Mr Branko Jovanikić

NUMERIČKI METODI REŠAVANJA DIFERENCIJALNIH IGARA GONJENJA OGRANIČENE DUŽINE. NEKE DIFERENCIJALNE IGRE SA NEPOTPUNOM INFORMACIJOM

UVOD

R.D. Luce i H.Raiffa u svojoj kapitalnoj monografiji "Igre i rešenja" [20] ,koja je i do danas vodeća knjiga po metodološkim pitanjima teorije igara,nazivaju teoriju igara "Savremenim matematičkim prilogom sukobu interesa".

U kibernetskom rečniku [14] Klaus G.navodi "Teorija igara je matematičko-kibernetska teorija izbora optimalnih načina ponašanja sistema iz mnoštva mogućih načina ponašanja u konfliktnim situacijama ".

U knjizi [24] profesor Dr Jovan Petrić na strani 38. piše: "Teorija igara se može objasniti kao matematička teorija procesa donošenja odluka protivnika koji su u sukobu ili su uključeni u konkurentske uslove".

Sve navedene definicije,mada se razlikuju u pojedinostima, teže u definiciji teorije igara kao dela matematike.

Možda bi najpogodnije rekli da je teorija igara teorija matematičkih modela izbora optimalnih rešenja u konfliktnim uslovima ili u uslovima neodredjenosti.

Teorija diferencijalnih igara, čiji je deo i teorija diferencijalnih igara gonjenja,pojavila se na granici matematičke teorije upravljanja i teorije igara.Ona se bavi izučavanjem upravljanja objektima koji se kreću u konfliktnim uslovima ili u uslovima neodredjenosti.

Diferencijalne igre su konfliktne situacije sa beskonačnim skupom alternativa /mogućnosti/,koje se mogu opisati preko diferencijalnih jednačina.Slična definicija je data u radu [16] .

Značajni progres matematičke teorije upravljanja i teorije igara,a takodje i potrebe rešavanja praktičnih zadataka su bili stimulans razvitka teorije diferencijalnih igara.

O fizičkoj osnovi diferencijalnih igara gonjenja ne treba mnogo govoriti,jer realnih procesa gonjenja u oblasti ljudske delatnosti,i u prirodi ima mnogo.

Sistematska istraživanja diferencijalnih igara gonjenja,u okviru diferencijalnih igara,počela su 50-tih godina ovoga veka pri čemu su se najpre izvodila u radovima američkih autora i koncentrisala su se oko "osnovne" parcijalne jednačine prvog reda koju je prvi dao R.Isaacs [1] .

L.S.Pontrjagin i E.F.Miščenko [27] osnovali su pravac u kome se istražuju pitanja kvalitativnog karaktera koja su bliska pitanjima mogućnosti upravljanja.U radovima ovog pravca posebno se razmatra zadatak gonjenja i zadatak bežanja.Prvi zadatak se sastoji u oceni skupa položaja iz kojih gonilac može da garantuje uspešno završenje gonjenja, tj.približenje konfliktno-upravljenog sistema datom skupu za konačno vreme.Drugi zadatak se sastoji u oceni skupa početnih položaja iz kojih begunac može da izbegne približenje konfliktno-upravljenog sistema datom skupu na beskonačnom intervalu vremena.

Fundamentalni pozicioni prilaz našao je odraza u radovima N.N. Krasovskog [15] i [16] i A.I.Subotina [16] . U radovima ovog pravca istražuju se ne samo pitanja kvalitativnog karaktera, već i pitanja tesno povezana sa praktičnim rešenjima diferencijalnih igara.

U monografiji N.N.Krasovskog [15] u kojoj su date linearne diferencijalne igre, metod istraživanja se bazira na njime razradjenom pravilu ekstremalnog nišanjenja.Dalji razvitak je doveo do dokaza fundamentalne teoreme o alternativi koja i sastavlja u mnogome osnovu monografije N.N.Krasovskog i A.I.Subotina [16] ,gde se razmatraju i nelinearne diferencijalne igre.Iz teoreme o alternativi sledi rešenje široke klase pozicionih diferencijalnih igara i pri njenom dokazu daje se i način konstrukcije optimalnih pozicionih strategija.Poslednje mogu biti izgradjene kao ekstremalne strategije na specifičnim skupovima, koji se nazivaju u [16] maksimalnim stabilnim mostovima.Za naročito izdvojene, takozvane regularne zadatke teorije igara u monografijama [15] i [16] izloženi su metodi rešenja koji su zasnovani na rešenju pomoćnih programskih zadataka i pravilu o ekstremalnom nišanjenju.

Nephodnost istraživanja diferencijalnih igara sa nepotpunom informacijom diktira se time da predložena u posedu učesnika igre potpuna informacija o faznom stanju procesa u svakom tekućem momentu vremena je bezuslovno uproščavanje zadatka i u praksi se retko ispunjava.U praksi je više konfliktnih situacija gde učesnici nemaju potpunu informaciju o protivniku.Informacija o protivniku se dobija sa izvesnim zakašnjenjem ili se dobija samo u odredjenim tačkama intervala vremena.

Osnovna poteškoća prelaza na istraživanje diferencijalnih igara sa nepotpunom informacijom sastoji se u odredjivanju informacione strukture igre, a to znači i klase čistih strategija koje odredjuju izbor upravljanja u svakom informacionom stanju igre.

Razvoj teorije diferencijalnih igara sa nepotpunom informacijom ide danas od posebnog ka opštem, tj. po putu izgradnje teoretskih modela sa informacionim strukturama odredjenog oblika ka gradjenju opšte diferencijalne igre sa nepotpunom informacijom.

Glavne metode pri našem istraživanju bile su metode diferencijalnih igara gonjenja kao i metoda funkcionalne analize/specijalno uključujući metod fiksne tačke/.Možemo preciznije reći da je metod fiksne tačke bio osnovno orudje u prvoj glavi ovog rada.

U mom dugogodišnjem radu u JNA skoro svakodnevno sam se susretao sa konfliktnim situacijama sa nepotpunom informacijom /u teoriji i praksi izvodjenja vojnih igara/,pa me je to navelo da drugi deo ovog rada,koji pretstavlja nezavisnu celinu od prvog dela,posvetim diferencijalnim igrama sa nepotpunom informacijom i da time dam svoj doprinos modeliranju i rešavanju istih.

Glava I. ovog rada nosi naslov numerički metodi rešavanja diferencijalnih igara gonjenja ograničene dužine.U njoj su istražene dve varijante diferencijalnih igara gonjenja ograničene dužine koje nazivamo:

a/igrom približavanja u datom momentu vremena i

b/igrom hvatanja.

U ovoj glavi dati su novi rezultati do kojih sam došao u toku višegodišnjeg rada.

Istraženo je pitanje konvergentnosti predloženih numeričkih metoda približavanja funkciji vrednosti u igri približavanja u datom momentu vremena i u igri hvatanja.

Utvrdjena je ravnomerna konvergencija ovih metoda ka funkciji vrednosti u odgovarajućim igrama gonjenja u bilo kom ograničenom prostoru stanja igre.

Na osnovu predloženih numeričkih metoda dati su načini konstrukcije maksimizirajućih i minimizirajućih niza strategija.

Dobijeni su novi konstruktivni dokazi postojanja rešenja kako igre približavanja tako i igre hvatanja.

Izvedeni su potrebni i dovoljni uslovi za to da bi neka funkcija bila funkcijom vrednosti a/ u igri približavanja u datom momentu vremena i b/ u igri hvatanja.

Prvi paragraf ove glave posvetio sam osnovnom izlaganju formalizma diferencijalnih igara gonjenja ograničene dužine.

Termin diferencijalne igre gonjenja koristi se zbog podeljene dinamike igrača.

Igre ograničene dužine označavamo sa $\Gamma(\mathcal{D})$. $\mathcal{D}$ je prostor stanja igre.

Osim navedenog u ovom paragrafu formulisana su neka pomoćna tvrdjenja i navode se dve postavke diferencijalnih igara gonjenja ograničene dužine, razmatrane u sledećim paragrafima, i to igra približenja u datom momentu vremena i igra hvatanja. Dalje su ove igre označene redom sa $\Gamma^1(\mathcal{D})$ i $\Gamma^2(\mathcal{D})$.

U drugom paragrafu izlaže se numerički metod približavanja funkciji vrednosti igre /NMPFVI/ približenja u datom momentu vremena i na njegovoj osnovi daje se način konstrukcije maksimizirajućeg niza strategija begunca koji u slučaju konačne konvergencije dovodi do optimalne strategije begunca.

Numerički metod približenja funkciji vrednosti igre gradi se za početna približenja iz specijalno definisanog skupa funkcija:

$$\mathcal{W}_-^1(\mathcal{D}) \subset C(\mathcal{D}).$$

Osnovno izlaganje se vodi za slučaj kompaktnog prostora stanja igre.

Neposrednom izlaganju NMPFVI prethodi istraživanje svojstava operatora Φ_-^1, posebno istraživanje svojstava ovog operatora na skupu $\mathcal{W}_-^1(\mathcal{D})$, a takodje i istraživanje nekih svojstava rešenja funkcionalne jednačine:

$$\Phi_-^1 \circ \omega(\cdot) = \omega(\cdot) \quad \cdots\cdots\cdots (*)$$

Saglasno svojstvima operatora Φ_-^1 niz približenja rešenju jednačine $(*)$ obrazuje neopadajući niz funkcija. U ovom paragrafu NMPFVI vrši približavanje funkciji vrednosti igre odozdo.

Osnovna teorema ovog paragrafa je teorema 1.2.3 kao i njene dve posledice.

U trećem paragrafu izlaže se NMPFVI $\Gamma^1(\mathcal{D})$ i na njegovoj osnovi daje se način gradjenja minimizirajućeg niza strategija gonioca, koji u slučaju konačne konvergencije dovodi do optimalne strategije gonioca.

Osim toga u ovom paragrafu izvode se potrebni i dovoljni uslovi da data neprekidna na prostoru stanja igre $\Gamma^1(\mathcal{D})$ funkcija w/./, koja zadovoljava odredjene granične uslove, bude funkcijom vrednosti igre $\Gamma^1(\mathcal{D})$.

NMPFVI u trećem paragrafu je poseban metod niza približenja rešenju neke funkcionalne jednačine: $\Phi_+^1 \circ \omega(\cdot) = \omega(\cdot)$, razmatrane na prostoru $C(\mathcal{D})$.Pri čemu se početna približenja biraju iz specijalno odredjenog skupa funkcija:

$$W_+^1(\mathcal{D}) \subset C(\mathcal{D}).$$

Osnovna tvrdjenja koja se tiču NMPFVI u ovom paragrafu za igre $\Gamma^1(\mathcal{D})$i na njegovoj osnovi gradjeni niz strategija sadrže se u teoremi 1.3.3 i njenim dvema posledicama kao i u teoremi 1.3.4 .

U četvrtom paragrafu razmatraju se dva primera diferencijalnih igara približenja u datom momentu vremena.

U prvoj modelnoj igri NMPFVI konvergira na granici.Ovde se igra istražuje NMPFVI,koji je dat u paragrafu 3.,pri čemu je pokazano da izabravši početno približenje /funkciju programskog minimaksa/ već smo se ubedili da je ono već samo fiksna tačka operatora Φ_+^1 , tj. ova funkcija je funkcija vrednosti igre.

Drugi primer pretstavlja linearnu igru približenja u datom momentu vremena.

U petom i šestom paragrafu razmatra se igra hvatanja.Ova igra preciznije odražava realne procese gonjenja od igre približenja u datom momentu vremena.

Numerički metodi približavanja funkciji vrednosti igre hvatanja $\Gamma^2(\mathcal{D})$koji su korišćeni u paragrafima 5. i 6.potpuno su identični NMPFVI približavanja $\Gamma^1(\mathcal{D})$koji su bili predloženi u paragrafu 2.i 3.

Osnovni rezultati ovih paragrafa takodje su analogni rezultatima paragrafa 2.i 3. U petom paragrafu oni su sadržani u teoremi 1.5.3,u njenim dvema posledicama kao i u teoremi 1.5.4.U paragra- 6. ove rezultate sadrže teorema 1.6.3 i njene dve posledice kao i teorema 1.6.4 .

Drugi deo ovog rada nosi naslov:"Neke diferencijalne igre sa nepotpunom informacijom".On se sastoji iz druge i treće glave.

U glavi II. istražene su neke antagonističke diferencijalne igre gonjenja,koje pretstavljaju modele konfliktnih upravljajućih procesa u slučaju kada informacija o faznom stanju protivnika stiže učesnicima konflikta sa odredjenim zakašnjenjem.Gradićemo optimalne strategije igrača u klasi mešovitih deo po deo programskih strategija ponašanja.Osim toga izvedena je funkcionalna jednačina za diskretne igre gonjenja sa zadržavanjem informacije o goniocu.

U prvom paragrafu igra se izvodi u R^k prostoru,skupovi dostiživosti igrača su kompaktni,funkcija dobitka je neprekidni monotoni funkcional od matrice Euklidovih rastojanja medju učesnicima goneće koalicije /grupe/ i begunaca u konačnom momentu vremena T.

Pri nekim ograničenjima, koja se postavljaju klasi antagonističkih pomoćnih igara gonjenja, koje se izvode u paragrafu 1. glave II., i na dinamiku igrača, u raznim igrama za svako $\varepsilon>0$ postoji situacija ε ravnoteže u klasi mešovitih deo po deo programskih strategija ponašanja /teorema 2.1.1/ i pri tome nalaženje situacije ravnoteže svodi se na nalaženje situacije ravnoteže u pomoćnoj jednovremenoj antagonističkoj igri gonjenja, koje se podrobno istražuju u paragrafu 4.

Igrač G dobija informaciju o igraču B sa zakašnjenjem ℓ, a igrač B sa zakašnjenjem ℓ_1. Dužina igre je T.

Prvi primer igre pretstavlja zadatak gonjenja u ravni izmedju koalicije koja se sastoji od dva gonioca G_1 i G_2 i begunca B. Dobitak igrača B odredjuje se kao minimum kvadrata rastojanja od begunca do gonioca. Igra je antagonistička.

U drugom primeru razmatra se antagonistička diferencijalna igra gonjenja u ravni izmedju koalicije gonilaca, koja se sastoji od m učesnika i igrača B. Dinamika igrača se zadaje složenijom diferencijalnom jednačinom. Skup dostiživosti igrača B za vreme T iz stanja y je odsečak promenljive dužine.

U paragrafu 2. razmatraju se diskretne igre gonjenja odredjene dužine T sa zadržavanjem informacije o igraču B i sa istom dinamikom kao u igrama paragrafa 1. za $\ell_1=0$. Ove igre možemo disjunktno podeliti na podigre vrednosti kojih su povezane sa funkcionalnim jednačinama, a optimalne strategije sa optimalnim strategijama polazne igre.

U slučaju igre formulisane u ovom paragrafu disjunktna podela na podigre i izvodjenje funkcionalnih jednačina moguće je blagodareći kompaktnosti i neprekidnosti po pripadnosti skupova dostiživosti igrača, neprekidnosti funkcije dobitka, a takodje i tome da kretanja igrača u klasi mešovitih deo po deo programskih strategija ponašanja pretstavljaju lance Markova.

U poslednjem delu paragrafa 2. pokazano je kako se mogu izvesti optimalne strategije igrača B iz funkcionalnih jednačina za diskretnu igru gonjenja u kojoj se informacija dobija sa odredjenim zakašnjenjem.

Paragraf 3. glave II. posvečen je beskoalicionim igrama gonjenja u kojima se informacija dobija sa odredjenim zakašnjenjem. Dinamika je ista kao u paragrafu 1. ove glave. Informacija o faznom stanju gonilaca stiže beguncima sa zakašnjenjem ℓ_1.Zakašnjenje informacije o faznom stanju begunaca je ℓ.

Funkcija dobitka za svakog begunca je monotono rastuća funkcija od njegovog rastojanja do najbližeg gonioca.Funkcija dobitka gonioca je suma dobitaka begunaca sa suprotnim znakom.

Situacija ravnoteže se shvata kao ravnoteža po Nešu [22] u klasi mešovitih deo po deo programskih strategija ponašanja.

Kada je ispunjen niz uslova igra ima za svako $\varepsilon>0$ situaciju ε ravnoteže /teorema 2.3.1/.

Nalaženje situacije ravnoteže izvodi se po sledećoj šemi:

-Igrač G rešava zadatak celobrojne minimizacije i na taj način odredjuje optimalni sastav grupe gonilaca svakog od igrača B_j, a dalje svaka grupa dejstvuje analogno tome kako je dejstvovala koalicija gonilaca u igri ove glave paragrafal.

-svaki igrač B_j dejstvujući determinisano na odsečku vremena $[0,T-\ell)$ prelazi u tačku $\bar{y}(t)$ koja je odredjena jednim od uslova teoreme 2.3.1.Odredjuje u momentu vremena $T-\ell$ broj gonilaca n_j /ovo je moguće blagodareći jednom od uslova teoreme 2.3.1/i dalje dejstvuje optimalno protiv n_j gonilaca,analogno kako je to uradjeno u zadatku paragrafa 1.glave II.

U paragrafu 4.istražuju se jednovremene igre gonjenja koje se pojavljuju pri rešavanju diferencijalnih igara gonjenja sa odredjenim zakašnjenjem informacije paragrafa 1.ove glave.

Razmatranje igara ovog tipa pretstavlja i samostalni interes za teoriju beskonačnih antagonističkih igara.Zadatak se postavlja na sledeći način.Skup begunaca i grupa gonilaca jednovremeno biraju skupove tačaka iz kompaktnog skupa $S\subset R^{k}$.Funkcija dobitka skupa igrača B je funkcional od matrice rastojanja medju tačkama, koje su izabrali gonioci i begunci.

Razmatraju se zadaci sa neprekidnom konveksnom funkcijom dobitka i opisuju se klase optimalnih strategija igrača u ovim igrama.

U trećoj glavi istraženi su matematički modeli konflikta upravljajućih procesa,u kojima informacija o tekućem stanju dospeva diskretno u zavisnosti od toga u kojoj oblasti faznog prostora se nalazi upravljajuća fazna tačka.Matematički zadatak se svodi na istraživanje jedne klase antagonističkih diferencijalnih igara gonjenja sa nepotpunom informacijom.Grade se skupovi čistih i mešovitih strategija.Dokazuju se teoreme o postojsnju situacije ravnoteže u klasi mešovitih strategija.

Za različite varijante disjunktne informacione strukture, iz različitih oblika dinamike i funkcionala dobitaka grade se informacione strukture, odredjuju se klase čistih strategija, uvode se mešovite strategije, dokazuju se teoreme egzistencije situacije ravnoteže u klasama mešovitih strategija.

U ovoj glavi dajemo i jedan primer u kome smo izračunali optimalne mešovite strategije.

Uprvom paragrafu razmatra se igra gonjenja sa nepotpunom informacijom odredjene dužine koja pretstavlja neposredno uopštenje igre gonjenja "Princeza i čudovište", koju je postavio Ajzeks R.[1]. Igra se izvodi u konveksnom zatvorenom mnogouglu S u ravni. Početna stanja se biraju u saglasnosti sa ravnomernom raspodelom verovatnoće u S i igračima se ništa ne saopštava do momenta dospevanja na jednu od stranica mnogougla, gde im se saopštava strana na koju je dospela odgovarajuća fazna tačka. Sledeća informacija se dobija pri dospevanju fazne tačke na drugu /ili na istu/ stranicu, gde se takodje saopštava stranica mnogougla i td. Igra se završava u momentu T i igrač B /maksimizirajući/ prima dobitak H/x/T/, y/T//, gde su x/t/ i y/t/ realizovane trajektorije u igri, a H/x, y/ je neka neprekidna funkcija. Igra se smatra antagonističkom.

Pri odredjivanju pretpostavki dinamike igrača može se dokazati neprekidna zavisnost funkcije dobitka od strategija što skupa sa kompaktnošću skupova, gradjenih u igri čistih strategija garantuje postojanje situacije ravnoteže u klasi mešovitih strategija /teorema 3.1.2/.

U paragrafu 2. razmatraju se igre sa diskretnom informacionom disjunktnom podelom u ravni. Istražuju se igre odredjene dužine. Daje se konačna disjunktna podela ravni.

Igra počinje slučajnim izborom početnog stanja na jednom od elemenata disjunktne podele, pri čemu igrači saznaju element disjunktne podele i njima se saopštava fakt prelaza i td. Igra se produžava do momenta T.

Dobitak se odredjuje kao u igrama razmatranim u paragrafu 1. Igra je antagonistička. Za odredjene uslove na dinamiku igre i disjunktnu podelu ravni /koja se naziva informaciona disjunktna podela/ dokazuje se neprekidna zavisnost funkcije dobitka od čistih strategija, što skupa sa kompaktnošću skupova strategija dovodi do postojanja situacije ravnoteže u mešovitim strategijama/teorema 3.2.2/.

U paragrafu 3. razmatra se primer diferencijalnih igara odredjene dužine sa diskretnom disjunktnom informacionom podelom. U navedenom primeru informaciona disjunktna podela je oblika:

$$S^{(1)}=[-1,+1]\ ;\ S^{(2)}=\{(x,y):y=x+1\}\ ;\ S^{(3)}=\{(x,y):y=x-1\}.$$

Pošto je u svakom od tri informaciona skupa moguć jedan od dva izbora upravljanja 1 ili -1 igra se svodi na matričnu igru dimenzija 8X8. Posle izračunavanja elemenata matrice dobija se da matrica sadrži bitnu podigru 2X2 što pokazuje odsustvo čistih optimalnih strategija. Mešovite optimalne strategije igrača G i B su oblika:

Igrač G: $/0\ 0\ \frac{1}{2}\ 0\ \frac{1}{2}\ 0\ 0\ 0/$,

Igrač B: $/\frac{1}{2}\ 0\ 0\ 0\ 0\ \frac{1}{2}\ 0\ 0/$.

U paragrafu 4. razmatraju se igre sa mešovitim informacionim stanjem i odredjene dužine T. Prvobitna igra se razvija u nekom konveksnom, zatvorenom skupu M u ravni sa diskretnim informacionim stanjem. Čim trajektorija dospeva na granicu skupa M igra prelazi u igru sa potpunom informacijom sa faznim ograničenjem u dopuni skupa M.

Da bi ostvario napred navedene ciljeve postavio sam i dokazao u radu šest lema /1.1.1; 1.1.2; 1.2.1; 1.2.2; 1.2.3 i 2.3.1/ i dvanaest teorema /1.2.1; 1.2.2; 1.2.3; 1.2.4; 1.6.1; 1.6.2; 1.6.3; 2.1.1; 2.2.1; 2.3.1; 2.4.1 i 3.2.1/.

Navedene oznake lema i teoreme u zagradama čitaju se na sledeći način: naprimer lema 1.2.3 označava treću lemu drugog paragrafa prve glave ili teorema 1.6.3 označava treću teoremu šestog paragrafa prve glave.

Definicije u glavi I su originalne. Definicije u glavama II i III najbliže su definicijama iznetim u radu [16].

Dugujem osobitu zahvalnost za korisne primedbe i sugestije profesorima Dr Kurepa Đuri i Dr Petrić Jovanu.

U radu su korišćene sledeće:

a/ skraćenice

NMPFV--Numerički metod približavanja funkciji vrednosti;

NMPFVI--Numerički metod približavanja funkciji vrednosti igre;

DIG--Diferencijalne igre gonjenja;

ADIG--Antagonističke diferencijalne igre gonjenja;

DDPČS--Deo po deo programska čista strategija;

DDPČSI--Deo po deo programska čista strategija igrača;

MDDPSP--Mešovita deo po deo programska strategija ponašanja;

MDDPSPI--Mešovita deo po deo programska strategija ponašanja igrača.

b/oznake

G--gonilac;

B--begunac;

$\mathcal{L}_G$ --Sistem upravljanja kojim upravlja igrač G;

$\mathcal{L}_B$ --Sistem upravljanja kojim upravlja igrač B;

$\mathcal{D}$--Prostor stanja igre;

$\mathcal{G}$--Skup strategija igrača G;

$\mathcal{B}$--Skup strategija igrača B;

$\mathcal{K}$--Funkcija dobitka u igri;

$\mathcal{J}$--Funkcional kvaliteta;

$\mathcal{H}$--Realizovano preslikavanja;

$\mathrm{Comp}\,R^k$-- Skup kompaktnih skupova iz R^k;

$C^t/x/$ili $C_G^t\,/x/$--Skup dostiživosti iz tačke x za vreme t igrača G;

$C^t/y/$ili $C_B^t\,/y/$--Skup dostiživosti iz tačke y za vreme t igrača B;

$\Gamma(\mathcal{D})$--Igra čiji je prostor stanja $\mathcal{D}$;

$\{U_n\}_{n=0}^{\infty}$ --Minimizirajući niz strategija igrača G;

$\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$ --Maksimizirajući niz strategija igrača B;

U_ε -- ε optimalna strategija igrača G;

V_ε -- ε optimalna strategija igrača B;

$\Gamma^1(\mathcal{D})$-Igra približavanja u datom momentu vremena;

$\Gamma^2(\mathcal{D})$-Igra hvatanja;

x/t/--Trajektorija igrača G;

y/t/--Trajektorija igrača B;

$\mathcal{Q}_r(x,y,t)$ --Lopta sa centrom u /x, y, t/, poluprečnika r;

$\{\omega_n(\cdot)\}_{n=0}^{\infty}$ --Niz približenja funkciji vrednosti igre;

R_+^1 --Nenegativna poluosa;

$\mathcal{A}(x,y)$ --Matrica nxm;

σ, τ --Proizvoljne disjunktne podele odsečka vremena $[0,T]$;

ℓ--Zakašnjenje informacije o igraču B;

ℓ_1--Zakašnjenje informacije o igraču G;

u/./, v/./--Parovi merljivih programskih upravljanja redom igrača G i B/Deo po deo programske čiste strategije redom igrača G i B/;

V/x, y/--Funkcija vrednosti igre.

Ostale oznake karakteristične za svaku glavu date su u njihovim prvim paragrafima.

GLAVA I

Numerički metodi rešavanja diferencijalnih igara gonjenja ograničene dužine

U ovoj glavi dati su numerički metodi rešavanja diferencijalnih igara gonjenja sa potpunom informacijom.

Kratak sadržaj ove glave iznesen je u uvodu na trećoj stranici.

§1. Diferencijalna igra gonjenja ograničene dužine

Ovaj paragraf sadrži osnovo izlaganje formalizma diferencijalnih igara gonjenja ograničene dužine. Navodimo dve postavke diferencijalnih igara ograničene dužine i to igru približenja u datom momentu vremena i igru hvatanja. Oznake karakteristične za glavu I date su u ovom paragrafu.

Pod diferencijalnom igrom gonjenja ograničene dužine smatramo skup elemenata:

$$\langle \mathcal{L}_G, \mathcal{L}_B, \mathcal{D}, \mathcal{H}, \mathcal{G}, \mathcal{B}, \mathcal{H}, \mathcal{K} \rangle, \ldots\ldots\ldots (1.1.1)$$

gde su: $\mathcal{L}_G$ i $\mathcal{L}_B$ sistemi upravljanja kojima upravljaju redom igrač G /gonilac/ i igrač B /begunac/, zadavanje kojih je istovetno sa zadavanjem nekih sistema običnih diferencijalnih jednačina; $\mathcal{D}$ je prostor stanja igre; $\mathcal{H}$ je funkcional kvaliteta koji je dat nad trajektorijama sistema upravljanja $\mathcal{L}_G$ i $\mathcal{L}_B$; $\mathcal{G}$ $(\mathcal{B})$ je skup strategija igrača G /B/; $\mathcal{H}$ je realizovano preslikavanje, koje korespondira svakom elementu iz nekog podmnoštva $\mathcal{D}^0$ prostora stanja $\mathcal{D}$ i svakom paru strategija iz skupa $\mathcal{G}$ i $\mathcal{B}$ odredjeni par trajektorija sistema kojima se upravlja $\mathcal{L}_G$ i $\mathcal{L}_B$; $\mathcal{K}$ je funkcija dobitka $(\mathcal{K}: \mathcal{D}^0 \times \mathcal{G} \times \mathcal{B} \to R^1)$.

Smatramo da se fazni položaj igrača G opisuje vektorom $x \in R^n$, a njegovo kretanje u faznom prostoru /R^n/ opisuje se vektorskom diferencijalnom jednačinom:

$$\dot{x} = f(x,u),\ u \in \mathcal{U} \in \mathrm{Comp}\, R^k, \ldots\ldots (1.1.2)$$

gde je $\mathrm{Comp}\, R^k$ skup kompaktnih podskupova iz R^k. Sistem upravljanja $\mathcal{L}_G$ poistovečujemo sa sistemom /1.1.2/.

Analogno smatramo da se fazni položaj igrača B opisuje vektorom položaja $y \in R^m$, a njegovo kretanje u faznom prostoru /R^m/ opisuje se vektorskom diferencijalnom jednačinom:

$$\dot{y} = g(y,v),\ v \in \mathcal{V} \in \mathrm{Comp}\, R^l \ \ldots\ldots (1.1.3)$$

Sistem upravljanja $\mathcal{L}_B$ poistovečujemo sa sistemom /1.1.3/.

U odnosu na desne strane sistema /1.1.2/, /1.1.3/ pretpostavljamo da su ispunjeni sledeći uslovi:

a/vektor funkcija $f(x,u)$ /$g(y,v)$/ definisana je i neprekidna na

$$R^n \times \mathcal{U} \quad (R^m \times \mathcal{V});$$

b/vektor funkcija $f(x,u)$ /$g(y,v)$/ zadovoljava lokalni uslov Lipšica po x /y/ sa konstantom koja ne zavisi od u /v/;

c/ za neko $\lambda > 0$ je: $\|f(x,u)\| \le \lambda(1+\|x\|)$; $\|g(y,v)\| \le \lambda(1+\|y\|)$

za svako $(x,u) \in R^n \times \mathcal{U}$ i $\forall (y,v) \in R^m \times \mathcal{V}$; /$\|\cdot\|$ je Euklidova norma u odgovarajućem prostoru/;

d/ neka su skupovi $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$, a takodje i skupovi:

$$f(x,u) = \{f(x,u) \mid u \in \mathcal{U}\}; \quad g(y,v) = \{g(y,v) \mid v \in \mathcal{V}\}$$

konveksni.

Uslovi a/ i b/ garantuju egzistenciju i jedinstvenost lokalnog apsolutno neprekidnog rešenja:

$$x(\cdot) = x(\cdot, x, u(\cdot)); \quad y(\cdot) = y(\cdot, y, v(\cdot)).$$

Siastem /1.1.2/ i /1.1.3/ sa ma kojim početnim uslovima $x(0)=x$ $(y(0)=y)$, za ma koje merljivo po Lebegu programno upravljanje $u(\cdot)$ $(v(\cdot))$ ima vrednosti iz $\mathcal{U}$ $(\mathcal{V})$. Ovo upravljanje nazvaćemo dopustivim.

Skupa sa uslovom c/ ovi uslovi garantuju i produživost odgovarajućih rešenja x/./, y/./ na celu realnu nenegativnu osu R^1_+. Početni moment vremena za sisteme /1.1.2/, /1.1.3/ svuda se smatra nultim.

Osim toga uslovi a/-c/ garantuju za sve ograničene podskupove:

$$\{(\tau,x)\} \in R^1_+ \times R^n, \quad \{(\tau,y)\} \in R^1_+ \times R^m$$

egzistenciju takvih konstanti: L, M, T da za sve tačke $(\tau,x'), (\tau,x''),$ $(\tau',x), (\tau'',x)$ i $(\tau,y'), (\tau,y''), (\tau',y), (\tau'',y)$ iz odgovarajućih podskupova važe jednačine:

$$\|x(\tau,x'',u(\cdot)) - x(\tau,x',u(\cdot))\| \le \|x'' - x'\| \exp LT, \quad \ldots\ldots\ldots (1.1.4)$$

$$\|x(\tau'',x,u(\cdot)) - x(\tau',x,u(\cdot))\| \le M|\tau'' - \tau'|, \quad \ldots\ldots\ldots (1.1.5)$$

$$\|y(\tau,y'',v(\cdot)) - y(\tau,y',v(\cdot))\| \le \|y'' - y'\| \exp LT, \quad \ldots\ldots\ldots (1.1.6)$$

$$\|y(\tau'',y,v(\cdot)) - y(\tau',y,v(\cdot))\| \le M|\tau'' - \tau'|. \quad \ldots\ldots\ldots (1.1.7)$$

ravnomerno po svim dopustivim upravljanjima u/./, v/./.

Uslovi a/-d/ garantuju kompaktnost skupova dostiživosti $C^t/x/$ i $C^t/y/$ sistema /1.1.2/ i /1.1.3/ za sve početne uslove: $x(0)=x$; $x \in R^n$ i $y(0)=$

$y\in R^m$ u svakom momentu vremena $t\in R^1_+$. Ovi uslovi garantuju takodje kompaktnost skupova $A^t(x)$ i $A^t(y)$ rešenja sistema /1.1.2/ i /1.1.3/ za sve početne uslove na ma kom odsečku $[0,t]$, $t\in R^1_+$. Kompaktnost poslednjih skupova se smatra redom u metrici prostora $C_n[0,t]$ i $C_m[0,t]$ gde je $C_k[0,t]$ /k=n,m/ prostor neprekidnih na odsečku $[0,t]$ k-vektor funkcija sa metrikom:

$$\gamma_k(z_1(\cdot),z_2(\cdot))=\max_{\tau\in[0,t]}\|z_1(\tau)-z_2(\tau)\|_k$$

/$\|\cdot\|_k$ je Euklidova norma u R^k; indeks k se ponekada izostavlja kada je je jasno kakva je dimenzija odgovarajućeg prostora/.

Neka je $(x,y,t)\in R^n\times R^m\times R^1$. Razmotrimo skup:

$$\mathcal{D}(x,y,t)=\bigcup_{t'\in[0,t]} C^{t-t'}(x)\times C^{t-t'}(y)\times\{t'\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1.1.8)$$

U daljem prostori $R^n\times R^m\times R^1$ i R^{n+m+1} se neće razlikovati, a za njihove tačke se koriste istovrsne oznake. Umesto $R^n\times R^m\times R^1$ pisaćemo

$\mathcal{D}_\infty$, pa je tada: $\mathcal{D}(x,y,t)\subset\mathcal{D}_\infty$, $(x,y,t)\in\mathcal{D}_\infty$.

<u>Napomena 1.1.1</u> Za t=0 se smatra da je: $C^t(x)=A^t(x)=x$ za svako $x\in R^n$
$C^t(y)=A^t(y)=y$ za svako $y\in R^m$

i $\mathcal{D}(x,y,t)=(x,y,t)$ za $\forall\, x\in R^n$, $y\in R^m$.

Osim toga pod dopustivim upravljanjem u/./ /v/.// na odsečku $[0,T]$ za t=0 smatramo svaki element $\mathcal{U}$ $(\mathcal{V})$, a pod rešenjem $x(\cdot,x,u(\cdot))$ $(y(\cdot,y,v(\cdot)))$ sistema /1.1.2/ //1.1.3// na ovom odsečku za odgovarajuće dopustivo upravljanje i za svako $x\in R^n$ $(y\in R^m)$ se uzima početni uslov: $x(\cdot,x,u(\cdot))=x$ $(y(\cdot,y,v(\cdot))=y)$.

Napomenimo i to da poslednji dogovor ne narušava tačnost ocena /1.1.4/—/1.1.7/. Svi navedeni dogovori ostaju na snazi.

Pod prostorom stanja podrazumevamo bilo koji skup $\mathcal{D}\subset\mathcal{D}_\infty$, koji ceo ne pripada hiperravni za t=0 i koji sadrži skupa sa svakom svojom tačkom /x, y, t/ i skup $\mathcal{D}(x,y,t)$. Posebno $\mathcal{D}_\infty$ i $\mathcal{D}(x,y,t)$ $((x,y,t)\in\mathcal{D}_\infty, t>0)$ su prostori stanja. Ipak u prvoj glavi biće osnovni prostor stanja oblika:

$$\mathcal{D}_\delta=\bigcup_{(x,y,t)\in S_\delta(x^0,y^0,t^0)}\mathcal{D}(x,y,t) \quad \ldots\ldots\ldots (1.1.9)$$

gde je $\delta>0$, $(x^0,y^0,t^0)\in\mathcal{D}_\infty$, $S_\delta(x^0,y^0,t^0)=O_\delta(x^0,y^0,t^0)\cap\mathcal{D}_\infty$,

a $O_\delta(x^0,y^0,t^0)$ zatvorena lopta u R^{n+m+1} sa centrom u tački (x^0,y^0,t^0) i poluprečnikom δ.

Na osnovu kompaktnosti skupova $A^t(x)$, $A^t(y)$ $(x\in R^n)$ $((x,y,t)\in\mathcal{D}_\infty)$

sledi:

Lema 1.1.1 $\mathcal{D}_\delta$ je kompakt $(\delta>0)$.

Dokaz. Iz /1.1.8/,/1.1.9/ i iz /1.1.5/,/1.1.7/ sledi da se može naći takvo $r>0$ da je: $\mathcal{D}(x,y,t)\subset O_r(x,y,t)$ za $\forall (x,y,t)\in S_\delta(x^\circ,y^\circ,t^\circ)$.

Dalje sledi da se može naći takvo $r_0>0$ $(r_0=r+\delta)$ da $\mathcal{D}_\delta\subset O_{r_0}(x^\circ,y^\circ,t^\circ)$.

Na taj način skup $\mathcal{D}_\delta$ je ograničen.

Za dokaz zatvorenosti skupa $\mathcal{D}_\delta$ razmotrimo višeznačno preslikavanje $\mathcal{D}:\mathcal{D}_\infty\rightarrow Comp\,\mathcal{D}_\infty$ koje korespondira tački $(x,y,t)\in\mathcal{D}_\infty$ kompaktan skup $\mathcal{D}(x,y,t)\subset\mathcal{D}_\infty$. Uzimajući u obzir /1.1.4/— /1.1.7/ sledi da je preslikavanje $\mathcal{D}$ neprekidno / u kompaktu $Comp\,\mathcal{D}_\infty$ uvodi se Hausdorfova metrika/ i tim pre poluneprekidno odozgo. Tada uzimajući u obzir /1.1.9/ i posebno to da je $S_\delta(x^\circ,y^\circ,t^\circ)$ kompakt zaključujemo da je skup $\mathcal{D}_\delta$ zatvoren. Time je lema dokazana.

Lema 1.1.2 Neka je $\delta>0$. Tada je a/ $int\,\mathcal{D}_\delta\neq\phi$; b/ $\overline{int\,\mathcal{D}_\delta}=\mathcal{D}_\delta$

Dokaz. Tačnost tvrdjenja pod a/ je očigledno. Dokažimo tvrdjenje b/. Pošto je skup $\mathcal{D}_\delta$ zatvoren to za dokaz tvrdjenja b/ je dovoljno da se ubedimo da $\mathcal{D}_\delta\subset\overline{int\,\mathcal{D}_\delta}$. Za to sa svoje strane je dovoljno pokazati da za sve tačke $(x,y,t)\in\mathcal{D}_\delta$ i za svako $\varepsilon>0$ može se naći takav otvoren skup $O(\varepsilon|(x,y,t)\in\mathcal{D}_\delta)$, da rastojanje od tačke /x, y, t/ do ovog skupa bude ne veće od ε.

Uzmimo proizvoljne $(\bar{x},\bar{y},\bar{t})\in\mathcal{D}_\delta$ i $\varepsilon>0$. Pošto je $(\bar{x},\bar{y},\bar{t})\in\mathcal{D}_\delta$ tada se može naći tačka $(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}},\bar{\bar{t}})\in S_\delta(x^\circ,y^\circ,t^\circ)$ i mogu se naći dopustiva upravljanja $\bar{\bar{u}}(\cdot),\bar{\bar{v}}(\cdot)$ koja su definisana na odsečku $[0,\bar{\bar{t}}-\bar{t}]$ da je: $(\bar{x},\bar{y},\bar{t})\in\mathcal{D}(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}},\bar{\bar{t}})$ i $\bar{x}=x(\bar{\bar{t}}-\bar{t},\bar{\bar{x}},\bar{\bar{u}}(\cdot))$; $\bar{y}=y(\bar{\bar{t}}-\bar{t},\bar{\bar{y}},\bar{\bar{v}}(\cdot))$.

Napomenimo da ako je: $\bar{\bar{t}}=\bar{t}$ tada je $(\bar{x},\bar{y},\bar{t})=(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}},\bar{\bar{t}})$ i ulogu polaznog otvorenog skupa može igrati skup $int\,S_\delta(x^\circ,y^\circ,t^\circ)$ i traženo je utvrdjeno. Zato ćemo dalje smatrati da je $\bar{\bar{t}}>\bar{t}$

Konstruišimo familiju skupova $\{C_r(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}},\bar{\bar{t}})\}_{r>0}$ svaki od kojih se gradi po pravilu: $C_r(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}},\bar{\bar{t}})=int(O_r(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}},\bar{\bar{t}})\cap S_\delta(x^\circ,y^\circ,t^\circ)$,

gde je $r>0$, a $O_r(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}},\bar{\bar{t}})$ je zatvorena ili otvorena lopta sa centrom u tački $(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}},\bar{\bar{t}})$ i radijusom/poluprečnikom/ r.

Svaki od skupova ove familije je neprazan, otvoren i sadrži se u $\mathcal{D}_\delta$, pri čemu tačka $(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}},\bar{\bar{t}})$ ili pripada svakom skupu iz ove familije ili je granična za sve ove skupove.

Razmotrimo sada familiju $\{\mathcal{Z}_\tau\}_{\tau\in(0,\bar{\bar{t}}-\bar{t}]}$ homomorfizama $\mathcal{Z}_\tau : R^{n+m+1} \longrightarrow R^{n+m+1}, \tau\in(0,\bar{\bar{t}}-\bar{t}]$ koji se odredjuju relacijom:

$$\mathcal{Z}_\tau(x,y,t)=(x(\tau,x,\bar{\bar{u}}(\cdot)),y(\tau,y,\bar{\bar{v}}(\cdot)),t-\tau),(x,y,t)\in R^{m+n+1}$$

za sve $\tau\in(0,\bar{\bar{t}}-\bar{t})$ i sve $r>0$ lik $\mathcal{Z}_\tau(C_r(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}},\bar{\bar{t}}))$ skupa $C_r(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}},\bar{\bar{t}})$ pri preslikavanju $\mathcal{Z}_\tau$ biće otvoren, a da pri tome tačka:

$$\mathcal{Z}_\tau(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}},\bar{\bar{t}})=(x(\tau,\bar{\bar{x}},\bar{\bar{u}}(\cdot)),y(\tau,\bar{\bar{y}},\bar{\bar{v}}(\cdot)),\bar{\bar{t}}-\tau)$$

ili pripada skupu $\mathcal{Z}_\tau(C_r(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}},\bar{\bar{t}}))$ /ili će $(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}},\bar{\bar{t}})\in C_r(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}},\bar{\bar{t}})$ /, ili je granična tačka ovog skupa /ako je tačka $(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}},\bar{\bar{t}})$ granična za $C_r(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}},\bar{\bar{t}})$ /.

Na osnovu navedenog sledi rastojanje od tačke $(\bar{x},\bar{y},\bar{t})$ do skupa $\mathcal{Z}_\tau(C_r(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}},\bar{\bar{t}}))$ za svako $\tau\in(0,\bar{\bar{t}}-\bar{t})$, $r>0$, nije veće od rastojanja ove tačke do tačke $\mathcal{Z}_\tau(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}},\bar{\bar{t}})$, ali pošto je:

$$(\bar{x},\bar{y},\bar{t})=\mathcal{Z}_\tau(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}},\bar{\bar{t}})\big|_{\tau=\bar{\bar{t}}-\bar{t}}=(x(\bar{\bar{t}}-\bar{t},\bar{\bar{x}},\bar{\bar{u}}(\cdot)),y(\bar{\bar{t}}-\bar{t},\bar{\bar{y}},\bar{\bar{v}}(\cdot)),\bar{t})$$

tada je τ dovoljno blisko ka $\bar{\bar{t}}-\bar{t}$ i rastojanje medju ovim tačkama uzimajući u obzir /1.1.5/,/1.1.7/ može biti učinjeno ne večim od ε, pa čak i jednako nuli /naprimer za $\tau=\bar{\bar{t}}-\bar{t}$ /.

Izaberimo odgovarajuće τ strogo manje od $\bar{\bar{t}}-\bar{t}$ i označimo ga sa $\tau(\varepsilon)$. Na taj način je pokazano rastojanje od tačke $(\bar{x},\bar{y},\bar{t})$ do otvorenog skupa $\mathcal{Z}_{\tau(\varepsilon)}(C_r(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}},\bar{\bar{t}}))$ za svako $r>0$ nije veće od ε.

Pokazaćemo da se može naći $r_0>0$ za koje važi pripadnost:

$\mathcal{Z}_{\tau(\varepsilon)}(C_{r_0}(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}},\bar{\bar{t}}))\subset\mathcal{D}_\delta$ i tada će lema biti dokazana. Po konstrukciji familija skupova $\{C_r(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}},\bar{\bar{t}})\}_{r>0}$ i iz oblika familije preslikavanja $\{\mathcal{Z}_\tau\}_{\tau\in(0,\bar{\bar{t}}-\bar{t}]}$ sledi da tačka /x, y, t/ iz $\mathcal{Z}_\tau(C_r(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}},\bar{\bar{t}}))$ pripada skupu $\mathcal{D}_\delta$ tada i samo tada kada je $t>0$, a to znači tada i samo tada kada je original /x, y, t/ pri preslikavanju $\mathcal{Z}_\tau$. Neka je tačka $(x',y',t')\in C_r(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}},\bar{\bar{t}})$, takva da je $t'\geq\tau$. Sledi da traženo r_0 treba birati tako da bi za svaku tačku $(x',y',t')\in C_r(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}},\bar{\bar{t}})$ važila nejednačina: $t'\geq\tau(\varepsilon)$. Dovoljno je da ova nejednačina važi za sve tačke $(x',y',t')\in C_{r_0}(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{y}},\bar{\bar{t}})$, a za ovo je dovoljno da bi $\bar{\bar{t}}-r_0\geq\tau(\varepsilon)$, gde je $r_0>0$, tj. r_0 treba da zadovolji nejednačine: $0<r_0\leq\bar{\bar{t}}-\tau(\varepsilon)$, koje su rešljive jer je $\tau(\varepsilon)<\bar{\bar{t}}-\bar{t}$ i $\bar{\bar{t}}>\bar{t}$ /ako bi važila jednačina $\tau(\varepsilon)=\bar{\bar{t}}-\bar{t}$, a $\bar{t}=0$, tada poslednje nejednačine nebi bile nerešljive/.Lema 1.1.2 je dokazana.

Funkcional kvaliteta je: $\bigcup\limits_{(x,y,t)\in\mathcal{D}} A^t(x)\times A^t(y)$

gde je $\mathcal{D}$ prostor stanja igre /1.1.1/

Dalje ćemo razlikovati dva funkcionala $\mathcal{H}^1$ i $\mathcal{H}^2$ koji su odredjeni pomoću neprekidne na R^n i R^m funkcije H jednačinama:

$$\ell^1(x(\cdot),y(\cdot))=H(x(t),y(t)) \qquad (1.1.10)$$

$$\ell^2(x(\cdot),y(\cdot))=\min_{\tau\in[0,t]} H(x(\tau),y(\tau)) \qquad (1.1.11)$$

gde je $(x(\cdot),y(\cdot))\in A^t(x)\times A^t(y)$, $(x,y,t)\in\mathcal{D}$

Skupovi strategija. Neka je $\mathcal{D}$ prostor stanja igre /1.1.1/.Dalje ćemo da koristimo sledeće oznake: $\mathcal{D}^0=\{(x,y,t)\in\mathcal{D}\,|\,t>0\}$;

$\mathcal{D}^t=\{(x',y',t')\in\mathcal{D}\,|\,t'=t\}$ $(t>0)$; $t^*=\sup\{t\,|\,(x,y,t)\in\mathcal{D}\}$;

$$(0,t^*>=\begin{cases}(0,t^*], & \text{ako postoji } (x,y,t)\in\mathcal{D};\ t=t^*;\\ (0,t^*), & u \text{ suprotnom slučaju.}\end{cases}$$

$\mathcal{U}^t(\mathcal{V}^t)$ je skup dopustivih upravljanja u/./,v/./datih na odsečku $[0,t]$, $t>0$; $\mathcal{U}^t_0(\mathcal{V}^t_0)$ su skupovi svih dopustivih upravljanja u/.//v/.// datih na poluintervalu $[0,t)$, $t>0$;

$$\mathcal{U}(\mathcal{D})=\Big(\bigcup_{t\in(0,t^*>}\mathcal{U}^t\Big)\cup\Big(\bigcup_{t\in(0,t^*)}\mathcal{U}^t_0\Big);\ \Big(\mathcal{V}(\mathcal{D})=\Big(\bigcup_{t\in(0,t^*>}\mathcal{V}^t\Big)\cup\Big(\bigcup_{t\in(0,t^*)}\mathcal{V}^t_0\Big)$$

Definicija 1.1.1 Pod strategijom $\mathfrak{U}\in\mathcal{G}$ $(\mathfrak{V}\in\mathcal{B})$ smatramo ma koji konačni, uredjeni skup preslikavanja:

$$\mathfrak{U}=(a^q,\dots,a^0),\ q=0,1,\dots,\ a^i:\ \mathcal{D}^0\to\mathcal{U}(\mathcal{D}),\ i\in[0,q];$$

$$(\mathfrak{V}=(b^r,\dots,b^0),\ r=0,1\dots,\ b^j:\mathcal{D}^0\to\mathcal{V}(\mathcal{D})\ j\in[0,r])$$

takvih da je:

1/ako je $q\geq 1$ $(r\geq 1)$, tada za sve $i\in[1,q]$, $j\in[1,r]$, $t\in(0,t^*>$

važi pripadnost:

$$a^i(\mathcal{D}^t)\subset\mathcal{U}^t\cup\Big(\bigcup_{t'\in(0,t)}\mathcal{U}^t_0\Big)\quad\Big(b^j(\mathcal{D}^t)\subset\mathcal{V}^t\cup\Big(\bigcup_{t'\in(0,t)}\mathcal{V}^t_0\Big)\Big);$$

2/za sve $t\in(0,t^*>$ važi pripadnost: $a^0(\mathcal{D}^t)\subset\mathcal{U}^t$ $(b^0(\mathcal{D}^t)\subset\mathcal{V}^t)$

Realizujuće preslikavanje $\mathcal{H}$ smatra se da je dato na skupu $\mathcal{D}^0 \times \mathcal{G} \times \mathcal{B}$, a skup njegovih vrednosti je: $\bigcup_{(x,y,t)\in\mathcal{D}^0} A^t(x)\times A^t(y)$

pri čemu slike podskupova $\mathcal{D}^t \times \mathcal{G}\times\mathcal{B}; t\in(0,t^*)$ skupa $\mathcal{D}^0\times\mathcal{G}\times\mathcal{B}$ pri preslikavanju $\mathcal{H}$ sadrže se u skupu $\bigcup_{(x',y',t')\in\mathcal{D}^t} A^t(x')\times A^t(y')$

Dalje ćemo po elementu $\langle (x,y,t), \mathcal{U}, \mathcal{V}\rangle \in \mathcal{D}^0\times\mathcal{G}\times\mathcal{B}$ jednoznačno konstruisati par rešenja $x(\cdot)\in A^t(x); y(\cdot)\in A^t(y)$, koja su slike odgovarajućeg elementa pri preslikavanju $\mathcal{H}$.

Neka je $\langle (x,y,t), \mathcal{U}, \mathcal{V}\rangle \in \mathcal{D}^0\times\mathcal{G}\times\mathcal{B}$ i neka je odredjenosti radi

$\mathcal{U}=(a^q,\dots,a^0)$, $\mathcal{V}=(b^r,\dots,b^0)$

Na prvom koraku konstrukcije razmotrimo dopustiva upravljanja $u_q(\cdot)=a^q(x,y,t)$, $v_r(\cdot)=b^r(x,y,t)$. Po definiciji 1.1.1 dopustivo upravljanje $u_q(\cdot)(v_r(\cdot))$ može biti odredjeno ili na odsečku $[0,t_q]$ $([0,t_r])$, gde je $t_q=t/t_r=t/$, ili na poluintervalu $[0,t_q)([0,t_r))$, gde je $t_q\in(0,t)$ $(t_r\in(0,t))$. Koristeći ova dopustiva upravljanja konstruišemo rešenja $x_0(\cdot)=x(\cdot,x,u_q(\cdot))$ i $y_0(\cdot)=y(\cdot,y,v_r(\cdot))$, koja su odredjena na istim poluintervalima ili odsečcima /svako na svome/kao i odgovarajuća dopustiva upravljanja.

Ako su oba rešenja $x_0(\cdot)$ i $y_0(\cdot)$ definisana na odsečku $[0,t]=[0,t_q]=[0,t_r]$ tada par rešenja $x(\cdot)=x_0(\cdot), y(\cdot)=y_0(\cdot)$ nazivamo slikom elemenata $\langle (x,y,t),\mathcal{U},\mathcal{V}\rangle$ pri preslikavanju $\mathcal{H}$. U suprotnom slučaju prelazimo na sledeći korak.

Na taj način pred drugim korakom, ako je on potreban, ili će oba konstruisana na prvom koraku rešenja $x_0(\cdot), y_0(\cdot)$ biti odredjena redom na nekim poluintervalima $[0,t_q)$, $t_q\in(0,t)$ i $[0,t_r)$, $t_r\in(0,t)$ ili će jedno od njih biti odredjeno na odgovarajućem poluintervalu.

Na drugom koraku rešenje $x_0(\cdot)$ $(y_0(\cdot))$, koje je konstruisano na prvom koraku produžavamo do neprekidnosti na odsečku $[0,t_q]([0,t_r])$ ako je ono bilo odredjeno na poluintervalu $[0,t_q)$, $t_q\in(0,t)([0,t_r)$, $t_r\in(0,t$.

Zatim pomoću rešenja $x_0(\cdot), y_0(\cdot)$ /već odredjeno na odsečcima $[0,t_q]$ $[0,t_r]$) /gradimo neko stanje. I ako je $t_q<t_r$ tada gradi-

mo stanje $(x_0(t_q), y_0(t_q), t-t_q) \in \mathcal{D}^0, t-t_q>0$. Ako je $t_q>t_2$ tada gradimo stanje $(x_0(t_2), y_0(t_2), t-t_2) \in \mathcal{D}^0$. Na kraju ako je $t_q=t_2$, tada gradimo bilo koje od dva poslednja stanja.

Neka je naprimer izgradjeno stanje $(x_0(t_2), y_0(t_2), t-t_2)$, tada razmatramo dopustivo upravljanje $v_{2-1}(\cdot)=\ell^{2-1}(x_0(t_2), y_0(t_2), t-t_2)$, koje po definiciji 1.1.1 može biti odredjeno ili na odsečku $[0,t_{2-1}]$, $t_{2-1}=t-t_2$ ili na poluintervalu $[0,t_{2-1})$, $t_{2-1} \in (0,t-t_2)$

Dalje će biti udobno da se označi razmak odredjivanja dopustivog upravljanja $v_{2-1}(\cdot)$ sa $[0,t_{2-1}>$ nezavisno od toga da li je on odsečak $[0,t_{2-1}]$ ili poluinterval $[0,t_{2-1})$.

Koristeći dopustivo upravljanje $v_{2-1}(\cdot)$ konstruišemo rešenje:

$y_1'(\cdot)=y(\cdot, y_0(t_2), v_{2-1}(\cdot))$. Zatim gradimo rešenje:

$$y_1(\tau)=\begin{cases} y_0(\tau), \text{ ako je } \tau \in [0,t_2); \\ y_1'(\tau-t_2) \quad \text{ako je } \tau \in [t_2, t_2+t_{2-1}> \end{cases}$$

i ono će biti rešenje sistema /1.1.3/ na razmaku $[0,t_2+t_{2-1}>$ sa početnim uslovom $y_1(0)=y_1$ za dopustivo upravljanje:

$$V(\tau)=\begin{cases} v_2(\tau) \quad \text{ako je } \tau \in [0,t_2) \\ v_{2-1}(\tau-t_2) \quad \text{ako je } \tau \in [t_2, t_2+t_{2-1}> \end{cases}$$

Ako rešenja $x_0(\cdot)$ i $y_1(\cdot)$, konstruisana posle dva koraka, budu odredjena na celom odsečku $[0,t]=[0,t_q]=[0,t_2+t_{2-1}]$ /ovo je moguće, ako je na prvom koraku rešenje $x_0(\cdot)$ bilo odredjeno već na celom odsečku $[0,t]$ /, tada par rešenja $x(\cdot)=x_0(\cdot)$ i $y(\cdot)=y_1(\cdot)$ nazivamo slikom elementa $<(x,y,t), \mathcal{U}, \mathcal{V}>$ pri preslikavanju $\mathcal{H}$. U suprotnom slučaju prelazimo na treći korak.

Na trećem koraku, ako je on potreban, po šemi drugog koraka definišemo na većem razmaku ono rešenje, konstruisano na prva dva koraka, koje je u datom momentu odredjeno na manjem razmaku od drugog, a ako su odredjena na istom razmaku, tada proširujemo na veći razmak bilo koje od njih. Zato na trećem koraku koristimo ili preslikavanje b^{r-2} ili preslikavanje a^{q-1} /Ako bi na drugom koraku bilo konstruisano stanje $(x_0(t_q), y_0(t_q), t-t_q)\in \mathcal{D}^0$, a ne stanje $(x_0(t_r), y_0(t_r), t-t_r)\in \mathcal{D}^0$ i znači tamo bi se koristilo preslikavanje a^{q-1}, a ne b^{r-1}. Tada na trećem koraku trebalo bi koristiti ili preslikavanje a^{q-2} ili preslikavanje b^{r-1} / i td. Za jednoznačno gradjenje slike elementa $\langle(x,y,t),\mathcal{U},\mathcal{V}\rangle$ pri preslikavanju $\mathcal{H}$ potrebno je uraditi ne više od $q+r+1$ koraka. To da rešenja, konstruisana "u najgorem slučaju" na $q+r+1$ koraku, stvarno će biti odredjena na celom odsečku $[0,t]$ garantovano je posebnim odredjivanjem preslikavanja a^0 i b^0 /definicija 1.1.1/. Smatramo da je preslikavanje $\mathcal{H}$ potpuno definisano.

Da bismo izdvojili tu situaciju, da je par rešenja $x(\cdot)\in A^t(x)$ i $y(\cdot)\in A^t(y)$ /ili jedno od njih/ lik /ili jedna komponenta lika/ elementa $\langle(x,y,t)\mathcal{U},\mathcal{V}\rangle\in\mathcal{D}^0\times\mathcal{G}\times\mathcal{B}$ pri preslikavanju $\mathcal{H}$, označimo ova rešenja sa $x(\cdot,x\,|\,\mathcal{U},\mathcal{V})$ i $y(\cdot,y\,|\,\mathcal{U},\mathcal{V})$. Pri takvoj simbolici delimično se gubi zavisnost ovih rešenja od polaznog stanja.

Neka je $\mathcal{G}^0(\mathcal{B}^0)$ takav podskup skupa $\mathcal{G}(\mathcal{B})$ da on sadrži sve te i samo te strategije $\mathcal{U}\in\mathcal{G}(\mathcal{V}\in\mathcal{B})$ koje su oblika $\mathcal{U}=a^0(\mathcal{V}=b^0)$, tj. koje su u suštini programske strategije.

Neposredno iz definicije preslikavanja $\mathcal{H}$ sledi tačnost sledećeg tvrdjenja.

<u>Lema 1.1.3</u> Neka je $(x,y,t)\in\mathcal{D}^0$ tada za $\forall\mathcal{U}\in\mathcal{G}$ ili $\mathcal{V}\in\mathcal{B}$ mogu se naći takvi $\mathcal{U}'\in\mathcal{G}^0$ i $\mathcal{V}'\in\mathcal{B}^0$ da je $x(\cdot,x\,|\,\mathcal{U},\mathcal{V})=x(\cdot,x\,|\,\mathcal{U},\mathcal{V}')=$ $=x(\cdot,x\,|\,\mathcal{U}',\mathcal{V})$ i $y(\cdot,y\,|\,\mathcal{U},\mathcal{V})=y(\cdot,y\,|\,\mathcal{U},\mathcal{V}')=y(\cdot,y\,|\,\mathcal{U}',\mathcal{V})$.

<u>Funkcija dobitka</u>. $\mathcal{K}:\mathcal{D}^0\times\mathcal{G}\times\mathcal{B}\to R^1$ odredjuje se sledećom jednačinom: $\mathcal{K}(x,y,t\,|\,\mathcal{U},\mathcal{V})=\mathcal{H}(x(\cdot),y(\cdot))$

gde je $\mathcal{H}$ funkcional kvaliteta, a rešenja $x(\cdot)=A^t(x)$ i $y(\cdot)=A^t(y)$ su likovi elementa $\langle(x,y,t),\mathcal{U},\mathcal{V}\rangle\in\mathcal{D}^0\times\mathcal{G}\times\mathcal{B}$ preslikavanja $\mathcal{H}$.

Igru /1.1.1/ označavamo simbolom $\Gamma(\mathcal{D})$, podvlačeći time prostor stanja odgovarajuće igre.

Pod rešenjem igre podrezumeva se procedura traženja optimalne strategije ili minimizirajućeg niza strategija igrača G i optimalne strategije ili pak maksimizirajućeg niza strategija igrača B.

Definisaćemo rešenje igre $\Gamma(\mathcal{D})$ iz datog početnog stanja $(x,y,t)\in\mathcal{D}^\circ$ i rešenje igre $\Gamma(\mathcal{D})$ iz bilo kog početnog stanja $(x,y,t)\in\mathcal{D}^\circ$. Poslednje se prosto naziva rešenjem igre $\Gamma(\mathcal{D})$.

Definicija 1.1.2 Neka je $(x,y,t)\in\mathcal{D}^\circ$. Ako za bilo koje $\varepsilon>0$ može se naći takvo $\omega^*\in R^1$ i takvi $\mathcal{U}_\varepsilon\in\mathcal{G},\ \mathcal{V}_\varepsilon\in\mathcal{B}$ da je:

$$\mathcal{K}(x,y,t|\mathcal{U}_\varepsilon,\mathcal{V})\le\omega^*+\varepsilon, \quad \ldots\ldots\ldots (1.1.13)$$

za sve $\mathcal{V}\in\mathcal{B}^\circ$ i $\mathcal{K}(x,y,t|\mathcal{U},\mathcal{V}_\varepsilon)\ge\omega^*-\varepsilon$ $\ldots\ldots\ldots$ (1.1.14)

za sve $\mathcal{U}\in\mathcal{G}^\circ$ tada je veličina ω^* vrednost igre $\Gamma(\mathcal{D})$ iz početnog stanja /x, y, t/, a odgovarajuće strategije $\mathcal{U}_\varepsilon$ i $\mathcal{V}_\varepsilon$ nazivaju se ε optimalne strategije igrača G i B u igri $\Gamma(\mathcal{D})$ iz početnog stanja. Ako za svako $\varepsilon>0$ strategija $\mathcal{U}^*\in\mathcal{G}$ $(\mathcal{V}^*\in\mathcal{B})$ je ε optimalna strategija igrača G /B/ u igri $\Gamma(\mathcal{D})$ iz početnih stanja /x, y, t/, tada se ona naziva optimalnom strategijom igrača G /B/ u igri $\Gamma(\mathcal{D})$ iz tih početnih stanja.

Niz strategija $\{\mathcal{U}_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\mathcal{U}_n\in\mathcal{G}$, $n=0,1,\ldots$; $(\{\mathcal{V}_n\}_{n=0}^{\infty}, \mathcal{V}_n\in\mathcal{B}, n=0,1,\ldots)$

naziva se minimizirajući /maksimizirajući/ niz strategija igrača G /B/u igri $\Gamma(\mathcal{D})$ iz početnog stanja /x, y, t/, ako za svako $\varepsilon>0$ postoji takvo N, da za svako $n\geq N$ strategija $\mathcal{U}_n$ $(\mathcal{V}_n)$ je ε optimalna strategija igrača G /B/ u igri $\Gamma(\mathcal{D})$ iz tog početnog stanja.

