U N I V E R Z I T E T   U   B E O G R A D U

P R I R O D N O - M A T E M A T I Č K I   F A K U L T E T

ANTE R. VUČEMILOVIĆ

NEKE KLASE NUL-DIMENZIONIH PROSTORA

(DOKTORSKA DISERTACIJA)

BEOGRAD, 1979.

SADRŽAJ

PREDGOVOR.. 1

TUMAČ SIMBOLA.. 7

GLAVA 1. OSNOVNA SVOJSTVA NUL-DIMENZIONIH PROSTORA... 9

1.1. Mala induktivna dimenzija - ind............ 9

1.2. Velika induktivna dimenzija - Ind.......... 15

1.3. Dimenzija definisana pomoću pokrivača- dim.. 16

1.4. Klasa separabilnih metričkih nul-dimenzionih prostora....................... 19

GLAVA 2. NEKE PODKLASE KLASE KOMPAKTNIH METRIČKIH NUL-DIMENZIONIH PROSTORA..................... 27

2.1. Dekompozicije prostora klase $\mathcal{Z}$ 27

2.2. Topološka karakterizacija prostora pomoću akumulacionog spektra................. 31

2.2.1. Podklase $\mathcal{Z}_1$, $\mathcal{Z}_2$, $\mathcal{Z}_3$, $\mathcal{Z}_4$, $\mathcal{Z}_5$, $\mathcal{Z}_6$ klase $\mathcal{Z}$ .. 31

2.2.2. Homogenost u odnosu na tačke istog reda..... 39

2.3. Konstrukcije prostora podklasa $\mathcal{Z}_i$, $i \in \{1,\dots,6\}$ 42

2.4. Još o karakterizaciji prostora pomoću akumulacionog spektra...................... 49

GLAVA 3. NEKE PODKLASE KLASE PREBROJIVIH METRIČKIH PROSTORA......................... 53

3.1. Dekompozicije prostora i razvrstavanje tačaka......................... 53

3.2. Topološka karakterizacija prostora pomoću akumulacionog spektra............... 56

3.2.1. Podklase $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$, $\mathcal{P}_4$ klase $\mathcal{P}$ 56

3.2.2. Homogenost u odnosu na tačke istog reda.... 67

3.3. Konstrukcije prostora podklasa $\mathcal{P}_i$, $i \in \{1,2,3,4\}$ 70

GLAVA 4. O JEDNOJ PODKLASI KLASE $\mathcal{Z}$ -KOMPAKTNIH METRIČKIH NUL-DIMENZIONIH PROSTORA I JEDNAČINI $X \times X \approx X$........................ 75

4.1. Podklasa $\mathcal{Z}_7$ klase $\mathcal{Z}$ 75

4.2. Konstrukcije prostora podklase $\mathcal{Z}_7$ 80

4.3. O prostorima koji su homeomorfni svojim kvadratima........................ 82

4.3.1. O redu tačaka topološkog proizvoda......... 83

LITERATURA...................................... 94

PREDGOVOR

U topologiji i šire, u matematici, nul-dimenzioni prostori imaju značajnu ulogu. U klasi kompaktnih metričkih prostora uz nul-dimenzione prostore, odredjenom pravilnošću, se izdvajaju i Peanovi kontinumi, iako topološki gledano su na dijametralno suprotnoj strani, naime prvi su potpuno ne povezani dok su drugi povezani i lokalno povezani.

Problematike nul-dimenzionih kompaktnih Hausdorffovih prostora i Boolovih algebri su paralelne, što proizlazi iz teoreme Stonea o reprezentaciji: svaka Boolova algebra je izomorfna Boolovoj algebri svih otvoreno-zatvorenih skupova nekog nul-dimenzionog kompaktnog Hausdorffovog prostora. Time je uspostavljen dualan odnos izmedju pojedinih pojmova Boolovih algebri i nul-dimenzionih kompaktnih Hausdorffovih prostora. Na primer, pitanje izomorfizma dveju Boolovih algebri ekvivalentno je pitanju homeomorfizma odgovarajućih kompaktnih nul-dimenzionih Hausdorffovih prostora; činjenici da je Boolova algebra prebrojiva ekvivalentna je činjenica da je odgovarajući kompaktan nul-dimenzioni Hausdorffov prostor metrizabilan; proizvodu odnosno sumi Boolovih algebri dualni su pojmovi topološke sume, odnosno proizvoda kompaktnih nul-dimenzionih Hausdorffovih prostora itd.
Pitanja vezana za kompaktne nul-dimenzione Hausdorffove pro-

store su ekvivalentna odgovarajućim pitanjima Boolovih algebri i obratno. Tako je, na primer, potvrdan odgovor na pitanje da li postoje nehomeomorfni kompaktni metrički nul-dimenzioni prostori čiji su kvadrati homeomorfni značio i potvrdan odgovor na pitanje, da li postoje neizomorfne Boolove algebre X i Y takve da je $X + X = Y + Y$. Pitanje da li postoji prebrojiva Boolova algebra X tako da je $X \neq X \times X$ i $X = X \times X \times X$ iskazano topološki glasi: da li postoji kompaktan metrički nul-dimenzioni prostor X tako da je $X \not\approx X + X$ i $X \approx X + X + X$ (Halmos P.: Lectures on Boolean Algebras).

U ovom radu se proučavaju osobine prostora nekih klasa metričkih nul-dimenzionih prostora. Rad se sastoji od četiri glave.

Prva glava je uvodna i opšteg karaktera. U njoj se daje pregled osnovnih, poznatih, svojstava nul-dimenzionih prostora. Tretirane su tri vrste dimenzija: mala induktivna, velika induktivna dimenzija i dimenzija definisana pomoću pokrivača, Posebno je istaknuta klasa metričkih separabilnih prostora u kojoj sve tri vrste dimenzije koincidiraju. Zbog potpunijeg izlaganja tvrdjenja se dokazuju, a dokazi su često drugačiji od uobičajeno datih; ovo se posebno odnosi na tvrdjenje da su kompaktni, metrički nul-dimenzioni prostori bez izolovanih tačaka medjusobno homeomorfni, kao i tvrdjenje Sierpińskog da su prebrojivi, metrički prostori bez izolovanih tačaka medjusobno homeomorfni. Inače, prvo od ovih tvrdjenja je osnov druge i četvrte glave, a drugo treće glave.

Druga glava je posvećena proučavanju nekih podklasa, klase $\mathcal{Z}$ kompaktnih, metričkih nul-dimenzionih prostora. Razmatranja se zasnivaju na pojmovima reda tačaka i akumulacinog spektra, koji potiču od M. Marjanovića [14]: kompaktnom metričkom nul-dimenzionom prostoru X pridružena je, na jedinstven način, dekompozicija od konačno (odn. beskonačno) medjusobno disjunktnih delova $X_0, X_1, \ldots$, a ovoj konačan (odn. beskonačan) niz u skupu $N \cup \{0, \omega\}$, koji se naziva akumulacioni spektar prostora X. Pomoću ovih pojmova M. Marjanović je uveo podklasu "punih prostora" i pokazao da konačni akumulacioni spektar topološki odredjuje te prostore [14] .

Naša razmatranja imaju cilj dalju razradu problematike kompaktnih, metričkih nul-dimenzionih prostora, zasnovanu na pojmu akumulacionog spektra. Nastojali smo proširiti okvir, posmatranjem drugih podklasa prostora, kojima akumulacioni spektar odredjuje topološku karakterizaciju. Tako smo, pomoću konačnog akumulacionog spektra, uveli podklase $\mathcal{Z}_1$, $\mathcal{Z}_2$, $\mathcal{Z}_4$, $\mathcal{Z}_5$ i dali potrebne i dovoljne uslove koji odredjuju topološku karakterizaciju prostora tih podklasa. Koristeći beskonačan akumulacioni spektar, dobili smo podklase $\mathcal{Z}_3$ i $\mathcal{Z}_6$ i dali potrebne i dovoljne uslove koji topološki odredjuju prostore tih podklasa. Provedene su sve konstrukcije prostora podklasa $\mathcal{Z}_i$, $i \in \{1, \ldots, 6\}$, sa nizom tvrdjenja tipa: za dati akumulacioni spektar i dati prostor $Z \in \mathcal{Z}$ postoji prostor $X \in \mathcal{Z}_i$ takav da je završni komad homeomorfan sa datim Z (tvrdjenja 2.3.8. do 2.3.14.). Prostori podklasa $\mathcal{Z}_i$ odlikuju se pravilnošću svojih delo-

va, tj. imaju osobinu homogenosti u odnosu na tačke istog reda. Ova se problematika tretira u odeljku 2.2.2.
Pošto je akumulacioni spektar topološka invarijanta, prirodno je bilo ispitati, da li su prostori X i Y homeomorfni ako su homeomorfni njihovi odgovarajući delovi, tj. $X_i \approx Y_i$, $\overline{X_i} \approx \overline{Y_i}$ za svako i ? Dobijen je potvrdan odgovor jedino za akumulacione spektre čija je dužina najviše četiri. Ovoj problematici je posvećen odeljak 2.4. Dobijeni rezultat ukazuje da bi dalja istraživanja,u karakterisanju prostora pomoću akumulacionog spektra, trebalo usmeriti u traženju izvesne pravilnosti prostora po njihovim delovima.

U trećoj glavi se proučavaju osobine nekih podklasa klase $\mathcal{P}$ prebrojivih metričkih prostora. Pokazuje se da se pojam akumulacionog spektra može uspešno primeniti i u ovoj klasi. Koristeći se tim pojmom, uvode se podklase $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$, $\mathcal{P}_4$ i daju potrebni i dovoljni uslovi koji topološki odredjuju prostore tih podklasa. Pokazano je da prostori ovih podklasa imaju svojstvo homogenosti u odnosu na tačke istog reda. Navedene su sve potrebne konstrukcije, kojima se dokazuje egzistencija prostora podklasa $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$, $\mathcal{P}_4$. Razmatranja u ovoj glavi teku u priličnoj meri paralelno sa onima iz druge glave; medjutim, dokazi su različiti, jer se ne raspolaže sa osobinom kompaktnosti.

Četvrta glava je posvećena rešenjima jednačine $X \times X \approx X$, u klasi $\mathcal{Z}$ kompaktnih metričkih nul-dimenzionih prostora. Osim trivijalnog rešenja C_0 poznato je da i Cantorov diskontinuum C je, takodjer, rešenje te jednačine. M. Marjanović je u [18] postavio pitanje: da li u klasi $\mathcal{Z}$, osim C_0, C_1,

C_0+C_1, C_2, C_1+C_2, C_3,C_4, C_5, C_7 postoje i druga rešenja jednačine $X \times X \approx X$? Pokazali smo da medju punim prostorima, osim navedenih rešenja, postoji još samo jedno $X = C_{\omega}$ (t.4.3.1.9.). Nadalje, pomoću akumulacionog spektra, izdvojili smo podklase u kojima jednačina $X \times X \approx X$ jedino može imati rešenja (t.4.3.1.10.). Dalje istraživanje ograničili smo na prostore sa akumulacionim spektrom (0,2), pa smo sledeći put Mazurkiewicz-Sierpińskog iz [19], o korišćenju reda izvodnog skupa, konstruisali jednu podklasu- $\mathcal{Z}_7$ (def. 4.1.4.), koja sadrži kompaktne prebrojive metričke prostore, a čiji su prostori topološki odredjeni jedino topološkim tipom nekog svog izvodnog skupa reda $< \omega_1$. Time je dobijena generalizacija tvrdjenja Mazurkiewicz-Sierpińskog iz [19] ,o karakterizaciji kompaktnih prebrojivih metričkih prostora, za širu klasu prostora. Dobili smo rezultat da u podklasi $\mathcal{Z}_7$ postoji $\aleph_1$ rešenja jednačine $X \times X \approx X$ (t. 4.3.1.16.).
Za dobijanje ovog rezultata, bilo je potrebno razmotriti operaciju "množenja reda tačaka" kompaktnih metričkih prebrojivih prostora. Dobijen je rezultat: proizvod redova ξ i η je "prirodna" (Hessenbergova) suma rednih brojeva ξ i η, $\xi \times \eta = \flat(\xi, \eta)$ (t.4.3.1.14.). Time je skup rednih brojeva $< \omega_1$,u odnosu na operaciju "množenje" reda tačaka, postao komutativna semigrupa sa jedinicom, a "prirodnoj" sumi ordinalnih brojeva je dato topološko značenje.

U trećoj i četvrtoj glavi su navedena i neka pitanja, za koja nam se činilo da su od interesa.

Svaka glava se deli na odeljke, a ovi na tačke. U radu se koristi decimalna numeracija, kako za glave i njihove delove, tako i za tvrdjenja i definicije. Svi iskazi su ili tvrdjenja ili definicije, a označeni su sa tri ili četiri cifre, od kojih je prva broj glave, druga broj odeljka, treća broj tačke (odn. iskaza), a četvrta broj po redu tog iskaza. Tako na primer, tvrdjenje 4.3.1.4. označava četvrti po redu iskaz u prvoj tački, trećeg odeljka, četvrte glave. Kao što je uobičajeno, brojevi u uglastim zagradama označavaju redne brojeve iz popisa literature, koja je data na kraju rada. Tumač simbola dat je na početku rada.

Neki rezultati iz druge i četvrte glave su saopšteni na kongresima (videti [24], [25]), a neki iz glave tri su objavljeni u [23].

Želim da se zahvalim prof. dr M. Marjanoviću, naučnom rukovodiocu pri izradi ove teze, koji mi je pomogao usmeravanjem, savetima i sugestijama.

Takodjer, izražavam svoju zahvalnost prof. dr Dj. Kurepi na podršci i korisnim savetima.

U Beogradu, juna 1979. g. Ante R. Vučemilović

TUMAČ SIMBOLA

$x \in X$	x je element skupa X
$X \subset Y$	X je podskup od Y
$X \supset Y$	Y je podskup od X
$\cup$	unija
$\cap$	presek
$X \setminus Y$	razlika skupova X i Y
$\emptyset$	prazan skup
$\Longrightarrow$	implikacija, dovoljnost
$\Longleftrightarrow$	ekvivalencija, ako i samo ako
$f: X \longrightarrow Y$	jednoznačno preslikavanje
f^{-1}	inverzno preslikavanje preslikavanja f
$X + Y$	topološka suma prostora X i Y; suma Boolovih algebri X i Y, 2
$X \times Y$	topološki proizvod prostora X i Y; proizvod Boolovih algebri X i Y, 2
$\overline{X}$	zatvorenje (adherencija) skupa X
Fr X	rub skupa X
$X \approx Y$	X je homeomorfno sa Y
$X \not\approx Y$	X nije homeomorfno sa Y
$\langle X \rangle$	familija zatvorenih podskupova prostora X
exp(X)	hiperprostor prostora X, 92
diam(X)	dijametar skupa X
$X^{(\alpha)}$	izvodni skup od X reda α, 76
card X	kardinalan broj skupa X

N	skup prirodnih brojeva
R^1	prostor realnih brojeva
C	Cantorov diskontinum segmenta $[0,1]$, 19
C_o	jednočlan prostor
C_1	prostor homeomorfan prostoru C
C_n	pun prostor, 42, 85
C_ω	pun prostor sa beskonačnim akumulacionim spektrom, 43
Q	prostor svih krajeva odbačenih intervala, pri konstrukciji prostora C, 16
Q_1	prostor homeomorfan prostoru Q
Q_n	Q-pun prostor, 70
$s(X)$	akumulacioni spektar prostora X, 29
$ord(x)$	red tačke x, 83
$r(x)$	red tačke x, prebrojivog prostora, 86
ω	najmanji **redni** broj bekonačnih skupova
ω_1	najmanji redni broj neprebrojivih skupova
$\aleph_o$	kardinalan broj skupa N
$\aleph_1$	kardinalan broj skupa rednih brojeva $\leq \omega_1$
$\delta(\xi,\eta)$	prirodna (Hessenbergova) suma rednih brojeva ξ i η , 87
$\mathcal{Z}$	klasa svih kompaktnih metričkih nul-dimenzionih prostora
$\mathcal{P}$	klasa svih prebrojivih metričkih prostora

GLAVA 1.

OSNOVNA SVOJSTVA NUL-DIMENZIONIH PROSTORA

U ovoj glavi daje se pregled osnovnih svojstava nul-dimenzionih prostora. Razmatraju se tri definicije dimenzije:

mala induktivna dimenzija - ind,

velika induktivna dimenzija - Ind,

dimenzija definisana preko pokrivača - dim.

Zbog potpunosti tvrdjenja se dokazuju, a dokazi se često razlikuju od uobičajenih. Pretpostavljamo da su svi prostori T_1(svaka njihova tačka je zatvoren skup).

1.1. MALA INDUKTIVNA DIMENZIJA - ind

1.1.1. DEFINICIJA. Neka je X topološki prostor.

$\operatorname{ind} X = -1$ ako i samo ako $X = \emptyset$;

$\operatorname{ind} X \leq n$, $n \in \{0,1,\dots\}$, ako i samo ako za svaku tačku $x \in X$ i za svaku njenu okolinu U postoji otvoren skup $V \subset X$ tako da je $x \in V \subset U$ i $\operatorname{ind} \operatorname{Fr} V \leq n-1$;

$\operatorname{ind} X = n$, $n \in \{0,1,\dots\}$, ako i samo ako $\operatorname{ind} X \leq n$ i nije $\operatorname{ind} X \leq n-1$, tj. ako je $\operatorname{ind} X \leq n$ i postoji tačka $x \in X$ i njena okolina U tako da za svaki otvoren skup V takav da je $x \in V \subset U$ nije $\operatorname{ind} \operatorname{Fr} V \leq n-2$;

$\operatorname{ind} X = \infty$ ako i samo ako ni za koji prirodni broj n nije $\operatorname{ind} X \leq n$.

Iz prethodne definicije sledi

1.1.2. DEFINICIJA. Topološki prostor X ima $\operatorname{ind} X = 0$ ako i samo ako za svaku tačku $x \in X$ i svaku njenu okolinu U

postoji otvoren skup $V \subset X$ tako da je $x \in V \subset U$ i $\mathrm{Fr}\ V = \emptyset$.
Drugim rečima: $\mathrm{ind}\ X = 0$ ako i samo ako za svaku tačku $x \in X$ i svaku njenu okolinu U postoji otvoreno-zatvorena okolina $V \subset U$, $x \in V$.

Na osnovu prethodne definicije neposredno proizlazi

1.1.3. TVRDJENJE. $\mathrm{ind}\ X = 0$ <u>ako i samo ako prostor</u> X <u>poseduje bazu čiji su elementi otvoreno-zatvoreni skupovi</u>.

Definiciji 1.1.2. je ekvivalentna

1.1.4. DEFINICIJA. Prostor X ima $\mathrm{ind}\ X = 0$ ako i samo ako za svaku tačku $x \in X$ i svaki zatvoren skup $F \subset X$, koji ne sadrži x, postoji otvoreno-zatvoren U, $x \in U$, takav da je $U \cap F = \emptyset$.

Neposredno sledi

1.1.5. TVRDJENJE. <u>Ako je</u> $\mathrm{ind}\ X = 0$ <u>i</u> A <u>podskup od</u> X <u>tada je</u> $\mathrm{ind}\ A = 0$.

1.1.6. TVRDJENJE. <u>Ako je</u> $\mathrm{ind}\ X = 0$ <u>tada je</u> X <u>prostor Tihonova</u> (kompletno-regularan T_1- prostor).

DOKAZ. Neka je $x \in X$ proizvoljna tačka i $F \subset X$ proizvoljan zatvoren skup u X i $x \notin F$. Kako je $\mathrm{ind}\ X = 0$, to na osnovu definicije 1.1.4., sledi da postoji otvoreno-zatvoren skup U u X takav da $x \in U$, $U \cap F = \emptyset$.
Funkcija $f: X \to [0,1]$ definisana sa

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{za } x \in U \\ 1, & \text{za } x \in X \setminus U \end{cases}$$

je neprekidna, što dokazuje da je X prostor Tihonova.

1.1.7. Tvrdjenje. <u>Ako je</u> ind $X = 0$ <u>tada je</u> X <u>potpuno nepovezan prostor, tj. jedine komponente u</u> X <u>su tačke</u>.

DOKAZ. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji komponenta $K \subset X$ koja ima barem dve različite tačke x_1, x_2. Iz ind $X = 0$, prema definiciji 1.1.4., sledi da postoji otvoreno-zatvoren skup U u X takav da je $x_1 \in U$, $x_2 \in X \setminus U$. No, tada je $K = (K \cap U) \cup [K \cap (X \setminus U)]$, gde su $K \cap U$ i $K \cap (X \setminus U)$ neprazni otvoreno-zatvoreni skupovi u K, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je K komponenta u X.

1.1.8. TVRDJENJE. <u>Lokalno-kompaktan Hausdorffov prostor</u> X <u>je potpuno nepovezan ako i samo ako je</u> ind $X = 0$.

DOKAZ. S obzirom na tvrdjenje 1.1.7., potrebno je samo dokazati da potpuna nepovezanost lokalno-kompaktnog Hausdorffovog prostora X povlači ind $X = 0$.

Neka je $x \in X$ i F proizvoljan zatvoren skup u X koji ne sadrži tačku x. Kako je X lokalno-kompaktan, postoji otvoren skup V, $x \in V$, takav da $\overline{V} \subset X \setminus F$ je kompaktan. Za svaku tačku $y \in \mathrm{Fr}\, V = \overline{V} \setminus V$ postoji otvoreno-zatvorena okolina $U_y \subset \overline{V}$ tačke x takva da $y \notin U_y$ (jer je $\overline{V}$ kompaktan T_2-prostor, pa je komponenta x ujedno i kvazikomponenta u $\overline{V}$, tj. x je presek svih otvoreno-zatvorenih skupova u $\overline{V}$ koji sadrže tačku x ([5], t.2.14.)). Zbog kompaktnosti od $\mathrm{Fr}\, V$, postoji konačno mnogo tačaka $y_1, \ldots, y_n$ u $\mathrm{Fr}\, V$ takvih da njima odgovarajući otvoreno-zatvoreni skupovi $X \setminus U_{y_1}, \ldots, X \setminus U_{y_n}$ čine pokrivač za $\mathrm{Fr}\, V$. Prema tome, skup $U_{y_1} \ldots U_{y_n}$ je otvoreno-zatvoren, sadrži tačku x, a sadržan je u skupu $\overline{V} \subset X \setminus F$, tj. disjunktan je sa F. Time je, prema definiciji 1.1.4., dokazano da je ind $X = 0$.

PRIMER. Postoji potpuno nepovezan T_2-prostor X takav da je $\operatorname{ind} X = 1$.Navodimo primer,značajnog prostora,koji potiče od Knaster-Kuratowskog ([1] ,str.184):
Neka je C Cantorov diskontinum na segmentu $[0,1]$, Q skup racionalnih tačaka a I skup iracionalnih tačaka u C . Sa L_x označimo segment sa krajevima $x \in C$, $a = (\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, a sa L_x skup tačaka u R^2 definisan sa:

$$L_x^* = \{(x_1,x_2) \in L_x \mid x_2 \text{ racionalan}\} \quad \text{za} \quad x \in Q,$$

$$L_x^* = \{(x_1,x_2) \in L_x \mid x_2 \text{ iracionalan}\} \quad \text{za} \quad x \in I.$$

Tada je $X = \bigcup\{L_x^* \mid x \in C\} \setminus \{a\}$ potpuno nepovezan T_2-prostor i $\operatorname{ind} X = 1$.

1.1.9. TVRDJENJE. <u>Topološki proizvod</u> $X = \prod\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ <u>ima</u> $\operatorname{ind} X = 0$ <u>ako i samo ako je</u> $\operatorname{ind} X_\alpha = 0$ <u>za svako</u> $\alpha \in A$.

DOKAZ. Neka je $x = (x_\alpha) \in X$ i U proizvoljna okolina od x. Za U možemo uzeti baznu okolinu,tj.

$$U = \prod\{U_\alpha \mid U_\alpha \subset X_\alpha, x \in U_\alpha, U_\alpha \text{ otvoren u } X_\alpha \text{ i } U_\alpha \neq X_\alpha \text{ za najviše konačno indeksa } \alpha\}.$$

Kako je $\operatorname{ind} X_\alpha = 0$ za svako $\alpha \in A$,sledi da postoji otvoreno -zatvorena okolina $V_\alpha \subset U_\alpha$ za $x_\alpha \in X_\alpha$,pa je

$$V = \prod\{V_\alpha \mid V_\alpha \neq X_\alpha \Leftrightarrow U_\alpha \neq X_\alpha\}$$

otvoreno-zatvorena okolina od x sadržana u U.Time je dokazano da je $\operatorname{ind} X = 0$.

Potrebost proizlazi iz činjenice što svaki X možemo posmatrati kao podskup od X , pa prema tvrdjenju 1.1.5., iz $\operatorname{ind} X = 0$ sledi $\operatorname{ind} X = 0$.

DEFINICIJA 1.1.10. Topološki proizvod $D^{\tau} = \prod\{X_{\alpha} \mid \alpha \in A\}$, gde je $X_{\alpha} = \{0,2\}$ diskretan prostor i card $A = \tau$ zovemo Cantorov diskontinum težine τ.

1.1.11. TVRDJENJE(ALEKSANDROVA). <u>Topološki prostor</u> X <u>težine</u> τ <u>ima</u> ind $X = 0$ <u>ako i samo ako je homeomorfan podskupu Cantorovog diskontinuma</u> D^{τ}.

DOKAZ. Dovoljnost. Neka je $X \approx X' \subset D^{\tau}$. Pošto je $X_{\alpha} = \{0,2\}$ diskretan to je ind $X_{\alpha} = 0$ za svako $\alpha \in A$, pa na osnovu tvrdjenja 1.1.9. je ind $D^{\tau} = 0$. Iz $X' \subset D^{\tau}$ i ind $D^{\tau} = 0$ prema tvrdjenju 1.1.5. sledi ind $X' = 0$, tj. ind $X = 0$.
Potrebnost. Neka je ind $X = 0$. Tada, prema tvrdjenju 1.1.3., X ima bazu $\mathcal{B} = \{B_{\alpha} \mid \alpha \in A\}$, card $A = \tau$, čiji su elementi B_{α} otvoreno-zatvoreni skupovi.
Funkcija $f_{\alpha} : X \to \{0,2\}$, $\alpha \in A$, definisana sa

$$f_{\alpha}(x) = \begin{cases} 2, & \text{za } x \in B_{\alpha} \\ 0, & \text{za } x \in X \setminus B_{\alpha} \end{cases}$$

je, očigledno, neprekidna, pa je i funkcija $f: X \to D^{\tau}$ definisana sa $(f(x))_{\alpha} = f_{\alpha}(x)$, $\alpha \in A$, takodjer neprekidna.
Pokažimo da f ostvaruje homeomorfizam izmedju X i $f(X)$.
f je injektivna, jer za $x, y \in X$, $x \neq y$, postoji B_{α} takvo da je $x \in B_{\alpha}$ i $y \notin B_{\alpha}$, pa je $f_{\alpha}(x) \neq f_{\alpha}(y)$, a time i $f(x) \neq f(y)$. Pokažimo još da je $f^{-1}: f(X) \to X$ neprekidno. U tu svrhu dovoljno je pokazati da je $f(B_{\alpha})$, $\alpha \in A$, otvoren skup u $f(X)$. Zaista, $f(B_{\alpha}) = \{(x_{\alpha}) \in f(X) \mid x_{\alpha} = 2\}$, a to je otvoren skup u $f(X)$. Prema tome je $X \approx f(X) \subset D^{\tau}$.

1.1.12. TVRDJENJE. <u>Ako je</u> X <u>prebrojiv i Tihonovljev prostor tada je</u> ind $X = 0$.

DOKAZ. Neka je $x \in X$ proizvoljna tačka i U njena proizvoljna okolina. Pošto je X Tihonovljev prostor, to postoji neprekidna funkcija $f: X \to [0,1]$ takva da je $f(x) = 0$, $f(X \setminus U) = 1$. Kako je X i prebrojiv, to postoji broj $r \in [0,1]$ takav da $r \notin f(X)$, pa $f(X) \cap [0,r]$ je otvoreno-zatvoren skup u $f(X)$. Prema tome, skup $f^{-1}[0,r]$ je otvoreno-zatvoren u X. Kako je i $x \in f^{-1}[0,r] \subset U$ tvrdjenje je dokazano.

1.1.13. TVRDJENJE. Ako X ima prebrojivu bazu i $\operatorname{ind} X = 0$ tada svaki otvoren skup u X je prebrojiva unija medjusobno disjunktnih otvoreno-zatvorenih skupova u X.

DOKAZ. Neka je G proizvoljan otvoren skup u X. Kako je $\operatorname{ind} X = 0$ i X ima prebrojivu bazu, to na osnovu tvrdjenja 1.1.3. postoji baza $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_n, \dots\}$ čiji su elementi otvoreno-zatvoreni skupovi. Neka je $G = B_{k_1} \cup B_{k_2} \cup \dots \cup B_{k_n} \cup \dots$; tada je $G = B_{k_1} \cup (B_{k_2} \setminus B_{k_1}) \cup \dots$, gde su $B_{k_1}, B_{k_2}, \dots, B_{k_n}, \dots$ otvoreno-zatvoreni skupovi u X. Time je tvrdjenje dokazano.

1.1.14. TVRDJENJE. Neka je X podskup skupa R^1 realnih brojeva. Tada je $\operatorname{ind} X = 0$ ako i samo ako je $R^1 \setminus X$ svuda gust u R^1.

DOKAZ. Dovoljnost. Neka je $x \in X$ proizvoljna tačka i (a,b) otvoren interval koji sadrži tu tačku. Pošto je $R^1 \setminus X$ svuda gust u R^1, sledi da postoje tačke $c \in (a,x) \cap (R^1 \setminus X)$, $d \in (x,b) \cap (R^1 \setminus X)$, pa je $x \in (c,d) \subset (a,b)$ i $\operatorname{Fr}(c,d) \cap X = \emptyset$, što dokazuje da je $\operatorname{ind} X = 0$.

Potrebnost. Neka je $\operatorname{ind} X = 0$ i pretpostavimo suprotno, tj.

da $R^1 \setminus X$ nije svuda gust u R^1. Tada bi postojala tačka $x \in R^1$ i otvoren interval $(a,b) \subset R^1$, koji je sadrži, takav da je $(a,b) \cap (R^1 \setminus X) = \emptyset$, tj. $(a,b) \subset X$, odakle sledi da je ind $X > 0$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom ind $X = 0$.

