Prirodno-matematički fakultet
Univerziteta u Beogradu

NEKE METODE PRIBLIŽNOG RJEŠAVANJA NEHOMOGENIH I HOMOGENIH GRANIČNIH PROBLEMA OBIČNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

/doktorska disertacija/

31. 10. 1977 г.

Комисија

1) [illegible]
2) М. Бертолино
3) Бор. Рашајски

A. Zolić

Beograd, 1977.

SADRŽAJ

PREDGOVOR

Ovaj rad je na izvjestan način nastavak mog magistarskog rada; sadržaj je dopunjen i proširen nekim metodama za rješavanje Šturm-Liuvilovih problema.

Inače, rad je podijeljen u pet dijelova koji su numerisani od 0 do 4. U prvom dijelu je dat kratak istorijski pregled razvoja teorije DJ i problema te teorije (prema [31], [33], [34]). U drugom dijelu uvedeni su osnovni pojmovi, definicije i oznake, što je potrebno za dalje izlaganje. Treći dio sadrži pregled metoda za rješavanje nehomogenih i homogenih graničnih problema običnih DJ. Razumije se da nije bilo moguće obuhvatiti sve metode; izbor je napravljen u zavisnosti od sadržaja sledećih dijelova. Četvrti dio sadrži rezultate mojih proučavanja graničnih problema običnih DJ. Ti rezultati su ranije publikovani ([6], [7]). Peti dio sadrži takođe rezultate mojih proučavanja graničnih problema običnih DJ. Jedan dio tih rezultata je publikovan ([8]), a jedan dio je saopšten u Naučnoj sekciji Društva matematičara, fizičara i astronoma SR Srbije.

U toku rada imao sam punu podršku mojih profesora dr K. Orlova, dr B. Rašajskog i dr M. Bertolina. Dobro su mi došli razgovori i savjeti doc. dr R. Miloševića. Neka mi bude dozvoljeno da im se i na ovom mjestu zahvalim.

Ako ovaj moj rad bude predstavljao manji kamenčić ili školjku na obali velikog neotkrivenog okeana istine, biću zadovoljan i to će mi dati snagu da ideje koje su se javile u toku rada razradim i tako dobijem potpuniju cjelinu posmatrane problematike.

A. Z.

Ne znam kako ja izgledam ljudima; ali sam sebi izgledam kao dječak koji se igra na obali mora i zabavlja se sam sa sobom pronašavši s vremena na vrijeme manji kamenčić ili ljepšu školjku, dok se veliki okean istine čitav pruža neotkriven preda mnom.

Isak Njutn (Isaac Newton, 1642 - 1727)

Jedan od osnovnih podstreka razvoja nauka, znači i matematike, je praksa. Proizvodnja materijalnih i duhovnih dobara, težnja ka boljim uslovima života i društvena praksa u najširem smislu riječi usmjeravaju čovjekovu aktivnost ka proučavanju društvenih i prirodnih pojava i procesa razvijajući postojeće i stvarajući nove teorije. Pri tome je očigledna povratna sprega između teorije i prakse; nestrogo govoreći praksa postavlja probleme, teorija rješava i otvara nova pitanja. Pitanje šta je "bolje" praksa bez teorije ili teorija bez prakse nema nikakav smisao. Cijeniti praksu bez teorijske osnove značilo bi biti moreplovac koji ulazi u brod bez krme i bez kompasa ne znajući kuda se plovi.

Razvitak jedne teorije dovodi često do takvih problema za čije rješavanje su potrebne kvalitativno nove metode ispitivanja koje, dakle, proizilaze iz unutrašnje potrebe same te teorije. Na taj način se može steći utisak da se ta teorija razvija relativno nezavisno od neposredne prakse. Naprotiv, radi se o unutrašnjoj logici razvoja teorije koja se nalazi u izvjesnom dijalektičkom jedinstvu s praksom.

Razvitak teorije diferencijalnih jednačina (DJ) je u tijesnoj vezi sa zadacima određivanja krivih, tačnije rečeno familije krivih, koje imaju tangentu određenog zadatog svojstva. Takvi zadaci su bili predmet interesovanja matematičara i prije nastanka diferencijalnog i integralnog računa (René Descartes, 1596-1650, Isaac Barrow, 1630-1677). Inače, sam termin - diferencijalna jednačina - predložio je Lajbnic (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646-1716). Mnogi zadaci geometrije, astronomije, fizike, mehanike itd. nisu mogli biti riješeni aparatom diferencijalnog i integralnog računa i zahtijevali su sastavljanje jednačina koje sadrže argument, nepoznatu funkciju i njene izvode ili diferencijale. Dakle, početak teorije DJ je u tijesnoj vezi s drugim nezavisnim teorijama.

U svom remek-djelu "Matematički principi prirodne filozofije" (Philosophiae Naturalis Principia Mathematica) 1686.* Njutn je proučio neke tipove DJ. Njemu pripada i metoda dobijanja integrala DJ u obliku stepenog reda pri čemu je koristio ideju metode neodređenih koeficijenata i ideju metode uzastopnih aproksimacija. Imao je i predstavu o opštem rješenju DJ, ali zapisivanje opšteg rješenja korišćenjem proizvoljne konstante pripada Bernuliju (Johannes Bernoulli, 1677-1748), koji je primijenio i ideju integracionog množitelja (poznata Bernulijeva DJ). Lajbnicu su bili poznati načini integracije DJ koje razdvajaju promjenljive. On je također pokazao kako se uvođenjem novih promjenljivih homogene i linearne DJ prvog reda mogu svesti na DJ koje razdvajaju promjenljive.

Međutim, sistematsko izučavanje teorije DJ počinje 1724. godine, kada je objavljeno detaljno ispitivanje italijanskog matematičara Rikatija (Jacobo Riccati (1676--1754) - Animadversiones in aequationes differentiales secundi gradus, Acta Eruditorum publicata Lipsiae) jedne DJ, koja je kasnije (1769.) na predlog Dalambera (Jean le Rond D'Allambert, 1717-1783) nazvana Rikatijeva DJ.

U daljem razvoju teorije DJ značajnu ulogu su imali: Ojler (Leonard Euler, 1707-1783), Dalamber, Bernuli (Nicolaus II Bernoulli, 1687-1759), Lagranž (Joseph-Louis

---

* Prema nekim izvorima 1687. - Dirk J. Struik - Abriss der Geschichte der Mathematik, Berlin, 1963.

Lagrange, 1736-1813), Klero (Alexis Claude Clairaut, 1713-1765), Koši (Augustin-Louis Cauchy, 1789-1857), Hamilton (Wiliam Rowan Hamilton, 1805-1865), Liuvil (Joseph Liouville, 1809-1882), Jakobi (Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804-1851), Pikar (Emile Picard, 1856-1941) i tako dalje.

Pojam singularnog rješenja se prvi put sreće kod Tejlora (B. Taylor, 1685-1731). Kasnije je Klero našao singularno rješenje DJ koja nosi njegovo ime; Dalamber je našao singularno rješenje opštije DJ koja nosi ime Lagranža. Problem singularnog rješenja je bio predmet interesovanja i drugih matematičara: Ojlera, Laplasa (Pierre Simon Laplace, 1749-1827) i drugih.

Mnogi zadaci mehanike, astronomije, fizike i drugih prirodnih nauka doveli su do razvoja približnih metoda za rješavanje raznih zadataka povezanih sa DJ. Razrada tih metoda je suštinski uticala na teoriju egzistencije i jedinosti rješenja DJ. Tako je Ojlerova metoda poligonalnih linija poslužila kao osnova dokaza značajne teoreme o egzistenciji rješenja DJ. Ojleru pripada i ideja predstavljanja rješenja DJ u obliku određenog integrala.

Granični problemi DJ su bili predmet interesovanja Dalambera, Laplasa, Ležandra (Adrien Marie Legendre, 1752-1833), Lamea (G. Lamé, 1795-1871) i drugih, ali je početak značajnijeg proučavanja tih problema vezan za Liuvila i Šturma (Charles Sturm, 1803-1855). Liuvil je posmatrao DJ

$$\frac{d\left(K\frac{dV}{dx}\right)}{dx} + (gr - m) = 0, \tag{0.1.}$$

gdje su g, K i m pozitivne funkcije argumenta x, V funkcija argumenta x i parametra r a r je korijen neke transcendentne jednačine $w(r) = 0$, zajedno s graničnim uslovima

$$\frac{dV}{dx} - hV = 0 \text{ za } x = x_0 \text{ i } \frac{dV}{dx} - HV = 0 \text{ za } x = X;$$

gdje su h i H pozitivne konstante, nule ili beskonačne vrijednosti. Ako je $h = \infty$, onda je $V = 0$ za $x = x_0$; ako je $H = \infty$, onda je $V = 0$ za $x = X$. Posmatrana DJ je vrlo značajna u tretiranju mnogih pitanja matematičke fizike. Liuvil je rješenje tražio u obliku reda

$$V = p_0 + p_1 + \dots + p_n + \dots ,$$

gdje za $K(x_0) = K_0$ imamo

$$p_0 = A(1 + hK_0 \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{K}),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$p_{i+1} = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{K} \int_{x_0}^{x} (m - gr)\, p_i dx, \; i = \overline{1,n}.$$

U isto vrijeme Šturm je detaljno ispitivao DJ

$$L \frac{d^2v}{dx^2} + M \frac{dv}{dx} + Nv = 0, \tag{0.2.}$$

gdje je v nepoznata funkcija a L, M, N date funkcije argumenta x u datom intervalu. Mnogi zadaci matematičke fizike se svode na ovu DJ. Na ispitivanje ove DJ Šturma su naveli izvjesni problemi algebre. On je, naime, primijetio, ako je poznato rješenje DJ u obliku reda ili u obliku određenog integrala, da je vrlo često teško direktno ispitati određena svojstva tog rješenja. Primijetio je da je prostije izvođenje zaključka o svojstvima nepoznate funkcije - rješenja DJ - posmatranjem same DJ. To je bio potpuno nov prilaz kvalitativnog ispitivanja integrala DJ, koji je koristan i kod izračunavanja korijena niza transcendentnih jednačina matematičke fizike kada su poznata određena svojstva koja imaju ti korijeni.

Poslednja DJ (0.2.) se može svesti na sledeći oblik

$$\frac{d(K \frac{dy}{dx})}{dx} + Gy = 0, \tag{0.3.}$$

gdje su K i G funkcije argumenta x i parametra λ ograničene u datom intervalu i $K \neq 0$. Opšte rješenje ove DJ sadrži dvije proizvoljne konstante za koje možemo uzeti y i $\frac{dy}{dx}$ za odgovarajuće, posebne vrijednosti x, tj. rješenje treba izabrati tako da bi y i $\frac{dy}{dx}$ u datoj tački bili jednaki nekoj proizvoljno zadatoj funkciji parametra λ. Očigledna je veza između DJ (0.1.) i (0.2.).

Dakle, metoda uzastopnih aproksimacija pripada Liuvilu. Metodu uzastopnih aproksimacija Liuvil je primijenio i na DJ

$$\frac{dK\, dL \ldots dM\, dN\, dU}{dx^m} + rU = 0,$$

gdje su K, L, ... , M, N pozitivne i neprekidne funkcije argumenta x, r parametar koji ne zavisi od x, a U funkcija koja zavisi od x i r. Ovim pitanjima bavio se i Ostrogradski (М. В. Остроградский, 1801-1862). Metodu uzastopnih aproksimacija detaljno je razradio Pikar.

Potpun razvoj teorije DJ omogućen je razvojem teorije funkcija kompleksne promjenljive. Tu su značajan uticaj imali radovi Košija (analitičko produženje rješenja, calcul des limites (račun granica)), Gausa (Johan Friedrich Carl Gauss, 1777-1855), Vajerštrasa (Karl Wilhelm Theodor Weierstrass, 1815-1897) i drugih velikih matematičara 19. vijeka.

U današnje vrijeme veliki uticaj na razvoj teorije DJ, zapravo na razvoj približnih metoda za rješavanje DJ, ima savremena elektronska računska tehnika. Pri tome se kod približnih metoda pored konvergencije, ocjene greške, broja računskih operacija posmatra numerička stabilnost, ekonomičnost sheme računanja i s tim u vezi optimizacija procesa računanja.

Znatan uticaj na razvoj teorije DJ su imali radovi sovjetskih matematičara. Pomenimo ovom prilikom samo Ljapunova (А. М. Ляпунов, 1857-1918) koji je u svojoj doktorskoj disertaciji "Opšti zadatak o stabilnosti kretanja" (1892.) prvi ispitivao u strogoj matematičkoj postavci problem stabilnosti mehaničkih sistema s konačnim brojem stepeni slobode. Radovi Ljapunova (i drugih matematičara i prije i poslije njega) usmjerili su razvoj teorije DJ u još jednom pravcu - u pravcu kvalitativne teorije DJ, koji se nalazi u izvjesnom jedinstvu sa teorijom DJ i teorije približnih metoda za rješavanje DJ. Taj pravac, mada predstavlja relativno nezavisno teorijsku cjelinu, u tijesnoj je vezi sa zadacima za koje bi se moglo reći da su predmet proučavanja numeričke matematike.

Izvjestan doprinos razvoju i primjeni teorije DJ dali su i naši matematičari. Pomenimo na ovom mjestu samo neke od njih: M. Petrović (1868-1943), J. Plemelj (1873-1967), T. Pejović i drugi.

1.-UVOD.

Uvedimo, najprije, neke pojmove, oznake i osnovne pretpostavke koje ćemo kasnije koristiti.

Definicija 1. Jednačina u kojoj osim nepoznate funkcije, jednog ili više argumenata, i poznatih veličina figurišu i izvodi nepoznate funkcije po njenim argumentima naziva se diferencijalna jednačina.

Pretpostavićemo da su argumenti nepoznate funkcije realni, a sama nepoznata funkcija realna i jednoznačna. Red najvišeg izvoda koji figuriše u diferencijalnoj jednačini predstavlja red diferencijalne jednačine. Ako nepoznata funkcija zavisi od jednog i samo jednog argumenta, onda se diferencijalna jednačina zove obična diferencijalna jednačina, inače je parcijalna diferencijalna jednačina. Predmet našeg interesovanja će biti vezan za obične diferencijalne jednačine. Jednostavnosti radi mi ćemo umjesto termina - obična diferencijalna jednačina - upotrebljavati termin - diferencijalna jednačina -, kratko DJ.

Primjer 1. Diferencijalna jednačina

(1.1.) $\quad F(x,y,y',\dots,y^{(n)}) = 0$

je DJ n-tog reda.

Ovdje je y nepoznata funkcija argumenta x; $y',\dots,$ $y^{(n)}$ su redom prvi,..., n-ti izvodi funkcije y po x a F je zadata funkcija svojih argumenata u oblasti definisanosti $\mathscr{D}(x,y,y',\dots,y^{(n)})$.

U teoriji diferencijalnih jednačina češće se razmatra DJ u tzv. normalnom obliku

(1.2.) $\quad y^{(n)} = f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})$,

gdje je f zadata funkcija svojih argumenata u oblasti definisanosti $D(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})$. Ako je funkcija f linearna po argumentima $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, onda se DJ (1.2.) zove linearna diferencijalna jednačina, u oznaci LDJ, inače je nelinearna. LDJ se može zapisati u sledećem obliku

(1.3.) $$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = r(x),$$

ili

(1.3.') $$L[y] = r(x),$$

gdje je L linearni diferencijalni operator, tj.

$$L[y] \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y .$$

Ako je $r(x) \equiv 0$, onda je LDJ homogena linearna diferencijalna jednačina, u oznaci HLDJ, inače je nehomogena.

Primjer 2. Diferencijalna jednačina

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}) = 0$$

je parcijalna diferencijalna jednačina prvog reda.

U ovom slučaju u je nepoznata funkcija argumenata $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$ su parcijalni izvodi prvog reda nepoznate funkcije u redom po argumentima $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a Φ je zadata funkcija svojih argumenata.

