UNIVERZITET U BEOGRADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Stevo B. Todorčević

REZULTATI I DOKAZI NEZAVISNOSTI U KOMBINATORNOJ TEORIJI SKUPOVA

– Doktorska disertacija –

Članovi komisije:

Đ. Kurepa

K.J. Devlin

M. Marjanović

S.Prešić

Beograd, 1979. god.

SADRŽAJ

Strana

0. Uvod 3

Glava I

1. Drveta i uredjajni tipovi. Definicije 13
2. Odnos drveta i uredjajnih tipova 16
3. Poddrveta ω_1-drveta 23
4. Poddrveta ω_2-Arosnzajnovih drveta 25
5. Poddrveta Kurepinih drveta 34
6. Problem Erdösa i Hajnala 36

Glava II

1. Krute Booleove algebre 43
2. Automorfizmi (ω_1,ω_2)-drveta 61

Glava III

1. Kurepina hipoteza i relacije particija 71
2. Drveta i particije 86
3. Jedan problem o beskonačnim grafovima 124

D

1. σ-gusti parcijalno uredjeni skupovi 127

Bibliografija 153

UVOD

U glavi I posmatramo odnos drveta i uredjajnih tipova i to odnos relacija drvo-podrvo i tip-podtip. Uz pomoć Jensenovog principa $\diamond$ konstruisaćemo ω_2-Aronszajnovo drvo koje ne sadrži ni jedno Aronsajnovo i Cantorovo podrvo. Sa druge strane, pokazaćemo da u nekom modelu ZFC + GCH svako ω_2-Aronszajnovo drvo sadrži i Aronszajnovo i Cantorovo podrvo. Time ćemo odgovoriti na jedno pitanje K.J.Devlina iz [10, str. 160] .

U § 5.I posmatraćemo egzistenciju Aronszajnovih i Cantorovih poddrveta Kurepinih drveta raznih visina. Tako ćemo moći dobiti model ZFC u kome za svaki regularan kardinal $\kappa \geq \omega$ postoji κ-metrizabilan κ-kompaktan prostor moći $> \kappa$ (tj. uopšteni Cantorov diskontinuum), što daje konsistentnost pozitivnog odgovora na jedan problem R.Sikorskog iz [69]. Inače, takvi prostori ne postoje u ZFC. Pored toga dobićemo konsistentnost egzistencije ω_1-metrizabilnog ω_1-kompaktnog prostora X za koga važi $\omega_1 < |X| < 2^{\omega_1}$, tj. poznata Cantorova teorema, da je moć proizvoljnog metričkog kompakta ili prebrojiva ili jednaka 2^{ω}, se ne uopštava.

U zborniku [23] Erdös i Hajnal formulišu sledeću rečenicu i traže da se ispita njena istinitost uz GCH:

Φ : svaki uredjajni tip φ moći ω_2 sa osobinama $\omega_2, \omega_2^* \nleq \varphi$ sadrži podtip ψ moći ω_1 sa osobinama $\omega_1, \omega_1^* \nleq \psi$.

U [10] Devlin dokazuje da V = L implicira $\neg\Phi$ i postavlja pitanje konsistentnosti Φ (sa GCH). U §6.I mi ćemo odgovoriti na ovo Devlinovo pitanje time što ćemo dokazati da je sa ZFC + GCH konsistentna sledeća jaka forma rečenice Φ:

Φ': svaki uredjani tip φ moći ω_2 sa osobinama ω_2, $\omega_2^* \nleq \varphi$ sadrži i Aronszajnov i realan neprebrojiv podtip.

Pored toga, dokazaćemo da $\Box$ implicira $\neg\Phi$, što predstavlja bitno pojačanje gornjeg Devlinovog rezultata, jer se dokaz uopštava.

U §1. gl.II posmatramo problem egzistencije Booleovih algebri koje nemaju netrivijalnih automorfizama, odnosno endomorfizama. Tako ćemo pokazati da za svaki kardinal $\kappa > \omega$ postoji tačno 2^κ tipova izomorfnosti Booleovih algebri bez netrivijalnih automorfizama. Sličan rezultat ćemo dobiti i za slučaj 1-1 odnosno "na" endomorfizama. Time ćemo dobiti rešenja problema 6, 7, 8 i 9 iz [58].

U §2, gl. II ćemo posmatrati problem izomorfizama i automorfizama ω_1-drveta (preciznije normalnih (ω_1, ω_1)-drveta). Tako ćemo pokazati da postoji 2^{ω_1} tipova izomorfnosti totalno krutih Aronszajnovih drveta (drvo $\underline{T} = (T, \leq_T)$ je totalno kruto ako su $([x, \cdot)_T, \leq_T)$ i $([y, \cdot)_T, \leq_T)$ neizomorfna drveta za svaki par tačaka $x, y \in T$, $x \neq y$, odakle, posebno, sledi da $\underline{T}$ nema ni jedan netrivijalni automorfizam). Ovo daje pozitivan odgovor na jedan problem T.J.Jecha iz [38].

U glavi III ćemo posmatrati neke probleme vezane za relacije particija Erdösa, Hajnala i Radoa iz [26] (koji su ponovo postavljeni i u zbornicima [22] i [23] Erdösa i Hajnala).

U §1.III posmatraćemo odnos Kurepine hipoteze i relacija V iz [26].Tako ćemo dokazati da $KH(\kappa,\lambda^+)$ implicira $\kappa^+ \not\to [\lambda^+]^2_{\kappa,\lambda}$; $\kappa > \lambda \geq \omega$. Problem važenja $\kappa^+ \to [\lambda^+]_{\kappa,\lambda}$ je postavljen u [26, str. 154]. Dakle, u konstruktibilnom univerzumu L imamo da važi $\kappa^+ \not\to [\lambda^+]^2_{\kappa,\lambda}$, za svako $\kappa = cf(\kappa) > \lambda \geq \omega$. Pored toga, dokazaćeno da $KH(\omega_\omega, \omega_\omega)$ implicira negativan odgovor na problem 7 iz [26].

U §2.III ćemo konstruisati model ZFC u kome važi:

(1) Neka je $\kappa \geq \omega$, $2 < r < \omega$ $|S| = \beth_{r-1}(\kappa)$. Tada postoji r-particija (I_0^r, I_1^r) skupa S za koju važi:

(i) ako je $S' \subseteq S$ i $|S'| = \kappa^+$, tada je $[S']^r \nsubseteq I_i^r$, za svako $i < 2$;

(ii) ako je $S' \subseteq S$ i $|S'| = \kappa^+$, tada postoje $S_0, S_1 \subseteq S'$, $|S_0| = |S_1| = \kappa$, tako da je $[S_i]^r \subseteq I_i^r$, za svako $i < 2$.

(2) Neka je $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa > \omega$, $2 \leq r < \omega$, $\nu \geq 2, r < \lambda_0 \leq \kappa$ i $\omega \leq \lambda_\xi = \mathrm{cf}(\lambda_\xi) \leq \kappa$ za $\xi \neq 0$, $\xi < \nu$. Tada

$$\kappa \not\to [\lambda_\xi]^r_{\xi<\nu} \text{ implicira } 2^\kappa \not\to [\lambda_\xi + 1]^{r+1}_{\xi<\nu}.$$

(3) Neka je $\kappa > \omega$ regularan i ne slabo kompaktan kardinal, tada je

$$\kappa^{(n)+} \not\to [\kappa]^{n+2}_\kappa, \quad \text{za svako } n < \omega.$$

(4) Neka je $\kappa \geq \omega$, $\xi < r < \omega$ i $n < \omega$, tada je

$$\kappa^{(n+1)+} \not\to ([{r+1+n \atop 3+n}], \kappa^+)^{r+n},$$

(1) daje konsistentnost pozitivnog odgovora na problem 62 iz [22], (2) daje konsistentnost pozitivnog odgovora na "glavni" deo problema 17 iz [22], (3) daje konsistentnost pozitivnog odgovora na pojačanu (do maksimuma) formu problema 17 Aiz [22] i (4) daje konsistentnost pozitivnog odgovora na jedan problem iz [26, str. 16o].

Ovde su ovi rezultati konsistentnosti opravdani, jer je poznato da postoji model ZFC u kome ne važe ni najprostije forme tvrdjenja (3) odnosno (2).

U §3.III ćemo posmatrati jedan problem o beskonačnim grafovima. Pokazaćemo da MA + $\neg$CH implicira da svaki graf moći ω_1, koji sadrži Shelahov podgraf ima hromatski broj $\leq \omega$. Ovo rešava problem 4 iz [21].

U dodatku se, primenom metoda Devlina [14] i Mitchella [59], konstruiše model teorije ZFC + $\neg\omega$KH + MA+ $\neg$CH. Koristeći ovaj rezultat dokazujemo da u ZFC ne postoji σ-gust parcijalno uredjen skup moći ω_1.

U [46] Kurepa posmatra sledeće uopštenje separabilnosti topoloških prostora (i oznaka je iz [46]):

κ_0: postoji familija $\{D_n | n \in \omega\}$ diskretnih podprostora prostora X, tako da je $\bigcup \{D_n | n \in \omega\}$ gust u X.

Posmatraćemo Kurepino pitanje iz [46], da li postoji prostor sa prvom aksiomom prebrojivosti, koji ne zadovoljava κ_0. Prvo ćemo konstruisati linearno uredjen topološki prostor gustine $> \omega_1$, sa prvom aksiomom prebrojivosti, koji ne zadovoljava κ_0. Zatim ćemo pokazati da u ZFC ne postoji linearno uredjen topološki prostor gustine $\leq \omega_1$, koji ne zadovoljava uslov κ_0. Naime, pokazaćemo da $\neg\omega KH + MA + \neg CH$ implicira da svaki linearno uredjen topološki prostor gustine ω_1 zadovoljava κ_0.

Na kraju posmatramo problem 12.D knjige [64], koji pita da li postoji savršeno normalan ne-Arhimedovski prostor, koji nije metrizabilan. Pokazaćemo da je odgovor na taj problem negativan, za slučaj prostora težine $\leq \omega_1$. Naime, pokazaćemo da $\neg\omega KH + MA + \neg CH$ implicira metrizabilnost svakog savršeno normalnog ne-Arhimedovskog prostora težine ω_1.

Teorija u kojoj radimo je ZFC (Zermelo-Fraenkel + aksiom izbora). Koristićemo opšteprihvaćene skupovno-teorijske definicije i oznake, koje možemo naći, na primer, u [9] ili [37].

Ordinal identifikujemo sa skupom manjih ordinala dok je kardinal inicijalni ordinal. Dakle, $\aleph_\alpha$ i ω_α ćemo identifikovati. Sa α, β, γ, δ, ξ, ... ćemo označavati ordinale, dok su slova κ, λ, μ, ν, ... rezervisana za označavanje (beskonačnih) kardinala. Ako je $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$, tada kažemo da je α izolovani ordinal i pišemo succ(α). Ako je $\alpha = \bigcup \alpha$, tada kažemo da je α granični ordinal, i pišemo lim(α). Ako je A proizvoljan skup tada postoji jedinstven kardinal κ, za koga postoji bijekcija $f: \kappa \to A$. Kardinal κ ćemo zvati moć (kardinalnost) skupa A i označavati sa $|A|$. Sa $P(A)$ označavamo skup svih podskupova skupa A. Ako je $\kappa = |A|$, tada je $|P(A)| = 2^\kappa$. Opšta kontinuum hipoteza GCH je rečenica $\forall_\kappa$ (κ je kardinal $\geq \omega \to 2^\kappa = \kappa^+$), gde sa κ^+ označavamo najmanji kardinal veći od κ. Ako je $\kappa = \lambda^+$ za neko λ, tada κ zovemo izolovani kardinal (sukcesor) u suprotnom je κ granični kardinal. Pojmove kofinalnost, regularnosti i singularnosti, nedostiživosti (inakcesibilnosti) i slabe nedostiživosti kardinala shvatamo na uobičajen način. Kardinalnu funkciju $\beth_n(\kappa)$ definišimo induktivno sa: $\beth_0(\kappa) = \kappa$, $\beth_{n+1}(\kappa) = 2^{\beth_n(\kappa)}$.

Ako su A i B proizvoljni skupovi tada nam ${}^AB$ označava skup svih preslikavanja skupa A u skup B. Dakle, ${}^\alpha 2$ je skup svih 0,1-nizova dužine α. Ako su α i β proizvoljni ordinali tada definišemo

$\alpha_\beta = \bigcup\{\gamma_\beta | \gamma < \alpha\}$. Ako je κ proizvoljan kardinal (konačan ili beskonačan) i A proizvoljan skup, tada definišemo

$$[A]^\kappa = \{X | X \subseteq A \text{ i } |X| = \kappa\}$$

$$[A]^{<\kappa} = \bigcup\{[A]^\lambda \mid \lambda < \kappa\}.$$

κ je kardinal Mahloa, ako svaki zatvoren i neograničen podskup od κ sadrži bar jedan inakcesibilan kardinal. κ je slabo kompaktan, ako za svaku Π_1^1 rečenicu ϕ i svaku relaciju U na V_κ, $(V_\kappa, \varepsilon, U) \models \phi$ implicira $(V_\lambda, \varepsilon, U \cap V_\lambda) \models \phi$, za neko $\lambda < \kappa$ (detaljnije o tome videti [18]).

Neka je λ granični ordinal. Podskup $S \subseteq \lambda$ je stacionaran ako je $S \cap C \neq \phi$, za svaki zatvoren i neograničen podskup C od λ. Neka je $0 \notin A \subseteq \lambda$ proizvoljan podskup, tada funkciju $f: A \to \lambda$ zovemo regresivnom, ako je $f(\alpha) < \alpha$, za svako $\alpha \in A$. Biće korisna sledeća poznata lema (koristićemo je bez posebnog spominjanja):

Neka je κ regularan neprebrojiv kardinal i $0 \notin S \subseteq \kappa$. Ako je S stacionaran i ako je $f: S \to \kappa$ regresivna funkcija, tada postoji $\beta \in \kappa$, tako da je $\{\alpha \in S | f(\alpha) = \beta\}$ stacionaran podskup od κ (Aleksandrov-Urysohn, Neumer, Fodor).

Koristićemo sledeće kombinatorne principe Jansena, koji važe uz predpostavku $V = L$ (v. [40] ili [9]).

$\diamond$: Postoji niz $\{S_\alpha | \alpha < \omega_1\}$, takav da je $S_\alpha \subseteq \alpha$, za svako $\alpha < \omega_1$ i takav da je za proizvoljan $X \subseteq \omega_1$ skup $\{\alpha < \omega_1 | X \cap \alpha = S_\alpha\}$ stacionaran u ω_1.

Neka je $\kappa \geq \omega_1$ proizvoljan kardinal, tada je

$\square_\kappa$: Postoji niz $\{C_\alpha | \alpha < \kappa^+, \lim(\alpha)\}$, tako da važi:

(i) C_α je zatvoren i neograničen podskup od α;

(ii) ako je $cf(\alpha) < \kappa$ tada je $|C_\alpha| < \kappa$;

(iii) ako je γ granična tačka skupa C_α, tada je $C_\gamma = \gamma \cap C_\alpha$.

često ćemo pisati $\square$ umesto $\square_{\omega_1}$.

U nekim delovima rada ćemo predpostavljati da su čitaoci upoznati sa metodom forsinga i to u obliku koji je dat u [37] ili [66]. Zato ćemo sada dati samo kratak pregled toga.

za svako $p \in P$ tada pišemo $P \Vdash \phi$.

Neka je κ proizvoljan kardinal, tada kažemo da parcijalno uredjeni skup $(P, \leqslant)$ zadovoljava <u>κ-c.c.</u>, ako P ne sadrži podskup moći κ medjusobno nekompatibilnih elemenata. Ako P zadovoljava ω_1-c.c., tada ćemo govoriti i da P zadovoljava c.c.c. (countable chain condition).

Parcijalno uredjeni skup P (tj. $(P, \leqslant)$) je <u>κ-zatvoren</u>, ako za svaki monotono opadajući niz $\{p_\alpha\}_{\alpha<\beta}$, $\beta < \kappa$ elemenata iz P postoji $p \in P$, tako da je $p \leqslant p_\alpha$, za svako $\alpha < \beta$.

Parcijalno uredjeni skup P je <u>κ-gust</u>, ako je presek proizvoljne kolekcije od $< \kappa$ gustih početnih komada od P, gust u P. ω_1-zatvoren i ω_1-gust parcijalno uredjeni skup zovemo i <u>σ-zatvoren</u> i <u>σ-gust</u>. Jasno je, da je svaki κ-zatvoren parcijalno uredjen skup i κ-gust.

<u>Lema 0.1.</u> Neka je M p.t.m. ZFC, P parcijalno uredjen skup u M i κ regularan neprebrojiv kardinal u M i neka važi $M \models$" P zadovoljava κ-c.c. ". Tada za svaki ordinal α u M $\alpha \geqslant \kappa$ važi $M \models$" α je kardinal " akko $M[G] \models$ " α je kardinal ", gde je G M-generički podskup od P. ∎

<u>Lema 0.2.</u> Neka je M p.t.m ZFC, P parcijalno uredjen skup u M, κ regularan neprebrojiv kardinal u M i neka važi $M \models P$ je κ-gust ". Neka je G M-generički podskup od P. Tada za svaki ordinal $\alpha < \kappa$ važi $[{}^{\alpha}M]^M = [{}^{\alpha}M]^{M[G]}$. ∎

<u>Lema 0.3.</u> Neka je M p.t.m. ZFC i neka su P_1 i P_2 parcijalno uredjeni skupovi u M. Neka je $P_1 \times P_2$ kartezijev proizvod P_1 i P_2, tj. $(p_1, p_2) \leqslant (q_1, q_2)$ akko je $p_1 \leqslant q_1$ i $p_2 \leqslant q_2$. Tada je $G_1 \times G_2$ M-generički podskup od $P_1 \times P_2$ ako i samo ako je G_1 M-generički podskup od P_1 i G_2 $M[G_1]$-generički podskup od P_2 i tada važi $M[G_1 \times G_2] = M[G_1][G_2]$.

Ako je G M-generički podskup od $P_1 \times P_2$, tada je $G_1 = \{p \in P_1 \mid (p, 1) \in G\}$ M-generički podskup od P_1, a $G_2 = \{q \in P_2 \mid (1, q) \in G\}$ $M[G_1]$-generički podskup od P_2 i važi $G = G_1 \times G_2$. ∎

Predhodne leme ćemo često koristiti i bez posebnog navodjenja. To se, takodje, odnosi i na sledeće leme (dokaze ovih lema možemo naći u [37] i [66]).

Lema 0.4. Neka je M p.t.m. ZFC i neka je P_1 parcijalno uredjen skup u M ($B = [RO(P)]^M$). Neka za $P_2 \varepsilon M^{(B)}$ važi $P_1 \Vdash$ " P_2 je parcijalno uredjen skup ". Neka je u M

$$Q = \{q \mid (\exists p \varepsilon P_1)\ (p \Vdash_{P_1} \text{" } q \varepsilon P_2 \text{ "})\} \quad \text{i}$$

$$P_1 \otimes P_2 = \{(p,q) \mid p \varepsilon P_1 \text{ , } q \varepsilon Q \text{ , } p \Vdash_{P_1} \text{" } q \varepsilon P_2 \text{ "}\} .$$

Definišimo parcijalno uredjenje skupa $P_1 \otimes P_2$ (u M) sa

$$(p_1,q_1) \leq (p_2,q_2) \quad \text{akko} \quad p_1 \leq_1 p_2 \quad p_1 \Vdash_{P_1} \text{" } q_1 \leq_2 q_2 \text{ "}.$$

Ako je G_1 M-generički podskup od P_1 i ako je G_2 $M[G_1]$-generički podskup od $i_{G_1}(P_2)$, tada postoji M-generički podskup $G_1 \otimes G_2$ od $P_1 \otimes P_2$ tako da je $M[G_1][G_2] = M[G_1 \otimes G_2]$. Obrnuto ako je G M-generički podskup od $P_1 \otimes P_2$ i ako je $G_1 = \{p \mid \exists q\ ((p,q) \varepsilon G)\}$ i $G_2 = \{i_{G_1}(q) \mid \exists p\ ((p,q) \varepsilon G)\}$, tada je G_1 M-generički podskup od P_1, G_2 $M[G_1]$-generički podskup od $i_{G_1}(P_2)$ i $G = G_1 \otimes G_2$. ■

Lema 0.5. Neka su M, P_1 i P_2 oni iz predhodne dve leme. Neka je $P = P_1 \times P_2$ ili $P = P_1 \otimes P_2$. Tada je sledeće ekvivalentno u M:

(a) P_1 zadovoljava c.c.c. i $P_1 \Vdash$ " P_2 zadovoljava c.c.c. " ;
(b) P zadovoljava c.c.c. ■

Martinova aksioma MA je sledeća rečenica:

Neka je P proizvoljan c.c.c. parcijalno uredjen skup i neka je F proizvoljna familija moći $< 2^{\omega}$. Tada postoji F-generički podskup od P.

Jasno je, da CH implicira MA, medjutim, poznato je da je MA konsistentna i sa $\neg$CH (v. [74]).

Na kraju rada ćemo koristiti neke topološke pojmove (top. prostor, baza, gust podskup, težina, separabilnost, ...), tako da čitaoce upućujemo na [29], gde se nalaze definicije tih pojmova. Ovde ćemo navesti samo neke definicije.

Kolekcija $\mathcal{P}$ nepraznih otvorenih podskupova topološkog prostora X je π-baza, ako za svaki otvoren skup U iz X postoji $V \varepsilon \mathcal{P}$, tako da je $V \subseteq U$.

Kolekcija F nepraznih podskupova topološkog prostora X je diskretna, ako svaka tačka x iz X ima okolinu koja seče najviše jedan element iz F.

Kolekcija F je σ-diskretna, ako je jednaka uniji prebrojivo mnogo diskretnih kolekcija prostora X. Analogno definišemo i pojam σ-disjunktne kolekcije.

Autor ovog rada izražava veliku zahvalnost profesoru Djuri Kurepi na čijim je seminarima u poslednje četiri godine stekao interesovanje za teoriju skupova. Posebno mu se zahvaljuje na pomoći u pripremi ovog rada i velikoj pomoći u literaturi.

Glava I

1. DRVETA I UREDJAJNI TIPOVI. DEFINICIJE

Drvo je parcijalno uredjen skup $\underline{T} = (T, \leq_T)$ kod koga je skup $(\cdot, x)_T = \{y \in T \mid y <_T x\}$ dobro uredjen, za svako $x \in T$, i čiji uredjajni tip predstavlja visinu tačke x u T u oznaci $\gamma_T(x)$. Ako je α ordinal, tada α-ti sloj drveta $\underline{T}$ je skup $R_\alpha T = \{x \in T \mid \gamma(x) = \alpha\}$. Često ćemo taj skup označavati i sa T_α. Visina drveta $\underline{T}$ je ordinal $\gamma T = \min\{\alpha \mid R_\alpha T = \phi\}$. Neka je $X \subseteq T$ proizvoljan skup, tada sledeći Kurepu sa $R_o X$ označavamo skup $\{x \in X \mid (\cdot, x)_T \cap X = \phi\}$. Inače, operator R_o ćemo posmatrati i u drugim parcijalno uredjenim skupovima. Čvorište drveta $\underline{T}$ je svaka klasa ekvivalencije relacije: $x \sim y$ akko $(\cdot, x)_T = (\cdot, y)_T$. Čvorište drveta $\underline{T}$ odredjeno tačkom $x \in T$ označavamo sa $|x|_T$ (v. [45, str. 72]). Za $x \in T$ stavljamo $[x]_T = \{y \in T \mid y \leq_T x \text{ ili } x \leq_T y\}$. Skup $X \subseteq T$ je lanac drveta $\underline{T}$, ako su svaka dva elementa iz X $\leq_T$-uporediva. Lanac $b \subseteq T$ nazivamo α-lanac ako je α njegov uredjajni tip u odnosu na relaciju $\leq_T \cap b^2$. Lanac $b \subseteq T$ je kofinalan lanac drveta $\underline{T}$ ako je $b \cap R_\alpha T \neq \phi$, za svako $\alpha < \gamma T$. Skup $X \subseteq T$ je antilanac drveta $\underline{T}$, ako su svaka dva različita elementa iz X $\leq_T$-neuporediva. Relaciju neuporedivosti drveta $\underline{T}$ označavamo sa $||_T$. $\underline{S}$ je poddrvo drveta $\underline{T}$, ako je $S \subseteq T$ i ako je $\leq_S = \leq_T \cap S^2$. Ako je C proizvoljan skup ordinala, tada sa $T \mid C$ označavamo poddrvo $(\cup \{T_\alpha \mid \alpha \in C\}, \leq_T \cap (\cup \{T_\alpha \mid \alpha \in C\})^2)$. Posebno je $T \mid \alpha = (\cup\{T_\beta \mid \beta < \alpha\}, \leq_T \cap (\cup \{T_\beta \mid \beta < \alpha\})^2$.

Neka je κ proizvoljan ordinal a λ proizvoljan kardinal. Drvo $\underline{T} = (T, \leq_T)$ zovemo <u>(κ, λ)-drvetom</u> (v. [9, str. 44]), ako važi:

(i) $\gamma T = \kappa$;

(ii) $|T_\alpha| < \lambda$, za svako $\alpha < \kappa$.

Neka je $\underline{T}$ proizvoljno (κ, λ)-drvo. $\underline{T}$ je <u>normalno</u> (κ, λ)-drvo ako važi:

(1) $|T_o| = 1$;

(2) ako je $\alpha + 1 < \kappa$ i $x \in T_\alpha$, tada postoje $y_1, y_2 \in T_{\alpha+1}$, tako da je $y_1 \neq y_2$ i $x <_T y_1, y_2$;

(3) za svako $x \in T$, visina drveta $([x]_T, \leq_T \cap [x]_T^2)$ je jednaka κ;

(4) ako je $x,y \in T$ i $|x|_T = |y|_T$ i ako je $\alpha = \gamma_T(x) = \gamma_T(y)$ granični ordinal, tada je $x = y$.

Proizvoljno drvo $\underline{T}$ visine κ ćemo još nazivati i <u>κ-drvetom</u>.

Sada navodimo osnovne vrste drveta. <u>Aronszajnovo drvo</u> je svako (ω_1, ω_1)-drvo, koje ne sadrži ni jedan kofinalan lanac (ω_1-lanac). Ako je $\kappa \geq \omega$ proizvoljan kardinal, tada <u>κ-Aronszajnovo drvo</u> definišemo kao (κ, κ)-drvo bez kofinalnih lanaca. Egzistenciju Aronszajnovih drveta (tj. ω_1-Aronszajnovih drveta) prvi je dokazao Aronszajn 1934-te godine (v. [45, str. 96]).

U radu [47] su konstruisane razne vrste Aronszajnovih poddrveta drveta $(\sigma Q, -|)$, gde je σQ skup svih dobro uredjenih ograničenih podskupova racionalnih brojeva a $-|$ relacije "biti početni komad". U [75] je konstruisano κ^+-Aronszajnovo drvo, za svaki regularan kardinal $\kappa \geq \omega$, uz predpostavku GCH. Sa druge strane, u [59] je konstruisan model ZFC u kome ne postoji ω_2-Aronszajnovo drvo. $\omega+1$-drvo $\underline{T}$ je <u>Cantorovo drvo</u>, ako je $|T_n| \leq \omega$, za svako $n < \omega$, dok je $|T_\omega| > \omega$. Neka je $\kappa \geq \omega$ proizvoljan kardinal. Drvo $\underline{T}$ je <u>κ-Cantorovo drvo</u>, ako je $\gamma T = \delta+1$, gde je $\delta \leq \kappa$ beskonačan kardinal, $|T|\delta| \leq \kappa$, dok je $|T_\delta| > \kappa$.

Jedno (ω_1, ω_1)-drvo $\underline{T}$ koje ima $> \omega_1$ maksimalnih ω_1-lanaca zovemo <u>Kurepino drvo</u>. <u>Kurepina hipoteza</u> KH je uslov da postoji Kurepino drvo. Neka je $\kappa \geq \omega$ proizvoljan kardinal, tada svako (κ,κ)-drvo $\underline{T}$ sa $> \kappa$ maksimalnih κ-lanaca zovemo <u>κ-Kurepinim drvetom</u>. Dobro je poznato (v. [76], [36]) da je KH konsistentna sa ZFC. Posebno, znamo da Kurepino drvo postoji u L (konstruktibilni univerzum), što je rezultat Solovaya. Sa druge strane J.Silver (v. [70] ili [36]) je dokazao: Con(ZFC + " postoji inakcesibilan kardinal") → Con(ZFC+GCH+¬KH). Predpostavka egzistencije inakcesibilnog kardinala je i nužna (v. na primer [36]).

Suslinovo drvo je svako (ω_1,ω_1)-drvo koje nema ni neprebrojivog lanca ni neprebrojivog antilanca. Analogno definišemo i pojam κ-Suslinovog drveta, za proizvoljan kardinal $\kappa \geq \omega_1$. Poznato je (v. [45,str. 132]) da je egzistencija Suslinovog drveta ekvivalentna negaciji Susline hipoteze (SH: svaki neprekidan linearno uredjen skup bez krajeva i neprebrojive familije otvorenih intervala je izomorfan sa realnim kontinuumom). Dobro je poznato da se SH ne može ni opovrgnuti ni dokazati u ZFC (v. [35], [77], [39], [74], [17]). U [14] Devlin je pokazao potpunu nezavisnost hipoteza CH, KH, SH.

Primetimo da u gornjim definicijama Aronszajnovih, Kurepinih i Suslinovih drveta nismo zahtevali normalnost, jer "normalizovanjem" ovih drveta uvek možemo dobiti i odgovarajuća normalna drveta, ako nam to bude potrebno (v. [17], [9]).

Ako je $(E, <)$ linearno uredjen skup, tada sa $tp(E, <)$ označavamo uredjajni tip skupa $(E, <)$. Ako je $\varphi = tp(E, <)$, tada je $|\varphi| = |E|$ i $\varphi^* = tp(E, >)$. Ako je $\Psi = tp(E_1, <_1)$ i $\varphi = tp(E_2, <_2)$, tada nam $\Psi \leq \varphi$ označava da postoji 1-1 preslikavanje $f: E_1 \to E_2$, koje čuva poredak. Ako je $\Psi \leq \varphi$, tada kažemo da φ sadrži Ψ.

Neka je $(E, <)$ proizvoljan linearno uredjen skup i $F \subseteq E$. F je gust u $(E, <)$, ako za svako $x,y \in E$, $x < y$ postoji $z \in F$, tako da je $x \leq z \leq y$. Kardinal $\min\left\{|F| \mid F \text{ je gust u } (E,<)\right\}$ zovemo gustina linearno uredjenog skupa $(E, <)$ i označavamo sa $d(E, <)$. Ako je $\varphi = tp(E, <)$, tada taj broj označavamo i sa $d(\varphi)$.

Uredjajni tip φ je realan ako predstavlja uredjajni tip nekog skupa realnih brojeva. φ je Aronszajnov tip, ako važi:

(i) $|\varphi| > \omega$;

(ii) $\omega_1, \omega_1^* \nleq \varphi$;

(iii) φ ne sadrži ni jedan realan neprebrojiv podtip.

Egzistencija Aronszajnovog tipa je prvi put dokazana u [45, str. 128; S(τ)], gde je on bio odredjen "prirodnim uredjenjem" nekog Aronszajnovog drveta. Klasa ovih tipova u [3] je označena sa Φ_3.

Kurepin tip je svaki uredjajni tip sa osobinama:

(1) $|\varphi| > \omega_1$;

(2) $d(\varphi) \leq \omega_1$;

(3) φ ne sadrži ni jedan realan neprebrojiv podtip.

2. ODNOS DRVETA I UREDJAJNIH TIPOVA

Neka je $(E,<)$ proizvoljan linearno uredjen skup. Induktivno možemo konstruisati drvo $\underline{T} = (T, \supset)$ nepraznih konveksnih delova linearno uredjenog skupa $(E, <)$, tako da važi:

(i) $T_o = \{E\}$;

(ii) ako je $I \in T_\alpha$ i $|I| > 1$, tada postoje disjunktni I_o, $I_1 \in T_{\alpha+1}$, tako da je $I = I_o \cup I_1$;

(iii) ako je $b \subset T$ lanac drveta $\underline{T}$ i ako je $\cap b \neq \phi$, tada je $\cap b \in T$.

Drvo $\underline{T} = (T, \supset)$ se zove drvo atomizacije linearno uredjenog skupa $(E, <)$. Ako je $\varphi = tp(E, <)$, tada $\underline{T}$ zovemo i drvetom atomizacije tipa φ (v. [45, str. 112. "développment complet de L'ensemble ordonné E"]).

Sada posmatramo obrnutu relaciju. Neka je $\underline{T} = (T, \leq_T)$ proizvoljno drvo. Svako čvorište $N \subseteq T$ uredimo relacijom $<_N$ dobrog uredjenja. Prirodno uredjenje drveta $\underline{T}$ je relacija $<$ definisana sa

$$x < y \text{ ako i samo ako je } x <_T y \text{ ili } x \|_T y \text{ i } z(x) <_N z(y),$$

gde je $z(x)$ $\leq_T$-najmanji element skupa $(\cdot,x)_T - (\cdot,y)_T$, $z(y)$ $\leq_T$-najmanji element skupa $(\cdot,y)_T - (\cdot,x)_T$ a $N = N(x,y)$ jedinstveno odredjeno čvorište drveta $\underline{T}$, kojem pripadaju tačke $z(x)$ i $z(y)$ (v. [45, str. 127. "ordinnance naturalle"]). Na taj način smo svakom drvetu $\underline{T}$ dodelili tip $\varphi = tp(T,<)$ njegovog prirodnog uredjenja.

Tvrdjenje 2.1. Ako je $\underline{T} = (T, \leq_T)$ Aronszajnovo drvo, tada je tip $\varphi = tp(T, <)$, njegovog prirodnog uredjenja, Aronsajnov. Ako je $\varphi = tp(E, <)$ Aronszajnov tip, tada je svako njegovo drvo atomizacije Aronszajnovo.

Dokaz: Prvi deo tvrdjenja je implicitno dokazan u [45, str. 128-9]. Dokažimo zato samo njegov drugi deo. Neka je $\underline{T} = (T, \supset)$ proizvoljno drvo atomizacije Aronszajnovog tipa $\varphi = tp(E, <)$. Svaki ω_1-lanac drveta $\underline{T}$ bi odredjivao jedan dobro uredjen ili inverzno dobro uredjen podskup od $(E, <)$, što bi bilo suprotno predpostavci $\omega_1, \omega_1^* \nleq \varphi$. Dakle, $\underline{T}$ nema ω_1-lanaca odakle, posebno, imamo da je $\gamma T \leq \omega_1$. Da bi dokazali da je $\underline{T}$ Aronszajnovo drvo dovoljno je još dokazati da je $|T_\alpha| \leq \omega$, za svako $\alpha < \gamma T$, jer će iz $|T| > \omega$, slediti $\gamma T = \omega_1$. Predpostavimo suprotno, tj. da je $|T_\alpha| \geq \omega_1$, za neko $\alpha < \gamma T$. Neka je α najmanji ordinal sa tom osobinom. Na osnovu osobina (i)-(iii) drveta $\underline{T}$ znamo da α mora biti graničan ordinal. Za svako $\underline{T} \in T_\alpha$ tačku $x(I) \in I$ odabiramo proizvoljno. Za svako $I \in T \restriction \alpha$ odaberimo kofinalan sa njim skup $A(I) \subseteq I$ i koinicijalan sa njim skup $B(I) \subseteq I$, tako da je $|A(I)|, |B(I)| \leq \omega$ (postoje, jer $\omega_1, \omega_1^* \nleq \varphi$). Neka je $D = \bigcup\{A(I) | I \in T \restriction \alpha\} \cup \bigcup\{B(I) | I \in T \restriction \alpha\}$ i neka je $F = D \cup \{x(I) | I \in T_\alpha\}$. Neposredno proveravamo da je D gust u $(F, < \cap F^2)$ i da je $|D| \leq \omega$. Dakle, φ sadrži neprebrojiv realan podtip $\Psi = tp(F, < \cap F^2)$, suprotno predpostavci da je φ Aronszajnov tip.∎

Tvrdjenje 2.2. Neka je $\underline{T} = (T, \leq_T)$ proizvoljno drvo i $\varphi = tp(T, \prec)$ tip njegovog prirodnog uredjenja. Tada φ sadrži Aronszajnov podtip ako i samo ako $\underline{T}$ sadrži Aronszajnovo poddrvo.

Neka je $\varphi = tp(E, <)$ proizvoljan tip i neka je $\underline{T} = (T, \supset)$ njegovo drvo atomizacije. Tada φ sadrži Aronszajnov podtip ako i samo ako $\underline{T}$ sadrži Aronszajnovo poddrvo.

Dokaz: Dokazujemo prvi deo tvrdjenja. Neka je $\underline{T} = (T, \leq_T)$ proizvoljno drvo i $\varphi = tp(T, \prec)$ tip njegovog prirodnog uredjenja. Predpostavimo da φ sadrži Aronszajnov podtip, tj. da postoji $S \subseteq T$, tako da je $\Psi = tp(S, \prec \cap S^2)$ Aronszajnov tip. Neka je $U = (\cdot, S] = \{x \in T | x \leq s$, za neko $s \in S\}$ i neka je $\underline{U} = (U, \leq_T \cap U^2)$. Predpostavimo prvo da postoji (najmanji) ordinal α, tako da je $|R_\alpha U| \geq \omega_1$. Lako proveravamo da α mora biti granični ordinal veći od 0. Za svako $x \in R_\alpha U$ odaberimo $s(x) \in S$ proizvoljno, tako da je $x \leq_T s(x)$. Po definiciji $\prec$ lako proveravamo da je $x \to s(x)$, $x \in R_\alpha U$ izomorfizam izmedju $(R_\alpha U, \prec \cap (R_\alpha U)^2)$, i jednog podskupa od $(S, \prec \cap S^2)$. Dakle, $tp(R_\alpha U, \prec \cap (R_\alpha U)^2)$ je, takodje Aronsajnov tip. Jasno je, da je $cf(\alpha) \leq \omega_1$ (na osnovu predhodnog tvrdjenja imamo da svaki Aronszajnov tip ima moć $= \omega_1$). Dokažimo da je $cf(\alpha) = \omega_1$. Predpostavimo suprotno, tj. $cf(\alpha) = \omega$ i da je $\{\alpha_n\}_{n\in\omega}$ strogo rastući niz ordinala koji konvergira ka α. Neka je $D = \cup\{R_{\alpha_n} U | n < \omega\}$ i $F = D \cup R_\alpha U$. Neposredno proveravamo da je D prebrojiv gust podskup linearno uredjenog skupa $(F, \prec \cap F^2)$, što znači da je $tp(F, \prec \cap F^2)$ realan. Odatle je i $tp(R_\alpha U, \prec \cap (R_\alpha U)^2)$ realan neprebrojiv tip, suprotno gornjoj činjenici da je on Aronszajnov. Dakle, $cf(\alpha) = \omega_1$. Neka je $\{\alpha_\delta | \delta < \omega_1\}$ strogo rastući niz koji konvergira ka α. Za svako $\delta < \omega_1$ neka je $V_\delta =$ $= \{x \in R_{\alpha\delta} U | \text{ skup } [x, \cdot)_T \cap R_\alpha U \text{ je neprebrojiv}\}$. Kako je $|R_{\alpha\delta} U| \leq \omega$, to je $V_\delta \neq \phi$ za svako $\delta < \omega_1$. Neka je $V = \cup \{V_\delta | \delta < \omega_1\}$ i neka je $\underline{V} =$ $= (V, \leq_T \cap V^2)$. Lako proveravamo da je $\underline{V}$ Aronszajnovo podrvo drveta $\underline{T}$. Predpostavimo sada da je $|R_\alpha U| \leq \omega$ za svako α. Neka je $C = \{\alpha |$ postoji $s \in S$, tako da je $s \in R_\alpha U\}$. Dakle, C je neprebrojiv skup ordinala, pa odbacivanjem jednog dela skupa S možemo predpostavidi da je $tp\ C = \omega_1$. Neka je $\{\alpha_\delta | \delta < \omega_1\}$ monotona numeracija skupa C. Za svako $\delta < \omega_1$ stavljamo $V_\delta = \{x \in R_{\alpha_\delta} U | \ |[x, \cdot)_T \cap S| \geq \omega_1\}$. Kako je $|R_{\alpha_\delta} U| \leq \omega$, za svako $\delta < \omega_1$ imamo da je $V_\delta \neq \phi$, za svako $\delta < \omega$. Neka je $V = \cup \{V_\delta | \delta < \omega_1\}$ i $\underline{V} = (V, \leq_T \cap V^2)$. Opet se nećemo zadržavati na jednostavnoj proveri da je $\underline{V}$ Aronszajnovo poddrvo drveta $\underline{T}$.

Predpostavimo sada da $\underline{T}$ sadrži Aronszajnovo poddrvo $\underline{S} = (S, \leq_T \cap S^2)$. Jednostavno se dokazuje da je $tp(S, < \cap S^2)$ Aronszajnov podtip tipa $\varphi = tp(T, <)$.

Dokažimo sada drugi deo tvrdjenja. Neka je $\varphi = tp(E, <)$ proizvoljan tip i neka je $\underline{T} = (T, \supset)$ njegovo drvo atomizacije. Predpostavimo da $\varphi = tp(E, <)$ sadrži Aronszajnov podtip, tj. da postoji $F \subseteq E$, tako da je $\Psi = tp(F, < \cap F^2)$ Aronszajnov tip. Neka je $U \doteq \{I \cap F | I \in T$ i $I \cap F \neq \phi\}$. Lako se proverava da je $\underline{U} = (U, \supset)$ drvo atomizacije skupa

$(F, < \cap F^2)$. Na osnovu predhodnog tvrdjenja zaključujemo da je $\underline{U}$ Aronszajnovo drvo. Za svako $J \in U$ sa $I(J)$ označavamo $\supset$ -najmanji element $I \in T$ sa osobinom $J = I \cap F$. Neka je $V = \{I(J) \mid J \in U\}$ i $\underline{V} = (V, \supset)$. Kako je $J \to I(J)$, $J \in U$ izomorfizam drveta $\underline{U}$ i $\underline{V}$, to je $\underline{V}$ Aronszajnovo poddrvo drveta $\underline{T}$.

Neka je sada $\underline{S} = S(, \supset)$ Aronszajnovo poddrvo drveta $\underline{T}$. Za svako $\alpha < \omega_1$ odaberimo $I_\alpha \in R_\alpha S$ pṙoizvoljan sa osobinom $|\{I \in S \mid I \subseteq I_\alpha\}| = \omega_1$. Kako je I_α neprebrojiv za svako $\alpha < \omega_1$, to induktivno po $\alpha < \omega_1$ možemo konstruisati niz $\{x_\alpha\}_{\alpha < \omega_1}$, tako da je $x_\alpha \in I_\alpha$ i $x_\alpha \neq x_\beta$, za $\alpha \neq \beta$. Neka je $F = \{x_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$. Dokažimo da je $tp(F, < \cap F^2) = \Psi$ Aronszajnov tip. Predpostavimo suprotno, tj. da je, na primer, $\omega_1 \leqslant \Psi$. To znači da postoji neprebrojiv $G \subseteq F$, tako da je $tp(G, < \cap G^2) = \omega_1$. Kako je G neprebrojiv i $|R_\alpha S| \leqslant \omega$, za svako $\alpha < \omega_1$, to možemo naći $J_\alpha \in R_\alpha S$, tako da je $|G \cap J_\alpha| \geqslant \omega_1$. Kako je $tp(G, < \cap G^2) = \omega_1$ lako dokazujemo da je $J_\alpha \in R_\alpha S$ jedini element slcja $R_\alpha S$ sa tom osobinom. To znači da je $\{J_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ jedan ω_1-lanac drveta $\underline{S}$, suprotno predpostavci da je ono Aronszajnovo. Analogno dokazujemo $\omega_1^* \nleqslant \Psi$ i da Ψ ne sadrži ni jedan realan neprebrojiv podtip. To znači da je Ψ Aronszajnov podtip φ. Ovo završava dokaz tvrdjenja 2.2. ∎

Jednostavan dokaz sledećeg tvrdjenja izostavljamo.

<u>Tvrdjenje 2.3.</u> Ako je $\underline{T} = (T, \leqslant_T)$ Cantorovo drvo tada je tip $\varphi = tp(T, \prec)$, njegovog prirodnog uredjenja neprebrojiv i realan. Ako je $\varphi = tp(E, <)$ neprebrojiv realan tip, tada $(E, <)$ možemo tako atomizirati da dobijemo Cantorovo drvo. ∎

<u>Tvrdjenje 2.4.</u> Neka je $\underline{T} = (T, \leqslant_T)$ proizvoljno drvo i $\varphi = tp(T, \prec)$ tip njegovog prirodnog uredjenja. Tada φ sadrži neprebrojiv realan podtip ako i samo ako $\underline{T}$ sadrži Cantorovo poddrvo.

Neka je $\varphi = tp(E, <)$ proizvoljan tip i neka je $\underline{T} = (T, \supset)$ njegovo drvo atomizacije. Tada φ sadrži neprebrojiv realan podtip ako i samo ako $\underline{T}$ sadrži Cantorovo poddrvo.

Dokaz: Dokazujemo prvi deo tvrdjenja. Neka je $\underline{T} = (T, \leqslant_T)$ proizvoljno drvo i neka je $\varphi = tp(T, \prec)$ tip njegovog prirodnog uredjenja. Predpostavimo da φ sadrži realan neprebrojiv podtip, tj. da postoji $S \subseteq T$, tako da je $tp(S, \prec \cap S^2)$ realan neprebrojiv tip. Neka je $U = (\cdot, S]_T$ i neka je $\underline{U} = (U, \leqslant_T \cap U^2)$. Dokažimo da postoji ordinal α, tako da je $|R_\alpha U| \geqslant \omega_1$. Predpostavimo suprotno, tj. da je $|R_\alpha U| \leqslant \omega$, za svako α. Neka je $C = \{\alpha \mid \text{postoji } s \in S, s \in R_\alpha U\}$. Kako je C neprebrojiv skup ordinala, to odbacujući jedan deo skup S možemo predpostaviti da je tp $C = \omega_1$. Neka je $C = \{\alpha_\delta \mid \delta < \omega_1\}$ monotona numeracija ovog skupa. Neka je $D \subseteq S$, takav prebrojiv skup, da je D gust u $(S, \prec \cap S^2)$ (jer je $tp(S, \prec \cap S^2)$ realan tip). Neka je $\delta' < \omega_1$, takav ordinal da je $D \subseteq \bigcup \{R_{\alpha_\delta} U \mid \delta < \delta'\}$. Kako je S neprebrojiv a $R_{\alpha_{\delta'}} U$ prebrojiv, to postoji $x \in R_{\alpha_{\delta'}} U$, tako da je $|[x, \cdot)_T \cap S| \geqslant \omega_1$. Medjutim, to znači da je $[x, \cdot)_T \cap S$ konveksan skup linearno uredjenog skupa $(S, \prec \cap S^2)$ moći $\geqslant 2$, koji ne sadrži ni jedan element iz D, suprotno predpostavci da je D gust u $(S, \prec \cap S^2)$. Dakle, $|R_\alpha U| \geqslant \omega_1$ za neko α. Neka je α najmanji ordinal sa tom osobinom. Lako proveravamo da je α granični ordinal veći od 0. Dokažimo da je $cf(\alpha) = \omega$. Ako za svako $x \in R_\alpha U$ fiksiramo tačku $s(x) \in S$, sa osobinom $x \leqslant_T s(x)$, dobijamo izomorfizam $x \to s(x)$, $x \in R_\alpha U$ linearno uredjenog skupa $(R_\alpha U, \prec \cap (R_\alpha U)^2)$ sa podskupom od $(S, \prec \cap S^2)$. To znači da je $(R_\alpha U, \prec \cap (R_\alpha U)^2)$ neprebojiv realan tip. Neka je $X \subseteq R_\alpha U$ prebrojiv gust skup u $(R_\alpha U, \prec \cap (R_\alpha U)^2)$. Svakom paru $x, y \in X$, $x \neq y$ odgovara ordinal $\beta(x,y) < \alpha$, tako da sloj $R_{\beta(x,y)} U$ sadrži čvorište koje odlučuje o poredku tačaka x i y u relaciji $\prec$ (v. gornju definiciju uredjenja $\prec$). Lako dokazujemo da skup $\{\beta(x,y) \mid x, y \in X, x \neq y\}$ mora biti neograničen u α, što znači da je $cf(\alpha) = \omega$. Neka je $\{\alpha_n\}_{n\in\omega}$ strogo rastući niz ordinala koji konvergira ka α, neka je $V = (R_\alpha U) \cup \bigcup \{R_{\alpha_n} U \mid u < \omega\}$ i neka je $\underline{V} = (V, \leqslant_T \cap V^2)$. Dakle, $\underline{V}$ je Cantorovo poddrvo drveta $\underline{T}$.

Predpostavimo sada da $\underline{T}$ sadrži Cantorovo poddrvo $\underline{S} = (S, \leqslant_T \cap S^2)$. Tada se jednostavno dokazuje da je $tp(S, \prec \cap S^2)$ neprebrojiv realan podtip od $\varphi = tp(T, \prec)$.

Dokažimo sada drugi deo tvrdjenja Neka je $\varphi = tp(E, <)$ proizvoljan tip i neka je $\underline{T} = (T, \supset)$ njegovo drvo atomizacije. Predpostavimo da φ sadrži neprebrojiv realan podtip, tj. da postoji $F \subseteq E$, tako da je $tp(F, < \cap F^2)$ neprebrojiv realan tip. Neka je $U = \{I \in T | I \cap F \neq \phi\}$, tada je U početni komad od T. Naime, $U = (\cdot, X]_T$, gde je $X = \{\{x\} | x \in F\} \subseteq T$. Analogno prvom delu dokaza nalazimo granični ordinal $\alpha > 0$ kofinalnosti ω, tako da je $|R_\alpha U| \geq \omega_1$, dok je $|R_\beta U| \leq \omega$, za svako $\beta < \alpha$. Neka je $\{\alpha_n\}_{n\in\omega}$ strogo rastući niz koji konvergira ka α, neka je $V = (R_\alpha U) \cup \bigcup\{R_{\alpha_n} U | n < \omega\}$ i neka je $\underline{V} = (V, \supset)$, tada je $\underline{V}$ traženo Cantorovo poddrvo drveta T.

Neka je sad $\underline{V} = (V, \supset)$ Cantorovo poddrvo drveta $\underline{T}$. Za svako $I \in R_\omega V$ fiksiramo tačku $x(I) \in I$. Neka je $F = \{x(I) | I \in R_\omega V\}$. Dokažimo da je $tp(F, < \cap F^2)$ neprebrojiv realan podtip tipa φ. Neka su $I_0, I_1 \in V$ proizvoljna dva različita elementa nekog čvorišta drveta $\underline{V}$. Stavimo $I_0 \prec I_1$ ako i samo ako je $x < y$ za svako $x \in I_0$, $y \in I_1$. Ovakvo uredjenje čvorišta drveta $\underline{V}$ inducira prirodno uredjenje $\prec$ drveta. Neposredno proveravamo da je $V \restriction \omega$ prebrojiv gust skup u $(V, \prec)$, što znači da je $tp(V, \prec)$ realan tip. Odatle je i $tp(F, < \cap F^2)$ realan tip, jer je (jasno) $x(I) \to I$, $I \in R_\omega V$ izomorfizam $(F, < \cap F^2)$ i $(R_\omega V, \prec \cap (R_\omega V))^2$. Ovim bi završili dokaz tvrdjenja 2.4. ∎

<u>Tvrdjenje 2.5.</u> Ako je $\underline{T} = (T, \leq_T)$ Kurepino drvo i ako je $\prec$ leksikografsko uredjena skupa $E = E(T)$ svih kofinalnih lanaca drveta $\underline{T}$, tada je $\varphi = tp(E, \prec)$ Kurepin tip.

Ako je $\varphi = tp(E, <)$ proizvoljan Kurepin tip, tada $(E, <)$ možemo tako atomizirati da dobijeno drvo bez zadnjeg sloja bude Kurepino drvo.

<u>Dokaz:</u> Daćemo samo skicu dokaza drugog dela tvrdjenja. Neka je $\varphi = tp(E, <)$ Kurepin tip, tj. uredjajni tip sa osobinama: $|\varphi| > \omega_1$, $d(\varphi) \leq \omega_1$ i φ ne sadrži ni jedan realan neprebrojiv podtip. Predpostavimo da je $(E, <)$ gust linearno uredjen skup (mada to nije nužno) i da je $\{x_\alpha | \alpha < \omega_1\}$ numeracija jednog njegovog gustog podskupa. Traženo drvo ćemo definisati induktivno po slojevima T_α, $\alpha \leq \omega_1$. Neka je $T_0 = \{E\}$. Predpostavimo da je $\alpha < \omega_1$ i da smo T_β, $\beta < \alpha$ već konstruisali pri če-

mu je $|T_\beta| \leq \omega$. Neka je $\alpha = \beta+1$. Neka je $I \in T_\beta$ i $|I| > 1$. Neka je $x \in I$ unutrašnja tačka ovog skupa, pri čemu u slučaju da je x_β unutrašnja tačka skupa I uzimamo $x = x_\beta$. Neka je $T_o = I \cap (\cdot, x]_E$ i $I_1 = I \cap (x, \cdot)_E$. Neka je $T_\alpha = \bigcup\left\{\{I_o, I_1\} \mid I \in T_\beta, |I| > 1\right\}$. Svaka tačka $x \in E$ odredjuje lanac $b(x) = \{I \in T/\alpha \mid I \ni x\}$, koji ima dužinu $< \alpha$ jedino u slučaju $\{x\} \in b(x) \in T \mid \alpha$. Kako je $|T \mid \alpha| \leq \omega$ i $|E| > \omega_1$ mora postojati $x \in E$ tako da je $b(x)$ α-lanac i $\cap\, b(x) \in T_\beta$ ima bar dva elementa. To znači da je $T_\beta \neq \phi$. Jasno je da je $|T_\alpha| \leq 2|T_\beta| \leq \omega$. Predpostavimo sada da je $\alpha < \omega_1$ granični ordinal. Tada stavljamo

$$T_\alpha = \left\{\cap\, b \mid b \text{ je } \alpha\text{-lanac iz } T \mid \alpha \text{ i } \cap\, b \neq \phi\right\}.$$

Kao u slučaju $\alpha = \beta+1$ dokazujemo nepraznost skupa T_α. Zato dokažimo samo da je $|T_\alpha| \leq \omega$. Predpostavimo suprotno, tj. da je $|T_\alpha| \geq \omega_1$. Za svako $I \leq T_\alpha$ fiksiramo tačku $x(I) \in I$. Neka je $F = \{x(I) \mid I \in T_\alpha\}$. Dokažimo da je $tp(F, < \cap F^2)$ realan neprebrojiv podtip tipa φ, čime ćemo dobiti protivrečnost sa predpostavkom da je φ Kurepin tip. Neka su I_o, I_1 elementi istog čvorišta drveta $\underline{T} \mid (\alpha+1)$. Neka je $I_o \prec I_1$ ako je $x < y$ za svako $x \in I_o$, $y \in I_1$. Neka je $\prec$ relacija prirodnog uredjenja drveta $\underline{T} \mid (\alpha+1)$ inducirana ovim uredjenjima čvorišta. Jednostavno proveravamo da je $T \mid \alpha$ prebrojiv gust skup u $(T \mid (\alpha+1), \prec)$, što znači da je $tp(T \mid (\alpha+1), \prec)$ realan tip. Kako je $x(I) \to I$, $I \in T_\alpha$ izomorfizam linearno uredjenog skupa $(F, < \cap F^2)$ i $(T_\alpha, \prec)$ imamo da je $tp(F, < \cap F^2)$ realan tip, što je i trebalo dobiti . Dakle $|T_\alpha| \leq \omega$. Neka je

$$T_{\omega_1} = \left\{\cap\, b \mid b \subseteq T \mid \omega_1 \text{ je } \omega_1\text{-lanac i } \cap\, b \neq \phi\right\}.$$

Neka je $T = \bigcup\left\{T_\alpha \mid \alpha \leq \omega_1\right\}$ i $\underline{T} = (T, \supset)$. Na osnovu konstrukcije jednostavno proveravamo da je $\underline{T}$ drvo atomizacije skupa $(E, <)$ i da je $\underline{T} \mid \omega_1$ Kurepino drvo.∎

3. PODRVETA ω_1-DRVETA

U ovom odeljku ćemo dati pregled uglavnom poznatih rezultata. Posmatraćemo egzistenciju Aronszajnovih i Cantorovih poddrveta nekih vrsta ω_1-drveta. Tu ćemo se ograničiti na (ω_1, ω_1)-drveta i ω_1-drveta, koja nemaju ω_1-lanaca. Sledeća teorema je verovatno prva teorema tog tipa (v. [48]).

Teorema 3.1. (Kurepa) Postoji normalno (ω_1,ω_1)-drvo $\underline{T}$ sa osobinama:

(i) $\underline{T}$ ne sadrži ni jedno Aronszajnovo podrvo;

(ii) ako je $\underline{T}'$ proizvoljno normalno (ω_1,ω_1)-drvo, tada ili $\underline{T}'$ sadrži jedno Aronszajnovo poddrvo ili $\underline{T}'$ sadrži poddrvo izomorfno drvetu $\underline{T}$. ∎

Primetimo da ni jedno (ω_1,ω_1)-drvo ne sadrži Cantorovo poddrvo. O prirodnim generalizacijama teoreme 3.1. videti [52] i [53]. Dokaz sledeće teoreme se nalazi u [10].

Teorema 3.2. (Jansen) Predpostavimo V=L. Tada postoji Kurepino drvo, koje ne sadrži ni jedno Aronszajnovo poddrvo. ∎

Ova teorema ima vrlo interesantne posledice o kojima ćemo govoriti nešto kasnije. U §5 ćemo govoriti o njenim generalizacijama.

Sada ćemo posmatrati egzistenciju Aronszajnovih poddrveta ω_1-drveta $\underline{T}$ sa osobinama: (i) $\gamma[t]_T = \omega_1$, za svako $t \in T$; (ii) $\underline{T}$ nema ni jedan ω_1-lanac.

U slučaju da (ii) zamenimo jačim uslovom (ii)': na T postoji strogo rastuća realna funkcija, dobijamo Kurepin "Problème 1" iz [47, str. 16o].

Neka je $C \subseteq \omega_1$ stacionaran podskup čiji je komplement, takodje, stacionaran. Neka je T skup svih zatvorenih podskupova od C. Neka je s, $t \in T$, tada stavljamo $s =\!| \; t$ ako i samo ako je $s = t \cap (\max(s)+1)$. Jasno je, da je $(T, =\!|)$ drvo. Da je $\gamma T = \omega_1$ možemo izvesti, na primer, iz leme 2 iz [15]. $\underline{T}$ nema ω_1-lanaca, jer bi svaki od njih odredjivao zatvoren i neograničen podskup od C što je nemoguće. Dokažimo da $\underline{T}$ ne sadrži Aronszajnovo poddrvo. Predpostavimo suprotno, tj. da je $\underline{S} = (S, =|)$ Aronszajnovo poddrvo drveta $\underline{T}$. Možemo predpostaviti da je S početni komad od T. Neka je

$$D = \{\alpha < \omega_1 \mid \lim(\alpha) \wedge (t \in S \mid \alpha \rightarrow t \subseteq \alpha)\},$$

tada je D zatvoren i neograničen podskup od ω_1. Kako je ω_1-C stacionaran to postoji $\alpha \in D \cap (\omega_1 - C)$. Neka je $t \in R_\alpha S$ proizvoljan element. Neka je $\alpha_t = \max(t)$. Neposredno na osnovu definicije skupa D sledi da je $\alpha_t = \alpha \in \omega_1 - C$, što je suprotno predpostavci da je $t \subseteq C$.

Sledeći primer drveta sa istim osobinama pripada J.E.Baumgartneru. Neka je T skup svih funkcija f, takvih da je za neko $\alpha < \omega_1$, f strogo rastuća i neprekidna funkcija iz α u ω_1, tako da je $f(\beta) > \beta$, za svako $\beta < \alpha$. Dokaz da je $(T, \subset)$ jedno ω_1-drvo bez ω_1-lanaca i Aronszajnovih poddrveta je analogan dokazu sličnog u prvom primeru. Što se tiče Kurepinog "Problème 1" sledeća teorema je dokazana u našem magistarskom radu.

Teorema 3.3. Postoji ω_1-drvo $\underline{T}$ sa sledećim osobinama:

(i) $\gamma[t]_T = \omega_1$, za svako $t \in T$;

(ii) $\underline{T}$ ne sadrži ni jedno Aronszajnovo i Cantorovo poddrvo:

(iii) na T postoji strogo rastuća realna funkcija.∎

Sledeća teorema nam daje informaciju više o mogućnosti konstrukcije drveta sa gornjim osobinama.

Teorema 3.4. Neka važi $\diamond$. Svako normalno ω_1-drvo kod koga su čvorišta izolovanih visina neprebrojiva sadrži poddrvo $\underline{T}$ sa osobinama:

(i) $\gamma[t]_T = \omega_1$, za svako $t \in T$;

(ii) $\underline{T}$ ne sadrži ni jedan ω_1-lanac i ni jedno Aronszajnovo poddrvo.

Dokaz: Neka je $\{X_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ niz iz $\diamond$. Lako se uveravamo da se možemo ograničiti na posmatranje normalnih ω_1-drveta sa neprebrojivim čvorištima izolovanog ranga, koja imaju oblik $\underline{S} = (\omega_1, \leq_S)$, pri čemu iz $\alpha \leq_S \beta$ sledi $\alpha \leq \beta$ (ordinalno).

