numerisane su rimskim ciframa.

## P R V A G L A V A

Većina diferencijalnih jednačina ne može se rešiti pomoću kvadratura, pa je zbog toga važno razraditi metod uporedjivanja nepoznatih rešenja jedne diferencijalne jednačine sa poznatim rešenjima neke druge diferencijalne jednačine. Isto tako, često je korisno uporediti rešenje diferencijalne jednačine

$$y' = f(x, y)$$

sa funkcijama koje zadovoljavaju odgovarajuću diferencijalnu nejednačinu

$$g'(x) \leq f(x, g(x)).$$

Sledeća teorema omogućuje takvo uporedjivanje i ona se u daljem izlaganju stalno koristi. Može se reći da je osnovna teorema, pomoću koje se dokazuju skoro sve teoreme koje dolaze. U literaturi je poznata kao Čapliginova teorema ili teorema o diferencijalnim nejednačinama. Zbog toga dajemo dokaz te teoreme, koji će biti prilagodjen našim budućim potrebama.

**T e o r e m a 1.** Pretpostavimo sledeće:

(a) funkcija  $f(x, y)$  je definisana i neprekidna u pravougaoniku

$$R = \left\{ (x, y) : x_0 \leq x \leq x_0 + a, |y - y_0| \leq b \right\};$$

(b)  $y = y(x)$  je jedinstveno rešenje sledećeg Košijevog zadatka

$$(1) \quad y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

definisano na intervalu  $[x_0, x_0 + a]$ ;

(c) na intervalu  $[x_0, x_0 + a]$  funkcija  $u = u(x)$  zadovoljava diferencijalnu nejednačinu

$$(1') \quad u'(x) \leq f(x, u(x)), \quad u(x_0) = y_0.$$

Tada je

$$(2) \quad u(x) \leq y(x)$$

na intervalu  $[x_0, x_0 + a]$ .

**D o k a z.** Definišimo niz  $F_n(x, y) = f(x, y) + \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Neka je

$y_n = y_n(x)$  rešenje sledećeg zadatka

$$y' = F_n(x, y), \quad y_n(x_0) = y_0 + \frac{1}{n}$$

Na osnovu pretpostavke pod (c) imamo

$$(3) \quad u'(x) \leq f(x, u(x)) < f(x, u(x)) + \frac{1}{n} \equiv F_n(x, u(x)), \\ u(x_0) = y_0 < y_0 + \frac{1}{n}.$$

Pokazaćemo da je

$$u(x) < y_n(x)$$

na intervalu  $[x_0, x_0 + a]$ . Pretpostavimo da to nije tačno. Zbog toga postoji  $x_2 \in (x_0, x_0 + a]$ , tako da je  $u(x_2) > y_n(x_2)$ . Kako je  $u(x_0) < y_n(x_0)$  to postoji bar jedno  $x \in (x_0, x_2)$  tako da je  $u(x) = y_n(x)$ . Neka je  $x_1$  najveće među njima. Tada je na intervalu  $(x_1, x_2]$   $u(x) > y_n(x)$ .

Zbog toga imamo

$$u'(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1^+} \frac{u(x) - u(x_1)}{x - x_1} \geq \lim_{x \rightarrow x_1^+} \frac{y_n(x) - y_n(x_1)}{x - x_1} \equiv \\ = y_n'(x_1) = F_n(x_1, y_n(x_1)) = F_n(x_1, u(x_1)).$$

Konačno, imamo

$$u'(x_1) \geq F_n(x_1, u(x_1)),$$

gde je  $x_1 \in [x_0, x_0 + a]$ , što protivureči sa (3).

Kako niz funkcija  $F_n(x, y)$  uniformno konvergira ka funkciji  $f(x, y)$  na  $R$  i zadatak (1), po pretpostavci, ima jedinstveno rešenje, tada, prema [4],  $y_n(x)$  uniformno konvergira ka  $y = y(x)$  na intervalu  $[x_0, x_0 + a]$ . Ako se u nejednačini  $u(x) < y_n(x)$  pusti da  $n \rightarrow \infty$ , dobiće se  $u(x) \leq y(x)$  na intervalu  $[x_0, x_0 + a]$ . Na taj način teorema je u potpunosti dokazana.

U vezi sa teoremom 1 navodimo dve napomene.

N a p o m e n a 1. Teorema 1 ostaje u važnosti ako se mesto znaka  $\leq$  stavi znak  $\geq$ .

N a p o m e n a 2. Formulacija i dokaz teoreme 1 koji navodim razlikuje se od onih u [2], [3] i [5]. Naime, u tim dokazima jedinstvenost se obezbeđuje preko Lipšicovog uslova sa konstantom  $L$  i to se koristi pri dokazu [2], [5]. Ako se to ne koristi, onda u (1') stoji

stroga nejednakost, [3]. Formulacija teoreme 1 bliska je onoj koja je data u [6].

Naredna teorema dokazuje se pomoću teoreme 1. U njoj se ispituje odnos rešenja diferencijalnih jednačina u zavisnosti od desnih strana tih jednačina. Zbog toga se ta teorema i zove teorema o uporedjivanju. Prelazimo na njenu formulaciju.

**T e o r e m a 2.** Neka su funkcije  $f(x,y)$  i  $g(x,y)$  definisane i neprekidne na pravougaoniku  $R$  i neka je na njemu ispunjena nejednačina  $f(x,y) \leq g(x,y)$ . Pored toga, pretpostavlja se da bar jedan od sledećih zadataka

$$y' = f(x,y), y(x_0) = y_0,$$

$$v' = g(x,v), v(x_0) = y_0$$

ima jedinstveno rešenje na intervalu  $[x_0, x_0+a]$ . Tada za njihova rešenja važi

$$y(x) \leq v(x)$$

na tom intervalu.

**D o k a z.** Neka, odredjenosti radi, druga jednačina ima jedinstveno rešenje na intervalu  $[x_0, x_0+a]$ . Tada je

$$y'(x) = f(x, y(x)) \leq g(x, y(x)), y(x_0) = y_0.$$

Prema teoremi 1, imamo na  $[x_0, x_0+a]$  da važi  $y(x) \leq v(x)$ . Ako je funkcija  $f(x,y)$  takva da zadatak (1) ima jedinstveno rešenje, tada funkcija  $u = -y(x)$  i  $\varphi = -v(x)$ , redom, zadovoljavaju diferencijalne jednačine

$$u' = -f(x, -u), \varphi' = -g(x, -\varphi).$$

Teorema 1 se primenjuje na funkcije  $u(x)$  i  $\varphi(x)$  i  $H(x,y) \equiv -f(x,-y)$ .

Zbog toga je

$$\varphi(x) \leq -g(x, -\varphi(x)) \leq -f(x, -\varphi(x)) \equiv H(x, \varphi(x)),$$

pa je  $\varphi(x) \leq u(x)$ , odnosno  $-v(x) \leq -y(x)$  na intervalu  $[x_0, x_0+a]$ .

Na taj način je teorema dokazana.

Pored teoreme 1 i 2, koje su osnovne, navodimo nekoliko lema, koje ćemo koristiti dalje. Sledeća lema je u svojoj formulaciji vrlo jednostavna a vrlo korisna pri dokazu jedinstvenosti rešenja zadatka (1), [3].

L e m a 11. Neka funkcija  $r(x)$  zadovoljava nejednačinu

$$r'(x) \leq k(x)r(x),$$

na intervalu  $[x_0, x_0+a]$ , gde je  $k(x)$  integrabilna funkcija na tom intervalu. Tada  $r(x)$  zadovoljava i nejednačinu

$$r(x) \leq r(x_0)e^{\int_{x_0}^x k(t)dt}.$$

D o k a z. Ako se polazna diferencijalna nejednačina pomnoži sa  $\exp(-\int_{x_0}^x k(t)dt)$ , dobiće se

$$(r(x)e^{-\int_{x_0}^x k(t)dt})' \leq 0.$$

Posle integracije u granicama od  $x_0$  do  $x(x > x_0)$ , dobijamo

$$r(x)e^{-\int_{x_0}^x k(t)dt} \leq r(x_0),$$

i konačno

$$r(x) \leq r(x_0)e^{\int_{x_0}^x k(t)dt}.$$

P o s l e d i c a l e m e 1. Neka funkcija  $r(x)$  zadovoljava uslove leme 1,  $r(x) \geq 0$  na  $[x_0, x_0+a]$  i  $r(x_0) = 0$ . Tada je  $r(x) \equiv 0$  na intervalu  $[x_0, x_0+a]$ .

Dokazaćemo i lemu koja se nalazi u [2], a zatim dati njeno uopštenje. Baš to uopštenje biće prava radna lema. Navodimo lemu iz [2], koju takodje u daljem radu koristimo.

L e m a 2. Neka diferencijabilna funkcija  $\sigma(x) \geq 0$  na intervalu  $[x_0, x_0+a]$  zadovoljava nejednačinu

$$(4) \quad \sigma'(x) \leq 2L\sigma(x) + 2\varepsilon\sqrt{\sigma(x)}.$$

Tada je

$$(4') \quad \sigma(x) \leq \left[ \sqrt{\sigma(x_0)} e^{L(x-x_0)} + \frac{\varepsilon}{L} (e^{L(x-x_0)} - 1) \right]^2$$

za  $x \in [x_0, x_0+a]$ , gde su  $L$  i  $\varepsilon$  pozitivne konstante.

D o k a z. Za dokaz ove leme koristićemo teoremu 1. Desna

strana u (4) jeste funkcija

$$f(x,y) = 2Ly + 2\varepsilon\sqrt{y}$$

koja zadovoljava Lipšicov uslov u svakoj poluravni  $y \geq \delta_0 > 0$ , koja ne sadrži pravu  $y = 0$ . Zbog toga može primeniti Čapliginovu teoremu u slučaju kada je  $\delta(x_0) > 0$ . Jer, ako je  $\delta(x_0) > 0$ , onda rešenje jed-  
načine

$$(5) \quad u' = 2Lu + 2\varepsilon\sqrt{u} \quad (u \geq 0)$$

koje zadovoljava uslov  $u(x_0) = \delta(x_0)$  ima nenegativan izvod i zbog toga će ostati, za  $x \geq x_0$ , unutar poluravni  $u \geq \delta(x_0) > 0$ .

Jednačina (5) je Bernulijeva. Njeno rešenje sa početnim uslovom  $u(x_0) = \delta(x_0)$  glasi

$$u(x) = \left[ \sqrt{\delta(x_0)} e^{L(x-x_0)} + \frac{\varepsilon}{L} (e^{L(x-x_0)} - 1) \right]^2,$$

pa kako je prema teoremi 1  $\delta(x) \leq u(x)$ , to je (4') i dokazano.

U slučaju da je  $\delta(x_0) = 0$ , teorema 1 se ne može primeniti. U tom slučaju posmatramo rešenje jednačine (5) koje zadovoljava uslov  $u_n(x_0) = \frac{1}{n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Pošto je desna strana jednačine (5) nene-  
gativna, to je  $u_n(x)$  rastuća funkcija od  $x$ . Pokazaćemo da je  $u_n(x) \geq \delta(x)$  na intervalu  $[x_n, x_n + a]$ . Pretpostavimo da u nekoj tački  $x_1 > x_0$  imamo  $u_n(x_1) < \delta(x_1)$ . Stavimo da je  $\varphi(x) = u_n(x) - \delta(x)$ . Tada je  $\varphi(x_0) = u_n(x_0) - \delta(x_0) = \frac{1}{n} > 0$  i  $\varphi(x_1) = u_n(x_1) - \delta(x_1) < 0$ . Zbog toga postoji bar jedno  $x \in (x_0, x_1)$  tako da je  $\varphi(x) = 0$ . Neka je medju njima  $x_2$  najveće. Tada je  $0 = \varphi(x_2) = u_n(x_2) - \delta(x_2)$ , odnosno  $\delta(x_2) = u_n(x_2) \geq \frac{1}{n} > 0$ . Prema prethodnom delu dokaza imamo  $u_n(x) \geq \delta(x)$  na intervalu  $[x_2, x_1]$ . Medjutim, to je nemoguće, jer je protivurečno sa  $u_n(x_1) < \delta(x_1)$ . Na taj način je

$$\delta(x) \leq \left[ \frac{1}{\sqrt{n}} e^{L(x-x_0)} + \frac{\varepsilon}{L} (e^{L(x-x_0)} - 1) \right]^2$$

za svako  $n \in \mathbb{N}$ . Ako pustimo da  $n \rightarrow \infty$ , dobićemo

$$\delta(x) \leq \left[ \frac{\varepsilon}{L} (e^{L(x-x_0)} - 1) \right]^2,$$

što je više nego što se traži u lemi. Na taj način lema 2 je dokazana.

U primenama će biti korisniji opštiji rezultat od onoga koji je sadržanu lemi 2. Naime, pretpostavimo da nenegativna diferencijabilna funkcija  $\sigma(x)$  na intervalu  $[x_0, x_0+a]$  zadovoljava sledeću diferencijalnu nejednačinu.

$$\sigma'(x) \leq p(x)\sigma(x) + q(x)\sqrt{\sigma(x)},$$

gde su  $p(x)$  i  $q(x)$  neprekidne funkcije na intervalu  $[x_0, x_0+a]$ .

Pitanje je da li se može funkcija  $\sigma(x)$  na intervalu  $[x_0, x_0+a]$  majorirati rešenjem odgovarajuće Bernulijeve jednačine. Odgovor je očigledan ako su funkcije  $p(x)$  i  $q(x)$  nenegativne. Međutim, u slučaju da je  $p(x)$  promenljivog znaka, odgovor nije tako očigledan. Pre nego što sve to iskažemo u obliku jednog stava, dokažimo jednu lemu koja je i sama ponekada korisna u primenama.

**L e m a I.** Neka je  $A(x)$  neprekidna i nenegativna funkcija na intervalu  $[x_0, x_0+a]$ . Ako diferencijabilna nenegativna funkcija  $\sigma(x) \geq 0$  zadovoljava diferencijalnu nejednačinu

$$\sigma'(x) \leq A(x)\sqrt{\sigma(x)}$$

na intervalu  $[x_0, x_0+a]$ , tada je

$$\sigma(x) \leq \left[ \sqrt{\sigma(x_0)} + \frac{1}{2} \int_{x_0}^x A(s) ds \right]^2.$$

**D o k a z.** Posmatraćemo funkciju  $\varphi(x, y) = A(x)\sqrt{y} \geq 0$ , koja ima neprekidan izvod  $\varphi_y(x, y) = \frac{A(x)}{2\sqrt{y}}$  u nekoj okolini tačke  $(x_0, \sigma(x_0) > 0)$ .

Tada zadatak

$$u' = A(x)\sqrt{u}, \quad u(x_0) = \sigma(x_0) > 0$$

ima jedinstveno rešenje koje ostaje u oblasti  $u \geq \sigma(x_0) > 0$ . Zbog toga se može primeniti teorema 1. Rešenje zadatka (5') glasi

$$u(x) = \left[ \sqrt{\sigma(x_0)} + \frac{1}{2} \int_{x_0}^x A(s) ds \right]^2,$$

pa prema pomenutoj teoremi sledi tvrdjenje leme. Neka je  $\sigma(x_0) = 0$ .

Sada ne možemo primeniti teoremu 1, zato što na  $x$ -osi nije ispunjen uslov jedinstvenosti. Zadatak (5') ima dva rešenja koja prolaze kroz tačku  $(x_0, 0)$ :  $u \equiv 0$  i  $u = \frac{1}{4} \left[ \int_{x_0}^x A(s) ds \right]^2$ . Mi ćemo naći rešenje jednačine  $u' = A(x)\sqrt{u}$  koje zadovoljava uslov  $u_n(x_0) = \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Pokazaćemo da je  $u_n(x) \geq \delta(x)$  na intervalu  $[x_0, x_0+a]$ . Pretpostavimo suprotno: neka postoji  $x_2 \in (x_0, x_0+a]$ , tako da je  $u_n(x_2) < \delta(x_2)$ . Stavimo da je  $\Psi(x) = u_n(x) - \delta(x)$ . Kako je  $\Psi(x_0) - (x_0) = \frac{1}{n} > 0$  i  $\Psi(x_2) = u_n(x_2) - \delta(x_2) < 0$ , to na intervalu  $(x_0, x_2)$  postoji bar jedno  $x$  tako da je  $\Psi(x) = 0$ . Neka  $x_1$  bude najveće. Zbog nenegativnosti izvoda rešenja jednačine (5') imamo  $\Psi(x_1) = 0 = u_n(x_1) - \delta(x_1)$ ,  $0 < \frac{1}{n} < u_n(x_1) = \delta(x_1)$ . Na intervalu  $[x_1, x_2]$ , prema prethodnom delu dokaza važi  $\delta(x) \leq u_n(x)$ , što pritivureći sa pretpostavkom  $u_n(x_2) < \delta(x_2)$ . Dalji postupak je kao u lemi 2: u nejednačini

$$\delta(x) \leq \left[ \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2} \int_{x_0}^x A(s) ds \right]^2$$

pustimo da  $n \rightarrow \infty$  i dobijamo  $\delta(x) \leq \frac{1}{4} \left[ \int_{x_0}^x A(s) ds \right]^2$ . Ovim je dokaz leme I u potpunosti završen.

Koristeći lemu I, dokazujemo još jednu lemu, koju ćemo često koristiti u toku rada. Kao što smo malo pre rekli ona će biti uopštenje leme 2. Prelazimo na njenu formulaciju.

**L e m a II.** Neka je  $\delta(x) \geq 0$  neprekidna i diferencijabilna funkcija na intervalu  $[x_0, x_0+a]$ . Pored toga, neka ona zadovoljava sledeću diferencijalnu nejednačinu

$$(6) \quad \delta'(x) \leq p(x)\delta(x) + q(x)\sqrt{\delta(x)}$$

na intervalu  $[x_0, x_0+a]$ , gde su  $p(x)$  i  $q(x)$  date neprekidne funkcije na tom intervalu i  $q(x) \geq 0$ . Tada je

$$(7) \quad \delta(x) \leq \left[ \sqrt{\delta(x_0)} e^{\frac{1}{2} \int_{x_0}^x p(r) dr} + \frac{1}{2} \int_{x_0}^x q(s) e^{\frac{1}{2} \int_s^x p(r) dr} ds \right]^2.$$

**D o k a z.** Odgovarajuća Bernulijeva jednačina glasi

$$(6') \quad u' = p(x)u + q(x)\sqrt{u},$$

gde desna strana ne mora biti nenegativna, pa se metod dokaza leme 2 ne može primeniti. Mi ćemo dokaz svesti na dokaz leme I. Zbog toga (6) napišemo na sledeći način

$$\delta'(x) - p(x)\delta(x) \leq q(x)\sqrt{\delta(x)}$$

i pomnožimo sa funkcijom  $\exp(-\int_{x_0}^x p(r) dr)$ , odakle se dobija

$$\left( \delta(x) e^{-\int_{x_0}^x p(r) dr} \right)' \leq q(x) \sqrt{\delta(x)} e^{-\int_{x_0}^x p(r) dr}$$

Poslednja nejednačine se može napisati

$$\left( \delta(x) e^{-\int_{x_0}^x p(r) dr} \right)' \leq q(x) \sqrt{\delta(x) e^{-2 \int_{x_0}^x p(r) dr}} e^{-\frac{1}{2} \int_{x_0}^x p(r) dr}$$

koja se, posle smene

$$(8) \quad y(x) = \delta(x) e^{-\int_{x_0}^x p(r) dr}, \quad A(x) = q(x) e^{-\frac{1}{2} \int_{x_0}^x p(r) dr},$$

svodi na

$$y'(x) \leq A(x) \sqrt{y(x)}, \quad (y(x_0) = \delta(x_0))$$

i dokaz teče dalje kao u prethodnoj lemi. Prema tome, imamo da je

$$y(x) \leq \left[ \sqrt{\delta(x_0)} + \frac{1}{2} \int_{x_0}^x A(s) ds \right]^2$$

Ako se iskoriste veze (8), dobićemo (7), što je trebalo i dokazati.

U toku daljeg rada vraćaćemo se na poslednju lemu. Pomoću nje dobićemo neke nove rezultate i dobiti već poznate rezultate jednostavnijim postupkom.

Kod iterativnih postupaka za rešavanje zadatka

$$(1) \quad y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

postavlja se često pitanje kada dobijena približna rešenja obrazuju monoton niz. Takvo pitanje razmatrao je B.N. Babkin [1] za Pikarov postupak sukcesivnih aproksimacija. Navešću, ukratko, njegove rezultate i dokazati jednu teoremu, koja će biti uopštenje njegovih rezultata. Najpre dajemo jednu definiciju.