1.2. VELIKA INDUKTIVNA DIMENZIJA - Ind

1.2.1. DEFINICIJA. Neka je X topološki prostor.
Ind $X = -1$ ako i samo ako $X = \emptyset$;
Ind $X \leq n$, $n \in \{0,1,\ldots\}$, ako i samo ako za svaki zatvoren skup $F \subset X$ i svaku njegovu otvorenu okolinu U postoji otvoren skup $V \subset X$ tako da je $F \subset V \subset \overline{V} \subset U$ i Ind Fr $V \leq n-1$;
Ind $X = n$, $n \in \{0,1,\ldots\}$, ako i samo ako Ind $X \leq n$ i nije Ind $X \leq n-1$;
Ind $X = \infty$ ako i samo ako ni za koji prirodan broj n nije Ind $X \leq n$.

Iz prethodne definicije sledi

1.2.2. DEFINICIJA. Prostor X ima Ind $X = 0$ ako i samo ako za svaki zatvoren skup $F \subset X$ i svaku njegovu otvorenu okolinu U postoji otvoren skup $V \subset X$ tako da je $F \subset V \subset U$ i Fr $V = \emptyset$. Drugim rečima: Ind $X = 0$ ako i samo ako za svaki zatvoren skup $F \subset X$ i za svaku njegovu otvorenu okolinu U postoji otvoreno-zatvoren skup V tako da je $F \subset V \subset U$.

Prethodnoj definiciji je ekvivalentna

1.2.3. DEFINICIJA. Prostor X ima Ind $X = 0$ ako i samo ako za svaka dva zatvorena disjunktna skupa $F_1, F_2 \subset X$ postoji otvoreno-zatvoren skup $U \subset X$ tako da sadrži jednog od skupova F_1, F_2 i disjunktan je sa drugim.

Neposredno slede tvrdjenja:

1.2.4. TVRDJENJE. Ako je Ind $X = 0$ tada je X normalan prostor.

1.2.5. TVRDJENJE. Ako je Ind $X = 0$ tada je ind $X = 0$.

1.2.6. TVRDJENJE. Ako je Ind $X = 0$ i F zatvoren podskup od X tada je Ind $F = 0$.

1.2.7. TVRDJENJE. Neka je X normalan F_b-prostor. Ako je $X = A \cup B$, A zatvoren skup u X, Ind $A = 0$, Ind $B=0$, tada je Ind $X = 0$.

DOKAZ. Pošto je $X \setminus A$ otvoren skup u X koji je F_b-prostor, to postoje zatvoreni skupovi $F_1, F_2, \ldots$ u X takvi da je $X \setminus A = F_1 \cup F_2 \cup \ldots$ .Kako je Ind $B = 0$ i F_n, $n \in N$, zatvoren i sadržan u B, na osnovu tvrdjenja 1.2.6., sledi da je Ind $F_n = 0$. Prema tome je: $X = A \cup F_1 \cup F_2 \cup \ldots$, gde su $A, F_1, F_2, \ldots$ zatvoreni skupovi u X i Ind A = Ind $F_n = 0$, $n \in N$, pa na osnovu tv.4.str.177 iz [1] sledi Ind $X = 0$.

1.3. DIMENZIJA DEFINISANA POMOĆU POKRIVAČA - dim

1.3.1. DEFINICIJA. Neka je X topološki prostor. $\dim X \leq n$, $n \in \{-1, 0, 1, \ldots\}$, ako i samo ako za svaki otvoren konačan pokrivač $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_m\}$ postoji otvoren pokrivač $\mathcal{V} = \{V_1, \ldots, V_m\}$ takav da je $V_k \subset U_k$, $k \in \{1, \ldots, m\}$, i svaka tačka iz X leži u najviše $n+1$ članova pokrivača $\mathcal{V}$.
$\dim X = n$ ako i samo ako je $\dim X \leq n$, a nije $\dim X \leq n-1$.
$\dim X = \infty$ ako i samo ako ni za koji prirodan broj n nije $\dim X \leq n$.

Neposredno sledi: $\dim X = -1$ ako i samo ako $X = \emptyset$.

Na osnovu prethodne definicije sledi

1.3.2. DEFINICIJA. Topološki prostor X ima $\dim X = 0$ ako i samo ako za svaki otvoren konačan pokrivač $\mathcal{U}=\{U_1,\ldots,U_m\}$ od X postoji otvoren pokrivač $\mathcal{V}=\{V_1,\ldots,V_m\}$ takav da je $V_k \subset U_k$, $k \in \{1,\ldots,m\}$, i $V_k \cap V_r = \emptyset$ kad god je $k \neq r$.

Zbog $V_k \cap V_r = \emptyset$ za $k \neq r$, sledi da su $V_1,\ldots,V_m$, iz prethodne definicije, i zatvoreni skupovi u X.

1.3.3.TVRDJENJE. Ako je $\dim X = 0$ tada je X normalan prostor, i $\operatorname{Ind} X = 0$.

DOKAZ. Neka su A,B proizvoljni disjunktni i zatvoreni skupovi u X. Tada skupovi $X\setminus A$, $X\setminus B$ čine otvoren pokrivač od X, pa iz $\dim X = 0$ sledi da postoje otvoreno-zatvoreni skupovi $V_1 \subset X\setminus A$, $V_2 \subset X\setminus B$ koji su disjunktni i čine pokrivač za X. Pošto je $A \subset V_2 \subset X\setminus B$, $B \subset V_1 \subset X \setminus A$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, sledi da je X normalan prostor, a prema definiciji 1.2.3., $\operatorname{Ind}X=0$.

Neposredno sledi

1.3.4. TVRDJENJE. Ako je $\dim X = 0$ i F zatvoren podskup od X tada je $\dim F = 0$.

1.3.5. TVRDJENJE. Ako je $\operatorname{Ind} X = 0$ tada je $\dim X = 0$.
Za dokaz ovog tvrdjenja potrebno nam je sledeće tvrdjenje:

1.3.6. TVRDJENJE. Neka je X normalan prostor i $\mathcal{U}=\{U_1,\ldots,U_n\}$ otvoren pokrivač od X. Tada postoji zatvoren pokrivač $\mathcal{V}=\{F_1,\ldots,F_n\}$ od X takav da je $F_k \subset U_k, k\in\{1,\ldots,n\}$.

DOKAZ. Neka je $H_1 = X\setminus(U_2 \cup \ldots \cup U_n)$. Tada je $H_1 \subset U_1$ zatvoren u X. Pošto je X normalan prostor, to postoji otvoren skup $G_1 \supset H_1$ u X takav da je $G_1 \subset \overline{G}_1 \subset U_1$ ([5], t.2.6.). Označimo $F_1 = \overline{G}_1$. Skupovi $G_1, U_2, \ldots, U_n$ su otvoreni i čine pokrivač od X, pa označivši $H_2 = X\setminus(G_1 \cup U_3 \cup \ldots \cup U_n)$, analogno prethodnom postupku, dobijamo otvoren skup G_2 takav da je $H_2 \subset G_2 \subset \overline{G}_2 \subset U_2$. Označimo $F_2 = \overline{G}_2$. Nastavljajući ovako, u n-tom koraku, polazeći od skupova $G_1, G_2, \ldots, G_{n-1}, U_n$, koji čine otvoren pokrivač od X, $F_k \subset U_k$ za $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ dobijamo : $H_n = X \setminus (G_1 \cup \ldots \cup G_{n-1})$, $H_n = \overline{H}_n \subset U_n$ i otvoren skup G_n takav da $H_n \subset G_n \subset \overline{G}_n \subset U_n$, tj. $F_n = \overline{G}_n$.

DOKAZ TVRDJENJA 1.3.5. Neka je $\operatorname{Ind} X = 0$ i $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_n\}$ proizvoljan otvoren pokrivač od X. Prema tv.1.2.4. X je normalan, pa na osnovu tv.1.3.6. postoji zatvoren pokrivač $\mathcal{V} = \{F_1, \ldots, F_n\}$ takav da $F_k \subset U_k$, $k \in \{1, \ldots, n\}$. Nadalje, kako je $\operatorname{Ind} X = 0$, sledi da postoje otvoreno-zatvoreni skupovi H_k takvi da je $F_k \subset H_k \subset U_k$. Neka su: $V_1 = H_1$, $V_2 = H_2 \setminus V_1$, $\ldots$, $V_n = H_n \setminus (V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_{n-1})$. Tada je $\{V_1, \ldots, V_n\}$ pokrivač od X čiji su elementi otvoreno-zatvoreni u X i medjusobno disjunktni. Kako je, očigledno, i $V_k \subset U_k$, sledi da je $\dim X = 0$.

1.3.7. TVRDJENJE. <u>Ako je</u> X <u>prostor Lindelöfa i</u> $\operatorname{ind} X = 0$ <u>tada je</u> $\dim X = \operatorname{Ind} X = 0$.

DOKAZ. Neka je $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_n\}$ otvoren pokrivač od X. Iz $\operatorname{ind} X = 0$ sledi da postoji baza od X čiji su elementi otvoreno-zatvoreni skupovi, pa postoji pokrivač α, upisan u $\mathcal{U}$, čiji su elementi otvoreno-zatvoreni u X. Kako je X Lindelöfov prostor, to postoji prebrojiv podpokrivač $\beta = \{V_1, V_2, \ldots\}$ pokrivača α. Skupovi: V_1, $V_2 \setminus V_1, \ldots$, $V_n \setminus (V_1 \cup \ldots \cup V_{n-1}), \ldots$ su otvoreno-zatvoreni, medjusobno disjunktni i obrazuju pokrivač upisan u $\mathcal{U}$. Kako se od elemenata ovog pokrivača može formirati pokrivač $\mathcal{V} = \{G_1, \ldots, G_n\}$ od X čiji su elementi otvoreno-zatvoreni, medjusobno disjunktni, $G_k \subset U_k$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, sledi da je $\dim X = 0$, pa odatle i $\operatorname{Ind} X = 0$.

1.4. KLASA SEPARABILNIH METRIČKIH NUL-DIMENZIONIH PROSTORA

Na osnovu t.1.3.7. sledi:

1.4.1. TVRDJENJE. Ako je X separabilan metrički prostor i $\operatorname{ind} X = 0$ tada je $\dim X = \operatorname{Ind} X = 0$.

1.4.2. TVRDJENJE. Ako je X kompaktan metrički prostor i $\operatorname{ind} X = 0$ tada je $\dim X = \operatorname{Ind} X = 0$.

S obzirom na prvo tvrdjenje, opravdana je upotreba naziva " Klasa separabilnih metričkih nul-dimenzionih prostora", bez obzira o kojoj vrsti dimenzije je reč.

Na osnovu t.1.1.11. sledi:

1.4.3. TVRDJENJE. Separabilan metrički prostor je nul-dimenzioni ako i samo ako je homeomorfan podskupu Cantorovog diskontinuma $D^{\aleph_0}$.

1.4.4. TVRDJENJE. Kompaktan metrički prostor je nul-dimenzion ako i samo ako je homeomorfan zatvorenom podskupu Cantorovog diskontinuma $D^{\aleph_0}$.

1.4.5. TVRDJENJE. Cantorov diskontinum $D^{\aleph_0}$ homeomorfan je prostoru C svih realnih brojeva segmenta $[0,1]$ koji u brojevnom sistemu sa osnovom tri, imaju zapis $0,a_1a_2\ldots$, gde je $a_n \in \{0,2\}$, $n \in N$.

DOKAZ. Pokažimo da je preslikavanje $f : D^{\aleph_0} \to C$ definisano sa $f(a_1,a_2,\ldots) = 0,a_1a_2\ldots$ homeomorfizam.
f je, očigledno, bijektivno. S obzirom da je $D^{\aleph_0}$ kompaktan T_2-prostor, dovoljno je pokazati da je f neprekidno. Neka je $a = 0,a_1a_2\ldots$ proizvoljna tačka iz C i $U = \{x \in C \mid |x - 0,a_1a_2\ldots| < \varepsilon\}$ njena proizvoljna ε-okolina.

Postoji $n_o \in N$ takav da je $\frac{2}{3^{n_o}} < \varepsilon$, pa je

$$U_{n_o} = \left\{ x \in C \mid x_k = a_k,\ k \leq n_o \right\}$$

okolina od a, sadržana u okolini U. Kako je

$V_{n_o} = \left\{ (x_1, x_2, \ldots) \in D^{\aleph_0} \mid x_k = a_k,\ k \leq n_o \right\}$ okolina u $D^{\aleph_0}$ tačke $(a_1, a_2, \ldots) \in D^{\aleph_0}$ i $f(V_{n_o}) = U_{n_o} \subset U$, sledi da je f neprekidno preslikavanje. Time je tvrdjenje dokazano.

Prostor C, u daljem, ćemo zvati Cantorov diskontinum, a ovde navodimo još i njegovu geometrijsku konstrukciju.

Segment $[0,1]$ podelimo na tri jednaka intervala i odbacimo središnji interval $G_1 = (1/3, 2/3)$. Preostala dva segmenta I_o(levi) i I_2(desni) podelimo na po tri jednaka intervala i odbacimo redom njihove središnje: $G_{01} = (\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2})$, $G_{21} = (\frac{7}{3^2}, \frac{8}{3^2})$. Time od I_o nastaju segmenti I_{oo}(levi), I_{o2}(desni), a od I_2 segmenti I_{2o}(levi), I_{22}(desni). Zatim, segmente $I_{oo}, I_{o2}, I_{2o}, I_{22}$ podelimo na po tri jednaka intervala, odbacimo redom središnje: $G_{oo1}, G_{o21}, G_{2o1}, G_{221}$ i neograničeno nastavimo postupak. Tada je

$$C = [0,1] \setminus G_1 \setminus \bigcup_{n=2}^{\infty} \bigcup_{k_1 \ldots k_{n-1}} \left\{ G_{k_1 \ldots k_{n-1} 1} \mid k_1, \ldots, k_{n-1} \in \{0,2\} \right\}.$$

1.4.6. TVRDJENJE. <u>Neka je X kompaktan metrički nul-dimenzioni prostor, koji nema izolovanih tačaka. Tada je X homeomorfan Cantorovom diskontinumu C.</u>

Dokaz zasnivamo na narednoj definiciji i tvrdjenju u vezi sa njom.

1.4.7. DEFINICIJA. Neka su X, Y kompaktni metrički prostori i $\{U_n\}$, $\{V_n\}$, $n \in N$, redom baze tih prostora čiji su elementi otvoreno-zatvoreni skupovi. Kažemo da su baze $\{U_n\}$ i $\{V_n\}$ <u>izomorfne</u> ako i samo ako su ispunjena sledeća dva uslova:

1) za svako $i \neq j$ je:

ili $U_i \subset U_j$ ili $U_j \subset U_i$ ili $U_i \cap U_j = \emptyset$;

ili $V_i \subset V_j$ ili $V_j \subset V_i$ ili $V_i \cap V_j = \emptyset$,

2) postoji bijektivno preslikavanje $f : \{U_n\} \to \{V_n\}$, $f(U_n) = V_n, n \in N$, takvo da je $f(U_i \cap U_j) = f(U_i) \cap f(U_j)$.

1.4.8. TVRDJENJE. <u>Kompaktni metrički nul-dimenzioni prostori koji imaju izomorfne baze su homeomorfni.</u>

DOKAZ. Neka su $\{U_n\}$, $\{V_n\}$ redom izomorfne baze za X i Y i $f : \{U_n\} \to \{V_n\}$ bijektivno preslikavanje.

Definišimo preslikavanje $h: X \to Y$ na sledeći način: svaka tačka $x \in X$ ima jedinstven zapis $x = \bigcap \{U_n \mid x \in U_n\}$, pa stavimo $h(x) = \bigcap \{f(U_n) \mid x \in U_n\}$. Pokažimo da je h dobro definisano. S obzirom da familija $\{f(U_n)\}$ ima osobinu konačnog presecanja, njeni elementi su zatvoreni skupovi, a Y je kompaktan, sledi da je $h(x)$ neprazan skup. Pokažimo da je $h(x)$ jednočlan skup. U suprotnom postojale bi tačke $y_1, y_2 \in h(x)$ koje su različite, pa bi postojali disjunktni bazni skupovi V_r, V_s, $y_1 \in V_r$, $y_2 \in V_s$, pa je $f^{-1}(V_r) \cap f^{-1}(V_s) = \emptyset$. No, sa druge strane je: $f^{-1}(V_r) \cap U_n \neq \emptyset$, $f^{-1}(V_s) \cap U_n \neq \emptyset$ za svako U_n koje sadrži tačku x, pa je $f^{-1}(V_r) \cap f^{-1}(V_s)$ skup u kojem je x. Dobijena kontradikcija dokazuje da je $h(x)$ jednočlan.

Preslikavanje h je surjektivno, jer za proizvoljnu tačku $y \in Y$ postoji jedinstven zapis $y = \bigcap \{V_n \mid y \in V_n\}$, pa je $\bigcap \{f^{-1}(V_n) \mid y \in V_n\}$ jednočlan skup u X i $h(\bigcap \{f^{-1}(V_n) \mid y \in V_n\}) = y$. h je, očigledno, injektivno i neprekidno, dakle, homeomorfizam.

DOKAZ za t.1.4.6. S obzirom na t.1.4.8.,dovoljno je dokazati da prostori X i C imaju izomorfne baze.
Prema t.1.4.4.,možemo smatrati da je X uronjen u C.
Pomoću matematičke indukcije,konstruišimo otvoreno-zatvorene pokrivače α_n, β_n, $n \in N$,redom za X i C,čiji su članovi neprazni,medjusobno disjunktni skupovi dijametra manjeg od $(2/3)^n$,i bijektivna preslikavanja $f_n: \alpha_n \longrightarrow \beta_n$.
Postoje neprazni ,otvoreno-zatvoreni,disjunktni skupovi U_o i U_2 koji pokrivaju X i dijametra su manjeg od $2/3$.
Isto tako,postoje neprazni,otvoreno-zatvoreni,disjunktni skupovi V_o i V_2 koji pokrivaju C i dijametra su manjeg od $2/3$. Prema tome

$$\alpha_1 = \{U_{i_1}\} , \quad \beta_1 = \{V_{i_1}\} , \quad i_1 \in \{0,2\} ,$$

su otvoreno-zatvoreni pokrivači,redom za X i C i preslikavanje $f_1: \alpha_1 \longrightarrow \beta_1$,dato sa $f_1(U_{i_1})=V_{i_1}$, je bijektivno.
Pretpostavimo da su

$$\alpha_k = \{U_{i_1 \ldots i_k}\} , \quad \beta_k = \{V_{i_1 \ldots i_k}\}$$

otvoreno-zatvoreni pokrivači redom za X i C,čiji su članovi neprazni,medjusobno disjunktni i dijametra manjeg od $(2/3)^k$, i $f_k: \alpha_k \longrightarrow \beta_k$,dato sa $f_k(U_{i_1 \ldots i_1})=V_{i_1 \ldots i_k}$,bijektivno preslikavanje($i_1 \ldots i_k$ su svi mogući k-nizovi brojeva 0 i 2).
Postoje,neprazni otvoreno-zatvoreni,disjunktni skupovi $U_{i_1 \ldots i_k o}$, $U_{i_1 \ldots i_k 2}$ koji pokrivaju $U_{i_1 \ldots i_k}$ i dijametra su manjeg od $2/3 \operatorname{diam}(U_{i_1 \ldots i_k}) < (2/3)^{k+1}$.
Isto tako,postoje neprazni otvoreno-zatvoreni disjunktni skupovi $V_{i_1 \ldots i_k o}$, $V_{i_1 \ldots i_k 2}$,koji pokrivaju $V_{i_1 \ldots i_k}$ a

dijametra su manjeg od $2/3\ \mathrm{diam}(V_{i_1\dots i_k}) < (2/3)^{k+1}$.

Prema tome su

$$\alpha_{k+1} = \{U_{i_1\dots i_k i_{k+1}}\},\quad \beta_{k+1} = \{V_{i_1\dots i_k i_{k+1}}\},\ i_{k+1}\in\{0,2\},$$

otvoreno-zatvoreni pokrivači redom za X i C,čiji su članovi neprazni medjusobno disjunktni,dijametra manjeg od $(2/3)^{k+1}$; i preslikavanje $f_{k+1}: \alpha_{k+1} \longrightarrow \beta_{k+1}$,dato sa $f_{k+1}(U_{i_1\dots i_k i_{k+1}}) = V_{i_1\dots i_k i_{k+1}}$,je bijektivno.

Time su konstruisani pokrivači α_n, β_n i bijektivna preslikavanja $f_n: \alpha_n \longrightarrow \beta_n$ za svako $n\in N$.

Na osnovu konstrukcije pokrivača α_n, β_n i preslikavanja f_n, sledi da familije

$$\alpha = \{U \mid U\in \alpha_n, n\in N\},\quad \beta = \{V \mid V\in \beta_n, n\in N\}$$

su baze prostora X i C koje su izomorfne.Time je t.1.4.6. dokazano.

Na osnovu t.1.1.12., sledi

1.4.9.TVRDJENJE. <u>Svaki prebrojiv metrički prostor je nul-dimenzonalan.</u>

Skup svih krajeva odbačenih intervala,pri konstrukciji Cantorovog diskontinuma C, označavaćemo sa Q.Pod prostorom Q podrazumevaćemo podprostor Q prostora C .

1.4.10. TVRDJENJE. <u>Neka je</u> X <u>prebrojiv metrički prostor koji nema izolovanih tačaka.Tada je</u> X <u>homeomorfan prostoru</u> Q.

DOKAZ. Neka je $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ prebrojiv metrički prostor bez izolovanih tačaka.Prema t.1.4.4.,možemo smatrati da je X uronjen u C.Koristeći matematičku indukciju,konstruisačemo otvoreno-zatvorene pokrivače α_n, $\beta_n, n \in N$, redom za X i Q, čiji su članovi neprazni medjusobno disjunktni skupovi dijametra manjeg od $(2/3)^n$ i bijektivna preslikavanja $f_n: \alpha_n \longrightarrow \beta_n$.

Postoje otvoreno-zatvoreni skupovi $U_k, k=\min\{i \mid x_i \in U_k,\ i \in N\}$, i $U_r, r=\min\{i \mid x_i \in U_r,\ i \in N\}$, $U_k \cap U_r = \emptyset$, koji pokrivaju X i dijametra su manjeg od 2/3.

Neka je $Q = \{y_1, y_2, \dots\}$. Postoje, takodjer, otvoreno-zatvoreni disjunktni skupovi $V_{\bar{k}}$, $\bar{k} = \min\{i \mid y_i \in V_{\bar{k}},\ i \in N\}$, i $V_{\bar{r}}$, $\bar{r} = \min\{i \mid y_i \in V_{\bar{r}},\ i \in N\}$, koji pokrivaju Q i dijametra su manjeg od 2/3. Označimo:

$$\alpha_1 = \{U_{k_1}\},\ k_1 \in \{k, r\}\ ;\quad \beta_1 = \{V_{\bar{k}_1}\},\ \bar{k}_1 \in \{\bar{k}, \bar{r}\},$$

i sa $f_1: \alpha_1 \longrightarrow \beta_1$ jednu od mogućih bijekcija.

Pretpostavimo da su

$$\alpha_m = \{U_{k_1 \dots k_m}\},\ k_m = \min\{i \mid x_i \in U_{k_1 \dots k_m},\ i \in N\},$$

$$\beta_m = \{V_{\bar{k}_1 \dots \bar{k}_m}\},\ \bar{k}_m = \min\{i \mid y_i \in V_{\bar{k}_1 \dots \bar{k}_m},\ i \in N\},$$

otvoreno-zatvoreni pokrivači redom za X i Q, čiji su članovi medjusobno disjunktni i dijametra manjeg od $(2/3)^m$.

Pretpostavimo takodjer, da je $f_m: \alpha_m \longrightarrow \beta_m$ jedna od mogućih bijekcija.

Postoje neprazni, otvoreno-zatvoreni, disjunktni skupovi

$$U_{k_1 \dots k_m s},\quad s = \min\{i \mid x_i \in U_{k_1 \dots k_m s},\ i \in N\},$$

$$U_{k_1 \dots k_m t},\quad t = \min\{i \mid x_i \in U_{k_1 \dots k_m t},\ i \in N\},$$

koji pokrivaju $U_{k_1 \dots k_m}$ i dijametra su manjeg od

$2/3 \operatorname{diam}(U_{k_1 \dots k_m}) < (2/3)^{m+1}$. Isto tako, postoje neprazni otvoreno-zatvoreni, disjunktni skupovi

$V_{\bar{k}_1\ldots\bar{k}_m\bar{s}}$, $\bar{s} = \min\{i \mid y_i \in V_{\bar{k}_1\ldots\bar{k}_m\bar{s}}, i\in N\}$,

$V_{\bar{k}_1\ldots\bar{k}_m\bar{t}}$, $\bar{t} = \min\{i \mid y_i \in V_{\bar{k}_1\ldots\bar{k}_m\bar{t}}, i\in N\}$,

koji pokrivaju $V_{\bar{k}_1\ldots\bar{k}_m}$ i dijametra su manjeg od

$2/3 \operatorname{diam}(V_{\bar{k}_1\ldots\bar{k}_m}) < (2/3)^{m+1}$. Tada su

$\alpha_{m+1} = \{U_{k_1\ldots k_m k_{m+1}}\}, k_{m+1} \in \{s,t\}$,

$\beta_{m+1} = \{V_{\bar{k}_1\ldots\bar{k}_m\bar{k}_{m+1}}\}, \bar{k}_{m+1} \in \{\bar{s},\bar{t}\}$,

otvoreno-zatvoreni pokrivači redom za X i Q, čiji su elementi medjusobno disjunktni i dijametra manjeg od $(2/3)^{m+1}$.

Bijekciju $f_{m+1}: \alpha_{m+1} \longrightarrow \beta_{m+1}$ definišimo na sledeći način:

za $f_m(U_{k_1\ldots k_m}) = V_{\bar{k}_1\ldots\bar{k}_m}$ stavljamo

$f_{m+1}(U_{k_1\ldots k_m k_{m+1}}) = V_{\bar{k}_1\ldots\bar{k}_m\bar{k}_{m+1}}$ gde je $k_{m+1} = k_m \Leftrightarrow \bar{k}_{m+1} = \bar{k}_m$.

Time su pokrivači α_n, β_n i bijekcije $f_n: \alpha_n \longrightarrow \beta_n$ u potpunosti definisani.

Familije: $\alpha = \{U \in \alpha_n, n \in N\}$, $\beta = \{V \in \beta_n , n \in N\}$

su baze redom za X i Y.

S obzirom na prirodu pokrivača $\alpha_n, n \in N$, za svaku tačku

$x_i \in X$ postoji jedinstven broj $n_o \in N$ takav da je:

$x_i \in U_{k_1\ldots k_{n_o}}$, $k_{n_o} = i$; $k_1,\ldots,k_{n_o-1} \neq k_{n_o}$.

Preslikavanje $h: X \longrightarrow Q$, definisano sa $h(x_i) = y_j$, gde je

$y_j \in V_{\bar{k}_1\ldots\bar{k}_{n_o}} = f_{n_o}(U_{k_1\ldots k_{n_o}})$, $j = \bar{k}_{n_o}$, je bijektivno, neprekidno, njegovo inverzno je neprekidno; dakle h je homeomorfizam.

NAPOMENA. Prethodno tvrdjenje je preformulisano tvrdjenje Sierpińskog, koje izvorno glasi drugačije ([22]).

1.4.11. TVRDJENJE. Ako je X prebrojiv metrički prostor tada je X homeomorfan podprostoru prostora Q.

DOKAZ. Ako je X prebrojiv metrički prostor, tada je topološki proizvod $X \times Q$ prebrojiv metrički prostor, koji nema izolovanih tačaka. Na osnovu prethodnog tvrdjenja, postoji homeomorfizam $h: X \times Q \longrightarrow Q$. Preslikavanje $h_1: X \to X \times Q$, definisano sa $h_1(x) = (x,0)$, $x \in X$, je, očigledno, homeomorfizam, pa preslikavanje $(h.h_1): X \longrightarrow Q$ ostvaruje homeomorfizam izmedju X i podprostora $h.h_1(X)$ od Q.

GLAVA 2.

NEKE PODKLASE KLASE KOMPAKTNIH METRIČKIH NUL-DIMENZIONIH PROSTORA

U ovoj glavi se daje topološka karakterizacija nekih podklasa klase kompaktnih, metričkih nul-dimenzionih prostora, koju označavamo sa $\mathcal{Z}$, kao i odgovarajuće konstrukcije prostora tih podklasa. Razmatranja se zasnivaju na postupku "razvrstavanja tačaka", koji potiče od M.Marjanovića [14].

2.1. DEKOMPOZICIJE PROSTORA KLASE

Pod dekompozicijom prostora podrazumevamo svaku familiju disjunktnih podskupova, koji čine njegov pokrivač.

Neka je $X \in \mathcal{Z}$ dati prostor. Pomoću matematičke indukcije, konstruisaćemo dekompozicije $\mathcal{U}_n = \{X_0, \ldots, X_n, X_{(n+1)}\}$, $n \in N \cup \{0\}$ prostora X tako da su ispunjeni sledeći uslovi:

(a) $\overline{X}_{(n+1)} = X_{(n+1)}$,

(b) $\overline{X}_i = X_i \cup X_{i+2} \cup \ldots \cup X_n \cup X_{(n+1)}$ za svako $i \in \{0, \ldots, n-1\}$,

(c) $\overline{X}_n \subset X_n \cup X_{(n+1)}$.

Neka je X_0 skup svih izolovanih tačaka od X i $X_{(1)} = X \setminus X_0$.

Tada

$$\mathcal{U}_0 = \{X_0, X_{(1)}\}$$

je dekompozicija od X, koja ispunjava uslove (a),(b),(c).

Pretpostavimo da je $\mathcal{U}_k = \{X_0, \ldots, X_k, X_{(k+1)}\}$ dekompozicija od X takva da je:

(1) $\overline{X}_{(k+1)} = X_{(k+1)}$,

(2) $\overline{X}_i = X_i \cup X_{i+2} \cup \dots \cup X_{(k+1)}$ za $i \in \{0,\dots,k-1\}$,

(3) $\overline{X}_k \subset X_k \cup X_{(k+1)}$.

Neka je:

(4) $X_{k+1} = X_{(k+1)} \setminus \overline{X}_k$

(5) $X_{(k+2)} = X_{(k+1)} \cap \overline{X}_k$.

Tada je $\mathcal{U}_{k+1} = \{X_0,\dots,X_{k+1},X_{(k+2)}\}$ dekompozicija od X. Zbog (1)i(5) je $\overline{X}_{(k+2)} = X_{(k+2)}$, pa $\mathcal{U}_{k+1}$ ispunjava uslov (a). Pokažimo da $\mathcal{U}_{k+1}$ ispunjava uslov (b), tj. da je

(6) $\overline{X}_i = X_i \cup X_{i+2} \cup \dots \cup X_{(k+2)}$ za $i \in \{0,\dots,k\}$.

