

Л.С.ПОНТРЯГИН

О
СНОВЫ
КОМБИНАТОРНОЙ
ТОПОЛОГИИ

Л. С. ПОНТРЯГИН

ОСНОВЫ
КОМБИНАТОРНОЙ
ТОПОЛОГИИ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1976

517.6

П56

УДК 513.83

Лев Семенович Понтрягин
Основы комбинаторной топологии

М., 1976 г., 136 стр.

Редактор *А. А. Мальцев*

Техн. редактор *Е. В. Морозова*

Корректоры *О. А. Сигал, А. Л. Инагова*

Сдано в набор 29/1 1976 г. Подписано к печати 10/VI 1976 г. Бумага 84×108^{1/2}.
Физ. печ. л. 4,25. Условн. печ. л. 7,14. Уч.-изд. л. 7.

Тираж 17 000 экз. Т-12219. Цена книги в переплете 68 коп.; в обложке 44 коп.
Заказ № 4091.

Издательство «Наука»,

Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

2-я типография издательства «Наука», 121099,
Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

Г1 20203—087
053(02)-76—54-76

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ко второму изданию	4
Введение	5
Обозначения	8

Глава I

Комплексы и их группы гомологий

§ 1. Евклидово пространство	11
§ 2. Симплекс. Комплекс. Полидр	20
§ 3. Приложение к теории размерности	29
§ 4. Группы гомологий	40
§ 5. Разбиение на компоненты. Нульмерная группа гомологии	45
§ 6. Числа Бетти. Формула Эйлера — Пуанкаре	49

Глава II

Инвариантность групп гомологий

§ 7. Симплициальные отображения и аппроксимации	57
§ 8. Коническая конструкция	66
§ 9. Бариецентрическое подразделение комплекса	72
§ 10. Лемма о покрытии симплекса и ее приложения	79
§ 11. Инвариантность групп гомологий при бариецентрическом подразделении	87
§ 12. Инвариантность групп гомологий	91

Глава III

Непрерывные отображения и неподвижные точки

§ 13. Гомотопные отображения	102
§ 14. Цилиндрическая конструкция	107
§ 15. Гомологические инварианты непрерывных отображений	116
§ 16. Теорема существования неподвижных точек	123

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Первое издание этой книжки вышло в 1947 году. Предлагаемое второе издание печатается без изменений. Несмотря на то, что за прошедший период времени вышло большое количество литературы по комбинаторной топологии, эта книжка не утрачивает своих прежних преимуществ: сжатости и тщательности изложения, отличаясь благоприятным образом от более современных, но зато более обширных и абстрактных книг. Она содержит ряд основных понятий теории гомологий и заканчивается изложением важнейшего результата комбинаторной топологии — теоремы о числе неподвижных точек отображения.

Книжка написана на основе полугодового курса комбинаторной топологии, который я несколько раз читал в Московском государственном университете. Формально у читателя предполагаются лишь незначительные знания из теории функций действительного переменного, теории матриц и теории коммутативных групп; в действительности же для понимания книги требуется значительная математическая культура. Существенным недостатком книги является полное отсутствие в ней примеров, которые так нужны для уяснения геометрического содержания комбинаторной топологии. В книге используются некоторые весьма немногочисленные сведения относительно метрических пространств, которые теперь обычно включаются в курс анализа. Сведения эти можно почерпнуть, например, из книги Ж. Дьедонне «Основы современного анализа». Сведения из теории коммутативных групп, употребляемые в настоящей книге, можно найти в моей книге «Непрерывные группы».

Л. Понтрягин

ВВЕДЕНИЕ

Основы комбинаторной топологии были заложены на грани прошлого и нашего столетий великим французским математиком Пуанкаре, который черпал постановки математических задач из естествознания. В большей части его работ важную роль играет геометрическая интерпретация аналитических задач и геометрическая интуиция. Исходя из задач анализа, Пуанкаре пришел к мысли о необходимости изучения геометрических и в первую очередь топологических свойств многомерных многообразий. Первоначально Пуанкаре считал, что многообразии задаются системой уравнений и неравенств относительно координат многомерного евклидова пространства. В таком многообразии он выделял подмногообразия меньшего числа измерений также при помощи уравнений. Уже при такой трактовке выявились те основные понятия, которые играют теперь главную роль в комбинаторной топологии. Если в n -мерном многообразии M имеется замкнутое подмногообразие Z меньшей размерности r , $r < n$, то возможны два случая: 1) в M существует ограниченное $(r+1)$ -мерное подмногообразие S , границей которого служит Z ; 2) в M не существует подмногообразия S с границей Z . В первом случае говорят, что Z гомологично нулю в M , и пишут: $Z \sim 0$ в M . Во втором случае говорят, что Z не гомологично нулю в M .

Пусть, например, M — область плоскости, заключенная между двумя концентрическими окружностями. Если за Z принять теперь окружность, концентрическую с исходными и расположенную в M , то очевидно, что Z не может служить границей в M и, следовательно, не гомологично нулю в M . Если же принять за Z окружность, которая ограничивает круг, целиком расположенный в M ,

то $Z \sim 0$ в M . Из приведенного примера ясно видна связь понятия гомологий с анализом. Если в области M задана аналитическая функция, то интеграл от нее по контуру Z равен нулю в случае, когда $Z \sim 0$ в M , и может быть не равен нулю в противном случае. Здесь же видно, что контур Z целесообразно рассматривать с заданным на нем направлением, так как от направления зависит знак интеграла. Аналогичная связь с интегрированием имеет место и в многомерном случае (формула Стокса); на место направления контура Z тогда становится ориентация многообразия M .

Уже после первой работы Пуанкаре обнаружилось, что аналитическая трактовка многообразий — задание их при помощи уравнений — приводит к ряду затруднений и может служить источником ошибок. Тогда Пуанкаре ввел новый прием изучения многообразий, — он стал разбивать их на элементарные куски — симплексы, правильно примыкающие друг к другу. Этот прием в полной мере сохраняет свое значение до сих пор и является основным в комбинаторной топологии. Благодаря ему понятие гомологии было формализовано, а гомологические инварианты многообразия, введенные Пуанкаре, — числа Бетти и коэффициенты кручения — получили точный логический смысл. Пуанкаре, введший числа Бетти и коэффициенты кручения многообразий, не сумел, однако, доказать их топологическую инвариантность; заслуга эта принадлежит американским математикам Александеру и Веблену. Они же установили, что вся теория гомологий применима не только к многообразиям, но и к геометрическим объектам более общего типа, именно к полиэдрам.

После Пуанкаре теория гомологий развивалась очень интенсивно. К ней присоединилась теория пересечений Лефшеца, которая была известна Пуанкаре лишь в зачаточном виде. Лефшецем и Хопфом были доказаны теоремы о неподвижных точках отображений. Александером была открыта новая теорема двойственности, которая вместе с теоремой двойственности Пуанкаре послужила базой для широкого развития топологических теорем двойственности, в чем большое участие приняли советские математики. Также при участии советских математиков была построена теория верхних гомологий. Наконец, Александров нашел пути применения теории гомоло-

гий к теоретико-множественным объектам и тем установлен синтез комбинаторной и теоретико-множественной топологии.

В настоящее время теория гомологий продолжает развиваться, но главной задачей, как я считаю, является теперь применение ее к решению геометрических проблем, в постановку которых самое понятие гомологии не входит. Некоторые из них решены полностью, — такова задача о нахождении суммы индексов неподвижных точек при отображении полиэдра в себя. Решение других находится в зачаточном состоянии, — такова задача о классификации непрерывных отображений одного полиэдра в другой.

В настоящее время широко понимаемая теория гомологий является основным хорошо развитым аппаратом комбинаторной топологии, и знание ее для занятий комбинаторной топологией совершенно необходимо.

В предлагаемой книге дается изложение основ теории гомологий и некоторых ее приложений. В главе I определяются понятия комплекса и его групп Бетти. В главе II доказывается топологическая инвариантность групп Бетти. В главе III даются приложения теории гомологий: строятся гомологические инварианты непрерывного отображения одного полиэдра в другой и устанавливается некоторое достаточное условие существования неподвижной точки при отображении полиэдра в себя.

ОБОЗНАЧЕНИЯ

В книге существенно используется понятие множества, которое предполагается известным (см., например, Хаусдорф, Теория множеств). Здесь я привожу некоторые обозначения, связанные с понятием множества и элементарными операциями над множествами.

А) Запись $a \in M$ означает, что элемент a принадлежит множеству M . В случае, если множество M конечно или счетно, мы иногда будем задавать его простым перечислением входящих в него элементов. В символах это записывается так:

$$M = \{a_1, \dots, a_n, \dots\}.$$

Написанное означает, что множество M составлено из элементов a_1, \dots, a_n, \dots

В) Запись $M = N$ означает, что множества M и N совпадают.

С) Запись $M \subset N$ или $N \supset M$ означает, что каждый элемент множества M входит в множество N , т. е. что множество M составляет часть множества N . Здесь не исключена возможность и совпадения обоих множеств.

Д) Через $M \cap N$ обозначается *пересечение* множеств M и N , т. е. множество, составленное из всех элементов, одновременно принадлежащих множествам M и N .

Е) Через $M \cup N$ обозначается *сумма* множеств M и N , т. е. множество, составленное из всех элементов, принадлежащих по крайней мере одному из множеств M и N .

Ф) Через $M \setminus N$ обозначается разность между множеством M и множеством N , т. е. множество, составленное из всех элементов, входящих в M , но не входящих в N . Таким образом, операция вычитания возможна здесь всегда, независимо от того, является ли множество N частью множества M или нет. Если $M \supset N$, то в результа-

те вычитания получается пустое множество, т. е. множество, не содержащее элементов.

Г) Пусть M и N — два множества. Допустим, что каждому элементу x множества M поставлен в соответствие один определенный элемент $y = f(x)$ множества N . Тогда мы будем говорить, что имеется *отображение* f множества M в множество N . Элемент y называется *образом* элемента x при отображении f , а элемент x — *прообразом* или одним из прообразов элемента y . Говорят, что f есть отображение множества M на множество N , если каждый элемент b множества N имеет хотя бы один прообраз a при отображении f , $b = f(a)$. Если A есть подмножество множества M , т. е. $A \subset M$, то через $f(A)$ мы будем обозначать множество всех таких элементов из N , которые являются образами элементов, принадлежащих A ; $f(A)$ будем называть *образом множества* A . Если $B \subset N$, то через $f^{-1}(B)$ мы будем обозначать множество всех таких элементов из M , которые переходят в B при отображении f ; множество $f^{-1}(B)$ будем называть *полным прообразом множества* B при отображении f . Отображение f множества M на множество N называется *взаимно однозначным*, если каждый элемент множества N имеет лишь один прообраз при отображении f . Если f есть взаимно однозначное отображение, то уравнение $y = f(x)$ можно однозначно разрешить относительно x , т. е. определить однозначно x , зная элемент y , и мы имеем $x = f^{-1}(y)$. Отображение f^{-1} называется *обратным* по отношению к отображению f .

Н) В книге предполагается известным понятие метрического пространства (см. Хаусдорф, Теория множеств). Расстояние между точками x и y метрического пространства обозначается через $\rho(x, y)$. Расстояние между подмножествами A и B метрического пространства обозначается через $\rho(A, B)$. Для понимания книги всюду, кроме § 3, под метрическим пространством можно понимать произвольное подмножество евклидова пространства двумя произвольными размерности, а под расстоянием между двумя точками этого подмножества — их расстояние в смысле евклидовой метрики.

ГЛАВА I

КОМПЛЕКСЫ И ИХ ГРУППЫ ГОМОЛОГИЙ

Комбинаторная топология изучает геометрические образования, разбивая их на простейшие геометрические фигуры — симплексы, правильно примыкающие друг к другу. Геометрическое образование, которое можно належащим образом разбить на симплексы, называется полиэдром, а сама схема разбиения — комплексом. Изучение полиэдра в первую очередь заключается в отыскании его топологических инвариантов, исходя из некоторого разбиения полиэдра на симплексы, или, иначе говоря, из некоторого комплекса, задающего полиэдр. Задача построения полной системы топологических инвариантов полиэдра до сих пор ни в какой мере не разрешена, построены и изучаются лишь некоторые инварианты, и среди них первое место по значению занимают группы гомологий, или, что то же самое, группы Бетти. Группы гомологий коммутативны и допускают конечные системы образующих, а потому могут быть заданы своими числовыми инвариантами; именно эти числовые инварианты и были первоначально введены Пуанкаре как топологические инварианты полиэдров. Позднее под влиянием идей современной алгебры пришли к мысли, что целесообразнее рассматривать как исходные сами группы, а не их числовые инварианты. Применительно к полиэдрам групповой подход дал лишь некоторые преимущества в изложении, но при переходе к геометрическим образованиям более общим, чем полиэдры, он позволил рассматривать групповые инварианты, уже не сводящиеся к числовым.

Основное содержание настоящей главы заключается в определении комплекса и в построении его группы го-

мологий; доказательство инвариантности дается в следующей главе.

Комплекс, первоначально возникший как схема разбиения полиэдра, играет теперь в топологии более значительную роль. В частности, он нашел важные приложения в теоретико-множественной топологии. Одно такое приложение дается в § 3.

§ 1. Евклидово пространство

Здесь приводятся некоторые свойства евклидова пространства, нужные для дальнейшего.

Линейное пространство. Определение 1. *Линейным* или *векторным пространством* размерности n называется множество R^n элементов, называемых *точками* или *векторами*, удовлетворяющее следующим условиям:

1. Множество R^n составляет коммутативную группу по сложению.

2. Множество R^n является модулем над полем действительных чисел, т. е. элементы из R^n можно умножать на действительные числа так, что выполнены условия: если λ и η — произвольные действительные числа, а x и y — произвольные векторы из R^n , то

$$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y, \quad (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x, \quad \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x, \\ 1 \cdot x = x, \quad 0 \cdot x = 0.$$

3. Максимальное число линейно независимых элементов из R^n равно n .

Как обычно, система x_1, \dots, x_n элементов из R^n называется *линейно независимой*, если из соотношения

$$\lambda^1 x_1 + \dots + \lambda^k x_k = 0, \quad (1)$$

где $\lambda^1, \dots, \lambda^k$ суть действительные числа, следует

$$\lambda^1 = \dots = \lambda^k = 0. \quad (2)$$

Базисом n -мерного линейного пространства R^n называется максимальная система e_1, \dots, e_n его линейно независимых элементов. При помощи выбранного базиса в R^n можно ввести координаты: если x — произвольный элемент из R^n , то в силу максимальной системы e_1, \dots, e_n имеется зависимость $\lambda x + \lambda^1 e_1 + \dots + \lambda^n e_n = 0$,

причем $\lambda \neq 0$, так как базис линейно независим. Разрешая это соотношение относительно x , получаем

$$x = x^1 e_1 + \dots + x^n e_n, \quad (3)$$

где x^1, \dots, x^n суть действительные числа, называемые координатами вектора x относительно базиса e_1, \dots, e_n :

$$x = (x^1, \dots, x^n). \quad (4)$$

А) Система точек x_0, x_1, \dots, x_k n -мерного линейного пространства R^n называется *независимой*, если система векторов

$$(x_1 - x_0), \dots, (x_k - x_0) \quad (5)$$

линейно независима. Очевидно, что независимость возможна лишь при $k \leq n$. Оказывается, система (5) линейно независима тогда и только тогда, когда из соотношений

$$\lambda^0 x_0 + \lambda^1 x_1 + \dots + \lambda^k x_k = 0, \quad (6)$$

$$\lambda^0 + \lambda^1 + \dots + \lambda^k = 0 \quad (7)$$

вытекает

$$\lambda^0 = \lambda^1 = \dots = \lambda^k = 0. \quad (8)$$

Здесь $\lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^k$ — действительные числа. Таким образом, свойство системы x_0, x_1, \dots, x_k быть независимой не зависит от порядка нумерации точек. Сверх того, ясно, что если система точек независима, то всякая ее подсистема также независима.

Покажем, что если система векторов (5) линейно независима, то из соотношений (6) и (7) вытекает (8). В силу (7) соотношение (6) переписывается в форме $-(\lambda^1 + \dots + \lambda^k) x_0 + \lambda^1 x_1 + \dots + \lambda^k x_k = 0$, или иначе $\lambda^1 (x_1 - x_0) + \dots + \lambda^k (x_k - x_0) = 0$; но так как система (5) линейно независима, то из последнего вытекает $\lambda^1 = \dots = \lambda^k = 0$, а отсюда ввиду (7) следует и $\lambda^0 = 0$. Покажем теперь, что если из соотношений (6) и (7) вытекает (8), то система (5) линейно независима. Пусть

$$\lambda^1 (x_1 - x_0) + \dots + \lambda^k (x_k - x_0) = 0. \quad (9)$$

Полагая $\lambda^0 = -(\lambda^1 + \dots + \lambda^k)$, мы можем переписать соотношение (9) в виде $\lambda^0 x_0 + \lambda^1 x_1 + \dots + \lambda^k x_k = 0$, причем для

наших чисел $\lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^k$ выполнено условие (7). Таким образом, в силу предположения имеем $\lambda^0 = \lambda^1 = \dots = \lambda^k = 0$, т. е. из (9) вытекает $\lambda^1 = \dots = \lambda^k = 0$, а это и означает линейную независимость системы (5).

Геометрический смысл независимости точек x_0, x_1, \dots, x_k заключается в том, что несущая их плоскость минимальной размерности имеет размерность ровно k . Если точки x_0, x_1, \dots, x_k зависимы, то несущая их плоскость минимальной размерности имеет размерность, меньшую чем k . На этом, однако, мы останавливаться не будем.

Дадим теперь другой критерий независимости точек. В) Пусть $x_0, x_1, \dots, x_k, k \leq n$, — система точек n -мерного линейного пространства R^n , а e_1, \dots, e_n — базис этого пространства. Определим координаты наших точек, положив

$$x_i = x_i^0 e_1 + \dots + x_i^n e_n, \quad i = 0, 1, \dots, k. \quad (10)$$

Введем теперь формально числа x_i^0 , положив

$$x_i^0 = 1, \quad i = 0, 1, \dots, k. \quad (11)$$

Матрицу $\|x_i^j\|, i=0, 1, \dots, k; j=0, 1, \dots, n$, обозначим через $N(x_0, x_1, \dots, x_k) = N(X)$. Число строк ее равно $k+1$, число столбцов равно $n+1$; $k+1 \leq n+1$. Окажется, что точки x_0, x_1, \dots, x_k независимы тогда и только тогда, когда матрица $N(X)$ имеет ранг $k+1$.

Допустим, что ранг матрицы $N(X)$ меньше $k+1$; это значит, что между строками ее существует линейная зависимость, т. е. имеются числа $\lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^k$, не все равные нулю, для которых

$$\lambda^0 x_0^j + \lambda^1 x_1^j + \dots + \lambda^k x_k^j = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n. \quad (12)$$

Умножая соотношение (10) на λ^i , суммируя по i и учитывая (12), получаем

$$\begin{aligned} \lambda^0 x_0 + \lambda^1 x_1 + \dots + \lambda^k x_k &= \\ &= \sum_{j=1}^n (\lambda^0 x_0^j + \lambda^1 x_1^j + \dots + \lambda^k x_k^j) e_j = 0. \end{aligned}$$

При $j=0$ соотношение (12) в силу (11) дает $\lambda^0 + \lambda^1 + \dots + \lambda^k = 0$. Таким образом, точки x_0, x_1, \dots, x_k зависимы (см. (6) — (8)).

Допустим, что точки x_0, x_1, \dots, x_k зависимы; тогда для них выполнены соотношения (6) и (7) при некоторых $\lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^k$, не обращающихся одновременно в нуль. Подставляя в (6) выражение для x_i из формулы (10) и перепиывая соотношение (7) в виде $\lambda^0 x_0^0 + \lambda^1 x_1^0 + \dots + \lambda^k x_k^0 = 0$ (см. 11), мы получим (12), а это значит, что ранг матриц $N(X)$ меньше $k+1$.

Вопрос о том, можно ли в n -мерном пространстве R^n найти независимую систему точек u_0, u_1, \dots, u_k при $k \leq n$, решается тривиальным образом, именно: если e_1, \dots, e_n есть базис R^n , то достаточно положить

$$u_0 = 0, \quad u_1 = e_1, \dots, u_k = e_k. \quad (13)$$

Здесь $u_0 = 0$ есть нуль группы R^n или, что то же, начало координат линейного пространства R^n . Очевидно, что векторы $(u_1 - u_0) = e_1, \dots, (u_k - u_0) = e_k$ линейно независимы и потому в силу А) точки u_0, u_1, \dots, u_k независимы. Вопрос о существовании независимых систем точек будет решен в предложении С) более полным образом; при этом мы будем пользоваться понятием близости точек в R^n в смысле близости их координат.

С) Пусть x_0, x_1, \dots, x_k — произвольная система точек n -мерного линейного пространства R^n , причем $k \leq n$. В произвольной близости каждой точки x_i можно выбрать тогда точку y_i так, что система y_0, y_1, \dots, y_k уже независима.

Для доказательства С) воспользуемся критерием В). Пусть u_0, u_1, \dots, u_k — заведомо независимая система точек (см. (13)), а $t, 0 \leq t \leq 1$, — действительный параметр.

Рассмотрим точки

$$z_i(t) = tu_i + (1-t)x_i, \quad i = 0, 1, \dots, k. \quad (14)$$

Легко проверяется, что матрица $N(Z(t))$, соответствующая построенной системе точек (см. (14)), получается из матриц $N(X)$ и $N(U)$ исходных систем точек по формуле

$$N(Z(t)) = tN(U) + (1-t)N(X). \quad (15)$$

Так как точки u_0, u_1, \dots, u_k независимы, то в силу В) ранг матрицы $N(U)$ равен $k+1$, и потому существует некий детерминант, составленный из $k+1$ столбцов матрицы $N(U)$, отличный от нуля. Соответствующий де-

терминант матрицы $N(Z(t))$ обозначим через $D(t)$, подчеркивая его зависимость от параметра t . Так как $N(Z(1)) = N(U)$ (см. (15)) и $D(1) \neq 0$, то $D(t)$ не равно нулю тождественно по t . Ввиду того, что $D(t)$ есть полином от t , найдется произвольно малое положительное число s такое, что $D(s) \neq 0$, а это означает, что матрица $N(Z(s))$ имеет ранг $k+1$, и поэтому точки $y_0 = z_0(s)$, $y_1 = z_1(s)$, \dots , $y_k = z_k(s)$ образуют независимую систему. Ввиду произвольной малости s точка y_i произвольно близка к x_i (см. (14)).

Определение 2. Говорят, что система x_0, x_1, \dots, x_m точек n -мерного линейного пространства R^n находится в *общем положении*, если каждая ее подсистема $x_{p_0}, x_{p_1}, \dots, x_{p_k}$ из $k+1$ точек ($k \leq n$) независима (см. А)).

Очевидно, что если $m \leq n$, то общность положения означает независимость. В случае, когда $m \geq n$, для общности положения достаточно, чтобы каждая подсистема исходной системы, содержащая ровно $n+1$ точек ($k=n$), была независимой.

Вопрос о существовании систем общего положения при произвольном m будет решен положительно, но для формулировки решения удобно пользоваться метрикой, и поэтому мы сначала определим понятие евклидова пространства.

Линейное евклидово пространство. Определим 3. Линейное пространство R^n называется *линейным евклидовым* или просто *евклидовым*, если в нем определена операция *скалярного произведения*, т. е. выполнено условие:

1. Каждым двум векторам x и y из R^n поставлено в соответствие действительное число xy , называемое их скалярным произведением, которое удовлетворяет условиям *линейности, симметрии и positivity*, т. е.

$$(\lambda x + \mu y)z = \lambda xz + \mu yz, \quad xy = yx, \quad xx \geq 0,$$

причем в последнем соотношении равенство имеет место лишь в случае $x=0$.

Два вектора x и y называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю, $xy=0$.

Заметим, что во всяком линейном пространстве R^n можно ввести скалярное произведение. Действительно,

пусть e_1, \dots, e_n — базис линейного пространства R^n ; определим тогда скалярное произведение базисных векторов, положив $e_i e_j = \delta_{ij}$ ($\delta_{ii} = 1, \delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$). Если теперь $x = x^1 e_1 + \dots + x^n e_n$ и $y = y^1 e_1 + \dots + y^n e_n$ — два произвольных вектора из R^n , то в силу аксиом скалярного произведения, мы должны иметь

$$xy = x^1 y^1 + \dots + x^n y^n. \quad (16)$$

Легко проверяется, что определенное последним соотношением скалярное произведение удовлетворяет всем требованиям определения 3.

D) Говорят, что система векторов e_1, \dots, e_n *ортонормальна*, если $e_i e_j = \delta_{ij}$. Покажем, что в линейном евклидовом пространстве R^n всегда можно ввести ортонормальный базис. Очевидно, что при ортонормальном базисе скалярное произведение в координатной форме записывается по формуле (16).

При построении ортонормального базиса будем исходить из произвольного базиса x_1, \dots, x_n пространства R^n . Так как это есть базис, то $x_1 \neq 0$ и потому $x_1 x_1 \neq 0$, и мы

можем положить $e_1 = (x_1 x_1)^{-\frac{1}{2}} x_1$, так что $e_1 e_1 = 1$. Допустим теперь, что уже построена ортонормальная система $e_1, \dots, e_k, e_i e_j = \delta_{ij}, k < n$, причем все элементы ее линейно выражаются через векторы x_1, \dots, x_k . Ввиду этого вектор $y = x_{k+1} - (\lambda^1 e_1 + \dots + \lambda^k e_k)$ отличен от нуля. Выберем теперь числа $\lambda^1, \dots, \lambda^k$ так, чтобы $y e_i = 0, i = 1, \dots, k$; для этого достаточно положить $\lambda^i = x_{k+1} e_i$. Так как $y \neq 0$, то,

полагая $e_{k+1} = (yy)^{-\frac{1}{2}} y$, получаем $e_i e_j = \delta_{ij}, i, j = 1, \dots, k+1$. Таким образом строится ортонормальная система e_1, \dots, e_n . Легко видеть, что она именно в силу своей ортонормальности линейно независима. Действительно, если $\lambda^1 e_1 + \dots + \lambda^n e_n = 0$, то, умножая это соотношение скалярно на e_i , получаем $\lambda^i = 0$.

E) В евклидовом пространстве R^n можно ввести метрику, положив $\rho(x, y) = +\sqrt{(x-y)(x-y)}$, так что будут выполнены все три аксиомы метрического пространства.

В силу аксиом скалярного произведения (см. условие 1 определения 3) $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$. Далее, в силу тех же аксиом, $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.

Остается доказать аксиому *треугольника*, т. е. что

$$\sqrt{(x-y)(x-y)} + \sqrt{(y-z)(y-z)} \geq \sqrt{(x-z)(x-z)}.$$

Полагая $x-y=u$, $y-z=v$, мы приводим последнее соотношение к виду: $\sqrt{uu} + \sqrt{vv} \geq \sqrt{(u+v)(u+v)}$.

Ввиду неотрицательности обеих частей этого соотношения, оно эквивалентно соотношению $uu + 2\sqrt{(uu)(vv)} + vv \geq (u+v)^2$. Последнее соотношение в свою очередь эквивалентно соотношению

$$(uu)(vv) \geq (uv)^2. \quad (17)$$

Соотношение (17) представляет собой так называемое *неравенство Шварца*. Приведем здесь его доказательство.

Квадратичная форма $(uu)\lambda^2 + 2(uv)\lambda + (vv) = (\lambda u + v) \cdot (\lambda u + v)$, будучи скалярным квадратом вектора $\lambda u + v$, не может принимать отрицательных значений, и потому дискриминант ее $(uu)(vv) - (uv)^2$ неотрицателен, а это и значит, что соотношение (17) всегда выполнено.

Вернемся теперь к вопросу об общем положении точек (см. определение 2).

Теорема 1. Пусть $\{x_0, x_1, \dots, x_m\} = S$ — система точек общего положения в евклидовом пространстве R^n ; существует тогда настолько малое положительное ε , что если $\rho(x_i, y_i) < \varepsilon$, $i=0, 1, \dots, m$, то система точек y_0, y_1, \dots, y_m также находится в общем положении.

Доказательство. Пусть $\{x_{r_0}, x_{r_1}, \dots, x_{r_k}\} = S'$ — произвольная подсистема системы S , причем $k \leq n$. Согласно определению система S' независима, и потому матрица $N(x_{r_0}, x_{r_1}, \dots, x_{r_k})$ (см. B)) имеет ранг, равный $k+1$. Ввиду этого один из детерминантов, например D , составленный из $k+1$ столбцов этой матрицы, отличен от нуля. Так как детерминант D есть непрерывная функция координат точек системы S' , существует настолько малое положительное ε' , что при $\rho(x_{r_i}, y_{r_i}) < \varepsilon'$, $i=0, 1, \dots, k$, детерминант D , составленный для точек $y_{r_0}, y_{r_1}, \dots, y_{r_k}$ также отличен от нуля, и потому матрица $N(y_{r_0}, y_{r_1}, \dots, y_{r_k})$ имеет ранг $k+1$, а это значит, что система $y_{r_0}, y_{r_1}, \dots, y_{r_k}$ независима. Таким образом, для каждой подсистемы S' системы S находится надлежащее положительное ε' . Принимая за ε минимальное из чисел ε' по всем подсистемам S' системы S , мы получаем нужное число.

Теорема 2. Пусть $\{x_0, x_1, \dots, x_m\} = S$ — произвольная система точек евклидова пространства R^n , a, ε — произвольно малое положительное число; существует тогда система точек y_0, y_1, \dots, y_m общего положения такая, что $\rho(x_i, y_i) < \varepsilon$, $i = 0, 1, \dots, m$. Коротко говоря, любую конечную систему точек из R^n произвольно малым смещением можно привести в общее положение.

Доказательство. Все подсистемы $x_{r_0}, x_{r_1}, \dots, x_{r_k}$, $k \leq n$, системы S перенумеруем, обозначив их через S_1, \dots, S_r . Система S_1 содержит не более $n+1$ точек, и потому произвольно малым сдвигом ее можно сделать независимой (см. С). Допустим теперь, что путем произвольно малого сдвига всей системы S мы уже достигли такого положения, при котором все подсистемы $S_1, \dots, S_s, s < r$, стали независимыми. Так как теперь систему S_{s+1} в силу С), также можно перевести в независимую путем произвольно малого сдвига, то сдвиг этот можно выбрать столь малым, что независимость систем S_1, \dots, S_s достигнута ранее, не нарушится (см. теорему 1). Этим самым индукция проведена и теорема доказана.

Выпуклые тела. Здесь будут даны некоторые сведения о выпуклых множествах, нужные для дальнейшего. F) Пусть a и b — две различные точки евклидова пространства R^n . Отрезком $(a, b) = (b, a)$ с концами a и b называется множество всех точек $x \in R^n$, представимых в форме: $x = \lambda a + \mu b$, где λ и μ суть действительные числа, удовлетворяющие условиям

$$\lambda + \mu = 1, \quad \lambda \geq 0, \quad \mu \geq 0.$$

Вместо двух параметров λ и μ можно ввести один параметр $s = \mu$, $0 \leq s \leq 1$, через который точка отрезка записывается в форме

$$x = (1-s)a + sb = a + s(b-a) = a + su, \quad u = b-a. \quad (18)$$

Оказывается, что если отрезки (a, b) и (a, c) имеют общую точку, отличную от a , то один из отрезков составляет часть другого, в частности отрезки могут совпадать, и в этом случае $b=c$.

Для доказательства этого утверждения запишем точки обоих отрезков в форме (18):

$$x = a + su, \quad 0 \leq s \leq 1; \quad y = a + tv, \quad 0 \leq t \leq 1$$

Пусть $x_0 = y_0 \neq a$ — общая точка наших отрезков:

$$x_0 = a + s_0 u = y_0 = a + t_0 v,$$

$$s_0 \neq 0, \quad t_0 \neq 0,$$

отсюда

$$s_0 u = t_0 v.$$

Если $s_0 = t_0$, то $u = v$, $b = c$, и отрезки совпадают. Если $s_0 \neq t_0$, то для определенности примем, что $s_0 < t_0$. Тогда $v = \frac{s_0}{t_0} u$, и точка y отрезка (a, c) представляется в форме $y = a + t \frac{s_0}{t_0} u$. Так как $\frac{s_0}{t_0} < 1$, то при $0 \leq t \leq 1$ мы имеем $y \in (a, b)$, и второй отрезок составляет правильную часть первого.

G) Множество M точек евклидова пространства R^n называется *выпуклым*, если из $a \in M$, $b \in M$ следует $(a, b) \subset M$. Точка a называется *внутренней* точкой множества M , если для нее существует настолько малое положительное ε , что из $\rho(a, x) < \varepsilon$ следует $x \in M$. Выпуклое множество W называется *выпуклым телом*, если оно компактно и содержит внутренние точки. Множество U всех внутренних точек выпуклого тела W , очевидно, составляет область в R^n , и потому $V = W \setminus U$ компактно. Множество V называется *границей* выпуклого тела W . Оказывается, что если $a \in U$, a и b и c — две различные точки из V , то отрезки (a, b) и (a, c) имеют лишь одну общую точку a . Далее, если $a \in U$ и c — произвольная точка из W , то существует такая точка $b \in V$, что отрезок (a, b) содержит c .

Для доказательства высказанных утверждений покажем, что если $a \in U$, $b \in W$, то каждая точка c отрезка (a, b) , отличная от b , входит в U . Пусть $c = \lambda a + \mu b$, $\lambda \neq 0$. Так как $a \in U$, то существует настолько малое положительное ε , что при $xx < \varepsilon^2$ имеем $a + x \in W$. Таким образом, отрезок $(a + x, b)$ целиком принадлежит W ; следовательно,

$$\lambda(a + x) + \mu b = \lambda a + \mu b + \lambda x = c + \lambda x \in W$$

при $xx < \varepsilon^2$.

Если теперь y — произвольный вектор из R^n такой, что $yy < \lambda^2 \varepsilon^2$, то точку $c + y$ можно записать в форме $c + \lambda x$,

где $xx < \varepsilon^2$. Но $c + \lambda x$ при этом условии принадлежит W ; таким образом, $c \in U$.

Пусть теперь $a \in U$, а b и c — две различные точки из V . Допустим, что отрезки (a, b) и (a, c) имеют общую точку, отличную от a ; тогда, согласно F), они либо совпадают и $b = c$, что невозможно, либо одни из них составляет правильную часть другого. Допустим, что $(a, c) \subset (a, b)$. Если так, то $c \in (a, b)$, причем $c \neq b$. Но по доказанному выше c в этом случае принадлежит U , а не V , — и мы пришли к противоречию.

Пусть теперь $a \in U$, и $c \neq a$ — произвольная точка из W . Найдем отрезок (a, b) , содержащий c и такой, что $b \in V$. Положим $c - a = v$ и рассмотрим множество всех точек y из R^n , представимых в форме $y = a + tv$, $t \geq 0$. При t достаточно малых y , очевидно, принадлежит U , так как a — внутренняя точка W . С другой стороны, при t достаточно больших y не может принадлежать W ввиду его компактности. Из этого в силу компактности W вытекает, что существует максимальное положительное значение $t = t_0$, для которого $y \in W$. Ясно, что $a + t_0 v = b$ есть граничная точка W , в противном случае t_0 не было бы максимальным.

Так как $c = a + v \in W$, то $t_0 \geq 1$. Полагая $t_0 v = u$, мы можем записать совокупность всех точек отрезка (a, b) в форме $x = a + su$, $0 \leq s \leq 1$. Точка c записывается в форме $a + \frac{1}{t_0}u$, $0 < \frac{1}{t_0} \leq 1$ и потому принадлежит отрезку (a, b) .

Так как выпуклое тело содержит внутреннюю точку a , то наряду с ней оно содержит и другие внутренние точки. Все эти точки должны лежать на отрезках вида (a, b) , $b \in V$, из чего следует, что V не пусто. В случае $c = a$ точка c лежит на любом отрезке вида (a, b) , $b \in V$.

Таким образом, утверждения, высказанные в G), доказаны.

§ 2. Симплекс. Комплекс. Полиэдр

Комбинаторная топология изучает геометрические фигуры, разбивая их некоторым правильным образом на простейшие фигуры — симплексы. Те геометрические фигуры, которые можно надлежащим образом разбить на симплексы, называются полиэдрами, а сама схема раз-

бления на симплексы называется комплексом. Определению этих основных понятий и посвящен настоящий параграф.

Симплекс. Определение 4. Пусть a_0, a_1, \dots, a_r — система независимых точек n -мерного евклидова пространства R^n , $r \leq n$ (см. § 1, А). Множество A^r точек x пространства R^n , представимых в виде

$$x = \lambda^0 a_0 + \lambda^1 a_1 + \dots + \lambda^r a_r, \quad (1)$$

где $\lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^r$ суть действительные числа, удовлетворяющие условиям

$$\lambda^0 + \lambda^1 + \dots + \lambda^r = 1, \quad (2)$$

$$\lambda^i \geq 0, \quad i = 0, 1, \dots, r, \quad (3)$$

называется r -мерным *симплексом*. Мы будем писать $A^r = (a_0, a_1, \dots, a_r)$. Исходные точки a_0, a_1, \dots, a_r , очевидно, принадлежат симплексу A^r ; они называются *вершинами*.

Ниже будет показано, что если два симплекса A^r и B^s совпадают, $A^r = B^s$, то вершины их также совпадают между собой, конечно, с точностью до порядка, и, в частности, $r = s$. Будет показано также, что точка x однозначно определяет числа $\lambda^0, \dots, \lambda^r$ при помощи соотношения (1), если только выполнено условие (2). Это позволяет нам считать числа $\lambda^0, \dots, \lambda^r$, удовлетворяющие условиям (2) и (3), координатами (*барицентрическими координатами*) точки $x \in A^r$.

Покажем прежде всего, что соотношения (1), (2) однозначно определяют числа $\lambda^0, \dots, \lambda^r$. Допустим, что

$$x = \mu^0 a_0 + \dots + \mu^r a_r \quad (4)$$

причем

$$\mu^0 + \dots + \mu^r = 1. \quad (5)$$

Вычитая соотношение (1) из соотношения (4), получаем

$$(\mu^0 - \lambda^0) a_0 + \dots + (\mu^r - \lambda^r) a_r = 0.$$

В силу (2) и (5) имеем $(\mu^0 - \lambda^0) + \dots + (\mu^r - \lambda^r) = 0$, и так как точки a_0, \dots, a_r независимы, то

$$\mu^i - \lambda^i = 0, \quad i = 0, \dots, r.$$

Покажем теперь, что вершины a_0, \dots, a_r однозначно определяются множеством A' . Если u_0 и u_1 — две различные точки пространства R^n , то $x \equiv \frac{1}{2}(u_0 + u_1)$ есть середина отрезка (u_0, u_1) . Оказывается, что каждая точка x симплекса A' , отличная от вершины, является серединой некоторого отрезка, концы которого принадлежат к A' . Напротив, вершина симплекса A' не может быть серединой отрезка с концами в A' .