U teoriji DJ proučavaju se i sistemi DJ, kako običnih tako i parcijalnih.

Primjer 3. Ukupnost DJ

$$F_i(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') = 0, \quad i = \overline{1,n},$$

ili u tzv. normalnom obliku

$$y_i' = f_i(x, y_1, \ldots, y_n), \quad i = \overline{1,n},$$

predstavlja sistem običnih DJ prvog reda.

Ovdje su y_i, $i = \overline{1,n}$, nepoznate funkcije argumenta x a y_i', $i = \overline{1,n}$, izvodi tih funkcija po x. Funkcije F_i, odnosno f_i, $i = \overline{1,n}$, su zadate funkcije svojih argumenata. Ako su funkcije f_i, $i = \overline{1,n}$, linearne po argumentima $y_1, \ldots, y_n$, onda je sistem DJ linearan, inače je nelinearan.

Definicija 2. Rješenje ili integral DJ (1.1.), odnosno (1.2.) na odsječku $I = [x_1, x_2]$ jeste takva funkcija $y = y(x)$, koja ima neprekidne izvode $y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)$, da je za $(\forall x)(x \in I)$ ispunjeno:

a) $[x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)] \in \mathscr{D}$,

b) $F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) \equiv 0$,

odnosno

a_1) $[x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))] \in D$,

b_1) $y^{(n)} \equiv f(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))$.

Pod dovoljno opštim pretpostavkama u odnosu na funkciju F u (1.1.), odnosno funkciju f u (1.2.), postoji beskonačan skup rješenja DJ (1.1.)

(1.4.) $\Psi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0$,

odnosno DJ (1.2.)

(1.5.) $y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n)$,

gdje su $C_1, \ldots, C_n$ proizvoljne konstante.

<u>Definicija 3.</u> Rješenje (1.4.), odnosno (1.5.) zove se opšte rješenje DJ (1.1.), odnosno (1.2.).

Opšte rješenje predstavlja familiju krivih linija, koja zavisi od n proizvoljnih konstanti. S gledište primjene veći značaj ima rješenje, npr. DJ (1.2.), $y = y(x)$ koje zadovoljava određene uslove. Ti uslovi mogu biti vezani za jednu ili više tačaka ili za neke određene osobine rješenja u pogledu npr. ograničenosti, monotonosti, periodičnosti i tome slično.

<u>Definicija 4.</u> Rješenje $y = y(x)$ DJ (1.2.) koje zadovoljava uslove :

(1.6.) $y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)},\ x=x_0$

zove se Košijevo rješenje, a uslovi (1.6.) početni ili Košijevi uslovi.

Problem nalaženja partikularnog ili Košijevog rješenja nosi naziv Košijev problem. Geometrijski, traži se ono rješenje koje prolazi kroz tačku (x_0, y_0) i u toj tački izvodi $y', \ldots, y^{(n-1)}$ imaju zadate vrijednosti. Očigledno, n početnih uslova (1.6.) određuju posebne vrijednosti konstanti $C_1, \ldots, C_n$.

Osim opšteg rješenja i Košijevih rješenja DJ, koja se, ustvari, mogu dobiti iz opšteg rješenja, postoje rješenja DJ koja se, nestrogo govoreći, ne mogu dobiti iz opšteg rješenja. Takva rješenja se zovu singularna rješenja.

Ako umjesto početnih uslova (1.6.), koji su vezani za tačku $x = x_0$, posmatramo n , $n \geqslant 2$, uslova vezanih za tačke $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$, $k \geqslant 2$, među koje može biti uključeno i $\pm\infty$, onda dobijamo granične uslove. Problem nalaženja rješenja $y = y(x)$ DJ koje zadovoljava granične uslove nosi naziv granični problem. Navedimo neke oblike graničnih uslova.

Neka su date tačke $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$, $k \geqslant 2$, i DJ n-tog reda, $n \geqslant 2$. Granični uslovi mogu imati oblik

$$(1.7.)\quad G_\nu(y_{x_1}, y'_{x_1}, \ldots, y^{(n-1)}_{x_1}, y_{x_2}, y'_{x_2}, \ldots, y^{(n-1)}_{x_2}, \ldots, y_{x_k}, y'_{x_k}, \ldots, y^{(n-1)}_{x_k}) = 0, \quad \nu = \overline{0,n-1}\,,$$

gdje je

$$y^{(m)}_{x_s} = \left[\frac{d^m y}{dx^m}\right]_{x = x_s}, \quad m = \overline{0,n-1}, \quad s = \overline{1,k},$$

a G_ν, $\nu = \overline{0,n-1}$, su date funkcije svojih argumenata, u opštem slučaju nelinearne. Ako su G_ν, $\nu = \overline{0,n-1}$, linearne, onda su granični uslovi (1.7.) linearni i mogu biti zapisani u sledećem obliku

$$(1.8.)\quad U_\nu(y_{x_1}, y'_{x_1}, \ldots, y^{(n-1)}_{x_1}, y_{x_2}, y'_{x_2}, \ldots, y^{(n-1)}_{x_2}, \ldots, y_{x_k}, y'_{x_k}, \ldots, y^{(n-1)}_{x_k}) = u_\nu, \quad \nu = \overline{0,n-1},$$

gdje su U_ν, $\nu = \overline{0,n-1}$, linearne funkcije svojih argumenata, a u_ν, $\nu = \overline{0,n-1}$, date konstante. Ako su $u_\nu = 0$, $\nu = \overline{0,n-1}$, onda su granični uslovi (1.8.) homogeni, inače su nehomogeni. Ako je DJ linearna i ako su granični uslovi linearni, onda je granični problem linearan, inače je nelinearan. Ako je DJ homogena i ako su granični uslovi homogeni, onda je granični problem homogen, inače je nehomogen.

Granični uslovi mogu imati i specijalne oblike. Npr. za DJ drugog reda

(1.9.) $\qquad y(a) = A,\ y(b) = B,$

granični uslovi prve vrste,

(1.10.) $\qquad y'(a) = A,\ y'(b) = B,$

granični uslovi druge vrste,

(1.11.) $\qquad \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \quad \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B,$
$\qquad |\alpha_0| + |\alpha_1| > 0, \qquad |\beta_0| + |\beta_1| > 0,$

granični uslovi treće vrste.

U teoriji DJ postavljaju se sledeći zadaci:

1) naći sva rješenja DJ,
2) naći rješenje DJ koje ima zadate osobine,
3) dokazati da postoji rješenje DJ koje ima određene osobine ne nalazeći to rješenje efektivno.

Naš interes će predstavljati nalaženje rješenja date DJ koje zadovoljava granične uslove. Posmatraćemo granične uslove (1.9.), (1.10.), (1.11.) i opštije granične uslove (1.8.).

Granični problem može:

a) nemati rješenje,
b) imati jedinstveno rješenje,
c) imati konačno ili beskonačno mnogo rješenja.

Primjer 4. Riješiti sledeći granični problem

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 0,\ y(\pi) = 1.$$

Rješenje: Opšte rješenje date DJ je

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x\ .$$

Na osnovu graničnih uslova dobijamo

$$0 = C_1 \quad i \quad 1 = -C_1,$$

što je nemoguće. Dakle, dati granični problem nema rješenje.

Primjer 5. Riješiti sledeći granični problem

$$y'' + y = 0,\ y(0) = 0,\ y(1) = 1.$$

Rješenje: U ovom slučaju imamo

$$0 = C_1$$
$$1 = C_1 \cos 1 + C_2 \sin 1,$$

odakle dobijamo $C_1 = 0$, $C_2 = 1/\sin 1$. Dakle, dati granični problem ima jedinstveno rješenje

$$y = \sin x / \sin 1.$$

Primjer 6. Riješiti sledeći granični problem

$$y'' + y = 0,\ y(0) = 0,\ y(\pi) = 0.$$

Rješenje: Rješenje ovog graničnog problema je

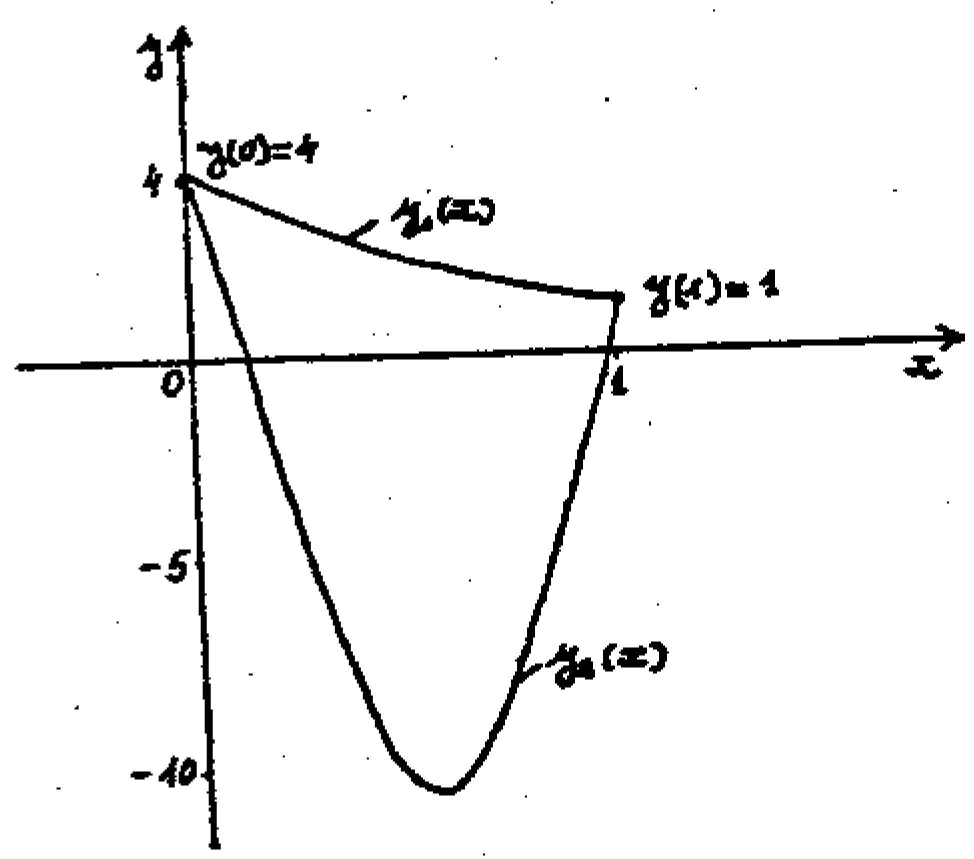
$$y = C \sin x,$$

gdje je C proizvoljna konstanta. Dakle, dati granični problem ima beskonačno mnogo rješenja.

Primjer 7. Riješiti sledeći granični problem

$$y'' = \frac{3}{2} y^2,\ y(0) = 4,\ y(1) = 1.$$

Rješenje: Ovaj granični problem ima dva rješenja; rješenja su prikazana na sledećoj slici.



Pretpostavićemo, ako se drugačije ne naglasi, da zadati granični problem ima rješenje ili čak šta više da je to rješenje jedinstveno.

2. - PREGLED METODA ZA RJEŠAVANJE GRANIČNIH PROBLEMA OBIČNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

a) Svodenje na Košijeve probleme.

Posmatrajmo sledeći granični problem

$$L[y] \equiv y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = r(x), \tag{2.1.}$$

$$y(a) = A, \quad y(b) = B. \tag{2.2.}$$

Neka je $y = \varphi(x,C_1,C_2)$ opšte rješenje DJ (2.1.). Na osnovu graničnih uslova (2.2.) dobijamo sistem jednačina po C_1 i C_2

$$\begin{aligned} \varphi(a,C_1,C_2) &= A \\ \varphi(b,C_1,C_2) &= B. \end{aligned} \tag{2.3.}$$

Sistem jednačina (2.3.) može nemati rješenje, imati jedinstveno rješenje, imati konačno ili beskonačno mnogo rješenja. Pretpostavimo da sistem jednačina (2.3.) ima rješenje i neka je $C_1 = \overline{C}_1$, $C_2 = \overline{C}_2$; tada je

$$y = \varphi(x,\overline{C}_1,\overline{C}_2)$$

rješenje graničnog problema (2.1.)-(2.2.).

Rješavanje graničnog problema (2.1.)-(2.2.) korišćenjem opteg rješenja DJ (2.1.) je povezano s dobro poznatim teškoćama integracije date DJ.

Metoda opšteg rješenja, bez sumnje, može u principu biti primijenjena i u slučaju najopštijeg graničnog problema (1.1.)-(1.7.).

Poznato je ([13]) da se rješenje graničnog problema (2.1.)-(2.2.) može dobiti kao linearna kombinacija rješenja $y_1(x)$ i $y_2(x)$ redom sledećih Košijevih problema

$$L[y_1] = r(x), \quad y_1(a) = A, \; y_1'(a) = 0, \tag{2.4.}$$

$$L[y_2] = 0, \quad y_2(a) = 0, \; y_2'(a) = 1, \tag{2.5.}$$

tj.

$$y(x) = y_1(x) + \alpha y_2(x), \tag{2.6.}$$

gdje je α, za sada, neodređen realan parametar.

Zaista, neposrednim provjeravanjem utvrđujemo da je (2.6.) rješenje DJ (2.1.) i da je ispunjen prvi granični uslov $y(a) = A$. Iz drugog graničnog uslova $y(b) = B$ dobijamo

$$\alpha = \frac{B - y_1(b)}{y_2(b)} . \tag{2.7.}$$

Na taj način imamo

$$y(x) = y_1(x) + \frac{B - y_1(b)}{y_2(b)} y_2(x), \tag{2.6'.}$$

gdje se pretpostavlja da je $y_2(b) \neq 0$, i pri tome granični problem (2.1.)-(2.2.) ima jedinstveno rješenje. Ako je $y_2(b) = 0$, onda granični problem (2.1.)-(2.2.) ili ima beskonačno mnogo rješenja ili uopšte nema rješenje.

Primjer 8. Svođenjem na Košijeve probleme riješiti sledeći granični problem

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 2,$$
$$y(1) = 1, \; y(2) = 3.$$

Rješenje: Posmatrajmo sledeće Košijeve probleme - nehomogeni Košijev problem

$$x^2y_1'' - 2xy_1 + 2y_1 = 2, \; y_1(1) = 1, \; y_1'(1) = 0,$$

i homogeni Košijev problem

$$x^2y_2'' - 2xy_2' + 2y_2 = 0, \; y_2(1) = 0, \; y_2'(1) = 1.$$

Rješenje nehomogenog Košijevog problema je $y_1(x) = 1$; rješenje homogenog Košijevog problema je $y_2(x) = x^2 - x$. Budući da je $y_1(2) = 1$ i $y_2(2) = 2$ imamo da je

$$\alpha = \frac{3 - 1}{2} = 1,$$

pa je rješenje graničnog problema

$$y(x) = 1 + (x^2 - x) = 1 - x + x^2.$$

U slučaju DJ n-tog reda, $n > 2$,

$$L[y] \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = r(x) \tag{2.1'.}$$

i graničnih uslova

(2.2') $\qquad y(x_i) = \beta_i, \quad i = \overline{1,n},$

rješenje tražimo u obliku

(2.6') $\qquad y(x) = y_1(x) + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i y_i(x)$,

gdje je $y_1(x)$ rješenje sledećeg nehomogenog Košijevog problema

(2.4') $\quad L[y_1] = r(x),\ y_1(x_1) = \beta_1,\ y_1^{(s)}(x_1) = 0,\ s = \overline{1,n-1},$

a $y_i(x)$, $i = \overline{2,n}$, su rješenja sledećih homogenih Košijevih problema

(2.5') $\quad L[y_i] = 0,\ y_i(x_1) = 0,\ y_i^{(s-1)}(x_1) = \begin{cases} 1, & s = i \\ 0, & s \neq i \end{cases},$

$i = \overline{2,n}$.