**D e f i n i c i j a 1.** Neka je funkcija  $f(x, y)$  definisana i neprekidna u oblasti  $D \subset \mathbb{R}^2$  a  $y = y(x)$  jedinstveno rešenje zadatka (1), definisano na intervalu  $[x_0, x_0 + a]$ . Funkcija  $y = v(x)$  koja zadovoljava uslov  $v(x) \geq y(x)$  ( $v(x_0) \geq y(x_0) = y_0$ ) na tom intervalu zove se gornja funkcija. Slično se definiše i donja funkcija  $y = u(x)$ .

Egzistencija gornje(donje) funkcije sledi iz teoreme 1 i 2.

Babkin je pretpostavio da funkcija  $f(x, y)$  ima neprekidan izvod  $f_y(x, y) > 0$  u  $D$ . Dalje, on bira funkcije  $u_0 = u_0(x)$  i  $v_0 = v_0(x)$  tako da zadovoljavaju sledeće diferencijalne nejednačine

$$(9) \quad u'_0(x) - f(x, u_0(x)) \leq 0, \quad v'_0(x) - f(x, v_0(x)) \geq 0$$

na intervalu  $[x_0, x_0+a]$ . Na osnovu teoreme 1 te dve funkcije su, redom, donja i gornja. Ovako izabrane funkcije ponekada ćemo zvati Čapliginove krive. Neka je

$$(9') \quad D_1 = \{(x, y) : x_0 \leq x \leq x_0+a, u_0(x) \leq y \leq v_0(x)\}.$$

Naredni par približnih rešenja  $(u_1(x), v_1(x))$  određuje se na sledeći način

$$u_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, u_0(t)) dt, \quad v_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, v_0(t)) dt,$$

pa iz pretpostavke da je  $f_y(x, y) > 0$  dokazuje se da važe nejednačine

$$u_0(x) \leq u_1(x) \leq y(x) \leq v_1(x) \leq v_0(x).$$

Postupak se nastavlja i formira se niz parova  $(u_n(x), v_n(x))$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , tako da važi ocena

$$0 \leq v_n(x) - u_n(x) = \int_{x_0}^x [f(t, v_{n-1}(t)) - f(t, u_{n-1}(t))] dt \leq \leq \delta_0 K^n \frac{(x-x_0)^n}{n!},$$

gde je  $\delta_0 = \max_{x_0 \leq x \leq x_0+a} [v_0(x) - u_0(x)]$ ,  $K = \max_{D_1} f_y(x, y)$ . Poslednja ocena dobija se vrlo lako, zahvaljujući pretpostavci da postoji neprekidan izvod  $f_y(x, y)$ . Dovoljna je egzistencija ograničenog izvoda. Ta ista procena omogućuje da se izvedu potrebni zaključci o konvergenciji nizova  $(u_n(x))$  i  $(v_n(x))$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ : oba ta dva niza konvergiraju jedinstvenom rešenju zadatka (1) kao zajedničkoj graničnoj vrednosti.

Poznato je da iz nejednačine  $f_y(x, y) > 0$  sledi da funkcija  $f(x, y)$  raste po drugom argumentu i Babkin to pri dokazu koristi.

Ja sam dokazao sličnu teoremu, pretpostavljajući da je funkcija  $f(x, y)$  rastuća po drugom argumentu a ne pretpostavljajući ništa o egzistenciji izvoda  $f_y(x, y)$ . Naravno, jedan od uslova jedinstvenosti za zadatak (1) mora biti ispunjen. Videće se da pri dokazu konvergencije koristimo složeniji matematički aparat.

Neka je funkcija  $f(x, y)$  neprekidna i neka raste po drugom argumentu. Slično Babkinu, određujem oblast  $(9')$ , gde su donja i gornja

funkcija određene iz uslova (9). Kako je funkcija  $u_0(x)$  određena iz uslova  $u_0'(x) - f(x, u_0(x)) \leq 0$ , tada je, prema teoremi 1, ispunjena nejednačina  $u_0(x) \leq y(x)$  na intervalu  $[x_0, x_0+d]$ , gde je  $y = y(x)$  rešenje zadatka (1). Narednu funkciju određujemo iz jednakosti

$$u_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, u_0(t)) dt.$$

Tada je

$$\begin{aligned} u_0(x) - u_1(x) &= u_0(x) - y_0 - \int_{x_0}^x f(t, u_0(t)) dt = \\ &= \int_{x_0}^x (u_0'(t) - f(t, u_0(t))) dt \leq 0, \end{aligned}$$

odnosno  $u_0(x) \leq u_1(x)$  na intervalu  $[x_0, x_0+a]$ . Kako je  $f(x, y)$  rastuća funkcija po drugom argumentu, to imamo

$$u_1'(x) - f(x, u_1(x)) = f(x, u_0(x)) - f(x, u_1(x)) \leq 0,$$

odakle zaključujemo da je  $u_1(x)$  donja funkcija na intervalu  $[x_0, x_0+a]$ .

Sasvim analogno se dokazuje sledeće: ako je  $u_n(x)$  donja funkcija dobijena iz uslova  $u_n'(x) - f(x, u_n(x)) \leq 0$ , tada je i

$$u_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, u_n(t)) dt$$

takodje takva funkcija i  $u_n(x) \leq u_{n+1}(x)$  na intervalu  $[x_0, x_0+a]$ . Prema tome važi sledeće

$$u_0(x) \leq u_1(x) \leq \dots \leq u_n(x) \leq \dots \leq y(x)$$

na pomenutom intervalu. Zbog toga za svako fiksirano  $x \in [x_0, x_0+a]$  postoji  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = \varphi(x)$ . Pokazaćemo da je granična funkcija  $\varphi(x)$  neprekidna. Zbog toga formiramo razliku

$$u_n(x_2) - u_n(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(t, u_{n+1}(t)) dt,$$

odakle je

$$|u_n(x_2) - u_n(x_1)| \leq M |x_1 - x_2|,$$

gde je  $M = \max |f(x, y)|$ . Ako pustimo da  $n \rightarrow \infty$  u poslednoj nejednačini, dobićemo

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq M |x_1 - x_2|,$$

odakle sledi neprekidnost funkcije  $\varphi(x)$ . Kako je  $(u_n(x))$  rastući niz funkcija i granična funkcija neprekidna, tada, na osnovu Dinijeve teoreme, [7], imamo da niz  $(u_n(x))$  uniformno konvergira ka funkciji

$\varphi(x)$  na intervalu  $[x_0, x_0+a]$ . Kako je

$$u_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, u_{n-1}(t)) dt,$$

tada je posle prelaska na graničnu vrednost,

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt.$$

Prema tome, granična funkcija jeste rešenje zadatka (1). Na taj način dokazana je sledeća teorema.

**T e o r e m a I.** Neka zadatak (1) ima jedinstveno rešenje (1) a za funkciju  $f(x,y)$  pretpostavimo da je neprekidna u oblasti  $D \subset \mathbb{R}^2$  i da raste po drugom argumentu. Tada možemo, polazeći od donje funkcije  $u_0(x)$  koja je odredjena iz uslova (9), formirati niz  $(u_n(x))$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  pomoću obrasca

$$u_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, u_{n-1}(t)) dt, \quad (n = 1, 2, \dots),$$

tako da je  $u_n(x) \leq u_{n+1}(x) \leq y(x)$  na intervalu  $[x_0, x_0+a]$ . Granična funkcija  $\varphi(x)$  toga niza jeste rešenje zadatka (1).

**N a p o m e n a.** Sličan zaključak važi i za niz  $(v_n(x))$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , takav da je

$$y(x) \leq v_{n+1}(x) \leq v_n(x), \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

na intervalu  $[x_0, x_0+a]$ . U ovom slučaju treba teoremu I primeniti na jednačinu

$$u' = - f(x, -u).$$

Dalje, navodimo jednu teoremu S.M.Ložinskog, koja je u [12] navedena bez dokaza.

**T e o r e m a A.** Neka je funkcija  $f(x,y)$  neprekidna u oblasti  $B$  (zatvorenoj ili otvorenoj) i neka postoji takva nenegativna integrabilna na konačnom intervalu  $[x_0, x_0+a]$  funkcija  $M(x)$ , tako da je  $|f(x,y)| \leq M(x)$  ako je  $x \in [x_0, x_0+a]$ ,  $(x,y) \in B$ ,  $(x, M(x)) \in B$ . Pretpostavimo da je konačna zatvorena oblast  $Q$  odredjena nejednakostima

$$x_0 \leq x \leq x_0+a, \quad |y - y_0| \leq \int_{x_0}^x M(u) du,$$

sadržana u  $B$ . Dalje, neka postoji nenegativna i integrabilna na  $[x_0, x_0+a]$  funkcija  $k(x)$ , tako da je

$$(10) \quad |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq k(x) |y_1 - y_2|$$

za  $x_0 \leq x \leq x_0 + a$  i  $(x, y_1), (x, y_2)$  proizvoljne tačke koje pripadaju oblasti  $Q$ . Tada je:

1) za proizvoljnu neprekidnu na intervalu  $[x_0, x_0 + a]$  funkciju  $y_0(x)$ ,  $(x, y_0(x)) \in Q$ , formulom

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt$$

odredjen niz  $(y_n(x))$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) tako da je  $(x, y_n(x)) \in Q$  za

$x_0 \leq x \leq x_0 + a$ ;

2) zadatak

$$(1) \quad y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

ima jedinstveno rešenje  $y = y(x)$  ( $(x, y(x)) \in Q, x_0 \leq x \leq x_0 + a$ ) i pri tome je

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$$

na intervalu  $[x_0, x_0 + a]$ ;

3) važe sledeće ocene

$$(11) \quad |y(x) - y_n(x)| \leq \frac{\int_{x_0}^x M(u) du + \max_{x_0 \leq u \leq x} |y_0(u) - y_0| \int_{x_0}^x k(u) du}{n!},$$

$$(12) \quad |y(x) - y_n(x)| \leq \int_{x_0}^x e^{\int_{x_0}^{\xi} k(u) du} k(\xi) |y_n(\xi) - y_{n-1}(\xi)| d\xi.$$

Navedena teorema Lozinskog je uopštenje poznate Pikarove teoreme za zadatak (1). Teoremu navodim i dokazujem iz sledećih razloga:

1) dokaz koji dajem jeste ilustracija kako se može koristiti lema II;

2) pokazaću da se teorema može dokazati pod slabijim pretpostavkama

nego što su navedene u [12] i 3) može se formulacija te teoreme pre-

neti i na teoreme koje dolaze. Prelazimo na dokaz teoreme Lozinskog.

**D o k a z.** Dokazaćemo da zadatak (1) ima jedinstveno rešenje.

Pretpostavimo da postoje dva rešenja zadatka (1)  $y_1 = y_1(x)$  i  $y_2 =$

$y_2(x)$ , pri čemu je  $y_1(x_0) = y_2(x_0) = y_0$ . Uvodimo funkciju  $\sigma(x) =$

$(y_1(x) - y_2(x))^2$  i koristimo pretpostavke za funkcije  $y_1(x)$  i  $y_2(x)$ ,

pa dobijemo jednakost

$$\delta'(x) = 2(y_1(x) - y_2(x))(y_1'(x) - y_1'(x)) = \\ 2(y_1(x) - y_2(x))(f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x))),$$

iz koje sledi sledeća diferencijalna nejednačina

$$\delta'(x) \leq 2k(x)\delta(x)$$

Na osnovu leme 1 i njene posledice imamo da je  $\delta(x) \equiv 0$  na intervalu  $[x_0, x_0+a]$ . Dakle,  $y_1(x) \equiv y_2(x)$  za  $x_0 \leq x \leq x_0+a$ .

Dalje, dokazujemo da je  $(x, y_n(x)) \in Q$  za  $x \in [x_0, x_0+a]$  i svako  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Za  $n = 0$  to sledi po pretpostavci. Ako se pretpostavi da je  $(x, y_{n-1}(x)) \in Q$  za  $x_0 \leq x \leq x_0+a$ , tada je

$$|y_n(x) - y_0| \leq \int_{x_0}^x |f(t, y_{n-1}(t))| dt \leq \int_{x_0}^x M(t) dt,$$

tj.  $(x, y_n(x)) \in Q$  za  $x_0 \leq x \leq x_0+a$ .

Dokazaćemo da niz  $(y_n(x))$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , uniformno konvergira na intervalu  $[x_0, x_0+a]$ . Iz samog izbora funkcije  $y_0(x)$  imamo da je

$|y_0(x) - y_0| \leq \int_{x_0}^x M(t) dt$  i zbog neprekidnosti funkcije  $f(x, y)$  važi

$$|y_1(x) - y_0| = \int_{x_0}^x |f(t, y_0(t))| dt \leq \int_{x_0}^x M(t) dt.$$

Na osnovu toga važi sledeća ocena

$$|y_1(x) - y_0(x)| \leq |y_1(x) - y_0| + |y_0 - y_0(x)| \leq 2 \int_{x_0}^x M(t) dt.$$

Prema načinu formiranja niza  $(y_n(x))$  i prema (10) važi sledeće

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq \int_{x_0}^x k(t) |y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)| dt.$$

Iz poslednje nejednačine za  $n = 2$  dobijamo

$$|y_2(x) - y_1(x)| \leq \int_{x_0}^x k(t) |y_1(t) - y_0(t)| dt \leq \\ \leq 2 \int_{x_0}^x k(t) dt \int_{x_0}^t M(\xi) d\xi \leq (2 \int_{x_0}^x M(t) dt) \int_{x_0}^x k(t) dt.$$

Stavimo da je  $m = 2 \int_{x_0}^x M(t) dt$ , pa ćemo dobiti za  $n = 3$

$$|y_3(x) - y_2(x)| \leq \int_{x_0}^x k(t) |y_2(t) - y_1(t)| dt \leq \\ \leq m \int_{x_0}^x k(t) dt \int_{x_0}^t k(\xi) d\xi = m \int_{x_0}^x (x-t) k(t) dt.$$

Sada je jasno da se indukcijom može pokazati da važi sledeća ocena

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq \frac{m}{(n-2)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n-2} k(t) dt \leq \\ \leq \frac{m \int_{x_0}^x k(t) dt}{(n-2)!} a^{n-2},$$

odakle sledi uniformna konvergencija reda

$$y_0(x) + (y_1(x) - y_0(x)) + \dots + (y_n(x) - y_{n-1}(x)) + \dots$$

ka funkciji  $y(x)$  na intervalu  $[x_0, x_0 + a]$ , za koju ćemo pokazati da je rešenje zadatka (1) na tom intervalu. Ta činjenica sledi iz ocene

$$\left| \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt - \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \right| \leq \int_{x_0}^x k(t) |y_n(t) - y(t)| dt.$$

Prećićemo na dokaz ocena (11) i (12). Prisetimo da je

$$\begin{aligned} |y(x) - y_0(x)| &= \left| \int_{x_0}^x f(u, y(u)) du + y_0 - y_0(x) \right| \leq \\ &\leq \int_{x_0}^x |f(u, y(u))| du + |y_0 - y_0(x)| \leq \int_{x_0}^x M(u) du + \max_{x_0 \leq u \leq x} |y_0(u) - y_0|, \end{aligned}$$

pa zbog toga (11) važi za  $n = 0$ :

$$|y(x) - y_0(x)| \leq \int_{x_0}^x M(u) du + \max_{x_0 \leq u \leq x} |y_0(u) - y_0|.$$

Neka (11) važi za prirodan broj  $n$ . Tada je, na osnovu nejednačine

$$|y_{n+1}(x) - y(x)| \leq \int_{x_0}^x k(u) |y_n(u) - y(u)| du,$$

ispunjeno i sledeće

$$\begin{aligned} |y(x) - y_{n+1}(x)| &\leq \int_{x_0}^x k(u) |y(u) - y_n(u)| du \leq \\ &\leq \int_{x_0}^x k(u) \frac{\int_{x_0}^u M(t) dt + \max_{x_0 \leq t \leq u} |y_n(t) - y_0|}{n!} \left[ \int_{x_0}^u k(t) dt \right]^n \leq \\ &\leq \frac{\int_{x_0}^x M(t) dt + \max_{x_0 \leq t \leq x} |y_0(t) - y_0|}{n!} \int_{x_0}^x k(u) \left[ \int_{x_0}^u k(t) dt \right]^n du = \\ &= \frac{\int_{x_0}^x M(u) du + \max_{x_0 \leq u \leq x} |y_0(u) - y_0|}{(n+1)!} \left[ \int_{x_0}^x k(u) du \right]^{n+1}. \end{aligned}$$

Na taj način, ocena (11) je dokazana.

Pri dokazu ocene (12) koristimo lemu II. Pored ostalog, ovde će se videti korisnost leme II pri oceni greške.

Zbog (10) imamo

$$\begin{aligned} |y'_n(x) - y'(x)| &= |f(x, y_{n-1}(x)) - f(x, y(x))| \leq \\ &\leq k(x) |y_{n-1}(x) - y(x)| \leq k(x) |y_n(x) - y(x)| + k(x) |y_n(x) - y_{n-1}(x)| \end{aligned}$$

Posle množenja sa  $2|y_n(x) - y(x)|$ , dobijamo

$$2|y'_n(x) - y'(x)| |y_n(x) - y(x)| \leq 2k(x) |y_n(x) - y(x)|^2 + \\ + 2k(x) |y_n(x) - y_{n-1}(x)| + |y_{n-1}(x) - y(x)| \cdot y'(x).$$

Ako stavimo da je  $\delta(x) = |y_n(x) - y(x)|^2$ , tada je

$$\delta'(x) \leq 2k(x)\delta(x) + 2k(x) |y_n(x) - y_{n-1}(x)| \sqrt{\delta(x)}.$$

Na osnovu (7) imamo

$$\delta(x) \leq \left[ e^{\int_{x_0}^x k(u) du} \int_{x_0}^x k(\xi) |y_n(\xi) - y_{n-1}(\xi)| e^{-\int_{x_0}^{\xi} k(u) du} d\xi \right]^2$$

odakle sledi (12):

$$|y_n(x) - y(x)| \leq \int_{x_0}^x e^{\int_{x_0}^u k(t) dt} k(\xi) |y_n(\xi) - y_{n-1}(\xi)| d\xi.$$

Na taj način teorema A je u potpunosti dokazana.

U vezi sa teoremom A navodimo dve napomene.

**N a p o m e n a 1.** Teorema A ostaje da važi i bez pretpostavke o egzistenciji funkcije  $M(x)$ : mesto oblasti  $Q$  može se uzeti oblast  $\{(x, y) : |x - x_0| \leq a, -\infty < y < +\infty\}$ . Ako se podje od neprekidne funkcije  $y_0(x)$  definisane na intervalu  $|x - x_0| \leq a$ , tada je takva i funkcija

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_0(t)) dt$$

Zbog toga je moduo njihove razlike ograničen:  $|y_1(x) - y_0(x)| \leq \alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ). Može se pokazati da važi sledeća ocena

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq \frac{\alpha a^{n-2}}{(n-2)!} \int_{x_0-a}^{x_0+a} k(t) dt.$$

Dalje dokaz teče kao u teoremi A.

**N a p o m e n a 2.** Jasno je da je teorema Lozinskog uopštene Pikarove teoreme. Može se i ovde, slično kao što je uradio Babkin sa Pikarovom teoremom, postaviti pitanje monotonosti niza  $(y_n(x), n \in \mathbb{N})$ . Iako se može dokazati teorema koja će biti opštija nego teorema 1 iz [1], samo ako se pretpostavi da je  $f_y(x, y) > 0$  na  $B$  i da je

$$y'_0(x) - f(x, y_0) \leq 0$$

na intervalu  $[x_0, x_0+a]$ . Medjutim, tako dobijena teorema jeste posledica teoreme I koju sam dokazao.

Slično Babkinu, R. Belman, [9], je raspravljao pitanje monotonosti Njutnovog postupka za rešavanje zadatka (1). Pre nego što navedemo Belmanove rezultate, navodimo jednu teoremu koja se odnosi na konveksnost funkcije  $f(x,y)$  po  $y$ , uniformno po  $x$ . Prvo dajemo definiciju takve konveksnosti, [8], [9],.