Zaista, zbog (2) i $X_{(k+1)} = X_{k+1} \cup X_{(k+2)}$ sledi da je (6) ispunjeno za $i \in \{0,\dots,k-1\}$. Na osnovu (3),(4),(5) je $\overline{X}_k \subset X_k \cup X_{(k+2)}$, a na osnovu (5) i $\overline{X}_k \supset X_k \cup X_{(k+2)}$, pa je (6) ispunjeno i za $i=k$. Konačno iz (4),(1),(5) sledi $\overline{X}_{k+1} \subset \overline{X}_{(k+1)} = X_{(k+1)} = X_{k+1} \cup X_{(k+2)}$. Time je pokazano da dekompozicija $\mathcal{U}_{k+1}$ ispunjava uslove (a),(b),(c), pa su konstrukcije dekompozicija $\mathcal{U}_n$, $n \in N$, u potpunosti definisane.

Mogu nastupiti sledeći slučajevi:

1) $X = X_0$, tj. prostor X ima konačno mnogo tačaka,

2) Postoji $n \in N$ tako da je $X_{n-1} = \emptyset$, $X_{(n)} \neq \emptyset$. Tada je:

$X_n = X_{(n)}$, $X_{(n+1)} = \emptyset$, pa je $X = X_0 \cup \dots \cup X_{n-2} \cup X_n$.

Za $n=1$ je $X_0 = \emptyset$, pa je, na osnovu t.1.4.6., $X \approx C$.

3) Postoji $n \in N$ tako da je $X_{n-1} \neq \emptyset$, $X_{(n)} = X_n \neq \emptyset$. Tada je

$X = X_0 \cup \dots \cup X_{n-1} \cup X_n$ i X_{n-1}, X_n zatvoreni i disjunktni skupovi,

4) Za svako $n \in N$ je $X_{(n)} \neq \emptyset$. Tada je $X = X_0 \cup \dots \cup X_n \cup \dots \cup X_\omega$,

gde je $X_\omega = \bigcap \{X_{(n)} \mid n \in N\}$ neprazan i kompaktan(jer $X_{(1)} \supset X_{(2)} \supset \dots$ i svi $X_{(1)}, \dots$ su zatvoreni u X).

U navedenim slučajevima prostoru X su jednoznačno pridruženi redom nizovi: $s(X) = (0)$; $s(X) = (0, \dots, n-2, n)$ (za $X_0 = \emptyset$ stavljamo $s(X) = (1)$); $s(X) = (0, \dots, n-1, n)$; $s(X) = (0, \dots, n, \dots, \omega)$.

Niz $s(X)$ nazivamo akumulacioni spektar prostora X, a tačku $x \in X_n, n \in N \cup \{0\} \cup \{\omega\}$, n-tačka prostora X.

2.1.1. TVRDJENJE. *Tačka $x \in X$ je n-tačka, $n \in N \cup \{0\}$, ako i samo ako $x \notin \overline{X}_{n-1}$ i $x \notin X_i$, $i \in \{0, \dots, n-2\}$. Tačka $x \in X$ je ω-tačka ako i samo ako $x \notin X_n$ za svako $i \in N \cup \{0\}$.*

DOKAZ. Prvi deo tvrdjenja sledi iz

$X = X_0 \cup \dots \cup X_{n-2} \cup X_{n-1} \cup X_n \cup X_{(n+1)}$ i $\overline{X}_{n-1} = X_{n-1} \cup X_{(n+1)}$, a drugi iz $X = X_0 \cup \dots \cup X_n \cup \dots \cup X_\omega$.

2.1.2. TVRDJENJE. *Neka je $X + Y$ topološka suma prostora $X, Y \in \mathcal{Z}$. Tada je $(X+Y)_n = X_n + Y_n$ za $n \in \{0, \dots, \omega\}$.*

DOKAZ. Pomoću matematičke indukcije, dokažimo tvrdjenje prvo za $n \in N \cup \{0\}$. Za $n=0$ tvrdjenje je, očigledno, tačno. Pretpostavimo da je $(X+Y)_k = X_k + Y_k$ tačno. Neka je naprimer $x \in X$. Tada na osnovu t.2.1.1. i indukcijske pretpostavke je:

$x \in (X+Y)_{k+1} \Longleftrightarrow x \notin \overline{(X+Y)_k} = \overline{X}_k + \overline{Y}_k$ i $x \notin X_i$, $i \in \{0, \dots, k-1\}$.

Za $n = \omega$ tvrdjenje sledi iz t.2.1.1.(drugi deo) i tačnosti od $(X+Y)_n = X_n + Y_n$ za svako $n \in N \cup \{0\}$, jer

$x \in (X+Y)_\omega \Longleftrightarrow x \notin (X+Y)_n = X_n + Y_n$ za svako $n \in N \cup \{0\}$.

2.1.3. TVRDJENJE. Neka je $X \in \mathcal{Z}$ i skup 1-tačaka X_1 neprazan. Tada je ili podprostor X_1 homeomorfan Cantorovom diskontinumu C ili je X_1 homeomorfan prostoru $C\setminus\{1\}$.

DOKAZ. Neka je X_0 skup izolovanih tačaka od X i $\mathcal{U}_1=\{X_0,X_1,X_{(2)}\}$ dekompozicija od X, koja ispunjava uslove (a),(b),(c). Kako je $X_{(2)}$ zatvoren(prema (a)) u X i X_0 otvoren, sledi da je X_1 otvoren skup u X.

Ako je $X_{(2)}=\emptyset$ tada je $X = X_0 \cup X_1$, pa je X_1 zatvoren u X. S druge strane, prema uslovu (b) je $\overline{X}_0=X\setminus X_1$, tj. $X_1=X\setminus\overline{X}_0$. Prema tome, X_1 je kompaktan podprostor od X i nema izolovanih tačaka, pa na osnovu t.1.4.6. sledi da je $X_1 \approx C$.

Ako je, pak, $X_{(2)} \neq \emptyset$, tada se X_1, kao otvoren skup u X, može izraziti u obliku $X_1 = \bigcup\{G_i \mid i \in N\}$ (prema t.1.1.13.), gde su G_i disjunktni otvoreno-zatvoreni skupovi u X bez izolovanih tačaka. Kako je $C\setminus\{1\} = \bigcup\{V_i \mid i \in N\}$, gde su V_i disjunktni otvoreno-zatvoreni skupovi u C, to je $G_i \approx V_i \approx C$ za svako $i \in N$, odakle sledi da je $X_1 \approx C\setminus\{1\}$.

2.1.4. TVRDJENJE. Neka je $X \in \mathcal{Z}$ i $s(X)=(0,\dots,n-1,n)$, $n \in N$. Tada postoje otvoreno-zatvoreni disjunktni skupovi X^1, X^2 u X tako da je $X = X^1 \cup X^2$, $s(X^1) = (0,\dots,n-2,n)$, $s(X^2) = (0,\dots,n-3,n-1)$.

DOKAZ. Kako je $X = X_0 \cup \dots \cup X_{n-1} \cup X_n$, to na osnovu uslova (a) i (b) sledi da su X_{n-1}, X_n disjunktni i zatvoreni u X. Prema def.1.2.3., postoji otvoreno-zatvoren skup U u X tako da je $X_n \subset U$, $U \cap X_{n-1} = \emptyset$. Označimo $V=X\setminus U$. Tada je $s(U) = (0,\dots,n-2,n)$ i $s(V)=(0,\dots,n-3,n-1)$ ili $s(V)=(0,\dots,n-2,n-1)$. U prvom slučaju stavimo $X^1=U$, $X^2=V$. U drugom slučaju je $V=V_0 \cup \dots \cup V_{n-2} \cup V_{n-1}$, gde su V_{n-2}, V_{n-1} disjunktni i zatvoreni u X,pa postoje disjunktni otvoreno-zatvoreni skupovi U^1,V^1,takvi da je $V=U^1\cup V^1$ i $s(U^1)=(0,\ldots,n-3,n-1)$, $s(V^1)=(0,\ldots,n-4,n-2)$ ili $s(V^1)=(0,\ldots,n-3,n-2)$.Tada stavimo: $X^1=U\cup V^1$; $X^2=U^1$.U oba slučaja su X^1,X^2 disjunktni,otvoreno-zatvoreni u X i $X=X^1\cup X^2$, $s(X^1)=(0,\ldots,n-2,n)$, $s(X^2)=(0,\ldots,n-3,n-1)$,pa je tvrdjenje dokazano.

2.2. TOPOLOŠKA KARAKTERIZACIJA PROSTORA POMOĆU AKUMULACIONOG SPEKTRA

U ovom odeljku se razmatra problem topološke karakterizacije prostora klase $\mathcal{Z}$,pomoću akumulacionog spektra.

M.Marjanović je u [14] pokazao da konačni akumulacioni spektar topološki odredjuje "pune prostore"klase $\mathcal{Z}$. Precizno: Ako $X,Y\in\mathcal{Z}$,$s(X)=s(Y)=(0,\ldots,n-2,n)$ ili $s(X)=s(Y)=(0,\ldots,n-1,n)$,$n\in\{2,3,\ldots\}$, i za svako $i\in N$ iz $X_i\neq\emptyset$, $Y_i\neq\emptyset$ sledi $\overline{X}_i\approx\overline{Y}_i\approx C$,tada su X i Y homeomorfni.

Mi dajemo proširenje ovog rezultata uvodjenjem podklasa $\mathcal{Z}_1$ i $\mathcal{Z}_2$ od $\mathcal{Z}$ i izdvajamo podklase $\mathcal{Z}_3$, $\mathcal{Z}_4$, $\mathcal{Z}_5$, $\mathcal{Z}_6$ klase $\mathcal{Z}$,čiji su prostori,u potpunosti,okarakterisani akumulacionim spektrom(konačnim ili beskonačnim).

2.2.1. PODKLASE $\mathcal{Z}_1$, $\mathcal{Z}_2$, $\mathcal{Z}_3$, $\mathcal{Z}_4$, $\mathcal{Z}_5$, $\mathcal{Z}_6$ KLASE $\mathcal{Z}$

2.2.1.1. DEFINICIJA. Prostor X pripada podklasi $\mathcal{Z}_1$ ako i samo ako $s(X)=(0,\ldots,n-2,n)$,$n\in N\setminus\{1\}$, i svi podprostori $X_2,\ldots,X_{n-2}$ nemaju izolovanih tačaka.

2.2.1.2. DEFINICIJA. Prostor X pripada podklasi $\mathcal{Z}_2$ ako i samo ako $s(X)=(0,\ldots,n-1,n)$,$n\in N\setminus\{1\}$,i svi podprostori $X_2,\dots,X_{n-2}$ nemaju izolovanih tačaka.

2.2.1.3. DEFINICIJA. Prostor X pripada podklasi $\mathcal{Z}_3$ ako i samo ako $s(X)=(0,\dots,n,\dots,\omega)$ i za svako $i\in N$ podprostor X_i nema izolovanih tačaka.

2.2.1.4. DEFINICIJA. Prostor X pripada podklasi $\mathcal{Z}_4$ ako i samo ako $s(X)=(0,\dots,n-2,n), n\in N\setminus\{1\}$, i sve tačke podprostora $X_2,\dots,X_{n-2}$ su izolovane.

2.2.1.5. DEFINICIJA. Prostor X pripada podklasi $\mathcal{Z}_5$ ako i samo ako $s(X)=(0,\dots,n-1,n), n\in N\setminus\{1\}$, i sve tačke podprostora $X_2,\dots,X_{n-2}$ su izolovane.

2.2.1.6. DEFINICIJA. Prostor X pripada podklasi $\mathcal{Z}_6$ ako i samo ako $s(X)=(0,\dots,n,\dots,\omega)$ i za svako $i\in N\setminus\{1\}$ sve tačke podprostora X_i su izolovane.

2.2.1.7. DEFINICIJA. Za prostore $X,Y\in\mathcal{Z}_i, i\in\{1,4\}$, kažemo da su ekvivalentni ako i samo ako $s(X)=s(Y)=(0,\dots,n-2,n)$ i podprostori X_n,Y_n su homeomorfni.

2.2.1.8. DEFINICIJA. Za prostore $X,Y\in\mathcal{Z}_i, i\in\{2,5\}$, kažemo da su ekvivalentni ako i samo ako $s(X)=s(Y)=(0,\dots,n-1,n)$ a podprostori X_{n-1},Y_{n-1} i X_n,Y_n su homeomorfni.

2.2.1.9. DEFINICIJA. Za prostore $X,Y\in\mathcal{Z}_i, i\in\{3,6\}$, kažemo da su ekvivalentni ako i samo ako podprostori X_ω,Y_ω su homeomorfni.

Zbog pogodnosti u izlaganju, kazaćemo da su prostori $X,Y\in\mathcal{Z}$ ekvivalentni i u sledećim slučajevima:

1) $s(X)=s(Y)=(0)$, card X = card Y;

2) $s(X)=s(Y)=(1)$;

3) $s(X)=s(Y)=(0,1)$, card X_0=card Y_0.

2.2.1.10. TVRDJENJE. <u>Neka su</u> $X,Y\in\mathcal{Z}_i, i\in\{1,\dots,6\}$, <u>ekvivalentni prostori. Ako su</u> X', X'' <u>disjunktni otvoreno-zatvoreni skupovi u</u> X, <u>koji ga pokrivaju, tada postoje disjunktni otvoreno-zatvoreni skupovi</u> Y', Y'' <u>u</u> Y, <u>koji ga pokrivaju i takvi da su</u> X', Y' <u>ekvivalentni i</u> X'', Y'' <u>ekvivalentni prostori</u>.

DOKAZ ZA $\mathcal{Z}_1$. Neka su $X,Y\in\mathcal{Z}_1$ i $s(X)=s(Y)=(0,\dots,n-2,n)$. Razlikujemo dva slučaja:

1) $s(X')=(0,\dots,n-2,n)$, $s(X'')\neq s(X')$;

2) $s(X')=s(X'')=(0,\dots,n-2,n)$.

Razmotrimo slučaj 1). Tada razlikujemo: a) $s(X'')=(0)$; b) $s(X'')=(1)$; c) $s(X'')=(0,1)$; d) $s(X'')=(0,\dots,k-2,k), k\in\{2,\dots,n-2\}$; e) $s(X'')=(0,\dots,k-1,k), k\in\{2,\dots,n-2\}$.

Ako je a), tada je X'' konačan. Neka je Y'' podskup od Y_0 takav da card $Y''=$ card X'' i stavimo $Y'=Y\setminus Y''$. Tada $X',Y'\in\mathcal{Z}_1$ su ekvivalentni i X'', Y'' ekvivalentni prostori.

Ako je b), tada postoji otvoreno-zatvoren skup $Y''\subset Y$, takav da je $s(Y'')=(1)$, pa su X'', Y'' ekvivalentni. Uzimajući $Y'=Y\setminus Y''$, dobijamo da su i X', Y' ekvivalentni, jer: $X', Y'\in\mathcal{Z}_1$, $s(X')=s(Y')$, $(X')_n=X_n$, $(Y')_n=Y_n$.

Ako je c), tada postoje otvoreno-zatvoreni skupovi X^1, X^2 da je $X''=X^1\cup X^2$, $s(X^1)=(0)$, $s(X^2)=(1)$. Postoji $Y^1\subset Y_0$ da je card $Y^1=$ card X^1 i $Y^2\subset Y$ da je $s(Y^2)=(1)$. Stavimo: $Y''=Y^1\cup Y^2$, $Y'=Y\setminus Y''$; tada su X'', Y'' i $X', Y'\in\mathcal{Z}_1$ ekvivalentni.

Ako je e), tada, na osnovu t.2.1.4., postoje otvoreno-zatvoreni disjunktni skupovi X^1, X^2 takvi da je: $X''=X^1\cup X^2$, $s(X^1)=(0,\dots,k-2,k)$, $s(X^2)=(0,\dots,k-3,k-1)$. Postoji k-tačka u Y i njena otvoreno-zatvorena okolina U takva da je

$s(U)=(0,\dots,k-2,k)$. Isto tako, postoji $(k-1)$-tačka u Y i njena otvoreno-zatvorena okolina V da je $s(V)=(0,\dots,k-3,k-1)$. Stavimo: $Y'=Y\setminus(U\cup V)$, $Y''=U\cup V$. Tada su X'',Y'' ekvivalentni, jer: $X'',Y''\in\mathcal{Z}_2$; $s(X'')=s(Y'')$; $(X'')_{k-1}\approx(Y'')_{k-1}\approx C$; $(X'')_k\approx(Y'')_k\approx C$. Takodje i X',Y' su ekvivalentni jer: $X',Y'\in\mathcal{Z}_1$; $s(X')=s(Y')$; $(X')_n=X_n$; $(Y')_n=Y_n$; $(X')_n\approx(Y')_n$.

Ako je d), tada postoji k-tačka u Y i njena otvoreno-zatvorena okolina U da je $s(U)=(0,\dots,k-2,k)$. Stavimo: $Y'=Y\setminus U$, $Y''=U$. Tada je: $X'',Y''\in\mathcal{Z}_1$; $s(X'')=s(Y'')$; $(X'')_k\approx(Y'')_k\approx C$, tj. X'',Y'' su ekvivalentni. Nadalje je: $X',Y'\in\mathcal{Z}_1$; $s(X')=s(Y')$; $(X')_n=X_n$; $(Y')_n=Y_n$; $(X')_n\approx(Y')_n$, tj. i X',Y' su ekvivalentni.

Razmotrimo slučaj 2).

Pošto su $X'\cap X_n$, $X''\cap X_n$ disjunktni i zatvoreni u X i $X_n\approx Y_n$, sledi da postoje disjunktni, zatvoreni skupovi F_1,F_2 u Y tako da je: $Y_n=F_1\cup F_2$; $F_1\approx X'\cap X_n$; $F_2\approx X''\cap X_n$. Nadalje, kako je Y nul-dimenzionalan, postoji otvoreno-zatvoren skup Y' u Y tako da je $F_1\subset Y'$, $Y'\cap F_2=\emptyset$. Stavimo $Y''=Y\setminus Y'$. Tada, očigledno, $X',Y'\in\mathcal{Z}_1$ su ekvivalentni i $X'',Y''\in\mathcal{Z}_1$ su ekvivalentni.

DOKAZ ZA $\mathcal{Z}_4$. Neka su $X,Y\in\mathcal{Z}_4$ i $s(X)=s(Y)=(0,\dots,n-2,n)$.

Razlikujemo dva slučaja:

1) $s(X')=(0,\dots,n-2,n)$, $s(X'')\neq s(X')$;

2) $s(X')=s(X'')=(0,\dots,n-2,n)$.

Razmotrimo slučaj 1). Tada razlikujemo: a) $s(X'')=(0)$; b) $s(X'')=(1)$; c) $s(X'')=(0,\dots,k-2,k)$, $k\in\{2,\dots,n-2\}$; d) $s(X'')=(0,\dots,k-1,k)$, $k\in\{1,\dots,n-2\}$.

Ako je a), tada je X'' konačan. Neka je: $Y''\subset Y_0$, card Y''=card X'', i $Y'=Y\setminus Y''$. Tada $X',Y'\in\mathcal{Z}_4$ su ekvivalentni i X'',Y'' su ekvivalentni. Ako b), tada postoji otvoreno-zatvoren podskup Y'' u Y

da je $s(Y'')=(1)$. Stavljajući $Y'=Y\setminus Y''$ dobijamo da su $X',Y'\in\mathcal{Z}_4$ ekvivalentni i X'',Y'' ekvivalentni.

Ako je c), tada je card $(X'')_k<\aleph_0$. Neka je $A=\{y_1,\dots,y_m\}$ podskup od Y_k i card $A=$ card $(X'')_k$. Postoji otvoreno-zatvoren podskup V_r u Y, koji sadrži y_r, $r\in\{1,\dots,m\}$ i takav da je $V_r\cap Y_k=\{y_r\}$ i $V_r\cap\overline{Y}_{k-1}=\emptyset$. Stavljajući $Y''=V_1\cup\dots\cup V_m$, $Y'=Y\setminus Y''$, dobijamo da $X',Y'\in\mathcal{Z}_4$ i $X'',Y''\in\mathcal{Z}_4$ su ekvivalentni.

Ako je d), tada na osnovu t.2.1.4. postoje otvoreno-zatvoreni disjunktni skupovi X^1,X^2 takvi da je: $X''=X^1\cup X^2$, $s(X^1)=(0,\dots,k-2,k)$, $s(X^2)=(0,\dots,k-3,k-1)$.

Ako je $k=1$, tada je $X^1\approx C$, $X^2\subset X_0$, card $X^2<\aleph_0$. Postoji, tada, otvoreno-zatvoren podskup U od Y_1 i podskup V od Y_0 takav da je card $V=$ card X^2. Stavljajući $Y'=Y\setminus(U\cup V)$, $Y''=U\cup V$, dobijamo da $X',Y'\in\mathcal{Z}_4$ i X'',Y'' su ekvivalentni.

Ako je $k=2$, tada je card $(X^1)_2<\aleph_0$, $X^2\approx C$. Neka je $A=\{y_1,\dots,y_m\}\subset Y_2$, card $A=$ card $(X'')_2$ i U otvoreno-zatvoren podskup od Y_1. Neka je V_r otvoreno-zatvoren u Y koji sadrži tačku y_r, $r\in\{1,\dots,m\}$ i takav da je $V_r\cap Y_2=\{y_r\}$ i $V_r\cap Y_1=\emptyset$. Stavljajući $Y''=V_1\cup\dots\cup V_m\cup U$, $Y'=Y\setminus Y''$, dobijamo da X',Y' i X'',Y'' su ekvivalentni.

Za $k>2$ je card $(X^1)_k<\aleph_0$, card $(X^2)_{k-1}<\aleph_0$. Neka: $A=\{y_1,\dots,y_m\}\subset Y_k$, card $A=$ card $(X^1)_k$; $B=\{y'_1,\dots,y'_t\}\subset Y_{k-1}$, card $B=$ card $(X^2)_{k-1}$. Postoje otvoreno-zatvoreni skupovi U_r, $r\in\{1,\dots,m\}$, i V_r, $r\in\{1,\dots,t\}$, u Y takvi da je

$U_r\cap Y_k=\{y_r\}$, $U_r\cap Y_{k-1}=\emptyset$ i $V_r\cap Y_{k-1}=\{y'_r\}$, $V_r\cap Y_{k-2}=\emptyset$.

Stavljajući: $Y''=U_1\cup\dots\cup U_m\cup V_1\cup\dots\cup V_t$, $Y'=Y\setminus Y''$ dobijamo, opet, da X',Y' i X'',Y'' su ekvivalentni.

Razmatranje slučaja 2) je analogno slučaju 2) za $\mathcal{Z}_1$, pa ga izostavljamo.

DOKAZ ZA $\mathcal{Z}_3$ je analogan dokazu za $\mathcal{Z}_1$.

DOKAZ ZA $\mathcal{Z}_6$ je analogan dokazu za $\mathcal{Z}_4$.

DOKAZ ZA $\mathcal{Z}_2$. Neka su $X,Y\in\mathcal{Z}_2$ i $s(X)=s(Y)=(0,\dots,n-1,n)$. Na osnovu t.2.1.4., postoje otvoreno-zatvoreni disjunktni skupovi X^1,X^2 takvi da je $X=X^1\cup X^2$, $s(X^1)=(0,\dots,n-2,n)$, $s(X^2)=(0,\dots,n-3,n-1)$. Isto tako, postoje otvoreno-zatvoreni disjunktni skupovi Y^1,Y^2 takvi da je $Y=Y^1\cup Y^2$, $s(Y^1)=(0,\dots,n-2,n)$, $s(Y^2)=(0,\dots,n-3,n-1)$. Prostori $X^1,Y^1\in\mathcal{Z}_1$ su ekvivalentni, jer je: $s(X^1)=s(Y^1)$, $(X^1)_n=X_n$, $(Y^1)_n=Y_n$. Takodjer i $X^2,Y^2\in\mathcal{Z}_1$ (ako je $n=2$, tada $X^2\approx Y^2\approx C$) su ekvivalentni, jer: $s(X^2)=s(Y^2)$, $(X^2)_{n-1}=X_{n-1}$, $(Y^2)_{n-1}=Y_{n-1}$. Kako tvrdjenje važi za prostore X^1,Y^1 i X^2,Y^2 sledi da važi i za prostore X i Y.

DOKAZ ZA $\mathcal{Z}_5$ je analogan dokazu za $\mathcal{Z}_2$.

2.2.1.11. TVRDJENJE. <u>Neka su</u> $X,Y\in\mathcal{Z}_i$, $i\in\{1,\dots,6\}$, <u>ekvivalentni prostori. Tada</u> X,Y <u>imaju izomorfne baze</u>.

DOKAZ. Na osnovu t.1.4.4., možemo smatrati da su X,Y uronjeni u Cantorov diskontinum C. Pomoću matematičke indukcije konstruišimo otvoreno-zatvorene pokrivače α_n, β_n, $n\in N$, redom za X i Y, čiji su članovi neprazni, medjusobno disjunktni skupovi, dijametra manjeg od $(2/3)^n$ i bijektivna preslikavanja $f_n:\alpha_n\longrightarrow\beta_n$.

Postoje neprazni, otvoreno-zatvoreni disjunktni skupovi X^1, X^2 koji pokrivaju X i dijametra su manjeg od $2/3$. Prema prethodnom tvrdjenju, postoje disjunktni otvoreno-zatvoreni skupovi Y^1,Y^2 koji pokrivaju Y i takvi da je X^{i_1}, $i_1\in\{1,2\}$, ekvivalentno sa Y^{i_1}.Nadalje,postoje neprazni,disjunktni otvoreno-zatvoreni skupovi $Y^{i_1 1}$, $Y^{i_1 2}$ koji pokrivaju Y^{i_1} i dijametra su manjeg od 2/3.Neka su,prema t.2.2.1.10., $X^{i_1 1}$, $X^{i_1 2}$ disjunktni otvoreno-zatvoreni skupovi koji pokrivaju X^{i_1},a redom su ekvivalentni sa $Y^{i_1 1}$, $Y^{i_1 2}$.Prema tome,dobijamo otvoreno-zatvorene pokrivače

$$\alpha_1 = \left\{X^{i_1 i_2}\right\}, \quad \beta_1 = \left\{Y^{i_1 i_2}\right\}; i_1, i_2 \in \{1,2\},$$

redom za X i Y.Neka je $f_1: \alpha_1 \longrightarrow \beta_1$ bijektivno preslikavanje,dato sa $f_1(X^{i_1 i_2}) = Y^{i_1 i_2}$.Pretpostavimo da su

$$\alpha_k = \left\{X^{i_1 \dots i_{2k}}\right\}, \quad \beta_k = \left\{Y^{i_1 \dots i_{2k}}\right\}; i_1, \dots, i_{2k} \in \{1,2\},$$

otvoreno-zatvoreni pokrivači redom za X i Y,čiji su članovi neprazni,medjusobno disjunktni,dijametra manjeg od $(2/3)^k$ i $f_k: \alpha_k \longrightarrow \beta_k$ bijektivno preslikavanje,dato sa $f_k(X^{i_1 \dots i_{2k}}) = Y^{i_1 \dots i_{2k}}$,gde su $X^{i_1 \dots i_{2k}}$, $Y^{i_1 \dots i_{2k}}$ ekvivalentni.Postoje neprazni,disjunktni otvoreno-zatvoreni skupovi $X^{i_1 \dots i_{2k} 1}$, $X^{i_1 \dots i_{2k} 2}$ koji pokrivaju $X^{i_1 \dots i_{2k}}$ i dijametra su manjeg od 2/3 diam $(X^{i_1 \dots i_{2k}})$.Ukoliko je $X^{i_1 \dots i_{2k}}$ jednočlan skup,tada stavimo $X^{i_1 \dots i_{2k} 1} = X^{i_1 \dots i_{2k}}$, $X^{i_1 \dots i_{2k} 2} = \emptyset$.Na osnovu t.2.2.1.10.,postoje disjunktni otvoreno-zatvoreni skupovi $Y^{i_1 \dots i_{2k} 1}$, $Y^{i_1 \dots i_{2k} 2}$ koji pokrivaju $Y^{i_1 \dots i_{2k}}$ i takvi da je $Y^{i_1 \dots i_{2k} i_{2k+1}}$, $i_{2k+1} \in \{1,2\}$,ekvivalentno sa $X^{i_1 \dots i_{2k} i_{2k+1}}$.

Nadalje,postoje disjunktni otvoreno-zatvoreni neprazni skupovi $Y^{i_1\dots i_{2k+1}1}$, $Y^{i_1\dots i_{2k+1}2}$ koji pokrivaju $Y^{i_1\dots i_{2k+1}}$ i dijametra su manjeg od $(2/3)\mathrm{diam}(Y^{i_1\dots i_{2k+1}}) < (2/3)^{k+1}$. Ukoliko je $Y^{i_1\dots i_{2k+1}}$ jednočlan skup,stavimo $Y^{i_1\dots i_{2k+1}1} = Y^{i_1\dots i_{2k+1}}$, $Y^{i_1\dots i_{2k+1}2} = \emptyset$.Prema t.2.2.1.10.,postoje disjunktni otvoreno-zatvoreni skupovi $X^{i_1\dots i_{2k+1}1}$, $X^{i_1\dots i_{2k+1}2}$ koji pokrivaju $X^{i_1\dots i_{2k+1}}$,a ekvivalentni su redom sa $Y^{i_1\dots i_{2k+1}1}$, $Y^{i_1\dots i_{2k+1}2}$ .Prema tome su

$$\alpha_{k+1} = \{X^{i_1\dots i_{2k+2}}\},\quad \beta_{k+1} = \{Y^{i_1\dots i_{2k+2}}\};\ i_{2k+2} \in \{1,2\},$$

otvoreno-zatvoreni pokrivači redom za X,Y,čiji su članovi disjunktni i dijametra manjeg od $(2/3)^{k+1}$.Bijektivno preslikavanje $f_{k+1}: \alpha_{k+1} \to \beta_{k+1}$ definišimo sa $f_{k+1}(X^{i_1\dots i_{2k+2}}) = Y^{i_1\dots i_{2k+2}}$.Time su konstruisani pokrivači α_n, β_n i bijektivna preslikavanja f_n za svako $n \in N$.

Prema konstrukciji pokrivača α_n, β_n i preslikavanja f_n, sledi da familije

$$\alpha = \{U \mid U \in \alpha_n, n \in N\},\quad \beta = \{V \mid V \in \beta_n, n \in N\}$$

su baze za prostore X i Y,a preslikavanje $f: \alpha \to \beta$,definisano sa $f(U) = f_n(U)$ za $U \in \alpha_n$,da je bijektivno.Pri tome α, β, f ispunjavaju sve uslove def.1.4.7.,tj. baze α, β prostora X,Y su izomorfne.

2.2.1.12. TVRDJENJE.Neka su $X,Y \in \mathcal{Z}_i$, $i \in \{1,\dots,6\}$, ekvivalentni prostori.Tada X,Y su homeomorfni.