Definišimo skupove U_α, $\alpha < \omega_1$. Za $\alpha = 0$ ili $\alpha = \beta+1$ stavljamo $U_\alpha = \phi$. Neka je sada α graničan ordinal. Ako X_α nije početni komada od

$S \restriction \alpha$, pri čemu je visina drveta $(X_\alpha, \leq_S \cap (X_\alpha)^2)$ jednaka α, tada opet stavljamo $U_\alpha = \phi$. Predpostavimo sada da je $X_\alpha \subseteq S \restriction \alpha$ početni komad i da je visina drveta $(X_\alpha, \leq_s \cap (X_\alpha)^2)$ jednaka α. Neka je B_α kolekcija svih maksimalnih α-lanaca drveta $(X_\alpha, \leq_s \cap (X_\alpha)^2)$. Neka je

$$U_\alpha = \bigcup \left\{ (b, \cdot)_S \mid b \in B_\alpha \right\} .$$

gde je $(b,\cdot)_S = \left\{ y \in S \mid x <_S y, \text{ za svako } x \in b \right\}$. Na kraju stavljamo

$$T = S - \bigcup \left\{ U_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \right\}$$

(podsetimo se da je $S = \omega_1$). Neposredno proveravamo da drvo $\underline{T} = (T, \leq_S \cap T^2)$ zadovoljava uslove (i)-(ii). ∎

4. PODRVETA ω_2-ARONSZAJNOVIH DRVETA

Sva ω_2-Aronszajnova drveta konstruisana uz predpostavku CH (v. [75] ili [36]) nužno su sadržavala i Aronszajnovo i Cantorovo poddrvo. Zato je prirodno postaviti pitanje egzistencije ω_2-Aronszajnovih drveta koja ne sadrže ni jedno Aronszajnova i Cantorovo poddrvo. Sledeća teorema daje jedan odgovor na to pitanje.

Teorema 4.1. Predpostavimo $\square$. Tada postoji ω_2-Aronszajnovo drvo koje ne sadrži ni jedno Aronszajnovo i Cantorovo poddrvo.

Dokaz: Neka je $D_1 = \omega_1^* + \omega_1$ i neka je R^1 skup svih konačnih nizova elemenata iz D_1. Dakle, imamo da je $|D_1| = |R^1| = \omega_1$. Neka su $a = (a_0, \ldots, a_\kappa)$ i $b = (b_0, \ldots, b_1)$ proizvoljni elementi skupa R^1. Stavimo da je

$$a < b \quad \text{akko je} \quad a \text{ početni komad od } b \text{ ili } a_i < b_i, \text{ gde je}$$
$$i = \min \left\{ j \mid a_j \neq b_j \right\} .$$

Lako se proverava da je $<$ relacija linearnog uredjenja na R^1 i da je $(R^1, <)$ gust linearno uredjen skup.

Lema 4.2. ([55. Theorem 2.4.]). (i) svaki interval iz R^1 sadrži podinterval sličan sa $(R^1, <)$ (kvazihomogenost); (ii) svaki prazan Dedekindov rez $X|Y$ ima tip (ω, ω^*), tj. X je kofinalno sa ω a Y sa ω^*. (iii) $\alpha \leq tp(R^1, <)$, za svako $\alpha < \omega_2$ i $\omega_2 \nleq tp(R^1, <)$. ∎

Neka je $(\bar{R}^1, <)$ Dedekindova komplefifikacija linearno uredjenog skupa $(R^1, <)$ i neka je $Q^1 = \bar{R}^1 - R^1$. Na osnovu predhodne leme zaključujemo da je $(Q^1, <)$ gust linearno uredjen skup, da sadrži α za svako $\alpha < \omega_2$ a ne sadrži ω_2 (po tipu) i da svaka tačka $x \in Q'$ ima u $(\bar{R}^1, <)$ i levi i desni karakter jednak ω.

Neka je σQ^1 skup svih ograničenih dobro uredjenih podskupova od Q^1 i neka je $=|$ relacija "biti početni komad" na σQ^1 (tj. $s =| t$ akko je s početni komad od t; v. [55], [56]). Za svako $z \in Q^1$ unapred fiksiramo strogo opadajući niz $\{z_n\}$ tačaka iz $\bar{R}^1$, koji konvergira ka z, tako da je levi karakter tačke z_n u $\bar{R}^1$ jednak ω_1, za svako $n \in \omega$. Neka je $\prec$ fiksirano dobro uredjenje skupa Q^1 po tipu (Q^1) $(=2^\omega)$. Za svako $z \in Q^1$ i $n \in \omega$ unapred fiksiramo strogo rastući niz $\{x(z,n,\alpha) | \alpha < \omega_1\}$ elemenata iz Q^1 na sledeći način. Neka je $x(z,n,o) = z$. Predpostavimo da smo konstruisali $x(z,n,\beta) < z_n$, za svako $\beta < \alpha < \omega_1$. Kako je levi karakter tačke z_n jednak ω_1 to je $\sup\{x(z,n,\beta) | \beta < \alpha\} < z_n$ (supremum je uzet u $(\bar{R}^1, <)$). Neka je $x(z,n,\alpha)$ $\prec$-najmanji $x \in Q^1$ sa osobinom $x(z,n,\beta) < x < z_n$, za svako $\beta < \alpha$ (Q^1 je gust u $(\bar{R}^1, <)$).

Traženo drvo $\underline{T}$ će biti poddrvo drveta $(\sigma Q^1, =|)$ i konstruisaćemo ga induktivno po slojevima T_α, $\alpha < \omega_2$. Svaki element $t \in T$ će imati maksim.. Istovremeno ćemo konstruisati preslikavanje $H: T \to \omega_2$, tako da iz $s -| t$, sledi $H(s) < H(t)$.

Neka je $T_o = \{\phi\}$ i $H(\phi) = 0$. Predpostavimo da je $0 < \alpha < \omega_2$ i da smo T_β, $\beta < \alpha$ već konstruisali, tako da je $\underline{T} | \alpha$ normalno (α, ω_2)--drvo, pri čemu važi sledeći induktivni uslov:

I_α: za svako $\beta < \gamma < \alpha$, $s \in T_\beta$ i $x \in \bar{R}^1$, tako da je $\max(s) < X$, postoji $t \in T_\gamma$, tako da je $s -| t$ i $\max(t) < x$.

Neka je $\{C_\xi | \lim(\xi), \xi < \omega_2\}$ niz iz □, tj. niz sa osobinama:

(i) C_ξ je zatvoren i neograničen podskup od ξ;

(ii) ako je $cf(\xi) < \omega_1$, tada je $|C_\xi| < \omega_1$;

(iii) ako je γ granična tačka skupa C_ξ, tada je $C_\gamma = C_\xi \cap \gamma$.

Kako je $|R^1| = \omega_1$ to je gustina $(\bar{R}^1, <)$ a time i $(Q^1, <)$ manja ili jednaka ω_1. Zato fiksiramo skup $P \subseteq Q^1$ moći ω_1, koji je gust u $(R^1, <)$.

Slučaj 1. $\alpha = \beta+1$. Za svako $t \in T_\beta$ definišemo $succ(t) = \left\{t \cup \{x\} \mid x \in P \text{ i } x > \max(t)\right\}$. Neka je $T_\alpha = \cup\left\{succ(t) \mid t \in T_\beta\right\}$. Preslikavanje H produžavamo na T_α proizvoljno na minimalan način. Jasno je, da je $|T_\alpha| \leq \omega_1$ i da važi $I_{\alpha+1}$.

Slučaj 2. $\lim(\alpha)$. Neka je $\left\{\gamma_\delta \mid \delta < \xi\right\}$ monotona numeracija skupa C_α iz $\square$. Na osnovu (ii) iz $\square$ imamo da je $\xi < \omega_1$. Prvo ćemo za svako $t \in T \restriction C_\alpha$ $(= \cup\left\{T_\beta \mid \beta \in C_\alpha\right\})$ i $n \in \omega$ odrediti maksimalni α-lanac $b^\alpha_{t,n}$ drveta $\underline{T} \restriction \alpha$, koji sadrži t. Zatim ćemo T_α definisati kao skup produženja lanaca $b^\alpha_{t,n}$, $t \in T \restriction C_\alpha$, $n \in \omega$. U tom cilju ćemo induktivno definisati niz $\left\{p^{t,n}_\delta \mid \delta(t) \leq \delta < \xi\right\}$ elemenata iz $T \restriction \alpha$, gde je $\delta(t) < \xi$ jedinstven δ sa osobinom $t \in T_{\gamma\delta}$. Neka je

$$p^{t,n}_{\delta(t)} = t$$

$p^{t,n}_{\delta+1} = q \in T_{\gamma\delta+1}$ sa najmanjim $H(q)$, koji ima osobine $p^{t,n}_\delta \dashv q$ i $\max(q) \leq x(\max(t), n, \delta+1)$.

Primetimo da na osnovu I_α ovakav q uvek postoji. Ako je δ graničan ordinal, tada definišemo

$p^{t,n}_\delta = q \in T_{\gamma_\delta}$, tako da je $p^{t,n}_{\delta'} \dashv q$, za svako $\delta' < \delta$ i $\max(q) \leq (\max(t), n, \delta)$,

ako takav q postoji. U suprotnom indukciju definisanja niza $\left\{p^{t,n}_\delta \mid \delta(t) \leq \delta < \xi\right\}$ završavamo. Ako indukcija nije nigde obustavljena definisani niz $\left\{p^{t,n}_\delta \mid \delta(t) \leq \delta < \xi\right\}$ jednostrano odredjuje jedan maksimalni α-lanac $b^\alpha_{t,n}$ drveta $\underline{T} \restriction \alpha$, koji sadrži t. Ako je $cf(\alpha) = \omega$, tada stavljamo

$T_\alpha = \left\{ (\cup b^\alpha_{t,n}) \cup \left\{ x(\max(t),n,\xi) \right\} \middle| \ t \in T \restriction C_\alpha,\ n \in \omega \ \text{i} \ b^\alpha_{t,n} \ \text{je definisan} \right\}$

Ako je $cf(\alpha) = \omega_1$, tada stavljamo

$T_\alpha = \left\{ (\cup b^\alpha_{t,n}) \cup \{x\} \middle| \ x \text{ je } \prec\text{-najmanji element iz } Q^1 \text{ veći od } \sup(\cup b^\alpha_{t,n}),\ t \in T \restriction C_\alpha,\ n \in \omega \text{ i } b^\alpha_{t,n} \text{ je definisan} \right\}.$

Kako je C_α kofinalan sa α, to će biti zadovoljeni svi induktivni uslovi ukoliko pokažemo da je konstrukcija gornjeg niza $\left\{ p^{t,n}_\delta \middle| \delta(t) \leq \delta < \xi \right\}$, $t \in T \restriction C_\alpha$, $n \in \omega$ uvek moguća uz predpostavku da je bila moguća za manje granične ordinale.

Predpostavimo suprotno, tj. da je za neko $t \in T \restriction C_\alpha$ i $n \in \omega$ konstrukcija niza $\left\{ p^{t,n}_\delta \middle| \delta(t) \leq \delta' < \xi \right\}$ obustavljena na koraku $\delta < \xi$. Kako smo već napomenuli δ mora biti graničan ordinal. Na osnovu (iii) iz $\square$ imamo da je $C_{\gamma_\delta} = C_\alpha \cap \gamma_\delta = \left\{ \gamma_{\delta'} \middle| \delta' < \delta \right\}$.

Ukoliko definišemo niz $\left\{ q^{t,n}_{\delta'} \middle| \delta(t) \leq \delta' < \delta \right\}$ za ordinal γ_δ $(< \alpha)$ na isti način na koji smo definisali niz $\left\{ p^{t,n}_{\delta'} \middle| \delta(t) \leq \delta' < \xi \right\}$, to se lako možemo uveriti da je $q^{t,n}_{\delta'} = p^{t,n}_{\delta'}$, za svako $\delta(t) \leq \delta' < \delta$ (primetimo da je $t \in T \restriction C_{\gamma_\delta}$ i da je definicija $\delta(t)$ invarijantna).

Niz $\left\{ q^{t,n}_{\delta'} \middle| \delta(t) \leq \delta' < \delta \right\}$ $\left(= \left\{ p^{t,n}_{\delta'} \middle| \delta(t) \leq \delta' < \delta \right\}\right)$ odredjuje maksimalni γ_δ-lanac $b^{\gamma_\delta}_{t,n}$ drveta T_{γ_δ}, koji smo po predpostavci produžili, što protivreči predpostavci da $p^{t,n}_\delta$ nismo mogli naći.

Dakle, indukciju možemo dalje nastaviti. Neka je

$$T = \cup \left\{ T_\alpha \middle| \alpha < \omega_2 \right\} \quad \text{i}$$

$\underline{T} = (T, =\!|)$, tada je, po konstrukciji, $\underline{T}$ jedno ω_2-Aronszajnovo drvo.

Dokažimo prvo da $\underline{T}$ ne sadrži ni jedno Aronszajnovo poddrvo. Predpostavimo suprotno, tj. da imamo jedno Aronszajnovo poddrvo $\underline{S} = (S, =\!|)$ drveta $\underline{T}$. Lako proveravamo da možemo predpostaviti da postoji ordinal $\alpha < \omega_2$ kofinalnosti ω_1, tako da je $R_\delta S \subseteq T_{\gamma_\delta}$, za svako $\delta < \omega_1$, gde je $\left\{ \gamma_\delta \middle| \delta < \omega_1 \right\}$ monotona numeracija skupa C_α iz $\square$.

Za svaki granični ordinal $\delta < \omega_1$ odaberimo $s_\delta \in R_\delta S$ proizvoljno.

Po gornjoj konstrukciji znamo da postoji $\delta' < \delta$, $t_\delta \in R_{\delta'} S \subseteq T_{\gamma_{\delta'}}$ i $n(\delta) < \omega$, tako da je s_δ jedinstveno proširenje maksimalnog γ_δ-lanca $b^{\gamma_\delta}_{t_\delta, n(\delta)}$. Označimo δ' sa $h(\delta)$. Time smo definisali regresivno preslikavanje $h,.\ \{\delta < \omega_1 | \lim(\delta)\} \to \omega_1$. Dakle, postoji stacionaran $D \subseteq \{\delta < \omega_1 | \lim(\delta)\}$ i $\delta_0 < \omega_1$, tako da je $h''(D) = \{\delta_0\}$. Pored toga možemo predpostaviti da je $n(\delta) = n$, za svako $\delta \in D$ i da je $t_\delta = t \in R_{\delta_0} S \subseteq T_{\gamma_{\delta_0}}$, za svako $\delta \in D$ (jer je $R_{\delta_0} S$ prebrojiv).

Neka su $\delta, \delta' \in D$, $\delta < \delta'$ proizvoljni. Kako su δ i δ' granični ordinali, to je $C_{\gamma_\delta} = C_\alpha \cap \gamma_\delta$ i $C_{\gamma_{\delta'}} = C_\alpha \cap \gamma_{\delta'}$, odakle je $C_{\gamma_\delta} = C_{\gamma_{\delta'}} \cap \gamma_\delta$.

Po konstrukciji neposredno proveravamo da je $b^{\gamma_\delta}_{t,n}$ početni komad od $b^{\gamma_{\delta'}}_{t,n}$, odakle je $s_\delta \dashv s_{\delta'}$. Ovo dokazuje da je $\{s_\delta | \delta \in D\}$ jedan ω_1 -lanac drveta $\underline{S}$, suprotno predpostavci da je ono Aronszajnovo drvo.

Dokažimo sada da $\underline{T}$ ne sadrži Cantorovo poddrvo. Predpostavimo suprotno, tj. da imamo jedno Cantorovo poddrvo $\underline{S} = (S, =\!|)$ drveta $\underline{T}$. Lako proveravamo da možemo predpostaviti da postoji graničan ordinal $\alpha < \omega_2$ kofinalnosti ω i strogo rastući niz $\{\alpha_n\}_{n \in \omega}$ koji konvergira ka α, tako da je $R_\omega S \subseteq T_\alpha$ i $R_n S \subseteq T_{\alpha_n}$, za svako $n < \omega$. Neka je $C_\alpha = \{\gamma_\delta | \delta < \xi\}$ monotona numeracija skupa C_α iz $\square$. Na osnovu (ii) iz $\square$ imamo da je $\xi < \omega_1$, tj. da je C_α prebrojiv. Za svako $\delta < \xi$ stavljamo

$$B_\delta = \{t \in T_{\gamma_\delta} | t \dashv s, \text{ za neko } s \in R_\omega S\}.$$

Kako je $B_\delta = \{t \in T_{\gamma_\delta} | t =\!| s, \text{ za neko } s \in S \mid \omega\}$ imamo da je $|B_\delta| \leqslant \omega$, za svako $\delta < \xi$. Dakle skup $B = \bigcup\{B_\delta | \delta < \xi\}$ je najviše prebrojiv. Po konstrukciji znamo da je svaka tačka $s \in R_\omega S$ jedinstveno proširenje lanca oblika $b^\alpha_{t,n}$, za neko $t \in B$ i $n \in \omega$. Neka je $(t,n) = l(s)$. Time smo definisali jedno 1-1 preslikavanje $l\colon R_\omega S \to B \times \omega$, što je nemoguće, jer je $|R_\omega S| \geqslant \omega_1$ i $||B \times \omega|| \leqslant \omega$. Dakle, $\underline{T}$ ne sadrži ni jedno Cantorovo poddrvo. Ovim bi završili dokaz teoreme 4.1.■

Drvo $\underline{T}$ je specijalno $\underline{\kappa^+\text{-Aronszajnovo drvo}}$ ($\kappa \geqslant \omega$ proizvoljan kardinal) ako je ono κ^+-Aronszajnovo i ako postoji preslikavanje $f\colon T \to \kappa$ sa osobinom $f(x) \neq f(y)$, za svako $x,y \in T$, $x <_T y$. Ako je $\underline{T}$ drvo koje smo konstruisali u dokazu teoreme 4.1. tada je $g(t) = \max(t)$ strogo rastuće preslikavanje iz T u $(Q^1, <)$. Neka je $U = \bigcup\{T_{\alpha+1} \mid -1 \leqslant \alpha < \omega_2\}$ i $\underline{U} = (U, =|)$. Dokažimo da je $\underline{U}$ specijalno ω_2-Aronszajnovo drvo. Dovoljno je naći strogo rastuće preslikavanje iz $\bigcup\{T_{\alpha+1} \mid 0 \leqslant \alpha < \omega_1\}$ u $(R^1, <)$. Neka je $t \in T_{\alpha+1}$, $0 \leqslant \alpha < \omega_1$ i neka je $\bar{t} \in T_\alpha$ jedinstven element sa osobinom $\bar{t} -| \, t$. Kako je $g(\bar{t}) < g(t)$, to možemo naći $f(t) \in R^1$ tako da je $g(\bar{t}) < f(t) < g(t)$, jer je R^1 gust u $(\bar{R}^1, <)$. Neposredno proveravamo da je f traženo preslikavanje. Dakle, važi sledeća teorema.

Teorema 4.1'. Predpostavimo $\square$. Tada postoji specijalno ω_2-Aronszajnovo drvo koje ne sadrži ni jedno Aronszajnovo i Cantorovo poddrvo. ∎

Teorema 4.1. ima prirodno uopštenje, pri čemu se i dokaz prenosi.

Teorema 4.3. Neka je $\kappa > \omega$ regularan kardinal i neka važi $\square_\kappa$. Tada postoji κ^+-Aronszajnovo drvo koje ne sadrži ni jedno κ-Aronszajnovo poddrvo i ni jedno λ-Cantorovo poddrvo u slučaju da je $\lambda^+ = \kappa$. ∎

Kako smo već jednom spomenuli ω_2-Aronszajnovo drvo je moguće konstruisati uz predpostavku CH. Zato se posle teoreme 4.1. postavlja pitanje da li se ω_2-Aronszajnovo drvo bez Aronszajnovog ili Cantorovog poddrveta može konstruisati pomoću CH. Pitanje da li se u ZFC+GCH može konstruisati ω_2-Aronszajnovo drvo bez Aronszajnovog poddrveta je postavljeno i u radu [1o, str. 16o]. Mi ćemo ovde pokazati da su odgovori na ova pitanja negativni.

Prvo ćemo dokazati sledeću lemu:

Lema 4.4. Neka je M p.t.m. ZFC, P σ-zatvoren parcijalno uredjen skup u M i $\underline{T}$ proizvoljno normalno λ-drvo u M. Neka je G proizvoljan M-generički podskup od P i neka važi $M[G] \models$ " $\underline{T}$ ne sadrži ni jedno Aronszajnovo poddrvo ili $\underline{T}$ ne sadrži ni jedno Cantorovo poddrvo". Ako je b kofinalan lanac drveta $\underline{T}$ u $M[G]$, tada je $b \in M$.

Dokaz: Ako λ nije graničan ordinal, tada je zaključak leme trivijalan. Zato predpostavimo $\lim(\lambda)$. Prvo predpostavimo da je $cf^M(\lambda) = \omega$. Tada u $M[G]$ postoji niz $\{x_n \mid n \in \omega\} \subseteq b$ kofinalan sa b (u uredjenju $\leqslant_T$).

Na osnovu leme 0.2. znamo da je $\{x_n | n \in \omega\} \in M$, odakle je i $b \in M$. Dakle, možemo predpostaviti da je $cf^M(\lambda) > \omega$.

Neka je $B = RO^M(P)$ Booleova algebra regularno otvorenih podskupova parcijalno uredjenog skupa P. Predpostavimo da zaključak leme ne važi, tj. da postoji $b^o \in M^{(B)}$, tako da je $d = \| b^o$ je kofinalan lanac drveta $\underline{T}$ i $b^o \nsubseteq \check{V} \| > 0$. Predpostavimo da je $d = 1$ i da dalje radimo u M.

Neka je

$$S = \{x \in T \mid \| \check{x} \in b^o \| > 0\} .$$

Ako je $x <_T y$, tada je $\| \check{y} \in b^o \| \leq \| \check{x} \in b^o \|$, što znači da je S početni komad od T. Kako je $\| b^o$ je kofinalan lanac drveta $\check{\underline{T}} \| = 1$, to svako $\alpha < \lambda$ možemo naći $x \in T_\alpha$, tako da je $\| \check{x} \in b^o \| > 0$. To znači da je visina drveta $(S, \leq_T \cap S^2)$ jednaka λ. Neka je $x \in S$ proizvoljan, tada iz $\| b^o \nsubseteq \check{V} \| = 1$ lako zaključujemo da moraju postojati $x_1, x_2 \in T_\alpha$, $\alpha > \gamma(x)$, $x_1 \neq x_2$ i $x <_T x_1, x_2$, tako da je $0 < \| \check{x}_1 \in b^o \|$, $\| \check{x}_2 \in b^o \| \leq \| \check{x} \in b^o \|$, tj. $x_1, x_2 \in S$. Neka je $\{x_n\}_{n\in\omega}$ proizvoljan $\leq_T$-rastući niz iz S. To znači da je $\| \check{x}_n \in b^o \| \geq \| x_{n+1} \in b^o \|$, za svako $n \in \omega$. Kako je P σ-zatvoren, to postoji $p \in P (\subseteq B)$, tako da je $p \leq \| \check{x}_n \in b^o \|$, za svako $n \in \omega$. Neka je $\alpha < \lambda$, takav ordinal da je $\alpha > \gamma(x_n)$, za svako $n \in \omega$. Kako važi $p \Vdash$ " b^o je kofinalan lanac drveta $\check{\underline{T}}$ ", to postoji $q \leq p$ i $x \in T_\alpha$, tako da je $q \Vdash$" $\check{x} \in b^o$", odakle je, posebno, $x \in S$. Kako je $q \Vdash$" $\check{x}_n \in b^o$" za svako $n \in \omega$, toza svako $n \in \omega$ važi $q \Vdash$" $\check{x}_n <_T \check{x}$", što znači da je $x_n <_T x$, za svako $n \in \omega$. Ovo dokazuje da je $\underline{S} = (S, \leq_T \ S^2)$ σ-zatvoreno drvo. Na osnovu $cf(\lambda) > \omega$ i dokazanih osobina drveta $\underline{S}$ možemo lako konstruisati poddrvo drveta $\underline{S}$ izomorfno drvetu nizova $({}^{\omega_1 -}2, \ )$.

Kako je P σ-zatvoren, to je ${}^{\omega_1}2$ apsolutno medju M i M[G] što znači da smo dokazali da važi $M[G] \models$ " $\underline{T}$ sadrži poddrvo izomorfno drvetu $({}^{\omega_1 -}2, \ )$". Odavde lako sledi da važi $M[G] \models$ " $\underline{T}$ sadrži i Aronszajnovo i Cantorovo poddrvo" suprotno predpostavci. Ovim bi završili dokaz leme. ∎

Teorema 4.5. Con(ZFC + " postoji slabo kompaktan kardinal ") → → *Con (ZFC + GCH +* "svako ω_2-Aronszajnovo drvo sadrži i Aronszajnovo i Cantorovo poddrvo").

Dokaz. Neka je $\kappa > \omega$ inakcesibilan kardinal. Parcijalno uredjeni skup $P(\kappa)$ definišemo na sledeći način (v. [37, Model VI]). Elementi p skupa $P(\kappa)$ su prebrojive funkcije sa osobinama: $\mathrm{dom}(p) \subseteq \omega_1 \times \kappa$, $\mathrm{rang}\,(p) \subseteq \kappa$ i $p(\alpha,\beta) < \beta$, za svako $(\alpha,\beta) \in \mathrm{dom}(p)$. Neka je $p \leq q$ akko $p \supseteq q$.

Neka je $P = P(\kappa)$ i neka je $\lambda < \kappa$ proizvoljan ordinal. Tada definišemo: $P_\lambda = \{p \mid (\omega_1 \times \lambda) | p \in P\}$ i $P^\lambda = \{p - p \mid (\omega_1 \times \lambda) | p \in P\}$. Dokaz sledeći leme možemo naći u [70] ili [36].

Lema 4.6. (Lévy) Neka je M p.t.m. ZFC i neka je $\kappa > \omega$ inakcesibilan kardinal u M. Neka je $P = [P(\kappa)]^M$. Tada važi $M \models$ " P je σ-zatvoren i zadovoljava κ-c.c. ". Ako je G M-generički podskup od P, tada je $\omega_1^M = \omega_1^{M[G]}$ i $\kappa = \omega_2^{M[G]}$. Pored toga, ako je $\lambda < \kappa$ neprebrojiv regularan kardinal u M, tada važi $M[G \cap P_\lambda] \models$ " P^λ je σ-zatvoren i zadovoljava κ-c.c.". ∎

Neka je G M-generički podskup od $P = [P(\kappa)]^M$ i $\lambda < \kappa$, tada stavljamo $G_\lambda = G \; P_\lambda$ i $G^\lambda = G \; P^\lambda$. Kako je $P \cong P_\lambda \times P^\lambda$, to po lemi 0.3. imamo da je G_λ M-generički podskup od P_λ, da je G^λ $M[G_\lambda]$-generički podskup od P^λ i $M[G] = M[G_\lambda][G^\lambda]$.

Krenimo sada u dokaz teoreme 4.5. Neka je M p.t.m. ZFC + GCH i neka je $\kappa > \omega$ slabo kompaktan kardinal u M. Neka je $P = [P(\kappa)]^M$ i neka je G M-generički podskup od P. Na osnovu leme 4.6. imamo da je $\omega_1^M = \omega_1^{M[G]}$ i $\kappa = \omega_2^{M[G]}$. Pored toga važi $M[G] \models$ GCH. Dokažimo da u M[G] svako ω_2-Aronszajnovo drvo sadrži i Aronszajnovo i Cantorovo poddrvo. Predpostavimo suprotno, tj. da u M[G] postoji ω_2-Aronszajnovo drvo $\underline{T} = (\kappa, \leq_T)$ (ako je $\alpha <_T \beta$, tada je $\alpha < \beta$) koje ne sadrži ili Aronszajnovo poddrvo ili Cantorovo poddrvo. Neka je $p \in G \subseteq P \subseteq B = [RO(P)]^M$ sve ovo forsira.

Dalje radimo u M. Definišimo $T' : \kappa \times \kappa \to B$ sa

$$T'(\alpha,\beta) = p \wedge \| \alpha \mathrel{\overset{\circ}{<}_{T}} \beta \|^B .$$

" $p \Vdash$ " $(\forall x \subseteq \check{\kappa})$ (x nije kofinalan lanac drveta $\overset{\circ}{\underline{T}}$) " je Π^1_1-rečenica koja važi u strukturi $(V_\kappa, \in, P, B, T', \{p\})$ (njenu formulaciju videti u [59, str. 42]). Kako je κ slabo kompaktan to postoji inakcesibilan $\lambda < \kappa$, tako da je $\underline{T} | \lambda = (\lambda, <_T \cap \lambda^2) \in M[G_\lambda]$ i tako da $(V_\lambda, \in, P | V_\lambda, B | V_\lambda, T' | \lambda, \{p\})$ zadovoljava gornju rečenicu. Možemo λ birati tako da je $B \mid V_\lambda = B_\lambda$ = (Booleova podalgebra od B generisana sa P_λ). To znači da drvo $\underline{T} \mid \lambda \in M[G_\lambda]$ nema ni jednog kofinalnog lanca u $M[G_\lambda]$. Neka je $x \in R_\lambda T$ proizvoljna tačka i neka je $b = (\cdot, x)_T$. Dakle, imamo da važi $M[G] = M[G_\lambda][G^\lambda] \models$ " b je kofinalan lanac drveta $\underline{T} \mid \lambda$ i $\underline{T} \mid \lambda$ ne sadrži ili Aronszajnovo ili Cantorovo poddrvo". Po lemi 4.6. imamo da važi $M[G_\lambda] \models P^\lambda$ je σ-zatvoren". Medjutim. Sve ovo zajedno zhači da $M[G_\lambda]$, P^λ, $\underline{T} \mid \lambda$ i b direktno protivreče lemi 4.4., čime se dokaz teoreme 4.5. završava. ∎

Prirodno je sada postaviti pitanje o nužnosti predpostavke egzistencije slabo kompaktnog kardinala. Naime, ako predpostavimo da svako ω_2-Aronszajnovo drvo sadrži ili Aronszajnovo ili Cantorovo poddrvo, tada na osnovu teoreme 4.1. imamo da važi $\neg\square$. Na osnovu jedne Jensenove primedbe (v. [4o, str. 286. Remark (3)]) znamo da je tada ω_2 kardinal Mahloa u L. U slučaju specijalnih ω_2-Aronszajnovih drveta imamo sledeću teoremu.

<u>Teorema 4.7.</u> Cob(ZFC + "postoji kardinal Mahloa") $\leftrightarrow$ Con(ZFC + + GCH + "svako specijalno ω_2-Aronszajnovo drvo sadrži i Aronszajnovo i Cantorovo poddrvo").

<u>Dokaz</u>: Neka je M p.t.m. ZFC + GCH i neka je κ kardinal Mahloa u M. Neka je G M-generički podskup od $P = [P(\kappa)]^M$. Kao i gore imamo da je $\omega_1^M = \omega_1^{M[G]}$, $\kappa = \omega_2^{M[G]}$ i $M[G] \models$ GCH. Dokažimo sada da u $M[G]$ svako specijalno ω_2-Aronszajnovo drvo sadrži i Aronszajnovo i Cantorovo poddrvo.

Predpostavimo suprotno, tj. da u $M[G]$ postoji specijalno ω_2-Aronszajnovo drvo $\underline{T} = (\kappa, \leq_T)$(ako je $\alpha <_T \beta$, tada je $\alpha < \beta$), koje ne sadrži ili Aronszajnovo ili Cantorovo poddrvo.

Kako je κ kardinal Mahloa u M, to na standardan način (v.[59, str. 41]) možemo naći inakcesibilan kardinal $\lambda < \kappa$ (u M) tako da je $\underline{T} \mid \lambda = (\lambda, \leq_T \cap \lambda^2) \in M[G_\lambda]$.

Neka je $x \in R_\lambda T$ proizvoljna tačka i $b = (\cdot, x)_T$. Lako proveravamo da $M[G_\lambda]$, P^λ, $\underline{T} \mid \lambda$ i b zadovoljavaju uslove leme 4.4., odakle imamo da je $b \in M[G_\lambda]$. Kako je $\underline{T}$ specijalno ω_2-Aronszajnovo drvo lanac b odredjuje preslikavanje $f: \lambda \to \omega_1^M$. To znači da je $\lambda = \omega_1^{M[G_\lambda]}$. Medjutim, ovo protivreči lemi 4.6., jer je λ inakcesibilan kardinal u M (i

$P_\lambda \cong [P(\lambda)]^M$).

Obrnuta implikacija teoreme sledi na osnovu teoreme 4.1'. i gornje Jensenove primedbe. ∎

Na osnovu teoreme 4.1' u modelu predhodne teoreme mora važiti $\neg\Box$, čime smo dokazali jedan nepublikovani rezultat Solovaya. To sa gornjom Jensenovom primedbom daje:

Posledica 4.8. Con (ZFC+ "postoji kardinal Mahloa") $\leftrightarrow$ Con(ZFC+GCH+$\neg\Box$). ∎

5. PODDRVETA KUREPINIH DRVETA

Prva teorema iz ove oblasti je teorema 3.2. Jensena, koja je u [10] dokazana Jensenovom tehnikom u L. Dokaz koristi neke posebne osobine kardinala ω, tako da se ne može direktno uopštiti. Kako je teorema dobila interesantne primene postavlja se pitanje njenog uopštenja. U sledećoj teoremi ćemo to postići metodom forsinga. Inače, teorema će biti dokazana na početku §2.III.

Teorema 5.1. Neka je M p.t.m ZFC+GCH i neka je $\kappa > \omega$ regularan kardinal u M. Tada postoji Cohenovo proširenje M[G] modela M sa istim kardinalima i funkcijom kofinalnosti u kome postoji κ-Kurepino drvo bez λ-Aronszajnovih i ν-Cantorovih poddrveta, za svako $\lambda = cf(\lambda) \geq \omega$ i $\nu \geq \omega$. ∎

Primenom metoda Eastona [20] u §2.III ćemo ovu teoremu proširiti, tako da pokriva klasu svih regularnih kardinala, tj. dokazaćemo sledeću teoremu.

Teorema 5.2. Neka je M p.t.m. ZFL. Tada postoji Cohenovo proširenje N modela M sa istim kardinalima i funkcijom kofinalnosti u kome za svaki regularan kardinal $\kappa \geq \omega$ postoji κ-Kurepino drvo bez λ-Aronszajnovih i ν-Cantorovih poddrveta, za svako $\lambda = cf(\lambda) \geq \omega$ i $\nu \geq \omega$. ∎

Navešćemo sada neke definicije iz [69]. Neka je $\kappa \geq \omega$ regularan kardinal. Neka je G uredjena abelova grupa (v. [69]), tako da postoji strogo opadajući niz $\{g_\xi \mid \xi < \kappa\}$ elemenata iz G koji konvergiraju ka $0 \in G$. Neka je X skup i neka je $\rho: X \times X \to \{g \in G \mid g \geq 0\}$ preslikavanje koje ima osobine:

(i) $\rho(x,y) = 0$ akko $x = y$

(ii) $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$

(iii) $\rho(x, y) = \rho(y,x)$.

Tada ρ zovemo <u>κ-metrikom</u> na X. Topološki prostor zovemo <u>κ-metrizabilnim</u>, ako mu je topologija generisana nekom κ-metrikom. ω-metrizabilni prostori su obični metrički prostori.

Topološki prostor X je κ-kompaktan ako svaki otvoreni pokrivač prostora ima podpokrivač moći $< \kappa$. U [69, str. 132] R. Sikorski pita: Da li za svaki regularan kardinal $\kappa \geq \omega$ postoji κ-metrizabilan κ-kompaktan prostor moći $> \kappa$?

U vezi sa ovim problemom Sikorskog u [42, Theorem 4] je dokazana sledeća teorema.

<u>Teorema 5.3.</u> (Juhász-Weiss). Neka je $\kappa \geq \omega$ regularan kardinal i neka je $\lambda > 0$ proizvoljan kardinal, tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) Postoji κ-metrizabilan κ-kompaktan prostor moći λ.

(ii) Postoji (κ,κ)-drvo $\underline{T}$ sa λ maksimalnih κ-lanaca, koje ne sadrži ni jedno κ-Aronszajnovo poddrvo. ∎

Na osnovu ove teoreme i teoreme Jensena, Juhasz i Weiss [42] zaključuju da je sa ZFC konsistentno da postoji ω_1-metrizabilan ω_1-kompaktan prostor moći $> \omega_1$ (ovakav prostor ne možemo naći u ZFC, jer, kako smo jednom spomenuli, u ZFC nema Kurepinih drveta). Medjutim, posle naše teoreme 5.2. možemo dobiti konsistentnost pozitivnog odgovora na čitav problem Sikorskog.

<u>Teorema 5.4.</u> Sa ZFC je konsistentno da za svaki regularan kardinal $\kappa \geq \omega$ postoji κ-metrizabilan κ-kompaktan prostor moći $> \kappa$. ∎

U [44] je posmatrano pitanje uopštenja poznate Cantorove teoreme, da je moć proizvoljnog metričkog kompakta ili prebrojiva ili jednaka 2^ω nezavisno od CH. Posebno je posmatrana ta teorema za slučaj prostora težine $\leqslant \omega_1$ ili karaktera $\leqslant \omega_1$. Još direktnije bi bilo pitanje da li je moć proizvoljnog ω_1-metrizabilnog ω_1-kompaktnog prostora ili $\leqslant \omega_1$ ili jednaka 2^{ω_1} nezavisno od $2^{\omega_1} = \omega_2$. Sledeća teorema tvrdi da odgovor može biti negativan.

Teorema 5.5. Sa ZFC je konsitentno da postoji ω_1-metrizabilan ω_1-kompaktan prostor X, za koga važi $\omega_1 < |X| < 2^{\omega_1}$.

Dokaz: Neka je M p.t.m. ZFC + $2^{\omega} = \omega_1 + 2^{\omega_1} > \omega_2$ i neka je $P = [KP(\omega_1)]$. Na osnovu lema 2.1., 2.2.III znamo da je P σ-zatvoren i da zadovoljava ω_2-c.c. u M. Neka je G M-generički podskup od P, $\underline{T} = (\bigcup\{T_p | p \in G\}, \bigcup\{\leqslant_p | p \in G\})$ i $b(\xi) = \{t \in T | (\exists p \in G)(\xi \in \mathrm{dom}(lp) \wedge t \leqslant_p lp(\xi))\}$, za svako $\xi < \omega_2$ (v. odgovarajuće definicije na početku §2.III). Na početku §2.III ćemo dokazati da je $\underline{T}$ Kurepino drvo, koje ne sadrži ni jedno Aronszajnovo poddrvo i da je

$$\{b(\xi) | \xi < \omega_2\}$$

kolekcija svih maksimalnih ω_1-lanaca drveta $\underline{T}$ u M[G]. Sada na osnovu teoreme 5.3. znamo da u M[G] postoji ω_1-metrizabilan ω_1 -kompaktan prostor moći ω_2 ($< 2^{\omega_1}$), što je trebalo pokazati. ∎

6. PROBLEM ERDÖSA I HAJNALA

U zborniku [23] Erdös i Hajnal formulišu sledeću rečenicu i traže da se ispita njena istinitost uz predpostavku GCH:

Φ: svaki uredjajni tip φ moći ω_2 sa osobinama $\omega_2, \omega_2^* \nleq \varphi$ sadrži podtip $\Psi \leqslant \varphi$ moći ω_1 sa osobinama $\omega_1, \omega_1^* \nleq \Psi$.

Prvo ćemo prevesti Φ u termine drveta i poddrveta a zatim ćemo ispitivati njenu istinitost koristeći se novom formulacijom.

Teorema 6.1. $\neg\Phi$ je ekvivalentna sa egzistencijom ili Kurepinog drveta bez Aronszajnovog poddrveta ili ω_2-Aronszajnovog drveta bez Aronszajnovog i Cantorovog poddrveta.

Dokaz: Dokažimo prvo obrnutu implikaciju. Neka je $\underline{T} = (T, \leq_T)$ Kurepino drvo bez Aronszajnovih poddrveta. Neka je $E = E(T)$ kolekcija svih njegovih maksimalnih ω_1-lanaca. Neka je $\prec$ leksikografsko uredjenje skupa E indukcirano nekim uredjenjima čvorišta drveta $\underline{T}$. Dokažimo da je $\varphi = tp(E, \prec)$ primer uredjajnog tipa, koji dokazuje $\neg\Phi$. Na osnovu tvrdjenja 2.5. znamo da je φ Kurepin tip, tj. da ima osobine: $|\varphi| > \omega_1$, $d(\varphi) \leq \omega_1$ i φ ne sadrži ni jedan realan neprebrojiv podtip. To znači da trebamo još dokazati da φ ne sadrži ni jedan Aronszajnov podtip. Predpostavimo suprotno, tj. da postoji $F \subseteq E$, tako da je $\Psi = tp(F, \prec \cap F^2)$ Aronszajnov tip. Za svaki lanac $b \in F$ postoji $t \in b$, tako da je $[t, \cdot)_T \cap b' = \phi$, za svako $b' \in F$, $b' \neq b$. U suprotnom bi mogli konstruisati strogo rastući niz $\{t_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ elemenata iz b i niz $\{b_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ elemenata iz $F - \{b\}$, tako da je $(\cdot, t_\alpha]_T = b \quad b_\alpha$, za svako $\alpha < \omega_1$ (predpostavili smo da je $\underline{T}$ normalno drvo). Bar jedan od skupova $A_1 = \{\alpha < \omega_1 | b_\alpha \prec b_{\alpha+1}\}$ i $A_2 = \{\alpha < \omega_1 | b_\alpha \succ b_{\alpha+1}\}$ je neprebrojiv. Neka je, na primer, A_1 neprebrojiv. Tada lako proveravamo da je $\{b_\alpha | \alpha \in A_1\}$ $\prec$-dobro uredjen neprebojiv podskup od $(F, \prec \cap F^2)$, suprotno sa $\omega_1 \nleq \Psi$. Ako je A_2 neprebrojiv slično dobijamo protivrečnost sa predpostavkom $\omega_1^* \nleq \Psi$.

Dakle, za svako $b \in F$ postoji $\leq_T$-najmanji $t(b) \in b$, tako da je $[t(b), \cdot)_T \cap b' = \phi$, za svako $b' \in F$, $b' \neq b$. Neka je $S = \{t(b) | b \in F\}$ i neka je $U = (\cdot\ S]_T = \{t \in T | t \leq_T s$, za neko $s \in S\}$. Kako je S neprebrojiv, to je i U neprebrojiv početni komad od $\underline{T}$. Dokažimo da je $\underline{U} = (U, \leq_T \cap U^2)$ Aronszajnovo poddrvo drveta $\underline{T}$. Predpostavimo suprotno, tj. da postoji ω_1-lanac $b \in E$, tako da je $b \subseteq U$. Na osnovu definicije tačaka $t(b)$, $b \in F$ imamo da je $|b \cap S| \leq 1$. Kako je $b \subseteq U$, to znači da za svako $t \in b$ postoji $b' \in F$, tako da je $b' \ni t$, i $b' \neq b$. To znači da induktivno možemo konstruisati $\leq_T$-strogo rastući niz $\{t_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ elemenata iz b i niz $\{b_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ elemenata iz F, tako da je $(\cdot, t_\alpha]_T = b \cap b_\alpha$, za svako $\alpha < \omega_1$.

Sada na isti način kao gore obrazujemo skupove A_1 i A_2 i dobijamo protivurečnost sa jednom od predpostavki $\omega_1 \nleq \Psi$ i $\omega_1^* \nleq \Psi$.

Neka je sada $\underline{T} = (T, \leq_T)$ jedno ω_2-Aronszajnovo drvo, koje ne sadrži ni jedno Aronszajnovo i Cantorovo poddrvo. Neka je $\prec$ relacija prirodnog uredjenja drveta $\underline{T}$ (v. §2: čvorišta su dobro uredjena). Dokažimo da je $\varphi = tp(T, \prec)$ uredjajni tip koji dokazuje $\neg\Phi$. Pre svega imamo da je $|\varphi| = |T| = \omega_2$. Na osnovu tvrdjenja 2.2. i 2.4. znamo da φ ne sadrži ni jedan Aronszajnov i ni jedan realan neprebrojiv podtip, što znači da za svako $\Psi \leqslant \varphi$, $|\Psi| = \omega_1$ mora važiti bar jedan od uslova $\omega_1 \leqslant \Psi$ ili $\omega_1^* \leqslant \Psi$. Dakle, trebamo još dokazati da važe uslovi $\omega_2, \omega_2^* \nleqslant \varphi$. Predpostavimo suprotno, tj. da je, na primer, $\omega_2 \leqslant \varphi$, tj. da postoji $U \subseteq T$, tako da je $tp(U, \prec \cap U^2) = \omega_2$. Kako je $|R_\alpha T| \leqslant \omega_1$ i kako je $|U| = \omega_2$, to mora postojati bar jedan $t \in R_\alpha T$ sa osobinom $|[t, \cdot)_T \cap U| = \omega_2$. Kako je skup $[t, \cdot)_T$ konveksan u $(T, <)$ i kako je $tp(U, \prec \cap U^2) = \omega_1$, to za svako $\alpha < \omega_2$ postoji najviše jedan $t \in R_\alpha T$, takav da je $|[t, \cdot)_T \cap U| = \omega_2$. Dakle, za svako $\alpha < \omega_2$ postoji jedinstven $t_\alpha \in R_\alpha T$ sa osobinom $|[t_\alpha, \cdot)_T \cap U| = \omega_2$. To znači da je $\{t_\alpha | \alpha < \omega_2\}$ ω_2-lanac drveta $\underline{T}$ suprotno predpostavci da je ono ω_2-Aronsuajnovo drvo.

Dokažimo sada direktnu implikaciju. Neka važi $\neg\Phi$. To znači da postoji uredjajni tip $\varphi = tp(E, <)$ moći ω_2 sa osobinama ω_2, $\omega_2^* \nleqslant \varphi$, tako da za svako $\Psi \leqslant \varphi$, $|\Psi| = \omega_1$ važi bar jedan uslov $\omega_1 \leqslant \Psi$ ili $\omega_1^* \leqslant \Psi$. Važi bar jedan od sledeća dva slučaja.

(A) postoji $\varphi' \leqslant \varphi$ sa osobinama $|\varphi'| = \omega_2$ i $d(\varphi') \leqslant \omega_1$;
(B) $d(\varphi') = \omega_2$, za svaki podtip $\varphi' \leqslant \varphi$ moći ω_2.

Neka važi (A). Neka je $\varphi' \leqslant \varphi$ tip sa osobinama $|\varphi'| = \omega_2$ i $d(\varphi') \leqslant \omega_1$. Dakle φ' je Kurepin tip koji ne sadrži ni jedan Aronszajnov podtip. Na osnovu tvrdjenja 2.5. postoji drvo $\underline{T}' = (T', \supset)$ atomizacije tipa φ' visine $\omega_1 + 1$, tako da je $\underline{T}' | \omega_1$ Kurepino drvo. Na osnovu tvrdjenja 2.2. $\underline{T}'$ a time i $\underline{T}' | \omega_1$ ne sadrži ni jedno Aronszajnovo poddrvo.

Neka važi (B). Dakle, za svako $\varphi' \leqslant \varphi$, $|\varphi'| = d(\varphi')$. Neka je $\underline{T} = (T, \supset)$ proizvoljno drvo atomizacije skupa $(E, <)$. Na osnovu tvrdjenja 2.2. i 2.4. znamo da $\underline{T}$ ne sadrži ni jedno Aronszajnovo i Cantorovo poddrvo. Znači dovoljno je još dokazati da je ono ω_2-Aronszajnovo. Kako važi $\omega_2, \omega_2^* \nleqslant \varphi$, $\underline{T}$ nema ω_2-lanaca. Odatle je, posebno, $\gamma T \leqslant \omega_2$, što znači da je još dovoljno dokazati da je $|R_\alpha T| \leqslant \omega_1$, za svako $\alpha < \gamma T$, jer je $|T| = \omega_2$ (odakle će slediti da je $\gamma T = \omega_2$).

Predpostavimo suprotno, tj. da postoji $\alpha < \gamma T$ ($\leqslant \omega_2$), tako da je $|R_\alpha T| \geqslant \omega_2$. Neka je α najmanji ordinal sa tom osobinom. Na osnovu definicije drveta atomizacije (§2) lako zaključujemo da je α granični ordinal veći od 0. Za svako $I \in R_\alpha T$ fiksirajmo $x(I) \in I$. Za svako $I \in T \mid \alpha$ odaberimo skupove $A(I)$, $B(I) \subseteq I$ moći $\leq \omega_1$, tako da je $A(I)$ kofinalan sa I a $B(I)$ koinicijalan sa I. Neka je $D = \cup\{A(I) \mid I \in T \mid \alpha\} \cup$ $\cup \cup\{B(I) \mid I \in T \mid \alpha\}$ i neka je $F = D \cup \{x(I) \mid I \in R_\alpha T\}$. Kako je $|T \mid \alpha| \leq \omega_1$, to je $|D| \leq \omega_1$. Neposredno proveravamo da je D gust u $(F, < \cap F^2)$. Dakle, podtip $\varphi' = tp(F, < \cap F^2)$ tipa φ ima osobine $|\varphi'| = \omega_2$ i $d(\varphi') \leq \omega_1$, što je suprotno predpostavci da radimo u slučaju (B). To znači da je $|R_\alpha T| \leq \omega_1$, za svako $\alpha < \gamma T$, tj. $\underline{T}$ je ω_2-Aronszajnovo drvo koje ne sadrži ni jedno Aronszajnovo i Cantorovo poddrvo, čime se dokaz teoreme zadržava. ∎

Na osnovu predhodne teoreme i teoreme Jensena (teorema 3.2) imamo sledeći rezultat iz [1o, Theorem 5].

Teorema 6.2. (Devlin) $V = L$ implicira $\neg\Phi$. ∎

Teoreme 4.1 i 6.1. daju sledeću teoremu koja predstavlja pojačanje predhodne teoreme i u čijem se dokazu dobija bitno različit uredjajni tip koji protivreči Φ.

Teorema 6.3. $\square$ implicira $\neg\Phi$. ∎

Posle teoreme 6.2. i 6.3. postavlja se pitanje konsistentnosti Φ sa ZFC odnosno ZFC+GCH, tj. da li se $\neg\Phi$ može izvesti iz CH (v. [1o, str. 16o] i [11, Abstact]). Naime, pitanje konsistentnosti Φ za ZFC + GCH se prirodno postavilo Devlinu, jer je on u [11] dokazao:

$$\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC} + \text{"postoji kardinal Ramseya"}) \rightarrow \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC} + 2^{\omega} = 2^{\omega_1} = \omega_2 + \Phi).$$

Dokaz ovoga tvrdjenja je relativno dug i koristi neke ideje Mitchella [59] i Silvera [71]. Medjutim, posle teoreme 6.1. vidimo da Φ važi u Mitchellovom modelu koji je konstruisan i dokazu teoreme 5.8. u [59]. Time dobijamo sledeće pojačanje gornjeg Devlinovog rezultata.

$$\mathrm{Con}(\mathrm{ZFC} + \text{"postoji slabo kompaktan kardinal"}) \rightarrow \mathrm{Con}(\mathrm{ZFC} + 2^{\omega} = 2^{\omega_1} = \omega_2 + \Phi).$$

Mi ćemo ovde dokazati da je Φ konsistentna i sa ZFC + GCH (što rešava gornji problem Devlina). I više od toga, pokazaćemo da je sa ZFC+ +GCH konsistentno i sledeće jako pojačanje rečenice Φ.

Φ': svaki uredjajni tip φ moći ω_2 sa osobinama $\omega_2, \omega_2^* \nleq \varphi$ sadrži i Aronszajnov i realan neprebrojiv podtip.

Teorema 6.4. Con(ZFC + "postoji sl. komp.kardinal")$\to$Con(ZFC+GCH+Φ').

Dokaz: Neka je M p.t.m. ZFC + $V = L$, κ slabo kompaktan kardinal u M i $P = [P(\kappa)]^M$ (v. §4). Neka je G M-generički podskup od P. Tada na osnovu leme 4.6. imamo da je $\omega_1^M = \omega_1^{M[G]}$, $\kappa = \omega_2^{M[G]}$. Pored toga, važi $M[G] \models$ GCH. Dokažimo da u $M[G]$ važi Φ'.

U suprotnom, u $M[G]$ postoji uredjajni tip $\varphi = tp(E, <)$ moći ω_2 sa osobinama $\omega_2, \omega_2^* \nleq \varphi$, koji ne sadrži ili Aronszajnov ili neprebrojiv realan podtip. Opet posmatramo slučajeve (A) i (B) iz dokaza teoreme 6.1.

Posmatrajmo prvo slučaj (B), tj. $d(\varphi') = \omega_2$ za svako $\varphi' \leqslant \varphi$, $|\varphi'| = \omega_2$. Neka je $\underline{T}$ proizvoljno drvo atomizacije skupa $(E, <)$. Da je $\underline{T}$ ω_2-Aronszajnovo drvo dokazujemo kao u dokazu teoreme 6.1. Na osnovu tvrdjenja 2.2. i 2.4. imamo da $\underline{T}$ ne sadrži ili Aronszajnovo ili Cantorovo poddrvo. Medjutim, ovo protivreči dokazu teoreme 4.5., jer se radi o istom modelu.

Dakle, mora važiti (A), tj. mora postojati $\varphi' \leqslant \varphi$, tako da je $|\varphi'| = \omega_2$ i $d(\varphi') \leqslant \omega_1$.

Kao u dokazu drugog dela tvrdjenja 2.5, koristeći sada CH, tip φ' možemo tako atomizirati da dobijeno drvo $\underline{T}'$ ima visinu ω_1+1, pri čemu je $|R\omega_1 T'| = \omega_2$ $(=\kappa)$ i $|T' \restriction \omega_1| = \omega_1$. Neka je $S = \underline{T} \restriction \omega_1$. Na osnovu tvrdjenja 2.2. i 2.4. znamo da $\underline{T}'$ a time i $\underline{S}$ ne sadrži ili Aronszajnovo ili Cantorovo poddrvo.

Kako S ima moć ω_1 u $M[G]$, to možemo naći $\lambda < \kappa$ (regularan i neprebrojiv kardinal u M), tako da je $\underline{S} \in M[G_\lambda]$. Kako važi $M[G_\lambda] \models$ "κ je inakcesibilan" i kako drvo $\underline{S}$ u $M[G] = M[G_\lambda][G^\lambda]$ ima ω_2 $(=\kappa)$ maksimalnih ω_1-lanaca, to mora postojati maksimalni ω_1-lanac b drveta $\underline{S}$ u $M[G]$, koji nije u $M[G_\lambda]$. Medjutim $M[G_\lambda]$, P^λ, $\underline{S}$ i b direktno protivreče lemi 4.4. Dakle, ni slučaj (A) ne može nastupiti čime se dokaz teoreme zadržava. ∎

Posledica 6.5. Con(ZFC+"postoji sl.komp.kardinal") $\to$ Con(ZFC+GCH + Φ). ∎

U teoremi 6.4. i posledici 6.5. predpostavka egzistencije nekog velikog kardinala je donekle i nužna. Naime, ako predpostavimo da važi Φ, tada na osnovu teorema 4.1. i 6.1. imamo da važi $\neg\Box$, što na osnovu spominjane Jensenove primedbe iz [4o] znači da je ω_2 kardinal Mahloa u L. Da li se predpostavka "postoji slabo kompaktan kardinal" u teoremama 4.5. i 6.4. može smanjiti na predpostavku "postoji kardinal Mahloa" mi još neznamo.

Sada ćemo posmatrati generalizaciju rečenice Φ. Neka je $\kappa \geq \omega$ proizvoljan regularan kardinal, tada stavljamo:

Φ_κ: svaki uredjajni tip φ moći κ^+ sa osobinama κ^+, $(\kappa^+)^* \nleq \varphi$ sadrži podtip Ψ moći κ sa osobinama κ, $\kappa^* \nleq \Psi$.

Primetimo da je $\Phi = \Phi_{\omega_1}$ i da Φ_ω ne važi. I za rečenicu Φ_κ možemo dobiti teoremu analognu teoremi 6.1. na čemu se nećemo zadržavati. Ovde samo napominjemo da prirodno uredjenje κ^+-Aronszajnovog drveta ($\kappa = cf(\kappa) \geq \omega_1$), kojeg smo dobili u dokazu teoreme 4.3. odredjuje uredjajni tip, koji dokazuje $\neg\Phi_\kappa$. Sve ideje dokaza te činjenice se nalaze u dokazima tvrdjenja 2.2. i 2.4. i teorema 4.1. i 6.1. Tako dobijamo sledeće tvrdjenje:

<u>Teorema 6.6.</u> $\Box_\kappa$ implicira $\neg\Phi_\kappa$, za svaki regularan kardinal $\kappa \geq \omega_1$. ∎

<u>Posledica 6.7</u>. Neka važi V=L. Tada važi $\neg\Phi_\kappa$ za svaki regularan kardinal $\kappa \geq \omega$. ∎

Leksikografskim uredjenjem svih maksimalnih κ-lanaca jednog κ-Kurepinog drveta koje ne sadrži κ-Aronszajnovih poddrveta, takodje, dobijamo primer uredjajnog tipa koji dokazuje $\neg\Phi_\kappa$, i koji ima drugačije osobine od onih tipova koje smo dobili u dokazu teoreme 6.6. Dakle, u modelu teoreme 5.2., takodje, važi $\neg\Phi_\kappa$ za svaki regularan kardinal $\kappa \geq \omega$.

Glava II

1. KRUTE BOOLEOVE ALGEBRE

Booleovu algebru nazivamo krutom ako nema ni jedan netrivijalan automorfizam. Pitanje egzistencije krute Booleove algebre postavlja još Birkhoff [6, Problem 74]. Katetov [43] medju prvima konstruiše krutu Booleovu algebru i to moći 2^{ω} (istovremeno do krute Booleove algebre su došli i Rieger [63] i Jónsson [41]). Radi odgovora na jedno pitanje de Groot, McDowella [33] Lozier [57] konstruiše krutu Booleovu algebru moći 2^{κ}, za svaki kardinal $\kappa \geqslant \omega$. McKenzie, Monk [58] konstruišu krutu Booleovu algebru moći λ, za svaki jako graničan kardinal $\lambda > \omega$. de Groot [32] pokazuje da postoji tačno $2^{2^{\omega}}$ tipova izomorfnosti krutih Booleovi algebri moći 2^{ω}, dok McKenzie, Monk [58] pokazuju da postoji tačno $2^{2^{\kappa}}$ tipova izomorfnosti krutih Booleovih algebri moći 2^{κ}, gde je κ takav regularan kardinal da je $2^{\lambda} \leqslant \kappa$, za svako $\lambda < \kappa$.

Mi ćemo ovde pokazati da za svaki kardinal $\kappa > \omega$ postoji tačno 2^{κ} tipova izomorfnosti krutih Booleovih algebri moći κ (ne postoji kruta Booleova algebra moći $1,2,3,4,5, \ldots, \omega$). Ovo potpuno završava gornju diskusiju datog problema (posebno, time dobijamo odgovore na probleme 8 i 9 iz [58]). Zatim ćemo odgovoriti pozitivno na problem 6 istog rada [58], dok na kraju dajemo jedan odgovor na problem 7 istog rada.

Sledeća lema će biti veoma korisna u našim rasudjivanjima a vezana je za imena Aleksandrov-Urison. Neumer, Fodor (v. [3o]).

Lema 1.1. (i) Neka je κ regularan neprebrojiv kardinal i S stacionaran podskup od κ. Ako je $f\colon S \to P(\kappa)$, takvo preslikavanje da je $|f(\alpha)| < \omega$ i $f(\alpha) \subseteq \alpha$, za svako $\alpha \in S$, tada postoji stacionaran $S' \subseteq S$ i $F \subseteq \kappa$ tako da je $f(\alpha) = F$, za svako $\alpha \in S'$.

(ii) Neka je κ regularan neprebrojiv kardinal, S stacionaran podskup od κ i $f\colon S \to \kappa$ proizvoljno preslikavanje. Tada ili postoji stacionaran $S' \subseteq S$ i $\beta < \kappa$, tako da je $f(\alpha) = \beta$, za svako $\alpha \in S'$ ili postoji stacionaran $S'' \subseteq S$ tako da je $f \restriction S''$ 1-1 preslikavanje i $f(\alpha) \geq \alpha$, za svako $\alpha \in S''$.

(iii) Neka je κ regularan neprebrojiv kardinal, S stacionaran podskup od κ i $\beta < \kappa$. Ako je $S = \bigcup\{S_\alpha | \alpha < \beta\}$, tada postoji $\alpha < \beta$, tako da je S_α stacionaran podskup od κ. ∎

Neka je κ proizvoljan regularan neprebrojiv kardinal i neka je $D_\omega = D_\omega(\kappa) = \{\alpha < \kappa | cf(\alpha) = \omega\}$. Jasno je, da je D_ω stacionaran podskup od κ.

Za svako $\alpha \in D_\omega$ unapred ćemo fiksirati neprekidno strogo rastuće preslikavanje $f_\alpha\colon \omega + 1 \to \kappa$, takvo da je $f_\alpha(0) = 0$ i $f_\alpha(\omega) = \alpha$. Za proizvoljan skup $S \subseteq D_\omega$ sa $E(S)$ označavamo skup $\{f_\alpha | \alpha \in S\}$, kojeg ćemo uvek smatrati uredjenim relacijom $\prec$ leksikografskog uredjenja: $f_\alpha \prec f_\beta$ ako i samo ako je $f_\alpha(\delta) < f_\beta(\delta)$, gde je $\delta = \min\{\gamma | f_\alpha(\gamma) \neq f_\beta(\gamma)\}$.

Uslov (i) sledeće leme je trivijalan, (ii) se može izvesti na osnovu rasudjivanja iz [3, §§3,5], dok je (iii) posledica teoreme 5.3.(i) iz [3].

Lema 1.2. Neka je κ proizvoljan regularan neprebrojiv kardinal, tada važi:

(i) Neka je $S \subseteq D_\omega(\kappa)$ proizvoljan skup. Tada proizvoljan neprebrojiv $X \subseteq E(S)$ sadrži neprebrojiv Y, koji je dobro uredjen relacijom $\prec$.

