

В. И. ШУЛИКОВСКИЙ

КЛАССИЧЕСКАЯ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ
ГЕОМЕТРИЯ

В ТЕНЗОРНОМ ИЗЛОЖЕНИИ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
А. П. НОРДЕНА



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1963

517.4

Ш 95

УДН 513.731 : 512.972

АННОТАЦИЯ

Задача книги — дать систематическое тензорное изложение классической дифференциальной геометрии на основе хорошо разработанного аппарата теории векторных полей и сетей двумерного пространства. Этому аппарату отводится первая часть книги, в которой рассмотрено большое число сетей специального вида и даны их инвариантные характеристики. Во второй части излагаются все основные разделы классической дифференциальной геометрии: общая теория поверхностей и конгруэнций прямых, окружностей и сфер; специальные классы поверхностей и конгруэнций и их инвариантные признаки; автоморфизмы поверхностей; некоторые специальные виды изгибаний и преобразований поверхностей; вопросы «геометрии около поверхности».

Книга рассчитана на научных работников, аспирантов и студентов старших курсов университетов и неединствитов, специализирующихся по геометрии.

Валентин Иванович Шуликовский
Классическая дифференциальная геометрия
в тензорном изложении

М., Физматгиз, 1963 г., 540 стр. с илл.

Редактор *Д. П. Полозков*.

Техн. редактор *Н. Я. Мурашова*.

Корректор *О. А. Бутусова*.

Сдано в набор 11/IV 1963 г. Подписано к печати 8/VIII 1963 г.
Бумага 84×108¹/₃₂. Физ. печ. л. 16,875. Усл. печ. л. 27,68. Уч.-изд. л.
25,85. Тираж 6500 экз. Т-07651. Цена книги 1 р. 44 к. Зак. 771.

Государственное издательство физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Московская типография № 5 Мосгорсовнархоза. Москва, Трехпрудный, 9.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	9
ЧАСТЬ ПЕРВАЯ	
ГЕОМЕТРИЯ ДВУМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА	
Г л а в а I. Поля векторов и сети в X_2	11
§ 1. Перебрасывание индексов бивектором	11
§ 2. Косое произведение векторов	14
§ 3. Сети и ткани в X_2	16
§ 4. Классификация сетей. Аффинор сети	17
§ 5. Геометрия сетей	19
§ 6. Главная сеть пары сетей	23
§ 7. Тройки сетей	25
§ 8. Приведенные аффиноры сети. Алгебра аффиноров	26
§ 9. Геометрия три-ткани	29
Г л а в а II. Риманова геометрия и пространства аффинной связности	34
§ 10. Риманова геометрия V_2	34
§ 11. Нормальные тройки сетей в V_2	37
§ 12. Параллельный перенос векторов. Ковариантное диф- ференцирование	40
§ 13. Пространство аффинной связности A_2	43
§ 14. Развертывание кривой на аффинное пространство	45
§ 15. Геодезические линии	47
§ 16. Инварианты векторных полей в V_2	48
§ 17. Тензор кривизны пространства A_2	50
§ 18. Тензор кривизны пространства V_2	52
§ 19. Специальные типы пространств A_2	53
§ 20. Преобразование связностей	58

Г л а в а III. Сети в V_2 и A_2	62
§ 21. Трансверсальный вектор поля	62
§ 22. Геодезическая кривизна и геодезические линии в V_2	67
§ 23. Чебышевский вектор сети	71
§ 24. Выражение чебышевского и геодезического векторов сети через ее биссекторные векторы	74
§ 25. Выражение чебышевского и геодезического векторов сети через ее тензор	75
§ 26. Алгебраические и дифференциальные соотношения между векторами сети	77
§ 27. Ковариантная производная тензора сети. Тензоры D и S сети	81
§ 28. Сети пространства A_2	83
§ 29. Построение сети с данным чебышевским вектором	91
§ 30. Полугеодезические сети	93
§ 31. Условия интегрируемости деривационных формул	97
§ 32. Сопряженные связности	99
§ 33. Четверки сопряженных связностей	103
§ 34. Специальные пары сопряженных связностей	104
§ 35. Инвариантный лучок векторов сети	109
§ 36. Формулы в специальной системе координат	113
Г л а в а IV. Диагональные свойства сетей	119
§ 37. Шестиугольные три-ткани	119
§ 38. Диагональность относительно сети	120
§ 39. Теорема Ли об интегрируемости в квадратурах	124
§ 40. Функция, гармоническая относительно двух изотер- мических сетей	124
§ 41. Ромбические и конформно-геодезические сети	125
§ 42. Диагональные свойства ромбических и конформно-гео- дезических сетей	129
§ 43. Вращение сети	132
§ 44. Вращение ромбических и конформно-геодезических сетей	134
Г л а в а V. Специальные сети	136
§ 45. Обобщенное уравнение Киллинга	136
§ 46. Изотермические сети	143
§ 47. L_m -сети, допускающие вращение	152
§ 48. Кодациевы сети	154
§ 49. Геодезические сети	155
§ 50. Сети Дубнова	158

§ 51. Квадратичный интеграл геодезических	161
§ 52. Линейный интеграл геодезических	170
§ 53. Геодезическое отображение поверхностей	171
§ 54. Сети Дубнова в пространстве A_2	172
§ 55. Чебышевские сети	173
§ 56. Пропорциональные сети	176
§ 57. Метрически-получебышевская сеть	178
§ 58. Обобщенные L_m -сети	180
§ 59. Сети равных путей	180
§ 60. Сети со сходящимися направлениями	184
§ 61. Задание сети ее сетевым углом и чебышевским или геодезическим вектором	186
§ 62. E -нормирование тензора сети	187
Г л а в а VI. Автоморфизмы поверхности	192
§ 63. Геометрические объекты	192
§ 64. Группа преобразований Ли, определяемая векторным полем	193
§ 65. Инвариантность геометрического объекта относительно группы Ли. Производная Ли	194
§ 66. Пространства V_2 , допускающие группу движений	199
§ 67. Импримитивные n -ткани	201
§ 68. Потенциальные сети Егорова	206
Г л а в а VII. II-семейства сетей	214
§ 69. Семейства сетей II	215
§ 70. Семейства II с полугеодезическим основанием	224
§ 71. Семейства II с геодезическим основанием	226
§ 72. Преобразование Петерсона	227
§ 73. Дифференциально-топологическая характеристика семейств II	228
§ 74. Семейства сетей \bar{II}	231

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

**ПОВЕРХНОСТИ И КОНГРУЭНЦИИ ТРЕХМЕРНОГО
ПРОСТРАНСТВА**

Г л а в а VIII. Теория поверхностей	234
§ 75. Общие понятия	234
§ 76. Внутренняя геометрия поверхности	235
§ 77. Деривационные уравнения. Вторая квадратичная форма	237

§ 78. Кривизны линий на поверхности. Асимптотическая сеть	239
§ 79. Сопряженные направления и сети	243
§ 80. Линии кривизны	245
§ 81. Геодезическое кручение	250
§ 82. Сферическое отображение поверхности	252
§ 83. Подвижной трехгранник поверхности	257
§ 84. Основная теорема теории поверхностей	259
§ 85. Задание поверхности различными квадратичными формами	263
§ 86. Основная тройка сетей	271
§ 87. Тангенциальное уравнение поверхности	273
§ 88. Построение поверхности по сферическому отображению сопряженной сети	275
§ 89. Формулы Лельевра	278
§ 90. Соответствие Петерсона. Параллельные сети	280
§ 91. Конформное соответствие Петерсона	282
§ 92. Поверхность, присоединенная данной относительно сопряженной сети	285
§ 93. Инварианты линий сети	287
§ 94. Уравнения изгибаия поверхности	291
Г л а в а IX. Специальные классы поверхностей	297
§ 95. Поверхности вращения	297
§ 96. Одно характеристическое свойство поверхностей вращения	301
§ 97. Винтовые поверхности	303
§ 98. Спиральные поверхности	305
§ 99. Линейчатые поверхности	307
§ 100. Поверхности переноса	315
§ 101. Минимальные поверхности	341
§ 102. Эволютная поверхность	352
§ 103. Квадратичные формы эволютной поверхности	354
§ 104. Средняя эволютная и средняя эвольвентная поверхности	357
§ 105. Поверхности W	360
§ 106. Поверхность с двумя семействами плоских линий кривизны	367
§ 107. Поверхность с одним семейством плоских линий кривизны	372
§ 108. Резные поверхности	374

§ 109. Поверхности Иоахимстала	377
§ 110. Каналовые поверхности	379
§ 111. Циклиды Дюпена	381
§ 112. Поверхности с одним семейством сферических линий кривизны	385
§ 113. Изгибание поверхности с сохранением средней кривизны	389
§ 114. Главное основание изгибания	396
§ 115. Поверхности Фосса	401
Г л а в а X. Конгруэнции прямых	412
§ 116. Общие понятия	412
§ 117. Линейчатые поверхности конгруэнции. Вторая квадратичная форма	413
§ 118. Семейства и сети линейчатых поверхностей	414
§ 119. Фокальные поверхности конгруэнции	415
§ 120. Специальные сети линейчатых поверхностей. Инварианты конгруэнции	416
§ 121. Задание конгруэнции квадратичными формами	422
§ 122. Опорная и опорная огибающая поверхности конгруэнции	425
§ 123. Специальные конгруэнции	427
§ 124. Соответствие полостей фокальной поверхности	437
§ 125. Конгруэнции лучей, параллельных нормалям поверхности	444
§ 126. Конгруэнции лучей, лежащих в касательных плоскостях поверхности	449
§ 127. Конгруэнции лучей, исходящих из точек поверхности	451
§ 128. Теорема Дюпена	455
Г л а в а XI. Конгруэнции сфер и окружностей	459
§ 129. Конгруэнции сфер	459
§ 130. Огибающая поверхность конгруэнции сфер	466
§ 131. Конгруэнции сфер Рибокура	468
§ 132. Примеры R -конгруэнций	470
§ 133. Изгибание R -конгруэнций сфер	472
§ 134. Преобразование Комбескюра R -конгруэнций	473
§ 135. Преобразование Рибокура	475
§ 136. Конгруэнции окружностей	478
§ 137. Вполне циклические конгруэнции окружностей	482

§ 138. Конгруэнции окружностей, расположенных в касательных плоскостях поверхности	484
§ 139. Преобразование Бианки псевдосферических поверхностей	489
Г л а в а XII. Бесконечно малые изгибания. Конгруэнции W	
§ 140. Бесконечно малые изгибания	491
§ 141. Характеристическая функция изгибания	494
§ 142. «Венок» поверхностей Дарбу	498
§ 143. Конгруэнции W	511
Г л а в а XIII. Изгибание на кинематически сопряженном основании	
§ 144. Качение поверхности по ее изгибанию	519
§ 145. Изгибание на кинематически сопряженном основании	524
Литература	526
Именной указатель	531
Предметный указатель	532
Указатель обозначений	539

ПРЕДИСЛОВИЕ

В книге решаются две основные задачи:

1) дается систематическое изложение теории сетей двумерного пространства и объединяются в одном месте многие ее результаты, полученные различными авторами и изложенные в журнальных статьях и диссертациях;

2) единым тензорным методом излагается значительное число разделов классической дифференциальной геометрии.

Объединение этих двух задач вполне естественно: понятие сети (координатной, изотропной, сопряженной, линий кривизны) возникло вместе с теорией поверхностей и в дальнейшем было ее постоянным спутником. Почти каждый, а если угодно, то даже каждый, специальный класс поверхностей характеризуется существованием на поверхностях этого класса некоторой специальной сети (поверхность переноса — сетью переноса, поверхность Фосса — сетью Фосса, изгибание поверхности вращения — изотермической и полугеодезической сетью, линейчатая поверхность — полугеодезической асимптотической сетью и т. д.). Теория сетей также органически вплетается в теорию конгруэнций прямых, сфер, окружностей, в различные вопросы изгибания поверхностей (изгибание на главном основании, бесконечно малое изгибание) и играет весьма важную роль в самых различных преобразованиях поверхностей.

Существенной особенностью аппарата исследования является систематическое применение бивектора в качестве вектора (оператора для перебрасывания индексов).

Основные преимущества такого вектора — его пригодность как в римановых пространствах, где он определяется однозначно, так и в пространствах произвольной аффинной связности, где он определяется с точностью до несущей

щественного функционального множителя, и простота записи с его помощью условий интегрируемости различных систем дифференциальных уравнений, роль которых в дифференциальной геометрии переоценить трудно.

По традициям классической дифференциальной геометрии нигде особо не оговаривается локальный характер исследований и молчаливо предполагается непрерывная дифференцируемость всех функций до такого порядка, какой необходим в каждом конкретном случае.

Книга рассчитана на научных работников, аспирантов и студентов старших курсов университетов и педагогических институтов, специализирующихся по геометрии. Она, надеюсь, будет полезна для специальных курсов и специальных семинаров по дифференциальной геометрии.

Для чтения книги необходимо знакомство с курсом дифференциальной геометрии в объеме программы для университетов или педагогических институтов и с элементами тензорного исчисления.

При чтении книги следует иметь в виду, что номера в квадратных скобках означают ссылки на работы, список которых помещен в конце книги. Номера в круглых скобках означают ссылки на формулы этой книги; так, например, (25; 3) означает формулу (3) из § 25, а (3) — формулу (3) того параграфа, в котором эта ссылка находится.

Моя приятная обязанность — поблагодарить моего учителя и редактора этой книги проф. А. П. Нордена, в ходе бесед с которым я получил много ценных советов и указаний.

Я очень признателен проф. А. Е. Либеру, любезно приславшему мне свою неопубликованную в печати диссертацию по теории сетей, ссылки на которую имеются в тексте.

С удовольствием благодарю здесь Р. Г. Сабитову и Г. А. Гаврилову за помощь, оказанную при оформлении рукописи, и Д. П. Полозкова за внимательное ее редактирование.

Казань,
июль 1960 г.

В. И. Шуликовский

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ
ГЕОМЕТРИЯ ДВУМЕРНОГО
ПРОСТРАНСТВА

ГЛАВА I
ПОЛЯ ВЕКТОРОВ И СЕТИ В X_2

§ 1. Перебрасывание индексов бивектором

1. Двумерным пространством или двумерной поверхностью X_2 называют многообразие точек, определяемых двумя координатами u^i ($i = 1, 2$).

Двухвалентные кососимметрические тензоры называются бивекторами. Матрица бивектора

$$\| \varepsilon_{is} \| = \begin{vmatrix} 0 & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \varepsilon \\ -\varepsilon & 0 \end{vmatrix}$$

определяется одной *существенной компонентой* $\varepsilon = \varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21}$. Отсюда следует, что любые два бивектора ε_{is} и ε_{is}^* пропорциональны. Действительно, всегда имеет место равенство $\varepsilon_{is}^* = \lambda \varepsilon_{is}$, где $\lambda = \frac{\varepsilon^*}{\varepsilon}$.

Каждому *ковектору* (то есть ковариантному бивектору) ε_{is} можно поставить в соответствие *контравектор* (то есть контравариантный бивектор) ε^{is} с матрицей

$$\| \varepsilon^{is} \| = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{\varepsilon} \\ -\frac{1}{\varepsilon} & 0 \end{vmatrix}$$

Два таких *взаимных бивектора* связаны соотношением

$$\varepsilon_{ih} \varepsilon^{sk} = \varepsilon_{hi} \varepsilon^{ks} = \delta_i^s$$

здесь δ_i^s — символ Кронекера, равный 1 при $s = i$ и 0 при $s \neq i$.

2. Тензоры, с помощью которых производится перебрасывание индексов, называются *верторами*. В римановой геометрии V_2 в качестве вертора часто используют метрический тензор g_{is} и его взаимный тензор g^{is} . Существующие правила при этом выражаются формулами

$$T_k g^{ks} = T^s, \quad T^i g_{ks} = T_s.$$

В пространстве X_2 , когда метрический тензор отсутствует, за верторы, следуя А. П. Нордену, с успехом можно принять любую пару взаимных бивекторов e_{is} и e^{is} , что мы и будем делать во всем дальнейшем изложении. Правила перебрасывания индексов бивектором следующие:

$$\text{правило поднимания индекса: } T_k e^{sk} = T^s;$$

$$\text{правило опускания индекса: } T^i e_{ks} = T_s.$$

Читателю следует обратить особое внимание на то, что поднимаемый индекс является *первым* у поднимающего контравектора, а опускаемый индекс — *вторым* у опускающего кобивектора.

Эта особенность вызвана необходимостью удовлетворить требованию, чтобы последовательно выполненные опускание и поднимание индекса у тензора не изменило этот тензор. В том, что это требование при указанных правилах выполняется, убедиться нетрудно:

$$e^{sk} (e_{lk} T^i) = T^s, \quad e_{ks} (e^{ki} T_i) = T_s.$$

3. Результат свертывания тензора $T^i_{\cdot s}$ по двум индексам i и s можно теперь записать в одном из следующих видов:

$$T^s_{\cdot s} = e^{sk} T^i_{\cdot ks} = e_{ks} T^sk_{\cdot} = -T^s_{\cdot s},$$

следовательно, *перемена уровней двух свертываемых индексов вызывает изменение знака тензора:*

$$T^s_{\cdot s} = -T^s_{\cdot s}.$$

Это правило используется очень часто, и читатель должен его запомнить.

Условие симметрии тензора T_{sk} по индексам s и k имеет вид

$$\varepsilon^{sk}T_{sk} = T_{s \cdot}^{\cdot s} = 0.$$

4. Рассмотрим произвольный тензор T_{isp}^q , кососимметричный по индексам i и s . Тензор $T_{isp}^qv^pw_q$, где v^p и w_q — произвольные одновалентные тензоры, кососимметричен, следовательно, пропорционален произвольно выбранному бивектору. Свертывая обе части равенства

$$T_{isp}^qv^pw_q = \lambda \varepsilon_{is}$$

со взаимным бивектором ε^{is} , получаем

$$2\lambda = \varepsilon^{is}T_{isp}^qv^pw_q,$$

$$T_{isp}^qv^pw_q = \frac{1}{2} \varepsilon_{is} \varepsilon^{kl} T_{klp}^qv^pw_q.$$

В силу произвольности тензоров v^p и w_q приходим к формуле

$$T_{isp}^q = \frac{1}{2} \varepsilon_{is} \varepsilon^{kl} T_{klp}^q = \frac{1}{2} \varepsilon_{is} T_{k \cdot p}^{\cdot k q}, \quad (1)$$

дающей представление кососимметричного по двум индексам тензора в виде произведения бивектора на тензор более низкой валентности.

Для произвольного тензора $P_{i \cdot}^{\cdot s}$ с помощью (1) получаем

$$P_{i \cdot}^{\cdot s} - P_{s \cdot}^{\cdot i} = \varepsilon_{is} \varepsilon^{kl} P_{kl \cdot}^{\cdot} = \varepsilon_{is} P_{k \cdot}^{\cdot k \cdot}. \quad (2)$$

Поднимая здесь индексы, приходим к следующим формулам:

$$P^{i \cdot}^{\cdot s} - P^{s \cdot}^{\cdot i} = \varepsilon^{is} \varepsilon^{kl} P_{kl \cdot}^{\cdot} = \varepsilon^{is} P_{k \cdot}^{\cdot k \cdot}, \quad (3)$$

$$P_{i \cdot}^{\cdot s} - P_{s \cdot}^{\cdot i} = \delta_i^s \varepsilon^{kl} P_{kl \cdot}^{\cdot} = \delta_i^s P_{k \cdot}^{\cdot k \cdot}. \quad (4)$$

Применяя (2) к тензору $\delta_i^m \delta_s^n$, находим

$$\delta_i^m \delta_s^n - \delta_s^m \delta_i^n = \varepsilon_{is} \varepsilon^{kl} \delta_k^m \delta_l^n = \varepsilon_{is} \varepsilon^{mn}. \quad (5)$$

5. Из равенства

$$\frac{1}{2} P_{is} P^{is} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ip} \varepsilon^{sq} P_{is} P_{pq} = \frac{1}{\varepsilon_{12}^2} (P_{11} P_{22} - P_{12} P_{21}),$$

где p_{is} — произвольный тензор, находим значение определителя

$$|p_{is}| = \det \|p_{is}\| = p_{11}p_{22} - p_{12}p_{21} = \frac{1}{2} \epsilon_{12}^2 p_{is} p^{is}. \quad (6)$$

Тензор \tilde{p}^{is} , взаимный тензору p_{is} , однозначно определяется равенством

$$\tilde{p}^{ih} p_{sk} = \delta_s^i \quad (7)$$

при условии, что $|p_{is}| \neq 0$.