Koeficijenti α_i, $i = \overline{2,n}$, se određuju iz uslova

$$y(x_i) = \beta_i, \quad i = \overline{2,n},$$

tj. iz sistema jednačina

(2.7') $\qquad y_1(x_i) + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j y_j(x_i) = \beta_i,\ i = \overline{2,n}.$

Primjer 9. Svođenjem na Košijeve probleme riješiti sledeći granični problem

$$L[y] \equiv (x^2 - 2x + 3)y''' - (x^2 + 1)y'' + 2xy' - 2y = -2,$$

$$y(-1) = 0, \quad y(0) = 2, \quad y(1) = 2.$$

Rješenje: Potražimo rješenje u obliku

$$y(x) = y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \alpha_3 y_3(x),$$

gdje je $y_1(x)$ rješenje sledećeg nehomogenog Košijevog problema

$$L[y_1] = -2,\ y_1(0) = 2,\ y_1'(0) = 0,\ y_1''(0) = 0,$$

a $y_2(x)$ i $y_3(x)$ su redom rješenja sledećih homogenih Košijevih problema

$$L[y_2] = 0,\ y_2(0) = 0,\ y_2'(0) = 1,\ y_2''(0) = 0,$$

$$L[y_3] = 0,\ y_3(0) = 0,\ y_3'(0) = 0,\ y_3''(0) = 1.$$

Na taj način dobijamo redom

$$y_1(x) = 1 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}e^x - \frac{1}{3}(x^2 - 1),$$

$$y_2(x) = x,$$
$$y_3(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}e^x + \frac{1}{3}(x^2 - 1),$$

pa je odgovarajući sistem (2.7.)

$$\frac{5}{3} + \frac{2}{3}e^{-1} - \alpha_2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{-1}\right)\alpha_3 = 0$$
$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3}e \quad + \alpha_2 + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}e\right)\alpha_3 = 2,$$

odakle je $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = -2$. Dakle, rješenje datog graničnog problema je

$$y(x) = 2 + x - x^2.$$

Analogno bismo postupili i u slučaju drugačijih graničnih uslova. Na primjer u slučaju graničnih uslova treće vrste

$$\begin{aligned} &\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A \\ (2.8.)\qquad &\beta_1 y(b) + \beta_1 y'(b) = B \end{aligned}$$

$$|\alpha_0| + |\alpha_1| > 0, \quad |\beta_0| + |\beta_1| > 0,$$

rješenje graničnog problema (2.1.)-(2.8.) tražimo u obliku

(2.9.) $$y(x) = y_1(x) + \alpha y_2(x),$$

gdje je $y_1(x)$ neko partikularno rješenje nehomogene LDJ

$$L[y_1] = r(x),$$

a $y_2(x)$ nenulto rješenje odgovarajuće HLDJ

$$L[y_2] = 0,$$

a α, za sada, neodređen realan parametar.

Neposrednim provjeravanjem utvrđujemo da je (2.9.) rješenje DJ (2.1.). Na osnovu prvog graničnog uslova imamo

$$\alpha_0[y_1(a) + \alpha y_2(a)] + \alpha_1[y_1'(a) + \alpha y_2'(a)] = A$$

ili

$$[\alpha_0 y_1(a) + \alpha_1 y_1'(a)] + \alpha[\alpha_0 y_2(a) + \alpha_1 y_2'(a)] = A,$$

pa zaključujemo da je potrebno da bude

$$\alpha_0 y_1(a) + \alpha_1 y_1'(a) = A$$

$$\alpha_0 y_2(a) + \alpha_1 y_2'(a) = 0.$$

Da bi prethodne jednakosti bile ispunjene dovoljno je da stavimo

$$y_2(a) = \alpha_1 k, \quad y_2'(a) = -\alpha_0 k,$$

gdje je k konstanta različita od nule i

$$y_1(a) = \frac{A}{\alpha_0}, \quad y_1'(a) = 0,$$

za $\alpha_0 \neq 0$, ili

$$y_1(a) = 0, \quad y_1'(a) = \frac{A}{\alpha_1},$$

za $\alpha_1 \neq 0$. Dakle, pod uvedenim pretpostavkama rješenje (2.9.) zadovoljava i DJ (2.1.) i prvi granični uslov (2.8.). Odredimo konstantu α tako da bude ispunjen i drugi granični uslov (2.8.), tj. da bude

$$\beta_0[y_1(b) + \alpha y_2(b)] + \beta_1[y_1'(b) + \alpha y_2'(b)] = B$$

ili

$$[\beta_0 y_1(b) + \beta_1 y_1'(b)] + \alpha[\beta_0 y_2(b) + \beta_1 y_2'(b)] = B,$$

odakle je

(2.10.) $$\alpha = \frac{B - [\beta_0 y_1(b) + \beta_1 y_1'(b)]}{\beta_0 y_2(b) + \beta_1 y_2'(b)},$$

gdje se pretpostavlja da je $\beta_0 y_2(b) + \beta_1 y_2'(b) \neq 0$, i pri tome granični problem (2.1.)-(2.8.) ima jedinstveno rješenje. Granični problem (2.1.)-(2.8.) ili nema rješenje ili ima beskonačno mnogo rješenja, ako je $\beta_0 y_2(b) + \beta_1 y_2'(b) = 0$. Dakle, rješenje (2.9.) se dobija kao linearna kombinacija rješenja $y_1(x)$ i $y_2(x)$ sledećih Košijevih problema

$$L[y_1] = r(x), \; y_1(a) = \frac{A}{\alpha_0}, \; y_1'(a) = 0 \; (\text{ili } y_1(a) = 0, \; y_1'(a) = \frac{A}{\alpha_1},$$

$$L[y_2] = 0, \; y_2(a) = \alpha_1 k, \; y_2'(a) = -\alpha_0 k.$$

Očigledno, u ovim razmatranjima bitnu ulogu je igrala linearnost DJ; granični uslovi mogu biti i nelinearni.

Primjer 10. Svodenjem na Košijeve probleme riješiti sledeći granični problem

$$L[y] \equiv (x^2 + 1)y'' - 2xy' + 2y = 6,$$

$$y(0) + y'(0) = 3, \; 2y(1) - y'(1) = 4.$$

Rješenje: Posmatrajmo sledeća dva Košijeva problema

$$L[y_1] = 6, \quad y_1(0) = 3, \quad y_1'(0) = 0,$$

$$L[y_2] = 0, \quad y_2(0) = k, \quad y_2'(0) = -k.$$

Rješenje prvog, nehomogenog Košijevog problema je $y_1(x)=3$, a rješenje drugog, homogenog Košijevog problema je $y_2(x) = -k(x^2 + x - 1)$, ili, stavimo li npr. $k = -1$, $y_2(x) = x^2 + x - 1$. Na osnovu (2.10.) imamo

$$\alpha = \frac{4 - [2*3 - 0]}{2*1 - 1*3} = 2,$$

pa je traženo rješenje

$$y(x) = 3 + 2(x^2 + x - 1) = 1 + 2x + 2x^2.$$

b) Svođenje na linearnu kombinaciju linearno nezavisnih funkcija.

Izvjestan broj metoda daje mogućnost nalaženja rješenja $y(x)$ graničnog problema

$$L[y] \equiv y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = r(x), \tag{2.11.}$$

$$\begin{aligned} U_1[y] &\equiv \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A \\ U_2[y] &\equiv \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B, \end{aligned} \tag{2.12.}$$

gdje je

$$|\alpha_0| + |\alpha_1| > 0, \quad |\beta_0| + |\beta_1| > 0,$$

u analitičkom obliku polazeći od proizvoljnog skupa linearno nezavisnih (bazisnih) funkcija $u_i(x)$, $i = \overline{0,n}$, od kojih funkcija $u_0(x)$ zadovoljava nehomogene granične uslove

(2.13.) $U_1[u_0] = A, \quad U_2[u_0] = B,$

a funkcije $u_i(x)$, $i = \overline{1,n}$, zadovoljavaju odgovarajuće homogene granične uslove

(2.14.) $U_1[u_i] = 0, \quad U_2[u_i] = 0, \quad i = \overline{1,n}.$

Ako su granični uslovi (2.12.) homogeni, onda se uzima da je $u_0(x) \equiv 0$.

Rješenje graničnog problema (2.11.)-(2.12.) tražimo u obliku

(2.15.) $$y(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i u_i(x).$$

Uvrstimo li (2.15.) u (2.11.) dobijamo

(2.16.) $$R(x,C_1,\ldots,C_n) \equiv L[y] - r(x) = L[u_0] - r(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i L[u_i] .$$

Ako je za neki izbor koeficijenata C_i, $i = \overline{1,n}$,

$$R(x,C_1,\ldots,C_n) \equiv 0, \text{ za } a \leqslant x \leqslant b,$$

onda je (2.15.) tačno rješenje graničnog problema (2.11.)-(2.12.). Uopšte govoreći takav izbor koeficijenata C_i, $i = \overline{1,n}$, je nemoguć. (Razumije se, to će biti samo u slučaju da je linearna kombinacija bazisnih funkcija jednaka tačnom rješenju $y(x)$.) U praksi se zadovoljavamo time da se funkcija $R(x,C_1,\ldots,C_n)$ anulira u izvjesnom broju tačaka intervala (a,b) ili da se za $x \in (a,b)$ minimizira u nekom smislu; na taj način se dobijaju razne metode za rješavanja postavljenog graničnog problema.

Metoda kolokacije se sastoji u sledećem: izaberu se tačke x_i, $x_i \in (a,b)$, $i = \overline{1,n}$, - tačke kolokacije i iz uslova da se funkcija $R(x,C_1,\ldots,C_n)$ anulira u tačkama kolokacije određujemo koeficijente C_i, $i = \overline{1,n}$. Na taj način dobijamo sistem linearnih algebarskih jednačina

(2.17.) $R(x_i,C_1,\ldots,C_n) = 0, \quad i = \overline{1,n},$

za određivanje koeficijenata C_i, $i = \overline{1,n}$.

Osnovni problem kod primjene metode kolokacije je izbor tačaka kolokacije. Ponekad se za tačke kolokacije uzimaju tačke ravnomjerne podjele intervala (a,b), a ponekad nule nekog specijalnog polinoma.

Primjer 11. Metodom kolokacije riješiti sledeći granični problem

$$y'' + xy' + y = 2x, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0.$$

Rješenje: Neka su redom bazisne funkcije $u_0(x) = 1 - x$, $u_1(x) = x(1 - x)$, $u_2(x) = x^2(1 - x)$, $u_3(x) = x^3(1 - x)$ i tačke kolokacije $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{3}{4}$. Očigledno, bazisne funkcije su linearno nezavisne i zadovoljavaju uslove (2.13.) i (2.14.). Rješenje graničnog problema tražimo u obliku

$$y(x) = (1-x) + C_1x(1-x) + C_2x^2(1-x) + C_3x^3(1-x).$$

Zamjenom $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$ u datu DJ dobijamo

$$R(x,C_1,C_2,C_3) = (1-4x) + (-2+2x-3x^2)C_1 + (2-6x+3x^2-4x^3)C_2 + $$
$$+ (6x-12x^2+4x^3-5x^4)C_3.$$

U tačkama kolokacije imamo

$$R(\tfrac{1}{4},C_1,C_2,C_3) \equiv 0 + (-\tfrac{27}{16})C_1 + \tfrac{5}{8}C_2 + \tfrac{203}{256}C_3 = 0$$
$$R(\tfrac{1}{2},C_1,C_2,C_3) \equiv -1 + (-\tfrac{7}{4})C_1 + (-\tfrac{9}{4})C_2 + \tfrac{3}{16}C_3 = 0$$
$$R(\tfrac{3}{4},C_1,C_2,C_3) \equiv -2 + (-\tfrac{35}{16})C_1 + (-\tfrac{5}{2})C_2 + (-\tfrac{549}{256})C_3 = 0$$

ili

$$203\,C_3 + 160\,C_2 - 432\,C_1 = 0$$
$$3\,C_3 - 36\,C_2 - 28\,C_1 = 16$$
$$-549\,C_3 - 640\,C_2 - 560\,C_1 = 512.$$

Rješenje ovog sistema je: $C_1 = -13.233$, $C_2 = 7.039$, $C_3 = -33.709$, pa je rješenje graničnog problema

$$y(x) = (1-x) - 13.233x(1-x) + 7.039x^2(1-x) - $$
$$- 33.709x^3(1-x),$$

ili

$$y(x) = (1-x)(1 - 13.233x + 7.039x^2 - 33.709x^3).$$

Integralna metoda najmanjih kvadrata sastoji se u sledećem: koeficijenti C_i, $i = \overline{1,n}$, u (2.16.) se odreduju iz uslova

(2.18.) $$I(C_1,\dots,C_n) = \int_a^b R^2(x,C_1,\dots,C_n)\,dx = \min.$$

Da bi bio ispunjen uslov (2.18.) potrebno je da bude

(2.19.) $$\frac{1}{2}\frac{\partial I}{\partial C_i} \equiv \int_a^b R\,\frac{\partial R}{\partial C_i}\,dx = 0, \quad i = \overline{1,n}.$$

Očigledno, (2.19.) predstavlja sistem linearnih algebarskih jednačina; rješavanjem ovog sistema dobijamo koeficijente C_i, $i = \overline{1,n}$.

Primjer 12. Integralnom metodom najmanjih kvadrata riješiti sledeći granični problem

$$y'' + xy' - 3y = 4x,\ y(0) = 0,\ y(1) = 2.$$

Rješenje: Neka su redom bazisne funkcije $u_0(x) = x(x+1)$, $u_1(x) = x(x-1)$, $u_2(x) = x^2(x-1)$. Rješenje graničnog problema tražimo u obliku

$$y(x) = x(x+1) + C_1x(x-1) + C_2x^2(x-1).$$

Zamjenom $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$ u datu DJ dobijamo

$$R(x,C_1,C_2) = (2-6x-x^2) + (2+2x-x^2)C_1 + (-2+8x+x^2+x^3)C_2.$$

Za odredivanje koeficijenata C_1 i C_2 na osnovu uslova (2.18.), odnosno (2.19.), imamo sledeći sistem linearnih algebarskih jednačina

$$\frac{1}{2}\frac{\partial I}{\partial C_1} \equiv \int_0^1 R\,\frac{\partial R}{\partial C_1}\,dx \equiv \frac{36}{5}C_1 + \frac{231}{30}C_2 - \frac{92}{15} = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial I}{\partial C_2} \equiv \int_0^1 R\,\frac{\partial R}{\partial C_2}\,dx \equiv \frac{77}{10}C_1 + \frac{1667}{105}C_2 - \frac{277}{30} = 0,$$

ili

$$\begin{aligned} 216\,C_1 + 231\,C_2 &= 184 \\ 1617\,C_1 + 3334\,C_2 &= 1939, \end{aligned}$$

odakle je

$$C_1 = \frac{165547}{346617} = 0.4776, \quad C_2 = \frac{3095619}{5341182} = 0.5796,$$

pa je traženo rješenje

$$y(x) = x(x+1) + 0.4776x(x-1) + 0.5796x^2(x-1)$$

ili

$$y(x) = 0.5224x + 0.8980x^2 + 0.5796x^3.$$

Ako umjesto uslova (2.18.) za određivanje koeficijenata C_i, $i = \overline{1,n}$, uzmemo uslov minimuma konačne sume

$$(2.20.) \qquad I_N(C_1,\dots,C_n) = \sum_{j=1}^{N} R^2(x_j,C_1,\dots,C_n) = \min.,$$

gdje je x_j, $j = \overline{1,N}$, $N \geqslant n$, dovoljno gust skup tačaka odsječka $[a,b]$, onda imamo tačnu metodu najmanjih kvadrata. Da bi bio ispunjen uslov (2.20.) potrebno je da bude

$$(2.21.) \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial I_N}{\partial C_i} = \sum_{j=1}^{N} R\,\frac{\partial R}{\partial C_i} = 0, \quad i = \overline{1,n}.$$

Očigledno, (2.21.) predstavlja sistem linearnih algebarskih jednačina, tzv. sistem normalnih jednačina; rješavanjem ovog sistema dobijamo koeficijente C_i, $i = \overline{1,n}$.

