Э. КАРТАН

ВНЕШНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ И ИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Перевод с французского
проф. С. П. ФИНИКОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1962

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Московского университета

ПРЕДИСЛОВИЕ ПЕРЕВОДЧИКА

Метод внешних форм, или теория систем в инволюции, составляет немаловажную часть общей теории интегрирования систем дифференциальных уравнений; в проблеме совместности и степени произвола общего решения метод Картана занимает первое место.

«Только в результате ряда поисков условий интегрируемости уравнений в частных производных,—пишет Картан *,— я пришел к моей теории структуры непрерывных групп»; и далее: «Я хотел создать теорию, куда входили бы понятия и операции, *независимые от всякой замены переменных, как зависимых, так и независимых*; для этого было необходимо заменить *частные производные дифференциалами,* которые имеют *внутреннее значение.* Я систематически изучал системы уравнений в частных производных в виде уравнений в полных дифференциалах, т. е. в виде систем Пфаффа... Возникшая отсюда *теория систем в инволюции* позволила мне развернуть мои работы по теории бесконечных групп преобразований. Старые проблемы, например задача Софуса Ли интегрирования дифференциальных систем, допускающих инфинитезимальные преобразования, привели меня с новой точки зрения к неожиданным обобщениям и т. д... Наконец, моя теория систем в инволюции позволила мне строго исследовать совместность уравнений Эйнштейна, построенных на базе его единой теории поля».

Нелегко читаемая теория систем в инволюции опубликована в журнале *Ann. de l'Ecole Norm. Sup.* в двух статьях: «О некоторых дифференциальных выражениях и проблеме Пфаффа» (1899, **16**, 239—332) и «Об интегрировании систем уравнений в полных дифференциалах» (1901, **18**, 241—311).

* *Selecta jubilé scientifique de M. Elie Cartan, Notice sur les travaux Scientifiques,* Paris, 1939, p. 21.

Первая статья вводит внешнее дифференцирование, вторая содержит основы теории интегрирования уравнений Пфаффа.

В последующие годы Картан дополняет теорию дифференциальных форм, рассматривает специальные случаи систем Пфаффа. К общей теории он возвращается два раза: в 1919 г. в статье «*Sur les variétés de courbure constante d'un espace euclidien ou non euclidien*» (Bull. Soc. Math. Fr., **47**, 126—160) в третьей главе коротко и ясно, без доказательств дает теорию систем в инволюции; второй раз там же в 1931 г. «*Sur la théorie des systèmes en involution et ses applications à la Relativité*» (**59**, 88—118). В первом семестре 1936/37 г. он читал курс лекций на эту тему, а в 1945 г. напечатал настоящую монографию, которая отличается доступностью изложения. Пятнадцать подробно рассмотренных задач из теории поверхностей много помогают читателю. Недаром после выхода в Париже этой книги в *Comptes Rendus* увеличилось число сообщений, которые используют метод Картана.

Русский перевод снабжен небольшим числом примечаний, которые мне помог сделать редактор книги В. В. Гольдберг. Они даны или подстрочно, или вынесены в конец книги (в последнем случае в тексте они обозначены цифрой в квадратных скобках).

С. П. Фиников

Предисловие автора

Это издание воспроизводит достаточно глубоко измененный курс лекций, прочитанный в первом семестре 1936/37 г. на факультете естественных наук Парижского университета.

Первая часть этой книги посвящена изложению теории систем уравнений в полных дифференциалах, которая служила объектом многих мемуаров, появившихся в *Annales de l'Ecole Normale Supérieure* в промежутке между 1901 и 1908 гг.; эта теория послужила основой моей теории структуры бесконечных групп преобразований в смысле Софуса Ли. Она с тех пор обобщалась различными авторами, в особенности Е. Кэлером, который распространил ее на произвольные системы внешних дифференциальных уравнений. Я принял в этой книге название и обозначение, предложенные Кэлером, и буду называть *внешним дифференциалом* внешней дифференциальной формы ω произвольной степени и обозначать $d\omega$ то, что я раньше называл *внешней производной* формы ω и обозначал ω'.

В первой чисто алгебраической главе рассматриваются внешние формы и системы внешних уравнений; вторая глава посвящена внешним дифференциальным формам (символические формы Гурса) и операции внешнего дифференцирования. Глава III вводит понятия замкнутой внешней дифференциальной системы и ее характеристической системы, в ней излагается теория вполне интегрируемых систем с приложениями к классической проблеме Пфаффа. Глава IV, которая вводит понятия интегрального элемента, характеров и жанра, посвящена, кроме того, двум основным теоремам существования. Глава V посвящена дифференциальным системам с предписанными независимыми переменными, специально системам в инволюции, с теоремами существования для этих систем и указанием многочисленных простых критериев инволютивности; именно эта глава больше всего подверглась переделке. Наконец, в главе VI вводится понятие продолжения дифференциальной системы и показывается, как можно искать решения системы не в инволюции.

Во всей первой части, начиная с главы IV, в уравнения рассматриваемых систем входят только *аналитические* функции, потому что теорема Коши — Ковалевской, на которую опираются все доказанные теоремы существования, имеет силу и даже смысл только для аналитических данных.

Вторая часть монографии посвящена приложениям к задачам дифференциальной геометрии. Она содержит две главы. Все задачи, рассматриваемые в главе VII, относятся к классической теории поверхностей. Некоторые из них известные, достаточно большое число других — новые. В каждой из этих задач указаны как степень общности решения, так и способ постановки проблемы Коши, включая случаи, когда начальные данные являются характеристическими. Глава VIII относится к задачам с числом независимых переменных, большим двух; она содержит проблему триортогональных систем, общую проблему p-ортогональных систем в p-мерном евклидовом пространстве: в последнем случае проблема Коши представляется в таком простом виде, в котором, я полагаю, она еще не рассматривалась. Наконец, задача реализации линейного элемента ds^2 с тремя переменными в шестимерном евклидовом пространстве рассмотрена в подробностях, с указаниями на особые решения задачи. Во всей этой второй части применяется почти исключительно метод подвижного репера, который особенно удобен в теории внешних дифференциальных систем в инволюции.

При редактировании этой монографии я использовал в качестве первой редакции записи Л. Готье, сделанные им при слушании курса. Эта первая редакция мне очень помогла, и мне приятно выразить здесь ему мою благодарность.

Часть первая

ТЕОРИЯ ВНЕШНИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Глава I

ВНЕШНИЕ ФОРМЫ

I. СИММЕТРИЧНЫЕ И КОСОСИММЕТРИЧНЫЕ БИЛИНЕЙНЫЕ ФОРМЫ, АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ И ВНЕШНИЕ КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

1. В классической алгебре *билинейной формой* называют линейное относительно двух серий переменных $u^1, u^2, \ldots, u^n$ и $v^1, v^2, \ldots, v^n$ в одинаковом числе n выражение *

$$F(u, v) = a_{ij} u^i v^j, \tag{1}$$

где коэффициенты a_{ij} принадлежат заданному телу, которое для простоты будем считать телом действительных чисел.

Эта форма называется *симметричной,* если она остается тождественной самой себе при замене переменных u^i переменными v^i с теми же индексами, и обратно, иначе говоря, если

$$a_{ij} = a_{ji} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

К билинейной симметричной форме можно присоединить квадратичную форму

$$F(u) = a_{ij} u^i u^j \tag{2}$$

* Мы принимаем раз навсегда уже ставшее классическим условие, которое состоит в опускании знака суммирования перед выражением, которое содержит один и тот же индекс, повторенный два раза; в формуле (1) имеются два индекса суммирования i и j, каждый повторяется два раза.

с одной серией переменных; форма (1) — *полярная форма* для квадратичной формы (2):

$$F(u, v) = v^i \frac{\partial F}{\partial u^i} = u^i \frac{\partial F}{\partial v^i}.$$

Существует внутренняя связь между формой (1) и формой (2), внутренняя в том смысле, что, если произвести над переменными u^i и переменными v^i одну и ту же линейную подстановку

$$u^i = A^i_k U^k, \quad v^i = A^i_k V^k,$$

то билинейная форма (1) преобразуется в билинейную форму Φ (U, V), тоже симметричную, а квадратичная форма (2) — в ассоциированную квадратичную форму Φ (U). Действительно, имеем

$$\Phi(U, V) = a_{ij} A^i_k A^j_h U^k V^h,$$

$$\Phi(U) = a_{ij} A^i_k A^j_h U^k U^h.$$

Легко проверить, что формула $\Phi(U, V)$ — симметричная, ибо коэффициент при $U^k V^h$, который равен сумме $a_{ij} A^i_k A^j_h$, где i и j — два независимых индекса суммирования, можно записать в виде

$$a_{ij} A^i_k A^j_h = a_{ij} A^i_h A^j_k,$$

что в точности совпадает с коэффициентом при $U^h V^k$; этой проверки можно избежать, если заметить, что замена двух серий переменных U^i и V^i сводится к замене двух серий переменных u^i и v^i, что не меняет исходную форму $F(u, v)$.

2. Форма (1) называется *кососимметричной*, если она меняет знак при перестановке двух серий переменных u^i и v^i:

$$F(v, u) = -F(u, v);$$

это выражается *кососимметричностью* коэффициентов

$$a_{ij} = -a_{ji}.$$

Если положить $v^i = u^i$, то получим форму, тождественно равную нулю. Можно однако присоединить к кососимметричной форме F (u, v) квадратичную форму, но с *некоммутативным* законом умножения. Заметим здесь, что, если объединить два члена формы $F(u, v)$

$$a_{12}u^1v^2 + a_{21}u^2v^1,$$

то получим

$$a_{12}(u^1v^2 - u^2v^1) = a_{12}\begin{vmatrix} u^1 & u^2 \\ v^1 & v^2 \end{vmatrix},$$

что можно условиться записывать $a_{12}[u^1\ u^2]$, где обозначение $[u^1\ u^2]$ напоминает определитель, первая строка которого образована из двух переменных u^1, u^2, а вторая — из двух переменных v^1, v^2. Выражение $a_{12}\ [u^1\ u^2]$ можно рассматривать как квадратичный моном с некоммутативным умножением Грассмана, ибо произведение двух переменных u^1, u^2 меняет знак при изменении порядка множителей. Следовательно, в этом случае к кососимметричной билинейной форме

$$F(u, v) = a_{ij}u^i v^j \qquad (a_{ij} = -a_{ji})$$

можно присоединить квадратичную форму с внешним умножением, или, короче, *внешнюю квадратичную форму*

$$F(u) = \frac{1}{2}a_{ij}[u^i u^j] \qquad (a_{ij} = -a_{ji}).$$

Числовой множитель $\frac{1}{2}$ вводится потому, что в правой части произведение $[u^1 u^2]$ входит два раза: в виде формы $[u^1 u^2]$ и в виде формы $[u^2 u^1] = -[u^1 u^2]$, что дает полный коэффициент

$$\frac{1}{2}a_{12} - \frac{1}{2}a_{21} = a_{12}.$$

Имеется внутреннее соответствие между кососимметричной билинейной формой и присоединенной внешней квадратичной формой; это соответствие сохраняется при линейной подстановке, выполненной одновременно над двумя сериями переменных u^i и v^j. Если положить

$$u^i = A^i_k U^k, \qquad v^j = A^i_k V^k,$$

то форма $F(u, v)$ преобразуется в форму

$$\Phi(U, V) = a_{ij}A^i_k A^j_h U^k V^h$$

с косой симметрией коэффициентов при произведениях U^iV^j, а форма $F(u)$ преобразуется в форму

$$\Phi(U) = \frac{1}{2}a_{ij}A^i_k A^j_h [U^k U^h];$$

мы видим, что она получается из формы $F(u)$ заменой повсюду u^i на $A^i_k U^k$ и выполнением умножения по обычным правилам алгебраического умножения, но с сохранением порядка переменных U^i в отдельных произведениях, которые встречаются.

3. Есть известная аналогия между классическими квадратичными формами, которые мы будем называть алгебраическими, и внешними квадратичными формами. Определим частную производную внешней квадратичной формы $F(u)$ соотношением

$$\frac{\partial F}{\partial u^i} = a_{ik} u^k.$$

Производная каждого монома равна нулю, если переменная u^i не встречается среди множителей монома; если u^i стоит на первом месте, как, например, в члене

$$a_{ij}[u^i u^j],$$

то производная будет равна

$$a_{ij} u^j;$$

если u^i стоит на втором месте, то применяем то же самое правило, позаботясь предварительно перевести u^i на первое место; производная по переменной u^i произведения $a_{ji}[u^j u^i]$, или произведения $-a_{ji}[u^i u^j]$, будет равна $-a_{ji} u^j = a_{ij} u^j$. Производная по u^j от производной по переменной u^i в силу этого будет равна a_{ij}, можно написать

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^j \partial u^i} = a_{ij} = -\frac{\partial^2 F}{\partial u^i \partial u^j}.$$

Заметим, что сумма $u^i \frac{\partial F}{\partial u^i} = a_{ik} u^i u^k$ равна нулю, тогда как для алгебраической квадратичной формы сумма $u^i \frac{\partial F}{\partial u^i}$, по теореме Эйлера, равна $2F$.

Предположим теперь, что вместо того чтобы умножать по классическим правилам u^i и $\frac{\partial F}{\partial u^i}$, мы применим внешнее умножение; тогда, как легко видеть, в зависимости от того, будет ли форма F алгебраической или внешней, получим

$$\left[u^i \frac{\partial F}{\partial u^i}\right] = 0, \qquad \left[u^i \frac{\partial F}{\partial u^i}\right] = 2F. \tag{3}$$

Теорема. *Всякая алгебраическая квадратичная форма F удовлетворяет соотношениям*

$$u^i \frac{\partial F}{\partial u^i} = 2F, \qquad \left[u^i \frac{\partial F}{\partial u^i}\right] = 0.$$

Напротив, всякая внешняя квадратичная форма F удовлетворяет соотношениям

$$u^i \frac{\partial F}{\partial u^i} = 0, \qquad \left[u^i \frac{\partial F}{\partial u^i}\right] = 2F.$$

4. Внешнее умножение двух линейных форм от одних и тех же переменных $f(u)$, $\varphi(u)$ дает внешнюю квадратичную форму, ассоциированную кососимметричной билинейной форме:

$$f(u)\varphi(v) - \varphi(u) f(v) = \begin{vmatrix} f(u) & \varphi(u) \\ f(v) & \varphi(v) \end{vmatrix};$$

эта квадратичная форма F обозначается посредством

$$[f(u)\varphi(u)]$$

и получается почленным умножением двух форм $f(u)$ и $\varphi(u)$, но с сохранением порядка множителей

$$F = [a_i u^i, \quad b_j u^j] = a_i b_j [u^i u^j]. \tag{4}$$

Заметим, что в правой части коэффициент $a_i b_j$ не кососимметричен, несмотря на то что форма, стоящая в правой части,— внешняя; можно, однако, переставляя индексы суммирования, записать

$$F = a_i b_j [u^i u^j] = a_j b_i [u^j u^i] = -a_j b_i [u^i u^j],$$

откуда

$$F = \frac{1}{2}(a_i b_j - a_j b_i)\ [u^i u^j], \tag{5}$$

теперь коэффициент при произведении $[u^i u^j]$ кососимметричен.

Докажем сейчас две теоремы, которые соответствуют друг другу.

Теорема. *Если $f^1, f^2, \ldots, f^p$ — p линейно независимых линейных форм от n переменных $u^1, u^2, \ldots, u^n$, то из соотношения*

$$f^1\varphi_1 + f^2\varphi_2 + \ldots + f^p\varphi_p = 0,$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ — p форм от тех же переменных, следует, что все φ_i будут линейными комбинациями форм f^i с кососимметричными коэффициентами:

$$\varphi_i = \alpha_{ih} f^h \qquad (\alpha_{ij} = -\alpha_{ji});$$

наоборот, из соотношения

$$[f^1\varphi_1] + [f^2\varphi_2] + \ldots + [f^p\varphi_p] = 0$$

следует, что все φ_i будут линейными комбинациями форм f^i с симметричными коэффициентами α_{ij}.

Предположим сперва $p = n$; в этом случае, при независимых формах f^i, всякая линейная форма может быть выражена как линейная комбинация форм f^i. Полагая теперь

$$\varphi_i = \alpha_{ik} f^k,$$

имеем

$$f^i\varphi_i = \alpha_{ik} f^i f^k,$$

$$[f^i\varphi_i] = \alpha_{ik} [f^i f^k].$$

Сумма $f^i \varphi_i$ будет, следовательно, равна нулю, если $\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$, а сумма $[f^i\varphi_i]$ обратится в нуль, если $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, что и доказывает теорему.

Предположим теперь $p < n$; введем $n - p$ новых форм $f^{p+1}, \ldots, f^n$, независимых между собой и от p первых заданных форм. Мы сможем применить теорему, доказанную для случая $p = n$, принимая функции $\varphi_{p+1}, \ldots, \varphi_n$ тождественно равными нулю. Тогда при равных нулю формах φ_{p+j} будем иметь коэффициенты

$$\alpha_{p+j,k} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, \; n-p; \quad k = 1, 2, \ldots, n),$$

откуда для обоих случаев $\alpha_{k,p+j} = 0$. Указатели $p+1, p+2, \ldots, n$, следовательно, не фигурируют в коэффициентах α_{ij}, которые действительно входят в выражения φ_i через f^j, и теорема, таким образом, доказана в общем случае.

Замечание. Два уравнения

$$f^i\varphi_i = 0, \qquad [f^i\varphi_i] = 0,$$

если они удовлетворены одновременно, имеют следствием

$$\varphi_i = 0.$$

5. Известно, что всякая алгебраическая квадратичная форма может быть приведена к канонической форме, в которой все коэффициенты при членах с различными множителями равны нулю. Существует также каноническая форма для внешних квадратичных форм.

Теорема. *Всякая внешняя квадратичная форма может быть приведена к виду*

$$F = [U^1U^2] + [U^3U^4] + \dots + [U^{2p-1}U^{2p}], \tag{6}$$

где U^i — $2p$ линейно независимых форм.

Доказательство очень просто. Предположим, что форма $F(u)$ тождественно не равна нулю, и, например, $a_{12} \neq 0$. Форму F можно записать тогда в виде

$$F = \left[u^1 + \frac{a_{23}}{a_{21}} u^3 + \dots + \frac{a_{2n}}{a_{21}} u^n,\ a_{12} u^2 + \right.$$
$$\left. + a_{13} u^3 + \dots + a_{1n} u^n \right] + \Phi,$$

где форма Φ содержит только переменные $u^3, u^4, \dots, u^n$. Теперь достаточно положить

$$u^1 + \frac{a_{23}}{a_{21}} u^3 + \dots + \frac{a_{2n}}{a_{21}} u^n = U^1,$$
$$a_{12}u^2 + a_{13}u^3 + \dots + a_{1n}u^n = U^2,$$

чтобы получить внешнюю квадратичную форму $F - [U^1 U^2]$, которая зависит только от переменных $u^3, \dots, u^n$, причем n форм $U^1, U^2, u^3, \dots, u^n$ независимы. Если форма Φ тождественно равна нулю, то теорема доказана, причем целое число p равно 1. В противном случае мы выполним над формой Φ ту же операцию, что и над F, и так далее.

Можно найти целое число p, не выполняя обязательно предыдущее приведение. Действительно, заметим, что при произвольной линейной подстановке переменных система линейных уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial u^1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial u^2} = 0, \ \dots, \quad \frac{\partial F}{\partial u^n} = 0 \tag{7}$$

сохраняется. Действительно, если положим

$$u^i = A_k^i U^k$$

при определителе из коэффициентов A_k^i, отличном от нуля, то легко видеть, что

$$\frac{\partial F}{\partial U^i} = A_i^k \frac{\partial F}{\partial u^k},$$

а так как определитель из коэффициентов A_i^k не равен нулю, то обращение в нуль частных производных $\frac{\partial F}{\partial u^i}$ влечет за собой обращение в нуль частных производных $\frac{\partial F}{\partial U^i}$ и обратно; но, если взять F в канонической форме

$$F = [U^1U^2] + \ldots + [U^{2p-1}U^{2p}],$$

то система (7) с переменными U^i запишется в виде

$$U^1 = U^2 = \ldots = U^{2p-1} = U^{2p} = 0.$$

Следовательно, целое число $2p$ есть ранг матрицы коэффициентов форм $\frac{\partial F}{\partial u^i}$. Эта матрица кососимметрична; хорошо известно, что ранг такой матрицы всегда чётен.

Ранг $2p$ показывает в то же время наименьшее число переменных, которые могут входить в форму F, если ее преобразовать подходящей линейной подстановкой над переменными.

Существуют аналогичные теоремы для алгебраических квадратичных форм. Раиг матрицы коэффициентов форм $\frac{\partial F}{\partial u^i}$ равным образом показывает наименьшее число переменных, которые могут входить в форму F; наиболее простой способ обнаружить это — использовать разложение формы на сумму квадратов.

II. ВНЕШНИЕ ФОРМЫ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СТЕПЕНИ

6. Мы будем рассматривать общие *внешние формы* произвольной степени. Внешняя кубическая форма, например, запишется в виде

$$F = \frac{1}{6} a_{ijk} [u^i u^j u^k], \tag{8}$$

где коэффициенты a_{ijk} *кососимметричны;* это означает, что, если выполнить перестановку трех указателей i, j, k, то коэффициент останется равным самому себе или изменит знак, смотря по тому, будет ли перестановка четной или нечетной. Символ $[u^i\ u^j\ u^k]$ можно рассматривать как произведение, но произведение, меняющее знак, если переставить два множителя. Это произведение останется равным самому себе при четной перестановке трех множителей и изменит знак при нечетной перестановке этих множителей. Благодаря этим условиям мы видим, что, рассматривая различные мономы, в которых фигурируют, с точностью до порядка, три множителя u^1, u^2, u^3, мы получим шесть различных членов, но сумма их будет $a_{123}\,[u^1\ u^2\ u^3]$. Едва ли следует отмечать, что мономы с двумя одинаковыми множителями надо рассматривать как равные нулю.

Можно присоединить к форме F кососимметричную трилинейную форму от трех серий переменных u^i, v^i, w^i

$$\frac{1}{6}\,a_{ijk}\begin{vmatrix} u^i & u^j & u^k \\ v^i & v^j & v^k \\ w^i & w^j & w^k \end{vmatrix}.$$

Вообще можно рассматривать внешние формы степени 4, 5 и т. д., к которым можно присоединить кососимметричные формы от 4, 5 и т. д. серий переменных.

7. *Сложение и умножение внешних форм.* Сумма двух внешних форм *одной степени* есть форма той же степени, коэффициентами которой будут служить суммы коэффициентов двух заданных форм.

Например, сумма формы (8) и формы

$$\Phi = \frac{1}{6}\,b_{ijk}\,[u^iu^ju^k] \tag{9}$$

будет равна

$$F + \Phi = \frac{1}{6}\,(a_{ijk} + b_{ijk})\,[u^iu^ju^k].$$

Внешним произведением двух внешних форм, имеющих равные или неравные степени, например двух форм:

$$F = \frac{1}{2}\,a_{ij}\,[u^iu^j],$$

$$\Phi = \frac{1}{6}\,b_{ijk}\,[u^iu^ju^k],$$

называется форма, полученная внешним умножением всеми возможными способами каждого монома первой формы на каждый моном второй, с сохранением порядка двух мономов, и сложением полученных таким образом мономов *:

$$[F\Phi] = \frac{1}{12} a_{ij} b_{khl} [u^i u^j u^k u^h u^l]. \tag{10}$$

Правая часть соотношения (10) не имеет кососимметричных коэффициентов относительно 5 индексов: i, j, k, h, l; но можно устроить, чтобы появились кососимметричные коэффициенты, поступая так, как мы это делали для внешнего произведения двух линейных форм.

Внешнее произведение форм F, Φ может зависеть от порядка, в котором располагаются множители F и Φ. Действительно, изменение порядка этих множителей сводится к замене монома $[u^i u^j u^k u^h u^l]$ на моном $[u^k u^h u^l u^i u^j]$; чтобы выполнить эту замену, надо передвинуть каждый из трех последних множителей на два шага налево, что вызовет 2×3 последовательных изменений знака. Вообще, если F и Φ — формы степеней соответственно p и q, то имеет место соотношение

$$[\Phi F] = (-1)^{pq} [F\Phi], \tag{11}$$

откуда следует:

Теорема. *Внешнее произведение двух внешних форм степеней p и q не меняется при изменении порядка этих двух множителей, за исключением того случая, когда оба множителя нечетной степени; в этом случае произведение меняет знак.*

Другая важная теорема относится к дистрибутивности умножения по отношению к сложению. Эта теорема сводится к следующему общему равенству:

$$[F_1 + F_2 + \ldots + F_h, \quad \Phi_1 + \Phi_2 + \ldots + \Phi_k] = \\ = \sum_{i,j} [F_i \Phi_j],$$

где предполагается, что формы $F_1, F_2, \ldots, F_n$ одной степени p и формы $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_k$ одной степени q.

8. *Внешние формы — мономы.* Внешняя форма степени p называется *мономом,* если ее можно представить как внеш-

* Числовые коэффициенты форм могут располагаться на произвольном месте, так как закон коммутативности выполняется для этих коэффициентов.

нее произведение p линейных форм. Мы будем искать, каким условиям должны удовлетворять коэффициенты формы, чтобы она была мономом.

Рассмотрим для этого систему линейных уравнений (*ассоциированную систему*), получаемую обращением в нуль всех частных производных порядка $p-1$ этой формы. Эти производные определяются в случае формы произвольной степени так же, как для квадратичной формы; они зависят от порядка дифференцирования; но в действительности этот порядок здесь не имеет значения, потому что единственное изменение, которое может испытать производная при изменении порядка дифференцирования,—это возможное изменение знака.

Ассоциированная система, которую мы будем рассматривать, имеет *внутреннее* значение в том смысле, что если выполнить линейную подстановку с отличным от нуля определителем над переменными, преобразующую форму F (u^1, $u^2, \ldots, u^p$) в форму Φ ($U^1, U^2, \ldots, U^p$), то та же линейная подстановка преобразует ассоциированную систему для F в ассоциированную систему для Φ. Это связано с тем, что линейная подстановка

$$u^i = A^i_k U^k$$

влечет

$$\frac{\partial \Phi}{\partial U^i} = A^i_k \frac{\partial F}{\partial u^k}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial U^i \, \partial U^j} = A^i_k A^j_h = \frac{\partial^2 F}{\partial u^k \, \partial u^h}, \ldots$$

Предположим теперь, что внешняя форма — моном; можно выполнить линейную подстановку над переменными так, что эта форма будет содержать только один член

$$a\,[u^1 u^2 u^3 \ldots u^p]$$

(если только форма не обращается тождественно в нуль, что мы исключаем). Ассоциированной системой этой формы, очевидно, будет система

$$u^1 = 0, \quad u^2 = 0, \ldots, u^p = 0;$$

она приводится, следовательно, к p независимым уравнениям.

Обратно, если ассоциированная система формы F степени p сводится к p независимым уравнениям, то можно линейной подстановкой над переменными сделать так, чтобы ассоциированная система была образована уравнениями

$$u^1 = 0, \quad u^2 = 0, \ldots, \quad u^p = 0;$$

но тогда ни один не равный нулю коэффициент этой формы не может содержать ни одного индекса, кроме 1, 2, ..., p, ибо не равный нулю коэффициент, такой, например, как

$$a_{i_1 i_2 \ldots i_{p-1}(p+1)},$$

введет переменное u^{p+1} в производную

$$\frac{\partial^{p-1} F}{\partial u^{i_1} \partial u^{i_2} \ldots \partial u^{i_{p-1}}},$$

что противоречит условию. Следовательно, форма будет $a[u^1, u^2, \ldots, u^p]$, т. е. она будет мономом *.

Теорема. *Чтобы внешняя форма степени p была мономом, необходимо и достаточно, чтобы ее ассоциированная система имела ранг p* **.

9. Приложим этот критерий к разысканию необходимых и достаточных условий, которым должны удовлетворять коэффициенты внешней формы, чтобы она была мономом. Начнем с простого случая квадратичных форм.

Пусть дана квадратичная форма

$$F = \frac{1}{2} a_{ij} [u^i u^j],$$

которую будем предполагать отличной от нуля. Предположим для определенности $a_{12} \neq 0$. Среди уравнений ассоциированной системы будут два уравнения:

$$\frac{\partial F}{\partial u^1} \equiv a_{12} u^2 + a_{13} u^3 + \ldots + a_{1n} u^n = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial u^2} \equiv a_{21} u^1 + a_{23} u^3 + \ldots + a_{2n} u^n = 0.$$

Эти два уравнения независимы и дают

$$u^1 = \frac{1}{a_{12}} (a_{23} u^3 + \ldots + a_{2n} u^n),$$

$$u^2 = -\frac{1}{a_{12}} (a_{13} u^3 + \ldots + a_{1n} u^n).$$

---

* Те же рассуждения показывают, что, если ассоциированная система имеет ранг r, то возможно заменой переменных найти такое выражение формы, которое вводит только r переменных и, очевидно, невозможно, чтобы их было меньше без того, чтобы ассоциированная система имела ранг, меньший r.

** Эта теорема уже была неявно доказана для $p=r$ благодаря введению канонической формы.

Будем искать коэффициент при u^k в $\frac{\partial F}{\partial u^i}$, *принимая во внимание значения* u^1, u^2, *которые мы только что написали.* Тогда получим

$$\frac{\partial F}{\partial u^i} = \left(a_{ik} + \frac{a_{i1}}{a_{12}} a_{2k} - \frac{a_{i2}}{a_{12}} a_{1k}\right) u^k =$$

$$= \frac{1}{a_{12}} (a_{12}a_{ik} - a_{1i}a_{2k} + a_{1k}a_{2i}) u^k \quad (i, k > 2).$$

Правая часть должна равняться нулю, если мы хотим, чтобы ассоциированная система имела ранг 2, отсюда *необходимыми и достаточными* условиями в случае $a_{12} \neq 0$ будут равенства

$$a_{12}a_{ik} - a_{1i}a_{2k} + a_{1k}a_{2i} = 0. \qquad (12)$$

Это соотношение было доказано в предположении $a_{12} \neq 0$, но оно будет справедливо даже при $a_{12} = 0$. Действительно, индексы 1, 2, i, k здесь играют одинаковую роль, ибо произвольная перестановка этих четырех индексов оставляет соотношение без изменения. Следовательно, оно останется еще справедливым, если один какой-нибудь из коэффициентов $a_{12}, a_{2i}, a_{2k}, a_{1i}, a_{1k}, a_{ik}$ будет отличен от нуля и тем более если они все обратятся в нуль. Следовательно, можно здесь заменить индексы 1, 2 на любые другие без того, чтобы соотношение (12) нарушилось.

Теорема. *Если внешняя квадратичная форма — моном, то между ее коэффициентами существуют соотношения*

$$a_{ij}a_{kh} - a_{ik}a_{jh} + a_{ih}a_{jk} = 0 \quad (i, j, k, h = 1, \ldots, n). \qquad (13)$$

Обратно, если эти соотношения удовлетворены, то форма — моном, ибо, если предположить $a_{12} \neq 0$, то соотношения (12), которые содержатся среди соотношений (13), будут удовлетворены, и мы видели, что при этих условиях форма будет мономом.

10. Тот же метод можно приложить к форме произвольной степени. Предположим для определенности, что $p = 5$ и коэффициент a_{12345} не равен нулю. Ассоциированная система этой формы содержит пять независимых уравнений:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial u^2\, \partial u^3\, \partial u^4\, \partial u^5} \equiv a_{12345}u^1 + a_{2345k}u^k = 0,$$

$$\frac{\partial^4 F}{\partial u^1\, \partial u^3\, \partial u^4\, \partial u^5} \equiv - a_{12345}u^2 + a_{1345k}u^k = 0,$$

$$\frac{\partial^4 F}{\partial u^1\, \partial u^2\, \partial u^4\, \partial u^5} \equiv a_{12345}u^3 + a_{1245k}u^k = 0,$$

$$\frac{\partial^4 F}{\partial u^1\,\partial u^2\,\partial u^3\,\partial u^5} \equiv -a_{12345}u^1 + a_{1235k}u^k = 0$$

$$\frac{\partial^4 F}{\partial u^1\,\partial u^2\,\partial u^3\,\partial u^4} \equiv a_{12345}u^5 + a_{1234k}u^k = 0.$$

Чтобы форма была мономом, необходимо и достаточно, чтобы все уравнения ассоциированной системы были следствием этих пяти уравнений, т. е. чтобы после замены u^1, u^2, u^3, u^4, u^5 их значениями, получаемыми из этих пяти уравнений, остальные уравнения были тождественно удовлетворены. Рассмотрим, например, уравнение

$$\frac{\partial^4 F}{\partial u^{i_1}\,\partial u^{i_2}\,\partial u^{i_3}\,\partial u^{i_4}} = 0;$$

коэффициент при u^k в левой части после замены u^1, u^2, u^3, u^4, u^5 их значениями и умножения на a_{12345} будет равен

$$a_{12345}a_{i_1i_2i_3i_4k} - a_{i_1i_2i_3i_4 1}a_{2345k} + a_{i_1i_2i_3i_4 2}a_{1345k} - a_{i_1i_2i_3i_4 3}a_{1245k} +$$
$$+ a_{i_1i_2i_3i_4 4}a_{1235k} - a_{i_1i_2i_3i_4 5}a_{1234k}.$$

Мы видим, что в этом выражении встречается десять индексов, которые делятся на две группы: указатели i_1, i_2, i_3, i_4 образуют здесь первую группу, а индексы 1, 2, 3, 4, 5, k — вторую группу; в каждой группе все индексы играют одинаковую роль. Выражение кососимметрично относительно индексов i_1, i_2, i_3, i_4 первой группы и кососимметрично относительно индексов второй группы. Полученное выражение равно нулю, если данная форма — моном при условии $a_{12345} \neq 0$, но оно сохранится и при $a_{12345} = 0$, если только коэффициенты a_{1234k}, a_{1235k}, a_{1245k}, a_{1345k}, a_{2345k} не будут одновременно равны нулю, ибо, если один из них не нуль, например первый, то в силу равноправия индексов 1, 2, 3, 4, 5, k мы получим то же самое выражение при условии $a_{1234k} \neq 0$, если будем писать условия, чтобы форма была мономом. С другой стороны, вполне очевидно, что если шесть коэффициентов a_{12345}, a_{1234k}, a_{1235k}, a_{1245k}, a_{1345k}, a_{2345k} будут нулями, то выражение будет тоже равно нулю. Мы приходим к следующей теореме.

Теорема. *Чтобы форма пятой степени была мономом, необходимо и достаточно, чтобы все величины в количестве* $C_n^4 C_n^6$

$$H_{i_1i_2i_3i_4,\,j_1j_2j_3j_4j_5j_6} \equiv a_{i_1i_2i_3i_4j_1}a_{j_2j_3j_4j_5j_6} - a_{i_1i_2i_3i_4j_2}a_{j_1j_3j_4j_5j_6} + a_{i_1i_2i_3i_4j_3}a_{j_1j_2j_4j_5j_6} -$$
$$- a_{i_1i_2i_3i_4j_4}a_{j_1j_2j_3j_5j_6} + a_{i_1i_2i_3i_4j_5}a_{j_1j_2j_3j_4j_6} - a_{i_1i_2i_3i_4j_6}a_{j_1j_2j_3j_4j_5} \qquad (14)$$

обращались в нуль.

Условие необходимо: мы только что это доказали. Оно достаточно, ибо, если оно выполнено и если коэффициент a_{12345} не равен нулю, то среди уравнений (14) встретятся соотношения

$$H_{i_1 i_2 i_3 i_4, 12345k} = 0,$$

которые, как мы видели, необходимы и достаточны при условии $a_{12345} \neq 0$, чтобы форма была мономом.

Мы видим, что все эти условия выражаются квадратичными соотношениями между коэффициентами данной формы. Если форма кубичная, то надо рассматривать соотношения

$$H_{ij,khlm} \equiv a_{ijk}a_{hlm} - a_{ijh}a_{klm} + a_{ijl}a_{khm} - a_{ijm}a_{khl} = 0$$

в числе $\frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$; но имеются вырождения, ибо при $k = i$, $h = j$ выражение $H_{ij,ijhm}$ само по себе равно нулю. Если $k = i$, то выражение имеет только три члена вместо четырех:

$$H_{ij,ihlm} = -a_{ijh}a_{ilm} + a_{ijl}a_{ihm} - a_{ijm}a_{ihl}.$$

III. СИСТЕМЫ ВНЕШНИХ УРАВНЕНИЙ

11. Рассмотрим систему уравнений, полученных обращением в нуль, одной или нескольких внешних форм, построенных на n переменных $u^1, u^2, \ldots, u^n$. Каждое из этих уравнений имеет определенную степень, но они не обязаны быть все одной и той же степени. Будем рассматривать $u^1, u^2, \ldots, u^n$ как декартовы координаты точки в пространстве n измерений. Будем говорить, что плоское многообразие, проходящее через начало координат (*других мы не будем рассматривать*), удовлетворяет данной системе, или будет *решением* этой системы, если все уравнения системы будут удовлетворены при учете уравнений плоского многообразия — уравнений линейных и однородных относительно переменных. Например, если плоское многообразие p измерений (мы будем говорить, что оно образует p-плоскость), то оно определяется посредством $n-p$ независимых линейных соотношений между координатами; если выразить $n-p$ координат, например, $n-p$ последних, как функции p других $u^1, u^2, \ldots, u^p$ и подставить в левые части уравнений данной системы вместо $u^{p+1}, \ldots, u^n$ их значения в функциях от $u^1, u^2, \ldots, u^p$, то полученные таким образом внешние формы от $u^1, u^2, \ldots, u^p$ должны тождественно обращаться в нуль. Вообще можно выразить $u^1, u^2, \ldots, u^n$ как линейные формы от p переменных $t^1, t^2, \ldots, t^p$; тогда получатся внешние формы от $t^1, t^2, \ldots, t^p$, которые должны тождественно обращаться в нуль.

Первое замечание, которое надо сделать, можно высказать в виде теоремы.

Теорема. *Всякое внешнее уравнение степени p автоматически удовлетворено любым плоским многообразием, размерность которого меньше p.*

Это вытекает из того, что внешняя форма степени p от $q < p$ переменных автоматически обращается в нуль.

Поэтому, *чтобы показать, что p-плоскость является решением системы внешних уравнений, нет надобности принимать во внимание уравнения системы, степень которых больше p.*

12. Чтобы определить, будет ли некоторая p-плоскость решением заданной системы внешних уравнений, можно отправляться из рассмотрения того, что называется *плюккеровыми*, или, лучше, *грассмановыми*, координатами какой-нибудь p-плоскости (проходящей через начало координат). Такая p-плоскость вполне определена, если задано p независимых векторов, выходящих из начала; пусть соответственно $\xi_1^i, \xi_2^i, \ldots, \xi_p^i$ — компоненты этих p векторов. Образуем матрицу из p строк и n столбцов

$$\begin{pmatrix} \xi_1^1 & \xi_1^2 & \ldots & \xi_1^n \\ \xi_2^1 & \xi_2^2 & \ldots & \xi_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_p^1 & \xi_p^2 & \ldots & \xi_p^n \end{pmatrix}$$

и будем обозначать через $u^{i_1 i_2 \ldots i_p}$ определитель, образованный из всех p строк матрицы и p столбцов, номера которых равны $i_1, i_2, \ldots, i_p$. Эти величины $u^{i_1 i_2 \ldots i_p}$ кососимметричны относительно p индексов. Если заменить эти p векторов через p других независимых векторов, взятых в той же p-плоскости, с компонентами $\overline{\xi}_1^i, \overline{\xi}_2^i, \ldots, \overline{\xi}_p^i$, то компоненты $\overline{\xi}_1^i, \overline{\xi}_2^i, \ldots, \overline{\xi}_p^i$ будут получаться из компонент $\xi_1^i, \xi_2^i, \ldots, \xi_p^i$ (i задано) линейной подстановкой, одной и той же для всякого индекса i, которая переводит $\xi_1^i, \xi_2^i, \ldots, \xi_p^i$ в $\overline{\xi}_1^i, \overline{\xi}_2^i, \ldots, \overline{\xi}_p^i$. Координаты $u^{i_1 i_2 \ldots i_p}$ p-плоскости будут, следовательно, вполне определены с точностью до отличного от нуля множителя: это *плюккеровы координаты* p-плоскости; они однородны и в излишнем числе, если $p > 1$.

Обратно, знание плюккеровых координат p-плоскости вполне определяет эту p-плоскость, ибо ее уравнения получатся, если выразить, что вектор, выходящий из начала, с компонентами u^i, будет линейной комбинацией векторов ξ_1^i, ξ_2^i, ..., ξ_p^i, иначе говоря, что все определители порядка $p+1$ матрицы

$$\begin{pmatrix} u^1\, u^2 \ldots u^n \\ \xi_1^1\, \xi_1^2 \ldots \xi_1^n \\ \xi_2^1\, \xi_2^2 \ldots \xi_2^n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \xi_p^1\, \xi_p^2 \ldots \xi_p^n \end{pmatrix}.$$

будут равны нулю, ибо каждый из этих определителей является линейной комбинацией координат $u^1, u^2, \ldots, u^n$, коэффициентами при которых будут определители $u^{i_1 i_2 \ldots i_p}$.

13. Теперь выясним, как узнать, будет ли p-плоскость с плюккеровыми координатами $u^{i_1 i_2 \ldots i_p}$ обращать в нуль заданную внешнюю форму степени p

$$F = \frac{1}{p!}\, a_{i_1 i_2 \ldots i_p} [u^{i_1} u^{i_2} \ldots u^{i_p}].$$

Для этого введем на p-плоскости координаты $v^1, v^2, \ldots, v^p$, которые получатся, если положить

$$u^i = v^k \xi_k^i \quad (i = 1,\ 2, \ldots, n),$$

где индекс суммирования k принимает значения $1, 2, \ldots, p$. Имеем

$$[u^{i_1} u^{i_2} \ldots u^{i_p}] = \xi_{k_1}^{i_1} \xi_{k_2}^{i_2} \ldots \xi_{k_p}^{i_p} [v^{k_1} v^{k_2} \ldots v^{k_p}];$$

в правой части надо принимать во внимание только те члены мономов, которые не равны нулю, т. е. те, для которых все индексы $k_1, k_2, \ldots, k_p$ различны; моном $[v^{k_1} v^{k_2} \ldots v^{k_p}]$ — не что иное, как $[v^1 v^2 \ldots v^p]$ со знаком $+$ или со знаком $-$, смотря по тому, будет ли перестановка p указателей $k_1, k_2, \ldots, k_p$ четной или нечетной; коэффициентом при $[v^1 v^2 \ldots v^p]$ будет тогда, как легко видеть, определитель

$$\begin{vmatrix} \xi_1^{i_1}\, \xi_1^{i_2} \ldots \xi_1^{i_p} \\ \xi_2^{i_1}\, \xi_2^{i_2} \ldots \xi_2^{i_p} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \xi_p^{i_1}\, \xi_p^{i_2} \ldots \xi_p^{i_p} \end{vmatrix} = u^{i_1 i_2 \ldots i_p}.$$

Отсюда, следовательно, вытекает, что

$$F = \frac{1}{p!} a_{i_1 i_2 \ldots i_p} u^{i_1 i_2 \ldots i_p} [v^1 v^2 \ldots v^p].$$

Искомое условие, чтобы заданная p-плоскость была решением внешнего уравнения $F = 0$, состоит в требовании, чтобы форма F обращалась в нуль, когда в ней внешнее произведение $[u^{i_1} u^{i_2} \cdots u^{i_p}]$ заменяется на плюккерову координату $u^{i_1 i_2 \ldots i_p}$ этой p-плоскости.

Теорема. *Чтобы p-плоскость с плюккеровыми координатами $u^{i_1 i_2 \ldots i_p}$ была решением уравнения*

$$F \equiv \frac{1}{p!} a_{i_1 i_2 \ldots i_p} [u^{i_1} u^{i_2} \ldots u^{i_p}] = 0,$$

*необходимо и достаточно, чтобы**

$$a_{i_1 i_2 \ldots i_p} u^{i_1 i_2 \ldots i_p} = 0.$$

14. Будем искать теперь условия, чтобы p-плоскость, заданная своими плюккеровыми компонентами, обращала в нуль внешнюю форму Φ степени $q < p$.

Начнем с некоторых геометрических замечаний. Если p-плоскость обращает в нуль форму Φ, то все q-плоскости, содержащиеся в этой p-плоскости $(q < p)$, также обращают в нуль форму Φ, ибо если форма Φ обращается в нуль, когда принимают во внимание уравнения p-плоскости, то тем более она будет обращаться в нуль, если принять во внимание *сверх того* те дополнительные уравнения, которые вместе с первыми определяют q-плоскость. Обратно, предположим, что форма Φ обращается в нуль для всех q-плоскостей, содержащихся в заданной p-плоскости. Если принять во внимание уравнения p-плоскости, разрешенные, например, относительно $u^{p+1}, \ldots, u^n$, то форма Φ преобразуется в форму Ψ от p переменных $u^1, u^2, \ldots, u^p$. Сказать, что она обращается в нуль для всех q-плоскостей, содержащихся в заданной p-плоскости, — значит сказать, что она обращается в нуль, когда p переменных $u^1, u^2, \ldots, u^p$ связаны посредством $p - q$ независимых произвольных линейных соотношений. Если взять линейные соотношения

$$u^{q+1} = u^{q+2} = \ldots = u^p = 0,$$

---

* Очевидно, достаточно подставить вместо монома $[u^{i_1} u^{i_2} \ldots u^{i_p}]$ ассоциированную кососимметричную p-линейную форму, где p сериями переменных будут $\xi_1^i, \xi_2^i, \ldots, \xi_p^i$.

то остается только один член в форме Ψ — тот, который содержит $[u^1 u^2 \ldots u^q]$; коэффициент монома $[u^1 u^2 \ldots u^q]$ в Ψ, следовательно, равен нулю; то же самое будет со всеми другими коэффициентами.

Теорема. *Необходимое и достаточное условие, чтобы p-плоскость обращала в нуль внешнюю форму Φ степени $q < p$, состоит в том, чтобы всякая q-плоскость, содержащаяся в данной p-плоскости, обращала в нуль эту форму.*

Аналитически можно поступать следующим образом. Если форма Φ обращается в нуль для данной p-плоскости, то все формы степени p

$$[\Phi u^{\alpha_1} u^{\alpha_2} \ldots u^{\alpha_{p-q}}] \quad (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-q} = 1, 2, \ldots, n)$$

тем более обращаются в нуль для этой p-плоскости. Эти необходимые условия будут достаточными; действительно, предположим, что в силу уравнений p-плоскости, разрешенных, например, относительно переменных $u^{p+1}, \ldots, u^n$, форма Φ перейдет в форму Ψ от $u^1, u^2, \ldots, u^p$. Если каждая из форм $[\Psi u^{\alpha_1} u^{\alpha_2} \ldots$ $\ldots u^{\alpha_{p-q}}]$ степени p, где $u^{\alpha_1}, u^{\alpha_2}, \ldots, u^{\alpha_{p-q}}$ — любые $p-q$ из переменных $u^1, u^2, \ldots, u^p$, равна нулю, то каждый из коэффициентов формы Ψ будет равен нулю, и, следовательно, p-плоскость будет обращать в нуль форму Φ.

Теорема. *Чтобы заданная p-плоскость обращала в нуль внешнюю форму Φ степени $q < p$*

$$\Phi = \frac{1}{q!} b_{i_1 i_2 \ldots i_q} [u^{i_1} u^{i_2} \ldots u^{i_q}],$$

необходимо и достаточно, чтобы плюккеровы координаты p-плоскости удовлетворяли C_n^{p-q} линейным уравнениям

$$b_{i_1 i_2 \ldots i_q} u^{i_1 i_2 \ldots i_q \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{p-q}} = 0$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-q} = 1, 2, \ldots, n).$$

Например, если трехмерная плоскость служит решением уравнений

$$a_i u^i = 0,$$

$$a_{ij} [u^i u^j] = 0,$$

$$a_{ijk} [u^i u^j u^k] = 0,$$

то ее плюккеровы координаты удовлетворяют $\frac{n^2+n+2}{2}$ линейным уравнениям:

$$a_i u^{i\alpha\beta} = 0 \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n),$$
$$a_{ij} u^{ij\alpha} = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n),$$
$$a_{ijk} u^{ijk} = 0.$$

15. *Условия, при которых кососимметричные величины $u^{i_1 i_2 \ldots i_p}$ являются плюккеровыми координатами p-плоскости.* Если задаться наперед системой чисел $u^{i_1 i_2 \ldots i_p}$, кососимметричных относительно p индексов $i_1, i_2, \ldots, i_p$, взятых среди целых чисел $1, 2, \ldots, n$, то эти числа вообще не будут плюккеровыми координатами никакой p-плоскости.

Теорема. *Чтобы система чисел $u^{i_1 i_2 \ldots i_p}$, кососимметричных относительно p индексов, была системой плюккеровых координат p-плоскости, необходимо и достаточно, чтобы внешняя форма степени p*

$$F = \frac{1}{p!} u^{i_1 i_2 \ldots i_p} [z_{i_1} z_{i_2} \ldots z_{i_p}]$$

относительно n переменных $z_1, z_2, \ldots, z_n$ была формой-мономом.

Действительно, если величины $u^{i_1 i_2 \ldots i_p}$ будут однородными координатами p-плоскости, определяемой p независимыми векторами $\xi_1^i, \xi_2^i, \ldots, \xi_p^i$, то имеем

$$F = [f_1 f_2 \ldots f_p],$$

где

$$f_1 = \xi_1^i z_i, \quad f_2 = \xi_2^i z_i, \quad \ldots, \quad f_p = \xi_p^i z_i.$$

Обратно, если F можно представить в таком виде, где $f_1, f_2, \ldots, f_p$ — произвольно заданные линейные формы, то коэффициенты $u^{i_1 i_2 \ldots i_p}$ будут плюккеровыми координатами p-плоскости, определяемой векторами $\xi_1^i, \ldots, \xi_p^i$*.

---

* Линейные соотношения $u^{i_1 i_2 \ldots i_{p-k}} z_k = 0$ дают необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять величины z_k, чтобы гиперплоскость

$$z_1 u^1 + z_2 u^2 + \ldots + z_n u^n = 0$$

содержала рассматриваемую p-плоскость.

Мы можем приложить теперь условия, найденные в п. **10**. В частности, *чтобы величины u^{ijk}, кососимметричные относительно трех индексов i, j, k, были бы координатами трехмерной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы имели место соотношения*

$$H^{ij,klm} \equiv u^{ijk} u^{hlm} - u^{ijh} u^{klm} + u^{ijl} u^{khm} -$$

$$- u^{ijm} u^{khl} = 0 \quad (i, j, k, h, l, m = 1, 2, \ldots, n).$$

В предыдущих пунктах мы получили *линейные* уравнения, которым должны удовлетворять плюккеровы координаты p-плоскости, чтобы эта p-плоскость образовывала решение заданной системы внешних уравнений; для полноты надо прибавить к этим линейным соотношениям *квадратичные* соотношения, которые выразят требование, чтобы эти координаты были координатами p-плоскости.

IV. СИСТЕМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ВНЕШНИХ УРАВНЕНИЙ

16. *Кольцо внешних форм*. Будем называть *кольцом*, определенным некоторым числом h внешних однородных форм $F_1, F_2, \ldots, F_h$ от n переменных, множество внешних форм вида

$$\Phi = [F_1 \varphi^1] + [F_2 \varphi^2] + \ldots + [F_h \varphi^h],$$

где φ^i — однородные внешние формы, подчиненные единственному условию, чтобы в каждом члене $[F_i \varphi^i]$ правой части сумма степеней (положительных или равных нулю) двух множителей была одна и та же во всех членах.

Очевидно, что всякая форма Φ кольца, определенного заданными h формами $F_1, F_2, \ldots, F_h$, обращается в нуль для всякого решения системы

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \ \ldots, \ F_h = 0.$$

Однако обратное не всегда верно. Мы сейчас укажем достаточно общий случай, когда обратное предложение справедливо, а затем приведем пример, опровергающий обратную теорему в самом общем случае.

17. Теорема. *Чтобы внешняя форма Φ обращалась в нуль для всякого решения системы линейных независимых уравнений*

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \ \ldots, \ F_h = 0, \tag{15}$$

необходимо и достаточно, чтобы форма Φ принадлежала кольцу, определенному формами F_i. А необходимым и достаточным условием того, чтобы Φ принадлежала этому кольцу, будет обращение в нуль формы $[F_1 F_2 \ldots F_h \Phi]$.

Мы уже видели, что если Φ принадлежит к этому кольцу, то форма Φ обращается в нуль для каждого решения линейных уравнений (15).

Условие — необходимо; действительно, преобразуем заменой переменных все формы F_i к переменным

$$u^1, \ u^2, \ \ldots, \ u^h;$$

сказать, что форма Φ обращается в нуль, когда обращаются в нуль переменные $u^1, u^2, \ldots, u^h$, — значит сказать, что всякий моном полинома Φ содержит множителем по крайней мере одну из переменных $u^1, u^2, \ldots, u^h$. Обозначим теперь через φ^1 коэффициент при u^1 в совокупности членов формы Φ, содержащих переменную u^1, после того как множитель u^1 переведен в каждом из этих членов на первое место; обозначим через φ^2 форму, получаемую аналогично по отношению к переменной u^2, отправляясь от формы $\Phi - [u^1 \varphi^1]$ и т. д. Мы, очевидно, будем иметь

$$\Phi = [u^1 \varphi^1] + [u^2 \varphi^2] + \ \ldots \ + [u^h \varphi^h]. \tag{16}$$

Первая часть теоремы, таким образом, доказана.

Теперь ясно, что форма

$$[F_1 F_2 \ldots F_h \Phi]$$

тождественно равна нулю, ибо после замены Φ ее выражением (16) каждый член произведения будет содержать два одинаковых множителя *первой степени* и, следовательно, будет равен нулю.

Обратно, если форма $[F_1 F_2 \ldots F_h \Phi]$ равна нулю и мы подходящей заменой переменных добьемся еще того, чтобы $F_i = u^i$ $(i = 1, 2, \ldots, h)$, то всякий моном, входящий в выражение для Φ, не может иметь все свои множители, отличными от $u^1, u^2, \ldots, u^h$, и, следовательно, Φ будет обращаться в нуль вместе с $u^1, u^2, \ldots, u^h$.

18. Рассмотрим теперь следующий пример. Пусть даны *нелинейные* формы

$$F_1 = [u^1u^3], \quad F_2 = [u^1u^4], \quad F_3 = [u^1u^2] - [u^3u^4].$$

Всякий биплан (двумерная плоскость) с координатами u^{ij}, обращающий в нуль эти три формы, в силу квадратичного соотношения

$$u^{13}u^{24} - u^{14}u^{23} - u^{12}u^{34} = 0,$$

будет иметь координату u^{12} равной нулю; иначе говоря, будет удовлетворять уравнению

$$\Phi \equiv [u^1u^2] = 0.$$

Так же будет со всякой p-плоскостью, которая обращает в нуль те же формы F_1, F_2, F_3, ибо все бипланы, содержащиеся в этой p-плоскости, обязаны обращать в нуль форму Φ, и форма Φ обратится в нуль для этой p-плоскости.

Форма Φ, *которая обращается в нуль для всякого решения уравнений*

$$F_1 = F_2 = F_3 = 0,$$

не принадлежит, однако, к кольцу, определяемому формами F_1, F_2, F_3.

Определение. *Будем говорить, что система внешних уравнений полная, если любая форма, которая обращается в нуль для всякого решения этой системы, принадлежит кольцу, определяющему левыми частями уравнений системы.*

19. Определение. *Две системы внешних уравнений называются алгебраически эквивалентными, если левые части уравнений одной из них принадлежат кольцу, определенному левыми частями уравнений другой системы.*

Ясно, что две алгебраически эквивалентные системы допускают одни и те же решения. Если одна система — полна, то всякая другая система, допускающая те же решения, будет ей алгебраически эквивалентна; обратное может не иметь места.

Легко образовать наиболее общую систему, алгебраически эквивалентную данной системе. Пусть, например, дана система третьей степени

$$\left.\begin{aligned} F_1 &\equiv A_{1i}u^i = 0, \\ F_2 &\equiv A_{2i}u^i = 0, \\ \Phi &\equiv \frac{1}{2} B_{ij}[u^iu^j] = 0, \\ \Psi &\equiv \frac{1}{6} C_{ijk}[u^iu^ju^k] = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Тогда для получения наиболее общей системы, алгебраически эквивалентной системе (17), достаточно образовать уравнения

$$\left.\begin{aligned}
&\overline{F}_1 \equiv aF_1 + bF_2 = 0,\\
&\overline{F}_2 \equiv a'F_1 + b'F_2 = 0,\\
&\overline{\Phi} \equiv c\Phi + [\tilde{\omega}^1 F_1] + [\tilde{\omega}^2 F_2] = 0,\\
&\overline{\Psi} \equiv h\Psi + [\tilde{\omega}^3 \Phi] + [\psi^1 F_1] + [\psi^2 F_2] = 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (17')$$

где a, b, a', b', c, h — постоянные ($ab' - ba' \neq 0$, $c \neq 0$, $h \neq 0$) и $\tilde{\omega}^1, \tilde{\omega}^2, \tilde{\omega}^3$ — произвольные линейные формы, ψ^1, ψ^2 — произвольные внешние квадратичные формы.

V. АССОЦИИРОВАННАЯ СИСТЕМА СИСТЕМЫ ВНЕШНИХ УРАВНЕНИЙ

20. Мы уже рассматривали (п. 8) то, что мы назвали системой, ассоциированной некоторой внешней форме. Теперь мы определим систему, ассоциированную системе внешних уравнений.

Определение. *Говорят, что прямая Δ, выходящая из начала координат, будет для системы внешних уравнений Σ особенной, если она будет решением этой системы и, кроме того, при произвольно заданном плоском многообразии V—решении системы Σ, наименьшее плоское многообразие, содержащее V и Δ, будет тоже решением системы Σ.*

Сейчас мы будем искать необходимые и достаточные условия для того, чтобы прямая с направляющими параметрами ξ^i была особенной для заданной системы внешних уравнений.

Пусть дана система Σ, которую будем предполагать для простоты третьей степени:

$$\left.\begin{aligned}
&F_\alpha \equiv A_{\alpha i} u^i = 0 && (\alpha = 1, 2, \ldots, r_1),\\
&\Phi_\alpha \equiv \frac{1}{2} A_{\alpha ij} [u^i u^j] = 0 && (\alpha = 1, 2, \ldots, r_2),\\
&\Psi_\alpha \equiv \frac{1}{6} A_{\alpha ijk} [u^i u^j u^k] = 0 && (\alpha = 1, 2, \ldots, r_3).
\end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Чтобы прямая (ξ^i) была *особенной,* она должна удовлетворять трем условиям (пп. **13** и **14**):

1°. Необходимо, чтобы она сама была решением Σ, т. е. чтобы она обращала в нуль формы F_α :

$$A_{\alpha i}\xi^i = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, r_1). \tag{19}$$

2°. Надо, чтобы при произвольно заданной прямой (u^i), решении системы Σ, биплан, определяемый этой прямой (u^i) и прямой (ξ^i), обращал в нуль формы Φ_α, т. е. чтобы имели место уравнения

$$A_{\alpha ij}u^i\xi^j = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, r_2) \tag{20}$$

всякий раз, когда коэффициенты u^i удовлетворяют r_1 соотношениям

$$A_{\beta i}u^i = 0 \quad (\beta = 1, 2, \ldots, r_1). \tag{21}$$

3°. Надо, чтобы при заданном биплане с координатами u^{ij}, решении системы Σ, трехмерная плоскость, определяемая этим бипланом и прямой (ξ^i), обращала в нуль формы Ψ_α; но координатами u^{ijk} этой трехмерной плоскости будут числа

$$u^{ijk} = u^{ij}\xi^k - u^{ik}\xi^j + u^{jk}\xi^i;$$

следовательно, надо, чтобы выполнялось равенство

$$A_{\alpha ijk}u^{ij}\xi^k = 0 \quad (\alpha = 1,2, \ldots, r_3) \tag{22}$$

всякий раз, когда координаты u^{ij} заданного биплана удовлетворяют $nr_1 + r_2$ соотношениям

$$\left.\begin{array}{c} A_{\beta i}u^{i1} = A_{\beta i}u^{i2} = \ldots = A_{\beta i}u^{in} = 0 \\ (\beta = 1, 2, \ldots, r_1), \\ A_{\gamma ij}u^{ij} = 0 \quad (\gamma = 1,2, \ldots, r_2). \end{array}\right\} \tag{23}$$

Эти необходимые условия достаточны. Действительно, пусть V — p-плоскость, которая является решением системы Σ, и W — $(p+1)$ -плоскость, определяемая посредством V и прямой ξ . Чтобы эта $(p+1)$-плоскость удовлетворяла системе Σ, необходимо и достаточно, чтобы всякая трехмерная плоскость, содержащаяся в W, была решением системы Σ. Так непременно и будет, если эта трехмерная плоскость принадлежит многообразию V; иначе она должна определяться прямой (ξ^i) и бипланом, содержащимся в многообразии V; этот биплан, следовательно, будет решением системы Σ, и условия, чтобы трехмерная плоскость была решением системы Σ, точно обеспечиваются уравнениями (19), (20) и (22) с учетом уравнений (21) и (23).

Заключение. *Чтобы прямая (ξ^i) была особенной для системы Σ, необходимо и достаточно, чтобы координаты прямой ξ^i удовлетворяли уравнениям* (19), (20) *и* (22), *коэффициенты u^i, которые фигурируют в уравнениях* (20), *были подчинены единственному условию обращать в нуль формы F_α, и коэффициенты u^{ij}, которые фигурируют в уравнениях* (22), *были подчинены условию удовлетворять* 1° *квадратичным уравнениям, которые выражают требование, чтобы эти коэффициенты были координатами биплана,* 2° *уравнениям* (23), *которые выражают требование, чтобы этот биплан был решением системы Σ.*

Легко увидеть, как происходит отыскание особенных прямых, если заданная система будет произвольной степени.

21. *Система, ассоциированная системе внешних уравнений.* Предположим, что к условиям (23), которым должны удовлетворять величины u^{ij}, фигурирующие в уравнениях (22), *не присоединены* квадратичные уравнения, которые выражают, что u^{ij} — координаты биплана. Тогда будем иметь для ξ^h систему условий (19), (20) и (22), которые могут быть менее жестки, чем те условия, которые дают все особенные прямые. Можно доказать, что вновь полученные условия выражают требование, чтобы внешние формы относительно u^1, $u^2, \ldots, u^n$

$$\xi^i \frac{\partial F_\alpha}{\partial u^i}, \quad \xi^i \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial u^i}, \quad \xi^i \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial u^i}$$

принадлежали кольцу форм $F_\alpha, \Phi_\alpha, \Psi_\alpha$, т. е. кольцу системы Σ.

Определение. *Системой, ассоциированной системе внешних уравнений Σ, называется совокупность линейных относительно координат $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n$ уравнений, которые выражают, что внешние формы $\xi^i \frac{\partial H}{\partial u^i}$, где H — любая из левых частей уравнений системы Σ, принадлежат кольцу системы.*

Система, ассоциированная внешней форме F введенная в п. 8, может также быть определена как совокупность уравнений линейных относительно координат $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n$, которые выражают требование, чтобы форма $\xi^i \frac{\partial F}{\partial u^i}$, рассматриваемая как внешняя форма относительно координат $u^1, u^2, \ldots, u^n$, была тождественно равна нулю, т. е. принадлежала кольцу F^*.

22. Легко видеть, что две алгебраически эквивалентные системы имеют одну и ту же ассоциированную систему и что ассоциированная система внутренним образом связана с системой Σ. Мы докажем следующую теорему.

Теорема. *Если ассоциированная система имеет ранг p и подходящей заменой переменных приводится к уравнениям*

$$\xi^1 = \xi^2 = \ldots = \xi^p = 0,$$

то существует система, алгебраически эквивалентная системе Σ, в уравнениях которой фигурируют только переменные $u^1, u^2, \ldots, u^p$.

Действительно, рассмотрим прямую, все параметры которой ξ^i равны нулю, кроме $\xi^{p+1} = 1$. Формы $\dfrac{\partial F_\alpha}{\partial u^{p+1}}$, которые будут константами, могут принадлежать кольцу системы Σ, если только они равны нулю: формы F_α не содержат, следовательно, переменной u^{p+1}. Формы

$$\Phi_\alpha^* = \Phi_\alpha - \left[u^{p+1} \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial u^{p+1}}\right],$$

$$\Psi_\alpha^* = \Psi_\alpha - \left[u^{p+1} \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial u^{p+1}}\right]$$

тем более, очевидно, не содержат переменной u^{p+1}. Но форма $\dfrac{\partial \Phi_\alpha}{\partial u^{p+1}}$ принадлежит кольцу форм F_α и форма $\dfrac{\partial \Psi_\alpha}{\partial u^{p+1}}$ — кольцу форм F_α и Φ_α; система

$$F_\alpha = 0, \quad \Phi_\alpha^* = 0, \quad \Psi_\alpha^* = 0$$

---

* Как пример случая, где ассоциированная система менее ограничительна, чем система, которая дает *особенные* прямые, рассмотрим систему Σ уравнений (п. 18)

$$[u^1u^3] = [u^1u^4] = [u^1u^2] - [u^3u^4] = [u^1u^2u^5] - [u^3u^4u^6] = 0.$$

Ее ассоциированная система будет

$$\xi^1 = \xi^2 = \xi^3 = \xi^4 = \xi^5 = \xi^6 = 0,$$

тогда как *особенные* прямые определяются уравнениями

$$\xi^1 = \xi^2 = \xi^3 = \xi^4 = 0.$$

алгебраически эквивалентна системе Σ, но уравнения этой системы не содержат u^{p+1}. Можно было бы шаг за шагом получить систему, алгебраически эквивалентную системе Σ и содержащую только переменные $u^1, u^2, \ldots, u^p$, ч. т. д.

Замечание. Целое число p, очевидно, выражает то наименьшее число переменных, с помощью которых можно написать уравнения системы, алгебраически эквивалентной системе Σ, ибо, если такая система содержит только $q < p$ переменных, то ее ассоциированная система, та же самая, что и у системы Σ, будет, самое большее, ранга q. Кроме того, мы видим, что p переменных, в наименьшем числе входящих в систему, алгебраически эквивалентную системе Σ, вполне определены в их совокупности.

Частный случай. Если система Σ только порядка 2, то легко видеть, что ассоциированная система получается присоединением к уравнениям первого порядка системы Σ уравнений системы, ассоциированной r_2 формам:

$$[F_1 F_2 \ldots F_{r_1} \Phi_\alpha] = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, r_2),$$

уравнений, которые получаются, если приравнять нулю все производные порядка $r_1 + 1$ от левых частей.