Преобразуя с помощью (4) тензор

$$p^{ih} p_{sk} = p_s^{\cdot h} p_{\cdot k}^i + \delta_s^i p^{jh} p_{jk} = -p_{sk} p^{ih} + \delta_s^i p^{jh} p_{jk},$$

имеем

$$p^{ih} p_{sk} = \frac{1}{2} p^{jh} p_{jk} \delta_s^i, \quad (8)$$

что при сравнении с (7) приводит к следующему, не зависящему от выбора бивектора, представлению взаимного тензора:

$$\tilde{p}^{is} = \frac{2}{p^{jh} p_{jk}} p^{is}. \quad (9)$$

§ 2. Косое произведение векторов

1. *Одновалентные тензоры*, безразлично, контра- или ковариантные, называются *векторами*.

В дальнейшем, наряду с обозначением вектора p_s , мы будем также пользоваться и обозначением p .

Два вектора v_s и w_s называются *коллинеарными* или *зависимыми*, если они пропорциональны ($w_s = \alpha v_s$, $\alpha \neq 0$) или один из них равен нулю.

2. *Относительный инвариант*

$$\epsilon^{sh} v_s w_h = \epsilon^{12} (v_1 w_2 - v_2 w_1) \quad (1)$$

двух векторов v_s и w_s назовем *косым произведением* этих векторов и будем обозначать

$$\epsilon^{sh} v_s w_h = v_s w^s = \langle vw \rangle.$$

При замене бивектора ϵ^{ik} на $\lambda \epsilon^{ik}$, где λ — любой функциональный множитель, косое произведение умножается на λ .

Очевидны равенства:

$$\begin{aligned}\langle vw \rangle &= -\langle wv \rangle, \\ \langle (\alpha v + \beta w) z \rangle &= \alpha \langle vz \rangle + \beta \langle wz \rangle, \\ \langle v(\alpha v) \rangle &= 0;\end{aligned}$$

здесь α, β — функциональные множители.

Из последнего равенства, или непосредственно из (1), легко видеть, что для того чтобы два вектора были коллинеарными, необходимо и достаточно, чтобы их косое произведение равнялось нулю.

3. Любой вектор p_s однозначно определяется его косыми произведениями на два неколлинеарных вектора v_s и w_s .

Действительно, пусть $\langle pv \rangle = A$, $\langle pw \rangle = B$; полагая

$$p_s = \lambda v_s + \mu w_s,$$

имеем

$$\begin{aligned}\langle pv \rangle &= \langle (\lambda v + \mu w) v \rangle = -\mu \langle vw \rangle = A, \\ \langle pw \rangle &= \langle (\lambda v + \mu w) w \rangle = \lambda \langle vw \rangle = B,\end{aligned}$$

следовательно,

$$p_s = \frac{Bv_s - Aw_s}{\langle vw \rangle}. \quad (2)$$

Заметим, что полученное выражение вектора p_s не зависит от выбора бивектора.

4. Применяя формулы (1; 2) и (1; 3) к тензорам $v_i w_s$ и $v^i w^s$, получим равенства

$$\begin{aligned}v_i w_s - v_s w_i &= \epsilon_{is} v_k w^k, \\ v^i w^s - v^s w^i &= \epsilon^{is} v_k w^k,\end{aligned}$$

из которых следуют выражения взаимных бивекторов через два неколлинеарных вектора v_s и w_s :

$$\begin{aligned}\epsilon_{is} &= \frac{v_i w_s - v_s w_i}{v_k w^k}, \\ \epsilon^{is} &= \frac{v^i w^s - v^s w^i}{v_k w^k}.\end{aligned}$$

§ 3. Сети и ткани в X_2

Поле вектора v_i определяет в X_2 *однопараметрическое семейство линий* (v), являющееся семейством интегральных кривых дифференциального уравнения

$$v_i du^i = 0.$$

Обратно, каждое однопараметрическое семейство линий $\varphi(u^i) = \text{const}$ определяет *псевдовектор*¹⁾

$$v_i = \lambda(u^s) \varphi_i \quad \left(\varphi_i = \partial_i \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial u^i} \right).$$

Вектор v_i будем называть *направляющим* или *касательным вектором семейства*.

Задание двух полей независимых векторов v_s и w_s определяет *сеть* (v, w). Векторы v_s и w_s назовем *направляющими векторами сети*.

Сеть можно также задать полем невырождающегося симметрического *тензора сети* a_{is} . Всюду, где не оговорено противное, *тензор сети считается вещественным*. Направляющие псевдовекторы сети v_s и w_s являются решениями уравнения

$$a_{is} x^i x^s = 0. \quad (1)$$

Так как уравнение $v_i w_s x^i x^s = 0$ ²⁾ имеет те же решения, что и уравнение (1), то, с точностью до множителя, тензор сети

$$a_{is} = 2\lambda v_i w_s = \lambda (v_i w_s + v_s w_i). \quad (2)$$

Аналогично определяется *n-ткань* ($v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$), то есть n однопараметрических различных семейств линий $(v_1), (v_2), \dots, (v_n)$. n -ткань определяется заданием симметричного псевдотензора

$$a_{i_1 i_2 \dots i_n} = n! \lambda v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_n}.$$

1) *Псевдотензорами* называются тензоры, заданные с точностью до произвольного функционального множителя.

2) $v_i w_s = \frac{1}{2} (v_i w_s + v_s w_i)$.

Линии n -ткани являются интегральными кривыми дифференциального уравнения

$$a_{i_1 i_2} \dots i_n du^{i_1} du^{i_2} \dots du^{i_n} = 0.$$

§ 4. Классификация сетей. Аффинор сети

1. Уравнение $a_{is} x^i x^s = 0$ определяет псевдовекторы сети, то есть определяет отношения $x^1 : x^2$:

$$a_{11} \left(\frac{x^1}{x^2} \right)^2 + 2a_{12} \frac{x^1}{x^2} + a_{22} = 0,$$

$$\left(\frac{x^1}{x^2} \right)_{1,2} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}.$$

Выражение

$$a = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \det \| a_{is} \|$$

называют *дискриминантом* тензора сети.

Если $a < 0$, то линии сети и ее направляющие векторы вещественны, а сеть называется *гиперболической* или *вещественной*.

Если $a > 0$, то линии сети и ее направляющие векторы комплексно сопряжены. Сеть в этом случае называется *эллиптической* или *комплексно сопряженной*.

При $a = 0$ тензор a_{ij} вырождается и определяет не сеть, а дважды взятое семейство линий, которое ради общности называют иногда *вырожденной сетью*.

2. Условимся называть бивектор ε_{is} и тензор сети a_{is} *согласованными*, если

$$\varepsilon_{12}^2 = |a|.$$

При выполнении этого условия, согласно (1; 6) и (1; 8), имеем

$$\frac{1}{2} a^{is} a_{is} = \frac{a}{|a|} = \sigma(a) = \begin{cases} -1 & \text{для гиперболической сети,} \\ +1 & \text{для эллиптической сети,} \end{cases} \quad (1)$$

и

$$a^{ih} a_{sh} = -a_s^h a_h^i = \sigma(a) \delta_s^i. \quad (2)$$

Тензор

$$a_i^s = \varepsilon^{sh} a_{ih},$$

где ε_{sk} и a_{sk} согласованы, мы будем в дальнейшем называть *аффином сетью*. Аффином определяется сетью с точностью до знака, так как при выборе согласованного с тензором сети бивектора имеется произвол в выборе знака: $\varepsilon_{12} = \pm \sqrt{|a|}$.

Эту неопределенность А. Е. Либбер [43] устраняет следующим образом. Пусть v_i и w_i являются направляющими векторами сети a_{is} , тогда ее аффином можно согласно (3; 2) записать в виде

$$a_i^s = \lambda (v_i w^s + v^s w_i). \quad (3)$$

В силу (2) имеем

$$a_i^s a_s^i = 2\lambda^2 (v_s w^s)^2 = -2\sigma(a).$$

Следовательно,

$$v_s w^s = \pm \frac{1}{\lambda} \sqrt{-\sigma(a)}.$$

Направляющие векторы v_i и w_i , являясь собственными векторами аффинора сети, удовлетворяют уравнениям

$$a_i^s v_s = \lambda v_s w^s v_i = \varrho_1 v_i, \quad a_i^s w_s = \varrho_2 w_i, \quad (4)$$

где числа

$$\varrho_1 = \pm \sqrt{-\sigma(a)}, \quad \varrho_2 = \mp \sqrt{-\sigma(a)}$$

являются собственными числами. Для гиперболической сети $\varrho_{1,2} = \pm 1$, для эллиптической $\varrho_{1,2} = \pm i$.

Назовем, следуя А. Е. Либберу, сеть *ориентированной*, если семейства ее линий или, что то же, ее собственные векторы, занумерованы.

Выбор знака аффинора ориентированной сети производится так: потребуем, чтобы первому собственному вектору v_s соответствовало собственное число $\varrho_1 = +1$ в случае гиперболической сети и $\varrho_1 = +i$ (i — фиксированная комплексная единица) в случае эллиптической сети. Иначе говоря, знак аффинора выбирается так, чтобы выполнялось равенство

$$a_i^s v_s = \varrho_1 v_i, \quad (4_1)$$

тогда автоматически будет

$$a_i^s w_s = \frac{1}{2} w_i. \quad (4_2)$$

Если направляющие псевдовекторы фиксированы, то, как нетрудно проверить, соответствующие согласованные бивектор и тензор сети имеют вид

$$e_{is} = \frac{\lambda}{\sqrt{-\sigma(a)}} (v_i w_s - v_s w_i), \quad (5)$$

$$a_{is} = \lambda (v_i w_s + v_s w_i) \quad (6)$$

при любом выборе λ .

§ 5. Геометрия сетей

1. Совокупность псевдовекторов v_s в каждой точке X_2 определяет множество пар чисел (v_1, v_2) , заданных с точностью до общего, отличного от нуля множителя. Принимая эти пары чисел за проективные координаты одномерного проективного пространства направлений, мы связываем с каждой точкой X_2 пространство направлений P_1 .

Два произвольных вектора p_s и q_s всегда можно разложить по двум независимым векторам v_s и w_s :

$$p_s = \lambda v_s + \mu w_s, \quad q_s = \lambda^* v_s + \mu^* w_s. \quad (1)$$

Ангармоническим отношением δ четырех соответствующих им направлений называют отношение

$$\delta = (vwpq) = \frac{\mu}{\lambda} : \frac{\mu^*}{\lambda^*}. \quad (2)$$

Из формул (1) находим косые произведения

$$\langle pw \rangle = \lambda \langle vw \rangle, \quad \langle pv \rangle = -\mu \langle vw \rangle,$$

$$\langle qw \rangle = \lambda^* \langle vw \rangle, \quad \langle qv \rangle = -\mu^* \langle vw \rangle.$$

Следовательно,

$$\delta = (vwpq) = \frac{\langle pv \rangle}{\langle pw \rangle} : \frac{\langle qv \rangle}{\langle qw \rangle}. \quad (3)$$

Ангармоническое отношение не зависит от нормирования векторов v_s, w_s, p_s, q_s и является инвариантом четырех соответствующих им направлений.

2. Каждая сеть (v, w) определяет в пространстве P_1 пару направлений v_i, w_i . Рассмотрим преобразование, относящее произвольному направлению p_i направление \bar{p}_i , четвертое гармоническое направлению p_i относительно направлений v_i, w_i . В силу равенства $(vw\bar{p}p) = (vwpp)^{-1} = -1$ это преобразование будет *инволюцией* (его квадрат есть тождественное преобразование). Направления p_i и \bar{p}_i назовем *сопряженными относительно сети $a = (v, w)$* или, короче, *a -сопряженными*. Само преобразование $p \leftrightarrow \bar{p}$, определенное сетью a , назовем *a -инволюцией*.

Из равенства (3) при $\delta = -1$ и $q_i = \bar{p}_i$ получаем следующее условие a -сопряженности направлений p_i и \bar{p}_i :

$$p_s v^s \bar{p}_i w^i + p_s w^s \bar{p}_i v^i = 2v_{(i} w_{s)} p^i \bar{p}^s = 0$$

или

$$a_{is} p^i \bar{p}^s = 0, \quad (4)$$

где $a_{is} = 2v_{(i} w_{s)}$ — тензор сети a . Отсюда следует, что векторы $a_{is} p^i$ и \bar{p}_s пропорциональны:

$$a_{is} p^i = \lambda \bar{p}_s. \quad (4')$$

3. Две сети, имеющие одно (и только одно) общее семейство линий, назовем, следуя А. Е. Либеру, *связанными сетями*, а сети, не имеющие общих семейств, — *раздельными сетями*.

Две раздельные сети (v, w) и (p, q) назовем *аполярными*, если касательные направления одной из них гармонически разделяют касательные направления другой. Из равенства (3) при $\delta = -1$ получаем

$$p_i v^i q_s w^s + p_i w^i q_s v^s = 2p_{(i} q_{s)} v^i w^s = 0.$$

Следовательно, условие аполярности двух сетей $a_{is} = 2v_{(i} w_{s)}$ и $b_{is} = 2p_{(i} q_{s)}$ имеет вид

$$b_{is} a^{is} = 0. \quad (5)$$

4. Две ориентированные сети с аффинорами a_i^s и b_i^s однозначно определяют *совместный инвариант*

$$H_{ab} = \frac{1}{2} a_i^s b_s^i. \quad (6)$$

Чтобы выяснить его геометрический смысл, составим из (3) производную пропорцию:

$$\frac{\delta+1}{\delta-1} = \frac{\langle pv \rangle \langle qw \rangle + \langle pw \rangle \langle qv \rangle}{\langle pv \rangle \langle qw \rangle - \langle pw \rangle \langle qv \rangle} = \frac{(p_i q_s + p_s q_i)(v^i w^s + v^s w^i)}{(p_i q_s - p_s q_i)(v^i w^s - v^s w^i)}.$$

Так как выражение, стоящее в правой части этого равенства, не зависит от нормирования входящих в него векторов, то можно считать, что

$$a_i^s = v_i w^s + v^s w_i, \quad b_i^s = p_i q^s + p^s q_i$$

являются аффинорами сетей a и b . Тогда согласно (4;5) и (4;6) имеем

$$v_i w^s - w_i v^s = \sqrt{-\sigma(a)} \delta_i^s, \quad p_i q^s - q_i p^s = \sqrt{-\sigma(b)} \delta_i^s,$$

$$\frac{\delta+1}{\delta-1} = \frac{a_i^s b_s^i}{2 \sqrt{-\sigma(a)} \sqrt{-\sigma(b)}}. \quad (7)$$

Следовательно, совместный инвариант двух сетей связан с ангармоническим отношением δ равенством

$$H_{ab} = \frac{1}{2} a_i^s b_s^i = -\sqrt{-\sigma(a)} \sqrt{-\sigma(b)} \frac{\delta+1}{\delta-1}. \quad (8)$$

Обращение совместного инварианта в нуль характеризует аполлярные сети.

Предположим, что сети a и b связаны. Их общее семейство непременно вещественно, так как в противном случае эти сети просто совпадали бы, следовательно, каждая из двух связанных сетей является гиперболической сетью. Предполагая, что совпадают семейства с одинаковым номером, например $p_i = v_i$, и учитывая, что $\sigma(a) = \sigma(b) = -1$, находим $\delta = 0$, $H_{ab} = 1$. При совпадении семейств с разными номерами аналогично получим $H_{ab} = -1$. Следовательно, совместный инвариант двух связанных сетей $H_{ab} = \pm 1$. Обратное предложение, как легко проверить, также имеет место, за единственным исключением, когда сеть (v, w) гиперболическая, а сеть (p, q) эллиптическая и ангармоническое отношение $(vwprq) = \pm i$.

5. *Взаимным углом* ϕ двух сетей a и b А. П. Норден [6] называет взятый с точностью до постоянного множите-

ля $\frac{1}{2c}$ логарифм ангармонического отношения, в котором касательные направления сети $a = (v, w)$ разделяют касательные направления сети $b = (p, q)$:

$$\varphi = \frac{1}{2c} \ln \delta, \quad \delta = (vwprq). \quad (9)$$

Внося получаемое отсюда значение $\delta = e^{2c\varphi}$ в (8), находим

$$\begin{aligned} H_{ab} &= -\sqrt{-\sigma(a)} \sqrt{-\sigma(b)} \operatorname{cth} c\varphi = \\ &= -i \sqrt{-\sigma(a)} \sqrt{-\sigma(b)} \operatorname{ctg} ic\varphi. \end{aligned} \quad (10)$$

Чтобы выяснить, когда выбором постоянной c можно добиться вещественности взаимного угла, рассмотрим три возможных случая:

1. Сети a и b гиперболические ($\sigma(a) = \sigma(b) = -1$). Если их направления не разделяются, то $\delta > 0$. Полагая $c = 1$, получаем

$$\varphi = \frac{1}{2} \ln \delta, \quad H_{ab} = -\operatorname{cth} \varphi. \quad (11)$$

Если же их направления разделяются, то $\delta < 0$. Выбором постоянной c сделать взаимный угол вещественным нельзя. В этом случае положим

$$c = 1, \quad \varphi = \frac{1}{2} \ln \delta, \quad H_{ab} = -\operatorname{cth} \varphi. \quad (12)$$

2. Обе сети эллиптические ($\sigma(a) = \sigma(b) = 1$). Так как пары направлений v_s, w_s и p_s, q_s комплексно сопряжены ($w_s = \bar{v}_s, q_s = \bar{p}_s$), то

$$\delta = \frac{\langle pv \rangle}{\langle \bar{p}\bar{v} \rangle} : \frac{\langle \bar{p}\bar{v} \rangle}{\langle pv \rangle} = \frac{\langle pv \rangle \overline{\langle pv \rangle}}{\langle \bar{p}\bar{v} \rangle \overline{\langle \bar{p}\bar{v} \rangle}} = \left(\frac{\operatorname{mod} \langle pv \rangle}{\operatorname{mod} \langle \bar{p}\bar{v} \rangle} \right)^2 > 0.$$

Полагая $c = 1$, получаем

$$\varphi = \frac{1}{2} \ln \delta, \quad H_{ab} = -\operatorname{cth} \varphi. \quad (13)$$

3. Если сеть a эллиптическая ($\sigma(a) = 1, w_s = \bar{v}_s$), а сеть b гиперболическая ($\sigma(b) = -1$), то

$$\delta = \frac{\langle pv \rangle}{\langle \bar{p}\bar{v} \rangle} : \frac{\langle qv \rangle}{\langle \bar{q}\bar{v} \rangle} = \frac{\langle pv \rangle}{\langle \bar{p}\bar{v} \rangle} : \frac{\langle qv \rangle}{\langle \bar{q}\bar{v} \rangle} = e^{2i\theta},$$

где

$$\theta = \arg \langle pv \rangle - \arg \langle qv \rangle.$$

Полагая здесь $c = i$, получаем

$$\varphi = \theta, \quad H = -\operatorname{ctg} \varphi. \quad (14)$$

В зависимости от обстоятельств мы будем пользоваться тем или иным выражением совместного инварианта H через ab взаимный угол φ .

§ 6. Главная сеть пары сетей

Сеть d , направления которой сопряжены относительно двух сетей a и b , или, иначе говоря, сеть, аполярная сетям a и b , называется их *главной* сетью.

