UNIVERZITET U BEOGRADU
Prirodno-matematički fakultet

DIMITRIJEVIĆ RADOSLAV

Topološke i uređajne strukture

DOKTORSKA TEZA

BEOGRAD, 1978.

UNIVERZITET U BEOGRADU
Prirodno-matematički fakultet

DIMITRIJEVIĆ RADOSLAV

Topološke i uređajne strukture

DOKTORSKA TEZA

BEOGRAD, 1978.

S A D R Ž A J

P R E D G O V O R

U mnogim oblastima matematike se često na posve prirodan način javljaju dve ili više različitih struktura istovremeno na posmatranom prostoru. Pritom se prirodno nameće pitanje njihove medjusobne povezanosti, kao i uticaj jedne strukture na drugu. Jasno je da se u takvim prostorima sagledavaju kvalitativno nove osobine, čime se stiče potpunija slika o posmatranim prostorima.

Uredjenje se u tom smislu javlja kao struktura koja je prirodno povezana sa drugim strukturama, bilo da ih generiše, bilo da je sa njima povezana na neki drugi način. Realna prava, kao model od koga se polazi u mnogim slučajevima pri proučavanju raznih problema, pretstavlja najbolji primer prostora na kome se javljaju topološka, uredjajna i grupna struktura, koje su medjusobno prirodno povezane. Uredjene grupe, topološke mreže, topološki uredjene grupe, uredjeni topološki vektorski prostori su oblasti koje se upravo bave proučavanjem prostora na kojima je pored uredjenja zadana i neka druga struktura.

Materjal koji je izložen u ovom radu usmeren je ka ispitivanju prostora na kojima su istovremeno zadane topološka i uredjajna struktura, pri čemu su te strukture uvek povezane odredjenim uslovima.

Proučavanje ove problematike javlja se četrdesetih godina u radovima Birkhofa i Nahbina, da bi u današnje vreme dostiglo svoj puni zamah u radovima mnogih matematičara. Stoga su i pristupi proučavanju ove problematike raznovrsni. U radu se težilo da se pored originalnih rezultata, koliko je to moguće, izlože osnovni rezultati u proučavanju ove materije, kako bi se stekla što potpunija slika o ovoj relativno novoj oblasti.

Rad se sastoji iz četiri dela koja su označena rimskim brojevima. Svaki deo se sastoji iz odeljaka koji su označeni arapskim brojevima. Numeracija definicija, stavova i teorema teče neprekidno u svakom odeljku posebno. Pri pozivanju, na primer, na teoremu 1. III.2., reč je o teoremi 1. drugog odeljka trećeg dela. Oznake dela, pa i odeljka su izostavljeni ukoliko se ima u vidu definicija, teorema ili stav iz istog odeljka, odn. istog dela.

U prvom delu su uvedeni neki pojmovi iz opšte topologije i teorije mreža koji su neophodni u daljem radu. Dokazi teorema iz ovog dela mogu se naći u klasičnim delima opšte topologije i teorije mreža.

U drugom delu se proučavaju prostori na kojima su istovremeno zadane topološka i uredjajna struktura. U svimrazmatranim slučajevima te dve strukture su medjusobno povezane tako, što je uredjenje okarakterisano u topološkim terminima. Rezultati koji su izloženi u ovom delu, u slučaju diskretnog uredjenja daju dobro poznate rezultate opšte topologije. Pritom ovi rezultati nose u sebi jednu novu dimenziju koja je dobijena istovremenim razmatranjemtopološke i uredjajne strukture na posmatranim prostorima. Svi rezultati drugog, trećeg i četvrtog odeljka, kao i teoreme 1.5., 1.6. i 5.4. ovog dela su originalni.

Treći deo je posvećen izučavanju ravnomernih prostora na kojima je zadano uredjenje. Te dve strukture su povezane kvaziravnomernom strukturom koja ih generiše. Ovu prirodnu povezanost tih dveju struktura prvi je uočio i proučavao Nahbin. Prostore u kojima su te dve strukture tako povezane nazvao je ravnomerno uredjenim. Uredjenje u takvim prostorima je neprekidno u odnosu na ravnomernu topologiju istih. Rezultati koji su izloženi u ovom delu odnose se isključivo na takve prostore. U poslednjem odeljku ovog dela proučava se uobičajena ravnomerna struktura realne prave. Dokazano je da je ravnomerna struktura realne prave u odnosu na prirodno uredjenje ravnomerno uredjena struktura. Rezultati drugog i petog odeljka, kao i teoreme 1.1 i 1.8. ovog dela su originalni.

U poslednjem delu ovog rada proučavaju se prostori bliskosti na kojima je zadano uredjenje. Relacija bliskosti je sa uredjenjem povezana relacijom kvazibliskosti koja ih generiše. Uredjenje u tim prostorima je takodje neprekidno u odnosu na topologiju generisanu relacijom bliskosti. Prvih pet odeljaka ovog dela odnose se na proučavanje takvih prostora. U šestom odeljku razmatra se specijalni tip uredjajne topologije i njena povezanost sa relacijom kvazibliskosti. Dokazuje se da za svaku topologiju postoji kvaziuredjenje koje na odredjen način indukuje zadanu topologiju. Poslednji odeljak ovog dela proučava saglasnost topologije i uredjenja. Sa tog stanovišta su razmatrane sve topološko-uredjene strukture koje su u ovom radu proučavane. Svi rezultati drugog, trećeg, četvrtog, šestog i sedmog odeljka su originalni.

Na kraju rada je dat spisak literature.

Posebno mi je prijatna dužnost da se zahvalim profesoru Dušanu Adnadjeviću, pod čijim je rukovodstvom ovaj rad radjen, koji me je svojim savetima i sugestijama usmeravao u toku rada.

I. UVOD

1. KVAZIUREDJENJE I UREDJENJE

Neka je P proizvoljan neprazan skup. Relacijom na skupu P nazivamo potskup μ Dekartovog proizvoda PxP. Ako je par $(a,b)\in\mu$, za elemente a i b kažemo da su u relaciji μ i pišemo $a\mu b$.

Ako je R potskup skupa P na kome je definisana relacija μ, tada za relaciju μ_R definisanu na R sa

$$a\mu_R b \overset{def}{\Longleftrightarrow} a\mu b$$

kažemo da je *indukovana* relacijom μ.

Svaka relacija μ definisana na skupu P indukuje relaciju μ^{-1} na skupu P sa

$$(a,b)\in\mu^{-1} \overset{def}{\Longleftrightarrow} (b,a)\in\mu .$$

Ovako definisanu relaciju nazivamo *inverznom* datoj relaciji μ. Lako je videti da su relacije μ i μ^{-1} definisane na skupu P simetrične u odnosu na dijagonalu $\Delta_P=\{(x,x) : x\in P\}$ skupa P.

Za relacije μ i ν definisane na skupu P definiše se *kompozicija* $\mu\circ\nu$ relacija μ i ν. Elementi $a,b\in P$ su u relaciji $\mu\circ\nu$, ako postoji element $c\in P$ tako da je $(a,c)\in\nu$ i $(c,b)\in\mu$.

Relacija μ definisana na skupu P je

(U_1) refleksivna, ako je $a\mu a$ za svako $a \in P$,

(U_2) simetrična, ako iz $a\mu b$ sledi $b\mu a$,

(U_3) antisimetrična, ako iz $a\mu b$ i $b\mu a$ sledi $a=b$,

(U_4) tranzitivna, ako iz $a\mu b$ i $b\mu c$ sledi $a\mu c$.

Relacija μ definisana na skupu P je relacija kvaziuredjenja, ako zadovoljava uslove (U_1) i (U_4). Relaciju kvaziuredjenja koja zadovoljava uslov (U_3) nazivamo uredjenjem. Lako je videti da je relacija μ definisana na skupu P relacija kvaziuredjenja onda i samo onda, ako je $\Delta_P \subset \mu$ i $\mu \circ \mu \subset \mu$. Relacija μ je uredjenje na skupu P onda i samo onda, ako je $\mu \circ \mu = \mu$ i $\mu \cap \mu^{-1} = \Delta_P$.

Za skup P na kome je definisana relacija kvaziuredjenja (uredjenja) μ kažemo da je kvaziuredjen (uredjen) i označavamo ga sa (P,μ). U daljem radu ćemo za relaciju kvaziuredjenja (uredjenja) uglavnom koristiti oznaku $\leq$.

Neka je $(P,\leq)$ uredjen skup. Za elemente $a,b \in P$ kažemo da su uporedivi, ako je $a \leq b$ ili $b \leq a$; u protivnom kažemo da su neuporedivi i pišemo $a \| b$. Uredjen skup u kome su svaka dva elementa uporediva nazivamo totalno ili linearno uredjenim. U literaturi se često totalno uredjen skup naziva lancem.

Neka je $\leq$ relacija kvaziuredjenja (uredjenja) definisana na skupu P. Relacija $\leq_d$ definisana sa:

$$a \leq_d b \overset{def}{\iff} b \leq a$$

je relacija kvaziuredjenja (uredjenja), koju nazivamo dualnom u odnosu na relaciju $\leq$. Iskaz u terminima kvaziuredjenja (uredjenja) koji se dobija zamenom relacije $\leq$ sa $\leq_d$ nazivamo dualnim prvobitnom iskazu. Pritom važi

PRINCIP DUALNOSTI: Ako iskaz o delimično uredjenim skupovima formulisan u opštelogičkim terminima i terminima uredjenja važi, tada važi i njemu dualan iskaz.

Pozivajući se na ovaj princip, formulacije dualnih pojmova kao i dokaze dualnih stavova u daljem tekstu uglavnom nećemo navoditi.

Neka je $(P,\leq)$ kvaziuredjen (uredjen) skup. Potskup $G\subset P\times P$ formiran od onih parova $(a,b)\in P\times P$ za koje je $x\leq y$ nazivamo g r a f o m kvaziuredjenja (uredjenja) $\leq$. Ako su $a,b\in P$ za koje je $a\leq b$, tada skup onih elemeneta $x\in P$ koji zadovoljavaju uslov $a\leq x\leq b$ nazivamo z a t v o r e n i m i n t e r v a l o m i označavamo sa $[a,b]$. Skup onih elemenata $x\in P$ za koje je $x\leq a$ nazivamo l e v i m p o č e t n i m z a t v o r e n i m i n t e r v a l o m i označavamo sa $(\leftarrow,a]$. Dualno se definiše d e s n i p o č e t n i z a t v o r e n i i n t e r v a l $[a,\rightarrow)$.

Za potskup A delimično uredjenog skupa P kažemo da je o p a d a j u ć i, ako iz $a\leq b$ i $b\in A$ sledi $a\in A$. Svaki potskup B delimično uredjenog skupa P na jedinstven način odredjuje najmanji opadajući skup $d(B)$ koji sadrži skup B. Tačka a je element skupa $d(B)$ onda i samo onda, ako je $a\leq b$ za neko $b\in B$. Drugim rečima, skup $d(B)$ se može prikazati kao

$$d(B) = \bigcup_{a\in B} (\leftarrow,a] \quad .$$

Da bi skup A bio opadajući, potrebno je i dovoljno da je $A = d(A)$. Dualno se definiše pojam rastućeg skupa, kao i najmanjeg rastućeg skupa $i(B)$ koji sadrži skup B.

Potskup A uredjenog skupa P je k o n v e k s a n , ako iz $a,b\in A$ i $a\leq b$ sledi $[a,b]\in A$. Pritom svaki potskup $B\subset P$ na jedinstven način odredjuje najmanji konveksan skup $c(B)$ koji sadrži skup B. Tačka b je element skupa $c(B)$ onda i samo onda, ako postoje elementi $a,c\in B$ tako da je $a\leq b\leq c$.

Preslikavanje f delimično uredjenog skupa $(P,\leq_1)$ u delimično uredjen skup $(R,\leq_2)$ je i z o t o n o ili r a s t u ć e (a n t i t o n o ili o p a d a j u ć e), ako iz $x\leq_1 y$ sledi $f(x)\leq_2 f(y)$ ($f(y)\leq_2 f(x)$). Preslikavanje f je d u a l n o i z o t o n o (a n t i t o n o), ako iz $f(x)\leq_2 f(y)$ sledi $x\leq_1 y$ ($y\leq_1 x$). Obostrano jednoznačno preslikavanje f delimično uredjenog skupa P na delimično uredjen skup R koje je istovremeno izotono i dualno izotono, nazivamo u r e d j a j n i m i z o m o r f i z m o m .

Neka je $\{(P_i,\leq_i) : i\in I\}$ priozvoljna familija kvaziuredjenih (uredjenih) skupova, a $P = \prod P_i$ proizvod skupova P_i. Tada se na skupu P može uvesti kvaziuredjenje (uredjenje) na sledeći način. Ako su $x=(x_i), y=(y_i)\in P$, stavimo da je

$$x\leq y \overset{def}{\Longleftrightarrow} x_i\leq y_i \text{ za svako } i\in I \ .$$

Lako je proveriti da je ovako definisana relacija $\leq$ na P kvaziuredjenje(uredjenje). Ovako definisano kvaziuredjenje (uredjenje) nazivamo k a r d i n a l n i m.

2. MREŽE

Skup L na kome su definisane dve različite operacije, koje svakom paru $(a,b)\in L\times L$ pridružuju elelment $a\vee b$ odn. $a\wedge b$ skupa L nazivamo m r e ž o m , ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

(L_1) $(\forall a,b\in L)\ a\vee b=b\vee a$ $(L_{1'})$ $(\forall a,b\in L)\ a\wedge b=b\wedge a$

(L_2) $(\forall a,b,c\in L)\ a\vee(b\vee c)=(a\vee b)\vee c$ $(L_{2'})$ $(\forall a,b,c\in L)\ a\wedge(b\wedge c)=(a\wedge b)\wedge c$

(L_3) $(\forall a,b\in L)\ a\vee(a\wedge b)=a$ $(L_{3'})$ $(\forall a,b\in L)\ a\wedge(a\vee b)=a$

Svaka mreža se može okarakterisati pomoću uredjenja. U tom cilju uvedimo neke pojmove koji su za to neophodni.

Neka je $(P,\leq)$ uredjen skup. Za element kažemo da je g o r n j a g r a n i c a skupa $H\subset P$, ako je $h\leq a$ za svako $h\in H$. Gornja granica a skupa H je s u p r e m u m skupa H, ako za svaku gornju granicu b skupa H važi $a\leq b$. Pojam d o n j e g r a n i c e i i n f i m u m a definišu se dualno. Supremum skupa H označavamo sa $\sup H$, a infimum sa $\inf H$.

U svakoj mreži se na prirodan način može uvesti uredjenje pomoću operacija mreže. Preciznije, važi sledeća

TEOREMA 1. N e k a j e $(L,\wedge,\vee)$ m r e ž a . T a d a j e s a

$$a\leq b \overset{def}{\Longleftrightarrow} a\wedge b = a$$

n a s k u p u L d e f i n i s a n a r e l a c i j a u r e d j e n j a . Z a o v a k o d e f i n i s a n u r e l a c i j u u r e d j e n j a i p r o i z v o l j a n k o n a č a n p o t s k u p $\{a_1, a_2,\dots,a_n\}$ e l e m e n a t a m r e ž e L p o s t o j i s u p r e m u m i i n f i m u m i p r i t o m v a ž i :

$$\inf\{a_1,a_2,\dots,a_n\}=\bigwedge_{i=1}^{n} a_i \quad , \quad \sup\{a_1,a_2,\dots,a_n\}=\bigvee_{i=1}^{n} a_i \ .$$

Štaviše, važi obrat, koji istovremeno daje alternativnu definiciju mreže u terminima uredjenja.

TEOREMA 2. Neka je $(L, \leq)$ delimično uredjen skup u kome svaka dva elementa imaju supremum i infimum. Tada je skup L mreža u odnosu na operacijje $\wedge$ i $\vee$ koje su na L definisane sa

$$a\wedge b = \inf\{a,b\} \qquad , \qquad a\vee b = \sup\{a,b\} .$$

Neprazan potskup $R\subset L$ je podmreža mreže $(L,\wedge,\vee)$ ako je za svaka dva elementa $a,b\in R$ $a\vee b, a\wedge b\in R$. Očigledno je svaki lanac mreže L podmreža mreže L. Skupovi $(\leftarrow,a]$ i $[a,\rightarrow)$ su takodje podmreže mreže L.

Mreža $(L,\wedge,\vee)$ je distibutivna, ako su zadovoljene sledeće aksiome:

$$(L_4) \quad (\forall a,b,c\in L)\ a\wedge(b\vee c) = (a\wedge b)\vee(a\wedge c)$$
$$(L_{4'}) \quad (\forall a,b,c\in L)\ a\vee(b\wedge c) = (a\vee b)\wedge(a\vee c) \quad .$$

Ako je u mreži L zadovoljena aksioma (L_4) tada je zadovoljena i aksioma $(L_{4'})$ i obratno. Mreža L je dakle distributivna, ako je zadovoljena jedna od aksioma (L_4) i $(L_{4'})$. Lako je videti da je dualna mreža, kao i svaka podmreža distributivne mreže distributivna.

Ideal mreže L je svaki neprazan potskup $I\subseteq L$ koji zadovoljava sledeće uslove:

$$(I_1) \quad (\forall a,b\in I)\ a\vee b\in I ,$$
$$(I_2) \quad (\forall a\in I)(\forall x\in L)\ a\wedge x\in I .$$

Lako je videti da se uslov (I_2) može zameniti sledećim uslovom:

$(I_{2'})$ ako je $a\in I$ i $y\leq a$, tada je $y\in I$.

Analogno se definiše dualni ideal. Napomenimo da se u literaturi dualni ideal naziva filtrom. Iz definicije se vidi da je svaki ideal (dualni ideal) podmreža date mreže. Štaviše, svaki ideal (dualni ideal) mreže je konveksna podmreža te mreže. Obratno, svaka konveksna podmreža mreže L može se prikazati kao presek nekog ideala i nekog dualnog ideala.

3. TOPOLOŠKE STRUKTURE

U ovom odeljku izložićemo neke pojmove opšte topologije koje ćemo u daljem radu koristiti. Osnovne pojmove opšte topologije nećemo posebno uvoditi. Rezultati koje ćemo izložiti mogu se naći u klasičnim delima opšte topologije, pa ih stoga nećemo posebno citirati.

Neka je $(\tau_i)_{i\in I}$ familija topologija na skupu X. Označimo sa Y_i skup X snabdeven topologijom τ_i, a sa f_i identičko preslikavanje $X \to Y_i$. Najslabiju topologiju τ na X, pri kojoj su sve funkcije f_i neprekidne nazivamo *supremum topologijom* i označavamo sa $\sup(\tau_i)$ ili $\vee \tau_i$. Familija svih skupova oblika $\bigcap_J f_i^{-1}(U_i^{-1})$, gde je $J \subset I$ konačan potskup skupa I, a $U_i \in \tau_i$, je baza supremum topologije.

Neka je $\{(X_i, \tau_i) : i\in I\}$ familija topoloških prostora; najslabiju od svih topologija na proizvodu $X = \prod X_i$, u odnosu na koju su sve projekcije

$$pr_i : X \to X_i$$

neprekidne, nazivamo *proizvod topologijom*. Familija svih mogućih konačnih preseka skupova oblika $pr_i^{-1}(U_i)$, gde je U_i otvoren skup u topologiji τ_i je baza proizvod topologije. Lako je videti da se svaki bazni element može prikazati kao proizvod $\prod_i G_i$, gde je G_i otvoren u topologiji τ_i za svako $i\in I$, pri čemu je $G_i = X_i$ za sve osim konačno mnogo indeksa.

Topološki prostor u kome za svake dve različite tačke postoje okoline svake od njih, koje ne sadrže drugu tačku nazivamo *Frešeovim* ili T_1-prostorom. Topološki prostor nazivamo *Hausdorfovim* ili T_2-prostorom, ako svake dve različite tačke imaju disjunktne okoline. Za topološki prostor kažemo da je *regularan*, ako za svaki zatvoren skup i proizvoljnu tačku koja mu ne pripada, postoje disjunktne okoline istih. Regularan T_1-prostor nazivamo T_3 prostorom. Topološki prostor je *normalan*, ako svaka dva zatvorena, disjunktna skupa imaju disjunktne okoline. Normalan T_1 prostor nazivamo T_4 prostorom. Sledeća teorema daje karakterizaciju normalnih prostora u terminima funkcija.

TEOREMA 1. (URISONOVA LEMA) Topološki prostor X je normalan, ako za svaka dva zatvorena, disjunktna skupa $A,B \subset X$ postoji neprekidna funkcija

$$f : X \to I$$

za koju je $f(A)=0$ i $f(B)=1$.

Sledeća teorema daje još jednu bitnu karakterizaciju normalnih prostora pomoću neprekidnih funkcija.

TEOREMA 2. (TICEOVA TEOREMA) Topološki prostor je normalan onda i samo onda, ako se svaka realna funkcija neprekidna na proizvoljnom zatvorenom potskupu tog prostora može proširiti do neprekidne funkcije na celom prostoru.

Za topološki prostor kažemo da je potpuno ili nasledno normalan, ako je svaki njegov potprostor normalan. Svaki potpuno normalan prostor je normalan. Obrat u opštem slučaju ne važi.

Topološki prostor X je savršeno normalan, ako za svaki par zatvorenih, disjunktnih skupova $F_0, F_1 \subset X$ postoji neprekidna funkcija $f: X \to I$ za koju je

$$(f(x)=0) \Leftrightarrow (x \in F_0) \qquad \text{i} \qquad (f(x)=1) \Leftrightarrow (x \in F_1) .$$

Očigledno je svaki savršeno normalan prostor i normalan, dok obrat u opštem slučaju ne važi. Pri karakterizaciji savršeno normalnih prostora važnu ulogu igraju skupovi tipa G_δ i F_σ. Za neki skup kažemo da je tipa G_δ (F_σ), ako se može prikazati kao presek (unija) prebrojivo mnogo otvorenih (zatvorenih) skupova.

TEOREMA 3. Topološki prostor je savršeno normalan onda i samo onda, ako je normalan i ako je svaku zatvoren skup u njemu tipa G_δ.

Klasa savršeno normalnih prostora je još uža od klase potpuno normalnih prostora, jer je svaki savršeno normalan prostor potpuno normalan.

Veoma važnu kategoriju topoloških prostora pretstavljaju potpuno regularni prostori kao i prostori Tihonova. Topološki prostor X je potpuno regularan, ako za svaku tačku $a \in X$ i svaki zatvoren skup F koji ne sadrži tu tačku, postoji neprekidna funkcija $f: X \to I$, tako da je $f(a) = 0$ i $f(x) = 1$ ako je $x \in F$. Potpuno regularan T_1 prostor nazivamo prostorom Tihonova. Lako je videti da je svaki potpuno regularan prostor regularan. Napomenimo da su Hausdorfovi prostori, regularni i potpuno regularni prostori invarijante topološkog proizvoda.

Familija $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ otvorenih potskupova topološkog prostora X je otvoren pokrivač istog, ako je $X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. Topološki prostor je kompaktan, ako se svaki njegov otvoren pokrivač može redukovati na konačan potpokrivač. Lako je videti da je svaki zatvoren potskup kompaktnog prostora kompaktan. U Hausdorfovim prostorima svaki kompaktan potskup je zatvoren. Može se dokazati da je svaki kompaktan, T_2 prostor normalan. Kompaktnost je takodje invarijanta topološkog priozvoda. Preciznije, važi sledeća

TEOREMA 4. (TEOREMA TIHONOVA) Da bi topološki proizvod nepraznih topoloških prostora bio kompaktan, potrebno je i dovoljno da su svi prostori kompaktni.

Može se dokazati da je svaki prostor Tihonova svuda gust potskup nekog kompaktnog Hausdorfovog prostora.

Topološki prostor nazivamo Lindelefovim, ako svaki njegov otvoren pokrivač ima prebrojiv potpokrivač. Svaki regularan prostor Lindelefa je normalan.

Za topološki prostor kažemo da je lokalno kompaktan, ako svaka tačka tog prostora ima bar jednu kompaktnu okolinu. Očigledno je svaki kompaktan prostor i lokalno kompaktan; obrat u opštem slušaju ne važi. Svaki lokalno kompaktan Hausdorfov prostor je regularan.

Neka je sada X proizvoljan topološki prostor, a X^* skup dobijen unijranjem skupa X i jednoelementnog skupa $\{\omega\}$ koji nije sadržan u skupu X. Tada se na skupu X^* može uvesti topologija formirana od svih otvorenih skupova prostora X, kao i svih skupova U iz X^*, za koje je $X^* - U$ zatvoren, kompaktan potskup prostora X. Ovako definisana topologija je kompaktna. Prostor X^* sa ovako definisanom topologijom nazivamo jednotačkastom kompaktifikacijom prostora X. Pritom važi

TEOREMA 5. (ALEKSANDROV) Prostor X^* je Hausdorfov onda i samo onda, ako je X lokalno kompaktan Hausdorfov prostor.

Na kraju ovog uvodnog odeljka uvedimo neke osnovne pojmove iz teorije filtera.

Neprazniu familiju $\mathfrak{F}$ potskupova skupa X nazivamo filtrom, ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

(F_1) $\emptyset \notin \mathfrak{F}$,

(F_2) ako je $A \in \mathfrak{F}$ i $A \subset B$, tada je $B \in \mathfrak{F}$,

(F_3) ako je $A \in \mathfrak{F}$ i $B \in \mathfrak{F}$, tada je $A \cup B \in \mathfrak{F}$.

Ako je $\mathfrak{F}$ maksimalna kolekcija koja zadovoljava uslove (F_1)-(F_3), tada kažemo da je $\mathfrak{F}$ maksimalni filter ili ultrafilter.

Podfamilija $\mathfrak{F}'$ filtra $\mathfrak{F}$ je baza filtra $\mathfrak{F}$, ako za svako $F \in \mathfrak{F}$ postoji $F' \in \mathfrak{F}'$ tako da je $F' \subset F$. Da bi familija $\mathfrak{F}'$ bila baza filtra $\mathfrak{F}$, potrebno je i dovoljno da su zadovoljeni sledeći uslovi:

(FB_1) $\emptyset \notin \mathfrak{F}'$,

(FB_2) za svako $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}'$ postoji $F_3 \in \mathfrak{F}'$ tako da je $F_3 \subset F_1 \cap F_2$.

Neka je $\mathfrak{F}$ filter definisan na topološkom prostoru X. Za filter $\mathfrak{F}$ kažemo da konvergira ka tački $p \in X$, ako svaka okolina tačke p sadrži neki element filtra $\mathfrak{F}$. U tom slučaju pišemo $\mathfrak{F} \to p$.

Neka je Δ neprazan, usmeren skup, a X topološki prostor. Preslikavanje $\varphi : \Delta \to X$ nazivamo uopštenim nizom i označavamo sa $\{\varphi(\delta) : \delta \in \Delta\}$. Elemente $\varphi(\delta)$ prostora X nazivamo članovima uopštenog niza i jednostavno označavamo sa φ_δ. Ako je A potskup u X, tada za niz $\{\varphi(\delta) : \delta \in \Delta\}$ kažemo da je rezidualan u A, ako postoji $\delta_o \in \Delta$ tako da je $\varphi(\delta) \in A$ za svako $\delta > \delta_o$. Za uopšteni niz $\{\varphi(\delta) : \delta \in \Delta\}$ kažemo da konvergira ka tački $p \in X$, ako je rezidualan u svakoj okolini tačke p.

Neka je $\mathcal{F}=\{F_\delta : \delta\in\Delta\}$ filter. Tada skup Δ možemo smatrati usmerenim stavljajući da je $\delta > \delta'$ onda i samo onda, ako je $F_\delta \subset F_{\delta'}$. Uopšteni niz $\{\varphi(\delta) : \delta\in\Delta\}$, gde je $\varphi(\delta)\in A$ nazivamo uopštenim nizom koji je generisan filtrom $\mathcal{F}$. Obratno, ako je $\{\varphi(\delta) : \delta\in\Delta\}$ uopšteni niz, tada je familija

$$\mathcal{F} = \{ F : \text{niz } \{\varphi(\delta) : \delta\in \Delta\} \text{ je rezidualan u } F \}$$

filter generisan uopštenim nizom $\{\varphi(\delta) : \delta\in\Delta\}$. Lako se može dokazati da je filter konvergentan ka tačci p onda i samo onda, ako uopšteni niz generisan filtrom $\mathcal{F}$ konvergira tačci p. Važi i obrat: uopšteni niz konvergira ka tačci p onda i samo onda, ako filter generisan njime konvergira tačci p.

4. RAVNOMERNE STRUKTURE

Nepraznu familiju $\mathcal{U}$ potskupova Dekartovog proizvoda nazivamo k v a z i r a v n o m e r n o m s t r u k t u r o m na X, ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

(U_1) svaki element familije $\mathcal{U}$ sadrži dijagonalu skupa X,

(U_2) ako je $U\in\mathcal{U}$ i $U\subset V$, tada je $V\in\mathcal{U}$,

(U_3) ako je $U, V\in\mathcal{U}$, tada je $U\cap V\in\mathcal{U}$,

(U_4) za svako $U\in\mathcal{U}$ postoji $V\in\mathcal{U}$, tako da je $V\circ V\subset U$.

Kvaziravnomernu strukturu koja zadovoljava uslov:

(U_5) ako je $U\in\mathcal{U}$, tada je i $U^{-1}\in\mathcal{U}$,

nazivamo r a v n o m e r n o m ili u n i f o r m n o m s t r u k t u r o m na X.

Ako je $\mathcal{U}$ kvaziravnomerna (ravnomerna) struktura na X, tada par $(X,\mathcal{U})$ nazivamo k v a z i r a v n o m e r n i m (r a v n o m e r n i m) p r o s t o r o m.

Podfamiliju $\mathcal{B}$ kvaziravnomerne (ravnomerne) strukture $\mathcal{U}$ nazivamo b a z o m kvaziravnomerne (ravnomerne) strukture, ako za svaki element $U\in\mathcal{U}$ postoji element $V\in\mathcal{B}$ tako da je $V\subset U$. Podfamiliju $\mathcal{C}$ kvaziravnomerne (ravnomerne) strukture $\mathcal{U}$ nazivamo p r e d b a z o m, ako familija konačnih preseka elemenata iz $\mathcal{C}$ pretstavlja bazu kvaziravnomerne (ravnomerne) strukture $\mathcal{U}$.

Neka je $\mathcal{U}$ ravnomerna struktura na X. Označimo sa $\tau(\mathcal{U})$ kolekciju potskupova skupa X koji su definisani na sledeći način. Skup G je element kolekcije $\tau(\mathcal{U})$, ako za svako $x \in G$ postoji $U \in \mathcal{U}$ tako da je $U(x) \subset G$. Lako je videti da je $\tau(\mathcal{U})$ topologija na X. Ovako definisanu topologiju nazivamo r a v n o m e r n o m t o p o l o g i j o m.

Da bi topologija $\tau(\mathcal{U})$ indukovana ravnomernom strukturom $\mathcal{U}$ bila Hausdorfova, potrebno je i dovoljno, da je presek svih elemenata ravnomerne strukture identičan sa dijagonalom tog prostora.

Preslikavanje f ravnomernog prostora $(X,\mathcal{U})$ u ravnomeran prostor $(Y,\mathcal{V})$ je r a v n o m e r n o n e p r e k i d n a, ako za svako $V \in \mathcal{V}$ postoji $U \in \mathcal{U}$ tako da je $(f \times f)(U) \subset V$.

Može se pokazati da je svako ravnomerno neprekidno preslikavanje istovremeno i neprekidno.

Neka je $((X_\alpha,\mathcal{U}_\alpha))_{\alpha \in I}$ familija ravnomernih prostora. Ravnomernu strukturu na proizvodu $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$, najslabiju od svih ravnomernih struktura na X u odnosu na koju su sve projekcije $pr_\alpha : X \twoheadrightarrow X_\alpha$ ravnomerno neprekidne nazivamo p r o i z v o d o m r a v n o m e r n i h s t r u k t u r a.

Za svako $\alpha \in I$ i $U \in \mathcal{U}_\alpha$ neka je

$$W_{(U,\alpha)} = \{ (x,y) \in X \times X : (x_\alpha, y_\alpha) \in U \}.$$

Tada je familija $\{ W_{(U,\alpha)} : \alpha \in I \text{ i } U \in \mathcal{U}_\alpha \}$ predbaza ravnomerne struktura na X.

Sledeća teorema karakteriše topologiju ravnomernih prostora dajući istovremeno klasu onih topoloških prostora koji su uniformizabilni.

TEOREMA 1. T o p o l o g i j a τ n a s k u p u X j e r a v n o m e r n a t o p o l o g i j a n e k e r a v n o m e r n e s t r u k t u r e o n d a i s a m o o n d a, a k o j e p r o s t o r (X, τ) p o t p u n o r e g u l a r a n.

Konačno uvedimo još jednu važnu klasu ravnomernih prostora. U tom cilju uvedimo najpre pojam Košijevog filtra.

Filter $\mathfrak{F}$ ravnomernog prostora $(X,\mathcal{U})$ nazivamo K o š i j e v i m, ako za svaki element U ravnomerne strukture $\mathcal{U}$ postoji element F filtra $\mathfrak{F}$ tako da je $F\times F\subset U$.

U ravnomernom prostoru svaki konvergentan filter je Košijev. Obrat u opštem slučaju ne važi.

Ravnomeran prostor u kome je svaki Košijev filter konvergentan nazivamo kompletnim ili potpunim ravnomernim prostorom.

Neka je $(X,\mathcal{U})$ ravnomeran prostor. Minimalan element skupa svih Košijevih filtera ravnomernog prostora X nazivamo minimalnim Košijevim filtrom u X. Označimo sa $\tilde{X}$ skup svih minimalnih Košijevih filtera u X. Za svaki simetričan element U ravnomerne strukture $\mathcal{U}$ označimo sa $\tilde{U}$ skup svih parova $(\mathfrak{F},\mathfrak{G})\in\tilde{X}\times\tilde{X}$ sa osobinom da je $F\times F\subset U$ i $G\times G\subset U$ za neko $F\in\mathfrak{F}$ i neko $G\in\mathfrak{G}$. Mnoštvo skupova oblika $\tilde{U}$ obrazuje fundamentalni sistem okolina neke ravnomerne strukture $\tilde{\mathcal{U}}$ na $\tilde{X}$. Ovako definisana ravnomerna struktura je kompletna Hausdorfova uniformnost.

Kako je filter okolina $\mathfrak{B}(x)$ svake tačke x iz X minimalan Košijev filter, to je sa $i(x)=\mathfrak{B}(x)$ definisano preslikavanje prostora X u prostor $\tilde{X}$.

Kompletnu Hausdorfovu ravnomernu strukturu $\tilde{\mathcal{U}}$ nazivamo Hausdorfovom kompletizacijom ravnomerne strukture $\mathcal{U}$, a preslikavanje $i:X\to\tilde{X}$ nazivamo kanonskim preslikavanjem prostora X u njegovu kompletizaciju $\tilde{X}$.

Pritom važi

TEOREMA 2. *Neka je X ravnomeran prostor, $\tilde{X}$ njegova ravnomerna Hausdorfova kompletizacija, a $i:X\to\tilde{X}$ kanonsko preslikavanje. Tada su zadovoljeni sledeći uslovi*

(i) Potprostor $i(X)$ je gust u $\tilde{X}$,

(ii) za svako ravnomerno neprekidno preslikavanje f prostora X u kompletan Hausdorfov prostor Y postoji, i pritom je jedinstveno, ravnomerno neprekidno preslikavanje $g:\tilde{X}\to Y$ tako da je $f=g\circ i$,

(iii) ako je $(\tilde{X}_1, i_1)$ bilo koji drugi par koji se sa-

stoji iz kompletnog Hausdorfovog prostora $\tilde{X}_1$ i ravnomerno neprekidnog preslikavanja $i_1 : X \to X_1$ i koji zadovoljava uslov (ii) teoreme, tada postoji jedinstven izomorfizam φ: $: X \to X_1$ tako da je $i_1 = \varphi \circ i$.

5. PROSTORI BLISKOSTI

Binarnu ralaciju δ definisanu na partitivnom skupu skupa X nazivamo relacijom kvazibliskosti ili kvaziproksimalnom strukturom, ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

(P_1) $(A \cup B) \delta C$ onda i samo onda, ako je $A \delta C$ ili $A \delta C$,
$A \delta (B \cup C)$ onda i samo onda, ako je $A \delta B$ ili $A \delta C$,

(P_2) ako je $A \delta B$, tada je $A \neq \emptyset$ i $B \neq \emptyset$,

(P_3) ako je $A \cap B \neq \emptyset$, tada je $A \delta B$,

(P_4) ako je $A \bar{\delta} B$, tada postoji skup $E \subset X$ tako da je $A \bar{\delta} E$ i $X - E \bar{\delta} B$.

Relaciju kvazibliskosti koja zadovoljava sledeći uslov

(P_5) ako je $A \delta B$, tada je $B \delta A$,

nazivamo relacijom bliskosti ili proksimalnom strukturom na X. Uredjen par (X, δ), gde je δ relacija kvazibliskosti (bliskosti) na X naziva se prostor kvazibliskosti (bliskosti).

Relaciju kvazibliskosti (bliskosti) koja zadovoljava uslov:

(P_6) ako je $x \delta y$, tada je $x=y$

nazivamo Hausdorfovom relacijom kvazibliskosti (bliskosti).

Svaka relacija kvazibliskosti (bliskosti) indukuju topologiju $\tau(\delta)$ pomoću operatora zatvaranja

$$A \to A^{\delta},$$

gde je $A^{\delta} = \{x \in X : x \delta A\}$.

Za svaku relaciju kvazibliskosti δ vezana je relacija kvazibliskosti

δ^{-1} definisana sa:

$$A\delta^{-1}B \text{ onda i samo onda, ako je } B\delta A .$$

Ovako definisanu relaciju kvazibliskosti nazivamo konjugovanom sa relacijom δ, a topologije $\tau(\delta)$ i $\tau(\delta^{-1})$ konjugovanim topologijama. U opštem slučaju ove topologije su različite.

Neka su τ i δ topologija i relacija kvazibliskosti (bliskosti) dedefinisane na istom skupu. Relacija kvazibliskosti (bliskosti) je saglasna sa topologijom τ, ako je $\tau = \tau(\delta)$. Sledeća teorema daje klasu onih topoloških prostora koji imaju saglasnu relaciju bliskosti.

TEOREMA 1. Ako je (X,τ) potpuno regularan topološki prostor, tada je relacija bliskosti δ definisana sa:

$A\bar{\delta}B$ ako postoji neprekidna funkcija $f:X\to I$ tako da je $f(x)=0$ za $x\in A$ i $f(x)=1$ za $x\in B$,

saglasna sa topologijom τ. Štaviše, ako je (X,τ) prostor Tihonova, tada je δ Hausdorfova relacija bliskosti.

Važi i obrat ove teoreme.

TEOREMA 2. Ako je (X,δ) (Hausdorfov) prostor bliskosti, tada je $\tau(\delta)$ (topologija Tihonova) potpuno regularna topologija.

Neka su (X,δ_1) i (Y,δ_2) prostori bliskosti. Preslikavanje $f:X\to Y$ je proksimalno ako iz

$$A\,\delta_1 B \quad \text{sledi} \quad f(A)\delta_2 f(B) .$$

Svako proksimalno preslikavanje je neprekidno u odnosu na topologije indukovane odgovarajućim relacijama bliskosti.

Neka je sada $((X_\alpha,\delta_\alpha))_{\alpha\in I}$ familija prostora bliskosti, a $X = \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ proizvod skupova X_α. Tada na skupu X možemo definisati relaciju bliskosti na sledeći način:

$A\delta B$ onda i samo onda, ako za svaki par konačnih pokrivača $\{A_1,A_2,\dots,A_m\}$ i $\{B_1,B_2,\dots,B_n\}$ skupova A i B respektivno, postoje skupovi A_i i B_j tako da je $pr_\alpha(A_i) \delta_\alpha pr_\alpha(B_j)$ za svako $\alpha \in I$.

Ovako definisanu relaciju na skupu X nazivamo proizvod relacijom bliskosti. Pritom je proizvod relacija bliskosti najslabija od svih relacija bliskosti na X pri kojima su sve projekcije proksimalno neprekidne.

Kolekciju $\mathcal{G}$ potskupova prostora bliskosti (X, δ) nazivamo δ-ultrafiltrom ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

(i) ako su A i B elementi familije $\mathcal{G}$, onda je $A \delta B$,

(ii) ako je $A \delta C$ za svako $C \in \mathcal{G}$, tada je $A \in \mathcal{G}$,

(iii) ako je $(A \cup B) \in \mathcal{G}$, tada je $A \in \mathcal{G}$ ili $B \in \mathcal{G}$.

Za svako $x \in X$, kolekcija $\mathcal{G}_x = \{A \subset X : A \delta x\}$ je δ-ultrafilter. Takav δ-ultrafilter nazivamo tačkastim.

Neka je (X, δ) Hausdorfof prostor bliskosti. Označimo sa $\mathfrak{X}$ skup svih δ-ultrafiltera u X. Za potskup $A \subset X$ označimo sa

$$\bar{\mathcal{A}} = \{\mathcal{G} \in \mathfrak{X} : A \in \mathcal{G}\}$$

Za svako $x \in X$ neka je $f(x) = \mathcal{G}_x$. Lako je videti da je f 1-1 preslikavanje za koje važi $f(A) \subseteq \bar{\mathcal{A}}$.

Za skup A se kaže da apsorbuje skup $\mathcal{P} \subset \mathfrak{X}$, ako je $A \in \mathcal{G}$ za svako $\mathcal{G} \in \mathcal{P}$. Može se dokazati da je relacija δ^* definisana na skupu $\mathfrak{X}$ sa :

$\mathcal{P} \delta^* \mathcal{Q}$ onda i samo onda, ako je $A \delta B$ kadgod A apsorbuje skup $\mathcal{P}$ a B apsorbuje skup $\mathcal{Q}$,

Hausdorfova relacija bliskosti na $\mathfrak{X}$. Štaviše, $(\mathfrak{X}, \tau(\delta^*))$ je kompaktan Hausdorfov prostor, pri čemu je $f(X)$ gust u $\mathfrak{X}$. Preciznije, važi

TEOREMA 3. Svaki Hausdorfov prostor bliskosti je gust potprostor jedinstvenog (do na δ-homeomorfizam) kompaktnog Hausdorfovog prostora.