Глава II

ВНЕШНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

I. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ВНЕШНЕЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

23. Рассмотрим n-мерное пространство или по крайней мере некоторую область $\mathfrak{D}$ этого пространства. Будем предполагать, что речь идет об евклидовом пространстве, хотя это совсем не обязательно; это предположение будет служить для упрощения языка. Обозначим через $x^1, x^2, \ldots, x^n$ текущие координаты. Будем называть *внешней дифференциальной формой степени p* внешнюю форму, в которой *переменными* будут дифференциалы $dx^1, dx^2, \ldots, dx^n$, а коэффициенты будут функциями от координат x^i, определенными в области $\mathfrak{D}$. Дифференциальная форма первого порядка, или линейная форма, запишется тогда в виде

$$a_i(x)\,dx^i,$$

внешняя квадратичная дифференциальная форма запишется в виде

$$\frac{1}{2}a_{ij}(x)\quad[dx^i dx^j]\quad(a_{ij}=-a_{ji})$$

и т. д.

Функцию от переменных $x^1, x^2, \ldots, x^n$ удобно рассматривать как дифференциальную форму нулевой степени.

При замене координат, которая отразится на *переменных* dx^i линейной подстановкой с ненулевым определителем, всякая внешняя дифференциальная форма степени p преобразуется в другую дифференциальную форму той же степени. Естественно надо предполагать, что новые координаты допускают частные производные по старым.

24. *Внешний дифференциал дифференциальной формы.* Если форма нулевой степени, т. е. функция $f(x)$, ее внешним дифференциалом, по определению, будет обыкновенный дифференциал df. Внешним дифференциалом линейной формы

$$\omega = a_i \, dx^i$$

будет, *по условию*, форма второй степени

$$d\omega = [da_i \, dx^i];$$

аналогично внешним дифференциалом формы второй степени

$$\omega = \frac{1}{2} a_{ij} [dx^i dx^j]$$

будет форма третьей степени

$$d\omega = \frac{1}{2} [da_{ij} \, dx^i dx^j]$$

и т. д.

Это определение предполагает, что коэффициенты рассматриваемых форм допускают частные производные первого порядка; мы увидим далее, что существуют случаи, когда можно определить внешний дифференциал формы, если даже коэффициенты не имеют производных.

Общее определение. *Если ω — внешняя дифференциальная форма порядка p*

$$\omega = \frac{1}{p!} a_{i_1 i_2 \ldots i_p} [dx^{i_1} dx^{i_2} \ldots dx^{i_p}], \tag{1}$$

то ее внешний дифференциал $d\omega$ будет равен

$$d\omega = \frac{1}{p!} [da_{i_1 i_2 \ldots i_p} dx^{i_1} dx^{i_2} \ldots dx^{i_p}]. \tag{2}$$

25. Предыдущее определение нуждается в обосновании, и мы сейчас докажем следующую теорему.

Теорема. *Если дифференциальная форма ω (x, dx) преобразуется при замене координат в форму $\tilde{\omega}(y, dy)$, то внешний дифференциал ее $d\omega$ преобразуется при той же замене координат во внешний дифференциал $d\tilde{\omega}$ формы $\tilde{\omega}$.*

Прежде чем провести доказательство, мы докажем несколько лемм, которые, впрочем, сами по себе имеют большое значение.

Лемма. 1. *Внешний дифференциал от дифференциала функции $f(x)$ равен нулю.*

Действительно, пусть форма будет

$$\omega = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

Ее внешний дифференциал, по определению, равен

$$d\omega = \left[d\,\frac{\partial f}{\partial x^i},\quad dx^i\right] = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i\,\partial x^j}\,[dx^j dx^i];$$

правая часть обращается в нуль в силу симметрии коэффициентов при произведении $[dx^i dx^j]$ и косой симметрии внешнего произведения $[dx^i dx^j]$ относительно перестановки индексов.

Лемма. 2. *Внешний дифференциал от внешнего произведения двух форм* ω, $\tilde{\omega}$ *соответственно степеней* p *и* q *равен* *

$$d\,[\omega\,\tilde{\omega}] = [d\,\omega,\,\tilde{\omega}] + (-1)^p\,[\omega,\,d\tilde{\omega}]. \tag{3}$$

Действительно, пусть

$$\omega = \frac{1}{p!}\,a_{i_1 i_2 \ldots i_p}\,[dx^{i_1}\,dx^{i_2}\,\ldots\,dx^{i_p}],$$

$$\tilde{\omega} = \frac{1}{q!}\,b_{j_1 j_2 \ldots j_q}\,[dx^{j_1}\,dx^{j_2}\,\ldots\,dx^{j_q}].$$

Имеем

$$[\omega\,\tilde{\omega}] = \frac{1}{p!}\,\frac{1}{q!}\,a_{i_1 i_2 \ldots i_p}\,b_{j_1 j_2 \ldots j_q}\,[dx^{i_1}\,dx^{i_2}\ldots\,dx^{i_p} dx^{j_1}\,\ldots\,dx^{j_q}],$$

откуда

$$d\,[\omega\,\tilde{\omega}] = \frac{1}{p!}\,\frac{1}{q!}\,[d\,(a_{i_1 i_2 \ldots i_p}\,b_{j_1 j_2 \ldots j_q})\,\cdot$$

$$\cdot\,dx^{i_1}\,dx^{i_2}\ldots\,dx^{i_p}\,dx^{j_1}\ldots\,dx^{j_q}],$$

но

$$d\,(ab) = bda + adb,$$

откуда

$$d\,[\omega\,\tilde{\omega}] = \frac{1}{p!}\,\frac{1}{q!}\,b_{j_1 j_2 \ldots j_q}\,[da_{i_1 i_2 \ldots i_p}\,dx^{i_1}\,\ldots\,dx^{i_p} dx^{j_1}\,\ldots\,dx^{j_q}] +$$

$$+\,\frac{1}{p!}\,\frac{1}{q!}\,a_{i_1 i_2 \ldots i_p}\,[db_{j_1 \ldots j_q}\,dx^{i_1}\ldots\,dx^{i_p}\,dx^{j_1}\ldots\,dx^{j_q}].$$

---

* В частности, когда одна из форм нулевой степени, т. е. функция a, имеем

$$d\,(a\omega) = [da\omega] + ad\omega,\quad \text{или}\quad d\,(\omega a) = d\omega a + (-1)^p\cdot[\omega\,da].$$

Первая сумма правой части есть не что иное, как внешнее произведение $[d\omega, \tilde{\omega}]$; что касается второй суммы, то, переставляя p раз множитель $db_{j_1j_2\ldots j_q}$ с множителями $dx^{i_1}, \ldots, dx^{i_p}$ и меняя каждый раз знак, мы умножим ее на $(-1)^p$ и поместим дифференциал $db_{j_1j_2\ldots j_q}$ точно перед дифференциалами $dx^{j_1}, \ldots$ $\ldots, dx^{j_q}$, так что вторая сумма будет равна $(-1)^p[\omega, d\tilde{\omega}]$. Отсюда следует формула (3).

Эта лемма обобщается для произведения произвольного числа сомножителей. Например,

$$d[\omega, \tilde{\omega}, \chi] = [d\omega, \tilde{\omega}, \chi] + (-1)^p \cdot [\omega, d\tilde{\omega}, \chi] + (-1)^q \cdot [\omega, \tilde{\omega}, d\chi],$$

если предполагать, что степень ω равна p, а степень $\tilde{\omega}$ равна q.

26. Обратимся теперь к доказательству сформулированной теоремы. Возьмем, например, дифференциальную форму второй степени, и пусть

$$\omega = a_{ij}[dx^i dx^j]$$

один из членов этой формы. Выразим переменные x^i через новые переменные y^i. Рассматриваемый член является внешним произведением трех множителей: первый a_{ij} — форма нулевой степени, второй и третий — линейные формы. Следовательно, переходя к новым переменным y^i и обозначая получаемую форму $\tilde{\omega}$, мы получим

$$d\tilde{\omega} = [da_{ij}\, dx^i dx^j] + a_{ij}[d(dx^i), dx^j] - a_{ij}[dx^i, d(dx^j)],$$

но в силу леммы 1 внешние дифференциалы от dx^i, dx^j равны нулю и, следовательно, форма $d\tilde{\omega}$ получится заменой в выражении $[da_{ij}dx^idx^j]$ дифференциала $d\omega$ координат x^i на функции от y^i.

27. Что касается линейных дифференциальных форм

$$\omega = a_i dx^i,$$

то можно связать внешнее дифференцирование с понятием *билинейного ковариантa.*

Введем второй символ дифференцирования δ; мы будем рассматривать символы $d\delta x^i$, на которые, как и на символы δdx^i, мы можем смотреть как на образующие двух новых серий переменных; мы можем условиться, что переменные δdx^i тождественны переменным $d\delta x^i$; это условие законно в том смысле, что оно сохраняется при произвольной замене переменных, ибо, выражая новые переменные y^i как функции от старых x^i, имеем

$$dy^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^k} dx^k,$$

$$\delta dy^i = \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^k \partial x^h} \delta x^h dx^k + \frac{\partial y^i}{\partial x^k} \delta dx^k$$

и

$$\delta y^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^k} \delta x^k, \quad d\delta y^i = \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^k \partial x^h} dx^h \delta x^k + \frac{\partial y^i}{\partial x^k} d\delta x^k;$$

сравнение δdy^i и $d\delta y^i$ немедленно показывает их равенство, если принять во внимание симметрию вторых частных производных $\frac{\partial^2 y^i}{\partial x^k \partial x^h}$ относительно двух индексов дифференцирования.

Теперь обозначим через $\omega(d)$ или $\omega(\delta)$ заданные дифференциальные формы, смотря по тому, какие символы дифференцирования используются, и возьмем выражение

$$\begin{aligned} d\omega(\delta) - \delta\omega(d) &= d(a_i \delta x^i) - \delta(a_i dx^i) = \\ &= da_i \delta x^i - \delta a_i dx^i + a_i (d\delta x^i - \delta dx^i). \end{aligned}$$

Получается билинейная форма, кососимметричная относительно двух серий переменных dx^i и δx^i. Этой кососимметричной билинейной форме, которую можно записать в виде определителя

$$\begin{vmatrix} da_i & dx^i \\ \delta a_i & \delta x^i \end{vmatrix},$$

ассоциирована внешняя форма $[da_i\, dx^i]$ — не что иное, как то, что мы называли внешним дифференциалом формы $a_i dx^i$. *Внутренний* (ковариантный) характер, очевидный для выражения $d\omega(\delta) - \delta\omega(d)$, немедленно придает внутренний характер форме $[da_i\, \delta x^i]$.

Можно было бы также ассоциировать внешнему дифференциалу внешней квадратичной формы ω кососимметричную трилинейную форму

$$d_1 \omega(d_2, d_3) - d_2 \omega(d_1, d_3) + d_3 \omega(d_1, d_2),$$

куда входят три символа дифференцирования, перестановочные между собой.

28. Теорема Пуанкаре. *Внешний дифференциал от внешнего дифференциала дифференциальной формы равен нулю.*

Доказательство непосредственно. Достаточно проверить теорему для монома

$$\omega = a\,[dx^1\,dx^2\,\ldots\,dx^p];$$

имеем

$$d\omega = [da\,dx^1\,dx^2\,\ldots\,dx^p];$$

поскольку каждый множитель правой части — точный дифференциал, формула, которая дает внешний дифференциал произведения, делает теорему очевидной.

Возьмем, например, форму

$$\omega = Pdx + Qdy + Rdz; \tag{5}$$

для нее имеем

$$\begin{aligned} d\omega &= [dPdx] + [dQdy] + [dRdz] = \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)[dydz] + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)[dzdx] + \\ &\quad + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)[dxdy]. \end{aligned} \tag{6}$$

Дифференцируя внешним образом еще раз, получим кубическую форму:

$$\begin{aligned} &\left[d\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right), dydz\right] + \left[d\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right), dzdx\right] + \\ &\quad + \left[d\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right), dxdy\right] = \\ &= \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right\} \cdot \\ &\quad \cdot [dxdydz] = 0. \end{aligned}$$

Теорема Пуанкаре допускает обратную, которой, впрочем, мы не будем пользоваться и которая формулируется так.

Теорема. *При заданной дифференциальной форме степени p, внешний дифференциал которой равен нулю и которая определена внутри области $\mathfrak{D}$, гомеоморфной внутренности гиперсферы, существует дифференциальная форма степени $p - 1$, определенная в той же области $\mathfrak{D}$, и для которой данная форма служит внешним дифференциалом.*

Мы ограничимся проверкой теоремы для $p = 1$. Форма (5), например, имеет внешний дифференциал, равный нулю, если в силу (6)

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0,$$

но эти условия необходимы и достаточны для того, чтобы форма $Pdx + Qdy + Rdz$ была точным дифференциалом, или внешним дифференциалом формы нулевой степени, т. е. функции $f(x,y,z)$.

II. ВНЕШНЕЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ОБОБЩЕННАЯ ФОРМУЛА СТОКСА

29. Классические формулы Коши — Грина, Стокса и Остроградского показывают замечательную связь между операцией внешнего дифференцирования и операцией интегрального исчисления, которая состоит в переходе от интеграла, распространенного на границу области $(p+1)$-мерного пространства к равному интегралу, распространенному на эту область. Рассмотрим, например, формулу Коши — Грина

$$\int\limits_C Pdx + Qdy = \iint\limits_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy,$$

в которой левая часть — криволинейный интеграл по замкнутому контуру C на плоскости, а правая часть — двойной интеграл, распространенный на площадь A, ограниченную этим контуром.

Поскольку внешний дифференциал формы $Pdx + Qdy$ равен

$$[dPdx] + [dQdy] = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)[dxdy],$$

мы видим, что формулу Коши — Грина можно записать в виде

$$\int\limits_C \omega = \iint\limits_A d\omega. \qquad (7)$$

Заметим, впрочем, что для того чтобы эта формула имела смысл, надо согласованно ориентировать линию C и площадь A; без такой ориентации каждый интеграл определяется только с точностью до знака. Согласованность ориентации определяется следующим правилом. Сначала произвольно ориентируют площадь A, согласуя, однако, чтобы площадь параллелограмма, построенного на двух векторах $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, взятых в этом порядке, была положительной; ориентация, которую придают линии C, будет следующей: в некоторой точке линии C проводят вектор $\vec{\varepsilon}_1$, внешний к площади, которую она ограничивает, и вектор $\vec{\varepsilon}_2$, касательный к контуру, так чтобы система $(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2)$ была положительно ориентирована.

Формула Стокса тоже приводится к виду (7), если взять за ω форму (5) и за $d\omega$ форму (6); первый интеграл берется по контуру C, ограничивающему часть поверхности A, второй интеграл распространяется на эту часть поверхности; здесь тоже имеется выбор согласованных ориентаций для контура и площади; *с соответствующими поправками* он — тот же, что и для формулы Коши — Грина.

Наконец, формула Остроградского приводит к тому же виду (7), если положить

$$\omega = P\,[dydz] + Q\,[dzdx] + R\,[dxdy],$$

$$d\omega = [dPdydz] + [dQdzdx] + [dRdxdy] =$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)[dxdydz].$$

Интеграл $\int\omega$ распространен на замкнутую поверхность S, ограничивающую объем V, а интеграл $\int d\omega$ распространяется на этот объем. Вопрос ориентации решается следующим образом. Ориентируем объем, строя трехграниик $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, который условимся называть правым, а объем ориентированного параллелепипеда, который построен на этих трех векторах $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, будем считать положительным. Чтобы ориентировать поверхность S, проведем через точку M этой поверхности три вектора $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3$, образующие правый трехгранник; первый вектор идет вне объема V, два других касаются поверхности S; условимся считать площадь ориентированного, построенного на векторах $\vec{\varepsilon}_2$ и $\vec{\varepsilon}_3$ параллелограмма положительной; это ориентирует поверхность.

Можно доказать, что с аналогичными условиями ориентации получается обобщенная формула Стокса:

$$\int \omega = \int d\omega;$$

первый интеграл распространен на p-мерную границу $(p+1)$-мерной области, на которую распространяется второй интеграл.

30. Если внешний дифференциал формы ω степени p равен нулю (мы будем говорить вместе с де Рамом, что такая форма *замкнута*), то интеграл $\int\omega$, распространенный на границу произвольной $(p+1)$-мерной области, тоже равен нулю. Если условия, которые мы неявно допустили, чтобы образовать внешний дифференциал (дифференцируемость коэффициентов) не осуществлены, то может случиться, что интеграл $\int\omega$, распространенный на границу некоторой области $p+1$ измерений, будет равен нулю. Можно сказать в этом случае, что форма ω имеет внешний дифференциал, равный нулю. Вообще при заданной форме ω степени p, если существует форма $d\omega$ степени $p+1$ такая, что обобщенная формула Стокса (7) будет пригодна для всей области $p+1$ измерений, мы могли бы сказать, что форма $d\omega$ будет внешним дифференциалом формы ω, если даже коэффициенты формы ω будут *просто непрерывными функциями.*

31. Можно легко доказать теорему Пуанкаре для случая, когда коэффициенты внешнего дифференциала $d\omega$ формы ω не дифференцируемы: достаточно предположить существование этого дифференциала. Действительно, предположим, что форма ω имеет степень p; обобщенная формула Стокса показывает, что интеграл $\int d\omega$, распространенный на некоторую область $p+1$ измерений, равен интегралу $\int\omega$, распространенному на границу этой области. Пусть тогда Σ будет замкнутым многообразием $p+1$ измерений; разобьем его на две части Σ_1 и Σ_2 замкнутым p-мерным многообразием C; интеграл $\int d\omega$, распространенный на Σ_1, и интеграл $\int d\omega$, распространенный на Σ_2, будут тот и другой равны интегралу $\int\omega$, распространенному на многообразие C, но первый раз с определенной ориентацией C, второй раз с противоположной ориентацией. Полный интеграл $\int d\omega$, распространенный на Σ, будет равен нулю: форма $d\omega$, следовательно, замкнутая, и это выражает также теорему Пуанкаре.

32. Можно доказать также обратную теорему Пуанкаре, сформулированную в п. 22. Мы ограничимся случаем $p=2$, что достаточно, чтобы понять, как может быть построено доказательство в общем случае*.

Предположим $n=3$ и поместимся внутри сферы Σ с центром O. Пусть дана замкнутая форма

$$\omega = P[dy\,dz] + Q[dz\,dx] + R[dx\,dy], \tag{8}$$

* Доказательство в тексте, с точностью до способа изложения, принадлежит Анри Картану (Henri Cartan). Ср. для рассмотренного здесь частного случая статью: A. Szücs. *Sur la variation des intégrales triples et le théorème de Stokes* (Acta Szeged, **3**, 1927, 81—95).

интеграл от которой, распространенный на всю замкнутую поверхность внутри сферы Σ, имеет величину, равную нулю. Пусть (C) — замкнутый контур, проведенный внутри этой сферы. Подсчитаем интеграл $\int\omega$, распространенный на поверхность S конуса с вершиной O и направляющей (C). Мы можем предположить, что координаты x, y, z текущей точки линии (C) выражены как функции криволинейной абсциссы s, отсчитываемой в определенном направлении на линии, которая, таким образом, ориентирована. Каждая точка M поверхности S имеет координаты вида

$$X = tx, \quad Y = ty, \quad Z = tz \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1),$$

где x, y, z обозначают координаты точки, в которой образующая OM пересекает (C). Имеем тогда

$$\omega(X, Y, Z; dX, dY, dZ) = P(X, Y, Z)\,[t\,dy + y\,dt,\ t\,dz + z\,dt] + \ldots$$

Но поскольку x, y, z — функции одного параметра s, моном $[dy\,dz]$ равен нулю, и мы имеем

$$[t\,dy + y\,dt,\ t\,dz + z\,dt] = t\,[dt,\ y\,dz - z\,dy]$$

и, следовательно,

$$\iint\limits_S \omega = \iint\limits_S t\,\Big[P(X, Y, Z)\cdot\left(y\frac{dz}{ds} - z\frac{dy}{ds}\right) + Q(X, Y, Z)\cdot\left(z\frac{dx}{ds} - x\frac{dz}{ds}\right) + R(X, Y, Z)\cdot\left(x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds}\right)\Big]\,dt\,ds. \tag{9}$$

Ориентация поверхности S, согласованная с ориентацией (C), рассматривает как положительную площадь малого параллелограмма, построенного на двух векторах, выходящих из точки (x, y, z) линии (C): первый вектор $\vec{\varepsilon}_1$ лежит на образующей, в направлении, внешнем к поверхности конуса S, т. е. в направлении возрастания t; второй вектор $\vec{\varepsilon}_2$ расположен на касательной к (C) в направлении возрастания s. Если рассматривать t и s как прямоугольные координаты точки плоскости, то это приводит к выбору положительного направления вращения, которое переводит ось t в ось s. Тогда имеем

$$\iint_S H\,dt\,ds = \int_0^l ds \int_0^1 H\,dt,$$

где l — длина линии (C), H — коэффициент при $dt\,ds$ в правой части уравнения (9). Полагая

$$\left.\begin{aligned} A(x, y, z) &= \int_0^1 tP(X, Y, Z)\,dt, \\ B(x, y, z) &= \int_0^1 tQ(X, Y, Z)\,dt, \\ C(x, y, z) &= \int_0^1 tR(X, Y, Z)\,dt, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

имеем

$$\iint_S \omega = \int_{(C)} A(y\,dz - z\,dy) + B(z\,dx - x\,dz) + C(x\,dy - y\,dx).$$

Полагая

$$\tilde{\omega} = A(y\,dz - z\,dy) + B(z\,dx - x\,dz) + C(x\,dy - y\,dx), \tag{11}$$

получаем соотношение

$$\int_S \omega = \int_{(C)} \tilde{\omega}.$$

Но форма ω замкнута, и интеграл $\iint \omega$, распространенный на произвольную поверхность, ограниченную кривой (C) (и лежащую внутри сферы Σ), будет тот же, что $\iint_S d\omega$. Следовательно, *мы пришли к построению формы первой степени* $\tilde{\omega}$, *допускающей в качестве внешнего дифференциала форму* ω, *которая предполагалась замкнутой*, ч. т. д.

33. Можно проверить, что в *случае, когда коэффициенты P, Q, R формы ω дифференцируемы*, внешний дифференциал $\tilde{\omega}$ равен ω. Поскольку ω замкнута, действительно имеется соотношение

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0. \tag{12}$$

С другой стороны, имеем

$$d\tilde{\omega} = \left\{2A + x\frac{\partial A}{\partial x} + y\frac{\partial A}{\partial y} + z\frac{\partial A}{\partial z} - \right.$$

$$\left. - x\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right)\right\}[dy\,dz] + \ldots$$

Непосредственно проверяется, что $\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}$ равно нулю в силу (12). С другой стороны, простой подсчет дает

$$2A + x\frac{\partial A}{\partial x} + y\frac{\partial B}{\partial y} + z\frac{\partial C}{\partial z} = \int\limits_0^1 \left[2tP(X, Y, Z) + \right.$$

$$\left. + t\left(X\frac{\partial P}{\partial X} + Y\frac{\partial P}{\partial Y} + Z\frac{\partial P}{\partial Z}\right)\right] dt =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial t}[t^2 P(X, Y, Z)]\,dt = P(x, y, z),$$

что дает

$$d\tilde{\omega} = \omega.$$

34. Замечание I. Может случиться, что интеграл $\int\omega$, где ω — замкнутая дифференциальная форма степени p, не будет равен нулю, когда он распространяется на некоторое замкнутое многообразие размерности p; это происходит, если не существует $(p+1)$-мерной области, для которой это многообразие служило бы границей, или же, если такая область содержит точки, где коэффициенты формы становятся бесконечно большими. Так будет для интеграла

$$\iint \frac{x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

который равен нулю, если его распространить на замкнутую поверхность, не содержащую начало внутри себя, но который не будет нулем в противном случае; его значение равно телесному углу, под которым поверхность видна из начала (4π для сферы). Во всяком случае значение этого интеграла не меняется, если замкнутая поверхность непрерывно деформируется, не проходя через начало.

Замечание II. Наконец, можно доказать, что всякий раз, когда можно определить внешний дифференциал формы ω способом, показанным в п. **24**, общие теоремы, сформулированные и доказанные для случая, когда первоначальное определение посредством дифференцирования коэффициентов имеет смысл, продолжают быть верными; например, формула

$$d[\omega\tilde{\omega}] = [d\omega, \tilde{\omega}] + (-1)^p [\omega, d\tilde{\omega}]$$

будет выполняться всякий раз, когда ω и $\tilde{\omega}$ допускают обобщенное внешнее дифференцирование *.

---

* См. относительно этого мемуар: P. Gillis. *Sur les formes différentielles et la formule de Stokes.* (Mém. Acad. Belgique, 20, 1943).

Глава III

ВНЕШНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ СИСТЕМА

I. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ. ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ

35. Дифференциальные системы, которые мы будем изучать, получаются обращением в нуль некоторого числа функций от n переменных $x^1, x^2, \ldots, x^n$, которые мы всегда будем рассматривать как координаты точки пространства n измерений или области $\mathfrak{D}$ этого пространства, и некоторого числа внешних дифференциальных форм, определенных в этой области и имеющих вообще произвольные степени.

В общем случае мы должны будем предполагать, что функции, которые вводятся,— *аналитические;* мы предполагаем также, что мы находимся в действительной области*. Проблемы, которые мы будем ставить, и теоремы, которые будем доказывать, будут всегда локального характера. Ясно, что мы сохраняем за собой право делать замену координат, но в проблемах, где данные предполагаются аналитическими, новые переменные необходимо будут аналитическими функциями старых.

36. Системы линейных дифференциальных уравнений хорошо изучены. Пусть

$$\theta_\alpha \equiv A_{\alpha i}\, dx^i = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, r) \tag{1}$$

уравнения такой системы; будем предполагать, что линейные формы θ_α линейно независимы, когда переменные x^i в коэффициентах $A_{\alpha i}$ принимают общие значения. Мы будем вообще говорить, что точка (x^i) пространства *общая*, если ранг матрицы коэффициентов $A_{\alpha i}$ в этой точке равен r.

* См. более точно относительно аналитических функций действительных переменных у Ж. Валирона (G. Valiron. *Sur les fonctions analytiques d'une variable réele.* Nouvelles Annales, 1, 1922, 321—329).

Будем называть *интегральным многообразием* системы (1) многообразие, определяемое некоторым числом таких соотношений между переменными, что эти соотношения между переменными и соотношения, которые получаются их дифференцированием, обращают тождественно в нуль формы θ_α. Это, естественно, предполагает, что левые части уравнений многообразия дифференцируемы.

В частности, рассмотрим интегральные многообразия $n-r$ измерений. Будем искать, существует ли интегральное многообразие этого рода, проходящее через *общую заданную точку* M_0 с координатами $(x^i)_0$. Предположим, что в этой точке определитель порядка r, составленный из r строк и r последних столбцов матрицы коэффициентов $A_{\alpha i}$, отличен от нуля. В окрестности этой точки уравнения (1) могут быть разрешены относительно дифференциалов r координат, которые мы будем называть для удобства $z^1, z^2, \ldots, z^r$. Мы видим, что интегральное многообразие, если оно существует, может быть определено, если задать подходящим образом функции $z^1, z^2, \ldots, z^r$ от $x^1, x^2, \ldots, x^{n-r}$.

37. Теорема. *Если существует $(n-r)$-мерное интегральное многообразие, проходящее через произвольно заданную общую точку, то его можно получить интегрированием системы обыкновенных дифференциальных уравнений, и это интегральное многообразие будет единственным.*

Будем рассматривать $x^1, x^2, \ldots, x^h$ $(h = n - r)$ как координаты точки евклидова пространства h измерений и обозначим буквой O точку этого пространства с координатами $(x^1)_0, (x^2)_0, \ldots, (x^h)_0$. Поместимся внутри гиперсферы Σ этого пространства с центром O и радиусом R и направим из точки O различные радиусы этой гиперсферы, каждый из которых будет определен параметрами $a^1, a^2, \ldots, a^h$ единичного вектора, лежащего на нем. Для всякого искомого интегрального многообразия координаты z^α $(\alpha = 1, 2, \ldots, r)$ будут функциями от координат подвижной точки внутри Σ, эти координаты можно записать

$$x^1 = a^1 t, \quad x^2 = a^2 t, \ldots, x^h = a^h t \quad (0 \leqslant t \leqslant R).$$

При перемещении вдоль радиуса неизвестные функции z^α будут удовлетворять уравнениям, полученным заменой в формах θ_β переменных x^i через $a^i t$ и dx^i через $a^i\,dt$. Мы будем иметь, таким образом, систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dz^\alpha}{dt} = \varphi^\alpha(a^1, a^2, \ldots, a^h, t) \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, r), \tag{2}$$

которая интегрируется при начальных условиях

$$z^\alpha = (x^{n-r+\alpha})_0 \quad \text{для} \quad x = (x^i)_0.$$

Для каждого радиуса можно быть уверенным, что интеграция может выполниться для некоторого интервала $(0, t_0)$, где t_0 — непрерывная функция от $a^1, a^2, \ldots, a^h$; t_0 допускает, следовательно, нижнюю границу, которая будет достигаться; эту нижнюю границу мы и примем за значение R.

Мы видим, следовательно, что существует интегральное многообразие $n-r$ измерений, проходящее через точку M_0; оно задается внутри гиперсферы Σ посредством интеграции системы обыкновенных дифференциальных уравнений, и оно единственное, ч. т. д.

38. *Вполне интегрируемые системы дифференциальных уравнений.* — *Система* (1) *называется вполне интегрируемой, если через каждую общую точку пространства и в достаточно малой окрестности этой точки проходит интегральное многообразие $n-r$ измерений.*

Мы видели в предыдущем пункте, как можно найти это интегральное многообразие в том случае, если оно существует.

Чтобы найти условие полной интегрируемости системы (1), сделаем следующее замечание, *которое играет основную роль в общей теории дифференциальных систем* и которое очень простое, именно: *всякое многообразие, которое обращает в нуль внешнюю дифференциальную форму, обращает в нуль одновременно и форму, получаемую из нее внешним дифференцированием.*

Всякое интегральное многообразие системы (1) должно обращать в нуль r форм $d\theta_\alpha$; но, если подсчитать эти формы, мы можем, вместо того, чтобы их выражать как квадратичные формы от $dx^1, dx^2, \ldots, dx^h, dz^1, dz^2, \ldots, dz^r$, выразить их как квадратичные формы от $h+r$ следующих линейных форм, *независимых в окрестности точки* M_0:

$$dx^1, dx^2, \ldots, dx^h, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r.$$

Пусть же

$$d\theta_\alpha = \frac{1}{2} C_{\alpha ij}[dx^i dx^j] + D^\lambda_{\alpha i}[dx^i\theta_\lambda] + \frac{1}{2} E^{\lambda\mu}_\alpha [\theta_\lambda\theta_\mu] \tag{3}$$

формула, в которой индексы суммирования i и j пробегают значения от 1 до h, а индексы суммирования λ, μ — от 1 до r. Всякое интегральное многообразие, проходящее через точку M_0, которое обращает в нуль формы θ_α, обращает в нуль и формы

$\frac{1}{2} C_{\alpha ij} [dx^i dx^j]$, и, следовательно, для всякой точки многообразия в окрестности точки M_0 коэффициенты $C_{\alpha ij}$ будут равны нулю. Поскольку они будут равны нулю также, каковы бы ни были начальные значения функций z^a для $x^i = (x^i)_0$, можно заключить, что функции $C_{\alpha ij}$ должны равняться нулю в достаточно малой окрестности точки M_0, откуда получаем следующую теорему.

Теорема. *Чтобы система* (1) *была вполне интегрируема, необходимо, чтобы в окрестности произвольной общей точки пространства формы* $d\theta_\alpha$ *— внешние дифференциалы форм* θ_α *принадлежали кольцу форм* θ_α.

Мы можем выразить это условие сравнением

$$d\theta_\alpha \equiv 0 \pmod{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r}.$$

Это можно выразить точнее, как мы уже видели, требованием существования линейных форм $\tilde{\omega}_\alpha^i$, регулярных в окрестности рассматриваемой общей точки пространства и таких, что имеет место равенство

$$d\theta_\alpha = [\theta_1 \tilde{\omega}_\alpha^1] + [\theta_2 \tilde{\omega}_\alpha^2] + \ldots + [\theta_r \tilde{\omega}_\alpha^r]. \tag{4}$$

39. Докажем теперь обратную теорему. Вернемся к многообразию $n-r$ измерений, определяемому дифференциальной системой (2) и проходящему через точку M_0 с координатами $(x^i)_0$, $(z^\alpha)_0$. Если заменить функции z^α их значениями в функциях от аргументов a^i, t, то будем иметь в силу самого способа получения форм θ^α

$$\theta_\alpha = P_{\alpha k}(a, t)\, da^k \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, r);$$

пусть, кроме того,

$$\tilde{\omega}_\alpha^i = Q_\alpha^i(a, t)\, dt + Q_{\alpha k}^i(a, t)\, da^k \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, r).$$

Соотношения (4), если сохранить в обеих частях только члены, содержащие dt, нам дадут

$$\frac{\partial P_{\alpha k}}{\partial t} [dt\, da^k] = P_{\lambda k} Q_\alpha^\lambda [da^k\, dt],$$

откуда

$$\frac{\partial P_{\alpha i}}{\partial t} + Q_\alpha^\lambda P_{\lambda i} = 0. \tag{5}$$

Для каждого значения указателя i эти r функций $P_{\alpha i}(a, t)$, рассматриваемые как функции от t, удовлетворяют системе линейных однородных уравнений (система, которая, впрочем, остается одной и той же для всех значений указателя i); но для $t = 0$ функции $P_{\alpha i}$ все равны нулю, потому что для $t = 0$ функции x^i и z^α фиксированы и не зависят от a^k, их дифференциалы не будут содержать, следовательно, членов с дифференциалами $da^1, da^2, \ldots, da^h$, если положить в коэффициентах $t = 0$. Поскольку начальные значения неизвестных функций $P_{\alpha i}$ системы (3) равны нулю, эти функции тождественно равны нулю и, следовательно, многообразие определенное интегрированием уравнений (2), обращает тождественно в нуль формы θ_α; следовательно, это интегральное многообразие.

Этот результат можно выразить следующей теоремой.

Теорема. *Чтобы система r линейных дифференциальных уравнений была вполне интегрируемой, необходимо и достаточно, чтобы в окрестности каждой общей точки пространства внешние дифференциалы $d\theta_\alpha$ левых частей θ_α уравнений системы принадлежали кольцу этих форм.*

40. Замечание I. Условие полной интегрируемости требует только существования интегрального многообразия $n-r$ измерений, проходящего через произвольную *общую* точку пространства, и только в окрестности общей точки формы $d\theta_\alpha$ должны принадлежать кольцу форм θ_α. Возможно, что этого не будет в окрестности необщей точки. Так, уравнение

$$\theta \equiv x\,dy - y\,dx = 0$$

вполне интегрируемо как всякое обыкновенное дифференциальное уравнение; но нельзя утверждать существование линейной формы $\tilde{\omega} = A dx + B dy$, регулярной и непрерывной в окрестности каждой заданной точки плоскости, такой, чтобы было

$$d\theta = [\theta\tilde{\omega}],$$

или

$$2\,[dx\,dy] = -(Ax + By)\,[dx\,dy];$$

действительно, для $x = y = 0$ может не быть

$$2 = -(Ax + By).$$

Замечание II. Можно привести условие полной интегрируемости к общему виду, который не требует специального исследования случая каждой общей точки. Действительно, из уравнений (4) следуют соотношения

$$[\theta_1\theta_2 \ldots \theta_r\, d\theta_\alpha] = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, r); \tag{6}$$

обратно, из этих соотношений следует в окрестности каждой общей точки, для которой линейные формы $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r$ независимы, существование форм $\tilde{\omega}_\alpha^\beta$, удовлетворяющих соотношениям (4). Поскольку всякая необщая точка может рассматриваться как предел последовательности общих точек, соотношения (6), справедливые для всякой общей точки, по принципу непрерывности будут верны также и для всякой необщей точки.

Соотношения (6) *дают, следовательно, необходимые и достаточные условия для полной интегрируемости системы* (1) и в форме, вообще более удобной, чем та, которая сначала была указана.

Замечание III. Если система вполне интегрируема, то существует r независимых функций φ_i $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, определенных в окрестности общей точки пространства и остающихся постоянными на всем интегральном многообразии *(первые интегралы системы),* так что данная система эквивалентна системе $d\varphi_1 = d\varphi_2 = \ldots = d\varphi_r = 0$. Обратное очевидно.

Замечание IV. Все то, что было сказано, не предполагает аналитичности коэффициентов $A_{\alpha i}$ данных уравнений, а предполагает только существование для этих коэффициентов непрерывных частных производных первого порядка *; это происходит от того, что отыскание интегральных многообразий сводится к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений.

II. ЗАМКНУТЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ СИСТЕМА

41. Возьмем снова произвольную дифференциальную систему, полученную приравниванием нулю некоторого числа внешиих дифференциальных форм, некоторые из которых могут иметь степень, равную нулю, т. е. являются функциями от переменных. Решение такой системы можно рассматривать как аналитическое представление многообразия простран-

---

* Существование этих частных производных необходимо, чтобы обеспечить существование форм θ_α.

ства n измерений, которое мы будем называть *интегральным многообразием*. Оно определяется некоторым числом соотношений между переменными. Эти соотношения, присоединенные к линейным соотношениям между дифференциалами $dx^1, dx^2, \ldots, dx^n$, которые получаются в результате дифференцирования исходных соотношений, тождественно обращают в нуль дифференциальные формы, являющиеся левыми частями уравнений данной системы. Если в эту систему входят конечные соотношения между переменными, то эти соотношения необходимо фигурируют среди уравнений всего интегрального многообразия.

Ясно, что каждое интегральное многообразие есть решение данной системы, к которой присоединены все уравнения, полученные внешним дифференцированием уравнений системы, ибо, если дифференциальная форма равна нулю, ее внешний дифференциал тоже равен нулю. Новая полученная дифференциальная система, очевидно, не может быть продолжена тем же процессом, как это следует из теоремы Пуанкаре.

42. Определение. *Дифференциальная система называется замкнутой относительно операции внешнего дифференцирования, или просто замкнутой, если внешние дифференциалы левых частей уравнений системы принадлежат кольцу, определенному этими левыми частями.*

Ясно, что если продолжить систему, присоединяя к ней уравнения, получаемые внешним дифференцированием, то получим замкнутую систему, так как внешний дифференциал левой части уравнения новой системы или тождественно равен нулю, или же будет левой частью какого-нибудь уравнения системы. Мы будем говорить, что система, продолженная таким образом, будет системой, происходящей от *замыкания* данной системы.

Легко видеть, что если две дифференциальные системы алгебраически эквивалентны, то системы, полученные их замыканием, тоже алгебраически эквивалентны.

В силу рассуждений п. **41** видим, что система, получаемая замыканием данной системы, допускает те же решения, что и первоначальная система, какова бы ни была размерность рассматриваемых интегральных многообразий.

Отсюда основной принцип — *отыскание решений дифференциальной системы всегда может быть сведено к отысканию решений замкнутой дифференциальной системы.*

43. *Характеристическая система дифференциальной системы.* Мы видели в главе I, что систему внешних дифференциальных уравнений всегда можно выразить, выполняя в случае надобности замену переменных и заменяя опять, в случае надобности, данную систему системой, алгебраически эквивалентной ей, посредством наименьшего числа переменных. Это вполне определенное число равно рангу ассоциированной системы; что касается переменных, то они будут линейными комбинациями первоначальных переменных, которые, если их приравнять нулю, образуют ассоциированную систему.

Когда идет речь о системе внешних дифференциальных уравнений, можно также спросить себя, нельзя ли выполнить замену переменных и заменить эту систему алгебраически эквивалентной так, чтобы новая система содержала как в коэффициентах, так и в дифференциалах, которые там фигурируют, наименьшее число переменных.

Мы увидим, что это возможно и решение этой проблемы достигается рассмотрением *характеристической системы.*

Определение. *Характеристической системой заданной дифференциальной системы называется ассоциированная система дифференциальной системы, полученной замыканием данной системы.*

Мы докажем следующую теорему.

44. Теорема. *Характеристическая система дифференциальной системы Σ вполне интегрируема. Если, кроме того, $y^1, y^2, \ldots, y^p$ образуют систему независимых первых интегралов, то можно построить систему, алгебраически эквивалентную системе Σ, на дифференциалах $dy^1, dy^2, \ldots, dy^p$ с коэффициентами в виде функций от $y^1, y^2, \ldots, y^p$.*

Будем предполагать для простоты, что не ограничит существенно общности, что система Σ не содержит конечных уравнений относительно $x^1, x^2, \ldots, x^n$. Достаточно доказать теорему для случая замкнутой системы Σ. Пусть наша система определяется следующими уравнениями, степень которых будем предполагать не превосходящей трех:

$$\left.\begin{aligned}
&\theta_\alpha \equiv A_{\alpha i}\, dx^i = 0 && (\alpha = 1, 2, \ldots, r_1),\\
&\varphi_\alpha \equiv \frac{1}{2} A_{\alpha ij}\,[dx^i\, dx^j] && (\alpha = 1, 2, \ldots, r_2),\\
&\psi_\alpha \equiv \frac{1}{6} A_{\alpha ijk}\,[dx^i\, dx^j\, dx^k] = 0 && (\alpha = 1, 2, \ldots, r_3).
\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Если ранг характеристической системы равен n, теорема становится очевидной. Если этот ранг равен целому числу $p < n$, добавим к уравнениям характеристической системы, если $p < n - 1$, другие линейные уравнения в количестве $n-1-p$, независимые между собой и независимые от первых. Мы получим, таким образом, систему обыкновенных дифференциальных уравнений, относительно которых мы предположим, чтобы не вводить новых обозначений, что переменные $x^1, x^2, \ldots, x^{n-1}$ будут их первыми интегралами. Мы знаем, что можно найти систему, алгебраически эквивалентную системе Σ, в которой не встречается дифференциал dx^n (п. **22**).

Предположим, что этого мы уже достигли, и в левые части уравнений (7) не входит dx^n. Тогда производная по переменному x^n одной из левых частей уравнений, например φ_α, есть не что иное, как производная формы $d\varphi_\alpha$ по dx^n, и, следовательно, принадлежит кольцу системы. Отсюда получаем сравнения

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\theta_\alpha}{\partial x^n}\equiv 0 \quad (\operatorname{mod}\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{r_1}),\\
&\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial x^n}\equiv 0 \quad (\operatorname{mod}\varphi_1, \ldots, \varphi_{r_2}, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{r_1}),\\
&\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial x^n}\equiv 0 \quad (\operatorname{mod}\psi_1, \ldots, \psi_{r_3}, \varphi_1, \ldots, \varphi_{r_2}, \theta_1, \ldots, \theta_{r_1}).
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Первые сравнения (8) можно записать в виде

$$\frac{\partial\theta_\alpha}{\partial x^n}=H_\alpha^\beta\theta_\beta. \tag{9}$$

Рассмотрим теперь систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial z_\alpha}{\partial x^n}=H_\alpha^\beta z_\beta, \tag{10}$$

где коэффициенты H_α^β будут функциями переменных $x^1, x^2, \ldots, x^p$. Пусть $\bar z_\alpha^{(1)}, \bar z_\alpha^{(2)}, \ldots, \bar z_\alpha^{(r_1)}$ — система независимых решений этой системы. Тогда существуют линейные формы, независимые от x^n, скажем $\bar\theta_1, \bar\theta_2, \ldots, \bar\theta_{r_1}$, такие, что

$$\theta_\alpha=\bar\theta_1\bar z_\alpha^{(1)}+\bar\theta_2\bar z_\alpha^{(2)}+\ldots+\bar\theta_{r_1}\bar z_\alpha^{(r_1)};$$

но система уравнений $\theta_\alpha=0$ эквивалентна системе уравнений $\bar\theta_\alpha=0$, в левые части которых не входят ни x^n, ни dx^n. Следовательно, можно предположить, заменяя систему Σ системой, ей алгебраически эквивалентной, что формы θ_α не содержат ни x^n, ни dx^n.

Перейдем к формам φ_α. Имеем

$$\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x^n} = K_\alpha^\beta \varphi_\beta + [\widetilde{\omega}_\alpha^\gamma \theta_\gamma], \tag{11}$$

где $\widetilde{\omega}_\alpha^\gamma$ — линейные формы, не содержащие dx^n, и θ_γ не зависят ни от x^n, ни от dx^n.

Рассмотрим теперь систему дифференциальных уравнений

$$\frac{du_\alpha}{dx^n} = K_\alpha^\beta u_\beta \qquad (\alpha = 1,\ 2, \dots , r_2) \tag{12}$$

и систему r_2 их независимых решений $\overline{u}_\alpha^i$ $(i = 1, 2, \dots , r_2)$. Положим

$$\varphi_\alpha = \overset{*}{\varphi}_\beta \overline{u}_\alpha^{(\beta)},$$

где $\overset{*}{\varphi}_\beta$ — новые внешние квадратичные формы. Система (11) примет вид

$$\frac{\partial \overset{*}{\varphi}_\alpha}{\partial x^n} = [(\widetilde{\omega}_\alpha^\beta)^* \theta_\beta].$$

Если обозначить через χ_α^β первообразную функцию для $(\widetilde{\omega}_\alpha^\beta)^*$, рассматриваемую как функцию от x^n, то увидим, что форма

$$\overset{*}{\varphi}_\alpha - [\chi_\alpha^\beta \theta_\beta]$$

не будет зависеть ни от x^n, ни от dx^n; но система $\theta_\alpha = \overset{*}{\varphi}_\alpha = 0$ алгебраически эквивалентна системе $\theta_\alpha = \varphi_\alpha = 0$. Можно, следовательно, считать, заменяя в случае надобности систему Σ алгебраически эквивалентной системой, что левые части уравнений первой и второй степени системы (7) не зависят ни от x^n, ни от dx^n.

Продолжая поступать таким же образом с левыми частями уравнений третьей степени, мы шаг за шагом придем к доказательству существования системы, алгебраически эквивалентной данной системе, в уравнения которой не входят ни x^n, ни dx^n.

Если $p < n - 1$, мы повторим над этой системой те же рассуждения, что и над системой Σ так, чтобы получить алгебраически эквивалентную систему, в которой встречаются только $n - 2$ переменных и т. д. до тех пор, пока мы не придем к системе, в которой фигурируют только p переменных и их дифференциалов.

Тогда теорема будет доказана. Действительно, если p переменными будут $y^1, y^2, \ldots, y^p$, то характеристическая система будет

$$dy^1 = 0, \quad dy^2 = 0, \ldots, dy^p = 0;$$

она вполне интегрируема, и ее наиболее общее интегральное многообразие получится, если приравнять $y^1, y^2, \ldots, y^p$ произвольным константам.

С другой стороны, очевидно нельзя найти систему, которая вводила бы меньше, чем p переменных и их дифференциалов и была алгебраически эквивалентной данной системе * ч. т. д.

Мы будем называть *классом* внешней дифференциальной системы ранг ее характеристической системы.

45. Определение. *Характеристическим многообразием называется всякое многообразие $n-p$ измерений, которое служит решением характеристической системы.*

Следующее свойство очевидно.

Теорема. *При произвольно заданном интегральном многообразии V системы Σ многообразие, получаемое проведением через каждую точку V характеристического многообразия, которое проходит через эту точку, будет тоже интегральным многообразием.*

Отсюда следует, в частности:

Теорема. *Если интегральное многообразие V системы Σ не содержится ни в каком интегральном многообразии большего числа измерений, то оно порождено характеристическим многообразием* **.

Действительно, если бы было иначе, характеристические многообразия, проведенные через различные точки V, порождали бы интегральное многообразие большего числа измерений, чем V.

46. Если система Σ не полная (п. 18) и ее можно пополнить, перейдем от характеристической системы Σ к новой характеристической системе, ранг которой может только понизиться; если ранг остается тем же, характеристическая система не меняется.

---

* Приложение теоремы п. 38 для доказательства полной интегрируемости характеристической системы — упражнение в подсчете, очень простом, если заданная система линейная. Мы оставим его в стороне.

** Исключением из этой теоремы является случай, когда во всех точках интегрального многообразия V ранг характеристической системы понижен. Тогда будем иметь дело с особым интегральным многообразием. Примером могут служить особые решения уравнения в частных производных первого порядка.

Возьмем в качестве примера систему

$$[dx^1 dx^3] = [dx^1 dx^4] = [dx^3 dx^4] - x^5 [dx^1 dx^2] = 0, \qquad (13)$$

которая замыкается новым уравнением

$$[dx^1 dx^2 dx^5] = 0; \qquad (14)$$

характеристическая система будет образована уравнениями

$$dx^1 = dx^2 = dx^3 = dx^4 = dx^5 = 0.$$

Система (13) неполная; полная система, допускающая те же решения, что и система (13), определяется уравнениями

$$[dx^1 dx^3] = [dx^1 dx^4] = [dx^1 dx^2] = [dx^3 dx^4] = 0. \qquad (15)$$

Ее характеристической системой будет система

$$dx^1 = dx^2 = dx^3 = dx^4 = 0.$$

III. ПРИЛОЖЕНИЯ К ПРОБЛЕМЕ ПФАФФА

47. Применим предыдущие соображения к случаю одного линейного дифференциального уравнения (уравнения Пфаффа):

$$\theta \equiv A_i dx^i = 0. \qquad (16)$$

Характеристическая система образована уравнением (16), к которому надо присоединить ассоциированную систему внешнего дифференциала $d\theta$, в котором один из дифференциалов заменен его значением, взятым из (16). Поскольку ассоциированная система четного ранга, отсюда следует:

Теорема. *Класс всякого линейного дифференциального уравнения — нечетное число.*

Если этот класс равен 1, то характеристическая система сводится к уравнению (16), которое, следовательно, вполне интегрируемо. Если Z будет ее первым интегралом, то заданное уравнение будет эквивалентно уравнению $dZ = 0$.

Возьмем общий случай, когда класс равен $2p + 1$. Пусть X^1 — некоторый частный первый интеграл характеристической системы. Если он связывает n переменных соотношением $X^1 = C^1$, где C^1 — произвольная постоянная, то число уравнений характеристической системы уменьшится, по крайней мере на единицу, а поскольку класс — всегда нечетное число, то класс уменьшится по крайней мере на две единицы. Тогда

X^2 будет первым интегралом новой характеристической системы, поскольку X^2 — функция от x^i и C^1, или только от x^i (если заменить C^1 посредством X^1). Связывая переменные двумя соотношениями

$$X^1 = C^1, \ X^2 = C^2,$$

т. е. дифференциалы dx^i двумя соотношениями

$$dX^1 = 0, \ dX^2 = 0,$$

класс системы понизим еще по крайней мере на две единицы. Продолжая так шаг за шагом, в конце концов получим p независимых первых интегралов $X^1, X^2, \ldots, X^p$, таких, что, если связать эти переменные посредством p соотношений

$$X^1 = C^1, \ X^2 = C^2, \ldots, X^p = C^p,$$

уравнение $\theta = 0$ становится вполне интегрируемым и приводится, следовательно, к виду $dZ = 0$.

Это приведение имеет силу только потому, что функции X^i предполагались константами. Если не будем больше предполагать их константами, то уравнение $\theta = 0$ приведется к форме

$$dZ - Y_1 dX^1 - Y_2 dX^2 - \ldots - Y_p dX^p = 0,$$

причем коэффициенты Y_i будут подходяще выбранными p функциями заданных переменных. Функции X^i, Y_i и Z образуют теперь систему $2p+1$ независимых функций, иначе уравнение (16) можно было бы выразить меньше, чем через $2p+1$ переменных, что вызвало бы понижение класса до числа, меньшего $2p+1$.

Теорема. *Всякое уравнение Пфаффа, класс которого равен $2p+1$, приводимо к канонической форме*

$$dZ - Y_1 dX^1 - Y_2 dX^2 - \ldots - Y_p dX^p = 0.$$

48. Замечание. Непосредственно видно, что если уравнение (16) класса $2p+1$, то число p будет наибольшим целым числом, для которого форма степени $2p+1$

$$[\theta, (d\theta)^p]$$

не будет равна тождественно нулю. Например, уравнение

$$\theta \equiv P dx + Q dy + R dz = 0$$

вообще класса 3, если не будет иметь место

$$[\theta, d\theta] \equiv [Pdx + Qdy + Rdz, dPdx + dQdy + dRdz] =$$

$$= \left\{ P\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + Q\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + R\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right\} \cdot$$

$$\cdot [dxdydz] = 0.$$

Форма $[\theta, (d\theta)^p]$ есть не что иное, как, с точностью до конечного множителя, форма-моном

$$[dX^1 dX^2 \dots dX^p dY_1 dY_2 \dots dY_p dZ].$$

49. *Уравнения в частных производных первого порядка.* Можно присоединить к проблеме Пфаффа задачу интегрирования одного уравнения в частных производных первого порядка

$$F\left(x^1, x^2, \dots, x^n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x^n}\right) = 0. \tag{17}$$

Интегрировать это уравнение в смысле, данном этой задаче Софусом Ли, — значит в действительности искать интегральные n-мерные многообразия дифференциальной системы

$$\left.\begin{aligned} &F(x^1, x^2, \dots, x^n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0, \\ &dz - p_1 dx^1 - p_2 dx^2 - \dots - p_n dx^n = 0, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

где $x^1, x^2, \dots, x^n, z, p_1, p_2, \dots, p_n$ рассматриваются как $2n+1$ независимых переменных [координаты *элемента касания*, образованного точкой (x^i, z) $(n+1)$-мерного пространства и гиперплоскостью, проходящей через эту точку].

Система (18) замыкается присоединением уравнений

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial F}{\partial x^i} + p_i \frac{\partial F}{\partial z}\right) dx^i + \frac{\partial F}{\partial p_i} dp_i = 0, \\ [dx^i dp_i] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Второе уравнение (18), где предполагается, что $2n+1$ переменных x^i, z, p_i связаны соотношением $F=0$, будет уравнением Пфаффа, которое можно рассматривать как содержащее $2n$ переменных и класс которого, самое большее, равен $2n-1$. Мы сейчас покажем, построив характеристическую систему уравнений (18), что этот класс действительно равен $2n-1$. Эта характеристическая система образована уравнениями (18), первым уравнением (19) и уравнением

$$u^i dp_i - v_i dx^i = 0,$$

где коэффициенты u^i, v_i предполагаются связанными соотношением

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x^i} + p_i \frac{\partial F}{\partial z}\right) u^i + \frac{\partial F}{\partial p_i} v_i = 0,$$

которое непосредственно дает

$$\frac{dx^1}{\frac{\partial F}{\partial p_1}} = \frac{dx^2}{\frac{\partial F}{\partial p_2}} = \ldots = \frac{dx^n}{\frac{\partial F}{\partial p_n}} = \frac{-dp_1}{\frac{\partial F}{\partial x^1} + p_1 \frac{\partial F}{\partial z}} =$$

$$= \ldots = \frac{-dp_n}{\frac{\partial F}{\partial x^n} + p_n \frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{dz}{p_i \frac{\partial F}{\partial p_i}}. \tag{20}$$

Заметим, наконец, что второе уравнение (18) и первое (19) — следствия уравнений (20).

50. В пространстве $2n+1$ измерений, или, лучше, в $2n$-мерном многообразии, определяемом уравнением $F=0$, *характеристиками* будут линии (характеристические полосы), получаемые интегрированием уравнений (20). Впрочем, интегрировать эти уравнения — значит привести их к уравнению Пфаффа

$$dz - p_i dx^i = 0,$$

где переменные x^i, p_i, z связаны уравнением $F=0$, приведенным к канонической форме

$$dZ - Y_1 dX^1 - Y_2 dX^2 - \ldots - Y_{n-1} dX^{n-1} = 0. \tag{21}$$

Как только это приведение сделано, остается только найти в $(2n-1)$-мерном пространстве переменных X^i, Y_i и Z $(n-1)$-мерные решения уравнения (21).

Все они получаются следующим образом.

Предположим сначала, что не существует никаких соотношений между $X^1, X^2, \ldots, X^{n-1}$; имеем тогда

$$Z = f(X^1, X^2, \ldots, X^{n-1}),\ P_1 = \frac{\partial f}{\partial X^1},\ P_2 = \frac{\partial f}{\partial X^2}, \ldots, P_{n-1} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial X^{n-1}}. \tag{22}$$

Предположим теперь, что имеется $p < n-1$ соотношений между $X^1, X^2, \ldots, X^{n-1}$, которые можно считать разрешенными относительно $X^{n-p}, X^{n-p+1}, \ldots, X^{n-1}$ в виде

$$X^{n-i} = f^i(X^1, X^2, \ldots, X^{n-p-1}) \quad (i = 1, 2, \ldots, p); \tag{23}$$

Z тогда будет функцией $n-p-1$ величин $X^1, X^2, \ldots, X^{n-p-1}$:

$$Z = f(X^1, X^2, \ldots, X^{n-p-1}). \tag{24}$$

Отсюда будет следовать

$$\frac{\partial f}{\partial X^i} - \left(Y_i + Y_{n-k}\frac{\partial f^k}{\partial X^i}\right) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-p-1); \tag{25}$$

эти n уравнений (23), (24), (25) определят новую категорию решений.

Наконец, если $n-1$ функций X^i будут константами, то Z тоже будет константой и получим решение

$$X^1 = a^1,\ X^2 = a^2, \ldots, X^{n-1} = a^{n-1},\ Z = b. \tag{26}$$

Заметим, что уравнение (21) не допускает интегральных многообразий, размерность которых была бы больше n.

Можно считать, что решение (26) определяет *полный интеграл* данного уравнения в частных производных. Мы действительно получим этот интеграл, исключая $p_1, p_2, \ldots, p_n$ из n уравнений (26) и уравнения $F=0$. Если этот полный интеграл известен, то можно посредством дифференцирований получить отсюда общий интеграл *.

---

* См. общую теорию уравнений в частных производных 1-го порядка с одной неизвестной функцией в книге Э. Гурса (E. Goursat. *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre,* 2-e ed., Hermann, Paris, 1921); см. также В. В. Степанов. *Курс дифференциальных уравнений,* главы IX, X. ГИТТЛ, М., 1952. — *Прим. перев.*

Глава IV

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ, ХАРАКТЕРЫ, ЖАНР. ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ

1. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

51. В этой главе мы хотим изложить некоторые теоремы существования, относящиеся к интегральным многообразиям замкнутой внешней дифференциальной системы (мы видели, что ее всегда можно привести к этому виду). Эти теоремы существования разрешают в некоторых случаях то, что называется *проблемой Коши,* содержание которой мы уточним в дальнейшем. Начиная с этой главы, мы будем вынуждены предполагать, как мы уже замечали раньше, что функции, которые входят в уравнения данной системы, являются *аналитическими,* в то время как в предыдущей главе достаточно было допустить существование непрерывных частных производных не слишком высокого порядка (первого или второго).

Теория, которую мы будем излагать, была сначала создана Эли Картаном для линейных дифференциальных уравнений, которые соответствуют замкнутым дифференциальным системам, содержащим уравнения не выше второй степени. Затем она была распространена Е. Кэлером на системы произвольной степени.

52. Внешние дифференциальные системы, которые мы будем рассматривать, имеют вид *:

* Как и в предыдущих главах, коэффициенты $A_{\alpha ij} A_{\alpha ijk}$, ... предполагаются кососимметричными относительно их латинских указателей i, j, k ,...

$$\left.\begin{array}{ll}
f_\alpha(x^1, x^2, \dots, x^n) = 0 & (\alpha = 1, 2, \dots, r_0),\\
\theta_\alpha \equiv A_{\alpha i} dx^i = 0 & (\alpha = 1, 2, \dots, r_1),\\
\varphi_\alpha \equiv \frac{1}{2} A_{\alpha ij} [dx^i dx^j] = 0 & (\alpha = 1, 2, \dots, r_2),\\
\psi_\alpha \equiv \frac{1}{6} A_{\alpha ijk} [dx^i dx^j dx^k] = 0 & (\alpha = 1, 2, \dots, r_3),\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots &
\end{array}\right\} \qquad (1)$$

Поскольку система замкнута, линейные уравнения $df_\alpha = 0$ должны фигурировать среди уравнений (1), или, точнее, форма df_α должна принадлежать кольцу форм θ_α; точно так же внешний дифференциал $d\theta_\alpha$ должен принадлежать кольцу форм θ_α и φ_α и так далее.

53. Существенное замечание надо сделать по поводу уравнений $f_\alpha = 0$, которые фигурируют в системе (1). Они определяют в пространстве n измерений аналитическое многообразие V некоторого числа ρ измерений. Мы предполагаем, что в *простой* точке многообразия V ранг матрицы частных производных $\frac{\partial f_\alpha}{\partial x^i}$ равен ρ (можно, между прочим, заметить, что ρ может быть меньше r_0 — числа уравнений $f_\alpha = 0$, некоторые алгебраические многообразия $n - \rho$ измерений должны, например, определяться более чем ρ целыми алгебраическими уравнениями, чтобы не потерять ни одну из их точек). Условие, которое мы наложили на уравнения $f_\alpha = 0$, не будет осуществляться, если, например, имеется одно конечное уравнение

$$f \equiv [(x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^n)^2 - 1]^2 = 0.$$

В этом случае рассуждения, которые мы будем приводить, теряют силу.

Если предыдущее условие выполнено и если мы находимся в простой точке $(x^i)_0$ многообразия V, то среди уравнений $\theta_\alpha = 0$ будут встречаться уравнения $df_\alpha = 0$, из которых ρ уравнений будут линейно независимыми, например те, которые соответствуют тем строкам матрицы из производных $\frac{\partial f_\alpha}{\partial x^i}$, которые входят в главный определитель для $x^i = (x^i)_0$. Всякое многообразие, удовлетворяющее этим ρ уравнениям $df_\alpha = 0$ и содержащее точку $(x^i)_0$ многообразия V, полностью содержится в V по крайней мере в окрестности этой точки.

54. *Плоские интегральные элементы.* Мы будем называть *плоским элементом p измерений* совокупность точки $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ и p-плоскости, проходящей через эту точку. Эта точка называется *начальной точкой* элемента. Плоский элемент p измерений с заданным началом может быть определен системой $n - p$ независимых линейных соотношений между $dx^1, dx^2, \ldots, dx^n$, рассматриваемых как текущие координаты в декартовой системе отнесения, имеющей точку (x^i) началом; можно также определить такой элемент p линейно независимыми векторами, выходящими из точки (x^i), или еще плюккеровыми координатами $u^{i_1 i_2 \ldots i_p}$ (п. **12**).

Плоский элемент p измерений называется *интегральным,* если он удовлетворяет следующим двум условиям:

1. Его начальная точка принадлежит многообразию V (можно сказать, что эта точка — *интегральная точка*).

2. Внешние формы, которые находятся в левых частях уравнений системы, обращаются в нуль рассматриваемым плоским элементом.

Очевидно, если многообразие будет интегральным, то каждая его точка будет интегральной точкой и все его касательные плоские элементы будут интегральными. Обратное также очевидно.

Прежде чем приступать к изучению интегральных многообразий, естественно поставить себе в качестве предварительной задачи изучение плоских интегральных элементов.

55. *Условие, чтобы p-мерный плоский элемент был интегральным.* Эту задачу мы разрешили в первой главе (пп. 12—**14**). Напомним коротко полученные тогда результаты.

Линейный элемент с началом в точке (x^i) и с направляющими параметрами u^i будет интегральным, если его начальная точка — интегральная и линейный элемент (u^i) обращает в нуль формы первой степени θ_α системы (1):

$$A_{\alpha i} u^i = 0.$$

Двумерный плоский элемент будет интегральным, если его начало будет интегральной точкой и его плюккеровы координаты u^{ij} обращают в нуль внешние квадратичные формы $[\theta_\alpha dx^1], \ldots, [\theta_\alpha dx^n]$ и φ_α, иначе говоря, если его плюккеровы координаты u^{ij} обращают в нуль все внешние квадратичные формы, принадлежащие кольцу системы (1)*.

---

* Напомним, что координаты u^{ij} обращают в нуль внешнюю квадратичную форму $[H_{ij} dx^i dx^j]$, если $H_{ij} u^{ij} = 0$. Кольцо системы (1) есть кольцо, определяемое формами θ_α, φ_α, ψ_α — левыми частями уравнений (1).

Вообще *p-мерный плоский элемент будет интегральным, если его начало — интегральная точка и его плюккеровы координаты* $u^{i_1 i_2 \dots i_p}$ *обращают в нуль все формы степени p, которые принадлежат кольцу данной системы.*

56. *Регулярная интегральная точка. Ординарный интегральный линейный элемент.* Пусть (x^i) — наиболее общая простая точка многообразия V. Интегральные линейные элементы, имеющие эту точку своим началом, определяются требованием, чтобы их параметры u^i удовлетворяли уравнениям

$$A_{\alpha i} u^i = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \dots, r_1). \tag{2}$$

Пусть s_0 — число тех из этих уравнений, которые линейно независимы, или, иначе, s_0 — ранг матрицы из коэффициентов $A_{\alpha i}$, когда простая точка (x^i) будет *общей* (описывает окрестность). *Точка* (x^i) *называется регулярной, если для этой точки число независимых уравнений* (2) *не ниже* s_0. *Линейный интегральный элемент называется ординарным, если его начальная точка будет регулярной точкой многообразия* V.

Целое число s_0 называется *характером нулевого порядка* системы *.

Всякая регулярная точка — необходимо простая точка многообразия V, но обратное может быть неверно. Поскольку условие того, чтобы точка не была регулярной, означает дополнительные уравнения для координат этой точки, то всякая достаточно малая окрестность регулярной точки внутри многообразия V содержит только регулярные точки. Можно также сказать, что если точка многообразия V не регулярна, то всякая окрестность этой точки внутри V содержит бесконечное множество регулярных точек, так как всякая нерегулярная точка является пределом бесконечной последовательности регулярных точек.

Заметим еще, что число уравнений, определяющих интегральный линейный элемент с заданным началом, никогда не может превысить число s_0. Наконец, для всякой точки пространства, интегральной или неинтегральной, достаточно близкой к регулярной точке, ранг уравнений (2), по меньшей мере, равен s_0, а может и превышать его.

57. *Регулярный линейный интегральный элемент, ординарный двумерный интегральный элемент.* Пусть (E_1) — орди-

---

* Если разрешить уравнения $f_\alpha = 0$ относительно некоторого числа переменных x^i так, чтобы в уравнениях (1) осталось только $n - \rho$ переменных и их дифференциалов, то характер s_0 естественно понизится.