Если p_s и q_s — направления главной сети, то, по определению, направление p_s в a - и b -инволюциях переходит в одно и то же направление q_s , следовательно,

$$a_i^s p_s = \lambda q_i, \quad b_i^s p_s = \mu q_i.$$

Направляющие векторы главной сети удовлетворяют, таким образом, уравнениям

$$\begin{aligned} \lambda q_i \mu q^i &= a_i^s p_s b^{ik} p_k = -a_{(s}^i b_{k)i} p^s p^k = 0, \\ a_{(s}^i b_{k)i} q^s q^k &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно, главную сеть можно определить тензором

$$d_{sk} = a_{(s}^i b_{k)i}. \quad (1)$$

Производя согласно (1; 2) замену

$$a_k^i b_{si} = a_s^i b_{ki} + 2\varepsilon_{ks} J, \quad J = \frac{1}{2} a_j^i b_i^j,$$

получим

$$d_{sk} = a_s^i b_{ki} + \varepsilon_{ks} J. \quad (2)$$

Ввиду того, что бивектор ε_{ik} произволен, инвариант J отличается от совместного инварианта H множителем, для нахождения которого обозначим через ε_{ik}^a и ε_{ik}^b

бивекторы, согласованные с тензорами a и b . Так как

$$e^{ik} = \frac{\sqrt{|a|}}{\varepsilon} e_a^{ik} = \frac{\sqrt{|b|}}{\varepsilon} e_b^{ik}, \quad (3)$$

то

$$J = \frac{\sqrt{|ab|}}{\varepsilon^2} H. \quad (4)$$

Подсчитаем дискриминант тензора d_{ik} :

$$\begin{aligned} \frac{d}{\varepsilon^2} &= -\frac{1}{2} d_i^k d_k^i = -\frac{1}{2} (a_i^s b_s^k - J \delta_i^k) (a^{ip} b_{pk} + J \delta_k^i) = \\ &= \frac{1}{2} (a_i^s b_s^k - J \delta_i^k) (a_p^i b_k^p - J \delta_k^i) = \\ &= \frac{ab}{\varepsilon^4} - J^2 = \frac{|ab|}{\varepsilon^4} (\sigma(a) \sigma(b) - H^2). \end{aligned} \quad (5)$$

Если сети a и b связанные, то $\sigma(a) = \sigma(b) = -1$, $H^2 = 1$, $d = 0$. Следовательно, главная сеть двух связанных сетей вырождается и является дважды взятым общим семейством сетей a и b .

Для двух аполярных сетей a и b формулы (2) и (5) упрощаются и принимают вид

$$d_{ik} = a_i^s b_{ks}, \quad d = \frac{ab}{\varepsilon^2}. \quad (6)$$

Три сети, имеющие общую аполярную им сеть, называются *комполярными*. Для комполярности сетей a , b , c необходимо и достаточно, чтобы главная сеть $a_{(i}^s b_{k)}^s$ сетей a и b была аполярна сети c , то есть чтобы выполнялось равенство

$$-a_{(i}^s b_{k)}^s c^{ik} = a_i^s b_s^k c_k^i = 0. \quad (7)$$

Непосредственным вычислением находим:

$$a_i^s b_s^k c_k^i = \varepsilon^{sp} \varepsilon^{kq} \varepsilon^{ir} a_{ip} b_{sq} c_{kr} = \frac{1}{\varepsilon^3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} \\ c_{11} & c_{12} & c_{22} \end{vmatrix}. \quad (8)$$

Отсюда следует, что тензоры трех комполярных сетей линейно зависимы.

Очевидно и обратное: если тензоры трех сетей линейно зависимы, то эти сети комполярны.

Тензор произвольной сети d_{is} можно разложить по тензорам a_{is} , b_{is} , c_{is} трех независимых сетей:

$$d_{is} = xa_{is} + yb_{is} + zc_{is}, \quad (9)$$

так как определитель этой системы с тремя неизвестными x , y , z отличен от нуля.

§ 7. Тройки сетей

Тройкой сетей a , c , d будем называть три взаимно аполярные сети. Тензоры тройки сетей удовлетворяют условиям аполярности:

$$a_{is}c^{is} = c_{is}d^{is} = d_{is}a^{is} = 0.$$

Докажем, что среди трех взаимно аполярных сетей — две гиперболические сети и одна — эллиптическая. Если тензор сети d определить равенством (6; 6)

$$d_{is} = a_i^k c_{ks}$$

и учесть, что теперь $d = \frac{ac}{e^2}$, то получим

$$\sigma(a)\sigma(c)\sigma(d) = 1.$$

Отсюда следует, что все три сети гиперболическими быть не могут. Следовательно, остается показать, что две эллиптические сети не могут быть аполярными. Пусть a и c — эллиптические сети и $\alpha_s \pm i\beta_s$ — направляющие векторы сети c . Условие аполярности

$$a_{ik}(\alpha^i + i\beta^i)(\alpha^k - i\beta^k) = a_{ik}\alpha^i\alpha^k + a_{ik}\beta^i\beta^k = 0$$

невозможно, так как квадратичная форма $a_{ik}x^i x^k$ при любых вещественных значениях вектора $x^i \neq 0$ положительна, ибо дискриминант этой формы положителен.

На основании этого будем считать, что сети a и c — гиперболические, а сеть d — эллиптическая.

Аффиноры a_i^h, c_i^h, d_i^h этих сетей удовлетворяют соотношениям:

$$a_i^s a_s^h = \delta_i^h, \quad c_i^s c_s^h = \delta_i^h, \quad d_i^s d_s^h = -\delta_i^h; \quad (1)$$

$$a_i^s c_s^i = c_i^s d_s^i = d_i^s a_s^i = 0. \quad (2)$$

Согласно (6;6) $a_i^s c_s^h = \lambda d_i^h$. Множитель λ определяется с помощью (1)

$$\begin{aligned} \lambda^2 d_i^s d_s^h &= -\lambda^2 \delta_i^h = a_i^p c_p^s a_s^q c_q^h = a_{ip} c_s^p a^{sq} c_q^h = \\ &= a_{sp} c_i^p a^{sq} c_q^h = -a_p^s c_i^p a_s^q c_q^h = -\delta_i^h. \end{aligned}$$

Следовательно, $\lambda = \pm 1$ и знаки аффиноров можно выбрать так, чтобы имело место

$$a_i^s c_s^h = -c_i^s a_s^h = -d_i^h.$$

Отсюда находим

$$c_i^s d_s^h = c_i^s c_s^j a_j^h = a_i^h.$$

Таким образом, мы получили формулы:

$$\left. \begin{aligned} a_i^s c_s^h &= -c_i^s a_s^h = -d_i^h, \\ c_i^s d_s^h &= -d_i^s c_s^h = a_i^h, \\ d_i^s a_s^h &= -a_i^s d_s^h = c_i^h, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

которые в дальнейшем используются очень часто.

§ 8. Приведенные аффиноры сети. Алгебра аффиноров

1. Формулы предыдущего параграфа записываются более компактно, если обозначить

$$A_i^s = ia_i^s, \quad A_i^s = ic_i^s, \quad A_i^s = d_i^s \quad (i^2 = -1). \quad (1)$$

Действительно, вместо трех формул (7;1) имеем одну

$$A_i^s A_s^h = -\delta_i^h. \quad (2)$$

Три формулы (7;3) тоже объединяются в одну формулу

$$A_i^s A_s^h = A_i^h, \quad (3)$$

если условиться, что (α, β, γ) принимает одно из трех значений $(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)$.

Тензоры (1) будем в дальнейшем называть *приведенными аффинорами* и будем всегда обозначать заглавными буквами.

2. Условимся в следующих обозначениях и определениях:

диадное произведение аффиноров

$$XY = X_i^s Y_s^k,$$

скалярное произведение аффиноров

$$(XY) = \frac{1}{2} X_i^s Y_s^i,$$

векторное произведение аффиноров

$$Z = [XY] = \frac{1}{2} (XY - YX) \rightarrow Z_i^s = \frac{1}{2} (X_i^k Y_k^s - Y_i^k X_k^s),$$

смешанное произведение аффиноров

$$XYZ = X_i^s Y_s^k Z_k^i.$$

Для приведенного аффинора сети выполняются соотношения

$$(XX) = -1, \quad XX = -\delta,$$

где δ — символ единичного аффинора.

Формулы (2) и (3) можно теперь записать в виде

$$\underset{\alpha}{A} \underset{\alpha}{A} = -\delta, \quad \underset{\alpha}{A} \underset{\beta}{A} = \underset{\gamma}{A}. \quad (4)$$

Аффиноры тройки сетей $\underset{\alpha}{A}$ очевидно, независимы, следовательно, аффинор X произвольной сети можно разложить по аффинорам $\underset{\alpha}{A}$:

$$X = \underset{\alpha}{A} x = \underset{1}{A} x^1 + \underset{2}{A} x^2 + \underset{3}{A} x^3. \quad (5)$$

Это дает нам возможность установить взаимно однозначное соответствие между аффинорами $\underset{2}{X}$ и векторами x трехмерного евклидова пространства с координатами x, x, x ,

полагая

$$x = - (XA)_{\alpha}^{\alpha}$$

Это соотношение является следствием (7;2) и (4).

Полученное соответствие приводит к изоморфному соответствию алгебраических векторных и аффинорных операций. В самом деле, для аффиноров

$$X = Ax_{\alpha}^{\alpha}, \quad Y = Ay_{\alpha}^{\alpha}$$

скалярное произведение, взятое с обратным знаком, равно скалярному произведению соответствующих векторов:

$$- (XY) = - (AA)_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} xy = xy + xy + xy = xy.$$

Векторному произведению аффиноров

$$\begin{aligned} Z = [XY] = [AA]_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} xx &= [AA]_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} (xy - xy) + [AA]_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} (xy - xy) + \\ &+ [AA]_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} (xy - xy) = Az + Az + Az = Az \end{aligned}$$

соответствует векторное произведение векторов $[xy] = z$.

Наконец, смешанное произведение аффиноров, взятое с обратным знаком, равно смешанному произведению соответствующих векторов:

$$- (X, Y, Z) = - ([XY] Z) = - (TZ) = tz = xyz,$$

где обозначено $T = [XY]$, $t = [xy]$.

После вышесказанного очевидна справедливость следующих формул:

$$[[XY] Z] = X (YZ) - Y (XZ), \quad (6)$$

$$[[XY][UV]] = X (YUV) - Y (XUV), \quad (7)$$

$$([XY] [UV]) = - \begin{vmatrix} (XU), (XV) \\ (YU), (YV) \end{vmatrix}, \quad (8)$$

$$(XYZ) (UVW) = - \begin{vmatrix} (XU) & (XV) & (XW) \\ (YU) & (YV) & (YW) \\ (ZU) & (ZV) & (ZW) \end{vmatrix},$$

которые получаются из соответствующих формул векторной алгебры заменой:

$$(XY) \rightarrow -(xy), \quad [XY] \rightarrow [xy], \quad (XYZ) \rightarrow -(xyz).$$

Компоненты аффиноров в формулы (6)–(9) входят однородно, а это означает, что они справедливы для произвольных смешанных тензоров X_i^s со следом $X_s^s = 0$.

Выведем еще несколько важных для дальнейшего формул. Тензор $A_{im}A_{nk} - A_{nm}A_{ik}$ кососимметричен и по индексам i, n , и по индексам m, k , следовательно, согласно (1; 1) и (2)

$$\begin{aligned} A_{im}A_{nk} - A_{nm}A_{ik} &= \frac{1}{4} \varepsilon_{in} \varepsilon_{mk} (A_{sp}A_{\alpha}^{sp} - A_{\alpha}^p A_p^s) = \\ &= -\frac{1}{2} \varepsilon_{in} \varepsilon_{mk} A_{\alpha}^p A_p^s = \varepsilon_{in} \varepsilon_{mk}. \end{aligned} \quad (10)$$

Поднимая здесь различные индексы, получаем

$$A_{\alpha}^{im} A_{nk} - A_{\alpha}^m A_k^i = \delta_n^i \delta_k^m, \quad (11)$$

$$A_{\alpha}^i A_k^n - A_{\alpha}^n A_k^i = \varepsilon^{in} \varepsilon_{mk} = \delta_m^i \delta_k^n - \delta_m^n \delta_k^i. \quad (12)$$

Умножение (12) на $A_s^m A_i^p$ приводит к соотношению

$$A_{\alpha}^p A_k^n + A_{\beta}^n A_k^p + A_{\gamma}^n A_k^p + \delta_s^p \delta_k^n = 0, \quad (13)$$

из которого свертыванием с A_i^k получаем

$$A_{\beta}^n A_i^p - A_{\gamma}^n A_i^p = A_{\alpha}^p \delta_i^n - A_{\alpha}^n \delta_i^p \quad (14)$$

§ 9. Геометрия три-ткани

Назовем три-ткань *ориентированной*, если ее семейства занумерованы. Обозначая через x_i ($\alpha = 1, 2, 3$) ее направляющие псевдовекторы, определим псевдотензор три-ткани равенством

$$a_{is_k} = 6x_{\begin{pmatrix} i & s & k \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}. \quad (1)$$

Требованием

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad (2)$$

нормирование векторов x определено с точностью до общего всем им множителя ρ .

Будем говорить, что псевдотензор фиксирован, если выбрано некоторое его нормирование a_{is_k} . Задание три-
ткани с фиксированным псевдотензором эквивалентно заданию кубической бинарной формы

$$F = a_{is_k} du^i du^s du^k. \quad (3)$$

Подбирая множитель ρ для псевдовекторов, удовлетворяющих равенству (2), из условия

$$6x_{(1}x_2x_3) = a_{is_k} \quad (4)$$

мы однозначно определим *согласованные* с формой (3) или с фиксированным тензором a_{is_k} псевдовекторы x_i и бивектор α

$$e_{ik} = 2x_{[1}x_2]x_k = 2x_{[2}x_3]x_k = 2x_{[3}x_1]x_k. \quad (5)$$

Условимся, что совокупность номеров (α, β, γ) принимает одно из трех значений: $(1, 2, 3)$; $(2, 3, 1)$; $(3, 1, 2)$.

В этих предположениях равенства (5) можно записать в следующем виде:

$$e_{is} = 2x_{[\alpha}x_{\beta]}.$$

Отсюда, поднимая индексы согласованным бивектором, находим

$$x_s x^\alpha = 1. \quad (6)$$

В пространстве направлений каждой точки X_2 три-
ткань определяет три направления x_i ($\alpha = 1, 2, 3$). Рассмотрим три направления

$$\bar{x}_i = x_i - x_j \quad (\alpha = 1, 2, 3). \quad (7)$$

Если равенство (2) записать в виде $x_i = -x_i - x_i$, то станет ясно, что пара направлений x, x гармонически разделяет направления x, x .

Докажем, что направления x и x сопряжены в инволюции, определяемой тензором:

$$b_{is} = x_i x_s + x_i x_s + x_i x_s = x_i x_s + x_i x_s + x_i x_s. \quad (8)$$

Действительно, согласно (6) и (8)

$$b_{is}^2 x_s = x_i - x_i = x_i. \quad (9)$$

Назовем тензор (8) *тензором Гессе* формы (3), а соответствующую ему сеть — *сетью Гессе* три-ткани.

Очевидно, что сеть Гессе однозначно определяется три-тканью, в то время как для однозначного задания тензора Гессе необходимо либо фиксировать тензор три-ткани, либо задать кубическую форму (3).

Рассмотрим три сети, определяемые тензорами

$$a_{is} = 2x_i x_s \quad (\alpha = 1, 2, 3). \quad (10)$$

Эти тензоры согласованы с бивектором (5), так как согласно (6)

$$a_{is} a^{is} = -2 \quad (11)$$

и, следовательно, a_i^s являются аффинорами сетей a .

Тензор три-ткани, согласно (4) и (10), можно записать в следующем виде:

$$a_{isk} = x_k a_{is} + x_k a_{is} + x_k a_{is}. \quad (12)$$

Каждой сети c с аффинором c_i^s три-ткань ставит в соответствие направление

$$a_{sk}^i c_i^s = H_{\alpha c} x_k + H_{\beta c} x_k + H_{\gamma c} x_k,$$

где $H_{\alpha c}$ ($\alpha = 1, 2, 3$) — совместные инварианты сетей c и a

Это направление становится неопределенным, если три совместных инварианта H равны между собой: в этом случае

$$a_{sk}^i c_i^s = H \left(x_k + x_k + x_k \right) = 0. \quad (13)$$

Назовем три-кань a_{isk} и сеть с *аполярными*, если выполняются условия (13), и докажем, что сеть, аполярная три-канни, определяется однозначно и является ее сетью Гессе. Из равенства $H = H$ имеем

$$\begin{aligned} 2(H - H) &= c_s^i (a_i^s - a_i^s) = -2c^{is} (x_i x_s - x_i x_s) = \\ &= 2c^{is} x_s (x_i - x_i) = 2c^{is} x_i \bar{x}_s = 0. \end{aligned}$$

В s -инволюции направления x и \bar{x} соответственные, что и доказывает наше утверждение.

Чтобы найти выражение тензора Гессе через тензор три-канни, рассмотрим сумму трех тензоров

$$s_{ik} = a_{ik} + a_{ik} + a_{ik} = a_{ik} + 2x_{(i} (x_k) + x_k) = a_{ik} - 2x_i x_k.$$

Придавая номеру α значения 1, 2, 3, получим

$$3s_{ik} = a_{ik} + a_{ik} + a_{ik} - 2(x_i x_k + x_i x_k + x_i x_k) = s_{ik} - 2b_{ik}.$$

Следовательно,

$$b_{ik} = -s_{ik}.$$

С помощью этого соотношения из (12) находим

$$a_{sk}^i a_{ij}^s = 2b_{kj} - 2s_{kj} = 4b_{kj},$$

откуда

$$b_{kj} = \frac{1}{4} a_{ik}^s a_{sj}^i. \quad (14)$$

Если $\bar{\epsilon}_{is}$ — произвольный бивектор, то

$$\bar{\epsilon}^{im} \bar{\epsilon}^{sn} a_{msk} a_{nij} = \frac{\epsilon^2}{\epsilon^2} a_{sk}^i a_{ij}^s = 4J b_{kj},$$

где $J = \frac{e^2}{e^2}$, а $\bar{\varepsilon}$ и ε — основные компоненты бивектора $\bar{\varepsilon}_{ik}$ и бивектора (5). Теперь согласно (8) имеем

$$\bar{\varepsilon}^{km} \bar{\varepsilon}^{jn} b_{kj} b_{mn} = J b_{kj} b^{kj} = 6J, \quad (15)$$

и с помощью (14) можем записать

$$16J^2 \bar{\varepsilon}^{im} \bar{\varepsilon}^{jn} b_{ij} b_{mn} = 96J^3 = a_{ni}^m a_{mj}^n a_q^{pi} a_p^{qj},$$

где индексы в правой части подняты бивектором $\bar{\varepsilon}^{ik}$. Это равенство определяет основную компоненту ε бивектора ε_{ik} , согласованного с тензором три-ткани

$$\varepsilon^6 = \frac{\bar{\varepsilon}^6}{96} a_{ni}^m a_{mj}^n a_q^{pi} a_p^{qj}. \quad (16)$$

Три-ткани, определяемые тензорами a_{isk} и

$$\bar{a}_{isk} = b_i^m b_s^n b_k^l a_{mnl} = 6 \bar{x}_{(\alpha} \bar{x}_\beta \bar{x}_{\gamma)},$$

назовем *присоединенными* друг другу. *Присоединенные три-ткани имеют общую сеть Гессе, и каждое направление одной из них сопряжено относительно сети Гессе одному из направлений другой.*

В силу условия аполярности $a_{isk} b_r^k \varepsilon^{ir} = 0$ имеем

$$a_{isk} b_r^k = a_{rsk} b_i^k.$$

Свернув обе части этого равенства с $b_p^i b_q^s$, придем к следующему выражению присоединенного тензора ¹⁾:

$$\bar{a}_{isk} = -3b_i^p a_{psk} = -3 \left(\bar{x}_\alpha a_{s\alpha k} + \bar{x}_\beta a_{s\beta k} + \bar{x}_\gamma a_{s\gamma k} \right). \quad (17)$$

Вводя аффиноры сети Гессе $B_i^s = \frac{1}{\sqrt{3}} b_i^s$ и полагая

$$\bar{a}_{isk} = -\frac{1}{3\sqrt{3}} \bar{a}_{isk},$$

получим вместо (17)

$$\bar{a}_{isk} = B_i^j a_{jsk} = -B_i^p B_s^q B_k^r a_{pqr}.$$

¹⁾ Учесть, что $b_i^k b_p^i = -3\delta_p^k$.

ГЛАВА II
РИМАНОВА ГЕОМЕТРИЯ И ПРОСТРАНСТВА
АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

§ 10. Риманова геометрия V_2

1. Двумерная *риманова геометрия* V_2 исторически впервые возникла как внутренняя геометрия двумерной поверхности трехмерного евклидова пространства E_3 : квадрат расстояния между двумя бесконечно близкими точками такой поверхности с криволинейными координатами u^i и $u^i + du^i$ задается положительно определенной квадратичной формой:

$$ds^2 = g_{is} du^i du^s, \quad |g_{is}| = g > 0, \quad (1)$$

где тензор g_{is} симметричен, не вырождается и называется *основным* или *метрическим* тензором римановой геометрии. С помощью этого тензора строится риманова геометрия: вычисляются расстояния, углы, площади, вводится понятие параллельного переноса векторов и т. д.