Пусть $x \equiv \lambda^0 a_0 + \dots + \lambda^r a_r$ — произвольная точка симплекса A' , отличная от вершины; это значит, что по крайней мере две ее барицентрические координаты отличны от нуля; допустим, что $\lambda^j > 0, \lambda^i > 0, j \neq i$. Пусть ε — настолько малое положительное число, что $\varepsilon < \lambda^i, \varepsilon < \lambda^j$. Положим $u_0 = x + \varepsilon(a_i - a_j), u_1 = x - \varepsilon(a_i - a_j)$. Очевидно, что точки u_0 и u_1 принадлежат A' и что

$$x = \frac{1}{2}(u_0 + u_1).$$

Допустим теперь, что $a_k = \frac{1}{2}(u_0 + u_1)$, причем u_0 и u_1 — две различные точки, принадлежащие A' . Мы имеем

$$u_p = \lambda_p^0 a_0 + \dots + \lambda_p^r a_r, \quad p = 0, 1.$$

Так как точки u_0 и u_1 различны, то найдутся такие два номера $i \neq j$, для которых $\lambda_0^i \geq 0$ и $\lambda_1^j > 0$. В силу предположения мы имеем

$$a_k = \frac{1}{2}(\lambda_0^0 + \lambda_1^0)a_0 + \dots + \frac{1}{2}(\lambda_0^i + \lambda_1^j)a_r;$$

здесь $\frac{1}{2}(\lambda_0^i + \lambda_1^j) > 0, \frac{1}{2}(\lambda_0^0 + \lambda_1^0) > 0$, но это противоречит доказанной ранее однозначности координат точек в симплексе, ибо

$$a_k = 0 \cdot a_0 + \dots + 1 \cdot a_k + \dots + 0 \cdot a_r.$$

В силу определения (4) нульмерный симплекс (a_0) состоит из одной точки a_0 . Одномерный симплекс (a_0, a_1) представляет собой прямойный отрезок, соединяющий точки a_0 и a_1 . Двумерный симплекс (a_0, a_1, a_2) является треугольником с вершинами a_0, a_1, a_2 . Наконец, трехмерный симплекс (a_0, a_1, a_2, a_3) оказывается тетраэдром с вершинами a_0, a_1, a_2, a_3 .

А) Пусть $A^r \subset R^n$ есть r -мерный симплекс. Точка $x \in A^r$, все барицентрические координаты которой положительны, называется *внутренней* точкой симплекса A^r , не внутренняя точка симплекса A^r называется его *граничной* точкой. Множество G^r всех внутренних точек симплекса называется r -мерным *открытым* симплексом, а множество F^{r-1} всех граничных точек симплекса A^r называется его *границей*. Без труда проверяется, что замыкание \bar{G}^r открытого симплекса G^r совпадает с исходным симплексом A^r , а так как A^r — ограниченное множество в R^n , то, будучи замкнутым, оно компактно. Очевидно также, что F^{r-1} замкнуто в A^r , а потому $G^r = A^r \setminus F^{r-1}$ есть область в A^r . Если G^r и H^s — два открытых совпадающих симплекса, $G^r = H^s$, то $\bar{G}^r = \bar{H}^s$, а так как \bar{G}^r и \bar{H}^s суть обычные (замкнутые) симплексы, то вершины их совпадают и, в частности, $r = s$. Таким образом, открытый симплекс однозначно определяет свои вершины.

В) Пусть R^{r+1} есть $(r+1)$ -мерное евклидово пространство, а e_0, e_1, \dots, e_r — некоторая ортонормальная система точек (векторов) в нем (см. § 1). Рассмотрим r -мерный симплекс $E^r = (e_0, e_1, \dots, e_r) \subset R^{r+1}$. Каждая точка $z \in E^r$ записывается в форме $z = \lambda^0 e_0 + \lambda^1 e_1 + \dots + \lambda^r e_r$, причем выполнены условия (2) и (3). Ввиду того, что e_0, e_1, \dots, e_r составляют ортонормальную систему, евклидовы координаты точки z относительно этой системы совпадают с ее барицентрическими координатами в E^r , и мы можем написать $z = (\lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^r) = \lambda$. Таким образом, расстояние между двумя точками λ и μ из E^r выражается формулой

$$\rho(\lambda, \mu) = \sqrt{(\lambda^0 - \mu^0)^2 + (\lambda^1 - \mu^1)^2 + \dots + (\lambda^r - \mu^r)^2}.$$

Полученную так метрику r -мерного симплекса будем называть его *естественной* метрикой; она выражается через внутренние (барицентрические) координаты. Очевидно, что соотношение (1), ставящее в соответствие точке $\lambda \in E^r$ точку $x \in A^r$, является непрерывным и взаимно однозначным, а в силу компактности симплекса E^r соответствие это и взаимно непрерывно. Таким образом, каждые два r -мерных симплекса гомеоморфны между собой, причем гомеоморфизм их осуществляется

таким отображением, при котором соответствующие точки имеют одинаковые барицентрические координаты.

С) Пусть $A^r = (a_0, a_1, \dots, a_r)$ есть r -мерный симплекс из R^n . Рассмотрим некоторую часть a_{i_0}, \dots, a_{i_s} , $0 \leq s \leq r$, вершин симплекса A^r . Так как вершины a_0, \dots, a_r независимы, то и a_{i_0}, \dots, a_{i_s} тоже независимы, поэтому в R^n существует симплекс $C^s = (a_{i_0}, \dots, a_{i_s})$. Симплекс C^s называется s -мерной гранью симплекса A^r . Обозначим через i_1, \dots, i_{r-s} те из чисел $0, 1, \dots, r$, которые отличны от i_0, \dots, i_s . Полагая

$$\lambda^{i_1} = \dots = \lambda^{i_{r-s}} = 0 \quad (6)$$

в соотношении (1), мы получим произвольную точку x из C^s . Таким образом, $C^s \subset A^r$, и множество C^s выделяется в A^r системой уравнений (6). Наоборот, каждая система вида (6) выделяет некоторую грань. В силу определения (4) каждая вершина симплекса A^r является его нульмерной гранью. С другой стороны, сам симплекс A^r оказывается своей r -мерной гранью. Грани размерности, меньшей чем r , называются *истинными* гранями симплекса A^r .

Д) Говорят, что симплексы A и B евклидова пространства R^n *расположены правильно*, если они или вообще не пересекаются, или их пересечение $A \cap B$ является гранью каждого из симплексов A и B . Если C есть грань симплекса A , а D есть грань симплекса B , причем $A \cap B \subset C \cap D$, т. е. $A \cap B = C \cap D$, то очевидно, что симплексы A и B тогда и только тогда расположены правильно, когда их грани C и D расположены правильно.

Е) Две грани одного симплекса всегда расположены правильно.

Действительно, если C и D суть две грани симплекса A , то каждая из них выделяется системой уравнения вида (6). Две же системы вида (6) вместе вновь образуют или систему вида (6) или противоречивую систему. Последнее происходит, если совокупная система содержит все координаты λ^i ; тогда пересечение $C \cap D$ пусто; в противном случае пересечение это есть общая грань симплексов C и D .

Комплекс. Перейдем теперь к основному для нас понятию комплекса.

Определение 5. Конечная совокупность K симплексов некоторого евклидова пространства R^n называется *геометрическим комплексом* или просто *комплексом*, если выполнены следующие условия:

1. Наряду с каждым симплексом A совокупности K в K входит также и любая грань симплекса A .

2. Каждые два симплекса совокупности K расположены правильно (см. D)).

Нульмерные симплексы комплекса K называются его *вершинами*.

Максимальная размерность симплексов из K называется *размерностью* комплекса K .

Хотя комплекс является основным понятием комбинаторной топологии, однако подлинным объектом изучения оказывается не комплекс, а то топологическое пространство, которое им определяется.

Определение 6. Пусть K — геометрический комплекс, расположенный в некотором евклидовом пространстве R^n . Множество всех точек, принадлежащих симплексам комплекса K , называется *полиэдром* и обозначается $|K|$.

Так как R^n есть метрическое пространство, то и его подмножество $|K|$ является метрическим пространством. Очевидно, что пространство $|K|$ компактно, ибо оно является конечной суммой компактных множеств — симплексов.

Если K и L суть два комплекса, а S — непрерывное отображение полиэдра $|K|$ в полиэдр $|L|$, то иногда мы будем называть S отображением комплекса K в комплекс L .

Простейшим r -мерным комплексом является совокупность T^r всех граней симплекса A^r . Совокупность S^{r-1} всех истинных граней симплекса A^r также составляет комплекс.

Очевидно, что $|T^r| = A^r$ и $|S^{r-1}| = F^{r-1}$, где F^{r-1} — граница симплекса A^r (см. A)).

Ввиду условия 1 определения 5 вершины каждого симплекса из K являются вершинами самого K . Таким образом, для задания комплекса K в R^n достаточно указать все его вершины, а затем отметить те совокуп-

ности вершин, на которые должно натягивать симплексы, чтобы получить все симплексы из K . Отвлекаясь от геометрического положения вершин в R^n , мы приходим к понятию абстрактного комплекса.

О п р е д е л е н и е 7. Конечная совокупность \mathfrak{K} элементов $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_k$ называется *абстрактным комплексом с вершинами* $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_k$, если выполнены следующие условия:

1. Некоторые из подмножеств множества \mathfrak{K} отмечены и называются *абстрактными симплексами* комплекса \mathfrak{K} .
2. К числу отмеченных принадлежат все подмножества \mathfrak{K} , содержащие по одному элементу, так что каждая вершина \mathfrak{K} является его симплексом.
3. Если \mathfrak{A} есть некоторый симплекс из \mathfrak{K} , то каждая его часть, называемая *гранью* симплекса \mathfrak{A} , также является симплексом комплекса \mathfrak{K} .

Если абстрактный симплекс $\mathfrak{A}^r = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r)$ имеет $r+1$ вершину, то r называется его *размерностью*. Максимальная из размерностей симплексов, входящих в комплекс \mathfrak{K} , называется *размерностью комплекса* \mathfrak{K} .

Очевидно, что каждому геометрическому комплексу K соответствует абстрактный комплекс \mathfrak{K} и притом вполне однозначно. Мы будем говорить, что K дает *геометрическую реализацию* абстрактного комплекса \mathfrak{K} . Вопрос о том, допускает ли каждый абстрактный комплекс геометрическую реализацию, составляет предмет нижеследующих предложений.

Теоремы реализации. F) Пусть \mathfrak{K} — абстрактный симплекс с вершинами $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_k$ и $E^k = (e_0, e_1, \dots, e_k)$ есть k -мерный симплекс, взятый с его метрикой, $E^k \subset R^{k+1}$ (см. B)). Каждому абстрактному симплексу $\mathfrak{A}^r = (\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_r)$ комплексу \mathfrak{K} поставим в соответствие грань $A^r = (e_0, e_1, \dots, e_r)$ симплекса E^k . Очевидно, что полученная так совокупность M симплексов составляет геометрический комплекс, ибо грани симплекса E^k расположены правильно (см. E)). Полученную так геометрическую реализацию M абстрактного комплекса \mathfrak{K} будем называть его *естественной реализацией*, а метрику полиэдра $|M|$, вытекающую из метрики E^k , — естественной метрикой, соответствующей комплексу \mathfrak{K} . Итак, \mathfrak{K} реализован в $E^k \subset R^{k+1}$. Очевидно, что точка $\lambda^0 e_0 + \lambda^1 e_1 + \dots + \lambda^k e_k = (\lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^k) = \lambda$ (см. B)) сим-

плекса E^k тогда и только тогда принадлежит полиэдру $|N|$, когда из $\lambda^{i_0} \neq 0, \lambda^{i_1} \neq 0, \dots, \lambda^{i_r} \neq 0$ вытекает существование симплекса $(c_{i_0}, c_{i_1}, \dots, c_{i_r})$ в комплексе \mathfrak{K} . Пусть теперь K — произвольная реализация комплекса \mathfrak{K} в евклидовом пространстве R^m . Вершину комплекса K , отвечающую вершине c_j , обозначим $c_j, j=0, 1, \dots, k$. Каждой точке $\lambda = (\lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^k)$ полиэдра $|N|$ поставим в соответствие точку $\psi(\lambda) \in R^m$, положив $\psi(\lambda) = \lambda^0 c_0 + \lambda^1 c_1 + \dots + \lambda^k c_k$; оказывается, что отображение ψ есть гомеоморфное отображение полиэдра $|N|$ на полиэдр $|K|$. Таким образом, каждая реализация комплекса \mathfrak{K} гомеоморфна его естественной реализации N , и потому две любые реализации абстрактного комплекса гомеоморфны между собой.

Покажем, что ψ дает гомеоморфизм $|N|$ и $|K|$. Непрерывность отображения ψ очевидна, и нам достаточно доказать его взаимную однозначность, так как непрерывность и взаимная однозначность отображения ψ влекут его гомеоморфность ввиду компактности $|N|$. Покажем, что $\psi(|N|) = |K|$. Пусть $A^r = (e_{i_0}, e_{i_1}, \dots, e_{i_r})$ — симплекс из N и $A^{*r} = (c_{i_0}, c_{i_1}, \dots, c_{i_r})$ — соответствующий ему симплекс из K . Очевидно, что ψ взаимно однозначно отображает симплекс A^r на симплекс A^{*r} . Так как из существования симплекса A^r в N вытекает существование симплекса A^{*r} в K и наоборот, то ясно, что $\psi(|N|) = |K|$.

Пусть $\lambda = (\lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^k)$ и $\mu = (\mu^0, \mu^1, \dots, \mu^k)$ — две точки из N ; покажем, что из $\psi(\lambda) = \psi(\mu)$ вытекает $\lambda = \mu$. Для этого обозначим через $\lambda^{i_0}, \lambda^{i_1}, \dots, \lambda^{i_r}$ совокупность всех отличных от нуля чисел λ^i , а через $\mu^{i_0}, \mu^{i_1}, \dots, \mu^{i_s}$ — совокупность отличных от нуля чисел μ^i . Положим $A^r = (e_{i_0}, e_{i_1}, \dots, e_{i_r}), B^s = (e_{j_0}, e_{j_1}, \dots, e_{j_s})$. Точки λ и μ являются соответственно внутренними точками симплексов A^r и B^s , а это значит, что точки $\psi(\lambda)$ и $\psi(\mu)$ являются соответственно внутренними точками симплексов A^{*r} и B^{*s} . Так как A^{*r} и B^{*s} принадлежат одному комплексу K , то они расположены правильно и потому могут иметь общую внутреннюю точку $\psi(\lambda) = \psi(\mu)$ лишь в случае совпадения. Таким

образом, $A^{*r} = B^{*s}$, а это значит, что $A^r = B^s$. Ввиду же того, что на одном симплексе A^r отображение ψ взаимно однозначно, получаем $\lambda = \mu$.

Данная в F) естественная реализация N абстрактного комплекса \mathfrak{K} обладает тем свойством, что размерность пространства R^{2n+1} , содержащего N , зависит от числа $k+1$ вершин комплекса \mathfrak{K} .

Более глубокий результат о возможности реализации абстрактного комплекса дает следующая теорема.

Т е о р е м а 3. *Абстрактный n -мерный комплекс \mathfrak{K} всегда можно реализовать в виде геометрического комплекса K , расположенного в евклидовом пространстве R^{2n+1} размерности $2n+1$; при этом вершины комплекса K можно выбрать в R^{2n+1} произвольно, лишь бы они находились в общем положении (см. § 1, определение 2).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть c_0, c_1, \dots, c_k — вершины комплекса \mathfrak{K} . Каждой вершине c_i поставим в соответствие точку $s_i \in R^{2n+1}$ так, чтобы система c_0, c_1, \dots, c_k находилась в общем положении в R^{2n+1} (см. определение 2).

Если теперь $\mathfrak{A}^r = (a_0, a_1, \dots, a_r)$ — некоторый симплекс комплекса \mathfrak{K} , то на точки a_0, a_1, \dots, a_r пространства R^{2n+1} , соответствующие вершинам a_0, a_1, \dots, a_r , напомним геометрический симплекс $A^r = (a_0, a_1, \dots, a_r)$. Полученную так совокупность симплексов пространства R^{2n+1} обозначим через K . Требуется доказать, что K является геометрическим комплексом, т. е. для K выполнены условия 1 и 2 определения 5. То, что выполнено условие 1 определения 5, непосредственно следует из условия 3 определения 7. Покажем, что условие 2 определения 5 также выполнено.

Пусть \mathfrak{A}^r и \mathfrak{B}^s — два симплекса абстрактного комплекса \mathfrak{K} , а A^r и B^s — соответствующие им геометрические симплексы совокупности K . Обозначим через d_0, d_1, \dots, d_i совокупность всех точек, являющихся вершинами по крайней мере одного из симплексов A^r и B^s . Так как размерность \mathfrak{K} равна n , то $r \leq n, s \leq n$, и потому $i \leq 2n+1$. Таким образом, в R^{2n+1} существует симплекс $D^i = (d_0, d_1, \dots, d_i)$, хотя он, конечно, может и не принадлежать совокупности K . Симплексы A^r и B^s являются гранями симплекса D^i и потому расположены правильно (см. E)). Таким образом, условие 2 определения 5 выполнено для совокупности K , и K является ком-

плексом. Тот факт, что геометрическому комплексу K соответствует абстрактный комплекс \mathfrak{A} , очевиден. Теорема доказана.

Итак, нами установлено, что каждому абстрактному комплексу \mathfrak{A} соответствует геометрический комплекс K , а тем самым и полиэдр $|K|$, причем последний, с точностью до гомеоморфизма, однозначно определяется исходным абстрактным комплексом \mathfrak{A} . Основной задачей комбинаторной топологии является изучение топологических свойств полиэдра. Комплекс играет здесь чисто вспомогательную роль: он служит для задания полиэдра и построения его инвариантов. Обычный путь построения инвариантов заключается в том, что устанавливаются свойства абстрактного комплекса, задающего полиэдр, а затем доказывается, что они являются топологическими инвариантами последнего.

§ 3. Приложение к теории размерности

Настоящий параграф представляет собой отступление в сторону теоретико-множественной топологии, и содержание его будет использовано в дальнейшем, да и то в незначительной степени, лишь в § 10, который сам представляет собой отступление от основной темы книги.

В теоретико-множественной топологии значительное место занимает теория размерности, решающая вопрос о том, что следует называть размерностью или числом измерений топологического пространства, и изучающая свойства топологических пространств в связи с их размерностью. Существует несколько различных определений числа измерений топологического пространства, однако для компактных метрических пространств важнейшие из них всегда приводят к одному и тому же числу. Здесь определение размерности будет дано лишь для компактных метрических пространств, и сделано это будет при помощи покрытий. Целью настоящего параграфа является доказательство того, что всякое компактное метрическое пространство размерности r может быть гомеоморфно отображено на некоторое подмножество евклидова пространства размерности $2r+1$. Результат этот является одним из основных в теории размерности и прекрасно демонстрирует силу комбинаторных методов

в теоретико-множественной топологии. Доказательство его опирается на понятие нерва, введенное П. С. Александровым, и на теорему 4, также принадлежащую П. С. Александрову. Доказательство чисто теоретико-множественного результата опирается в данном случае на использование основных элементарных понятий комбинаторной топологии, освободиться от которых здесь, по-видимому, невозможно.

Понятия размерности и нерва. А) Пусть R — метрическое пространство, A — некоторое множество его точек и δ — положительное число. Через $N(A, \delta)$ будем обозначать множество всех точек из R , расстояние которых до A меньше δ . Через $\bar{N}(A, \delta)$ будем обозначать множество всех точек из R , расстояние которых до A не превосходит δ . Ясно, что замыкание первого множества содержится во втором и что первое множество является открытым, в то время как второе — замкнутым. В случае, если A состоит из одной точки a , диаметр обоих множеств $N(a, \delta)$ и $\bar{N}(a, \delta)$, очевидно, не превосходит 2δ .

В) Пусть R — метрическое пространство, а $\Sigma = \{C_0, C_1, \dots, C_k\}$ — конечная система его подмножеств. Говорят, что система Σ составляет покрытие пространства R , если каждая точка из R принадлежит по крайней мере одному множеству системы Σ . Покрытие Σ пространства R называется ϵ -покрытием, если диаметр каждого множества C_i системы Σ меньше положительного числа ϵ . Обычно рассматриваются системы Σ , состоящие либо сплошь из открытых множеств (открытое покрытие), либо сплошь из замкнутых множеств (замкнутое покрытие). Говорят, что система Σ имеет кратность n , если существует в R точка, одновременно принадлежащая n множествам системы Σ , но не существует точки из R , одновременно принадлежащей $n+1$ множествам системы Σ . Покажем, что для компактного пространства R при произвольном положительном ϵ всегда существует как открытое ϵ -покрытие, так и замкнутое ϵ -покрытие.

В самом деле, если x — произвольная точка из R , то сумма всех областей вида $N(x, \epsilon/3)$ (см. А) составляет R и ввиду компактности можно выбрать конечное покрытие пространства R областями $N(x_0, \epsilon/3)$, $N(x_1, \epsilon/3)$, \dots , $N(x_n, \epsilon/3)$. Замкнутое покрытие состоит из

множеств $\bar{P}(x_0, \varepsilon/3)$, $\bar{P}(x_1, \varepsilon/3)$, ..., $\bar{P}(x_k, \varepsilon/3)$. Оба указанных покрытия, очевидно, являются ε -покрытиями.

Определение 8. Говорят, что компактное метрическое пространство R имеет *конечную размерность* r , если для каждого положительного ε существует замкнутое ε -покрытие пространства R , кратность которого не превосходит числа $r+1$, но для достаточно малого положительного ε не существует уже замкнутого ε -покрытия пространства R , кратность которого не превосходит числа r . Если для пространства R не существует никакого целого числа $r \geq 0$, удовлетворяющего указанному условию, то говорят, что размерность пространства R бесконечна. Легко проверить, что размерность пространства R является его топологическим инвариантом.

Действительно, пусть R и R' — два компактных метрических пространства, а f — гомеоморфное отображение R на R' . Так как R компактно, то функция f равномерно непрерывна, и, следовательно, для каждого положительного числа ε' существует такое положительное число ε , что если x и y — две точки из R , удовлетворяющие условию $\rho(x, y) < \varepsilon$, то $\rho(f(x), f(y)) < \varepsilon'$. Если теперь $\Sigma = \{C_0, C_1, \dots, C_k\}$ — замкнутое ε -покрытие пространства R , то множества $f(C_i) = C'_i$, $i=0, 1, \dots, k$, составляют замкнутое ε' -покрытие Σ' пространства R' . Ввиду взаимной однозначности отображения f кратности покрытий Σ и Σ' совпадают. Из сказанного непосредственно следует, что размерность пространства R' не превосходит размерности пространства R , а так как пространство R и R' равноправны, то размерности их просто совпадают.

В § 10 будет показано, что r -мерный симплекс (см. определение 4) имеет размерность, равную r в смысле определения 8. Имеются и другие основания считать, что определение 8 вполне целесообразно.

С) Пусть R — компактное метрическое пространство, $\Sigma = \{C_0, C_1, \dots, C_k\}$ — его замкнутое ε -покрытие; существует тогда настолько малое положительное число δ (число Лебега покрытия Σ), что замкнутое покрытие $\bar{\Sigma}_\delta$, составленное из множеств $\bar{H}(C_i, \delta) = F_i$, $i=0, 1, \dots, k$ (см. А)), является ε -покрытием и имеет ту же кратность, что и исходное покрытие Σ . Из сказанного вытекает, что открытое покрытие Σ_δ , составленное из

множеств $H(C_i, \delta) = G_i$, $i=0, 1, \dots, k$, является ε -покрытием и имеет кратность, равную кратности исходного покрытия Σ .

Пусть $\Sigma' = \{C_{p_0}, C_{p_1}, \dots, C_{p_n}\}$ — такая система множеств, что пересечение их пусто, т. е. не существует точки, принадлежащей всем множествам системы Σ' . Покажем, что для достаточного малого δ' пересечения множеств системы $\bar{\Sigma}'_{\delta'} = \{F_{p_0}, F_{p_1}, \dots, F_{p_n}\}$ также пусто. Допустим прогнвоположное; тогда для каждого натурального числа m при $\delta' = 1/m$ найдется точка a_m , принадлежащая всем множествам системы $\bar{\Sigma}'_{\delta'}$. В силу компактности R существует точка a , предельная для последовательности $a_1, a_2, \dots, a_m, \dots$. Из замкнутости множеств системы Σ' вытекает, что a принадлежит всем множествам системы Σ' .

Таким образом, каждой подсистеме вида Σ' системы Σ соответствует свое достаточно малое число δ' . Так как подсистем вида Σ' в системе Σ имеется лишь конечное число, то, принимая за δ наименьшее из чисел δ' , мы получаем число δ , удовлетворяющее тому условию, что кратность покрытия $\bar{\Sigma}_\delta$ равна кратности покрытия Σ .

Так как диаметр каждого из множеств C_i меньше ε , то можно, сверх того, выбрать δ настолько малым, чтобы и диаметр каждого множества F_i был меньше ε . Из С) следует в, частности,

Д) Если размерность компактного метрического пространства R равна r , то для всякого положительного ε существует открытое ε -покрытие пространства R , кратность которого не превосходит $r+1$.

Определение 9. Пусть $\Sigma = \{C_0, C_1, \dots, C_k\}$ — некоторая система множеств пространства R . Построим абстрактный комплекс \mathfrak{K} , называемый *нервом* системы Σ . Каждому множеству C_i поставим в соответствие букву c_i и совокупность букв c_0, c_1, \dots, c_k примем за совокупность вершин комплекса \mathfrak{K} . Будем считать, что совокупность вершин $c_{i_0}, c_{i_1}, \dots, c_{i_s}$ тогда и только тогда определит симплекс комплекса \mathfrak{K} , когда множества $C_{i_0}, C_{i_1}, \dots, C_{i_s}$ имеют общую точку. Очевидно, что если кратность системы Σ равна $r+1$, то размерность ее нерва равна r .

Е) Пусть f — непрерывное отображение метрического пространства R в метрическое пространство S . Отго

бражение f называется ε -отображением, если для каждой точки $z \in f(R)$ полный прообраз ее $f^{-1}(z)$ в R имеет диаметр меньше ε .

Теорема 4. Пусть R — компактное метрическое пространство, $\Sigma = \{G_0, G_1, \dots, G_k\}$ — его открытое ε -покрытие, \mathfrak{R} — нерв этого покрытия, а K — геометрическая реализация абстрактного комплекса \mathfrak{R} в некотором евклидовом пространстве R^m . Таким образом, каждому множеству G_i системы Σ поставлена в соответствие точка $c_i \in R^m$, являющаяся вершиной геометрического нерва K покрытия Σ . Существует тогда непрерывное ε -отображение f пространства R в полиэдр $|K|$ такое, что если $x \in G_p$, то $f(x)$ принадлежит некоторому симплексу A^* из K с вершиной c_p .

Докажем это. Зададим числовую функцию $\varphi_i(x)$, $x \in R$, $i = 0, 1, \dots, k$, как расстояния точки x до замкнутого множества $R \setminus G_i$. Функция $\varphi_i(x)$, очевидно, непрерывна на R , положительна тогда и только тогда, когда $x \in G_i$, и обращается в нуль, когда $x \in R \setminus G_i$. Так как каждая точка x принадлежит хотя бы одному множеству G_i системы Σ , то сумма $\varphi(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \dots + \varphi_k(x)$ положительна при всяком x . Положим

$\lambda^i(x) = \frac{\varphi_i(x)}{\varphi(x)}$; подобно $\varphi_i(x)$ функция $\lambda^i(x)$ непрерывна на R , положительна тогда и только тогда, когда $x \in G_i$, и обращается в нуль, когда $x \in R \setminus G_i$. Сверх того,

$$\lambda^0(x) + \lambda^1(x) + \dots + \lambda^k(x) = 1. \quad (1)$$

Пусть M — естественная реализация абстрактного комплекса \mathfrak{R} (см. § 2, F). Каждой точке $x \in R$ поставим в соответствие точку $\lambda(x)$ евклидова пространства R^{k+1} , положив

$$\lambda(x) = \lambda^0(x)e_0 + \lambda^1(x)e_1 + \dots + \lambda^k(x)e_k. \quad (2)$$

Из соотношения (1) и неотрицательности функций $\lambda^i(x)$ вытекает, что $\lambda(x)$ принадлежит симплексу $E^k \subset R^{k+1}$. Покажем, что $\lambda(x)$ принадлежит полиэдру $|M|$.

Пусть x — некоторая фиксированная точка из R . Через $\Sigma_x = \{G_{i_0}, G_{i_1}, \dots, G_{i_r}\}$ обозначим совокупность всех областей системы Σ , которым точка x принадлежит. Так как области системы Σ_x имеют непустое пересечение, то в комплексе \mathfrak{R} существует симплекс $\mathfrak{A} = (c_{i_0}, c_{i_1}, \dots, c_{i_r})$ и,

следовательно, в комплексе N существует симплекс $A = (e_{i_0}, e_{i_1}, \dots, e_{i_r})$. С другой стороны, $\lambda^{i_0}(x), \lambda^{i_1}(x), \dots, \lambda^{i_r}(x)$ есть совокупность всех чисел последовательно-сти $\lambda^0(x), \lambda^1(x), \dots, \lambda^k(x)$, отличных от нуля, и потому (в силу (2))

$$\lambda(x) = \lambda^{i_0}(x)e_{i_0} + \lambda^{i_1}(x)e_{i_1} + \dots + \lambda^{i_r}(x)e_{i_r},$$

а это значит, что $\lambda(x) \in A \in N$. Если, далее, $x \in G_p$, то область G_p входит в систему Σ_x , и потому e_p есть вершина симплекса A .

Покажем, что отображение λ пространства R в полиэдр $|N|$ есть ε -отображение. Пусть z — произвольная точка из $\mathfrak{A}(R)$, $\lambda^{-1}(z)$ — ее полный прообраз в R и x — некоторая точка из $\lambda^{-1}(z)$. Точка x принадлежит к одной из областей системы Σ , например к G_p , и потому $\lambda^p(x) \neq 0$. Если теперь $y \in \lambda^{-1}(z)$, то имеем $\lambda(x) = \lambda(y)$, и в силу (2) получаем $\lambda^p(y) = \lambda^p(x) \neq 0$. Таким образом, $y \in G_p$, т. е. $\lambda^{-1}(z) \subset G_p$. Так как диаметр множества G_p меньше ε , то и диаметр содержащегося в нем множества $\lambda^{-1}(z)$ тоже меньше ε .

Итак, в применении к естественной реализации N нерва \mathfrak{A} утверждение теоремы доказано.

Перейдем теперь от комплекса N к комплексу K при помощи отображения ψ (см. § 2, F) и положим $f(x) = \psi(\lambda(x))$. Так как ψ есть гомеоморфное отображение комплекса N на комплекс K и переводит каждый симплекс из N в соответствующий симплекс из K , то утверждение теоремы справедливо и для отображения f пространства R в комплекс K . Для полноты укажем еще формулу, дающую переход от R к K :

$$f(x) = \lambda^0(x)c_0 + \lambda^1(x)c_1 + \dots + \lambda^k(x)c_k. \quad (3)$$

Таким образом теорема доказана.

Если пространство R имеет размерность r , то в силу D) существует открытое ε -покрытие Σ пространства R , кратность которого не превосходит $r+1$ при произвольно малом ε . Таким образом, существует непрерывное ε -отображение f пространства R в r -мерный полиэдр $|K|$ — нерв покрытия Σ . Этот результат устанавливает принципиально важную связь между общими компактными мет-

рическими пространствами и полиэдрами; он принадлежит П. С. Александрову и имеет многочисленные приложения в топологии.

Пространство отображений и теорема включения.
 F) Пусть R — метрическое пространство. Последовательность $a_0, a_1, \dots, a_m, \dots$ его точек называется последовательностью Коши, если для всякого положительного ε существует настолько большое натуральное число n , что при $p > n, q > n$ имеем $\rho(a_p, a_q) < \varepsilon$. Легко проверяется, что последовательность Коши может иметь лишь одну предельную точку, и если она ее имеет, то сходится к ней. Пространство R называется полным, если каждая последовательность Коши в нем сходится. Легко видеть, что компактное пространство всегда полно, точно так же полно и евклидово пространство. Оказывается, что если $G_0 = R, G_1, \dots, G_m, \dots$ есть последовательность областей полного метрического пространства, всюду плотных в R , то пересечение всех этих областей не пусто и даже всюду плотно в R .

Докажем последнее утверждение. Пусть a_0 — произвольная точка из $G_0 = R$ и ε_0 — произвольно малое положительное число. Покажем, что существует точка a , принадлежащая всем областям G_m и такая, что $\rho(a_0, a) \leq \varepsilon_0$.

Допустим, что построена уже конечная последовательность точек a_0, a_1, \dots, a_n пространства R и конечная последовательность чисел $\varepsilon_0, \varepsilon_1 < 1, \dots, \varepsilon_n < 1/n$, так что $\bar{H}(a_i, \varepsilon_i) \subset H(a_{i-1}, \varepsilon_{i-1}) \cap G_i, i = 1, 2, \dots, n$ (см. А)). (4)

Продолжим эти две последовательности. Так как G_{n+1} всюду плотно в R , то существует точка $a_{n+1} \in H(a_n, \varepsilon_n) \cap G_{n+1}$; так как $H(a_n, \varepsilon_n) \cap G_{n+1}$ есть область, то существует настолько малое число $\varepsilon_{n+1} < \frac{1}{n+1}$, что $\bar{H}(a_{n+1}, \varepsilon_{n+1}) \subset$

$\subset H(a_n, \varepsilon_n) \cap G_{n+1}$. Таким образом, мы можем считать, что последовательности $a_0, a_1, \dots, a_m, \dots$ и $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m, \dots$ бесконечны, и условия (4) для них выполнены. Если $p < q$, то $a_q \in H(a_p, \varepsilon_p)$ и, следовательно, $\rho(a_p, a_q) < \varepsilon_p < 1/p$; таким образом, $a_0, a_1, \dots, a_m, \dots$ есть последовательность Коши и потому сходится к некоторой точке a . К той же точке a сходится и последовательность a_m, a_{m+1}, \dots , а она принадлежит замкнутому множеству

$\bar{H}(a_m, \varepsilon_m)$. Таким образом, $a \in \bar{H}(a_m, \varepsilon_m)$, и мы видим, что a принадлежит всем областям G_m . Так как $a \in \bar{H}(a_0, \varepsilon_0)$, то $\rho(a_0, a) \leq \varepsilon_0$.

Итак, утверждение наше доказано.

Определение 10. Пусть R — компактное метрическое пространство, S — произвольное метрическое пространство, и Φ — множество всех непрерывных отображений пространства R в пространство S . Если f и g — два отображения из Φ , то $\rho(f(x), g(x))$ есть непрерывная числовая функция, заданная на компактном пространстве R , и потому достигает своего максимума; этот максимум мы обозначим через $\rho(f, g)$ и примем за *расстояние* между элементами f и g во вновь определенном метрическом пространстве Φ . Ниже будет показано, что $\rho(f, g)$ удовлетворяет всем аксиомам метрического пространства. Оказывается, что если S полно (см. F)), то и Φ полно.

Докажем, что $\rho(f, g)$ удовлетворяет аксиомам метрического пространства. Очевидно, что $\rho(f, g) = 0$ тогда и только тогда, когда $f = g$. Точно так же очевидно, что $\rho(f, g) = \rho(g, f)$. Покажем, что если f, g и h — три отображения из Φ , то $\rho(f, h) \leq \rho(f, g) + \rho(g, h)$. Пусть a — та точка из R , для которой $\rho(f(x), h(x))$ достигает своего максимума; тогда имеем $\rho(f, h) = \rho(f(a), h(a)) \leq \rho(f(a), g(a)) + \rho(g(a), h(a)) \leq \rho(f, g) + \rho(g, h)$.

Докажем теперь, что если S полно, то Φ также полно. Пусть $f_0, f_1, \dots, f_m, \dots$ — последовательность Коши из Φ . Это значит, что для произвольно малого положительного ε существует натуральное число n такое, что если $p > n$, $q > n$, то $\rho(f_p, f_q) < \varepsilon$. А это значит, что для произвольной точки $x \in R$ мы имеем

$$\rho(f_p(x), f_q(x)) < \varepsilon. \quad (5)$$

Таким образом, последовательность $f_0(x), f_1(x), \dots, \dots, f_m(x), \dots$ точек из S есть последовательность Коши и потому сходится к некоторой точке, которую мы обозначим через $f(x)$. Переходя в неравенстве (5) к пределу при $q \rightarrow \infty$, мы получаем

$$\rho(f_p(x), f(x)) \leq \varepsilon. \quad (6)$$

Покажем теперь, что отображение f пространства R в S непрерывно в каждой точке $x \in R$. Так как отображение f_p непрерывно в точке x , то существует настолько

малое положительное δ , что из $\rho(x, y) < \delta$ вытекает $\rho(f_p(x), f_p(y)) < \varepsilon$. Так как соотношение (6) имеет место и для точки y , то мы имеем

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \rho(f_p(x), f_p(y)) + \rho(f_p(y), f(y)) < 3\varepsilon.$$

Таким образом, отображение f непрерывно, т. е. $f \in \Phi$. Соотношение (6) показывает, что $\rho(f_p, f) \leq \varepsilon$ при $p > n$, а это значит, что последовательность $f_0, f_1, \dots, f_m, \dots$ сходится к f .

G) Пусть Φ — метрическое пространство всех непрерывных отображений компактного метрического пространства R в произвольное метрическое пространство S (см. определение 10). Через Φ_ε обозначим множество всех ε -отображений из Φ (см. E)) и покажем, что Φ_ε есть область в Φ .

Пусть $f \in \Phi_\varepsilon$; существует тогда настолько малое положительное число δ , что для двух произвольных точек x и y пространства R из $\rho(f(x), f(y)) < \delta$ вытекает $\rho(x, y) < \varepsilon$. Допустим противоположное. Это значит, что имеется стремящаяся к нулю последовательность $\delta_1, \delta_2, \dots, \dots, \delta_m, \dots$ положительных чисел такая, что для каждого натурального m найдется пара точек x_m, y_m , удовлетворяющая условию $\rho(f(x_m), f(y_m)) < \delta_m, \rho(x_m, y_m) \leq \varepsilon$. Так как R компактно, то из последовательности $x_1, x_2, \dots, \dots, x_m, \dots$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Для того чтобы не менять обозначений, мы предположим, что последовательность $x_1, x_2, \dots, x_m, \dots$ сама сходится к точке x . Точно так же можно предположить, что последовательность $y_1, y_2, \dots, y_m, \dots$ сходится к точке y . Мы имеем тогда $\rho(f(x), f(y)) = 0$, т. е. $f(x) = f(y)$, но $\rho(x, y) \geq \varepsilon$, а это противоречит предположению, что f есть ε -отображение.