DOKAZ. Prema prethodnom tvrdjenju X i Y imaju izomorfne baze,a odatle,na osnovu t.1.4.8.,sledi da su X i Y homeomorfni prostori.

Na osnovu činjenice da je ekvivalentnost prostora podklasa $\mathcal{Z}_i, i \in \{1,\dots,6\}$, topološka invarijanta i prethodnog tvrdjenja sledi

2.2.1.13. TVRDJENJE. <u>Prostori</u> $X,Y \in \mathcal{Z}_i, i \in \{1,\dots,6\}$, <u>su homeomorfni ako i samo ako su ekvivalentni.</u>

2.2.2. HOMOGENOST U ODNOSU NA TAČKE ISTOGA REDA

Poznato je da je Cantorov diskontinum C homogen prostor ([5], str.1oo).

2.2.2.1. DEFINICIJA. Kažemo da je prostor $X \in \mathcal{Z}_i$, $i \in \{1,\dots,6\}$, <u>homogen u odnosu na svoje n-tačke</u> ako za svake dve tačke $a,b \in X_n$ postoji homeomorfizam $h:X \longrightarrow X$ takav da je $h(a) = b$.

2.2.2.2. TVRDJENJE. <u>Neka je</u> $X \in \mathcal{Z}_i, i \in \{1,4\}$, <u>i</u> $s(X)=(0,\dots,n-2,n)$, $X_n \approx C$. <u>Tada je</u> X <u>homogen u odnosu na svoje n-tačke.</u>

DOKAZ. Neka su $a,b \in X_n$ proizvoljne tačke. U dokazu t.2.2.1.11., stavljajući $Y=X$, može se postići da bijektivna preslikavanja $f_k: \alpha_k \longrightarrow \beta_k$, $k \in N$, ispunjavaju sledeći uslov:

$$a \in X^{i_1\dots i_{2k}} \Longleftrightarrow b \in f_k(X^{i_1\dots i_{2k}}),\ k \in N.$$

Tada, preslikavanje $h:X \longrightarrow X$, definisano sa

$$h(x) = \bigcap \left\{ f_k(X^{i_1\dots i_{2k}}) \;\middle|\; x \in X^{i_1\dots i_{2k}}, k \in N \right\},$$

je homeomorfizam (videti t.1.4.8.) za koji je $h(a)=b$.

Analogno prethodnom tvrdjenju dokazuje se

2.2.2.3. TVRDJENJE. <u>Neka je</u> $X\in \mathcal{Z}_i, i\in\{3,6\}$, <u>i</u> $X_\omega \approx C$. <u>Tada je</u> X <u>homogen u odnosu na svoje ω-tačke</u>.

2.2.2.4. TVRDJENJE. <u>Neka je</u> $X\in \mathcal{Z}_i, i\in\{1,4\}$, <u>i</u> $s(X)=(0,\dots,n-2,n)$. <u>Tada je prostor</u> X <u>homogen u odnosu na svoje k-tačke za</u> $k\leq n-2$.

DOKAZ ZA $\mathcal{Z}_1$. Neka su $a,b\in X_k$ proizvoljne tačke. Ako je $k=0$, tada preslikavanje $h:X\longrightarrow X$, dato sa: $h(a)=b$; $h(b)=a$; $h(x)=x$ za $x\in X\setminus\{a,b\}$, je, očigledno, homeomorfizam. Neka je $k\neq 0$. Na osnovu t.2.1.1., postoje otvoreno-zatvorene, disjunktne okoline U_a, U_b u X tačaka $a,b\in X_k$, koje ispunjavaju uslove: $U_a\cap \overline{X}_{k-1}=\emptyset$, $U_b\cap \overline{X}_{k-1}=\emptyset$.

Za $k>1$, prostori U_a, U_b pripadaju podklasi $\mathcal{Z}_1$ i ispunjavaju uslove: $s(U_a)=s(U_b)=(0,\dots,k-2,k)$ (prema t.2.1.2.), $(U_a)_k\approx(U_b)_k\approx C$, pa na osnovu t.2.2.2.2. postoji homeomorfizam $h_1:U_a\longrightarrow U_b$ da je $h_1(a)=b$. Tada preslikavanje $h:X\longrightarrow X$, definisano sa

$$(1)\qquad h(x)=\begin{cases} h_1(x) & \text{za } x\in U_a\\ h_1^{-1}(x) & \text{za } x\in U_b\\ x & \text{za } x\in X\setminus(U_a\cup U_b),\end{cases}$$

je homeomorfizam, koji ispunjava uslov $h(a)=b$.

Za $k=1$, okoline U_a, U_b nemaju izolovanih tačaka, pa su prostori U_a, U_b homeomorfni sa C. Kako je prostor C homogen, to preslikavanje $h:X\longrightarrow X$, definisano sa (1), je homeomorfizam, koji ispunjava uslov $h(a)=b$.

DOKAZ ZA $\mathcal{Z}_4$. Neka $a,b\in X_k$ su proizvoljne tačke.

Za $k\in\{0,1\}$ dokaz je isti kao za $\mathcal{Z}_1$.

Neka je $k>1$. Kako su tačke a,b izolovane u X_k, to postoje njihove disjunktne otvoreno-zatvorene okoline U_a, U_b u X takve da je: $U_a \cap X_k = \{a\}$, $U_a \cap \overline{X}_{k-1} = \emptyset$; $U_b \cap X_k = \{b\}$, $U_b \cap \overline{X}_{k-1} = \emptyset$. Prema tome: $U_a, U_b \in \mathcal{Z}_3$; $s(U_a) = s(U_b) = (0,\ldots,k-2,k)$; $(U_a)_k \approx (U_b)_k$, pa su, na osnovu t.2.2.1.12., prostori U_a i U_b homeomorfni. Ako je $h_1 : U_a \longrightarrow U_b$ homeomorfizam, tada mora biti $h_1(a) = b$ (jer su a, b jedine k-tačke u U_a, U_b). Preslikavanje $h : X \longrightarrow X$, definisano sa (1), je homeomorfizam, za koji je $h(a) = b$.

Sledeća dva tvrdjenja se dokazuju analogno prethodnom.

2.2.2.5. TVRDJENJE. <u>Neka je</u> $X \in \mathcal{Z}_i$, $i \in \{2,5\}$, <u>i</u> $s(X) = (0,\ldots,n-1,n)$. <u>Tada je</u> X <u>homogen u odnosu na svoje k-tačke za</u> $k < n-1$ (za $n=2$ je $k \leq 1$).

2.2.2.6. TVRDJENJE. <u>Neka je</u> $X \in \mathcal{Z}_i$, $i \in \{3,6\}$. <u>Tada je prostor</u> X <u>homogen u odnosu na svoje k-tačke za</u> $k \in N$.

Na osnovu t.2.2.2.2. i t.2.2.2.4., sledi

2.2.2.7. TVRDJENJE. <u>Neka je</u> $X \in \mathcal{Z}_i$, $i \in \{1,4\}$, <u>i</u> $s(X) = (0,\ldots,n-2,n)$, $X_n \approx C$. <u>Tada je</u> X <u>homogen u odnosu na sve svoje k-tačke.</u>

Na osnovu t.2.1.4., t.2.2.2.2. i t.2.2.2.5., sledi

2.2.2.8. TVRDJENJE. <u>Neka je</u> $X \in \mathcal{Z}_i$, $i \in \{2,5\}$, <u>i</u> $s(X) = (0,\ldots,n-1,n)$, $X_{n-1} \approx X_n \approx C$. <u>Tada je</u> X <u>homogen u odnosu na sve svoje k-tačke.</u>

Na osnovu t.2.2.2.3. i t.2.2.2.6., sledi

2.2.2.9. TVRDJENJE. <u>Neka je</u> $X \in \mathcal{Z}_i$, $i \in \{3,6\}$, <u>i</u> $X_\omega \approx C$. <u>Tada je</u> X <u>homogen u odnosu na sve svoje k-tačke.</u>

2.3. KONSTRUKCIJE PROSTORA PODKLASA $\mathcal{Z}_i, i\in\{1,\dots,6\}$

U odeljku 2.2. je data topološka karakterizacija prostora podklasa $\mathcal{Z}_i, i\in\{1,\dots,6\}$. U ovome odeljku navodimo konstrukcije prostora podklasa $\mathcal{Z}_i$, i time dokazujemo egzistenciju tih podklasa.

Sa C_o označavaćemo prostor koji se sastoji od jedne tačke, a sa C_1 prostor koji je homeomorfan Cantorovom diskontinumu C.

2.3.1. TVRDJENJE. <u>Za svako</u> $n\in N\setminus\{1\}$ <u>postoji prostor</u> $C_n\in\mathcal{Z}_1$ <u>takav da je</u> $s(C_n)=(0,\dots,n-2,n)$, $(C_n)_n\approx C$.

DOKAZ. Koristićemo se matematičkom indukcijom. Prvo konstruišimo C_2. U svaki od odbačenih intervala, pri konstrukciji Cantorovog diskontinuma, uronimo prostor C_o. Tada unija prostora C i svih, ovako uronjenih, prostora C_o je prostor C_2. Prostor C_3 konstruišemo na sledeći način: U svaki od odbačenih intervala, pri konstrukciji prostora C, uronimo prostore C_o i C_1 tako da budu disjunktni. Tada unija prostora C i svih, ovako uronjenih, prostora C_o i C_1 daje prostor C_3. Pretpostavimo da su prostori C_{k-1} i C_k konstruisani. U svaki od odbačenih intervala, pri konstrukciji prostora C, uronimo prostore C_{k-1} i C_k tako da budu disjunktni. Tada unija prostora C i svih, ovako uronjenih, prostora C_{k-1} i C_k je prostor C_{k+2}. Zaista, prema konstrukciji i t. 2.1.1., 2.1.2., je: $C_{k+2}\in\mathcal{Z}_1$, $s(C_{k+2})=(0,\dots,k,k+2)$, $(C_{k+2})_{k+2}=C$.

Na osnovu prethodnog tvrdjenja sledi

2.3.2. TVRDJENJE. Za svako $n \in N \setminus \{1\}$ postoji prostor $X \in \mathcal{Z}_2$ takav da je $s(X)=(0,\dots,n-1,n)$, $X_{n-1} \approx X_n \not\approx C$.

DOKAZ. Neka je $X = C_{n-1} + C_n$ topološka suma prostora C_{n-1} i C_n. Tada je, na osnovu prethodnog tvrdjenja i t.2.1.2., ipunjeno: $X \in \mathcal{Z}_2$, $s(X)=(0,\dots,n-1,n)$, $X_{n-1} \approx C$, $X_n \not\approx C$.

2.3.3. TVRDJENJE. Postoji prostor $C_\omega \in \mathcal{Z}_3$ takav da je $(C_\omega)_\omega \approx C$.

DOKAZ. U svaki od odbačenih intervala, pri konstrukciji Cantorovog diskontinuma, uronimo niz medjusobno disjunktnih prostora $C_1, C_2, \dots$ tako da dijametri i razdaljine tih prostora od levih krajeva odgovarajućih odbačenih intervala teže prema nuli. Unija Cantorovog diskontinuma C i svih ovako uronjenih prostora je prostor C_ω. Zaista, prema konstrukciji, svaka tačka iz C je tačka nagomilavanja za $C_1, C_2, \dots$, pa je $(C_\omega)_\omega = C$ i $(C_\omega)_n = \bigcup\{(C_k)_n,\ k \geqslant n\}$, tj. za svako $n \in N$ $(C_\omega)_n$ nema izolovanih tačaka. Prema tome $C_\omega \in \mathcal{Z}_3$ i $(C_\omega)_\omega \approx C$.

Za konstrukcije prostora podklasa $\mathcal{Z}_i, i \in \{1,\dots,6\}$, potrebna su nam izvesna tvrdjenja koja su vezana za pojam "dekompozicije poluneprekidne odozgo".

2.3.4. DEFINICIJA. Neka je X topološki prostor. Kažemo da je dekompozicija $\mathcal{D}$ od X, čiji su elementi zatvoreni skupovi u X, poluneprekidna odozgo ako je ispunjen uslov: Za svako $D \in \mathcal{D}$ i svaki otvoren skup U u X, koji sadrži D, postoji otvoren skup $V \subset U$ u X koji sadrži D i unija je elemenata dekompozicije $\mathcal{D}$ ([26], str.61).

Dekompoziciju poluneprekidnu odozgo označavaćemo sa u.s.c.

Preslikavanje $p: X \to \mathcal{D}$, definisano sa $x \in p(x)$, $x \in X$, nazivamo <u>prirodnom projekcijom</u>. Sa $X/\mathcal{D}$ označavamo kvocijent prostor induciran dekompozicijom $\mathcal{D}$.

2.3.5. TVRDJENJE. *Neka je A zatvoren podskup prostora X i $\mathcal{D}$ u.s.c. dekompozicija od A. Tada dekompozicija $\mathcal{D}'$, koju čine elementi dekompozicije $\mathcal{D}$ i tačke skupa $X \setminus A$, je u.s.c. dekompozicija od X.*

DOKAZ. Neka je $D \in \mathcal{D}'$ proizvoljan element i G proizvoljan otvoren skup u X koji sadrži D. Pokažimo da postoji otvoren skup $V \subset G$ u X, koji sadrži D i unija je elemenata iz $\mathcal{D}'$. Neka je $D \in X \setminus A$. Tada je $V=(X \setminus A) \cap U$ otvoren skup u X, $D \subset V$, i V je unija elemenata iz $\mathcal{D}'$.
Neka je $D \in \mathcal{D}$. Pošto je $\mathcal{D}$ u.s.c. dekompozicija od A, to u otvorenom skupu $G \cap A$ (u odnosu na A) postoji otvoren skup W (u odnosu na A) koji sadrži D i unija je elemenata iz $\mathcal{D}$. Postoji otvoren skup H u X takav da je $W = H \cap A$. Tada je skup $V=H \cap G$ otvoren u X, $D \subset V \subset G$, i unija je elemenata iz $\mathcal{D}'$. Dakle, prema def.2.3.4., $\mathcal{D}'$ je u.s.c. dekompozicija od X.

2.3.6. TVRDJENJE. *Neka je X kompaktan metrički prostor i $\mathcal{D}$ njegova u.s.c. dekompozicija. Tada je kvocijent prostor $X/\mathcal{D}$ kompaktan i metrizabilan.*

DOKAZ. Kako je X metrički i $\mathcal{D}$ u.s.c. dekompozicija od X, sledi da je $X/\mathcal{D}$ normalan Hausdorffov prostor ([7],t.5., str.195). Prema tome, $X/\mathcal{D}$ je neprekidna slika $p(X)$ kompaktnog metričkog prostora X na Hausdorffov prostor $X/\mathcal{D}$, pa je ovaj kompaktan i metrizabilan ([5],t.23.,str.126).

2.3.7. TVRDJENJE. *Neka je $X \in \mathcal{X}$, $\mathcal{D}$ u.s.c.dekompozicija*

<u>zatvorenog skupa</u> A <u>u</u> X <u>i neka</u> $A/\mathcal{D} \in \mathcal{Z}$. <u>Tada dekompozicija</u> $\mathcal{D}'$ <u>od</u> X, <u>definisana kao u t.2.3.5., inducira kvocijent prostor</u> $X/\mathcal{D}' \in \mathcal{Z}$.

DOKAZ. Na osnovu prethodna dva tvrdjenja, sledi da je $X/\mathcal{D}'$ kompaktan metrički prostor, pa preostaje još pokazati da je nul-dimenzionalan. U tačkama od $X\setminus A$ nul-dimenzionost sledi neposredno, jer je $X\setminus A$ otvoren skup u $X/\mathcal{D}'$. Neka je $D\in\mathcal{D}$ proizvoljno i U ma koji otvoren skup u $X/\mathcal{D}'$ koji sadrži D. Pokažimo da postoji otvoreno-zatvoren skup u X, sadžan u U, koji sadrži D i unija je elemenata iz $\mathcal{D}'$. Skup $p^{-1}(U)$ je otvoren u X i unija je elemenata iz $\mathcal{D}'$. Prema tome $p^{-1}(U)\cap A$ je otvoren u A i unija je elemenata iz $\mathcal{D}$, pa je $U\cap p(A)$ otvoren u $A/\mathcal{D}$. Kako je $A/\mathcal{D}$ nul-dimenzion, postoji otvoreno zatvoren skup G u $A/\mathcal{D}$ takav da je $p^{-1}(D)\subset p^{-1}(G)\subset p^{-1}(U)\cap A$. Skup $p^{-1}(G)$ je otvoren u A, pa postoji otvoren skup V u X takav da je $p^{-1}(G)=V\cap A$. Dakle je $p^{-1}(G)\subset V\cap p^{-1}(U)$. Kako je X nul-dimenzion i $p^{-1}(G)$ zatvoren u X, postoji otvoreno-zatvoren skup H u X takav da je $p^{-1}(G)\subset H\subset V\cap p^{-1}(U)$. Kako je $H\cap A=p^{-1}(G)$ i $H\subset p^{-1}(U)$ to smo pokazali da je $p(H)$ otvoreno-zatvoren skup u $X/\mathcal{D}'$, sadržan u U, a sadrži D, pa je tvrdjenje dokazano.

NAPOMENA. Prethodno tvrdjenje je neposredna posledica t.1.2.7.

2.3.8. TVRDJENJE. <u>Za svako</u> $n\in N\setminus\{1\}$ <u>postoji prostor</u> $I_n\in\mathcal{Z}_4$ <u>takav da je</u> $s(I_n)=(0,\ldots,n-2,n)$ <u>i</u> $(I_n)_n$ <u>jednočlan skup</u>.

DOKAZ. Koristićemo matematičku indukciju. Prostor I_2 je unija članova konvergentnog niza(različitih članova) realnih brojeva i njegove granične vrednosti. Prostor I_3 je unija Cantorovog diskontinuma i članova konvergentnog niza, koji konvergira prema jedinici (pri čemu članovi niza nisu iz C). Prostor I_4 konstruišemo na sledeći način. U svaki odbačeni interval, pri konstrukciji Cantorovog diskontinuma, uronimo C_1 i I_2 tako da budu disjunktni. Uniju svih ovih prostora i Cantorovog diskontinuma označimo sa A_4. Tada je: $A_4 \in \mathcal{Z}_4$, $s(A_4)=(0,1,2,4)$, $(A_4)_4=C$. Identifikacijom svih 4-tačaka prostora A_4 dobijamo kvocijent-prostor $A_4/(A_4)_4$, koji, prema t. 2.3.7., je iz $\mathcal{Z}$, a prema konstrukciji pripada $\mathcal{Z}_4$ i ima samo jednu 4-tačku; dakle $I_4=A_4/(A_4)_4$.

Pretpostavimo da su prostori $I_2,\ldots,I_k$ konstruisani, pa konstruišimo I_{k+1}. U svaki odbačeni interval, pri konstrukciji Cantorovog diskontinuma C, uronimo I_{k-2} i I_{k-1} tako da budu disjunktni. Neka je A_{k+1} unija svih ovih prostora i prostora C. Tada je: $A_{k+1} \in \mathcal{Z}_4$, $s(A_{k+1})=(0,\ldots,k-1,k+1)$, $(A_{k+1})_{k+1}=C$. Kvocijent-prostor, koji nastaje od A_{k+1} identifikacijom svih njegovih $(k+1)$-tačaka je I_{k+1}, jer, prema t. 2.3.7., je iz $\mathcal{Z}$, a prema konstrukciji, akumulacioni spektar mu je $(0,\ldots,k-1,$ $,k+1)$, sve i-tačke, $i \in \{2,\ldots,k-1\}$, su mu izolovane i ima samo jednu $(k+1)$-tačku. Prema tome, na osnovu matematičke indukcije tvrdjenje je dokazano.

2.3.9. TVRDJENJE. <u>Za svako</u> $Z \in \mathcal{Z}$ <u>i svako</u> $n \in N \setminus \{1\}$, <u>postoji prostor</u> $X \in \mathcal{Z}_1$ <u>takav da je</u> $s(X)=(0,\ldots,n-2,n)$ <u>i</u> $X_n \approx Z$.

DOKAZ. Na osnovu t. 2.3.1., postoji $C_n \in \mathcal{Z}_1$ takav da je $(C_n)_n = C$. Pošto je Z kompaktan metrički prostor, to postoji u.s.c. dekompozicija $\mathcal{D}$ od $(C_n)_n$ takva da je $(C_n)_n/\mathcal{D} \approx Z$ ([5], t.28., str.127 i t.31., str.132). Neka je $\mathcal{D}'$ dekompozicija od

C_n,koju čine elementi dekompozicije $\mathcal{D}$ i tačke skupa $C_n \setminus (C_n)_n$. Prema t.2.3.5.,dekompozicija $\mathcal{D}'$je u.s.c.,pa na osnovu t. 2.3.7. je $C_n/\mathcal{D}' \in \mathcal{Z}$.Pokažimo da je $X = C_n/\mathcal{D}'$.Zaista,prema konstrukciji je: $X_i = (C_n)_i, i \in \{0,\ldots,n-2\}$, $s(X)=(0,\ldots,n-2,n)$, $X_n \approx Z$, pa je X traženi prostor.

2.3.10. TVRDJENJE. <u>Za svako</u> $Z \in \mathcal{Z}$ <u>postoji prostor</u> $X \in \mathcal{Z}_3$ <u>takav da je</u> $X_\omega \approx Z$.

DOKAZ. Na osnovu t.2.3.3.,postoji prostor $C_\omega \in \mathcal{Z}_3$ takav da je $(C_\omega)_\omega = C$. Nadalje,postoji u.s.c. dekompozicija $\mathcal{D}$ od $(C_\omega)_\omega$ takova da je $(C_\omega)_\omega/\mathcal{D} \approx Z$ (videti prethodno tvrdjenje). Neka je $\mathcal{D}'$ dekompozicija od C_ω koju čine elementi od dekompozicije $\mathcal{D}$ i tačke skupa $C_\omega \setminus (C_\omega)_\omega$. Tada je $X = C_\omega/\mathcal{D}'$ traženi prostor,jer je: $X \in \mathcal{Z}$(prema t.2.3.5.,2.3.7.); $X_i = (C_\omega)_i$, $i \in N \cup \{0\}$; $X_\omega = (C_\omega)_\omega/\mathcal{D}' \approx Z$.

2.3.11. TVRDJENJE. <u>Za svako</u> $Z \in \mathcal{Z}$ <u>i svako</u> $n \in N \setminus \{1\}$ <u>postoji prostor</u> $X \in \mathcal{Z}_4$ <u>takav da je</u> $s(X)=(0,\ldots,n-2,n)$ <u>i</u> $X_n \approx Z$.

DOKAZ. Neka je $A_n \in \mathcal{Z}_4$, $s(A_n)=(0,\ldots,n-2,n)$, $(A_n)_n = C$, definisan kao u dokazu t.2.3.8. Postoji u.s.c. dekompozicija $\mathcal{D}$ od $(A_n)_n$ takva da $(A_n)_n/\mathcal{D} \approx Z$ (videti dokaz t.2.3.9.). Neka je $\mathcal{D}'$ dekompozicija od A_n koju čine elementi iz $\mathcal{D}$ i tačke od $A_n \setminus (A_n)_n$. Na osnovu t.2.3.5., $\mathcal{D}'$ je u.s.c.,pa prema t.2.3.7. je $A_n/\mathcal{D}' \in \mathcal{Z}$. Pokažimo da je $X = A_n/\mathcal{D}'$ .Zaista, prema konstrukciji je: $X_i = (A_n)_i, i \in \{0,\ldots,n-2\}$, $X_n \approx Z$,pa je X traženi prostor.

2.3.12. TVRDJENJE. <u>Za svako</u> $Z^1, Z^2 \in \mathcal{Z}$ <u>i svako</u> $n \in N \setminus \{1,2\}$ <u>postoji prostor</u> $X \in \mathcal{Z}_i, i \in \{2,5\}$ <u>takav da je</u>:$s(X)=(0,\ldots,n-1,n)$;

$X_{n-1} \approx Z^1$; $X_n \approx Z^2$.

DOKAZ. Na osnovu t.2.3.9. i t.2.3.11., postoje prostori $X^1, X^2 \in \mathcal{X}_i, i \in \{1,4\}$, takvi da je: $s(X^1)=(0,\dots,n-3,n-1)$, $(X^1)_{n-1} \approx Z^1$; $s(X^2)=(0,\dots,n-2,n)$, $(X^2)_n \approx Z^2$. Topološka suma $X = X^1+X^2$ ispunjava uslove: $X \in \mathcal{X}_i, i \in \{2,5\}$, $s(X)=(0,\dots,n-1,n)$ (na osnovu t.2.1.2.); $X_{n-1}=(X^1)_{n-1} \approx Z^1$; $X_n=(X^2)_n \approx Z^2$, pa je X traženi prostor.

2.3.13. TVRDJENJE. <u>Postoji prostor</u> $I_\omega \in \mathcal{X}_6$ <u>takav da je</u> $(I_\omega)_\omega \approx C$.

DOKAZ. U svaki od odbačenih intervala, pri konstrukciji Cantorovog diskontinuma C, uronimo niz medjusobno disjunktnih prostora $I_2, I_3, \dots$ (videti t.2.3.8.) tako da dijametri i razdaljine tih prostora od levih krajeva odgovarajućih odbačenih intervala teže prema nuli. Unija Cantorovog diskontinuma i svih ovako uronjenih prostora je traženi prostor I_ω Zaista, prema konstrukciji, svaka tačka iz C je tačka nagomilavanja za $I_2, I_3, \dots$, pa je $(I_\omega)_\omega = C$. Osim toga je $(I_\omega)_n = \bigcup\{(I_k)_n,\ k \geqslant n\}$, pa za svako $n \in N$ sve tačke od $(I_\omega)_n$ su izolovane. Prema tome je $I_\omega \in \mathcal{X}_6$ i $(I_\omega)_\omega \approx C$.

2.3.14. TVRDJENJE. <u>Za svako</u> $Z \in \mathcal{Z}$ <u>postoji prostor</u> $X \in \mathcal{X}_6$ <u>takav da je</u> $X_\omega \approx Z$.

DOKAZ. Neka je I_ω prostor iz prethodnog tvrdjenja. Postoji u.s.c. dekompozicija $\mathcal{D}$ od $(I_\omega)_\omega$ takva da je $(I_\omega)_\omega/\mathcal{D} \approx Z$. Neka je $\mathcal{D}'$ dekompozicija od I_ω koju čine elementi od $\mathcal{D}$ i tačke od $I_\omega \setminus (I_\omega)_\omega$. Prema t.2.3.5., dekompozicija $\mathcal{D}'$ je u.s.c., pa, na osnovu t.2.3.7., $I_\omega/\mathcal{D}' \in \mathcal{Z}$. Prostor $X=I_\omega/\mathcal{D}'$ je traženi prostor, jer: $X_k=(I_\omega)_k$, $k \in N \cup \{0\}$, i $X_\omega=(I_\omega)_\omega/\mathcal{D} \approx Z$.

2.4. JOŠ O KARAKTERIZACIJI PROSTORA POMOĆU AKUMULACIONOG SPEKTRA

2.4.1. TVRDJENJE. <u>Neka su prostori</u> $X,Y\in\mathcal{Z}$ <u>takvi da je</u> $s(X)=s(Y)=(0,1)$, $X_0\approx Y_0$. <u>Tada su</u> X <u>i</u> Y <u>homeomorfni.</u>

DOKAZ. Iz $s(X)=s(Y)=(0,1)$ sledi da su X_1,Y_1 otvoreno-zatvoreni skupovi redom u X i Y. K tome je ,prema t.2.1.3., $X_1\approx Y_1\approx C$,pa iz: $X=X_0\cup X_1, Y=Y_0\cup Y_1, X_0\approx Y_0, X_1\approx Y_1$ sledi $X\approx Y$.

Na osnovu t.2.2.1.12.,slede tvrdjenja:

2.4.2. TVRDJENJE. <u>Neka su prostori</u> $X,Y\in\mathcal{Z}$ <u>takvi da je</u> $s(X)=s(Y)=(0,2)$, $X_2\approx Y_2$. <u>Tada su</u> X <u>i</u> Y <u>homeomorfni.</u>

NAPOMENA. Prethodno tvrdjenje je specijalan slučaj tvrdjenja Pelczyńskog [20],za kompaktne metričke prostore.

2.4.3. TVRDJENJE. <u>Neka su prostori</u> $X,Y\in\mathcal{Z}$ <u>takvi da je</u> $s(X)=s(Y)=(0,1,2)$, $X_2\approx Y_2$. <u>Tada su</u> X <u>i</u> Y <u>homeomorfni.</u>

2.4.4. TVRDJENJE. <u>Neka su prostori</u> $X,Y\in\mathcal{Z}$ <u>takvi da je</u> $s(X)=s(Y)=(0,1,3)$, $X_3\approx Y_3$. <u>Tada su</u> X <u>i</u> Y <u>homeomorfni.</u>

2.4.5. TVRDJENJE. <u>Neka su prostori</u> $X,Y\in\mathcal{Z}$ <u>takvi da je</u> $s(X)=s(Y)=(0,1,2,3)$, $X_2\approx Y_2$, $X_3\approx Y_3$. <u>Tada su</u> X <u>i</u> Y <u>homeomorfni.</u>

Na osnovu prethodnih tvrdjenja,prirodno se nameće

PITANJE. Da li su $X,Y\in\mathcal{Z}$ homeomorfni prostori ako ispunjavaju uslove: 1) $s(X)=s(Y)=(0,\dots,n-2,n)$ ili $s(X)=s(Y)=(0,\dots,n-1,n)$, 2) Za svako $i\in\{0,\dots,n\}$ je $X_i\approx Y_i$, $\overline{X}_i\approx\overline{Y}_i$.

Na osnovu prethodnih tvrdjenja sledi da je odgovor potvrdan za $n\leq 3$. Primer,koji sledi,pokazuje da je odgovor negativan već za $n=4$.

PRIMER. Sa $C_1(a,b)$ označimo Cantorov diskontinum segmenta $[a,b]$, tj. podprostor od $[a,b]$ dobijen konstrukcijom koja je analogna onoj za Cantorov diskontinum C segmenta $[0,1]$. Sa $C_2(a,b)$ označimo prostor segmenta $[a,b]$ dobijen konstrukcijom koja je analogna onoj za prostor C_2 segmenta $[0,1]$ (videti t.2.3.1.).