Сеть, определяемая тензором g_{is} , называется *изотропной* сетью, а ее направляющие векторы — *изотропными* векторами. Изотропная сеть в рассматриваемом случае — эллиптическая, ее линии имеют нулевую длину. Квадрат изотропного вектора тоже обращается в нуль.

Отвлекаясь от поверхности, порождающей риманову геометрию, ее можно определить как такое X_2 , в котором задано поле симметричного, двухвалентного, невырождающегося тензора g_{is} — основного или метрического тензора. Все понятия римановой геометрии вводятся с помощью этого тензора и сохраняются при таком ее определении.

На этом пути возможно обобщение римановой геометрии, связанное с отказом от обязательной положительной определенности квадратичной формы (1). Получаемые при этом геометрии с вещественными изотропными сетями называются иногда *псевдоримановыми* геометриями. В дальнейшем мы будем оба типа геометрий называть просто римановыми, так как в рассматриваемых нами вопросах различие между ними несущественно и состоит в том, что в геометриях с вещественной изотропной сетью существуют вещественные (изотропные) линии с нулевой длиной, квадраты некоторых векторов могут быть отрицательными и даже обращаться (для вещественных изотропных векторов) в нуль.

В дальнейшем изложении, ради простоты и краткости, изотропная сеть считается эллиптической, а изменения для случая гиперболической изотропной сети предлагается внести читателю.

2. Бивектор ϵ_{ik} , согласованный с метрическим тензором, то есть такой, что

$$\epsilon_{12} = \epsilon = \sqrt{g},$$

называется *дискриминантным бивектором* римановой геометрии.

Этот бивектор мы постоянно будем использовать в качестве вектора.

Поднимая индексы у метрического тензора, получаем тензор

$$g^{is} = \epsilon^{im} \epsilon^{sn} g_{mn} = \tilde{g}^{is},$$

взаимный метрическому.

Инвариант

$$g_{is} p^i q^s = g^{is} p_i q_s$$

называется *скалярным произведением* векторов p_i и q_s и обозначается

$$g_{is} p^i q^s = g^{is} p_i q_s = pq.$$

Длина вектора p_i или p^i обозначается через p и выражается равенством

$$p^2 = g_{is} p^i p^s = g^{is} p_i p_s = pp = p^2.$$

Вектор, длина которого равна единице, называется *ортом*.

Угол φ между векторами p_i и q_i определяется формулой

$$\cos \varphi = \frac{g^{is} p_i q_s}{pq} = \frac{g^{is} p^i q^s}{pq}.$$

Для угла между ортами v_i и w_i эта формула упрощается:

$$\cos \varphi = g_{is} v^i w^s = g^{is} v_i w_s = vw.$$

Будем считать, что *изотропная сеть ориентирована*. Тогда ее аффинор определяется однозначно

$$g_i^s = \epsilon^{sk} g_{ki} = \epsilon_{ki} g^{ks}$$

и называется *версором*.

Условимся называть *дополнительным* для вектора p_i и обозначать через \tilde{p}^i вектор

$$\tilde{p}^i = g_i^s p_s, \quad \tilde{p}^i = -g^i_s p^s.$$

Дополнительные векторы ортогональны:

$$g_{is} \tilde{p}^i p^s = g_{is} g^{ih} p_h p^s = p_s p^s = 0$$

и имеют равные длины:

$$\tilde{p}^2 = g_{is} \tilde{p}^i \tilde{p}^s = g_{is} g^{im} g^{sn} p_m p_n = g^{is} p_i p_s = p^2.$$

Следовательно, *версор производит поворот векторов на прямой угол*. При этом *ориентация изотропной сети устанавливает положительное направление отсчета углов*: поворот от вектора p_i к вектору \tilde{p}^i считается положительным.

Если v_i и w_i — орты, то в принятых обозначениях

$$\cos \varphi = \cos(\widehat{v}, w) = g_{is} v^i w^s = \tilde{v}^s w_s = \tilde{w}^s v_s$$

или

$$\cos \varphi = vw = \langle \tilde{v} w \rangle = \langle w \tilde{v} \rangle.$$

Для определения синуса угла между ортами v_i и w_i , точнее, угла поворота от вектора v_i к вектору w_i , заметим, что он равен косинусу угла между векторами w_i и \tilde{v}_i , следовательно,

$$\sin(\widehat{v}, w) = g_{is} \tilde{v}^i w^s = v_s w^s = \tilde{v} w = \langle vw \rangle.$$

Для угла между векторами w_i и v_i имеем

$$\sin(\widehat{w, v}) = w_s v^s = -v_s w^s = -\sin(\widehat{v, w}),$$

как и следовало ожидать.

Заметив, что $\delta_i^s p_s = p_i$, т. е. что аффиноор δ_i^s оставляет векторы неизменными, рассмотрим теперь аффиноор

$$(\varphi)_i^s = \delta_i^s \cos \varphi + g_i^s \sin \varphi, \quad [(2)]$$

переводящий вектор p_i в вектор

$$q_i = (\varphi)_i^s p_s = (\delta_i^s \cos \varphi + g_i^s \sin \varphi) p_s = p_i \cos \varphi + \tilde{p}_i \sin \varphi.$$

Непосредственной проверкой легко установить, что векторы p_i и q_i имеют равные длины и составляют между собой угол φ , следовательно, аффиноор (2) производит поворот векторов на угол φ . Следуя А. П. Нордену [6], назовем его аффинором поворота на угол φ .

Для двух аффиноров поворота имеем очевидное свойство:

$$(\varphi)_i^s (\psi)_s^k = (\varphi + \psi)_i^k.$$

§ 11. Нормальные тройки сетей в V_2

Рассмотрим ориентированную сеть с аффинором a_i^s . В римановой геометрии для такой сети однозначно определяется тензор

$$a_{is} = \epsilon_{ki} a_s^k. \quad (1)$$

Следуя Я. С. Дубнову [30], назовем его метрически нормированным тензором сети. Этот тензор характеризуется тем, что абсолютная величина его дискриминанта равна дискриминанту метрического тензора, а знак выбран так, что поднятие одного индекса дискриминантным бивектором приводит к аффинору ориентированной сети.

Пусть v_i и w_i — первый и второй направляющие орты ориентированной (для определенности гиперболической) сети a . Полагая $a_i^s = \lambda(v_i w^s + v^s w_i)$, найдем множитель λ из условия $a_i^s v_s = v_i = \lambda v_s w^s v_i = \lambda \sin \omega v_i$, где ω — угол между направляющими ортами сети, или сетевой углом.

Заметим, что для ориентированной сети ее сетевой угол определяется однозначно (напомним, что изотропная сеть считается ориентированной). Следовательно, $\lambda = \frac{1}{\sin \omega}$, и мы приходим к следующим выражениям аффинора и метрически нормированного тензора сети через ее направляющие орты и сетевой угол:

$$a_i^s = \frac{1}{\sin \omega} (v_i \omega^s + v^s \omega_i), \quad (2)$$

$$a_{0i_s} = \frac{1}{\sin \omega} (v_i \omega_s + v_s \omega_i). \quad (3)$$

Для взаимного угла φ сети a и изотропной сети имеем

$$\operatorname{ctg} \varphi = -\frac{1}{2} g_i^s a_s^i = \frac{1}{\sin \omega} g^{is} v_i \omega_s = \operatorname{ctg} \omega.$$

Следовательно, угол между двумя направлениями v_i и w_i в римановой геометрии равен взаимному углу сети (v, w) и изотропной сети. Для ортогональной сети $\omega = \frac{\pi}{2}$, $g^{is} a_{is} = 0$, следовательно, ортогональная сеть характеризуется своей аполярностью с изотропной сетью.

Каждую сеть a римановой геометрии можно однозначно дополнить до тройки сетей, выбирая за вторую сеть этой тройки ее биссекторную сеть c , направления которой являются биссекторными для направлений сети a . Третья сеть d найдется как главная сеть сетей a и c и называется *характеристической сетью* сети a . Очевидно, что и сеть a тоже характеристическая для сети d . Биссекторная сеть любой сети ортогональна и, следовательно, аполярна изотропной сети, а потому ее можно охарактеризовать как главную сеть данной сети и изотропной сети. В римановой геометрии с эллиптической изотропной сетью биссекторные сети, как это следует из результатов § 7, вещественны.

Если одна из сетей тройки ортогональна, то она является биссекторной для двух других сетей, которые будут взаимно характеристическими сетями. Такие тройки сетей назовем *нормальными тройками*.

Биссекторную и характеристическую сети данной ориентированной сети a можно однозначно ориентировать, принимая за первое направление биссекторной сети на-

правление внутренней биссектрисы сети a . Ориентация характеристической сети определится требованием, чтобы она имела с сетью a общую внутреннюю биссектрису. Согласно сказанному за первый орт биссекторной сети следует взять

$$m_i = \frac{v_i + w_i}{2 \cos \frac{\omega}{2}},$$

а за второй —

$$n_i = \frac{w_i - v_i}{2 \sin \frac{\omega}{2}} = \tilde{m}_i.$$

Аффинол биссекторной сети, таким образом, имеет вид

$$c_i^s = m_i n^s + m^s n_i = \frac{1}{\sin \omega} (\omega_i \omega^s - v_i v^s). \quad (4)$$

За аффинол характеристической сети следует принять

$$d_i^s = -a_i^k c_k^s = \frac{1}{\sin \omega} (v_i v^s + \omega_i \omega^s). \quad (5)$$

Аффинолы a_i^s , c_i^s , d_i^s нормальной тройки сетей удовлетворяют соотношениям (8;3)

$$a_i^s c_s^k = -d_i^k, \quad c_i^s d_s^k = a_i^k, \quad d_i^s a_s^k = c_i^k. \quad (6)$$

Биссекторная сеть \tilde{c} сети c называется *второй биссекторной сетью* сети a . Ее аффинол

$$\tilde{c}_i^s = g_i^k c_k^s. \quad (7)$$

Четыре сети a , \tilde{c} , d , g имеют общую аполярную сеть c , следовательно, каждые три из них комполярны, а поэтому линейно зависимы. Эти линейные зависимости имеют вид:

$$a_i^s = d_i^s \cos \omega - \tilde{c}_i^s \sin \omega, \quad (8)$$

$$g_i^s = \tilde{c}_i^s \cos \omega + d_i^s \sin \omega, \quad (9)$$

$$\tilde{c}_i^s = g_i^s \cos \omega - a_i^s \sin \omega, \quad (10)$$

$$d_i^s = a_i^s \cos \omega + g_i^s \sin \omega. \quad (11)$$

Для вывода этих формул проще всего воспользоваться таблицей

$l_s \backslash p_i^s$	a_i^s	c_i^s	d_i^s	\tilde{c}_i^s	(12)
v_s	v_i	w_i	w_i	\tilde{w}_i	
w_s	$-w_i$	v_i	$-v_i$	\tilde{v}_i	

значений $p_i^s l_s$, которая легко проверяется. Теперь для вывода формулы (8), например, запишем условие линейной зависимости $a_i^s = \lambda d_i^s + \mu \tilde{c}_i^s$, из которой находим $a_i^s v_s = \lambda w_i + \mu \tilde{w}_i = v_i$, что при сравнении с очевидным разложением $v_i = w_i \cos \omega - \tilde{w}_i \sin \omega$ приводит к (8).

Отметим в заключение легко проверяемую формулу

$$g_{is} = \frac{1}{\sin^2 \omega} (v_i v_s - 2 \cos \omega v_i w_s + w_i w_s). \quad (13)$$

§ 12. Параллельный перенос векторов. Ковариантное дифференцирование

Рассмотрим в V_2 кривую L , заданную параметрическими уравнениями $u^i = u^i(t)$, и в некоторой ее точке $t = t_0$ вектор v_0^i . Запишем систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dv^i}{dt} + \Gamma_{sk}^i v^s \frac{du^k}{dt} = 0 \quad (1)$$

с неизвестными $v^i(t)$, где величины

$$\Gamma_{sk}^i = \Gamma_{ks}^i = \frac{1}{2} g^{ij} (\partial_s g_{kj} + \partial_k g_{sj} - \partial_j g_{sk}) \quad (2)$$

называются символами Кристоффеля второго рода. Решение этой системы при заданных начальных условиях $v^i(t_0) = v_0^i$ определяет в каждой точке кривой L вектор $v^i(t)$, о котором говорят, что он получен из вектора v_0^i параллельным переносом вдоль кривой L . Последователь-

ность векторов $v^i(t)$ образует вдоль кривой L совокупность векторов, получаемых друг из друга параллельным переносом.

Совокупность векторов в данной точке V_2 называют *касательным аффинным пространством* этой точки. Параллельный перенос векторов устанавливает связь, соответствие между векторами касательных аффинных пространств любых двух точек произвольной кривой: соответствующими называются векторы, получаемые друг из друга параллельным переносом.

Выражение

$$\delta v^i = dv^i + \Gamma_{sk}^i v^s du^k$$

называется *абсолютным дифференциалом вектора* v^i . Обращение абсолютного дифференциала в нуль необходимо и достаточно для того, чтобы вектор переносился вдоль кривой параллельно.

Предположим, что нам дано векторное поле $v^i(u^s)$ и кривая $u^i = u^i(t)$. Векторы поля образуют вдоль этой кривой последовательность $v^i(u^s(t))$. В этом случае абсолютный дифференциал можно записать в следующем виде:

$$\delta v^i = (\partial_k v^i + \Gamma_{sk}^i v^s) du^k.$$

Выражение

$$\nabla_k v^i = v^i|_k = \partial_k v^i + \Gamma_{sk}^i v^s$$

не зависит от выбора кривой и называется *ковариантной производной вектора* v^i . Символы Кристоффеля, преобразуясь при замене координат $u^{i'} = u^{i'}(u^i)$ по закону [6] § 32:

$$\Gamma_{s'k'}^{i'} = A_i^{i'} A_s^s A_k^k \Gamma_{sk}^i + A_j^{i'} \partial_s A_k^j, \quad (3)$$

где

$$A_i^{i'} = \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i}, \quad A_i^{i'} = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}},$$

не образуют тензора, однако ковариантная производная вектора является тензором. Аналогичные заключения справедливы и для *ковариантной производной ковектора*:

$$\nabla_s v_i = v_i|_s = \partial_s v_i - \Gamma_{is}^k v_k$$

и для *ковариантной производной произвольного тензора*:

$$\nabla_s T_j^i = \partial_s T_j^i + \Gamma_{ks}^i T_j^k - \Gamma_{js}^k T_k^i + \dots$$

Правила ковариантного дифференцирования аналогичны правилам обычного дифференцирования, так, например:

$$\begin{aligned}\nabla_s(T_k^i + Q_k^i) &= \nabla_s T_k^i + \nabla_s Q_k^i, \\ \nabla_s(T_k^i Q_r^j) &= (\nabla_s T_k^i) Q_r^j + T_k^i \nabla_s Q_r^j.\end{aligned}$$

Ковариантной производной скаляра будем называть его частную производную.

Для инварианта F , полученного свертыванием тензоров (пусть для конкретности $F = v_i \omega^i$) справедливо следующее правило дифференцирования:

$$\partial_k F = \nabla_k F = \partial_k (v_i \omega^i) = (\partial_k v_i) \omega^i + v_i \partial_k \omega^i = v_{i|k} \omega^i + v_i \omega^i{}_{|k}.$$

Непосредственными вычислениями легко убедиться, что ковариантная производная метрического тензора обращается в нуль:

$$\nabla_k g_{is} = \partial_k g_{is} - \Gamma_{ik}^j g_{js} - \Gamma_{sk}^j g_{ij} = 0.$$

Рассмотрим ковариантную производную символа Кронекера:

$$\nabla_k \delta_s^i = \partial_k \delta_s^i + \Gamma_{jk}^i \delta_s^j - \Gamma_{sk}^j \delta_j^i = \partial_k \delta_s^i.$$

Правая часть этого равенства обращается в нуль при любых значениях индексов i и s , следовательно, ковариантная производная символа Кронекера равна нулю:

$$\nabla_k \delta_s^i = 0.$$

Теперь легко доказать, что ковариантная производная тензора \tilde{g}^{is} , взаимного метрическому тензору g_{is} , тоже обращается в нуль. Действительно:

$$\nabla_k (\tilde{g}^{is} g_{js}) = (\nabla_k \tilde{g}^{is}) g_{js} = \nabla_k \delta_j^i = 0.$$

Так как метрический тензор не вырождается, то

$$\nabla_k \tilde{g}^{is} = \nabla_k g^{is} = 0.$$

Ковариантная производная $\nabla_k \varepsilon_{is}$ произвольного бивектора ε_{is} кососимметрична по индексам i и s , следовательно,

$$\nabla_k \varepsilon_{is} = \frac{1}{2} \varepsilon_{is} (\varepsilon^{mn} \nabla_k \varepsilon_{mn}) = 2\omega_k \varepsilon_{is},$$

где

$$\omega_k = \frac{1}{4} \varepsilon^{mn} \nabla_k \varepsilon_{mn}.$$

Дифференцируя обе части равенства $\varepsilon^{is} \varepsilon_{js} = \delta_j^i$, находим

$$(\nabla_k \varepsilon^{is}) \varepsilon_{js} = -\varepsilon^{is} \nabla_k \varepsilon_{js} = -\varepsilon^{is} \cdot 2\omega_k \varepsilon_{js},$$

следовательно,

$$\nabla_k \varepsilon^{is} = -2\omega_k \varepsilon^{is}.$$

Покажем, что ковариантная производная дискриминантного бивектора римановой геометрии равна нулю. Дифференцируя обе части равенства $\varepsilon^{is} = g^{ik} g^{sl} \varepsilon_{kl}$, справедливого для дискриминантного бивектора, находим:

$$\nabla_k \varepsilon^{is} = -2\omega_k \varepsilon^{is} = g^{ip} g^{sl} \nabla_k \varepsilon_{pl} = g^{ip} g^{sl} \cdot 2\omega_k \varepsilon_{pl} = 2\omega_k \varepsilon^{is},$$

следовательно, $\omega_k = 0$, и наше предложение доказано.

Тензоры, ковариантная производная которых обращается в нуль, называются *ковариантно постоянными*. Из предыдущего следует, что основные тензоры g_{is} и g^{is} , дискриминантные бивекторы ε_{is} и ε^{is} , версор g_i^s римановой геометрии и символ Кронекера δ_i^s ковариантно постоянны. Эти тензоры можно вносить под знак ковариантной производной и выносить из-под этого знака. Это свойство ковариантно постоянных тензоров часто используется при вычислениях. Так, например, если известна производная $v_{i|s} = \theta_{is}$ вектора v_i , то производная дополнительного вектора

$$\tilde{v}_{i|s} = (g_i^h v_h)_{|s} = g_i^h v_{h|s} = g_i^h \theta_{hs}.$$

На основании этого же свойства найдем ковариантную производную аффинора поворота:

$$\begin{aligned} (\varphi)_{i|k}^s &= (\delta_i^s \cos \varphi + g_i^s \sin \varphi)_{|k} = (-\delta_i^s \sin \varphi + g_i^s \cos \varphi) \partial_k \varphi = \\ &= \left[\delta_i^s \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) + g_i^s \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) \right] \varphi_k = \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right)_i^s \varphi_k. \end{aligned} \quad (4)$$

§ 13. Пространство аффинной связности A_2

Риманово пространство является частным случаем более общего *пространства аффинной связности*, которое определяется следующим образом. Величины Γ_{sh}^i , симметричные по нижним индексам, преобразующиеся при

замене криволинейных координат по формуле (12;3), а в остальном совершенно произвольные, называются *коэффициентами связности*.

Пространство X_2 , в котором заданы коэффициенты связности, называется пространством аффинной связности A_2^1).

В пространстве аффинной связности можно, как и в предыдущем параграфе, с помощью дифференциальных уравнений (12; 1) ввести понятие параллельного переноса векторов или, что то же, установить связь между векторами касательных аффинных пространств в различных точках произвольных кривых.

В пространствах аффинной связности общего типа невозможно определить длины векторов, углы и т. д., тем не менее они тоже богаты геометрическими свойствами.

Пространство A_2 будет римановым, если существует симметричный невырождающийся тензор g_{is} — метрический тензор, — ковариантная производная которого равна нулю. В § 19 указано другое свойство, характеризующее риманово пространство, основанное на понятии параллельного переноса.