Definicija 1.1.3 Funkcija $\omega^*:\mathcal{D}\to R^1$ naziva se funkcijom vrednosti igre $\Gamma(\mathcal{D})$ ako u svakoj tački $(x,y,t)\in\mathcal{D}^\circ$ veličina $\omega^*(x,y,t)$ je vrednost igre $\Gamma(\mathcal{D})$ iz odgovarajučeg početnog stanja i $\omega^*(x,y,t)=\mathcal{H}(x,y)$ za svako $(x,y,0)\in\mathcal{D}$. /Ovde je $\mathcal{H}$ funkcional kvaliteta u igri $\Gamma(\mathcal{D})$ /. Strategija $\mathcal{U}_\varepsilon\in\mathcal{G}$ $(\mathcal{V}_\varepsilon\in\mathcal{B})$ naziva se ε optimalna strategija igrača G /B/ u igri $\Gamma(\mathcal{D})$ ako je ona ε optimalna strategija igrača G /B/u igri $\Gamma(\mathcal{D})$ iz bilo kog početnog stanja $(x,y,t)\in\mathcal{D}^\circ$. Strategija $\mathcal{U}^*\in\mathcal{G}$ $(\mathcal{V}^*\in\mathcal{B})$ naziva se optimalna strategija igrača G/B/u igri $\Gamma(\mathcal{D})$ ako je ona optimalna strategija igrača G/B/ u igri $\Gamma(\mathcal{D})$ iz bilo kog početnog stanja $(x,y,t)\in\mathcal{D}^\circ$.

Niz strategija $\{\mathcal{U}_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\mathcal{U}_n\in\mathcal{G}$, $n=0,1,\ldots$; $(\{\mathcal{V}_n\}_{n=0}^{\infty}, \mathcal{V}_n\in\mathcal{B}, n=0,1,\ldots)$

naziva se minimizirajući /maksimizirajući/ niz strategija igrača G/B/ u igri $\Gamma(\mathcal{D})$ ako za svako $\varepsilon>0$ postoji N, da za svako $n\geq N$ strategija $\mathcal{U}_n$ $(\mathcal{V}_n)$ je ε optimalna strategija igrača G/B/ u igri $\Gamma(\mathcal{D})$.

§2. Prvi numerički metod približavanja funkciji vrednosti igre približenja u odredjenom momentu vremena /konstrukcija maksimizirajućeg niza strategija begunca/

U ovom paragrafu na osnovu predloženog NMPFVI, u koме se funkciji vrednosti približava odozdo, daje se način konstrukcije maksimizirajućeg niza strategija begunca. Ovaj način dovodi do konstrukcije optimalne strategije begunca. Tačnije ako ona egzistira u skupu strategija $\mathcal{B}$ tada ovaj način obavezno dovodi da njene konstrukcije.

Prostor stanja igre $\Gamma^1(\mathcal{D})$ je oblika /1.1.9/, tj. $\mathcal{D}=\mathcal{D}_\delta$, $\delta>0$. Na osnovu leme 1.1.1 $\mathcal{D}$ je kompakt.

U glavi I $C(\mathcal{D})$ je metrički prostor neprekidnih funkcija na kompaktu $\mathcal{D}$, sa metrikom koja odgovara normi:

$$\gamma(\omega(\cdot))=\max_{d\in\mathcal{D}}|\omega(d)|,\ \omega(\cdot)\in C(\mathcal{D}).$$

Operator $\Phi_-^1 : C(\mathcal{D})\to C(\mathcal{D})$ za svaku funkciju $\omega(\cdot)\in C(\mathcal{D})$ odredjujemo sledećom jednačinom:

$$\Phi_-^1\circ\omega(x,y,t)=\max_{\tau\in[0,t]}\ \max_{\eta\in C^\tau(y)}\ \min_{\xi\in C^\tau(x)}\omega(\xi,\eta,t-\tau),\ \ldots\ldots(1.2.1)$$

gde su $(x,y,t)\in\mathcal{D}$; $C^\tau(x)$; $C^\tau(y)$ skupovi dostiživosti sistema /1.1.2/ i /1.1.3/ iz početnog položaja x i y u momentu vremena τ.

Napomena 1.2.1 Oznaku Φ_-^1 koristićemo i za operator koji je definisan relacijom /1.2.1/, ali koji dejstvuje iz $Lip(\mathcal{D})$ u $Lip(\mathcal{D})$, gde je $Lip(\mathcal{D})$ podskup funkcija iz $C(\mathcal{D})$, koje zadovoljavaju na $\mathcal{D}$ uslov Lipšica. ($\omega(\cdot)\in Lip(\mathcal{D})$ ako postoje takve konstante $L_1, L_2>0$, da je:

$$|\omega(x'',y'',t'')-\omega(x',y',t')|<L_1|t''-t'|+L_2(\|x''-x'\|+\|y''-y'\|)$$

za svako $(x'',y'',t''),(x',y',t')\in\mathcal{D}$).

Lema 1.2.1 Operator $\Phi_-^1 : C(\mathcal{D})\to C(\mathcal{D})$ $(\Phi_-^1 : Lip(\mathcal{D})\to Lip(\mathcal{D}))$ je definisan korektno, tj. realno preslikava $C(\mathcal{D})(Lip(\mathcal{D}))$ u sebe.

Dokaz. Neka je $\omega(\cdot)\in C(\mathcal{D})$. Pokazaćemo da je i $\Phi_-^1\circ\omega(\cdot)\in C(\mathcal{D})$.

Uzmimo proizvoljne $(x'',y'',t''),(x',y',t')\in\mathcal{D}$ i ocenimo odozgo i odozdo veličinu: $\Delta=\Phi_-^1\circ\omega(x'',y'',t'')-\Phi_-^1\circ\omega(x',y',t')\ldots(1.2.2)$

Ocenimo je najpre odozgo. Izaberimo $\tau_+''\in[0,t'']$, $\eta_+''\in C^{\tau_+''}(y'')$ i dopustivo upravljanje $v_+''(\cdot)\in V^{\tau_+''}$ iz uslova: $\eta_+''=y(\tau_+'',y'',v_+''(\cdot))$,

$$\min_{\xi\in C^{\tau''_+}(x'')} \omega(\xi,\eta''_+,t''-\tau''_+) = \max_{\tau\in[0,t'']}\ \max_{\eta\in C^{\tau}(y'')}\ \min_{\xi\in C^{\tau}(x'')} \omega(\xi,\eta,t''-\tau)$$

Zatim stavljamo da je $\eta'_+=y(\theta'_+,y',v'_+(\cdot))$, gde je $\theta'_+=\min\{t',\tau''\}$

Tada važi: $\Delta\le \min_{\xi\in C^{\tau''_+}(x'')}\omega(\xi,\eta''_+,t''-\tau''_+)-\min_{\xi\in C^{\theta'_+}(x')}\omega(\xi,\eta'_+,t'-\theta'_+)$.

Izaberimo sada $\xi'_+\in C^{\theta'_+}(x')$ i dopustivo upravljanje $u'_+(\cdot)\in\mathcal{U}^{\tau''_+}$

iz uslova: $\xi'_+=x(\theta'_+,x',u'_+(\cdot))$; $\omega(\xi'_+,\eta'_+,t'-\theta'_+)=\min_{\xi\in C^{\theta'_+}(x')}\omega(\xi,\eta'_+,t'-\theta'_+)$.

Zatim stavimo da je $\xi''_+=x(\tau''_+,x'',u''_+(\cdot))$. Tada iz prethodne nejednačine sledi nejednačina: $\Delta\le\omega(\xi''_+,\eta''_+,t''-\tau''_+)-\omega(\xi'_+,\eta'_+,t'-\theta'_+)$... (1.2.3)

Analogno se vrši ocena veličine Δ odozdo. Mogu se naći takve $(\xi''_-,\eta''_-,t''-\theta''_-),(\xi'_-,\eta'_-,t'-\tau'_-)$ da je:

$$\Delta\ge\omega(\xi''_-,\eta''_-,t''-\theta''_-)-\omega(\xi'_-,\eta'_-,t'-\tau'_-)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (1.2.4)$$

gde je: $\theta''_-=\min\{t,\tau'\}$; $\eta'_-=y(\tau'_-,y',v'_-(\cdot))$, $\eta''_-=y(\theta''_-,y'',v'_-(\cdot))$

za neko dopustivo upravljanje $v'_-(\cdot)\in\mathcal{V}^{\tau'_-}$;

$\xi''_-=x(\theta''_-,x'',u''_-(\cdot))$, $\xi'_-=x(\tau'_-,x',u''_-(\cdot))$

za neko dopustivo upravljanje : $u''(\cdot)\in\mathcal{U}^{\tau'_-}$

Iz /1.2.2/--/1.2.4/sledi: $|\Delta|\le\max\{|\omega(\xi''_+,\eta''_+,t''-\tau''_+)-$

$$-\omega(\xi'_+\eta'_+,t-\theta'_+|,\ |\omega(\xi''_-,\eta''_-,t''-\theta''_-)-\omega(\xi'_-,\eta'_-,t'-\tau')|\}\ .\ .\ .\ .\ (1.2.5)$$

Uzimajući u obzir konstrukcije i ocene /1.1.4/--/1.1.7/, gde su konstante L, M, T$\ge$0 izabrane za ograničene skupove:

$\{(\tau,x)\}=P_{\tau t}(\mathcal{D})\times P_{\tau x}(\mathcal{D})$, $\{(\tau,y)\}=P_{\tau t}(\mathcal{D})\times P_{\tau y}(\mathcal{D})$

/gde su $P_{\tau t}(\mathcal{D}),P_{\tau x}(\mathcal{D}),P_{\tau y}(\mathcal{D})$ projekcije skupa $\mathcal{D}\in R^{m+n+1}$ na koordinatne podprostore $\{t\},\{x\},\{y\}$ prostora R^{m+n+1} / imamo:

$$\|(\xi''_+,\eta''_+,t-\tau''_+)-(\xi'_+,\eta'_+,t'-\theta'_+)\|\le|t''-t'|+|\tau''_+-\theta'_+|+\|\xi''_+-\xi'_+\|+\|\eta''_+-\eta'_+\|\le$$

$$\leq 2|t''-t'|+\|x(\tau''_+,x'',u'_+(\cdot))-x(\theta'_+,x',u'_+(\cdot))\|+\|y(\tau''_+,y'',v''_+(\cdot))-y(\theta'_+,y',v''_+(\cdot))\|\leq$$

$$\leq 2|t''-t'|+\|x(\tau''_+,x''u'_+(\cdot))-x(\theta'_+,x'',u'_+(\cdot))\|+\|x(\theta'_+,x'',u'_+(\cdot)-x(\theta'_+,x',u'_+(\cdot))\|+$$

$$+\|y(\tau''_+,y'',v''_+(\cdot))-y(\theta'_+,y'',v''_+(\cdot))\|+\|y(\theta'_+,y'',v''_+(\cdot))-y(\theta'_+,y',v'_+(\cdot))\|\leq$$

$$\leq 2(M+1)|t''-t'|+(\exp LT)(\|x''-x'\|+\|y''-y'\|)\dots\dots\dots \quad (1.2.6)$$

i analogno je $\|(\xi''_-,\eta''_-,t''-\theta''_-)-(\xi'_-,\eta'_-,t'-\tau'_-)\|\leq 2(M+1)|t''-t'|+$
$+(\exp LT)(\|x''-x'\|+\|y''-y'\|)\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\quad.\ (1.2.7)$

Iz /1.2.5/--/1.2.7/, uzimajući u obzir ravnomernu neprekidnost funkcije na kompaktu $\mathcal{D}$, zaključujemo da ako su $(x'',y'',t''),(x',y',t')\in\mathcal{D}$ dovoljno bliske tada će veličina $|\Delta|$ biti koliko god hoćemo mala i sledi da je funkcija $\Phi^1_-\circ\omega(\cdot)$ ravnomerno neprekidna na $\mathcal{D}$. Na taj način je pokazano, da ako je $\omega(\cdot)\in C(\mathcal{D})$, tada je $\Phi^1_-\circ\omega(\cdot)\in C(\mathcal{D})$

Neka je polazna pretpostavka takva da je $\omega(\cdot)\in Lip(\mathcal{D})$ sa konstantama $L_1,L_2\geq 0$. Pokazaćemo da je tada i $\Phi^1_-\circ\omega(\cdot)\in Lip(\mathcal{D})$.

Iz /1.2.2/, /1.2.5/, uzimajući u obzir da je $\omega(\cdot)\in Lip(\mathcal{D})$ dobijamo:

$$|\Phi^1_-\circ\omega(x'',y'',t'')-\Phi^1_-\circ\omega(x',y',t')|\leq\max\{2L_1|t''-t'|+$$
$$+L_2(\|\xi''_+-\xi'_+\|+\|\eta''_+-\eta'_+\|),\ 2L_1\|t''-t'|+L_2(\|\xi''_--\xi'_-\|+\|\eta''_--\eta'_-\|)\}\dots(1.2.8)$$

Ocenjujući desnu stranu nejednačine /1.2.8/ po analogiji sa /1.2.6/ imamo:

$$|\Phi^1_-\circ\omega(x'',y'',t'')-\Phi^1_-\circ\omega(x',y',t')\leq$$
$$\leq\max\{2(L_1+L_2M)|t''-t'|+L_2(\exp LT)(\|x''-x'\|+\|y''-y'\|),$$
$$,\ 2(L_1+L_2M)\|t''-t'|+L_2(\exp LT)(\|x''-x'\|+y''-y'\|)\}=$$
$$=2(L_1+L_2M)|t''-t'|+L_2(\exp LT)(\|x''-x'\|+\|y''-y'\|)\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow\Phi^1_-\circ\omega(\cdot)\in Lip(\mathcal{D}).$$

<u>Lema 1.2.2</u> Operator $\Phi^1_-:C(\mathcal{D})\to C(\mathcal{D})\ (\Phi^1_-:Lip(\mathcal{D})\to Lip(\mathcal{D}))$ je neprekidan.

Dokaz. Dovoljno je dokazati samo neprekidnost operatora $\Phi^1_-:C(\mathcal{D})\to C($

Izaberimo proizvoljno $\omega_1(\cdot),\omega_2(\cdot)\in C(\mathcal{D})$ i $(x,y,t)\in\mathcal{D}$. Ne umanjujući opštost moguće je smatrati da je:

$$\Phi_-^1 \circ \omega_1(x,y,t) \geq \Phi_-^1 \circ \omega_2(x,y,t) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1.2.10)$$

Neka $\tau' \in [0,t]$ i $\eta' \in C^{\tau'}(y)$ zadovoljavaju jednačinu:

$$\min_{\xi \in C^{\tau'}(x)} \omega_1(\xi,\eta',t-\tau') = \max_{\tau \in [0,t]} \max_{\eta \in C^{\tau}(y)} \min_{\xi \in C^{\tau}(x)} \omega_1(\xi,\eta,t-\tau), \ldots (1.2.11)$$

a $\xi' \in C^{\tau'}(x)$ zadovoljava jednačinu:

$$\omega_2(\xi',\eta',t-\tau') = \min_{\xi \in C^{\tau'}(x)} \omega_2(\xi,\eta',t-\tau') \quad \ldots\ldots \quad (1.2.12)$$

Iz /1.2.10/--/1.2.12/ sledi nejednačina:

$$|\Phi_-^1 \circ \omega_1(x,y,t) - \Phi_-^1 \circ \omega_2(x,y,t)| \leq \omega_1(\xi',\eta',t-\tau') - \omega_2(\xi',\eta',t-\tau'),$$

i takodje sledi nejednačina

$$|\Phi_-^1 \circ \omega_1(x,y,t) - \Phi_-^1 \circ \omega_2(x,y,t)| \leq \gamma(\omega_1(\cdot) - \omega_2(\cdot)),$$

gde je γ norma u $C(\mathcal{D})$. Iz poslednje nejednačine, uzimajući u obzir da $(x,y,t) \in \mathcal{D}$ sledi da je:

$$\gamma(\Phi_-^1 \circ \omega_1(\cdot) - \Phi_-^1 \circ \omega_2(\cdot)) \leq \gamma(\omega_1(\cdot) - \omega_2(\cdot)),$$

što i dokazuje lemu 1.2.2.

<u>Lema 1.2.3</u> $\Phi_-^1 \circ \omega(\cdot) \geq \omega(\cdot)$ za svaku funkciju $\omega(\cdot) \in C(\mathcal{D})$.

Dokaz. Biramo proizvoljno $\omega(\cdot) \in C(\mathcal{D})$ i $(x,y,t) \in \mathcal{D}$. Iz /1.2.1/ sledi da je: $\Phi_-^1 \circ \omega(x,y,t) \geq \max_{\eta \in C^{\tau}(y)} \min_{\xi \in C^{\tau}(x)} \omega(\xi,\eta,t-\tau)$

za svako $\tau \in [0,t]$. Ali za $\tau = 0$ poslednja nejednačina je ekvivalentna nejednačini: $\Phi_-^1 \circ \omega(x,y,t) \geq \omega(x,y,t)$.

Zato kao posledica proizvoljnosti $(x,y,t) \in \mathcal{D}$, $\omega(\cdot) \in C(\mathcal{D})$

sledi da je tvrdjenje leme ispravno.

U niže navedenoj definiciji figuriše neprekidna na R^{n+m+1} funkcija H/./, koja odredjuje funkcional kvaliteta $\mathcal{H}$ u igri približenja u odredjenom momentu vremena /1.1.10/.

<u>Definicija 1.2.1</u> Neka je funkcija $\omega(\cdot)$ definisana na prostoru stanja igre $\Gamma^1(\mathcal{D})$. Govorićemo da funkcija $\omega(\cdot)$ pripada skupu $W_-^1(\mathcal{D})$ ako je:

1° w/x, y, 0/ = H/x, y/ za svako $(x,y,0) \in \mathcal{D}$;

2° w/./ $\in C(\mathcal{D})$

3 postoji $V \in \mathcal{B}$ da je:

a/ $\mathcal{K}^1(x,y,t\,|\,\mathcal{U},\mathcal{V}')\geq \omega(x,y,t)$ za $\forall\, \mathcal{U}\in \mathcal{G}^\circ$ i $(x,y,t)\in \mathcal{D}^\circ$;

b/ $\omega(x(\tau,x\,|\,\mathcal{U},\mathcal{V}'),y(\tau,y\,|\,\mathcal{U},\mathcal{V}'),t-\tau)\geq \omega(x,y,t)$ za svako $\mathcal{U}\in \mathcal{G}^\circ$, $(x,y,t)\in \mathcal{D}^\circ$ i $\tau\in[0,\tau']$ za neko $\tau'\in(0,t]$.

Napomena 1.2.2 Ako funkcija H/./u igri približenja u datom momentu vremena zadovoljava uslov Lipšica na $P_t(x,y)(\mathcal{D}\setminus\mathcal{D}^\circ)$ / $P_t(x,y)(\mathcal{D}\setminus\mathcal{D}^\circ)$ je projekcija skupa $\mathcal{D}\setminus\mathcal{D}^\circ\subset R^{n+m+1}$ na hiperravan $t=0$/, tada uslov 2° definicije 1.2.1 zamenjujemo uslovom $2^{\circ\prime}$ $w/./\in Lip(\mathcal{D})$. Oznaku $\mathcal{W}_-^1(\mathcal{D})$ zadržavamo i za skupove funkcija, koje zadovoljavaju uslove $1^\circ, 2^{\circ\prime}, 3^\circ$.

Lema 1.2.4 $\mathcal{W}_-^1(\mathcal{D})\neq\phi$.

Dokaz. Za dokaz leme dovoljno je razmotriti funkciju:

$$\omega_-^1(x,y,t)=\max_{\eta\in C^t(y)}\ \min_{\xi\in C^t(x)} H(\xi,\eta) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1.2.13)$$

Ona zadovoljava uslov 1° definicije 1.2.1. Uopšte neprekidnost ili lipšicivost funkcije može biti utvrdjeno analogno dokazu leme 1.2.1.

Važenje uslova 3° definicije 1.2.1 za funkciju $\omega_-^1(\cdot)$ takodje je jasno. U svojstvu strategije $\mathcal{V}\in\mathcal{B}$, koja figuriše u ovom uslovu, treba uzeti strategiju $\mathcal{V}'=\ell^\circ$, gde preslikavanje b° korespondira tački $(x,y,t)\in\mathcal{D}^\circ$ dopustivo upravljanje $v(\cdot)\in\mathcal{V}^t$ iz uslova:

$$\eta'=y(t,y,v(\cdot)),\ \omega_-^1(x,y,t)=\min_{\xi\in C^t(x)} H(\xi,\eta').$$

Teorema 1.2.1 Operator Φ_-^1 preslikava $\mathcal{W}_-^1(\mathcal{D})$ u sebe.

Dokaz. Uzmimo proizvoljnu funkciju $\omega(\cdot)\in\mathcal{W}_-^1(\mathcal{D})$. Uslov 1° definicije 1.2.1 za funkciju $\Phi_-^1\circ\omega(\cdot)$ je zadovoljen. Uslov 2° ove definicije za funkciju $\Phi_-^1\circ\omega(\cdot)$ važi na osnovu leme 1.2.1. Na taj način za dokaz teoreme dovoljno je ustanoviti važenje uslova 3° definicije 1.2.1 za funkciju $\Phi_-^1\circ\omega(\cdot)$.

Pošto je $\omega(\cdot)\in\mathcal{W}_-^1(\mathcal{D})$, tada za ovu funkciju postoji strategija $\mathcal{V}\in\mathcal{B}$ sa svojstvima formulisanim u uslovu 3° definicije 1.2.1. Neka je odredjenosti radi $\mathcal{V}'=(\ell^\tau,\ldots,\ell^\circ)$. Tada strategija $\bar{\mathcal{V}}\in\mathcal{B}$ sa analognim svojstvima, ali sada u odnosu na funkciju $\Phi_-^1\circ\omega(\cdot)$ biće oblika: $\bar{\mathcal{V}}=(\bar{\ell}^{\tau+1},\ldots,\bar{\ell}^\circ)$.

Preslikavanje $\bar{\ell}^{\tau+1}$ odredićemo na $\mathcal{D}$ na sledeći način. Neka je $(x,y,t)\in\mathcal{D}^\circ$. Nadjimo $\tau'\in(0,t)$ i $\eta'\in C^{\tau'}(y)$ iz uslova:

$$\Phi_-^1\circ\omega(x,y,t)=\min_{\xi\in C^{\tau'}(x)} \omega(\xi,\eta',t-\tau') \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1.2.14)$$

Primetimo da τ' uvek može biti pozitivno, jer za funkciju $\omega(\cdot)$ važi uslov 3^0 definicije 1.2.1 /deo pod b//. Zatim ćemo naći dopustivo upravljanje $\tilde{v}(\cdot)\in V^{\tau'}$ iz uslova $\eta'=y(\tau',y,\tilde{v}(\cdot))$ i stavimo:

$$v'(\cdot)=\begin{cases}\tilde{v}(\cdot), & \text{ako } \tilde{v}(\cdot)\in V^{\tau'} \text{ i } \tau'=t;\\ \tilde{v}(\cdot)\,|\,[0,\tau'], & \text{ako } \tilde{v}(\cdot)\in V^{\tau'} \text{ i } \tau'\in(0,t).\end{cases}$$

gde je $\tilde{v}(\cdot)|[0,\tau']$ suženje dopustivog upravljanja v/./na poluinterval $[0,\tau')$. Dalje smatramo da je $\overline{\mathcal{E}}^{\tau+1}(x,y,t)=v'(\cdot)$ i stavićemo $\overline{\mathcal{E}}^i=\mathcal{E}^i$, $i\in[0,\tau]$. Na taj način strategija $\overline{V}'$ se dobija iz strategije V'ako njoj dodamo preslikavanje $\overline{\mathcal{E}}^{\tau+1}$. Pokažimo da je strategija $\overline{V}'$ tražena.

Fiksirajmo proizvoljno $\mathcal{U}\in\mathcal{G}^0$, $\mathcal{U}=\alpha^0$ i $(x,y,t)\in\mathcal{D}^0$. Neka su $\tau'\in(0,t]$ i $\eta'\in C^{\tau'}(y)$ te tačke koje posredstvom /1.2.14/ odredjuju lik tačke /x, y, t/pri preslikavanju $\overline{\mathcal{E}}^{\tau+1}$, tj. dopustivo upravljanje $v'(\cdot)=\overline{\mathcal{E}}^{\tau+1}(x,y,t)$.

Neka je dalje $u(\cdot)=\alpha^0(x,y,t)$, $u(\cdot)\in\mathcal{U}^t$. Stavimo $\xi=x(\tau',x,u(\cdot))$.

Dokažimo najpre da strategija $\overline{V}'$ obezbedjuje nejednačinu pod a/ iz uslova 3^0definicije 1.2.1, gde umesto w/./treba staviti funkciju $\Phi^1_0\,\omega(\cdot)$. Zato ćemo razmatrati dva slučaja: kada je $\tau'=t$ i kada je $\tau'\in(0,t)$.

Neka je $\tau'=t$. Saglasno konstrukciji realizujućih preslikavanja $\mathcal{H}$ imamo: $\overline{\xi}=x(t,x,u(\cdot))=x(t,x|\mathcal{U},\overline{V}')$

$$\eta'=y(t,y,v'(\cdot))=y(t,y|\mathcal{U},\overline{V}')$$

Tada po definiciji funkcije dobitka u igri $\Gamma^1(\mathcal{D})$ moguće je napisati da je: $\mathcal{K}(x,y,t|\mathcal{U},\overline{V}')=H(\overline{\xi},\eta')$

Ali pošto je: $\omega(\cdot)\in\mathcal{W}^{-1}_{-}(\mathcal{D})$, $(\overline{\xi},\eta',0)\in\mathcal{D}$, tada je:

$H(\overline{\xi},\eta')=\omega(\overline{\xi},\eta',0)$ i zato je: $\mathcal{K}^1(x,y,t|\mathcal{U},\overline{V}')\geq\min\limits_{\xi\in C^t(x)}\omega(\xi,\eta',0)$.

Odakle na osnovu /1.2.14/i pošto je $\tau'=t$ sledi:

$$\mathcal{K}^1(x,y,t|\mathcal{U},\overline{V}')\geq\min_{\xi\in C^{\tau'}(x)}\omega(\xi,\eta',t-\tau')=\Phi^1_0\,\omega(x,y,t).$$

Na taj način u slučaju $\tau'=t$ potrebna nejednačina je dobijena.

Neka je $\tau'\in(0,t)$. Može se naći takva strategija $\tilde{\mathcal{U}}\in\mathcal{G}^0$, $\tilde{\mathcal{U}}=\tilde{\alpha}^0$, da je: $\mathcal{K}^1(x,y,t|\mathcal{U},\bar{\mathcal{V}}')=\mathcal{K}^1(\tilde{\xi},\eta',t-\tau'|\tilde{\mathcal{U}},\mathcal{V}')$ . . . . /1.2.15/

Neka je $\tilde{a}^o(\tilde{\xi},\eta',t-\tau')=\tilde{u}(\cdot)$, $\tilde{u}(\cdot)\in\mathcal{U}^{t-\tau'}$ pri čemu je $\tilde{u}(\tau)=u(\tau'+\tau)$, $\tau\in[0,t-\tau']$, gde je $\tilde{u}(\cdot)=\tilde{a}^o(x,y,t)$. Tada uzimajući u obzir strukturu strategija $\bar{\mathcal{V}}'$ i $\mathcal{V}'$, a takodje i konstrukcije realizujućih preslikavanja $\mathcal{H}$, imamo: $x(\tau'+\tau,x|\mathcal{U},\bar{\mathcal{V}}')=x(\tau,\tilde{\xi}|\tilde{\mathcal{U}},\mathcal{V}')$; $y(\tau'+\tau,y|\mathcal{U},\bar{\mathcal{V}}')=y(\tau,\eta'|\tilde{\mathcal{U}},\mathcal{V}')$ za svako $\tau\in[0,t-\tau']$ /ovde je $x(\cdot,x|\mathcal{U},\bar{\mathcal{V}}')$, $y(\cdot,|\mathcal{U},\bar{\mathcal{V}}')$ lik elementa $\langle(x,y,t);\mathcal{U},\bar{\mathcal{V}}'\rangle$ preslikavanja $\mathcal{H}$, a $(x(\cdot,\tilde{\xi}|\tilde{\mathcal{U}},\mathcal{V}')y(\cdot,\eta'|\tilde{\mathcal{U}},\mathcal{V}$ je lik elementa $\langle(\tilde{\xi},\eta',t-\tau'),\tilde{\mathcal{U}},\mathcal{V}'\rangle$ preslikavanja $\mathcal{H}$ /. Na osnovu navedenog sledi: $H(x(t,x|\mathcal{U},\bar{\mathcal{V}}'),y(t,y|\mathcal{U},\bar{\mathcal{V}}'))=H(x(t-\tau',\tilde{\xi}|\tilde{\mathcal{U}},\mathcal{V}'),y(t-\tau',\eta'|\tilde{\mathcal{U}},\mathcal{V}'))$.

Ali ova nejednačina po definiciji funkcije dobitka $\mathcal{K}^1$ u igri $\Gamma^1(\mathcal{D})$ je ekvivalentna /1.2.15/.

Uzimajući u obzir svojstvo strategije $\mathcal{V}'$ u odnosu na w/./, a takodje i /1.2.14/dobijamo:

$$\mathcal{K}^1(\tilde{\xi},\eta',t-\tau'|\tilde{\mathcal{U}},\mathcal{V}')\geq\omega(\tilde{\xi},\eta',t-\tau')\geq\min_{\xi\in C^{\tau'}(x)}\omega(\xi,\eta',t-\tau')=\Phi^1_o\,\omega(x,y,t).$$

Odavde i na osnovu /1.2.15/sledi da u slučaju $\tau'\in(0,t)$ strategija $\bar{\mathcal{V}}'$ obezbedjuje nejednačinu pod a/uslova 3^o u definiciji 1.2.1 u odnosu na funkciju $\Phi^1_o\,\omega(\cdot)$.

Pokažimo na kraju da strategija $\bar{\mathcal{V}}'$ obezbedjuje takodje nejednačinu b/ uslova 3^o definicije 1.2.1 u odnosu na funkciju $\Phi^1_o\,\omega(\cdot)$. Ranije izabrani $\mathcal{U}\in\mathcal{G}^o_1(x,y,t)\in\mathcal{D}^o$, $\tau'\in(0,t]$ i $\eta'\in C^{\tau'}(y)$ ostaju isti. Izaberimo proizvoljno $\bar{\tau}\in[0,\tau']$ i stavimo $\bar{\xi}=x(\bar{\tau},x|\mathcal{U},\bar{\mathcal{V}}')$, $\bar{\eta}=y(\bar{\tau},y|\mathcal{U},\mathcal{V}')$. Iz nejednačine: $\Phi^1_o\,\omega(\bar{\xi},\bar{\eta},t-\bar{\tau})\geq\max_{\tau\in[0,t-\bar{\tau}]}\max_{\eta\in C^{\tau}(\bar{\eta})}\min_{\xi\in C^{\tau}(\bar{\xi})}\omega(\xi,\eta,t-\bar{\tau}-\tau)$ sledi za svako $\tau\in[0,t-\bar{\tau}]$, $\eta\in C^{\tau}(\bar{\eta})$ je: $\Phi^1_o\,\omega(\bar{\xi},\bar{\eta},t-\bar{\tau})\geq$
$\geq\min_{\xi\in C^{\tau}(\bar{\xi})}\omega(\xi,\eta,t-\bar{\tau}-\tau)$.

Izaberimo $\tau^o\in[0,t-\bar{\tau}]$ tako da je $\tau^o+\bar{\tau}=\tau'$. Tada tačka

$\eta'=y(\tau',y|\mathcal{U},\mathcal{V}')$ pripada skupu $C^{\tilde{\tau}^\circ}(\bar{\eta})$, a poslednja nejednačina za $\tau=\tilde{\tau}^\circ$ i $\eta=\eta'$ je oblika: $\Phi^1_\circ\,\omega(\bar{\xi},\bar{\eta},t-\bar{\tau})\geq\min_{\xi\in C^{\tilde{\tau}^\circ}(\bar{\xi})}\omega(\xi,\eta',t-\tilde{\tau}')$.

Odakle zbog pripadnosti $C^{\tilde{\tau}^\circ}(\bar{\xi})\subset C^{\tau'}(x)$ sledi da je:

$$\Phi^1_\circ\,\omega(\bar{\xi},\bar{\eta},t-\bar{\tau})\geq\min_{\xi\in C^{\tau'}(x)}\omega(\xi,\eta',t-\tilde{\tau}').$$

Ali ova nejednačina skupa sa /1.2.14/je ekvivalentna nejednačini:

$$\Phi^1_\circ\,\omega(x(\bar{\tau},x|\mathcal{U},\bar{\mathcal{V}}'),y(\bar{\tau},y|\mathcal{U},\bar{\mathcal{V}}'),t-\bar{\tau})\geq\Phi^1_\circ\,\omega(x,y,t).$$

Na taj način tražena nejednačina je utvdjena, a skupa sa njom i tačnost tvrdjenja teoreme.

Teorema 1.2.2 Neka funkcija $\omega'(\cdot)$ zadovoljava sledeće uslove:

1/ $\omega'(\cdot)\in C(\mathcal{D})$;

2/ $\omega'(x,y,0)=H(x,y)$ za $\forall(x,y,0)\in\mathcal{D}$;

3/ $\omega'(\cdot)$ je nepokretna tačka operatora Φ^1_-, tj. zadovoljava nejednačinu: $\Phi^1_\circ\,\omega(\cdot)=\omega(\cdot)$ . . . . /1.2.16/

Tada za ma koje $(x,y,t)\in int\,\mathcal{D}$ i $\varepsilon>0$ je moguće naći takvu strategiju $\mathcal{U}_\varepsilon\in\mathcal{G}$ da je:

$$\mathcal{K}^1(x,y,t|\mathcal{U}_\varepsilon,\mathcal{V})\leq\omega'(x,y,t)+\varepsilon \quad . . . . /1.2.17/$$

za sve $\mathcal{V}\in\mathcal{B}^\circ$.

Dokaz. Pre svega napomenimo da je $int\,\mathcal{D}\neq\phi$, pošto pod prostorom stanja $\mathcal{D}$ podrazumevamo skup $\mathcal{D}_\delta$ $(\delta>0)$, a po lemi 1.2.2 je $int\,\mathcal{D}_\delta\neq\phi$ $(\delta>0)$.

Uzmimo proizvoljnu $(x,y,t)\in int\,\mathcal{D}$ i $\varepsilon>0$. Neka je $r>0$ tako da bi $O_r(x,y,t)\subset\mathcal{D}$, gde je $O_r(x,y,t)$ zatvorena ili otvorena lopta sa centrom u /x, y, t/poluprečnika r. Izaberimo dalje $\tau(\varepsilon)\in(0,t]$ iz uslova: a/ $(x(\tau(\varepsilon),x,u(\cdot)),y,t-\tau(\varepsilon))\in O_r(x,y,t)$ za svako dopustivo upravljanje u/./; b/ $\omega'(x,y,t)\geq\omega'(x(\tau(\varepsilon),x,u(\cdot)),y,t-\tau(\varepsilon))-\frac{\varepsilon}{2}$ za svako dopustivo upravljanje u/./; c/ $\omega'(x(t,x,u(\cdot)),y(t,y,v(\cdot)),0)-\frac{\varepsilon}{2}$ za svako dopustivo upravljanje u/./, v/./; d/ t se celobrojno deli na $\tau(\varepsilon)$.

Pokažimo da je takav izbor $\tau(\varepsilon)$ moguć. Iz /1.1.5/ sledi da za $\forall\tau\in[0,t]$ i dopustivo upravljanje $u(\cdot)\in\mathcal{U}^t$ važi nejednačina:

$$\|x(\tau,x,u(\cdot))-x\|\leq\mu\tau,\quad \mu>0,$$

gde je μ neka konstanta. Tada za sve $\forall\tau\in[0,t]$ i svako dopustivo upravljanje $u(\cdot)\in\mathcal{U}^t$ sledi nejednačina:

$\|(x,y,t)-(x(\tilde{\tau},x,u(\cdot)),y,t-\tilde{\tau})\| \le (\mathcal{M}+1)\cdot\tilde{\tau}$.

Iz navedenog sledi da bi zadovoljili uslov a/ moguće je uzeti u svojstvu $\tilde{\tau}(\varepsilon) \forall \tilde{\tau} \in (0,t]$, koje nije veće od $\tau/\mathcal{M}+1$.

Uzimajući u obzir prethodnu nejednačinu i da je $\omega(\cdot) \in C(\mathcal{D})$ sledi da je moguće zadovoljiti uslov b/.

Uz pomoć /1.1.7/ sledi:

$$\|(x(t,x,u(\cdot)),y(t-\tilde{\tau},y,v(\cdot)),0)-(x(t,x,u(\cdot)),y(t,y,v(\cdot)),0)\| \le \mathcal{M}\tilde{\tau}$$

za svako $\tilde{\tau} \in [0,t]$ i sva dopustiva upravljanja $u(\cdot) \in \mathcal{U}^t$ i $v(\cdot) \in \mathcal{V}^t$.

Na osnovu ravnomerne neprekidnosti funkcije $\omega'(\cdot)$ na kompaktu $\mathcal{D}=\mathcal{D}_\delta$ sledi da je uslov c/ moguće zadovoljiti.

Na kraju jasno je da se uslov d/ poklapa sa ostalima.

Napomenimo da uslov a/ garantuje to da razmatrajući u uslovima b/ i c/ funkciju $\omega'(\cdot)$ redom u tačkama $(x(\tilde{\tau}(\varepsilon),x,u(\cdot)),y,t-\tilde{\tau}(\varepsilon))$ za svako dopustivo upravljanje $u(\cdot) \in \mathcal{U}^t$ i $x(t,x,u(\cdot)),y(t-\tilde{\tau}(\varepsilon),y,v(\cdot)),0)$ / za ma koja dopustiva upravljanja $u(\cdot) \in \mathcal{U}^t$ i $v(\cdot) \in \mathcal{V}^t$ mi ne izlazimo izvan granica njene oblasti definisanosti, tj. izvan granica skupa $\mathcal{D}=\mathcal{D}_\delta$.

Napomenimo da iz uslova a/ i iz strukture skupova $\mathcal{D}=\mathcal{D}_\delta$ sledi da je: $(x(\tilde{\tau}(\varepsilon)+\tau,x,u(\cdot)),y(\tau,y,v(\cdot)),t-\tilde{\tau}(\varepsilon)-\tau) \in \mathcal{D}$ za svako $\tau \in [0,t-\tilde{\tau}(\varepsilon)]$ i sva dopustiva upravljanja $u(\cdot) \in \mathcal{U}^t$ i $v(\cdot) \in \mathcal{V}^t$.

Strategiju gradimo oblika $\mathcal{U}_\varepsilon=(a_\varepsilon^{n(\varepsilon)},\ldots,a_\varepsilon^0)$, gde $n(\varepsilon)$ biramo iz uslova $n(\varepsilon)=(t/\tilde{\tau}(\varepsilon))-1$. Neka je $(x',y',t') \in \mathcal{D}^0$, a $(\tilde{x},y',t'-\tilde{\tau}(\varepsilon)) \in \mathcal{D}$ za sve $\tilde{x} \in C^{\tilde{\tau}(\varepsilon)}(x')$. Nadjimo $x'' \in C^{\tilde{\tau}(\varepsilon)}(x')$ iz uslova:

$$\omega'(x'',y',t'-\tilde{\tau}(\varepsilon)) = \min_{\tilde{x} \in C^{\tilde{\tau}(\varepsilon)}(x')} \omega'(\tilde{x},y',t'-\tilde{\tau}(\varepsilon)) \quad \ldots\ldots\ldots (1.2.18)$$

Smatramo da je $u''(\cdot) \in \mathcal{U}^{\tilde{\tau}(\varepsilon)}$ takvo da je $x''=x(\tilde{\tau}(\varepsilon),x',u''(\cdot))$. Suženje dopustivog upravljanja $u''(\cdot)$ na poluintervalu $[0,\tilde{\tau}(\varepsilon))$ označimo sa $u'(\cdot)$. Ako je $t'>\tilde{\tau}(\varepsilon)$ tada za $i \in [0,n(\varepsilon)]$, $i \ge 1$ /mnoštvo takvih indeksa može biti pusto/ stavimo $a_\varepsilon^i(x',y',t')=u'(\cdot)$. Dalje ako je $t' \in \tilde{\tau}(\varepsilon)$, tada stavljamo $a_\varepsilon^0(x',y',t')=u''(\cdot)$.

Napred navedenim načinom odredimo preslikavanje a_ε^i, $i \in [0,n(\varepsilon)]$, $i \ge 1$ na skupu svih tih $(x',y',t') \in \mathcal{D}^0$ za koje je $(\tilde{x},y',t'-\tilde{\tau}(\varepsilon)) \in \mathcal{D}^0$ za sve $\tilde{x}=C^{\tilde{\tau}(\varepsilon)}(x')$, a preslikavanje a_ε^0 odredimo na skupu svih tih $(x',y',t') \in \mathcal{D}^0$ za koje je $(\tilde{x},y',t'-\tilde{\tau}(\varepsilon)) \in \mathcal{D}\setminus\mathcal{D}^0$ za $\forall \tilde{x} \in C^{\tilde{\tau}(\varepsilon)}(x')$. Na skupu svih ostalih tačaka iz $\mathcal{D}^0$ ova preslikavanja odredićemo proizvoljno saglasno definiciji 1.1.1.

Pokazaćemo da za ranije izabrane $(x,y,t) \in \mathrm{int}\,\mathcal{D}$ i $\varepsilon>0$ konstruisana strategija $\mathcal{U}_\varepsilon \in \mathcal{G}$ obezbedjuje nejednačinu /1.2.17/ za svako $V \in \mathcal{B}^0$.

Uzmimo proizvoljnu strategiju $V \in \mathcal{B}^\circ$. Neka su: $x(\cdot) = x(\cdot, x \mid \mathcal{U}_\varepsilon V)$, $y(\cdot) = y(\cdot, y \mid \mathcal{U}_\varepsilon V)$. Traženi dokaz izvodimo za dva slučaja: $n(\varepsilon) = 0$ i $n(\varepsilon) > 0$.

Neka je $n(\varepsilon) = 0$, $\mathcal{U}_\varepsilon \in \mathcal{G}^\circ$ i $\tau(\varepsilon) = t$. Tada koristeći uslov izbora $\tau(\varepsilon)$ i prva dva uslova teoreme sledi:

$$\omega'(x, y, t) = \omega'(x(0), y(0), t) \geq \omega'(x(\tau(\varepsilon)), y(0), 0) - \frac{\varepsilon}{2} \geq \omega'(x(\tau(\varepsilon)),$$
$$, y(\tau(\varepsilon)), 0) - \varepsilon = \omega'(x,(t), y(t), 0) - \varepsilon = H(x(t), y(t)) - \varepsilon =$$
$$= \mathcal{K}^1(x, y, t \mid \mathcal{U}_\varepsilon, V) - \varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1.2.19)$$

Odavde neposredno sledi /1.2.17/.

Neka je $n(\varepsilon) > 0$, a znači $\tau(\varepsilon) < t$. Koristeći uslove izbora $\tau(\varepsilon)$ za sve uslove teoreme i način konstrukcije strategije $\mathcal{U}_\varepsilon$, posebno /1.2.18/ sledi:

$$\omega'(x, y, t) = \omega'(x(0), y(0), t) \geq \omega'(x(\tau(\varepsilon)), y(0), t - \tau(\varepsilon)) - \frac{\varepsilon}{2} =$$
$$= \max_{\tau \in [0, t - \tau(\varepsilon)]} \quad \max_{y' \in C^{\tau}(y(0))} \quad \cdot \min_{x' \in C^{\tau}(x(\tau(\varepsilon)))} \omega'(x', y', t - 2\tau(\varepsilon)) - \frac{\varepsilon}{2} \geq$$
$$\geq \min_{x' \in C^{\tau(\varepsilon)}(x(\tau(\varepsilon)))} \omega'(x', y(\tau(\varepsilon)), t - 2 \cdot \tau(\varepsilon)) - \frac{\varepsilon}{2} =$$
$$= \omega'(x(2 \cdot \tau(\varepsilon)), y(\tau(\varepsilon)), t - 2 \cdot \tau(\varepsilon)) - \frac{\varepsilon}{2} \geq, \dots, \geq$$
$$\geq \omega'(x(i \cdot \tau(\varepsilon)), y((i-1) \cdot \tau(\varepsilon)), t - i \cdot \tau(\varepsilon)) - \frac{\varepsilon}{2} \geq, \dots, \geq$$
$$\geq \omega'(x(n(\varepsilon)+1)\tau(\varepsilon)), \quad y(n(\varepsilon) \cdot \tau(\varepsilon)), t - (n(\varepsilon)+1) \cdot \tau(\varepsilon)) - \frac{\varepsilon}{2} =$$
$$= \omega'(x(t), y(t - \tau(\varepsilon)), 0) - \frac{\varepsilon}{2} \geq \omega'(x(t), y(t), 0) - \varepsilon =$$
$$= H(x(t), y(t)) - \varepsilon = \mathcal{K}^1(x, y, t \mid \mathcal{U}_\varepsilon, V) - \varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1.2.20)$$

Odakle sledi /1.2.17/. Teorema 1.2.2 je dokazana.

Napomena 1.2.3 Suština uslova a/ izbora $\tau(\varepsilon)$ svedoči o tome da navedenim, pri dokazu teoreme, načinom strategiju $\mathcal{U}_\delta \in \mathcal{G}$, koja obezbedjuje nejednačinu /1.2.17/ ravnomerno za svako $V \in \mathcal{B}^\circ$, moguće je graditi samo za tačke $(x, y, t) \in \operatorname{int} \mathcal{D}$, a ne za sve tačke $(x, y, t) \in \mathcal{D}^\circ$.

Uzmimo proizvoljnu funkciju $\omega_0(\cdot) \in \mathcal{W}_-^1(\mathcal{D})$ i fiksirajmo tu strategiju $V_0 \in \mathcal{B}$ egzistencija i svojstva koje u odnosu na funkciju $\omega_0(\cdot)$ su garantovani uslovom 3° definicije 1.2.1. Koristeći funkciju $\omega_0(\cdot)$

u svojstvu početnog približenja rešenja jednačine /1.2.16/gradićemo sledeća približenja rešenja ove jednačine:

$$\omega_n(\cdot) = \Phi_{-o}^{1}\, \omega_{n-1}(\cdot), \quad n = 1, 2, \dots \qquad \dots \quad (1.2.21)$$

Po teoremi 1.2.1 je $\omega_n(\cdot) \in W_-^1(\mathcal{D})$ za svako $n = 1, 2, \dots$, a po lemi 1.2 .3 je:

$$\omega_0(\cdot) \leq \omega_1(\cdot) \leq, \dots, \leq \omega_n(\cdot) \leq, \dots \qquad \dots (1.2.22)$$

Gradićemo takodje niz strategija $\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$, $V_n \in \mathcal{B}$, $n = 0, 1, \dots$, gde je V_0 ranije izabrana strategija, a svaka od strategija V_n, $n = 1, 2, \dots$ gradi se po strategiji V_{n-1} i po približenju $\omega_{n-1}(\cdot)$ isto kao pri dokazu teoreme 1.2.1. Strategija $\bar{V}'$ se gradila po V' i po funkciji $\omega(\cdot)$ Na taj način svaka strategija V_n ovog izraza u odnosu na niz približenja $\omega_n(\cdot)$ poseduje svojstva formulisana u uslovu 3^0 definicije 1.2.1. Najvažnije od svih svojstava je to saglasno kome je:

$$\mathcal{K}^1(x, y, t \mid U, V_n) \geq \omega_n(x, y, t) \quad \dots \quad (1.2.23)$$

za svako $U \in \mathcal{G}^0$, $(x, y, t) \in \mathcal{D}^0$ i $n = 0, 1, 2, \dots$.

Niz strategija $\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$, konstruisan po navedenom pravilu i koji poseduje svojstvo /1.2.23/nazvaćemo nizom strategija koji odgovara nizu približenja /1.2.21/sa početnim približenjem $\omega_0(\cdot)$.

<u>Teorema 1.2.3</u> 1. Za svako početno približenje $\omega_0(\cdot) \in W_-^1(\mathcal{D})$ niz približenja /1.2.21/konvergira ravnomerno na $\mathcal{D}$ ka funkciji $\omega^*(\cdot)$, u odnosu na koju važe sledeća svojstva:

a/ $\omega^*(\cdot) \in C(\mathcal{D})$, ako je $H(\cdot) \in Lip(P_{2(x,y)}(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}^0))$, tada je $\omega^* \in Lip(\mathcal{D})$;

b/ $\omega^*(\cdot)$ je fiksna tačka operatora Φ_-^1;

c/ $\omega^*(\cdot)$ je funkcija vrednosti igre $\Gamma^1(\mathcal{D})$ i zato je granica niza približenja /1.2.21/jedna te ista za sva početna približenja $\omega_0(\cdot) \in W_-^1(\mathcal{D})$

2. Niz strategija $\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$ koji odgovara nizu približenja /1.2.21/ sa ma kojim početnim približenjem $\omega_0(\cdot) \in W_-^1(\mathcal{D})$, je maksimizirajući niz strategija begunca u igri $\Gamma^1(\mathcal{D})$.

Dokaz. Razmotrimo niz približenja /1.2.21/sa početnim približenjem $\omega_0(\cdot) \in W_-^1(\mathcal{D})$. Kao rezultat dobijamo monotoni niz $\{\omega_n(\cdot)\}_{n=0}^{\infty}$ (1.2.22) funkcija neprekidnih, a u slučaju ako je $H(x) \in Lip(P_{2(x,y)}(\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}^0))$, tada one zadovoljavaju uslov Lipšica na kompaktu $\mathcal{D}$. Napomenimo da je ovde $\mathcal{D} = \mathcal{D}_\delta$, $\delta > 0$, a tada po lemi 1.2.1 $\mathcal{D}$ je kompakt. Neprekidnost ili Lipšicivost funkcija, koje obrazuju niz $\{\omega_n(\cdot)\}_{n=0}^{\infty}$ sledi iz izbora početnog približenja $\omega_0(\cdot)\in \mathcal{W}_-^1(\mathcal{D})$ i iz teoreme 1.2.1.

Pokažimo da je niz $\{\omega_n(\cdot)\}_{n=0}^{\infty}$ ograničen i ravnomerno neprekidan na $\mathcal{D}$. Tada, kao što je poznato, on će sadržati ravnomerni konvergentni na $\mathcal{D}$ niz, a pošto je niz $\{\omega_n(\cdot)\}_{n=0}^{\infty}$ monoton tada će i sam biti ravnomerno konvergentan na $\mathcal{D}$.

Pošto je niz $\{\omega_n(\cdot)\}_{n=0}^{\infty}$ neopadajući /1.2.22/ i $\omega_0(\cdot)\in C(\mathcal{D})$, tada za $\forall n=0,1,2,\dots$ i $(x,y,t)\in\mathcal{D}$ imamo:

$$\omega_n(x,y,t)\geq \min_{(x',y',t')\in\mathcal{D}} \omega_0(x',y',t')=\mathcal{M}_1>-\infty.$$

Saglasno definiciji funkcije dobitka u igri $\Gamma^1(\mathcal{D})$ sledi:

$$+\infty>\mathcal{M}_2=\max_{(x',y')\in P_2(x,y)(\mathcal{D}\setminus\mathcal{D}^0)} \omega_0(x',y',t'),$$

za svako $(x,y,t)\in\mathcal{D}^0$, $\mathcal{U}\in\mathcal{G}$, $\mathcal{V}\in\mathcal{B}$. Neka sada niz strategija $\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$ odgovara nizu približenja $\{\omega_n(\cdot)\}_{n=0}^{\infty}$, tada iz prethodnih odnosa i iz /1.2.23/ sledi nejednačina $\omega_n(x,y,t)\leq\mathcal{M}_2<+\infty$ važi za sve $(x,y,t)\in\mathcal{D}^0$ i $n=0,1,2,\dots$. Ali zbog toga što je $\omega_n(\cdot)\in C(\mathcal{D})$, $n=0,1,2,\dots$ zaključujemo da poslednja nejednačina važi za $\forall(x,y,t)\in\mathcal{D}$, $n=0,1,2,\dots$

Sada smo se konačno ubedili da je:

$$|\omega_n(x,y,t)|\leq \max\{|\mathcal{M}_1|\ |\mathcal{M}_2|\}<+\infty,$$

za $\forall(x,y,t)\in\mathcal{D}$, $n=0,1,2,\dots$. Na taj način niz $\{\omega_n(\cdot)\}_{n=0}^{\infty}$ je ravnomerno ograničen na $\mathcal{D}$.

Za dokaz ravnomerne konvergentnosti niza $\{\omega_n(\cdot)\}_{n=0}^{\infty}$ uzimamo proizvoljne $(x'',y'',t''),(x',y',t')\in\mathcal{D}$ i za $\forall n=0,1,2,\dots$ uzimamo da je:

$$\Delta_n=\omega_n(x'',y'',t'')-\omega_n(x',y',t')\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (1.2.24)$$

Naveščemo ocene veličina Δ_n, $n=1,2,\dots$ odozgo i odozdo.

Po konstrukciji niza $\{\omega_n(\cdot)\}_{n=0}^{\infty}$ za $\forall(x_2,y_2,t_2),(x_1,y_1,t_1)\in\mathcal{D}$ i $n\geq1$ važi jednačina: $\omega_n(x_2,y_2,t_2)-\omega_n(x_1,y_1,t_1)=$

$$=\Phi_-^1\circ\,\omega_{n-1}(x_2,y_2,t_2)-\Phi_-^1\circ\,\omega_{n-1}(x_1,y_1,t_1)\ .\ .\ .\ .\ (1.2.25)$$

pa sledi za Δ_n, $n\geq1$ moguće je ukazati ocenu odozgo sličnu oceni /1.2.3/ za veličine /1.2.2/ u dokazu leme 1.2.1. Ako je $n\geq2$, tada desnu stranu dobijene ocene koriščenjem /1.2.25/ ponovo možemo oceniti odozgo načinom navedenim pri dokazu leme 1.2.1 i td. dotle dok ne bude dobijena ocena:

$$\Delta_n\leq\omega_0(\xi''_{+n},\eta''_{+n},t''-\tau''_{+n})-\omega_0(\xi'_{+n},\eta'_{+n},t-\theta'_{+n})\ .\ .\ .\ .\ .\ (1.2.26)$$

Pri čemu $(\xi''_{+n},\eta''_{+n},t''-\tau''_{+n})$, $(\xi'_{+n},\eta'_{+n},t-\theta'_{+n})\in\mathcal{D}$ treba da budu takve

da je: $\theta'_{+n}=\min\{\tau''_{+n},t'\}$; $\eta''_{+n}=y(\tau''_{+n},y'',v''_{+n}(\cdot))$, $\eta'_{+n}=$
$=y(\theta'_{+n},y',v''_{n}(\cdot))$,

za neko dopustivo upravljanje $v''_{+n}(\cdot)=\mathcal{V}^{\tau''_{+n}}$;

$\zeta'_{+n}=x(\theta'_{+n},x',u'_{+n}(\cdot))$; $\zeta''_{+n}=x(\tau''_{+n},x'',u'_{+n}(\cdot))$

za neko dopustivo upravljanje $u'_{+n}(\cdot)\in\mathcal{U}^{\tau\zeta_n}$.

Analogno se pokazuje ocena veličine Δ_n, $n\geq 1$ odozdo:

$$\Delta_n\geq\omega_0(\zeta''_{-n},\eta''_{-n},t''-\theta''_{-n})-\omega_0(\zeta'_{-n},\eta'_{-n},t'-\tau'_{-n})\,.\quad .\quad .\quad .\quad .\qquad (1.2.27)$$

Pri čemu su $(\zeta''_{-n},\eta''_{-n},t''-\theta''_{-n}),(\zeta'_{-n},\eta'_{-n},t'-\tau'_{-n})\in\mathcal{D}$ i takve da je:
$\theta''_{-n}=\min\{\tau'_{-n},t''\}$; $\eta'_{-n}=y(\tau'_{-n},y',v'_{-n}(\cdot))$, $\eta''_{-n}=y(\theta''_{-n},y'',v'_{-n}(\cdot))$

za neko dopustivo upravljanje $v'_{-n}\in\mathcal{V}^{\tau'_{-n}}$; $\zeta''_{-n}=x(\theta''_{-n},x'',u''_{-n}(\cdot))$,
$,\zeta'_{-n}=x(\tau'_{-n},x',u''_{-n}(\cdot))$

za neko dopustivo upravljanje $u''_{-n}(\cdot)\in\mathcal{U}^{\tau'_{-n}}$.

Iz /1.2.26/i/1.2.27/za $n\geq 1$ sledi: $|\Delta_n|\leq\max\{|\omega_0(\zeta''_{+n},\eta''_{+n},t''-\tau''_{+n})-$
$-\omega_0(\zeta'_{+n},\eta'_{+n},t'-\theta'_{+n})|,\ |\omega_0(\zeta''_{-n},\eta''_{-n},t''-\theta''_{-n})-$
$$-\omega_0(\zeta'_{-n},\eta'_{-n},t'-\tau'_{-n})|\},\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\qquad (1.2.28)$$

a iz /1.2.24/ za $n=0$ sledi:

$$|\Delta_0|=|\omega_0(x'',y'',t'')-\omega_0(x',y',t')|\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\qquad (1.2.29)$$

Osim toga analogno ocenama /1.2.6/,/1.2.7/u dokazu leme 1.2.1 za $n\geq 1$ moguće je dobiti ocene:

$$\|(\zeta''_{+n},\eta''_{+n},t''-\tau''_{+n})-(\zeta'_{+n},\eta'_{+n},t'-\theta'_{+n})\|\leq 2(M+1)|t''-t'|+$$
$$+(\exp LT)(\|x''-x'\|+\|y''-y'\|)\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\qquad (1.2.30)$$

$$\|(\zeta''_{-n},\eta''_{-n},t''-\theta''_{-n})-(\zeta'_{-n},\eta'_{-n},t'-\tau'_{-n})\|\leq 2(M+1)|t''-t'|+$$
$$+(\exp LT)(\|x''-x'\|+\|y''-y'\|).$$

Iz /1.2.28/--/1.2.30/, uzimajući u obzir ravnomernu neprekidnost funkcije $\omega_0(\cdot)$ na kompaktu $\mathcal{D}$, sledi da će svi članovi niza $\{|\Delta_n|\}_{n=0}^{\infty}$ biti proizvoljno mali ravnomerno za $n=0,1,2,\ldots$ ako su samo (x'',y'',t''), $(x',y',t')\in\mathcal{D}$ dovoljno bliske. A ovo i označava da niz $\{\omega_n(\cdot)\}_{n=0}^{\infty}$ ravnomerno neprekidan na $\mathcal{D}$.

Navedeno sledi kao posledica da je granica niza $\{\omega_n(\cdot)\}_{n=0}^{\infty}$ neka neprekidna $\mathcal{D}$ funkcija.Ova funkcija će čak zadovoljiti uslov Lipšica na $\mathcal{D}$ ako samo je $H(\cdot)\in Lip(P_t(x,y)(\mathcal{D}\setminus\mathcal{D}^*))$.

U ovom slučaju saglasno napomeni 1.2.1 funkcija $\omega_0(\cdot)\in W^1(\mathcal{D})$ zadovoljiće uslov Lipšica na $\mathcal{D}$ .Tada iz/1.2.28/slično dokazu leme 1.2.1 //1.2.8/i/1.2.9//moguće je ustanoviti da će svaki član niza $\{\omega_n(\cdot)\}_{n=0}^{\infty}$ zadovoljiti uslov Lipšica na $\mathcal{D}$ sa jednakim konstantama. A ovo je dovoljno zato da bi i granična funkcija $\omega^*(\cdot)$ zadovoljila Lipšicov uslov na $\mathcal{D}$,i to sa istim konstantama.

Pošto je na osnovu leme 1.2.2 operator Φ^1_- neprekidan, a niz približenja $\{\omega_n(\cdot)\}_{n=0}^{\infty}$ konvergira ravnomerno na $\mathcal{D}$,tada će granična funkcija $\omega^*(\cdot)$ ovog niza biti fiksna tačka operatora Φ^1_- .

Pokazaćemo da je funkcija $\omega^*(\cdot)$ funkcija vrednosti igre $\Gamma^1\mathcal{D}$, što i dokazuje prvi deo teoreme.

Neka je $\varepsilon>0$ .Niz strategija $\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$ odgovara nizu približenja $\{\omega_n(\cdot)\}_{n=0}^{\infty}$ .Pošto niz $\{\omega_n(\cdot)\}_{n=0}^{\infty}$ konvergira ravnomerno na $\mathcal{D}$ ka funkciji $\omega^*(\cdot)$, tada postoji takvo $\mathcal{N}$, da za svako $n\geq\mathcal{N}$ važi:

$\|(\omega^*(\cdot)-\omega_n(\cdot))\|\leq\varepsilon$, ,gde je $\|\ \|$ max norma u $C(\mathcal{D})$ .Tada na osnovu /1.2.23/ je:

$$\mathcal{K}^1(x,y,t\,|\,U,V_n)\geq\omega^*(x,y,t)-\varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1.2.31)$$

za svako $(x,y,t)\in\mathcal{D}^o$. $U\in\mathcal{G}^*$ i $n\geq\mathcal{N}$.

Sa druge strane funkcija $\omega^*(\cdot)$ zadovoljava sve uslove teoreme 1.2.2 zato se za svaku tačku $(x,y,t)\in int\,\mathcal{D}$ može naći strategija $U_\varepsilon\in\mathcal{G}$ da je:

$$\mathcal{K}^1(x,y,t\,|\,U_\varepsilon,V)\leq\omega^*(x,y,t)+\varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1.2.32)$$

za $V\in\mathcal{B}^o$.

Iz /1.2.31/i/1.2.32/sledi da je $\omega^*(x,y,t)$ vrednost igre $\Gamma^1\mathcal{D}$ iz bilo kog početnog stanja $(x,y,t)\in int\,\mathcal{D}$ .Prostori stanja $\mathcal{D}=\mathcal{D}_\delta$ $\delta>0$ u suštini bili su proizvoljni zato na osnovu prethodnog sledi da u igri $\Gamma^1(\mathcal{D}_\infty)$ sa maksimalno širokim prostorom stanja postoji funkcija vrednosti igre i ona je neprekidna na $\mathcal{D}_\infty$ .Suženje ove funkcije na skup $\mathcal{D}$ se poklapa sa funkcijom vrednosti igre $\Gamma^1(\mathcal{D})$.

Pošto je $\omega^*(\cdot)\in C(\mathcal{D})$, $\overline{int\,\mathcal{D}}=\mathcal{D}$ /po lemi 1.1.2/i $\omega^*(x,y,t)$ je vrednost igre $\Gamma^1(\mathcal{D})$ iz svakog početnog stanja $(x,y,t)\in int\,\mathcal{D}$, tada je $\omega^*(\cdot)$ funkcija vrednosti igre $\Gamma^1\mathcal{D}$.

Analogno utvrdjivanju nejednačine /1.2.31/ubedjujemo se u istinitost i drugog tvrdjenja teoreme 1.2.3.

Posledica 1. Za to da bi funkcija $\omega(\cdot)\in \mathcal{W}_-^1(\mathcal{D})$ bila funkcijom vrednosti igre $\Gamma^1(\mathcal{D})$ potrebno je i dovoljno da bi ona bila fiksnom tačkom operatora Φ_-^1.

Posledica 2. Neka niz približenja /1.2.21/ sa početnim približenjem $\omega_0(\cdot)\in \mathcal{W}_-^1(\mathcal{D})$ konvergira za konačan broj iteracija, tj. za neko $\tau^*\in\{0,1,\ldots\}$ je: $\omega_\tau(\cdot)=\omega_{\tau}^*(\cdot)$, $n=\tau^*+1,\ \tau^*+2,\cdots$, tada strategija V_{τ^*} ,kao uostalom i sve strategije V_n, $n>\tau^*$ iz niza strategija $\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$,koji odgovara nizu približenja /1.2 .21/sa početnim približenjem $\omega_0(\cdot)$ je optimalna strategija begunca u igri $\Gamma^1(\mathcal{D})$.

Teorema 1.2.4.1. Za to da bi u igri $\Gamma^1(\mathcal{D})$ postojala optimalna strategija begunca potrebno je i dovoljno da niz približenja /1.2.21/sa nekim početnim približenjem $\omega_0(\cdot)\in \mathcal{W}_-^1(\mathcal{D})$ konvergira za neki konačan broj iteracija.