**D e f i n i c i j a 2.** Funkcija  $f(x,y)$  je konveksna po  $y$  uniformno po  $x$  u nekoj oblasti  $G$ , ako je ispunjen sledeći uslov

$$(13) \quad f(x, y_1 \lambda + (1-\lambda) y_2) \leq \lambda f(x, y_1) + (1-\lambda) f(x, y_2)$$

za bilo koje tačke  $(x, y_1), (x, y_2) \in G, \lambda \in \mathbb{R}$  i  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

Nejednačina (13) može se napisati u sledećem obliku

$$(13') \quad (y_1 - y_2) f(x, y) + (y_2 - y) f(x, y_1) + (y - y_1) f(x, y_2) \geq 0$$

gde je  $y$  neka vrednost izmedju  $y_1$  i  $y_2$ . To ćemo dokazati. Neka je odredjenosti rada,  $y_1 < y_2$ . Tada je  $y = \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2$  uvek izmedju  $y_1$  i  $y_2$ . Obrnuto, svaki broj  $y$  koji leži izmedju  $y_1$  i  $y_2$  može se pretpostaviti u obliku

$$y = \lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2,$$

gde je  $\lambda = (y_2 - y) : (y_2 - y_1)$ . Zaista, kako je  $y_1 < y < y_2$ , to je

$$\begin{aligned} y &= y_1 + y - y_1 = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{y_2 - y_1} (y - y_1) = \\ &= y_1 - y_1 \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} + y_2 \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \end{aligned}$$

Zbog toga se (13) može napisati u sledećem obliku

$$f(x, y) \leq \frac{y_2 - y}{y_2 - y_1} f(x, y_1) + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} f(x, y_2),$$

odakle sledi (13').

Posle ovoga, dokazaću jednu teoremu koja se odnosi na vezu izmedju egzistencije parcijalnog izvoda  $f_y(x,y)$  i konveksnosti

funkcije  $f(x,y)$  po  $y$ , uniformno po  $x$ . Teorema koju navodim jeste jedno uopštenje rezultata iz [10], vezanog za konveksnu diferencijabilnu funkciju  $f(x)$ , definisanu na intervalu  $[a,b]$ . Prelazimo na formulaciju te teoreme.

**T e o r e m a II.** Neka je funkcija  $f(x,y)$  definisana i neprekidna u nekoj oblasti  $G$  i neka u njoj ima konačan izvod  $f_y(x,y)$ . Da bi funkcija  $f(x,y)$  bila konveksna po  $y$ , uniformno po  $x$  u oblasti  $G$  potrebno je i dovoljno da njen izvod  $f_y(x,y)$  raste (u širem smislu) po  $y$ .

**D o k a z.** Uslov je potreban. Neka je  $f(x,y)$  konveksna funkcija po  $y$ , uniformno po  $x$  u oblasti  $G$ . Tada, polazeći od (13') možemo napisati

$$(14) \quad \frac{f(x,y_2) - f(x,y)}{y_2 - y} \geq \frac{f(x,y_2) - f(x,y)}{y_1 - y} .$$

Ako pustimo da  $y \rightarrow y_2$  u poslednjoj nejednačini, dobićemo

$$f_y(x,y_2) \geq \frac{f(x,y_1) - f(x,y_2)}{y_1 - y_2} .$$

Potpuno analogno, kada pustimo da  $y \rightarrow y_1$ , dobijamo

$$\frac{f(x,y_2) - f(x,y_2)}{y_1 - y_2} \geq f_y(x,y_1),$$

odakle zaključujemo da je

$$(15) \quad f_y(x,y_2) \geq f_y(x,y_1)$$

za  $y_2 \geq y_1$ .

Uslov je dovoljan. Neka važi (15). Tada je

$$\frac{f(x,y_1) - f(x,y)}{y_1 - y} = f_y(x, \xi_1),$$

$$\frac{f(x,y_2) - f(x,y)}{y_2 - y} = f_y(x, \xi_2),$$

gde je  $y_1 < \xi_1 < y < \xi_2 < y_2$ , odakle sledi (14), pa iz toga (13').

Na taj način je teorema II u potpunosti dokazana.

Ova teorema je vrlo korisna pri radu, jer je lakše raditi sa izvodom nego se koristiti pojmom konveksnosti.

Navodimo dve napomene u vezi sa teoremom II.

**N a p o m e n a 1.** Oblast  $G$  mora biti takva da sadrži sve duži koje su paralelne sa  $y$ -osom a njihovi krajevi leže u  $G$ . Dakle,  $G$  ne mora biti konveksan skup u ravni  $Oxy$ .

**N a p o m e n a 2.** Teorema II može se dokazati i za funkciju  $f(x,y)$ , gde je  $y = (y_1, \dots, y_n)$ . Uredjenje u  $R^n$  je po koordinatama:  $y^1 = (y_1^1, \dots, y_n^1)$  i  $y^2 = (y_1^2, \dots, y_n^2) \in R^n$ ;  $y^1 \leq y^2$  ako i samo ako je  $y_i^1 \leq y_i^2 (i = 1, 2, \dots, n)$ .

**P o s l e d i c a.** Ako funkcija  $f(x,y)$  ima unutar oblasti  $G$  pozitivan drugi izvod, tada je ona konveksna po  $y$ , uniformno po  $x$ .

Kao što smo već rekli, R.Belman je ispitivao monotonost Njutn-Kantorovičevog postupka za rešavanje zadatka (1). Izlažemo, ukratko, u čemu se satoji taj postupak. Neka je  $y_{n-1}(x)$ ,  $y_{n-1}(x_0) = y_0$ , približno rešenje zadatka (1) odredjeno. Tada se naredno približno rešenje  $y_n(x)$  odredjuje kao rešenje sledećeg zadatka.

$$y'_n = f_y(x, y_{n-1}(x))(y_n - y_{n-1}(x)) + f(x, y_{n-1}(x)),$$
$$y_n(x_0) = y_0 (n = 1, 2, \dots).$$

Belman, uz pretpostavku da je neprekidna i diferencijabilna po  $y$  funkcija  $f(x,y)$  konveksna po  $y$ , uniformno po  $x$ , dokazuje <sup>da je</sup> niz približnih rešenja  $(y_n(x))$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , monotono rastući.

Mamedov, [11], navodi još jedan postupak za rešavanje zadatka (1), koji je poznat pod imenom modifikovan Njutn-Kantorovičev postupak. Ovim postupkom se približno rešenje  $y_n(x)$  zadatka (1) odredjuje kao rešenje sledećeg zadatka

$$y'_n = f_y(x, y_0(x))(y_n - y_{n-1}(x)) + f(x, y_{n-1}(x)),$$
$$y_n(x_0) = y_0,$$

pod pretpostavkom da je  $y_{n-1}(x)$  već odredjeno i  $y_0(x)$  već izabrana

neprekidna funkcija koja ostaje ista za  $n = 1, 2, \dots$ .

Koristeći teoremu o diferencijalnim nejednačinama i teoremu II, dokazao sam teoremu III koja daje dovoljne uslove da bi niz približnih rešenja  $y_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , dobijen modifikovanim Njutn-Kantorovičevim postupkom, bio monotono opadajući.

**T e o r e m a III.** Pretpostavimo sledeće:

(i) neprekidna funkcija  $f(x, y)$  definisana u nekoj oblasti  $D \subset \mathbb{R}^2$  ima neprekidan izvod  $f_y(x, y)$  koja je opadajuća funkcija po drugom argumentu;

(ii) zadatak

$$(1) \quad y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

ima jedinstveno rešenje na intervalu  $[x_0, x_0 + a]$ ;

(iii) funkcija  $y_0(x)$  klase  $C^1[x_0, x_0 + a]$  zadovoljava nejednačinu

$$y_0'(x) - f(x, y_0(x)) \geq 0.$$

Tada niz  $(y_n(x))$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , definisan na sledeći način

$$y_1' = f_y(x, y_0(x))(y_1 - y_0(x)) + f(x, y_0(x)), \quad y_1(x_0) = y_0$$

$$y_{n+1}' = f_y(x, y_0(x))(y_{n+1} - y_n) + f(x, y_n),$$

$$y_{n+1}(x_0) = y_0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

konvergira ka rešenju zadatka (1) i pri tome je

$$y_0(x) \geq y_1(x) \geq \dots \geq y_n(x) \geq \dots \geq y(x)$$

na intervalu  $[x_0, x_0 + a]$ .

**D o k a z.** Prvo upoređujemo funkcije  $y_0(x)$  i  $y_1(x)$ .

Ako u jednačini

$$y_1' = f_y(x, y_0(x))(y_1 - y_0(x)) + f(x, y_0(x))$$

mesto funkcije  $y_1(x)$  stavimo  $y_0(x)$  imaćemo, na osnovu pretpostavke za funkciju  $y_0(x)$ , sledeću nejednačinu

$$y_0'(x) - f(x, y_0(x)) \geq 0,$$

odakle, na osnovu teoreme 1, važi da je  $y_0(x) \geq y(x)$  i  $y_0(x) \geq y_1(x)$ .

Dalje upoređujemo funkcije  $y_1(x)$  i  $y(x)$ :

$$y_1'(x) - f(x, y_1(x)) = f_y(x, y_0(x))(y_1(x) - y_0(x)) + f(x, y_0(x)) -$$

$$- f(x, y_1(x)) = f_y(x, y_0(x)) - f_y(x, \eta_1) (y_1(x) - y_0(x)),$$

gde je  $\eta_1$  neka vrednost između  $y_1(x)$  i  $y_0(x)$ . Zbog toga je  $f_y(x, y_0(x)) - f_y(x, \eta_1) \leq 0$ , jer funkcija  $f_y(x, y)$  opada po drugom argumentu. Prema već dokazanom imamo da je i  $y_1(x) - y_0(x) \leq 0$ .

Prema tome važi nejednačina

$$y_1'(x) - f(x, y_1(x)) \geq 0$$

odakle je  $y(x) \leq y_1(x) \leq y_0(x)$  na intervalu  $[x_0, x_0 + a]$ .

Neka je  $y_n(x)$  ( $n \geq 1$ ) funkcija koja zadovoljava sledeće uslove  $y_n' - f(x, y_n) \geq 0$  i  $y_n(x) \leq y_0(x)$  na intervalu  $[x_0, x_0 + a]$ . Lako se dokazuje da rešenje jednačine

$$y_{n+1}' = f_y(x, y_0(x)) (y_{n+1} - y_n) + f(x, y_n)$$

zadovoljava uslove  $y_{n+1}(x) \leq y_n(x)$  i  $y_{n+1}(x) \geq y(x)$ . Prema tome, dokazali smo da je formirani niz  $(y_n(x))$  monotono opadajući:

$$y(x) \leq \dots \leq y_{n+1} \leq \dots \leq y_1(x) \leq y_0(x).$$

Sada ćemo pokazati da je taj niz uniformno konvergentan na intervalu. Za to je dovoljno dokazati da je  $|y_{n+1} - y_n| \leq a_n$ , gde je  $a_n$  opšti član konvergentnog reda. Pre svega, uvodimo oznaku  $h_n(x) = |f(x, y_n(x)) - y_n'(x)|$ .

Tada iz

$$y_{n+1}' - y_n' = f_y(x, y_0(x))(y_{n+1} - y_n) + f(x, y_n) - y_n'$$

važi

$$2 |y_{n+1} - y_n| |y_{n+1}' - y_n'| \leq 2k |y_{n+1} - y_n|^2 +$$

$$+ 2h_n(x) |y_{n+1} - y_n|,$$

gde je  $|f_y(x, y_0(x))| \leq k$  na intervalu  $[x_0, x_0 + a]$ . Na osnovu leme II

važi ocena

$$|y_{n+1} - y_n| \leq \int_{x_0}^x e^{-k(t-x)} h_n(t) dt.$$

Kako je

$$\begin{aligned} h_n(x) &= |f(x, y_n(x)) - y'_n(x)| = \\ &= |f(x, y_n(x)) - f_y(x, y_0(x))(y_n - y_{n-1}) - f(x, y_{n-1})| \leq \\ &\leq 2k |y_n - y_{n-1}|, \end{aligned}$$

to konačno imamo

$$|y_{n+1} - y_n| \leq e^{ka} \int_{x_0}^x |y_n - y_{n-1}| dt, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

odakle se lako dokazuje da važi

$$|y_{n+1} - y_n| \leq \frac{1}{\alpha} (\alpha e^{ka})^n \frac{a^n}{n!}.$$

Dalji dokaz je sasvim jednostavan.

**N a p o m e n a .** Ako je funkcija  $f_y(x, y)$  monotono rastuća po drugom argumentu, tada treba staviti da je

$$y'_{n+1} = - f_y(x, y_0(x))(y_{n+1} - y_n) + f(x, y_n), \quad y_n(x_0) = y_0,$$

pa i u tom slučaju dobijamo jedan monoton postupak.  $(n = 0, 1, 2, \dots)$

Ako funkcija  $f(x, y)$  zadovoljava uopšteni Lipšicov uslov sa integrabilnom funkcijom  $k(x) \geq 0$  na intervalu  $[x_0, x_0 + a]$ , onda se može navesti jedan monoton postupak za rešavanje zadatka (1) koji je sličan onom u teoremi III. Medjutim, dalje se neće pretpostaviti ništa o egzistenciji i rašćenju izvoda  $f_y(x, y)$ . Naime, važi sledeća teorema.

**T e o r e m a IV .** Neka je, pored uslova u teoremi A, za funkciju  $f(x, y)$  ispunjen i uslov

$$y'_0(x) - f(x, y_0(x)) \geq 0 \quad (y_0(x_0) = y_0)$$

na intervalu  $[x_0, x_0 + a]$ . Tada je

$$y_0(x) \geq y_1(x) \geq \dots \geq y_n(x) \geq \dots \geq y(x),$$

gde je

$$y'_{n+1} = - k(x)(y_{n+1}(x) - y_n(x)) + f(x, y_n(x)) \quad (n=0, 1, \dots)$$

a  $y = y(x)$  rešenje zadatka (1).

**D o k a z .** Prema načinu konstruisanja niza  $(y_n(x))$ , imamo da  $y_1(x)$  zadovoljava sledeću jednačinu

$$y'_1(x) = - k(x)(y_1(x) - y_0(x)) + f(x, y_0(x)).$$

Ako umesto funkcije  $y_1(x)$  stavimo  $y_0(x)$  imaćemo nejednačinu

$$y_0'(x) - f(x, y_0(x)) \geq 0$$

na intervalu  $[x_0, x_0+a]$ . Zbog toga je, na osnovu teoreme 1, na tom intervalu  $y_1(x) \geq y_0(x)$ . Naš je zadatak, dalje, da pokažemo da važi i nejednačina

$$y_1'(x) - f(x, y_1(x)) \geq 0$$

na  $[x_0, x_0+a]$ , odakle ćemo zaključiti da važi  $y(x) \leq y_1(x)$ , gde je  $y(x)$  rešenje zadatka (1). Radi toga primetimo da iz činjenice da je  $y_0(x) \geq y_1(x)$  i uslova

$$|f(x, y_0(x)) - f(x, y_1(x))| \leq k(x) |y_0(x) - y_1(x)|$$

sledi

$$\begin{aligned} -k(x)(y_0(x) - y_1(x)) &\leq f(x, y_0(x)) - f(x, y_1(x)) \leq \\ &\leq k(x)(y_0(x) - y_1(x)). \end{aligned}$$

Koristeći prvu nejednačinu, imamo da je

$$\begin{aligned} 0 &\leq k(x)(y_0(x) - y_1(x)) + f(x, y_0(x)) - f(x, y_1(x)) = \\ &= -k(x)(y_1(x) - y_0(x)) + f(x, y_0(x)) - f(x, y_1(x)), \end{aligned}$$

odakle zaključujemo da važi

$$\begin{aligned} y_1'(x) - f(x, y_1(x)) &= \\ &= -k(x)(y_1(x) - y_0(x)) + f(x, y_0(x)) - f(x, y_1(x)) \geq 0. \end{aligned}$$

Oдавде, koristeći teoremu 1, dobijamo sledeću nejednačinu

$$y_1(x) \geq y(x)$$

na intervalu  $[x_0, x_0+a]$ . Neka je, dalje, funkcija  $y_n(x)$  određena iz uslova  $y_n'(x) - f(x, y_n(x)) \geq 0$  a funkcija  $y_{n+1}(x)$  kao rešenje jednačine

$$y_{n+1}' = -k(x)(y_{n+1} - y_n(x)) + f(x, y_n(x)), \quad y_{n+1}(x_0) = y_0.$$

Jasno je, na osnovu teoreme 1, da je  $y_{n+1}(x) \geq y_n(x)$ . Zaista, ako se u poslednjoj jednačini umesto  $y_{n+1}$  stavi  $y_n(x)$ , dobiće se

$$y_n'(x) - f(x, y_n(x)) \geq 0,$$

odakle sledi naše tvrdjenje. Dalje, imamo da je

$$y_{n+1}' - f(x, y_{n+1}) = -k(x)(y_{n+1} - y_n) + f(x, y_n) - f(x, y_{n+1}) \geq 0,$$

pa je  $y_{n+1}(x) \geq y(x)$  na intervalu  $[x_0, x_0+a]$ . Dakle, dokazali smo da je

$$y_0(x) \geq y_1(x) \geq \dots \geq y_n(x) \geq \dots \geq y(x).$$

Konvergenција niza  $(y_n(x))$ ,  $n=1,2,\dots$ , dokazuje se kao u teoremi III

Iskoristićemo lemu II, i oceniti razliku  $|y_{n+1}(x) - y(x)|$ . Pre svega, primećujemo da iz jednakosti

$$\begin{aligned}y'_{n+1}(x) &= -k(x)(y_{n+1}(x) - y_n(x)) + f(x, y(x)), \\y'(x) &= f(x, y(x))\end{aligned}$$

na intervalu  $[x_0, x_0+a]$ , sledi

$$|y'_{n+1} - y'| \leq k(x)|y_{n+1} - y_n| + k(x)|y_n - y|.$$

Dalje, imamo

$$\begin{aligned}|y'_{n+1} - y'| &\leq k(x)|y_{n+1} - y_n| + k(x)|y_n - y_{n+1} + y_{n+1} - y| \leq \\&\leq k(x)|y_{n+1} - y_n| + k(x)|y_n - y_{n+1}| + k(x)|y_{n+1} - y|,\end{aligned}$$

odnosno

$$|y'_{n+1} - y'| \leq k(x)|y_{n+1} - y| + 2k(x)|y_{n+1} - y_n|.$$

Posle množenja sa  $2|y_{n+1} - y|$  i smene  $\delta(x) = (y_{n+1} - y)^2$ , dobijamo

$$\delta'(x) \leq 2k(x)\delta(x) + 4k(x)|y_{n+1} - y_n| \sqrt{\delta(x)}.$$

Primena leme II dovodi do ocene

$$|y_{n+1}(x) - y(x)| \leq 2 \int_{x_0}^x e^{\int_t^x k(s) ds} k(t) |y_{n+1}(t) - y_n(t)| dt.$$

Sličnim postupkom se može oceniti i razlika  $|y_{n+1} - y_n|$ .

U daljem radu iznosimo neke rezultate poljskog matematičara R.Zubera, koje ćemo dobiti pod slabijim pretpostavkama i iskoristiti ih za dobijanje novih rezultata.

R.Zuber, polazeći od zadatka

$$(1) \quad y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

definiše niz novih zadataka

$$y' = F_n(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

takvih, da rešenja toga niza definišu niz funkcija

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), \dots,$$

koji konvergira ka rešenju zadatka (1). Sve se to preciznije iskazuje u sledećoj teoremi, [13],

**T e o r e m a 3.** Neka su funkcije  $f(x,y)$  i  $F_n(x,y)$  ( $n = 0,1,2$ ) definisane i neprekidne u pravougaoniku

$$R = \left\{ (x,y) \mid |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b \right\}.$$

Pored toga, te funkcije zadovoljavaju Lipšicov uslov sa konstantom  $L$ :

$$\begin{aligned} |f(x,y) - f(x,\bar{y})| &\leq L |y - \bar{y}| \\ |F_n(x,y) - F_n(x,\bar{y})| &\leq L |y - \bar{y}|. \end{aligned}$$

Za funkcije  $y_n(x)$  čine se sledeće pretpostavke:

- 1° grafik svake od njih leži u  $R$ ;
- 2° za svako  $n$  funkcija  $y_{n+1}(x)$  zadovoljava sledeći zadatak

$$y'_{n+1} = F_n(x, y_{n+1}), \quad y_{n+1}(x_0) = y_0$$

za  $|x - x_0| \leq a$ ;

- 3° na kraju, pretpostavimo da je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{|x-x_0| \leq a} |F_n(x, y_n(x)) - f(x, y_n(x))| < +\infty.$$

Pod navedenim pretpostavkama niz  $(y_n(x))$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , uniformno konvergira na dosta malom intervalu  $|x - x_0| \leq h$  ka rešenju zadatka (1).