(ii) Neka je $S \subseteq D_\omega(\kappa)$ stacionaran skup. Tada postoji $S' \subseteq S$, tako da $S - S'$ nije stacionaran i tako da je $\{\gamma \in S' | f_\alpha \prec f_\gamma \prec f_\beta\}$ stacionaran, za svako $\alpha, \beta \in S'$, $f_\alpha \prec f_\beta$.

(iii) Neka su $S, S' \subseteq D_\omega(\kappa)$ proizvoljni skupovi i neka je $(E(S), \prec)$

sličan podskupu od $(E(S'), \prec)$, tada je $S-S'$ nestacinnaran podskup od κ.

Dokaz: (i) Neka je $X \subseteq E(S)$ neprebrojiv. Možemo predpostaviti da je $X = \{f_\alpha \mid \alpha \in A\}$, gde $A \subseteq S$ ima uredjajni tip jednak ω_1. Neka je $T(X) = \{f \restriction (n+1) \mid n \leq \omega$ i $f \in X\}$, tada $T(X)$ odredjuje drvo $\underline{T} = (T(X), \subset)$. Skup $T(X) \restriction \omega = \bigcup\{R_n T(X) \mid n < \omega\}$ je neprebrojiv. U suprotnom bi postojao $\alpha \in A$, tako da je $g(\max(\mathrm{dom}(g))) < \alpha$ za svako $g \in T(X) \restriction \omega$. Neka je $\beta \in A$, $\beta > \alpha$ proizvoljan. Kako je f_β neprekidna, to postoji $n < \omega$ tako da je $f(n) > \alpha$. Neka je $g = f_\beta \restriction (n+1)$, tada je $g \in T(X)$ i $g(\max(\mathrm{dom}(g))) = f(n) > \alpha$, suprotno izboru $\alpha \in A$. Neka je $n < \omega$ prvi sa osobinom $|R_n T(X)| \geq \omega_1$. Kako je $|R_0 T(X)| = 1$, to je $n > 0$. Neka je $g \in R_{n-1} T(X)$, takav da je $Y' = \{g' \in R_n T(X) \mid g' \supset g\}$ neprebrojiv. Za svako $g' \in Y'$ odaberimo $f(g') \in X$, tako da je $f(g') \supset g'$. Neka je $Y = \{f(g') \mid g' \in Y'\}$, tada je Y traženi neprebrojiv $\prec$-dobro uredjeni podskup od X.

(ii) Neka je $S \subseteq D_\omega(\kappa)$ stacionaran skup i neka je $T(S) = \{f \restriction (n+1) \mid f \in E(S), n \leq \omega\}$. Opet posmatramo drvo $(T(S), \subset)$. Dokažimo da važi:

(+) postoje stacionarni skupovi S' $S'' \subseteq S$, tako da je $f \prec g$, za svako $f \in E(S')$ i $g \in E(S'')$.

Predpostavimo da (+) ne važi. Kako svaki element iz $T(S) \restriction \omega$ možemo shvatiti kao konačan podskup od κ, to po lemi 1.1.(i), za svako $n < \omega$ postoji $g \in R_n T(S)$, tako da je $\{\alpha \in S \mid f_\alpha \supset g\}$ stacionaran. Na osnovu predpostavke da (+) ne važi imamo da je takav $g \in R_n T(S)$ jedinstven, pa ga zato označavamo sa g_n $(n < \omega)$. Iz istog razloga imamo da je $g_n \subset g_{n+1}$, za svako $n < \omega$. Neka je $S_n = \{\alpha \in S \mid f_\alpha \supset g_n\}$, $n < \omega$. Skup $S-S_n$ je nestacionaran, jer bi u suprotnom primenom leme 1.1.(i) dobili $g' \in R_n T(S)$, $g' \neq g_n$, tako da je $\{\alpha \in S \mid f_\alpha \supset g'\}$ stacionaran, suprotno predpostavci da (+) ne važi. Neka je $S' = \bigcap\{S_n \mid n < \omega\}$, tada je $S-S' = \bigcup\{S-S_n \mid n < \omega\}$ nestacionaran po lemi 1.1.(iii), jer je $S-S_n$ nestacionaran, za svako $n < \omega$. Dakle, S' je stacionaran, što je suprotno činjenici da on može biti najviše jednočlan. Ovo dokazuje (+).

Primetimo da na osnovu (+) imamo zaključak da $E(S)$ nije $\prec$-dobro uredjen, ako je $S \subseteq D_\omega(\kappa)$ stacionaran (a, takodje, po lemi 1.1.(iii) nije jednak uniji od $< \kappa$ svojih $\prec$-dobro uredjenih podskupova).

Nastavimo dokaz (ii). Neka je $\alpha \in S$ proizvoljan. Ako postoji $g \subset f_\alpha$, tako da je $\{\beta \in S \mid f_\alpha \prec f_\beta \text{ i } g \subset f_\beta\}$ nestacionaran, tada sa $l(\alpha)$ označimo $\subset$-najmanji takav g. Neka je $S_1 = \{\alpha \in s \mid l(\alpha)$ je definisan$\}$. S_1 nije stacionaran. U suprotnom bi po lemi 1.1(i) postojao stacionaran $S_2 \subseteq S_1$, i $g \in T(S)$, tako da je $l(\alpha) = g$, za svako $\alpha \in S_2$, odakle lako dobijamo protivrečnost, ako (+) primenimo na S_2. Dakle, S_1 je nestacionaran podskup od κ. Neka je $S' = S - S_1$. Direktno na osnovu konstrukcije zaključujemo da S' zadovoljava traženi uslov.

(iii) Neka su $S, S' \subseteq D_\omega(\kappa)$ proizvoljni skupovi i neka je $h\colon E(S) \to E(S')$ izomorfizam $(E(S), \prec)$ i nekog podskupa od $(E(S'), \prec)$. Relaciju $\prec$ proširujemo na $T(D_\omega(\kappa)) = \{f_\alpha \mid (n+1) \mid \alpha \in D_\omega(\kappa),\ n \leqslant \omega\}$ sa: $f \prec g$ ako i samo ako je $f \subset g$ ili $f(\delta) < g(\delta)$ gde je $\delta = \min\{\gamma \mid f(\gamma) \neq g(\gamma)\}$ (tj. $\prec$ je relacija prirodnog uredjenja drveta $(T(D_\omega), \subset)$ iz §1.I). Za svako $g \in T(S') = \{f \mid (n+1) \mid f \in E(S'),\ n \leqslant \omega\}$ stavljamo

$$D(g) = \{f \in E(S) \mid h(f) = g \ \text{ ili } g \prec h(f)\}$$

$$L(g) = \{f \in E(S) \mid h(f) \prec g\}$$

Dakle, $D(g)$ i $L(g)$ su desni i levi Dedekindovi rezovi odredjeni sa g. Neka je

$$d(g) = \{f' \in T(L(g)) \mid \text{ako je } g' \in T(L(g)) \text{ i } g' \prec f', \text{tada je } g' \subset f'\},$$

$$l(g) = \{f' \in T(L(g)) \mid \text{ako je } g' \in T(L(g)) \text{ i } f' \prec g', \text{ tada je } f' \subset g'\}.$$

Dakle, $d(g)$ i $l(g)$ su lanci u $T(D(g)) = \{f \mid (n+1) \mid f \in D(g),\ n \leqslant \omega\}$ i i $T(L(g)) = \{f \mid (n+1) \mid f \in L(g),\ n \leqslant \omega\}$, respektivno. Neka je C skup svih $\alpha < \kappa$ za koje važi:

(1) $f(\max(\mathrm{dom}(f))) < \alpha$ ako i samo ako je $h(f)(\max(\mathrm{dom}(h(f)))) < \alpha$, za svako $f \in E(S)$;

(2) ako je $g \in T(S)$, $g(\max(\mathrm{dom}(g))) < \alpha$ i ako postoji $f \in E(S)$, tako da je $g \subseteq f$, tada postoji takav f, sa osobinom $f(\max(\mathrm{dom}(f))) < \alpha$;

(3) ako je $g \in T(S')$ i $g(\max(\mathrm{dom}(g))) < \alpha$, tada je
$\sup\{f(\max(\mathrm{dom}(f))) \mid f \in d(g)\} < \alpha$ i $\sup\{f(\max(\mathrm{dom}(f))) \mid f \in l(g)\} < \alpha$;

(4) ako je $g \in T(S')$, $f \in T(L(g))$, $g(\max(\mathrm{dom}(g)))$, $f(\max(\mathrm{dom}(f))) < \alpha$ i ako postoji $f' \in L(g)$, tako da je $f \prec f'$ i $f \subset f'$, tada postoji takav f' sa osobinom $f'(\max(\mathrm{dom}(f'))) < \alpha$;

(5) ako je $g \in T(S')$, $f \in T(D(g))$, $g(\max(\mathrm{dom}(g)))$, $f(\max(\mathrm{dom}(f))) < \alpha$, i ako postoji $f' \in D(g)$, tako da je $f' \prec f$, tada postoji takav f' sa osobinom $f'(\max(\mathrm{dom}(f'))) < \alpha$.

Kako je κ regularan neprebrojiv kardinal jednostavno dokazujemo da je C zatvoren i neograničen podskup od κ. Za dokaz (iii) dovoljno je pokazati $C \cap S \subseteq S'$, jer je tada $S - S' \subseteq \kappa - C$ nestacionaran skup.

Neka je $\alpha \in C \cap S$. Trebamo dokazati da je $h(f_\alpha) = f_\alpha$ (jer će iz $h(f_\alpha) \in E(S')$ slediti $\alpha \in S'$). Pre svega imamo da je $h(f_\alpha)(\max(\mathrm{dom}(h(f_\alpha)))) \geq \alpha$, jer bi u suprotnom iz (1) sledilo $f_\alpha(\max(\mathrm{dom}(f_\alpha))) = f_\alpha(\omega) = \alpha < \alpha$, što je nemoguće. Dakle, u slučaju $g(f_\alpha) \neq f_\alpha$ imamo da je $h(f_\alpha)(\omega) > \alpha$, što znači da postoji $n' < \omega$ sa osobinom $h(f_\alpha)(n') < \alpha \leq h(f_\alpha)(n'+1)$. Neka je $g = h(f_\alpha) \mid (n+1)$. Kako za $f_\alpha \mid (n+1)$, $n < \omega$ važi predpostavka uslova (2), to na osnovu (2) znamo da postoje $f_n \in E(S)$, $f_\alpha \mid (n+1) \subset f_n$ i $f_n(\max(\mathrm{dom}(f_n))) < \alpha$, za svako $n < \omega$.

Slučaj 1. $|\{n < \omega \mid f_n \in L(g)\}| = \omega$. Dokažimo da je tada $\{f_\alpha \mid (n+1) \mid n < \omega\} \subseteq l(g)$. Pre svega imamo da je $\{f_\alpha \mid (n+1) \mid n < \omega\} \subseteq T(L(g))$. Ako $f_\alpha \mid (n+1) \not\in l(g)$, tada postoji $g' \in T(L(g))$ tako da je $f_\alpha \mid (n+1) \prec g'$ i $f_\alpha \mid (n+1) \not\subset g'$. Jasno je da možemo predpostaviti da je $g' \in L(g)$. Na osnovu (4) možemo predpostaviti da je $g'(\max(\mathrm{dom}(g'))) = g(\omega) < \alpha$. Na osnovu (1) imamo da je $h(g')(\omega) < \alpha$. Kako je $f_\alpha \prec g'$ to je $h(f_\alpha) \prec h(g')$, što na osnovu $h(f_\alpha)(n'+1) > \alpha > h(g')(n'+1)$ znači da je $m = \min\{m' \mid h(f_\alpha)(m') \neq h(g')(m')\} < n'+1$. Kako je $g = h(f_\alpha) \mid (n'+1)$, to je $g \prec h(g')$ odakle je $g' \in D(g)$ suprotno predpostavci.

Dakle, $\{f_\alpha \mid (n+1) \mid n < \omega\} \subseteq l(g)$ odakle je $\sup\{f(\max(\mathrm{dom}(f))) \mid f \in l(g)\} \geq \alpha$ suprotno sa (3).

Slučaj 2. $|\{n < \omega \mid f_n \in D(g)\}| = \omega$. Protivrečnost dobijamo kao u slučaju 1.

Ovo konačno dokazuje da je $h(f_\alpha) = f_\alpha$, tj. $\alpha \in S'$ čime se dokaz leme završava. ∎

Na osnovu (ii) predhodne leme imamo da za svaki stacionaran $S \subseteq D_\omega(\kappa)$ sadrži $S' \subseteq S$, tako da je $S-S'$ nestacionaran skup i tako da $E(S')$ ima osobinu: $\{\gamma \in S' \mid f_\alpha \prec f_\gamma \prec f_\beta\}$ je stacionaran za svako f_α, $f_\beta \in E(S')$, $f_\alpha < f_\beta$. Ovo ćemo izražavati rečima da je u $E(S')$ <u>svaki interval stacionaran</u>.

Neka je $S \subseteq D_\omega(\kappa)$ proizvoljan skup, tada sa $B(S)$ označavamo Booleovu algebru svih konačnih unija intervala iz $E(S)$ oblika $[x, y)$, $x, y \in E(S) \cup \{-\infty, +\infty\}$. Dakle, imamo da je $|B(S)| = |S|$, za beskonačan $S \subseteq D_\omega(\kappa)$. Primetimo da je $\{[-\infty, f), \mid f \in E(S)\} \cup \{-\infty, +\infty\}$ monotona baza algebre $B(S)$.

<u>Lema 1.3.</u> Neka je κ proizvoljan regularan neprebrojiv kardinal i neka su S', $S'' \subseteq D_\omega(\kappa)$ proizvoljni skupovi. Ako postoji strogo rastuće preslikavanje $H: B(S') \to B(S'')$, tada je $S' - S''$ nestacionaran podskup od κ.

<u>Dokaz:</u> Predpostavimo suprotno, tj. da je $S = S'-S''$ stacionaran podskup od κ. Neka je $b_\alpha = [-\infty, f_\alpha)$ $(= \{f \in E(S') \mid f \prec f_\alpha\} \in B(S'))$, za svako $\alpha \in S$. Dakle, po predpostavci je $H(b_\alpha) \subset H(b_\beta)$, za svako $\alpha, \beta \in S$, $f_\alpha \prec f_\beta$ ($\subset$ nam uvek označava strogu inkluziju). Neka je $\alpha \in S$ proizvoljan. Kako je $H(b_\alpha) \in B(S'')$, to postoji jedinstveno razlaganje

$$H(b_\alpha) = \bigcup\{[x_\alpha^i, y_\alpha^i) \mid i < n(\alpha)\}, \qquad (6)$$

gde je $n(\alpha) < \omega$, i $x_\alpha^i, y_\alpha^i \in E(S'') \cup \{-\infty, +\infty\}$, za svako $i < n(\alpha)$ i $x_\alpha^i < y_\alpha^i < x_\alpha^{i+1}$, za svako $i < n(\alpha) - 1$. Kako je S stacionaran, to postoji stacionaran $T \subseteq S$ i $n < \omega$, tako da je $n(\alpha) = n$, za svako $\alpha \in$ (v. lemu 1.1.(i)).

Preslikavanje $h: T \to \kappa$ definišemo na sledeći način. Neka je $\alpha \in T$ proizvoljan, tada ili postoji $\beta \in S''$, tako da je $x^o_\alpha = f_\beta$ ili je $x^o_\alpha = -\infty$. U prvom slučaju stavljamo $h(\alpha) = \beta$ a u drugom $h(\alpha) = 0$.

Po lemi 1.1.(ii) ili postoji stacionaran $S_1 \subseteq T$ i $\beta_1 < \kappa$, tako da je $h''(S_1) = \{\beta_1\}$ ili postoji stacionaran $S'_1 \subseteq T$, takav da je $h \mid S'_1$ 1-1 preslikavanje i $h(\alpha) \geq \alpha$, za svako $\alpha \in S'_1$. Pokažimo da drugi slučaj ne može nastupiti. Predpostavimo suprotno, tj. da takav S'_1 postoji.

Neka je $\alpha, \beta \in S'_1$ i $f_\alpha \prec f_\beta$. Kako je $H(b_\alpha) \subset H(b_\beta)$, to na osnovu (6) imamo da je $x^o_\alpha \succcurlyeq x^o_\beta$. Kako je $h(\alpha) \neq h(\beta)$, to je $x^o_\alpha = f_{h(\alpha)} \neq$ $\neq f_{h(\beta)} = x^o_\beta$, odakle mora biti $f_{h(\alpha)} \succ f_{h(\beta)}$. Ovo dokazuje da je $(E(S'_1), \prec)$ inverzno izomorfan podskup od $(E(S''), \prec)$. Medjutim, ovo ne može biti, jer po lemi 1.2.(i) $E(S'_1)$ sadrži neprebrojiv dobro $\prec$-uredjen podskup a $E(S'')$ ne sadrži ni jedan neprebrojiv inverno dobro $<$-uredjen podskup.

Dakle, postoji stacionaran $S_1 \subseteq T$ i $\beta_1 < \kappa$, tako da je $h''(S_1) = \{\beta_1\}$, tj. $x^o_\alpha = x^o_\beta$, za svako $\alpha, \beta \in S_1$.

Definišimo sada preslikavanje $l: S_1 \to \kappa$. Neka je $\alpha \in S_1$ proizvoljan, tada ili postoji $\beta \in S''$, tako da je $y^o_\alpha = f_\beta$ ili je $y^o_\alpha = +\infty$. U prvom slučaju stavljamo $l(\alpha) = \beta$ a u drugom $l(\alpha) = 0$. Po lemi 1.1.(ii) ili postoji stacionaran $S_2 \subseteq S_1$ i $\beta_2 < \kappa$, tako da je $l''(S_2) = \{\beta_2\}$ ili postoji stacionaran $S'_2 \subseteq S_1$, takav da je $l \mid S'_2$ 1-1 preslikavanje i $l(\alpha) \geq \alpha$, za svako $\alpha \in S'_2$. Pokažimo da drugi slučaj ne može nastupiti. Predpostavimo suprotno, tj. da takav $S'_2 \subseteq S_1$ postoji.

Neka je $\alpha, \beta \in S'_1$ i $f_\alpha \prec f_\beta$. Kako je $H(b_\alpha) \subset H(b_\beta)$ i kako je $S'_2 \subseteq S_1$ to na osnovu (6) imamo da je $y^o_\alpha \preccurlyeq y^o_\beta$. Kako je $l(\alpha) \neq l(\beta)$, to je $y^o_\alpha = f_{l(\alpha)} \neq f_{l(\beta)} = y^o_\beta$, odakle mora biti $f_{l(\alpha)} \prec f_{l(\beta)}$. Ovo dokazuje da je $(E(S'_2), \prec)$ sličan sa podskupom od $(E(S''), \prec)$, što po lemi 1.2.(ii) znači da je $S'_2 = S'_2 - S''$ nestacionaran podskup od κ suprotno predpostavci (podsetimo se da je $S'_2 \subseteq S = S' - S''$).

Dakle, postoji stacionaran $S_2 \subseteq S_1$ i $\beta_1 < \kappa$, tako da je $l''(S_2) = \{\beta_2\}$, tj. $y^o_\alpha = y^o{}_\beta$, za svako $\alpha, \beta \in S_2$.

Nastavljajući ovaj postupak $2n$ puta dolazimo do stacionarnog $S_{2n} \subseteq S_{2n-1} \subseteq \ldots \subseteq S_1 \subseteq T \subseteq S$, takvo da je $x^i_\alpha = x^i_\beta$ i $y^i_\alpha = y^i_\beta$, za svako

$i < n$ i svako $\alpha, \beta \in S_{2n}$. To znači da je $H(b_\alpha) = H(b_\beta)$ (na osnovu (6)) za svako $\alpha, \beta \in S_{2n}$, što je suprotno sa predpostavkom da je $H: B(S') \to B(S'')$ strogo rastuće preslikavanje. Ovo završava dokaz leme. ∎

Na osnovu predhodne leme posebno imamo da su algebre oblika $B(S')$ i $B(S'')$ izomorfne jedino u slučaju kad je $S' \Delta S''$ nestacionaran podskup od κ.

Lema 1.4. Neka je κ proizvoljan regularan neprebrojiv kardinal i $S \subseteq D_\omega(\kappa)$ takav skup da je u $E(S)$ svaki interval stacionaran. Tada ne postoji ni jedno netrivijalno strogo rastuće preslikavanje iz $B(S)$ u $B(S)$.

Dokaz: Predpostavimo suprotno, tj. da postoji jedno netrivijalno strogo rastuće preslikavanje $H: B(S) \to B(S)$. Dakle, postoji $b \in B(S)$, tako da je $c = H(b) \not\leq b$.

Posmatrajmo prvo slučaj $c-b \neq \phi$, što znači da postoje $\alpha, \beta \in S$, $f_\alpha \prec f_\beta$ tako da je $[f_\alpha, f_\beta) \subseteq c-b$.

Neka je $S' = \{\gamma \in S \mid f_\alpha \preccurlyeq f_\gamma \prec f_\beta\}$ i $S'' = \{\gamma \in S \mid f_\gamma \not\in c\}$. Dakle imamo da je $S' \cap S'' = \phi$, dok je po predpostavci S' stacionaran podskup od κ.

Definišimo strogo rastuće preslikavanje $F: B(S') \to B(S'')$ imajući u vidu jednostavne činjenice $B(S') \cong B(S) \mid [f_\alpha, f_\beta)$ i $B(S'') \cong B(S) \mid (E(S)-c)$. Neka je $d \in B(S')$ proizvoljan, tada stavljamo $F(d) = H(b \cup d)-c$.

Na osnovu predhodne leme imamo da je $S' = S'-S''$ nestacionaran podskup od κ suprotno činjenici da je $S' = \{\gamma \in S \mid f_\alpha \preccurlyeq f_\gamma \prec f_\beta\}$ stacionaran.

Posmatrajmo sada slučaj $c \subset b$. Neka je $d = H(c)$, odakle je $d \subset c \subset b$ ($\subset$ je stroga inkluzija). Neka je $S' = \{\gamma \in S \mid f_\gamma \in b-c\}$ i $S'' = \{\gamma \in S \mid f_\gamma \in c-d\}$, tada su po predpostavci (leme) skupovi S' i S'' stacionarni i $S' \cap S'' = \phi$.

Definišimo strogo rastuće preslikavanje $G: B(S') \to B(S')$ imajući u vidu jednostavne činjenice $B(S') \cong B(S) \mid (b-c)$ i $B(S'') = B(S) \mid (c-d)$. Neka je $e \in B(S')$ proizvoljan, tada stavljamo $G(e) = H(c \cup e)-d$. Na osnovu predhodne leme imamo da je $S' = S' - S''$ nestacionaran podskup od

κ, što protivreči gornjoj činjenici. Ovo završava dokaz leme 1.4. ∎

Posmatrajmo sada "na" homomorfirme u klasi algebri oblika $B(S)$.

Lema 1.5. Neka je κ proizvoljan regularan neprebrojiv kardinal i neka su S', $S''\subseteq D_\omega(\kappa)$ proizvoljni skupovi. Ako postoji "na" homomorfizam $H: B(S') \to B(S'')$, tada je $S''-S'$ nestacionaran podskup od κ.

Dokaz: Predpostavimo suprotno, tj. da je $S = S''-S'$ stacionaran podskup od κ. Opet za svako $\alpha \in S$ posmatramo $b_\alpha = [-\infty, f_\alpha)$ $(\in B(S''))$. Dakle, $b_\alpha \subset b_\beta$, za svako $\alpha,\beta \in S$, $f_\alpha \prec f_\beta$. Slično za $\alpha \in S'$ posmatramo $c_\alpha = [-\infty, f_\alpha) = \{f \in E(S') | f \prec f_\alpha\} \in B(S')$. Dakle, $\{c_\alpha | \alpha \in S'\} \cup \{\phi, E(S')\}$ čini monotonu bazu algebre $B(S')$. Na $E(S')$ definišemo relaciju ekvivalencije $\sim$ sa: $f_\alpha \sim f_\beta$, ako je $H(c_\alpha) = H(c_\beta)$. Jasno je, da su klase ekvivalencije relacije $\sim$ konveksni podskupovi od $E(S')$. Neka je $T\subseteq S'$ takav da je $\{f_\alpha | \alpha \in T\}$ jednak skupu predstavnika klasa ekvivalencije relacije $\sim$. Dakle, sa α, $\beta \in T$, $f_\alpha < f_\beta$ imamo $H(c_\alpha) \subset H(c_\beta)$ ($\subset$ je stroga inkluzija).

Kako je H "na" homomorfizam i kako je $\{c_\alpha | \alpha \in S'\} \cup \{\phi, E(S')\}$ monotona baza algebre $B(S')$ to je $\{H(c_\alpha) | \alpha \in S'\} \cup \{\phi, E(S'')\}$ monotona baza algebre $B(S'')$, odakle je i $\{H(c_\alpha) | \alpha \in T\} \cup \{\phi, E(S'')\}$ monotona baza algebre $B(S'')$ (naime, ove kolekcije su jednake).

Neka je $\alpha \in S$ proizvoljan. Kako je $b_\alpha \in B(S'')$ i kako je $\{H(c_\gamma) | \gamma \in T\} \cup \{\phi, E(S'')\}$ monotona baza algebre $B(S'')$, to postoji jedinstveno razlaganje,

$$b_\alpha = \bigcup \{-H(x_\alpha^i) \cap H(y_\alpha^i) | \ i < n(\alpha)\} \tag{7}$$

gde je $n(\alpha) < \omega$, x_α^i, $y_\alpha^i \in \{c_\gamma | \gamma \in T\} \cup \{\phi, E(S')\}$, za svako $i < n(\alpha)$ i $H(x_\alpha^i) \subset H(y_\alpha^i) \subset H(x_\alpha^{i+1})$, za svako $i < n(\alpha)$ (odakle je i $x_\alpha^i \subset y_\alpha^i \subset x_\alpha^{i+1}$, za za svako $i < n(\alpha)$, pri čemu nam $\subset$ uvek označava strogu inkluziju). Kako je S stacionaran, to prelaženjem na stacionaran podskup možemo predpostaviti da je $n(\alpha) = n$, za svako $\alpha \in S$.

Preslikavanje $h: S \to \kappa$ definišemo na sledeći način. Neka je $\alpha \in S$ proizvoljan, tada ili postoji $\beta \in T$, tako da je $x_\alpha^o = c_\beta$ ili je $x_\alpha^o = \phi$. U prvom slučaju stavljamo $h(\alpha) = \beta$ a u drugom $h(\alpha) = 0$.

Na osnovu leme 1.1(ii) znamo da ili postoji stacionaran $S_1 \subseteq S$ i $\beta_1 < \kappa$, tako da je $h''(S_1) = \{\beta_1\}$ ili postoji stacionaran $S_1' \subseteq S$, takav da je $h \mid S_1'$ 1-1 preslikavanje i $h(\alpha) \geq \alpha$, za svako $\alpha \in S_1'$. Pokažimo da drugi slučaj ne može nastupiti. Predpostavimo suprotno, tj. da takav S_1 postoji.

Neka je $\alpha, \beta \in S_1'$ i $f_\alpha \prec f_\beta$. Tada na osnovu $b_\alpha \subset b_\beta$, na osnovu osobina skupa T i na osnovu (7) zaključujemo da mora biti $H(x_\alpha^o) \supseteq H(x_\beta^o)$. Kako je $h(\alpha) \neq h(\beta)$ to je $x_\alpha^o = c_{h(\alpha)} \neq c_{h(\beta)} = x_\beta^o$, odakle je $c_{h(\alpha)} \supset c_{h(\beta)}$, tj. $f_{h(\alpha)} \succ f_{h(\beta)}$. Ovo dokazuje da je $f_\alpha \to f_{h(\alpha)}$, $\alpha \in S_1'$ inverzni izomorfizam skupa $(E(S_1'), \prec)$ sa jednim podskupom od $E(T)$ odnosno $E(S')$. Medjutim, ovo ne može biti, jer po lemi 1.2.(i) $E(S_1')$ sadrži neprebrojiv dobro $\prec$-uredjen skup a $E(S')$ ne sadrži ni jedan neprebrojiv inverzno dobro $\prec$-uredjen podskup.

Dakle, postoji stacionaran $S_1 \subseteq S$ i $\beta_1 < \kappa$, tako da je $f''(S_1) = \{\beta_1\}$, tj. $H(x_\alpha^o) = H(x_\beta^o)$, za svako $\alpha, \beta \in S_1$.

Definišimo sada preslikavanje $l: S_1 \to \kappa$. Neka je $\alpha \in S_1$ proizvoljan, tada ili postoji $\beta \in T$, tako da je $y_\alpha^o = c_\beta$ ili je $y_\alpha^o = E(S')$. U prvom slučaju stavljamo $l(\alpha) = \beta$ a u drugom $l(\alpha) = 0$.

Na osnovu leme 1.1.(ii) znamo da ili postoji stacionaran $S_2 \subseteq S_1$ i $\beta_2 < \kappa$, tako da je $l''(S_2) = \{\beta_2\}$ ili postoji stacionaran $S_2' \subseteq S_1$, takav da je $l \mid S_2'$ 1-1 preslikavanje i $l(\alpha) \geq \alpha$, za svako $\alpha \in S_2'$. Pokažimo da drugi slučaj ne može nastupiti. Predpostavimo suprotno, tj. da takav S_2' postoji.

Neka je $\alpha, \beta \in S_2'$ i $f_\alpha \prec f_\beta$. Tada na osnovu $b_\alpha \subset b_\beta$, na osnovu osobina skupa T, na osnovu $S_2' \subseteq S_1$ i na osnovu (7) mora biti $H(y_\alpha^o) \subseteq H(y_\beta^o)$, tj. $y_\alpha^o \subseteq y_\beta^o$. Kako je $l(\alpha) \neq l(\beta)$, to je $y_\alpha^o = c_{l(\alpha)} \neq c_{l(\beta)} = y_\beta^o$, odakle je $c_{l(\alpha)} \subset c_{l(\beta)}$, tj. $f_{l(\alpha)} \prec f_{l(\beta)}$. Ovo dokazuje da je $f_\alpha \to f_{l(\alpha)}$ izomorfizam linearno uredjenog skupa $(E(S_2'), \prec)$ sa podskupom od $(E(S'), \prec)$. Medjutim, ovo protivreči lemi 1.2. (iii), jer je $S_2' = S_2' - S'$ stacionaran skup (podsetimo se da je $S_2' \subseteq S = S'' - S'$).

Dakle, postoji stacionaran $S_2 \subseteq S_1$ i $\beta_1 < \kappa$, tako da je

$1''(S_2) = \{\beta_2\}$, tj. $H(y^o_\alpha) = H(y^o_\beta)$, za svako $\alpha,\beta \in S_2$.

Nastavljajući ovaj postupak 2n puta dolazimo do stacionarnog skupa $S_{2n} \subseteq S_{2n-1} \subseteq \ldots \subseteq S_1 \subseteq S$, takvog da je $H(x^i_\alpha) = H(x^i_\beta)$ i $H(y^i_\alpha) = H(y^i_\beta)$, za svako $i < n$ i svako $\alpha,\beta \in S_{2n}$. Na osnovu (7), to znači da je $b_\alpha = b_\beta$, za svako $\alpha,\beta \in S_{2n}$, što je nemoguće. Ovo završava dokaz leme. ■

Lema 1.6. Neka je κ proizvoljan regularan neprebrojiv kardinal i $S \subseteq D_\omega(\kappa)$ takav skup da je u $E(S)$ svaki interval stacionaran. Tada $B(S)$ nema netrivijalnih "na" endomorfizama.

Dokaz: Neka je $H: B(S) \to B(S)$ proizvoljan "na" endomorfizam. Opet za svako $\alpha \in S$ posmatramo $b_\alpha = [-\infty, f_\alpha)$ $(= \{f \in E(S) | f < f_\alpha\} \in B(S)$). Kako smo već napomenuli skup $\mathcal{U} = \{b_\alpha | \alpha \in S\} \cup \{\phi, E(S)\}$ je monotona baza algebre $B(S)$. Ako je $H | \mathcal{U}$ 1-1 preslikavanje, tada je, jasno, i samo preslikavanje H 1-1 preslikavanje, tj. automorfizam algebre $B(S)$. Na osnovu leme 1.4. imamo da je H = identičkom preslikavanju algebre $B(S)$, što nam i treba.

Dakle, možemo posmatrati slučaj $H(b_{\alpha'}) = H(b_{\beta'})$, za neko $\alpha', \beta' \in S$, $\alpha' \neq \beta'$. Neka je, na primer, $f_{\alpha'} \prec f_{\beta'}$ i neka je $b = [f_{\alpha'}, f_{\beta'}) \in B(S)$. Neka je $c \in B(S)$, takav da je $H(c) = b$. Kako je $H(b) = \phi$ i $H(c) = b \neq \phi$, to je $c-b \neq \phi$ i $d = H(c-b) \neq \phi$ (i $d \subseteq b$). Neka je $S' = \{\gamma | f_\gamma \in c-b\}$ i neka je $S'' = \{\gamma \in S | f_\gamma \in d\}$, tada su po predpostavci leme S' i S'' stacionarni, dok je $S' \cap S'' = \phi$. Definišimo $F: B(S') \to B(S'')$ sa $F(e) = H(e)$ pri čemu imamo u vidu jednostavne činjenice $B(S') \cong B(S) | (c-b)$ i $B(S'') \cong B(S) | d$. Tada je F homomorfizam Booleove algebre $B(S')$ na $B(S')$ što protivreči lemi 1.5. Dakle drugi slučaj ne može nastupiti. Ovo završava dokaz leme. ■

Teorema 1.7. Za svaki kardinal $\kappa > \omega$ postoji tačno 2^κ tipova izomorfnosti krutih Booleovih algebri moći κ.

Dokaz : Predpostavimo prvo da je $\kappa > \omega$ regularan kardinal. Neka je $S \subseteq D_\omega(\kappa)$ proizvoljan stacionaran skup, takav da je u $E(S)$ svaki interval stacionaran, tada je po lemi 1.4. $B(S)$ kruta Booleva algebra moći κ.

Na osnovu [73] postoji familija T_α, $\alpha < \kappa$ medjusobno disjunktnih stacionarnih podskupova od $D_\omega(\kappa)$. Takodje znamo da postoji familija X_α, $\alpha < 2^\kappa$, podskupova od κ, tako da je $X_\alpha - X_\beta \neq \phi$, za svako $\alpha, \beta < 2^\kappa$, $\alpha \neq \beta$. Neka je $S_\alpha = \cup\left\{T_\beta \mid \beta \in X_\alpha\right\}$, za svako $\alpha < 2^\kappa$.

Dakle familija S_α, $\alpha < 2^\kappa$ ima osobinu da je $S_\alpha - S_\beta$ stacionaran, za svako $\alpha, \beta < 2^\kappa$, $\alpha \neq \beta$. Na osnovu leme 1.2.(ii) znamo da postoji $S'_\alpha \subseteq S_\alpha$, takav da je $S_\alpha - S'_\alpha$ nestacionaran i takav da je u $E(S'_\alpha)$ svaki interval stacionaran. Jasno je, da familija S'_α, $\alpha < 2^\kappa$ ima osobinu da je $S'_\alpha - S'_\beta$ stacionaran za svako $\alpha, \beta < 2^\kappa$, $\alpha \neq \beta$. Sada na osnovu lema 1.4. i 1.3. znamo da je $B(S'_\alpha)$, $\alpha < 2^\kappa$ familija krutih medjusobno neizomorfnih Booleovih algebri.

Predpostavimo sada da je $\kappa > \omega$ singularan kardinal. Neka je κ_α, $\alpha < \lambda = cf(\kappa)$ strogo rastući niz regularnih neprebrojivih kardinala čiji je supremum κ.

Za svako $\alpha > \lambda$ odaberimo stacionaran $S_\alpha \subseteq D_\omega(\kappa_\alpha)$, takav da je u $E(S_\alpha)$ svaki interval stacionaran. Pored toga predpostavljamo da su $E(S_\alpha)$, $\alpha < \lambda$ medjusobno disjunktni i da imaju minimalne elemente.

Neka je $E = \cup\left\{E(S_\alpha) \mid \alpha < \lambda\right\}$. Skup E uredjujemo relacijom $\prec$ tako da je $\prec \mid E(S_\alpha)$ jednako leksikografskom uredjenju toga skupa, za svako $\alpha < \lambda$, dok je $E(S_\alpha) \prec E(S_\beta)$, za svako $\alpha < \beta < \lambda$.

Sa $B(E)$ označavamo Booleovu algebru svih konačnih unija intervala iz $(E, <)$ oblika $[x, y)$, $x, y \in E \cup \left\{-\infty, +\infty\right\}$. Dakle, imamo da je $|B(E)| = |E| = \kappa$.

Kako je $|B(S_\alpha) \mid b| = \kappa_\alpha$, za svako $\phi \neq b \in B(S_\alpha)$ i svako $\alpha < \lambda$, to svaki automorfizam algebre $B(E)$ inducira automorfizam algebre $B(S_\alpha)$ za svako $\alpha < \lambda$. Dakle, po lemi 1.4. imamo da je $B(E)$ kruta Booleova algebra.

Neka su $B(E)$ i $B(E')$, tako dobijene Booleove algebre na osnovu nizova S_α, $\alpha < \lambda$ i S'_α, $\alpha < \lambda$ respektivno i neka je $H: B(E) \to B(E')$ izomorfizam. Kao i gore imamo da H inducira izomorfizam $H_\alpha : B(S_\alpha) \to B(S'_\alpha)$, za svako $\alpha < \lambda$.

Kako je κ_α regularan i neprebrojiv, to na osnovu dokazanog postoji familija moći 2^{κ_α} medjusobno neizomorfnih Booleovih algebri oblika $B(S_\alpha)$, $S_\alpha \subseteq D_\omega(\kappa_\alpha)$ i u $E(S_\alpha)$ je svaki interval stacionaran, za svako $\kappa < \lambda$. To znači da postoji $\Pi\left\{2^{\kappa_\alpha} \mid \alpha < \lambda\right\} = 2^\kappa$ krutih medjusobno niizomorfnih algebri oblika $B(E)$ (i svaka, jasno, ima moć κ). Ovo završava dokaz teoreme. ∎

Stoneov prostor Booleovih algebri, koje smo konstruisali u dokazu predhodne teoreme je uredjen. Naime, Stoneov prostor algebre B(S) (odnosno B(E)) se dobija iz Dedekindove komplefifikacije linearno uredjenog skupa $(E(S),\prec)$ (odnosno $(E,\prec)$) udvajanjem svake nekrajnje tačke iz E(S) (odnosno E). Primetimo da teorema 1.7. daje pozitivne odgovore na probleme 8 i 9 iz [58].

McKenzie i Monk [58, Problem 6] pitaju:Da li postoji beskonačna Booleova algebra, koja nema netrivijalnih 1-1 endomorfizama?

Familija $B(S'_\alpha)$, $\alpha < 2^\kappa$, koju smo definisali na početku dokaza teoreme 1.7. zajedno sa lemama 1.3. i 1.4. daje sledeći pozitivan odgovor na mnogo jače pitanje:

<u>Teorema 1.8.</u> Neka je κ proizvoljan regularan neprebrojiv kardinal. Tada postoji familija B_α, $\alpha < 2^\kappa$ medjusobno različitih Booleovih algebri, od kojih svaka ima moć κ, tako da je svako strogo rastuće preslikavanje $H\colon B_\alpha \to B_\beta$, $\alpha,\beta < 2^\kappa$ nužno jednako identičkom preslikavanju algebre B_α. ∎

Posle "Problema 6" McKenzie i Monk [58, Problem 7] postavljaju sledeće dualno pitanje: za koje beskonačne kardinale κ postoji Booleova algebra moći κ bez netrivijalnih "na" endomorfizama?

Oni ovaj problem postavljaju u ovom obliku, jer je Rieger [63] konstruisao Booleovu algebru bez netrivijalnih "na" endomorfizama, i jer je njena moć dosta velika. Naime, njegove Booleove algebre imaju moć izmedju $\aleph_\alpha$ i $2^{\aleph_\alpha}$, gde za $\aleph_\alpha$ važi: $\aleph_\alpha = \alpha$. Sledeća teorema daje dovoljno kompletan odgovor na to pitanje. Ona je već dokazana, jer na osnovu Lema 1.5. i 1.6. imamo da familija $B(S'_\alpha)$, $\alpha < 2^\kappa$, koju smo konstruisali na početku dokaza teoreme 1.7., zadovoljava njen zaključak.

<u>Teorema 1.9.</u> Neka je κ proizvoljan regularan neprebrojiv kardinal. Tada postoji familija B_α, $\alpha < 2^\kappa$ medjusobno različitih Booleovih algebri, od kojih svaka ima moć κ, tako da je svaki "na" homomorfizam $H\colon B_\alpha \to B_\beta$, α, $\beta < 2^\kappa$ nužno jednak identičkom preslikavanju algebre B_α. ∎

Primetimo da ista familija (tj. familija $B(S'_\alpha)$, $\alpha < 2^\kappa$, koju smo konstruisali na početku dokaza teoreme 1.7) zadovoljava i teoremu 1.8 i teoremu 1.9, tj. važi tvrdjenje:

Stoneov prostor Booleovih algebri, koje smo konstruisali u dokazu predhodne teoreme je uredjen. Naime, Stoneov prostor algebre $B(S)$ (odnosno $B(E)$) se dobija iz Dedekindove komplefifikacije linearno uredjenog skupa $(E(S), \prec)$ (odnosno $(E, \prec)$) udvajanjem svake nekrajnje tačke iz $E(S)$ (odnosno E). Primetimo da teorema 1.7. daje pozitivne odgovore na probleme 8 i 9 iz [58].

McKenzie i Monk [58, Problem 6] pitaju:Da li postoji beskonačna Booleova algebra, koja nema netrivijalnih 1-1 endomorfizama?

Familija $B(S'_\alpha)$, $\alpha < 2^\kappa$, koju smo definisali na početku dokaza teoreme 1.7. zajedno sa lemama 1.3. i 1.4. daje sledeći pozitivan odgovor na mnogo jače pitanje:

<u>Teorema 1.8.</u> Neka je κ proizvoljan regularan neprebrojiv kardinal. Tada postoji familija B_α, $\alpha < 2^\kappa$ medjusobno različitih Booleovih algebri, od kojih svaka ima moć κ, tako da je svako strogo rastuće preslikavanje $H\colon B_\alpha \to B_\beta$, $\alpha, \beta < 2^\kappa$ nužno jednako identičkom preslikavanju algebre B_α. ∎

Posle "Problema 6" McKenzie i Monk [58, Problem 7] postavljaju sledeće dualno pitanje: za koje beskonačne kardinale κ postoji Booleova algebra moći κ bez netrivijalnih "na" endomorfizama?

Oni ovaj problem postavljaju u ovom obliku, jer je Rieger [63] konstruisao Booleovu algebru bez netrivijalnih "na" endomorfizama, i jer je njena moć dosta velika. Naime, njegove Booleove algebre imaju moć izmedju $\aleph_\alpha$ i $2^{\aleph_\alpha}$, gde za $\aleph_\alpha$ važi: $\aleph_\alpha = \alpha$. Sledeća teorema daje dovoljno kompletan odgovor na to pitanje. Ona je već dokazana, jer na osnovu Lema 1.5. i 1.6. imamo da familija $B(S'_\alpha)$, $\alpha < 2^\kappa$, koju smo konstruisali na početku dokaza teoreme 1.7., zadovoljava njen zaključak.

<u>Teorema 1.9.</u> Neka je κ proizvoljan regularan neprebrojiv kardinal. Tada postoji familija B_α, $\alpha < 2^\kappa$ medjusobno različitih Booleovih algebri, od kojih svaka ima moć κ, tako da je svaki "na" homomorfizam $H\colon B_\alpha \to B_\beta$, $\alpha, \beta < 2^\kappa$ nužno jednak identičkom preslikavanju algebre B_α.

Primetimo da ista familija (tj. familija $B(S'_\alpha)$, $\alpha < 2^\kappa$, koju smo konstruisali na početku dokaza teoreme 1.7) zadovoljava i teoremu 1.8 i teoremu 1.9, tj. važi tvrdjenje:

(8) za svaki regularan neprebrojiv kardinal κ postoji familija B_α, $\alpha < 2^\kappa$ medjusobno različitih Booleovih algebri, od kojih svaka ima moć κ, tako da ako je $H: B_\alpha \to B_\beta$, $\alpha, \beta < 2^\kappa$ proizvoljni "na" homomorfizam ili strogo rastuće preslikavanje, tada je H nužno jednako identičkom preslikavanju algebre B_α.

Neka su B_1 i B_2 dve proizvoljne Booleove algebre, tada pišemo $B_1 \leq B_2$ ako je B_1 slična podalebri algebre B_2. Pisaćemo $B_1 < B_2$ ako važi $B_1 \leq B_2$ i $B_2 \nleq B_1$. Jasno je, da je $\leq$ relacija kvazi uredjenja, tj. da je refleksivna i tranzitivna. Kako na standardan način možemo naći familiju S_α, $\alpha < \kappa$ stacionarnih podskupova od $D_\omega(\kappa)$, tako da je $S_\alpha \subseteq S_\beta$, dok je $S_\beta - S_\alpha$ stacionaran podskup od κ, za svako $\beta < \alpha < \kappa$ (i svaki interval u $E(S_\alpha)$ je stacionaran), to primenom teoreme Sikorskog o produženju $B(S_o) > B(S_1) > \dots > B(S_\alpha) > \dots$, $\alpha < \kappa$. Dakle važi:

(9) za svaki regularan neprebrojiv kardinal κ postoji strogo $<$-opadajući niz dužine κ krutih Booleovih algebri moći κ.

Posmatrajmo sada pitanje važenja teorema 1.8. i 1.9. odnosno tvrdjenja (8) za singularne neprebrojive kardinale. U slučaju singularnog $\kappa > \omega$ smo u dokazu teoreme 1.7. odabrali strogo rastući niz κ_α, $\alpha < \lambda = \mathrm{cf}(\kappa)$ regularnih neprebrojivih karinala (na primer sukcesora) zatim za niz S_α, $\alpha < \lambda$ ($S_\alpha \subseteq D_\omega(\kappa_\alpha)$ stacionaran i $E(S_\alpha)$ ima sve intervale stacionarne) smo obrazovali linearno uredjen skup $E = \cup \{E(S_\alpha) | \alpha < \lambda\}$ i algebru $B(E)$, za koju smo dokazali da je kruta Booleova algebra moći κ. Da bi dokazali da $B(E)$ nema netrivijalnih "na" endomorfizama odnosno strogo rastućih preslikavanja potrebna nam je dodatna osobina stacionarnih skupova S_α odnosno linearno uredjenih skupova $E(S_\alpha)$. Naime, potrebna nam je osobina da za svako $\alpha < \beta < \lambda$, $E(S'_\alpha)$ nije sličan podskupu od $E(S_\beta)$, za svaki stacionaran $S'_\alpha \subseteq S_\alpha$ (podsetimo se da se uvek držimo dogovora sa početka odeljka: da smo za svaki ordinal α, $\mathrm{cf}(\alpha) = \omega$ unapred fiksirali neprekidno i strogo rastuće preslikavanje $f_\alpha: \omega+1 \to 0_n$, tako da je $f_\alpha(0) = 0$ i $f_\alpha(\omega) = \alpha$, tako da nam je $E(S) = \{f_\alpha | \alpha \in S\}$, za svaki skup $S \subseteq \{\alpha | \lim(\alpha), \mathrm{cf}(\alpha) = \omega\}$ pri čemu na $E(S)$ uvek posmatramo leksikografsko uredjenje). Gornju osobinu skupova $E(S_\alpha)$ možemo obezbediti ako predpostavimo da za svaki kardinal $\kappa \geq \omega$ važi sledeća rečenica:

$E(\kappa^+)$: Postoji stacionaran skup $D \subseteq D_\omega(\kappa^+)$, tako da je $D \cap \alpha$ nestacionaran podskup od α, za svako $\alpha < \kappa^+$.

Naime, na osnovu $E(\kappa^+)$ znamo da je svaki podskup od $E(D)$ moći $< \kappa^+$ jednak prebrojivoj uniji svojih dobro $\prec$-uredjenih podskupova (v. [3, Lemma 7.2]). Sa druge strane u dokazu leme 1.2.(ii) smo videli da ako je $S \subseteq D_\omega(\lambda)$, $cf(\lambda) = \lambda > \omega$ stacionaran skup, tada $E(S)$ nije jednak uniji od $< \lambda$ svojih dobro-$\prec$-uredjenih podskupova, što znači da u slučaju $\lambda < \kappa^+$ $E(S)$ nije slično podskupu od $E(D)$.

Što se tiče važenja $E(\kappa)$, poznato je (v.[4o] ili [9] da u L $E(\kappa)$ važi za svaki regularan ne slabo kompaktan kardinal.

Neka je do daljnjeg $\kappa > \omega$ singularan kardinal i neka je κ_α, $\alpha < \lambda = cf(\kappa)$ strogo rastući niz sukcesora koji konvergira ka κ, pri čemu je $\kappa_\alpha > \lambda$, za svako $\alpha < \lambda$. Neka je $D_\alpha \subseteq D_\omega(\kappa_\alpha)$ stacionaran skup, koji zadovoljava $E(\kappa_\alpha)$.

<u>Lema 1.1o.</u> Neka su $E' = \bigcup \{E(S'_\alpha) \mid \alpha < \lambda\}$ i $E'' = \bigcup \{E(S''_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ gore definisani skupovi pri čemu su S'_α, $S''_\alpha \subseteq D_\alpha$ proizvoljni (neprazni), za svako $\alpha < \lambda$. Ako postoji strogo rastuće preslikavanje $H: B(E') \to B(E'')$, tada je $S'_\alpha - S''_\alpha$ nestacionaran podskup od κ_α, za svako $\alpha < \lambda$.

<u>Dokaz</u>: Predpostavimo suprotno, tj. da postoji $\alpha' < \lambda$, tako da je $S = S'_{\alpha'} - S''_{\alpha'}$ stacionaran podskup od $\kappa_{\alpha'}$. Neka je $b_\alpha = [-\infty, f_\alpha)$ $(= \{f \in E' \mid f \prec f_\alpha\} \in B(E'))$, za svako $\alpha \in S$. Dakle, po predpostavci je $H(b_\alpha) \subset H(b_\beta)$, za svako $\alpha, \beta \in S$, $f_\alpha \prec f_\beta$. Neka je $\alpha \in S$ proizvoljan, tada postoji jedinstveno razlaganje

$$H(b_\alpha) = \bigcup \{[x^i_\alpha, y^i_\alpha) \mid i < n(\alpha)\}, \tag{1o}$$

gde je $n(\alpha) < \omega$, x^i_α, $y^i_\alpha \in E'' \cup \{\pm\infty\}$, za svako $i < n(\alpha)$ i $x^i_\alpha \prec y^i_\alpha \prec x^{i+1}_\alpha$, za svako $i < n(\alpha) - 1$. Prelazeći na stacionaran podskup od S možemo predpostaviti da je $n(\alpha) = n$, za svako $\alpha \in S$. Neka je

$$A = \{z \in E'' \{\pm\infty\} \mid z = x^i_\alpha \text{ ili } z = y^i_\alpha, \text{ za neko } i < n, \alpha \in \quad \}$$

Kako je $|A| \leq \kappa_{\alpha'}$, to postoji 1-1 preslikavanje $r: A \to \kappa_{\alpha'}$.

Preslikavanje $h: S \to \kappa_{\alpha'}$ definišemo na sledeći način. Neka je

$\alpha \in S$ proizvoljan, tada postoji $z \in A$, tako da je $x_\alpha^o = z$. Neka je $h(\alpha) = r(z)$. Po lemi 1.1.(ii) ili postoji stacionaran $U_1 \subseteq S$ i $\beta_1 < \kappa_{\alpha'}$, tako da je $h''(U_1) = \{\beta_1\}$ ili postoji stacionaran $U_1' \subseteq S$, takav da je $h \mid U_1'$ 1-1 preslikavanje. Dokažimo da drugi slučaj ne može nastupiti. Predpostavimo suprotno, tj. da takav U_1' postoji i da je $h(\alpha) \neq r(-\infty)$, za svako $\alpha \in U_1'$.

Neka je $\alpha, \beta \in U_1'$ i $f_\alpha \prec f_\beta$. Kako je $H(b_\alpha) \subset H(b_\beta)$, to na osnovu (1o) imamo da je $x_\alpha^o \succcurlyeq x_\beta^o$. Kako je $h(\alpha) \neq h(\beta)$ i kako je r 1-1 preslikavanje, to je $x_\alpha^o = r^{-1}(h(\alpha)) \neq r^{-1}(h(\beta))$, odakle mora biti $r^{-1}(h(\alpha)) \succ r^{-1}(h(\beta))$. Ovo dokazuje da je $f_\alpha \to r^{-1}(h(\alpha))$, $\alpha \in U_1'$ inverzni izomorfizam $E(U_1')$ sa podskupom od E'', što je nemoguće, jer po lemi 1.2.(i) $E(U_1')$ sadrži neprebrojiv dobro $\prec$-uredjen podskup a E'' ne sadrži neprebrojivih inverzno dobro $\prec$-uredjenih podskupova.

Dakle, postoji stacionaran $U_1 \subseteq S$ i $\beta_1 < \kappa_{\alpha'}$, tako da je $h''(U_1) = \{\beta_1\}$, tj. $x_\alpha^o = x_\beta^o$, za svako $\alpha, \beta \in U_1$.

Sada definišemo preslikavanje $l\colon U_1 \to \kappa_{\alpha'}$. Neka je $\alpha \in U_1$ proizvoljan, tada postoji $z \in A$, tako da je $y_\alpha^o = z$. Neka je $l(\alpha) = r(z)$. Po lemi 1.1.(ii) ili postoji stacionaran $U_2 \subseteq U_1$ i $\beta_2 < \kappa_{\alpha'}$, tako da je $l''(U_2) = \{\beta_2\}$ ili postoji stacionaran $U_2' \subseteq U_1$, tako da je $l \mid U_2'$ 1-1 preslikavanje. Dokažimo da drugi slučaj ne može nastupiti. Predpostavimo suprotno, tj. da takav U_2' postoji i da je $l(\alpha) \neq r(+\infty)$, za svako $\alpha \in U_2'$.

Neka je $\alpha, \beta \in U_2'$ i $f_\alpha \prec f_\beta$. Kako je $H(b_\alpha) \subset H(b_\beta)$ i kako je $U_2' \subseteq U_1$, to na osnovu (1o) imamo da je $y_\alpha^o \preccurlyeq y_\beta^o$. Kako je $l(\alpha) \neq l(\beta)$, to je $y_\alpha^o = r^{-1}(l(\alpha)) \neq r^{-1}(l(\beta)) = y_\beta^o$, odakle je $r(l(\alpha)) \prec r^{-1}(l(\beta))$. Ovo dokazuje da je $f_\alpha \to r^{-1}(l(\alpha))$, $\alpha \in U_2'$ izomorfizam $E(U_2')$ sa jednim podskupom od E''. Označimo sa t taj izomorfizam. Kako je $\left| \cup \{E(S_\alpha'') \mid \alpha < \alpha'\} \right| < \kappa_{\alpha'}$, to, odbacivanjem nestacionarno podskupa od U_2', možemo predpostaviti da $t''(E(U_2')) \cap (\cup \{E(S_\alpha'') \mid \alpha < \alpha'\}) = \phi$. Na osnovu leme 1.2.(iii) možemo, odbacivanjem nestacionarnog podskupa od U_2', predpostaviti da je $t''(E(U_2')) \cap E(S_{\alpha'}'') = \phi$. Dakle, možemo smatrati $t''(E(U_2')) \subseteq \cup \{E(S_\alpha'') \mid \alpha' < \alpha < \lambda\}$.

Na osnovu osobina skupova D_α odnosno $E(D_\alpha)$ (videti primedbu pre leme) znamo da je svaki podskup od $E(S''_\alpha)$ moći manje od κ_α jednak prebrojivoj uniji svojih dobro $\prec$-uredjenih podskupova. Dakle $t''(E(U'_2))$, a time i $E(U'_2)$ je jednako prebrojivoj uniji svojih dobro $\prec$-uredjenih podskupova suprotno činjenici koju smo dokazali u dokazu leme 1.2.(ii).

Dakle, postoji stacionaran $U_2 \subseteq U_1$ i $\beta_2 < \kappa_\alpha$, tako da je $1''(U_2) = \{\beta_2\}$, tj. $y^o_\alpha = y^o_\beta$, za svako $\alpha, \beta \in U_2$.

Nastavljajući ovaj postupak $2n$ puta dolazimo do stacionarnog skupa $U_{2n} \subseteq U_{2n-1} \subseteq \ldots \subseteq U_1 \subseteq S$, tako da je $x^i_\alpha = x^i_\beta$ i $y^i_\alpha = y^i_\beta$, za svako $i < n$ i svako $\alpha, \beta \in U_{2n}$. Na osnovu (lo) to znači da je $H(b_\alpha) = H(b_\beta)$, za svako $\alpha, \beta \in U_2$, što je suprotno predpostavci da je H strogo rastuće preslikavanje. Ovo završava dokaz leme. ∎

Sledeću lemu dokazujemo koristeći predhodnu na isti način na koji smo dokazali lemu 1.4. na osnovu leme 1.3.

Lema 1.11. Neka je $E = \bigcup\{E(S_\alpha) \mid \alpha < \lambda\}$, pri čemu su S_α D_α, $\alpha < \lambda$ stacionarni skupovi takvi da $E(S_\alpha)$ ima sve intervale stacionarne, za svako $\alpha < \lambda$. Tada svako strogo rastuće preslikavanje $H\colon B(E) \to B(E)$ mora biti jednako identičkom preslikavanju algebre $B(E)$. ∎

Lema 1.12. Neka je $E' = \bigcup\{E(S'_\alpha) \mid \alpha < \lambda\}$ i $E'' = \bigcup\{E(S''_\alpha) \mid \alpha < \lambda\}$, pri čemu su S'_α, $S''_\alpha \subseteq D_\alpha$ proizvoljni i neprazni, za svako $\alpha < \lambda$. Ako postoji "na" homomorfizam $H\colon B(E') \to B(E'')$, tada je $S''_\alpha - S'_\alpha$ nestacionaran podskup od κ_α, za svako $\alpha < \lambda$.

Dokaz: Predpostavimo suprotno, tj. da postoji $\alpha' < \lambda$, tako da je $S = S''_{\alpha'} - S_{\alpha'}$, stacionaran podskup od $\kappa_{\alpha'}$. Neka je $b_\alpha = [-\infty, f_\alpha)$ $(= \{f \in E'' \mid f \prec f_\alpha\} \in B(E''))$, za svako $\alpha \in S$. Dakle, imamo da je $b_\alpha \subset b_\beta$, za svako $\alpha, \beta \in S$, $f_\alpha \prec f_\beta$. Neka je $d(f) = [-\infty, f)$ $(= \{f' \in E' \mid f' \prec f\} \in B(E'))$, za svako $f \in E'$. Kao u dokazu leme 1.5. možemo naći $F \subseteq E'$ tako da je $\{H(d(f)) \mid f \in F\} \cup \{\phi, E''\}$ monotona baza algebre $B(E'')$, pri čemu je $H(d(f)) \neq H(d(g))$, za svako $f, g \in F$, $f \neq g$. Neka je $\alpha \in S$ proizvoljan. Kako je $b_\alpha \in B(E'')$, to postoji jedinstveno razlaganje

$$b_\alpha = \cup\left\{-H(x^i_\alpha)\cap H(y^i_\alpha)\,|\, i < n(\alpha)\right\}, \qquad (11)$$

gde je $n(\alpha) < \omega$, x^i_α, $y^i_\alpha \in \left\{d(f)\,|\, f \in F\right\} \cup \left\{\phi, E'\right\}$, za svako $i < n(\alpha)$ i $H(x^i_\alpha) \subset H(y^i_\alpha) \subset H(x^{i+1}_\alpha)$, za svako $i < n(\alpha) -1$ (odnosno $x^i_\alpha \subset y^i_\alpha \subset x^{i+1}_\alpha$, za svako $i < n(\alpha) -1$). Opet možemo predpostaviti da je $n(\alpha) = n$, za svako $\alpha \in S$. Neka je

$$A = \left\{z\,|\, z = x^i_\alpha \text{ ili } z = y^i_\alpha, \text{ za neko } i < n \text{ i } \alpha \in S\right\}.$$

Kako je $|A| \leq \kappa_{\alpha'}$, to postoji 1-1 preslikavanje $r: A \to \kappa_{\alpha'}$. Dalji tok dokaza leme je analogan dokazu leme 1.1o. (odnosno leme 1.5) te ga izostavljamo. Naime, opet možemo doći do stacionarnog skupa $U_{2n} \subseteq U_{2n-1} \subseteq \subseteq \ldots \subseteq U_1 \subseteq S$, takvog da je $x^i_\alpha = x^i_\beta$ i $y^i_\alpha = y^i_\beta$ za svaki $i < n$ i $\alpha, \beta \in S$, što na osnovu (11) znači $b_\alpha = b_\beta$, za svako $\alpha, \beta \in S$, što je nemoguće. Ovim bi završili dokaz leme. ∎

Sledeću lemu dokazujemo na osnovu predhodne na isti način na koji smo dokazali lemu 1.6. na osnovu leme 1.5.

<u>Lema 1.13</u>. Neka je $E = \cup\left\{E(S_\alpha)\,|\,\alpha < \lambda\right\}$, pri čemu su $S_\alpha \subseteq D_{\alpha'}$, $\alpha < \lambda$ takvi stacionarni skupovi da $E(S_\alpha)$, $\alpha < \lambda$ imaju sve intervale stacionarne. Tada $B(E)$ nema ni jednog netrivijalnog "na" endomorfizma. ∎

Kao u dokazu teoreme 1.7. za svako $\alpha < \lambda$ možemo naći familiju S^α_β, $\beta < 2^{\kappa_\alpha}$ stacionarnih podskupova od $D_{\alpha'}$, tako da je $S^\alpha_\beta - S^\alpha_{\beta'}$ stacionaran za svako β, $\beta' < 2^{\kappa_\alpha}$, $\beta \neq \beta'$, pri čemu $E(S^\alpha_\beta)$ ima sve intervale stacionarne. Za svako $p \in \Pi\left\{2^{\kappa_\alpha}\,|\,\alpha < \lambda\right\}$ posmatramo skup $E_p = \cup\left\{S^\alpha_{p(\alpha)}\,|\,\alpha < \lambda\right\}$ i algebru $B(E_p)$.