Primjer 13. Tačnom metodom najmanjih kvadrata riješiti sledeći granični problem

$$y'' + xy' - 2y = 2, \quad y(0) = 0, \ y(1) = 1.$$

Rješenje: Neka su redom bazisne funkcije $u_0(x) = x$, $u_1(x) = x(x-1)$, $u_2(x) = x^2(x-1)$. Rješenje tražimo u obliku

$$y(x) = x + C_1x(x-1) + C_2x^2(x-1).$$

Zamjenom $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$ u datu DJ dobijamo

$$R(x,C_1,C_2) = (-2-x) + (x+2)C_1 + (x^3+6x-2)C_2.$$

Uzmemo li za čvorove intervala (0,1) tačke $x_j = \frac{j}{4}$, $j = 1, 2,3$, tada dobijamo

$$R(x_j,C_1,C_2) = -2-x_j + (x_j+2)C_1+(x_j^3+6x_j-2)C_2, \quad j=1,2,3,$$

ili

$$R(x_j,C_1,C_2) = -2-x_j + \alpha_jC_1 + \beta_jC_2, \quad j = 1,2,3,$$

gdje je $\alpha_j = x_j + 2$, $\beta_j = x_j^3 + 6x_j - 2$.

Na taj način imamo

$$I_3(C_1,C_2) = \sum_{j=1}^{3} R^2(x_j,C_1,C_2).$$

Odgovarajući sistem normalnih jednačina (2.21.) je

$$\frac{1}{2}\frac{\partial I_3}{C_1} = \sum_{j=1}^{3}(-2-x_j)\,\alpha_j + C_1\sum_{j=1}^{3}\alpha_j^2 + C_2\sum_{j=1}^{3}\alpha_j\,\beta_j = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial I_3}{\partial C_2} = \sum_{j=1}^{3}(-2-x_j)\,\beta_j + C_1\sum_{j=1}^{3}\alpha_j\,\beta_j + C_2\sum_{j=1}^{3}\beta_j^2 = 0.$$

Sledećom tabelom dat je računski proces

j	x_j	$-2-x_j$	α_j	$(-2-x_j)\,\alpha_j$	α_j^2	x_j^3
1	0.25	-2.2500	2.2500	-5.0625	5.0625	0.0156
2	0.50	-2.5000	2.5000	-6.2500	6.2500	0.1250
3	0.75	-2.7500	2.7500	-7.5625	7.5625	0.4219
$\sum$				-18.8750	18.8750	

$6x_j$	β_j	β_j^2	$\alpha_j\,\beta_j$	$(-2-x_j)\,\beta_j$
1.5000	-0.4844	0.2346	-1.0899	1.0899
3.0000	1.1250	1.2656	2.8125	-2.8125
4.5000	2.9219	8.5375	8.0352	-8.0352
		10.0377	9.7578	-9.7578

Na taj način imamo

$$18.8750\ C_1 + \ 9.7578\ C_2 = 18.8750$$
$$9.7578\ C_1 + 10.0377\ C_2 = \ 9.7578,$$

odakle dobijamo: $C_1 = 1.000$, $C_2 = 0.000$. Dakle, rješenje datog graničnog problema je

$$y(x) = x + x(x-1) = x^2.$$

Odredimo li koeficijente C_i, $i = \overline{1,n}$, u (2.16.) koristeći sledeću teoremu iz teorije opštenih Furijeovih redova (Joseph Fourier, 1768-1830), koju navodimo bez dokaza ([13]), Teorema: Neka je $u_i(x)$, $i = 0,1,\ldots$, potpun sistem funkcija s nenultom normom koje su ortogonalne na odsječku $[a,b]$. Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna i ortogonalna sa svakom funkcijom $u_i(x)$ na odsječku $[a,b]$, tj.

$$(2.22.)\qquad \int_a^b f(x)\, u_i(x)\, dx = 0, \quad i = 0,1,\ldots,$$

onda je $f(x) \equiv 0$ za $a \leq x \leq b$, dobijamo metodu Galerkina ili metodu momenata. Naime, koeficijente C_i, $i = \overline{1,n}$, određujemo iz uslova ortogonalnosti funkcije $R(x,C_1,\ldots,C_n)$ i funkcija $u_i(x)$, $i = \overline{1,n}$, na odsječku $[a,b]$, tj.

$$(2.23.)\qquad \int_a^b u_i(x)\, R(x,C_1,\ldots,C_n)\, dx = 0, \quad i = \overline{1,n}.$$

Očigledno, (2.23.) predstavlja sistem linearnih algebarskih jednačina za određivanje koeficijenata C_i, $i = \overline{1,n}$.

Primjer 14. Galerkinovom metodom riješiti sledeći granični problem

$$y'' - (x+1)y' + 2y = 2x, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0.$$

Rješenje: Neka su bazisne funkcije $u_0(x) = 1-x$, $u_1(x) = x(1-x)$, $u_2(x) = x^2(1-x)$. Rješenje tražimo u obliku

$$y(x) = (1-x) + C_1 x(1-x) + C_2 x^2(1-x).$$

Zamjenom $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$ u datu DJ dobijamo

$$R(x,C_1,C_2) = (3-3x) + C_1(3x-3) + C_2(x^3+3x^2-8x+2).$$

Odgovarajući sistem linearnih algebarskih jednačina (2.23.) je

$$\int_0^1 (x-x^2)\, R(x,C_1,C_2)\, dx = 0$$

$$\int_0^1 (x^2-x^3) R(x,C_1,C_2)\, dx = 0$$

ili

$$-\frac{3}{20} C_2 - \frac{1}{4} C_1 + \frac{1}{4} = 0$$

$$\frac{1027}{210} C_2 - \frac{31}{10} C_1 + \frac{31}{10} = 0,$$

odakle je $C_1 = 1$ i $C_2 = 0$. Dakle, traženo rješenje datog graničnog problema je

$$y(x) = (1-x) + x(1-x) = 1 - x^2.$$

Nije teško pokazati da navedene metode mogu biti primijenjene i u slučaju graničnog problema za LDJ n-tog reda, $n > 2$. Linearnost DJ je pri tome bitna pretpostavka, a granični uslovi mogu biti i nelinearni; bazisne funkcije treba izabrati tako da budu zadovoljeni dati nelinearni granični uslovi. Ove metode mogu biti primijenjene i u slučaju nelinearnih DJ; uopšte govoreći određivanje koeficijenata C_i, $i = \overline{1,n}$, se svodi na rješavanje sistema nelinearnih algebarskih ili transcendentnih jednačina.

c) Metoda konačnih razlika.*

Posmatrajmo DJ

(2.24.) $F(x,y,y',y'') = 0$

i granične uslove

$$G_a(a,y(a),y'(a)) = 0$$
(2.25.)
$$G_b(b,y(b),y'(b)) = 0.$$

Metoda konačnih razlika za rješavanje graničnog problema (2.24.)-(2.25.) sastoji se u sledećem. Odsječak $[a,b]$ podijelimo na n jednakih dijelova dužine

$$h = \frac{b-a}{n}.$$

Tačke podjele - čvorovi imaju apscise $x_i = x_0 + ih$, $i = \overline{0,n}$, $x_0 = a$, $x_n = b$. Uvedimo za $x = x_i$ sledeće oznake: $y(x_i) = y_i$, $y'(x_i) = y_i'$, $y''(x_i) = y_i''$, $F(x_i,y(x_i),y'(x_i),y''(x_i)) = F(x_i,y_i,y_i',y_i'')$. Ako u DJ (2.24.) za $x = x_i$, $i = \overline{1,n-1}$, umjesto izvoda uzmemo približne vrijednosti - količnike konačnih razlika

$$y_i' \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h},$$

$$y_i'' \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

---

*Opštiji bi bio naziv: Metoda mreža.

dobićemo sistem od (n-1)-ne jednačine po y_i, $i = \overline{0,n}$,

$$F_i\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}, \frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}\right) = 0, \quad i = \overline{1,n-1} \,. \tag{2.27.}$$

Za tačke $x_o = a$ i $x_n = b$ imamo

$$\begin{aligned} &G_a\left(x_o, y_o, \frac{-y_2+4y_1-3y_o}{2h}\right) = 0, \\ &G_b\left(x_n, y_n, \frac{3y_n-4y_{n-1}+y_{n-2}}{2h}\right) = 0. \end{aligned} \tag{2.28.}$$

Očigledno, (2.27.) i (2.28.) predstavlja sistem od (n+1)-ne jednačine sa (n+1)-nom nepoznatom: y_o, $y_1, \dots, y_n$.

Ako je granični problem linearan (tj. ako F linearna funkcija po y, y', y'' i ako su G_a i G_b linearne funkcije po y, y'), onda je dobijeni sistem linearan, inače je nelinearan. Ako je granični problem homogen, dobijeni sistem je homogen, inače je nehomogen.

Razumije se da su dobijene vrijednosti y_o, $y_1, \dots, y_n$ rješavanjem sistema jednačina (2.27.)-(2.28.) približne vrijednosti rješenja $y(x)$ u čvorovima x_i, $i = \overline{0,n}$ (zbog toga bi bilo korektnije da su drugačije obilježene, npr. sa Y_i, $i = \overline{0,n}$). Ako se želi postići veća tačnost, onda je prirodno smanjiti dužinu h, tj. povećati broj čvorova. Međutim, povećanje broja čvorova dovodi do povećanja broja jednačina u sistemu (2.27.)-(2.28.). Na taj način imamo da se teorijski dobijeno povećanje tačnosti smanjuje zbog grešaka pri rješavanju dobijenog sistema jednačina. Umjesto toga bolje je umjesto obrazaca (2.26.) uzeti tačnije obrasce, na primjer

$$\begin{aligned} y_i' &\approx \frac{-y_{i+2} + 8y_{i+1} - 8y_{i-1} + y_{i-2}}{12h} \\ y_i'' &\approx \frac{-y_{i+2} + 16y_{i+1} - 30y_i + 16y_{i-1} - y_{i-2}}{12h^2} \end{aligned} \tag{2.26.'}$$

Ako se koriste obrasci (2.26.), onda imamo običnu metodu konačnih razlika; ako se koriste obrasci (2.26.') onda imamo poboljšanu metodu konačnih razlika.

Ova metoda može biti primijenjena i u slučaju DJ n-tog reda, $n>2$; potrebno je izvode zamijeniti odgovarajućim količnicima konačnih razlika. Npr. ako je u pitanju DJ trećeg reda, onda imamo i

$$y''' \approx \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2}}{2h^3},$$

ili

$$y''' \approx \frac{-y_{i+3}+8y_{i+2}-13y_{i+1}+13y_{i-1}-8y_{i-2}+y_{i-3}}{8h^3}.$$

U opštem slučaju imamo za k parno

$$y_i^{(k)} \approx \frac{1}{h^k} \Delta^k y_{i-\frac{k}{2}},$$

a za k neparno

$$y_i^{(k)} \approx \frac{1}{2}\frac{1}{h^k}\left(\Delta^k y_{i-\frac{k+1}{2}} + \Delta^k y_{i-\frac{k-1}{2}}\right).$$

Ilustrujmo metodu sledećim primjerima.

Primjer 15. Običnom metodom konačnih razlika riješiti sledeći granični problem

$$y'' + y + x = 0, \quad y(0) = y(1) = 0, \quad h = 0.2.$$

Rješenje: Iz graničnih uslova imamo $y_0 = 0$ i $y_5 = 0$; odgovarajući sistem jednačina je

$$\frac{y_2 - 2y_1 + 0}{(0.2)^2} + y_1 + 0.2 = 0$$

$$\frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{(0.2)^2} + y_2 + 0.4 = 0$$

$$\frac{y_4 - 2y_3 + y_2}{(0.2)^2} + y_3 + 0.6 = 0$$

$$\frac{0 - 2y_4 + y_3}{(0.2)^2} + y_4 + 0.8 = 0.$$

Rješavanjem ovog sistema dobijamo

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y	0	0.03610	0.06278	0.07102	0.05250	0

.

Poređenja radi navedimo numeričke vrijednosti tačnog rješenja $y = \sin x / \sin 1 - x$

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
y	0	0.03611	0.06281	0.07106	0.05256	0

.

Primjer 16. Poboljšanom metodom konačnih razlika riješiti sledeći granični problem

$y'' - xy' + 2y = 0,\quad 10y(-1) + y'(-1) = 10,\quad 10y(1) - y'(1) = 10,\quad h = 0.5.$

Rješenje: Odgovarajući sistem linearnih algebarskih jednačina u sređenom obliku je

$$\begin{aligned}
7y_0 + 4y_1 - y_2 \qquad\qquad &= 10\\
7y_0 - 12y_1 + 9y_2 \qquad\qquad &= 0\\
y_0 - 16y_1 + 24y_2 - 16y_3 + y_4 &= 0\\
9y_2 - 12y_3 + 7y_4 &= 0\\
y_2 - 4y_3 - 7y_4 &= 10,
\end{aligned}$$

pa je rješenje graničnog problema

x	-1	-0.5	0	0.5	1
y	0	3.7500	5.0000	3.7500	0

.

Primjer 17. Riješiti sledeći homogeni granični problem

$y'' + \lambda xy = 0,\quad y(0) = y(1.5) = 0,\quad h = 0.5.$

Rješenje: Odgovarajući sistem linearnih algebarskih jednačina u sređenom obliku je

$$\begin{aligned}
y_2 + (0.5^3\lambda - 2)y_1 &= 0\\
(0.5^2\lambda - 2)y_2 + y_1 &= 0.
\end{aligned}$$

Iz uslova za postojanje netrivijalnog rješenja ovog sistema

$$\begin{vmatrix} 1 & 0.5^3\lambda - 2 \\ 0.5^2\lambda - 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

dobijamo jednačinu

$$\lambda^2 - 24\lambda + 96 = 0.$$

Rješenja poslednje jednačine $\lambda_1 = 18.93$ i $\lambda_2 = 5.07$ predstavljaju dvije sopstvene vrijednosti zadatog homogenog graničnog problema - Šturm-Liuvilovog problema. Odgovarajuće sopstvene funkcije su $y(x,18.93)$ i $y(x,5.07)$; numeričke vrijednosti ovih funkcija se mogu odrediti iz posmatranog homogenog sistema algebarskih jednačina.

Primjer 18. Riješiti sledeći granični problem

$$y'' - \frac{1+x}{2+x} y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(\infty) = 0, \quad h = 0.5.$$

Rješenje: Iz diferencne jednačine

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{0.5^2} - \frac{1 + ih}{2 + ih} y_i = 0, \quad i = 1,2,\ldots$$

redom računamo $y_2, y_3, \ldots$ u funkciji od y_1. S obzirom na drugi granični uslov možemo staviti da je $y_n = 0$ i na taj način dobijamo niz aproksimacija za y_1.

y_n	$y_n = 0$
$y_2 = 2.15y_1 - 1$	$y_1 = 0.465$
$y_3 = 3.6583y_1 - 2.1667$	$y_1 = 0.593$
$y_4 = 5.8200y_1 - 3.7202$	$y_1 = 0.6392$
$y_5 = 9.0728y_1 - 5.9714$	$y_1 = 0.6582$
$y_6 = 14.090y_1 - 9.3836$	$y_1 = 0.6660$
$y_7 = 21.925y_1 - 14.672$	$y_1 = 0.6692$
$y_8 = 34.245y_1 - 22.961$	$y_1 = 0.6704$

Primjena ove metode u slučaju nelinearnog graničnog problema je moguća ali je povezana s dobro poznatim teškoćama rješavanja nelinearnih sistema algebarskih jednačina.