Lako se vidi da Zuberov postupak iz prethodne teoreme obuhvata Pikarov i Njutn-Kantorovičev postupak za rešavanje zadatka (1). Dokaz teoreme 3 dat je u [14] i konstanta  $h$  određuje se iz uslova  $hL < \frac{1}{3}$ . Dokazaću teoremu V koja uopštava Zuberove rezultate iz teoreme 3. Za funkciju  $f(x,y)$  imamo iste pretpostavke kao u teoremi A. Kao što teorema A (S.M.Loziński) uopštava Pikarovu teoremu za zadatak (1), tako teorema V uopštava Zuberove rezultate iz teoreme 3.

**T e o r e m a V.** Pretpostavimo da su funkcije  $f(x,y)$  i  $F_n(x,y)$  definisane i neprekidne u oblasti  $B \subset R^2$  (zatvorenoj ili otvorenoj) i da postoji integrabilna funkcija  $M(x)$ , takva da je  $|f(x,y)| \leq M(x)$  ( $x_0 \leq x \leq x_0 + a$ ,  $(x, y(x)) \in B$ ). Pretpostavimo da je zatvorena oblast

$$Q = \left\{ (x,y) \mid x_0 \leq x \leq x_0 + a, |y - y_0| \leq \int_{x_0}^x M(t) dt \right\}$$

sadržana u  $B$ . Pored toga, neka na  $Q$  funkcije  $f(x,y)$  i  $F_n(x,y)$  zadovoljavaju uopšteni Lipšicov uslov sa integrabilnom nenegativnom

funkcijom  $k(x)$  na intervalu  $[x_0, x_0+a]$ :

$$|f(x, y) - f(x, \bar{y})| \leq k(x) |y - \bar{y}|,$$

$$|F_n(x, y) - F_n(x, \bar{y})| \leq k(x) |y - \bar{y}|$$

za funkcije, pak,  $y_n(x)$  čine se sledeće pretpostavke:

1° grafik svake od njih leži u  $Q$ ;

2° za svako  $n$  funkcija  $y_{n+1}(x)$  zadovoljava sledeći zadatak

$$y'_{n+1} = F_n(x, y_{n+1}), \quad y_{n+1}(x_0) = y_0;$$

3° važi sledeća ocena

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x_0 \leq x \leq x_0+a} |F_n(x, y_n(x)) - f(x, y_n(x))| < +\infty.$$

Pod navedenim pretpostavkama niz funkcija  $(y_n(x))$  uniformno konvergira ka rešenju  $y(x)$  zadatka (1) na nekom intervalu  $x_0 \leq x \leq x_0 + h$ , gde je  $h$  dosta mali broj.

D o k a z. Stavimo da je  $\delta_n(x) = F_n(x, y_n(x)) - f(x, y_n(x))$ , pa zbog toga imamo

$$y'_{n+1} = f(x, y_n) + F_n(x, y_{n+1}) - F_n(x, y_n) + \delta_n$$

$$y'_n = f(x, y_{n-1}) + F_{n-1}(x, y_n) - F_{n-1}(x, y_{n-1}) + \delta_{n-1}.$$

Posle integracije i oduzimanja dobijamo

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= \int_{x_0}^x [f(t, y_n) - f(t, y_{n-1})] dt + \\ &+ \int_{x_0}^x [F_n(t, y_{n+1}) - F_n(t, y_n)] dt - \int_{x_0}^x [F_{n-1}(t, y_n) - F_{n-1}(t, y_{n-1})] dt \\ &+ \int_{x_0}^x [\delta_n(t) - \delta_{n-1}(t)] dt. \end{aligned}$$

Dalje, na osnovu pretpostavki za funkcije  $f(x, y)$  i  $F_n(x, y)$ , imamo da je

$$\begin{aligned} |y_{n+1} - y_n| &\leq 2 \int_{x_0}^x k(t) |y_n - y_{n+1}| dt + \int_{x_0}^x k(t) |y_{n+1} - y_n| dt + \\ &+ \int_{x_0}^x (|\delta_n(t)| + |\delta_{n+1}(t)|) dt. \end{aligned}$$

Neka je

$$\rho_{n+1} = \sup_{x_0 \leq x \leq x_0+a} |y_{n+1}(x) - y_n(x)|, \quad \varepsilon_n = \sup_{x_0 \leq x \leq x_0+h} |\delta_n(x)|,$$

gde će  $h$  biti dalje precizirano. Tada je

$$\rho_{n+1} \leq (2 \int_{x_0}^{x_0+h} k(t) dt) \rho_n + \left( \int_{x_0}^{x_0+h} k(t) dt \right) \rho_{n+1} + h (\varepsilon_n + \varepsilon_{n-1}).$$

Konstantu  $h$  biramo tako da je

$$a = \int_{x_0}^{x_0+h} k(t) dt < \frac{1}{3}$$

pa zbog toga možemo napisati

$$\rho_{n+1} \leq \frac{2a}{1-a} \rho_n + \frac{h}{1-a} (\varepsilon_n + \varepsilon_{n-1}) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Za tako izabrano  $a$  imamo da je  $q = \frac{2a}{1-a} < 1$ . Stavićemo da je

$$\psi_n = \frac{h}{1-a} (\varepsilon_n + \varepsilon_{n-1}).$$

pa dobijamo sledeću vezu

$$\rho_{n+1} \leq q \rho_n + \psi_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Nije teško videti da važi sledeće

$$\rho_2 \leq q \rho_1 + \psi_1, \quad \rho_3 \leq q \rho_2 + \psi_2 \leq q^2 \rho_1 + q \psi_1 + \psi_2, \dots,$$

$$\rho_{n+1} \leq q^n \rho_1 + q^{n-1} \psi_1 + q^{n-2} \psi_2 + \dots + q \psi_{n-1} + \psi_n$$

odakle se dobija

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_{n+1} \leq \rho_1 \sum_{n=1}^{\infty} q^n + \left( \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} \right) \left( \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \right).$$

Na taj način, dokazali smo da red  $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_{n+1}$  konvergira.

Kako je

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq \sup_{x_0 \leq x \leq x_0+h} |y_{n+1}(x) - y_n(x)| = \delta_{n+1}$$

to imamo da red

$$y_0(x) + (y_1(x) - y_0(x)) + \dots + (y_{n+1}(x) - y_n(x)) + \dots$$

uniformno konvergira na intervalu  $[x_0, x_0+h]$  ka funkciji  $y(x)$ , gde je  $h < \frac{1}{3}$ . Zbir poslednjeg reda jeste rešenje problema (1), što se vidi iz jednakosti

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt + \int_{x_0}^x [F_n(t, y_{n+1}(t)) - F_n(t, y_n(t))] dt + \int_{x_0}^x \delta_n(t) dt$$

kada se pusti da  $n \rightarrow \infty$ . Tada je

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt,$$

što je trebalo dokazati.

Zuber je pretpostavio da funkcije  $f(x, y)$  i  $F_n(x, y) (n = 0, 1, 2, \dots)$  pored ostalog, zadovoljavaju Lipšicov uslov sa konstantom  $L$ . To obezbeđuje da zadatak (1) ima jedinstveno rešenje. Ako odbacimo taj uslov za funkciju  $f(x, y)$ , pitanje je da li se onda može dokazati Peanova teorema. Kao što će se videti, odgovor je potvrđan.

Sve navedene uslove iz teoreme 3 za funkcije  $f(x, y)$  i  $F_n(x, y)$  zadržavamo osim Lipšicovog uslova za funkciju  $f(x, y)$ . Dakle, funkcija  $f(x, y)$  biće samo neprekidna u pravougaoniku  $R$ .

Pokazaćemo, prvo, da je niz  $(y_n(x))$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , uniformno ograničen i podjednako neprekidan na intervalu  $|x - x_0| \leq a$ . Ta činjenica sledi iz pretpostavke da funkcije  $y_n(x)$  leže u pravougaoniku  $R$ . Tada je

$$|y_n(x)| \leq |y_n(x) - y_0| + |y_0| \leq b + |y_0|$$

za svako  $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$  i svako  $n \in \mathbb{N}$ .

Dalje, kako je

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x F_{n-1}(t, y_n(t)) dt,$$

to je

$$y_n(x) - y_n(\bar{x}) = \int_{\bar{x}}^x F_{n-1}(t, y_n(t)) dt,$$

odnosno

$$\begin{aligned} |y_n(x) - y_n(\bar{x})| &\leq \left| \int_{x_0}^x F_{n-1}(t, y_n(t)) - F_{n-1}(t, y_{n-1}(t)) dt \right| + \\ &+ \left| \int_{x_0}^x F_{n-1}(t, y_{n-1}(t)) - f(t, y_{n-1}(t)) dt \right| + \\ &+ \left| \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt \right| \leq L \left| \int_{x_0}^x |y_n(t) - y_{n-1}(t)| dt \right| + \end{aligned}$$

+  $K|x - \bar{x}| + M|x - \bar{x}|$ , gde je  $K$  konstanta takva da je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{|x-x_0| \leq a} |F_n(x, y_n(t)) - f(x, y_n(t))| < K$$

a  $|f(x, y)| \leq M$  ( $f(x, y)$  - neprekidna funkcija na  $R$ ). Kako funkcije

$y_n(x)$  ne izlazi iz  $R$  za  $|x - x_0| \leq a$ , to je razlika  $|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq 2b$

Dakle je

$$|y_n(x) - y_n(\bar{x})| \leq A |x - \bar{x}|,$$

gde je  $A = 2bL + K + M$  za  $|x - x_0| \leq a$  i svako  $n \in \mathbb{N}$ . Na taj način smo dokazali da je niz  $(y_n(x))$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , podjednako neprekidan za  $|x - x_0| \leq a$ . Prema Arcela-Askolijevom stavu, [3], postoji podniz  $(y_{n_k}(x))$  niza  $(y_n(x))$  koji uniformno konvergira na intervalu  $|x - x_0| \leq a$  ka neprekidnoj funkciji  $y(x)$ . Kako sve funkcije niza  $(y_n(x))$  prolaze kroz tačku  $(x_0, y_0)$  to isto čini i funkcija  $y(x)$ . Pokazaćemo da je  $y(x)$  rešenje zadatka (1). Da bismo to dokazali, polazimo od jednakosti

$$y_{n_k}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x F_{n_{k-1}}(t, y_{n_k}(t)) dt$$

i pokazaćemo da neka desna strana teži ka

$$y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

za  $|x - x_0| \leq a$ . Radi toga uočimo sledeću jednakost

$$\begin{aligned} y_0 + \int_{x_0}^x F_{n_{k-1}}(t, y_{n_k}(t)) dt &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt + \\ &+ \int_{x_0}^x [F_{n_{k-1}}(t, y_{n_k}(t)) - F_{n_{k-1}}(t, y_{n_{k-1}}(t))] dt + \\ &+ \int_{x_0}^x [f(t, y_{n_{k-1}}(t)) - f(t, y(t))] dt + \int_{x_0}^x [F_{n_{k-1}}(t, y_{n_{k-1}}(t)) - f(t, y(t))] dt, \end{aligned}$$

i pokažimo da drugi, treći i četvrti integral na desnoj strani teže uniformno ka nuli na intervalu  $|x_0 - x| \leq a$  kada  $k \rightarrow +\infty$ . Drugi integral teži ka nuli zbog toga što funkcije  $F_n(x, y)$  zadovoljavaju Lipšicov uslov sa konstantom  $L$  i što niz  $(y_{n_k}(x))$  uniformno konvergira za  $|x - x_0| \leq a$ :

$$\left| \int_{x_0}^x [F_{n_{k-1}}(t, y_{n_k}(t)) - F_{n_{k-1}}(t, y_{n_{k-1}}(t))] dt \right| \leq L \int_{x_0}^x |y_{n_k}(t) - y_{n_{k-1}}(t)| dt.$$

Zbog neprekidnosti funkcije  $f(x, y)$  na zatvorenom pravougaoniku  $R$ , sledi njena uniformna neprekidnost. Kako niz  $(y_{n_k}(x))$  uniformno konvergira ka funkciji  $y(x)$ , to se razlika

$$f(x, y(x)) - f(x, y_{n_k}(x))$$

može učiniti proizvoljno malom za dovoljno veliko  $k$  i za svako  $x$  iz intervala  $[x_0 - a, x_0 + a]$ .

Dalje, kako je

$$\sup |F_n(x, y_n(x)) - f(x, y_n(x))|$$

opšti član konvergentnog reda, to onda on teži nuli. Međutim, kako je

$$\begin{aligned} & |F_{n_{k-1}}(x, y_{n_{k-1}}(x)) - f(x, y_{n_{k-1}}(x))| \leq \\ & \leq \sup |F_{n_{k-1}}(x, y_{n_{k-1}}(x)) - f(x, y_{n_{k-1}}(x))|, \end{aligned}$$

to je tvrdjenje za treći integral očigledno.

Na osnovu gornjeg, ako pustimo da  $k \rightarrow +\infty$ , dobićemo

$$y(x) = y_0 + \int_x^{x_0} f(t, y(t)) dt$$

za  $|x - x_0| \leq a$ . Kako su funkcije  $y(x)$  i  $f(x, y)$  neprekidne, to je i funkcija pod integralom u poslednjoj jednakosti neprekidna. Zbog toga desna strana u toj jednakosti ima izvod za svako  $x$ . Takva je tada i leva, pa je poslednja jednakost ekvivalentna sa sledećom

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0$$

za  $|x - x_0| \leq a$ .

Ako izvršimo analizu korišćenja uslova

$$(16) \sum_{n=0}^{\infty} \sup_{|x-x_0| \leq a} |F_n(x, y_n(x)) - f(x, y_n(x))| < +\infty$$

u prethodnom rasudjivanju, onda dolazimo do sledećih zaključaka. Dva puta smo se pozivali na uslov (16). U prvom slučaju hteli smo da procenimo integral

$$\left| \int_{x_0}^x |F_{n-1}(t, y_{n-1}(t)) - f(t, y_{n-1}(t))| dt \right|$$

i za to nam je bilo dovoljno da

$$\delta_{n-1} = \sup_{|x-x_0| \leq a} |F_{n-1}(x, y_{n-1}(x)) - f(x, y_{n-1}(x))| \geq$$

$$\geq |F_{n-1}(x, y_{n-1}(x)) - f(x, y_{n-1}(x))|$$

bude ograničen niz.

U drugom slučaju bilo je potrebno da pokažemo da integral

$$\int_{x_0}^x [F_{n_{k-1}}(t, y_{n_{k-1}}(t)) - f(t, y_{n_{k-1}}(t))] dt$$

teži nuli a za to je dovoljno da  $\delta_n$  bude nula niz: u tom slučaju imamo procenu za poslednji integral

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^x |F_{n_{k-1}}(t, y_{n_{k-1}}(t)) - f(t, y_{n_{k-1}}(t))| dt \leq \\ & \leq \int_{x_0}^x \sup_{|x-x_0| \leq a} |F_{n_{k-1}}(t, y_{n_{k-1}}(t)) - f(t, y_{n_{k-1}}(t))| dt \leq \delta_{n_{k-1}} |x-x_0|. \end{aligned}$$

Prema tome, uslov

$$(16) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \sup_{|x-x_0| \leq a} |F_n(x, y_n(x)) - f(x, y_n(x))| < +\infty$$

možemo zameniti sledećim, slabijim, uslovom

$$\sup_{|x-x_0| \leq a} |F_n(x, y_n(x)) - f(x, y_n(x))| = \delta_n \rightarrow 0$$

kada  $n \rightarrow \infty$ .

Prethodno možemo iskazati u sledećoj teoremi.

**T e o r e m a VI.** Neka su funkcije  $f(x, y)$  i  $F_n(x, y)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  neprekidne u pravougaoniku

$$R = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}.$$

Sve funkcije  $F_n(x, y)$  zadovoljavaju Lipšicov uslov sa konstantom  $L$ :

$$|F_n(x, y) - F_n(x, \bar{y})| \leq L |y - \bar{y}|.$$

Za funkcije  $y_n(x)$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ), čine se sledeće pretpostavke:

1° svaka od njih leži u pravougaoniku  $R$ ;

2° za svako  $n = 0, 1, 2, \dots$  funkcija  $y_{n+1}(x)$  zadovoljava sledeći

zadatak

$$y'_{n+1} = F_n(x, y_{n+1}), \quad y_{n+1}(x_0) = y_0$$

za  $|x - x_0| \leq a$ ;

3° na kraju, važi i

$$\sup |F_n(x, y_n(x)) - f(x, y_n(x))| = \delta_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Tada postoji bar jedno rešenje zadatka (1) definisano na celom intervalu  $|x - x_0| \leq a$ .

Koristeći ideju dokaza teoreme VI i neke njene rezultate, dokazao sam narednu teoremu koja je opštija od Zuberove teoreme 3. Teorema koju dokazujem, za razliku od Zuberove, sadrži i ocenu greške koja se dobija pomoću leme II.

**T e o r e m a VII.** Neka su funkcije  $f(x, y)$  i  $F_n(x, y)$ ,  $(n=0, 1, 2, \dots)$  definisane i neprekidne u pravougaoniku

$$R = \left\{ (x, y) : \left\{ \begin{array}{l} |x - x_0| \leq a, \\ |y - y_0| \leq b \end{array} \right. \right\}.$$

Pored toga, te funkcije zadovoljavaju Lišicov uslov sa konstantom  $L$ :

$$|f(x, y) - f(x, \bar{y})| \leq L |y - \bar{y}|,$$

$$|F_n(x, y) - F_n(x, \bar{y})| \leq L |y - \bar{y}|.$$

Za funkcije  $y_n(x)$  čine se sledeće pretpostavke

1° grafik svake od njih leži u  $R$ ;

2° za svako  $n$  funkcija  $y_{n+1}(x)$  zadovoljava sledeći zadatak

$$y'_{n+1} = F_n(x, y_{n+1}), \quad y_{n+1}(x_0) = y_0$$

za  $|x - x_0| \leq a$ ;

3° na kraju, pretpostavimo i da važi

$$\sup_{|x-x_0| \leq a} |F_n(x, y_n(x)) - f(x, y_n(x))| = \delta_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Pod navedenim pretpostavkama niz  $(y_n(x))$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , uniformno konvergira na celom intervalu  $|x - x_0| \leq a$  ka rešenju zadatka (1) i pri tome važi ocena

$$|y_{n+1}(x) - y(x)| \leq \frac{\delta_n}{L} (e^{L(x-x_0)} - 1) + 2 \int_{x_0}^x |y_{n+1}(t) - y_n(t)| e^{-L(t-x)} dt$$

za  $x_0 \leq x \leq x_0 + a$ .

D o k a z. Ova teorema se razlikuje od teoreme VI po pretpostavci da funkcija  $f(x,y)$  zadovoljava Lipšicov uslov sa konstantom  $L$ . Zbog toga zadatak

$$(1) \quad y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

ima jedinstveno rešenje za  $|x - x_0| \leq a$  i iz niza  $(y_n(x))$  nije potrebno izdvojiti podniz  $(y_{n_k}(x))$ , videti naprimer [4]. Prema tome, niz  $(y_n(x))$  konvergira ka jedinstvenom rešenju  $y(x)$  zadatak (1).

Ocenićemo razliku  $|y_{n+1}(x) - y(x)|$ , koristeći lemu II.

Polazimo od jednakosti

$$y'_{n+1}(x) = F_n(x, y_{n+1}(x)), \quad y_{n+1}(x_0) = y_0,$$

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0,$$

dobijamo

$$\begin{aligned} |y'_{n+1} - y'| &= |F_n(x, y_{n+1}) - f(x, y)| \leq \\ &\leq |F_n(x, y_{n+1}) - F_n(x, y_n)| + |F_n(x, y_n) - f(x, y_n)| + \\ &+ |f(x, y_n) - f(x, y)| \leq L|y_{n+1} - y_n| + \delta_n + L|y_n - y| = \\ &= L|y_{n+1} - y_n| + \delta_n + L|y_n - y_{n+1} + y_{n+1} - y| \leq \\ &\leq L|y_{n+1} - y_n| + 2L|y_{n+1} - y_n| + \delta_n. \end{aligned}$$

Poslednja diferencijalna nejednačina može se napisati i ovako

$$|y'_{n+1} - y'| \leq L|y_{n+1} - y| + \varphi_n(x),$$

gde je  $\varphi_n(x) = \delta_n + 2L|y_{n+1} - y_n|$ . Poslednju nejednačinu množimo sa  $2|y_{n+1} - y|$  i dobijamo

$$2|y'_{n+1} - y'| |y_{n+1} - y| \leq 2L|y_{n+1} - y|^2 + 2\varphi_n(x)|y_{n+1} - y|.$$

Ako stavimo da je  $\delta(x) = (y_{n+1} - y)^2$ , pa iz poslednje nejednačine dobijamo nejednačinu

$$\delta'(x) \leq 2L\delta(x) + 2\varphi_n(x)\sqrt{\delta(x)}, \quad \delta(x_0) = 0.$$

Na osnovu leme II imamo ocenu

$$|y_{n+1} - y| \leq \frac{\delta_n}{L} (e^{L(x-x_0)} - 1) + 2 \int_{x_0}^x |y_{n+1} - y_n| e^{-L(t-x)} dt,$$

čime je teorema u potpunosti dokazana.