2. Ako niz približenja /1.2.21/sa početnim približenjem $\omega_0(\cdot)\in \mathcal{W}_-^1(\mathcal{D})$ konvergira za konačan broj iteracija, tada će on konvergirati za konačan broj iteracija i sa bilo kojim drugim početnim približenjem iz skupa $\mathcal{W}_-^1(\mathcal{D})$ .Osim toga ovaj broj ne prelazi τ^*+1 ,gde je τ^* broj iteracija, za koji konvergira niz približenja /1.2 .21/sa početnim približenjem $\omega_-^1(\cdot)$.

Dokaz. Dovoljnost u prvom tvrdjenju teoreme važi saglasno napred navedenoj posledici 2.Dokazaćemo samo neophodnost.

Neka je $V^*\in\mathcal{B}$, $V^*=(b_*^{\tau^*},\ldots,b_*^0)$ optimalna strategija begunca u igri $\Gamma^1(\mathcal{D})$ .Pokazaćemo da se za bilo koju tačku $(x,y,t)\in\mathcal{D}^\circ$ može naći strategija $\overline{\mathcal{U}}\in\mathcal{G}^\circ$ da je:

$$\mathcal{K}^1(x,y,t\,|\,\overline{\mathcal{U}},V^*)\le(\Phi_-^1)^{\tau^*}\circ\,\omega_-^1(x,y,t), \qquad (1.2.33)$$

gde je $(\Phi_-^1)^{\tau^*}$ τ^*-ti stepen operatora Φ_-^1 ; funkcija koja figuriše ovde i u formulaciji teoreme je $\omega_-^1(\cdot)$ odredjena relacijom /1.2.13/.Ali pošto je: $(\Phi_-^1)^{\tau^*}\circ\,\omega_-^1(\cdot)\in\mathcal{W}_-^1(\mathcal{D})$, tada za svako $(x,y,t)\in\mathcal{D}^\circ$, $\mathcal{U}\in\mathcal{G}^\circ$ i za neko $V_{\tau^*}\in\mathcal{B}$ važiće i suprotna ne stroga nejednačina. Sledi u /1.2.33/važiće jednačina, jer bi u drugom slučaju protivrečilo optimalnosti strategije. Jednačina u /1.2.33/ označava da je $(\Phi_-^1)^{\tau^*}\circ\,\omega_-^1(\cdot)$ funkcija vrednosti igre $\Gamma^1(\mathcal{D})$, a takav njen oblik svedoči o tome da niz približenja /1.2.21/sa početnim približenjem $\omega_-^1(\cdot)$ konvergira ne više nego za τ^* iteracija.Ovim je ustanovljena dovoljnost u prvom tvrdjenju teoreme.

Neka je $(x,y,t)\in\mathcal{D}^\circ$ /Slučaj $\tau^*=0$ biće jasan iz analize slučaja kada je $\tau^*>0$ / i $\tau^*>0$ .Uzmimo dopustivo upravljanje $v_{\tau^*}(\cdot)=b_*^{\tau^*}(x,y,t)$,gde je $v_{\tau^*}(\cdot)\in\mathcal{V}_0^{\tau^*}$ za neko $\varepsilon_{\tau^*}\in(0,t)$ ili

$v_2^*(\cdot) \in \mathcal{V}^{\tau_2^*}$ za $\tau_2^* = t$ stavimo:

$$y_1 = \lim_{\tau \to \tau_2^* - 0} y(\tau, y, v_2^*(\cdot)). \text{ Tada:}$$

$$(\Phi_-^1)^{2^*}{}_0\, \omega_-^1(x,y,t) \geq \min_{x' \in C^{\tau_2^*}(x)} (\Phi_-^1)^{2^*-1}{}_0\, \omega_-^1(x', y_1, t - \tau_2^*),$$

a za neko $x_1 \in C^{\tau_2^*}(x)$ i $t_1 = t - \tau_2^*$ je:

$$(\Phi_-^1)^{2^*}{}_0\, \omega_-^1(x,y,t) \geq (\Phi_-^1)^{2^*-1}{}_0\, \omega_-^1(x_1, y_1, t_1) \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1.2.34)$$

U posebnom slučaju je $t_1 = 0$, a /1.2.34/ biće ekvivalentna nejednačini:

$$(\Phi_-^1)^{2^*}{}_0\, \omega_-^1(x,y,t) \geq H(x'', y''), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1.2.35)$$

gde je $x'' = x_1$, $y'' = y_1$.

Ako je dalje $2^* - 1 = 0$, a $t_1 > 0$, tada /1.2.34/ postaje oblika:

$$(\Phi_-^1)^{2^*}{}_0\, \omega_-^1(x,y,t) \geq \omega_-^1(x_1, y_1, t_1).$$

Nalazimo $y'' = y(t_1, y, v_0(\cdot))$, gde je:

$$v_0(\cdot) = v_{2^*-1}(\cdot) = b_*^{2^*-1}(x_1, y_1, t_1) = b_*^0(x_1, y_1, t_1,), \quad v_0(\cdot) \in \mathcal{V}^{t_1}$$

i uzimajući u obzir /1.2.13/ sledi:

$$\omega_-^1(x_1, y_1, t_1) \geq \min_{x' \in C^{t_1}(x_1)} H(x', y'').$$

Nalazimo $x'' \in C^{t_1}(x_1)$ takvo da je $\omega_-^1(x_1, y_1, t_1) \geq H(x'', y'')$.

U rezultatu ponovo ćemo doći do /1.2.35/.

Ako je $2^* - 1 = 0$ i $t_1 > 0$, tada razmatrajući dopustivo upravljanje $v_{2^*-1}(\cdot) = b_*^{2^*-1}(x_1, y_1, t_1)$ analogno /1.2.34/ sledi:

$$(\Phi_-^1)^{2^*-1}{}_0\, \omega_-^1(x_1, y_1, t_1) \geq (\Phi_-^1)^{2^*-2}{}_0\, \omega_-^1(x_2, y_2, t_2) \cdot$$

Odavde i na osnovu /1.2.34/ sledi:

$$(\Phi_-^1)^{2^*}{}_0\, \omega_-^1(x,y,t) \geq (\Phi_-^1)^{2^*-2}{}_0\, \omega_-^1(x_2, y_2, t_2).$$

Izvodeći kao i ranije analizu veličina $2^* - 2$ i t_2 ili ćemo doći do /1.2.35/ ili ćemo učiniti sledeći korak sličan opisanim dva koraka i td. U rezultatu obavezno dolazimo do /1.2.35/.

Sada je jasno kako treba graditi strategiju $\overline{\mathcal{U}} \in \mathcal{G}^0$, $\overline{\mathcal{U}} = \bar{a}^0$ tako da je:

$$\mathcal{K}^1(x,y,t \mid \overline{\mathcal{U}}, V^*) = H(x'', y'') \leq (\Phi_-^1)^{2^*}{}_0\, \omega_-^1(x,y,t),$$

gde je: $x'' = x(t, x \mid \overline{\mathcal{U}}, V^*) = x(t, x, \overline{\mathcal{U}}(\cdot))$, $\bar{u}(\cdot) = \bar{a}^0(x,y,t)$, a $y'' = y(t, y \mid \overline{\mathcal{U}}, V^*)$.

Ovo i znači da važi/1.2.33/pa je prvo tvrdjenje teoreme dokazano.

Kakva god bila funkcija $\omega(\cdot)\in W_-^1(\mathcal{D})$ važi nejednačina:

$$\Phi_-^1 o\ \omega(\cdot)\geq \omega_-^1(\cdot)$$

Ovo sledi iz /1.2.1/i /1.2.13/i iz toga da je:

$$\omega(x,y,0)=H(x,y)\quad za\quad \forall (x,y,0)\in\mathcal{D}.$$

Znači kakva god bila $\omega(\cdot)\in W_-^1(\mathcal{D})$ i $n=0,1,2,\ldots$ važi nejednačina:

$$(\Phi_-^1)^{n+1} o\ \omega(\cdot)\geq(\Phi_-^1)^n o\ \omega_-^1(\cdot).$$

Odavde sledi da ako niz približenja /1.2.21/sa početnim približenjem $\omega_-^1(\cdot)$ konvergira za τ^* iteracija, onda će za svako početno približenje iz skupa $W_-^1(\mathcal{D})$ on konvergirati najviše za τ^*+1 iteracija. Sa druge strane ako niz približenja /1.2.21/sa nekim početnim približenjem $\omega_0(\cdot)\in W_-^1(\mathcal{D})$ konvergira za konačan broj iteracija, on će konvergirati i sa početnim približenjem $\omega_-^1(\cdot)$ .Ovo je bilo utvrdjeno u toku dokaza prvog tvrdjenja teoreme. Na taj način je utvrdjena istinitost i drugog tvrdjenja teoreme.

§3. Drugi numerički metod približenja funkciji vrednosti igre približenja u odredjenom momentu vremena /konstrukcija minimizirajućeg niza strategija gonioca/

Kratak pregled sadržaja ovog paragrafa dat je u uvodnom delu na četvrtoj i petoj stranici.

Pošto medju rezultatima prvog dela ovog paragrafa i rezultatima paragrafa 2. postoji odredjena simetrija to će se oni navesti bez dokaza.

I ovde ćemo smatrati da je prostor stanja igre $\Gamma^1(\mathcal{D})$ oblika /1.1.9/, tj. $\mathcal{D}=\mathcal{D}_\delta,\ \delta>0$.

Operator $\Phi_+^1: C(\mathcal{D})\to C(\mathcal{D})$ za svaku funkciju $\omega(\cdot)\in C(\mathcal{D})$ odredjujemo jednačinom:

$$\Phi_+^1 o\ \omega(x,y,t)=\min_{\tau\in[0,t]}\ \min_{\xi\in C_x^\tau}\ \max_{\eta\in C_y^\tau}\ \omega(\xi,\eta,t-\tau)\cdot\cdots(1.3.1)$$

Napomena 1.3.1 Oznaka Φ_+^1 ostaje i za navedeni operator, koji je odredjen jednačinom /1.3.1/, ali koji dejstvuje iz $Lip(\mathcal{D})$ u $Lip(\mathcal{D})$

Lema 1.3.1 Operator $\Phi_+^1: C(\mathcal{D})\to C(\mathcal{D}).\ (\Phi_+^1: Lip(\mathcal{D})\to Lip(\mathcal{D}))$ odredjen je korektno, tj. stvarno preslikava $C(\mathcal{D})(Lip(\mathcal{D}))$ u sebe.

Lema 1.3.2 Operator $\Phi_+^1: C(\mathcal{D})\to C(\mathcal{D})(\Phi_+^1: Lip(\mathcal{D})\to Lip(\mathcal{D}))$ je neprekidan.

Lema 1.3.3 $\Phi_+^1 o\ \omega(\cdot)\leq\omega(\cdot)$ za svaku funkciju $\omega(\cdot)\in C(\mathcal{D})$.

Definicija 1.3.1 Neka je funkcija $\omega(\cdot)$ odredjena na prostoru stanja igre $\Gamma^1(\mathcal{Z})$. Govorićemo da funkcija $\omega(\cdot)$ pripada skupu funkcija $\mathcal{W}_+^1(\mathcal{D})$ ako je:

1/ $\omega(x,y,0)=H(x,y)$ za $\forall\ (x,y,0)\in\mathcal{D}$;

2/ $\omega(\cdot)\in C(\mathcal{D})$;

3/ postoji $\mathcal{U}'\in\mathcal{G}$ da je:

a/ $\mathcal{K}^1(x,y,t\,|\,\mathcal{U}',V)\leq\omega(x,y,t)$ za $\forall\ (x,y,t)\in\mathcal{D}^\circ$;

b/ $\omega(x(\varepsilon,x\,|\,\mathcal{U}',V),\ y(\varepsilon,y\,|\,\mathcal{U}',V),\ t-\varepsilon)\leq\omega(x,y,t)$ za $\forall\ V\in\mathcal{B}^\circ$, $(x,y,t)\in\mathcal{D}^\circ$ i $\varepsilon\in[0,\tau']$ za neko $\tau'\in(0,t]$.

Napomena 1.3.2 Ako je $H(\cdot)\in Lip(\rho_2(x,y)\,(\mathcal{D}\setminus\mathcal{D}^\circ)$, tada uslov 2/ zamenjujemo uslovom 2'/ $\omega(\cdot)\in Lip(\mathcal{D})$. Oznaku $\mathcal{W}_+^1(\mathcal{D})$ koristimo i za skupove, koji zadovoljavaju uslove 1/, 2'/, 3/.

Lema 1.3.4 $\mathcal{W}_+^1(\mathcal{D})\neq\phi$

Posebno skupu $\mathcal{W}_+^1(\mathcal{D})$ pripada funkcija:

$$\omega_+^1(x,y,t)=\min_{\xi\in C^t(x)}\ \max_{\eta\in C^t(y)} H(\xi,\eta)\cdot \ldots \qquad (1.3.2)$$

Teorema 1.3.1 Operator Φ_+^1 preslikava $\mathcal{W}_+^1(\mathcal{D})$ u $\mathcal{W}_+^1(\mathcal{D})$.

Dokaz ove teoreme ne navodimo.

Teorema 1.3.2 Neka funkcija $\omega'(\cdot)$ zedovoljava sledeće uslove:

1/ $\omega'(\cdot)\in C(\mathcal{D})$;

2/ $\omega'(x,y,0)=H(x,y)$ za $\forall\ (x,y,0)\in\mathcal{D}$;

3/ $\omega'(\cdot)$ je fiksna tačka operatora Φ_+^1, tj. $\omega'(\cdot)$ zadovoljava jednačinu:

$$\Phi_+^1\circ\omega(\cdot)=\omega(\cdot)\ \ldots \qquad (1.3.3)$$

tada za svako $(x,y,t)\in int\,\mathcal{D}$ i $\varepsilon>0$ postoji takva strategija $V_\varepsilon\in\mathcal{B}$ da je: $\mathcal{K}^1(x,y,t\,|\,\mathcal{U},V_\varepsilon)\geq\omega'(x,y,t)-\varepsilon$ za $\forall\ \mathcal{U}\in\mathcal{G}^\circ$.

Teorema 1.3.3 1. Za svako početno približenje $\omega_0(\cdot)\in\mathcal{W}_+^1(\mathcal{D})$ niz približenja:

$$\omega_n(\cdot)=\Phi_+^1\circ\omega_{n-1}(\cdot),\quad n=1,2,\ldots \qquad (1.3.4)$$

konvergira ravnomerno na $\mathcal{D}$ ka funkciji $\omega^*(\cdot)$ u odnosu na koju važe tvrdjenja:

a/ $\omega^*(\cdot)\in C(\mathcal{D})$, a ako je $H(\cdot)\in Lip\,(\rho_2(x,y)\,(\mathcal{D}\setminus\mathcal{D}^\circ))$ tada je $\omega^*(\cdot)\in Lip\,(\mathcal{D})$;

b/ $\omega^*(\cdot)$ je fiksna tačka operatora Φ_+^1;

c/ $\omega^*(\cdot)$ je funkcija vrednosti igre $\Gamma^1(\mathcal{D})$ i sledi da je granica niza približenja /1.3.4/ ista za svako početno približenje $\omega_0(\cdot)\in\mathcal{W}_+^1(\mathcal{D})$.

2.Niz strategija $\{U_n\}_{n=0}^{\infty}$,koji odgovara nizu približenja /1.3.4/ sa bilo kojim početnim približenjem $\omega_0(\cdot)\in \mathcal{W}_+^1(\mathcal{D})$,je minimizirajući niz strategija gonioca G u igri $\Gamma^1(\mathcal{D})$.

Posledica 1. Za to da bi funkcija $\omega^*(\cdot)\in \mathcal{W}_+^1(\mathcal{D})$ bila funkcijom vrednosti igre $\Gamma^1(\mathcal{D})$ potrebno je i dovoljno da ona bude fiksnom tačkom operatora Φ_+^1 .

Posledica 2. Neka niz približenja/1.3.4/ sa početnim približenjem $\omega_0(\cdot)\in \mathcal{W}_+^1(\mathcal{D})$ konvergira za konačan broj iteracija, tj. za neko

$$q^*\in\{0,1,2,\dots\} \text{ je } \omega_n(\cdot)=\omega_{q^*}(\cdot),\ n=q^*+1, q^*+2,\dots$$

Tada strategija U_{q^*} kao i svaka strategija U_n , $n>q^*$ iz niza strategija $\{U_n\}_{n=0}^{\infty}$,koja odgovara približenju oblika /1.3.4/ sa početnim približenjem $\omega_0(\cdot)$ je optimalna strategija gonioca u igri $\Gamma^1(\mathcal{D})$.

Teorema 1.3.4 1. Za to da bi u igri $\Gamma^1(\mathcal{D})$ postojala optimalna strategija gonioca potrebno je i dovoljno da bi niz približenja /1.3.4/ sa nekim početnim približenjem $\omega_0(\cdot)\in \mathcal{W}_+^1(\mathcal{D})$ konvergirao za konačan broj iteracija.

2.Ako niz približenja /1.3.4/ sa početnim približenjem $\omega_0(\cdot)\in\mathcal{W}_+^1(\mathcal{D})$ konvergira za konačan broj iteracija, tada će on konvergirati za konačan broj iteracija i iz bilo kog početnog približenja iz skupa $\mathcal{W}_+^1(\mathcal{D})$ .Osim toga ovaj broj ne prelazi q^*+1 , gde je q^* broj iteracija za koji konvergira niz približenja /1.3.4/ sa početnim približenjem $\omega_+^1(\cdot)$.

P§4. Primeri diferencijalnih igara približenja u datom momentu vremena

Ovde ćemo razmatrati dva primera diferencijalnih igara približenja u datom momentu vremena.

U prvom primeru igra se istražuje NMPFVI, koji je dat u paragrafu 3.

Drugi primer pretstavlja linearnu igru približenja u datom momentu vremena.

Primer 1. Neka je sistem upravljanja, koji kontroliše gonilac, oblika: $\dot{x}=u,\ x\in R^1,\ u\in\mathcal{U}=[-1,1]$, ... (1.4.1)

a sistem upravljanja, koji kontroliše begunac, oblika:

$$\dot{y}=v,\quad y\in R^1,\quad v\in\mathcal{V}=[-2,2]\ . \qquad (1.4.2)$$

Neka je prostor stanja igre maksimalno širok, tj. :

$$\mathcal{D}=\mathcal{D}_\infty=\{(x,y,t)\in R^3 / t\geq 0\}\ . \qquad (1.4.3)$$

Na kraju neka se funkcional kvaliteta /1.1.10/ odredjuje jednačinom: $H(x,y)=d(x,y,\mathcal{M})=\min_{m\in\mathcal{M}}|x+y-m|$, ... (1.4.4)

gde je $\mathcal{M}=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

U svojstvu početnog približenja bira se funkcija programskog maksimina. Ipak u saglasnosti sa teoremom 1.2.4 i za svako drugo približenje iz $W_-^1(\mathcal{D})$ prvi NMPFV u igri /1.4.1/--/1.4.4/ konvergiraće samo na granici. Iz navedene teoreme sledi da u ovoj igri za begunca ne egzistira optimalna strategija na skupu $\mathcal{D}$.

Dalje ćemo pokazati da funkcija programskog minimaksa, tj. funkcija ω_+^1 /koja je oblika /1.3.2//izabrana u svojstvu početnog približenja u drugom NMPFVI i sama je fiksna tačka operatora Φ_+^1 . Znači ona je funkcija vrednosti igre/1.4.1/--/1.4.4/. Sledi po teoremi 1.3.4 za gonioca egzistira optimalna strategija u ovoj igri, pri čemu u suštini programska.

Funkciju /1.4.4/ moguće je prikazati oblika:

$$H(x,y)=\max\{0,\ \min\{1-x-y,\ 1+x+y\}\}\ . \qquad (1.4.5)$$

Nadjimo sada eksplicitni oblik funkcije $\omega_+^1(\cdot)$ u igri/1.4.1/--/1.4.4/. Zato primetimo da su skupovi dostiživosti sistema/1.4.1/, /1.4.2/oblika:

$$C^t(x)=[x-t,\ x+t],\ x\in R^1,\ t\geq 0 \quad i \quad C^t(y)=[y-2t,\ y+2t],\ y\in R^1,\ t\geq 0\ .$$

Tada za svako $(x,y,t)\in\mathcal{D}_\infty$ uzimajući u obzir /1.3.2/i/1.4.5/ sledi:

$$\omega_+^1(x,y,t)=\min_{x'\in C^t(x)}\ \max_{y'\in C^t(y)} H(x',y')=\min_{x'\in[x-t,x+t]}\ \max_{y'\in[y-2t,y+2t]}$$

$$\max\{0,\ \min\{1-x'-y',\ 1+x'+y'\}\}=\min_{x'\in[x-t,x+t]}\ \max\{0,\ \max_{y'\in[y-2t,y+2t]}$$

$$\min\{1-x'-y',\ 1+x'+y'\} = \min_{x'\in[x-t,\,x+t]} \max\{0,\ \min\{1-x'-y+2t,\ 1+x'+y+2t,\ 1\}\} = \max\{0\ \min_{x'\in[x-t,\,x+t]} \min\{1-x'-y+2t,\ 1+x'+y+2t,\ 1\}\} =$$

$$= \max\{0,\ \min\{1-x-y+t,\ 1+x+y+t,\ 1\}\}, \Longrightarrow ;$$

$$\omega_+^1(x,y,t) = \max\{0,\ \min\{1-x-y+t,\ 1+x+y+t,\ 1\}\} \quad \ldots\ldots (1.4.6)$$

Pokazaćemo sada da u igri /1.4.1/--/1.4.4/funkcija /1.4.6/je fiksna tačka operatora Φ_+^1 .Uzmimo proizvoljnu tačku$(x,y,t)\in\mathcal{D}_\infty$. Tada sledi:

$$\Phi_+^1 \circ \omega_+^1(x,y,t) = \min_{\tau\in[0,t]} \min_{x'\in C^\tau(x)} \max_{y'\in C^\tau(y)} \omega_+^1(x',y',t-\tau) =$$

$$= \min_{\tau\in[0,t]} \min_{x'\in[x-\tau,\,x+\tau]} \max_{y'\in[y-2\tau,\,y+2\tau]} \max\{0, \min\{1-x'-y'+t-\tau,\ 1+x'+y'+t-\tau, 1\}\} = \min_{\tau\in[0,t]} \min_{x'\in[x-\tau,\,x+\tau]} \max\{0, \max_{y'\in[y-2\tau,\,y+2\tau]} \min\{1-x'-y'+t-\tau,\ 1+x'+y'+t-\tau, 1\}\} = \min_{\tau\in[0,t]} \min_{x'\in[x-\tau,\,x+\tau]}$$

$$\max\{0,\ \min\{1-x'-y+t+\tau,\ 1+x'+y+t+\tau,\ 1+t-\tau,\ 1\}\} =$$

$$= \min_{\tau\in[0,t]} \min_{x'\in[x-\tau,\,x+\tau]} \max\{0\ ,\ \min\{1-x'-y+t+\tau, 1+x'+y+t+\tau, 1\}\} =$$

$$= \min_{\tau\in[0,t]} \max\{0 \min_{x'\in[x-\tau,\,x+\tau]} \min\{1-x'-y+t+\tau,\ 1+x'+y+t+\tau, 1\}\} =$$

$$= \min_{\tau\in[0,t]} \max\{0,\ \min\{1-x-y+t\ ,\ 1+x+y+t,\ 1\}\} =$$

$$= \max\{0,\ \min\{1-x-y+t\ ,\ 1+x+y+t,\ 1\}\}.$$

Na taj način:je:

$$\Phi_+^1 \circ \omega_+^1(x,y,t) = \max\{0,\ \min\{1-x-y+t,\ 1+x+y+t,\ 1\}\}, \quad \ldots\ldots (1.4.7)$$

a uporedjujući /1.4.6/i/1.4.7/ubedjujemo se da u igri /1.4.1/--/1.4.4/je funkcija $\omega_+^1(\cdot)$ nepokretna tačka operatora Φ_+^1 , tj. ona je funkcija vrednosti u navedenoj igri.

Konstrukcija optimalne strategije gonioca u igri/1.4.1/--/1.4.4/ostvaruje se slično tome kako se pri rasudjivanju leme 1.2.4 gradila strategija, koja garantuje uslov 3^0 definicije

1.2.1 za funkciju $\omega_-^1(\cdot)$.

Iz prethodna dva paragrafa sledi da je funkcija vrednosti ove ili one igre u suštini ekvivalentna rešenju igre, zato ćemo u sledećem primeru ovog paragrafa govoriti samo o traženju funkcije vrednosti igre.

Primer 2.

Neka je sistem upravljanja koji kontroliše gonilac oblika:

$$\dot{x}=Ax+u,\quad x\in R^n,\quad u\in\mathcal{U}\in \text{comp}\,R^n \quad \dots\dots\dots (1.4.8)$$

gde je A matrica nxn sa realnim konstantnim elementima. Smatramo da sistem upravljanja, koji kontroliše begunac, ima oblik:

$$\dot{y}=Ey+v,\quad y\in R^n,\quad v\in V\in \text{comp}\,R^n, \quad \dots\dots\dots (1.4.9)$$

gde je E matrica nxn sa realnim konstantnim elementima. U svojstvu prostora stanja biramo skup:

$$\mathcal{D}_\infty=\{(x,y,t)\in R^{2n+1}\mid t\geq 0\} \quad \dots\dots\dots (1.4.10)$$

Na kraju smatramo da se funkcional kvaliteta /1.1.10/ odredjuje:

$$H(x,y)=\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \quad \dots\dots\dots (1.4.11)$$

Skup dostiživosti $C^{\tau}(x)$ $(C^{\tau}(y))$ sistema /1.4.8/ //1.4.9// je za $\forall x\in R^n (y\in R^n)$ i $\tau\in \ell^1_+$ konvekstan i kompaktan i nezavisan od konveksnosti skupa $\mathcal{U}(\mathcal{V})$. Bitna je samo njegova kompaktnost.

Razmotrimo funkciju $\omega_-^1(\cdot)$ u igri/1.4.8/--/1.4.11/ i pokažimo da ako važe odredjene pretpostavke onda je ona fiksna tačka operatora Φ_-^1 a to znači da je funkcija vrednosti igre.

Funkciju odredjenu jednačinom/1.4.11/je moguće pretstaviti oblika: $H(x,y)=\max\limits_{\|\ell\|\leq 1} \ell\cdot(x-y)$,

gde je $\ell(x-y)$ skalarni proizvod vektora ℓ i $(x-y)$ iz R^n pa je:

$$\omega_-^1(x,y,t)=\max_{y'\in C^t(y)}\ \min_{x'\in C^t(x)}\ \max_{\|\ell\|\leq 1} \ell(x'-y')$$

Na desnoj strani ove jednačine unutrašnje operacije minimuma i maksimuma mogu da promene mesta, jer za svako fiksno y' funkcija $h_{y'}(\ell,x')=\ell(x'-y')$ je bilinearna i tim pre konveksna po $x\in C^t(x)$ i konveksna po $\ell, \|\ell\|\leq 1$ pa se na nju može primeniti teorema o minimaksu [16]. Premeštajući zatim operacije maksimuma po $y'\in C^t(y)$ i po $\ell, \|\ell\|\leq 1$ sledi:

$$\omega_-^1(x,y,t)=\max_{\|\ell\|\le 1}\ \max_{y'\in C^t(y)}\ \min_{x'\in C^t(x)} \ell(x'-y')$$

Pošto su sistemi/1.4.8/,/1.4.9/linearni, tada je moguće $x'\in C^t(x)$, $y'\in C^t(y)$ pretstaviti oblika:

$$x'\in e^{At}x+\int_0^t e^{A(t-\theta)}u(\theta)d\theta,\quad y'=e^{Et}y+\int_0^t e^{E(t-\theta)}v(\theta)d\theta,$$

za neka dopustiva upravljanja: $u(\cdot)\in\mathcal{U}^t$, $v(\cdot)\in\mathcal{V}^t$. Zato je:

$$\omega_-^1(x,y,t)=\max_{\|\ell\|\le 1}\Big[\ell(e^{At}\cdot x-e^{Et}\cdot y)+\max_{v(\cdot)\in\mathcal{V}^t}\ \min_{u(\cdot)\in\mathcal{U}^t}\int_0^t \ell(e^{A(t-\theta)}u(\theta)-e^{E(t-\theta)}v(\theta))d\theta\Big],$$

a navedena formula je identična formuli:

$$\omega_-^1(x,y,t)=\max_{\|\ell\|\le 1}\Big[\ell(e^{At}\cdot x-e^{Et}\cdot y)+\int_0^t \max_{v\in\mathcal{V}}\ \min_{u\in\mathcal{U}} \ell(e^{A(t-\theta)}u-e^{E(t-\theta)}v)d\theta\Big] \quad \ldots\ldots (1.4.12)$$

<u>Napomena 1.4.1</u> Za svako fiksirano $\tau\in R_+^1$ funkcijaé $z(\ell,\tau)=\max_{v\in\mathcal{V}}\min_{u\in\mathcal{U}}\ell(e^{A\tau}u-e^{E\tau}v)$ je konveksna po $\ell,\|\ell\|\le 1$.

<u>Napomena 1.4.2</u> Ako je tačna napomena 1.4.1, tada za $\forall t\in R_+^1$ integralni sabirak pod znakom maksimuma u /1.4.12/je konveksna po $\ell,\|\ell\|\le 1$, funkcija, a tada na osnovu linearnosti po ℓ drugog sabirka u /1.4.12/za $\forall(x,y,t)\in\mathcal{D}_\infty$ konveksna je po $\ell,\|\ell\|\le 1$ i suma ovih sabiraka, tj. funkcija koja stoji pod znakom maksimuma u /1.4.12/.

Uzmimo proizvoljnu tačku $(x,y,t)\in\mathcal{D}_\infty$. Tada uzimajući u obzir /1.4.12/je:

$$\Phi_-^1\circ\omega_-^1(x,y,t)=\max_{\tau\in[0,t]}\ \max_{y'\in C^\tau(y)}\ \min_{x'\in C^\tau(x)}\ \max_{\|\ell\|\le 1}\Big[\ell\big[e^{A(t-\tau)}\cdot x'-e^{E(t-\tau)}\cdot y'\big]+\int_0^{t-\tau}\max_{v\in\mathcal{V}}\ \min_{u\in\mathcal{U}}\ell(e^{A(t-\tau-\theta)}u-e^{E(t-\tau-\theta)}v)d\theta\Big].$$

Za fiksirano $\tau\in[0,t]$ i $y'\in C^\tau(y)$ funkcija, koja pripada desnoj strani ove jednačine, u srednjoj zagradi, je konveksna po $x'\in C^\tau(x)$, na osnovu napomenae 1.4.1, ali na osnovu iste napomene ova funkcija je takodje konveksna po $\ell,\|\ell\|\le 1$. Kod konveksnih funkcija operacije minimuma po $x'\in C^\tau(x)$ i maksimuma po $\ell,\|\ell\|\le 1$ mogu da promene mesta pa je:

$$\Phi_-^1 \circ \omega_-^1(x,y,t) = \max_{\|l\|\le 1}\ \max_{\tau\in[0,t]}\ \max_{y'\in C^{\tau}(y)}\ \min_{x'\in C^{\tau}(x)}$$

$$[l(e^{A(t-\theta)}x' - e^{E(t-\tau)}\cdot y') + \int_0^{t-\tau} \max_{v\in V}\ \min_{u\in U} l(e^{A(t-\tau-\theta)}\cdot u -$$

$$- e^{E(t-\tau-\theta)}v)d\theta] = \max_{\|l\|\le 1}\ \max_{\tau\in[0,t]} [l(e^{At}\cdot x - e^{Et}\cdot y) +$$

$$+ \max_{v(\cdot)\in V^{\tau}}\ \min_{u(\cdot)\in U^{\tau}} \int_0^{\tau} l(e^{A(t-\theta)}u(\theta) - e^{E(t-\theta)}v(\theta))d\theta + \int_0^{t-\tau} \max\ \min l(e^{A(t-\tau-\theta)}u -$$

$$- e^{E(t-\tau-\theta)}v)d\theta] = \max_{\|l\|\le 1}\ \max_{\tau\in[0,t]} [l(e^{At}\cdot x - e^{Et}\cdot y) + \int_0^{\tau} \max_{v\in V}\ \min_{u\in U}$$

$$l(e^{A(t-\theta)}u - e^{E(t-\theta)}v)d\theta + \int_{\tau}^{t} \max_{v\in V}\ \min_{u\in U} l(e^{A(t-\theta)}u - e^{E(t-\theta)}v)d\theta] =$$

$$= \max_{\|l\|\le 1} [l(e^{At}\cdot x - e^{Et}\cdot y) + \int_0^{t} \max_{v\in V}\ \min_{u\in U} l(e^{A(t-\theta)}u - e^{E(t-\theta)}v)d\theta].$$

Iz navedenog niza jednačina i iz /1.4.12/sledi da je:

$$\Phi_-^1 \circ \omega_-^1(x,y,t) = \omega_-^1(x,y,t).$$

Na taj način dokazana je sledeća teorema 1.4.1.

Teorema 1.4.1 Ako važi napomena 1.4.1, tada u igri/1.4.8/-- /1.4.11/ funkcija odredjena jednačinom /1.4.12/ je funkcija vrednosti igre.

§5. Prvi numerički metod približenja funkciji vrednosti igre gonjenja do hvatanja/konstrukcija maksimizirajućeg niza strategija begunca/

U ovom paragrafu razmatra se igra gonjenja /1.1.1/ $\Gamma^2(\mathcal{D})$ u kojoj je funkcional kvaliteta oblika /1.1.11/.

Po pitanjima koja pokreće i po metodu istraživanja dati paragraf je u mnogome analogan paragrafu 2., a kako su dokazi izloženi u paragrafu 2 i dobijeni rezultati bili dovoljno podrobni to se ovde slični rezultati navode bez dokaza.

Prostor stanja igre $\Gamma^2(\mathcal{D})$ je oblika /1.1.9/, tj. $\mathcal{D}=\mathcal{D}\delta$, $\delta>0$.

Odredimo operator $\Phi_-^2 : C(\mathcal{D}) \to C(\mathcal{D})$ sledećom jednačinom:

$$\Phi_-^2 \circ \omega(x,y,t) = \max_{\tau\in[0,t]} \max_{\eta(\cdot)\in A^{\tau}(y)} \min_{\xi(\cdot)\in A^{\tau}(x)} \min\{\omega(\xi(\tau),\eta(\tau),t-\tau), \min_{\theta\in[0,\tau]} H(\xi(\theta),\eta(\theta))\}, \quad . \quad . \quad . \quad (1.5.1)$$

gde je $w/x,y,t/$ bilo koja funkcija, a $/x,y,t/\in\mathcal{D}$.

Napomena 1.5.1 Oznaka Φ_-^2 važi iza operator koji je odredjen jednačinom /1.5.1/, ali koji dejstvuje iz $Lip(\mathcal{D})$ u $Lip(\mathcal{D})$

Lema 1.5.1 Operator $\Phi_-^2 : C(\mathcal{D}) \to C(\mathcal{D})$ $(\Phi_-^2 : Lip(\mathcal{D}) \to Lip(\mathcal{D}))$. je odredjen korektno, tj. stvarno preslikava $C(\mathcal{D})$ $(Lip(\mathcal{D}))$ u samog sebe.

Lema 1.5.2 Operator $\Phi_-^2 : C(\mathcal{D}) \to C(\mathcal{D}) (\Phi_-^2 : Lip(\mathcal{D}) \to Lip(\mathcal{D}))$ je neprekidan.

Lema 1.5.3 $\Phi_-^2 \circ \omega(\cdot) \geq \omega(\cdot)$ za svaku funkciju $\omega(\cdot)\in C(\mathcal{D})$ takvu da je:

$$\omega(x,y,t) \leq H(x,y) \text{ za } \forall (x,y,t)\in\mathcal{D}.$$

Definicija 1.5.1 Neka je funkcija $\omega(\cdot)$ definisana na prostoru stanja igre $\Gamma^2(\mathcal{D})$. Govorićemo da funkcija $w/.$/ pripada skupu funkcija $\mathcal{W}_-^2(\mathcal{D})$, ako:

1/ $\omega(x,y,0) = H(x,y)$ za $\forall (x,y,0)\in\mathcal{D}$;

2/ $\omega(\cdot)\in C(\mathcal{D})$;

3/postoji $\mathcal{V}'\in\mathcal{B}$, da je:

a/ $\mathcal{K}^2(x,y,t \mid \mathcal{U},\mathcal{V}') \geq \omega(x,y,t)$ za $\forall\, \mathcal{U}\in\mathcal{G}^{\circ}, (x,y,t)\in\mathcal{D}^{\circ}$;

b/ $\omega(\xi, x(\xi \mid \mathcal{U},\mathcal{V}'), y(\xi, y \mid \mathcal{U},\mathcal{V}'), t-\xi) \geq \omega(x,y,t)$, za $\forall\, \mathcal{U}\in\mathcal{G}^{\circ}$, $(x,y,t)\in\mathcal{D}^{\circ}$ i $\xi\in[0,\xi']$ za $\forall\, \xi'\in(0,t]$.

Napomena 1.5.2 Ako je $H(\cdot)\in Lip(P_2(x,y)(\mathcal{D}))$ tada uslov 2/ u definiciji 1.5.1 zamenjujemo uslovom 2' /$\omega(\cdot)\in Lip(\mathcal{D})$ .Oznaku $\mathcal{W}_-^2(\mathcal{D})$ sačuvaćemo i za skup funkcija, koje zadovoljavaju 1/, 2'/, 3/.

Lema 1.5.4 $\mathcal{W}_-^2(\mathcal{D}) \neq \phi$

Posebno skupu $\mathcal{W}_-^2(\mathcal{D})$ pripada funkcija:

$$\omega_-^2(x,y,t) = \max_{\eta(\cdot)\in A(y)} \min_{\xi(\cdot)\in A^t(x)} \min_{\tau\in[0,t]} H(\xi(\tau),\eta(\tau)) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1.5.2)$$

Teorema 1.5.1 Operator Φ_-^2 preslikava $\mathcal{W}_-^2(\mathcal{D})$ u sebe.

Ovde ćemo pokazati kako se gradi strategija $\overline{\mathcal{V}'}\in\mathcal{B}$, koja poseduje u odnosu na funkciju $\Phi_-^2 \circ \omega(\cdot)$ svojstva iz uslova 3/definicije 1.5.1, pri tome smatraćemo da je $\omega(\cdot)\in \mathcal{W}_-^2(\mathcal{D})$ i po2-

nata strategija $V' \in \mathcal{B}$ poseduje analogna svojstva u odnosu na funkcije w/./.Neka je odredjenodti radi $V' = \{ \ell^{\tau}_{,} \dots , \ell^{0} \}$, tada strategiju $\overline{V}'$ gradimo oblika $\overline{V}' = (\overline{\ell}^{\tau+1}_{,} \dots , \overline{\ell}^{0})$, gda je $\overline{\ell}^{i} = \ell^{i}_{,}$ $i \in [0;\tau]$, a preslikavanje $\overline{\ell}^{\tau+1}$ gradićemo niže navedenim načinom.

Neka je $(x,y,t) \in \mathcal{D}^{0}$. Nadjimo $\tau' \in (0,t]$ i $\eta'(\cdot) \in A^{\tau'}(y)$ iz uslova:

$$\Phi^{2}_{-} \circ \omega(x,y,t) = \min_{\xi(\cdot) \in A^{\tau'}(x)} \min \{ \omega(\xi(\tau'), \eta'(\tau'), t-\tau'), \min_{\theta \in [0,\tau]} H(\xi(\theta), \eta(\theta)) \} \dots (1.5.3)$$

Neka je dopustivo upravljanje $\widetilde{v}(\cdot) \in \mathcal{V}^{\tau'}$ takvo da je $\eta'(\cdot) = y(\cdot, y, \widetilde{v}(\cdot))$. Stavimo da je:

$$v'(\cdot) = \begin{cases} \widetilde{v}(\cdot), \text{ ako je } \widetilde{v}(\cdot) \in \mathcal{V}^{\tau'} \text{ i } \tau' \angle t \\ \widetilde{v}(\cdot) \big| [0,\tau') \text{ ako je } \widetilde{v}(\cdot) \in \mathcal{V}^{\tau'} \text{ i } \tau' \in (0,t), \end{cases}$$

gde je $\widetilde{v}(\cdot) \big| [0,\tau')$ suženje dopustivog upravljanja $\widetilde{v}(\cdot)$ na poluintervalu $[0,\tau')$. Sada smatramo da je $\overline{\ell}^{\tau+1}(x,y,t) = v'(\cdot)$.

Rasudjivanjima sličnim onima u teoremi 1.2.1 utvrdjuje se da više konstruisana strategija poseduje tražena svojastva u odnosu na funkciju: $\Phi^{2}_{-} \circ \omega(\cdot)$.

<u>Teorema 1.5.2</u> Neka funkcija $\omega'(\cdot)$ zadovoljava sledeće uslove:

1/ $\omega'(\cdot) = C(\mathcal{D})$;

2/ $\omega'(x,y,0) = H(x,y)$ za $\forall (x,y,0) \in \mathcal{D}$;

3/ $\omega'(\cdot)$ je fiksna tačka operatora Φ^{2}_{-}, tj. $\omega'(\cdot)$ zadovoljava jednačinu:

$$\Phi^{2}_{-} \circ \omega'(\cdot) = \omega'(\cdot) \quad \dots \dots \dots \quad (1.5.4)$$

tada za bilo koje tačke $(x,y,t) \in \operatorname{int} \mathcal{D}$ i $\varepsilon > 0$ postoji strategija $\mathcal{U}_{\varepsilon} \in \mathcal{G}$ da je:

$$\mathcal{K}^{2}(x,y,t \mid \mathcal{U}_{\varepsilon}, V) \leq \omega'(x,y,t) + \varepsilon, \quad \text{za } \forall\, V \in \mathcal{B}^{0}.$$

Uzmimo proizvoljnu funkciju $\omega_{0}(\cdot) \in \mathcal{W}^{2}_{-}(\mathcal{D})$ i fiksirajmo onu strategiju $V_{0} \in \mathcal{B}$ egzistencija i svojstva koje u odnosu na $\omega_{0}(\cdot)$ su garantovana uslovom 3/definicije 1.5.1. Koristeći funkciju $\omega_{0}(\cdot)$ u svojstvu početnog približenja rešenja jednačine /1.5.4/gradićemo sledeća približenja rešenja ove jednačine:

$$\omega_{n}(\cdot) = \Phi^{2}_{-} \circ \omega_{n-1}(\cdot), \quad n = 1,2,\dots, \quad \dots \dots \dots \quad (1.5.5)$$

Gradićemo takodje niz strategija $\{V_{n}\}_{n=0}^{\infty}$, $V_{n} \in \mathcal{B}$, $n = 0,1,2,\dots$, gde je V_{0} ranije izabrana strategija, a svaka od strategija V_{n}, $n = 1,2,\dots$ gradi se po strategiji V_{n-1} i po približenju $\omega_{n-1}(\cdot)$ isto kao što se neposredno posle formulacije teoreme 1.5.1 gradila strategija $\widetilde{V}'$ po strategiji V' i po funkciji w/./.Na taj način svaka strategija V_n ovog niza u odnosu na nizovsko približenje w_n/./ poseduje svojstva formulisana u uslovu 3/definicije 1.5.1. Dalje ćemo konstruisati po navedenom pravilu niz strategija $\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$ i nazvati ih nizovskim strategijama koje odgovaraju nizu približenja /1.5.5/sa početnim približenjem w_0/./.

Po teoremi 1.5.1 niz približenja /1.5.5/sa početnim približenjem $\omega_0(\cdot)\in \mathcal{W}_-^2(\mathcal{D})$ je takav da je $\omega_n(\cdot)\in \mathcal{W}_-^2(\mathcal{D}), n=1,2,\dots$ .Odavde sledi takodje da je:

$$\omega_n(x,y,t)\leq H(x,y), \qquad (1.5.6)$$

gde je $(x,y,t)\in\mathcal{D},\ n=0,1,2,\dots$.

Pošto je $\omega_n(\cdot)\in \mathcal{W}_-^2(\mathcal{D}),\ n=0,1,2\dots$ tada za odgovarajuće strategije $V_n\in\mathcal{B}$ i za $\forall\, u\in\mathcal{G}^0$ i $(x,y,t)\in\mathcal{D}^0$ imamo:

$$\mathcal{K}^2(x,y,t\,|\,u,V_n)\geq \omega_n(x,y,t).$$

Ali za te $V_n\in\mathcal{B}$, $u\in\mathcal{G}^0$ i $(x,y,t)\in\mathcal{D}^0$/a uopšte rečeno i za $\forall\ V\in\mathcal{B}$, $u\in\mathcal{G}$ i $(x,y,t)\in\mathcal{D}^0$ /po definiciji funkcije dobitka u igri $\Gamma^2(\mathcal{D})$ važi nejednačina:

$$H(x,y)\geq \mathcal{K}^2(x,y,t\,|\,u,V_n).$$

Sledi: $\omega(x,y,t)\leq H(x,y)$ za $\forall\,(x,y,t)\in\mathcal{D}^0$ i $n=0,1,\dots$

U isto vreme pošto je $\omega_n(\cdot)\in \mathcal{W}_-^2(\mathcal{D}),\ n=0,1,2\cdots$, tada je:

$$\omega(x,y,0)=H(x,y)\ \text{za}\ \forall(x,y,0)\in\mathcal{D},\quad n=0,1,2,\dots .$$

Na taj način nejednačina /1.5.6/važi.Iz /1.5.6/i iz toga da je $\omega_n(\cdot)\in C(\mathcal{D}),\ n=0,1,2,\dots$kao i koriščenjem leme 1.5.3 sledi da niz približenja/1.5.5/sa početnim približenjem $\omega_0(\cdot)\in \mathcal{W}_-^2(\mathcal{D})$ obrazuje neopadajući niz funkcija, tj. $\omega_0(\cdot)\leq\omega_1(\cdot)\leq\dots\leq\omega_n(\cdot)\leq\dots$.

<u>Teorema 1.5.3</u> 1.Za svako početno približenje $\omega_0(\cdot)\in \mathcal{W}_-^2(\mathcal{D})$ niz približenja/1.5.5/kovergira ravnomerno na $\mathcal{D}$ ka funkciji $\omega^*(\cdot)$ u odnosu na koju važe sledeća tvrdjenja:

a/ $\omega^*(\cdot)\in C(\mathcal{D})$, a ako $H(\cdot)\in Lip\,(P_{r(x,y)}(\mathcal{D}))$, tada je $\omega^*(\cdot)\in Lip\,(\mathcal{D})$;

b/ $\omega^*(\cdot)$ je fiksna tačka operatora Φ^2

c/ $\omega^*(\cdot)$ je funkcija vrednosti igre $\Gamma^2(\mathcal{D})$ i sledi da je granica niza približenja/1.5.5/ista za sva početna približenja $\omega_0(\cdot)\in \mathcal{W}_-^2(\mathcal{D})$.

2.Niz strategija $\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$ koji odgovara nizu približenja /1.5.5/iz svakog početnog stanja $\omega_0(\cdot)\in \mathcal{W}_-^2(\mathcal{D})$ je maksimizirajući niz strategija begunca u igri $\Gamma^2(\mathcal{D})$.

Posledica 1. Za to da bi funkcija $\omega^*(\cdot)\in \mathcal{U}_-^2(\mathcal{D})$ bila funkcijom vrednosti igre $\Gamma^2(\mathcal{D})$ potrebno je i dovoljno da ona bude fiksnom tačkom operatora Φ_-^2.

Posledica 2. Neka niz približenja /1.5.5/ sa početnim približenjem $\omega_0(\cdot)\in \mathcal{U}_-^2(\mathcal{D})$ konvergira za konačan broj iteracija, tj. za neko $\tau^*\in\{0,1\}$ je:

$$\omega_n(\cdot)=\omega_{\tau^*}(\cdot),\quad n=\tau^*+1,\ \tau^*+2,\dots .$$

Tada strategija V_{τ^*} kao i svaka druga strategija V_n, $n>\tau^*$ iz niza strategija $\{V_n\}_{n=0}^{\infty}$, koji odgovara nizu približenja /1.5.5/ sa početnim približenjem $w_0(\cdot)$ je optimalna strategija begunca u igri $\Gamma^2(\mathcal{D})$.

Teorema 1.5.4 1. Za to da bi u igri $\Gamma^2(\mathcal{D})$ postojala optimalna strategija begunca neophodno je i dovoljno da bi niz približenja /1.5.5/ sa nekom početnim približenjem $\omega_0\in \mathcal{U}_-^2(\mathcal{D})$ konvergirao za konačan broj iteracija.

2. Ako niz približenja /1.5.5/ sa početnim približenjem $\omega_0(\cdot)\in \mathcal{U}_-^2(\mathcal{D})$ konvergira za konačan broj iteracija, tada će niz konvergirati za konačan broj iteracija i iz svakog početnog približenja iz skupa $\mathcal{U}_-^2(\mathcal{D})$. Osim toga ovaj broj iteracija nije veći od τ^*+1, gde je τ^* broj iteracija za koji konvergira niz približenja /1.5.5/ sa početnim približenjem $\omega_0(\cdot)\in \mathcal{U}_-^2(\mathcal{D})$.

§6. Drugi numerički metod približenja funkciji vrednosti igre gonjenja do hvatanja /konstraukcija minimizirajućeg niza strategija gonioca/

U ovom paragrafu razmatra se diferencijalna igra hvatanja. Ova igra preciznije odražava realne procese gonjenja od igre približenja u datom momentu vremena.

Osnovni rezultati ovog paragrafa sadržani su u teoremi 1.6.3, u nejnim dvema posledicama kao i u teoremama 1.6.4 i 1.6.5.

Prostor stanja igre $\Gamma^2(\mathcal{D})$ je oblika /1.1.9/ $\mathcal{D}=\mathcal{D}\delta$, $\delta>0$.

Operator $\Phi_+^2: C(\mathcal{D})\to C(\mathcal{D})$ za svaku funkciju $\omega(\cdot)\in C(\mathcal{D})$ odredjujemo sledećom jednačinom:

$$\Phi_+^2\circ\omega(x,y,t)=\min_{\tau\in[0,t]}\ \min_{\xi(\cdot)\in A^{\tau}_{(x)}}\ \max_{\eta(\cdot)\in A^{\tau}_{(y)}}\ \min\{\omega(\xi(\tau)),\ \eta(\tau),t-\tau),\ \min_{\theta\in[0,\tau]}H(\xi(\theta),\eta(\theta))\},\ (x,y,t)\in\mathcal{D}.\ \dots\ \dots\ (1.6.1)$$

Napomena 1.6.1 Oznaka Φ_+^2 važi i za operator koji je odredjen jednačinom/1.6.1/, ali koji dejstvuje iz $Lip(\mathcal{D})$ u $Lip(\mathcal{D})$.

Lema 1.6.1 Operator $\Phi_+^2 : C(\mathcal{D}) \to C(\mathcal{D})$ $(\Phi_+^2 : Lip(\mathcal{D}) \to Lip(\mathcal{D}))$ je odredjen korektno, tj. stvarno preslikava $C(\mathcal{D})$ $(Lip(\mathcal{D}))$ u sebe.

Lema 1.6.2 Operator $\Phi_+^2 : C(\mathcal{D}) \to C(\mathcal{D})$ $(\Phi_+^2 : Lip(\mathcal{D}) \to Lip(\mathcal{D}))$ je neprekidan.

Dokaz. Dovoljno je dokazati samo neprekidnost operatora $\Phi_+^2 : C(\mathcal{D}) \to C(\mathcal{D})$. Izaberimo proizvoljno $\omega_1(\cdot), \omega_2(\cdot) \in C(\mathcal{D})$ i $(x,y,t) \in \mathcal{D}$.
Ne umanjujući opštost moguće je smatrati da je

$$\Phi_+^2 \circ \omega_1(x,y,t) \geq \Phi_+^2 \circ \omega_2(x,y,t) \quad \ldots \ldots \quad (1.6.2)$$

Neka $\tau' \in [0,t]$, $\xi'(\cdot) = A^{\tau'}(x)$ zadovoljavaju relaciju:

$$\max_{\eta(\cdot) A^{\tau'}(y)} \min\{\omega_2(\xi'(\tau'), \eta(\tau'), t-\tau'), \min_{\theta \in [0,\tau']} H(\xi'(\theta), \eta(\theta))\} =$$
$$= \Phi_+^2 \circ \omega_2(x,y,t) \quad \ldots \ldots \quad (1.6.3)$$

a $\eta' \in A^{\tau'}(y)$ zadovoljava jednačinu:

$$\min\{\omega_1(\xi'(\tau'), \eta'(\tau'), t-\tau'), \min_{\theta \in [0,\tau']} (\xi'(\theta), \eta'(\theta))\} = \max_{\eta(\cdot) \in A^{\tau'}(y)} \min\{\omega_1(\xi'(\tau'), \eta(\tau'), t-\tau'),$$
$$\min_{\theta \in [0,\tau']} H(\xi'(\theta), \eta(\theta))\}. \quad \ldots \ldots \quad (1.6.4)$$

Iz /1.6.1/--/1.6.4/ sledi nejednačina:

$$|\Phi_+^2 \circ \omega_1(x,y,t) - \Phi_+^2 \circ \omega_2(x,y,t)| \leq \min\{\omega_1(\xi'(\tau'), \eta'(\tau'), t-\tau'),$$
$$\min_{\theta \in [0,\tau']} H(\xi'(\theta), \eta'(\theta))\} - \min\{\omega_2(\xi'(\tau'), \eta'(\tau'), t-\tau'),$$
$$\min_{\theta \in [0,\tau']} H(\xi'(\theta), \eta'(\theta))\}. \quad \ldots \ldots \quad (1.6.5)$$

Ali kao što je poznato:

$\min\{a,b\} = \frac{a+b}{2} - \frac{|a-b|}{2}$; $a, b \in R^1$, tada za $\forall\, a_1, b_1, a_2, b_2 \in R^1$ je:

$$\min\{a_1,b_1\} - \min\{a_2,b_2\} = \frac{a_1+b_1}{2} - \frac{a_2+b_2}{2} - \frac{|a_1-b_1|}{2} + \frac{|a_2-b_2|}{2} =$$
$$= \frac{a_1-a_2}{2} + \frac{b_1-b_2}{2} - \frac{|a_1-b_1|}{2} + \frac{|a_2-a_1-b_2+b_1+a_1-b_1|}{2} \leq \frac{a_1-a_2}{2} + \frac{b_1-b_2}{2} +$$
$$+ \frac{|a_1-a_2|}{2} + \frac{|b_1-b_2|}{2} \leq |a_1-a_2| + |b_1-b_2|, \text{ tj.}$$
$$\min\{a_1,b_1\} - \min\{a_2,b_2\} \leq |a_1-a_2| + |b_1-b_2| \quad \ldots \ldots \quad (1.6.6)$$

Sada iz/1.6.5/i /1.6.6/ sledi:

$$|\Phi_+^2 \circ \omega_1(x,y,t) - \Phi_+^2 \circ \omega_2(x,y,t)| \leq |\omega_1(\xi'(\tau'), \eta'(\tau'), t-\tau') -$$

$$- \omega_2(\xi'(\tau'), \eta'(\tau'), t-\tau')|$$

i tim pre je:

$$|\Phi_+^2 \circ \omega_1(x,y,t) - \Phi_+^2 \circ \omega_2(x,y,t)| \leq \mathcal{V}(\omega_1(\cdot) - \omega_2(\cdot)),$$

gde je $\mathcal{V}$ norma u $C(\mathcal{D})$. Iz poslednje nejednačine uzimajući u obzir proizvoljnost $(x,y,t) \in \mathcal{D}$ sledi da je:

$$\mathcal{V}(\Phi_+^2 \circ \omega_1(\cdot) - \Phi_+^2 \circ \omega_2(\cdot)) \leq \mathcal{V}(\omega_1(\cdot) - \omega_2(\cdot))$$

što i dokazuje lemu 1.6.2.

Lema 1.6.3 $\Phi_+^2 \circ \omega(\cdot) \leq \omega(\cdot)$ za svaku funkciju $\omega(\cdot) \in C(\mathcal{D})$ takvu da je:

$$\omega(x,y,t) \leq H(x,y)$$

za $\forall (x,y,t) \in \mathcal{D}$.

Definicija 1.6.1 Neka je funkcija w/./ definisana na prostoru stanja igre $\Gamma^2(\mathcal{D})$. Govorićemo da funkcija w/./pripada skupu $\mathcal{W}_+^2(\mathcal{D})$ ako je:

1/ $\omega(x,y,t) \leq H(x,y)$ za $\forall (x,y,t) \in \mathcal{D}$ i $\omega(x,y,0) = H(x,y)$ za $\forall (x,y,0) \in \mathcal{D}$

2/ $\omega(\cdot) \in C(\mathcal{D})$;

3/postoji $\mathcal{U}' \in \mathcal{G}$ tako da je:

a/ $\mathcal{K}^2(x,y,t|\mathcal{U}',V) \leq \omega(x,y,t)$ za $\forall V \in \mathcal{B}^0$ i $(x,y,t) \in \mathcal{D}^0$;

b/ $\min\{\omega(x(\tau,x|\mathcal{U}',V), y(\tau,y|\mathcal{U}',V), t-\tau), \min_{\theta \in [0,\tau]} H(x(\theta,x|\mathcal{U}',V), y(\theta,y|\mathcal{U}',V))\} \leq \omega(x,y,t)$,

za svako $V \in \mathcal{B}$, $(x,y,t) \in \mathcal{D}^0$ i $\tau \in [0,\tau']$ za neko $\tau' \in (0,t]$.

Napomena 1.6.2 Ako je $H(\cdot) \in Lip(P_2(x,y)(\mathcal{D}))$, tada uslov 2/definicije 1.6.1 zamenjujemo uslovom 2'/ $\omega(\cdot) \in Lip(\mathcal{D})$. Oznaka $\mathcal{W}_+^2(\mathcal{D})$ ostaje i za skup funkcija koji zadovoljava 1/, 2'/, 3/.

Napomena 1.6.3 Neke razlike uslova 1/ u definiciji 1.6.1 od odgovarajućeg uslova u definiciji 1.5.1 uslovljene su time da je tamo nejednačina $\omega(x,y,t) \leq H(x,y)$, $(x,y,t) \in \mathcal{D}$ bila uvek ispunjena kao posledica uslova 3/. Na kraju ova razlika kao i svojstvo nesimetričnosti medju nejednačinama dela b/iz uslova 3/definicije 1.5.1 i definicije 1.6.1 uslovljeni su specifikom funkcionala kvaliteta u igri $\Gamma^2(\mathcal{D})$.

Lema 1.6.4 $\mathcal{W}_+^2(\mathcal{D}) \neq \phi$.
Posebno skupu $\mathcal{W}_+^2(\mathcal{D})$ pripada funkcija:

$$\omega_+^2(x,y,t) = \min_{\xi(\cdot)\in A^t(x)} \max_{\eta(\cdot)\in A^t_{(y)}} \min_{\theta\in[0,t]} H(\xi(\theta),\eta(\theta)) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (1.6.7)$$

Teorema 1.6.1 Operator Φ_+^2 preslikava $\mathcal{W}_+^2(\mathcal{D})$ u sebe.

Dokaz. Uzmimo proizvoljnu funkciju $\omega(\cdot)\in \mathcal{W}_+^2(\mathcal{D})$ i pokažimo da za funkcije $\Phi_+^2 o\,\omega(\cdot)$ važe svi uslovi definicije 1.6.1 što će potvrditi tačnost teoreme.

Za sve $(x,y,t)\in\mathcal{D}$ saglasno /1.6.1/ sledi:

$$\Phi_+^2 o\,\omega(x,y,t) \leq \min\{\omega(x,y,t), H(x,y)\} \leq H(x,y).$$

U isto vreme pošto je $\omega(\cdot)\in \mathcal{W}_+^2(\mathcal{D})$ tada je:

$$\omega(x,y,0) = H(x,y) \quad za \ \forall (x,y,0)\in\mathcal{D}.$$

Na osnovu /1.6.1/ za sve $(x,y,0)\in\mathcal{D}$ sledi:

$$\Phi_+^2 o\,\omega(x,y,0) = \min\{\omega(x,y,0), H(x,y)\} = H(x,y).$$

Sledi da za funkcije $\Phi_+^2 o\,\omega(\cdot)$ važi uslov 1/ definicije 1.6.1. Pošto je $\omega(\cdot)\in \mathcal{W}_+^2$ sledi da je $\omega(\cdot)\in C(\mathcal{D})$ pa je na osnovu leme 1.6.1 $\Phi_+^2 o\,\omega(\cdot)\in C(\mathcal{D})$. Znači za funkcije $\Phi_+^2 o\,\omega(\cdot)$ ispunjen je uslov 2/ definicije 1.6.1. Analogno se ustanovljuje da ako je $\omega(\cdot)\in Lip(\mathcal{D})$ tada i $\Phi_+^2 o\,\omega(\cdot)\in Lip(\mathcal{D})$, tj. tada za funkcije $\Phi_+^2 o\,\omega(\cdot)$ važi uslov 2'/modifikovane definicije 1.6.1.

Neka strategija $\pi'\in\mathcal{G}$, $\pi' = (a^q,\dots,a^0)$ poseduje u odnosu na funkcije $w/./$ svojstva iz uslova 3/definicije 1.6.1, tada strategiju $\overline{\pi}'\in\mathcal{G}$ koja poseduje analogna svojstva u odnosu na funkciju $\Phi_+^2 o\,\omega(\cdot)$, tražićemo oblika $\overline{\pi} = (\bar{a}^{q+1},\dots,\bar{a}^0)$, $\bar{a}^i = a^i$, $i\in[0,q]$ gde preslikavanje $\bar{a}^{q+1}$ gradimo niže navedenim načinom.

Neka $(x,y,t)\in\mathcal{D}^0$. Nadjimo $\tau'\in(0,t]$ i $\xi'(\cdot)\in A^{\tau'}(x)$ iz uslova:

$$\Phi_+^2 o\,\omega(x,y,t) = \max_{\eta(\cdot)\in A^{\tau'}(y)} \min\{\omega(\xi'(\tau'),\eta'(\tau'),t-\tau'), \min_{\theta\in[0,\tau']} H(\xi'(\theta),\eta(\theta))\} \dots (1.6.8)$$

Možemo uvek τ' da izaberemo pozitivno, jer za funkciju $w/./$ važi uslov 3/definicije 1.6.1/deo pod b//. Neka je dopustivo upravljanje $\tilde{u}(\cdot)\in\mathcal{U}^{\tau'}$ takvo da je $\xi'(\cdot) = x(\cdot,x,\tilde{u}(\cdot))$. Stavimo da je:

$$u'(\cdot) = \begin{cases} \tilde{u}(\cdot), & ako \ \tilde{u}(\cdot)\in\mathcal{U}^{\tau'} \ i \ \tau' = t \\ \tilde{u}(\cdot)\big|_{[0,\tau']}, & ako \ \tilde{u}(\cdot)\in\mathcal{U}^{\tau'} \ i \ \tau'\in(0,t), \end{cases}$$

gde je $\tilde{u}(\cdot)\big|_{[0,\tau')}$ suženje dopustivog upravljanja $\tilde{u}(\cdot)$ na poluinterval $[0,\tau')$. Sada smatramo da je: $\bar{a}^{\nu+1}(x,y,t)=\tilde{u}'(\cdot)$.

Pokažimo da konstruisana strategija $\bar{u}'\in\mathcal{G}$ poseduje tražena svojstva u odnosu na funkciju $\Phi_+^2\circ\omega(\cdot)$. Pokažimo, najpre, da strategija $\bar{u}'$ obezbedjuje jednačinu pod a/ iz uslova 3/ definicije 1.6.1, gde umesto funkcije w/./ treba staviti funkciju $\Phi_+^2\circ\omega(\cdot)$.

Fiksirajmo proizvoljnu $V\in\mathcal{B}^0$, $V=\ell^0$; $(x,y,t)\in\mathcal{D}^0$. Neka su $\tau'\in(0,t]$ i $\xi'(\cdot)\in A^{\tau'}(x)$ te veličine, koje posredstvom /1.6.8/ odredjuju dopustiva upravljanja $u'(\cdot)=\bar{a}^{\nu+1}(x,y,t)$. Neka je dalje $v(\cdot)=\ell^0(x,y,t)$, $v(\cdot)\in\mathcal{V}^{\mathcal{U}}$ i neka je $\tilde{\eta}(\cdot)=y(\cdot,y,v(\cdot))$. Razmotrimo dva slučaja: $\tau'=t$ i $\tau'\in(0,t)$.