нарный интегральный элемент с направляющими параметрами u^i. Чтобы получить сведения о двумерных интегральных элементах, которые содержат (E_1), построим то, что называется *элементом, полярным элементу* (E_1): это совокупность линейных элементов (dx^i), таких, что плоский элемент, определяемый посредством (u^i) и (dx^i), будет интегральным.

Условиями, которым должны удовлетворять параметры dx^i, будут уравнения

$$A_{\alpha i}dx^i = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, r_1), \tag{3}$$

$$A_{\alpha ij}u^i dx^j = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, r_2); \tag{4}$$

эти уравнения образуют *полярную систему элемента* (E_1).

Пусть $s_0 + s_1$ — ранг полярной системы *общего* ординарного интегрального элемента (E_1). Это означает, что r_1 уравнений (3) и r_2 уравнений (4) содержат $s_0 + s_1$ независимых, если принять во внимание, что координаты u^i удовлетворяют уравнениям

$$A_{\alpha i}u^i = 0.$$

Ординарный интегральный элемент (E_1) будет называться регулярным, если ранг полярной системы не понижается ниже своего нормального значения $s_0 + s_1$. Произвольный двумерный интегральный элемент будет называться ординарным, если он содержит по крайней мере один регулярный линейный интегральный элемент.

Целое число s_1 называется *характером первого порядка* данной дифференциальной системы.

Заметим, что, если $s_0 + s_1$ больше или равно $n - 1$, то полярный элемент регулярного линейного интегрального элемента (E_1) сводится к самому этому элементу. В этом случае, следовательно, не существует ни одного ординарного интегрального элемента двух измерений.

Можно заметить, как и в предыдущих пунктах, что всякая достаточно малая окрестность регулярного линейного интегрального элемента внутри многообразия интегральных линейных элементов содержит только регулярные элементы.

58. *Обобщение.* Допустим, что $s_0 + s_1 < n - 1$. Пусть (E_2) — ординарный двумерный интегральный элемент, определяемый, например, двумя интегральными линейными элементами (u^i) и (v^i). *Полярную систему* элемента (E_2) образуют уравнения, которые показывают, что линейный интегральный элемент (dx^i) определяет вместе с (E_2) интеграль-

ный элемент трех измерений. Уравнениями полярной системы будут уравнения

$$\left.\begin{array}{ll}A_{\alpha i}dx^i = 0 & (\alpha = 1, \dots, r_1), \\ A_{\alpha ij}u^i dx^j = 0, \quad A_{\alpha ij}v^i dx^j = 0 & (\alpha = 1, \dots, r_2), \\ A_{\alpha ijk}u^i v^j dx^k = 0 & (\alpha = 1, \dots, r_3).\end{array}\right\} \qquad (5)$$

Пусть $s_0 + s_1 + s_2$ — ранг этой системы для общего ординарного интегрального элемента (E_2).

Ординарный интегральный элемент (E_2) называется *регулярным*, если ранг его полярной системы не ниже $s_0 + s_1 + s_2$, и всякий трехмерный интегральный элемент называется *ординарным*, если он содержит хотя бы один регулярный интегральный элемент двух измерений.

Целое число s_2 называется *характером второго порядка* данной дифференциальной системы.

Если $s_0 + s_1 + s_2$ больше или равно $n - 2$, то полярный элемент (E_2) — двумерный и не существует ни одного интегрального элемента трех измерений, который был бы ординарным.

Эти определения легко обобщаются.

Окончательно, *интегральный элемент p измерений (E_p) будет ординарным, если он содержит хотя бы один регулярный интегральный элемент (E_{p-1}), этот последний содержит хотя бы один регулярный интегральный элемент (E_{p-2}) и т. д. вплоть до регулярного интегрального элемента (E_1), который будет иметь своим началом регулярную точку.*

Обыкновенный интегральный элемент p измерений существует только при условии, если

$$s_0 + s_1 + \dots + s_{p-1} < n - p + 1.$$

59. *Жанр замкнутой дифференциальной системы.* В конце концов наступит момент, когда не будет существовать обыкновенного интегрального элемента некоторой размерности, например $h + 1$. Целое число h называется жанром дифференциальной системы; это первое целое число, для которого

$$s_0 + s_1 + \dots + s_h = n - h.$$

Существуют регулярные интегральные элементы h измерений, но не существует ни одного ординарного интегрального элемента $h + 1$ измерений.

Целые числа $s_0, s_1, s_2, \dots, s_h$ будут характерами дифференциальной системы.

Напомним еще раз, что в многообразии интегральных элементов размерности $p \leqslant h$ всякая достаточно малая окрестность регулярного интегрального элемента содержит только регулярные интегральные элементы.

Интегральный элемент (E_p) аналитически может быть определен координатами $x^1, x^2, \ldots, x^n$ своей начальной точки и своими плюккеровыми координатами $u^{i_1 i_2 \ldots i_p}$, подчиненными лишь условию удовлетворять системе квадратичных соотношений, которые мы вывели в главе I. Всякая окрестность элемента (E_p) может быть определена условием, что координаты x^i, $u^{i_1 i_2 \ldots i_p}$ элемента окрестности (E_p) не отклоняются более некоторого значения от одноименных координат заданного элемента (E_p).

II. ДВЕ ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ

60. Мы хотим доказать для заданной дифференциальной системы Σ жанра h существование интегрального многообразия некоторого числа $p \leqslant h$ измерений. Это не значит, что не существует никаких интегральных многообразий, размерность которых больше h; это не означает тем более, что интегральные многообразия p измерений, существование которых мы хотим доказать, исчерпывают все интегральные многообразия p измерений. Теоремы существования будут доказаны приложением теоремы Коши — Ковалевской, которую мы сейчас сформулируем.

61. Итак, пусть дана замкнутая дифференциальная система Σ жанра h и пусть $p \leqslant h$; имеем

$$s_0 + s_1 + \ldots + s_{p-1} \leqslant n - p.$$

Рассмотрим p-мерный интегральный элемент $(E_p)_0$, который предполагаем *ординарным*. Мы можем предположить, что его уравнения не влекут за собой никаких линейных соотношений на дифференциалы $dx^1, dx^2, \ldots, dx^n$. Изменим обозначения и будем писать z^λ $(\lambda = 1, 2, \ldots, n-p = \nu)$ вместо $x^{p+1}, \ldots, x^n$; элемент $(F_p)_0$ будет определяться уравнениями вида

$$dz^\lambda = a_i^\lambda dx^i \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots \nu), \tag{6}$$

где индекс суммирования i меняется от 1 до p.

Существует цепь регулярных интегральных элементов $(E_{p-1})_0$, $(E_{p-2})_0, \ldots, (E_1)_0$, каждый из которых содержится в предыдущем и в $(E_p)_0$ и началом которых будет регулярная точка многообразия V; мы можем предположить для простоты изложения, что p первых координат x^i этой точки равны нулю, а остальные равны $z^\lambda = a^\lambda$. Наконец, мы можем предположить, выполняя в случае необходимости линейную подстановку с постоянными коэффициентами над p координатами x^i, что уравнения линейных элементов $(E_{p-1})_0$, $(E_{p-2})_0, \ldots$ получаются добавлением к уравнениям (6) последовательно уравнений

$$dx^p = 0,\ dx^{p-1} = 0, \ldots, dx^2 = 0;$$

параметрами элемента $(E_1)_0$ тогда будут числа

$$1, 0, \ldots, 0,\ a_1^1, a_1^2, \ldots, a_1^\nu.$$

При таких условиях всякое интегральное многообразие V_p p измерений, касательное к элементу $(E_p)_0$, будет иметь в качестве касательных плоских элементов в окрестности начальной точки ($x^i = 0$, $z^\lambda = a^\lambda$) ординарные интегральные элементы из p-мерного элемента $(F_p)_0$. Интегральное многообразие можно определить ν уравнениями

$$z^\lambda = \varphi^\lambda (x^1, x^2, \ldots, x^p) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, \nu), \tag{7}$$

где φ^λ — голоморфные функции от x^i в окрестности значений $x^i = 0$, которые для $x^i = 0$ принимают значения $z^\lambda = a^\lambda$. Мы докажем следующую теорему (обобщенную теорему Коши), формулировка которой будет далее высказана более точно.

Теорема. *Существует по крайней мере одно аналитическое интегральное многообразие, касательное к p-мерному ординарному интегральному элементу $(E_p)_0$ и содержащее $(p-1)$-мерное интегральное многообразие V_{p-1}, касательное к регулярному интегральному элементу $p-1$ измерений $(E_{p-1})_0$.*

62. *Теорема Коши — Ковалевской.* Мы будет опираться в этом доказательстве на классическую теорему, которую мы сформулируем в следующей, достаточной для нас форме*.

Пусть задана система из q уравнений в частных производных первого порядка между q неизвестными функциями z^λ от p независимых переменных x^i, разрешенная относительно производных $\frac{\partial z^\lambda}{\partial x^p}$, с правыми частями в виде функций от аргументов x^i, z^λ, $\frac{\partial z^\lambda}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial z^\lambda}{\partial x^{p-1}}$, голоморфных в окрестности значе-

---

* См. общую формулировку в книге Гурса Э. (E. Goursat), *Cours d'Analyse mathématique* 2-e edition, t. II. Paris, 1911, pp. 632—637. (Имеется русский перевод: Гурс Э. *Курс математического анализа*, т. II, ч. II. ГТТИ, 1933, § 386, 456.— *Прим. перев.*).

ний $x^i = 0, z^\lambda = a^\lambda, \dfrac{\partial z^\lambda}{\partial x^i} = a_i^\lambda$. *Эта система допускает одно и только одно аналитическое решение, в котором неизвестные функции будут голоморфными функциями от* $x^1, x^2, \ldots, x^p$ *в окрестности* $x^i = 0$, *сводящимися для* $x^p = 0$ *к заданным голоморфным функциям* $z^\lambda = \chi^\lambda(x^1, x^2, \ldots, x^{p-1})$, *которые принимают при* $x^1 = x^2 = \ldots = x^{p-1} = 0$ *значения* a^λ, *а их производные* $\dfrac{\partial z^\lambda}{\partial x^i}$ — *значения* a_i^λ.

63. Мы начнем с доказательства теоремы, которая представляет частный случай теоремы, сформулированной в п. **61**.

Первая теорема существования. *Пусть дана замкнутая дифференциальная система* Σ, *для которой*

$$s_0 + s_1 + \ldots + s_{p-1} = n - p.$$

Пусть $(E_p)_0$ — *ординарный интегральный элемент* p *измерений и* V_{p-1} — *интегральное многообразие* $p-1$ *измерений, касательное к регулярному интегральному плоскому элементу* $(E_{p-1})_0$, *содержащемуся в элементе* $(E_p)_0$. *Тогда существует одно и только одно интегральное многообразие* p *измерений, содержащее многообразие* V_{p-1}, *и это многообразие является касательным к элементу* $(E_p)_0$.

Заметим сейчас же, что последняя часть теоремы очевидна, так как через регулярный интегральный элемент $(E_{p-1})_0$ проходит в силу равенства $s_0 + s_1 + \ldots + s_{p-1} = n - p$ только один p-мерный интегральный элемент, которым является $(E_p)_0$.

Мы проведем доказательство для $p = 3$, что будет достаточным для того, чтобы дать идею доказательства для общего случая.

64. *Предварительное замечание по поводу доказательства.* Мы будем предполагать, как было сказано в п. **61**, что элемент $(E_3)_0$ имеет началом точку с координатами $x^i = 0$, $z^\lambda = a^\lambda$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, n-3 = \nu)$ и что он определяется уравнениями

$$dz^\lambda = a_1^\lambda dx^1 + a_2^\lambda dx^2 + a_3^\lambda dx^3 \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, \nu). \tag{6}$$

Регулярный интегральный элемент $(E_2)_0$ получается присоединением к уравнениям (6) уравнения $dx^3 = 0$, а регулярный интегральный элемент $(E_1)_0$ — присоединением к ним еще уравнения $dx^2 = 0$.

Пусть

$$x^3 = 0, z^\lambda = \Phi^\lambda(x^1, x^2) \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, \nu)$$

уравнения интегрального многообразия V_2 двух измерений; для $x^1 = x^2 = 0$ функции Φ^λ и их частные производные $\frac{\partial \Phi^\lambda}{\partial x^1}$, $\frac{\partial \Phi^\lambda}{\partial x^2}$ принимают соответственно значения a^λ, a_1^λ, a_2^λ.

Пусть теперь

$$z^\lambda = F^\lambda (x^1, x^2, x^3)$$

уравнения неизвестного трехмерного многообразия V_3; для $x^3 = 0$ функции F^λ сводятся к заданным функциям Φ^λ. Кроме того, для $x^1 = x^2 = x^3 = 0$ должны иметь место уравнения $\frac{\partial F^\lambda}{\partial x^3} = a_3^\lambda$.

Уравнениями, которым должны удовлетворять функции F^λ, в силу уравнений (1) системы Σ, будут уравнения

$$\left.\begin{aligned}
&f_\alpha(x, z) = 0 \qquad (\alpha = 1,2, \ldots, r_0);\\
&H_{\alpha i} \equiv A_{\alpha i} + A_{\alpha\lambda} \frac{\partial z^\lambda}{\partial x^i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3;\ \alpha = 1, 2, \ldots, r_1);\\
&H_{\alpha ij} \equiv A_{\alpha ij} + A_{\alpha i\lambda} \frac{\partial z^\lambda}{\partial x^j} - A_{\alpha j\lambda} \frac{\partial z^\lambda}{\partial x^i} + A_{\alpha\lambda\mu} \frac{\partial z^\lambda}{\partial x^i} \frac{\partial z^\mu}{\partial x^j} = 0\\
&\qquad (i, j = 1, 2, 3;\quad \alpha = 1, 2, \ldots, r_2);\\
&H_{\alpha 123} \equiv A_{\alpha 123} + A_{\alpha ij\lambda} \frac{\partial z^\lambda}{\partial x^k} + A_{\alpha i\lambda\mu} \frac{\partial z^\lambda}{\partial x^j} \frac{\partial z^\mu}{\partial x^k} +\\
&\qquad + A_{\alpha\lambda\mu\nu} \frac{\partial z^\lambda}{\partial x^1} \frac{\partial z^\mu}{\partial x^2} \frac{\partial z^\nu}{\partial x^3} = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Здесь в выражении для $H_{\alpha 123}$ индексы i, j, k, которые встречаются во втором и третьем члене, образуют последовательно три четных перестановки 123, 231, 312 указателей 1, 2, 3.

В окрестности точки M_0, начала элемента $(E_3)_0$, можно сохранить только ρ уравнений $f_\alpha(x,z) = 0$, подчиненных единственному условию, чтобы матрица коэффициентов dz^λ в ρ дифференциалах df_α имела ранг ρ; будем предполагать, что это будут ρ первых уравнений.

Уравнения (8) можно разделить на три группы:

$$f_\alpha(x, z) = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \rho); \qquad (A)$$

$$H_{\alpha 1} = 0, \qquad H_{\alpha 2} = 0, \qquad H_{\alpha 12} = 0; \qquad (B)$$

$$H_{\alpha 3} = 0, \qquad H_{\alpha 13} = 0, \qquad H_{\alpha 23} = 0, \qquad H_{\alpha 123} = 0. \qquad (C)$$

Многообразие V_2 удовлетворяет уравнениям (A) и (B). Многообразие V_3 должно удовлетворять, сверх того, уравнениям (C).

65. Если в коэффициентах уравнений (C) дать аргументам x^i, z^λ, $\frac{\partial z^\lambda}{\partial x^1}$, $\frac{\partial z^\lambda}{\partial x^2}$ соответственно значения 0, a^λ, a_1^λ, a_2^λ, то получим систему линейных уравнений относительно $\frac{\partial z^\lambda}{\partial x^3}$; тогда легко увидеть, что система (C) получается из полярной системы элемента $(E_2)_0$, если заменить dx^1 и dx^2 нулем, dx^3 — единицей и dz^λ — производной $\frac{\partial z^\lambda}{\partial x^3}$. В эту полярную систему, по условию, входит $s_0 + s_1 + s_2$ независимых относительно дифференциалов dx^i и dz^λ уравнений; но эти уравнения не могут иметь следствием никакого линейного соотношения между дифференциалами dx^1, dx^2, dx^3 без того, чтобы эти соотношения встречались среди тех, которые определяют элемент $(E_3)_0$, что не имеет места. Уравнения (C), как линейные уравнения относительно $\frac{\partial z^\lambda}{\partial x_3}$ будут, следовательно, содержать $s_0 + s_1 + s_2$ независимых, если в коэффициентах этих уравнений заменить x^i, z^λ, $\frac{\partial z^\lambda}{\partial x^1}$, $\frac{\partial z^\lambda}{\partial x^2}$ соответственно на 0, a^λ, a_1^λ, a_2^λ. Выберем из этих уравнений $s_0 + s_1 + s_2$ независимых и назовем их *главными*.

Если в этих главных уравнениях дать аргументам x^i, z^λ, $\frac{\partial z^\lambda}{\partial x^1}$, $\frac{\partial z^\lambda}{\partial x^2}$ значения, достаточно близкие к 0, a^λ, a_1^λ, a_2^λ, они не перестанут быть линейно независимыми. Возможны три случая.

1°. *Значения, данные аргументам определят двумерный интегральный элемент;* этот элемент необходимо будет регулярным, если значения его аргументов отличаются достаточно мало от значений 0, a^λ, a_1^λ, a_2^λ. В этом случае неглавные уравнения (C) будут следствием главных уравнений (C).

2°. *Значения, данные только аргументам x^i, z^λ, определяют интегральную точку,* без того чтобы значения, данные другим аргументам, определяли двумерный интегральный элемент. Неглавные уравнения (C) будут тогда следствиями главных уравнений (C) и уравнений (B). Точнее, неглавные уравнения $H_{\alpha 3} = 0$, не зависящие ни от $\frac{\partial z^\lambda}{\partial x^1}$, ни от $\frac{\partial z^\lambda}{\partial x^2}$, будут следствиями главных уравнений $H_{\alpha 3} = 0$. Неглавные уравнения $H'_{\alpha 13} = 0$, зависящие только от $\dfrac{\partial z^\lambda}{\partial x^1}$ и не зависящие от $\dfrac{\partial z^\lambda}{\partial x^2}$, будут следствиями главных уравнений $H_{\alpha 13} = 0$ и $H_{\alpha 3} = 0$ и, кроме того, уравнений $H_{\alpha 1} = 0$, которые выражают, что частные производные $\dfrac{\partial z^\lambda}{\partial x^1}$ определяют линейный интегральный элемент. Наконец, неглавные уравнения $H_{\alpha 23} = 0$, $H_{\alpha 123} = 0$ будут следствиями главных уравнений (C) и всей совокупности уравнений (B).

Эти результаты можно выразить следующими формулами, где α' — указатель неглавного уравнения (C) или какого-нибудь уравнения (B):

$$\left.\begin{aligned}
H_{\alpha' 3} &= \{H_{\alpha 3}\},\\
H_{\alpha' 13} &= \{H_{\alpha 3},\ H_{\alpha 13},\ H_{\alpha 1}\},\\
H_{\alpha' 23} &= \{H_{\alpha 3},\ H_{\alpha 13},\ H_{\alpha 23},\ H_{\alpha 123},\ H_{\alpha 1},\ H_{\alpha 2},\ H_{\alpha 12}\},\\
H_{\alpha' 123} &= \{H_{\alpha 3},\ H_{\alpha 13},\ H_{\alpha 23},\ H_{\alpha 123},\ H_{\alpha 1},\ H_{\alpha 2},\ H_{\alpha 12}\};
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

фигурные скобки обозначают линейные комбинации тех выражений, которые находятся внутри них, с коэффициентами в виде функций от x^i, z^λ, $\dfrac{\partial z^\lambda}{\partial x^1}$, $\dfrac{\partial z^\lambda}{\partial x^2}$, голоморфных в окрестности значений 0, a^λ, a_1^λ, a_2^λ этих аргументов.

3°. *Значения данные аргументам x^i, z^λ, не определяют интегральной точки.* Неглавные уравнения (C) будут тогда следствиями главных уравнений (C), уравнений (B) и уравнений (A).

Сделаем еще два замечания. Во-первых, отметим, что можно предполагать, что уравнения $df_\alpha = 0$ встречаются среди уравнений $\theta_\alpha = 0$, что уравнения $d\theta_\alpha = 0$ встречаются среди уравнений $f_\alpha = 0$ и уравнения $d\varphi_\alpha = 0$ — среди уравнений $\psi_\alpha = 0$.

Во-вторых, обратим внимание на то, что среди главных уравнений (C) вида $H_{\alpha 3} = 0$ могут быть ρ первых уравнений, возникающих из $df_\alpha = 0$, т. е.

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial x^3} + \frac{\partial f_\alpha}{\partial z^\lambda} \cdot \frac{\partial z^\lambda}{\partial x^3} = 0 \qquad (\alpha = 1,\ 2, \ldots, \rho). \tag{10}$$

66. *Доказательство первой теоремы существования.* Рассмотрим $s_0 + s_1 + s_2$ главных уравнений (C). Поскольку $s_0 + s_1 + s_2 = n - 3$, числу неизвестных функций z^λ, они дают частные производные $\dfrac{\partial z^\lambda}{\partial x^3}$ как функции от других частных производных

$\frac{\partial z^\lambda}{\partial x^1}$, $\frac{\partial z^\lambda}{\partial x^2}$. Они образуют систему Коши — Ковалевской и, следовательно, допускают одно и только одно голоморфное решение

$$z^\lambda = F^\lambda (x^1, x^2, x^3), \tag{11}$$

для которого все F^λ сводятся при $x^3 = 0$ к заданным функциям $\Phi^\lambda (x^1, x^2)$. Мы сейчас докажем, что многообразие V_3, определяемое уравнениями (11), будет интегральным.

Во-первых, среди уравнений системы Коши — Ковалевской имеются ρ уравнений (10), которые показывают, что на многообразии V_3 функции $f_\alpha (x,z)$ независимы от x^3, но для $x^3=0$ они равны нулю, потому что многообразие V_2 — интегральное; они поэтому тождественно равны нулю. *Многообразие V_3 удовлетворяет, следовательно, уравнениям (A).*

Во-вторых, поскольку многообразие V_3 удовлетворяет уравнениям (A), то все его точки будут интегральными точками и, следовательно, в силу п. **65**, 2° все выражения $H_{\alpha 3}$, даже и неглавные, будут тождественно равны нулю на многообразии V_3; что касается выражений $H_{\alpha 13}$, $H_{\alpha 23}$, $H_{\alpha 123}$, то те из них, которые являются главными, равны нулю при тех же условиях; те из них, которые являются неглавными, удовлетворяют в силу (9) уравнениям вида

$$\left.\begin{aligned} H_{\alpha' 13} &= \{H_{\alpha 1}\}, \\ H_{\alpha' 23} &= \{H_{\alpha 1},\ H_{\alpha 2},\ H_{\alpha 12}\}, \\ H_{\alpha' 123} &= \{H_{\alpha 1},\ H_{\alpha 2},\ H_{\alpha 12}\}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Следовательно, достаточно, чтобы многообразие V_3 удовлетворяло уравнениям (B) для того, чтобы оно было интегральным.

В-третьих, величины $H_{\alpha 1}$, $H_{\alpha 2}$, $H_{\alpha 12}$ равны нулю при $x^3 = 0$. Возьмем одну из форм θ_α; на многообразии V_3 имеем

$$\theta_\alpha = H_{\alpha 1}\, dx^1 + H_{\alpha 2}\, dx^2,$$

откуда

$$d\theta_\alpha = -\frac{\partial H_{\alpha 1}}{\partial x^3}[dx^1\, dx^3] - \frac{\partial H_{\alpha 2}}{\partial x^3}[dx^2 dx^3] + \left(\frac{\partial H_{\alpha 2}}{\partial x^1} - \frac{\partial H_{\alpha 1}}{\partial x^2}\right)[dx^1\, dx^2]. \tag{13}$$

Поскольку уравнения $d\theta_\alpha = 0$ составляют часть уравнений $\varphi_\alpha = 0$, коэффициент $\frac{\partial H_{\alpha 1}}{\partial x^3}$ будет линейной комбинацией с голоморфными коэффициентами выражений $H_{\alpha 13}$ и, следовательно, в силу (12) выражений $H_{\alpha 1}$. Все r_1 величин $H_{\alpha 1}$ удовлетворяют системе линейных с голоморфными коэффициентами дифференциальных уравнений с независимым переменным x^3; поскольку функции $H_{\alpha 1}$ равны нулю при $x^3 = 0$, они равны нулю тождественно. *Многообразие V_3 удовлетворяет, следовательно, уравнениям $H_{\alpha 1} = 0$, а значит, и уравнениям $H_{\alpha 13} = 0$.*

В-четвертых, выражение $\frac{\partial H_{\alpha 2}}{\partial x^3}$ в силу (13) представляет линейную комбинацию с голоморфными коэффициентами выражений $H_{\alpha 23}$, т. е. в силу (12) выражений $H_{\alpha 2}$ и $H_{\alpha 12}$.

С другой стороны, поскольку имеем

$$\varphi_\alpha = H_{\alpha 12}\,[dx^1\,dx^2] + H_{\alpha 23}\,[dx^2\,dx^3],$$

получим

$$d\varphi_\alpha = \left(\frac{\partial H_{\alpha 12}}{\partial x^3} + \frac{\partial H_{\alpha 23}}{\partial x^1}\right)[dx^1\,dx^2\,dx^3],$$

а так как $d\varphi_\alpha$ есть линейная комбинация $d\psi_\alpha$, то выражение $\frac{\partial H_{\alpha 12}}{\partial x^3} + \frac{\partial H_{\alpha 23}}{\partial x^1}$ будет линейной комбинацией выражений $H_{\alpha 123}$, т. е. в силу (12) выражений $H_{\alpha 2}$ и $H_{\alpha 12}$. Наконец, поскольку $\frac{\partial H_{\alpha 23}}{\partial x^1}$ в силу (12) есть линейная комбинация выражений $H_{\alpha 2}$, $H_{\alpha 12}$, $\frac{\partial H_{\alpha 2}}{\partial x^1}$, $\frac{\partial H_{\alpha 12}}{\partial x^1}$, видим, что все $\frac{\partial H_{\alpha 12}}{\partial x^3}$ будут линейными комбинациями с голоморфными коэффициентами функций $H_{\alpha 2}$ и $H_{\alpha 12}$ и их частных производных по x^1. Они; следовательно, удовлетворяют системе Коши — Ковалевской, и так как они обращаются в нуль при $x^3 = 0$, то будут тождественно равны нулю в силу (12) также и все $H_{\alpha 23}$ и $H_{\alpha 123}$. Значит, многообразие удовлетворяет всем уравнениям (A), (B) и (C), ч. т. д.

67. Вторая теорема существования. *Пусть дана замкнутая дифференциальная система Σ, для которой*

$$s_0 + s_1 + \ldots + s_{p-1} < n - p.$$

Пусть $(E_p)_0$ — интегральный элемент p измерений и V_{p-1} — интегральное $(p-1)$-мерное многообразие, касательное к регулярному интегральному элементу $(E_{p-1})_0$, содержащемуся в $(E_p)_0$. Тогда существует бесконечное множество p-мерных интегральных многообразий, содержащих многообразие V_{p-1} и касательных к элементу $(E_p)_0$. Каждое из них однозначно определяется, если выбрать произвольно $n - p - s_0 - s_1 - \ldots - s_{p-1}$

неизвестных функций при единственном условии, что они приводятся при $x^3=0$ к соответствующим функциям $\Phi^\lambda(x^1, x^2)$.

Доказательство проводится легко и сводится к доказательству первой теоремы. Действительно, вернемся к предположению $p=3$ и будем рассматривать систему главных уравнений (C); они разрешимы относительно $s_0+s_1+s_2$ частных производных $\frac{\partial z^\lambda}{\partial x^3}$. В правых частях остается $n-3-s_0-s_2$ частных производных $\frac{\partial z^\lambda}{\partial x^3}$; присоединим к $n-3-s_0-s_1-s_2$ соответствующим функциям z^λ значения в виде функций от переменных x^1, x^2, x^3, голоморфных в окрестности $x^i=0$ и подчиненных единственному условию сводиться при $x^3=0$ к функциям $\Phi^\lambda(x^1, x^2)$ с тем же указателем. Тогда получится система Коши — Ковалевской с единственным решением, соответствующим данным начальным условиям $z^\lambda=\Phi^\lambda(x^1, x^2)$.

68. Будем называть интегральные многообразия, существование которых доказано двумя предыдущими теоремами существования, *ординарными* интегральными многообразиями. Совокупность ординарных интегральных многообразий образует то, что мы будем называть *общим решением* данной дифференциальной системы. Интегральные многообразия, которые не будут ординарными, не имеют ни в одной точке обыкновенного касательного интегрального элемента. *Регулярными интегральными многообразиями* будут лишь те, которые допускают регулярные касательные интегральные элементы.

Можно оценить *степень общности ординарных интегральных многообразий* V_p, допускающих заданный p-мерный ординарный касательный интегральный элемент.

Действительно, сохраняя предыдущие обозначения, получим, что сечение V_1 интегрального многообразия V_p плоским многообразием $x^p=x^{p-1}=\ldots=x^2=0$ зависит от $n-p-s_0$ произвольных функций переменного x^1, подчиненных единственному условию, чтобы при $x^1=0$ их частные производные имели заданные значения a_1^λ. Если интегральное многообразие V_1 выбрано, сечение многообразия V_p плоским многообразием $x^p=x^{p-1}=\ldots$ $\ldots=x^3=0$ зависит от $n-p-s_0-s_1$ произвольных функций переменных x^1, x^2, подчиненных единственному условию сводиться при $x^2=0$ к известным функциям переменного x^1, и так далее. Многообразие V_p само зависит от $n-p-s_0-s_1-\ldots-s_{p-1}$ произвольных функций переменных $x^1, x^2, \ldots, x^p$, подчиненных единственному условию приводиться при $x^p=0$ к заданным функциям переменных $x^1, x^2, \ldots, x^{p-1}$.

Введем ради симметрии целое число σ_p (которое не будет характером) посредством соотношения

$$s_0 + s_1 + \ldots + s_{p-1} + \sigma_p = n - p.$$

Мы можем теперь сказать, *в целом*, что обыкновенное интегральное p-мерное касательное к элементу $(E_p)_0$ многообразие зависит от

$s_1 + s_2 + \ldots + s_{p-1} + \sigma_p$ произвольных функций переменной x^1,

$s_2 + \ldots + s_{p-1} + \sigma_p$ произвольных функций переменных x^1, x^2,

. . . .

$s_{p-1} + \sigma_p$ произвольных функций переменных $x^1, x^2, \ldots, x^{p-1}$,

σ_p произвольных функций переменных $x^1, x^2, \ldots, x^{p-1}, x^p$.

69. Замечание. Не следует придавать слишком строгого смысла предыдущей формулировке, только численно характеризующей совокупность произвольных функций, которые можно задать, чтобы прийти к наиболее общему p-мерному интегральному многообразию последовательным применением теоремы Коши — Ковалевской. В действительности только те целые числа имеют абсолютные значения, которые дают число произвольных функций от наибольшего числа независимых переменных (σ_p, если $\sigma_p \neq 0$; s_{p-1}, если $\sigma_p = 0$, $s_{p-1} \neq 0$ и т. д.). Не желая оправдывать это утверждение, которое в конце концов имеет смысл только для *аналитических* дифференциальных систем и для *аналитических* интегральных многообразий этих систем, ограничимся рассмотрением простого примера, который показывает, с какой осторожностью надо подходить к вопросам этого рода. Пусть дано уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial z}{\partial x};$$

с нашей точки зрения, общее решение этого уравнения зависит от двух произвольных функций одного переменного, например, двух голоморфных функций переменной x, к которым сводятся z и $\frac{\partial z}{\partial y}$ при $x = 0$. Однако можно было бы также сказать, что это общее решение зависит от одной только произвольной функции, а именно функции $\Phi(y)$, к которой сводится z при $x = 0$. К сожалению, если задаться для $\Phi(y)$ голоморфной функцией переменной y в окрестности, например, $y = 0$, то уравнение не допускает *никакого* голоморфного решения в окрестности точки $x = 0$, $y = 0$; достаточно взять

$$\Phi(y) = \frac{1}{1-y},$$

что приводит для z к ряду

$$z = \frac{1}{1-y} + \frac{2}{1}\frac{x}{(1-y)^3} + \frac{4!}{2!}\frac{x^2}{(1-y)^5} + \dots + \frac{(2n)!}{n!}\frac{x^n}{(1-y)^{2n+1}} + \dots$$

Однако этот ряд с целыми степенями относительно x сходится только при $x = 0$. Можно доказать, что этот отрицательный результат будет получаться для всех нецелых функций $\Phi(y)$ и даже для некоторых целых функций $\Phi(y)$.

70. *Степень общности ординарных интегральных элементов E_p, имеющих началом заданную регулярную интегральную точку.* Если сделать то же предположение, что и выше, относительно регулярных интегральных элементов $(E_{p-1})_0, \dots, (E_1)_0$, содержащихся в ординарном элементе $(E_p)_0$, то ординарные элементы (E_p), соседние с элементом $(E_p)_0$ и с тем же началом, что и $(E_p)_0$, получаются одним и только одним способом из p интегральных линейных элементов, из которых i-тый элемент будет иметь p компонент dx^k все равными нулю за исключением $dx^i = 1$, причем ν других компонент будут $dz^\lambda = t_i^\lambda$. Но компоненты t_1^λ первого линейного элемента (E_1) подчинены требованию удовлетворять s_0 уравнениям, компоненты t_2^λ второго, образующего с первым интегральный элемент (E_2), подчинены требованию удовлетворять $s_0 + s_1$ уравнениям полярной системы элемента (E_1); компоненты t_3^λ третьего, образующие вместе с (E_2) интегральный элемент (E_3), подчинены требованию удовлетворять $s_0 + s_1 + s_2$ уравнениям полярной системы (E_2) и т. д. Все эти уравнения независимы, а их число равно

$$s_0 + (s_0 + s_1) + (s_0 + s_1 + s_2) + \dots + (s_0 + s_1 + \dots + s_{p-1}) =$$
$$= ps_0 + (p-1)s_1 + \dots + s_{p-1}.$$

Вводя число σ_p, увидим, что искомое число произвольных параметров равно

$$p(n-p) - [ps_0 + (p-1)s_1 + \dots + 2s_{p-2} + s_{p-1}] =$$
$$= p(s_0 + s_1 + \dots + s_{p-1} + \sigma_p) - [ps_0 + (p-1)s_1 + \dots + s_{p-1}] =$$
$$= s_1 + 2s_2 + 3s_3 + \dots + (p-1)s_{p-1} + p\sigma_p.$$

Теорема. *В замкнутой системе, жанр которой больше или равен p, ординарный p-мерный интегральный элемент, имеющий началом заданную регулярную интегральную точку, зависит от $s_1 + 2s_2 + \dots + (p-1)s_{p-1} + p\sigma_p$ произвольных параметров.*

71. *Частный случай.* Если все целые числа s, начиная с известного порядка $q < p$, равны нулю и, если, кроме того, целое число σ_p равно нулю, то получаем важную теорему.

Теорема. *Если* $s_q = s_{q+1} = \ldots = s_{p-1} = \sigma_p = 0$, то *через всякое* $(q-1)$-*мерное регулярное интегральное многообразие проходит одно, и только одно, ординарное интегральное многообразие* V_p.

Эта теорема прилагается, например, к вполне интегрируемой системе из $n-p$ уравнений в полных дифференциалах от n переменных, ибо в этом случае замкнутая система содержит только уравнения $\theta_\alpha = 0$, и мы имеем

$$s_0 = n - p, \; s_1 = s_2 = \ldots = s_p = 0;$$

через каждую регулярную точку пространства действительно проходит одно, и только одно, интегральное многообразие V_p.

В общем случае указанный выше метод приводит при заданном интегральном многообразии V_{q-1} к интегрированию $p-q$ последовательных систем Коши — Ковалевской. Но можно ограничиться интегрированием одной системы: достаточно, полагая V_{q-1} расположенным в многообразии

$$x^q = x^{q+1} = \ldots = x^p = 0,$$

положить

$$x^q = a^q t, \; x^{q+1} = a^{q+1} t, \ldots, x^p = a^p t$$

и, рассматривая $a^q, \ldots, a^p$ как произвольные *параметры*, интегрировать систему, где z^ρ рассматриваются как неизвестные функции от q независимых переменных $x^1, x^2, \ldots, x^{q-1}, t$. В результате мы приходим к одной системе Коши — Ковалевской с $n-p$ неизвестными функциями от q независимых переменных. После того как эта система проинтегрирована, заменяем в полученных выражениях для неизвестных функций t на 1 и $a^q, a^{q+1}, \ldots, a^p$ на $x^q, x^{q+1}, \ldots, x^p$. Это по существу тот же самый процесс, который был применен при интегрировании вполне интегрируемой системы.

Замечание. Если система (1) не содержит внешних дифференциальных уравнений выше второй степени, то числа $s_0, s_1, s_2, \ldots$ не возрастают, и достаточно, чтобы целое число s_q равнялось нулю, чтобы числа $s_{q+1}, \ldots$ тоже обратились в нуль. Что касается целого числа σ_p которое не является характером, то оно определяется из равенства

$$s_0 + s_1 + \ldots + s_{q-1} = n - p.$$

III. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ И ОСОБЫЕ РЕШЕНИЯ. ХАРАКТЕРИСТИКИ

72. Будем говорить, что p-мерное интегральное многообразие составляет часть *общего решения* дифференциальной системы, которая рассматривается как система от p независимых переменных, если его общий p-мерный касательный элемент будет ординарным интегральным элементом; это интегральное многообразие, существование которого по крайней мере локальное, доказывает основная теорема существования (п. **67**) как следствие теоремы Коши — Ковалевской.

Интегральное многообразие, которое не составляет части общего решения, называется *особым*. Решение может быть особым или потому, что ни одна точка интегрального многообразия не регулярна, или потому, что ни один интегральный элемент, будет ли он одномерным, или двумерным и т. д., или размерности $p-1$, не будет регулярным интегральным элементом. Следовательно, возможно существование различных классов особых интегральных многообразий с убывающими степенями особенностей при переходе от одного класса к следующему.

73. Мы уже ввели понятие *характеристик* дифференциальной системы; эти характеристики входят в образование интегральных многообразий, которые не содержатся ни в каком интегральном многообразии большего числа измерений. Эти характеристики существуют, впрочем, только для некоторых дифференциальных систем. Мы будем называть их *характеристиками Коши*.

Существует другой вид характеристик, существующих вообще на всяком интегральном многообразии V_p данного числа p измерений и составляющих часть общего решения системы. Это многообразия $q < p$ измерений, содержащиеся на рассматриваемом интегральном многообразии V_p и обладающие тем свойством, что их q-мерные касательные элементы не регулярны. *Их значение следует из замечания, что теорема Коши — Ковалевской теряет силу, если пытаться определить интегральное многообразие размерности $q+1$, которое их содержит.* Их отыскание связано с предварительной задачей отыскания q-мерных интегральных элементов многообразия V_p, которые не регулярны. Существование таких элементов не влечет за собой само по себе существования q-мерных характеристических многообразий, кроме случая $q=1$; это происходит в силу условий совместности, которые не удовлетворяются сами по себе при $q > 1$.

Мы сейчас разъясним эти понятия на некоторых примерах, взятых из классических задач.

74. Пример I. *Уравнения в частных производных первого порядка.* Пусть в классических обозначениях дано уравнение в частных производных первого порядка

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

с одной неизвестной функцией от двух независимых перёменных. Следуя методу Софуса Ли, распространим нашу проблему на отыскание двумерных решений замкнутой дифференциальной системы:

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z, p, q) = 0, \\ F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz + F_p\,dp + F_q\,dq = 0, \\ dz - p\,dx - q\,dy = 0, \\ [dx\,dp] + [dy\,dq] = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Характер s_0 равен рангу системы

$$\left.\begin{aligned} (F_x + pF_z)\,dx + (F_y + qF_z)\,dy + F_p\,dp + F_q\,dq = 0, \\ dz - p\,dx - q\,dy = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Этот ранг равен 2; точка интегрального многообразия — особая (т. е. нерегулярная), если ранг системы (15) меньше 2; так будет, если имеют место равенства

$$F_x + pF_z = 0, \quad F_y + qF_z = 0, \quad F_p = 0, \quad F_q = 0. \qquad (16)$$

Следовательно, *особыми решениями* будут те решения, которые удовлетворяют уравнениям (16).

Других особых решений здесь нет. Действительно, предположим регулярной общую точку интегрального многообразия. Полярный элемент линейного интегрального элемента с компонентами δx, δy, δz, δp, δq задается уравнениями (15), к которым надо присоединить уравнение

$$\delta p\,dx + \delta q\,dy - \delta x\,dp - \delta y\,dq = 0. \qquad (17)$$

Характер s_1, следовательно, равен 1. Особое интегральное многообразие могло бы представиться, если бы для всех касательных линейных элементов ранг системы (15) и (17) снизился на единицу; это произойдет, если имеют место соотношения

$$\frac{\delta x}{F_p} = \frac{\delta y}{F_q} = \frac{-\delta p}{F_x + pF_z} = \frac{-\delta q}{F_y + qF_z} = \frac{\delta z}{pF_p + qF_q}; \qquad (18)$$

но эти соотношения (18) показывают, что в заданной точке интегрального многообразия существует только один особый касательный элемент. *Следовательно, не существует других особых решений, кроме тех, если они существуют, которые удовлетворяют уравнениям* (16).

Характеристиками интегрального многообразия V_2 будут по определению, данному в п. **73**, те линии, элементы которых удовлетворяют уравнениям (18): это — характеристики, которые уже встречались (п. **59**). Они зависят в своей совокупности от произвольных постоянных.

75. Пример II. *Уравнения в частных производных второго порядка.* Всякое уравнение в частных производных второго порядка с одной неизвестной функцией z и двумя независимыми переменными x, y может быть представлено замкнутой системой дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,\\
&(F_x + pF_z + rF_p + sF_q)\,dx + (F_y + qF_z + sF_p + tF_q)\,dy +\\
&\quad + F_r\,dr + F_s\,ds + F_t\,dt = 0,\\
&dz - p\,dx - q\,dy = 0\\
&dp - r\,dx - s\,dy = 0,\\
&dq - s\,dx - t\,dy = 0,\\
&[dx\,dr] + [dy\,ds] = 0,\\
&[dx\,ds] + [dy\,dt] = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Характер s_0 равен 4, рангу линейной системы относительно $dx, dy, \ldots, dt$, образованной четырьмя уравнениями (19), которые следуют за первым. Этот ранг понижается на единицу в точках, где

$$\left.\begin{aligned}
&F_x + pF_z + rF_p + sF_q = 0,\\
&F_y + qF_z + sF_p + tF_q = 0,\\
&F_r = 0, \quad F_s = 0, \quad F_t = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Получаем первый класс особых решений; это такие решения, которые удовлетворяют уравнениям (20).

Отправимся теперь от регулярной точки. Полярная система обыкновенного линейного интегрального элемента с компонентами $(\delta x, \delta y, \delta z, \delta p, \delta q, \delta r, \delta s, \delta t)$ дается четырьмя уравнениями (19), которые следуют за первым, и двумя уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \delta x\,dr + \delta y\,ds - \delta r\,dx - \delta s\,dy &= 0, \\ \delta x\,ds + \delta y\,dt - \delta s\,dx - \delta t\,dy &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Имеем $s_0 + s_1 = 6$, откуда $s_1 = 2$, и ранг полярной системы, равный 6, понижается на единицу, если ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} F_x + pF_z + rF_p + sF_q & F_y + qF_z + sF_p + tF_y & F_r & F_s & F_t \\ -\delta r & -\delta s & \delta x & \delta y & 0 \\ -\delta s & -\delta t & 0 & \delta x & \delta y \end{pmatrix} \tag{22}$$

равен 2. Этого не может быть для всех линейных элементов, касательных к двумерному интегральному многообразию, по крайней мере если не существует для этого многообразия какого-либо соотношения между x и y *. Действительно, в силу сделанных предположений, в частности, следует соотношение

$$F_t \delta x^2 - F_s \delta x \delta y + F_r \delta y^2 = 0,$$

откуда следуют равенства

$$F_r = F_s = F_t = 0,$$

и, в силу первого уравнения (19), соотношения

$$F_x + pF_z + rF_p + sF_q = 0, \quad F_y + qF_z + sF_p + tF_q = 0;$$

ни одна точка интегрального многообразия не будет регулярной.

Следовательно, не существует никаких других особых интегральных многообразий, кроме тех, которые удовлетворяют уравнениям (20).

---

* Случаи, когда такое соотношение существует, не интересны: или существует одно соотношение между x и y, например, y есть функция от x; тогда в силу трех уравнений (19), которые следуют после второго, z, p, q будут также функциями от x, и мы получим уравнения многообразия в виде

$$r + 2sy' + t(y')^2 = z'' - qy'',$$

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0;$$

или же x и y будут константами, и, следовательно, также z, p, q будут константами; уравнением многообразия будет уравнение

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0.$$

На интегральном многообразии, которое составляет часть общего решения, характеристиками будут одномерные многообразия, для которых ранг матрицы (22) равен 2; в частности, при перемещениях вдоль характеристики выполняется соотношение

$$F_t \delta x^2 - F_s \delta x \delta y + F_z \delta y^2 = 0. \tag{23}$$

Через всякую точку многообразия проходят две действительные характеристики, если

$$(E_s)^2 - 4F_r F_t > 0.$$

Наконец, легко проверить, что если перемещаться по интегральному многообразию так, чтобы удовлетворялось соотношение (23), то ранг матрицы (22) будет тождественно равен 2.

В противоположность тому, что происходит с уравнениями в частных производных первого порядка, характеристики уравнения в частных производных второго порядка зависят вообще от бесконечного множества произвольных параметров (в действительности — от произвольных функций); они не будут характеристиками Коши.

76. Пример III. *Система двух уравнений в частных производных первого порядка с двумя неизвестными функциями z_1, z_2 от двух независимых переменных x, y.*

Эта система может быть представлена замкнутой дифференциальной системой:

$$\left.\begin{aligned}
&F(x,\ y,\ z^1,\ z^2,\ p_1,\ q_1,\ p_2,\ q_2) = 0,\\
&\Phi(x,\ y,\ z^1,\ z^2,\ p_1,\ q_1,\ p_2,\ q_2) = 0,\\
&(F_x + p_1 F_{z^1} + p_2 F_{z^2})\,dx + (F_y + q_1 F_{z^1} + q_2 F_{z^2})\,dy + F_{p_1} dp_1 +\\
&\qquad + F_{q_1} dq_1 + F_{p_2} dp_2 + F_{q_2} dq_2 = 0,\\
&(\Phi_x + p_1 \Phi_{z^1} + p_2 \Phi_{z^2})\,dx + (\Phi_y + q_1 \Phi_{z^1} + q_2 \Phi_{z^2})\,dy +\\
&\qquad + \Phi_{p_1} dp_1 + \Phi_{q_1} dq_1 + \Phi_{p_2} dp_2 + \Phi_{q_2} dq_2 = 0,\\
&dz^1 - p_1\,dx - q_1\,dy = 0,\\
&dz^2 - p_2\,dx - q_2\,dy = 0,\\
&[dx\,dp_1] + [dy\,dq_1] = 0,\\
&[dx\,dp_2] + [dy\,dq_2] = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Характер s_0 равен четырем; это ранг линейной системы, образованной из четырех уравнений (24), которые следуют за вторым уравнением. Этот ранг понижается только, если выполняются или уравнения

$$\left.\begin{aligned} & F_x + p_1F_{z^1} + p_2F_{z^2} = F_y + q_1F_{z^1} + q_2F_{z^2} = F_{p_1} = F_{q_1} = \\ & \qquad = F_{p_2} = F_{q_2} = 0, \\ & \Phi_x + p_1\Phi_{z^1} + p_2\Phi_{z^2} = \Phi_y + q_1\Phi_{z^1} + q_2\Phi_{z^2} = \Phi_{p_1} = \\ & \qquad = \Phi_{q_1} = \Phi_{p_2} = \Phi_{q_2} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

или уравнения

$$\frac{F_x + p_1F_{z^1} + p_2F_{z^2}}{\Phi_x + p_1\Phi_{z^1} + p_2\Phi_{z^2}} = \frac{F_y + q_1F_{z^1} + q_2F_{z^2}}{\Phi_y + q_1\Phi_{z^1} + q_2\Phi_{z^2}} = \frac{F_{p_1}}{\Phi_{p_1}} = \frac{F_{q_1}}{\Phi_{q_1}} = \\ = \frac{F_{p_2}}{\Phi_{p_2}} = \frac{F_{q_2}}{\Phi_{q_2}}. \tag{26}$$

Следовательно, возможны два вида особых интегральных многообразий, смотря по тому, будут ли удовлетворяться уравнения (25) или уравнения (26).

Подсчитаем теперь характер s_1. Чтобы получить уравнения полярного элемента линейного интегрального элемента с компонентами δx, δy, δz^1, δz^2, δp_1, δq_1, δp_2, δq_2, надо присоединить к четырем линейным уравнениям, которые имеются в системе (24), уравнения

$$\delta x\, dp_1 + \delta y\, dq_1 - \delta p_1\, dx - \delta q_1\, dy = 0,$$

$$\delta x\, dp_2 + \delta y\, dq_2 - \delta p_2\, dx - \delta q_2\, dy = 0.$$

Отсюда выводим, что $s_1 = 2$. Рассматриваемый линейный интегральный элемент будет особым, если шесть уравнений, которые определяют полярный элемент этого линейного интегрального элемента, сводятся к пяти. Но на двумерном интегральном многообразии, не налагающем никаких соотношений на x и y, эти уравнения не могут повлечь никакого линейного соотношения между dx и dy, потому что рассматриваемый полярный элемент содержит все линейные элементы, касательные к многообразию. Следовательно, для того чтобы рассматриваемый линейный элемент был особым, необходимо и достаточно, чтобы четыре уравнения

$$\left.\begin{aligned} F_{p_1}dp_1 + F_{q_1}dq_1 + F_{p_2}dp_2 + F_{q_2}dq_2 = 0, \\ \Phi_{p_1}dp_1 + \Phi_{q_1}dq_1 + \Phi_{p_2}dp_2 + \Phi_{q_2}dq_2 = 0, \\ \delta x dp_1 + \delta y dq_1 = 0, \\ \delta x dp_2 + \delta y dq_2 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

сводились к трем, что немедленно дает

$$\frac{D(F,\Phi)}{D(q_1,q_2)}\,\delta x^2-\left[\frac{D(F,\Phi)}{D(p_1,q_2)}-\frac{D(F,\Phi)}{D(p_2,q_1)}\right]\delta x\delta y+$$
$$+\frac{D(F,\Phi)}{D(p_1,p_2)}\,\delta y^2=0. \tag{28}$$

Из этого результата вытекают два заключения:

1°. Может получиться второй класс особых интегральных многообразий, таких, которые удовлетворяют трем уравнениям:

$$\frac{D(F,\Phi)}{D(q_1,q_2)}=\frac{D(F,\Phi)}{D(p_1,q_2)}-\frac{D(F,\Phi)}{D(p_2,q_1)}=\frac{D(F,\Phi)}{D(p_1,p_2)}=0. \tag{29}$$

2°. На ординарном интегральном многообразии, т. е. многообразии, составляющем часть общего решения, существуют вообще два семейства характеристических линий, определяемых дифференциальным уравнением (28).

Теорема. *При заданной системе двух уравнений в частных производных первого порядка с двумя неизвестными функциями z^1, z^2 от двух независимых переменных x, y могут существовать три класса особых решений, смотря по тому, будут ли они удовлетворять уравнениям* (25), *уравнениям* (26) *или уравнениям* (29). *Кроме того, каждое общее интегральное многообразие допускает два семейства характеристических линий, определяемых дифференциальным уравнением* (28).

77. *Уравнения в частных производных второго порядка с одной неизвестной функцией z от трех независимых переменных x^1, x^2, x^3.* Будем обозначать через p_i и $p_{ij}=p_{ji}$ частные производные первого и второго порядка от z, где индексы показывают переменные, по которым производится дифференцирование. Если

$$F(x^i, z, p_i, p_{ij})=0$$

данное уравнение, то положим

$$\left.\begin{aligned} A_i&=\frac{\partial F}{\partial x^i}+p_i\frac{\partial F}{\partial z}+p_{ik}\frac{\partial F}{\partial p_k},\\ A^{ij}&=m\frac{\partial F}{\partial p_{ij}}\ \left(m=1,\ \text{если}\ i=j,\ m=\frac{1}{2},\ \text{если}\ i\neq j\right).\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Данное уравнение будет представлено замкнутой дифференциальной системой из 9 уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&F = 0,\\
&A_i dx^i + A^{ij} dp_{ij} = 0,\\
&dz - p_i dx^i = 0,\\
&dp_i - p_{ik} dx^k = 0 \qquad (i = 1, 2, 3),\\
&[dx^k dp_{ik}] = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).
\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

$S_0 = 5$

Характер s_0 равен 5, т. е. рангу системы, образованной пятью линейными уравнениями (31), которые следуют за уравнением $F = 0$. Нерегулярная интегральная точка характеризуется соотношениями

$$A_i = 0, \qquad A^{ij} = 0. \tag{32}$$

Имеется первый возможный класс особых интегралов, именно интегралы, которые удовлетворяют уравнениям (32).

Полярная система регулярного линейного интегрального элемента содержит $s_0 + s_1 = 8$ уравнений, именно: 5 уравнений, которые определяют линейные интегральные элементы и, кроме того, 3 уравнения

$$\delta x^k dp_{ik} - \delta p_{ik} dx^k = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

$S_1 = 3$

Интегральный элемент $(\delta x^k, \delta z, \ldots)$ будет особым, если 4 уравнения

$$\left.\begin{aligned}
&A_i dx^i + A^{ij} dp_{ij} = 0,\\
&\delta x^k dp_{ik} - \delta p_{ik} dx^k = 0
\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

сведутся к трем. Поскольку на трехмерном интегральном многообразии, для которого независимыми переменными будут x^1, x^2, x^3, уравнения (33) не могут повлечь за собой никаких линейных соотношений между дифференциалами dx^i, особый линейный интегральный элемент будет характеризоваться сведением четырех уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&A^{ij} dp_{ij} = 0,\\
&\delta x^k dp_{ik} = 0
\end{aligned}\right\} \tag{34}$$

к трем. Пусть $\delta x^i = a^i$ — такой особый интегральный элемент, если предположить, что он существует. Если в уравнениях (34) заменить dp_{ij} произведением $\xi_i \xi_j$ двух новых переменных ξ, то заметим, что уравнение $a^i \xi_i = 0$ будет иметь следствием $A^{ij} \xi_i \xi_j = 0$. Следовательно, квадратичная форма $A^{ij} \xi_i \xi_j$ должна разлагаться в произведение двух линейных множителей:

$$A^{ij} \xi_i \xi_j = a^k b^h \xi_k \xi_h,$$

откуда

$$A^{ij} = \frac{1}{2} (a^i b^j + b^i a^j). \tag{35}$$

Обратно, если величины A^{ij} будут иметь вид (35), то легко проверить, что в каждой точке будут два особых интегральных линейных элемента соответственно с компонентами $\delta x^i = a^i$ и $\delta x^i = b^i$.

Мы видим, что если интегральное многообразие не обращает в нуль все A^{ij}, то невозможно, чтобы все его касательные элементы были особыми.

Мы видим, кроме того, что, если дискриминант квадратичной формы $A^{ij} \xi_i \xi_j$ обращается в нуль, то всякое неособое интегральное многообразие допускает два семейства различных или совпадающих характеристических линий: одно — образованное траекториями поля векторов a^i, другое — образованное траекториями поля векторов b^i. Если, напротив, дискриминант квадратичной формы $A^{ij} \xi_i \xi_j$ не равен нулю, то характеристических линий не существует.

Перейдем, наконец, к характеру s_2. Полярный элемент регулярного двумерного интегрального элемента дается пятью уравнениями, определяющими интегральные линейные элементы, и шестью другими уравнениями, которые, если опустить члены с dx^1, dx^2, dx^3, можно записать в виде

$$\delta_1 x^k dp_{ik} = 0,$$

$$\delta_2 x^k dp_{ik} = 0,$$

где через $\delta_1 x^k$, $\delta_2 x^k$ обозначены компоненты двух линейных интегральных элементов, которые определяют рассматриваемый двумерный интегральный элемент.

Эти уравнения можно записать также в виде

$$\frac{dp_{i1}}{c_1} = \frac{dp_{i2}}{c_2} = \frac{dp_{i3}}{c_3} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

если обозначить через

$$c_i dx^i = 0$$

уравнение рассматриваемого интегрального плоского элемента. Отсюда следует, что dp_{ij} пропорциональны произведениям $c_i c_j$. Двумерный интегральный элемент будет особым, если

$$A^{ij} c_i c_j = 0. \tag{36}$$

Это уравнение выражает, что в трехмерном пространстве, образованном рассматриваемым интегральным многообразием, особые касательные плоские элементы, выходящие из одной точки, будут касательными одного конуса второго класса, имеющего эту точку своей вершиной.

Следовательно, существуют двумерные характеристические многообразия: это будут решения на многообразии, отнесенном к координатам x^1, x^2, x^3, *уравнения в частных производных первого порядка.*

Бихарактеристики Адамара будут характеристиками этого уравнения; они, собственно говоря, не будут характеристиками системы (31), разве только, если уравнение (36) разложится на два линейных уравнения, когда уравнение в частных производных характеристик разложится на два линейных уравнения, интегральные поверхности которых будут поверхностями, порожденными характеристическими линиями первого семейства или характеристическими линиями второго семейства.

Теорема. *Уравнение в частных производных второго порядка с одной неизвестной функцией z от трех независимых переменных не может допускать особых решений, кроме тех, если они существуют, которые обращают в нуль частные производные от левых частей относительно частных производных второго порядка от z. Неособые решения допускают всегда двумерные характеристические многообразия, получаемые интегрированием уравнения в частных производных первого порядка; конус, являющийся конусом второго класса, огибает касательные плоскости в данной точке к характеристическим многообразиям, проходящим через эту точку. Если конус распадается на две прямые* Δ_1, Δ_2, *то существуют два семейства двумерных характеристических многообразий: одно — образованное поверхностями, геометрическим местом траекто-*

рий прямых Δ_1, другое — образованное поверхностями, геометрическим местом траекторий прямых Δ_2; эти траектории являются характеристическими линиями общих интегральных многообразий заданного уравнения. Напротив, если конус не вырождается, то не существует характеристических линий, т. е. линий, все касательные элементы которых особые; бихарактеристики Адамара, т. е. характеристики уравнения в частных производных первого порядка, которое дает характеристические поверхности, не будут, вообще говоря, характеристическими линиями в том смысле, что двумерные интегральные многообразия системы (31), *проходящие через бихарактеристику, даются теоремой Коши — Ковалевской.*

Глава V

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ В ИНВОЛЮЦИИ С ПРЕДПИСАННЫМИ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

I. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О СИСТЕМАХ В ИНВОЛЮЦИИ

78. Во многих приложениях дифференциальных систем имеются заданные независимые переменные $x^1, x^2, \dots, x^p$. Когда дифференциальная система приведена к форме (1) п. 52, то интересуются только p-мерными интегральными многообразиями и среди них теми, которые не вводят никаких соотношений между независимыми переменными $x^1, \dots, x^p$.

Определение. *Дифференциальная система* Σ *с* $n-p$ *неизвестными функциями* z^λ *от* p *независимых переменных* x^i *называется системой в инволюции, если ее жанр больше или равен* p *и если уравнения, определяющие* p*-мерный, ординарный общий интегральный элемент, не вводят никаких линейных соотношений между дифференциалами* $dx^1, dx^2, \dots, dx^p$.

Вполне понятно, что p-мерные *ординарные* интегральные многообразия с независимыми переменными $x^1, x^2, \dots, x^p$ могут быть получены приложением теорем существования, сформулированных и доказанных в предыдущей главе.

79. *Системы уравнений в частных производных.* Всякая система внешних дифференциальных уравнений с предписанными независимыми переменными, очевидно, может быть записана в форме системы уравнений в частных производных с $n-p$ неизвестными функциями от p независимых переменных. Обратное предложение также справедливо. Действительно, возьмем для определенности систему, образованную некоторым числом соотношений между частными производными трех первых порядков от q неизвестных функции z_λ. Обозначим через t_i^λ, t_{ij}^λ, t_{ijk}^λ эти частные производные; система будет образована посредством соотношений, заданных между переменными

$$x^i, z^\lambda, t_i^\lambda, t_{ij}^\lambda, t_{ijk}^\lambda \qquad \begin{matrix}(i, j, k = 1, 2, \dots, p; \\ \lambda = 1, 2, \dots, q),\end{matrix}$$

к которым присоединяются пфаффовы уравнения

$$dz^\lambda - t_i^\lambda dx^i = 0,$$
$$dt_i^\lambda - t_{ij}^\lambda dx^j = 0,$$
$$dt_{ij}^\lambda - t_{ijk}^\lambda dx^k = 0.$$

Далее, надо присоединить уравнения, которые получаются из предыдущих внешним дифференцированием. Система Σ, полученная таким образом, не содержит в действительности внешних дифференциальных уравнений степени выше второй. Будем искать p-мерные интегральные многообразия этой системы и среди них только те, которые не устанавливают никаких соотношений между $x^1, x^2, \dots, x^p$.

Впрочем известно, что в теории уравнений в частных производных первого порядка, как показал Софус Ли, представляет интерес снять это последнее ограничение.

80. Мы сейчас непосредственно укажем условие того, чтобы дифференциальная система Σ была в инволюции.

Теорема. *Чтобы замкнутая дифференциальная система с $n - p$ неизвестными функциями z^λ от p независимых переменных $x^1, x^2, \dots, x^p$ была в инволюции, необходимо и достаточно, чтобы полярная система общей интегральной точки, общего интегрального элемента $q \leqslant p - 1$ измерений не имела следствием никакого линейного соотношения между дифференциалами $dx^1, dx^2, \dots, dx^p$.*

Необходимость условия очевидна. Оно достаточно, потому что если оно выполнено, то уравнения общего ординарного интегрального элемента p измерений не влекут никаких соотношений между $dx^1, dx^2, \dots, dx^p$. Регулярные интегральные элементы $q < p$ измерений, содержащиеся в ординарном p-мерном интегральном элементе, не могут тогда иметь следствием больше, чем $p - q$ независимых соотношений между дифференциалами $dx^1, dx^2, \dots, dx^p$.

II. ПРИВЕДЕННЫЕ ХАРАКТЕРЫ

81. Мы собираемся указать критерии инволютивности, опирающиеся на рассмотрение того, что мы будем называть *приведенными характерами.*

Определим сначала p-мерные интегральные элементы (без линейных соотношений между дифференциалами dx^i, что мы всегда будем предполагать в дальнейшем), имеющие началом общую интегральную точку. Мы исключим случай, когда существование такого интегрального элемента потребует новых соотношений между зависимыми и независимыми переменными, — случай, когда эта система в конце концов не будет в инволюции. Мы будем рассматривать семейство $\mathfrak{F}$ интегральных элементов, размерность которых равна 1, 2, ..., $p-1$ и которые могут содержаться в p-мерном интегральном элементе.

Определение. *Будем называть приведенной полярной системой некоторой интегральной точки или интегрального элемента полярную систему точки или элемента, в уравнениях которой опущены члены, содержащие дифференциалы dx^1, dx^2, ..., dx^p, и сохранены только члены с дифференциалами dz^1, dz^2, ..., dz^q.*

Будем обозначать соответственно через

$$s_0', \ s_0'+s_1', \ s_0'+s_1'+s_2', \ \dots, \ s_0'+s_1'+s_2'+\dots+s_{p-1}'$$

ранги приведенной полярной системы общей интегральной точки, линейного интегрального элемента семейства $\mathfrak{F}$, двумерного интегрального элемента системы $\mathfrak{F}$ и т. д.

Положительные или равные нулю целые числа s_0', s_1', ..., s_{p-1}' *называются приведенными характерами порядка* 0, 1, ..., $p-1$.

Поскольку уравнения различных приведенных полярных систем допускают только переменные dz^λ, ясно, что

$$s_0'+s_1'+s_2'+\dots+s_{p-1}' \leqslant n-p.$$

Наконец, введем приведенный характер s_p' посредством уравнения

$$s_0'+s_1'+s_2'+\dots+s_{p-1}'+s_p' = n-p.$$

82. Замечание. Может случиться, что интегральные элементы p измерений, выходящие из общей интегральной точки, образуют несколько различных непрерывных семейств. Каждому из этих семейств соответствует совокупность приведенных характеров. Выяснение того, будет ли данная дифференциальная система в инволюции, протекает неодинаково для этих различных семейств, так как искомые p-мерные интегральные многообразия не будут одними и теми же в различных случаях, потому что их p-мерные касательные элементы меняются от семейства к семейству. Следовательно, возможно, что данная система будет в инволюции для одного из семейств p-мерных интегральных многообразий и не будет в инволюции для другого.

III. НЕОБХОДИМЫЙ И ДОСТАТОЧНЫЙ КРИТЕРИЙ ИНВОЛЮЦИИ

83. Теперь мы укажем критерий инволютивности.

Необходимый и достаточный критерий инволюции. *Пусть дана замкнутая дифференциальная система с $n-p$ неизвестными функциями от p независимых переменных;* пусть $s_0', s_1', \ldots, s_{p-1}'$ — *приведенные характеры этой системы, соответствующие семейству (или одному из семейств) p-мерных интегральных элементов системы. Чтобы эта система была в инволюции, необходимо и достаточно, чтобы число независимых уравнений, которые связывают параметры t_i^λ общего p-мерного интегрального элемента семейства, было равно*

$$ps_0' + (p-1)s_1' + \ldots + s_{p-1}'.$$

Если система не в инволюции, то число этих уравнений больше.

84. Начнем с важного замечания. Выполняя в случае надобности линейную с постоянными коэффициентами подстановку над переменными $x^1, x^2, \ldots, x^p$, можно предположить, что ранг приведенной полярной системы общего линейного интегрального элемента семейства $\mathfrak{F}$, для которого $dx^2 = dx^3 = \ldots = dx^p = 0$, равен нормальному числу $s_0' + s_1'$, что ранг приведенной полярной системы общего двумерного интегрального элемента семейства $\mathfrak{F}$, для которого $dx^3 = \ldots = dx^p = 0$, равен $s_0' + s_1' + s_2'$ и т. д. Если обозначить через

$$dz^\lambda = t_1^\lambda dx^1 + t_2^\lambda dx^2 + \ldots + t_p^\lambda dx^p$$

уравнения общего p-мерного элемента заданного семейства, то увидим, что коэффициенты t_1^λ подчинены требованию удовлетворить s_0' независимым линейным уравнениям, а именно s_0' приведенным полярным уравнениям общей интегральной точки, где dz^λ заменены на t_1^λ. Если коэффициенты t_1^λ удовлетворяют этим уравнениям, то t_2^λ подчинены требованию удовлетворить $s_0' + s_1'$ независимым линейным уравнениям, а именно $s_0' + s_1'$ приведенным полярным уравнениям интегрального линейного элемента ($\delta x^1 = 1$, $\delta x^2 = \ldots = \delta x^p = 0$, $\delta z^\lambda = t_1^\lambda$), где дифференциалы dz^λ заменены коэффициентами t_2^λ и т. д. Это показывает, что существует, *по меньшей мере*,

$$ps_0' + (p-1)s_1' + \ldots + 2s_{p-2}' + s_{p-1}'$$

независимых уравнений, которым должны удовлетворять параметры t_i^λ. Это оправдывает последнюю часть формулировки критерия. Будем говорить, что эти уравнения, вполне определенные, будет ли система в инволюции или нет, будут уравнениями, которым параметры t_i^λ *нормально* удовлетворяют.