Как и в предыдущем параграфе, можно доказать, что в пространстве аффинной связности производная символа Кронекера равна нулю, а производные взаимных бивекторов имеют вид

$$\varepsilon_{is|k} = 2\omega_k \varepsilon_{is}, \quad \varepsilon^{is|k} = -2\omega_k \varepsilon^{is}. \quad (1)$$

Вектор ω_k , определяющий эти производные, назовем *дополнительным вектором бивектора*. При замене бивектора $\varepsilon_{is}^* = \sigma \varepsilon_{is}$ имеем

$$\varepsilon_{is|k}^* = 2\omega_k^* \varepsilon_{is}^* = (\sigma \varepsilon_{is})_{|k} = (2\omega_k + \partial_k \ln \sigma) \varepsilon_{is};$$

следовательно, дополнительный вектор получает градиентное приращение:

$$\omega_k^* = \omega_k + \frac{1}{2} \partial_k \ln \sigma. \quad (2)$$

1) Если отказаться от требования симметрии $\Gamma_{sh}^i = \Gamma_{hs}^i$, то придем к так называемому пространству A_2 с кручением.

Из первого равенства (1) находим

$$\varepsilon_{12|k} = 2\omega_k \varepsilon_{12} = \partial_k \varepsilon_{12} - \Gamma_{k1}^1 \varepsilon_{12} - \Gamma_{k2}^2 \varepsilon_{12}$$

или

$$2\omega_k = \partial_k \ln \varepsilon_{12} - \Gamma_{ks}^s. \quad (3)$$

Так как бивектор в пространстве A_2 не является ковариантно постоянным, то операция перебрасывания индексов и ковариантного дифференцирования в этих пространствах в общем случае непереставимы. Так, например,

$$\varepsilon^{ik} p_{k|s} = (\varepsilon^{ik} p_k)_{|s} - \varepsilon^{ik} p_{k|s} = p^i_{|s} + 2\omega_s p^i.$$

§ 14. Развертывание кривой на аффинное пространство

Рассмотрим в A_2 кривую $L : u^i = u^i(t)$ и касательное аффинное пространство R_2 произвольной ее точки $t = t_0$. Найдем в этом пространстве векторы $r = r(t)$, $r_i = r_i(t)$, удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= r_i \frac{du^i}{dt}, \\ \frac{dr_i}{dt} &= \Gamma_{is}^h r_h \frac{du^s}{dt} \end{aligned} \quad (1)$$

с начальными данными $r(t_0) = r_0$, $r_i(t_0) = r_{i0}$, где векторы r_{i0} независимы. Решение этой системы $r = r(t)$, $r_i = r_i(t)$ определяет в R_2 кривую $L' : r = r(t)$, о которой говорят, что она получена из кривой L пространства A_2 развертыванием ее на пространство R_2 .

Замена начальных векторов r_0 и r_{i0} равносильна аффинному преобразованию R_2 , следовательно, кривая L' определяется с точностью до аффинного преобразования.

По свойствам систем дифференциальных уравнений из независимости начальных векторов r_{i0} следует, что векторы $r_i(t)$ независимы в каждой точке L' и определяют в соответствующей точке L репер ее касательного аффинного пространства. Все касательные аффинные пространства точек кривой L отображены, таким образом, на одно пространство R_2 . Каждому вектору v^i в точке кривой L соответствует вектор $v = r_i v^i$ соответствующей точки кривой L' в R_2 . Если последовательность векторов $v^i(t)$

параллельна вдоль кривой L , то согласно (1)

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dr_i}{dt} v^i + r_i \frac{dv^i}{dt} = r_i \frac{\delta v^i}{dt} = 0,$$

следовательно, параллельно переносимые вдоль L векторы A_2 отображаются в параллельные векторы R_2 .

Ангармоническое отношение четырех направлений в A_2 , определяемых векторами v^i ($\alpha = 1, 2, 3, 4$), равно, очевидно, ангармоническому отношению направлений в R_2 , определяемых векторами $v = r_i v^i$. Если векторы v^i переносятся вдоль кривой параллельно, то их ангармоническое отношение сохраняется, так как при этом векторы v сохраняют свое направление. Очевидно обратное: направление, образующее с тремя данными параллельно переносимыми направлениями постоянное ангармоническое отношение, переносится параллельно.

При разворачивании кривой L римановой геометрии, в аффинное пространство R_2 можно внести евклидову метрику, определяя ее основной тензор γ_{is} и начальные векторы r_{i0} так, чтобы в начальной точке $t = t_0$ выполнялись равенства

$$\gamma_{is}|_{t=t_0} = r_{i0} r_{s0} = g_{is}|_{t=t_0},$$

где g_{is} — основной тензор римановой метрики. Тензор $\gamma_{is}(t) = r_i(t) r_s(t)$ удовлетворяет в силу (1) системе уравнений

$$\frac{d\gamma_{is}}{dt} = \frac{dr_i}{dt} r_s + \frac{dr_s}{dt} r_i = (\Gamma_{ik}^j \gamma_{js} + \Gamma_{sk}^j \gamma_{ji}) \frac{du^k}{dt}.$$

Таким же уравнениям удовлетворяет и тензор $g_{is}(t)$, так как ввиду его ковариантного постоянства имеем

$$\nabla_k g_{is} \frac{du^k}{dt} = \frac{dg_{is}}{dt} - (\Gamma_{ik}^j g_{js} + \Gamma_{sk}^j g_{ji}) \frac{du^k}{dt} = 0.$$

Так как начальные значения этих тензоров тоже совпадают, то вдоль кривой L они равны: $\gamma_{is}(t) = g_{is}(t)$.

Полученное таким образом разворачивание кривой называется метрическим. Из его свойств легко следует, что при параллельном перенесении длины векторов и углы между ними не изменяются.

§ 15. Геодезические линии

Условимся говорить, что направление псевдовектора v_i переносится параллельно по кривой, если некоторый вектор w_i этого направления переносится по этой кривой параллельно. Дифференцируя ковариантно обе части равенства $v_i = \lambda w_i$ при условии $\delta w_i = 0$, получаем

$$\delta v_i = \delta(\lambda w_i) = \frac{d\lambda}{\lambda} v_i, \quad (1)$$

следовательно, для того чтобы направление вектора переносилось вдоль кривой параллельно, необходимо и достаточно, чтобы абсолютный дифференциал этого вектора был пропорционален ему самому.

Линия пространства A_2 называется геодезической, если ее касательное направление переносится по этой линии параллельно. Направляющий вектор $\frac{du^i}{dt}$ геодезической линии $u^i = u^i(t)$ является решением уравнения $\delta \frac{du^i}{dt} = \lambda \frac{du^i}{dt}$ или уравнения

$$\epsilon_{is} \left(\frac{d^2 u^i}{dt^2} + \Gamma_{kj}^i \frac{du^k}{dt} \frac{du^j}{dt} \right) \frac{du^s}{dt} = 0. \quad (2)$$

Таким образом, геодезические линии определяются дифференциальным уравнением второго порядка с обыкновенными производными. Из свойств дифференциальных уравнений следует, что через каждую точку по каждому направлению проходит одна и только одна геодезическая и что геодезические пространства A_2 составляют двупараметрическое семейство кривых.

При разворачивании геодезической линии на R_2 ее касательные векторы перейдут в параллельные векторы, касательные к ее развертке, следовательно, геодезическая линия переходит при разворачивании в прямую линию R_2 .

Чтобы найти касательный вектор, переносимый вдоль геодезической параллельно, произведем в уравнении $\delta \frac{du^i}{dt} = \lambda \frac{du^i}{dt}$ замену параметра кривой $s = s(t)$ так, чтобы в новом уравнении

$$\left(\delta \frac{du^i}{ds} \right) \frac{ds}{dt} = \left(\lambda - \frac{d^2 s}{dt^2} \frac{dt}{ds} \right) du^i$$

правая часть обратилась в нуль, то есть потребуем, чтобы параметр s удовлетворял уравнению

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \lambda \frac{ds}{dt}.$$

Этим уравнением параметр s — назовем его *каноническим параметром геодезической линии* — определяется с точностью до линейного преобразования. Уравнение геодезической линии, отнесенной к каноническому параметру, имеет вид

$$\delta \frac{du^i}{ds} = 0, \quad (3)$$

следовательно, вектор производной $\frac{du^i}{ds}$ по каноническому параметру геодезической линии переносится вдоль нее параллельно.

§ 16. Инварианты векторных полей в V_2

Наличие в V_2 основных тензоров g_{is} и g^{is} и дискриминантных бивекторов ϵ_{is} и ϵ^{is} позволяет с помощью операций свертывания и ковариантного дифференцирования получить ряд алгебраических и дифференциальных инвариантов векторных полей.

Напомним сначала, что с каждым векторным полем a_i в V_2 связано дополнительное поле \tilde{a}_i , векторы которого получаются из векторов данного поля поворотом на прямой угол.

Квадрат длины вектора — алгебраический инвариант поля — можно записать в одном из следующих видов:

$$a^2 = \mathbf{a}^2 = g_{is} a^i a^s = g^{is} a_i a_s = \tilde{a}^i a_i = -a^i \tilde{a}_i.$$

Совместными алгебраическими инвариантами двух полей a_i и b_i являются *скалярное произведение векторов*

$$\mathbf{ab} = ab \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = g^{is} a_i b_s = \tilde{a}^s b_s = \tilde{b}^s a_s$$

и *косое произведение векторов*

$$\langle \mathbf{ab} \rangle = ab \sin(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \epsilon_{is} a^i b^s = a_s b^s = -b_s a^s,$$

выражающее площадь построенного на них параллелограмма. Обращение в нуль скалярного или косоугольного произведения характеризуют соответственно ортогональные или коллинеарные векторы.

Результат свертывания ковариантной производной $a_{i|s}$ с бивектором приводит к дифференциальному инварианту — ротору вектора —

$$\text{rot } a = \varepsilon^{is} a_{i|s} = a_{s|s} = -a^s_{|s},$$

который мы будем также называть *косой производной вектора*.

В силу симметрии коэффициентов связности косую производную можно записать в следующем виде:

$$\text{rot } a = a_{s|s} = \varepsilon^{is} (\partial_s a_i - \Gamma_{is}^k a_k) = \varepsilon^{is} \partial_s a_i,$$

показывающем, что обращение ее в нуль необходимо и достаточно для существования такой функции φ — *потенциала вектора* a_i , — что $a_i = \partial_i \varphi$. Векторное поле в этом случае является полем *градиента функции* φ

$$a = \text{grad } \varphi$$

и называется *потенциальным полем*.

Другой дифференциальный инвариант — *дивергенцию вектора* — мы получим, свертывая ковариантную производную вектора с метрическим тензором:

$$\text{div } a = g^{is} a_{i|s} = \tilde{a}^s_{|s} = -\tilde{a}_{s|s}.$$

Дивергенция и ротация дополнительных векторных полей связаны равенствами

$$\text{div } a = -\text{rot } \tilde{a}, \quad \text{rot } a = \text{div } \tilde{a}. \quad (1)$$

Векторное поле, дивергенция которого равна нулю, называется *соленоидальным*. Из соотношений (1) следует, что если одно из дополнительных векторных полей соленоидально, то другое потенциально, и наоборот.

Поле одновременно потенциальное и соленоидальное называется *лапласовым*. Его дополнительное поле, очевидно, тоже лапласово. Потенциалы φ и ψ дополнительных лапласовых полей a_i и \tilde{a}_i ($a_i = \partial_i \varphi$, $\tilde{a}_i = \partial_i \psi$) связаны условиями Коши — Римана

$$\psi_i = g^i_s \varphi_s = \tilde{\varphi}_s, \quad \varphi_i = -g^i_s \psi_s = -\tilde{\psi}_s$$

и являются решениями одного и того же уравнения Лапласа:

$$g^{is}\theta_{i|s} = \tilde{\theta}^s_{|s} = 0 \quad (\theta_i = \partial_i\theta).$$

Инварианты потенциального векторного поля $a_i = \partial_i\varphi$ называются *дифференциальными параметрами* функции φ .
Первый дифференциальный параметр функции φ —

$$\Delta_1\varphi = (\text{grad } \varphi)^2 = g^{is}\varphi_i\varphi_s = \varphi_i\tilde{\varphi}^i$$

выражает квадрат длины вектора $\text{grad } \varphi$, а дивергенция этого вектора

$$\text{div}(\text{grad } \varphi) = \Delta_2\varphi = g^{is}\varphi_{i|s} = \tilde{\varphi}^s_{|s}$$

называется *вторым дифференциальным параметром*.
Скалярное произведение градиентов двух функций

$$\text{grad } \varphi \text{ grad } \psi = \Delta_1(\varphi, \psi) = g^{is}\varphi_i\psi_s$$

называется их *смешанным параметром*, а косое произведение

$$\varepsilon^{is}\varphi_i\psi_s = D(\varphi, \psi)$$

— *параметром Якоби*. Параметр Якоби лишь множителем отличается от якобиана функций φ и ψ по координатам u^1, u^2 :

$$D(\varphi, \psi) = \varepsilon^{12}(\varphi_1\psi_2 - \varphi_2\psi_1) = \frac{1}{\varepsilon} \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \psi_1 & \psi_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u^1, u^2)},$$

следовательно, обращение его в нуль необходимо и достаточно для функциональной зависимости $F(\varphi, \psi) = 0$.

В ряде вопросов употребляется дифференциальный параметр

$$\Delta_{22}\varphi = \frac{1}{2} \varphi_{i|k}\varphi^{i\cdot k}.$$

§ 17. Тензор кривизны пространства A_2

В отличие от частных производных, вторые ковариантные производные тензоров в общем случае не симметричны по индексам дифференцирования. При альтернировании

по индексам k и s в выражении

$$\begin{aligned} v_{i|ks} &= (v_{i|k})_{|s} = \partial_s v_{i|k} - \Gamma_{si}^j v_{j|k} - \Gamma_{sk}^j v_{i|j} = \\ &= \partial_s (\partial_k v_i - \Gamma_{ki}^j v_j) - \Gamma_{si}^j (\partial_k v_j - \Gamma_{kj}^p v_p) - \Gamma_{sk}^j v_{i|j} = \\ &= \partial_s \partial_k v_i - (\partial_s \Gamma_{ki}^j) v_j - \Gamma_{ki}^j \partial_s v_j - \Gamma_{si}^j \partial_k v_j + \Gamma_{si}^j \Gamma_{kj}^p v_p - \Gamma_{sk}^j v_{i|j} \end{aligned}$$

последнее слагаемое обращается в нуль в силу симметрии коэффициентов связности, третье и четвертое слагаемые взаимно уничтожаются, а первое обращается в нуль в силу перестановочности порядка частного дифференцирования $\partial_s \partial_k v_i = \partial_k \partial_s v_i$, следовательно,

$$v_{i|[ks]} = \frac{1}{2} R_{ksi}{}^j v_j, \quad (1)$$

где тензор

$$R_{ksi}{}^j = 2 \{ \partial_{[k} \Gamma_{s]i}^j - \Gamma_{i[k}^p \Gamma_{s]p}^j \} \quad (2)$$

не зависит от выбора векторного поля и называется *тензором кривизны*.

Можно показать, что альтернированная вторая ковариантная производная произвольного тензора выражается через тензор кривизны следующим образом:

$$T_{j \cdot | [ks]}^{i \cdot} = \frac{1}{2} R_{ksj}{}^p T_p^{i \cdot} - \frac{1}{2} R_{ksp}{}^i T_j^{p \cdot} + \dots \quad (3)$$

Тензор

$$R_{hi} = R_{shi}{}^s \quad (4)$$

называется *тензором Риччи*. В двумерном пространстве A_2 тензор кривизны можно выразить через тензор Риччи: в силу косои симметрии тензора кривизны $R_{shi}{}^j$ по индексам s и k имеем:

$$R_{shi}{}^j = \frac{1}{2} \varepsilon_{sh} R_p{}^p{}_{i \cdot}{}^j, \quad (*)$$

$$R_{hi} = R_{shi}{}^s = \frac{1}{2} \varepsilon_{sh} R_p{}^p{}_{i \cdot}{}^s = \frac{1}{2} R_p{}^p{}_{i \cdot}{}^i.$$

Следовательно, $\frac{1}{2} R_p{}^p{}_{i \cdot}{}^j = R^j{}_{i \cdot}$ и из (*) получается искомое выражение тензора кривизны

$$R_{shi}{}^j = \varepsilon_{sh} R^j{}_{i \cdot} = \varepsilon_{sh} \varepsilon^{jp} R_{pi}, \quad (5)$$

не зависящее от выбора бивектора.

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка с неизвестными v_1, v_2 :

$$v_{i|s} = \partial_s v_i - \Gamma_{si}^j v_j = \theta_{is}.$$

Условия ее интегрируемости — $\partial_k \partial_s v_i = \partial_s \partial_k v_i$ — эквивалентны, очевидно, равенству (1), то есть могут быть записаны в виде

$$\theta_{i[s|k]} = \frac{1}{2} \epsilon_{sk} \theta_{ij}{}^j = \frac{1}{2} \epsilon_{sk} R^j{}_{.i} v_j \quad (6)$$

или в виде

$$\theta_{ij}{}^j = v_{i|j}{}^j = R^j{}_{.i} v_j. \quad (7)$$

Можно показать, что условия интегрируемости систем

$$v^i{}_{|s} = \theta_s^i, \quad T^i{}_{k|s} = \theta_{ks}^i$$

имеют соответственно следующий вид

$$\theta_{s|}^i = v^i{}_{|s} = -R^i{}_{.s} v^s, \quad (8)$$

$$\theta_{k|s}^i = T^i{}_{k|s} = R^s{}_{.k} T_s^i - R^i{}_{.s} T_k^s. \quad (9)$$

Тензоры, стоящие в левых частях последних равенств, будем называть *косыми производными тензоров* θ_s^i и θ_{ks}^i по индексу s .

§ 18. Тензор кривизны пространства V_2

Риманова геометрия V_2 характеризуется существованием ковариантно постоянного метрического тензора: $g_{ik|s} = 0$. Рассматривая эти равенства как систему дифференциальных уравнений, составим условия ее интегрируемости:

$$g_{ik|s}{}^s = R^s{}_{.i} g_{sk} + R^s{}_{.k} g_{is} = 2R^s{}_{.(hk)} g_{is} = 0.$$

Отсюда следует, что $R^s{}_{.k} g_{is} = K \epsilon_{ik}$ (ϵ_{is} — дискриминальный бивектор) или

$$R_{sk} = K g_{sk}. \quad (1)$$

Множитель

$$K = \frac{1}{2} R_{sh} g^{sh} \quad (2)$$

называют *гауссовой кривизной* V_2 или *гауссовой кривизной дифференциальной формы* $g_{is} du^i du^s$.

Условия интегрируемости уравнений $v_{i;s} = \theta_{is}$ согласно (17; 7) и (1) приводятся в римановой геометрии к виду

$$\theta_{is|s} = v_{i;s} = K g_i^s v_s = \tilde{K} v_i. \quad (3)$$

§ 19. Специальные типы пространств A_2

1. Предположим, что A_2 допускает *поле абсолютно параллельных векторов*, то есть поле векторов v_i , переносимых параллельно по любому пути. Абсолютный дифференциал $\delta v_i = v_{i;s} du^s$ вектора такого поля должен обращаться в нуль при любых du^s ; отсюда следует, что

$$v_{i;s} = 0. \quad (1)$$

Условия интегрируемости этого уравнения

$$R^s_{i;s} v_s = 0$$

выполняются либо если тензор Риччи вырождается, либо если он обращается в нуль. В первом случае мы имеем дело с пространствами S_2 , подробно изученными А. П. Нордемом [80]. Во втором случае условие интегрируемости выполняется тождественно, а система (1) имеет бесконечное число решений. Если v_i и w_i — два линейно независимых решения этой системы, то производная тензора $a_{is} = v_i w_s$ обращается в нуль: $a_{is|k} = 0$. Следовательно, рассматриваемая геометрия является геометрией Римана с гауссовой кривизной равной нулю: $K = 0$. Такая геометрия осуществляется на евклидовой плоскости и называется *евклидовой геометрией*. Поля абсолютно параллельных векторов совпадают с полями параллельных векторов постоянной длины.