Onako kao što su Babkin i Belman postavili pitanje monotonosti Pikarovog i Njutn-Kantorovičevog postupka za rešavanja zadatka (1), prirodno je postaviti i pitanje monotonosti Zuberovog postupka. Dokazaću sledeće dve teoreme, u kojima imamo dovoljne uslove da bi Zuberov postupak bio monoton. Dokaz tih teorema zasniva se na teoremi 2.

**T e o r e m a VIII.** Neka je, pored uslova u teoremi VII ispunjen i sledeći uslov

$$F_0(x,y) \leq F_1(x,y) \leq \dots \leq F_n(x,y) \leq \dots \leq f(x,y)$$

na  $R_1 \subset R$ , gde je

$$R_1 = \left\{ (x,y) : \left( x_0 \leq x \leq x_0 + a, |y - y_0| \leq b \right) \right\}$$

Tada je

$$y_1(x) \leq y_2(x) \leq \dots \leq y_n(x) \leq \dots \leq y(x)$$

na intervalu  $[x_0, x_0 + a]$ .

**D o k a z.** Kako funkcije  $f(x,y)$  i  $F_n(x,y)$  zadovoljavaju

Lipšicov uslove sa konstantom  $L$ , to je moguće primeniti teoremu 2.

Kako je  $y_{n+1}(x_0) = y(x_0) = y_0$  i

$$y'_{n+1} = F_n(x, y_{n+1}) \leq f(x, y_{n+1}) \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

odnosno

$$y'_{n+1} \leq f(x, y_{n+1}),$$

pa je

$$y'_{n+1}(x) \leq y(x) \quad (x_0 \leq x \leq x_0 + a), \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

Dalje, pokažaćemo da je

$$y_n(x) \leq y_{n+1}(x) \quad (x_0 \leq x \leq x_0 + a), \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Zaista, prema uslovima u teoremi imamo

$$y'_n = F_{n-1}(x, y_n) \leq F_n(x, y_n),$$

odnosno

$$y'_n \leq F_n(x, y_n), \quad y_n(x_0) = y_0.$$

Medjutim, kako je

$$y'_{n+1} = F_n(x, y_{n+1}),$$

pa je na osnovu teoreme 2 ispunjena nejednačina

$$y_n(x) \leq y_{n+1}(x) \quad (x_0 \leq x \leq x_0 + a) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Na taj način teorema je u potpunosti dokazana.

Još jednom se vraćamo na teoremu VII iz koje izbacujemo pretpostavku da funkcija  $f(x, y)$  zadovoljava Lipšicov uslov. Pokazaćemo da zadatak (1) ima minimalno rešenje na intervalu  $[x_0, x_0 + a]$ .

Da bi bilo sve to jasnije, dokazaćemo sledeću teoremu.

**T e o r e m a IX.** Neka su funkcije  $f(x, y)$  i  $F_n(x, y)$  ( $n=0, 1, 2,$  definisane i neprekidne u pravougaoniku

$$R_1 = \left\{ (x, y) : x_0 \leq x \leq x_0 + a, |y - y_0| \leq b \right\}.$$

Dalje, funkcije  $F_n(x, y)$  zadovoljavaju Lipšicov uslov sa konstantom  $L$ :

$$|F_n(x, y) - F_n(x, \bar{y})| \leq L |y - \bar{y}|$$

i niz nejednačina na  $R_1$

$$F_0(x, y) \leq F_1(x, y) \leq \dots \leq F_n(x, y) \leq \dots \leq f(x, y).$$

Za funkcije  $y_n(x)$  čine se sledeće pretpostavke:

1<sup>o</sup> grafik svake od njih leži u  $R_1$ ;

2<sup>o</sup> za svako  $n$  funkcija  $y_{n+1}(x)$  zadovoljava sledeći zadatak

$$y'_{n+1} = F_n(x, y_{n+1}), \quad y_{n+1}(x_0) = y_0$$

za  $x_0 \leq x \leq x_0 + a$ ,

3<sup>o</sup> na kraju, pretpostavimo da je

$$\sup_{x_0 \leq x \leq x_0 + a} |F_n(x, y_n(x)) - f(x, y_n(x))| = \delta_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Tada niz  $(y_n(x))$  zadovoljava uslov

$$y_0(x) \leq y_1(x) \leq \dots \leq y_n(x) \leq \dots$$

i sadrži podniz  $y_{n_k}(x)$  koji konvergira ka minimalnom rešenju  $y(x)$  zadatka (1) na intervalu  $[x_0, x_0 + a]$ .

**D o k a z.** Onako kako smo to učinili pri dokazu teoreme VI, tako i ovde dokazujemo da je niz  $y_n(x)$  uniformno ograničen i potpuno neprekidan. Zbog toga možemo da izdvojimo podniz  $y_{n_k}(x)$  koji uniformno konvergira ka neprekidnoj funkciji  $y(x)$ . Dalje, kao u teoremi VI,

dokazuje se da je  $y(x)$  rešenje zadatka (1) na intervalu  $[x_0, x_0+a]$ . Koristeći niz nejednčina za  $F_n(x,y)$  ( $n = 0,1,2,\dots$ ) i  $f(x,y)$  imamo

$$y'_{n_k} = F_{n_{k-1}}(x, y_{n_k}) \leq F_{n_k}(x, y_{n_k}),$$

pa je na osnovu teoreme 1 ispunjena nejednakost

$$y_{n_k}(x) \leq y_{n_{k+1}}(x)$$

na intervalu  $[x_0, x_0+a]$ . Dalje, za bilo koje  $k$  imamo da je

$$y'_{n_k} = F_{n_{k-1}}(x, y_{n_k}) \leq f(x, y_{n_k}(x)),$$

odakle je

$$y_{n_k}(x) \leq \bar{y}(x),$$

gde je  $\bar{y}(x)$  bilo koje rešenje zadatka (1). Ako se u poslednjoj nejednčini pusti da  $k \rightarrow +\infty$ , dobiće se nejednčina

$$y(x) \leq \bar{y}(x)$$

na intervalu  $[x_0, x_0+a]$ . Na taj način je dokazana egzistencija minimalnog rešenja problema (1) na  $[x_0, x_0+a]$ .

Analogno se može dokazati egzistencija maksimalnog rešenja zadatka (1) na intervalu  $[x_0, x_0+a]$ .

**N a p o m e n a.** Nije teško videti da se neke od dokazanih teorema mogu preneti i na sistem diferencijalnih jednačina

$$y'_i = f_i(x, y_1, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

pretpostavljajući da su funkcije  $f_1, f_2, \dots, f_n$  neprekidne i da zadovoljavaju Lipšicov uslov. To se, pre sve, odnosi na tereme VI i VII.

Pretpostavke da funkcije  $f(x,y)$  i  $F_n(x,y)$  zadovoljavaju Lipšicov uslov sa konstantom  $L$

$$|f(x,y) - f(x,\bar{y})| \leq L|y - \bar{y}|,$$

$$|F_n(x,y) - F_n(x,\bar{y})| \leq L|y - \bar{y}|,$$

zamenićeemo opštijim uslovima

$$|f(x,y) - f(x,\bar{y})| \leq \varphi(x, |y - \bar{y}|),$$

$$|F_n(x,y) - F_n(x,\bar{y})| \leq \varphi(x, |y - \bar{y}|),$$

gde je  $\varphi(x,u)$  neprekidna funkcija za  $|x - x_0| \leq a$ ,  $0 \leq u \leq 2b$ .

Formulisaćemo i dokazaćemo teoremu sa novim pretpostavkama, koja daje opštiji rezultat nego teorema VII. Za dokaz neće biti dovoljna teorema 1 o diferencijalnim nejednačinama. Navešćemo opštiju teoremu o diferencijalnim nejednačinama [20], [21] i iskoristiti je za dokaz nove teoreme.

**T e o r e m a 3.** Pretpostavimo da je  $f(x,y)$  neprekidna funkcija u oblasti  $G \subset \mathbb{R}^2$  i da je  $v(x)$  neprekidna funkcija  $v(x)$  zadovoljava diferencijalnu nejednačinu

$$D_+ v(x) \leq f(x, v(x)) \quad \text{y} \quad v(x_0) = y_0,$$

gde je  $D_+ v(x)$  - desni donji izvodni broj funkcije  $v(x)$  u tački  $x$ .

Osim toga, neka je  $y(x)$  maksimalno rešenje zadatka

$$(1) \quad y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Tada je  $v(x) \leq y(x)$  za  $x \geq x_0$ .

U toku daljeg izlaganja više puta ćemo koristiti teoremu 3.

Prelazimo na formulaciju ranije pomenute teoreme.

**T e o r e m a X.** Neka su funkcije  $f(x,y)$  i  $F_n(x,y)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) definisane i neprekidne na

$$R = \left\{ (x,y) : |x-x_0| \leq a, |y-y_0| \leq b \right\}.$$

Pored toga, one na  $R$  zadovoljavaju uslove

$$(17) \quad |f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq \varphi(x, |y_1 - y_2|),$$

$$(18) \quad |F_n(x,y_1) - F_n(x,y_2)| \leq \varphi(x, |y_1 - y_2|),$$

gde je  $\varphi(x,u)$  neprekidna funkcija definisana za  $|x-x_0| \leq a$ ,

$0 \leq u \leq 2b$  i takva da zadatak

$$(19) \quad u' = \varphi(x,u), \quad u(x_0) = 0$$

ima samo nulto rešenje.

Za funkcije  $y_n(x)$  ( $n=1, 2, \dots$ ) čine se sledeće pretpostavke:

(i) svaka od njih leži u  $R$ ;

(ii) za svako  $n=0,1,2,\dots$  funkcija  $y_{n+1}(x)$  zadovoljava Košijev zadatak

$$(20) \quad y'_{n+1} = F_n(x, y_{n+1}), \quad y_{n+1}(x_0) = y_0,$$

(iii) na kraju, pretpostavimo da važi i

$$(21) \quad \sup_{|x-x_0| \leq a} |F_n(x, y_n(x)) - f(x, y_n(x))| \leq \delta_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Tada niz  $(y_n(x))$ ,  $n=1,2,\dots$ , uniformno konvergira ka rešenju zadatka

$$(1) \quad y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

na intervalu  $|x-x_0| \leq a$ .

D o k a z . Kako su funkcije  $f(x, y)$  i  $F_n(x, y)$  neprekidne, to postoje rešenja zadatka (20) i (1). Pokazaćemo da su ta rešenja jedinstvena. Učinićemo to, primera radi, samo za zadatak (1). Pretpostavimo da postoje dva takva rešenja  $y_1(x)$  i  $y_2(x)$ . Stavimo da je  $v(x) = |y_1(x) - y_2(x)|$  i iskoristimo nejednačinu

$$D_+ v(t) \leq |v'(t)|,$$

koja će biti dokazana u II glavi. Tada je, na osnovu (17),

$$\begin{aligned} D_+ v(x) &= D_+ |y_1(x) - y_2(x)| \leq |y_1'(x) - y_2'(x)| = \\ &= |f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x))| \leq \varphi(x, v(x)). \end{aligned}$$

Prema tome, dokazali smo da funkcija  $v(x)$  zadovoljava diferencijalnu nejednačinu

$$(19') \quad D_+ v(x) \leq \varphi(x, v(x)), \quad v(x_0) = 0.$$

Kako zadatak (19) ima samo nulto rešenje, na osnovu teoreme 3 o diferencijalnim nejednačinama imamo da je  $v(x) = |y_1(x) - y_2(x)| \leq 0$ , odakle sledi da je  $y_1(x) \equiv y_2(x)$  na intervalu  $[x_0, x_0+a]$ . Mogućnost preslikavanja intervala  $[x_0-a, x_0]$  na interval  $[x_0, x_0+a]$  linearnom transformacijom dopušta svodjenje dokaza za interval  $[x_0-a, x_0]$  na dokaz za  $[x_0, x_0+a]$ . Na taj način, dokazali smo da zadatak ima jedinstveno rešenje na celom intervalu  $|x-x_0| \leq a$ .

Napominjemo da smo zaključak o jedinstvenosti rešenja zadatka (1) izveli na osnovu teoreme o diferencijalnim nejednačinama.

Lako je dokazati da je niz  $(y_n(x))$  ( $n=1,2,\dots$ ) uniformno ogra-

ničen:

$$|y_n(x)| = |y_n(x) - y_0 + y_0| \leq |y_n(x) - y_0| + |y_0| \leq b + |y_0|.$$

Primetimo da je konvergentan niz  $(\delta_n)$  ograničen:  $0 \leq \delta_n \leq M_1$ .

Zbog neprekidnosti funkcije  $\varphi(x, u)$  i  $f(x, y)$  imamo da su i one ograničene na odgovarajućim oblastima definisanosti:

$$|\varphi(x, u)| \leq M_2, \quad |f(x, y)| \leq M_3.$$

Zbog toga važi sledeće

$$\begin{aligned} |y'_{n+1}(x)| &\leq |F_n(x, y_{n+1}(x)) - F_n(x, y_n(x))| + \\ &+ |F_n(x, y_n(x)) - f(x, y_n(x))| + |f(x, y_n(x))| \\ &\varphi(x, |y_{n+1}(x) - y_n(x)|) + a_n + M_3 \leq M_1 + M_2 + M_3 \equiv M. \end{aligned}$$

Na osnovu toga i Lagranžove teoreme o srednjoj vrednosti imamo

$$|y_n(x_1) - y_n(x_2)| = |y'_n(\xi)| |x_1 - x_2| \leq M |x_1 - x_2|, \quad \xi \in (x_1, x_2),$$

odakle zaključujemo da je niz  $(y_{n+1}(x))$ ,  $(n=0, 1, 2, \dots)$ , podjednako neprekidan na intervalu  $|x - x_0| \leq a$ . Prema Arcela-Askolijevom stavu postoji podniz  $(y_{n_k}(x))$  niza  $(y_n(x))$  koji uniformno konvergira ka neprekidnoj funkciji  $y(x)$  na intervalu  $|x - x_0| \leq a$ .

Pokazaćemo da je pomenuta funkcija  $y(x)$  rešenje zadatka (1).

Da bismo to pokazali, polazimo od funkcije

$$y_0 + \int_{x_0}^x F_{n_{k-1}}(t, y_{n_k}(t)) dt,$$

i dokazaćemo da ona teži ka funkciji

$$y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt.$$

Lako se vidi da važi sledeća jednakost

$$\begin{aligned} &\int_{x_0}^x F_{n_{k-1}}(t, y_{n_k}(t)) dt - \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt = \\ &= \int_{x_0}^x [F_{n_{k-1}}(t, y_{n_k}(t)) - F_{n_{k-1}}(t, y_{n_{k-1}}(t))] dt + \\ &+ \int_{x_0}^x [f(t, y_{n_{k-1}}(t)) - f(t, y(t))] dt + \\ &+ \int_{x_0}^x [F_{n_{k-1}}(t, y_{n_{k-1}}(t)) - f(t, y_{n_{k-1}}(t))] dt. \end{aligned}$$

Na osnovu poslednje jednakosti, (17), (18) i (20) imamo sledeću procenu

$$\left| \int_{x_0}^x [F_{n_{k-1}}(t, y_{n_k}(t)) - f(t, y(t))] dt \right| \leq \\ \left| \int_{x_0}^x \varphi(t, |y_{n_k}(t) - y_{n_{k-1}}(t)|) dt \right| + \left| \int_{x_0}^x \varphi(t, y_{n_{k-1}}(t) - y(t)) dt \right| + \sigma_{n_k} |x - x_0|.$$

Pokazaćemo da u poslednjoj nejednačini integrali na desnoj strani teže nuli. Ta činjenica sledi iz neprekidnosti funkcije  $\varphi(x, u)$  za  $|x - x_0| \leq a$ ,  $0 \leq u \leq 2b$  i pretpostavke da zadatak (19) ima samo nulto rešenje:  $0 \equiv (x, 0)$ . Zbog toga  $\varphi(x, u_k(x))$  uniformno teži ka  $\varphi(x, 0) \equiv 0$  kada  $u_k(x)$  uniformno teži ka nuli pri  $k \rightarrow \infty$ . Ako u jednakosti

$$y_{n_k}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x F_{n_{k-1}}(t, y_{n_k}(t)) dt$$

pustimo da  $k \rightarrow \infty$  imaćemo jednakost

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt,$$

čime smo pokazali da podniz  $(y_{n_k}(x))$  teži ka jedinstvenom rešenju

$y(x)$  zadatka (1). Analogno se dokazuje da bilo koji drugi podniz  $(y_{n_m}(x))$  niza  $(y_n(x))$ , koji uniformno konvergira, konvergira ka jedinstvenom rešenju  $y(x)$  zadatka (1). Pa, prema [4], iz niza  $(y_n(x))$  nije potrebno izdvajati podniz. Ustvari, sam niz  $(y_n(x))$  konvergira ka funkciji  $y(x)$ . Na taj način teorema X je u potpunosti dokazana.

**N a p o m e n a 1.** Ako se u teoremi X odbaci pretpostavka

$$(17) |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq \varphi(x, |y_1 - y_2|)$$

a zadrže sve ostale, može se dokazati još jedna teorema Peanovog tipa, koja uopštava teoremu VI.

**N a p o m e n a 2.** Teorema X može se dokazati i za sistem diferencijalnih jednačina.

## D R U G A   G L A V A

U ovoj glavi pokazuje se kako osnovna teorema o diferencijalnim nejednačinama može da se primeni na sistem diferencijalnih jednačina i jednačine u Banahovom prostoru. To se, pre svega, odnosi na teoremu 1 i leme 2, I i II iz prve glave. U čemu se sastoji ta primena, može se videti iz sledeće teoreme, [2]. Zbog toga, pre svega, navodimo tu teoremu zajedno sa dokazom.

**T e o r e m a   4 .** Neka funkcija  $x = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  i  $y = (y_1(t), \dots, y_n(t))$ ,  $t \in [t_0, t_0 + a]$ , zadovoljava redom sledeće sisteme diferencijalnih jednačina

$$(1) \quad x' = X(t, x), \quad X(t, x) = (X_1(t, x), \dots, X_n(t, x)),$$

$$(1') \quad y' = Y(t, y), \quad Y(t, y) = (Y_1(t, y), \dots, Y_n(t, y)).$$

Osim toga, neka su funkcije  $X(t, x)$  i  $Y(t, y)$  definisane i neprekidne u oblasti  $[t_0, t_0 + a] \times D$ , gde je  $D$  neka oblast sadržana u Euklidskom prostoru  $R^n$  i neka je

$$(2) \quad \|X(t, Z) - Y(t, Z)\| \leq \varepsilon, \quad (t, Z) \in [t_0, t_0 + a] \times D.$$

Na kraju, pretpostavićemo da funkcija  $X(t, x)$  zadovoljava Lipšicov uslov sa konstantom  $L$ .

$$(2') \quad \|X(t, y_1) - X(t, y_2)\| \leq L \|y_1 - y_2\|.$$

Tada je

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|x(t_0) - y(t_0)\| e^{\frac{L(t-t_0)}{1}} + \frac{\varepsilon}{L} (e^{\frac{L(t-t_0)}{1}} - 1),$$

$$(t_0 \leq t \leq t_0 + a).$$

Za funkciju  $Y(t, y)$  nije obavezno da zadovoljava Lipšicov uslov.

Napominjemo da je norma u  $R^n$  Euklidska norma.