3. - PRIMJENA METODE OSTATAKA NA RJEŠAVANJE GRANIČNIH PROBLEMA OBIČNIH DJ

U 2.a) je pokazano kako se rješavanje graničnih problema običnih LDJ n-tog reda može svesti na rješavanje jednog nehomogenog Košijevog problema i (n-1) homogenog Košijevog problema. Za rješavanje odgovarajućih Košijevih problema može biti primijenjena bilo koja od poznatih metoda - što predstavlja nov problem. Ovdje ćemo pokazati kako se na granične probleme DJ može primijeniti metoda ostataka razrađena u [1] , posebno na linearne i posebno na nelinearne granične probleme. Biće posmatrani i nehomogeni i homogeni granični problemi. Rješenja odgovarajućih Košijevih problema ćemo tražiti u obliku Tejlorovog reda.

a) Linearni granični problemi.

1) Svođenje na dva ili više Košijevih problema.

Posmatrajmo sledeći granični problem

(3.1.) $\quad L[y] \equiv y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = r(x),$

(3.2.) $\quad y(a) = A, \quad y(b) = B,$

i sledeće Košijeve probleme

(3.3.) $\quad L[y_1] = r(x), \quad y_1(a) = A, \quad y_1'(a) = 0,$

(3.4.) $\quad L[y_2] = 0, \quad y_2(a) = 0, \quad y_2'(a) = 1.$

Rješenje graničnog problema (3.1.)-(3.2.) tražićemo u obliku (2.6.). Metoda rješavanja će se zasnivati na metodi ostataka ([1]). Pod istim pretpostavkama učinjenim u [1] za Košijeve probleme tražićemo rješenje u obliku reda

(3.5.) $$y(x) = A + \sum_{i=2}^{\infty} a_i(x-a)^i + \alpha\left[(x-a) + \sum_{i=2}^{\infty} b_i(x-a)^i\right],$$

gdje je

$$(3.6.)\qquad \alpha = \frac{B - A - \sum_{i=2}^{\infty} a_i (b-a)^i}{b - a + \sum_{i=2}^{\infty} b_i (b-a)^i} .$$

Zaista, neposrednim provjeravanjem može se utvrditi da je (3.5.) rješenje graničnog problema (3.1.)-(3.2.).

Uvedimo oznake za $k \geqslant 1$

$$s_k(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i (x-a)^i = A + \sum_{i=2}^{k} a_i (x-a)^i ,$$

$$\delta_k(x) = r(x) - p_2(x)s_k(x) - p_1(x)s_k'(x) - s_k''(x),$$

$$S_k(x) = \sum_{i=0}^{k} b_i (x-a)^i = (x-a) + \sum_{i=2}^{k} b_i (x-a)^i ,$$

$$\Delta_k(x) = - p_2(x)S_k(x) - p_1(x)S_k'(x) - S_k''(x).$$

Koeficijente a_i i b_i za $i = 2,3,\ldots$ računako po formulama ([1])

$$(3.7.)\qquad a_i = \frac{1}{i(i-1)} \lim_{x\to a} \frac{\delta_{i-1}(x)}{(x-a)^{i-2}} ,\qquad b_i = \frac{1}{i(i-1)} \lim_{x\to a} \frac{\Delta_{i-1}(x)}{(x-a)^{i-2}} .$$

Za α uzimamo prema (3.6.) približno

$$\alpha \approx \alpha_k = \frac{B - s_k(b)}{S_k(b)} .$$

<u>Primjer 19.</u> Riješiti sledeći granični problem

$(2x+1)y'' + (2x-1)y'-2y=x^2+2x$, $y(0)=1$, $y(1) = 3.23576$.

Rješenje: Rješenje tražimo u obliku

$$y(x) = 1 + \sum_{i=2}^{\infty} a_i x^i + \alpha[x + \sum_{i=2}^{\infty} b_i x^i] .$$

Redom računamo

$$s_1(x) = 1,\quad s_1'(x) = 0,\quad s_1''(x) = 0,\qquad \delta_1(x) = \frac{x^2+x+2}{2x+1} ,$$

$$a_2 = \frac{1}{2*1}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2+2x+2}{2x+1}}{x^0} = 1,$$

$S_1(x) = x,\ S_1'(x) = 1,\ S_1''(x) = 0,\ \Delta_1(x) = \frac{1}{2x+1}$,

$$b_2 = \frac{1}{2*1}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2x+1}}{x^0} = \frac{1}{2*1},$$

Dalje je

$s_2(x) = 1 + x^2,\ s_2'(x) = 2x,\ s_2''(x) = 2,\ \delta_2(x) = \frac{-x(x+1)}{2x+1}$,

$$a_3 = \frac{1}{3*2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-x(x+1)}{2x+1}}{x^1} = -\frac{1}{3!},$$

$S_2(x)=x+\frac{x^2}{2!}$, $S_2'(x)=1+x,\ S_2''(x)=1,\ \Delta_2(x) = \frac{-x(x+1)}{2x+1}$,

$$b_3 = \frac{1}{3*2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-x(x+1)}{2x+1}}{x^1} = -\frac{1}{3!}.$$

Analogno dobijamo: $a_4 = b_4 = \frac{1}{4!},\ a_5 = b_5 = -\frac{1}{5!},\dots$.

Na taj način imamo

$$y(x)=1+x^2-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{5!}x^5+\dots+\alpha[x+\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4- - \frac{1}{5!}x^5+\dots].$$

Zadržimo li se na aproksimacijama $s_9(x)$ i $S_9(x)$ dobićemo prema (3.6.)

$$\alpha\approx\alpha_9 = \frac{3.23576 - s_9(1)}{S_9(1)} = \frac{3.23576 - 1.86788}{1.36788} = 1.00000.$$

Dakle, približno rješenje je

$$\tilde{y}(x) = -1 + 3x + \frac{1}{2}x^2 + 2(1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3+\dots - \frac{1}{9!}x^9).$$

Primijetimo da je tačno rješenje

$$y(x) = -1 + 3x + \frac{1}{2}x^2 + 2(1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3+\dots) = -1 + 3x + \frac{1}{2}x^2 + 2e^{-x}.$$

Bez ikakvih principijelnih teškoća metoda može biti primijenjena i na granične probleme LDJ višeg reda $(n > 2)$.

Pokažimo to na sledećem primjeru.

Primjer 20. Riješiti sledeći granični problem

$$L[y]\equiv y'''-xy''-3xy'+9y = 9x^2-8x+3,\ y(0)=1,\ y(1)=0,\ y(2)=-5.$$

Rješenje: Rješenje tražimo u obliku

$$y(x)=1+\sum_{i=3}^{\infty} a_i x^i + \alpha_2[x+\sum_{i=3}^{\infty} b_i x^i]+\alpha_3[x^2+\sum_{i=3}^{\infty} c_i x^i].$$

Redom računamo

$$s_2(x)=1,\ s_2'(x)=0,\ s_2''(x)=0,\ s_2'''(x)=0,\ \delta_2(x)=-6-\dots,$$

$$a_3=\frac{1}{3*2*1}\lim_{x\to 0}\frac{-6-\dots}{x^0}=-1,$$

$$S_2(x)=x,\ S_2'(x)=1,\ S_2''(x)=0,\ S_2'''(x)=0,\quad \Delta_2(x)=-6x,$$

$$b_3=\frac{1}{3*2*1}\lim_{x\to 0}\frac{-6x}{x^0}=0,$$

$$\mathcal{S}_2(x)=x^2,\ \mathcal{S}_2'(x)=2x,\ \mathcal{S}_2''(x)=2,\ \mathcal{S}_2'''(x)=0,\ \mathcal{D}_2(x)=2x-\dots,$$

$$c_3=\frac{1}{3*2*1}\lim_{x\to 0}\frac{2x-\dots}{x^0}=0.$$

Zadržimo li se na aproksimacijama $s_3(x)=1-x^3$, $S_3(x)=x$, $\mathcal{S}_3(x)=x^2$, imaćemo približno rješenje datog graničnog problema

$$y(x)=1-x^3+\alpha_2 x+\alpha_3 x^2.$$

Iskoristimo li druga dva granična uslova $y(1)=0$, $y(2)=-5$, imaćemo sistem linearnih algebarskih jednačina za odredivanje nepoznatih parametara α_2 i α_3

$$\alpha_2+\alpha_3=0$$
$$\alpha_2+2\alpha_3=1,$$

odakle je $\alpha_2=-1$, $\alpha_3=1$. Na taj način približno rješenje je

$$\tilde{y}(x)=1-x+x^2-x^3.$$

Primijetimo da je to i tačno rješenje.

2) Svođenje na jedan Košijev problem.

Posmatrajmo sledeći Košijev problem

(3.8.) $L[y] \equiv y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = r(x)$, $y(a) = A$, $y'(a) = \alpha$,

gdje je α neodređen realan parametar. Rješenje Košijevog problema (3.8.) tražimo u obliku reda

(3.9.) $$y(x) = A + \alpha(x-a) + \sum_{i=2}^{\infty} a_i(x-a)^i.$$

Koeficijente a_i, $i \geq 2$, računamo po formuli ([1])

(3.10.) $$a_i = \frac{1}{i(i-1)} \lim_{x \to a} \frac{\delta_{i-1}(x)}{(x-a)^{i-2}},$$

gdje je

$$\delta_k(x) = r(x) - p_2(x)s_k(x) - p_1(x)s_k'(x) - s_k''(x),$$

a $s_k(x)$ je parcijalna suma reda (3.9.), tj.

$$s_k(x) = A + \alpha(x-a) + \sum_{i=2}^{k} a_i(x-a)^i, \quad k \geq 1.$$

Zbog linearnosti DJ (3.8.) nepoznati parametar α će figurisati linearno u izrazima za koeficijente reda (3.9.). Iskoristimo li drugi granični uslov $y(b) = B$, dobićemo linearnu jednačinu za određivanje nepoznatog parametra α, tj.

(3.11.) $$B = A + \alpha(b-a) + \sum_{i=2}^{\infty} a_i(b-a)^i.$$

Dovoljno je na osnovu (3.11.) parametar α odrediti s traženom tačnošću.

Primjer 21. Riješiti sledeći granični problem

$$y'' + 4xy' + (4x^2+2)y = 0, \; y(-1) = 0, \; y(0) = 1.$$

Rješenje: Rješenje tražimo u obliku

$$y(x) = 1 + \alpha x + \sum_{i=2}^{\infty} a_i x^i,$$

gdje je α neodređen parametar. Redom računamo

$s_1(x) = 1 + \alpha x$, $s_1'(x) = \alpha$, $s_1''(x) = 0$, $\delta_1(x) = -2 + \cdots$,

$$a_2 = \frac{1}{2 \cdot 1} \lim_{x \to 0} \frac{-2 + \cdots}{x^0} = -1.$$

Dalje je

$s_2(x)=1+\alpha x-x^2$, $s_2'(x)=\alpha-2x$, $s_2''(x)=-2$, $\delta_2(x)=-6\alpha x+\cdots$,

$$a_3 = \frac{1}{3\cdot 2}\lim_{x\to 0}\frac{-6\alpha x+\cdots}{x^1} = -\alpha .$$

Analogno dobijamo: $a_4 = \frac{1}{2}$, $a_5 = \frac{4\alpha+1}{10}, \ldots$, i zadržavši se na aproksimaciji $s_5(x)$ približno rješenje je

$$\tilde{y}(x) = 1+\alpha x-x^2-\alpha x^3+\frac{1}{2}x^4+\frac{4\alpha+1}{10}x^5.$$

Iz drugog graničnog uslova $y(-1) = 0$ dobijamo $\alpha = 1$. Na taj način imamo

$$\tilde{y}(x) = 1 + x - x^2 - x^3 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^5.$$

Inače, tačno rješenje je

$$y(x) = 1+x-x^2-x^3+\frac{1}{2!}x^4 + \frac{1}{2!}x^5-\frac{1}{3!}x^6 - \frac{1}{3!}x^7+\cdots=(1+x)e^{-x^2}.$$

Bez ikakvih principijelnih teškoća metoda može biti primijenjena i na granične probleme LDJ višeg reda $(n>2)$. Pokažimo to na sledećem primjeru.

Primjer 22. Riješiti sledeći granični problem

$$y^{IV}=xy'''-y''+xy'-3y+x^2+2x+5,\ y(-1)=0,\ y(0)=1,\ y(1)=4,$$

$y(2)=15$.

Rješenje: Neka je $y'(0)=\alpha$, $y''(0)=\beta$, $y'''(0)=\gamma$. Rješenje tražimo u obliku

$$(*)\qquad y(x)= 1 +\alpha x + \beta x^2 +\gamma x^3 + \sum_{i=4}^{\infty} a_i x^i;$$

koeficijente a_i, $i\geq 4$, računamo koristeći formulu

$$a_i = \frac{1}{i(i-1)(i-2)(i-3)}\lim_{x\to 0}\frac{\delta_{i-1}(x)}{x^{i-4}},$$

gdje je

$$\delta_k(x) = xs_k'''(x)-s_k''(x)+xs_k'(x)-3s_k(x)+x^2+2x+5-s_k^{IV}(x),$$

a $s_k(x)$ je parcijalna suma reda $(*)$, tj.

$$s_k(x) = 1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \sum_{i=4}^{k} a_i x^i .$$

Redom računamo

$s_3(x)=1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3$, $s_3'(x)=\alpha + 2\beta x + 3\gamma x^2$, $s_3''(x)=$
$=2\beta + 6\gamma x$, $s_3'''(x)=6\gamma$, $s_3^{IV}(x)=0$, $\delta_3(x)= 2 - 2\beta + \cdots$,

$$a_4 = \frac{1}{4*3*2*1} \lim_{x\to 0} \frac{2-2\beta+\cdots}{x^0} = \frac{1-\beta}{12} .$$

Zadržimo li se na aproksimaciji $s_4(x)$ imaćemo približno rješenje

$$\tilde{y}(x)=1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \frac{1-\beta}{12} x^4 .$$

Iskoristimo li granične uslove $y(-1)=0$, $y(1)=4$, $y(2)=15$ dobićemo sistem linearnih algebarskih jednačina za određivanje nepoznatih realnih parametara α, β, γ, tj.

$$\begin{aligned} 12\alpha - 11\beta + 12\gamma &= 13 \\ 12\alpha + 11\beta + 12\gamma &= 35 \\ 3\alpha + 4\beta + 12\gamma &= 19, \end{aligned}$$

odakle je $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$, pa je približno rješenje

$$\tilde{y}(x) = 1 + x + x^2 + x^3 .$$

b) Nelinearni granični problemi.

Posmatrajmo sledeći nelinearni granični problem

(3.12.) $\quad y'' = f(x,y,y'),\quad y(a) = A,\quad y(b) = B,$

gdje je $f(\cdot,\cdot,\cdot)$ nelinearna funkcija po druga dva argumenta. Rješenje graničnog problema (3.12.) tražimo pomoću Košijevog problema

(3.13.) $\quad y'' = f(x,y,y'),\ y(a) = A,\quad y'(a) = \alpha$,

gdje je α neodređen realan parametar. Rješenje Košijevog problema (3.13.) tražimo u obliku reda

(3.14.) $\quad y(x) = A + \alpha(x-a) + \sum_{i=2}^{\infty} a_i (x-a)^i .$

Koeficijente a_i, $i \geq 2$, računamo po formuli

$$(3.15.)\qquad a_i = \frac{1}{i(i-1)} \lim_{x\to a} \frac{\delta_{i-1}(x)}{(x-a)^{i-2}},$$

gdje je

$$\delta_k(x) = f(x, s_k(x), s_k'(x)) - s_k''(x),$$

a $s_k(x)$ je parcijalna suma reda (3.14.), tj.

$$s_k(x) = A + \alpha(x-a) + \sum_{i=2}^{k} a_i(x-a)^i,\ k \geqslant 1.$$

Zbog nelinearnosti DJ (3.12.) nepoznati parametar α će figurisati nelinearno u izrazima za koeficijente a_i, $i \geqslant 2$, reda (3.14.). Iskoristimo li drugi granični uslov $y(b)=B$, dobićemo nelinearnu jednačinu za određivanje parametra , tj.

$$(3.16.)\qquad B = A + \alpha(b-a) + \sum_{i=2}^{\infty} a_i(b-a)^i.$$

Rješenje jednačine (3.16.) dovoljno je odrediti s traženom tačnošću npr. Njutnovom metodom ili metodom iteracije. Rješenje jednačine (3.16.) nije uvijek jedinstveno, što je posljedica nelinearnosti graničnog problema, tj. višeznačnosti rješenja graničnog problema (3.12.).