Na osnovu lema 1.1o. i 1.12. imamo da ne postoji ni jedno strogo rastuće preslikavanje iz $B(E_p)$ u $B(E_{p'})$ i ni jedan na homomorfizam iz $B(E_p)$ na $B(E_{p'})$, za svako p, $p' \in \Pi\left\{2^{\kappa_\alpha}\,|\,\alpha < \lambda\right\}$, $p \neq p'$.

Na osnovu lema 1.11. i 1.13. znamo da je svako strogo rastuće preslikavanje ili "na" endomorfizam $H: B(E_p) \to B(E_p)$ nužno jednako identičkom preslikavanju algebre $B(E_p)$, za svako $p \in \Pi\left\{2^{\kappa_\alpha}\,|\,\alpha < \lambda\right\}$. Time smo dokazali teoremu:

Teorema 1.14. $(\forall\lambda)$ $E(\lambda^+)$ Za proizvoljan kardinal $\kappa > \omega$, postoji familija B_α, $\alpha < 2^\kappa$ medjusobno različitih Booleovih algebri, od kojih svaka ima moć κ, tako da ako je $H: B_\alpha \to B_\beta$, $\alpha, \beta < 2^\kappa$ "na" homomorfizam ili strogo rastuće preslikavanje, tada je H nužno jednako identičkom preslikavanju algebre B_α. ∎

2. AUTOMORFIZMI (ω_1, ω_1)-DRVETA

Drveta $\underline{S}$ i $\underline{T}$ su izomorfna, ako postoji bijekcija $h: S \to T$, koja čuva uredjenja drveta $\underline{S}$ i $\underline{T}$. Ako je $\underline{S} = \underline{T}$, tada je h automorfizam drveta $\underline{S}$. Drvo je kruto, ako nema netrivijalnih automorfizama. U ovom odeljku ćemo, češće nego u ostalim, pisati T umesto $\underline{T}$, jer će nam relacija $\leqslant_T$ obično biti jednaka sa $\subset$. Za svako $x \in T$ skup $\{y \in T | y \geqslant_T x\}$ označavamo sa T^x smatrajući ga drvetom sa uredjenjem induciranim iz T. $\underline{T}$ je totalno kruto, ako je $\underline{T}^x$ neizomorfno sa $\underline{T}^y$, za svako $x, y \in T$, $x \neq y$.

Neka je $A \subseteq T$ proizvoljan podskup i neka je $\mathcal{T} = \{(T(x), \leqslant_x) | x \in A\}$ familija medjusobno disjunktnih drveta, tako da je $T \cap T(x) = \phi$ za svako $x \in A$. Definišemo operaciju bočnog umetanja (v. [45, str.101. "intercalation Latérale"]), koja daje novo drvo $S = Lt_A(T, \mathcal{T})$, tako da je $S = T \cup \bigcup\{T(x) | x \in A\}$, dok je $\leqslant_S$ odredjeno sa :

(i) $\leqslant_S \cap\, T^2 = \leqslant_T$ i $\leqslant_S \cap\, T(x)^2 = \leqslant_x$, za svako $x \in A$;

(ii) $(\cdot, x]_T <_S T(x)$ i $(S - (\cdot, x]_T) \,||_S\, T(x)$, za svako $x \in A$.

Primetimo da je T početni komad od S i da je $\underline{T}$ poddrvo drveta $\underline{S}$. Definiciju normalnog (ω_1, ω_1)-drveta iz §1.I pooštravamo na sledeći način. $\underline{T}$ je normalno (ω_1, ω_1)-drvo, ako važi:

(1) $\gamma T = \omega_1$

(2) $|R_0 T| = 1$ i $|R_\alpha T| \leqslant \omega$, za svako $\alpha < \omega_1$;

(3) $\gamma T^x = \omega_1$, za svako $x \in T$;

(4) svako $x \in T$ ima tačno ω neposrednih naslednika;

(5) ako je $\gamma(x) = \gamma(y) = \alpha$ $(x, y \in T)$ graničan ordinal, tada iz $(\cdot, x)_T = (\cdot, y)_T$ sledi $x = y$.

Neka je ${}^{\omega_1}\omega = \cup\left\{{}^{\alpha}\omega \mid \alpha < \omega_1\right\}$ skup svih nizova s čiji su domeni prebrojivi ordinali a vrednosti prirodni brojevi. Neka je $l(s) = \mathrm{dom}(s)$, za svako $s \in {}^{\omega_1}\omega$. Svako normalno (ω_1, ω_1)-drvo ima representaciju u skupu $T \subseteq {}^{\omega_1}\omega$ (sa $\subset$ kao uredjenjem), koji zadovoljava uslove:

(a) $s \hat{} n \in T$, za svako $s \in T$ i $n \in \omega$;

(b) za svako $s \in T$ i $\alpha < \omega_1$ postoji $t \in T$, tako da je $l(t) = \alpha$ i $t \subseteq s$ ili $t \supseteq s$;

(c) $T \cap {}^{\alpha}\omega$ je najviše prebrojiv, za svako $\alpha < \omega_1$.

Iz uslova (b) vidimo da je $\gamma(s) = l(s)$, za svako $s \in T$.

Navešćemo prvo neke poznate rezultate. Označimo sa $\sigma(T)$ broj svih automorfizama normalnog (ω_1, ω_1)-drveta T. U [38] je pokazano da $\sigma(T)$ ima osobine:

- ili je $\sigma(T) < \omega$ ili je $2^{\omega} \leqslant \sigma(T) \leqslant 2^{\omega_1}$;
- ako T nema Suslinovih poddrveta, tada je ili $\sigma(T) < \omega$ ili $\sigma(T) = 2^{\omega}$ ili $\sigma(T) = 2^{\omega_1}$;
- ako je $\sigma(T) \geqslant \omega$, tada je $\sigma(T)^{\omega} = \sigma(T)$.

Aronszajnova, Kurepina i Suslinova drveta čine osnovne vrste normalnih (ω_1, ω_1)-drveta. Sledeće dve teoreme daju pregled poznatih rezultata o ovim drvetima, ako se radi o njihovoj egzistenciji, izomorfizmima i automorfizmima.

<u>Teorema 2.1.</u>

1. (Aronszajn) Postoji Aronszajnovo drvo,
2. (Gaifman-Specker) Postoji 2^{ω_1} neizomorfnih Aronszajnovih drveta.
3. (Jech, Tennenbaum) Konsistentno je sa ZFC da postoji Suslinovo drvo.
4. (Jech) Konsistentno je sa ZFC da postoji 2^{ω_1} neizomorfnih Suslinovih drveta.
5. (Lévy, Rowbottom, Stewart) Konsistentno je sa ZFC da postoji Kurepino drvo.

6. (Jech) Konsistentno je sa ZFC da postoji 2^{ω_1} neizomorfnih Kurepinih drveta. ▪

Dokaz 1 se nalazi u [45, str. 96]; dokaz 2 se nalazi u [31]; dokaz 3 i 5 možemo naći, na primer, u [36] ; dokaz 4 i 6 se nalaze u [38] . Tvrdjenja 3, 4, 5 i 6 važe i u L, što su rezultati Jensena, Jecha, Solovaya i Jecha, respektivno.

Teorema 2.2. Sa ZFC je konsistentno:

1. (Jensen) Postoji kruto Suslinovo drvo.
2. (Jensen) Postoji Suslinovo drvo T, za koga je $\sigma(T) = 2^{\omega}$.
3. (Jensen) Postoji Suslinovo drvo T, za koga je $\sigma(T) = 2^{\omega_1}$.
4. (Jech) Postoji kruto Kurepino drvo.
5. (Jech) Postoji Kurepino drvo T, za koga je $\sigma(T) = 2^{\omega}$.
6. (Jech) Postoji Kurepino drvo T, za koga je $\sigma(T) = 2^{\omega_1}$. ▪

Dokazi 1, 2 i 3 se nalaze u [17] a dokazi 4, 5 i 6 u [38]. Inače, sva ova tvrdjenja važe u L.

U [38] je pokazano da polazeći od proizvoljnog tranzitivnog modela M teorije ZFC +CH i kardinala κ u M, za koga u M važi $\kappa^{\omega} = \kappa$, možemo preko σ-zatvorenog parcijalno uredjenog skupa dobiti generičko proširenje M[G], sa istim kardinalima i funkcijom kofinalnosti, u kome postoji Suslinovo drvo T, za koga je $\sigma(T) = \kappa$. Dakle, možemo dobiti model u kome postoji Suslinovo drvo T, za koga važi $2^{\omega} < \sigma(T) < 2^{\omega_1}$. U [38, str. 67] se napominje da se slično može postići i sa Kurepino drvo.

Naime, na osnovu σ-zatvorenosti gore spomenutog parcijalno uredjenog skupa znamo da $\diamond$ važi u M[G] (v.[17]). Na osnovu [38, lema 4.2.] znamo da tada u M[G] postoji totalno kruto Kurepino drvo T_1. Neka je T gore spomenuto Suslinovo drvo T za koga je $\sigma(T) = \kappa$.

Neka nam je, za svako $x \in T$, dat primerak $T_1(x)$, drveta T_1, pri čemu je $T_1(x) \cap T_1(y) = \phi$, za svako $x, y \in T$, $x \neq y$, i $T_1(x) \cap T = \phi$, za svako $x \in T$. Neka je

$$S = L\, t_T(T, \mathcal{T}),$$

gde je $\mathcal{T} = \left\{ T_1(x) \mid x \in T \right\}$. Neposredno proveravamo da je S Kurepino drvo i da je $\sigma(S) = \sigma(T) = \kappa$.

Posle rezultata sadržanih u teoremi 2.2. Jech [38, Problem, str. 7o] postavlja pitanje da li u ZFC postoji kruto normalno (ω_1, ω_1)--drvo. On pritom primećuje da u ZFC ne možemo dokazati egzistenciju normalnog (ω_1, ω_1)-drveta T, za koga je $\sigma(T) < 2^{\omega_1}$ a da pritom ne dokažemo egzistenciju krutog normalnog (ω_1, ω_1)-drveta. Ovde ćemo pokazati da je odgovor na ovaj Jechov problem pozitivan. Naime, konstruisaćemo 2^{ω_1} medjusobno neizomorfnih totalno krutih Aronszajnovih drveta.

Prvo navodimo neke definicije iz [31]. Neka je s niz a X skup ordinala, tada nam $s|X$ označava niz $(s_{\alpha_0}, \dots s_{\alpha_\delta}, \dots)$ $\alpha_\delta < L(s)$, gde je $X = \{\alpha_0, \dots, \alpha_\delta, \dots\}$ monotona numeracija skupa X a $s = (s_\alpha)_{\alpha<l(s)}$. $s|\bar{X}$ definišemo kao $s|(l(s)-X)$.

Ako je $s|X = s'$ i $s|\bar{X} = s''$, tada pišemo $s=s' *_X s''$. Ako su S' i S'' skupovi nizova, tada stavljamo $S' *_X S'' = \{s' *_X s'' | s' \varepsilon S', s'' \varepsilon S''\}$.

Ako skupove nizova S', S'' i $S' *_X S''$ shvatamo kao drveta (u odnosu na relaciju $\subset$), tada se sledeće osobine lako proveravaju;

- Ako je $s,t \varepsilon S' *_X S''$, tada je $s \subseteq t$ ako i samo ako je $s|X \subseteq t|X$ i $s|\bar{X} \subseteq t|\bar{X}$.
- Ako je $s \varepsilon R_\alpha(S' *_X S'')$, tada je $s \to (s|X, s|\bar{X})$ jedno 1-1 preslikavanje iz $R_\alpha(S' *_X S'')$ na $R_{\alpha'} S' \times R_{\alpha''} S''$, gde je α' uredjajni tip skupa $\alpha \cap X$ a α' uredjajni tip skupa $\alpha - X$.
- Ako su S' i S'' normalna (ω_1, ω_1)-drveta nizova, koja zadovoljavaju uslove (a)-(c), tada je takvo i $S' *_X S''$.
- Ako su S' i S'' normalna (ω_1, ω_1)-drveta, pri čemu je S' Aronszajnovo i $X \subseteq \omega_1$ ima moć ω_1, tada je i $S' *_X S''$ Aronszajnovo drvo (v. [31, Lemma 3.3.]).

Neka je $S_0 = \left\{s \ \varepsilon \ {}^{\omega_1}\omega \,\middle|\, \{\alpha | s_\alpha \neq 0\} \text{ je konačan}\right\}$. Jasno je, da je S_0 jedno normalno (ω_1, ω_1)-drvo nizova, tj. da zadovoljava uslove (a)-(c) sa početka ovog odeljka. Sledeća Lema i njen dokaz se verovatno prvi put sreće u [52].

<u>Lema 2.3.</u> Svaki početni komad B drveta S_0 moći ω_1 sadrži ω_1-Lanac.

<u>Dokaz</u>: Za svaki granični ordinal $\alpha < \omega_1$ odaberimo $s^\alpha \ \varepsilon \ B \cap R_\alpha S_0$

proizvoljno. Za $\lim(\alpha)$ sa $h(\alpha)$ označavamo najmanji $\beta < \alpha$, sa osobinom $s_\delta^\alpha = 0$, za svako $\beta \leqslant \delta < \alpha$. Preslikavanje $h: \{\alpha < \omega_1 \mid \lim(\alpha)\} \to \omega_1$ je regresivno, što znači da postoji stacionaran $C \subseteq \{\alpha < \omega_1 \mid \lim(\alpha)\}$ i $\beta < \omega_1$, tako da je $h''(C) = \{\beta\}$. Kako je $R_\beta S$ prebrojiv, možemo predpostaviti da je $s^\alpha \mid \beta = s^{\alpha'} \mid \beta$, za svako $\alpha, \alpha' \in C$. Medjutim, to znači da je $s^\alpha \subseteq s^{\alpha'}$, za svako $\alpha, \alpha' \in C$, $\alpha < \alpha'$, tj. skup $\{s^\alpha \mid \alpha \in C\}$ B je ω_1-lanac. ∎

Do kraja ovog odeljka $S \subseteq {}^{<\omega_1}\omega$ će nam biti fiksirano Aronszajnovo drvo nizova (tj. zadovoljavajuće gornje uslove (a)-(c)). Za svako $X\ \omega_1$, definišemo $T(X) = S *_X S_0$.

<u>Lema 2.4</u>. Neka su $X, Y \subseteq \{\alpha < \omega_1 \mid \alpha = \omega^\beta$ za neko $\beta\}$ disjunktni i neprebrojivi i neka je $x \in T(X)$ i $y \in T(Y)$. Tada $T(X)^x$ i $T(Y)^y$ nemaju izomorfnih neprebrojivih početnih komada.

<u>Dokaz</u>: Predpostavimo suprotno, tj. da postoje $x \in T(X)$ i $y \in T(Y)$, tako da $T(X)^x$ i $T(Y)^y$ imaju izomorfne početne komade A i B, respektivno. Neka je $A_0 = \{s|\bar{X} \mid s \in A\}$, tada je $A_0 \cup \{s \in S_0 \mid s \subseteq x|\bar{X}\}$ neprebrojiv početni komad od S_0. Na osnovu Leme 2.3. postoji maksimalni ω_1-lanac $a \subseteq A_0 \cup \{s \in S_0 \mid s \subseteq x|\bar{X}\}$. Neka je $A_1 = \{s \in A \mid s|\bar{X} \in a\}$. Lako proveravamo da je A_1 neprebrojiv početni komad od $T(X)^x$. Neka je $s, t \in A_1 \cap R_{\delta+1} T(X)$, $s \mid \delta = t \mid \delta$ i $\delta \notin X$. Kako $\delta \notin X$ imamo da je $s|X = t|X$, a kako su $s|\bar{X}$ i $t|\bar{X}$ elementi lanca a istih dužina, to je $s|\bar{X} = t|\bar{X}$. Dakle, $s = t$.

Kako je A_1 neprebrojiv početni komad od $T(X)^x$ i kako su A i B izomorfni, to postoji neprebrojiv početni komad $B_1 \subseteq B$ drveta $T(Y)^y$ (a time i drveta B), tako da su A_1 i B_1 izomorfni. Neka je $B_2 = \{s|\bar{Y} \mid s \in B_1\}$. Tada je $B_2 \cup \{s \in S_0 \mid s \subseteq y|\bar{Y}\}$ neprebrojiv početni komad od S_0. Po lemi 2.3. postoji maksimalan ω_1-lanac $b \subseteq B_2 \cup \{s \in S_0 \mid s \subseteq y|\bar{Y}\}$. Neka je $B_3 = \{s \in B_1 \mid s|\bar{Y} \in b\}$. Neposredno proveravamo da je B_3 neprebrojiv početni komad drveta $T(Y)^y$. Dokažimo da su svaka dva elementa iz B_3 uporediva odakle dobijamo protivvrečnost sa činjenicom da je $T(Y)^y$ jedno Aronszajnovo drvo.

Predpostavimo suprotno, da postoje s, $t \in B_2$, tako da ne važi ni $s \subseteq t$ ni $t \subseteq s$. Neka je $\beta < l(s)$, $l(t)$ najmanji ordinal sa osobinom $s_\beta \neq s_\beta$ i neka je $u = s \mid (\beta+1)$ i $v = t \mid (\beta+1)$. Dakle, imamo da je $u \mid \beta = v \mid \beta$ i $u \neq v$. Neka su u' i v' elementi od A_1, tako da je u slika od u' a v slika od v' pri posmatranom izomorfizmu. To znači da postoji ordinal $\delta < \omega_1$, tako da je u', $v' \in A_1 \cap R_{\delta+1}\, T(X)$, $u' \mid \delta = v' \mid \delta$ i da je $u' \neq v'$. Na osnovu gore dokazane osobine skupa A_1, mora biti $\delta \in X$. Ne gubeći od opštosti možemo predpostaviti da je $\delta > l(x)$, $l(y)$, što, na osnovu $\delta \in X \subseteq \left\{\alpha \mid \alpha = \omega^\beta \text{ za neko } \beta < \omega_1\right\}$, znači da je visina tačaka u' i v' u drvetu $T(X)^x$ jednako $\delta+1$. Dakle, i visina tačaka u i v u drvetu $T(Y)^y$ je jednaka $\delta+1$, što, na osnovu $\delta \in \left\{\alpha \mid \alpha = \omega^\beta, \text{ za neko } \beta < \omega_1\right\}$ i $\delta > l(y)$, znači da je $l(u) = l(v) = \delta+1$. Dakle, imamo dve tačke $u, v \in B_2$, sa osobinama $u \neq v$, $l(u) = l(v) = \delta+1$, $u \mid \delta = v \mid \delta$ i $\delta \notin X$ (jer je $\delta \in X$ i $X \cap Y = \phi$). Kako $\delta \notin Y$, to je $u|Y = v|Y$ a kako su $u|\bar{Y}$ i $v|\bar{Y}$ elementi lanca b istih visina, to je $u|\bar{Y} = v|\bar{Y}$. To znači da je $u = v$, suprotno gornjoj činjenici $u \neq v$. Dakle, B_2, nema neuporedivih elemenata, što je trebalo pokazati. ∎

Teorema 2.5. Postoji 2^{ω_1} medjusobno neizomorfnih totalno krutih Aronszajnovih drveta.

Dokaz: Neka je $\left\{X_\delta \mid \delta < \omega_1\right\}$ disjunktna kolekcija neprebrojivih podskupova od $\left\{\alpha < \omega_1 \mid \alpha = \omega^\beta \text{ za neko } \beta\right\}$. Ovoj familiji skupova odgovara familija $\mathcal{T} = \left\{T(X_\delta) \mid \delta < \omega_1\right\}$ Aronszajnovih drveta, pri čemu predpostavljamo da su njeni elementi disjunktni skupovi.

Induktivno ćemo konstruisati monotono rastući niz T_α, $\alpha \leqslant \omega_1$ Aronszajnovih drveta, tako da je T_α početni komad od T_β, za svako $\alpha < \beta \leqslant \omega_1$.

Neka je $T_0 = T(X_0)$. Svakoj tački $x \in R_0 T_0$ (a postoji samo jedna) dodeljujemo drvo $T(x) \in \mathcal{T} - \left\{T_0\right\}$, tako da ta korespondencija bude 1-1 i minimalna, što znači da ako je $T(X_\delta)$ dodeljeno nekom $x \in R_0 T_0$, tada je i $T(X_{\delta'})$ za svako $\delta' < \delta$ takodje dodaljeno nekom $x \in R_0 T_0$. Neka je $\mathcal{T}_1 = \left\{T(x) \mid x \in R_0 T_0\right\}$. Neka je

$$T_1 = Lt_{R_0 T_0}\,(T_0, \mathcal{T}_1),$$

drvo dobijeno bočnim umetanjem $T(x)$ na mesto $x \varepsilon T_o$, za svako $x \varepsilon R_o T_o$ (v. početak odeljka). Direktno na osnovu odgovarajućih definicija proveravamo da je T_1 Aronszajnovo drvo i da je T_o njegov početni komad.

Predpostavimo da je $\alpha < \omega_1$ takav ordinal da je T_β, $\beta < \alpha$ već konstruisano.

Ako je α graničan ordinal, tada stavljamo

$$T_\alpha = \mathrm{U}\left\{T_\beta | \beta < \alpha\right\}.$$

Neposredno proveravamo da je T_α Aronszajnovo drvo, dok činjenica da je T_β početni komad od T_α, za svako $\beta < \alpha$, sledi direktno iz induktivne predpostavke.

Neka je sada $\alpha = \beta+1$. Za svako $x \varepsilon R_\alpha T_\alpha$ odaberimo $T(x) \varepsilon \mathcal{T}$, koje do sada nismo koristili, tako da ta korespondencija bude 1-1 i minimalna. Neka je

$$T_\alpha = Lt_{R_\alpha T_\alpha}(T_\alpha, \mathcal{T}_\alpha),$$

gde je $\mathcal{T}_\alpha = \left\{T(x) | x \varepsilon R_\beta T_\beta\right\}$. Opet se ne zadržavamo na jednostavnom dokazu činjenica da je T_α Aronszajnovo drvo i da je T_β (a time i T_δ, $\delta < \beta$) početni komad ot T_α. Neka je

$$T_{\omega_1} = \mathrm{U}\left\{T_\alpha | \alpha < \omega_1\right\}$$

Da je T_α početni komad ot T_{ω_1}, za svako $\alpha < \omega_1$ sledi direktno na osnovu iste činjenice za T_β i $T_{\beta'}$, za svako $\beta < \beta' < \omega_1$.

Po konstrukciji lako pokazujemo da je $R_\beta T_\beta = R_\beta T_\alpha$, za svako $\beta < \alpha < \omega_1$, odakle je $R_\alpha T_{\omega_1} = R_\beta T_\alpha$, za svako $\alpha < \omega_1$, što znači da je T_{ω_1} jedno normalno (ω_1, ω_1)-drvo.

Dokažimo da je T_{ω_1} Aronszajnovo drvo. Predpostavimo suprotno, tj. da T_{ω_1} sadrži jedan maksimalan ω_1-lanac b. Neka je $x_\alpha \varepsilon b$ jedinstven element iz $b \cap R_\alpha T_{\omega_1}$, za svako $\alpha < \omega_1$. Kako je $R_\alpha T_{\omega_1} = R_\alpha T_\alpha$, to je $x_\alpha \varepsilon T_\alpha$, za svako $\alpha < \omega_1$. Neka je $\alpha < \omega_1$ granični ordinal, tada, na osnovu definicije T_α, znamo da postoji $\beta < \alpha$, tako da je $x_\alpha \varepsilon T_\beta$. Neka je $h(\alpha)$ jedan takav $\beta < \alpha$. Time smo definisali regresivno preslikavanje

h: $\left\{\alpha < \omega_1 | \lim(\alpha)\right\} \to \omega_1$. Dakle, postoji stacionaran $C \subseteq \left\{\alpha < \omega_1 | \lim(\alpha)\right\}$ i

$\beta < \omega_1$, tako da je $h''(C) = \{\beta\}$. To znači da je $x_\alpha \in T_\beta$, za svako $\alpha \in C$. Kako je T_β početni komad od T_{ω_1} i kako je $\{x_\alpha | \alpha \in C\}$ kofinalan sa b imamo da je $b \subseteq T_\beta$. Medjutim, ovo protivreči činjenici da je T_β Aronszajnovo drvo. Ovim smo dokazali da je T_{ω_1} jedno (normalno) Aronszajnovo drvo. Dokažimo sada da je T_{ω_1} totalno kruto.

Predpostavimo suprotno, tj. da postoje $x,y \in T_{\omega_1}$, $x \neq y$, tako da je $T^x_{\omega_1}$ izomorfno sa $T^y_{\omega_1}$. Predpostavimo, odredjenosti radi, da je $\gamma(x) \leq \gamma(y)$. Neka je $\pi\colon T^x_{\omega_1} \to T^y_{\omega_1}$ jedan od automorfizama.

Prilikom konstrukcije drveta $T_{\beta+1}$, gde je $\beta = \gamma(x)$ imali smo da je $T(x) \in \mathcal{T}$ bilo bočno umetnuto na mesto $x \in R_\beta T_\beta$ drveta T_β. To znači da je $T(x) \subseteq T^x_{\omega_1}$ i da je $U = \{x\} \cup T(x)$ početni komad drveta $T^x_{\omega_1}$. To znači da je i $\pi''(U)$ početni komad drveta $T^y_{\omega_1}$. Za svaki granični ordinal $\alpha < \omega_1$, $\alpha > \gamma(y)$ odabiramo proizvoljan $y_\alpha \in \pi''(U) \cap R_\alpha T_{\omega_1}$. Kao i gore, znamo da je $y_\alpha \in R_\alpha T_\alpha$. Na osnovu definicije T_α, za graničan $\alpha < \omega_1$, znamo da postoji najmanji $\beta < \alpha$, sa osobinom $y_\alpha \in T_\beta$. Pored toga, u slučaju $\beta > 0$ mora biti $\beta = \delta+1$ za neko β. Ako važi ovaj poslednji slučaj, to izveze

$$T_\beta = Lt_{R_\delta T_\delta}(T_\delta, \mathcal{T}_\beta),$$

znamo da postoji jedinstven $z_\alpha \in R_\delta T_\delta$, tako da je $y_\alpha \in T(z_\alpha)$. Označimo β sa $i(\alpha)$. Time smo dobili regresivno preslikavanje $i\colon \{\alpha < \omega_1 | \lim(\alpha), \alpha > \gamma(y)\} \to \omega_1$. Dakle, postoji stacionaran $D \subseteq \{\alpha < \omega_1 | \lim(\alpha), \alpha > \gamma(y)\}$ i $\beta_1 < \omega_1$, tako da je $i''(D) = \{\beta_1\}$. Pored toga, predpostavljamo da je u slučaju $\beta_1 > 0$, $z_\alpha = z \in R_{\delta_1} T_{\delta_1}$, gde je $\beta_1 = \delta_1+1$. Po definiciji preslikavanja i imamo da je $\{y_\alpha | \alpha \in D\} \subseteq T_{\beta_1}$, pri čemu je, u slučaju $\beta_1 > 0$, ispunjeno $\{y_\alpha | \alpha \in D\} \subseteq T(z)$, $z \in R_{\delta_1} T_{\delta_1}$. Pored toga u slučaju $\beta_1 > 0$ imamo da je $y \leq z$, odakle je $x \neq z$ (gde je $\leq$ relacija uredjenja drveta T_{ω_1}).

Posmatrajmo prvo slučaj $\beta_1 > 0$. Neka je $V = \{u | y \leq u \leq z\} \cup T(z)$, tada je V početni komad drveta T_{ω_1}, pa je takav i $B = V \cap \pi''(U)$. B je, pored toga, i neprebrojiv, jer sadrži $\{y_\alpha | \alpha \in D\}$. Ako je $z=y$, tada su $A - \{x\}$ i $B - \{y\}$ izomorfni neprebrojivi početni komadi drveta $T(x)$ i $T(z)$, respektivno, gde je $A = \pi^{-1}(B)$. Medjutim, ovo protivreči Lemi 2.4., jer iz $x \neq z$ sledi da je $T(x) = T(X_\delta)$ i $T(z) = T(X_{\delta'})$ za $\delta \neq \delta'$. Neka je sada $z \neq y$, tj. $z > y$ i neka je $x' \in A$, takav da je $\pi(x') = z$. Kako je $z > y$, to je $t' \in T(x)$. Neka je $B' = B \cap T(z)$ i $A' = \pi^{-1}(B')$, tada su A' i B' neprebrojivi izomorfni početni komadi drveta $T(x)^{x''}$ i $T(z)$ gde je $x'' = \pi^{-1}(\min T(z))$ sukcesor tačke $x' \in T(x)$. Medjutim, ovo protivreči lemi 2.4., jer je $T(x) = T(X_\delta)$ i $T(z) = T(X_{\delta'})$, za $\delta \neq \delta'$.

Neka je sada $\beta_1 = 0$. Neka je $B = T_0 \cap \pi''(U)$ i $A = \pi^{-1}(B)$, tada su A i B neprebrojivi početni i izomorfni komadi drveta $U(= \{x\} \cup T(x))$ i T_0^y, jer $B \supseteq \{y_\alpha | \alpha \in D\}$ (primetimo da je $y \in T_0$). Neka je $y' = \pi(\min T(x))$ i $A' = A - \{x\}$ i $B' = B - \{y\}$. Tada su A' i B' izomorfni neprebrojivi početni komadi drveta $T(x)$ i $T^{y'}$. Medjutim, ovo protivreči lemi 2.4.,jer je $T(x)=T(X_\delta)$ za $\delta > 0$. Ovo konačno, završava dokaz da je T_{ω_1} totalno kruto Aronszajnovo drvo.

Drvo T_{ω_1} smo mogli konstruisati na gornji način ne koristeći sve elemente familije $\mathcal{T}$ već samo elemente jedne njene neprebrojive podfamilije $\{T(X_\delta) | \delta \in F\}$, $F \subseteq \omega_1$, $|F| = \omega_1$. Označimo sa $T^F_{\omega_1}$ tako dobijeno drvo.

Neka su F i G proizvoljni neprebrojivi i različiti podskupovi od ω_1. Dokažimo da su drveta $T^F_{\omega_1}$ i $T^G_{\omega_1}$ neizomorfna. Neka je, na primer, $F-G \neq \phi$ i neka je $\delta < \omega_1$ jedan element te razlike. Drvo $T(X_\delta)$ je korišćeno prilikom konstrukcije drveta $T^F_{\omega_1}$, što znači da postoji $\beta < \omega_1$ i $x \in R_\beta T^F_\beta = R_\beta T^F_{\omega_1}$, tako da je $T(x) = T(X_\delta) \subseteq T^F_{\beta+1} \subseteq T^F_{\omega_1}$.

Predpostavimo da postoji izomorfizam $\pi: T^F_{\omega_1} \to T^G_{\omega_1}$. Ponavljajući gore sprovedeno rasudjivanje možemo naći $T(z) \subseteq T^G_{\omega_1}$, $x' \in T(x)$ i $z' \in T(z)$, tako da drveta $T(x)^{x'}$ i $T(z)^{z'}$ imaju izomorfne neprebrojive početne komade. Kako je $T(z) = T(X_{\delta'})$ za neko $\delta' \in G$, to je $\delta \neq \delta'$ čime dobijamo protivrečnost sa Lemom 2.4. Ovo dokazuje da je

$$\{T^F_{\omega_1} | F \subseteq \omega_1 \text{ i } |F| = \omega_1\}$$

familija moći 2^{ω_1} medjusobno neizomorfnih totalno krutih (normalnih) Aronszajnovih drveta, čime je dokaz teoreme završen. ∎

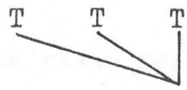
Kako postoji familija $\mathcal{F}$ moći 2^{ω_1} neprebrojivih podskupova od ω_1, takva da je $F-G \neq \phi$, za svako $F, G \in \mathcal{F}$, $F \neq G$, to iz dokaza predhodne teoreme zaključujemo da je $\{T^F_{\omega_1} | F \in \mathcal{F}\}$ familija moći 2^{ω_1} totalno krutih

Aronszajnovih drveta, takva da $T^F_{\omega_1}$ nije izomorfan početnom komadu od $T^G_{\omega_1}$, za svako $F, G \in \mathcal{F}$, $F \neq G$. Sledeća teorema je posledica predhodne i predstavlja konačnu dopunu teoreme 2.2. ∎

Teorema 2.6.

1. Postoji kruto Aronszajnovo drvo.
2. Postoji Aronszajnovo drvo T, za koga je $\sigma(T) = 2^{\omega}$.
3. Postoji Aronszajnovo drvo T, za koga je $\sigma(T) = 2^{\omega_1}$.

Dokaz: Tvrdjenje 1 sledi iz predhodne teoreme. Neka je T' sledeće drvo



... ω puta,

gde je T kruto (normalno) Aronszajnovo drvo. Neposredno proveravamo da je $\sigma(T') = 2^{\omega}$, što dokazuje 2.

Dokažimo sada 3. Neka su $\underline{S}$ i $\underline{T}$ proizvoljna normalna (ω_1, ω_1)-drveta. Drvo $\underline{U} = \underline{S} \otimes \underline{T}$ definišemo na skupu

$$U = \left\{ (s,t) \mid s \in S,\ t \in T \text{ i } \gamma(s) = \gamma(t) \right\},$$

relacijom $(s't') \leq (s,t)$ ako i samo ako je $s' \leq_S s$ i $t' \leq_T t$. Neka je $S^0 = \left\{ s \in {}^{\omega_1}2 \mid \left\{ \alpha \mid s_\alpha \neq 0 \right\} \text{ je konačan} \right\}$ i neka je $\underline{T}$ proizvoljno normalno Aronszajnovo drvo. Lako se proverava da je $\underline{U} = \underline{S}^0 \otimes \underline{T}$, takodje, normalno Aronszajnovo drvo. Dokažimo da je $\sigma(\underline{U}) = 2^{\omega_1}$. Za svako $f \in {}^{\omega_1}2$ definišemo automorfizam π_f drveta $\underline{S}^0$ sa

$$\pi_f(s) = \bar{s}, \text{ gde je } \bar{s}(\xi) = \begin{cases} s(\xi), & \text{ako je } f(\xi) = 0 \\ 1-s(\xi), & \text{ako je } f(\xi) = 1. \end{cases}$$

Jasno je, da je $\pi_f \neq \pi_g$, za $f \neq g$, odakle imamo da je $\sigma(\underline{S}^0) = 2^{\omega_1}$. Za svaki automorfizam π drveta $\underline{S}^0$ definišemo automorfizam $\bar{\pi}$ drveta $\underline{U}$ sa

$$\bar{\pi}(s,t) = (\pi(s), t).$$

Jasno je, da je $\bar{\pi}_1 \neq \bar{\pi}_2$, za $\pi_1 \neq \pi_2$, što znači da je $\sigma(\underline{U}) = 2^{\omega_1}$, tj. važi tvrdjenje 3. ∎

Glava III

1. KUREPINA HIPOTEZA I RELACIJE PARTICIJA

Biće korišćene razne forme uopštenja Kurepine hipoteze u ispitivanju relacija V iz [26, str. 18]. Tako ćemo moći dobiti konsistentnost negativnog odgovora na jedan problem istog rada. Inače, dobro je poznato da se o tom problemu ne može govoriti u ZFC (ili ZFC+GCH).

Kurepina hipoteza KH (v. §1.I) se prirodno uopštava na sledeći način (v. [9, str.10]). Neka je $\kappa \geq \omega$ proizvoljan kardinal, tada stavljamo

KH(κ): Postoji familija $\mathcal{F} \subseteq P(\kappa)$, takva da je $|\mathcal{F}| > \kappa$, dok je za svako $\alpha < \kappa$

$$|\{f \cap \alpha \mid f \in \mathcal{F}\}| \leq |\alpha| + \omega.$$

Hipotezu KH(κ), $\kappa \geq \omega$ možemo dati i u terminima drveta:

Postoji drvo $\underline{T} = (T, \leq_T)$ visine κ, koje ima $> \kappa$ maksimalnih κ-lanaca, tako da je

$$|R_\alpha T| \leq |\alpha| + \omega, \text{ za svako } \alpha < \kappa.$$

Sledeća forma uopštenja Kurepine hipoteze pripada C.C.Changu (v.[8] ili [9, ch. 18]). Neka su κ i λ proizvoljni beskonačni kardinali i neka je $\lambda \leq \kappa$, tada stavljamo:

KH(κ,λ): Postoji familija $\mathcal{F} \subseteq P(\kappa)$, takva da je $|\mathcal{F}| > \kappa$, dok je

$$|\{f \cap x \mid f \in \mathcal{F}\}| \leq |x| + \omega,$$

za svako $x \subseteq \kappa$, $|x| < \lambda$.

Dokaz sledeće teoreme možemo naći u [9, ch. 18].

Teorema 1.1. (Jensen). Neka važi V=L.

(i) za svaki regularan neprebrojiv kardinal κ i neprebrojiv kardinal $\lambda < \kappa$ važi $KH(\kappa,\lambda)$;

(ii) ako je κ regularan neprebrojiv kardinal, tada $KH(\kappa,\kappa)$ važi ako i samo ako κ nije neiskaziv kardinal. ∎

Što se tiče $KH(\kappa)$ za singularne kardinale κ, poznato je da $KH(\kappa)$ ne važi, ako je $\kappa > cf(\kappa) > \omega$ (v. [25] ili [4]). Medjutim, poznato je da, na primer, $KH(\omega_\omega,\omega_\omega)$ može važiti.

U teoremi 2.5., §2.I smo videli da je Kurepina hipoteza ekvivalentna sa egzistencijom Kurepinog tipa, tj. uredjajnog tipa φ koji ima osobine: $|\varphi| > \omega_1$, $d(\varphi) \leq \omega_1$ i φ ne sadrži ni jedan realan neprebrojiv podtip. Sada ćemo u termine uredjajnih tipova prevesti i ostale forme Kurepine hipoteze.

Teorema 1.2. Neka je $\kappa \geq \omega$ proizvoljan kardinal, tada je $KH(\kappa,\kappa)$ ekvivalentna sa sledećom rečenicom:

postoji uredjajni tip φ koji zadovoljava sledeće uslove:

(i) $|\varphi| > \kappa$;

(ii) $d(\varphi) \leq \kappa$;

(iii) $d(\Psi) = |\Psi|$ za svako $\Psi \leq \varphi, |\Psi| \leq \kappa$.

Dokaz: Neka je $\mathcal{F} \subseteq P(\kappa)$ familija koja zadovoljava $KH(\kappa,\kappa)$. Elemente familije $\mathcal{F}$ ćemo identifikovati sa odgovarajućim karakterističnim funkcijama, tj. elementima skupa ${}^{\kappa}2$. Familiji $\mathcal{F}$ dodeljujemo drvo $\underline{T} = (T, \subset)$, gde je

$$T = \left\{t \in {}^{\kappa}2 \,|\, (\exists f \in \mathcal{F})\ (t \subset f)\right\}.$$

Kako je $\left|\left\{f \cap \alpha \,|\, f \in \mathcal{F}\right\}\right| \leq |\alpha| + \omega$ to je i $|R_\alpha T| \leq |\alpha| + \omega$, za svako $\alpha < \kappa$. Odatle posebno imamo da je $|T| \leq \kappa$. Odbacivanjem nekih članova familije $\mathcal{F}$ možemo predpostaviti da za svako $f \in$ i $t \subset f$, $t \in T$ postoji $f' \in \mathcal{F}$, $f' \neq f$ i $f' \supset t$. Pored toga, elemente familije $\mathcal{F}$ identifikujemo i sa maksimalnim κ-lancima drveta $\underline{T}$. Za dva neuporediva elementa $t, t' \in T$ definišemo

$$\rho(t,t') = \min\left\{\alpha \mid t_\alpha \neq t'_\alpha\right\}.$$

Neka je

$$\varphi = tp(\mathcal{F}, \prec),$$

gde je $\prec$ leksikografsko uredjenje familije $\mathcal{F}$. Dokažimo da φ zadovoljava uslove (i)-(iii). Uslov (i) važi, jer $|\varphi| = |\mathcal{F}| > \kappa$. Dokažimo (ii). Za svako $t \in T$ odaberimo $f(t) \in \mathcal{F}$, $f(t) \supset t$, pri čemu, u slučaju da postoji, biramo da bude $\prec$-najmanji element iz $\mathcal{F}$ sa tom osobinom. Dokažimo da je

$$D = \left\{f(t) \mid t \in T\right\}$$

gust u $(\mathcal{F}, \prec)$, odakle će (ii) slediti, jer $|D| \leq |T| \leq \kappa$. Neka su $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$, $f_1 \prec f_2$ proizvoljni. Tada je po definiciji $f_1(\rho(f_1,f_2)) = 0$ i $f_2(\rho(f_1,f_2)) = 1$. Neka je $t = f_2 \mid (\rho(f_1,f_2) + 1)$. Ako za $t \in T$ postoji $\prec$-najmanji $f \in \mathcal{F}$ sa osobinom $f \supset t$, tada je on jednak sa $f(t)$, pa je $f_1 \prec f(t) \preccurlyeq f_2$, što nam i treba.

Predpostavimo da $\prec$-najmanjeg $f \in \mathcal{F}$, $f \supset t$ nema. Neka je $f_3 \in \mathcal{F}$ takav da je $f_3 \supset t$ i $f_3 \prec f_2$. Neka je $t' = f_3 \mid (\rho(f_2,f_3) + 1)$, tada važi

$$f_1 \prec f(t') \prec f_2,$$

što je trebalo dobiti. Dokažimo sada da važi uslov (iii). Predpostavimo suprotno, tj. da postoji $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ i $D \subseteq \mathcal{G}$, tako da je $|D| < |\mathcal{G}| \leq \kappa$ i tako da je D gust u $(\mathcal{G}, \prec)$. Prelazeći na podskup od $\mathcal{G}$ možemo predpostaviti da je $\lambda = |\mathcal{G}|$ regularan (čak i sukcesor). Pored toga, jasno je, da je $\lambda > \omega$.

Induktivno po slojevima U_α, $\alpha < \lambda$ ćemo konstruisati poddrvo $\underline{U}$ drveta $\underline{T}$.

Neka je $\alpha < \lambda$ i neka smo U_β, $\beta < \alpha$ već konstruisali tako da važe induktivni uslovi:

- $|U_\beta| \leq |\beta| + \omega$, za svako $\beta < \alpha$;
- neka je $f \in \mathcal{G}$ i neka je dužina lanca $\left\{t \in U \mid \alpha \mid t \subset f\right\}$ manja od α, tada postoji $t(f) \in U \mid \alpha$, tako da je $\left\{f' \in \mathcal{G} \mid f' \supset t(f)\right\} = \left\{f\right\}$;
- $\left\{f \in \mathcal{G} \mid f \supset t\right\} \neq \phi$ za svako $t \in U \mid \alpha$.

Slučaj 1: $\alpha = 0$. Neka je $U_o = \{\phi\}$.

Slučaj 2. $\alpha = \beta+1$. Neka je $t \in U_\alpha$ takav da je $|\{f \in \mathcal{G} | f \supset t\}| > 1$. Jasno je, da postoje t_o, $t_1 \supset t$, $t_o, t_1 \in R_\delta T$ za neko $\delta < \kappa$, $t_o \neq t_1$, tako da su $I_o = \{f \in \mathcal{G} | f \supset t_o\}$ i $I_1 = \{f \in \mathcal{G} | f \supset t_1\}$ disjunktni neparni i $I_o \cup I_1 = \{f \in \mathcal{G} | f \supset t\}$. Neka je

$$U_\alpha = U\left\{\{t_o, t_1\} \,|\, t \in U_\beta,\ |\{f \in \mathcal{G} | f \supset t\}| > 1\right\}.$$

Jasno je, da važi $|U_\alpha| \leqslant |\alpha| + \omega$. Zato dokažimo samo nepraznost skupa U_α, tj. egzistenciju $t \in U_\alpha$ za koga je $|\{f \in \mathcal{G} | f \supset t\}| > 1$. U suprotnom bi, na osnovu induktivne predpostavke, svakom $f \in \mathcal{G}$ odgovarao $t(f) \in U \,|\, \alpha$, $t(f) \subset f$, tako da je $\{f' \in \mathcal{G} | f' \supset t(f)\} = \{f\}$. To znači da je $f \to t(f)$, $f \in \mathcal{G}$ jedno 1-1 preslikavanje skupa moći λ u skup moći $\leqslant |\alpha| + \omega < \lambda$, što je nemoguće.

Slučaj 3. $\lim(\alpha)$. Neka je

$$U_\alpha = \left\{Ub \,|\, b \subseteq U \,|\, \alpha \text{ je maksimalni } \alpha\text{-lanac i } \{f \in \mathcal{G} | f \supset Ub\} \neq \phi\right\}.$$

Kao i gore dokazujemo nepraznost skupa U_α, pa za to dokažimo samo $|U_\alpha| \leqslant |\alpha| + \omega$. Predpostavimo suprotno, tj. da je $|U_\alpha| > |\alpha|$. Za svako $t \in U_\alpha$ fiksirajmo $f(t) \in \mathcal{G}$ sa osobinom $f(t) \subset t$. Neka je $\mathcal{G}' = \{f(t) \,|\, t \in U_\alpha\}$. Dakle, $|\mathcal{G}'| = |U_\alpha| > |\alpha|$. Jednostavno proveravamo da za $f \neq f'$, $f, f' \in \mathcal{G}'$ postoje $t, t' \in U_\beta$, za neko $\beta < \alpha$, $t \neq t'$, tako da je $t \subset f$ i $t' \subset f'$. Dakle, $\rho(f,f') = \rho(t,t')$, tj.

$$x = \{\rho(f,f') | f,f' \in \mathcal{G}',\ f \neq f\} \subseteq \{\rho(t,t') | t,t' \in U_\beta,\ \beta < \alpha \text{ i } t \neq t'\}.$$

Kako skup na desnoj strani ima moć $\leqslant |\alpha| + \omega$, to je $|x| \leqslant |\alpha| + \omega$.

Neka je $f, f' \in \mathcal{G}'$ i $f \neq f'$. Ako predpostavimo da je, na primer, $f \prec f'$ to je $f(\delta) = 0$ i $f'(\delta) = 1$, gde je $\delta = \rho(f,f') \in x$. To znači da je $\delta \in (f'-f) \cap x$. Dakle, za $f \neq f'$, $f, f' \in \mathcal{G}'$ imamo da je $f \cap x \neq f' \cap x$. To znači da skup

$$\{f \cap x | f \in \mathcal{F}\}$$

ima moć $\geqslant |\mathcal{G}'| > |x|$, što je suprotno predpostavci da $\mathcal{F}$ zadovoljava

$KH(\kappa,\kappa)$. Ovo završava dokaz induktivnog prelaza u slučaju 3. Neka je

$$U = \bigcup \left\{ U_\alpha \mid \alpha < \lambda \right\} \text{ i}$$

neka je $\underline{U} = (U, \subset)$. Dokažimo da svakom $f \in \mathcal{G}$ odgovara $t(f) \in U$ tako da je $\left\{ f' \in \mathcal{G} \mid f' \supset t(f) \right\} = \left\{ f \right\}$. Predpostavimo suprotno, tj. da za $f \in \mathcal{G}$ takvog $t(f) \in U$ nema. Po konstrukciji, to znači da je $b = \left\{ t \in U \mid t \subset f \right\}$ jedan maksimalni λ-lanac drveta $\underline{U}$. Neka je $b = \left\{ t_\alpha \mid \alpha < \lambda \right\}$ njegova monotona numeracija. Takodje, po konstrukciji za svako $\alpha < \lambda$ možemo odabrati $f_\alpha \in \mathcal{G}$, tako da je $t_\alpha \subset f_\alpha$ i $t_{\alpha+1} \not\subset f_\alpha$. Bar jedan od skupova

$$A_0 = \left\{ f_\alpha \mid f_\alpha \prec f_{\alpha+1} \right\} \quad \text{i} \quad A_1 = \left\{ f_\alpha \mid f_\alpha \succ f_{\alpha+1} \right\}$$

ima moć λ i predstavlja dobro uredjen ili inverzno dobro uredjen podskup od $(\mathcal{G}, \prec)$, što je suprotno sa predpostavkom da je $d(\mathcal{G}, \prec) \leq |D| < \lambda$. Dakle, svaki $f \in \mathcal{G}$ ima $t(f) \in U$. Kako je λ regularan i $|D| < \lambda$ to postoji $\alpha < \lambda$ tako da je

$$\gamma_u(t(f)) < \alpha, \text{ za svako } f \in D.$$

Kako je $|U_\alpha| \leq |\alpha| + \omega < \lambda$ (i $|U \mid \alpha| \leq |\alpha| + \omega$), to mora postojati $t \in U_\alpha$ tako da je $\left|\left\{ f \in \mathcal{G} \mid f \supset t \right\}\right| > 1$ (to smo dokazali u slučaju 2). Neka je $f_1, f_2 \in \mathcal{G}$, $f_1, f_2 \supset t \in U_\alpha$ i $f_1 \prec f_2$. Kako je D gust u $(\mathcal{G}, \prec)$ to mora postojati $f \in D$, tako da je $f_1 \preccurlyeq f \preccurlyeq f_2$, odakle će lako slediti da je $t(f) \supseteq t$. Dakle, $\gamma_u(t(f) \geq \alpha$, što je suprotno sa izborom ordinala $\alpha < \lambda$. Ovo završava dokaz da $\varphi = tp(\mathcal{F}, \prec)$ zadovoljava uslov (iii) čime je dokazana jedna implikacija teoreme.

Dokažimo sada obrnutu implikaciju. Neka je $\varphi = tp(E, <)$ uredjajni tip, koji zadovoljava uslove (i)-(iii). Predpostavljamo da je $(E, <)$ gust linearno uredjen skup i da je $D = \left\{ x_\alpha \mid \alpha < \kappa \right\}$ jedan njegov gust podskup.

Induktivno po slojevima T_α, $\alpha < \kappa+1$ ćemo konstruisati drvo atomizacije linearno uredjenog skupa $(E, <)$ visine $\kappa+1$. Neka je $\alpha < \kappa$ i neka smo T_β, $\beta < \alpha$ već konstruisali tako da je $|T_\beta| \leq |\beta| + \omega$, za svako $\beta < \alpha$.

<u>Slučaj 1</u>. $\alpha = 0$. Neka je $T_0 = \left\{ E \right\}$.

Slučaj 2. $\alpha = \beta+1$. Neka je $I \in T_\beta$ i $|I| > 1$. Ako je $x_\beta \in I$ unutrašnja tačka tog skupa, tada stavljamo $I_o = (\cdot, x_\beta] \cap I$ i $I_1 = (x_\beta, \cdot) \cap I$ u ako nije tada je u toj definiciji x_β zamenjujemo sa proizvoljno odabranom unutrašnjom tačkom skupa I. Na standardan način pokazujemo da je $T_\alpha = \cup \left\{ \{I_o, I_1\} \,|\, I \in T_\beta, |I| > 1 \right\}$ neprazan i da ima moć $\leqslant |\alpha| + \omega$.

Slučaj 3. $\lim(\alpha)$. Neka je tada

$$T_\alpha = \left\{ \cap b \,|\, b \subseteq T \; \alpha \text{ je maksimalni } \alpha\text{-lanac i } \cap b \neq \phi \right\}.$$

Opet se ne zadržavamo na dokazu da je T_α neprazan. Dokažimo samo da je $|T_\alpha| \leqslant |\alpha| + \omega$. Predpostavimo suprotno, tj. da je $|\alpha| < |T_\alpha|$. Za svako $I \in T_\alpha$ odaberimo $x(I) \in I$ proizvoljno. Neka je $F = \{x(I) \,|\, I \in T_\alpha\}$, odakle je $|F| = |T_\alpha|$. Neka su $I_1, I_2 \in T \restriction (\alpha+1)$ elementi istog čvorišta drveta $\underline{T} \restriction (\alpha+1)$. Definišimo:

$$I_1 \prec I_2 \text{ ako i samo ako je } x < y, \text{ za svako } x \in I_1 \text{ i } y \in I_2.$$

Neka je $\prec$ relacija prirodnog uredjenja drveta $\underline{T} \restriction (\alpha+1)$ odredjena ovakvim uredjenjima čvorišta. Neposredno proveravamo da je $T \restriction \alpha$ gust u $(T \restriction (\alpha+1), \prec)$, što znači da je

$$d(T \restriction (\alpha+1), \prec) \leqslant |\alpha| + \omega$$

Neposredno proveravamo da je preslikavanje $x(I) \to I$, $I \in T_\alpha$ izomorfizam izmedju $(F, < \cap F^2)$ i jednog podskupa od $(T \restriction (\alpha+1), \prec)$ (naime, $(T_\alpha, \prec \cap T_\alpha^2)$).

Dakle, imamo da je

$$d(F, < \cap F^2) \leqslant |\alpha| + \omega < |F|,$$

što protivreči uslovu (iii).

Neka je

$$T_\kappa = \left\{ \cap b \,|\, b \subseteq T \restriction \kappa \text{ je } \kappa\text{-lanac i } \cap b \neq \phi \right\}.$$

Neka je

$$T = \cup \left\{ T_\alpha \mid \alpha \leqslant \kappa \right\}$$

i $\underline{T} = (T, \supset)$. Po konstrukciji imamo da $x \in E$ odredjuje lanac $b(x) = \{I \in T \,|\, I \ni x\}$ visine $< \kappa$, samo ako je $\{x\} \in T \restriction \kappa$. Kako je $|E| > \kappa$

i $|T|\kappa| \leq \kappa$ to

$$E' = \left\{x \in E \middle| b(x) \text{ je } \kappa{+}1\text{-lanac drveta } \underline{T}\right\}$$

ima moć $> \kappa$. Neka je $x, x' \in E'$ i $x \neq x'$. Dokažimo da je $b(x) \neq b(x')$. Predpostavimo suprotno da je $b(x) = b(x') = b$. Kako je D gust u $(E <)$, to postoji $\beta < \kappa$, tako da je $x < x_\beta < x'$. Neka je I jedinstveni element skupa $b \cap T_\beta$. Po konstrukciji su $I_0 = (\cdot, x_\beta] \cap I$ i $I_1 = (x_\beta, \cdot) \cap I$ sukcesori I u $T_{\beta+1}$. Tačno jedan od njih pripada b. Neka je to I_0. Medjutim, tada važi $x' \notin I_0$, suprotno predpostavci $I_0 \in b(x') = \left\{I \in T \middle| I \ni x'\right\}$. Dakle,

$$\left\{l(x) \middle| x \in E'\right\} = \mathcal{F}$$

je kolekcija moći $> \kappa$ maksimalnih κ-lanaca drveta $\underline{T} \mid \kappa$, gde je $l(x) = b(x) - \left\{\{x\}\right\}$.

Da bi dokazali $KH(\kappa,\kappa)$ dovoljno je pokazati da $\mathcal{F}$ zadovoljava uslov

$$\left|\left\{l(x) \cap X \middle| x \in E'\right\}\right| \leq |X| + \omega,$$

za svako $X \subseteq T \mid \kappa$, $|X| < \kappa$. Predpostavimo suprotno, tj. da postoji beskonačan $X \subseteq T \mid \kappa$, $|X| < \kappa$ i $F \subseteq E'$, $|F| > |X|$, tako da je $l(x) \cap X \neq l(x') \cap X$, za svako $x, x' \in F$, $x \neq x'$.

Dakle, za svako $x \in F$ $l(x) \cap X$ je maksimalni lanac drveta $(X, \supset)$ pri čemu možemo predpostaviti da nema poslednjeg elementa. Neka su $I, I' \in X$ elementi istog čvorišta drveta $(X, \supset)$. Definišimo

$I \lhd I'$ ako i samo ako je $x < x'$ za svako $x \in I$ i $x' \in I'$

Neka je $\lhd$ leksikografsko uredjenje skupa $\mathcal{L} = \left\{l(x) \cap X \middle| x \in F'\right\}$ koje je inducirano gornjim uredjenjima čvorišta drveta $(X, \supset)$. Na već uobičajen način možemo dokazati da je

$$d(\mathcal{L}, \lhd) \leq |X|.$$

Neposredno proveravamo da je $x \to l(x) \cap X$, $x \in F$ izomorfizam linearno uredjenih skupova $(F, < \cap F^2)$ i $(\mathcal{L}, \lhd)$. To znači da važi

$$d(F, < \cap F^2) \leq |X| < |F|,$$

što protivreči činjenici da $\varphi = tp(E, <)$ zadovoljava uslov (iii) iz formulacije teoreme. Ovo završava dokaz druge implikacije teoreme 1.2. a time i čitave teoreme. ∎

Sledeća teorema nam daje prevod dvokardinalne Kurepine hipoteze u termine uredjajnih tipova. Predpostavka GCH je učinjena samo zbog jednostavnosti formulacije, što znači da $KH(\kappa,\lambda)$ možemo prevesti u termine uredjajnih tipova i bez te predpostavke, stim što ćemo imati nešto drugčiju formulaciju.

Teorema 1.3. (GCH) Neka su κ i λ proizvoljni beskonačni kardinali i neka je $\lambda \leqslant \kappa$, tada je $KH(\kappa,\lambda)$ ekvivalentna sa sledećom rečenicom:

postoji uredjajni tip φ za koga važe uslovi:

(i) $|\varphi| < \kappa$;

(ii) $d(\varphi) \leqslant \kappa$;

(iii) $d(\Psi) = |\Psi|$, za svako $\Psi \leqslant \varphi$, $|\Psi| \leqslant \lambda$.

Dokaz: Kako je dokaz ove teoreme je analogan dokazu predhodne, to ćemo ovde navesti samo razlike. Ako je $\mathcal{F} \subseteq P(\kappa)$ familija koja zadovoljava $KH(\kappa,\lambda)$, tada opet obrazujemo odgovarajuće drvo $\underline{T} = (T, \subset)$, $T \subseteq {}^{\kappa}2$. Kako važi GCH to je $|T| \leqslant \kappa$ pa će biti $d(\mathcal{F}, \prec) \leqslant \kappa$ (jedino mesto u dokazu ove implikacije gde se koristi GCH). Ostali deo dokaza ove implikacije je potpuno identičan sa onim iz dokaza predhodne teoreme.

Kod dokaza obrnute implikacije opet konstruišemo drvo atomizacije $\underline{T}$ skupa $(E, <)$. U slučaju graničnog κ induktivni uslov je $|T_\alpha| < \kappa$ za $\alpha < \kappa$. Ovaj uslov se održava pomoći GCH. Ako je $\kappa = \nu^+$ tada je induktivni uslov $|T_\alpha| \leqslant \kappa$, za svako $\alpha < \kappa$. Ako je $\alpha < \kappa$ graničan i $|T \restriction \alpha| \leqslant \kappa$ tada je $|T_\alpha| \leqslant \kappa^\nu = \kappa$, na osnovu GCH. Dalji dokaz ove implikacije je potpuno identičan sa odgovarajućim dokazom u predhodnoj teoremi. ∎

Sada navodimo definiciju relacija $\underline{\overline{V}}$ iz [26 §18. 3.] sa namerom da posmatramo njihov odnos sa Kurepinom hipotezom. Neka su κ, λ, μ, ν proizvoljni kardinali i neka je $1 \leqslant r < \omega$.

$$\kappa \to [\lambda]^r_{\mu,\nu} \qquad (1)$$

označava sledeću rečenicu: ako je $[\kappa]^r = \cup \{ I_\alpha \mid \alpha < \mu \}$ disjunktna particija skupa $[\kappa]^r$, tada postoji $B \subseteq \kappa$ i $D \subseteq \mu$, tako da je $|B| = \lambda$, $|D| = \nu$

i $[B]^r \subseteq \cup \left\{ I_\alpha | \alpha \in D \right\}$.

U [26, str. 154] Erdös Hajnal i Rado napominju da posle rezultata koje su oni dobili u tom radu ostaje sledeći problem otvoren:

$$\text{da li važi } \kappa^+ \to [\lambda^+]^2_{\kappa,\lambda} \quad \text{za svako } \kappa > \lambda \geq \omega \text{ ?}$$

(videti, takodje, Problem 3.1. i Problem 3.2. iz [26] kao specijalne slučajeve ovog problema).

U sledećoj teoremi je sadržan osnovni rezultat ovog odeljka.

<u>Teorema 1.4.</u> (G.C.H) Neka je $\kappa > \lambda \geq \omega$ proizvoljan par kardinala, tada važi implikacija

$$KH(\kappa, \lambda^+) \Rightarrow \kappa^+ \not\to [\lambda^+]^2_{\kappa,\lambda}.$$

<u>Dokaz</u>: Neka važi $KH(\kappa, \lambda^+)$, tada po teoremi 1.3. znamo da postoji uredjajni tip $\varphi = tp\,(E, <)$ sa osobinama: $|\varphi| > \kappa$; $d(\varphi) \leq \kappa$; $d(\Psi) = |\Psi|$, za svako $\Psi \leq \varphi$, $|\Psi| \leq \lambda^+$.

Predpostavljamo da je $(E, <)$ gust linearno uredjen skup i da je $D = \left\{ x_\alpha | \alpha < \kappa \right\}$ gust u $(E, <)$. Particiju $(I_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ skupa $[E]^2$ definišemo sa

$$\left\{ x,y \right\}_< \in I_\alpha \text{ akko je } \alpha < \kappa \text{ najmanji ordinal sa osobinom } x < x_\alpha < y.$$

Kako je D gust u $(E, <)$, to je jasno da je ovim particija $(I_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ dobro definisana (i da je to disjunktna particija). Dokažimo da ova particija dokazuje $\kappa^+ \not\to [\lambda^+]^2_{\kappa,\lambda}$.