Покажем теперь, что если $\rho(f, g) < \frac{\delta}{2}$, то g есть ε -отображение; это и будет означать, что Φ_ε есть область.

Пусть $g(x) = g(y) = z$; тогда мы имеем

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \rho(f(x), g(x)) + \rho(g(y), f(y)) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

и в силу доказанного ранее $\rho(x, y) < \varepsilon$. Так как прообраз $g^{-1}(z)$ точки $z \in g(R)$ в R компактен, и каждые его две

точки x и y удалены друг от друга менее чем на ε , то сам прообраз $g^{-1}(z)$ имеет диаметр меньше ε .

Таким образом, $g \in \Phi_\varepsilon$, и утверждение G) доказано. Теорема 5. Компактное метрическое пространство R размерности r может быть гомеоморфно отображено на некоторое подмножество евклидова пространства R^{2r+1} размерности $2r+1$.

Доказательство. Пусть Φ — пространство всех непрерывных отображений пространства R в пространство R^{2r+1} (см. определение 10). Через Φ_ε обозначим множество всех ε -отображений из Φ ; в силу G) Φ_ε есть область в Φ . Очевидно, что $\Phi_1, \Phi_{1/2}, \dots, \Phi_{1/m}, \dots$ есть убывающая последовательность областей из Φ . Пересечение всех областей $\Phi_{1/m}$ обозначим через Ψ . Так как всякое отображение $h \in \Psi$ есть ε -отображение при произвольно малом ε , то h является взаимно однозначным отображением пространства R на подмножество $h(R)$ пространства R^{2r+1} и, в силу компактности R , гомеоморфизмом. Таким образом, нам достаточно доказать, что Ψ не пусто, а для этого в силу F) достаточно показать, что Φ_ε всюду плотно в Φ . Доказываем это.

Пусть g — произвольное отображение из Φ , а ε и η — два произвольно малых положительных числа. Покажем, что существует ε -отображение f пространства R в R^{2r+1} такое, что $\rho(g, f) < \eta$. Этим и будет показано, что Φ_ε всюду плотно в Φ . Так как g равномерно непрерывно, то существует настолько малое положительное число $\delta \leq \varepsilon$, что из $\rho(x, y) < \delta$ вытекает $\rho(g(x), g(y)) < \eta/6$. Пусть теперь $\Sigma = \{G_0, G_1, \dots, G_k\}$ — открытое δ -покрытие пространства R , кратность которого не превосходит $r+1$ (см. D)). Покрытие Σ является одновременно и ε -покрытием. Так как диаметр каждого множества G_i меньше δ , то диаметр каждого множества $g(G_i) = F_i$ меньше $\eta/6$. Через $c_i, i=0, 1, \dots, k$, обозначим точку из R^{2r+1} , стояние которой от F_i меньше $\eta/6$, и предположим, сверх того, что точки c_0, c_1, \dots, c_k находятся в общем положении (в силу теоремы 2 такой выбор точек c_i возможен). Точки c_0, c_1, \dots, c_k примем за вершины геометрического нерва K (см. теорему 3) покрытия Σ , считая, что вершина c_i соответствует элементу покрытия G_i . Покажем, что отображение f пространства R в нерв K , построенное в теореме 4, удовлетворяет нашим требованиям.

Так как Σ есть ε -покрытие, то в силу теоремы 4 f есть ε -отображение. Остается показать, что $\rho(g, f) < \eta$.

Оценим прежде всего размеры симплексов комплекса K . Для этого мы воспользуемся предположением D) § 9, доказательство которого опирается лишь на определение симплекса. Предложение это утверждает, что диаметр симплекса равен длине максимального его ребра. Таким образом, нам достаточно оценить лишь размеры одномерных симплексов комплекса K . Пусть (c_p, c_q) — некоторый одномерный симплекс из K . Так как в K существует симплекс (c_p, c_q) , то области G_p и G_q пересекаются, а следовательно, пересекаются и множества F_p и F_q . Так как диаметр каждого из множеств F_p и F_q меньше $\eta/6$ и расстояния точек c_p и c_q соответственно до множеств F_p и F_q тоже меньше $\eta/6$, то $\rho(c_p, c_q) < 2/3\eta$. Таким образом, диаметр каждого симплекса из K меньше $2/3\eta$.

Пусть теперь x — некоторая фиксированная точка из R . Существует область G_p системы Σ , содержащая x . Так как $g(x) \in F_p$ и расстояние вершины c_p от множества F_p меньше $\eta/6$, то $\rho(g(x), c_p) < \eta/3$. С другой стороны, в силу теоремы 4 точка $f(x)$ принадлежит симплексу A комплекса K с вершиной c_p , и ввиду сделанной выше оценки диаметра симплексов из K мы имеем $\rho(c_p, f(x)) < 2/3\eta$. Таким образом, $\rho(g(x), f(x)) < \eta$, а это значит, что $\rho(g, f) < \eta$, ибо x — произвольная точка из R .

Итак, теорема 5 полностью доказана.

В дополнение к теореме 5 следует отметить, что для каждого натурального числа r существует r -мерное компактное метрическое пространство P^r , которое невозможно гомеоморфно отобразить на подмножество евклидова пространства R^{2r} размерности $2r$. Этот весьма нетривиальный результат принадлежит Ван-Кампену. Пространство P^r определено у него следующим образом. Пусть A^{2r+2} — симплекс размерности $2r+2$. Совокупность всех граней симплекса A^{2r+2} , размерность которых не превосходит r , составляет r -мерный комплекс K^r . Пространство P^r представляет собой полиэдр $|K^r|$. Для $r=1$ комплекс K^1 легко можно себе представить и нетрудно элементарными методами доказать, что $|K^1|$ невозможно гомеоморфно отобразить на подмножество плоскости. В случае $r > 1$ доказательство опирается на понятие индекса пересечения, в настоящей книге не рассматриваемое.

§ 4. Группы гомологий

Намеченный в конце § 2 общий путь построения инвариантов полиэдра реализуется здесь применительно к основным инвариантам — группам гомологий. Доказательство инвариантности групп гомологий будет дано в главе II; так как даваемое в настоящем параграфе определение групп гомологий и проводимое в следующих параграфах настоящей главы их исследование опирается на комплекс лишь как на комбинаторную схему, то нет надобности делать различие между абстрактным комплексом и его геометрической реализацией.

А) Любую последовательность a, b, c, \dots, f , в которой можно записать совокупность всех вершин некоторого симплекса, будем называть порядком вершин этого симплекса. Будем говорить, что симплекс (a_0, a_1, \dots, a_r) получает *ориентацию* или становится *ориентированным*, если каждому порядку его вершин поставлен в соответствие знак $+$ или $-$ так, что порядкам, отличающимся нечетной перестановкой, соответствуют противоположные знаки. Записывать это будем в виде

$$A^r = \varepsilon (a_0, a_1, \dots, a_r), \quad (1)$$

где ε означает тот знак, который приписан последовательности a_0, a_1, \dots, a_r , $\varepsilon = \pm 1$. Таким образом, каждый симплекс допускает две различные (противоположные) ориентации. Если A^r — ориентированный симплекс, то через $-A^r$ будем обозначать симплекс, противоположно ориентированный.

Нульмерный симплекс (a_0) имеет лишь один порядок вершин, тем не менее, согласно определению, он все же допускает две противоположные ориентации: $+(a_0)$ и $-(a_0)$.

В) Пусть (a_1, a_2, \dots, a_r) — некоторый r -мерный симплекс. Любую $(r-1)$ -мерную грань его можно получить вычеркиванием из последовательности a_0, a_1, \dots, a_r одной вершины a_i . Ориентации $A^r = \varepsilon (a_0, a_1, \dots, a_r)$ исходного симплекса поставим в соответствие ориентацию

$$B_i^{r-1} = (-1)^i \varepsilon (a_0, a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_r)$$

его $(r-1)$ -мерной грани. Легко проверяется, что установленное между ориентациями A^r и B_i^{r-1} соответствие не зависит

от случайно выбранного порядка вершин a_0, a_1, \dots, a_r . Мы будем писать $A^r \xrightarrow{\pm} B_i^{r-1}$. Очевидно, что $-A^r \xrightarrow{\pm} -B_i^{r-1}$. Симплексы A^r и B_i^{r-1} мы будем называть *когерентно ориентированными*.

С) Пусть $A_1^r, A_2^r, \dots, A_{\alpha^r}^r$ — совокупность всех как-либо ориентированных r -мерных симплексов некоторого комплекса K . Пусть далее G — произвольная коммутативная группа, взятая в аддитивной записи. Линейную форму

$$x = g_1 A_1^r + g_2 A_2^r + \dots + g_{\alpha^r} A_{\alpha^r}^r \quad (2)$$

относительно симплексов $A_1^r, A_2^r, \dots, A_{\alpha^r}^r$ с коэффициентами $g_1, g_2, \dots, g_{\alpha^r}$ принадлежащими G , будем называть *r -мерной цепью* комплекса K по группе коэффициентов G . Если $A_1^{*r}, A_2^{*r}, \dots, A_{\alpha^r}^{*r}$ суть r -мерные симплексы из K , взятые с какими-либо другими ориентациями так, что $A_i^{*r} = \varepsilon_i A_i^r$, то будем считать, что

$$x = \varepsilon_1 g_1 A_1^{*r} + \varepsilon_2 g_2 A_2^{*r} + \dots + \varepsilon_{\alpha^r} g_{\alpha^r} A_{\alpha^r}^{*r}.$$

Этим самым мы освобождаемся в определении цепи от случайности в выборе ориентации симплексов. Если

$$x = \sum_{i=1}^{\alpha^r} g_i A_i^r \quad \text{и} \quad y = \sum_{i=1}^{\alpha^r} h_i A_i^r$$

— две r -мерные цепи из K по группе G , то положим

$$x + y = \sum_{i=1}^{\alpha^r} (g_i + h_i) A_i^r. \quad (3)$$

Таким образом, в множестве всех r -мерных цепей комплекса K по группе G определена операция сложения, и множество это превращено в коммутативную группу, которую мы будем обозначать через $L_G^r(K)$ или просто через L^r , когда это не может привести к недоразумениям.

При образовании цепей за группу G в большинстве случаев принимают группу G_0 целых чисел или же группу G_m вычетов по модулю m . Для сокращения полагают $L_{G_m}^r = L_m^r$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Особенно употребительны группы G_0 и G_2 .

В случае G_2 вместо ориентированных симплексов можно рассматривать неориентированные, так как при $g \in G_2$ мы имеем $g = -g$, и потому в цепи x нет надобности различать симплексы A^r и $-A^r$.

Определение 11. Пусть A^r — некоторый ориентированный r -мерный симплекс комплекса K . A^r можно рассматривать как цепь из K по целочисленной группе коэффицициентов. Обозначим через $B_0^{r-1}, B_1^{r-1}, \dots, B_r^{r-1}$ совокупность всех когерентно ориентированных с A^r ($r-1$)-мерных граней симплекса A^r (см. В)), и положим

$$\Delta(A^r) = \Delta A^r = B_0^{r-1} + B_1^{r-1} + \dots + B_r^{r-1}. \quad (4)$$

В случае $r=0$ положим

$$\Delta A^0 = 0. \quad (4')$$

Очевидно, что

$$\Delta(-A^r) = -\Delta(A^r).$$

ΔA^r является $(r-1)$ -мерной цепью из K по целочисленной группе коэффицициентов и называется *границей ориентированного симплекса A^r* . Границу Δx произвольной r -мерной цепи x из K по группе G (см. (2)) определим, положив

$$\Delta(x) = \Delta x = \sum_{i=1}^{a^r} g_i \Delta A_i^r. \quad (5)$$

Легко видеть, что

$$\Delta(-x) = -\Delta(x) \quad \text{и} \quad \Delta(x+y) = \Delta(x) + \Delta(y). \quad (6)$$

Оказывается, сверх того, что

$$\Delta \Delta x = 0. \quad (7)$$

Докажем соотношение (7). Его достаточно доказать лишь для случая $x = A^r$. Пусть $A^r = + (a_0, a_1, \dots, a_r)$. Через C_p^{r-1} обозначим ориентированный симплекс, полученный из A^r выкидыванием вершины a_p , а через C_{pq}^{r-2} — ориентированный симплекс, получаемый из A^r выкидыванием двух вершин a_p и a_q , $p < q$. Таким образом,

$$C_p^{r-1} = + (a_0, a_1, \dots, a_{p-1}, a_{p+1}, \dots, a_r),$$

$$C_{pq}^{r-2} = + (a_0, a_1, \dots, a_{p-1}, a_{p+1}, \dots, a_{q-1}, a_{q+1}, \dots, a_r).$$

При этих обозначениях имеем

$$\Delta A^r = \sum_{i=0}^r (-1)^i C_i^{r-1},$$

$$\Delta C_i^{r-1} = \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j C_{ji}^{r-2} + \sum_{j=i+1}^r (-1)^{j-1} C_{ij}^{r-2}.$$

Итак,

$$\Delta \Delta A^r = \sum_{j < i} (-1)^{i+j} C_{ji}^{r-2} + \sum_{i < j} (-1)^{j+i-1} C_{ij}^{r-2} = 0.$$

Таким образом, соотношение (7) доказано.

Операция Δ образования границы границы является важнейшей в комбинаторной топологии; она приводит к следующим основным понятиям так называемой теории гомотологии.

Определение 12. r -мерная цепь x называется *циклом*, если граница ее равна нулю, т. е. если $\Delta x = 0$. Множество всех r -мерных циклов (по группе G) комплекса K обозначается через $Z_G^r(K)$ или просто Z^r ($Z_{G_m}^r = Z_m^r$). Очевидно, что Z^r есть подгруппа группы L^r (см. (6)). Для $r=0$ имеем $Z^0 = L^0$ (см. (4')).

Заметим, что каждая граница является циклом (см. (7)).

Определение 13. r -мерный цикл z n -мерного комплекса K называется *гомологичным нулю*, если он является границей $(r+1)$ -мерной цепи из K , $r=0, 1, \dots, n-1$. n -мерный цикл z считается гомологичным нулю лишь в случае, если он равен нулю. В знаках гомологичность нулю записывается так: $z \sim 0$.

Множество всех r -мерных циклов по группе G комплекса K , гомологичных нулю, обозначается через $H_G^r(K)$ или просто H^r ($H_{G_m}^r = H_m^r$). Очевидно, что H^r есть подгруппа группы Z^r (см. (7)). Два r -мерных цикла z_1 и z_2 называются *гомологичными* между собой, если разность их гомологична нулю ($z_1 - z_2 \sim 0$); в этом случае пишут: $z_1 \sim z_2$.

Определение 14. Так как $H^r \subset Z^r$ (см. определение 12, 13), то можно составить фактор-группу $B^r = Z^r/H^r$.

Группа $B^r = B_G^r(K)$ называется *r*-мерной группой Бетти или *r*-мерной группой гомологий комплекса K по группе коэффициентов G ($B_{G_m}^r = B_m^r$).

Определение цикла и гомологичности нулю, конечно, зависит от положенной в основу всего построения группы G .

В силу определений 13 и 14 элементы группы гомологий представляют собой классы гомологичных между собой циклов.

Оказывается, что для нахождения групп гомологий комплекса K по любой группе коэффициентов G достаточно знать группы гомологий K лишь по целочисленной группе коэффициентов; ввиду этого последние играют особо важную роль. Факта этого мы доказывать, однако, не будем.

В дальнейшем будет показано, что группы гомологий комплекса K являются топологическими инвариантами соответствующего полиэдра. Группы гомологий полиэдра являются его основными наиболее хорошо изученными топологическими инвариантами.

Д) Пусть K есть *n*-мерный комплекс, и Δ — операция образования границы в нем; тогда Δ есть гомоморфизм группы L^r в группу L^{r-1} (см. (6)), $r = 1, 2, \dots, n$. В силу определений 12 и 13 ядром гомоморфизма Δ в группе L^r служит подгруппа Z^r , а образом группы L^r при гомоморфизме Δ является подгруппа $H^{r-1} \subset L^{r-1}$. Таким образом, группы L^r/Z^r и H^{r-1} изоморфны.

Е) Пусть x, y, z — элементы группы гомологии B^r которого комплекса K , а x, y, z — циклы из K , принадлежащие соответственно классам гомологий $* * * x, y, z$. Тогда соотношения $x + y = z$ и $x + y \sim z$ эквивалентны. Таким образом, любое соотношение между элементами группы гомологий B^r можно записать в виде соотношения между циклами, употребляя вместо знака равенства знак гомологии; иначе говоря, изучая гомологические соотношения между циклами, мы тем самым изучаем свойства групп гомологий — важнейшего топологического инварианта; в этом и заключается значение знака гомологии. Например, вместо того чтобы говорить о линейной независимости элементов группы гомологии, можно говорить о гомологической независимости между циклами.

§ 5. Разбиение на компоненты. Нульмерная группа гомологии

Настоящий параграф посвящается выяснению геометрического смысла нульмерной группы гомологии комплекса, для чего предварительно будет доказано одно общее предложение, имеющее и некоторый самостоятельный интерес (см. теорему 6).

А) *Подкомплексом* комплекса K называется всякий комплекс L , все симплексы которого принадлежат K . Совокупность всех симплексов комплекса K , размерность которых не превосходит r , называется r -мерным *остовом* комплекса K и составляет его подкомплекс.

В) Комплекс K будем называть *связным*, если его невозможно разбить в сумму двух непустых подкомплексов L и M без общих симплексов. Оказывается, что комплекс K связан тогда и только тогда, когда для каждого его двух вершин a и e существует последовательность вершин

$$a_1 = a, a_2, \dots, a_q = e, \quad (1)$$

причем любые две соседние вершины этой последовательности служат вершинами одномерного симплекса из K .

Для доказательства выказанного предложения допустим сперва, что комплекс K не связан и потому распадается в сумму двух непересекающихся подкомплексов L и M . Пусть a — вершина из L , а e — вершина из M . Допустим, что цепочка (1) существует для этих вершин. Через a_i обозначим последнюю ее вершину, принадлежащую L . Существующий по условию симплекс (a_i, a_{i+1}) , очевидно, не может принадлежать ни L , ни M . Таким образом, для несвязного комплекса условие существования цепочки (1) не выполнено.

Допустим теперь, что комплекс K связан. Зафиксируем какую-либо его вершину a и рассмотрим множество E всех таких вершин e комплекса K , которые можно связать с a цепочкой вида (1). Очевидно, что если симплекс A имеет хоть одну вершину, принадлежащую E , то и все вершины его принадлежат E . Таким образом, совокупность всех симплексов из K , имеющих вершины в E , составляет подкомплекс L . Множество всех симплексов из K , не принадлежащих L , очевидно, составляет под-

комплекс M из K и потому пусто ввиду связности K . Таким образом, в E входят все вершины комплекса K , и фиксированную вершину a можно соединить цепочкой вида (1) с любой вершиной e . Из этого непосредственно следует, что и две любые вершины из K также можно соединить цепочкой.

С) Компонентой некоторого комплекса K будем называть такой связный его подкомплекс L , что K распадается в сумму двух непересекающихся подкомплексов L и M . Пусть K_1, \dots, K_p — совокупность всех компонент комплекса K . Оказывается, что компоненты эти попарно не пересекаются и в сумме составляют весь комплекс K .

Допустим, что компоненты K_i и K_j пересекаются. Так как K_i есть компонента, то K распадается в сумму двух непересекающихся подкомплексов $K_i = L$ и M . Пересечения K_j с L и M обозначим соответственно через K'_j и K''_j . Легко видеть, что K'_j и K''_j суть непересекающиеся подкомплексы комплекса K_j , в сумме составляющие K_j . Ввиду связности K_j один из кусков K'_j и K''_j должен быть пустым. Но $K'_j = K_j \cap K_i$ и по предположению не пуст, следовательно, $K_j \subset K_i$. Точно так же можно доказать, что и $K_i \subset K_j$, т. е. мы получаем $K_i = K_j$, и потому $i = j$.

Покажем теперь, что сумма всех компонент составляет комплекс K . Пусть A — произвольный симплекс из K ; покажем, что A принадлежит одной из компонент. Если K связан, то он имеет только одну компоненту $K = K_1$, и утверждение правильно. В случае несвязного K его можно разбить в сумму двух непересекающихся подкомплексов L и M ; один из них, например L , содержит A . Если L связан, то L есть компонента K , и мы видим, что симплекс A принадлежит одной из компонент. В случае несвязности L мы продолжим разбиение на части, пока не дойдем до компоненты, содержащей A .

Теорема 6. Пусть K_1, \dots, K_p — совокупность всех компонент некоторого комплекса K . В основу построения всех групп положим некоторую фиксированную группу коэффициентов G , которую в дальнейшем явено указывать не будем. Пусть B^r — группа гомологии комплекса K , а B^r_i — группа гомологии комплекса K_i . Оказывается, что B^r изоморфна прямой сумме $B^r_1 + \dots + B^r_p$.

Доказательство. Пусть L' — группа всех r -мерных цепей комплекса K . Через L'_i обозначим ее подгруппу, составленную из всех цепей, в которые с коэффициентами, отличными от нуля, входят лишь симплексы комплекса K_i . Очевидно, что

$$L' = L'_1 + \dots + L'_p. \quad (2)$$

Группа L'_i представляет собой группу всех r -мерных цепей комплекса K_i . Далее положим $H_i^{r-1} = \Delta L'_i$, тогда

$$H_i^{r-1} \subset L_i^{r-1}. \quad (3)$$

Покажем, что

$$H^{r-1} = H_1^{r-1} + \dots + H_p^{r-1}. \quad (4)$$

Действительно, если Δx есть произвольный элемент из H^{r-1} , где $x \in L'$, то в силу (2) имеем $x = x_1 + \dots + x_p$, $x_i \in L'_i$ и, следовательно,

$$\Delta x = \Delta x_1 + \dots + \Delta x_p, \quad (5)$$

где $\Delta x_i \in H_i^{r-1}$. Единственность разложения (5) следует из (2) и (3).

Через Z'_i обозначим ядро гомоморфизма Δ в группе L'_i и покажем, что

$$Z' = Z'_1 + \dots + Z'_p. \quad (6)$$

Если $z \in Z'$, то $z = x_1 + \dots + x_p$, где $x_i \in L'_i$ (см. (2)). Отсюда получаем $\Delta x_1 + \dots + \Delta x_p = \Delta z = 0$, но в силу (3) и (4) это дает $\Delta x_i = 0$; таким образом, $x_i \in Z'_i$. Единственность полученного разложения z следует из (2).

Из соотношений (4) и (6) следует, что группа Z'/H' изоморфна прямой сумме: $Z'_1/H'_1 + \dots + Z'_p/H'_p$. Таким образом, теорема 6 доказана.

Д) Пусть K — произвольный комплекс, а A_1^0, \dots, A_c^0 — совокупность всех его положительно ориентированных нульмерных симплексов $A_i^0 = \pm (a_i)$. Пусть далее

$$x = g_1 A_1^0 + \dots + g_\alpha A_\alpha^0$$

— произвольная нульмерная цепь из K по группе коэффициентов G . Индекс $I(x)$ цепи x определим, положив

$$I(x) = g_1 + \dots + g_\alpha.$$

Очевидно, что

$$I(x + y) = I(x) + I(y). \quad (7)$$

Оказывается, что из $x \sim 0$ следует $I(x) = 0$.

Пусть $A^1 = + (a, b)$ — произвольный ориентированный одномерный симплекс из K ; положим $A^0 = + (a)$, $B^0 = + (b)$. Тогда, $\Delta(gA^1) = gB^0 - gA^0$ и, следовательно, $I(\Delta(gA^1)) = 0$. Из этого в силу (7) получаем $I(\Delta y) = 0$ при произвольном $y \in Z^1$. Таким образом, утверждение доказано.

Заметим, что понятие индекса невозможно ввести для цепи, размерность которой больше нуля. В самом деле, только для нульмерного симплекса можно говорить о положительной ориентации, ибо только для него существует единственный порядок вершин.

Е) Для связного комплекса K условия $I(x) = 0$ и $x \sim 0$ эквивалентны. Сверх того, оказывается, что группа $B_G^0(K)$ изоморфна группе коэффициентов G .

Пусть a и e — две произвольные вершины из K ; положим $A^0 = + (a)$, $E^0 = + (e)$. В силу связности K существует цепочка вида (1) такая, что в K имеется симплекс (a_i, a_{i+1}) , $i = 1, \dots, q-1$. Положим $A_i^1 = + (a_i, a_{i+1})$ и рассмотрим цепь

$$y = gA_1^1 + gA_2^1 + \dots + gA_{q-1}^1$$

относительно группы G . Очевидно, что $\Delta y = gE^0 - gA^0$. Таким образом, $gE^0 \sim gA^0$. Из этого непосредственно следует, что произвольная нульмерная цепь x по произвольной группе G гомологична цепи gA^0 , где $g \in G$. Так как x и gA^0 гомологичны, то индексы их равны и, следовательно, $I(x) = g$. Таким образом, получаем

$$x \sim I(x)A^0.$$

Последнее показывает, что если $I(x) = 0$, то $x \sim 0$. Итак, эквивалентность соотношений $I(x) = 0$ и $x \sim 0$ доказана.

В силу (7) оператор I дает гомеоморфное отображение группы $L^0 = Z^0$ в группу G . Так как при произвольном $g \in G$ имеется в Z^0 цикл gA^0 , индекс которого равен g , то $I(Z^0) = G$. С другой стороны, из эквивалентности со-

отношений $I(x) = 0$ и $x \sim 0$ следует, что ядро гомоморфизма I есть H^0 . Ввиду сказанного получаем изоморфизм групп Z^0/H^0 и G . Этим доказательство предложения E) закончено.

Теорема 7. *Нульмерная группа гомологии произвольного комплекса K по группе коэффициентов G изоморфна прямой сумме нескольких экземпляров группы G , причем число этих экземпляров равно числу компонент комплекса K .*

Эта теорема непосредственно следует из теоремы 6 и предложения E).

§ 6. Числа Бетти. Формула Эйлера — Пуанкаре

Так как группа гомологии B^r комплекса K является топологическим инвариантом полиэдра $|K|$, то любой числовой инвариант B^r оказывается инвариантом полиэдра $|K|$. Особенно большой интерес представляет, конечно, нахождение полной системы числовых инвариантов групп гомологий. Задача построения полной системы числовых инвариантов будет разрешена здесь для группы гомологии B_0^r по целочисленной группе коэффициентов, а также для группы гомологии B_m^r по простому модулю m . Для группы B_0^r полная система инвариантов состоит из ее ранга — числа Бетти и ее коэффициентов кручения. Для группы B_m^r имеется лишь один инвариант — число Бетти по модулю m . Далее в этом параграфе будет установлена формула Эйлера — Пуанкаре, дающая два выражения эйлеровой характеристики комплекса: одно через числа Бетти, т. е. инвариантное, и другое через числа симплексов разных размерностей — не инвариантное.

Напомним прежде всего некоторые основные факты из теории коммутативных групп, которые мы будем брать в аддитивной записи.

А) Говорят, что коммутативная группа A допускает *конечную систему образующих* $x_1, x_2, \dots, x_s, x_i \in A$, если каждый элемент $x \in A$ может быть записан в виде

$$x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_s x_s,$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ суть целые числа. Известно, что каждая фактор-группа и подгруппа группы с конечным числом

образующих также допускает конечную систему образующих. Группа A , допускающая систему из одной образующей x_1 , называется циклической. Если из соотношения $\lambda x_1 = 0$, где λ — целое, следует $\lambda = 0$, то образующую x_1 и самую группу A называют свободными или имеющими порядок нуль. Если существует натуральное число λ такое, что $\lambda x_1 = 0$ и λ есть наименьшее удовлетворяющее этому условию число, то говорят, что образующая x_1 и сама группа A имеют конечный порядок λ .

В) Всякая коммутативная группа A с конечным числом образующих распадается в прямую сумму циклических групп:

$$A_1, \dots, A_r; B_1, \dots, B_q,$$

где A_i — свободная циклическая группа, а B_j имеет конечный порядок τ_j , причем τ_{j+1} делится на τ_j . Числа r, τ_1, \dots, τ_q составляют полную систему числовых инвариантов группы A . Число r называется *рангом группы A* , а числа τ_1, \dots, τ_q — ее *коэффициентами кручения*. Заметим, что если все элементы группы A имеют простой порядок m , то ранг ее равен нулю, а все коэффициенты кручения τ_1, \dots, τ_q равны m ; число q коэффициентов кручения в этом случае называется *рангом группы A по модулю m* и вместе с m составляет полную систему ее инвариантов.

С) Если группа коэффициентов G есть циклическая группа с образующей g , то группа L' , очевидно, допускает конечную систему образующих gA'_1, \dots, gA'_r , где A'_1, \dots, A'_r есть совокупность всех как-либо ориентированных r -мерных симплексов комплекса K . В силу A) подгруппы Z' и H' группы L' также допускают конечные системы образующих, а вместе с ними и фактор-группа $B' = Z'/H'$.

Определение 15. Пусть B'_0 есть r -мерная группа Бетти комплекса K по целочисленной группе коэффициентов. Ранг группы B'_0 называется *r -мерным числом Бетти* комплекса K и обозначается через $\rho'_0 = r'$. Коэффициенты кручения τ'_1, \dots, τ'_q группы B'_0 называются *r -мерными коэффициентами кручения* комплекса K и обозначаются через τ'_1, \dots, τ'_q .

D) Если за группу коэффициентов принять группу G_m вычетов по простому модулю m , то все элементы группы L'_m также имеют порядок m . Вместе с группой L'_m все элементы ее подгруппы Z'_m и H'_m , а также фактор-группы $B'_m = Z'_m/H'_m$ тоже имеют порядок m .

Определение 16. Пусть B'_m есть r -мерная группа Бетти комплекса K по простому модулю m . Ранг группы B'_m по модулю m называется r -мерным числом Бетти комплекса K по модулю m и обозначается через r'_m .

Теорема 8. Нульмерное число Бетти r^0_m произвольного комплекса K по модулю m , где m — нуль или простое число, равно числу r компонент комплекса K . Сверх того, нульмерная группа Бетти B^0_m комплекса K по целочисленной группе коэффициентов не имеет коэффициентов кручения.

Доказательство. В силу теоремы 7 группа B^0_m разлагается в прямую сумму групп C_1, \dots, C_p , каждая из которых изоморфна группе G_m вычетов по модулю m . Если $m=0$, то все группы C_i свободны, т. е. B^0_m не имеет коэффициентов кручения и ранг ее равен p . Если m — простое число, то все группы C_i имеют порядок m и ранг группы B^0_m по модулю m равен p .

Таким образом, теорема 8 доказана.

Эйлерова характеристика. Формула Эйлера — Пуанкаре. Теорема 9. Пусть K есть n -мерный комплекс, α^r — число r -мерных симплексов комплекса K , r^r — r -мерное число Бетти комплекса K , а r^r_m — r -мерное число Бетти комплекса K по простому модулю m . Тогда имеют место равенства

$$\chi = \chi(K) = \sum_{r=0}^n (-1)^r \alpha^r = \sum_{r=0}^n (-1)^r r^r = \sum_{r=0}^n (-1)^r r^r_m.$$

Число χ называется *эйлеровой характеристикой* комплекса K .

Для доказательства теоремы 9 введем по-новому понятие ранга группы и докажем одно его свойство.

Е) Пусть A_0 — произвольная коммутативная группа. Систему x_1, \dots, x_s ее элементов будем называть линейно

независимой, если из соотношения $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_s x_s = 0$, где λ_i — целые числа, следует $\lambda_1 = \dots = \lambda_s = 0$. Если группа A_0 допускает конечную максимальную систему линейно независимых элементов x_1, \dots, x_ρ , то скажем, что группа A_0 имеет конечный ранг ρ и обозначим его через $\rho_0(A_0)$. Если в группе A_0 существует система из произвольно большого числа линейно независимых элементов, то положим $\rho_0(A_0) = \infty$. Без труда доказывается, что ранг группы является ее инвариантом, т. е. не зависит от выбора максимальной системы.

Покажем, что для группы A_0 с конечным числом образующих определения В) и Е) дают одно и то же число.

Образующую циклической группы A_i обозначим через x_i , а образующую циклической группы B_j — через y_j (см. В)). Покажем, что x_1, \dots, x_r образуют максимальную линейно независимую систему. Допустим, что

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_r x_r = 0. \quad (1)$$

Так как $A_0 = A_1 + \dots + A_r + B_1 + \dots + B_q$, то из (1) следует $\lambda_i x_i = 0$, а ввиду того, что x_i есть свободная образующая, получаем $\lambda_i = 0$. Пусть теперь $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_r x_r + \mu_1 y_1 + \dots + \mu_q y_q$ — произвольный элемент группы A ; умножая его на $\lambda = \tau_q$, получаем $\lambda x = \lambda \lambda_1 x_1 - \dots - \lambda \lambda_r x_r = 0$, т. е. система x, x_1, \dots, x_r линейно зависима.

Г) Пусть A_m — группа, все элементы которой имеют простой порядок m , а G_m — группа вычетов по модулю m . Тогда можно определить операцию умножения произвольного элемента $\lambda \in G_m$ на произвольный элемент $x \in A_m$. Действительно, пусть β — некоторое число из класса вычетов λ , тогда произведение βx очевидно, не зависит от выбора β из λ , а зависит лишь от самого класса λ , и мы полагаем $\lambda x = \beta x$. Системе x_1, \dots, x_s элементов группы A_m будем называть линейно независимой по модулю m , если из соотношения $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_s x_s = 0$, где $\lambda_i \in G_m$, следует $\lambda_1 = \dots = \lambda_s = 0$. Если в A_m имеется максимальная линейно независимая по модулю m система элементов x_1, \dots, x_ρ , то скажем, что ранг группы A_m по модулю m равен ρ и обозначим его через $\rho_m(A_m)$. Если в A_m существуют независимые по модулю m системы из произвольно большого числа элементов, то положим $\rho_m(A_m) = \infty$. Без труда доказывается, что так определенный ранг является инвариантом группы, т. е. не зависит

от выбора максимальной системы. Покажем, что для группы A с конечной системой образующих определения B) и F) приводят к одному и тому же понятию ранга по модулю m .

Образующую циклической группы B_j обозначим через y_j (см. B). Допустим, что

$$\lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_q y_q = 0. \quad (2)$$

Так как $A = B_1 + \dots + B_q$, то из (2) следует $\lambda_j y_j = 0$. Так как порядок образующей y_j равен m , то отсюда $\lambda_j = 0$ ($\lambda_j \in G_m$). Пусть далее $y = \mu_1 y_1 + \dots + \mu_q y_q$ — произвольный элемент группы A ; тогда соотношение $y = \mu_1 y_1 + \dots + \mu_q y_q = 0$ показывает, что система y, y_1, \dots, y_q линейно зависима по модулю m .

Лемма. Пусть m — нуль или произвольное простое число, а A_m — группа, обладающая тем свойством, что для всякого $x \in A_m$ имеем $mx = 0$. Это значит, что при $m \neq 0$ все элементы группы A_m имеют порядок m , а при $m = 0$ группа A_m произвольна. Пусть далее B_m — некоторая подгруппа группы A_m и $C_m = A_m/B_m$. Оказывается, что

$$\rho_m(A_m) = \rho_m(B_m) + \rho_m(C_m). \quad (3)$$

Доказательство. Для того чтобы не рассматривать отдельно случаев $m \neq 0$ и $m = 0$, будем называть обычную линейную зависимость (см. E)) линейной зависимостью по модулю нуль.

Пусть

$$y_1, \dots, y_s \quad (4)$$

— некоторая линейно независимая по модулю m система элементов группы B_m , а

$$z_1, \dots, z_t \quad (5)$$

— некоторая линейно независимая по модулю m система элементов группы C_m . Через x_i обозначим произвольный элемент из A_m , принадлежащий классу смежности z_i , и покажем, что система

$$x_1, \dots, x_t, y_1, \dots, y_s \quad (6)$$

линейно независима в A_m по модулю m .

Допустим, что

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_t x_t + \mu_1 y_1 + \dots + \mu_s y_s = 0, \quad \lambda_j \in G_m, \quad \mu_i \in G_m. \quad (7)$$

Переходя к фактор-группе, отсюда получаем $\lambda_1 z_1 + \dots + \lambda_t z_t = 0$, а в силу независимости системы (5) из этого следует $\lambda_i = \dots = \lambda_t = 0$. Таким образом, соотношение (7) превращается в $\mu_1 y_1 + \dots + \mu_s y_s = 0$, а отсюда в силу независимости системы (4) вытекает $\mu_1 = \dots = \mu_s = 0$. Итак, система (6) независима.

Из доказанного уже вытекает, что если $\rho_m(B_m) = \infty$, или $\rho_m(C_m) = \infty$, то $\rho_m(A_m) = \infty$. Таким образом, в этом случае утверждение леммы уже доказано. Допустим теперь, что $\rho_m(B_m)$ и $\rho_m(C_m)$ конечны и будем считать, что системы (4) и (5) максимальны. Докажем в этом предположении, что система (6) также максимальна.

Пусть x — произвольный элемент из A_m , и z — соответствующий элемент из C_m ($x \in z$). В силу максимальной системы (5) имеем

$$vz + v_1 z_1 + \dots + v_t z_t = 0, \quad (8)$$

причем $v \neq 0$, $v \in G$, $v_i \in G$. Из (8) следует

$$vx + v_1 x_1 + \dots + v_t x_t = y \in B_m. \quad (9)$$

В силу максимальной системы (4) отсюда следует

$$\mu y + \mu_1 y_1 + \dots + \mu_s y_s = 0, \quad (10)$$

причем $\mu \neq 0$, $\mu \in G_m$, $\mu_i \in G_m$. Из (9) и (10) получаем

$$\mu vx + \mu v_1 x_1 + \dots + \mu v_t x_t + \mu_1 y_1 + \dots + \mu_s y_s = 0. \quad (11)$$

Здесь $\mu v \neq 0$, так как в случае $m = 0$ μ и v суть целые числа, отличные от нуля, а в случае $m \neq 0$ μ и v суть вычеты по простому модулю m , отличные от нуля, — их произведение также отлично от нуля по модулю m . Таким образом, (11) дает линейную зависимость системы $x, x_1, \dots, x_t, y_1, \dots, y_s$ и максимальность системы (6) доказана.

Мы имеем $\rho_m(A_m) = t + s$, $\rho_m(B_m) = s$, $\rho_m(C_m) = t$. Таким образом, лемма доказана.

Доказательство теоремы 9. Пусть m — нуль или простое число, G_m — группа вычетов по модулю m , и g — образующая группа G_m (G_0 — группа целых чисел).