<u>Primjer 23.</u> Riješiti sledeći granični problem

$$y'' + y'^2 - 4y = -2,\ y(0) = 1,\ y(1) = 2.$$

Rješenje: Neka je $y'(0) = \alpha$. Rješenje tražimo u obliku

$$y(x) = 1 + \alpha x + \sum_{i=2}^{\infty} a_i x^i.$$

Redom računamo

$$s_1(x) = 1 + \alpha x,\ s_1'(x) = \alpha,\ s_1''(x) = 0,\quad \delta_1(x) = 2 - \alpha^2 + \dots,$$

$$a_2 = \frac{1}{2*1} \lim_{x\to 0} \frac{2-\alpha^2 + \dots}{x^0} = \frac{2-\alpha^2}{2}.$$

Dalje je

$$s_2(x) = 1 + \alpha x + \frac{2-\alpha^2}{2} x^2,\ s_2'(x) = \alpha + (2-\alpha^2)x,\ s_2''(x) = 2-\alpha^2,$$

$$\delta_2(x) = 2\alpha^3 x + \dots,$$

$$a_3 = \frac{1}{3\cdot 2} \lim_{x\to 0} \frac{2\alpha^3 + \dots}{x} = \frac{\alpha^3}{3} .$$

Zadržimo li se na aproksimaciji $s_3(x)$ imaćemo

$$\tilde{y}(x) = 1 + \alpha x + \frac{2-\alpha^2}{2} x^2 + \frac{\alpha^3}{3} x^3.$$

Iz drugog graničnog uslova $y(1)=2$ dobijamo $\alpha=0$. Na taj način imamo

$$\tilde{y}(x) = 1 + x^2.$$

Bez ikakvih principijelnih teškoća metoda može biti primijenjena i na granične probleme nelinearnih DJ višeg reda $(n > 2)$.

c) Homogeni granični problemi - Šturm-Liuvilov problem.

Posmatrajmo homogenu linearnu DJ (HLDJ)

(3.17.) $\quad u'' + a_1(x)u' + a_2(x)u = 0,$

gdje za $x \in [\xi_1,\xi_2] = I$ koeficijent $a_1(x) \in C^1(I)$ a koeficijent $a_2(x) \in C(I)$. Smjenom

$$u = y \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{x_0}^{x} a_1(x)\, dx\right), \quad (x_0, x \in I)$$

HLDJ (3.17.) se svodi na kanoničan oblik

(3.18.) $\quad y'' - p(x)y = 0,$

gdje je

$$p(x) = \frac{1}{4} a_1^2(x) + \frac{1}{2} a_1'(x) - a_2(x).$$

Posmatraćemo sledeći homogeni granični problem: odrediti ono rješenje $u(x)$ HLDJ (3.17.), odnosno $y(x)$ HLDJ (3.18.), koje zadovoljava homogene granične uslove

(3.19.') $\quad u(x_0) = u(x_1) = 0, \ (x_0, x_1 \in I),$

odnosno

(3.19.) $\quad y(x_0) = y(x_1) = 0, \ (x_0, x_1 \in I).$

Očigledno, homogeni granični problem (3.17.)-(3.19.'), odnosno (3.18.)-(3.19.), uvijek ima trivijalno rješenje $u(x) \equiv 0$, odnosno $y(x) \equiv 0$; od interesa su netrivijalna rješenja odgovarajućeg Šturm-Liuvilovog problema

(3.20.) $$y'' - \lambda p(x)y = 0,$$

(3.21.) $$y(x_0,\lambda) = y(x_1,\lambda) = 0,$$

gdje je λ parametar koji ne zavisi ni od x ni od y.

Definicija 5. Vrijednosti parametra λ za koje homogeni granični problem (3.20.)-(3.21.) ima netrivijalno rješenje zovu se sopstvene ili karakteristične vrijednosti a odgovarajuća rješenja $y(x,\lambda)$ sopstvene funkcije graničnog problema (3.20.)-(3.21.).

Pokažimo kako se metoda ostataka može primijeniti i u rješavanju Šturm-Liuvilovog problema pri čemu se koristi pokazani postupak svođenja na Košijeve probleme.

Posmatrajmo sledeći Košijev problem

(3.22.) $$y'' - \lambda p(x)y = 0, \quad y(x_0,\lambda) = 0, \quad y'(x_0,\lambda) = \alpha,$$

gdje je α neodređen parametar. Rješenje Košijevog problema (3.22.) tražimo u obliku reda

(3.23.) $$y(x,\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i(\lambda,\alpha)(x-x_0)^i = \alpha(x-x_0) + \sum_{i=2}^{\infty} b_i(\lambda,\alpha)(x-x_0)^i.$$

Koeficijente $b_i(\lambda,\alpha)$, $i \geq 2$, računamo po formuli ([1])

(3.24.) $$b_i(\lambda,\alpha) = \frac{1}{(i-1)i} \lim_{x\to x_0} \frac{\delta_{i-1}(x)}{(x-x_0)^{i-2}},$$

gdje je

$$\delta_k(x) = \lambda p(x)s_k(x) - s_k''(x),$$

a $s_k(x)$ je parcijalna suma reda (3.23.), tj.

$$s_k(x) = \alpha(x-x_0) + \sum_{i=2}^{k} b_i(\lambda,\alpha)(x-x_0)^i, \quad k \geq 1.$$

Zbog linearnosti DJ (3.18.) nepoznati parametar α će figurisati linearno u izrazima za koeficijente reda (3.23.) a zbog homogenosti DJ (3.18.) biće

$$b_i(\lambda,\alpha) = \alpha a_i(\lambda), \quad i \geq 2.$$

Na taj način imamo

$$y(x,\lambda)=\alpha\left[(x-x_0)+\sum_{i=2}^{\infty}a_i(\lambda)(x-x_0)^i\right],$$

i bez smanjenja opštosti možemo uzeti npr. $\alpha=1$. Sumiramo li dobijeni red dobićemo rješenje $y(x,\lambda)$ postavljenog Šturm-Liuvilovog problema. Sopstvene vrijednosti dobijamo rješavanjem jednačine

$$\bar{y}(x_1,\lambda)=0.$$

Medutim, u složenijim slučajevima, koji su česti i u praksi, nije moguće sumirati dobijeni red ili, ako je moguće, suma reda je nepodesnog oblika za primjenu. Tada uzimamo odsječak reda za približno rješenje. Sopstvene vrijednosti odredujemo s traženom tačnošću npr. Njutnovom metodom

$$\lambda_n^{(k+1)}=\lambda_n^{(k)}-\frac{y(x_1,\lambda_n^{(k)})}{y'(x_1,\lambda_n^{(k)})},\quad k=0,1,\dots .$$

Primjer 24. Riješiti sledeći Šturm-Liuvilov problem

$$y''+\lambda y=0,\ y(x_0)=y(x_1)=0,\ x_0\neq x_1.$$

Rješenje: Neka je $y'(x_0,\lambda)=1$. Rješenje Košijevog problema

$$y''+\lambda y=0,\ y(x_0,\lambda)=0,\ y'(x_0,\lambda)=1$$

tražimo u obliku reda

$$y(x,\lambda)=(x-x_0)+\sum_{i=2}^{\infty}a_i(\lambda)(x-x_0)^i.$$

Redom računamo

$$s_1(x)=x-x_0,\ s_1'(x)=1,\ s_1''(x)=0,\ \delta_1(x)=-\lambda(x-x_0),$$

$$a_2(\lambda)=\frac{1}{2\cdot1}\lim_{x\to x_0}\frac{-\lambda(x-x_0)}{(x-x_0)^0}=0,$$

$$a_3(\lambda)=\frac{1}{3\cdot2}\lim_{x\to x_0}\frac{-\lambda(x-x_0)}{(x-x_0)^1}=-\frac{\lambda}{3!}.$$

Dalje je

$$s_3(x)=(x-x_0)-\frac{\lambda}{3!}(x-x_0)^3,\ s_3'(x)=1-\frac{\lambda}{2!}(x-x_0)^2,$$

$$s_3''(x) = -\lambda(x-x_0), \quad \delta_3(x) = \frac{\lambda^2}{3!}(x-x_0)^3,$$

$$a_4(\lambda) = \frac{1}{3*4} \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{\lambda^2}{3!}(x-x_0)^3}{(x-x_0)^2} = 0,$$

$$a_5(\lambda) = \frac{1}{4*5} \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{\lambda^2}{3!}(x-x_0)^3}{(x-x_0)^3} = \frac{\lambda^2}{5!}, \dots .$$

Zaključujemo: $a_{2j}(\lambda) = 0$, $a_{2j+1}(\lambda) = (-1)^j \dfrac{\lambda^j}{(2j+1)!}$, $j \geqslant 0$.

Na taj način imamo

$$y(x,\lambda)=(x-x_0)-\frac{\lambda}{3!}(x-x_0)^3 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\lambda^j}{(2j+1)!}(x-x_0)^{2j+1}.$$

Za $\lambda>0$ imamo

$$y(x,\lambda)=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left(\sqrt{\lambda}(x-x_0) - \frac{[\sqrt{\lambda}(x-x_0)]^3}{3!} +\dots\right)= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin\sqrt{\lambda}(x-x_0).$$

Iskoristimo li drugi granični uslov $y(x_1,\lambda) = 0$ dobićemo

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin\sqrt{\lambda}(x_1-x_0) = 0,$$

odakle su sopstvene vrijednosti

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{x_1-x_0}\right)^2, \quad n = 1,2,\dots$$

a odgovarajuće sopstvene funkcije su

$$y_n(x,\lambda_n) = \frac{x_1-x_0}{n\pi} \sin n\pi\frac{x-x_0}{x_1-x_0},$$

ili poslije normiranja

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{x_1-x_0}} \sin n\pi\frac{x-x_0}{x_1-x_0}, \quad n = 1,2,\dots .$$

<u>Primjer 25.</u> Dat je granični problem

$$y'' + \lambda x^2 y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Odrediti s tačnošću 10^{-2} jednu sopstvenu vrijednost i odgovarajuću sopstvenu funkciju.

Rješenje: Posmatrajmo sledeći Košijev problem

$$y'' + \lambda x^2 y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$$

Rješenje tražimo u obliku reda

$$y(x,\lambda) = x + \sum_{i=2}^{\infty} a_i(\lambda)x^i.$$

Redom računamo

$$s_1(x) = x,\ s_1'(x) = 1,\ s_1''(x) = 0,\quad \delta_1(x) = -\lambda x^3,$$

$$a_2(\lambda) = \frac{1}{1*2}\lim_{x\to 0}\frac{-\lambda x^3}{x^0} = 0,$$

$$a_3(\lambda) = a_4(\lambda) = 0,\ a_5(\lambda) = \frac{1}{4*5}\lim_{x\to 0}\frac{-\lambda x^3}{x^3} = -\frac{\lambda}{4*5}.$$

Dalje je

$$s_5(x) = x - \frac{\lambda}{4*5}x^5,\ s_5'(x) = 1 - \frac{\lambda}{4}x^4,\ s_5''(x) = -\lambda x^3,$$

$$\delta_5(x) = \frac{\lambda^2}{4*5}x^7,\quad a_6(\lambda) = a_7(\lambda) = a_8(\lambda) = 0,$$

$$a_9(\lambda) = \frac{1}{8*9}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\lambda^2}{4*5}x^7}{x^7} = \frac{\lambda^2}{4*5*8*9},$$

i slično

$$a_{10}(\lambda) = a_{11}(\lambda) = a_{12}(\lambda) = 0,\ a_{13}(\lambda) = \frac{\lambda^3}{4*5*8*9*12*13},\ \ldots .$$

Dakle,

$$y(x,\lambda) = x - \frac{\lambda}{4*5}x^5 + \frac{\lambda^2}{4*5*8*9}x^9 - \frac{\lambda^3}{4*5*8*9*12*13}x^{13} + \ldots .$$

Iskoristimo li drugi granični uslov $y(1,\lambda) = 0$ i uzmemo li za početnu aproksimaciju $\lambda_1^{(0)} = 30$ primjenom Njutnove metode za rješavanje algebarskih i transcendentnih jednačina dobijamo

$$\lambda_1^{(1)} = 30 - \frac{1.0000-1.5000+0.6250-0.1202+0.0133-0.0009+\cdots}{-0.0500+0.0417-0.0120+0.0018-0.0002+\cdots} =$$

$$= 30 + \frac{0.0172}{0.0187} = 30 + 0.92 = 30.92.$$

Na potpuno isti način dobijamo $\lambda_1^{(2)} = 30.93$, $\lambda_1^{(3)} = 30.93$. Dakle, $\lambda_1 = 30.93$ a odgovarajuća sopstvena funkcija je $y(x,30.93)$.

4. - PRIMJENA ANTICIPATIVNE METODE NA RJEŠAVANJE GRANIČNIH PROBLEMA OBIČNIH DJ

Rješenje graničnog problema se traži u obliku Tejlorovog reda. Za određivanje koeficijenta A_{k+1} uzima se unapred (anticipira; lat. anticipare = unapred uzeti (ili uzimati)) da su koeficijenti $A_1, \ldots, A_k$ poznati i iz uslova određenosti koeficijenta A_{k+1} dobijaju se uslovi za određivanje koeficijenata $A_1, \ldots, A_k$.

a) Nehomogeni granični problemi.

Neka je dat granični problem

(4.1) $$L[y] \equiv y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = r(x),$$

(4.2.) $$y(a) = A, \quad y(b) = B.$$

U 3. je pokazano kako se rješenje graničnog problema (4.1)-(4.2.) može dobiti kao linearna kombinacija rješenjâ $y_1(x)$ i $y_2(x)$ redom Košijevih problema

$$L[y_1] = r(x), \quad y_1(a) = A, \quad y_1'(a) = 0,$$
$$L[y_2] = 0, \quad y_2(a) = 0, \quad y_2'(a) = 1,$$

tj.

$$y(x) = y_1(x) + \alpha y_2(x),$$

gdje se nepoznati realni parametar α određuje iz drugog graničnog uslova $y(b) = B$, ili pomoću jednog Košijevog problema

$$L[y] = r(x), \quad y(a) = A, \quad y'(a) = \alpha,$$

gdje se nepoznati realni parametar α određuje, opet, iz drugog graničnog uslova. U oba slučaja osnova za rješavanje Košijevih problema, znači i graničnih problema, je bila metoda ostataka ([1]). U prvom slučaju bitna je bila linearnost DJ, a u drugom slučaju DJ je mogla biti i nelinearna.

Ovdje ćemo pokazati kako se granični problem (4.1.) - -(4.2.) može riješiti uzimajući za osnovu anticipativnu metodu ([2]).