Prostor bliskosti $(\mathfrak{X}, \delta^*)$ koji je prethodno opisan nazivamo kompaktifikacijom Smirnova za dati prostor bliskosti (X, δ).

II. TOPOLOŠKI UREDJENI PROSTORI

1. AKSIOME SEPARACIJE U TOPOLOŠKI UREDJENIM PROSTORIMA

Topološki uredjen prostor $(X,\mathcal{T},\leq)$ je skup X na kome je istovremeno definisana topologija $\mathcal{T}$ i uredjenje $\leq$. Smatraćemo da su ove dve strukture definisane nezavisno jedna od druge. Ukoliko ne postoji mogućnost da dodje do zabune, mi ćemo topološki uredjen prostor jednostavno označavati sa $(X,\mathcal{T})$, izostavljajući oznaku $\leq$ za uredjenje. Često ćemo razmatrati topološke prostore na kojima je definisano kvaziuredjenje. Takve prostore nazivamo topološko kvaziuredjenim prostorima, a označavaćemo ih isto kao topološki uredjene prostore.

Kako se svaki topološki prostor $(X,\mathcal{T})$ može posmatrati kao topološko uredjen prostor sa trivijalnim uredjenjem, to proučavanje topološko uredjenih prostora u sebi uključuje i proučavanje apstraktnih topoloških prostora. Stoga su rezultati dobijeni pri proučavanju topološki uredjenih prostora često uopštenja rezultata datih u opštoj topologiji. Sobzirom da se topolška i uredjajna struktura često prirodno javljaju zajedno, to je proučavanje medjusobnih odnosa ovih struktura od interesa, čime se daje jedna nova dimenzija proučavanju topologije.

DEFINICIJA 1. Topološki uredjen prostor $(X, \tau, \leq)$ je odozgo (odozdo) T_1-uredjen, ako za svaki par elemenata $a, b \in X$ za koje je $a \nleq b$, postoji opadajuća(rastuća)okolina W tačke $b(a)$ tako da je $a \notin W$ $(b \notin W)$. Topološki uredjen prostor je T_1-uredjen, ako je istovremeno odozdo i odozgo T_1-uredjen(vid [31]).

Pojam T_1-uredjenog prostora poklapa se sa pojmom semizatvorenog uredjenja (vid.[XV]) kao i pojmom semineprekidnog uredjenja (vid.[56]).

TEOREMA 1. U svakom topološki uredjenom prostoru $(X, \tau, \leq)$ sledeća tvrdjenja su ekvivalenta:

(i) $(X, \tau, \leq)$ je odozdo (odozgo) T_1-uredjen,

(ii) za svaki par tačaka $a, b \in X$ za koje je $a \nleq b$, postoji otvoren skup U koji sadrži tačku $a(b)$ tako da je $x \nleq b$ $(a \nleq x)$ za svako $x \in U$,

(iii) ako niz $\{x_\alpha, \alpha \in A\}$ konvergira ka a, i ako je $x_\alpha \leq b$ $(b \leq x_\alpha)$ za svako $\alpha \in A$, tada je $a \leq b$ $(b \leq a)$,

(iv) za svako $x \in X$, skup $(\leftarrow, x]$ $([x, \rightarrow))$ je zatvoren (vid. [31]).

DOKAZ: Da je (i) ekvivalentno sa (ii) je očigledno.

(ii)$\Rightarrow$(iv) Ako je $x \in X$, tada je prema pretpostavci, za svako $y \in X - (\leftarrow, x]$ $(X - [x, \rightarrow))$ $y \nleq x$ $(x \nleq y)$. Stoga postoji otvoren skup U koji sadrži element y, tako da je $u \nleq x$ $(x \nleq u)$ za svako $u \in U$. Odatle je $U \subseteq X - (\leftarrow, x]$ $(U \subseteq X - [x, \rightarrow))$, što dokazuje da je skup $X - (\leftarrow, x]$ $(X - [x, \rightarrow))$ otvoren.

(iii)$\Leftarrow$(iv) Neka je $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$ niz koji konvergira ka tačci a, i pretpostavimo da je $x_\alpha \leq b$ $(b \leq x_\alpha)$ za svako $\alpha \in A$. Tada je prema pretpostavci $a \in (\leftarrow, b]$ $([b, \rightarrow))$, pa je stoga $a \leq b$ $(b \leq a)$.

(iii)$\Rightarrow$(ii) Pretpostavimo da $(X, \tau, \leq)$ nije odozdo (odozgo) T_1-uredjen prostor. Tada postoje elementi $a, b \in X$, $a \nleq b$, tako da svaki otvoren skup U koji sadrži $a(b)$, sadrži element x_U za koji je $x_U \leq b$ $(a \leq x_U)$. Označimo sa $\mathcal{U}$ familiju otvorenih skupova usmerenih inkluzijom kao relacijom poretka. Očigledno je da niz $\{x_U : U \in \mathcal{U}\}$ konvergira ka a(b). No tada je $a \leq b$, što je kontradikcija.||

DEFINICIJA 2. Topološki uredjen prostor $(X, \tau, \leq)$ je T_2-uredjen ako za svaki par elemenata $a,b \in X$ takvih da je $a \nleq b$, postoji rastuća okolina U tačke a i opadajuća okolina V tačke b koje su disjunktne (vid. [31]).

Pojam T_2-uredjenog prostora poklapa se sa pojmom zatvorenog uredjenja (vid. [XV]), ili pojmom neprekidnog uredjenja. Opravdanost ovih naziva vidi se iz sledeće teoreme.

TEOREMA 2. Neka je $(X, \tau, \leq)$ uredjen topološki prostor. Tada su sledeća tvrdjenja ekvivalentna:

(i) $(X, \tau, \leq)$ je T_2-uredjen prostor,

(ii) za svaki par elemenata $a,b \in X$, takvih da je $a \nleq b$, postoje otvoren skup U koji sadrži a i otvoren skup V koji sadrži b, tako da je za svako $x \in U$ i svako $y \in V$ $x \nleq y$,

(iii) graf uredjenja $\leq$ je zatvoren u proizvod topologiji na $X \times X$,

(iv) ako su $\{x_\alpha, \alpha \in A\}$ i $\{y_\alpha : \alpha \in A\}$ nizovi koji konvergiraju ka a i b respektivno, i ako je $x_\alpha \leq y_\alpha$ za svako $\alpha \in A$, tada je $a \leq b$ (vid. [31]).

DOKAZ: Očigledno je da su uslovi (i) i (ii) ekvivalentni. Da su uslovi (ii) i (iv) ekvivalentni dokazuje se analogno kao u prethodnoj teoremi.

Dokažimo sada da (iii)$\Rightarrow$(i). Pretpostavimo da je graf G uredjenja zatvoren i neka su $a,b \in X$ takvi elementi za koje je $a \nleq b$. Tada je $(a,b) \in X^2 - G$, pa kako je graf G zatvoren, to postoje okoline V' i W' tačaka a i b respektivno, tako da je:

$$(V' \times W') \cap G = \emptyset \;;$$

drugim rečima, ako je $x \in V'$ i $y \in W'$, tada je $x \nleq y$. Označimo sa $V = i(V')$, a sa $W = d(W')$. Kako je $V' \subseteq V$, to je V rastuća okolina tačke a. Slično se zaključuje da je W opadajuća okolina tačke b. Dokažimo da su skupovi V i W disjunktni. Pretpostavimo suprotno, da postoji $z \in V \cap W$. Kako je $z \in V$, postoji tačka $z \in V'$ tako da je $x \leq z$. Slično se zaključuje da postoji tačka $y \in W'$ tako da je $z \leq y$. Sada iz $x \leq z$ i $z \leq y$ sledi da je $x \leq y$, što je kontradikcija, jer je $(x,y) \in V' \times W'$.

Dokažimo sada da iz (i) sledi (ii). Pretpostavimo da graf G uredje - nja nije zatvoren. Tada postoji tačka $(a,b) \in X^2$ tako da je $(a,b) \in \bar{G}$ i $(a,b) \in X^2 - G$. Stoga je $a \nleq b$. Neka je V proizvoljna rastuća okolina tačke a, a W proizvoljna opadajuća okolina tačke b. Kako je $V \times W$ okolina tačke (a,b), to je $(V \times W) \cap G \neq \emptyset$, jer je $(a,b) \in \bar{G}$. Stoga postoje elementi $v \in V$ i $w \in W$ tako da je $(v,w) \in G$, odnosno $v \leq w$. No skup V je rastući, pa stoga iz $v \leq w$ i $v \in V$ sledi da je $w \in V$. Time smo dokazali da okoline V i W nisu disjunktne.||

Lako je videti da je svaki T_i-uredjen prostor istovremeno T_i topološki prostor $(i=1,2)$ (vid.[31],[XV]). Obrat u opštem slučaju ne važi (vid.[31]).

DEFINICIJA 3. Topološki uredjen prostor $(X,\tau,\leq)$ je odozdo (o- odozgo) regularno uredjen, ako za svaki zatvoren opadajući (rastući) potskup $F \subset X$ i svaku tačku $x \in X-F$ postoji otvoren opadajući (rastući) skup U i otvoren rastući (opadajući) skup V, tako da je $x \in V$, $F \subseteq U$ i $U \cap V = \emptyset$. Topološki uredjen prostor je regularno uredjen, ako je istovremeno odozdo i odozgo regularno uredjen (vid.[11],[31]).

Regularno uredjen prostor koji je istovremeno i T_1-uredjen nazivamo T_3-uredjenim prostorom.

Neka je $(X,\tau,\leq)$ topološki uredjen prostor. Tada svaki potskup $A \subset X$ na jedinstven način odredjuje najmanji opadajući, zatvoren skup $D(A)$ koji sadrži skup A, kao i najmanji rastući, zatvoren skup $I(A)$ koji sadrži skup A.

TEOREMA 3. Ako je $(X,\tau,\leq)$ topološki uredjen prostor, tada su sledeća tvrdjenja ekvivalentna:

(i) $(X,\tau,\leq)$ je odozdo (odozgo) regularno uredjen,

(ii) za svaku otvorenu rastuću (opadajuću) okolinu V tačke $a \in X$ postoji otvoren rastući skup W koji sadrži tačku a, tako da je $I(W) \subseteq V$ $(D(W) \subseteq V)$.

DOKAZ: (i)$\Longrightarrow$(ii) Neka je X odozdo (odozgo) regularno uredjen prostor i neka je V otvoren, rastući (opadajući) skup koji sadrži tačku a. Skup X-V je zatvoren opadajući (rastući) i ne sadrži tačku a. Kako je X odozdo (odozgo) regularno uredjen, postoji otvorena rastuća (opadajuća) okolina W tačke a i otvorena opadajuća (rastuća) okolina W_1 skupa X-V, tako da je $W \cap W_1 = \emptyset$. Skup $X-W_1$ je zatvoren rastući (opadajući), pa kako je $W \subseteq X-W_1$, to je $W \subseteq I(W) \subseteq X-W_1$ $(W \subseteq D(W) \subseteq X-W_1)$. Stoga je $a \in W \subseteq I(W) \subseteq V$ $(a \in W \subseteq D(W) \subseteq V)$.

(ii)$\Rightarrow$(i) Neka je F zatvoren, opadajući (rastući) skup koji ne sadrži tačku a. Tada je V=X-F otvoren rastući (opadajući) skup koji sadrži tačku a. Stoga postoji otvoren, rastući (opadajući) skup W koji sadrži tačku a, tako da je $D(W) \subseteq V$. No tada je G=X-D(W) otvoren, opadajući (rastući) skup, pri čemu je $F \subseteq G$, $a \in W$ i $G \cap W = \emptyset$.||

DEFINICIJA 4. Topološki uredjen prostor $(X, \mathcal{T}, \leq)$ je normalno uredjen, ako za svaka dva zatvorena disjunktna skupa F_1 i F_2 od kojih je prvi opadajući a drugi rastući, postoje otvoreni, disjunktni skupovi G_1 i G_2, tako da je G_1 opadajući i sadrži F_1 a G_2 rastući i sadrži F_2 (vid.[XV],[31]).

Normalno uredjen prostor koji zadovoljava aksiomu T_1-uredjenosti, nazivamo T_4-uredjenim prostorom. Lako je videti da je svaki T_i-uredjen prostor istovremeno i T_{i-1}-uredjen prostor (i=2,3,4). Obrat u opštem slučaju ne važi (vid.[31]).

Napomenimo da se navedene aksiome separacije mogu analogno formulisati i u topološki kvaziuredjenim prostorima. Sve dokazane teoreme važe i u takvim prostorima.

TEOREMA 4. U svakom topološki uredjenom prostoru $(X, \mathcal{T}, \leq)$ sledeća tvrdjenja su ekvivalentna:

(i) $(X, \mathcal{T}, \leq)$ je normalno uredjen,

(ii) za svaka dva otvorena skupa G_1 i G_2, gde je G_1 opadajući, a G_2 rastući skup i $G_1 \cup G_2 = X$, postoje skupovi F_1 i

F_2 koji su respektivno opadajući i rastući, tako da je $F_1 \subset G_1$, $F_2 \subset G_2$ i $F_1 \cup F_2 = X$,

(iii) ako je F zatvoren, opadajući (rastući) skup, a V otvoren, opadajući (rastući) skup koji sadrži skup F, tada postoji otvoren opadajući (rastući) skup W tako da je $F \subset$ $\subset W$ i $D(W) \subset V$ $(I(W) \subset V)$ (vid. [XL], [11]).

DOKAZ: (i)$\Rightarrow$(ii) Neka su G_1 i G_2 otvoreni skupvi za koje važi $G_1 \cup G_2 = X$, pri čemu je G_1 opadajući a G_2 rastući skup u X. Tada su skupovi $H_1 = X - G_1$ i $H_2 = X - G_2$ zatvoreni, pri čemu je H_1 rastući, H_2 opadajući i $H_1 \cap H_2 = \emptyset$. Prostor X je normalno uredjen, pa postoji otvoren rastući skup K_1 koji sadrži H_1 i otvoren opadajući skup K_2 koji sadrži H_2 i pritom je $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. No sada je $F_1 = X - K_1$ zatvoren opadajući skup, $F_2 = X - K_2$ zatvoren rastući skup, pri čemu je $F_1 \cup F_2 = X$. Lako je videti da je $F_1 \subset G_1$ i $F_2 \subset G_2$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Neka je F zatvoren, opadajući (rastući) skup, a V otvoren, opadajući (rastući) skup koji sadrži skup F. Skup X-F je otvoren, rastući (opadajući) pri čemu je $(X-F) \cup V = X$, pa stoga postoji zatvoren, rastući (opadajući) skup F_1 i zatvoren, opadajući (rastući) skup F_2 tako da je $F_1 \subset X-F$, $F_2 \subset V$ i $F_1 \cup F_2 = X$. Stavimo da je $W_1 = X - F_1$ i $W_2 = X - F_2$. Tada je W_1 otvoren, opadajući (rastući) skup, W_2 je otvoren, rastući (opadajući) skup i $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Pritom je $F \subset W_1$ i $X - V \subset W_2$. Stavimo da je $W = W_1$. Tada je $D(W) \subset D(X - W_2) = X - W_2 \subset V$ $(I(W) \subset I(X - W_2) = X - W_2 \subset V)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Neka je F_1 zatvoren, opadajući skup disjunktan sa zatvorenim, rastućim skupom F_2. Stavimo $F = F_1$ i $V = X - F_2$. Tada prema (iii) postoji otvoren, opadajući skup W tako da je $F \subset W$ i $D(W) \subset V$. Skupovi $G_1 = W$ i $G_2 = X - D(W)$ su otvoreni, pri čemu je prvi opadajući i sadrži skup F_1 a drugi je rastući i sadrži skup F_2.||

TEOREMA 5. Neka je topološki uredjen prostor X regularno kvaziuredjen. Ako je X prostor Lindelefa, tada je on normalno uredjen.

DOKAZ: Neka je A zatvoren, opadajući skup, B zatvoren, rastući skup i $A \cap B = \emptyset$. Kako je prostor X regularno uredjen, to za svaku tačku $a\in A$ postoji otvoren, opadajući skup B, tako da je $D(G_a)\cap B=\emptyset$. Familija $\{G_a\}_{a\in A}\cup \complement A$ je otvoren pokrivač prostora X koji se redukuje na prebrojiv potpokrivač obrazovan skupovima $\complement A, G_{a_1}, G_{a_2}, \dots$. Stoga je $A\subset G_{a_1}\cup G_{a_2}\cup \dots$.

Analogno se mogu odrediti otvoreni, rastući skupovi $H_{b_1}, H_{b_2}, \dots$, tako da je $B\subset H_{b_1}\cup H_{b_2}\cup \dots$, pri čemu je $A\cap I(H_{b_n})=\emptyset$ za svako $n=1,2,\dots$.

Za $n=1$ stavimo da je $U_1=G_{a_1}$ i $V_1=H_{b_1}-D(U_1)$. Za $n>1$ definišimo skupove U_n i V_n induktivno:

$$U_n=G_{a_n}-(I(V_1)\cup \dots \cup I(V_{n-1})), \quad V_n=H_{b_n}-(D(U_1)\cup \dots \cup D(U_n)).$$

Skupovi U_n i V_n su respektivno otvoreni opadajući i rastući u X. Tada su skupovi

$$G=U_1\cup U_2\cup \dots \qquad \text{i} \qquad H=V_1\cup V_2\cup \dots$$

respektivno opadajući i rastući skupovi u X. Kako je $V_n\subset H_{b_n}$, to je $I(V_n)\subset I(H_{b_n})$. Stoga je $A\cap I(V_n)\subset A\cap I(H_{b_n})$. Odatle sledi da je $A\subset G$. Analogno se dokazuje da je $B\subset H$. Konačno, dokažimo da je $G\cap H=\emptyset$. Za to je dovoljno dokazati da je $U_n\cap V_m=\emptyset$ za svako $n,m\in N$. Zaista, ako je $m\leq n-1$, tada je prema definiciji skupova U_n, $U_n\cap I(V_m)=\emptyset$, pa je $U_n\cap V_m=\emptyset$. Ako je $n\leq m$, tada je prema definiciji skupova V_n, $D(U_n)\cap V_m=\emptyset$, odakle sledi da je $U_n\cap V_m=\emptyset$.||

TEOREMA 6. Neka je uredjen topološki prostor X normalno uredjen. Ako je preslikavanje $f:X\to Y$ neprekidno, zatvoreno preslikavanje normalno uredjenog prostora X na topološki uredjen prostor Y, pri čemu je f istovremeno izotono i dualno izotono, tada je prostor Y normalno uredjen.

DOKAZ: Neka je $f:X\to Y$ preslikavanje sa navedenim osobinama i neka je X normalno uredjen prostor. Neka su G_1 i G_2 otvoreni potskupovi u Y, pri čemu je G_1 opadajući, G_2 rastući skup i $G_1\cup G_2=Y$. Tada su skupovi $f^{-1}(G_1)$ i $f^{-1}(G_2)$ otvoreni, pri čemu je zbog izotonosti preslikavanja f prvi opadajući, drugi rastući skup u X i

$$f^{-1}(G_1)\cup f^{-1}(G_2)=f^{-1}(G_1\cup G_2)=X \ .$$

Kako je X normalno uredjen prostor, to prema uslovu (ii) TEOREME 4. postoje zatvoreni skupovi F_1 i F_2 tako da je F_1 opadajući, F_2 rastući skup, $F_2 \subset f^{-1}(G_1)$, $F_2 \subset f^{-1}(G_2)$ i $F_1 \cup F_2 = X$. Kako je preslikavanje f "na", to je

$$f(F_1) \cup f(F_2) = f(F_1 \cup F_2) = Y$$

i $f(F_1) \subset G_1$, $f(F_2) \subset G_2$. Preslikavanje f je zatvoreno, pa su stoga skupovi $f(F_1)$ i $f(F_2)$ zatvoreni. Dokažimo da su oni respektivno opadajući i rastući u Y. Neka je $x \in f(F_1)$ i $y \leq x$. Tada postoji $\bar{x} \in F_1$ i $\bar{y} \in X$ tako da je $f(\bar{x}) = x$ i $f(\bar{y}) = y$. Kako je funkcija f dualno izotona i $f(\bar{y}) \leq f(\bar{x})$, to je $\bar{y} \leq \bar{x}$. Skup F_1 je opadajući, $x \in F_1$ i $\bar{y} \leq \bar{x}$, odakle sledi da je $\bar{y} \in F_1$. Stoga je $y = f(\bar{y}) \in f(F_1)$. Analogno se dokazuje da je $f(F_2)$ rastući skup.||

Sada ćemo izložiti prvi fundamentalni stav u ovom odaljku. U slučaju kada je posmatrano uredjenje diskretnog tipa, ova teorema se svodi na Urisonovu teoremu o separaciji zatvorenih, disjunktnih skupova normalnog prostora pomoću neprekidne funkcije.

TEOREMA 7. Da bi topološki kvaziuredjen prostor X bio normalno kvaziuredjen, potrebno je i dovoljno, da za svaka dva zatvorena, disjunktna potskupa $F_0, F_1 \subset X$, gde je F_0 opadajući, a F_1 rastući skup, postoji neprekidna, rastuća funkcija $f: X \to I$ tako da je $f(x) = 0$ za $x \in F_0$ i $f(x) = 1$ za $x \in F_1$ (vid. [XL]).

DOKAZ: Pretpostavimo najpre da takva funkcija f postoji. Definišimo skupove

$$A_o = \{x \in X : f(x) < 1/2\} \quad , \quad A_1 = \{x \in X : f(x) > 1/2\} \ .$$

Sobzirom na učinjene pretpostavke o funkciji f, skup A_o je opadajući i sadrži skup F_o, skup A_1 je rastući i sadrži skup F_1, pri čemu je očigledno $A_o \cap A_1 = \emptyset$. To dokazuje da je prostor X normalno kvaziuredjen.

Obratno, pretpostavimo da je X normalno kvaziuredjen prostor i neka su F_o i F_1 zatvoreni, disjunktni skupovi, pri čemu je prvi opadajući a drugi rastući.

Za svaki dijadski razlomak ξ oblika $k/2^n$, gde su k i n prirodni brojevi, $0 \leq \xi \leq 1$, definišimo otvoren, opadajući skup $V(\xi)$ X na sledeći način:

$$V(0) = \emptyset \qquad , \qquad V(1) = X - F_1 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Neka je n proizvoljan prirodan broj. Pretpostavimo da smo za svako $k=0,1,\ldots,2^n$ definisali skupove

$$V(k/2^n) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [n]$$

tako da su sledeći uslovi zadovoljeni:

(1_n) $V(k/2^n)$ je otvoren, opadajući skup $(k=0,1,\ldots,2^n)$,

(2_n) $D(V(k/2^n)) \subset V((k+1)/2^n)$ $(k=0,1,\ldots,2^n-1)$,

(3_n) $F_o \subset V(k/2^n)$ $(k=1,2,\ldots,2^n)$,

(4_n) $V(0)=\emptyset$.

Formule (1) pokazuju da za n=0 ovi uslovi zaista važe. Uočimo sada proizvoljan prirodan broj $n \geq 0$ i definišimo za svako $k=0,1,2,\ldots,2^{n+1}$ skupove

$$V(k/2^{n+1}) \quad \ldots\ldots\ldots [n+1]$$

na sledeći način.

Ako je k paran broj oblika $k=2p$, gde je $p=0,1,\ldots,2^n$, stavimo

$$V(k/2^{n+1}) = V(p/2^n) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Ako je $k \neq 1$ neparan broj oblika $k=2p+1$, gde je $p=1,2,\ldots,2^n-1$, tada je prema uslovu (2_n)

$$D(V(p/2^n)) \subset V((p+1)/2^n) \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Skup $D(V(p/2^n))$ je zatvoren, a $V((p+1)/2^n))$ otvoren, opadajući, pa kako je X normalno kvaziuredjen prostor, to postoji otvoren, opadajući skup W_o tako da je:

$$D(V(p/2^n)) \subset W_o \qquad i \qquad D(W_o) \subset V((p+1)/2^n) \qquad (4)$$

U tom slučaju stavimo da je $V(k/2^{n+1}) = W_o$.

Ako je k=1, primetimo da je prema uslovu (3_n)

$$F_o \subset V(1/2^n) \quad .$$

Zbog normalne kvaziuredjenosti prostora X, postoji otvoren, opadajući skup W_1 tako daje

$$F_o \subset W_1 \qquad i \qquad D(W_1) \subset V(1/2^n) \quad \ldots (5)$$

U tom slučaju stavimo da je $V(1/2^{n+1}) = W_1$.

Na taj način imamo niz [n+1] potpuno definisan. Ovako definisan niz očigledno zadovoljava uslov (1_{n+1}). Uslov (2_{n+1}) je takodje očigledan; ako je $k=o$, to neposredno sledi iz (4_n); ako je $k>o$ paran broj, uslov (2_{n+1}) sledi iz prvog dela (4), a ako je $k=1$ iz drugog dela (5). Konačno, ako je $k>1$ neparan broj, tada uslov (2_{n+1}) sledi iz drugog dela (4). Na sličan način se može pokazati da su i uslovi (3_{n+1}) i (4_{n+1}) zadovoljeni. Štaviše, iz (2) vidimo da niz $[n+1]$ proširuje niz $[n]$.

Time smo metodom potpune matematičke indukcije za svaki dijadski razlomak ξ konstruisali otvoren opadajući skup $V(\xi)$, $0 \leq \xi \leq 1$, tako da su zadovoljeni sledeći uslovi:

(a) ako je $\xi < \xi'$, tada je $D(V(\xi)) \subset V(\xi')$,

(b) ako je $\xi > o$, tada je $F_o \subset V(\xi)$,

(c) $V(0) = \emptyset$, $V(1) = X - F_1$.

Definišimo funkciju $f(x)$ kao supremum onih dijadskih razlomaka ξ, $0 \leq \xi \leq 1$, za koje je $x \in X - V(\xi)$. Očigledno je $0 \leq f(x) \leq 1$.

Ako je $x \in F_o$, tada iz uslova (b) sledi da je $x \in V(\xi)$ za svaki dijadski razlomak $\xi > 0$. To dokazuje da je $f(x) = 0$.

Ako je $x \in F_1$, tada je $x \in X - V(1)$ zbog uslova (c), pa je dakle $f(x)=1$.

Pretpostavimo sada da za elemente $x, y \in X$ važi $x \leq y$. Ako je $x \in X - V(\xi)$, tada je $y \in X - V(\xi)$ jer je skup $X - V(\xi)$ rastući. Stoga je $f(y) \geq \xi$. Sobzirom na proizvoljnost broja ξ, zaključujemo da je

$$f(x) \leq f(y) \quad \text{ako je } x \leq y \ ;$$

funkcija f je dakle rastuća.

Primetimo na kraju da je

$$\overline{V(\xi)} \subset D(V(\xi))$$

kao posledica uslova (a), pa stoga imamo inkluziju:

(a') ako je $\xi < \xi'$, tada je $\overline{V(\xi)} \subset D(V(\xi'))$.

Koriščenjem poslednjeg uslova, potpuno analogno dokazu Urisonove leme, dokazuje se neprekidnost funkcije f.||

Napomenimo da u normalno kvaziuredjenim prostorima važi niz interesantnih osobina (vid.[9],[39],[46]). Od specijalnog su interesa rezultati koji se odnose na interpolaciju semineprekidnih funkcija neprekidnom funkcijom (vid. [39],[46]) koji uopštavaju poznate rezultate opšte topologije.

Sledeći fundamentalni rezultat ovog paragrafa odnosi se na proširenje neprekidnih funkcija u topološki uredjenim prostorima. Zbog dužine, dokaz ove teoreme ne navodimo.

TEOREMA 8. Neka je X normalno kvaziuredjen prostor, F zatvoren potskup prostora X, a f ograničena, realna funkcija koja je neprekidna i rastuća na F. Označimo sa $A(\xi)$ i $B(\xi)$ skupove

$$A(\xi)=\{x\in X : f(x)\leq \xi\} \quad , \quad B(\xi)=\{x\in X : f(x)\geq \xi\} \quad ,$$

gde je ξ proizvoljan realan broj.

Da bi se funkcija f mogla proširiti do neprekidne, ograničene funkcije koja je rastuća na X, potrebno je i dovoljno, da iz

$$\xi<\xi' \quad \text{sledi} \quad D(A(\xi))\cap I(B(\xi')) = \emptyset$$

(vid. [XL]).

Na kraju ovog odeljka uvedimo još neke pojmove koje ćemo u daljem radu koristiti.

Neka je $(X,\tau,\leq)$ topološki kvaziuredjen prostor. Za topologiju τ kažemo da je lokalno konveksna, ako je skup konveksnih okolina svake tačke baza okolinskog sistema te tačke. Topologija τ je jako konveksna, ako je skup otvorenih konveksnih potskupova baza topologije τ. Ako je skup koji se sastoji iz otvorenih opadajućih i otvorenih rastućih skupova predbaza topologije τ, tada za topologiju τ kažemo da je konveksna (vid. [XL]).

Lako je videti da je svaka konveksna topologija jako konveksna, a da je ova lokalno konveksna (vid.[XL]).

2. POTPUNO NORMALNO UREDJENI PROSTORI

Neka je (X,τ) topološki prostor snabdeven kvaziuredjenjem (uredjenjem). Ako je $Y \subsetneq X$, tada je (Y, τ_Y) kvaziuredjen (uredjen) potprostor prostora (X, τ) u odnosu na kvaziuredjenje (uredjenje) indukovano kvaziuredjenjem (uredjenjem) sa prostora X na potprostor Y.

DEFINICIJA 1. Topološki kvaziuredjen (uredjen) potprostor (Y, τ_Y) prostora (X, τ) je τ-saglasno kvaziuredjen (uredjen), ako za svaki τ_Y-zatvoren skup F koji je opadajući (rastući) u Y, postoji τ-zatvoren skup F^* koji je opadajući (rastući) u X, tako da je $F = F^* \cap Y$ (vid. [31]).

Očigledno je, da svaki potprostor topološki uredjenog prostora ne mora biti τ-saglasno uredjen.

STAV 1. Neka je (Y, τ_Y) τ-saglasno kvaziuredjen potprostor topološki kvaziuredjenog prostora (X, τ). Tada za svaki zatvoren, opadajući (rastući) potskup $A \subset Y$ važi $A = D(A) \cap Y$ $(A = I(A) \cap Y)$.

DOKAZ: Kako je (Y, τ_Y) τ-saglasno kvaziuredjen potprostor prostora (X, τ), to za svaki zatvoren opadajući potskup $A \subset Y$ postoji zatvoren, opadajući potskup A^* u X, tako da je $A = A^* \cap Y$. Kako je $D(A)$ najmanji zatvoren opadajući skup koji sadrži skup A, to je $D(A) \subseteq A^*$. Stoga je $D(A) \cap Y \subseteq A^* \cap Y = A$. Inkluzija $A \subset D(A) \cap Y$ je očigledna, što dokazuje da je $A = D(A) \cap Y$. Drugi deo tvrdjenja se analogno dokazuje.||

STAV 2. Topološki kvaziuredjen potprostor (Y, τ_Y) prostora (X, τ) je τ-saglasno kvaziuredjen onda i samo onda, ako za svaki τ_Y-otvoren opadajući (rastući) potskup $G \subset Y$ postoji otvoren opadajući (rastući) potskup G^* u X, tako da je $G = G^* \cap Y$.

DOKAZ: Neka je (Y, τ_Y) τ-saglasno kvaziuredjen potprostor prostora (X, τ). Ako je $G \subset Y$ τ_Y-otvoren opadajući (rastući) potskup u Y, tada je $F = Y - G$ τ_Y-zatvoren rastući (opadajući) potskup u Y. Stoga postoji zatvoren rastući (opadajući) potskup F^* u X, tako da je $F = F^* \cap Y$. Skup $G^* = X - F^*$ je otvoren opadajući (rastući) potskup u X za koji važi $G = G^* \cap Y$.

Obratno, pretpostavimo da za svaki τ_Y-zatvoren, opadajući (rastući) potskup $G \subset Y$ postoji otvoren opadajući (rastući) skup G^* u X, tako da je $G = G^* \cap Y$. Neka je F τ_Y-zatvoren, opadajući (rastući) potskup u Y. Skup $Y - F$ je τ_Y-otvoren, rastući (opadajući) potskup u Y, pa stoga postoji rastući (opadajući) skup G^* otvoren u X, tako da je $Y-F = Y \cap G^*$. Skup $F^* = X - G^*$ je opadajući (rastući) i zatvoren u X. Lako je dokazati da je $F = F^* \cap Y$.||

DEFINICIJA 2. Topološki prostor X snabdeven kvaziuredjenjem je potpuno (ili nasledno) normalno kvaziuredjen, ako je svaki njegov potprostor normalno kvaziuredjen. Potpuno normalno kvaziuredjen prostor u kome je kvaziuredjenje uredjenje, nazivamo potpuno normalno uredjen prostor.

TEOREMA 3. Neka je X topološki prostor snabdeven kvaziuredjenjem u kome je svaki potprostor τ-saglasno kvaziuredjen. Tada su sledeća tvrdjenja ekvivalentna:

(i) (X, τ) je potpuno normalno kvaziuredjen,

(ii) za svaka dva potskupa $A, B \subset X$ koja zadovoljavaju uslov

$$D(A) \cap B = \emptyset = A \cap I(B) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (*)$$

postoji otvoren opadajući skup U^* i otvoren rastući skup V^* tako da je

$$A \subseteq U^* \quad , \quad B \subseteq V^*$$

i

$$U^* \cap V^* = \emptyset \quad .$$

DOKAZ: (i)$\Rightarrow$(ii) Neka je X potpuno normalno kvaziuredjen prostor i neka su A i B potskupovi u X koji zadovoljavaju uslov (*). Označimo sa Y skup $X - (D(A) \cap I(B))$. Tada su skupovi $D(A) - I(B)$ i $I(B) - D(A)$ zatvoreni u Y, pri čemu je prvi opadajući a drugi rastući u Y. Stoga postoje otvoreni skupovi U i V u Y, pri čemu je U opadajući, V rastući potskup u Y i

$$D(A) - I(B) \subseteq U \quad , \quad I(B) - D(A) \subseteq V \quad \text{i} \quad U \cap V = \emptyset \quad .$$

Na osnovu STAVA 2., postoje otvoren opadajući skup U^* i otvoren rastući skup V^* u X tako da je $U = U^* \cap Y$ i $V = V^* \cap Y$. Stoga je

$$D(A)-I(B)\subseteq U^{*} \quad , \quad I(B)-D(A)\subseteq V^{*} \quad , \quad U^{*}\cap V^{*}=\emptyset \; .$$

Kako je $A\subseteq D(A)-I(B)$, to je $A\subseteq U^{*}$. Slično se dokazuje da je $B\subseteq V^{*}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Neka je $Y\subset X$ proizvoljan potskup prostora X i neka su A i B disjunktni, zatvoreni potskupovi u prostoru Y, pri čemu je A opadajući a B rastući potskup u odnosu na kvaziuredjenje indukovano na Y kao potprostoru prostora X. Dokažimo najpre da skupovi A i B zadovoljavaju relaciju (*). Zaista, prema STAVU 1. je $A=D(A)\cap Y$, $B=I(B)\cap Y$, pa je stoga

$$A\cap I(B)=D(A)\cap I(B)\cap Y=(D(A)\cap Y)\cap(I(B)\cap Y)=A\cap B=\emptyset \; .$$

Analogno se dokazuje da je $D(A)\cap B=\emptyset$. Stoga postoje otvoren opadajući skup U^{*} i otvoren rastući skup V^{*}, tako da je

$$A\subseteq U^{*} \quad , \quad B\subseteq V^{*} \qquad i \qquad U^{*}\cap V^{*}=\emptyset \; .$$

Očigledno je $A\subseteq U^{*}\cap Y=U$, $B\subseteq V^{*}\cap Y=V$ i $U\cap V=\emptyset$. Pritom je U otvoren i opadajući, a V otvoren i rastući potskup u Y. Prostor X je dakle potpuno normalno kvaziuredjen.||

STAV 4. Neka je X topološki prostor snabdeven kvaziuredjenjem. Ako je svaki otvoren potskup $G\subset X$ prostora X normalno kvaziuredjen, tada je X potpuno normalno kvaziuredjen

DOKAZ: Neka je $Y\subset X$ proizvoljan potprostor prostora X. Neka su F_1 i F_2 zatvoreni, disjunktni potskupovi u Y, pri čemu je prvi opadajući a drugi rastući u Y. Označimo sa F skup $D(F_1)\cap I(F_2)$. Skup $X-F=G$ je otvoren u X, pa je prema pretpostavci normalno kvaziuredjen kao potprostor prostora X. Skupovi $D(F_1)\cap G$ i $I(F_2)\cap G$ su disjunktni i zatvoreni u G. Stoga postoje disjunktni skupovi G_1 i G_2 u G od kojih je prvi opadajući i sadrži skup $D(F_1)\cap G$ a drugi rastući i sadrži skup $I(F_2)\cap G$. Kako je $F_1\subseteq D(F_1)\cap G$, $F_2\subseteq I(F_2)\cap G$, to su $G_1\cap Y$ i $G_2\cap Y$ disjunktne okoline skupova F_1 i F_2 u Y. Pritom je $G_1\cap Y$ opadajući a $G_2\cap Y$ rastući skup u Y.||

STAV 5. Neka je $(X,\mathcal{R})$ potpuno normalno kvaziuredjen topo-topološki prostor u kome je svaki potprostor $\mathcal{R}$-saglasno kvaziuredjen. Ako za skupove $A,B\subset X$ važi

$$D(A)\cap B = \emptyset = A\cap I(B) \quad ,$$

tada postoji otvoren, opadajući (rastući) skup G tako da je

$$A\subseteq G \quad i \quad D(G)\cap B=\emptyset \qquad (B\subseteq G \quad i \quad A\cap I(G)=\emptyset \ ) .$$

DOKAZ: Neka je $Y = X-(D(A)\cap I(B))$. Tada su skupovi $D(A)-I(B)$ i $I(B)-D(A)$ disjunktni i zatvoreni u Y, pri čemu je prvi opadajući a drugi rastući u Y. Kako je prostor X potpuno normalno kvaziuredjen, a svaki njegov potprostor τ-saglasno kvaziuredjen, to postoji otvoren opadajući skup G u Y tako da je

$$D(A)-I(B)\subseteq G \quad i \quad D(G)\cap Y\cap (I(B)-D(A)) = \emptyset \ .$$

Kako je $A\cap I(B) = \emptyset$, to je $A\subseteq D(A)-I(B)\subseteq G$. Iz relacije $D(A)\cap B = \emptyset$ sledi

$$D(G)\cap B\subseteq D(G)\cap (I(B)-D(A))\subseteq D(G)\cap Y\cap (I(B)-D(A)) = \emptyset \ .$$

Stoga je $D(G)\cap B = \emptyset$. Analogno se dokazuje drugi deo tvrdjenja.

TEOREMA 6. Neka je (X,τ) topološki prostor snabdeven kvaziuredjenjem. Ako je svaki potprostor prostora X τ-saglasno kvaziuredjen, tada su sledeća tvrdjenja ekvivalentna:

(i) (X,τ) je potpuno normalno kvaziuredjen,

(ii) ako su A i B zatvoreni potskupovi prostora X od kojih je prvi opadajući a drugi rastući, tada postoje zatvoreni skupovi A^* i B^* od kojih je prvi opadajući a drugi rastući u X i

$$A^*\cup B^* = X \quad , \quad A^*\cap (A\cup B) = A \quad , \quad B^*\cap (A\cup B) = B \ .$$

DOKAZ: (i)$\Longrightarrow$(ii) Neka su A i B zatvoreni skupovi u X, pri čemu je prvi opadajući a drugi rastući u X. Kako je A zatvoren opadajući skup u X, to je $A = D(A)$. Stoga je $D(A-B)\subseteq D(A) = A$, odakle sledi da je $D(A-B)\cap (B-A) = \emptyset$. Prema STAVU 5., postoji otvoren opadajući skup G, tako da je:

$$A-B\subseteq G \quad i \quad D(G)\cap (B-A) = \emptyset \ .$$

Definišimo skupove:

$$A^* = D(G)\cup (A\cap B) \quad i \quad B^* = (X-G)\cup (A\cap B) \ .$$

Skup A^* je opadajući. Zaista, neka je $y\in A^*$ i $x\leq y$. Kako je $y\in A^*$, to je $y\in D(G)$, ili $y \in A \cap B$. Ako je $y \in D(G)$, tada je i $x \in D(G)$, pa je dakle $x \in A^*$. Ako je $y \in A \cap B$, tada je $y \notin B-A \subseteq X-D(G)$ pa je stoga $y \in D(G)$. Odavde sledi da je $x \in D(G) \subseteq A^*$. Slično se dokazuje da je skup B^* rastući u X. Sada je:

$$A^* \cup B^* \supseteq D(G) \cup (X-G) \supseteq G \cup (X-G) = X .$$

Lako je proveriti da je

$$A^* \cap (A \cup B) = A \quad i \quad B^* \cap (A \cup B) = B$$

čime je prvi deo teoreme dokazan.