U slučaju $\tau'=t$ sledi:

$$\mathcal{K}^2(x,y,t\,|\,\bar{u}',V)=\min_{\theta\in[0,t]} H(\xi'(\theta),\tilde{\eta}(\theta))$$

što sa uključenjem $\omega(\cdot)\in\mathcal{U}_+^{2}(\mathcal{D})$ daje jednačinu:

$$\mathcal{K}^2(x,y,t\,|\,\bar{u}',V)=\min\{\omega(\xi'(t),\tilde{\eta}(t),0),\ \min_{\theta\in[0,t]} H(\xi'(\theta),\tilde{\eta}(\theta))\}.$$

Uzimajući u obzir izbor $\tau'=t$ i $\xi'(\cdot)\in A^t(x)$ sledi:

$$\mathcal{K}^2(x,y,t\,|\,\bar{u}',V)\le \max_{\eta(\cdot)\in A^t(y)} \min\{\omega(\xi'(t),\eta(t),0),\ \min_{\theta\in[0,t]} H(\xi'(\theta),\eta(\theta))\}=$$

$$=\Phi_+^2\circ\omega(x,y,t).$$

Na taj način za $\tau'=t$ tražena nejednačina je ustanovljena.

Neka je $\tau'\in(0,t)$. Tada slično dokazu teoreme 1.2.1 postoji takva strategija $\tilde{V}\in\mathcal{B}^0$, $\tilde{V}\in\ell^0$ da je:

$$\mathcal{K}^2(x,y,t\,|\,\bar{u}',\tilde{V})=\min\{\mathcal{K}^2(\xi'(\tau'),\tilde{\eta}(\tau'),t-\tau'\,|\,u',\tilde{V}),\ \min_{\theta\in[0,\tau']} H(\xi'(\theta),\tilde{\eta}(\theta))\}.$$

Uzimajući u obzir svojstvo strategije u' u odnosu na funkciju w/./, a takodje /1.6.8/ sledi:

$$\mathcal{K}^2(x,y,t\,|\,u',\tilde{V})\le\min\{\omega(\xi'(\tau'),\tilde{\eta}(\tau'),t-\tau')\ \min_{\theta\in[0,\tau']} H(\xi'(\theta),\tilde{\eta}(\theta))\}\le$$

$$\le\max_{\eta(\cdot)\in A^{\tau'}(y)} \min\{\omega(\xi'(\tau'),\eta(\tau'),t-\tau'),\ \min H(\xi'(\theta),\eta(\theta))\}=\Phi_+^2\circ\omega(x,y,t).$$

Traženu nejednačinu ustanovili smo i za $\tau'\in(0,t)$.

Pokazaćemo da strategija $\bar{u}'$ obezbedjuje takodje nejednačinu pod b/ uslova 3/ definicije 1.6.1 u odnosu na funkciju $\Phi_+^2\circ\omega(\cdot)$.

Ranije proizvoljno izabrane $V\in\mathcal{B}$ i $(x,y,t)\in\mathcal{D}^0$ smatramo prethodnim. Takodje prethodni smisao imaju i $\tau'\in(0,t]$, $\xi'(\cdot)\in A^{\tau'}(x)$. Neka su:

$\bar{\xi}(\tilde{\tau})=x(\tilde{\tau},x|\bar{\mathcal{U}}';V),\ \bar{\eta}(\tau)=y(\tau,y|\bar{\mathcal{U}}';V),\ \tau\in[0,t]$ i $\bar{\xi}(\tau)=\xi'(\tau),\ \tau\in[0,\tau']$.

Izaberimo proizvoljno $\bar{\tau}\in[0,\tau']$ i neka je $\tau^{o}\in[0,t-\bar{\tau}]$ takvo da je $\tau^{o}+\bar{\tau}=\tau'$. Tada važe sledeće relacije:

$$\min\{\Phi_{+}^{2}\circ\omega(\bar{\xi}(\bar{\tau}),\bar{\eta}(\bar{\tau}),t-\bar{\tau}),\ \min_{\theta\in[0,\bar{\tau}]}H(\bar{\xi}(\theta),\bar{\eta}(\theta))\}=$$

$$=\min\{\Phi_{+}^{2}\circ\omega(\xi'(\bar{\tau}),\bar{\eta}(\bar{\tau}),t-\bar{\tau}),\ \min_{\theta\in[0,\bar{\tau}]}H(\xi'(\theta),\bar{\eta}(\theta))\}=$$

$$=\min\Big\{\min_{\tau\in[0,t-\bar{\tau}]}\ \min_{\xi(\cdot)\in A^{\tau}(\xi'(\bar{\tau}))}\ \max_{\eta(\cdot)\in A^{\tau}(\bar{\eta}(\bar{\tau}))}\ \min\{\omega(\xi(\tau),\eta(\tau),t-\bar{\tau}-\tau),$$

$$\min_{\theta\in[0,\tau]}H(\xi(\theta),\eta(\theta))\},\ \min_{\theta\in[0,\bar{\tau}]}H(\xi'(\theta),\bar{\eta}(\theta))\Big\}\leq\max_{\eta(\cdot)\in A^{\tau^{o}}(\bar{\eta}(\bar{\tau}))}$$

$$\min\{\omega(\xi'(\tau'),\eta(\tau^{o}),t-\tau'),\ \min_{\theta\in[0,\tau^{o}]}H(\xi'(\theta+\bar{\tau}),\eta(\theta)),\ \min_{\theta\in[0,\bar{\tau}]}H(\xi'(\theta)\bar{\eta}(\theta))\}\leq$$

$$\leq\max_{\eta(\cdot)\in A^{\tau'}(y)}\ \min\{\omega(\xi'(\tau'),\eta(\tau'),t-\tau'),\ \min_{\theta\in[0,\tau']}H(\xi'(\theta),\eta(\theta))\}.$$

Iz navedenih relacija uzimajući u obzir/1.6.8/ sledi da je:

$$\min\{\Phi_{+}^{2}\circ\omega(\bar{\xi}(\bar{\tau}),\bar{\eta}(\bar{\tau}),t-\bar{\tau}),\ \min_{\theta\in[0,\bar{\tau}]}H(\bar{\xi}(\theta),\bar{\eta}(\theta))\}\leq\Phi_{+}^{2}\circ\omega(x,y,t).$$

Ali pošto su:

$$\bar{\xi}(\tau)=x(\tau,x|\bar{\mathcal{U}}';V),\ \bar{\eta}(\tau)=y(\tau,y|\bar{\mathcal{U}}';V),\ \tau\in[0,t],$$

a $V\in\mathcal{B}$ i $(x,y,t)\in\mathcal{D}^{o}$ bili su izabrani proizvoljno sledi da je takodje izabrano proizvoljno i $\bar{\tau}\in[0,\tau']$ gde je $\tau'\in(0,t]$, tada poslednja nejednačina potvrdjuje da strategija $\bar{\mathcal{U}}'$ obezbedjuje nejednačinu pod b/uslova 3/definicije 1.6.1. Teorema 1.6.1 je dokazana.

Teorema 1.6.2 Neka funkcija $\omega'(\cdot)$ zadovoljava sledeće uslove:

1/ $\omega'(\cdot)\in C(\mathcal{D})$

2/ $\omega'(x,y,0)=H(x,y)$ za $\forall(x,y,0)\in\mathcal{D}$;

3/ $\omega'(\cdot)$ je fiksna tačka operatora Φ_{+}^{2}, tj. $\omega'(\cdot)$ zadovoljava jednačinu:

$$\Phi_{+}^{2}\circ\omega(\cdot)=\omega(\cdot)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (1.6.9)$$

Tada za $\forall (x,y,t)\in \operatorname{int}(\mathcal{D})$ i $\varepsilon>0$ je moguće izabrati takvu strategiju $V_\varepsilon\in\mathcal{B}$ za svako $\mathcal{U}\in\mathcal{G}^\circ$, da je $\mathcal{K}^2(x,y,t\,|\,\mathcal{U},V_\varepsilon)\geq\omega'(x,y,t)-\varepsilon$ . . . . (1.6.10)

Dokaz. Fiksirajmo proizvoljne $(x,y,t)\in\operatorname{int}(\mathcal{D})$ i $\varepsilon>0$. Izaberimo $r>0$ tako da je $\mathcal{O}_r(x,y,t)\subset\mathcal{D}$, gde je $\mathcal{O}_r(x,y,t)$ zatvorena ili otvorena lopta sa centrom u tački /x, y, t/ i poluprečnika r.

Biramo $\tau(\varepsilon)\in(0,t)$ iz uslova:

a/ t se deli na celobrojne $\tau(\varepsilon)$;

b/ $(x,y(\tau(\varepsilon),y,v(\cdot)),t-\tau(\varepsilon))\in\mathcal{O}_r(x,y,t)$ za svako dopustivo upravljanje v/./;

c/ $\omega'(x,y,t)-\frac{\varepsilon}{2}\leq\omega'(x,y(\tau(\varepsilon),y,v(\cdot)),t-\tau(\varepsilon))$ za svako dopustivo upravljanje v/./;

d/
$$\min_{i\in[0;n(\varepsilon)]} H(x(i\tau(\varepsilon),x,u(\cdot)),y((i+1)\tau(\varepsilon),y,v(\cdot))-\frac{\varepsilon}{2}\leq$$
$$\leq\min_{\tau\in[0,t]} H(x(\tau,x,u(\cdot)),y(\tau,y,v(\cdot))),$$

za sva dopustiva upravljanja u/./, v/./. Ovde je: $n(\varepsilon)=\frac{t}{\tau(\varepsilon)}-1$.

Slično dokazu teoreme 1.2.2 i ovde se može proveriti da je takav izbor $\tau(\varepsilon)$ moguć.

Traženu strategiju $V_\varepsilon\in\mathcal{B}$ gradimo oblika:

$$V_\varepsilon=(\ell_\varepsilon^{n(\varepsilon)},\dots,\ell_\varepsilon^{0}),\ n(\varepsilon)=\frac{\tau}{\tau(\varepsilon)}-1.$$

Neka je $(x',y',t')\in\mathcal{D}^\circ$, a $(x',\tilde{y},t'-\tau(\varepsilon))\in\mathcal{D}$ za $\forall\,\tilde{y}\in C^{\tau(\varepsilon)}(y')$. Nadjimo $y''\in C^{\tau(\varepsilon)}(y)$ iz uslova:

$$\omega'(x',y'',t-\tau(\varepsilon))=\max_{\tilde{y}\in C^{\tau(\varepsilon)}(y')}\omega'(x',\tilde{y},t'-\tau(\varepsilon))\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (1.6.11)$$

Smatramo da je $v''(\cdot)\in V^{\tau(\varepsilon)}$ takvo da je $y''=y(\tau(\varepsilon),y',v''(\cdot))$. Suženje dopustivog upravljanja $v''(\cdot)$ na poluinterval $[0,\tau(\varepsilon))$ označimo sa $v'(\cdot)$

Ako je $t'>\tau(\varepsilon)$ tada za $i\in[0;n(\varepsilon)]$, $i\geq1$ /skup takvih indeksa u slučaju $n(\varepsilon)=0$ može biti prazan/ stavimo $\ell_\varepsilon^i(x',y',t')=v'(\cdot)$.

Dalje ako je $t'=\tau(\varepsilon)$ tada stavimo: $\ell_\varepsilon^0(x',y',t')=v''(\cdot)$

Napred navedenim načinom odredjujemo preslikavanje ℓ_ε^i, $i\in[0;n(\varepsilon)]$, $i\geq1$ na skupu svih tih $(x',y',t')\in\mathcal{D}^\circ$ za koje je $(x',\tilde{y},t'-\tau(\varepsilon))\in\mathcal{D}^\circ$ za $\forall\,\tilde{y}\in C^{\tau(\varepsilon)}(y')$, a preslikavanje ℓ_ε^0 odredjujemo napred navedenim načinom na skupu svih tih $(x',y',t')\in\mathcal{D}^\circ$ za koje je $(x',\tilde{y},t-\tau(\varepsilon))\in\mathcal{D}\setminus\mathcal{D}^\circ$ za $\forall\,\tilde{y}\in C^{\tau(\varepsilon)}(y')$. Na skupu svih ostalih tačaka iz skupa $\mathcal{D}^\circ$ odgovarajuća preslikavanja odredićemo proizvoljno, usaglašavajući samo sa definicijom 1.1.1.

Pokazaćemo da za ranije izabrane $(x,y,t)\in\mathcal{D}$ i $\varepsilon>0$ izgradjena strategija V_ε obezbedjuje nejednačinu /1.6.10/ za svaku $\mathcal{U}\in\mathcal{G}^\circ$.

Uzmimo proizvoljnu strategiju $\mathcal{U}\in\mathcal{G}^0$. Neka je: $x(\cdot)=x(\cdot,x|\mathcal{U},V_\varepsilon)$, $y(\cdot)=y(\cdot,y|\mathcal{U},V_\varepsilon)$. Tada uslov b/ izbora $\tau(\varepsilon)$ uslova teoreme i način gradjenja strategije V_ε posebno jednačina/1.6.1/garantuju ispravnost sledećih relacija, gde ne umanjujući opštost smatramo da $n(\varepsilon)$ postoji i veće je od nule:

$$
\begin{aligned}
&\omega'(x,y(\tau(\varepsilon)),t-\tau(\varepsilon)) = \min_{\tau\in[0,t-\tau(\varepsilon)]}\ \min_{\xi(\cdot)\in A^{\tau}(x)}\ \max_{\eta(\cdot)\in A^{\tau}(y(\tau(\varepsilon)))}\\
&\min\{\omega'(\xi(\tau),\eta(\tau),t-\tau(\varepsilon)-\tau),\ \min_{\theta\in[0,\tau]} H(\xi(\theta),\eta(\theta))\}\le\\
&\le \max_{\eta(\cdot)\in A^{\tau(\varepsilon)}(y(\tau(\varepsilon)))} \min\{\omega'(x(\tau(\varepsilon)),\eta(\tau(\varepsilon)),t-2\tau(\varepsilon)),\\
&,\min_{\theta\in[0,\tau(\varepsilon)]} H(x(\theta),\eta(\theta))\}\le \max_{\eta(\cdot)\in A^{\tau(\varepsilon)}(y(\tau(\varepsilon)))} \min\{\omega'(x(\tau(\varepsilon)),\\
&,\eta(\tau(\varepsilon)),t-2\tau(\varepsilon)),H(x,y(\tau(\varepsilon)))\}=\\
&=\min\Big\{\max_{\tilde{y}\in C^{\tau(\varepsilon)}(y(\tau(\varepsilon)))}\omega'(x(\tau(\varepsilon)),\tilde{y},t-2\tau(\varepsilon)),H(x,y(\tau(\varepsilon)))\Big\}=\\
&=\min\{\omega'(x(\tau(\varepsilon)),y(2\tau(\varepsilon)),t-2\tau(\varepsilon)),H(x,y(\tau(\varepsilon)))\}=\\
&=\min\Big\{\min_{\tau\in[0,t-2\tau(\varepsilon)]}\ \min_{\xi(\cdot)\in A^{\tau}(x(\tau(\varepsilon)))}\ \max_{\eta(\cdot)\in A^{\tau}(y(2\cdot\tau(\varepsilon)))}\\
&\min\{\omega'(\xi(\tau),\eta(\tau),t-2\tau(\varepsilon)-\tau),\min H(\xi(\theta),\eta(\theta))\},H(x,y(\tau(\varepsilon)))\Big\}\le\\
&\le\min\{\min\{\omega'(x(2\tau(\varepsilon)),y(3\tau(\varepsilon)),t-3\tau(\varepsilon)),H(x(\tau(\varepsilon)),y(2\tau(\varepsilon)))\},\\
&,H(x,y(\tau(\varepsilon)))\}=\min\{\omega'(x(2\tau(\varepsilon)),y(3\tau(\varepsilon)),t-3\tau(\varepsilon)),\\
&,\min H(x(i\tau(\varepsilon))\,y((i+1)\tau(\varepsilon)))\}\le\dots\le\\
&\le\min\{\omega'(x(n(\varepsilon)\cdot\tau(\varepsilon)),y((n(\varepsilon)+1)\tau(\varepsilon)),t-(n(\varepsilon)+1)\tau(\varepsilon)),\min_{i\in[0;n(\varepsilon)-1]}\\
&H(x(i\cdot\tau(\varepsilon)),y((i+1)\tau(\varepsilon)))\}=\min_{i\in[0;n(\varepsilon)]}H(x(i\cdot\tau(\varepsilon)),y((i+1)\cdot\tau(\varepsilon))).
\end{aligned}
$$

Iz navedenih relacija sledi da je:

$$\omega'(x,y(\tau(\varepsilon)),t-\tau(\varepsilon))\le\min_{i\in[0;n(\varepsilon)]}H(x(i\cdot\tau(\varepsilon)),y((i+1)\cdot\tau(\varepsilon))).$$

Odavde i iz uslova c/ i d/ izbora $\tau(\varepsilon)$ sledi:

$$\omega'(x,y,t)-\varepsilon\le\min_{\tau\in[0,t]}H(x(\tau),y(\tau)).$$

Ali kako je: $x(\cdot)=x(\cdot,x|\mathcal{U},V_\varepsilon)$, $y(\cdot)=y(\cdot,y|\mathcal{U},V_\varepsilon)$, tada poslednja nejednačina je ekvivalentna nejednačini/1.6.10/.Teorema je dokazana

Uzmimo proizvoljnu funkciju $\omega_0(\cdot)\in \mathcal{U}_+^{2}(\mathcal{D})$ i fiksirajmo strategiju $\mathcal{U}_0\in \mathcal{G}$,postojanje i svojstva koje u odnosu na funkciju $\omega_0(\cdot)$ su garantovani uslovom 3/ definicije 1.6.1.Koristeći funkciju $\omega_0(\cdot)$ u svojstvu početnog približenja rešenju jednačine /1.6.9/ gradićemo sledeća približenja rešenju ove jednačine:

$$\omega_n(\cdot)=\Phi_+^2\circ\omega_{n-1}(\cdot),\quad n=1,2,\cdots, \qquad (1.6.12)$$

Po teoremi 1.6.1 je $\omega_n(\cdot)\in \mathcal{W}_+^{2}(\mathcal{D})$ za $\forall n=1,2,\cdots$, a na osnovu leme 1.6.3 sledi:

$$\omega_0(\cdot)\geq\omega_1(\cdot)\geq\ldots\geq\omega_n(\cdot)\geq\ldots \qquad (1.6.13)$$

Konstruišimo niz strategija $\{\mathcal{U}_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\mathcal{U}_n\in\mathcal{G}$, $n=0,1,\ldots$,gde je $\mathcal{U}_0$ od ranije izabrana strategija, a svaka od strategija $\mathcal{U}_n$, $n=1,2,\cdots$ gradi se po strategiji $\mathcal{U}_{n-1}$ i po približenju $\omega_{n-1}(\cdot)$.Isto kao i pri dokazu teoreme 1.6.1 strategija $\overline{\mathcal{U}}'$ gradila se po strategiji $\mathcal{U}'$ i po funkciji $\omega(\cdot)$ .U daljem konstruisanju po navedenom pravilu niz strategija $\{\mathcal{U}_n\}_{n=0}^{\infty}$ nazvaćemo nizom strategija koji odgovara nizu približenja /1.6.12/ sa početnim približenjem $w_0/\cdot/$.

<u>Teorema 1.6.3</u> 1.Za svako početno približenje $\omega_0(\cdot)\in\mathcal{W}_+^{2}(\mathcal{D})$ niz približenja /1.6.12/konvergira ravnomerno na $\mathcal{D}$ ka funkciji $\omega^*(\cdot)$, za koju važe sledeća tvrdjenja:

a/ $\omega^*(\cdot)\in C(\mathcal{D})$, ako je $H(\cdot)\in Lip(\rho_2(x,y)(\mathcal{D}))$ tada: $\omega^*(\cdot)\in Lip(\mathcal{D})$;

b/ $\omega^*(\cdot)$ je nepokretna tačka operatora Φ_+^2 ;

c/ $\omega^*(\cdot)$ je funkcija vrednosti igre $\Gamma^2(\mathcal{D})$ i sledi da je granica niza približenja /1.6.12/ista za sva početna približenja $\omega_0(\cdot)\in\mathcal{W}_+^{2}(\mathcal{D})$

2.Niz strategija $\{\mathcal{U}_n\}_{n=0}^{\infty}$ koji odgovara nizu približenja /1.6.12/ sa bilo kojim početnim približenjem $\omega_0(\cdot)\in\mathcal{W}_+^{2}(\mathcal{D})$ je minimizirajući niz strategija gonioca u igri $\Gamma^2(\mathcal{D})$.

Dokaz.Ako bude ustanovljena ravnomerna konvergencija niza približenja /1.6.12/sa ma kojim početnim približenjem $\omega_0(\cdot)\in\mathcal{W}_+^{2}(\mathcal{D})$, tada slično dokazu teoreme 1.2.3 sva ostala tvrdjenja teoreme 1.6.3 biće ne složene posledice ovog svojstva odgovarajućeg niza približenja leme 1.6.2, teoreme 1.6.1 i teoreme 1.6.2.Zato ćemo se zadržati samo na dokazu ravnomerne konvergencije nizovskih približenja /1.6.12/sa proizvoljnim početnim približenjem $\omega_0(\cdot)\in\mathcal{W}_+^{2}(\mathcal{D})$ koje sada smatramo fiksiranim.

Uzimajući u obzir /1.6.13/za dokaz ravnomerne konvergencije niza $\{\omega_n(\cdot)\}_{n=0}^{\infty}$, dobijenog odgovarajućim nizom približenja, dovoljno je dokazati da je on ravnomerno ograničen i ravnomerno neprekidan.

Pošto niz $\{\omega_n(\cdot)\}_{n=0}^{\infty}$ ne raste na osnovu /1.6.13/ i $\omega_0(\cdot)\in C(\mathcal{D})$ tada za $\forall\, n=0,1,2,\dots$ i $(x,y,t)\in\mathcal{D}$ imamo:

$$\omega_n(x,y,t)\le\max_{(x',y',t')\in\mathcal{D}}\omega_0(x',y',t')=\mathcal{M}_1<+\infty.$$

Na osnovu definicije funkcije dobitka u igri $\Gamma^2(\mathcal{D})$ i svojstva strategija iz niza $\{\mathcal{U}_n\}_{n=0}^{\infty}$, koji odgovara nizu približenja $\{\omega_n(\cdot)\}_{n=0}^{\infty}$ za $\forall\, n=0,1\dots,$ $V\in\mathcal{B}$ i $(x,y,t)\in\mathcal{D}^0$ imamo:

$$-\infty<\mathcal{M}_2=\min_{(x',y')\in P_2(x,y)(\mathcal{D})}H(x',y')\le\varkappa^2(x,y,t\,|\,\mathcal{U}_n,V)\le\omega_n(x,y,t).$$

Odatle i koristeći $\omega_n(\cdot)\in C(\mathcal{D})$, $n=0,1,\dots,$, sledi da za $\forall\, n=0,1,2,\dots$ i $(x,y,t)\in\mathcal{D}$ važi nejednačina:

$$\omega_n(x,y,t)\ge\mathcal{M}_2>-\infty.$$

Na taj način je:

$$|\omega_n(x,y,t)|\le\max\{|\mathcal{M}_1|,|\mathcal{M}_2|\},$$

za $\forall\, n=0,1,2,\dots$ i $(x,y,t)\in\mathcal{D}$. Znači niz $\{\omega_n(\cdot)\}_{n=0}^{\infty}$ je ravnomerno ograničen.

Za dokaz ravnomerne neprekidnosti niza $\{\omega_n(\cdot)\}_{n=0}^{\infty}$ uzećemo proizvoljne $(x'',y'',t''),(x',y',t')\in\mathcal{D}$ i za $\forall\, n=0,1,\dots$ stavimo:

$$\Delta_n=\omega_n(x'',y'',t'')-\omega_n(x',y',t')\quad\dots\dots\dots\quad(1.6.14)$$

Navešćemo ocene veličine Δ_n, $n=1,2,\dots$ odozgo i odozdo. Po konstrukciji niza $\{\omega_n(\cdot)\}_{n=0}^{\infty}$ je:

$$\Delta_n=\Phi_+^2\circ\omega_{n-1}(x'',y'',t'')-\Phi_+^2\circ\omega_{n-1}(x',y',t')\quad\dots\dots\dots\quad(1.6.15)$$

za svako $n\ge 1$.

Uzmimo proizvoljno $n\ge 1$ i izaberimo $\tau'_{+n_1}\in[0,t']$, $\zeta'_{+n_1}(\cdot)\in A^{\tau'_{+n_1}}(x')$ i dopustivo upravljanje $u'_{+n_1}(\cdot)\in\mathcal{U}^{\tau'_{+n_1}}$ iz uslova $\zeta'_{+n_1}(\cdot)=x(\cdot,x',u'_{+n_1}(\cdot))$ tako da je:

$$\max_{\eta(\cdot)\in A^{\tau'_{+n_1}}(y)}\min\Big\{\omega_{n-1}(\zeta'_{+n_1}(\tau'_{+n_1}),\eta(\tau'_{+n_1}),$$

$$,t'-\tau'_{+n_1}),\ \min_{\theta\in[0,\tau'_{+n_1}]}H(\zeta'_{+n_1}(\theta),\eta(\theta))\Big\}=\Phi_+^2\circ\omega_{n-1}(x',y',t').$$

Zatim stavimo: $\zeta''_{+n_1}(\cdot)=x(\cdot,x'',u'_{+n_1}(\cdot))$, $\zeta''_{+n_1}(\cdot)\in A^{\theta''_{+n_1}}(x'')$, , gde je $\theta''_{+n_1}=\min\{t'',\tau'_{+n_1}\}$ tada je: $\Delta_n\le\max_{\eta(\cdot)\in A^{\theta''_{+n_1}}(y'')}\min\{\omega_{n-1}(\zeta''_{+n_1}(\theta''_{+n_1}),$

$\eta(\theta''_{+n_1}),$

$$, t''-\theta_{+n_1}), \min_{\theta\in[0,\theta''_{+n_1}]} H(\zeta''_{+n_1}(\theta),\eta(\theta))\} - \max_{\eta(\cdot)\in A^{\bar\tau'_{+n_1}}} \min\{\omega_{n-1}(\zeta'_{+n_1}(\bar\tau'_{+n_1}),\eta(\bar\tau'_{+n_1}),$$

$$, t'-\bar\tau'_{+n_1}) \min_{\theta\in[0,\bar\tau'_{+n_1}]} H(\zeta'_{+n_1}(\theta),\eta(\theta))\} . \quad \cdots \quad (1.6.16)$$

Izaberimo sada $\eta''(\cdot)=A^{\theta''_{+n_1}}(y'')$ i dopustivo upravljanje $v''_{+n_1}(\cdot)\in V^{\bar\tau'_{+n_1}}$ iz uslova $\eta''_{+n_1}(\cdot)=y(\cdot,y'',v''_{+n_1}(\cdot))$ tako da je:

$$\min\{\omega_{n-1}(\zeta''_{+n_1}(\theta''_{+n_1}),\eta''_{+n_1}(\theta''_{+n_1}),t''-\theta''_{+n_1}), \min_{\theta\in[0,\theta''_{+n_1}]} H(\zeta''_{+n_1}(\theta),\eta''_{+n_1}(\theta))\}=$$

$$=\max_{\eta(\cdot)\in A^{\theta''_{+n_1}}(y'')} \min\{\omega_{n-1}(\zeta''_{+n_1}(\theta''_{+n_1}),\eta(\theta''_{+n_1}),t-\theta''_{+n_1}), \min_{\theta\in[0,\theta_{+n_1}]}$$

$$H(\zeta''_{+n_1}(\theta),\eta(\theta))\}.$$

Zatim stavimo: $\eta'_{+n_1}(\cdot)=y(\cdot,y',v''_{+n_1}(\cdot))$, $\eta'_{+n_1}(\cdot)\in A^{\tau'}_{+n_1}(y')$ .Na osnovu /1.6.16/sledi ocena:

$$\Delta_n\le \min\{\omega_{n-1}(\zeta''_{+n_1}(\theta''_{+n_1}),\eta''_{+n_1}(\theta''_{+n_1}),t''-\theta''_{+n_1}),$$

$$\min_{\theta\in[0,\theta''_{+n_1}]} H(\zeta''_{+n_1}(\theta),\eta''_{+n_1}(\theta))\} - \min\{\omega_{n-1}(\zeta'_{+n_1}(\tau'_{+n_1}),$$

$$\eta'_{+n_1}(\bar\tau'_{+n_1}),t'-\bar\tau'_{+n_1}), \min_{\theta\in[0,\bar\tau'_{+n_1}]} H(\zeta'_{+n_1}(\theta),\eta'_{+n_1}(\theta))\} . \quad \cdots \quad (1.6.17)$$

Dalje ako je n-1≥ 1, tada u odnosu na veličine: $\omega_{n-1}(\zeta''_{+n_1}(\theta''_{+n_1})$, $,\eta''_{+n_1}(\theta''_{+n_1}),t''-\theta''_{+n_1}),\omega_{n-1}(\zeta'_{+n_1}(\bar\tau'_{+n_1}),\eta'_{+n_1}(\bar\tau'_{+n_1}),t'-\bar\tau'_{+n_1})$, uzimajući u obzir konstrukciju niza $\{\omega_n(\cdot)\}_{n=0}^{\infty}$, možemo ponoviti prethodna rasudjivanja i td.Na kraju sa n koraka dobiće se sledeća ocena:

$$\Delta_n\le \min\{\omega_0(\zeta''_{+n}(\theta''_{+n}),\eta''_{+n}(\theta''_{+n}),t''-\theta''_{+n}),$$

$$\min_{\theta\in[0,\theta''_{+n}]} H(\zeta''_{+n}(\theta),\eta''_{+n}(\theta))\} - \min\{\omega_0(\zeta'_{+n}(\bar\tau'_{+n}),$$

$$\eta'_{+n}(\bar\tau'_{+n}),t'-\tau'_{+n}), \min_{\theta\in[0,\tau'_{+n}]} H(\zeta'_{+n}(\theta),\eta'_{+n}(\theta))\},$$

gde je: $\bar\tau'_{+n}\in[0,t']$, $\theta''_{+n}\in[0,t'']$, $\zeta''_{+n}(\cdot)\in A^{\theta''_{+n}}(x'')$, $\zeta'_{+n}(\cdot)\in A^{\bar\tau'_{+n}}(x')$, $\eta''_{+n}(\cdot)\in A^{\theta''_{+n}}(y'')$, $\eta'_{+n}(\cdot)\in A^{\bar\tau'_{+n}}(y')$.

Pri čemu je:

$$\theta''_{+n}=\min\{t'',\bar\tau'_{+n}\};\ \zeta'_{+n}(\cdot)=x(\cdot,x',u'_{+n}(\cdot));\ \zeta''_{+n}=x(\cdot,x'',u'_{+n}(\cdot))$$

za neko dopustivo upravljanje $v_{+n}(\cdot)\in \mathcal{V}^{\nu\bar{\tau}'+n}$.

Iz poslednje ocene i iz /1.6.6/sledi da je:

$$\Delta_n \leq |\Delta^1_{+n}| + |\Delta^2_{+n}| \qquad (1.6.18)$$

gde su:

$$\Delta^1_{+n} = \omega_0(\xi''_{+n}(\theta''_{+n}), \eta''_{+n}(\theta''_{+n}), t''-\theta''_{+n}) - \omega_0(\xi'_{+n}(\tau'_{+n}), \eta'_{+n}(\tau'_{+n}), t'-\tau'_{+n}) \qquad (1.6.19)$$

$$\Delta^2_{+n} = \min_{\theta\in[0,\theta''_{+n}]} H(\xi''_{+n}(\theta), \eta''_{+n}(\theta)) - \min_{\theta\in[0,\tau'_{+n}]} H(\xi'_{+n}(\theta), \eta'_{+n}(\theta)) \qquad (1.6.20)$$

Ocenimo sada odozgo i odozdo veličinu Δ^2_{+n}.

Neka je $\bar{\theta}'_{+n}\in[0,\tau'_{+n}]$ tako da je:

$$H(\xi'_{+n}(\bar{\theta}'_{+n}), \eta'_{+n}(\bar{\theta}'_{+n})) = \min_{\theta\in[0,\tau'_{+n}]} H(\xi'_{+n}(\theta), \eta'_{+n}(\theta))$$

Tada uzimajući da je: $\bar{\theta}''_{+n} = \min\{\theta''_{+n}, \bar{\theta}'_{+n}\}$ i iz/1.6.20/sledi:

$$\Delta^2_{+n} \leq H(\xi''_{+n}(\bar{\theta}''_{+n}), \eta''_{+n}(\bar{\theta}''_{+n})) - H(\xi'_{+n}(\bar{\theta}'_{+n}), \eta'_{+n}(\bar{\theta}'_{+n}))$$

pri čemu je $\bar{\theta}'_{+n} - \bar{\theta}''_{+n} \leq \tau'_{+n} - \tau''_{+n} \leq |t''-t'|$

Sa druge strane neka je $\bar{\bar{\theta}}''_{+n}\in[0,\theta''_{+n}]$ takvo da je:

$$H(\xi''_{+n}(\bar{\bar{\theta}}''_{+n}), \eta''_{+n}(\bar{\bar{\theta}}''_{+n})) = \min_{\theta\in[0,\theta''_{+n}]} H(\xi''_{+n}(\theta), \eta''_{+n}(\theta)),$$

tada iz /1.6.20/sledi:

$$\Delta^2_{+n} \geq H(\xi''_{+n}(\bar{\bar{\theta}}''_{+n}), \eta''_{+n}(\bar{\bar{\theta}}''_{+n})) - H(\xi'_{+n}(\bar{\bar{\theta}}''_{+n}), \eta'_{+n}(\bar{\bar{\theta}}''_{+n})).$$

Iz prethodne dve nejednačine sledi da postoje takvi:

$$\tilde{\theta}''_{+n}\in[0,\theta''_{+n}],\ \tilde{\theta}'_{+n}\in[0,\tau'_{+n}],\ \tilde{\theta}'_{+n} - \tilde{\theta}''_{+n} \leq |t''-t'|$$

da je:

$$|\Delta^2_{+n}| \leq |\tilde{\Delta}^2_{+n}|, \qquad (1.6.21)$$

gde je:

$$\tilde{\Delta}^2_{+n} = H(\xi''_{+n}(\tilde{\theta}''_{+n}), \eta''_{+n}(\tilde{\theta}''_{+n})) - H(\xi'_{+n}(\tilde{\theta}'_{+n}), \eta'_{+n}(\tilde{\theta}'_{+n})) \qquad (1.6.22)$$

Na kraju iz /1.6.18/ i /1.6.21/sledi ocena:

$$\Delta_n \leq |\Delta^1_{+n}| + |\tilde{\Delta}^2_{+n}| \qquad (1.6.23)$$

Analogno je moguće ukazati ocenu svake od veličina Δ_n, $n\geq 1$ odozdo na sledeći način:

$$\Delta_n \geq -|\Delta^1_{-n}| - |\tilde{\Delta}^2_{-n}|, \qquad (1.6.24)$$

gde je: $\Delta^1_{-n} = \omega_0(\xi''_{-n}(\theta''_{-n}), \eta''_{-n}(\theta''_{-n}), t''-\tau''_{-n}) - \omega_0(\xi'_{-n}(\theta'_{-n}), \eta'_{-n}(\theta'_{-n}), t'-\theta'_{-n}), \qquad (1.6.25)$

i $\tilde{\Delta}^2_{-n} = H(\xi''_{-n}(\tilde{\theta}''_{-n}), \eta''_{-n}(\tilde{\theta}''_{-n})) - H(\xi'_{-n}(\tilde{\theta}'_{-n}), \eta'_{-n}(\tilde{\theta}'_{-n}))$ . . . . (1.6.26)

U /1.6.25/,/1.6.26/ su:

$\theta''_{-n} \in [0, t''_{-}], \theta'_{-n} \in [0, t'], \xi''_{-n}(\cdot) \in A^{\tilde{\tau}''_{-n}}(x'');$

$\xi'_{-n}(\cdot) \in A^{\tilde{\theta}'_{-n}}(x'); \eta''_{-n}(\cdot) \in A^{\tilde{\theta}''_{-n}}(y''); \eta'_{-n}(\cdot) \in A^{\tilde{\theta}'_{-n}}(y'); \tilde{\theta}''_{-n} \in [0, \theta''_{-n}]; \tilde{\theta}'_{-n} \in [0, \theta'_{-n}],$

pri čemu je:

$\theta'_{-n} = \min\{t', \theta'_{-n}\}, \xi''_{-n}(\cdot) = x(\cdot, x'', u''_{-n}(\cdot)); \xi'_{-n}(\cdot) = x(\cdot, x', u''_{-n}(\cdot))$

za neko dopustivo upravljanje $u''_{-n} \in \mathcal{U}^{\tilde{\tau}''_{-n}}$ $; \eta''_{-n}(\cdot) = y(\cdot, y'', v'_{-n}(\cdot));$

i $\eta'_{-n}(\cdot) = y(\cdot, y', v'_{-n}(\cdot))$

za neko dopustivo upravljanje $v'_{-n}(\cdot) \in \mathcal{V}^{\tilde{\tau}''_{-n}}$: i $\tilde{\theta}''_{-n} - \tilde{\theta}'_{-n} \leq |t'' - t'|$.

Iz ocena/1.6.23/,/1.6.24/sledi ocena modula veličine $\Delta_n, n \geq 1$:

$|\Delta_n| \leq \max\{|\Delta^1_{+n}| + |\tilde{\Delta}^2_{+n}|, |\Delta^1_{-n}| + \tilde{\Delta}^2_{-n}|\}$ . . . . . . (1.6.27)

Ako je $n = 0$ na osnovu/1.6.24/sledi:

$|\Delta_0 = |\omega_0(x'', y'', t'') - \omega_0(x', y', t')|$ . . . . (1.6.28)

Dalje ćemo analogno ocenama/1.2.6/,/1.2.7/u dokazu leme 1.2.1 dobiti ocene:

$\|(\xi''_{+n}(\theta''_{+n}), \eta''_{+n}(\theta''_{+n}), t'' - \theta''_{+n}) - (\xi'_{+n}(\tau'_{+n}), \eta'_{+n}(\tau'_{+n}), t' - \tau'_{+n})\| \leq$

$\leq 2(\mathcal{M}+1)|t'' - t'| + (\exp LT)(\|x'' - x'\| + \|y'' - y'\|),$

$\|(\xi''_{-n}(\tau''_{-n}), \eta''_{-n}(\tau''_{-n}), t'' - \tau''_{-n}) - (\xi'_{-n}(\theta'_{-n}), \eta'_{-n}(\theta'_{-n}), t' - \theta'_{-n})\| \leq$

$\leq 2(\mathcal{M}+1)|t'' - t'| + (\exp LT)(\|x'' - x'\| + \|y'' - y'\|)$ . . . . (1.6.29)

Dalje je:

$\|(\xi''_{+n}(\tilde{\theta}''_{+n}), \eta''_{+n}(\tilde{\theta}''_{+n})) - (\xi'_{+n}(\tilde{\theta}'_{+n}), \eta'_{+n}(\tilde{\theta}'_{+n}))\| \leq$

$\leq 2\mathcal{M}|t'' - t'| + (\exp LT)(\|x'' - x'\| + \|y'' - y'\|),$

$\|(\xi''_{-n}(\tilde{\theta}''_{-n}), \eta''_{-n}(\tilde{\theta}''_{-n})) - (\xi'_{-n}(\tilde{\theta}'_{-n}), \eta'_{-n}(\tilde{\theta}'_{-n}))\| \leq$

$\leq 2\mathcal{M}|t'' - t'| + (\exp LT)(\|x'' - x'\| + \|y'' - y'\|)$ . . . . . . (1.6.30)

Pošto su funkcije $\omega_0(\cdot)$ i $H(\cdot)$ ravnomerno neprekidne na kompaktima $\mathcal{D}$ i $R_{t(x,y)}(\mathcal{D})$ tada iz/1.6.27/--/1.6.30/uzimajući u obzir

/1.6.19/,/1.6.22/,/1.6.25/i /1.6.26/ sledi da će svi članovi niza $\{|\Delta_k|\}_{k=0}^{\infty}$ biti proizvoljno mali ravnomerno za sve $k=0,1,2,\ldots$, ako su samo $(x'',y'',t''),(x',y',t')\in\mathcal{D}$ dovoljno bliske. A ovo i označava da je niz $\{\omega_k(\cdot)\}_{k=0}^{\infty}$ ravnomerno neprekidan.

Na taj način je dokazano da niz $\{\omega_k(\cdot)\}_{k=0}^{\infty}$ ravnomerno konvergira na $\mathcal{D}$. Na kraju rasudjivanja dokaza teoreme primetimo da ako je $H(\cdot)\in Lip(\rho_2(x,y)(\mathcal{D}))$ tada na osnovu /1.6.27/--/1.6.30/ i na osnovu /1.6.19/,/1.6.22/,/1.6.25/i /1.6.26/sledi da članovi niza $\{\omega_k(\cdot)\}_{k=0}^{\infty}$ zadovoljavaju uslov Lipšica sa jednakim konstantama, a to znači da će i granična funkcija ovog niza zadovoljavati uslov Lipšica sa istim konstantama.

Posledica 1. Za to da bi funkcija $\omega_0(\cdot)\in \mathcal{W}_+^2(\mathcal{D})$ bila vrednost igre $\Gamma^2(\mathcal{D})$ potrebno je i dovoljno da bi ona bila fiksnom tačkom operatora Φ_+^2.

Posledica 2. Neka niz približenja /1.6.12/sa početnim približenjem $\omega_0(\cdot)\in\mathcal{W}_+^2(\mathcal{D})$ konvergira za konačan broj iteracija, tj. za neko $q^*\in\{0,1,\ldots\}$, je: $\omega_n(\cdot)=\omega_{q^*}(\cdot)$, $n=q^*+1, q^*+2,\ldots$, tada strategija $\mathcal{U}_{q^*}$, kao uostalom i svaka strategija $\mathcal{U}_n, n>q^*$ iz niza $\{\mathcal{U}_k\}_{k=0}^{\infty}$ koji odgovara nizu približenja /1.6.12/sa početnim približenjem $w_0/\cdot/$, je optimalna strategija gonioca u igri $\Gamma^2(\mathcal{D})$.

Teorema 1.6.4 Za to da bi u igri $\Gamma^2(\mathcal{D})$ postajala optimalna strategija gonioca potrebno je i dovoljno da niz približenja/1.6.12/ sa početnim približenjem $\omega_0(\cdot)\in\mathcal{W}_+^2(\mathcal{D})$ konvergira za konačana broj iteracija. Niz će konvergirati za konačan broj iteracija i iz bilo kog drugog početnog približenja skupa $\mathcal{W}_+^2(\mathcal{D})$. Osim toga ovaj broj ne prelazi q^*+1, gde je q^* broj iteracija za koji konvergira niz približenja /1.6.12/ sa početnim približenjem $\omega_+^2(\cdot)$.

Funkcija $\omega_+^2(\cdot)$ koja ovde figuriše odredjena je relacijom /1.6.7/.

Ovaj drugi deo rada pretstavlja posebnu celinu i sastoji se iz druge i treće glave.

Neophodnost istraživanja diferencijalnih igara sa nepotpunom informacijom diktira se time da predložena u posedu učesnika igre potpuna informacija o faznom stanju procesa u svakom tekućem momentu vremena je bezuslovno uproščavanje zadatka i u praksi se retko ispunjava.

Osnovna poteškoća prelaza na istraživanje diferencijalnih igara sa nepotpunom informacijom satoji se u odredjivanju informacione strukture, a to znači i klase čistih strategija koje odredjuju izbor upravljanjau u svakom informacionom stanju igre.

Razvoj teorije diferencijalnih igara sa nepotpunom informacijom ide danas od posebnog ka opštem, tj. po putu izgradnje teoretskih modela sa informacionim strukturama odredjenog oblika ka gradjenju opšte diferencijalne igre sa nepotpunom informacijom.

U mom dugogodišnjem radu u JNA skoro svakodnevno sam se susretao sa konfliktnim situacijama sa nepotpunom informacijom /u teoriji i praksi izvodjenja vojnih igara/, pa me je to navelo da drugi deo ovog rada, posvetim diferencijalnim igrama sa nepotpunom informacijom i da time dam svoj doprinos modeliranju i rešavanju istih.

GLAVA II

Diferencijalne igre u kojima se informacija dobija sa odredjenim zakašnjenjem

U praksi se informacija o protivniku, u konfliktnim situacijama, se dobija sa izvesnim zakašnjenjem.

U glavi II istražene su neke antagonističke diferencijalne igre gonjenja, koje pretstavljaju modele konfliktnih upravljajućih procesa u slučaju kada informacija o faznom stanju protivnika stiže učesnicima konflikta sa odredjenim zakašnjenjem.

§1. Antagonističke diferencijalne igre gonjenja sa više učesnika u kojima se informacija dobija sa odredjenim zakašnjenjem

Kratak pregled sadržaja ovog paragrafa je dat na šestoj strani uvoda.

Razmotrićemo antagonističke diferencijalne igre gonjenja /ADIG/

odredjene dužine T izmedju koalicije gonilaca $G=\{G_1,G_2,\dots,G_n\}$ koja dejstvuje kao jedan igrač i na isti način postupajućim skupom begunaca: $B=\{B_1,B_2,\dots,B_m\}$

Jednačine za učesnike su:

$$\left.\begin{array}{ll} G_i:\dot{x}^{(i)}=f^{(i)}(x,u^{(i)}), \quad u^{(i)}\in U^{(i)}\subset \mathrm{Comp}\,R^{q}; & i=1,2,\dots,n \\ B_j:\dot{y}^{(j)}=y^{(j)}(y,v^{(j)}), \quad v^{(j)}\in V^{(j)}\subset \mathrm{Comp}\,R^{\ell}; & j=1,2,\dots,m \end{array}\right\}\dots(2.1.1)$$

$$x^{(i)}\in R^{K},\quad y^{(j)}\in R^{K},\quad x^{(i)}(0)=x_0^{(i)};\quad y^{(j)}(0)=y_0^{(j)}.$$

Desne strane jednačina sadrže sve uslove, koji garantuju postojanje, jedinstvenost i produživost na odsečak vremena $[0,T]$ rešenja ADIG iz početnog stanja $x_0^{(i)}, i=1,2,\dots,n;\ y_0^{(j)}, j=1,2,\dots,m$ i za sve parove merljivih programskih upravljanja: $u(t)=\{u^{(i)}(t)\};\ v(t)=\{v^{(j)}(t)\}$.

Stanje informacije u igri je sledeće. Dati brojevi $\ell>0$ i $\ell_1>0$ pretstavljaju zakašnjenje informacije redom o igraču B i o igraču G. Ovo označava da igrač G za $0\leq t\leq \ell$ u svakom momentu vremena t zna svoje stanje $x(t)=\{x^{(i)}(t)\}$, vreme t i stanje igrača B u početnom momentu $y_0=\{y_0^{(j)}\}$. Za $\ell\leq t\leq T$ igrač G zna svoje stanje $x(t)=\{x^{(i)}(t)\}$, vreme t i stanje igrača B u momentu vremena $t-\ell: y(t-\ell)=\{y^{(j)}(t-\ell)\}$. Analogno igrač B u svakom momentu vremena t za $0\leq t\leq \ell_1$, zna svoje stanje $y(t)=\{y^{(j)}(t)\}$ vreme t i stanje igrača G u početnom momentu $x_0=\{x_0^{(i)}\}$. Za $\ell_1\leq t\leq T$ igrač B zna svoje stanje $y(t)=\{y^{(j)}(t)\}$, vreme t i stanje igrača G u momentu $t-\ell_1, x(t-\ell_1)=\{x^{(i)}(t-\ell_1)\}$.

Dobitak igrača B je terminalni i odredjuej se na sledeći način. Razmotrimo matricu [nxm] : $A(x,y)=\{\rho(x^{(i)}(T),y^{(j)}(T))\}$,

gde je $\rho(x^{(i)},y^{(j)})$ Euklidovo rastojanje izmedju tačaka $x^{(i)}\in R^{K}, y^{(j)}\in R^{K}$. Uvodimo na skupu matrice A relaciju poretka na sledeći način. Smatramo da $A\succ B$ ako se može naći takav neprazan podskup: $I\subset\{1,2,\dots,n\}$ da je: $a_{ij}\geq b_{ij}$ za $\forall j=1,\dots,m$ i $i\in I$

za bar jedan element $a_{i_0j_0}>b_{i_0j_0}$ i $a_{ij}=b_{ij}$ za $i\notin I$ $j=1,2,\dots,m$.

Realna funkcija $F(A)$, definisana na skupu matrica A, je monotono rastuća ako je $F(A)\geq F(B)$ za $A\succ B$.

Neka je dobitak igrača B:

$$\mathcal{K}(x,y)=F[A(x,y)],\quad \dots\dots\dots\dots (2.1.2)$$

gde je F realna,neprekidna monotono rastuća funkcija.

Opišimo skupove strategija igrača. Uvodimo deo po deo programske čiste strategije igrača/DDPČSI/. Pod DDPČSI G, u/./ podrazumevamo par $\{\delta, a\}$ gde je δ proizvoljna disjunktna podela odsečka vremena $[0,T]$ konačnim brojem tačaka $0 \le t_1 < t_2 < \dots < t_z = T$, a "a" je preslikavanje, koje svakom stanju $x(t_k)=\{x^{(i)}(t_k)\}$; $y_0=\{y_0^{(j)}\}$, t_k za $0 \le t_k \le \ell$ korespondira odsečak merljivog programskog upravljanja $u(t)=\{u^{(i)}(t)\}$, odredjenog na poluintervalu $t \in [t_k, t_{k+1})$, a za $\ell \le t_k \le T$ svakom stanju $x(t_k)=\{x^{(i)}(t_k)\}, y(t_k-\ell)=\{y^{(j)}(t_k-\ell)\}, t_k$, korespondira odsečak merljivog programskog upravljanja $u(t)=\{u^{(i)}(t)\}$ odredjenog na $t \in [t_k, t_{k+1})$.

Analogno pod DDPČSI B, v/./ mi ćemo da shvatimo par $\{\tau, b\}$, gde je τ proizvoljna disjunktna podela odsečka vremena $[0,T]$ konačnim brojem tačaka: $0=t'_1<t'_2<\dots<t'_s=T$, a "b" je preslikavanje, koje za $0 \le t'_k \le \ell_1$ svakom stanju $x_0=\{x_0^{(i)}\}, y(t'_k)=\{y^{(j)}(t'_k)\}, t'_k$, korespondira merljivo programsko upravljanje $v(t)=\{v^{(j)}(t)\}$ odredjeno na poluintervalu $t \in [t'_k, t'_{k+1})$ a za $\ell_1 < t_k \le T$ svakom stanju $x(t'_k-\ell_1)=\{x^{(i)}(t'_k-\ell_1)\}; y(t'_k)=\{y^{(j)}(t'_k)\}, t'_k$ korespondira merljivo programsko upravljanje $v(t)=\{v^{(j)}(t)\}$, koje je odredjeno na poluintervalu $t \in [t'_k, t'_{k+1})$.

Skup svih DDPČSI za G i B označićemo redom sa $\bar{G}$ i $\bar{B}$.

Na taj način ako igrača G i B primenjuju DDPČSI $u(\cdot) \in \bar{G}$, $v(\cdot) \in \bar{B}$ za date početne uslove x_0, y_0 postoji jedinstveno rešenje sistema /2.1.1/, i znači funkcija dobitka se odredjuje jednoznačno:

$$\mathcal{K}(x_0, y_0;\ u(\cdot), v(\cdot)) = F[f(x(T), y(T))] \quad \dots \quad (2.1.3)$$

gde su x/t/ i y/t/ rešenje sistema /2.1.1/iz početnih stanja x_0, y_0 u situaciji(u/./,v/./).

Označimo opisanu igru sa $\Gamma(x_0, y_0, T)$. Pošto igra $\Gamma(x_0, y_0, T)$ nije igra sa potpunom informacijom, tada u opštem slučaju je:

$$\sup_{v(\cdot)\in\bar{B}} \inf_{u(\cdot)\in\bar{G}} \mathcal{K}(x_0, y_0; u(\cdot), v(\cdot)) \neq \inf_{u(\cdot)\in\bar{G}} \sup_{v(\cdot)\in\bar{B}} \mathcal{K}(x_0, y_0; u(\cdot), v(\cdot)) \dots (2.1.4)$$

Iz /2.1.4/ sledi da situacija ε ravnoteže u ovoj igri postoji ne za svako $\varepsilon > 0$ zato je neophodno da se prošire prostori strategija $\bar{G}$ i $\bar{B}$ do takozvanih mešovitih deo po deo programskih strategija ponašanja /MDDPSP/koje uključuju mogućnost slučajnog izbora na svakom koraku.

Pod MDDPSP igrača G,$\mu(\cdot)$ mi ćemo podrazumevati par $\{\delta, d\}$, gde je δ proizvoljna disjunktna podela odsečka vremena $[0,T]$ konačnim brojem tačaka $0=t_1<t_2<\dots<t_z=T$, a "d" je preslikavanje

koje za $0 \le t_k \le l$ svakom stanju $x(t_k)=\{x^i(t_k)\}$; $y_0=\{y_0^{(j)}\}$, t_k korespondira verovatnu meru μ koja zavisi od $x(t_k), y_0, t_k$ na skupu dostiživosti igrača G za vreme t_{k+1}, t_k iz stanja $x(t_k), C_G^{t_{k+1}-t_k}(x(t_k))=\prod_{i=1}^{n} C_{G_i}^{t_{k+1}-t_k}(x^{(i)}(t_k))$, a za $l < t_k \le T$ svakom stanju $x(t_k)=\{x^{(i)}(t_k)\}$; $y(t_k-l)=\{y^{(j)}(t_k-l)\}, t_k$ korespondira verovatnu meru μ, koja zavisi od $t_k, y(t_k-l), x(t_k)$ na skupu dostiživosti igrača G za vreme: $t_{k+1}-t_k, C_G^{t_{k+1}-t_k}(x(t_k))=\prod_{i=1}^{n} C_{G_i}^{t_{k+1}-t_k}(x^{(i)}(t_k))$.

Analogno pod MDDPSP igrača B, $\nu(\cdot)$ mi ćemo podrazumevati par (τ, e), gde je τ proizvoljna disjunktna podela odsečka vremena $[0,T]$ konačnim brojem tačaka $0=t_1' < t_2' < \ldots < t_s' = T$, a "e" je **preslikavanje**, koje svakom stanju $t_k', x_0=\{x_0^{(i)}\}, y(t_k')=\{y^{(j)}(t_k')\}$ za $0 \le t_k' \le l_1$ korespondira verovatnu meru ν, koja zavisi od $x_0, y(t_k'), t_k'$ na skupu dostiživosti igrača B iz stanja $y(t_k')$ za vreme:

$$t_{k+1}'-t_k', C_B^{t_{k+1}'-t_k'}(y(t_k'))=\prod_{j=1}^{m} C_{B_j}^{t_{k+1}'-t_k'}(y^j(t_k')).$$

a za $l_1 \le t_k' \le T$ svakom stanju $t_k', x(t_k'-l_1)=\{x^{(i)}(t_k'-l_1)\}, y(t_k')$ korespondira verovatnu meru ν, koja zavisi od ovog stanja na skupu dostiživosti igrača B za vreme

$$t_{k+1}'-t_k', C_B^{t_{k+1}'-t_k'}(y(t_k'))=\prod_{j=1}^{m} C_{B_j}^{t_{k+1}'-t_k'}(y^{(j)}(t_k')).$$

Svaki par MDDPSP $\mu(\cdot), \nu(\cdot)$ za fiksirane početne uslove indukuje raspodelu verovatnoće na skupovima konačnih stanja igre:

$$C_G^T(x_0)=\prod_{i=1}^{n} C_G^T(x_0^{(i)}); \quad C_B^T(y_0)=\prod_{j=1}^{m} C_{B_j}^T(y_0^j),$$

zato ćemo pod dobitkom podrazumevati matematičko očekivanje dobitka: $\mathcal{X}(x_0, y_0; \mu(\cdot), \nu(\cdot))$, koje ćemo označiti sa $\mathcal{M}(x_0, y_0; \mu(\cdot), \nu(\cdot))$.

Na taj način mi ćemo odrediti mešovito proširenje igre $\Gamma(x_0, y_0, T)$, koje ćemo označiti sa $\overline{\Gamma(x_0, y_0, T)}$. Pod rešenjem igre $\overline{\Gamma(x_0, y_0, T)}$ podrazumevamo nalaženje situacije ravnoteže u klasi MDDPSP.

Opisaćemo kako se izvode kretanja iz početnih stanja x_0, y_0 u situaciji $(\mu(\cdot), \nu(\cdot))$. Neka je $\mu(\cdot)=\{\delta, d\}$ gde je $\delta=\{t_k\}, k=1,2,\ldots,r$, $\nu(\cdot)=\{\tau, e\}$; gde je $\tau=\{t_k'\}; k=1,\ldots,s$. Označimo sa $\omega=\delta \cup \tau$, tj. opštu disjunktnu podelu odsečka vremena tačkama $\omega=\{t_k''\}$

U momentu $t_1''=0$ igrači G i B realizuju mere μ i ν diktirane redom preslikavanjima d i e u stanju $x_0, y_0, 0$ i prelaze u tačke $x(t_2)=\{x^{(i)}(t_2)\}, x^{(i)}(t_2) \in C_{G_i}^{t_2-t_1}(x_0^{(i)})$, $i=1,2,\ldots n$ i $y(t_2')=\{y^{(j)}(t_2')\}, y^{(j)}(t_2') \in C_{B_j}^{t_2'-t_1'}(y_0^{(j)}), j=1,2,\ldots m$. koristeći ma koja programska upravljanja, koja prevode tačke $x_0^{(i)}$ i $y_0^{(j)}$ redom u $x^{(i)}(t_2)$ i $y^{(j)}(t_2')$ /ovde se $\{x^{(i)}(t_2)\}, \{y^{(j)}(t_2')\}$ biraju slučajno u saglasnosti sa verovatnim merama μ, ν, koje ulaze u strategije $\mu(\cdot)$, $\nu(\cdot)$ u svojstvu ponašanja/. U stanjima $x(t_2)$ i $y(t_2)$ ponovo se realizuju verovatne mere μ i ν diktirane preslikavanjima d i e. U ovim informativnim stanjima i igrači prelaze u nove slučajno izabrane tačke $x(t_3)=\{x^{(i)}(t_3)\}$; $y(t_3')=\{y^{(j)}(t_3')\}$, gde je $x^{(i)}(t_3)=C_{Gi}^{t_3-t_2}(x^{(i)}(t_2))$, $y^{(j)}(t_3')=C_{Bj}^{t_3-t_2}(y^{(j)}(t_2'))$ i td. Kao rezultat takvog niza ponašanja realizuju se slučajne trajektorije $x(t)=\{x^{(i)}(t)\}$, $y(t)=\{y^{(j)}_i(t)\}$ iz početnih stanja x_0, y_0 , koja odgovaraju situaciji $\mu(\cdot)$, $\nu(\cdot)$ u MDDPSP.

Neka su skupovi dostiživosti učesnika skupa B_j za vreme t iz početnih stanja $y^{(j)}$, $C_{Bj}^{t}(y^{(j)})$ za $\forall y^{(j)}$ i t kompaktni i neka je $D_B^{\ell}(y)=\overline{\bigcup_{j=1}^{m} C_{Bj}^{\ell}(y^{(j)})}$ konveksni omotač unije skupova $C_{Bj}^{\ell}(y^{(j)})$. Razmotrimo jednovremenu pomoćnu antagonističku igru Γ_y na skupu $[D_B^{\ell}(y)]^n \times \prod_{j=1}^{m} C_{Bj}^{\ell}(y^{(j)})$. Igra teče na sledeći način. Igrač $G=\{G_1,G_2,\dots,G_n\}$ bira n tačaka $\gamma^{(i)}\in D_B^{\ell}(y)$, a igrač B bira m tačaka $\eta^{(j)}\in C_{Bj}^{\ell}(y^{(j)})$. Izbori se vrše jednovremeno i nezavisno jedan od drugog. Igrač B prima dobitak, koji se odredjuje formulom /2.1.2/. Pošto je funkcija /2.1.2/ neprekidna, a skupovi čistih strategija igrača u igri Γ_y su kompaktni, igra ima situaciju ravnoteže u klasi mešovitih strategija. Označimo vrednost igre sa v_y. Ona zavisi od skupova strategija igrača G i B, $[D_B^{\ell}(y)]^n$ i $\prod_{j=1}^{m} C_{Bj}^{\ell}(y^{(j)})$.

Neka je μ_y^*, ν_y^* situacija ε ravnoteže u igri Γ_y. Familiji Γ_y postavićemo sledeće zahteve:

1. Za svako $\varepsilon>0$ postoji takav broj N da u igri Γ_y igrač G poseduje mešovitu ε optimalnu strategiju $\mu_y^{*\varepsilon}$, koja pripisuje jednake verovatnoće $\frac{1}{N}$, N tačkama skupa $[D_B^{\ell}(y)]^n$, $\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_N$ i pri tome izabrani za dati ε broj N ne zavisi od y za svako $y\in\prod_{j=1}^{m} C_{Bj}^{T-\ell}(y_0^{(j)})$.

2. Neka je $y(t)=\{y^{(j)}(t)\}$ proizvoljno dopustivo kretanje igrača B za $0\leq t\leq T$. Tada postoje takve neprekidne trajektorije koje se ne seku $\gamma_j[y(t-\ell)]$, $j=1,2,\dots,N$ da je $\gamma_j[y(t-\ell)]\in[D_B^{\ell}(y(t-\ell))]^n$ i svaka od $\gamma_j[y(t-\ell)]$ je tačka spektra strategije $\mu^{*\varepsilon}_{y(t-\ell)}$ u igri $\Gamma_{y(t-\ell)}$.

<u>Teorema 2.1.1</u> Neka je $D_B^{\ell}(y)$ kompaktan skup za $\forall y\in C_B^{T-\ell}(y_0)$ i svaki od učesnika koalicije $G=\{G_1,G_2,\dots,G_n\}$ može u momentu vremena $T-\ell_1$ da garantuje ispunjenje pripadnosti

$$C_{Gi}^{\ell_1}(x^{(i)}(T-\ell_1))\supset D_B^{\ell}(y(T-\ell)) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.1.5)$$

za svako $y(T-\ell)\in C_B^{\ell_1}(y(t-\ell-\ell_1))$ nezavisno od dejstva igrača B i oslanjajući se samo na informaciju, koja se dobija o igri $\overline{\Gamma(x_0, y, T)}$, a koalicija G, dejstvujući dalje na odsečku vremena $[T-\ell_1, T]$ može da garantuje za $\forall \varepsilon_1 > 0$, ε_1 susret u momentu vremena T iz bilo koje od tačaka $z_j[y(T-\ell)]$ koje su odredjene zahtevima 1. i 2. Tada za igrača $B=\{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$ postoji optimalna MDDPSP koja se sastoji u sledećem. Za $0 \le t \le T-\ell$ programski preći u tačku $\bar{y}=(\bar{y}^{(1)}, \bar{y}^{(2)}, \ldots, \bar{y}^{(m)})$ za koju je vrednost pomoćne igre $V_{\bar{y}}$ maksimalna. U momentu vremena $T-\ell$ izabrati ma koju tačku od tačaka $y' \in \prod_{j=1}^{m} C_{B_j}(\bar{y}^{(j)})$ u saglasnosti sa mešovitom strategijom $\nu^*_{\bar{y}}$, optimalnoj u igri $\Gamma_{\bar{y}}$ /izvršiti slučajan izbor/ i preći programski u tačku, koja se realizovala kao rezultat slobodnog izbora $y' = y(T) = \{y^{(j)}(T)\}$. Za igrača $G=\{G_1, G_2, \ldots, G_m\}$ za $\forall \varepsilon > 0$ postoji sledeća 4ε optimalna MDDPSP. Za $0 \le t \le T-\ell_1$ treba dejstvovati na taj način /determinisano/ da bi se garantovalo ispunjenje pripadnosti /2.1.5/, a dalje sa verovatnoćom $\frac{1}{N}$ izabrati jednu od tačaka $z_j[y[T-\ell-\ell_1)]$ i ostvariti u momentu vremena T ε_1 susret sa tačkom $z_j = \{z_j^{(i)}\}$ koja se premešta po trajektoriji $z_j[y(T-\ell)]$.