85. *Доказательство критерия.* Приступим теперь к доказательству главной части критерия.

Предположим сначала, что система в инволюции. Тогда все линейные интегральные элементы, для которых не все dx^i равны нулю, принадлежат семейству $\mathfrak{F}$ и обязаны удовлетворять только s_0' уравнениям, которые не имеют следствием никаких соотношений между dx^i; следовательно, мы имеем $s_0 = s_0'$*. Полярная система общего регулярного интегрального линейного элемента будет определяться $s_0' + s_1'$ независимыми линейными уравнениями, не имеющими следствием никаких соотношений между dx^i; значит, $s_0' + s_1' = s_0 + s_1$, откуда $s_1' = s_1$, и все двумерные ординарные интегральные элементы, для которых существует только $p-2$ соотношения между dx^i, принадлежат семейству $\mathfrak{F}$. Можно продолжить эти рассуждения до конца и показать, что $s_h' = s_h'$ для $h = 0, 1, 2, \ldots, p-1$. Но тогда мы знаем (п. **70**), что число независимых уравнений, которым удовлетворяют параметры t_i^λ p-мерного ординарного интегрального элемента, равно

$$ps_0 + (p-1)s_1 + \ldots + s_{p-1} = ps_0' + (p-1)s_1' + \ldots + s_{p-1}'.$$

Сформулированное условие инволютивности, следовательно, необходимо.

* Напомним, что s_i — характеры, определенные в пп. **56** и **57**, а s_i' — приведенные характеры.

Обратно, предположим, что система — не в инволюции. Параметры t_i^λ удовлетворяют

$$ps_0' + (p-1)s_1' + \ldots + s_{p-1}'$$

нормальным уравнениям; но это не единственные уравнения. Действительно, если все интегральные линейные элементы, для которых существует только $p-1$ соотношений между dx^i, принадлежат семейству $\mathfrak{F}$, от $s_0' = s_0$; если все двумерные интегральные элементы, для которых существует только $p-2$ соотношения между dx^i, принадлежат семейству $\mathfrak{F}$, то $s'_1 = s_1$; но нельзя продолжить эти рассуждения до конца, если система — не в инволюции.

Предположим, например, что трехмерные интегральные элементы, для которых существует только $p-3$ соотношения между dx^i, не принадлежат все семейству $\mathfrak{F}$; это значит, что t_1^λ, t_2^λ и t_3^λ удовлетворяют еще другим уравнениям, кроме $3s_0' + 2s_1' + s_2'$ нормальных уравнений, которые их связывают между собой. Следовательно, число независимых уравнений, которым удовлетворяют параметры t_1^λ, *больше, чем* $ps_0' + (p-1)s_1' + \ldots + s_{p-1}'$, ч. т. д.

Замечание. Вводя, как выше, характер s_p', можно сказать, что *необходимым и достаточным условием инволюции будет требование, чтобы p-мерный интегральный элемент, наиболее общий для рассматриваемого семейства, зависел от*

$$s_1' + 2s_2' + \ldots + (p-1)s_{p-1}' + ps_p'$$

независимых параметров.

86. Пример I. Пусть система с двумя независимыми переменными и тремя неизвестными функциями определяется четырьмя уравнениями:

$$\begin{cases} [dx^1\,dz^1] = 0, & [dx^2 dz^1] = 0, \\ [dz^1\,dz^2] = 0, & [dz^1\,dz^3] = 0. \end{cases}$$

Двумерные интегральные элементы образуют только одно неприводимое семейство, определяемое уравнениями

$$\begin{cases} dz^1 = 0, \\ dz^2 = a\,dx^1 + b\,dx^2, \\ dz^3 = a'dx^1 + b'dx^2 \end{cases}$$

с четырьмя произвольными параметрами; следовательно, существуют два соотношения между 6 величинами t_1^λ, t_2^λ. Здесь имеем $s_0 = 0$; с другой стороны, можно взять за общий линейный элемент семейства $\mathfrak{F}$ элемент

$$\delta x^1 = \alpha, \quad \delta x^2 = \beta, \quad \delta z^1 = 0, \quad \delta z^2 = a\alpha + b\beta, \quad \delta z^3 = a'\alpha + b'\beta;$$

его приведенная полярная система будет

$$\alpha dz^1 = 0, \quad \beta dz^1 = 0, \quad (a\alpha + b\beta)\, dz^1 = 0, \quad (a'\alpha + b'\beta)\, dz^1 = 0.$$

Следовательно, имеем $s_1' = 1$, откуда $s_2' = 2$ (так как $s_1' + s_2'$ должно быть равно 3, числу неизвестных функций). Но равное 4 число независимых параметров, от которых зависит двумерный общий интегральный элемент, меньше, чем $s_1' + 2s_2' = 5$. Следовательно, система — не в инволюции. Мы придем к такому же заключению, если отбросим последнее уравнение системы, которое не допускает тогда более двух неизвестных функций.

87. Пример II. Пусть дана система с четырьмя неизвестными функциями z^λ от двух независимых переменных x^1, x^2:

$$\begin{cases} [dx^1 dz^1] + [dx^2 dz^2] = 0, \\ [dx^2 dz^1] = 0, \\ [dx^2 dz^3] = 0, \\ [dz^3 dz^4] = 0. \end{cases}$$

Двумерные интегральные элементы даются уравнениями

$$\begin{cases} dz^1 = a dx^2, \\ dz^2 = a dx^1 + b dx^2, \\ dz^3 = c dx^2, \\ c\, [dx^2 dz^4] = 0. \end{cases}$$

Следует различать два случая:

1°. $c \neq 0$. Имеем неприводимое семейство

$$\begin{cases} dz^1 = a dx^2, \\ dz^2 = a dx^1 + b dx^2, \\ dz^3 = c dx^2, \\ dz^4 = h dx^2 \end{cases}$$

с четырьмя параметрами a, b, c, h. Приведенной полярной системой линейного интегрального элемента ($\delta x^1 = \alpha$, $\delta x^2 = \beta$, $\delta z^1 = a\beta$, $\delta z^2 = a\alpha + b\beta$, $\delta z^3 = c\beta$, $\delta z^4 = h\beta$) будет система

$$\begin{cases} \alpha dz^1 + \beta dz^2 = 0, \\ \qquad \beta dz^1 = 0, \\ \qquad \beta dz^3 = 0, \\ c\beta dz^4 - h\beta dz^3 = 0; \end{cases}$$

следовательно, $s_1' = 4$, $s_2' = 0$. Равное 4 число независимых параметров двумерного интегрального элемента равно $s_1' + 2s_2'$, система — в инволюции.

2°. $c = 0$. Имеем неприводимое семейство

$$\begin{cases} dz^1 = adx^2, & dz^3 = 0, \\ dz^2 = adx^1 + bdx^2, & dz^4 = hdx^1 + kdx^2 \end{cases}$$

с 4 независимыми параметрами a, b, h, k. Приведенной полярной системой линейного элемента ($\delta x^1 = \alpha$, $\delta x^2 = \beta$, $\delta z^1 = a\beta$, $\delta z^2 = a\alpha + b\beta$, $\delta z^3 = 0$, $\delta z^4 = h\alpha + k\beta$) будет система

$$\begin{cases} \alpha dz^1 + \beta dz^2 = 0, \\ \qquad \beta dz^1 = 0, \\ \qquad \beta dz^3 = 0, \\ (h\alpha + k\beta)\ dz^3 = 0; \end{cases}$$

имеем $s_1' = 3$, $s_2' = 1$, поскольку $4 < s_1' + 2s_2' = 5$, система — не в инволюции.

Можно заметить, что если бы мы не наложили ограничение на выбор независимых переменных, то имели бы систему в инволюции только с одним семейством двумерных ординарных интегральных элементов, именно с первым рассмотренным семейством.

88. З а м е ч а н и е. Можно было бы пытаться распространить критерий на случай, когда приведенные характеры s_i' были бы определены посредством приведенных полярных систем общих интегральных элементов последовательных размерностей, принадлежащих *или не принадлежащих* семейству $\mathfrak{F}$. Но критерий мог бы тогда привести к ошибке.

Это можно видеть на примере п. **86**. Действительно, возьмем снова систему

$$\begin{cases} [dx^1\ dz^1] = 0, & [dz^1\ dz^2] = 0, \\ [dx^2, dz^1] = 0, & [dz^1, dz^3] = 0; \end{cases}$$

приведенной полярной системой интегрального линейного элемента ($\delta x^1 = \alpha$, $\delta x^2 = \beta$, $\delta z^1 = t^1$, $\delta z^2 = t^2$, $\delta z^3 = t^3$) будет система

$$\alpha dz^1 = 0, \quad \beta dz^1 = 0, \quad t^1 dz^2 - t^2 dz^1 = 0, \quad t^1 dz^3 - t^3 dz^1 = 0,$$

ранг которой $s_1' = 3$. С другой стороны, число уравнений, которым должны удовлетворять параметры двумерных интегральных элементов, как мы видели, равно 2; но это число на этот раз меньше $2s_0' + s_1' = 3$; тем не менее система — не в инволюции; таким образом, приходим к противоречию со второй частью критерия.

Если теперь возьмем систему не в инволюции

$$\begin{cases} [dx^1 dz^1] = 0, \\ [dx^2 dz^1] = 0, \\ [dz^1 dz^2] = 0, \end{cases}$$

то приведенной полярной системой линейного интегрального элемента ($\delta x^1 = \alpha$, $\delta x^2 = \beta$, $\delta z^1 = t^1$, $\delta z^2 = t^2$) будет система

$$\alpha dz^1 = 0, \ \beta dz^1 = 0, \ t^1 dz^2 - t^2 dz^1 = 0.$$

Ее ранг равен $s_1' = 2$. С другой стороны, число уравнений, которым должны удовлетворять параметры двумерных интегральных элементов, тоже равно 2 — числу, на этот раз равному $2s_0' + s_1'$; тем не менее система — не в инволюции.

IV. ДОСТАТОЧНЫЙ КРИТЕРИЙ ИНВОЛЮЦИИ

89. Мы теперь установим второй критерий инволютивности, *просто достаточный*, нередко удобный в приложениях.

Второй, достаточный критерий инволюции. *Пусть даны замкнутая дифференциальная система с $n - p$ неизвестными функциями от p независимых переменных, неприводимое семейство p-мерных интегральных элементов и соответствующее семейство $\mathfrak{F}$ интегральных элементов размерностей $q = 1, 2, \ldots, p-1$. Обозначим через* $\sigma_0 = s_0'$

ранг приведенной полярной системы общей интегральной точки, через $\sigma_0 + \sigma_1$ — *ранг приведенной полярной системы общего линейного элемента семейства* $\mathfrak{F}$, *для которого* $\delta x^2 = \delta x^3 = \ldots = \delta x^p = 0$, через $\sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2$ — *ранг приведенной полярной системы наиболее общего двумерного элемента семейства* $\mathfrak{F}$, *для которого* $\delta x^3 = \ldots = \delta x^p = 0$ *и так далее. Система в инволюции, если число независимых уравнений, которым подчиняются параметры рассматриваемого семейства интегральных p-мерных элементов, равно*

$$p\sigma_0 + (p-1)\sigma_1 + \ldots + \sigma_{p-1}.$$

90. Доказательство. Из первого критерия мы знаем, что полное число независимых уравнений, которым удовлетворяют параметры общего p-мерного интегрального элемента рассматриваемого семейства, по меньшей мере, равно

$$ps_0' + (p-1)s_1' + \ldots + s_{p-1}'.$$

Следовательно, имеем

$$p\sigma_0 + (p-1)\sigma_1 + \ldots + \sigma_{p-1} \geqslant ps_0' + (p-1)s_1' + \ldots + s_{p-1}'.$$

Но имеются очевидные неравенства (первое из которых — в действительности равенство):

$$\sigma_0 \leqslant s_0',$$
$$\sigma_0 + \sigma_1 \leqslant s_0' + s_1',$$
$$\sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 \leqslant s_0' + s_1' + s_2',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\sigma_0 + \sigma_1 + \ldots + \sigma_{p-2} + \sigma_{p-1} \leqslant s_0' + s_1' + \ldots + s_{p-2}' + s_{p-1}',$$

которые при сложении дают

$$p\sigma_0 + (p-1)\sigma_1 + \ldots + \sigma_{p-1} \leqslant ps_0' + (p-1)s_1' + \ldots + s_{p-1}'.$$

Отсюда следует:

1°. Что две части последнего неравенства равны и, следовательно, все предыдущие неравенства сводятся к равенствам ($\sigma_i = s_i'$);

2°. Что система в инволюции.

Мы можем добавить, что q-мерные интегральные элементы семейства $\mathfrak{F}$, для которых $\delta x^{q+1} = \delta x^{q+2} = \ldots = \delta x^p = 0$, *регулярны*.

91. Дополнительное замечание. Второй критерий продолжает быть пригодным, если целые числа σ_i были бы подсчитаны, когда одно или несколько уравнений данной дифференциальной системы оставлены в стороне; в самом деле, это могло бы только уменьшить числовые величины целых чисел σ_0, $\sigma_0+\sigma_1$, $\sigma_0+\sigma_1+\sigma_2$ и т. д., и приведенное доказательство критерия не перестало бы быть пригодным. Само собой разумеется, что если пользоваться этим замечанием, то необходимо учитывать *все* уравнения системы, чтобы определить p-мерные интегральные элементы.

92. Частный случай. Один частный случай особенно интересен, потому что он достаточно часто встречается в приложениях; это тот случай, когда dz^λ входят во внешние дифференциальные уравнения данной замкнутой системы только в первой степени. Действительно, в этом случае приведенные характеры могут быть подсчитаны *без предварительного знания p-мерных интегральных элементов.* Это следует из того, что приведенные полярные системы могут быть образованы прямо без этого предварительного знания.

Пусть, например,

$$\left.\begin{aligned}
&f_\alpha(x,z)=0 && (\alpha=1,2,\ \ldots,\ r_0),\\
&\theta_\alpha\equiv A_{\alpha i}\,dx^i+A_{\alpha\lambda}\,dz^\lambda=0 && (\alpha=1,2,\ \ldots,\ r_1),\\
&\varphi_\alpha\equiv\frac{1}{2}A_{\alpha ij}[dx^i dx^j]+A_{\alpha i\lambda}[dx^i dz^\lambda]=0 &&\\
& && (\alpha=1,2,\ \ldots,\ r_2),\\
&\psi_\alpha\equiv\frac{1}{6}A_{\alpha ijh}[dx^i dx^j dx^h]+\frac{1}{2}A_{\alpha ij\lambda}[dx^i dx^j dz^\lambda] &&\\
& && (\alpha=1,2,\ \ldots,\ r_3),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &&
\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

уравнения системы. Приведенный характер s_0 есть ранг системы

$$A_{\alpha\lambda}\,dz^\lambda=0;$$

сумма $s_0'+s_1'$ есть ранг системы

$$A_{\alpha\lambda}\,dz^\lambda=0,\qquad A_{\alpha i\lambda}\,\delta_1 x^i\,dz^\lambda=0,$$

где все $\delta_1 x^i$ — произвольные параметры.

Сумма $s_0' + s_1' + s_2'$ будет рангом системы

$$\begin{cases} A_{\alpha\lambda}\, dz^\lambda = 0, \\ A_{\alpha i\lambda}\, \delta_1 x^i\, dz^\lambda = 0, \\ A_{\alpha i\lambda}\, \delta_2 x^i\, dz^\lambda = 0, \\ A_{\alpha ij\lambda}\, \delta_1 x^i \delta_2 x^j\, dz^\lambda = 0, \end{cases}$$

где все $\delta_1 x^i$ и $\delta_2 x^i$ — произвольные параметры и т. д.

Заметим, наконец, что в этом случае имеется только одно неприводимое семейство p-мерных интегральных элементов, определяемое соотношениями

$$A_{\alpha i} + A_{\alpha\lambda} t_i^\lambda = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, r_1;\ i = 1, 2, \ldots, p),$$

$$A_{\alpha ij} + A_{\alpha i\lambda} t_j^\lambda - A_{\alpha j\lambda} t_i^\lambda = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, r_2;\ i, j = 1, 2, \ldots, p),$$

$$A_{\alpha ijh} + A_{\alpha ij\lambda} t_h^\lambda - A_{\alpha ih\lambda} t_j^\lambda + A_{\alpha jh\lambda} t_i^\lambda = 0$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots, r_3;\quad i, j, k = 1, 2, \ldots, p).$$

V. СЛУЧАЙ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

93. Если замкнутая дифференциальная система допускает только два независимых переменных, то в системе не встретится ни одного внешнего дифференциального уравнения выше второй степени. Следовательно, не надо будет заниматься уравнениями, получающимися в результате внешнего дифференцирования уравнений второй степени, которые система может содержать, ибо они всегда будут удовлетворены для всякого двумерного плоского элемента.

Для простоты будем предполагать, что не стеснит существенно общности, что система не содержит никаких конечных уравнений. Будем записывать s_0 независимых линейных уравнений в виде

$$\theta_\alpha = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, s_0).$$

Введем тогда вместе с дифференциалами dx, dy независимых переменных $n - s_0 - 2$ линейные дифференциальные формы $\tilde{\omega}^\lambda$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, n - s_0 - 2)$, независимые между собой и независимые от $s_0 + 2$ форм θ_α, dx, dy. Они, следовательно, образуют вместе с θ_0 $n - 2$ независимые относительно дифференциалов неизвестных функций формы. Наконец, мы можем взять вместо дифференциалов dx, dy две независимые линейные комбинации ω^1, ω^2 этих дифференциалов, что может быть удобно в приложениях.

Теперь заданная система представится в виде

$$\left.\begin{aligned} &\theta_\alpha = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, s_0), \\ &\varphi_\alpha \equiv C_\alpha [\omega^1\omega^2] + A_{\alpha\lambda} [\omega^1 \tilde{\omega}^\lambda] + B_{\alpha\lambda} [\omega^2 \tilde{\omega}^\lambda] + \\ &+ \frac{1}{2} D_{\alpha\lambda\mu} [\tilde{\omega}^\lambda \tilde{\omega}^\mu] = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, r). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Мы будем заниматься только случаем, когда существуют двумерные интегральные элементы, что позволит, впрочем, заменяя формы $\tilde{\omega}^\lambda$ через $\tilde{\omega}^\lambda$ без линейной комбинации форм ω^1, ω^2, предположить все коэффициенты C_α равными нулю. Мы исключим, таким образом, системы не в инволюции.

Если мы знаем общие уравнения

$$\theta_\alpha = 0, \quad \tilde{\omega}^\lambda = t_1^\lambda \omega^1 + t_2^\lambda \omega^2 \tag{3}$$

двумерных интегральных элементов, то мы знаем семейство $\mathfrak{F}$ линейных интегральных элементов, содержащихся в двумерном интегральном элементе. После этого приведенная полярная система линейного интегрального элемента $(\omega_\delta^i, \tilde{\omega}_\delta^\lambda)$ семейства $\mathfrak{F}$ будет образована уравнениями $\theta_\alpha = 0$ и уравнениями

$$(A_{\alpha\lambda}\, \omega_\delta^1 + B_{\alpha\lambda}\, \omega_\delta^2) + D_{\alpha\lambda\mu}\, \tilde{\omega}_\delta^\lambda \tilde{\omega}^\mu = 0. \tag{4}$$

Матрица коэффициентов полярной системы, или *полярная матрица*, есть не что иное, как матрица частных производных $\dfrac{\partial\varphi_\alpha}{\partial\tilde{\omega}_\delta^\lambda}$, или после замены ω_δ^i, $\tilde{\omega}_\delta^\lambda$ на ω^i, $\tilde{\omega}^\lambda$ матрица с r строками и $\nu = n - s_0$ столбцами

$$\left(\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial\tilde{\omega}^\lambda}\right). \tag{5}$$

Приведенный характер s_1', который мы будем с этого момента обозначать s_1, поскольку нет опасности смешения, будет рангом полярной матрицы; нерегулярными, или особыми, линейными элементами будут те линейные элементы, которые обращают в нуль все определители из s_1 строк и s_1 столбцов этой матрицы.

94. *Критерий инволюции.* Немедленно получаем достаточный критерий инволюции, замечая, что если приведенный характер s_1 равен числу r всех линейно независимых форм φ_α, то условия, которым должны удовлетворять коэффициенты t_1^λ, t_2^λ общих уравнений (2) двумерных интегральных элементов, сведутся к s_1 условиям вида

$$C_\alpha + A_{\alpha\lambda} t_2^\lambda - B_{\alpha\lambda} t_1^\lambda + D_{\alpha\lambda\mu} t_1^\lambda t_2^\mu = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, s_1).$$

Эти условия необходимо независимы, так как число независимых соотношений между t_1^λ и t_2^λ, *по меньшей мере*, равно s_1.

С другой стороны, имеется случай, когда этот достаточный критерий будет также необходимым; это тот случай, когда формы $\widetilde{\omega}^\lambda$ входят линейно в формы φ_α. Действительно, в этом случае уравнениями, которым должны удовлетворять t_1^λ и t_2^λ, будут уравнения

$$C_\alpha + A_{\alpha\lambda} t_2^\lambda - B_{\alpha\lambda} t_1^\lambda = 0,$$

и очевидно, что имеется столько линейно независимых уравнений этой системы, сколько имеется линейно независимых форм φ_α (*принимая во внимание высказанное раз навсегда предположение, что эти уравнения совместны*).

Приходим к следующей теореме.

Теорема. *Достаточным условием для того, чтобы замкнутая дифференциальная система с двумя независимыми переменными была в инволюции, служит требование, чтобы приведенный характер s_1 был равен числу линейно независимых квадратичных форм φ_α. Это условие также необходимо, если формы φ_α содержат формы $\widetilde{\omega}^\lambda$ только в первой степени (если все коэффициенты $D_{\alpha\lambda\mu}$ равны нулю).*

95. Замечание. Следующий пример показывает, что это условие не всегда необходимо. Рассмотрим дифференциальную систему, образованную тремя внешними квадратичными уравнениями:

$$[\widetilde{\omega}^2 \widetilde{\omega}^3] = 0, \quad [\widetilde{\omega}^3 \widetilde{\omega}^1] = 0, \quad [\widetilde{\omega}^1 \widetilde{\omega}^2] = 0.$$

Двумерные интегральные элементы задаются уравнениями:

$$\widetilde{\omega}^1 = a_1\omega^1 + b_1\omega^2,$$

$$\widetilde{\omega}^2 = a_2\omega^1 + b_2\omega^2,$$

$$\widetilde{\omega}^3 = a_3\omega^1 + b_3\omega^2$$

с конечными уравнениями:

$$a_2b_3-b_2a_3=0,\quad a_3b_1-b_3a_1=0,\quad a_1b_2-b_1a_2=0;$$

число независимых параметров, от которых они зависят, равно 4 (a_1, a_2, a_3 — произвольны, а b_1, b_2, b_3 им пропорциональны). С другой стороны, ранг полярной матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & \tilde{\omega}^3 & -\tilde{\omega}^2 \\ -\tilde{\omega}^3 & 0 & \tilde{\omega}^1 \\ \tilde{\omega}^2 & -\tilde{\omega}^1 & 0 \end{pmatrix}$$

равен $2: s_1=2$ и $s_2=1$. Имеем $s_1+2s_2=2+2=4$ — числу независимых параметров общего двумерного интегрального элемента. Однако число линейно независимых форм φ_α равно $3>s_1$.

96. *Случай, когда $s_2=0$. Характеристики.* — В случае $s_2=0$, т. е. $s_0=n-s_1-2$, число форм $\tilde{\omega}^\lambda$ равно s_1, если система — в инволюции. Через всякое одномерное нехарактеристическое интегральное многообразие проходит одно, и только одно, двумерное интегральное многообразие. Характеристические линии ординарного интегрального многообразия обращают в нуль все определители, содержащие s_1 строк и s_1 столбцов полярной матрицы. В случае, когда s_1 равно числу линейно независимых форм φ_α, полярная матрица содержит точно s_1 строк и s_1 столбцов, так что характеристические линии данного интегрального многообразия определяются однородным уравнением степени s_1 относительно ω^1, ω^2, или относительно dx, dy.

Возьмем, в частности, случай, когда коэффициенты $D_{\alpha\lambda\mu}$ в уравнениях (2) равны нулю, т. е. когда формы $\tilde{\omega}^\lambda$ входят в квадратичные формы φ_α линейно. В этом случае элементами полярной матрицы будут формы $A_{\alpha\lambda}\omega^1+B_{\alpha\lambda}\omega^2$. Можно привести квадратичные уравнения $\varphi_\alpha=0$ к замечательному виду, выявляющему s_1 семейств характеристик по крайней мере когда эти семейства различны.

Действительно, пусть $\omega^2-m\omega^1=0$ — уравнение одного из этих семейств. Коэффициент m — корень уравнения

$$|A_{\alpha\lambda}+mB_{\alpha\lambda}|=0 \qquad (\alpha,\lambda=1,2,\ldots,s_1). \tag{6}$$

Будем искать такую линейную комбинацию уравнений $\varphi_\alpha=0$, левая часть которой содержала бы множитель $\omega^2-m\omega^1$. Если

$k^\alpha \varphi_\alpha = 0$ — такая комбинация, то это значит, что, каково бы ни было $\lambda = 1, 2, \ldots, s_1$, будем иметь

$$k^\alpha (A_{\alpha\lambda} + mB_{\alpha\lambda}) = 0.$$

Можно найти для k^α значения, не все равные нулю и удовлетворяющие этим s_1 однородным уравнениям, потому что определитель из коэффициентов при неизвестных (определитель системы) равен нулю. Одно из внешних квадратичных уравнений этой дифференциальной системы будет иметь вид

$$[\omega^2 - m\omega^1,\ c_\lambda \widetilde{\omega}^\lambda] = 0.$$

Следовательно, если s_1 семейств характеристик будут различными и задаются уравнениями $\omega^2 - m_i \omega^1 = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, s_1)$, то квадратичные уравнения системы могут быть приведены к виду*

$$[\omega^2 - m_i\omega^1,\ \ c_{i\lambda} \widetilde{\omega}^\lambda] = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, s_1). \tag{7}$$

Эти уравнения обнаруживают очень интересный факт. Если задаться для определения ординарного интегрального многообразия одномерным *характеристическим* решением, то задача вообще невозможна. Это с очевидностью вытекает из уравнений (7), ибо, если имеем $\omega^2 = m_i \omega^1$ вдоль заданной характеристической кривой, то *необходимо*, чтобы вдоль этой кривой выполнялось также равенство

$$c_{i\lambda} \widetilde{\omega}^\lambda = 0,$$

так как на неизвестном двумерном интегральном многообразии форма $c_{i\lambda} \widetilde{\omega}^\lambda$ должна быть кратной форме $\omega^2 - m_i \omega^1$. Вопрос, будет ли это необходимое условие также достаточным, остается нерешенным; возможно, впрочем, что если условие будет достаточным, то проблема будет допускать бесконечное множество решений. Это то место теории, которое было мало изучено и о котором мало что известно.

VI. СИСТЕМЫ В ИНВОЛЮЦИИ, ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ КОТОРЫХ ЗАВИСИТ ОТ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

97. Мы можем предположить, не стесняя общности, что система не допускает конечных уравнений. Если она содержит p независимых переменных, то будем обозначать через

* Мы предполагаем коэффициенты C_α равными нулю, чего всегда можно добиться добавлением к формам $\widetilde{\omega}^\lambda$ надлежащим образом выбранных линейных комбинаций форм ω^1, ω^2.

$\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^p$ систему p независимых линейных комбинаций их дифференциалов. Пусть

$$\left.\begin{aligned} &\theta_\alpha = 0 && (\alpha = 1, 2, \ldots, s_0), \\ &\varphi_\alpha \equiv A_{\alpha i\lambda}[\omega^i \tilde{\omega}^\lambda] = 0 && (\alpha = 1, 2, \ldots, r) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

соответственно уравнения первой и второй степени системы. Будем считать, что в квадратичные формы φ_α линейные формы $\tilde{\omega}^\lambda$ входят только в первой степени. Мы не написали членов с произведением $[\omega^i \omega^j]$, потому что наша система, если она в инволюции, допускает p-мерные интегральные элементы и, следовательно, прибавляя к $\tilde{\omega}^\lambda$ линейные комбинации форм ω^i, можно добиться того, чтобы коэффициенты при произведениях $[\omega^i \omega^j]$ обратились в нуль.

Система могла бы содержать уравнения выше второй степени, но их выписывать нет необходимости.

Поставим задачу найти замечательную форму уравнений $\varphi_\alpha = 0$ и вывести отсюда важные следствия относительно характеристик данной дифференциальной системы.

98. Пусть s_1 — приведенный характер первого порядка; следующие характеры по условию равны нулю. Число форм $\tilde{\omega}^\lambda$, независимых между собой и независимых от форм θ_α и ω^i, равно s_1. Тогда можно положить, в случае необходимости производя подходящую линейную подстановку над формами ω^i, что ранг системы

$$A_{\alpha 1\lambda} \tilde{\omega}^\lambda = 0$$

равен s_1 и, аналогично совершая в случае необходимости линейную подстановку над формами φ_α, что имеем

$$\left.\begin{aligned} &A_{\alpha 1\lambda} \tilde{\omega}^\lambda \equiv \tilde{\omega}^\alpha && (\alpha = 1, 2, \ldots, s_1), \\ &A_{\beta 1\lambda} \tilde{\omega}^\lambda = 0 && (\beta = s_1 + 1, \ldots, r). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Теперь сказать, что система — в инволюции с характерами $s_2 = s_3 = \ldots = s_p = 0$, значит сказать, что существует точно $(p-1)s_1$ соотношений между коэффициентами уравнений

$$\tilde{\omega}^\alpha = t_i^\alpha \omega^i, \tag{10}$$

которые определяют общий p-мерный интегральный элемент. Этими соотношениями необходимо будут равенства

$$t_i^\alpha = A_{\alpha i\lambda} t_1^\lambda \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, s_1;\ i = 2, 3, \ldots, p). \tag{11}$$

Отсюда следует, в частности, что *не существует более s_1 линейно независимых форм* φ_α $(r = s_1)$, ибо исследование формы φ_{s_1+1}, в которой ω^1 не встречается, даст

$$A_{s_1+1, i, \lambda}\, t_1^\lambda = 0 \qquad (i = 2, 3, \ldots, p),$$

что вводит между t_1^λ соотношения, которые не могут получиться из уравнений (11).

Образуем теперь определитель полярной матрицы линейного элемента (ω_0^i); это однородная форма степени s_1 относительно форм $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^p$. Предположим, чтобы не нарушать общности, что для $\omega^3 = \ldots = \omega^p = 0$ определитель распадается в произведение различных линейных форм относительно ω^1, ω^2. Из рассуждений п. **96** видно, что, прибегая в случае надобности к подходящей линейной подстановке над φ_α и $\widetilde{\omega}^\alpha$, можно считать

$$\varphi_\alpha \equiv [\omega^1 + m_\alpha \omega^2, \widetilde{\omega}^\alpha] + A_{\alpha i \beta}[\omega^i \widetilde{\omega}^\beta] \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 1, 2, \ldots, s_1; \\ i = 3, 4, \ldots, p \end{pmatrix}.$$

Отсюда, выражая, что формы $\widetilde{\omega}^\alpha = t_i^\alpha \omega^i$ обращают в нуль формы φ_α, получим, в частности, тот факт, что в формах φ_α коэффициенты при произведениях $[\omega^2 \omega^i]$ равны нулю:

$$m_\alpha t_i^\alpha = A_{\alpha i \beta} t_2^\beta,$$

откуда, принимая во внимание значения (11) для t_2^β и t_i^α, получаем

$$m_\alpha A_{\alpha i \beta} t_1^\beta = A_{\alpha i \beta} m_\beta t_1^\beta,$$

откуда, наконец,

$$A_{\alpha i \beta} = 0 \text{ для } \alpha \neq \beta.$$

Полагая $A_{\alpha i \alpha} = m_{i\alpha}$ и для симметрии $m_\alpha = m_{2\alpha}$, имеем окончательно

$$\varphi_\alpha \equiv [\omega^1 + m_{i\alpha}\omega^i, \widetilde{\omega}^\alpha] = 0. \tag{12}$$

Такова замечательная форма, к которой можно привести внешние квадратичные уравнения данной дифференциальной системы.

99. Характеристическими линиями интегральных многообразий, следовательно, будут те линии, которые в каждой своей точке касаются одного из $(p-1)$-мерных плоских элементов, определяемых уравнениями

$$\omega^1 + m_{i\alpha}\omega^i = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, s_1).$$

Эти $(p-1)$-мерные элементы обладают замечательным свойством, вытекающим из следующей теоремы.

Теорема. *Каждое из уравнений*

$$\omega^1 + m_{i\alpha}\omega^i = 0,$$

рассматриваемое на данном интегральном многообразии, вполне интегрируемо.

Прежде чем приступить к доказательству, положим для краткости

$$\omega^1 + m_{i\alpha}\omega^i = \bar{\omega}^\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, s_1); \tag{13}$$

здесь $\bar{\omega}^\alpha$ образуют s_1 форм, отличных от $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^p$, которые естественно могут не быть линейно независимыми.

Теперь заметим сначала, что на интегральном многообразии имеется соотношение вида

$$\tilde{\omega}^\alpha = t^\alpha \bar{\omega}^\alpha \tag{14}$$

следствие уравнений (12). С другой стороны, уравнение $d\varphi_\alpha = 0$ должно быть следствием уравнений данной дифференциальной системы, которая замкнута; внешние дифференциалы $d\varphi_\alpha$, следовательно, тождественно обращаются в нуль, если принять во внимание уравнения $\theta_\beta = 0$ и заменить в них $\tilde{\omega}^\lambda$ через $t^\lambda \bar{\omega}^\lambda$ (уравнения системы, степень которых выше 2, в действительности тождественно удовлетворены в силу предыдущих условий).

Фиксируем теперь индекс α. Так как $\varphi_\alpha = [\bar{\omega}^\alpha \tilde{\omega}^\alpha]$, то получим

$$d\varphi_\alpha = [d\bar{\omega}^\alpha \tilde{\omega}^\alpha] - [\bar{\omega}^\alpha d\tilde{\omega}^\alpha]. \tag{15}$$

Предположим, что, принимая во внимание уравнения* $\theta_\beta = 0$, имеем

$$\left.\begin{aligned} d\bar{\omega}^\alpha &= \frac{1}{2} a_{ij}[\omega^i\omega^j] + a_{i\lambda}[\omega^i\tilde{\omega}^\lambda], \\ d\tilde{\omega}^\alpha &= \frac{1}{2} c_{ij}[\omega^i\omega^j] + c_{i\lambda}[\omega^i\tilde{\omega}^\lambda] + \frac{1}{2} c_{\lambda\mu}[\tilde{\omega}^\lambda\tilde{\omega}^\mu]; \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

внешний дифференциал $d\bar{\omega}^\alpha$ не содержит членов с $[\tilde{\omega}^\lambda\tilde{\omega}^\mu]$, потому что уравнения $\omega^1 = \omega^2 = \ldots = \omega^p = 0$ образуют вполне интегрируемую систему**.

* Конечно, коэффициенты a_{ij}, $a_{i\lambda}$ уравнений (16) будут меняться вместе с изменением фиксированного индекса α.

** Формы ω^i — линейно независимые комбинации дифференциалов $dx^1, dx^2, \ldots, dx^p$.

В силу (15) и (16) имеем

$$d\varphi_\alpha = \frac{1}{2} a_{ij} [\omega^i \omega^j \widetilde{\omega}^\alpha] + a_{i\lambda} [\omega^i \widetilde{\omega}^\lambda \widetilde{\omega}^\alpha] - \frac{1}{2} c_{ij} [\omega^i \omega^j \overline{\omega}^\alpha] +$$
$$+ c_{i\lambda} [\omega^i \overline{\omega}^\alpha \widetilde{\omega}^\lambda] - \frac{1}{2} c_{\lambda\mu} [\overline{\omega}^\alpha \widetilde{\omega}^\lambda \widetilde{\omega}^\mu]. \tag{17}$$

Следовательно, *каковы бы ни были произвольные параметры* t^λ, мы должны иметь

$$\frac{1}{2} t^\alpha a_{ij} [\omega^i \omega^j \overline{\omega}^\alpha[+ t^\alpha t^\lambda a_{i\lambda} [\omega^i \overline{\omega}^\lambda \overline{\omega}^\alpha] - \frac{1}{2} c_{ij} [\omega^i \omega^j \overline{\omega}^\alpha] +$$
$$+ t^\lambda c_{i\lambda} [\omega^i \overline{\omega}^\alpha \overline{\omega}^\lambda] - \frac{1}{2} t^\lambda t^\mu c_{\lambda\mu} [\overline{\omega}^\alpha \overline{\omega}^\lambda \overline{\omega}^\mu] = 0.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при t^α и при $t^\alpha t^\beta$, где предполагаем $\beta \neq \alpha$, получим уравнения

$$a_{ij} [\omega^i \omega^j \overline{\omega}^\alpha] = 0, \quad a_{i\beta} [\omega^i \overline{\omega}^\beta \overline{\omega}^\alpha] = 0,$$

во втором из которых нет суммирования по индексу β. Эти уравнения показывают, что *на всем интегральном многообразии* форма $d\overline{\omega}^\alpha$ обращается в нуль в силу $\overline{\omega}^\alpha = 0$. Это последнее уравнение будет, следовательно, вполне интегрируемым, ч. т. д.

100. Предыдущую теорему можно сформулировать следующим образом.

Теорема. *Всякая дифференциальная система в инволюции с p независимыми переменными, общее решение которой зависит только от s_1 произвольных функций одного переменного, допускает вообще s_1 семейств таких $(p-1)$-мерных характеристических многообразий, что через каждую точку интегрального многообразия проходит одно, и только одно, многообразие каждого семейства; каждая кривая, лежащая на одном из этих характеристических многообразий, будет сама характеристической.*

Замечание. Если s_1 семейств характеристических линейных элементов не будут различными, то приведенная форма (12) внешних квадратичных уравнений дифференциальной системы будет не так проста. Можно показать, что полярная матрица с s_1 строками и s_1 столбцами может быть приведена к такому виду, что все ее элементы выше главной диагонали будут равны нулю; это равносильно тому, что *определитель полярной матрицы распадается в произведение s_1 линейных относительно $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^p$ форм**.

Мы закончим эту главу приложением теории систем в инволюции к свойствам пфаффовых систем.

VII. ТЕОРЕМА СХОУТЕНА И ВАН ДЕР КУЛЬКА**

101. Эта теорема относится к общей системе линейных уравнений в полных дифференциалах (системе Пфаффа). Пусть

$$\theta_\alpha = 0 \qquad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots, q) \tag{18}$$

система $q + 1$ уравнений, линейно независимых относительно n переменных $x^1, x^2, \ldots, x^n$, которые могут быть независимыми или зависимыми. Энгель (F. Engel) привлек внимание к новому числовому инварианту системы Пфаффа, именно в случае, которым мы занимаемся, это наибольшее целое число m, такое, что внешняя форма степени $2m + q + 1$

$$[\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_q, (\lambda_0 d\theta_0 + \lambda_1 d\theta_1 + \ldots + \lambda_q d\theta_q)^m] \tag{19}$$

не обращается тождественно в нуль; $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_q$ — произвольные параметры.

Теорема Схоутена и ван дер Кулька формулируется следующим образом.

Теорема. *Если m — инвариант Энгеля системы* (18), *то можно найти алгебраически эквивалентную ей систему, левые части которой имели бы класс, равный* $2m + 1$.

---

* Как только формы $A_{\alpha 1\lambda}\widetilde{\omega}^\lambda$ приведены к $\widetilde{\omega}^\alpha$, можно рассматривать $(s_1)^2$ коэффициентов $A_{\alpha i\beta}$, где индекс i имеет фиксированное значение, большее единицы, как элементы матрицы S_i. Условие инволютивности системы, которое заключается в том, что соотношения

$$A_{\alpha i\lambda} t_j^\lambda = A_{\alpha j\lambda} t_i^\lambda$$

должны быть следствиями уравнений (11), где t_1^λ не связаны никакими соотношениями, просто эквивалентно свойству $p - 1$ матриц $S_2, \ldots, S_p$ быть перестановочными между собой. Из теории перестановочных матриц следует, что все корни характеристического уравнения матрицы $u^2S_2 + u^3S_3 + \ldots + u^pS_p$, где u^i — параметры, линейны относительно параметров $u^2, u^3, \ldots, u^p$. Поскольку матрица S_1 — единичная, это означает, что определитель матрицы $u^1S_1 + u^2S_2 + \ldots + u^pS_p$ является произведением линейных относительно параметров $u^1, u^2, \ldots, u^p$ форм. Заменяя параметры u^i формами ω^i, получаем результат, сформулнрованный в тексте.

** A. J. Schouten et van der Kulk. *Beiträge zur Theorie der Systeme Pfaff'sher Gleichungen.* (Proc. Akad. Amsterdam, **43** et **44**, 1940; **45**, 1941).

Очевидно, если $2m+q$ по меньшей мере равно n, то форма (19) тождественно равна нулю; следовательно, безусловно $2m \leqslant n-q$.

102. Чтобы составить уравнения задачи определения системы, алгебраически эквивалентной заданной системе и обладающей указанным свойством, допустим, что всегда возможно, что форма

$$[\theta_0\theta_1 \ldots \theta_q (d\theta_0)^m]$$

тождественно в нуль не обращается, и положим

$$\Theta = \theta_0 + u^1\theta_1 + u^2\theta_2 + \ldots + u^q\theta_q,$$

где $u^1, u^2, \ldots, u^q$ обозначают q неизвестных функций переменных $x^1, x^2, \ldots, x^n$.

Мы сейчас определим эти неизвестные функции так, чтобы форма Θ имела класс, равный $2m+1$. Это условие выражается уравнением степени $2m+3$.

$$[\Theta, (d\Theta)^{m+1}] = 0, \tag{20}$$

к которому следует присоединить уравнение, которое получается его внешним дифференцированием, именно

$$(d\Theta)^{m+2} = 0. \tag{21}$$

По условию, если рассматривать $u^1, u^2, \ldots, u^p$ как постоянные, внешний дифференциал $d\Theta$ по модулю $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_q$ приводится к сумме

$$[\omega^1\omega^2] + [\omega^3\omega^4] + \ldots + [\omega^{2m-1}\omega^{2m}],$$

где ω^i — $2m$ линейно независимых дифференциальных форм, построенных на переменных x^i и их дифференциалах, причем коэффициенты, конечно, могут зависеть от параметров u^1, $u^2, \ldots, u^q$.

Следовательно, если рассматривать теперь параметры u^i как переменные, то получим

$$d\Theta \equiv [\omega^1\omega^2] + \ldots + [\omega^{2m-1}\omega^{2m}] + [\theta_1\tilde{\omega}^1] + \ldots + [\theta_q\tilde{\omega}^q] \pmod{\Theta}, \tag{22}$$

где $\tilde{\omega}^i + du^i$ — линейная форма относительно $dx^1, dx^2, \ldots, dx^n$.

103. Сначала будем искать общие n-мерные интегральные элементы системы (20), (21). Уравнение (20) показывает, что $d\Theta$ по модулю Θ сводится к внешней квадратичной форме, построенной на $2m$ линейных независимых формах, иначе говоря, что правая часть сравнения (22), если в ней заменить $\tilde{\omega}^i$ их значениями, сведется по модулю Θ к сумме

$$[\bar{\omega}^1 \bar{\omega}^2] + [\bar{\omega}^3 \bar{\omega}^4] + \ldots + [\bar{\omega}^{2m-1} \bar{\omega}^{2m}],$$

где $\bar{\omega}^i$ — суммы ω^i, линейных комбинаций форм $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q$ и еще $n - 2m - q - 1$ других форм $\omega^{2m+1}, \ldots, \omega^{n-q-1}$, независимых от ω^i и θ_α. Но непосредственно видно, что в правую часть сравнения (22) не могут входить эти $n - q - 1$ последних форм. Окончательно, следовательно, имеем сравнение

$$d\Theta \equiv [\omega^1 + a^{1\alpha}\theta_\alpha, \omega^2 + a^{2\alpha}\theta_\alpha] + \ldots + [\omega^{2m-1} + \\ + a^{2m-1,\alpha}\theta_\alpha, \omega^{2m} + a^{2m,\alpha}\theta_\alpha] \pmod{\Theta} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, q). \tag{23}$$

Если взять коэффициенты при $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q$ в развернутой правой части, то получим выражение форм $\tilde{\omega}^\alpha$:

$$\tilde{\omega}^\alpha = a^{1\alpha}\omega^2 - a^{2\alpha}\omega^1 + \ldots + a^{2m-1,\alpha}\omega^{2m} - a^{2m,\alpha}\omega^{2m-1} + \\ + b^{\alpha\lambda}\theta_\lambda + c^\alpha\Theta \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, q). \tag{24}$$

Принимая во внимание сравнение (22), будем иметь

$$b^{\alpha\beta} - b^{\beta\alpha} = a^{1\alpha}a^{2\beta} - a^{1\beta}a^{2\alpha} + \ldots + a^{2m-1,\alpha}a^{2m,\beta} - \\ - a^{2m,\alpha}a^{2m-1,\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, q). \tag{25}$$

Элемент n измерений, определяемый уравнениями (24), где коэффициенты удовлетворяют соотношениям (25), удовлетворяет уравнению (20). Он удовлетворяет, впрочем, автоматически уравнению (21), ибо форма $d\Theta$ в силу уравнения (20) представляет, самое большее, сумму $m+1$ квадратичных независимых мономов и потому $(m+2)$-я степень ее тождественно равна нулю.

Число независимых параметров, от которых зависит наиболее общий n-мерный интегральный элемент замкнутой системы (20), (21), следовательно, равен числу $2mq$ параметров $a^{i\alpha}$, увеличенному на $\frac{q(q+1)}{2}$ независимых параметров $b^{\alpha\beta}$ $\left[q^2\right.$ параметров, связанных посредством $\frac{q(q-1)}{2}$ соотношений (25)$\left.\right]$ и увеличенному, наконец, на q параметров c^α, что дает полное число независимых параметров, равное

$$2mq + \frac{q(q+3)}{2}. \tag{26}$$

104. Мы подошли теперь к определению приведенных характеров дифференциальной системы. Уравнение (20) имеет степень, равную $2m+3$, все $(2m+1)$-мерные элементы — интегральные. Имеем, следовательно,

$$s_0 = s_1 = s_2 = \ldots = s_{2m+1} = 0.$$

Будем теперь рассматривать следующую цепь интегральных элементов: $E_{2m+2}, \ldots, E_{n-1}$, которые последовательно вводят между дифференциалами n независимых переменных следующие соотношения:

$$\begin{array}{ll}
E_{2m+2}: & \omega^{2m+1} = \ldots = \omega^{n-q-1} = \theta_2 = \theta_3 = \ldots = \theta_q = 0; \\
E_{2m+3}: & \omega^{2m+1} = \ldots = \omega^{n-q-1} = \quad = \theta_3 = \ldots = \theta_q = 0; \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
E_{2m+q}: & \omega^{2m+1} = \ldots = \omega^{n-q-1} = \qquad\qquad = \theta_q = 0; \\
E_{2m+q+1}: & \omega^{2m+1} = \ldots = \omega^{n-q-1} = 0; \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
E_{n-1}: & \omega^{n-q-1} = 0.
\end{array}$$

Чтобы образовать приведенную полярную систему для каждого из этих интегральных элементов, мы будем пользоваться только уравнениями (20); мы получим, таким образом, ранги $\sigma_{2m+2}, \sigma_{2m+2}+\sigma_{2m+3}, \ldots$, которые самое большее равны рангам $s_{2m+2}, s_{2m+2}+s_{2m+3}, \ldots$ В силу достаточного критерия п. 89 заданная дифференциальная система будет несомненно в инволюции, если число (26) независимых параметров общего n-мерного интегрального элемента будет равно

$$(2m+2)\,\sigma_{2m+2} + (2m+3)\,\sigma_{2m+3} + \ldots + n\sigma_n.$$

105. Чтобы образовать приведенную полярную систему элемента E_{2m+2}, для которого имеем

$$\omega^{2m+1} = \omega^{2m+2} = \ldots = \omega^{n-q-1} = 0,\ \theta_2 = \theta_3 = \ldots = \theta_q = 0,$$

достаточно при подсчете $(d\Theta)^{m+1}$ сохранять только члены при $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^{2m}, \theta_1$, что приведет $(d\Theta)^{m+1}$ с точностью до числового множителя к $[\omega^1, \omega^2 \ldots \omega^{2m}\theta_1\widetilde{\omega}^1] \pmod{\Theta}$ и, следовательно, $[\Theta, (d\Theta)^{m+1}]$ к $[\Theta\omega^1\omega^2 \ldots \omega^{2m}\theta^1\widetilde{\omega}^1]$. Приведенная полярная система сведется, следовательно, просто к уравнению $\widetilde{\omega}^1 = 0$, и мы имеем

$$\sigma_{2m+2} = 1.$$

Подсчет приведенной полярной системы элемента E_{2m+3} производится приведением $d\Theta \pmod{\Theta}$ к сумме

$$[\omega^1\omega^2] + \ldots + [\omega^{2m-1}\omega^{2m}] + [\theta_1\widetilde{\omega}^1] + [\theta_2\widetilde{\omega}^2],$$

откуда получаем уравнения

$$\widetilde{\omega}^1 = 0, \; \widetilde{\omega}^2 = 0;$$

следовательно, имеем $\sigma_{2m+2} + \sigma_{2m+3} = 2$, откуда

$$\sigma_{2m+3} = 1.$$

Продолжая так последовательно, найдем, что

$$\sigma_{2m+4} = \ldots = \sigma_{2m+q+1} = 1.$$

Поскольку сумма уже подсчитанных σ равна q, числу неизвестных функций, все следующие σ равны нулю.

Непосредственный подсчет дает теперь

$$(2m+2)\,\sigma_{2m+2} + \ldots + n\sigma_n = 2mq + (2 + 3 + \ldots + q + 1) =$$
$$= 2mq + \frac{q(q+3)}{2}.$$

Этот результат показывает, что *система в инволюции и ее общее решение зависит от одной произвольной функции* $2m+q+1$ *переменных.*

Поскольку всегда существует решение (и даже бесконечное множество решений), для которого неизвестные функции $u^1, u^2, \ldots$ $\ldots, u^q$ принимают для заданных числовых значений $(x^i)_0$ переменных x^i произвольно заданные числовые значения, можно найти $q+1$ таких частных решений, что, для $x^i = (x^i)_0$, $q+1$ соответствующих форм Θ линейно независимы относительно $dx^1, dx^2, \ldots$ $\ldots, dx^n$. Теорема, таким образом, доказана.

Глава VI

ПРОДОЛЖЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

I. ОСНОВНАЯ ПРОБЛЕМА

106. В предыдущих главах мы доказали теоремы существования для некоторых дифференциальных систем с предписанными независимыми переменными, которые мы назвали системами в инволюции. Решениями этих систем, существование которых мы доказали применением теоремы Коши—Ковалевской, являются функции, образующие *общее решение* рассматриваемой системы. Мы знаем, однако, что могут существовать случайно другие решения; это *особые решения*, получаемые из новых дифференциальных систем, каждая из которых получается присоединением к уравнениям данной системы новых соотношений между зависимыми и независимыми переменными; эти новые системы вообще не будут в инволюции. Основная задача состоит, следовательно, в отыскании указаний, которые можно иметь о решениях системы, которая не находится в инволюции; в частности, *пусть задано частное решение данной дифференциальной системы; может ли оно быть получено как неособое решение системы в инволюции, которую можно было бы вывести из данной системы регулярным процессом?*

Ответу на этот вопрос посвящена настоящая глава. Регулярный процесс, на который мы намекали, основан на понятии *продолжения* дифференциальной системы, которое мы введем в следующем разделе.

107. *Приведение к случаю линейной системы Пфаффа.* Мы можем всегда для удобства изложения предполагать, что данная система содержит только конечные уравнения между зависимыми и независимыми переменными и линейные уравнения относительно дифференциалов переменных, как зависимых, так и независимых. Действительно (п. 79) всякая дифференциальная система может рассматриваться, как система уравнений в частных производных первого порядка с $n-p$ неизвестными z^λ от p независимых переменных $x^1, x^2, \ldots, x^p$. С этой точки зрения ее можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} &F_\alpha(x^i, z^\lambda, t_i^\lambda) = 0 \quad (i = 1, \ldots, p;\ \lambda = 1, \ldots, n-p;\ \alpha = 1, \ldots, r_0), \\ &dz^\lambda - t_i^\lambda dx^i = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, n-p); \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

к этим уравнениям следует присоединить те, которые получаются из них внешним дифференцированием, именно:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial F_\alpha}{\partial x^i} dx^i + \frac{\partial F_\alpha}{\partial z^\lambda} dz^\lambda + \frac{\partial F_\alpha}{\partial t_i^\lambda} dt_i^\lambda = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, r_0), \\ &[dx^i dt_i^\lambda] = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n-p). \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Изменим обозначения: обозначим через ν полное число зависимых переменных z^λ, t_i^λ, которые входят в уравнения (1) и (2); замкнутую систему (1), (2) от ν неизвестных функций, для которых мы примем обозначение z^λ $(\lambda = 1, 2, \ldots, \nu)$, можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} &F_\alpha(x, z) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, r_0), \\ &\theta_\alpha = 0 \qquad\quad (\alpha = 1, 2, \ldots, r_1), \\ &\varphi_\alpha \equiv C_{\alpha ij}[dx^i dx^j] + A_{\alpha i\lambda}[dx^i \tilde{\omega}^\lambda] = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, r_2). \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Все θ_α — линейные формы относительно $dx^1, dx^2, \ldots, dx^p$, $dz^1, dz^2, \ldots, dz^\nu$, образованные левыми частями последних уравнений (1) и первых уравнений (2), или независимыми комбинациями этих левых частей. Формы φ_α — левые части последних уравнений (2) или независимые линейные комбинации этих левых частей. Формы $\tilde{\omega}^\lambda$ — линейные дифференциальные формы, образующие вместе с θ_α систему ν независимых относительно $dz^1, dz^2, \ldots, dz^\nu$ форм Пфаффа. Можно ввести вместо дифференциалов $dx^1, dx^2, \ldots, dx^p$ систему p независимых линейных комбинаций этих дифференциалов, которые будем обозначать через $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^p$; коэффициенты в ω^i могут зависеть как от независимых переменных, так и от зависимых.

108. Замечание. Мы можем предположить r_1 форм θ_α независимыми, т. е. что ранг линейной системы $\theta_\alpha = 0$ равен r_1. Конечно, при этом надо считать, что мы находимся в *общей* точке (x, z), где x^i и z^λ удовлетворяют конечным уравнениям системы (3); такая точка будет *регулярной интегральной точкой*. Мы будем заниматься только теми инте-

гральными многообразиями системы (3), все общие точки которых регулярны. Остальные будут решениями другой системы, которая получается из системы (3) присоединением конечных соотношений, которые выражают, что ранг системы $\theta_\alpha = 0$ имеет заданное значение, меньшее r_1.

II. ПРОДОЛЖЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

109. Операция продолжения дифференциальной системы по существу тождественна той операции, при которой к заданной системе уравнений в частных производных присоединяют уравнения, которые получаются дифференцированием всей системы или части ее по одному или нескольким независимым переменным. Рассмотрим систему (3) и составим общие уравнения, которые дают p-мерные интегральные элементы

$$\tilde{\omega}^\lambda = t_i^\lambda dx^i \qquad (\lambda = 1,\ 2\ , \dots,\ \nu - r_1); \tag{4}$$

эти уравнения будут

$$H_{\alpha ij} \equiv C_{\alpha ij} + A_{\alpha i\lambda} t_j^\lambda - A_{\alpha j\lambda} t_i^\lambda = 0 \tag{5}$$

$$(\alpha = 1,\ 2,\ \dots\ ,\ r_2;\ i, j = 1,2,\ \dots\ , p).$$

Можно рассматривать t_i^λ как новые неизвестные функции, подчиненные условию удовлетворять конечным уравнениям (5). Мы получим продолжение системы (3), если присоединим к ней конечные уравнения (5), линейные уравнения (4) и уравнения, которые получатся из (5) и (4) внешним дифференцированием. Заметим, что в полученной таким образом новой системе можно откинуть внешние квадратичные уравнения $\varphi_\alpha = 0$, которые фигурируют в начальной системе (3), потому что они будут алгебраическими следствиями уравнений (4).

Можно также выполнить частичное продолжение, присоединяя только часть уравнений (4).

Следуя предыдущей схеме, можно доказать, что если система (3) — в инволюции, то то же самое будет с полным ее продолжением *; но нам не будет нужна эта теорема. Впрочем, можно впасть в ошибку, если хоть один раз сделать частичное продолжение.

110. Предположим, что заданная система (3) — не в инволюции. Могут представиться различные случаи.

* Э. Картан (E. Cartan), *Sur la structure des groupes infinis de transformations*. Chapitre *I* (Annales École normale sup., **21**, pp. 154—175, 1904, spécialement, pp. 166—171, nn. **7—9**).

Первый случай: *уравнения (5), которые дают p-мерные интегральные элементы, исходящие из общей интегральной точки, несовместны.* В этом случае совместность уравнений (5) повлечет соотношения между координатами x^i, z^λ начальной точки интегрального элемента.

Если эти уравнения повлекут за собой соотношения между независимыми переменными или если они имеют следствием понижение ранга системы $\theta_\alpha = 0$ ниже r_1, то поставленная задача не допускает решения.

Если ни один из этих двух случаев невозможности не представился, надо присоединить к уравнениям (3) конечные соотношения между зависимыми и независимыми переменными, которые выражают совместность уравнений (5) и уравнений, которые из них получаются внешним дифференцированием; числа r_0 и r_1, таким образом, увеличатся, квадратичные уравнения $\varphi_\alpha = 0$ не изменятся. Мы получим, таким образом, новую систему с теми же зависимыми и независимыми переменными, что и первая, но с увеличением целых чисел r_0 и r_1: в частности, *целое число* $\nu - r_1$ *уменьшится.*

Второй случай: *уравнения* (5) *совместны в каждой регулярной интегральной точке пространства, но система — не в инволюции.* В этом случае продолжают систему, как это было показано в п. **109**, и получают, таким образом, новую систему, содержащую новые зависимые переменные. По сравнению со старой системой произойдет увеличение целого числа r_0, так как присоединятся конечные соотношения (5) между независимыми и зависимыми переменными — соотношения, которые выражают, что p-мерный элемент (4) — интегральный; целое число r_1 тоже увеличится из-за присоединения уравнений (4) и уравнений, которые вытекают из дифференцирования уравнений (5). Что касается квадратичных уравнений новой системы, они не содержат более уравнений $\varphi_\alpha = 0$ старой системы, если сделано полное продолжение системы, но следует присоединить уравнения, которые вытекают из внешнего дифференцирования уравнений (4). Если продолжение только частичное, некоторые уравнения $\varphi_\alpha = 0$ следует сохранить.

111. Мы видим из предыдущего, что если заданная система — не в инволюции, имеется регулярный способ получить из нее последовательность новых систем, допускающих те же решения, что и данная система. Можно доказать *при некоторых условиях, которые, впрочем, нелегко сформулировать,* что все кончится тем, что придем к системе в инволюции.

Мы не будем останавливаться на общем случае и покажем лишь, как можно провести доказательство в наиболее простом случае, когда имеются только две независимых переменных. Доказательство, которое мы сейчас дадим, не распространяется, впрочем, на случай произвольного числа независимых переменных.

III. СЛУЧАЙ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

112. Будем обозначать буквами x и y независимые переменные, сохраняя все предыдущие обозначения. Будем предполагать, чтобы упростить изложение, что в квадратичных уравнениях $\varphi_\alpha = 0$, которые напишем в виде

$$\varphi_\alpha \equiv C_\alpha [dx\, dy] + A_{\alpha\lambda} [dx \tilde{\omega}^\lambda] + B_{\alpha\lambda} [dy \tilde{\omega}^\lambda] = 0, \qquad (6)$$

мы освободились от форм θ_α, прибавляя к φ_α в случае надобности квадратичную форму, сравнимую с нулем по модулю $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{r_1}$. Будем называть буквой ρ разность $\nu - r_1$, так что в формах φ_α встречаются только ρ форм $\tilde{\omega}^1, \tilde{\omega}^2, \ldots, \tilde{\omega}^\rho$, независимых между собой и от форм θ_α.

Мы сейчас уточним, каким способом следует продолжать систему, когда уравнения (5) совместны, а система — не в инволюции. Как мы указали, мы будем делать только частичные продолжения.

113. Напомним критерий инволютивности системы, сформулированный в п. **94** для случая, когда через общую интегральную точку проходит по крайней мере один двумерный интегральный элемент. Необходимым и достаточным условием инволютивности будет совпадение приведенного характера s_1 с числом линейно независимых квадратичных форм φ_α. В том случае, который мы сейчас рассматриваем, коэффициенты C_α формул (6) можно предположить равными нулю. Подставляя вместо дифференциалов dx, dy две независимые линейные комбинации ω^1, ω^2 и записывая тогда

$$\varphi_\alpha \equiv A_{\alpha\lambda} [\omega^1 \tilde{\omega}^\lambda] + B_{\alpha\lambda} [\omega^2 \tilde{\omega}^\lambda],$$

можно предположить, что интегральный элемент $\omega^2 = 0$ регулярен, так что s_1 есть число независимых форм $A_{\alpha\lambda}\tilde{\omega}^\lambda$. Меняя запись, можно предположить

$$A_{\alpha\lambda}\tilde{\omega}^\lambda \equiv \tilde{\omega}^\alpha,$$

так что имеем

$$\varphi_\alpha \equiv [\omega^1 \tilde{\omega}^\alpha] + B_{\alpha\lambda} [\omega^2 \tilde{\omega}^\lambda] \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, s_1). \qquad (7)$$

Если система не в инволюции, то существуют формы φ_α, независимые от s_1 предыдущих форм, но коэффициенты при ω^1 в этих формах будут линейными комбинациями форм $\tilde{\omega}^1$, $\tilde{\omega}^2, \ldots, \tilde{\omega}^{s_1}$. Следовательно, можно предположить, что в форме φ_{s_1+1}, например, отсутствует член с ω^1. *Мы сейчас докажем, что коэффициент при ω^2 представляет линейную комбинацию s_1 форм $\tilde{\omega}^1, \tilde{\omega}^2, \ldots, \tilde{\omega}^{s_1}$.*

Действительно, предположим, например, что

$$\varphi_{s_1+1} \equiv [\omega^2 \tilde{\omega}^{s_1+1}];$$

легко видеть, что тогда первый приведенный характер будет больше, чем s_1, ибо первыми $s_1 + 1$ приведенными уравнениями полярного элемента линейного интегрального элемента $(\omega^1 = 1,\ \omega^2 = m)$ будут уравнения

$$\tilde{\omega}^\alpha + mB_{\alpha\lambda}\tilde{\omega}^\lambda = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, s_1),$$
$$m\tilde{\omega}^{s_1+1} = 0;$$

но, если дать m достаточно малое значение, то ранг этой системы будет равен $s_1 + 1$, так что первый характер будет по меньшей мере равен $s_1 + 1$.

114. Теперь мы можем предположить, выполняя в случае надобности линейную подстановку над s_1 формами φ_1, $\varphi_2, \ldots, \varphi_{s_1}$, что форма φ_{s_1+1}, кратная $\tilde{\omega}^1$, не равна нулю, так что можно написать

$$\varphi_{s_1+1} \equiv [\omega^2 \tilde{\omega}^1]. \tag{8}$$

Мы сейчас докажем, что коэффициент при ω^2 в φ_1 зависит только от $\tilde{\omega}^1, \tilde{\omega}^2, \ldots, \tilde{\omega}^{s_1}$. Действительно, приведенная полярная система интегрального линейного элемента $(\omega^1 = 1,\ \omega^2 = m)$ содержит уравнения

$$\tilde{\omega}^1 + mB_{1\lambda}\tilde{\omega}^\lambda = 0,$$
$$\tilde{\omega}^\alpha + mB_{\alpha\lambda}\tilde{\omega}^\lambda = 0 \qquad (\alpha = 2, 3, \ldots, s_1),$$
$$\tilde{\omega}^1 = 0;$$

эта система, когда m стремится к нулю, стремится к системе

$$B_{1\lambda}\tilde{\omega}^\lambda = 0, \qquad \tilde{\omega}^2 = 0, \ldots, \tilde{\omega}^{s_1} = 0, \qquad \tilde{\omega}^1 = 0;$$

поскольку ее ранг должен быть равен s_1, это значит, что в форме $B_{1\lambda}\tilde{\omega}^\lambda$ могут фигурировать только $\tilde{\omega}^1, \tilde{\omega}^2, \ldots, \tilde{\omega}^{s_1}$.