Neka su $X \subseteq E$ i $B \subseteq \kappa$, $|B| = \lambda$ proizvoljni i neka je $[X]^2 \subseteq \cup \left\{ I_\alpha | \alpha \in B \right\}$. To znači da za svako $\left\{ x,y \right\}_< \in [X]^2$ postoji $\alpha \in B$, tako da je $x < x_\alpha < y$. Neka je $D' = \left\{ x_\alpha | \alpha \in B \right\}$ i $F = X \cup D'$, tada ovo znači da je D' gust u linearno uredjenom skupu $(F, < \cap F^2)$.

Na osnovu treće osobine tipa φ imamo da je

$$|F| = d(F, < \cap F^2) \leq |D'| = \lambda.$$

Dakle, $|X| \leq \lambda$. Ovim smo dokazali da za svako $X \subseteq E$ i $B \subseteq \kappa$, $|B| = \lambda$ iz $[X]^2 \subseteq \cup \left\{ I_\alpha | \alpha \in B \right\}$ sledi $|X| \leq \lambda$, što dokazuje $\kappa^+ \not\to [\lambda^+]^2_{\kappa,\lambda}$. ∎

Isto rasudjivanje dokazuje sledeću teoremu pri čemu se primenjuje teorema 1.2. umesto teoreme 1.3.

Teorema 1.5. Neka su $\kappa > \lambda \geq \omega$ proizvoljni kardinali, tada važi implikacija

$$KH(\kappa,\kappa) \Rightarrow \kappa^+ \not\rightarrow [\lambda^+]^2_{\kappa,\lambda}. \blacksquare$$

Iz dokaza predhodne teoreme imamo informaciju više. Naime, gore definisana parcijalna $(I_\xi)_{\xi<\kappa}$ dokazuje relaciju $\kappa^+ \rightarrow [\lambda^+]^2_{\kappa,\lambda}$ za svako λ, $\omega \leq \lambda < \kappa$, što je interesantno uporediti sa jednim opštim pitanjem Erdösa Hajnala i Radoa (v. [26, str. 156. Remarks]).

Na osnovu teorema 1.1., 1.4. i 1.5. imamo sledeću teoremu, koja daje konsistentnost negativnog odgovora na gornji problem Erdösa, Hajnala i Radoa u slučaju regularnog κ.

Teorema 1.6. (V = L) Neka je $cf(\kappa) = \kappa > \lambda \geq \omega$, tada važi

$$\kappa^+ \not\rightarrow [\lambda^+]^2_{\kappa,\lambda}. \blacksquare$$

Specijalan slučaj gornjeg opšteg problema Erdösa Hajnala i Radoa je pitanje važenja relacije $\omega_2 \rightarrow [\omega_1]^2_{\omega_1,\omega}$ (v.[26, Problem 3.1.a] ili [22, Problem 19]). Danas je poznato da o važenju te relacije nemožemo ništa reći u ZFC (ili ZFC+GCH). U [22] Erdös i Hajnal uporedjuju tu relaciju sa KH i sa sledećom rečenicom.

$TH(\omega_1)$: postoji familija moći ω_2 skoro disjunktnih funkcija iz ${}^{\omega_1}\omega$.

(f,g $\in {}^{\omega_1}\omega$ su skoro disjunktne ako je $\{\alpha < \omega_1 \mid f(\alpha) = g(\alpha)\}$ prebrojiv).

Neki autori $TH(\omega_1)$ označavaju sa ωKH.

Jednostavno se dokazuje da važi $KH \Rightarrow TH(\omega_1) \Rightarrow \omega_2 \not\rightarrow [\omega_1]^2_{\omega_1\ \omega}$. Zato Erdös i Hajnal (v. [22, Problem 19/c]) pitaju da li važi jedna od obrnutih implikacija. Da ne važi $TH(\omega_1) \Rightarrow KH$ sledi iz sledeće teoreme.

Teorema 1.7.

Con (ZFC + "postoji inakcesibilan kardinal") $\rightarrow$ Con(ZFC+TH(ω_1)+$\neg$KH).

Dokaz: Pre svega podsetimo se da je ovde predpostavka egzistencije inakcesibilnog kardinala i nužna.

Parcijalno uredjen skup C definišemo na sledeći način:

$p \in C$ akko je p prebrojiva funkcija, $\mathrm{dom}(p) \subseteq \omega_2$ i rang $(p) \subseteq {}^{\omega_1}\omega$;

$p,q \in C$, $p \leq q$ akko je $\mathrm{dom}(q) \subseteq \mathrm{dom}(p)$;

$q(\xi) \subseteq p(\xi)$, za svako $\xi \in \mathrm{dom}(q)$ i

$q(\xi) \cap q(\xi') = p(\xi) \cap p(\xi')$, za svako $\xi, \xi' \in \mathrm{dom}(q)$, $\xi \neq \xi'$.

Neka važi CH. Dokažimo da C zadovoljava ω_2-c.c. Neka je $\mathcal{F} \subseteq C$, $|\mathcal{F}| = \omega_2$ proizvoljna familija. Na osnovu poznate generalizacije Leme Marczewskog, znamo da postoji $F \subseteq \omega_2$ i $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$, $|\mathcal{F}'| = \omega_2$, tako da je

$$\mathrm{dom}(p) \cap \mathrm{dom}(q) = F, \text{ za svako } p,q \in F', \ p \neq q.$$

Kako je $|F| \leq \omega$ i $|{}^{\omega_1}\omega| = \omega_1$, to na osnovu CH možemo predpostaviti da je $p \restriction F = q \restriction F$, za svako $p,q \in F'$. Neposredno proveravamo da su svaka dva člana $p,q \in F'$ kompatibilna.

Takodje, je jasno da je C σ-zatvoren parcijalno uredjen skup.

Neka je $D_\xi = \{p \in C \mid \mathrm{dom}(p) \ni \xi\}$, $\xi < \omega_2$ i neka je $E_\alpha = \{p \in C \mid \mathrm{dom}(p(\xi)) \ni \alpha$, za svako $\xi \in \mathrm{dom}(p)\}$, $\alpha < \omega_2$. Neposredno proveravamo da su D_ξ, $\xi < \omega_2$ i E_α, $\alpha < \omega_1$ gusti podskupovi od C.

Neka je M p.t.m. ZFC+GCH i neka je G M-generički podskup od $[C]^M$. Na osnovu osobina parcijalno uredjenog skupa C imamo da M i M[G] imaju iste kardinale i funkciju kofinalnosti. Za svako $\xi \in \omega_2^M = \omega_2^{M[G]}$ u M[G] definišemo

$$f_\xi = \bigcup \{p(\xi) \mid p \in G, \ \xi \in \mathrm{dom}(p)\}.$$

Jednostavno se proverava da je $\{f_\xi \mid \xi < \omega_2^M\}$ familija moći ω_2^M skoro disjunktnih funkcija iz ${}^{\omega_1}\omega$, što znači da $TH(\omega_1)$ važi u M[G].

Neka je M p.t.m. ZFC+V = L i neka je κ prvi inakcesibilan kardinal u M. Neka je $P = [P(\kappa)]^M$, gde je $P(\kappa)$ parcijalno uredjen skup Lévya, koji kalapsira κ u ω_2 (v. §4.I). Neka je G M-generički podskup od P i neka je N = M[G]. Poznato je da važi $N \models \neg KH + GCH$ (v. [7o]).

Neka je $C = [C]^N$, gde je C gore definisani parcijalno uredjen skup koji daje $TH(\omega_1)$. Dakle, ako je H N-generički podskup od C, tada važi $N[H] \models TH(\omega_2)$. Za dokaz teoreme 1.7. je dovoljno još dokazati da važi $N[H] \models \neg KH$. Neka je $T = (\omega_1, \leq_T)$ proizvoljno normalno (ω_1,ω_1)--drvo u $N[H]$ $(\omega_1 = \omega_1^M = \omega_1^{M[G][H]})$. Trebamo dokazati da T u $N[H]$ ima $< \kappa = \omega_2^{N[H]}$ maksimalnih ω_1-lanaca.

Za $\lambda < \omega_2^N$ $(= \kappa)$ definišemo $C_\lambda = \{p \mid \lambda | P \varepsilon C\}$ i $C^\lambda = \{p - p \mid \lambda | \, | p \varepsilon C\}$. Tada je (u N) $|C_\lambda| = \omega_1$, za svako $\lambda < \omega_2^N$. Neka je $H_\lambda = H \cap C_\lambda$ i $H^\lambda = H \cap C^\lambda$. Tada je H_λ N-generički podskup od C_λ i H^λ $N[H_\lambda]$-generički podskup od C^λ i važi $N[H] = N[H_\lambda][H^\lambda]$.

Na osnovu leme istinitosti za forsing postoji $\lambda < \omega_2^N$ $(= \kappa)$, tako da je $\underline{T} \varepsilon N[H_\lambda]$. Kako je $|C_\lambda|^N = \omega_1^N$ i $N = (L[G])^N$ (pri čemu možemo smatrati $G \subseteq \kappa = \omega_2^N$), to po lemi kondenzacije postoji $\nu < \kappa$ (predpostavljamo da je ν regularan i neprebrojiv u M), tako da je $\underline{T}$, $C_\lambda \varepsilon M[G_\nu][H_\lambda]$ (definicije P^ν, P_ν, G^ν, G_ν, $\nu < \kappa$ videti u §4.I).

Primenom Leme o.3. za P^ν, C_λ i $M[G_\nu]$ imamo da je H_λ $M[G_\nu]$-generički podskup od C_λ a G^ν $M[G_\nu][H_\lambda]$-generički podskup od P^ν i da važi

$$M[G_\nu][H_\lambda][G^\nu] = M[G_\nu][G^\nu][H_\lambda] = N[H_\lambda]. \qquad (2)$$

Kako je C_λ σ-zatvoren u $M[G_\nu]$ (jer je takav u N), to se svaki prebrojiv niz iz $M[G_\nu][H_\lambda]$ elemenata iz $M[G_\nu]$ nalazi u $M[G_\nu]$, što znači da je P^ν σ-zatvoren i u $M[G_\nu][H_\lambda]$, jer je takav u $M[G_\nu]$ (v. [7o], [36]). Iz istog razloga je C^λ σ-zatvoren parcijalno uredjen skup u $N[H_\lambda]$, jer je takav u N. Primenom leme Silvera (v. [7o] ili [36]) znamo da je svaki maksimalni ω_1-lanac drveta $\underline{T}$ iz $N[H]$ sadržan u $N[H_\lambda]$ a zatim u $N[G_\nu][H_\lambda]$, na osnovu iste leme i (2).

Posmatrajmo parcijalno uredjen skup $P_\nu \otimes C_\lambda$ u M (v. Lemu o.4). Lako se proverava da je $|P_\nu \otimes C_\lambda|^M < \kappa$. Po Lemi o.4. imamo da je $M[G_\nu][H_\lambda] = M[G_\nu \otimes H_\lambda]$, gde je $G_\nu \otimes H_\lambda$ M-generički podskup od $P_\nu \otimes C_\lambda$. Dakle, κ je inakcesibilan kardinal u $M[G_\nu][H_\lambda]$, što znači da $\underline{T} \varepsilon M[G_\nu][H_\lambda]$ ima $< \kappa$ maksimalnih ω_1-lanaca u $M[G_\nu][H_\lambda]$ a time na osnovu gore dokazanog i u $N[H]$. Dakle u $N[H]$ ima $< \kappa = \omega_2^{N[H]}$ maksimalnih ω_1-lanaca drveta $\underline{T}$, što je i trebalo pokazati. ∎

U radu [61] autor nas obaveštava da je teoremu 1.7. dobio i J. Baumgartner (vidi, takodje [5, str. 235]). J.Baumgartner nije publikovao taj rezultat, pa smo se odlučili da ga ovde dokažemo, radi kompletnosti diskusije gornjih problema.

Na kraju posmatramo "Problem 7" iz [26, str. 164], koji glasi:

Neka je $|S| = \omega_{\omega+1}$ i neka je $[S]^2 = I_o \cup I_1$. Predpostavimo da za svako $X \subseteq S$, $|X| = \omega_1$ postoji $Y \subseteq X$, $|Y| = \omega_1$, tako da je $[Y]^2 \subseteq I_1$. Da li tada postoji $S' \subseteq S$, $|S'| = \omega_{\omega+1}$, tako da je $[S']^2 \subseteq I_1$?

Teorema 1.8. Neka važi $KH(\omega_\omega, \omega_\omega)$. Tada postoji S, $|S| = \omega_{\omega+1}$ i particija $[S]^2 = I_o \cup I_1$, tako da važi:

(1) za svako $X \subseteq S$, $|X| = \omega_1$ postoji $Y \subseteq X$, $|Y| = \omega_1$, tako da je $[Y]^2 \subseteq I_1$;

(2) ne postoji $S' \subseteq S$, $|S'| = \omega_{\omega+1}$, tako da je $[S']^2 \subseteq I_1$. ∎

Dakle, imamo da $KH(\omega_\omega, \omega_\omega)$ implicira negativan odgovor na "Problem 7". Pre nego krenemo u dokaz teoreme 1.8. navodimo sledeću lemu koja ima i samostalni interes.

Lema 1.9. $KH(\omega_\omega, \omega_\omega)$ je ekvivalentna sa egzistencijom uredjajnog tipa φ sa osobinama:

(i) $|\varphi| > \omega_\omega$;

(ii) $d(\varphi) \leq \omega_\omega$;

(iii) ako je $\Psi \leq \varphi$ i $|\Psi| = \omega_1$, tada je $\omega_1 \leq \Psi$.

Dokaz: Neka je $F \subseteq P(\omega_\omega)$ familija koja zadovoljava $KH(\omega_\omega, \omega_\omega)$. Kao u dokazu terema 1.2. i 1.3. elemente familije F identifikujemo sa odgovarajućim karakterističnim funkcijama.

Posmatrajmo drvo $\underline{T} = (T, \subset)$, gde je

$$T = \left\{ t \in {}^{\delta}2 \,|\, (\exists f \in F)\ (t \subseteq f) \right\},$$

gde je $\delta = \omega_\omega + 1$.

Na osnovu osobina familije F lako proveravamo da je $|R_\alpha T| \leq |\alpha| + \omega$, za svako $\alpha < \omega_\omega$ i da je $R_\delta T (= F)$ ima moć $> \omega_\omega$. Posmatrajmo sledeće $\omega+1$-pod-drvo $\underline{U} = (U, \subset)$ drveta $\underline{T}$, gde je

$$U = \cup \left\{ R_{\omega_n} \,|\, n \leq \omega \right\}.$$

Dakle, $|R_n U| \leq \omega_n$, za svako $n < \omega$, dok $R_\omega U = F$ ima moć $> \omega_\omega$. Dokažimo da $\underline{U}$ ima sledeću osobinu.

(+) Ako je $X \subseteq R_\omega U$ neprebrojiv, tada je takav i
$$Y = \{t \in U|\omega| (\exists f \in X)(t \subset f)\}.$$

Predpostavimo suprotno, tj. da postoji $X \subseteq R_\omega$, $|X| \geqslant \omega_1$, tako da je $Y = \{t \in U|\omega| (\exists f \in X)(t \subset f)\}$ prebrojiv. Za svako $f, g \in X$, $f \neq g$ postoji $n < \omega$ i $s, t \in R_n U$, $s \neq t$ i $s \subset f$, $t \subset g$. Jasno je, da tada važi $\rho(f,g) = \rho(s,t)$. Ovo dokazuje inkluziju:

$$x = \{\rho(f,g) | f,g \in X,\ f \neq g\} \subseteq \{\rho(s,t) | s,t \in Y,\ s \neq t \text{ i } \gamma(s) = \gamma(t)\}.$$

Dakle, važi $|x| \leqslant |Y| + \omega \leqslant \omega$. Kao u dokazu teoreme 1.2. imamo da je $f \cap x \neq g \cap x$, za svako $f,g \in X$, $f \neq g$, što znači da je

$$|\{f \cap x | f \in F\}| > |x| + \omega,$$

suprotno predpostavci o familiji F. Dakle, važi (+).

Za svako $n < \omega$ sloj $R_u U$ uredjujemo dobro uredjenjem $\lhd$ po tipu $\leqslant \omega_n$. Neka je

$$\varphi = tp\ (F, \lhd),$$

gde je $\lhd$ leksikografsko uredjenje skupa F indukovano gornjim uredjenjima slojeva. Dokažimo da φ zadovoljava uslove (i)-(iii). Kako je $|\varphi| = |F| > \omega_\omega$ to uslov (i) je ispunjen. Da važi (ii) proveravamo kao u dokazu teoreme 1.2. Dokažimo (iii). Neka je $\Psi \leqslant \varphi$, $|\Psi| = \omega_1$ proizvoljan, tj. neka je $X \subseteq F$, $|X| = \omega_1$ i $\Psi = tp(X, \lhd)$.

Na osnovu (+) $Y = \{t \in U|\omega| (\exists f \in X)(t \subset f)\}$ je neprebrojiv. Neka je $n < \omega$ prvi sa osobinom $|R_n Y| \geqslant \omega_1$. Kako je $|R_o Y| \leqslant |R_o U| \leqslant \omega$, to je $n > 0$. Neka $t \in R_{n-1} Y$ ima osobinu da je $Y' = \{s \in R_n Y | s \supset t\}$ neprebrojiv. Za svako $s \in Y'$ odaberimo $f(s) \in X$ tako da je $f(s) \supset s$. Jasno je, da je $X' = \{f(s) | s \in Y'\}$ neprebrojiv $\lhd$-dobro uredjen skup, odakle imamo $\omega_1 \leqslant \Psi$, tj. važi (iii).

Dokažimo sada obrnutu implikaciju. Neka je dat uredjajni tip φ sa osobinama: $|\varphi| > \omega_\omega$; $d(\varphi) \leqslant \omega_\omega$; za svako $\Psi \leqslant \varphi$, $|\Psi| = \omega_1$ važi $\omega_1 \leqslant \Psi$.

Dokažimo da za svako $\Psi \leqslant \varphi$, $|\Psi| \leqslant \omega_\omega$ važi $d(\Psi) = |\Psi|$, tako da će implikacija slediti direktno na osnovu teoreme 1.2.

Jasno je, da je dovoljno dokazati $d(\Psi) = |\Psi|$, za svako $\Psi \leqslant \varphi$, $|\Psi| < \omega_\omega$.

Neka je $\Psi \leqslant \varphi$, $|\Psi| < \omega_\omega$ proizvoljan. Ako je Ψ jednak prebrojivoj uniji svojih dobro uredjenih podtipova nema ništa da se dokazuje.

Dakle, predpostavljamo da Ψ nije jednak prebrojivoj uniji svojih dobro uredjenih podtipova. Pored toga na osnovu osobine (iii) tipa φ imamo da istu osobinu ima i Ψ. Dakle, $\Psi \varepsilon \Phi_4$ (specijalna klasa uredjajnih tipova Ψ' sa osobinama: Ψ' nije unija od prebrojivo mnogo svojih dobro uredjenih podtipova; za svako $\Psi'' \leqslant \Psi'$, $|\Psi''| = \omega_1$ važi $\omega_1 \leqslant \Psi''$, videti [3]). Na osnovu [3, Theorem 4.6.(i)] zaključujemo da je $\kappa \leqslant \Psi$, gde je $\kappa = |\Psi|$. To znači da je $d(\Psi) = \kappa = |\Psi|$. Ovo završava dokaz Leme 1.15. ∎

Primetimo da smo u dokazu direktne implikacije Leme 1.9. od $KH(\omega_\omega, \omega_\omega)$ koristili samo $KH(\omega_\omega, \omega_1)$ i $|T \mid \omega_\omega| \leqslant \omega_\omega$. Kako smo ovaj poslednji uslov mogli obezbediti, na primer, pomoću GCH, to smo zapravo dokazali sledeće interesantno tvrdjenje.

<u>Lema 1.1o</u>. (GCH) Sledeća tri uslova su ekvivalentna:

(a) $KH(\omega_\omega, \omega_\omega)$;

(b) $KH(\omega_\omega, \omega_1)$;

(c) postoji uredjajni tip φ sa osobinama:

(i) $|\varphi| > \omega_\omega$;

(ii) $d(\varphi) \leqslant \omega_\omega$;

(iii) ako je $\Psi \leqslant \varphi$, $|\Psi| = \omega_1$, tada je $\omega_1 \leqslant \Psi$. ∎

<u>Dokaz teoreme 1.8</u>. Neka je $\varphi = tp(E, <)$ uredjajni tip koji ima osobine (i)-(iii) iz Leme 1.9. Definišimo particiju

$$[E]^2 = I_1 \cup I_1 \qquad (3)$$

na sledeći način. Neka je $\prec$ fiksirano dobro uredjenje skupa E, tada stavljamo

$$\{x,y\}_{\neq} \varepsilon I_0, \; x,y \varepsilon E \quad \text{akko je } x \prec y \quad y < x$$

$$\{x,y\}_{\neq} \varepsilon I_1, \; x,y \varepsilon E \quad \text{akko je } x \prec y \quad x < y.$$

Dokažimo da je (I_0, I_1) tražena particija, tj. da zadovoljava uslove (1),

(2) teoreme 1.8. Neka je $X \subseteq E$ i $|X| = \omega_1$. Na osnovu osobine (iii) tipa φ znamo da postoji neprebrojiv $<$-dobro uredjen $Y \subseteq X$. Dakle, imamo da je Y dobro uredjen i relacijom $<$ i relacijom $\prec$. Na osnovu opšte-poznate Leme znamo da postoji $Y' \subseteq Y$, $|Y'| = \omega_1$ tako da se $<$ i $\prec$ poklapaju na Y', tj. $x,y \in Y'$, $x < y$ akko $x \prec y$. Na osnovu definicije particije (I_0, I_1), to znači da je $[Y']^2 \subseteq I_1$, što dokazuje da za (I_0, I_1) važi (1).

Dokažimo da za (I_0, I_1) važi i uslov (2) iz teoreme 1.8. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $E' \subseteq E$, $|E'| = \omega_{\omega+1}$, tako da je $[E']^2 \subseteq I_1$.

Na osnovu definicije (I_0, I_1) imamo da za svako $x,y \in E'$ iz $x \prec y$ sledi $x < y$, tj. da je E' $<$-dobro uredjen. Medjutim, ovo protivreči činjenici da je $d(\varphi) \leq \omega_\omega$, čime se dokaz teoreme 1.8. završava. ∎

2. DRVETA I PARTICIJE

Na početku ovog odeljka će biti reči o egzistenciji Kurepinih drveta bez Aronszajnovih i Cantorovih poddrveta. Dobićemo neke rezultate konsistentnosti, koje ćemo kasnije primenjivati pri posmatranju nekih problemaErdösa i Hajnala iz [26], [22] i [23].

R.Jensen je prvi konstruisao Kurepino drvo koje nema ni jedno Aronszajnovo poddrvo uz predpostavku V=L (v. [10, Theorem 4]). Konstrukcija bitno koristi neke specijalne osobine kardinala ω_1 tako da se ne može direktno uopštiti. Sa druge strane egzistencija takvog drveta ima interesantne posledice kako u kombinatornoj teoriji skupova (v. [10]) tako i u skupovno teorijskoj topologiji (v. [42]).Dakle, od interesa je dobiti razna uopštenja te teoreme. Ovde ćemo to postići metodom forsinga.

Neka je κ regularan neprebrojiv kardinal. Parcijalno uredjen skup $KP(\kappa)$ definišemo na sledeći način (uporediti sa [76] ili [36]). Elementi skupa $KP(\kappa)$ su parovi $p = (\underline{T}_p, l_p)$ pri čemu važi:

(1) $\underline{T}_p$ je normalno (α_p+1, κ)-drvo koje ne sadrži ni jedno λ-Aronszajnovo poddrvo i nijedno ν-Cantorovo poddrvo, gde je $\lambda \geq \omega$ proizvoljan regularan a $\nu \geq \omega$ proizvoljan kardinal; $\underline{T}_p = (T_p, \leq_p)$, gde je T_p ordinal iz κ.

(2) lp je bijekcija izmedju $\mathrm{dom}(lp) \subseteq \kappa^+$ i zadnjeg sloja $R_{\alpha_p} T_p$ drveta $\underline{T}_p$.

Uredjenje $\leqslant$ skupa $KP(\kappa)$ definišemo na sledeći način: $p \leqslant q$, $p, q \in KP(\kappa)$ akko važi:

(3) $\underline{T}p$ je endekstenzija drveta $\underline{T}q$, tj. $\underline{T}p|(\alpha_q+1) = \underline{T}_q$.
(4) $\mathrm{dom}(lp) \supseteq \mathrm{dom}(lq)$.
(5) $lq(\xi) \leqslant_p lp(\xi)$, za svako $\xi \in \mathrm{dom}(lq)$.

Pre svega primetimo da skup $KP(\kappa)$ nije prazan, jer drveta sa osobinom (1) ima dosta i to proizvoljno velike visine. Naime, za proizvoljno $\alpha < \kappa$ skup $\left\{s \in \bigcup\left\{{}^{\beta}2 \mid \beta \leqslant \alpha\right\} \mid \left\{\beta \mid s_\beta \neq 0\right\} \text{ je konačan}\right\}$ sa relacijom $\subset$ predstavlja jedno $(\alpha+1, \kappa)$-drvo, koje zadovoljava uslov (1). Pored toga, svako $p \in KP(\kappa)$ ima dva nekompatibilna proširenja, što se jednostavno proverava.

<u>Lema 2.1.</u> Parcijalno uredjeni skup $KP(\kappa)$ je κ-zatvoren. Više od toga, svaki opadajući niz $\left\{p_\alpha\right\}_{\alpha<\mu}$, $\mu < \kappa$ elemenata iz $KP(\kappa)$ ima infimum $p \in KP(\kappa)$, za koga, pored ostalog, važi i $\mathrm{dom}(lp) = \bigcup\left\{\mathrm{dom}(lp_\alpha) \mid \alpha < \mu\right\}$.

<u>Dokaz:</u> Jasno je, da se možemo ograničiti na slučaj kad je $\mu < \kappa$ beskonačan i regularan kardinal. Neka je $T' = \bigcup\left\{T_{p_\alpha} \mid \alpha < \mu\right\}$. Skup T' uredjujemo na prirodan način relacijom $\leqslant_p$, tako da $(T', \leqslant_p)$ bude endekstenzija svakog T_{p_α}, $\alpha < \mu$. Neka je $D = \bigcup\left\{\mathrm{dom}(lp_\alpha) \mid \alpha < \mu\right\}$. Za svako $\xi \in D$ sa

$$b(\xi) = \left\{t \in T' \mid (\exists \alpha < \mu)(\xi \in \mathrm{dom}(lp_\alpha) \quad t \leqslant p_\alpha \, lp_\alpha(\xi))\right\}$$

je jedinstveno odredjen kofinalan lanac drveta $\underline{T}'$. Svaki lanac $b(\xi)$, $\xi \in D$ ćemo produžiti jedinstveno, tako da dobijamo novo drvo $\underline{T} = (T, \leqslant_p)$, koje ima poslednji sloj. Time je odredjena i bijekcija l: $D \to$ poslednji sloj drveta $\underline{T}$. Neka je $p = (\underline{T}, l)$. Dokažimo da p zadovoljava uslove leme.

Netrivijalno je pokazati samo da $\underline{T}$ zadovoljava uslov (1) iz definicije skupa $KP(\kappa)$. Dokažimo prvo da $\underline{T}$ ne sadrži ni jedno λ-Aronszajnovo poddrvo, za proizvoljan regularan kardinal $\lambda \geqslant \omega$. Lako proveravamo da je dovoljno posmatrati slučaj $\lambda = \mu > \omega$, jer će ostali slučajevi slediti direktno na osnovu predpostavke da $\underline{T}p_\alpha$, $\alpha < \mu$ ne sadrži ni jedno λ-Aronszajnovo poddrvo.

Proširivanjem niza $\{p_\alpha\}\ \alpha < \mu$ možemo predpostaviti da je $\mathrm{dom}(1p_\alpha) = \mathrm{U}\{\mathrm{dom}(1p_\beta) \mid \beta < \alpha\}$, za svaki granični ordinal $\alpha < \mu$. Predpostavimo suprotno, tj. da $\underline{T}$ sadrži λ-Aronszajnovo poddrvo $\underline{S}$. Jednostavnim rasudjivanjem proveravamo da možemo predpostaviti da je $R_\beta S \subseteq R\alpha_{p_\beta} Tp_\beta$, za svako $\beta < \mu$ (i da je niz $\{p_\beta\}_{\beta < \mu}$ strogo rastući).

Za svaki graničan $\beta < \mu$ odredimo $x_\beta \in R_\beta S$ proizvoljno. Na osnovu predpostavke o nizu $\{p_\beta\}_{\beta < \mu}$, znamo da za svaki granični ordinal $\beta < \mu$ postoji $\delta < \beta$ i $\xi(\beta) \in \mathrm{dom}(1p_\delta)$, tako da je $x_\beta = 1p_\beta(\xi(\beta)) > p_\beta\ 1p_\delta\ (\xi(\beta)) \in R_\delta S$. Označimo ovo δ sa $f(\beta)$. Time smo definisali regresivno preslikavanje $f\colon \{\beta < \mu \mid \lim(\beta)\} \to \mu$. Dakle, postoji stacionaran $C \subseteq \{\beta < \mu \mid \lim(\beta)\}$ i $\delta' < \mu$, tako da je $f''(C) = \{\delta'\}$. Kako je $|R_\delta S| < \mu$, to možemo predpostaviti da je $\xi(\beta) = \xi'$ za svako $\beta \in C$. Neka su $\beta, \beta' \in C$ i $\beta < \beta'$ proizvoljni, tada je po definiciji preslikavanja f $x_\beta = 1p_\beta(\xi') < p_{\beta'}\ 1p_{\beta'}\ (\xi') = x_{\beta'}$. To znači da je $\{x_\beta \mid \beta \in C\}$ jedan μ-lanac drveta $\underline{S}$, što je suprotno predpostavci da je ono μ-Aronszajnovo. Ovo završava dokaz da $\underline{T}$ ne sadrži λ-Aronszajnovo poddrvo, za svaki regularan $\lambda \geq \omega$.

Dokažimo sada da $\underline{T}$ ne sadrži ni jedno ν-Cantorovo poddrvo, za svaki beskonačan kardinal ν.

Predpostavimo suprotno, tj. da $\underline{T}$ sadrži ν-Cantorovo poddrvo $\underline{S}$, $\nu \geq \omega$. Neka je δ takav ordinal da je $\gamma S = \delta + 1$. Dakle, po definiciji iz §1.I znamo da je δ kardinal $\leq \nu$. Jednostavno se proverava da možemo predpostaviti da je $R_\delta S$ podskup nekog sloja drveta $\underline{T}$, što na osnovu predpostavke $p_\beta \in KP(\kappa)$, $\beta < \mu$ znači da to mora biti poslednji sloj drveta $\underline{T}$. Ako je $\nu < \mu$, tada na osnovu regularnosti μ znamo da je $S|\ \delta \subseteq Tp_\beta$, za neko $\beta < \mu$, odakle lako dokazujemo da Tp_β sadrži ν-Cantorovo poddrvo, suprotno predpostavci $p_\beta \in KP(\kappa)$. Dakle, mora biti $\nu \geq \mu$. Neka je X skup svih $t \in R_\delta S$ za koje je $(\cdot, t)_S$ ograničen skup u $(\cdot, t)_T$. Lako dokazujemo da mora biti $|X| \leq \nu$, tako da odbacivanjem skupa X možemo smatrati da je $(\cdot, t)_S$ neograničen u $(\cdot, t)_T$, za svako $t \in R_\delta S$. Za $\beta < \mu$ stavljamo $B_\beta = \{t \in R\alpha_{p_\beta}\ Tp_\beta \mid t \leq_p s$, za neko $s \in R_\delta S\}$. Kako je $B_\beta = \{t \in R\alpha_{p_\beta}\ Tp_\beta \mid t \leq_p s$, za neko $s \in S|\delta\}$, to je $|V_\beta| \leq \nu$, za svako $\beta < \mu$.

Neka je $A_\beta = 1_{p_\beta}^{-1}(B_\beta)$, $\beta < \mu$ i neka je $A = \bigcup\left\{A_\beta | \beta < \mu\right\}$. Dakle, imamo da je $|A| \leqslant \nu\, \mu = \nu$. Jednostavno proveravamo da mora biti $1''(A) \supset R_\delta S$, odakle je $|R_\delta S| \leqslant \nu$, suprotno predpostavci da je $\underline{S}$ ν-Cantorovo drvo. Dakle $\underline{T}$ ne sadrži ni jedno ν-Cantorovo poddrvo, za svaki beskonačan kardinal ν.

Dokaz sledeće leme je potpuno analogan dokazu Prop. 4.3. iz [7].

<u>Lema 2.2.</u> Neka je κ neprebrojiv regularan kardinal, tako da je $\kappa^\lambda = \kappa$, za svako $\lambda < \kappa$. Tada svaka kolekcija $\mathcal{T} \subseteq KP(\kappa)$ moći κ^+ ima istobrojnu podkolekciju $\mathcal{T}'$ čija su svaka dva elementa kompatibilna.∎

Neposredno proveravamo da su

$$D_\alpha = \left\{p \in KP(\kappa) | \alpha_p > \alpha\right\} \text{ i}$$

$$E_\xi = \left\{p \in KP(\kappa) | \xi \in \mathrm{dom}(1p)\right\}.$$

gusti i otvoreni u $KP(\kappa)$, za svako $\alpha < \kappa$ i svako $\xi < \kappa^+$.

Neka je M prebrojiv tranzitivan model (p.t.m.) ZFC+GCH i neka je κ regularan neprebrojiv kardinal u M. Za parcijalno uredjen skup $P = [KP(\kappa)]^M$ važi $M \models$ "P je κ-zatvoren i zadovoljava κ^+-c.c.", na osnovu lema 2.1. i 2.3. Neka je G M-generički podskup od P tada M i M[G] imaju iste kardinale i funkciju kofinalnosti. U M[G] definišemo

$$\underline{T} = \left(\bigcup\left\{Tp | p \in G\right\}, \bigcup\left\{\leqslant_p | p \in G\right\}\right).$$

Kako su, za svako $\alpha < \kappa$ i $\xi < \kappa^+$, $[D_\alpha]^M$ i $[E_\xi]^M$ gusti otvoreni podskupovi od P u M, to je $\underline{T}$ jedno (κ,κ)-drvo, pri čemu je

$$b(\xi) = \left\{ t \in T | (\exists p \in G)(\xi \in \mathrm{dom}(1p) \wedge t \leqslant_p 1p(\xi))\right\}$$

jedan njegov maksimalni κ-lanac, za svako $\xi < \kappa^+$, tj. $\underline{T}$ je κ-Kurepino drvo u M[G]. Na osnovu uslova (1) iz definicije skupa $KP(\kappa)$ imamo da $\underline{T}$ ne sadrži ni jedno λ-Aronszajnovo poddrvo, za svaki regularan kardinal $\omega \leqslant \lambda < \kappa$ i ni jedno ν-Cantorovo poddrvo za svaki beskonačan kardinal ν.

<u>Lema 2.3.</u> $M[G] \models$ "$\underline{T}$ ne sadrži ni jedno κ-Aronszajnovo poddrvo".

Dokaz: Predpostavimo suprotno, tj. da $\underset{\sim}{T}$ sadrži jedno κ-Aronszajnovo poddrvo $\underset{\sim}{S}$ u $M[G]$. Možemo predpostaviti da je S početni komad od T. Neka $p \varepsilon G$ sve ovo forsira.

Dalje radimo u M. Neka je $j\colon \kappa \to \kappa\times\kappa$ takva bijekcija da iz $j(\alpha) = (u,\nu)$ sledi $u \leq \alpha$. Induktivno po $\alpha < \kappa$ ćemo konstruisati monotono opadajući niz $\{p_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ elemenata iz $KP(\kappa)$ na sledeći način:

Slučaj 1: $p_o = p$.

Slučaj 2: $\lim(\alpha)$. Neka je tada p_α jednak infimumu niza $\{p_\alpha\}_{\beta<\alpha}$, kojeg smo dobili u lemi 2.1.

Slučaj 3: $\alpha = \beta+1$. Neka je $j(\beta) = (u,v)$. Ako je $v \geq tp(dom(lp_u))$, gde na $dom(lp_u)$ podrazumevamo uredjenje inducirano iz κ^+, tada stavljamo $p_\alpha = p_\beta$. Na osnovu predpostavke $u \leq \beta$ imamo da je p_u već konstruisan što opravdava njegovo gornje pojavljivanje. Predpostavimo sada da je $v < tp\ (dom(lp_u))$ i neka je ξ v-ti elemenat iz $dom(lp_u)$. Kako je $p_\beta \leq p$ to važi

$$p_\beta \mid\mid\!- \text{"}\dot{b}(\xi) \not\subset \dot{S}\text{"} .$$

Zato postoji $p_\alpha \leq p_\beta$ i $x \varepsilon \kappa$ tako da važi

$$p_\alpha \mid\mid\!- \text{"}x \varepsilon \dot{b}(\xi) - \dot{S}\text{"},$$

pri čemu možemo predpostaviti da je $x \varepsilon Tp_\alpha$. Ovo završava konstrukciju niza $\{p_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$. Neka je

$$C = \{\alpha < \kappa \mid \lim(\alpha) \wedge (\beta < \alpha \to j\text{-}1\ (\beta\times\beta) \subseteq \alpha \wedge tp(dom(lp_\beta)) < \alpha)\} .$$

Kako je κ regularan neprebrojiv kardinal, to se na standardan način proverava da je C zatvoren i neograničen podskup od κ. Neka je $\beta \varepsilon C$ proizvoljan i neka je $\xi \varepsilon dom(lp_\beta)$, takodje, proizvoljan. Kako je β graničan, to po konstrukciji u slučaju 2. znamo da postoji $\delta < \beta$, tako da je $\xi \varepsilon dom(lp_\delta)$. Neka je $v < tp(dom(lp_\delta) < \beta$, takav ordinal, da je ξ v-ti element skupa $dom(lp_\delta)$. Kako je $\beta \varepsilon C$, to postoji $\gamma < \beta$, tako da je $j(\gamma) = (\delta, v)$. Po konstrukciji $p_{\gamma+1}$ u slučaju 3. znamo da postoji $x \varepsilon Tp_{\gamma+1}$, tako da važi

$$p_{\delta+1} \mid\mid\!- \text{"}\check{x} \varepsilon \dot{b}(\xi) - \dot{S}\text{"}.$$

Dakle, za svako $\xi \in \mathrm{dom}(1p_\beta)$ postoji $x \in Tp_\beta$, tako da važi $p_\beta \Vdash$ "$\check{x} \in \dot{b}(\xi) - \dot{S}$". Iz $p_\beta \Vdash$ "$\widecheck{1p_\beta}(\xi) \in \dot{b}(\check{\xi})$", za svako $\xi \in \mathrm{dom}(1p_\beta)$ imamo da važi

$$p_\beta \Vdash \text{"}\widecheck{Ra_{p_\beta} Tp_\beta} \cap \dot{S} = \phi\text{"},$$

odakle, na osnovu $p_\beta \Vdash$ "$\check{Ra}_{p_\beta} \dot{T} = \widecheck{Ra_{p_\beta} Tp_\beta}$", imamo da važi

$$p_\beta \Vdash \text{"}\check{Ra}_{p_\beta} \dot{T} \cap \dot{S} = \phi\text{"},$$

suprotno činjenici da iz $p_\beta \leq p$ sledi $p_\beta \Vdash$ "$\dot{S}$ je početni komad od $\dot{T}$ moći $\check{\kappa}$". Ovo završava dokaz leme. ∎

Dakle, $\underline{T}$ je u $M[G]$ jedno κ-Kurepino drvo, koje ne sadrži ni jedno λ-Aronszajnovo i ν-Cantorovo poddrvo, za svaki regularan kardinal $\lambda \geq \omega$ i svaki kardinal $\nu \geq \omega$.

Iz dokaza predhodne leme se vidi da smo, takodje, dokazali da

$$\{b(\xi) \mid \xi < \kappa^+\}$$

predstavlja kolekciju svih maksimalnih κ-lanaca drveta $\underline{T}$ u $M[G]$.

Posle ovoga se prirodno postavlja pitanje proširenja gornjeg rezultata, tako da budu pokriveni svi regularni neprebrojivi kardinali istovremeno. Drugim rečima, da li za svaki regularan neprebrojiv kardinal κ postoji κ-Kurepino drvo koje ne sadrži ni jedno λ-Aronszajnovo i ν-Cantorovo podrvo za svako $\lambda = cf(\lambda) \geq \omega$ i $\nu \geq \omega$.

Koristeći merod Eastona [2o] pokazaćemo da je to uvek moguće, time što ćemo pokazati da važi sledeća teorema.

Teorema 2.4. Neka je M p.t.m. teorije $ZFC + V = L$. Tada postoji Cohenovo proširenje $M[G]$ modela M, takvo da M i $M[G]$ imaju iste kardinale i funkciju kofinalnosti i da u $M[G]$ važi:

(i) klase slabo kompaktnih kardinala V i L se poklapaju;

(ii) za svaki regularan neprebrojiv i ne slabo kompaktan kardinal κ postoji κ-Suslinovo drvo;

(iii) za svaki regularan neprebrojiv i ne slabo kompaktan kardinal κ postoji κ-Kurepino drvo koje ne sadrži ni jedno λ-Aronszajnovo i ν-Cantorovo poddrvo, za svaki regularan kardinal $\lambda \geq \omega$ i svaki beskonačan kardinal ν;

(iv) GCH.

Dokaz: Neka je X klasa svih regularnih neprebrojivih i neslabo kompaktnih kardinala u M. Parcijalno uredjenu klasu C u M definišemo na sledeći način:

f ε C akko je f funkcija dom(f) $\subset$ X (dom(f) je skup) i ako važi:

(1) $f(\kappa)\ \varepsilon KP(\kappa)$, za svako $\kappa\ \varepsilon$ dom(f);

(2) $|\lambda \cap \mathrm{dom}(f)| < \lambda$, za svaki regularan kardinal λ.

Uredjenje $\leqslant$ na C definišemo sa: f,g ε C, f $\leqslant$ g akko je dom(f) $\supset$ dom(g) i $f(\kappa) \leqslant g(\kappa)$, za svako, $\kappa\ \varepsilon$ dom(g).

Za regularan kardinal λ stavljamo

$$C_\lambda = \{f\ \varepsilon\ C \mid \mathrm{dom}(f) \subseteq X\ \ (\lambda+1)\}$$

$$C^\lambda = \{f\ \varepsilon\ C \mid \mathrm{dom}(f) \cap (\lambda+1) = \phi\}$$

Za regularan kardinal λ i f ε C stavljamo $f_\lambda = f \mid (X \cap (\lambda+1))$ i $f^\lambda = f - f_\lambda$. Lako proveravamo da je $f \to (f_\lambda, f^\lambda)$ izomorfizam medju C i $C_\lambda \times C^\lambda$, koji prevodi (f,q) u $f \cup g$. Neka je G proizvoljna M-generička podklasa od C i M[G] odgovarajuće Cohenovo proširenje (v. [66, §12] ili [79]). Za regularan kardinal λ stavljamo $G_\lambda = \{f_\lambda \mid f\ \varepsilon\ G\}$ i $G^\lambda = \{f^\lambda \mid f\ \varepsilon\ G\}$, tada je G_λ M-generički podskup od C_λ, a G^λ $M[G_\lambda]$-generička podklasa od C^λ $M[G] = M[G_\lambda]\,[G^\lambda]$ (v. [66, § 12]).

<u>Lema 2.5</u>. C_λ zadovoljava λ^+-c.c. a C^λ je λ^+-zatvorena parcijalno uredjena klasa u M, gde je λ proizvoljan regularan kardinal. Preciznije, neka je $C'_\lambda = \{f\ \varepsilon\ C \mid \mathrm{dom}(f) \subseteq X \cap \lambda\}$, tada važi:

(a) svaka familija $\mathcal{F} \subseteq C_\lambda$ moći λ^+ sadrži istobrojnu podfamiliji $\mathcal{F}'$ čija su svaka dva elementa kompatibilna;

(b) svaka familija $\mathcal{F} \subseteq C'_\lambda$ moći λ sadrži istobrojnu podfamiliju $\mathcal{F}'$ čija su svaka dva elementa kompatibilna.

<u>Dokaz leme 2.5</u>. Da je C^λ λ^+-zatvorena klasa sledi direktno na osnovu (1) i (2) iz definicije C i leme 2.1. Neka je $\mathcal{F} \subseteq C_\lambda$ proizvoljna familija moći λ^+. Kako je na osnovu (2) $|\mathrm{dom}(f)| < \lambda$ i $\mathrm{dom}(f) \subsetneq \lambda+1$, za svako $f\ \varepsilon\ C_\lambda$, to možemo predpostaviti da je dom(f) = d, za svako f $\varepsilon\ \mathcal{F}$:

Kako je $|KP(\nu)| \leqslant \lambda$ za svako $\nu < \lambda$ i $|d| < \lambda$ imamo da je

$$\Pi\left\{|KP(\nu)| \;\middle|\; \nu \in d - \{\lambda\}\right\} \leqslant \lambda,$$

jer je λ regularan i važi GCH. Zato možemo predpostaviti da je $f|(d-\{\lambda\}) = g|(d-\{\lambda\})$, za svako $f,g \in \mathcal{F}$. Sada (a) sledi direktno na osnovu leme 2.2.

Ako je $\lambda = \nu^+$ za regularan ν tada se (b) svodi na (a), jer je tada $C'_\lambda = C_\nu$. U slučaju $\lambda = \nu^+$ za singularan ν zaključak (b) je trivijalan jer je tada $|C'_\lambda| \leqslant \nu$. Neka je sada λ inakcesibilan. Na osnovu poznatog uopštenja leme Marczewskog (v.[28]) znamo da postoji $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$, $|\mathcal{F}'| = \lambda$ i $d \subseteq X \cap \lambda$, tako da je

$$\mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g) = d,$$

za svako $f,g \in \mathcal{F}'$, $f \neq g$. Kako je $d \subset \lambda$, $|d| < \lambda$ to možemo predpostaviti da je $f|d = g|d$, za svako $f, g \in \mathcal{F}'$. Sada je jasno da za svaki par $f,g \in \mathcal{F}'$ važi $f \cup g \leqslant f,g$, tj. važi (b). ∎

Dokaz sledeće leme je potpuno analogan dokazu leme 12.1. iz [66], te ga izostavljamo. Niz klasa u M i skup klasa u M definišemo na prirodan način (v. [66] ili [79, def. 4.1. i 4.2.]).

<u>Lema 2.6</u>. Neka je $\{D_\beta\}_{\beta < \lambda}$ niz klasa u M, gde je λ regularan kardinal u M i D_β gust početni komad od C, za svako $\beta < \lambda$. Tada postoji $g \in G^\lambda$, takav da važi

$$(\forall_\beta < \lambda)\,(\exists f \in G_\lambda)\,(f \cup g \in D_\beta). \;\blacksquare$$

Primetimo da nam lema 2.6. obezbedjuje da C zadovoljava uslove (G!!) i (G!) iz [79, §4].

Definicije forsing relacija ||- i ||-* uzimamo iz [79, §4]. Kako C zadovoljava uslov (G!!) iz [79], to imamo da važe sve tri fosing leme, što je dokazano u istom radu (videti, takodje, [66,§12]). Dakle, ispunjene su sve predpostavke osnovne teoreme rada [79], tako da možemo zaključiti da je M[G] prebrojiv tranzitivan model ZFC (dokaz toga se može sprovesti na osnovu dokaza iste činjenice za Eastonovu klasu, koji je dat, na primer, u [66,§12]).

Dokaz sledeće leme možemo naći u [66, Lemma 12.2] ili [37, Lemma 6o], gde je ona dokazana za Eastonovu parcijalno uredjenu klasu.

Lema 2.7. (Easton) Neka je λ proizvoljan regularan kardinal u M i neka je f u M[G] preslikavanje iz λ u M. Tada je $f \in M[G_\lambda]$. ■

Da M i M[G] imaju iste kardinale i funkciju kofinalnosti dokazuje se potpuno analogno dokazu iste činjenice za Eastonov model (v. [66. §12]).

Dokažimo sada da GCH važi u M[G], tj. da važi (iv). Na osnovu Leme 2.7. imamo da je

$$P(\lambda)^{M[G]} = P(\lambda)^{M[G_\lambda]},$$

za svaki regularan kardinal λ, odakle na osnovu poznate Leme (v.[66, Lemma 11.1]) imamo da je

$$|P(\lambda)|^{M[G]} = |P(\lambda)|^{M[G_\lambda]} \leq ((C_\lambda|^\lambda)^\lambda)^M = (2^\lambda)^M = \lambda^+ .$$

Dakle, u M[G], GCH važi za svaki regularan kardinal. Za ostale kardinale možemo rasudjivati analogno pri čemu ćemo koristiti izvesno proširenje leme 2.7. Medjutim, to možemo izvesti i na sledeći način. Na osnovu Leme 2.7. imamo da M i M[G] ima iste prebrojive nizove, što znači da u M[G], GCH važi i za sve kardinale kofinalnosti ω. Silverova teorema (v.[72]) nam daje činjenicu da GCH i M[G] važi i za singularne kardinale kofinalnosti veće od ω.

Neka je $\kappa \in X$, tada u $M[G_\kappa]$ definišemo

$$\underline{T}(\kappa) = (\cup\{T_{f(\kappa)} | f \in G_\kappa,\ \kappa \in \mathrm{dom}(f)\},\ \cup\{\leq_{f(\kappa)} | f \in G_\kappa, \kappa \in \mathrm{dom}(f)\}).$$

Kao i gore dokazujemo da je $\underline{T}(\kappa)$ κ-Kurepino drvo koje ne sadrži λ-Aronszajnovih i ν-Cantorovih poddrveta, za svaki regularan i beskonačan $\lambda < \kappa$ i svaki beskonačan ν. Dakle, trebamo još dokazati da $\underline{T}(\kappa)$ ne sadrži ni jedno κ-Aronszajnovo poddrvo u $M[G_\kappa]$, čime će biti dokazan uslov (iii) teoreme uz predpostavku da važi (i), jer na osnovu Leme 2.7. drvo $\underline{T}(\kappa)$ će imati iste osobine i u modelu M[G].

Lema 2.8. $M[G_\kappa] \models$"$\underline{T}(\kappa)$ ne sadrži ni jedno κ-Aronszajnovo poddrvo".

Dokaz: Kako važi $C_\kappa = C'_\kappa \times KP(\kappa)$, to ćemo elemente skupa C_κ označavati kao parove (f,p), $f \in C'_\kappa$, $f \in KP(\kappa)$.

Predpostavimo da zaključak leme ne važi, tj. da $\underline{T} = \underline{T}(\kappa)$ (u $M[G_\kappa]$ sadrži κ-Aronszajnovo poddrvo $\underline{S}$. Možemo predpostaviti da je S početni komad skupa T. Neka $(f,p) \in G_\kappa$ sve ovo forsira. Dalje radimo u M.

Sublema 2.9. Za svako $p' \leq p$ i $\xi < \kappa^+$ postoji $q \in KP(\kappa)$, $q \leq p$, tako da važi

$$(f,q) \mid\mid\!- \text{"}(\exists\, x \in \check{T}q)(x \in \dot{b}(\xi) - \dot{S})\text{"}.$$

Dokaz subleme: Ovde je $b(\xi)$ maksimalni κ-lanac drveta $\underline{T}(\kappa)$ u $M[G_\kappa]$ koga smo definisali na početku odeljka.

Induktivno ćemo konstruisati niz $\{(f_\alpha, p_\alpha)\}\ \alpha < \delta$ elemenata iz C_κ, tako da važe uslovi

(a) $p_\alpha \leq p_{\alpha'} \leq p'$ i $f_{\alpha'} \leq f$, za svako $\alpha' < \alpha < \delta$;

(b) $\{f_\alpha | \alpha < \delta\}$ je maksimalan skup medjusobno nekompatibilnih elemenata iz $\{g \in C'_\kappa | g \leq f\}$.

Primetimo da će na osnovu (b) i leme 2.5.(b) biti $\delta < \kappa$. Predpostavimo da smo $(f_\alpha, p_\alpha), \alpha < \alpha'$ već konstruisali pri čemu je $\alpha' < \kappa$. Ako je $\{f_\alpha | \alpha < \alpha'\}$ maksimalan skup uzajamno nekompatibilnih elemenata iz $\{g \in C'_\kappa | g \leq f\}$, tada indukciju završavamo stavljajući $\delta = \alpha'$. U drugom slučaju postoji $f' \leq f$, koji nije kompatibilan ni sa jednim f_α, $\alpha < \alpha'$. Na osnovu leme 2.1. znamo da postoji $r \in KP(\kappa)$, tako da je $r_\alpha \leq p_\alpha$, za svako $\alpha < \alpha'$.

Kako je $(f',r) \leq (f,p)$, to postoji $(f_{\alpha'}, p_{\alpha'}) \leq (f',r)$ i $x \in \kappa$, tako da važi

$$(f_{\alpha'}, p_{\alpha'}) \mid\mid\!- \text{"}\check{x} \in \dot{b}(\xi) - \dot{S}\text{"},$$

pri čemu, jasno, možemo predpostaviti da je $x \in Tp_{\alpha'}$. Dakle, indukciju možemo nastaviti. Kako C'_κ zadovoljava κ-c.c. to mora postojati $\delta < \kappa$, tako da se indukcija završava na koraku δ, tj. tako da važi (b).

Na osnovu leme 2.1. postoji $q \in KP(\kappa)$, takav da je $q \leq p_\alpha$, za svako $\alpha < \delta$. Dokažimo da q zadovoljava zaključak subleme. Za to je dovoljno dokazati da je

$$D = \left\{(h,r) \varepsilon C_\kappa \mid (h,r) \leqslant (f,q),\ (h,r) \Vdash "(\exists x \varepsilon \check{T}_q)(x \varepsilon \dot{b}(\check{\xi}) - \dot{S})"\right\}$$

gust u $\left\{(h,r) \varepsilon C_\kappa \mid (h,r) \leqslant (f,q)\right\}$.

Neka je $(g',q) \leqslant (f,q)$ proizvoljan. Kako je $g \leqslant f$ to na osnovu (b) mora postojati $\alpha < \delta$ tako da je q kompatibilno sa f_α. Neka je $h \leqslant f_\alpha, g$. Kako je $(h,r) \leqslant (f_\alpha, p_\alpha)$ to na osnovu konstrukcije niza $\left\{(f_\alpha, p_\alpha)\right\}_{\alpha<\delta}$, znamo da postoji $x \varepsilon Tp_\alpha$ Tq, tako da je

$$(f_\alpha, p_\alpha) \Vdash "\check{x} \varepsilon \dot{b}(\check{\xi}) - \dot{S}",$$

odakle je $(h,r) \varepsilon D$. Dakle, D je gust u $\left\{(h,r) \varepsilon C_\kappa \mid (h,r) \leqslant (f,q)\right\}$. Ovo označava dokaz subleme. ∎

Dalji dokaz Leme 2.8. je analogan dokazu Leme 2.3. Neka je $j\colon \kappa \to \kappa \times \kappa$, takva bijekcija da iz $j(\alpha) = (u,v)$ sledi $u \leqslant \alpha$.

Indukcitno po $\alpha < \kappa$ konstruišemo opadajući niz $\left\{p_\alpha\right\}_{\alpha<\kappa}$ elemenata iz $KP(\kappa)$.

<u>Slučaj 1:</u> $\alpha = 0$. Neka je $p_0 = p$.

<u>Slučaj 2:</u> $\lim(\alpha)$. Tada za p_α uzimamo infimum niza $\left\{p_\alpha\right\}_{\beta < \alpha}$, kojeg smo dobili u Lemi 2.1.

<u>Slučaj 3:</u> $\alpha = \beta+1$. Neka je $j(\beta) = (u,v)$. Ako je $v \geqslant tp(dom|lp_u))$, tada stavljamo $p_\alpha = p_\beta$. Neka je sada $v < tp(dom|lp_u))$ i neka je ξ v-ti elemenat skupa $dom(lp_u)$. Na osnovu subleme 2.9. znamo da postoji $p_\alpha \leqslant p_\beta$ tako da važi

$$(f,p_\alpha) \Vdash "(\exists\, x \varepsilon \check{T}p_\alpha)\ (x \varepsilon \dot{b}(\check{\xi}) - \dot{S})".$$

Ovo završava konstrukciju niza $\left\{p_\alpha\right\}_{\alpha < \kappa}$.

Neka je

$$C = \left\{\beta < \kappa \mid \lim(\beta) \wedge (\delta < \beta \to j^{-1}(\delta \times \delta) \subseteq \beta \wedge tp(dom(lp_\delta)) < \beta)\right\}.$$

Kako je κ regularan neprebrojiv kardinal to na standardan način proveravamo da je C zatvoren i neograničen u κ. Neka je $\beta \varepsilon C$ proizvoljan ordinal i neka je $\xi \varepsilon dom(lp_\beta)$ proizvoljno. Kako je β graničan ordinal to

je p_β konstruisano u slučaju 2. pa, specijalno, važi $\mathrm{dom}(1p_\beta) =$ U
$= \bigcup\{\mathrm{dom}(1p_\delta) \mid \delta < \beta\}$. Dakle, postoji $\delta < \beta$ tako da je $\xi \in \mathrm{dom}(1p_\delta)$.
Neka je $\nu < \mathrm{tp}(\mathrm{dom}(1p_\delta))$, takav da je ξ ν-ti član skupa $\mathrm{dom}(1p_\delta)$. Kako je $\beta \in C$ to je $\nu < \beta$ odakle, iz istog razloga, postoji $\gamma < \beta$, tako da je $j(\gamma) = (\delta, \nu)$. Po konstrukciji $p_{\gamma+1}$ u slučaju 3. imamo

$$(f, p_{\gamma+1}) \Vdash \text{"}(\exists x \in \check{T}p_{\gamma+1})(x \in \dot{b}(\xi) - \dot{S})\text{"}$$

Kako je $p_\beta \leqslant p_{\gamma+1}$, to je

$$(f, p_\beta) \Vdash \text{"}(\exists x \in \check{T}p_\beta)(x \in \dot{b}(\xi) - \dot{S})\text{"}.$$

Kako ovo važi, za svako $\xi \in \mathrm{dom}(1p_\beta)$ i kako važi

$$(f, p_\beta) \Vdash \text{"}\widecheck{1p_\beta}(\xi) \in \dot{b}(\xi)\text{"}$$

za svako $\xi \in \mathrm{dom}(1p_\beta)$, to je

$$(f, p_\beta) \Vdash \text{"}\widecheck{R_{\alpha_{p_\beta}}} Tp_\beta \cap \dot{S} = \phi\text{"}.$$

Kako važi $(f, p_\beta) \Vdash \text{"}\widecheck{R\alpha_{p_\beta}} Tp_\beta = R\check{\alpha}_{p_\beta} \dot{\underline{T}}(\check{\kappa})\text{"}$ to je

$$(f, p_\beta) \Vdash \text{"}R\check{\alpha}_{p_\beta} \dot{\underline{T}}(\check{\kappa}) \cap \dot{S} = \phi\text{"},$$

suprotno predpostavci da iz $(f, p_\beta) \leqslant (f, p)$ imamo da važi $(f, p_\varepsilon) \Vdash$ "$\dot{S}$ je početni komad ot $\dot{T}$ moći $\check{\kappa}$". Ovo završava dokaz leme 2.8. ∎

Primetimo da se iz dokaza leme 2.8. može zaključiti da

$$\{b(\xi) \mid \xi < \kappa^+\}$$

predstavlja kolekciju <u>svih</u> maksimalnih κ-lanaca drveta $\underline{T}(\kappa)$ u $M[G]$.

Dokažimo sada da važi zaključak (i) teoreme, tj. da se klase slabo kompaktnih kardinala M i $M[G]$ poklapaju, jer je $L^{M[G]} = M$.

Da je svaki slabo kompaktan kardinal iz $M[G]$, takodje, slabo kompaktan i u M sledi na osnovu teoreme Keislera (dokaz možemo naći u [9, ch. 15]. Da važi i obrnuto tvrdi sledeća lema čijim dokazom će biti završen dokaz zaključka (i) teoreme.

Lema 2.1o. Svaki slabo kompaktan kardinal κ u M je slabo kompaktan i u M[G].

Dokaz: Predpostavimo suprotno, tj. da postoji slabo kompaktan kardinal κ u M, koji nije slabo kompaktan u M[G]. Kako je κ inakcesibilan u M[G], to u M[G] postoji κ-Aronszajnovo drvo $\underline{T} = (\kappa, \leq_T)$. Možemo predpostaviti da iz $\alpha <_T \beta$ sledi $\alpha < \beta$. Na osnovu Leme 2.7. imamo da je $\underline{T} \in M[G_\kappa]$. Neka $f \in G_\kappa$ sve to forsira. Dalje radimo u M.

Kako $\kappa \notin X$ to je $C_\kappa = C'_\kappa$. Na osnovu leme 2.5(b) imamo da C'_κ zadovoljava κ-c.c., što znači da možemo smatrati da je $B = RO(C'_\kappa) \subset V_\kappa$. Takodje, možemo smatrati da je za svaki inakcesibilan $\lambda < \kappa$ $B|V_\lambda = B_\lambda = RO(C'_\lambda)$. Preslikavanje $T' : \kappa \times \kappa \to B$ definišemo sa

$$T'(\alpha,\beta) = f \wedge ||\, \check{\alpha} \mathrel{\dot{<}_T} \check{\beta}\, ||^B .$$

Rečenica "$f \Vdash$" $(\forall x \subseteq \kappa)$(x nije kofinalan lanac drveta $\dot{\underline{T}}$)" " je jedna Π^1_1 rečenica koja je zadovoljena u strukturi $(V_\kappa, \varepsilon, C'_\kappa, B, T', \{f\})$ (njenu formulaciju videti u [59, str. 42]).