Neka je (c_m) strogo rastući niz realnih brojeva koji konvergira broju α i (a_n^m) strogo rastući niz realnih brojeva, koji konvergira ka c_m, $m\in N$. Neka je, nadalje, (d_m) strogo opadajući niz realnih brojeva, koji konvergira broju α i (b_n^m) strogo opadajući niz realnih brojeva, koji konvergira ka d_m, $m\in N$. Prostori

$$X=\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\Big[C_1(a_{6n-2}^m,a_{6n-1}^m)\cup C_2(a_{6n-5}^m,a_{6n-4}^m)\cup\{a_{3n}^m-\tfrac{1}{k}\mid k\in N\}\cup\{c_m\}\Big]\cup\{\alpha\},$$

$$Y=X\cup\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\Big[C_1(b_{4n}^m,b_{4n-1}^m)\cup C_2(b_{4n-2}^m,b_{4n-3}^m)\cup\{d_m\}\Big]$$

(kao podprostori od R^1) pripadaju klasi $\mathcal{Z}$ (prema t.1.2.7.), $s(X)=s(Y)=(0,1,2,4)$, a prostori njihovih 4-tačaka su

$$X_4=\{\alpha\}\cup\bigcup_{m=1}^{\infty}\{c_m\}\ ,\quad Y_4=\{\alpha\}\cup\bigcup_{m=1}^{\infty}\{c_m\}\cup\bigcup_{m=1}^{\infty}\{d_m\}\ .$$

Pokažimo da X,Y ispunjavaju sledeće uslove:

1) $X_0\approx Y_0$, 2) $\overline{X}_0\approx\overline{Y}_0$, 3) $X_1\approx Y_1$, 4) $\overline{X}_1\approx\overline{Y}_1$,

5) $X_2\approx Y_2$, 6) $\overline{X}_2\approx\overline{Y}_2$, 7) $X_4=\overline{X}_4\approx\overline{Y}_4=Y_4$, 8) $X\not\approx Y$.

Uslov 1) je, očigledno, ispunjen.

2) Prostor $B^m=\{d_m\}\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}C_2(b_{4n-2}^m,b_{4n-3}^m)$ je homeomorfan prostoru $C_2(a_1^m,a_2^m)$, $m\in N$, pa postoji pravi otvoreno-zatvoren podskup A^m od $C_2(a_1^m,a_2^m)$ i homeomorfizmi: $h_m\colon A^m\longrightarrow B^m$,

$g_m : C_2(a_1^m,a_2^m) \setminus A^m \longrightarrow C_2(a_1^m,a_2^m)$. Preslikavanje $h: \overline{X}_o \longrightarrow \overline{Y}_o$, definisano sa:

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{za } x \in \overline{X}_o \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} C_2(a_1^m,a_2^m) \\ h_m(x) & \text{za } x \in A^m \\ g_m(x) & \text{za } x \in C_2(a_1^m,a_2^m) \setminus A^m, \end{cases}$$

je homeomorfizam.

3) Prostori X_1, Y_1 su homeomorfni, jer, na osnovu t.2.1.3., svaki od njih je homeomorfan sa $C \setminus \{1\}$.

4) Prostori $\overline{X}_1, \overline{Y}_1$ su homeomorfni, jer svaki od njih nema izolovanih tačaka, pa je homeomorfan sa C.

5) Prostori 2-tačaka od X, Y redom su:

$$X_2 = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[C_2(a_{6n-5}^m, a_{6n-4}^m) \setminus (C_2(a_{6n-5}^m, a_{6n-4}^m))_o \cup \{a_{3n}^m\} \right],$$

$$Y_2 = X_2 \cup \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} C_2(b_{4n-2}^m, b_{4n-3}^m) \setminus (C_2(b_{4n-2}^m, b_{4n-3}^m))_o .$$

Postoji pravi otvoreno-zatvoren podskup A_n^m od $B_n^m = C_2(a_{6n-5}^m, a_{6n-4}^m) \setminus (C_2(a_{6n-5}^m, a_{6n-4}^m))_o$ takav da je $A_n^m \approx B_n^m$ (primetimo da je $B_n^m \approx C$). Dakle, postoje homeomorfizmi:

$h_n^m: A_n^m \longrightarrow C_2(b_{4n-2}^m, b_{4n-3}^m) \setminus (C_2(b_{4n-2}^m, b_{4n-3}^m))_o$; $g_n^m: B_n^m \setminus A_n^m \longrightarrow B_n^m$.

Preslikavanje $h: X_2 \longrightarrow Y_2$, definisano sa

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{za } x \in X_2 \setminus \bigcup_{m,n} B_n^m \\ h_n^m(x) & \text{za } x \in A_n^m \\ g_n^m(x) & \text{za } x \in B_n^m \setminus A_n^m, \end{cases}$$

je homeomorfizam.

6) Pokažimo da su prostori

$$\overline{X}_2 = \{\alpha\} \cup \bigcup_m \{c_m\} \cup \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^m \cup \{a_{3n}\},$$

$$\overline{Y}_2 = \overline{X}_2 \cup \bigcup_m \{d_m\} \cup \bigcup_{m,n} C_2(b_{4n-2}^m, b_{4n-3}^m) \setminus (C_2(b_{4n-2}^m, b_{4n-3}^m))_o$$

homeomorfni.

Prostor $B^m = \{d_m\} \cup \bigcup_n C_2(b^m_{4n-2}, b^m_{4n-3}) \setminus (C_2(b^m_{4n-2}, b^m_{4n-3}))_o$, $m \in N$, je homeomorfan sa C, pa postoji pravi otvoreno-zatvoren podskup A^m od $C_2(a^m_1, a^m_2) \setminus (C_2(a^m_1, a^m_2))_o \approx C$, takav da je $A^m \approx B^m$. Dakle, postoje homeomorfizmi $h_m: A^m \longrightarrow B^m$,

$g_m: C_2(a^m_1, a^m_2) \setminus (C_2(a^m_1, a^m_2))_o \setminus A^m \longrightarrow C_2(a^m_1, a^m_2) \setminus (C_2(a^m_1, a^m_2))_o$.

Preslikavanje $h: \overline{X}_2 \longrightarrow \overline{Y}_2$, definisano sa

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{za } x \in \overline{X}_2 \setminus \bigcup_m C_2(a^m_1, a^m_2) \setminus (C_2(a^m_1, a^m_2))_o \\ h_m(x) & \text{za } x \in A^m \\ g_m(x) & \text{za } x \in C_2(a^m_1, a^m_2) \setminus (C_2(a^m_1, a^m_2))_o \setminus A^m, \end{cases}$$

je homeomorfizam.

7) Prostori

$$X_4 = \overline{X}_4 = \{\alpha\} \cup \bigcup_m \{c_m\} \;;\; Y_4 = \overline{Y}_4 = \{\alpha\} \cup \bigcup_m \{c_m, d_m\}$$

su konvergentni nizovi, pa su homeomorfni.

8) Prostori X, Y nisu homeomorfni, jer u svakoj okolini tačke $c_m \in X$, $m \in N$, ima izolovanih 2-tačaka, dok u dovoljno maloj okolini tačke $d_m \in Y$ nema izolovanih 2-tačaka.

PRIMEDBA. Koristeći navedeni primer, može se pokazati da za svako $n > 4$ postoje nehomeomorfni prostori $X, Y \in \mathcal{Z}$, koji ispunjavaju uslove: 1) $s(X) = s(Y) = (0, \ldots, n-2, n)$ ili $s(X) = s(Y) = (0, \ldots, n-1, n)$; 2) za svako $i \in \{0, \ldots, n\}$ je $X_i \approx Y_i$, $\overline{X}_i \approx \overline{Y}_i$. Takodjer, postoje nehomeomorfni prostori $X, Y \in \mathcal{Z}$, koji ispunjavaju uslove: 1) $s(X) = s(Y) = (0, \ldots, n, \ldots, \omega)$; 2) za svako $i \in N \cup \{0, \omega\}$ je $\overline{X}_i \approx \overline{Y}_i$, $X_i \approx Y_i$.

GLAVA 3.

NEKE PODKLASE KLASE PREBROJIVIH METRIČKIH PROSTORA

U ovoj glavi se razmatra topološka karakterizacija nekih podklasa klase svih prebrojivih metričkih prostora, koju označavamo sa $\mathcal{P}$. Navode se i konstrukcije za prostore tih podklasa. Polazeći od dekompozicije prostora, razvrstavanja tačaka i akumulacionog spektra, pokazuje se da se mnoga tvrdjenja glave 2. prenose i na odgovarajuće podklase klase $\mathcal{P}$. U razmatranjima ove glave ulogu Cantorovog diskontinuma C, koju je ovaj imao u glavi 2., preuzima prostor Q svih krajeva odbačenih intervala pri konstrukciji prostora C.

3.1. DEKOMPOZICIJE PROSTORA I RAZVRSTAVANJE TAČAKA

Neka je X prebrojiv metrički prostor. Primetimo da je, na osnovu t.1.1.12., X nul-dimenzionalan.

Koristeći matematičku indukciju, konstruisaćemo dekompozicije

$$\mathcal{U}_n = \{X_0,\dots,X_n,X_{(n+1)}\}\ ,\ n\in N,$$

prostora X tako da su ispunjeni sledeći uslovi:

(a) $\overline{X}_{(n+1)} = X_{(n+1)}$,

(b) $\overline{X}_i = X_i \cup X_{i+2} \cup \dots \cup X_n \cup X_{(n+1)}$ za svako $i\in\{0,\dots,n-1\}$,

(c) $\overline{X}_n \subset X_n \cup X_{(n+1)}$.

Neka je X_0 skup svih izolovanih tačaka od X i $X_1 = X\setminus\overline{X}_0$,

$X_{(2)}=X\setminus(X_0\cup X_1)$. Tada je $\mathcal{U}_1=\{X_0,X_1,X_{(2)}\}$ dekompozicija od X,koja ispunjava uslove (a),(b),(c).

Primetimo,da u slučaju $X_1\neq\emptyset$ svaka tačka od X_1 ima okolinu u X koja nema izolovanih tačaka,pa je na osnovu t. 1.4.10. podprostor X_1 homeomorfan prostoru Q.
Pretpostavimo da dekompozicija

$$\mathcal{U}_k=\{X_0,\dots,X_k,X_{(k+1)}\}$$

prostora X ispunjava uslove (a),(b),(c). Tada stavljajući:

$$X_{k+1}=X_{(k+1)}\setminus\overline{X}_k;\ X_{(k+2)}=X_{(k+1)}\cap\overline{X}_k\ ,$$

dobijamo dekompoziciju

$$\mathcal{U}_{k+1}=\{X_0,\dots,X_{k+1},X_{(k+2)}\}$$

prostora X, za koju se,na isti način kao u odeljku 2.1.,pokazuje da ispunjava uslove (a),(b),(c). Time su dekompozicije $\mathcal{U}_n, n\in N$, prostora X definisane.

Razmatraćemo, u daljem,sledeće slučajeve:

1) $X=X_0$,tj. kada X ima samo izolovane tačke,
2) Postoji $n\in N$ tako da je: $X_{n-1}=\emptyset$, $X_{(n)}\neq\emptyset$. Tada je $X=X_0\cup\dots\cup X_{n-2}\cup X_n$.
   Za $n=1$ je $X=X_1$,pa je $X\approx Q$.
3) Postoji $n\in N$ tako da je: $X_{n-1}\neq\emptyset$, $X_{(n)}=X_n\neq\emptyset$.Tada je $X=X_0\cup\dots\cup X_{n-1}\cup X_n$,a skupovi X_{n-1},X_n su zatvoreni u X.

U navedenim slučajevima prostoru X redom pridružujemo nizove: $s(X)=(0)$; $s(X)=(0,\dots,n-2,n)$ (za $X_0=\emptyset$ stavljamo $s(X)=(1)$); $s(X)=(0,\dots,n-1,n)$.

Niz s(X) nazivamo <u>akumulacioni spektar</u> prostora X, a za tačku $x\in X_n, n\in N\cup\{0\}$,kažemo da je <u>n-tačka</u> od X.

Sledeća tri tvrdjenja su analogna redom tvrdjenjima 2.1.1.,2.1.2.,2.1.4.:

3.1.1. TVRDJENJE. <u>Neka je</u> $X \in \mathcal{P}$. <u>Tačka</u> $x \in X$ <u>je n-tačka</u>, $n \in N \cup \{0\}$, <u>ako i samo ako</u> $x \notin \overline{X}_{n-1}$ <u>i</u> $x \notin X_i, i \in \{0,\dots,n-2\}$.

3.1.2. TVRDJENJE. <u>Neka je</u> $X + Y$ <u>topološka suma prostora</u> $X,Y \in \mathcal{P}$. <u>Tada je</u> $(X + Y)_n = X_n + Y_n$, $n \in N \cup \{0\}$.

3.1.3. TVRDJENJE. <u>Neka je</u> $X \in \mathcal{P}$ <u>i</u> $s(X)=(0,\dots,n-1,n)$, $n \in N$. <u>Tada postoje otvoreno-zatvoreni disjunktni podskupovi</u> X^1, X^2 <u>od</u> X <u>takvi da je</u>: $X = X^1 \cup X^2$; $s(X^1)=(0,\dots,n-2,n)$; $s(X^2)=(0,\dots,n-3,n-1)$.

3.1.4. TVRDJENJE. <u>Neka je</u> $X \in \mathcal{P}$ <u>kompaktan prostor</u>. <u>Tada je ili</u> $s(X)=(0)$ <u>ili</u> $s(X) = (0,2)$.

DOKAZ. Razlikujemo dva slučaja: 1) $\mathrm{card}\, X < \aleph_0$, 2) $\mathrm{card}\, X = \aleph_0$. Neka je $X=X_0 \cup X_1 \cup X_{(2)}$. U slučaju 1) je $X = X_0$, pa je $s(X)=(0)$. U slučaju 2) je $X_{(2)} \neq \emptyset$. Pokažimo još da je $X_1=\emptyset$. Pretpostavimo suprotno, tj. $X_1 \neq \emptyset$. Tada je X_1 podprostor bez izolovanih tačaka, pa pošto je X kompaktan, na osnovu t.1.4.6., sledi $\overline{X}_1 \approx C$, a odatle $\mathrm{card}\, X \geq \mathrm{card}\, \overline{X}_1 > \aleph_0$, što je u kontradikciji sa pretpostavkom $\mathrm{card}\, X = \aleph_0$. Prema tome je: $X_1=\emptyset$, $X_{(2)}=X_2 \neq \emptyset$, pa je $X=X_0 \cup X_2$, odakle proizlazi da je $s(X)=(0,2)$.

U idućem odeljku trebaće nam

3.1.5. TVRDJENJE. <u>Neka je</u> $X \in \mathcal{P}$. <u>Prostor</u> X_0 <u>je kompaktan ako i samo ako svaki beskonačan niz u</u> X_0 <u>ima tačku nagomilavanja</u>.

DOKAZ. Dovoljnost. Dovoljno je pokazati da svaki beskonačni niz u $\overline{X}_o \setminus X_o$ ima tačku nagomilavanja. Neka je (a_n) beskonačni niz u $\overline{X}_o \setminus X_o$. Postoji niz (b_n) u X_o takav da je $d(a_n, b_n) < 1/n$, $n \in N$, gde je sa d označena metrika u X. Tada, prema pretpostavci, postoji podniz (b_{n_k}) niza (b_n) takav da $b_{n_k} \longrightarrow b$; $n_k \to \infty$. Odatle i zbog $d(a_{n_k}, b_{n_k}) \longrightarrow 0$ sledi: $d(a_{n_k}, b) \longrightarrow 0$; $n_k \to \infty$, tj. b je tačka nagomilavanja niza (a_n).

Potrebnost sledi neposredno iz svojstva kompaktnosti od $\overline{X}_o$.

3.2. TOPOLOŠKA KARAKTERIZACIJA PROSTORA POMOĆU AKUMULACIONOG SPEKTRA

U ovom odeljku razmatramo problem topološke karakterizacije prostora klase $\mathcal{P}$ pomoću akumulacionog spektra.

U [23] je pokazano da akumulacioni spektar topološki odredjuje "Q-pune prostore klase $\mathcal{P}$.

Precizno: Ako $X, Y \in \mathcal{P}$, $s(X)=s(Y)=(0,\dots,n-2,n)$ ili $s(X)=$ $=s(Y)=(0,\dots,n-1,n)$, $n \in N \setminus \{1\}$, i za svako $i \in N$ iz $X_i \neq \emptyset$, $Y_i \neq \emptyset$ sledi $X_i \approx Y_i \approx Q$, tada su prostori X i Y homeomorfni.

Ovde dajemo proširenje navedenog rezultata uvodjenjem podklasa $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$. Takodjer, izdvajamo podklase $\mathcal{P}_3$ i $\mathcal{P}_4$, klase $\mathcal{P}$, čiji su prostori topološki odredjeni njihovim akumulacionim spektrom.

3.2.1. PODKLASE $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$, $\mathcal{P}_4$ KLASE $\mathcal{P}$

3.2.1.1. DEFINICIJA. Prostor X pripada <u>podklasi</u> $\mathcal{P}_1$

ako i samo ako $s(X)=(0,\dots,n-2,n)$, $n\in N\setminus\{1,2,3\}$, i svi podprostori $X_2,\dots,X_{n-2}$ nemaju izolovanih tačaka.

3.2.1.2. DEFINICIJA. Prostor X pripada podklasi $\mathcal{P}_2$ ako i samo ako $s(X)=(0,\dots,n-1,n)$, $n\in N\setminus\{1,2,3,4\}$, i svi podprostori $X_2,\dots,X_{n-2}$ nemaju izolovanih tačaka.

3.2.1.3. DEFINICIJA. Prostor X pripada podklasi $\mathcal{P}_3$ ako i samo ako $s(X)=(0,\dots,n-2,n)$, $n\in N\setminus\{1\}$, podprostor $\overline{X}_0$ je kompaktan i sve tačke podprostora $X_2,\dots,X_{n-2}$ su izolovane.

3.2.1.4. DEFINICIJA. Prostor X pripada podklasi $\mathcal{P}_4$ ako i samo ako $s(X)=(0,\dots,n-1,n)$, $n\in N\setminus\{1\}$, podprostor $\overline{X}_0$ je kompaktan i sve tačke podprostora $X_2,\dots,X_{n-3}$ su izolovane.

3.2.1.5. DEFINICIJA. Za prostore $X,Y\in\mathcal{P}_i, i\in\{1,3\}$, kažemo da su ekvivalentni ako i samo ako $s(X)=s(Y)=(0,\dots,n-2,n)$ i podprostori X_n,Y_n su homeomorfni.

3.2.1.6. DEFINICIJA. Za prostore $X,Y\in\mathcal{P}_i, i\in\{2,4\}$, kažemo da su ekvivalentni ako i samo ako $s(X)=s(Y)=(0,\dots,n-1,n)$, a podprostori X_{n-1},Y_{n-1} i X_n,Y_n su homeomorfni.

Kazaćemo da su prostori $X,Y\in\mathcal{P}$ ekvivalentni i u sledećim slučajevima:

1) $s(X)=s(Y)=(0)$, card X = card Y;

2) $s(X)=s(Y)=(1)$;

3) $s(X)=s(Y)=(0,1)$, card X_0 = card Y_0 ;

4) $s(X)=s(Y)=(0,2)$ i podprostori X_2,Y_2 nemaju izolovanih tačaka ;

5) $s(X)=s(Y)=(0,1,2)$ i podprostori X_2,Y_2 nemaju izolovanih tačaka;

6) $s(X)=s(Y)=(0,1,3)$ i podprostori X_3, Y_3 nemaju izolovanih tačaka;

7) $s(X)=s(Y)=(0,1,2,3)$ i podprostori X_2, X_3, Y_2, Y_3 nemaju izolovanih tačaka;

8) $s(X)=s(Y)=(0,1,2,3,4)$ i podprostori $X_2, X_3, X_4, Y_2, Y_3, Y_4$ nemaju izolovanih tačaka.

Na osnovu t.3.1.4. sledi

3.2.1.7. TVRDJENJE. <u>Kompaktni prostori klase</u> $\mathcal{P}$ <u>koji imaju kardinalnost</u> $\aleph_0$ <u>pripadaju podklasi</u> $\mathcal{P}_3$.

3.2.1.8. TVRDJENJE. <u>Neka su</u> $X, Y \in \mathcal{P}_i$, $i \in \{1,2,3,4\}$, <u>ekvivalentni prostori. Ako su</u> X', X'' <u>disjunktni otvoreno-zatvoreni skupovi u</u> X, <u>koji ga pokrivaju, tada postoje disjunktni otvoreno-zatvoreni skupovi</u> Y', Y'' <u>u</u> Y, <u>koji ga pokrivaju i takvi da su</u> X', Y' <u>ekvivalentni i</u> X'', Y'' <u>ekvivalentni prostori.</u>

DOKAZ ZA $\mathcal{P}_1$. Neka su $X, Y \in \mathcal{P}_1$ i $s(X)=s(Y)=(0,\dots,n-2,n)$. Razlikovaćemo slučajeve: 1) $s(X')=(0,\dots,n-2,n)$, $s(X'')\neq s(X')$; 2). $s(X')=s(X'')=(0,\dots,n-2,n)$.

U slučaju 1) razlikovaćemo slučajeve:

a) $s(X'')=(0)$; b) $s(X'')=(1)$; c) $s(X'')=(0,1)$; d) $s(X'')=(0,\dots,k-2,k)$, $k\in\{2,\dots,n-2\}$; e) $s(X'')=(0,\dots,k-1,k)$, $k\in\{2,\dots,n-2\}$.

Ako je a), tada je ili X'' konačan skup ili card $X = \aleph_0$. U prvom slučaju postoji podskup Y'' od Y_0 takav da je card $Y''=$ card X''. Stavljajući $Y' = Y\setminus Y''$ dobijamo da otvoreno-zatvoreni skupovi Y', Y'' čine dekompoziciju od Y i da su $X', Y' \in \mathcal{P}_1$ i X'', Y'' parovi ekvivalentnih prostora.

U slučaju card $X'' = \aleph_0$, postoji pravi otvoreno-zatvoren podskup Y'' od Y_0 takav da je card $Y = \aleph_0$. Zaista, u suprotnom, na osnovu t.3.1.5., $\overline{Y}_0$ bio bi kompaktan, pa bi i $\overline{Y}_2$, kao podskup od $\overline{Y}_0$, bio kompaktan, odakle zbog $Y_2 \approx Q$ sledi $\overline{Y}_2 \approx C$, što je kontradikcija sa $Y \in \mathcal{P}$. Stavljajući $Y' = Y \setminus Y''$ dobijamo, opet, da otvoreno-zatvoreni skupovi Y', Y'' čine dekompoziciju od Y tako da su: $X', Y' \in \mathcal{P}_1$; X'', Y'' ekvivalentni.

U slučaju b) postoji pravi otvoreno-zatvoren podskup Y'' od Y_1, pa stavljajući $Y' = Y \setminus Y''$ dobijamo da otvoreno-zatvoreni skupovi Y', Y'' čine dekompoziciju od Y tako da su: $X', Y' \in \mathcal{P}_1$ i X'', Y'' ekvivalentni prostori.

Ako je c), tada postoje otvoreno-zatvoreni skupovi X^1, X^2 takvi da je: $X'' = X^1 \cup X^2$, $s(X^1) = (0)$, $s(X^2) = (1)$ (videti t.3.1.3.). Birajući $Y^1 \subset Y_0$ tako da card $Y^1 =$ card X^1 (videti a)) i pravi otvoreno-zatvoren podskup Y^2 od Y_1, te stavljajući $Y'' = Y^1 \cup Y^2$, $Y' = Y \setminus Y''$ dobijamo da su $X', Y' \in \mathcal{P}_1$ i X'', Y'' ekvivalentni prostori.

Ako je d), tada je $(X'')_k \approx Q$. Kako je i $Y_k \approx Q$, postoji pravi otvoreno-zatvoren podskup Y'' od Y takav da je $s(Y'') = (0, \dots, k-2, k)$. Stavljajući $Y' = Y \setminus Y''$ dobijamo da X', Y'; X'', Y'' ispunjavaju uslove tvrdjenja.

Ako je e), tada, na osnovu t.3.1.3., postoje otvoreno-zatvoreni skupovi X^1, X^2 takvi da je: $X'' = X^1 \cup X^2$, $s(X^1) = (0, \dots, k-2, k)$, $s(X^2) = (0, \dots, k-3, k-1)$. Kako je $Y_k \approx Q$, $Y_{k-1} \approx Q$, to postoje otvoreno-zatvoreni skupovi Y^1, Y^2 u Y takvi da je $s(Y^1) = (0, \dots, k-2, k)$, $(Y^1)_k \approx Q$, $s(Y^2) = (0, \dots, k-3, k-1)$, $(Y^2)_{k-1} \approx Q$. Stavimo $Y'' = Y^1 \cup Y^2$; $Y' = Y \setminus Y''$. Tada su X'', Y'' ekvivalentni, jer prema konstrukciji i t.3.1.2. je: $s(X'') = s(Y'') =$

$=(0,\dots,k-1,k)$; $X_i \approx Y_i \approx Q$ za $i \in \{2,\dots,k\}$. Takodjer i X', Y' su ekvivalentni, jer: $X', Y' \in \mathcal{P}_1$; $s(X')=s(Y')=(0,\dots,n-2,n)$; $(X')_n=X_n$; $(Y')_n=Y_n$; $X_n \approx Y_n$.

Razmotrimo slučaj 2). Neka je $s(X)=s(Y)=(0,\dots,n-2,n), n \geqslant 4$; $X_n \approx Y_n$. Kako je X_n zatvoren u X i otvoreno-zatvoreni skupovi X', X'' čine dekompoziciju za X, to proizlazi da su $X_n \cap X'$ i $X_n \cap X''$ disjunktni i zatvoreni u X. Jer je $X_n \approx Y_n$, postoje disjunktni zatvoreni skupovi F_1, F_2 u Y takvi da je: $Y_n = F_1 \cup F_2$; $F_1 \approx X_n \cap X'$; $F_2 \approx X_n \cap X''$. Nadalje, Y je nul-dimenzionalan, pa postoji otvoreno-zatvoren skup Y' u Y takav da je $F_1 \subset Y'$, $F_2 \cap Y' = \emptyset$. Označimo $Y'' = Y \setminus Y'$. Tada su Y' i Y'' otvoreno-zatvoreni u Y i čine njegovu dekompoziciju. Pošto je: $X', Y', X'', Y'' \in \mathcal{P}_1$; $s(X')=s(Y')=(0,\dots,n-2,n)$; $(X')_n = X' \cap X_n \approx F_1 = (Y')_n$; $s(X'')=s(Y'')=(0,\dots,n-2,n)$; $(X'')_n = X_n \cap X'' \approx F_2 = (Y'')_n$ sledi da su X', Y' i X'', Y'' ekvivalentni.

DOKAZ ZA $\mathcal{P}_2$. Neka je $s(X)=s(Y)=(0,\dots,n-1,n)$, $n \geqslant 5$, i X', X'' otvoreno-zatvoreni skupovi u X, koji čine njegovu dekompoziciju. Na osnovu t.3.1.3., postoje disjunktni otvoreno-zatvoreni skupovi X^1, X^2 u X takvi da je $X = X^1 \cup X^2$ i disjunktni otvoreno-zatvoreni skupovi Y^1, Y^2 u Y tako da je: $Y = Y^1 \cup Y^2$, $s(X^1)=s(Y^1)=(0,\dots,n-2,n)$, $s(X^2)=s(Y^2)=(0,\dots,n-3,n-1)$. Kako je $X^1, Y^1 \in \mathcal{P}_1$; $X^2, Y^2 \in \mathcal{P}_1$ a tvrdjenje važi za $\mathcal{P}_1$, to postoje disjunktni otvoreno-zatvoreni skupovi $(Y^1)'$, $(Y^1)''$ u Y^1 tako da je: $Y^1 = (Y^1)' \cup (Y^1)''$; $X^1 \cap X'$, $(Y^1)'$ ekvivalentni; $X^1 \cap X''$, $(Y^1)''$ ekvivalentni. Isto tako, postoje otvoreno-zatvoreni, disjunktni skupovi $(Y^2)'$, $(Y^2)''$ u Y^2 tako da je: $Y^2 = (Y^2)' \cup (Y^2)''$; $X^2 \cap X'$, $(Y^2)'$ ekvivalentni; $X^2 \cap X''$, $(Y^2)''$ ekvivalentni. Prema tome su: $X' = (X^1 \cap X') \cup (X^2 \cap X')$, $Y' = (Y^1)' \cup$

$\cup(Y^2)'$ ekvivalentni i $X''=(X^1\cap X'')\cup(X^2\cap X''),Y''=(Y^1)''\cup(Y^2)''$ takodjer ekvivalentni.

DOKAZ ZA $\mathcal{P}_3$. Neka su $X,Y\in\mathcal{P}_3$ i $s(X)=s(Y)=(0,\dots,n-2,n)$. Razlikujemo slučajeve: a) $s(X')=(0,\dots,n-2,n)$, $s(X'')=(0)$; b) $s(X')=(0,\dots,n-2,n)$, $s(X'')=(1)$; c) $s(X')=(0,\dots,n-2,n)$, $s(X'')=(0,1)$; d) $s(X')=(0,\dots,n-2,n)$, $s(X'')=(0,\dots,k-2,k)$, $k\in\{2,\dots,n-2\}$; e) $s(X')=(0,\dots,n-2,n)$, $s(X'')=(0,\dots,k-1,k)$, $k\in\{2,\dots,n-2\}$; f) $s(X')=s(X'')=(0,\dots,n-2,n)$.

Primetimo da su,po pretpostavci, $\bar{X}_0$ i $\bar{Y}_0$ kompaktni,pa odatle i $\bar{X}_k\subset\bar{X}_0$, $\bar{Y}_k\subset\bar{Y}_0$, $k\in\{2,\dots,n-2,n\}$, sledi da su i $\bar{X}_k$, $\bar{Y}_k$ kompaktni.

Ako je a), tada iz $s(X'')=(0)$ i kompaktnosti od $\bar{X}_0$ proizlazi da je card $X''<\aleph_0$. Postoji podskup Y'' od Y_0 takav da je card Y''=card X'', pa stavljajući $Y'=Y\setminus Y''$ dobijamo : $X',Y'\in\mathcal{P}_3$ su ekvivalentni i X'',Y'' su ekvivalentni.

Ako je b), tada iz $s(X'')=(1)$ sledi $X''\approx Q$,pa birajući otvoreno-zatvoren podskup Y'' od Y_1 (u Y) i stavljajući $Y'=Y\setminus Y''$ dobijamo opet da su $X',Y'\in\mathcal{P}_3$ ekvivalentni i X'', Y'' ekvivalentni.

Ako je c), tada iz $s(X'')=(0,1)$ i kompaktnosti od $\bar{X}_0$ sledi: $X''=(X'')_0\cup(X'')_1$, card $(X'')_0<\aleph_0$, $(X'')_1\approx Q$. Neka je F_1 podskup od Y_0 takav da je card F_1=card $(X'')_0$ i F_2 otvoreno-zatvoren podskup od Y_1 (u Y). Tada stavljajući $Y''=F_1\cup F_2$, $Y'=Y\setminus Y''$ dobijamo da su $X',Y'\in\mathcal{P}_3$ ekvivalentni i X'',Y'' ekvivalentni.