Мы можем предположить, выполняя в случае необходимости линейную подстановку над формами $\tilde{\omega}^\alpha$ ($\alpha \leqslant s_1$), что коэффициент при ω^2 в φ_1 равен $\tilde{\omega}^2$:

$$\varphi_1 \equiv [\omega^1\tilde{\omega}^1] + [\omega^2\tilde{\omega}^2].$$

Продолжим наши рассуждения. Коэффициент при ω^2 в φ_2 должен быть линейной комбинацией из s_1 форм $\tilde{\omega}^1, \tilde{\omega}^2, \ldots, \tilde{\omega}^{s_1}$. Если эта комбинация не зависит от $\tilde{\omega}^1$ и $\tilde{\omega}^2$, то мы можем предположить, что она равна $\tilde{\omega}^3$ и так далее. Наступит момент, когда коэффициенты при ω^2 в последовательных формах $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, которые мы будем рассматривать, будут зависеть только от форм, которые ранее встречались; будем иметь, например,

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 \equiv [\omega^1\tilde{\omega}^1] + [\omega^2\tilde{\omega}^2],\\
&\varphi_2 \equiv [\omega^1\tilde{\omega}^2] + [\omega^2\tilde{\omega}^3],\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&\varphi_{h-1} \equiv [\omega^1\tilde{\omega}^{h-1}] + [\omega^2\tilde{\omega}^h],\\
&\varphi_h \equiv [\omega^1\tilde{\omega}^h] + B_1[\omega^2\tilde{\omega}^1] + B_2[\omega^2\tilde{\omega}^2] + \ldots + B_h[\omega^2\tilde{\omega}^h],\\
&\varphi_{s_1+1} \equiv [\omega^2\tilde{\omega}^1].
\end{aligned}$$

Теперь мы отсюда выведем, что для всякого интегрального двумерного элемента

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{\omega}^1 &= t_1\omega^2,\\
\tilde{\omega}^2 &= t_1\omega^1 + t_2\omega^2,\\
\tilde{\omega}^3 &= t_2\omega^1 + t_3\omega^2,\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
\tilde{\omega}^h &= t_{h-1}\omega^1 + t_h\omega^2,
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

причем имеет место соотношение

$$t_h = B_2t_1 + B_3t_2 + \ldots + B_ht_{h-1}. \tag{10}$$

115. Получив этот первый результат, выполним *частичное продолжение* данной дифференциальной системы, которое введет $h-1$ новых неизвестных функций $t_1, t_2, \ldots, t_{h-1}$. Нам следует присоединить тогда к линейным дифференциальным уравнениям $\theta_\alpha = 0$ заданной системы h новых независимых линейных уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde{\omega}^1 - t_1\omega^2 = 0,\\
&\tilde{\omega}^2 - t_1\omega^1 - t_2\omega^2 = 0\\
&\tilde{\omega}^3 - t_2\omega^1 - t_3\omega^2 = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\tilde{\omega}^h - t_{h-1}\omega^1 - (B_2t_1 + B_3t_2 + \ldots + B_ht_{h-1})\,\omega^2 = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

К старым квадратичным уравнениям, число которых, впрочем, будет приведено к h, присоединятся h квадратичных уравнений, получаемых внешним дифференцированием уравнений (11). Основным результатом, полученным посредством этого продолжения, является *уменьшение целого числа* ρ: действительно, целое число r_1 увеличилось на h единиц, тогда как число зависимых переменных увеличилось только на $h-1$ единиц, следовательно, целое число $\rho = \nu - r_1$ *действительно уменьшилось на единицу.*

116. Из анализа предыдущих пунктов следует регулярный метод получения из данной дифференциальной системы не в инволюции последовательности дифференциальных систем, допускающих те же решения, что и исходная система. Если в данный момент полученная система несовместна, то несовместна и исходная система; если полученная система не допускает двумерных интегральных элементов, имеющих началом общую точку пространства зависимых и независимых переменных, то из нее получают новую систему, для которой число ρ уменьшается; если полученная система допускает двумерные интегральные элементы, имеющие началом общую точку, но без того, чтобы система стала в инволюции, получают новую систему, для которой число ρ еще уменьшится. Поскольку целое число ρ не может безгранично уменьшаться, *наступит момент, когда или система будет несовместной, или система будет в инволюции.*

Теорема. *Всякое решение замкнутой дифференциальной системы с двумя независимыми переменными может рассматриваться, как составляющее часть общего решения системы в инволюции, которую можно образовать регулярным способом в конце конечного ряда операций.*

117. Замечание. В действительности мы ограничены теми решениями начальной системы (3), для которых ранг системы, образованной дифференциальными уравнениями первого порядка, имеет наибольшее значение, и те же ограничения неявно налагаются на дифференциальные системы, которые последовательно получаются из данной. В частности, если исходная дифференциальная система имеет особые решения, эти решения остаются в стороне. Если желают дать теореме, сформулированной в предыдущем пункте, всю ее значимость, необходимо обратить внимание на *решение, определяемое начальной системой,* и для каждой последовательной системы начинать с присоединения, если они существуют, соотношений между зависимыми и независимыми переменными, которые выражают, что ранг системы линейных дифференциальных уравнений имеет значение, соответствующее рассматриваемому решению. К несчастью, *не очевидно, что ранг новой системы линейных дифференциальных уравнений увеличится,* т. е. что *целое число* ρ *уменьшится,* хотя бы число независимых соотношений между зависимыми и независимыми переменными увеличилось. Также нельзя, строго говоря, утверждать, что теорема доказана. Тем не менее соображения этого раздела дают нам практический метод получения всех решений заданной системы таким способом, что каждое решение составляет часть общего решения системы в инволюции, образованной без предварительного интегрирования.

Часть вторая

ПРИЛОЖЕНИЯ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Глава VII

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

I. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ТЕОРИИ ПОДВИЖНОГО РЕПЕРА

1. Рассмотрим в обычном пространстве семейство $\mathfrak{F}$ прямоугольных трехгранников, зависящее от некоторого числа параметров. Будем обозначать буквой A вершину одного из этих трехгранников и буквами $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ — единичные векторы его осей. Инфинитезимальное перемещение, которое переводит трехгранник τ семейства в бесконечно близкий трехгранник τ', будет определено, если известны инфинитезимальные векторы $d\vec{A}, d\vec{e}_1, d\vec{e}_2, d\vec{e}_3$. Разложение их проектированием на оси трехгранника τ дает соотношения

$$d\vec{A} = \omega^i \vec{e}_i, \qquad d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j,$$

где ω^i и ω_i^j — дифференциальные формы, линейные относительно дифференциалов параметров семейства $\mathfrak{F}$. Это *относительные компоненты* инфинитезимальных перемещений трехгранника. Они, впрочем, не будут независимыми, так как векторы $\vec{e}_i$ должны удовлетворять соотношениям

$$(\vec{e}_1)^2 = (\vec{e}_2)^2 = (\vec{e}_3)^2 = 1,$$
$$\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0.$$

После дифференцирования эти соотношения дают

$$\omega_1^1 = \omega_2^2 = \omega_3^3 = 0,$$

$$\omega_2^3 + \omega_3^2 = \omega_3^1 + \omega_1^3 = \omega_1^2 + \omega_2^1 = 0.$$

В дальнейшем мы будем писать не различая ω_i^j или ω_{ij}. Кроме трех форм ω^1, ω^2, ω^3, которые определяют компоненты по осям трехгранника τ того параллельного переноса, который приводит к совпадению точку $\vec{A}$ с точкой $\vec{A}+d\vec{A}$, существуют еще три другие формы:

$$\omega_{23} = -\omega_{32}, \qquad \omega_{31} = -\omega_{13}, \qquad \omega_{12} = -\omega_{21};$$

они определяют компоненты вращения, которое приводит трехгранник τ к эквиполлентности с бесконечно близким трехгранником *.

2. Шесть форм ω^1, ω^2, ω^3, ω_{23}, ω_{31}, ω_{12} удовлетворяют соотношениям, которые систематически употреблял Дарбу в теории движения твердого тела с двумя степенями свободы (с двумя параметрами). Эти соотношения вытекают из внешнего дифференцирования уравнений (1). Действительно, имеем

$$d\omega^i\vec{e}_i - [\omega^i d\vec{e}_i] = 0, \quad \text{или} \quad d\omega^i - [\omega^k\omega_k^i] = 0,$$

$$d\omega_i^j\vec{e}_j - [\omega_i^j d\vec{e}_j] = 0, \quad \text{или} \quad d\omega_i^j - [\omega_i^k\,\omega_k^j] = 0;$$

отсюда *уравнения структуры*

$$\left.\begin{aligned} d\omega^i &= [\omega^k\omega_{ki}] = [\omega_{ik}\omega^k], \\ d\omega_i^j &= [\omega_i^k\,\omega_k^j]. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Последние уравнения (2) можно еще записать в виде

$$d\omega_i^j = -[\omega_i^k\,\omega_{jk}]. \tag{2'}$$

3. Предположим наоборот, что даны шесть дифференциальных форм ω^i, $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$, построенные на q переменных u^k и их дифференциалах, удовлетворяющих уравнениям (2). Тогда существует семейство прямоугольных трехгранников, зависящее от q параметров u^1, u^2, ..., u^q, так что формы ω^i, ω_{ij} будут относительными компонентами инфинитезимальных перемещений трехгранников этого семейства.

Действительно, рассмотрим наиболее общее возможное семейство ортогональных трехгранников, зависящее от шести параметров: $v^1, v^2, \ldots, v^6$, и пусть $\bar{\omega}^i\ (v, dv)$, $\bar{\omega}_{ij}\ (v, dv)$ —

* Эквиполлентные трехгранники — трехгранники с соответственно параллельными векторами. — *Прим. перев.*

соответствующие относительные компоненты их инфинитезимальных перемещений. Уравнения

$$\left.\begin{aligned} \bar{\omega}^i(v;\ dv) &= \omega^i(u;\ du), \\ \bar{\omega}_{ij}(v;\ dv) &= \omega_{ij}(u;\ du), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где все v^i рассматриваются как неизвестные функции переменных $u^1, u^2, \ldots, u^q$, образуют вполне интегрируемую систему.

Действительно, внешнее дифференцирование уравнений (3) с помощью формул (2) приведет к одним и тем же выражениям, как в левой части уравнения, так и в правой; только в левой части квадратичная форма будет выражена через формы $\bar{\omega}^i$, $\bar{\omega}_{ij}$, а в правой — через формы ω^i, ω_{ij}. Значит, полученные соотношения являются следствием уравнений (3), что и требовалось доказать.

Следовательно, можно поставить в соответствие каждой системе значений u^i прямоугольный трехгранник с параметрами v^i, который будет единственным, если наложить начальное условие: заданным значениям $(u^i)_0$ соответствует определенный трехгранник с параметрами $(v^i)_0$.

Очевидно, все семейства искомых трехгранников получаются из одного из них произвольным перемещением, сопровождаемым симметрией или без нее (настоящее перемещение будет, если фиксирована ориентация искомых трехгранников).

II. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

4. К заданной поверхности S можно присоединить семейство ортогональных трехгранников, вершины которых образуют поверхность, а векторы $\vec{e}_3$ нормальны к этой поверхности. Это семейство зависит от двух параметров, если к каждой точке A поверхности присоединяется один трехгранник τ по определенному закону, например, если в качестве векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ брать единичные векторы главных касательных в точке A *; надо лишь еще предположить, что мы остаемся в области поверхности без омбилических точек (точек округления), где главные направления неопределенны.

Семейство трехгранников может зависеть и от трех параметров, если присоединять к каждой точке A все прямоугольные реперы, векторы $\vec{e}_3$ которых нормальны к поверхности S.

* Мы будем называть такие трехгранники *трехгранниками Дарбу*.

В каждом из этих случаев, если вектор $\overrightarrow{dA}$ касается поверхности, получим

$$\omega^3 = 0, \tag{4}$$

откуда, в силу уравнений структуры (2) и выражения для внешнего дифференциала $d\omega^3$, следует

$$[\omega^1\omega_{13}] + [\omega^2\omega_{23}] = 0. \tag{5}$$

Обратно, всякий раз, когда для семейства ортогональных трехгранников форма ω^3 тождественно равна нулю, вершина A этих трехгранников опишет поверхность, для которой векторы $\vec{e}_3$ будут нормалями.

Действительно, уравнения $\omega^1 = \omega^2 = 0$ образуют теперь вполне интегрируемую систему в силу уравнений структуры

$$d\omega^1 = [\omega^2\omega_{21}], \qquad d\omega^2 = [\omega^1\omega_{12}],$$

Пусть u и v — два независимые первые интеграла этой системы; уравнение

$$\overrightarrow{dA} = \omega^1\vec{e}_1 + \omega^2\vec{e}_2$$

показывает, что точка A зависит только от u и v. Точка A, следовательно, описывает поверхность, касательная плоскость которой содержит каждый из векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ и, значит, нормальна к вектору $\vec{e}_3$.

Мы предположили неявно, что формы ω^1 и ω^2 линейно независимы, без этого точка A описывала бы линию, а не поверхность.

5. Рассмотрим линию на поверхности; определим на ней положительное направление и обозначим через $\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$ единичные векторы трехгранника Френе, присоединенного к точке A кривой. Пусть θ будет угол $(\vec{e}_1, \vec{T})$; положительным направлением вращения в касательной плоскости будем считать вращение, которое переводит вектор $\vec{e}_1$ в положение $\vec{e}_2$ поворотом на угол $+\frac{\pi}{2}$. Пусть $\vec{\varepsilon}$ — единичный вектор, который получается из вектора $\vec{T}$ вращением на угол $+\frac{\pi}{2}$ в касательной плоскости. Пусть, наконец, $\tilde{\omega}$ — угол $(\vec{N}, \vec{e}_3)$; положительным направлением вращения в плоскости, перпендикулярной к вектору $\vec{T}$, будем считать вращение, которое переводит вектор $\vec{\varepsilon}$ в вектор $\vec{e}_3$ поворотом на угол $+\frac{\pi}{2}$.

Имеем

$$\left.\begin{aligned} \vec{T} &= \vec{e}_1 \cos\theta + \vec{e}_2 \sin\theta, \\ \vec{\varepsilon} &= -\vec{e}_1 \sin\theta + \vec{e}_2 \cos\theta, \\ \vec{N} &= \vec{\varepsilon} \sin\widetilde{\omega} + \vec{e}_3 \cos\widetilde{\omega}, \\ \vec{B} &= -\vec{\varepsilon} \cos\widetilde{\omega} + \vec{e}_3 \sin\widetilde{\omega}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Напомним, наконец, формулы Френе:

$$\left.\begin{aligned} d\vec{T} &= \frac{ds}{\rho}\vec{N}, \\ d\vec{N} &= -\frac{ds}{\rho}\vec{T} + \frac{ds}{\tau}\vec{B}, \\ d\vec{B} &= -\frac{ds}{\tau}\vec{N}, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где элемент дуги обозначен через ds, кривизна и кручение — через $\frac{1}{\rho}$ и $\frac{1}{\tau}$.

Дифференцирование первого уравнения (6) дает [1]

$$\frac{ds}{\rho}\vec{N} = (d\theta + \omega_{12})\vec{\varepsilon} + (\omega_{13}\cos\theta + \omega_{23}\sin\theta)\vec{e}_3;$$

коэффициент при векторе $\vec{\varepsilon}$ будет проекцией на касательную плоскость вектора $\frac{ds}{\rho}\vec{N}$, отложенного на главной нормали; коэффициент при $\vec{e}_3$ будет его проекцией на нормаль к поверхности. Отсюда получается [2]

$$\left.\begin{aligned} d\theta + \omega_{12} &= \frac{ds\sin\widetilde{\omega}}{\rho} = \frac{ds}{R_g}, \\ \omega_{13}\cos\theta + \omega_{23}\sin\theta &= \frac{ds\cos\widetilde{\omega}}{\rho} = \frac{ds}{R_n}, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где $\frac{1}{R_g}$ и $\frac{1}{R_n}$ — *геодезическая кривизна* и ***нормальная кривизна***.

Имеем далее [3]

$$\frac{ds^2}{R_n} = \omega_{13}\cos\theta ds + \omega_{23}\sin\theta ds = \omega^1\omega_{13} + \omega^2\omega_{23};$$

форма $\omega^1\omega_{13} + \omega^2\omega_{23}$ — *вторая основная форма* Φ *Гаусса;* она равна также

$$-d\vec{e}_3 \cdot d\vec{A} = -(\omega_{31}\vec{e}_1 + \omega_{32}\vec{e}_2)(\omega^1\vec{e}_1 + \omega^2\vec{e}_2) =$$

$$= (\omega_{13}\vec{e}_1 + \omega_{23}\vec{e}_2)(\omega^1\vec{e}_1 + \omega^2\vec{e}_2).$$

Следовательно,

$$\Phi = \omega^1\omega_{13} + \omega^2\omega_{23} = \frac{ds^2}{R_n}. \tag{9}$$

Первая основная форма F есть линейный элемент ds^2 поверхности:

$$F = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 = ds^2. \tag{10}$$

Третья форма играет тоже важную роль. Продифференцируем уравнение

$$\vec{e}_3 = \vec{N}\cos\tilde{\omega} + \vec{B}\sin\tilde{\omega},$$

которое легко получается из уравнений (6). Принимая во внимание равенства (6) и (7), получим

$$d\vec{e}_3 = \omega_3^1\vec{e}_1 + \omega_3^2\vec{e}_2 = \left(-\frac{ds}{\rho}\vec{T} + \frac{ds}{\tau}\vec{B}\right)\cos\tilde{\omega} - \vec{N}\sin\tilde{\omega}\,d\tilde{\omega} -$$

$$-\frac{ds}{\tau}\vec{N}\sin\tilde{\omega} + \vec{B}\cos\tilde{\omega}\,d\tilde{\omega} = -\left(d\tilde{\omega} + \frac{ds}{\tau}\right)\left(\vec{N}\sin\tilde{\omega} - \vec{B}\cos\tilde{\omega}\right) -$$

$$-ds\,\frac{\cos\tilde{\omega}}{\rho}\vec{T} = -\left(d\tilde{\omega} + \frac{ds}{\tau}\right)\vec{\varepsilon} - \frac{ds}{R_n}\vec{T},$$

откуда, проектируя на $\vec{T}$ и $\vec{\varepsilon}$, будем иметь

$$-\vec{T}d\vec{e}_3 = \frac{ds}{R_n} = \omega_{13}\cos\theta + \omega_{23}\sin\theta,$$

$$-\vec{\varepsilon}d\vec{e}_3 = d\tilde{\omega} + \frac{ds}{\tau} = -\omega_{13}\sin\theta + \omega_{23}\cos\theta.$$

Мы снова находим выражение $\frac{ds}{R_n}$, уже полученное во второй формуле (8). Что касается $\frac{d\tilde{\omega}}{ds} + \frac{1}{\tau}$, то это *геодезическое кру-*

чение $\frac{1}{T_g}$; заменяя $\cos\theta$ на $\frac{\omega^1}{ds}$ и $\sin\theta$ на $\frac{\omega^2}{ds}$, получаем соотношение

$$\frac{ds^2}{T_g} = \left(\frac{d\tilde{\omega}}{ds} + \frac{1}{\tau}\right) ds^2 = \omega^1\omega_{23} = \omega^2\omega_{13}. \tag{11}$$

Форма

$$\Psi = \omega^1\omega_{23} - \omega^2\omega_{13} \tag{12}$$

третья основная форма поверхности.

Заметим, что вторая основная форма зависит от выбора положительного направления на нормали к поверхности, но не зависит от ориентации трехгранника. Третья основная форма, напротив, меняет знак при изменении ориентации трехгранника, но не зависит от выбора положительного направления на нормали.

6. Формулы предыдущего пункта сохраняют силу, даже если присоединить к каждой точке поверхности бесконечное множество ортогональных трехгранников при условии, что все они имеют один и тот же вектор $\vec{e}_3$, нормальный к поверхности. Предположим теперь, что к каждой точке A поверхности S присоединяется один определенный трехгранник. Соотношение (5) позволяет написать

$$\left.\begin{aligned} \omega_{13} &= a\omega^1 + b\omega^2, \\ \omega_{23} &= b\omega^1 + c\omega^2. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Теперь три основные формы запишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} F &= (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2, \\ \Phi &= a(\omega^1)^2 + 2b\omega^1\omega^2 + c(\omega^2)^2, \\ \Psi &= b(\omega^1)^2 + (c - a)\omega^1\omega^2 - b(\omega^2)^2. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Заметим, что форма Ψ является якобианом формы F и Φ, т. е. определителем, составленным из половин частных производных этих форм по ω^1 и ω^2 [4].

Линии кривизны определяются уравнением $\Psi = 0$, асимптотические линии — уравнением $\Phi = 0$. Что касается главных кривизн, то они даются системой уравнений

$$\frac{a\omega^1 + b\omega^2}{\omega^1} = \frac{b\omega^1 + c\omega^2}{\omega^2} = \frac{1}{R},$$

откуда получается квадратное уравнение для $\frac{1}{R}$:

$$\left(a - \frac{1}{R}\right)\left(c - \frac{1}{R}\right) - b^2 = 0; \tag{15}$$

следовательно, средняя и полная кривизны поверхности запишутся в виде:

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=a+c,\quad \frac{1}{R_1R_2}=ac-b^2. \tag{15'}$$

Если векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ лежат на главных касательных, то

$$\frac{1}{R_1}=a,\quad \frac{1}{R_2}=c,\quad b=0,$$

и в этом случае

$$\left.\begin{aligned}\Phi&=\frac{1}{R_1}(\omega^1)^2+\frac{1}{R_2}(\omega^2)^2,\\ \Psi&=\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)\omega^1\omega^2.\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Если угол, образованный положительным направлением касательной к ориентированной кривой с первой главной касательной поверхности обозначить буквой θ, то получим для этой кривой формулы [5]:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{R_n}=\frac{\cos^2\theta}{R_1}+\frac{\sin^2\theta}{R_2},\quad \frac{1}{T_g}=\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)\sin\theta\cos\theta,\\ &\frac{1}{R_g}=\frac{d\theta+\omega_{12}}{ds}.\end{aligned}\right. \tag{17}$$

Отметим наконец, что, если принять за вектор $\vec{e}_1$ единичный вектор касательной к заданной на поверхности кривой C, то в каждой точке этой кривой имеем [6]

$$\frac{1}{R_n}=a,\quad \frac{1}{T_g}=b,\quad \frac{1}{R_g}=\frac{d\theta+\omega_{12}}{ds}. \tag{18}$$

Отсюда, в частности, следует, что если C — асимптотическая линия на поверхности, то в каждой точке имеем $a=0$, откуда в силу уравнения (15')

$$b^2=-\frac{1}{R_1R_2}, \tag{19}$$

и кручение кривой равно $\pm\sqrt{-\frac{1}{R_1R_2}}$ (*теорема Эннепера*).

7. Мы приступим теперь к различным задачам классической теории поверхностей. Эти задачи главным образом будут иметь объектом исследования определение поверхностей, обладающих некоторыми свойствами, или определение пары поверхностей, допускающих точечное соответствие, обладающее заданными свойствами.

Мы будем сводить задачи первой категории к отысканию семейства ортогональных трехгранников, присоединенных к различным точкам искомой поверхности, и таких, что вектор $\vec{e}_3$ будет нормалью к поверхности. Во многих случаях будет удобно присоединить к каждой точке поверхности *трехгранник Дарбу*, векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ которого лежат на главных касательных; это, правда, имеет неудобство: приходится ограничиваться той областью поверхности, где нет омбилических точек, потому что в омбилической точке трехгранник Дарбу неопределен. Во многих случаях может быть выгодно присоединить к каждой точке поверхности все ортогональные трехгранники, у которых вектор $\vec{e}_3$ будет нормален к поверхности, что снимает ограничение, о котором шла речь. Правда, этот последний способ, казалось бы, вводит паразитические неизвестные, но, как мы увидим, это только видимость.

Задачи второй категории тоже приводятся к отысканию семейства ортогональных трехгранников, присоединенных к двум искомым поверхностям; каждый трехгранник, присоединенный к точке A первой поверхности, соответствует определенному трехграннику, присоединенному к соответствующей точке A' второй поверхности; точечное соответствие, существующее между двумя поверхностями, устанавливает в действительности определенное соответствие между касательными AT и $A'T'$, исходящими из двух соответствующих точек A и A'.

Задача I

Поверхности, все точки которых омбилические

8. Поскольку вторая основная форма пропорциональна первой [7], имеем в уравнениях (13) п. **6**

$$a = c, \quad b = 0.$$

Семейство прямоугольных трехгранников, присоединенных к различным точкам поверхности, может быть, следовательно, рассмотрено как интегральное многообразие уравнений

$$\omega^3 = 0, \quad \omega_{13} = a\omega^1, \quad \omega_{23} = a\omega^2,$$

которые после замыкания посредством внешнего дифференцирования образуют систему

$$\omega^3 = 0, \quad \omega_{13} = a\omega^1, \quad \omega_{23} = a\omega^2, \quad [\omega^1 da] = 0, \quad [\omega^2 da] = 0.$$

Эта система — не в инволюции; она влечет $da=0$, откуда получается новая система

$$\omega^3 = 0, \quad \omega_{13} = a\omega^1, \quad \omega_{23} = a\omega^2, \quad da = 0, \tag{I,1}$$

которая, как легко видеть, будет вполне интегрируемой, поскольку внешнее дифференцирование не дает никаких новых уравнений.

Если постоянная a равна нулю, мы видим, что $d\vec{e}_3=0$; нормаль к поверхности имеет фиксированное направление: поверхность есть плоскость. Если постоянная a не равна нулю, то точка

$$\vec{P} = \vec{A} + \frac{1}{a}\vec{e}_3$$

неподвижна, ибо

$$d\vec{P} = \left(\omega^1 + \frac{1}{a}\omega_{31}\right)\vec{e}_1 + \left(\omega^2 + \frac{1}{a}\omega_{32}\right)\vec{e}_2 = 0;$$

имеем сферу с центром P и радиусом $\frac{1}{a}$. Все искомые поверхности, таким образом, получены; они зависят от четырех произвольных постоянных.

Однако семейство трехгранников, которое мы взяли как вспомогательное неизвестное, не зависит только от произвольных постоянных, ибо в каждой точке любой из сфер, которые образуют искомое семейство поверхностей, прямоугольный трехгранник, который к ней присоединен, можно выбрать совершенно произвольно с единственным условием, чтобы его вектор $\vec{e}_3$ был нормален к поверхности; эти трехгранники зависят, следовательно, от одной произвольной функции двух аргументов. Но эта функция несущественная и не представляет интереса для первоначальной задачи. *Она отброшена самой дифференциальной системой* (I, 1), *которая выражает условия задачи.* Действительно, эта система не вводит шесть форм ω^1, ω^2, ω^3, ω_{13}, ω_{23}, ω_{12}; она вводит только пять из них ω^3, ω^1, ω^2, ω_{13}, ω_{23}. Приравнивая нулю эти пять форм, получим вполне интегрируемую систему [*это характеристическая система уравнений* (I, 1)], решение которой зависит от пяти произвольных постоянных u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, каждое частное решение определяет семейство ортогональных трехгранников, зависящее от одного параметра. Геометрическое истолкование такого семейства легко получить, ибо, если оставаться внутри этого семейства, то формы ω^3, ω^1, ω^2,

ω_{13}, ω_{23} остаются нулями; начало A трехгранника остается неподвижным ($\omega^1 = \omega^2 = \omega^3 = 0$) и вектор $\vec{e}_3$ будет также фиксирован ($\omega_{31} = \omega_{32} = 0$). Семейство образовано, следовательно, из трехгранников, имеющих данное начало A и данный вектор $\vec{e}_3$; оно геометрически эквивалентно *элементу касания Ли* (точка и плоскость, проходящая через эту точку). Замкнутая дифференциальная система (I, 1), которая вводит зависимые и независимые переменные u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, a, выражает, следовательно, просто свойство элементов касания искомой поверхности, точнее, то свойство, которое характеризует элементы касания поверхности, все точки которой омбилические; в дифференциальную систему, к которой мы пришли, *входят только компоненты* ω^i, ω_{ij}, *играющие действенную роль в заданной проблеме.*

Задача II

Установить между двумя заданными поверхностями конформное точечное соответствие

9. Пусть S и $\bar{S}$ — две заданные поверхности; надо получить между этими двумя поверхностями такое точечное соответствие, чтобы между их линейными элементами ds^2 и $\overline{ds}^2$ существовало соотношение вида

$$\overline{ds^2} = u^2 ds^2.$$

Присоединим к каждой точке этих двух поверхностей наиболее общий правый ортогональный трехгранник, имеющий эту точку своим началом и вектор $\vec{e}_3$ нормалью поверхности. Тогда получим соотношение

$$(\bar{\omega}^1)^2 + (\bar{\omega}^2)^2 = u^2 [(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2],$$

откуда

$$\bar{\omega}^1 = u(\omega^1 \cos\theta + \omega^2 \sin\theta),$$

$$\bar{\omega}^2 = u(-\omega^1 \sin\theta + \omega^2 \cos\theta)$$

или

$$\bar{\omega}^1 = u(\omega^1 \cos\theta + \omega^2 \sin\theta),$$

$$\bar{\omega}^2 = u(\omega^1 \sin\theta - \omega^2 \cos\theta).$$

Можно ограничиться первым случаем, ибо во втором случае можно заменить векторы $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ трехгранника, присоединенного ко второй поверхности, на $-\vec{e}_2$ и $-\vec{e}_3$, что даст новый правый трехгранник, который приведет к формулам первого случая.

Если теперь повернуть трехгранник на угол θ около его третьей оси, то окончательно каждому трехграннику, присоединенному к первой поверхности, будет соответствовать определенный трехгранник, присоединенный ко второй поверхности, так что будут иметь место соотношения

$$\bar{\omega}^1 = u\omega^1, \quad \bar{\omega}^2 = u\omega^2. \tag{II,1}$$

Эта система после внешнего дифференцирования замыкается и дает новую систему

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\omega}^1 = u\omega^1, \quad \bar{\omega}^2 = u\omega^2, \\ &[\omega^1 du] - u\,[\omega^2, \bar{\omega}_{12} - \omega_{12}] = 0, \\ &[\omega^2 du] + u\,[\omega^1, \bar{\omega}_{12} - \omega_{12}] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{II,2}$$

Формы ω^1 и ω^2 — линейные комбинации дифференциалов параметров, от которых зависит положение текущей точки поверхности S; число неизвестных функций равно четырем, именно: два параметра, от которых зависит положение точки $\bar{A}$ поверхности $\bar{S}$, соответствующей точке A поверхности S, отношение локального подобия u поверхности $\bar{S}$ по отношению к S в окрестности точки A, наконец, положение в касательной плоскости в точке $\bar{A}$ поверхности $\bar{S}$ касательной, которая соответствует заданной касательной поверхности S в точке A. В систему (II, 2) существенно входят 4 формы, отличные от ω^1, ω^2, именно $\bar{\omega}^1$, $\bar{\omega}^2$, du, $\bar{\omega}_{12}—\omega_{12}$. Можно заметить, что обращение в нуль этих четырех форм фиксирует точку $\bar{A}$ и функцию u и, кроме того, выражает, что соответствующие трехгранники с началами A и $\bar{A}$ повернулись на один и тот же угол вокруг их третьей оси, т. е., что и векторы $\vec{e}_1$ двух трехгранников постоянно соответствуют.

Мы получим полярную матрицу (п. **93**) системы (II, 2), если предположим, что ее столбцы соответствуют формам du и $\bar{\omega}_{12} - \omega_{12}$; определитель ее равен

$$\begin{vmatrix} \omega^1 & -u\omega^2 \\ \omega^2 & u\omega^1 \end{vmatrix} = u\left\{(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2\right\}. \tag{II,3}$$

Ее ранг $s_1 = 2$ равен числу квадратичных уравнений, которые фигурируют в уравнениях (II, 2). *Система,* следовательно,— *в инволюции* (п. **94**), *и ее общее решение зависит от двух произвольных функций одного аргумента.*

Поскольку функция u существенно отлична от нуля, особого решения нет; нет и действительных характеристик.

10. *Проблема Коши.* Всякое решение вполне определяется одномерным решением уравнений

$$\bar{\omega}^1 = u\omega^1, \quad \bar{\omega}^2 = u\omega^2.$$

Для этого зададим произвольную кривую C на поверхности S и произвольную кривую $\bar{C}$ на поверхности $\bar{S}$. Произвольно выбирая трехгранник, присоединенный к каждой точке поверхности S, берем в каждой точке линии C вектор $\vec{e}_1$ касательным к C так, чтобы иметь $\omega^2 = 0$; возьмем аналогично вектор $\vec{e}_1$ касательным в каждой точке линии $\bar{C}$; но вектор $\vec{e}_2$ может быть выбран двумя различными способами, каждому из которых соответствует определенный выбор $\vec{e}_3$. Установим теперь произвольное точечное (аналитическое) соответствие между C и $\bar{C}$, что дает функцию $u = \frac{d\bar{s}}{ds}$. Каждое из этих одномерных решений системы (II, 2) дает, следовательно, согласно общей теории, определенное конформное отображение $\bar{S}$ на S.

Аналитически задачу решить легко. При условии, что обе поверхности аналитические, можно ввести на каждой из них систему криволинейных координат: x, y, для S, $\bar{x}$, $\bar{y}$ для $\bar{S}$ так, чтобы

$$ds^2 = A^2(dx^2 + dy^2), \quad d\bar{s}^2 = \bar{A}^2(d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2).$$

Всякое конформное представление получается, если принять за $\bar{x} + i\bar{y}$ аналитическую функцию от $x + iy$, или аналитическую функцию от $x - iy$. Аналитическая кривая C, с другой стороны, определяется, если принять за $x + iy$ аналитическую функцию $f(t)$ действительного параметра t. Если считать, что каждой точке кривой $\bar{C}$ соответствует тот же параметр t, что и соответствующей точке кривой C, будем иметь

$$\bar{x} + i\bar{y} = \bar{f}(t),$$

где $\bar{f}(t)$ — определенная аналитическая функция от t. Исключая параметр t, получим аналитическое соотношение между двумя комплексными переменными $x+iy$, $\bar{x}+i\bar{y}$, и это аналитическое соотношение определит искомое конформное соответствие. Другое конформное соответствие получится, если исключить параметр t из уравнения $\bar{x}+i\bar{y}=\bar{f}(t)$ и уравнения, которое выражает $x-iy$ как функцию от t.

Задача III

Поверхности Вейнгартена

11. *Поверхностями Вейнгартена* называются такие поверхности, для которых между главными кривизнами существует заданное соотношение. Для симметрии их можно определять соотношением (аналитическим) между средней кривизной $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$ и полной кривизной $\frac{1}{R_1R_2}$.

Если мы присоединим к каждой точке одной из искомых поверхностей S произвольный правый ортогональный трехгранник, подчиненный единственному условию, чтобы вектор $\vec{e}_3$ был нормалью к поверхности, то дифференциальная система, которая выражает нашу задачу, будет образована уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} \omega^3=0,\quad \omega_{13}=a\omega^1+b\omega^2,\quad \omega_{23}=b\omega^1+c\omega^2,\\ F(a+c,\ ac-b^2)=0,\\ F_a\,da+F_b\,db+F_c\,dc=0. \end{aligned}\right\} \tag{III,1}$$

Эта система замыкается присоединением внешних квадратичных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} [\omega^1, da-2b\omega_{12}]+[\omega^2, db+(a-c)\,\omega_{12}]=0,\\ [\omega^1, db+(a-c)\,\omega_{12}]+[\omega^2, dc+2b\omega_{12}]=0. \end{aligned}\right\} \tag{III,2}$$

Впрочем, легко проверить, что последнее уравнение (III, 1) можно записать в виде [8]

$$F_a(da-2b\omega_{12})+F_b\{db+(a-c)\,\omega_{12}\}+ \\ +F_c(dc+2b\omega_{12})=0. \tag{III, 3}$$

Уравнения системы вводят, таким образом, формы ω^1, ω^2 — независимые линейные комбинации дифференциалов криволинейных координат точки поверхности S и шесть независимых форм ω^3, ω_{13}, ω_{23}, $da-2b\omega_{12}$, $db+(a-c)\omega_{12}$, $dc+2b\omega_{12}$, между последними тремя из которых существует соотношение (III, 3); в действительности имеется 5 неизвестных функций, чтобы определить элемент касания поверхности S, соответствующий системе данных значений криволинейных координат.

Здесь полярной матрицей, столбцы которой соответствуют трем формам $da-2b\omega_{12}$, $db+(a-c)\omega_{12}$, $dc+2b\omega_{12}$, будет матрица

$$\begin{pmatrix} \omega^1 & \omega^2 & 0 \\ 0 & \omega^1 & \omega^2 \\ F_a & F_b & F_c \end{pmatrix};$$

имеем $s_1=2$. Характеристики определяются уравнением

$$F_c(\omega^1)^2-F_b\omega^1\omega^2+F_a(\omega^2)^2=0,$$

или, если положить $a+c=u$, $ac-b^2=v$, уравнением

$$F_u\{(\omega^1)^2+(\omega^2)^2\}+F_v\{a(\omega^1)^2+2b\omega^1\omega^2+c(\omega^2)^2\}=0. \quad \text{(III,4)}$$

Мы видим, что характеристические касательные на каждой интегральной поверхности принадлежат инволюции, определяемой асимптотическими касательными и касательными минимальных линий [9].

Общий двумерный интегральный элемент определяется соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} da-2b\omega_{12}&=\alpha\omega^1+\beta\omega^2, \\ db+(a-c)\omega_{12}&=\beta\omega^1+\gamma\omega^2, \\ dc+2b\omega_{12}&=\gamma\omega^1+\delta\omega^2, \end{aligned}\right\} \quad \text{(III,5)}$$

причем

$$\alpha F_a+\beta F_b+\gamma F_c=0,$$
$$\beta F_a+\gamma F_b+\delta F_c=0.$$

12. *Проблема Коши.* Всякое нехарактеристическое одномерное решение уравнений (III, 1) дает однозначно одну поверхность Вейнгартена заданного класса. Такое решение определяется однопараметрическим семейством ортогональных трехгранников, к каждому из которых присоединены три числа a, b, c. Эти решения можно получить, если взять линию C, с каждой точкой которой связан по произвольному аналитическому закону правый ортогональный трехгранник, вектор $\vec{e}_1$ которого касается линии C (это возможно в силу неопределенности трехгранников, присоединенных к каждой точке искомой поверхности). Будем иметь тогда по формулам (18) п. **6**

$$a=\frac{1}{R_n}=\frac{\cos\tilde{\omega}}{\rho},\qquad b=\frac{1}{T_g}=\frac{d\tilde{\omega}}{ds}+\frac{1}{\tau},$$

где $\tilde{\omega}$ имеет указанный выше (п. 5) смысл. Что касается c, то оно дается уравнением

$$F(a+c,\ ac-b^2)=0;$$

каждому решению этого уравнения соответствует одномерное решение уравнения (1) и, следовательно, поверхность Вейнгартена, содержащая линию C и имеющая нормалью вектор $\vec{e}_3$, присоединенный к каждой точке этой линии.

Задача Коши может быть невозможной или неопределенной, если отправляться от характеристического одномерного решения, т. е. в силу (III, 4), если $F_u+aF_v=F_c=0$, или если значение, выбранное для параметра c в каждой точке линии C будет двойным корнем уравнения $F=0$, которое его определяет. Легко видеть, что, если кривая C взята произвольно, задача невозможна. Действительно, в силу (III, 3) имеем вдоль C

$$F_a(da-2b\omega_{12})+F_b\{db+(a-c)\,\omega_{12}\}=0, \qquad \text{(III,6)}$$

откуда в силу (III,5)

$$\alpha F_a+\beta F_b=0,\quad \beta F_a+\gamma F_b=0,$$

и, следовательно, вдоль линии $C\,(\omega^2=0)$

$$F_a\{db+(a-c)\,\omega_{12}\}+F_b(dc+2b\omega_{12})=0. \qquad \text{(III,7)}$$

Мы видим, что, если a, b, c известны как функции кривизны $\frac{1}{\rho}$, кручения $\frac{1}{\tau}$ кривой C и угла $\tilde{\omega}$, который нормаль к поверхности S образует с главной нормалью линии C, два уравнения $F=0$, $F_c=0$ и уравнение (III, 7) образуют три соотношения между $\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\tau}$, $\tilde{\omega}$, c и их производными по длине дуги s. Исключение c и $\tilde{\omega}$ приводит к соотношению между кривизной $\frac{1}{\rho}$, кручением $\frac{1}{\tau}$ и их производными по криволинейной абсциссе, что ограничивает возможный выбор кривой C.

Приступим теперь к изучению некоторых частных случаев.

13. Первый частный случай. *Поверхности, одна из главных кривизн которых имеет заданное постоянное значение* α. Соотношение $F=0$ здесь в силу формулы (15) примет вид

$$F \equiv (\alpha - a)\ (\alpha - c) - b^2.$$

Характеристики задаются уравнением

$$a\,(\omega^1)^2 + 2b\omega^1\omega^2 + c\,(\omega^2)^2 = \alpha\,\{(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2\}.$$

Между элементами характеристической кривой существуют соотношения

$$a = \alpha, \quad b = 0, \quad (c - \alpha)^2\,\omega_{12} = 0.$$

Возможны два случая. Если значение c вдоль кривой C не будет постоянно равно α мы должны иметь $\omega_{12}=0$; линия C, следовательно, будет геодезической линией поверхности с углом $\tilde{\omega}=0$, откуда

$$\alpha = \frac{1}{\rho}, \quad \frac{1}{\tau} = 0.$$

Характеристика C будет окружность с радиусом $\frac{1}{\alpha}$, причем развертывающаяся поверхность, описанная около поверхности вдоль кривой C, будет круглым цилиндром с тем же радиусом.

Если, напротив, $c=\alpha$ во всех точках C, то линия C будет омбилической линией; это линия, проведенная на сфере радиуса $\frac{1}{\alpha}$, ибо из уравнений

$$\frac{\cos\tilde{\omega}}{\rho} = \alpha, \qquad \frac{d\tilde{\omega}}{ds} + \frac{1}{\tau} = 0$$

получается

$$\rho^2 + \tau^2\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2 = \frac{1}{\alpha^2};$$

эта сфера, впрочем, образует поверхность, отвечающую требованию задачи.

Поверхности Вейнгартена рассмотренного класса — не что иное, как *каналовые поверхности*, огибающие однопараметрическое семейство сфер радиуса $\frac{1}{\alpha}$. Легко видеть теперь, что если задаться кривой C, проведенной на сфере Σ радиуса $\frac{1}{\alpha}$ и не являющейся большим кругом ее, то единственной каналовой поверхностью, которая могла бы содержать линию C и была бы касательной вдоль C к сфере Σ, является сама эта сфера: проблема Коши допускает в этом случае одно и только одно решение. Если, наоборот, задаться для C окружностью радиуса $\frac{1}{\alpha}$, то будет существовать бесконечное множество каналовых поверхностей, содержащих C в качестве своей геодезической: проблема Коши будет неопределенна *.

14. Второй частный случай. *Поверхности, разность главных кривизн которых имеет заданное значение* 2α. Соотношение между a, b, c в этом случае будет иметь вид

$$F \equiv (a-c)^2 + 4(b^2 - \alpha^2) = 0.$$

Характеристики задаются посредством уравнения

$$(a-c)(\omega^1)^2 + 4b\omega^1\omega^2 - (a-c)(\omega^2)^2 = 0.$$

Тремя соотношениями, которым удовлетворяет характеристика, будут равенства:

$$a - c = 0, \ b = \pm\alpha, \quad dc + 2b\omega_{12} = 0,$$

откуда, предполагая $b = \alpha$, получим

$$a = c = \frac{\cos\widetilde{\omega}}{\rho}, \quad \frac{d\widetilde{\omega}}{ds} + \frac{1}{\tau} = \alpha,$$

$$\cos\widetilde{\omega}\,\frac{d\frac{1}{\rho}}{ds} + \frac{\sin\widetilde{\omega}}{\rho}\left(\frac{1}{\tau} + \alpha\right) = 0.$$

Если $d\frac{1}{\rho}\Big/ds = 0$, где $\frac{1}{\rho} \neq 0$, то имеем или $\frac{1}{\tau} = +\alpha$ вместе с $\widetilde{\omega} = 0$, или $\frac{1}{\tau} = -\alpha$ вместе с $\frac{d\widetilde{\omega}}{ds} = 2\alpha$; в этих двух

* Проблема допускает здесь особые решения, уравнения характеристик станут тождеством, если $a = c = \alpha$, $b = 0$; это будут сферы радиуса $\frac{1}{\alpha}$.

случаях кривая C будет винтовой линией. В противном случае кривая C подчинена соотношению

$$\frac{d\frac{1}{\rho}}{ds}\cdot\frac{d\frac{1}{\tau}}{ds}-\left(\frac{1}{\tau}+\alpha\right)\frac{d^2\frac{1}{\rho}}{ds^2}+$$

$$+2\frac{\rho}{\tau}\left(\frac{d\frac{1}{\rho}}{ds}\right)^2+\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\tau^2}-\alpha^2\right)\left(\frac{1}{\tau}+\alpha\right)=0.$$

Когда это соотношение удовлетворено, угол $\widetilde{\omega}$ определен в каждой точке с точностью до 2π.

Задача не допускает особых решений, ибо уравнение характеристик приводит к тождеству только, если $a=c$, $b=0$, что противоречит уравнению $F=0$.

15. Третий частный случай. *Поверхности постоянной средней кривизны.* Соотношение между a, b, c, будет иметь вид

$$F=a+c-\alpha=0;$$

мнимые характеристики — минимальные линии интегральной поверхности. Проблема Коши допускает решение и только одно, если задать кривую C и в каждой точке ее трехгранник, вектор $\vec{e}_1$ которого касается этой кривой: тогда вдоль линии C

$$a=\frac{\cos\widetilde{\omega}}{\rho},\quad c=\alpha-\frac{\cos\widetilde{\omega}}{\rho},\qquad b=\frac{d\widetilde{\omega}}{ds}+\frac{1}{\tau}.$$

16. Четвертый частный случай. *Поверхности постоянной полной кривизны* K. Здесь имеем

$$F=ac-b^2-K=0.$$

Характеристики даются уравнением

$$a(\omega^1)^2+2b\omega^1\omega^2+c(\omega^2)^2=0;$$

это асимптотические линии интегральных поверхностей, действительные, если $K<0$. Три соотношения, которым должна удовлетворять характеристика, которую будем предполагать в каждой точке касающейся вектора $\vec{e}_1$, будут

$$a=0,\ b^2=-K,\quad c^2\omega_{12}+2b(dc+2b\omega_{12})=0,$$

или
$$\frac{\cos\tilde{\omega}}{\rho}=0, \quad \frac{d\tilde{\omega}}{ds}+\frac{1}{\tau}=\sqrt{-K},$$

$$\frac{dc}{ds}+\frac{c^2-4K}{2\sqrt{-K}}\cdot\frac{\sin\tilde{\omega}}{\rho}=0.$$

Если линия C не прямая, то

$$\cos\tilde{\omega}=0, \quad \sin\tilde{\omega}=\pm 1, \quad \frac{1}{\tau}=\sqrt{-K};$$

кривая имеет постоянное кручение, равное $\sqrt{-K}$ (теорема Эннепера); кроме того, имеем

$$c=\pm\sqrt{-K}\operatorname{tg}\int\frac{ds}{\rho}.$$

Если линия C — прямая, то скорость вращения нормали к поверхности вдоль этой прямой равна $\sqrt{-K}$ и для параметра c следует взять постоянное значение вдоль прямой.

Как и в предыдущих задачах, мы оставим в стороне вопрос, будет ли проблема Коши допускать одно решение или бесконечное множество решений, если начальные данные удовлетворяют предыдущим необходимым условиям. Несомненно бывают случаи, когда она допускает бесконечное множество решений, без чего искомые поверхности зависели бы не более, чем от одной произвольной функции одной переменной, как кривые с заданным постоянным кручением.

Задача IV

Изотермические поверхности

17. Изотермическая поверхность определяется как поверхность, линейный элемент ds^2 которой может быть приведен к виду $A(d\xi^2+d\eta^2)$, где ξ и η — параметры линий кривизны. Присоединим к каждой точке такой поверхности трехгранник Дарбу, векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ которого лежат на главных касательных, что заставит нас ограничиться рассмотрением части поверхности, не содержащей омбилических точек.

Обозначая буквами a и c главные кривизны, получим сначала уравнения

$$\omega^3=0, \qquad \omega_{13}=a\omega^1, \qquad \omega_{23}=c\omega^2. \qquad \text{(IV,1)}$$

Затем надо выразить, что существует функция u такая, что две формы $u\omega^1$ и $u\omega^2$ будут точными дифференциалами, что дает нам

$$\left.\begin{aligned} \left[\omega^1 \frac{du}{u}\right] + [\omega^2\omega_{12}] = 0, \\ \left[\omega^2 \frac{du}{u}\right] - [\omega^1\omega_{12}] = 0. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV,2)}$$

Наконец, дифференцируя внешним образом уравнения (IV, 1) и принимая во внимание уравнения структуры, получим

$$\left.\begin{aligned} [\omega^1 da] + (a - c)[\omega^2\omega_{12}] = 0, \\ [\omega^2 dc] + (a - c)[\omega^1\omega_{12}] = 0. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV,3)}$$

Уравнения (IV, 1, 2, 3) образуют замкнутую дифференциальную систему нашей задачи.

Общий двумерный интегральный элемент определяется уравнениями:

$$\begin{aligned} \omega_{12} &= h\omega^1 + k\omega^2, \\ \frac{du}{u} &= -k\omega^1 + h\omega^2, \\ da &= a_1\omega^1 + (a - c)h\omega^2, \\ dc &= (a - c)k\omega^1 + c_2\omega^2; \end{aligned}$$

он зависит от четырех произвольных параметров h, k, a_1, c_2; поскольку имеется четыре линейно независимых квадратичных уравнения (IV, 2) и (IV, 3), *система — в инволюции, и ее общее решение зависит от четырех произвольных функций одной переменной.* Определитель полярной системы равен $\omega^1\omega^2\{(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2\}$, действительными характеристиками будут линии кривизны интегральных поверхностей.

18. *Проблема Коши.* Всякое одномерное решение уравнений (IV, 1) может быть получено заданием ориентированной кривой C, к каждой точке которой присоединен ортогональный трехгранник, вектор $\vec{e}_3$ которого будет нормалью линии C; обозначая через θ угол, на который надо повернуть вектор $\vec{e}_1$ около вектора $\vec{e}_3$ в положительном направлении, чтобы получить положительное направление касательной линии C, будем иметь

$$\left.\begin{aligned} a\cos^2\theta + c\sin^2\theta &= \frac{\cos\widetilde{\omega}}{\rho}, \\ (c-a)\sin\theta\cos\theta &= \frac{d\widetilde{\omega}}{ds} + \frac{1}{\tau}, \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(IV,4)}$$

где $\widetilde{\omega}$ обозначает угол нормали к поверхности S с главной нормалью линии C. Можно было бы задать произвольно как функции длины дуги s углы $\widetilde{\omega}$ и θ; из двух предыдущих уравнений определяется a и c, если только произведение $\sin\theta\cos\theta$ не равно нулю. Наконец, функция u будет выбрана произвольно вдоль линии C. Этим начальным условиям будет соответствовать изометрическая поверхность, и только одна, содержащая линию C и допускающая в качестве трехгранника Дарбу в каждой точке линии C трехгранник, присоединенный к этой точке.

Эти начальные данные зависят от пяти произвольных функций одного переменного; это согласуется с тем, что мы получили, ибо можно определить поверхность S, принимая за кривую C сечение этой поверхности заданной плоскостью, что приводит к четырем произвольным функциям начальных данных, соответствующим проблеме Коши.

Предположим теперь, что мы приняли $\theta = 0$, так что линия C становится линией кривизны неизвестной интегральной поверхности. Уравнения (IV, 4) приводятся к уравнениям

$$a = \frac{\cos\widetilde{\omega}}{\rho}, \quad \frac{d\widetilde{\omega}}{ds} + \frac{1}{\tau} = 0,$$

но имеется дополнительное условие, связанное с тем, что уравнения (IV, 2) и (IV, 3) влекут за собой

$$\left[\omega^2, \ \frac{du}{u} + \frac{dc}{a-c}\right] = 0.$$

Следовательно, вдоль линии C мы должны иметь

$$\frac{du}{u} + \frac{dc}{a-c} = 0.$$

Можно будет задать линию C и функцию c; угол $\widetilde{\omega}$ будет задан с точностью до константы выражением $\left(-\int \frac{ds}{\tau}\right)$; будем иметь тогда $a = \frac{\cos\widetilde{\omega}}{\rho}$ и, наконец, функция u будет известна с точностью до множителя *(который, впрочем, не играет никакой роли в этом вопросе)*. В этом случае начальные данные вводят только три произвольные функции одного переменного. Мы оставим в стороне вопрос, существуют ли решения, совместные с этими данными, и какова степень их неопределенности. Существуют случаи, которым соответствует бесконечное множество интегральных поверхностей.

Частный случай. Минимальные поверхности являются частным случаем изотермических поверхностей, ибо для такой поверхности ($c=-a$) уравнения (IV, 2) и (IV, 3) показывают, что $\frac{du}{u}=\frac{da}{2a}$, что позволяет опустить уравнения (IV, 2). Вообще поверхности с постоянной средней кривизной будут изотермическими поверхностями, потому что $\frac{du}{u}=\frac{da}{a-c}$ есть точный дифференциал.

Задача V

Пары изометричных поверхностей

19. Пусть S и $\overline{S}$ — две изометричные поверхности, т. е. поверхности с одним и тем же линейным элементом ds^2. Присоединим к каждой точке S наиболее общий правый ортогональный трехгранник, вектор $\vec{e}_3$ которого является нормалью поверхности S. По предположению, существует точечное соответствие между S и $\overline{S}$, сохраняющее линейный элемент ds^2. В силу рассуждений, проведенных при решении задачи II, каждому правому трехграннику, присоединенному к поверхности S, можно поставить в соответствие правый трехгранник, присоединенный к $\overline{S}$ таким образом, что при этом соответствии будут иметь место соотношения $\overline{\omega}^1=\omega^1$, $\overline{\omega}^2=\omega^2$. Эти два соотношения после внешнего дифференцирования дают

$$[\omega^1, \overline{\omega}_{12}-\omega_{12}]=0, \qquad [\omega^2, \overline{\omega}_{12}-\omega_{12}]=0,$$

откуда следует, что $\overline{\omega}_{12}-\omega_{12}=0$. Окончательно, дифференциальная система, от которой зависит решение задачи, состоит из уравнений первой степени

$$\omega^3=0, \quad \overline{\omega}^3=0, \quad \overline{\omega}^1=\omega^1, \quad \overline{\omega}^2=\omega^2, \quad \overline{\omega}_{12}=\omega_{12}. \qquad (V,1)$$

Она должна быть пополнена внешним дифференцированием этих уравнений, которое дает три внешних квадратичных уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &[\omega^1 \omega_{13}] + [\omega^2\omega_{23}] = 0, \\ &[\omega^1 \bar{\omega}_{13}] + [\omega^2\bar{\omega}_{23}] = 0, \\ &[\bar{\omega}_{13}\bar{\omega}_{23}] - [\omega_{13}\omega_{23}] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{V,2}$$

Все эти уравнения вводят 11 форм: ω^1, ω^2, ω^3, $\bar{\omega}^1$, $\bar{\omega}^2$, $\bar{\omega}^3$, ω_{13}, ω_{23}, $\bar{\omega}_{13}$, $\bar{\omega}_{23}$, $\bar{\omega}_{12} - \omega_{12}$; действительно, существует 11 зависимых и независимых переменных: десять определяют элементы касания этих двух поверхностей, одиннадцатый определяет соответствие между касательными двух поверхностей в двух соответствующих точках.

Общий двумерный интегральный элемент определяется равенствами:

$$\left.\begin{aligned} \omega_{13} &= a\omega^1 + b\omega^2, \\ \omega_{23} &= b\omega^1 + c\omega^2, \\ \bar{\omega}_{13} &= \bar{a}\omega^1 + \bar{b}\omega^2, \\ \bar{\omega}_{23} &= \bar{b}\omega^1 + \bar{c}\omega^2 \end{aligned}\right\} \tag{V,3}$$

с конечным соотношением

$$\bar{a}\bar{c} - \bar{b}^2 = ac - b^2. \tag{V,4}$$

Заметим тут же, что соотношение (V, 4) выражает равенство полных кривизн в соответствующих точках двух поверхностей и что уравнение $\bar{\omega}_{12} = \omega_{12}$ выражает равенство геодезических кривизн двух соответствующих линий (теоремы Гаусса).

Полярной матрицей, столбцы которой соответствуют формам ω_{13}, ω_{23}, $\bar{\omega}_{13}$, $\bar{\omega}_{23}$, будет матрица

$$\begin{pmatrix} \omega^1 & \omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^1 & \omega^2 \\ \omega_{23} & -\omega_{13} & -\bar{\omega}_{23} & \bar{\omega}_{13} \end{pmatrix};$$

поскольку ее ранг равен трем, числу квадратичных уравнений (V, 2), *система — в инволюции, и ее общее решение зависит от* $s_2=1$ *произвольных функций двух переменных.*

Одномерные характеристические решения, которые сводят ранг полярной матрицы к 2, определяются уравнениями:

$$\omega^1\omega_{13}+\omega^2\omega_{23}=0, \qquad \omega^1\overline{\omega}_{13}+\omega^2\overline{\omega}_{23}=0;$$

они существуют, только если две поверхности S и $\overline{S}$ допускают две соответствующие асимптотические линии.

Особыми решениями системы будут такие решения, для которых два предыдущих уравнения будут тождествами; они образуются произвольной парой плоскостей; они тривиальны.

20. Отыскание поверхностей $\overline{S}$, изометричных данной поверхности. Пусть S — заданная поверхность; замкнутая дифференциальная система, которая определяет поверхность $\overline{S}$, приводится к уравнениям:

$$\left.\begin{aligned}\overline{\omega}^1=\omega^1,\quad \overline{\omega}^2=\omega^2,\quad \overline{\omega}^3=0,\quad \overline{\omega}_{12}=\omega_{12},\\ [\omega^1\overline{\omega}_{13}]+[\omega^2\overline{\omega}_{23}]=0,\\ [\overline{\omega}_{13}\overline{\omega}_{23}]-K[\omega^1\omega^2]=0,\end{aligned}\right\} \tag{V,5}$$

где K обозначает полную кривизну $ac-b^2$ поверхности S.

Общий двумерный интегральный элемент задается уравнениями:

$$\left.\begin{aligned}\overline{\omega}_{13}=\overline{a}\omega^1+\overline{b}\omega^2,\\ \overline{\omega}_{23}=\overline{b}\omega^1+\overline{c}\omega^2,\end{aligned}\right\} \tag{V,6}$$

с конечным соотношением

$$\overline{a}\overline{c}-\overline{b}^2=K. \tag{V,7}$$

Определитель полярной матрицы равен:

$$\begin{vmatrix}\omega^1 & \omega^2\\ -\overline{\omega}_{23} & \overline{\omega}_{13}\end{vmatrix}=\omega^1\overline{\omega}_{13}+\omega^2\overline{\omega}_{23};$$

ее ранг равен 2, т. е. числу квадратичных уравнений (5), *система — в инволюции, и общее решение ее зависит от двух произвольных функций одной переменной.*

21. *Проблема Коши.* Зададим кривую C на поверхности S; можно воспользоваться неопределенностью трехгранников, присоединенных к различным точкам поверхности S, чтобы сохранить в каждой точке линии C только один трехгранник, вектор $\vec{e}_1$ которого будет касаться линии C в направлении, выбранном за положительное на этой кривой. Зададим теперь ориентированную кривую $\bar{C}$ и постараемся присоединить к к каждой точке линии $\bar{C}$ ортогональный трехгранник так, чтобы получить одно одномерное решение уравнений (V, 5); между линиями C и $\bar{C}$ существует соответствие с сохранением дуг $d\bar{s} = ds$; вектор $\vec{e}_1$ трехгранника будет касательной к линии $\bar{C}$ в положительном направлении; вектор $\vec{e}_3$ будет нормалью к $\bar{C}$; наконец, условие $\bar{\omega}_{12} = \omega_{12}$ даст

$$\frac{\sin \bar{\bar{\omega}}}{\bar{\rho}} = \frac{\sin \tilde{\omega}}{\rho};$$

поскольку линия $\bar{C}$ задана, из этого соотношения получим

$$\sin \bar{\bar{\omega}} = \sin \tilde{\omega} \frac{\bar{\rho}}{\rho}.$$

Чтобы задача была возможна, необходимо, чтобы кривизна $\frac{1}{\bar{\rho}}$ линии $\bar{C}$ была меньше геодезической кривизны линии C на поверхности S. Если это условие удовлетворено, то существуют для $\bar{\bar{\omega}}$ два значения, дополнительных друг для друга, что дает для вектора $\vec{e}_3$ трехгранника, присоединенного к линии $\bar{C}$, два возможных положения. Если одно из этих положений выбрано, то существует поверхность $\bar{S}$, и только одна, содержащая линию $\bar{C}$, нормаль которой несет вектор $\vec{e}_3$ и которая будет изометрична поверхности S.

Имеется исключение, если $\bar{a} = 0$, т. е. если $\cos \bar{\bar{\omega}} = 0$; тогда кривая $\bar{C}$, если задача возможна, будет асимптотической линией поверхности $\bar{S}$. Этот случай представится, если в каждой точке линии $\bar{C}$ кривизна будет равна по абсолютной величине геодезической кривизне линии C в соответствующей точке. Этот случай вообще будет невозможен. Действительно, соотношение (V, 7) дает $\bar{b}^2 = -K$, но $\bar{b}$ есть геодезическое кручение, т. е. в данном случае обыкновенное кручение линии $\bar{C}$; следовательно, необходимо, чтобы кручение линии $\bar{C}$ было равно по абсолютной величине корню квадратному из полной кривизны поверхности S в соответствующей точке линии C, взятой с обратным знаком (теорема Эннепера). Характеристиками интегральной поверхности S не будут, следовательно, никакие кривые. Впрочем, можно заметить, что квадратичные уравнения (V, 5) можно записать в виде:

$$[\bar{\omega}_{13} + \sqrt{-K}\,\omega^2,\quad \bar{\omega}_{23} - \sqrt{-K}\,\omega^1] = 0,$$
$$[\bar{\omega}_{13} - \sqrt{-K}\,\omega^2,\quad \bar{\omega}_{23} + \sqrt{-K}\,\omega^1] = 0.$$

Они выделяют, очевидно, два семейства характеристик:

$$\bar{\omega}_{13} + \sqrt{-K}\,\omega^2 = 0,\quad \bar{\omega}_{23} - \sqrt{-K}\,\omega^1 = 0;$$
$$\bar{\omega}_{13} - \sqrt{-K}\,\omega^2 = 0,\quad \bar{\omega}_{23} + \sqrt{-K}\,\omega^1 = 0;$$

кривые каждого из этих семейств удовлетворяют уравнению асимптотических линий; с другой стороны, для первого семейства имеем

$$\omega^1\bar{\omega}_{23} - \omega^2\bar{\omega}_{13} = \sqrt{-K}\,\{(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2\},\quad \text{или}\quad \frac{1}{\tau} = \sqrt{-K},$$

и для второго

$$\omega^1\bar{\omega}_{23} - \omega^2\bar{\omega}_{13} = \sqrt{-K}\,\{(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2\},\quad \text{или}\quad \frac{1}{\tau} = -\sqrt{-K}.$$

Задача VI

Пары изометричных поверхностей с сохранением одного семейства асимптотических линий

22. Присоединим к каждой точке двух поверхностей правый ортогональный трехгранник, вектор $\vec{e}_1$ которого будет касаться асимптотической линии семейства, которое сохраняется в соответствии, а вектор $\vec{e}_3$ будет нормалью к поверхности, так что $\bar{\omega}^1 = \omega^1$, $\bar{\omega}^2 = \omega^2$ (трехгранник, выбранный для S вполне определяет трехгранник, который присоединен к $\bar{S}$). Рассмотрение соотношений (V, 3) и (V, 4) предыдущего пункта, где $a = \bar{a} = 0$, приводит к уравнениям

$$\left.\begin{array}{c} \bar{\omega}^1 = \omega^1,\quad \bar{\omega}^2 = \omega^2,\quad \omega^3 = 0,\quad \bar{\omega}^3 = 0,\quad \bar{\omega}_{12} = \omega_{12}, \\ \bar{\omega}_{13} = \varepsilon\omega_{13}\quad (\varepsilon = \pm 1); \\ [\omega^1\omega_{13}] + [\omega^2\omega_{23}] = 0,\quad [\omega^1\bar{\omega}_{13}] + [\omega^2\bar{\omega}_{23}] = 0, \\ [\omega^2\omega_{13}] = 0,\quad [\omega_{12},\ \bar{\omega}_{23} - \varepsilon\omega_{23}] = 0; \end{array}\right\} \quad (\text{VI},1)$$

последнее уравнение получено внешним дифференцированием уравнения $\bar{\omega}_{13} = \varepsilon\omega_{13}$.

Общий интегральный элемент двух измерений задается соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} \omega_{13} = b\omega^2, \quad \omega_{23} = b\omega^1 + c\omega^2, \\ \bar{\omega}_{13} = \varepsilon b\omega^2, \quad \bar{\omega}_{23} = \varepsilon b\omega^1 + \bar{c}\omega^2, \\ (\bar{c} - \varepsilon c)\,[\omega_{12}\omega^2] = 0. \end{aligned}\right\}$$

Следует различать два случая:

1°. $\bar{c} = \varepsilon c$. В этом случае $\bar{\omega}_{13} = \varepsilon\omega_{13}$, $\bar{\omega}_{23} = \varepsilon\omega_{23}$, $\bar{\omega}_{12} = \omega_{12}$; если $\varepsilon = 1$, то два семейства трехгранников равны; то же самое будет с двумя поверхностями S и $\bar{S}$; если $\varepsilon = -1$, то эти две поверхности симметричны. Это тривиальное решение.

2°. $\bar{c} - \varepsilon c \neq 0$. В этом случае имеем

$$\omega_{12} = h\omega^2;$$

двумерный интегральный элемент зависит от четырех произвольных параметров b, c, $\bar{c}$, h.

Определитель полярной матрицы, столбцы которой соответствуют формам ω_{13}, ω_{23}, $\bar{\omega}_{23}$, ω_{12}, будет равен:

$$\begin{vmatrix} \omega^1 & \omega^2 & 0 & 0 \\ \varepsilon\omega^1 & 0 & \omega^2 & 0 \\ \omega^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon\omega_{12} & \omega_{12} & -\bar{\omega}_{23} + \varepsilon\omega_{23} \end{vmatrix} = -(\varepsilon c - \bar{c})(\omega^2)^4;$$

его ранг 4 равен числу квадратичных уравнений (VI. 1); следовательно, *система — в инволюции, и ее общее решение зависит от четырех произвольных функций одной переменной.* Характеристиками будут асимптотические линии, которые соответствуют на обеих поверхностях.

Поверхности S и $\bar{S}$ обладают простым геометрическим свойством, они — линейчатые; действительно, если перемещаться вдоль асимптотической линии $\omega^2 = 0$, то

$$d\vec{A} = ds\,\vec{e}_1, \quad d\vec{e}_1 = \omega_{12}\vec{e}_2 + \omega_{13}\vec{e}_3 = 0;$$

точка A описывает прямую, так как вектор $\vec{e}_1$ неподвижен.