(ii)$\Longrightarrow$(i) Obratno, pretpostavimo da za svaka dva zatvorena skupa A i B, gde je prvi opadajući a drugi rastući u X, postoje zatvoreni skupovi A^* i B^*, gde je A^* opadajući, B^* rastući, tako da je

$$A^* \cup B^* = X \quad , \quad A^* \cap (A \cup B) = A \quad , \quad B^* \cap (A \cup B) = B .$$

Dokažimo da je svaki potprostor $Y \subseteq X$ normalno kvaziuredjen. Neka su M_o i M_1 disjunktni, zatvoreni potskupovi u Y, pri čemu je prvi opadajući, a drugi rastući u Y. Tada je prema STAVU 1.

$$M_o = D(M_o) \cap Y \qquad , \qquad M_1 = I(M_1) \cap Y .$$

Prema pretpostavci teoreme, postoje zatvoreni skupovi C_o i C_1 u X, gde je C_o opadajući, C_1 rastući skup u X i

$$C_o \cap (D(M_o) \cup I(M_1)) = D(M_o) \quad , \quad C_1 \cap (D(M_o) \cup I(M_1)) = I(M_1)$$
$$C_o \cup C_1 = X .$$

Stavimo $F_i = C_{1-i} \cap Y$, gde je $i=0,1$. Na osnovu prethodnog imamo:

$$F_o \cup F_1 = (C_o \cup C_1) \cap Y = Y$$

Pritom je:

$$F_o \cap M_o = C_1 \cap Y \cap M_o = C_1 \cap M_o = C_1 \cap (I(M_1) \cup D(M_1)) \cap M_o = I(M_1) \cap M_o .$$

Dokažimo da je $I(M_1) \cap M_o = \emptyset$. Kako su skupovi M_o i M_1 disjunktni i zatvoreni u Y, to su oni zatvoreni i u $M_o \cup M_1$. Skup M_1 je rastući u $M_o \cup M_1$, pa je prema STAVU 1. $M_1 = I(M_1) \cap (M_o \cup M_1)$. Stoga je

$$M_o \cap I(M_1) \subseteq I(M_1) \cap (M_o \cup M_1) = M_1$$

Kako je $M_o \cap I(M_1) \subseteq M_o$, to je $M_o \cap I(M_1) \subseteq M_o \cap M_1 = \emptyset$. Dakle je $F_o \cap M_o = \emptyset$. Na analogan način se dokazuje da je $D(M_o) \cap M_1 = \emptyset$, odakle sledi da je $F_1 \cap M_1 = \emptyset$. Time smo dokazali da je svaki potprostor $Y \subseteq X$ normalno kvaziuredjen.||

STAV 7. Neka je $(X,\mathcal{T})$ topološki prostor snabdeven kvaziuredjenjem u kome je svaki potprostor $\mathcal{T}$-saglasno kvaziuredjen. Ako je X potpuno normalno kvaziuredjen prostor, tada za svaki opadajući skup A i svaki rastući skup B za koje važi

$$A\cap I(B) = \emptyset \qquad (D(A)\cap B = \emptyset)$$

postoji otvoren, opadajući (rastući) skup G tako da je

$$A\subseteq G \ , \quad G\cap I(B) = \emptyset \quad i \quad D(G)\cap B\subseteq D(A)$$

$$(B\subseteq G \ , \quad D(A)\cap G = \emptyset \quad i \quad A\cap I(B)\subseteq I(A)).$$

DOKAZ: Uočimo skupove A i B-D(A). Tada je

$$A\cap I(B-D(A))\subseteq A\cap I(B) = \emptyset = D(A)\cap (B-D(A)) \ .$$

Na osnovu STAVA 5., postoji otvoren, opadajući skup G_o tako da je:

$$A\subseteq G_o \quad i \quad D(G_o)\cap (B-D(A)) = \emptyset \ .$$

Iz poslednje relacije sledi da je $D(G_o)\cap B\subseteq D(A)$. Stavimo da je $G = G_o-I(B)$. Očigledno je $A\subseteq G$ i $G\cap I(B) = \emptyset$. Pritom je

$$D(G)\cap B = D(G_o-I(B))\cap B\subseteq D(G_o)\cap B\subseteq D(A)$$

čime je prvi deo stava dokazan. Drugi deo stava se analogno dokazuje.||

STAV 8. Neka je $f:X\to Y$ neprekidno, zatvoreno preslikavanje potpuno normalno kvaziuredjenog prostora X na topološki kvaziuredjen prostor Y. Ako je preslikavanje f istovremeno izotono i dualno izotono, tada je Y potpuno normalno kvaziuredjen.

DOKAZ: Neka je X potpuno normalno kvaziuredjen topolološki prostor i neka je A proizvoljan potskup kvaziuredjenog topološkog prostora Y. Skup $f^{-1}(A)$ je normalno kvaziuredjen potprostor prostora X. Kako je

$$f:f^{-1}(A) \longrightarrow A$$

neprekidno, zatvoreno preslikavanje koje je istovremeno izotono i dualno izotono, to je prema STAVU 6.,1. potprostor A prostora Y normalno kvaziuredjen.||

3. SAVRŠENO NORMALNO UREDJENI PROSTORI

DEFINICIJA 1. Topološki prostor X snabdeven kvaziuredjenjem je savršeno normalno kvaziuredjen, ako za svaki zatvoren rastući skup B i svaki zatvoren, opadajući skup A, $A \cap B = \emptyset$, postoji neprekidna, rastuća funkcija $f: X \to I$ koja zadovoljava uslove:

$$(f(x)=0) \Longleftrightarrow (x \in A) \text{ i } (f(x)=1) \Longleftrightarrow (x \in B) \quad \ldots (1)$$

Očigledno da su uslovi za savršeno normalnu kvaziuredjenost stroži od uslova koje zadovoljava funkcija čiju egzistenciju garantuje uopštenje Urisonove leme na normalno kvaziuredjenim prostorima. Stoga je svaki savršeno normalno kvaziuredjen prostor normalno kvaziuredjen. Savršeno normalno kvaziuredjen prostor u kome je je kvaziuredjenje uredjenje, nazivamo savršeno normalno uredjenim prostorom.

DEFINICIJA 2. Neka je X topološki prostor snabdeven kvaziuredjenjem (uredjenjem). Potskup $F \subset X$ je opadajućeg tipa (rastućeg tipa) G_δ, ako se može prikazati kao presek prebrojivo mnogo otvorenih opadajućih (rastućih) skupova.

Slično se definiše skup opadajućeg (rastućeg) tipa F_σ. Lako se može videti da su familije skupova opadajućeg (rastućeg) tipa G_δ i rastućeg (opadajućeg) tipa F_σ medjusobno komplementarne.

STAV 1. Neka je A zatvoren potskup savršeno normalno kvaziuredjenog prostora X. Ako je skup A opadajući, tada postoji neprekidna, rastuća funkcija $f: X \to I$ za koju važi ekvivalencija:

$$(f(x) = 0) \Longleftrightarrow (x \in A) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Dokaz ovog stava neposredno sledi iz DEFINICIJE 1., ako se za skup B izabere prazan skup. Analogno se zaključuje da važi sledeći

STAV 2. Neka je B zatvoren potskup savršeno normalno kvaziuredjenog prostora X. Ako je skup B rastući, tada postoji neprekidna rastuća funkcija $f:X \to I$, za koju važi ekvivalencija:

$$(f(x) = 1) \Longleftrightarrow (x \in B) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (3)$$

Da bi smo utvrdili jedno od važnijih svojstava koje karakteriše savršeno normalno kvaziuredjene prostore, dokažimo sledeću lemu:

LEMA 1. Neka je A zatvoren skup opadajućeg tipa G_δ u normalno kvaziuredjenom prostoru X, i neka je $B \subset X$ zatvoren, rastući skup disjunktan sa skupom A. Tada postoji neprekidna, rastuća funkcija $f: X \to I$ koja zadovoljava uslove

$$(f(x) = 0) \Leftrightarrow (x \in A) \qquad \text{i} \qquad (x \in B) \Rightarrow (f(x) = 1) \ .$$

DOKAZ: Kako je skup A opadajućeg tipa G_δ, to se može prikazati kao:

$$A = G_1 \cup G_2 \cup \ \ldots$$

gde su G_n $(n=1,2,\ldots)$ otvoreno opadajući skupovi. Pritom možemo pretpostaviti da je $G_n \cap B = \emptyset$, jer u protivnom skup G_n možemo zameniti sa $G_n \cap \complement B$, koji je otvoren i opadajući. Skup A je kao presek opadajućih skupova opadajući, pa sobzirom na normalnu kvaziuredjenost prostora X, a na osnovu TEOREME 7., 1., za svako $n=1,2,\ldots$ postoji neprekidna rastuća funkcija $f_n: X \to I$ tako da je

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ , & \text{za } x \in A \\ 1 \ , & \text{za } x \in X - G_n \end{cases} \ .$$

Definišimo funkciju

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x) \qquad .$$

Kako je red koji definiše funkciju f ravnomerno konvrgentan, to je funkcija f neprekidna. Pritom je $0 \leq f_n \leq 1$ $(n=1,2,\ldots)$, pa $f: X \to I$. Funkcija f_n je rastuća pa je za $x \leq y$ $f_n(x) \leq f_n(y)$ $(n=1,2,\ldots)$. Odatle sledi da je $f(x) \leq f(y)$. Funkcija je dakle rastuća.

Neka je sada $x \in B$. Kako je $B \subseteq X - G_n$ za svako $n=1,2,\ldots$, to je $f(x) = 1$. Time smo dokazali implikaciju $x \in B \Rightarrow f(x)=1$

Dokažimo sada ekvivalenciju $x\in A \Leftrightarrow f(x)=0$. Kako je $A\subset G_n$ $(n=1,2,3,\dots)$, to je $f_n(x)=0$ za svako $x\in A$, pa je dakle $f(x)=0$. Ako je $x\in X-A$, tada postoji takav indeks $n\in N$ za koji je $x\in X-G_n$. No tada je $f_n(x)=1$. Dakle je $f(x)>0$.||

LEMA 2. Neka je A zatvoren, opadajući potskup normalno kvaziuredjenog prostora X, i neka je $B\subset X$ zatvoren pot - skup rastućeg tipa G_δ koji je disjunktan sa skupom A. Tada postoji neprekidna, rastuća funkcija $f:X\to I$ koja zadovoljava sledeće uslove:

$$(x\in A)\Rightarrow(f(x)=0) \qquad \text{i} \qquad (x\in B)\Leftrightarrow(f(x)=1) .$$

Dokaz ove leme analogan je dokazu prethodne leme.

TEOREMA 3. Topološki prostor X snabdeven kvaziuredjenjem je savršeni normalno kvaziuredjen onda i samo onda, ako je normalno kvaziuredjen i ako je svaki opadajući, zatvoren skup opadajućeg tipa G_δ, a svaki zatvoren, rastući skup rastućeg tipa G_δ .

DOKAZ: Neka je topološki kvaziuredjen prostor X savršeno normalno kvaziuredjen. Tada je on normalno kvaziuredjen. Neka je $A\subset X$ zatvoren, opadajući skup. Prema STAVU 1., postoji neprekidna, rastuća funkcija $f:X\to I$ koja zadovoljava uslov (2). Definišimo skupove:

$$G_n = \{x\in X: f(x)<\frac{1}{n}\}$$

za svako $n=1,2,\dots$. Skupovi G_n su otvoreni i opadajući. Tada je

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} G_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty}\{x\in X: f(x)<\frac{1}{n}\} = \{x\in X: f(x)<\frac{1}{n} \text{ za svako } n\} =$$

$$= \{x\in X: f(x)=o\} = A .$$

Time smo dokazali da je svaki zatvoren, opadajući skup opadajućeg tipa G_δ. Na osnovu STAVA 2., analogno se dokazuje da je svaki zatvoren, rastući skup rastućeg tipa G_δ .

Obratno, neka je X normalno kvaziuredjen prostor u kome je svaki zatvoren, rastući skup rastućeg tipa G_δ, a svaki zatvoren, opadajući skup opadajućeg tipa G_δ. Neka su A i B zatvoreni, disjunktni skupovi, respektivno opadajući i rastući. Na osnovu LEME 1. postoji neprekidna, rastuća funkcija $g:X\to I$ takva da je

$$(x\in A)\Leftrightarrow(g(x)=0) \quad \text{i} \quad (x\in B)\Rightarrow(g(x)=1) \quad .$$

Definišimo skupove

$$G=\{x\in X:g(x)<\frac{1}{2}\} \ , \quad F=\{x\in X:g(x)=\frac{1}{2}\} \ , \quad H=\{x\in X:g(x)>\frac{1}{2}\} \ .$$

Tada su skupovi $G\cup F$ i $H\cup F$ zatvoreni, pri čemu je prvi opadajući a drugi rastući. Kako je $(G\cup F)\cap B=\emptyset$, to na skupove $G\cup F$ i B možemo primeniti LEMU 2., uzimajući interval$[1/2,1]$ umesto $[0,1]$. Postoji dakle neprekidna, rastuća funkcija h na X koja zadovoljava uslove:

$$(x\in B)\Leftrightarrow(h(x)=1) \quad \text{i} \quad (x\in G\cup F)\Rightarrow(f(x)=\frac{1}{2}) \quad ,$$

gde je $1/2\leq h(x)\leq 1$. Definišimo funkciju

$$f(x) = \begin{cases} g(x) \ , & \text{za } x\in G\cup F \\ h(x) \ , & \text{za } x\in H\cup F \end{cases} \quad .$$

Kako je $(G\cup F)\cap(H\cup F) = F$ i $g(x)=h(x)=1/2$ za $x\in F$, funkcija f je neprekidna. Pritom je $(G\cup F)\cup(H\cup F) = X$, odakle sledi da $f:X\to I$. Funkcije g i h su rastuće, poklapaju se na skupu F, pa je stoga i funkcija f rastuća. Lako je videti da funkcija f zadovoljava uslove (1).||

TEOREMA 4. Topološki prostor X snabdeven kvaziuredjenjem je savršeno normalno kvaziuredjen onda i samo onda, ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

(i) za svaku odozdo poluneprekidnu rastuću funkciju f postoji rastući niz neprekidnih rastućih funkcija čija je granična vrednost funkcija f,

(ii) za svaku odozgo poluneprekidnu rastuću funkciju f postoji opadajući niz rastućih, neprekidnih funkcija čija je granična vrednost funkcija f.

DOKAZ: Neka je X savršeno normalno kvaziuredjen prostor. Dokažimo najpre da važi prvi uslov. Dokaz ćemo izvesti u tri koraka.

Pretpostavimo najpre da funkcija prima samo dve različite vrednosti $\alpha, \beta \in R$. Ne umanjujući opštost dokaza, možemo pretpostaviti da je $\alpha=1$ a $\beta=0$. Kako je funkcija f odozdo poluneprekidna i rastuća, skup $A=\{x\in X: f(x)=0\}$ je zatvoren i opadajući. Stoga se na osnovu TEOREME 3. skup A može prikazati kao:

$$A = \bigcap_{n=1}^{+\infty} G_n \quad ,$$

gde je G_n otvoren, opadajući skup za svako $n\in N$, pri čemu je $G_{n+1} \subseteq G_n$. Prostor X je prema pretpostavci savršeno normalno kvaziuredjen, pa je stoga i normalno kvaziuredjen. Za svako $n\in N$ postoji dakle neprekidna, rastuća funkcija f_n takva da je $f_n(x)=1$ za $x\in X-G_n$ i $f_n(x)=0$ za $x\in A$, pri čemu je $0\leq f_n \leq 1$. Funkcija h(x) definisana sa

$$h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x)$$

je neprekidna i rastuća na X. Za svako $n\in N$ definišimo funkciju

$$g_n(x) = \min\{1, nh(x)\} \quad .$$

Tada je $\{g_n\}$ monotono rastući niz neprekidnih, rastućih funkcija čija je granična vrednost funkcija f.

Pretpostavimo sada da funkcija f prima n različitih vrednosti $\alpha_1 > \alpha_2 \ldots > \alpha_n$. Definišimo funkcije g_i za svako $1\leq i\leq n-1$ na sledeći način:

$$g_i(x) = \begin{cases} \alpha_{i+1} & , \text{ za } x\in\{x\in X: f(x)\leq \alpha_{i+1}\} \\ \alpha_1 & , \text{ za } x\notin\{x\in X: f(x)\leq \alpha_{i+1}\} \end{cases} .$$

Očigledno je $f=\min\{g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}\}$. Neka je $\{g_{ij}\}$ monotono rastući niz neprekidnih, rastućih funkcija takvih da je $\lim g_{ij} = g_j$. Tada je $\{\min(g_{i1}, g_{i2}, \ldots, g_{in-1})\}$ niz neprekidnih, rastućih funkcija koji ima funkciju f kao graničnu vrednost.

Razmotrimo sada najopštiji slučaj. Ne umanjujući opštost dokaza, možemo se ograničiti na slučaj kada je $0< f< 1$. Neka je

$$A_{mp} = \{x\in X: \frac{p+1}{m} \geq f(x) > \frac{p}{m}\} \quad ,$$

gde su m i p prirodni brojevi koji zadovoljavaju uslov $o \leq p \leq m-1$. Za svako fiksno m, neka je

$$g_m(x) = \frac{p}{m} \qquad \text{za} \qquad x \in A_{mp} \quad .$$

Funkcija g_m je odozdo poluneprekidna i rastuća na X. Stoga postoji monotono rstući niz $\{g_{mj}\}$ neprekidnih, rastućih funkcija za koje je $\lim g_{mj} = g_m$. Pritom je očigledno $g_m \leq f$. Ne umanjujući opštost dokaza, možemo pretpostaviti da je $g_{mj} \geq 0$ za svako $x \in X$. Napišimo dvostruki niz $\{g_{mj}\}$ u obliku običnog niza $\{h_n\}$ i formirajmo niz

$$H_n = \min\{h_1, h_2, \ldots, h_n\} \quad .$$

Definišimo funkciju

$$H = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} H_n \quad .$$

Tada je $H > 0$ za svako $x \in X$. U protivnom, ako je $H(x)=0$ za neko $x \in X$, tada je i $H_n(x)=0$ za svako $n \in N$. No onda je i $h_n(x)=0$ za svako $n \in N$, odakle sledi da je $g_{mj}(x)=0$ za svako m i j. Stoga je $\lim g_{mj}(x)=0$, pa je dakle $g_m(x)=0$, što je suprotno pretpostavci da je $f(x)>0$ za svako $x \in X$. Lako je videti da je $H \leq f$.

Neka je

$$f_n = \min\{H, H_n\} \quad .$$

Tada je $\{f_n\}$ niz neprekidnih, rastućih funkcija koji konvergira funkciji f.

Na sličan način se dokazuje da je svaka odozgo poluneprekidna, rastuća funkcija granična vrednost monotono opadajućeg niza neprekidnih, rastućih funkcija.

Obratno, pretpostavimo da su u topološkom prostoru X snabdevenom kvaziuredjenjem zadovoljeni uslovi (i) i (ii), i dokažimo da je on savršeno normalno kvaziuredjen. Neka je A zatvoren, opadajući potskup u X i dokažimo da je on opadajućeg tipa G_δ. Definišimo funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 0 \ , & x \in A \\ 1 \ , & x \in X-A \end{cases} \quad .$$

Ovako definisana funkcija je očigledno odozdo poluneprekidna i rastuća na X. Stoga postoji monotono rastući niz neprekidnih, rastućih funkcija f_n, tako da je

$\lim f_n = f$. Definišimo niz funkcija $\{g_n\}$ sa

$$g_n = \max\{0, f_n\} \quad .$$

Funkcije g_n su neprekidne i rastuće na X. Stoga je i funkcija

$$g = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} g_n$$

neprekidna i rastuća na X. Dokažimo da je $g(x)=0$ onda i samo onda,ako je $x \in A$. Ako je $x \in A$, tada je $f(x)=0$. Kako je $f_n(x) \leq f(x)$, to je $f_n(x) \leq 0$. Stoga je $\max(0, f_n(x))=0$, odakle sledi da je $g_n(x)=0$ za svako $n \in N$. Dakle je $g(x)=0$. Obratno, ako je $x \in X-A$, tada je $f(x)=1$, pa je stoga $\lim f_n(x)=1$. Stoga postoji indeks $n_o \in$ $\in N$ tako da je $f_n(x) > 0$ za svako $n \geq n_o$. Odavde zaključujemo da je $g_n(x) > o$ za svako $n \geq n_o$. Dakle je $g(x) > 0$. Definišimo skupove

$$G_n = \{x \in X : g(x) < \frac{1}{n}\} \quad .$$

Skupovi G_n su otvoreni i opadajući. Pritom je

$$\begin{aligned} \cap G_n &= \cap \{x \in X : g(x) < \frac{1}{n}\} = \{x \in X : g(x) < \frac{1}{n} \text{ za svako } n\} = \\ &= \{x \in X : g(x) = 0\} = A \ , \end{aligned}$$

čime smo dokazali da je svaki zatvoren, opadajući skup opadajućeg tipa G_δ. Slično se dokazuje da je svaki zatvoren rastući skup rastućeg tipa G_δ.

Ostaje još da dokažemo da je prostor X normalno kvaziuredjen. Neka je A zatvoren, opadajući skup, a B zatvoren rastući skup disjunktan sa skupom A. Prema prethodno dokazanom, postoje neprekidne funkcije g_1 i g_2 koje su rastuće na X i koje zadovoljavaju uslove:

$$(g_1(x)=0) \Leftrightarrow (x \in A) \quad , \quad 0 \leq g_1(x) \leq 1$$

i

$$(g_2(x)=0) \Leftrightarrow (x \in B) \quad , \quad -1 \leq g_2(x) \leq 0 \quad .$$

Funkcija

$$g = g_1 + g_2$$

je neprekidna i rastuća na X, pri čemu je pozitivna na skupu B a negativna na skupu A. Skupovi

$$F = \{x \in X : g(x) < 0\} \qquad \text{i} \qquad G = \{x \in X : g(x) < 0\}$$

su otvoreni i disjunktni. Pri tome je F opadajući i sadrži skup A,a G je rastući i sadrži skup B. Na osnovu TEOREME 3., prostor X je savršeno normalno kvaziuredjen.||

Dokažimo sada jedan interesantan rezultat koji daje vezu izmedju savršeno normalno kvaziuredjenih prostora i metrizabilnih prostora. U tom cilju uvedimo najpre sledeću definiciju.

DEFINICIJA 3. Neka je X kvaziuredjen metrički prostor. Funkcija rastojanja d koja definiše metriku prostora X je saglasna sa kvaziuredjenjem, ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

(i) ako je F zatvoren, rastući skup i $x \leq y$, tada je $d(x,F) \geq d(y,F)$,

(ii) ako je F zatvoren, opadajući skup i $x \leq y$, tada je $d(x,F) \leq d(y,F)$ (vid.[46]).

TEOREMA 5. Svaki metrizabilan prostor snabdeven kvaziuredjenjem u kome je metrika saglasna sa kvaziuredjenjem je savršeno normalno kvaziuredjen.

DOKAZ: Neka je X metrizabilan topološki prostor snabdeven kvaziuredjenjem u kome je metrika d, koja indukuje topologiju prostora X, saglasna sa kvaziuredjenjem. Tada je prostor X normalno kvaziuredjen (vid.[46]).

Neka je sada F proizvoljan opadajući skup zatvoren u X. Definišimo funkciju $f: X \longrightarrow R^+$ sa

$$f(x) = d(x,F) \quad .$$

Ovako definisana funkcija f je neprekidna i rastuća, jer je funkcija rastojanja d saglasna sa kvaziuredjenjem. Za svako $n \in N$ definišimo skupove G_n sa:

$$G_n = \{x \in X : f(x) < \frac{1}{n}\} \quad .$$

Kako je funkcija f neprekidna, skupovi G_n su otvoreni, a sobzirom na izotonost funkcije f, oni su i opadajući. Pritom je

$$\begin{aligned} \cap G_n &= \cap \{x \in X : f(x) < \frac{1}{n}\} = \{x \in X : f(x) < \frac{1}{n} \text{ za svako } n\} = \\ &= \{x \in X : f(x) = 0\} = \{x \in X : d(x,F) = 0\} = F \quad , \end{aligned}$$

čime smo dokazali da je svaki zatvoren, opadajući potskup prostora X opadajućeg tipa G_δ. Analogno sa dokazuje da je svaki zatvoren, rastući skup rastućeg tipa G_δ. Na osnovu TEOREME 3., prostor X je savršeno normalno kvaziuredjen.

4. KOMPAKTNO UREDJENI PROSTORI

DEFINICIJA 1. Kompaktan topološki prostor snabdeven kvaziuredjenjem (uredjenjem) je kompaktno kvaziuredjen (uredjen), ako je kvaziuredjenje (uredjenje) zatvoreno (vid.[XL]).

Na osnovu TEOREME 2.,1.,vidi se da je kompaktno kvaziuredjen prostor ustvari kompaktan, T_2-uredjen prostor. Svaki kompaktno uredjen prostor je kompaktan Hausdorfov prostor.

STAV 1. Neka je X kompaktno kvaziuredjen prostor. Ako je $K \subset X$ kompaktan potskup prostora X, tada su skupovi $d(K)$ i $i(K)$ generisani skupom K zatvoreni.

DOKAZ: Dokažimo da je skup $d(K)$ zatvoren. U tom cilju uočimo proizvoljnu tačku $a \in X-d(K)$. Tada za svako $x \in K$ važi $a \nleq x$. Stoga za svako $x \in K$, na osnovu TEOREME 1.1.,postoji rastuća okolina V_a^x tačke a i opadajuća okolina W_x tačke x, disjunktna sa V_a^x. Kako je skup K kompaktan, to postoji konačno mnogo tačaka $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$ takvih da je

$$K \subseteq W_{x_1} \cup W_{x_2} \cup \ldots \cup W_{x_n}$$

Označimo sa V skup definisan sa

$$V = V_a^{x_1} \cap V_a^{x_2} \cap \ldots \cap V_a^{x_n}$$

Skup V je očigledno rastuća okolina tačke a. Pritom je

$$\begin{aligned} V \cap K \subseteq V \cap (W_{x_1} \cup W_{x_2} \cup \ldots \cup W_{x_n}) &= (V \cap W_{x_1}) \cup \ldots \cup (V \cap W_{x_n}) \\ \subseteq (V_{x_1} \cap W_{x_1}) \cup \ldots \cup (V_{x_n} \cap W_{x_n}) &= \emptyset , \end{aligned}$$

odakle sledi inkluzija $K \subseteq X-V$. Kako je skup $X-V$ opadajući, to je $d(K) \subseteq X-V$, odn. $V \cap d(K) = \emptyset$. Drugim rečima, skup $X-d(K)$ je otvoren. Slično se dokazuje da je $i(K)$ zatvoren skup.||

STAV 2. Ako je X kompaktno kvaziuredjen topološki prostor, za svaki opadajući (rastući) potskup $A \subset X$ i svaku okolinu V skupa A postoji otvorena opadajuća (rastuća) okolina W skupa A koja je sadržana u V.

DOKAZ: Označimo sa W skup $X-i(\overline{X-V})$. Kako je skup $\overline{X-V}$ zatvoren, to je on kompaktan. No tada je skup $i(\overline{X-V})$ prema prethodnom stavu zatvoren. Skup W je dakle otvoren i opadajući u X. Pritom je

$$X-V \subseteq \overline{X-V} \subseteq i(X-V) ,$$

odakle sledi inkluzija $W \subseteq V$. Da dokažemo da je $A \subseteq W$, dovoljno je pokazati da je $A \cap i(\overline{X-V}) = \emptyset$. Pretpostavimo suprotno. Tada postoji tačka $t \in X$ koja je i u skupu A i u skupu $i(\overline{X-V})$. Kako je $t \in i(\overline{X-V})$, to postoji element $x \in \overline{X-V}$ tako da je $x \leq t$. No kako je $t \in A$, to je i $x \in A$, što je u kontradikciji sa činjenicom da je V okolina skupa A. Stav se slično dokazuje u slučaju kada je skup A rastući.||

TEOREMA 3. Svaki kompaktno kvaziuredjen topološki prostor je normalno kvaziuredjen.

DOKAZ: Neka je F zatvoren, opadajući skup i $a \in X-F$. Tada je $a \not\leq x$ za svako $x \in F$. Zaista, ako bi bilo $a \leq x$, tada je $a \in F$, što je suprotno pretpostavci. Stoga za svako $x \in F$ postoji opadajuća okolina O_x tačke x i rastuća okolina O_a^x tačke a, tako da je $O_x \cap O_a^x = \emptyset$. Familija $\{O_x\}_{x \in F}$ je otvoren pokrivač skupa F. Skup F je kao zatvoren potskup kompaktnog prostora kompaktan, pa se stoga pokrivač $\{O_x\}_{x \in F}$ redukuje na konačan potpokrivač $\{O_{x_1}, O_{x_2}, \ldots, O_{x_n}\}$. Definišimo skupove:

$$O_F = \bigcup_{i=1}^{n} O_{x_i} \quad , \qquad O_a = \bigcap_{i=1}^{n} O_a^{x_i} .$$

Očigledno je $O_F \cap O_a = \emptyset$, pri čemu je O_F opadajića okolina skupa F_a a O_a rastuća okolina tačke a.

Koristeći prethodno dobijeni rezultat, zaključujemo da za svaka dva disjunktna skupa F_1 i F_2, od kojih je prvi opadajući a drugi rastući, postoje okoline O_{F_1} i O_{F_2} koje su respektivno opadajući i rastući, disjunktni skupovi. Na osnovu STAVA 2., postoje otvorene okoline G_1 i G_2 skupova F_1 i F_2 koji su respektivno opadajući i rastući skupovi i koji zadovoljavaju uslove:

$$F_1 \subseteq G_1 \subseteq O_{F_1} \quad , \quad F_2 \subseteq G_2 \subseteq O_{F_2} \quad .$$

Očigledno je $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.||

U slučaju uredjenja, ove rezultate je dao Nahbin (vid.[XL]). Stoga su i dokazi ovih tvrdjenja, izuzev poslednje teoreme, analogni dokazima odgovarajućih stavova koje je dao Nahbin.

Dokažimo sada jedno svojstvo savršeno normalno kvaziuredjenih prostora u klasi kompaktno kvaziuredjenih prostora. U tom cilju dokažimo sledeću lemu.

LEMA 1. Neka je X kompaktno kvaziuredjen topološki prostor Ako je G otvoren, opadajući (rastući) skup u X, tada za svako $a \in G$ postoji okolina O_a tačke a koja zadovoljava uslov:

$$a \in O_a \subseteq D(O_a) \subseteq G \qquad (a \in O_a \subseteq I(O_a) \subseteq G) \quad .$$

DOKAZ: Skup X-G je zatvoren i rastući u X, pa prema prvom delu dokaza prethodne teoreme za svako $a \notin X-G$ postoji opadajuća okolina O_a tačke a i rastuća okolina O_{X-G} skupa X-G, tako da je $O_a \cap O_{X-G} = \emptyset$. Na osnovu STAVA 2., postoji otvorena, rastuća okolina W skupa X-G tako da je

$$X-G \subseteq W \subseteq O_{X-G} \quad .$$

Stoga je $O_a \cap W = \emptyset$, odn. $O_a \subseteq X-W$. Kako je X-W zatvoren skup opadajući u X, to je $D(O_a) \subseteq X-W \subseteq G$.||

TEOREMA 4. U klasi kompaktno kvaziuredjenih topoloških prostora sledeća dva svojstva su ekvivalentna:

(i) prostor X je savršeno normalno kvaziuredjen,

(ii) svi otvoreni rastući i opadajući potskupovi prostora X imaju svojstvo Lindelefa.

DOKAZ: (i)$\Rightarrow$(ii) Neka je G otvoren, opadajući skup i neka je $\mathcal{G} = \{F_\alpha\}$ otvoren pokrivač skupa G:

$$G = \bigcup_{F_\alpha \in \mathcal{G}} F \quad .$$

Kako je prostor X savršeno normalno kvaziuredjen, to je svaki otvoren, opadajući skup opadajućeg tipa $F_{\mathcal{G}}$:

$$G = H_1 \cup H_2 \cup \dots$$

Na osnovu kompaktnosti prostora X, svaki od skupova H_n pokriven je konačnim brojem skupova $F_\alpha \in \mathcal{G}$. Stoga je ceo skup G pokriven prebrojivom familijom skupova $F_\alpha \in \mathcal{G}$. Potpuno analogno se dokazuje da svaki otvoren, rastući skup ima svojstvo Lindelefa.

(ii)$\Rightarrow$(i) Na osnovu TEOREME 3., prostor X je normalno kvaziuredjen. Neka je G otvoren, opadajući skup. Na osnovu LEME 1., za svako $x \in G$ postoji okolina O_x tačke x, tako da je $D(O_x) \subseteq G$. Okoline O_x obrazuju sistem okolina $O_{x_1}, O_{x_2}, \dots, O_{x_n}$ čija je unija skup G. Kako je $D(O_x) \subseteq G$, to je :

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} D(O_{x_n}) = G \quad ,$$

tj. G je skup opadajućeg tipa $F_{\mathcal{G}}$. Na osnovu TEOREME 3.,2., i činjenice da su mnoštvo skupova opadajućeg tipa (rastućeg tipa) G_δ i mnoštvo skupova rastućeg (opadajućeg) tipa $F_{\mathcal{G}}$ uzajamno komplementarni, zaključujemo da je prostor X savršeno normalno kvaziuredjen.||

5. POTPUNO REGULARNO UREDJENI PROSTORI

DEFINICIJA 1. Topološki prostor X snabdeven kvaziuredjenjem je potpuno regularno kvaziuredjen, ako su zadovoljena sledeća dva uslova:

(i) za svaku okolinu G priozvoljne tačke $a \in X$ postoje neprekidne funkcije $f, g : X \to I$, gde je f rastuća a g opadajuća na X, pri čemu je

$$f(a) = g(a) = 1 \quad \text{i} \quad \inf\{f(x), g(x)\} = 0 \text{ ako je } x \in X - G \ ,$$

(ii) za svake dve tačke $a, b \in X$ za koje je $a \nleq b$ postoji neprekidna, realna funkcija f rastuća na X za koju važi

$$f(a) > f(b)$$

(vid. [XL]).

Potpuno regularno kvaziuredjen prostor X u kome je zadovoljen jedan od sledeć a dva ekvivalentna iskaza:

(a) prostor X je Hausdorfov,

(b) kvaziuredjenje prostora je uredjenje,

nazivamo potpuno regularno uredjenim prostorom (vid. [XL]).

STAV 1. Svaki potpuno regularno kvaziuredjen prostor je uniformizabilan. Kvaziuredjenje takvog prostora je zatvoreno, a skup otvorenih, opadajućih i otvorenih rastućih skupova je otvorena predbaza (vid. [XL]).

DOKAZ: Da dokažemo prvi deo tvrdjenja, dovoljno je pokazati da je prostor potpuno regularan. Neka je G proizvoljna okolina tačke a. Označimo sa f i g funkcije koje zadovoljavaju uslov (i) prethodne definicije. Funkcija $h(x)$ definisana sa

$$h(x) = \sup\{0, f(x)+g(x)-1\}$$

je neprekidna, pri čemu je $0 \leq h \leq 1$. Očigledno je $h(a)=0$. Ako je $x \in X-G$, tada je $f(x)=0$ ili $g(x)=0$. No tada je $h(x)=0$. Prostor je dakle potpuno regularan.

Pretpostavimo sada da je $a \not\leq b$. Prema uslovu (ii) prethodne definicije, postoji neprekidna, rastuća funkcija f za koju važi $f(a) > f(b)$. Neka je $f(a) > \xi > f(b)$. Stavimo da je $V=\{x: f(x) > \xi\}$ i $W=\{x: f(x) < \xi\}$. Skupovi V i W su disjunktne okoline tačaka a i b respektivno, pri čemu je V rastući a W opadajući skup. Na osnovu TEOREME 2.1., kvaziuredjenje je zatvoreno.

Konačno, neka je G okolina tačke a, a f i g funkcije odredjene uslovom (i) definicije. Definišimo skupove

$$W_1 = \{x : f(x) > 0\} \quad , \quad W_2 = \{x : g(x) > 0\} .$$

Skup W_1 je otvoren i rastući, a W_2 je otvoren i opadajući, pri čemu je $a \in W_1 \cap W_2 \subseteq G$.||

TEOREMA 2. Svaki topološki uredjen potprostor kompaktno uredjenog prostora je potpuno regularno uredjen (vid. [XL]).

DOKAZ: Kako je svaki potprostor potpuno regularnog prostora potpuno regularan, dovoljno je dokazati da je svaki kompaktan prostor potpuno regularno uredjen. Neka je X kompaktno uredjen prostor, $a \in X$ i neka je G proizvoljna okolina tačke a. Tada postoji otvoren, opadajući skup W_1 i otvoren, rastući skup W_2 tako da je $a \in W_1 \cap W_2 \subseteq V$. Skup $d(a)$ je opadajući i zatvoren i pritom je disjunktan sa skupom $X-W_1$. Kako je kompaktno uredjen skup normalno uredjen, to postoji neprekidna rastuća funkcija $g': X \to I$ tako da je

$$g'(d(a)) = 0 \quad \text{i} \quad g'(X-W_1) = 1 \quad .$$

Funkcija $g=1-g'$ je neprekidna, opadajuća na X pri čemu je

$$g(a) = 1 \quad \text{i} \quad g(x) = 0 \text{ ako je } x \in X-W_1$$

i $0 \leq g \leq 1$. Analogno se zaključuje da postoji neprekidna, rastuća funkcija $f:X \to I$ za koju važi

$$f(a) = 1 \qquad \text{i} \qquad f(x) = 0 \text{ ako je } x \in X-W_2$$

Kako je $X-G \subseteq (X-W_1) \cup (X-W_2)$, funkcije f i g zadovoljavaju uslov (i) DEFINICIJE 1.

Neka je sada $a \nleq b$. Tada je $i(a) \cap d(b) = \emptyset$, pa stoga postoji neprekidna, rastuća funkcija $f:X \to I$ za koju je

$$f(d(b)) = 0 \qquad \text{i} \qquad f(i(a)) = 1 \quad .$$

Stoga je $f(a) > f(b)$, čime je dokazan i uslov (ii) DEFINICIJE 1.||

Kao i potpuno regularni prostori, tako su i potpuno regularno uredjeni prostori odredjeni u terminima funkcija. Sasvim se prirodno postavlja pitanje unutrašnje definicije potpuno regularno uredjenih prostora, koja nebi u sebi sadržala pojam funkcije, a da se sam prostor ne posmatra kao gust potskup kompaktno uredjenog prostora. Da bi smo odgovorili na ovo pitanje, uvedimo najpre neke pojmove koji će nam u daljem radu biti potrebni.

DEFINICIJA 2. Neka je $(X,\mathcal{T},\leq)$ uredjen topološki prostor, a $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$ topologije na X za koje je $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \leq \mathcal{T}$. Uredjen par $(\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2)$ nazivamo uredjajno definicionim, ako su sledeća tri uslova ekvivalentna:

(i) $x \in cl_{\mathcal{T}}\{y\}$ (ii) $x \leq y$ (iii) $y \in cl_{\mathcal{T}}\{x\}$

(vid.[29]).

Može se pokazati da je uredjenje topološkog prostora semizatvoreno, ako postoje topologije τ_1 i τ_2 na X tako da je (τ_1, τ_2) uredjajno definicioni par.

DEFINICIJA 3. Neka je $(X, \tau, \leq)$ uredjen topološki prostor, a $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ respektivno, familije opadajućih i rastućih, zatvorenih skupova u X. Familija $\mathcal{L} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ je normalno uredjena predbaza prostora X, ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

(i) $\mathcal{A}$ $(\mathcal{B})$ je baza zatvorenih skupova topologije $\tau_{\mathcal{A}}$ $(\tau_{\mathcal{B}})$, pri čemu je $(\tau_{\mathcal{A}}, \tau_{\mathcal{B}})$ uredjajno definicioni par za koji je $\tau_{\mathcal{A}} \vee \tau_{\mathcal{B}} = \tau$,

(ii) za svaki $\tau_{\mathcal{A}}$ $(\tau_{\mathcal{B}})$-zatvoren skup $F \subseteq X$ i $x \in X - F$ postoji skup $B(A)$ u $\mathcal{B}(\mathcal{A})$, tako da je $x \in B(A)$ i $B \cap F = \emptyset$ $(A \cap \cap F = \emptyset)$,

(iii) za svako $A \in \mathcal{A}$ i $B \in \mathcal{B}$, $A \cap B = \emptyset$, postoje skupovi $A' \in \mathcal{A}$ i $B' \in \mathcal{B}$ tako da je $A \subseteq A'$, $B \subseteq B'$, $A \cap B' = \emptyset = A' \cap B$ i $A' \cup B' = X$ (vid.[29])

U radu [29] je dokazana sledeća teorema.

TEOREMA 3. Svaki potpuno regularno uredjen prostor ima normalno uredjenu predbazu.

Mićemo sada dokazati obrat ove teoreme. Uvedimo najpre sledeću definiciju.

DEFINICIJA 4. Neka je $(X, \tau, \leq)$ uredjen topološki prostor u kome je uredjenje semizatvoreno. Skup Σ parova (F, O_F), gde je $F \in \mathcal{A}(\mathcal{B})$, a $O_F \in X - \mathcal{B}(X - \mathcal{A})$ okolina skupa F, je uredjajno potpun, ako za svaki par $(F, O_F) \in \Sigma$ postoji okolina $O'_F \in X - \mathcal{B}$ $(X - \mathcal{A})$ skupa $F \in \mathcal{A}$ $(\mathcal{B})$ i skup $\bar{F} \in \mathcal{A}(\mathcal{B})$, tako da su zadovoljeni sledeći uslovi:

(i) $D(O'_F) \subseteq \bar{F} \subseteq O_F$ $\quad (I(O'_F) \subseteq \bar{F} \subseteq O_F)$

(ii) $(F, O'_F) \in \Sigma$, $(\bar{F}, O_F) \in \Sigma$.

Da dokažemo obrat TEOREME 3., dokažimo najpre neke pomoćne stavove.

LEMA 1. Ako je $\mathcal{S} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ normalno uredjena predbaza, tada je $\Sigma = \{(A, O_A)\}$, gde je $A \in \mathcal{A}(\mathcal{B})$, $O_A \in X - \mathcal{B}(X - \mathcal{A})$, uredjajno potpun sistem.