Пусть далее $A'_1, \dots, A'_{\alpha'_r}$ — совокупность всех как-либо ориентированных r -мерных симплексов комплекса K . За образующие группы L'_m можно принять $gA'_1, \dots, gA'_{\alpha'_r}$. Легко устанавливается, что система эта линейно независима по модулю m . Максимальность ее следует из того, что она составляет систему образующих. Таким образом,

$$\rho_m(L'_m) = \alpha'_r. \quad (12)$$

В силу леммы имеем

$$\rho_m(L'_m) = \rho_m(Z'_m) + \rho_m(L'_m/Z'_m), \quad r = 0, 1, \dots, n. \quad (13)$$

При $r > 0$ группы L'_m/Z'_m и H_m^{r-1} изоморфны (см. § 4, D)). Таким образом, соотношение (13) в этом случае получает вид

$$\rho_m(L'_m) = \rho_m(Z'_m) + \rho_m(H_m^{r-1}), \quad r = 1, \dots, n. \quad (14)$$

Для $r = 0$ имеем $Z'_m = L'_m$, и потому

$$\rho_m(L'_m) = \rho_m(Z'_m). \quad (15)$$

Введя условно $\rho_m(H_m^{-1}) = 0$, соотношения (14) и (15) можно вместе записать так:

$$\alpha'_r = \rho_m(Z'_m) + \rho_m(H_m^{r-1}), \quad \rho_m(H_m^{-1}) = 0, \quad (16)$$

где $r = 0, 1, \dots, n$. В силу леммы и определений 15, 16 имеем

$$\begin{aligned} \rho_m(Z'_m) &= \rho_m(H'_m) + \rho_m(Z'_m/H'_m) = \rho_m(H'_m) + \rho_m(B'_m) = \\ &= \rho_m(H'_m) + \rho'_m, \quad r = 0, 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (17)$$

Так как по самому определению $H_m^n = \{0\}$, то соотношения (16) и (17) вместе дают

$$\alpha'_r = \rho'_m + \rho_m(H_m^{r-1}) + \rho_m(H'_m), \quad \rho_m(H_m^{-1}) = \rho_m(H_m^n) = 0, \\ r = 0, 1, \dots, n.$$

Умножая полученное соотношение на $(-1)^r$ и суммируя по r , получаем

$$\sum_{r=0}^n (-1)^r \alpha'_r = \sum_{r=0}^n (-1)^r \rho'_m.$$

Таким образом, теорема 9 доказана.

ИНВАРИАНТНОСТЬ ГРУПП ГОМОЛОГИЙ

Настоящая глава посвящается доказательству того факта, что если полиэдры $|K|$ и $|L|$ гомеоморфны, то порождающие их комплексы K и L имеют изоморфные группы гомологий любой размерности, так что создается возможность говорить о группах гомологий самих полиэдров. Доказательство этого факта не просто и требует создания сложного аппарата, который сам по себе представляет большой интерес и применяется не только для доказательства инвариантности, но также для изучения непрерывных отображений одного полиэдра в другой.

Наиболее интересная часть развиваемого здесь аппарата заключается в построении так называемых симплициальных аппроксимаций. Если φ есть непрерывное отображение полиэдра $|K|$ в полиэдр $|L|$, то отображение φ заменяется так называемым симплициальным, которое уже вполне обозримо с комбинаторной точки зрения и порождает алгебраические связи между комплексами K и L . Оказывается, однако, что для возможности симплициальной аппроксимации необходимо, чтобы симплексы комплекса K были достаточно мелкими, и поэтому приходится подвергать комплекс K подразделению. Комплекс K^* называется подразделением комплекса K , если $|K^*| = |K|$ и если каждый симплекс комплекса K^* содержится в некотором симплексе комплекса K . Такого общего понятия подразделения, по имени ввиду его общности им неудобно пользоваться. Здесь будут использоваться специальные так называемые барицентрические подразделения. Связь между комплексом K и его барицентрическим подразделением K' все же остается довольно громоздкой, так что доказательство изоморфности

групп гомологий комплексов и K' сложно и составляет наиболее неприятную часть доказательства инвариантности групп гомологий. Взаимодействие метода симплициальных аппроксимаций и операции барцентрического подразделения приводит нас к доказательству инвариантности групп гомологий.

§ 7. Симплициальные отображения и аппроксимации

В настоящем параграфе определяется понятие симплициального отображения комплекса K в комплекс L ; выясняется поведение цепей, циклов и гомологий при переходе от K к L при симплициальном отображении и доказывается, что непрерывное отображение φ полиэдра $|K|$ в полиэдр $|L|$ может быть аппроксимировано симплициальным отображением, если только выполнены некоторые ограничения в отношении исходного непрерывного отображения φ .

Симплициальное отображение. А) Пусть $A^r = (a_0, a_1, \dots, a_r)$ — симплекс из R^m , а $B^s = (b_0, b_1, \dots, b_s)$ — симплекс из R^n . Допустим, что задано отображение f , ставящее в соответствие каждой вершине a_i некоторую вершину b_j (отображение f не обязано быть взаимно однозначным). Поставим теперь в соответствие каждой точке

$$x = \lambda^0 a_0 + \lambda^1 a_1 + \dots + \lambda^r a_r \in A^r \quad (1)$$

точку $f(x) \in R^n$, положив

$$f(x) = \lambda^0 f(a_0) + \lambda^1 f(a_1) + \dots + \lambda^r f(a_r). \quad (2)$$

Полученное так отображение, очевидно, совпадает с исходным на вершинах a_i ; оно является непрерывным отображением симплекса A^r в симплекс B^s и называется *симплициальным отображением* A^r в B^s . Оказывается, что множество $f(A^r)$ составляет некоторую грань D^k симплекса B^s , причем симплекс D^k натянут на те вершины b_j , которые могут быть представлены в форме $f(a_i)$. Далее, если g есть симплициальное отображение B^s в симплекс $C^t = (c_0, c_1, \dots, c_t)$, то gf есть симплициальное отображение A^r в C^t . Ввиду того, что при отображении f некоторые различные вершины симплекса A^r могут переходить в одну и ту же вершину симплекса B^s , в правой

части равенства (2) возможно приведение подобных членов относительно вершин b_j , и равенство (2) может быть переписано в виде

$$f(x) = \mu^0 b_0 + \mu^1 b_1 + \dots + \mu^s b_s. \quad (3)$$

Здесь каждое μ^j представляет собой сумму тех λ^i , для которых $f(a_i) = b_j$. Так как для λ^i выполнены условия (2) и (3) определения 4, то они выполнены и для μ^j ; таким образом, $f(x) \in B^s$. Из (3) также следует, что $f(A^r)$ равно D^s . Непрерывность отображения f на A^r следует из B) § 2. Симплициальность отображения gf следует из того, что в силу формул (2) и (3) отображение gf задается формулой

$$g(f(x)) = \lambda^0 g(f(a_0)) + \dots + \lambda^r g(f(a_r)).$$

Поясним изложенное простым примером.

Пусть $r=3$, $s=2$; положим

$$f(a_0) = f(a_2) = b_0, \quad f(a_1) = f(a_3) = b_1.$$

Тогда мы имеем $f(x) = (\lambda^0 + \lambda^2) b_0 + (\lambda^1 + \lambda^3) b_1$, $\mu^0 = \lambda^0 + \lambda^2$, $\mu^1 = \lambda^1 + \lambda^3$. Здесь $k=1$ и $D^1 = (b_0, b_1)$.

О п р е д е л е н и е 17. Пусть K и L — два комплекса, а f — непрерывное отображение полиэдра $|K|$ в полиэдр $|L|$. Если для каждого симплекса A из K отображение f является симплициальным отображением симплекса A в некоторый симплекс B из L (см. A)), то f будем называть *симплициальным отображением комплекса K в комплекс L* .

Очевидно, что последовательное проведение двух симплициальных отображений вновь дает симплициальное отображение (см. A)).

Из определения 17 следует:

1. Если a_0, a_1, \dots, a_r суть вершины некоторого симплекса комплекса K , то $f(a_0), f(a_1), \dots, f(a_r)$ являются вершинами некоторого симплекса комплекса L .

Ниже будет показано (см. B)), что если отображение f , заданное лишь на вершинах комплекса K , удовлетворяет условию 1, то его можно распространить, и притом только одним способом, в симплициальное отображение всего комплекса K в комплекс L . Это приводит нас к следующему определению.

О п р е д е л е н и е 18. Отображение f , ставящее в соответствие каждой вершине комплекса K некоторую вершину комплекса L так, что при этом выполнено условие 1, называется *симплициальным отображением вершин* комплекса K в вершины комплекса L или же *симплициальным отображением абстрактного комплекса \mathfrak{K} в абстрактный комплекс \mathfrak{L}* (здесь \mathfrak{K} и \mathfrak{L} суть абстрактные комплексы, соответствующие геометрическим комплексам K и L).

Если при отображении f хотя бы две различные вершины симплекса A сливаются, то мы будем говорить, что симплекс A *вырождается* при отображении f .

В) Пусть K и L — два геометрических комплекса, а f — отображение, ставящее в соответствие каждой вершине комплекса K некоторую вершину комплекса L так, что выполнено условие 1; тогда отображение f может быть одним и только одним способом распространено на весь полиэдр $|K|$ так, что полученное отображение g является симплициальным отображением комплекса K в комплекс L (см. определение 17).

Пусть a_0, a_1, \dots, a_k — вершины комплекса K , \mathfrak{K} — абстрактный комплекс, соответствующий K , и N — естественная реализация комплекса \mathfrak{K} в симплексе $E^k \equiv \equiv (e_0, e_1, \dots, e_k)$ (см. § 2, F)). Будем считать, что a_i и e_i соответствуют одной и той же вершине комплекса \mathfrak{K} . Положим

$$x = \lambda^0 a_0 + \lambda^1 a_1 + \dots + \lambda^k a_k. \quad (4)$$

Соотношение это ставит в соответствие каждой точке $\lambda \in |N|$ точку $x \in |K|$, причем получаемое так отображение $\lambda \rightarrow x$ полиэдра $|N|$ на полиэдр $|K|$ взаимно однозначно и взаимно непрерывно (см. § 2, F)). Положим

$$g(x) = \lambda^0 f(a_0) + \lambda^1 f(a_1) + \dots + \lambda^k f(a_k). \quad (5)$$

Соотношение это дает непрерывное отображение $\lambda \rightarrow g(x)$ полиэдра $|N|$ в полиэдр $|L|$. Таким образом, соотношения (4) и (5), вместе взятые, дают непрерывное отображение g полиэдра $|K|$ в полиэдр $|L|$. Очевидно, что $g(a_i) = f(a_i)$. Далее, если $A' = (a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_r})$ есть произвольный симплекс из K , то g дает симплициальное отображение A' в некоторый симплекс $B' \in L$. Таким образом, найдено симплициальное отображение g комплекса K

в комплекс L , совпадающее с f на вершинах. Единственность g очевидна, так как, совпадая с f на всех вершинах некоторого симплекса A' , отображение g по самому своему определению (см. A) может быть распространено на весь симплекс A' лишь одним вполне определенным способом (см. (2)).

Итак, утверждение В) доказано.

Теорема аппроксимации. Перейдем теперь к доказательству возможности симплициальной аппроксимации непрерывных отображений. Для этого введем вспомогательное понятие — звезду комплекса.

С) Совокупность всех внутренних точек произвольного симплекса (см. § 2, A) комплекса K будем называть открытым симплексом комплекса K . Нетрудно видеть, что каждая точка полиэдра $|K|$ принадлежит одному и только одному открытому симплексу комплекса K . Топологическую сумму всех открытых симплексов комплекса K , имеющих среди своих вершин вершину a комплекса K , будем называть *звездой* вершины a в комплексе K и обозначать через $S(a)$, $S(a) \subset |K|$. Оказывается, что каждая звезда $S(a)$ комплекса K является областью в полиэдре $|K|$. Докажем это.

Положим $F = |K| \setminus S(a)$ и покажем, что $F = |K^*|$, где K^* — некоторый подкомплекс комплекса K . Этим самым утверждение наше будет доказано, так как каждый полиэдр компактен, а потому и замкнут. В K^* зачислим все симплексы из K , не имеющие среди своих вершин вершины a , и покажем, что $|K^*| = F$. F по построению есть топологическая сумма всех открытых симплексов комплекса K , не имеющих среди своих вершин вершины a ; но если A есть открытый симплекс, не имеющий среди своих вершин вершины a , то и все его грани также не имеют вершины a , т. е. $\bar{A} \subset F$. Таким образом, F есть топологическая сумма всех замкнутых симплексов из K , не имеющих a среди своих вершин, и мы видим, что $F = |K^*|$.

Теорема 10. Пусть φ — непрерывное отображение комплекса K в комплекс L , обладающее тем свойством, что для всякой звезды $S(a)$ комплекса K найдется хотя бы одна звезда $S(b)$ комплекса L , удовлетворяющая условию $\varphi(S(a)) \subset S(b)$. Поставим теперь в соответствие каждой вершине a комплекса K такую вершину $f(a)$ ком-

плекса L , что $\varphi(S(a)) \subset S(f(a))$. Оказывается, что отображение f является симплициальным отображением вершин комплекса K в вершины комплекса L , и потому его можно распространить в симплициальное отображение f всего комплекса K в комплекс L . Мы будем говорить, что f является симплициальной аппроксимацией отображения φ , или что φ допускает симплициальную аппроксимацию f . Оказывается далее, что если $x \in |K|$, $D \in L$, $\varphi(x) \in D$, то $f(x) \in D$.

Докажем это. Пусть x — произвольная точка из $|K|$ и A — тот открытый симплекс комплекса K , который содержит x ; через B обозначим тот открытый симплекс комплекса L , который содержит точку $\varphi(x)$. Вершины симплекса A обозначим через a_0, a_1, \dots, a_r и покажем, что $f(a_i)$ есть вершина симплекса B .

Мы имеем $x \in A \subset S(a_i)$, и, следовательно,

$$\varphi(x) \in \varphi(S(a_i)) \subset S(f(a_i));$$

так как, сверх того, $\varphi(x) \in B$, то открытый симплекс B принадлежит звезде $S(f(a_i))$, а это значит, что $f(a_i)$ есть одна из вершин симплекса B .

Так как x — произвольная точка из $|K|$, то A — произвольный открытый симплекс комплекса K , и нами доказано, таким образом, что вершины одного симплекса из K при отображении f переходят в вершины одного симплекса из L , т. е. отображение f симплициально.

Так как f есть симплициальное отображение, то $f(\bar{A}) = C \subset \bar{B}$, причем C есть грань симплекса \bar{B} . Пусть теперь D — произвольный симплекс из L , содержащий точку $\varphi(x)$, а T — комплекс, составленный из всех граней симплекса D , включая и D . Так как $\varphi(x)$ может входить лишь в один открытый симплекс комплекса L и этот симплекс есть B , то $\bar{B} \in T$, и, следовательно, \bar{B} есть грань симплекса D , а потому и C есть грань симплекса D ; таким образом,

$$f(x) \in f(\bar{A}) = C \subset D.$$

Итак, теорема 10 полностью доказана.

Отметим, что симплициальная аппроксимация f непрерывного отображения φ определена в теореме 10 не однозначно, ибо для звезды $S(a)$ может найтись несколько звезд $S(b)$, удовлетворяющих условию $\varphi(S(a)) \subset$

$\subset S(b)$. Всюду в дальнейших построениях мы будем выбирать одну из возможных аппроксимаций.

D) Пусть K , L и M — комплексы, φ — непрерывное отображение комплекса K в комплекс L , а ψ — непрерывное отображение комплекса L в комплекс M . Если f есть симплициальная аппроксимация отображения φ , а g — симплициальная аппроксимация отображения ψ , то оканчивается, что gf есть симплициальная аппроксимация отображения $\psi\varphi$.

Пусть a — произвольная вершина комплекса K ; тогда мы имеем $\varphi(S(a)) \subset S(f(a))$ и, следовательно,

$$\psi(\varphi(S(a))) \subset \psi(S(f(a))) \subset S(g(f(a))),$$

а это и значит, что gf есть симплициальная аппроксимация отображения $\psi\varphi$.

Алгебра симплициального отображения. Нижеследующее одинаково применимо как к абстрактным, так и к геометрическим комплексам, и мы не будем делать между ними различия.

E) Пусть f — симплициальное отображение комплекса K в комплекс L , и $A^r = \varepsilon(a_0, a_1, \dots, a_r)$ — некоторый ориентированный симплекс из K . Если симплекс A^r не вырождается при отображении f , т. е. все его вершины переходят в различные вершины комплекса L , $f(a_i) = b_i$, то положим

$$\hat{f}(A^r) = \varepsilon(b_0, b_1, \dots, b_r) = B^r. \quad (6)$$

Если симплекс A^r вырождается при отображении f , то положим

$$\hat{f}(A^r) = 0. \quad (7)$$

Пусть далее $x = g_1 A_1^r + \dots + g_{\alpha^r} A_{\alpha^r}^r$ — произвольная r -мерная цепь комплекса K по группе коэффициентов G ; тогда положим

$$\hat{f}(x) = g_1 \hat{f}(A_1^r) + \dots + g_{\alpha^r} \hat{f}(A_{\alpha^r}^r). \quad (8)$$

Этим самым каждой цепи x из K по группе G поставлена в соответствие цепь $\hat{f}(x)$ той же размерности из L по той же группе G . Таким образом, симплициальному отображению f поставлено в соответствие отображение \hat{f} цепей.

Очевидно, что

$$\hat{f}(x + y) = \hat{f}(x) + \hat{f}(y). \quad (9)$$

Далее, оказывается, что выполнено следующее важное соотношение:

$$\Delta \hat{f}(x) = \hat{f}(\Delta x). \quad (10)$$

Соотношение (10) достаточно доказать лишь для случая, когда $x = A^r$, т. е. для случая простейшей целочисленной цепи.

Допустим, что симплекс A^r не вырождается; тогда из

$$(6) \text{ следует } \Delta \hat{f}(A^r) = \sum_{i=0}^r \varepsilon(-1)^i (b_0, \dots, b_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_r).$$

Далее, $\Delta A^r = \sum_{i=0}^r \varepsilon(-1)^i (a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_r)$. Так

как A^r не вырождается, то и все его грани не вырождаются. Из последнего соотношения получаем

$$\hat{f}(\Delta A^r) = \sum_{i=0}^r \varepsilon(-1)^i (b_0, \dots, b_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_r).$$

Пусть теперь A^r вырождается при отображении f , но так, что размерность его снижается лишь на единицу, т. е. сливаются лишь две различные его вершины. Так как порядок вершин симплекса несуществен, то мы можем считать, что сливаются a_0 и a_1 , т. е. $\hat{f}(a_0) = \hat{f}(a_1) = b$, в то время как все вершины $\hat{f}(a_i) = b_i$, $i = 2, \dots, r$, различны и не совпадают с b . По самому определению (см. (7)) $\hat{f}(A^r) = 0$ и, следовательно, $\Delta \hat{f}(A^r) = 0$. Таким образом, достаточно доказать, что $\hat{f}(\Delta A^r) = 0$. Мы имеем $\Delta A^r =$

$$= \sum_{i=0}^r \varepsilon(-1)^i (a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_r).$$

Из стоящих в правой части последнего равенства только два симплекса (a_1, a_2, \dots, a_r) и (a_0, a_2, \dots, a_r) не вырождаются при отображении f , все же остальные вырождаются, так как одновременно содержат вершины a_0 и a_1 . Таким образом,

$$\hat{f}(\Delta A^r) = \varepsilon(b, b_2, \dots, b_r) - \varepsilon(b, b_2, \dots, b_r) = 0.$$

Если теперь симплекс A^r вырождается и притом так, что размерность его падает больше чем на одну единицу, то все его $(r-1)$ -мерные грани при отображении \hat{f} также вырождаются. В силу (7) мы имеем

$$\hat{f}(\Delta A^r) = 0 \text{ и } \Delta \hat{f}(A^r) = 0.$$

Итак, соотношение 10 полностью доказано.

F) Пусть \hat{f} — симплициальное отображение комплекса K в комплекс L . Если z — цикл из K , то $\hat{f}(z)$ — цикл из L . Если $z_1 \sim z_2$, то $\hat{f}(z_1) \sim \hat{f}(z_2)$. Иначе: $\hat{f}(Z^r(K)) \subset Z^r(L)$, $\hat{f}(H^r(K)) \subset H^r(L)$. Действительно, из $\Delta z = 0$ в силу (10) следует $\Delta \hat{f}(z) = \hat{f}(\Delta z) = 0$. Если $z_1 - z_2 = \Delta x$, то из (9) и (10) следует

$$\hat{f}(z_1) - \hat{f}(z_2) = \hat{f}(\Delta x) = \Delta \hat{f}(x).$$

Таким образом, предложение F) доказано.

Изложенное приводит нас к следующему основному определению.

О п р е д е л е н и е 19. Пусть f — симплициальное отображение комплекса K в комплекс L , а $B^r(K)$ и $B^r(L)$ суть r -мерные группы Бетти комплексов K и L по некоторой группе коэффициентов. Если z^* — некоторый элемент группы $B^r(K)$, а z — произвольный цикл из класса гомологий z^* , то положим

$$\check{f}(z^*) = \hat{f}(z), \quad (11)$$

где $\hat{f}(z)^*$ означает тот класс гомологий из $B^r(L)$, к которому принадлежит цикл $\hat{f}(z)$. Ниже будет показано, что соотношение (11) однозначно определяет операцию \check{f} применительно к элементам z^* группы $B^r(K)$. Оказывается далее, что определенное так отображение \check{f} группы $B^r(K)$ в группу $B^r(L)$ есть гомоморфизм. О нем мы будем говорить, что он соответствует исходному симплициальному отображению \hat{f} . Для доказательства однозначности операции \check{f} выберем из класса гомологий z^* два цикла z_1 и z_2 . Мы имеем $z_1 \sim z_2$, и, следовательно, $\hat{f}(z_1) \sim \hat{f}(z_2)$ (см. F)). Таким образом, $\hat{f}(z_1)^* = \hat{f}(z_2)^*$, и однозначность \check{f} доказана.

Для доказательства того, что \check{f} есть гомоморфизм, возьмем два произвольных класса гомологий u^* и v^* из

$B'(K)$ и положим $u^* + v^* = \omega^*$. Если теперь u и v — циклы соответственно из u^* и v^* , то $\omega = u + v \in \omega^*$. Мы имеем

$$\check{f}(\omega^*) = \hat{f}(\omega)^* = \check{f}(u + v)^* = \check{f}(u)^* + \check{f}(v)^*.$$

Последний член этого равенства представляет собой класс гомологий, содержащий сумму $\hat{f}(u) + \hat{f}(v)$; но, по определению сложения в фактор-группе, класс, содержащий сумму, равен сумме соответствующих классов, т. е.

$$(\hat{f}(u) + \hat{f}(v))^* = \hat{f}(u)^* + \hat{f}(v)^* = \check{f}(u^*) + \check{f}(v^*).$$

Таким образом, $\check{f}(\omega^*) = \check{f}(u^*) + \check{f}(v^*)$.

Итак, \check{f} есть гомоморфизм.

Г) Пусть K, L, M — три комплекса, f — симплициальное отображение комплекса K в комплекс L , а g — симплициальное отображение комплекса L в комплекс M . Отображение $h = gf$ является симплициальным отображением комплекса K в комплекс M . Оказывается, что

$$\hat{h} = \hat{g}\hat{f} \quad (12)$$

и

$$\check{h} = \check{g}\check{f}. \quad (13)$$

Соотношение (12) достаточно доказать лишь для ориентированного симплекса A' комплекса K . Если отображение h не вырождается на A' , то отображение f не вырождается на A' и одновременно g не вырождается на $f(A')$; тогда ясно, что $\hat{h}(A') = \hat{g}(\hat{f}(A'))$, и соотношение (12) в этом случае выполнено. Если отображение h вырождается на A' , то должно быть выполнено по меньшей мере одно из условий: а) отображение f вырождается на A' , б) отображение g вырождается на $f(A')$. В этом случае $\hat{h}(A') = 0$, но если выполнено условие а), то $\hat{f}(A') = 0$, и поэтому $\hat{g}(\hat{f}(A')) = 0$, если же выполнено условие б), то $\hat{g}(\hat{f}(A')) = 0$. Итак, соотношение (12) справедливо.

Докажем теперь соотношение (13) на основании соотношения (12). Пусть $z^* \in B'(K)$ и z — произвольный цикл из z^* . Мы имеем

$$\check{h}(z^*) = \hat{h}(z)^* = \hat{g}(\hat{f}(z))^* = \check{g}(\hat{f}(z)^*) = \check{g}(\check{f}(z^*)).$$

§ 8. Коническая конструкция

Для построения барицентрического подразделения симплекса я воспользуюсь конической конструкцией, которая нередко употребляется в комбинаторной топологии. Она найдет себе применение также в главе III.

Конус. А) Пусть R^n — евклидово пространство, F — некоторое множество его точек, и x — точка из R^n . Будем говорить, что x находится в общем положении к F , если x не принадлежит F и если при любых двух различных точках x и y из F отрезки (x, x) и (x, y) имеют лишь одну общую точку x (см. § 1, F).

Если x находится в общем положении к F , то множество всех точек, принадлежащих отрезкам вида (x, x) , где $x \in F$, называется *конусом* с вершиной x и основанием F ; оно обозначается через $\kappa(F)$. Очевидно, что если x находится в общем положении к F и $G \subset F$, то $\kappa(G) \cap F = G$.

Легко проверяется, что если множество F' гомеоморфно F и x' находится в общем положении к F' , то конусы $\kappa(F)$ и $\kappa(F')$ гомеоморфны. Этим мы, впрочем, пользоваться не будем.

Простой пример возможности построения конуса дает выпуклое тело (см. § 1, G). Пусть W — выпуклое тело, U — множество его внутренних точек, V — его граница, а x — произвольная точка из U . Из предложения § 1 непосредственно следует, что точка x находится в общем положении к V и что

$$W = \kappa(V). \quad (1)$$

Нужный для дальнейшего пример возможности построения конуса дает симплекс

В) Пусть $A^r = (a_0, a_1, \dots, a_r)$ есть r -мерный симплекс n -мерного евклидова пространства R^n (см. определение 4). Множество всех внутренних точек симплекса A^r обозначим через G^r , а границу симплекса A^r — через F^{r-1} (см. § 1, A). Оказывается, что A^r является выпуклым множеством; далее, если $x \in G^r$, то x находится в общем положении к F^{r-1} и $A^r = \kappa(F^{r-1})$.

Пусть $a = \lambda^0 a_0 + \lambda^1 a_1 + \dots + \lambda^r a_r$, $b = \mu^0 a_0 + \mu^1 a_1 + \dots + \mu^r a_r$ — две различные точки из A^r . Пусть далее x — произвольная точка отрезка (a, b) , $x = \alpha a + \beta b$, $\alpha + \beta = 1$,

$\alpha \geq 0, \beta \geq 0$; тогда

$$x = \nu^0 a_0 + \nu^1 a_1 + \dots + \nu^r a_r,$$

где

$$\nu^i = \alpha \lambda^i + \beta \mu^i, \quad i = 0, 1, \dots, r. \quad (2)$$

Непосредственно проверяется, что $\nu^0 + \nu^1 + \dots + \nu^r = 1$, $\nu^i \geq 0, i = 0, 1, \dots, r$. Таким образом, $x \in A^r$, и барицентрические координаты точки $x \in (a, b)$ выражаются через барицентрические координаты точек a и b по формуле (2), а это значит, что свойство точки x принадлежать отрезку (a, b) формулируется в терминах барицентрической системы координат и потому является внутренним свойством симплекса. Таким образом, соотношение $x(F^{r-1}) = A^r$ достаточно доказать для одного какого-либо r -мерного симплекса. Так как в r -мерном евклидовом пространстве существует r -мерный симплекс, то нам достаточно рассмотреть случай $n = r$.

Покажем, что если $A^r \subset R^r$, то $A^r = W$ является выпуклым телом, причем F^{r-1} составляет границу V тела W , а G^r — множество U его внутренних точек. В силу сделанного выше замечания (см. (1)), утверждение В) этим самым будет полностью доказано.

Пусть e_1, \dots, e_r — некоторый базис пространства R^r . Положим $a_i = a_i^1 e_1 + \dots + a_i^r e_r, i = 0, 1, \dots, r; x = x^1 e_1 + \dots + x^r e_r$. Если $x \in A^r$ и $\lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^r$ — барицентрические координаты точки x , то мы имеем

$$\lambda^0 + \lambda^1 + \dots + \lambda^r = 1, \quad (3)$$

$$\lambda^0 a_0^j + \lambda^1 a_1^j + \dots + \lambda^r a_r^j = x^j, \quad j = 1, \dots, r. \quad (4)$$

Совокупная система соотношений (3) и (4) ставит в соответствие каждой системе чисел $(\lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^r) = \lambda$, удовлетворяющих соотношению (3), систему чисел $(x^1, \dots, x^r) = x = \varphi(\lambda)$. Наоборот, если в соотношениях (3), (4) систему чисел λ рассматривать как неизвестную, а систему x — как произвольно заданную, то мы имеем крамеровскую систему уравнений с матрицей, равной транспонированной матрице $N(a_0, a_1, \dots, a_r)$ (см. § 1, В)). Так как точки a_0, a_1, \dots, a_r независимы, то последняя матрица имеет не обращающийся в нуль детерминант (см. § 1, В)). Поэтому система (3), (4) разрешима

относительно x , и мы можем положить $\lambda = \varphi^{-1}(x)$. Если $x \in G^r$, то в силу самого определения (см. § 2, A)) все числа системы $\varphi^{-1}(x)$ положительны. Так как соответствие φ^{-1} непрерывно, то существует настолько малое положительное ε , что при $\rho(x, y) < \varepsilon$ все числа системы $\varphi^{-1}(y)$ положительны, и потому $y \in G^r \subset W$. Отсюда следует, что $G^r \subset U$. Пусть теперь $x \in F^{r-1}$; тогда одно из чисел системы $\varphi^{-1}(x) = \lambda$ равно нулю. Для определенности предположим, что $\lambda^0 = 0$. Если теперь δ — произвольное малое положительное число, то положим $\mu^0 = -\delta$, $\mu^1 = \lambda^1 + \delta$, $\mu^2 = \lambda^2, \dots, \mu^r = \lambda^r$. Полученная так система чисел μ удовлетворяет условию (3), но точка $y = \varphi(\mu)$ уже не принадлежит $A^r = W$. Ввиду произвольной малости δ , $\rho(x, y)$ произвольно мало, и потому $x \in V$, т. е. $F^{r-1} \subset V$. Из этого и из $G^r \subset U$ следует $F^{r-1} = V$ и $G^r = U$.

Таким образом, предложение B) доказано.

Следующий нужный для дальнейшего пример построения конуса дает предложение:

C) Пусть $A^r = (a_0, a_1, \dots, a_r)$ — симплекс евклидова пространства R^n . Оказывается, что точка $x \in R^n$ тогда и только тогда находится в общем положении к множеству A^r , когда система x, a_0, a_1, \dots, a_r независима (см. § 1, A)) и, следовательно, существует симплекс $B^{r+1} = (x, a_0, a_1, \dots, a_r)$. В случае независимости точек x, a_0, a_1, \dots, a_r мы имеем $\kappa(A^r) = B^{r+1}$.

Докажем предложение C).

Допустим, что в A^r имеются две различные точки x_1 и x_2 такие, что отрезки xx_1 и xx_2 пересекаются в точке y , отличной от x . Бариеметрические координаты точки x_j , $j = 1, 2$, обозначим через $\lambda_j^0, \dots, \lambda_j^r$; мы имеем

$$y = \alpha_j x + \beta_j \lambda_j^0 a_0 + \dots + \beta_j \lambda_j^r a_r, \quad \alpha_j \neq 1. \quad (5)$$

Вычитая соотношение (5) при $j=1$ из того же соотношения при $j=2$, получаем

$$(\alpha_2 - \alpha_1)x + (\beta_2 \lambda_2^0 - \beta_1 \lambda_1^0)a_0 + \dots + (\beta_2 \lambda_2^r - \beta_1 \lambda_1^r)a_r = 0. \quad (6)$$

Мы имеем $\alpha_2 - \alpha_1 + \sum_{i=0}^r (\beta_2 \lambda_2^i - \beta_1 \lambda_1^i) = 0$, причем не все коэффициенты соотношения (6) равны нулю. Действительно, если допустить, что $\alpha_2 - \alpha_1 = 0$, то обращение в нуль ос-

тальных коэффициентов означало бы совпадение точек x и x_2 . Таким образом, точки x, a_0, \dots, a_r линейно зависимы

Допустим теперь, что x находится в общем положении к A^r ; тогда по доказанному точки x, a_0, \dots, a_r независимы. Покажем, что множества $\kappa(A^r)$ и B^{r+1} совпадают. Пусть x — произвольная точка из A^r с барицентрическими координатами $\lambda^0, \dots, \lambda^r$. Тогда точка $y \in \kappa x$ записывается в форме

$$y = \alpha x + \beta \lambda^0 a_0 + \dots + \beta \lambda^r a_r;$$

таким образом, $y \in B^{r+1}$. Пусть теперь

$$z = \mu x + \mu^0 a_0 + \dots + \mu^r a_r$$

— произвольная точка из B^{r+1} . Исключая очевидный случай $z = x$, мы можем считать, что $\mu \neq 1$. Положим

$$\alpha = \mu, \quad \beta = 1 - \mu, \quad \lambda^i = \frac{\mu^i}{\beta}; \quad (7)$$

тогда z записывается в форме

$$z = \alpha x + \beta \lambda^0 a_0 + \dots + \beta \lambda^r a_r.$$

Таким образом, $z \in \kappa(A^r)$. Итак, $\kappa(A^r) = B^{r+1}$.

Допустим теперь, что точки x, a_0, \dots, a_r зависимы:

$$v x + v^0 a_0 + \dots + v^r a_r = 0, \quad v + v^0 + \dots + v^r = 0, \quad v \neq 0. \quad (8)$$

Так как соотношение это не нарушается от умножения на произвольное число, то можно считать его коэффициенты произвольно малыми. Пусть далее x_1 — произвольная внутренняя точка из A^r с барицентрическими координатами $\lambda_1^0, \dots, \lambda_1^r$. Положим

$$y_i = \alpha_1 x + \beta_1 \lambda_1^0 a_0 + \dots + \beta_1 \lambda_1^r a_r, \quad \alpha_1 \neq 1. \quad (9)$$

Здесь все коэффициенты положительны, поэтому, прибавляя к соотношению (9) соотношение (8), взятое с достаточно малыми коэффициентами, получаем

$$y = (\alpha_1 + v) x + (\beta_1 \lambda_1^0 + v^0 a_0 + \dots + (\beta_1 \lambda_1^r + v^r) a_r,$$

где все коэффициенты также положительны. Положим,

как в (7),

$$\alpha_2 = \alpha_1 + v, \quad \beta_2 = 1 - \alpha_2, \quad \lambda_2^i = \frac{\beta_1 \lambda_1^i + v^i}{\beta_2}.$$

Мы имеем тогда

$$y = \alpha_2 x + \beta_2 \lambda_2^0 \alpha_0 + \dots + \beta_2 \lambda_2^r \alpha_r.$$

Точку с барицентрическими координатами $\lambda_2^0, \dots, \lambda_2^r$ обозначим через x_2 и покажем, что $x_1 \neq x_2$. Допустим, что $x_1 = x_2 = x$; тогда $y = \alpha_1 x + \beta_1 x = \alpha_2 x + \beta_2 x$, а так как $\alpha_1 \neq \alpha_2 = \alpha_1 + v$, то мы получаем два различных представления точки y отрезка (x, x) , что невозможно, так как (x, x) есть одномерный симплекс, а α и β — барицентрические координаты в нем.

Таким образом, предположение С) доказано.

Д) Пусть K — комплекс, расположенный в евклидовом пространстве R^n , а x — точка из R^n , находящаяся в общем положении к полиэдру $|K|$. Поскольку x находится в общем положении к $|K|$, она находится в общем положении и к любому симплексу $A \in K$; таким образом, существует в R^n симплекс $\kappa(A)$ (см. С)). Оказывается, что совокупность всех симплексов вида $\kappa(A)$, $A \in K$, вместе с их гранями составляет комплекс, который мы будем обозначать через $\kappa(K)$; кроме того, $|\kappa(K)| = \kappa(|K|)$. Для получения комплекса $\kappa(K)$ ко всем симплексам вида $\kappa(A)$, $A \in K$, очевидно, нужно присоединить все симплексы самого комплекса K и вершину (x) .

Для доказательства того, что все симплексы совокупности $\kappa(K)$ расположены правильно, заметим прежде всего, что если P и Q суть два правильно расположенных симплекса, то, взяв по одной грани из каждого, мы также получим два правильно расположенных симплекса. Таким образом, нам достаточно показать, что два симплекса вида $\kappa(A)$ и $\kappa(B)$, $A \in K$, $B \in K$, расположены правильно. Если A и B не пересекаются, то пересечение $\kappa(A)$ и $\kappa(B)$ содержит лишь точку x , т. е. их совместную вершину. Пусть теперь $A \cap B = C$; тогда C есть совместная грань симплексов A и B и очевидно, что $\kappa(A) \cap \kappa(B) = \kappa(C)$.

При любом симплексе $A \in K$ мы имеем $A \subset |K|$ и потому $\kappa(A) \subset \kappa(|K|)$, а это значит, что $|\kappa(K)| \subset \kappa(|K|)$. Докажем обратное включение. Пусть $y \in \kappa(|K|)$; тогда

существует точка $x \in |K|$ такая, что $y \in (\kappa, x)$; но в K существует симплекс A , содержащий точку x , и потому $y \in \kappa(A)$. Таким образом, $\kappa(|K|) \subset |\kappa(K)|$.

Итак, утверждение D) доказано.

Алгебра конуса. E) Пусть K — комплекс, расположенный в евклидовом пространстве R^n , и x — точка, находящаяся в общем положении к полиэдру $|K|$. Если $A^r = \varepsilon(a_0, a_1, \dots, a_r)$ — ориентированный симплекс комплекса K , то через $\kappa(A^r)$ обозначим ориентированный симплекс $\varepsilon(\kappa, a_0, a_1, \dots, a_r)$ комплекса $\kappa(K)$ (см. D)). Если $x^r = g_1 A_1^r + \dots + g_k A_k^r$ — произвольная r -мерная цепь из K , то положим

$$\kappa(x^r) = g_1 \kappa(A_1^r) + \dots + g_k \kappa(A_k^r). \quad (10)$$

Таким образом, $\kappa(x^r)$ есть $(r+1)$ -мерная цепь из $\kappa(K)$ по той же группе коэффициентов, что и x^r . Оказывается, что

$$\Delta \kappa(x^r) = x^r - \kappa(\Delta x^r) \quad \text{при } r > 0 \quad \text{и} \quad \Delta \kappa(x^0) = x^0 - I(x^0)(\kappa), \quad (11)$$

где $I(x^0)$ есть индекс цепи x^0 (см. § 5, D)).