Ako je d), tada iz $s(X'')=(0,\dots,k-2,k)$ i kompaktnosti od $\bar{X}_k$ sledi da je $(X'')_k$ kompaktno, pa kako su sve tačke od X_k izolovane (u X_k) mora biti card $(X'')_k<\aleph_0$. Neka je F=

$=\{y_1,\dots,y_m\}\subset Y_k$, card F = card $(X'')_k$. Postoji otvoreno-zatvoren podskup V_i, $i\in\{1,\dots,m\}$ u Y takav da je $V_i\cap \cap Y_k=\{y_i\}$, $V_i\cap \overline{Y}_{k-1}=\emptyset$. Stavljajući: $Y''=V_1\cup\dots\cup V_m$, $Y'= =Y\setminus Y''$ dobijamo da su $X',Y'\in \mathcal{P}_3$ i $X'',Y''\in\mathcal{P}_3$ ekvivalentni.

U slučaju e) razlikujemo dve mogućnosti: 1) $s(X'')=(0,1,2)$, 2) $s(X'')=(0,\dots,k-1,k)$, $k\in\{3,\dots,n-2\}$.

Ako je 1), tada postoje disjunktni otvoreno-zatvoreni skupovi X^1,X^2 tako da je: $X''=X^1\cup X^2$, $s(X^1)=(0,2)$, $s(X^2)=(1)$. Tada je X^1 kompaktan, pa je card $(X^1)_2<\aleph_0$; $X^2\approx Q$ .Neka je $F_1=\{y_1,\dots,y_m\}\subset Y_2$, card F_1=card $(X^1)_2$. Postoji otvoreno-zatvoren podskup V_i, $i\in\{1,\dots,m\}$, u Y takav da je $V_i\cap Y_2=\{y_i\}$, $V_i\cap\overline{Y}_1=\emptyset$ i otvoreno-zatvoren podskup F_2 od Y_1. Stavljajući: $Y''=V_1\cup\dots\cup V_m\cup F_2$, $Y'=Y\setminus Y''$ dobijamo da su $X',Y'\in\mathcal{P}_3$ i $X'',Y''\in\mathcal{P}_4$ ekvivalentni.

Ako je 2), tada postoje disjunktni otvoreno-zatvoreni skupovi X^1,X^2 (na osnovu t.3.1.3.) takvi da je : $X''=X^1\cup X^2$; $s(X^1)=(0,\dots,k-2,k)$; $s(X^2)=(0,\dots,k-3,k-1)$. Pošto $X\in\mathcal{P}_3$, to $(X^1)_k$ i $(X^2)_{k-1}$ imaju konačno mnogo tačaka. Neka: $F_1= =\{y_1,\dots,y_m\}\subset Y_k$, card F_1=card $(X^1)_k$; $F_2=\{y_1,\dots,y_s\}\subset Y_{k-1}$, card F_2=card $(X^2)_{k-1}$. Postoji otvoreno-zatvoren skup V_i , $i\in\{1,\dots,m\}$,takav da je $V_i\cap Y_k=\{y_i\}$, $V_i\cap\overline{Y}_{k-1}=\emptyset$ i otvoreno-zatvoren skup U_j, $j\in\{1,\dots,s\}$,takav da je $U_j\cap Y_{k-1}= =\{y_j\}$, $U_j\cap\overline{Y}_{k-2}=\emptyset$. Stavljajući: $Y''=V_1\cup\dots\cup V_m\cup U_1\cup\dots\cup U_s$, $Y'=Y\setminus Y''$ dobijamo da su $X',Y'\in\mathcal{P}_3$ i $X'',Y''\in\mathcal{P}_4$ ekvivalentni.

Ako je f), tada su $(X')_n$ i $(X'')_n$ disjunktni i zatvoreni u X. Kako je $X_n\approx Y_n$, postoje disjunktni zatvoreni skupovi F_1, F_2 u Y takvi da je: $F_1\approx(X')_n$, $F_2\approx(X'')_n$, $Y_n=F_1\cup F_2$. Zbog nul-dimenzionosti od Y, postoji otvoreno-zatvoren skup Y'

u Y takav da je $F_1 \subset Y'$, $Y' \cap F_2 = \emptyset$. Stavljajući $Y'' = Y \setminus Y'$ dobijamo da su $X', Y' \in \mathcal{P}_3$; $X'', Y'' \in \mathcal{P}_3$ ekvivalentni, jer: $s(X') = s(X'') = (0, \dots, n-2, n)$; $(X')_n \approx F_1 = (Y')_n$; $(X'')_n \approx F_2 = (Y'')_n$.

DOKAZ ZA $\mathcal{P}_4$ je analogan dokazu za $\mathcal{P}_2$.

3.2.1.9. TVRDJENJE. Neka su $X, Y \in \mathcal{P}_i, i \in \{1,2,3,4\}$, ekvivalentni prostori. Tada su X i Y homeomorfni.

DOKAZ. Na osnovu t.1.4.11., možemo smatrati da su X, Y uronjeni u prostor Q, a prema t.3.1.3. dovoljno je razmotriti samo slučaj $s(X) = s(Y) = (0, \dots, n-2, n)$. Neka je: $X_i = \{x_i^1, x_i^2, \dots\}$; $Y_i = \{y_i^1, y_i^2, \dots\}$, $i \in \{0, \dots, n-2, n\}$, i preslikavanje $f: X_n \longrightarrow Y_n$, dato sa $f(x_n^r) = y_n^r$, $r \in N$, homeomorfizam. Prema t.3.1.3., postoji dekompozicija od X na najviše tri otvoreno-zatvorena skupa: $X_n^{\bar{n}}$; $X_p^{\bar{p}}$; $X_r^{\bar{r}}$, $p, r \leq n$ i $\neq n-1$, čiji su dijametri manji od $2/3$ i $s(X_k^{\bar{k}}) = (0, \dots, k-2, k)$, $k \in \{n, p, r\}$, gde $\bar{k} \in \{\bar{n}, \bar{p}, \bar{r}\}$ označava najmanji prirodan broj j takav da je $x_k^j \in X_k^{\bar{k}}$. Na osnovu t.3.2.1.8., postoji dekompozicija od Y na otvoreno-zatvorene skupove $Y_n^{n'}$; $Y_p^{p'}$; $Y_r^{r'}$ takve da su redom ekvivalentni sa $X_n^{\bar{n}}$; $X_p^{\bar{p}}$; $X_r^{\bar{r}}$. Broj $k' \in \{n', p', r'\}$ označava najmanji prirodan broj j takav da je $y_k^j \in Y_k^{k'}$. Na osnovu t.3.1.3., postoji dekompozicija od $Y_k^{k'}$, $k \in \{n, p, r\}$, na tri otvoreno-zatvorena skupa $Y_{kk}^{k'k'}$, $Y_{kk_1}^{k'k_1'}$, $Y_{kk_2}^{k'k_2'}$ takva da su njihovi dijametri manji od $2/3$ i

$$s(Y_{kk_i}^{k'k_i'}) = (0, \dots, k_i - 2, k_i), \text{gde je } k_i' = \min\left\{j \mid y_{k_i}^j \in Y_{kk_i}^{k'k_i'}\right\},$$

$i \in \{0,1,2\}$, $k_0 = k$, $k_0' = k'$. Ako je $Y_k^{k'}$ jednočlan skup, tada stavljamo:

$$Y_{kk}^{k'k'} = Y_k^{k'}; \quad Y_{kk_1}^{k'k_1'} = \emptyset; \quad Y_{kk_2}^{k'k_2'} = \emptyset.$$

Prema t.3.2.1.8., postoji dekompozicija od $X_k^{\bar{k}}$ na otvoreno-zatvorene skupove $X_{k\,k}^{\bar{k}\,\bar{k}}$, $X_{k\,k_1}^{\bar{k}\,\bar{k}_1}$, $X_{k\,k_2}^{\bar{k}\,\bar{k}_2}$, koji su ekvivalentni redom sa

$$Y_{k\,k}^{k'k'},\ Y_{k\,k_1}^{k'k_1'},\ Y_{k\,k_2}^{k'k_2'}.$$

Tako smo dobili otvoreno-zatvorene pokrivače

$$\alpha_1 = \left\{X_{k\,k_i}^{\bar{k}\,\bar{k}_i}\right\},\quad \beta_1 = \left\{Y_{k\,k_i}^{k'k_i'}\right\},$$

za X i Y, čiji su elementi disjunktni i dijametra manjeg od $2/3$. Neka je $f_1\colon \alpha_1 \longrightarrow \beta_1$ bijektivno preslikavanje dato sa:

$$f_1(X_{k\,k_i}^{\bar{k}\,\bar{k}_i}) = Y_{k\,k_i}^{k'k_i'}.$$

Pomoću matematičke indukcije definišimo pokrivače α_n, β_n, $n \in N$, za X i Y i bijektivna preslikavanja $f_n\colon \alpha_n \longrightarrow \beta_n$.

Pretpostavimo da su

$$\alpha_n = \left\{X_{a_1\ldots a_{2n}}^{\bar{a}_1\ldots\bar{a}_{2n}}\right\},\quad \beta_n = \left\{Y_{a_1\ldots a_{2n}}^{a_1'\ldots a_{2n}'}\right\}$$

pokrivači za X, Y, gde: $X_{a_1\ldots a_{2n}}^{\bar{a}_1\ldots\bar{a}_{2n}}$, $Y_{a_1\ldots a_{2n}}^{a_1'\ldots a_{2n}'}$ su ekvivalentni, imaju akumulacioni spektar $(0,\ldots,a_{2n}-2,a_{2n})$; niz $a_1,\ldots,a_{2n}$ je nerastući sa članovima koji su iz $\{0,\ldots,n-2,n\}$;

$$\bar{a}_{2n} = \min\left\{j \mid x_{a_{2n}}^j \in X_{a_1\ldots a_{2n}}^{\bar{a}_1\ldots\bar{a}_{2n}}\right\};\quad a_{2n}' = \min\left\{j \mid y_{a_{2n}}^j \in Y_{a_1\ldots a_{2n}}^{a_1'\ldots a_{2n}'}\right\}.$$

Pretpostavimo,takodjer, da su članovi pokrivača α_n, β_n disjunktni otvoreno-zatvoreni u X,Y i dijametra manjeg od $(2/3)^n$. Neka je k tome $f_n\colon \alpha_n \longrightarrow \beta_n$ bijektivno preslikavanje dato sa:

$$f_n(X_{a_1\ldots a_{2n}}^{\bar{a}_1\ldots\bar{a}_{2n}}) = Y_{a_1\ldots a_{2n}}^{a_1'\ldots a_{2n}'}.$$

Na osnovu t.3.1.3., postoji dekompozicija od $X_{a_1\ldots a_{2n}}^{\bar{a}_1\ldots\bar{a}_{2n}}$ na najviše tri disjunktna otvoreno-zatvorena skupa:

$$X_{a_1\dots a_{2n}a_{2n}}^{\bar a_1\dots\bar a_{2n}\bar a_{2n}},\ X_{a_1\dots a_{2n}s}^{\bar a_1\dots\bar a_{2n}\bar s},\ X_{a_1\dots a_{2n}t}^{\bar a_1\dots\bar a_{2n}\bar t};\ s,t\leq a_{2n} \text{ i } \neq a_{2n}-1,$$

takva da su im dijametri manji od (2/3)diam $(X_{a_1\dots a_{2n}}^{\bar a_1\dots\bar a_{2n}})$ i $s(X_{a_1\dots a_{2n}k}^{\bar a_1\dots\bar a_{2n}\bar k})=(0,\dots,k-2,k)$, $k\in\{a_{2n},s,t\}$; gde $\bar k\in\{\bar a_{2n},\bar s,\bar t\}$ označava najmanji priridan broj j takav da $x_k^j\in X_{a_1\dots a_{2n}k}^{\bar a_1\dots\bar a_{2n}\bar k}$.

Prema t.3.2.1.8., postoji dekompozicija od $Y_{a_1\dots a_{2n}}^{a_1'\dots a_{2n}'}$ na disjunktne otvoreno-zatvorene skupove:

$$Y_{a_1\dots a_{2n}a_{2n}}^{a_1'\dots a_{2n}'a_{2n}'};\ Y_{a_1\dots a_{2n}s}^{a_1'\dots a_{2n}'s'};\ Y_{a_1\dots a_{2n}t}^{a_1'\dots a_{2n}'t'}$$

takve da su $Y_{a_1\dots a_{2n}k}^{a_1'\dots a_{2n}'k'}$ i $X_{a_1\dots a_{2n}k}^{\bar a_1\dots\bar a_{2n}\bar k}$ ekvivalentni, gde je

$k'\in\{a_{2n}',s',t'\}$, $k'=\min\left\{j \,\middle|\, y_k^j\in Y_{a_1\dots a_{2n}k}^{a_1'\dots a_{2n}'k'}\right\}$. Nadalje, prema t. 3.1.3. postoji dekompozicija od $Y_{a_1\dots a_{2n}k}^{a_1'\dots a_{2n}'k'}$ na najviše tri otvoreno-zatvorena skupa:

$$(1)\qquad Y_{a_1\dots a_{2n}k\,k}^{a_1'\dots a_{2n}'k'k'},\ Y_{a_1\dots a_{2n}k\,k_1}^{a_1'\dots a_{2n}'k'k_1'},\ Y_{a_1\dots a_{2n}k\,k_2}^{a_1'\dots a_{2n}'k'k_2'},$$

čiji su dijametri manji od (2/3)diam $(Y_{a_1\dots a_{2n}k}^{a_1'\dots a_{2n}'k'})$ i takva da je:

$$s(Y_{a_1\dots a_{2n}k\,k_i}^{a_1'\dots a_{2n}'k'k_i'})=(0,\dots,k_i-2,k_i),\ k_i'=\min\left\{j \,\middle|\, y_{k_i}^j\in Y_{a_1\dots a_{2n}k\,k_i}^{a_1'\dots a_{2n}'k'k_i'}\right\}$$

$$\text{za } i\in\{0,1,2\} \text{ i } k_o=k,\ k_o'=k'.$$

Ako je $Y_{a_1\dots a_{2n}k}^{a_1'\dots a_{2n}'k'}$ jednočlan, tada stavljamo:

$$Y_{a_1\dots a_{2n}k\,k}^{a_1'\dots a_{2n}'k'k'}=Y_{a_1\dots a_{2n}k}^{a_1'\dots a_{2n}'k'},\ Y_{a_1\dots a_{2n}k\,k_1}^{a_1'\dots a_{2n}'k'k_1'}=Y_{a_1\dots a_{2n}k\,k_2}^{a_1'\dots a_{2n}'k'k_2'}=\emptyset.$$

Koristeći ponovo t.3.2.1.8., dobijamo dekompoziciju od

$X^{\bar{a}_1\ldots\bar{a}_{2n}\bar{k}}_{a_1\ldots a_{2n}k}$ na otvoreno-zatvorene skupove:

$$X^{\bar{a}_1\ldots\bar{a}_{2n}\bar{k}\,\bar{k}}_{a_1\ldots a_{2n}k\,k},\quad X^{\bar{a}_1\ldots\bar{a}_{2n}\bar{k}\,\bar{k}_1}_{a_1\ldots a_{2n}k\,k_1},\quad X^{\bar{a}_1\ldots\bar{a}_{2n}\bar{k}\,\bar{k}_2}_{a_1\ldots a_{2n}k\,k_2}$$

koji su redom ekvivalentni sa skupovima u (1).

Tada su:

$$\alpha_{n+1}=\left\{X^{\bar{a}_1\ldots\bar{a}_{2n}\bar{k}\,\bar{k}_i}_{a_1\ldots a_{2n}k\,k_i}\right\},\quad \beta_{n+1}=\left\{Y^{a'_1\ldots a'_{2n}k'k'_i}_{a_1\ldots a_{2n}k\,k_i}\right\}$$

($\bar{k}_i$ ima analogno značenje broja k'_i) otvoreno-zatvoreni pokrivači za X i Y, čiji su članovi disjunktni, dijametra manjeg od $(2/3)^{n+1}$, i odgovarajući parovi

$X^{\bar{a}_1\ldots\bar{a}_{2n}\bar{k}\,\bar{k}_i}_{a_1\ldots a_{2n}k\,k_i}$, $Y^{a'_1\ldots a'_{2n}k'k'_i}_{a_1\ldots a_{2n}k\,k_i}$ su ekvivalentni. Neka je

$f_{n+1}\colon \alpha_{n+1}\longrightarrow\beta_{n+1}$ bijektivno preslikavanje, dato sa:

$$f_{n+1}\left(X^{\bar{a}_1\ldots\bar{a}_{2n}\bar{k}\,\bar{k}_i}_{a_1\ldots a_{2n}k\,k_i}\right)=Y^{a'_1\ldots a'_{2n}k'k'_i}_{a_1\ldots a_{2n}k\,k_i}\,.$$

Time su pokrivači α_n, β_n i preslikavanja $f_n\colon \alpha_n\longrightarrow\beta_n$ u potpunosti definisani.

Familije

$$\alpha=\left\{U\in\alpha_n,\ n\in N\right\},\quad \beta=\left\{V\in\beta_n,\ n\in N\right\}$$

su baze redom za X i Y. S obzirom na prirodu pokrivača α_n, za svaku tačku $x_i^k\in X$ postoji jedinstven broj $m\in N$, takav da je:

$$x_i^k\in X^{\bar{a}_1\ldots\bar{a}_{2m}}_{a_1\ldots a_{2m}},\ a_{2m}=i\ ,\ \bar{a}_{2m}=\bar{a}_{2m-1}=k;\ \bar{a}_1,\ldots\bar{a}_{2m-2}\neq k.$$

Definišimo preslikavanje $h\colon X\longrightarrow Y$ sa: $h(x_i^k)=y_i^{k'}$, gde je

$y_i^{k'}\in f_m\left(X^{\bar{a}_1\ldots\bar{a}_{2m}}_{a_1\ldots a_{2m}}\right)=Y^{a'_1\ldots a'_{2m}}_{a_1\ldots a_{2m}}$, $k'=a'_{2m}$. Lako se pokazuje da ovako definisano preslikavanje h je: bijektivno, neprekidno i ima neprekidno inverzno preslikavanje. Dakle, h je homeomorfizam.

Analogno prethodnom tvrdjenju dokazuje se (videti [23]) da su prostori $X,Y \in \mathcal{P}$ homeomorfni i u sledećim slučajevima:

1) $s(X)=s(Y)=(0,2)$; X_2, Y_2 nemaju izolovanih tačaka,

2) $s(X)=s(Y)=(0,1,2)$; X_2, Y_2 nemaju izolovanih tačaka,

3) $s(X)=s(Y)=(0,1,3)$; X_3, Y_3 nemaju izolovanih tačaka,

4) $s(X)=s(Y)=(0,1,2,3)$; X_2, X_3, Y_2, Y_3 nemaju izolovanih tačaka,

5) $s(X)=s(Y)=(0,1,2,3,4)$; $X_2, X_3, X_4, Y_2, Y_3, Y_4$ nemaju izolovanih tačaka.

PRIMEDBA. U definiciji 3.2.1.1. (odn. 3.2.1.2.) podklase $\mathcal{P}_1$ (odn. $\mathcal{P}_2$) n ne može biti manje od četiri (odn. pet), jer postoje nehomeomorfni prostori $X,Y \in \mathcal{P}$ takvi da je: $s(X)=s(Y)=(0,1,3)$ i $X_3 \approx Y_3$(videti odeljak 3.3.).

PITANJE. Da li su prostori $X,Y \in \mathcal{P}$ homeomorfni, ako ispunjavaju uslove:

1) za svako $n \in N$, podprostori X_n, Y_n su neprazni i nemaju izolovanih tačaka,

2) $\bigcap \{\overline{X}_n \mid n \in N \cup \{0\}\} = \emptyset$, $\bigcap \{\overline{Y}_n \mid n \in N \cup \{0\}\} = \emptyset$?

3.2.2. HOMOGENOST U ODNOSU NA TAČKE ISTOGA REDA

3.2.2.1. TVRDJENJE. <u>Prostor Q je homogen.</u>

DOKAZ. Modifikujući dokaz t.1.4.10. stavljajući:

$X = Q$, $x_1 = a$, $y_1 = b$ (gde su $a,b \in Q$ proizvoljne tačke), $f_1(U_1)=V_1$ dobijamo da odgovarajući homeomorfizam $h:Q \to Q$ ispunjava uslov $h(a)=b$.

3.2.2.2. DEFINICIJA. Kažemo da je prostor $X \in \mathcal{P}$ <u>homogen u odnosu na svoje n-tačke</u>, ako za svake dve tačke $a,b \in X_n$ postoji homeomorfizam $h:X \to X$ takav da je $h(a)=b$.

3.2.2.3. TVRDJENJE. <u>Neka je</u> $X \in \mathcal{P}$, $s(X)=(0,\dots,n-2,n)$ <u>i za svako</u> $i \in \{2,\dots,n-2,n\}$ <u>podprostor</u> X_i <u>nema izolovanih tačaka. Tada je</u> X <u>homogen u odnosu na sve svoje k-tačke.</u>

DOKAZ. Prvo dokažimo tvrdjenje za $k=n$. Neka su $a,b \in X_n$ proizvoljne tačke. Na osnovu t.3.2.2.1., možemo u dokazu t.3.2.1.9. staviti: $Y = X$, $x_n^1=a$, $y_n^1=b$. Tada odgovarajući homeomorfizam $h:X \to X$ ispunjava uslov $h(a)=b$.

Neka je $k \in \{1,\dots,n-2\}$ i $a,b \in X_k$ proizvoljne tačke. Prema t.3.1.1., postoje disjunktne, otvoreno-zatvorene okoline U_a, U_b u X redom za tačke a,b tako da je: $U_a \cap \overline{X}_{k-1} = \emptyset$, $U_b \cap \overline{X}_{k-1} = \emptyset$.

Za $k>1$, na osnovu t.3.1.2., je $s(U_a)=s(U_b)=(0,\dots,k-2,k)$ i svi podprostori: $(U_a)_2,\dots,(U_a)_{k-2},(U_a)_k$, $(U_b)_2,\dots,(U_b)_{k-2}$, $(U_b)_k$ nemaju izolovanih tačaka. Na osnovu prvodokazanog dela tvrdjenja, postoji homeomorfizam $h_1:U_a \to U_b$ tako da je $h_1(a)=b$. Tada, preslikavanje $h:X \quad X$, definisano sa

$$h(x)=\begin{cases} h_1(x) & \text{za } x \in U_a \\ h_1^{-1}(x) & \text{za } x \in U_b \\ x & \text{za } x \in X \setminus (U_a \cup U_b), \end{cases} \tag{1}$$

je homeomorfizam, za koji je $h(a)=b$.

Za $k=1$, okoline U_a i U_b nemaju izolovanih tačaka, pa je

$U_a \approx U_b \approx Q$. Pošto je, prema t.3.2.2.1., prostor Q homogen, to preslikavanje $h: X \longrightarrow X$, definisano sa (1), je homeomorfizam, za koji je $h(a)=b$.
Za $k=0$, tvrdjenje je, očigledno, ispunjeno.

Analogno prethodnom dokazuju se tvrdjenja:

3.2.2.4. TVRDJENJE. Neka je $X \in \mathcal{P}$, $s(X)=(0,\dots,n-1,n)$ i podprostori: $X_2,\dots,X_n$ nemaju izolovanih tačaka. Tada je X homogen u odnosu na sve svoje k-tačke.

3.2.2.5. TVRDJENJE. Neka je $X \in \mathcal{P}_1$, $s(X)=(0,\dots,n-2,n)$. Tada je X homogen u odnosu na svoje k-tačke za $k \leq n-2$.

3.2.2.6. TVRDJENJE. Neka je $X \in \mathcal{P}_2$, $s(X)=(0,\dots,n-1,n)$. Tada je X homogen u odnosu na svoje k-tačke za $k \leq n-2$.

3.2.2.7. TVRDJENJE. Neka je $X \in \mathcal{P}_3$, $s(X)=(0,\dots,n-2,n)$. Tada je X homogen u odnosu na svoje k-tačke za $k \leq n-2$.

DOKAZ. Neka su $a,b \in X_k$ proizvoljne tačke.
Za $k \in \{0,1\}$ dokaz je isti kao u t.3.2.2.3.
Neka je $k>1$. Pošto su tačke a,b izolovane u X_k, to postoje njihove disjunktne otvoreno-zatvorene okoline U_a,U_b u X takve da je: $U_a \cap X_k=\{a\}$, $U_a \cap \overline{X}_{k-1}=\emptyset$; $U_b \cap X_k=\{b\}$, $U_b \cap \overline{X}_{k-1}=\emptyset$. Prema tome je: $U_a,U_b \in \mathcal{P}_3$, $s(U_a)=s(U_b)=(0,\dots,k-2,k)$, $(U_a)_k \approx (U_b)_k$, pa su, na osnovu t.3.2.1.9., prostori U_a i U_b homeomorfni. Kako su, prema t.3.1.2., tačke a,b k-tačke za U_a,U_b (jedine k-tačke), to svaki homeomorfizam $h_1: U_a \longrightarrow U_b$ ispunjava uslov $h_1(a)=b$. Preslikavanje $h: X \longrightarrow X$, dato sa (1) iz t. 3.2.2.3., je homeomorfizam koji ispunjava uslov da je $h(a)=b$.

Analogno prethodnom tvrdjenju dokazuje se

3.2.2.5. TVRDJENJE. <u>Neka je</u> $X \in \mathcal{P}_4$, $s(X)=(0,\ldots,n-1,n)$. <u>Tada je</u> X <u>homogen u odnosu na svoje k-tačke za</u> $k \leq n-2$.

3.3. KONSTRUKCIJE PROSTORA PODKLASA $\mathcal{P}_i$, $i \in \{1,2,3,4\}$

U ovom odeljku se navode konstrukcije za prostore podklasa $\mathcal{P}_i$, $i \in \{1,2,3,4\}$, pa time dokazujemo egzistenciju tih podklasa.

Sa Q_0, u daljem, označavamo prostor koji se sastoji od jedne tačke, a sa Q_1 prostor koji je homeomorfan sa Q.

3.3.1. TVRDJENJE. <u>Za svako</u> $n \in N \setminus \{1\}$ <u>postoji prostor</u> $Q_n \in \mathcal{P}$ <u>takav da je</u> $s(Q_n)=(0,\ldots,n-2,n)$ <u>i za svako</u> $i \in \{2,\ldots,n-2,n\}$ <u>podprostor</u> $(Q_n)_i$ <u>nema izolovanih tačaka.</u>

DOKAZ. Koristimo matematičku indukciju. Prvo konstruišimo Q_2. U svaki od odbačenih intervala, pri konstrukciji Cantorovog diskontinuma C, uronimo Q_0. Tada unija svih ovako uronjenih Q_0 i prostora Q daje prostor Q_2.
Da bi dobili Q_3, u svaki od odbačenih intervala, pri konstrukciji prostora C, uronimo prostore Q_0 i Q_1 tako da su disjunktni. Tada unija prostora Q i svih, ovako uronjenih, prostora Q_0 i Q_1 jeste prostor Q_3.
Pretpostavimo da su Q_{k-1} i Q_k konstruisani. Tada u svaki od odbačenih intervala, pri konstrukciji prostora C, uronimo Q_{k-1} i Q_k tako da budu disjunktni. Unija prostora Q i svih, ovako uronjenih, prostora Q_{k-1} i Q_k daje prostor

Q_{k+2} , jer prema konstrukciji i t.3.1.1.,3.1.2. je: $s(Q_{k+2})=(0,\dots,k,k+2)$, $(Q_{k+2})_{k+2}=Q$, $(Q_{k+2})_i \approx Q$ za svako $i\in\{2,\dots,k\}$.

3.3.2. TVRDJENJE. <u>Za svako</u> $n\in N$ <u>postoji prostor</u> $X\in\mathcal{P}$ <u>takav da je</u> $s(X)=(0,\dots,n-1,n)$ <u>i za svako</u> $i\in\{2,\dots,n-1,n\}$ <u>podprostor</u> X_i <u>nema izolovanih tačaka.</u>

DOKAZ. Neka je $X=Q_{n-1}+Q_n$ topološka suma prostora Q_{n-1} i Q_n. Tada, na osnovu prethodnog tvrdjenja i t.3.1.2., je: $s(X)=(0,\dots,n-1,n)$, $X_i\approx Q$ za svako $i\in\{2,\dots,n\}$.

3.3.3. TVRDJENJE. <u>Za svako</u> $P\in\mathcal{P}$ <u>i svako</u> $n\in N\setminus\{1,2,3\}$ <u>postoji prostor</u> $X\in\mathcal{P}_1$ <u>takav da je</u> $s(X)=(0,\dots,n-2,n)$ <u>i</u> $X_n\approx P$.

DOKAZ. Neka je Q_n prostor iz t.3.3.1. Kako je $(Q_n)_n=Q$, to,prema t.1.4.11., možemo smatrati da je P uronjen u $(Q_n)_n$. Tada je $X=(Q_n)_0\cup(Q_n)_1\cup\dots\cup(Q_n)_{n-2}\cup P$ traženi prostor, jer,prema konstrukciji i t.3.1.2., je: $X\in\mathcal{P}_1$, $s(X)=(0,\dots,n-2,n)$, $X_n\approx P$.

3.3.4. TVRDJENJE. <u>Za svako</u> $P^1,P^2\in\mathcal{P}$ <u>i svako</u> $n\in N\setminus\{1,2,3,4\}$ <u>postoji prostor</u> $X\in\mathcal{P}_2$ <u>takav da je</u>: $s(X)=(0,\dots,n-1,n)$; $X_{n-1}\approx P^1$; $X_n\approx P^2$.

DOKAZ. Na osnovu prethodnog tvrdjenja, postoje prostori $X^1,X^2\in\mathcal{P}_1$ takvi da je: $s(X^1)=(0,\dots,n-3,n-1)$, $(X^1)_{n-1}\approx P^1$; $s(X^2)=(0,\dots,n-2,n)$, $(X^2)_n\approx P^2$. Topološka suma $X=X^1+X^2$ je traženi prostor, jer, prema konstrukciji i t.3.1.2., je: $X_{n-1}=(X^1)_{n-1}\approx P^1$, $X_n=(X^2)_n\approx P^2$, $X_i=(X^1)_i+(X^2)_i\approx Q$ za svako $i\in\{2,\dots,n-2\}$.

Za konstrukcije prostora podklasa $\mathcal{P}_i$, $i \in \{3,4\}$ potrebna su nam, prethodno, izvesna tvrdjenja.