2. *Эквивалентная геометрия* характеризуется существованием площади, сохраняющейся при параллельном переносе. Это означает, что существует бивектор ε_{is} такой, что площадь параллелограмма $\varepsilon_{is} v^i w^s$, построенного на векто-

рах v^i и w^s , не изменяется, если эти векторы переносятся параллельно по любой кривой. Следовательно, из условий $\delta v^i = 0$ и $\delta w^i = 0$ должно следовать, что

$$\delta(\varepsilon_{is}v^i w^s) = \varepsilon_{is|h} v^i w^s du^h = 0.$$

Так как в каждой точке векторы v^i , w^i и du^i можно выбрать произвольно, то

$$\varepsilon_{is|h} = 0. \quad (2)$$

Эквивалентная геометрия, таким образом, допускает существование ковариантно постоянного бивектора, который мы назовем *эквивалентным*. Этот бивектор определяется с точностью до постоянного множителя.

Полагая в (2) $i = 1$, $s = 2$, получаем равенство

$$\partial_k \ln \varepsilon_{12} = \Gamma_{ks}^s. \quad (3)$$

Из условий интегрируемости уравнений (2)

$$\varepsilon_{is|h}{}^h = R^h{}_i \varepsilon_{hs} + R^h{}_s \varepsilon_{ih} = R_{si} - R_{is} = 0 \quad (4)$$

следует, что тензор Риччи эквивалентной геометрии симметричен.

Условия (3) и (4) эквивалентны и каждое из них характеризует эквивалентную геометрию.

3. Поле направлений, переносимых параллельно по любой кривой, называется *абсолютно параллельным*, а определяемое им семейство линий — *изотропным семейством*.

Пусть v_i — поле абсолютно параллельных направлений. Равенство $\delta v_i = v_{i|s} du^s = \mu_s v_i du^s$ в этом случае должно выполняться для любых du^s , следовательно,

$$v_{i|s} = \mu_s v_i.$$

Условие интегрируемости этой системы

$$v_{i|s}{}^s = R^s{}_i v_s = \mu_{s|}{}^s v_i$$

показывает, что псевдовектор поля абсолютно параллельных направлений удовлетворяет условию

$$R_{is} v^i v^s = 0. \quad (5)$$

4. *Геометрия Вейля W_2* . Так называют аффинную связность, в которой существует два поля абсолютно парал-

лельных направлений v_i и w_i . Сеть (v, w) , соответствующая двум полям абсолютно параллельных направлений, называется *декартовой*. Следовательно, *геометрия Вейля характеризуется существованием декартовой сети*.

Направления v_i и w_i согласно предыдущему удовлетворяют условиям

$$R_{is}v^i v^s = 0, \quad R_{is}w^i w^s = 0,$$

следовательно, тензор Риччи пространства Вейля можно представить в виде

$$R_{is} = Kg_{is} + Qe_{is}, \quad (6)$$

где

$$g_{is} = v_i w_s + v_s w_i, \quad e_{is} = v_i w_s - v_s w_i. \quad (7)$$

Из условий $v_{i|k} = \sigma_k v_i$, $w_{i|k} = \rho_k w_i$ находим

$$g_{is|k} = 2\omega_k g_{is}, \quad e_{is|k} = 2\omega_k e_{is}, \quad (8)$$

где

$$\omega_k = \sigma_k + \rho_k. \quad (9)$$

Составим условия интегрируемости второго уравнения (8):

$$e_{is|k}{}^h = R^h{}_{i|k} e_{hs} + R^h{}_{s|k} e_{ih} = 2R_{[si]} = 2\omega_{k|}{}^h e_{is}.$$

Следовательно,

$$Q = -\omega_{k|}{}^h. \quad (10)$$

Полагая во втором из равенств (8) $i = 1$, $s = 2$, найдем

$$\partial_k \ln e_{12} = \Gamma_{ks}^s + 2\omega_k. \quad (11)$$

Метрический тензор вейлевой геометрии g_{is} определяется с точностью до произвольного множителя. При перенормировании $g_{is}^* = \lambda g_{is}$ имеем согласно (8)

$$g_{is|k}^* = 2\omega_k^* g_{is}^* = (2\omega_k + \partial_k \ln \lambda) g_{is}^*,$$

следовательно, при этом перенормировании вектор ω_k — его называют *дополнительным вектором* — преобразуется так:

$$\omega_k^* = \omega_k + \frac{1}{2} \partial_k \ln \lambda. \quad (12)$$

Вейлева геометрия вполне определяется заданием метрического тензора и дополнительного вектора. Этот факт является следствием более общего предложения: *аффинная связность однозначно определяется заданием ковариантной производной $a_{is|k} = \theta_{isk}$ произвольного симметричного невырождающегося тензора a_{is}* . Для доказательства запишем равенства

$$\begin{aligned} a_{is|k} &= \partial_k a_{is} - \Gamma_{ik}^p a_{ps} - \Gamma_{sk}^p a_{ip} = \theta_{isk}, \\ a_{sk|i} &= \partial_i a_{sk} - \Gamma_{si}^p a_{pk} - \Gamma_{ki}^p a_{sp} = \theta_{ski}, \\ -a_{k|is} &= -\partial_s a_{ki} + \Gamma_{ks}^p a_{pi} + \Gamma_{is}^p a_{kp} = -\theta_{kis}. \end{aligned}$$

Складывая почленно эти равенства и свертывая результат с \tilde{a}^{sj} , получаем выражение коэффициентов связности

$$\begin{aligned} \Gamma_{ik}^j &= \frac{1}{2} \tilde{a}^{js} (\partial_i a_{sk} + \partial_k a_{is} - \partial_s a_{ik}) - \\ &- \frac{1}{2} \tilde{a}^{js} (\theta_{isk} + \theta_{ski} - \theta_{kis}). \end{aligned} \quad (13)$$

Заданием метрического тензора g_{is} и дополнительного вектора ω_k геометрии Вейля определена согласно (8) производная $g_{is|k} = 2\omega_k g_{is}$, но тогда по формуле (13) находим

$$\begin{aligned} \Gamma_{ik}^j &= \frac{1}{2} \tilde{g}^{js} (\partial_i g_{ks} + \partial_k g_{is} - \partial_s g_{ik}) - \\ &- \tilde{g}^{js} (\omega_i g_{ks} + \omega_k g_{si} - \omega_s g_{ik}). \end{aligned} \quad (14)$$

Наличие метрического тензора в W_2 еще не позволяет определить длину вектора, так как нормирование этого тензора произвольно.

Существование декартовой сети, однако, позволяет ввести понятие угла: углом между двумя направлениями v и w называется взаимный угол сети (v, w) и декартовой сети g_{is} .

Так как изотропные направления, то есть направления декартовой сети, абсолютно параллельны, то согласно § 14 угол между направлениями при их параллельном перенесении не изменяется.

Метрический тензор и бивектор (7) согласованы. Дифференцируя обе части каждого из равенств

$$\varepsilon^{is} \varepsilon_{ik} = \delta_k^s, \quad g^{is} g_{sk} = \sigma(g) \delta_k^i$$

и учитывая (8), легко получим

$$e^{is}{}_{|k} = -2\omega_k e^{is}, \quad g^{is}{}_{|k} = -2\omega_k g^{is}. \quad (15)$$

Отсюда следует, что

$$(g^{sj} e_{ji})_{|k} = g^s{}_{|k} = 0, \quad (16)$$

так что *декартова сеть характеризуется тем, что ковариантная производная ее аффинора равна нулю.*

Как и в случае V_2 , аффинор $g^s{}_i$ называется *версором*: он производит поворот векторов на прямой угол.

5. Если вейлево пространство является одновременно и эквиаффинным, то тензор Риччи симметричен и, как следует из (6) и (10), $Q = -\omega_{k|}{}^k = 0$, а это значит, что дополнительный вектор градиентен: $\omega_k = \partial_k \omega$. Полагая при перенормировании метрического тензора $\lambda = e^{-2\omega}$, получим согласно (12) $\omega_k = 0$. Следовательно, производная нового метрического тензора равна нулю, и *вейлева эквиаффинная геометрия является геометрией Римана.*

6. Если пространство допускает три поля абсолютно параллельных направлений, то уравнение (5) должно иметь три независимых решения, что возможно либо при $R_{is} = 0$, то есть в евклидовом пространстве, либо когда тензор Риччи кососимметричен:

$$R_{is} = Q \varepsilon_{is}. \quad (17)$$

В последнем случае пространство, открытое А. П. Норденом [6], называется *квазиевклидовым*. В этом пространстве уравнение $v_{i|s} = \sigma_s v_i$, определяющее поле абсолютных параллельных направлений, неограниченно интегрируемо.

Направление, составляющее постоянное ангармоническое отношение с тремя абсолютно параллельными направлениями, будет согласно § 14, тоже абсолютно параллельным. Следовательно, *квазиевклидово пространство характеризуется существованием ∞^1 полей абсолютно параллельных направлений.*

Квазиевклидово пространство является частным случаем пространства Вейля: в нем существует ∞^2 декартовых

сетей, получаемых объединением любых двух изотропных семейств. Взаимный угол любых двух декартовых сетей постоянен. Измерение углов можно производить относительно любой декартовой сети.

§ 20. Преобразование связностей

1. Рассмотрим в данном X_2 две аффинные связности A_2 и A_2^* , заданные своими коэффициентами Γ_{sh}^i и Γ_{sh}^{*i} . Переход от связности A_2 к связности A_2^* называется *преобразованием* связности. Разность

$$T_{sh}^i = \Gamma_{sh}^{*i} - \Gamma_{sh}^i \quad (1)$$

есть тензор и называется *тензором аффинной деформации* [6].

Для разности производных произвольного тензора p_h^i в новой связности A_2^* и в старой связности A_2 имеем

$$\begin{aligned} \nabla_s^* p_h^i - \nabla_s p_h^i &= (\partial_s p_h^i - \Gamma_{hs}^r p_r^i + \Gamma_{rs}^i p_h^r) - \\ &- (\partial_s p_h^i - \Gamma_{hs}^r p_r^i + \Gamma_{rs}^i p_h^r) = T_{rs}^i p_h^r - T_{hs}^r p_r^i. \end{aligned} \quad (2)$$

Найдем связь между новым и старым тензорами Риччи R_{ih}^* и R_{ih} .

Если p_i — произвольный вектор, то

$$\nabla_s^* p_i - \nabla_s p_i + T_{is}^m p_m = 0.$$

Вычислим косую производную левой части этого равенства:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{sk} \nabla_h^* (\nabla_s^* p_i - \nabla_s p_i + T_{is}^m p_m) &= \varepsilon^{sk} (\nabla_h^* \nabla_s^* p_i + T_{sh}^l \nabla_l^* p_i + \\ &+ T_{ik}^l \nabla_s^* p_l - \nabla_k \nabla_s p_i + \nabla_h T_{is}^m p_m + T_{is}^m \nabla_k p_m) = 0. \end{aligned}$$

Заменяя здесь

$$\varepsilon^{sk} \nabla_h^* \nabla_s^* p_i = \varepsilon^{sk} R_{hi}^* p_s,$$

$$\varepsilon^{sk} \nabla_k \nabla_s p_i = \varepsilon^{sk} R_{ki} p_s,$$

$$\varepsilon^{sk} T_{sh}^l \nabla_l^* p_i = 0,$$

$$\varepsilon^{sk} (T_{ik}^l \nabla_s^* p_l + T_{is}^m \nabla_k p_m) = \varepsilon^{sk} T_{ik}^l (\nabla_s^* p_l - \nabla_s p_l) = -\varepsilon^{sk} T_{ik}^l T_{sl}^m p_m,$$

получим

$$\varepsilon^{sk} (\overset{*}{R}_{ki} \delta_s^m - R_{ki} \delta_s^m - T_{ik}^l T_{sl}^m + \nabla_k T_{is}^m) p_m = 0,$$

что в силу произвольности вектора p_m приводит к равенству

$$\overset{*}{R}_{\cdot i}^m = R_{\cdot i}^m + \varepsilon^{sk} (T_{ik}^l T_{ls}^m + \nabla_s T_{ik}^m), \quad (3)$$

выражающему закон преобразования тензора Риччи при преобразовании связности, определенном равенством (1).

2. Преобразование связностей называется *геодезическим* или *проективным*, если оно сохраняет геодезические линии.

Для того чтобы преобразование (1) было проективным, необходимо и достаточно, чтобы уравнения

$$(\nabla_s v_i) v^s v^i = 0, \quad (\overset{*}{\nabla}_s v_i) v^s v^i = 0,$$

определяющие геодезические поля v_i в старой и новой связностях, были равносильны, то есть, чтобы уравнение

$$(\nabla_s v_i - \overset{*}{\nabla}_s v_i) v^s v^i = T_{is}^h \varepsilon_{lh} v^l v^s = 0$$

в произвольно выбранной точке выполнялось тождественно, то есть при любом выборе вектора v^i в этой точке. Отсюда следует, что

$$3T_{(is}^h \varepsilon_{l)k} = T_{is}^h \varepsilon_{lk} + T_{sl}^h \varepsilon_{lk} + T_{li}^h \varepsilon_{sk} = 0.$$

Свертывая обе части с ε^{lj} , мы получим равносильное уравнение

$$\begin{aligned} T_{is}^j + T_{sl}^h (\delta_i^l \delta_k^j - \delta_k^l \delta_i^j) + T_{li}^h (\delta_s^l \delta_k^j - \delta_k^l \delta_s^j) = \\ = 3T_{is}^j - T_{is}^l \delta_l^j - T_{li}^l \delta_s^j = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, тензор (1) при проективном преобразовании имеет вид

$$T_{is}^j = \delta_i^j p_s + \delta_s^j p_i, \quad (4)$$

где вектор

$$p_s = \frac{1}{3} T_{ls}^l \quad (4')$$

называется *вектором проективного преобразования связности*.

Тензор Риччи при проективном преобразовании изменяется согласно (3) и (4) по следующему закону:

$${}^*R_{is} = R_{is} + p_i p_s - p_{s|i} - \varepsilon_{si} p_m{}^m = R_{is} + p_i p_s - 2p_{s|i} + p_{i|s}. \quad (5)$$

3. Альтернированием обеих частей уравнения (5) получаем равенство

$$R_{[is]} = R_{[is]} + 3p_{[i|s]}, \quad (6)$$

из которого следует теорема: *если для двух связностей, находящихся в проективном соответствии, выполняются два из следующих трех условий:*

- 1) первая связность эквивалентна ($R_{[is]} = 0$),
 - 2) вторая связность эквивалентна (${}^*R_{[is]} = 0$),
 - 3) вектор преобразования градиентен ($p_{[i|s]} = 0$),
- то выполняется и третье.

4. *Проективно-евклидовым* называют пространство, допускающее проективное отображение на пространство Евклида.

Так как тензор Риччи пространства Евклида равен нулю, то для того, чтобы данное пространство было проективно-евклидовым, необходимо и достаточно, чтобы существовал вектор p_i , удовлетворяющий системе уравнений

$$R_{is} + p_i p_s - 2p_{s|i} + p_{i|s} = 0. \quad (7)$$

Найдем условия интегрируемости этой системы. Альтернированием из (7) находим

$$3p_{[i|s]} = -R_{[is]},$$

или

$$p_{i|s} = p_{s|i} + \frac{1}{3}(R_{s|i} - R_{is}).$$

Если это значение производной $p_{i|s}$ внести в систему (7), то получим равносильную ей систему

$$p_{s|i} = p_s p_i + \frac{1}{3}(2R_{is} + R_{si}), \quad (8)$$

условие интегрируемости которой —

$$\begin{aligned} p_{s|i}{}^i &= R^i{}_s p_i = p_{s|i}{}^i p_i + p_s p_{i|i}{}^i + \frac{1}{3}(2R_{is} + R_{si}){}^i = \\ &= \frac{1}{3}(2R^i{}_s + R_s{}^i) p_i + p_s \frac{1}{3}(2R^i{}_i + R_i{}^i) + \frac{1}{3}(2R_{is} + R_{si}){}^i \end{aligned}$$

или

$$(2R_{is} + R_{st})_i^i = 0. \quad (9)$$

Таким образом, для того чтобы пространство было проективно-евклидовым, необходимо и достаточно, чтобы его тензор Риччи удовлетворял уравнению (9).

Экипроективное, то есть аффинное проективно-евклидово, пространство характеризуется тем, что его тензор Риччи удовлетворяет уравнению Кодацци:

$$R_{is|s}^s = 0.$$

Для случая римановой геометрии это уравнение принимает вид

$$(Kg_{is})_i^s = K^s g_{is} = 0.$$

Отсюда следует теорема Бельтрами: для того чтобы риманова геометрия V_2 была проективно-евклидовой, необходимо и достаточно, чтобы ее кривизна была постоянна.

ГЛАВА III
СЕТИ В V_2 И A_2

§ 21. Трансверсальный вектор поля

С каждым векторным полем в римановом пространстве V_2 связан так называемый *трансверсальный вектор* [59], играющий в дальнейшем изложении очень важную роль.

1. Рассмотрим сначала поле ортов v^i . Дифференцирование обеих частей равенства $g_{is}v^i v^s = 1$ дает

$$g_{is}v^i{}_{|k}v^s + g_{is}v^i v^s{}_{|k} = 2g_{is}v^i{}_{|k}v^s = 0$$

или $v_{s|k}\tilde{v}^s = 0$. Отсюда следует, что тензор $v_{s|k}$ вырождается и может быть представлен в виде

$$v_{s|k} = \tilde{v}_s \underset{v}{t}_k, \quad (1)$$

где

$$\underset{v}{t}_k = -v_{s|k}v^s. \quad (2)$$

Вектор $\underset{v}{t}_k$ и есть *трансверсальный вектор* поля ортов v_i .

Если вектор поля a_s не единичен, то $a_s = a \underset{0}{a}_s$, где $\underset{0}{a}_s$ — орт. Производную вектора поля

$$a_{s|k} = (\partial_k a) \underset{0}{a}_s + a \underset{0}{a}_s{}_{|k}$$

после очевидных преобразований можно записать в виде

$$a_{s|k} = (\partial_k \ln a) a_s + \underset{a}{t}_k \tilde{a}_s. \quad (3)$$

2. Составим условие интегрируемости уравнений (1):

$$v_{i|k}{}^k = K \tilde{v}_i = \underset{v}{t}_{k|}{}^k \tilde{v}_i + \underset{v}{t}_k \tilde{v}_{i|}{}^k.$$

Последнее слагаемое равно нулю, ибо

$$\tilde{v}_{i|k} = (g_i^s v_s)|_k = g_i^s v_{s|k} = g_i^s \tilde{v}_s t_k = -v_i t_k, \quad (4)$$

следовательно

$$t_k|_v^k = K, \quad (5)$$

то есть *косая производная или ротация трансверсального вектора произвольного поля равна гауссовой кривизне.*

3. В ряде вопросов удобно иметь выражение трансверсального вектора, не содержащее ковариантных производных. Его можно получить, определяя из (1) и (4) косые произведения:

$$t_k|_v \tilde{v}^k = -v_i|_v^i = -\varepsilon^{is} \partial_s v_i, \quad t_k v^k = \tilde{v}_i|_v^i = \varepsilon^{is} \partial_s v_i.$$

На основании (2; 2) отсюда имеем

$$t_s = -v_i|_v^i v_s - \tilde{v}_i|_v^i \tilde{v}_s = -\varepsilon^{ik} (v_s \partial_k v_i + \tilde{v}_s \partial_k \tilde{v}_i). \quad (6)$$

Если изотропную сеть не считать заранее эллиптической, то последняя формула несколько изменится. Пусть $g_i^s g_s^k = -\sigma(g) \delta_i^k$, тогда для неизотропного вектора v_i

$$\tilde{v}_{i|s} = g_i^k \tilde{v}_k t_s = -\sigma(g) v_i t_s, \quad t_i v^i = \sigma(g) \tilde{v}_i|_v^i$$

и вместо (6) мы получим¹⁾

$$t_s = \frac{-v_i|_v^i v_s - \sigma(g) \tilde{v}_i|_v^i \tilde{v}_s}{v_j v^j} = \frac{-\varepsilon^{ik} (v_s \partial_k v_i + \sigma(g) \tilde{v}_s \partial_k \tilde{v}_i)}{v_j v^j}. \quad (6')$$

4. Выясним, как преобразуется трансверсальный вектор поля при повороте вектора поля на угол ω .

Пусть $w_i = (\omega)_i^s v_s$. Согласно (12; 4) и (1) имеем

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{i|k} &= \tilde{w}_i t_k = \left(\omega + \frac{\pi}{2} \right)_i^s v_s \omega_k + (\omega)_i^s \tilde{v}_s t_k = \\ &= \left(\omega + \frac{\pi}{2} \right)_i^s v_s (\omega_k + t_k) = \tilde{w}_i (\omega_k + t_k), \end{aligned}$$

¹⁾ $v_i \tilde{v}^i = g^{ik} v_i v_k$ — модуль вектора v_i — имеет одно из значений ± 1 .