Для $x^r = A_i^r$ соотношение (11) устанавливается непосредственно, а на произвольную цепь x^r оно распространяется путем умножения на коэффициенты g_i и суммирования.

Используем приведенные здесь конструкции для доказательства одного простого предложения.

Теорема 11. Пусть A^r — симплекс размерности r . Через S^{r-1} обозначим комплекс, составленный из всех истинных граней симплекса A^r , а через T^r обозначим комплекс, составленный из всех граней симплекса A^r , включая и A^r . Оказывается, что в комплексе T^r каждый цикл z^s размерности $s > 0$ гомологичен нулю. В S^{r-1} каждый цикл z^s размерности $s, 0 < s < r-1$, гомологичен нулю; каждый цикл z^{r-1} размерности $r-1 > 0$ представим в форме $z^{r-1} = g\Delta(A^r)$, где g — некоторый элемент из положенной в основу группы коэффициентов, а A^r означает ориентированный симплекс.

Доказательство. Без ограничения общности мы можем считать, что симплекс $A^r = (a_0, a_1, \dots, a_r)$ лежит в пространстве R^n , причем существует точка x такая, что

система κ, a_0, \dots, a_r независима. Определим симплицальное отображение f комплекса $\kappa(T^r)$ в комплекс T^r , положив $f(\kappa) = a_0, f(a_i) = a_i, i=0, 1, \dots, r$. Пусть теперь z^s — произвольный цикл из T^r размерности $s > 0$. Положим $v = \kappa(z^s)$; тогда $\Delta v = z^s$ (см. (11)). Таким образом, $z^s \sim 0$ в $\kappa(T^r)$. В силу самого построения $\hat{f}(z^s) = z^s$. Мы имеем $z^s = \hat{f}(z^s) = \Delta \hat{f}(v) = \Delta u$, причем u есть цепь из T^r ; следовательно, $z^s \sim 0$ в T^r .

Пусть теперь z^s — произвольный цикл из S^{r-1} . Тогда $z^s = \Delta u$, где u есть цепь из T^r . При $s < r-1$ цепь u принадлежит S^{r-1} , так как все симплексы комплекса T^r размерности меньше r принадлежат S^{r-1} , и, следовательно, $z^s \sim 0$ в S^{r-1} . В случае $s = r-1$ существует в T^r лишь один симплекс A^r размерности r , и если обозначить через A^r какую-либо его ориентацию, то мы имеем $u = gA^r$; таким образом, $z^{r+1} = g\Delta A^r$.

Итак, теорема II доказана.

К теореме II следует добавить, что нульмерные гомотопии в комплексах T^r и S^{r-1} выясняются на основе § 5. Следует только заметить, что T^r всегда связан, а S^{r-1} связан, за исключением случая $r-1=0$, когда S^{r-1} состоит из двух точек.

§ 9. Бариецентрическое подразделение комплекса

В настоящем параграфе на основе конструкции конуса (см. § 8, A)) будет дана конструкция бариецентрического подразделения K' комплекса K . Задача, преследуемая операцией бариецентрического подразделения, заключается в том, чтобы полиэдр $|K|$, заданный первоначально при помощи комплекса K , представить при помощи комплекса K' , $|K'| = |K|$, причем симплексы комплекса K' мельче симплексов комплекса K . Важно при этом, чтобы переход от комплекса K к комплексу K' был по возможности прост и позволял установить связь между гомотопиями в K и K' .

Геометрический смысл операции бариецентрического подразделения весьма прост. Центром симплекса A^r будем называть его точку, все бариецентрические координаты которой равны между собой, т. е. равны $\frac{1}{r+1}$. В случае, когда K имеет размерность нуль, будем считать, что

$K' = K$. Если K имеет размерность один, то для перехода к K' разделим каждый одномерный симплекс комплекса K пополам на два одномерных симплекса, при этом получится еще новая вершина — центр одномерного симплекса. Если операция подразделения уже определена для комплекса K размерности n , то для перехода к комплексу K' при размерности, равной $(n+1)$, следует барицентрически поделить каждый $(n+1)$ -мерный симплекс A^{n+1} комплекса K , считая, что все симплексы меньшей размерности подразделены. Предположим, что граница S^n симплекса A^{n+1} подразделена барицентрически; тогда барицентрическое подразделение симплекса A^{n+1} , по определению, есть конус $\kappa(S^n)$ с вершиной κ в центре симплекса A^{n+1} .

Геометрия барицентрического подразделения. Определим 20. Поставим в соответствие каждому комплексу K , расположенному в евклидовом пространстве R^m , комплекс K' , также расположенный в R^m и называемый *барицентрическим подразделением* исходного комплекса K . Для нульмерного комплекса K определим K' , положив $K' = K$. Допустим теперь, что барицентрическое подразделение определено для любого n -мерного комплекса, при этом так, что выполнены условия: а) $|K'| = |K|$; б) если L есть подкомплекс комплекса K , то L' есть подкомплекс комплекса K' .

Определим теперь операцию барицентрического подразделения для $(n+1)$ -мерного комплекса K . Для этого обозначим через M n -мерный остов комплекса K (см. § 5, А)). Пусть $A_1^{n+1}, A_2^{n+1}, \dots, A_k^{n+1}$ — совокупность всех $(n+1)$ -мерных симплексов комплекса K . Через S_i обозначим совокупность всех истинных граней симплекса A_i^{n+1} , $S_i \subset M$. Через κ_i обозначим *центр* симплекса A_i^{n+1} , т. е. ту точку его, все барицентрические координаты которой равны между собой. Так как комплекс S_i имеет размерность n , то определено барицентрическое подразделение S_i' и в силу В) § 8 существует комплекс $\kappa_i(S_i')$. K' определим теперь как совокупность всех симплексов, принадлежащих комплексам M' и $\kappa_i(S_i')$, $i = 1, \dots, k$. Оказывается, что K' есть комплекс, и для него вновь выполнены условия а) и б).

Так как совокупность симплексов K' определена как совокупность симплексов, принадлежащих нескольким

комплексам, то очевидно, что для нее выполнено условие 1 определения 5. Докажем, что для K' выполнено условие 2 определения 5. Пусть P и Q — два симплекса из K' . Докажем, что они расположены правильно. Для этого рассмотрим три возможных случая.

Случай 1. Симплексы P и Q принадлежат комплексу M' . Так как, по предположению индукции, M' есть комплекс, то в этом случае P и Q расположены правильно.

Случай 2. $P \in M'$, $Q \in \varkappa_i(S_i)$. Так как все симплексы из $\varkappa_i(S_i)$ являются гранями симплексов вида $\varkappa_i(B)$, $B \in S_i$, то достаточно рассмотреть случай $Q = \varkappa_i(B)$. Так как $P \subset M'$, $|M'| = |M|$ и $\varkappa_i(B) \subset A_i^{n+1}$, то $P \cap Q \subset |M| \cap A_i^{n+1} = |S_i|$. Далее, $\varkappa_i(B) \cap |S_i| = B$. Таким образом, $P \cap Q \subset P \cap B$. Далее P и B суть два симплекса из M' и потому расположены правильно, а из этого в силу D) § 2 следует, что P и Q также расположены правильно.

Случай 3. $P \in \varkappa_i(S_i)$, $Q \in \varkappa_j(S_j)$. Если $i = j$, то симплексы P и Q принадлежат одному комплексу $\varkappa_i(S_i)$, а потому расположены правильно. Пусть $i \neq j$; тогда, так же как и в случае 2, мы можем предположить, что $P = \varkappa_i(A)$, $A \in S_i$; $Q = \varkappa_j(B)$, $B \in S_j$. Мы имеем

$$P \subset A_i^{n+1}, Q \subset A_j^{n+1}, P \cap Q \subset A_i^{n+1} \cap A_j^{n+1}.$$

Так как $i \neq j$, то $A_i^{n+1} \cap A_j^{n+1} \subset |S_i| \cap |S_j|$, и потому $P \cap Q \subset |S_i| \cap |S_j|$. Следовательно, $P \cap Q = P \cap |S_i| \cap Q \cap |S_j|$. Далее, $P \cap |S_i| = \varkappa_i(A) \cap |S_i| = A$, $Q \cap |S_j| = \varkappa_j(B) \cap |S_j| = B$. Итак, $P \cap Q = A \cap B$, а так как A и B суть симплексы из M' , то они расположены правильно, и потому P и Q также расположены правильно (см. § 2, D)).

Покажем теперь, что для $(n+1)$ -мерного комплекса K выполнены условия а) и б). Мы имеем

$$|K| = |M| \cup A_1^{n+1} \cup \dots \cup A_k^{n+1},$$

$$|K'| = |M'| \cup |\varkappa_1(S_1)| \cup \dots \cup |\varkappa_k(S_k)|.$$

По предположению индукции, $|M| = |M'|$, а, в силу B) и D) § 8, $A_i^{n+1} = |\varkappa_i(S_i)|$. Таким образом, $|K| = |K'|$.

Пусть теперь L — произвольный подкомплекс комплекса K , N — n -мерный остов комплекса L , а нумерация

$(n+1)$ -мерных симплексов из K выбрана так, что $A_i^{n+1}, \dots, A_i^{n+1}$ составляют совокупность всех $(n+1)$ -мерных симплексов из L . По определению, L' состоит из всех симплексов, входящих в комплексы N' и $\varkappa_j(S'_j)$, $j=1, \dots, l$. По предположению индукции, N' есть подкомплекс комплекса M' , ибо N есть подкомплекс комплекса M . Далее $l \leq k$, и потому L' есть подкомплекс комплекса K' .

Таким образом, условия а) и б) выполнены для $(n+1)$ -мерного комплекса K .

А) Пусть K — некоторый комплекс, расположенный в евклидовом пространстве R^m , а

$$A_0, A_1, \dots, A_r \quad (1)$$

— некоторая убывающая последовательность его симплексов, т. е. такая, что каждый следующий симплекс ее является истинной гранью предыдущего. Через σ_i обозначим центр симплекса A_i . Оказывается, что в K' существует симплекс

$$(\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_r). \quad (2)$$

С другой стороны, каждый симплекс P из K' может быть задан таким способом. Мы будем говорить, что последовательность (1) задает симплекс (2).

Доказательство будем вести индуктивно по числу измерений комплекса K , придерживаясь при этом обозначений определения 20.

Если симплекс A_0 имеет размерность, меньшую $n+1$, то все симплексы последовательности (1) принадлежат комплексу M , и, по предположению индукции, в $M' \subset K'$ существует симплекс (2). Если A_0 имеет размерность $n+1$, то $A_0 = A_i^{n+1}$, $\sigma_0 = \varkappa_i$. В случае $r=0$, $(\sigma_0) \in \varkappa_i(S'_i) \subset K'$. В случае $r \neq 0$ последовательность A_1, \dots, A_r принадлежит комплексу S_i и, по предположению индукции, в S'_i существует симплекс $A = (\sigma_1, \dots, \sigma_r)$. Тогда в комплексе $\varkappa_i(S'_i)$ имеется симплекс

$$\varkappa_i(A) = (\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_r).$$

Пусть $P \in K'$. Если $P \in M'$, то, по предположению индукции, симплекс P задается последовательностью (1). Если $P \in \varkappa_i(S'_i)$, то возможны различные случаи:

а) $P \subseteq S_i$, тогда $P \subset M'$; б) $P = (x_i)$, и тогда симплекс P задается последовательностью из одного симплекса A_i^{n+1} ; в) $P = x_i(A)$, $A \subset S_i$, тогда, по предположению индукции, A задается некоторой последовательностью A_1, \dots, A_r графической симплекса S_i , а сам симплекс P задается последовательностью $A_i^{n+1}, A_1, \dots, A_r$.

Итак, утверждение А) доказано.

Приведенное в А) свойство барицентрического подразделения можно было бы принять за его определение. Такое определение было бы, пожалуй, проще, но, на мой взгляд, менее наглядно. Доказательство того, что K' есть комплекс, и $|K'| = |K|$, осталось бы примерно таким же громоздким, как и при принятии здесь определения.

Введем теперь понятие многократного барицентрического подразделения.

В) Пусть K — произвольный комплекс. Положим $K^{(0)} = K$ и определим $K^{(m)}$ как барицентрическое подразделение комплекса $K^{(m-1)}$. Комплекс $K^{(m)}$ будем называть *m-кратным барицентрическим подразделением* комплекса K или просто *подразделением* комплекса K . В тех случаях, когда кратность подразделения нас не интересует, подразделение комплекса K будем обозначать через K^α с греческим индексом наверху, например, через K^α . Здесь α не означает уже числа, так что подразделения K_1^α и K_2^α двух разных комплексов могут быть и различной кратности.

Перейдем теперь к оценке размеров симплексов комплекса $K^{(m)}$ по сравнению с размерами симплексов комплекса K .

С) Диаметр симплекса A , расположенного в n -мерном пространстве R^n , равен максимуму длин его одномерных граней.

Пусть $A = (a_0, a_1, \dots, a_r)$, а x и y — две его точки, причем барицентрические координаты точки x равны $\lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^r$. Расстояние между точками x и y в n -мерном пространстве R^n выражается формулой

$$\rho(x, y)^2 = (x_j - y_j)(x_j - y_j) = (x - y)^2.$$

Давая вектору x приращение h , получаем

$$\rho(x+h, y)^2 = (x-h-y)^2 + 2(x-h-y)h + h^2.$$

Покажем, что если x не является вершиной симплекса A , то существует в A такая точка $x+h$, для которой

$$\rho(x+h, y) > \rho(x, y). \quad (3)$$

Если x не является вершиной, то по крайней мере две барицентрические координаты точки x отличны от нуля. Предположим для простоты, что отличны от нуля λ_0 и λ_1 . Пусть ν — такое положительное число, что $\nu < \frac{\lambda_0}{2}$, $\nu < \frac{\lambda_1}{2}$.

Положим $h = \varepsilon \nu (a_0 - a_1)$, где $\varepsilon = \pm 1$. Очевидно, что $x+h$ принадлежит при этом симплексу A . Выберем теперь такое значение для ε , чтобы $(x-y)h \geq 0$. Это возможно, так как при перемене знака ε знак $(x-y)h$ меняется. При выбранном векторе h мы получаем неравенство (3).

Таким образом, при x , отличном от вершины симплекса A , функция $\rho(x, y)$ не может достигать своего максимума. Она достигает его, когда x и y попадают в концы максимального ребра симплекса A .

Теорема 12. Пусть K есть r -мерный комплекс, расположенный в евклидовом пространстве R^n . Если диаметры всех его симплексов не превосходят числа η , то диаметры всех симплексов комплекса $K^{(m)}$ (см. В)) не превосходят числа $\left(\frac{r}{r+1}\right)^m \eta$ и, следовательно, при m достаточно большом могут быть сделаны произвольно малыми.

Доказательство. В силу предложения С), диаметры всех симплексов комплекса K' не превосходят длин его одномерных симплексов. Пусть (σ_0, σ_1) — произвольный одномерный симплекс комплекса K' ; здесь σ_0 есть центр симплекса A_0 , а σ_1 — центр грани A_1 симплекса A_0 (см. А)).

Пусть $A_0 = (a_0, a_1, \dots, a_s)$, а $A_1 = (a_0, a_1, \dots, a_t)$. Положим $A = (a_{t+1}, \dots, a_s)$ и обозначим через σ центр симплекса A . Непосредственно проверяется, что $\sigma_0 = \frac{t+1}{s+1} \sigma_1 + \frac{s-t}{s+1} \sigma$ (см. § 8, (2)). Таким образом, отрезок (σ_1, σ) делится точкой σ_0 в отношении $(s-t):(t+1)$, и, следовательно, $\rho(\sigma_0, \sigma_1) = \frac{s-t}{s+1} \rho(\sigma_1, \sigma)$; но $\rho(\sigma_1, \sigma)$ не превосходит диаметра симплекса A_0 , так как σ_1 и σ принад-

лежат A_0 . Таким образом, $\rho(\sigma_0, \sigma_1) \leq \frac{s-t}{s+1} \eta$. Так как $0 \leq s \leq r$ и $0 \leq t \leq s-1$, то диаметр любого одномерного симплекса из K' не превосходит числа $\frac{r}{r+1} \eta$, но ввиду С) и диаметр любого симплекса произвольной размерности из K' не превосходит того же числа $\frac{r}{r+1} \eta$.

Из доказанного непосредственно вытекает и утверждение теоремы для m -кратного барицентрического подразделения $K^{(m)}$ комплекса K . Таким образом, теорема 12 доказана.

Алгебра барицентрического подразделения. Наша задача заключается теперь в том, чтобы при переходе от комплекса K к его барицентрическому подразделению K' указать переход от каждой цепи x из K к некоторой вполне определенной цепи x' из K' .

Д) Пусть K — комплекс произвольной размерности и K' — его барицентрическое подразделение. Поставим теперь в соответствие каждой r -мерной цепи x из K по группе коэффициентов G r -мерную цепь x' из K' по той же группе коэффициентов G , называемую барицентрическим подразделением исходной цепи x . Для нульмерной цепи x положим $x' = x$. Допустим теперь, что для n -мерных цепей из K уже определена операция барицентрического подразделения. Определим ее для простейшей $(n+1)$ -мерной цепи $x = A$ (A есть $(n+1)$ -мерный ориентированный симплекс из K). Через S обозначим совокупность всех истинных граней симплекса A , а через κ — его центр. Тогда $\kappa(S) \subset K'$. По предположению индукции, барицентрическое подразделение $(\Delta A)'$ границы ΔA симплекса A уже определено; при этом $(\Delta A)'$ есть цепь из S' . Положим $A' = \kappa((\Delta A)')$ (см. § 8, E)). Если теперь $x = g_1 A_1 + \dots + g_k A_k$ — произвольная $(n+1)$ -мерная цепь из K , то положим $x' = g_1 A'_1 + \dots + g_k A'_k$. Оказывается, что для произвольной цепи x из K выполнено важное соотношение

$$\Delta(x') = (\Delta x)'. \quad (4)$$

Если $K^{(m)}$ есть m -кратное барицентрическое подразделение комплекса K , то цепь $x^{(m)}$ определим индуктивно, положив $x^{(0)} = x$, $x^{(m+1)} = (x^{(m)})'$. Если $K^{(m)}$ обозначается че-

рез K^α (см. В)), то $x^{(m)}$ будем обозначать через x^α . Из соотношения (4) непосредственно вытекает

$$\Delta(x^\alpha) = (\Delta x)^\alpha. \quad (5)$$

Соотношение (4) будем доказывать индуктивно. Для нульмерной цепи оно очевидно. Допустим, что оно справедливо для любой n -мерной цепи, и докажем его для $(n+1)$ -мерного ориентированного симплекса A . Мы имеем

$$\Delta A' = \Delta \kappa((\Delta A)') = (\Delta A)' - \kappa(\Delta(\Delta A)'). \quad (6)$$

Так как ΔA имеет размерность n , то, по предположению индукции, получаем $\Delta(\Delta A)' = (\Delta \Delta A)' = 0$, и соотношение (6) переходит в (4).

Е) Если z — цикл из K , то z^α — цикл из K^α . Если циклы z_1 и z_2 гомологичны в K , то циклы z_1^α и z_2^α гомологичны в K^α . Утверждение это непосредственно вытекает из соотношения (5).

§ 10. Лемма о покрытии симплекса и ее приложения

Настоящий параграф представляет собой отклонение от основной темы настоящей книги — теории гомологий, но близко к ней примыкает. Все дальнейшее изложение не опирается на содержание этого параграфа.

Здесь даются доказательства леммы Шпернера и два приложения этой леммы, именно, во-первых, доказательство того, что r -мерный симплекс имеет размерность r в смысле определения 8, и, во-вторых, доказательство того, что непрерывное отображение симплекса в себя всегда имеет неподвижную точку, т. е. точку, переходящую в себя при отображении.

Вопрос о том, является ли число измерений симплекса топологическим инвариантом или нет, представлял собой одну из трудных проблем математики. Он был окончательно решен Брауэром и Лебегом в начале этого столетия. Лемма Шпернера является результатом длительного процесса усовершенствования доказательства инвариантности числа измерений симплекса.

Лемма Шпернера. А) Пусть K — комплекс, K^α — его подразделение (см. § 9, В)) и a — произвольная верши-

на комплекса K^α . Через $S(a)$ обозначим симплекс минимальной размерности из K , содержащий a . Поставим в соответствие вершине $a \in K^\alpha$ одну из вершин $f(a) \in K$ симплекса $S(a)$. Оказывается, что отображение f вершин комплекса K^α в вершины комплекса K является симплициальным (см. определение 18), и для всякой цепи x из K имеет место равенство

$$\hat{f}(x^\alpha) = x. \quad (1)$$

Перейдем к доказательству утверждения А). Из определения 20 барицентрического подразделения K' комплекса K вытекает, что каждый симплекс комплекса K' расположен хотя бы в одном симплексе комплекса K . Это, очевидно, справедливо и для произвольного подразделения K^α комплекса K . Пусть теперь B — произвольный симплекс из K^α . Через $S(B)$ обозначим симплекс минимальной размерности из K , содержащий B . Симплекс $S(B)$, очевидно, определен однозначно, так как пересечение любых двух симплексов из K также есть симплекс из K , если, конечно, пересечение это не пусто. Пусть b — произвольная вершина симплекса B . Тогда очевидно, что $S(b)$ есть грань симплекса $S(B)$, быть может, совпадающая с $S(B)$. Таким образом, $f(b)$ есть вершина симплекса $S(B)$, и мы видим, что все вершины симплекса B при отображении f переходят в вершины симплекса $S(B)$, т. е. условие симплициальности отображения f выполнено.

Соотношение (1) будем доказывать индуктивно по числу измерений цепи x . Для нульмерной цепи оно очевидно. Допустим, что оно верно для любой $(r-1)$ -мерной цепи из K и докажем его для простейшей r -мерной цепи — ориентированного r -мерного симплекса A . Очевидно, что каждый симплекс B , входящий в цепь A^α с коэффициентом, отличным от нуля, содержится в симплексе A , и, следовательно, $S(B)$ есть грань симплекса A . Таким образом, $f(B)$ есть грань симплекса A . Если теперь рассматривать B как ориентированный симплекс, то $f(B)$ есть нуль в случае вырождения и $+A$ или $-A$, если отображение f на симплексе B не вырождается. Отсюда вытекает, что

$$\hat{f}(A^\alpha) = kA, \quad (2)$$

Покажем, что число k равно $+1$. Для этого возьмем границу от обеих частей равенства (2); тогда мы получим

$$\Delta \hat{f}(A^0) = \hat{f}(\Delta A^0) = \hat{f}((\Delta A)^0) = k\Delta A.$$

Полагая $\Delta A = x$, получаем из последнего равенства $\hat{f}(x^0) = kx$, а так как x есть цепь размерности $r-1$, то для нее соотношение (1) верно, и мы видим, что $k=1$.

Переход от простейшей r -мерной цепи A к произвольной r -мерной цепи x делается на основе того, что обе части равенства (1) линейны относительно цепи x .

Итак, предложение А) доказано.

Лемма. Пусть $A = (a_0, a_1, \dots, a_r)$ есть r -мерный симплекс, и $\Sigma = \{F_0, F_1, \dots, F_r\}$ — замкнутое его покрытие (см. § 3, В)), причем любая грань $C = (a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_s})$ целиком принадлежит сумме множеств системы $\Sigma' = \{F_{i_0}, F_{i_1}, \dots, F_{i_s}\}$. Оказывается, что тогда существует точка a , принадлежащая одновременно всем множествам системы Σ , т. е. покрытие Σ имеет кратность, равную $r+1$.

Доказательство. Допустим, что точки a , принадлежащей всем множествам системы Σ , нет. Тогда кратность покрытия Σ не превосходит r , и существует настолько малое число δ , что система Σ_δ , составленная из множеств $H(F_i, \delta)$, $i=0, 1, \dots, r$, также имеет кратность, не превосходящую r (см. § 3, С)).

Пусть теперь T — комплекс, составленный из всех граней симплекса A , $|T| = A$. Обозначим через T^α настолько малое подделение комплекса T , что диаметр каждого симплекса из T^α меньше δ (см. теорему 12). Пусть далее b — произвольная вершина комплекса T^α и $C(b) = (a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_s})$. По предположению леммы, грань $C(b) = C$ симплекса A входит в сумму множеств соответствующей системы Σ' , и потому существует такое множество F_{i_q} этой системы, которое содержит точку b . Положим $f(b) = a_{i_q}$. Таким образом, каждой вершине $b \in T^\alpha$ поставлена в соответствие вершина $f(b) \in T$ по способу, указанному в А); кроме того, из $f(b) = a_i$ вытекает, что $b \in F_i$. Покажем теперь, что если $B = (b_0, b_1, \dots, b_r)$ — произвольный r -мерный симплекс T^α , то он вырождается при отображении f , т. е. не может отобразиться на весь

симплекс A . Допустим противоположное; тогда все вершины $f(b_0), f(b_1), \dots, f(b_r)$ различны, а это значит, что $b_0 \in F_{j_0}, b_1 \in F_{j_1}, \dots, b_r \in F_{j_r}$, причем все индексы j_0, j_1, \dots, j_r различны. Таким образом, мы приходим к допущению, что симплекс B пересекается со всеми множествами системы Σ ; но, пересекаясь с множеством F_i , симплекс B ввиду малости его диаметра содержится в множестве $H(F_i, \delta)$; таким образом, получается, что B входит во все множества системы Σ , а это невозможно. Итак, отображение f вырождается на каждом r -мерном симплексе B комплекса T^c .

Будем теперь рассматривать A как ориентированный симплекс; тогда A^c есть r -мерная целочисленная цепь из T^c , и ввиду того, что каждый ее симплекс B вырождается при отображении f , мы имеем $\hat{f}(A^c) = 0$; но это противоречит равенству (1).

Таким образом, лемма доказана.

В) Для того чтобы покрытие Σ удовлетворяло условиям леммы, достаточно, чтобы каждое множество F_i не пересекалось с гранью $A_i = (a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_r)$, противоположной вершине a_i .

В самом деле, если i не входит в систему чисел i_0, i_1, \dots, i_s , то C есть грань симплекса A_i (см. лемму) и по предположению, имеющемуся в В), грань эта не пересекается с F_i . Таким образом, C может пересекаться лишь с множествами системы Σ' , а так как система Σ покрывает A и, следовательно, содержит в своей сумме грань C , то сумма множеств системы Σ' содержит C , и предположение леммы выполнено.

Размерность полиэдра. Здесь будет показано, что если K есть r -мерный комплекс (см. определение 5), то размерность полиэдра $|K|$ равна r (см. определение 8); таким образом, размерность комплекса есть его топологический инвариант, ибо определение 8 топологически инвариантно. В частности, этим решается и вопрос об инвариантности числа измерений симплекса. Нетривиальная часть решения заключается в доказательстве того, что размерность r -мерного симплекса не меньше r ; это делается при помощи применения леммы Шпернера. Тривиальная часть решения заключается в построении ε -покрытия полиэдра $|K|$ кратности $r+1$.

С) Пусть K — произвольный r -мерный комплекс, K' — его барицентрическое подразделение и c — некоторая вершина комплекса K (она же, очевидно, является и вершиной комплекса K'). Совокупность всех симплексов комплекса K' с вершиной c и всех граней этих симплексов называется *барицентрической звездой* комплекса K с центром c и обозначается через $B(c)$. Очевидно, что если диаметр всех симплексов комплекса K' меньше $\epsilon/2$, то диаметр полиэдра $|B(c)|$ меньше ϵ . Оказывается, что если c_0, c_1, \dots, c_k есть совокупность всех вершин комплекса K , то полиэдры $|B(c_i)|$, $i=0, 1, \dots, k$, образуют замкнутое покрытие Σ полиэдра $|K|$, причем кратность этого покрытия равна $r+1$.

Пусть B — произвольный симплекс комплекса K' ; тогда он определяется убывающей последовательностью A_0, A_1, \dots, A_{p-1} симплексов комплекса K (см. § 9, A). Если A_{p-1} есть нульмерный симплекс, т. е. $A_{p-1} = (c_i)$, то симплекс B принадлежит барицентрической звезде $B(c_i)$. Если A_{p-1} имеет положительную размерность, то обозначим через c_i одну из вершин этого симплекса и положим $A_p = (c_i)$; тогда последовательность

$$A_0, A_1, \dots, A_{p-1}, A_p \quad (3)$$

определяет симплекс D комплекса $B(c_i)$, причем B есть грань симплекса D . Таким образом, и в этом случае симплекс B принадлежит барицентрической звезде $B(c_i)$. Мы видим, следовательно, что каждый симплекс из K' принадлежит хотя бы к одной барицентрической звезде, а это значит, что система Σ действительно составляет покрытие полиэдра $|K|$.

Пусть σ — некоторая вершина комплекса $B(c_i)$, и A — тот симплекс из K , центром которого σ является (см. § 9, A). Покажем, что c_i есть вершина симплекса A . Так как σ есть вершина комплекса $B(c_i)$, то существует в $B(c_i)$ симплекс D , имеющий среди своих вершин σ и c_i . Допустим, что симплекс D задается последовательностью (3); тогда среди симплексов этой последовательности имеется симплекс A . Так как $A_p = (c_i)$ есть грань каждого симплекса последовательности (3), то мы видим, что A имеет c_i своей вершиной.

Допустим, что несколько множеств системы Σ имеют непустое пересечение P . Так как все множества си-

стемы Σ суть полиэдры, соответствующие подкомплексам комплекса K' , то P также есть полиэдр, соответствующий некоторому подкомплексу комплекса K' и, следовательно, содержит вершину σ комплекса K' . Пусть A — тот симплекс из K , центром которого является σ ; тогда все содержащие вершину σ комплексы $B(c_i)$ имеют свои ми центрами вершины симплекса A , и число их, таким образом, не превосходит числа $r+1$, ибо размерность симплекса A не больше r ; таким образом, кратность покрытия Σ не превосходит числа $r+1$.

Если A есть r -мерный симплекс комплекса K с вершинами a_0, a_1, \dots, a_r , то все комплексы $B(a_i), i=0, 1, \dots, r$, имеют вершину σ — центр симплекса A , и, следовательно, кратность покрытия Σ не меньше $r+1$. Итак, утверждение С) доказано.

Теорема 13. Если K есть r -мерный комплекс, то размерность полиэдра $|K|$ в смысле определения 8 равна r .

Доказательство. Пусть ε — произвольное положительное число, и K^ε — такое подразделение комплекса K , что диаметры всех симплексов комплекса K^ε не превосходит $\varepsilon/2$. Применяя к комплексу K^ε предложение С), мы получаем для полиэдра $|K|$ замкнутое ε -покрытие кратности $r+1$. Таким образом, размерность полиэдра $|K|$ не превосходит числа r .

Покажем, что размерность полиэдра $|K|$ не меньше r . Это достаточно сделать для произвольного r -мерного симплекса A из K , так как в силу определения 8 размерность подпространства не может быть больше размерности пространства.

Пусть $A = (a_0, a_1, \dots, a_r)$ и $A_i = (a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_r)$ — грань симплекса A , противоположная вершине a_i . Очевидно, что нет точки симплекса A , одновременно принадлежащей всем граням A_i . В самом деле, грань A_i определяется уравнением $\lambda^i = 0$ (см. § 2, С)), а совокупность всех таких уравнений приводит нас к невозможному для барицентрических координат соотношению $\lambda^0 = \lambda^1 = \dots = \lambda^r = 0$. Таким образом, существует настолько малое положительное число ε , что пересечение всех множеств системы Σ_ε^* , составленной из $H(A_i, \varepsilon), i=0, 1, \dots, r$, пусто (см. § 3, С)). По-

кажем, что всякое замкнутое ε -покрытие $\Sigma = \{C_0, C_1, \dots, C_k\}$ симплекса A имеет кратность, не меньшую чем $r+1$.

Множество C_j системы Σ не может пересекаться одновременно со всеми гранями A_i , так как если бы пересечение это существовало, то множество C_j принадлежало бы одновременно всем множествам системы Σ_ε^* , что невозможно. Таким образом, каждому числу $j, j=0, \dots, k$, можно поставить в соответствие целое число $g(j)$, $0 \leq g(j) \leq r$, так, что множество C_j не пересекается с $A_{g(j)}$. Обозначим теперь через F_i сумму всех таких множеств C_j системы Σ , для которых $g(j) = i$. Каждое множество F_i не пересекается с гранью A_i , и система F_0, F_1, \dots, F_r удовлетворяет, следовательно, условиям предложения Б)). В силу леммы существует точка a , общая для всех множеств F_0, F_1, \dots, F_r . Так как $a \in F_i$, а F_i составлено как сумма некоторых множеств системы Σ , то существует такой номер i_i , что $a \in C_{i_i}$ и $g(i_i) = i$. Множества $C_{i_0}, C_{i_1}, \dots, C_{i_r}$ все имеют различные номера, ибо каждому числу j поставлено в соответствие лишь одно число $g(j)$. Таким образом, мы видим, что a одновременно принадлежит к $r+1$ различным элементам покрытия Σ , и, следовательно, кратность этого покрытия не меньше $r+1$.

Итак, теорема 13 доказана.

Теорема Брауэра. Теорема о существовании неподвижной точки при непрерывном отображении симплекса в себя будет получена здесь как весьма простое приложение леммы Шпернера.

Теорема 14. Пусть $A = (a_0, a_1, \dots, a_r)$ есть r -мерный симплекс и φ — непрерывное отображение его в себя. Существует тогда точка $a \in A$ такая, что $\varphi(a) = a$; точка эта называется неподвижной точкой отображения φ .

Доказательство. Бариецентрические координаты точки $p \in A$ обозначим через $\lambda^i(p), i=0, 1, \dots, r$. Бариецентрические координаты ее образа $\varphi(p)$ обозначим через $\mu^i(p), i=0, 1, \dots, r$. Через F_i обозначим множество всех таких точек p симплекса A , для которых

$$\lambda^i(p) \geq \mu^i(p). \quad (4)$$

Покажем, что система $\Sigma = \{F_0, F_1, \dots, F_r\}$ удовлетворяет условиям леммы.

Замкнутость множеств системы Σ непосредственно вытекает из непрерывности отображения φ .

Пусть $C = (a_{i_0}, a_{i_1}, \dots, a_{i_s})$ — произвольная грань симплекса A (быть может, сам симплекс A). Пусть $p \in C$, и допустим, что p не принадлежит ни к одному из множеств системы $\Sigma' = \{F_{i_0}, F_{i_1}, \dots, F_{i_s}\}$. Тогда для p имеем

$$\lambda^{i_0}(p) < \mu^{i_0}(p), \lambda^{i_1}(p) < \mu^{i_1}(p), \dots, \lambda^{i_s}(p) < \mu^{i_s}(p)$$

(см. (4)). Суммируя все эти неравенства, получаем

$$\begin{aligned} \lambda^{i_0}(p) + \lambda^{i_1}(p) + \dots + \lambda^{i_s}(p) < \\ < \mu^{i_0}(p) + \mu^{i_1}(p) + \dots + \mu^{i_s}(p) \end{aligned}$$

Но левая часть последнего неравенства равна единице, так как точка p принадлежит симплексу C , правая же не превосходит единицы, и, следовательно, неравенство это невозможно.

Таким образом, в силу леммы существует в A точка a , принадлежащая всем множествам системы Σ ; для этой точки мы имеем, следовательно,

$$\lambda^0(a) \geq \mu^0(a), \lambda^1(a) \geq \mu^1(a), \dots, \lambda^r(a) \geq \mu^r(a). \quad (5)$$

Если бы в этой системе неравенств имелось хотя бы одно истинное неравенство, например $\lambda^i(a) > \mu^i(a)$, то, суммируя все неравенства (5), мы получили бы

$$\begin{aligned} \lambda^0(a) + \lambda^1(a) + \dots + \lambda^r(a) > \\ > \mu^0(a) + \mu^1(a) + \dots + \mu^r(a), \end{aligned}$$

что невозможно, так как и правая, и левая части здесь равны единице. Таким образом, для точки a получаем

$$\lambda^0(a) = \mu^0(a), \lambda^1(a) = \mu^1(a), \dots, \lambda^r(a) = \mu^r(a),$$

а это значит, что $a = \varphi(a)$.

Итак, теорема 14 доказана.

§ 11. Инвариантность групп гомологий при барицентрическом подразделении

В настоящем параграфе будет установлена связь между гомологиями в комплексе K и в его подразделении K^α (см. § 9, В). В частности, будет доказано, что группы K и K^α изоморфны.

Т е о р е м а 15. Пусть K — некоторый комплекс и K^α — его подразделение (см. § 9, В). Если δ — некоторый r -мерный класс гомологий комплекса K , а z — произвольный цикл из δ , то обозначим через z^α тот класс гомологий комплекса K^α , который содержит цикл z^α . Тогда однозначное отображение $z \rightarrow z^\alpha$ (см. § 9, Е) дает изоморфное отображение r -мерной группы $V^r(K)$ комплекса K на r -мерную группу $V^r(K^\alpha)$ комплекса K^α .

В дальнейшем мы иногда будем отождествлять классы гомологий δ и δ^α , так что можно будет говорить о совпадении групп $V^r(K)$ и $V^r(K^\alpha)$.

Доказательству теоремы 15 предположим лемму.

Л е м м а. Пусть K — произвольный комплекс, K^α — его подразделение, а x — такая цепь из K^α , что граница ее Δx представима в форме $\Delta x = z^\alpha$, где z — цикл из K . Существует тогда такая цепь y из K , что $\Delta y = z$ и $x - y^\alpha$ есть цикл, гомологичный нулю в K^α .

Покажем прежде всего, что теорема 15 вытекает из леммы.

А) Если лемма верна для комплекса K , то для этого комплекса верна и теорема 15.

Придерживаясь обозначений теоремы 15, положим $z^\alpha = \varphi(\delta)$, тогда φ ставит в соответствие каждому элементу группы $V^r(K)$ некоторый элемент группы $V^r(K^\alpha)$. Очевидно, что отображение φ есть гомоморфизм группы $V^r(K)$ в группу $V^r(K^\alpha)$. Нам достаточно показать, что гомоморфизм этот есть изоморфизм на всю группу $V^r(K^\alpha)$.

Покажем сперва, что φ есть изоморфизм. Пусть δ — произвольный элемент группы $V^r(K)$, z — некоторый цикл из δ , z^α — его подразделение и δ^α — тот класс гомологий комплекса K^α , который содержит z^α . Допустим, что $\delta^\alpha = 0$; это значит, что $z^\alpha \sim 0$ в K^α , т. е. существует цепь x из K^α такая, что $\Delta x = z^\alpha$. К цепи x можно, следовательно, применить лемму, а это значит, что существует

цепь y из K такая, что $\Delta y = z$, т. е. $z \sim 0$ в K , или $\mathfrak{z} = 0$. Таким образом, из $\varphi(\mathfrak{z}) = 0$ вытекает $\mathfrak{z} = 0$. Отображение φ есть изоморфизм.