3.3.5. TVRDJENJE. Neka je A zatvoren podskup metričkog prostora X i $\mathcal{D}$ u.s.c. dekompozicija od A, čiji su elementi kompaktni. Tada dekompozicija $\mathcal{D}'$, koju čine elementi od $\mathcal{D}$ i tačke skupa $X \setminus A$, je u.s.c. dekompozicija od X i kvocijent prostor $X/\mathcal{D}'$ je metrizabilan.

DOKAZ. Dekompozicija $\mathcal{D}'$ je u.s.c. na osnovu t.2.3.5., pa je još potrebno dokazati da je $X/\mathcal{D}'$ metrizabilan. Iz činjenice da je dekompozicija $\mathcal{D}'$ u.s.c., sledi da je prirodna projekcija $p: X \longrightarrow X/\mathcal{D}'$ zatvoreno preslikavanje ([26],t.9.9.,str.61), a pošto su, k tome, elementi od $\mathcal{D}'$ kompaktni, proizlazi da je $X/\mathcal{D}'$ metrizabilan prostor ([4], t.4.4.17.,str.356).

3.3.6. TVRDJENJE. Neka je X metrički nul-dimenzioni prostor, $\mathcal{D}$ u.s.c. dekompozicija zatvorenog skupa A u X tako da je $A/\mathcal{D}$ metrički nul-dimenzioni prostor. Tada dekompozicija $\mathcal{D}'$, definisana kao u t.3.3.5., inducira metrizabilan nul-dimenzioni prostor $X/\mathcal{D}'$.

DOKAZ. Na osnovu prethodnog tvrdjenja sledi da je $X/\mathcal{D}'$ metrizabilan. Kako je $A/\mathcal{D}$ nul-dimenzion i zatvoren u $X/\mathcal{D}'$ i $(X/\mathcal{D}')\setminus(A/\mathcal{D}')=X\setminus A$ takodjer nul-dimenzion, to prema t.1.2.7. sledi da je $X/\mathcal{D}'$ nul-dimenzion.

3.3.7. TVRDJENJE. Za svako $n \in N\setminus\{1\}$ postoji prostor $P_n \in \mathcal{P}_3$ takav da je $s(P_n)=(0,\dots,n-2,n)$ i $(P_n)_n$ je jednočlan skup.

DOKAZ. Koristimo matematičku indukciju. Prostor P_2 je unija različitih članova konvergentnog niza realnih brojeva i njegove granične vrednosti. Prostor P_3 je unija od Q i članova niza koji konvergira ka jedinici(pri čemu članovi niza nisu iz Q).Konstruišimo P_4. U svaki od odbačenih intervala, pri konstrukciji prostora C, uronimo Q_1 i P_2 tako da su disjunktni.Neka je B_4 podprostor od $[0,1]$, koji se sastoji od svih tačaka ovako uronjenih prostora i skupa C. Prema t.1.1.14., B_4 je nul-dimenzion. Pokažimo da je $P_4=B_4/C$. Zaista, prema t.3.3.6. i konstrukciji je: $P_4 \in \mathcal{P}$, $s(P_4)=(0,1,2,4)$, $(P_4)_2$ ima sve tačke izolovane, $(P_4)_4$ je jednočlan i $\overline{(P_4)_0}$ je kompaktan.

Pretpostavimo da su prostori $P_2,\ldots,P_n$ konstruisani. U svaki od odbačenih intervala, pri konstrukciji prostora C, uronimo P_{n-2} i P_{n-1} tako da budu disjunktni. Neka je B_{n+1} podprostor od $[0,1]$, koji se sastoji od svih tačaka ovako uronjenih prostora i skupa C. Identifikacijom tačaka iz C dobijamo kvocijent prostor B_{n+1}/C, koji,prema konstrukciji i t.3.3.6., ispunjava uslove: pripada klasi $\mathcal{P}$, ima akumulacioni spektar $(0,\ldots,n-1,n+1)$, sve k-tačke za $k\in\{2,\ldots,n-1\}$ su izolovane, ima samo jednu $(n+1)$-tačku, i zatvorenje skupa njegovih 0-tačaka je kompaktno. Prema tome je $P_{n+1}=B_{n+1}/C$.

3.3.8. TVRDJENJE. <u>Za svaki kompaktan prostor</u> $P\in\mathcal{P}$ <u>i svako</u> $n\in N\setminus\{1\}$ <u>postoji prostor</u> $X\in\mathcal{P}_3$ <u>takav da je</u> $s(X)=(0,\ldots,n-2,n)$ <u>i</u> $X_n\approx P$.

DOKAZ. Za $n=2$, X je kompaktan, pa na osnovu t.2.3.9. je tvrdjenje tačno. Za $n>4$, prvo konstruišimo prostor B_n.

Neka su P_{n-3} i P_{n-2} prostori iz t.3.3.7. U svaki od odbačenih intervala, pri konstrukciji prostora C, uronimo P_{n-3} i P_{n-2} tako da budu disjunktni. Tada je B_n podprostor od $[0,1]$, koji se sastoji od svih ovako uronjenih prostora i od C. Prema t. 1.1.14., B_n je nul-dimenzion, a prema konstrukciji $B_n \setminus C$ je prebrojiv. Postoji u.s.c. dekompozicija $\mathcal{D}$ od C takva da je $C/\mathcal{D} \approx P$. Neka je $\mathcal{D}'$ u.s.c. dekompozicija od B_n, koju čine elementi iz $\mathcal{D}$ i tačke od $B_n \setminus C$. Tada, prema t.3.3.6., je $X = B_n/\mathcal{D}'$ metrički, a prema konstrukciji i prebrojiv prostor. Lako se utvrdjuje da je X tražen prostor. Za $n=3$ (odn. $n=4$) stavljajući: $P_0 = Q_0$, $P_1 = Q_1$ (odn. $P_1 = Q_1$) dokaz je analogan prethodnom.

3.3.9. TVRDJENJE. <u>Za svaka dva kompaktna prostora</u> P^1, $P^2 \in \mathcal{P}$ <u>i svako</u> $n \in N \setminus \{1,2\}$ <u>postoji prostor</u> $X \in \mathcal{P}_4$ <u>takav da je</u>: $s(X) = (0,\dots,n-1,n)$; $X_{n-1} \approx P^1$; $X_n \approx P^2$.

DOKAZ. Prema prethodnom tvrdjenju, postoje prostori $X^1, X^2 \in \mathcal{P}_4$ takvi da je: $s(X^1) = (0,\dots,n-3,n-1)$, $(X^1)_{n-1} \approx P^1$; $s(X^2) = (0,\dots,n-2,n)$, $(X^2)_n \approx P^2$. Topološka suma $X = X^1 + X^2$ je traženi prostor, jer je: $X \in \mathcal{P}$; $s(X) = (0,\dots,n-1,n)$ i sve tačke od X_i, $i \in \{2,\dots,n-2\}$, su izolovane (prema t.3.1.2.); $\overline{X}_0 = \overline{(X^1)}_0 + \overline{(X^2)}_0$ je kompaktno; $X_{n-1} = (X^1)_{n-1} \approx P^1$; $X_n = (X^2)_n \approx P^2$.

GLAVA 4.

O JEDNOJ PODKLASI KLASE $\mathcal{Z}$ - KOMPAKTNIH METRIČKIH NUL-DIMENZIONIH PROSTORA I JEDNAČINI $X \times X \approx X$

U ovoj glavi se razmatra podklasa $\mathcal{Z}_7$, klase $\mathcal{Z}$, čiji prostori imaju akumulacioni spektar $(0,2)$.

Koristeći pojam izvodnog skupa, daje se topološka karakterizacija prostora te podklase. Takodjer, navode se i konstrukcije prostora te podklase. Na kraju, razmatra se rešavanje jednačine $X \times X \approx X$, te se pokazuje da u podklasi $\mathcal{Z}_7$ ta jednačina ima $\aleph_1$ različitih rešenja.

4.1. PODKLASA $\mathcal{Z}_7$ KLASE $\mathcal{Z}$

Neka je X prostor klase $\mathcal{Z}$. Izvodni skupovi prostora X definišu se induktivno([7],str.27o): prvi izvodni skup $X^{(1)}$ je skup svih tačaka nagomilavanja od X. Ako je α ordinalni broj prve vrste stavljamo

$$X^{(\alpha)} = (X^{(\alpha-1)})^{(1)} ,$$

a za ordinalni broj druge vrste

$$X^{(\alpha)} = \bigcap \{X^{(\beta)} \mid \beta < \alpha\} .$$

$X^{(\alpha)}$ nazivamo <u>izvodnim skupom reda</u> α. Za $\alpha=0$ stavljamo $X^{(o)}=X$. Za svako α izvodni skup $X^{(\alpha)}$ je zatvoren u X. Označimo $X_{(\beta)}=X^{(\beta)}\setminus X^{(\beta+1)}$; tada za svako α je

$$X=\bigcup\{X_{(\beta)}\mid\beta<\alpha\}\cup X^{(\alpha)}.$$

Skupovi $X_{(o)},X_{(1)},\dots,X_{(\beta)},\dots,X^{(\alpha)}$ čine dekompoziciju prostora X na medjusobno disjunktne skupove. Kako je $X^{(\alpha)}$ zatvoren skup u X, to je $\bigcup\{X_{(\beta)}\mid\beta<\alpha\}$ otvoren skup u X. Kako je $X_{(\beta)}$ skup izolovanih tačaka od $X^{(\beta)}$, sledi da je card $X_{(\beta)}\leq\aleph_o$.

Kažemo da je $X^{(\alpha)}$ <u>posljednji izvodni skup</u> od X, ako je α najmanji ordinalan broj takav da je: $X^{(\alpha)}\neq\emptyset$ i $X^{(\alpha+1)}=\emptyset$ ili $X^{(\alpha)}\neq\emptyset$ i $X^{(\alpha)}=X^{(\alpha+1)}$.

4.1.1. TVRDJENJE. <u>Svaki separabilan metrički prostor ima poslednji izvodni skup čiji je red manji od</u> ω_1 ([7], str. 27o)

Na osnovu prethodnog tvrdjenja sledi

4.1.2. TVRDJENJE. <u>Za svaki ordinalni broj</u> α <u>i svaki prostor</u> $X\in\mathcal{Z}$ <u>je</u> card $(\bigcup\{X_{(\beta)}\mid\beta<\alpha\})\leq\aleph_o$.

4.1.3. TVRDJENJE. <u>Ako je</u> $X^{(\alpha)}$ <u>poslednji izvodni skup prostora</u> $X\in\mathcal{Z}$ <u>tada je ili</u> card $X^{(\alpha)}<\aleph_o$ <u>ili</u> $X^{(\alpha)}\approx C$.

DOKAZ. $X^{(\alpha)}$ je zatvoren skup u X, pa je $X^{(\alpha)}\in\mathcal{Z}$. Ako je $X^{(\alpha+1)}=(X^{(\alpha)})^{(1)}=\emptyset$ tada sve tačke prostora $X^{(\alpha)}$ su izolovane, pa je card $X^{(\alpha)}<\aleph_o$.
Ako je pak $X^{(\alpha)}=X^{(\alpha+1)}$, tada je prostor $X^{(\alpha)}\in\mathcal{Z}$ bez izolovanih tačaka, pa prema t.1.4.6. je $X^{(\alpha)}\approx C$.

4.1.4. DEFINICIJA. Prostor X pripada <u>podklasi</u> $\mathcal{Z}_7$, klase $\mathcal{Z}$, ako i samo ako postoji ordinalan broj α takav da za svako $o \leq \beta < \alpha$ je ispunjen uslov

$$\overline{X_{(\beta)}} = \bigcup \{ X_{(\gamma)} \mid \beta \leq \gamma < \alpha \} \cup X^{(\alpha)} .$$

4.1.5. TVRDJENJE. <u>Prebrojivi kompaktni metrički prostori pripadaju podklasi</u> $\mathcal{Z}_7$.

DOKAZ. Neka je X prebrojiv kompaktan metrički prostor. Prema t.4.1.3., je $X = X_{(o)} \cup X_{(1)} \cup \dots \cup X^{(\alpha)}$, card $X^{(\alpha)} < \aleph_o$, gde je $X^{(\alpha)} \neq \emptyset$ poslednji izvodni skup prostora X. Kako za svako $\beta < \alpha$ vredi $\overline{X_{(\beta)}} = X_{(\beta)} \cup X_{(\beta+1)} \cup \dots \cup X^{(\alpha)}$ to je $X \in \mathcal{Z}_7$.

4.1.6. TVRDJENJE. <u>Ako je</u> $X \in \mathcal{Z}_7$ <u>tada je ili</u> $s(X)=(o)$ <u>ili</u> $s(X)=(1)$ <u>ili</u> $s(X)=(0,2)$.

DOKAZ. Ako je card $X < \aleph_o$ tada je $X = X^{(o)} = X_{(o)}$, tj. sve tačke od X su izolovane, pa je $s(X)=(C)$.
Ako je $X \approx C$, tada je $s(X)=(1)$.
Ako je card $X \geq \aleph_o$ i $X \not\approx C$, tada postoji ordinalan broj $\alpha > o$ takav da je $X = X_{(o)} \cup \dots \cup X^{(\alpha)}$ i $\overline{X_{(o)}} = X$. Pokažimo da je $X_1 = \emptyset$. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $X_1 \neq \emptyset$. Tada, s jedne strane je $X_1 \subset X^{(\alpha)}$, a s druge $X^{(\alpha)} \subset \overline{X_o} = \overline{X_{(o)}}$ (jer $X_o = X_{(o)}$), pa bi imali $X_1 \cap \overline{X}_o \neq \emptyset$, što je nemoguće. Dakle je: $X_o \neq \emptyset$, $X_1 = \emptyset$, card $X \geq \aleph_o$, odakle sledi da je $s(X)=(o,2)$.

4.1.7. TVRDJENJE. <u>Ako je</u> $X \in \mathcal{Z}_7$ <u>i</u> $a \in X_{(\beta)}$ <u>tada je</u> $a \in \bigcap \{ \overline{X_{(\gamma)}} \mid \gamma \leq \beta \} \setminus X^{(\beta+1)}$.

DOKAZ. Iz $X \in \mathcal{Z}_7$ sledi da za svako $\gamma \leq \beta$ je $\overline{X_{(\gamma)}} = X_{(\gamma)} \cup \dots \cup X_{(\beta)} \cup X^{(\beta+1)}$, pa $a \in X_{(\beta)}$ povlači $a \in \bigcap \{ \overline{X_{(\gamma)}} \mid \gamma \leq \beta \}$. Odatle i iz $a \notin X^{(\beta+1)}$ sledi tvrdjenje.

4.1.8. TVRDJENJE. Ako je $X \in \mathcal{Z}_7$ i $X^{(\alpha)} \neq \emptyset$, $\alpha > 0$, tada je $X^{(\alpha)} = \bigcap\{\overline{X_{(\gamma)}} \mid \gamma < \alpha\}$.

DOKAZ. Tvrdjenje sledi iz $X = \bigcup\{X_{(\delta)} \mid \delta < \alpha\} \cup X^{(\alpha)}$ i $\overline{X_{(\gamma)}} = \bigcup\{X_{(\delta)} \mid \gamma \leq \delta < \alpha\} \cup X^{(\alpha)}$ za svako $\gamma < \alpha$.

4.1.9. TVRDJENJE. Neka je $X \in \mathcal{Z}_7$, $X = \bigcup\{X_{(\gamma)} \mid \gamma < \alpha\} \cup X^{(\alpha)}$. Ako disjunktni otvoreno-zatvoreni skupovi X', X'' čine dekompoziciju od X tada podprostori X', X'' pripadaju podklasi $\mathcal{Z}_7$ i $X^{(\alpha)} = (X')^{(\alpha)} \cup (X'')^{(\alpha)}$, $X_{(\beta)} = (X')_{(\beta)} \cup (X'')_{(\beta)}$ za svako $\beta < \alpha$.

DOKAZ. Tvrdjenje sledi neposredno iz definicije 4.1.4.

4.1.10. DEFINICIJA. Za prostore $X, Y \in \mathcal{Z}_7$ kažemo da su ekvivalentni ako i samo ako postoji ordinalan broj α takav da su podprostori $X^{(\alpha)}$ i $Y^{(\alpha)}$ neprazni i homeomorfni.

4.1.11. TVRDJENJE. Neka su $X, Y \in \mathcal{Z}_7$ ekvivalentni prostori. Ako su X', X'' disjunktni otvoreno-zatvoreni skupovi u X, koji čine pokrivač za X, tada postoje disjunktni otvoreno-zatvoreni skupovi Y', Y'' u Y, koji čine pokrivač za Y i takvi da su X', Y' i X'', Y'' parovi ekvivalentnih prostora.

DOKAZ. Kako su X i Y ekvivalentni prostori, to postoji ordinalan broj α tako da je $X = \bigcup\{X_{(\gamma)} \mid \gamma < \alpha\} \cup X^{(\alpha)}$, $Y = \bigcup\{Y_{(\gamma)} \mid \gamma < \alpha\} \cup Y^{(\alpha)}$, $X^{(\alpha)} \approx Y^{(\alpha)}$.
Razlikujemo dva slučaja: 1) $X' \cap X^{(\alpha)} = \emptyset$, $X'' \cap X^{(\alpha)} \neq \emptyset$; 2) $X' \cap X^{(\alpha)} \neq \emptyset$, $X'' \cap X^{(\alpha)} \neq \emptyset$.
Razmotrimo slučaj 1). Iz $X' \cap X^{(\alpha)} = \emptyset$ proizlazi da je $X' \subset \bigcup\{X_{(\gamma)} \mid \gamma < \alpha\}$, tj. da je X' prebrojiv kompaktan prostor. Prema tome, postoji jedinstven ordinalan broj $\beta < \alpha$

takav da je $(X')^{(\beta)}$ poslednji izvodni skup od X', koji ima konačno tačaka. Neka je card $(X')^{(\beta)}=n$ i $y_1,\dots,y_n$ različite tačke skupa $Y_{(\beta)}$. Kako su tačke $y_1,\dots,y_n$ izolovane u $Y_{(\beta)}$ i $Y_{(o)}\cup\dots\cup Y_{(\beta)}$ je otvoren skup u Y, to postoje medjusobno disjunktne otvoreno-zatvorene okoline $U_{y_1},\dots,U_{y_n}$, redom tačaka $y_1,\dots,y_n$, tako da je $U_{y_i}\cap Y_{(\beta)} = \{y_i\}$ za svako $i\in\{1,\dots,n\}$. Neka je $Y'=U_{y_1}\cup\dots\cup U_{y_n}$ i $Y''=Y\setminus Y'$. Prema konstrukciji i t.4.1.9. je $(Y')^{(\beta)}=\{y_1,\dots,y_n\}$, pa je $(X')^{(\beta)}\approx(Y')^{(\beta)}$. Takodjer je $(Y'')^{(\alpha)}\approx \approx(X'')^{(\alpha)}$, jer je $Y^{(\alpha)}\subset Y''$, $X^{(\alpha)}\subset X''$, pa na osnovu t.4.1.9. je $(Y'')^{(\alpha)}=Y^{(\alpha)}$, $(X'')^{(\alpha)}=X^{(\alpha)}$. Prema tome X', $Y'\in\mathcal{Z}_7$ i $X'',Y''\in\mathcal{Z}_7$ su parovi ekvivalentnih prostora.

Razmotrimo slučaj 2). Kako je $X^{(\alpha)}$ zatvoren skup u X, to su $X'\cap X^{(\alpha)}$ i $X''\cap X^{(\alpha)}$ disjunktni i zatvoreni skupovi u X. Kako je $X^{(\alpha)}\approx Y^{(\alpha)}$, to postoje disjunktni zatvoreni skupovi F_1 i F_2 u Y tako da je $Y^{(\alpha)}=F_1\cup F_2$, $F_1\approx X'\cap X^{(\alpha)}$, $F_2\approx X''\cap X^{(\alpha)}$. Nadalje, kako je Y nuldimenzionalan, postoji otvoreno-zatvoren skup Y' u Y takav da je $F_1\subset Y'$, $Y'\cap F_2=\emptyset$. Stavimo $Y''=Y\setminus Y'$. Tada, prema t.4.1.9. je $(Y')^{(\alpha)}=F_1$, $(Y'')^{(\alpha)}=F_2$, odakle je $(X')^{(\alpha)} \approx(Y')^{(\alpha)}$, $(X'')^{(\alpha)}\approx(Y'')^{(\alpha)}$. Prema tome su $X',Y'\in\mathcal{Z}_7$ i $X'',Y''\in\mathcal{Z}_7$ parovi ekvivalentnih prostora.

4.1.12. TVRDJENJE. <u>Neka su</u> $X,Y\in\mathcal{Z}_7$ <u>ekvivalentni prostori. Tada</u> X <u>i</u> Y <u>imaju izomorfne baze.</u>

DOKAZ. Uranjajući X i Y u Cantorov diskontinum C, te koristeći prethodno tvrdjenje, dokazivanje teče isto kao u t.2.2.1.11., s tim što termin"ekvivalentni prostori"ima značenje u smislu definicije 4.1.10.

Na osnovu prethodnog tvrdjenja i t.1.4.8. sledi

4.1.13. TVRDJENJE. Neka su $X,Y \in \mathcal{Z}_7$ ekvivalentni prostori. Tada su X i Y homeomorfni.

Iz prethodnog sledi tvrdjenje Mazurkiewicz-Sierpińskog [19]

4.1.14. TVRDJENJE. Ako su $X,Y \in \mathcal{Z}$ prebrojivi prostori, čiji poslednji izvodni skupovi $X^{(\alpha)}, Y^{(\alpha)}$ imaju istu kardinalnost, tada su X i Y homeomorfni.

DOKAZ. Prema t.4.1.5., prostori X i Y su iz $\mathcal{Z}_7$. Tada je $X = X_{(o)} \cup \ldots \cup X^{(\alpha)}$, $Y = Y_{(o)} \cup \ldots \cup Y^{(\alpha)}$, card $X^{(\alpha)}$ = card $Y^{(\alpha)} = n$, $n \in N$, tj. X i Y su ekvivalentni, pa su, na osnovu t.4.1.13., X i Y homeomorfni.

4.1.15. TVRDJENJE. Ako prostori $X,Y \in \mathcal{Z}_7$ imaju poslednje izvodne skupove $X^{(\alpha)}$, $Y^{(\alpha)}$, koji nemaju izolovanih tačaka, tada su X i Y homeomorfni.

DOKAZ. Iz $X = X_{(o)} \cup \ldots \cup X^{(\alpha)}$, $Y = Y_{(o)} \cup \ldots \cup Y^{(\alpha)}$, $X^{(\alpha)} \approx Y^{(\alpha)} \approx C$ sledi da su X i Y ekvivalentni, pa su prema t.4.1.13. i homeomorfni.

4.2. KONSTRUKCIJE PROSTORA PODKLASE $\mathcal{Z}_7$

4.2.1. TVRDJENJE. Za svaki ordinalan broj $\alpha < \omega_1$ postoji prostor $X_\alpha \in \mathcal{Z}_7$ takav da je card $(X_\alpha)^{(\alpha)} = 1$.

DOKAZ. Koristićemo transfinitnu indukciju.
Za $\alpha = 0$ tvrdjenje je tačno, jer za $X_0 = \{1\}$ je $X_0 = (X_0)^{(0)}$.
Pretpostavimo da je tvrdjenje tačno za sve ordinalne brojeve

$\beta < \alpha$, $\alpha < \omega_1$. Ako je α prve vrste, tada u svaki od odbačenih intervala, pri konstrukciji Cantorovog diskontinuma C, uronimo $X_{\alpha-1}$. Neka je X podprostor od $[0,1]$, koji se sastoji od svih tačaka ovako uronjenih prostora $X_{\alpha-1}$ i skupa C. Tada je $X \in \mathcal{Z}_7$, $X = X_{(0)} \cup \dots \cup X_{(\alpha-1)} \cup X^{(\alpha)}$, $X^{(\alpha)} = C$. Identifikacijom tačaka skupa $X^{(\alpha)}$ dobijamo kvocijent prostor $X/X^{(\alpha)}$, koji je traženi prostor X_α.
Ako je α druge vrste, tada u svaki od odbačenih intervala, pri konstrukciji prostora C, uronimo niz medjusobno disjunktnih prostora $X_0, \dots, X_\beta, \dots$, $\beta < \alpha$, tako da njihovi dijametri i razdaljine od levih krajeva odgovarajućih odbačenih intervala teže prema nuli. Neka je X podprostor od $[0,1]$, koji se sastoji od svih ovako uronjenih prostora X_β, $\beta < \alpha$, i prostora C. Tada je $X \in \mathcal{Z}_7$, $X = \bigcup \{X_{(\beta)} \mid \beta < \alpha\} \cup X^{(\alpha)}$, $X^{(\alpha)} = C$. Identifikacijom tačaka iz $X^{(\alpha)}$ dobijamo kvocijent prostor $X/X^{(\alpha)}$, koji je opet traženi prostor X_α.

4.2.2. TVRDJENJE. <u>Za svaki ordinalan broj</u> $\alpha < \omega_1$ <u>postoji prostor</u> $X \in \mathcal{Z}_7$ <u>takav da je njegov poslednji izvodni skup</u> $X^{(\alpha)}$ <u>homeomorfan Cantorovom diskontinumu</u> C.

DOKAZ. Za $\alpha = 0$ je $X = C$, pa je tvrdjenje tačno. Pretpostavimo da je tvrdjenje tačno za sve ordinalne brojeve $\beta < \alpha$, $\alpha < \omega_1$, pa pkažimo da je tačno i za ordinalan broj α. Ako je α prve vrste, tada u svaki od odbačenih intervala, pri konstrukciji prostora C, uronimo prostor $X_{\alpha-1}$ (videti t.4.2.1.). Tada je X podprostor od $[0,1]$, koji se sastoji od svih tačaka ovako uronjenih prostora $X_{\alpha-1}$ i prostora C.
Ako je α druge vrste, tada u svaki od odbačenih intervala,

pri konstrukciji prostora C, uronimo niz medjusobno disjunktnih prostora $X_0, \dots, X_\beta, \dots$, $\beta < \alpha$, (videti t.4.2.1.) tako da njihovi dijametri i razdaljine od levih krajeva odgovarajućih odbačenih intervala teže prema nuli. Tada je X podprostor od $[0,1]$, koji se sastoji od svih ovako uronjenih prostora i prostora C.

4.2.3. TVRDJENJE. <u>Za svaki</u> $Z \in \mathcal{Z}$ <u>i svaki ordinalan broj</u> $\alpha < \omega_1$ <u>postoji prostor</u> $X \in \mathcal{Z}_7$ <u>takav da je</u>
$X = \bigcup \{X_{(\beta)} \mid \beta < \alpha\} \cup X^{(\alpha)}$ <u>i</u> $X^{(\alpha)} \approx Z$.

DOKAZ. Na osnovu prethodnog tvrdjenja postoji $Y \in \mathcal{Z}_7$ takav da je njegov poslednji izvodni skup $Y^{(\alpha)}$ homeomorfan Cantorovom diskontinumu C. Nadalje, postoji u.s.c. dekompozicija $\mathcal{D}$ od $Y^{(\alpha)}$ tako da je $Y^{(\alpha)}/\mathcal{D} \approx Z$. Neka je $\mathcal{D}'$ dekompozicija od Y, koju čine članovi dekompozicije $\mathcal{D}$ i tačke skupa $Y \setminus Y^{(\alpha)}$. Tada, prema t.2.3.7. i konstrukciji, je $X = Y/\mathcal{D}'$ tražen prostor.

4.3. O PROSTORIMA KOJI SU HOMEOMORFNI SVOJIM KVADRATIMA

U ovom odeljku razmatramo rešenja jednačine $X \times X \approx X$ u klasi $\mathcal{Z}$ kompaktnih metričkih nul-dimenzionih prostora. M. Marjanović je u [18] postavio sledeći problem:
Odrediti prostor klase $\mathcal{Z}$, koji je homeomorfan svojem kvadratu a topološki je različit od $C_0, C_1, C_0 + C_1$, C_2, $C_1 + C_2$, C_3, C_4, C_5, C_7.

Ovde se daje rešenje tog problema, tako što se pokazuje da u podklasi $\mathcal{Z}_7$ postoji $\aleph_1$ topološki različitih prostora koji su homeomorfni svojim kvadratima.

4.3.1. O REDU TAČAKA TOPOLOŠKOG PROIZVODA

4.3.1.1. DEFINICIJA. Neka je $X \in \mathcal{Z}$. Kažemo da je n red tačke $x \in X$ ako i samo ako je $x \in X_n$, $n \in N \cup \{0, \omega\}$. Red tačke $x \in X$ označavamo sa $\mathrm{ord}(x)$.

Broj $n \in N \setminus \{1\}$ predstavljaćemo u obliku $n = 6k + r$, gde je $k \in N \cup \{0\}$, $r \in \{0,2,3,4,5,7\}$.

Sledeće tvrdjenje, koje potiče od M. Marjanovića [16], daje formulu za izračunavanje reda tačaka topološkog proizvoda.

4.3.1.2. TVRDJENJE. Neka su $X, Y \in \mathcal{Z}$ i $x \in X$, $y \in Y$. Ako je $\mathrm{ord}(x) = 6k_1 + r_1$ i $\mathrm{ord}(y) = 6k_2 + r_2$ tada je $\mathrm{ord}(x,y) = 6(k_1+k_2) + r_1 \cdot r_2$, gde je množenje ostataka r_1, r_2 dato tablicom

•	0	2	3	4	5	7
0	0	2	3	4	5	7
2	2	2	5	4	5	7
3	3	5	3	7	5	7
4	4	4	7	4	7	7
5	5	5	5	7	5	7
7	7	7	7	7	7	7

Ako je $\mathrm{ord}(x) = 1$ i $\mathrm{ord}(y) = n$, $n \in N \cup \{0\}$, tada je $\mathrm{ord}(x,y) = 1$.

4.3.1.3. TVRDJENJE. Ako je $\mathrm{ord}(x) = \omega$ i $\mathrm{ord}(y) = 1$ tada je $\mathrm{ord}(x,y) = 1$.

DOKAZ. Kako je $\mathrm{ord}(y) = 1$, to postoji okolina V u Y tačke y, koja nema izolovanih tačaka iz Y. Tada okolina $X \times V$ tačke $(x,y) \in X \times Y$ nema izolovanih tačaka iz $X \times Y$, odakle proizlazi da je $\mathrm{ord}(x,y) = 1$.

4.3.1.4. TVRDJENJE. Ako je ord $(x) = \omega$ i ord $(y) = n \neq 1$ tada je ord $(x,y) = \omega$.

DOKAZ. Neka je $U \times V$ proizvoljna okolina tačke $(x,y) \in X \times Y$, gde su U,V redom okoline tačaka x,y u X,Y. Treba pokazati da $U \times V$ sadrži tačke reda n za svako $n \in N \cup \{0\}$. Kako je $\mathrm{ord}(x) = \omega$ i $\mathrm{ord}(y) = n \neq 1$, sledi da U sadrži tačke reda n za svako $n \in N \cup \{0\}$, a da V sadrži tačku reda nula. Prema tome, na osnovu t.4.3.1.2., proizlazi da $U \times V$ sadrži tačke reda n za svako $n \in N \cup \{0\}$, tj. $\mathrm{ord}(x,y) = \omega$.