следовательно,

$$\frac{t_k}{w} = \frac{t_k}{v} + \omega_k, \quad (7)$$

то есть *трансверсальный вектор получает приращение, равное градиенту угла поворота.*

Отсюда легко следует, что *изогональные*, то есть составляющие между собой постоянный угол, *поля характеризуются равенством их трансверсальных векторов.*

5. *Задание трансверсального вектора определяет поле с точностью до поворота на произвольный постоянный угол.* Для доказательства этого обозначим вектор искомого поля через v_i и положим $v_i = (\omega)_i^s w_s$, где w_i — произвольное поле ортов. Для угла ω имеем согласно (7) уравнение в полных дифференциалах

$$\frac{t_s}{v} - \frac{t_s}{w} = \omega_s,$$

условие интегрируемости которого выполняется в силу (5) и которое определяет угол ω с точностью до произвольного слагаемого, так что $v_i = (\omega + c)_i^s w_s$, что и требовалось доказать.

6. Название трансверсальный связано со следующим свойством этого вектора. *Трансверсальными* векторного поля a_i называют линии, вдоль которых направление вектора поля переносится параллельно. Если направляющий вектор трансверсального поля p^i , то $a_{i|s} p^s = \lambda a_i$. С другой стороны,

$$a_{i|k} p^k = \partial_k \ln a p^k a_i + t_k p^k \tilde{a}_i.$$

Следовательно, $t_k p^k = 0$, $t_k = \lambda p_k$. Отсюда следует, что семейство линий, определяемое трансверсальным вектором поля, является семейством трансверсалей этого поля.

7. Трансверсальные векторы направляющих ортов v_i и w_i сети a_{is} можно найти следующим образом. Из равенства $a_{is} v^i v^s = 0$ имеем

$$a_{is|k} v^i v^s = -2a_{is} v^i \tilde{v}^s t_k.$$

Однако $a_{is} v^i \tilde{v}^s = -v_s \tilde{v}^s = -1$. Следовательно,

$$2t_k = a_{is|k} v^i v^s, \quad 2t_k = -a_{is|k} \omega^i \omega^s. \quad (8)$$

Второе равенство получается аналогичным способом.

8. Рассмотрим семейство линий уровня функции φ . Производная направляющего градиента φ_i этого семейства

$$\varphi_{i|s} = \varphi_i \partial_s \ln \sqrt{\Delta_1 \varphi} + \tilde{\varphi}_i t_s. \quad (9)$$

Найдем выражение трансверсального вектора этого семейства через дифференциальные параметры функции φ . Свертывая обе части равенства (9) с g^{is} и e^{st} , получим

$$\left. \begin{aligned} \Delta_2 \varphi &= \Delta_1 (\varphi, \ln \sqrt{\Delta_1 \varphi}) - t_s \varphi^s, \\ 0 &= D (\ln \sqrt{\Delta_1 \varphi}, \varphi) + t_s \tilde{\varphi}^s. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Отсюда определяются косые произведения

$$t_s \varphi^s = \Delta_1 (\varphi, \ln \sqrt{\Delta_1 \varphi}) - \Delta_2 \varphi, \quad t_s \tilde{\varphi}^s = D (\varphi, \ln \sqrt{\Delta_1 \varphi})$$

и трансверсальный вектор

$$t_s = \frac{1}{\Delta_1 \varphi} \{ D (\varphi, \ln \sqrt{\Delta_1 \varphi}) \varphi_s + [\Delta_2 \varphi - \Delta_1 (\varphi, \ln \sqrt{\Delta_1 \varphi})] \tilde{\varphi}_s \}. \quad (11)$$

Другое выражение трансверсального вектора можно получить вводя градиент

$$\partial_s N = N_s = \partial_s \ln \sqrt{\Delta_1 \varphi} \quad (N = \ln \sqrt{\Delta_1 \varphi}), \quad (12)$$

с помощью которого равенства (10) приводятся к виду

$$(N_s - \tilde{t}_s) \tilde{\varphi}^s = \Delta_2 \varphi, \quad (N_s - \tilde{t}_s) \varphi^s = 0,$$

дающему искомое выражение

$$\tilde{t}_s = N_s - \frac{\Delta_2 \varphi}{\Delta_1 \varphi} \varphi_s, \quad t_s = \frac{\Delta_2 \varphi}{\Delta_1 \varphi} \tilde{\varphi}_s - \tilde{N}_s. \quad (13)$$

Внося это значение в (9), получаем

$$\varphi_{i|s} = \varphi_i N_s - \tilde{\varphi}_i \tilde{N}_s + \frac{\Delta_2 \varphi}{\Delta_1 \varphi} \tilde{\varphi}_i \tilde{\varphi}_s. \quad (14)$$

Первый и второй дифференциальные параметры каждой функции не произвольны, а удовлетворяют, согласно (5), дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} t_s|_s^\varphi &= K = \left[\frac{\Delta_2 \Phi}{\Delta_1 \Phi} \tilde{\varphi}_s - \tilde{N}_s \right]_s = \\ &= -\Delta_1 \left(\frac{\Delta_2 \Phi}{\Delta_1 \Phi}, \varphi \right) - \frac{(\Delta_2 \Phi)^2}{\Delta_1 \Phi} + \Delta_2 \ln \sqrt{\Delta_1 \Phi}. \end{aligned} \quad (15)$$

9. Понятие трансверсального вектора можно ввести и в геометрии Вейля. Пусть эта геометрия определена тензорами g_{is} и ω_s (§ 19, п. 4), а неизотропный вектор v^i удовлетворяет условию

$$g_{is} v^i v^s = \pm 1.$$

Тогда

$$\frac{1}{2} (g_{is} v^i v^s)|_k = \omega_k g_{is} v^i v^s + g_{is} v^i v^s|_k = -\tilde{v}_s (v^s \omega_k + v^s|_k) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$v^s|_k = \tilde{v}^s t_k - v^s \omega_k, \quad (16)$$

$$v_{s|k} = (\varepsilon_{is} v^i)|_k = \varepsilon_{is} (2\omega_k v^i + \tilde{v}^i t_k - v^i \omega_k) = \tilde{v}_s t_k + v_s \omega_k. \quad (17)$$

Если тензор g_{is} заменить на $g_{is}^* = \varrho^2 g_{is}$, то v_i заменится на $v_i^* = \varrho v_i$. Однако

$$\begin{aligned} v_{i|s}^* &= \tilde{v}^i t_s + v_i \omega_s = (\varrho v_i)|_s = \varrho_s v_i + \varrho (\tilde{v}^i t_s + v_i \omega_s) = \\ &= \tilde{v}^i t_s + v_i (\omega_s + \partial_s \ln \varrho) = \tilde{v}^i t_s + v_i \omega_s^*, \end{aligned}$$

так что вектор t_s не изменится. Назовем этот вектор *трансверсальным*. Как и в римановой геометрии вдоль линий трансверсального вектора направление вектор v_i переносится параллельно; при повороте поля на угол φ его трансверсальный вектор получает приращение $\partial_i \varphi$, а для изогональных полей эти векторы равны.

Для вектора \tilde{v}_i , в силу ковариантного постоянства вектора g_i^s и равенства $g_i^s g_s^k = -\sigma(g) \delta_i^k$, из (17) находим

$$\left. \begin{aligned} \tilde{v}_{i|s} &= -\sigma(g) v_i t_s + \tilde{v}_i \omega_s, \\ \tilde{v}^i|_s &= -\sigma(g) v^i t_s - \tilde{v}^i \omega_s. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Вычисляя теперь косые производные

$$\left. \begin{aligned} v_{s|}^s &= \tilde{v}_s t^s + v_s \omega^s = (\tilde{t}_s - \omega_s) v^s, \\ \tilde{v}_{s|}^s &= -\sigma(g) \tilde{v}_s t^s + v_s \omega^s = (\tilde{t}_s - \omega_s) \tilde{v}^s, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

находим

$$\tilde{t}_s - \omega_s = \frac{\tilde{v}_{i|}^i v_s - v_{i|}^i \tilde{v}_s}{v_k \tilde{v}^k}, \quad (20)$$

$$t_s = -\sigma(g) \tilde{\omega}_s - \frac{v_{i|}^i v_s + \sigma(g) \tilde{v}_{i|}^i \tilde{v}_s}{v_k \tilde{v}^k}. \quad (21)$$

Отметим здесь же связь чебышевского вектора a_i ортогональной сети (см. § 28), определяемой аффинором $a_i^s = v_i v^s + \tilde{v}_i \tilde{v}^s$, с общим трансверсальным вектором t_s полей v_s и \tilde{v}_s . Имеем, согласно (28;3),

$$\begin{aligned} a_{i|}^s{}^i &= (\tilde{t}_i - \omega_i) v^i \tilde{v}^s + v_i (-\sigma(g) v^i t^s - \tilde{v}^s \omega^i) + (\tilde{t}_i - \omega_i) \tilde{v}^i v^s + \\ &+ \tilde{v}_i (\tilde{v}^s t^i - v^s \omega^i) = -2\tilde{t}^i (v_i \tilde{v}^s + \tilde{v}_i v^s) = -2a_i^s \tilde{t}^i = -2a_i^s a^i. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$a_i = \tilde{t}_i = \omega_i + \frac{\tilde{v}_{s|}^s v_i - v_{s|}^s \tilde{v}_i}{v_k \tilde{v}^k}. \quad (22)$$

§ 22. Геодезическая кривизна и геодезические линии в V_2

1. Геодезической кривизной линии в римановой геометрии называют производную угла отклонения ее касательного вектора от вектора, переносимого вдоль нее параллельно, по длине дуги этой линии. Для вычисления геодезической кривизны линии, принадлежащей семейству, определяемому полем ортов v_i , предположим, что вектор, переносимый вдоль нее параллельно, принадлежит полю ортов p_i . Если ω — угол между ортами p_i и v_i ($\sin \omega = p_i v^i$), то, по определению, геодезическая кривизна ε линий (v)

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{ds} = \omega_i \frac{du^i}{ds} = \omega_i v^i.$$

Заменяя здесь $\omega_i = \frac{t_i}{v} - \frac{t_i}{p}$ и замечая, что $\frac{t_i v^i}{p} = 0$, получаем

$$z = \frac{t_s v^s}{v}, \quad (1)$$

следовательно, *геодезическая кривизна линии семейства равна косому произведению трансверсального вектора этого семейства на его направляющий орт*. Так как $\frac{t_s}{v} = -v_{i|s} v^i$

и $v_{i|s} \tilde{v}^i = 0$, то

$$z = -v_{i|s} v^i v^s = -v_{i|s} (v^i v^s + \tilde{v}^i \tilde{v}^s) = -g^{is} v_{i|s} = \tilde{v}_{s|}^s. \quad (2)$$

Таким образом, геодезическую кривизну линии семейства можно определить либо как взятую с обратным знаком дивергенцию ее направляющего орта, либо как ротацию орта дополнительного поля.

Геодезические кривизны линий уровня функции φ и их ортогональных траекторий можно найти по формуле (2), если заметить, что их направляющие орты есть $\frac{\varphi_i}{\sqrt{\Delta_1 \varphi}}$

и $\frac{\tilde{\varphi}_i}{\sqrt{\Delta_1 \varphi}}$ соответственно. Имеем

$$z = \left(\frac{\tilde{\varphi}_i}{\sqrt{\Delta_1 \varphi}} \right)_{|}^i = -\frac{\Delta_2 \varphi}{\sqrt{\Delta_1 \varphi}} + \frac{\Delta_1 (\varphi, \Delta_1 \varphi)}{2 (\Delta_1 \varphi)^{3/2}}, \quad (3)$$

$$\tilde{z} = -\left(\frac{\varphi_i}{\sqrt{\Delta_1 \varphi}} \right)_{|}^i = \frac{D(\varphi, \Delta_1 \varphi)}{2 (\Delta_1 \varphi)^{3/2}}. \quad (4)$$

2. Направляющий орт геодезической линии переносится по ней параллельно и образует постоянный угол с любым вектором, переносимым по этой линии параллельно, следовательно, геодезическая линия характеризуется обращением в нуль ее геодезической кривизны.

Поле направляющих векторов геодезического семейства линий называется *геодезическим*. Дополнительный вектор \tilde{v}_i геодезического поля ортов v_i , как это следует из (2), градиентен

$$\tilde{v}_i = -\varphi_i = -\partial_i \varphi. \quad (5)$$

Функция φ называется *потенциалом геодезического поля*

и характеризуется тем, что ее первый дифференциальный параметр

$$\Delta_1 \varphi = g_{is} \varphi^i \varphi^s = g_{is} \tilde{v}^i \tilde{v}^s = 1. \quad (6)$$

Так как $\frac{d\varphi}{ds} = \varphi_i v^i = -\tilde{v}_i v^i = 1$, то

$$d\varphi = ds, \quad \varphi = \int ds = s + s_0,$$

следовательно, потенциал геодезического поля равен длине дуги линии этого поля, отсчитанной от некоторой начальной ортогональной траектории линий поля ($\varphi = s_0$).

Ортогональные траектории геодезического семейства называются геодезическими параллелями. Из формулы (4) следует, что функциональная зависимость первого дифференциального параметра функции от нее самой необходима и достаточна для того, чтобы линии уровня этой функции были геодезически параллельны.

3. Из формулы (5) легко следует предложение: если известно геодезическое поле p_i , то конечное уравнение ($\varphi = \text{const}$) геодезических параллелей этого поля определяется одной квадратурой:

$$\varphi = - \int \frac{\tilde{p}_i}{P} du^i. \quad (7)$$

Функция φ удовлетворяет уравнению (6)

$$\Delta_1 \varphi = 1.$$

Предположим, что нам известно решение этого уравнения $\theta(u^i, a)$, существенно зависящее от одной произвольной постоянной a , то есть не содержащее его в качестве слагаемого. Тогда при любом значении постоянной b уравнение

$$\frac{\partial \theta(u^i, a)}{\partial a} = b \quad (8)$$

определяет ортогональные траектории линий уровня функции $\theta(u^i, a)$, так как

$$\Delta_1 \left(\theta, \frac{\partial \theta}{\partial a} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a} (\Delta_1 \theta) = 0.$$

Но при любых значениях постоянной a эти линии уровня геодезически параллельны, следовательно, уравнение (8) определяет двухпараметрическое семейство геодезических, то есть все геодезические данного V_2 .

Следствием последнего результата является так называемая теорема Якоби: *если известен промежуточный интеграл уравнения геодезических первого порядка, зависящий от произвольной постоянной a :*

$$p_i(u^s, a) du^i = 0, \quad (9)$$

то конечные уравнения всех геодезических определяются квадратурами. Действительно, потенциал $\theta(u^s, a)$ геодезического поля p_i определяется квадратурой

$$\theta(u^s, a) = - \int \frac{\tilde{p}_i(u^s, a)}{p(u^s, a)} du^i$$

и содержит постоянную a , откуда следует доказываемое.

Две последние теоремы показывают, что интегрирование уравнения геодезических линий V_2 можно свести либо к нахождению решения уравнения $\Delta_1 \theta = 1$, существенно зависящего от одной произвольной постоянной, либо к нахождению его первого промежуточного интеграла (9).

4. Для отыскания геодезического поля ортов w_i Гаусс предложил определить его углом ω , который оно составляет с произвольно выбранным полем ортов v_i . Из равенств $t_i w^i = (t_i + \omega_i) w^i = (t_i + \omega_i) \frac{du^i}{ds} = 0$ получаем гауссову форму уравнения геодезических

$$d\omega = - t_i \frac{du^i}{v}, \quad (10)$$

или, подробнее,

$$\begin{aligned} \omega_i w^i &= - t_i w^i = - t_i (v^i \cos \omega + \tilde{v}^i \sin \omega) = \\ &= - \underset{v}{g} \cos \omega - \tilde{\underset{v}{g}} \sin \omega. \end{aligned} \quad (11)$$

5. Геодезические кривизны $\underset{v}{g}$ и $\underset{w}{g}$ линий сети (v, w) согласно (1) и (21;8) можно определить равенствами

$$\underset{v}{g} = t_i v^i = \frac{1}{2} a_{is|h} v^i v^s v^h, \quad \underset{w}{g} = t_i w^i = - \frac{1}{2} a_{is|h} w^i w^s w^h. \quad (12)$$

Вектор

$$\alpha_i = \frac{ev_i + gw_i}{\sin^2 \omega} \quad (13)$$

назовем *геодезическим вектором сети*. Обращение этого вектора в нуль характеризует *геодезическую сеть*, то есть сеть, оба семейства линий которой — геодезические.

Полугеодезическая сеть, то есть сеть у которой геодезическим является только одно семейство, характеризуется одним из равенств:

$$\alpha_i = \frac{g}{v} v_i, \quad \alpha_i = \frac{g}{w} w_i \quad (14)$$

или одним равенством

$$a^{is} \alpha_i \alpha_s = 2 \frac{g^2}{\sin^2 \omega} = 0. \quad (15)$$

С помощью геодезического вектора геодезические кривизны линий сети выражаются формулами

$$\underset{v}{\kappa} = \alpha_i \underset{v}{\omega}^i \sin \omega, \quad \underset{w}{\kappa} = -\alpha_i \underset{w}{\omega}^i \sin \omega. \quad (16)$$

§ 23. Чебышевский вектор сети

Для каждой линии, принадлежащей одному из семейств сети (v, w) , можно определить инвариант, называемый ее чебышевской кривизной. Рассмотрим линию w сети, последовательность направляющих ортов v_i вдоль нее и последовательность ортов p_i , переносимых по линии w параллельно. Производная угла ω отклонения орта v_i от орта p_i ($\sin \omega = p_i v^i$) называется *чебышевской кривизной линии w* . Учитывая, что $\underset{v}{\omega}_i = \underset{v}{t}_i - \underset{p}{t}_i$ и $\underset{p}{t}_i \underset{p}{\omega}^i = 0$, находим следующие выражения для чебышевских кривизн $\underset{w}{\kappa}$ и $\underset{v}{\kappa}$ линий (w) и (v) сети:

$$\left. \begin{aligned} \underset{w}{\kappa} &= \frac{d\omega}{ds} = \omega_i \underset{w}{\omega}^i = (\underset{v}{t}_i - \underset{p}{t}_i) \underset{w}{\omega}^i = \underset{v}{t}_i \underset{w}{\omega}^i = -v_{s|i} v^s \underset{w}{\omega}^i, \\ \underset{v}{\kappa} &= \frac{d\omega}{ds} = \underset{v}{t}_i \underset{v}{\omega}^i = -w_{s|i} w^s \underset{v}{\omega}^i. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Обращение чебышевской кривизны $\underset{v}{\chi}$ в нуль показывает, что направляющие орты линий (v) переносятся по линиям (w) параллельно, то есть что линии семейства (w) являются трансверсальными линиями (v) . Сеть, обладающая этим свойством, называется *получебышевской*. Обращение в нуль обеих чебышевских кривизн $\underset{v}{\chi}$ и $\underset{w}{\chi}$ характеризует *чебышевскую сеть*, у которой направляющие векторы каждого семейства переносятся параллельно по линиям другого семейства.

Вектор

$$a_s = \frac{\underset{v}{\chi} v_s + \underset{w}{\chi} w_s}{\sin^2 \omega} \quad (2)$$

назовем *чебышевским вектором сети*. Обращение этого вектора в нуль характеризует чебышевскую сеть. Получебышевская сеть характеризуется одним из равенств

$$a_s = \frac{\underset{w}{\chi}}{\sin^2 \omega} w_s, \quad a_s = \frac{\underset{v}{\chi}}{\sin^2 \omega} v_s \quad (3)$$

или одним равенством

$$a^{is} a_i a_s = - \frac{2\underset{v}{\chi}\underset{w}{\chi}}{\sin^2 \omega} = 0. \quad (4)$$

С помощью чебышевского вектора чебышевские кривизны выражаются равенствами

$$\underset{v}{\chi} = a_i w^i \sin \omega, \quad \underset{w}{\chi} = - a_i v^i \sin \omega. \quad (5)$$

Для изогональной сети трансверсальные векторы $\underset{v}{t}_s$ и $\underset{w}{t}_s$ равны: $\underset{v}{t}_s = \underset{w}{t}_s = t_s$, следовательно,

$$g = \underset{v}{t}_s \underset{v}{v}^s = \underset{w}{t}_s \underset{w}{w}^s = \underset{v}{\chi}, \quad g = \underset{w}{\chi}.$$

Геодезический и чебышевский векторы такой сети тоже оказываются равными:

$$a_s = \frac{\underset{v}{\chi} v_s + \underset{w}{\chi} w_s}{\sin^2 \omega} = \frac{g v_s + g w_s}{\sin^2 \omega} = a_s = t_i \frac{v^i v_s + w^i w_s}{\sin^2 \omega} = d_{0s}^i t_i \frac{1}{\sin \omega}.$$

Для ортогональной сети $d_i^s = g_i^s$, $\sin \omega = 1$, поэтому

$$a_s = \alpha_s = g_s^i t_i = \tilde{t}_s, \quad (6)$$

что согласно (21;6) можно записать так:

$$a_i = \frac{w_{k|}{}^k v_i - v_{k|}{}^k w_i}{v_s w^s} = \frac{e^{kl} (\partial_l w_k v_i - \partial_l v_k w_i)}{e^{sj} v_s w_j}. \quad (6')$$

Эта формула остается справедливой и в случае гиперболической изотропной сети, что легко следует из формулы (21;6').