Kako je κ slabo kompaktan to postoji inokcesibilan $\lambda < \kappa$, tako da gornja rečenica važi u strukturi $(V_\lambda, \varepsilon, C'_\lambda, B_\lambda\ T'|V_\lambda, \{f\})$ pri čemu je $\underline{T}|\lambda = (\lambda, \leq_T \cap \lambda^2) \varepsilon M[G \cap C'_\lambda]$.

To znači da je $\underline{T}|\lambda$ jedno normalno λ-drvo u $M[G \cap C'_\lambda]$ koje nema ni jedan kofinalan lanac.

Neka je $x \in R_\lambda T$ proizvoljna tačka i neka je $b = (\cdot, x)_T$. Na osnovu leme 2.7. imamo da je $b \in M[G_\lambda] = M[G \cap C'_\lambda][G \cap KP(\lambda)]$. Pored toga C'_λ zadovoljava λ-c.c. (lema 2.5.(b) dok je $KP(\lambda)$ λ-zatvoren čime dobijamo protivrečnost sa sledećom lemom. Dakle, dokazom te leme će biti završen i dokaz leme 2.1o. ■

Lema 2.11. Neka je M p.t.m. ZFC i neka su C i P parcijalno uredjeni skupovi u M, tako da važi $M \models$ " C zadovoljava λ-c.c. a P je λ-zatvoren", gde je λ neprebrojiv regularan kardinal u M. Neka je G M-generičan podskup od $C \times P$ i neka je

$$G_C = \left\{ p \in C \,|\, (p,1) \in G \right\}, \quad G_P = \left\{ q \in P \,|\, (1,q) \in G \right\}.$$

Neka je $\underline{T}$ normalno λ-drvo u $M[G_C]$ koje nema nijednog maksimalnog

λ-lanca. Tada $\underline{T}$ nema ni jednog maksimalnog λ-lanca u $M[G]$.

Dokaz: Pre svega imamo da je G_C M-generičan nad C a G_p $M[\check{G}_C]$ -generičan nad P i da važi $M[G] = M[G_C][G_p]$. Kako ćemo raditi sa dve forsing relacije $||\!-_C^M$ i $||\!-_P^{M[G_C]}$, to ćemo, radi jednostavnosti zapisa, u termima odgovarajućih jezika forsinga izostavljati posebne znakove. To znači da ćemo pisati λ umesto $\check{\lambda}$, b umesto $\dot{b}$, jer bi u suprotnom morali da radimo sa označavanjima oblika $\check{\dot{x}}$. Ne gubeći od opštosti možemo predpostaviti da je $\underline{T} = (\lambda, \leqslant_T)$.

Predpostavimo da zaključak leme ne važi, tj. da u $M[G]$ postoji maksimalni λ-lanac b drveta $\underline{T}$. Dakle, postoji $q \in Gp$ tako da u $M[G_c]$ važi

$$q \; ||\!-_P^{M[G_c]} \text{"b je maksimalni } \lambda\text{-lanac drveta } \underline{T}\text{"}.$$

To znači da postoji $p \in G_c$ za koga važi

$$p \; ||\!-_c^M \text{"}[\underline{T} \text{ je normalno } \lambda \text{ drvo} \wedge q \; ||\!-_P^{M[G_c]} \text{"}[b \text{ je maksimalni } \lambda\text{-lanac drveta } \underline{T}]\text{"}]\text{"}.$$

Dalje radimo u M. Dokažimo prvo sledeću sublemu.

Sublema 2.12. Neka su $\alpha < \lambda$ i $q_o \in P$, $q_o \leqslant q$ proizvoljni, tada postoji $q' \leqslant q_o$, tako da važi

$$p \; ||\!-_c \text{"}(\exists x \in T_\alpha)\ (q' \, ||\!-_p \text{"}x \in b\text{"})\text{"}.$$

Dokaz subleme: Induktivno ćemo konstruisati niz $\{(p_\xi, q_\xi, x_\xi)\}_{\xi < \delta}$ tako da važi:

(1) $p_\xi \in C$, $p_\xi \leqslant p$ i $q_\xi \in P$, za svako $\xi < \delta$

(2) p_ξ i $p_{\xi'}$ su nekompatibilni i $q_{\xi'} \leqslant q_\xi \leqslant q_o$ za svako $\xi < \xi' < \delta$;

(3) $p_\xi \; ||\!-_c \text{"}[x_\xi \in T_\alpha \wedge q_\xi \; ||\!- \text{"}x_\xi \in b\text{"}]\text{"}$, za svako $\xi < \delta$.

Ordinal δ odredujemo kao najmanji ordinal na kome se indukcija završava, tj. za koga je $\{p_\xi | \xi < \delta\}$ maksimalan skup nekompatibilnih elemenata iz $\{r \in C | r \leqslant p\}$. Kako C zadovoljava λ-c.c., to će biti $\delta < \lambda$,

Predpostavimo da smo $\{(p_\xi, q_\xi, x_\xi)\}_{\xi < \xi'}$ već konstruisali. Ako je $\{p_\xi | \xi < \xi'\}$ maksimalan skup nekompatibilnih elemenata iz $\{r \in C | r \leqslant p\}$ tada indukciju završavamo stavljajući $\delta = \xi'$. U suprotnom postoji $p' \leqslant p$ nekompatibilan sa svakim p_ξ, $\xi < \xi'$. Kako je $\xi' < \lambda$ i kako je P λ-zatvoren to postoji $r \in P$, $r \leqslant q_\xi$ za svako $\xi < \xi'$.

Kako važi $p \,||\!-_c "[q \,||\!-_p "(\exists y \in T_\alpha)(y \in b)"]"$ i kako je $p' \leqslant p$ i $r \leqslant q$, to isto važi i za par p', r, odakle je

$$p' \,||\!-_c "[(\exists r' \leqslant n)(\exists y \in T_\alpha)(r' \,||\!-_p "y \in b")]".$$

Dakle postoji $p_{\xi'} \leqslant p'$, $q_{\xi'} \leqslant r$ i $x_{\xi'} \in \lambda$ tako da važi

$$p_{\xi'} \,||\!-_c "[x_{\xi'} \in T_\alpha \wedge q_{\xi'} \,||\!-_p "x_\xi \in b"]".$$

Ovo završava konstrukciju gornjeg niza. Kako je $\delta < \lambda$ i kako je P λ-zatvoren postoji $q' \in P$ tako da je $q' \leqslant q_\xi$, za svako $\xi < \delta$. Da bi dokazali da važi $p \,||\!-_c "[(\exists x \in T_\alpha)(q' \,||\!-p "x \in b")]$, dovoljno je pokazati da je skup

$$D = \{\bar{p}' \in C | p' \leqslant p,\ p' \,||\!-_c "(\exists x \in T_\alpha)(q' \,||\!-_p "x \in b")"\}$$

gust ispod p.

Neka je $p' \leqslant p$ proizvoljan. Kako je $\{p_\xi | \xi < \delta\}$ maksimalan skup nekompatibilnih elemenata ispod p to postoji $\xi < \delta$, tako da su p' i p_ξ kompatibilni. Neka je $p'' \leqslant p'$, p_ξ. Kako je $p'' \leqslant p_\xi$, to na osnovu konstrukcije niza $\{(p_\xi, q_\xi, x_\xi)\}_{\xi < \delta}$ važi

$$p'' \,||\!-_c "[x_\xi \in T_\alpha \wedge q_\xi \,||\!- "x_\xi \in b"]"$$

Kako je $q' \leqslant q_\xi$, to važi

$$p'' \,||\!-_c "[x_\xi \in T_\alpha \wedge q' \,||\!- "x_\xi \in b"]",$$

tj. $p'' \in D$. Dakle, D je gust ispod p čime dokaz subleme završava ■

Niz $\{q_\alpha\}_{\alpha < \lambda}$ elemenata iz P definišemo induktivno. Neka je $q_o = q$ i predpostavimo da smo q_β, $\beta < \alpha < \lambda$ već konstruisali, tako da je $q_{\beta'} \leqslant q_\beta$ za $\beta < \beta' < \alpha$. Kako je P λ-zatvoren to postoji $q'_\alpha \in P$ tako da je $q'_\alpha \leqslant q_\beta$ za svako $\beta < \alpha$. Na osnovu subleme 2.12. znamo da postoji $q_\alpha \leqslant q'_\alpha$ tako je dovoljavaju κ-c.c. u M odakle je, posebno, κ regularan i neprebrojiv kardinal u $M[G]$ za svaki M-generički podskup G od P.

Predpostavimo suprotno tj. $1_p \not\Vdash$ "$\check{Q}$ zadovoljava $\check{\kappa}$-c.c.", što znači da postoji $p \in P$ tako da važi $p \Vdash$ "$\check{Q}$ ne zadovoljava $\check{\kappa}$ -c.c.". Neka je G M-generički podskup od P koji sadrži p. Dakle, u $M[G]$ Q ne zadovoljava κ-c.c., što znači da postoji preslikavanje $h: \kappa \to Q$ tako da je $h(\alpha)$ nekompatibilno sa $h(\beta)$ za svako $\alpha < \beta < \kappa$. Kako je $p \in G$ možemo predpostaviti da p sve to forsira.

Dalje radimo u M. Za svako $\alpha < \kappa$ definišemo $p_\alpha \in P$ i $q_\alpha \in Q$, tako da je $p_\alpha \leq p$ i

$$p_\alpha \Vdash \dot{h}(\check{\alpha}) = \check{q}_\alpha$$

Jasno je da ovakve p_α i q_α uvek možemo naći. Dokažimo da je $\{(p_\alpha, q_\alpha) \mid \alpha < \kappa\}$ sastavljen od medjusobno nekompatibilnih elemenata čime dobija protivrečnost sa predpostavkom da $P \times Q$ zadovoljava κ-c.c. Predpostavimo suprotno tj. da su za neko $\alpha < \beta < \kappa$ (p_α, q_α) i (p_β, q_β) kompatibilni. Neka je $(p' q') \leq (p_\alpha, q_\alpha), (p_\beta, q_\beta)$. Tada je po definiciji

$$p' \Vdash \text{"}\dot{h}(\check{\alpha}) = \check{q}_\alpha,\ \dot{h}(\check{\beta}) = \check{q}_\beta,\ \dot{h}(\check{\alpha}) \not\perp \dot{h}(\check{\beta}) \text{ i } \check{q}' \leq \check{q}_\alpha, \check{q}_\beta\text{"},$$

što je očito nemoguće. Ovo završava dokaz leme 2.13. ∎

<u>Lema 2.14</u>. Neka je M p.t.m. ZFC, κ neprebrojiv regularan kardinal u M i $\underline{T}$ = κ-Suslinovo drvo u M. Neka je C parcijalno uredjen skup u M za koga važi $M \models$ "svaka familija $\mathcal{F} \subseteq C$ moći κ sadrži istobrojnu podfamiliju $\mathcal{F}'$ čija su svaka dva elementa kompatibilna" i neka je G M-generički podskup od C. Tada je $\underline{T}$ κ-Suslinovo drvo i u $M[G]$.

<u>Dokaz</u>: κ-Suslinovo drvo $\underline{T}$ $(T, \leq_T)$ u M odredjuje parcijalno uredjen skup $(T, \geq_T)$ koji zadovoljava κ-c.c. u M. Na osnovu gornje osobine parcijalno uredjenog skupa C lako proveravamo da $C \times T$ zadovoljava κ-c.c. u M. Na osnovu leme 2.13. imamo da važi $C \Vdash$ "$(\check{T}, \geq_{\check{T}})$ zadovoljava $\check{\kappa}$-c.c.". Odavde lako sledi da je $\underline{T}$ κ-Suslinovo drvo u $M[G]$, za svaki M-generički podskup G od C. ∎

<u>Lema 2.15.</u> Neka je M p.t.m. ZFC, κ regularan neprebrojiv kardi-

nal u M, C i P parcijalno uredjeni skupovi u M tako da važi M $\models$ "$\check{C}$ zadovoljava κ-c.c. i P je κ-zatvoren" i $\underline{T}$ κ-Suslinovo drvo u M. Neka je G M-generički podskup od $C \times \check{P}$ i neka je

$$G_c = \left\{p \in C \mid (p,1) \in G\right\}, \quad G_p = \left\{q \in P \mid (1,q) \in G\right\}$$

Neka je $\underline{T}$, takodje κ-Suslinovo drvo i u $M[G_c]$. Tada je $\underline{T}$ κ-Suslinovo drvo u $M[G]$.

<u>Dokaz</u>: Pre svega imamo da je G_c M-generički podskup od C a G_p $M[G_c]$ generički podskup od P i da važi $M[G] = M[G_c][G_p]$. Kako ćemo raditi sa dve forsing relacije $\Vdash_C^M$ i $\Vdash_P^{M[G_c]}$, to ćemo radi jednostavnosti zapisa, u termima odgovarajućih jezika forsinga izostavljati znakove ˇi · .

Neka je $\underline{T}$ κ-Suslinovo drvo u M. Možemo predpostaviti da je $\underline{T}$ normalno (κ,κ)-drvo i da je $\underline{T} = (\kappa, \leq_T)$ pri čemu $\alpha <_T \beta$ implicira $\alpha < \beta$.

Neka je $A \subset \kappa$ maksimalni antilanac drveta $\underline{T}$ u $M[G]$. Trebamo dokazati da je njegova moć u $M[G]$ manja od κ .

Neka je $q \in P$ proizvoljan tako da u $M[G_c]$ važi

$$q \Vdash_P^{M[G_c]} \text{"A je maksimalni antilanac drveta } \underline{T}\text{"},$$

trebamo naći $q' \leq q$, tako da u $M[G_c]$ važi

$$q' \Vdash_P^{M[G_c]} \text{"A ima moć manju od } \kappa\text{"}.$$

Neka je $p \in G_c$, takav da važi

$$p \Vdash_C^M \text{"}[T = (\kappa, \leq_T) \text{ je normalno } \kappa\text{-Suslinovo drvo} \wedge q \Vdash_P^{M[G_c]} \text{"A je maksimalni antilanac drveta T"}]\text{"}.$$

Dalje, radimo u M. Dokažimo prvo sledeću sublemu:

<u>Sublema 2.16</u>. Neka su $\alpha < \kappa$ i $q_o \leq q$ proizvoljni. Tada postoji $q' \leq q_o$, tako da važi

$$p \Vdash_c \text{"}(\exists \beta < \kappa)\ (q' \Vdash_p \text{"}\beta \in A \wedge \alpha \lesseqgtr_T \beta\text{"})\text{"}.$$

<u>Dokaz subleme</u>. Induktivno ćemo konstruisati niz $\left\{(p_\xi, q_\xi, \beta_\xi)\right\}_{\xi<\delta}$ tako da važe uslovi

(1) $p_\xi \in C$, $p_\xi \leqslant p$ i $q_\xi \in P$ za svako $\xi < \delta$;

(2) p_ξ i $p_{\xi'}$ su nekompatibilni i $q_{\xi'} \leqslant q_\xi \leqslant q_o$, za svako $\xi < \xi' < \delta$;

(3) $p_\xi \ ||\!-_c$ "$[\beta_\xi < \kappa \wedge q_\xi \ ||\!-_p$ "$\beta_\xi \in A \quad \alpha \lessgtr_T \beta_\xi$"$]$".

Ordinal δ će biti odredjen kao onaj ordinal za koga je $\{p_\xi | \xi < \delta\}$ maksimalan skup medjusobno nekompatibilnih elemenata ispod p. Dakle, $\delta < \kappa$.

Konstrukcija niza $\{(p_\xi, q_\xi, \beta_\xi)\}_{\xi < \delta}$ je potpuno analogna konstrukciji odgovarajućeg niza iz dokaza subleme 2.12., tako da se na njoj nećemo zadržavati. Neka je $q' \in P$ takav da je $q' \leqslant q_\xi$, $\xi < \delta$ (postoji, jer je P κ-zatvoren). Kao u dokazu subleme 2.12. pokazujemo da q' zadovoljava zaključak subleme. ■

Na osnovu subleme 2.16. ćemo induktivno konstruisati monotono opadajući niz $\{q_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$ elemenata iz P. Neka je $q_o = q$ i neka smo za svako $\beta < \alpha < \kappa$ već konstruisali q_β. Kako je P κ-zatvoren to postoji $q'_\alpha \in P$, $q'_\alpha \leqslant q_\beta$, za svako $\beta < \alpha$. Na osnovu subleme 2.16. postoji $q_\alpha \leqslant q'_\alpha$ tako da važi

$$p \ ||\!-_c \text{"}(\exists \beta < \kappa)(q_\alpha \ ||\!-_p \text{"}\beta \in A \wedge \alpha \lessgtr_T \beta\text{"})\text{"} \tag{4}$$

Kako je po predpostavci $p \in G_c$, to na osnovu (4) imamo

$$M[G_c] \models (\forall \alpha < \kappa)(\exists \beta < \kappa)(q_\alpha \ ||\!-_P^{M[G_c]} \text{"}\check{\beta} \in \dot{A} \wedge \check{\alpha} \gtrless_{\check{T}} \beta\text{"}). \tag{5}$$

Dalje radimo u $M[G_c]$. Na osnovu (5) za svako $\alpha < \kappa$ postoji $\beta(\alpha) < \kappa$, tako da važi

$$q_\alpha \ ||\!-_P^{M[G_c]} \text{"}\beta(\check{\alpha}) \in \dot{A} \quad \check{\alpha} \gtrless_{\check{T}} \beta(\check{\alpha})\text{"}. \tag{6}$$

Neka je $\bar{A} = \{\beta(\alpha) | \alpha < \kappa\}$. Dokažimo da je $\bar{A}$ maksimalni antilanac drveta $\underline{T}$. Na osnovu (6) imamo da je α uporedimo sa $\beta(\alpha)$ za svako $\beta < \kappa$, što znači da trebamo još dokazati da je $\bar{A}$ antilanac drveta $\underline{T}$. Neka su $\beta(\alpha)$ i $\beta(\alpha')$ proizvoljni elementi toga skupa i neka je $\alpha < \alpha' <$ Kako je $q_{\alpha'} \leqslant q_\alpha \leqslant q$, to na osnovu (6) i početne predpostavke o q imamo

$$q_{\alpha'} \;||\!\!-_P^{M[G_c]} \text{"} \beta(\check{\alpha}),\ \beta(\check{\alpha}') \in \dot{A} \text{ i } \dot{A} \text{ je antilanac drveta } \check{\underline{T}}\text{"}.$$

Dakle, mora biti ili $\beta(\alpha) = \beta(\alpha')$ ili $\beta(\alpha)$ neuporedivo sa $\beta(\alpha')$, što dokazuje da je $\bar{A}$ maksimalni antilanac drveta $\underline{T}$. Kako je po predpostavci leme $\underline{T}$ κ-Suslinovo drvo u $M[G_c]$ imamo da je $|\bar{A}| < \kappa$. Neka je $\delta < \kappa$ takav ordinal da je $\bar{A} = \{\beta(\alpha) | \alpha < \delta\}$ (κ je regularan u $M[G_c]$).

Neposredno proveravamo da važi

$$q_\delta \;||\!\!-_P^{M[G_c]} \text{"}\check{\bar{A}} \subseteq \dot{A} \text{ i } \check{\bar{A}} \text{ je maksimalni lanac drveta } \check{\underline{T}}\text{"}.$$

Dakle, $q_\delta \;||\!\!-_P^{M[G_c]} \text{"}\check{\bar{A}} = \dot{A}\text{"}$ tj.

$$q_\delta \;||\!\!-_P^{M[G_c]} \text{"moć antilanca } \dot{A} \text{ drveta } \check{\underline{T}} \text{ je manja od } \check{\kappa}\text{"},$$

što je trebalo dobiti. Ovo završava dokaz leme 2.15. ∎

Dokažimo sada, konačno, da u $M[G]$ za svaki regularan neprebrojiv i ne slabo kompaktan kardinal κ postoji κ-Suslinovo drvo. Kako je κ kardinal sa istim osobinama i u M to na osnovu teoreme Jensena (v. [4o] ili [9]) znamo da postoji κ-Suslinovo drvo $\underline{T}$ i M. Na osnovu Leme 2.7. dovoljno je dokazati da je $\underline{T}$ κ-Suslinovo drvo u $M[G_\kappa]$.

Kako je $\kappa \in X$, to je $C_\kappa \cong C'_\kappa \times KP(\kappa)$ pa je $M[G_\kappa] = M[G \cap C'_\kappa]\,[G \cap KP(\kappa)]$, pri čemu važe odgovarajući uslovi generičnosti. Na osnovu Leme 2.5.(b) znamo da C'_κ zadovoljava uslove Leme 2.14. odakle imamo da je $\underline{T}$ κ-Suslinovo drvo u $M[G \cap C'_\kappa]$. C'_κ i $KP(\kappa)$ zadovoljavaju uslove Leme 2.15 što znači $\underline{T}$, takodje, κ-Suslinovo drvo i u $M[G_\kappa]$ što je i trebalo dokazati. Ovim je dokaz teoreme 2.4. završen. ∎

U slučaju da je X iz dokaza teoreme 2.4. klasa svih regularnih kardinala u M, tada isti dokaz daje teoremu 5.2. gl.I.

U nastavku ovog odeljka ćemo posmatrati neke probleme Erdösa i Hajnala iz [22] odnosno [26] primenjujući teoremu 2.4.

Prva primena je vezana za osnovne relacije particija. Neka je $1 \leq r < \omega$ i neka su κ, ν, λ_ξ, $\xi < \nu$ proizvoljni karinalni brojevi, tada relacija

$$\kappa \to (\lambda_\xi)^r_{\xi<\nu} \tag{7}$$

označava sledeću rečenicu: za svaku particiju $[\kappa]^r = \cup\{I_\xi | \xi < \nu\}$

skupa $[\kappa]^r = \{A \mid A \subseteq \kappa,\ |A| = r\}$, postoji $\xi_0 < \nu$ i $X \subseteq \kappa$, tako da je $|X| = \lambda_{\xi_0}$ i $[X]^r \subseteq I_{\xi_0}$ (v. [26] ili [27]). Particiju $(I_\xi)_{\xi < \nu}$ nazivamo još i r-particija skupa κ, dok je ν njen tip.

Izučavanje ovih i ostalih relacija danas čini čitav jedan pravac u teoreiji skupova, gde posebno mesto pripada madjarskoj školi. Sledeći rezultati su prvi i osnovni u ovoj oblasti:

1. $\omega \to (\omega)_n^\omega$, $1 \leq \omega$, $n < \omega$	Ramsey [62]
2. $(2^\kappa)^+ \to (\kappa^+, (2^\kappa)^+)^2$	Erdös-Rado [27], Kurepa [51]
3. $(2^\kappa)^+ \to (\kappa^+)_\kappa^2$	Erdös-Rado [27], Kurepa [54]
4. $\beth_n(\kappa)^+ \to (\kappa^+)_\kappa^{n+1}$, $n < \omega$	Erdös-Rado [27], Kurepa[54]
5. $\kappa \to (\omega, \kappa)^2$	Dushnik-Miller [19], Erdös
6. $2^\kappa \not\to (\kappa^+, \kappa^+)^2$	Kurepa [54] Sierpiński [68]
7. $\beth_n(\kappa) \not\to (\kappa^+)_\kappa^{n+1}$	Erdös-Hajnal-Rado [26]

gde je κ proizvoljan beskonačan kardinal.

Neka je $S = \{f : f : \kappa \to 2\}$ i neka je $\prec$ leksikografsko uredjenje skupa S. Opštepoznata je danas činjenica da $(S, \prec)$ nema dobro uredjenih ili inverzno dobro uredjenih podskupova moći κ^+. Neka je $<$ proizvoljno dobro uredjenje skupa S. Posmatrajmo sledeću particiju skupa $[S]^2$:

$$I_0 = \{\{f, g\} \mid f, g \in S \wedge f \prec g \wedge f < g\}$$

$$I_1 = \{\{f, g\} \mid f, g \in S \wedge f \prec g \wedge g < f\}.$$

Neka je $S' \subseteq S$ proizvoljan podskup za koga važi $[S']^2 \subseteq I_0$ ili $[S']^2 \subseteq I_1$. Tada je $|S'| \leq \kappa$, jer je tada $(S', \prec)$ ili $(S', \succ)$ dobro uredjen. Dakle, particija (I_0, I_1) dokazuje 6. Ovu particiju ćemo nazivati particijom Kurepa-Sierpińskog. Pored osobine da (I_0, I_1) dokazuje 6. ona ima i sledeću interesantnu osobinu:

za svako $S' \subseteq S$, $|S| = \kappa^+$ postoje $S_0, S_1 \subseteq S'$, $|S_0| = |S_1| = \kappa$ tako da je $[S_0]^2 \subseteq I_0$ i $[S_1]^2 \subseteq I_1$.

U [22] Erdös i Hajnal pitaju može li se za svako $2 \leq n < \omega$ naći n-particija koja dokazuje $\underset{=}{1}_n(\kappa) \nrightarrow (\kappa^+, \kappa^+)^{n+1}$ i koja pored toga zadovoljava uslov analogan ovom. Tačnije problem 62. iz [22] glasi:

Neka je $2 < r < \omega$, $|S| = \underset{=}{1}_{r-1}(\omega)$. Da li tada postoji r-particija (I_o^r, I_1^r) skupa S tako da važe sledeći uslovi:

(1) $S' \subseteq S$, $|S'| = \omega_1$ implicira $[S']^r \nsubseteq I_i^r$, za svako $i < 2$;

(2) $S' \subseteq S$, $|S'| = \omega_1$ implicira da za svako $u < \omega$ i svako $i < 2$ postoji $S_i \subseteq S'$, $|S_i| = n$, tako da je $[S_i]^r \subseteq I_i^r$?

Da li se (2) može zameniti jačim uslovom:

(2') $S' \subseteq S$, $|S'| = \omega_1$ implicira da postoje $S_i \subseteq S'$, $|S_i| = \omega$, tako da je $[S_i]^r \subseteq I_i^r$, za svako $i < 2$?

Ovde ćemo dokazati konsistentnost pozitivnog odgovora na ovaj problem i to za svaki beskonačan kardinal κ istovremeno. U dokazu ćemo, jasno, koristiti teoremu 2.4. pri čemu se unapred dogovarmo da ćemo na početku svakog tvrdjenja u kom se koristi model te teoreme pisati "aksiomu" $V = L[G]$, umesto uobičajenog $Con(ZFC) \to Con(ZFC + \ldots)$, što bi u našem slučaju bilo nepregledno. Naime, u modelu $M[G]$, koji smo dobili u dokazu te teoreme zapravo i važi aksioma $V = L[G]$.

<u>Teorema 2.18</u>. ($V = L[G]$) Neka je $\kappa \geq \omega$, $2 < r < \omega$ i $|S| = \underset{=}{1}_{r-1}(\kappa)$ Tada postoji r-particija (I_o^r, I_1^r) skupa S, koja zadovoljava uslove:

(1) ako je $S' \subseteq S$ i $|S'| = \kappa^+$, tada je $[S']^r \nsubseteq I_i^r$, za svako $i < 2$;

(2) ako je $S' \subseteq S$ i $|S'| = \kappa^+$, tada postoje $S_o, S_1 \subseteq S'$, $|S_o| = |S_1| = \kappa$, tako da je $[S_i]^r \subseteq I_i^r$, za svako $i < 2$.

<u>Dokaz</u>: Dokazaćemo samo slučaj $\kappa = \omega$, jer će se u njegovom dokazu naći sve ideje dokaza i opšteg slučaja. Predpostavimo da za $r \geq 2$ postoji disjunktna r-particija (I_o^r, I_1^r) nekog skupa moći ω_{r-1} (podsetimo se da važi GCH), koja zadovoljava uslove (1) i (2). U slučaju r=2 uzimamo gore definisanu particiju Kurepa-Sierpińskog. Dokažimo da postoji (r+1)-particija (I_o^{r+1}, I_1^{r+1}) nekog skupa moći ω_r, koja zadovoljava uslove (1) i (2).

Neka je $\underline{T} = (T, \subset)$ normalno ω_{r-1}-Kurepino drvo koje ne sadrži ni Arzonszajnovo ni Cantorovo poddrvo. Predpostavljamo da je T početni komad skupa nizova ${}^{\omega_{r-1}}2$.

Neka je $E = E(T)$ kolekcija svih maksimalnih ω_{r-1}-lanaca drveta $\underline{T}$. Dakle, elemente iz E možemo identifikovati sa odgovarajućim nizovima nula i jedinica, tj. sa elementima skupa ${}^{\omega_{r-1}}2$. Kako je $|E| = \omega_r$, to je dovoljno naći $(r+1)$-particiju skupa E sa osobinama (1) i (2). Zato predpostavljamo da nam je data disjunktna r-particija (I_o^r, I_1^r) skupa T koja zadovoljava uslove (1) i (2), jer je $|T| = \omega_{r-1}$.

Za proizvoljna dva različita maksimalna lanca b, b' $\subset$ T sa $R(b,b')$ označavamo $\subset$-najveći $t \in T$ sa osobinom $t \in b$ i $b \in b'$.

Neka je $\{b_o, \ldots, b_r\} \in [E]^{r+1}$ proizvoljan, tada stavljamo $\{b_o, \ldots, b_r\} \in I_i^{r+1}$ ako i samo ako je $\{R(b_l, b_{l'}) \mid l \neq l', l, l' \leq r\} \in I_i^r$ za svako $i < 2$. Kako je $\underline{T}$ binarno drvo, to je skup na desnoj strani tačno r-točlan, tako da je na taj način (I_o^{r+1}, I_1^{r+1}) dobro definisana (i da je to disjunktna particija). Dokažimo da (I_o^{r+1}, I_1^{r+1}) zadovoljava uslove (1) i (2) teoreme.

Neka je $E' \subseteq E$, $|E'| = \omega_1$ proizvoljan. Dokažimo da postoji maksimalni lanac b drveta $\underline{T}$, tako da važi

$$\left|\left\{R(b,b') \mid b \neq b', b' \in E'\right\}\right| = \omega_1 . \tag{8}$$

Induktivno po slojevima U_α, $\alpha < \omega_1$ ćemo konstruisati poddrvo $\underline{U} = (U, \subset)$ drveta $\underline{T}$. Neka je $\alpha < \omega_1$ i neka su U_β, $\beta < \alpha$ već konstruisani tako da važe induktivni uslovi:

- $|U_\beta| \leq \omega$, za svako $\beta < \alpha$;
- neka je $b \in E'$ i neka je dužina lanca $\{t \in U|\alpha \mid t \subset b\}$ manja od α, tada postoji $t(b) \in U|\alpha$, tako da je $\{b' \in E' \mid b' \supset t(b)\} = \{b\}$;
- $\{b \in E' \mid b \supset t\} \neq \phi$, za svako $t \in U|\alpha$.

<u>Slučaj 1</u>: $\alpha = 0$. Neka je tada $U_o = \{\phi\}$.

<u>Slučaj 2</u>: $\alpha = \beta+1$. Neka je $s \in U_\beta$, tako da je $|\{b \in E' \mid b \supset s\}| > 1$. Jasno je, da postoje $s_o, s_1 \in T$, s_o, s_1 s, $l(s_o) = l(s_1)$ i $s_o \neq s_1$, tako

da su $I_o = \{b \in E' | b \supset s_o\}$ i $I_1 = \{b \in E' | b \supset s_1\}$ disjunktni neprazni i $I_o \cup I_1 = \{b \in E' | b \supset s\}$. Neka je

$$U_\alpha = U\left\{\{s_o, s_1\} | s \in U_\beta, \; |\{b \in E' | b \supset s\}| > 1\right\}.$$

Po induktivnoj predpostavci je $|U_\alpha| \leqslant 2|U_\beta| \leqslant \omega$, pa zato dokažimo samo nepraznost skupa U_α, tj. egzistenciju $s \in U_\beta$, za koga je $|\{b \in E' | b \supset s\}| > 1$. U suprotnom bi svakom $b \in E'$ odgovarao $t(b) \in U|\alpha$ tako da je $t(b) \subset b$ i $\{b' \in E' | b' \supset t(b)\} = \{b\}$. To znači da je $b \to t(b)$ jedan-jedan preslikavanje, što protivreči predpostavci $|U|\alpha| \leqslant \omega$ i $|E'| = \omega_1$.

Slučaj 3. $\lim(\alpha)$. Neka je

$$U_\alpha = \left\{\cup l \,|\, l \subset U|\alpha \text{ je maksimalni } \alpha\text{-lanac i } \{b \in E' | b \supset l\} \neq \phi\right\}.$$

Da je $U_\alpha \neq \phi$ dokazuje se potpuno analogno dokazu iste činjenice u slučaju 2. Zato dokažimo samo da je $|U_\alpha| \leqslant \omega$. Naime, u suprotnom bi $\underline{U}|(\alpha+1)$ sadržavalo jedno Cantorovo poddrvo suprotno predpostavci o drvetu $\underline{T}$.

Neka je $U = U\{U_\alpha | \alpha < \omega_1\}$ i $\underline{U} = (U, \subset)$. Kako je $\underline{U}$ jedno (ω_1, ω_1)-drvo i kako ono ne može biti Aronszajnovo (jer $\underline{T}$ ne sadrži Aronszajnovo poddrvo), mora postojati ω_1-lanac l drveta $\underline{U}$. Neka je $b \supseteq l$ maksimalno produženje lanca l u T. Neposredno proveravamo da b zadovoljava uslov (8).

Dakle, na osnovu uslova (8) možemo naći monotono $\subset$-rastući niz $\{t_\alpha\}_{\alpha < \omega_1}$ elemenata iz b i niz $\{b_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ elemenata iz E', tako da je $R(b, b_\alpha) = t_\alpha$, za svako $\alpha < \omega_1$. Primetimo da odatle imamo da je $R(b_\alpha, b_\beta) = t_\alpha$, za svako $\alpha < \beta < \omega_1$.

Neka je $T' = \{t_\alpha | \alpha < \omega_1\}$ $(\subset T)$. Na osnovu osobine (1) r-particije (I_o^r, I_1^r) skupa T znamo da postoje $\{t_{\alpha_0}, \ldots, t_{\alpha_{r-1}}\} \in [T']^r$, $\alpha_0 <$ $< \ldots < \alpha_{r-1} < \omega_1$ tako da je

$$\{t_{\alpha_0}, \ldots, t_{\alpha_{r-1}}\} \in I_o^r.$$

Neka je $\alpha_r < \omega_1$ i $\alpha_r > \alpha_{r-1}$. Neposredno proveravamo da važi

$$\{R(b_{\alpha_l}, b_{\alpha_{l'}}) | l \neq l', l, l' \leq r\} = \{t_{\alpha_0}, \ldots, t_{\alpha_{r-1}}\},$$

odakle je na osnovu definicije (I_o^{r+1}, I_1^{r+1}) $\{b_{\alpha_0}, \ldots, b_{\alpha_r}\} \varepsilon I_o^{r+1}$.

Slično dokazujemo da postoji $\{b_{\beta_0}, \ldots, b_{\beta_r}\} \varepsilon [E']^{t+1}$ tako da je $\{b_{\beta_0}, \ldots, b_{\beta_r}\} \varepsilon I_1^{r+1}$ što dokazuje da particija (I_o^{r+1}, I_1^{r+1}) zadovoljava uslov (1).

Dokažimo sada da (I_o^{r+1}, I_1^{t+1}) zadovoljava uslov (2). Neka je $E' \subseteq E$, $|E'| = \omega_1$ proizvoljan. Kao i gore nalazimo maksimalan lanac $b \subset T$ i nizove $\{t_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ i $\{b_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ elemenata iz b odnosno E' tako da je $R(b, b_\alpha) = t_\alpha$, za svako $\alpha < \omega_1$.

Kako (I_o^t, I_1^r) zadovoljava uslov (2) to postoje beskonačni prebrojivi skupovi $T_o, T_1 \subseteq T' = \{t_\alpha | \alpha < \omega_1\}$ tako da je $[T_i]^r \subseteq I_1^r$, za svako $i < 2$. Možemo predpostaviti da je $T_i = \{t_\alpha | \alpha \ \varepsilon \ C_i\}$, $|C_o| = |C_1| =$ i da je C_i po tipu ω-niz ordinala iz ω_1. Neka je

$$E_i = \{b_\alpha | \alpha \ \varepsilon \ C_i\}, \quad i < 2.$$

Neposredno na osnovu odgovarajućih definicija proveravamo da je $[E_i]^{r+1} \subseteq I_i^{r+1}$ za svako $i < 2$. Ovo završava dokaz teoreme. ∎

Druga primena teoreme 2.4. je vezana za takozvane relacije uglastih zagrada, koje su definisane u [26, §18].

Neka su κ, $\lambda\xi$, $\xi < \nu$ i ν proizvoljni kardinali i neka je $1 \leq r < \omega$.

Relacija

$$\kappa \rightarrow [\lambda_\xi]^r_{\xi < \nu} \tag{9}$$

označava sledeću rečenicu: za svaku disjunktnu particiju $[\kappa]^r = \cup \{I_\xi | \xi < \nu\}$ postoji $X \subseteq \kappa$ i $\xi < \nu$, tako da je $|X| = \lambda_\xi$ i $[X]^r \cap I_\xi = \phi$ (ekvivalentno: za svako f: $[\kappa]^r \to \nu$ postoji $\xi < \nu$ i $X \subseteq \kappa$, $|X| = \lambda_\xi$, tako da je $\xi \notin f''[X]^r$; preslikavanje f nazivamo <u>bojenje</u> skupa $[\kappa]^r$).

Navešćemo prvo neke osnovne i jednostavne osobine ovih relacija.

8. relacije $\kappa \to (\lambda_0, \lambda_1)^r$ i $\kappa \to [\lambda_0, \lambda_1]^r$ su ekvivalentne;
9. osobina monotonosti relacije (9) po kardinalima. Kako se ove lako otkrivaju na osnovu definicije nećemo ih eksplicitno navoditi;
10. neka je $\nu \geq 2$, tada za svaki niz kardinala λ_ξ, $\xi < \nu$ $\kappa \to (\lambda_\xi)^r_{\xi<\nu}$ implicira $\kappa \to [\lambda_\xi]^r_{\xi < \nu}$. Posebno, ako za $\xi_0 < \xi_1 < \nu$ važi $\kappa \to (\lambda_{\xi_0}, \lambda_{\xi_1})^r$ tada važi i $\kappa \to [\lambda_\xi]^r_{\xi < \nu}$.

U sledećoj teoremi navodimo osnovne rezultate o ovim relacijama čiji se dokazi mogu naći u [26, §18].

<u>Teorema 2.19</u>. (Erdös, Hajnal, Rado) (GCH). Neka je $\kappa \geq \omega$ proizvoljan kardinal tada važi:

(a) $\kappa^+ \not\to [\kappa^+]^2_{\kappa^+}$;

(b) $\kappa^+ \not\to [cf(\kappa), (\kappa^+)_{\kappa^+}]^2$;

(c) $\kappa^+ \not\to [r+1, (\kappa^+)_{\kappa^+}]^r$, $r \geq 3$.

U slučaju singularnog κ (uz GCH) relacija $\kappa \to [\lambda_\xi]^r_{\xi < \nu}$ je dovoljno kompletno ispitana (v. [26,Theorem 20, 20A, 21, 22, 23]).

Kad je κ inakcesibilan o relaciji (9) se vrlo malo zna (v. [22, Problem 16.]). Taj slučaj je kompletno ispitan uz predpostavku V=L. U tome bitnu ulogu igra poznata Jensenova teorema da je za regularne neprebrojive kardinale κ, SH_κ ekvivalentna slaboj kompaktnosti karinala κ (v. [40]). Naime, važi sledeća teorema (v. [40, §6], [67]):

<u>Teorema 2.20</u>.(Martin, Shore) (V=L). Neka je κ proizvoljan regularan neprebrojiv kardinal, tada je $\kappa \to [\kappa]^2_\kappa$ ekvivalentno slaboj kompaktnosti kardinala κ. ■

Mi ćemo ovde, izvesnim profinjenjem dokaza te teoreme (v. [40,§6] i [67]), uspeti da dobijemo konačno pojačanje sledeće teoreme S.Shelaha (v. [65, Theorem 1.2.]):

(Shelah) (V=L). Za svaki regularan kardinal $\lambda \geq \omega$ postoji bojenje f koje dokazuje $\lambda^+ \nrightarrow [\lambda^+]^2_{\lambda^+}$, tako da nema trouglova obojenih trima bojama.

<u>Teorema 2.21</u>. (V=L) Za svaki regularan neprebrojiv kardinal κ, koji nije slabo kompaktan, postoji bojenje koje dokazuje $\kappa \nrightarrow [\kappa]^2_\kappa$ i koje nema trouglova obojenih trima bojama.

<u>Dokaz</u>: Neka je $\kappa > \omega$ proizvoljan regularan ne slabo kompaktan kardinal. Tada, na osnovu gore spomenute teoreme Jensena, znamo da postoji normalno κ-Suslinovo drvo $\underline{T} = (T, \leq_T)$. Možemo predpostaviti da je $|\mathrm{succ}(x)| \geq |\gamma_T(x)|$, za svako $x \in T$, gde je succ(x) skup neposrednih sukcesora tačke x u T. Za svako $x \in T$ skup succ(x) ćemo urediti dobro relacijom $<_x$, tako da je $\mathrm{tp}(\mathrm{succ}(x), <_x) \geq \gamma_T(x)$.

Za svako $x,y \in T$ neka je $r(x,y)$ $\leq_T$-najveći $z \in T$, tako da je $z \leq_T x$ i $z \leq_T y$.

Gornje uredjivanje skupa succ(x), $x \in T$ relacijom $<_x$ dobrog uredjenja nam omogućava da svakom $y \in T^x$ $(= \{y \in T | y \geq_T x\})$ dodelimo jedinstven ordinal $\xi_x(y)$ na sledeći način:

- ako je $y = x$ neka je $\xi_x(x) = \mathrm{tp}(\mathrm{succ}(x), <_x)$;
- ako je $y > x$ i $z \in \mathrm{succ}(x)$ $x < z \leq y$ neka je $\xi_x(y) = \mathrm{tp}(\{u \in \mathrm{succ}(x) | u <_x z\}, <_x)$.

Definišimo, konačno, bojenje $f: [T]^2 \to \kappa$. Neka su $x,y \in T$, $x \neq y$ proizvoljni i neka je $z = r(x,y)$. Neka je

$$f(\{x,y\}) = \min \{\xi_z(x), \xi_z(y)\}.$$

Dokažimo da je f traženo bojenje. Pre svega dokažimo da f dokazuje $\kappa \nrightarrow [\kappa]^2_\kappa$. Predpostavimo suprotno, tj. da postoji $\xi < \kappa$ i $X \subseteq T$, $|X| = \kappa$, tako da je $\xi \notin f''[X]^2$. Možemo predpostaviti da je $\gamma_T(x) > \xi$, za svako $x \in X$.

Za svako $x \in X$ iz $\gamma_T(x) > \xi$ sledi da postoji $u(x) \in \mathrm{succ}(x)$ tako da je $\mathrm{tp}(\{u \in \mathrm{succ}(x) | u <_x u(x)\}, <_x) = \xi$.

Neka je $x,y \in X$ i $x \neq y$. Predpostavimo, na primer da je

$u(x) \leq u(y)$. Dakle, $x < u(x) \leq y < u(x)$, jer je $x \neq y$. Odavde je $r(x,y) = x$ i $\min\{\xi_x(x), \xi_x(y)\} = \xi$, što znači da je $f(\{x,y\}) = \xi$, suprotno predpostavci. Ovo dokazuje da je za svako $x,y \in X$, $x \neq y$, $u(x) \| u(y)$, tj. da je $A = \{u(x) | x \in X\}$ antilanac drveta $\underline{T}$ moći κ, suprotno predpostavci da je ono κ-Suslinovo.

Dakle, f dokazuje $\kappa \nrightarrow [\kappa]^2_\kappa$. Dokažimo sada i drugu osobinu bojenja f.

Na osnovu poznate triangularne leme (v. [56]) imamo da važi

$$|\{r(x,y),\ r(x,z),\ r(y,z)\}| \leq 2,$$

za proizvoljne tri tačke $x,y,z \in T$. dakle, ako imamo $\{x,y,z\} \not\subseteq T$ proizvoljni tročlani skup možemo posmatrati sledeća dva slučaja:

Slučaj 1: $r(x,y) = r(x,z) = r(y,z) = u$. Tada važi

$$\{f(\{x,y\}),\ f(\{x,z\}),\ f(\{y,z\})\} = \{\min\{\xi_u(x), \xi_u(y)\}, \min\{\xi_u(x), \xi_u(z)\},$$
$$\min\{\xi_u(y), \xi_u(z)\}\}$$

Kako je skup na desnoj strani najviše dvočlan, takav je i skup na levoj strani, što znači da je trougao odredjen tačkama x,y,z obojen sa najviše dve boje.

Slučaj 2: $u = r(x,y) = r(x,z) <_T r(y,z)$. Neposredno proveravamo da je tada $\xi_u(y) = \xi_u(z)$ odakle je

$$f(\{x,y\} = \min\{\xi_u(x), \xi_u(y)\} = \min\{\xi_u(x), \xi_u(z)\} = f(\{x,z\}),$$

što opet znači da je trougao odredjen tačkama x,y,z obojen sa najviše dve boje. Ovo završava dokaz teoreme 2.21.. ■

U teoriji osnovnih relacija (7) dobro su poznate takozvane "stepping-up" implikacije

$$\kappa \rightarrow (\lambda_\xi)_{\xi<\nu} \Rightarrow \kappa^+ \rightarrow (\lambda_\xi+1)^{r+1}_{\xi<\nu}$$

$$\kappa \nrightarrow (\lambda_\xi)^r_{\xi<\nu} \Rightarrow \kappa^+ \nrightarrow (\lambda_\xi+1)^{r+1}_{\xi<\nu}$$

pri dosta malim ograničenjima i u zapisu kad važi GCH, koju možemo eliminisati (tako, na primer, u drugoj implikaciji mesto κ^+ zapravo stoji 2^κ). Pomoću ovih implikacija su i dobijene relacije 4. i 7. na osnovu relacija 3. i 6., respektivno (v. [26] [54]).

Zbog toga se prirodno nameće pitanje važenja analognih implikacija i za relacije "uglastih zagrada", Što se tiče pozitivnih "stepping-up" implikacija važi sledeća teorema (v. [26]).

Teorema 2.22. (Erdös Hajnal Rado) (GCH). Neka je

$$r \geq 1;\ \kappa \geq \omega;\ r < \lambda_\xi \leq \kappa,\ \xi < \nu.$$

Tada $\kappa \to [\lambda_\xi]^r_{\xi<\nu}$ implicira $\kappa^+ \to [\lambda_\xi+1]^{r+1}_{\xi<\nu}$. ∎

O ovoj implikaciji za negativne relacije uglastih zagrada se vrlo malo zna. Naime problemi 17 i 17A iz [22] glase:

- predpostavimo $\kappa \geq \omega$, $2 \leq r<\omega$ i $r < \lambda_\xi \leq \kappa$, $\xi < \nu$. Da li tada
$$\kappa \nrightarrow [\lambda_\xi]^r_{\xi < \nu} \text{ implicira } 2^\kappa \nrightarrow [\lambda_\xi+1]^{r+1}_{\xi<\nu}\ ? \tag{1o}$$

- da li važi $2^{2^{\omega}} \nrightarrow [\omega_1]^3_{\omega_1}$? Da li važi $\omega_{n+1} \nrightarrow [\omega_1]^{n+2}_{\omega_1}$, $n < \omega$, uz predpostavku GCH?

Posmatrajmo prvo predpostavke o kardinalima u (1o). Pre svega možemo se ograničiti na slučaj $\nu \geq 2$. Ako je $\kappa = \omega$ tada na osnovu teoreme Ramseya imamo $\omega \to (\omega,\omega)^r$, što na osnovu 1o. znači da važi $\kappa \to [\lambda_\xi]^r_{\xi<\nu}$. Dakle, možemo se ograničiti na slučaj $\kappa > \omega$ i $\lambda_\xi \leq \omega$ za najviše jedno $\xi < \nu$.

Ovde ćemo pokazati konsistentnost važenja implikacije (1o) u njenim "glavnim" slučajevima. Naime, ograničenje će se odnositi na regularnost κ i svih λ_ξ sem možda jednog, što je dovoljno zadovoljavajuće, jer, kako smo već jednom napomenuli, relacija $\kappa \to [\lambda_\xi]^r_{\xi<\nu}$ je dovoljno dobro ispitana (u radu [26,§18]) za slučaj singularnog κ.

Što se tiče traženja rezultata konsistentnosti kad se radi o ovom problemu Erdösa i Hajnala i ono je opravdano, jer postoji model ZFC u kome ne važi ni najprostija forma implikacije (1o).

Teorema 2.23. ($V = L[G]$) Neka je $cf(\kappa) = \kappa > \omega$, $2 \leq r < \omega$, $\nu \geq 2$ $r < \lambda_0 \leq \kappa$ i $\omega \leq \lambda_\xi = cf(\lambda_\xi) \leq \kappa$, za $0< \xi < \nu$. Tada

$$\kappa \nrightarrow [\lambda_\xi]^r_{\xi<\nu} \quad \text{implicira} \quad 2^\kappa \nrightarrow [\lambda_\xi+1]^{r+1}_{\xi<\nu} .$$

<u>Dokaz</u>: Neka je $(I^r_\xi)_{\xi<\nu}$ disjunktna particija nekog skupa moći κ, koja dokazuje $\kappa \nrightarrow [\lambda_\xi]^r_{\xi<\nu}$. Neka je $\underline{T} = (T, \subset)$ normalno κ -Kurepino drvo, koje ne sadrlzi ni jedno λ-Aronszajnovo i μ-Cantorovo poddrvo za svaki $\lambda = cf(\lambda) \geqslant \omega$ i $\mu \geqslant \omega$. Predpostavljamo da je T početni komad skupa nizova ${}^\kappa 2$. Neka je $E = E(T)$ kolekcija svih maksimalnih κ -lanaca drveta $\underline{T}$. Opet ćemo elemente skupa E identifikovati sa odgovarajućim nizovima iz ${}^\kappa 2$. Kako važi GCH, to je $|E| = \kappa^+$, pa zato možemo fiksirati dobro uredjenje $\lhd$ skupa E po tipu κ^+. Dakle, dovoljno je naći (r+1)-particiju skupa E koja dokazuje $\kappa^+ \nrightarrow [\lambda_\xi+1]^{r+1}_{\xi<\nu}$ ukoliko predpostavimo da je $(I^r_\xi)_{\xi<\nu}$ r-particija skupa T (jer $|T| = \kappa$).

Opet za proizvoljna dva različita maksimalna lanca $b, b' \subset T$ definišemo $T(b,b')$ kao $\subset$- najveći $t \in T$ sa osobinama $t \in b$ i $t \in b'$. Za $A \subseteq E$ stavljamo $RA = \left\{R(b,b') \mid b,\ b' \in A,\ b \neq b'\right\}$.

(r+1)-particiju $(I^{r+1}_\xi)_{\xi<\nu}$ skupa E definišemo sa:

$$\left\{b_0, \ldots, b_r\right\}_{\lhd} \in I^{r+1}_\xi \quad \text{akko je} \quad R(b_i, b_{i+1}) \subset R(b_{i+1}, b_{i+2}), \text{za svako } i \leqslant r-2 \text{ i}$$

$$R\left\{b_0, \ldots, b_t\right\} \in I^r_\xi ,$$

za svako $0 < \xi < \nu$, dok je $I^{r+1}_0 = [E]^{r+1} - \cup\left\{I^{r+1}_\xi \mid 0 < \xi < \nu\right\}$.

Dokažimo da ovako definisana (r+1)-particija $(I^{r+1}_\xi)_{\xi<\nu}$ dokazuje $\kappa^+ \nrightarrow [\lambda_\xi+1]^{r+1}_{\xi<\nu}$ (jasno je, da je ona dobro definisana). Predpostavimo suprotno, da $(I^{r+1}_\xi)_{\xi<\nu}$ nema tražene osobine, tada mora nastupiti bar jedan od sledeća dva slučaja (A) i (B).

(A) Postoji $X \subseteq E$, tako da je $|X| = \lambda_0+1$ i $[X]^{r+1} \cap I^{r+1}_0 = \phi$.

Neka je $X = \left\{b_\alpha \mid \alpha < \lambda_0+1\right\}$ numeracija tog skupa inducirana uredjenjem $\lhd$, tj. $\alpha < \alpha' < \lambda_0+1$ akko $b_\alpha \lhd b_{\alpha'}$. Ako je λ_0 konačan tada ova numeracija očito postoji, tok u slučaju beskonačnog λ_0 (kada je $\lambda_0+1 = \lambda_0$, jer se radi o kardinalnom zbiru), takva numeracija postoji prelaženjem na istobrojan podskup.

Dokažimo da je $l = \left\{R(b_\alpha,\ b_{\alpha+1}) \alpha < \lambda_0\right\}$ lanac drveta $\underline{T}$, pri čemu je to njegova $\subset$-monotona rastuća numeracija. Predpostavimo suprotno, tj. da postoje $\alpha < \beta < \lambda_0$, tako da je $R(b_\alpha, b_{\alpha+1}) \| R(b_\beta, b_{\beta+1})$ ili $R(b_\beta, b_{\beta+1}) \subset R(b_\alpha, b_{\alpha+1})$. Posmatraćemo samo prvi slučaj, jer se drugi diskutije analogno. Neka je t $\subset$-najveći element iz T manji i od $R(b_\alpha, b_{\alpha+1})$ i od $R(b_\beta, b_{\beta+1})$. Neposredno proveravamo da je $\alpha+1 < \beta$ i da je $R(b_\alpha, b_\beta) = R(b_{\alpha+1}, b_\beta) = t$. Neka je $\{b_o, \ldots, b_r\} \in [X]^{r+1}$, takav da je $b_\alpha, b_{\alpha+1}, b_\beta \in \{b_o, \ldots, b_r\}$. Po predpostavci je $\{b_o, \ldots, b_r\} \in I_\xi^{r+1}$, za neko $\xi > 0$, odakle imamo da je $R(b_o, b_1) \subset \ldots \subset R(b_{r-1}, b_r)$. Medjutim, odatle lako sledi da je $R(b_i, b_{i+1}) = R(b_i, b_j)$, za svako $i < j \leq r$, što znači da je $R(b_\alpha, b_{\alpha+1}) = R(b_\alpha, b_\beta) = t$, suprotno činjenici da je $t \not\subset R(b_\alpha, b_{\alpha+1})$.

Dakle, $l = \{R(b_\alpha, b_{\alpha+1}) | \alpha < \lambda_0\}$ je lanac drveta $\underline{T}$. Dokažimo da je $[l]^r \cap I_o^r = \phi$, što će biti suprotno predpostavci da $(I_\xi^r)_{\xi<\nu}$ dokazuje $\kappa \nrightarrow [\lambda_\xi]^r_{\xi<\nu}$, jer je $|l| = \lambda_0$.

Neka je $C = \left\{ R(b_{\alpha_0}, b_{\alpha_0+1}), \ldots, R(b_{\alpha_{r-1}}, b_{\alpha_{r-1}+1}) \right\} \in [l]^r$ proizvoljan element pri čemu je $\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_{r-1} < \lambda_0$. Kako je $\alpha_0+1 \leq \alpha_1$, to na osnovu činjenice da je l lanac drveta $\underline{T}$, lako proveravmo da je $R(b_{\alpha_0}, b_{\alpha_0+1}) = R(b_{\alpha_0}, b_{\alpha_1})$. Slično $R(b_{\alpha_i}, b_{\alpha_i+1}) = R(b_{\alpha_i}, b_{\alpha_{i+1}})$, za svako $i < r-1$. Dakle,

$$C = \left\{R(b_{\alpha_0}, b_{\alpha_1}), \ldots, R(b_{\alpha_{r-2}}, b_{\alpha_{r-1}}), R(b_{\alpha_{r-1}}, b_{\alpha_{r-1}+1})\right\}.$$

Posmatrajmo $D = \left\{b_{\alpha_0}, b_{\alpha_1}, \ldots, b_{\alpha_{r-1}}, b_{\alpha_{r-1}+1}\right\} \in [X]^{r+1}$. Neposredno proveravamo da je $\{R(b, b') | b \neq b', b, b' \in D\} = C$ odakle, na osnovu definicije $(I_\xi^{r+1})_{\xi<\nu}$ i činjenice $D \in I_\xi^{r+1}$, za neko $\xi > 0$ imamo da je $C \in I_\xi^r$ za isto $\xi > 0$. Dakle $[l]^r \cap I_o^r = \phi$, što konačno pokazuje da je slučaj (A) nemoguć.

(B) Postoji $X \subseteq E$ i $1 \leq \xi \leq \nu$, tako da je $|X| = \lambda_\xi$ i $[X]^{r+1} \cap I_\xi^{r+1} = \phi$.

Dokažimo prvo da mora postojati maksimalni lanac b drveta T tako da važi

$$\left|\left\{ R(b,b') \mid b' \not\geq b,\ b' \in X\right\}\right| = \lambda_\xi. \tag{11}$$

Kao i u dokazu teoreme 2.18. ćemo induktivno po slojevima U_α, $\alpha < \lambda_\xi$ konstruisati poddrvo $\underline{U} = (U, \subset)$ drveta T.

Neka je $\alpha < \lambda_\xi$ i neka smo U_β, $\beta < \alpha$ već konstruisali tako da važe induktivni uslovi:

- $|U_\beta| \leq |\beta| + \omega$, za svako $\beta < \alpha$;
- neka je $b \in X$ i neka je dužina lanca $\left\{t \in U \mid t \subset b\right\}$ manja od α, tada postoji $t(b) \in U|\alpha$, tako da je $\left\{b' \in X \mid b' \supset t(b)\right\} = \left\{b\right\}$;
- $\left\{b \in X \mid b \supset t\right\} \not\geq \phi$, za svako $t \in U|\alpha$.

<u>Slučaj 1</u>. $\alpha = 0$. Neka je $U_o = \left\{\phi\right\}$.

<u>Slučaj 2</u>. $\alpha = \beta+1$. Neka je $s \in U_\beta$, takav da je $\left|\left\{b \in X \mid b \supset s\right\}\right| > 1$. Jasno je, da postoje s_o, $s_1 \in T$, $s_o, s_1 \supset s$, $s_o \not\geq s_1$ i $\gamma(s_o) = \gamma(s_1)$, tako da su $I_o = \left\{b \in X \mid b \supset s_o\right\}$ i $I_1 = \left\{b \in X \mid b \supset s_1\right\}$ disjunktni neprazni i $I_o\ \ I_1 = \left\{b \in X \mid b \supset s\right\}$. Neka je

$$U_\alpha = U\left\{\left\{s_o, s_1\right\} \mid s \in U_\beta,\ \left|\left\{b \in X \mid b \supset s\right\}\right| > 1\right\}.$$

Neposredno na osnovu induktivne predpostavke je $|U_\alpha| \leq |\alpha| + \omega$. Zato dokažimo nepraznost skupa U_α, tj. egzistenciju $s \in U_\beta$ tako da je $\left|\left\{b \in X \mid b \supset s\right\}\right| > 1$. U suprotnom bi svakom $b \in X$ odgovarao $t(b) \in U|\alpha$, tako da je $t(b)\ \ b$ i $\left\{b' \in X \mid b' \supset t(b)\right\} = \left\{b\right\}$. To znači da je $b \mapsto t(b)$, $t \in X$ jasno 1-1 preslikavanje, suprotno činjenicama $|U|\alpha| \leq |\alpha| + \omega < \lambda_\xi$ i $|X| = \lambda_\xi$.

<u>Slučaj 3.</u> $\lim(\alpha)$. Neka je

$$U_\alpha = \left\{Ul \mid l \subset U|\alpha \text{ je maksimalni } \alpha\text{-lanac i } \left\{b \in X \mid b \supset l\right\} \not\geq \phi\right\}.$$

Da je $U_\alpha \not\geq \phi$ dokazujemo kao u slučaju 2. Zato dokažimo samo da je $|U_\alpha| \leq |\alpha| + \omega$. Predpostavimo li da je $|U_\alpha| > |\alpha|$, tada jednostavnim rasudjivanjem iz $U|(\alpha+1)$ možemo izdvojiti $|\alpha|$-Cantorovo poddrvo drveta $\underline{T}$ suprotno predpostavci o drvetu $\underline{T}$.

Neka je $U = \bigcup\{U_\alpha | \alpha < \lambda_\xi\}$ i $\underline{U} = (U, \subset)$. Kako je $\underline{U}$ jedno $(\lambda_\xi,\lambda_\xi)$-drvo i kako $\underline{T}$ ne sadrži λ_ξ-Aronszajnovo poddrvo, to $\underline{U}$ mora imati kofinalan λ_ξ-lanac $l \subset U$. Neka je $b \supseteq l$ maksimalno produženje lanca l u T. Neposredno po konstrukciji proveravamo da b zadovoljava uslov (11).

Koristeći se uslovom (11) možemo naći monotono $\subset$-rastući niz $\{t_\alpha\}_{\alpha<\lambda_\xi}$ elemenata iz b i niz $\{b_\alpha\}_{\alpha<\lambda_\xi}$ elemenata iz X, tako da je $R(b,b_\alpha) = t_\alpha$, za svako $\alpha < \lambda_\xi$. Pored toga možemo predpostaviti da je $b_\alpha \lhd b_\beta$ za svako $\alpha < \beta < \lambda_\xi$.

Neka je $X' = \{t_\alpha | \alpha < \lambda_\xi\}$ $(\subset T)$. Dokažimo da je $[X']^r \cap I^r_\xi = \phi$, čime ćemo dobiti protivrečnost sa predpostavkom da $(I^r_\xi)_{\xi<\nu}$ dokazuje $\kappa \nrightarrow [\lambda_\xi]^r_{\xi<\nu}$ (jer $|X'| = \lambda_\xi$).

Neka je $\{t_{\alpha_0}, \ldots, t_{\alpha_{r-1}}\} \in [X']^r$, $\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_{r-1} < \lambda_\xi$, proizvoljan element i neka je $\alpha_r > \alpha_{r-1}$.