<u>Napomena 2.1.1</u> Pod ε_1 susretom u datom slučaju podrazumevamo dospevanje tačke $x=(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)})$ u ε_1 okolinu tačke $z_j=(z_j^{(1)}, z_j^{(2)}, \ldots, z_j^{(m)})$, tj. Ispunjenje nejednačine:

$$\varrho(x^{(i)}, z_j^{(i)}) < \varepsilon_1 \quad za \ \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Dokaz. Neka su $\mu^*(\cdot)$, $\nu^*(\cdot)$ strategije 4ε optimalne koje mi želimo da odredimo. Potrebno je dokazati da je:

$$\mathcal{M}(x_0, y_0; \mu^{*\varepsilon}(\cdot), \nu(\cdot)) - 4\varepsilon \le \mathcal{M}(x_0, y_0;$$

$$\mu^{*\varepsilon}(\cdot), \nu^{*\varepsilon}(\cdot)) \le \mathcal{M}(x_0, y_0; \mu(\cdot); \nu^{*\varepsilon}(\cdot)) + 4\varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots (2.1.6)$$

za sve MDDPSP $\mu(\cdot)$, $\nu(\cdot)$. Poznato je ipak da je dovoljno dokazati:

$$\mathcal{M}(x_0, y_0; \mu^{*\varepsilon}(\cdot), v(\cdot)) - 4\varepsilon \le \mathcal{M}(x_0, y_0; \mu^{*\varepsilon}(\cdot), \nu^{*\varepsilon}(\cdot)) \le$$

$$\le \mathcal{M}(x_0, y_0; u(\cdot), \nu^{*\varepsilon}(\cdot)) + 4\varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots (2.1.7)$$

za DDPČSI $u(\cdot) \in \bar{G}$; $v(\cdot) \in \bar{B}$.

Neka su $x^{*\varepsilon}(t) = \{x^{(i)*\varepsilon}(t)\}$, $y^{*\varepsilon}(t) = \{y^{(j)*\varepsilon}(t)\}$ trajektorije redom igrača G i B, koje se realizuju kao rezultat primene strategija $\mu^{*\varepsilon}(\cdot)$, $\nu^{*\varepsilon}(\cdot)$. Tada saglasno strategiji $\mu^*(\cdot)$ tačka $x^{*\varepsilon}(T) = \{x^{(i)*\varepsilon}(T)\}$ sa verovatnoćom $\frac{1}{N}$ dospeva u ε_1 okolinu tačaka $z_j[y(T-\ell)]$ koje pretstavljaju spektar strategija $\mu^{\varepsilon}_{\bar{y}}$, ε optimalne u igri $\Gamma_{\bar{y}}$. Tačka $y^{*\varepsilon}(T) = \{y^{(j)*\varepsilon}(T)\}$ saglasno strategiji $\nu^{*\varepsilon}(\cdot)$ je realizacija strategije $\nu_{\bar{y}}^{*\varepsilon}$,optimalne za igrača B u igri $\Gamma_{\bar{y}}$ .Pošto funkcija dobitka neprekidno zavisi od $\varrho(x^{(i)}, y^{(j)})$,za svako $\varepsilon>0$ može se naći $\varepsilon_1>0$,da čim je $x^{*\varepsilon}(T)$ sa verovatnoćom $\frac{1}{N}$ dospela u ε_1 okolinu tačke $\xi_j[y(T-\ell)]$,tj.

$$\varrho(x^{(i)*\varepsilon}(T), \xi_j^{(i)}[y(T-\ell)])<\varepsilon_1, \quad i=1,2,3\ldots,n$$

tada važi relacija:

$$|\mu(x_0,y_0;\mu^{*\varepsilon}(\cdot),\nu^{*\varepsilon}(\cdot))-\mu(\mu_{\bar{y}}^{*\varepsilon},\nu_{\bar{y}}^{*\varepsilon})|<\varepsilon \quad \ldots\ldots \quad (2,1.8)$$

gde je $\mu(\mu_{\bar{y}}^{*\varepsilon},\nu_{\bar{y}}^{*\varepsilon})$ matematičko očekivanje dobitka u igri $\Gamma_{\bar{y}}$ pri primeni strategija $\mu_{\bar{y}}^{*\varepsilon},\nu_{\bar{y}}^{*\varepsilon}$ u ovoj igri.Sa druge strane situacija $(\mu_{\bar{y}}^{*\varepsilon},\nu_{\bar{y}}^{*\varepsilon})$ je ε optimalna u igri $\Gamma_{\bar{y}}$,pa je:

$$|\mu(y_{\bar{y}}^{*\varepsilon},\nu_{\bar{y}}^{*\varepsilon},\nu_{\bar{y}}^{*\varepsilon})-V(\bar{y}))|<\varepsilon \quad \ldots\ldots \quad (2.1.9)$$

Iz /2.1.7/,/2.1.8/ i /2.1.9/sledi da za dokaz 4ε optimalnosti strategija $\mu^{*\varepsilon}(\cdot)$, $\nu^{*\varepsilon}(\cdot)$ dovoljno je dokazati ispunjenje nejednačina:

$$\mu(x_0,y_0;\mu^{*\varepsilon}(\cdot),v(\cdot))-2\varepsilon\le V(\bar{y}) \quad \ldots\ldots \quad (2.1.10)$$

$$\mu(x_0,y_0;u(\cdot),\nu^{*\varepsilon}(\cdot))+2\varepsilon\ge V(\bar{y}) \quad \ldots\ldots \quad (2.1.11)$$

za svako $u(\cdot)\in\bar{G}$, $v(\cdot)\in\bar{B}$.

Dokažimo najpre /2.1.10/.Neka se igrač G pridržava strategije $\mu^{*\varepsilon}$,a igrač B proizvoljne čiste deo po deo programske strategije v/./$\in\bar{B}$ .Tada saglasno strategiji $\mu^{*\varepsilon}$ igrač G vrši slučajan izbor u momentu vremena $T-\ell_1$ i u momentu završetka igre T se nadje sa verovatnoćom $\frac{1}{N}$ u ε_1 okolini tačke $\xi_j[y(T-\ell)]$, koja ulazi u spektar strategija $\mu_{\bar{y}}^{*\varepsilon}$, ε optimalne u igri $\Gamma_{y(T-\ell)}$. Ma kakva bila strategija v/./$\in\bar{B}$ igrača B i njena odgovarajuća trajektorija $y(t)=\{y^{(j)}(t)\}$ važi relacija

$$y(T)\in C_B^{\ell}(y(T-\ell))=\prod_{j=1}^{m}C_B^{\ell}(y^{(j)}(T-\ell)),$$

tj. y/T/ pretstavlja jednu od čistih strategija igrača B u igri. $\Gamma_y(T-\ell)$.

Pošto igrač B dobija sa zakašnjenjem $\ell_1>0$ informaciju o igraču G tada rezultat slučajnog izbora igrača G nije poznat igraču B do momenta završetka igre i ponašanje igrača G je strategijski ekvivalentno jednakoverovatnom izboru tačaka u ε_1 okolini tačaka $\xi_j[y(T-\ell)]$ u momentu T.Tada pošto funkcija dobitka neprekidno zavisi od $\varrho(x^{(i)},y^{(j)})$,a skup $C_B^{\ell}(y(T-\ell))$ je kompaktan za $\forall\, \varepsilon>0$ postoji $\varepsilon_1>0$ takvo da čim je $\varrho(x^{(i)}(T),\xi_j^{(i)}[y(T-\ell)])<\varepsilon_1, i=1,2,\ldots,n$ tada će važiti relacija:

$$|\mu(x_0,y_0;\mu^{*\varepsilon}(\cdot),v(\cdot))-\mu(\mu^{*\varepsilon},y(T))|<\varepsilon \quad \ldots \quad (2.1.12)$$

gde je $\mu(\mu^{*\varepsilon},y(T))$ matematičko očekivanje dobitka u igri $\Gamma_y(T-\ell)$, a y/t/ je trajektorija, koja se realizuje kao rezultat primene strategije v/./.Sa druge strane strategija $\mu^{*\varepsilon}$ je ε optimalna u igri Γ_y pa je:

$$\mu(\mu^{*\varepsilon};y(T))-\varepsilon\leq V(y), \quad \ldots \quad (2.1.13)$$

gde je $y=y(T-\ell)$ .Iz /2.1.12/ i /2.1.13/ sledi da je:

$$\mu(x_0,y_0;\mu^{*\varepsilon}(\cdot),v(\cdot))-2\varepsilon\leq V(y)$$

pri čemu je ε_1 moguće izabrati tako da bi navedena jednačina važila za svako $y(T-\ell)\in C_B^{T-\ell}(y_0)=\prod_{j=1} C_B^{T-\ell}(y_0^{(j)})$, pošto je $C_B^{T-\ell}(y_0)$ kompaktan, a funkcija dobitka neprekidna i znači ravnomerno neprekidna na kompaktu.

Tačku $\bar{y}$ biramo na taj način da bi vrednost igre $\Gamma_{\bar{y}}$ bila maksimalna, znači /2.1.10/tim pre važi.

Dokažimo /2.1.11/.Neka se B pridržava strategije $y^{*\varepsilon}(\cdot)$, a igrač G proizvoljne čiste deo po deo programske strategije $u(\cdot)\in\bar{G}$ .Saglasno strategiji $y^{*\varepsilon}(\cdot)$ igrač B vrši slučajan izbor u momentu vremena $T-\ell$ i sledi da rezultat ovog izbora igrač G ne zna do momenta završetka igre, zato on ne može da usmeri gonjenje za tačkom $y=\{y^{(j)}\}$,koja se realizovala kao razultat izbora.Razmotrimo dva slučaja.

1.Neka je strategija igrača G,u/./ takva da je: $x(T)=\{x^{(i)}(T)\}\in[D_B^{\ell}(\bar{y})]'$,gde je x/t/ trajektorija gonioca, koja odgovara ovoj strategiji.Tada $x(T)$ pretstavlja čistu strategiju igrača G u jednovremenoj pomoćnoj igri $\Gamma_{\bar{y}}$ i sledi nejednačina /2.1.12/važi na osnovu optimalnosti strategija $y_{\bar{y}}^{*\varepsilon}$ igrača B u igri $\Gamma_{\bar{y}}$.

2. Neka je u/./ takva strategija igrača G, da makar jedna od tačaka $x^{(i)}(T)\notin D_B^{\ell}(\bar{y})$ .Smatraćemo jednostavnosti radi da $x^{(1)}(T)\notin D_B^{\ell}(\bar{y})$ .Razmotrimo $\inf \rho(x^{(1)},\xi)$,gde je ρ Euklidovo rastojanje.Pošto je skup $D_B^{\ell}(\bar{y})$ kompaktan ovaj infimum dostiže se u nekoj ograničenoj tački skupa ξ_0 .Pošto je skup $D_B^{\ell}(\bar{y})$ konvekstan, za sve tačke $y\in D_B^{\ell}(\bar{y})$ sledi: $(x^{(1)}-\xi_0,y)\leq(x^{(1)}-\xi_0,\xi_0)$, gde je /x,y/ skalarni proizvod vektora $x,y\in R^K$ .Sledi da je:

$$(x^{(1)}-\xi_0,y-\xi_0)\leq 0 \quad \ldots \quad (2.1.14)$$

Razmotrimo razliku:

$$\rho^2(x^{(1)},y)-\rho^2(\zeta_0,y)=(x^{(1)}-y,x^{(1)}-y)-(\zeta_0-y,\zeta_0-y)=$$

$$=((x^{(1)}-\zeta_0)+(\zeta_0-y),(x^{(1)}-\zeta_0)+(\zeta_0-y))-(\zeta_0-y,\zeta_0-y)=$$

$$=(x^{(1)}-\zeta_0,x^{(1)}-\zeta_0)+2(x^{(1)}-\zeta_0,\zeta_0-y)>0$$

jer važi/2.1.14/ i osim toga je:

$$\rho^2(x^{(1)},\zeta_0)=(x^{(1)}-\zeta_0,x^{(1)}-\zeta_0)>0$$

$/x^1\notin D_B^l(\bar{y})$, a ovaj skup je zatvoren/.

Dobili smo da je $\rho(x^{(1)},y)>\rho(\zeta_0,y)$ za svaku tačku $y\in D_B^l(\bar{y})$ posebno i za tačke y, koje čine spektar strategija $y_{\bar{y}}^{\pi\varepsilon}$ u igri $\Gamma_{\bar{y}}$. Tada se matrica $A(x,y)=\{\rho(x^{(i)}(T),y^{(j)}(T)\}$ uporedjuje sa matricom $E(\bar{x},y)$ koja se razlikuje od matrice $A(x,y)$ prvom vrstom u kojoj umesto $x^{(1)}$ stoji ζ_0 i $A(x,y)\succ E(\bar{x},y)$. Funkcija dobitka monotono raste i sledi da je za strategiju igrača G, u/./, moguće izabrati dominirajuću strategiju ū/./ takvu da je $\bar{x}^{(i)}(T)\in D_B^l(\bar{y})$, $i=1,2,\dots,n$, gde je $\bar{x}(t)=\{\bar{x}^{(i)}(t)\}$ skup trajektorija igrača G, koje odgovaraju strategiji $\bar{u}(.)$. Opet smo dobili prvi slučaj. Teorema 2.1.1 je dokazana.

Napomena 2.1.2 Bez obzira što se pri dokazu teoreme 2.1.1 odnosi izmedju l i l_1 ne razmatraju, teorema postaje sadržajnija ako je $l_1>l$. U suprotnom slučaju brzine učesnika koalicije gonilaca treba da budu vrlo velike po sravnjenju sa brzinama igrača B_j.

Primer 1. Razmotrimo igru u ravni izmedju koalicije gonilaca $G=\{G_1,G_2\}$ i begunca B. Jednačine kretanja su oblika:

$$\left.\begin{array}{l} G_i: \dot{x}^{(i)}=u^{(i)},\ \|u^{(i)}\|\le\alpha^i,\ i=1,2 \\ B: \dot{y}=v,\ \|v\|\le\beta,\ \alpha^i>\beta \end{array}\right\} \quad \dots\dots \quad (2.1.15)$$

$$x^{(i)}\in R^2,\ y\in R^2,\ u^{(i)}\in R^2,\ v\in R^2$$

Dobitak igrača B se odredjuje:

$$\min_i \rho^2(x^{(i)}(T),y(T)), \quad \dots\dots\dots \quad (2.1.16)$$

gde je $\rho(x^{(i)},y)$ Euklidovo rastojanje medju tačkama $x^{(i)}$ i y . Informaciono stanje je isto kao u opštem slučaju.

Razmotrimo pomoćnu jednovremenu diferencijalnu igru gonjenja na skupu $C^{\ell}_{B}(y)$,koji pretstavlja krug radijusa $\beta\ell$ sa centrom u tački y.Satimov J.A.je pokazao [30] da je vrednost navedene igre:

$$v(y)=\beta^2\ell^2-\frac{4}{\pi^2}\beta^2\ell^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.1.17)$$

Optimalne strategije igrača su sledeće:Za igrača B je optimalna raspodela na kružnici polupričnika $\beta\ell$ sa centrom u tački y. Za igrača G optimalna ravnomerna raspodela tačaka $\zeta^{(i)}$ $i=1,2$ na kružnici radijusa $r_0=\frac{2\beta\ell}{\pi}$ sa centrom u istoj tački y,$C_{r_0}(y)$, pri čemu $\zeta^{(1)}$ i $\zeta^{(2)}$ pripadaju krajnjim tačkama prečnika ove kružnice.

Neka je $\mu^{*\varepsilon}_{N,y}$ takva mešovita strategija igrača G,koja pripisuje jednake verovatnoće $\frac{1}{N}$, N tačkama $\zeta_j=(\zeta_j^{(1)},\zeta_j^{(2)})$ takvim da su $\zeta_j^{(1)}$ i $\zeta_j^{(2)}$ raspoređjene na suprotnim krajevima prečnika kružnice $C_{r_0}(y)$,$\zeta_1^{(1)}$,bira proizvoljno,a ostale tačke $\zeta_j^{(1)}$ dele kružnicu na jednake delove.Tada niz strategija $\{\mu^{*\ell}_{N,y}\}$ konvergira ka strategiji μ^*_y optimalnoj za igrača G u igri Γ_y i pošto je funkcija dobitka neprekidna onda je:

$$\lim_{N\to\infty}\mathcal{M}(\mu^{*\ell}_{N,y},\nu)=\mathcal{M}(\mu^*_y,\nu).$$

Pošto skup $C^{\ell}_{B}(y)$ za svako $y\in C^{T-\ell}_{B}(y_0)$ ostaje u krugu poluprečnika $\beta\ell$ broj N od y ne zavisi i uslov 1. je ispunjen.

Neka je sada y/t/ proizvoljno dopustivo kretanje igrača B za $0\le t\le T$ .Fiksirajmo t i razmotrimo igru $\Gamma_{y(t-\ell)}$ .Neka je sada $\zeta_j[y(T-\ell)]$ tačka spektra strategija $\mu^{*\ell}_{N,y(t-\ell)}$ u ovoj igri. Smatraćemo da se krug $C^{\ell}_{B}(y(t-\ell))$ kreće postepeno pri kretanju centra kruga po trajektoriji $y(t-\ell)$ .Tada trajektorije svih tačaka kruga su krive kongruentne trajektoriji $y(t-\ell)$ .Posebno takve kongruentne krive biće i trajektorije:

$$\zeta_j[y(t-\ell)]=\{\zeta_j^{(i)}[y(t-\ell)]\}$$

i sledi da se ove trajektorije ne seku.Na taj način uslov 2. je takodje ispunjen.

Neka svaki od učesnika koalicije $G=\{G_1,G_2\}$ ne dejstvuje/ostaje u tački $x_0^{(i)}$ / do momenta vremena ℓ ,a zatim primenjuje determinisanu strategiju koja se sastoji u nišanjenju u toku gonjenja u tačku $y(t-\ell)$,tj. $u(\cdot)=\{\sigma,a\}$ je takvo da preslikavanje "a" svakom stanju $x(t_k)=(x^{(1)}(t_k),x^{(2)}(t_k)),y(t_k-\ell),t_k$ korespondira odsečak upravljanja $u(t)=(u^{(1)}(t),u^{(2)}(t))$ koji je odredjen na poluintervalu $[t_k,t_{k+1})$ pri čemu je:

$$\| u^{(i)}(t) \| = \alpha^{(i)}; \quad u^{(i)}(t) = \alpha^{(i)} \frac{y(t_k - l) - x(t_k)}{\rho(x(t_k), y(t_k - l))} \quad \ldots \ldots \quad (2.1.18)$$

ako je:

$$\left. \begin{aligned} & T \geq \frac{\rho(x_0^{(i)}, y_0)}{\alpha^{(i)} - \beta} + l + l_1 \\ & \alpha^{(i)} l_1 = \beta(l + l_1), \; i = 1,2 \end{aligned} \right\} \quad \ldots \ldots \quad (2.1.19)$$

Svaki učesnik koalicije G_1 garantuje u momentu vremena $(T - l_1)$ pripadnost:

$$C_{G_1}^{l_1}(x^{(i)}(T - l_1)) \supset C_B^{l}(y(T - l)) \quad \ldots \ldots \quad (2.1.20)$$

za svako $y(T-l) \in C_B^{l_1}(y(T - l - l_1))$.

Dalje ćemo razmatrati bilo koju od tačaka:

$$\xi_j[y(T - l - l_1)] = \{\xi_j^{(1)}[y(T - l - l_1)], \; \xi_j^{(2)}[y(T - l - l_1)]\}.$$

Kako smo već ranije naveli, ove tačke se kreću po krivama koje su kongruentne trajektoriji $y(t-l)$ pri čemu su njihove brzine jednake brzini tačke $y(t-l)$. Osim toga, igrač G u svakom momentu vremena t za $T - l_1 \leq t \leq T$ zna koordinate ovih tačaka. Na zaj način zadatak približenja igrača G_1 tački $\xi_j^{(i)}$, $i = 1,2$ pretvara se u zadatak gonjenja sa potpunom informacijom. Jednačine gonjenja za ovaj zadatak su:

$$G_i: \dot{x}^{(i)} = u^{(i)} \quad \tilde{B}_i: \dot{\xi}_j^{(i)} = v, \quad i = 1,2; \quad \| u^{(i)} \| \leq \alpha^{(i)}; \; \| v \| \leq \beta; \; \alpha^{(i)} > \beta, \quad \ldots (2.1.21)$$

gde je $\tilde{B}_i$ fiktivni begunac koji raspolaže kretanjem tačke $\xi_j^{(i)}$, α i β su iste kao u /2,1.15/, a dužina igre je odredjena i jednaka l_1. Označimo ove fiktivne igre sa $\tilde{\Gamma}_i$. U igrama $\tilde{\Gamma}_i$ izbor upravljanja $\tilde{B}_i$, v se poklapa sa izborom upravljanja igrača B u igri $\Gamma(x_0, y_0, T)$ u svakom momentu vremena. Sada se setimo da važi pripadnost /2.1.20/ koja označava da u igri $\tilde{\Gamma}_i$ skup dostiživosti begunca $\tilde{B}_i$ za vreme l_1 iz početnog stanja $\xi_j^{(i)}[y(T - l - l_1)]$ se sadrži u skupu dostiživosti gonioca G_i za vreme l_1 iz početnog stanja $x^{(i)}(T - l_1)$. Ovo označava da gonilac G_i može da se približi tački $\xi_j^{(i)}$, koja se kreće po bilo kojoj trajektoriji $\xi_j^{(i)}[y(t-l)]$ za vreme koje ne prelazi l_1 ako bude primenjivao strategiju gonjenja.

U našem primeru ako su samo ispunjeni uslovi /2.1.19/, tj. ako su brzine učesnika goneće koalicije dovoljno velike u poredjenju sa brzinom begunca, tada je primenljiva teorema 2.1.1.

Opisaćemo optimalne strategije irgača. Pošto vrednost pomoćne igre Γ_y^c ne zavisi od izbora tačke y, tada optimalna strategija igrača B /MDDPSP/ sastoji se u sledećem. Za $0 \le t \le T-\ell$ preći programski iz tačke y_0 u ma koju tačku $y \in C_B^{T-\ell}(y_0)$. Izabrati u momentu vremena $T-\ell$ u saglasnosti sa ravnomernom raspodelom ma koju tačku $\xi_j^{(i)}$ kružnice poluprečnika β sa centrom u tački y i preći programski za vreme ℓ u tačku η. Za igrača $G=\{G_1, G_2\}$ μ_ε optimalna strategija je sledeća MDDPSP. Do momenta ℓ učesnici koalicije G_1, G_2 kreću se po pravcu prema tački y_0 ili ne dejstvuju, za $\ell \le t \le T-\ell$ G_i gone tačku $y(t-\ell)$ i samim tim obezbedjuju ispunjenje pripadnosti /2.1.20/. U momentu $T-\ell_1$ fiksira se ma koja ε optimalna strategija $u_{N,y}^{*\varepsilon}$ i igrač G_i sa verovatnoćom $\frac{1}{N}$ bira jednu od tačaka ξ_j /par tačaka koje su rasporedjene na suprotnim krajevima prečnika kružnice radijusa $\tau_0 = \frac{2\beta\ell}{\pi}$ / i preostalo vreme $T-\ell_1 \le t \le T$ G_i goni tačku $\xi_j^{(i)}$ premeštajući se po trajektoriji $\xi_j^{(i)}[y(t-\ell)]$ do ε_1 susreta sa ovom tačkom, tako da u momentu završetka igre tačka $x(T)=\{x^{(1)}(T), x^{(2)}(T)\}$ pripada ε_1 okolini tačke $\{\xi_j^{(1)}[y(T-\ell)], \xi_j^{(2)}[y(T-\ell)]\}$.

<u>Primer 2.</u> Razmotrimo antagonističku diferencijalnu igru u ravni izmedju koalicije gonilaca $G=\{G_1, G_2, \dots G_n\}$, koja dejstvuje kao jedan igrač i begunca B. Dužina igre je fiksirana i jednaka T. Jednačine kretanja su oblika:

$$G_i: \begin{array}{l} \dot{x}_1^{(i)} = u_1^{(i)} \\ \dot{x}_2^{(i)} = u_2^{(i)} \end{array} ; (u_1^{(i)})^2 + (u_2^{(i)})^2 \le (\alpha^{(i)})^2; \quad i=1,2,\dots n \quad \dots\dots (2.1.22)$$

$$B: \begin{array}{l} \dot{y}_1 = v y_2 + y_1 ; \\ \dot{y}_2 = -1 \end{array} \quad -1 \le v \le 1 \quad \dots\dots (2.1.23)$$

Dobitak igrača B je terminalni i odredjuje se:

$$x(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}, y) = \min_i \rho(x^{(i)}(T), y(T)) \quad \dots\dots (2.1.24)$$

Informaciono stanje u igri je isto kao u opštem slučaju. Jednačine /2.1.22/ označavaju da učesnici goneće koalicije G_i poseduju jednostavna kretanja. Iz /2.1.23/ sledi:

$$y_2(t) = y_2(0) - t \quad \dots\dots (2.1.25)$$

Stavljajući $v=+1$ sledi:

$$y_1(t) = t + 1 - y_2(0) + [y_1(0) + y_2(0) - 1]e^t \quad \dots\dots (2.1.26)$$

Za $v=-1$ je: $y_1(t) = -t - 1 + y_2(0) + [y_1(0) - y_2(0) + 1]e^t$ . . . . . (2.1.27)

Moguće je pokazati da skup dostiživosti igrača B za vreme t iz stanja $(y_1(0), y_2(0))$, $C_B^t(y_1(0), y_2(0))$ je odsečak koji spaja tačke $E_t(y(0))$ i $A_t(y(0))$ pri čemu koordinate tačke $E_t(y(0))$ odredjuju se jednačinama /2.1.25/,/2.1.27/, a koordinate tačke $A_t(y(0))$ jednačinama /2.1.25/,/2.1.26/. Polovina dužine ovog odsečka je:

$$d_t(y(0)) = t+1-y_2(0)+[y_2(0)-1]e^t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.1.28)$$

Na taj način $C_B^t(y(0))$ je odsečak paralelan apscisi, dužina kojeg je neprekidna funkcija od vremena.

Razmotrimo jednovremenu pomoćnu diferencijalnu igru Γ_y na skupu $C_B^\ell(y_1,y_2)$ /na odsečku $[E_\ell(y_1,y_2); A_\ell(y_1,y_2)]$ /. Igra se odvija na sledeći način: igrač G bira n tačaka $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(n)} \subset C_B^\ell(y_1,y_2)$ a igrač B tačku $\eta \in C_B^\ell(y_1,y_2)$. Izbori se vrše jednovremeno i nezavisno jedan od drugoga. Igrač B prima dobitak:

$$\mathcal{K}(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \xi^{(3)}, \dots, \xi^{(n)}; \eta) = \min_i \rho(\xi^{(i)}, \eta).$$

Iz paragrafa IV ove glave sledi da je vrednost igre u ovom slučaju $V_{al}(\Gamma_y) = \frac{d_\ell(y_1,y_2)}{2n-1}$, a optimalne strategije igrača su sledeće. Jedinstvena optimalna strategija igrača G sastoji se iz izbora sa jednakom verovatnoćom $\frac{1}{2}$ dve koalicije tačaka $\xi_1 = \{\xi_1^{(1)}, \xi_1^{(2)}, \dots, \xi_1^{(n)}\}$ i $\xi_2 = \{\xi_2^{(1)}, \xi_2^{(2)}, \dots, \xi_2^{(n)}\}$ takvih da je:

$$\xi_1^1 = E_\ell(y_1,y_2); \ \xi_2^{(n)} = A_\ell(y_1,y_2)$$

i tačke $\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \xi_1^2, \xi_2^{(2)}, \dots, \xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}$ dele odsečak $[E_\ell(y_1,y_2), A_\ell(y_1,y_2)]$ na jednake delove. Igrač B ima nekoliko optimalnih strategija. Jedna od njih sastoji se u izboru sa jednakom verovatnoćom $\frac{1}{2n}$ tačke $\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)}, \xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}, \dots, \xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}$. Na taj način uslov 1. je ispunjen pri čemu strategija igrača G, ν_ℓ^* je ne samo ε optimalna več je optimalna.

Neka je y/t/ proizvoljno dopustivo kretanje igrača B za $0 \le t \le T$. Tada $C_B^\ell(y(t-\ell))$ pretstavlja odsečak $[E_\ell(y(t-\ell)), A_\ell(y(t-\ell))]$ koji se kreče, ostajući pri tome paralelnim apscisnoj osi pri čemu dužina ovog odsečka je:

$$d_\ell(y(t-\ell)) = \ell+1-y_2(t-\ell)+[y_2(t-\ell)-1]e^\ell \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.1.29)$$

i ne zavisi od $y_1(t-\ell)$, i smanjuje se pri kretanju B po trajektoriji. Sve tačke $\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}$ $i=1,\dots,n$ opisuju pri tome trajektorije koje se ne seku, jer u svakom momentu vremena t je:

$$\rho(\xi_1^{(i)}[y(t-\ell)], \xi_2^{(i)}[y(t-\ell)]) = \frac{d_\ell(y(t-\ell))}{2n-1}$$

i znači uslov 2. je takodje ispunjen.

Iz /2.1.29/ i /2.1.25/ sledi da je:

$$\max_{(y_1,y_2)\in C_B^{T-\ell}(y_1(0),y_2(0))} Va\ell\,\Gamma_y = \frac{1}{2n-1}\max_{(y_1,y_2)\in C_B^{T-\ell}(y_1(0),y_2(0))}\{\ell+1-y_2(T-\ell)+[y_2(T-\ell)-1]\cdot e^{\ell}\}\le$$

$$\le\frac{1}{2n-1}\{T+1-y_2(0)+[y_2(0)-T-1+\ell]e^{\ell}\}$$

i tačku $(y_1,y_2)\in C_B^{T-\ell}(y_1(0),y_2(0))$ moguće je birati proizvoljno.

Znači ako su ispunjeni uslovi teoreme 2.1.1, optimalne strategije igrača u ovom primeru je moguće opisati na sledeći način. Svaki od učesnika koalicije gonilaca do momenta $T-\ell_1$ goni sredinu odsečka $[E_\ell(y(t-\ell)),A_\ell(y(t-\ell))]$ da bi se garantovalo ispunjenje pripadnosti /2.1.5/. U momentu $T-\ell_1$ igrač G vrši slučajanizbor /sa verovatnoćom $\frac{1}{2}$ bira jednu od n koalicija tačaka $\xi_1^{(i)}[y(T-\ell-\ell_1)]$, $\xi_2^{(i)}[y(T-\ell-\ell_1)]$ i na preostalom intervalu vremena svaki učesnik G_i goni tačku $\xi_j^{(i)}$ premeštejući se po trajektoriji $\xi_j^{(i)}[y(t-\ell)]$ sa tim da bi u momentu T obezbedio dospevanje tačke $x^{(i)}$ u ε_1 okolinu tačke $\xi_j^{(i)}$.

Igrač B se može kretati proizvoljno za $0\le t\le T-\ell$. U momentu $T-\ell$ igrač B bira sa verovatnoćom $\frac{1}{2n}$ jednu od tačaka $\xi_j^{(i)}$, koje dele na jednake delove odsečak $[E_\ell(y(T-\ell)),A_\ell(y(T-\ell))]$ i za vreme $T-\ell\le t\le T$ prelazi programski u realizovanu kao rezultat slučajnog izbora tačku koristeći odgovarajuće upravljanje v.

Vrednost igre je $\dfrac{d_\ell(y(T-\ell))}{2n-1}$.

§2. Funkcionalne jednačine za diskretnu igru gonjenja u kojoj se informacija dobija sa odredjenim zakašnjenjem

Kratak pregled ovog paragrafa dat je na šestoj strani uvoda.

Razmotrićemo antagonističke diferencijalne igre gonjenja odredjene dužine T opisane u prvom delu 1 paragrafa ove glave.

Neka je $\ell_1=0$, tj. igrač B poseduje potpunu informaciju, a $\ell>0$. Jednostavnosti radi smatraćemo disjunktnu podelu δ odsečka vremena $[0;T]$ takvom da je $t_{k+1}-t_k=\delta$, $k=1,2,\dots,r$, a broj δ je činilac broja ℓ. Označimo uvedenu diskretnu igru sa Γ.

Definicija 2.2.1 Stanje informacije igrača G/B/ u momentu vremena t_k nazvaćemo informacionim skupom igrača G/B/ k-tog nivoa. Označimo informacioni skup igrača G/B/ k-tog nivoa sa I_k^G (I_k^B).

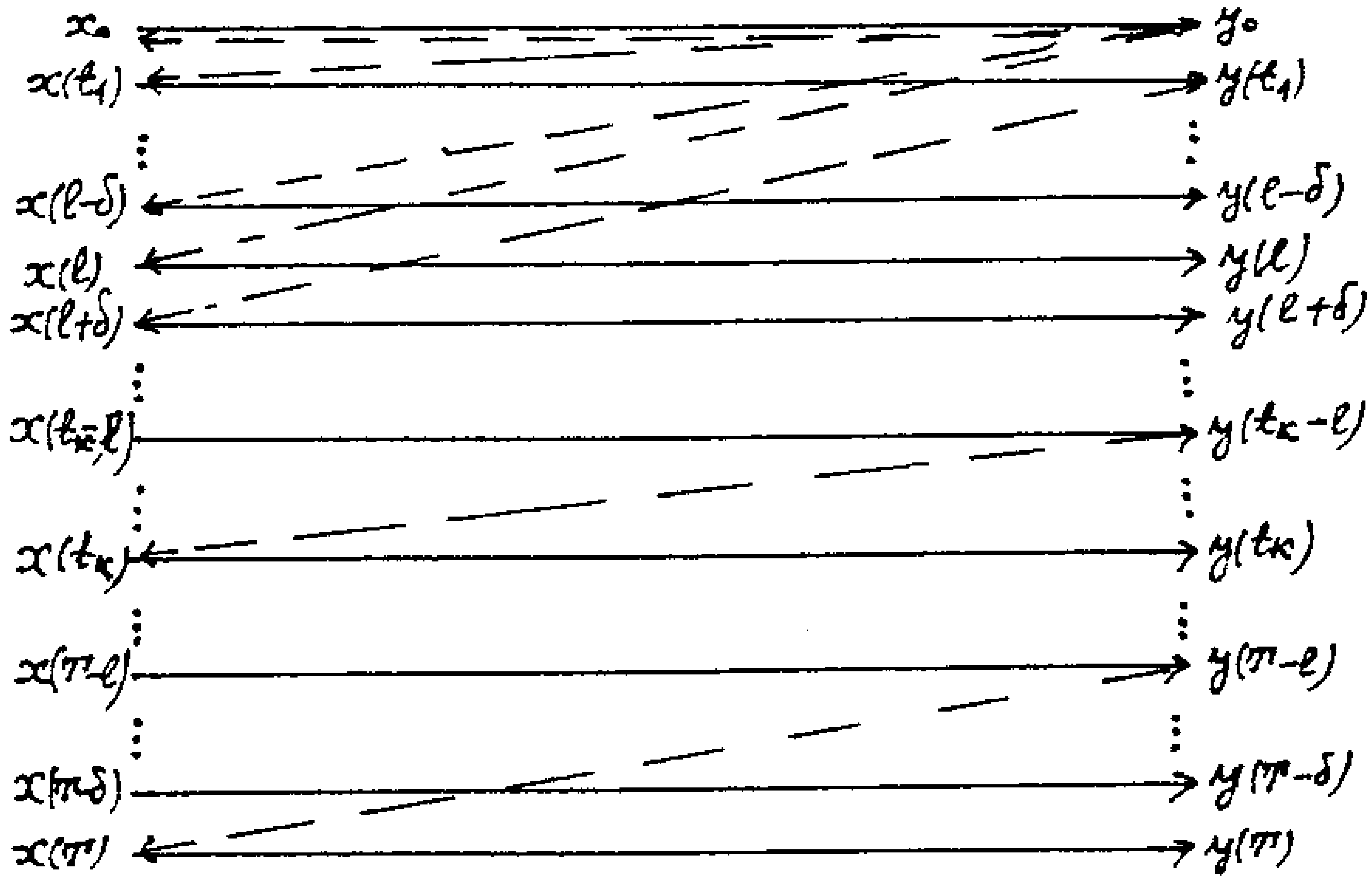
I_k^G pretstavlja Dekartov proizvod $t_k, x(t_k), C_B^{t_k}(y_0)$ za $0\le t_k\le\ell$. Za $\ell\le t_k\le T$ I_k^G je Dekartov proizvod $t_k, x(t_k)$ i $C_B^{\ell}(y(t_k-\ell))$.

I_k^B je skup od jednog elementa i pretstavlja tačku:

$(t_k, x(t_k), y(t_k)) \in [0,T] \times C_G^{t_k}(x_0) \times C_B^{t_k}(y_0)$.

Klasu svih informacionih skupova nivoa $\mathcal{K}$ Igrača G/B/ označićemo sa $\mathcal{J}_k^G(\mathcal{J}_k^B)$.

Šematski opisana igra je prikazana na slici 1.



slika 1

Opisana diferencijalna igra sa odredjenim zakašnjenjem informacije o beguncu može biti disjunktno podeljena na podigre vrednosti kojih su povezane sa funkcionalnim jednačinama, a optimalne strategije sa optimalnim strategijama polazne igre. Podigra, koju uvodimo, opisuje se stanjem informacije, koja je dostupna igračima u početku podigre.

Razmotrimo proizvoljni informacioni skup igrača G nivoa $\mathcal{K}$ i zafiksirajmo ovo stanje informacije I_k^G. Neka igrač G zna takodje raspodelu verovatnoća na skupu dostiživosti igrača B za vreme ℓ iz stanja $y(t_k-\ell), C_B^{\ell}(y(t_k-\ell))$, koje smo mi označili sa $P^{\ell}_{y(t_k-\ell)}$. Primetimo da raspodela $P^{\ell}_{y(t_k-\ell)}$ nije proizvoljna, a rezultat je raspodela, izabranih od strane igrača B na skupovima

$$C_B^{\delta}(y(t_k-\ell)),\ C_B^{\delta}(y(t_k-\ell+\delta)), \dots, C_B^{\delta}(y(t_k-\delta)).$$

Neka je poslednja raspodela takodje poznata igraču G.

Podigra teče ovako. Izbori $y(t_k-\ell+\delta), y(t_k-\ell+2\delta), \dots, y(t_k)$ se rondomiziraju saglasno raspodeli $P^{\ell}_{y(t_k-\ell)}$ i saopštava se igraču B, ali ne i igraču G. Izbor $x(t_k+\delta-\ell)$ saopštava se obojici igrača posle toga kada je on učinjen, ali izbor $y(t_k+\delta)$, saglasno informacionim uslovima drži se u tajnosti od igrača G dotle dok on ne učini izbor $x(t_k+l+\delta)$ .Dalje se izvode redom izbori $v(t_k+2\delta)$ i $x(t_k+2\delta)$ i izbor $y(t_k-l+2\delta)$ se saopštava igraču G.

Ovaj niz izbora se produžava dotle dok svi slučajni izbori ne budu objavljeni, posle čega se igra produžava korišćenjem šeme stanja informacije koja je prihvaćena za polaznu igru.

Funkcija dobitka podigre biće funkcija dobitka polazne igre. Podigru ćemo označiti sa $\Gamma_k = \Gamma_k[I_k^\sigma, P^l_{y(t_k-l)}; T-k\delta]$, a vrednost podigre sa

$$\nu[I_k^\sigma, P^l_{y(t_k-l)}; T-k\delta].$$

Neka je $\mathcal{V}_{y(t_k)}$ verovatna mera, izabrana igračem B na skupu $C_B^\delta(y(t_k))$. U_k je slika deo po deo programske strategije u/./ igrača G, izračunate u informacionom skupu I_k^σ .Primetimo da U_k pretstavlja izbor tačke $x(t_k+\delta)\in C_a^\delta(x(t_k))$, koji je diktiran strategijom u/./.

Kretanje igrača B u klasi MDDPSP moguće je razmatrati kao Markovski proces sa prelaznom funkcijom za jedan korak $\mathcal{V}_{y(t_k)}$ .Tada se raspodela $P^l_{y(t_k-l)}$ pretstavlja oblika:

$$P^l_{y(t_k-l)}=\int\limits_{C_B^\delta(y(t_k-l))} d\mathcal{V}_{y(t_k-l)} \int\limits_{C_B^\delta(y(t_k-l+\delta))} d\mathcal{V}_{y(t_k-l+\delta)} \cdots \int\limits_{C_B^\delta(y(t_k-2\delta))} \mathcal{V}_{y(t_k-2\delta)}\, d\mathcal{V}_{y(t_k-2\delta)} \cdots \quad (2.2.1)$$

gde se integrali podrazumevaju kao u jednačini Čepmen-Kolmogorova [5], [8] .Zato da bi zapis bila kompaktna, udobno je uvesti pojam raspodele $P^{l-\delta}_{y(t_k-l+\delta)}$ na skupu dostiživosti igrača B: $C_B^{l-\delta}(y(t_k-l+\delta))$, koji jednak:

$$P^{l-\delta}_{y(t_k-l+\delta)}=\int\limits_{C_B^\delta(y(t_k-l+\delta))} d\mathcal{V}_{y(t_k-l+\delta)} \int\limits_{C_B^\delta(y(t_k-l+2\delta))} d\mathcal{V}_{y(t_k-l+2\delta)} \cdots \int\limits_{C_B^\delta(y(t_k-2\delta))} \mathcal{V}_{y(t_k-2\delta)}\, d\mathcal{V}_{y(t_k-2\delta)} \cdots (2.2.2)$$

Sledi da je:

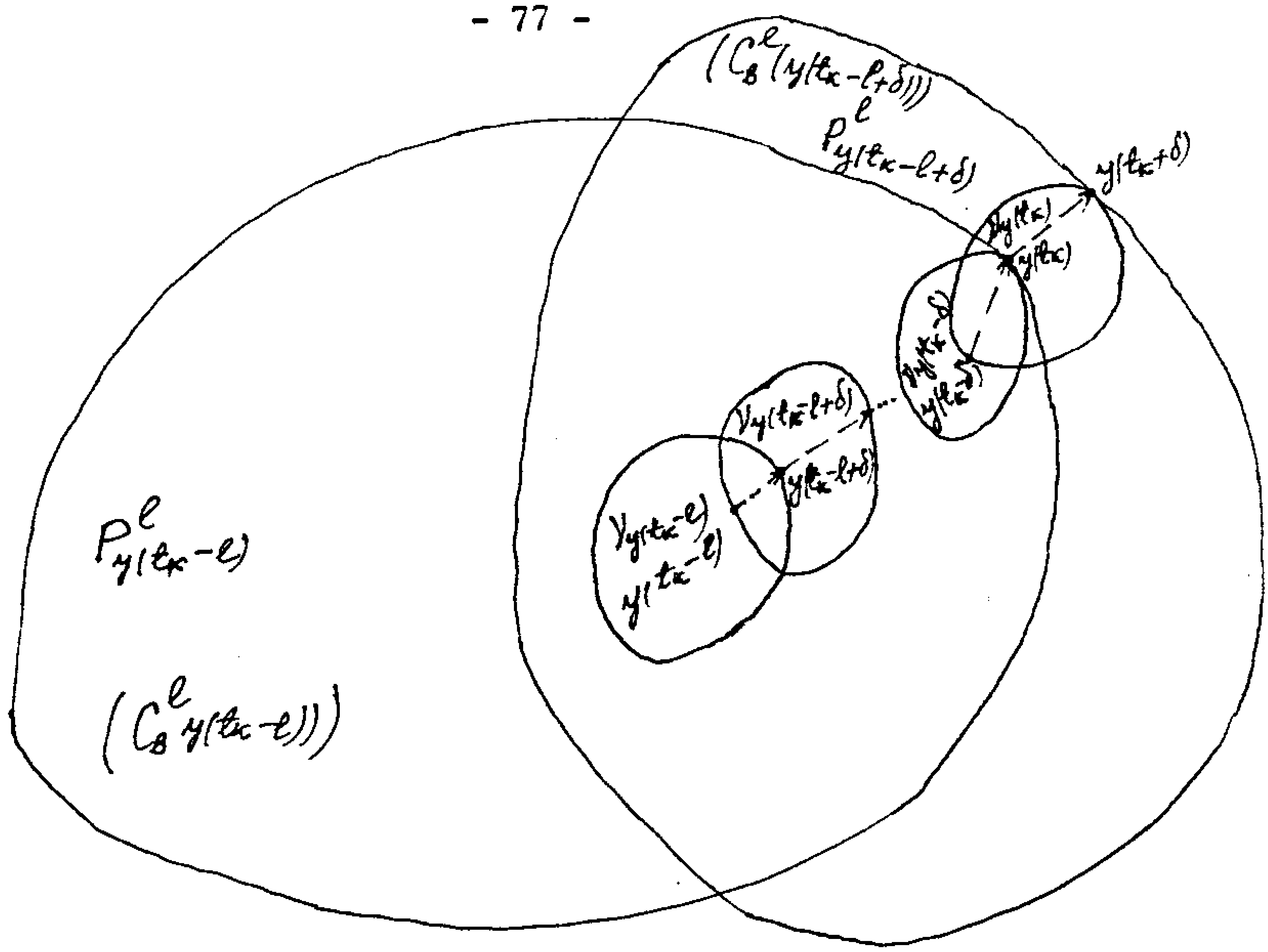
$$P^l_{y(t_k-l)}=\int\limits_{C_B^l(y(t_k-l))} P^{l-\delta}_{y(t_k-l+\delta)}\, d\mathcal{V}_{y(t_k-l)} \quad \ldots\ldots\ldots (2.2.3)$$

a

$$P^l_{y(t_k-l+\delta)}=\int\limits_{C_B^{l-\delta}(y(t_k-l+\delta))} \mathcal{V}_{y(t_k)}\, d P^{l-\delta}_{y(t_k-l+\delta)}, \quad \ldots\ldots\ldots (2.2.4)$$

gde je $P^l_{y(t_k-l+\delta)}$ verovatna mera na skupu $C_B^l(y(t_k-l+\delta))$.

U saglasnosti sa definicijom podigre $y(t_k-l+\delta), \mathcal{V}_{y(t_k)}$ sledi da $P^l_{y(t_k-l+\delta)}$ postaje poznata igraču G posle toga kada je igrač B izabrao verovatnu meru $\mathcal{V}_{y(t_k)}$ na $C_B^\delta(y(t_k))$ i saznaje rezultat njene rondomizacije $y(t_k+\delta)$ /slika2/.



Slika 2.

Napomena 2.2.1 Upučivanje na Markovski proces pri odredjivanju intervala u /2.2.1/ je prirodno, ali ne i obavezno. Možemo se koristiti opštom definicijom integrala, koja je prihvaćena u funkcionalnoj analizi [5], [8].

Neka su u opisanoj diferencijalnoj igri gonjenja sa odredjenim zakašnjenjem informacije za igrača G zadovoljeni sledeći uslovi:

1/ Skupovi dostiživosti igrača G i B $C_G^t(x)$ i $C_B^t(y)$ su kompaktni za ma koje $t \in [0,T]$, x, y i menjaju se neprekidno po pripadnosti pri promeni redom x i y;

2/ Vrednost podigre $V[I_k^G, P^l_{y(t_k-l)}; T-k\delta]$ postoji i neprekidno zavisi od I_k^G, u_{k-1}, $P^l_{y(t_k-l)}$, $\nu_{y(t_k-\delta)}$

Napomena 2.2.2 Bliskost medju informacionim skupovima smatra se u smislu Hausdorfa, a konvergencija mera $\nu_{y(t_k-\delta)}$, $P^l_{y(t_k-l)}$ u smislu slabe konvergencije mera.

Izvodimo funkcionalnu jednačinu, koja povezuje vrednost igre

$$\Gamma[I_k^G, P^l_{y(t_k-l)}; T-k\delta] \quad \text{i} \quad \Gamma[I_{k+1}^G, P^l_{y(t_k-l+\delta)}; T-(k+1)\delta].$$

Opišimo jednu od strategija igrača B u igri $\Gamma[I_k^B, P^l_{y(t_k-l)}; T-k\delta]$. Neka igrač B čini svoj prvi korak u ovoj igri u saglasnosti sa raspodelom verovatnoće $\nu_{y(t_k)}$. Posle toga kada igrač G realizuje svoju DDPČSI, u/./ u informacionom skupu I_K^G i izračuna $x(t_K+\delta)$ on poseduje informaciju I_{K+1}^G. Neka dalje igrač B produžava igru, pridržavajući se optimalnih strategija u igri $\Gamma[I_{K+1}^G, P^\ell_{y(t_K-\ell+\delta)}; T-(K+1)\delta]$.

Pogledajmo dobitak igrača B, ako u početku igre $\Gamma[I_K^G, P^\ell_{y(t_K-\ell)}; T-K\delta]$ on saopšti igraču G da je to baš ta strategija koju će on da koristi. Posle prvih koraka u igri $\Gamma[I_K^G, P^\ell_{y(t_K-\ell)}; T-K\delta]$ i posle toga kako je izbor $y(t_K-\ell+\delta)$ saopšten igraču G, informacija dostupna igraču G sastoji se iz I_{K+1}^G; $P^\ell_{y(t_K-\ell+\delta)}$ pa je:

$$V[I_{K+1}^G, P^\ell_{y(t_K-\ell+\delta)}; T-(K+1)\delta].$$

Igrač B ne može znati rezultat rondomizacije za $y(t_K-\ell+\delta)$ od ranije, zato u početku igre $\Gamma[I_K^G, P^\ell_{y(t_K-\ell)}; T-K\delta]$ on može garantovati sebi samo matemetičko očekivanje vrednosti igre:

$$\int_{C_B^\delta(y(t_K-\ell))} V[I_{K+1}^G, P^\ell_{y(t_K-\ell+\delta)}; T-(K+1)\delta]\, d\nu_{y(t_K-\ell)}.$$

Pošto B ne zna DDPČSI u/./ igrača G on može biti uveren samo u dobitak :

$$\min_{u_K} \int_{C_B^\delta(y(t_K-\ell))} V[I_{K+1}^G, P^\ell_{y(t_K-\ell+\delta)}; T-K\delta]\, d\nu_{y(t_K-\ell)}.$$

Ako pak B bira $\nu_{y(t_K)}$ razumno, tada je:

$$V[I_K^G, P^\ell_{y(t_K-\ell)}; T-K\delta] \geq \max_{\nu_{y(t_K)}} \min_{u_K} \int_{C_B^\delta(y(t_K-\ell))} V[I_{K+1}^G, P^\ell_{y(t_K-\ell+\delta)}; T-(K+1)\delta]\, d\nu_{y(t_K-\ell)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.2.5)$$

Maksimum i minimum dostiže se, jer je neprekidna funkcija:

$$V[I_{K+1}^G, P^\ell_{y(t_K-\ell+\delta)}; T-(K+1)\delta]$$

i kompaktni su skupovi dostiživosti igrača.

Pokazaćemo da se nejednačina /2.2.5/ može zameniti jednačinom. Neka se igrač B pridržava optimalne strategije u igri $\Gamma[I_K^G, P^\ell_{y(t_K-\ell)}; T-K\delta]$ i neka je $\nu^*_{y(t_K)}$ početna komponenta ove strategije. Pošto je strategija igrača B optimalna on je može saopštiti igraču G ne smanjujući pri tome svoj očekivani dobitak.

Opišimo jednu od strategija igrača B u igri: $\Gamma[I_K^G, P^\ell_{y(t_K-\ell)}; T-K\delta]$. Neka igrač G bira tako u_K da bi rondomizirao:

$$\int_{C_B^\delta(y(t_K-\ell))} V[I_{K+1}^G, P^{\ell *}_{y(t_K-\ell+\delta)}; T-(K+1)\delta]\, d\nu_{y(t_K-\ell)},$$

gde $P^{\ell *}_{y(t_k-\ell+\delta)}$ nastaje od $P^{\ell}_{y(t_k-\ell)}$ i $\nu^*_{y(t_k)}$ i odredjuje se formulama /2.2.2/,/2.2.4/ za $\nu_{y(t_k)}=\nu^*_{y(t_k)}$ .Tada I^G_{k+1} pretstavlja Dekartov proizvod $x(t_k+\delta)\times C^{\ell}_{B}(y(t_k-\ell+\delta))\times t_{k+1}$ pri čemu se $y(t_k-\ell+\delta)$ raspodeljuje u saglasnosti sa merom $\nu_{y(t_k-\ell)}$,Ako igrač G koristi svoju optimalnu strategiju u igri $\Gamma[I^G_{k+1}, P^{\ell *}_{y(t_k-\ell+\delta)}; T-(k+1)\delta]$,tada očekivani dobitak igrača B neće biti veći od :

$$\int\limits_{C^{\delta}_{B}(y(t_k-\ell))} V[I^G_{k+1}, P^{\ell *}_{y(t_k-\ell+\delta)}; T-(k+1)\delta]\, d\nu_{y(t_k-\ell)}.$$

Pri čemu ovaj dobitak saglasno načinu izbora u_k je:

$$\min_{u_k}\int\limits_{C^{\delta}_{B}(y(t_k-\ell))} V[I^G_{k+1}, P^{\ell *}_{y(t_k-\ell+\delta)}; T-(k+1)\delta]\, d\nu_{y(t_k-\ell)} \cdot \;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \quad (2.2.6)$$

Pošto igrač B,po pretpostavci,igra optimalnim načinom u igri $\Gamma[I^G_k, P^{\ell}_{y(t_k-\ell)}; T-k\delta]$,tada izraz /2.2.6/ nije manji od vrednosti igre $\Gamma[I^G_k, P^{\ell}_{y(t_k-\ell)}; T-k\delta]$ .Sledi da je: $V[I^G_k, P^{\ell}_{y(t_k-\ell)}; T-k\delta]\leq$

$$\leq \max_{\nu_{y(t_k)}}\min_{u_k}\int\limits_{C^{\delta}_{B}(y(t_k-\ell))} V[I^G_{k+1}, P^{\ell *}_{y(t_k-\ell+\delta)}; T-(k+1)\delta]\, d\nu_{y(t_k-\ell)} \cdot \;\cdot\;\cdot\;\cdot \quad (2.2.7)$$

Uzimajući u obzir i /2.2.5/ i/2.2.7/ dobijamo funkcionalnu jednačinu, koja povezuje vrednosti igara:

$\Gamma[I^G_k, P^{\ell}_{y(t_k-\ell)}; T-k\delta]; \Gamma[I^G_{k+1}, P^{\ell}_{y(t_k-\ell+\delta)}; T-(k+1)\delta]$:

$$V(I^G_k, P^{\ell}_{y(t_k-\ell)}; T-k\delta] = \max_{\nu_{y(t_k)}}\min_{u_k}\int\limits_{C^{\delta}_{B}(y(t_k-\ell))} V[I^G_{k+1}, P^{\ell}_{y(t_k-\ell+\delta)}; T-(k+1)\delta]\, d\nu_{y(t_k-\ell)} \ldots \quad (2.2.8)$$

Pokazaćemo da optimalne strategije igrača B u diskretnoj igri gonjenja sa zakašnjenjem informacije za igrača G mogu biti izvedene iz funkcionalnih jednačina /2.2.8/ i /2.2.5/.

Prva funkcionalna jednačina povezuje vrednost igre G sa vrednošću igre $\Gamma[I^G_1, P^{\delta}_{y_0}; T-\delta]$ i oblika je:

$$V=\max_{\nu_{y_0}}\min_{u_0} V[I^G_1, \nu_{y_0}; T-\delta].$$

Odredimo komponente MDDPSP igrača B uz pomoć sledećeg rekurzivnog metoda .Neka je ν_{y_0} izabrano tako da bi maksimizirao

---

$$\min_{u_0} V[I_1^G, \nu_{y_0}; T-\delta].$$

Označimo takvu maksimizirajuću raspodelu sa $\nu_{y_0}^*$. U opštem slučaju ako su poznati $\nu_{y_0}^*, \nu_{y(t_1)}^*, \nu_{y(t_2)}^*, \dots, \nu_{y(t_k-\delta)}^*$ mi možemo za $\forall I_k^G$ obrazovati $P_{y(t_k-\ell)}^{\ell *}$ po formuli /2.2.2/ i izabrati $\nu_{y(t_k)}^*$ jednaku ma kojoj $\nu_{y(t_k)}$ koja maksimizira:

$$\min_{u_k} \int\limits_{C_B^\delta(y(t_k-\ell+\delta))} V[I_{k+1}^G, P_{y(t_k-\ell+\delta)}^{\ell}; T-(k+1)\delta]\, d\nu_{y(t_k-\ell)}^*,$$

gde se $P_{y(t_k-\ell+\delta)}^{\ell}$ izračunava po formuli /2.2.4/ za

$$P_{y(t_k-\ell+\delta)}^{\ell-\delta} = P_{y(t_k-\ell+\delta)}^{(\ell-\delta)*}.$$

Pokažimo da opisani metod izbora komponenata MDDPSP igrača B dovodi do optimalne strategije $\nu^*(\cdot)$ igrača B.

Neka igrač B bira baš takvu strategiju $\nu^*(\cdot)$. Označimo kratkoće radi da je:

$$V[I_k^G, P_{y(t_k-\ell)}^{\ell *}, T-k\delta] = V^*[I_k^G].$$

Niz $V^*(I_k^G)$ poseduje dva svojstva

1. $\min\limits_{u_k} \int\limits_{C_B^\delta(y(t_k-\ell))} V^*[I_{k+1}^G]\, d\nu_{y(t_k-\ell)}^* = V^*[I_k^G],$

2. $\min\limits_{u_0} V^*[I_1^G] = V.$

Svojstvo 1. je posledica definicije strategije $\nu^*(\cdot)$ i funkcionalne jednačine /2.2.8/, a svojstvo 2. dobija se iz prvog i funkcionalne jednačine.

Treba da dokažemo da je:

$$M(x_0, y_0; \nu^*(\cdot), \mu(\cdot)) \geq V$$

za svaku dopustivu MDDPSP $\mu(\cdot)$ igrača G. Dovoljno je dokazati da je:

$$M(x_0, y_0; \nu^*(\cdot), u(\cdot)) \geq V$$

za svaku dopustivu DDPČSI u/./igrača G. Neka igrač G bira proizvoljno DDPČSI u/./, tada iz svojstva 1. sledi da je:

$$M(V^*[I_{k+1}^G] \setminus I_k^G) = \int\limits_{C_B^\delta(y(t_k-\ell))} V^*[I_{k+1}^G]\, d\nu_{y(t_k-\ell)}^* \geq V^*[I_k^G] \quad \dots\dots\dots (2.2.9)$$

za svako $k = 1, 2, \dots, \tau-1$. Ako prointegralimo /2.2.9/ i još jednom primenimo svojstvo 1. sledi: $M(M(V^*[I_{k+1}^G] \setminus I_{k-1}^G) \setminus I_{k-1}^G) \geq \int\limits_{C_B^\delta(y(t_k-\ell+\delta))} V^*[I_k^G]\, d\nu_{y(t_k-\ell+\delta)}^* =$

$$= M(V^*[I_k^G] \setminus I_{k-1}^G) \geq V^*[I_{k-1}^G].$$

Ako integralimo potreban broj puta i iskoristimo uslov 2.sledi da je:

$$u(x_o, y_o;\ u(\cdot), \nu^*(\cdot)) \geq V. \qquad \ldots \ldots \ldots (2.2.10)$$

što je i trebalo dokazati.

Teorema 2.2.1 Ako se u svakom informacionom skupu komponente MDDPSP igrača B biraju ranije opisanim načinom, tada strategija igrača B biće optimalna.

§3. Beskoalicione diferencijalne igre gonjenja u kojima se informacija dobija sa odredjenim zakašnjenjem

Razmotrićemo beskoalicionu diferencijalnu igru gonjenja odredjene dužine T izmedju grupe gonilaca $G=\{G_1, G_2, \ldots, G_n\}$, koja dejstvuje kao jedan igrač i begunaca $B_1, B_2, \ldots B_m$ $(n>m>2)$. Jednačine kretanja igrača i uslovi koji se postavljaju desnim stranama ovih jednačina takvi su kao u §1. ove glave.

Kratak sadržaj ovog paragrafa dat je na stranici 7 uvoda.

Informaciono stanje u igri je sledeće. Dati su brojevi $\ell, \ell_1 > 0$, koji pretstavljaju zakašnjenje dobijanja informacije redom igrača G o igračima B_j i igračima B_j o igraču G. Ovo označava da igrač G zna za $0 \leq t \leq \ell$ u svakom momentu vremena t svoje stanje $x(t)=\{x^{(i)}(t)\}$, vreme t i stanje igrača B_j u početnom momentu y_o, $j=1,2,\ldots,m$. Za $\ell \leq t \leq T$ igrač G zna svoje stanje $x(t)=\{x^{(i)}(t)\}$, vreme t i stanje igrača B_j u momentu vremena $t-\ell$, $y^{(j)}(t-\ell)$, $j=1,2,\ldots m$.

Svaki od igrača B_j za $0 \leq t \leq \ell_1$ zna svoje stanje $y^{(j)}(t)$, stanje drugih begunaca $y^{(k)}(t)$, $k \neq j$, vreme t i stanje igrača G u početnom momentu vremena $x_o=\{x_o^{(i)}\}$. Za $\ell_1 \leq t \leq T$ igrači B_j znaju svoja stanja $y^{(j)}(t)$, stanja begunaca B_j, $y^{(k)}(t)$, $k \neq j$, vreme t i stanje igrača G u momentu vremena $t-\ell_1$, $x(t-\ell_1)=\{x^{(i)}(t-\ell_1)\}$

Dobitak igrača je terminalni i odredjuje se na sledeći način. Razmotrimo:

$$a_j(x, y^{(j)}) = \min_i \rho^{\alpha}(x^{(i)}(T), y^{(j)}(T)), \quad j=1,2,\ldots,m$$

gde je $\rho(x^{(i)}, y^{(j)})$ Euklidovo rastojanje izmedju tačaka $x^{(i)}, y^{(j)} \in R^k$, a $x^{(i)}(t), y^{(j)}(t)$ su ma koje dopustive trajektorije redom učesnika grupe G i igrača B_j. Dobitak igrača B_j je:

$$\mathcal{K}_j(x, y^{(j)}) = F_j[a_j(x, y^{(j)})], \quad j=1,2,\ldots m,$$

a dobitak igrača G je:

$$\mathcal{K}_0(x, y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, v^{m}) = -\sum_{j=1}^{m} F_j\,[a_j(x, y^{(j)})],$$

gde su F_j realne,neprekidne,monotono rastuće funkcije.

Neka se pojam DDPČSI uvodi isto kao u paragrafu 1.,glave II, a skupovi DDPČSI označavaju se redom sa $\bar{G}, \bar{B}_j$ .Tada za date početne uslove $x_0, y_0^{(1)}, \ldots, v_0^{m}$ /kratkoće radi označićemo ih sa x_0, y_0 /, funkcije dobitka igrača u situaciji $S=(u(\cdot), v^{(1)}(\cdot), \ldots, v^{(m)}(\cdot))$ odredjuju se jednoznačno:

$$\mathcal{K}(x_0, y_0; S) = -\sum_{j=1}^{m} F_j\,[a_j(x(T), y^{(j)}(T))], \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.3.1)$$

$$\mathcal{K}_j(x_0, y_0; S) = F_j\,[a_j(x(T), y^{(j)}(T))] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.3.2)$$

gde su $x(t)=\{x^{(i)}(t)\}, y^{(j)}(t), j=1,\ldots,m$ rešenja sistema /2.1.1/ iz početnih uslova x_0, y_0 u situaciji $S^*=(u^*(\cdot), v^{(1)*}(\cdot), \ldots, v^{(m)*}(\cdot))$

Definicija 2.3.1 Situaciju $S^*=(u^*(\cdot), v^{(1)*}(\cdot), \ldots, v^{(m)*}(\cdot))$ nazvaćemo situacijom ravnoteže u DDPČSI ako je:

$$\mathcal{K}_0(x_0, y_0; S^* \| u(\cdot)) \le \mathcal{K}_0(x_0, y_0; S^*) \; i$$

$$\mathcal{K}_j(x_0, y_0; S^* \| v^{(j)}(\cdot)) \le \mathcal{K}_j(x_0, y_0; S^*) \; za \; \forall\, u(\cdot) \in \bar{G};$$

$$v^{(j)}(\cdot) \in \bar{B}_j, \quad j=1,2,\ldots,m.$$

Na taj način situaciju ravnoteže mi shvatamo kao ravnotežu po Nešu [22] .