DOKAZ: Neka je $A \in \mathcal{A}(\mathcal{B})$, $O_A \in X - \mathcal{B}(X - \mathcal{A})$, pri čemu je $(A, O_A) \in \Sigma$. Uočimo skup $\bar{A} = X - O_A \in \mathcal{B}(\mathcal{A})$. Očigledno je $A \cap \bar{A} = \emptyset$. Kako je $\mathcal{S}$ normalno uredjena predbaza, to postoje disjunktne okoline $O'_A \in X - \mathcal{B}(X - \mathcal{A})$ i $O'_{\bar{A}} \in X - \mathcal{A}(X - \mathcal{B})$ skupova A i $\bar{A}$ respektivno. Skup $F = X - O'_{\bar{A}}$ je element familije $\mathcal{A}(\mathcal{B})$. Kako je $O'_A \cap O'_{\bar{A}} = \emptyset$, to je $O'_A \subseteq X - O'_{\bar{A}} = F$. Sobzirom da je F zatvoren, opadajući (rastući) skup, to je $D(O'_A) \subseteq F$ $(I(O'_A) \subseteq F)$. Dokažimo da je $F \subseteq O_A$. Zaista, kako je

$$(X - O_A) \cap F = (X - O_A) \cap (X - O'_{\bar{A}}) = \bar{A} \cap (X - O'_{\bar{A}}) = \emptyset ,$$

to je $F \subseteq O_A$. Kako je $A \in \mathcal{A}(\mathcal{B})$, $O'_A \in X - \mathcal{A}(X - \mathcal{B})$, $F \in \mathcal{A}(\mathcal{B})$, $O_A \in X - \mathcal{B}(X - \mathcal{A})$, to je $(A, O'_A) \in \Sigma$ i $(F, O_A) \in \Sigma$. ||

LEMA 2. Neka su A i B zatvoreni, disjunktni skupovi u topološki uredjenom prostoru $(X, \tau, \leq)$, gde je skup A opadajući a skup B rastući. Ako za skup A postoji sistem opadajućih okolina $\{G_r\}$ numerisan svim dijadskim racionalnim brojevima r $(0 \leq r \leq 1)$, tako da je $G_1 = X - B$ i iz $r < r'$ sledi $D(G_r) \subseteq G_{r'}$, tada postoji monotono rastuća funkcija $f : X \to I$ tako da je $f(A) = 0$ i $f(B) = 1$.

DOKAZ: Definišimo funkciju

$$f(x) = \inf\{r : x \in G_r\}$$

i dokažimo najpre da je neprekidna. Neka je $x \in X$ i $\lambda \in I$ takav realan broj, za koji je $f(x) < \lambda$. Kako je skup dijadskih razlomaka gust u R, to postoji dijadski razlomak $\bar{r}$ tako da je $f(x) < \bar{r} < r$. No tada je $G_{\bar{r}}$ okolina tačke x. Zaista, ako $G_{\bar{r}}$ nebi bila okolina tačke x, važila bi nejednakost

$$\sup\{r : x \in X - G_r\} \geq \bar{r} .$$

Kako je

$$\inf\{r : x \in G_r\} = \sup\{r : x \in X - G_r\},$$

što se lako može dokazati, to je $f(x) \geq \bar{r}$, suprotno pretpostavci da je $f(x) < \bar{r}$.

Neka je $y \in G_{\bar{r}}$. Kako je $f(y) = \inf\{r : y \in G_{\bar{r}}\}$, to je $f(y) \leq \bar{r}$. Sobzirom da je

$$\{x : f(x) \leq \bar{r}\} \subseteq \{x : f(x) < \lambda\} ,$$

to je $f(y) < \lambda$. Time smo dokazali da je funkcija $f(x)$ odozdo poluneprekidna. Analogno se dokazuje da je ona i odozgo poluneprekidna.

Da je funkcija f monotono rastuća, neposredno sledi iz činjenice da za $x, y \in X$, $x \leq y$, $y \in G_r$ važi kadgod je $x \in G_r$.

Konačno, na osnovu definicije funkcije f je jasno da je $f(A) = 0$ i $f(B) = 1$.||

LEMA 3. Neka je $(F, O_F) \in \Sigma$, gde je Σ uredjajno potpun sistem. Tada postoji neprekidna funkcija $f : X \to I$, monotono rastuća na X, tako da je $f(F) = 0$ i $f(X - O_F) = 1$.

DOKAZ: Označimo sa G_1 skup O_F. Kako je sistem Σ uredjajno potpun, postoji okolina G_o skupa F i zatvoren, opadajući skup Φ_o tako da je

$$F \subseteq G_o \subseteq D(G_o) \subseteq \Phi_o \subseteq G_1 ,$$

pri čemu je

$$(F, G_o) \in \Sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

i

$$(\Phi_o, G_1) \in \Sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Iz (2) sledi egzistencija skupova $G_{1/2} \in X - \mathcal{B}$ i $\Phi_{1/2} \in \mathcal{A}$, tako da je

$$\Phi_o \subseteq G_{1/2} \subseteq D(G_{1/2}) \subseteq \Phi_{1/2} \subseteq G_1 .$$

Nastavljajući isto rasudjivanje, indukcijom možemo za svaki dijadski razlomak r oblika $p/2^n$ $(0 \leq r \leq 1)$ konstruisati zatvoren, opadajući skup $\Phi_{p/2^n}$ i otvoren opadajući skup $G_{p/2^n}$, tako da je

$$\Phi_{\frac{p}{2^n}} \subseteq G_{\frac{2p+1}{2^{n+1}}} \subseteq D(G_{\frac{2p+1}{2^{n+1}}}) \subseteq \Phi_{\frac{2p+1}{2^{n+1}}} \subseteq G_{\frac{p+1}{2^n}} .$$

Na taj način smo za skupove $A = F$ i $B = X - O_F$ konstruisali sistem opadajućih okolina G_r koji zadovoljava uslove prethodne leme, čime je tvrdjenje leme dokazano.||

TEOREMA 4. Ako uredjen topološki prostor $(X, \tau, \leq)$ ima normalno uredjenu predbazu, tada je on potpuno regularno uredjen.

DOKAZ : Neka je $\mathfrak{X}$ normalno uredjena predbaza prostora X. Prema LEMI 1., $\sum = \{(A, O_A)\}$, gde je $A \in \mathfrak{A}(\mathfrak{B})$, $O_A \in X-\mathfrak{B}(X-\mathfrak{A})$, je uredjajno potpun sistem. Neka je $a \in X$, a G proizvoljna okolina tačke a. Kako je $\mathfrak{X}$ normalno uredjena predbaza, prema uslovu (i) DEFINICIJE 3., postoje skupovi $A \in \mathfrak{A}$ i $B \in \mathfrak{B}$, tako da je

$$x \in (X-A) \cap (X-B) \subseteq G \ .$$

Kako je uredjenje potpuno regularnog prostora semizatvoreno, skup $(\leftarrow, a]$ je zatvoren. Stoga je $(\leftarrow, a] \in X-B$. Kako je $((\leftarrow, a], X-B) \in \sum$ jer je $(\leftarrow, a] \in \mathfrak{A}$, $X-B \in X-\mathfrak{B}$, to prema LEMI 3., postoji monotono rastuća, neprekidna funkcija $f': X \rightarrow I$, tako da je

$$f'((\leftarrow, a]) = 0 \quad i \quad f(B) = 1 \ .$$

Funkcija $f = 1-f'$ je neprekidna, monotono opadajuća, pri čemu je $f(a)=1$ i $f(B)=0$.

Potpuno analogno se može konstruisati monotono rastuća, neprekidna funkcija $g: X \rightarrow I$, tako da je:

$$g(a) = 1 \qquad i \qquad g(A) = 0 \ .$$

Kako je $X-G \subseteq A \cup B$, to je $\inf\{f(x), g(x)\} = 0$ za $x \in X-G$. Osim toga je $f(a)=g(a)= = 1$.

Konačno dokažimo da za svako $x, y \in X$, $x \not\leq y$, postoji neprekidna, monotono rastuća funkcija $f: X \rightarrow R$ tako da je $f(x) > f(y)$. Na osnovu definicije normalno uredjene predbaze, skupovi $(\leftarrow, y]$ i $[x, \rightarrow)$ su medjusobno disjunktni elementi predbaze $\mathfrak{X}$. Kako je $(\leftarrow, y] \in \mathfrak{A}$, $X-[x, \rightarrow) \in X-\mathfrak{B}$, a $X-[x, \rightarrow)$ je okolina skupa $(\leftarrow, y]$, to je $((\leftarrow, y], X-[x, \rightarrow)) \in \sum$. Stoga na osnovu LEME 3., postoji neprekidna, monotono rastuća funkcija $f: X \rightarrow I$ koja zadovoljava sledeće uslove:

$$f((\leftarrow, y]) = 0 \quad , \quad f([x, \rightarrow)) = 1 \ .$$

Očigledno je $f(x) > f(y)$. ||

Sada iz TEOREMA 3. i 4. neposredno imamo posledicu koja daje karakterizaciju potpuno regularno uredjenih prostora pomoću separacionih aksioma. Drugim rečima, dobijamo unutrašnju karakterizaciju potpuno regularno uredjenih prostora.

POSLEDICA 1. Topološki uredjen prostor je potpuno regularno uredjen onda i samo onda ako ima normalno uredjenu pred-bazu.

6. KOMPAKTIFIKACIJA UREDJENIH TOPOLOŠKIH PROSTORA

U ovom odeljku ćemo sa (X^*,τ^*) obeležavati jednotačkastu kompaktifikaciju topološkog prostora X, gde je $X^* = X\cup\{\omega\}$, $\omega\notin X$.

DEFINICIJA 1. Neka je $(X,\tau,\leq)$ uredjentopološki prostor, a G graf uredjenja na X. Ako postoji uredjenje na X^* čiji graf G^* zadovoljava uslov $G^*\cap(X\times X) = G$, tada $(X^*,\tau^*,\leq^*)$ nazivamo uredjajnom kompaktifikacijom prostora $(X,\tau,\leq)$. Ako je uredjenje $\leq^*$ zatvoreno, tada prostor $(X^*,\tau^*,\leq^*)$ nazivamo T_2-uredjajnom kompaktifikacijom (vid.[29]).

DEFINICIJA 2. Uredjen topološki prostor $(X,\tau,\leq)$ je strogo lokalno kompaktan, ako za svako $x,y\in X$, $x\not\leq y$ važi jedan od uslova:

(i) postoji rastuća okolina G tačke x, tako da je $\bar{G}$ kompaktan,

(ii) postoji opadajuća okolina H tačke y, tako da je $\bar{H}$ kompaktan (vid.[29])

TEOREMA 1. Ako je $(X,\tau,\leq)$ uredjen topološki prostor, tada se na X^* može definisati uredjenje tako da je $(X^*,\tau^*,\leq^*)$ jednotačkasta T_2-uredjajna kompaktifikacija onda i samo onda, ako je prostor $(X,\tau,\leq)$ strogo lokalno kompaktan, T_2-uredjen (vid.[29]).

DOKAZ: Pretpostavimo najpre da se na X^* može definisati uredjenje $\leq^*$ tako da je $(X^*,\tau^*,\leq^*)$ T_2-uredjajna kompaktifikacija prostora $(X,\tau,\leq)$. Prema TEOREMI 3.4., prostor $(X^*,\tau^*,\leq^*)$ je normalno uredjen. Kako za svako $x,y\in X$,

$x \not< y$, važi $x \not\leq \omega$ ili $\omega \not\leq y$, to postoji opadajuća, τ^*-otvorena okolina H tačke ω i rastuća, τ^*-otvorena okolina tačke x, tako da je $G \cap H = \emptyset$. No tada je $x \in G \subseteq X^* - H$, odakle sledi da je $cl_\tau G$ kompaktan skup. Slično se zaključuje ako $\omega \not\leq y$. Pritom je $(X, \tau, \leq)$ T_2-uredjen, čime smo teoremu dokazali u jednom smeru.

Pretpostavimo sada da je $(X, \tau, \leq)$ strogo lokalno kompaktan, T_2-uredjen prostor. Definišimo na X^* uredjenje $\leq^*$ na sledeći način. Za $x, y \in X$ stavimo da je $x \leq^* y$ onda i samo onda, ako je $x \leq y$. Za element $x \in X$ stavimo da je $x <^* \omega$, ako postoji opadajući, τ-otvorena okolina G tačke x tako da je $cl_\tau G$ kompaktan skup, a ne postoji rastući, τ-otvorena okolina tačke x čije je zatvorenje kompaktan skup. Dualno se definiše uredjenje $\leq^*$ na X^* u slučaju kada je $\omega <^* x$. Lako je videti da je $\leq^*$ uredjenje na X^*.

Ostaje da dokažemo da je $(X^*, \tau^*, \leq^*)$ T_2-uredjen prostor. Neka je za $x \in X$, $x \not\leq^* \omega$. Tada je $\omega <^* x$ ili $\omega \parallel x$. Ako je $\omega <^* x$, tada postoji rastuća, τ-otvorena okolina G tačke x, tako da je $cl_\tau G$ kompaktan skup. Skup G je rastući u X^*, jer iz $g \in G$ i $g <^* y$ sledi da je $y \in G$. Ovo zbog toga što je $y \neq \omega$, a G je rastuća, τ-otvorena okolina tačke g čije je zatvorenje kompaktan skup. Stavimo sada da je $H = X^* - G$. Tada je $X^* - cl_\tau G \subseteq H$. Pritom je G rastuća, τ^*-okolina tačke x disjunktna sa opadajućom τ^*-okolinom H tačke ω. Isti zaključak se analognim rasudjivanjem dobija u slučaju kada je $\omega \parallel x$. ||

DEFINICIJA 3. Kompaktan, T_2-uredjen prostor $(Y, \mathcal{U}, \trianglelefteq)$ je uredjajna kompaktifikacija prostora $(X, \tau, \leq)$ ako postoji uredjen potprostor $(Z, \mathcal{U}_Z, \trianglelefteq_Z)$ prostora $(Y, \mathcal{U}, \trianglelefteq)$ gust u njemu, koji je istovremeno homeomorfan i uredjajno izomorfan prostoru $(X, \tau, \leq)$ (vid. [XL], [29]).

DEFINICIJA 4. Ako je $(Y, \mathcal{U}, \trianglelefteq)$ uredjajna kompaktifikacija prostora $(X, \tau, \leq)$ sa osobinom da se svaka ograničena, izotona funkcija koja preslikava X u R može proširiti do ograničene, izotone funkcije koja preslikava Y u R, tada prostor $(Y, \mathcal{U}, \trianglelefteq)$ nazivamo Ston-Čehovljevom uredjajnom kompaktifikacijom prostora $(X, \tau, \leq)$ (vid. [XL], [29]).

Kao i u prethodnom paragrafu, označimo sa $\mathcal{A}$ ($\mathcal{B}$) familiju svih zatvorenih, opadajućih (rastućih) potskupova uredjenog topološkog prostora $(X, \tau, \leq)$. Ako je $\mathcal{F}$ ($\mathcal{G}$) neprazan potskup skupa $\mathcal{A}$($\mathcal{B}$), tada uredjen par $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ nazivamo $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ familijom, ako je $F \cap G \neq \emptyset$ za svako $F \in \mathcal{F}$ i svako $G \in \mathcal{G}$. Pisaćemo $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \subseteq (\mathcal{F}', \mathcal{G}')$, ako je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ i $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}'$. Kako je ovo relacija uredjenja u skupu $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ familija, to na osnovu Zornove leme sledi, da za svaku $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ familiju $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ postoji maksimalni element $(\mathcal{R}, \mathcal{S})$ u skupu svih $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ familija za koji je $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \subseteq (\mathcal{R}, \mathcal{S})$.

Za svaki element $x \in X$, označimo sa $\mathcal{A}^x$ ($\mathcal{B}^x$) skup onih elemenata familije $\mathcal{A}$ ($\mathcal{B}$) koji sadrže x. Tada je $(\mathcal{A}^x, \mathcal{B}^x)$ maksimalni element skupa svih $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ familija. Ako je prostor potpuno regularno uredjen, tada je $\cap \mathcal{A}^x = (\leftarrow, x]$ i $\cap \mathcal{B}^x = [x, \rightarrow)$ (vid.[29]). Stoga je $\cap(\mathcal{A}^x \cup \mathcal{B}^x) = \{x\}$. Lako je pokazati da je $\mathcal{A}^q \subseteq \mathcal{A}^p$ onda i samo onda ako je $\mathcal{B}^q \supseteq \mathcal{B}^p$.

Neka je $\{(\mathcal{A}^p, \mathcal{B}^p), p \in P\}$ kolekcija maksimalnih $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ familija uredjenog topološkog prostora $(X, \tau, \leq)$. Na osnovu rečenog, očigledno je da između $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ familija oblika $(\mathcal{A}^x, \mathcal{B}^x)$, gde je $x \in X$, i tačaka prostora X postoji 1-1 korespodencija. Stoga, ne umanjujući opštost dokaza, možemo smatrati da je $X \subseteq P$. Označimo skup P sa $C^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(X)$ i definišimo na njemu relaciju R sa :

$$pRq \text{ onda i samo onda, ako je } \mathcal{A}^q \subseteq \mathcal{A}^p .$$

TEOREMA 2. Relacija R je uredjenje na $C^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(X)$ za koje $x \leq y$ važi onda i samo onda ako je xRy (vid.[29]).

DOKAZ: Očigledno je pRp za svako $p \in C^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(X)$. Ako je pRq, tada je $(\mathcal{A}^p, \mathcal{B}^p) = (\mathcal{A}^q, \mathcal{B}^q)$, pa je $p=q$. Lako je videti da je R tranzitivna relacija.

Neka je sada $x \leq y$ i $A \in \mathcal{A}^y$. Kako je skup A opadajući, to je $x \in A$, pa je $A \in \mathcal{A}^x$, čime smo dokazali da je xRy.

Obratno, ako je xRy, tada je $\mathcal{A}^y \subseteq \mathcal{A}^x$, pa je $(\leftarrow, x] = \cap \mathcal{A}^x \subseteq \cap \mathcal{A}^y = (\leftarrow, y]$. Stoga je $x \leq y$.||

TEOREMA 3. $C^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(X)$ je distributivna mreža.

DOKAZ: Neka su $(\mathcal{A}^p, \mathcal{B}^p)$ i $(\mathcal{A}^q, \mathcal{B}^q)$ maksimalne $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ familije koje odgovaraju tačkama $p,q\in C_{\mathscr{A}}^{\mathscr{B}}(X)$. Familije $\mathscr{F}=\mathscr{A}^p\cap\mathscr{A}^q$ i $\mathscr{G}=\mathscr{B}^p\cup\mathscr{B}^q$ su neprazne. Zaista, ako je $A^p\in\mathscr{A}^p$ i $A^q\in\mathscr{A}^q$, tada je $A^p\cup A^q\in\mathscr{F}$, jer bi u protivnom postojao skup $B^p\in\mathscr{B}^p$ tako da je $B^p\cap(A^p\cup A^q)=\emptyset$. No onda je $B^p\cap A^p=\emptyset$, što je suprotno činjenici da je $(\mathscr{A}^p,\mathscr{B}^p)$ $[\mathscr{A},\mathscr{B}]$ familija. Analogno se zaključuje da je $A^p\cup A^q\in\mathscr{A}^q$.

Familija $(\mathscr{F},\mathscr{G})$ je maksimalna $[\mathscr{A},\mathscr{B}]$ familija. Da to dokažemo, pretpostavimo suprotno, da postoji $[\mathscr{A},\mathscr{B}]$ familija $(\mathscr{F}',\mathscr{G}')$ za koju je $(\mathscr{F},\mathscr{G})\subset(\mathscr{F}',\mathscr{G}')$. Ako je $\mathscr{F}\subset\mathscr{F}'$, tada postoji skup $A'\in\mathscr{F}'$ koji nije iz $\mathscr{F}$. Stoga on ne pripada bar jednoj od familija $\mathscr{A}^p$ i $\mathscr{A}^q$. Ako A' nije u $\mathscr{A}^p$, tada postoji skup $B^p\in\mathscr{B}^p$ takav da je $A'\cap B^p=\emptyset$, suprotno pretpostavci da je $(\mathscr{F}',\mathscr{G}')[\mathscr{A},\mathscr{B}]$ familija. Slično se dokazuje da A' nije u $\mathscr{A}^q$. Ako je $\mathscr{G}\subset\mathscr{G}'$, analogno se zaključuje. Stoga je $(\mathscr{F},\mathscr{G})$ maksimalna $(\mathscr{A},\mathscr{B})$ familija. Postoji dakle $r\in C_{\mathscr{A}}^{\mathscr{B}}(X)$ tako da je $(\mathscr{F},\mathscr{G})=(\mathscr{A}^r,\mathscr{B}^r)$. Dokažimo da je $p\vee q=r$.

Kako je $\mathscr{A}^r\subseteq\mathscr{A}^p,\mathscr{A}^q$, to je $p,q\leq r$. Neka je $p,q\leq s$ za neko $s\in C_{\mathscr{A}}^{\mathscr{B}}(X)$. Tada je $\mathscr{A}^s\subseteq\mathscr{A}^p,\mathscr{A}^q$, pa je $\mathscr{A}^s\subseteq\mathscr{A}^r$. Dakle je $r\leq s$, što dokazuje da je $p\vee q=$ $=r$.

Na sličan način se dokazuje da za svaka dva elementa $p,q\in C_{\mathscr{A}}^{\mathscr{B}}(X)$ postoji infimum $p\wedge q$.

Konačno, mreža $C_{\mathscr{A}}^{\mathscr{B}}(X)$ je distributivna, jer je maksimalna $[\mathscr{A},\mathscr{B}]$ familija $(\mathscr{A}^p\cup(\mathscr{A}^q\cap\mathscr{A}^r))$ koja odgovara elementu $p\vee(q\wedge r)$ očigledno jednaka maksimalnoj $[\mathscr{A},\mathscr{B}]$ familiji $((\mathscr{A}^p\cup\mathscr{A}^q)\cap(\mathscr{A}^p\cup\mathscr{A}^r))$ koja odgovara elementu $(p\vee g)\wedge(p\vee r)$.||

Definišimo sada za svako $A(B)$ iz $\mathscr{A}(\mathscr{B})$ skupove

$$\Phi(A)=\{p\in C_{\mathscr{A}}^{\mathscr{B}}(X):A\in\mathscr{A}^p\},\ \Psi(B)=\{p\in C_{\mathscr{A}}^{\mathscr{B}}(X):B\in\mathscr{B}^p\}.$$

Na osnovu prethodne teoreme zaključujemo da je za svako $A(B)$ iz $\mathscr{A}(\mathscr{B})$, skup $\Phi(A)(\Psi(B))$ ideal (dualni ideal) u $C_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}}(X)$.

LEMA 1. Ako za skupove $A(B)$ iz $\mathscr{A}(\mathscr{B})$ važi $A\cup B=X$, tada je $\Phi(A)\cup\Psi(B)=C_{\mathscr{A}}^{\mathscr{B}}(X)$.

DOKAZ: Neka je $p\in C_{\mathscr{A}}^{\mathscr{B}}(X)$ i pretpostavimo da p nije u $\Phi(A)\cup\Psi(B)$. Tada $A\notin\mathscr{A}^p$

i $B \notin \mathcal{B}^p$, pa stoga postoje skupovi A^p i B^p u $\mathcal{A}^p$ i $\mathcal{B}^p$ respektivno, za koje je $A \cap B^p = \emptyset = A^p \cap B$. No tada je

$$A^p \cap B^p = (A^p \cap B^p) \cap X = (A^p \cap B^p) \cap (A \cup B) = \emptyset \quad ,$$

suprotno pretpostavci da je $(\mathcal{A}^p, \mathcal{B}^p)$ maksimalna familija.||

LEMA 2. Ako je X potpuno regularno uredjen prostor, tada je familija $\{\Phi(A), \Psi(B)\}$, gde je $A \in \mathcal{A}$ i $B \in \mathcal{B}$, predbaza zatvorenih skupova topologije u na $C_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(X)$.

DOKAZ: Pretpostavimo da X sadrži više od jednog elementa. Tada postoji $A \in \mathcal{A}$ ili $B \in \mathcal{B}$ tako da je $A \neq X$ ili $B \neq X$. Ako je $A \neq X$, tada postoji $x \in X - A$, pa prema TEOREMI 3.1., i uslovu (ii) DEFINICIJE 3.5., postoji $B' \in \mathcal{B}$ tako da je $x \in B'$ i $B' \cap A = \emptyset$. Stoga je $\Phi(A) \cap \Psi(B) = \emptyset$.||

TEOREMA 4. Ako je X potpuno regularno uredjen prostor, tada je $(C_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(X), u)$ kompaktan, T_2-uredjen prostor (vid.[29]).

DOKAZ: Pretpostavimo da familija $\{\Phi(A_k), \Psi(B_l)\}$, $k \in K$, $l \in L$ ima osobinu konačnog preseka, gde je $A_k \in \mathcal{A}$, $B_l \in \mathcal{B}$ za svako $k \in K$, $l \in L$. Označimo sa $\mathcal{F} = \{A_k : k \in K\}$, a sa $\mathcal{G} = \{B_l : l \in L\}$. Tada je $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ familija. Stoga postoji maksimalna $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ familija $(\mathcal{A}^p, \mathcal{B}^p)$, $p \in C_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(X)$, tako da je $(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \subseteq (\mathcal{A}^p, \mathcal{B}^p)$. Stoga je $p \in \Phi(A_k) \cup \Psi(B_l)$ za $k \in K$ i svako $l \in L$, što dokazuje da je $C_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(X)$ kompaktan prostor.

Neka je sada $p \not\leq q$, $p, q \in C_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(X)$. Tada je $\mathcal{A}^q \not\subseteq \mathcal{A}^p$, pa stoga postoji $A^q \in \mathcal{A}^q$ koji nije u $\mathcal{A}^p$. Postoji dakle $B^p \in \mathcal{B}^p$ tako da je $A^p \cap B^p = \emptyset$. Prema uslovu (iii) definicije normalno uredjene predbaze, postoje skupovi A, B u $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ tako da je $A^q \subseteq A$, $B^p \subseteq B$, $A \cup B = X$ i $A^q \cap B = \emptyset = A \cap B^p$. Skupovi $U = C_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(X) - \Phi(A)$ i $V = C_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(X) - \Psi(B)$ su u-otvorene okoline tačaka p i q respektivno. Pritom je U opadajući, a V rastući skup u $C_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(X)$ za koje je $U \cap V = \emptyset$.||

Potskup Z uredjenog topološkog prostora X je opadajući (rastući)nula skup, ako postoji opadajuća (rastuća) funkcija $f: X \to R$ tako da je $Z = \{x \in X : f(x) \leq 0\}$. Familiju svih opadajućih (rastućih) nula skupova označavamo sa $\mathcal{A}_o (\mathcal{B}_o)$.

LEMA 3. Neka je f neprekidana funkcija koja preslikava X u I. Funkcija $F: C_{\mathcal{A}_0}^{\mathcal{B}_0}(X) \longrightarrow R$ definisana sa:

$$F(p) = \inf_{A^p \in \mathcal{A}^p} \{ \sup f(A^p) \}$$

je rastuća i $f(x) = F(x)$ za svako $x \in X$.

DOKAZ: Neka je $p, q \in C_{\mathcal{A}_0}^{\mathcal{B}_0}(X)$, $p \leq q$. Tada je $\mathcal{A}^q \subseteq \mathcal{A}^p$. Ako je

$$S = \{ \sup f(A^q) : A^q \in \mathcal{A}_0^q \}, \qquad T = \{ \sup f(A^p) : A^p \in \mathcal{A}_0^p \},$$

tada je $S \subseteq T$, pa je stoga $F(p) = \inf T \leq \inf S = F(q)$. Ako je $f(x) = a$, $x \in X$, tada je $A = \{y \in X : f(y) \leq a\}$ element familije $\mathcal{A}_0^x$, odakle sledi da je $F(x) \leq \sup f(A) \leq a$. Obratno, $F(x) = \inf_{A^x \in \mathcal{A}_0^x} \{ \sup f(A^x) \} \geq f(x)$. ||

LEMA 4. Neka je f neprekidna, rastuća funkcija koja preslikava X u I. Ako je G funkcija koja preslikava $C_{\mathcal{A}_0}^{\mathcal{B}_0}(X)$ u R definisana sa:

$$G(p) = \sup_{B^p \in \mathcal{B}^p} \{ \inf f(B^p) \} ,$$

tada je F=G.

DOKAZ: Ako je $p \in C_{\mathcal{A}_0}^{\mathcal{B}_0}(X)$, tada je za svako $A^p \in \mathcal{A}_0^p$, $B^p \in \mathcal{B}_0^p$

$$\sup f(A^p) \geq \sup f(A^p \cap B^p) \geq \inf (A^p \cap B^p) \geq \inf f(B^p) .$$

Stoga je $\inf_{A^p \in \mathcal{A}_0^p} \{ \sup f(A^p) \} \geq \inf f(B^p)$, odakle sledi $F \geq G$.

Obratno, za $\varepsilon > 0$ stavimo da je $a_\varepsilon = F(p) - \varepsilon$, $A_\varepsilon = \{x \in X : f(x) \leq a_\varepsilon\}$ i $B_\varepsilon = \{x \in X : f(x) \geq a_\varepsilon\}$. Kako je $A_\varepsilon \cup B_\varepsilon = X$, to je prema LEMI 1., $\Phi(A_\varepsilon) \cup \Psi(B_\varepsilon) = C_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(X)$. Odatle je $p \in \Phi(A_\varepsilon)$ ili $p \in \Psi(B_\varepsilon)$.

Ako je $p \in \Phi(A_\varepsilon)$, tada je $A_\varepsilon \in \mathcal{A}_0^p$ i stoga je $F(p) \leq \sup f(A_\varepsilon) \leq a_\varepsilon < F(p)$. Odavde sledi da je

$$G(p) \geq \inf f(B) \geq a_\varepsilon = F(p) - \varepsilon ,$$

što dokazuje da je $G \geq F$. ||

TEOREMA 5. Neka je f neprekidna , rastuća funkcija koja preslikava X u I. Tada postoji neprekidna, rastuća funkcija F koja preslikava $C_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(X)$ u I, tako da je $f(x) = F(x)$ za svako $x \in X$ (vid.[29]).

DOKAZ: Definišimo funkciju F kao u LEMI 3. i dokažimo da ima tražene osobine. Prema LEMI 4., F je rastuća funkcija za koju je $f(x)=F(x)$ za svako $x\in X$.

Ostaje da dokažemo da je F neprekidna funkcija. Neka je $p\in C_{\mathcal{A}_o}^{\mathcal{B}_o}(X)$, a U okolina tačke $F(p)$ oblika $(\leftarrow,a],a\in I$. Neka je $V=[b,\rightarrow)$, gde je $F(p)<b<a$. Tada je $U\cup V=I$, pa je $f^{-1}(U)\cup f^{-1}(V)=X$. Kako je $f^{-1}(U)\in\mathcal{A}_o$, $f^{-1}(V)\in\mathcal{B}_o$, to je na osnovu LEME 1., $\Phi(f^{-1}(U))\cup\Psi(f^{-1}(V))=C_{\mathcal{A}_o}^{\mathcal{B}_o}(X)$. Sada $p\in\Psi(f^{-1}(V))$, jer bi u protivnom bilo $f^{-1}(V)\in\mathcal{B}_o^p$, pa bi važila nejednakost

$$G(p)\geq \inf f(f^{-1}(V))\geq \inf V>F(p)\quad ,$$

suprotno LEMI 4.. Stoga je skup $U=C_{\mathcal{A}_o}^{\mathcal{B}_o}(X)-\Psi(f^{-1}(V))$ očigledno u-okolina tačke p.

Ako je $q\in U$, tada je $q\in\Phi(f^{-1}(U))$, pa je $f^{-1}(U)\in\mathcal{A}_o^q$; stoga je

$$F(q)\leq \sup f(f^{-1}(U))\leq \sup U\ ,$$

odakle sledi da je $F(q)\in K$. Time smo dokazali da je $p\in U\subseteq f^{-1}(K)$. Ako je U okolina tačke $F(p)$ oblika $[a,\rightarrow)$, dokaz se slično izvodi.||

Teoreme 2.-4. sažete u jedan rezultat, koji je ujedno centralni rezultat u ovom odeljku, može se iskazati sledećom teoremom.

TEOREMA 6. Ako je $(X,\mathcal{T},\leq)$ potpuno regularno uredjen prostor a $\alpha(X)=cl_u X$, gde je u topologija na $C_{\mathcal{A}_o}^{\mathcal{B}_o}(X)$, tada je $(\alpha(X),u_{\alpha(X)},\leq)$ Ston-Čehovljeva uredjajna kompaktifikacija prostora $(X,\mathcal{T},\leq)$ (vid.[29]).

III. RAVNOMERNO UREDJENI PROSTORI

1. POJAM RAVNOMERNO UREDJENIH PROSTORA I OSNOVNE OSOBINE

Neka je $\mathcal{U}$ kvaziravnomerna struktura na X. Označimo sa $\mathcal{U}^*$ množtvo potskupova Dekartovog proizvoda XxX oblika $V \cap W^{-1}$, gde je $V, W \in \mathcal{U}$. Lako je proveriti da je $\mathcal{U}^*$ ravnomerna struktura na X. Za ravnomernu strukturu $\mathcal{U}^*$ kažemo da je generisana, ili asocirana datom kvaziravnomernom strukturom $\mathcal{U}$ (vid. [XL]).

Označimo sada sa G presek svih elemenata neke kvaziravnomerne strukture $\mathcal{U}$. Tada je G graf kvaziuredjenja na X. Pre svega je očigledno, da za svako $x \in X$, $(x,x) \in G$, jer je $(x,x) \in \Delta \subset V$ za svako $V \in \mathcal{U}$. Neka je dalje $(x,y) \in G$ i $(y,z) \in G$. Za svako $V \in \mathcal{U}$ postoji $W \in \mathcal{U}$, tako da je $W \circ W \subseteq V$, pa kako je $G \subseteq W$, to je $(x,z) \in G \circ G \subseteq W \circ W \subseteq V$. Za ovako definisano kvaziuredjenje kažemo da je generisano kvaziravnomernom strukturom $\mathcal{U}$.

DEFINICIJA 1. Ravnomeran prostor $(X, \mathcal{U})$ na kome je istovremeno zadano kvaziuredjenje je ravnomerno kvaziuredjen prostor, ako postoji bar jedna kvaziravnomerna stuktura koja generiše ravnomernu strukturu $\mathcal{U}$ i kvaziuredjenje definisano na prostoru X (vid.[XL]).

DEFINICIJA 2. Ravnomerno kvaziuredjen prostor koji zadovoljava jedan od sledeća dva ekvivalentna uslova:

(i) ravnomerna struktura prostora je Hausdorfova

(ii) kvaziuredjenje prostora je uredjenje

nazivamo ravnomerno uredjenim prostorom.

Dokažimo najpre neka jednostavnija svojstva ravnomerno kvaziuredjenih prostora.

STAV 1. Neka je $(X,\mathcal{U})$ ravnomerno kvaziuredjen prostor, a Y ravnomeran potprostor prostora X sa indukovanim kvaziuredjenjem. Tada je Y ravnomerno kvaziuredjen prostor.

DOKAZ: Neka je G graf kvaziuredjenja zadanog na prostoru X. Označimo sa $\mathcal{U}_Y$ i G_Y ravnomernu strukturu i graf kvaziuredjenja na Y koji su generisani ravnomernom strukturom $\mathcal{U}$ i kvaziuredjenjem prostora X. Kako je $\mathcal{U}$ ravnomerna struktura, postoji kvaziravnomerna struktura $\mathcal{F}$ na X koja generiše ravnomernu strukturu $\mathcal{U}$ i kvaziuredjenje na X. Označimo sa $\mathcal{F}_Y$ trag kvaziravnomerne strukture $\mathcal{F}$ na YxY:

$$\mathcal{F}_Y = \{F\cap(Y\times Y) : F\in\mathcal{F}\}.$$

Tada je $\mathcal{F}_Y$ kvaziravnomerna struktura na Y (vid.[XIV]). Lako je dokazati da kvaziravnomerna struktura $\mathcal{F}_Y$ generiše ravnomernu strukturu $\mathcal{U}_Y$. Kako je

$$\cap\mathcal{F}_Y = \bigcap_{F\in\mathcal{F}}(F\cap(Y\times Y)) = (\cap\mathcal{F})\cap(Y\times Y) = G\cap(Y\times Y) = G_A ,$$

to je kvaziuredjenje generisano kvaziravnomernom strukturom $\mathcal{F}_Y$ identično sa kvaziuredjenjem koje je generisano kvaziuredjenjem prostora X na potprostor Y.||

STAV 2. Kvaziuredjenje svakog uniformno kvaziuredjenog prostora je zatvoreno (vid.[XL])

DOKAZ: Neka je $(X,\mathcal{U})$ ravnomerno kvaziuredjen prostor, a G graf kvaziuredjenja na X. Ako za tačke $a,b\in X$ važi $a\nleq b$, tada je $(a,b)\in X^2-G$. Ako je $\mathcal{F}$ kvaziravnomerna struktura koja generiše ravnomernu strukturu $\mathcal{U}$ i kvaziuredjenje na X, tada postoji $V\in\mathcal{F}$ tako da je $(a,b)\in X^2-V$. Neka su $V_1, W\in\mathcal{F}$ za koje je $V_1 \circ V_1 \subseteq V$ i $W \circ W \subseteq V_1$. Definišimo skupove A i B sa

$$A = i[W(a)] \quad , \quad B = d[W^{-1}(b)] \quad .$$

Kako je $W(a) \subseteq A$, to je A rastuća okolina tačke a. Slično, iz $W^{-1}(b) \subseteq B$ vidimo da je B opadajuća okolina tačke b. Prema TEOREMI 2.1., dovoljno je dokazati da su A i B disjunktni skupovi. Pretpostavimo suprotno, da postoji $z \in A \cap B$. Kako je $z \in A$, to postoji $x \in W(a)$ tako da je $x \leq z$. Pritom je $(a,x) \in W$, $(x,z) \in G \subset W$, pa je $(a,z) \in W \circ W \subset V_1$. Slično se iz $z \in B$ zaljučuje da je $(z,b) \in V_1$. Stoga je $(a,b) \in V_1 \circ V_1 \subseteq V$, što je u kontradikciji sa činjenicom da je $(a,b) \in X^2 - G$.||

STAV 3. Topologija svakog ravnomerno kvaziuredjenog prostora je lokalno konveksna (vid.[XL]).

DOKAZ: Neka je $(X,\mathcal{U})$ ravnomerno uredjen prostor, G graf kvaziuredjenja na X, a $\mathcal{G}$ kvaziravnomerna struktura koja generiše ravnomernu strukturu $\mathcal{U}$ i kvaziuredjenje na X. Neka je A okolina tačke $a \in X$. Tada postoji element $W \in \mathcal{U}$ tako da je $A = W(a)$. No tada postoji $V \in \mathcal{G}$ tako da je $V \circ V^{-1} \subseteq W$. Odredimo $V_1 \in \mathcal{G}$ tako da je $V_1 \circ V_1 \subseteq V$. Neka je $W_1 = V_1 \cap V_1^{-1}$, a $B = k[W_1(a)]$, gde je k oznaka za najmanji konveksan skup koji sadrži skup $W_1(a)$. Kako je $W_1(a) \subseteq B$ i $W_1 \in \mathcal{U}$, skup B je konveksna okolina tačke a. Dokažimo da je $B \subset A$. Neka je $x \in B$. Tada postoje tačke $x', x'' \in W_1(a)$, tako da je $x' \leq x \leq x''$. Sada je $(a,x') \in W_1 \subseteq V_1$, $(x',x) \in G \subseteq V_1$, što dokazuje da je $(a,x) \in V_1 \circ V_1 \subseteq V$. Slično, iz $(a,x'') \in W_1 \subseteq V_1^{-1}$ i $(x,x'') \in G \subseteq V_1$ sledi da je $(x,a) \in V_1 \circ V_1 \subseteq V$, ili $(a,x) \in V^{-1}$. Stoga je $(a,x) \in V \cap V^{-1} \subseteq W$, tj. $x \in W(a) = A$, što je i trebalo dokazati.||

Sledeća teorema po svojoj suštini i važnosti zauzima centralno mesto u ovom odeljku. Ona naime, potpuno karakteriše topologiju ravnomerno kvaziuredjenih struktura, istovremeno opisujući klasu onih uredjenih topoloških prostora koji se mogu snabdeti saglasnom ravnomernom strukturom, koja je u odnosu na dato uredjenje ravnomerno uredjena. Zbog dužine, dokaz ove teoreme ne navodimo.

TEOREMA 4. Topologija svakog ravnomerno kvaziuredjenog prostor je potpuno regularno kvazuuredjena. Obratno, svaki potpuno regularno kvaziuredjen prostor ima saglasnu ravnomerno kvaziuredjenu strukturu (vid.[XI])

Neka je $(X,\mathcal{U})$ ravnomeran prostor na kome je istovremeno zadano kvaziuredjenje koje je nezavisno od ravnomerne strukture $\mathcal{U}$ na X. Sledeće pitanje se prirodno postavlja. Pod kojim uslovima je $\mathcal{U}$ ravnomerno kvaziravnomerna struktura? Odgovor na ovo pitanje daje sledeća teorema, koju je dao Nahbin (vid.[XL]).

TEOREMA 1. Neka je $(X,\mathcal{U})$ ravnomeran prostor na kome je definisano kvaziuredjenje grafom G. Da bi $\mathcal{U}$ bila ravnomerno kvaziuredjena struktura u odnosu na zadano kvaziuredjenje dovoljno je da su zadovoljeni sledeći uslovi:

(i) za svako $V\in\mathcal{U}$, postoji $W\in\mathcal{U}$, tako da je $W\circ G\subseteq G\circ V$,

(ii) za svako $V\in\mathcal{U}$, postoji $W\in\mathcal{U}$, tako da je $(G\circ W)\subseteq(W\circ G^{-1})$ $\subseteq V$,

(iii) skup $i(a)=\{x\in X : x\geq a\}$ je zatvoren za svako $a\in X$.

DOKAZ: Pretpostavimo da su uslovi (i)-(iii) teoreme zadovoljeni. Kako je $\Delta\subseteq G\circ V$ i $G\circ(V_1\cap V_2)\subseteq(G\circ V_1)\cap(G\circ V_2)$, to skupovi oblika $G\circ V$, gde je $V\in\mathcal{U}$, čine bazu nekog filtra na X^2. Označimo taj filter sa $\mathcal{G}$, i dokažimo da je $\mathcal{G}$ kvaziravnomerna struktura koja generiše ravnomernu strukturu i kvaziuredjenje na prostoru X.