Rješenje graničnog problema (4.1.)-(4.2.) tražimo u obliku reda

$$(4.3.)\quad y(x)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-a)^i=A+\sum_{i=1}^{k} A_i(x-a)^i+\sum_{i=k+1}^{\infty} a_i(x-a)^i,$$

$k\geq 1$, gdje su koeficijenti A_i, $i=\overline{1,k}$, za sada neodređeni. Uvedimo sledeće oznake

$$S_k(x) = A + \sum_{i=1}^{k} A_i(x-a)^i,$$

$$\Delta_k(x) = r(x) - p_2(x)S_k(x) - p_1(x)S_k'(x) - S_k''(x).$$

Izraz $\Delta_k(x)$ može biti razvijen u Tejlorov red po stepenima binoma $x-a$, tj.

$$(4.4.)\quad \Delta_k(x) = \alpha_0(A_1,\dots,A_k) + \alpha_1(A_1,\dots,A_k)(x-a) +\dots+$$
$$+ \alpha_{k-2}(A_1,\dots,A_k)(x-a)^{k-2} + \alpha_{k-1}(A_1,\dots,A_k)(x-a)^{k-1} +\dots .$$

Iz uslova konačnosti izraza

$$\lim_{x\to a} \frac{\Delta_k(x)}{(x-a)^{k-1}}$$

dobijamo sistem algebarskih jednačina sa k nepoznatih veličina $A_1,\dots, A_k$

$$(4.5.)\quad \begin{aligned} &\alpha_0(A_1,\dots,A_k) = 0\\ &\alpha_1(A_1,\dots,A_k) = 0\\ &\vdots\\ &\alpha_{k-2}(A_1,\dots,A_k) = 0. \end{aligned}$$

Zbog linearnosti DJ (4.1.) dobijeni sistem je linearan. Radi određenosti sistema neka je jedna od veličina $A_1,\dots, A_k$ jednaka α, npr. $A_i = \alpha$, $1\leq i\leq k$, gdje je α neodređen realan parametar. Na taj način imamo

$$(4.5.')\quad \begin{aligned} &\alpha_0(A_1,\dots,A_{i-1},\alpha,A_{i+1},\dots,A_k) = 0\\ &\alpha_1(A_1,\dots,A_{i-1},\alpha,A_{i+1},\dots,A_k) = 0\\ &\vdots\\ &\alpha_{k-2}(A_1,\dots,A_{i-1},\alpha,A_{i+1},\dots,A_k) = 0, \end{aligned}$$

što predstavlja sistem algebarskih jednačina za određivanje koeficijenata $A_1,\dots, A_{i-1}, A_{i+1},\dots, A_k$ u funkciji od parametra α. Pretpostavimo li da je rješenje graničnog problema (4.1.)-(4.2.) jedinstveno (za to je dovoljno pretpostaviti neprekidnost funkcija p_1, p_2, r), rješenje sistema (4.5.') je jedinstveno. Odredimo li približno rješenje graničnog problema (4.1.)-(4.2.)

$$(4.3.') \qquad \tilde{y}(x) = A + \sum_{i=1}^{k} A_i (x-a)^i$$

neodredeni parametar α možemo odrediti iz drugog graničnog uslova $y(b) = B$, tj. iz

$$(4.6.') \qquad B = A + \sum_{i=1}^{k} A_i (b-a)^i .$$

Primjer 26. Riješiti sledeći granični problem

$$y'' + 6xy' - 24y = -22, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 3.$$

Rješenje: Potražimo rješenje u obliku

$$y(x) = 1 + \sum_{i=1}^{4} A_i x^i + \sum_{i=5}^{\infty} a_i x^i .$$

Redom računamo

$$S_4(x) = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4,$$

$$S_4'(x) = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + 4A_4 x^3,$$

$$S_4''(x) = 2A_2 + 6A_3 x + 12A_4 x^2,$$

$$\Delta_4(x) = 2-2A_2 + (18A_1-6A_3)x + (12A_2-12A_4)x^2 + 6A_3 x^3.$$

Iz uslova konačnosti izraza

$$\lim_{x\to 0} \frac{\Delta_4(x)}{x^3}$$

dobijamo

$$2 - 2A_2 = 0$$
$$18A_1 - 6A_3 = 0$$
$$12A_2 - 12A_4 = 0$$

odakle je $A_1 = \alpha$, $A_2 = 1$, $A_3 = 3\alpha$, $A_4 = 1$.

Na taj način imamo

$$\tilde{y}(x) = 1 + \alpha x + x^2 + 3\alpha x^3 + x^4.$$

Iz drugog graničnog uslova $y(1) = 3$ dobijamo $\alpha = 0$. Dakle,

$$\tilde{y}(x) = 1 + x^2 + x^4.$$

Bez ikakvih principijelnih teškoća metoda može biti primijenjena i na nelinearne granične probleme. Pokažimo to na sledećem primjeru.

Primjer 27. Riješiti sledeći granični problem

$$y'' = \frac{3}{2} y^2, \quad y(0) = 4, \quad y(1) = 1.$$

Rješenje: Rješenje tražimo u sledećem obliku

$$y(x) = 4 + \sum_{i=1}^{3} A_i x^i + \sum_{i=4}^{\infty} a_i x^i.$$

Redom računamo

$$S_3(x) = 4 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3,$$

$$S_3'(x) = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2,$$

$$S_3''(x) = 2A_2 + 6A_3 x,$$

$$\Delta_3(x) = \frac{3}{2}(4+A_1x+A_2x^2+A_3x^3)^2 - 2A_2 - 6A_3x = 24-2A_2 + (12A_1-$$

$$-6A_3)x + \left(\frac{3}{2}A_1^2+12A_2\right)x^2 + (12A_3+3A_1A_2)x^3 + \cdots .$$

Iz uslova konačnosti izraza

$$\lim_{x\to 0} \frac{\Delta_3(x)}{x^2}$$

dobijamo

$$24 - 2A_2 = 0$$

$$12A_1 - 6A_3 = 0,$$

odakle je $A_1 = \alpha$, $A_2 = 12$, $A_3 = 2\alpha$. Dakle,

$$\tilde{y}(x) = 4 + \alpha x + 12x^2 + 2\alpha x^3.$$

Iz drugog graničnog uslova $y(1) = 1$ dobijamo $\alpha = -5$, pa je

$$\tilde{y}(x) = 4 - 5x + 12x^2 - 10x^3.$$

Iskoristimo li činjenicu da je

$$A_{k+1} = \frac{1}{k(k+1)} \lim_{x\to a} \frac{\Delta_k(x)}{(x-a)^{k-1}} = \frac{1}{k(k+1)} \alpha_{k-1}(A_1,\ldots,A_k)$$

umjesto sistema (4.5.) imaćemo sistem

$$
\begin{aligned}
&\alpha_0(A_1,\ldots,A_k) = 0\\
&\alpha_1(A_1,\ldots,A_k) = 0\\
(4.7.)\quad &\vdots\\
&\alpha_{k-2}(A_1,\ldots,A_k) = 0\\
&\alpha_{k-1}(A_1,\ldots,A_k) = k(k+1)A_{k+1},
\end{aligned}
$$

a umjesto sistema (4.5') imaćemo sistem

$$
(4.7')\quad
\begin{aligned}
\alpha_0(A_1,\dots,A_{i-1},\alpha,A_{i+1},\dots,A_k) &= 0\\
\alpha_1(A_1,\dots,A_{i-1},\alpha,A_{i+1},\dots,A_k) &= 0\\
&\vdots\\
\alpha_{k-2}(A_1,\dots,A_{i-1},\alpha,A_{i+1},\dots,A_k) &= 0\\
\alpha_{k-1}(A_1,\dots,A_{i-1},\alpha,A_{i+1},\dots,A_k) &= k(k+1)A_{k+1}.
\end{aligned}
$$

U primjeru 26. odgovarajući sistem bi bio

$$
\begin{aligned}
2 - 2A_2 &= 0\\
18A_1 - 6A_3 &= 0\\
12A_2 - 12A_4 &= 0\\
6A_3 &= 20A_5,
\end{aligned}
$$

odakle je $A_1 = \alpha$, $A_2 = 1$, $A_3 = 3\alpha$, $A_4 = 1$, $A_5 = \frac{9}{10}\alpha$, pa je

$$\tilde{y}(x) = 1 + \alpha x + x^2 + 3\alpha x^3 + x^4 + \frac{9}{10}\alpha x^5.$$

Iz drugog graničnog uslova $y(1) = 3$ dobijamo $\alpha = 0$. Dakle, opet je

$$\tilde{y}(x) = 1 + x^2 + x^4.$$

U slučaju DJ n-tog reda $(n > 2)$ odgovarajući sistem algebarskih jednačina se dobija iz uslova konačnosti izraza

$$\lim_{x\to a} \frac{\Delta_k(x)}{(x-a)^{k-n+1}}.$$

Sistem ima k nepoznatih veličina i $(k-n+1)$-nu jednačinu. Radi određenosti sistema neka su $(n-1)$-na od veličina $A_1,\dots,A_k$ jednake neodređenim realnim parametrima α, β, ... Odredimo li približno rješenje graničnog problema u obliku

$$y(x) = \sum_{i=0}^{k} A_i(\alpha,\beta,\dots)(x-a)^i$$

neodređene parametre možemo odrediti iz preostalih graničnih uslova. Pokažimo to na jednom primjeru.

<u>Primjer 28.</u> Riješiti sledeći granični problem

$$y''' = (2-2x-x^2)y'' + (2+4x)y' - 4y + 12x^2 + 20x^3,\quad y(0) = 1,$$
$$y(1) = 9,\quad y(2) = 49.$$

Rješenje: Potražimo rješenje u obliku

$$y(x) = 1 + \sum_{i=1}^{4} A_i x^i + \sum_{i=5}^{\infty} a_i x^i.$$

Redom računamo

$$S_4(x) = 1 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4,$$
$$S_4'(x) = A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + 4A_4x^3,$$
$$S_4''(x) = 2A_2 + 6A_3x + 12A_4x^2,$$
$$S_4'''(x) = 6A_3 + 24A_4x,$$

$$\Delta_4(x) = (2A_1+4A_2-6A_3-4) + (12A_3-24A_4)x + (2A_2-6A_3+24A_4)x^2 + \dots\,.$$

Iz uslova konačnosti izraza

$$\lim_{x\to 0} \frac{\Delta_4(x)}{x^2}$$

dobijamo

$$2A_1 + 4A_2 - 6A_3 - 4 = 0$$
$$12A_3 - 24A_4 = 0,$$

odakle je $A_1 = 2 + 6\beta - 2\alpha$, $A_2 = \alpha$, $A_3 = 2\beta$, $A_4 = \beta$. Na taj način imamo

$$\tilde{y}(x) = 1 + (2+6\beta-2\alpha)x + \alpha x^2 + 2\beta x^3 + \beta x^4.$$

Iz druga dva granična uslova $y(1) = 9$, $y(2) = 49$ dobijamo

$$-\alpha + 9\beta = 6$$
$$44\beta = 44,$$

odakle je $\alpha = 3$ i $\beta = 1$, pa je

$$\tilde{y}(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4.$$

b) Homogeni granični problemi.

Neka je dat sledeći homogeni granični problem: homogena linearna diferencijalna jednačina (HLDJ)

(4.8.) $\quad u'' + a_1(x)u' + a_2(x)u = 0,$

gdje za $x\in[x_1,x_2] = I$ koeficijent $a_1(x)\in C^1(I)$, a koeficijent $a_2(x)\in C(I)$, i homogeni granični uslovi

(4.9.) $\quad u(a) = u(b) = 0, \quad (a,b\in I).$

Bez smanjenja opštosti možemo posmatrati homogeni granični problem u sledećem obliku

(4.10.) $\quad y'' - p(x)y = 0,$

(4.11.) $\quad y(a) = y(b) = 0.$

Homogeni granični problem (4.8.)-(4.9.), odnosno (4.10)-(4.11.), uvijek ima trivijalno rješenje $u(x) \equiv 0$, odnosno $y(x) \equiv 0$; od interesa su netrivijalna rješenja odgovarajućeg Šturm-Liuvilovog problema

(4.12.) $y'' - \lambda p(x)y = 0$,

(4.13.) $y(a, \lambda) = y(b, \lambda) = 0$,

gdje je λ parametar koji ne zavisi ni od x, ni od y. Posmatraćemo problem nalaženja takvih vrijednosti parametra λ za koje postoji netrivijalno rješenje postavljenog Šturm-Liuvilovog problema. Takve vrijednosti λ, kao što je ranije rečeno, zovu se sopstvene vrijednosti, a odgovarajuća rješenja $y(x, \lambda)$ sopstvene funkcije postavljenog problema.

Rješenje graničnog problema (4.12.)-(4.13.) tražimo u obliku

(4.14.) $$y(x,\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(\lambda)(x-a)^i = \sum_{i=1}^{k} A_i(\lambda)(x-a)^i + \sum_{i=k+1}^{\infty} a_i(\lambda)(x-a)^i, \quad k \geqslant 1,$$

gdje su koeficijenti $A_i(\lambda)$, $i = \overline{1,k}$, za sada neodređeni.

Uvedimo sledeće oznake

$$S_k(x) = \sum_{i=1}^{k} A_i(\lambda)(x-a)^i,$$

$$\Delta_k(x) = \lambda p(x) S_k(x) - S_k''(x).$$

Izraz $\Delta_k(x)$ može biti razvijen u Tejlorov red po stepenima binoma $x-a$, tj.

(4.15.) $$\Delta_k(x) = \alpha_0(A_1(\alpha),\dots,A_k(\alpha)) + \alpha_1(A_1(\alpha),\dots,A_k(\alpha))(x-a)+\dots+\alpha_{k-2}(A_1(\alpha),\dots,A_k(\alpha))(x-a)^{k-2}+\alpha_{k-1}(A_1(\alpha),\dots,A_k(\alpha))(x-a)^{k-1}+\dots .$$

Iz uslova konačnosti izraza

$$\lim_{x\to a} \frac{\Delta_k(x)}{(x-a)^{k-1}}$$

dobijamo sistem algebarskih jednačina sa k nepoznatih veličina $A_1(\lambda),\dots, A_k(\lambda)$

$$\alpha_0(A_1(\lambda),\dots,A_k(\lambda)) = 0$$

$$\alpha_1(A_1(\lambda),\dots,A_k(\lambda)) = 0$$

$$(4.16.)\qquad \vdots$$
$$\alpha_{k-2}(A_1(\lambda),\dots,A_k(\lambda)) = 0.$$

Zbog linearnosti DJ (4.10.) dobijeni sistem jednačina je linearan po $A_1(\lambda),\dots, A_k(\lambda)$. Zbog homogenost DJ (4.10.) možemo bez smanjenja opštosti staviti da je jedna od veličina $A_1(\lambda),\dots, A_k(\lambda)$ jednaka određenoj realnoj konstanti c, $c\neq 0$, (ili fukciji $c(\lambda)$, $c(\lambda)\not\equiv 0$); neka je npr. $A_i(\lambda) = c \neq 0$, $1\leq i\leq k$. Sistem jednačina (4.16.) ima sada $(k-1)$-nu jednačinu i $(k-1)$-nu nepoznatu

$$\alpha_0(A_1(\lambda),\dots,A_{i-1}(\lambda),c,A_{i+1}(\lambda),\dots,A_k(\lambda)) = 0$$
$$\alpha_1(A_1(\lambda),\dots,A_{i-1}(\lambda),c,A_{i+1}(\lambda),\dots,A_k(\lambda)) = 0$$
$$(4.16'.)\qquad \vdots$$
$$\alpha_{k-2}(A_1(\lambda),\dots,A_{i-1}(\lambda),c,A_{i+1}(\lambda),\dots,A_k(\lambda)) = 0,$$

odakle dobijamo koeficijente $A_1(\lambda),\dots,A_{i-1}(\lambda)$, $A_{i+1}(\lambda),\dots,A_k(\lambda)$ u funkciji od parametra λ. Odredimo li približno rješenje homogenog graničnog problema (4.12.)-(4.13.)

$$(4.17.)\qquad \widehat{y}(x,\lambda) = \sum_{i=1}^{k} A_i(\lambda)(x-a)^i,$$

onda iz drugog graničnog uslova $y(b,\lambda) = 0$ možemo odrediti približne sopstvene vrijednosti λ.