Posmatrajmo $\{b_{\alpha_0}, \ldots, b_{\alpha_{r-1}}, b_{\alpha_r}\} \in [X]^{r+1}$. Po predpostavci je $\{b_{\alpha_0}, \ldots, b_{\alpha_{r-1}}, b_{\alpha_r}\} \notin I^{r+1}_\xi$, što na osnovu definicije znači da

$$\{t_{\alpha_0}, \ldots, t_{\alpha_{r-1}}\} = R\{b_{\alpha_0}, \ldots, b_{\alpha_{r-1}}, b_{\alpha_r}\} \notin I^r_\xi ,$$

što je i trebalo dokazati. Ovo završava dokaz teoreme 2.23. ∎

Sledeća teorema daje konsistentnost pozitivnog odgovora na najopštiju formu problema 17 A Erdös i Hajnala. Inače, konsistentnost jednog dela njenih relacija, tj. relacija oblika $\kappa^{++} \nrightarrow [\kappa^+]^3_{\kappa^+}$, $\kappa \geq \omega$ je dobio i R.A. Shore [67].

<u>Teorema 2.24.</u> $(V = L[G])$ Neka je κ proizvoljan regularan neprebrojiv i ne slabo kompaktan kardinal, tada je

$$\kappa^{(n)+} \nrightarrow [\kappa]^{n+2}_\kappa , \text{ za svako } n < \omega.$$

Dokaz: Pre svega primetimo da za svaki slabo kompaktan kardinal κ važi $\kappa^{(n)+} \to [\kappa]^{n+2}_{\kappa}$, jer (po definiciji) važi $\kappa \to (\kappa)^{n+2}_{2}$, za svako $n < \omega$.

Neka je proizvoljan regularan neprebrojiv i ne slabo kompaktan kardinal, tada na osnovu $V = L[G]$ znamo da postoji κ-Suslinovo drvo. U dokazu teoreme 2.21 smo koristili samo egzistenciju κ-Suslinovog drveta, što znači da važi $\kappa \nrightarrow [\kappa]^{2}_{\kappa}$. Na osnovu teoreme 2.23. ovu relaciju možemo uzastopno "stepenovati", tako da dobijamo da važe gornje relacije. ■

Pomoću teoreme 2.23 možemo "stepenovati" i relacije teoreme 2.19. Tako dobijamo:

Teorema 2.25. ($V = L[G]$) Neka je $\kappa \geq \omega$ proizvoljan kardinal, tada važi:

(a) $\kappa^{(n+1+} \nrightarrow [cf(\kappa)^{+}, (\kappa^{+})_{\kappa}\cancel{+}]^{n+2}$, za svako $n < \omega$

(b) $\kappa^{(n+1)+} \nrightarrow [r+n+1, (\kappa^{+})_{\kappa^{+}}]^{r+n}$, za svano $n < \omega$ i $2 \leq r < \omega$. ■

Specijalan slučaj problema 17 A Erdösa i Hajnala pita da li GCH implicira $\omega_2 \nrightarrow [\omega_1]^{3}_{\omega_1}$. Sa druge strane mi smo u teoremi 2.24. pokazali konsistentnost (sa GCH) te relacije. Zato se postavlja pitanje nije li bilo nužno tražiti taj rezultat konsistentnosti, tj. da li GCH implicira $\omega_2 \nrightarrow [\omega_1]^{3}_{\omega_1}$, bez dodatnih aksiomatskih predpostavki. Danas je opštepoznato da se $\omega_2 \nrightarrow [\omega_1]^{3}_{\omega_1}$ ne može dokazati u ZFC + GCH. Naime, to sledi iz činjenice da hipoteza Changa Δ implicira $\omega_2 \to [\omega_1]^{3}_{\omega_1}$ i da je Δ konsistentno sa ZFC + GCH (v. [71], [11]). Dokažimo ovu činjenicu i ovde.

Naime, $\omega_2 \to [\omega_1]^{3}_{\omega_1}$ ćemo izvesti iz sledeće forme rečenice Δ:

za svako preslikavanje $f: \omega_2 \times \omega_2 \times \omega_2 \to \omega_2$, postoji $X \subseteq \omega_2$, tako da je $|X| = \omega_1$, $|X \cap \omega_1| = \omega$ i $f''(X^3) \subseteq X$.

Neka je $[\omega_2]^3 = \bigcup \{I_\xi \mid \xi < \omega_2\}$ proizvoljna disjunktna particija skupa $[\omega_2]^3$. Ono odredjuje preslikavanje $f: \omega_2 \times \omega_2 \times \omega_2 \to \omega_1$ na sledeći način:

$$f(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} \xi \text{ ako su } x_1,x_2,x_3 \text{ medjusobno različiti i } \{x_1,x_2,x_3\} \in I_\xi; \\ 0 \text{ u drugom slučaju.} \end{cases}$$

Na osnovu Δ postoji $X \; \omega_2$, tako da je $|X| = \omega_1$, $|X \cap \omega_1| = \omega$ i $f''(X^3) \subseteq X$. Neka je $\xi \in \omega_1 - X$ proizvoljan (postoji, jer $|X \cap \omega_1| = \omega$), tada je $\xi \notin f''(X^3)$. Na osnovu definicije f lako sledi da je $[X]^3 \cap I_\xi = \phi$ što je i trebalo dobiti. ■

Treća primena teoreme 2.4. se odnosi na "stepenovanje" izvesnih relacija, koje predstavljaju profinjenja relacija $\kappa \to (\lambda_\xi)^r_{\xi<\nu}$ i $\kappa \to [\lambda_\xi]^r_{\xi<\nu}$ i koje su prvi put ispitivane u [26,§19].

Neka Γ_ξ, $\xi < \nu$ označava ili kardinal λ_ξ ili par $[{i_\xi \atop j_\xi}]$ konačnih kardinala. Tada relacija

$$\kappa \to (\Gamma_\xi)^r_{\xi < \nu}$$

označava sledeću rečenicu: za svaku particiju $[\kappa]^r = \cup \{I_\xi | \xi < \nu\}$ postoji $X \subseteq \kappa$ i $\xi < \nu$, tako da je ili $\Gamma_\xi = \lambda_\xi$, $|X| = \lambda_\xi$, $[X]^r \subseteq I_\xi$ ili $\Gamma_\xi = [{i_\xi \atop j_\xi}]$, $|X| = i_\xi$, $|[X]^r \cap I_\xi| \geq j_\xi$.

Relacija

$$\kappa \to [\Gamma_\xi]^r_{\xi < \nu}$$

označava sledeću rečenicu: za svaku disjunktnu particiju $[\kappa]^r = \cup \{I_\xi | \xi < \nu\}$, postoji $X \subseteq \kappa$ i $\xi < \nu$, tako da je ili $\Gamma_\xi = \lambda_\xi$, $|X| = \lambda_\xi$, $[X]^r \cap I_\xi = \phi$ ili $\Gamma_\xi = [{i_\xi \atop j_\xi}]$, $|X| = i_\xi$, $|[X]^r \cap \cup\{I_{\xi'} | \xi' \neq \xi, \xi' < \nu\}| \geq j_\xi$.

<u>Teorema 2.26</u>. (Erdös, Hajnal, Rado [26, §19]) Neka je $\kappa \geq \omega$ o $r \geq 3$, tada važi:

(a) $\kappa^+ \not\to [[{r+1 \atop 3}], (\kappa^+)_\kappa]^r$;

(b) $\kappa^+ \to [[{r+1 \atop 2}], \kappa^+]^r$. ■

Iz ove teoreme imamo, posebno, da za svako $\kappa \geq \omega$ i $r \geq 3$ važi

$$\kappa^+ \to \left([{r+1 \atop 2}], \kappa^+\right)^r \tag{12}$$

$$\kappa^+ \not\to \left([{r+1 \atop 3}], \kappa^+\right)^r . \tag{13}$$

Opet se postavlja pitanje važenja "stepping-up" implikacija za ove generalisane relacije. Relacija (12) se može stepenovati, tj. za svako $\kappa \geq \omega$.$3 \leq r < \omega$ i $n < \omega$ važi

$$\kappa^{(n+1)+} \to \left(\left[{r+1+n \atop 2+n} \right], \kappa^+ \right)^{r+n},$$

uz predpostavku GCH (v. [26, Theorem 29A]).

Pitanje da li se relacija (13) može stepenovati, tj. da li važi

$$\kappa^{(n+1)+} \nrightarrow \left(\left[{r+1+n \atop 3+n} \right], \kappa^+ \right)^{r+n}, \quad \kappa \geq \omega,\ 3 \leq r < \omega,\ u < \omega,$$

je ostalo otvoreno (v, [26, str. 16o]). Mi ćemo ovde pokazati konsistentnost važenja te relacije (odnosno "stepping-up" implikacije).

<u>Teorema 2.27.</u> $(V = L[G])$ Neka je $\kappa \geq \omega$, $3 \leq r < \omega$ i $n < \omega$, tada važi relacija

$$\kappa^{(n+1)+} \nrightarrow \left(\left[{r+1+n \atop 3+n} \right], \kappa^+ \right)^{r+n}.$$

<u>Dokaz</u>: Dokaz izvodimo indukcijom po $n < \omega$. Predpostavimo da važi

$$\kappa^{(n+1)+} \nrightarrow \left(\left[{r+1+n \atop 3+n} \right], \kappa^+ \right)^{r+n} \tag{14}$$

(u slučaju $n=0$ to je relacija (13)). Neka je $\lambda = \kappa^{(n+1)+}$ i neka je $\underline{T} = (T, \subset)$ λ-Kurepino drvo koje ne sadrži ni jedno κ^+-Aronszajnovo poddrvo i nijedno μ-Cantorovo poddrvo, $\mu \geq \omega$. Opet predpostavljamo da je T početni komad skupa ${}^{\lambda}2$ i da je $E = E(T)$ kolekcija svih maksimalni lanaca drveta T. Opet definišemo $R(b,b')$ kao u ranijim dokazima, pri čemu za $A \subseteq E$ stavljamo $RA = \{ R(b,b') \mid b,b' \in A,\ b \neq b' \}$. Neka je $(I_o^n, I$ disjunktna $(r+n)$-particija skupa T koja dokazuje (14). Trebamo naći $(r+n+1)$-particiju skupa E koja dokazuje

$$\kappa^{(n+2)+} \nrightarrow \left(\left[{r+1+n+1 \atop 3+n+1} \right], \kappa^+ \right)^{r+n+1}. \tag{15}$$

Neka je $\lhd$ fiksirano dobro uredjenje skupa E po tipu λ^+. Traženu particiju (I_o^{n+1}, I_1^{n+1}) definišemo na sledeći način:

$$\{b_o, \ldots, b_{r+n}\}_{\triangleleft} \in I_o^{n+1} \text{ akko je } R(b_o, b_1) \ \ldots \ R(b_{r+n-1}, b_{r+n}) \text{ i}$$

$$R\{b_o, \ldots, b_{r+n}\} \in I_o^n,$$

dok je $I_1^{n+1} = [E]^{r+n+1} - I_o^{n+1}$.

Ukoliko predpostavimo suprotno, da (I_o^{n+1}, I_1^{n+1}) ne dokazuje (15) mora važiti bar jedan od sledeća dva slučaja.

Slučaj 1. Postoji $X \subseteq E$, $|X| = r+n+2$ i $|[X]^{r+n+1} \cap I_o^{n+1}| \geq 3+n+1$. Neka je $X = \{b_o, \ldots, b_{r+n+1}\}$ numeracija skupa X inducirana uredjenjem $\triangleleft$. Dokažimo prvo da važi

$$R(b_o, b_1) \subset R(b_1, b_2) \subset \ldots \subset R(b_{r+n}, b_{r+n+1}). \tag{16}$$

U suprotnom postoje $i < j \leq r+n$ tako da je ili $R(b_i, b_{i+1}) \| R(b_j, b_{j+1})$ ili $R(b_j, b_{j+1}) \subset R(b_i, b_{i+1})$.

Posmatrajmo samo prvi slučaj, jer će se drugi diskutovati potpuno analogno. Neka je $t = \subset$-najveći element iz T sa osobinom $t \subset R(b_i, b_{i+1}), R(b_j, b_{j+1})$. (Napomenimo da se u svakom od dosadalsnjih pojavljivanja $\subset$ smatra strogom inkluzijom.)

Odavde lako dokazujemo da je $i+1 < j$ i da je $R(b_i, b_j) = R(b_{i+1}, b_j) = t$.

Neka su A_l, $l < 3+n+1$ elementi skupa $[X]^{r+n+1}$ koji pripadaju I_o^{r+1}. Kako skupova A_l ima bar četiri to mora postojati $l < 3+n+1$ tako da je $b_i, b_{i+1}, b_j \in A_l$. Neka je $A_l = \{b'_o, b'_1, \ldots, b'_{r+n}\}$. Kako je $A_l \in I_o^{n+1}$ to je

$$R(b'_o, b'_1) \subset \ldots \subset R(b'_{r+n-1}, b'_{r+n}),$$

odakle je

$$R(b'_i, b'_{i+1}) = R(b'_i, b'_j),$$

za svako $i < j \leq r+n$. Odatle je

$$R(b_i, b_{i+1}) = R(b_i, b_j) = t,$$

što je nemoguće.

Dakle, možemo smatrati da važi (16). Neka je

$$Y = \{R(b_o, b_1), R(b_1,b_2), \ldots, R(b_{r+n}, b_{r+n+1})\}.$$

Na osnovu (16) lako proveravamo da je $R A_l \in [Y]^{r+n}$, za svako $l < 3 + n+1$.

Pokažimo da skup $\{R A_l | l < 3+n+1\}$ ima $\geq 3+n$ člana.

Skup $X-A_l$ je tačno jednočlan. Neka je $k(l) \leq r+n+1$, takav indeks da je $b_{k(l)}$ jedinstveni element skupa $X-A_l$. Jasno je, da iz $l \neq l'$ sledi $k(l) \neq k(l')$, pa je zato za najviše jedno $l < 3+n+1$ $k(l) = r+n+1$.

Neka je $l < 3+n+1$, tada lako proveravamo da u slučaju $k(l) < r+n+1$ važi

$$R(b_{k(l)}, b_{k(l)+1}) \notin R A_l$$

Kako je $R(b_{k(l)}, b_{k(l)+n}) \neq R(b_{k(l')}, b_{k(l')+1})$ za $l \neq l'$, $l,l' < 3+n+1$, kako je $|R A_l| = r+n$ i $|Y| = r+n+1$, tada je jasno da je za svako $l\ l' < 3+n+1$, $k(l), k(l') \neq r+n+1$,

$$R A_l \neq R A_{l'},\quad ,$$

tj. da je skup $\{R A_l | l < 3+n+1\}$ najmanje 3+n-točlan.

Medjutim, činjenica da je $R A_l \in I_o^n$, $l < 3+n+1$ implicira da je $[Y]^{r+n} \cap I_o^r \supseteq \{R A_l | l < 3+n+1\}$, što je suprotno predpostavci da (I_o^n, I_1^n) dokazuje relaciju (14).

<u>Slučaj 2</u>. Postoji $X \subseteq E$, tako da je $|X| = \kappa^+$ i $[X]^{r+n+1} \subseteq I_1^{n+1}$.

Kao u dokazu teoreme 2.23. nalazimo maksimalni lanac b drveta $\underline{T}$ tako da je

$$|\{R(b,b') | b' \neq b,\ b' \in X\}| = \kappa^+.$$

To znači da možemo konstruisati strogo $\subset$-rastući niz $\{t_\alpha\}_{\alpha<\kappa^+}$ elemenata iz b i niz $\{b_\alpha\}_{\alpha<\kappa^+}$ elemenata iz X, tako da je $t_\alpha = R(b,b_\alpha)$ za svako $\alpha < \kappa^+$. Pored toga možemo predpostaviti da je $b_\alpha \lhd b_\beta$ za svako $\alpha < \beta < \kappa^+$

Neka je $Y = \{t_\alpha | \alpha < \kappa^+\}$ i neka je $\{t_{\alpha_0}, \ldots, t_{\alpha_{r+n-k}}\}$ $\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_{r+n-1}$ proizvoljan r+n-točlan skup. Neka je $\alpha_{r+n} > \alpha_{r+n-1}$ proizvoljan.

Neposredno proveravamo da je

$$R\left\{b_{\alpha_0}, \ldots, b_{\alpha_{r+n-1}}, b_{\alpha_{r+n}}\right\} = \left\{t_{\alpha_0}, \ldots, t_{\alpha_{r+n-1}}\right\},$$

odakle na osnovu definicije particije (I_o^{n+1}, I_1^{n+1}) i $[X]^{r+n+1} \subseteq I_1^{n+1}$ mora biti $\left\{t_{\alpha_0}, \ldots, t_{\alpha_{r+n-1}}\right\} \varepsilon\, I_1^n$ .Dakle,

$$[Y]^{r+n} \subseteq I_1^n,$$

što je suprotno predpostavci da (I_o^n, I_1^n) dokazuje (14). Ovim je dokaz teoreme 2.27. završen. ∎

Potpuno analogno se dokazuje da je i relaciju (a) teoreme 2.26. moguće stepenovati, tj. da važi sledeća teorema:

Teorema 2.28. (V = L[G]) Neka je $\kappa \geq \omega$, $3 \leq r < \omega$ i $n < \omega$, tada važi relacija

$$\kappa^{(n+1)+} \nrightarrow [[{}^{r+1+n}_{3+n}], (\kappa^+)_{\kappa^+}]^{r+n}. \;\blacksquare$$

3. JEDAN PROBLEM O BESKONAČNIM GRAFOVIMA

Graf $\underline{G}$ je uredjajni par (G, E), gde je $E \subseteq [G]^2$ proizvoljan podskup. Elemente skupa G nazivamo temenima a elemente skupa E stranicama grafa $\underline{G}$. Sledeći Kurepu podskup $H \subseteq G$ nazivamo lanac odnosno antilanac grafa $\underline{G}$, ako je $[H]^2 \subseteq E$ odnosno $[H]^2 \cap E = \phi$. Podgraf grafa $\underline{G}$ je svaki graf (H, D), gde je $H \subseteq G$ i $D \subseteq E$.

Hromatski broj $Cbr(\underline{G})$ grafa $\underline{G}$ je najmanji kardinal λ, za koga postoji razlaganje skupa G na λ antilanaca grafa $\underline{G}$ (v. [24]).

$\underline{G}$ = (G, E) je Shalahov graf ako je $|G| = \omega_1$ i ako postoji $X \subseteq G$, $|X| = \omega$, tako da je $\left|\left\{x \in X \,\middle|\, \{x,y\} \in E\right\}\right| \geq \omega$, za svako $y \in G-X$.

U [21, Problem 4] Erdös, Galvin i Hajnal pitaju da li se u ZFC može dokazati egzistencija grafa $\underline{G} = (\omega_1, E)$, takvog da je $Cbr(\underline{G}) = \omega_1$ i $\underline{G}$ ne sadrži ni jedan Shelahov podgraf. Naime, pitanje je postavljeno u ovoj formi, jer je u [34] pokazano da u L takav graf postoji (vidi, takodje, [21, Theorem 6.6.]). Mi ćemo ovde pokazati da je odgovor na ovaj problem negativan. Naime, važi:

Teorema 3.1. (MA + $\neg$CH) Svaki graf moći ω_1 koji ne sadrži Shelahov podgraf ima hromatski broj $\leqslant \omega$.

Dokaz: Neka je $\underline{G} = (\omega_1, E)$ proizvoljan graf koji ne sadrži ni jedan Shelahov podgraf.

Parcijalno uredjen skup P definišemo na sledeći način:

$p \in P$ akko je p konačna funkcija iz ω_1 u ω, tako da je $p^{-1}(n)$ antilanac grafa $\underline{G}$ za svako $n \in \text{rang}(p)$.

$p, q \in P$, $p \leqslant q$ akko je $p \supseteq q$.

Skup

$$D_\alpha = \{p \in P \mid \text{dom}(p) \ni \alpha\}$$

je gust u P za svako $\alpha < \omega_1$, što se jednostavno proverava. Predpostavimo, za trenutak, da smo dokazali da P zadovoljava c.c.c. Na osnovu MA + $\neg$CH postoji $\{D_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$-generički podskup H od P. Neka je

$$h = \cup H$$

Neposredno proveravamo da je h preslikavanje ω_1 u ω, takvo da je za svako $n \in \text{rang}(h)$ $h^{-1}(n)$ antilanac grafa $\underline{G}$. To znači da je $\text{Chr}(\underline{G}) \leqslant \omega$, što nam i treba.

Dokažimo sada da P zadovoljava c.c.c. Predpostavimo suprotno tj. da postoji familija $\mathcal{F} = \{p_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ od ω_1 medjusobno nekompatibilnih elemenata iz P. Na osnovu leme Marczewskog možemo predpostaviti da postoji B ω_1, takav da je

$$\text{dom}(p_\alpha) \cap \text{dom}(p_\beta) = B,$$

za svako $\alpha < \beta < \omega_1$ i da je $p_\alpha | B = p_\beta | B$, za svako $\alpha, \beta < \omega_1$. To znači da je za svako $\alpha < \beta < \omega_1$ $p_\alpha \cup p_\beta$ funkcija, što na osnovu predpostavke znači da postoji $x \in \text{dom}(p_\alpha)$ i $y \in \text{dom}(p_\beta)$, $x \neq y$ tako da je $\{x, y\} \in E$ i $p_\alpha(x) = p_\beta(y)$.

Neka je $B_\alpha = \text{dom}(p_\alpha) - B$, za svako $\alpha < \omega_1$. Prelazeći na podskup od F moći ω_1 možemo predpostaviti da je

$$\max B < \min B_\alpha \leq \max B_\alpha < \min B_\beta$$

za svako $\alpha < \beta < \omega_1$.

Neka je $X = \bigcup\{B_n \mid n < \omega\}$. Dakle, imamo da je $|X| = \omega$. Predpostavimo da je $|B_\alpha| = k$, za svako $\alpha < \omega_1$ (opet prelazeći na neprebrojiv podskup od $\widetilde{\mathcal{F}}$). To znači da za svako $\alpha < \omega_1$ imamo monotonu numeraciju $\{x_\alpha^i \mid i < k\}$ skupa B_α.

Neka je $V_o = X \cup \{x_\alpha^o \mid \omega \leq \alpha < \omega_1\}$.

Kako $(V_o, [V_o]^2 \cap E)$ nije Shelahov graf, to postoji $y \in V_o - X$ za koga je $|\{x \in X \mid \{x, y\} \in E\}| < \omega$. Naime, postoji neprebrojivo mnogo takvih $y \in V_o - X$.

Dakle, postoji neprebrojiv $S_o \subseteq [\omega, \omega_1)$ takav da je $|\{x \in X \mid \{x, x_\alpha^o\} \in E\}| < \omega$, za svako $\alpha \in S_o$. Kako je X prebrojiv, to možemo predpostaviti da je za neki konačan $A_o \subseteq X$ ispunjeno

$$A_o = \{x \in X \mid \{x, x_\alpha^o\} \in E\},$$

za svako $\alpha \in S_o$, Postupak dalje produžavamo na svako $0 < i < k$. Naime, prvo obrazujemo $V_i = X \cup \{x_\alpha^i \mid \alpha \in S_{i-1}\}$. Kako $(V_i, [V_i]^2 \cap E)$ nije Shelahov graf to kao gore možemo naći neprebrojiv $S_i \subseteq S_{i-1}$ i konačan $A_i \subseteq X$ tako da je

$$A_i = \{x \in X \mid \{x, x_\alpha^i\} \in E\}, \tag{1}$$

za svako $\alpha \in S_i$.

Neka je $A = \bigcup\{A_i \mid i < k\}$ i neka je $n < \omega$, takav da je $B_n \quad A = \phi$ (postoji, jer je A konačan a B_n, $n < \omega$ disjunktni i neprazni).

Neka je $\alpha \in S_{k-1}$ proizvoljan. Kao što smo gore napomenuli kako p_n i p_α nisu kompatibilni mora postojati $x \in B_n$ i $x_\alpha^i \in B_\alpha$, tako da je $\{x, x_\alpha^i\} \in E$ i $p_n(x) = p_\alpha(x_\alpha^i)$.

Kako je $S_{k-1} \subseteq S_i$, to na osnovu (1) imamo da je $x \in A_i$ suprotno predpostavci da je $B_n \cap A = \phi$. Ovo završava dokaz teoreme. ∎

D

1. σ-GUSTI PARCIJALNO UREDJENI SKUPOVI

Neka je P proizvoljan parcijalno uredjen skup i neka je $D \subseteq P$. D nazivamo otvorenim u P ako iz $p \leqslant q$ i $q \in D$ sledi $p \in D$, tj. ako je D otvoren u topologiji na P čiju bazu čini kolekcija $(\cdot, p]$, $p \in P$. D je gust u P, ako za svako $p \in P$ postoji $q \leqslant D$, tako da je q p. P je <u>σ-gust</u> parcijalno uredjen skup, ako je $\cap \{D_n \mid n \in \omega\}$ gust u P, za proizvoljan niz $\{D_n\}_{n \in \omega}$ gust otvorenih podskupova od P, tj. ako je P prostor Baire-a u gornjoj topologiji. P je σ-zatvoren, ako za svaki monotono opadajući niz $\{p_n\}_{n \in \omega}$ elemenata iz P postoji $p \in P$, tako da je $p \leqslant p_n$, za svako $n \in \omega$. Jasno je, da je svaki σ-zatvoren parcijalno uredjen skup i σ-gust.

U ovom odeljku mislimo posmatrati pitanje moći σ-gustih parcijalno uredjenih skupova. Da bi izbegli trivijalne slučajeve smatraćemo da je svaki parcijalno uredjen skup sa kojim budemo radili <u>razdeljiv</u> (v. [37, str. 52]), tj. da za svaka dva njegova elementa p i q važi bar jedan uslov

(1) $q \leqslant p$ ili

(2) postoji $r \leqslant q$ koji je nekompatibilan sa p.

Jasno je, da svaki (razdeljiv) σ-zatvoren parcijalno uredjen skup ima moć $\geqslant 2^{\omega}$ nezavisno od CH, pa se zato postavlja pitanje, da li to isto važi i za σ-guste parcijalnouredjene skupove. Drugim rečima, da li postoji σ-gust parcijalno uredjen skup moći ω_1 (v. [13, str.75]).

Jedan (neapsolutan) primer takvog parcijalno uredjenog skupa možemo dobiti pomoću Suslinovog drveta. Naime, ako je $(T, \leq_T)$ proizvoljno Suslinovo drvo, tada je $(T, \geq_T)$ σ-gust parcijalno uredjen skup moći ω_1. Dakle, gore je postavljeno pitanje egzistencije apsolutnog primera parcijalno uredjenog σ-gustog skupa moći ω_1.

Ovde ćemo pokazati da u ZFC nemožemo konstruisati σ-gust parcijalno uredjen skup moći ω_1. Da bi to izveli konstruisaćemo prvo model teorije ZFC $+ \neg$wKH + MA + $\neg$CH, gde je

wKH: Postoji normalno ω_1-drvo moći ω_1 koje ima više od ω_1 maksimalnih ω_1-lanaca.

U dokazu će biti korišćena kombinacija ideja iz [59] i iz [14], gde je dokazana konsistentnost teorije ZFC $+ \neg$KH + MA + $\neg$CH. U drugom delu će biti date neke primene ovog rezultata u skupovno-teorijskoj topologiji.

Neka je M p.t.m. teorije ZFC+V = L i neka je κ prvi inakcesibilan kardinal u M. Kako $\neg$KH implicira da je ω_2 inakcesibilan kardinal u L, to je ova predpostavka opravdana.

Definišemo C u M kao parcijalno uredjen skup svih konačnih funkcija p, tako da je $\mathrm{dom}(p) \subseteq \kappa$ i $\mathrm{rang}(p) \subseteq 2$, koji uredjujemo sa: $p \leq_C q$ akko je $p \supseteq q$.

Ako je G M-generički podskup od C tada je $2^{\omega} = \kappa$ u $M[G]$. Kako C zadovoljava c.c.c. to M i $M[G]$ imaju iste kardinale i funkciju kofinalnosti.

Za $\gamma < \kappa$ definišemo $C_\gamma = \{p \in C \mid \mathrm{dom}(p) \subseteq \gamma\}$ i $C^\gamma = \{p \in C \mid \mathrm{dom}(p) \cap \gamma = \phi\}$. Kako važi $C \cong C_\gamma \times C^\gamma$, to je $G_\gamma = G \cap C_\gamma$ M-generički podskup od C_γ, a $G^\gamma = G \cap C^\gamma$ je $M[G_\gamma]$-generički podskup od C^γ i $M[G_\gamma][G^\gamma] = M[G]$.

Neka je $B = RO(C)$ (u M). Kako je C kanonski izomorfno gustom podskupu od B, to ćemo C identifikovati sa tim podskupom. Tako ćemo sa B_γ označavati kompletnu Booleovu algebru generisanu sa C_γ, za svako $\gamma < \kappa$.

U M definišemo skup F svih funkcija f sa osobinama:

(i) $f: \kappa \times (\omega_1 \times \kappa) \to B$;

(ii) $\gamma \neq \gamma' \to f(\gamma, (\alpha,\beta)) \wedge f(\gamma', (\alpha,\beta)) = 0$;

(iii) $\gamma \geq \beta \to f(\gamma, (\alpha,\beta)) = 0$;

(iv) $|\{z \in \kappa \times (\omega_1 \times \kappa) | f(z) > 0\}| \leq \omega_1$;

(v) postoji ordinal $\varphi(f) < \omega_1$, takav da je $f(\gamma, (\alpha,\beta)) = 0$, za $\alpha \geq \varphi(f)$;

(vi) rang $(f|\delta) \subseteq B_{\delta^+}$, za svaki ordinal $\delta < \kappa$, gde je $f|\delta = f|(\delta \times (\omega_1 \times \delta))$ a δ^+ prvi kardinal veći od δ.

Dakle, ovo je Devlinova modifikacija parcijalno uredjenog skupa Mitchella iz [59, str. 26-27]. Mi se za naše potrebe možemo koristiti direktno i Mitchellovim parcijalno uredjenim skupom.

Koristeći F možemo definisati u $M[G]$ parcijalno uredjen skup P na sledeći način. Za $f \in F$ definišemo

$$\bar{f} = \{(\gamma, (\alpha,\beta)) | (\exists p \in G)\ [p \leq_B f(\gamma, (\alpha,\beta))]\}.$$

Neka je $P = \{\bar{f} |\ f \in F\}$, i $\bar{f} \leq_p \bar{g}$ akko je $\bar{f} \supseteq \bar{g}$.

Definišimo u M parcijalno uredjen skup Q sa domenom $C \times F$ stavljajući $(p,f) \leq_Q (q,g)$ akko je $p \leq_c q$ i $p \mid\mid\!-_c$ "$\bar{f} \leq_p \bar{g}$" (tj. $p \supseteq q$ i $p \mid\mid\!-_c$ "$\bar{f} \supseteq \bar{g}$").

Na osnovu leme o.4. znamo da, ako je K M-generički podskup od Q, gde je $G = \{p \in C | (p, 0_F) \in K\}$ $(0_F = \{(z,0) | z \in \kappa \times (\omega_1 \times \kappa)\})$ i ako je $H = \{\bar{f} \in P |\ (\phi, f) \in K\}$, tada je H $M[G]$-generički podskup od P i $M[G][H] = M[K]$.

U M definišemo uredjenje $\leq_F$ skupa F sa: $f \leq_F g$ ako i samo ako je $1 \mid\mid\!-_c$ "$\bar{f} \supseteq \bar{g}$", tj. $f(z) \geq_B g(z)$, za svako $z \in \kappa \times (\omega_1 \times \kappa)$. Neka je $\{f_\alpha | \alpha < \delta\}$, $\delta < \omega_1$ $\leq_F$-opadajući niz iz F (u M). Definišimo $g: \kappa \times (\omega_1 \times \kappa) \to B$ sa: $g(z) = V^B\{f_\alpha(z) | \alpha < \delta\}$, za svako $z \in \kappa \times (\omega_1 \times \kappa)$. Pisaćemo $g = \Lambda_{\alpha<\delta} f_\alpha$. Jasno je, da je $g \in F$ i $g \leq_F f_\alpha$, za svako $\alpha < \delta$.

Navodimo neke osobine parcijalno uredjenog skupa Q. P zadovoljava κ-c.c. u $M[G]$. Q zadovoljava κ-c.c. u M. U $M[K]$ važi $2^\omega = 2^{\omega_1} = \omega_2$, $\omega_1^{M[K]} = \omega_1^{M[G]} = \omega_1^M$, $\omega_2^{M[K]} = \kappa$.

Za $\gamma < \kappa$ u M definišemo $F_\gamma = \{f|\gamma | f \in F\}$, $F^\gamma = \{f-f|\gamma \ | f \in F\}$, $Q_\gamma = C_\gamma \times F_\gamma$ i $Q^\gamma = C^\gamma \times F^\gamma$. Neka je $K_\gamma = K \cap Q_\gamma$ i $K^\gamma = K \cap Q^\gamma$. U $M[G]$ za svako $\gamma < \kappa$ stavljamo $P_\gamma = \{f|\gamma \ | f \in P\}$ i $P^\gamma = \{f-f|\gamma \ | f \in P\}$. Primetimo da za regularan u M kardinal $\lambda > \omega_1^M$ važi $P_\lambda \in M[G_\lambda]$ i da P_λ i P^λ odgovaraju skupovima F_λ i F^λ na isti način na koji P odgovara skupu F. U $M[G_\gamma]$ skup Q^γ uredimo sa:

$$(p,f) \leqslant_{Q^\gamma} (q,g) \text{ akko je } p \leqslant_C q \text{ i } (\exists\, p' \in G_\lambda)\ [p' \cup p \ \Vdash_C \text{"}\bar{f} \ \bar{g}\text{"}].$$

Ako je $\lambda > \omega_1^M$ regularan kardinal u M, tada je K_λ M-generički podskup od Q_λ i K^λ je $M[K_\lambda]$ generički podskup od Q^λ i važi $M[K] = M[K_\lambda][K^\lambda]$ (v. [11, lemama 4.7.]).

U $M[K_\gamma]$ $(\gamma < \kappa)$ skup F^γ uvodimo relacijom $\leqslant_F$ (ista oznaka kao gore): $f \leqslant_F g$ ako i samo ako (u $M[K_\gamma]$) važi $1 \Vdash_{C^\gamma}^{M[K_\gamma^F]}$ "$\bar{f} \supseteq \bar{g}$".

<u>Lema 1.1.</u> ([11, Lemma 4.8.] Neka je $\gamma \geqslant \omega_1^M$, $\delta < \omega_1^M$ i $\{f_\xi | \xi < \delta\}$ niz elemenata iz F^γ u $M[K_{\gamma^+}]$, takav da iz $\xi < \xi' < \delta$ sledi $f_{\xi'} \leqslant_F f_\xi$. Tada postoji $g \in F^\gamma$, tako da važi

$$M[K_{\gamma^+}] \models \text{"}(\forall_\xi < \delta)(1 \Vdash_{C^{\gamma^+}} \text{"}\bar{g} \supseteq \bar{f}_\xi\text{"}).$$

Element $g \in F^\gamma$ ove leme ćemo označavati sa $\Lambda_{\xi < \delta} f_\xi$. Sledeća lema je centralno mesto u dokazu konsistentnosti teorije ZFC+ $\neg$wKH+MA+ $\neg$CH.

<u>Lema 1.2.</u> Neka je $\lambda > \omega_1^M$ regularan kardinal u M. Neka je R parcijalno uredjen skup u $M[K_\lambda]$ i $M[K_\lambda] \models$ "R zadovoljava c.c.c.". Neka je $\underline{T}$ normalno ω_1-drvo moći ω_1 i $M[K_\lambda][I]$, gde je I $M[K_\lambda]$-generički podskup od R. Neka važi $M[K][I] \models$ "b je maksimalni ω_1-lanac drveta $\underline{T}$". Tada je $b \in M[K_\lambda][I]$.

<u>Dokaz:</u> Na osnovu lema o.3. i o.4. iz uvoda rada zaključujemo da je $M[K_\lambda][I][G^\lambda][H^\lambda] = M[K][I]$, pri čemu važe i odgovarajući uslovi generičnosti, gde je $H_\lambda = H \cap P_\lambda$ i $H^\lambda = H \cap P^\lambda$.

Predpostavimo da zaključak leme 1.2. ne važi, tj. da postoji maksimalan ω_1-lanac b drveta $\underline{T}$ u $M[K][I]$, koji se ne nalazi u $M[K_\lambda][I]$. Kako $M[K_\lambda][I]$ i $M[K_\lambda][I][G^\lambda]$ imaju iste kolekcije ω_1-lanaca svih ω_1-drveta iz

$M[K_\lambda][I]$ (v.[12, lema 8]), to možemo predpostaviti da b nije u $M[K_\lambda][I][G^\lambda]$. Kako je $|T| = \omega_1$, to možemo smatrati da je $\underline{T} = (\omega_1, \leqslant_T)$ i $T_o = \{0\}$ (u $M[K_\lambda][I]$).

Kako ćemo raditi sa više forsing relacija istovremeno, to ćemo izostavljati specijalne oznake elemenata odgovarajućih jezika forsinga.

Znamo da postoje $r \in I$, $p \in G^\lambda$ i $f \in F^\lambda$ tako da važi

$$r \Vdash_R^{M[K_\lambda]} \text{"}[\underline{T} = (\omega_1, \leqslant_T) \text{ je normalno } \omega_1\text{-drvo}, T_o = \{0\} \text{ i } (p,f) \Vdash_{Q^\lambda}^{M[K_\lambda][I]} \text{"}[b \text{ je maksimalni } \omega_1\text{-lanac drveta } \underline{T}, \text{ koji nije u } M[K_\lambda][I][G^\lambda]\,]\text{"}\,]\text{"}.$$

Radeći ispod r i (p,f) možemo predpostaviti da je $r = 1_R$, $p = 1_c$ i $f = 0_{F^\lambda}$. Dalje radimo u $M[K_\lambda]$. Na standardan način proveravamo da $R \times C^\lambda$ zadovoljava c.c.c.

Sublema 1.3. Neka su $\alpha < \omega_1$ i $f \in F^\lambda$ proizvoljni. Tada postoji $f' \leqslant_F f$, tako da je

$$1 \Vdash_R \text{"}(\exists y \in T_\alpha)\ (\ (1,f') \Vdash_{Q^\lambda} \text{"}y \varepsilon\ b\text{"})\text{"}.$$

Dokaz subleme: Induktivno ćemo konstruisati niz $\{(r_\xi, p_\xi, f_\xi, q_\xi) \mid \xi < \delta\}$, $\delta < \omega_1$, tako da važe uslovi:

(i) $r_\xi \in R$, $p_\xi \in C^\lambda$, $f_\xi \in F^\lambda$ i $y_\xi \in \omega_1$, za svako $\xi < \delta$;

(ii) (r_ξ, p_ξ) i $(r_{\xi'}, p_{\xi'})$ su nekompatibilni u R C^λ i $f_{\xi'} \leqslant_F f_\xi \leqslant f$, za svako $\xi < \xi' < \delta$;

(iii) $r_\xi \Vdash_R \text{"}[y_\xi \in T_\alpha \wedge (p_\xi, f_\xi) \Vdash_{Q^\lambda} \text{"}y_\xi \in b\text{"}]\text{"}$.

Ordinal δ odredjujemo kao onaj ordinal na kome se indukcija završava, tj. kad je $\{(r_\xi, p_\xi))\xi < \delta\}$ maksimalan skup medjusobno nekompatibilnih elemenata iz $R \times C^\lambda$. To znači da je $\delta < \omega_1$.

Predpostavimo da smo $(r_\xi, p_\xi, f_\xi, q_\xi)$ već konstruisali, za svako $\xi < \xi' < \omega_1$. Ako je $\{(r_\xi, p_\xi) | \xi < \xi'\}$ maksimalan skup nekompatibilnih elemenata iz $R \times C^\lambda$, tada stavljamo $\delta = \xi'$ i završavamo indukciju. Predpostavimo zato da postoji $(r,p) \in R \times C^{\lambda}$, tako da je $(r,p) \not\perp (r_{\xi}, p_{\xi})$, za svako $\xi < \xi'$.

Neka je $g \in F^{\lambda}$, $g = \wedge_{\xi<\xi'} f_{\xi}$ element iz leme 1.1. (kako je κ prvi inakcesibilan kardinal to je $\lambda = \nu^{+}$ za neko $\nu \geq \omega_1$). Dakle, $g \leq_F f_{\xi}$, za svako $\xi < \xi'$. Kako važi $r \,||\!-_R$ "$[(p,g) \,||\!-_Q\lambda$ "$(\exists x \in T_{\alpha})\,(x \in b)$"]", to možemo naći $y' \in \omega_1$ $r' \leq r$ i $(p',g') \leq_Q\lambda\ (p,g)$, tako da važi

$$r' \,||\!-_R \text{"}[y' \in T_{\alpha} \text{ i } (p', g') \,||\!-_Q\lambda \text{ "}y \in b\text{"}].$$

Na osnovu definicije uredjenja skupa Q^{λ} znamo da postoji $q \in Q_{\lambda}$ tako da važi

$$q \cup p' \,||\!-_C \bar{g}' \supseteq \bar{g}.$$

Za svako $z = (\gamma, (\alpha,\beta)) \in \kappa \times (\omega_1 \times \kappa) - (\lambda \times (\omega_1 \times \lambda))$ stavljamo

$$h(z) = g(z) \vee [g'(z) \wedge (q \quad p' | \beta^{+})].$$

Neposredno proveravamo da je $h \in F^{\lambda}$, $h \leq_F g$ i $(p',h) \leq_Q\lambda\ (p'g')$. Neka je $r_{\xi'} = r'$, $p \quad = p'_{\xi}$, $f_{\xi'} = h$ i $y_{\xi'} = y'$ tada $(r_{\xi'}, p_{\xi'}, f_{\xi'}, y_{\xi'})$ zajedno sa već konstruisanim članovima niza zadovoljava uslove (i)-(iii).

Dakle, možemo smatrati da niz $\{(r_{\xi}, p_{\xi}, f_{\xi}, y_{\xi}) | \xi < \delta\}$, $\delta < \omega_1$ konstruisan. Neka je $f' = \wedge_{\xi<\delta} f_{\xi}$ element koji dobijamo u lemi 1.1. Da f' zadovoljava zaključak subleme proverava se na standardan način.

<u>Sublema 1.4</u>. Neka su $\alpha < \omega_1$ i $f \in F^{\lambda}$ proizvoljni i neka važi $1 \,||\!-_R$ "$(\exists y \in T_{\alpha})((1,f) \,||\!-_Q\lambda$ "$y \in b$")". Tada postoji $\beta < \omega_1$, $\beta > \alpha$ i f^{o}, $f^{1} \in F^{\lambda}$, f^{o}, $f' \leq_F f$, tako da važi

$1 \,||\!-_R$"[ako je $x \in T_{\alpha} \wedge (1,f) \,||\!-_Q\lambda$ "$x \in b$", tada postoje x^{o}, $x^{1} \in T_{\beta}$, $x^{o} \not\perp x^{1}$, $x <_T x^{o}, x^{1}$, tako da je $(1,f^{i}) \,||\!-_Q\lambda$ "$x^{i} \in b$", za svako $i < 2$]".

<u>Dokaz subleme</u>. Kao u slučaju dokaza subleme 1.3. induktivno konstruišemo niz $\{(r_{\xi}, p_{\xi}, f^{o}_{\xi}, f^{1}_{\xi}, x^{o}_{\xi}, x^{1}_{\xi}, x_{\xi}, \beta_{\xi}) | \xi < \delta\}$ $\delta < \omega_1$, tako da važi:

(i) $r_{\xi} \in R$, $p_{\xi} \in C^{\lambda}$, f^{o}_{ξ}, $f^{1}_{\xi} \in F$, x^{o}_{ξ}, $x^{1}_{\xi} \in \omega_1$ i $\beta_{\xi} < \omega_1$, za svako $\xi < \omega_1$;

(ii) f^{i}_{ξ}, $\leq_F f^{i}_{\xi} \leq_F f$, za svako $\xi < \xi' < \delta$ i svako $i < 2$;

(iii) $r_{\xi} \,||\!-_R$ "$[x_{\xi} \in T_{\alpha} \wedge (1,f) \,||\!-_Q\lambda$ "$x_{\xi} \in b$"]";

(iv) $r_\xi \,||\!-_R "[x^i_\xi \in T_{\beta_\xi} \wedge x^o_\xi \neq x^1_\xi, x_\xi <_T x^i_\xi \wedge (p_\xi, f^i_\xi) \,||\!-_{Q^\lambda} "x^i_\xi \in b"]"$.

(v) $(v_\xi, p_\xi) \not\perp (r'_\xi, p_{\xi'})$, za svako $\xi < \xi' < \delta$.

Ordinal δ odredjujemo kao onaj ordinal na kome se indukcija završava, što na osnovu (v) znači da je $\delta < \omega_1$. Predpostavimo da smo već konstruisali $(r_\xi, p_\xi, f^o_\xi, f^1_\xi, x^o_\xi, x^1_\xi, x_\xi, \beta_\xi)$, za svako $\xi < \xi' < \omega_1$. Ako je $\{(r_\xi, p_\xi) | \xi < \xi'\}$ maksimalan skup medjusobno nekompatibilnih elemenata iz $R \times C^\lambda$, tako stavljamo $\delta = \xi'$ i završavamo indukciju. Zato predpostavljamo da postoji $(r,p) \in R \times C^\lambda$, tako da je $(r,p) \not\perp (r_\xi, p_\xi)$ za svako $\xi < \xi'$.

Neka je $g^o = \wedge_{\xi<\xi'} f^o_\xi$ i $g^1 = \wedge_{\xi<\xi'} f^1_\xi$. Kako je po predpostavci $1 \,||\!-_R "(\exists y \in T_\alpha)((1,f) \,||\!-_{Q^\lambda} "y \in b")"$, to proširujući r možemo predpostaviti da postoji $x \in \omega_1$, tako da je

$$r \,||\!-_R "[x \in T_\alpha \wedge (1,f) \,||\!-_{Q^\lambda} "x \in b"]".$$

Neka je I proizvoljan $M[K_\lambda]$-generički podskup od R, koji sadrži $r \in R$. Dakle, u $M[K_\lambda][I]$ imamo da za $x \in T_\alpha$ važi $(1,f^i) \,||\!-_{Q^\lambda} "\check{x} \in \dot{b}"$. Dokažimo da radeći u $M[K_\lambda][I]$ možemo naći $\beta < \omega_1$, $\beta < \alpha$, zatim $p' \in C^\lambda$, $p' \leq p$, $g^{io}, g^{il} \in F^\lambda$, $f^{il}, g^{i2} \leq_F g^i$ $(i < 2)$ i elemente $x^{ij} \in T_\beta$ $(i,j < 2)$, tako da je $x < x^{ij}$, $x^{io} \neq x^{il}$ i

$$(p', g^{ij}) \,||\!-_{Q^\lambda} "x^{ij} \in \dot{b}", \quad i,j < 2.$$

Naime, za to je dovoljno dokazati da za svako $g \in F^\lambda$ iz $(p,g) \,||\!-_{Q^\lambda} "\check{x} \in \dot{b}"$ sledi egzistencija $p' \leq p$, $g', g'' \leq_F g$, $\beta > \alpha$ i $x'x'' \in T_\alpha$, $x' \neq x''$, $x <_T x', x''$, tako da je $(p',q') \,||\!-_{Q^\lambda} "\check{x}' \in \dot{b}"$ i $(p',g'') \,||\!-_{Q^\lambda} "\check{x}'' \in \dot{b}"$.

Neka je G^λ proizvoljan $M[K_\lambda][I]$-generički podskup od C^λ, koji sadrži p. Dakle u $M[K_\lambda][I][G^\lambda]$ važi

$$\bar{g} \,||\!-_{P^\lambda} "[\dot{b} \text{ je kofinalan lanac drveta } \check{T} \text{ koji nije u } M[K_\lambda][I][G^\lambda]\check{\ }]". \quad (1)$$

U $M[K_\lambda][I][G^\lambda]$ mora postojati $\beta > \alpha$, $h', h'' \in F^\lambda$, $\bar{h}', \bar{h}'' \supseteq \bar{g}$ i $x', x'' \in T_{\beta'}$, $x' \neq x''$, $x <_T x', x''$, tako da važi $\bar{h}' \,||\!-_{P^\lambda} "\check{x}" \in \dot{b}"$ i $\bar{h}'' \,||\!-_{P^\lambda} "\check{x}" \in \dot{b}"$, jer bi u suprotnom

$$b' = \{y \in T | (\exists \bar{h} \supseteq \bar{g})(\bar{h} \,||\!-_{P^\lambda} "\check{y} \in \dot{b}")\}$$

bio kofinalan lanac drveta $\underline{T}$, za koga važi $\bar{g} \Vdash_{P^\lambda}$ "$\check{b}' = \dot{b}$", suprotno (1). Kako je G^λ proizvoljan $M[K_\lambda][I]$-generički podskup od C^λ, koji sadrži p, to u $M[K_\lambda][I]$ važi

$$p \Vdash_{C^\lambda} \text{"}(\exists \beta > \alpha)\ (\exists \bar{h}', \bar{h}'' \supset \bar{g})\ (\exists x', x'' \in T_\beta)$$
$$[x <_T x', x'',\ x' \neq x'' \text{ i } \bar{h}' \Vdash_{P^\lambda} \text{"}\check{x}' \in \dot{b}\text{" i } \bar{h}'' \Vdash_{P^\lambda} \text{"}\check{x}'' \in \dot{b}\text{"}]\text{"}.$$

Dakle postoji $p' \leq p$, $\beta > \alpha$, $h', h'' \in F^\lambda$ i $x', x'' \in T_\beta$, $x' \neq x''$, $x <_T x', x''$, tako da je

$$p' \Vdash_{C^\lambda} \text{"}[\,^{-}h' \nVdash_{P^\lambda} \text{"}\check{x}' \in \dot{b}\text{" i } \bar{h}'' \Vdash_{P^\lambda} \text{"}\check{x}'' \in \dot{b}\text{"}]\text{"};$$

$$p' \Vdash_{C^\lambda} \text{"}\bar{h}', \bar{h}'' \supseteq \bar{g}\text{"}.$$

Kao u dokazu subleme 1.3. možemo naći $g', g'' \in F^\lambda$, tako da je $g'\ g'' \leq_F \bar{g}$ i $p' \Vdash_{C^\lambda}$ "$[\bar{g}' \supseteq h'$ i $\bar{g}'' \supseteq \bar{h}'']$". Dakle, $\beta > \alpha$, p', g', g'' i x', x'' zadovoljavaju gore tražene osobine. Kako je I proizvoljan $M[K_\lambda]$-generički podskup od R, koji sadrži r, to važi

$$r \Vdash_R \text{"}(\exists \beta > \alpha)(\exists p' \leq p)(\exists g^{io}, g^{il} \leq_F g^i)(\exists x^{io}, x^{il} \in T_\beta)$$
$$[x <_T x^{ij}\ \ x^{io} \neq x^{il} \wedge (p', g^{ij}) \Vdash_{Q^\lambda} \text{"}x^{ij} \in b\text{"}]\text{"},$$

Za svako $i, j < 2$. Dakle, postoje $r' \leq r$, $\beta > \alpha$, g^{io}, $g^{il} \leq_F g^i$, $x^{io}, x^{il} \in \omega_1$ $(i < 2)$ i $p' \leq p$, tako da je

$$r' \Vdash_R \text{"}[x^{ij} \in T_\beta \wedge x <_T x^{ij} \wedge x^{io} \neq x^{il} \wedge (p', g^{ij}) \Vdash_{Q^\lambda} \text{"}x^{ij} \in b\text{"}]\text{"},$$

za svako $i, j < 2$.

Predpostavimo, na primer, da je $x^{oo} \neq x^{ll}$. Tada stavljamo da je $r_{\xi'} = r'$, $p_{\xi'} = p'$ $f^i_{\xi'} = g^{ii}$ $(i < 2)$, $x_{\xi'} = x$, $x^i = x^{ii}$ $(i < 2)$ i $\beta_{\xi'} = \beta$. Neposredno po konstrukciji proveravamo da uslovi (i)-(v) ostaju biti zadovoljeni.

Dakle, možemo smatrati da je niz $\left\{(r_\xi, p_\xi, f^o_\xi, f^1_\xi, x^o_\xi, x^1_\xi, x_\xi, \beta_\xi)\,\middle|\, \xi < \delta\right\}$, $\delta < \omega_1$ konstruisan.

Neka je $f^i_\delta = \Lambda_{\xi<\delta} f^i_\xi$, $(i < 2)$ i neka je $\beta = \sup\left\{\beta_\xi \,\middle|\, \xi < \delta\right\}$. Na osnovu subleme 1.3. postoje $f' \leq_F f^i_\delta$, $i < 2$, tako da važi

$$1 \Vdash_R \text{"}(\exists y \in T_\beta)((1, f^i) \Vdash_{Q^\lambda} \text{"}y \in b\text{"})\text{"}, \tag{2}$$

za svako $i < 2$. Dokažimo da su β i f^o, f^1 traženi iz zaključka subleme 1.4. Za to je dovoljno dokazati da je skup

$$\Big\{(r,p) \,|\, r \;||\!-_R \text{"[ako je } x \in T_\alpha \wedge (1, f) \;||\!-_Q\lambda \text{ "}x \in b\text{", tada postoje } x^o, x^1 \in T_\beta, \; x^o \not\leq x^1,\; x <_T x^o, x^1, \text{ tako da je } (p, f^i) \,||\!-_Q\lambda \text{ "}x^i \in b\text{", za } i < 2]\text{"}\Big\} \quad (3)$$

gust u $R \times C^\lambda$. Neka je $(r,p) \in R \times C^\lambda$ proizvoljan. Kako je $\{(r_\xi, p_\xi) \,|\, \xi < \delta\}$ maksimalan skup medjusobno nekompatibilnih elemenata iz $R \times C^\xi$, to postoji $\xi < \delta$, tako da su (r,p) i (r_ξ, p_ξ) kompatibilni. Neka je $(r', p') \in R \times C^\lambda$, takav da je $(r', p') \leq (r,p)$, (r_ξ, p_ξ), to na osnovu (iii) iz gornje konstrukcije

$$r' \;||\!-_R \text{"[} x_\xi \in T_\alpha \wedge (1,f) \;||\!-_Q\lambda \text{ "}x_\xi \in b\text{"]"} \qquad (4)$$

Kako je $f^i \leq_F f^i_\delta \leq_F f^i_\xi$, to na osnovu (iv) važi

$$r' \;||\!-_R \text{"[} x^i_\xi \in T_{\beta\xi} \wedge x^o_\xi \not\leq x^1_\xi,\; x_\xi < x^i_\xi \wedge (p', f^i) \;||\!-_Q\lambda \text{ "}x^i_\xi \in b\text{"]"}, \qquad (5)$$

za svako $i < 2$. Na osnovu (2) postoji $r'' \leq r$ i $x^i \in \omega_1$ $(i < 2)$, tako da je

$$r'' \;||\!-_R \text{"[}x^i \in T_\beta \wedge (1, f^i) \;||\!-_Q\lambda \text{ "}x^i \in b\text{"]"}, \quad i < 2. \qquad (6)$$

Na osnovu (4), (5) i (6) važi

$$r'' \;||\!-_R \text{"[}x_\xi <_T x^i_\xi <_T x^i \wedge x^o \not\leq x^1\text{]"}, i < 2 \qquad (7)$$

Relacije (4), (5), (6) i (7) daju

$$r'' \;||\!-_R 2[x_\xi \in T_\alpha \wedge (1,f) \;||\!-_Q\lambda \text{ "}x_\xi \in b\text{"} \wedge x^o, x' \in T_\beta \wedge x^o \not\leq x^1 \wedge \wedge x_\xi <_T x^o, x^o \wedge (p', f^i) \;||\!-_Q\lambda \text{ "}x^i \in b\text{"]"}, \; (i < 2) \qquad (8)$$

Kako postoji samo jedno $x \in \omega_1$, za koga je $r'' \;||\!-_R$ "[$x \in T_\alpha \wedge (1,f) \;||\!-_Q\lambda$ "$x \in b$"]", to nam (8) znači da je $(r'', p') \in$ skupa (3), tj. skup (3) je gust u $R \times C^\lambda$. Ovo završava dokaz subleme. ∎

Nizove $\{f_s \,|\, s \in {}^{\omega}2\}$ i $\{\alpha_n \,|\, n \in \omega\}$ ćemo konstruisati induktivno po $|s|$, tako da važi:

(i) $s \in {}^{\omega}2 \rightarrow f_s \in F^\lambda$;

(ii) $s \subseteq t \rightarrow f_t \leq_F f_s$;

(iii) $n < m \rightarrow \alpha_n < \alpha_m < \omega_1$;

(iv) ako je s ${}^{n}2$, tada je $1 \ ||\!-_R \ "(\exists y \in T_{\alpha_n})\ ((1,f_s) \ ||\!-_Q\lambda \ "y \in b")"$;

(v) ako je $s \in {}^{n}2$, tada je

$$1 \ ||\!-_R"[\text{ako je } x \in T_{\alpha_n} \text{ i } (1,f_s) \ ||\!-_Q\lambda \ "x \in b", \text{ tada postoje } x_o,x_1 \in T_{\alpha_{n+1}},$$
$$x_o \neq x_1,\ x <_T x_o,x_1, \text{ tako da je } (1,f_{s^\frown i}) \, ||\!-_Q\lambda \ "x_i \in b",\ i < 2]".$$

Neka je $f_\phi = 0_F\lambda$, $\alpha_0 = 0$. Predpostavimo da smo već definisali $\left\{f_s \,|\, s \in {}^{\underline{n+1}}2\right\}$ i $\left\{\alpha_m \,|\, m \leq n\right\}$. Za svako $s \in {}^{n}2$ po (iv) važi

$1 \ ||\!-_R \ "(\exists y \in T_{\alpha_n})\ (\ (1,f_s) \ ||\!-_Q\lambda \ "y \in b")"$. Na osnovu subleme 1.4. možemo naći f_s^o, $f_s^1 \leq_F f_s$ i $\beta_s > \alpha_n$, tako da važi

$$1 \ ||\!-_R \ "[\text{ako je } x \in T_{\alpha_n} \text{ i } (1,f_s) \ ||\!-_Q\lambda \ "x \in b", \text{ tada postoje } x_o,\ x_1 \in T_{\beta_s},$$
$$x_o \neq x_1,\ x <_T x_o,x_1, \text{ tako da je } (1,f_s^i) \ ||\!-_Q\lambda \ "x_i \in b",\ i < 2]".$$

Neka je $\alpha_{n+1} = \sup\left\{\beta_s \,|\, s \in {}^{n}2\right\}$. Na osnovu subleme 1.3. postoje $f_{s^\frown i} \leq_F f_s^i$ $(i < 2)$, tako da je $1 \ ||\!- \ "(\exists y \in T_{\alpha_{n+1}})\ (\ (1,f_{s^\frown i}) \, ||\!-_Q\lambda \ "y \in b")"$.

Dakle, konstrukcija se može nastaviti.

Dalje radimo u $M[K_\lambda][I]$. To znači da rečenice koje 1_R forsira u uslovima (iv) i (v) važe u $M[K_\lambda][I]$. Definišimo niz $\left\{x_s \,|\, s \in {}^{\omega}2\right\}$ na sledeći način. Neka je $x_\phi = 0$. Predpostavimo da smo za svako $s \in {}^{n}2$ definisali x_s tako da je $x_s \in T_{\alpha_n}$ i $(1,f_s) \ ||\!-_Q\lambda \ "x_s \in b"$. Kako važi (v), to možemo naći $x_{s^\frown o}$, $x_{s^\frown 1} \in T_{\alpha_{n+1}}$, $x_{s^\frown o} \neq x_{s^\frown 1}$ i $x_s <_T x_{s^\frown 1}$, tada da je

$$(1,f_{s^\frown i}) \ ||\!-_Q\lambda \ "x_{s^\frown i} \in b",\quad i < 2.$$

Dakle, indukcija se može nastaviti. Primetimo da iz $s,t \in {}^{n}2$, $s \neq t$ sledi da je $x_s \neq x_t$.

Neka je $1 = (\cup G_{\lambda+\omega}) - (\cup G_\lambda)$ odsečak generičkog skupa $\cup G$. To znači da je $1 \in {}^{\omega}2$ i $1 \in M[K_{\lambda+\omega}]$. Dakle niz $\left\{f_{1|n} \,|\, n \in \omega\right\}$ pripada $M[K_{\lambda+\omega}]$, njegovi elementi su iz F^λ, pri čemu je $f_{1|n} \leq_F f_{1|m}$, za $m \leq n < \omega$. Primenom leme 1.1. zaključujemo da postoji $f_1 \in F^\lambda$ i $p \in G_{\lambda^+}$, tako da je

$$p \ ||\!-_C\lambda+ \ " \ \bar{f}_1 \supseteq \bar{f}_{1|n}, \quad \text{za svako } n < \omega.$$

Neka je $p' = p|\lambda$ a $p'' = p - p'$, tada je $p' \in G_\lambda$ i $p'' \in C^\lambda$. Po definiciji uredjenja $\leqslant_Q\lambda$ u $M[G_\lambda]$ imamo da je

$$(p'', f_1) \leqslant_Q\lambda\ (p'', f_{1|n}) \text{ za svako } n < \omega .$$

Dalje radimo u $M[K_\lambda][I]$. Na osnovu konstrukcije niza $\{x_s | s \in {}^{\omega}2\}$ znamo da je

$$(p'', f_1) \mid\mid\!-_Q\lambda\ "x_{1|n} \in b \cap T_{\alpha_n}", \text{ za svako } n < \omega. \tag{9}$$

Kako važi $(p'', f_1) \mid\mid\!-$ "$\dot{b}$ je maksimalni ω_1-lanac drveta $\underline{T}$", to postoje $x_1 \in T_\alpha$ i $(p''', f_1') \leqslant_Q\lambda\ (p'', f_1)$, tako da je $(p''', f_1') \mid\mid\!-$ "$x_1 \in b$", gde je $\alpha = \sup\{\alpha_n | n < \omega\}$. Na osnovu (9) imamo da važi

$$(p''', f_1') \mid\mid\!-_Q\lambda\ "(\forall_{n\in\omega})(\forall_s \in {}^n2)(1|n = s \leftrightarrow x_s \in (\cdot,x)_T\ T_{\alpha_n})",$$

što znači da važi $(p''', f_1') \mid\mid\!-_Q\lambda$ "$1 \in M[K_\lambda][I]$", suprotno $M[K_\lambda][I]$-generičnosti skupa $1 = (UG_{\lambda+\omega}) - (UG_\lambda)$. Ovo završava dokaz leme 1.2. ∎

Definiciju iteracionog niza uzimamo iz [14] kao i faktornu lemu za iteracioni niz (v. [14, lema 1.4.]). Dokaz sledeće leme je potpuno analogan dokazu leme 3.7. iz [14].