Покажем теперь, что φ есть отображение на всю группу $B^r(K^\alpha)$. Пусть x — произвольный элемент группы $B^r(K^\alpha)$ и x — некоторый элемент из класса гомологий x . Так как x есть цикл из K^α , то $\Delta x = 0^\alpha$, где 0 есть нулевой цикл из K , т. е. мы находимся в условиях применимости леммы при $z = 0$. Таким образом, существует цепь y из K такая, что $\Delta y = 0$, причем $x - y^\alpha \sim 0$ в K^α . Очевидно, что $\varphi(x) = x$, где x — класс гомологий из K , содержащий y . Таким образом, отображение φ есть отображение на всю группу $B^r(K^\alpha)$.

Итак, предположение А) доказано.

Доказательство леммы. Лемму докажем лишь для случая $K^\alpha = K'$, т. е. для однократного барицентрического подразделения. Переход к многократному барицентрическому подразделению $K^{(m)}$ проводится при помощи очевидной индукции по m . Доказательство будем вести индуктивно по числу измерений комплекса K . Для нульмерного комплекса лемма очевидна; будем считать, что она правильна для каждого n -мерного комплекса; тогда в силу А) теорема 15 также верна для каждого $(n+1)$ -мерного комплекса.

Пусть K — произвольный $(n+1)$ -мерный комплекс, M — его n -мерный остов, и $A_1^{n+1}, \dots, A_k^{n+1}$ — совокупность всех как-либо ориентированных $(n+1)$ -мерных симплексов комплекса K . Через S_i обозначим совокупность всех истинных граней симплекса A_i^{n+1} , а через κ_i — центр симплекса A_i^{n+1} . Положим $T_i = \kappa_i(S_i)$. Ввиду того что комплекс S_i имеет размерность n , по предположению индукции, для него справедливы лемма и теорема 15. Таким образом, гомологические свойства комплекса S_i те же самые, что и у комплекса S_i , гомологические же свойства последнего разобраны в теореме 11. Изучим теперь гомологические свойства комплекса T_i , исходя из знания их для S_i и соотношения $T_i = \kappa_i(S_i)$.

Рассмотрим некоторую r -мерную цепь κ_i из T_i , представимую в виде $\kappa_i(z_i)$, где z_i — цепь из S_i , и обладающую тем свойством, что ее граница $\Delta \kappa_i$ принадлежит S_i' .

Оказывается, что имеет место следующее: а) если $r \leq n$, то в S'_i существует цепь y_i такая, что $x_i - y_i$ есть цикл, гомологичный нулю в T_i ; б) если $r = n + 1$, то $x_i = g_i(A_i^{n+1})'$, где g_i — элемент из той группы коэффициентов, которая положена в основу построения цепей.

Так как Δx_i принадлежит S'_i , то имеем: при $r = 1$ $\Delta x_i = \Delta \kappa_i(z_i) = z_i - I(z_i)(\kappa_i)$ (см. § 8, (11)), отсюда $I(z_i)(\kappa_i) = 0$, или $I(z_i) = 0$, т. е. z_i в этом случае есть нульмерный цикл из S'_i с индексом, равным нулю; при $r > 1$ (§ 8, (11)) $\Delta x_i = \Delta \kappa_i(z_i) = z_i - \kappa_i(\Delta z_i)$, откуда $\kappa_i(\Delta z_i) = 0$, или $\Delta z_i = 0$, т. е. z_i есть $(r-1)$ -мерный цикл из S'_i .

а) Если $r \leq n$, то размерность z_i не превосходит $n-1$. В силу теоремы 15 цикл z_i гомологичен нулю в S'_i , ибо всякий цикл размерности, меньшей n , гомологичен нулю в S_i (см. теорему 11). Таким образом, существует в S'_i цепь y_i такая, что $\Delta y_i = z_i$. Положим $v_i = \kappa_i(y_i)$. Мы имеем тогда

$$\Delta v_i = y_i - \kappa_i(\Delta y_i) = y_i - x_i; \text{ т. е. } x_i - y_i \sim 0 \text{ в } T_i.$$

б) Пусть $r = n + 1$. Тогда цикл z_i имеет размерность n . Если $n = 0$, то индекс цикла z_i равен нулю, и потому, как легко видеть, цикл z_i представим в форме $z_i = g_i \Delta A'_i$; а так как при $n = 0$ имеем $\Delta A'_i = (\Delta A_i)'$, то утверждение доказано. Если $n > 0$, то в силу теоремы 15 существует в S_i такой цикл u_i , что $z_i \sim u_i$; но ввиду того, что размерность цикла z_i равна размерности комплекса S'_i , гомология переходит в равенство, и мы имеем $z_i = u_i$. В силу теоремы 11 цикл u_i из S_i представим в форме $g_i \Delta A_i^{n+1}$. Таким образом, $z_i = g_i(\Delta A_i^{n+1})'$, т. е. $x_i = g_i \kappa_i((\Delta A_i^{n+1})') = g_i(A_i^{n+1})'$. Таким образом, предложения а) и б) доказаны.

Мы предполагали, что $x_i = \kappa_i(z_i)$, и потому размерность x_i была не меньше единицы; покажем теперь, что с) Если x_i есть нульмерная цепь из T_i , то существует в S_i нульмерная цепь y_i такая, что $x_i - y_i \sim 0$ в T_i .

Пусть a — произвольная вершина из S'_i ; тогда в T_i существует симплекс $+(x_i, a)$ с границей $+(a) - (x_i)$, т. е. $+(x_i) \sim +(a)$ в T_i . Заменяя в x_i симплекс $+(x_i)$ симплексом $+(a)$, получаем искомую цепь y_i .

Пусть теперь x — данная в условии леммы цепь из K' . Так как $\Delta x = z'$ имеет размерность не выше n , то z есть цепь из M , и потому z' есть цепь из M' . Обозначим через x_i сумму тех членов линейной формы x , которые содержат симплексы с вершиной \varkappa_i ; x_i есть цепь из T_i . Покажем, что Δx_i есть цепь из S'_i . Действительно, цепь $x - x_i$ не содержит симплексов с вершиной \varkappa_i , и потому ее граница $\Delta(x - x_i)$ тоже не содержит таких симплексов. Цепь Δx принадлежит комплексу M' и тоже, следовательно, не содержит симплексов с вершиной \varkappa_i . Таким образом, и разность $\Delta x_i = \Delta x - (\Delta x - \Delta x_i)$ этих двух цепей не содержит симплексов с вершиной \varkappa_i . Будучи цепью из T_i и не содержа симплексов с вершиной \varkappa_i , цепь Δx_i принадлежит S'_i и, следовательно, к ней применимы предложения а) и б).

Рассмотрим теперь два случая.

Случай 1. Размерность цепи x меньше $n+1$. В силу а) и с) существует цепь y_i из S'_i такая, что $x_i - y_i \sim 0$

в T_i . Положим $x = x - (x_1 - y_1) - \dots - (x_k - y_k)$, тогда $\Delta x = \Delta x = z'$ и $x - x \sim 0$ в K' . Очевидно, что цепь x уже не содержит симплекса, вершина которого была бы \varkappa_i , $i=1, 2, \dots, k$, и потому x входит в M' . К цепи x применима, таким образом, лемма, т. е. существует цепь y из M такая, что $\Delta y = z$ и $x - y' \sim 0$ в M' . Следовательно, и $x - y' \sim 0$ в K' . Итак, первый случай разобран.

Случай 2. Размерность цепи x равна $n+1$. В силу б) цепь x_i представима в форме $x_i = g_i(A_i^{n+1})'$. Составим цепь

$$y = g_1 A_1^{n+1} + \dots + g_k A_k^{n+1}.$$

Очевидно, что цепь $x - y'$ уже не содержит симплекса, вершина которого есть \varkappa_i , $i=1, 2, \dots, k$. Так как цепь $x - y'$ является $(n+1)$ -мерной, то в силу этого она равна нулю, и, следовательно, $x = y'$. Переходя к границе, получаем $(z - \Delta y)' = 0$, но очевидно, что барицентрическое подразделение цепи может равняться нулю лишь при условии, что сама цепь равна нулю, и потому $\Delta y = z$. Итак, второй случай разобран.

Таким образом, лемма полностью доказана, а тем самым в силу А) доказана и теорема 15.

§ 12. Инвариантность групп гомологий

Здесь на основе аппарата, изложенного в предыдущих параграфах настоящей главы, будет дано, наконец, доказательство теоремы инвариантности групп гомологий.

Теорема 16. Пусть K_1 и K_2 — комплексы такие, что полиэдры $|K_1|$ и $|K_2|$ гомеоморфны. Тогда группы гомологий $B'_G(K_1)$ и $B'_G(K_2)$ изоморфны при любой группе коэффициентов G .

Теорема эта является прямым следствием более полной теоремы 18. Последняя устанавливает вполне определенный изоморфизм между группами $B'_G(K_1)$ и $B'_G(K_2)$, когда задано определенное гомеоморфное отображение φ полиэдра $|K_1|$ на полиэдр $|K_2|$. Прежде чем перейти к формулировке и доказательству теоремы 18, сделаем несколько предварительных замечаний.

Предварительные замечания и лемма. А) Пусть K и L — два комплекса, K^α и L^β — их подразделения, а f — симплициальное отображение комплекса K^α в комплекс L^β . В силу определения 19 отображению f соответствует вполне определенный гомоморфизм \hat{f} группы $B'_G(K^\alpha)$ в группу $B'_G(L^\beta)$. С другой стороны, в силу теоремы 15 имеется вполне определенный изоморфизм между группами $B'_G(K^\alpha)$ и $B'_G(K)$, точно так же как между группами $B'_G(L^\beta)$ и $B'_G(L)$. Таким образом, мы можем считать, что \hat{f} есть гомоморфизм группы $B'_G(K)$ в группу $B'_G(L)$. Точно гомоморфизм \hat{f} группы $B'_G(K)$ в группу $B'_G(L)$ описывается так: пусть x — произвольный элемент группы $B'_G(K)$, x — некоторый цикл из класса x , и x^α — его подразделение из K^α . Тогда $\hat{f}(x^\alpha)$ есть цикл из L^β (см. § 7, F); в силу теоремы 15 существует цикл y из L такой, что его подразделение y^β гомологично $\hat{f}(x^\alpha)$ в L^β . Если \mathfrak{h} — тот класс гомологий, который содержит y , то $\hat{f}(x) = \mathfrak{h}$.

В) Пусть K и L — два комплекса, а φ — непрерывное отображение полиэдра $|K|$ в полиэдр $|L|$. Тогда существует настолько большое целое число $m \geq 0$, что отображение φ комплекса $K^{(m)}$ в L уже удовлетворяет условию звезд (см. теорему 10).

Существует настолько малое положительное число ε , что каждое подмножество F полиэдра $|L|$, диаметр которого меньше ε , целиком располагается в одной из звезд $S(b)$ комплекса L . Действительно, допустим противоположное, т. е. что для каждого натурального числа i существует множество F_i из $|L|$ диаметра, меньшего чем $1/i$, не входящее целиком ни в одну из звезд комплекса L . Так как $|L|$ компактно и диаметры множеств F_i стремятся к нулю, существует в $|L|$ точка s , любая окрестность которой содержит бесчисленное количество множеств F_i . За окрестность точки s можно принять ту звезду $S(b)$ комплекса K , которая содержит s . Таким образом, среди множеств F_i существует хотя бы одно, целиком содержащееся в $S(b)$, и мы получаем противоречие. Этим самым существование искомого ε доказано.

Так как $|K|$ компактно, то непрерывное отображение φ является равномерно непрерывным, и существует поэтому настолько малое положительное число δ , что при $\rho(x, y) < \delta$, где x и y — точки из $|K|$ имеем

$$\rho(\varphi(x), \varphi(y)) < \varepsilon. \quad (1)$$

Если η — максимальный из диаметров симплексов комплекса K , то выберем настолько большое m , чтобы $\left(\frac{n}{n+1}\right)^m \eta < \frac{\delta}{2}$; тогда диаметр каждой звезды $S(a)$ комплекса $K^{(m)}$ меньше δ (см. теорему 12). В силу (1) диаметр $\varphi(S(a))$ меньше ε , и потому $\varphi(S(a))$ содержится хотя бы в одной из звезд $S(b)$. Итак, отображение φ комплекса $K^{(m)}$ в комплекс L удовлетворяет условию звезд, и предложение В) доказано.

С) Пусть K' — барицентрическое подразделение произвольного комплекса K . Оказывается, что каждая звезда комплекса K' содержится в некоторой звезде комплекса K .

Пусть σ — произвольная вершина комплекса K' , и A — тот симплекс из K , центром которого σ является. Если $B = (\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_r)$ — произвольный симплекс звезды $S(\sigma)$ комплекса K' , то $\sigma = \sigma_i$. Открытый симплекс B , очевидно, расположен в открытом симплексе A_0 (см. § 9, А), и, так как A_0 имеет своей гранью симплекс $A_i = A$, то мы видим, что звезда $S(\sigma)$ содержится в сумме $S(A)$ всех открытых

симплексов, имеющих A своей гранью. Если a есть произвольная вершина симплекса A , то ясно, что звезда $S(a)$ комплекса K содержит $S(A)$; таким образом, $S(\sigma) \subset S(a)$, и предложение С) доказано.

Лемма. Пусть \hat{f} — симплициальное отображение комплекса K в комплекс L , и K^α — подразделение комплекса K (см. § 9, В)). Если $K^\alpha \neq K$, то отображение \hat{f} уже не является симплициальным отображением комплекса K^α в комплекс L , но оно удовлетворяет условию звезд, и существует поэтому (см. теорему 10) симплициальное отображение \hat{f}^α комплекса K^α в комплекс L , аппроксимирующее \hat{f} . Оказывается, что при произвольной цепи x из K имеем

$$\hat{f}^\alpha(x^\alpha) = \hat{f}(x). \quad (2)$$

В частном случае, когда $L=K$ и \hat{f} — тождественное отображение комплекса K самого на себя, мы получаем $\hat{f}^\alpha(x^\alpha) = x$.

Доказательство. Покажем прежде всего, что отображение \hat{f} комплекса K в комплекс L удовлетворяет условию звезд.

Пусть a — произвольная вершина комплекса K , $f(a) = b$, и A — произвольный открытый симплекс из K с вершиной a . Легко видеть, что $f(A)$ есть открытый симплекс из L с вершиной b (см. § 7, А)), и потому $f(S(a)) \subset S(b)$. Из этого в силу С) следует, что отображение \hat{f} комплекса K^α в L также удовлетворяет условию звезд.

Соотношение (2) будем доказывать индуктивно по числу измерений цепи x . Для нульмерной цепи оно очевидно; допустим, что соотношение это справедливо для любой $(r-1)$ -мерной цепи и докажем его для r -мерного ориентированного симплекса A из K .

Пусть T — совокупность всех граней симплекса A , тогда $f(|T|) = D$, где D — некоторый симплекс из L . Все вершины комплекса T^α при отображении \hat{f} переходят в точки из D , а потому каждый симплекс комплекса T^α при отображении \hat{f}^α переходит в D или его грань (см. теорему 10). Разберем теперь два случая:

а) Если размерность D меньше r , то все r -мерные симплексы комплекса T^α при отображении \hat{f}^α вырождаются, и потому $\hat{f}^\alpha(A^\alpha) = 0$; но в этом случае и $\hat{f}(A) = 0$,

b) Если размерность D равна r , то $\hat{f}(A)$ есть ориентированный некоторым образом симплекс D . С другой стороны, каждый r -мерный симплекс комплекса T^α при отображении \hat{f}^α или вырождается, или отображается на D , поэтому

$$\hat{f}^\alpha(A^\alpha) = k\hat{f}(A), \quad (3)$$

где k — целое число. Покажем, что $k=1$. Для этого к соотношению (3) применим операцию Δ . Мы имеем

$$\Delta\hat{f}^\alpha(A^\alpha) = \hat{f}^\alpha(\Delta A^\alpha) = k\Delta\hat{f}(A) = k\hat{f}(\Delta A).$$

Если обозначить теперь ΔA через x , мы получаем из последнего

$$\hat{f}^\alpha(x^\alpha) = k\hat{f}(x),$$

но так как, по предположению индукции, для $(r-1)$ -мерной цепи x соотношение (2) верно, то $k=1$. Таким образом, для любого r -мерного ориентированного симплекса A_i из K имеем $\hat{f}^\alpha(A_i^\alpha) = \hat{f}(A_i)$. Умножая последнее соотношение на коэффициент g_i и суммируя по i , получаем соотношение (2) для произвольной r -мерной цепи. Итак, лемма доказана.

Отметим важное следствие доказанной леммы.

D) Пусть \check{f} — симплициальное отображение комплекса K в комплекс L , K^α — некоторое подразделение комплекса K , и \check{f}^α — симплициальное отображение комплекса K^α в комплекс L , аппроксимирующее отображение \check{f} . Отображению \check{f}^α соответствует гомоморфизм \check{f}^α группы $B^r(K^\alpha)$ в группу $B^r(L)$, но в силу A) его можно понимать и как гомоморфизм группы $B^r(K)$ в группу $B^r(L)$. С другой стороны, отображению \check{f} также соответствует гомоморфизм \check{f} группы $B^r(K)$ в группу $B^r(L)$. Оказывается, что гомоморфизмы \check{f} и \check{f}^α группы $B^r(K)$ в группу $B^r(L)$ совпадают между собой. В частном случае, когда $L=K$ и \check{f} есть тождественное отображение комплекса K на себя, мы получаем вывод, что гомоморфизм \check{f}^α есть тождественное отображение группы $B^r(K)$ на себя.

Пусть x^* — произвольный элемент группы $B^r(K)$, а x — цикл из класса гомологий x^* . Тогда $\check{f}^\alpha(x^\alpha)$ есть цикл из L , и содержащий его класс гомологий $\check{f}^\alpha(x^\alpha)^*$, соглас-

но A), есть $\check{f}^\alpha(x^*)$. С другой стороны, $\hat{f}(x)$ также есть цикл из L , и содержащий его класс гомологий $\hat{f}(x)^*$ есть $\check{f}(x^*)$. В силу леммы $\hat{f}^\alpha(x^\alpha) = \hat{f}(x)$, и потому $\check{f}^\alpha(x^*) = \check{f}(x^*)$. Таким образом, утверждение D) доказано.

При помощи приведенной леммы очень просто доказать инвариантность числа измерений полиэдра.

Теорема 17. *Если $|K_1|$ и $|K_2|$ — два гомоморфных полиэдра, то размерности комплексов K_1 и K_2 одинаковы. Таким образом, можно говорить о размерности полиэдра.*

Доказательство. Пусть размерность n комплекса K_1 больше размерности комплекса K_2 . Пусть далее φ — гомоморфное отображение комплекса K_2 на комплекс K_1 , а K_2^α — настолько мелкое подразделение комплекса K_2 , что существует симплициальное отображение \hat{f} комплекса K_2^α в комплекс K_1 , аппроксимирующее отображение φ . Пусть далее K_1^α — настолько мелкое подразделение комплекса K_1 , что существует симплициальное отображение \hat{g} комплекса K_1^α в комплекс K_2^α , аппроксимирующее отображение φ^{-1} . Тогда симплициальное отображение $\hat{f}\hat{g}$ комплекса K_1^α в K_1 аппроксимирует тождественное отображение $\varphi\varphi^{-1}$, и, следовательно, в силу леммы для каждой цепи x из K_1 мы имеем

$$\hat{f}(\hat{g}(x^\alpha)) = x. \quad (4)$$

С другой стороны, каждый n -мерный симплекс из K_1^α вырождается при отображении \hat{g} , ибо в K_2^α симплексов размерности n нет. Таким образом, для каждой n -мерной цепи x из K мы имеем $\hat{g}(x^\alpha) = 0$, а потому $\hat{f}(\hat{g}(x^\alpha)) = 0$; но это противоречит соотношению (4), ибо существует в K_1 n -мерная цепь x , отличная от нуля.

Итак, теорема 17 доказана.

Основная теорема. Теорема 18. Пусть φ_1 — гомоморфное отображение комплекса K_1 на комплекс K_2 , $\varphi_1^{-1} = \varphi_2$, и K_1^α, K_2^α — такие подразделения заданных комплексов, что отображение φ_1 комплекса K_1^α в комплекс K_2^α удовлетворяет условию звезд. Пусть \hat{f}_1^α — симплициальное отображение комплекса K_1^α в комплекс K_2^α , аппроксимирующее отображение φ_1 . Тогда оказывается, что

а) гомоморфизм \check{f}_1^a группы $B^r(K_1)$ в группу $B^r(K_2)$ не зависит от случайно выбранных симплициальных подразделений K_1^a и K_2^a и симплициальной аппроксимации f_1^a , а потому может быть обозначен через $\check{\varphi}_1$,

$$\check{\varphi}_1(B^r(K_1)) \subset B^r(K_2);$$

б) гомоморфизм φ_1 есть изоморфное отображение группы $B^r(K_1)$ на группу $B^r(K_2)$;

в) если указанным здесь способом на основе отображения φ_2 построить изоморфизм $\check{\varphi}_2$ группы $B^r(K_2)$ на группу $B^r(K_1)$, то изоморфизмы $\check{\varphi}_1$ и $\check{\varphi}_2$ взаимно обратны.

Доказательство. Имея в виду доказательство утверждения а), наряду с подразделениями K_1^a и K_2^a введем в рассмотрение другие два подразделения K_1^b и K_2^b заданных комплексов такие, что отображение φ_1 комплекса K_1^b на комплекс K_2^b удовлетворяет условию звезд, и обозначим через f_1^b симплициальное отображение комплекса K_1^b в комплекс K_2^b , аппроксимирующее отображение φ_1 .

Так как подразделения K_1^a и K_1^b суть многократные барицентрические подразделения одного и того же комплекса K_1 , то одно из подразделений мельче другого. Допустим, что K_1^b является подразделением K_1^a , и выберем настолько мелкое подразделение K_2^b , чтобы отображение φ_2 комплекса K_2^b на комплекс K_1^b удовлетворяло условию звезд. Тогда и отображение φ_2 комплекса K_2^b на комплекс K_1^a также удовлетворяет условию звезд. Симплициальное отображение комплекса K_2^b в комплекс K_1^a , аппроксимирующее отображение φ_2 , обозначим через f_2^a , а симплициальное отображение комплекса K_2^b в комплекс K_1^b , аппроксимирующее отображение φ_2 , обозначим через f_2^b . Обозначим далее через K_1^y такое подразделение комплекса K_1 , что отображение φ_1 комплекса K_1^y на K_2^b удовлетворяет условию звезд, и обозначим через f_1^y симплициальное отображение комплекса K_1^y в комплекс K_2^b , аппроксимирующее

Полученную систему отображений можно схематически изобразить так:

$$K_2 \xleftarrow{f_1^\alpha} K_1 \xleftarrow{f_2^\alpha} K_2 \xleftarrow{f_1^\gamma} K_1^\gamma.$$

Здесь стрелки указывают на наличие отображений, над стрелками стоят заданные гомеоморфные отображения, а под стрелками — аппроксимирующие их симплициальные отображения. Если в полученной схеме заменить значок α значком β , то получим другую схему отображений, которую выписывать не будем.

Симплициальным отображениям соответствуют гомоморфизмы групп гомологий. Гомоморфизмы эти схематически изобразим так:

$$B'(K_2) \xleftarrow{f_1^\alpha} B'(K_1) \xleftarrow{f_2^\alpha} B'(K_2) \xleftarrow{f_1^\gamma} B'(K_1^\gamma),$$

$$B'(K_2) \leftarrow B'(K_1) \leftarrow B'(K_2) \leftarrow B'(K_1).$$

Здесь сверху выписаны группы гомологий подразделенных комплексов, а снизу — исходных, так как и для них в силу замечания А) гомоморфизмы определены. Замечая в полученной схеме значок α значком β , мы получим другую схему, которую выписывать не будем.

Симплициальное отображение $f_{1/2}^{\alpha, f_1^\alpha}$ комплекса K_2^γ в комплекс K_2^α аппроксимирует тождественное отображение $\Phi_1 \Phi_2$ (см. § 7, D)), и потому гомоморфизм $\check{f}_1^\alpha \check{f}_2^\alpha$ группы $B'(K_2)$ самой в себя является тождественным (см. лемму). Ядро гомоморфизма $\check{f}_1^\alpha \check{f}_2^\alpha$ содержит ядро гомоморфизма \check{f}_2^α , и так как гомоморфизм $\check{f}_1^\alpha \check{f}_2^\alpha$ является тождественным, то его ядро содержит лишь нуль, поэтому мы получаем:

$$\text{Ядро гомоморфизма } \check{f}_2^\alpha \text{ содержит лишь нуль.} \quad (5)$$

Так как гомоморфизм $\check{f}_1^\alpha \check{f}_2^\alpha$ является тождественным отображением группы $B'(K_2)$ на себя, то мы имеем

$$B'(K_2) = \check{f}_1^\alpha \check{f}_2^\alpha B'(K_2) \subset \check{f}_1^\alpha B'(K_1)$$

и, следовательно,

$$\check{f}_1^\alpha B'(K_1) = B'(K_2). \quad (6)$$

Симплициальное отображение $f_2^\alpha f_1^\gamma$ комплекса K_1^γ в комплекс K_1^α аппроксимирует тождественное отображение $\varphi_2 \varphi_1$, и так же, как только что было сделано, мы получаем:

Ядро гомоморфизма \check{f}_1^γ содержит лишь нуль, (7)

$$\check{f}_2^\alpha B'(K_2) = B'(K_1). \quad (8)$$

Из (5) и (8) мы видим, что гомоморфизм \check{f}_2^α является изоморфным отображением группы $B'(K_2)$ на группу $B'(K_1)$, а так как отображение $\check{f}_1^\alpha \check{f}_2^\alpha$ является тождественным, то гомоморфизмы \check{f}_1^α и \check{f}_2^α являются взаимно обратными изоморфизмами:

$$\check{f}_1^\alpha = (\check{f}_2^\alpha)^{-1}. \quad (9)$$

Точно так же заключаем, что гомоморфизмы \check{f}_2^α и \check{f}_1^γ являются обратными изоморфизмами:

$$\check{f}_1^\gamma = (\check{f}_2^\alpha)^{-1}. \quad (10)$$

Из (9) и (10) видим, что изоморфизмы \check{f}_1^α и \check{f}_1^γ совпадают:

$$\check{f}_1^\alpha = \check{f}_1^\gamma. \quad (11)$$

Заменяя во всех проделанных рассуждениях значок α значком β , мы убеждаемся, что изоморфизмы \check{f}_1^β и \check{f}_1^γ совпадают:

$$\check{f}_1^\beta = \check{f}_1^\gamma. \quad (12)$$

Соотношения (11) и (12) дают нам совпадение гомоморфизмов \check{f}_1^α и \check{f}_1^β , а это значит, что утверждение а) доказано. Изоморфность отображения \check{f}_1^α также уже доказана и, следовательно, утверждение б) верно.

Применяя уже доказанное предложение а) к отображению φ_2 комплекса K_2 на комплекс K_1 , мы можем обозначить гомоморфизм \check{f}_2^α группы $B'(K_2)$ на группу $B'(K_1)$ через $\check{\varphi}_2$, и тогда соотношение (9) показывает, что изоморфизмы $\check{\varphi}_1$ и φ_2 взаимно обратны, т. е. утверждение с) доказано.

Итак, теорема 18 полностью доказана.

Группы гомологий полиэдра. Расширим несколько понятия полиэдра.

О п р е д е л е н и е 21. Метрическое пространство P называется *полиэдром*, если оно гомеоморфно полиэдру $|K|$ в прежнем смысле слова (см. определение 6). Если σ есть гомеоморфное отображение комплекса K на пространство P , то пару (σ, K) будем называть *триангуляцией* полиэдра P , а r -мерную группу гомологии комплекса K будем называть *r -мерной группой гомологии* этой триангуляции и обозначать через $B^r(\sigma, K)$.

Теорема 16 дает возможность говорить о группах гомологий полиэдра P , ибо группы гомологий двух различных триангуляций полиэдра P изоморфны. На основании теоремы 16 группа гомологии полиэдра P определена, однако, только с точностью до изоморфизма; элементы ее остаются не индивидуализированными. Теорема 18 приводит нас к более содержательному определению.

О п р е д е л е н и е 22. Пусть P — некоторый полиэдр, а (σ_1, K_1) и (σ_2, K_2) — две его триангуляции. Тогда $\sigma_2^{-1}\sigma_1 = \varphi$ есть топологическое отображение комплекса K_1 на комплекс K_2 , и потому в силу теоремы 18 определен изоморфизм φ группы $B^r(\sigma_1, K_1)$ на группу $B^r(\sigma_2, K_2)$. Элементы $x_1 \in B^r(\sigma_1, K_1)$ и $x_2 \in B^r(\sigma_2, K_2)$ будем считать эквивалентными, $x_1 \sim x_2$, если $x_2 = \varphi(x_1)$. Рефлексивность здесь очевидна, симметрия следует из теоремы 18, транзитивность будет доказана ниже. Совокупность всех эквивалентных между собой элементов r -мерных групп гомологий всех триангуляций полиэдра P будем считать элементом r -мерной группы гомологии $B^r(P)$ полиэдра P . Если $\xi \in B^r(P)$, а $x \in \xi$ и $x \in B^r(\sigma, K)$, то x будем называть *представителем* элемента ξ триангуляции (σ, K) . Если ξ и η — два элемента из $B^r(P)$, а x и y — их представители в триангуляции (σ, K) , то сумму $\xi + \eta$ определим, как тот элемент из $B^r(P)$, который содержит $x + y$. Независимость от случайного выбора триангуляции (σ, K) следует из теоремы 18, ибо φ есть изоморфизм.

Докажем теперь транзитивность введенного здесь понятия эквивалентности. Пусть (σ_i, K_i) , $i = 1, 2, 3$, — три произвольные триангуляции полиэдра P ; $\sigma_2^{-1}\sigma_1 = \varphi$, $\sigma_3^{-1}\sigma_2 = \psi$, а $x_i \in B^r(\sigma_i, K_i)$ — три таких элемента, что $x_1 \sim x_2$, $x_2 \sim x_3$. Это значит, что

$$x_2 = \check{\varphi}(x_1), x_3 = \check{\psi}(x_2),$$

т. е.

$$x_3 = \check{\psi}(\check{\varphi}(x_1)).$$

Покажем, что отображению $\sigma_3^{-1}\sigma_1$ соответствует изоморфизм $\check{\psi}\check{\varphi}$, равный произведению изоморфизмов $\check{\psi}$ и $\check{\varphi}$. Пусть K_3^α — произвольное подразделение комплекса K_3 . Через K_2^α обозначим настолько мелкое подразделение комплекса K_2 , что существует симплициальное отображение g комплекса K_2^α в комплекс K_3^α , аппроксимирующее отображение $\sigma_3^{-1}\sigma_2$. Через K_1^α обозначим настолько мелкое подразделение комплекса K_1 , что существует симплициальное отображение f комплекса K_1^α в комплекс K_2^α , аппроксимирующее отображение $\sigma_2^{-1}\sigma_1$. Тогда в силу теоремы 18 имеем равенства для изоморфизмов

$$\check{\psi} = \check{g}, \check{\varphi} = \check{f}, \text{ т. е. } \check{\psi}\check{\varphi} = \check{g}\check{f}.$$

Но симплициальное отображение gf аппроксимирует непрерывное отображение $\sigma_3^{-1}\sigma_2\sigma_2^{-1}\sigma_1 = \sigma_3^{-1}\sigma_1 = \psi\varphi$ (см. § 7, D)). Таким образом, топологическому отображению $\sigma_3^{-1}\sigma_1$ соответствует изоморфизм $\check{\psi}\check{\varphi}$, и транзитивность доказана.

ГЛАВА III

НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ

Если P и Q суть две геометрические фигуры, например два полиэдра, то все непрерывные отображения P в Q распадаются на классы эквивалентных между собой. Эквивалентными считаются такие два отображения, которые могут быть переведены друг в друга путем непрерывной деформации (см. определение 23). Классификация непрерывных отображений с этой точки зрения представляет собой одну из основных задач современной топологии. Задача эта находится еще в самой начальной стадии разрешения. Теория гомологий дает возможность построить некоторые инварианты классов непрерывных отображений. Если φ есть непрерывное отображение полиэдра $|K|$ в полиэдр $|L|$, то отображению φ соответствуют гомоморфизмы φ групп гомологий комплекса K в группы гомологий комплекса L (см. теорему 20). Гомоморфизмы эти оказываются инвариантами не только самого отображения φ , но и того класса отображений, к которому φ принадлежит. Так построенные инварианты естественно назвать гомологическими. Оказывается, что лишь в очень частных случаях гомологические инварианты составляют полную систему. Тем не менее инварианты эти очень важны. Первые параграфы настоящей главы будут посвящены их построению.

В случае, когда полиэдры P и Q совпадают, открывается возможность говорить о неподвижных точках непрерывного отображения φ полиэдра P самого в себя. Точка x из P называется неподвижной точкой отображения φ , если $\varphi(x) = x$.

К вопросу о существовании неподвижных точек отображения сводятся многие теоремы существования анализа, поэтому задача изучения неподвижных точек отображения занимает в топологии важное место. Решение ее значительно продвинуто и даже завершено в некотором определенном смысле. Каждой изолированной неподвижной точке отображения приписывается ее индекс: целое число — положительное, отрицательное или нуль. Доказано, что сумма индексов всех неподвижных точек данного отображения φ полиэдра P в себя выражается через гомологические инварианты отображения φ и потому не зависит от самого отображения φ , а определяется лишь классом отображения, содержащим φ . Таким образом, задачу о сумме индексов неподвижных точек следует считать решенной, но это не есть решение задачи в ее полном объеме. Может случиться, например, что сумма индексов отображения равна нулю, и невозможно, следовательно, на основе указанного результата заключить что-либо о существовании неподвижных точек, между тем данное отображение, равно как и все эквивалентные ему, может иметь неподвижные точки. Точно так же на основе упомянутого результата невозможно судить о числе различных неподвижных точек отображения. Может случиться, что суммарный индекс очень велик, а отображение имеет лишь одну неподвижную точку большого индекса. Тем не менее результат, дающий выражение суммарного индекса через гомологические инварианты, весьма важен и является одним из лучших в комбинаторной топологии. Здесь, однако, он не приводится, а рассматривается лишь случай, когда гомологический инвариант, выражающий суммарный индекс, отличен от нуля, и доказывается, что тогда отображение имеет хотя бы одну неподвижную точку.

§ 13. Гомотопные отображения

В настоящем параграфе будет дано точное определение гомотопности отображений, а также указан важный прием изучения этого понятия, опирающийся на конструкцию топологического произведения и непрерывное отображение последнего.

О п р е д е л е н и е 23. Пусть P и Q — два метрических пространства. Допустим, что каждому действительному

числу t , $0 \leq t \leq 1$, поставлено в соответствие непрерывное отображение φ_t пространства P в пространство Q . Семейство отображений φ_t будем называть *непрерывным*, если функция $\varphi_t(x)$, $x \in P$, является непрерывной функцией двух переменных: числа t и точки x . Более полно это означает, что для каждой пары значений $x = x_0$, $t = t_0$ и положительного числа ε существует положительное число δ , обладающее тем свойством, что из $\rho(x, x_0) < \delta$, $|t - t_0| < \delta$ следует

$$\rho(\varphi_t(x), \varphi_{t_0}(x_0)) < \varepsilon. \quad (1)$$

Семейство φ_t будем называть также *непрерывной деформацией* отображения φ_0 в отображение φ_1 . Два непрерывных отображения φ и ψ пространства P в пространство Q будем называть *гомотопными* или *эквивалентными*: $\varphi \sim \psi$, если существует непрерывная деформация φ_t , переводящая отображение φ в отображение ψ , т. е. если существует непрерывное семейство φ_t отображений P в Q , для которого $\varphi_0 = \varphi$, $\varphi_1 = \psi$.

Оказывается, что установленное так понятие эквивалентности обладает свойствами рефлексивности, симметрии и транзитивности, а потому может быть положено в основу разбиения всех непрерывных отображений P в Q на классы эквивалентных между собой.

Рефлексивность. Пусть φ — непрерывное отображение пространства P в пространство Q . Положим $\varphi_t = \varphi$. очевидно, что φ_t есть непрерывное семейство отображений, причем $\varphi_0 = \varphi$, $\varphi_1 = \varphi$. Таким образом, $\varphi \sim \varphi$.

Симметрия. Пусть φ и ψ — два непрерывных отображения пространства P в пространство Q , причем $\varphi \sim \psi$; это значит, что существует непрерывное семейство φ_t отображений P в Q такое, что $\varphi_0 = \varphi$, $\varphi_1 = \psi$. Положим $\psi_t = \varphi_{1-t}$. очевидно, что ψ_t также есть непрерывное семейство отображений P в Q , причем $\psi_0 = \psi$, $\psi_1 = \varphi$. Таким образом, $\psi \sim \varphi$.

Транзитивность. Пусть φ , ψ , ω — три непрерывных отображения пространства P в пространство Q такие, что $\varphi \sim \psi$ и $\psi \sim \omega$, т. е. существуют непрерывные семейства φ_t и ψ_t такие, что $\varphi_0 = \varphi$, $\varphi_1 = \psi$, $\psi_0 = \psi$, $\psi_1 = \omega$. При $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ положим $\omega_t = \varphi_{2t}$; при $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ положим $\omega_t = \psi_{2t-1}$. Заданное двумя способами отображение $\omega_{1/2}$

определено ими одинаково, ибо при первом способе $\omega_{1/2} = \varphi_1 = \psi$, а при втором способе $\omega_{1/2} = \psi_0 = \psi$. Из того, что семейства φ_t и ψ_t непрерывны, легко выводится, что и семейство ω_t непрерывно. Сверх того, мы имеем $\omega_0 = \varphi$, $\omega_1 = \omega$. Таким образом, $\varphi \sim \omega$.

Простой пример непрерывной деформации дает следующая элементарная конструкция:

А) Пусть φ и ψ — два непрерывных отображения метрического пространства P в выпуклое множество S евклидова пространства R^n ; S может быть, в частности, симплексом. Положим

$$\varphi_t(x) = (1-t)\varphi(x) + t\psi(x).$$

Из непрерывности отображений φ и ψ легко следует непрерывность семейства φ_t . Так как S выпукло, то φ_t есть отображение P в S . Сверх того, $\varphi_0 = \varphi$, $\varphi_1 = \psi$. Таким образом, два любых отображения пространства P в выпуклое множество S эквивалентны между собой. Этим вопрос о классификации отображений любого пространства в выпуклое множество решен полностью.

Важный пример эквивалентности отображений дает следующая теорема.