23. *Проблема Коши.* Имеется одно одномерное решение линейных уравнений (VI, 1), которое определяется парой ориентируемых кривых C, $\bar{C}$, соответствующих с сохранением криволинейных абсцисс. К каждой точке линии C присоединим правый ортогональный трехгранник, вектор $\vec{e}_3$ которого будет нормален линии C; пусть θ — угол, образованный вектором $\vec{e}_1$ с положительным направлением касательной к линии C. К соответствующей точке линии $\overline{C}$ надо присоединить правый трехгранник, вектор $\vec{e}_3$ которого будет нормален к линии $\overline{C}$, а вектор $\vec{e}_1$ образует тот же самый угол θ с положительным направлением касательной к линии C. Чтобы удовлетворить двум последним линейным уравнениям (VI, 1), надо, чтобы *

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\sin\overset{\approx}{\omega}}{\overline{\rho}} = \frac{\sin\tilde{\omega}}{\overline{\rho}}, \\ &\cos\theta\frac{\cos\overset{\approx}{\omega}}{\overline{\rho}} - \sin\theta\left(\frac{d\overset{\approx}{\omega}}{d\overline{s}} + \frac{1}{\overline{\tau}}\right) = \\ &= \varepsilon\cos\theta\frac{\cos\tilde{\omega}}{\rho} - \varepsilon\sin\theta\left(\frac{d\tilde{\omega}}{ds} + \frac{1}{\overline{\tau}}\right). \end{aligned}\right\} \tag{VI,2}$$

Если задать две ориентированные кривые C, $\overline{C}$, а также угол θ, то два предыдущих уравнения определяют $\tilde{\omega}$ и $\overset{\approx}{\omega}$. Если, например, выбрать

$$\theta = \frac{\pi}{2},$$

то

$$\frac{d(\overset{\approx}{\omega} - \varepsilon\tilde{\omega})}{ds} = \frac{\varepsilon}{\tau} - \frac{1}{\overline{\tau}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\overset{\approx}{\omega} + \varepsilon\tilde{\omega}}{2} = \frac{\overline{\rho} + \varepsilon\rho}{\overline{\rho} - \varepsilon\rho}\operatorname{tg}\frac{\overset{\approx}{\omega} - \varepsilon\tilde{\omega}}{2},$$

что дает $\overset{\approx}{\omega} - \varepsilon\tilde{\omega}$ с точностью до аддитивной постоянной, далее определяем $\operatorname{tg}\frac{\overset{\approx}{\omega} + \varepsilon\tilde{\omega}}{2}$, откуда найдем $\overset{\approx}{\omega} + \varepsilon\tilde{\omega}$ с точностью до 2π. После того как углы $\overset{\approx}{\omega}$ и $\tilde{\omega}$ фиксированы, две поверхности S и $\overline{S}$ вполне определены; из каждой точки линии C выходит

* В силу уравнений (14) п. 6 (стр. 133) имеем тождество

$$\omega^1\Phi - \omega^2\Psi = \omega_{13}F,$$

где F, Ф, Ψ означают три основные формы поверхности; отсюда выводим

$$\omega_{13} = \frac{1}{R_n}\omega^1 - \frac{1}{T_g}\omega^2,$$

откуда следует второе уравнение (VI. 2).

в касательной плоскости поверхности S прямая, которая несет вектор $\vec{e}_1$, эта прямая порождает поверхность S; поверхность $\bar{S}$ порождается аналогичным образом.

Можно было бы поступить иначе, задавая произвольно линии C и $\bar{C}$ и в каждой точке каждой из этих кривых вектор $\vec{e}_3$, нормальный к кривой, при единственном условии, чтобы $\frac{\sin\tilde{\omega}}{\rho} = \frac{\sin\tilde{\tilde{\omega}}}{\bar{\rho}}$; в силу уравнений (VI, 2) угол θ тогда будет определен касательной; условие, что этот угол отличен от нуля, выражается неравенством

$$\frac{\cos\tilde{\tilde{\omega}}}{\bar{\rho}} \neq \varepsilon\frac{\cos\tilde{\omega}}{\rho}$$

Теорема Коши — Ковалевской непригодна, если нормальные кривизны кривых C и $\bar{C}$ равны нулю. В этом случае мы знаем, что эти линии должны быть прямыми так, чтобы угол поворота вектора $\vec{e}_3$ при перемещении на некоторый отрезок линии $\bar{C}$ был равен аналогичному углу линии C, умноженному на $\varepsilon(\bar{b} = \varepsilon b)$. Ясно, что в этом случае задача допускает бесконечное множество решений.

Замечание I. Если заданы поверхность S и линия C, то соответствующая кривая $\bar{C}$, так же как угол $\tilde{\tilde{\omega}}$, будет определяться из двух уравнений относительно $\frac{1}{\bar{\rho}}, \frac{1}{\bar{\tau}}, \tilde{\tilde{\omega}}, \frac{d\tilde{\tilde{\omega}}}{ds}$; исключая $\tilde{\tilde{\omega}}$, увидим, что линия $\bar{C}$ должна удовлетворять некоторому соотношению между ее кривизной, ее кручением и их производными по длине дуги.

Замечание II. Две линейчатые поверхности могут быть изометричными без того, чтобы их образующие соответствовали.

Задача VII

Пары изометричных поверхностей с сохранением линии кривизны

24. К уравнениям

$$\bar{\omega}^1 = \omega^1, \quad \bar{\omega}^2 = \omega^2, \quad \omega^3 = 0, \quad \bar{\omega}^3 = 0, \quad \bar{\omega}_{12} = \omega_{12}, \qquad \text{(VII,1)}$$

которые имеют место для произвольных изометрических поверхностей, следует прибавить новое уравнение, которое выражает пропорциональность левых частей уравнений линий кривизны поверхностей S и $\bar{S}$:

$$\omega^1\bar{\omega}_{23} - \omega^2\bar{\omega}_{13} = u\,(\omega^1\omega_{23} - \omega^2\omega_{13}),$$

где u — неизвестная функция, существенно отличная от нуля. Это уравнение можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} \bar{\omega}_{13} &= u\omega_{13} + v\omega^1, \\ \bar{\omega}_{23} &= u\omega_{23} + v\omega^2. \end{aligned}\right\} \tag{VII,2}$$

Наконец, внешнее дифференцирование уравнений (VII, 1) и (VII, 2) дает квадратичные уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &[\omega^1\omega_{13}] + [\omega^2\omega_{23}] = 0, \\ &[\bar{\omega}_{13}\bar{\omega}_{23}] - [\omega_{13}\omega_{23}] = 0, \\ &[\omega_{13}\,du] + [\omega^1\,dv] = 0, \\ &[\omega_{23}\,du] + [\omega^2\,dv] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{VII,3}$$

Уравнения (VII, 1, 2, 3) образуют замкнутую дифференциальную систему, которую надо исследовать.

Общий двумерный интегральный элемент дается системой:

$$\left.\begin{aligned} \omega_{13} &= a\omega^1 + b\omega^2, \\ \omega_{23} &= b\omega^1 + c\omega^2, \\ du &= u_1\omega^1 + u_2\omega^2, \\ dv &= (bu_2 - cu_1)\,\omega^1 + (bu_1 - au_2)\,\omega^2 \end{aligned}\right\} \tag{VII,4}$$

с конечным уравнением

$$(au + v)\,(cu + v) - b^2u^2 = ac - b^2. \tag{VII,5}$$

Следовательно, он зависит от четырех произвольных параметров.

Определитель полярной матрицы, столбцы которой соответствуют формам ω_{13}, ω_{23}, du, dv, равен:

$$\begin{vmatrix} \omega^1 & \omega^2 & 0 & 0 \\ \omega_{23} - u\bar{\omega}_{23} & -\omega_{13} + u\bar{\omega}_{13} & 0 & 0 \\ -du & 0 & \omega_{13} & \omega^1 \\ 0 & -du & \omega_{23} & \omega^2 \end{vmatrix} = -(\omega^1\omega_{23} - \omega^2\omega_{13})\cdot[u\,(\omega^1\bar{\omega}_{13} + \omega^2\bar{\omega}_{23}) - (\omega^1\omega_{13} + \omega^2\omega_{23})].$$

Поскольку его ранг равен 4, числу квадратичных уравнений (VII, 3), *система — в инволюции, и общее решение ее зависит от четырех произвольных функций одной переменной.*

25. *Особыми решениями* будут такие решения, для которых определитель полярной матрицы тождественно равен нулю, что будет, если $u = \pm 1$, $v = 0$; в этом случае две поверхности будут равны или симметричны; это тривиальные решения. Следует добавить особые решения, вытекающие из неопределенности линий кривизны пары плоскостей или пары сфер; это тоже тривиальные решения.

Из предыдущего следует, что *поверхности S, для которых существует поверхность $\bar{S}$, изометричная поверхности S с сохранением линий кривизны и неравная или симметричная ей, исключительные.*

Характеристиками будут:

1°. Два семейства линий кривизны, которые соответствуют на двух поверхностях;

2°. Два семейства линий, определяемых уравнениями

$$u(\omega^1\bar{\omega}_{13} + \omega^2\bar{\omega}_{23}) = \omega^1\omega_{13} + \omega^2\omega_{23};$$

эти два семейства линий не будут действительными.

Действительно, дискриминант квадратичной формы

$$u(\omega^1\bar{\omega}_{13} - \omega^2\bar{\omega}_{23}) - (\omega^1\omega_{13} + \omega^2\omega_{23}) =$$

$$= (u^2 - 1)\{a(\omega^1)^2 + 2b\omega^1\omega^2 + c(\omega^2)^2\} + uv\{(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2\}$$

равен

$$(u^2 - 1)b^2 - \{(u^2 - 1)a + uv\}\cdot\{(u^2 - 1)c + uv\} =$$

$$= (u^2 - 1)\cdot(b^2 - ac) - (u^2 - 1)uv(a + c) - u^2v^2.$$

Если учесть соотношение (VII, 5), то увидим, что этот дискриминант сводится к $-v^2 < 0$ *.

26. *Проблема Коши.* Будем искать одномерное решение системы уравнений (VII, 1) и (VII, 2). Можно предположить в силу неопределенности трехгранников, присоединенных к поверхностям S и $\bar{S}$, что для этого решения имеем $\omega^2 = 0$. Мы берем, следовательно, две ориентируемые кривые C и $\bar{C}$ с соответствием, сохраняющим дуги ($d\bar{s} = ds$). К каждой точке каждой кривой присоединяем трехгранник, вектор $\vec{e}_1$ которого

---

* Это следует из того, что соотношение (VII, 5) можно записать в виде $(u^2-1)(b^2-ac) = (a+c)uv + v^2$. — *Прим. перев.*

будет касаться кривой в положительном направлении. Мы будем иметь тогда

$$\frac{\sin\bar{\tilde{\omega}}}{\bar{\rho}}=\frac{\sin\tilde{\omega}}{\rho},\quad \frac{\cos\bar{\tilde{\omega}}}{\bar{\rho}}=u\,\frac{\cos\tilde{\omega}}{\rho}+v,$$

$$\frac{d\bar{\tilde{\omega}}}{d\bar{s}}+\frac{1}{\bar{\tau}}=u\left(\frac{d\tilde{\omega}}{ds}+\frac{1}{\tau}\right).$$

Мы видим, что выбор векторов $\vec{e}_3$ подчинен только одному условию

$$\frac{\sin\bar{\tilde{\omega}}}{\bar{\rho}}=\frac{\sin\tilde{\omega}}{\rho};$$

функции u и v тогда определяются вдоль линий C и $\bar{C}$ двумя другими уравнениями, которые существенно исключают линии кривизны. Эти данные однозначно определяют поверхности S и $\bar{S}$. Мы видим, что вводится пять произвольных функций одной переменной (две произвольные функции для каждой кривой и одна произвольная функция для угла $\tilde{\omega}$); но если мы воздержимся брать кривую C в данной плоскости, останется только четыре произвольные функции, согласно полученному раньше результату.

Возьмем теперь случай, когда теорема Коши — Ковалевской не применима. В этом случае имеются необходимые условия

$$\frac{\sin\bar{\tilde{\omega}}}{\bar{\rho}}=\frac{\sin\tilde{\omega}}{\rho},\quad \frac{d\tilde{\omega}}{ds}+\frac{1}{\tau}=0,\quad \frac{d\bar{\tilde{\omega}}}{ds}+\frac{1}{\bar{\tau}}=0,$$

$$\frac{\cos\bar{\tilde{\omega}}}{\bar{\rho}}=u\,\frac{\cos\tilde{\omega}}{\rho}+v.$$

Уравнения (VII, 4) показывают, кроме того, что в рассматриваемом случае ($\omega^2=0,\ b=0$) мы должны иметь $dv+c\,du=0$ вдоль линий C и $\bar{C}$; но мы имеем

$$a=\frac{\cos\tilde{\omega}}{\rho},\quad \bar{a}=\frac{\cos\bar{\tilde{\omega}}}{\bar{\rho}},\qquad v=\bar{a}-ua,$$

далее, в силу (VII, 5),

$$\bar{a}(cu+v)=ac;$$

отсюда легко получается

$$c = \frac{\bar{a}(\bar{a} - au)}{a - \bar{a}u};$$

заменяя v и c в уравнении $dv + cdu = 0$ их значениями, получим для определения функции u уравнение Риккати

$$(\bar{a}^2 - a^2)\frac{du}{ds} + \bar{a}\frac{da}{ds}u^2 - \left(a\frac{da}{ds} + \bar{a}\frac{d\bar{a}}{ds}\right)u + a\frac{d\bar{a}}{ds} = 0.$$

Заметим, что две кривые C и $\bar{C}$ не могут быть выбраны произвольно; в совокупности они зависят только от трех произвольных функций одного переменного; можно задать произвольно как функции длины дуги s углы $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\tilde{\omega}}$, общую геодезическую кривизну $\frac{1}{R_g}$; кривизны и кручения тогда будут тоже определены как функции s.

27. Другой метод. Вычисления будут более простыми, если мы присоединим к каждой точке поверхности S трехгранник Дарбу, векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ которого лежат на главных касательных; мы ограничиваем себя естественно условием оставаться в областях без омбилических точек. Мы можем отправиться от уравнений

$$\left.\begin{gathered}\bar{\omega}^1 = \omega^1,\ \bar{\omega}^2 = \omega^2,\ \omega^3 = 0,\ \bar{\omega}^3 = 0,\ \bar{\omega}_{12} = \omega_{12},\\ \omega_{13} = a\omega^1,\ \omega_{23} = c\omega^2,\\ \bar{\omega}_{13} = ta\omega^1,\ \ \bar{\omega}_{23} = \frac{c}{t}\omega^2,\end{gathered}\right\}\qquad \text{(VII, 6)}$$

из которых два последних выражают равенство полных кривизн в соответствующих точках обеих поверхностей.

Система замыкается в результате внешнего дифференцирования, которое дает новые уравнения

$$\left.\begin{gathered}[\omega^1 da] + (a - c)[\omega^2\omega_{12}] = 0,\\ [\omega^2 dc] + (a - c)[\omega^1\omega_{12}] = 0,\\ [\omega^1 d(ta)] + \left(ta - \frac{c}{t}\right)[\omega^2\omega_{12}] = 0,\\ \left[\omega^2 d\left(\frac{c}{t}\right)\right] + \left(ta - \frac{c}{t}\right)[\omega^1\omega_{12}] = 0.\end{gathered}\right\}\qquad \text{(VII, 7)}$$

Можно видоизменить два последних уравнения с помощью двух первых, что даст нам эквивалентные уравнения

$$\left.\begin{aligned}
&[\omega^1\, da] + (a - c)\,[\omega^2\omega_{12}] = 0,\\
&[\omega^2\, dc] + (a - c)\,[\omega^1\omega_{12}] = 0,\\
&\left[\omega^1,\ \frac{t\,dt}{1-t^2} + \frac{c}{a}\,\frac{da}{a-c}\right] = 0,\\
&\left[\omega^2,\ \frac{dt}{t\,(1-t^2)} - \frac{a}{c}\,\frac{dc}{a-c}\right] = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(VII, 7')}$$

Характеристики, как это показывает простой подсчет, определяются уравнением

$$\omega^1\omega^2\,\{a^2t^2\,(\omega^1)^2 + c^2\,(\omega^2)^2\} = 0;$$

мы снова приходим к двум семействам линий кривизны и двум мнимым семействам.

28. Преимущество этого метода заключается в том, что он быстро приводит к дифференциальной системе, которая определяет поверхности $\bar{S}$, изометричные данной поверхности S с соответствием линий кривизны, без того, чтобы поверхность $\bar{S}$ была равна или симметрична поверхности S. Если поверхность S задана, то мы в действительности должны просто определить неизвестное t с условием $t^2 \neq 1$. Два последних уравнения (VII, 7') представляют искомую дифференциальную систему, в которой a и c будут известными функциями. Если мы положим для поверхности S

$$\omega_{12} = h\omega^1 + k\omega^2,$$

то два первых уравнения (VII, 7) дадут нам

$$\begin{aligned}
a_2 &= (a - c)\,h,\\
c_1 &= (a - c)\,k,
\end{aligned}$$

где через a_2 обозначена вторая ковариантная производная от a $(da = a_1\omega^1 + a_2\omega^2)$ и через c_1 — первая ковариантная производная от c. Два последних уравнения (VII, 7) нам дадут тогда [10]:

$$\frac{t\,dt}{1-t^2} = t\,\frac{ta}{c}\,k\omega^1 - \frac{c}{a}\,h\omega^2 = t^2\tilde{\omega}^1 - \tilde{\omega}^2,$$

где для краткости положено

$$\frac{a}{c} k\omega^1 = \tilde{\omega}^1, \quad \frac{c}{a} h\omega^2 = \tilde{\omega}^2.$$

Внешнее дифференцирование уравнений (VII, 8) дает

$$t^2 \{d\tilde{\omega}^1 - 2[\tilde{\omega}^1\tilde{\omega}^2]\} = d\tilde{\omega}^2 - 2[\tilde{\omega}^1\tilde{\omega}^2].$$

Коэффициент при t^2 в левой части известен, обозначим его через $A[\omega^1\omega^2]$, правая часть тоже известна, обозначим ее через $B[\omega^1\omega^2]$.

Теперь, если ни A, ни B не равны нулю, дифференциальная система может допускать только решение $t^2 = \frac{B}{A}$. Вообще это не будет решением, ибо мы знаем, что проблема возможна только для ограниченного класса поверхностей S. Может случиться, что $t^2 = \frac{B}{A}$ действительно будет решением, и тогда это будет единственным решением задачи, если $B \neq A$ *. Если $A = B = 0$, то уравнение (VII, 8) вполне интегрируемо; в этом случае существует бесконечное множество поверхностей $\overline{S}$, зависящих существенно от произвольной постоянной (существенно — значит с точностью до переноса).

Поверхность S, для которых эти особенности имеют место, характеризуется тем, что две формы

$$\tilde{\omega}^1 = \frac{a}{c} k\omega^1, \quad \tilde{\omega}^2 = \frac{c}{a} h\omega^2$$

удовлетворяют двум соотношениям

$$d\tilde{\omega}^1 = d\tilde{\omega}^2 = 2[\tilde{\omega}^1\tilde{\omega}^2];$$

в частности, форма $\tilde{\omega}^1 - \tilde{\omega}^2$ будет полным дифференциалом.

Эти поверхности могут быть определены. Пользуясь соотношениями

$$d\omega^1 = h[\omega^1\omega^2], \quad d\omega^2 = k[\omega^1\omega^2],$$

находим

$$\left(\frac{h}{a}\right)_1 = \frac{hk}{c}, \quad \left(\frac{k}{c}\right)_2 = -\frac{hk}{a}.$$

---

* В действительности имеются два решения, соответствующие двум поверхностям S, симметричным друг другу.

Продолжая выкладки *, получим $hk=0$.

Пусть, например, $k=0$. Тогда $d\left(\frac{h}{a}\right)=\lambda\,\omega^2$; но внешнее дифференцирование уравнения $\omega_{12}=h\omega^1$ дает $h_2=ac+h^2$ и, поскольку $a_2=(a-c)h$, отсюда следует

$$\lambda=c\left(1+\frac{h^2}{a^2}\right).$$

Замкнутая дифференциальная система, которая определяет рассматриваемый класс поверхностей S, будет:

$$\left.\begin{aligned}
&\omega^3=0,\ \omega_{13}=a\omega^1,\ \omega_{23}=c\omega^2,\ \omega_{12}=h\omega^1,\\
&d\left(\frac{h}{a}\right)=c\left(1+\frac{h^2}{a^2}\right)\omega^2,\\
&[\omega^1\,da]-h(a-c)[\omega^1\omega^2]=0,\\
&[\omega^2\,dc]=0.
\end{aligned}\right\}\qquad \text{(VII, 9)}$$

Она — в инволюции, и общее решение ее зависит от двух произвольных функций одной переменной; характеристиками служат два семейства линий кривизны.

29. Можно геометрически охарактеризовать все эти поверхности. Заметим сначала, что линии кривизны второго семейства ($\omega^1=0$) будут геодезическими ($\omega_{12}=0$); они будут плоскими, ибо при перемещении вдоль одной из них имеем

$$\frac{d\vec{A}}{ds}=\vec{e}_2,\quad \frac{d\vec{e}_2}{ds}=c\vec{e}_3,\quad \frac{d\vec{e}_3}{ds}=-c\vec{e}_2;$$

ее кривизна равна c; поскольку dc кратно ω^2, все эти плоские геодезические будут равны между собой. Плоскости этих различных линий кривизны огибают развертывающуюся поверхность; поверхность, следовательно, порождается одной плоской линией Г, плоскость которой катится без скольжения по фиксированной развертывающейся поверхности (каждая точка линии Г перемещается нормально к плоскости кривой); поскольку дифференциал вектора $\vec{e}_1$, нормального к плоскости кривой, равен $(h\vec{e}_2+a\vec{e}_3)\omega^1$, отсюда следует, что характеристика плоскости линии Г лежит в плоскости $A\vec{e}_2\vec{e}_3$ и пер-

* Дифференциальная система, которая дает искомые поверхности, используя просто полученные результаты, — не в инволюции; только прилагая метод продолжения, рассмотренный в главе VI, получим соотношение $hk=0$.

пендикулярна к вектору $h\vec{e}_2 + a\vec{e}_3$; образующая развертывающейся поверхности огибает плоскость линии Г и, следовательно, будет прямой, параллельной вектору $\vec{e}_2 - \frac{h}{a}\vec{e}_3$. Поскольку дифференциал этого вектора равен $c\frac{h}{a}\left(\vec{e}_2 - \frac{h}{a}\vec{e}_3\right)\omega^2$, отсюда следует, что образующая развертывающейся поверхности имеет постоянное направление. Плоскость кривой Г огибает, следовательно, цилиндр, так что искомые поверхности будут *резными поверхностями* (*surfaces-moulure*), которые действительно зависят от двух произвольных функций одной переменной.

Мы приходим, следовательно, к следующему заключению. *Поверхности S, допускающие изометричные поверхности $\bar{S}$ с сохранением линий кривизны, не равные и не симметричные им, будут исключительными; они образуют класс поверхностей, зависящий от четырех произвольных функций одной переменной. Соответствующая поверхность $\bar{S}$ — вообще единственная, с точностью до перемещения или симметрии; имеется исключение для резных поверхностей, для которых поверхность зависит, с точностью до перемещения или симметрии, от произвольной постоянной.*

Задача VIII

Пары изометричных поверхностей с сохранением главных кривизн

30. Достаточно, чтобы сохранялась средняя кривизна, поскольку полная кривизна у изометричных поверхностей одинакова. Если мы используем те же ортогональные трехгранники, что и в предыдущих задачах, то мы получим уравнения

$$\bar{\omega}^1 = \omega^1,\ \bar{\omega}^2 = \omega^2,\ \omega^3 = 0,\ \bar{\omega}^3 = 0,\ \bar{\omega}_{12} = \omega_{12}. \qquad \text{(VIII, 1)}$$

Поскольку, с другой стороны,

$$[\omega^1\omega_{23}] - [\omega^2\omega_{13}] = (a + c)[\omega^1\omega^2] = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)[\omega^1\omega^2],$$

то замкнутая дифференциальная система, которая выражает условия задачи, получается присоединением к уравнениям (VIII, 1) квадратичных уравнений

$$
\left.\begin{array}{r}
[\omega^1\omega_{13} + [\omega^2\omega_{23}] = 0,\\
[\omega^1\omega_{13}] + [\omega^2\bar{\omega}_{23}] = 0,\\
[\bar{\omega}_{13}\bar{\omega}_{23}] - [\omega_{13}\omega_{23}] = 0,\\
[\omega^1,\ \bar{\omega}_{23} - \varepsilon\omega_{23}] - [\omega^2,\ \bar{\omega}_{13} - \varepsilon\omega_{13}] = 0 \quad (\varepsilon = \pm 1).
\end{array}\right\} \quad \text{(VIII, 2)}
$$

Двойной знак связан с тем, что главные радиусы кривизны двух поверхностей могут откладываться в различных направлениях на векторах $\vec{e}_3$, присоединенных к поверхностям S и $\bar{S}$. Впрочем, можно ограничиться случаем $\varepsilon = +1$, решения для случая $\varepsilon = -1$ получаются из решений случая $\varepsilon = +1$ посредством симметрии поверхности $\bar{S}$ относительно плоскости.

Общий двумерный интегральный элемент задается посредством уравнений:

$$\omega_{13} = a\omega^1 + b\omega^2, \quad \omega_{23} = b\omega^1 + c\omega^2,$$

$$\bar{\omega}_{13} = \bar{a}\omega^1 + \bar{b}\omega^2, \quad \bar{\omega}_{23} = \bar{b}\omega^1 + \bar{c}\omega^2$$

с конечными соотношениями

$$\bar{a}\bar{c} - \bar{b}^2 = ac - b^2, \quad \bar{a} + \bar{c} = a + c;$$

он зависит от четырех произвольных параметров.

Определитель полярной матрицы, столбцы которой соответствуют формам ω_{13}, ω_{23}, $\bar{\omega}_{13}$, $\bar{\omega}_{23}$, равен

$$
\begin{vmatrix}
\omega^1 & \omega^2 & 0 & 0\\
0 & 0 & \omega^1 & \omega^2\\
\omega_{23} & -\omega_{13} & -\bar{\omega}_{23} & \bar{\omega}_{13}\\
\omega^2 & -\omega^1 & -\omega^2 & \omega^1
\end{vmatrix}
= \{(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2\}\{\omega^1(\omega_{13} - \bar{\omega}_{13}) + \omega^2(\omega_{23} - \bar{\omega}_{23})\}. \quad \text{(VIII, 3)}
$$

Поскольку ранг матрицы равен четырем, числу квадратичных уравнений (VIII, 2), *система — в инволюции, и ее общее решение зависит от четырех произвольных функций одной переменной.*

Особые решения. Они соответствуют равенствам $\bar{a} = a$, $b = \bar{b}$, $c = \bar{c}$, т. е. $\bar{\omega}_{13} = \omega_{13}$, $\bar{\omega}_{23} = \omega_{23}$, и приводят к двум равным или симметричным поверхностям ($\varepsilon = -1$). Это очевидные решения.

Действительными *характеристиками* служат пары соответствующих линий, имеющих одну и ту же нормальную кривизну.

31. *Проблема Коши.* Всякое одномерное решение системы (VIII, 1) получится, если взять две ориентированные кривые C и $\overline{C}$, соответствующие друг другу с сохранением дуг, и присоединить к этим кривым ортогональные трехгранники, векторы $\vec{e}_3$ которых выбраны так, что удовлетворяется соотношение

$$\frac{\sin \overline{\overline{\omega}}}{\overline{\rho}} = \frac{\sin \widetilde{\omega}}{\rho}; \qquad \text{(VIII, 4)}$$

такое решение зависит от пяти произвольных функций одной переменной. Оно будет характеристическим, если в то же время

$$\frac{\cos \overline{\overline{\omega}}}{\overline{\rho}} = \frac{\cos \widetilde{\omega}}{\rho},$$

т. е. если кривизна будет одной и той же функцией криволинейной абсциссы для обеих кривых. Тогда следует принять $\widetilde{\overline{\omega}} = \widetilde{\omega}$. С другой стороны, равенства

$$\overline{a} = a, \quad \overline{a} + \overline{c} = a + c, \quad \overline{a}\overline{c} - \overline{b}^2 = ac - b^2$$

дают

$$\overline{c} = c, \ \overline{b} = \pm b;$$

две кривые имеют, следовательно, равные или противоположные геодезические кручения. Это новое условие, которому должны удовлетворять две кривые, чтобы проблема Коши была возможна *.

Задача IX

Пары поверхностей в точечном соответствии, сохраняющем линии кривизны и главные кривизны

32. Мы уточним задачу, требуя, чтобы соответствие между двумя поверхностями сохраняло среднюю кривизну и полную кривизну.

---

* Относительно задачи VIII, которая была поставлена О. Бонне (O. Bonnet) см. статью Э. Картана (E. Cartan, *Sur les couples des surfaces applicables avec conservation des courbures principales*, Bull. Sc. Math., **66**, 55—85, 1942.

Присоединим к каждой точке поверхности S правый трехгранник Дарбу*, тогда к соответствующей точке поверхности $\bar{S}$ можно присоединить одним и только одним способом трехгранник Дарбу так, чтобы

$$\omega^3 = 0,\ \bar{\omega}^3 = 0,\ \bar{\omega}^1 = u\omega^1,\ \bar{\omega}^2 = v\omega^2 \quad (u > 0,\ v > 0). \qquad \text{(IX, 1)}$$

Теперь следует рассматривать два существенно различных случая, смотря по тому, будут ли главные кривизны одними и теми же для линий кривизны, которые соответствуют на обеих поверхностях, или же главные кривизны меняются между двумя семействами линий кривизны при переходе от одной поверхности к другой.

33. Первая задача. К уравнениям (IX, 1) следует присоединить уравнения

$$\omega_{13} = a\omega^1,\ \omega_{23} = c\omega^2,\ \bar{\omega}_{13} = \varepsilon\bar{a}\bar{\omega}^1,\ \bar{\omega}_{23} = \varepsilon\bar{c}\bar{\omega}^2\ (\varepsilon = \pm 1), \qquad \text{(IX, 2)}$$

затем надо присоединить уравнения, которые получаются из (IX, 1) и (IX, 2) внешним дифференцированием:

$$[\omega^1 du] + [\omega^2,\ u\omega_{12} - v\bar{\omega}_{12}] = 0,$$

$$[\omega^2 dv] + [\omega^1,\ u\bar{\omega}_{12} - v\omega_{12}] = 0,$$

$$[\omega^1 da] + (a - c)[\omega^2\omega_{12}] = 0,$$

$$[\omega^2 dc] + (a - c)[\omega^1\omega_{12}] = 0,$$

$$[\bar{\omega}^1 d\bar{a}] + (\bar{a} - \bar{c})[\bar{\omega}^2\bar{\omega}_{12}] = 0,$$

$$[\bar{\omega}^2 d\bar{c}] + (\bar{a} - \bar{c})[\bar{\omega}^1\bar{\omega}_{12}] = 0.$$

Вычитая из пятого уравнения третье, умноженное на u и из шестого уравнения четвертое, умноженное на v, мы получим уравнения

$$[\omega^2,\ u\omega_{12} - v\bar{\omega}_{12}] = 0,\ [\omega^1,\ u\bar{\omega}_{12} - v\omega_{12}] = 0.$$

Это позволяет написать шесть квадратичных уравнений в виде

$$\left.\begin{array}{c}
[\omega^1 du] = 0, \quad [\omega^2 dv] = 0, \\
[\omega^1,\ u\bar{\omega}_{12} - v\omega_{12}] = 0, \quad [\omega^2,\ u\omega_{12} - v\bar{\omega}_{12}] = 0, \\
[\omega^1 da] + (a - c)[\omega^2\omega_{12}] = 0, \\
[\omega^2 dc] + (a - c)[\omega^1\omega_{12}] = 0.
\end{array}\right\} \qquad \text{(IX, 3)}$$

---

* Это предполагает, что рассматривается только часть поверхности без омбилических точек.

Уравнения (IX, 1, 2, 3) образуют замкнутую дифференциальную систему первой задачи.

Определитель Δ полярной матрицы, столбцы которой соответствуют формам $du, dv, \omega_{12}, \bar{\omega}_{12}, da, dc$, после всех выкладок будет равен

$$\Delta = (a - c)^2 \cdot (u^2 - v^2) \cdot (\omega^1)^3 (\omega^2)^3. \qquad \text{(IX, 4)}$$

Ранг ее равен шести, числу всех квадратичных уравнений (IX, 3), *система — в инволюции, и ее общее решение зависит от шести произвольных функций одной переменной.*

Особые решения. Поскольку $a - c$ по условию существенно отлично от нуля, особыми решениями будут такие решения, для которых $u^2 = v^2$, или $u = v$, поскольку u и v — две существенно положительные функции. Два первых уравнения (IX, 3) дадут тогда $du = 0$, а два следующих дадут $\bar{\omega}_{12} = \omega_{12}$, откуда внешним дифференцированием получим

$$[\bar{\omega}_{13}\bar{\omega}_{23}] = [\omega_{13}\omega_{23}],$$

или

$$(u^2 - 1)\, ac = 0.$$

Если оставить в стороне развертывающие поверхности ($a = 0$ или $c = 0$), то получим $u = 1$; равенства

$$\bar{\omega}^1 = \omega^1, \quad \bar{\omega}^2 = \omega^2, \quad \bar{\omega}_{12} = \omega_{12}, \quad \bar{\omega}_{13} = \varepsilon\omega_{13}, \quad \bar{\omega}_{23} = \varepsilon\omega_{23}$$

показывают тогда, что эти две поверхности равны или симметричны — решение тривиальное.

Мы видим, таким образом, что *поверхности S, для которых существует не равная и не симметричная им поверхность $\bar{S}$, находящаяся с S в точечном соответствии с сохранением линий кривизны, средней кривизны и полной кривизны,— исключительны: они образуют класс, зависящий от шести произвольных функций одной переменной.*

Характеристиками, в силу (IX, 4), служат линии кривизны.

34. *Проблема Коши.* Всякое одномерное решение уравнений (IX, 1) и (IX, 2) образуется двумя семействами ортогональных трехгранников, присоединенных к двум ориентированным кривым C и $\bar{C}$, и четырьмя функциями u, v, a, c; каждый трехгранник определен вектором $\vec{e}_3$, нормальным к соответствующей кривой, и углом θ, который образован положительным направлением касательной к кривой с вектором $\vec{e}_1$. Тогда имеем в силу формул (14) и (16) п. **6** (стр. 133 и 134) соотношения

$$d\bar{s}\cdot\cos\bar{\theta} = u\,ds\cdot\cos\theta, \qquad d\bar{s}\cdot\sin\bar{\theta} = v\cdot ds\cdot\sin\theta,$$

$$\frac{\cos\tilde{\omega}}{\rho} = a\cos^2\theta + c\sin^2\theta, \qquad \frac{d\tilde{\omega}}{d\bar{s}} + \frac{1}{\bar{\tau}} = (c-a)\sin\theta\cos\theta,$$

$$\frac{\cos\tilde{\tilde{\omega}}}{\bar{\rho}} = \varepsilon\,(a\cos^2\bar{\theta} + c\sin^2\bar{\theta}), \qquad \frac{d\tilde{\tilde{\omega}}}{d\bar{s}} + \frac{1}{\bar{\tau}} = \varepsilon\,(c-a)\sin\bar{\theta}\cos\bar{\theta}.$$

Зададим произвольно закон соответствия между точками кривых C и $\bar{C}$, т. е. $\frac{d\bar{s}}{ds} = w$. Тогда получим

$$u = \frac{w\cos\bar{\theta}}{\cos\theta}, \qquad v = \frac{w\sin\bar{\theta}}{\sin\theta};$$

функции a, c, θ, $\bar{\theta}$ будут определены четырьмя последними соотношениями, где углы $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\tilde{\omega}}$ определены положением векторов $\vec{e}_3$ трехгранников, присоединенных к двум кривым. Мы видим, что данные зависят от 7 произвольных функций одной переменной (две кривые, углы $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\tilde{\omega}}$ и функция w). Это согласуется со степенью произвола общего решения задачи, ибо при заданном решении задачи можно принять за кривую C сечение поверхности S фиксированной заданной плоскостью.

Теорема Коши — Ковалевской теряет силу, если линия C будет линией кривизны поверхности S, т. е. если $\theta = 0$ или $\frac{\pi}{2}$ ($\bar{\theta}$ имеет тогда то же значение). Предположим, например, $\theta = 0$, $\omega^2 = \bar{\omega}^2 = 0$. Уравнения (IX, 3) показывают тогда, что для возможности решения задачи надо иметь

$$dv = 0, \quad u\omega_{12} - v\bar{\omega}_{12} = 0.$$

Данные в этом случае будут следующие. Мы должны иметь

$$u = \frac{d\bar{s}}{ds}, \quad a = \frac{\cos\tilde{\omega}}{\rho} = \varepsilon\frac{\cos\tilde{\tilde{\omega}}}{\bar{\rho}}, \quad \frac{d\tilde{\omega}}{ds} + \frac{1}{\tau} = 0, \quad \frac{d\tilde{\tilde{\omega}}}{ds} + \frac{1}{\bar{\tau}} = 0,$$

$$\frac{\sin\tilde{\omega}}{\rho} = v\,\frac{\sin\tilde{\tilde{\omega}}}{\bar{\rho}}, \quad dv = 0.$$

Зададим, например, $\tilde{\omega}$ и $\frac{1}{\rho}$ как функции от s, кручение линии C будет дано посредством $\frac{1}{\tau} = -\frac{d\tilde{\omega}}{ds}$. Зададим далее u как функцию от s и постоянное значение m переменной v. Тогда

$$\operatorname{tg} \bar{\bar{\omega}} = \frac{\varepsilon}{m} \operatorname{tg} \tilde{\omega}, \quad \frac{1}{\bar{\bar{\rho}}} = \varepsilon \frac{\cos \tilde{\omega}}{\cos \bar{\bar{\omega}}} \cdot \frac{1}{\rho}, \quad \frac{1}{\bar{\bar{\tau}}} = -\frac{1}{u} \cdot \frac{d\bar{\bar{\omega}}}{d\bar{s}},$$

что дает нам $\bar{\bar{\omega}}, \frac{1}{\bar{\bar{\rho}}}$ и $\frac{1}{\bar{\bar{\tau}}}$ как функции от $\bar{s}$. Наконец, зададим произвольно c как функцию s. Характеристическое решение, полученное таким образом, зависит от четырех произвольных функций от s, именно $\tilde{\omega}, \frac{1}{\rho}$, u, c. Очевидно будут существовать характеристические решения одного измерения, которым соответствует бесконечное множество решений данной задачи.

35. Частный случай. *Поверхности, допускающие семейство линий кривизны, образованных геодезическими линиями.* Если второе семейство линий кривизны поверхности S образовано геодезическими линиями, будем иметь соотношение вида

$$\omega_{12} = h\omega^1; \tag{IX, 5}$$

поскольку $d\omega^2 = [\omega^1\omega_{12}] = 0$, то ω^2 будет точным дифференциалом $d\beta$. Как мы видели раньше (п. **29**), линии кривизны этого семейства — плоские и все равны между собой; поверхность S порождается плоской линией Γ, плоскость которой катится без скольжения по фиксированной развертывающейся поверхности.

Если такая поверхность принадлежит классу, который мы рассматриваем, то поверхность $\bar{S}$ будет задаваться системой

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\omega}^3 = 0, \quad \bar{\omega}^1 = u\omega^1, \quad \bar{\omega}^2 = v\omega^2, \quad \bar{\omega}_{13} = \varepsilon a\bar{\omega}^1, \quad \bar{\omega}_{23} = \varepsilon c\bar{\omega}^2, \\ &[\omega^1 du] = 0, \qquad\qquad [\omega^2, dv] = 0, \\ &[\omega^1, u\bar{\omega}_{12} - v\omega_{12}] = 0, \quad [\omega^2, u\omega_{12} - v\bar{\omega}_{12}] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{IX, 6}$$

Из последних двух уравнений и уравнений (IX, 5) следует, что ω_{12} пропорционально $\bar{\omega}^1$, а из последнего уравнения (IX, 6) следует, что

$$\bar{\omega}_{12} = \frac{u}{v}\,\omega_{12} = \frac{h}{v}\,\bar{\omega}^1.$$

Поверхность $\bar{S}$, если она существует, имеет второе семейство линий кривизны, также образованное геодезическими линиями. Функции u и v будут тогда определяться системой

$$[\omega^1 du] = 0, \quad [\omega^2 dv] = 0, \quad \bar{\omega}_{12} = \frac{u}{v}\omega_{12}, \tag{IX, 7}$$

откуда внешним дифференцированием получим

$$h[\omega^1 dv] + acv(v^2 - 1)[\omega^1\omega^2] = 0. \tag{IX, 8}$$

Из этих уравнений получаем

$$dv = ac\,\frac{v(1-v^2)}{h}\,\omega^2. \tag{IX, 9}$$

Поскольку $[\omega^2 dc] = 0$, видим, что возможны два случая.

1°. $\left[\omega^2, d\left(\frac{a}{h}\right)\right] = 0$. В этом случае уравнение (IX,9) вполне интегрируемо и дает для v функцию, зависящую от одной произвольной постоянной; уравнение $[\omega^1 du] = 0$ затем дает для u произвольную функцию от параметра линий кривизны первого семейства поверхности S. Тогда имеется бесконечное множество поверхности $\bar{S}$, образующих вместе с S пары поверхностей, удовлетворяющих условиям поставленной задачи.

2°. $\left[\omega^2, d\left(\frac{a}{h}\right)\right] \neq 0$. В этом случае уравнение (IX,9) допускает единственное решение $v = 1$, и можно снова взять за u произвольную функцию параметра линий кривизны первого семейства поверхности S, откуда снова получаем существование бесконечного множества поверхностей $\bar{S}$.

Первый случай — это случай *резных поверхностей.*

36. Вторая задача. Исходим из уравнений (IX, 1), к которым надо присоединить линейные уравнения

$$\omega_{13} = a\omega^1,\ \omega_{23} = c\omega^2,\ \bar{\omega}_{13} = \varepsilon c\bar{\omega}^1,\ \bar{\omega}_{23} = \varepsilon a\bar{\omega}^2\ (\varepsilon = \pm 1) \tag{IX,10}$$

и квадратичные уравнения

$$\left.\begin{aligned}
&[\omega^1 du] + [\omega^2, u\omega_{12} - v\bar{\omega}_{12}] = 0,\\
&[\omega^2 dv] + [\omega^1, u\bar{\omega}_{12} - v\omega_{12}] = 0,\\
&[\omega^1 da] + (a-c)[\omega^2\omega_{12}] = 0,\\
&[\omega^2 dc] + (a-c)[\omega^1\omega_{12}] = 0,\\
&[\bar{\omega}^1 dc] - (a-c)[\bar{\omega}^2\bar{\omega}_{12}] = 0,\\
&[\bar{\omega}^2 da] - (a-c)[\bar{\omega}^1\bar{\omega}_{12}] = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{IX,11}$$

Определитель полярной матрицы, столбцы которой соответствуют последовательно формам du, dv, ω_{12}, ω_{12}, da, dc, равен

$$\begin{vmatrix} \omega^1 & 0 & u\omega^2 & -v\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & -v\omega^1 & u\omega^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (a-c)\omega^2 & 0 & \omega^1 & 0 \\ 0 & 0 & (a-c)\omega^1 & 0 & 0 & \omega^2 \\ 0 & 0 & 0 & -(a-c)\overline{\omega^2} & 0 & \overline{\omega^1} \\ \theta & 0 & 0 & -(a-c)\overline{\omega^1} & \overline{\omega^2} & 0 \end{vmatrix} = \omega^1\omega^2(a-c)^2\{(\omega^1)^2(\overline{\omega^1})^2 - (\omega^2)^2(\overline{\omega^2})^2\}.$$

Ранг матрицы равен 6, числу квадратичных уравнений (IX, 11), ***система — в инволюции, и ее общее решение зависит от шести произвольных функций одной переменной.*** Поскольку разность $a - c$, так же как функции u и v, существенно отлична от нуля, нет ни одного особого решения. *Характеристиками* будут линии кривизны и два семейства линий, заданных уравнением

$$\omega^1\overline{\omega^1} - \omega^2\overline{\omega^2} = 0, \text{ или } u(\omega^1)^2 - v(\omega^2)^2 = 0;$$

есть два других семейства характеристик, но они мнимые.

37. *Проблема Коши.* Формулы, найденные при рассмотрении первой задачи для решения проблемы Коши, здесь заменятся следующими:

$$\left.\begin{aligned} &d\bar{s}\cdot\cos\bar{\theta} = uds\cos\theta, && d\bar{s}\cdot\sin\bar{\theta} = vds\sin\theta, \\ &\frac{\cos\tilde{\omega}}{\rho} = a\cos^2\theta + c\sin^2\theta, && \frac{d\tilde{\omega}}{ds} + \frac{1}{\tau} = (c-a)\sin\theta\cos\theta, \\ &\frac{\cos\tilde{\tilde{\omega}}}{\bar{\rho}} = \varepsilon(c\cos^2\bar{\theta} + a\sin^2\bar{\theta}), && \frac{d\tilde{\tilde{\omega}}}{d\bar{s}} + \frac{1}{\bar{\tau}} = \varepsilon(a-c)\sin\bar{\theta}\cos\bar{\theta}. \end{aligned}\right\} \tag{IX,12}$$

Зададим произвольно две кривые C и $\bar{C}$, углы $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\tilde{\omega}}$ и закон соответствия точек между этими кривыми, т. е. функцию $\frac{d\bar{s}}{ds} = w$. Тогда будем иметь

$$u = w\frac{\cos\bar{\theta}}{\cos\theta}, \quad v = w\frac{\sin\bar{\theta}}{\sin\theta};$$

функции a, c, θ, $\bar{\theta}$ будут определяться четырьмя последними соотношениями.

Теорема Коши — Ковалевской теряет силу, если кривая C будет линией кривизны поверхности S или, если имеется, например, соотношение

$$\sqrt{u}\cos\theta = \sqrt{v}\sin\theta.$$

Рассмотрим сначала первый случай и будем предполагать для определенности $\theta = 0$, откуда следует $\bar{\theta} = 0$. К уравнениям

$$d\bar{s} = u ds,\ a = \frac{\cos\tilde{\omega}}{\rho},\ \ c = \varepsilon\frac{\cos\tilde{\tilde{\omega}}}{\bar{\rho}},\ \ \frac{d\tilde{\omega}}{ds} + \frac{1}{\tau} = 0,$$

$$\frac{d\tilde{\tilde{\omega}}}{d\bar{s}} + \frac{1}{\bar{\tau}} = 0$$

следует присоединить новые соотношения, необходимые для того, чтобы задача была возможна. Действительно, из соотношений (IX, 11) получается

$$\left[\omega^2,\ da + dc + (a - c)\frac{dv}{v}\right] = 0;$$

следовательно, вдоль линии C

$$\frac{dv}{v} + \frac{da + dc}{a - c} = 0. \qquad \text{(IX,13)}$$

Зададим, например, значения $u, \tilde{\omega}$ и $\frac{1}{\rho}$ как функции от s: кривая C будет определена своей кривизной и кручением, равным $\frac{d\tilde{\omega}}{ds}$. Поскольку функция $\bar{s}$ известна, зададим значения $\tilde{\tilde{\omega}}$ и $\frac{1}{\bar{\rho}}$ как функции от $\bar{s}$; кручение $\frac{1}{\bar{\tau}}$ будет определено. Что касается функции v, то она будет определена с точностью до постоянного множителя; таким образом, начальные данные зависят от пяти произвольных функций одной переменной.

Исследуем теперь второй случай, где предполагается

$$\sqrt{u}\cos\theta = \sqrt{v}\sin\theta, \text{ или } \sqrt{u}\,\omega^1 = \sqrt{v}\,\omega^2.$$

Из (IX,11) получаем уравнение

$$[\sqrt{u}\omega^1 - \sqrt{v}\omega^2, vda + udc + (a - c)\sqrt{uv}(\bar{\omega}_{12} - \omega_{12})] = 0.$$

К уравнениям (IX, 12) следует присоединить уравнение

$$vda + udc + (a - c)\sqrt{uv}(\bar{\omega}_{12} - \omega_{12}) = 0. \qquad \text{(IX,14)}$$

Мы сможем тогда задать кривую C и функции $\tilde{\omega}$, u, v как функции s. Будем иметь

$$\operatorname{tg}\theta = \sqrt{\frac{u}{v}}, \quad \operatorname{tg}\bar{\theta} = \sqrt{\frac{v}{u}}, \quad d\bar{s} = \sqrt{uv}ds,$$

откуда определяем θ, $\bar{\theta}$, $\bar{s}$; что касается функций a и c, то они даются уравнениями

$$\frac{av + cu}{u + v} = \frac{\cos\tilde{\omega}}{\rho}; \quad (c - a)\frac{\sqrt{uv}}{u + v} = \frac{d\tilde{\omega}}{ds} + \frac{1}{\tau};$$

наконец, кривая $\bar{C}$ и угол $\tilde{\tilde{\omega}}$ определяются из уравнений

$$\frac{\cos\tilde{\tilde{\omega}}}{\bar{\rho}} = \varepsilon\frac{cu + av}{u + v}, \quad \frac{d\tilde{\tilde{\omega}}}{d\bar{s}} + \frac{1}{\bar{\tau}} = \varepsilon(a - c)\frac{\sqrt{uv}}{u + v},$$

а значение $\dfrac{\sin\tilde{\tilde{\omega}}}{\bar{\rho}}$ получим из уравнения (IX, 14). Эти данные зависят, таким образом, от пяти произвольных функций одной переменной.

Мы оставим в стороне определение поверхности $\bar{S}$ по заданной поверхности S.

Задача X
Пары поверхностей в точечном соответствии с сохранением геодезического кручения кривых

38. Мы исключим тривиальный случай плоскости и сферы. Поскольку геодезическое кручение равно отношению (см. п. 5)

$$\frac{\omega^1\omega_{23} - \omega^2\omega_{13}}{(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2},$$

каждая из форм числителя и знаменателя при переходе от первой поверхности S ко второй $\bar{S}$ может только умножаться на один и тот же множитель (с точностью до знака). Следовательно, две поверхности будут в конформном соответствии, так как в силу только что сказанного линейные элементы их пропорциональны. Присоединим к различным точкам поверхности S правые ортогональные трехгранники, подчиненные единственному условию, чтобы вектор $\vec{e}_3$ являлся нормалью к поверхности; присоединим далее к соответственным точкам поверхности $\overline{S}$ однозначно соответствующие трехгранники так, чтобы иметь

$$\overline{\omega}^1 = u\omega^1, \quad \overline{\omega}^2 = u\omega^2 \qquad (u > 0);$$

тогда должно быть

$$\omega^1\overline{\omega}_{23} - \omega^2\overline{\omega}_{13} = \varepsilon u\,(\omega^1\omega_{23} - \omega^2\omega_{13}) \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

откуда

$$\overline{\omega}_{13} = \varepsilon u\,(\omega_{13} + v\omega^1), \quad \overline{\omega}_{23} = \varepsilon u\,(\omega_{23} + v\omega^2).$$

Окончательно, замкнутая дифференциальная система предлагаемой задачи будет образована линейными уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} &\omega^3 = 0, \ \overline{\omega}^3 = 0, \ \overline{\omega}^1 = u\omega^1, \ \overline{\omega}^2 = u\omega^2, \\ &\overline{\omega}_{13} = \varepsilon u\,(\omega_{13} + v\omega^1), \ \overline{\omega}_{23} = \varepsilon u\,(\omega_{23} + v\omega^2) \end{aligned}\right\} \tag{X,1}$$

и внешними квадратичными уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} &[\omega^1\omega_{13}] + [\omega^2\omega_{23}] = 0, \\ &\left[\omega^1 \frac{du}{u}\right] + [\omega^2, \omega_{12} - \overline{\omega}_{12}] = 0, \\ &\left[\omega^2 \frac{du}{u}\right] - [\omega^1, \omega_{12} - \overline{\omega}_{12}] = 0, \\ &[\omega^1 dv] + \left[\omega_{13} \frac{du}{u}\right] + [\omega_{23}, \omega_{12} - \overline{\omega}_{12}] = 0, \\ &[\omega^2 dv] + \left[\omega_{23} \frac{du}{u}\right] - [\omega_{13}, \omega_{12} - \overline{\omega}_{12}] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{X,2}$$

Общий двумерный интегральный элемент определяется уравнениями

$$\left.\begin{aligned} &\omega_{13} = a\omega^1 + b\omega^2, \\ &\omega_{23} = b\omega^1 + c\omega^2, \\ &\frac{du}{u} = \alpha\omega^1 + \beta\omega^2, \\ &\omega_{12} - \overline{\omega}_{12} = \beta\omega^1 - \alpha\omega^2, \\ &dv = [(a - c)\,\alpha + 2b\beta]\,\omega^1 + [2b\alpha + (c - a)\,\beta]\,\omega^2; \end{aligned}\right\} \tag{X,3}$$

он зависит от пяти произвольных параметров, a, b, c, α, β. *Система будет в инволюции, и ее общее решение будет зависеть от пяти произвольных функций одной переменной,* если определитель полярной матрицы не будет тождественно равен нулю; но этот определитель, столбцы которого соответствуют формам $\omega_{13}, \omega_{23}, \frac{du}{u}, \omega_{12}-\bar{\omega}_{12}, dv$, равен

$$\begin{vmatrix} \omega^1 & \omega^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^1 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 & -\omega^1 & 0 \\ -\frac{du}{u} & \bar{\omega}_{12}-\omega_{12} & \omega_{13} & \omega_{23} & \omega^1 \\ \omega_{12}-\bar{\omega}_{12} & -\frac{du}{u} & \omega_{23} & -\omega_{13} & \omega^2 \end{vmatrix} = \frac{du}{u}[(\omega^1)^2+(\omega^2)^2]^2;$$

он, следовательно, не обращается тождественно в нуль. Действительные характеристики общих решений образуют одно семейство, характеризуемое постоянством функции u.

39. *Проблема Коши.* Оставив на некоторое время в стороне особые решения предложенной задачи, займемся проблемой Коши относительно общих решений. Можно предположить, что для одномерного решения системы (X, 1) имеем $\omega^2=0$. Тогда для пары соответствующих линий C, $\bar{C}$ и пары описанных развертывающихся поверхностей Σ, $\bar{\Sigma}$ имеем

$$d\bar{s} = u\,ds, \quad \frac{\cos\bar{\tilde{\omega}}}{\bar{\rho}} = \varepsilon\left(\frac{\cos\tilde{\omega}}{\rho}+v\right), \quad \frac{d\bar{\tilde{\omega}}}{d\bar{s}}+\frac{1}{\bar{\tau}} = \varepsilon\left(\frac{d\tilde{\omega}}{ds}+\frac{1}{\tau}\right).$$

Иначе говоря, произвольно задаются две кривые и две развертывающиеся поверхности; точечным соответствием между кривыми будет соответствие, осуществляющее равенство геодезических кручений с точностью до знака ε; таким образом, будет получаться функция $u=\frac{d\bar{s}}{ds}$ вдоль двух кривых и функция v будет разностью ($\varepsilon=+1$) или суммой ($\varepsilon=-1$) нормальных кривизн в двух соответствующих точках этих кривых. Начальные данные зависят от шести произвольных функций, которые сводятся к пяти, если выбрать за линию C сечение поверхности S данной плоскостью.

Теорема Коши — Ковалевской теряет силу, если данные величины будут характеристиками, т. е. если функция u будет константой, например, равной m. В этом случае необходимо дополнительное условие для начальных данных; α в формулах (X, 3) должно быть нулем и вдоль линии C должно быть

$$dv = 2b(\omega_{12} - \bar{\omega}_{12}),$$

или

$$\frac{dv}{ds} = 2\left(\frac{d\tilde{\omega}}{ds} + \frac{1}{\tau}\right)\cdot\left(\frac{\sin\tilde{\omega}}{\rho} - m\frac{\sin\tilde{\tilde{\omega}}}{\bar{\rho}}\right).$$

Данные величины будут зависеть тогда только от четырех произвольных функций одной переменной; поскольку кривая C и развертывающаяся поверхность Σ заданы (три произвольные функции), функции $\frac{1}{\bar{\rho}}, \frac{1}{\bar{\tau}}, \tilde{\tilde{\omega}}$ переменной $\bar{s}$ связаны одним конечным соотношением и одним дифференциальным уравнением.

Если поверхность S дана, поверхность $\bar{S}$ определяется системой, образованной пятью последними уравнениями (X, 1) и четырьмя последними уравнениями (X, 2). Эта система — не в инволюции; в наиболее благоприятном случае поверхность $\bar{S}$ зависит, с точностью до перенесения, от пяти произвольных постоянных; еще следовало бы убедиться, что этот случай может действительно осуществиться.

40. Особые решения. Особыми решениями системы (X, 1, 2) будут такие решения, для которых функция u будет константой m. Уравнения (X, 2) дают тогда

$$\bar{\omega}_{12} - \omega_{12} = 0, \quad dv = 0 \quad (v = n),$$

и после внешнего дифференцирования получаем

$$[\bar{\omega}_{13}\bar{\omega}_{23}] - [\omega_{13}\omega_{23}] = 0.$$

Замкнутой дифференциальной системой, которая дает особые решения, будет система:

$$\left.\begin{aligned} &\omega^3 = 0, \bar{\omega}^3 = 0, \bar{\omega}^1 = m\omega^1, \bar{\omega}^2 = m\omega^2,\\ &\bar{\omega}_{12} = \omega_{12}, \bar{\omega}_{13} = \varepsilon m(\omega_{13} + n\omega^1),\\ &\bar{\omega}_{23} = \varepsilon m(\omega_{23} + n\omega^2),\\ &[\omega^1\omega_{13}] + [\omega^2\omega_{23}] = 0,\\ &[\bar{\omega}_{13}\bar{\omega}_{23}] - [\omega_{13}\omega_{23}] = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (X,4)$$

Эта система — в инволюции, и ее общее решение зависит от двух произвольных функций одного аргумента. Характеристики даются уравнением

$$\bar{\omega}^1\bar{\omega}_{13} + \bar{\omega}^2\bar{\omega}_{23} = \omega^1\omega_{13} + \omega^2\omega_{23},$$

или еще

$$(m^2 - 1)(\omega^1\omega_{13} + \omega^2\omega_{23}) + m^2 n\{(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2\} = 0.$$

Последнее уравнение (X, 4) показывает, что поверхности S будут поверхностями Вейнгартена, удовлетворяющими соотношению

$$\frac{m^2-1}{R_1R_2} + m^2 n\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + m^2 n^2 = 0;$$

соответствующие поверхности $\bar{S}$ удовлетворяют аналогичному соотношению, в котором m заменяется на $\frac{1}{m}$ и n на $-\varepsilon n$. Если поверхность S дана, константы m и n тоже заданы. Соответствующие поверхности $\bar{S}$ задаются вполне интегрируемой системой:

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\omega}^3 = 0,\ \bar{\omega}^1 = m\omega^1,\ \bar{\omega}^2 = m\omega^2,\ \bar{\omega}_{12} = \omega_{12},\\ &\bar{\omega}_{13} = \varepsilon m(\omega_{13} + n\omega^1),\ \bar{\omega}_{23} = \varepsilon m(\omega_{23} + n\omega^2); \end{aligned}\right\} \quad (X,5)$$

эти поверхности $\bar{S}$ вполне определены с точностью до перемещения или симметрии.

Особое решение системы (X, 1, 2, 3) будет определено заданием двух кривых C, $\bar{C}$ и двух описанных развертывающихся поверхностей Σ, $\bar{\Sigma}$, удовлетворяющих условиям

$$d\bar{s} = m\,ds;\quad \frac{\sin\bar{\tilde{\omega}}}{\bar{\rho}} = \frac{\sin\tilde{\omega}}{\rho};\quad \frac{\cos\bar{\tilde{\omega}}}{\bar{\rho}} = \varepsilon\left(\frac{\cos\tilde{\omega}}{\rho} + n\right),$$

$$\frac{d\bar{\tilde{\omega}}}{d\bar{s}} + \frac{1}{\bar{\tau}} = \varepsilon\left(\frac{d\tilde{\omega}}{ds} + \frac{1}{\tau}\right).$$

Эти данные будут характеристическими, если

$$\frac{\cos\tilde{\omega}}{\rho} = \frac{m^2 n}{1-m^2},\quad \frac{\cos\bar{\tilde{\omega}}}{\bar{\rho}} = \varepsilon\frac{n}{1-m^2}.$$

Задача XI

Поверхности, имеющие ту же самую третью основную форму, что и данная поверхность

41. Поскольку линии кривизны соответствуют на двух поверхностях (они определяются обращением в нуль третьей основной формы, см. стр. 133), мы присоединим к каждой точке данной поверхности S правый трехгранник Дарбу; ему соответствует в соответствующей точке искомой поверхности $\bar{S}$ трехгранник Дарбу такой, что

$$\bar{\omega}^3 = 0, \ \bar{\omega}^1 = u\omega^1, \ \bar{\omega}^2 = v\omega^2 \qquad (u > 0, v > 0); \qquad \text{(XI,1)}$$

в силу соотношения

$$\bar{\omega}^1\bar{\omega}_{23} - \bar{\omega}^2\bar{\omega}_{13} = \omega^1\omega_{23} - \omega^2\omega_{13},$$

обозначая через a и c главные кривизны поверхности S, можно положить

$$\bar{\omega}_{13} = \frac{\omega_{13} + w\omega^1}{v} = \frac{a+w}{v}\,\omega^1, \ \ \bar{\omega}_{23} = \frac{\omega_{23} + w\omega^2}{u} = \frac{c+w}{u}\,\omega^2. \ \text{(XI,2)}$$

Внешнее дифференцирование уравнений (XI, 1) и (XI, 2) дает внешние квадратичные уравнения

$$[\omega^1 du] + [\omega^2, u\omega_{12} - v\bar{\omega}_{12}] = 0,$$

$$[\omega^2 dv] + [\omega^1, u\bar{\omega}_{12} - v\omega_{12}] = 0,$$

$$\left[\omega^1, dw - \frac{c+w}{u}\,du - \frac{a+w}{v}\,dv\right] = 0,$$

$$\left[\omega^2, dw - \frac{c+w}{u}\,du - \frac{a+w}{v}\,dv\right] = 0.$$

Из них следует соотношение

$$dw = \frac{c+w}{u}\,du + \frac{a+w}{v}\,dv,$$

которое после внешнего дифференцирования дает

$$\left[dc\,\frac{du}{u}\right] + \left[da\,\frac{dv}{v}\right] - (a-c)\left[\frac{du}{u}\,\frac{dv}{v}\right] = 0.$$

Окончательно, замкнутая дифференциальная система задачи будет иметь вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{\omega}^3 = 0,\ \bar{\omega}^1 = u\omega^1,\ \bar{\omega}^2 = v\omega^2,\\
&\bar{\omega}_{13} = \frac{a+w}{v}\,\omega^1,\ \omega_{23} = \frac{c+w}{u}\,\omega^2,\\
&dw = \frac{c+w}{u}\,du + \frac{a+w}{u}\,dv,\\
&[\omega^1 du] + [\omega^2,\ u\omega_{12} - v\bar{\omega}_{12}] = 0,\\
&[\omega^2 dv] + [\omega^1,\ u\bar{\omega}_{12} - v\omega_{12}] = 0,\\
&\left[dc\ \frac{du}{u}\right] + \left[da\ \frac{dv}{v}\right] - (a-c)\left[\frac{du}{u}\ \frac{dv}{v}\right] = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (XI,3)$$

Общий двумерный интегральный элемент, если положить

$$\begin{aligned}
&\omega_{12} = h\omega^1 + k\omega^2,\ da = a_1\omega^1 + (a-c)\,h\omega^2,\\
&dc = (a-c)\,k\omega^1 + c_2\omega^2,
\end{aligned} \qquad (XI,4)$$

задается посредством уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&du = \alpha\omega^1 + \beta\omega^2, \quad dv = \gamma\omega^1 + \delta\omega^2,\\
&\bar{\omega}_{12} = \frac{uh-\beta}{v}\,\omega^1 + \frac{vk+\gamma}{u}\,\omega^2,
\end{aligned}\right\} \qquad (XI,5)$$

где коэффициенты α, β, γ, δ связаны соотношением

$$-(a-c)(\alpha\delta - \beta\gamma) + (a-c)\cdot(vk\beta - uh\gamma) + ua_1\delta - vc_2\alpha = 0.$$

Двумерный интегральный элемент зависит, следовательно, от трех произвольных параметров.