Lema 1.6. Neka je M p.t.m. ZFC, λ granični ordinal u M, $\{P_\xi | \xi < \lambda + 1\}$ iteracioni niz u M i $\underline{T}$ jedno normalno ω_1-drvo u M moći ω_1. Neka je G M-generički podskup od P_λ. Za $\nu < \lambda$ stavljamo $G_\nu = \{p|\nu | p \in G\}$. Ako je $b \in M[G]$ maksimalni ω_1-lanac drveta i ako je $\omega_1^M = \omega_1^{M[G]}$, tada je $b \in M[G_\nu]$ za neko $\nu < \lambda$. ∎

Neka je $\underline{T} = (T, \leqslant)$ Aronszajnovo drvo. Parcijalno uredjeni skup $P = P(\underline{T})$ definišemo na sledeći način. Elementi skupa P su konačna preslikavanja, tako da je $\mathrm{dom}(p) \subseteq T$, $\mathrm{rang}(p) \subseteq Q$ (skup racionalnih brojeva) i $p(s) < p(t)$ za svako $s,t \in \mathrm{dom}(p)$, $s <_T t$. P uredjujemo sa $p \leqslant q$ akko je $p \supseteq q$ (v. [17], [14]). Da je P c.c.c. parcijalno uredjen skup i da je u svakom njegovom generičkom proširenju $\underline{T}$ specijalno Aronszajnovo drvo pokazano je u [17] ili [14, lemma 3.3., 3.4.]. Dokaz sledeće leme je potpuno analogan dokazu leme 3.5. iz [14].

Lema 1.7. Neka je M p.t.,. ZFC, $\underline{T}$ Aronszajnovo drvo u M i $P = [P(\underline{T})]^M$. Neka je $\underline{U}$ proizvoljno normalno ω_1-drvo moći ω_1 u M. Neka je

G M-generički podskup od P i b maksimalni ω_1-lanac drveta $\underline{U}$ u $M[G]$. Tada je $b \in M$. ∎

Vratimo se sada predpostavkama, koje smo načinili na početku odeljka. M je p.t.m. ZFC+ $V = L$, κ je prvi inakcesibilan kardinal u M, $B = [RO(C)]^M$, F je skup funkcija iz $\kappa \times (\omega_1 \times \kappa)$ u B, koji smo definisali na početku odeljka, $Q = C \times F$, ... Neka je $N = M[K]$, gde je K M-generički podskup od Q. Kako smo napomenuli imamo da u N važi $2^\omega = 2^{\omega_1} = \omega_2$, $\omega_1^M = \omega_1^N$ i $\omega_2^N = \kappa$. Skupove K_γ, K^γ, G_γ, G^γ, H_γ, H^γ definišemo kao na početku dokaza.

Sada navodimo Devlinovu modifikaciju (v. [14, str. 285]) iteracionog niza Solovaya i Tennenbauma [14]. Predpostavljamo da dalje radimo u modelu N.

Neka je R proizvoljni parcijalno uredjen skup, tada se skup svih $X \in N^{(R)}$, za koje važi $||X \subseteq \check{\omega}_1 \times \check{\omega}_1||^R = 1$ nalazi u 1-1 korespodenciji sa ${}^{(\omega_1 \times \omega_1)}RO(R)$. Ako je $|R| \leqslant \omega_2$ i ako R zadovoljava c.c.c. tada je $|RO(R)| \leqslant \omega_2$ na osnovu $\omega_2^{\omega} = \omega_2$ (u N važi $2^\omega = 2^{\omega_1} = \omega_2$). Odatle je $|{}^{(\omega_1 \times \omega_1)}RO(R)| \leqslant \omega_2$. To znači da je $|\{X \in N^{(R)} \mid ||X \subseteq \check{\omega}_1 \times \check{\omega}_1|| = 1\}| \leqslant \omega_2$, pa zato postoji numeracija $\tau(R)$ skupa $\{X \in N^{(R)} \mid ||X \subseteq \omega_1 \times \omega_1|| = 1\}$ po tipu ω_2. Neka je ρ: $\omega_2 \times \omega_2 \to \omega_2$ takva bijekcija da je $\rho(\xi, \xi') \geqslant \xi, \xi'$ za svako ξ, ξ' i neka su i, j inverzne funkcije sa ρ, tj. $\rho(i(\xi), j(\xi)) = \xi$, za svako ξ.

Definisaćemo sada iteracioni niz $\{R_\xi | \xi \leqslant \omega_2\}$ tako da važi:

(i) $\xi \leqslant \omega_2 \to R_\xi$ zadovoljava c.c.c.;

(ii) $\xi < \omega_2 \to |R_\xi| \leqslant \omega_1$.

Neka je $R_0 = D$ dvoelementna Booleova algebra. Ako je λ graničan za R_λ uzimamo granicu niza $\{R_\xi | \xi < \lambda\}$ (tj. direktnu granicu; v. [74], gde je dokazano da R_λ zadovoljava c.c.c., jer po induktivnoj predpostavci svaki R_ξ zadovoljava c.c.c.). Takodje, je jasno, da je $|R_\lambda| \leqslant \omega_1$, ako je $\lambda < \omega_2$. Predpostavimo da smo već konstruisali $\{R_\xi | \xi \leqslant \lambda\}$, za neko $\lambda < \omega_2$. Neka je $S = \tau(R_{i(\lambda)})(j(\lambda))$ $j(\lambda)$-ti element τ-numeracije skupa $\{X \in N^{(R_{i(\lambda)})} \mid ||X \subseteq \check{\omega}_1 \times \check{\omega}_1||^{R_{i(\lambda)}} = 1\}$. Posmatramo tri slučaja.

Slučaj 1. $||$ S je c.c.c. parcijalno uredjenje skupa $\check{\omega}_1$ $||^{R_\lambda} \neq 1$. Tada stavljamo $R_{\lambda+1} = R_\lambda \otimes D$.

Slučaj 2. Slučaj 1 ne važi i $||$ postoji normalno $\check{\omega}_1$-drvo $\underline{T}$ moći $\check{\omega}_1$ i term b S-forsing jezika, tako da je $||$ b je maksimalan $\check{\omega}_1$-lanac drveta $\check{\underline{T}}$, koji nije u $N[I_\lambda]^\vee||^S > 0 \;||^{R\lambda} = 0$, gde I_λ N-generički podskup od R_λ. Tada stavljamo $R_{\lambda+1} = R_\lambda \otimes S$.

Slučaj 3. Ne važi ni jedan od slučajeva 1 i 2. To znači da je $d > 0$, gde je $d = ||$ postoji normalno $\check{\omega}_1$-drvo $\underline{T}$ moći $\check{\omega}_1$ i term b S-forsing jezika, tako da je $||$b je maksimalni $\check{\omega}_1$-lanac drveta $\check{\underline{T}}$ koji se ne nalazi u $N[I_\lambda]^\vee||^S > 0 \;||^{R\lambda}$ (primetimo da se u slučaju 2. i 3. u [14] spominjalo samo normalno (ω_1,ω_1)-drvo).

Sublema 1.8. $d = d'$, gde je $d' = ||$ postoji Aronszajnovo drvo $\underline{T}$ i term b S-forsing jezika tako da je $||$ b je maksimalan $\check{\omega}_1$-lanac drveta $\check{\underline{T}}$ koji nije u $N[I_\lambda]^\vee||^S > 0 \;||^{R\lambda}$.

Dokaz: Jasno je, da je $d' \leq_{R_\lambda} d$. (Koristimo istu oznaku i za R_λ i za odgovarajuću kompletnu Booleovu algebru.). Neka je I_λ proizvoljan N-generički podskup od R_λ koji sadrži d. Radeći u $N[I_\lambda]$ fiksiramo normalno ω_1-drvo $\underline{T}$ moći ω_1 i term b S-forsing jezika tako da je $e = ||$b je maksimalan ω_1-lanac drveta $\check{\underline{T}}$ koji nije u $N[I_\lambda]^\vee||^S > 0$. Neka je

$$U = \left\{x \in T \,|\, (\exists e' \leq_S e)\ (e' \;||\tfrac{N[I_\lambda]}{S} \text{"}\check{x} \in b\text{"})\right\}$$

i neka je $\underline{U} = (U, \leq_T \cap U^2)$. Jasno je, da je U početni komad od T. Kako važi $e \;||\!-_S$ "b je kofinalan lanac drveta $\check{\underline{T}}$ " To je visina drveta $\underline{U}$ jednaka ω_1. Kako je $e \;||\!-_S$ " $b \notin N[I_\lambda]^\vee$", to za svako $x \in U_\alpha$ postoji $\beta > \alpha$ $x_1,x_2 \in U_\beta$, $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 >_T x$ i $e_1,e_2 \leq_s e$, tako da je $e_i \;||\!-_s$"$\check{x}_i \varepsilon$ b", tj. $x_1,x_2 \in U_\beta$. Odavde, posebno, sledi da ako $\underline{U}$ ima ω_1-lanac tada obavezno ima i neprebrojiv antilanac. Dakle, da bi dokalazi da je $\underline{U}$ Suslinovo drvo dovoljno je dokazati da nema neprebrojivih antilanaca. Medjutim, ako je $A \subsetneq U$ neprebrojiv antilanac, tada je $\left\{||\check{x} \in b||^S \,|\, x \in A\right\}$ disjunktna neprebrojiva kolekcija elemenata od S (odnosno RO(S)), koji su različiti od 0, suprotno predpostavci da S zadovoljava c.c.c. Po definiciji $\underline{U}$ imamo da važi $e \;||\!-_S$ "b je maksimalan ω_1-lanac drveta $\check{\underline{U}}$" (primetimo da U ne mora biti normalno (v. def. §1.I), medjutim, unija nekih ω_1 slojeva toga drveta daje normalno Suslinovo drvo za koga važe isti zaključi). Kako je I_λ bio proizvoljan N-generički podskup od R_λ, koji sadrži d imamo da važi

$d \; ||\!-^{N}_{R_\lambda}$ "[postoji Aronszajnovo drvo $\underline{U}$ i term b S-forsing jezika, tako da je $||$b je maksimalan $\check{\omega}_1$-lanac iz $\check{\underline{U}}$ i b $\notin N[I_\lambda]^{\check{}}\,||^{S} > 0$]". Dakle, $d \leq_{R_\lambda} d'$.

Na osnovu predhodne subleme i principa maksimuma postoji $\underline{T}_o$, tako da važi

(i) $||\underline{T}_o$ je Aronszajnovo drvo $||^{R_\lambda} = 1$ i

(ii) $d \leq_{R_\lambda} ||$ postoji term b S-forsing jezika, tako da je $||$ b maksimalan $\check{\omega}_1$-lanac drveta $\check{\underline{T}}_o$ koji nije u $N[I_\lambda]^{\check{}}\,||^{S} > 0 \; ||^{R_\lambda}$.

Neka je $E \in N^{(R_\lambda)}$ takav da je $||E = P(\underline{T}_o)\;||^{R_\lambda} = 1$, gde je $P(\underline{T})$ gode definisano (skup svih konačnih strogo rastućih preslikavanja iz $\underline{T}_o$ u Q). Neka je $R_{\lambda+1} = R_\lambda \otimes E$. Tada je po lemi Solovaya $R_{\lambda+1}$ c.c.c. parcijalno uredjen skup (jasno je, da je $|R_{\lambda+1}| \leq \omega_1$). Po lemi 3.8. iz [14] imamo da važi $||$ S zadovoljava c.c.c. $||^{R_{\lambda+1}} \neq 1$. Ovo završava konstrukciju niza $\{R_\xi | \xi \leq \omega_2\}$.

Neka je I N-generički podskup od $R = (R_{\omega_2})^N$. Da u N[I] važi $MA + 2^\omega = \omega_2$ dokazuje se na standardan način (v. [14, str. 287.288] . Dokažimo zato samo $N[I] \models \neg wKH$.

Neka je $\underline{T} = (\omega_1, \leq_T)$ proizvoljno normalno ω_1-drvo u N[I]. Trebamo dokazati da ono ima $\leq \omega_1$ maksimalnih ω_1-lanaca u N[I]. Na osnovu leme istinitosti za forsing možemo naći $\delta < \omega_2^N$ tako da je $\underline{T} \in N[I_\delta]$. Kako je $N = (L[K])^N$, pri čemu možemo smatrati $K \subseteq \kappa = \omega_2^N$ možemo naći $\lambda < \kappa$, tako da je $\underline{T}$, $R_\delta \in M[K_\lambda][I_\delta]$ ($\lambda > \omega_1$ i λ je regularan kardinal u M). Na osnovu leme o.3. imamo

$$M[K_\lambda][I_\delta][K^\lambda] = M[K_\lambda][K^\lambda][I_\delta] = N[I_\delta],$$

jer je Q^λ, $R_\delta \in M[K_\lambda]$, pri čemu važe odgovarajući uslovi generičnosti. Dakle, R_δ je parcijalno uredjen skup u $M[K_\lambda]$, koji zadovoljava c.c.c., jer taj uslov zadovoljava M[K]. Dakle, zadovoljene su sve predpostavke leme 1.2 za $M[K_\lambda]$, R_δ, $\underline{T}$, Primenom te leme zaključujemo da se svaki maksimalni

ω_1-lanac drveta $\underline{T}$ u $N[I_\delta]$ nalazi u $M[K_\lambda][I_\delta]$. Da se svaki maksimalni ω_1-lanac drveta T iz N[I] nalazi u $N[I_\delta]$ dokazujemo indukcijom po iteracionom nizu $\left\{R_\xi | \xi \leqslant \omega_2\right\}$. Granični koraci indukcije slede na osnovu leme 1.6. Sukcesorni koraci indukcije u slučajevima 1. i 2. slede direktno po definiciji, dok u slučaju 3. sledi na osnovu leme 1.7. Dakle, svaki maksimalni ω_1-lanac drveta $\underline{T}$ iz N[I] pripada $M[K_\lambda][I_\delta]$.

Kako je $|Q_\lambda \otimes R_\delta|^M < \kappa$, to je κ inakcesibilan kardinal u $M[K_\lambda][I_\delta] = M[K_\lambda \otimes I_\delta]$, gde je $K_\lambda \otimes I_\delta$ M-generički podskup od $Q_\lambda \otimes R_\delta$ iz leme o.4. To znači da $\underline{T}$ ima manje od κ maksimalnih ω_1-lanaca u $M[K_\lambda][I_\delta]$ a time i manje od $\kappa = \omega_2^{N[I]}$ maksimalnih ω_1 -lanaca u N[I], što je i trebalo dokazati.

Dokažimo sada da u dobijenom modelu ne postoji ni jedan σ-gust parcijalno uredjen skup moći ω_1. Ako je $\underline{T} = (T, \leqslant_T)$ normalno ω_1-drvo, tada kažemo da je $\underline{T}$ <u>σ-gusto</u>, ako je parcijalno uredjeni skup $(T, \geqslant_T)$ σ-gust. Sledeća lema je opštepoznata (vidi, na primer, [17], [13]).

<u>Lema 1.9.</u> Neka je P proizvoljan σ-gust parcijalno uredjen skup moći ω_1 i neka je B = RO(P). Tada postoji σ-gusto normalno ω_1-drvo $\underline{T} = (T, \geqslant_B)$ moći ω_1, tako da je T gust podskup od B.

<u>Dokaz</u>: Neka je $\left\{p_\alpha | \alpha < \omega_1\right\}$ numeracija skupa P. Induktivno po slojevima T_α, $\alpha < \omega_1$ ćemo konstruisati traženo drvo. Neka je $T_o = \left\{1_B\right\}$. Predpostavimo da smo $T_\beta, \beta < \alpha < \omega_1$ već definisali pri čemu je, za svako $\beta < \alpha$, T_β (disjunktno) razbijanje jedinice. Predpostavimo prvo da je $\alpha = \beta+1$. Neka je $x \in T_\beta$ proizvoljan. Kako je P razdeljiv, to postoji $p, q \in P$, $p, q \leqslant_B x$, tako da su p i q nekompatibilni. Ako je $x \wedge p_\beta > 0$ (u B), predpostavljamo da je $p \leqslant x \wedge p_\beta$. Neka je A(x) maksimalan skup medjusobno nekompatibilnih elemenata iz $\left\{r \in B | r \leqslant_B x\right\}$, koji proširuje $\left\{p,q\right\}$. Dakle, imamo da je $\bigvee^B A(x) = x$. Neka je $T_\alpha = \bigcup\left\{A(x) | x \in T_\beta\right\}$. Predpostavimo sada da je α graničan ordinal. Neka je $T_\alpha = \left\{\bigwedge_B b | b \text{ je } \alpha\text{-lanac iz } T|\alpha \text{ i } \bigwedge_B b > 0\right\}$. Neka je

$$D_\beta = \left\{r \in B | o < r \leqslant_B x \text{ , za neko } x \in T_\beta\right\}$$

za svako $\beta < \alpha$. Po predpostavci o T_β, $\beta < \alpha$ znamo da je D_β gust otvoren skup u $(B - \left\{0\right\}, \leqslant_B)$, za svako $\beta < \alpha$. Neka je $D = \bigcup\left\{D_\beta | \beta < \alpha\right\}$. Kako je P σ-gust, to je i $(B-\{0\}, \leq_B)$ σ-gust parcijalno uredjen skup (jednostavna provera), što znači da je D gust u $B-\{0\}$. Neka je $r \varepsilon D$ proizvoljan, tada on odredjuje σ-lanac $b(r) = \{x | x \varepsilon T|\alpha \text{ i } r \leq_B x\}$. Dakle, za svako $r \varepsilon D$ imamo da je $0 < r \leq b(r) \varepsilon T_\alpha$, što znači da je T_α (disjunktno) razbijanje jedinice. Posebno, svako $x \varepsilon T|\alpha$ ima produženje u T_α. Neka je $T = \cup \{T_\alpha | \alpha < \omega_1\}$. Po konstrukciji T je gust u $B-\{0\}$ i $(T, \geq_B)$ je normalno ω_1-drvo moći ω_1. Odatle će jednostavno slediti da je $(T, \leq_B)$ σ-gust parcijalno uredjen skup.

<u>Lema 1.10</u>. (MA + $\neg$CH) Neka je $\underline{T}$ proizvoljno normalno σ-gusto ω_1-drvo moći ω_1. Tada $\underline{T}$ ima više od ω_1 maksimalnih ω_1-lanaca.

<u>Dokaz:</u> Predpostavimo suprotno, tj. da $\underline{T}$ ima $\leq \omega_1$ maksimalnih ω_1-lanaca. Neka je $\mathcal{X}$ kolekcija <u>svih</u> njegovih maksimalnih ω_1-lanaca. Dakle, po predpostavci je $|\mathcal{X}| \leq \omega_1$. Kako je $\underline{T}$ normalno ω_1-drvo, to je za svako $b \varepsilon \mathcal{X}$, skup $D(b) = T-b$ gust i otvoren u parcijalno uredjenom skupu $(T, \geq_T)$. Za svako $\alpha < \omega_1$ stavljamo $D_\alpha = \cup \{R_\beta T | \alpha \leq \beta < \omega_1\}$. Kako je $\underline{T}$ normalno ω_1-drvo, to je D_α gust i otvoren skup u $(T, \geq_T)$, za svako $\alpha < \omega_1$. Neka je

$$\mathcal{F} = \{D(b) | b \varepsilon \mathcal{X}\} \cup \{D_\alpha | \alpha < \omega_1\},$$

tada je $\mathcal{F}$ kolekcija od ω_1 gustih otvorenih skupova parcijalno uredjenog skupa $(T, \geq_T)$. Jedna posledica MA + $\neg$CH glasi (v. [13]):

DA: Za svaki σ-gust parcijalno uredjen skup P moći ω_1 i svaku kolekciju $\mathcal{F}$, njegovih gustih podskupova moći ω_1, postoji $\mathcal{F}$-generički podskup od P.

Ako DA primenimo na parcijalno uredjen skup $(T, \geq_T)$ i kolekciju $\mathcal{F}$ zaključujemo da postoji $\mathcal{F}$-generički skup $G \subseteq T$. Kako je $\underline{T}$ drvo tada uslov 2. iz definicije generičkog skupa znači da je G lanac drveta $\underline{T}$. Uslov 1. nam obezbedjuje da je G početni komad od T. Kako je $D_\alpha \cap G \neq \phi$ (po uslovu 3. iz definicije generičkog skupa), za svako $\alpha < \omega_1$ imamo da je G maksimalni ω_1-lanac drveta $\underline{T}$, tj. $G \varepsilon \mathcal{X}$. Dakle, po definiciji je $D(G) \varepsilon \mathcal{F}$, što po uslovu 3. znači da je $D(G) \cap G \neq \phi$, što je nemoguće, jer je $D(G) = T-G$ po definiciji. Ovo završava dokaz leme. ∎

Teorema 1.11. ($\neg$wKH + MA + $\neg$CH) Ne postoji σ-gust parcijalno uredjeni skup moći ω_1.

Dokaz: Teorema sledi direktno iz lema 1.9. i 1.lo.∎

U radu [46] Kurepa daje sledeće interesantno uopštenje pojma separabilnosti topološkog prostora X

K_o: postoji prebrojiva familija $\mathcal{D}$ diskretnih podprostora prostora X, tako da je $\cup\mathcal{D}$ gust podskup prostora X.

(Oznaka K_o je uzeta iz gornjeg rada)

Ruski matematičari (Arhangelskiĭ i drugi) ovu osobinu danas nazivaju d-separabilnost prostora X.

Osobinu K_o imaju neke važne klase topoloških prostora kao što su metrizabilni prostori, dijadski bikompaktni, bikompakti Eberleina, dispersioni prostori i drugi. Za razliku od separabilnosti ova osobina se prenosi pri proizvodu proizvoljnog broja prostora (v. [1]).

U istom radu Kurepa postavlja pitanje egzistencije topoloških prostora sa prvom aksiomom prebrojivosti, koji nemaju osobinu K_o. U teoremi 2 toga rada on pokazuje da je Suslinov kontinuum linearno uredjen prostor sa prvom aksiomom prebrojivosti, koji ne zadovoljava uslov K_o. Primetimo da on ima težinu ω_1.

Medjutim, mi možemo dati i apsolutni primer linearno uredjenog prostora sa prvom aksiomom prebrojivosti, koji nema osobinu K_o.

Neka je R^1 skup svih konačnih nizova ordinala iz ω_1, koji uredjujemo relacijom $<$ prirodnog uredjenja (v. [55]. Kako smo već jednom napomenuli $(R^1, <)$ je gust linearno uredjen skup, $\alpha \leq tp(R^1, <)$, za svako $\alpha < \omega_2$ ($\omega_2 \nleq tp(R^1, <)$, jer $|R^1| = \omega_1$), $cf(R^1, <) = \omega_1$, ... Neka je σR^1 skup svih ograničenih dobro uredjenih podskupova od $(R^1, <)$ i neka je $\dashv$ relacija "biti početni komad" na σR^1, tada je (jasno) $(\sigma R^1, \dashv)$ jedno normalno ω_2-drvo. Neka je $T = \cup\{R_\alpha(\sigma R^1) | \alpha < \omega_2, \lim(\alpha)\}$ i neka je $\underline{T} = (T, \dashv)$. Čvorišta drveta $\underline{T}$ imaju moć 2^ω pa ih zato možemo urediti relacijom $\lhd$ po tipu realnih brojeva. Neka je $(T, \lhd)$ prirodno uredjenje drveta $\underline{T}$ inducirano takvim uredjenjima čvorišta. $(T, \lhd)$ je gust linearno uredjen skup, koji, kao prostor, ne zadovoljava K_o. Naime, neka je $\mathcal{D} = \{D_n | n \in \omega\}$ proizvoljna kolekcija diskretnih podskupova od T. Kako je D_0 diskretan postoji $t_0 \in T$, takav da je $[t_0, \cdot)_{(T,\dashv)} \cap D_0 \neq \phi$. Kako je D_1 diskretan postoji $t_1 \in [t_0, \cdot)_{(T,\dashv)}$, tako da je $D_1 \cap [t_1, \cdot)_{(T,\dashv)} = \phi$ itd.. Time dobijamo niz $t_0, t_1, \ldots$ elemenata iz T sa osobinama: $t_{i+1} \in [t_i, \cdot)_{(T,\dashv)}$ i $[t_i, \cdot)_{(T,\dashv)}$ $D_i = \phi$. Posebmo je $t_0 =| t_1 =| t_2 =| \ldots$, što znači da je $t = \bigcup \{t_i | i \in \omega\} \in T$. Po konstrukciji je $D_i \cap [t, \cdot)_{(T,\dashv)} = \phi$, za svako $i < \omega$, što znači da $\bigcup \{D_i | i \in \omega\}$ nije gust u T, jer je $[t, \cdot)_{(T,\dashv)}$ $\lhd$-konveksan skup moći > 2.

Neka je $S = \bigcup \{R_\alpha T | \alpha < \omega_2, cf(\alpha) = \omega\}$. Kako je, za svako $t \in T$ $(t, \cdot)_{(T,\dashv)}$ $\lhd$-konveksan otvoren skup i kako je kolekcija takvih skupova π-baza prostora T (tj. svaki otvoren skup iz T sadrži neko $(t, \cdot)_{(T,\dashv)}$), to je skup S gust u T (na T podrazumevamo uredjajnu topologiju induciranu uredjenjem $\lhd$). Kako T ne zadovoljava K_0 to i S ne zadovoljava K_0 (jednostavna provera). Primetimo da je uredjajna topologija na S iz $(S, \lhd \cap S^2)$ ista sa induciranom topologijom iz T. Neka je $s \in S$ proizvoljan i neka je N čvorište sukcesora tačke s u T (neposrednih sukcesora). Neka je $\{x_n | n \in \omega\}$ niz iz N $\lhd$-koincijalan sa $(N, \lhd \cap N^2)$ i neka je $\{y_n | n \in \omega\}$ niz iz $(\cdot, s)_{(T,\dashv)}$ $\dashv$-kofinalan sa $(\cdot, s)_{(T,\dashv)}$. Neposredno proveravamo da je $\sup_\lhd \{y_n\} = s = \inf_\lhd \{x_n\}$, što znači da s ima prebrojiv karakter u T a time i u S. Dakle, S je traženi topološki prostor. Primetimo da konstruisani prostor S ima gustinu (a time i težinu) veću od ω_1. Zato se postavlja pitanje egzistencije linearno uredjenog topološkog prostora gustine $\leq \omega_1$, koji ne zadovoljava uslov K_0 i to u običnoj teoriji skupova, jer kako smo gore videli Suslinov kontinum predstavlja jedan takav primer.

Ovde ćemo pokazati da je odgovor na to pitanje negativan, tj. da u ZFC nemoćemo konstruisati linearno uredjen prostor gustine ω_1 (odnosno $<2^\omega$), koji ne zadovoljava uslov K_0. To će slediti na osnovu gore dokazane konsistentnosti teorije ZFC + $\neg$wKH + MA + $\neg$CH i sledeće teoreme.

<u>Teorema 1.12</u>. ($\neg$wKH + MA + $\neg$CH). Svaki linearno uredjen topoločki prostor gustine $\leq \omega_1$ zadovoljava uslov K_0.

Dokaz: Neka je X proizvoljan linearno uredjen topološki prostor gustine $\leq \omega_1$. Možemo predpostaviti da X nema izolovanih tačaka (ako je $Y \subseteq X$ skup izolovanih tačaka, tada stavljamo $X_o = \bar{Y}$, $X_1 = X - X_o$ i teoremu dokazujemo za X_1). Neka je $<$ uredjenje, koje inducira topologiju na X. Dokažimo da se možemo ograničiti na slučaj kad je $|X| = \omega_1$ i kad je $(X, <)$ gust linearno uredjen skup. Naime, na osnovu već učinjene predpostavke $(X, <)$ može imati jedino skokove $[x,y]$ $(x,y \in X, (x,y) = \phi)$ u kome je x granična tačka skupa $(\cdot, x)$ a y granična tačka skupa $(y, \cdot)$. Neka je $Y \subseteq X$ skup moći ω_1 koji je gust u X i koji iz jednog skoka može imati najviše jednu tačku (jasno je, da takav Y postoji). Dakle, $(Y, < \cap Y^2)$ je gust linearno uredjen skup. Ako Y sa topologijom induciranom relacijom $< \cap Y^2$ zadovoljava uslov K_o tada i X zadovoljava uslov K_o (jednostavna provera). Dakle, možemo predpostaviti da je $(X, <)$ gust linearno uredjen skup i da je $|X| = \omega_1$. Dokažimo da X zadovoljava uslov K_o, tj. da ima gust skup koji je jednak prebrojivoj uniji diskretnih podprostora.

Predpostavimo suprotno, tj. da X ne zadovoljava uslov K_o. Neka je $\mathcal{U}$ kolekcija svih otvorenih skupova iz X koji (kao podprostori) zadovoljavaju uslov K_o. Predpostavimo da je u neprazna. Dokažimo da svaki lanac iz $(\mathcal{U}, \subset)$ ima majorantu. Možemo se ograničiti na $\subset$-dobro uredjene lance. Neka je $l = \{U_\alpha | \alpha < \delta\}$, proizvoljan lanac iz $(\mathcal{U}, \subset)$, takav da je $U_\alpha \subset U_\beta$, za svako $\alpha < \varepsilon < \delta$.

Neka je S_α skup svih uredjajnih komponenti otvorenog skupa U_α, za svako $\alpha < \delta$. Dakle, S_α je kolekcija disjunktnih konveksnih otvorenih skupova u X. Neka je $S = \cup \{S_\alpha | \alpha < \delta\}$. Parcijalno uredjeni skup $(S, \subset)$ je razvrstan, tj. svaki lanac mu je $\subset$-dobro uredjen. Neka je $A = R_o S$ skup svih $\subset$-minimalnih elemenata iz S i neka je za svako $I \in A$ $b(I)$ fiksiran maksimalan lanac iz $(S, \subset)$, koji sadrži I. Neka je $J \in S$ proizvoljan i neka je, na primer $J \in S_\alpha$, $\alpha < \delta$. Kako je A skup minimalnih elemenata iz $(S, \subset)$ i kako je $(S, \subset)$ razvrstan, to postoji $I \in A$, tako da je $I \subseteq J$. Neka je $\beta < \delta$ takav da je $I \in S_\alpha$. Predpostavimo da je $I \not\subseteq J$, tada je $\beta < \alpha$. Neka je $x \in I$ proizvoljna tačka, tada je $x \in U_{\alpha'}$, za svako $\beta \leq \alpha' < \delta$. Lanac $b(I)$ možemo karakterisati kao skup uredjajnih komponenti skupova $U_{\alpha'}$, $\beta \leq \alpha' < \delta$ koje sadrže tačku x (jednostavna provera). Odatle, posebno, imamo da je $J \in b(I)$, što na osnovu proizvoljnosti znači da je

$S = \cup \{b(I) \mid I \in A\}$. Odatle, takodje imamo da je za proizvoljna dva lanca $b(I)$, $b(I')$, I, $I' \in A$ ili $(\cup b(I)) \cap (\cup b(I')) = \phi$ ili se $b(I)$ i $b(I')$ poklapaju počevši od nekog elementa, što znači da je $\cup b(I) = \cup b(I')$.

Dakle, možemo izdvojiti $A' \subseteq A$ tako da je

$$\cup \{U_\alpha \mid \alpha < \delta\} = \cup \{\cup b(I) \mid I \in A'\} \quad \text{i}$$

$(\cup b(I)) \cap (\cup b(I')) = \phi$, za svako $I, I' \in A'$, $I \neq I'$. Kako je $\{\cup b(I) \mid I \in A'\}$ disjunktna kolekcija otvorenih skupova, to da bi dokazali da $\cup \{U_\alpha \mid \alpha < \delta\}$ zadovoljava uslov K_o, dovoljno je dokazati da svako $\cup b(I)$, $I \in A'$ zadovoljava uslov K_o. Dakle, trebamo dokazati da unija, proizvoljnog $\subset$-dobro uredjenog lanca otvorenih konveksnih skupova, koji zadovoljavaju uslov K_o, takodje zadovoljava uslov K_o. Medjutim, ovo se jednostavno dokazuje, tako da dokaz izostavljamo.

Neka je U maksimalni element parcijalno uredjenog skupa $(\mathcal{U}, \subset)$. Kako X ne zadovoljava uslov K_o, to je $X_o = X - \bar{U}$ neprazan otvoren skup u X, čiji proizvoljni otvoreni podskup ne zadovoljava uslov K_o. Ovo konačno znači, da se možemo ograničiti na posmatranje linearno uredjenog topološkog prostora X moći ω_1, takvog da je $(X, <)$ gust i takvog da svaki otvoren skup iz X <u>ne</u> zadovoljava uslov K_o.

Neka je $\{x_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ numeracija skupa X. Induktivno po slojevima T_α, $\alpha \leq \omega_1$ ćemo konstruisati drvo atomizacije linearno uredjenog skupa $(X, <)$. Neka je $T_o = \{X\}$ i neka je $\alpha \leq \omega_1$, takav ordinal da smo T_β, $\beta < \alpha$ već konstruisali. Neka je $\alpha = \beta+1$. Za svako $I \in T_\beta$, $|I| > 1$ biramo unutrašnju tačku x, pri čemu za x biramo x_β, ako je x_β unutrašnja tačka I. Neka je $I_o = (\cdot, x] \cap I$, $I_1 = (x, \cdot) \cap I$. Neka je $T_\alpha = \cup \{\{I_o, I_1\} \mid I \in T_\beta, |I| >$
U slučaju da je α graničan ordinal stavljamo:

$$T_\alpha = \{\cap b \mid b \text{ je } \alpha\text{-lanac iz } T|\alpha \text{ i } \cap b \neq \phi\}.$$

Neka je $T = \cup \{T_\alpha \mid \alpha \leq \omega_1\}$. Da bi dokazali da je $\underline{T} = (T, \supset)$ drvo atomizacije linearno uredjenog skupa $(X, <)$ dovoljno je dokazati da je $\cap b(x) = \{x\}$, za svako $x \in X$, gde je $b(x) = \{I \in T \mid I \ni x\}$. Medjutim, ovo lako sledi na osnovu konstrukcije. Neka je $T' = \{I \in T \mid |I| > 1\}$. Jasno je, da je $|T'| = \omega_1$ i da svako $I \in T'$ ima dva disjunktna neposredna sukcesora, tj. $(T', \supset)$ je razdeljiv parcijalno uredjen skup moći ω_1.

Neka su $x,y \in X$, $x < y$ proizvoljni. Kako je $(X,<)$ gust to postoji $z \in X$, tako da je $x < z < y$. Neka je $b'(z) = b(z) - \{\{z\}\}$. Jasno je da je $b'(z) \subsetneq T'$, da $b'(z)$ ima graničnu dužinu i da je $\{z\} = \cap\, b'(z)$. To znači da postoji $I \in b'(z)$, tako da je $I \subsetneq (x,y)$. Ovo dokazuje da je $= \{int(I) \mid I \in T'\}$ π-baza prostora X.

Kako je $(T', \supset)$ razdeljiv parcijalno uredjen skup moći ω_1, to na osnovu teoreme 1.11. on ne može biti σ-gust. Dakle, postoji kolekcija $\{D_n \mid n \in \omega\}$ otvorenih gustih podskupova iz $(T', \supset)$, tako da $D = \cap\{D_n \mid n \in \omega\}$ nije gust u $(T', \subset)$. To znači da postoji $I_o \in T'$, tako da je $D \cap \{I \in T' \mid I \subsetneq I_o\} = \phi$.

Neka je $E_n = R_o D_n$ (skup svih $\supset$-minimalnih elemenata iz D_n), za svako $n \in \omega$. Neka je $\mathcal{P}_n = \{int(I) \mid I \in E_n\}$, za svako $n \in \omega$. Dakle, $\mathcal{P}_n$ je kolekcija otvorenih nepraznih i disjunktnih podskupova od X za svako $n \in \omega$. Dokažimo da je $\mathcal{P} = \cup\{\mathcal{P}_n \mid n \in \omega\}$ π-baza prostora $V_o = int(I_o)$ tj. da V_o ima σ-disjunktnu π-bazu, čime ćemo dobiti protivrečnost sa podpostavkom da ni jedan otvoren skup iz X <u>ne</u> zadovoljava uslov K_o.

Neka su $x,y \in V_o$, $x < y$ proizvoljni. Trebamo naći $P \in \mathcal{P}$, tako da je $P \subsetneq (x,y)$. Kako smo gore pokazali postoji $I \in T'$ $(I \subsetneq I_o)$, tako da je $I \subsetneq (x,y)$. Kako je D_n gust skup u $(T', \supset)$ to postoji $J_n \in D_n$ tako da je $J_n \subsetneq I$. Po predpostavci da je $E_n = R_o D_n$ postoji $I_n \in E_n$, tako da je $I_n \supsetneq J_n$ (jer je $(T', \supset)$ drvo). Iz istog razloga (tj. da je $(T', \supset)$ drvo) imamo da za svako $n \in \omega$ važi $I \subsetneq I_n$ ili $I_n \subsetneq I$. Kako je $D \cap \{I' \in T' \mid I' \subsetneq I_o\} = \phi$, to mora postojati $n_o \in \omega$ tako da $I \notin D_{n_o}$. Kako je D_{n_o} otvoren i $I_{n_o} \in D_{n_o}$, imamo da iz $I \subsetneq I_{n_o}$ sledi da je $I \in D_{n_o}$. Dakle, mora biti $I_{n_o} \subsetneq I$. Neka je $P = int(I_{n_o}) \in \mathcal{P}_{n_o} \subsetneq \mathcal{P}$). Za P imamo da važi $P \subsetneq I \subsetneq (x,y)$, što je i trebalo dobiti. Dakle, $\mathcal{P} = \cup\{\mathcal{P}_n \mid n \in \omega\}$

je σ-disjunktna π-baza prostora V_o. Ovim bi završili dokaz teoreme 1.12. ∎

Iz dokaza predhodne teoreme se vidi da možemo dokazati i nešto jaču teoremu:

Teorema 1.12'. ($\neg$wKH+MA+ $\neg$CH). Svaki linearno uredjen topološki prostor gustine $\leq \omega_1$ ima σ-disjunktnu π-bazu. ∎

Problem 12.D knjige [64] glasi: Da li postoji savršeno normalan ne-Arhimedovski prostor, koji nije metrizabilan?

Prostor X je ne-Arhimedovski ako ima bazu $\mathfrak{B}$ topologije, tako da iz $U,V \in \mathfrak{B}$ sledi da je $U \subseteq V$, $V \subseteq U$ ili $U \cap V = \phi$. Dakle, ovo je još jedan naziv za R-prostore Kurepe (v. [50], [6o], ...). Odmah ispod se napominje da je odgovor na taj problem pozitivan, ako postoji Suslinov kontinuum. Naime, koristeći $\neg$SH možemo konstruisati savršeno normalan ne-Arhimedovski prostor težine ω_1, koji nije metrizabilan. Dakle, problem glasi, da li postoji apsolutan primer takvog prostora. Mi ćemo ovde dokazati da je odgovor na taj problem negativan, ako se ograničimo na prostore težine ω_1.

Baza $\mathfrak{B}$ sa gornjom osobinom predstavlja pseudodrvo (v. [56]) u odnosu na relaciju $\supset$. Iz teorije ovih prostora uzimamo samo činjenicu da iz $\mathfrak{B}$ možemo izdvojiti bazu $\mathfrak{B}'$, tako da je $(\mathfrak{B}', \supset)$ drvo (svaki lanac je dobro uredjen). Dokaz te činjenice možemo naći u [6o] ili u [2], gde su takvi prostori nazvani "prostori sa bazom ranga 1".

Prvo dokazujemo sledeću lemu:

Lema 1.13. Neka je X proizvoljan savršeno normalan ne-Arhimedovski prostor. Tada je X metrizabilan ako i samo ako zadovoljava uslov K_o.

Dokaz: Neka je X savršeno normalan ne-Arhimedovski prostor i neka je $\mathfrak{B}$ njegova granasta baza. Predpostavljamo da je $(\mathfrak{B}, \supset)$ drvo. Predpostavimo da X zadovoljava uslov K_o, tj. da postoji familija $\{D_n | n \in \omega\}$ diskretnih podprostora od X, tako da je $\bigcup \{D_n | n \in \omega\} = X$.

Neka je $x \in D_n$ i $n \in \omega$. Tada postoji $V_x \in \mathfrak{B}$, tako da je $x \in V_x$ i $V_x \cap (D_n - \{x\}) = \phi$. Kako je X savršeno normalan, to je svaka njegova tačka jednaka proseku prebrojive kolekcije otvorenih skupova iz X. Kako je $\mathcal{B}$ granasta baza prostora X odatle će slediti da je karakter svake tačke u X prebrojiv. Dakle, za svako $x \varepsilon D_n$ $(n \varepsilon \omega)$ postoji $\{V_x^i\}_{i\varepsilon\omega}$, tako da je $x \varepsilon V_x^{i+1} \subseteq V_x^i \subseteq V_x$, za svako $i \varepsilon \omega$ i tako da je $\{V_x\}_{i\varepsilon\omega}$ baza tačke x u X. Neka je

$$\mathcal{P}_{(n,i)} = \{ V_x^i | x \varepsilon D_n \},$$

za svako $i,n \varepsilon \omega$. Tada lako proveravamo da je $\mathcal{P}(n,i)$ disjunktna kolekcija za svako $i,n \varepsilon \omega$ i da je $\mathcal{P} = \cup\{ \mathcal{P}(n,i) | i,n \varepsilon \omega\}$ π-baza prostora X, tj. da X ima σ-disjunktnu π-bazu.

Dokažimo sada da, ako X ima σ-disjunktnu π-bazu, tada on ima i σ-diskretnu π-bazu.

Neka je $\mathcal{P} = \cup \{ \mathcal{P}_n | n \varepsilon \omega\}$ σ-disjunktna π-baza prostora X. Da bi dokazali da je $\mathcal{P}$ σ-diskretna dovoljno je dokazati da je za svako $n \varepsilon \omega$ $\mathcal{P}_n$ σ-diskretna kolekcija otvorenih skupova iz X. Jasno je, da možemo predpostaviti da je $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{B}$. Neka je $V = \cup \mathcal{P}_n$. Kako je X savršeno normalan to postoji kolekcija $\{F_i | i \varepsilon \omega\}$ zatvorenih skupova u X tako da je $V = \cup \{F_i | i \varepsilon \omega\}$. Neka je $\mathcal{P}_n^i = \{U \varepsilon \mathcal{P}_n | U \cap F_i \neq \phi\}$. Dakle, dovoljno je dokazati da je $\mathcal{P}_n^i$ diskretna kolekcija za svako $i \varepsilon \omega$. Neka je $x \varepsilon X$ proizvoljna tačka. Trebamo naći $U' \varepsilon \mathcal{B}$ tako da je $x \varepsilon U'$ i $U' \cap U \neq \phi$ za najviše jedan element U kolekcije $\mathcal{P}_n^i$. Ako je $x \varepsilon \cup \mathcal{P}_n$ tada je to jasno (jer je $\mathcal{P}_n$ disjunktna kolekcija). Zato predpostavimo da $x \notin V$. Kako $x \notin F_i$ postoji $U' \varepsilon \mathcal{B}$, tako da je $x \varepsilon U'$ i $U' \cap F_i = \phi$. Neka je $U \varepsilon \mathcal{P}_n^i$ proizvoljan i neka je $y \varepsilon U \cap F_i$ $(\neq \phi)$ proizvoljna tačka. Elementi U i U' baze $\mathcal{B}$ imaju osobina $U-U' \neq \phi$ i $U'-U \neq \phi$, što znači da mora biti $U \cap U' = \phi$, što nam i treba.

Dakle, možemo predpostaviti da X ima σ-diskretnu π-bazu $\mathcal{P} = \cup\{ \mathcal{P}_n | n \varepsilon \omega\} \subseteq \mathcal{B}$.

Za svako $n \varepsilon \omega$ stavljamo

$$\mathcal{B}_n = \{V \varepsilon \mathcal{B} \mid \text{ili je } V \cap (\cup \mathcal{P}_n) = \phi \text{ ili je } V \varepsilon \mathcal{P}_n\}$$

Kako je $\mathcal{P}_n$ diskretna kolekcija to je $\mathcal{B}_n$ pokrivač prostora X, za svako $n \varepsilon \omega$. Neka je $\mathcal{U}_n = R_o \mathcal{B}_n$ (= skup svih $\supset$-minimalnih elemenata iz $\mathcal{B}_n$).

Za svako $n \in \omega$ $\mathcal{U}_n$ je disjunktan pokrivač prostora X, jer je $(\mathcal{B}, \supset)$ drvo. Dakle $\mathcal{U} = \cup \{\mathcal{U}_n | n \in \omega\}$ je jedna σ-diskretna kolekcija otvorenih skupova iz X. Na osnovu teoreme Nagata-Smirnova, za dokaz metrizabilnosti prostora X, dovoljno je dokazati da je $\mathcal{U}$ baza prostora X.

Neka su $x \in V_0 \in \mathcal{B}$ proizvoljni. Trebamo naći $V \in \mathcal{U}$ tako da je $x \in V \subseteq V_0$. Kako je $\mathcal{P}$ π-baza prostora X to postoji $n_0 \in \omega$ i $V' \in \mathcal{P}_{n_0}$ tako da je $V' \subseteq V_0$. Neka je $V \in \mathcal{U}_{n_0}$ jedinstven elemenat ove kolekcije koji sadrži x. Dokažimo da je $x \in V \subseteq V_0$. Kako je $\mathcal{B}$ granasta baza u suprotnom bi bilo $V \not\subseteq V_0$, odakle je i $V \not\subseteq V'$, što je suprotno definiciji kolekcije $\mathcal{B}_{n_0}$ odnosno $\mathcal{U}_{n_0}$.

Dakle, ako X zadovoljava K_0, tada je on metrizabilan prostor. Da svaki metrizabilan prostor zadovoljava uslov K_0 je opštepoznata činjenica, koja se pored toga jednostavno dokazuje. Ovim bi završili dokaz leme 1.13. ■

Da bi dokazali da u ZFC ne postoji savršeno normalan prostor težine ω_1 sa granastom bazom, koji nije metrizabilan, dovoljno je, na osnovu rezultata iz prvog dela odeljka, dokazati sledeću teoremu.

Teorema 1.14. $(\neg wKH + MA + \neg CH)$. Neka je X proizvoljan savršeno normalan ne-Arhimedovski prostor težine ω_1. Tada je X metrizabilan prostor.

Dokaz: Na osnovu leme 1.13. dovoljno je dokazati da X zadovoljava uslov K_0. Neka je $\mathcal{B}$ granasta baza prostora X, pri čemu opet predpostavljamo da je $(\mathcal{B}, \supset)$ drvo. Neka je

$$\mathcal{B}' = \{V \in \mathcal{B} \mid V \text{ zadovoljava } K_0 \text{ (kao podprostor od X)}\}.$$

Jasno je da je $\mathcal{B}'$ krajnji komad u $(\mathcal{B}, \supset)$. Neka je $\mathcal{B}_0 = R_0 \mathcal{B}'$ (= skup $\supset$-minimalnih elemenata iz $\mathcal{B}'$). Dakle, svaki elemenat iz $\mathcal{B}_0$ zadovoljava uslov K_0 i ako $V \in \mathcal{B}$ zadovoljava K_0, tada je $V \subseteq V'$ za neko $V' \in \mathcal{B}_0$. Kako je $\mathcal{B}_0$ disjunktna kolekcija otvorenih skupova koji zadovoljavaju K_0 to i $V_0 = \cup \mathcal{B}_0$, takodje, zadovoljava uslov K_0 (jasno). Ako je $\bar{V}_0 = X$, tada i X zadovoljava uslov K_0 čime dokaz završavamo. Predpostavimo zato da je $X_0 = X - \bar{V}_0$ neprazan. Dakle, X_0 je savršeno normalan prostor težine ω_1 sa granastom bazom $\mathcal{B}|X_0$ čiji ni jedan elemenat (kao podprostor) ne zadovoljava uslov K_o. Dokažimo da takav prostor ne postoji.

Predpostavimo suprotno, tj. da postoji (savršeno normalan) prostor X težine ω_1 sa granastom bazom $\mathcal{B}$ koja ima osobinu da ni jedan $V \in \mathcal{B}$ ne zadovoljava uslov K_o. Posmatrajmo parcijalno uredjeni skup $(\mathcal{B}, \subset)$, pri čemu predpostavljamo da je $(\mathcal{B}, \supset)$ drvo. $(\mathcal{B}, \subset)$ je separativan parcijalno uredjen skup koji ima gust podskupa moći ω_1, jer X ima težinu ω_1 (jednostavna provera). Kako smo videli u teoremi 1.11. (zapravo u njenom dokazu) $(\mathcal{B}, \subset)$ ne može biti σ-gust. Dakle, postoji kolekcija $\{D_n | n \in \omega\}$ otvorenih gustih skupova iz $(\mathcal{B}, \subset)$ čiji presek $D = \cap \{D_n | n \in \omega\}$ nije gust u $(\mathcal{B}, \subset)$. Neka je $V_o \in \mathcal{B}$ takav da je $D \cap \{V \in \mathcal{B} | V \subseteq V_o\} = \phi$. Neka je $\mathcal{P}_n = R_o D_n$ (= kolekcija $\supset$ -minimalnih elemenata iz D_n), za svako $n \in \omega$. Dakle, $\mathcal{P}_n$ je disjunktna kolekcija otvorenih nepraznih skupova za svako $n \in \omega$ (u svim našim rasudjivanjima sa granastom bazom $\mathcal{B}$, smatramo da $\mathcal{B}$ ne sadrži ϕ). Dokažimo da je $\mathcal{P} = \cup\{\mathcal{P}_n | n \in \omega\}$ π-baza prostora V_o, čime ćemo dobiti protivrečnost sa predpostavkom da V_o ne zadovoljava uslov K_o. Neka je $V \in \mathcal{B}$, $V \subseteq V_o$ proizvoljan. Trebamo naći $V' \in \mathcal{P}$, tako da je $V' \subseteq V$. Za svako $n \in \omega$ postoji $V'_n \in D_n$, tako da je $V'_n \subseteq V$ (jer je D_n gust u $(\mathcal{B}, \subset)$).

Neka je $V_n \in \mathcal{P}_n$ takav da je $V_n \supseteq V'_n$ ($\mathcal{P}_n = R_o D_n$). Dakle, $V_n \supseteq V$ ili $V_n \subseteq V$, za svako $n \in \omega$. Kako je $D \cap \{V' \in \mathcal{B} | V \subseteq V_o\} = \phi$, to mora postojati $n_o \in \omega$ tako da $V \notin D_{n_o}$. Kako je D_{n_o} otvoren, to znači da mora biti $V_{n_o} \subset V$, što je i trebalo dobiti, jer je $V_{n_o} \in \mathcal{P}$. Ovim bi završili dokaz teoreme 1.14. ∎

Iz dokaza predhodne teoreme se vidi da smo dokazali i sledeću teoremu:

<u>Teorema 1.15</u>. ($\neg$ wKH + MA + $\neg$ CH) Neka je X proizvoljan T_1 ne-Arhimedovski prostor težine ω_1. Tada X ima σ-disjunktnu π-bazu. ∎

BIBLIOGRAFIJA

1. Arhangelskiǐ A.B. Bukompakti i obedinenija sčetnih semeǐstv metrizyembih prostranstv, DAN SSSR,Tom.232, N$^{\underline{o}}$ 5(1977) 989-992.

2. Arhangelskíǐ A.B. O prostranstvah s bazoǐ boljšoǐ rang kotorǐ konečen, Vestnik M.Y. N$^{\underline{o}}$ 2 (1977) 3-5.

3. Baumgartner J.E.,A new class of order types, Ann.Math. Logic. 9.(1976) 187-222.

4. Baumgartner J.E., Prikry K.O. On A theorem of Silver, Discrete Math 14(1976)M-21.

5. Benda M., Ketonen J. On regularity of ultrafilters, Israel J. Math. 17(1974) 231-24o.

6. Birkhoff G. Latice theory, 1945.

7. Burgess J.D.Forcing, Handbook of Math. Logic (N.H)(1977) 4o3-452.

8. Chang c.c. Extensions of combinatorial principles of Kurepa and Prikry, Theory of sets and topology, Berlin (1972) 49-57.

9. Devlin K.J. Aspects of Constructibility, Lect. Notes in Math. 354 (1973).

1o. Devlin K.J. Order types, trees, and a problem of Erd_ős and Hajnal, Periodica Math. Hung. vol. 5(2) (1974) 153-16o.

11. Devlin K.J.A note on a problem ofErdös and Hajnal,Discrete Math. 11(1979) 9-22.

12. Devlin K.J. Kurepa's hypothesis and the continuum, Fund. Math.89. (1975) 23-31.

13. Devlin K.J. And alternative to Martin's Axiom, Set Theory and Hierarchy Theory, Bierutowice, Poland (Lect. Hotes 537) (1975) 65-76.

14. Devlin K.J. $\aleph_1$-Trees, Ann. Math. Logic 13 (1978) 267-33o.

15. Devlin K.J . On generalising Martin's Axiom, Bull. Polon. Acod. Sci. 26. No. 3 (1978) 211-212.

16. Devlin K.J. Martin's Axiom Versus the Continuum Hypothesis (u pripremi).

17. Devlin K.J., Johnsbratcn H. The Souslin Problem. Lecture Notes in Math. 4o5 (1974).

18. Drake F.R. Set Theory: An Introduction to Large Cardinals (N.H) 1974.

19. Dushink B., Miler E.W. Partially ordered sets, Amer. J. Math.63. (1941) 6oo-61o.

2o. Easton W.B. Powers of regular cardinals, Ann. Math. Logic 1(197o) 139-178.

21. Erdös P. Galvin F., Hajnal A. On set-systems having Large chromatic number and not Containing prescribed subsystems, Infinite and Finite sets, Coll. Math. Soc. János Bolyai lo V. I (1975) 425-513.

22. Erdös P., Hajnal A. Unsolved problems in set theory, Proceedings of Symp. in Pure Math. XIII Part 1, Amer. Math. Soc. R.I. (1971) 17-48.

23. Erdös P., Hajnal A. Unsolved and solved problems in set theory, Proc. of. Symp. in Pure Math. XXV, Amer. Math. Soc. R.I. (1974) 267-287.

24. Erdös P. Hajnal A. On shromatic number of graphs and set-systems, Acta Math. Acad.Sci. Hungar. 17 (1966) 61-99.

25. Erdös P., Hajnal A., Milner E.C. On sets of almost disjoint subsets of a set, Acta Math. Acad.Sci. Hungar, 19 (1968) 2o9-218.

26. Erdös P.Hajnal A., Rado R. Partition relations for cardinal numbers, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 16(1965) 93-196.

27. Erdös P.RadoR. A partition calculus in set theory, Bull. Amer. Math. Soc. 62(1956) 427-489.

28. Erdös P. Rado R. Intersection theorems for systems of sets, J. London Math. Soc. 35(196o) 85-9o.

29. Engelking R. General topology, MM 6o., Warszawa 1977.

3o. Fodor G. Eine Bemerkung zur Theorie der Regressiven Funktionen Acta Sci. Math. Szeged 17(1956) 139-2o2.

31. Gaifman H., Specker E.P. Isomorphism types of trees, Proc. Amer. Math. Soc. 15(1964) 1-7.

32. de Groot J. Groops represented by homeomorphism group I, Math. Ann., 138(1959) 8o-1o2.

33. de Groot J., McDowell R.H. Autohomeomorphism groups of 0-dimensional Spaces, Compos. Math. 15(1963) 2o3-2o9.

34. Hajnal A., Máté A. Set mappings, partitions, and Chromatic numbers, Logic Colloqvium '73. Proc. Log. Colloq. Bristol 1973 (N.H.) (1975) 347-379.

35. Jech T.J. Nonprovability of Suslin's hypothesis, Comment. Math. Univ. Carolinac 8(1967) 291-3o5.

36. Jech T.J. Trees, J.Symbolic Logic 36(1971) 1-14.

37. Jech T.J. Lecture on set theory, Lecture Notes in Math. 217(1971).

38. Jech T.J. Automorphisms of ω_1-trees, Trans.Amer. Math. Soc.173 (1972) 57-7o.

39. Jensen B.R. Souslin's Hypothesis is incompatible with V=L, Notices Amer. Math. Soc. 15(1968) 935.

4o. Jensen B.R. The fine structure of the constructible Hierarchy, Ann. Math. Logic 4(1972) 229-3o8.

41. Jónsson B.Boolean algebra without proper automorphisms, Proc. Amer. math. Soc. 2(1951) 766-77o.

42. Juhász I., Weiss W.A.R. On a problem of Sikorski, Fund. Math. 1oo. (1978) 223-227.

43. Katetov M. Remarks on Boolean algebras, Collog. Math.2(1951),229-235.

44. Kunen K. On the cardinality of compact spaces, Notices Amer. Math. Soc 22(1975) A-212.

45. Kurepa Dj. Ensembles ordonnés et Ramifiés, Publ. Math. Univ. Belgrade 4(1935) 1-138.

46. Kurepa Dj. Le probléme de Souslin et les espaces abstraits, Comptes rendus, 2o3(1936)1o49-1o52.

47. Kurepa Dj.Ensembles Linéaires et une classe de tableaux ramifies, Publ. Math. Univ. Beograde 6(1937) 129-16o.

48. Kurepa Dj. A propos d'une généralisation de la nation d'ensembles bien ordonnés. Acta Mathematica 75(1942) 139-15o.

49. Kurepa Dj. Teorija skupova Zagreb 1951.

5o. Kurepa Dj. Sur L'écart abstrait, Glasnik, Mat. Fiz 11(1956) 1o5-134.

51. Kurepa Dj. On binary symmetrikal relations or graphs, Dissert.Slov. Acad. Sci. Ljubljana 4(1953) 67-92.

52. Kurepa Dj. On regressive functions, Z. für math. Logic und Grund. der Math. 4(1958) 148-156.

53. Kurepa Dj. General continuum hypothesis and ramifications, Fund.. Math. 47(1959) 29-33.

54. Kurepa Dj. On the cardinal number of ordered sets and of symmetrical structures in dependence on the cardinal numbers of its chains and antichains, Glasnik Mat.-fiz. 14(1959) 183-2o3.

55. Kurepa Dj. On A-trees, Publ. Math. Inst. Belgrade 8(22) (1968) 153-16

56. Kurepa Dj.Ramified sets or preudotrees, Publ. Math. Inst. Belgrade, 22(36) (1977) 149-163.

57. Lozier F.W. A class of compact rigid 0-dimensional spaces. Canad. J.Math 21(1969) 817-821.

58. McKenzie R., Monk J.D. On automorphism groups of Boolean algebras. Infinite and finite sets, Collq. Math. Soc. János Bolyai 10 v.II (1975) 951-989.

59. Mitchell W.J. Aronszajn trees and the independence of the transfer property, Ann. Math. Logic 5(1972) 21-46.

6o. Papić P. Pseudodistancijalni prostori, Zatreb 1953.

61. Prikry K. Kurep's Hypothesis and a Problem of Ulam on Families of Measures, Monatchefte fur Math. 81(1976) 41-57.

62. Ramsey F.P. On a problem of formal Logic. Proc. London. Math. Soc. Ser.2., 3o(193o) 264-286.

63. Rieger L. Some remarks on automorphisms of BA's, Fund. Math.38(1951) 2o9-216.

64. Rudin M.E.Lectures on set theoretic topology, CBMS Regional Conference Amer. Math. Soc. R.I. 1977.

.65. Shelah S. Coloring without triangles and Partition relation, Israel J. Math. 2o. No. 1 (1975) 1-12.

66. Shoenfield J.R. Unramified forcing, Axiomatic Set Theory, Proc. Symp. Pure Math. XIII.Part 1. Amer. Math. Soc. R.I. (1971) 357-381.

67. Shore R.A. Square bracket partition relations in L,Fund. Math. 84(1974) 1o1-1o6.

68. Sierpiński W. Sur un probléme de la theorie des relations, Ann. Scuola Horm. Super. Pisa Ser 2., 2(1933) 285-287.

69. Sikorski R.Remarks on some topological spaces of high power, Fund. Math. 37(195o) 125-136.

7o. Silver J. The Independence of Kurepå's Conjecture and Two-Cardinal Conjecturing in Model Theory, Proc. Symp. Pure Math. XIII, 1.Amer. Math.Soc. R.I. (1971) 383-39o.

71. Silver J. The consistency of Chang's conjecture (nije publikovano).

72. Silver J. On the Singular Cardinals Problem. Proc. Internat. Congress in Math. Vancouver 1974.

73. Solovay R.M.Real valued measurable cardinals, Axiomatic set theory Proc. Symp. Pure Math. XIII (1) (1971) 397-428.

74. Solovay R.M., Tennenbaum S. Iterated Cohen Extension and Souslin's Problem, Ann. of Math. 94(1971) 2o1-245.

75. Specker E. Sur un probléme de Sikorski, Coll. Math. 2(1951) 9-12.

76. Stewart D.H. M. Sci. Thesis, Bristol 1966.

77. Tennenbaum S. Suslin's Problem. Proc. Nat. Acad. Sci 59(1968) 6o-63.

78. Williams N.H. Combinatorial set theory, Studies in Logic and the Found. of Math. v. 91 (N.H.) 1977.

79. Zarach A. Forcing with proper classes, Fund. Math. 81(1973) 1-27.