Napomena 2.3.1 Mi smo ovde koristili prihvaćene oznake:

$$S^* \| v^{(j)}(\cdot) = (u^*(\cdot), v^{(1)*}(\cdot), \ldots, v^{(j-1)*}(\cdot), \ldots, v^{(m)*}(\cdot)).$$

Definicija 2.3.2 Situaciju $S^{*\varepsilon}=(u^{*\varepsilon}(\cdot), v^{(1)*}(\cdot), \ldots v^{(m)*}(\cdot))$ nazvaćemo situacijom ε ravnoteže u DDPČSI ako je:

$$\mathcal{K}_0(x_0, y_0; S^{*\varepsilon} \| u(\cdot)) - \varepsilon \le \mathcal{K}_0(x_0, y_0; S^{*\varepsilon}) \; i$$

$$\mathcal{K}_j(x_0, y_0; S^{*\varepsilon} \| v^{(j)}(\cdot)) - \varepsilon \le \mathcal{K}_j(x_0, y_0; S^{*\varepsilon})$$

za svako $u(\cdot) \in \bar{G}, \quad v^{(j)}(\cdot) \in \bar{B}_j, \quad j=1,2,\ldots,m.$

Uvodimo pojam MDDPSP igrača G i B_j : $\mu(\cdot), \nu^{(j)}(\cdot), j=1,2,\ldots m$ isto kao u paragrafu 1. glave II i podrazumevaćemo pod dobitkom igrača u situaciji $\mathcal{I}=(\mu(\cdot), \nu^{(1)}(\cdot), \ldots, \nu^{m}(\cdot))$ matematičko očekivanje dobitaka odredjenih formulama /2.3.1/,/2,3.2/,koje ćemo označiti sa:

$$u_j(x_0, y_0; \mathcal{I}), \; j=0,1,2,\ldots,m.$$

Mešovito raširenje beskoalicione igre gonjenja označićemo sa $\hat{\Gamma}(x_0, y_0, T)$. Pod rešenjem ove igre shvataćemo nalaženje situacije ravnoteže u klasi MDDPSP.

Neka su skupovi dostiživosti igrača B_j za vreme t iz početnih stanja $y_0^{(j)}$, $C_B^t(y^{(j)})$ kompaktni za svako t i $y^{(j)}$.

Označimo sa $\Gamma_{y^{(j)}}^{n_j}$ pomoćnu jednovremenu diferencijalnu igru gonjenja izmedju grupe $\tilde{G}^{n_j} = \{G_{n_{j-1}+1}, G_{n_{j-1}+2}, \dots, G_{n_{j-1}+n_j}\}$ koja dejstvuje kao jedan igrač i begunaca B_j. Igra teče na sledeći način: igrač $\tilde{G}^{n_j}$ bira n_j tačaka $\xi^{(i)} \in C_{B_j}^{\ell}(y^{(j)})$, $i = n_{j-1}+1, n_{j-1}+2, n_{j-1}+3, \dots, n_{j-1}+n_j$, a igrač B_j tačku $\eta^{(j)} \in C_B^{\ell}(y^{(j)})$. Izbori se vrše jednovremeno i nezavisno. Dobitak igrača B_j je $\mathcal{K}_{y^{(j)}}^{n_j}(\xi, \eta^{(j)})$ i odredjuje se formulom:

$$\mathcal{K}_{y^{(j)}}^{n_j}(\xi, \eta^{(j)}) = F_j[\min_i \rho(\xi^{(i)}, \eta^{(j)})], \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.3.3)$$

gde je F_j ista funkcija kao i u /2.3.2/. Pošto je funkcija dobitka u igri $\Gamma_{y^{(j)}}^{n_j}$ neprekidna, a skupovi strategija igrača su kompaktni ova igra ima situaciju ravnoteže u mešovitim strategijama. Označimo vrednost ove igre sa $V_{y^{(j)}}^{n_j}$.

Neka se u svakoj igri iz familije igara $\{\Gamma_{y^{(j)}}^{n_j}\}$ postavljaju zahtevi, analogni onim, koje smo susreli u glavi 2. paragraf 1. i to:

1*. Za svako $\varepsilon > 0$ postoji takav broj N^{n_j} da u igri $\Gamma_{y^{(j)}}^{n_j}$ igrač $\tilde{G}^{n_j}$ poseduje mešovitu $\frac{\varepsilon}{m}$ optimalnu strategiju $\mu_{y^{(j)}, n_j}^{*\varepsilon}$ koja pripisuje jednake verovatnoće $\frac{1}{N^{n_j}}$, N^{n_j} tačkama /n_j je skup tačaka /skupa $[C_{B_j}^{\ell}(y^{(j)})]^{n_j}$, $\xi_{j1}, \xi_{j2}, \dots, \xi_{jN^{n_j}}$ i pri tome izabran za dato ε broj N^{n_j} ne zavisi od $y^{(j)}$ za svako $y^{(j)} \in C_{B_j}^{T-\ell}(y_0^{(j)})$.

2*. Neka je $y^{(j)}(t)$ proizvoljno dopustivo kretanje B_j za $0 \leq t \leq T$. Tada postoje neprekidne trajektorije koje se ne seku:

$\xi_{js}[y^{(j)}(t-\ell)]$, $s = 1, 2, \dots, N^{n_j}$, da je:

$$\xi_{js}[y^{(j)}(t-\ell)] \in [C_{B_j}^{\ell}(y^{(j)}(t-\ell))]^{n_j}$$

i svaka od $\xi_{js}[(y^{(j)}(t-\ell)]$ je tačka spektra strategija $\mu_{y^{(j)}(t-\ell), n_j}^{*\varepsilon}$

u igri $\Gamma_{y^{(j)}(t-\ell)}^{n_j}$.

Razmotrimo takve dve pomoćne igre: $\Gamma_{y^{(j)}}^{n_j}$ i $\Gamma_{y^{(j)}}^{n_j+1}$ iz familije igara $\{\Gamma_{y^{(j)}}^{n_j}\}$.

<u>Lema 2.3.1</u> Neka su $\xi = \{\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(n_j)}, \xi^{(n_j+1)}\} \in [C_{B_j}^{\ell}(y^{(j)})]^{n_j+1}$ i $\bar{\xi} = \{\bar{\xi}^{(1)}, \bar{\xi}^{(2)}, \dots, \bar{\xi}^{n_j}\}$ čiste strategije redom igrača $\tilde{G}^{n_j+1}$ i $\tilde{G}^{n_j}$, a μ i $\bar{\mu}$ su proizvoljne mešovite strategije ovih igrača. Mešo-

vite strategije igrača B_j u igrama $\Gamma_{y^{(j)}}^{n_j+1}$ i $\Gamma_{y^{(j)}}^{n_j}$ označimo sa ν i $\bar{\nu}$, a parove mešovitih strategija/optimalnih/ u ovim igrama sa $(\mu^*, \nu^*$ i $(\bar{\mu}^*, \bar{\nu}^*)$, tada važe relacije:

$$\mathcal{K}_{y^{(j)}}^{n_j+1}(\zeta, \eta^{(j)}) = F_j[\min_{i=\overline{1,n_j+1}} \rho(\zeta^{(i)}, \eta^{(j)})] = F_j[\min(\min_{i=\overline{1,n_j}} \rho(\zeta^{(i)}, \eta^{(j)})],$$

$$\rho(\zeta^{(n_j+1)}, \eta^{(j)}) \leq F_j(\min_{i=\overline{1,n_j}} \rho(\zeta^{(i)}, \eta^{(j)})) = \mathcal{K}_{y^{(j)}}^{n_j}(\zeta, \eta^{(j)}).$$

Dokaz. Poslednja nejednačina važi na osnovu monotonosti funkcije F_j. Tada za svaku verovatnu meru ν važi:

$$\int_{C_{B_j}^{l}(y^{(j)})} \mathcal{K}_{y^{(j)}}^{n_j+1}(\zeta, \eta^{(j)})\, d\nu \leq \int_{C_{B_j}^{l}(y^{(j)})} \mathcal{K}_{y^{(j)}}^{n_j}(\zeta, \eta^{(j)})\, d\nu.$$

Posebno je:

$$\int_{C_{B_j}^{l}(y^{(j)})} \mathcal{K}_{y^{(j)}}^{n_j+1}(\zeta, \eta^{(j)})\, d\nu^* \leq \int_{C_{B_j}^{l}(y^{(j)})} \mathcal{K}_{y^{(j)}}^{n_j}(\zeta, \eta^{(j)})\, d\nu^*; \quad \ldots (2.3.4)$$

ali je

$$V_{y^{(j)}}^{n_j+1} \leq \int_{C_{B_j}^{l}(y^{(j)})} \mathcal{K}_{y^{(j)}}^{n_j+1}(\zeta, \eta^{(j)})\, d\nu^*. \quad \ldots \ldots (2.3.5)$$

Iz /2.3.4/ i /2.3.5/ sledi: $V_{y^{(j)}}^{n_j+1} \leq \int_{C_{B_j}^{l}(y^{(j)})} \mathcal{K}_{y^{(j)}}^{n_j}(\zeta, \eta^{(j)})\, d\nu^*;$

Znači za verovatnu meru μ^* na $[C_{B_j}^{l}(y^{(j)})]^{n}$ je:

$$V_{y^{(j)}}^{n_j+1} \leq \int_{[C_{B_j}^{l}(y^{(j)})]^{n_j}} \times \int_{C_{B_j}^{l}(y^{(j)})} \mathcal{K}_{y^{(j)}}^{n_j}(\zeta, \eta^{(j)})\, d\bar{\nu}^* d\bar{\mu}^* \leq$$

$$\leq \int_{[C_{B_j}^{l}(y^{(j)})]^{n_j}} \int_{C_{B_j}^{l}(y^{(j)})} \mathcal{K}_{y^{(j)}}^{n_j}(\zeta, \eta^{(j)})\, d\bar{\nu}^* d\bar{\mu} = V_{y^{(j)}}^{n_j},$$

što je i trebalo dokazati.

Razmotrimo celobrojni zadatak minimizacije. Naći

$$\min_{n_j} \sum_{j=1}^{m} V_{y^{(j)}}^{n_j} \quad \ldots \ldots (2.3.6)$$

pri ograničenjima:

$$\sum_{j=1}^{m} n_j = n, \quad \ldots \quad (2.3.7)$$

$$n_j \geq 0. \quad \ldots \quad (2.3.8)$$

Označimo rešenje ovog zadatka sa:

$\bar{n}(y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(m)}) = \bar{n}(y) = (n_1(y), n_2(y), \ldots, n_m(y))$.

Pri kretanju igrača B_j po trajektorijama $y^{(j)}(t)$ vektor $\bar{n}(y(t))$ u opštem slučaju će se menjati.

Neka u igri $\hat{\Gamma}(x_0, y_0; T)$ važe sledeći uslovi:

1. Postoji skup tačaka $\bar{y}^{(1)}, \bar{y}^{(2)}, \ldots, \bar{y}^{(m)}, \bar{y}^{(j)} \in C_{B_j}^{T-\ell}(y_0^{(j)})$ zato postoji i $\max\limits_{y^{(j)} \in C_{B_j}^{T-\ell}(y_0^{(j)})} V_{\bar{y}^{(j)}}^{n_j}$

i pri tome tačka $\bar{y}^{(j)}$, u kojoj se dostiže maksimum pomoćne igre je jedna te ista za svako $1 \leq n_j \leq n$, tj. vrednost pomoćne jednovremene igre je maksimalna u tački $\bar{y}^{(j)}$ za bilo koji broj gonilaca;

2. Rešenje celobrojnog zadatka minimizacije /2.3.6/--/2.3.8/ pretstavlja isti vektor $\bar{n}(y(T-\ell))$ za $\forall y^{(j)}(T-\ell) \in C_{B_j}^{T-\ell}(y_0^{(j)})$, $j=1,2,\ldots,m$ pri čemu su svi $n_j \geq 1$.

3. Neka je $\mu(y^{(j)}(t))$ minimalna lopta, koja sadrži skup $C_{B_j}^{\ell}(y^{(j)}(t))$, a $R(y^{(j)}(t))$ njen poluprečnik. Neka je:

$$R = \max_{j} \max_{y^{(j)} \in C_{B_j}^{T-\ell}(y_0^{(j)})} R(y^{(j)}).$$

Označimo sa $\bar{\mathcal{M}}(y^{(j)}(t))$ $[2R - R(y^{(j)})]$ okolinu lopte $\mu(y^{(j)}(t))$. Za svako $G_i \in G$ postoji samo jedan broj j tako da je:

$$C_{G_i}^{\ell+\ell_1}(x^{(i)}(T-\ell-\ell_1)) \cap \bar{\mathcal{M}}(y^{(j)}(T-\ell)) \neq \Lambda$$

4. Svaki od učesnika grupe gonilaca G može garantovati u momentu vremena $T-\ell_1$ ispunjenje pripadnosti:

$$C_{G_i}^{\ell_1}(x^{(i)}(T-\ell_1)) \supset C_{B_j}^{\ell}(y^{(j)}(T-\ell)) \quad \text{za } \forall\, y^{(j)}(T-\ell) \in C_{B_j}^{\ell_1}(y^{(j)}(T-\ell-\ell_1)),$$

$$i = n_{j-1}(y(T-\ell))+1,\ n_{j-1}(y(T-\ell))+2, \ldots, n_{j-1}(y(T-\ell)) + n_j(y(T-\ell)),$$

nezavisno od dejstva igrača B_j i oslanjajući se samo na informaciju u igri $\hat{\Gamma}(x_0, y_0, T)$ /smatramo da je $n_0 = 0$/.

5. Svaka od grupa gonilaca $G, \tilde{G}^{n_j}(y(T-\ell))$ dejstvuje dalje na odsečku vremena $[T-\ell_1, T]$ i može garantovati za $\forall \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_1$ susret sa ma kojom od tačaka $Z_{js}[y^{(j)}(T-\ell)]$ koje su odredjene uslovima

1^*, 2^* koji su postavljeni familiji pomoćnih igara $\{\Gamma_{\bar{y}^{(j)}}^{n_j}\}$.

<u>Teorema 2.3.1</u> Pri ispunjenju uslova 1 —5 i 1^*, 2^* u igri $\hat{\Gamma}(x_0,y_0,T)$ za svako $\varepsilon>0$ postoji situacija 2ε ravnoteže u MDDPSP koju ćemo označiti sa $\pi^{*\varepsilon}=(\mu^{*\varepsilon}(\cdot),\nu^{(1)*\varepsilon}(\cdot),\ldots,\nu^{(m)*\varepsilon}(\cdot))$ .Opišimo 2ε ravnotežne strategije igrača koje ulaze u situaciju $\pi^{*\varepsilon}$.

Strategije $\nu^{(j)*\varepsilon}$ igrača B_j sastoje se u sledećem; Za $0\le t\le T-\ell$ igrač B_j programski prelazi u tačku $\bar{y}^{(j)}$ koja je odredjena uslovom 1.Pošto u momentu vremena $T-\ell$ igrač B_j zna mesta nalaženja učesnika grupe gonilaca za $t=T-\ell-\ell_1$, $x^{(i)}(T-\ell-\ell_1)$,B_j može da odredi sastav sledeće grupe $\tilde{G}^{n_j}$,proverivši ispunjenje uslova 3.Tada u momentu $T-\ell$ igrač B_j bira ma koju od tačaka $\bar{\bar{y}}^{(j)}\in C^{\ell}_{B_j}(\bar{y}^{(j)})$ u saglasnosti sa mešovitom strategijom $\nu^{*n_j}_{\bar{y}^{(j)}}$,koja je optimalna u igri $\Gamma^{n_j}_{\bar{y}^{(j)}}$ /vrši slučajan izbor/ i prelazi programski u realizovanu kao rezultat slučajnog izbora tačku: $\bar{\bar{y}}^{(j)}\in y^{(j)}(T)$.Ako se desi da je $n_j=0$,tada B_j bira proizvoljnu tačku $\bar{\bar{y}}^{(j)}\in C^{\ell}_{B_j}(\bar{y}^{(j)})$.

Igrač G,koji se koristi strategijom $\mu^{*\varepsilon}(\cdot)$i zna početne položaje begunca B_j,$y_0^{(j)}$,$j=1,2,\ldots,m$ rešava u početnom momentu vremena celobrojni zadatak minimizacije /2.3.6/--/2.3.8/ za skup tačaka $\bar{y}^{(j)}\in C^{T-\ell}_{B_j}(y_0^{(j)})$ .Dejstvujući determinisano za $0\le t\le T-\ell$,G obezbedjuje ispunjenje pripadnosti iz uslova 4.U momentu vremena $T-\ell_1$ svaka od grupa $\tilde{P}^{n_j}(y(T-\ell))$, $j=1,2,\ldots,m$ sa verovatnoćom $\frac{1}{N^{n_j}}$ bira jednu od tačaka $z_{js}[y^{(j)}(T-\ell-\ell_1)]$i u momentu vremena T obezbedjuje ε_1 susret sa tačkom z_{js} koja se premešta po trajektoriji $z_{js}[y^{(j)}(t-\ell)]$.

Dokaz.Za dokaz 2ε ravnotežnosti situacije $\pi^{*\varepsilon}$ dovoljno je pokazati ispunjenje nejednačina:

$$\mu_0(x_0,y_0;\pi^{*\varepsilon}\|u(\cdot))-2\varepsilon\le\mu_0(x_0,y_0;\pi^{*\varepsilon}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.3.9)$$

$$\mu_j(x_0,y_0;\pi^{*\varepsilon}\|v(\cdot))-2\varepsilon\le\mu_j(x_0,y_0;\pi^{*\varepsilon}) \quad . \quad . \quad . \quad (2.3.10)$$

za DDPČSI $u(\cdot)\in\bar{G}$, $v^{(j)}(\cdot)\in\bar{B}_j$, $j=1,2,\ldots,m$.

Neka su $x^{*\varepsilon}(t)\in\{x^{(i)*\varepsilon}(t)\}$, $y^{(j)*\varepsilon}(t)$, $j=1,2,\ldots,m$ neke trajektorije redom igrača G i B_j ,koje su se realizovale kao rezultat primene opisanih 2ε ravnotežnih strategija.Tada tačke $x^{(i)*\varepsilon}(T)$ i $i\in n_{j-1}(\bar{y})+1, n_{j-1}(\bar{y})+2,\ldots,n_{j-1}(\bar{y})+n_j(\bar{y})$sa verovatnoćom $\frac{1}{N^{n_j(\bar{y})}}$ dospevaju u ε okolinu tačke $z^{(i)}_{js}[y^{(j)}(T-\ell)]$ / n_j je skup tačaka/ koje čine spektre strategija $\mu^{*\varepsilon}_{\bar{y}^{(j)}}, n_j, \frac{\varepsilon}{m}$ optimalnih u igrama $\Gamma^{n_j(\bar{y})}_{\bar{y}^{(j)}}$.

Svaka tačka $y^{(j)*\varepsilon}(T)$, $j=1,2,\ldots m$ saglasno strategiji $\nu^{*\varepsilon(j)}(\cdot)$ je realizacija strategije $\nu^{*\varepsilon}_{\bar{y}^{(j)}}, n_j$,optimalne za igrača B_j u igri $\Gamma^{n_j(\bar{y})}_{\bar{y}^{(j)}}$.

Pošto je zadovoljen uslov 3. , $\min_i \rho^{\alpha}(x^{(i)*\varepsilon}(T), y^{(j)*\varepsilon}(T))$

može se realizovati samo za $i \in \{n_{j-1}(\bar{y})+1, \dots, n_{j-1}(\bar{y})+n_j(\bar{y})\}$
Osim toga funkcije dobitaka neprekidno zavise od $\rho(x^{(i)}, y^{(j)})$ zato
za $\forall \varepsilon > 0$ može se naći $\varepsilon_1 > 0$ tako da čim je:

$$\rho(x^{(i)*\varepsilon}(T), \xi^{(i)}_{js}[y^{(j)}(T-\ell)] < \varepsilon_1$$

za $\forall j = 1, 2, \dots, m$ i odgovarajuće brojeve i, tada će važiti:

$$|\mu_j(x_0, y_0; \pi^{*\varepsilon}) - \mu_j(\mu^{*\varepsilon}_{\bar{y}^{(j)}}, n_j; \nu^{*\varepsilon}_{\bar{y}^{(j)}}, n_j)| < \frac{\varepsilon}{m}, \; j = 1, 2, \dots, m \quad \dots (2.3.11)$$

gde je $\mu_j(\mu^{*\varepsilon}_{\bar{y}^{(j)}}, n_j; \nu^{*\varepsilon}_{\bar{y}^{(j)}}, n_j)$ matematičko očekivanje dobitaka u igri $\Gamma^{n_j(\bar{y})}_{\bar{y}^{(j)}}$.

Sa druge strane situacija $(\mu^{*\varepsilon}_{\bar{y}^{(j)}}, n_j; \nu^{*\varepsilon}_{\bar{y}^{(j)}}, n_j)$ je $\frac{\varepsilon}{m}$ optimalna u igri $\Gamma^{n_j(\bar{y})}_{\bar{y}^{(j)}}$ pa je:

$$|\mu_j(\mu^{*\varepsilon}_{\bar{y}^{(j)}}, n_j; \nu^{*\varepsilon}_{\bar{y}^{(j)}}, n_j) - V^{n_j(\bar{y})}_{\bar{y}^{(j)}}| < \frac{\varepsilon}{m} \quad \dots \dots (2.3.12)$$

Iz /2 .3.10/,/2.3.12/sledi da za dokaz /2.3.10/ je dovoljno dokazati da je:

$$\mu_j(x_0, y_0; \pi^{*\varepsilon} \| v^{(j)}(\cdot)) - 2\varepsilon + \frac{2\varepsilon}{m} \le V^{n_j(\bar{y})}_{\bar{y}^{(j)}} \quad \dots \dots (2.3.13)$$

Napomenimo da je:

$$-\mu_0(x_0, y_0; \pi^{*\varepsilon}) = \sum_{j=1}^{m} \mu_j(x_0, y_0; \pi^{*\varepsilon}),$$

jer je ispunjen uslov 3. Iz /2.3.11/i /2.3.12/sledi:

$$\mu_j(x_0, y_0; \pi^{*\varepsilon}) \le \mu_j(\mu^{*\varepsilon}_{\bar{y}^{(j)}}, n_j; \nu^{*\varepsilon}_{\bar{y}^{(j)}}, n_j) + \frac{\varepsilon}{m} \le V^{n_j(\bar{y})}_{\bar{y}^{(j)}} + \frac{2\varepsilon}{m}, j = 1, 2, \dots, m \Longrightarrow:$$

$$\mu_0(x_0, y_0; \pi^{*\varepsilon}) \ge -\sum_{j=1}^{m} V^{n_j(\bar{y})}_{\bar{y}^{(j)}} - 2\varepsilon \quad \dots \dots (2.3.14)$$

Tada sledi da za dokaz /2.3.9/ je dovoljno dokazati da je:

$$\mu_0(x_0, y_0; \pi^{*\varepsilon} \| u(\cdot)) \le -\sum_{j=1}^{m} V^{n_j(\bar{y})}_{\bar{y}^{(j)}} \quad \dots \dots (2.3.15)$$

Dokažimo najpre /2.3.13/.Neka se u igri $\hat{\Gamma}(x_0, y_0; T)$ pojavila situacija $(\pi^{*\varepsilon} \| v^{(j)}(\cdot))$,gde je $v^{(j)}(\cdot)$ proizvoljna DDPČSI B_j.Tada je $y^{(j)}(T) \in C^{\ell}_{a_j}(y^{(j)}(T-\ell))$ gde je trajektorija igrača B_j,koja odgovara strategiji $v^{(j)}(\cdot)$, tj. $y^{(j)}(T)$ pretstavlja jednu od čistih strategija igrača B_j u igri $\Gamma^{n_j(y(T-\ell))}_{y^{(j)}(T-\ell)}$.

Igrač G se pridržava $\mu^{*\varepsilon}(\cdot)$,rvši slučajni izbor u momentu vremena $T-\ell_1$ i u momentu vremena T grupa $\tilde{G}^{n_j(y(T-\ell))}$ dospeva u ε_1 okolinu tačke $\xi_{js}[y^{(j)}(T-\ell)]$,koja ulazi u spektar strategije $\mu^{*\varepsilon}_{y^{(j)}}, n_j$ i $\frac{\varepsilon}{m}$ je optimalna u igri $\Gamma^{n_j(y(T-\ell))}_{y^{(j)}(T-\ell)}$.

Pošto B_j prima informaciju o igraču G sa zakašnjenjem ℓ_1, tada rezultat slučajnog izbora nije poznat B_j do momenta T, a ponašanje grupe $\bar{B}^{n_j(y(T-\ell))}$ strategijski je ekvivalentno ravnomernom izboru tačaka ε_1 okoline tačaka $\bar{\jmath}_{js}[y^{(j)}(T-\ell)]$ u momentu vremena T.

Funkcija dobitka je neprekidna, a skup $C^{\ell}_{B_j}(y^{(j)}(T-\ell))$ je kompaktan, znači za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\varepsilon_1 > 0$ tako da čim je

$$\rho(x^{(i)}(T), \bar{\jmath}_{js}[y^{(j)}(T-\ell)]) < \varepsilon_1$$

za i^* koji odgovara rešenju zadatka /2.3.6/--/2.3.8/ važiće:

$$|\mu_j(x_0, y_0; \pi^{*\varepsilon} \| v^{(j)}(\cdot)) - \mu_j(\mu^{*\varepsilon}_{y^{(j)}}, n_j; y^{(j)}(T))| < \frac{\varepsilon}{m} \quad . \quad . \quad . \quad (2.3.16)$$

gde je $\mu_j(\mu^{*\varepsilon}_{y^{(j)}}, n_j; y^{(j)}(T))$ matematičko očekivanje dobitka u igri $\Gamma^{n_j(y(T-\ell))}_{y^{(j)}(T-\ell)}$. Ovde se koristi ta okolnost, da vrednost funkcije dobitka zavisi samo od brojevai, koji odgovaraju rešenju zadatka minimizacije /2.3.6/--/2.3.8/, što je moguće blagodareći uslovu 3. Sa druge strane strategija $\mu^{*\varepsilon}_{y^{(j)}}, n_j$ je $\frac{\varepsilon}{m}$ optimalna u igri $\Gamma^{n_j(y(T-\ell))}_{y^{(j)}(T-\ell)}$ zato je:

$$\mu_j(\mu^{*\varepsilon}_{y^{(j)}}, n_j; y^{(j)}(T)) - \frac{\varepsilon}{m} \leq V^{n_j(y(T-\ell))}_{y^{(j)}(T-\ell)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.3.17)$$

Iz /2.3.16/ i /2.3.17/ sledi da je:

$$\mu_j(x_0, y_0; \pi^{*\varepsilon} \| v^{(j)}(\cdot)) - \frac{2\varepsilon}{m} \leq V^{n_j(\bar{y}(T-\ell))}_{\bar{y}^{(j)}},$$

tada će /2.3.13/ tim pre važiti za $m \geq 2$.

Dokažimo sada /2.3.15/. Neka je u igri $\hat{\Gamma}(x_0, y_0; T)$ situacija oblika $(\pi^{*\varepsilon} \| u(\cdot))$. Pošto se igrači B_j pridržavaju mešovitih strategija $y^{(j)*\varepsilon}$ oni vrše slučajne izbore u momentu $T-\ell$, a igrač G ne zna rezultate ovih izbora do momenta T, zato ne može da usmeri gonioce za tačkama $y^{(j)}$.

Neka su $x^{(i)}(t)$ trajektorije učesnika sledeće grupe, koje odgovaraju strategiji $u(\cdot) \in \bar{G}$.

Razmotrićemo sledeće slučajeve:

1. Neka je $x^{(i)}(T) \in C^{\ell}_{B_j}(\bar{y}^{(j)})$ za $i = n_{j-1}(\bar{y})+1, n_{j-1}(\bar{y})+2, \ldots, n_{j-1}(\bar{y})+n_j(\bar{y})$. Tada svaki izbor tačaka $\{x^{(i)}(T)\}$, $i = n_{j-1}(\bar{y})+1, n_{j-1}(\bar{y})+n_j(\bar{y})$ pretstavlja čistu strategiju grupe $\bar{G}^{n_j(\bar{y})}$ u igri $\Gamma^{n_j(\bar{y})}_{\bar{y}^{(j)}}$ i nejednačina /2.3.15/ važi na osnovu ispunjenja uslova 1. i optimalnosti strategije $\nu^{(j)*\varepsilon}_{\bar{y}^{(j)}, n_j}$ u igrama $\Gamma^{n_j(\bar{y})}_{\bar{y}^{(j)}}$, $j = 1, 2, \ldots, m$, koje ulaze u strategiju $y^{(j)*\varepsilon}(\cdot)$ igrača B_j u svojstvu ponašanja.

2. Neka bi makar jedna od tačaka $x^{(i)}(T) \in C^{\ell}_{B_j}(\bar{y}^{(j)})$ za neodgovara-

juće j. Odredjenosti radi mi ćemo staviti da je $x^{(1)}(T)\in C^{l}_{B_j}(\bar{y}^{(2)})$. tada pošto se igrači B_j pridržavaju strategije $y^{(j)*\varepsilon}(\cdot)$ oni će dejstvovati optimalno u pomoćnim igrama $\Gamma^{n_1(\bar{y})-1}_{\bar{y}^{(1)}}$, $\Gamma^{n_2(\bar{y})+1}_{\bar{y}^{(2)}}$, $\Gamma^{n_j(\bar{y})}_{\bar{y}^{(j)}}$, , $j=3,4,\dots,m$ i sledi da je :

$$\mu_0(x_0,y_0;\pi^{*\varepsilon}\| u(\cdot))\le -\Big(V^{n_1(\bar{y})-1}_{\bar{y}^{(1)}}+V^{n_2(\bar{y})+1}_{\bar{y}^{(2)}}+\sum_{j=3}^{m}V^{n_j(\bar{y})}_{\bar{y}^{(j)}}\Big)\le -\sum_{j=1}^{m}V^{n_j(\bar{y})}_{\bar{y}^{(j)}}.$$

Poslednja nejednačina je zadovoljena zahvaljujući tome da je vektor $n_j(\bar{y})$ rešenje celobrojnog zadatka minimizacije /2.3.6/--/2.3.8/.

3. Neka bar jedna od tačaka $x^{(i)}(T)\notin C^{l}_{B_j}(\bar{y}^{(j)})$ ni za koje $j=1,2,\dots,m$ /smatraćemo odredjenosti radi da je to tačka $x^{(1)}(T)$ / i pri tome postoji broj j_0 takav da je

$$C^{l+l_1}_{G_1}(x^{(1)}(T-l-l_1))\cap\bar{\mu}(\bar{y}^{(j_0)}(T-l))\ne\Lambda$$

Tada saglasno strategiji $y^{(j)*\varepsilon}(\cdot)$ igrači B_j dejstvuju optimalno u igrama:

a/ $\Gamma^{n_1(\bar{y})-1}_{\bar{y}^{(1)}}$, $\Gamma^{n_{j_0}(\bar{y})+1}_{\bar{y}^{(j_0)}}$, $\Gamma^{n_j(\bar{y})}_{\bar{y}^{(j)}}$, $j=1,2,\dots,j_0-1,j_0+1,\dots,m$,

ako je $j_0\ne 1$ ili u igrama:

b/ $\Gamma^{n_j(\bar{y})}_{\bar{y}^{(j)}}$, $j=1,2,\dots,m\,(j_0=1)$.

U svakom slučaju, na osnovu paragrafa 1. glave II, može se naći tačka $\zeta_0\in C^{l}_{B_{j_0}}(\bar{y}^{(j_0)})$ takva da je $\rho(\zeta_0,\eta)\le\rho(x^{(1)}(T),\eta)$ za sve tačke $\eta\in C^{l}_{B_{j_0}}(\bar{y}^{(j_0)})$. Označimo sa $\bar{u}(\cdot)$ uslovnu strategiju igrača G/nije važno da li u stvarnosti takva strategija postoji/, takvu da je $\bar{x}^{(1)}(T)=\zeta_0$, gde je $\bar{x}^{(1)}(t)$ uslovna trajektorija, koja odgovara $\bar{u}(\cdot)$, a $\bar{x}^{(i)}(t)=x^{(i)}$ za $i\ne 1$. Tada na osnovu monotonosti funkcije F_j sledi:

$$\mu_0(x_0,y_0;\pi^{*\varepsilon}\| u(\cdot))\le\mu_0(x_0,y_0;\pi^{*\varepsilon}\|\bar{u}(\cdot))$$

i ako važi a/ tada mi dospevamo u uslove slučaja 2, a ako važi b/ u uslove slučaja 1.

4. Neka je na kraju: $x^{(1)}(T)\in C^{l}_{B_j}(\bar{y}^{(j)}(T-l))$, $j=1,2,\dots,m$ i

$$C^{l+l_1}_{G_1}(x^{(1)}(T-l-l_1))\cap\bar{\mu}(\bar{y}^{(j)}(T-l))=\Lambda,\ j=1,2,\dots,m,$$

tada igrači B_j dejstvuju optimalno u igrama $\Gamma^{n_j-1}_{\bar{y}^{(1)}}$, $\Gamma^{n_j(\bar{y})}_{\bar{y}^{(j)}}$, $j=2,3,\dots,m$ pri čemu ako je $n_1(\bar{y})>1$ tada u tački $x^{(1)}(T)$ ne može se realizovati $\min_i\rho(x^{(i)}(T),\bar{y}^{(j)}(T))$ ni za koje brojeve $j=1,2,\dots,m$ i sledi da igrač

G prima dobitak: $\mu_0(x_0, y_0; \Pi^{1\ell} \| u(\cdot)) \leq -(\gamma_{\bar{y}^{(1)}}^{n_1(\bar{y})-1} + \sum_{j=1}^{m} \gamma_{\bar{y}^{(j)}}^{n_j(\bar{y})}) \leq -\sum_{j=1}^{m} \gamma_{\bar{y}^{(j)}}^{n_j(\bar{y})}$

pošto je $\gamma_{\bar{y}^{(1)}}^{n_1(\bar{y})-1} > \gamma_{\bar{y}^{(1)}}^{n_1(\bar{y})}$ po lemi 2.3.1.

Ako je pak $n_1(\bar{y}) = 1$, tada je tim pre:

$$\min_i \rho(x^{(i)}(T), y^{(1)}(T)) > \gamma_{\bar{y}^{(1)}}^{1}$$

pa je tražena nejednačina zadovoljena.

Napomena 2.3.2 Zadatak ima smisla samo za $\ell_1 > \ell$.

§4. Jednovremene antagonističke igre gonjenja sa konveksnom funkcijom dobitka

Pri rešavanju diferencijalnih iigara gonjenja sa odredjenim zakašnjenjem informacije potrebno je da se zna rešavanje pomoćnih jednovremenih antagonističkih igara gonjenja.Poslednjim igrama je posvečen ovaj paragraf.

Kratak pregled sadržaja ovog paragrafa dat je na strani 7 uvoda.

U R^k je dat kompaktan skup S.Goneća grupa $G = \{G_1, G_2, \dots, G_n\}$ dejstvuje kao jedan igrač i begunci koji takodje dejstvuju organizovano, biraju redom sistem tačaka $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, \dots, x^{(n)}), x^{(i)} \in S$ i $y = (y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(m)}), y^{(j)} \in S$ .Izbori strategija se vrše jednovremeno i nezavisno, tj. prilikom izbora igrač G ne zna izbor igrača B i obratno. Tačka $x^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, n$ se interpretira kao položaj grupe gonilaca $G_i \in G$ u S. Analogni smisao imaju tačke $y^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, m$, koje se interpretiraju kao položaj učesnika grupe $B_j \in B \cup S$.

Neka je $\rho(x,y)$ Euklidovo rastojanje medju tačkama $x \in R^k$, $y \in R^k$.

Razmotrimo matricu $[n, m]$:

$$A(x,y) = \{\rho(x^{(i)}, y^{(j)})\}.$$

Funkciju dobitka/dobitak igrača B/moguće je odrediti na sledeći način:

$$\varkappa(x,y) = F(A(x,y)), \quad \dots \quad (2.4.1)$$

gde je F data realna funkcija.Igra je antagonistička, tj. dobitak igrača G jednak je dobitku igrača B sa suprotnim znakom.

U ovom paragrafu mi ćemo razmotriti nekoliko igara opisanog tipa sa neprekidnom konveksnom funkcijom dobitka.

Igra Γ_1 . Neka je $S = [a; b] \in R^1$, $m = 1$ /jedan begunac/, a funkcija dobitka odredjuje se na sledeći način:

$$\mathcal{K}(x,y)=\mathcal{K}(x_1,x_2,\dots,x_n;y)=\min_i |x-y| \quad \dots \dots \quad (2.4.2)$$

Cilj igrača B je maksimizacija rastojanja izmedju njega i grupe gonilaca /maksimizacija minimalnog rastojanja do jednog od učesnika koalicije G/. Igrač G ima suprotan cilj.

Ne smanjujući opštost možemo smatrati da je $[a,b]=[-1;1]$.

Teorema 2.4.1 U igri Γ igrač B zna dve /krajnje/ optimalne mešovite strategije, prva se sastoji u izboru tačaka:

$$-1,-\frac{2n-3}{2n-1},\dots,-\frac{2n-2i-1}{2n-1},\dots-\frac{1}{2n-1},\frac{1}{2n-1},\dots 1$$

sa verovatnoćom $\frac{1}{2n}$; druga se sastoji u izboru tačaka:

$$-1,-\frac{n-2}{n-1},\dots,-\frac{n-i-1}{n-1},\dots,\frac{n-2}{n-1},1$$

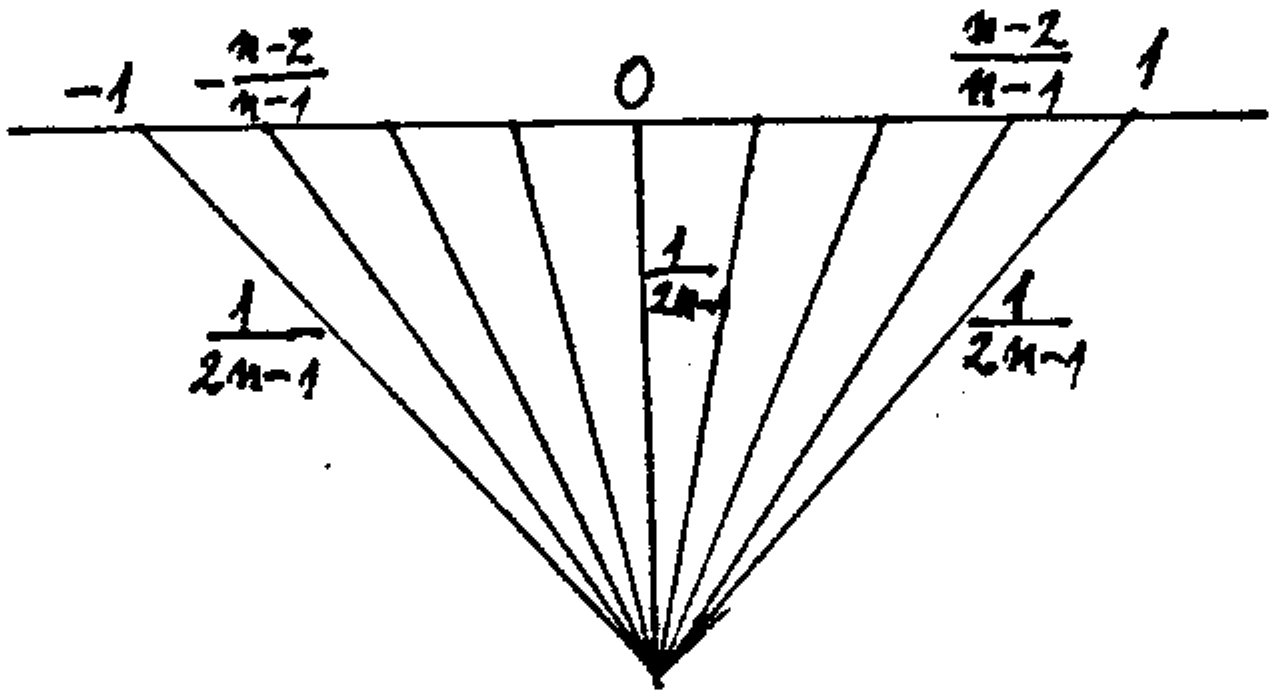
sa veorvatnoćom $\frac{1}{2n-1}$.

Optimalna strategija igrača G sastoji se u ravnoverovatnom izboru dve grupe od n tačaka: $-1,-\frac{2n-5}{2n-1},\dots,-\frac{1}{2n-1},\frac{3}{2n-1},\dots,\frac{2n-3}{2n-1}$,

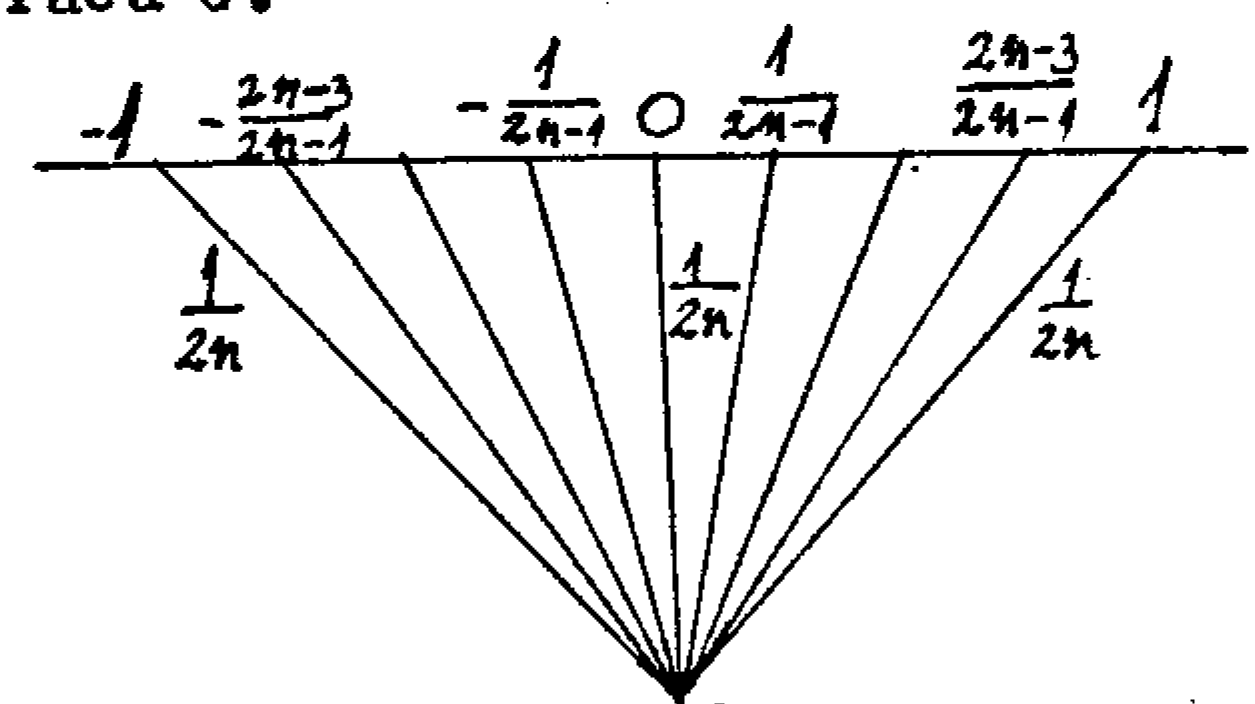
$$-\frac{2n-3}{2n-1},\dots,-\frac{3}{2n-1},\frac{1}{2n-1},\dots,\frac{2n-5}{2n-1},1$$

Vrednost igre je $\frac{1}{2n-1}$.

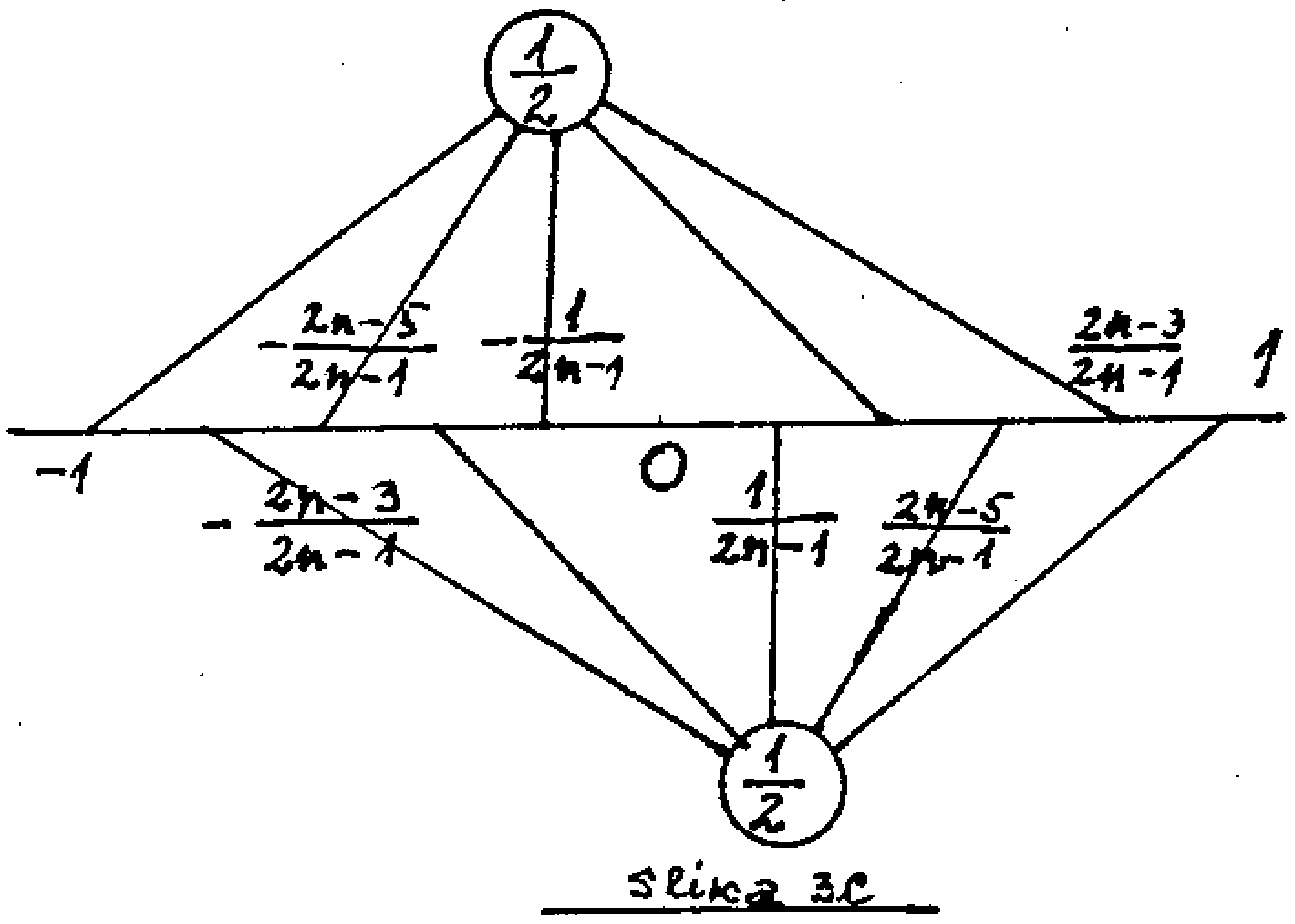
Na slici 3a i 3b prikazane su optimalne strategije igrača B, a na slici 3c optimalne strategije igrača G.



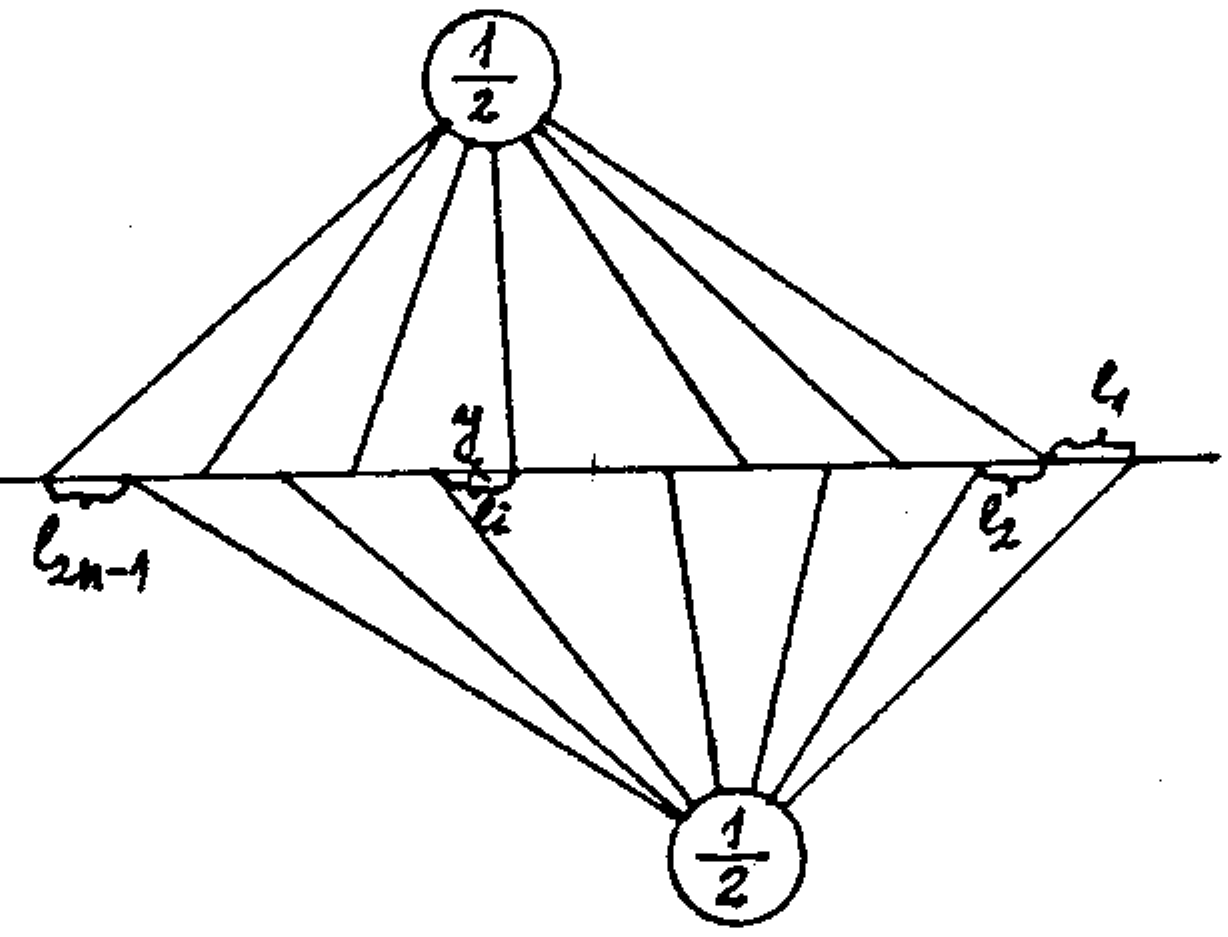
slika 3a



slika 3b



slika 3c



slika 4

Dokaz. Uvodimo sledeće oznake. Neka je μ^* strategija igrača G, čiju optimalnost mi nameravamo da dokažemo, a y^*, y^{**} su strategije igrača B navedene u postavci teoreme.

Neka je:

$$l_i = \left[\frac{2n-2i-1}{2n-1}; \frac{2n-2i+1}{2n-1}\right], \quad i = 1,2,\dots,2n-1$$

Dokazaćemo najpre da je: $\mu(\mu^*, y) \le \frac{1}{2n-1}$ . . . . (2.4.3)

za $\forall y \in [-1;1]$. Za $y \in l_j$ /slika 4/ sledi:

$$\mu(\mu^*, 1) = \frac{1}{2}\min_i\left|\frac{2n-2i-1}{2n-1} - y\right| + \frac{1}{2}\min_i\left|\frac{2n-2i+1}{2n-1} - y\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left(y - \frac{2n-2j-1}{2n-1}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2n-2j+1}{2n-1} - y\right) = \frac{1}{2n-1}.$$

Na taj način za bilo koju svoju čistu strategiju igrač B protiv mešovite strategije μ^* igrača G ne može da obezbedi sebi veći dobitak od $\frac{1}{2n-1}$.

Neka igrač B bira mešovitu strategiju y^*, a igrač G proizvoljnu čistu strategiju $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Dobitak igrača B u ovom slučaju je:

$$\mu(x; y^*) = \frac{1}{2n}\left(\sum_{j=1}^{m}\min_i\left|\frac{2n-2j-1}{2n-1} - x_i\right| + \sum_{j=1}^{m}\min_i\left|\frac{2n-2j+1}{2n-1} - x_i\right|\right)$$

Dokazaćemo nejednačinu:

$$\mu(x, y^*) \ge \frac{1}{2n-1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad -(2.4.4)$$

za svako $x_1, x_2, \dots, x_n \in [-1, 1]$ pretraživanjem mogućih varijanata nalaženja tačaka x_i.

Razmotrimo sledeće slučajeve:

1. $x_i \in l_{2i-1}$, $i = 1,2,\dots,n$;
2. $x_i \in l_{2i-1}$, $i = 1,2,\dots,k-1,k+1,\dots,n$; $x_k \in l_{2p-1}$, $k \ne p$
3. $x_i \in l_{2i-1}$, $i = 1,2,\dots,k-1,k+1,\dots,n$; $x_k \in l_{2i}$,

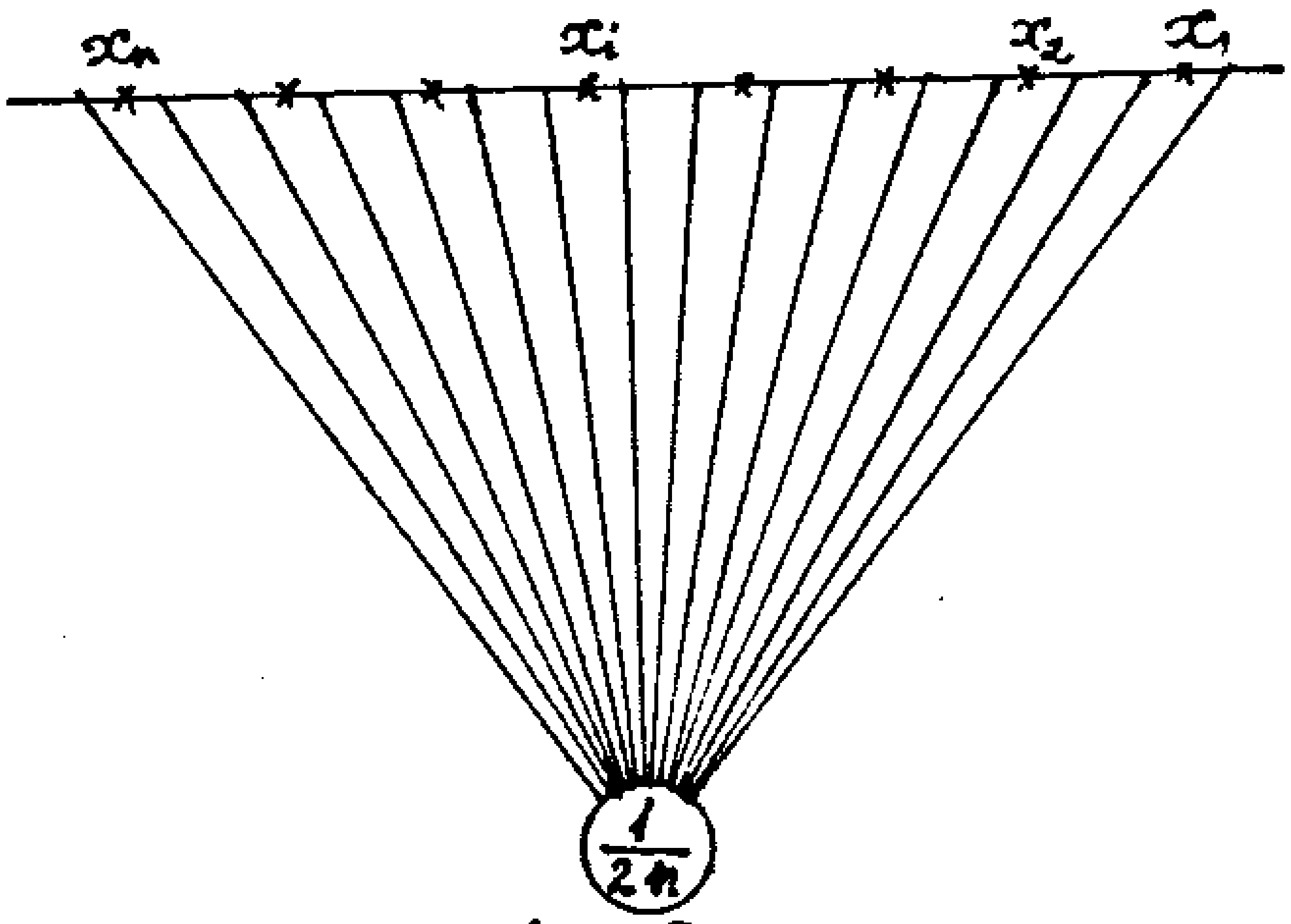
tj. bilo koja dva susedna odsečka sadrže tačke x_k.

U prvom slučaju /slika 5/ je:

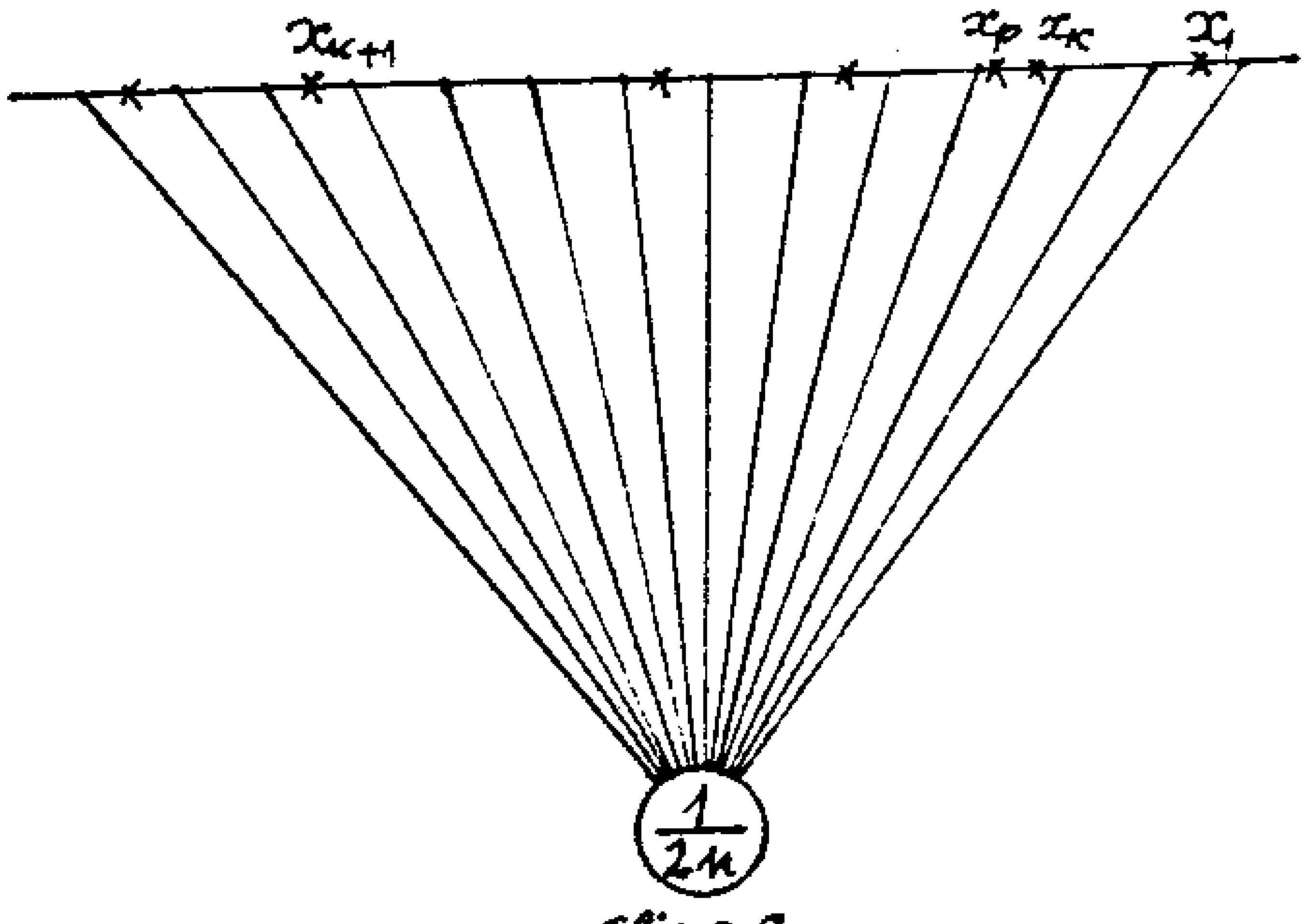
$$\frac{2n-4i+1}{2n-1} \le x_i \le \frac{2n-4i+3}{2n-1}.$$

Sledi da je:

$$\mu(x_1, x_2, \dots x_n, y^*) = \frac{1}{2n}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(x_j - \frac{2n-4j+1}{2n-1}\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{2n-4j+3}{2n-1} - x_j\right)\right] = \frac{1}{2n-1}.$$



slika 5



slika 6

Drugi slučaj označava da u jednom od odsečaka dospevaju dve tačke x_i /slika 6/ i onda sledi:

$$\mu(x_1,x_2,\dots,x_n;\nu^*)=\frac{1}{2n}\Big[\sum_{j=1}^{k-1}\Big(\frac{2n-4j+3}{2n-1}-x_j\Big)+\sum_{j=1}^{k-1}\Big(x_j-\frac{2n-4j+1}{2n-1}\Big)+$$

$$+\Big(x_{k-1}-\frac{2n-4k+3}{2n-1}\Big)+\Big(\frac{2n-4k+1}{2n-1}-x_{k+1}\Big)+\sum_{j=k+1}^{p-1}\Big(\frac{2n-4j+3}{2n-1}-x_j\Big)+$$

$$+\sum_{j=k+1}^{p-1}\Big(x_j-\frac{2n-4j+1}{2n-1}\Big)+\min\Big(\frac{2n-4p+3}{2n-1}-x_p,\frac{2n-4p+3}{2n-1}-x_k\Big)+$$

$$+\min\Big(x_p-\frac{2n-4p+1}{2n-1},x_k-\frac{2n-4p+1}{2n-1}\Big)+\sum_{j=p+1}^{n}\Big(\frac{2n-4j+3}{2n-1}-x_j\Big)+$$

$$+\sum_{j=p+1}^{n}\Big(x_j-\frac{2n-4j+1}{2n-1}\Big)\Big]\geq\frac{1}{2n}\Big[n\Big(\frac{2}{2n-1}-\frac{4}{2n-1}+\frac{2}{2n-1}+\frac{2}{2n-1}\Big)\Big]=\frac{1}{2n-1}$$

I zaista razmotrimo izraz:

$$\min\Big(\frac{2n-4p+3}{2n-1}-x_p,\frac{2n-4p+3}{2n-1}-x_k\Big)+\min\Big(x_p-\frac{2n-4p+1}{2n-1},x_k-\frac{2n-4p+1}{2n-1}\Big)$$

Minimum navedenog izraza po x_k, x_p jednak je nuli i dostiže se naprimer za

$$x_p=\frac{2n-4p+1}{2n-1},\ x_k=\frac{2n-4p+3}{2n-1},$$

Poznato je da je:

$$\frac{2n-4(k-1)+1}{2n-1}\leq x_{k-1}\leq\frac{2n-4(k-1)+3}{2n-1},$$

zato sledi da je: $\min\limits_{x_{k-1}}\Big(x_{k-1}-\frac{2n-4k+3}{2n-1}\Big)=\frac{2}{2n-1}$

Analogno je: $\min_{x_{k+1}}\left(\frac{2n-4k+1}{2n-1}-x_{k+1}\right)=\frac{2}{2n-1}$.