Da dokažemo da je $\mathcal{G}$ kvaziravnomerna struktura na X, dovoljno je pokazati da za svako $V\in\mathcal{U}$, postoji $W\in\mathcal{U}$, tako da je

$$(G\circ W)\circ(G\circ W)\subseteq G\circ V .$$

Za dati skup $V\in\mathcal{U}$, neka je $V'\in\mathcal{U}$ takav skup za koji je $V'\circ V'\subseteq V$. Prema uslovu (i) teoreme, postoji skup $V''\in\mathcal{U}$, tako da je $V''\circ G\subseteq G\circ V'$. Skup $W=V'\cap V''$ je element ravnomerne strukture $\mathcal{U}$ za koji je

$$G\circ W\circ G\circ W\subseteq G\circ V''\circ G\circ V'\subseteq G\circ G\circ V'\circ V''\subseteq G\circ V .$$

Dokažimo sada da je ravnomerna struktura generisana sa $\mathcal{G}$ identična sa ravnomernom strukturom $\mathcal{U}$. Primetimo najpre da je $G\circ V\in\mathcal{U}$ za svako $V\in\mathcal{U}$, što neposredno sledi iz inkluzije $V=\Delta\circ V\subseteq G\circ V$. Da dokažemo obrat, neka je $V\in\mathcal{U}$. Tada prema uslovu (ii) teoreme postoji skup $W'\in\mathcal{U}$ tako da je $(G\circ W')\circ(W'\circ G^{-1})\subseteq$ $\subseteq V$. No tada za skup $W=W'\cap W'^{-1}$ važi inkluzija $(G\circ W)\circ(G\circ W)^{-1}\subseteq V$, čime smo dokazali da je ravnomerna struktura $\mathcal{U}$ identična sa ravnomernom strukturom koja je generisana kvaziravnomernom strukturom $\mathcal{G}$.

Na kraju, ostaje da dokažemo da je kvaziuredjenje generisano kvaziravnomernom strukturom $\mathcal{G}$ identično sa datim kvaziuredjenjem, ili ekvivalentno, da je $G=\bigcap_{V\in\mathcal{U}}(G\circ V)$. Kako je $G=G\circ\Delta\subseteq G\circ V$ za svako $V\in\mathcal{U}$, to je $G\subseteq$ $\bigcap(G\circ V)$. Da dokažemo obratnu inkluziju, pretpostavimo da je $(a,b)\in X^2-G$, odn. da je $a\not\leq b$. Skup $i(a)$ je prema uslovu (iii) teoreme zatvoren, pa kako je $b\in X-i(a)$, to postoji okolina tačke b, označimo je sa B, koja je disjunktna sa skupom $i(a)$. Neka je $V\in\mathcal{U}$ takav skup za koji je $V^{-1}(b)=B$. Tada je $(a,b)\in$ $\in X^2-G\circ V$, jer bi u protivnom postojala tačka $x\in X$ za koju je $(a,x)\in G$ i (x,b) $\in V$. No tada je $a\leq x$, odn. $x\in i(a)$ i $x\in V^{-1}(b)$, suprotno pretpostavci da su B i $i(a)$ disjunktni skupovi. ||

Napomenimo da Nahbin u dokazu ove teoreme za kompoziciju $A\circ B$ skupova A i B uzima skup $\{(x,y):(\exists z)(x,z)\in A \text{ i } (z,y)\in B\}$, što u standardnoj literaturi koja koristi relacijski aparat nije uobičajeno. Ovo napominjemo zbog toga što ćemo u daljem radu koristiti uobičajenu definiciju kompozicije relacija. Doslednost u tom smislu nužno bi dovela do promene u formulaciji prethodne teoreme, čime bi se izgubilo u originalnosti. Stoga smo dokaz i dali u navedenom obliku.

TEOREMA 6. *Svaki Hausdorfov, ravnomeran prostor $(X,\mathcal{U})$ koji je istovremeno polumreža u odnosu na supremum, u kome je $x\vee y$ ravnomerno neprekidna funkcija je uniformno uredjen prostor* (vid. [XL]).

DOKAZ: Označimo sa G graf uredjenja na X. Dokažimo da su uslovi (i)-(iii) prethodne teoreme zadovoljeni, čime će i teorema biti dokazana.

Da dokažemo da je zadovoljen uslov (i) prethodne teoreme, uočimo proizvoljan skup $V \in \mathcal{U}$ i neka je $W \in \mathcal{U}$ takav skup za koji iz $(x', x'') \in W$ i $(y', y'') \in W$ sledi $(x' \vee y', x'' \vee y'') \in V$. Ovo je moguće zbog ravnomerne neprekidnosti operacije $\vee$. Neka je sada $(x,y) \in W \circ G$. Tada postoji $t \in X$ tako da je $(x,t) \in W$ i $(t,y) \in G$ odn. $t \leq y$. Kako je $(x,t) \in W$ i $(y,y) \in W$, to je $(x \vee y, t \vee y) \in V$, odn. $(x \vee y, y) \in V$ jer je $t \vee y = y$. Pritom je $x \leq x \vee y$, pa je $(x, x \vee y) \in G$. Stoga iz $(x \vee y, y) \in V$ i $(x, x \vee y) \in G$ sledi da je $(x,y) \in G \circ V$. Dakle je $W \circ G \subseteq G \circ V$.

Neka je sada $V \in \mathcal{U}$ i odredimo skup $W_1 \in \mathcal{U}$ tako da je $W_1 \circ W_1^{-1} \circ W_1 \subseteq V$. Neka je dalje $W_2 \in \mathcal{U}$ takav skup da iz $(x', x'') \in W_2$ i $(y', y'') \in W_2$ sledi $(x' \vee y', x'' \vee y'') \in W_1$. Stavimo li da je $W = W_1 \cap W_2$, tada je $(G \circ W) \cap (W \circ G^{-1}) \subseteq V$. Zaista, ako je $(x,y) \in (G \circ W) \cap (W \circ G^{-1})$, tada postoji $u \in X$ tako da je $(x,u) \in G$, odn. $x \leq u$ i $(u,y) \in W$ jer je $(x,y) \in G \circ W$. Slično, zbog $(x,y) \in W \circ G^{-1}$, postoji $v \in X$ tako da je $(x,v) \in W$ i $(v,y) \in G^{-1}$ odn. $y \leq v$. Sada iz relacija $(x,v) \in W \subseteq W_2$ i $(u,y) \in W \subseteq W_2$ sledi da je $(x \vee u, v \vee y) \in W_1$. Kako je $x \vee u = u$ i $v \vee y = v$, to je $(u,v) \in W_1$. Konačno, iz relacija $(x,v) \in W \subseteq W_1$, $(v,u) \in W_1^{-1}$, $(u,y) \in W_1$ sledi da je $(x,y) \in W_1 \circ W_1^{-1} \circ W_1 \subseteq V$, čime je dokazan i drugi uslov prethodne teoreme.

Konačno, primetimo da je $x \vee y$ kao ravnomerno neprekidna funkcija istovremeno neprekidna funkcija dveju promenljivih, a time i neprekidna funkcija svake od promenljivih posebno. Stoga je za svako $a \in X$ skup $i(a) = \{x \in X : x \vee a = x\}$ zatvoren, jer je X Hausdorfov prostor. Time je dokazan i poslednji uslov teoreme. ||

Dokažimo sada dve teoreme, koje daju različite klase uredjenih topoloških prostora sa osobinom da imaju saglasne ravnomerne strukture koje su u odnosu na uredjenje zadano na tim prostorima ravnomerno uredjene strukture.

TEOREMA 7. *Svaki kompaktno uredjen prostor ima saglasnu ravnomernu strukturu koja je u odnosu na uredjenje prostora ravnomerno uredjena struktura* (vid[XL]).

DOKAZ: Neka je X kompaktno uredjen prostor. Označimo sa $\mathcal{G}$ filter okolina grafa G, i dokažimo da je $\mathcal{G}$ kvaziravnomerna struktura koja generiše ravnomernu strukturu $\mathcal{U}$ saglasnu sa topologijom posmatranog prostora, kao i uredjenje na X.

Dokažimo najpre da je $\mathcal{G}$ kvaziravnomerna struktura na X. Ako je $V \in \mathcal{G}$, tada je $\Delta \subseteq V$ jer je $G \subseteq V$. Štaviše, za svako $V \in \mathcal{G}$, postoji $W \in \mathcal{G}$ tako da je $W \circ W \subseteq V$. Da to dokažemo, pretpostavimo suprotno. Tada postoje tačke x, $y \in X$ tako da je $(x,y) \in X^2 - V$ i $(x,y) \in W \circ W$. Iz poslednje relacije sledi egzistencija takvog elementa $t \in X$ za koji je $(x,t) \in W$ i $(t,y) \in W$. Označimo sa V' skup onih tačaka $(x,t,y) \in X^3$ za koje je $(x,y) \in X^2 - V$ i $t \in X$. Za svako $W \in \mathcal{G}$ neka je $\tilde{W}$ skup svih tačaka (x,t,y) iz X^3 takvih da je $(x,y) \in X^2 - V$, $(x,t) \in W$ i $(t,y) \in W$. Očigledno je $\tilde{W} \subseteq V'$, i sobzirom na pretpostavku da $W \circ W \subseteq V$ ne važi, skup $\tilde{W}$ je neprazan. Stoga je kolekcija skupova $\tilde{W}$, gde je $W \in \mathcal{G}$, baza nekog filtra f na V'. Kako je V' kompaktan skup, to filter f ima bar jednu tačku nagomilavanja (a,h,b).

Tada je $a \leq h$. U protivnom bi, sobzirom da je X normalno uredjen, postojala otvorena, opadajuća okolina Q tačke b i otvorena, rastuća okolina P tačke a, tako da je $P \cap Q = \emptyset$. Kako je topološki prostor X normalan, a P okolina zatvorenog skupa i(a), to postoji zatvorena okolina P' skupa i(a), tako da je $P' \subseteq P$. Na sličan način se može odrediti zatvorena okolina Q' tačke h, tako da je $Q' \subseteq Q$. Skup $W = X^2 - P' \times Q'$ je otvoren i sadrži G. To dokazuje da je $W \in \mathcal{G}$, pa je dakle $\tilde{W} \in f$. Štaviše, $P' \times Q' \times X$ je okolina tačke (a,h,b) u X^3 koja je disjunktna sa skupom $\tilde{W}$, jer je za svaku tačku $(x,t,y) \in P' \times Q' \times X$ očigledno $(x,t) \in X^2 - W$, i stoga je $(x,t,y) \in X^3 - \tilde{W}$. Ovo je pak u kontradikciji sa činjenicom da je (a,h,b) tačka nagomilavanja filtra f. Analogno se dokazuje da je $h \leq b$, odakle sledi da je $a \leq b$. Odatle sledi $(a,b) \in V$, što je u kontradikciji sa činjenicom da je $(a,h,b) \in V'$. Dobijena kontradikcija dokazuje da za svako $V \in \mathcal{G}$, postoji $W \in \mathcal{G}$ tako da je $W \circ W \subseteq V$. Filter $\mathcal{G}$ je dakle kvaziravnomerna struktura.

Dokažimo sada da $\mathcal{G}$ generiše uredjenje čiji je graf G. Kako je X^2 Hausdorfov prostor, to je G presek svih okolina kvaziravnomerne strukture.

Konačno dokažimo da je ravnomerna struktura generisana sa $\mathcal{G}$ saglasna sa topologijom prostora X. Označimo sa $\mathcal{U}$ filter okolina dijagonale Δ. Tada je $\mathcal{U}$ jedinstvena ravnomerna struktura saglasna sa topologijom prostora X. Očigledno je svaki otvoren skup u topologiji definisanoj pomoću kvaziravnomerne strukture $\mathcal{G}$ otvoren i u topologiji definisanoj pomoću ravnomerne strukture $\mathcal{U}$. Osim toga, topologija definisana ravnomernom strukturom je Hausdorfova. Na osnovu osobina kompaktnog prostora zaključujemo da su ove topologije identične. Stoga iz jedinstvenosti ravnomerne strukture saglasne sa topologijom kompaktnog, Hausdorfovog prostora sledi identičnost ravnomerne strukture $\mathcal{U}$ sa ravnomernom strukturom koja je generisana kvaziravnomernom strukturom $\mathcal{G}$.||

TEOREMA 8. Svaki strogo lokalno kompaktan T_2-uredjen prostor ima saglasnu ravnomernu strukturu koja je, u odnosu na uredjenje prostora ravnomerno uredjena stuktura.

DOKAZ: Neka je (X,τ) strogo lokalno kompaktan, T_2-uredjen prostor. Tada se na jednotačkastoj kompaktifikaciji X^* može definisat uredjenje, tako da je (X^*,τ^*) jednotačkasta, T_2-uredjajna kompaktifikacija prostora (X,τ). Prema prethodnoj teoremi, postoji ravnomerna struktura saglasna sa topologijom τ^*, koja je ravnomerno uredjena u odnosu na uredjenje na X^*. Stoga tvrdjenje teorema neposredno sledi prema STAVU 1. .||

2. PROIZVOD RAVNOMERNO UREDJENIH PROSTORA

Neka je $\mathcal{U}$ ravnomerna struktura definisana na uredjenom skupu X i neka je G graf tog uredjenja. Familija $\mathcal{G}(\mathcal{U})$ definisana sa

$$\mathcal{G}(\mathcal{U}) = \{ V \in \mathcal{U} : \text{postoje } V_1, V_2, \ldots \in \mathcal{U} \text{ tako da je } V_1 = V, \text{ i za svako } n \in N,\ G \subseteq V_n \text{ i } V_{n+1} \circ V_{n+1} \subseteq V_n \}$$

je kvaziravnomerna struktura na X za koju važi sledeći

STAV 1. Neka je $(X,\mathcal{U})$ ravnomeran prostor na kome je istovremeno zadano uredjenje čiji je graf G. Da bi prostor

$(X,\mathcal{U})$ bio ravnomerno uredjen, potrebno je i dovoljno, da je $\mathcal{G}^*(\mathcal{U})\supseteq\mathcal{U}$ i $\cap\mathcal{G}(\mathcal{U})\subseteq G$ (vid.[42])

DOKAZ: Kako je $\mathcal{G}(\mathcal{U})\subseteq\mathcal{U}$, očigledno je $\mathcal{G}^*(\mathcal{U})\subseteq\mathcal{U}$. Stoga, ako je $\mathcal{G}^*(\mathcal{U})\subseteq\mathcal{U}$, to je $\mathcal{G}^*(\mathcal{U})=\mathcal{U}$, što dokazuje da kvaziravnomerna struktura $\mathcal{G}(\mathcal{U})$ generiše ravnomernu strukturu $\mathcal{U}$.

Neka je $\mathfrak{G}\subseteq\mathcal{G}(\mathcal{U})$ kvaziravnomerna struktura na X za koju je $\cap\mathfrak{G}=G$ i $\mathfrak{G}^*=\mathcal{U}$. Očigledno je $\mathfrak{G}\subseteq\mathcal{G}(\mathcal{U})$, pa je stoga $\cap\mathfrak{G}\supseteq\cap\mathcal{G}(\mathcal{U})$. Time smo dokazali da kvaziravnomerna struktura $\mathcal{G}(\mathcal{U})$ generiše i uredjenje na X.

Obratno, pretpostavimo da je $\mathfrak{G}$ kvaziravnomerna struktura na X za koju je $G\subseteq\cap\mathfrak{G}$ i $\mathfrak{G}^*=\mathcal{U}$. Očigledno je $\mathfrak{G}\subseteq\mathcal{G}(\mathcal{U})$. Ako je $H\in\mathcal{U}$, tada je $H=U\cap V^{-1}$, gde je $U,V\in\mathfrak{G}$, pa je $H\in\mathcal{G}^*(\mathcal{U})$.||

Napomenimo još, da je $\mathcal{G}(\mathcal{U})$ maksimalna kvaziravnomerna struktura, koja za datu ravnomerno uredjenu strukturu $\mathcal{U}$ ima osobinu da je $\mathcal{G}^*(\mathcal{U})=\mathcal{U}$ i $\cap\mathcal{G}(\mathcal{U})=G$ (vid.[42]).

TEOREMA 2. Neka je $\{(X_i,\mathcal{U}_i)\}_{i\in I}$ familija ravnomerno uredjenih prostora. Ako je $\mathcal{U}$ proizvod ravnomernih struktura na Dekartovom proizvodu $X=\prod_{i\in I}X_i$, tada je $(X,\mathcal{U})$ ravnomerno uredjen prostor u odnosu na kardinalno uredjenje na X.

DOKAZ: Neka je G_i graf uredjenja na X_i, a G graf kardinalnog uredjenja na X. Označimo sa $\mathfrak{B}$ bazu ravnomerne strukture $\mathcal{U}$ na X. Tada za svaki element U ravnomerne strukture $\mathcal{U}$ postoji element B baze $\mathfrak{B}$, tako da je $B\subseteq U$. Skup B je oblika

$$B=B(U_{i_1},U_{i_2},\dots,U_{i_n})=g_{i_1}^{-1}(U_{i_1})\cap g_{i_2}^{-1}(U_{i_2})\cap\dots\cap g_{i_n}^{-1}(U_{i_n}),$$

gde je $U_{i_k}\in\mathcal{U}_{i_k}$ i $g_{i_k}=pr_{i_k}\times pr_{i_k}$ $(k=1,2,\dots,n)$. Kako je $(X_i,\mathcal{U}_i)$ ravnomerno uredjen prostor za svako $i\in I$, to je prema prethodnom stavu $\mathcal{U}_i\subseteq\mathcal{G}^*(\mathcal{U}_i)$ za svako $i\in I$. Stoga za svaki skup $U_{i_k}\in\mathcal{U}_{i_k}$, postoje skupovi $U'_{i_k},U''_{i_k}\in\mathcal{G}(\mathcal{U}_{i_k})$ tako da je :

$$U_{i_k}=U'_{i_k}\cap U''^{-1}_{i_k}$$

$(k=1,2,\dots,n)$. Stoga postoje skupovi $V_{i_k}^m, W_{i_k}^m \in \mathcal{G}(\mathcal{U}_{i_k})$, $(k=1,2,\dots,n; m=1,2,3,\dots)$, koji zadovoljavaju sledeće uslove:

$$V_{i_k}^1 = U'_{i_k} \quad , \qquad W_{i_k}^1 = U''_{i_k} \quad ,$$

i
$$G_{i_k} \subseteq V_{i_k}^m \quad , \qquad G_{i_k} \subseteq W_{i_k}^m$$

$$V_{i_k}^{m+1} \circ V_{i_k}^{m+1} \subseteq V_{i_k}^m \quad , \qquad W_{i_k}^{m+1} \circ W_{i_k}^{m+1} \subseteq W_{i_k}^m$$

za svako $k=1,2,\dots,n$ i svako $m=1,2,\dots$. Definišime skupove

$$V^m = \bigcap_{k=1}^n g^{-1}(V_{i_k}^m) \quad , \qquad W^m = \bigcap_{k=1}^n g^{-1}(W_{i_k}^m)$$

$(m=1,2,\dots)$. Kako su skupovi $V_{i_k}^m$ elementi ravnomerne strukture $\mathcal{U}_{i_k}$ to su skupovi V^m elementi baze $\mathcal{B}$ ravnomerne strukture $\mathcal{U}$. Pritom za svako $m=1,2,\dots$ važi $V^{m+1} \circ V^{m+1} \subseteq V^m$. Zaista,

$$V^{m+1} \circ V^{m+1} = \{\bigcap_{k=1}^n g_{i_k}^{-1}(V_{i_k}^{m+1})\} \circ \{\bigcap_{k=1}^n g_{i_k}^{-1}(V_{i_k}^{m+1})\} \subseteq$$

$$\subseteq \bigcap_{k=1}^n ((\bigcap_{k'=1}^n g_{i_k}^{-1}(V_{i_{k'}}^{m+1})) \circ g_{i_k}^{-1}(V_{i_k}^{m+1})) \subseteq$$

$$\subseteq \bigcap_{k=1}^n (\bigcap_{k'=1}^n (g_{i_k}^{-1}(V_{i_{k'}}^{m+1}) \circ g_{i_k}^{-1}(V_{i_k}^{m+1})) \subseteq$$

$$\subseteq \bigcap_{k=1}^n (g_{i_k}^{-1}(V_{i_k}^{m+1}) \circ g_{i_k}^{-1}(V_{i_k}^{m+1})) \subseteq$$

$$\subseteq \bigcap_{k=1}^n g_{i_k}^{-1}(V_{i_k}^{m+1} \circ V_{i_k}^{m+1}) \subseteq \bigcap_{k=1}^n g_{i_k}^{-1}(V_{i_k}^m) = V^m \quad .$$

Štaviše,

$$G = \bigcap_{i \in I} g_i^{-1}(G_i) \subseteq \bigcap_{k=1}^n g_{i_k}^{-1}(G_{i_k}) \subseteq \bigcap_{k=1}^n g_{i_k}^{-1}(V_{i_k}) = V^m$$

važi za svako $m=1,2,\dots$. Time smo dokazali da je V^1 element kvaziravnomerne strukture $\mathcal{G}(\mathcal{U})$. Slično se dokazuje da je i W^1 element kvaziravnomerne strukture $\mathcal{G}(\mathcal{U})$. Stoga je $V^1 \cap (W^1)^{-1}$ element ravnomerne strukture $\mathcal{G}^*(\mathcal{U})$. Kako je

$$V^1 \cap (W^1)^{-1} = (\bigcap_{k=1}^{n} g_{i_k}^{-1}(V_{i_k}^1)) \cap (\bigcap_{k=1}^{n} g_{i_k}^{-1}(W_{i_k}^1)) =$$
$$= (\bigcap_{k=1}^{n} g_{i_k}^{-1}(U'_{i_k})) \cap (\bigcap_{k=1}^{n} g_{i_k}^{-1}(U''_{i_k})) =$$
$$= (\bigcap_{k=1}^{n} g_{i_k}^{-1}(U'_{i_k})) \cap (\bigcap_{k=1}^{n} g_{i_k}^{-1}(U''_{i_k})^{-1}) =$$
$$= \bigcap_{k=1}^{n} g_{i_k}^{-1}(U'_{i_k} \cap U''^{-1}_{i_k}) = \bigcap_{k=1}^{n} g_{i_k}^{-1}(U_{i_k}) = B\,,$$

to je B element ravnomerne strukture $\mathcal{G}^*(\mathcal{U})$. Pritom je $B \subseteq U$, pa je dakle $U \in \mathcal{G}^*(\mathcal{U})$. Time smo dokazali da je $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{G}^*(\mathcal{U})$.

Ostaje još da dokažemo inkluziju $\cap \mathcal{G}(\mathcal{U}) \subseteq G$. Pretpostavimo da $(x,y) \notin G$. Tada postoji indeks $i \in I$ za koji je $(x_i, y_i) \notin G_i$. Kako je $\cap \mathcal{G}(\mathcal{U}_i) \subseteq G_i$, postoji bar jedan element $U_i \in \mathcal{G}(\mathcal{U}_i)$, tako da je $(x_i, y_i) \notin U_i$. Skup $U = g_i^{-1}(U_i)$ je element kvaziravnomerne strukture $\mathcal{G}(\mathcal{U})$. Zaista, kako je $U_i \in \mathcal{G}(\mathcal{U}_i)$, to postoje skupovi $U_i^1, U_i^2, \ldots$ koji su elementi ravnomerne strukture $\mathcal{U}_i$, tako da je

$$U_i^1 = U_i \qquad , \qquad G_i \subseteq U_i^n$$

i

$$U_i^{n+1} \circ U_i^{n+1} \subseteq U_i^n$$

$(n=1,2,\ldots)$. Tada su skupovi $U_n = G_i^{-1}(U_i^n)$ elementi ravnomerne strukture $\mathcal{U}$. Očigledno je $U = U_1$. Štaviše,

$$U_{n+1} \circ U_{n+1} = g_i^{-1}(U_i^{n+1}) \circ g_i^{-1}(U_i^{n+1}) \subseteq g_i^{-1}(U_i^{n+1} \circ U_i^{n+1}) \subseteq g^{-1}(U_i^n) = U_n.$$

i

$$G = \cap g_i^{-1}(G_i) \subseteq g_i^{-1}(G_i) \subseteq g_i^{-1}(U_i^n) = U_n \quad ,$$

odakle je $U \in \mathcal{G}(\mathcal{U})$. Sada iz $U = g^{-1}(U_i)$ i $(x_i, y_i) \notin U$ sledi $(x,y) \notin U$, odn. $(x,y) \in \cap \mathcal{G}(\mathcal{U})$ Time je dokazana inkluzija $\cap \mathcal{G}(\mathcal{U}) \subseteq G$. Prema prethodnom stavu, $(X, \mathcal{U})$ je ravnomerno uredjen prostor.||

Sledeća posledica neposredno sledi iz TEOREME 6.1. i prethodne teoreme.

POSLEDICA 1. Neka je $(X_i, \mathcal{U}_i)$ familija Hausdorfovih, ravnomernih struktura koje su polumreže u odnosu na supremum. Ako je $x \bigvee_i y$ ravnomerno neprekidna funkcija za svako i, tada je proizvod ravnomernih struktura $\mathcal{U}$ u odnosu na kardinalno uredjenje ravnomerno uredjena struktura.

POSLEDICA 2. Neka je A_i potprostor ravnomerno uredjenog prostora X_i za svako $i \in I$. Tada je ravnomerno uredjen potprostor $A = \prod A_i$ ravnomerno uredjenog prostora $X = \prod X_i$ u odnosu na kardinalno uredjenje jednak proizvodu ravnomerno uredjenih potprostora A_i.

DOKAZ: Na osnovu prethodne teoreme, proizvod $\prod X_i$ ravnomerno uredjenih prostora X_i je ravnomerno uredjen prostor. Potprostor $A = \prod A_i$ u odnosu na indukovano uredjenje i ravnomernu strukturu je prema STAVU 1.1. ravnomerno uredjen prostor. Ravnomerna struktura na A generisana ravnomernom strukturom na proizvodu $\prod X_i$ identična je proizvodu ravnomernih struktura potprostora A_i.

Neka je $\prod G_{A_i}$ graf kardinalnog uredjenja na A, a G graf kardinalnog uredjenja na X. Tada je

$$
\begin{aligned}
(x,y) \in \prod G_{A_i} &\Leftrightarrow (\forall i \in I)(x_i, y_i) \in G_{A_i} \Leftrightarrow (\forall i \in I)((x_i, y_i) \in G_i \cap (A_i x A_i)) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (\forall i \in I)((x_i, y_i) \in G_i \wedge (x_i, y_i) \in A_i x A_i) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (\forall i \in I)((x_i, y_i) \in G_i) \wedge (\forall i \in I)((x_i, y_i) \in A_i x A_i) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x,y) \in G \wedge (\forall i \in I)(x_i \in A_i) \wedge (\forall i \in I)(y_i \in A_i) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x,y) \in G \wedge x \in \prod A_i \wedge y \in \prod A_i \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x,y) \in G \cap ((\prod A_i) x (\prod A_i)) ,
\end{aligned}
$$

što dokazuje da je uredjenje indukovano uredjenjem prostora X na potprostor A identično sa kardinalnim uredjenjem proizvoda $\prod A_i$.||

3. RAVNOMERNO UREDJENI PROSTORI U KLASI TOTALNO UREDJENIH SKUPOVA

Neka je $(X,\mathcal{U})$ Hausdorfov ravnomeran prostor na kome je definisano uredjenje čiji je graf G. Ako postoji bar jedna kvaziravnomerna struktura $\mathcal{G}$ koja generiše ravnomernu strukturu $\mathcal{U}$, tako da je $G \subseteq \cap \mathcal{G}$, kažemo da je $(X,\mathcal{U})$ skoro ravnomerno uredjen prostor. Očigledno je svaki ravnomerno uredjen prostor istovremeno i skoro ravnomerno uredjen prostor. Obrat o opštem slučaju ne važi (vid. [42], primer 2.3.). U klasi totalno uredjenih skupova ova dva pojma se medjutim poklapaju, što sledeći stav i dokazuje.

STAV 1. Neka je $(X,\leq)$ totalno uredjen skup na kome je zadana ravnomerna struktura $\mathcal{U}$. Da bi $(X,\mathcal{U})$ bio ravnomerno uredjen prostor, potrebno je i dovoljno, da je on skoro ravnomerno uredjen (vid. [43])

DOKAZ: Neka je $\mathcal{G}$ kvaziravnomerna struktura na X za koju je $\mathcal{G}^{*}=\mathcal{U}$ i $G\subseteq \cap\mathcal{G}$. Pretpostavimo da $(x,y)\in(\cap\mathcal{G})-G$. Tada je $(y,x)\in G\subseteq\cap\mathcal{G}$. Neka je $H\in\mathcal{U}$. Tada je $V\cap V^{-1}\subseteq H$ za neko $V\in\mathcal{G}$. Kako je $(y,x)\in V$, to je $(x,y)\in V^{-1}$. Stoga je $(x,y)\in H$. No tada je $(x,y)\in\cap\mathcal{U}$ Kako je $(x,y)\notin G$, to $(x,y)\notin\Delta$. Prostor $(X,\mathcal{U})$ dakle nije Hausdorfov, što je kontradikcija. ||

DEFINICIJA 1. Ravnomeran prostor $(X,\mathcal{U})$ na kome je zadano uredjenje je ravnomerno konveksan, ako za svako $U\in\mathcal{U}$, postoji $V\in\mathcal{U}$, tako da je $V\subseteq U$, pri čemu je $V(x)$ konveksan skup za svako $x\in X$ (vid. [43]).

Jasno je da je svaki ravnomerno konveksan prostor istovremeno i lokalno konveksan. Obrat u opštem slučaju ne važi (vid. [43], primer 2.1.) .

STAV 2. Svaki skoro ravnomerno uredjen prostor je ravnomerno konveksan (vid. [43]).

DOKAZ: Neka je $(X,\leq)$ uredjen skup i neka je $\mathcal{U}$ Hausdorfova ravnomerna

ravnomerna struktura na X. Označimo sa $\mathcal{G}$ kvaziravnomernu strukturu na X za koju je $G\subseteq\bigcap\mathcal{G}$ i $\mathcal{G}^{*}=\mathcal{U}$. Neka je U proizvoljan element ravnomerne stukture $\mathcal{U}$. Kako je $\mathcal{G}^{*}=\mathcal{U}$, postoji skup $F\in\mathcal{G}$ tako da je $F\cap F^{-1}\subseteq U$. Tada postoji skup $V\in\mathcal{G}$ tako da je $V\circ V\subseteq F$. Neka je $W=V\cap V^{-1}$. Za svaki potskup $A\subseteq X$, skup

$$\mathrm{Conv}\,(A)=\{t\in X : (\exists a,b\in A) \text{ tako da je } a\leq t\leq b\}$$

je konveksan skup koji sadrži skup A. Za svako $x\in X$, neka je $L_x=\mathrm{Conv}\,(W(x))$. Konačno, neka je $M=\{(x,y)\in X\times X : y\in L(x)\}$. Očigledno, za svako $x\in X$ skup $M(x)=L_x$ je konveksan.

Dokažimo najpre da je $M\in\mathcal{U}$. Ako je $(x,y)\in W$, tada je $y\in W(x)=L_x$, pa je $(x,y)\in M$. Stoga je $W\subseteq M$, odakle sledi da je $M\in\mathcal{U}$.

Neka je sada $(x,y)\in M$. Tada je $y\in L_x$; postoje dakle tačke $a,b\in W(x)$ tako da je $a\leq y\leq b$. Sada je $(x,a)\in W\subseteq V$, $(a,y)\in G\subseteq V$. Odavde sada sledi da je $(x,y)\in V\circ V\subseteq F$. Osim toga, $(x,b)\in W\subseteq V^{-1}$, $(y,b)\in G\subseteq V$, odakle je $(y,x)\in V\circ V\subseteq F$. Stoga je $(x,y)\in F\cap F^{-1}\subseteq U$. Time smo dokazali inkluziju $M\subseteq U$.||

DEFINICIJA 2. Neka je $(X,\leq)$ mreža. Ako je $\mathcal{U}$ ravnomerna struktura u odnosu na koju su operacije mreže ravnomerno neprekidne funkcije, tada kažemo da je $(X,\mathcal{U},\leq)$ ravnomerna mreža.

STAV 3. Neka je $(X,\leq)$ totalno uredjen skup. Ako je $\mathcal{U}$ uniformno konveksna, Hausdorfova ravnomerna struktura na X, tada je $(X,\mathcal{U},\leq)$ ravnomerna mreža (vid.[43]).

DOKAZ: Neka je $U\in\mathcal{U}$. Tada postoji simetričan element W ravnomerne strukture $\mathcal{U}$, Tako da je $W\circ W\subseteq U$. Kako je $(X,\mathcal{U})$ ravnomerno konveksan prostor, postoji $V\in\mathcal{U}$ tako da je $V\subseteq W$, pri čemu je $V(x)$ konveksan skup za svako $x\in X$. Neka je

$$V^{*}=\{(a,x,b,y) : (a,b)\in V,\ (x,y)\in V\}\ .$$

Da dokažemo stav, treba dokazati da je $(\vee\times\vee)(V^{*})\subseteq U$ i $(\wedge\times\wedge)(V^{*})\subseteq U$. Mi ćemo dokazati samo prvu inkluziju; druga se dokazuje slično. Neka je $(a,x,b,y)\in V^{*}$. Ako je $a\geq x$ i $b\geq y$, ili $a\leq x$ i $b\leq y$, tada je $(a\vee x,b\vee y)\in V\subseteq U$.

Ostaje da razmotrimo slučaj kada je $x \geq a$ i $y \leq b$ ili $x \leq a$ i $y \geq b$. Pretpostavimo da je $x \leq a$ i $y \geq b$. Tada je $(V \times V)(a,x,b,y) = (a,y)$. Razmotrimo sada dve mogućnosti koje mogu nastupiti.

(i) Pretpostavimo da je $y \geq a$. Tada iz $y \geq a \geq x$ sledi da je $a \in V(x)$, jer je $y \in V(x)$ a $V(x)$ je konveksan skup. Sada je $(x,a) \in V$, tj, $(a,x) \in V^{-1}$, odakle imamo:

$$(a,y) \in V^{-1} \circ V \subseteq W^{-1} \circ W = W \circ W \subseteq U .$$

(ii) Ako je $y < a$, tada je $a > y \geq b$. Stoga je $y \in V(a)$, jer je skup $V(a)$ konveksan i $b \in V(a)$. To dokazuje da je $(a,y) \in V \subseteq U$. Na sličan način se dokazuje da je $(V \times V)(a,x,b,y) \in U$, ako je $x \geq a$ i $y \leq b$. Time je dokazana inkluzija $(V \times V)(V^{*}) \subseteq U$.||

TEOREMA 4. Neka je $(X, \leq)$ totalno uredjen skup na kome je definisana ravnomerna struktura $\mathcal{U}$. Tada su sledeće tvrdjenja ekvivalentna:

(i) $(X, \mathcal{U}, \leq)$ je ravnomerno uredjen prostor,

(ii) $(X, \mathcal{U}, \leq)$ je skoro ravnomerno uredjen prostor,

(iii) $\mathcal{U}$ je ravnomerno konveksna, Hausdorfova ravnomerna struktura na X ,

(iv) $(X, \mathcal{U}, \leq)$ je ravnomerna mreža

(vid. [43]).

DOKAZ: Da (i) povlači (ii) je očigledno. Na osnovu STAVA 2., (ii) povlači (iii). Prema STAVU 3., iz (iii) sledi (iv). Konačno, prema TEOREMI 6.1., iz (iv) sledi (i).||

4. UREDJAJNA KOMPLETIZACIJA RAVNOMERNO UREDJENIH PROSTORA

Neka je $(X, \mathcal{U})$ skoro ravnomerno uredjen prostor, a $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{U}})$ ravnomerna kompletizacija prostora $(X, \mathcal{U})$. Definišimo na $\tilde{X}$ binarnu relaciju na sledeći način: $\tilde{x} \lesssim \tilde{y}$ onda i samo onda, ako za svaki Košijev niz $\{x_U : U \in \mathcal{U}^S\}$

koji konvergira ka $\tilde{x}$, postoji Košijev niz $\{y_U : U\in \mathcal{U}^S\}$ koji konvergira ka $\tilde{y}$,tako da je za svako $U\in \mathcal{U}^S$ $x_U \leq y_U$. Ovu relaciju zvaćemo strogim uredjenjem na X.

Neka je sada $\mathcal{G}$ kvaziravnomerna struktura na X za koju je $\bigcap\mathcal{G} \supseteq G$ i $\mathcal{G}^* = \mathcal{U}$. Definišimo na $\tilde{X}$ binarnu ralaciju $\leq(\mathcal{G})$ na sledeći način: $\tilde{x} \leq (\mathcal{G})\ \tilde{y}$ onda i samo onda, ako za svako $V\in\mathcal{G}$ i svaki Košijev niz $\{x_U : U\in \mathcal{U}^S\}\subseteq X$ koji konvergira ka $\tilde{x}$, postoji Košijev niz $\{y_U : U\in\mathcal{U}^S\}\subseteq X$ koji konvergira ka $\tilde{y}$, tako da je za svako $U\in\mathcal{U}^S$ $(x_U, y_U)\in V$. Relaciju $\leq(\mathcal{G})$ na X nazivamo $\mathcal{G}$-uredjenjem. Ako je $\tilde{x}\precsim\tilde{y}$, očigledno je $\tilde{x}\leq(\mathcal{G})\tilde{y}$ za svaku kvaziravnomernu strukturu $\mathcal{G}$ za koju je $G\subseteq\bigcap\mathcal{G}$ i $\mathcal{G}^* = \mathcal{U}$.

STAV 1. Ako je $(X,\mathcal{U})$ skoro ravnomerno uredjen prostor, tada su relacije strogog uredjenja i $\mathcal{G}$-uredjenja relacije poretka na X (vid.[42]).

DOKAZ: Neka je $\mathcal{G}$ kvaziravnomerna struktura na X za koju je $G\subseteq\bigcap\mathcal{G}$ i $\mathcal{U} = \mathcal{G}^*$.

Očigledno je $\tilde{x}\precsim\tilde{x}$ i $\tilde{x}\leq(\mathcal{G})\tilde{x}$ za svako $\tilde{x}\in\tilde{X}$.

Pretpostavimo da je $\tilde{x}\precsim\tilde{y}$ $(\tilde{x}\leq(\mathcal{G})\tilde{y})$ i $\tilde{y}\precsim\tilde{x}$ $(\tilde{y}\leq(\mathcal{G})\tilde{x})$. Neka je $\{y_U : U\in\mathcal{U}^S\}\subseteq X$ Košijev niz koji konvergira ka $\tilde{y}$. Dokažimo da niz $\{y_U\}$ konvergira ka $\tilde{x}$. Neka je $W\in\mathcal{U}^S$. Tada postoji $H\in\mathcal{U}^S$ tako da je $\tilde{H}\circ\tilde{H}\subseteq\tilde{W}$. Neka je $V\in\mathcal{G}$ element kvaziravnomerne strukture $\mathcal{G}$ za koju je $(V\circ V)\cap(V\circ V)^{-1}\subseteq H$. Prema definiciji relacije $\precsim$ $(\leq(\mathcal{G}))$, postoji Košijev niz $\{x_U : U\in\mathcal{U}^S\}\subseteq X$ koji konvergira ka $\tilde{x}$ i Košijev niz $\{z_U : U\in\mathcal{U}^S\}\subseteq X$ koji konvergira ka $\tilde{y}$, tako da za svako $U\in\mathcal{U}^S$ važi $y_U\leq x_U$ $((y_U,x_U)\in V)$ i $x_U\leq z_U$ $((x_U,z_U)\in V)$. Stoga je

$$(y_U,x_U)\in G\subseteq V \qquad ((y_U,x_U)\in V)$$

i

$$(x_U,z_U)\in G\subseteq V \qquad ((x_U,z_U)\in V)$$

Kako su $\{y_U\}$ i $\{z_U\}$ Košijevi nizovi koji konvergiraju ka $\tilde{y}$, to postoji $K\in\mathcal{U}^S$ tako da je $K\subseteq H$ i za koji iz $J\subseteq K$ sledi $(y_J, z_J)\in V\cap V^{-1}$. Stoga je $(z_J, y_J)\in V$, pa je dakle $(x_J, y_J)\in V\circ V$. No sada je

$$(y_J, x_J)\in(V\circ V)^{-1}\cap V\subseteq H\subseteq\tilde{H}\ .$$

No tada je $(\tilde{x},x_J)\in\tilde{K}\subseteq\tilde{H}$ pa je stoga $(\tilde{x},y_J)\in\tilde{H}\ \tilde{H}\subseteq\tilde{W}$. To dokazuje da niz $\{y_U\}$ konvergira ka $\tilde{x}$, a kako je $\tilde{\mathcal{U}}$ Hausdorfov prostor, to niz $\{y_U\}$ takodje konvergira ka $\tilde{y}$, čime je jednakost $\tilde{x}=\tilde{y}$ dokazana.

Pretpostavimo sada da je $\tilde{x}\precsim\tilde{y}$ $(\tilde{x}\leq(\mathcal{G})\tilde{y})$ i $\tilde{y}\precsim\tilde{z}$ $(\tilde{y}\leq(\mathcal{G})\tilde{z})$. Neka je $\{x_U : U\in\mathcal{U}^S\}\subseteq X$ Košijev niz koji konvergira ka $\tilde{x}$. Tada postoji Košijev niz $\{y_U : U\in\mathcal{U}^S\}\subseteq X$ koje konvergira ka $\tilde{y}$, i Košijev niz $\{z_U : U\in\mathcal{U}^S\}\subseteq X$ koji konvergira ka $\tilde{z}$ tako da je za svako $U\in\mathcal{U}^S$ $x_U\leq y_U$ $((x_U,y_U)\in W)$ i $y_U\leq z_U$ $((y_U,z_U)\in W)$. No tada je za svako $U\in\mathcal{U}^S$ $x_U\leq z_U$ $((x_U,z_U)\in W\circ W\subseteq V)$, što dokazuje da je $\tilde{x}\precsim\tilde{z}$ $(\tilde{x}\leq(\mathcal{G})\tilde{z})$.||

STAV 2. Ako je $(X,\mathcal{U})$ skoro ravnomerno uredjen prostor, tada svako $\mathcal{G}$-uredjenje na $\tilde{X}$ zadovoljava uslov:

$$G\subseteq G(\leq(\mathcal{G}))\cap(P\times P)\quad,$$

gde je $G(\leq(\mathcal{G}))$ graf $\mathcal{G}$-uredjenja $\leq(\mathcal{G})$ (vid. [42]).