**D o k a z .** Polazimo od relacije

$$\sigma(t) = \|x(t) - y(t)\|^2 = \sum_{k=1}^n [x_k(t) - y_k(t)]^2$$

koja je definisana i diferencijabilna na intervalu  $[t_0, t_0 + a]$ . Vodeći računa o (1) i (1') i svojstvima skalarnog proizvoda u  $R^n$  imamo da je

$$\begin{aligned} \sigma'(t) &= 2 \sum_{k=1}^n [x_k(t) - y_k(t)] [x_k'(t) - y_k'(t)] = \\ &= 2 (X(t, x(t)) - Y(t, y(t)), x(t) - y(t)) = \\ &= 2 (X(t, x(t)) - X(t, y(t)), x(t) - y(t)) + \\ &+ 2 (X(t, y(t)) - Y(t, y(t)), x(t) - y(t)). \end{aligned}$$

Koristeći Koši-Švarcovu nejednačinu za skalarni proizvod, dobijamo

$$\begin{aligned} \sigma'(t) &\leq \|\sigma'(t)\| \leq 2 \|X(t, x(t)) - X(t, y(t))\| \|x(t) - y(t)\| + \\ &+ 2 \|X(t, y(t)) - Y(t, y(t))\| \|x(t) - y(t)\|. \end{aligned}$$

Zbog (2) i (2') imamo

$$\sigma'(t) \leq 2L \|x(t) - y(t)\|^2 + 2\varepsilon \|x(t) - y(t)\|.$$

Vodeći računa o načinu kako je funkcija  $\sigma(t)$  definisana, dobijamo sledeću diferencijalnu nejednačinu

$$(4) \quad \sigma'(t) \leq 2L \sigma(t) + 2\varepsilon \sqrt{\sigma(t)}.$$

Dakle, problem se sveo na skalarnu diferencijalnu nejednačinu, pa je dalji dokaz sadržan u lemi 2 prve glave. Na osnovu pomenute leme imamo sledeću ocenu

$$\sigma(t) \leq \left[ \sigma(t_0) e^{L(t-t_0)} + \frac{\varepsilon}{L} (e^{L(t-t_0)} - 1) \right]^2, \quad t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$$

i vodeći računa o uvedenim oznakama dobijamo procenu (3). Na taj način teorema je u potpunosti dokazana.

U dokazu prethodne teoreme koriste se uslovi dati u njoj i problem se svodi na rešavanje odgovarajuće diferencijalne nejednačine. Rešavajući nejednačinu (4), dobijamo procenu za  $\|x(t) - y(t)\|$ .

Mi smo problem sa sistemom diferencijalnih jednačina sveli na problem skalarnih diferencijalnih nejednačina. Objasnićemo zašto se to čini.

Poznato je da se teorema o diferencijalnim nejednačinama ne prenosi na jednačine višeg reda bez dodatnih uslova. Naime, ako je

vektorska funkcija  $\varphi(t)$  takva da na intervalu  $[t_0, t_0+a]$  važi nejednačina

$$\varphi'(t) \leq X(t, \varphi(t))$$

a  $x = x(t)$  rešenje sistema (1) na tom intervalu, tada ne važi, u opštem slučaju, nejednačina  $\varphi(t) \leq x(t)$  na intervalu  $[t_0, t_0+a]$ .

Takva nejednačina važi na nekom intervalu  $[t_0, t_1]$ , ( $t_1 < t_0 + a$ ).

Medjutim, koliko je to  $t_1$  nije lako odrediti, [15], [16]. Zbog toga je korisno neke probleme vezane za jednačinu višeg reda ili za sistem diferencijalnih jednačina svoditi na skalarne diferencijalne nejednačine, pa izvoditi odgovarajuće zaključke za postavljene probleme.

U daljem radu pokazaćemo kako se odgovarajući problemi iz teorije diferencijalnih jednačina mogu rešiti pomenutom metodom. To se, pre svega, odnosi na rešavanje odgovarajućih nejednačina, koje sadrže apsolutne vrednosti (norme u  $R^n$  ili u Banahovom prostoru) kako nepoznate funkcije  $x(t)$  tako i njenog izvoda  $x'(t)$ . Do takvih nejednačina se dolazi u kvalitativnoj analizi ili kod približnog rešavanja diferencijalnih jednačina i kod ocene greške. Sve će to biti ilustrovano u daljem izlaganju.

Rezultati iz [17] omogućuju praktično rešavanje zadatka

$$(1) \quad x'(t) = X(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0,$$

ako je funkcija  $X(t, x)$  holomorfná u okolini tačke  $(t_0, x_0)$ . Koristeći se tim rezultatom, daću jedan postupak za rešavanje zadatka (1), u slučaju kada je jednačina skalarna. U tom postupku koristi se simbol  $\theta(x)$ . Pored toga daću ocenu greške postupka iz [17], [18], [19] i pri tome ću koristiti lemu II iz prve glave. Prvo, navodimo rezultate iz [17], koji su sadržali u sledećoj teoremi. Ovde se navodi nov dokaz teoreme.

**T e o r e m a D.** Neka je data diferencijalna jednačina

$$(5) \quad y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

gde je funkcija  $f(x,y)$  holomorfná u nekoj okolini tačke  $(x_0, y_0)$ .

Neka je funkcija

$$(6) \quad y_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)^n$$

približno rešenje zadatka (5), gde su  $a_0, a_1, \dots, a_n$  koeficijenti tačnog rešenja

$$(6') \quad y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n.$$

Dalje, obrazujemo jednačinu

$$(5') \quad \bar{y}'_{n+1} = f(x, y_n), \quad y_{n+1}(x_0) = a_0 = y_0,$$

odnosno

$$(7) \quad \bar{y}_{n+1} = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt.$$

Ako desnu stranu u (7) razvijemo u red, dobiće se

$$(10) \quad \bar{y}_{n+1} = y_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)^2 + \dots + b_n(x-x_0)^n + b_{n+1}(x-x_0)^{n+1} + \dots$$

Dokazuje se da je

$$(8) \quad a_m = b_m \quad (m = 1, 2, \dots, n+1).$$

D o k a z. Pre svega, primetimo da iz (6) sledé jednakosti

$$y_n^{(k)}(x_0) = k! a_k \quad (k = 0, 1, \dots, n),$$

odakle je

$$(6'') \quad y_n^{(k)}(x_0) = y^{(k)}(x_0), \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Ako hoćemo da dokažemo jednakosti (8), dovoljno je dokazati da funkcija  $y_{n+1}(x)$ , određena pomoću (7), ima jednake izvode sa rešenjem  $y(x)$  zadatka (5) do reda  $(n+1)$ .

Dakle, treba da dokažemo da važe jednakosti

$$\bar{y}_{n+1}^{(k)}(x_0) = y^{(k)}(x_0), \quad (k = 0, 1, \dots, n+1).$$

Poslednje jednakosti se lako dokazuju za  $k = 0, 1, \dots, n+1$  direktnim izračunavanjem. Tako za  $k = 0$  imamo iz (7)

$$(7_0) \quad \bar{y}_{n+1}(x_0) = y_0 = y(x_0).$$

Posle diferenciranja (7) postaje (5') i ako stavimo da je  $x=x_0$ ,  $y = y_0$  dobijamo

$$(7_1) \quad \overline{y}'_{n+1}(x_0) = f(x, y_n(x_0)) = f(x_0, y_0) = y'(x_0).$$

Dalje, ako se (5') diferencira dobiće se

$$(9) \quad \overline{y}''_{n+1}(x) = f_x(x, y_n(x)) + f_y(x, y_n(x)) y'_n(x).$$

Ako u poslednjoj jednakosti stavimo da je  $x = x_0, y = y_0$ , imaćemo

$$\overline{y}''_{n+1}(x_0) = f_x(x_0, y_n(x_0)) + f_y(x_0, y_n(x_0)) y'_n(x_0)$$

vođeći računa o jednakostima (6"), dobijamo

$$(7_2) \quad \overline{y}''_{n+1}(x_0) = f_x(x_0, y_0) + f_y(x_0, y_0) y'(x_0) = y''(x_0).$$

Postupak se može dalje nastaviti: diferencirane jednačine (9)

dovodi do sledeće jednačine

$$\begin{aligned} \overline{y}'''_{n+1}(x) &= f_{xx}(x, y_n(x)) + 2f_{xy}(x, y_n(x)) y'_n(x) + \\ &+ f_{yy}(x, y_n(x)) y_n'^2(x) + f_y(x, y_n(x)) y_n''(x), \end{aligned}$$

iz koje se za  $x = x_0, y = y_0$  dobija

$$(7_3) \quad \begin{aligned} \overline{y}'''_{n+1}(x_0) &= f_{xx}(x_0, y_0) + 2f_{xy}(x_0, y_0) y'(x_0) + \\ &+ f_{yy}(x_0, y_0) y_x'^2(x_0) + f_y(x_0, y_0) y''(x_0) = y'''(x_0). \end{aligned}$$

Tako nastavljamo korak po korak i na kraju izračunavamo  $\overline{y}^{(n+1)}_{n+1}(x)$ :

$$\begin{aligned} \overline{y}^{(n+1)}_{n+1}(x) &= f_x^{(k)}(x, y_n(x)) + f_x^{(k-1)}(x, y_n(x)) y'_n(x) + \dots + \\ &+ f_y(x, y_n(x)) y_n^{(n)}(x). \end{aligned}$$

Ako stavimo da je  $x = x_0, y = y_0$  u poslednjoj jednakosti i vodimo računa o jednakostima (6"), dobićemo

$$(7_{n+1}) \quad \begin{aligned} \overline{y}^{(n+1)}_{n+1}(x_0) &= f_x^{(k)}(x_0, y_0) + f_x^{(k-1)}(x_0, y_0) y'(x_0) + \dots + \\ &+ f_y(x_0, y_0) y^{(n)}(x_0) = y^{(n+1)}(x_0). \end{aligned}$$

Na taj način dokazali smo jednakosti (7<sub>0</sub>) - (7<sub>n+1</sub>), što je ekvivalentno sa (8). Na taj način teorema je u potpunosti dokazana.

Koristeći teoremu D, izložiću jedan postupak za određivanje približnog rešenja (6) zadatka (5).

Pretpostavimo da smo odredili približno rešenje

$$(6) \quad y_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n$$

i pomoću njega formiramo jednačinu

$$(7) \quad \bar{y}_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt.$$

Ako se desna strana u (7) razvije u red, dobiće se

$$(10) \quad \bar{y}_{n+1}(x) = y_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)^2 + \dots + b_{n+1}(x-x_0)^{n+1} + \dots,$$

pa se, prema dokazanoj teoremi, to može napisati na sledeći način

$$\bar{y}_{n+1}(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_{n+1}(x-x_0)^{n+1} + b_{n+2}(x-x_0)^{n+2} + \dots,$$

odnosno

$$(10') \quad \bar{y}_{n+1}(x) = y_{n+1}(x) + O((x-x_0)^{n+1}).$$

Formula (10') u sebi sadrži približno rešenje

$$y_{n+1}(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}$$

i omogućuje postupak, uz pomoć teoreme D, za njegovo određivanje.

Naime, polazeći od (7), ne moramo desnu stranu razvijati u red (10)

već samo napisati asimptotsku formulu (10'). Naš zadatak je još jed-

nostavniji: sastoji se samo u određivanju sabirka  $a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}$  iz

formule (10'). To zbog toga što je približno rešenje, prema teoremi D,

oblika

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) + a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}.$$

U pojedinim slučajevima desna strana može se u (7) razviti u red po stepenima od

$$a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n$$

u okolini tačke  $x_0$ . U tim slučajevima je izdvajanje sabirka

$a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}$  vrlo lako i određivanje približnog rešenja oblika (6) može se izvršiti dosta brzo.

Ako se desi da je  $a_{n+1} = 0$ , tada se (7) pretstavlja u obliku

$$\bar{y}_{n+1}(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)^n + a_{n+2}(x-x_0)^{n+2} + o((x-x_0)^{n+2}),$$

pa je približno rešenje

$$y_{n+2}(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_{n+2}(x-x_0)^{n+2}.$$

Medjutim, ako se desi da je i  $a_{n+2} = 0$ , to se razvitak desne strane od (7) traži do prvog člana  $a_{n+p}(x-x_0)^{n+p}$ ,  $p > 2$  u kome je  $a_{n+p} \neq 0$ .

Napominjemo da prelaz od diferencijalne jednačine (5') na integralnu jednačinu (7) nije neophodan. Možemo  $a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}$  odrediti na sledeći način: desnu stranu jednačine (5') pretstavimo na sledeći način

$$\bar{y}'_{n+1}(x) = a_1 + c_1(x-x_0) + \dots + c_n(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

pa integracija u granicama od  $x_0$  do  $x$  daje formulu

$$\bar{y}_{n+1}(x) = y_{n+1}(x) + o((x-x_0)^{n+1}).$$

Sada ću navesti nekoliko primera kojima se ilustruje značaj teoreme D i efikasnost metode koju sam predložio.

**P r i m e r 1.** Pretpostavimo da treba odrediti približno rešenje sledećeg zadatka

$$y' = e^{xy}, \quad y(0) = 0.$$

Za rešavanje tog problema možemo iskoristiti Pikarovu metodu. U tom slučaju prvo približno rešenje glasi  $y_0(x) = 0$ . Naredno približno rešenje jeste funkcija

$$y_1(x) = \int_0^x e^0 dt = x$$

Sledeće približno rešenje glasi

$$y_2(x) = \int_{x_0}^x e^{t^2} dt.$$

Daljim postupak ovom metodom postaje potpuno nepraktičan. Medjutim, kao je  $e^{xy}$  analitička funkcija u okolini tačke  $(0,0)$ , to možemo primeniti metod diferenciranja. Ali, ni on nije mnogo praktičniji, jer su izvodi išuviše glomazni:

$$\begin{aligned} y'' &= (xy' + y)e^{xy}, \\ y''' &= [2y' + xy'' + (xy' + y)^2]e^{xy}, \\ y^{iv} &= [8y'' + xy'''' + 2(xy' + y)(xy'' + 2y')]e^{xy} + \\ &+ [2y' + xy'' + (xy' + y)^2](xy' + y)e^{xy}, \dots, \end{aligned}$$

odakle je  $y'(0) = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y''(0) = 0$ ,  $y'''(0) = 2$ ,  $y^{(iv)}(0) = 0$ .

Prema tome, približno rešenje glasi  $y_3(x) = x + \frac{1}{3}x^3$ .

Ovaj problem rešićemo, koristeći teoremu D. Prvo približno rešenje glasi  $y_0(x) = 0$ . Sada ćemo mesto  $y$  u desnoj strani polazne jednačine staviti  $y_0 = 0$  i imamo diferencijalnu jednačinu  $\bar{y}_1' = 1$ ,  $\bar{y}_1(0) = 0$ , odakle imamo  $\bar{y}_1(x) = x = y_1(x)$ . Dalje, mesto  $y$  stavimo  $y_1(x) = x$  i dobijamo jednačinu

$$\bar{y}_2'(x) = e^{x^2} = 1 + x^2 + o(x^2), \quad y(0) = 0.$$

Iz izraza  $1 + x^2 + o(x^2)$  izdvojimo samo  $x^2$  i vršimo integraciju u granicama od 0 do  $x$  i dobijamo približno rešenje  $y_3(x) = x + \frac{x^3}{3}$ .

Naredna diferencijalna jednačina glasi

$$\bar{y}_3'(x) = e^{x(x + \frac{x^3}{3})} = 1 + (x^2 + \frac{x^4}{3}) + \frac{1}{2}(x^2 + \frac{x^4}{3})^2 + o(x^4), \quad \bar{y}_3(0) = 0.$$

Iz desne strane izdvojimo samo  $\frac{x^4}{3} + \frac{x^4}{2}$ , odakle se dobija naredni sabirak  $\frac{x^5}{6}$  za približno rešenje

$$y_5(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{6}.$$

Ako se obrazuje naredna diferencijalna jednačina

$$\bar{y}_4'(x) = e^{x(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{6})}, \quad \bar{y}_4(0) = 0,$$

imaćemo  $\bar{y}_4'(x) = 1 + (x^2 + \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{6}) + \frac{1}{2}(x^2 + \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{6})^2 + \frac{1}{6}(x^2 + \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{6})^3 + o(x^6)$ .

Na desnoj strani poslednje jednačine izdvajamo sabirke čiji je stepen 6:  $\frac{x^6}{6} + \frac{x^6}{3} + \frac{x^6}{6} = \frac{2}{3}x^6$ . Zbog toga je naredno približno rešenje

$$y_7(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{6} + \frac{2}{21}x^7$$

P r i m e r 2. Neka je

$$y' = (1+x)^{y+x}, \quad y(0) = 1,$$

Naći  $y_3(x)$ . Odmah je jasno da možemo odmah naći  $y_0(x) = 1$ ,  $y_1(x) = 1+x$ .

Dalje, obrazujemo jednačinu

$$\bar{y}_2'(x) = (1+x)^{2x+1}, \quad y_2(0) = 1,$$

koja se može napisati na sledeći način

$$\bar{y}'_2(x) = e^{(2x+1)\ln(x+1)}, \bar{y}_2(0) = 1.$$

Ako se iskoristi formula  $\ln(1+x) = x + o(x)$ , dobićemo

$$\bar{y}'_2(x) = e^{x+2x^2+o(x)} = e^{x+o(x)} = 1+x+o(x),$$

odakle se dobija približno rešenje

$$\bar{y}_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2.$$

Dalji postupak se nastavlja kao u primeru 1. Formira se jednačina

$$\bar{y}'_3(x) = (1+x)^{1+2x+\frac{x^2}{2}}, \bar{y}_3(0) = 1,$$

koju možemo napisati na sledeći način

$$\bar{y}'_3(x) = e^{(1+2x+\frac{x^2}{2})\ln(1+x)} = e^{(1+2x+\frac{x^2}{2})(x+\frac{x^2}{2}+o(x^2))},$$

$$\bar{y}'_3(x) = e^{x+\frac{3}{2}x^2+o(x^2)} = 1+(x+\frac{3}{2}x^2) + \frac{1}{2}(x+\frac{3}{2}x^2)^2+o(x^2)$$

Nas interesuje samo  $\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^2 = 2x^2$ . Prema tome, naredno približno rešenje glasi

$$y_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3.$$

**P r i m e r 3.** Naći  $y_3(x)$  za sledeći zadatak

$$y' = 2x + \cos y, y(0) = 0.$$

Kako je  $y'(0) = 1$ , to je  $y_1(x) = x$ . Mesto  $y$  u funkciji  $f(x,y) = 2x + \cos y$  zamenimo  $y_1(x) = x$  i dobićemo jednačinu

$$\bar{y}'_2(x) = 2x + \cos x, \bar{y}_2(0) = 0,$$

koji se može napisati na sledeći način

$$\bar{y}'_2(x) = 1 + 2x + o(x), \bar{y}_2(0) = 0.$$

Poslednja jednačina omogućuje da se formira naredno približno rešenje  $y_2(x) = x+x^2$ . Sličnim postupkom formiramo narednu jednačinu

$$\bar{y}'_3(x) = 2x + \cos(x+x^2) = 2x+1 - \frac{1}{2}(x+x^2)^2 + o(x^2),$$

odakle se vidi da je traženo približno rešenje

$$y_3(x) = x + x^2 - \frac{x^3}{6}.$$

Prethodni postupak može se primeniti i na jednačine višeg reda.

Neka je data jednačina

$$(11) \quad y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

sa početnim uslovima

$$(11') \quad y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

gde je  $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  analitička funkcija u nekoj okolini tačke  $(x_0, y_0, \dots, y^{(n-1)})$ . Tada zadatak (11) - (11') ima rešenje  $y = \varphi(x)$  koje se može razviti u red

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

koji konvergira u intervalu  $(r - x_0, r + x_0)$ , gde je  $r$ -poluprečnik konvergencije.