Topološki proizvod $X \times X$ označavaćemo sa X^2.

Iz prethodna tri tvrdjenja sledi

4.3.1.5. TVRDJENJE. Ako je $X \in \mathcal{Z}$ tada za akumulacione spektre $s(X)$, $s(X^2)$ prostora X i X^2 važi tablica

$s(X)$	$s(X^2)$
(0)	(0)
(1)	(1)
$(0,1)$	$(0,1)$
$(0,\dots,6k-2,6k)$	$(0,\dots,12k-2,12k)$
$(0,\dots,6k-1,6k)$	$(0,\dots,12k-1,12k)$
$(0,\dots,6k,6k+2)$	$(0,\dots,12k,12k+2)$
$(0,\dots,6k+1,6k+2)$	$(0,\dots,12k+1,12k+2)$
$(0,\dots,6k+1,6k+3)$	$(0,\dots,12k+1,12k+3)$
$(0,\dots,6k+2,6k+3)$	$(0,\dots,12k+3,12k+5)$
$(0,\dots,6k+2,6k+4)$	$(0,\dots,12k+2,12k+4)$
$(0,\dots,6k+3,6k+4)$	$(0,\dots,12k+5,12k+7)$
$(0,\dots,6k+3,6k+5)$	$(0,\dots,12k+3,12k+5)$
$(0,\dots,6k+4,6k+5)$	$(0,\dots,12k+5,12k+7)$
$(0,\dots,6k+5,6k+7)$	$(0,\dots,12k+5,12k+7)$
$(0,\dots,6k+6,6k+7)$	$(0,\dots,12k+12,12k+13)$
$(0,\dots,n,\dots,\omega)$	$(0,\dots,n,\dots,\omega)$,

gde je $k \in N \cup \{0\}$.

4.3.1.6. DEFINICIJA. Kažemo da je prostor $X \in \mathcal{Z}$ <u>pun</u> ako i samo ako svaki njegov podprostor $X_n \neq \emptyset$, $n > 0$, nema izolovanih tačaka.

Na osnovu ove definicije i t.2.3.1.,2.3.2.,2.3.3. sledi

4.3.1.7. TVRDJENJE. <u>Puni prostori su jedino</u> $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots, C_\omega$, $C_1+C_2, C_2+C_3, \ldots, C_{n-1}+C_n, \ldots$ <u>i prostori koji imaju akumulacioni spektar</u> (0) <u>ili</u> (0,1).

4.3.1.8. TVRDJENJE. <u>Neka prostori</u> $X, Y \in \mathcal{Z}$ <u>nemaju akumulacioni spektar</u> (0),(1),(0,1). <u>Tada je topološki proizvod</u> $X \times Y$ <u>pun ako i samo ako su</u> X <u>i</u> Y <u>puni.</u>

DOKAZ. Dovoljnost je dokazana u [16].
POTREBNOST. Neka je $X \times Y$ pun. Pretpostavimo suprotno, tj. da barem jedan od faktora X,Y nije pun; na primer X. Tada, postoji tačka $x \in X_n$, $n > 0$, koja je izolovana u X_n, pa uzimajući tačku $y \in Y_0$ dobijamo, prema t.4.3.1.2., da je (x,y) izolovana tačka u $(X \times Y)_n$, $n > 0$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je $X \times Y$ pun.

Iz t.4.3.1.7. i 4.3.1.5. sledi

4.3.1.9. TVRDJENJE. <u>Jedini puni prostori koji su homeomorfni svojim kvadratima su</u>: C_0, C_1, C_0+C_1, C_1+C_2, C_2, C_3, C_4, C_5, C_7, C_ω.

Na osnovu t.4.3.1.5. sledi

4.3.1.10. TVRDJENJE. <u>U klasi</u> $\mathcal{Z}$ <u>jedino prostori koji imaju akumulacione spektre</u> (0), (1), (0,1), (0,2), (0,1,2), (0,1,3), (0,1,2,4), (0,1,2,3,5), (0,1,2,3,4,5,7), $(0,\ldots,n,\ldots,\omega)$ <u>mogu biti homeomorfni svojim kvadratima.</u>

Mi ćemo potražiti rešenja jednačine $X^2 \approx X$ u klasi $\mathcal{Z}_7$. U tu svrhu, prethodno, nam je potrebno definisati red tačaka prebrojivih prostora klase $\mathcal{Z}$ i množenje reda njihovih tačaka.

4.3.1.11. DEFINICIJA. Za tačku x prebrojivog prostora $X \in \mathcal{Z}$ kažemo da je <u>reda</u> β ako i samo ako je $x \in X_{(\beta)}$ (ako je $X^{(\beta)}$ poslednji izvodni skup tada stavljamo $X_{(\beta)} = X^{(\beta)}$). Red tačke x označavamo sa $r(x)$.

4.3.1.12. TVRDJENJE. <u>Neka su</u> $X,Y \in \mathcal{Z}$ <u>prebrojivi prostori i</u> $X \times Y$ <u>njihov topološki proizvod. Ako je</u> $r(x) = 0$, $x \in X$, <u>i</u> $r(y) = \beta$, $y \in Y$, <u>tada je</u> $r(x,y) = \beta$, $(x,y) \in X \times Y$.

DOKAZ. Iz $r(x)=0$ sledi da je tačka x izolovana u X, pa je $\{x\} \times Y$ otvoreno-zatvoren skup u $X \times Y$. Prema tome, projekcija $p: \{x\} \times Y \longrightarrow Y$, definisana sa $p(x,y)=y$, $y \in Y$, je homeomorfizam, pa je $r(x,y)=r(y)=\beta$.

4.3.1.13. TVRDJENJE. <u>Neka su</u> $X,Y \in \mathcal{Z}$ <u>prebrojivi prostori i</u> $r(a)=\alpha$, $r(b)=\beta$ <u>za</u> $a \in X$, $b \in Y$. <u>Tada je red</u> $r(a,b)$ <u>tačke</u> $(a,b) \in X \times Y$ <u>jednoznačno odredjen sa</u> α, β.

DOKAZ. Koristićemo transfinitnu indukciju. Prema prethodnom tvrdjenju, tvrdjenje je tačno za $\alpha=0$, $\beta=0$. Pretpostavimo da je tvrdjenje tačno za $r(x) \leq \alpha$, $r(y) < \beta$ i $r(x) < \alpha$, $r(y) \leq \beta$ za svako $x \in X$, $y \in Y$, pa pokažimo da je tačno i za $r(a)=\alpha$, $r(b)=\beta$.

Kako je $r(a)=\alpha$, tj. $a \in X_{(\alpha)}$ sledi da postoji okolina U_a od a u X, koja osim a sadrži samo tačke reda manjeg od α. Isto tako, postoji okolina V_b od b u Y, koja osim tačke b sadrži samo tačke čiji je red manji od β. Prema indukcijskoj pretpostavci skup

$$A = \left\{ r(x,y) \;\middle|\; (x,y) \in (U_a \times V_b) \setminus \{(a,b)\} \right\}$$

je jednoznačno odredjen. Neka je $s = \sup A$. Razlikujemo dva slučaja: 1) $s \in A$, 2) $s \notin A$.

U slučaju 1) je (a,b) tačka nagomolavanja za tačke reda s, pa kako $(U_a \times V_b) \setminus \{(a,b)\}$ sadrži samo tačke reda $\leq s$, proizlazi da je $(a,b) \in (X \times Y)_{(s+1)}$, tj. $r(a,b) = s+1$.

U slučaju 2) je (a,b) tačka nagomilavanja za tačke reda manjeg od s, pa je $(a,b) \in (X \times Y)_{(s)}$, tj. $r(a,b) = s$. Time je pokazano da je $r(a,b)$ jednoznačno odredjen sa α i β.

Na osnovu prethodnog tvrdjenja proizlazi da red tačke $(x,y) \in X \times Y$ zavisi jedino od ordinalnih brojeva $r(x)$ i $r(y)$, te da je nezavisan od prostora X i Y. Prema tome, za $r(x) = \alpha$ i $r(y) = \beta$ ima smisla govoriti o "množenju" $r(x) \times r(y) = \alpha \times \beta$ reda tačaka. Kako je $X \times Y \approx Y \times X$ i $(X \times Y) \times Z \approx X \times (Y \times Z)$ ovo množenje je komutativno i asocijativno, a 0 je neutralan elemenat. Prema tome $([0, \omega_1), \times)$ je semigrupa sa jedinicom.

Ordinalan broj ξ predstavljaćemo u jedinstvenom obliku $\xi = \sum_\alpha \omega^\alpha x_\alpha$, $x_\alpha \in N \cup \{0\}$, gde se sabiranje vrši po opadajućim eksponentima α.

Ako je $\xi = \sum_\alpha \omega^\alpha x_\alpha$, $\eta = \sum_\alpha \omega^\alpha y_\alpha$ tada je $\flat(\xi,\eta) = \sum_\alpha \omega^\alpha (x_\alpha + y_\alpha)$ prirodna suma ordinalnih brojeva ξ i η ([6], str.1o9).

Sledeće tvrdjenje daje formulu za množenje reda tačaka.

4.3.1.14. TVRDJENJE. <u>Neka su</u> $X, Y \in \mathcal{Z}$ <u>prebrojivi prostori i</u> $r(x) = \xi = \sum_\alpha \omega^\alpha x_\alpha$, $r(y) = \eta = \sum_\alpha \omega^\alpha y_\alpha$ <u>za</u> $x \in X$,

$y \in Y$. Tada red tačke $(x,y) \in X \times Y$ je $r(x,y) = \sum_{\alpha} \omega^{\alpha}(x_{\alpha} + y_{\alpha})$, tj. proizvod $\xi \times \eta$ je prirodna suma brojeva ξ i η

$\xi \times \eta = \delta(\xi, \eta)$.

DOKAZ. Koristićemo transfinitnu indukciju.

Prema t.4.3.1.12. tvrdjenje je tačno za $\xi = 0$, $\eta = 0$. Neka je $r(a) = \omega^{\alpha}$, $r(b) = \omega^{\beta}$, $\beta \leq \alpha$, $a \in X$, $b \in Y$. Pretpostavimo da je tvrdjenje tačno za svako $r(x) < \omega^{\alpha}$, $r(y) \leq \omega^{\beta}$ i za svako $r(x) \leq \omega^{\alpha}$, $r(y) < \omega^{\beta}$, $x \in X$, $y \in Y$. Iz $r(a) = \omega^{\alpha}$ i $r(b) = \omega^{\beta}$ sledi da je $a \in X_{(\omega^{\alpha})}$ i $b \in Y_{(\omega^{\beta})}$. Prema tome, postoji okolina U_a od a u X, koja sadrži samo jednu tačku reda ω^{α} (to je a), a sve ostale njene tačke su reda manjeg od ω^{α}. Isto tako, postoji okolina V_b od b u Y, koja sadrži samo jednu tačku reda ω^{β} (to je b), dok su sve ostale njene tačke reda manjeg od ω^{β}. Ako je β druge vrste, tada na osnovu indukcijske pretpostavke $(U_a \times V_b) \setminus \{(a,b)\}$ sadrži tačke čiji je red najviše $\omega^{\alpha} + \omega^{\gamma}$ za svako $\gamma < \beta$. Prema tome je $r(a,b) = \lim\limits_{\gamma<\beta} (\omega^{\alpha} + \omega^{\gamma}) = \omega^{\alpha} + \lim\limits_{\gamma<\beta} \omega^{\gamma} = \omega^{\alpha} + \omega^{\beta}$. Ako je β prve vrste, tada prema pretpostavci indukcije $(U_a \times V_b) \setminus \{(a,b)\}$ sadrži tačke čiji je red najviše $\omega^{\alpha} + \omega^{\beta-1}.n$ za svako $n < \omega$. Prema tome je $r(a,b) = \lim\limits_{n<\omega} (\omega^{\alpha} + \omega^{\beta-1}.n) = \omega^{\alpha} + \omega^{\beta-1}.\lim\limits_{n<\omega} n = \omega^{\alpha} + \omega^{\beta}$. Time je dokazano da tvrdjenje važi za $r(a) = \omega^{\alpha}$, $r(b) = \omega^{\beta}$, $\beta \leq \alpha$. Na osnovu ovog, te osobina komutacije i asocijacije za množenje reda tačaka sledi da je i za $r(x) = \sum_{\alpha} \omega^{\alpha} x_{\alpha}$, $r(y) = \sum_{\alpha} \omega^{\alpha} y_{\alpha}$ ispunjeno $r(x,y) = \sum_{\alpha} \omega^{\alpha}(x_{\alpha} + y_{\alpha})$.

Na osnovu prethodnog tvrdjenja i t.4.1.13. sledi

4.3.1.15. TVRDJENJE. Neka su $X, Y \in \mathcal{Z}$ prebrojivi prostori. Ako je $X^{(\xi)}$ poslednji izvodni skup od X, card $X^{(\xi)} = n$, i $Y^{(\eta)}$ poslednji izvodni skup od Y, card $Y^{(\eta)} = m$, tada je $(X \times Y)^{(b(\xi, \eta))}$ poslednji izvodni skup topološkog proizvoda $X \times Y$ i card $(X \times Y)^{(b(\xi, \eta))} = n.m$. Drugim rečima: Ako su uredjeni parovi (ξ, n), (η, m) pridruženi redom prebrojivim prostorima $X, Y \in \mathcal{Z}$ tada uredjen par $(b(\xi, \eta), n\, m)$ topološki odredjuje proizvod $X \times Y$.

4.3.1.16. TVRDJENJE. Svaki prostor X podklase $\mathcal{Z}_7$, koji ima poslednji izvodni skup $X^{(\alpha)}$, $\alpha \in \{\omega^{\beta} | 0 < \beta < \omega_1\}$, homeomorfan Cantorovom diskontinumu C, je homeomorfan svojem kvadratu.

DOKAZ. Dokaz se zasniva na sledećim tvrdjenjima:

1) Ako je $\xi < \alpha$ i $\eta < \alpha$ tada je $b(\xi, \eta) < \alpha$.

Dokaz. Neka je $\alpha = \omega^{\beta}$, $0 < \beta < \omega_1$. Ako je β prve vrste tada postoje prirodni brojevi n_1 i n_2 tako da je $\xi \leq \omega^{\beta-1} n_1$, $\eta \leq \omega^{\beta-1} \cdot n_2$, pa je $b(\xi, \eta) \leq \omega^{\beta-1}(n_1+n_2) < \omega^{\beta} = \alpha$. Ako je β druge vrste tada postoje ordinalni brojevi $\gamma_1, \gamma_2 < \beta$ tako da je $\xi \leq \omega^{\gamma_1}$, $\eta \leq \omega^{\gamma_2}$, pa je $b(\xi, \eta) \leq \omega^{\max\{\gamma_1, \gamma_2\}} + \omega^{\min\{\gamma_1, \gamma_2\}} < \omega^{\beta} = \alpha$.

2) Ako je $x_0 \in X_{(\xi)}$, $\xi < \alpha$ i $x_1 \in X_{(\eta)}$, $\eta < \alpha$ tada je $(x_0, x_1) \in (X^2)_{(b(\xi, \eta))}$.

Dokaz. Iz $x_0 \in X_{(\xi)}$ sledi da postoji otvoreno-zatvorena okolina U_{x_0} od x_0 u X takva da je $U_{x_0} \subset X \setminus X^{(\xi+1)}$, $U_{x_0} \cap X_{(\xi)} = \{x_0\}$. Isto tako, postoji otvoreno-zatvorena okolina U_{x_1} od x_1 u X takva da je $U_{x_1} \subset X \setminus X^{(\eta+1)}$, $U_{x_1} \cap X_{(\eta)} = \{x_1\}$. Kako su $U_{x_0}, U_{x_1} \in \mathcal{Z}$ prebrojivi prostori, to na osnovu t. 4.3.1.14. je $(x_0, x_1) \in (U_{x_0} \times U_{x_1})_{(b(\xi, \eta))}$, gde je, prema

1), $b(\xi,\eta)<\alpha$; dakle je $(x_0,x_1)\in (X^2)_{(b(\xi,\eta))}$.

3) <u>Za svako</u> $\gamma<\alpha$ <u>postoje tačke</u> $x_0,x_1\in X$ <u>takve da je</u> $(x_0,x_1)\in (X^2)_{(\gamma)}$.

Dokaz. Neka je $x_0\in X_{(0)}$ i $x_1\in X_{(\gamma)}$. Tada je $b(0,\gamma)=$ $=\gamma$, pa, prema 2), je $(x_0,x_1)\in (X^2)_{(b(0,\gamma))}=(X^2)_{(\gamma)}$.

4) <u>Ako je</u> $x_0\in X_{(\xi)}$, $\xi<\alpha$, <u>i</u> $x_1\in X^{(\alpha)}$ <u>tada je</u> $(x_0,x_1)\in (X^2)^{(\alpha)}$.

Dokaz. Iz $x_0\in X_{(\xi)}$ proizlazi da postoji okolina U_{x_0} od x_0 u X takva da je $U_{x_0}\subset X\setminus X^{(\xi+1)}$, $U_{x_0}\cap X_{(\xi)}=\{x_0\}$. Nadalje, iz $x_1\in X^{(\alpha)}\approx C$ sledi da u svakoj okolini U_{x_1} od x_1 u X ima tačaka iz $X_{(\gamma)}$ za svako $\gamma<\alpha$, i da je $U_{x_1}\setminus\{x_1\}\cap X^{(\alpha)}\neq\emptyset$. Kako je $U_{x_0}\times U_{x_1}$ bazna okolina od (x_0,x_1) u X^2, to je dovoljno pokazati da je ispunjen uslov

(a) $\quad (U_{x_0}\times U_{x_1})\setminus\{(x_0,x_1)\}\cap (X^2)_{(\gamma)}\neq\emptyset$ za svako $\gamma<\alpha$.

Zaista, postoje tačke $x_0'\in U_{x_0}\cap X_{(0)}$, $x_1'\in U_{x_1}\cap X_{(\gamma)}$, pa prema 3) je $(x_0',x_1')\in (U_{x_0}\times U_{x_1})\setminus\{(x_0,x_1)\}\cap (X^2)_{(\gamma)}$

5) <u>Ako je</u> $x_0\in X^{(\alpha)}$ <u>i</u> $x_1\in X^{(\alpha)}$ <u>tada je</u> $(x_0,x_1)\in (X^2)^{(\alpha)}$.

Dokaz. Iz $x_0,x_1\in X^{(\alpha)}$ sledi da proizvoljne okoline U_{x_0} i U_{x_1} tačaka x_0,x_1 u X za svako $\gamma<\alpha$ ispunjavaju uslove $U_{x_0}\cap X_{(\gamma)}\neq\emptyset$, $U_{x_1}\cap X_{(\gamma)}\neq\emptyset$. Kako je $U_{x_0}\times U_{x_1}$ proizvoljna bazna okolina od (x_0,x_1) u X^2, to je dovoljno pokazati da je ispunjen uslov

(b) $\quad (U_{x_0}\times U_{x_1})\cap (X^2)_{(\gamma)}\neq\emptyset$ za svako $\gamma<\alpha$.

Zaista, postoje tačke $x_0'\in U_{x_0}\cap X_{(0)}$, $x_1'\in U_{x_1}\cap X_{(\gamma)}$, pa na osnovu 2) je $(x_0',x_1')\in (U_{x_0}\times U_{x_1})\cap (X^2)_{(\gamma)}$, tj. uslov (b) je ispunjen. Time je tvrdjenje 5) dokazano.

6) <u>Podprostor</u> $(X^2)^{(\alpha)}$ <u>je homeomorfan prostoru</u> C.

Dokaz. Kako je $(X^2)^{(\alpha)}$ zatvoren skup u $X^2 \in \mathcal{Z}$ sledi da je $(X^2)^{(\alpha)}$ kompaktan prostor. Pokažimo još da $(X^2)^{(\alpha)}$ nema izolovanih tačaka. Neka je (x_o,x_1) proizvoljna tačka iz $(X^2)^{(\alpha)}$ i $U_{x_o} \times U_{x_1}$ proizvoljna bazna okolina te tačke u X^2. Na osnovu 2), barem jedna od tačaka x_o,x_1 leži u $X^{(\alpha)}$; na primer neka je to x_o. Kako je $X^{(\alpha)} \approx C$, to postoji tačka $x_1' \in U_{x_1} \setminus \{x_1\} \cap X^{(\alpha)}$, pa prema 5) je $(x_o,x_1') \in (X^2)^{(\alpha)}$, tj. $(x_o,x_1') \in (U_{x_o} \times U_{x_1}) \setminus \{(x_o,x_1)\} \cap (X^2)^{(\alpha)}$; dakle $(X^2)^{(\alpha)}$ nema izolovanih tačaka. Na osnovu t.1.4.6. je $(X^2)^{(\alpha)} \approx C$.

7) <u>Za svako</u> $\gamma < \alpha$ <u>je</u> $(X^2)^{(\alpha)} \subset \overline{(X^2)_{(\gamma)}}$.

Dokaz. Neka je $(x_o,x_1) \in (X^2)^{(\alpha)}$. Tada, prema 2), je barem jedna od tačaka x_o,x_1 iz $X^{(\alpha)}$. Ako je to samo x_1 tada je ispunjen uslov (a) iz 4), tj. $(x_o,x_1) \in \overline{(X^2)_{(\gamma)}}$. Ako je, pak, $x_o,x_1 \in X^{(\alpha)}$ tada je ispunjen uslov (b) iz 5), tj. opet je $(x_o,x_1) \in \overline{(X^2)_{(\gamma)}}$.

Konačno, predjimo na dokaz t.4.3.1.16.

Prostor X^2 ispunjava uslove:

(c) $X^2 = \bigcup\{(X^2)_{(\beta)} \mid \beta < \alpha\} \cup (X^2)^{(\alpha)}$ (na osnovu 3),4),5)),

(d) $(X^2)^{(\alpha)} \approx C$ (na osnovu 6)),

(e) $\overline{(X^2)_{(\gamma)}} = \bigcup\{(X^2)_{(\beta)} \mid \gamma \leq \beta < \alpha\} \cup (X^2)^{(\alpha)}$ za svako $\gamma < \alpha$ (na osnovu 7)).

Prema tome je: $X^2 \in \mathcal{Z}_7$, $(X^2)^{(\alpha)} \approx C$, $X \in \mathcal{Z}_7$, $X^{(\alpha)} \approx C$, pa je, prema t.4.1.13., $X^2 \approx X$.

Na osnovu prethodnog tvrdjenja sledi

4.3.1.17. TVRDJENJE. <u>Postoji</u> $\aleph_1$ <u>topoloških tipova prostora podklase</u> $\mathcal{Z}_7$ <u>koji su homeomorfni svojim kvadratima.</u>

Koristeći t.4.3.1.16., može se pokazati da u svakoj podklasi klase $\mathcal{Z}$, čiji su prostori akumulacionog spektra: (0,1,2), (0,1,3), (0,1,2,4), (0,1,2,3,5), (0,1,2,3,4,5,7), (0,...,n,...,) postoji $\aleph_1$ topoloških tipova prostora koji su homeomorfni svojim kvadratima. U ovo se podrobnije nećemo upuštati, jer smatramo da je bitan korak učinjen tvrdjenjem 4.3.1.16.

Ako je $X^2 \approx X$ tada je, očigledno, i $X^n \approx X$ za svako $n \in N$. Medjutim, postoji prostor $X \in \mathcal{Z}$ takav da je $X^2 \not\approx X$ i $X^2 \approx X^3$ (na primer: $C_2 + C_3$, $C_3 + C_4$, $C_4 + C_5$).

PITANJE 1. Da li postoji prostor $X \in \mathcal{Z}$ koji je topološki različit od $C_2 + C_3$, $C_3 + C_4$, $C_4 + C_5$, a ispunjava uslove $X^2 \not\approx X$, $X^2 \approx X^3$?

PITANJE 2. Da li postoji prostor $X \in \mathcal{Z}$ takav da je $X \not\approx X^2$ i $X \approx X^3$?

PITANJE 3. Ako je $X \in \mathcal{Z}$ i $X \not\approx C_0$ da li iz $X^2 \approx X$ sledi $X + X \approx X$?

Na kraju, navodimo neka zapažanja o hiperprostorima. Ako je X topološki prostor, tada sa $\exp(X)$ označavamo hiperprostor od X, tj. skup svih nepraznih zatvorenih podskupova od X sa Vietorisovom topologijom([7], str.168).

M. Marjanović je u [14] pokazao:

1. $\exp(X)$ je pun prostor za svako $X \in \mathcal{Z}$,
2. Za $X \in \mathcal{Z}$ važi: $s(X)=(0) \Longrightarrow \exp(X) = \langle X \rangle$; $s(X)=(1) \Longrightarrow \exp(X) \approx C_1$; $s(X)=(0,1) \Longrightarrow \exp(X) \approx \langle X_0 \rangle + C_1$; $s(X)=(0,2) \Longrightarrow \exp(X) \approx C_2$; $s(X)=(0,1,2) \Longrightarrow \exp(X) \approx C_1 + C_2$; $s(X)=$

$=(0,1,3) \Longrightarrow \exp(X) \approx C_3$; $s(X)=(0,1,2,3) \Longrightarrow \exp(X) \approx C_5$; $s(X)=(0,1,2,4) \Longrightarrow \exp(X) \approx C_4$; $s(X)=(0,1,2,3,5) \Longrightarrow \exp(X) \approx C_5$; za svako drugo X je $\exp(X) \approx C_7$,

3. Jedina rešenja jednačine $\exp(X) \approx X$ u klasi $\mathcal{Z}$ su:

   C_0, C_1, C_0+C_1, C_2, C_1+C_2, C_3, C_4, C_5, C_7.

Na osnovu ovog rezultata i t.4.3.1.5. proizlazi da u klasi $\mathcal{Z}$ iz $X^2 \approx Y^2$ sledi $\exp(X) \approx \exp(Y)$. Obrat ne važi: na primer $\exp(C_5+C_6) \approx \exp(C_6) \approx C_7$, $(C_5+C_6)^2 \approx C_{11}+C_{12}$, $(C_6)^2 \approx C_{12}$. Slično, na osnovu istog rezultata i t.4.3.1.9. proizlazi da u klasi $\mathcal{Z}$ iz $\exp(X) \approx X$ sledi $X^2 \approx X$. Obrat ne važi: na primer $(C_\omega)^2 \approx C_\omega$, ali $\exp(C_\omega) \approx C_7 \not\approx C_\omega$.

Lako se proverava da jednačina $\exp(X \times Y) \approx \exp(X) \times \exp(Y)$ je u klasi $\mathcal{Z}$ zadovoljena jedino u sledećim slučajevima: 1) barem jedan od faktora X,Y je C_0, 2) barem jedan od faktora X,Y je C_1, 3) barem jedan od faktora X,Y ima kardinalan broj skupa izolovanih tačaka $\aleph_0$.

Curtis i Schori u [3] su pokazali da za svaki nedegenerativni Peanov kontinum X je $\exp(X)$ homeomorfan Hilbertovom kubu I^ω.

Na osnovu ovog rezultata sledi da svaka dva Peanova kontinuma X,Y zadovoljavaju jednačinu $\exp(X \times Y) \approx \exp(X) \times \exp(Y)$.

PITANJE 4. Neka je $X \in \mathcal{Z}$, card $X_0 = \aleph_0$, i Y nedegenerativni Peanov kontinum. Da li je tada $\exp(X \times Y) \approx \exp(X) \times I^\omega$?

L I T E R A T U R A

ALEKSANDROV, P., PASYNKOV, B.

[1] Vvedenie v teoriju razmernosti, Moskva 1973.

ARHANGEL'SKIJ, A., PONOMAREV, V.

[2] Osnovy obščej topologii v zadačah i upražnenijah, Nauka, Moskva 1974.

CURTIS, D., SCHORI, R.

[3] 2^X and $C(X)$ are homeomorphic to the Hilbert cube, Bull. Am. Math. Soc., 8o (1974), 927 - 931.

ENGELKING, R.

[4] General topology, Warszawa 1977.

HOCKING, J., YOUNG, G.

[5] Topology, Addison-Wesley, Reading 1961.

KAMKE, E.

[6] Theory of sets, Dover Publication, New York 195o.

KURATOWSKI, K.

[7] Topologija I, Mir, Moskva 1966.

[8] Topologija II, Mir, Moskva 1969.

KURATOWSKI, K., MOSTOWSKI, A.

[9] Teorija množestv, Mir, Moskva 197o.

KUREPA, DJ.

[1o] Teorija skupova, Zagreb 1951.

MAMUZIĆ, Z.

[11] Uvod u opštu topologiju, Beograd 196o.

MARJANOVIĆ, M.

[12] Exponentially complete spaces, Glasnik Matematički 6 (26) (1971), 143 _ 147.

[13] Exponentially complete spaces II, Publ. Inst. Math. t. 13 (27) (1972), 77 - 79.

[14] Exponentially complete spaces III, Publ. Inst. Math. t. 14 (28) (1972), 97 - 1o9.

[15] Exponentially complete spaces IV, Publ. Inst. Math. t. 16 (3o) (1973), 1o1 - 1o9.

[16] Numerical invariants of 0-dimensional spaces and their Cartesian multiplication, Publ. Inst. Math. t. 17 (31) (1974), 113 - 12o.

[17] On numerical invariants of 0-dimensional spaces, Math. Balkanica 4.74 (1974), 419 - 421.

[18] Some questions related to hyperspaces, Topological Symposium, Prag 1976, 276 - 278.

MAZURKIEWICZ, S., SIERPIŃSKI, W.

[19] Contribution à la topologie des ensembles denomrables, Fund. Math., 1 (192o), 17 - 27.

PEŁCZYŃSKI, A.

[20] A remark on spaces 2^X for zero-dimensional X, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser.Math.13 (1965),85-89.

SCHORI, R., WEST, J.

[21] 2^I is homeomorphic to the Hilbert cube, Bull. Amer. Math. Soc. 78 (1972), 402 - 406.

SIERPIŃSKI, W.

[22] Sur une propriété topologique des ensembles dénombrables denses en soi,Fund.Math.1(1920),11-16.

VUČEMILOVIĆ, A.

[23] On countable spaces, Math. Balkanica 4.127 (1974), 669 - 674.

[24] O nul-dimenzionim prostorima, Saopštenje na VI kongresu mat.,fiz.,ast.,Novi Sad 1975.

[25] On 0-dimensional spaces, Saopštenje na Int. Simp. iz topologije, Beograd 1976.

WILLARD, S.

[26] General topology, Addison - Wesley, 1970.