DOKAZ: Neka su $x,y\in X$ za koje je $x\leq y$. Neka su $U,V\in\mathcal{G}$ takvi skupovi za koje je $W\circ W\subseteq V$. Pretpostavimo da je $\{x_U : U\in\mathcal{U}^S\}\subseteq X$ Košijev niz koji konvergira ka x. Ako je $J\subseteq W\cap W^{-1}$, tada je $(x,x_J)\in W\circ W^{-1}\subseteq W^{-1}$. Stoga je

$$(x,y)\in G\subseteq W\qquad,\qquad (x_J,y)\in W\circ W\subseteq V\ .$$

Definišimo niz $\{y_U\}$ sa

$$y_U=\begin{cases} x_U\ , & \text{ako } U\not\subseteq W\cap W^{-1}\\ y\ , & \text{ako } U\subseteq W\cap W^{-1}\end{cases}$$

Tada je $\{y_U\}\subseteq X$ Košijev niz koji konvergira ka y, pri čemu je $(x_U,y_U)\in V$ za svako $U\in\mathcal{U}^S$. Stoga je $x\leq(\mathcal{G})y$.||

STAV 3. Neka je $(X,\mathcal{U})$ ravnomerno uredjen prostor. Ako je $\mathcal{G}$ kvaziravnomerna struktura na X, tada je uredjenje indukovano $\mathcal{G}$-uredjenjem sa $\tilde{X}$ na X identično zadanom uredjenju (vid. [42]).

DOKAZ: Neka za elemente $x,y\in X$ važi $x\leq y$. Tada prema STAVU 1. važi $x\leq(\mathcal{G})$ y. Obratno, pretpostavimo da je $x\leq(\mathcal{G})y$. Niz definisan sa $x_U=x$ za svako $U\in$

$\in \mathcal{U}^S$ je očigledno Košijev niz koji konvergira ka x. Neka su V i W elementi kvaziravnomerne strukture $\mathcal{G}$ za koje važi $W\circ W \subseteq U$. Tada postoji niz $\{y_U : U \in \mathcal{U}^S\} \subseteq X$ koji konvergira ka y tako da je $(x, y_U) = (x_U, y_U) \in W$ za svako $U \in \mathcal{U}^S$. Ako je $J \subseteq W \cap W^{-1}$, tada je $(y, y_J) \in W \cap W^{-1} \subseteq W^{-1}$. Stoga je $(x, y) \in W\circ W \subseteq V$. To dokazuje da je $(x, y) \in \bigcap \mathcal{G}$, odn. $x \leq y$.||

Neka je $(X, \mathcal{U})$ skoro ravnomerno uredjen prostor, a $\mathcal{G}$ kvaziravnomerna struktura na X za koju je $G \subseteq \bigcap \mathcal{G}$ i $\mathcal{G}^* = \mathcal{U}$. Za svako $V \in \mathcal{G}$, označimo sa $|V|$ potskup Dekartovog proizvoda $\tilde{X} x \tilde{X}$ čiji su elementi parovi $(\tilde{x}, \tilde{y})$ sa osobinom da za svaki Košijev niz $\{x_U : U \in \mathcal{U}^S\}$ koji konvergira ka $\tilde{x}$, postoji Košijev niz $\{y_U : U \in \mathcal{U}^S\}$ koji konvergira ka $\tilde{y}$, tako da je $(x_U, y_U) \in V$ za svako $U \in \mathcal{U}^S$. Neka je $|\mathcal{G}|$ filter generisan na $\tilde{X} x \tilde{X}$ familijom $\{|V| : V \in \mathcal{G}\}$.

LEMA 1. $|\mathcal{G}|$ je kvaziravnomerna struktura na $\tilde{X}$.

DOKAZ: Kako je $\Delta \subseteq V$ za svako $V \in \mathcal{G}$, to je $(\tilde{x}, \tilde{x}) \in V$ za svako $\tilde{x} \in \tilde{X}$.

Neka su V i W elementi kvaziravnomerne strukture $\mathcal{G}$ za koje je $W\circ W \subseteq V$. Pretpostavimo da je $(\tilde{x}, \tilde{y}), (\tilde{y}, \tilde{z}) \in |W|$, i neka je $\{x_U : U \in \mathcal{U}^S\} \subseteq X$ Košijev filter koji konvergira ka $\tilde{x}$. Kako je $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in |W|$ i $(\tilde{y}, \tilde{z}) \in |W|$, postoje Košijevi nizovi $\{y_U : U \in \mathcal{U}^S\}, \{z_U : U \in \mathcal{U}^S\} \subseteq X$ koji konvergiraju tačkama $\tilde{y}$ i $\tilde{z}$ respektivno, tako da je za svako $U \in \mathcal{U}^S$, $(x_U, y_U) \in W$ i $(y_U, z_U) \in W$. Stoga je $(x_U, z_U) \in W\circ W \subseteq V$ za svako $U \in \mathcal{U}^S$. To dokazuje da je $|\mathcal{G}|$ kvaziravnomerna struktura na X.||

LEMA 2. $|\mathcal{G}|^* = \mathcal{U}$.

DOKAZ: Napomenimo najpre da je za dati skup $A \in \mathcal{U}^S$, $\tilde{A}$ skup takvih parova $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \tilde{X} x \tilde{X}$, sa osobinom da za svaki niz $\{x_U : U \in \mathcal{U}^S\}$ koji konvergira ka $\tilde{x}$ i svaki niz $\{y_U : U \in \mathcal{U}^S\}$ koji konvergira ka $\tilde{y}$, postoji $U \in \mathcal{U}^S$ tako da za svako J, $K \subseteq U$ važi $(x_J, y_J) \in A$. Pritom je $\tilde{\mathcal{U}}$ filter generisan familijom $\{\tilde{A} : A \in \mathcal{U}^S\}$, za koji važi $\{\tilde{A} : A \in \mathcal{U}^S\} \subseteq \tilde{\mathcal{U}}^S$.

Neka su V i W elementi kvaziravnomerne strukture $\mathcal{G}$ za koje važi $W\circ W \subseteq V$, i neka je $H = V \cap V^{-1}$. Dokažimo najpre da je $|W|\circ|W|^{-1} \subseteq \tilde{H}$. Neka je $(\tilde{x}, \tilde{y}) \subseteq |W| \cap |W|^{-1}$, i pretpostavimo da su $\{x_U : U \in \mathcal{U}^S\} \subseteq X$ i $\{y_U : U \in \mathcal{U}^S\} \subseteq X$ Košijevi nizovi koji knovergiraju tačkama $\tilde{x}$ i $\tilde{y}$ respektivno. Tada postoji Košijev niz $\{a_U : U \in \mathcal{U}^s\} \subseteq X$ koji konvergira ka $\tilde{y}$ tako da je $(x_U, a_U) \in W$ za svako $U \in \mathcal{U}^s$; postoji dakle skup $K \in \mathcal{U}^s$, tako da je za svako $P, Q \subseteq K$, $(a_P, y_Q) \in W$. Stoga je $(x_P, y_Q) \in W \circ W \subseteq V$. Osim toga je $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in |W|^{-1}$, pa postoji Košijev niz $\{b_U : U \in \mathcal{U}^s\} \subseteq X$ koji konvergira ka $\tilde{x}$ tako da je $(y_U, b_U) \in W$, tj. $(b_U, y_U) \in W^{-1}$, za svako $U \in \mathcal{U}^s$. Kako niz $\{b_U\}$ konvergira ka $\tilde{x}$, postoji $L \in \mathcal{U}^s$ tako da je za svako $P, Q \subseteq L$, $(x_P, b_Q) \in W^{-1}$. Stoga je $(x_P, y_Q) \in W^{-1} \circ W^{-1} \subseteq V^{-1}$. Dakle, ako je $P, Q \subseteq L \cap K$, tada je $(x_P, y_Q) \in V \cap V^{-1}$, što dokazuje da je $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \tilde{H}$.

Neka je $V \in \mathcal{G}$, a $H = V \cap V^{-1}$. Dokažimo najpre da je $\tilde{H} \subseteq |V|$. Pretpostavimo da je $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \tilde{H}$, i neka su $\{x_U : U \in \mathcal{U}^s\} \subseteq X$ i $\{z_U : U \in \mathcal{U}^s\} \subseteq X$ Košijevi nizovi koji konvergiraju tačkama $\tilde{x}$ i $\tilde{y}$. Pretpostavimo dalje da je $W \in \mathcal{U}^s$ takav skup da za svako $J, K \subseteq W$ važi $(x_J, z_K) \in H \subseteq V$. Definišimo niz $\{y_U\}$ sa

$$y_U = \begin{cases} x_U, & \text{ako } U \nsubseteq W \\ z_U, & \text{ako } U \subseteq W \end{cases}.$$

Očigledno je $\{y_U\} \subseteq X$ Košijev niz koji konvergira ka $\tilde{y}$ pri čemu je $(x_U, y_U) \subseteq V$ za svako $U \in \mathcal{U}^s$. Stoga je $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in |V|$. To dokazuje da je $\tilde{H} \subseteq |V|$.

Ako je $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{U}}$, tada prema prethodnom postoji $V \in \mathcal{G}$ tako da je $\tilde{H} \subseteq \tilde{A}$, gde je $H = V \cap V^{-1}$. Stoga je $|W| \cap |W|^{-1} \subseteq \tilde{A}$ za neko $|W| \in |\mathcal{G}|$. Obratno, ako je $\tilde{A} \in |\mathcal{G}|^*$, tada postoji $V \in \mathcal{G}$ tako da je $|V| \cap |V|^{-1} \subseteq A$. Neka je $H = V \cap V^{-1}$. Tada je prema prethodnom $\tilde{H} \subseteq |V|$, odakle je zbog simetričnosti, $\tilde{H} \subseteq |V| \cap |V|^{-1}$. Stoga je $\tilde{H} \subseteq \tilde{A}$, čime je konačno dokazano da je $|\mathcal{G}|^* = \tilde{\mathcal{U}}$. ||

LEMA 3. $G(\leq(\mathcal{G})) = \cap |\mathcal{G}|$.

Dokaz ove leme neposredno sledi iz definicije kvaziravnomerne strukture $|\mathcal{G}|$ i $\mathcal{G}$-uredjenja.

TEOREMA 4. Neka je $(X, \mathcal{U})$ skoro ravnomerno uredjen prostor. Tada je $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{U}})$ ravnomerno uredjen prostor u odnosu na $\mathcal{G}$-uredjenje (vid. [42])

DOKAZ: Na osnovu LEMA 1., 2. i 3., $\mathcal{G}$ je kvaziravnomerna struktura na X za koju važi $G(\leq(\mathcal{G})) = \cap |\mathcal{G}|$ i $|\mathcal{G}|^* = \mathcal{U}$. ||

TEOREMA 5. Ako je $(X,\mathcal{U})$ skoro ravnomerno uredjen prostor, tada je $(\tilde{X},\tilde{\mathcal{U}})$ skoro ravnomerno uredjen prostor u odnosu na strogo uredjenje (vid. [42]).

DOKAZ: Prema prethodno rečenom, postoji $\mathfrak{G}$-uredjenje na $\tilde{X}$ za koje je $G(\leq((\mathfrak{G}))\supseteq G$. Prema LEMAMA 1.,2. i 3., $|\mathfrak{G}|$ je kvaziravnomerna struktura na X za koju važi $G\subseteq \cap|\mathfrak{G}|$ i $|\mathfrak{G}|^{*}=\mathcal{U}$.||

Da bi $(\tilde{X},\tilde{\mathcal{U}})$ bio ravnomerno uredjen prostor u odnosu na strogo uredjenje, neophodno je uvesti dodatne uslove, koji čvršće povezuju ravnomernu strukturu $\mathcal{U}$ i uredjenje dato na posmatranom prostoru.

Neka je $(X,\mathcal{U})$ ravnomeran prostor na kome je zadano uredjenje čiji je graf G. Za ravnomernu strukturu kažemo da zadovoljava uslov (M), ako

za svako $V\in\mathcal{U}$, postoji $W\in\mathcal{U}$ . . . . (M)
tako da je $WoG\subseteq GoV$

Kako je $Go(U\cap V)\subseteq(GoU)\cap(GoV)$ za svako $U,V\in\mathcal{U}$, skup $\{GoU : U\in\mathcal{U}\}$ je baza nekog filtra na XxX. Označimo sa $\mathcal{G}(\mathcal{U})$ filter na XxX generisan mnoštvom $\{GoU : U\in\mathcal{U}\}$.||

STAV 6. Neka je $(X,\leq)$ uredjen skup, a $\mathcal{U}$ ravnomernu strukturu na X. Da bi ravnomerna struktura $\mathcal{U}$ zadovoljavala uslov (M), potrebno je i dovoljno, da je $\mathfrak{G}(\mathcal{U})=\mathcal{G}(\mathcal{U})$ (vid. [42])

DOKAZ: Pretpostavimo najpre da ravnomerna struktura $\mathcal{U}$ zadovoljava uslov (M). Ako je $H\in\mathfrak{G}(\mathcal{U})$, tada postoji $J\in\mathfrak{G}(\mathcal{U})$ tako da je $JoJ\subseteq H$. Kako je $G\subseteq J$, to je

$$GoJ\subseteq JoJ\subseteq H\ .$$

Sobzirom da je $J\in\mathcal{U}$, imamo da je $H\in\mathcal{G}$. Dakle je $\mathfrak{G}(\mathcal{U})\subseteq\mathcal{G}(\mathcal{U})$.

Obratno, pretpostavimo da je $U\in\mathcal{U}$. Prema uslovu (M), postoje skupovi $V_1,V_2,\ldots\in$ tako da je $V_1=U$ i $V_{n+1}oV_{n+1}\subseteq V_n$ za svako $n\in N$, pri čemu je

$$V_{n+1}oG\subseteq GoV_n\ .$$

Za svako $n\in N$, definišimo skupove $W_n=GoV_{2n-1}$. Tada je $W_1=GoV_1=GoU$. Štaviše, za svako $n\in N$ važi $G\subseteq W_n$, pri čemu je

$$
\begin{aligned}
W_{n+1} \circ W_{n+1} &= G \circ V_{2n+1} \circ G \circ V_{2n+1} \subseteq \\
&\subseteq G \circ G \circ V_{2n} \circ V_{2n} \subseteq \\
&\subseteq G \circ V_{2n-1} \subseteq \\
&\subseteq W_n \ .
\end{aligned}
$$

Stoga je $G \circ U \in \mathcal{G}(\mathcal{U})$, odakle sledi da je $\mathcal{B}(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{G}(\mathcal{U})$.

Pretpostavimo sada da je $\mathcal{G}(\mathcal{U}) = \mathcal{B}(\mathcal{U})$, i neka je $U \in \mathcal{U}$. Tada je $G \circ U \in \mathcal{G}(\mathcal{U})$, pa stoga postoje skupvi $V_1, V_2 \in \mathcal{G}(\mathcal{U})$ tako da je $V_1 \circ V_2 \subseteq G \circ U$. Kako je $\mathcal{B}(\mathcal{U})$ baza filtra, postoje skupovi $J_1, J_2 \in \mathcal{U}$ tako da je $G \circ J_1 \subseteq V_1$ i $G \circ J_2 \subseteq \subseteq V_2$. Stoga je

$$J_1 \circ G \subseteq G \circ J_1 \circ G \circ J_2 \subseteq G \circ U \ .$$

Time smo dokazali da ravnomerna struktura zadovoljava uslov (M).||

STAV 7. Neka je $(X, \mathcal{U})$ skoro ravnomerno uredjen prostor. Ako ravnomerna struktura zadovoljava uslov (M), tada su relacije $\mathcal{G}$-uredjenja i strogog uredjenja ekvivalentne (vid. [42]).

DOKAZ: Očigledno je $G \subseteq G(\leq(\mathcal{G}))$.

Obratno, pretpostavimo da je $\tilde{x} \leq (\mathcal{G}) \tilde{y}$ i neka je $\{x_U : U \in \mathcal{U}^s\}$ Košijev niz koji konvergira ka tačci $\tilde{x}$. Neka je $V \in \mathcal{U}^s$. Tada postoji Košijev niz $\{y_U : U \in \mathcal{U}^s\} \subseteq X$ koji konvergira ka $\tilde{y}$, tako da je $(x_U, y_U) \in G \circ V$ za svako $U \in \mathcal{U}^s$. Stoga postoji $a_V \in X$ tako da je $(x_V, a_V) \in G$ i $(a_V, y_V) \in V$. Razmotrimo niz $\{a_V\} \subseteq X$. Za svako $V \in \mathcal{U}^s$ je $x_V \leq a_V$ i $(a_V, y_V) \in V$. Neka su $V, V' \in \mathcal{U}^s$ skupovi za koje važi $V' \circ V' \subseteq V$. Tada postoji skup $U \in \mathcal{U}^s$ tako da je za svako $J, K \subseteq U$, $(y_J, y_K) \in V'$. Stoga iz $J, K \subseteq U \cap V'$ imamo $(a_J, y_J) \in J \subseteq V'$ i $(y_J, y_K) \in V'$. Odavde je $(a_J, y_K) \in V$. To dokazuje da je $\{a_V\}$ Košijev niz koji konvergira ka istoj tačci kojoj konvergira i niz $\{y_U\}$. Drugim rečima, $\{a_V\} \subseteq X$ je Košijev niz koji konvergira ka $\tilde{y}$. Odavde zaključujemo da je $\tilde{x} \lesssim \tilde{y}$.

POSLEDICA 1. Neka je $(X, \mathcal{U})$ skoro ravnomerno uredjen prostor. Ako ravnomerna struktura $\mathcal{U}$ zadovoljava uslov (M), tada je $(\tilde{X},\tilde{\mathcal{U}})$ ravnomerno uredjen prostor u odnosu na strogo uredjenje (vid. [42]).

Ovaj rezultat neposredno sledi iz STAVA 2. i prethodnog stava. Ako je $(X,\mathcal{U})$ ravnomerno uredjen prostor, analogno tvrdjenje ne važi (vid.[42]).

5. REALNA PRAVA KAO RAVNOMERNO UREDJENA STRUKTURA

Realna prava je model od koga se, zbog bogatstva različitih struktura koje na njoj postoje, polazi pri uvodjenju i izučavanju novih pojmova. Kako se na realnoj pravoj prirodno definiše ravnomerna struktura indukovana metrikom realne prave, samo se po sebi nameće pitanje dali je ova ravnomerna struktura u odnosu na uredjenje realne prave ravnomerno uredjena struktura. Odgovor na ovo pitanje daje sledeći

STAV 1. Ravnomerna struktura $\mathcal{U}_R$ realne prave je ravnomerno uredjena struktura u odnosu na uredjenje prirodno definisano na realnoj pravoj.

DOKAZ: Da dokažemo da je ravnomerna stuktura $\mathcal{U}_R$ prirodno definisana na realnoj pravoj R ravnomerno uredjena struktura, dovoljno je dokazati da je $x\vee y$ kao funkcija od (x,y) ravnomerno neprekidna. Označimo sa $\mathcal{B}_R$ bazu ravnomerne strukture $\mathcal{U}_R$. Neka je $U_r=\{(x,y):|x-y|<r\}$ proizvoljan element baze $\mathcal{B}_R$. Tada je

$$W(U_r,U_r)=\{((x,y),(u,v)) : (x,u)\in U_r \text{ i } (y,v)\in U_r\}$$

element baze ravnomerne strukture proizvoda $\mathcal{U}_R\times\mathcal{U}_R$. Da dokažemo ravnomernu neprekidnost funkcije $\vee$, uočimo proizvoljan element $((x,y),(u,v))\in W(U_r,U_r)$, i pokažimo da je $(\vee\times\vee)((x,y),(u,v))\in U_r$, ili što je ekvivalentno, da je

$$|x\vee y - u\vee v|<r \ .$$

Kako je $((x,y),(u,v))\in W(U_r,U_r)$, to je $(x,u)\in U_r$ i $(y,v)\in U_r$. Stoga je $|x-u|<r$ i $|y-v|<r$, ili

$$u-r<x<u+r \quad i \quad v-r<y<v+r \; .$$

Iz poslednjih relacija imamo da je

$$\sup\{u-r, v-r\}<\sup\{x,y\}<\sup\{u+r, v+r\}$$

odnosno

$$\sup\{u,v\}-r < \sup\{x,y\} < \sup\{u,v\}+r \; .$$

Odavde sledi da je

$$|x \vee y - u \vee v| < r$$

što je i trebalo dokazati.||

Sledeći stav daje konstrukciju kvaziravnomerne strukture koja generiše uredjenje i ravnomernu strukturu realne prave. Štaviše, pokazaćemo da je to jedinstvena maksimalna kvaziravnomerna struktura na R koja generiše uredjenje i ravnomernu sturkturu $\mathcal{U}_R$ realne prave. Da formulišemo taj stav, uvedimo najpre tu kvaziravnomernu strukturu.

Za svako $r>0$, označimo sa $V_r=\{(x,y)\in R^2 : x<y+r\}$. Tada je $\{V_r : r\in R\}$ baza neke kvaziravnomerne strukture na R (vid.[XIV]). Označimo tu kvaziravnomernu strukturu sa ϑ_R.

STAV 2. Kvaziravnomerna struktura ϑ_R generiše uredjenje i ravnomernu strukturu realne prave.

DOKAZ: Neka je $U_r=\{(x,y) : |x-y|<r\}$ element baze ravnomerne strukture $\mathcal{U}_R$. Tada je

$$\begin{aligned} U_r &= \{(x,y) : -r<x-y<r\} = \\ &= \{(x,y) : y<x+r\} \cap \{(x,y) : x<y+r\} = V_r \cap V_r^{-1} \end{aligned}$$

Kako je $V_r \cap V_r^{-1} \in \vartheta_R \cap \vartheta_R^{-1}$, to je $U_r \in \vartheta_R \cap \vartheta_R^{-1}$. Obratno, neka su V_{r_1} i V_{r_2} elementi baze kvaziravnomerne strukture ϑ_R. Ne umanjujući opštost dokaza, možemo pretpostaviti da je $r_1<r_2$. Tada je $U_{r_1} \subseteq V_{r_1} \cap V_{r_2}^{-1}$, gde je $U_{r_1}=\{(x,y) : |x-y|<r_1\}$. Zaista, ako je $(x,y)\in U_{r_1}$, tada je $|x-y|<r_1$, odnosno $-r_1<x-y<r_1$. Odatle sledi da je $y<x+r_1$ i $x<y+r_1$. No sada je $y<x+r_2$ i $x<y+r_1$, pa je dakle $(x,y)\in V_{r_2}^{-1}$ i $(x,y)\in V_{r_1}$. Stoga je $(x,y)\in V_{r_1} \cap V_{r_2}^{-1}$, što dokazuje da je $\mathcal{U}_R = \vartheta_R \cap \vartheta_R^{-1}$. Dokažimo sada sada da je $\cap \vartheta_R = G$, gde je G graf uredjenja na

R. Očigledno je $G \subseteq \{(x,y) : x < y+r\} = V_r$ za svako $r>0$, pa je dakle $G \subseteq \bigcap \mathcal{V}_R$. Obratno, pretpostavimo da je $(x,y) \in X \times X - G$. Tada je $y < x$. Izaberimo $r>0$ tako da je $y+r < x$. Tada je $(x,y) \in X \times X - V_r$. Zaista, ako bi bilo $(x,y) \in V_r$, tada bi važila nejednakost $x < y+r$, suprotno načinu izbora broja r. Stoga je

$$(x,y) \in X \times X - \bigcap \mathcal{V}_R ,$$

što dokazuje da je $\bigcap \mathcal{V}_R \subseteq G$. Time smo dokazali da kvaziravnomerna struktura $\mathcal{V}_R$ generiše uredjenje na R.||

STAV 3. Ako je $\mathcal{G}(\mathcal{U}_R)$ filter generisan familijom $\{G \circ U : U\ \mathcal{U}_R\}$, gde je G graf uredjenja na R, tada je $\mathcal{G}(\mathcal{U}_R) = \mathcal{V}_R$.

DOKAZ: Neka je $V_r \in \mathcal{V}_R$. Tada je $G \circ V_{r/2} \subseteq V_r$. Zaista, kako je $G \subseteq V_{r/2}$ i $U_{r/2} \subseteq V_{r/2}$, to je $G \circ U_{r/2} \subseteq V_{r/2} \circ V_{r/2}$. Pritom je $V_{r/2} \circ V_{r/2} \subseteq V_r$, pa je stoga $G \circ U_{r/2} \subseteq V_r$. Iz poslednje inkluzije sledi da je $V_r \in \mathcal{G}(\mathcal{U}_R)$, čime smo dokazali da je $\mathcal{V}_R \subseteq \mathcal{G}(\mathcal{U}_R)$.

Obratno, neka je $G \circ U_r \in \mathcal{G}(\mathcal{U}_R)$. Tada je $V_r \subseteq G \circ U_r$. Da tc dokažemo, pretpostavimo da je $(x,y) \in V_r$. Tada je $x < y+r$, pa postoji $z \leq y$ koje zadovoljava nejednakost $x-r < z < x+r$, odnosno $|x-z| < r$. Odatle sledi da je $(x,z) \in U_r$. Kako je $z \leq y$, to je $(z,y) \in G$. Sada iz $(x,z) \in U_r$ i $(z,y) \in G$ sledi da je $(x,y) \in G \circ U_r$. Time smo dokazali inkluziju $V_r \subseteq G \circ U_r$, pa je stoga $G \circ U_r \in \mathcal{V}_R$. Dakle je $\mathcal{G}(\mathcal{U}_R) \subseteq \mathcal{V}_R$, čime je stav dokazan.||

STAV 4. Kvaziravnomerna struktura $\mathcal{V}_R$ je jedinstvena maksimalna kvaziravnomerna struktura koja generiše ravnomernu strukturu $\mathcal{U}_R$ i uredjenje na realnoj pravoj.

DOKAZ: Neka je $V \in \mathcal{U}_R$. Kako je funkcija $x \wedge y$ ravnomerno neprekidna u odnosu na ravnomernu strukturu $\mathcal{U}_R$ na R, to postoji $W \in \mathcal{U}_R$ tako da za svaki par tačaka (x_1,x_2) i (y_1,y_2) iz W važi

$$(x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2) \in V .$$

Dokažimo da je $W \circ G \subseteq G \circ V$. Zaista, ako je $(x,y) \in W \circ G$, tada postoji $z \in R$ tako da je $(x,z) \in G$ i $(x,y) \in W$. Iz $(z,y) \in W$ i $(x,x) \in W$ sledi da je $(x \wedge z, x \wedge y) \in V$, odnosno $(x, x \wedge y) \in V$. Kako je $x \wedge y \leq y$, to je $(x \wedge y, y) \in G$. No sada iz $(x, x \wedge y) \in V$

i $(x \wedge y, y) \in G$ sledi da je $(x,y) \in G \circ V$. Dakle je $W \circ G \subseteq G \circ V$.

Kako ravnomerna struktura $\mathcal{U}_R$ zadovoljava uslov (M), to je prema STAVU 6.4. $\mathcal{C}(\mathcal{U}_R) = \mathcal{G}(\mathcal{U}_R)$. Stoga je $\mathcal{C}(\mathcal{U}_R)$ jedinstvena maksimalna kvaziravnomerna struktura na R koja generiše ravnomernu strukturu $\mathcal{U}_R$ i uredjedjenje na R. No prema prethodnom stavu je $\mathcal{C}(\mathcal{U}_R) = \vartheta_R$.||

IV. PROSTORI UREDJENE BLISKOSTI

1. DEFINICIJA I OSNOVNE OSOBINE PROSTORA UREDJENE BLISKOSTI

Neka je δ relacija kvazibliskosti definisana na X. Definišimo na partitivnom skupu skupa X relaciju δ^* na sledeći način:

$A\delta^*B$ onda i samo onda, ako za svaka dva konačna pokrivača $\{A_1,A_2,\ldots,A_m\}$ i $\{B_1,B_2,\ldots,B_n\}$ skupova A i B respektivno, postoje skupovi A_i i B_j tako da je $A_i\delta B_j$ i $B_j\delta A_i$.

Lako je videti da je δ^* relacija bliskosti na X (vid.[48],[50]). Za relaciju δ^* kažemo da je g e n e r i s a n relacijom kvazibliskosti δ.

Dokažimo sada da je sa

$$x\leq y \text{ onda i samo onda ako je } x\delta y$$

definisana relacija kvaziuredjenja na X. Zaista, iz $\{x\}\cap\{x\}=\{x\}\neq\emptyset$ na osnovu aksiome (P_3) sledi da je $\{x\}\delta\{x\}$, odn. $x\leq x$ za svako $x\in X$. Relacija $\leq$ je dakle refleksivna. Da dokažemo da je relacija $\leq$ tranzitivna, pretpostavimo da je $x\leq y$ i $y\leq z$ ili, što je ekvivalentno, da je $x\delta y$ i $y\delta z$. Tada je $x\delta z$. Zaista, ako bi bilo $x\bar{\delta}z$, tada bi prema (P_4) postojao skup $E\subset X$, tako da je $x\bar{\delta}E$ i $X-E\,\bar{\delta}z$. Ako je $y\in E$, tada je $x\bar{\delta}y$ suprotno pretpostavci da je $x\delta y$. Ako je

$y \in X-E$, tada je $y \bar{\delta} z$, što je takodje kontradikcija. Dakle je $x \leq z$, što dokazuje da je relacija $\leq$ tranzitivna.

Za relaciju $\leq$ kažemo da je asocirana ili generisana relacijom kvazibliskosti δ (vid. [48]).

DEFINICIJA 1. Uredjena trojka $(X, \delta^*, \leq)$, gde je δ^* relacija bliskosti, a $\leq$ kvaziuredjenje na X, je prostor kvaziuredjene bliskosti, ako postoji bar jedna relacija kvazibliskosti na X koja generiše relaciju bliskosti δ^* i kvaziuredjenje $\leq$ (vid. [50]).

Prostor kvaziuredjene bliskosti $(X, \delta^*, \leq)$ koji zadovoljava jedan od sledećih ekvivalentnih uslova:

(a) relacija bliskosti δ^* je Hausdorfova relacija bliskosti,

(b) kvaziuredjenje $\leq$ na prostoru X je uredjenje,

nazivamo prostorom uredjene bliskosti (vid. [50])

Da bi smo ispitali neke osnovne osobine prostora uredjene bliskosti dokažimo najpre niz lema, koje su, mada interesantne, uglavnom tehničkog karaktera, i na koje ćemo se u daljem radu često pozivati.

LEMA 1. Neka je $(X, \delta^*, \leq)$ prostor kvaziuredjene bliskosti. Ako je δ relacija kvazibliskosti koja generiše relaciju bliskosti δ^* i kvaziuredjenje $\leq$, tada je $\tau(\delta^*) = \tau(\delta) \vee \tau(\delta^{-1})$.

DOKAZ: Dokažimo najpre da je $\tau(\delta) \vee \tau(\delta^{-1}) \subseteq \tau(\delta^*)$. Neka je $G \in \tau(\delta) \vee \tau(\delta^{-1})$, a $x \in G$ proizvoljna tačka skupa G. Tada postoje skupovi $G_1 \in \tau(\delta)$ i $G_2 \in \tau(\delta^{-1})$ tako da je $x \in G_1 \cap G_2 \subseteq G$. Kako je $x \in G_1 \in \tau(\delta)$, to je $x \bar{\delta} X-G_1$. Slično, iz $x \in$ $\in G_2 \in \tau(\delta^{-1})$ sledi da je $x \bar{\delta}^{-1} X-G_2$, ili ekvivalentno, $X-G_2 \bar{\delta} x$. Pritom je $\{X-G_1, X-G_2\}$ pokrivač skupa $X-G$, pa je $x \bar{\delta}^* X-G$, što dokazuje da je $G \in \tau(\delta^*)$.

Da dokažemo obrat, označimo sa δ^{**} najfiniju relaciju kvazibliskosti saglasnu sa topologijom $\tau(\delta) \vee \tau(\delta^{-1})$. Kako je topologija $\tau(\delta^{**})$ finija od topologija $\tau(\delta)$ i $\tau(\delta^{-1})$, to je i relacija kvazibliskosti δ^{**} finija od relacije bliskosti δ^*. Zaista, ako je $A \bar{\delta}^* B$, tada postoje konačni pokrivači $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$

i $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ skupova A i B respektivno, tako da je $A_i \bar{\delta} B_j$ ili $A_i \bar{\delta}^{-1} B_j$ za svako i i j. Stoga je $A_i \bar{\delta}^{**} B_j$ za svako i i j, jer je relacija kvazibliskosti δ^{**} finija od relacija kvazibliskosti δ i δ^{-1}. Iz poslednje relacije imamo da je

$$\bigcup_{i=1}^{m} A_i \,\bar{\delta}^{**} \bigcup_{j=1}^{n} B_j ,$$

odakle konačno sledi relacija $A \bar{\delta}^{**} B$. Stoga je $\tau(\delta^*) \subseteq \tau(\delta^{**}) = \tau(\delta) \vee \tau(\delta^{-1})$.||

LEMA 2. Neka je δ relacija kvazibliskosti na X. Tada je svaki zatvoren skup u topologiji $\tau(\delta)$ ($\tau(\delta^{-1})$) opadajući (rastući) skup u odnosu na kvaziuredjenje generisano relacijom kvazibliskosti δ.

DOKAZ: Neka je $x \in A = A^{\delta}$, i pretpostavimo da je $y \leq x$, odn. $y \delta x$. Kako je $x \in A^{\delta}$, to je $x \delta A$. No tada je $y \delta A$. Zaista, ako bi bilo $y \bar{\delta} A$, tada bi prema aksiomi (P_4) postojao skup $E \subset X$ tako da je $y \bar{\delta} E$ i $X-E \bar{\delta} A$. Ako je $x \in E$, tada je $y \bar{\delta} x$, što je u kontradikcijom sa pretpostavkom da je $y \delta x$. Slično se iz $x \in X-E$ dolazi do kontradikcije $x \bar{\delta} A$. Stoga je $y \delta A$, odakle zbog $A = A^{\delta}$ sledi da je $y \in A$.||

LEMA 3. U svakom prostoru kvaziuredjene bliskosti $(X, \delta^*, \leq)$ je

$$D(A) = \bigcap \{B : X-B \bar{\delta} A\} \quad \text{i} \quad I(A) = \bigcap \{B : A \bar{\delta} X-B\}$$

gde je δ relacija kvazibliskosti na X koja generiše relaciju bliskosti δ^* i kvaziuredjenje $\leq$ na X.

DOKAZ: Pretpostavimo da je $x \in X-D(A)$. Kako je $D(A) = \{x : x \delta A\} = A^{\delta}$, to je $x \bar{\delta} A$. Stoga postoji skup $B \subseteq X$ tako da je $x \bar{\delta} B$ i $X-B \bar{\delta} A$. Kako je $x \bar{\delta} B$, to je $x \notin B$ prema aksiomi (P_3), odakle sledi inkluzija $\bigcap \{B : X-B \bar{\delta} A\} \subseteq D(A)$.

Da dokažemo obratnu inkluziju, pretpostavimo da je $x \in D(A)$ i $X-B \bar{\delta} A$. Kako je tada $x \delta A$, to je $x \in B$, jer je $D(A) \subseteq B$. Drugi deo leme se dokazuje analogno.||

LEMA 4. U svakom prostoru kvaziuredjene bliskosti $(X, \delta^*, \leq)$ važe sledeće ekvivalencije:

(i) $x\,\delta\,A$ onda i samo onda ako je $x\,\delta\,D(A)$,

(ii) $A\,\delta\,x$ onda i samo onda ako je $I(A)\,\delta\,x$,

gde je δ relacija kvazibliskosti koja generiše relaciju bliskosti δ^* i kvaziuredjenje $\leq$ na X.

DOKAZ: Kako je $A\subseteq D(A)$, to iz $x\,\delta\,A$ očigledno sledi da je $x\,\delta\,D(A)$. Obratno, ako je $x\,\bar{\delta}\,A$, tada postoji $E\subset X$ tako da je $x\,\bar{\delta}\,E$ i $X-E\,\bar{\delta}\,A$. Iz $X-E\,\bar{\delta}\,A$ sledi inkluzija $D(A)\subseteq E$. Kako je $x\bar{\delta}E$, to je $x\,\bar{\delta}\,D(E)$. Analogno se dokazuje i druga ekvivalencija.‖

Za dokaz prethodnih dveju lema koristili smo sledeći lemu.

LEMA 5. U svakom prostoru kvaziuredjene bliskosti $(X,\delta^*,\leq)$ važe sledeće implikacije:

(i) ako je $A\bar{\delta}B$, tada je $D(B)\subseteq X-A$,

(ii) ako je $A\bar{\delta}B$, tada je $I(A)\subseteq X-B$,

gde je δ relacija kvazibliskosti koja generiše relaciju bliskosti δ^* i kvaziuredjenje $\leq$ na X.

DOKAZ: Pretpostavimo da je $A\,\bar{\delta}\,B$. Tada za svako $x\in A$ važi $x\,\bar{\delta}\,B$. Ovo je pak ekvivalentno sa činjenicom da iz $x\,\delta\,B$ sledi $x\in X-A$. Odavde sledi da je $B^{\delta}\subseteq X-A$, odnosno $D(B)\subseteq X-A$. Dualno se dokazuje druga implikacija.‖

LEMA 6. Ako je $(X,\delta^*,\leq)$ prostor uredjene bliskosti, tada za svaka dva neprazna skupa $A,B\subset X$ važi

$$A\,\delta\,B \text{ onda i samo onda ako je } I(A)\,\delta\,D(B),$$

gde je δ proizvoljna relacija kvazibliskosti koja generiše relaciju bliskosti δ^* i kvaziuredjenje $\leq$ na X.

DOKAZ: Ako je $A\,\delta\,B$, očigledno je $I(A)\,\delta\,D(B)$, jer je $A\subseteq I(A)$ i $B\subseteq D(B)$. Da dokažemo obrat, pretpostavimo da je $A\,\bar{\delta}\,B$. Prema aksiomi (P_4) postoji skup $E\subset X$ tako da je $A\,\bar{\delta}\,E$ i $X-E\,\bar{\delta}\,B$. No sada iz $X-E\,\bar{\delta}\,B$, na osnovu LEME 5., sledi inkluzija $D(B)\subseteq E$. Kako je $A\,\bar{\delta}\,E$, to je $A\,\bar{\delta}\,D(B)$. Stoga prema (P_4) postoji skup $F\subseteq X$ za koji je $A\,\bar{\delta}\,X-F$ i $F\,\bar{\delta}\,D(B)$. Iz $A\,\bar{\delta}\,X-F$, na osnovu LEME 5. sledi inkluzija $I(A)\subseteq F$, pa je stoga $I(A)\,\bar{\delta}\,D(B)$.‖

DEFINICIJA 2. Neka je $(X,\tau,\leq)$ topološki prostor snabdeven kvaziuredjenjem (uredjenjem). Za relaciju kvazibliskosti δ kažemo da je saglasna sa topologijom τ i kvaziuredje- njem (uredjenjem) $\leq$ na X, ako relacija kvazibliskosti generiše dato kvaziuredjenje (uredjenje) $\leq$, pri čemu je $\tau(\delta^*) = \tau$, gde je δ^* relacija bliskosti generisana relacijom kvazibliskosti δ (vid. [48], [50]).

STAV 1. Ako je $(X, \tau, \leq)$ kvaziuredjen (uredjen) topološki prostor, tada je relacija δ definisana na partitivnom skupu skupa X sa :

> $A \bar{\delta} B$ onda i samo onda, ako postoji monotono opadajuća, neprekidna funkcija $f: X \to I$ tako da je $f(A)=0$ i $f(B)=1$

relacija kvazibliskosti na X.

DOKAZ: Da dokažemo da je δ relacija kvazibliskosti na X, dovoljno je pokazati da je zadovoljena aksioma (P_4), jer su ostale aksiome očigledno zadovoljene. Pretpostavimo da je $A \bar{\delta} B$, i neka je f neprekidna, opadajuća funkcija za koju je $f(A)=0$, $f(B)=1$ i $0 \leq f \leq 1$. Neka je $E = \{x \in X : 1/2 \leq f \leq 1\}$. Tada je funkcija

$$g(y) = \begin{cases} 2y , & \text{ako je } 0 \leq y \leq 1/2 \\ 1 , & \text{ako je } 1/2 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

neprekidna i rastuća na X. Funkcija $g \circ f : X \to I$ je takodje neprekidna i opadajuća na X, pri čemu je $g \circ f(A)=0$ i $g \circ f(E)=1$. To dokazuje da je $A \bar{\delta} E$. Slično se dokazuje da je $X-E \bar{\delta} B$. U tom slučaju treba posmatrti funkciju $f \circ h$, gde je

$$h(y) = \begin{cases} 0 , & \text{ako je } 0 \leq y \leq 1/2 \\ 2y-1 , & \text{ako je } 1/2 \leq y \leq 1 \end{cases} .$$

Tada je $f \circ h(X-E) = 0$, $f \circ h(B) = 1$ i $0 \leq f \circ h \leq 1$, pri čemu je $f \circ h$ neprekidna i opadajuća funkcija na X.||

Lako je videti da je relacija δ^{-1} definisana na kvaziuredjenom (uredjenom) topološkom prostoru $(X, \tau, \leq)$ sa

$A\,\delta^{-1}B$ onda i samo onda ako postoji monotono rastuća, neprekidna funkcija $f:X\to I$ tako da je $f(A)=1$ i $f(B)=0$

konjugovana sa relacijom δ.

TEOREMA 2. Ako je $(X,\tau,\leq)$ potpuno regularno kvaziuredjen topološki prostor, tada postoji relacija kvazibliskosti δ saglasna sa topologijom τ i kvaziuredjenjem (vid. [50]).