Lako se pokazuje da rešenje  $\varphi(x)$  zadatka (11) - (11') zadovoljava jednačinu

$$(12) \quad \varphi(x) = \sum_{k=1}^{n-1} y_0^{(n-k)}(x_0) \frac{(x-x_0)^{n-k}}{(n-k)!} + \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n-1} f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) dt$$

Važi i obrnuto: funkcija  $\varphi(x)$  koja ima neprekidan izvod reda  $(n-1)$  i zadovoljava jednačinu (12) jeste rešenje i zadatka (11) - (11'). Može se dokazati teorema slična teoremi D. Naime, ako se podje od približnog rešenja zadatka (11) - (11')

$$y_m(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_m(x-x_0)^m \quad (m \geq n)$$

i obrazuje jednačina

$$\overline{y}_{m+1}^{(n-1)} = f(x, y_m(x), \dots, y_m^{(n-1)}(x)),$$

$$\overline{y}_{m+1}(x_0) = y_0, \overline{y}'_{m+1}(x_0) = y'_0, \dots, \overline{y}_{m+1}^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

može se pokazati da važi jednakost

$$\overline{y}_{m+1}(x) = y_{m+1}(x) + o((x-x_0)^{m+1}).$$

Sve ćemo ovo ilustrovati sledećim primerom. Naći približno rešenje  $y_3(x)$  zadatka

$$y'' = 2\sqrt{e^{2x}-y^2}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Odmah je jasno da imamo  $y_1(x) = x$ . Obrazovaćemo jednačinu

$$\bar{y}_2'' = 2\sqrt{e^{2x}-x^2}, \bar{y}_2(0) = 0, \bar{y}_2'(0) = 1.$$

Poslednju jednačinu možemo napisati na sledeći način

$$\bar{y}_2'' = 2\sqrt{1+2x+2x^2+o(x^2)-x^2} = 2\sqrt{1+2x+o(x)},$$

odakle imamo

$$\bar{y}_2'' = 2(1 + \frac{1}{2}(2x) - \frac{1}{8}(2x)^2) = 2(1+x - \frac{1}{2}x^2+o(x^2)).$$

Nas interesuje samo sabirak 2, čija integracija daje  $x^2$ . Prema tome, približno rešenje glasi  $y_2(x) = x+x^2$ . Ono što smo uradili sa približnim rešenjem  $y_1(x)$  uradićemo sa  $y_2(x)$ :  $\bar{y}_3'' = 2\sqrt{e^{2x}-(x+x^2)^2}$ ,

$$\bar{y}_3'' = 2(1 + (2x+x^2) - \frac{1}{8}(2x+x^2)^2 + o(x^2)).$$

Slično kao malo pre, uočavamo samo  $2x$  i uzastopna integracija daje  $\frac{x^3}{3}$ . Prema tome, traženo približno rešenje glasi

$$y_3(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{3}.$$

Napominjem, da je ovaj problem rešen u [25] metodom diferenciranja i metodama iz [18] i [19].

U daljem radu razmotrićemo ocenu greške zadatka (5). Pitanje ocene greške zadatka (5) može se rešiti, koristeći komparativnu jednačinu za jednačinu (5). Medjutim, može se to pitanje raspraviti, ne uzimajući u obzir komparativnu jednačinu.

Prvo navodim jednu teoremu koja rešava pitanje greške zadatka (5) a u svojoj formulaciji sadrži komparativnu jednačinu. Radi jednostavnijeg pisanja stavićemo da je  $x_0 = y_0 = 0$ .

**T e o r e m a E.** Neka je data analitička diferencijalna jednačina

$$(13) \quad y' = f(x, y), \quad y(0) = 0$$

i odgovarajuća komparativna jednačina

$$(14) \quad \eta' = F(x, \eta), \quad \eta(0) = 0,$$

čija su rešenja, redom, sledeće funkcije

$$(13') \quad y(x) = a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

$$(14') \quad \eta(x) = b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n + \dots$$

Dalje, odgovarajući ostaci neka su

$$(13'') \quad R_n^y = y(x) - (a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n),$$

$$(14'') \quad R_n^\eta = \eta(x) - (b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n)$$

Tada je

$$(15) \quad R_n^y \leq R_n^\eta \left( \frac{|x|}{\rho} \right)^{n+1} \frac{1}{1 - \frac{|x|}{\rho}},$$

i

$$(15') \quad |R_n^y| \leq \eta(\rho) \left( \frac{|x|}{\rho} \right)^{n+1} \frac{1}{1 - \frac{|x|}{\rho}},$$

za  $|x| < \rho < r$ , gde je  $r$  poluprečnik konvergencije rešenja (13') a

$\rho$  fiksiran realan broj manji od  $r$ .

Pre nego što predjemo na dokaz teoreme E, napominjem da je američki matematičar W. Kaplan y [26] dobio slične rezultate, koristeći jedan stav iz teorije kompleksnih funkcija i Košijevu komparativnu jednačinu. Dokaz koji dajem ne koristi takav stav i, po mom mišljenju, jednostavniji je nego Kaplanov dokaz. Pored toga, teorema E odnosi se na bilo koju komparativnu jednačinu.

D o k a z. Pitanja vezana za komparativnu jednačinu uzeta su iz [3]. Iz same definicije komparativne jednačine dokazuje se da važi, [3],

$$|a_n| \leq b_n,$$

pa zbog toga važi i

$$(15) \quad |a_n x^n| \leq b_n |x|^n.$$

Kako je

$$\eta(|x|) = b_1 |x| + \dots + b_n |x|^n + \dots,$$

to na osnovu (15) imamo da važi

$$(15') \quad |y(x)| \leq \eta(|x|)$$

Na osnovu toga imamo

$$\begin{aligned} |R_n^y| &= \left| y(x) - \sum_{\nu=1}^n a_\nu x^\nu \right| = \left| \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{n+\nu} x^{n+\nu} \right| \leq \\ &\leq \sum_{\nu=1}^{\infty} |a_{n+\nu}| |x|^{n+\nu} \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} b_{n+\nu} |x|^{n+\nu} = \\ &= \eta(|x|) - \sum_{\nu=1}^n b_\nu |x|^\nu = R_n^\eta, \end{aligned}$$

što je više nego nejednačina (15). Neka je  $r$  poluprečnik konvergencije reda (13') i  $\rho$  realan broj iz intervala  $(0, r)$ . Tada je  $|y(x)| \leq \eta(\rho)$  za

$|x| \leq \rho$ . Zaista, imamo da važi

$$\begin{aligned} |\eta(x)| &\leq b_1|x| + \dots + b_n|x|^n + \dots \\ &\leq b_1\rho + \dots + b_n\rho^n = \eta(\rho), \end{aligned}$$

odakle se dobija nejednakost  $b_n\rho^n \leq \eta(\rho)$ , odnosno

$$b_n \leq \frac{\eta(\rho)}{\rho^n}.$$

Kako se radi o analitičkom rešenju zadatka (13), imaćemo, na osnovu prethodnog, sledeću ocenu

$$|a_n| = \frac{|y^{(n)}(0)|}{n!} \leq b_n \leq \frac{\eta(\rho)}{\rho^n},$$

koja i rešava problem:

$$\begin{aligned} |R_n^y| &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y^{(n+i)}(0)}{(n+i)!} |x|^{n+i} \leq \eta(\rho) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\rho^{n+i}} |x|^{n+i} = \\ &= \eta(\rho) \left( \frac{|x|}{\rho} \right)^{n+1} \frac{1}{1 - \frac{|x|}{\rho}}, \quad (|x| \leq \rho < r), \end{aligned}$$

čime je teorema u potpunosti dokazana.

U daljem izlaganju izvršićemo procenu

$$(13'') \quad R_n^y = y(x) - (a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n),$$

ne koristeći komparativnu jednačinu (14).

Pretpostavimo da je određeno približno rešenje

$$y_n(x) = a_1x + \dots + a_nx^n$$

zadatka (13). Formiraćemo razliku

$$\delta_n(x) = f(x, y_n(x)) - y_n'(x),$$

kao što se čini u [18] i [19]. Ove razlike se formiraju za određivanje koeficijenta  $a_{n+1}$  u narednom približnom rešenju po metodi K.P. Orlova. Mi ćemo ih ovde iskoristiti za ocenu razlike  $|y(x) - y_n(x)|$ , gde je  $y(x)$  tačno rešenje zadatka (13). Za dobijanje odgovarajuće ocene iskoristiće se lema II.

**T e o r e m a** XI. Neka je

$$(13') \quad y(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

rešenje zadatka (13). Pretpostavlja se da funkcija  $f(x,y)$  zadovoljava Lipšicov uslov sa konstantom  $L$ :

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|.$$

Ako se uzme za približno rešenje zadatka (13) funkcija

$$y_n(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n,$$

tada važi ocena

$$(17) \quad |y_n(x) - y(x)| \leq \int_{x_0}^x |\delta_n(t)| e^{L(t-x)} dt, \quad (0 \leq x \leq \rho < r),$$

gde je

$$\delta_n(x) = f(x, y_n(x)) - y_n'(x).$$

**D o k a z.** Lako se vidi da važi sledeća jednakost

$$y(x) - y_n'(x) = f(x, y(x)) - f(x, y_n(x)) + f(x, y_n(x)) - y_n'(x)$$

i prema uvedenim oznakama imamo

$$y(x) - y_n'(x) = f(x, y(x)) - f(x, y_n(x)) + \delta_n(x).$$

Iz poslednje jednakosti lako se dobija sledeća diferencijalna nejednačina u kojoj je odgovarajuća funkcija i njen izvod pod znakom modula

$$|y'(x) - y_n'(x)| \leq L|y(x) - y_n(x)| + |\delta_n(x)|.$$

Ako se poslednja nejednačina pomnoži sa  $2|y_n(x) - y(x)|$  dobiće se sledeća nejednačina

$$2|y'(x) - y_n'(x)| |y(x) - y_n(x)| \leq 2L|y(x) - y_n(x)|^2 + 2|\delta_n(x)| |y(x) - y_n(x)|.$$

Ovde ćemo staviti da je  $\sigma(x) = (y_n(x) - y(x))^2$ ,  $\sigma(0) = 0$ , pa poslednja nejednačina postaje

$$\sigma'(x) \leq 2L\sigma(x) + 2|\delta_n(x)| \sqrt{\sigma(x)}.$$

Na osnovu leme II imamo

$$\sigma(x) = \left[ \int_{x_0}^x |\delta_n(t)| e^{L(t-x)} dt \right]^2,$$

odakle se dobija

$$(17) \quad |y_n(x) - y(x)| \leq \int_{x_0}^x |\delta_n(t)| e^{L(t-x)} dt, (0 \leq x \leq \rho < r)$$

što je trebalo i dokazati.

Ako se stavi da je

$$\alpha_n = \max |\delta_n(x)|,$$

iz (17) imamo

$$|y_n(x) - y(x)| \leq \frac{\alpha_n}{L} (e^{L(x-x_0)} - 1), \quad 0 \leq x \leq \rho < r.$$

Nije teško videti da za  $|x - x_0| \leq \rho < r$  važi ocena

$$|y_n(x) - y(x)| \leq \frac{\alpha_n}{L} (e^{L|x-x_0|} - 1).$$

U daljem izlaganju pokazaćemo kako se lema II može iskoristiti za ocenu rešenja sistema

$$(1) \quad x' = X(t, x), \quad x(t_0) = x_0.$$

Oznake su iz teoreme 4.

Dokazao sam sledeću teoremu u vezi sa ocenom rešenja sistema (1).

**T e o r e m a XII.** Neka je funkcija  $X(t, x)$  neprekidna i neka zadovoljava Lipšicov uslov sa konstantom  $L$

$$\|X(t, x_1) - X(t, x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\|.$$

Tada važi nejednačina

$$\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\| + \int_{t_0}^t e^{L(t-s)} \|X(t, x_0)\| ds.$$

**D o k a z.** Zaista, polazeći od jednačine (1), dobijamo sledeće nejednačine

$$\begin{aligned} \|x'(t)\| &= \|X(t, x)\| = \|X(t, x) - X(t, x_0) + X(t, x_0)\| \\ &\leq \|X(t, x) - X(t, x_0)\| + \|X(t, x_0)\| \end{aligned}$$

tj.

$$\|x'(t)\| \leq L \|x(t) - x_0\| + \|X(t, x_0)\|.$$

Ako se poslednja nejednačina pomnoži sa  $2 \|x(t) - x_0\|$ , dobiće se nova nejednačina

$$(18) \quad 2 \|x'(t)\| \|x(t) - x_0\| \leq 2L \|x(t) - x_0\|^2 + \\ + 2 \|X(t, x_0)\| \|x(t) - x_0\|$$

Neka je sada

$$\delta(t) = \|x(t) - x_0\|^2 = \sum_{k=1}^n (x_k(t) - x_k^0)^2,$$

odakle je  $\delta'(t) = 2(x_1(t) - x_1^0)x_1'(t) + \dots + 2(x_n(t) - x_n^0)x_n'(t),$

odnosno

$$\delta'(t) = 2(x(t) - x_0, x'(t)).$$

Ako se primeni Koši-Švarcova nejednačina, dobiće se

$$\delta(t) = 2(x(t) - x_0, x'(t)) \leq 2\|(x(t) - x_0, x'(t))\| \leq \\ \leq 2 \|x(t) - x_0\| \|x'(t)\|.$$

Zbog toga nejednačina (18) postaje

$$\delta'(t) \leq 2L\delta(t) + 2\|X(t, x_0)\| \sqrt{\delta(t)}, \delta(t_0) = 0,$$

pa na osnovu leme II imamo procenu

$$\delta(t) \leq \left[ \int_{t_0}^t e^{L(t-s)} \|X(s, x_0)\| ds \right]^2.$$

Vodeći računa o uvedenim oznakama imamo

$$\|x(t) - x_0\| \leq \int_{t_0}^t e^{L(t-s)} \|X(s, x_0)\| ds.$$

Kako je  $\|x(t)\| \leq \|x(t) - x_0\| + \|x_0\|$ , to iz prethodne nejednačine sledi

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| + \int_{t_0}^t e^{L(t-s)} \|X(s, x_0)\| ds,$$

čime je teorema dokazana.

P o s l e d i c a. Ako je  $\sup_D \|X(t, x)\| \leq M$ , tada iz poslednje nejednačine dobijamo poznati rezultat, [3],

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| + \frac{M}{L}(e^{L(t-t_0)} - 1)$$

Prirodno je postaviti pitanje da li se može poslednja teorema preneti na diferencijalne jednačine u Banahovom prostoru.

Pored toga, da li se postupak za ocenu greške može iskoristiti za takve jednačine. Pokazaće se da je to moguće u izvesnom smislu. Jasno je da se pitanje svodi na lemu II iz prve glave. Mi ćemo dokazati jedno uopštenje te leme. Za dokaz te leme koristićemo teoremu 3 o diferencijalnim nejednačinama koja uopštava teoremu 1.

U daljem radu se izračunavaju izvodni brojevi pojedinih funkcija i dobijaju se određene nejednačine. Ta izračunavanja i određene granične prelaze opravdava sledeća lema realne analize. Ova lema je modifikacija jedne leme iz [27].

**L e m a 3.** Neka je  $x_n \geq 0$  konvergentan niz i  $y_n$  bilo koji niz na realnoj pravoj za koji je  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n > -\infty$ , tada je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

Ako je  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty$  i  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n > 0$ , tada je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = -\infty$$

Pored navedene leme, biće nam potrebna sledeća teorema iz analize [22], [23]. Teoremu navodimo bez dokaza.

**T e o r e m a 5.** Neka je funkcija  $f(x)$  neprekidna na otsečku  $[a, b]$  i neka je jedan od četiri izvodna broja te funkcije - obeležimo ga sa  $Df(x)$  - nenegativan za  $a \leq x \leq b$ . Tada je  $f(b) \geq f(a)$ .

U daljem radu biće nam potrebna lema koja je uopštenje leme II. Naime, ako mesto diferencijabilne funkcije  $\delta(x)$  i njenog izvoda  $\delta'(x)$  stavimo neprekidnu funkciju i desni donji izvodni broj u tački  $x$ , tvrdjenje leme II ostaje u važnosti. Za dokaz te činjenice koristićemo teoremu 3, lemu 3 i teoremu 5.

**L e m a III.** Neka je  $\delta(x) \geq 0$  neprekidna funkcija na intervalu  $[x_0, x_0 + a]$ . Pred toga, neka ona zadovoljava sledeću diferencijalnu nejednačinu

$$(19) \quad D_+ \delta(x) \leq p(x) \delta(x) + q(x) \sqrt{\delta(x)}$$

na intervalu  $[x_0, x_0+a]$ , gde su  $p(x)$  i  $q(x)$  definisane neprekidne funkcije na tom intervalu i  $q(x) \geq 0$  a  $D_+ \delta(x)$  desni donji izvodni broj funkcije  $\delta(x)$  u tački  $x$ .

Tada je

$$(19') \quad \delta(x) \leq \left[ \sqrt{\delta(x_0)} e^{\frac{1}{2} \int_{x_0}^x p(r) dr} + \frac{1}{2} \int_{x_0}^x q(s) e^{\frac{1}{2} \int_s^x p(r) dr} ds \right].$$

D o k a z. Nejednačinu (19) možemo napisati na sledeći način

$$D_+ \delta(x) - p(x) \delta(x) \leq q(x) \sqrt{\delta(x)},$$

i posle množenja sa  $\exp(-\int_{x_0}^x p(r) dr)$ , vodeći računa o lemi 3, imamo

$$D_+ (\delta(x) e^{-\int_{x_0}^x p(r) dr}) \leq q(x) \sqrt{\delta(x)} e^{-\int_{x_0}^x p(r) dr}.$$

Poslednja nejednačina se može napisati na sledeći način

$$D_+ (\delta(x) e^{-\int_{x_0}^x p(r) dr}) \leq q(x) \sqrt{\delta(x)} e^{-\int_{x_0}^x p(r) dr} e^{-\frac{1}{2} \int_{x_0}^x p(r) dr},$$

koja se smenom

$$(20) \quad y = \delta(x) e^{-\int_{x_0}^x p(r) dr}$$

svodi na nejednačinu

$$D_+ y \leq \sqrt{y} q(x) e^{-\frac{1}{2} \int_{x_0}^x p(r) dr}.$$

Radi kraćeg pisanja stavićemo da je

$$(20') \quad A(x) = q(x) e^{-\frac{1}{2} \int_{x_0}^x p(r) dr}$$

pa poslednja nejednačina postaje

$$(21) \quad D_+ y \leq A(x) \sqrt{y}.$$

Neka je  $\delta(x_0) > 0$ . Tada iz (20) imamo da je  $y(x_0) = \delta(x_0) > 0$ .

Kroz tačku  $(x_0, \delta(x_0))$  prolazi jedinstveno rešenje jednačine

$$(21') \quad u' = A(x) \sqrt{u}$$

i ostaje u poluravni  $u \geq \delta(x_0) > 0$ , jer je desna strana u (21')

nenegativna pa rešenje raste desno od  $x_0$ . Rešenje jednačine (21'),

koje zadovoljava uslov  $u(x_0) = \delta(x_0) > 0$  glasi

$$(21'') \quad u(x) = \left[ \sqrt{\delta(x_0)} + \frac{1}{2} \int_{x_0}^x A(s) ds \right]^2.$$

Na osnovu teoreme 3 o diferencijalnim nejednačinama, imamo da važi nejednačina

$$y(x) \leq u(x)$$

na intervalu  $[x_0, x_0+a]$ . Vodeći računa o (20), (20') i (21'') dobijamo (19'). Prema tome, ako je  $\delta(x_0) > 0$  lema III je dokazana.

Neka je  $\delta(x_0) = 0$ . Ne može se primeniti teorema 3 u slučaju da je  $\delta(x_0) = 0$ , zbog toga što kroz tačku  $(x_0, 0)$  prolaze dva rešenja  $u = 0$  i  $u = \frac{1}{4} \left[ \int_{x_0}^x A(s) ds \right]^2$  zadatka (21'). Ne znamo da li je drugo rešenje maksimalno, jer ne znamo da li samo ta dva rešenja prolaze kroz tačku  $(x_0, 0)$ . Zbog toga nalazimo rešenje  $u_n(x)$  jednačine (21') koje zadovoljava uslov  $u_n(x_0) = \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Pokazaćemo da je  $u_n(x) \geq \delta(x)$ ,  $\delta(x_0) = 0$ , na intervalu  $[x_0, x_0+a]$ . Pretpostavimo suprotno: neka postoji  $x_2 \in (x_0, x_0+a]$  tako da je  $u_n(x_2) < \delta(x_2)$ . Sada ćemo uvesti neprekidnu funkciju  $\psi(x) = u_n(x) - \delta(x)$ , koja u tačkama  $x_0$  i  $x_2$  ima vrednosti različitog znaka. Zbog toga postoji bar jedno  $x$  takvo da je  $\psi(x) = 0$ . Označimo sa  $x_1$  najveće. Kako je desna strana jednačine (21') nenegativna, to je onda  $0 < \frac{1}{n} < u_n(x_1) = \delta(x_1)$ . Sada na intervalu  $[x_1, x_2]$  primenimo prvi deo dokaza i dobićemo da je  $\delta(x) \leq u_n(x)$ , što protivureči sa pretpostavkom da je  $u_n(x_2) < \delta(x_2)$ . Dokaz se završava ako se u nejednačini

$$\delta(x) \leq \left[ \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2} \int_{x_0}^x A(s) ds \right]^2$$

pusti da  $n \rightarrow \infty$ , odakle je

$$\delta(x) \leq \frac{1}{4} \left[ \int_{x_0}^x A(s) ds \right]^2.$$

Na taj način je lema u potpunosti dokazana.