Теорема 19. Пусть φ — непрерывное отображение комплекса K в комплекс L , удовлетворяющее условию звезд (см. теорему 10), а f — симплициальное отображение комплекса K в комплекс L , аппроксимирующее φ . Оказывается, что тогда отображения f и φ полиэдра $|K|$ в полиэдр $|L|$ или, что то же, комплекса K в комплекс L эквивалентны между собой.

Доказательство. Будем считать, что комплекс L расположен в евклидовом пространстве R^n ; тогда φ и f суть два непрерывных отображения полиэдра $|K|$ в пространство R^n . Положим

$$\varphi_t(x) = (1-t)\varphi(x) + tf(x).$$

Очевидно, что φ_t есть непрерывное семейство отображений полиэдра $|K|$ в пространство R^n , причем $\varphi_0 = \varphi$, $\varphi_1 = f$. Остается показать, что $\varphi_t(x)$ принадлежит $|L|$. Пусть D — такой симплекс из L , что для заданной точки $x \in |K|$ имеем $\varphi(x) \in D$; тогда, согласно теореме 10, точка $f(x)$ также принадлежит D , и потому точка $\varphi_t(x)$, являющаяся точкой отрезка $(\varphi(x), f(x))$, тоже принадлежит D

виду выпуклости D . Таким образом, теорема 19 доказана.

Важное принципиальное значение теоремы 19 заключается в том, что каждое непрерывное отображение комплекса K в комплекс L эквивалентно симплициальному отображению некоторого подразделения K^α комплекса K в комплекс L . Таким образом, в каждом классе эквивалентных между собой непрерывных отображений существуют симплициальные.

Функция $\varphi_t(x)$, играющая роль при изучении непрерывных деформаций, является функцией двух переменных, и потому ее естественно записать в обычной для двух переменных форме: $\varphi_t(x) = \varphi(x, t)$. С другой стороны, понятие прямого произведения метрических пространств дает возможность рассматривать пару переменных x, t как точку нового метрического пространства, и тем самым открывается возможность заменить непрерывное семейство отображений одним непрерывным отображением. Такова роль понятия прямого произведения в интересующем нас вопросе; его значение в топологии не исчерпывается, конечно, этим простым приложением.

Определение 24. Пусть R и S — два метрических пространства; их *прямое произведение* $R \times S$ определим так: точкой z пространства $R \times S$ назовем любую пару $x, y, z = (x, y)$, где $x \in R, y \in S$. Расстояние между двумя точками z и $z' = (x', y')$ пространства $R \times S$ определим, положив

$$\rho(z, z')^2 = \rho(x, x')^2 + \rho(y, y')^2; \quad (2)$$

легко проверяется, что $R \times S$ есть метрическое пространство (см. Обозначения, Н); в частности, если R и S суть евклидовы пространства размерностей r и s , то произведение $R \times S$ является евклидовым пространством размерности $r + s$. Без труда проверяется, что если φ есть гомотопное отображение пространства R на пространство R^* , а ψ — гомотопное отображение пространства S на пространство S^* , то отображение, ставящее в соответствие паре (x, y) пару $(\varphi(x), \psi(y))$, дает гомотопное отображение пространства $R \times S$ на пространство $R^* \times S^*$. Это показывает, что понятие прямого произведения имеет топологически инвариантный смысл.

Применим теперь понятие прямого произведения к вопросу о непрерывных деформациях.

В) Пусть φ_t — непрерывное семейство отображений метрического пространства P в метрическое пространство Q . Через J обозначим отрезок $0 \leq t \leq 1$ числовой прямой; J , естественно, есть метрическое пространство. Положим $\Phi(z) = \Phi(x, t) = \varphi_t(x)$, где $z = (x, t)$. Функция Φ ставит в соответствие каждой точке $z \in P \times J$ точку $\Phi(z) \in Q$. Оказывается, что Φ есть непрерывное отображение пространства $P \times J$ в пространство Q . Пусть далее Ψ — произвольное непрерывное отображение пространства $P \times J$ в пространство Q . Положим $\psi_t(x) = \Psi(x, t) = \Psi(z)$, где $(x, t) = z$; ψ_t есть семейство отображений пространства P в пространство Q . Оказывается, что семейство это непрерывно.

Докажем непрерывность отображения Φ , исходя из непрерывности семейства φ_t . Пусть ε — положительное число и δ — то положительное число, которое существует в силу непрерывности семейства φ_t и которое обеспечивает неравенство (1). Допустим, что $\rho((x, t), (x_0, t_0)) < \delta$, тогда

$$\rho(x, x_0) < \delta, \quad |t - t_0| < \delta \quad (3)$$

(см. (2)). Из (3) в силу (1) получаем

$$\rho(\Phi(x, t), \Phi(x_0, t_0)) = \rho(\varphi_t(x), \varphi_{t_0}(x_0)) < \varepsilon.$$

Докажем непрерывность семейства ψ_t , исходя из непрерывности отображения Ψ . Так как Ψ непрерывно, то при заданной точке (x_0, t_0) для положительного ε существует такое положительное число $\delta' = \delta\sqrt{2}$, что из $\rho((x, t), (x_0, t_0)) < \delta'$ следует

$$\rho(\Psi(x, t), \Psi(x_0, t_0)) < \varepsilon. \quad (4)$$

Если теперь $\rho(x, x_0) < \delta$, $|t - t_0| < \delta$, то

$$\rho((x, t), (x_0, t_0)) < \delta'$$

(см. (2)), и потому в силу (4) имеем

$$\rho(\psi_t(x), \psi_{t_0}(x_0)) = \rho(\Psi(x, t), \Psi(x_0, t_0)) < \varepsilon.$$

Таким образом, предложение В) доказано.

§ 14. Цилиндрическая конструкция

В настоящем параграфе будет рассмотрено прямое произведение полиэдра $|K|$ на отрезок J . Будет показано, что $|K| \times J$ есть полиэдр. Некоторое вполне определенное разбиение $|K| \times J$ на симплексы мы обозначим через $K \times J$; таким образом, $K \times J$ представляет собой комплекс, однозначно определяемый комплексом K , причем $|K \times J| = |K| \times J$. Далее будут исследованы некоторые гомологические свойства $K \times J$. Роль прямого произведения пространства на отрезок J была уже указана в предыдущем параграфе, полностью она выяснится в следующем.

Геометрия цилиндра. А) Пусть F — некоторое подмножество евклидова пространства R^m . Будем считать, что R^m расположено в евклидовом пространстве R^{m+1} и обозначим через e единичный вектор из R^{m+1} , ортогональный к R^m . Через J обозначим множество всех чисел t , $0 \leq t \leq 1$. Очевидно, что множество всех точек вида $z = x + te$, где $x \in F$, $t \in J$, изометрично прямому произведению $F \times J$. Множество это и будем обозначать теперь через $F \times J$. Множество $F \times J$ естественно назвать *цилиндром*, построенным на F . Нижним основанием цилиндра $F \times J$ будем считать множество $F \times 0$, а верхним — множество $F \times 1$; здесь 0 и 1 суть элементы множества J . Оказывается, что если F есть выпуклое множество из R^m , то $F \times J$ — выпуклое множество из R^{m+1} (см. § 1, G)). Далее, если $F = W$ есть выпуклое тело из R^m с границей V , то $W \times J$ есть выпуклое тело из R^{m+1} с границей, равной $V \times J \cup W \times 0 \cup W \times 1$. Таким образом, граница выпуклого тела $W \times J$ состоит из боковой поверхности $V \times J$ и двух оснований $W \times 0$ и $W \times 1$.

Допустим, что F выпукло, и покажем, что $F \times J$ также выпукло. Пусть

$$z_p = x_p + t_p e, \quad x_p \in F, \quad t_p \in J, \quad p = 1, 2,$$

— две точки из $F \times J$; тогда точка $z = \alpha z_1 + \beta z_2$, принадлежащая отрезку (z_1, z_2) , записывается в форме

$$z = \alpha x_1 + \beta x_2 + (\alpha t_1 + \beta t_2) e, \quad (1)$$

где $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$. В силу выпуклости F точка

$\alpha x_1 + \beta x_2$ принадлежит F , а из $t_1 \in J, t_2 \in J$ непосредственно вытекает $\alpha t_1 + \beta t_2 \in J$.

Перейдем теперь к рассмотрению выпуклого тела $F = W$. Из компактности W непосредственно вытекает компактность $W \times J$. Обозначим далее через U множество всех внутренних точек тела W . Покажем, что если $x_0 \in U, 0 < t_0 < 1$, то $z_0 = x_0 + t_0 e$ есть внутренняя точка выпуклого множества $W \times J$. Так как x_0 есть внутренняя точка W , то существует настолько малое положительное ε , что из $x \in R^m$ и $\rho(x, x_0) < \varepsilon$ следует $x \in W$. В случае надобности ε можно так уменьшить, что из $|t - t_0| < \varepsilon$ следует $0 < t < 1$. Положим $z = x + te$. Если теперь $\rho(z, z_0) < \varepsilon$, то $\rho(x, x_0) < \varepsilon$ и $|t - t_0| < \varepsilon$; таким образом, $z \in W \times J$, и, следовательно, z_0 есть внутренняя точка $W \times J$.

Пусть теперь $z_0 = x_0 + t_0 e$ — точка из $W \times J$, принадлежащая боковой поверхности $V \times J$ цилиндра $W \times J$, т. е. такая, что $x_0 \in V$. Покажем, что z_0 есть граничная точка $W \times J$. Так как x_0 есть граничная точка W , то существует точка $x \in R^m$, произвольно близкая к x_0 и не принадлежащая W . Тогда точка $z = x + t_0 e$ не принадлежит $W \times J$ и произвольно близка к z_0 . Таким образом, z_0 есть граничная точка $W \times J$. Пусть $z_0 = x_0 + 0e$ — произвольная точка нижнего основания цилиндра $W \times J$; тогда в произвольной близости от нее существует точка $z = x_0 - \varepsilon e$, уже не принадлежащая $W \times J$, и потому z_0 есть граничная точка $W \times J$. Точно так же, если $z_0 = x_0 + e$ есть точка верхнего основания, то в произвольной близости от нее имеется точка $x_0 + (1 + \varepsilon)e$, уже не принадлежащая $W \times J$, и потому z_0 есть граничная точка множества $W \times J$.

Таким образом, предложение А) доказано.

В) Пусть $F = A^r = (a_0, a_1, \dots, a_r)$ — симплекс евклидова пространства $R^m, R^m \subset R^{m+1}$, и e — единичный вектор, ортогональный к R^m (см. А)). Цилиндр $A^r \times J = P^{r+1}$ будем называть *призмой*. Совокупность всех истинных граний симплекса A^r обозначим через S и боковую поверхность призмы P^{r+1} определим как $|S| \times J$. Полную границу призмы P^{r+1} определим как $|S| \times J \cup A^r \times 0 \cup A^r \times 1 = Q^r$. Точки призмы P^{r+1} , не принадлежащие ее границе Q^r , будем называть внутренними ее точками. Одной из внутренних точек является центр $\sigma + \frac{1}{2}e$ призмы P^{r+1} (здесь σ — центр симплекса A^r). Оказывается, что если κ

есть внутренняя точка призмы P^{r+1} , то κ находится в общем положении к Q^r (см. § 8, A), и $\kappa(Q^r) = P^{r+1}$.

Пусть $x = \lambda^0 a_0 + \dots + \lambda^r a_r$ — произвольная точка симплекса A^r ; тогда точка $z = x + te$ призмы P^{r+1} однозначно определяется числами $\lambda^0, \dots, \lambda^r, t$, которые мы будем называть *внутренними координатами* точки z призмы P^{r+1} . Очевидно, что точка z является внутренней точкой призмы P^{r+1} тогда и только тогда, когда все числа λ^i для нее положительны, а t удовлетворяет неравенствам $0 < t < 1$. Таким образом, свойство точки быть внутренней или граничной формулируется в терминах ее внутренних координат.

Пусть $x_p = \lambda_p^0 a_0 + \dots + \lambda_p^r a_r$, $p = 1, 2$, — две точки из A^r . Тогда соотношение (1) переписывается в форме

$$z = (\alpha\lambda_1^0 + \beta\lambda_2^0)a_0 + \dots + (\alpha\lambda_1^r + \beta\lambda_2^r)a_r + (\alpha t_1 + \beta t_2)e, \quad (2)$$

или, иначе,

$$\lambda^0 = \alpha\lambda_1^0 + \beta\lambda_2^0, \dots, \lambda^r = \alpha\lambda_1^r + \beta\lambda_2^r, \quad t = \alpha t_1 + \beta t_2. \quad (3)$$

Таким образом, свойство точки z принадлежать отрезку (z_1, z_2) формулируется в терминах внутренних координат призмы.

Ввиду сказанного, утверждения, высказанные в B), достаточно доказать для какого-либо одного r -мерного симплекса, в частности можно предположить, что $m=r$, т. е. симплекс A^r лежит в r -мерном евклидовом пространстве R^r . В этом случае A^r — выпуклое тело в R^r (см. § 8, B)), а потому в силу A) P^{r+1} есть выпуклое тело в R^{r+1} , причем граница Q^r призмы P^{r+1} является теперь границей выпуклого тела P^{r+1} . Для выпуклого тела P^{r+1} и его границы Q^r утверждения, высказанные в B), уже были доказаны (см. § 8, (1)).

Перейдем теперь к построению комплекса $K \times J$, т. е. к подразделению на симплексы пространства $|K| \times J$. Множество $|K| \times J$ составлено из призм $A^r \times J = P^{r+1}$, где A^r есть симплекс из K ; поэтому, для того чтобы разбить $|K| \times J$ на симплексы, нужно указать, как разбиваются на симплексы призмы P^{r+1} . При $r=0$ призма P^1 представляется собой отрезок, т. е. одномерный симплекс, и не нуждается в разбиении. Пусть теперь $r > 0$; тогда S есть $(r-1)$ -мерный комплекс, и мы можем считать, что комплекс $S \times J$ уже определен. Присоединим к комплексу

$S \times J$ два симплекса $A' \times 0$ и $A' \times 1$, и полученный так комплекс обозначим через C^r . Тогда $|C^r| = Q^r$, и ввиду В) мы можем построить комплекс $\kappa(C^r)$, где κ есть центр призмы P^{r+1} . Совокупность симплексов комплекса $\kappa(C^r)$ и составляет разбиение призмы P^{r+1} на симплексы. Такова в общих чертах конструкция комплекса $K \times J$; перейдем к ее формальному описанию.

С) Пусть K — комплекс, расположенный в евклидовом пространстве $R^m \subset R^{m+1}$ (см. А), В)). Комплексу K поставим в соответствие вполне определенный комплекс $K \times J$, расположенный в R^{m+1} и называемый *цилиндром* над комплексом K .

Если A — произвольный симплекс комплекса K , то через $K \times 0$ обозначим совокупность всех симплексов вида $A \times 0$, а через $K \times 1$ — совокупность всех симплексов вида $A \times 1$; $K \times 0$ и $K \times 1$, очевидно, суть комплексы. В случае нульмерного комплекса K комплекс $K \times J$ определим как совокупность всех симплексов, входящих в $K \times 0$ и $K \times 1$, и всех отрезков вида $a \times J$, где a — вершина комплекса K .

Будем считать теперь, что для n -мерного комплекса K комплекс $K \times J$ уже определен так, что при этом выполнены условия: а) $|K \times J| = |K| \times J$; б) если L есть подкомплекс комплекса K , то $L \times J$ есть подкомплекс комплекса $K \times J$; с) $K \times 0$ и $K \times 1$ суть подкомплексы комплекса $K \times J$. Определим теперь комплекс $K \times J$ для $(n+1)$ -мерного комплекса K . Для этого обозначим через M n -мерный остов комплекса K , а через $A_1^{n+1}, \dots, A_k^{n+1}$ — совокупность всех $(n+1)$ -мерных его симплексов. Множество всех истинных граней симплекса A_i^{n+1} обозначим через S_i , а центр призмы $P_i = A_i^{n+1} \times J$ — через κ_i . К комплексу $S_i \times J$ присоединим симплексы $A_i^{n+1} \times 0$ и $A_i^{n+1} \times 1$ и полученный так комплекс обозначим через C_i . Через $K \times J$ обозначим теперь совокупность всех симплексов, принадлежащих комплексам $M \times J$ и $\kappa_i(C_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$. Оказывается, что $K \times J$ есть комплекс, причем условия а), б) и с) для него выполнены.

Для того чтобы не проводить отдельно совершенно одинаковых рассуждений применительно к комплексам $K \times 0$ и $K \times 1$, будем считать, что p есть число, равное 0 или 1.

Покажем прежде всего, что

при $P \in M \times J$

симплексы P и $A_i^{n+1} \times p$ расположены правильно. (4)

Мы имеем $P \subset |M \times J| = |M| \times J$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} P \cap (A_i^{n+1} \times p) &\subset (|M| \times J) \cap (A_i^{n+1} \times p) \subset \\ &\subset (|M| \times p) \cap (A_i^{n+1} \times p) = |S_i| \times p. \end{aligned} \quad (5)$$

Так как $S_i \times p$ есть подкомплекс комплекса $M \times p$, а последний в силу с) является подкомплексом комплекса $M \times J$, то $S_i \times p$ есть подкомплекс комплекса $M \times J$. Обозначим через $a_1 \times p, \dots, a_r \times p$ совокупность всех вершин симплекса $P \in M \times J$, принадлежащих подкомплексу $S_i \times p$ комплекса $M \times J$. Точки a_0, \dots, a_r суть вершины симплекса A_i^{n+1} ; натянутую на них грань его мы обозначим через D . $D \times p$ есть общая грань симплексов P и $A_i^{n+1} \times p$, так что для доказательства (4) нам достаточно показать, что

$$P \cap (A_i^{n+1} \times p) = D \times p. \quad (6)$$

Если бы имело место равенство $D = A_i^{n+1}$ (это, впрочем, невозможно в силу (5)), то соотношение (6) было бы верно. Таким образом, нужно рассмотреть случай, когда D есть истинная грань симплекса A_i^{n+1} и принадлежит, следовательно, комплексу S_i . В силу (5) для доказательства (6) нам достаточно показать, что

$$P \cap (|S_i| \times p) = D \times p. \quad (7)$$

Пусть E — произвольный симплекс из S_i ; так как P и $E \times p$ суть симплексы одного комплекса $M \times J$, то пересечение P и $E \times p$ представляет собой симплекс, натянутый на общие вершины P и $E \times p$, но общие вершины P и $S_i \times p$ все принадлежат симплексу $D \times p$, и потому $E \subset D$. Таким образом, (7) установлено, а из него следует (6) и затем (4).

Из (4) прежде всего вытекает, что C_i есть комплекс. В самом деле, C_i получено присоединением к комплексу $S_i \times J$ обоих симплексов $A_i^{n+1} \times p$, $p = 0, 1$. Симплексы $A_i^{n+1} \times 0$ и $A_i^{n+1} \times 1$ не пересекаются и потому располо-

жены правильно. Далее, если $P \in S_i \times J$, то в силу b) $P \in M \times J$, и потому, на основании (4), симплексы P и $A_i^{n+1} \times p$ расположены правильно. Таким образом, условие 2 определения 5 выполнено для C_i . Условие 1 определения 5 выполняется также, ибо все истинные грани симплекса $A_i^{n+1} \times p$ входят в $S_i \times p$, а последний в силу с) есть подкомплекс комплекса $S_i \times J$. Таким образом, употребленный нами комплекс $\kappa_i(C_i)$ действительно существует (см. B) и § 8, D)).

Так как $K \times J$ определено как совокупность симплексов, принадлежащих к нескольким комплексам, то очевидно, что для $K \times J$ выполнено условие 1 определения 5. Покажем, что и условие 2 определения 5 выполнено для $K \times J$. Пусть P и Q — два симплекса из $K \times J$. Рассмотрим три различных случая.

Случай 1. Если P и Q оба принадлежат $M \times J$, то они расположены правильно в силу того, что $M \times J$ есть комплекс.

Случай 2. $P \in M \times J$, $Q \in \kappa_i(C_i)$. Так как все симплексы комплекса $\kappa_i(C_i)$ суть грани симплексов вида $\kappa_i(B)$, $B \in C_i$, то можно считать, что $Q = \kappa_i(B)$. Мы имеем $P \subset |M| \times J$, $Q = \kappa_i(B) \subset |\kappa_i(C_i)| = P_i = A_i^{n+1} \times J$, и потому $P \cap Q \subset (|M| \times J) \cap (A_i^{n+1} \times J) = |S_i| \times J \subset |C_i|$. Так как, сверх того, $\kappa_i(B) \cap |C_i| = B$, то $P \cap Q \subset P \cap B$. Если $B = A_i^{n+1} \times p$, то в силу (4) P и B расположены правильно, и потому P и Q также расположены правильно (см. § 2, D)). Если $B \in S_i \times J \subset M \times J$, то P и B расположены правильно, как симплексы одного комплекса $M \times J$, и потому P и Q также расположены правильно (см. § 2, D)).

Случай 3. $P \in \kappa_i(C_i)$, $Q \in \kappa_j(C_j)$. При $i = j$ симплексы P и Q принадлежат одному комплексу и потому расположены правильно. Будем считать, что $i \neq j$, тогда, как и в случае 2, мы можем считать, что $P = \kappa_i(A)$, $A \in C_i$, $Q = \kappa_j(B)$, $B \in C_j$. Из $i \neq j$, далее, легко следует, что $P \cap Q \subset |C_i| \cap |C_j|$, а так как $\kappa_i(A) \cap |C_i| = A$ и $\kappa_j(B) \cap |C_j| = B$, то $P \cap Q \subset A \cap B$. Если $A = A_i^{n+1} \times p$, $B = A_j^{n+1} \times p'$, то A и B , очевидно, расположены правильно, так как либо они вовсе не пересекаются при $p \neq p'$, либо принадлежат одному комплексу $K \times p$ при $p = p'$. Если $A \in S_i \times J$, $B = A_j^{n+1} \times p$, то дело сводится к (4). Если

$A \in S_i \times J$, $B \in S_j \times J$, то симплексы A и B оба принадлежат комплексу $M \times J$ и потому расположены правильно. Таким образом, A и B всегда расположены правильно, а отсюда вытекает и правильность расположения симплексов P и Q (см. § 2, D)).

Итак, установлено, что построенная нами совокупность $K \times J$ симплексов составляет комплекс.

Докажем а). Мы имеем $|K \times J| = |M \times J| \cup \bigcup | \varkappa_1(C_1) \cup \dots \cup | \varkappa_k(C_k) |$. Далее $|K| \times J = |M| \times J \cup |M \times J| = |M| \times J \cup \dots \cup P_k$. В силу предположения индукции $|M \times J| = |M| \times J$. Сверх того, $|C_i|$ составляет множество всех граничных точек призмы P_i (см. B)), ибо, по предположению индукции, $|S_i \times J| = |S_i| \times J$ составляет боковую поверхность призмы P_i . Таким образом, $| \varkappa_i(C_i) | = \varkappa_i(|C_i|) = P_i$. Итак, мы видим, что $|K \times J| = |K| \times J$.

Докажем б). Пусть L — подкомплекс комплекса K , N — его n -мерный остов, и $A_1^{n+1}, \dots, A_l^{n+1}$ — совокупность всех $(n+1)$ -мерных симплексов комплекса L , $l \leq k$. Тогда, по предположению индукции, $N \times J$ есть подкомплекс комплекса $M \times J$. Далее $L \times J$ составлен из всех симплексов, принадлежащих комплексам $N \times J$ и $\varkappa_j(C_j)$, $j=1, \dots, l$, а K составлен из всех симплексов, принадлежащих комплексам $M \times J$ и $\varkappa_i(C_i)$, $i=1, \dots, k$. Таким образом, мы видим, что $L \times J$ есть подкомплекс комплекса $K \times J$.

Докажем с). Комплекс $K \times p$, очевидно, состоит из всех симплексов комплекса $M \times p$ и симплексов $A_i^{n+1} \times p$, $i=1, \dots, k$. По предположению индукции, $M \times p$ есть подкомплекс комплекса $M \times J \subset K \times J$, а симплекс $A_i^{n+1} \times p$ входит в комплекс $\varkappa_i(C_i)$; таким образом, $K \times p$ есть подкомплекс комплекса $K \times J$.

Очевидно, что комплекс $K \times J$ имеет размерность на единицу больше, чем комплекс K .

Алгебра цилиндра. После того как комплекс $K \times J$ построен, перед нами стоит задача поставить в соответствие каждой r -мерной цепи x из K $(r+1)$ -мерную цепь $x \times J$ из $K \times J$ по той же группе коэффициентов, по которой была дана исходная цепь x .

D) Пусть K — некоторый комплекс, $K \times J$ — цилиндр, построенный на нем (см. C)), и p — число, принимающее значение 0 или 1. Поставим в соответствие ориентиро-

ванному симплексу $A^r = \varepsilon(a_0, \dots, a_r)$ из K r -мерный ориентированный симплекс $A^r \times p = \varepsilon(a_0, p), \dots, (a_r, p)$ из $K \times p$. Если далее $x = g_1 A_1^r + \dots + g_k A_k^r$ — произвольная r -мерная цепь из K , то положим

$$x \times p = g_1(A_1^r \times p) + \dots + g_k(A_k^r \times p).$$

При этом имеет место очевидное соотношение для границы

$$\Delta(x \times p) = (\Delta x) \times p. \quad (8)$$

Перейдем теперь к построению цепи $x \times J$.

Б) Пусть K_1^r — некоторый комплекс, $K \times J$ — построенный на нем цилиндр (см. С)) и $x = g_1 A_1^r + \dots + g_k A_k^r$ — произвольная r -мерная цепь из K по группе коэффициентов G . Цепи x поставим в соответствие $(r+1)$ -мерную цепь $x \times J$ из $K \times J$ по группе G , называемую цилиндром, построенным на x . Если для простейшей целочисленной цепи — ориентированного симплекса A_i^r — цепь $A_i^r \times J$ уже определена, то положим

$$x \times J = g_1(A_1^r \times J) + \dots + g_k(A_k^r \times J). \quad (9)$$

Цепь $A_i^r \times J$ будем строить индуктивно по размерности r . Для нульмерного ориентированного симплекса $A^0 = +a$ цепь $A^0 \times J$ определим следующим образом. В комплексе $K \times J$ имеется отрезок $a \times J$ с концами $a \times 0$ и $a \times 1$; ориентируем его в направлении от $a \times 0$ к $a \times 1$ и примем за $A^0 \times J$, т. е. положим $A^0 \times J = +(a \times 0, a \times 1)$. Для границы мы имеем

$$\Delta(A^0 \times J) = +(a \times 1) - (a \times 0) = A^0 \times 1 - A^0 \times 0.$$

Отсюда в силу (9) для любой нульмерной цепи x^0 будем иметь

$$\Delta(x^0 \times J) = x^0 \times 1 - x^0 \times 0. \quad (10)$$

Допустим теперь, что для n -мерных цепей операция построения цилиндра уже определена, при этом так, что имеет место соотношение

$$\Delta(x \times J) = x \times 1 - x \times 0 - (\Delta x) \times J. \quad (11)$$

Заметим, что при $n=0$ соотношение (11) переходит в (10). Определим теперь операцию построения цилиндра для

$(n+1)$ -мерной цепи. Для этого обозначим через $A_1^{n+1}, \dots, A_k^{n+1}$ совокупность всех как-либо ориентированных $(n+1)$ -мерных симплексов комплекса K и в остальном будем придерживаться обозначений, данных в С). Цепь ΔA_i^{n+1} имеет размерность n и составлена из симплексов комплекса S_i , поэтому определена цепь $(\Delta A_i^{n+1}) \times J$, составленная из симплексов комплекса $S_i \times J$. Составим теперь цепь $u_i = A_i^{n+1} \times 1 - A_i^{n+1} \times 0 - (\Delta A_i^{n+1}) \times J$, принадлежащую комплексу C_i . В комплексе $\varkappa_i(C_i)$ существует, таким образом, цепь $\varkappa_i(u_i)$ (см. § 8, E)). Положим

$$A_i^{n+1} \times J = \varkappa_i(u_i) = \varkappa_i(A_i^{n+1} \times 1 - A_i^{n+1} \times 0 - (\Delta A_i^{n+1}) \times J). \quad (12)$$

После того как цилиндр $A_i^{n+1} \times J$ построен, он по формуле (9) строится и для любой $(n+1)$ -мерной цепи x . Оказывается при этом, что соотношение (11) вновь выполнено.

Соотношение (11) достаточно доказать для простейшей $(n+1)$ -мерной цепи $x = A_i^{n+1}$. Так как для n -мерной цепи ΔA_i^{n+1} соотношение (11) имеет место в силу предположения индукции, то

$$\begin{aligned} \Delta((\Delta A_i^{n+1}) \times J) &= (\Delta A_i^{n+1}) \times 1 - (\Delta A_i^{n+1}) \times 0 - (\Delta \Delta A_i^{n+1}) \times J = \\ &= (\Delta A_i^{n+1}) \times 1 - (\Delta A_i^{n+1}) \times 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Далее мы имеем в силу (8) и (13)

$$\Delta u_i = (\Delta A_i^{n+1}) \times 1 - (\Delta A_i^{n+1}) \times 0 - \Delta((\Delta A_i^{n+1}) \times J) = 0. \quad (14)$$

Теперь граница цепи $\varkappa_i(u_i) = A_i^{n+1} \times J$ вычисляется на основании соотношения (11) § 8, именно, мы имеем

$$\begin{aligned} \Delta(A_i^{n+1} \times J) &= \Delta \varkappa_i(u_i) = u_i - \varkappa_i(\Delta u_i) = u_i = \\ &= A_i^{n+1} \times 1 - A_i^{n+1} \times 0 - (\Delta A_i^{n+1}) \times J. \end{aligned}$$

Таким образом, соотношение (11) верно для $x = A_i^{n+1}$.

Соотношение (11) приводит нас к основному выводу:

F) Если z — цикл из K , то циклы $z \times 1$ и $z \times 0$ гомогичны в $K \times J$.

В самом деле, в силу (11) при $\Delta z = 0$ имеем

$$\Delta(z \times J) = z \times 1 - z \times 0, \quad \text{т. е. } z \times 1 \sim z \times 0 \text{ в } K \times J.$$

§ 15. Гомологические инварианты непрерывных отображений

В настоящем параграфе каждому непрерывному отображению ω полиэдра P в полиэдр Q будут поставлены в соответствие гомоморфизмы групп гомологий полиэдра P в группы гомологий полиэдра Q ; при этом окажется, что двум эквивалентным отображениям ω_0 и ω_1 ставятся в соответствие одинаковые гомоморфизмы. Этот результат является центральным для всей гомологической теории непрерывных отображений.

Гомоморфизмы для комплексов. Лемма 1. Пусть f_0, f_1 — два эквивалентных между собой симплициальных отображения комплекса K в комплекс L . Если z — произвольный цикл из K , то оказывается, что $\hat{f}_0(z) \sim \hat{f}_1(z)$, т. е. гомоморфизмы \hat{f}_0 и \hat{f}_1 группы $B^r(K)$ в группу $B^r(L)$ одинаковы.

Доказательство. Пусть f_t — то непрерывное семейство отображений комплекса K в комплекс L , которое связывает заданные отображения f_0 и f_1 . Как и в § 13, B), положим $f(x, t) = f_t(x)$, $x \in |K|$, $t \in J$; тогда f есть непрерывное отображение комплекса $K \times J$ в комплекс L . Отображение f не симплициально на всем комплексе $K \times J$, но на его подкомплексах $K \times 0$ и $K \times 1$ оно симплициально ввиду симплициальности отображений f_0 и f_1 ; поэтому для цепей из $K \times 0$ и $K \times 1$ существует алгебраическое отображение \hat{f} ; и в силу самого его определения мы имеем равенства

$$\hat{f}_0(z) = \hat{f}(z \times 0), \quad \hat{f}_1(z) = \hat{f}(z \times 1), \quad (1)$$

где z — произвольный цикл из K .

Пусть $(K \times J)^\alpha$ — настолько мелкое подразделение комплекса $K \times J$, что существует симплициальное отображение g комплекса $(K \times J)^\alpha$ в комплекс L , аппроксимирующее отображение f . Так как $z \times 0 \sim z \times 1$ в $K \times J$ (см. § 14, F)), то $(z \times 0)^\alpha \sim (z \times 1)^\alpha$ в $(K \times J)^\alpha$ (см. § 9, E)), а из последнего в силу § 7, F) заключаем:

$$\hat{g}((z \times 0)^\alpha) \sim \hat{g}((z \times 1)^\alpha). \quad (2)$$

Симплициальное отображение g аппроксимирует отображение f комплекса $(K \times J)^\alpha$; то же верно и для лю-

бого подкомплекса комплекса $(K \times J)^\alpha$. Таким образом, симплициальное отображение g комплекса $(K \times 0)^\alpha$ аппроксимирует симплициальное же отображение f комплекса $K \times 0$, и в силу леммы § 12 мы заключаем:

$$\hat{g}((z \times 0)^\alpha) = \hat{f}(z \times 0). \quad (3)$$

Точно так же устанавливаем:

$$\hat{g}((z \times 1)^\alpha) = \hat{f}(z \times 1). \quad (4)$$

Сравнивая соотношения (1), (2), (3), (4), получаем

$$\hat{f}_0(z) \sim \hat{f}_1(z).$$

Таким образом, лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть K и L — два комплекса, K^α и K^β — два подразделения комплекса K , L^α и L^β — два подразделения комплекса L , f^α — симплициальное отображение комплекса K^α в комплекс L^α , f^β — симплициальное отображение комплекса K^β в комплекс L^β . Оказывается, что если отображения f^α и f^β эквивалентны, то гомоморфизмы f^α и f^β группы $B^r(K)$ в группу $B^r(L)$ (см. § 12, A) совпадают.

Доказательство. Пусть K^1 — то из подразделений K^α и K^β , которое мельче; таким образом, K^1 является подразделением обоих подразделений K^α и K^β . Пусть далее L^1 — то из подразделений L^α и L^β , которое крупнее, таким образом, L^α и L^β являются подразделениями подразделения L^1 .

В сказанном значки α и β равноправны; дальнейшее построение мы будем вести для значка α , имея в виду, что его можно полностью повторить и для значка β .

Пусть e — тождественное отображение комплекса K^α самого на себя, а e^α — симплициальное отображение комплекса K^1 в комплекс K^α , аппроксимирующее отображение e . В силу теоремы 19 существует непрерывное семейство e_t , связывающие отображения e и e^α . Пусть далее g — тождественное отображение комплекса L^1 самого на себя, а g^α — симплициальное отображение комплекса L^α в комплекс L^1 , аппроксимирующее отображение g . В силу теоремы 19 существует непрерывное семейство g_t , связывающее отображения g и g^α . Имеющуюся систему

отображений можно схематически изобразить так:

$$L^{\gamma} \xleftarrow{g^{\alpha}} L^{\alpha} \xleftarrow{f^{\alpha}} K^{\alpha} \xleftarrow{e^{\alpha}} K^{\gamma};$$

здесь стрелки указывают на наличие отображений, сверху стоят исходные отображения, а под ними — аппроксимирующие их симплициальные. Отображение f^{α} можно считать аппроксимирующим самое себя. Рассмотрим семейство непрерывных отображений $g_i f^{\alpha} e_i$ комплекса K^{γ} в комплекс L^{γ} ; нетрудно видеть, что оно непрерывно, а так как $g_0 f^{\alpha} e_0 = f^{\alpha}$, $g_1 f^{\alpha} e_1 = g^{\alpha} f^{\alpha} e^{\alpha}$, то получаем

$$f^{\alpha} \sim g^{\alpha} f^{\alpha} e^{\alpha}. \quad (5)$$

Полученным симплициальным отображением соответствуют гомоморфизмы групп гомологий, что схематически можно записать так:

$$B^{\gamma}(L^{\gamma}) \xleftarrow{g^{\alpha}} B^{\gamma}(L^{\alpha}) \xleftarrow{f^{\alpha}} B^{\gamma}(K^{\alpha}) \xleftarrow{e^{\alpha}} B^{\gamma}(K^{\gamma}),$$

$$B^{\gamma}(L) \leftarrow B^{\gamma}(L) \leftarrow B^{\gamma}(K) \leftarrow B^{\gamma}(K).$$

Здесь сверху выписаны группы гомологий подразделенных комплексов, для которых и определены гомоморфизмы, а снизу — группы гомологий исходных комплексов, так как для этих групп гомоморфизмы также определены (см. § 12, A). Так как отображение g^{α} аппроксимирует тождественное, то в силу § 12, D) соответствующий ему гомоморфизм \check{g}^{α} группы $B^{\gamma}(L)$ в группу $B^{\gamma}(K)$ является тождественным. Точно так же отображению e^{α} соответствует тождественный гомоморфизм e^{α} группы $B^{\gamma}(K)$ на себя. Таким образом, для гомоморфизмов мы имеем

$$\check{f}^{\alpha} = \check{g}^{\alpha} \check{f}^{\alpha} e^{\alpha}. \quad (6)$$

Повторяя те же построения для значка β , получаем для непрерывных отображений

$$f^{\beta} \sim g^{\beta} f^{\beta} e^{\beta}; \quad (7)$$

для гомоморфизмов

$$\check{f}^{\beta} = \check{g}^{\beta} \check{f}^{\beta} e^{\beta}. \quad (8)$$

По предположению, $f^{\alpha} \sim f^{\beta}$; следовательно, в силу (5) и (7) можно написать:

$$g^{\alpha} f^{\alpha} e^{\alpha} \sim g^{\beta} f^{\beta} e^{\beta}. \quad (9)$$

Так как $g^\alpha f^\alpha e^\alpha$ и $g^\beta f^\beta e^\beta$ суть два симплициальных отображения комплекса K^1 в комплекс L^1 , то в силу (9), леммы 1 настоящего параграфа и § 7, G) получаем для гомоморфизмов

$$\check{g}^\alpha \check{f}^\alpha e^\alpha = \check{g}^\beta \check{f}^\beta e^\beta. \quad (10)$$

Сравнивая соотношения (6), (8) и (10), мы получаем для гомоморфизмов

$$\check{f}^\alpha = \check{f}^\beta.$$

Таким образом, лемма 2 доказана.

Теорема 20. Пусть φ_0 — непрерывное отображение комплекса K в комплекс L , L^α — произвольное подразделение комплекса L , K^α — такое подразделение комплекса K , что существует симплициальное отображение f^α комплекса K^α в комплекс L^α , аппроксимирующее отображение φ_0 . Оказывается, что гомоморфизм \check{f}^α группы $B^r(K)$ в группу $B^r(L)$ не зависит от случайного выбора подразделений K^α и L^α , а также от аппроксимации f^α , но определяется лишь исходным отображением φ_0 , поэтому гомоморфизм \check{f}^α мы обозначим просто через $\check{\varphi}_0$, $\check{\varphi}_0(B^r(K)) \subseteq B^r(L)$. Более того, оказывается что если φ_0 и φ_1 — два эквивалентных отображения комплекса K в комплекс L , то соответствующие им гомоморфизмы $\check{\varphi}_0$ и $\check{\varphi}_1$ совпадают.