DOKAZ: Označimo sa $\mathcal{U}$ i $\mathcal{L}$ respektivno topologije formirane od svih rastućih, odnosno opadajućih skupova otvorenih u topologiji τ. Označimo sa δ relaciju kvazibliskosti definisanu u STAVU 1. i dokažimo da je $\tau(\delta)\subseteq\mathcal{U}$ i $\tau(\delta^{-1})\subseteq\mathcal{L}$. Neka je $G\in\tau(\delta)$ i pretpostavimo da je $x\in G$. Kako je $G\in\tau(\delta)$, to je $x\,\bar{\delta}\,X-G$. Stoga postoji neprekidna, opadajuća funkcija $f:X\to I$ tako da je $f(x)=0$ i $f(X-G)=1$. Skup $f^{-1}([0,1/2))$ je otvoren u odnosu na topologiju τ, pri čemu je $x\in f^{-1}([0,1/2))\subseteq G$. Kako je G rastući skup, to je $G\in\mathcal{U}$.

Analogno se dokazuje da je $\tau(\delta^{-1})\subseteq\mathcal{L}$. Stoga je $\tau(\delta)\vee\tau(\delta^{-1})\subseteq$ $\subseteq\mathcal{U}\vee\mathcal{L}$. Odavde, na osnovu LEME 1., sledi da je $\tau(\delta^{*})\subseteq\mathcal{U}\vee\mathcal{L}$. Kako je prostor X potpuno regularno kvaziuredjen, to je $\mathcal{U}\vee\mathcal{L}=\tau$, odakle sledi inkluzija $\tau(\delta^{*})\subseteq\tau$.

Da dokažemo obratnu inkluziju, pretpostavimo da je $G\in\tau$ i neka je $x\in G$. Kako je prostor potpuno regularno kvaziuredjen, postoje skupovi $U\in\mathcal{U}$ i $L\in\mathcal{L}$ tako da je $x\in U\cap L\subseteq G$. Skupovi $X-U$ i $X-L$ su zatvoreni, pri čemu je prvi opadajući a drugi rastući i $X-G\subseteq(X-U)\cup(X-L)$. Kao i II.,5., može se dokazati da postoji neprekidna, rastuća funkcija $f':X\to I$ tako da je $f'(X-U)=0$ i $f'(x)=1$. No tada je funkcija $f=1-f'$ takodje neprekidna, monotono opadajuća funkcija za koju je $f(x)=0$ i $f(X-U)=1$. Stoga je $x\,\bar{\delta}\,X-U$. Analogno se zaključuje da postoji neprekidna, monotono rastuća funkcija $g:X\to I$ tako da je $g(x)=0$ i $g(X-L)=1$, što dokazuje da je $X-L\;\bar{\delta}^{-1}x$. Kako je pritom $\{X-U,X-L\}$ pokrivač skupa $X-G$, to je $G\in\tau(\delta^{*})$.

Konačno dokažimo da je kvaziuredjenje generisano relacijom δ identično sa zadanim kvaziuredjenjem na X. Pretpostavimo da je $x\nleq y$. Kako je X potpuno regularno kvaziuredjen prostor, postoji neprekidna, monotono rastuća funkcija $f:X \to R$ tako da je $f(x) > f(y)$. Tada je funkcija

$$\bar{f}(z) = \frac{f(z)-f(x)}{f(y)-f(x)}$$

neprekidna i monotono rastuća na X. Osim toga je $\bar{f}(x)=0$ i $\bar{f}(y)=1$. Funkcija

$$g = \sup\{0, \inf\{1, \bar{f}\}\}$$

je takodje neprekidna i opadajuća na X za koju važi $g(x)=0, g(y)=1$ i $0 \leq g \leq 1$. Stoga je $x \bar{\delta} y$, što dokazuje da je $x \not\leq_\delta y$, gde je $\leq_\delta$ kvaziuredjenje generisano relacijom kvazibliskosti δ.

Obratno, ako je $x \not\leq_\delta y$, ili što je ekvivalentno, $x \bar{\delta} y$, tada postoji neprekidna, monotono rastuća funkcija $f:X \to I$ tako da je $f(x)=0$ i $f(y)=1$. Skupovi $A_\xi = \{x \in X : f(x) < \xi\}$ i $B_\xi = \{x \in X : f(x) > \xi\}$ su disjunktni, pri čemu je prvi rastući, a drugi opadajući u X. Kako je $x \in A_\xi$, a $y \in B_\xi$, to je $x \not\leq y$. Zaista, ako bi bilo $x \leq y$, tada skupovi A_ξ i B_ξ ne bi bili disjunktni, što je kontradikcija.||

DEFINICIJA 3. Neka je $(X, \mathcal{T}, \leq)$ kvaziuredjen topološki prostor a $\mathcal{U}$ i $\mathcal{L}$ familije otvorenih, rastućih i opadajućih potskupova prostora X respektivno. Ako je $\mathcal{U} \vee \mathcal{L} = \mathcal{T}$, tada za topologiju $\mathcal{T}$ kažemo da je konveksna.

STAV 3. Ako je $(X, \mathcal{T}, \leq)$ konveksan, T_4-kvaziuredjen prostor, tada je sa

$$A \bar{\delta} B \text{ onda i samo onda ako je } I(A) \cap D(B) = \emptyset \qquad (*)$$

definisana relacija kvazibliskosti koja je saglasna sa topologijom $\mathcal{T}$ i kvaziuredjenjem.

DOKAZ: Da je relacijom $(*)$ definisana relacija kvazibliskosti, jasno je na osnovu STAVA 1. i činjenice da je u normalno kvaziuredjenom prostoru $I(A) \cap D(B) = \emptyset$ onda i samo onda ako se $I(A)$ i $D(B)$ mogu funkcionalno razdvojiti neprekidnom, opadajućom funkcijom.

Da je relacija kvazibliskosti saglasna sa topologijom i kvaziuredjenjem prostora X, neposredno sledi iz TEOREME 2. i činjenice da je svaki konveksan, T_4-kvaziuredjen prostor potpuno regularno kvaziuredjen.||

STAV 4. Ako potpuno regularno kvaziuredjen prostor $(X, \tau, \leq)$ ima relaciju kvazibliskosti definisanu sa (*) koja je saglasna sa topologijom τ i kvazuredjenjem $\leq$, tada je X normalno kvaziuredjen prostor.

DOKAZ: Neka je $A=I(A)$, $B=D(B)$ i $A \cap B = \emptyset$. Tada je prema pretpostavci teoreme $A \bar{\delta} B$. Stoga prema (P_4) postoji skup $E \subset X$ tako da je $X-E \bar{\delta} B$ i $A \bar{\delta} E$. Na osnovu LEME 5. je $D(E) \subseteq X-A$ i $I(X-E) \subseteq X-B$, odn. $A \subseteq X-D(E)$ i $B \subseteq X-I(X-E)$. Kako je $X-D(E)$ otvoren, rastući skup, a $X-I(X-E)$ otvoren, opadajući skup i

$$(X-D(E)) \cap (X-I(X-E)) = \emptyset \quad ,$$

to je X normalno kvaziuredjen prostor.||

LEMA 7. Neka je δ relacija kvazibliskosti saglasna sa topologijom i kvaziuredjenjem potpuno regularno kvaziuredjenog prostora $(X, \tau, \leq)$. Ako je A kompaktan, a B zatvoren rastući (opadajući) skup disjunktan sa skupom A, tada je $B \bar{\delta} A$ $(A \bar{\delta} B)$.

DOKAZ: Za svako $a \in A$, na osnovu LEME 4., važi $B \bar{\delta} a$. Na osnovu LEME 4., i ekvivalenta aksiome (P_4) postoji otvorena okolina U_a tačke a tako da ja $B \bar{\delta} U_a$. Sada je $\{U_a : a \in A\}$ otvoren pokrivač skupa A, pa se iz njega može izdvojiti konačan potpokrivač $\{U_{a_1}, U_{a_2}, \ldots, U_{a_n}\}$. Na osnovu aksiome (P_1) važi $B \bar{\delta} \bigcup_{i=1}^{n} U_{a_i}$, odakle je $B \bar{\delta} A$. Analogno se dokazuje da je $A \bar{\delta} B$ ako je skup B opadajući.||

TEOREMA 5. Svaki kompaktno kvaziuredjen prostor ima jedinstvenu relaciju kvazibliskosti definisanu sa

$$A \bar{\delta} B \text{ onda i samo onda ako je } I(A) \cap D(B) = \emptyset$$

koja je saglasna sa topologijom i kvaziuredjenjem.

DOKAZ: Neka je δ proizvoljna relacija kvazibliskosti saglasna sa topologijom i kvaziuredjenjem. Ako je $I(A) \cap D(B) \neq \emptyset$, tada je na osnovu aksiome (P_3) $I(A) \delta D(B)$, No onda je na osnovu LEME 6. $A \delta B$.

Obratno, ako je $I(A) \cap D(B) = \emptyset$, tada je prema prethodnoj lemi $I(A) \bar{\delta} D(B)$, odakle je prema LEMI 6. $A \bar{\delta} B$.||

TEOREMA 6. Ako je $(X, \delta^*, \leq)$ prostor kvaziuredjene bliskosti, onda je $(X, \tau(\delta^*), \leq)$ potpuno regularno uredjen prostor (vid. [50])

DOKAZ: Neka je δ relacija kvazibliskosti koja generiše relaciju bliskosti δ^* i kvaziuredjenje $\leq$. Označimo sa P proizvoljnu $\tau(\delta^*)$-okolinu tačke $p \in X$. Kako je $\tau(\delta) = \tau(\delta) \vee \tau(\delta^{-1})$, to postoje skupovi $U \in \tau(\delta)$ i $V \in \tau(\delta^{-1})$ tako da je $p \in U \cap V \subseteq P$. Očigledno je $p \bar{\delta} X-U$, pa stoga postoji $\tau(\delta^*)$-neprekidna, rastuća funkcija $f: X \to I$ tako da je $f(p)=1$ i $f(X-U)=0$. Slično se zaključuje da postoji $\tau(\delta^*)$-neprekidna, opadajuća funkcija $g: X \to I$ tako da je $g(X-V)=0$ i $g(p)=1$. Ako je $x \in X-P$, očigledno je $f(x)=0$ ili $g(x)=0$.

Pretpostavimo sada da je $x \nleq y$. Tada je $x \bar{\delta} y$, pa stoga kao i prethodno, postoji $\tau(\delta^*)$-neprekidna, rastuća funkcija f tako da je $f(x) > f(y)$. ||

DEFINICIJA 4. Neka su $(X_i, \delta^*_i, \leq_i)$ $(i=1,2)$ prostori kvaziuredjene bliskosti. Za funkciju $f: X_1 \to X_2$ kažemo da je proksimalno uredjeno preslikavanje ako na X_i postoje relacije kvazibliskosti δ_i koje generišu relacije bliskosti δ^*_i i kvaziuredjenja $\leq_i$ $(i=1,2)$, tako da je $f(A)\, \delta_2\, f(B)$ kadgod je $A\, \delta_1\, B$ (vid. [50]).

Za prostore $(X_1, \delta_1, \leq)$ i $(X_2, \delta_2, \leq)$ kažemo da su proksimalno uredjeno izomorfni, ako postoji 1-1 funkcija f koja preslikava prostor X_1 na prostor X_2 tako da su f i f^{-1} proksimalno uredjeni izomorfizni (vid.[50])

Na osnovu prethodne definicije je očigledno da je svako proksimalno uredjeno preslikavanje $f: (X_1, \delta^*_1, \leq_1) \longrightarrow (X_2, \delta^*_2, \leq_2)$ istovremeno rastuće preslikavanje uredjenog prostora $(X_1, \leq_1)$ u uredjen prostor $(X_2, \leq_2)$ kao i proksimalno preslikavanje prostora bliskosti (X_1, δ^*_1) u prostor bliskosti (X_2, δ^*_2). Stoga je sledeća teorema očigledna.

TEOREMA 7. Ako je $f: (X_1, \delta^*_1, \leq_1) \to (X_2, \delta^*_2, \leq_2)$ proksimalno uredjeno preslikavanje, onda je $f: (X_1, \tau(\delta^*_1), \leq_1) \longrightarrow (X_2, \tau(\delta^*_2), \leq_2)$ neprekidna, rastuća funkcija (vid.[50]).

Sledeća teorema, koja daje dovoljne uslove za obrat prethodne teoreme, uopštenje je poznatog rezultata koji važi u prostorima bliskosti.

TEOREMA 8. Svaka neprekidna, rastuća funkcija koja preslikava kompaktno uredjen prostor u prostor kvaziuredjene bliskosti je proksimalno uredjeno preslikavanje(vid. [50]).

DOKAZ: Ako je X kompaktno uredjen prostor, tada je jedinstvena saglasna relacija kvazibliskosti definisana sa:

$$A\,\delta\,B \text{ onda i samo onda , ako je } I(A)\cap D(B) \neq \emptyset .$$

Stoga za funkciju $f : X \to (Y, \delta^*, \leq)$, iz $A\,\delta\,B$ sledi $f(I(A))\cap f(D(B)) \neq \emptyset$. Sada iz $A\,\delta\,B$ imamo da je $I(f(A))\cap D(f(B)) \neq \emptyset$, pa je stoga $I(f(A))\,\delta_2\,D(f(B))$, odakle sledi relacija $f(A)\,\delta_2\,f(B)$.||

2. PROSTORI UREDJENE BLISKOSTI I MREŽE BLISKOSTI

DEFINICIJA 1. Neka je $(X, \leq)$ mreža na kojoj je istovremeno definisana relacija bliskosti δ. Ako su operacije mreže proksimalno neprekidne funkcije u odnosu na zadanu relaciju bliskosti δ, tada kažemo da je $(X, \leq)$ proksimalna mreža ili mreža bliskosti.

Sobzirom da mreža bliskosti prirodno povezuje uredjajnu strukturu sa relacijom bliskosti, prirodno se postavlja pitanje veze izmedju tih struktura. Mi ćemose ovde specijalno zadržati na izučavanju veze izmedju mreža bliskosti i prostora uredjene bliskosti. Dokazaćemo da je svaka mreža bliskosti istovremeno prostor uredjene bliskosti.

Da to dokažemo, najpre ćemo dati jedan interesantan rezultat koji istovremeno daje odgovor na pitanje, kada je prostor bliskosti, na kome je zadano kvaziuredjenje nezavisno od relacije bliskosti, prostor kvaziuredjene bliskosti.

TEOREMA 1. Neka je X skup na kome je definisana relacija bliskosti δ^* i kvaziuredjenje $\leq$. Ako relacija bliskosti δ^* zadovoljava uslove

(i) ako je $A\bar{\delta}^* B$, tada postoji potskup $E\subset X$ tako da je $A\bar{\delta}^* G^{-1}(E)$ i $X-G^{-1}(E)\bar{\delta}^* B$, gde je G graf kvaziuredjenja ,

(ii) skup d(a) je zatvoren u topologiji (δ^*) za svako $a\in X$,

tada je $(X,\delta^*,\leq)$ prostor kvaziuredjene bliskosti.

DOKAZ: Definišimo na partitivnom skupu skupa X relaciju δ na sledeći način:

$$A\,\delta\,B \text{ onda i samo onda, ako je } A\,\delta^* G^{-1}(B) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (*)$$

Ovako definisana relacija δ je relacija kvazibliskosti na X. Da to dokažemo, proverimo da li su zadovoljene aksiome (P_1)-(P_4) relacije kvazibliskosti.

$$(P_1): (A\cup B)\,\delta\, C \Leftrightarrow (A\cup B)\,\delta^* G^{-1}(C) \Leftrightarrow A\,\delta^* G^{-1}(C) \text{ ili } B\,\delta^* G^{-1}(C)$$

$$\Leftrightarrow A\delta C \text{ ili } B\delta C$$

$$A\,\delta\,(B\cup C) \Leftrightarrow A\,\delta^* G^{-1}(B\cup C) \Leftrightarrow A\,\delta^*(G^{-1}(B)\cup G^{-1}(C)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A\,\delta^* G^{-1}(B) \text{ ili } A\,\delta^* G^{-1}(C) \Leftrightarrow A\,\delta\, B \text{ ili } A\,\delta\, C\,.$$

(P_2) : Neka je $A=\emptyset$ ili $B=\emptyset$. Ako je $B=\emptyset$, tada je $G^{-1}(B)=\emptyset$. Kako je δ^* relacija bliskosti, to je na osnovu aksiome (P_3) relacije bliskosti, $A\bar{\delta}^* G^{-1}(B)$. To dokazuje da je $A\bar{\delta}B$.

(P_3) : Ako je $A\cap B\neq\emptyset$, tada je na osnovu aksiome (P_3) relacije bliskosti δ^* $A\delta^* B$. Kako je $B\subseteq G^{-1}(B)$, to je $A\,\delta^* G^{-1}(B)$, pa je prema definiciji relacije δ $A\delta B$.

(P_4) : Pretpostavimo sada da je $A\bar{\delta}B$, što je na osnovu definicije relacije δ ekvivalentno sa $A\,\bar{\delta}^* G^{-1}(B)$. Tada na osnovu aksiome (P_4) relacije bliskosti postoji skup $E\subset X$ tako da je $A\bar{\delta}^* E$ i $X-E\,\bar{\delta}^* G^{-1}(B)$. Iz poslednje relacije na osnovu definicije relacije δ odmah sledi da je $X-E\,\bar{\delta}\,B$. Dokažimo da je $A\bar{\delta}E$. Kako je $A\bar{\delta}^* E$, to prema uslovu (i) teoreme, postoji skup $F\subset X$ tako da je $A\bar{\delta}^* G^{-1}(F)$ i $X-G^{-1}(F)\bar{\delta}^* E$. Sada iz $X-G^{-1}(F)\bar{\delta}^* E$ prema aksiomi (P_3) prostora bliskosti sledi da je $(X-G^{-1}(F))\cap E=\emptyset$, odakle imamo inkluziju $E\subseteq G^{-1}(F)$. Kako je $G^{-1}(F)$ najmanji opadajući skup koji sadrži skup F, to je $G^{-1}(E)\subseteq G^{-1}(F)$. Sobzirom da je $A\bar{\delta}^* G^{-1}(F)$, to je prema jednoj od prethodnih osobina relacija bliskosti $A\bar{\delta}^* G^{-1}(E)$. Time smo dokazali da je $A\bar{\delta}E$.

Označimo sada sa δ_1^* relaciju bliskosti generisanu relacijom kvazibliskosti δ, i dokažimo najpre da je $\delta^* = \delta_1^*$.

Da to dokažemo, pretpostavimo da je $A\,\delta^*B$. Neka su $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ i $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ proizvoljni, konačni pokrivači skupova A i B respektivno. Kako je

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} A_i \qquad , \qquad B \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B_j$$

i $A\,\delta^*B$, to prema aksiomi (P_1) prostora bliskosti postoje indeksi i i j tako da je $A_i\,\delta^*B_j$ $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$. Sobzirom da je $A_i \subseteq G^{-1}(A_i)$ i $B_j \subseteq G^{-1}(B_j)$ to je $G^{-1}(A_i)\,\delta^*B_j$ i $A_i\,\delta^*G^{-1}(B_j)$. Poslednje dve relacije pokazuju da bilo koja dva konačna pokrivača $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ i $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ skupova A i B respektivno, sadrže takve skupove A_i i B_j za koje važe relacije $A_i \delta B_j$ i $B_j \delta A_i$. To dokazuje da je $A\,\delta_1^*B$.

Obratno, pretpostavimo da je $A\,\bar{\delta}^*B$, i neka su $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ i $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ konačni pokrivači skupova A i B respektivno, tako da je $A = \bigcup A_i$ i $B = \bigcup B_j$. Kako je $A\,\bar{\delta}^*B$, to je prema aksiomi (P_1) prostora bliskosti $A_i\,\bar{\delta}^*B_j$ za svako i i svako j $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$. No tada je $A_i\,\bar{\delta}\,B_j$. Zaista, prema uslovu (i) teoreme, postoji skup $E \subset X$ tako da je $A_i\,\bar{\delta}^*G^{-1}(E)$ i $X - G^{-1}(E)\,\bar{\delta}^*B_j$. No sada je $B_j \subseteq G^{-1}(E)$, odakle je i $G^{-1}(B_j) \subseteq G^{-1}(E)$, pa je dakle $A_i\,\bar{\delta}^*G^{-1}(B_j)$. Odavde imamo da je $A_i\,\bar{\delta}\,B_j$. Time smo dokazali da je $A\,\bar{\delta}_1^*B$, što zajedno sa prethodnim dokazuje identičnost relacija bliskosti δ^* i δ_1^*.

Ostalo je još da dokažemo da je kvaziuredjenje $\leq$ identično sa kvaziuredjenjem koje je generisano relacijom kvazibliskosti δ. Označimo sa $\leq_\delta$ kvaziuredjenje generisano relacijom kvazibliskosti δ i pretpostavimo da za elemente $x, y \in X$ važi $x \nleq_\delta y$. Tada je prema definiciji kvaziuredjenja $\leq_\delta$, $x\,\bar{\delta}\,y$, što je ekvivalentno sa činjenicom da je $x\,\bar{\delta}^*G^{-1}(y)$. Kako je $G^{-1}(y) = d(y)$, to je $x\,\bar{\delta}^*d(y)$. Stoga je prema aksiomi (P_3) prostora bliskosti $x \in X - d(y)$, što dokazuje da je $x \nleq y$.

Obratno, pretpostavimo da je $x \nleq y$. Tada je $x \in X - d(y)$. Kako je skup $d(y)$ prema uslovu (ii) teoreme zatvoren, to je $x\,\bar{\delta}^*d(y)$. Pritom je $d(y) = G^{-1}(y)$, pa je $x\bar{\delta}^* G^{-1}(y)$. Stoga je prema definiciji relacije δ, $x\bar{\delta}y$. Dakle je $x \not\leq_\delta y$, čime smo dokazali da relacija kvazibliskosti δ generiše kvaziuredjenje zadano na prostoru X.‖

TEOREMA 2. Neka je (X,δ^*) Hausdorfov prostor bliskosti na kome je zadano uredjenje $\leq$ u odnosu na koje je $(X,\leq)$ supremum-polumreža. Ako je operacija supremuma $\vee$ polumreže $(X,\leq)$ proksimalno neprekidna funkcija, onda je $(X,\delta^*,\leq)$ prostor uredjene bliskosti.

DOKAZ: Pretpostavimo da je $A\bar{\delta}^*B$. Prema aksiomi (P_4) prostora bliskosti postoji skup $E\subset X$ tako da je $A\bar{\delta}^*E$ i $X-E\bar{\delta}^*B$. Kako je operacija supremuma proksimalno neprekidna u odnosu na relaciju bliskosti δ^*, to je $\vee^{-1}(A)\ \bar{\delta}^*_2 \vee^{-1}(B)$, gde je $\delta^*_2 = \delta^* x \delta^*$. Stoga postoje konačni pokrivači $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ i $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ skupova $\vee^{-1}(A)$ i $\vee^{-1}(B)$ respektivno, tako da za neko $s=1,2$ važi

$$pr_s(A_i)\ \bar{\delta}^*\ pr_s(E_j)$$

za svako i i j $(1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n)$. No tada je prema aksiomi (P_1) prostora bliskosti

$$\bigcup_{i=1}^{m} pr_s(A_i)\ \bar{\delta}^* \bigcup_{j=1}^{n} pr_s(E_j)\ ,$$

odnosno,

$$pr_s\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big)\ \bar{\delta}^*\ pr_s\Big(\bigcup_{j=1}^{n} E_j\Big)\ .$$

Stoga je

$$pr_s \vee^{-1}(A)\ \bar{\delta}^*\ pr_s \vee^{-1}(E)\ .$$

Očigledno je $A\subseteq pr_s\vee^{-1}(A)$, pa je stoga

$$A\ \bar{\delta}^*\ pr_s \vee^{-1}(E)\ .$$

Pritom je $G^{-1}(E)\subseteq pr_s\vee^{-1}(E)$, pa je dakle $A\bar{\delta}^* G^{-1}(E)$. Zaista, skup $pr_s\vee^{-1}(E)$ je opadajući, pa kako je $E\subseteq pr_s\vee^{-1}(E)$, to je $G^{-1}(E)\subseteq pr_s\vee^{-1}(E)$. Dokažimo da je skup $pr_s\vee^{-1}(E)$ opadajući. Odredjenosti radi, pretpostavimo da je $s=1$. Neka je $x\in pr_1\vee^{-1}(A)$. Tada je $(x,y)\in\vee^{-1}(A)$ za neko $y\in X$. Stoga je $x\vee y\in A$. Ako je $z\leq x$, tada je $z\vee(x\vee y)=x\vee y\in A$, jer je $z\leq x\leq x\vee y$. Odatle sledi da je $(z, x\vee y)\in \vee^{-1}(A)$. No tada je i $z\in pr_1\vee^{-1}(A)$.

Kako je $E \subseteq G^{-1}(E)$, to je $X-G^{-1}(E) \subseteq X-E$, pa sobzirom da je $X-E\,\bar{\delta}^*B$, imamo relaciju $X-G^{-1}(E)\,\bar{\delta}^*\,B$. Time smo dokazali da za svaka dva skupa $A,B \subset X$ za koja je $A\,\bar{\delta}^*B$, postoji skup $E \subset X$ tako da je $A\,\bar{\delta}^*G^{-1}(E)$ i $X-G^{-1}(E)\,\bar{\delta}^*\,B$. Time smo dokazali da je uslov (i) prethodne teoreme zadovoljen.

Da dokažemo da je zadovoljen i uslov (ii) prethodne teoreme, primetimo da je operacija supremuma $\vee$ kao proksimalno neprekidna funkcija istovremeno i neprekidna funkcija dveju promenljivih, a time i neprekidna funkcija svake promenljive posebno. Stoga je skup

$$d(a) = \{x \in X : x \vee a = a\}$$

zatvoren, jer je X Hausdorfov prostor. Prema prethodnoj teoremi, $(X,\delta^*,\leq)$ je prostor uredjene bliskosti.||

POSLEDICA 1. Svaka mreža bliskosti je prostor uredjene bliskosti.

3. PROSTORI SKORO UREDJENE BLISKOSTI

DEFINICIJA 1. Uredjenu trojku $(X,\delta^*,\leq)$, gde je $\leq$ uredjenje a δ^* Hausdorfova relacija bliskosti na X, nazivamo skora uredjenim prostorom bliskosti, ako postoji bar jedna relacija bliskosti δ koja generiše relaciju bliskosti δ^*, pri čemu je $G(\leq) \subseteq G(\leq_\delta)$, gde je $G(\leq_\delta)$ graf uredjenja generisan relacijom kvazibliskosti δ.

Očigledno je svaki prostor uredjene bliskosti i prostor skoro uredjene bliskosti. Ako je delimično uredjen skup totalno uredjen, tada su pojmovi prostora uredjene bliskosti i prostora skoro uredjene bliskosti ekvivalentni.

STAV 1. Neka je $(X,\leq)$ totalno uredjen skup na kome je definisana relacija bliskosti δ^*. $(X,\delta^*,\leq)$ je prostor uredjene bliskosti onda i samo onda, ako je prostor skoro uredjene bliskosti.

DOKAZ: Neka je δ relacija kvazibliskosti koja generiše relaciju bliskosti δ^*, pri čemu je $G(\leq) \subseteq G(\leq_\delta)$, gde je $\leq_\delta$ uredjenje generisano relacijom kvazibliskosti δ.

Pretpostavimo da postoji par $(a,b) \in X^2$, tako da je $a \delta b$ i $a \nleq b$. Tada je $b < a$, pa je stoga $b <_\delta a$, odnosno $b \delta a$. No tada je $a \delta^* b$. Kako je δ^* Hausdorfova relacija bliskosti, to je $a=b$, što je u kontradikciji sa pretpostavkom da je $a \nleq b$. Time smo dokazali da je svaki prostor skoro uredjene bliskosti istovremeno i prostor uredjene bliskosti.||

STAV 2. *Topologija $\tau(\delta^*)$ svakog prostora skoro uredjene bliskosti $(X,\delta^*,\leq)$ je lokalno konveksna.*

DOKAZ: Kako je $(X,\delta^*,\leq)$ prostor skoro uredjene bliskosti, to postoji relacija kvazibliskosti δ koja generiše relaciju bliskosti δ^*, pri čemu je $G(\leq) \subseteq G(\leq_\delta)$, gde je $\leq_\delta$ uredjenje generisano relacijom kvazibliskosti δ.

Neka je $x \in G \in \tau(\delta^*)$. Tada je $x \bar{\delta}^* X-G$. Stoga postoji konačan pokrivač $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ skupa $X-G$, tako da je za svako $i=1,2,\ldots,n$

$$x \bar{\delta} P_i \qquad \text{ili} \qquad P_i \bar{\delta} x \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Stoga za svako $i=1,2,\ldots,n$ postoji skup $Q_i \subset X$ tako da je

$$x \bar{\delta} Q_i \qquad \text{i} \qquad X-Q_i \bar{\delta} P_i \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

ili

$$P_i \bar{\delta} X-Q_i \qquad \text{i} \qquad Q_i \bar{\delta} x \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

zavisno od toga dali važi prva ili druga relacija u (1). Neka je

$$Q = \bigcap_{i=1}^{n} (X-Q_i) = X - \bigcup_{i=1}^{n} Q_i ,$$

a $K=k(Q)$ najmanji konveksan skup koji sadrži skup Q. Dokažimo najpre da je K okolina tačke x. Da to dokažemo, dovoljno je pokazati da je $x \bar{\delta}^* X-Q$, jer je očigledno $x \in Q \subseteq K$. Označimo sa Q_{i_j} one skupove Q_i, $i=1,2,\ldots,n$, za koje je $Q_i \bar{\delta} x$, a sa Q_{i_k} one skupove Q_i za koje je $x \bar{\delta} Q_i$. Tada je

$$(\bigcup_j Q_{i_j}) \bar{\delta} x \qquad \text{i} \qquad x \bar{\delta} (\bigcup_k Q_{i_k}) \; .$$

Kako je $\{\bigcup_j Q_{i_k}, \bigcup_k Q_{i_k}\}$ konačan pokrivač skupa $X-Q$, to je $x \bar{\delta}^* X-Q$.

Dokažimo sada da je $K \subseteq G$. Neka je $a \in K = k(Q)$. Tada postoje elementi $u, v \in Q$ tako da je $u \leq a \leq v$. Kako je $G(\leq) \subseteq G(\leq_\delta)$, to je $u \delta a$ i $a \delta v$. Sobzirom da su u i v elementi skupa Q, to je $u, v \delta X-Q_i$ i $X-Q_i \delta u, v$ za svako $i=1, 2, \ldots, n$. Stoga je $a \bar{\delta} P_{i_k}$ za svako i_k. Zaista, ako bi važila relacija $a \delta P_{i_k}$, tada bi bilo $X-Q_{i_k} \delta P_{i_k}$, što je u kontradikciji sa (2). Slično se iz činjenice da je $v \delta X-Q_i$ za svako $i=1,2,\ldots,n$ dokazuje da je $P_{i_j} \bar{\delta}$ a za svako i_j. Stoga je

$$a \bar{\delta} \bigcup_k P_{i_k} \qquad \text{i} \qquad \bigcup_j P_{i_j} \bar{\delta} a \quad ,$$

pa kako je $\{\cup P_{i_j}, \cup P_{i_k}\}$ konačan pokrivač skupa $X-G$, to je $a \bar{\delta} X-G$. Odavde sledi da je $a \in G$. ||

POSLEDICA 1. Svaki prostor $(X, \delta^*, \leq)$ uredjene bliskosti je lokalno konveksan.

4. PROIZVOD PROSTORA UREDJENE BLISKOSTI

Neka je $\{(X_\alpha, \delta^*_\alpha, \leq_\alpha)\}$ familija prostora kvaziuredjene (uredjene) bliskosti. Tada se na skupu $X = \prod X_\alpha$ može definisati relacija bliskosti kao proizvod relacija bliskosti δ^*_α. Na skupu X se pomoću relacija uredjenja $\leq_\alpha$ na različite načine može uvesti uredjenje. Tako se na skupu X javljaju dve strukture: uredjajna i proksimalna. Stoga se prirodno postavlja pitanje, dali skup X snabdeven tim dvema strukturama može biti prostor uredjene bliskosti. Odgovor na ovo pitanje daje sledeća

TEOREMA 1. Neka je $(X_\alpha, \delta^*_\alpha, \leq_\alpha)$ familija prostora kvaziuredjene bliskosti. Ako je δ^* proizvod relacija bliskosti δ^*_α, a $\leq$ kardinalno kvaziuredjenje na proizvodu $X = \prod_\alpha X_\alpha$, tada je $(X, \delta^*, \leq)$ prostor kvaziuredjene bliskosti. Ako je $\{(X_\alpha, \delta^*_\alpha, \leq_\alpha) : \alpha \in I\}$ familija prostora uredjene bliskosti, onda je i $(X, \delta^*, \leq)$ prostor uredjene bliskosti.

DOKAZ: Kako je $(X_\alpha, \delta^*_\alpha, \leq_\alpha)$ prostor kvaziuredjene bliskosti, to za svako $\alpha \in I$

postoji relacija kvazibliskosti δ_α koja ge neriše kvaziuredjenje $\leq$ i relaciju bliskosti δ^*_α na X_α. Označimo sa δ_1 proizvod relacija kvazibliskosti δ_α, a sa δ^*_1 relaciju bliskosti na X generisanu njome. Dokažimo da je $\delta^* = \delta^*_1$.

U tom cilju pretpostavimo najpre da je $A\,\delta^*_1 B$, i neka su $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ i $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ proizvoljni, konačni pokrivači skupova A i B respektivno. Kako je $A\,\delta^*_1 B$, to postoje indeksi i i j za koje je $A_i\,\delta_1 B_j$ i $B_j\,\delta_1 A_i$ $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$. Uočimo prizvoljne, konačne pokrivače $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_p}\}$ i $\{B_{j_1}, B_{j_2}, \ldots, B_{j_q}\}$ skupova A_i i B_j respektivno. Kako je $A_i\,\delta_1 B_j$, pri čemu je δ_1 proizvod relacija kvazibliskosti δ_α, to postoje skupovi A_{i_k} i B_{j_l} tako da je $pr_\alpha(A_{i_k})\,\delta_\alpha\,pr_\alpha(B_{j_l})$ za svako $\alpha \in I$ $(1 \leq k \leq p, 1 \leq l \leq q)$. Ne umanjujući opštost dokaza, možemo pretpostaviti da je $A_{i_k} \subseteq A_i$ i $B_{j_l} \subseteq B_j$. Stoga je $pr_\alpha(A_{i_k}) \subseteq pr_\alpha(A_i)$ i $pr_\alpha(B_{j_l}) \subseteq pr_\alpha(B_j)$ za svako $\alpha \in I$. Kako je $pr_\alpha(A_{i_k})\,\delta_\alpha\,pr_\alpha(B_{j_l})$, to je pogotovo $pr_\alpha(A_i)\,\delta_\alpha\,pr_\alpha(B_j)$ za svako $\alpha \in I$. Analogno se iz relacije $B_j\,\delta_1 A_i$ zaključuje da je $pr_\alpha(B_j)\,\delta_\alpha\,pr_\alpha(A_i)$ za svako $\alpha \in I$. Stoga iz poslednjih dveju relacija sledi da je $pr_\alpha(A_i)\,\delta^*_\alpha\,pr_\alpha(B_j)$ za svako $\alpha \in I$. To dokazuje da je $A\,\delta^* B$.

Obratno, pretpostavimo da je $A\,\delta^* B$, i neka je $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ konačan pokrivač skupa A, a $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ konačan pokrivač skupa B. Kako je $A\,\delta^* B$, to postoje skupovi A_i i B_j tako da je $pr_\alpha(A_i)\,\delta^*_\alpha\,pr_\alpha(B_j)$ za svako $\alpha \in I$ $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$. Odavde specijalno sledi da je $pr_\alpha(A_i)\,\delta_\alpha\,pr_\alpha(B_j)$ i $pr_\alpha(B_j)\,\delta_\alpha\,pr_\alpha(A_i)$ za svako $\alpha \in I$. Dokažimo da je $A_i\,\delta_1 B_j$ i $B_j\,\delta_1 A_i$, čime ćemo dokazati da je $A\,\delta^*_1 B$. U tom cilju uočimo dva proizvoljna, konačna pokrivača $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_p}\}$ i $\{B_{j_1}, B_{j_2}, \ldots, B_{j_q}\}$ skupova A_i i B_j respektivno. Kako je

$$pr_\alpha(A_i) \subseteq \bigcup_{k=1}^{p} pr_\alpha(A_{i_k}) \qquad \text{i} \qquad pr_\alpha(B_j) \subseteq \bigcup_{l=1}^{q} pr_\alpha(B_{j_l}) \quad ,$$

a $pr_\alpha(A_i)\,\delta_\alpha\,pr_\alpha(B_j)$ za svako $\alpha \in I$, to je i

$$\bigcup_{k=1}^{p} pr_\alpha(A_{i_k})\,\delta_\alpha \bigcup_{l=1}^{q} pr_\alpha(B_{j_l})$$

za svako $\alpha \in I$. Postoje dakle indeksi k i l tako da je $pr_\alpha(A_{i_k})\,\delta_\alpha\,pr_\alpha(B_{j_l})$ za svako $\alpha \in I$ $(1 \leq k \leq p, 1 \leq l \leq q)$. Time smo dokazali da je $A_i\,\delta_1 B_j$. Analogno se dokazuje da je $B_j \delta_1 A_i$. Iz poslednjih dveju relacija sledi da je $A \delta_1^* B$. Time smo ujedno dokazali da relacija kvazibliskosti δ_1 generiše relaciju bliskosti δ^*.

Dokažimo sada da se kardinalno kvaziuredjenje poklapa sa kvaziuredjenjem koje je generisano relacijom kvazibliskosti δ_1. Označimo poslednje sa $\leq_{\delta_1}$, i pretpostavimo da za tačke $x=(x_\alpha)$ i $y=(y_\alpha)$ iz X važi $x \leq_{\delta_1} y$. Tada je na osnovu definicije kvaziuredjenja generisanog relacijom kvazibliskosti δ_1, $x \delta_1 y$. Kako je δ_1 proizvod relacija bliskosti δ_α, to je $pr_\alpha(x) \delta_\alpha pr_\alpha(y)$ za svako $\alpha \in I$. Stoga je $x_\alpha \delta_\alpha y_\alpha$ za svako $\alpha \in I$, pa kako relacija δ_α generiše kvaziuredjenje na X_α, to odavde sledi da je $x_\alpha \leq y_\alpha$ za svako α. To dokazuje da je $x \leq y$.

Obratno, ako je $x \leq y$, tada je $x_\alpha \leq_\alpha y_\alpha$ za svako $\alpha \in I$. Ovo je pak ekvivalentno sa činjenicom da je $x_\alpha \delta_\alpha y_\alpha$ za svako $\alpha \in I$, jer relacija kvazibliskosti δ_α generiše kvaziuredjenje $\leq_\alpha$ na X_α za svako $\alpha \in I$. Kako je svaka tačka sama sebi pokrivač, a $pr_\alpha(x)=x_\alpha$ i $pr_\alpha(y)=y_\alpha$, to je $x \delta_1 y$, ili ekvivalentno, $x \leq_{\delta_1} y$.

Očigledno je proizvod prostora uredjene bliskosti takodje prostor uredjene bliskosti.||

5. KOMPAKTIFIKACIJA PROSTORA UREDJENE BLISKOSTI

Neka je $(X, \delta^*, \leq)$ prostor uredjene bliskosti, a δ proizvoljna relacija kvazibliskosti na X. Označimo sa $\mathfrak{X}$ skup svih δ-ultrafiltera definisanih na prostoru bliskosti (X, δ^*), a sa $\boldsymbol{\delta}^*$ relaciju bliskosti na $\mathfrak{X}$ (vid.I.5.). Definišimo sada na $\mathfrak{X}$ relaciju $\boldsymbol{\delta}$ sa:

$$\mathfrak{P} \boldsymbol{\delta} \mathfrak{Q} \text{ onda i samo onda, ako je } A \delta B \text{ kadgod je } \mathfrak{P} \subseteq \overline{\mathfrak{A}} \text{ i } \mathfrak{Q} \subseteq \overline{\mathfrak{B}}$$

LEMA 1. Relacija $\boldsymbol{\delta}$ je relacija kvazibliskosti na $\mathfrak{X}$. Ako relacija kvazibliskosti δ generiše relaciju bliskosti δ^* na X, tada relacija kvazibliskosti $\boldsymbol{\delta}$ generiše relaciju bliskosti δ^* na $\mathfrak{X}$. Štaviše, skup X snabdeven uredjenjem $\leq$ generisanim relacijom kvazibliskosti δ je uredjajno izomorfan skupu $f(X)\subseteq\mathfrak{X}$ u odnosu na uredjenje $\prec$ generisano relacijom kvazibliskosti δ (vid. [50]).

DOKAZ: Da je δ relacija kvazibliskosti na $\mathfrak{X}$, dokazuje se potpuno analogno kao i činjenica da je δ^* relacija bliskosti na $\mathfrak{X}$. Neka relacija kvazibliskosti δ generiše relaciju bliskosti δ^* na X, i neka relacija kvazibliskosti δ generiše relaciju bliskosti δ^{**} na $\mathfrak{X}$. Da dokažemo da su δ^* i δ^{**} identične relacije na $\mathfrak{X}$, primetimo da je δ^{**} najgrublja relacija bliskosti koja je finija od relacija δ i δ^{-1}. Kako je relacija bliskosti δ^* finija od δ i δ^{-1}, to je relacija bliskosti δ^* finija od relacija δ i δ^{-1}. Stoga je relacija δ^* finija od relacije δ^{**}. Pretpostavimo sada da je $\mathcal{P}\,\bar{\delta}^*\mathcal{Q}$, i neka su $A,B\subseteq X$ skupovi za koje važi $\mathcal{P}\subseteq\bar{\mathcal{A}}$, $\mathcal{Q}\subseteq\bar{\mathcal{B}}$ i $A\bar{\delta}^*B$. Kako je relacija bliskosti δ^* generisana relacijom kvazibliskosti δ, to postoje pokrivači $\{A_i:i\in J_m\}$ i $\{B_j:j\in J_n\}$ skupova A i B respektivno, tako da je $A_i\bar{\delta}B_j$ ili $B_j\bar{\delta}A_i$ za svako $(i,j)\in J_m\times J_n$. Familije $\{\mathcal{A}_i:i\in J_m\}$ i $\{\mathcal{B}_j:j\in J_n\}$ su konačni pokrivači skupova $\mathcal{P}$ i $\mathcal{Q}$ respektivno. Kako je $A_i\bar{\delta}B_j$ ili $B_j\bar{\delta}A_i$ za svaki par $(i,j)\in J_m\times J_n$, to je

$$\bar{\mathcal{A}}_i\,\bar{\delta}\,\bar{\mathcal{B}}_j \quad\text{ili}\quad \bar{\mathcal{B}}_j\,\bar{\delta}\,\bar{\mathcal{A}}_i$$

za svako $(i,j)\in J_m\times J_n$. Stoga je $\mathcal{P}\bar{\delta}^{**}\mathcal{Q}$, što dokazuje da je relacija bliskosti δ^{**} finija od relacije bliskosti δ^*.