Поскольку число квадратичных уравнений (XI, 3) равно трем, *система — в инволюции, и ее общее решение зависит от трех произвольных функций одного аргумента.*

Характеристики обращают в нуль определитель полярной матрицы

$$\begin{vmatrix}
u\omega^1 & 0 & -v\omega^2\\
0 & v\omega^2 & u\omega^1\\
dc + (a-c)\dfrac{dv}{v} & da - (a-c)\dfrac{du}{u} & 0
\end{vmatrix} =$$

$$= u^2\left(da - \frac{a-c}{u}\,du\right)(\omega^1)^2 - v^2\left(dc + \frac{a-c}{v}\,dv\right)(\omega^2)^2. \qquad (XI,6)$$

42. *Особые решения.* Они задаются двумя дополнительными уравнениями:

$$\frac{du}{u} = \frac{da}{a-c}, \quad \frac{dv}{v} = \frac{dc}{c-a},$$

которые после внешнего дифференцирования приводят к условию

$$[da\ dc] = 0,$$

которому должна удовлетворять данная поверхность S. *Оно выражает, что S есть поверхность Вейнгартена.* Если это так, то в силу (XI, 4) и (XI, 5) находим

$$\frac{u_2}{u} = \frac{\beta}{u} = \frac{a_2}{a-c} = h, \qquad \text{откуда } uh = \beta,$$

$$\frac{v_1}{v} = \frac{\gamma}{v} = \frac{c_1}{c-a} = -k, \qquad \text{откуда } vk + \gamma = 0.$$

Следовательно, имеем $\bar{\omega}_{12} = 0$, откуда $[\bar{\omega}_{13}\ \bar{\omega}_{23}] = 0$. Это соотношение показывает, что *поверхность $\bar{S}$ развертывающаяся;* выражения ω_{13} и ω_{23} из уравнений (XI, 3) показывают тогда, что $(w+a)\ (w+c) = 0$, например

$$w = -a, \quad \bar{\omega}_{13} = 0.$$

Для определения поверхности $\bar{S}$ имеем систему:

$$\frac{du}{u} = \frac{da}{a-c}, \quad \frac{dv}{v} = \frac{dc}{c-a}, \quad \bar{\omega}_{13} = 0, \quad \bar{\omega}_{23} = \frac{c-a}{u}\omega^2, \ \bar{\omega}_{12} = 0. \tag{XI,7}$$

Эта система вполне интегрируема. *Следовательно, если S — поверхность Вейнгартена, то система* (XI, 3) *допускает особые решения, образованные семейством развертывающихся поверхностей (цилиндры вращения), зависящим от произвольных постоянных.*

43. *Общее решение. Проблема Коши.* Зададим на поверхности S кривую C и трехгранники, которые к ней присоединены. Мы получим одномерное решение системы (XI, 3), если зададим кривую $\bar{C}$, которая должна соответствовать кривой C, и развертывающуюся поверхность $\bar{\Sigma}$, описанную около $\bar{S}$ вдоль линии $\bar{C}$. Тогда, обозначая через θ угол линии

C с первой главной касательной S и через $\bar{\theta}$ аналогичный угол кривой $\bar{C}$, будем иметь

$$\left.\begin{aligned}
&d\bar{s}\cos\bar{\theta} = u\,ds\cos\theta, \qquad d\bar{s}\sin\bar{\theta} = v\,ds\sin\theta,\\
&\frac{1}{\bar{R}_n} = \frac{a+w}{uv}\cos^2\bar{\theta} + \frac{c+w}{uv}\sin^2\bar{\theta} =\\
&= \frac{ds^2}{d\bar{s}^2}\left[\frac{u}{v}(a+w)\cos^2\theta + \frac{v}{u}(c+w)\sin^2\theta\right],\\
&\frac{1}{\bar{T}_g} = \frac{c-a}{uv}\sin\bar{\theta}\cos\bar{\theta} = \frac{ds^2}{d\bar{s}^2}\cdot\frac{1}{T_g},\\
&\frac{dw}{ds} = \frac{c+w}{u}\cdot\frac{du}{ds} + \frac{a+w}{v}\cdot\frac{dv}{ds}.
\end{aligned}\right\} \quad (XI,8)$$

В этих уравнениях $\frac{1}{R_n}$, $\frac{1}{T_g}$, θ, a, c — известные функции от s. Более того, мы знаем как функции от $\bar{s}$ кривизну $\frac{1}{\bar{\rho}}$, кручение $\frac{1}{\bar{\tau}}$ и угол $\bar{\bar{\omega}}$. Нам остается определить функции u, v, w в различных точках линии $\bar{C}$. Надо сначала установить точечное соответствие между C и $\bar{C}$ посредством уравнения

$$\frac{d\bar{s}^2}{\bar{T}_g} = \frac{ds^2}{T_g}.$$

Затем мы будем иметь

$$u^2\cos^2\theta + v^2\sin^2\theta = \frac{d\bar{s}^2}{ds^2},$$

$$u^2(a+w)\cos^2\theta + v^2(c+w)\sin^2\theta = \frac{uv}{\bar{R}_n}\frac{d\bar{s}^2}{ds^2}.$$

Наконец, мы имеем дифференциальное уравнение — последнее уравнение (XI, 8), которое завершает определение u, v, w с точностью до произвольной константы. Начальные данные, следовательно, вводят три произвольные функции, что согласуется с результатом, полученным выше.

Мы оставим в стороне определение начальных данных для характеристики.

Задача XII

Пары поверхностей в конформном соответствии с сохранением асимптотических линий

44. Очевидно, что конформное соответствие, сохраняющее асимптотические линии, сохраняет также и линии кривизны *. Если присоединить к каждой точке первой поверхности S наиболее общий правый ортогональный трехгранник, вектор $\vec{e}_3$ которого будет нормален к поверхности S, то этим трехгранникам будут однозначно соответствовать аналогичные трехгранники, присоединенные к поверхности $\bar{S}$, и мы получим соотношения

$$\omega^3 = 0,\ \bar{\omega}^3 = 0,\ \bar{\omega}^1 = u\omega^1,\ \bar{\omega}^2 = u\omega^2 \qquad (u > 0).$$

Далее имеем

$$\bar{\omega}^1\bar{\omega}_{13} + \bar{\omega}^2\bar{\omega}_{23} = uv\,(\omega^1\omega_{13} + \omega^2\omega_{23}),$$

откуда

$$\bar{\omega}_{13} = v\omega_{13} + w\omega^2, \qquad \bar{\omega}_{23} = v\omega_{23} - w\omega^1;$$

но соотношение

$$[\bar{\omega}^1\bar{\omega}_{13}] + [\bar{\omega}^2\bar{\omega}_{23}] = 0$$

дает $w = 0$.

Замкнутая дифференциальная система задачи, следовательно, будет состоять из уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\omega^3 = 0,\ \bar{\omega}^3 = 0,\ \bar{\omega}^1 = u\omega^1,\ \bar{\omega}^2 = u\omega^2,\ \bar{\omega}_{13} = v\omega_{23},\ \bar{\omega}_{23} = v\omega_{23},\\
&[\omega^1\omega_{13}] + [\omega^2\omega_{23}] = 0,\\
&\left[\omega^1\,\frac{du}{u}\right] + [\omega^2,\ \omega_{12} - \bar{\omega}_{12}] = 0,\\
&\left[\omega^2\,\frac{du}{u}\right] - [\omega^1,\ \omega_{12} - \bar{\omega}_{12}] = 0,\\
&\left[\omega_{13}\,\frac{dv}{v}\right] + [\omega_{23},\ \omega_{12} - \bar{\omega}_{12}] = 0,\\
&\left[\omega_{23}\,\frac{dv}{v}\right] - [\omega_{13},\ \omega_{12} - \bar{\omega}_{12}] = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{XII},1)$$

---

* Так как соответствие конформное, то оно сохраняет углы между соответствующими линиями рассматриваемых поверхностей. Поскольку это соответствие переводит асимптотические линии одной поверхности в асимптотические линии другой, то оно переводит сопряженные линии одной в сопряженные линии другой. Поэтому рассматриваемое конформное соответствие должно переводить линии кривизны одной поверхности, которые сопряжены и ортогональны, в линии кривизны другой. — *Прим. перев.*

Наиболее общий двумерный интегральный элемент дается системой:

$$\left.\begin{aligned}
\omega_{13} &= a\omega^1 + b\omega^2\\
\omega_{23} &= b\omega^1 + c\omega^2,\\
\omega_{12} - \overline{\omega}_{12} &= \beta\omega^1 - \alpha\omega^2,\\
\frac{du}{d} &= \alpha\omega^1 + \beta\omega^2,\\
\frac{dv}{v} &= \lambda\omega^1 + \mu\omega^2
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(XII,2)}$$

с соотношениями

$$\left.\begin{aligned}
a\alpha + b\beta - c\lambda + b\mu &= 0,\\
b\alpha + c\beta + b\lambda - a\mu &= 0;
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(XII,3)}$$

он зависит, следовательно, от пяти произвольных параметров; поскольку 5 есть число независимых квадратичных уравнений системы (XII, 1), *система — в инволюции, и общее решение ее зависит от пяти произвольных функций одной переменной.*

Характеристики получаются обращением в нуль определителя полярной матрицы. Если сопоставить столбцы матрицы формам

$$\omega_{13},\ \omega_{23},\ \omega_{12} - \overline{\omega}_{12},\ \frac{du}{u},\ \frac{dv}{v},$$

ее определитель запишется в виде

$$\begin{vmatrix}
\omega^1 & \omega^2 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \omega^2 & \omega^1 & 0\\
0 & 0 & -\omega^1 & \omega^2 & 0\\
-\frac{dv}{v} & \overline{\omega}_{12} - \omega_{12} & \omega_{23} & 0 & \omega_{13}\\
\omega_{12} - \overline{\omega}_{12} & -\frac{dv}{v} & -\omega_{13} & 0 & \omega_{23}
\end{vmatrix} =$$

$$= \{(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2\} \left\{\frac{dv}{v}(\omega^1\omega_{13} + \omega^2\omega_{23}) - \right.$$

$$\left. - (\overline{\omega}_{12} - \overline{\omega}_{12})(\omega^1\omega_{23} - \omega^2\omega_{13})\right\}.$$

Если принять во внимание уравнения (XII, 2), то определитель полярной матрицы будет равен:

$$\{(\omega^1)^2+(\omega^2)^2\}\cdot\{(a\lambda-b\beta)(\omega^1)^3+[2b\lambda+a\mu+b\alpha+(a-c)\beta]\cdot$$

$$\cdot(\omega^1)^2\omega^2+[c\lambda+2b\mu+(c-a)\alpha+b\beta]\,\omega^1(\omega^2)^2+$$

$$+(c\mu-b\alpha)\cdot(\omega^2)^3\}. \qquad \text{(XII,4)}$$

45. *Особые решения.* Они получатся, если присоединить к уравнениям системы четыре линейных относительно α, β, λ, μ уравнения

$$\left.\begin{aligned} a\lambda-b\beta&=0,\\ 2b\lambda+a\mu+b\alpha+(a-c)\beta&=0,\\ c\lambda+2b\mu+(c-a)\alpha+b\beta&=0,\\ c\mu-b\alpha&=0.\end{aligned}\right\} \qquad \text{(XII,5)}$$

Определитель из коэффициентов этих уравнений равен

$$(b^2-ac)\cdot\{4b^2+(a-c)^2\}.$$

Надо различать несколько случаев.

1°. *Определитель не равен нулю.* Тогда имеем

$$\alpha=\beta=\lambda=\mu=0;$$

отсюда, в силу (XII, 2), следует

$$\frac{du}{u}=0, \quad \frac{dv}{v}=0, \quad \omega_{12}=\overline{\omega}_{12},$$

откуда внешним дифференцированием получим

$$[\overline{\omega}_{13}\overline{\omega}_{23}]-[\omega_{13}\omega_{23}]=0, \text{ или } (v^2-1)[\omega_{13}\omega_{23}]=0.$$

Поскольку b^2-ac, по предположению, отлично от нуля, очевидно, что $v^2=1$; следовательно, две поверхности будут собственно или зеркально подобными — это тривиальное решение.

2°. *Определитель равен нулю, но $b^2-ac\neq0$.* Тогда $a=c$, $b=0$; обе поверхности — плоскости ($a=0$) или сферы. В первом случае решение тривиально; во втором случае ($a\neq0$) в силу (XII, 5) $\lambda=\mu=0$, откуда $dv=0$. Эти поверхности будут двумя произвольными сферами — это очевидное решение задачи.

3°. *Определитель равен нулю и* $b^2 - ac = 0$. Обе поверхности развертывающиеся. Поскольку поверхность S задана, можно предположить, что трехгранники выбраны так, что $b = c = 0$, $a \neq 0$; тогда в силу (XII, 5) и (XII, 3)

$$\alpha = \beta = \lambda = \mu = 0;$$

следовательно, функции u, v будут константами и $\bar{\omega}_{12} = \omega_{12}$. Поверхность $\bar{S}$ тогда определяется вполне интегрируемой системой

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\omega}^3 = 0, \quad \bar{\omega}^1 = m\omega^1, \quad \bar{\omega}^2 = m\omega^2, \\ &\bar{\omega}_{12} = \omega_{12}, \quad \bar{\omega}_{13} = n\omega_{13}, \quad \bar{\omega}_{23} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XII,6)}$$

где m и n — постоянные.

Между криволинейными абсциссами ребер возврата Γ, $\bar{\Gamma}$ двух поверхностей S, $\bar{S}$ существует соотношение $\bar{s} = ms$. Если кривизна $\frac{1}{\rho}$ линии Γ равна $\varphi(s)$, то кривизна $\frac{1}{\bar{\rho}}$ линии $\bar{\Gamma}$ в соответствующей точке будет равна $\frac{1}{m}\varphi\left(\frac{\bar{s}}{m}\right)$; кручение $\bar{\Gamma}$ получается из кручения Γ в соответствующей точке умножением на n.

46. *Общее решение. Проблема Коши.* Можно предположить для всякого одномерного решения системы (XII, 1), что имеем $\omega^2 = 0$. Сохраняя обычные обозначения, мы будем иметь для двух соответствующих произвольно заданных кривых C и $\bar{C}$ и для двух описанных развертывающихся поверхностей Σ и $\bar{\Sigma}$

$$d\bar{s} = u\,ds, \qquad \frac{\cos\bar{\tilde{\omega}}}{\bar{\rho}}\,d\bar{s} = v\,\frac{\cos\tilde{\omega}}{\rho}\,ds,$$

$$\left(\frac{d\bar{\tilde{\omega}}}{d\bar{s}} + \frac{1}{\bar{\tau}}\right)d\bar{s} = v\left(\frac{d\tilde{\omega}}{ds} + \frac{1}{\tau}\right)ds.$$

$\frac{1}{\rho}$, $\frac{1}{\tau}$ и $\tilde{\omega}$ известны как функции от s, $\frac{1}{\bar{\rho}}$, $\frac{1}{\bar{\tau}}$, $\bar{\tilde{\omega}}$ — как функции от $\bar{s}$; $\bar{s}$ и s связаны посредством уравнения

$$\frac{1}{\bar{R}_n}\cdot\frac{1}{\bar{T}_g} = \frac{1}{R_n}\cdot\frac{1}{T_g};$$

если $\bar{s}$ известна как функция от s, то будем иметь $u = \dfrac{d\bar{s}}{ds}$ и немедленно получим функцию v.

Рассматриваемое одномерное решение будет характеристическим, если $a\lambda - b\beta = 0$, т. е.

$$\frac{1}{R_n}\frac{d\ln v}{ds} - \frac{1}{T_g}\left(\frac{1}{R_g} - \frac{u}{\bar{R}_g}\right) = 0;$$

с другой стороны, исключая μ из двух соотношений (XII, 3), найдем $\lambda = -\alpha$ и, следовательно, получаем дополнительное условие

$$\frac{d\ln(uv)}{ds} = 0.$$

Можно задать $\dfrac{1}{\rho}$, $\dfrac{1}{\tau}$, $\tilde{\omega}$, u как функции от s; v будет определена с точностью до постоянного множителя; затем найдем $\dfrac{1}{\bar{\rho}}$, $\dfrac{1}{\bar{\tau}}$ и $\bar{\tilde{\omega}}$, потому что известны $\dfrac{1}{\bar{R}_n}$, $\dfrac{1}{\bar{R}_g}$ и $\dfrac{1}{\bar{T}_g}$, т. е. $\dfrac{\cos\bar{\tilde{\omega}}}{\bar{\rho}}$, $\dfrac{\sin\bar{\tilde{\omega}}}{\bar{\rho}}$ и $\dfrac{d\bar{\tilde{\omega}}}{d\bar{s}} + \dfrac{1}{\bar{\tau}}$. Данные величины в этом случае вводят только четыре произвольные функции одной переменной.

47. Частный случай. *Минимальные поверхности.* Если поверхность S — минимальная, то тоже самое будет и с поверхностью $\bar{S}$. Соотношения (XII, 3) сводятся к $\lambda+\alpha=0$, $\mu+\beta=0$, откуда следует уравнение.

$$\frac{du}{u} + \frac{dv}{v} = 0.$$

Мы видим тогда, что два последние квадратичные уравнения (XII, 1) будут следствиями двух предыдущих. Если минимальная поверхность S задана, поверхность $\bar{S}$ должна удовлетворять системе

$$\left.\begin{aligned} &\bar{\omega}^3 = 0,\ \bar{\omega}^1 = u\omega^1,\ \bar{\omega}^2 = u\omega^2,\ \bar{\omega}_{13} = \frac{m}{u}\omega_{13},\ \bar{\omega}_{23} = \frac{m}{u}\omega_{23},\\ &\left[\omega^1\frac{du}{u}\right] + [\omega^2, \omega_{12} - \bar{\omega}_{12}] = 0,\\ &\left[\omega^2\frac{du}{u}\right] - [\omega^1, \omega_{12} - \bar{\omega}_{12}] = 0; \end{aligned}\right\}\quad \text{(XII,7)}$$

эта система — в инволюции, и ее решение дает произвольную минимальную поверхность. Две произвольные минимальные поверхности, следовательно, находятся в конформном соответствии, сохраняющем асимптотические линии и линии кривизны, — это классический результат.

Если поверхность S — не минимальная, то поверхность $\bar{S}$, если она существует, зависит самое большее от произвольных постоянных.

Задача XIII

Пары поверхностей в точечном соответствии, сохраняющем линии кривизны и вторую основную форму

48. Если отнести обе поверхности к их трехгранникам Дарбу, то придем к следующей замкнутой дифференциальной системе [11]:

$$\left.\begin{aligned}
&\omega^3 = 0,\ \bar{\omega}^3 = 0,\ \bar{\omega}^1 = u\omega^1,\ \bar{\omega}^2 = v\omega^2\ (u, v > 0);\\
&\omega_{13} = a\omega^1,\ \omega_{23} = c\omega^2,\ \bar{\omega}_{13} = \frac{a}{u}\,\omega^1,\ \bar{\omega}_{23} = \frac{c}{v}\,\omega^2;\\
&[\omega^1 da] + (a-c)[\omega^2\omega_{12}] = 0,\\
&[\omega^2 dc] + (a-c)[\omega^1\omega_{12}] = 0,\\
&[\omega^1 du] + [\omega^2, u\omega_{12} - v\bar{\omega}_{12}] = 0,\\
&[\omega^2 dv] + [\omega^1, u\bar{\omega}_{12} - v\omega_{12}] = 0,\\
&\left[\omega^1, \frac{da}{a} - \frac{du}{u}\right] + \left[\omega^2, \omega_{12} - \frac{cu}{av}\,\bar{\omega}_{12}\right] = 0,\\
&\left[\omega^2, \frac{dc}{c} - \frac{dv}{v}\right] - \left[\omega^1, \omega_{12} - \frac{av}{cu}\bar{\omega}_{12}\right] = 0.
\end{aligned}\right\}\quad \text{(XIII,1)}$$

Эта система — не в инволюции; две простые линейные комбинации приводят к квадратичным уравнениям *:

$$[\omega^1, (a+c)uv\omega_{12} - (av^2 + cu^2)\bar{\omega}_{12}] = 0,$$

$$[\omega^2, (a+c)uv\,\omega_{12} - (av^2 + cu^2)\,\bar{\omega}_{12}] = 0,$$

* Чтобы получить, например, первое из указанных квадратичных уравнений, надо умножить второе квадратичное уравнение системы (XIII, 1) на uv, четвертое — на $(-cu)$, шестое — на $(-cuv)$ и полученные уравнения сложить. — *Прим. перев.*

откуда получается новое уравнение

$$(av^2 + cu^2)\,\bar{\omega}_{12} = (a + c)\,uv\,\omega_{12},$$

которое позволяет, например, опустить два последних уравнения (XIII,1).

Новая полученная система состоит из уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&\omega^3 = 0,\quad \bar{\omega}^3 = 0,\quad \bar{\omega}^1 = u\omega^1,\quad \bar{\omega}^2 = v\omega^2,\\
&\omega_{13} = a\omega^1,\quad \omega_{23} = c\omega^2,\quad \bar{\omega}_{13} = \frac{a}{u}\,\omega^1,\ \bar{\omega}_{23} = \frac{c}{v}\,\omega^2,\\
&(av^2 + cu^2)\,\bar{\omega}_{12} = (a + c)\,uv\,\omega_{12},\\
&[\omega^1 da] + (a - c)\,[\omega^2\,\omega_{12}] = 0,\\
&[\omega^2 dc] + (a - c)\,[\omega^1\,\omega_{12}] = 0,\\
&[\omega^1 du] + cu\,\frac{u^2 - v^2}{av^2 + cu^2}\,[\omega^2\,\omega_{12}] = 0,\\
&[\omega^2\,dv] + av\,\frac{u^2 - v^2}{av^2 + cu^2}\,[\omega^1\omega_{12}] = 0,\\
&[uv\,(u^2 - v^2)\,(adc - cda) + (a + c)\,(av^2 - cu^2)\,\cdot\\
&\cdot\,(udv - vdu),\ \omega_{12}] + ac\left\{(a + c)\,uv - \frac{av^2 + cu^2}{uv}\right\}\cdot\\
&\cdot\,(av^2 + cu^2)\,[\omega^1\omega^2] = 0.
\end{aligned}\right\}\qquad \text{(XIII,2)}$$

Общий двумерный интегральный элемент зависит от пяти произвольных параметров. Следовательно, *система — в инволюции, и ее общее решение зависит от пяти произвольных функций одной переменной.*

Характеристики определяются уравнением

$$\begin{aligned}
&2uv\,(u^2 - v^2)\,\frac{a^2v^2 - c^2u^2}{av^2 + cu^2}\,\omega_{12}\,\{a\,(\omega^1)^2 - c\,(\omega^2)^2\}\,\omega^1\omega^2 +\\
&+ \{uv\,(u^2 - v^2)\,(adc - cda) + (a + c)\,(av^2 - cu^2)\,\times\\
&\times\,(udv - vdu)\}\,(\omega^1)^2\,(\omega^2)^2 = 0.
\end{aligned}\qquad \text{(XIII,3)}$$

Некоторые возможности оставлены в стороне. Мы исключим сначала случай двух развертывающихся поверхностей.

Последнее линейное уравнение (XIII, 2) было бы тождеством, если бы $a + c = 0$, $av^2 + cu^2 = 0$; две поверхности были бы минимальными с $v = u$; они были бы в конформном соответствии, сохраняющем асимптотические линии, — это случай, который мы изучали в предыдущей задаче.

Если бы мы имели $av^2 + cu^2 = 0$ без $a + c = 0$, то форма ω_{12} обратилась бы в нуль, откуда $ac = 0$, что мы исключали.

49. *Особые решения.* Уравнение (XIII,3) может быть тождеством, если форма ω_{12} не равна тождественно нулю, только в том случае, если

$$\begin{cases} (u^2 - v^2)(a^2v^2 - c^2u^2) = 0, \\ uv(u^2 - v^2)(adc - cda) + (a + c)(av^2 - cu^2) \cdot \\ \qquad \cdot (udv - vdu) = 0. \end{cases}$$

Если $v = u$, то мы возвращаемся к предыдущей задаче, но с дополнительным ограничивающим условием: две поверхности должны иметь точно одну и ту же вторую основную форму. Если поверхности не будут минимальными, то последнее линейное уравнение (XIII, 2) показывает, что $\bar{\omega}_{12} = \omega_{12}$, откуда $ac\ (1 - uv) = 0$, и, следовательно, $u = 1$. Две поверхности конгруэнтны — это тривиальный случай.

Если $a^2v^2 = c^2u^2$, $av = \varepsilon cu$ и если поверхности не минимальные, то $\bar{\omega}_{12} = \varepsilon\omega_{12}$, откуда $u = \sqrt{\dfrac{a}{c}}$, $v = \varepsilon\sqrt{\dfrac{c}{a}}$.

Квадратичные уравнения (XIII, 2) показывают тогда, что произведение ac имеет постоянное значение. Две поверхности — постоянной положительной кривизны, одной и той же для обеих поверхностей; главные кривизны — одни и те же в двух соответствующих точках, но касательной главного направления с главной кривизной a на поверхности S соответствует касательная главного направления с главной кривизной c на поверхности $\bar{S}$. Если поверхность S дана, то поверхность $\bar{S}$ определена с точностью до перемещения.

Мы оставим в стороне исследование проблемы Коши *.

---

* Об определении поверхностей, допускающих заданную вторую основную форму, см. статью Э. Картана (Bull. Sc. Math., 58, 8—32, 1943); см. также С. П. Фиников. *Метод внешних форм Картана.* ГИТТЛ, М.—Л., 1948, стр. 369—372. — *Прим. перев.*

Задача XIV

Поверхности $\bar{S}$ в точечном соответствии с данной поверхностью S, при котором линии кривизны каждой поверхности соответствуют асимптотическим линиям другой

50. Мы предположим, естественно, что каждая из поверхностей S и $\bar{S}$ имеет противоположные по знаку главные кривизны * и что они отнесены к трехгранникам Дарбу. На этих двух поверхностях будут соответствовать касательные, гармонически сопряженные одновременно относительно главных касательных и асимптотических касательных; они определяются уравнениями

$$a(\omega^1)^2 - c(\omega^2)^2 = 0, \qquad \bar{a}(\bar{\omega}^1)^2 - \bar{c}(\bar{\omega}^2)^2 = 0.$$

Мы будем иметь, следовательно, соотношение вида

$$\bar{a}(\bar{\omega}^1)^2 - \bar{c}(\omega^2)^2 = \rho\{a(\omega^1)^2 - c(\omega^2)^2\}.$$

С другой стороны, уравнение $\bar{\omega}^1 = 0$ является уравнением одной асимптотической касательной поверхности S. Отсюда, если принять во внимание предыдущее соотношение, вытекает, например, что

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{\bar{a}}\,\bar{\omega}^1 &= \lambda(\sqrt{a}\,\omega^1 - \sqrt{-c}\,\omega^2), \\ \sqrt{-\bar{c}}\,\bar{\omega}^2 &= \lambda(\sqrt{a}\,\omega^1 + \sqrt{-c}\omega^2), \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XIV,1)}$$

если предполагать $a > 0$, $c < 0$, $\bar{a} > 0$, $\bar{c} < 0$. Отсюда $\rho = 2\lambda^2$. В качестве проверки отметим, что тогда

$$\bar{a}(\bar{\omega}^1)^2 + \bar{c}(\bar{\omega}^2)^2 = -4\lambda^2\sqrt{-ac}\,\omega^1\omega^2,$$

$$\sqrt{-\bar{a}\bar{c}}\,\bar{\omega}^1\bar{\omega}^2 = \lambda^2[a(\omega^1)^2 + c(\omega^2)^2],$$

формулы, которые соответствуют условию задачи.

Присоединяя к уравнениям (XIV, 1) линейные уравнения:

$$\bar{\omega}^3 = 0, \quad \bar{\omega}_{13} = \bar{a}\,\bar{\omega}^1, \quad \bar{\omega}_{23} = \bar{c}\,\bar{\omega}^2 \qquad \text{(XIV,2)}$$

---

* Это предположение нужно для того, чтобы асимптотические линии поверхностей S и $\bar{S}$, определяемые соответственно уравнениями $a(\omega^1)^2 + c(\omega^2)^2 = 0$ и $\bar{a}(\bar{\omega}^1)^2 + \bar{c}(\bar{\omega}^2)^2 = 0$, были действительными. — *Прим. перев.*

и внешние квадратичные уравнения, получаемые внешним дифференцированием уравнений (XIV, 1) и (XIV, 2), получим

$$\left.\begin{aligned}
[\bar\omega^1 d\bar a] + (\bar a - \bar c)[\bar\omega^2 \bar\omega_{12}] &= 0,\\
[\bar\omega^2 d\bar c] + (\bar a - \bar c)[\bar\omega^1 \bar\omega_{12}] &= 0,\\
\sqrt{\bar a}\left[\bar\omega^1, \frac{d\lambda}{\lambda} + \frac{\bar a + \bar c}{\bar a - \bar c}\,\frac{d\bar a}{2\bar a}\right] - H[\bar\omega^1 \bar\omega^2] &= 0,\\
\sqrt{-\bar c}\left[\bar\omega^2, \frac{d\lambda}{\lambda} - \frac{\bar a + \bar c}{\bar a - \bar c}\,\frac{d\bar c}{2\bar c}\right] - K[\bar\omega^1 \bar\omega^2] &= 0.
\end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{XIV},3)$$

Замкнутая дифференциальная система задачи образована уравнениями (XIV, 1, 2, 3). Здесь мы положили

$$\begin{aligned}
H[\bar\omega^1\bar\omega^2] &= \lambda d\left(\sqrt{a}\,\omega^1 - \sqrt{-c}\,\omega^2\right) =\\
&= \lambda\,\frac{a+c}{2}\left(\frac{h}{\sqrt{a}} + \frac{k}{\sqrt{-c}}\right)[\omega^1\omega^2] =\\
&= \frac{(a+c)\sqrt{-\bar a\bar c}}{4\lambda\sqrt{-ac}}\left(\frac{h}{\sqrt{a}} + \frac{k}{\sqrt{-c}}\right)\cdot[\bar\omega^1 \bar\omega^2],\\
K[\bar\omega^1\bar\omega^2] &= \lambda d\left(\sqrt{a}\,\omega^1 + \sqrt{-c}\,\omega^2\right) =\\
&= \lambda\,\frac{a+c}{2}\left(\frac{h}{\sqrt{a}} - \frac{k}{\sqrt{-c}}\right)[\omega^1\omega^2] =\\
&= \frac{(a+c)\sqrt{-\bar a\bar c}}{4\lambda\sqrt{-ac}}\left(\frac{h}{\sqrt{a}} - \frac{k}{\sqrt{-c}}\right)[\bar\omega^1 \bar\omega^2],
\end{aligned}$$

где h и k означают коэффициенты, которые входят в форму ω_{12}:

$$\omega_{12} = h\omega^1 + k\omega^2.$$

Двумерные интегральные элементы, зависящие от четырех параметров, и число квадратичных уравнений (XIV, 3), равное четырем, показывают, что *система — в инволюции, и ее общее решение зависит от четырех произвольных функций одной переменной.*

Характеристики будут определяться следующим уравнением, получаемым приравниванием нулю определителя полярной матрицы, столбцы которой соответствуют формам $d\bar a$, $d\bar c$, $\bar\omega_{12}$, $\frac{d\lambda}{\lambda}$:

$$\begin{vmatrix} \bar\omega^1 & 0 & \bar\omega^2 & 0 \\ 0 & \bar\omega^2 & \bar\omega^1 & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{\bar a}}\cdot\frac{\bar a+\bar c}{\bar a-\bar c}\,\bar\omega^1 & 0 & 0 & \sqrt{\bar a}\,\bar\omega^1 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{-\bar c}}\,\frac{\bar a+\bar c}{\bar a-\bar c}\,\bar\omega^2 & 0 & \sqrt{-\bar c}\,\bar\omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

С точностью до множителя, который не равен ни нулю, ни бесконечности, это уравнение можно записать в виде

$$(\bar a+\bar c)\,\bar\omega^1\,\bar\omega^2\,\{\bar a\,(\bar\omega^1)^2+\bar c\,(\bar\omega^2)^2\}=0.$$

Характеристиками служат линии кривизны и асимптотические линии интегральных поверхностей.

51. *Особые решения* — это минимальные интегральные поверхности $(\bar a+\bar c=0)$. Из двух последних уравнений (XIV, 3) вытекает после легкого подсчета

$$\frac{2d\lambda}{\lambda}=\frac{a+c}{\sqrt{-ac}}\,(h\omega^1+k\omega^2). \qquad \text{(XIV,4)}$$

Функция λ существует только, если правая часть является точным дифференциалом; если это будет так, то λ определяется с точностью до произвольного постоянного множителя. Тогда поверхность $\bar S$ будет произвольной минимальной поверхностью, и точечное соответствие между S и $\bar S$ зависит от произвольной постоянной, которая входит в выражение λ. Если поверхность S — минимальная, то λ — произвольная постоянная, не равная нулю.

Мы не будем касаться задачи определения поверхностей, для которых уравнение (XIV, 4) вполне интегрируемо, т. е. удовлетворяет уравнению

$$\left[\omega^1, d\left(h\,\frac{a+c}{\sqrt{-ac}}\right)\right]+\left[\omega^2,\ d\left(k\,\frac{a+c}{\sqrt{-ac}}\right)\right]=0.$$

52. *Общее решение. Проблема Коши.* Сопоставим данной линии C поверхности S, которая не является ни линией кривизны, ни асимптотической линией, данную линию $\bar C$ и опи-

санную ориентированную развертывающуюся поверхность так, чтобы $\frac{1}{\bar\rho}$, $\frac{1}{\bar\tau}$ и угол $\bar{\bar\omega}$ были данными функциями от $\bar s$ и зададимся также точечным соответствием между этими двумя линиями. Если обозначить через θ и $\bar\theta$ углы, которые образуют положительные касательные к кривым C и $\bar C$ с соответствующими векторами $\vec{e}_1$, то линейные уравнения (XIV, 1), (XIV, 2) дадут:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{\bar a}\, d\bar s\cos\bar\theta &= \lambda\left(\sqrt{a}\cos\theta - \sqrt{-c}\sin\theta\right) ds,\\ \sqrt{-\bar c}\, d\bar s\sin\bar\theta &= \lambda\left(\sqrt{a}\cos\theta + \sqrt{-c}\sin\theta\right) ds,\\ \frac{\cos\bar{\bar\omega}}{\bar\rho} &= \bar a\cos^2\bar\theta + \bar c\sin^2\bar\theta,\\ \frac{d\bar{\bar\omega}}{d\bar s} + \frac{1}{\bar\tau} &= (\bar c - \bar a)\sin\bar\theta\cos\bar\theta. \end{aligned}\right\} \quad \text{(XIV,5)}$$

Поскольку известно отношение $\frac{d\bar s}{ds}$ и угол θ, имеем

$$\sqrt{\bar a}\cos\bar\theta = m\lambda, \qquad \sqrt{-\bar c}\sin\bar\theta = n\lambda,$$

где m и n известны, так как кривая C задана; далее имеем уравнение

$$(m^2 - n^2)\lambda^2 = \frac{\cos\bar{\bar\omega}}{\bar\rho},$$

которое дает λ; имеем, наконец,

$$m^2\lambda^2 \operatorname{tg}\bar\theta + n^2\lambda^2 \operatorname{ctg}\bar\theta = -\frac{d\bar{\bar\omega}}{d\bar s} - \frac{1}{\bar\tau},$$

откуда получаем $\bar\theta$; наконец, находим $\bar a$ и $\bar c$. Одномерное решение системы, таким образом, вполне определено. Заданные величины действительно зависят от четырех произвольных функций одной переменной.

Предположим теперь, что линия C — асимптотическая линия поверхности S, например, определяемая уравнением

$$\sqrt{a}\cos\theta + \sqrt{-c}\sin\theta = 0.$$

Уравнения (XIV,5) дают тогда $\bar{\theta}=0$ и

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{\bar{a}}\, d\bar{s} &= 2\lambda \sqrt{a}\cos\theta\, ds, \\ \frac{\cos\bar{\bar{\omega}}}{\bar{\rho}} &= \bar{a}, \\ \frac{d\bar{\bar{\omega}}}{d\bar{s}} + \frac{1}{\bar{\tau}} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XIV,6)}$$

Имеется одно дополнительное условие; последнее уравнение (XIV, 3) показывает, что вдоль линии $\bar{C}$ должно быть

$$\frac{d\lambda}{\lambda} - \frac{\bar{a}+\bar{c}}{\bar{a}-\bar{c}}\,\frac{d\bar{c}}{2\bar{c}} + \frac{(a+c)\sqrt{\bar{a}}}{4\lambda\sqrt{-ac}}\left(\frac{h}{\sqrt{a}} - \frac{k}{\sqrt{-c}}\right)d\bar{s} = 0. \qquad \text{(XIV,7)}$$

Зададимся теперь линией $\bar{C}$; третье уравнение (XIV, 6) дает $\bar{\bar{\omega}}$ с точностью до постоянной, второе дает $\bar{a}$. Если мы зададим теперь точечное соответствие между $\bar{C}$ и C, то первое уравнение (XIV, 6) дает λ, а уравнение (XIV, 7) дает дифференциальное уравнение относительно $\bar{c}$, которое позволит получить функцию $\bar{c}$ с точностью до произвольной постоянной. Заданные величины на этот раз зависят от трех произвольных функций одной переменной.

Предположим, наконец, что линия C будет линией кривизны поверхности S, т. е. например, что $\theta=0$. Уравнения (XIV, 5) принимают тогда вид

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{\bar{a}}\, d\bar{s}\cos\bar{\theta} &= \sqrt{-\bar{c}}\, d\bar{s}\sin\bar{\theta} = \lambda\sqrt{a}\, ds, \\ \frac{\cos\bar{\bar{\omega}}}{\bar{\rho}} &= \bar{a}\cos^2\bar{\theta} + \bar{c}\sin^2\bar{\theta} = 0, \\ \frac{d\bar{\bar{\omega}}}{d\bar{s}} + \frac{1}{\bar{\tau}} &= (\bar{c}-\bar{a})\sin\bar{\theta}\cos\bar{\theta}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XIV,8)}$$

Следует присоединить дополнительное условие. Линейная комбинация квадратичных уравнений (XIV, 3) приводит к уравнению

$$\left[\sqrt{\bar{a}}\,\bar{\omega}^1 - \sqrt{-\bar{c}}\,\bar{\omega}^2, \frac{d\lambda}{\lambda} + \frac{\bar{a}+\bar{c}}{2\sqrt{-\bar{a}\bar{c}}}\,\bar{\omega}_{12}\right] = \\ = (H-K)\,[\bar{\omega}^1\bar{\omega}^2],$$

откуда получаем искомое условие

$$\frac{d\lambda}{\lambda}+\frac{\bar{a}+\bar{c}}{2\sqrt{-\bar{a}\bar{c}}}\bar{\omega}_{12}=\frac{\lambda(H-K)}{\sqrt{-\bar{a}\bar{c}}}\overline{ds}=\frac{n}{\sqrt{-\bar{a}\bar{c}}}\overline{ds}, \qquad \text{(XIV,9)}$$

где n — известная функция.

Зададим тогда кривую $\bar{C}$ с $\bar{\bar{\omega}}=\frac{\pi}{2}$ и точечное соответствие между $\bar{C}$ и C. Будем иметь тогда

$$\sqrt{\bar{a}}\cos\bar{\theta}=\sqrt{-\bar{c}}\sin\bar{\theta}=m\lambda,$$

где m — известная функция, и далее

$$m^2\lambda^2=-\frac{1}{\bar{\tau}}\sin\bar{\theta}\cos\bar{\theta}.$$

Внося значение λ^2 в (XIV, 9), где $\bar{\omega}_{12}$ заменено его значением $-\overline{d\theta}+\frac{\sin\bar{\bar{\omega}}}{\bar{\rho}}\overline{ds}$, получим дифференциальное уравнение для $\bar{\theta}$, которое определяет $\bar{\theta}$ с точностью до постоянной, откуда затем находим значения λ, a и $\bar{c}$. Заданные величины зависят еще от трех произвольных функций одной переменной.

Замечание. Известное преобразование Софуса Ли, которое преобразует прямые в сферы и обратно, переводит поверхность S в поверхность $\bar{S}$, асимптотические линии которой соответствуют линиям кривизны поверхности S и обратно. Но это преобразование не существует в действительной области; впрочем, поверхности $\bar{S}$, соответствующие поверхности S, зависят тогда только от произвольных постоянных.

Задача XV

Пары выпуклых поверхностей в точечном соответствии, при котором асимптотические линии одной поверхности соответствуют минимальным линиям другой

53. Мы будем говорить, что поверхность выпукла, если ее полная кривизна всюду положительна. Ясно, что мы можем ограничиться той частью поверхности, которая обладает этим свойством.

Линии кривизны соответствуют на двух рассматриваемых поверхностях, потому что касательные главных направлений гармонически сопряжены одновременно и относительно асимптотических касательных и относительно минимальных касательных.

Присоединим к различным точкам двух поверхностей соответствующие правые трехгранники Дарбу. Замкнутая дифференциальная система, соответствующая нашей задаче, образована линейными уравнениями [12]

$$\left.\begin{aligned} &\omega^3 = 0,\ \bar\omega^3 = 0,\ \bar\omega^1 = u\sqrt{a}\,\omega^1,\ \bar\omega^2 = u\sqrt{c}\,\omega^2,\\ &\omega_{13} = a\omega^1,\ \omega_{23} = c\omega^2,\ \bar\omega_{13} = \frac{v}{\sqrt{a}}\omega^1,\ \bar\omega_{23} = \frac{v}{\sqrt{c}}\omega^2; \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{XV}, 1)$$

мы предполагаем, что трехгранники Дарбу первой поверхности выбраны так, чтобы главные кривизны были положительными; можно предположить также $u > 0$.

Дифференциальная система пополняется квадратичными уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} &[\omega^1 da] + (a-c)[\omega^2\omega_{12}] = 0,\\ &[\omega^2 dc] + (a-c)[\omega^1\omega_{12}] = 0,\\ &\left[\omega^1 \frac{du}{u}\right] + \left[\omega^2,\ \frac{a+c}{2a}\omega_{12} - \sqrt{\frac{c}{a}}\,\bar\omega_{12}\right] = 0,\\ &\left[\omega^2 \frac{du}{u}\right] + \left[\omega^1,\ \sqrt{\frac{a}{c}}\,\bar\omega_{12} - \frac{a+c}{2c}\omega_{12}\right] = 0,\\ &\left[\omega^1 \frac{dv}{v}\right] + \left[\omega^2,\ \frac{3a-c}{2a}\omega_{12} - \sqrt{\frac{a}{c}}\,\bar\omega_{12}\right] = 0,\\ &\left[\omega^2 \frac{dv}{v}\right] + \left[\omega^1,\ \sqrt{\frac{c}{a}}\,\bar\omega_{12} - \frac{3c-a}{2c}\omega_{12}\right] = 0. \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{XV}, 2)$$

Общий двумерный интегральный элемент зависит от шести произвольных параметров; следовательно, *система — в инволюции,* потому что число независимых квадратичных уравнений (XV, 2) также равно шести, и *общее решение зависит от шести произвольных функций одной переменной.*

Определитель полярной матрицы, столбцы которой соответствуют формам $\frac{da}{a-c}$, $\frac{dc}{a-c}$, $\frac{du}{u}$, $\frac{dv}{v}$, ω_{12}, $\bar\omega_{12}$, после деления на $a - c$ двух первых строк будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} \omega^1 & 0 & 0 & 0 & \omega^1 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 & 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^1 & 0 & \frac{a+c}{2a}\omega^2 & -\sqrt{\frac{c}{a}}\omega^2 \\ 0 & 0 & \omega^2 & 0 & -\frac{a+c}{2c}\omega^1 & \sqrt{\frac{a}{c}}\omega^1 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^1 & \frac{3a-c}{2a}\omega^2 & -\sqrt{\frac{a}{c}}\omega^2 \\ 0 & 0 & 0 & \omega^2 & -\frac{3c-a}{2c}\omega^1 & \sqrt{\frac{c}{a}}\omega^1 \end{vmatrix};$$

он равен

$$\frac{(a-c)^2}{2ac\sqrt{ac}}\omega^1\omega^2\{(\omega^1)^2+(\omega^2)^2\}\{a(\omega^1)^2+c(\omega^2)^2\}.$$

Единственные действительные характеристики соответствуют линиям кривизны двух поверхностей.

Особых решений нет. В силу самого способа, которым мы аналитически ставили задачу, мы исключили те части поверхности, которые содержат омбилические точки. Но очевидно, что произвольная пара сфер образует решение задачи.

54. *Проблема Коши.* Зададим две кривые C и $\bar{C}$ и закон соответствия между ними; зададим далее углы $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\bar{\omega}}$, т. е. описанные развертывающие поверхности Σ и $\bar{\Sigma}$. Уравнения (XV, 1), в которые входят четыре неизвестные функции a, c, u, v и углы θ и $\bar{\theta}$, образованные касательными к кривым C и $\bar{C}$ с соответствующими векторами $\vec{e}_1$, напишутся здесь в виде

$$\begin{cases} d\bar{s}\cos\bar{\theta} = u\sqrt{a}\,ds\cos\theta, & d\bar{s}\sin\bar{\theta} = u\sqrt{c}\,ds\sin\theta, \\ \dfrac{\cos\tilde{\omega}}{\rho} = a\cos^2\theta + c\sin^2\theta, & \dfrac{d\tilde{\omega}}{ds} + \dfrac{1}{\tau} = (c-a)\sin\theta\cos\theta, \\ \dfrac{\cos\tilde{\bar{\omega}}}{\bar{\rho}} = \dfrac{v}{ua}\cos^2\bar{\theta} + \dfrac{v}{uc}\sin^2\bar{\theta}, & \dfrac{d\tilde{\bar{\omega}}}{d\bar{s}} + \dfrac{1}{\bar{\tau}} = \dfrac{v}{u}\dfrac{a-c}{ac}\sin\bar{\theta}\cos\bar{\theta}. \end{cases}$$

Следовательно, имеется шесть конечных уравнений с шестью неизвестными функциями θ, $\bar{\theta}$, a, c, u, v.

Если угол θ равен нулю (C — линия кривизны поверхности S), то угол $\bar{\theta}$ будет также равен нулю, и уравнения сведутся к

$$\left.\begin{array}{c} d\bar{s} = u\sqrt{a}\,ds, \quad a = \dfrac{\cos\tilde{\omega}}{\rho}, \quad \dfrac{d\tilde{\omega}}{ds} + \dfrac{1}{\tau} = 0, \\ \dfrac{v}{ua} = \dfrac{\cos\tilde{\tilde{\omega}}}{\bar{\rho}}, \quad \dfrac{d\tilde{\tilde{\omega}}}{d\bar{s}} + \dfrac{1}{\bar{\tau}} = 0. \end{array}\right\} \quad \text{(XV, 3)}$$

Но следует присоединить дополнительное условие, которое получится, если найти линейную комбинацию уравнений (XV, 2), не содержащую формы ω *. Таким образом, найдем новое условие

$$a\,\frac{dv}{v} - c\,\frac{du}{u} + \frac{c-a}{2c}\,dc = 0. \qquad \text{(XV, 4)}$$

Зададим две кривые C, $\bar{C}$ и точечное соответствие, которое их связывает. Третье и пятое уравнения (XV, 3) дают $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\tilde{\omega}}$, второе дает a, первое — u, четвертое — v, а уравнение (XV, 4) дает c посредством дифференциального уравнения. Начальные данные зависят от пяти произвольных функций одной переменной. Нужно использовать только соответствующие части линий C и $\bar{C}$, для которых функции a и c положительны.

55. Замечание. Задача, которую мы только что рассмотрели, и предыдущая задача имеют большую аналогию, но между ними существует, однако, существенная разница. При заданной поверхности S с противоположными кривизнами всегда существует бесконечное множество поверхностей $\bar{S}$, способных находиться в таком точечном соответствии с поверхностью S, что асимптотические линии одной из поверхностей соответствуют линиям кривизны другой. Напротив, при заданной выпуклой поверхности S вообще невозможно найти поверхность $\bar{S}$, способную быть в таком точечном соответствии с S, что асимптотическим линиям одной поверхности соответствуют минимальные линии другой.

---

* Для этого надо второе уравнение системы (XV, 2) умножить на $\frac{c-a}{2c}$, четвертое — на $(-c)$, шестое — на a и полученные уравнения сложить. — *Прим. перев.*

Общее замечание

56. Проблемы, которыми мы занимались, рассматривались в евклидовой геометрии, но их можно ставить и в неевклидовой геометрии без существенного изменения аналитического аппарата и без существенных изменений в результатах. Единственное отличие будет в уравнениях структуры. Вместо уравнений

$$d\omega_{23} = [\omega_{12}\omega_{31}],\quad d\omega_{31} = [\omega_{23}\omega_{12}],\quad d\omega_{12} = [\omega_{31}\omega_{23}]$$

будем иметь уравнения

$$d\omega_{23} = [\omega_{12}\omega_{31}] - C[\omega^2\omega^3],$$
$$d\omega_{31} = [\omega_{23}\omega_{12}] - C[\omega^3\omega^1],$$
$$d\omega_{12} = [\omega_{31}\omega_{23}] - C[\omega^1\omega^2];$$

C обозначает в этих формулах постоянную кривизну пространства.

В приложениях формул структуры, которые мы делали, форма ω^3 была всегда равна нулю; единственное изменение будет, следовательно, в выражении для $d\omega_{12}$.

Понятия основных форм поверхности не испытывают никаких изменений; формулы

$$\omega_{13}\cos\theta + \omega_{23}\sin\theta = ds\,\frac{\cos\tilde{\omega}}{\rho},$$

$$\omega_{23}\cos\theta - \omega_{13}\sin\theta = d\tilde{\omega} + \frac{ds}{\tau},$$

$$d\theta + \omega_{12} = ds\,\frac{\sin\tilde{\omega}}{\rho}$$

сохраняются без изменений.

Часть рассмотренных задач сохраняет смысл даже в римановой геометрии трех измерений. Равным образом можно рассматривать проблемы дифференциальной геометрии аффинной, проективной, конформной и т. д., используя в каждом из этих случаев уравнения структуры группы соответствующей геометрии*.

---

* См. Э. Картан (E. Cartan. *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle,* Paris, Gauthier — Villars, 1937).

Глава VIII

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ С БОЛЕЕ ЧЕМ ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

I. ТРИОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

57. Отыскание триортогональных систем в обыкновенном трехмерном пространстве сводится к очень простой замкнутой дифференциальной системе, если за неизвестные принять прямоугольные трехгранники, присоединенные к различным точкам A пространства и единичные базисные векторы которых $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ соответственно нормальны к трем поверхностям системы, которые проходят через точку A.

Напомним сначала уравнения Дарбу (уравнения структуры) главы VII:

$$\left.\begin{aligned} d\omega^1 &= -[\omega^2\omega_{12}] + [\omega^3\omega_{31}], \\ d\omega^2 &= -[\omega^3\omega_{23}] + [\omega^1\omega_{12}], \\ d\omega^3 &= -[\omega^1\omega_{31}] + [\omega^2\omega_{23}], \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I, 1)}$$

где ω^1, ω^2, ω^3 — проекции на оси трехгранника с началом A вектора $\overrightarrow{AA'}$, соединяющего точку A с бесконечно близкой точкой A', а формы ω_{23}, ω_{31}, ω_{12} — компоненты бесконечно малого вектора, представляющего вращение, которое переводит трехгранник, присоединенный к точке A, в положение, эквиполлентное* трехграннику, присоединенному к точке A'.

Выражая, что каждое из уравнений $\omega^1 = 0$, $\omega^2 = 0$, $\omega^3 = 0$ вполне интегрируемо [13], получим

$$[\omega^1, d\omega^1] = 0, \quad [\omega^2, d\omega^2] = 0, \quad [\omega^3, d\omega^3] = 0;$$

отсюда немедленно получаются в силу (I, 1) три уравнения:

$$[\omega^2\omega^3\omega_{23}] = 0, \quad [\omega^3\omega^1\omega_{31}] = 0, \quad [\omega^1\omega^2\omega_{12}] = 0. \qquad \text{(I, 2)}$$

* См. сноску на стр. 128. — *Прим. перев.*

Эти уравнения нет надобности дифференцировать внешним образом, потому что это приведет к уравнениям четвертой степени, тождественно удовлетворяющимся для всякого трехмерного элемента.

Ясно, что система (I, 2) не налагает никаких условий на линейный элемент одного или двух измерений, чтобы он был интегральным; следовательно, мы имеем для приведенных характеров s_0 и s_1:

$$s_0 = 0, \quad s_1 = 0.$$

Рассмотрим теперь двумерный элемент, который устанавливает между ω^1, ω^2, ω^3 линейное соотношение *

$$u_1\omega^1 + u_2\omega^2 + u_3\omega^3 = 0;$$

приведенная полярная система этого интегрального элемента, очевидно, сводится к равенствам

$$u_1\omega_{23} = 0, \quad u_2\omega_{31} = 0, \quad u_3\omega_{12} = 0. \tag{I, 3}$$

Поскольку ее ранг равен 3, имеем $s_2 = 3$ и, следовательно, $s_3 = 0$.

С другой стороны, трехмерные интегральные элементы зависят от шести произвольных параметров, ибо уравнения (I, 2) дают

$$\left.\begin{aligned} \omega_{23} &= \alpha_1\omega^2 - \beta_1\omega^3, \\ \omega_{31} &= \alpha_2\omega^3 - \beta_2\omega^1, \\ \omega_{12} &= \alpha_3\omega^1 - \beta_3\omega^2. \end{aligned}\right\} \tag{I, 4}$$

Поскольку сумма $s_1 + 2s_2 + 3s_3 = 2s_2$ равна 6, *система — в инволюции, и ее общее решение зависит от трех произвольных функций двух переменных.*

58. *Проблема Коши.* Всякое нехарактеристическое двумерное решение системы (I, 2) определяет однозначно триортогональную систему. Такое решение получится, если задать произвольную аналитическую поверхность Σ и присоединить к каждой из ее точек произвольный прямоугольный трехгранник, т. е. задаться в каждой точке A тремя единичными ор-

---

* Коэффициенты u_1, u_2, u_3 — не то что иное, как плюккеровы координаты u^{23}, u^{31}, u^{12} по отношению к трехграннику с началом в точке A бивектора, образованного рассматриваемым интегральным элементом двух измерений.

тогональными векторами $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. В достаточно малой окрестности поверхности Σ будет существовать триортогональная система такая, что в точке A поверхности Σ проходящие через эту точку поверхности трех семейств системы будут соответственно нормальны к векторам $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

В частности, если взять в качестве поверхности Σ некоторую определенную плоскость, то таким образом получатся наиболее общие триортогональные системы, каждая система один, и только один, раз, и начальные условия будут зависеть действительно от трех произвольных функций криволинейных координат точек поверхности Σ.

Случай, когда начальные данные будут характеристическими. В силу уравнений (I, 3) начальные данные будут характеристическими, если один из коэффициентов u_1, u_2, u_3 уравнения касательной плоскости $u_1\omega^1+u_2\omega^2+u_3\omega^3=0$ в общей точке поверхности Σ будет равен нулю, или, иначе, если в каждой точке A поверхности Σ одна из осей трехгранника, присоединенного к этой точке, например первая, касается поверхности Σ. В этом случае, как легко видеть, задача, вообще говоря, невозможна. Это вытекает из уравнений (I, 4); если перемещаться по поверхности Σ в направлении вектора $\vec{e}_1$, то $\omega^2=\omega^3=0$, поэтому форма ω_{23} должна быть равна нулю. Следовательно, чтобы проблема была возможна, надо, чтобы при перемещении по поверхности Σ вдоль линии с касательной $\vec{e}_1$ выполнялось соотношение

$$\vec{e}_2\cdot d\vec{e}_3=0.$$

Это соотношение показывает, что при перемещении вдоль траектории с касательным вектором $\vec{e}_1$ (т. е. вдоль пересечения поверхностей двух последних семейств неизвестной тройной системы), вектор $\vec{e}_3$ порождает развертывающуюся поверхность; то же самое должно быть для вектора $\vec{e}_2$: это следствие классической теоремы Дюпена.

Если два коэффициента уравнения касательной плоскости поверхности Σ равны нулю в общей точке, то одна из осей трехгранника, присоединенного к этой точке, например третья, будет нормалью к поверхности Σ. Тогда для возможности проблемы надо, чтобы при перемещении по поверхности Σ в направлении вектора $\vec{e}_1$ форма ω_{23} была равна нулю, а при перемещении в направлении $\vec{e}_2$ форма ω_{31} обращалась в нуль. *Необходимым* условием возможности будет, следовательно, требование, чтобы две оси трехгранника, присоединенного к точке A, были в этой точке главными касательными поверхности Σ. Это условие, впрочем, будет достаточным, ибо семейство поверхностей, параллельных поверхности Σ, и два семейства развертывающихся нормалей (поверхностей, образованных нормалями) к поверхности Σ образуют триортогональную систему, которая соответствует начальным данным. *Все это не означает, что полученные результаты образуют единственное решение проблемы.*

Заметим, наконец, что при заданной триортогональной системе характеристическими поверхностями этой системы будут поверхности, являющиеся геометрическим местом линий пересечения двух семейств триортогональной системы.

Замечание. Мы использовали только первые уравнения структуры (I, 1) пространства. Отсюда следует, что все полученные результаты имеют силу в пространстве постоянной кривизны и даже в произвольном римановом пространстве.

II. ТРОЙНАЯ СИСТЕМА С ПОСТОЯННЫМИ УГЛАМИ

59. Проблему триортогональных систем можно обобщить, отыскивая три однопараметрических семейства поверхностей, пересекающихся попарно под заданными постоянными углами. Если присоединить к каждой точке A пространства трехгранник, единичные базисные векторы которого будут касаться трех линий попарного пересечения трех поверхностей системы, проходящих через эту точку, то грани трехгранника пересекаются под постоянными углами, косинусы которых мы обозначим буквами α, β, γ. Мы получим соотношения

$$\left.\begin{aligned} d\vec{A} &= \omega^i \vec{e}_i, \\ d\vec{e}_i &= \omega_i^j \vec{e}_j \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II, 1)}$$

с 9 коэффициентами ω_i^j, которые удовлетворяют 6 линейным уравнениям с постоянными коэффициентами. Эти уравнения получаются дифференцированием конечных соотношений

$$\vec{e}_i^{\,2} = 1, \quad \vec{e}_2\vec{e}_3 = \alpha, \quad \vec{e}_3\vec{e}_1 = \beta, \quad \vec{e}_1\vec{e}_2 = \gamma,$$

что дает

$$\left.\begin{aligned}
\omega_1^1+\gamma\omega_1^2+\beta\omega_1^3&=0,\\
\omega_2^2+\alpha\omega_2^3+\gamma\omega_2^1&=0,\\
\omega_3^3+\beta\omega_3^1+\alpha\omega_3^2&=0,\\
\omega_2^3+\omega_3^2+\alpha(\omega_2^2+\omega_3^3)+\beta\omega_2^1+\gamma\omega_3^1&=0,\\
\omega_3^1+\omega_1^3+\beta(\omega_3^3+\omega_1^1)+\gamma\omega_3^2+\alpha\omega_1^2&=0,\\
\omega_1^2+\omega_2^1+\gamma(\omega_1^1+\omega_2^2)+\alpha\omega_1^3+\beta\omega_2^3&=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(\text{II, }2)$$

Среди форм ω_i^j здесь только три независимых, что вполне согласуется с тем, что ориентация подвижного трехгранника, который остается равным самому себе, зависит от трех параметров.

Уравнения структуры, которые получаются внешним дифференцированием первого уравнения (II, 1) (нам нет надобности в других), имеют вид

$$\left.\begin{aligned}
d\omega^1&=[\omega^1\omega_1^1]+[\omega^2\omega_2^1]+[\omega^3\omega_3^1]=[\omega^i\omega_i^1],\\
d\omega^2&=[\omega^1\omega_1^2]+[\omega^2\omega_2^2]+[\omega^3\omega_3^2]=[\omega^i\omega_i^2],\\
d\omega^3&=[\omega^1\omega_1^3]+[\omega^2\omega_2^3]+[\omega^3\omega_3^3]=[\omega^i\omega_i^3].
\end{aligned}\right\}\qquad(\text{II, }3)$$

Составление уравнений задачи. Выразим, как и в случае триортогональной системы, что каждое из уравнений $\omega^1=0$, $\omega^2=0$, $\omega^3=0$ вполне интегрируемо, откуда в силу (II, 3) следует

$$\left.\begin{aligned}
[\omega^1\omega^2\omega_2^1]-[\omega^3\omega^1\omega_3^1]&=0,\\
[\omega^2\omega^3\omega_3^2]-[\omega^1\omega^2\omega_1^2]&=0,\\
[\omega^3\omega^1\omega_1^3]-[\omega^2\omega^3\omega_2^3]&=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(\text{II, }4)$$

Новое внешнее дифференцирование бесполезно, уравнения (II, 4) образуют замкнутую дифференциальную систему задачи.

Все одномерные или двумерные элементы будут интегральными; полярной системой двумерного интегрального элемента $u_1\omega^1+u_2\omega^2+u_3\omega^3=0$ будет система:

$$\left.\begin{aligned}
u_3\omega_2^1-u_2\omega_3^1&=0,\\
u_1\omega_3^2-u_3\omega_1^2&=0,\\
u_2\omega_1^3-u_1\omega_2^3&=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(\text{II, }5)$$

Ее ранг s_2 равен трем; следовательно, имеем

$$s_1 = 0, \ s_2 = 3, \ s_3 = 0.$$

С другой стороны, общий трехмерный интегральный элемент зависит от $s_1 + 2s_2 + 3s_3 = 6$ произвольных параметров *; следовательно, *система — в инволюции, и ее общее решение зависит от трех произвольных функций двух переменных.*

60. *Проблема Коши.* Всякое двумерное *нехарактеристическое* решение системы (II, 4) определяет одиозначно решение задачи. Мы будем иметь такое решение, если зададим произвольную аналитическую поверхность Σ и в каждой точке ее трехгранник, равный тем трехгранникам, которые мы рассматривали. Если взять за поверхность Σ фиксированную плоскость, то начальные условия будут действительно зависеть от трех произвольных функций двух переменных.

Отнесем уравнения (II, 5) к параметрам u_1, u_2, u_3 касательной плоскости поверхности Σ относительно репера в этой точке. Начальные данные будут характеристическими, если среди уравнений (II, 5) будет не менее трех независимых, или если ранг системы, образованной девятью уравнениями (II, 2) и (II, 5), меньше 9, или, наконец, если определитель из коэффициентов при ω_i^j в этих уравнениях равен нулю.

Чтобы написать уравнения, которые выражают, что этот определитель равен нулю, можно сначала разрешить уравнения (II, 5), полагая

$$\omega_2^1 = \lambda^1 u_2, \quad \omega_3^1 = \lambda^1 u_3,$$
$$\omega_3^2 = \lambda^2 u_3, \quad \omega_1^2 = \lambda^2 u_1,$$
$$\omega_1^3 = \lambda^3 u_1, \quad \omega_2^3 = \lambda^3 u_2,$$

где λ^1, λ^2, λ^3 — три вспомогательных неизвестных.

Три первых уравнеиия (II, 2) дадут тотчас

$$\omega_1^1 = -(\beta\lambda^3 + \gamma\lambda^2)\, u_1,$$
$$\omega_2^2 = -(\gamma\lambda^1 + \alpha\lambda^3)\, u_2,$$
$$\omega_3^3 = -(\alpha\lambda^2 + \beta\lambda^1)\, u_3;$$

* Действительно, имеется 9 форм ω_i^j; их выражения в линейных функциях от ω^1, ω^2, ω^3 содержат 27 коэффициентов, каждое из уравнений (II, 2) дает три линейных соотношения между коэффициентами, что составит в целом 18 соотношений; каждое из уравнений (II, 5) дает новое соотношение; в целом, *самое большее,* имеем $18 + 3 = 21$ соотношение. Остается, следовательно, *самое меньшее,* $27 - 21 = 6$ произвольных параметров, но мы знаем, что число $s_1 + 2s_2 + 3s_3$ не может быть превышено.

если внести их в три последние уравнения (II, 2), то получим три уравнения на λ^1, λ^2, λ^3:

$$\begin{gathered}\{(\beta-\alpha\gamma)u_2+(\gamma-\alpha\beta)u_3\}\lambda^1+(1-\alpha^2)u_3\lambda^2+(1-\alpha^2)u_2\lambda^3=0,\\ (1-\beta^2)u_3\lambda^1+\{(\gamma-\alpha\beta)u_3+(\alpha-\beta\gamma)u_1\}\lambda^2+(1-\beta^2)u_1\lambda^3=0,\\ (1-\gamma^2)u_2\lambda^1+(1-\gamma^2)u_1\lambda^2+\{(\alpha-\beta\gamma)u_1+(\beta-\gamma\alpha)u_2\}\lambda^3=0.\end{gathered}$$

$$\begin{vmatrix} (\beta-\gamma\alpha)u_2+(\gamma-\alpha\beta)u_3 & (1-\alpha^2)u_3 & (1-\alpha^2)u_2 \\ (1-\beta^2)u_3 & (\gamma-\alpha\beta)u_3+(\alpha-\beta\gamma)u_1 & (1-\beta^2)u_1 \\ (1-\gamma^2)u_2 & (1-\gamma^2)u_1 & (\alpha-\beta\gamma)u_1+ \\ & & +(\beta-\gamma\alpha)u_2 \end{vmatrix}=0. \quad (II,6)$$

Исключение λ^1, λ^2, λ^3 приводит к искомому уравнению

Это уравнение конуса третьего класса (характеристический конус). Особые интегральные плоские элементы будут в каждой точке A касательными плоскостями к характеристическому конусу, присоединенному к этой точке. При заданной одной из рассматриваемых тройных систем, соответствующими характеристическими поверхностями будут поверхности, касательная плоскость которых в каждой точке касается конуса (характеристического), присоединенного к этой точке.

Характеристический конус в случае триортогональных систем распадается на три оси трехгранника. Он распадается также, когда две из граней трехгранника будут с прямыми углами; если, например, вектор $\vec{e}_3$ будет перпендикулярен к двум векторам $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, то конус распадается в прямую, которая несет вектор $\vec{e}_3$, и две прямые плоскости $[A\vec{e}_1\vec{e}_2]$, которые образуют угол $\frac{\pi}{4}$ с биссектрисой угла, образованного векторами $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$. Никакого другого случая распадения характеристического конуса не существует.

III. p-ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ В ПРОСТРАНСТВЕ p ИЗМЕРЕНИЙ

61. Речь идет об отыскании в p-мерном евклидовом пространстве p семейств $(p-1)$-мерных гиперповерхностей, пересекающихся ортогонально. Мы используем тот же метод, что и в трехмерном пространстве, присоединяя к каждой точке A пространства прямоугольный p-гранник, образованный p единичными ортогональными между собой векторами $\vec{e}_1$,

$\vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_p$, каждый из которых будет ортогонален к одной из p гиперповерхностей системы, проходящих через точку A.

Перемещаясь из точки A в инфинитезимально близкую точку, получим формулы

$$\left.\begin{aligned} d\vec{A} &= \omega^i \vec{e}_i, \\ d\vec{e}_i &= \omega_{ij} \vec{e}_j \end{aligned}\right\} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, p) \qquad \text{(III, 1)}$$

с кососимметричными формами $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$; эти соотношения просто показывают, что векторы $\vec{e}_i$ имеют постоянную длину и пересекаются ортогонально.

Уравнения структуры пространства получатся внешним дифференцированием уравнений (III, 1):

$$\left.\begin{aligned} d\omega^i &= [\omega^k \omega_{ki}], \\ d\omega_{ij} &= [\omega_{ik} \omega_{kj}]. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III, 2)}$$

62. Теперь дифференциальные уравнения задачи должны просто выражать, что каждое из уравнений $\omega^i = 0$ вполне интегрируемо. Но уравнение $[\omega^1, d\omega^1] = 0$, например, напишется, принимая во внимание уравнения (III, 2), в виде

$$[\omega^1 \omega^k \omega_{k1}] = 0.$$

Система p таких уравнений — не в инволюции. Но вычисления, проведенные для $p = 3$, показывают, что если $\omega^2 = \omega^3 = \ldots = \omega^p = 0$, то форма ω_{12} не зависит от ω^3; она не зависит, следовательно, и от $\omega^4, \ldots, \omega^p$. Значит, для всякого решения рассматриваемой проблемы должны иметь

$$[\omega^i \omega^j \omega_{ij}] = 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, p) \qquad \text{(III, 3)}$$

(по i и j не суммировать).

Обратно, уравнения (III, 3) имеют следствием полную интегрируемость каждого из уравнений $\omega^i = 0$.

Чтобы написать полную систему уравнений задачи, надо присоединить к уравнениям (III, 3) уравнения, которые получаются их внешним дифференцированием, именно

$$\begin{gathered} [\omega^j \omega^k \omega_{ki} \omega_{ij}] - [\omega^i \omega^k \omega_{kj} \omega_{ij}] + \\ + [\omega^i \omega^j \omega_{ik} \omega_{kj}] = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, p), \end{gathered} \qquad \text{(III, 4)}$$

уравнения, в которых суммирование проводится только по индексу k.