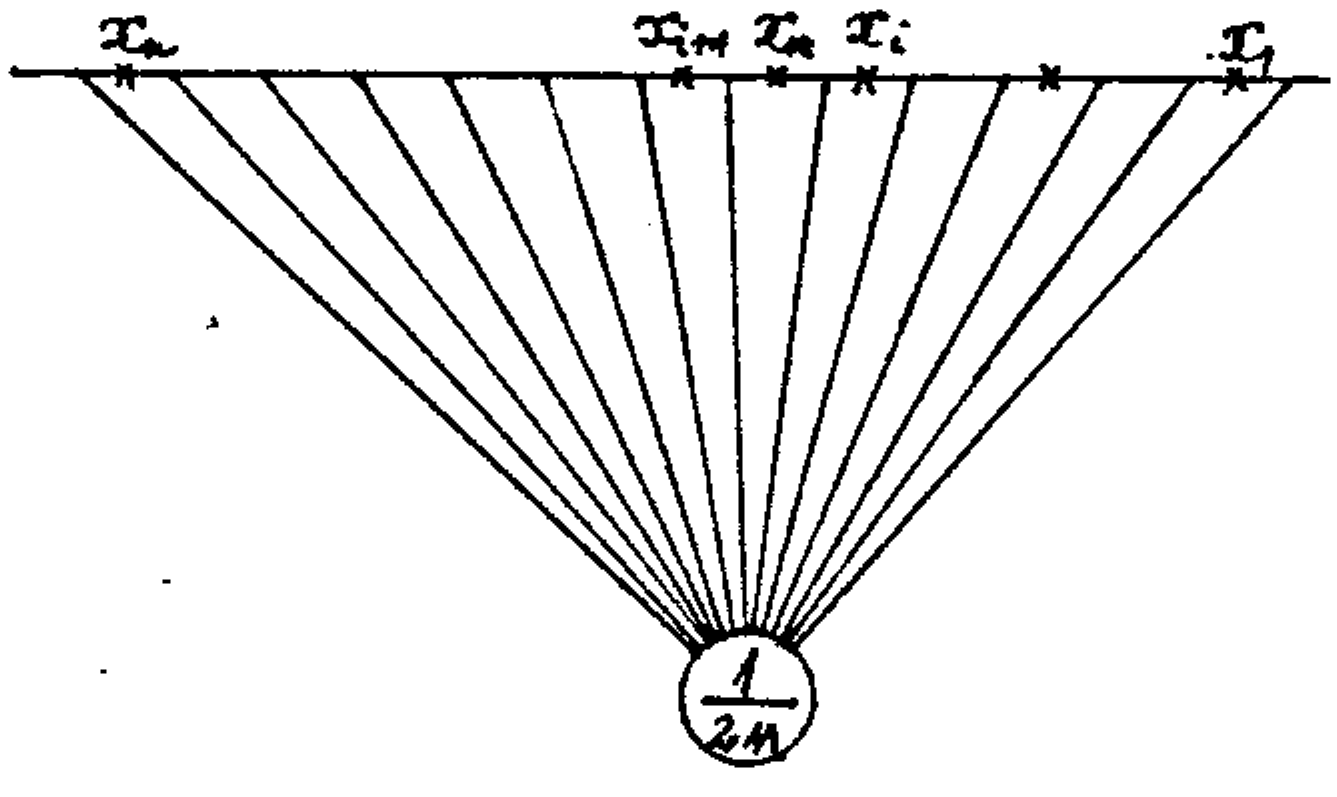
Pri povečanju broja tačaka $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots x_{k_s}$, $s_p\in \ell_{2p-1}$ dobitak igrača B raste. Strogi dokaz navedenog fakta izvodi se metodom matematičke indukcije po broju tačaka $x_{k_s}\in \ell_{2p-1}$, pri čemu dokaz indukcionog prelaza skoro potpuno se poklapa sa napred navedenim rasudjivanjima.

Napomena 2.4.1 Pri dokazu nejednačine /2.4.4/koristili smo se uslovom da je $k\neq 1$. Za $k=1$ dokaz je analogan.

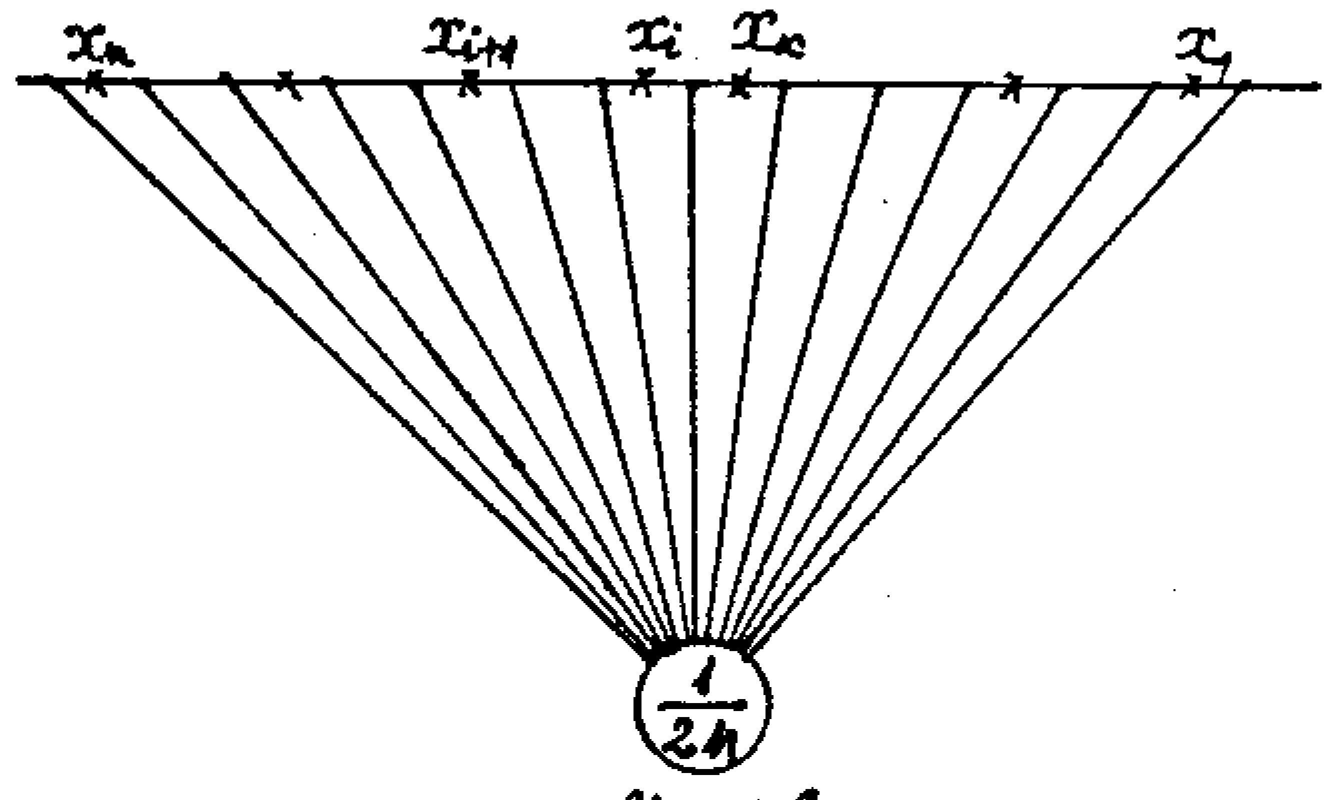
U trećem slučaju dokaz nejednačine /2.4.4/analogan je tek navedenom. Varijante rasporeda tačaka pretstavljene su na slikama 7a, 7b, 7c.

Iz nejednačina /2.4.3/ i /2.4.4/sledi da su strategije μ^* i ν^* optimalne redom za igrače G i B. Vrednost igre je jednaka $\frac{1}{2n-1}$.

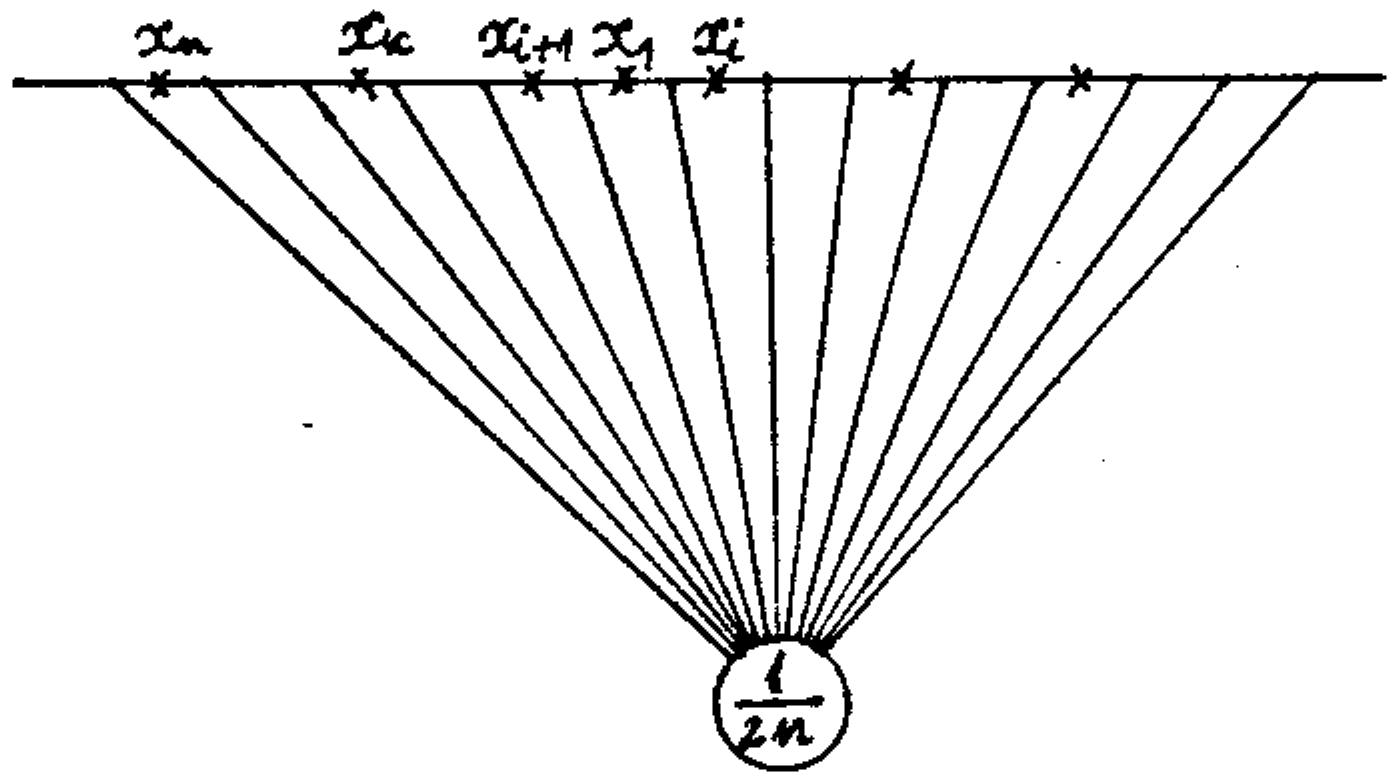
Dokaz optimalnosti strategije ν^{**} igrača B analogan je dokazu optimalnosti za strategiju ν^*.



slika 7a



slika 7b



slika 7c

Igra Γ_3 . $S=[-1;1]$, $n>1$ /nekoliko begunaca/, a funkcija dóbitka je data na sledeći način:

$$\mathcal{K}(x,y)=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\min_{i}|x_i-y_j|.$$

Teorema 2.4.2 Vrednost igre Γ_2 i optimalna strategija igrača G poklapaju se sa takvima igre Γ_1 .Što se tiče begunca $B_j \in \mathcal{B}, j=1,2,\ldots,$ svaki od njih treba da bira strategiju optimalnu za igrača B u u igri Γ_1 .

Dokaz ove teoreme analogan je dokazu optimalnosti strategija igrača G i B u igri Γ_1.

GLAVA III

Diferencijalne igre sa diskretnom informacijom

U ovoj glavi izloženi su matematički modeli konflikta upravljajućih procesa, u kojima informacija o tekućem stanju dospeva diskretno u zavisnosti od toga u kojoj oblasti faznog prostora se nalazi upravljajuća fazna tačka. Matematički zadatak se svodi na istraživanje jedne klase antagonističkih diferencijalnih igara gonjenja sa nepotpunom informacijom.

§1. Diferencijalna igra na konveksnom mnogouglu

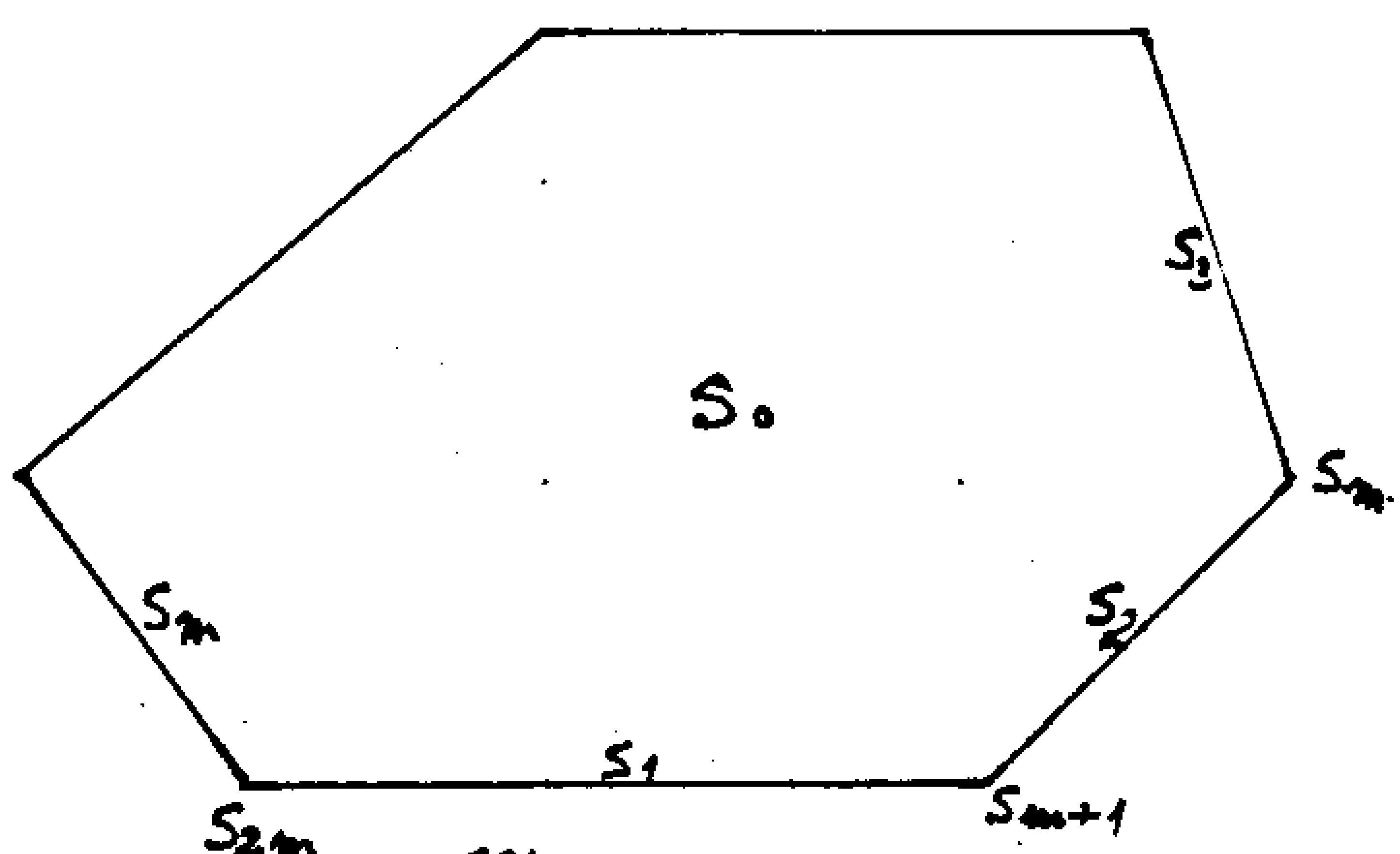
Kratak pregled ovog paragrafa dat je na strani 8 uvoda.

Dva igrača gonilac G i begunac B premeštaju se u zatvorenom mnogouglu $S\in R^n$ bez informacije o sebi i o svom protivniku. Igra traje odredjeno vreme T, a posle toga igrač B prima dobitak, koji zavisi od trajektorija igrača G i B. Igra je antagonistička, tj. dobitak igrača G jednak je dobitku igrača B sa suprotnim znakom.

Jednostavnosti radi razmatraćemo kretanje u ravni, mada rezultati mogu biti preneseni i na slučaj prostora bilo kojih dimenzija.

Neka je u ravni dat konveksni mnogougao S. Označimo sa S_0 unutrašnjost od S, sa $s_1, s_2, \ldots, s_m$ stranice mnogougla S /bez temena/ i sa $s_{m+1}, s_{m+2}, \ldots, s_{2m}$ temena mnogougla S /slika 8/.

U početnom momentu vremena "slučaj bira tačku $x_0\in S$ igrača G i $y_0\in S$ igrača B u saglasnosti sa ravnomernom raspodelom u S. Ako kao rezultat slučajnog koraka $x_0(y_0)$ pripada $S_k, k=0,1,\ldots,m,$ tada igrač G/B/zna samo S_k, ali ne i koja je to tačka. Dalje se igrači G i B premeštaju u S po jednačinama:



Slika 8.

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,u),\ u\in \mathcal{U}\subset \mathrm{Comp}\,R^2 \\ \dot{y} &= g(y,v),\ v\in \mathcal{V}\subset \mathrm{Comp}\,R^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (3.1.1)$$

gde $\mathrm{Comp}\,R^2$ označava skup svih kompaktnih skupova u ravni. Početna stanja su $x_0\in S, y_0\in S, x\in R^2, y\in R^2$. Pošto zahtevamo da u procesu igre igrači G i B ne napuštaju S potrebno je da odredimo klase dopustivih upravljanja.

Definicija 3.1.1 Programska upravljanja $u(t)$, $v(t)$, $t\in[0,T]$, $u\in\mathcal{U}$, $v\in\mathcal{V}$ nazivaju se dopustivim ako za sve početne uslove $x_0, y_0\in S$ trajektorije $x(t)$, $y(t)$ dobijene kao rešenje sistema jednačina /3.1.1/pripadaju skupu S. Odgovarajuće trajektorije $x(t)$, $y(t)$ mi ćemo nazvati dopustivim trajektorijama.

Neka je u momentu $0\le t\le T$ tačka $x(t)\in S_k$ i tačka $y(t)\in S_\ell$ tada u ovom momentu vremena igrači G i B znaju da se oni nalaze redom u S_k i S_ℓ, ali ne znaju tačno baš u kojoj tački S_k i S_ℓ se nalaze. Na trajektorijama $x(t)$, $y(t)$ za $t\in[0,T]$ dat je neki neprekidni funkcional $F(x_0, y_0, x(t), y(t))$ i dobitak igrača B je F/dobitak igrača G je -F/.

Saglasno uslovima igre igrači razlikuju samo skupove $S_k (k=0,1,\dots,m)$, ali ne razlikuju pozicije u S_k. Osim toga igrači znaju i skup S. zato nalazeći se naprimer na strani S_k, igrač G/B/ zna koja je to stranica, a znači i sa koje strane od S_k se nalazi mnogougao S. Ako se G/B/ nalazi u temenu S_k, $k=m+1,\dots,2m$ tada on zna i strane S_{ki} i $S_{k\ell}$ koje se sastaju u temenu S_k i konačno raspored mnogougla S u odnosu na ove strane. Ako je $x\in S_0$ tada G/B/ zna da se samo nalazi u S_0. Zato ćemo mi odrediti informacione skupove $S^{(i)}$ igrača G/B/ na sledeći način:

$$S^{(0)}=S_0;\ S^{(k)}=S_k\cup S_0,\quad k=1,2,\dots,m.$$

Odredimo dopustiva upravljanja u svakom od $S^{(k)}$, $k=0,1,\dots,m$. Za $x\in S^{(0)} (y\in S^{(0)})$ igrač G/B/ može birati proizvoljno upravljanje $u\in\mathcal{U}$ $(v\in\mathcal{V})$ za $x\in S^{(k)}$, $k=1,2,\dots,m$. Treba imati u vidu tu situaciju da nalazeći se na stranici S_k, G treba da bira upravljanje $u\in\mathcal{U}$, koje će usmeriti kretanje tačke unutar S, jer za svako $x\in S^{(k)}$ skup dopustivih upravljanja je isti inače G bi mogao da razlikuje različite pozicije u $S^{(k)}$. Tada za svako $x\in S^{(k)}$ mi ćemo navesti skup dopustivih upravljanja koji se poklapa sa takvim za $x\in S_k$, $k=1,2,\dots,m$. Upravljanje $\bar{u}\in\mathcal{U}$ mi ćemo nazvati dopustivim u tački $x'\in S_k$ ako postoji takvo $\delta>0$ da za sve početne uslove $x'\in S_k$, odsečak trajektorije $x(t)$ dobijen kao rešenje sistema je:

$$\dot{x}=f(x,\bar{u}),\ x(0)=x',$$

za $0\le t\le\delta$ pripada skupu S_0. Označimo sa u_k skup dopustivih upravljanja igrača G u tački $x\in S_k$. Analognim načinom odredjuje se dopustivo upravljanje $\bar{v}\in\mathcal{V}$ u tački $y\in S_k$ igrača B i skup dopustivih upravljanja u tački y označava se sa $v(y)$. Skup dopustivih upravljanja u informacionom skupu $S^{(k)}$ odredjujemo:

$$\mathcal{U}(S^{(k)})=\bigcap_{x\in S_k} u(x) \quad i \quad V(S^{(k)})=\bigcap_{y\in S_k} v(y).$$

Saglasno definiciji 3.1.1 ovi skupovi su isti u svim partijama $x\in S^{(k)}$. Poslednje isključuje mogućnost poklapanja ovih ili onih pozicija iz $S^{(k)}$ igrača G i B.

Za neke $S^{(k)}$ skupovi $\mathcal{U}(S^{(k)})$ i $V(S^{(k)})$ mogu biti nekompaktni. U takvim slučajevima mesto $\mathcal{U}(S^{(k)}), V(S^{(k)})$, mi ćemo razmotriti ma koje kompaktna podskupove ovih skupova, sužavajući na taj način skupove dopustivih upravljanja na dati informacion skup. Osim toga neki S_k, $\mathcal{U}(S^{(k)})$ ili $V(S^{(k)})$ mogu biti prazni. U ovom slučaju smatraćemo da se kretanje prekida a tačka miruje u S_k do momenta završetka igre. T. Ako je u nekom momentu vremena t' tačka x/y/dospela u jedno od temena S, tada ćemo takodje smatrati, da će ona ostati tamo do momenta završetka igre T. U odnosu na sistem/3.1.1/ mi ćemo smatrati da su f/x,u/ i g/y,v/ neprekidne po skupu promenljivih, zadovoljavaju lokalni uslov Lipšica i:

$$|f(x,u)|\leq \mu_1|x|+N_1; \; |g(y,v)|\leq \mu_2|y|+N_2.$$

Neka za $t>0$ rešenja $x(t), y(t)$ jednačine/3.1.1/ za sve početne uslove i za sva konstantna upravljanja ne dodiruju granice mnogougla S.

Mada su definicije informacionih skupova G i B analogne definicijama za finitarne igre u radu Isbella [7] one se razlikuju od definicije Kuna [26], koji je zahtevao da svaki informacioni skup seče trajektoriju samo jednom. U našem slučaju nije tako. Trajektorije igrača prolaze po informacionim skupovima.

Pod čistom strategijom mi podrazumevamo pravilo koje svakom informacionom stanju igrača korespondira dejstvo koje je dopustivo u datom informacionom stanju. Ovu neformalnu definiciju postaraćemo se da iskoristimo za formalnu definiciju strategije.

Pošto se dopustivo upravljanje bira saglasno informaciji, to ono treba da bude jednako u svim tačkama informacionog skupa $S^{(k)}$, $k=0,1,\dots,m$, jer je informacija ista u svim tačkama informacionog skupa, a to je da igrač zna da se nalazi u $S^{(k)}$ i ništa više.

<u>Definicija 3.1.2</u> Pod strategijom u/./ /v/.// igrača G/B/ mi ćemo smatrati preslikavanje koje korespondira svakom informacionom skupu $S^{(k)}$, $k=0,1,\dots,m$ igrača G/B/ neko dopustivo u tom informacionom skupu upravljanje $u\in\mathcal{U}(S^{(k)})$ $(v\in V(S^{(k)}))$. Iz takve definicije strategije mi vidimo da se izbori upravljanja u i v, uopšte go-

voreći, menjaju pri prelazu iz jednog informacionog stanja u drugo, ali se ne menjaju unutar jednog informacionog skupa. Ovo je potpuno usaglašeno sa takvom intuitivnom situacijom, da igrači nemaju osnova da menjaju izabrana upravljanja, ako informacioni uslovi ostaju isti.

Neka je data situacija $(u(\cdot), v(\cdot))$. Prvi čini korak slučaj i bira tačke x_0 i y_0 na skupu S_0, tada igrač G bira upravljanje $u(S^{(0)})$, a igrač B upravljanje $v(S^{(0)})$ diktirano strategijom $u(\cdot)$, a igrač B upravljanje $v(S^{(0)})$ diktirano strategijom v/./. Kretanje se izvodi po jednačinama:

$$\dot{x}=f(x,u(S^{(0)})), \quad \dot{y}=g(y,v(S^{(0)})),$$

za početne uslove $x(0)=x_0, y(0)=y_0$.

Neka je $t_1'(t_1'')$ prvi moment vremena kada $x(t)(y(t))$ dospeva iz S_0 u $S_{K_1}(S_{K_2})$, tada u momentu $t_1'(t_1'')$ igrač G/B/ bira upravljanje $u(S^{(K_1)})\ (v(S^{(K_2)}))$ diktirano strategijom u/./ //v/.// i ovog se pridržava do završetka igre ili do dospevanja na drugu stranu mnogougla S. Kretanje u $S^{(K_1)}\ (S^{(K_2)})$ izvodi se po:

$$\dot{x}=f(x,u(S^{(K_1)})).\ (\dot{y}=g(y,v(S^{(K_2)})))$$

sa početnim uslovom $x(t_1')(y(t_1''))$. Ovaj proces se produžava do momenta T. U momentu T igra se prekida i igrač B prima dobitak:

$$\mathcal{K}(x_0,y_0;u(\cdot),v(\cdot))=F(x(T),y(T)), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3.1.2)$$

gde su x/t/, y/t/ trajektorije procesa iz početnog stanja x_0, y_0 u situaciji /u/./, v/.//, F/x, y/ je neka neprekidna funkcija. Pošto se početno stanje x_0, y_0 bira slučajno u S_0, tada igrač B u početku igre može biti uveren samo u srednji dobitak:

$$\mathcal{M}(u(\cdot),v(\cdot))=\frac{1}{\mu^2(S_0)}\int_{S_0\times S_0}\mathcal{K}(x,y;u(\cdot),v(\cdot))\,dx,dy,$$

gde je $\mu(S_0)$ Lebegova mera skupa S_0.

Pod funkcijom dobitka u ovoj igri smatraćemo srednju vrednost dobitka: $\mathcal{K}(x_0,y_0;u(\cdot),v(\cdot))$, tj. funkciju $\mathcal{M}(u(\cdot),v(\cdot))$.

Zadavši skupove strategija igrača G i B, funkciju dobitka $\mathcal{M}(u(\cdot),v(\cdot))$ mi smo odredili igru gonjenja sa nepotpunom informacijom u normalnoj formi.

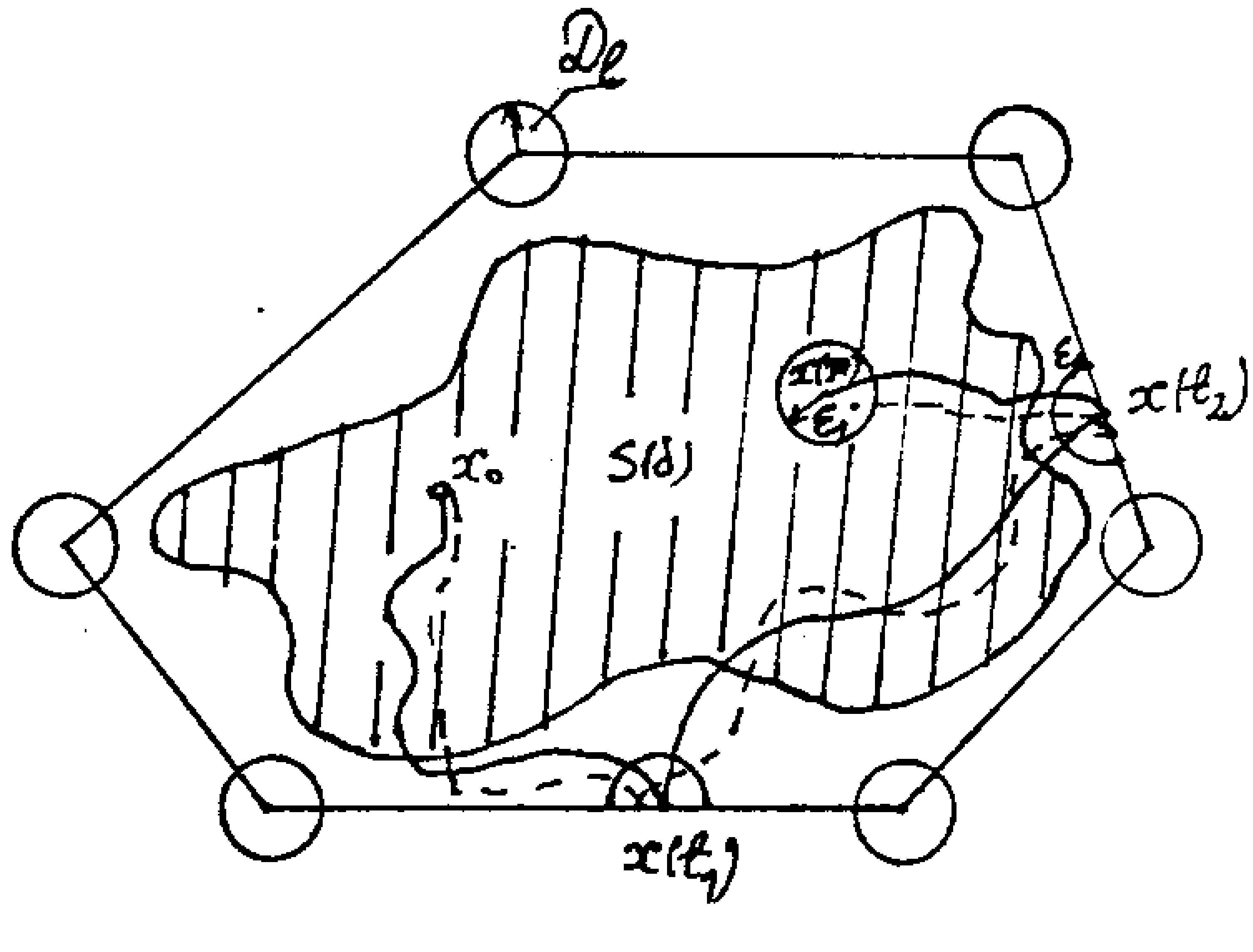
Pokažimo neprekidnost funkcije $\mathcal{M}(u(\cdot),v(\cdot))$ po strategijama $u(\cdot)$, $v(\cdot)$. Uvodimo oznake $u(S^{(K)})=u_K$; $v(S^{(K)})=v_K$, $K=0,1,2,\ldots m$. Tada svaka strategija G/B/ može biti pretstavljena u obliku vektora:

$$u(\cdot)=(u_0,u_1,\ldots,u_m)\quad (v(\cdot)=(v_0,v_1,\ldots,v_m)).$$

Svaka od vrednosti $u_K \in \mathcal{U}(S^{(K)})$ $(v_K \in \mathcal{V}(S^{(K)}))$, kako smo već govorili, skupovi svih strategija su kompaktni skupovi u prostoru R^{m+1}.

Označimo skup strategija igrača G/B/ sa $\mathcal{G}$ $(\mathcal{B})$ .Pokazaćemo da je funkcija $\mu(u(\cdot), v(\cdot))$ neprekidna funkcija definisana na Dekartovom proizvodu kompaktnih skupova $(\mathcal{G} \times \mathcal{B})$ .Razmotrićemo proizvoljnu situaciju $(u(\cdot), v(\cdot))$ .Označimo sa $\mathcal{D}_\ell$, $\ell = 1,2,\dots,m$ δ okoline temena S_K, $K = m+1,\dots,2m$.

Neka je $S'(\delta) \subset S_0$ $(S''(\delta) \subset S_0)$ skup svih početnih stanja x_0 (y_0) za koje trajektorija $x(t)$ $(y(t))$ za $0 \le t \le T$ ne seče skup $\mathcal{D}_\ell$ /slika 2/.Označimo sa $S(\delta) = S'(\delta) \cap S''(\delta)$.



slika 9

Tada je $S(\delta) \times S(\delta)$ pravougaoni skup tih početnih stanja x_0, y_0 , za koja trajektorije $x(t), y(t)$ za $0 \le t \le T$ iz početnih stanja x_0, y_0 u situaciji $(u(\cdot), v(\cdot))$ ne seku skupove $\mathcal{D}_\ell \times \mathcal{D}_\ell$.

Uslov 1.za $\forall \varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ da je

$$|\mu^2(S(\delta)) - \mu^2(S_0)| < \varepsilon,$$

gde je μ Lebegova mera skupa S.

Neka su $x_0, y_0 \in S(\delta) \times S(\delta)$ i neka su $t_1, t_2, \dots, t_\ell$ $(\tau_1, \tau_2, \dots \tau_\ell)$ momenti dospevanja trajektorije $x(t)$ $(y(t))$ na stranice S_k.Pošto $x(t), y(t)$ ne seku skupove $\mathcal{D}_\ell$ tada postoji $\varepsilon_1 > 0$, $(\varepsilon_1 < \delta)$ da ε_1 okoline $\gamma^2_{\varepsilon_1}(x(t_i)), \gamma^2_{\varepsilon_1}(y(\tau_i))$ redom tačaka $x(t_i), y(\tau_i)$ ne sadrže temena skupa S.

Uzmimo bilo koji niz $u_n(\cdot), v_n(\cdot)$ koji konvergira ka $(u(\cdot), v(\cdot))$ .Za $\forall \varepsilon_1 > 0$ postoji $N_1(x_0, y_0, \varepsilon_1)$ tako da čim je $n > N_1(x_0, y_0, \varepsilon_1)$ tada tačke preseka strana skupa S trajektorijama $x_n(t), y_n(t)$ u situaciji $(u_n(\cdot), v_n(\cdot))$ iz početnih stanja x_0, y_0 pripadaće $\gamma_{\varepsilon_1}(x(t_i)), \gamma_{\varepsilon_1}(y(\tau_i))$ pošto male promene strategija ne mogu promeniti redosled prolaska informacionih skupova u poredjenju sa situacijom $(u(\cdot), v(\cdot))$ .Momenti dospevanja u informacione skupove $S^{(K)}$, $K = 1,2,\dots,m$ malo će se razlikovati od momenata t_i i τ_i u situaciji $(u(\cdot), v(\cdot))$ .Iz navedenog sledi da za $\forall \varepsilon_1 > 0$ postoji $N_1(x_0, y_0, \delta, \varepsilon_1)$ da čim je $n > N_1(x_0, y_0, \delta, \varepsilon_1)$ tada je:

$$\max_{0 \le t \le T} |x_n(t) - x(t)| < \varepsilon_1, \quad \max_{0 \le t \le T} |y_n(t) - y(t)| < \varepsilon_1 .$$

Poslednje označava da trajektorije koje polaze iz $x_0, y_0 \in S(\delta)\times S(\delta)$ neprekidno zavise od trajektorija u tački $(u(\cdot), v(\cdot))$. Pošto je po pretpostavci F/x, y/neprekidna funkcija od x i y, tada za svaki niz $(u_n(\cdot), v_n(\cdot))$ koji konvergira ka $(u(\cdot), v(\cdot))$ za sve tačke $x_0, y_0 \in S(\delta)\times S(\delta)$ postoji $N_2(x_0, y_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ da za sve $n > N_2(x_0, y_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ važi nejednačina:

$$|F(x_n(T), y_n(T)) - F(x(T), y(T))| < \varepsilon_2$$

ili što je isto na osnovu /3.1.2/:

$$|\varkappa(x_0, y_0, u_n(\cdot), v_n(\cdot)) - \varkappa(x_0, y_0, u(\cdot), v(\cdot))| < \varepsilon_2 \quad . \; . \; . \; . \; (3.1.3)$$

Pokažimo da niz integrala takodje konvergira:

$$|\mu(u_n(\cdot), v_n(\cdot)) - \mu(u(\cdot), v(\cdot))| = \Big| \frac{1}{\mu^2(S_0)} \int_{S_0\times S_0} \varkappa(x, y; u_n(\cdot), v_n(\cdot))\,dx\cdot dy -$$

$$- \frac{1}{\mu^2(S_0)} \int_{S_0\times S_0} \varkappa(x, y; u(\cdot), v(\cdot))\,dx\cdot dy \Big| = \frac{1}{\mu^2(S_0)} \Big| \int_{S_0\times S_0 \setminus S(\delta)\times S(\delta)} \varkappa(x, y; u_n(\cdot); v_n(\cdot))\,dx\cdot dy +$$

$$+ \int_{S(\delta)\times S(\delta)} \varkappa(x, y; u_n(\cdot), v_n(\cdot))\,dx\cdot dy \;-\; \int_{S_0\times S_0 \setminus S(\delta)\times S(\delta)} \varkappa(x, y; u(\cdot), v(\cdot))\,dx\cdot dy -$$

$$- \int_{S(\delta)\times S(\delta)} \varkappa(x, y; u(\cdot), v(\cdot))\,d(x\cdot dy \Big| \leq \frac{1}{\mu^2(S_0)} \Big\{ \Big| \int_{S_0\times S_0 \setminus S(\delta)\times S(\delta)} \varkappa(x, y; u_n(\cdot)\, v_n(\cdot))\,dx\cdot dy -$$

$$- \int_{S_0\times S_0 \setminus S(\delta)\times S(\delta)} \varkappa(x, y; u(\cdot), v(\cdot))\,dx\cdot dy \Big| + \Big| \int_{S(\delta)\times S(\delta)} \varkappa(x, y; u_n, v_n(\cdot))\,dx\cdot dy -$$

$$- \int \varkappa(x, y; u(\cdot), v(\cdot))\,dx\cdot dy \Big| \Big\}.$$

Ocenimo prvi sabirak:

$$\Big| \int_{S_0\times S_0 \setminus S(\delta)\times S(\delta)} \varkappa(x, y; u_n(\cdot), v_n(\cdot))\,dx\cdot dy \; - \int_{S_0\times S_0 \setminus S(\delta)\times S(\delta)} \varkappa(x, y; u(\cdot); v(\cdot))\,dx\cdot dy \Big| \leq$$

$$\leq \Big| \int_{S_0\times S_0 \setminus S(\delta)\times S(\delta)} \varkappa(x, y; u_n(\cdot), v_n(\cdot))\,dx\cdot dy \Big| + \Big| \int_{S_0\times S_0 \setminus S(\delta)\times S(\delta)} \varkappa(x, y; u(\cdot), v(\cdot))\,dx\cdot dy \Big| \leq$$

$$\leq \int_{S_0\times S_0 \setminus S(\delta)\times S(\delta)} |\varkappa(x, y; u_n(\cdot), v_n(\cdot))|\,dx\cdot dy + \int_{S_0\times S_0 \setminus S(\delta)\times S(\delta)} |\varkappa(x, y; u(\cdot), v(\cdot))|\,dx\cdot dy \leq$$

$$\leq 2\mathcal{M}(\mu^2(S_0) - \mu^2(S(\delta)) = 2\mathcal{M}\varepsilon,$$

gde je $\mathcal{M}$ maksimalna vrednost $\varkappa(x, y; u(\cdot), v(\cdot))$ u S_0/Funkcija

$\mathcal{K}(x,y;(u(\cdot),v(\cdot))$ je ograničena brojem $\max_{x,y\in S} F(x,y)$ ./

Ocenimo sada drugi sabirak. Iz /3.1.3/ sledi da niz $\mathcal{K}(x_0,y_0;u_n(\cdot), v_n(\cdot))$ konvergira za sve tačke $x_0,y_0 \in S(\delta)\times S(\delta)$ ka $\mathcal{K}(x_0,y_0;u(\cdot),v(\cdot))$ zato niz integrala:

$$\int_{S(\delta)\times S(\delta)} \mathcal{K}(x,y;u_n(\cdot),v_n(\cdot))\,dx\cdot dy$$

takodje konvergira. Ovo označava da postoji takvo $N_3(\varepsilon_3)$ da za $\forall n > N_3(\varepsilon_3)$ biće:

$$\Big|\int_{S(\delta)\times S(\delta)} \mathcal{K}(x,y;u_n(\cdot),v_n(\cdot))\,dx\cdot dy - \int_{S(\delta)\times S(\delta)} \mathcal{K}(x,y;u(\cdot),v(\cdot))\,dx\cdot dy\Big| < \varepsilon_3$$

sledi da za svako $n > N_0$, gde je:

$$N_0 = \max\{N_2(x_0,y_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2);\, N_3(\varepsilon_3)\},$$

važi:

$$|\mu(u_n(\cdot),v_n(\cdot)) - \mu(u(\cdot),v(\cdot))| < \frac{1}{\mu^2(S_0)}(2M\varepsilon + \varepsilon_3).$$

Za dovršavanje ovog dokaza dovoljno je staviti $\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu^2(S_0)}(2M\varepsilon+\varepsilon_3)$, tj. funkcija $\mu(u(\cdot),v(\cdot))$ je neprekidna u tački $(u(\cdot),v(\cdot))$. Pošto je situacija $(u(\cdot),v(\cdot))$ bila proizvoljna, tada je $\mu(u(\cdot),v(\cdot))$ neprekidna funkcija strategija $u(\cdot), v(\cdot)$.

<u>Teorema 3.1.1</u> Funkcija dobitka $\mu(u(\cdot),v(\cdot))$ pri ispunjenju uslova 1. je neprekidna funkcija na proizvodu kompaktnih skupova: $\mathcal{G}\times\mathcal{B}$.

U teoriji igara je poznato da svaka igra u normalnoj formi, koja je definisana na kompaktnim skupovima strategija i sa neprekidnom funkcijom dobitka ima situaciju ravnoteže u mešovitim strategijama.

Ovo zajedno sa teoremom 3.1.1 daje nam osnovnu u ovom paragrafu teoremu.

<u>Teorema 3.1.2</u> Razmatrana igra gonjenja sa nepotpunom informacijom pri ispunjenju uslova 1. ima situaciju ravnoteže u mešovitim strategijama.

<u>Napomena 3.1.1</u> U svojstvu raspodele na skupu S_0 moguće je umesto ravnomerne raspodele uzeti bilo koju neprekidnu raspodelu i pri tome svi rezultati ovog odeljka ostaju na snazi.

§2. Diferencijalne igre sa diskretnom disjunktnom informacionom podelom

Ovde ćemo razmatrati diferencijalnu igru gonjenja u kojoj igrači G i B u procesu igre nemaju informaciju o svom stanju, a znaju samo neki skup u kome se oni nalaze.

Kratak sadržaj ovog paragrafa dat je na strani 8 uvoda.

Smatraćemo da je jednačina kretanja oblika:

$$\dot{x}=f(x,u,v),\ u\in\mathcal{U},\ v\in\mathcal{V}, \quad \ldots\ldots\ldots (3.2.1)$$

gde je $x\in R^n$, a $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ su kompaktni skupovi u R^n sa početnim uslovom $x(0)=x_0$. Jednostavnosti radi ograničimo se igrama, gde je $x\in R^2$ i igra ima odredjenu dužinu T.

U odnosu na sistem /3.2.1/ mi ćemo pretpostaviti da je $f(x,u,v)$ neprekidna po skupu promenljivih, zadovoljava lokalni uslov Lipšica po x /ravnomerno u odnosu na u i v/ i

$$|f(x,u,v)|\le \mathcal{M}|x|+N$$

Neka je $\bar{S}=\{\bar{S}_1,\bar{S}_2,\ldots,\bar{S}_m\}$ disjunktna podela, koja je konačna podela neke mrežaste disjunktne podele ravni. Dalje ćemo razmatrati samo podele koje su disjunktne podele $\bar{S}$.

Neka je $S=\{S_1,S_2,\ldots,S_m\}$ takva disjunktna podela ravni R^2 na konačan broj skupova.

Definicija 3.2.1 Tačka $x\in S_i$ naziva se graničnom tačkom disjunktne podele, ako za svako $\varepsilon>0$ postoji ε okolina tačke x, $\omega_\varepsilon(x)$ i takvo $k\neq i$ da je:

$$\omega_\varepsilon(x)\cap S_k\neq\phi. \quad \ldots\ldots\ldots (3.2.2)$$

Tačka $x\in S_i$ naziva se graničnom tačkom prvog reda ako je ona granična tačka disjunktne podele S i skup S_k iz /3.2.2/ je jedinnstven. Sve ostale granične tačke disjunktne podele S nazivaju se graničnim tačkama drugog reda.

Disjunktna podela naziva se regularnom, ako ona sadrži konačan broj graničnih tačaka drugog reda i ako je bar jedan element disjunktne podele ograničen. Vezni skup graničnih tačaka prvog reda naziva se regularnim odsečkom granice.

Smatraćemo da za $t>0$ rešenje $x(t)$ jednačine /3.2.1/ za sve početne uslove i za bilo koji par konstantnih upravljanja u, v ne dodiruje regularne odsečke granice.

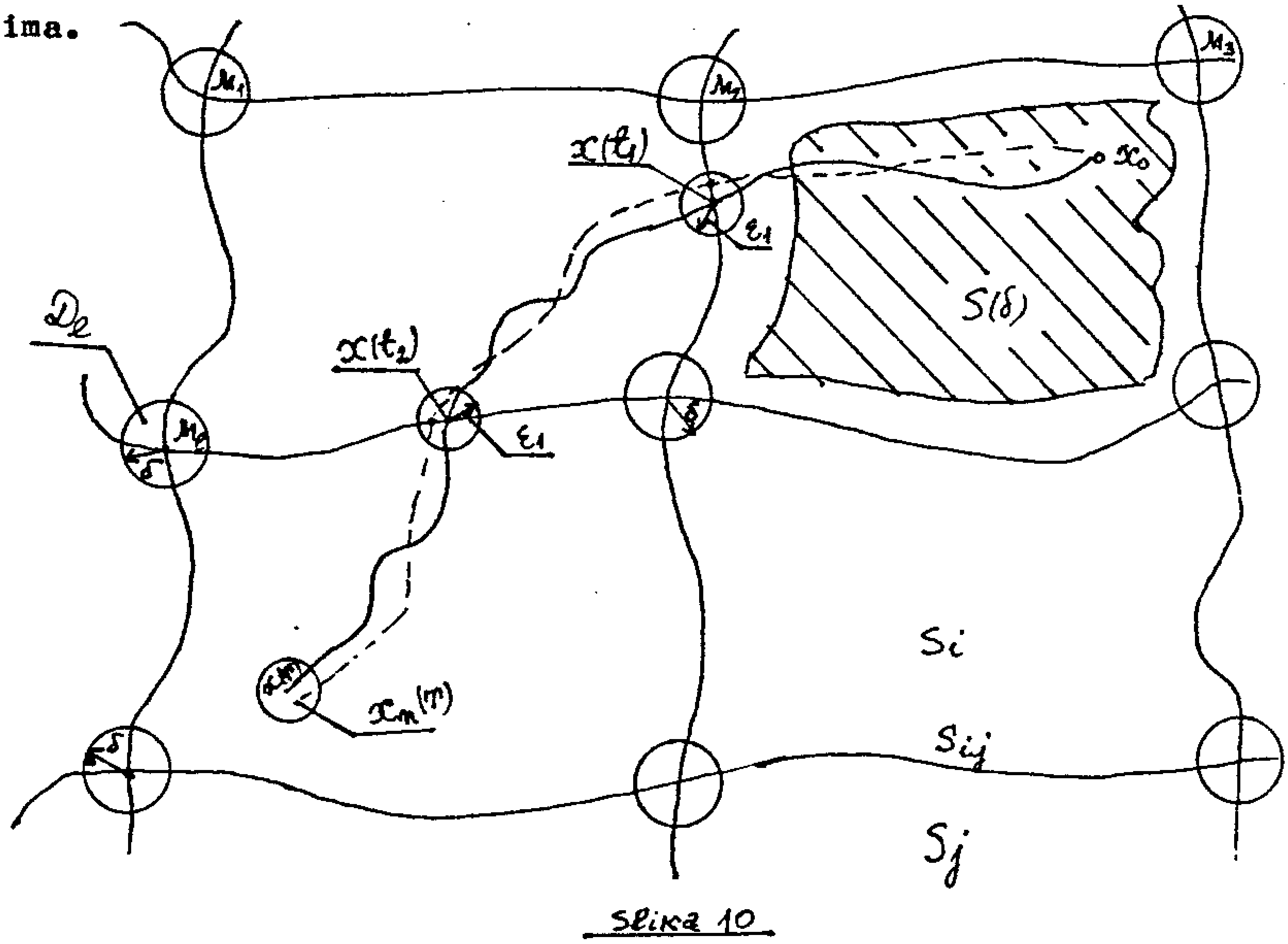
Igra teče na sledeći način. U R^2 je data informaciona disjunktna podela S. Na jednom od graničnih elemenata S, S_{k_0} je data neprekidna raspodela F/x/. Slučaj bira tačku $x \in S_{k_0}$ u saglasnosti sa raspodelom F/x/. Tačka x_0 je početni uslov jednačine /3.2.1/ i ne saopštava se ni jednom od igrača G i B. Igrači G i B znaju samo da tačka x_0 pripada elementu disjunktne podele S_{k_0}. Njima je takodje poznata raspodela F/x/.

Tačka x_0 premešta se u S_{k_0} u saglasnosti sa jednačinom kretanja /3.2.1/ pod dejstvom upravljanja u i v, koja redom biraju igrači G i B.

Neka je t_1 prvi moment dospevanja trajektorije x/t/ na granicu disjunktne podele S. U tački x/t_1/ igračima se saopštava da data tačka pripada granici skupa S_i i S_j.

Ako kretanje počinje od tačke $x(t_1)$ onda se izvodi po jednom od elemenata podele S_{k_i}. Sledeća informacija dospeva u momentu t_2, kada $x(t_2)$ ponovo dospe na granicu disjunktne podele S, pri ovome se saopštava da data tačka pripada granici skupova S_{k_i} i S_{k_j}. Ovaj proces se produžava do momenta T. Igrač B prima dobitak $H(x(T))$, gde je H/x/ neka neprekidna funkcija data na R^2. Igrač G prima dobitak $-H(x(T))$.

Smatraćemo da je disjunktna podela S regularna. Ona je prikazana na slici 10. Ovde su granične tačke drugog reda prikazane kružićima.



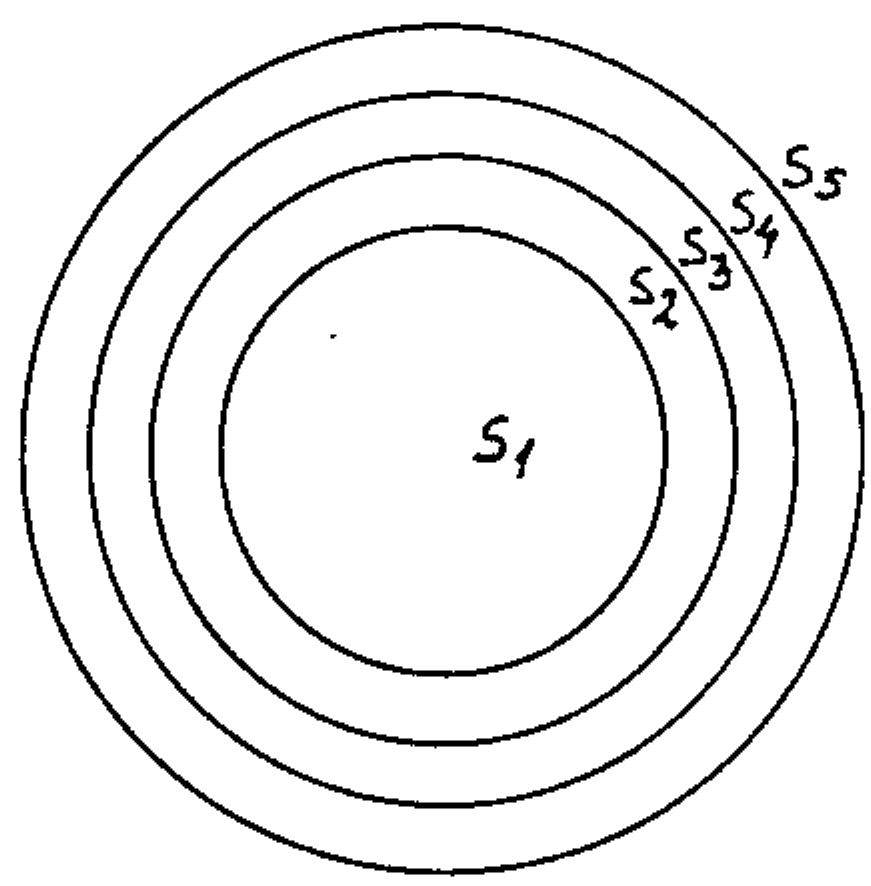
Slika 10

Na osnovu definicije granične tačke prvog reda takve su granice samo za dva elementa disjunktne podele S.Ma koji regularni odsečak granice je takodje odsečak granice samo dva elementa disjunktne podele S.Označimo regularni odsečak granice medju skupovima $S_i, S_j \subset S$ sa $\bar{S}_{ij}$ /ako S_i i S_j nemaju graničnih tačaka tada je $\bar{S}_{ij} = \phi$ /.

Neka je $l(\bar{S}_{ij})$ dužina odsečka krive $\bar{S}_{ij}$ / ona može biti jednaka ∞ /.Ako skupovi S_i, S_j imaju neprazan regularni odsečak granice $\bar{S}_{ij}$,tada postoji maksimalni regularni odsečak granice $\bar{S}_{ij}$ medju skupovima S_i, S_j ,tj.takav odsečak $\bar{S}_{ij}$ da je:

$$l(S_{ij}) = \sup_{\bar{S}_{ij}} l(\bar{S}_{ij}),$$

gde $l(S_{ij})$ može biti jednak beskonačnosti.Ako je $l(S_{ij}) < \infty$ tada je skup S_{ij} ili zatvorena kriva /slika 11/ ili krajevi odsečka S_{ij} su izolovane granične tačke drugog reda/pošto je graničnih tačaka drugog reda samo konačan broj/.Ako je $l(S_{ij}) = \infty$ tada odsečak S_{ij} ima ne više od jedne granične tačke drugog reda /slika 10/.



slika 11

Označimo sa $\mu l (l=1,2,\dots,K)$ granične tačke drugog reda.Iz opisivanja igre sledi da regularni odsečci granice S_{ij} i tačke μl imaju u igri posebnu informacionu ulogu.

U tačkama skupa S_{ij} igrač dobija informaciju o prelazu procesa u jedan od elemenata disjunktne podele, za koje je ova tačka granična. Na taj način posle realizacije slučajnog mehanizma sa raspodelom F/x/ u skupu $S_{\kappa_0} \in S$ u početnom momentu igre promena informacionog stanja igrača se dešava pri prelazu trajektorije x/t/ kroz skupove S_{ij} .

Skup $S_{\kappa_0} \in S$ i regularni odsečci granice S_{ij} nazivaju se informacionim skupovima igrača G i B.

Pošto se informacioni skupovi jednoznačno odredjuju disjunktnom podelom S ,to se ova podela naziva informacionom podelom.

Sada smo u stanju da odredimo strategije igrača u igri.Razmotrimo skup svih informacionih skupova $(S_{\kappa_0}, S_{12}, \dots, S_{ij}, \dots, S_{m(m-1)})$ koji se sastoji od m^2-m+1 elemenata.Strategija igrača G pretstavlja m^2-m+1 dimenzioni vektor:

$$\mathcal{U}(\cdot)=(u_{K_0}, u_{12},\dots, u_{ij},\dots, u_{m(m-1)})\dots\dots\dots(3.2.3)$$

gde je $u_{K_0}\in\mathcal{U}$ izbor igrača G u informacionom skupu S_{K_0}, $u_{ij}\in\mathcal{U}$ je izbor igrača G u informacionom skupu S_{ij} .

Analognim načinom strategija igrača B je m^2-m+1 dimenzioni vektor:

$$v(\cdot)=(v_{K_0}, v_{12},\dots, v_{ij},\dots, v_{(m-1)m}),\dots\dots(3.2.4)$$

gde je $v_{K_0}\in V$ izbor igrača B u informacionom skupu S_{K_0} , $v_{ij}\in V$ je izbor igrača B u informacionom skupu S_{ij} .

Skup svih vektora /3.2.3/ za $u_{K_0}\in\mathcal{U}$, $u_{ij}\in\mathcal{U}$ su skupovi čistih strategija igrača G i označava se sa $\mathcal{G}$ .Analogno skup vektora /3.2.4/ za $v_{K_0}\in V$, $v_{ij}\in V$ je skup čistih strategija igrača B i označava se sa $\mathcal{B}$.

Postavimo disjunktnoj podeli S i jednačini /3.2.1/ sledeće dopunske uslove.

<u>Uslov 1.</u> Neka je x unutrašnja tačka regularnog odsečka granice S_{ij} i neka je $x(t)$ rešenje sistema jednačina /3.2.1/ sa početnim uslovom $x(0)=x_0$ i pri koriščenju konstantnih upravljanja $u\in\mathcal{U}$, $v\in V$, tada važi tačno jedna od dve alternative:

1. postoji takav broj $\delta>0$ da je $x(t)\in S_i$ za $\forall\ t\in[0,\delta]$;
2. postoji takav broj $\delta>0$ da je $x(t)\in S_j$ za $\forall\ t\in[0,\delta]$.

Neka je $(u(\cdot), v(\cdot))$ bilo koja situacija u igri. Razmotrimo detaljnije proces formiranja trajektorija $x(t)$ u situaciji $(u(\cdot), v(\cdot))$ Pošto kao rezultat slučajnog koraka igrači u početku igre dospevaju u informacioni skup $S_{K_0}\in S$, tada na prvoj etapi igre strategije igrača $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ diktiraju im izbore upravljanja $\mathcal{U}(S_{K_0})=u_{K_0}$, $V(S_{K_0})=v_{K_0}$, koji ostaju konstantni do momenta vremena t, dospevanja tačke x , koja se premešta saglasno sistemu

$$\dot{x}=f(x,u_{K_0}, v_{K_0}),\ x(0)=x_0,\dots\dots\dots(3.2.5)$$

na granicu disjunktne podele S.

Ako je tačka $x(t_1)\in S_{i_1 j_1}$, tada se dalje kretanje tačke izvodi saglasno sistemu:

$$\dot{x}=f(x,u_{i_1 j_1}, v_{i_1 j_1}),\ x(t)\Big|_{t=t_1}=x(t_1)\dots\dots\dots(3.2.6)$$

gde su $u_{i_1 j_1}=\mathcal{U}(S_{i_1 j_1})$ i $v_{i_1 j_1}=V(S_{i_1 j_1})$ izbori u informacionom skupu $S_{i_1 j_1}$ diktirani strategijama $u(\cdot)$, $v(\cdot)$. Ako je pak $x(t_1)=\mathcal{M}$ tada ćemo smatrati da se dalje kretanje tačke prekida i tačka miruje do momenta T.

Kretanje se produžava do t_{2} momenta dospevanja tačke $x(t)$ u sledeći informacioni skup, koji je regularan odsečak granice, gde se izvodi smena upravljanja saglasno strategijama $u(\cdot), v(\cdot)$ i td. do momenta završetka igre T. Kao rezultat dobijamo trajektoriju kretanja $x(t), 0 \leq t \leq T$. Iz navedenog sledi da strategije $u(\cdot), v(\cdot)$ u svakoj situaciji realizuju deo po deo konstantna programska upravljanja $u(t), v(t)$ sa konačnim brojem tačaka prekida t_K, koje odgovaraju momentima prelaza trajektorije $x(t)$ granica disjunktne podele S.

Svakom početnom uslovu $x_0 \in S_{K_0}$ i svakoj situaciji $(u(\cdot), v(\cdot)), u(\cdot) \in \mathcal{G}$, $v(\cdot) \in \mathcal{B}$ jednoznačno odgovara trajektorija kretanja $x(t), 0 \leq t \leq T$, a to znači i dobitak $H(x(T))$. Zato možemo napisati da dobitak u datoj igri je funkcija od početnog uslova $x_0 \in S_{K_0}$ i strategija $u(\cdot), v(\cdot)$ tj.

$$\mathcal{K}(x_0, u(\cdot), v(\cdot)) = H(x(T)), \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3.2.7)$$

gde je $x(t)$ trajektorija kretanja iz početnog stanja x_0 u situaciji $(u(\cdot), v(\cdot))$.

Pošto je realizovano početno stanje x_0 nepoznato igračima i slučajna je veličina sa raspodelom F/x/ na skupu S_{K_0}, tada igrač B u situaciji $(u(\cdot), v(\cdot))$ može da računa samo na srednji dobitak:

$$\mu(u(\cdot), v(\cdot)) = \int_{S_{K_0}} \mathcal{K}(x_0, u(\cdot), v(\cdot))\, dF(x), \quad \ldots \ldots \quad (3.2.8)$$

gde se veličina $\mathcal{K}(x_0, u(\cdot), v(\cdot))$ odredjuje po formuli /3.2.7/. Na taj način mi smo doveli razmatranu igru na normelni oblik:

$$\Gamma = \langle \mathcal{G}, \mathcal{B}, \mu(u(\cdot), v(\cdot)) \rangle, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3.2.9)$$

gde su $\mathcal{G}, \mathcal{B}$ neki kompaktni skupovi u $2(m^2 - m + 1)$ dimenzionom Euklidovom prostoru, koji su skupovi strategija igrača G i B, a $\mu(u(\cdot), v(\cdot))$ je realna funkcija data na Dekartovom proizvodu $\mathcal{G} \times \mathcal{B}$ koja je funkcija dobitka igrača B.

Uvodimo u razmatranje mešovite strategije, ali pre toga dokazaćemo neprekidnost funkcije dobitka $\mu(u(\cdot), v(\cdot))$ na skupu $\mathcal{G} \times \mathcal{B}$. Dokaz ovog tvrdjenja podseča na odgovarajući dokaz teoreme iz glaveIII paragrafa 1.

Razmotrimo proizvoljnu situaciju $(u(\cdot), v(\cdot))$. Označimo sa $\mathcal{D}_\ell$, $\ell = 1, 2, \ldots S$, δ- okolinu graničnih tačaka $\mu\ell$ drugog reda disjunktne podele S. Neka je $S(\delta) \subset S_{K_0}$ skup tih početnih stanja x_0, za koje trajektorija $x(t)$ za $0 \leq t \leq T$ ne seče skupove $\mathcal{D}_\ell$ /slika 10/.

Uslov 2. Za svako $\varepsilon > 0$ moguće je naći takvo δ da je:

$1-\mu(S(\delta))<\varepsilon,$

gde je μ mera koja stvara raspodele F/x/. Neka je $x_0 \in S(\delta)$ i $t_1, t_2, \dots t_r$ su momenti dospevanja trajektorije $x(t)$ u informacione skupove $S_{ij}^{x(t)}$ (tj. prvi momenti preseka trajektorije regularnih odsečaka granica disjunktnih podela S)/slika 10/.

Pošto $x(t)$ ne prolazi kroz skup $\mathcal{D}_2$ tada postoji $\varepsilon_1>0(\varepsilon_1<\delta)$ da ε_1 okolina $\gamma_{\varepsilon_1}(x(t_i))$ tačaka $x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_m)$ ne sadrži granične tačke drugog reda $\mathcal{M}$.

Uzmimo ma koji niz $(u_k(\cdot), v_k(\cdot))$ koji konvergira ka $(u(\cdot), v(\cdot))$. Za svako $\varepsilon_1>0$ može se naći takvo $N_1(x_0,\varepsilon_1)$ da čim je $n>N_1(x_0,\varepsilon_1)$ tada će tačke preseka granice disjunktne podele S trajektorijom $x_n(t)$ u situaciji $(u_k(\cdot), v_k(\cdot))$ iz početnog stanja $x_0 \in S(\delta)$ pripadati $\gamma_{\varepsilon_1}(x(t_i))$, jer male promene strategija ne mogu da promene poredak prelaska informacionih skupova /po sravnjenju sa situacijom $(u(\cdot), v(\cdot))$ /.