Primjer 29. Riješiti sledeći homogeni granični problem

$$y'' - \lambda(1+x^2)y = 0,\quad y(0,\lambda) = y(1,\lambda) = 0.$$

Rješenje: Rješenje tražimo u obliku

$$y(x,\lambda) = \sum_{i=1}^{5} A_i(\lambda)x^i + \sum_{i=6}^{\infty} a_i(\lambda)x^i.$$

Redom računamo

$$S_5(x) = A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + A_5x^5,$$
$$S_5'(x) = A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + 4A_4x^3 + 5A_5x^4,$$
$$S_5''(x) = 2A_2 + 6A_3x + 12A_4x^2 + 20A_5x^3,$$
$$\Delta_5(x) = \lambda(1+x^2)S_5(x) - S_5''(x) = -2A_2 + (\lambda A_1-6A_3)x + (\lambda A_2-12A_4)x^2 + (\lambda A_1+\lambda A_3-20A_5)x^3 + (\lambda A_2+\lambda A_4)x^4 + (\lambda A_3+\lambda A_5)x^5+\dots.$$

Iz uslova konačnosti izraza

$$\lim_{x\to 0} \frac{\Delta_5(x)}{x^4}$$

dobijamo

$$\begin{aligned}
-2A_2 \qquad\qquad\qquad\qquad &= 0\\
\lambda A_1 \quad -6A_3 \qquad\qquad\quad &= 0\\
\lambda A_2 \quad -12A_4 \qquad &= 0\\
\lambda A_1 \quad +\lambda A_3 \quad -20A_5 &= 0,
\end{aligned}$$

odakle je $A_2 = 0$, $A_3 = \frac{\lambda}{6} A_1$, $A_4 = 0$, $A_5 = \frac{\lambda}{20} A_1(1+ \frac{\lambda}{6})$.

Na taj način imamo

$\tilde{y}(x,\lambda) = A_1x+ \frac{\lambda}{6}A_1x^3+ \frac{\lambda}{20}A_1(1+ \frac{\lambda}{6})x^5 = A_1[x+ \frac{\lambda}{6} x^3+ \frac{\lambda}{20}(1+ \frac{\lambda}{6})x^5]$.

Bez smanjenja opštosti možemo staviti da je npr. $A_1 = 1$. Iz drugog graničnog uslova $y(1,\lambda) = 0$ dobijamo

$$1 + \frac{\lambda}{6} + \frac{\lambda}{20}(1 + \frac{\lambda}{6}) = (1 + \frac{\lambda}{6})(1 + \frac{\lambda}{20}) = 0,$$

odakle dobijamo približne sopstvene vrijednosti $\lambda_1= - 6$ i $\lambda_2= -20$; približne vrijednosti sopstvenih funkcija su redom jednake $y(x,-6)$ i $y(x,-20)$.

Iskoristimo li činjenicu da je

$$A_{k+1}= \frac{1}{k(k+1)} \lim_{x\to a} \frac{\Delta_k(x)}{(x-a)^{k-1}} = \frac{1}{k(k+1)} \alpha_{k-1}(A_1(\lambda),\dots,A_k(\lambda)),$$

onda umjesto sistema jednačina (4.16.), odnosno (4.16'.) imamo sisteme jednačina

$$(4.18.)\qquad \begin{aligned}
&\alpha_0(A_1(\lambda),\dots,A_k(\lambda)) = 0\\
&\alpha_1(A_1(\lambda),\dots,A_k(\lambda)) = 0\\
&\vdots\\
&\alpha_{k-2}(A_1(\lambda),\dots,A_k(\lambda)) = 0\\
&\alpha_{k-1}(A_1(\lambda),\dots,A_k(\lambda)) = k(k+1)A_{k+1},
\end{aligned}$$

odnosno

$$(4.18'.)\qquad \begin{aligned}
&\alpha_0(A_1(\lambda),\dots,A_{i-1}(\lambda),c,A_{i+1}(\lambda),\dots,A_k(\lambda)) = 0\\
&\alpha_1(A_1(\lambda),\dots,A_{i-1}(\lambda),c,A_{i+1}(\lambda),\dots,A_k(\lambda)) = 0\\
&\vdots\\
&\alpha_{k-2}(A_1(\lambda),\dots,A_{i-1}(\lambda),c,A_{i+1}(\lambda),\dots,A_k(\lambda)) = 0\\
&\alpha_{k-1}(A_1(\lambda),\dots,A_{i-1}(\lambda),c,A_{i+1}(\lambda),\dots,A_k(\lambda)) = k(k+1)A_{k+1}.
\end{aligned}$$

U primjeru 29. odgovarajući sistem bi bio

$$
\begin{aligned}
-2A_2 \qquad\qquad\qquad\qquad &= 0\\
\lambda A_1 \quad -6A_3 \qquad\qquad\qquad &= 0\\
\lambda A_2 \quad -12A_4 \qquad\qquad &= 0\\
\lambda A_1 \quad +\lambda A_3 \quad -20A_5 \qquad &= 0\\
\lambda A_2 \quad +\lambda A_4 \quad -30A_6 &= 0,
\end{aligned}
$$

odakle je $A_2 = 0$, $A_3 = \frac{\lambda}{6}A_1$, $A_4 = 0$, $A_5 = \frac{\lambda}{20}A_1(1+\frac{\lambda}{6})$, $A_6 = 0$.
U slučaju DJ n-tog reda ($n>2$) odgovarajući sistem algebarskih jednačina se dobija iz uslova konačnosti izraza

$$\lim_{x\to a} \frac{\Delta_k(x)}{(x-a)^{k-n+1}} .$$

Sistem ima k nepoznatih veličina $A_1(\lambda),\dots, A_k(\lambda)$ i $(k-n+1)$-nu jednačinu. Radi određenosti sistema bez smanjenja opštosti možemo staviti da su $(n-1)$-na od veličina $A_1(\lambda),\dots,A_k(\lambda)$ jednake redom određenim realnim konstantama $c_1,\dots,c_{n-1}$ različitim od nule (ili funkcijama $c_1(\lambda),\dots,c_{n-1}(\lambda)$ koje nisu identički jednake nuli). Odredimo li na taj način približno rješenje graničnog problema onda iz preostalih graničnih uslova možemo odrediti približne vrijednosti parametra λ i $(n-2)$-ije neodređene konstante; zbog homogenosti graničnog problema jedna neodređena konstanta može biti izabrana proizvoljno.

Bez ikakvih principijelnih teškoća metoda može biti primijenjena i u slučaju nelinearne DJ; odgovarajući sistem algebarskih jednačina neće biti linearan. Pokažimo to na primjeru.

Primjer 30. Riješiti homogeni granični problem

$$y'' - \lambda x y^2 = 0, \quad y(0,\lambda) = y(1,\lambda) = 0.$$

Rješenje: Rješenje tražimo u obliku

$$y(x,\lambda) = \sum_{i=1}^{5} A_i(\lambda)x^i + \sum_{i=6}^{\infty} a_i(\lambda)x^i.$$

Redom računamo

$$
\begin{aligned}
S_5(x) &= A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + A_5x^5,\\
S_5'(x) &= A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + 4A_4x^3 + 5A_5x^4,\\
S_5''(x) &= 2A_2 + 6A_3x + 12A_4x^2 + 20A_5x^3,
\end{aligned}
$$

$$\Delta_5(x) = \lambda x S_5^2(x) - S_5''(x) = \lambda x(A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + A_5x^5)^2 - 2A_2 - 6A_3x - 12A_4x^2 - 20A_5x^3 = -2A_2 + (-6A_3)x + (-12A_4)x^2 + (-20A_5 + \lambda A_1^2)x^3 + (2\lambda A_1A_2)x^4 + \cdots .$$

Iz uslova konačnosti izraza

$$\lim_{x\to 0} \frac{\Delta_5(x)}{x^4}$$

dobijamo

$$\begin{array}{lllll} -2A_2 & & & & = 0 \\ & -6A_3 & & & = 0 \\ & & -12A_4 & & = 0 \\ \lambda A_1^2 & & & -20A_5 & = 0 \end{array}$$

odakle je $A_2 = 0$, $A_3 = 0$, $A_4 = 0$, $A_5 = \dfrac{\lambda A_1^2}{20}$, pa je

$$\tilde{y}(x,\lambda) = A_1x + \frac{\lambda A_1^2}{20} .$$

Iz drugog graničnog uslova $y(1,\lambda) = 0$ dobijamo $\lambda_1 = -20/A_1$ i bez smanjenja opštosti možemo staviti npr. $A_1 = 1$.

Uporedimo ovu metodu s metodom ostataka. Neka treba odrediti k $(k > 1)$ koeficijenata rješenja $y(x)$ graničnog problema (4.1.)-(4.2.), odnosno k $(k > 1)$ koeficijenata rješenja $y(x,\lambda)$ i sopstvene vrijednosti λ homogenog graničnog problema (4.12.)-(4.13.). Upoređenje je dato sledećom tabelom

broj računanja	parcijalnih suma	izvoda	izraza $\Delta_k(x)$	limesa	sistema jednač.
metoda ostataka	k-1	2(k-1)	k-1	k-1	0
anticip. metoda	1	2	1	0	1

Napomenimo i sledeće: ako poslije određivanja k koeficijenata treba odrediti sledećih m koeficijenata, onda umjesto posmatranih sistema jednačina imamo sistem od $(k-1)+m$ jednačina sa $k+m$ nepoznatih, gdje se novi sistem jednačina dobija "lijepljenjem" novih m jednačina. Prethodno nađene veličine $A_1, \ldots, A_k$ su rješenja i novih sistema; ustvari imamo sistem od m jednačina sa m nepoznatih $A_{k+1}, \ldots, A_m$.

LITERATURA:

[1] K. Orlov, PRACTICAL METHOD FOR SOLVING DIFFERENTIAL EQUATIONS AND THEIR SYSTEMS BY MEANS OF TAYLOR SERIES, Matematički vesnik, Beograd, 8(23), sv. 1, 1971.

[2] K. Orlov, NEW PRACTICAL METHODS FOR FINDING PARTICULAR SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS, Matematički vesnik, Beograd, 9(24), sv. 4, 1972.

[3] K. Orlov, FINDING OF THE GENERAL INTEGRAL OF DIFFERENTIAL EQUATIONS BY MEANS OF TAYLOR SERIES AND FINDING OF SOME FORM OF NON-CAUCHY'S INTEGRALS, Matematički vesnik, Beograd, 9(24), sv. 3, 1972.

[4] M. Stojanović, KORIŠĆENJE JEDNE VRSTE TRANSFORMACIJA DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA RADI PRAKTIČNOG DOBIJANJA PARTIKULARNIH REŠENJA, Matematički vesnik, Beograd, 9(24), sv. 3, 1972.

[5] M. Stojanović, METODA DIFERENCIRANJA ZA DOBIJANJE REŠENJA DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA I NJIHOVIH SISTEMA U OBLIKU TAJLOROVOG REDA, Zbornik radova Građevinskog fakulteta u Beogradu, 14, br. 3, 1972.

[6] A. Zolić, REŠAVANJE GRANIČNIH PROBLEMA OBIČNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA SVOĐENJEM NA KOŠIJEVE PROBLEME, Matematički vesnik, Beograd, 11(26), sv. 2, 1974.

[7] A. Zolić, REŠAVANJE ŠTURM-LIUVILOVIH PROBLEMA OBIČNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA SVOĐENJEM NA KOŠIJEVE PROBLEME, Matematički vesnik, Beograd, 11(26), sv. 2, 1974.

[8] A. Zolić, ANTICIPATIVNA METODA ZA REŠAVANJE GRANIČNIH PROBLEMA OBIČNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA, Matematički vesnik, Beograd, 13(28), sv. 1, 1976.

[9] M. Bertolino, METODE PRIMENJENE ANALIZE (NUMERIČKA ANALIZA), Zavod za izdavanje udžbenika SR Srbije, Beograd, 1970.

[10] B. Rašajski, TEORIJA OBIČNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA, Zavod za izdavanje udžbenika SR Srbije, Beograd, 1971.

[11] W. E. Milne, NUMERICAL SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATI - ONS, New York, John Wiley and Sons, 1953.
[12] L. Collatz, THE NUMERICAL TREATMENT OF DIFFERENTIAL EQU-TIONS, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1959.
[13] J. D. Lambert, COMPUTATIONAL METHODS IN ORDINARY DIFFE - RENTIAL EQUATIONS, John Wiley and Sons, London, New York, Sydney, Toronto, 1973.
[14] R. W. Hamming, NUMERICAL METHODS FOR SCIENTISTS AND ENGI-NEERS, McGraw-Hill Book Company, New York, San Francisco, Toronto, London, 1962.
[15] J. M. McCormick, M. G. Salvadori, NUMERICAL METHODS IN FORTRAN, Prentice- Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersy, 1964.
[16] S. H. Gould, VARIATIONAL METHODS FOR EIGENVALUE PROBLEMS, University of Toronto Press, London: Oxford University Press, 1966.
[17] B. P. Demidovič, I. A. Maron, È. Z. Šuvalova, ČISLENNYE METODY ANALIZA, Nauka, Moskva, 1967.
[18] I. S. Berezin, N. P. Židkov, METODY VYČISLENIĬ, T. 2., FM, Moskva, 1960.
[19] G. N. Položiĭ i dr., MATEMATIČESKIĬ PRAKTIKUM, FM, Moskva, 1960.
[20] P. F. Fil´čakov, ČISLENNYE I GRAFIČESKIE METODY PRIKLADNOĬ MATEMATIKI, Naukova dumka, Kiev, 1970.
[21] M. A. Naĭmark, LINEĬNYE DIFFERENCIAL´NYE OPERATORY, Nauka, Moskva, 1969.
[22] N. S. Bahvalov, ČISLENNYE METODY, Nauka, Moskva, 1973.
[23] V. V. Gudkov, DVUHTOČEČNYE KRAEVYE ZADAČI DLJA OBYKNOVEN-NYH DIFFERENCIAL´NYH URAVNENIĬ, Zinatne, Riga, 1973.
[24] " " LINEĬNYE I NELINEĬNYE KRAEVYE ZADAČI , pod redakcieĭ J. A. Mitropol´skogo, Izdanie Instituta matematiki AN USSR, Kiev, 1971.
[25] M. L. Krasnov i dr., VARIACIONOE ISČISLENIE, Nauka, Moskva, 1973.

[26] L. V. Kantorovič, V. I. Krylov, PRIBLIŽENNYE METODY VYSŠEGO ANALIZA, FM, Moskva-Leningrad, 1962.

[27] V. I. Krylov i dr., VYČISLITEL'NYE METODY VYSŠEǏ MATEMATIKI, Vyšèišaja škola, Minsk, 1972.

[28] N. P. Erugin, KNIGA DLJA ČTEHIJA PO OBŠČEMU KURSU DIFFERENCIAL'NYH URAVNENIǏ, Nauka i tehnika, Minsk, 1970.

[29] E. Kamke, SPRAVOČNIK PO OBYKNOVENNYM DIFFERENCIAL'NIM URAVNENIJAM, FIZMATGIZ, Moskva, 1971.

[30] " " ČISLENNYE METODY REŠENIJA DIFFERENCIAL'NIH INTEGRAL'NYH URAVNENIǏ I KVADRATURNYE FORMULY, Nauka, Moskva, 1964.

[31] V. A. Dobrovol'skiǏ, OČEREKI RAZVITIJA ANALITIČECKOǏ TEOPII DIFFERENCIAL'NYH URAVNENIǏ, Višča škola, Kiev, 1974.

[32] I. Babuška i dr., ČISLENNYE PROCESSY REŠENIJA DIFFERENCIAL'NYH URAVNENIǏ, Mir, Moskva, 1969.

[33] E. T. Bell, VELIKI MATEMATIČARI, Znanje, Zagreb, 1972.

[34] " " MATEMATIČESKAJA ÈNCIKLOPEDIJA, 1, A-G, Moskva, 1977.