Доказательство. Пусть L^β — произвольное подразделение комплекса L , K^β — такое подразделение комплекса K , что существует симплициальное отображение f^β комплекса K^β в комплекс L^β , аппроксимирующее φ_1 . В силу теоремы 19 имеем $f^\alpha \sim \varphi_0$, $f^\beta \sim \varphi_1$, а так как по условию $\varphi_0 \sim \varphi_1$, то $f^\alpha \sim f^\beta$. Таким образом, в силу леммы 2 настоящего параграфа гомоморфизмы \check{f}^α и \check{f}^β совпадают, а так как оба они построены независимо один от другого, то и гомоморфизмы $\check{\varphi}_0$, $\check{\varphi}_1$, указанные в формулировке теоремы, не зависят от случайно выбранных подразделений K^α и K^β и аппроксимации f^α .

Итак, теорема 20 доказана.

В силу теоремы 20 каждому непрерывному отображению φ комплекса K в комплекс L соответствует гомоморфизм φ групп гомологий; докажем следующее важное свойство построенного гомоморфизма.

Теорема 21. Пусть K , L , M — три комплекса, φ — непрерывное отображение комплекса K в комплекс L ,

а ψ — непрерывное отображение комплекса L в комплекс M . Оказывается, что непрерывному отображению ψ комплекса K в комплекс M соответствует гомоморфизм $\check{f}\psi$, являющийся произведением гомоморфизмов ψ и \check{f} (см. теорему 20).

Доказательство. Пусть M^α — произвольное подразделение комплекса M . Через L^α обозначим настолько мелкое подразделение комплекса L , что непрерывное отображение ψ комплекса L^α в комплекс M^α допускает симплициальную аппроксимацию g^α . Через K^α обозначим настолько мелкое подразделение комплекса K , что отображение ψ комплекса K^α в комплекс L^α допускает симплициальную аппроксимацию f^α . Схематически имеющуюся систему отображений можно записать так:

$$M^\alpha \begin{array}{c} \xleftarrow{\psi} \\ \xleftarrow{g^\alpha} \end{array} L^\alpha \begin{array}{c} \xleftarrow{\psi} \\ \xleftarrow{f^\alpha} \end{array} K^\alpha.$$

Здесь стрелки указывают на наличие отображений; над стрелками стоят исходные непрерывные отображения, а под стрелками — аппроксимирующие их симплициальные. В силу § 7, D) симплициальное отображение $g^\alpha f^\alpha$ аппроксимирует непрерывное отображение ψ . В силу теоремы 20 для гомоморфизмов имеют место равенства: $\check{f}\psi = \check{f}^\alpha$, $\psi = \check{g}^\alpha$, а непрерывному отображению ψ соответствует произведение гомоморфизмов $\check{g}^\alpha \check{f}^\alpha$ (см. § 7, G)), что на основании указанных равенств ставит в соответствие непрерывному отображению ψ произведение гомоморфизмов $\check{f}\psi$.

Таким образом, теорема 21 доказана.

Гомоморфизмы групп гомологий полиэдров. Теорема 22. Пусть ω — непрерывное отображение полиэдра P в полиэдр Q , ξ — некоторый элемент группы $V^r(P)$ (см. определение 22), (σ, K) и (τ, L) — произвольные триангуляции полиэдров P и Q и, наконец, $x \in \in V^r(\sigma, K) = V^r(K)$. Отображение $\tau^{-1}\omega\sigma = \lambda$, очевидно, является непрерывным отображением комплекса K в комплекс L , и в силу теоремы 20 определен гомоморфизм $\check{\lambda}$ группы $V^r(K)$ в группу $V^r(L)$. Положим $y = \check{\lambda}(x)$ и обозначим через η тот элемент группы $V^r(Q)$, который содержит y . Оказывается, что элемент η не зависит от

случайного выбора элемента x из ξ , и потому можно определить гомоморфизм $\check{\omega}$ группы $B^r(P)$ в группу $B^r(Q)$, положив $\eta = \check{\omega}(\xi)$. Оказывается далее, что если $\check{\omega}_0$ и $\check{\omega}_1$ суть два эквивалентных между собой непрерывных отображения полиэдра P в полиэдр Q , то гомоморфизмы $\check{\omega}_0$ и $\check{\omega}_1$ совпадают.

Доказательство. Пусть (σ_1, K_1) и (σ_2, K_2) — две произвольные триангуляции полиэдра P , а (τ_1, L_1) и (τ_2, L_2) — две произвольные триангуляции полиэдра Q . Рассмотрим непрерывные отображения:

$$\tau_1^{-1}\omega\sigma_1 = \lambda_1, \quad \tau_2^{-1}\omega\sigma_2 = \lambda_2, \quad \sigma_2^{-1}\sigma_1 = \varphi, \quad \tau_2^{-1}\tau_1 = \psi.$$

Для этих непрерывных отображений имеет место очевидное равенство

$$\lambda_2 = \psi\lambda_1\varphi^{-1}.$$

В силу теоремы 21 то же равенство имеет место для соответствующих гомоморфизмов:

$$\check{\lambda}_2 = \check{\psi}\check{\lambda}_1\check{\varphi}^{-1}. \quad (11)$$

Пусть ξ — произвольный элемент группы $B^r(P)$, а x_1 и x_2 — его представители из групп $B^r(K_1)$ и $B^r(K_2)$ (см. определение 22). Положим $y_1 = \check{\lambda}_1(x_1)$, $y_2 = \check{\lambda}_2(x_2)$ и покажем, что y_1 и y_2 являются представителями одного и того же элемента η группы $B^r(Q)$ в группах $B^r(L_1)$ и $B^r(L_2)$. Этим самым первая часть теоремы 22 будет доказана.

Так как x_1 и x_2 являются представителями одного и того же элемента ξ , то в силу определения 22 имеем $x_1 = \check{\varphi}^{-1}(x_2)$, откуда на основании (11) получаем $y_2 = \psi(y_1)$, что, в свою очередь, на основании определения 22, означает принадлежность y_1 и y_2 к одному и тому же элементу $B^r(Q)$.

Пусть теперь ω_1 — непрерывное семейство отображений полиэдра P в полиэдр Q . Нетрудно видеть, что $\tau^{-1}\omega_1\sigma = \mu_1$ есть непрерывное семейство отображений комплекса K в комплекс L . Пусть $\xi \in B^r(P)$, и x — представитель элемента ξ в группе $B^r(\sigma, K)$; теорема 22 утверждает, что $\check{\omega}_0(\xi) = \check{\omega}_1(\xi)$, но по построению гомоморфизмов $\check{\omega}_0$ и $\check{\omega}_1$ последнее равенство означает, что $\check{\mu}_0(x) = \check{\mu}_1(x)$, это же последнее равенство вытекает

из теоремы 20 в силу эквивалентности отображений μ_0 и μ_1 .

Итак, теорема 22 доказана.

Теорема 23. Пусть P , Q , R — три полиэдра, φ — непрерывное отображение полиэдра P в полиэдр Q , а ψ — непрерывное отображение полиэдра Q в полиэдр R . Оказывается, что непрерывному отображению $\psi\varphi = \check{\psi}$ полиэдра P в полиэдр R соответствует гомоморфизм $\check{\psi} = \check{\psi}\varphi$, являющийся произведением гомоморфизмов $\check{\psi}$ и φ .

Доказательство. Теорема 23 непосредственно вытекает из теорем 21 и 22. Пусть (ρ, K) , (σ, L) и (τ, M) — произвольные триангуляции полиэдров P , Q и R . Гомоморфизм φ строится при помощи непрерывного отображения $\sigma^{-1}\varphi = \lambda$ комплекса K в комплекс L ; гомоморфизм ψ строится при помощи непрерывного отображения $\tau^{-1}\psi\sigma = \mu$ комплекса L в комплекс M ; гомоморфизм $\check{\psi}$ строится при помощи непрерывного отображения $\tau^{-1}\psi\varphi = \nu$ комплекса K в комплекс M . Так как $\nu = \mu\lambda$, то из теоремы 21 теорема 23 вытекает непосредственно.

Гомотопически эквивалентные полиэдры. Понятие гомотопической эквивалентности полиэдров (см. определение 25) в последнее время начинает играть существенную роль в топологии. Ввиду того что оно близко при- мыкает к изложенному выше материалу, я привожу его здесь, хотя в дальнейшем оно и не будет использовано. Интересно отметить, что для гомотопически эквивалентных полиэдров многие инварианты совпадают; здесь это совпадение будет установлено лишь для групп гомологий.

А) Пусть P — полиэдр, а φ — непрерывное отображение полиэдра P в себя, эквивалентное тождественному; тогда гомоморфизм $\check{\varphi}$ группы $B^r(P)$ в себя является тождественным.

В силу теоремы 22 достаточно доказать предложение А) для случая, когда φ есть тождественное отображение полиэдра P в себя. Пусть (ρ, K) — произвольная триангуляция полиэдра P , тогда отображение $\rho^{-1}\varphi\rho = \lambda$ комплекса K в себя является тождественным, и потому гомоморфизм $\check{\lambda}$ группы $B^r(K)$ в себя также является

тождественным, а из этого в силу теоремы 22 предложение А) и вытекает.

Определение 25. Пусть P и Q — два полиэдра, φ — непрерывное отображение P в Q , а ψ — непрерывное отображение Q в P . Будем говорить, что отображения φ и ψ *гомотопически взаимно обратны*, если отображение $\psi\varphi$ полиэдра P в себя и отображение $\varphi\psi$ полиэдра Q в себя эквивалентны тождественным. Полиэдры P и Q будем называть *гомотопически эквивалентными*, если существуют для них гомотопически взаимно обратные φ и ψ .

Теорема 24. Пусть P и Q — два гомотопически эквивалентных полиэдра, а φ и ψ — гомотопически взаимно обратные отображения, осуществляющие эту эквивалентность (см. определение 25). Оказывается, что гомотопизм φ является изоморфизмом группы $B^r(P)$ на группу $B^r(Q)$, а гомотопизм ψ является изоморфизмом группы $B^r(Q)$ на группу $B^r(P)$, причем изоморфизмы φ и ψ взаимно обратны.

Доказательство. Так как отображение $\psi\varphi = \lambda$ эквивалентно тождественному, то в силу А) гомотопизм λ группы $B^r(P)$ в себя является тождественным изоморфизмом. В силу теоремы 24 имеем $\lambda = \psi\varphi$, и поэтому $\psi\varphi$ есть тождественное отображение группы $B^r(P)$ на себя. Из этого заключаем, что ядро гомотопизма φ содержит лишь нуль, а ψ есть гомотопизм группы $B^r(Q)$ на всю группу $B^r(P)$.

Совершенно так же приходим к выводу, что ядро гомотопизма ψ содержит только нуль, а φ есть гомотопизм группы $B^r(P)$ на всю группу $B^r(Q)$. Сопоставляя полученное, видим, что φ и ψ суть взаимно обратные изоморфизмы.

Итак, теорема 24 доказана.

§ 16. Теорема существования неподвижных точек

В настоящем параграфе будут даны достаточные условия существования неподвижных точек отображения ω полиэдра P в себя. Условия эти будут даны в терминах гомологических инвариантов отображения ω (см. § 15).

Приводимые здесь достаточные условия заведомо не являются необходимыми. Необходимые и достаточные условия заведомо не могут быть даны в терминах гомологических инвариантов отображения, как показывают довольно сложные примеры, которые я не могу привести в этой книге. Кроме теоремы 27, будет дана еще теорема 25, которая является вспомогательной для теоремы 27, но имеет и другие, более глубокие следствия.

След эндоморфизма группы. А) Пусть B — коммутативная группа конечного ранга, взятая в аддитивной записи, x_1, \dots, x_r — ее максимальная линейно независимая система элементов, а x — произвольный элемент из B . Тогда существует линейная зависимость

$$ax = a^1x_1 + \dots + a^rx_r, \quad (1)$$

где a — натуральное число, а a_1, \dots, a_r — целые числа. Положим

$${}^*a^i = \frac{a^i}{a}$$

и напишем формальное равенство, не имеющее группового смысла:

$$x \stackrel{*}{=} a^1x_1 + \dots + a^rx_r, \quad (2)$$

здесь a^1, \dots, a^r суть рациональные числа. Равенство (2) имеет лишь тот смысл, что после умножения на подходящее число a оно переходит в равенство (1), имеющее уже групповой смысл. Очевидно, что если a является подходящим числом для перехода от (2) к (1), то и всякое его кратное также подходит для этой цели. Числа a^1, \dots, a^r конечно не определяют элемента x , но оказывается, что при заданной системе x_1, \dots, x_r элемент x однозначно определяет числа a^1, \dots, a^r . Докажем это.

Допустим, что наряду с равенством (2) имеет место равенство

$$x \stackrel{*}{=} b^1x_1 + \dots + b^rx_r, \quad (3)$$

которое при умножении на натуральное число b приобретает групповой смысл. Умножая соотношения (2) и

(3) на число ab , мы получим два равенства

$$abx = aba^1x_1 + \dots + aba^r x_r, \quad (4)$$

$$abx = abb^1x_1 + \dots + abb^r x_r,$$

уже имеющие групповой смысл. Ввиду линейной независимости системы x_1, \dots, x_r из соотношений (4) получаем равенства для чисел: $aba^i = abb^i$, $i=1, \dots, r$, откуда следует: $a^i = b^i$. Этим наше утверждение доказано.

В) Эндоморфизмом группы, как известно, называется гомоморфизм ее в самое себя. Пусть B — коммутативная группа конечного ранга, x_1, \dots, x_r — максимальная система ее линейно независимых элементов, и f — эндоморфизм группы B . В силу А) мы можем написать соотношение

$$f(x_i) = \sum_{j=1}^r a_{ij} x_j. \quad (5)$$

След $S(\|a_{ij}\|) = \sum_{i=1}^r a_{ii}$ матрицы $\|a_{ij}\|$, как оказывается, не зависит от случайности выбора системы x_1, \dots, x_r и потому называется следом эндоморфизма f группы B . Мы обозначим его через $S(f, B)$.

Докажем, что $\sum_{i=1}^r a_{ii}$ не зависит от выбора системы x_1, \dots, x_r . Пусть y_1, \dots, y_r — другая система линейно независимых элементов и

$$f(y_i) = \sum_{j=1}^r b_{ij} y_j \quad (6)$$

— равенство, аналогичное (5). Пусть далее

$$y_i = \sum_{j=1}^r p_{ij} x_j, \quad (7)$$

$$x_i = \sum_{j=1}^r q_{ij} y_j. \quad (8)$$

Очевидно, существует натуральное число a , после умножения на которое равенства (5) — (8) переходят в равенства, имеющие групповой смысл. Из (7) и (8) получаем

$$a^2 y_i = \sum_{j=1}^r a^i a x_j = \sum_{i,k=1}^r a^i a^k a y_k,$$

т. е.

$$y_i \stackrel{*}{=} \sum_{j,k=1}^r p_{ij}^k y_k,$$

так как, кроме того, $y_i \stackrel{*}{=} y_i$, то

$$\sum_{j=1}^r p_{ij}^{*k} = \delta_i^k. \quad (9)$$

Из соотношений (8), (6) и (7) получаем

$$\begin{aligned} a^3 f(x_i) &= a^2 f\left(\sum_{j=1}^r a^i a y_j\right) = a \sum_{j=1}^r a^i a f(y_j) = \\ &= a \sum_{j,k=1}^r a^i a^k a b_j y_k = \sum_{j,k=1}^r a^i a^k a b_j a y_k = \sum_{j,k,l=1}^r a^i a^k a^l a p_{kj}^l x_l \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$f(x_i) \stackrel{*}{=} \sum_{j,k,l=1}^r q_{ij}^{*k} p_{kj}^l x_l.$$

Сравнивая последнее соотношение и (5), получаем

$$a_i^l \stackrel{*}{=} \sum_{j,k=1}^r q_{ij}^{*k} p_{kj}^l.$$

Теперь имеем

$$\sum_{l=1}^r a_i^l \stackrel{*}{=} \sum_{j,k,l=1}^r q_{ij}^{*k} p_{kj}^l = \sum_{j,k,l=1}^r p_{kj}^l a_i^k \stackrel{*}{=} \sum_{l=1}^r b_i^l$$

(см. (9)).

Таким образом, независимость следа $S(f, B)$ от системы x_1, \dots, x_r доказана.

С) Пусть B — группа конечного ранга, C — ее подгруппа, и $B^* = B/C$ — фактор-группа. Если подгруппа C инвариантна относительно некоторого эндоморфизма f группы B , т. е. $f(C) \subseteq C$, то эндоморфизм f , очевидно, определен и на C ; более того, эндоморфизм f можно естественным образом определить и на B^* ; для этого достаточно поступить так: пусть $x^* \in B^*$ и x — элемент класса смежности x^* ; положим

$$f(x)^* = (f(x))^*,$$

здесь $(f(x))^*$ обозначает тот элемент из B^* , который содержит элемент $f(x)$. Оказывается, что так определенное $f(x^*)$ не зависит от случайного выбора $x \in x^*$ и f есть эндоморфизм группы B^* . Далее, имеет место следующее важное соотношение:

$$S(f, B) = S(f, B^*) + S(f, C). \quad (10)$$

Пусть x и x' — два произвольных элемента из x^* , тогда $x - x' \in C$, и мы имеем $f(x) - f(x') = f(x - x') \in C$. Таким образом, $f(x)$ и $f(x')$ принадлежат также к одному классу смежности B по подгруппе C .

Докажем теперь соотношение (10). Пусть y_1, \dots, y_t, y_t — максимальная линейно независимая система из C , а x_1^*, \dots, x_s^* — максимальная линейно независимая система из B^* . Обозначим через x_i некоторый элемент класса смежности x_i^* , тогда система $x_1, \dots, x_s, y_1, \dots, y_t$ является максимальной линейно независимой системой группы B , это было уже доказано раньше (см. § 6, лемма). Мы имеем, следовательно (см. А)),

$$f(x_i) \stackrel{*}{=} \sum_{k=1}^s a_{ik} x_k + \sum_{l=1}^t b_{il} y_l. \quad (11)$$

Так как $f(C) \subseteq C$, то

$$f(y_l) \stackrel{*}{=} \sum_{l=1}^t c_{il} y_l. \quad (12)$$

Умножая соотношение (11) на подходящее натуральное число a , переходя далее к фактор-группе B^* и вновь

деля на a , получаем

$$f(x_i^*) = \sum_{k=1}^s a_i^k x_k^* \quad (13)$$

Из соотношений (11) — (13) получаем

$$S(f, B) = \sum_{k=1}^s a_k^k + \sum_{l=1}^t c_l^l$$

$$S(f, C) = \sum_{l=1}^t c_l^l S(f, B^*) = \sum_{k=1}^s a_k^k.$$

Таким образом, соотношение (10) доказано.

Д) Пусть B — группа конечного ранга, C — ее подгруппа, составленная из всех элементов конечного порядка группы B , и $\hat{B} = B/C$. Если f — произвольный эндоморфизм группы B , то, очевидно, $f(C) \subset C$ и $S(f, C) = 0$, так как в C вообще нет независимых элементов. Таким образом, эндоморфизм f определен для \hat{B} , и мы имеем $S(f, \hat{B}) = S(f, B)$. Переход от группы B к группе \hat{B} будем называть приведением. Очевидно, что приведенная группа \hat{B} не имеет элементов конечного порядка, кроме нуля.

Слабые гомологии. Определение 26. Пусть K — некоторый комплекс и Z_0^r — группа его r -мерных циклов по целочисленной группе коэффициентов. Два цикла z_1 и z_2 из Z_0^r называются *слабо гомологичными* между собой: $z_1 \approx z_2$, если существует натуральное число a , для которого $a(z_1 - z_2) \sim 0$. Очевидно, что совокупность \hat{H}_0^r всех циклов, слабо гомологичных нулю, образует подгруппу группы Z_0^r , причем группа H_0^r циклов, гомологичных нулю, содержится в \hat{H}_0^r . Фактор-группа $\hat{B}^r = Z_0^r / \hat{H}_0^r$ называется *приведенной группой гомологий комплекса* K . Элементы ее суть классы слабо гомологичных между собой циклов.

Е) Так как $H_0^r \subset \hat{H}_0^r$ (см. определение 26), то каждый класс смежности z^* группы Z_0^r по подгруппе H_0^r содержится в некотором классе смежности \hat{z} группы Z_0^r по подгруппе \hat{H}_0^r . Соответствие $z^* \rightarrow \hat{z}$, очевидно, дает гомоморфное ото-

бражение группы B'_0 на группу \hat{B}' . Оказывается, что ядро этого гомоморфизма состоит из всех элементов группы B'_0 , порядок которых конечен, так что переход от группы B'_0 к группе \hat{B}' есть приведение в смысле D), и по тому след любого эндоморфизма группы B'_0 равен следу соответствующего эндоморфизма группы \hat{B}' . В этом заключается роль приведенной группы гомологий.

Покажем, что ядро C^r гомоморфизма $z^* \rightarrow \hat{z}$ состоит из всех элементов группы B'_0 конечного порядка. Пусть $z^* \in C^r$ и z — цикл из z^* . Так как $z \in z^* \subset \hat{z} = 0$, то $z \approx 0$, и потому существует натуральное число a такое, что $az \sim 0$, и, следовательно, $az^* = 0$, т. е. z^* имеет конечный порядок. Если, наоборот, z^* имеет конечный порядок, то $az^* = 0$, и, следовательно, для любого цикла $z \in z^*$ имеем $az \sim 0$, т. е. $z \approx 0$, и потому $\hat{z} = 0$, т. е. $z^* \in C^r$.

F) Так как группа \hat{B}' (см. определение 26) не имеет элементов конечного порядка и допускает конечную систему образующих, то в ней существует линейно независимый базис z_1, \dots, z_p . Выберем из каждого класса z_i цикл z_i . Система циклов z_1, \dots, z_p составляет так называемый базис *слабых гомологий* размерности r комплекса K и обладает тем свойством, что если z — произвольный r -мерный цикл нашего комплекса, то

$$z \approx a^1 z_1 + \dots + a^p z_p,$$

где a^1, \dots, a^p — целые числа, однозначно определенные циклом z и базисом z_1, \dots, z_p .

G) Пусть K и L — два комплекса, K^α и L^β — их подразделения, а \hat{f} — симплициальное отображение комплекса K^α в комплекс L^β . Очевидно, что из $z_1 \approx z_2$ в K^α следует $\hat{f}(z_1) \approx \hat{f}(z_2)$ в L^β . Таким образом, симплициальное отображение \hat{f} порождает гомоморфизм \check{f} группы $\hat{B}^r(K)$ в группу $\hat{B}^r(L)$ (см. § 12, A)). Пусть теперь $L^\beta = K$; тогда эндоморфизм \check{f} группы \hat{B}^r и эндоморфизм \check{f} группы B_{r_0} имеют одинаковый след (см. D), E)). След этот может быть получен еще так: пусть z^1, \dots, z^{pr} есть r -мерный базис слабых гомологий комплекса K ,

тогда

$$\hat{f}((z_i^r)^0) \approx \sum_{j=1}^{p^r} {}^r a_j^i z_j^r, \quad (14)$$

и мы имеем соотношение

$$S(\check{f}, B_0^r(K)) = S(\check{f}, \hat{B}^r(K)) = \sum_{j=1}^{p^r} {}^r a_j^i. \quad (15)$$

Для доказательства соотношения (15) обозначим через \hat{z}_i^r тот класс слабых гомологий комплекса K , который содержит цикл z_i^r ; тогда в применении к группе $\hat{B}^r(K)$ соотношение (14) дает

$$\check{f}(\hat{z}_i^r) = \sum_{j=1}^{p^r} {}^r a_j^i \hat{z}_j^r, \quad (16)$$

а так как $\hat{z}_1^r, \dots, \hat{z}_{p^r}^r$ составляют максимальную линейно независимую систему группы $\hat{B}^r(K)$, то из (16) следует (15). **Формула Эйлера — Пуанкаре — Хопфа.** Нижеследующая теорема Хопфа служит основой для получения различных теорем о неподвижных точках; в то же время она является прямым обобщением теоремы Эйлера — Пуанкаре относительно эйлеровой характеристики.

Теорема 25. Пусть K — произвольный n -мерный комплекс, K^α — его подразделения и \check{f} — симплициальное отображение комплекса K^α в комплекс K . Через L_0^r обозначим группу всех r -мерных цепей комплекса K^α по целочисленной группе коэффициентов. Если $x \in L_0^r$, то положим $g(x) = (\check{f}(x))^\alpha$, тогда g есть эндоморфизм группы L_0^r ; с другой стороны, симплициальному отображению \check{f} соответствует эндоморфизм \check{f} группы $\hat{B}^r(K)$ (см. F)).

Оказывается, что

$$\sum_{r=0}^n (-1)^r S(g, L_0^r) = \sum_{r=0}^n (-1)^r S(\check{f}, \hat{B}^r(K)) = J(\check{f}, K). \quad (17)$$

Доказательство. Эндоморфизм g определен для группы L_0^r при произвольном $r, r = 0, 1, \dots, n$. При

произвольном $x \in L'_0$ имеем

$$\Delta g(x) = g(\Delta x); \quad (18)$$

действительно,

$$\Delta g(x) = \Delta(\hat{f}(x))^\alpha = (\Delta\hat{f}(x))^\alpha = (\hat{f}(\Delta x))^\alpha = g(\Delta x).$$

Подгруппу всех циклов группы L'_0 обозначим через Z'_0 , а подгруппу циклов, гомологичных нулю, — через H'_0 . Из (18) непосредственно следует:

$$g(Z'_0) \subset Z'_0, \quad g(H'_0) \subset H'_0. \quad (19)$$

Соотношение (19) в силу B) дает нам

$$\begin{aligned} S(g, L'_0) &= S(g, Z'_0) + S(g, L'_0/Z'_0) = \\ &= S(g, Z'_0/H'_0) + S(g, H'_0) + S(g, L'_0/Z'_0). \end{aligned} \quad (20)$$

Выясним, какой смысл имеет эндоморфизм g для групп $Z'_0/H'_0 = B'_0(K^\alpha)$ и L'_0/Z'_0 , имея в виду, что существует вполне определенный изоморфизм групп $B'_0(K^\alpha)$ и $B'_0(K)$, а также групп L'_0/Z'_0 и H_0^{-1} .

Симплициальное отображение \check{f} ставит в соответствие каждому циклу z из K цикл $\check{f}(z^\alpha)$ из K и тем самым порождает эндоморфизм \check{f} группы $B'_0(K)$ (см. С).

Если же теперь мы хотим перейти от группы $B'_0(K)$ к группе $B'_0(K^\alpha)$ на основе естественного изоморфизма (см. теорему 15), то циклу z^α комплекса K^α следует поставить в соответствие цикл $(\check{f}(z^\alpha))^\alpha$. Последнее соответствие совпадает с g . Таким образом, эндоморфизм \check{f} группы $B'_0(K)$ переходит в эндоморфизм g группы Z'_0/H'_0 , если взять естественный изоморфизм между группами $B'_0(K)$ и $Z'_0/H'_0 = B'_0(K^\alpha)$. Следовательно, мы имеем

$$S(\check{f}, B'_0(K)) = S(g, Z'_0/H'_0). \quad (21)$$

Пусть x^* — произвольный элемент группы L'_0/Z'_0 и x — произвольная цепь из класса смежности x^* . Очевидно, что все элементы из x^* имеют одинаковые границы, и потому мы можем положить $\Delta x^* = \Delta x$. Так определенное отображе-

ние Δ является изоморфизмом группы L'_0/Z'_0 на группу H_0^{r-1} , ибо ядро гомоморфизма Δ группы L'_0 на группу H_0^{r-1} есть Z'_0 . Эндоморфизм g определен как для группы L'_0/Z'_0 , так и для группы $H_0^{r-1} \subset L_0^{r-1}$ (см. С) и (19)). В силу (18) имеем $g(\Delta x^*) = \Delta g(x^*)$, а это значит, что эндоморфизм g одинаков для групп H_0^{r-1} и L'_0/Z'_0 , если только переход от одной к другой сделать на основе изоморфизма Δ , данного здесь. Таким образом,

$$S(g, L'_0/Z'_0) = S(g, H_0^{r-1}). \quad (22)$$

Соотношения (21) и (22) позволяют нам переписать формулу (20) в виде

$$S(g, L'_0) = S(\check{f}, B'_0(K)) + S(g, H'_0) + S(g, H_0^{r-1}). \quad (23)$$

Здесь следует считать, что $S(g, H_0^n) = 0$ и $S(g, H_0^{-1}) = 0$. Умножая равенство (23) на $(-1)^r$ и суммируя по r , получаем

$$\sum_{r=0}^n (-1)^r S(g, L'_0) = \sum_{r=0}^n (-1)^r S(\check{f}, B'_0(K)).$$

Равенство $S(\check{f}, \hat{B}^r(K)) = S(\check{f}, B'_0(K))$ было отмечено уже раньше (см. G)).

Таким образом, теорема 25 доказана.

Число, введенное в теореме 25, можно иначе выразить так:

Н) Пусть $A_1^r, \dots, A_{\alpha^r}^r$ — совокупность всех r -мерных ориентированных симплексов комплекса K^α , $r=0, 1, \dots, n$. $\hat{f}(A_j^r)$ есть r -мерный ориентированный симплекс из K или 0, а $(\hat{f}(A_j^r))^\alpha$ представляется в виде

$$(\hat{f}(A_j^r))^\alpha = \sum_{k=1}^{\alpha^r} f_j^k A_k^r, \quad (24)$$

где каждый коэффициент f_j^k есть целое число. Тогда имеет место равенство

$$J(f, K) = \sum_{r=0}^n (-1)^r \sum_{k=1}^{\alpha^r} f_k^k = \sum_{r=0}^n (-1)^r \sum_{l=1}^{p^r} r a_l^r. \quad (25)$$

Для доказательства соотношения (25) заметим, что A_j' составляют максимальную линейно независимую систему

группы L_0' , а потому $S(g, L_0') = \sum_{k=1}^{\alpha'} r_k^k$. С другой стороны,

имеют место (15) и (17). Таким образом, предложение Н) доказано. Выведем теперь из формулы (25) формулу Эйлера — Пуанкаре.

Будем считать, что $K^\alpha = K$, а f есть тождественное отображение K на себя. Тогда вместо (24) имеем $f(A_j) = A_j'$,

и потому в данном случае $r_j^k = \delta_j^k$, т. е. $\sum_{k=1}^{\alpha'} r_k^k = \alpha'$. Точно

так же вместо (14) имеем $\hat{f}(z_i) = z_i'$ и потому в данном

случае имеем $\sum_{l=1}^{p'} r_l^i = p'$, и потому $\sum_{r=0}^n (-1)^r \alpha^r = \sum_{r=0}^n (-1)^r p^r$.

Теорема существования. Теорема 26. Пусть φ — непрерывное отображение n -мерного комплекса K самого в себя. В силу G) и теоремы 20 отображению φ соответствует эндоморфизм $\tilde{\varphi}$ группы $\tilde{B}^r(K)$.

Положим $J(\varphi, K) = \sum_{r=0}^n (-1)^r S(\tilde{\varphi}, \tilde{B}^r(K))$; оказывается,

что если введено так число $J(\varphi, K)$ отлнчно от нуля, то отображение φ полидра $|K|$ в себя имеет неподвижную точку.

Доказательство. Доказательство будем вести от противного. Допустим, что неподвижных точек нет, и покажем, что тогда число $J(\varphi, K)$ равно нулю.

Так как отображение φ не имеет неподвижных точек, то в силу компактности полидра $|K|$ существует настолько малое положительное число ε , что

$$\rho(x, \varphi(x)) > \varepsilon \text{ при } x \in |K|. \quad (26)$$

Пусть K^β — настолько мелкое подразделение комплекса K , что диаметр каждого симплекса из K^β меньше $\varepsilon/3$. Для сохранения единства в обозначениях с предыду-

щим будем считать, что $K^{\beta} = K$. Это означает лишь, что комплекс K был взят в достаточно мелком подразделении. Пусть теперь K^{α} — настолько мелкое подразделение комплекса K , что существует симплициальное отображение f комплекса K^{α} в комплекс K , аппроксимирующее отображение φ . Так как для каждой точки x из $|K|$ существует симплекс $D \in K$ такой, что $f(x) \in D$, $\varphi(x) \in D$, то $\rho(f(x), \varphi(x)) < \varepsilon/3$. В силу (26) это дает

$$\rho(x, f(x)) > \frac{2}{3}\varepsilon. \quad (27)$$

Пусть A_j^r — произвольный ориентированный симплекс комплекса K^{α} . Покажем, что симплексы $f(A_j^r)$ и A_j^r не пересекаются. Если $x \in A_j^r$, $f(x) \in f(A_j^r)$ и если бы симплексы эти пересекались, то мы имели бы $\rho(x, f(x)) < \frac{2}{3}\varepsilon$, ибо диаметры обоих симплексов меньше $\varepsilon/3$.

Если в соотношении (24) хотя одно число $r f_j^i$ отлично от нуля, то это значит, что симплекс A_j^r содержится в подразделении $\tilde{f}(A_j^{\alpha})^{\alpha}$, т. е. симплексы A_j^r и $f(A_j^r)$ пересекаются, что невозможно. Таким образом, все числа $r f_j^i$ равны нулю. Следовательно, $J(f, K) = 0$. Для перехода к $\tilde{J}(\varphi, K)$ следует отметить только, что эндоморфизм φ по самому своему построению совпадает с эндоморфизмом \tilde{f} . Таким образом, $J(\varphi, K) = 0$.

Итак, теорема 26 доказана.

Из теоремы 26 непосредственно вытекает соответствующую теорема для полиэдра P . Приведенную группу гомологии $\tilde{B}^r(P)$ полиэдра P можно определить как приведенные группы $B_0^r(P)$ (см. D)) или при помощи триангуляций, как это сделано в определении 22. Если ω есть непрерывное отображение полиэдра P в себя, то ему соответствует эндоморфизм $\tilde{\omega}$ группы $\tilde{B}^r(P)$. Эндоморфизм $\tilde{\omega}$ можно определить либо на основе замечания D), либо так же, как это сделано в теореме 22.

Теорема 27. Пусть ω — непрерывное отображение n -мерного полиэдра P в себя и $\tilde{\omega}$ — соответствующий этому отображению эндоморфизм группы $\tilde{B}^r(P)$.

Оказывается, что если число

$$J(\omega, P) = \sum_{r=0}^n (-1)^r S(\check{\omega}, \check{B}^r(P))$$

отлично от нуля, то отображение ω имеет неподвижную точку.

Доказательство. Пусть (σ, K) — произвольная триангуляция полиэдра P ; тогда $\varphi = \sigma^{-1}\omega\sigma$ есть непрерывное отображение комплекса K в себя. Ясно, что $J(\omega, P) = J(\varphi, K)$, и потому $J(\varphi, K) \neq 0$, таким образом, отображение φ имеет неподвижную точку x (см. теорему 26). Тогда $\sigma(x) \in P$ есть неподвижная точка отображения ω . Действительно, мы имеем

$$\omega(\sigma(x)) = \sigma(\varphi(x)) = \sigma(x).$$

Этим теорема 27 доказана.

1) Пусть φ — непрерывное отображение связного комплекса K в себя; тогда $S(\check{f}, \check{B}^0(K)) = 1$.

Действительно, пусть \check{f} — симплициальное отображение комплекса K^a в комплекс K , аппроксимирующее отображение φ . Если a — некоторая вершина комплекса K , то $+(a)$ есть цикл, образующий нульмерный базис слабых гомологий в K . $\check{f}(+(a)) = +(b)$, где b — также вершина из K , и потому $\check{f}(+(a)) \approx +a$, таким образом, в силу G , $S(\check{f}, \check{B}^0(K)) = 1$.

Теорема 28. Если A — симплекс любой размерности, то $J(\omega, A) = 1$ при любом непрерывном отображении ω симплекса в себя, и потому отображение ω имеет неподвижную точку (см. теорему 14).

Доказательство. В силу 1) имеем $S(\check{\omega}, \check{B}^0(A)) = 1$, а так как для $r > 0$ группа $\check{B}^r(A)$ не имеет элементов, отличных от нуля, то $J(\omega, A) = 1$.

Этим теорема 28 доказана.

2) Пусть R^{n+1} — евклидово пространство размерности $n+1$ ($n \geq 1$) с декартовыми координатами x^1, x^2, \dots, x^{n+1} . Множество Σ^n точек пространства R^{n+1} , удовлетворяющих уравнению $(x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^{n+1})^2 = 1$, называется n -мерной сферой. Оказывается, что Σ^n гомотоморфно границе $F^n = |S^n|$ симплекса размерности $n+1$. Таким образом, Σ^n есть полиэдр, n -мерная группа

гомологии которого — свободная циклическая группа. Образующую этой группы обозначим через u . Если ω есть непрерывное отображение полиэдра Σ^n в себя, то мы имеем: $\omega(u) = ku$. Число k называется степенью отображения ω сферы Σ^n в себя и является инвариантом класса отображений, содержащего ω .

Для доказательства гомеоморфности Σ^n и F^n выберем в R^{n+1} симплекс A^{n+1} размерности $n+1$ такой, что центр его совпадает с началом координат O в R^{n+1} , причём $\Sigma^n \subset A^{n+1}$. Если $x \in F^n$ (здесь F^n — граница симплекса A^{n+1}), то отрезок $(0, x)$ пересекает Σ^n в единственной точке $y = \varphi(x)$. Легко видеть, что φ есть гомеоморфное отображение множества F^n на множество Σ^n . Таким образом, Σ^n и F^n гомеоморфны.

Теорема 29. Пусть ω — непрерывное отображение n -мерной сферы Σ^n в себя (см. J) со степенью k . Тогда имеем: $J(\omega, \Sigma^n) = 1 + (-1)^nk$. Таким образом, отображение ω всегда имеет неподвижную точку, если только число $1 + (-1)^nk$ отлично от нуля.

Теорема 29 непосредственно вытекает из теоремы 27 и из того, что каждая группа гомологии комплекса S^n размерности r , $0 < r < n$, тривиальна, между тем как группы гомологий размерностей 0 и n суть свободные циклические группы (см. теорему 11).

В качестве простого приложения теоремы 29 рассмотрим отображение ω сферы Σ^n в себя, переводящее каждую точку $x \in \Sigma^n$ в диаметрально противоположную ей точку $-x$, $\omega(x) = -x$. Отображение это, очевидно, не имеет неподвижных точек, и потому число $1 + (-1)^nk$ равно нулю. Таким образом, $k = (-1)^{n+1}$. Мы видим, что степень отображения сферы Σ^n в себя, переводящего каждую точку в диаметрально противоположную, равна $(-1)^{n+1}$.