Moguće je dalje pokazati da će se momenti dospevanja trajektorije $x_k(t)$ u informacione skupove malo razlikovati od momenata dospevanja trajektorije $x(t)$ u situaciji $(u(\cdot), v(\cdot))$. Iz navedenog sledi da za $\varepsilon_1>0$ postoji takav broj $N_1(x_0,\varepsilon_1)$ da čim je $n>N(x_0\varepsilon_1)$ onda je:

$$\max_{0\le t\le T} |x(t)-x_k(t)|<\varepsilon_1 .$$

Poslednje označava da trajektorije koje polaze iz tačke $x_0 \in S(\delta)$ neprekidno zavise od strategija $u(\cdot), v(\cdot)$. Pošto je $H(x)$, po pretpostavci, neprekidna funkcija od x tada za svaki niz $(u_k(\cdot), v_k(\cdot))$, koji konvergira ka $(u(\cdot), v(\cdot))$ i za sve tačke $x_0 \in S(\delta)$ može se naći takvo $N_2(x_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ da za svako $n>N_2(x_0,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ važi:

$$|H(x(T))-H(x_k(T))|\,\varepsilon_2$$

ili na osnovu /3.2.7/ sledi da je:

$$|\mathcal{K}(x_0,u(\cdot),v(\cdot))-\mathcal{K}(x_0,u_k(\cdot),v_k(\cdot))|<\varepsilon_2 \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \qquad (3.2.10)$$

Pokažimo sada da niz integrala takodje konvergira:

$$|\mathcal{M}(u_k(\cdot), v_k(\cdot))-\mathcal{M}(u(\cdot), v(\cdot))|=\Big|\int_{S_{K_0}}\mathcal{K}(x,u_k(\cdot),v_k(\cdot))\,dF(x)-$$

$$-\int_{S_{K_0}}\mathcal{K}(x,u(\cdot),v(\cdot))\,dF(x)\Big|=\Big|\int_{S_{K_0}\setminus S(\delta)}\mathcal{K}(x,u_k(\cdot),v_k(\cdot))\,dF(x)+\int_{S(\delta)}\mathcal{K}(x,u_k(\cdot),v_k(\cdot))\,dF(x)-$$

$$-\int_{S_{K_0}\setminus S(\delta)} \mathcal{K}(x,u(\cdot),v(\cdot))\,dF-\int_{S(\delta)}\mathcal{K}(x,u(\cdot),v(\cdot))\,dF(x)|\leq$$

$$\leq|\int_{S_{K_0}\setminus S(\delta)} \mathcal{K}(x,u_n(\cdot),v_n(\cdot))\,dF(x)-\int_{S_{K_0}\setminus S(\delta)}\mathcal{K}(x,u(\cdot),v(\cdot))\,dF(x)|+$$

$$+|\int_{S(\delta)} \mathcal{K}(x,u_n(\cdot),v_n(\cdot))\,dF(x)-\int_{S(\delta)}\mathcal{K}(x,u(\cdot),v(\cdot))\,dF(x)|.$$

Ocenimo sada prvi sabirak:

$$|\int_{S_{K_0}\setminus S(\delta)} \mathcal{K}(x,u_n(\cdot),v_n(\cdot))\,dF(x)-\int_{S_{K_0}\setminus S(\delta)}\mathcal{K}(x,u(\cdot),v(\cdot))\,dF(x)|\leq$$

$$\leq|\int_{S_{K_0}\setminus S(\delta)} \mathcal{K}(x,u_n(\cdot),v_n(\cdot))\,dF(x)|+|\int_{S_{K_0}\setminus S(\delta)}\mathcal{K}(x,u(\cdot),v(\cdot))\,dF(x)|\leq$$

$$\leq\int_{S_{K_0}\setminus S(\delta)} |\mathcal{K}(x,u_n(\cdot),v_n(\cdot))|\,dF(x)+\int_{S_{K_0}\setminus S(\delta)}|\mathcal{K}(x,u(\cdot),v(\cdot))|\,dF(x)\leq$$

$$\leq 2\mathcal{M}\mu(S_{K_0}-S(\delta))=2\mathcal{M}[1-\mu(S(\delta))]<2\mathcal{M}\varepsilon,$$

gde je $\mathcal{M}$ maksimalna vrednost $\mathcal{K}(x,u(\cdot),v(\cdot))$ u S_{K_0}. Ocenimo sada dr^{u}gi sabirak. Iz /3.2.10/ sledi da niz $\mathcal{K}(x_0,u_n(\cdot),v_n(\cdot))$ konvergira u svakoj tački $x_0\in S(\delta)$ ka $\mathcal{K}(x_0,u(\cdot),v(\cdot))$ zato niz integrala:

$$\int_{S(\delta)}\mathcal{K}(x_0,u_n(\cdot),v_n(\cdot))\,dF(x)$$

takodje konvergira. Ovo označava da se može naći takvo $\mathcal{N}_3(\varepsilon_3)$ da će za svako $n>\mathcal{N}_3(\varepsilon_3)$ biti:

$$|\int_{S(\delta)}\mathcal{K}(x,u_n(\cdot),v_n(\cdot))\,dF(x)-\int_{S(\delta)}\mathcal{K}(x,u(\cdot),v(\cdot))\,dF(x)|<\varepsilon_3 \quad\dots\quad (3.2.11)$$

Na osnovu toga sledi da za $n>\mathcal{N}_0$, gde je $\mathcal{N}_0=\max\{\mathcal{N}_2(x,\delta,\varepsilon_1,\varepsilon_2),\mathcal{N}_3(\varepsilon_3)\}$ važi:

$$|\mathcal{M}(u_n(\cdot),v_n(\cdot))-\mathcal{M}(u(\cdot),v(\cdot))|<2\mathcal{M}\varepsilon+\varepsilon_3 \quad\dots\dots\quad (3.2.12)$$

Za okončanje dokaza dovoljno je staviti $\varepsilon_0 = 2\mu\varepsilon + \varepsilon_3$ pa je funkcija $\mu(u(\cdot), v(\cdot))$ neprekidna u tački $(u(\cdot), v(\cdot))$. Pošto je situacija $(u(\cdot), v(\cdot))$ bila proizvoljna, tada $\mu(u(\cdot), v(\cdot))$ je neprekidna funkcija strategija $u(\cdot), v(\cdot)$ •

Treba navesti da smo dobili sledeću teoremu:

Teorema 3.2.1 U igri sa regularnom disjunktnom informacionom podelom S funkcija dobitka $\mu(u(\cdot), v(\cdot))$ je neprekidna funkcija na proizvodu skupova $\mathcal{G} \times \mathcal{B}$ •

Neka je $\mu(\nu)$ proizvoljna verovatna mera na $\mathcal{G} \times \mathcal{B}$. Pod mešovitom strategijom $\mu(\nu)$ igrača G/B/ podrazumevamo proizvoljnu verovatnu meru na $\mathcal{G} \times \mathcal{B}$. Skup svih mešovitih strategija G/B/ mi ćemo označiti sa $\Sigma_G(\Sigma_B)$. Pod mešovitim raširenjem igre gonjenja sa nepotpunom informacijom podrazumevamo igru u normalnoj formi nad prostorima strategija $\Sigma_G(\Sigma_B)$ sa funkcijom dobitka:

$$R(\mu, \nu) = \int_{\Sigma_G} \int_{\Sigma_B} \mu(u(\cdot), v(\cdot))\, d\mu\, d\nu .$$

Na taj način $R(\mu, \nu)$ je prosto matematičko očekivanje dobitka $\mu(u(\cdot), v(\cdot))$, ako se strategije $u(\cdot), v(\cdot)$ biraju slučajno u saglasnosti sa verovatnim merama $\mu \in \Sigma_G$ i $\nu \in \Sigma_B$. Pod situacijom ravnoteže u mešovitim raširenjima igre gonjenja sa nepotpunom informacijom mi ćemo podrazumevati takav par strategija μ^*, ν^* da je:

$$R(\mu, \nu^*) \geq R(\mu^*, \nu^*) \geq R(\mu^*, \nu),$$

gde je

$$\mu \in \Sigma_G, \; \nu \in \Sigma_B .$$

Govorićemo da igra gonjenja sa nepotpunom informacijom ima situaciju ravnoteže u mešovitim strategijama, ako njeno mešovito raširenje ima situaciju ravnoteže.

U teoriji igara poznato je [6] da svaka igra u normalnoj formi odredjena na kompaktnim skupovima strategija i sa neprekidnom funkcijom dobitka ima situaciju ravnoteže u mešovitim strategijama.

Iz navedenog i iz teoreme 3.2.1 sledi teorema.

Teorema 3.2.2 Pri ispunjenju uslova 1., 2. igra Γ sa regularnom informacionom disjunktnom podelom S ima situaciju ravnoteže u mešovitim strategijama.

§3. Primer diferencijalnih igara odredjene dužine sa diskretnom informacionom disjunktnom podelom

Kratak sadržaj ovog paragrafa iznet je stranama 8. i 9. uvoda.

Igra se izvodi u ravni. Promena pozicione promenljive (x,y) izvodi se po jednačinama: $\dot{x}=v_1$, $\dot{y}=u_2$,

gde v_1 i u_2 uzimaju jednu od vrednosti iz skupa $\{-1,+1\}$. Uvodimo novu promenljivu $z=(\dot{x},\dot{y})$. Navedene jednačine postaju oblika:

$$z=u+v$$

gde je: $u=\begin{pmatrix}0\\u_2\end{pmatrix}$, $v=\begin{pmatrix}v_1\\0\end{pmatrix}$, $u_2\in\{-1,1\}$, $v_1\in\{-1,1\}$; $z(0)=0$

Dužina igre je $T=1$. Dobitak igrača B je terminalni i jednak:

$$\mathcal{K}(z_0,T)=|x(1)|+|y(1)|$$

Informaciona disjunktna podela je oblika prikazanog na slici 12., tj.

$$S^{(1)}=[-1,1],\ S^{(2)}=\{(x,y): y=x+1\},\ S^{(3)}=\{(x,y): y=x-1\}$$

Igra počinje u imformacionom skupu AB/odsečak $[-1,1]$ ose Ox / slučajnim izborom u saglasnosti sa ravnomernom raspodelom na AB početne tačke z_0. Pošto u svakom od tri informaciona skupa je moguć jedan od dva izbora upravljanja $/+1$ ili $-1/$, tada se spisak čistih strategija oba igrača poklapa i oblika je:

$u_1(\cdot),\ v_1(\cdot):\quad (1\ \ 1\ \ 1)$

$u_2(\cdot),\ v_2(\cdot):\quad (1\ \ 1\ -1)$

$u_3(\cdot),\ v_3(\cdot):\quad (1\ -1\ \ 1)$

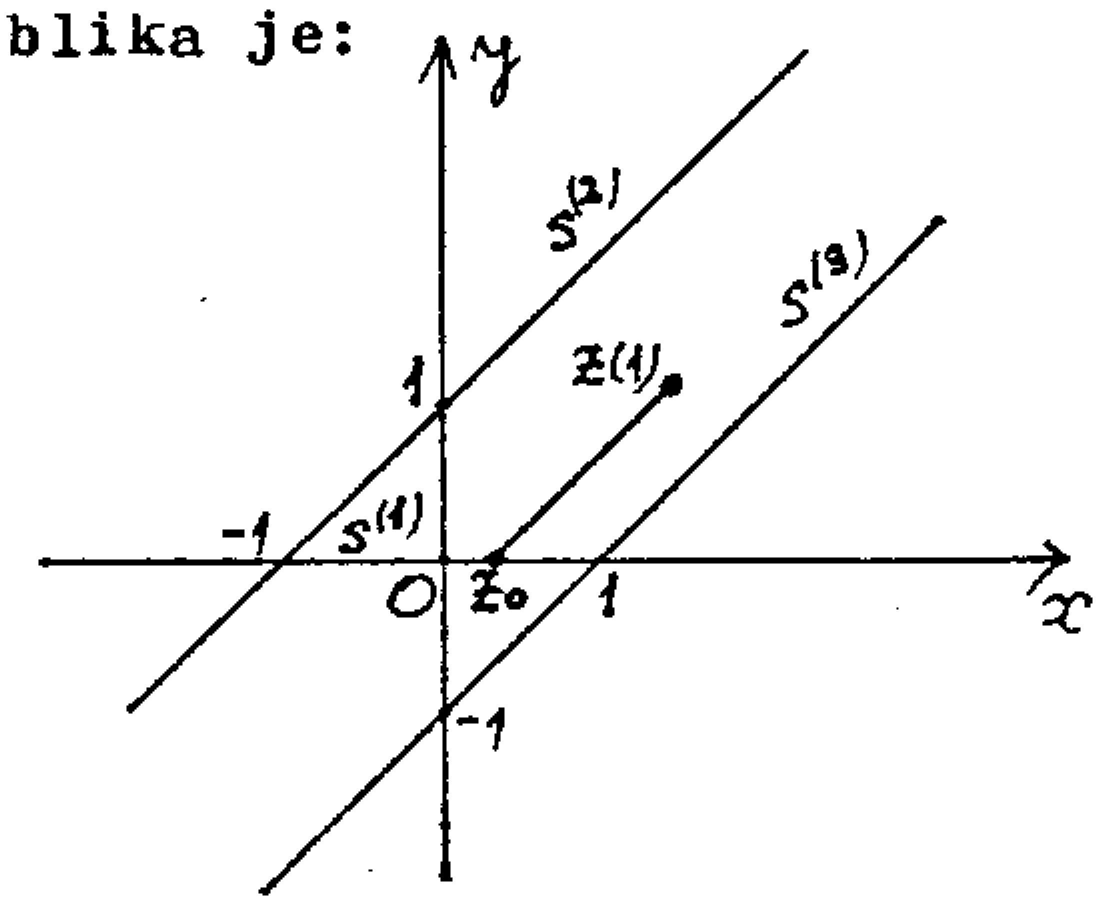
$u_4(\cdot),\ v_4(\cdot):\quad (1\ -1\ -1)$

$u_5(\cdot),\ v_5(\cdot):\quad (-1\ \ 1\ \ 1)$

$u_6(\cdot),\ v_6(\cdot):\quad (-1\ -1\ \ 1)$

$u_7(\cdot),\ v_7(\cdot):\quad (-1\ \ 1\ -1)$

$u_8(\cdot),\ v_8(\cdot):\quad (-1\ -1\ -1)$



Slika 12

Za izračunavanje funkcije dobitka potrebno je izračunati koordinate tačke $(x(1),y(1))$ u svakoj situaciji i usredniti po početnim podacima sa odsečka $[-1,1]$.

Počinjemo sa razmatranjem situacije $(v_1(\cdot),u_1(\cdot)): v_1(\cdot)=u_1(\cdot)=(1\ 1\ 1)$

Izračunajmo koordinate krajeva trajektorija:

$$x(1)=z_0+1, \quad y(1)=1$$

Dobitak je:

$$\mathcal{K}(z_0,T)=z_0+2$$

Srednji dobitak igrača B po početnim stanjima je:

$$\mu(v_1(\cdot),u_1(\cdot))=\int_{-1}^{1}(z+2)\,dF(z)=\int_{-1}^{1}(z+2)\frac{1}{2}dz=\frac{1}{2}\left(\frac{z^2}{2}+2z\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+2-\frac{1}{2}+2\right)=2$$

Iste trajektorije se dobijaju u situacijama:

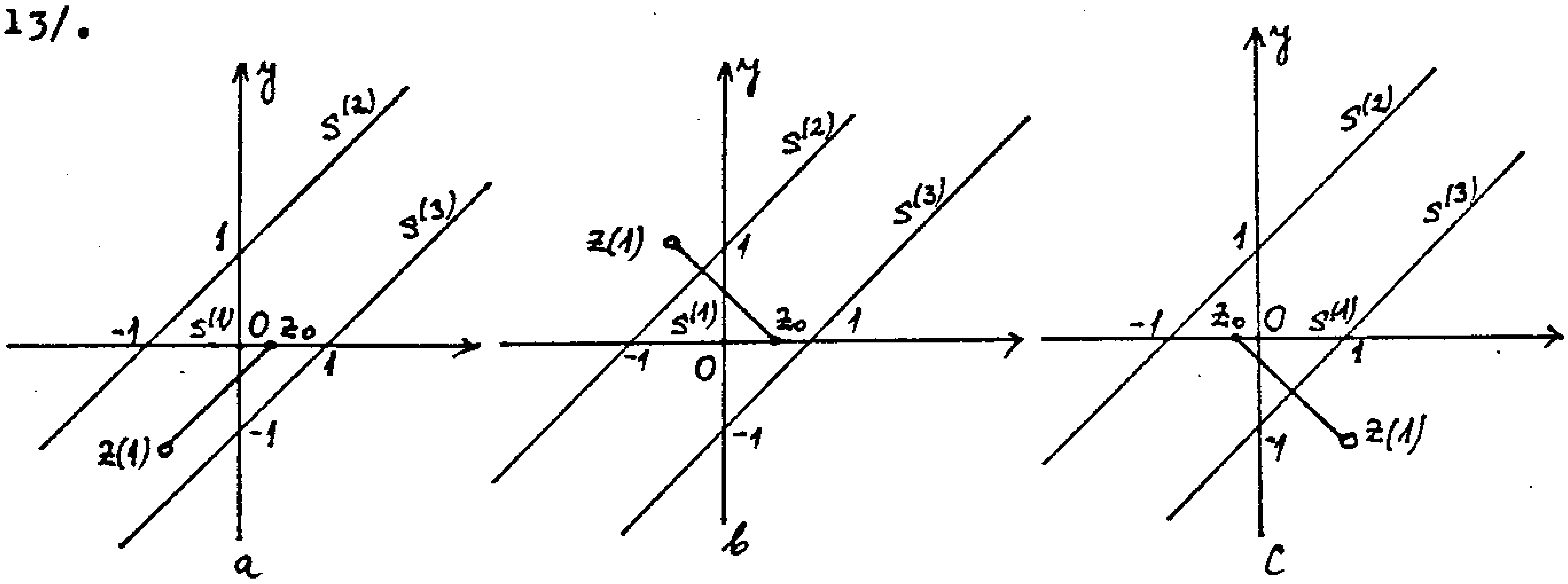
$(v_1(\cdot),\ v_2(\cdot)),\ (v_1(\cdot),\ u_3(\cdot)),\ (v_1(\cdot),\ u_4(\cdot));\ (v_2(\cdot),\ u_1(\cdot)),\ (v_2(\cdot),\ u_2(\cdot)),\ (v_2(\cdot),u_3(\cdot)),$

$(v_2(\cdot),\ u_4(\cdot));\ v_3(\cdot),\ u_1(\cdot)),\ (v_3(\cdot),\ u_2(\cdot)),\ (v_3(\cdot),\ u_3(\cdot)),\ (v_3(\cdot),\ u_4(\cdot);$

$(v_4(\cdot),\ u_1(\cdot)),\ (v_4(\cdot),\ u_2(\cdot)),\ (v_4(\cdot),\ u_3(\cdot)),\ v_4(\cdot),\ u_4(\cdot)).$

Zato je dobitak u ovim situacijama jednak 2.

Na osnovu simetrije rasudjivanja i proračuni su analogni u tim slučajevima kada se realizuju trajektorije sledećih tipova/ slika 13/.



slika 13

Slika 13a odgovara situacijama:

$(v_5(\cdot),\ u_5(\cdot),\ (v_5(\cdot),\ u_6(\cdot)),\ (v_5(\cdot),\ u_7(\cdot)),\ v_5(\cdot),\ u_8(\cdot));$

$(v_6(\cdot),\ u_5(\cdot)),(v_6(\cdot),u_6(\cdot)),(v_6(\cdot),u_7(\cdot)),(v_6(\cdot),u_8(\cdot));(v_7(\cdot),u_5(\cdot)),(v_7(\cdot),\ u_6(\cdot)),$

$(v_7(\cdot),u_7(\cdot)),(v_7(\cdot),u_8(\cdot));(v_8(\cdot),u_5(\cdot)),(v_8(\cdot),u_6(\cdot)),(v_8(\cdot),u_7(\cdot)),(v_8(\cdot),u_8(\cdot))$

Srednji dobitak u ovim situacijama je 2.

Slika 13b odgovara situacijama:

$$(v_6(\cdot), u_1(\cdot)), (v_6(\cdot), u_2(\cdot)); (v_8(\cdot), u_1(\cdot)), (v_8(\cdot), u_2(\cdot))$$

Srednji dobitak u ovim situacijama je takodje 2.
Slika 13c odgovara situacijama:

$$(v_1(\cdot), u_7(\cdot)), (v_1(\cdot), u_8(\cdot)); (v_3(\cdot), u_7(\cdot)), (v_3(\cdot), u_8(\cdot))$$

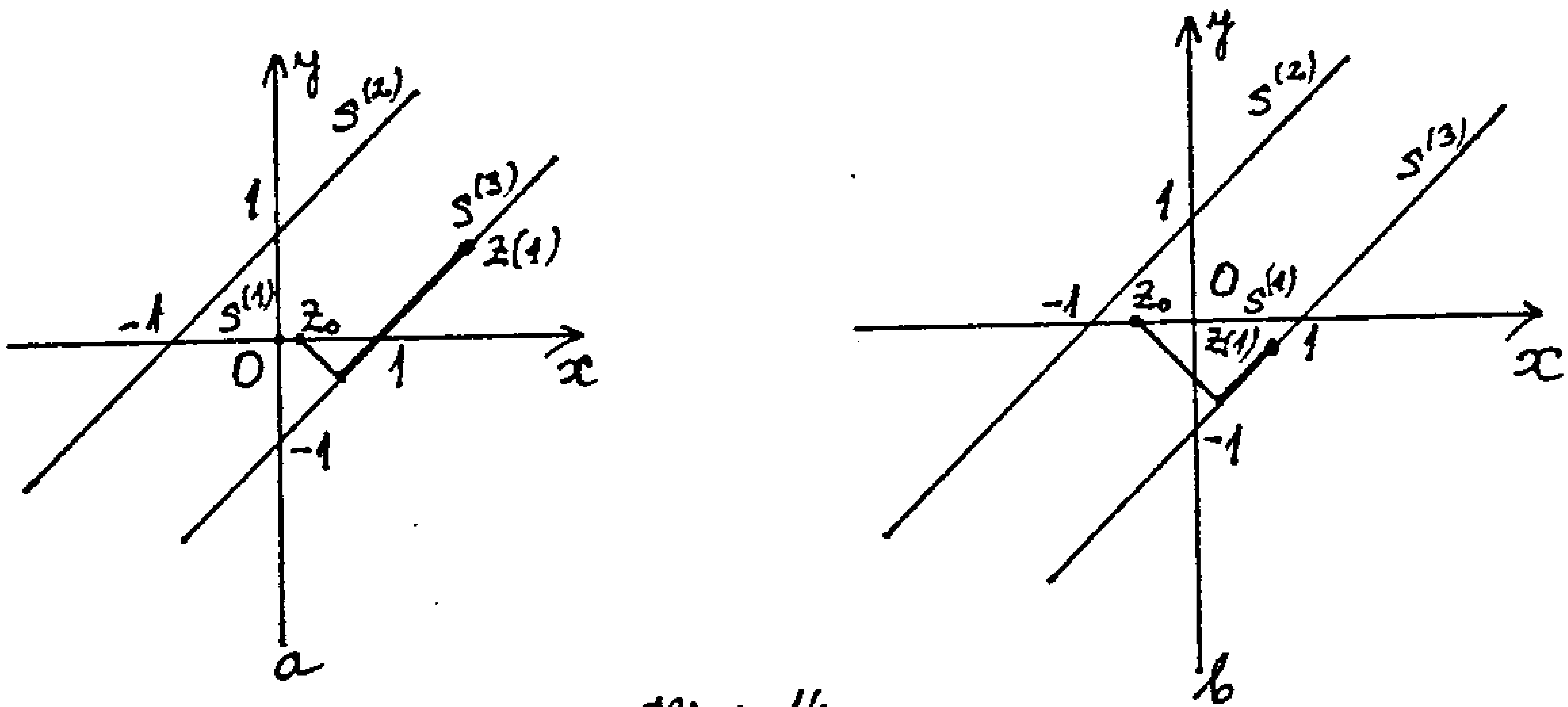
Srednji dobitak u ovim situacijama je takodje 2.

Razmotrimo situaciju:

$$v_1(\cdot) = (1\ 1\ 1), \quad u_5 = (-1\ 1\ 1)$$

Ako je početno stanje $z_0 \in [0,1]$, tada koordinate kraja trajektorije su /slika 14a/:

$$x(1) = z_0 + 1; \; y(1) = x(1) - 1 = z_0,$$



Slika 14

a za $z_0 \in [-1, 0]$ /slika 14b/ je:

$$x(1) = z_0 + 1; \; y(1) = z_0,$$

pa sledi:

$$\mathcal{K}(z_0, T) = |x(1)| + |y(1)| = \begin{cases} 2z_0 + 1, & \text{za } z_0 \in [0,1], \\ 1, & \text{za } z_0 \in [-1, 0]. \end{cases}$$

Srednji dobitak igrača B po početnim stanjima je:

$$M(v_1(\cdot), u_5(\cdot)) = \frac{1}{2}\Big[\int_{-1}^{1} \mathcal{K}(z, T)\, dz\Big] = \frac{1}{2}\Big[\int_{-1}^{0} dz + \int_{0}^{1} (2z+1)\, dz\Big] =$$

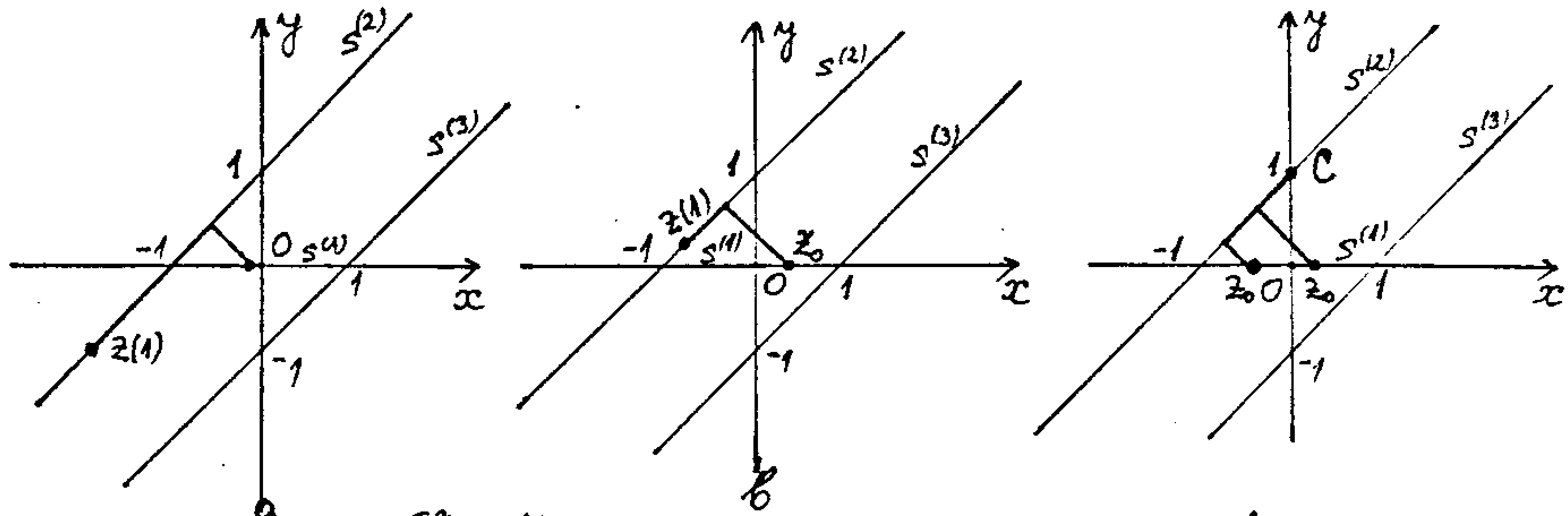
$$= \frac{1}{2}\Big[z\Big|_{-1}^{0} + (2z+1)\Big|_{0}^{1}\Big] = \frac{1}{2}[1 + 2 + 1 - 1] = 1{,}5.$$

Iste trajektorije se dobijaju i u situacijama:

$$(v_1(\cdot), u_6(\cdot)),\ (v_3(\cdot), u_5(\cdot)),\ (v_3(\cdot), u_6(\cdot)),$$

zato je dobitak u ovim situacijama jednak 1,5.

Na osnovu simetrije rasudjivanja i proračuni su analogni u slučaju kada se realizuju trajektorije sledećih tipova /slika 15/:



Slika 15

Slika 16

Slika 15a odgovara situacijama:

$$(v_6(\cdot), u_3(\cdot)),\ (v_6(\cdot), u_4(\cdot)),\ (v_8(\cdot), u_3(\cdot)),\ (v_8(\cdot), u_4(\cdot))$$

za $z_0 \in [-1,0]$, a slika 15b odgovara istim situacijama za $z_0 \in [0,1]$. Funkcija dobitka u ovim situacijama je 1,5 , tj.

$$\mu(v_6(\cdot), u_3(\cdot)) = \mu(v_6(\cdot), u_4(\cdot)) = \mu(v_8(\cdot), u_3(\cdot)) = \mu(v_8(\cdot), u_4(\cdot)) = 1,5.$$

Razmotrimo situaciju: $v_5(\cdot) = (-111)$, $u_1(\cdot) = (111)$. Za svako $z_0 \in [-1,+1]$ krajevi trajektorija dospevaju u tačku C/slika 16/, pa je:

$$x(1) = 0;\quad y(1) = 1,\quad x(z_0 T) = 1$$

Srednji dobitak igrača B je:

$$\mu(v_5(\cdot), u_1(\cdot)) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dz = 1$$

Iste trajektorije se dobijaju u situacijama:

$$(v_5(\cdot), u_2(\cdot)),\ (v_7(\cdot), u_1(\cdot)),\ (v_7(\cdot), u_2(\cdot)).$$

Zato je i dobitak u navedenim situacijama 1.

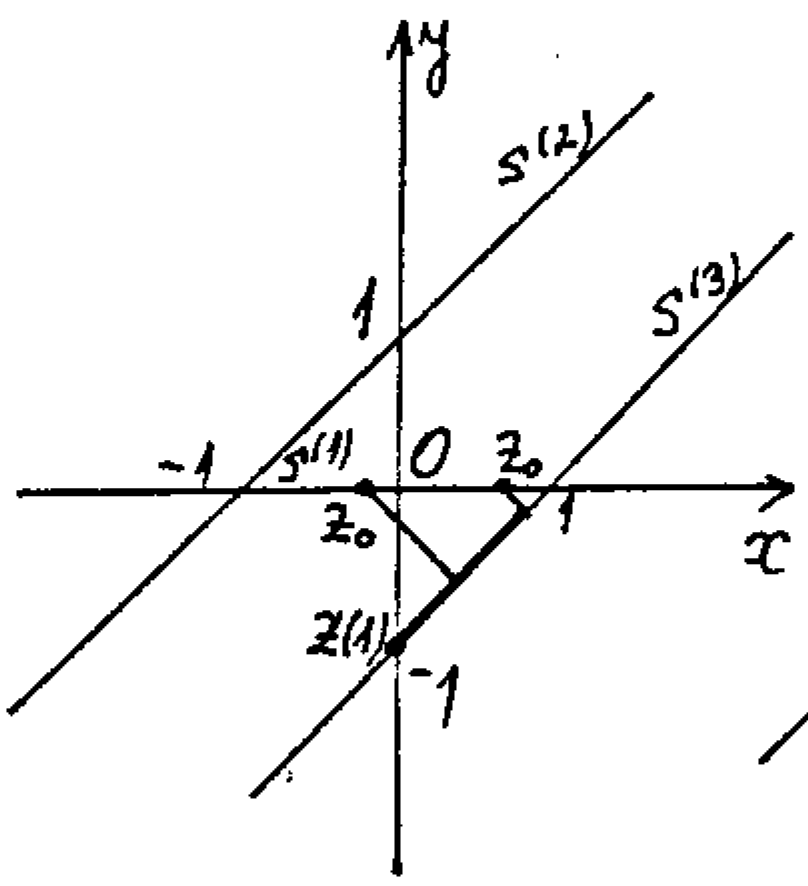
Na osnovu simetrije rasudjivanja i proračuni su analogni u slučaju kada se realizuju trajektorije sledećih tipova/slika 17/:

Slika 17 odgovara situacijama:

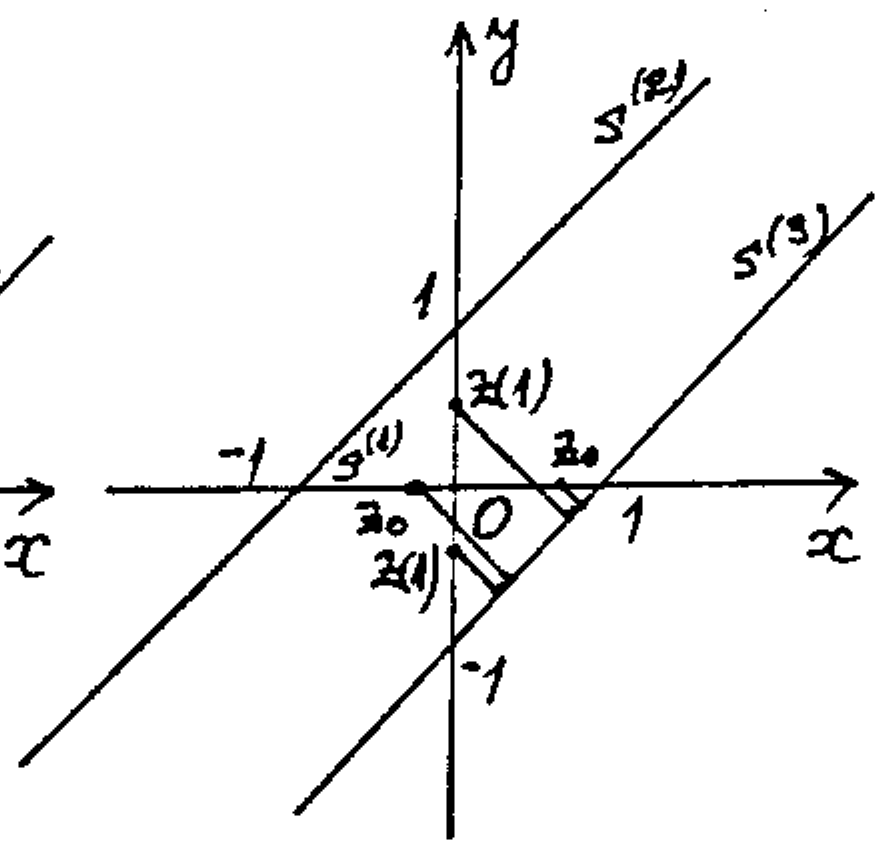
$$(v_2(\cdot), u_7(\cdot)),\ (v_2(\cdot), u_8(\cdot)),\ (v_4(\cdot), u_7(\cdot)),\ (v_4(\cdot), u_8(\cdot)).$$

Sledi da je:

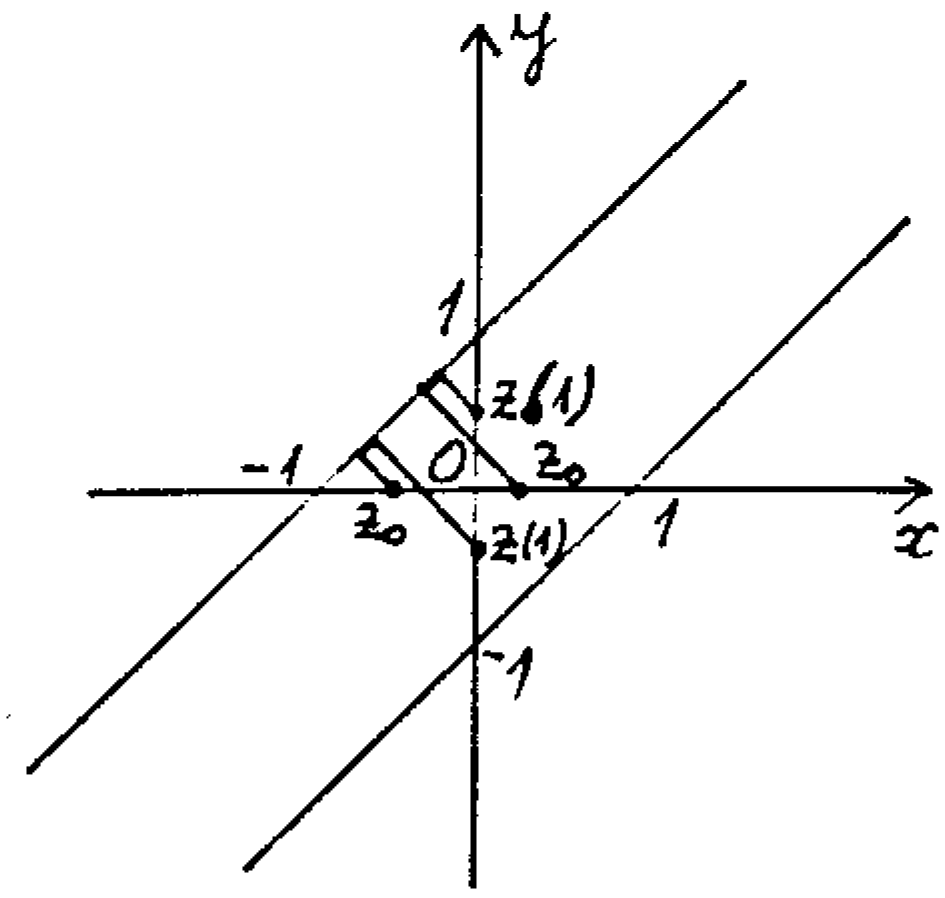
$$\mu(v_2(\cdot),u_7(\cdot)) = \mu(v_2(\cdot),u_8(\cdot)) = \mu(v_4(\cdot),u_7(\cdot)) = \mu(v_4(\cdot),u_8(\cdot)) = 1$$



Slika 17



Slika 18



Slika 19

Razmotrimo situaciju:

$$v_2(\cdot)=(11-1),\ u_5(\cdot)=(-111)$$

za svako $z_0 \in [-1,1]$ .Kraj ove trajektorije dospeva na osu OY/slika 18/.Sledi:

$$y_1 = z_0$$

za $z_0 \in [-1,1]$ i imamo:

$$K(z_0 T) = \begin{cases} z_0, & ako\ z_0 \in [0,1], \\ -z_0, & ako\ z_0 \in [-1,0]. \end{cases}$$

Srednji dobitak igrača B po početnim stanjima je:

$$\mu(v_2(\cdot),u_5(\cdot)) = \frac{1}{2}\left[-\int_{-1}^{0} z\,dz + \int_{0}^{1} z\,dz\right] = \frac{1}{2}\left[-\frac{z^2}{2}\Big|_{-1}^{0} + \frac{z^2}{2}\Big|_{0}^{1}\right] = 0,5.$$

Iste trajektorije se dobijaju u situacijama:

$$(v_2(\cdot),u_6(\cdot)),\ (v_4(\cdot),u_5(\cdot)),\ (v_4(\cdot),u_6(\cdot)),$$

zato dobitak u ovim situacijama jednak je 0,5.

Na osnovu simetrije rasudjivanja i proračuni su analogni u slučaju kada se realizuju trajektorije sledećih tipova/slika 19/.

Slika 19 odgovara situacijama:

$$(v_5(\cdot),u_3(\cdot)),(v_5(\cdot),u_4(\cdot)),(v_7(\cdot),u_3(\cdot)),(v_7(\cdot),u_4(\cdot)).$$

Sledi da je:

$$\mu(v_5(\cdot),u_3(\cdot)) = \mu(v_5(\cdot),u_4(\cdot)) = \mu(v_7(\cdot),u_3(\cdot)) =$$

$$= \mu(v_7(\cdot),u_4(\cdot)) = 0,5.$$

Odredili smo vrednosti funkcije dobitka u svim situacijama i sada možemo napisati konačni oblik matrice dobitka:

	$u_1(\cdot)$	$u_2(\cdot)$	$u_3(\cdot)$	$u_4(\cdot)$	$u_5(\cdot)$	$u_6(\cdot)$	$u_7(\cdot)$	$u_8(\cdot)$
$v_1(\cdot)$	2	2	2	2	1,5	1,5	2	2
$v_2(\cdot)$	2	2	2	2	0,5	0,5	1	1
$v_3(\cdot)$	2	2	2	2	1,5	1,5	2	2
$v_4(\cdot)$	2	2	2	2	0,5	0,5	1	1
$v_5(\cdot)$	1	1	0,5	0,5	2	2	2	2
$v_6(\cdot)$	2	2	1,5	1,5	2	2	2	2
$v_7(\cdot)$	1	1	0,5	0,5	2	2	2	2
$v_8(\cdot)$	2	2	1,5	1,5	2	2	2	2

Navedenu matricu možemo redukovati tako što ćemo uzeti strategije $v_1(\cdot), v_6(\cdot)$ za igrača B i $u_3(\cdot), u_5(\cdot)$ za igrača G.

Razmatranje odgovarajuće 2x2 matrice:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1{,}5 \\ 1{,}5 & 2 \end{pmatrix}$$

pokazuje da navedene strategije treba da se biraju sa jednakim verovatnoćama.

Konačno optimalne mešovite strategije igrača G i B su oblika:

Igrač G: $/\ 0\ 0\ \frac{1}{2}\ 0\ \frac{1}{2}\ 0\ 0\ 0\ /$

Igrač B $/\ \frac{1}{2}\ 0\ 0\ 0\ 0\ \frac{1}{2}\ 0\ 0\ /.$

§4. Igre sa mešovitim informacionim stanjem

Pregled sadržaja ovog paragrafa iznet je na strani 9 uvoda.

Neka su jednačine kretanja oblika:

$$\dot{x} = f(x, u, v), \qquad \ldots\ldots\ (3.4.1)$$

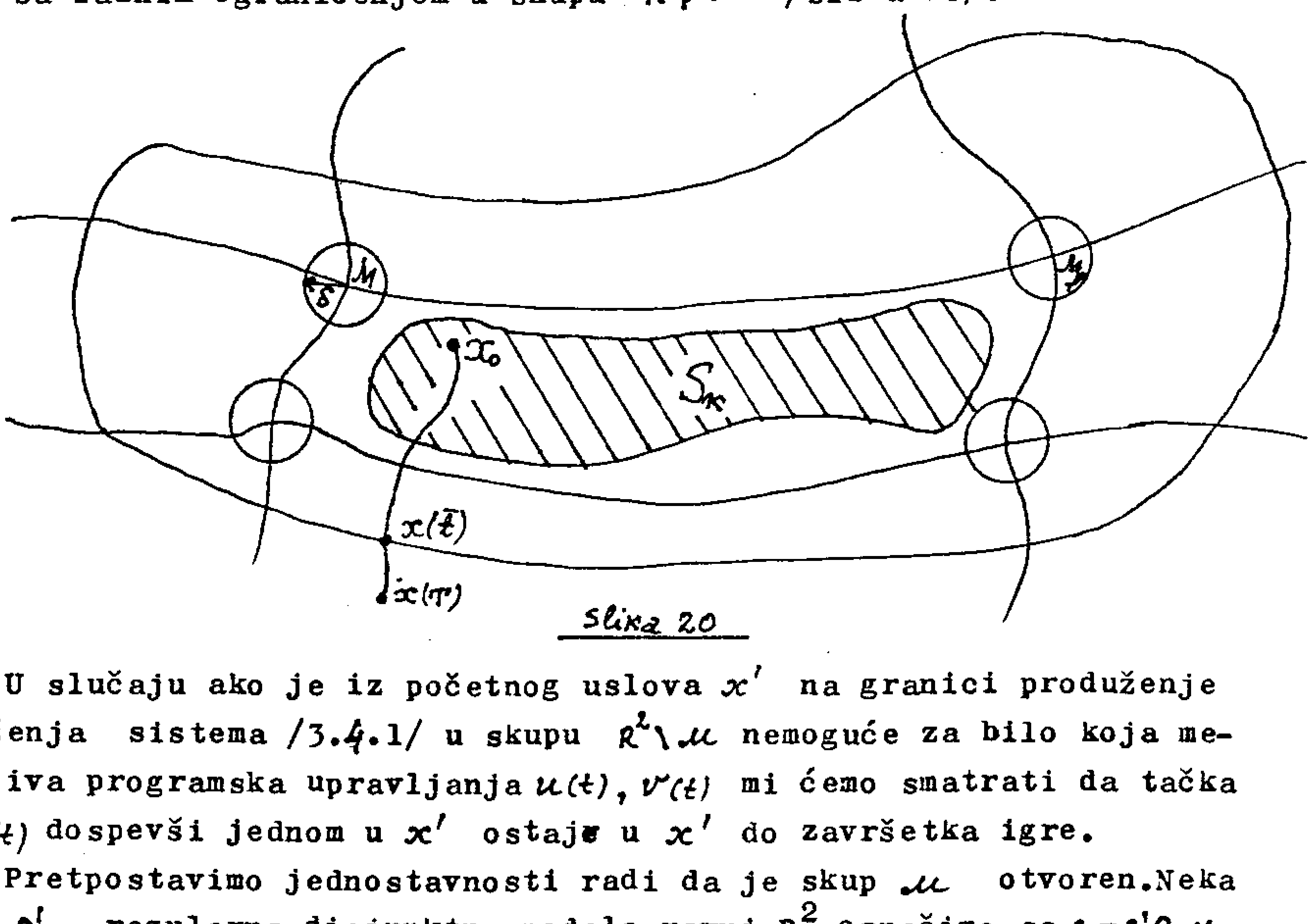
gde su $x \in R^2$, $u \in \mathcal{U} \subset R^2$, $v \in V \subset R^2$ / $\mathcal{U}$ i V su kompaktni skupovi/ za početni uslov $x(0) = 0$.

Kao i obično pretpostavljamo da sistem /3.4.1/zadovoljava sve uslove, koji garantuju egzistenciju, jedinstvenost i produživost na odsečak $[0,T]$ rešenja za sva merljiva programska upravljanja

$u(t), v(t), 0 \leq t \leq T$. Igra ima odredjenu dužinu T. Dobitak igrača B odredjuje se preko $H(x(T))$ gde je $H(x)$ neka data funkcija /G dobija $-H(x(T))$/.

U R^2 je dat jednovezni skup $\mathcal{M}$, unutar kojeg igrači dobijaju diskretnu informaciju. Početno stanje x_0 pripada $\mathcal{M}$. Čim tačka $x(t)$ dospe na granicu $\mathcal{M}$ igra teče dalje sa potpunom informacijom /tj. igračima se saopštava stanje sistema x u svakom tekućem momentu vremena/.

Po uslovima igre ako tačka dospe na granicu $\mathcal{M}$ više ne može da se vrati u $\mathcal{M}$, tj. počev od prvog prispeća na granicu $\mathcal{M}$ igra je sa faznim ograničenjem u skupu $\overline{R^2 \setminus \mathcal{M}}$ /slika 20/.



slika 20

U slučaju ako je iz početnog uslova x' na granici produženje rešenja sistema /3.4.1/ u skupu $R^2 \setminus \mathcal{M}$ nemoguće za bilo koja merljiva programska upravljanja $u(t)$, $v(t)$ mi ćemo smatrati da tačka $x(t)$ dospevši jednom u x' ostaje u x' do završetka igre.

Pretpostavimo jednostavnosti radi da je skup $\mathcal{M}$ otvoren. Neka je S' regularna disjunktna podela ravni R^2. Označimo sa $S = S' \cap \mathcal{M}$ disjunktnu podelu disjunktne podele S' . S je disjunktna podela skupa $\mathcal{M}$ skupovima $S'_k \cap \mathcal{M} (S'_k \in S')$.

Analognim načinom odredimo regularne odsečke granice S_{ij} kao preseke $S_{ij} = S'_{ij} \cap \mathcal{M}$ regularnih odsečaka granica disjunktne podele S' sa skupom $\mathcal{M}$.

Neka su dalje $\mathcal{M}_\ell, \ell = 1, \ldots, s$ granične tačke drugog reda disjunktne podele S' koje ulaze u skup $\mathcal{M}$.

Strategija igrača G/B/ $u(\cdot)$ $(v(\cdot))$ sastoji se iz para $u(\cdot) = \{u_1(\cdot), u_2(\cdot)\}$ $(v(\cdot) = \{v_1(\cdot), v_2(\cdot)\})$, gde je $u_1(\cdot)$ $(v_1(\cdot))$ strategija oblika /3.2.3/ //3.2.4// definisana na informacionim skupovima disjunktne podele S podele S'

i $u_2(\cdot)(v_2(\cdot))$ je deo po deo programska strategija u igri sa potpunom informacijom sa faznim ograničenjem u skupu $R^2\setminus\mathcal{M}$.

Označimo sa $\mathcal{G}$ i $\mathcal{B}$ skupove svih mogućih strategija $u(\cdot), v(\cdot)$ igrača G i B.

Naša definicija strategije odražava tu činjenicu, da na prvoj etapi igre /u $\mathcal{M}$ / igrač dejstvuje u saglasnosti sa diskretnom informacijom odredjenom disjunktnom podelom S (pri tome se za formiranje upravljanja koriste funkcije $u_1(\cdot), v_1(\cdot)$), a dalje posle izlaska iz $\mathcal{M}$ igrači igraju sa potpunom informacijom /pri tome se koriste druge komponente strategije $u_2(\cdot), v_2(\cdot)$ /.

Igra teče na sledeći način. Neka je S'_{K_0} element disjunktne podele S' koja ima neprazan presek sa $\mathcal{M}$. U početnom momentu vremena slučaj bira tačku $x_0 \in S_{K_0} = S'_{K_0} \cap \mathcal{M}$ u saglasnosti sa datom ravnomernom raspodelom F/x/. Neka su igrači izabrali strategije:

$$u(\cdot)=\{u_1(\cdot),u_2(\cdot)\}\in\mathcal{G} \quad i \quad v(\cdot)=\{v_1(\cdot),v_2(\cdot)\}\in\mathcal{B}$$

U situaciji $(u(\cdot), v(\cdot))$ kretanje tačke x vrši se na sledeći način. Kretanje tačke x iz stanja $x_0 \in S_{K_0}$, koje je realizovano kao rezultat slučajnog izbora, vrši se samo pod uticajem komponenata $u_1(\cdot)$, $v_1(\cdot)$ strategija $u(\cdot), v(\cdot)$. Trajektorija $x(t)$ na ovoj etapi gradi se isto kao u paragrafu 3 glave III. Neka je $\bar{t}$ prvi moment dospevanja $x(t)$ u skup $R^2\setminus\mathcal{M}$.

Počev od stanja $x(\bar{t})$ $(\bar{t}<T)$ kretanje tačke se odredjuje komponentama $u_2(\cdot), v_2(\cdot)$ strategija $u(\cdot), v(\cdot)$. Ako je $\bar{t}\geq T$ tada se igra prekida u $\mathcal{M}$ i trajektorija $x(t)$ se gradi kao u paragrafu 2 glave III.

Odavde sledi da svakom realizovanom početnom stanju u situaciji $(u(\cdot), v(\cdot))$ odgovara jedinstvena trajektorija $x(t)$, a to znači jedinstven dobitak:

$$\mathcal{K}(x_0 u(\cdot), v(\cdot)) = H(x(T)), \qquad (3.4.2)$$

gde je $x(t)$ trajektorija kretanja iz početnog stanja x_0 u situaciji $(u(\cdot), v(\cdot))$. Pošto je realizovano početno stanje x_0 nepoznato igračima i slučajna je veličina sa raspodelom F/x/ na skupu $S_{K_0} = S'_{K_0} \cap \mathcal{M}$, tada igrač B u situaciji $(u(\cdot), v(\cdot))$ može da računa samo na srednji dobitak:

$$\mathcal{M}(u(\cdot), v(\cdot)) = \int_{S_{K_0}} \mathcal{K}(x, u(\cdot), v(\cdot))\, dF(x), \qquad (3.4.3)$$

gde se veličina $\mathcal{K}(x, u(\cdot), v(\cdot))$ odredjuje po formuli /3.4.2/. Na taj način mi smo doveli razmatranu igru na normalni oblik:

$$\Gamma = \langle \mathcal{G}, \mathcal{B}, \mathcal{M}(u(\cdot), v(\cdot)) \rangle, \quad \ldots \ldots \quad (3.4.3)$$

gde su $\mathcal{G}$ i $\mathcal{B}$ skupovi strategija igrača G i B, a $\mathcal{M}(u(\cdot), v(\cdot))$ je realna funkcija /3.4.3/definisana na Dekartovom proizvodu $\mathcal{G}\times\mathcal{B}$ i koja pretstavlja funkciju dobitka igrača B.

Označimo sa $V(x,T)$ funkciju vrednosti diferencijalne igre u skupu $\overline{R^2\setminus\mathcal{M}}$ iz početnog stanja x_0 i dužine T. Za odredjivanje rešenja igre Γ odredićemo pomoćnu igru Γ'.

Igra Γ' razlikuje se od igre Γ odredjivanjem funkcije dobitka. Neka je $(u(\cdot), v(\cdot))$ situacija u Γ, $x_0 \in S_{K_0}$ rezultat slučajnog izbora i $x(t)$ trajektorija u situaciji $(u(\cdot), v(\cdot))$ iz početnog stanja $x_0 \in S_{K_0}$.

Označimo sa $\bar{t}$ prvi moment dospevanja trajektorije $x(t)$ u skup $R^2\setminus\mathcal{M}$, tj.

$$\bar{t} = \inf\{t : x(\bar{t}) \in \mathcal{M}\} \quad \ldots \ldots \quad (3.4.5)$$

Ako se infimum u /3.4.5/ne dostiže tada stavljamo $\bar{t}=\infty$.
Odredimo u igri Γ' funkciju dobitka na sledeći način:

$$\mathcal{K}'(x_0, u_1(\cdot), v_1(\cdot)) = \begin{cases} V(x(\bar{t}), T-\bar{t}), & \text{ako je } 0 \leq \bar{t} \leq T \\ H(x(T)) & \text{u suprotnom slučaju.} \end{cases}$$

Primetimo da po definiciji vrednost igre je:

$$V(x,T), V(x,0) = H(x).$$

Neka je dalje:

$$\mathcal{M}'(u_1(\cdot), v_1(\cdot)) = \int_{S_{K_0}} \mathcal{K}'(x, u_1(\cdot), v_1(\cdot))\, dF(x).$$

Strategije u igri Γ' su u suštini prve komponente strategija

$$u(\cdot) = (u_1(\cdot), u_2(\cdot)),\ v(\cdot) = (v_1(\cdot), v_2(\cdot)),$$

koje su odredjene na komponentama disjunktne podele S, tj. $u_1(\cdot)$ i $v_1(\cdot)$, zato do koriščenja deo po deo programskih komponenata $u_2(\cdot)$, $v_2(\cdot)$ ne dolazi /igra se prekida čim tačka x dospe u $\overline{R^2\setminus\mathcal{M}}$ /.

Označimo sa $\mathcal{G}_1$ i $\mathcal{B}_1$ skupove strategija $u_1(\cdot), v_1(\cdot)$ u igri Γ'. Ovi skupovi komponenti su skupovi u Euklidovim prostorima konačnih dimenzija /paragraf 2 glava III/.

ZAKLJUČAK

I/ Sadržina doktorskog rada su naši novi rezultati dobijeni u ku rada na temi i to:

1. Utvrdjena je ravnomerna konvergencija niza približenja ka ıkciji vrednosti igre u odgovarajućim diferencijalnim igrama go- ɜnja u bilo kom ograničenom prostoru stanja igre.

2. Na osnovu predloženih numeričkih metoda dati su načini kon- ·ukcije maksimizirajućih i minimizirajućih strategija igrača, a u ıčaju konačne konvergencije metod optimalnih strategija u razma- ınoj igri.

3. Dobijeni su konstruktivni dokazi postojanja rešenja kako ig- približenja u datom momentu vremena tako i igre hvatanja.

4. Izvedeni su potrebni i dovoljni uslovi da bi neka funkcija .a funkcijom vrednosti igre: a/ u igri približenja u datom momen- vremena i b/ u igri hvatanja.

5. Priložena su tri originalna primera diferencijalnih igara ıjenja sa nepotpunom informacijom.

6. Istražena je klasa diferencijalnih igara gonjenja odredjene ine T izmedju grupe od n gonilaca, koji dejstvuju kao jedan igrač, ı begunaca. Situacija ravnoteže se shvata kao situacija ravnoteže Nešu [22] u klasi mešovitih deo po deo programskih strategija .ašanja.

7. Prikazane su jednovremene igre gonjenja kada grupa gonilaca ıegunci jednovremeno biraju sistem tačaka iz kompaktnog skupa $S \in R^k$ kcija dobitka je funkcional rastojanja medju tačkama koje su .brali gonioci i begunci.

8. Data je igra gonjenja sa nepotpunom informacijom, koja pret- .vlja neposredno uopštenje igre gonjenja "Princeza i čudovište" u je prvi postavio R. Ajzeks [1] .

9. Razmotrene su igre sa disjunktnom informacionom podelom i ·e sa mešovitim informacionim stanjem.

II/ Navodimo neka moguća uopštenja postignutih rezultata u radu:

1. Predloženi u radu numerički metodi približavanja funkciji dnosti igre i dati na njihovoj osnovi metodi konstrukcije mak- izirajućih i minimizirajućih nizova strategija, koji dovode do imalnih strategija, uzimajući u obzir sadašnji nivo razvitka teo- e diferencijalnih igara, mogu se koristiti za opštije diferenci- ne igre od kojih smo razmotrili u radu. Pri tome je moguće pre-

ti na odgovarajuće igre i metode identifikacije vrednosti igre osnovi kojih leže funkcionalne jednačine.

2. Moguće je raširiti rezultate ovog rada i na diferencijalne re sa drugim funkcionalom kvaliteta.Ovo se postiže odgovarajućim redjivanjem operatora.

3. Moguća su uopštenja rezultata ovog rada i njihovo rasprostiaje na diferencijalne igre sa faznim ograničenjem.

4. Rezultati izneti u glavi I ovog rada mogu se uopštiti na neke diferencijalne igre sa nepotpunom informacijom o tekućem stau igre.

L I T E R A T U R A

[1] Ajzeks R.Diferencialjnie igri,izd-vo "Mir",Moskva,1967.

[2] Berž K. Obščaja teorija igr neskoljkih lic,Moskva,1961.

[3] Beskonečnie antagonističeskie igri,Sbornik pod red.N.N.Vorobjova,I.N.Rublevskoj,Moskva,"Nauka",1967.

[4] Blekuel D.,Giršik M.Teorija igr i statističeskih rešenij,Moskva,Inostranaja literatura,1958.

[5] Vilenkin N.J. i dr.Funkcionalnij analiz,/serija"spravočnaja matematičeskaja biblioteka"/,Moskva,"Nauka",1964.

[6] Vorobjov N.N.Teorija igr,Lekcii dlja ekonomistov kibernetikov,Leningrad,1974.

[7] Isbel D.Finitarnie igri,V knige "Pozicionie igri",Moskva,"Nauka ",1967.

[8] Iosoda K.Funkcionaljnij annaliz,"Mir",Moskva,1967.

[9] Istratesku B.Intraduktore in theory punktelore fikse,Bukurešti,1973.

[10] Jovanikić B. Diferencijalne igre gonjenja,magistarski rad,Prirodno-matematički fakultet,Beograd,1978.

[11] Jovanikić B.Matematičko modeliranje konfliktne situacije i njegova primena u eksploataciji ležišta mineralnih sirovina,Zbornik radova,Tehnički fakultet-Institut za bakar ,Bor,1979.

[12] Jovanikić B.Primena teorije igara u klasičnoj mehanici,Zbornik radova,Tehnički fakultet-Institut za bakar,Bor,1980/81.

[13] Karlin S.Matematičeskie metodi v teorii igr,programirovanii i ekonomike,Moskva,"Mir",1964.

[14] Klaus T."Wörterbuch der Kibernetik",Dietz,Verlag,Berlin,1967.

[15] Krasovskij N.N.Igrovie zadači o vstreče dviženij,Moskva,"Nauka",1970.

[16] Krasovskij N.N.,Subotin A.I.Pozicionnie diferencialjnie igri,Moskva,"Nauka",1974.

[17] Kruševskij A.V.Teorija igr,"Višča škola",Kiev,1977.

[18] Kuratovskij K.Topologija,"Mir",Moskva,1966.

[19] Kurepa DJ.Viša algebra,Školska knjiga,Zagreb,1965.

[20] LJus R.D.,Rajfa H.Igri i rešenija,Fizmatgiz,Moskva,1960.

[21] Mak-Kinsi D.Vvedenie v teoriju igr,Fizmatgiz,Moskva,1961.

[22] Nach J.F.Non kooperative games,"Ann math.",1951.,vol.54,N 2.

[23] Nejman D.,Morgenštern O.Teorija igr i ekonomičeskoe povedenie,"Nauka",Moskva,1970.

[24] Petrić J.Operaciona istraživanja,knjiga II,treće izdanje,"sa-

vremena administracija",Beograd,1974.

[25] Petrosjan L.A.Invarijantnij centr presledovanija v odnoj klasse nelinejnih differencialjnih igr,"Izd-vo A.N.Arm.SSR",1968, T.3,N°5.

[26] Pozicionnie igri,Pod red.N.N.Vorobjova,I.N.Rublevskoj,"Nauka", Moskva,1967.

[27] Pontrjagin L.S.,Miščenko E.F.Zadača ob ukloneniii ot vsreči v linejnih differencijalnih igrah,"Differencialjnie urovnenija", Moskva,1971,T.7,N°3.

[28] Primenenie teorii igr v voennom dele,Sbornik pod red.B.O.Aškenazi,Moskva,Sovetskoe radio,1961.

[29] Pšeničnij B.N.Struktura differencialjnih igr,V knjige:Teorija optimaljnih rešenij,Trudi seminara,Br.1,Kiev,1968.

[30] Satimov N.J.Zadača ob uklonenii ot vstreči v differencialjnih igrah s nelinejnimi upravljenijami,"Differencialjnie urovnenija",1973,T.9,N° 10.

[31] Tasković M.Banahova preslikavanja na prostorima i uredjenim skupovima,Theze,Beograd,1978.

SADRŽAJ

Uvod 1

Skraćenice 9a

Oznake 9a

Glava I. Numerički metodi rešavanja diferencijanih igara gonjenja ograničene dužine 10

§1. Diferencijalna igra gonjenja ograničene dužine 10

§2. Prvi numerički metod približavanja funkciji vrednosti igre približenja u odredjenom momentu vremena/knostrukcija maksimizirajućeg niza strategija begunca/ 20

§3. Drugi numerički metod približenja funkciji vrednosti igre približenja u odredjenom momentu vremena/konstrukcija minimizirajućeg niza strategija gonioca/ 36

§4. Primeri diferencijalnih igara približenja u datom momentu vremena 38

§5. Prvi numerički metod približenja funkciji vrednosti igre gonjenja do hvatanja /knstrukcija maksimizirajućeg niza strategija begunca/ 43

§6. Drugi numerički metod približenja funkciji vrednosti igre gonjenja do hvatanja /konstrukcija minimizirajućeg niza strategija gonioca/ 47

Neke diferencijalne igre sa nepotpunom informacijom 61

Glava II. Diferencijalne igre u kojima se informacija dobija sa odredjenim zakašnjenjem 61

§1. Antagonističke diferencijalne igre gonjenja sa više učesnika u kojima se informacija dobija sa odredjenim zakašnjenjem 61

§2. Funkcionalne jednačine za diskretnu igru gonjenja u kojoj se informacija dobija sa odredjenim zakašnjenjem 74

§3. Beskoalicione diferencijalne igre gonjenja u kojima se informacija dobija sa odredjenim zakašnjenjem 81

§4. Jednovremene antagonističke igre gonjenja sa konveksnom funkcijom dobitka 90

Glava III. Diferencijalne igre sa diskretnom informacijom 96

§1. Diferencijalna igra na konveksnom mnogouglu 96

§2. Diferencijalne igre sa diskretnom disjunktnom informacionom podelom 103

§3. Primer diferencijalnih igara odredjene dužine sa diskretnom informacionom disjunktnom podelom 111

§4.Igre sa mešovitim informacionim stanjem 116
Zaključak 120
Literatura 122