Označimo sa $\prec$ kvaziuredjenje generisano relacijom kvazibliskosti δ. Kako je $\delta^*(=\delta^{**})$ Hausdorfova relacija bliskosti, to je $\prec$ relacija uredjenja na $\mathfrak{X}$. Da dokažemo da je $x\leq y$ onda i samo onda, ako je $f(x)\prec f(y)$, dovoljno je dokazati da iz $x\,\delta\,y$ sledi $\sigma_x\,\delta\,\sigma_y$, jer je obratna inkluzija očigledna. Neka je $\sigma_x\in\bar{\mathcal{A}}$ i $\sigma_y\in\bar{\mathcal{B}}$. Tada je $A\in\sigma_x$ i $B\in\sigma_y$, pa je stoga $x\delta^*A$ i $y\delta^*B$. Dakle je $A\,\delta\,x$ i $y\,\delta\,B$. Kako je $x\,\delta\,y$, to je $A\,\delta\,B$, odakle sledi da je $\sigma_x\,\delta\,\sigma_y$.

LEMA 2. $(\mathfrak{X},\delta^*,\prec)$ je kompaktno uredjen prostor u kome je $f(X)$ gust potskup proksimalno uredjajno izomorfan sa prostorom $(X,\delta^*,\leq)$ (vid. [50]).

DOKAZ: Da je prostor uredjene bliskosti $(\mathfrak{X}, \delta^*, \prec)$ kompaktan, a $f(X)$ gust potskup prostora $\mathfrak{X}$, neposredno sledi iz činjenice da je $(\mathfrak{X}, \delta^*)$ kompactifikacija Smirnova prostora (X, δ^*). Da dokažemo da je $\prec$ zatvoreno uredjenje, pretpostavimo da za elemente $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \in \mathfrak{X}$ važi relacija $\mathcal{G}_1 \not\prec \mathcal{G}_2$. Tada postoje skupovi $A \in \mathcal{G}_1$ i $B \in \mathcal{G}_2$ tako da je $A \overline{\delta} B$. Stoga postoje skupovi $E, F \subseteq X$, tako da je $A \overline{\delta} E$, $F \overline{\delta} B$ i $X-E \overline{\delta} X-F$. No tada za skupove $\overline{\mathcal{E}}, \overline{\mathcal{F}} \in \mathfrak{X}$ važi $\mathcal{G}_1 \notin D(\overline{\mathcal{E}})$ i $\mathcal{G}_2 \notin I(\overline{\mathcal{F}})$. Iz relacije $X-E \overline{\delta} X-F$ sledi $\overline{\mathcal{E}} \cup \overline{\mathcal{F}} = \mathfrak{X}$, pa je stoga $\mathfrak{X} - D(\overline{\mathcal{E}})$ rastuća okolina tačke $\mathcal{G}_1$ koja je disjunktna sa opadajućom okolinom $\mathfrak{X} - I(\overline{\mathcal{F}})$ tačke $\mathcal{G}_2$. Da dokažemo da su X i $f(X)$ proksimalno uredjajno izomorfni, pokazaćemo da je $A \delta B$ onda i samo onda, ako je $f(A) \delta f(B)$ za svaku relaciju kvazibliskosti δ koja generiše relaciju bliskosti δ^* na X. Primetimo najpre da je $f(B) \subseteq \mathcal{A}$ onda i samo onda, ako je $B \subseteq cl_{\tau(\delta^*)} A$. Implikacija

$$f(A) \delta f(B) \Rightarrow A \delta B$$

je očigledna, jer je $f(A) \subseteq \overline{\mathcal{A}}$ i $f(B) \subseteq \overline{\mathcal{B}}$. Da dokažemo obratnu implikaciju, pretpostavimo da je $A \delta B$ i $f(A) \subseteq \overline{\mathcal{P}}$, $f(B) \subseteq \overline{\mathcal{Q}}$. Neka je, ukoliko je to moguće, $P \overline{\delta} Q$. Tada je pema LEMI 6.1., $I(P) \overline{\delta} D(Q)$, odakle je $clP \overline{\delta} clQ$. Kako je $A \subseteq clP$, $B \subseteq clQ$ i $A \delta B$, to je $clP \delta clQ$, što je kontradikcija.||

LEMA 3. *Svaki proksimalno-uredjajni izomorfizam g prostora $(X, \delta^*, \leq)$ na gust potskup kompaktno uredjenog prostora $(Y, \delta_1^*, \leq_1)$ može se proširiti do proksimalno uredjenog izomorfizma prostora $(\mathfrak{X}, \delta^*, \prec)$ na prostor $(Y, \delta_1^*, \leq_1)$.*

DOKAZ: Kao proksimalni izomorfizam prostora bliskosti (X, δ^*) na gust potskup kompaktnog prostora bliskosti (Y, δ_1^*), preslikavanje g se može proširiti do proksimalnog izomorfizma h prostora bliskosti $(\mathfrak{X}, \delta^*)$ na prostor bliskosti (Y, δ_1^*) na sledeći način:

Ako je $\mathcal{G} \in \mathfrak{X}$, tada postoji jedinstven δ-ultrafilter $\mathcal{G}_1$ koji sadrži sliku $g(\mathcal{G}) = \{g(A) : A \in \mathcal{G}\}$ δ-ultrafiltra $\mathcal{G}$ u Y. Kako je Y kompaktan prostor, to postoji $y \in Y$ tako da je $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_y$. Stavimo da je $h(\mathcal{G}) = y$, i dokažimo da je ovako definisano preslikavanje proksimalno uredjajni izomorfizam prostora $(\mathfrak{X},\delta^*,\prec)$ na prostor $(Y,\delta_1^*,\leq)$. Neka je δ_1 jedinstvena saglasna relacija kvazibliskosti na Y. Dokazaćemo da je $\mathcal{P}\delta\mathcal{Q}$ onda i samo onda, ako je $h(\mathcal{P})\ \delta_1 h(\mathcal{Q})$ za svaku relaciju kvazibliskosti δ koja generiše relaciju bliskosti δ^*. Ako je $\mathcal{P}\delta\mathcal{Q}$, tada je $I(\mathcal{P})\cap D(\mathcal{Q})\neq\emptyset$. Neka je $\mathcal{G}\in I(\mathcal{P})\cap D(\mathcal{Q})$, i neka je $h(\mathcal{G})=y$. Dokažimo najpre da je $h(\mathcal{P})\ \delta_1 y$. Pretpostavimo suprotno, i neka su E i F potskupovi u Y za koje je $h(\mathcal{P})\ \bar{\delta}_1 Y-E$, $Y-E\ \bar{\delta}_1 y$ i $E\bar{\delta}_1 F$. Kako je $h(\mathcal{P})\ \delta_1 Y-E$, to skup $g^{-1}(E)$ apsorbuje $\mathcal{P}$. Stoga je $g^{-1}(E)$ element svakog δ-ultrafiltra u $\mathcal{P}$. Slično se dokazuje da je $g^{-1}(F)\in\mathcal{G}$. Kako je $\mathcal{P}\delta\mathcal{G}$, imamo da je $g^{-1}(E)\ \delta\ g^{-1}(F)$. No ovo je kontradikcija, jer je g proksimalno presli - kavanje i $E\ \bar{\delta}_1 F$. Stoga je $h(\mathcal{P})\ \delta_1 y$. Slično se dokazujeda je $y\ \delta_1 h(\mathcal{Q})$, odakle sledi relacija $h(\mathcal{P})\ \delta_1 h(\mathcal{Q})$. Obratno, pretpostavimo da je $h(\mathcal{P})\ \delta_1 h(\mathcal{Q})$. Kako je Y kompaktno uredjen prostor, postoji $y\in I(h(\mathcal{P}))\cap D(h(\mathcal{Q}))$. Neka je $\mathcal{G} = h^{-1}(y)$. Ako je $A\in\mathcal{G}$, a B apsorbuje $\mathcal{Q}$, tada je $A\,\delta\, h(\mathcal{Q})$ i $h(\mathcal{Q})\subseteq \mathrm{cl}\,B\subseteq D(B)$. Odavde sledi da je $A\,\delta\,B$, pa je dakle $\mathcal{G}\delta\mathcal{Q}$. Slično se zaključuje da je $\mathcal{P}\delta\mathcal{G}$, pa je stoga $\mathcal{P}\delta\mathcal{Q}$. ||

Kao neposrednu posledicu prethodnih lema imamo sledeću teoremu.

TEOREMA 1. Svaki prostor uredjene bliskosti $(X,\delta^*,\leq)$ je gust potskup jedinstvenog (do na proksimalno-uredjajni izomorfizam) kompaktno uredjenog prostora $\mathfrak{X}$. Kako $\mathfrak{X}$ ima jedinstvenu saglasnu relaciju kvazibliskosti, to za potskupove $A,B\subseteq X$ važi

$A\bar{\delta}B$ onda i samo onda, ako je $I(A)\cap D(B)=\emptyset$ u $\mathfrak{X}$,

gde je δ bilo koja relacija kvazibliskosti koja generiše relaciju bliskosti δ^* (vid. [50]).

DOKAZ: Neka je g proksimalno uredjeno preslikavanje prostora $(X_1,\delta^*_1,\leq)$ na prostor $(X_2,\delta_2^*,\leq_2)$. Kako je g proksimalno preslikavanje, to se ono može produžiti do neprekidnog preslikavanja $h:(\mathfrak{X}_1,\delta_1^*)\longrightarrow(\mathfrak{X}_2,\delta_2^*)$, gde je preslikavanje h definisano sa

$$h(\mathcal{G}) = \mathcal{G}_2 = \{B\in\mathbb{P}(X_2) : B\ \delta_2^* g(C) \text{ za svako } C\in\mathcal{G}_1\}.$$

Dokažimo da je h proksimalno uredjeno preslikavanje. Neka su δ_i relacije kvazibliskosti na X_i koje generišu relacije bliskosti δ_i^* $(i=1,2)$, pri čemu iz $A\,\delta_1 B$ sledi $g(A)\,\delta_2 g(B)$. Pretpostavimo da je $\mathcal{P}\,\delta_1\,\mathcal{Q}$, i neka A apsorbuje $h(\mathcal{P})$ a neka B apsorbuje $h(\mathcal{Q})$. Pretpostavimo dalje da je $A\,\overline{\delta}_2 B$, ukoliko je to moguće. Neka su $C, D \subseteq X_2$ takvi potskupovi za koje važi:

$$A\,\overline{\delta}_2\,X_2-C \quad , \quad X_2-D\,\overline{\delta}_2\,B \quad \text{i} \quad C\,\overline{\delta}_2\,D \quad .$$

Sada A apsorbuje $h(\mathcal{P})$, pa kako je $A\,\overline{\delta}_2\,X_2-C$, to skup X_2-C nije sadržan ni u jednom δ-ultrafiltru iz $h(\mathcal{P})$. Kako je g proksimalno preslikavanje, skup

$$g^{-1}(X_2-C) = X_1-g^{-1}(C)$$

nije element nijednog δ-ultrafiltra iz $\mathcal{P}$, što dokazuje da skup $g^{-1}(C)$ apsorbuje $\mathcal{P}$. Slično se dokazuje da $g^{-1}(D)$ apsorbuje $\mathcal{Q}$. Kako je $\mathcal{P}\,\delta_1\,\mathcal{Q}$, to je

$$g^{-1}(C)\,\delta_1\,g^{-1}(D) \quad ,$$

što je u kontradikciji sa činjenicom da je g proksimalno preslikavanje. ||

Sledeća teorema neposredno sledi iz prethodne teoreme i TEOREME 5.1.

TEOREMA 3. Kompactifikacija Smirnova potpuno regularno uredjenog prostora $(X, \tau, \leq)$ definiše uredjajni izomorfizam skupa $\{\delta_\alpha : \alpha \in I\}$ svih saglsnih relacija kvazibliskosti na X na skup $\{\mathcal{X}_\alpha : \alpha \in I\}$ svih kompaktifikacija Smirnova na prostoru X (vid. [50]).

TEOREMA 4. Neka je $(X, \delta^*, \leq)$ prostor uredjene bliskosti. Tada za svaku relaciju kvazibliskosti δ koja generiše relaciju bliskosti δ^* važi

$A\,\overline{\delta}\,B$ onda i samo onda, ako postoji proksimalno uredjajno preslikavanje $g: X \to I$ tako da je $g(A)=1$ i $g(B)=0$

(vid. [50]).

Dokaz ove teoreme analogan je dokazu odgovarajuće teoreme u teoriji prostora bliskosti.

6. TOPOLOGIJE GENERISANE KVAZIUREDJENJEM I RELACIJOM KVAZIBLISKOSTI

Neka je $(X,\leq)$ kvaziuredjen skup. Definišimo na skupu X topologiju τ na sledeći način. Skup G je otvoren u topologiji τ ako za svako $x\in G$ važi $[x,\rightarrow)\subseteq G$. Ovako definisanu topologiju zvaćemo segmentnom ili konusnom topologijom (vid.[8])

TEOREMA 1. Ako je (X,τ) segmentna topologija indukovana kvaziuredjenjem $\leq$, tada na prostoru X postoji relacija kvazibliskosti δ koja je saglasna sa topologijom τ.

DOKAZ: Označimo sa $G=\{(x,y): x\leq y\}$. Tada je sa

$$A\,\delta\,B \text{ onda i samo onda, ako je } (A\times B)\cap G\neq\emptyset$$

definisana relacija kvazibliskosti na X. Označimo sa $\tau(\delta)$ topologiju indukovanu relacijom kvazibliskosti δ i dokažimo da je $\tau(\delta)=\tau$.

Neka je $A\in\tau$ i $x\in A$. Tada je $[x,\rightarrow)\subseteq A$, pa je $[x,\rightarrow)\cap(X-A)=\emptyset$. Stoga je za svako $y\in X-A$, $x\not\leq y$. Drugim rečima, važi relacija

$$(\{x\}\times(X-A))\cap G=\emptyset \quad ,$$

odakle je prema definiciji relacije kvazibliskosti δ, $x\,\overline{\delta}\,X-A$. To dokazuje da je $A\in\tau(\delta)$.

Obratno, ako je $A\in\tau(\delta)$, tada za svako $x\in A$ važi $x\,\overline{\delta}\,X-A$. Stoga je prema definiciji relacije kvazibliskosti δ, $(\{x\}\times(X-A))\cap G=\emptyset$. Poslednja relacija pokazuje da je $[x,\rightarrow)\cap(X-A)=\emptyset$, odakle sledi inkluzija $[x,\rightarrow)\subseteq A$. Dakle je $A\in\tau$. ||

STAV 2. Ako je relacija kvazibliskosti δ saglasna sa topologijom τ na skupu X, tada postoji kvaziuredjenje u odnosu na koje je topologija τ segmentna.

DOKAZ: Definišimo na skupu X relaciju $\leq$ sa :

$$x\leq y \text{ onda i samo onda, ako je } x\,\delta\,y\ .$$

Lako je videti da je ovako definisana relacija kvaziuredjenje na X. Neka je

$G \in \tau$ i $x \in G$. Kako je relacija bliskosti saglasna sa topologijom τ, to je $\tau(\delta) = \tau$. Ako je $x \leq y$, tada je i $y \in G$. Zaista, ako bi bilo $y \in X-G$, tada bi važila relacija $y \,\delta\, X-G$. No kako je $x \leq y$, to je $x \,\delta\, y$, pa je stoga $x \,\delta\, X-G$. Sobzirom da je skup $X-G$ zatvoren u topologiji $\tau(\delta)$, to je $x \in X-G$, što je kontradikcija.||

POSLEDICA 1. *Svaki topološki prostor je kvaziuredljiv; drugim rečima, za svaku topologijupostoji kvaziuredjenje u odnosu na koje je ta topologija segmentna.*

DOKAZ: Zaista, kako svaki topološki prostor ima saglasnu relaciju kvazi - bliskosti, to prema prethodnom stavu postoji kvaziuredjenje koje generiše segmentnu topologijom identičnu sa datom topologijom.||

7. SAGLASNOST NEKIH TOPOLOGIJA SA UREDJENJEM

Pri proučavanju raznih problema u matematici, često se na posve prirodan način istovremeno javljaju više različitih struktura. Samim tim se postavlja pitanje medjusobnog odnosa izmedju različitih struktura definisanih na istom prostoru, kao i zavisnost jedne strukture od druge. Na taj način se došlo do pojmova kao što su topološke grupe, topološke mreže, uredjene grupe, itd.

Ovde će biti izložen još jedan pristup proučavanja topološke i ure - djajne strukture. Kao rezultat takvog razmatranja topološke i uredjajne strukture javlja se pojam saglasnosti topologije i uredjenja. Postoje više različitih definicija saglasnosti topologije i uredjenja, no sve definicije zadovolja - vaju niz uslova koji se prirodno postavljaju pri izučavanju ove problematike i od kojih se na kraju pošlo pri uvodjenju samog pojma saglasnosti.

DEFINICIJA 1. *Neka je $(X, \leq)$ uredjen skup na kome je definisana topologija τ. Topologija τ je S-saglasna sa uredjenjem $\leq$, ako je τ T_1-topologija, i ako za svaki par tačaka $a, b \in X$ za koje je $a < b$, postoje okoline O_a i O_b tača-*

ka a i b respektivno, tako da su zadovoljeni uslovi:

(S_1) ako je $x \in O_a$, tada je $x < b$ ili $x \parallel b$,

(S_2) ako je $y \in O_b$, tada je $a < y$ ili $y \parallel a$

(vid.[47]).

DEFINICIJA 2. Topologija τ je strogo S-saglasna sa uredjenjem $\leq$ prostora X, ako je τ T_1-topologija i ako za svaki par tačaka $a,b \in X$ za koje je je $a<b$, postoje okoline O_a i O_b tačaka a i b respektivno, tako da je zadovoljen uslov:

(S) ako je $x \in O_a$ i $y \in O_b$, tada je $x \leq y$ ili $x \parallel y$

(vid.[47]).

Ovako definisani pojmovi saglasnosti topologije i uredjenja zadovoljavaju uslove koji se prirodno postavljaju pri samom uvodjenju pojma saglasnosti. Navedimo neke od njih.

(i) Neka je $(X,\leq)$ uredjen skup, a τ_1 i τ_2 topologije na X za koje važi $\tau_2 \subseteq \tau_1$. Ako je topologija τ_1 S-saglasna (strogo S-saglasna) sa uredjenjem $\leq$ na X, tada je i topologija τ_2 S-saglasna (strogo S-saglasna) sa uredjenjem $\leq$.

(ii) Neka su $\leq_1$ i $\leq_2$ uredjenja na topološkom prostoru (X,τ) za koja je $\leq_1 \subseteq \leq_2$. Ako je topologija τ S-saglasna (strogo S-saglasna) sa uredjenjem $\leq_2$, tada je ona S-saglasna (strogo S-saglasna) i sa uredjenjem $\leq_2$.

(iii) Neka je $(X,\leq)$ uredjen skup, a Y potskup skupa X. Ako je topologija τ S-saglasna (strogo S-saglasna) sa uredjenjem $\leq$ na X, tada je i topologija τ_Y saglasna sa uredjenjem $\leq_Y$.

Očigledno je svaka topologija strogo S-saglasna sa uredjenjem istovremeno i S-saglasna sa tim uredjenjem. Obrat u opštem slučaju ne važi. Štaviše, postoji T_2-topologija koja je S-saglasna sa uredjenjem, koja medjutim nije strogo S-saglasna sa tim uredjenjem (vid.[47]).

Gotovo sve važnije uredjajne topologije, kao što su intervalna topologija, konvergentna topologija, idealske topologije, itd., su S-saglasne sa uredjenjem koje ih indukuje (vid.[47]).

Kako su uslovi za strogu S-saglasnost znatno jači od uslova za S-saglasnost, to su ove topologije tek uz dodatne uslove strogo S-saglasne sa uredjenjem (vid.[47],[44],[45]).

Na osnovu definicije saglasnosti topologije i uredjenja i osobine (i) prirodno se nameće pitanje egzistencije najvećeg elementa u skupu svih topologija koje su saglasne sa datim uredjenjem. Delimičan odgovor na ovo pitanje je dat u radu [45].

Navedimo sada još jednu definiciju saglasnosti topologije i uredjenja. U tom cilju uvedimo najpre neke pojmove.

Neka je (X,ρ) uredjen skup. Označimo sa $x\bar{\rho}\,y$ relaciju koja je zadovoljena ako je $x\rho y$ ili $x\| y$. Za skupove $A,B\subset X$ kažemo da su *uredjajno udaljeni*, ako su sledeći uslovi zadovoljeni:

(i) $A\cap B=\emptyset$,

(ii) $\forall x\in A,\forall y\in B$ važi $x\bar{\rho}\,y$ ili $\forall x\in A,\forall y\in B$ važi $y\bar{\rho}\,x$.

DEFINICIJA 3. *Neka je (X,τ,ρ) prostor na kome je definisana topologija τ i uredjenje ρ. Topologija τ je A-saglasna sa uredjenjem ρ, ako za svake dve tačke $a,b\in X$ i svaku okolinu U_a tačke a koja ne sadrži tačku b, postoji okolina $U_a^*\subseteq U_a$ koja je uredjajno udaljena od tačke b* (vid.[2],[3]).

Napomenimo odmah, da ovako definisana saglasnost topologije i uredjenja zadovoljava uslove (i)-(iii).

Sam pojam A-saglasnosti je opštiji od pojmova S-saglasnosti i stroge S-saglasnosti, jer obuhvata širu klasu topoloških prostora koji mogu biti saglasni sa uredjenjem. Tako naprimer postoji T_0-prostor čija je topologija A-saglasna sa uredjenjem (vid.[2]).

Potpuno analogno se može definisati saglasnost topologije u kvaziuredjenja (vid.[4]).

Ispitajmo sada odnose izmedju navedenih pojmova saglasnosti topologije i uredjenja.

STAV 1. Neka je (X,τ) T_1-prostor. Ako je topologija τ A-saglasna sa uredjenjem $\leq$ na X, tada je ona i S-saglasna sa tim uredjenjem.

DOKAZ: Neka za tačke $a,b\in X$ važi $a<b$, i pretpostavomo da je U_a okolina tačke a koja ne sadrži tačku b. Kako je topologija τ A-saglasna sa uredjenjem $\leq$, to se u okolinu U_a može upisati okolina U_a^* tačke a koja je uredjajno udaljena od tačke b. No tada za svako $x\in U_a^*$ važi $x<b$ ili $x\parallel b$. Dakle je U_a^* tražena okolina. Analogno se dokazuje da postoji okolina V_b^* tačke b tako da je za svako $y\in V_b^*$ zadovoljena jedna od relacija $b<y$ ili $b\parallel y$. Kako je τ T_1 topologija, to je ona S-saglasna sa uredjenjem.

Neka je $(X,\leq)$ uredjen skup. Potskup $A\subset X$ je konačno separabilan, ako postoji konačan skup elemenata $x_1,x_2,\ldots,x_n\in A$ tako da je

$$A\subseteq \bigcup_{i=1}^{n}(\leftarrow,x_i]\cup\bigcup_{i=1}^{n}[x_i,\rightarrow)\ .$$

Za tačke $a,b\in X$ označimo sa $N(a,b)=\{x\in X:$ nije $x\leq a, x\leq b$ i nije $x\geq a, x\geq b\}$. Uredjen skup $(X,\leq)$ je konačno separabilan, ako je skup $N(a,b)$ konačno separabilan za svako $a,b\in X$ (vid.[47]).

STAV 2. Neka je $(X,\leq)$ konačno separabilan skup. Ako je τ T_1 topologija koja je A- saglasna sa uredjenjem, tada je ona i stroga S-saglasna sa tim uredjenjem.

DOKAZ: Dokažimo najpre da su skupovi $(\leftarrow,a]$ i $[a,\rightarrow)$ zatvoreni za svako $a\in X$. Neka je $x\in X-[a,\rightarrow)$ i pretpostavimo da je U_x proizvoljna okolina tačke x koja ne sadrži tačku a. Kako je topologija τ saglasna sa uredjenjem, to se u okolinu U_x može upisati okolina V_x tačke x koja je uredjajno udaljena od tačke a. No tada je $V_x\subseteq X-[x,\rightarrow)$. Zaista, ako bi postojala tačka $y\in V_x\cap[a,\rightarrow)$, tada bi bilo $a\leq y$, što je suprotno činjenici da je okolina V_x tačke x uredjajno udaljena od tačke a. Analogno se dokazuje da je svaki skup oblika $(\leftarrow,a]$ zatvoren.

Neka je sada za tačke $a,b\in X$, $a<b$. Kako je X prema pretpostavci konačno separabilan, to postoje elementi $x_1,x_2,\ldots,x_n\in N(a,b)$ tako da se

svaki element iz $N(a,b)$ nalazi u nekom od skupova $(\leftarrow,x_1],\dots,(\leftarrow,x_n]$, $[x_1,\rightarrow),\dots,[x_n,\rightarrow)$. Skupovi

$$A=(\leftarrow,a]\cup\big(\bigcup_{i=1}^{n}(\leftarrow,x_i]\big)\quad i\quad B=[b,\rightarrow)\cup\big(\bigcup_{i=1}^{n}[x_i,\rightarrow)\big)$$

su zatvoreni, pri čemu je lako videti da je $a\in A, b\in X-A; b\in B, a\in X-B$ i $A\cup B=X$. No tada su $U_a=X-B$ i $U_b=X-A$ disjunktne okoline tačaka a i b respektivno, sa osobinom da je za svako $x\in U_a$ i svako $y\in U_b$ $x<y$ ili $x\parallel y$. Zaista, ako bi za neko $x\in U_a$ i neko $y\in U_b$ važilo $x>y$, tada bi bilo $x\in(\leftarrow,x_i]$ za neko x_i ili $x\in(\leftarrow,a]$. No onda je $x_i\geq x$ ili $a\geq x$, pa je dakle $x_i>y$ ili $a>y$. Stoga $y\in(\leftarrow,a]\cup(\bigcup(\leftarrow,x_i])$, pa je $y\in X-U_b$ što je kontradikcija.||

U celokupnom radu, sa izuzetkom uvodnog odeljka, razmatrani su prostori na kojima je istovremeno zadana topološka i uredjajna struktura. Pritom je uvek postojala odredjena povezanost izmedju tih struktura, što je pretstavljalo i osnov za izučavanje topološki uredjenih prostora. Sobzirom na izloženu problematiku saglasnosti topologije i uredjenja, sasvim se prirodno postavlja pitanje saglasnost topologije i uredjenja u dosada proučavanim prostorima. Svi stavovi koji slede, upravo sa tog aspekta razmatraju topološki uredjene prostore koji su proučavani u dosada izloženom radu.

STAV 3. Ako je $(X,\delta^*,\leq)$ prostor uredjene bliskosti, tada je topologija $\tau(\delta^*)$ A-saglasna sa uredjenjem .

DOKAZ: Neka za tačke $a,b\in X$ važi $a\not\leq b$, i pretpostavimo da je U_a proizvoljna okolina tačke a koja ne sadrži tačku b. Kako je $a\not\leq b$, ili ekvivalentno $a\bar{\delta}b$, to postoji skup $E\subseteq X$ tako da je $a\bar{\delta}E$ i $X-E\bar{\delta}b$. Kako je $a\in X-E$ i $a\bar{\delta}X-(X-E)$, to je $X-E$ δ-okolina tačke a; dakle je i topološka okolina. Pritom je za svako $x\in X-E$ $x\bar{\delta}b$, odnosno $x\not\leq b$. Skup $V_a=U_a\cap(X-E)$ je okolina tačke a koja je upisana u okolinu U_a sa osobinom da za svako $x\in V_a$ važi $x\not\leq b$.||

STAV 4. Topologija $\tau(\delta^*)$ prostora uredjene bliskosti $(X,\delta^*,\leq)$ je strogo S-saglasna sa uredjenjem $\leq$.

DOKAZ: Neka su a i b proizvoljni elementi iz X za koje važi $a<b$. Kako je $(X,\tau(\delta^*))$ Hausdorfov prostor, to postoje otvoreni skupovi $O_1,O_2\in\tau(\delta^*)$ tako

da je $a \in O_1, b \in O_2$ i $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Topologija $\tau(\delta^*)$ je prema LEMI 1.1. supremum topologija $\tau(\delta)$ i $\tau(\delta^{-1})$, pa stoga postoje skupovi $L_1, L_2 \in \tau(\delta^{-1})$ i $U_1, U_2 \in \tau(\delta)$ tako da je

$$a \in L_1 \cap U_1 \subseteq O_1 \qquad \text{i} \qquad b \in L_2 \cap U_2 \subseteq O_2 \quad .$$

Označimo sa L i U respektivno skupove $L_1 \cap L_2$ i $U_1 \cap U_2$. Kako je svaki skup otvoren u topologiji $\tau(\delta)$ ($\tau(\delta^{-1})$) prema LEMI 2.1. rastući (opadajući), to je skup L opadajući a skup U rastući. Kako je $a < b$, to je $a \in L$ a $b \in U$. Pritom je $L \cap U = \emptyset$. Zaista, ako bi postojao element $c \in L \cap U$, tada bi on istovremeno pripadao i skupu $O_1 \cap O_2$ što je suprotno činjenici da je $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.

Dokažimo sada da za svako $x \in L$ i svako $y \in U$ važi $x < y$ ili $x \| y$. Pretpostavimo suprotno, da je $x > y$ za neko $x \in L$ i neko $y \in U$. Kako je skup L opadajući a $y < x \in L$, to je $y \in L$. No ovo je u kontradikciji sa činjenicom da je $L \cap U = \emptyset$.

Iz prethodnog stava sledi da je topologija $\tau(\delta^*)$ svakog prostora uredjene bliskosti S-saglasna sa uredjenjem na tom prostoru.||

U daljem nećemo specijalno naglašavati o kojoj je saglasnosti reč ; podrazumevaćemo da je u pitanju bilo koja od navedenih saglasnosti topologije i uredjenja.

POSLEDICA 1. Ako je $(X, \tau, \leq)$ potpuno regularno uredjen topološki prostor, onda je topologija saglasna sa uredjenjem.

DOKAZ: Ako je $(X, \tau, \leq)$ potpuno regularno uredjen prostor, tada prema TEOREMI 2.1. postoji relacija bliskosti δ^* koja indukuje topologiju τ, pri čemu je $(X, \delta^*, \leq)$ prostor uredjene bliskosti. Stoga je na osnovu TEOREME 3. topologija τ saglasna sa uredjenjem.||

POSLEDICA 2. Ako je $(X, \tau, \leq)$ kompaktno uredjen topološki prostor, tada je topologija τ saglasna sa uredjenjem.

DOKAZ: Ako je $(X, \tau, \leq)$ kompaktno uredjen prostor, tada prema TEOREMI 5. 1. postoji jedinstvena relacija bliskosti koja je saglasna sa topologijom τ i uredjenjem. Stoga je prema STAVU 3. topologija τ saglasna sa uredjenjem.||

POSLEDICA 3. Neka je $\{(X_\alpha, \delta^*_\alpha, \leq_\alpha) : \alpha \in A\}$ familija prostora uredjene bliskosti. Ako je $(X, \delta^*, \leq)$ proizvod prostor, gde je $\delta^* = \prod \delta^*_\alpha$, a $\leq$ kardinalno uredjenje, tada je topologija $\tau(\delta^*)$ saglasna sa uredjenjem $\leq$.

DOKAZ: Prema TEOREMI 1.4., proizvod prostora uredjene bliskosti je takodje prostor uredjene bliskosti u odnosu na kardinalno uredjenje, pa je stoga prema STAVU 3. topologija $\tau(\delta^*)$ saglasna sa uredjenjem $\leq$.||

POSLEDICA 4. Ako je $(X, \mathcal{U}, \leq)$ ravnomerno uredjen prostor, tada je topologija $\tau(\mathcal{U})$ indukovana ravnomernom strukturom $\mathcal{U}$ saglasna sa uredjenjem $\leq$.

DOKAZ: Prema TEOREMI 4.1.III., topologija $\tau(\mathcal{U})$ indukovana ravnomernom strukturom $\mathcal{U}$ je potpuno regularno uredjena, pa je na osnovu POSLEDICE 1. ista saglasna sa uredjenjem.||

POSLEDICA 5. Neka je $\{(X_\alpha, \mathcal{U}_\alpha, \leq_\alpha) : \alpha \in A\}$ familija ravnomerno uredjenih prostora. Ako je $(X, \mathcal{U}, \leq)$ proizvod prostor, gde je $\mathcal{U} = \prod \mathcal{U}_\alpha$ a $\leq$ kardinalno uredjenje, tada je topologija $\tau(\mathcal{U})$ saglasna sa uredjenjem.

DOKAZ: Proizvod prostora $(X_\alpha, \mathcal{U}_\alpha, \leq_\alpha)$ je prema TEOREMI 2.2.III. ravnomerno uredjen prostor. Stoga je prema prethodnoj posledici topologija $\tau(\mathcal{U})$ saglasna sa uredjenjem $\leq$.||

I N D E X

U

Z

[XVI] Naimpally, S.A. and Warrack, B.D., Proximity Spaces, Cambridge University Press, London, 1970.

[XVII] Nagata, J., Modern General Topology, Nort-Holland Publ. Comp., Amsterdam, London, 1974.

[XVIII] Сикорский, Р., Буловы алгебри, Мир, Москва, 1969.

[XIX] Скорняков, Л. А., Элементы теории структур, Наука, Москва, 1970.

[XX] Szasz, G., Einführung in die Verbandstheorie, Akadémiai Kiado, Budapest, 1962.

[XXI] Thron, W.J., Topological Structures, Holt, Rinehart and Winston, New York, Chicaga, San Francisco, Toronto, London, 1966.

[XXII] Владимиров, Д, А., Буловы алгебры, Наука, Москва, 1969.

II. ČLANCI

[1] Adnadjević, D., Saglasnost topologije i uredjenja, Matematički vesnik, 7 (22) 1970. 109-112.

[2] Adnadjević, D., Saglasnost topologije i uredjenja, Matematički vesnik, 8 (23), 1971, 83-88.

[3] Аднаджевич, Д., Топология и порядок, ДАН СССР, 1972, 206, №6, 1273-76.

[4] Аднаджевич, Д., Некоторые вопросы взаимоотношения топологии и квазипорядка, Topology and its application, Budva 1972, 11-15.

[5] Bartle, R.G., Nets and filters in topology, Am. Math. Montly, vol.62 (1955), 551-557.

[6] Birsan, T., Connectedness in ordered topological spaces, Mat. vessnik, 13(28)1, 35-40.

[7] Burges, D.C.J. and Fitzpatrick, M., Syntopogenous preordered spaces, Math.Proc.Camb.Phil.Soc.(1976), 80, 71-79.

[8] Carlson, W.J., Topologies generated by orders and quas-uniform strctures, Atti.Accad.naz.Lincei.Rend.Cl.sci.fis., mat.e nat r, 1974(1975), № 5, 369-373.

[9] Davies, E.B., The existence of characters on topological lattices, J.London Math.Soc.,43(1968),217-220.

[10] De Groot, J. and Aarts, J.M., Complete regularity as a separation axioms, Inter.Congress of math., Moscow, 1966,p.31.

[11] Dimitrijević, R.,Normalno i savršeno normalno kvaziuredjeni topološki prostori, Mat.vesnik, 11(26)1,1974, 31-37.

[12] Dimitrijević, R.,Some properties of uniform ordered spaces, Mat.vesnik 13(28)2,1976, 157-162.

[13] Dimitrijević, R., Potpuno normalno i savršeno normalno kvaziuredjeni topološki prostori, Mat.vesnik, 1(14)(29),1977, 225-236.

[14] Dimitrijević, R., On proximiti ordered spaces (u pripremi)

[15] Dimitrijević, R., On compatibility of some topologies with the ordering, (u pripremi)

[16] Ефремович, В.А., Геометрија близости, Мат. сбор., 31(73) №1, 189-200.

[17] Frink, O., Compactifikacions and semi-normal spaces, Amer.J. math., 86(1964), 602-7.

[18] Frink, O., Ideals in partially ordered sets, Am. Math. Monthly, 61(1954) 223-234.

[19] Ganter, T.E.. and Steinlage, R.C., Characterizations of quasi-uniformities, J.London Math.Soc.(2), 5(1972), 48-52.

[20] Hamburger, P., Complete regularity as a separation axiom, Periodica Math.Hungarica,Vol.4(1), (1973), 39-41.

[21] Hayashi, E., Products of Steiner´s quasi-proximity spaces, Proc.Am. Math.Soc., Vol.51, № 1, 1975.

[22] Киселева, Т.Г., Частично упорядоченные множества, наделенные равномерной структурой, Вест. Ленин. унив., 1967, № 13., 51-57.

[23] Katetov, M., On real-valued function in topological spaces, Fund.Math, 38(1951), 85-91.

[24] Katetov, M., Corrections to " On real-valued function in topological spaces, Fund.Math, 40(1953), 203-205.

[25 Leader, S., On products of proximity spaces, Math. Annalen, 154,185-94.

[26] Lodato, M.W., On topologically induced generalized proximity relations, Proc.Am.Math.Soc.15(1964), 417-422.

[27] Lodato, M.W., On topologically induced generalized proximity relations II, 1966, Pacif.J.Math., 17, 131-135.

[28] Mattson, D.A., Separation relations and quasi-proximities, Math.Annalen, 171, (1967), 87-92.

[29] McCallion, T.M., Compactifications of ordered topological spaces, Proc. Camb.Phil.Soc.,71(1972), 463-473.

[30] McCartan, S.D., A quotient ordered space, Proc.Camb.Phil.Soc.,64(1968) 317-322.

[31] McCartan, S.D., Separation axioms for topological ordered spaces, Proc. Camb.Phil.Soc.,64(1968), 965-973.

[32] Meenakshi, K.N., Proximity structuries in Boolean algebras, Acta Sci. Math.(Szeged), 27(1966), 85-92.

[33] Njastad, O., Some properties of proximity and generalized uniformity, Math.Scand,12(1963), 47-56.

[34] Pervin, W.J., Qusi-proximities for topological spaces, Math.Annalen, 150(1963), 325-326.

[35] Pervin, W.J., On separation and proximity spaces, Am.Math.Montly,71 (1964), 158-161.

[36] Pervin, W.J., Quasi-uniformization of topological spaces, Math.Annalen, 150(1963), 316-317.

[37] Priestley, H.A., Ordered topological spaces and reprezentation of distributive lattices, Proc.London Math.Soc.,(3)24(1972)507-30.

[38] Priestley, H.A., Reprezentation of distributive lattices by means of ordered Stone spaces,Bull.London Math.Soc., 2(1970),186-90.

[39] Priestley, H.A., Separation theorems for semi-continuous functions on normally ordered topological spaces, J.London Math.Soc. (2)3(1971), 371-377.

[41] Рамм, Н.С. и Щварц, А.С., Геометрия близости, униформнаягеометрия и топология, Мат. сб., том 33(75) No 1,(1953), 157-180.

[42] Redfield, R.H., Ordering uniform completins of partially ordered sets, Can.J.Math.,Vol.XXVI, № 3, 1974, 644-664.

[43] Redfield, R.H., Uniformly convex totally ordered sets, Proc.Am.Math. Soc.,vol.51, № 2., 1975, 289-294.

[44] Rosicky, J., A note on topology compatible with the ordering, Arch.Math. (Brno), 5(1969), 19-24.

[45] Rosicky, J., Topologies compatible with ordering, Scripta fac.nat.njep. brunensis, Mathematica 1, 1:9-23, 1971.

[46] Semadeni, Z. and Zidenberg, H., On preorder topological spaces and increasing semicontinuous functions, Annales Soc.Math.Pol. Ser.I:Commentationes Math.XI(1968)313-316.

[47] Sekanina, A. and Sekanina, M., Topologies compatible with ordering, Arch. Math.(Brno)2(1966), 113-126.

[48] Singal, M.K. and Sunder Lal, Local proximiti ordered spaces, Math.Student, Vol.XLI, № 3(1973), 269-275.

[49] Singal, M.K. and Sunder Lal, A note on local proximities and regular topological spaces, (u pripremi)

[50] Singal, M.K. and Sunder Lal, Proximity ordered spaces, J.London Math. Math.Soc., 14(1976), 393-404.

[51] Смирнов, Ю.М., О пространствах близости, Мат. сб., том 31(73), No. 3, 1952, 543-574.

[52] Steiner, E.F , The relation between quasi-proximities and topological spaces, Math.Annalen, 155(1964)194-195.

[53] Шварц, А.С., Пространства близости и структуры, Учен. зап. Ивановск Гос. Пед. Инст., 10(1956), 55-60.

[54] Tong, H., Some charachterizations of normal and prefectly normal spa-

ces, Duke Math.J., 19(1952), 289-292.

[55] Ward, A.J., On relations betveen certain instrinsit topologies in partially ordered sets, Proc.Camb.Phil.Soc., Vol.51(1955) 254-261.

[56] Ward, L.E., Partially ordered topological spaces, Proc.Am.Math.Soc. 5(1954)144-161.

[57] Wolk, E.S., Order-compatible topologies on a p[illegible]ially ordered set, Proc. Am.Math.Soc., 9(1958), 524-529.

[58] Wolk, E.S., Partially well ordered sets and partial ordinals, Fund. Math. LX(1967), 175-186.

[59] Wolk, E.S., The topology of a partially ordered set, Fund.Math., LXII (1968), 255-264.