Naredni zadatak se sastoji u primeni leme III na diferencijalne jednačine u Banahovom prostoru.

Neka je za svako  $t \in [0, T]$  definisan operator  $f(t, x): B \rightarrow B$

(B - Banahov prostor). Tada možemo posmatrati sledeću jednačinu u B

$$(22) \quad x' = f(t, x)$$

sa početnim uslovom

$$(23) \quad x(0) = x_0 .$$

Ako je funkcija  $f(t, x)$  neprekidna i ako zadovoljava Lipšicov uslov sa konstantom L:

$$(24) \quad \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\| ,$$

tada postoji jedinstveno rešenje zadatka (22) - (23), [3].

Nas interesuje da li se može izvršiti procena tog rešenja slično kao što je uradjeno sa odgovarajućim rešenjem sistema diferencijalnih jednačina u teoremi XII. Pokazaće se da je to moguće uz pomoć leme III.

Neka je  $x = x(t)$  rešenje zadatka (22) - (23). Tada je

$$\begin{aligned} \|x'(t)\| &= \|f(t, x(t)) - f(t, x_0) + f(t, x_0)\| \leq \\ &\leq \|f(t, x(t)) - f(t, x_0)\| + \|f(t, x_0)\| , \end{aligned}$$

odakle se, na osnovu (24), dobija nejednačina

$$\|x'(t)\| \leq L \|x(t) - x_0\| + \|f(t, x_0)\| .$$

Ako se poslednja jednačina pomnoži sa  $2\|x(t) - x_0\|$ , dobiće se nova jednačina

$$(25) \quad 2 \|x'(t)\| \|x(t) - x_0\| \leq 2\|x(t) - x_0\|^2 + 2\|f(t, x_0)\| \|x(t) - x_0\|$$

Stavimo da je  $\delta(x) = \|x(t) - x_0\|^2$ ,  $\delta(0) = 0$ . Tada je za  $h > 0$

$$\begin{aligned} \frac{\delta(t+h) - \delta(t)}{h} &= \frac{\|x(t+h) - x_0\|^2 - \|x(t) - x_0\|^2}{h} = \\ &= (\|x(t+h) - x_0\| + \|x(t) - x_0\|) \frac{\|x(t+h) - x_0\| - \|x(t) - x_0\|}{h} \leq \\ &\leq (\|x(t+h) - x_0\| + \|x(t) - x_0\|) \frac{\|x(t+h) - x_0\| - \|x(t) - x_0\|}{h} \\ &= (\|x(t+h) - x_0\| + \|x(t) - x_0\|) \frac{\|x(t+h) - x(t)\|}{h} . \end{aligned}$$

Kako je  $h > 0$ , to konačno dobijamo

$$\frac{\delta(t+h) - \delta(t)}{h} \leq (\|x(t+h) - x_0\| + \|x(t) - x_0\|) \left\| \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \right\|.$$

Ako pustimo da  $h \rightarrow +0$ , vodeći računa o lemi 3 i da je norma neprekidna funkcija, dobićemo

$$(24') \quad D_+ \delta(t) \leq 2 \|x(t) - x_0\| \|x'(t)\|.$$

Zbog toga se nejednačina (24) može napisati na sledeći način

$$D_+ \delta(t) \leq 2L \delta(t) + 2 \|f(t, x_0)\| \sqrt{\delta(t)}, \quad \delta(0) = 0,$$

pa je problem sveden na lemu III. Na taj način važi za rešenje  $x(t)$  zadatka (22) - (23) sledeća ocena

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| + \int_0^t \|f(\xi, x_0)\| e^{L(t-\xi)} d\xi.$$

Još jednom se vraćamo na pitanje greške. Taj problem biće raspravljen za zadatak (22) - (23). Neka je za pomenuti problem određeno približno rešenje  $x_n(t)$ ,  $x_n(0) = x_0$ . Ocena razlike postaje aktuelna i, kao što će se pokazati, svešće se na ocenu.

$$\alpha_n(t) = \|f(t, x_n(t)) - x'_n(t)\|$$

na intervalu  $[0, T]$ .

Polazimo od sledeće identičnosti

$$x'(t) - x'_n(t) = f(t, x(t)) - f(t, x_n(t)) + f(t, x_n(t)) - x'_n(t),$$

iz koje dobijamo nejednačinu

$$\|x'(t) - x'_n(t)\| \leq L \|x(t) - x_n(t)\| + \alpha_n(t).$$

Poslednju nejednačinu množimo sa  $2\|x(t) - x_n(t)\|$ , stavimo da je ovde  $\delta_n(t) = \|x(t) - x_n(t)\|^2$  i vodimo računa o (24'), pa ćemo dobiti

$$D_+ \delta_n(t) \leq 2L \delta_n(t) + 2\alpha_n(t) \sqrt{\delta_n(t)}, \quad \delta_n(0) = 0.$$

Iz poslednje nejednačine i leme III dobijamo procenu

$$(25) \quad \|x(t) - x_n(t)\| \leq \int_0^t \alpha_n(\xi) e^{L(t-\xi)} d\xi$$

na intervalu  $[0, T]$ .

Nejednačina (25) može se korisno primeniti pri oceni greške kod različitih približnih metoda za rešavanje zadatka (22) - (23).

Kao primer uzmimo, prvo, Pikarov postupak. Neka je  $x_n(t), x_n(0) = x_0$ ,  
odredjeno. Tada je

$$x'_n(t) - f(t, x_n(t)) = f(t, x_{n-1}(t)) - f(t, x_n(t)),$$

odakle imamo procenu

$$\alpha_n(t) = \|x'_n(t) - f(t, x_n(t))\| = \|f(t, x_{n-1}(t)) - f(t, x_n(t))\| \leq \\ \leq L \|x_{n-1}(t) - x_n(t)\|.$$

Na osnovu poslednje nejednačine i (25) dobijamo

$$(25') \quad \|x(t) - x_n(t)\| \leq L \int_0^t \|x_{n-1}(\xi) - x_n(\xi)\| e^{L(\xi - t)} d\xi,$$

iz koje se može izvesti poznata ocena greške za Pikarov postupak, [3].  
Prema tome, (25) je bolja procena od (25'). Napominjem da je nejednačina (25'), ustvari procena Lozinskog iz teoreme A, tamo izvedena za skalarni slučaj.

Nije teško videti da za Njtn-Kantarovičev postupak važi sledeća procena za  $\alpha_n(t)$ :

$$\alpha_n(t) = \|x'_n(t) - f(t, x_n(t))\| = \|f_x(x, x_{n-1}(t))(x_n(t) - x_{n-1}(t)) + \\ + f(x, x_{n-1}(t)) - f(t, x_n(t))\| \leq 2M \|x_n(t) - x_{n-1}(t)\|,$$

gde je  $\|f_x(t, x)\| \leq M$ .

Iz napred izloženog se vidi da je formula (25) primenljiva u Pikarovom i Njtn-Kantarovičevom postupku. To je zbog toga što se kod tih metoda lako može da proceni funkcija

$$\alpha_n(t) = x_n(t) - f(t, x_n(t)).$$

Ranije smo videli da je nejednačina (25) lako primenljiva u metodi K.Orlova. Naime, u toj metodi se izračunavaju razlike

$$\delta_n(t) = f(t, x_n(t)) - x'_n(t),$$

pa se problem svodi na odredjivanje maksimuma funkcije  $\|\delta_n(t)\|$  na intervalu  $[0, T]$ .

U radu [24] izloženo je nekoliko iterativnih procesa za rešavanje običnih diferencijalnih jednačina. Jedan od postupaka je i metod izgadjivanja. Taj pojam se uvodi narednom definicijom koja potiče od M.A Krasnoseljskog, [24].

Definicija. Rećićemo da su jednačine

$$(26) \quad x' = f_n(t, x), \quad (n \in \mathbb{N}), \quad x(0) = x_0$$

dobijene izgadjivanjem desne strane jednačine

$$(26') \quad x' = f(t, x), \quad x(0) = x_0$$

ako je

$$(27) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0, \quad \delta_n = \max_{(t, x)} |f_n(t, x) - f(t, x)|$$

i ako su rešenje  $x_n(t)$  zadatka (26) određena jednoznačno.

Sledeća teorema, [24], daje dovoljne uslove da niz  $(x_n(t))$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , konvergira ka rešenju zadatka (26'). Navešćemo tu teoremu, a zatim formulisati i dokazati jednu novu teoremu koja se odnosi na diferencijalne jednačine u Banahovim prostorima.

**T e o r e m a 6.** Neka neprekidna funkcija  $f(t, x)$ , definisana na  $R$ , gde je

$$R = \left\{ (t, x) : 0 \leq t \leq T, |x - x_0| \leq r \right\},$$

zadovoljava uslov

$$(28) \quad \text{sign}(x-y) [f(t, x) - f(t, y)] \leq \varphi(t, |x-y|),$$

gde je  $\varphi(t, u)$  neprekidna funkcija i takva da zadatak

$$u' = \varphi(t, u), \quad u(0) = 0$$

ima samo nulto rešenje. Tada rešenje  $x_n(t)$  zadatka (26), dobijeno izgadjivanjem zadatka (26'), konvergira ka jedinstvenom rešenju zadatka (26') i pri tome je brzina konvergencije određena nejednačinom

$$|x_n(t) - x(t)| \leq \varepsilon_n(t),$$

gde je  $\varepsilon_n(t)$  rešenje zadatka

$$u' = \varphi(t, u) + \delta_n, \quad u(0) = 0$$

i  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n(t) = 0$ .

Direktno prenošenje teoreme 6 na jednačine u Banahovim prostorima nije moguće zbog uslova (28). Medjutim, može se dokazati slična teorema teoremi 6. Pre nego što predjemo na formulaciju i dokaz te slične teoreme primetimo da za neprekidnu funkciju  $x(t)$ , definisanu na intervalu  $[0, T]$  sa vrednostima u Banahovom prostoru važi nejednačina

$$(29) \quad D_+ \|x(t)\| \leq \|x'(t)\|.$$

Ta činjenica sledi iz nejednačine

$$\|x(t+h) - x(t)\| \leq \|x(t+h) - x(t)\| \leq \|x(t+h) - x(t)\|$$

iz koje se za  $h > 0$  dobija

$$\frac{\|x(t+h) - x(t)\|}{h} \leq \left\| \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \right\|.$$

Vodeći računa da je norma neprekidna funkcija, pustimo da  $h \rightarrow + 0$  i dobićemo (29).

Neka je za svako  $t \in [0, T]$  definisan operator  $f(t, x): B \rightarrow B$  ( $B$  - Banahov prostor). Tada možemo posmatrati sledeću jednačinu u  $B$

$$(30) \quad x' = f(t, x)$$

sa početnim uslovom

$$(31) \quad x(0) = x_0.$$

Mogu da formulišem i dokažem sledeću teoremu.

**T e o r e m a XIII.** Neka zadatak (30) - (31) ima rešenje.

Neka je funkcija  $f(t, x)$  neprekidna na  $R = [0, T] \times S$ , gde je  $S = \{x: \|x - x_0\| \leq r\}$ . Pored toga neka zadovoljava i uslov

$$\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq \varphi(t, \|x_1 - x_2\|),$$

gde je  $\varphi(t, u)$  neprekidna funkcija i takva da zadatak

$$(32) \quad u' = \varphi(t, u), \quad u(0) = 0$$

ima samo nulto rešenje. Neka su jednačine

$$x' = f_n(t, x), \quad x_n(0) = x_0$$

dobijene izgladjivanjem jednačine (30), čija su rešenja  $x_n(t)$ ,

$x_n(0) = x_0$ . Tada je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x(t)$$

i pri tome je brzina konvergencije određena nejednačinom

$$\|x_n(t) - x(t)\| \leq \mathcal{E}_n(t);$$

gde je  $\mathcal{E}_n(t)$  rešenje zadatka

$$(33) \quad u' = \mathcal{Q}(t, u) + \delta_n, \quad u(0) = 0$$

u  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_n(t) = 0$ . Ovde je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0 \text{ i } \overline{\delta}_n = \sup_{(t, x) \in R} \|f_n(t, x) - f(t, x)\|$$

**D o k a z.** Pretpostavka da postoji rešenje zadatka (30) - (31) potrebna je, jer neprekidnost operatora  $f(t, x)$  ne obezbedjuje egzistenciju rešenja zadatka (30) - (31) kod jednačina u Banahovom prostoru, [11]. Prvo ćemo dokazati da zadatak (30) - (31) ima jedinstveno rešenje. Pretpostavimo da zadatak ima dva rešenja  $x^1(t)$ , i  $x^2(t)$  i stavimo da je

$$v(t) = \|x^1(t) - x^2(t)\|, \quad v(0) = 0.$$

Tada je

$$\|x^1'(t) - x^2'(t)\| = \|f(t, x^1(t)) - f(t, x^2(t))\| \leq \mathcal{Q}(t, \|x^1(t) - x^2(t)\|)$$

odakle je, na osnovu (29)

$$D_+ v(t) \leq \mathcal{Q}(t, v(t)), \quad v(0) = 0.$$

Koristeći rezultat teoreme 3 imamo da je  $v(t) \leq u(t) \equiv 0$ , odakle sledi da je  $x^1(t) = x^2(t)$ . Koristićemo i dalje teoremu 3 o diferencijalnim nejednačinama i dokazaćemo da  $x_n(t)$  konvergira ka rešenju  $x(t)$  zadatka (30) - (31). Lako se vidi da je sledeći niz nejednačina tačan

$$\begin{aligned} \|x_n'(t) - x'(t)\| &= \|f_n(t, x_n(t)) - f(t, x(t))\| \leq \\ &\leq \|f_n(t, x_n(t)) - f(t, x_n(t))\| + \|f(t, x_n(t)) - f(t, x(t))\| \\ &\leq \mathcal{Q}(t, \|x_n(t) - x(t)\|) + \overline{\delta}_n. \end{aligned}$$

Na osnovu (29) poslednja nejednačina se može napisati

$$D_+ \|x_n(t) - x(t)\| \leq \mathcal{P}(t, \|x_n(t) - x(t)\|) + \delta_n,$$

pa na osnovu pomenute teoreme 3 o diferencijalnim nejednačina i pretpostavke da je  $\mathcal{E}_n(t)$  rešenje zadatka

$$(33) \quad u' = \mathcal{P}(t, u) + \delta_n, \quad u(0) = 0$$

važi nejednačina

$$\|x_n(t) - x(t)\| \leq \mathcal{E}_n(t)$$

na intervalu  $[0, T]$ . Ako pokažemo da  $\mathcal{E}_n(t)$  teži uniformno ka nuli, to je i dokaz završen. To ćemo i dokazati. Zaista, kako je  $\lim \delta_n = 0$ , to  $\mathcal{P}(t, u) + \delta_n$  uniformno teži ka funkciji  $\mathcal{P}(t, u)$ , pa rešenje zadatka (33) uniformno teži ka rešenju zadatka (32) kada  $n \rightarrow \infty$ , [4], :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_n(t) = u(t) \equiv 0.$$

Na taj način teorema je dokazana.

Navodimo sledeće napomene u vezi pretpostavke da zadatak (30) - (31) ima bar jedno rešenje.

**N a p o m e n a 1.** Ako se pretpostavi da je operator  $f(t, x)$  potpuno neprekidan, onda u formulaciji teoreme XIII može da izostane pretpostavka o egzistenciji rešenja zadatka (30) - (31). To je zbog toga što potpuno neprekidan operator obezbedjuje egzistenciju bar jednog rešenja zadatka (30) - (31).

**N a p o m e n a 2.** Ako se pretpostavi da je funkcija  $\mathcal{P}(t, u)$  monotono rastuća po drugom argumentu, može se dokazati da zadatak (30) - (31) ima jedinstveno rešenje, koje se može dobiti metodom sukcesivnih aproksimacija.

L I T E R A T U R A

- [1] Бабкин. Б. Н., Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений любого порядка методом последовательных приближений на основе теоремы С.А. Чаплыгина о дифференциальных неравенствах, ДАН СССР, 1948, том LIX, № 3.
- [2] Birkhoff - Rota, Ordinary differential equations, Gin and company, 1962.
- [3] Rašajski Dr Borivoje, Teorija običnih diferencijalnih jednačina, Zavod za izdavanje udžbenika, Beograd, 1971.
- [4] Хартман Ф, Обыкновенные дифференциальные уравнения, Издательство "МИР", Москва 1970.
- [5] Березин Н.С. и Жидков Н.П., Методы вычислений, Государственное издательство физико-математической литературы, Москва 1959.
- [6] Петровский Г.И., Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, Издательство "Наука", Москва, 1964.
- [7] В.М. Будак, С.В. Фомин, Кратные интегралы и ряды, Издательство "Наука", Москва 1967.
- [8] Р. Беллман, Р. Калаба, Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи, Издательство "Мир", Москва 1968.
- [9] R. Bellman, On monotone convergence to solutions of  $k'(=g(u, t)$ , Proc. Amer. Math. Soc., 8 (1957).
- [10] Г.М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления I, Физматгиз 1962.
- [11] Я.Д. Мамедов, Односторонние оценки в условиях исследования решений дифференциальных уравнений в Банаховых пространствах Издательство "ЭЛМ", Баку - 1971.
- [12] В.И. Смирнов, Курс высшей математики II, Издательство "Наука", Москва 1967.
- [13] R. Zuber, A method of successive Approximations, Buletin de l'Académie Polonaise des Sciences, N° 10 (1966).
- [14] R. Zuber, O pewnym algorytmie rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu (I) Zastosowania matematyki, VII, 4 (1966).

- [15] M. Bertolino, O maksimalnom intervalu primene Чарлсгичи-ових nejednakosti, Matematički vesnik 3(18), Sv.1., 1966.
- [16] M. Bertolino, Beskonačna granica primenljivosti nekih diferencijalnih nejednakosti, Matematički vesnik 7(22), Sv.4., 1970o
- [17] K. Orlov, Jedna metoda aproksimirana za integralne diferencijalne jednačine, Srpska kraljevska akademija, Glas CLXIII, Beograd 1934.
- [18] K. Orlov, Practical Method for Solving Differential Equations and Their Systems by Means of Taylor Series, Matematički vesnik 8(23) 1971, Beograd.
- [19] K. Orlov, Finding of The General Integral of Differential Equations by Means of Taylor Series and Finding of Some Form of Non - Cauchys Particular Integrals, Matematički vesnik 9(24) 1972, Beograd.
- [20] T. Wazewski, Annales de la Soc. Polonaise de Math. XXIII, 110-116 (1950)
- [21] C. Corduneanu, Sur les inégalités différentielles, Matematica, Vol 6(29), 1964.
- [22] И.П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, Государственное издательство мехнико-теоретической литературы, Москва 1957.
- [23] A. J. Hinčin, Osm predavanja iz matematičke analize, Naučna knjiga, Beograd, 1949.
- [24] Я.Д. Мамедов, Осходимости некоторых итерационных процессов для решения дифференциальных уравнений, Дифференциальные уравнения, том IV /8/, 1968.
- [25] M. Stojanović, Metod diferenciranja za dobijanje rešenja diferencijalnih jednačina i njihovih sistema u obliku Taylor-ovog reda, Zbornih radova Gradjevinskog fakulteta u Beogradu, sveska 14, N<sup>o</sup> 3, 1972.
- [26] W. Kaplan, Ordinary differential equations, Massachusetts, 1958.
- [27] Л.Д. Кудрявцев, Математический анализ, Издательство "Высшая школа", Москва 1970.
- [28] Н.Н. Лузин, Интегральное исчисление, Москва 1949.

- [29] R. Milošević, Granice primenljivosti Čapliginove metode (magistarski rad), Beograd, 1969.
- [30] R. Milošević, Neke primedbe u vezi sa Čapliginovom teoremom Matematički vesnik 7(22), Sv. 7, 1970.
- [31] R. Milošević, Primedba u vezi sa dokazom jedne integralne nejednačine, Matematički vesnik 10(25), Sc. 3, 1973.
- [32] M. Bertolino et D. Trifunović, Sur le théorème fondamental de S.A. Čapligin sur l'inégalité différentielle du premier ordre, Mathematica balkanica, 1, 1971.

## S A D R Ž A J

	Strana
1. U V O D . . . . .	I
2. PRVA GLAVA . . . . .	1
3. DRUGA GLAVA . . . . .	40
4. LITERATURA . . . . .	66