Покажем теперь, что система (III, 3, 4) в инволюции.

Прежде всего, всякий p-мерный интегральный элемент определяется в силу (III, 3) соотношениями вида

$$\omega_{ji} = \alpha_{ij}\omega^j - \alpha_{ji}\omega^i \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, p); \qquad \text{(III, 5)}$$

легко видеть, что, каковы бы ни были числовые значения $p(p-1)$ коэффициентов $\alpha_{ij}\,(i \neq j)$, уравнения (III, 4) будут следствиями уравнений (III, 5). Действительно, каждый член левой части одного из уравнений (III, 4) будет иметь вид $[\omega^i\omega^j\omega_{ik}\omega_{jk}]$, где i, j, k означают три фиксированных индекса, взятых из последовательности $1, 2, \ldots, p$; в силу (III, 5) моном $[\omega^i\omega^j\omega_{ik}]$ будет кратным моному $[\omega^i\omega^j\omega^k]$, и его внешнее произведение на ω_{jk} равно нулю, потому что ω_{jk} линейно выражается через ω^j и ω^k.

Следовательно, p-мерные интегральные элементы зависят от $p(p-1)$ произвольных параметров.

Найдем теперь приведенные характеры системы (III, 3, 4). Всякий двумерный элемент будет интегральным. Полярный элемент двумерного интегрального элемента с плюккеровыми компонентами u^{ij} определяется приведенными уравнениями

$$u^{ij}\omega_{ij} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, p);$$

ранг этой системы будет равен

$$s_2 = \frac{p(p-1)}{2}.$$

Поскольку $\frac{p(p-1)}{2}$ есть число форм ω_{ij}, отличных от ω^i, имеем

$$s_1 = 0, \quad s_2 = \frac{p(p-1)}{2}, \qquad s_3 = \ldots s_p = 0,$$

и, следовательно,

$$s_1 + 2s_2 + 3s_3 + \ldots + ps_p = p(p-1),$$

т. е. числу произвольных параметров, от которых зависит общий p-мерный интегральный элемент.

Система (III, 3, 4), следовательно,— *в инволюции, и ее общее решение зависит от* $\frac{p(p-1)}{2}$ *произвольных функций двух переменных.*

63. *Проблема Коши.* Всякое нехарактеристическое двумерное решение системы (III, 3, 4) дает одно, и только одно, решение проблемы. Поскольку всякий двумерный элемент будет интегральным, мы получим наиболее общее двумерное решение, если зададим произвольную (аналитическую) двумерную поверхность Σ и в каждой точке A этой поверхности по произвольному аналитическому закону зададим прямоугольный p-гранник. Если данные — нехарактеристические, то в окрестности поверхности Σ существует p-ортогональная система, и только одна, такая, что в каждой точке A поверхности Σ p гиперповерхностей этой системы будут соответственно нормальны к базисным векторам соответствующего p-гранника. При фиксированной поверхности Σ данные величины введут $\frac{p(p-1)}{2}$ функций от двух криволинейных координат точки поверхности Σ.

Начальные условия будут характеристическими, если ранг полярной системы интегрального элемента (u^{ij}), касательного к поверхности Σ, будет меньше, чем $\frac{p(p-1)}{2}$, т. е. если хотя бы одна из компонент u^{ij} равна нулю. Тогда, чтобы проблема была возможна, необходимы дополнительные условия.

Предположим, например, что только одна компонента равна нулю, пусть u^{12}. Это означает, что в каждой точке A поверхности Σ по крайней мере одна из касательных к поверхности Σ перпендикулярна к плоскости, определяемой точкой A и двумя векторами $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$; впрочем, их не может быть больше одной, ибо тогда все компоненты u^{1i}, u^{2i} будут равны нулю, что мы исключаем. При этих условиях на поверхности Σ существует семейство кривых, для каждой из которых в каждой из ее точек касательная будет перпендикулярна плоскости, определяемой точкой A и векторами $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$. Перемещаясь вдоль одной из этих кривых, имеем $\omega^1 = \omega^2 = 0$, и, следовательно, в силу (III, 5) имеем $\omega_{12} = 0$, т. е. $\vec{e}_1 \cdot d\vec{e}_2 = 0$. *В этом и заключается необходимое условие возможности проблемы.* Его еще можно выразить, говоря, что *при перемещении вдоль какой-нибудь из кривых поверхности Σ, ортогональных плоскостям $[A\vec{e}_1\vec{e}_2]$, траектория каждой точки*

$$\vec{M} = \vec{A} + x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2$$

с фиксированными координатами x_1, x_2 будет ортогональна плоскости $[A\vec{e}_1\vec{e}_2]$, которая ее содержит; действительно,

$$\vec{e}_1 \cdot d\vec{M} = \omega^1 + x^2\omega_{21} = 0, \; \vec{e}_2 \cdot d\vec{M} = \omega^2 + x^1\omega_{12} = 0.$$

64. Возможны более сложные случаи. Ограничимся рассмотрением того, что происходит при $p=4$. Легко видеть, что все возможные случаи сводятся к следующим шести:

1°. Одна компонента u^{ij} равна нулю, например, u^{12};

2°. Две компоненты равны нулю, например, u^{12}, u^{34};

3° и 4°. Три компоненты u^{ij} равны нулю, например, u^{23}, u^{31}, u^{12}, или u^{14}, u^{24}, u^{34};

5°. Четыре компоненты u^{ij} равны нулю, например, u^{23}, u^{31}, u^{12}, u^{34};

6°. Пять компонент u^{ij} равны нулю, например, u^{12}, u^{13}, u^{14}, u^{23}, u^{24}.

Мы увидим, что в каждом случае имеется столько дополнительных условий возможности, сколько имеется нулевых компонент u^{ij}, за исключением случая 6°, который содержит 6 условий.

Два первых случая мы неявно уже рассмотрели.

3°. *Предположим* $u^{23}=u^{31}=u^{12}=0$. Уравнения касательного плоского элемента в точке поверхности будут

$$\frac{\omega^1}{u^{14}}=\frac{\omega^2}{u^{24}}=\frac{\omega^3}{u^{34}}.$$

Далее, в каждой точке A поверхности Σ существует определенная касательная, вдоль которой имеем $\omega^1=\omega^2=\omega^3=0$, три формы ω_{23}, ω_{31}, ω_{12} становятся нулями. Следовательно, существует однопараметрическое семейство линий (C) на поверхности Σ, вдоль которых величины $\vec{e}_2 d\vec{e}_3$, $\vec{e}_3 d\vec{e}_1$, $\vec{e}_1 d\vec{e}_2$ должны быть равны нулю, чтобы проблема была возможна. Это еще означает: *если в трехмерном пространстве* $[A\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3]$, *присоединенном к каждой точке A поверхности Σ, рассматривать точку M с фиксированными относительными координатами x^1, x^2, x^3, то геометрическое место, описываемое точкой M, когда точка A описывает кривую (C), будет ортогональной траекторией соответствующих пространств* $[A\vec{e}_1\, \vec{e}_2\, \vec{e}_3]$.

4°. *Предположим теперь* $u^{14}=u^{24}=u^{34}=0$. Уравнениями плоского элемента, касательного в некоторой точке к поверхности Σ, будут уравнения:

$$u^{23}\omega^1+u^{31}\omega^2+u^{12}\omega^3=0, \quad \omega^4=0.$$

На поверхности Σ существуют три однопараметрических семейства кривых; первое образовано линиями (C_1), вдоль которых $\omega^1=0$, второе — линиями (C_2), вдоль которых $\omega^2=0$ и третье — линиями (C_3), вдоль которых $\omega^3=0$. Форма ω_{i4} равна нулю, если перемещаться по линии

$(C_i)(i=1, 2, 3)$. Это дает три условия возможности решения, каждое из которых имеет геометрическую интерпретацию, аналогичную той, которая была дана в случае, когда только одна компонента u^{ij} была нулем. *Это будут необходимые условия для того, чтобы через поверхность Σ проходила гиперповерхность, принадлежащая четырежды ортогональной системе.*

5°. *Предположим* $u^{23}=u^{31}=u^{12}=u^{34}=0$. Уравнения плоского элемента, касательного к поверхности Σ, будут иметь вид

$$u^{14}\omega^2 - u^{24}\omega^1 = 0, \quad \omega^3 = 0.$$

На поверхности Σ существует семейство кривых (C_1), вдоль которых $\omega^1=\omega^2=0$, и семейство кривых (C_2), вдоль которых $\omega^4=0$. Вдоль кривых (C_1) формы ω_{12}, ω_{13}, ω_{23} равны нулю; вдоль кривых (C_2) форма ω_{34} равна нулю. Рассмотрение линий (C_1) дает три условия возможности решения, линий (C_2) — четвертое условие.

6°. *Наконец, предположим* $u^{12}=u^{13}=u^{23}=u^{14}=u^{24}=0$. Уравнениями плоского элемента, касательного к поверхности Σ, будут уравнения

$$\omega^1=\omega^2=0.$$

На поверхности Σ существует семейство кривых (C_1), вдоль которых $\omega^3=0$, и семейство кривых (C_2), вдоль которых $\omega^4=0$. Вдоль кривых (C_1) формы ω_{12}, ω_{13}, ω_{23} равны нулю; вдоль кривых (C_2) формы ω_{12}, ω_{14}, ω_{24} равны нулю. Это дает шесть условий возможности решения. Это шесть *необходимых условий для того, чтобы поверхность Σ могла рассматриваться как пересечение двух гиперповерхностей четырежды ортогональной системы* (в рассматриваемом случае гиперповерхностей первого семейства и гиперповерхностей второго семейства системы).

65. *Характеристические многообразия.* При заданной p-ортогональной системе характеристическими многообразиями системы будут многообразия, двумерные касательные элементы которых будут особыми, т. е. у которых по крайней мере одна из компонент u^{ij} равна нулю. Предположим для простоты $p=4$ и обозначим через ξ^1, ξ^2, ξ^3, ξ^4 параметры гиперповерхностей каждого из четырех семейств системы. Шести случаям, рассмотренным в предыдущем пункте, соответствуют шесть классов характеристических многообразий.

1°. $u^{12}=0$. Многообразия, удовлетворяющие уравнению

$$f(\xi^1, \xi^2)=0.$$

2°. $u^{12}=u^{34}=0$. Многообразия, определяемые двумя уравнениями:

$$f(\xi^1, \xi^2)=0,\ \varphi(\xi^3, \xi^4)=0.$$

3°. $u^{23}=u^{31}=u^{12}=0$. Многообразия, удовлетворяющие двум независимым уравнениям:

$$f(\xi^1, \xi^2, \xi^3)=0, \quad \varphi(\xi^1, \xi^2, \xi^3)=0.$$

4°. $u^{14}=u^{24}=u^{34}=0$. Многообразия $\xi^4=\text{const}$, т. е. гиперповерхности одного из четырех семейств данной системы и все двумерные многообразия, содержащиеся в такой гиперповерхности.

5°. $u^{23}=u^{31}=u^{12}=u^{34}=0$. Многообразия, удовлетворяющие уравнениям

$$\xi^2=\text{const}, \quad f(\xi^1, \xi^2)=0.$$

6°. $u^{12}=u^{13}=u^{23}=u^{14}=u^{24}=0$. Пересечения двух гиперповерхностей данной четырежды ортогональной системы.

66. Замечание. Если p-мерное пространство будет постоянной ненулевой кривизны, то ничего не надо менять при решении проблемы p-ортогональных систем. Но уже не будет того же самого в произвольном римановом пространстве *, это объясняется тем, что уравнения (III, 4) вводят внешние дифференциалы форм ω_{ij} и что вообще всякий трехмерный элемент, который удовлетворяет уравнениям (III, 3), не удовлетворяет уравнениям (III, 4). Это затруднение не проявляется в задаче триортогональных систем. Впрочем, существование p-ортогональной системы в римановом пространстве p измерений дает возможность представить линейный элемент ds^2 этого пространства как квадратичную форму

$$g_1(d\xi^1)^2+g_2(d\xi^2)^2+\ldots+g_p(d\xi^p)^2;$$

между тем наиболее общий p-мерный линейный элемент ds^2 содержит $\frac{p(p+1)}{2}$ произвольных функций p переменных; правда, можно всегда выполнить замену переменных так, чтобы

* См. Э. Картан (E. Cartan. *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann.* Paris, Gauthier — Villars, 1928, 2-me edition revue et augmente, 1946). Имеется русский перевод первого издания: Э. Картан. *Лекции по геометрии римановых пространств.* ОНТИ, 1930; см. также *«Риманова геометрия в ортогональном репере»* (по лекциям Э. Картана, читанным в Сорбонне в 1926—1927 гг.). Изд-во МГУ, 1960; последняя книга содержит главы, имеющиеся во французском издании 1946 г. и не вошедшие в русское издание 1930 г.— *Прим. перев.*

привести p коэффициентов к постоянным числовым значениям, но вообще невозможно привести к нулю $\frac{p(p-1)}{2}$ из этих коэффициентов, потому что если $p > 3$, то $\frac{p(p-1)}{2}$ больше, чем p.

IV. РЕАЛИЗАЦИЯ ТРЕХМЕРНОГО РИМАНОВА ПРОСТРАНСТВА МНОГООБРАЗИЕМ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

67. Мы уже рассматривали (п. **20** и п. **21**, стр. 151—153) проблему наложения поверхностей, которую можно рассматривать как задачу отыскания поверхности с заданным линейным элементом ds^2. Аналогичную задачу можно ставить, если задать определенную квадратичную дифференциальную форму от трех переменных: можно ли найти в евклидовом пространстве трехмерное многообразие, линейный элемент которого будет точно равен этой заданной форме? Мы покажем, что проблема всегда возможна в евклидовом пространстве шести измерений, но вообще невозможна в евклидовом пространстве пяти или четырех измерений.

В римановой геометрии *, как и в евклидовой, к каждой точке A трехмерного пространства можно присоединить ортогональный трехгранник; инфинитезимальные смещения трехгранника можно при подходящем условии тоже определить шестью формами $\tilde{\omega}^1$, $\tilde{\omega}^2$, $\tilde{\omega}^3$, $\tilde{\omega}_{23} = -\tilde{\omega}_{32}$, $\tilde{\omega}_{31} = -\tilde{\omega}_{13}$, $\tilde{\omega}_{12} = -\tilde{\omega}_{12}$. Линейный элемент ds^2 пространства равен сумме квадратов $(\tilde{\omega}^1)^2 + (\tilde{\omega}^2)^2 + (\tilde{\omega}^3)^2$. Кроме того, имеются формулы

$$\left.\begin{aligned} d\vec{A} &= \tilde{\omega}^1\vec{e}_1 + \tilde{\omega}^2\vec{e}_2 + \tilde{\omega}^3\vec{e}_3, \\ D\vec{e}_1 &= \tilde{\omega}_{12}\vec{e}_2 - \tilde{\omega}_{31}\vec{e}_3, \\ D\vec{e}_2 &= -\tilde{\omega}_{12}\vec{e}_1 + \tilde{\omega}_{23}\vec{e}_3, \\ D\vec{e}_3 &= \tilde{\omega}_{31}\vec{e}_1 - \tilde{\omega}_{23}\vec{e}_2, \end{aligned}\right\} \tag{IV,1}$$

где символ $D\vec{e}_i$ означает *ковариантное дифференцирование*. Уравнения структуры также обобщаются, но частично; они пишутся в виде:

* См. сноску на предыдущей странице.

$$\left.\begin{aligned}
d\tilde{\omega}^1 &= -[\tilde{\omega}^2\tilde{\omega}_{12}] + [\tilde{\omega}^3\tilde{\omega}_{31}],\\
d\tilde{\omega}^2 &= [\tilde{\omega}^1\tilde{\omega}_{12}] - [\tilde{\omega}^3\tilde{\omega}_{23}],\\
d\tilde{\omega}^3 &= -[\tilde{\omega}^1\tilde{\omega}_{31}] + [\tilde{\omega}^2\tilde{\omega}_{23}],\\
d\tilde{\omega}_{23} &= [\tilde{\omega}_{12}\tilde{\omega}_{31}] - K_{11}[\tilde{\omega}^2\tilde{\omega}^3] - K_{12}[\tilde{\omega}^3\tilde{\omega}^1] - K_{13}[\tilde{\omega}^1\tilde{\omega}^2],\\
d\tilde{\omega}_{31} &= [\tilde{\omega}_{23}\tilde{\omega}_{12}] - K_{21}[\tilde{\omega}^2\tilde{\omega}^3] - K_{22}[\tilde{\omega}^3\tilde{\omega}^1] - K_{23}[\tilde{\omega}^1\tilde{\omega}^2],\\
d\tilde{\omega}_{12} &= [\tilde{\omega}_{31}\tilde{\omega}_{23}] - K_{31}[\tilde{\omega}^2\tilde{\omega}^3] - K_{32}[\tilde{\omega}^3\tilde{\omega}^1] - K_{33}[\tilde{\omega}^1\tilde{\omega}^2].
\end{aligned}\right\} \quad (IV,2)$$

Коэффициенты $K_{ij} = K_{ji}$ определяют *риманову кривизну* пространства.

Если присоединить к каждой точке пространства определенный прямоугольный трехгранник, то формы $\tilde{\omega}^i$, $\tilde{\omega}_{ij}$ будут линейными комбинациями дифференциалов координат u^1, u^2, u^3 точки пространства, где координаты определены по некоторому закону. Если же присоединить к каждой точке наиболее общий прямоугольный трехгранник, имеющий эту точку своим началом, то формы $\tilde{\omega}_{ij}$ будут линейно зависеть от дифференциалов трех новых параметров, отличных от координат начальной точки,— параметров, которые служат для определения ориентации трехгранника. Формулы (IV, 1) и (IV, 2) будут годны и в том и в другом случае.

68. Прежде чем приступать к проблеме реализации данного риманова пространства трехмерным многообразием евклидова пространства шести измерений, напомним основные формулы метода подвижного прямоугольного гексаэдра — формулы, которые являются частным случаем формул (III, 1) и (III, 2) п. **61**.

Присоединяя к каждой точке A пространства прямоугольный гексаэдр, определяемый шестью ортогональными векторами $\vec{e}_i$, получим соотношения

$$\left.\begin{aligned}
d\vec{A} &= \omega^i\vec{e}_i,\\
d\vec{e}_i &= \omega_{ij}\vec{e}_j \qquad (\omega_{ij} = -\omega_{ji})
\end{aligned}\right\} \quad (IV,3)$$

с уравнениями структуры

$$\left.\begin{aligned}
d\omega^i &= [\omega^k\omega_{ki}] \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6),\\
d\omega_{ij} &= [\omega_{ik}\omega_{kj}] \qquad (i, j, k = 1, 2, \ldots 6).
\end{aligned}\right\} \quad (IV,4)$$

69. Зададим теперь трехмерное риманово пространство $\mathscr{E}$ и его уравнения структуры (IV, 2) относительно выбранных прямоугольных трехгранников, присоединенных к различным его точкам. Задача, которую мы хотим поставить, состоит в сопоставлении каждому из этих трехгранников прямоугольного гексаэдра шестимерного евклидова пространства E_6, начальная точка которого будет описывать трехмерное многообразие V так, чтобы три вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ гексаэдра касались многообразия V, три других $\vec{e}_4, \vec{e}_5, \vec{e}_6$ были к нему нормальны и, наконец, чтобы при инфинитезимальном смещении этого гексаэдра, которое соответствует инфинитезимальному смещению трехгранника в римановом пространстве, имело место равенство

$$(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2 = (\tilde{\omega}^1)^2 + (\tilde{\omega}^2)^2 + (\tilde{\omega}^3)^2.$$

Это соотношение показывает, что можно перейти от $\tilde{\omega}^i$ к ω^i ортогональной подстановкой; другими словами, в трехмерном пространстве, касательном к V, в некоторой точке M многообразия V можно подвергнуть векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, выходящие из этой точки, в их совокупности такому вращению вокруг точки M, что будем иметь $\omega^i = \tilde{\omega}^i$.

Обозначим латинскими буквами $i, j, \ldots$ указатели 1, 2, 3 и греческими буквами $\alpha, \beta, \ldots$ указатели 4, 5, 6. Поставленная задача сведется к интегрированию системы

$$\omega^i = \tilde{\omega}^i \quad (i = 1, 2, 3), \quad \omega^\alpha = 0 \quad (\alpha = 4, 5, 6). \tag{IV,5}$$

Внешнее дифференцирование трех первых уравнений в силу (IV, 4) и (IV, 2) дает уравнения

$$\left.\begin{aligned} &[\tilde{\omega}^2, \omega_{12} - \tilde{\omega}_{12}] - [\tilde{\omega}^3, \omega_{31} - \tilde{\omega}_{31}] = 0,\\ &[\tilde{\omega}^3, \omega_{23} - \tilde{\omega}_{23}] - [\tilde{\omega}^1; \omega_{12} - \tilde{\omega}_{12}] = 0,\\ &[\tilde{\omega}^1, \omega_{31} - \tilde{\omega}_{31}] - [\tilde{\omega}^2, \omega_{23} - \tilde{\omega}_{23}] = 0, \end{aligned}\right\}$$

откуда следует

$$\omega_{23} = \tilde{\omega}_{23}, \quad \omega_{31} = \tilde{\omega}_{31}, \quad \omega_{12} = \tilde{\omega}_{12}. \tag{IV,6}$$

Что касается трех последних уравнений (IV, 5), то они дают после внешнего дифференцирования

$$[\tilde{\omega}^k \omega_{k\alpha}] = 0 \qquad (\alpha = 4, 5, 6),$$

где индекс суммирования k принимает значения 1, 2, 3.

Наконец, уравнения (IV, 6) после внешнего диффереицирования дают

$$[\omega_{ik}\omega_{jk}] + [\omega_{i\lambda}\omega_{j\lambda}] = [\widetilde{\omega}_{ik}\widetilde{\omega}_{jk}] + K_{l1}[\widetilde{\omega}^2\widetilde{\omega}^3] + K_{l2}[\widetilde{\omega}^3\widetilde{\omega}^1] + K_{l3}[\widetilde{\omega}^1\widetilde{\omega}^2],$$

где буквой l обозначается латинский индекс, который вместе с указателями i, j определяет четную перестановку (i, j, l) трех индексов 1, 2, 3.

Окончательно получаем замкнутую дифференциальную систему

$$\left.\begin{aligned} \omega^i = \widetilde{\omega}^i, \quad \omega^\alpha = 0, \quad \omega_{ij} = \widetilde{\omega}_{ij}, \\ [\widetilde{\omega}^k\omega_{k\alpha}] = 0, \\ [\omega_{i\lambda}\omega_{j\lambda}] = K_{l1}[\widetilde{\omega}^2\widetilde{\omega}^3] + K_{l2}[\widetilde{\omega}^3\widetilde{\omega}^1] + K_{l3}[\widetilde{\omega}^1\widetilde{\omega}^2]. \end{aligned}\right\} \qquad (IV,7)$$

В этих 15 уравнениях, из которых 9 линейных и 6 квадратичных, тремя независимыми переменными будут координаты точки заданного риманова пространства; формы $\widetilde{\omega}^i$, $\widetilde{\omega}_{ij}$ — известные линейные комбинации дифференциалов этих координат, из которых три первые независимы. Имеются 21 неизвестная функция, именно: параметры, от которых зависит наиболее общий прямоугольный гексаэдр евклидова пространства шести измерений; формы ω^i, ω^α, ω_{ij}, $\omega_{i\alpha}$ — 18 линейных, линейно независимых форм, построенных на этих 21 параметре и их дифференциалах. Однако в действительности число неизвестных *не паразитических* функций равно 18, ибо уравнения

$$\omega^i = \omega^\alpha = \omega_{ij} = \omega_{i\alpha} = 0$$

показывают, что начальная точка подвижного гексаэдра остается неподвижной, так же как векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$; эти уравнения образуют вполне интегрируемую систему, общее решение которой образовано множеством фигур, составленных из трех единичных ортогональных векторов, выходящих из этой точки,— фигур, которые зависят по существу от 18 параметров (6 — для координат точки, 5 — для компонент $\vec{e}_1$, 4 — для $\vec{e}_2$, и 3 — для $\vec{e}_3$).

Система (IV, 7) в действительности вводит только точки трехмерного риманова многообразия V, касательное в каждой точке V трехмерное пространство и в этом касательном пространстве прямоугольный трехгранник, определяемый векторами $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$. Положение векторов $\vec{e}_4$, $\vec{e}_5$, $\vec{e}_6$ дает паразитические неизвестные. Таким образом, в действительности имеется только 18 неизвестных функций, дифференциалы которых фигурируют в 18 линейных независимых формах ω^i, ω^α, ω_{ij}, $\omega_{i\alpha}$.

70. *Трехмерные интегральные элементы.* Они получаются при разрешении 6 квадратичных уравнений (IV, 7) относительно 9 форм $\omega_{i\alpha}$. Три первых квадратичных уравнения дают

$$\left.\begin{aligned}
\omega_{14} &= a_{11}\tilde{\omega}^1 + a_{12}\tilde{\omega}^2 + a_{13}\tilde{\omega}^3,\\
\omega_{24} &= a_{21}\tilde{\omega}^1 + a_{22}\tilde{\omega}^2 + a_{23}\tilde{\omega}^3,\\
\omega_{34} &= a_{31}\tilde{\omega}^1 + a_{32}\tilde{\omega}^2 + a_{33}\tilde{\omega}^3,\\
\omega_{15} &= b_{11}\tilde{\omega}^1 + b_{12}\tilde{\omega}^2 + b_{13}\tilde{\omega}^3,\\
\omega_{25} &= b_{21}\tilde{\omega}^1 + b_{22}\tilde{\omega}^2 + b_{23}\tilde{\omega}^3,\\
\omega_{35} &= b_{31}\tilde{\omega}^1 + b_{32}\tilde{\omega}^2 + b_{33}\tilde{\omega}^3,\\
\omega_{16} &= c_{11}\tilde{\omega}^1 + c_{12}\tilde{\omega}^2 + c_{13}\tilde{\omega}^3,\\
\omega_{26} &= c_{21}\tilde{\omega}^1 + c_{22}\tilde{\omega}^2 + c_{23}\tilde{\omega}^3,\\
\omega_{36} &= c_{31}\tilde{\omega}^1 + c_{32}\tilde{\omega}^2 + c_{33}\tilde{\omega}^3,
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(IV,8)}$$

где $a_{ij} = a_{ji}$, $b_{ij} = b_{ji}$, $c_{ij} = c_{ji}$. Формы ω_{i4} равны половинам частных производных по параметрам $\tilde{\omega}^i$ квадратичной формы

$$\Phi_4 = a_{ij}\tilde{\omega}^i\tilde{\omega}^j;$$

формы ω_{i5}, ω_{i6} равны половинам частных производных по параметрам $\tilde{\omega}^i$ двух других квадратичных форм

$$\Phi_5 = b_{ij}\tilde{\omega}^i\tilde{\omega}^j, \qquad \Phi_6 = c_{ij}\tilde{\omega}^i\tilde{\omega}^j.$$

Геометрический смысл этих форм следующий. Если рассматривать кривую, проведенную в многообразии V, и обозначить через $\left(\frac{\vec{1}}{R_n}\right)$ нормальную проекцию вектора кривизны на трехмерное пространство, то будем иметь

$$\left(\frac{\vec{1}}{R_n}\right) ds^2 = \Phi_4\vec{e}_4 + \Phi_5\vec{e}_5 + \Phi_6\vec{e}_6.$$

Остальные квадратичные уравнения (IV, 7) устанавливают между коэффициентами Φ_4, Φ_5, Φ_6 соотношения

$$A_{ij} + B_{ij} + C_{ij} = K_{ij}, \qquad \text{(IV,9)}$$

где A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} означают миноры элементов a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} в определителях, образованных из коэффициентов форм Φ_4, Φ_5, Φ_6.

Отсюда следует, что трехмерный общий интегральный элемент зависит от $6 \cdot 3 = 18$ параметров, связанных шестью (независимыми) соотношениями, что дает 12 независимых параметров.

71. *Подсчет приведенных характеров.* Возьмем линейный интегральный элемент, который в силу произвола трехгранников, присоединяемых к риманову пространству, можно всегда предположить удовлетворяющим соотношениям $\tilde{\omega}^2 = \tilde{\omega}^3 = 0$. Приведенной полярной системой этого интегрального элемента будет система:

$$\left.\begin{aligned} \omega_{14} = \omega_{15} = \omega_{16} = 0, \\ a_{11}\omega_{24} + b_{11}\omega_{25} + c_{11}\omega_{26} = 0, \\ a_{11}\omega_{34} + b_{11}\omega_{35} + c_{11}\omega_{36} = 0, \\ a_{12}\omega_{34} + b_{12}\omega_{35} + c_{12}\omega_{36} - (a_{13}\omega_{24} + b_{13}\omega_{25} + c_{13}\omega_{26}) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (IV,10)$$

Ранг ее $s_1 = 6$.

Если теперь мы возьмем двумерный интегральный элемент, удовлетворяющий условию $\tilde{\omega}^3 = 0$, то приведенными уравнениями его полярного элемента будут уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \omega_{14} = \omega_{15} = \omega_{16} = 0, \\ \omega_{24} = \omega_{25} = \omega_{26} = 0, \\ a_{11}\omega_{34} + b_{11}\omega_{35} + c_{11}\omega_{36} = 0, \\ a_{12}\omega_{34} + b_{12}\omega_{35} + c_{12}\omega_{36} = 0, \\ a_{22}\omega_{34} + b_{22}\omega_{35} + c_{22}\omega_{36} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (IV,11)$$

Имеем $s_1 + s_2 = 9$, откуда $s_2 = 3$ и, следовательно, $s_3 = 0$.

Поскольку сумма $s_1 + 2s_2 + 3s_3 = 12$ равна числу произвольных параметров, от которых зависит общий трехмерный интегральный элемент, *система — в инволюции, и ее общее решение зависит от трех произвольных функций двух переменных.*

72. *Проблема Коши.* Пусть в шестимерном евклидовом пространстве задана поверхность Σ, реализующая данное двумерное многообразие S риманова пространства. Можно всегда предположить, что к каждой точке многообразия S присоединен ортогональный трехгранник, третий вектор которого нормален к многообразию S. Мы получим, следовательно, уравнение $\tilde{\omega}^3 = 0$ для рассматриваемого двумерного решения дифференциальной системы (IV, 7). К каждой точке поверхности Σ должен быть присоединен прямоугольный гексаэдр, векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ которого вполне определены и будут касаться поверхности Σ, так что удовлетворяются уравнения

$$\omega^1 = \tilde{\omega}^1, \qquad \omega^2 = \tilde{\omega}^2. \tag{IV,12}$$

Как бы ни выбирать остальные единичные векторы гексаэдра, будем иметь $\omega^3 = \omega^4 = \omega^5 = \omega^6 = 0$. Два уравнения (IV, 12) влекут за собой

$$[\tilde{\omega}^2, \quad \omega_{12} - \tilde{\omega}_{12}] = 0, \qquad [\tilde{\omega}^1, \quad \omega_{12} - \tilde{\omega}_{12}] = 0,$$

откуда

$$\omega_{12} = \tilde{\omega}_{12}.$$

Чтобы все линейные уравнения системы (IV, 7) были удовлетворены, надо, сверх того, чтобы

$$\omega_{13} = \tilde{\omega}_{13}, \qquad \omega_{23} = \tilde{\omega}_{23}.$$

Но из уравнения $\tilde{\omega}^3 = 0$ следует в силу третьего уравнения (IV, 2) квадратичное уравнение

$$[\tilde{\omega}^1 \tilde{\omega}_{13}] + [\tilde{\omega}^2 \tilde{\omega}_{23}] = 0,$$

откуда

$$\tilde{\omega}_{13} = a\tilde{\omega}^1 + b\tilde{\omega}^2, \qquad \tilde{\omega}_{23} = b\tilde{\omega}^1 + c\tilde{\omega}^2.$$

Чтобы закончить определение двумерного решения, надо выбрать вектор $\vec{e}_3$, нормальный к поверхности Σ, таким образом, чтобы иметь

$$\omega_{13} = a\tilde{\omega}^1 + b\tilde{\omega}^2, \qquad \omega_{23} = b\tilde{\omega}^1 + c\tilde{\omega}^2. \tag{IV,13}$$

Чтобы сделать этот выбор, предположим сначала, что по некоторому закону взяты векторы $\vec{e}_3$, $\vec{e}_4$, $\vec{e}_5$, $\vec{e}_6$, нормальные к поверхности Σ; обозначим их $\vec{\varepsilon}_3$, $\vec{\varepsilon}_4$, $\vec{\varepsilon}_5$, $\vec{\varepsilon}_6$ и положим

$$d\vec{e}_1 = \hat{\omega}_{13}\vec{\varepsilon}_3 + \hat{\omega}_{14}\vec{\varepsilon}_4 + \hat{\omega}_{15}\vec{\varepsilon}_5 + \hat{\omega}_{16}\vec{\varepsilon}_6,$$

$$d\vec{e}_2 = \hat{\omega}_{23}\vec{\varepsilon}_3 + \hat{\omega}_{24}\vec{\varepsilon}_4 + \hat{\omega}_{25}\vec{\varepsilon}_5 + \hat{\omega}_{26}\vec{\varepsilon}_6,$$

где

$$\hat{\omega}_{1\alpha} = h_\alpha\, \tilde{\omega}^1 + k_\alpha\, \tilde{\omega}^2, \qquad \hat{\omega}_{2\alpha} = k_\alpha\, \tilde{\omega}^1 + l_\alpha\, \tilde{\omega}^2 \quad (\alpha = 3,\ 4,\ 5,\ 6).$$

Искомый вектор $\vec{e}_3$ будет иметь вид

$$\vec{e}_3 = x^3\vec{\varepsilon}_3 + x^4\vec{\varepsilon}_4 + x^5\vec{\varepsilon}_5 + x^6\vec{\varepsilon}_6,$$

причем его координаты удовлетворяют следующим конечным уравнениям:

$$\left.\begin{aligned}(x^3)^2+(x^4)^2+(x^5)^2+(x^6)^2&=1,\\ h_3x^3+h_4x^4+h_5x^5+h_6x^6&=a,\\ k_3x^3+k_4x^4+k_5x^5+k_6x^6&=b,\\ l_3x^3+l_4x^4+l_5x^5+l_6x^6&=c.\end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{IV},14)$$

Эти четыре уравнения с четырьмя неизвестными сводятся к линейным уравнениям, если вычислить сначала определитель

$$\delta=\begin{vmatrix} x^3 & x^4 & x^5 & x^6\\ h_3 & h_4 & h_5 & h_6\\ k_3 & k_4 & k_5 & k_6\\ l_3 & l_4 & l_5 & l_6\end{vmatrix}, \qquad (\mathrm{IV},15)$$

квадрат которого равен

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & a & b & c\\ a & (\vec{h})^2 & \vec{h}\cdot\vec{k} & \vec{h}\cdot\vec{l}\\ b & \vec{k}\cdot\vec{h} & (\vec{k})^2 & \vec{k}\cdot\vec{l}\\ c & \vec{l}\cdot\vec{h} & \vec{l}\cdot\vec{k} & (\vec{l})^2\end{vmatrix},$$

где $\vec{h}, \vec{k}, \vec{l}$ обозначают в четырехмерном пространстве, нормальном к поверхности Σ, три вектора, имеющие соответственно компонентами величины h_i, k_i, l_i $(i=3, 4, 5, 6)$.

Здесь возможно несколько случаев.

Предположим сначала, что векторы $\vec{h}, \vec{k}, \vec{l}$ линейно независимы. Если Δ отрицателен, то ясно, что уравнения (IV, 14) не допускают ни одного действительного решения. Если Δ положителен, они допускают два действительных и различных решения; мы увидим в следующем пункте, что начальные данные не будут характеристическими и что, следовательно, через поверхность Σ проходит два трехмерных многообразия, реализующих в окрестности Σ заданное риманово пространство $\mathscr{E}$. Если, наконец, Δ равен нулю, то уравнения (IV, 14) допускают единственное решение, которому соответствует двумерное решение дифференциальной системы (IV, 7), но, как мы увидим в следующем пункте, это решение характеристическое.

Если векторы $\vec{h}, \vec{k}, \vec{l}$ линейно зависимы и система (IV, 14) совместна, то каждому из ее решений соответствует двумерное решение системы (IV, 7); но, как увидим, оно характеристическое.

73. *Двумерные характеристические решения системы* (IV, 7). Двумерный интегральный элемент $\widetilde{\omega}^3 = 0$ будет особым, если ранг системы (IV, 11) меньше девяти, иначе говоря, если определитель

$$\delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & b_{11} & c_{11} \\ a_{12} & b_{12} & c_{12} \\ a_{22} & b_{22} & c_{22} \end{vmatrix}$$

обращается в нуль. Будем исходить из двумерного решения системы (IV, 7), определяемого так, как это было изложено в предыдущем пункте. Если возьмем в качестве векторов $\vec{\varepsilon}_3$ $\vec{\varepsilon}_4$, $\vec{\varepsilon}_5$, $\vec{\varepsilon}_6$ векторы $\vec{e}_3$, $\vec{e}_4$, $\vec{e}_5$, $\vec{e}_6$, то неизвестные x^3, x^4, x^5, x^6 уравнений (IV,14) будут иметь значения 1, 0, 0, 0; векторы $\vec{h}$, $\vec{k}$, $\vec{l}$ будут иметь компонентами соответственно величины

$$\begin{matrix} a, & a_{11}, & b_{11}, & c_{11}; \\ b, & a_{12}, & b_{12}, & c_{12}; \\ c, & a_{22}, & b_{22}, & c_{22}. \end{matrix}$$

Теперь определитель δ' равен определителю δ (IV, 15), квадрат которого равен Δ. Чтобы рассматриваемое двумерное многообразие было характеристическим, необходимо и достаточно, чтобы Δ был равен нулю; это может быть в двух случаях: или векторы $\vec{h}, \vec{k}, \vec{l}$ будут линейно независимы (первый случай, рассмотренный в п. 72), или они будут линейно зависимы (второй случай, рассмотренный в п. 72).

Если полученное для системы (IV, 7) двумерное решение — характеристическое, то покажем, что это решение должно удовлетворять дополнительным условиям для того, чтобы проблема была возможна. Эти условия мы получим из рассмотрения уравнений (IV, 9) п. 70. Мы можем предположить, что для $\widetilde{\omega}^3 = 0$ квадратичная форма Φ_6 тождественно равна нулю, т. е. коэффициенты c_{11}, c_{12}, c_{22} равны нулю. Три уравнения

$$A_{11} + B_{11} + C_{11} = K_{11},$$
$$A_{12} + B_{12} + C_{12} = K_{12},$$
$$A_{22} + B_{22} + C_{22} = K_{22}$$

линейны относительно a_{33} и b_{33} ; в самом деле, они могут быть записаны в виде

$$\left.\begin{aligned} a_{22}a_{33} + b_{22}b_{33} &= a_{23}^2 + b_{23}^2 + c_{23}^2 + K_{11}, \\ a_{12}a_{33} + b_{12}b_{33} &= a_{13}a_{23} + b_{13}b_{23} + c_{13}c_{23} - K_{12}, \\ a_{11}a_{33} + b_{11}b_{33} &= a_{13}^2 + b_{13}^2 + c_{13}^2 + K_{22}. \end{aligned}\right\} \qquad (IV,16)$$

Но при заданном двумерном многообразии в каждой точке известны все коэффициенты квадратичных форм Φ_4, Φ_5, Φ_6, за исключением a_{33}, b_{33}, c_{33} (коэффициент a_{13}, например, известен в силу соотношения $d\vec{e}_3 = (a_{31}\vec{e}_1 + a_{32}\vec{e}_2)\,\tilde{\omega}^1$, которое имеет место на двумерном многообразии). Исключая a_{33} и b_{33} из трех уравнений (IV, 16), *получаем, следовательно, необходимое условие, которому должно удовлетворять всякое двумерное характеристическое решение, чтобы через это многообразие проходило трехмерное многообразие, реализующее пространство* $\mathcal{E}$*. Это условие выражается уравнением

$$\begin{vmatrix} a_{22} & b_{22} & a_{23}^2 + b_{23}^2 + c_{23}^2 + K_{11} \\ a_{12} & b_{12} & a_{13}a_{23} + b_{13}b_{23} + c_{13}c_{23} - K_{12} \\ a_{11} & b_{11} & a_{13}^2 + b_{13}^2 + c_{13}^2 + K_{22} \end{vmatrix} = 0. \qquad (IV,17)$$

74. *Характеристические многообразия трехмерного многообразия, реализующего данный линейный элемент ds^2.* Если трехмерное многообразие V шестимерного евклидова пространства реализует заданный линейный элемент ds^2 (заданного риманова пространства $\mathcal{E}$), то мы получим двумерные характеристические многообразия, если выразим, что касательный плоский элемент трех измерений $u_1\omega^1 + u_2\omega^2 +$

* Это условие обобщает хорошо известное условие, которому должна удовлетворять линия (C) обыкновенного пространства, чтобы через (C) проходила поверхность с заданным линейным элементом ds^2, для которой (C) должна быть асимптотической линией: квадрат кручения должен быть равен римановой кривизне с изменением знака заданного ds^2.

$+ u_3\omega^3 = 0$ обладает тем свойством, что при перемещении вдоль этого плоского элемента формы Φ_4, Φ_5, Φ_6 будут линейно зависимы, иначе говоря, если существует три коэффициента λ^4, λ^5, λ^6, не равные нулю одновременно и такие, что квадратичная форма $\lambda^4\Phi_4 + \lambda^5\Phi_5 + \lambda^6\Phi_6$ будет делиться на $u_1\tilde{\omega}^1 + u_2\tilde{\omega}^2 + u_3\tilde{\omega}^3$. Это выражается соотношением

$$\begin{vmatrix} u_1 & 0 & 0 & 0 & u_3 & u_2 \\ 0 & u_2 & 0 & u_3 & 0 & u_1 \\ 0 & 0 & u_3 & u_2 & u_1 & 0 \\ a_{11} & a_{22} & a_{33} & 2a_{23} & 2a_{31} & 2a_{12} \\ b_{11} & b_{22} & b_{33} & 2b_{23} & 2b_{31} & 2b_{12} \\ c_{11} & c_{22} & c_{33} & 2c_{23} & 2c_{31} & 2c_{12} \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{(IV,18)}$$

Если это соотношение не удовлетворено тождественно, т. е. если многообразие V не образует особого решения системы (IV, 7), то получается кубическое уравнение относительно u_1, u_2, u_3, которое определяет в каждой точке многообразия V конус третьего класса. *Искомые характеристические многообразия будут решениями уравнения в частных производных первого порядка, определяемого уравнением* (IV, 18); касательная плоскость в каждой точке должна касаться конуса третьего класса, определяемого этим уравнением.

75. *Особые решения.* Это такие решения, для которых уравнение (IV, 18) относительно u_1, u_2, u_3 будет тождеством. Это условие позволяет характеризовать особые решения чисто проективным свойством.

Рассмотрим на интегральном многообразии V линию (C), касательная к которой в каждой точке A имеет в качестве направляющих параметров формы $\tilde{\omega}^1$, $\tilde{\omega}^2$, $\tilde{\omega}^3$. Плоское многообразие, содержащее одновременно трехмерную плоскость, касательную к многообразию V в точке A, и соприкасающийся биплан в точке A к линии (C), содержит вектор

$$\Phi_4\vec{e}_4 + \Phi_5\vec{e}_5 + \Phi_6\vec{e}_6,$$

как показывает немедленно подсчет $d\vec{A}$ и $d^2\vec{A}$. Теперь, если биплан Π, который касается многообразия V в точке A, будет особым интегральным элементом, то это будет означать, что геометрическое место соприкасающихся плоскостей к кривым, которые касаются биплана Π в точке A, расположено в гиперплоскости пяти измерений. Многообразие V будет особым решением, если это имеет место, каковы бы ни были плоские элементы П, касательные к V. В этом и заключается искомое проективное свойство особых решений.

Возможны два случая в зависимости от того, будет ли пятимерная гиперплоскость, соответствующая биплану П, независима от этого биплана или нет; в первом случае эта гиперплоскость будет тем, что называется *соприкасающейся гиперплоскостью* в точке A к многообразию V.

Первый случай. В этом случае можно предположить, что соприкасающаяся гиперплоскость будет нормальна в каждой точке к вектору $\vec{e}_6$, иначе говоря, что форма Φ_6 тождественно равна нулю. Уравнения

$$\omega_{16}=0, \quad \omega_{26}=0, \quad \omega_{36}=0$$

дадут после внешнего дифференцирования

$$[\omega_{14}\omega_{46}]+[\omega_{15}\omega_{56}]=0,$$

$$[\omega_{24}\omega_{46}]+[\omega_{25}\omega_{56}]=0,$$

$$[\omega_{34}\omega_{46}]+[\omega_{35}\omega_{56}]=0.$$

Отсюда следует *вообще* $\omega_{46}=\omega_{56}=0$, если только два конических сечения $\Phi_4=0$, $\Phi_5=0$ не будут дважды касаться или не имеют между собой касания второго порядка. *Если мы оставим эти два случая в стороне,* то увидим, что $d\vec{e}_6=0$ и, следовательно, соприкасающаяся гиперплоскость неподвижна. *Соответствующими римановыми пространствами будут те пространства, которые допускают реализацию трехмерным многообразием в евклидовом пространстве пяти измерений.* Можно доказать, что вообще их реализация в пятимерном пространстве возможна только одним способом, с точностью до переноса или симметрии.

Может случиться, что две формы Φ_5 и Φ_6 равны нулю; тогда риманово пространство допускает реализацию в четырехмерном пространстве. Если три формы Φ_4, Φ_5, Φ_6 равны нулю, то риманово пространство $\mathcal{E}$ обладает нулевой римановой кривизной; тогда оно по крайней мере локально реализуемо в евклидовом пространстве трех измерений.

Второй случай. Мы мало скажем об особых решениях этого второго случая. Легко доказать, что каждая из форм Φ_4, Φ_5, Φ_6 разлагается на два множителя первой степени; первый из этих множителей будет одним и тем же для всех трех форм, другой меняется вместе с тремя формами. Эти особые решения существуют только для пространств $\mathcal{E}$, у которых квадратичная форма Римана с коэффициентами K_{ij} имеет дискриминант, равный нулю. Интегральные многообразия имеют очень простое геометрическое строение: *каждое из них порождается произвольным однопараметрическим семейством плоских двумерных многообразий.* Они, следовательно, зависят от 11 произвольных функций одной переменной, что делает очевидным весьма исключительный характер римановых пространств, для которых дифференциальная система (IV, 7) допускает особые решения, входящие во второй случай.

Как видно, остается еще разобрать некоторое число случаев в теории особых решений дифференциальной системы, которая дает трехмерные многообразия шестимерного евклидова пространства, способные реализовать данное трехмерное риманово пространство.

Что касается римановых пространств n измерений, то известно, что они могут быть реализованы многообразиями, погруженными в евклидово пространство $\frac{n(n+1)}{2}$ измерений; задание $(n-1)$-мерного нехарактеристического решения дифференциальной системы этой задачи определяет, как и для $n=3$, конечное число n-мерных решений *.

* Относительно этой общей проблемы см. M. Janet. Annales Soc. pol. Math., **5**, 1926, 38—43; E. Cartan. Ibidem, **6**, 1—7, 1927.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cartan E., *Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff*, Annales Ecole Normale, 3-e serie, **16**, 1899, 239—332.

2. Cartan E., *Sur l'intégration des systèmes d'équations aux différentielles totales*, Annales Ecole Normale, 3-e serie, **18**, 1901, 241—311.

3. Cartan E., *Sur la structure des groupes infinis de transformations*, Annales Ecole Normale, 3-e serie, **21**, 1904, chap. I^er.

4. Riquier C., *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, Paris, 1910.

5. Coursat E. *Sur certains systèmes d'équations aux différentielles totales et sur une généralisation du probleme de Pfaff*. Annales Fac. Sc. Toulouse, 3-e serie, **7**, 1915, 1—58.

6. Cerf G., *Remarques sur une généralisation du probleme de Pfaff*, C. R., **170**, 1920, 374—376.

7. Goursat E., *Leçons sur le problème de Pfaff*, Paris, Hermann, 1922, chap. VIII.

8. Cartan E., *Leçons sur les invariants intégraux*, Paris, Hermann, 1922.

9. Riquier C., *La mèthode des fonctions majorantes et les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, Mém. Sc. Math., XXII, 1928.

10. Janet M., *Leçons sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, Paris, Gauthier — Villars, 1929.

11. Fubini G. et Čech E., *Introduction à la gèomètrie projective différentielle des surfaces*, Paris, Gauthier — Villars, 1931, chap. XII à XIV.

12. Kähler E., *Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen*, Hamburger Math. Einzelschrifte, **16**, 1934.

13. Thomas J. M., *An existence theorem for generalized pfaffian Systems*, Bull. Amer. Math. Soc., **40**, 1934, 309—315.

14. Thomas J. M., *Differential systems*, Amer. Math. Soc. Colloqium Public., XXI, 1937.

15. Schouten J. A. und van der Kulk W., *Beiträge zur Theorie der Systeme Pfaffscher Gleichungen*, Proc. Akad. Amsterdam, **43** et **44**, 1940, **45**, 1941.

16. Gillis P., *Sur les formes différentielles et la formule de Stokes*, Thèse Fac. Sc. Liége, 1942.

Литература на русском языке, добавленная переводчиком

1. Рашевский П. К., *Геометрическая теория уравнений с частными производными*, ГИТТЛ, М.—Л., 1947.
2. Фиников С. П., *Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии*, ГИТТЛ, М.—Л., 1948.
3. Фиников С. П., *Теория конгруэнций*, ГИТТЛ, М.—Л., 1950.
4. Фиников С. П., *Теория пар конгруэнций*, ГИТТЛ, М., 1956.
5. *Риманова геометрия в ортогональном репере* (по лекциям Э. Картана, читанным в Сорбонне в 1926—1927 гг.), Изд-во МГУ, 1960.
6. Щербаков Р. Н., *Аффинная и проективная дифференциальная геометрия*, Изд-во Томского ун-та, 1960.
7. Фавар Ж., *Курс локальной дифференциальной геометрии*, ИЛ, М., 1960.
8. Фиников С. П., *Дифференциальная геометрия*, Изд-во МГУ, 1961.

ПРИМЕЧАНИЯ ПЕРЕВОДЧИКА

[1] Действительно, дифференцируя первое уравнение (6) и используя при этом (6), (7), (1) и равенство $\omega_{21}=-\omega_{12}$, будем иметь

$$\frac{ds}{\rho}\vec{N}=(\omega_{12}\vec{e}_2+\omega_{13}\vec{e}_3)\cos\theta-\vec{e}_1\sin\theta\,d\theta+$$

$$+(\omega_{21}\vec{e}_1+\omega_{23}\vec{e}_3)\sin\theta+\vec{e}_2\cos\theta\,d\theta;$$

$$\frac{ds}{\rho}\vec{N}=(d\theta+\omega_{12})\vec{\varepsilon}+(\omega_{13}\cos\theta+\omega_{23}\sin\theta)\vec{e}_3.$$

[2] Равенства (8) получатся, если скалярно умножить предшествующее равенство соответственно на $\vec{\varepsilon}$ и $\vec{e}_3$ и учесть, что в силу (6)

$$\vec{N}\cdot\vec{\varepsilon}=\sin\tilde{\omega},\qquad \vec{N}\cdot\vec{e}_3=\cos\tilde{\omega}$$

и что проекции кривизны $\frac{1}{\rho}$ на касательную плоскость и на нормаль к поверхности по *определению* являются *геодезической* $\left(\frac{1}{R_g}\right)$ и *нормальной* $\left(\frac{1}{R_n}\right)$ *кривизнами* поверхности.

[3] Используемые здесь соотношения $\omega^1=\cos\theta\,ds$, $\omega^2=\sin\theta\,ds$ вытекают из сравнения уравнений

$$d\vec{A}=\omega^1\vec{e}_1+\omega^2\vec{e}_2,$$

$$\frac{d\vec{A}}{ds}=\vec{T}=\vec{e}_1\cos\theta+\vec{e}_2\sin\theta.$$

[4] Действительно,

$$\begin{vmatrix}\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial\omega^1} & \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial\omega^2}\\ \frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial\omega^1} & \frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial\omega^2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\omega^1 & \omega^2\\ a\omega^1+b\omega^2 & b\omega^1+c\omega^2\end{vmatrix}=$$

$$=b(\omega^1)^2+(c-a)\,\omega^1\omega^2-b(\omega^2)^2=\Psi.$$

[5] Первая и третья формулы (17) следуют из формул (8) при условиях $a=\frac{1}{R_1}$, $b=0$, $c=\frac{1}{R_2}$; вторая формула (17) вытекает из того, что в силу (11) и (12)

$$\frac{1}{T_g}=\frac{\Psi}{ds^2},$$

выражение для Ψ имеет вид (16) и

$$ds^2=\frac{\omega^1\omega^2}{\sin\theta\cos\theta}.$$

[6] Формулы (18) получаются из формул (9) и (11), так как в рассматриваемом случае $\omega^2=0$, $\omega^1=ds$.

[7] Омбилическая точка — точка поверхности, где главные направления неопределенны. Так как главные направления определяются уравнением

$$b(\omega^1)^2+(c-a)\,\omega^1\omega^2-b(\omega^2)^2=0,$$

то они будут неопределенны в том и только в том случае, если

$$b=0,\qquad a=c,$$

т. е. в силу (14), если первая и вторая основные формы поверхности пропорциональны.

[8] Обозначим $a+c$ через u, $ac-b^2$ через v. Тогда равенство $F(a+c,\ ac-b^2)=F(u,\ v)=0$ дает

$$F_a=F_u+cF_v,\quad F_b=-2bF_v,\qquad F_c=F_u+aF_v,$$

откуда

$$2b(F_c-F_a)+(a-c)F_b=0,$$

а это означает, что последнее уравнение (III, 1) может быть записано в виде (III, 3)

[9] Минимальные линии определяются уравнением $(\omega^1)^2+(\omega^2)^2=0$. Левая часть уравнения характеристик (III, 4) является линейной комбинацией левых частей уравнений минимальных и асимптотических линий. Легко видеть, что два направления, соответствующие двум решениям уравнения (III, 4), будут гармонически разделять как направления касательных к асимптотическим линиям, так и направления касательных к минимальным линиям, а потому характеристические касательные принадлежат инволюции, определяемой асимптотическими касательными и касательными минимальных линий.

[10] Подставляя в два последних уравнения (VII, 7')

$$da=a_1\omega^1+a_2\omega^2,\qquad dc=c_1\omega^1+c_2\omega^2$$

и учитывая, что

$$a_2=(a-c)\,h,\qquad c_1=(a-c)\,k,$$

получим

$$\left[\omega^1,\ \frac{t\,dt}{1-t^2}+\frac{c}{a}\,h\omega^2\right]=0,$$

$$\left[\omega^2,\ \frac{dt}{t(1-t^2)}-\frac{a}{c}\,k\omega^1\right]=0,$$

или

$$\left[\omega^1, \frac{t\,dt}{1-t^2} + \frac{c}{a} h\omega^2 - t^2 \frac{a}{c} k\omega^1\right] = 0,$$

$$\left[\omega^2, \frac{t\,dt}{1-t^2} + \frac{c}{a} h\omega^2 - t^2 \frac{a}{c} k\omega^1\right] = 0,$$

откуда

$$\frac{t\,dt}{1-t^2} = t^2 \frac{a}{c} k\omega^1 - \frac{c}{a} h\omega^2.$$

[11] Вторая квадратичная форма поверхности $\overline{S}$, отнесенной к трехграннику Дарбу, равна

$$\overline{\Phi} = \overline{\omega}^1\overline{\omega}_{13} + \overline{\omega}^2\overline{\omega}_{23} = \overline{a}u^2(\omega^1)^2 + \overline{c}v^2(\omega^2)^2;$$

она должна совпадать со второй квадратичной формой поверхности S:

$$\Phi = a(\omega^1)^2 + c(\omega^2)^2,$$

откуда

$$\overline{a} = \frac{a}{u^2}, \qquad \overline{c} = \frac{c}{v^2}.$$

Поэтому

$$\overline{\omega}_{13} = \overline{a}\overline{\omega}^1 = \frac{a}{u}\omega^1, \qquad \overline{\omega}_{23} = \overline{c}\omega^2 = \frac{c}{v}\omega^2.$$

[12] Для того чтобы асимптотические линии поверхности S соответствовали минимальным линиям поверхности $\overline{S}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$u^2\{a(\omega^1)^2 + c(\omega^2)^2\} = (\overline{\omega}^1)^2 + (\overline{\omega}^2)^2,$$

где u — произвольная функция.

Поскольку линии кривизны на поверхностях S и $\overline{S}$ соответствуют, имеем

$$\overline{\omega}^1 = \alpha\omega^1, \qquad \overline{\omega}^2 = \beta\omega^2,$$

откуда после подстановки в предыдущее уравнение в силу линейной независимости ω^1 и ω^2 получим

$$\alpha = u\sqrt{a}, \qquad \beta = u\sqrt{c},$$

то есть

$$\overline{\omega}^1 = u\sqrt{a}\,\omega^1, \qquad \overline{\omega}^2 = u\sqrt{c}\,\omega^2.$$

Аналогично для того, чтобы минимальные линии поверхности S соответствовали асимптотическим линиям поверхности $\overline{S}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$uv\{(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2\} = \overline{a}(\omega^1)^2 + \overline{c}(\omega^2)^2,$$

(где v — произвольная функция), или

$$uv\{(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2\} = \overline{a}au^2(\omega^1) + \overline{c}cu^2(\omega^2)^2,$$

откуда

$$\overline{a} = \frac{v}{ua}, \qquad \overline{c} = \frac{v}{uc}.$$

Таким образом,

$$\overline{\omega}_{13} = \frac{v}{ua}\,\overline{\omega^1}, \qquad \overline{\omega}_{23} = \frac{v}{uc}\,\overline{\omega^2},$$

то есть

$$\overline{\omega}_{13} = \frac{v}{\sqrt{a}}\,\omega^1, \qquad \overline{\omega}_{23} = \frac{v}{\sqrt{c}}\,\omega^2.$$

[13] Уравнения $\omega^i = 0$ $(i=1, 2, 3)$ следует рассматривать как дифференциальные уравнения трех семейств поверхностей. Так как каждое из этих семейств поверхностей зависит от одного параметра (через каждую точку пространства проходит по одной поверхности каждого семейства), то каждое из уравнений $\omega^i = 0$ $(i=1, 2, 3)$ должно быть вполне интегрируемым.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Адамара бихарактеристики 91

Биплан 29

Вейнгартена поверхности 140

Гаусса формы 132, 133
Гиперплоскость соприкасающаяся 225
Грассмановы координаты 22

Дарбу трехгранник 129, 135
Дистрибутивность 16
Дифференциал внешний 35
— произведения 37
Дюпена теорема 203

Жанр 69

Замыкание 54

Инвариант Энгеля 113
Инволюция 93
Инволюция условия 94, 96, 101
Интегралы первые 53

Касательные главные 129
Класс системы 58
— уравнения 60
Ковариант билинейный 38
Кольцо внешних форм 27
Конус третьего класса 207
Координаты грассмановы 22
— плюккеровы 22, 26
Коши проблема 77
— теорема 71
— характеристики 82
Коши — Грина формула 41
Коши — Ковалевской теорема 71
Коэффициенты кососимметричные 8
Кривая характеристическая 110, 112
Кривизна 131
Кривизна геодезическая 131
— главная 133
— нормальная 131
— полная 134, 140
— средняя 134, 140
Критерий инволюции 96
Кручение 131
— геодезическое 132

Линия винтовая 145
Линии асимптотические 133
— геодезические 143
— кривизны 133
— минимальные 141

Матрица полярная 105
Многообразие интегральное 49, 54, 110
— — ординарное 78
— — особое 82
— — регулярное 78
— характеристическое 58
Моном 16

Ориентация 41, 44
Остроградского формула 42

Плоскость 136, 185
— p измерений 21
Плюккеровы координаты 22, 26
Поверхности Вейнгартена 140
— в конформном соответствии 137
— выпуклые 196
— изометричные 149, 156
— изотермические 146
— каналовые 144
— линейчатые 154
— минимальные 149, 187
— омбилические 135
— постоянной кривизны полной 145

Поверхности Вейнгартена постоянной кривизны средней 145
— развертывающиеся 181
— резные 164, 171

Приведение к системе Пфаффа 118
Проблема Коши 57
Продолжение системы 118
— — частичное 124
Произведение внешнее 15
Производная частная внешней формы 10, 17
Пространство риманово 214
Прямая особенная 30
Пуанкарэ теорема 40, 43
Пфаффа система 118
— уравнение 59

Реализация риманова пространства 214
Репер подвижной 127
Решение системы внешних уравнений 21
— — — — общее 78, 82
— — — — особое 82

Система ассоциированная 17, 30
— в инволюции 93
— внешних уравнений 21
— вполне интегрируемая 50
— в частных производных 93
— линейных дифференциальных уравнений 48
— полярная 68
— — линейного элемента 68
— — плоского элемента 68
— триортогональная 201
— тройная 204
— p-ортогональная 207
— характеристическая 55
Сложение внешних форм 15
Соответствие конформное 137
Стокса формула 42
Сфера 136, 158
Схоутена и Ван дер Кулька теорема 113

Теорема существования вторая 77
— — первая 72
Точка начальная 66
— интегральная 66
— — регулярная 67
— омбилическая 129, 135
— общая 48
— простая 65

Трехгранники 127, 135
— Дарбу 129
— эквиполлентные 128

Умножение внешнее 15
Уравнения главные 74
— в частных производных второго порядка 84, 88
— — — — первого порядка 61, 83
— нормальные 98
— структуры евклидова пространства 128
— — риманова пространства 214
Условие полной интегрируемости 51, 52

Форма алгебраическая квадратичная 7
— билинейная 7, 39
— — кососимметричная 8
— — симметричная 7
— внешняя 14
— — дифференциальная 35
— — — замкнутая 43
— каноническая 13
— полярная 8
— трилинейная 15, 39
Формы основные поверхности 132
Френе формулы 131

Характер порядка 0 67
— — 1 68
— — 2 69
— приведенный 95
Характеристики 82, 95

Цепь регулярных элементов 70
Цилиндр 143, 181

Эквиполлентность 128
Элемент интегральный ординарный 69
— — — линейный 67
— — — плоский 69
— — регулярный 68
— — — линейный 67
— — — плоский 69
— касания 61
— — Ли 137
— линейный поверхности 132
— — пространства риманова 214
— полярный 68
Энгеля инвариант 113
Эннепера теорема 134, 146, 153

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие переводчика 3

Предисловие автора 5

Часть первая

ТЕОРИЯ ВНЕШНИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Глава I. Внешние формы 7

I. Симметричные и кососимметричные билинейные формы, алгебраические и внешние квадратичные формы 7
II. Внешние формы произвольной степени 14
III. Системы внешних уравнений 21
IV. Системы алгебраически эквивалентных внешних уравнений 27
V. Ассоциированная система системы внешних уравнений . 30

Глава II. Внешние дифференциальные формы 35

I. Определение. Внешнее дифференцирование 35
II. Внешнее дифференцирование и обобщенная формула Стокса 41

Глава III. Внешние дифференциальные системы. Характеристическая система 48

I. Общие сведения. Вполне интегрируемые системы . . . 48
II. Замкнутые дифференциальные системы. Характеристическая система 53
III. Приложение к проблеме Пфаффа 59

Глава IV. Интегральные элементы, характеры, жанр. Теоремы существования 64

I. Интегральные элементы дифференциальной системы . . . 64
II. Две теоремы существования 70
III. Общее решение и особые решения. Характеристики . . 82

Глава V. Дифференциальные системы в инволюции с предписанными независимыми переменными 93

I. Общие сведения о системах в инволюции 93
II. Приведенные характеры 95
III. Необходимый и достаточный критерий инволюции . . 96
IV. Достаточный критерий инволюции 101
V. Случай двух независимых переменных 104
VI. Системы в инволюции, общее решение которых зависит от произвольных функций одной переменной 108
VII. Теорема Схоутена и ван дер Кулька 113

Глава VI. Продолжения дифференциальной системы 118

I. Основная проблема 118
II. Продолжения дифференциальной системы 120
III. Случай двух независимых переменных 122

Часть вторая

ПРИЛОЖЕНИЯ К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Глава VII. Системы дифференциальных уравнений теории поверхностей 127

I. Основные принципы теории подвижного репера 127
II. Основные теоремы теории поверхностей 129
Задача I. Поверхности, все точки которых омбилические 135
Задача II. Установить между двумя заданными поверхностями конформное точечное соответствие 137
Задача III. Поверхности Вейнгартена 140
Задача IV. Изотермические поверхности 146
Задача V. Пары изометричных поверхностей 149
Задача VI. Пары изометричных поверхностей с сохранением одного семейства асимптотических линий 153
Задача VII. Пары изометричных поверхностей с сохранением линий кривизны 156
Задача VIII. Пары изометричных поверхностей с сохранением главных кривизн 164
Задача IX. Пары поверхностей в точечном соответствии, сохраняющем линии кривизны и главные кривизны . . . 166
Задача X. Пары поверхностей в точечном соответствии, с сохранением геодезического кручения кривых 174
Задача XI. Поверхности, имеющие ту же самую третью основную форму, что и данная поверхность 179
Задача XII. Пары поверхностей в конформном соответствии с сохранением асимптотических линий 183
Задача XIII. Пары поверхностей в точечном соответствии, сохраняющем линии кривизны и вторую основную форму 188
Задача XIV. Поверхности $\overline{S}$ в точечном соответствии с данной поверхностью S, при котором линии кривизны каждой поверхности соответствуют асимптотическим линиям другой 191

З а д а ч а XV. Пары выпуклых поверхностей в точечном соответствии, при котором асимптотические линии одной поверхности соответствуют минимальным линиям другой . . . 196
Общее замечание 200

Глава VIII. Геометрические проблемы с более чем двумя независимыми переменными 201

I. Триортогональные системы 201
II. Тройная система с постоянными углами 204
III. p-Ортогональные системы в пространстве p измерений . 207
IV. Реализация трехмерного риманова пространства многообразием евклидова пространства 214

Литература 227

Примечания переводчика 229

Предметный указатель 233

Э. Картан
ВНЕШНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ
И ИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Редактор *В. В. Гольдберг*
Технич. редактор *Г. И. Георгиева*

Сдано в набор 6/I 1962 г.
Подписано к печати 27/IX 1962 г.
Формат 60×90/16 Печ. л. 15,0
Изд. № 104 Уч.-изд. л. 12,25
Заказ 6 Тираж 5000 Цена 1 руб.

Издательство Московского университета
Москва, Ленинские горы,
Административный корпус
Типография Изд-ва МГУ.
Москва, Ленинские горы