Таким образом, *чебышевский вектор ортогональной сети является дополнительным для общего трансверсального вектора ее направляющих ортов*. Отсюда следует, что *ортогональные сети, взаимный угол которых постоянен, имеют равные чебышевские векторы*. Действительно, если взаимный угол ортогональных сетей $a_{is} = 2v_{(i}\tilde{v}_{s)}$ и $b_{is} = 2\tilde{w}_{(i}w_{s)}$ постоянен, то

$$\frac{1}{2} a_{is} b^{is} = (v_i \tilde{v}_s + v_s \tilde{v}_i) w^i \tilde{w}^s = \sin^2(\widehat{v}, \widehat{w}) - \cos^2(\widehat{v}, \widehat{w}) = \text{const},$$

так что их направляющие векторы составляют друг с другом постоянные углы.

В частности, *чебышевские векторы первой и второй бисекторных сетей любой сети равны*.

Из (21;5) и (6) следует, что

$$\text{div } a = g^{is} a_{i|s} = -\tilde{a}_{i|}{}^i = K, \quad (7)$$

то есть, что дивергенция чебышевского вектора произвольной ортогональной сети V_2 равна гауссовой кривизне [73].

Из результата § 21, п. 5 теперь легко следует теорема: *ортогональная сеть определяется своим чебышевским вектором, удовлетворяющим условию (7), с точностью до поворота ее направлений на постоянный угол*.

§ 24. Выражение чебышевского и геодезического векторов сети через ее биссекторные векторы

В некоторых вопросах полезны выражения чебышевского и геодезического векторов сети через векторы:

$$\left. \begin{aligned} M_i &= \frac{m_i}{\sin \frac{\omega}{2}} = \frac{w_i + v_i}{\sin \omega} = \frac{\tilde{v}_i - \tilde{w}_i}{2 \sin^2 \frac{\omega}{2}} = \frac{1}{2} (\tilde{v}_i - \tilde{w}_i) M^2, \\ N_i &= \frac{n_i}{\cos \frac{\omega}{2}} = \frac{w_i - v_i}{\sin \omega} = \frac{\tilde{w}_i + \tilde{v}_i}{2 \cos^2 \frac{\omega}{2}} = \frac{1}{2} (\tilde{w}_i + \tilde{v}_i) N^2, \end{aligned} \right\} (1)$$

которые в дальнейшем мы будем называть *биссекторными*. Произведем в формуле (22;13) следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \sin^2 \omega \alpha_i &= \underset{v}{\rho} v_i + \underset{w}{\rho} w_i = \tilde{v}_{s1} \cdot v_i + \tilde{w}_{s1} \cdot w_i = \\ &= \frac{1}{2} \{ (\tilde{v}_s + \tilde{w}_s) \cdot (v_i + w_i) + (\tilde{v}_s - \tilde{w}_s) \cdot (v_i - w_i) \} = \\ &= \left\{ \left(\frac{N_s}{N^2} \right) \cdot M_i - \left(\frac{M_s}{M^2} \right) \cdot N_i \right\} \sin \omega. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sin \omega \alpha_i = \left(\frac{N_s}{N^2} \right) \cdot M_i - \left(\frac{M_s}{M^2} \right) \cdot N_i. \quad (2)$$

Преобразуя (2), находим

$$\begin{aligned} \sin \omega \alpha_i &= \frac{N_{s1} \cdot}{N^2} M_i - \frac{M_{s1} \cdot}{M^2} N_i + \\ &+ N_s M_i \left(\cos^2 \frac{\omega}{2} \right) \cdot - M_s N_i \left(\sin^2 \frac{\omega}{2} \right) \cdot = \\ &= \frac{N_{s1} \cdot}{N^2} M_i - \frac{M_{s1} \cdot}{M^2} N_i + \frac{1}{2} (N^s M_i + M^s N_i) \omega_s \sin \omega. \end{aligned} \quad (3)$$

Чтобы заменить последнее слагаемое, преобразуем разность

$$\begin{aligned} \sin \omega (\alpha_i - a_i) &= \frac{1}{\sin \omega} (t_s \underset{v}{\rho} v_i + t_s \underset{w}{\rho} w_i - t_s \underset{v}{\rho} v_i - t_s \underset{w}{\rho} w_i) = \\ &= \frac{1}{\sin \omega} (t_s \underset{w}{\rho} w_i - t_s \underset{v}{\rho} v_i) = \frac{1}{2} \omega_s (N^s M_i + M^s N_i) \sin \omega. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\sin \omega a_i = \frac{N_{s|}{}^s}{N^2} M_i - \frac{M_{s|}{}^s}{M^2} N_i. \quad (4)$$

Эта формула показывает, что чебышевская сеть характеризуется градиентностью векторов M_s и N_s или градиентностью векторов

$$\frac{v_i}{\sin \omega} = \varphi_i = \partial_i \varphi, \quad \frac{w_i}{\sin \omega} = \psi_i = \partial_i \psi. \quad (5)$$

Функции φ и ψ назовем *чебышевскими потенциалами* чебышевской сети. Метрический тензор с помощью этих функций записывается в виде

$$g_{ik} = \varphi_i \varphi_k - 2 \cos \omega \varphi_{(i} \psi_{k)} + \psi_i \psi_k, \quad (6)$$

а линейный элемент — в виде

$$ds^2 = d\varphi^2 - 2 \cos \omega d\varphi d\psi + d\psi^2. \quad (7)$$

Из последнего следует, что чебышевские потенциалы совпадают с длинами дуг линий чебышевской сети.

§ 25. Выражение чебышевского и геодезического векторов сети через ее тензор

Производную $a_{is|k}$ метрически нормированного тензора сети всегда можно разложить по линейно независимым тензорам $v_i v_s$, $v_{(i} w_{s)}$, $w_i w_s$:

$$a_{is|k} = \lambda_k v_i v_s + \mu_k v_{(i} w_{s)} + \nu_k w_i w_s.$$

Коэффициенты этого разложения легко определяются с помощью равенств (21;8):

$$a_{is|k} w^i w^s = -2t_k = \lambda_k \sin^2 \omega,$$

$$a_{is|k} v^i v^s = 2t_k = \nu_k \sin^2 \omega,$$

$$a_{is|k} v^i w^s = -\frac{1}{2} \mu_k \sin^2 \omega = 0.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2} a_{is|k} = \frac{-t_k v_i v_s + t_k w_i w_s}{\sin^2 \omega}. \quad (1)$$

Свертывая обе части этого равенства с тензором a^{sk} :

$$\frac{1}{2} a_{is|k} a^{sk} = \frac{-t_k v^k v_i - t_k w^k w_i}{\sin^2 \omega} = -\frac{v v_i + w w_i}{\sin^2 \omega} = -a_i,$$

приходим к следующим выражениям чебышевского вектора сети:

$$a_i = -\frac{1}{2} a_{is|k} a^{sk} = \frac{1}{2} a_{is} a^{sk}|_k. \quad (2)$$

Отсюда легко получаются часто употребляемые формулы

$$a_{s|k}^k = -2a_s^k a_k, \quad a_{k|s}^s = -2a_k^s a^k. \quad (3)$$

Последние формулы позволяют охарактеризовать чебышевскую сеть тем, что ковариантная производная ее метрически нормированного тензора симметрична по всем индексам:

$$a_{is|k} = a_{ik|s}. \quad (4)$$

Для получения выражения геодезического вектора сети свернем обе части равенства (1) с тензором c^{sk} бисекторной сети:

$$\begin{aligned} a_{is|k} c^{sk} &= \frac{2}{\sin^2 \omega} (-t_s w^s v_i + t_s v^s w_i) = \\ &= \frac{2}{\sin^2 \omega} (-v v_i + w w_i) = 2d_i^s \alpha_s, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\alpha_s = \frac{1}{2} d_{00}^i a_{i|j} c_k^j = \frac{1}{2} c_s^i a_{i|j} d_k^j. \quad (5)$$

Второе выражение можно получить либо из первого, либо свертыванием обеих частей равенства (1) с тензором d^{sk} характеристической сети.

§ 26. Алгебраические и дифференциальные соотношения между векторами сети

Чебышевский и геодезический векторы a_i и α_i данной сети, чебышевский вектор c_i ее биссекторной сети и градиент ω_i сетевого угла ω инвариантно связаны с каждой сетью и играют важную роль для изучения свойств сетей и составления инвариантных характеристик сетей специального типа. В дальнейшем эти четыре вектора мы будем называть *векторами сети*. Векторы сети связаны рядом алгебраических и дифференциальных зависимостей, вывод которых дается в этом параграфе.

В выражении чебышевского вектора (23;2)

$$a_s = \frac{t_i v^i v_s + t_i \omega^i \omega_s}{\sin^2 \omega}$$

произведем замену:

$$t_s = t_s - \frac{\omega_s}{2} = -\tilde{c}_s - \frac{\omega_s}{2}, \quad t_s = t_s + \frac{\omega_s}{2} = -\tilde{c}_s + \frac{\omega_s}{2}, \quad (1)$$

где t_s — трансверсальный вектор биссекторного направления, а \tilde{c}_i — дополнительный вектор чебышевского вектора c_i биссекторной сети ($\tilde{c}_i = g_i^s c_s$). Получаем:

$$a_s = -\frac{v^i v_s + \omega^i \omega_s}{\sin \omega} \frac{\tilde{c}_i}{\sin \omega} - \frac{\omega^i \omega_s - v^i v_s}{\sin \omega} \frac{\omega_i}{2 \sin \omega}$$

или, на основании (11;4) и (11;5),

$$a_s = -d_s^i \frac{\tilde{c}_i}{\sin \omega} - \frac{1}{2} c_s^i \Omega_i, \quad (2)$$

где вектор

$$\Omega_i = \frac{\omega_i}{\sin \omega} = \partial_i \ln \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \quad (3)$$

и называется *градиентом сети*.

Совершенно аналогично получаем следующее выражение геодезического вектора —

$$\alpha_s = -d_s^i \frac{\tilde{c}_i}{\sin \omega} + \frac{1}{2} c_s^i \Omega_i. \quad (4)$$

Из (2) и (4) находим следующие выражения каждого вектора сети через каждые два остальных ее вектора:

$$\begin{aligned} 2\tilde{c}_i &= d_i^s (\alpha_s + a_s) \sin \omega = 2d_i^s a_s \sin \omega - a_i^s \omega_s = \\ &= 2d_i^s \alpha_s \sin \omega + a_i^s \omega_s, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\Omega_i = c_i^s (\alpha_s - a_s) = -2c_i^s a_s - 2a_i^s \frac{\tilde{c}_s}{\sin \omega} = 2c_i^s \alpha_s + 2a_i^s \frac{\tilde{c}_s}{\sin \omega}, \quad (6)$$

$$a_i = -d_i^s \frac{\tilde{c}_s}{\sin \omega} - \frac{1}{2} c_i^s \Omega_s = \alpha_i - c_i^s \Omega_s = -\alpha_i - 2d_i^s \frac{\tilde{c}_s}{\sin \omega}, \quad (7)$$

$$\alpha_i = -d_i^s \frac{\tilde{c}_s}{\sin \omega} + \frac{1}{2} c_i^s \Omega_s = \alpha_i + c_i^s \Omega_s = -\alpha_i - 2d_i^s \frac{\tilde{c}_s}{\sin \omega}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} -2c_i &= g_i^s d_s^k (\alpha_k + a_k) \sin \omega = c_i^s (a_s + \alpha_s) \cos \omega - (a_i + \alpha_i) = \\ &= 2c_i^s a_s \cos \omega - 2a_i - c_i^s \Omega_s + \partial_i \ln \sin \omega = \\ &= 2c_i^s \alpha_s \cos \omega + c_i^s \Omega_s - \partial_i \ln \sin \omega - 2a_i. \end{aligned} \quad (9)$$

Заменяя тремя способами по формуле (5) вектор \tilde{c}_i в выражении гауссовой кривизны $-K = \tilde{c}_i^i$, получим три равенства:

$$\begin{aligned} -2K &= a_i^s (a_{s|}^i - a_s a^i + a_{s|}^i - \alpha_s \alpha^i - 2a_s \alpha^i) \sin \omega \cos \omega + \\ &+ g_i^s (a_{s|}^i + a_{s|}^i + \alpha_s \alpha^i - a_s a^i) \sin^2 \omega = \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} &= a_i^s \left(a_{s|}^i - 2a_s \alpha^i + 2a_s \Omega^i \cos \omega - \frac{\omega_{s|}^i}{\sin 2\omega} \right) \sin 2\omega + \\ &+ 2g_i^s (a_{s|}^i + 2a_s \Omega^i \cos \omega) \sin^2 \omega = \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} &= a_i^s \left[\alpha_{s|}^i - 2\alpha_s \alpha^i - 2\alpha_s \Omega^i \cos \omega - \right. \\ &\left. - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \omega (\operatorname{ctg} \omega)_{s|}^i \right] \sin 2\omega + 2g_i^s (\alpha_{s|}^i - \Omega_s \Omega^i) \sin^2 \omega. \end{aligned} \quad (12)$$

Приведем для примера вывод первой из этих формул.

Заменяя аффиноор характеристической сети d_i^s по формуле (11;9), имеем

$$\begin{aligned} 2\tilde{c}_{s|}^s &= -2K = [d_i^s(\alpha_s + a_s) \sin \omega]_i^i = \\ &= [g_i^s(\alpha_s + a_s) - \tilde{c}_i^s(\alpha_s + a_s) \cos \omega]_i^i = \\ &= g_i^s(\alpha_{s|}^i + a_{s|}^i) - \tilde{c}_i^s(\alpha_s + a_s) \cos \omega - \\ &\quad - \tilde{c}_i^s(\alpha_{s|}^i + a_{s|}^i) \cos \omega + \tilde{c}_i^s(\alpha_s + a_s) \omega^i \sin \omega. \quad (13) \end{aligned}$$

Так как, согласно § 23, чебышевские векторы сетей c и \tilde{c} равны, то $\tilde{c}_i^s = -2c_i^s c^i$.

Выразим теперь все векторы правой части (13) через векторы a_s и α_s , а все аффиноор — через аффиноор a_i^s и g_i^s с помощью (5—8) и (11;8—11)

$$\begin{aligned} -\tilde{c}_i^s(\alpha_s + a_s) \cos \omega &= 2\tilde{c}_i^s(\alpha_s + a_s) c^i \cos \omega = \\ &= -c_s^k 2\tilde{c}_k^s(\alpha^s + a^s) \cos \omega = \\ &= -c_s^k d_k^l(\alpha_l + a_l) \sin \omega (\alpha^s + a^s) \cos \omega = \\ &= -a_s^i(\alpha_i \alpha^s + a_i a^s + 2\alpha_i a^s) \sin \omega \cos \omega, \\ \tilde{c}_i^s(\alpha_s + a_s) \omega^i \sin \omega &= g_i^k(\alpha^i + a^i) c_k^l \omega_l \sin \omega = \\ &= g_i^k(\alpha^i + a^i)(\alpha_k - a_k) \sin^2 \omega = g_i^s(\alpha_s \alpha^i - a_s a^i) \sin^2 \omega, \\ -\tilde{c}_i^s(\alpha_{s|}^i + a_{s|}^i) \cos \omega &= \\ &= -(g_i^s \cos \omega - a_i^s \sin \omega)(\alpha_{s|}^i + a_{s|}^i) \cos \omega. \end{aligned}$$

Внося эти значения в (13), получим (10). Вывод формул (11) и (12) аналогичен.

Приравнявая нулю ротации трех градиентных векторов, стоящих в правых частях формулы (6), получим

следующие равенства:

$$c_0^s (\alpha_{s|}^i - \alpha_s \alpha^i - a_{s|}^i + a_s a^i) = 2\alpha_s a^s \cos \omega. \quad (14)$$

$$c_0^s (a_{s|}^i \sin \omega - c_{s|}^i + 4 \cos^2 \omega a_s c^i) = \cos \omega (c_{s|}^s - 4c_s a^s), \quad (15)$$

$$c_0^s (\alpha_{s|}^i \sin^2 \omega - c_{s|}^i - 4c_s \alpha^i + 4c_s c^i) = \cos \omega (c_{s|}^s - 4c_s a^s). \quad (16)$$

Приведем для примера вывод формулы (15). Имеем

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \Omega_{i|}^i &= \left(c_0^s a_s + a_0^s \frac{\tilde{c}_s}{\sin \omega} \right)_|^i = c_0^s (a_{s|}^i - 2a_s c^i) + \\ &+ \frac{1}{\sin \omega} a_0^s (\tilde{c}_{s|}^i - 2\tilde{c}_s a^i) - a_0^s \tilde{c}_s \omega^i \frac{\cos \omega}{\sin^2 \omega} = 0. \quad (17) \end{aligned}$$

Подсчитаем отдельно последние слагаемые:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \omega} a_0^s g_s^k (c_{k|}^i - 2c_k a^i) &= \\ &= \frac{1}{\sin \omega} \left(-c_0^k \frac{1}{\sin \omega} - \delta_k^i \operatorname{ctg} \omega \right) (c_{k|}^i - 2c_k a^i) = \\ &= -\frac{1}{\sin^2 \omega} c_0^k (c_{k|}^i - 2c_k a^i) - \frac{\cos \omega}{\sin^2 \omega} (c_{s|}^s - 2c_s a^s); \\ -\frac{\cos \omega}{\sin^2 \omega} a_0^s \tilde{c}_s \omega^i &= -\frac{\cos \omega}{\sin^2 \omega} a_0^s \tilde{c}_s \left(2c_h^i a^h + 2a_0^i \tilde{c}^l \frac{1}{\sin \omega} \right) \sin \omega = \\ &= -\frac{\cos \omega}{\sin \omega} a_0^s g_s^l c_l (2c_h^i a^h) = -2 \frac{\cos \omega}{\sin \omega} d_h^s g_s^l c_l a^h = \\ &= 2 \frac{\cos \omega}{\sin \omega} \left(\operatorname{ctg} \omega c_h^l + \frac{1}{\sin \omega} \delta_h^l \right) c_l a^h = \\ &= 2 \operatorname{ctg}^2 \omega c_h^l c_l a^h + 2 \frac{\cos \omega}{\sin^2 \omega} c_h a^h. \end{aligned}$$

Внося эти значения в (17), получим (15).

Подсчитаем, наконец, второй дифференциальный параметр сетевого угла ω :

$$\begin{aligned} \Delta_2 \omega &= -(g_s^s \omega_s)_|^i = [\tilde{c}_0^s (a_s - \alpha_s) \sin \omega]_|^i = \\ &= \tilde{c}_0^s (a_{s|}^i - \alpha_{s|}^i) \sin \omega - 2\tilde{c}_0^s (a_s - \alpha_s) \sin \omega c^i + \\ &+ \tilde{c}_0^s (a_s - \alpha_s) \omega^i \cos \omega = \tilde{c}_0^s (a_{s|}^i - \alpha_{s|}^i) \sin \omega + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \tilde{c}_i^s (a_s - \alpha_s) g_h^i d_l^h (a^l + \alpha^l) \sin^2 \omega + \\
 & + \tilde{c}_i^s (a_s - \alpha_s) c_l^i (a^l - \alpha^l) \sin \omega \cos \omega = \\
 & = \tilde{c}_i^s (a_{s|}^i - \alpha_{s|}^i) \sin \omega + a_l^s (a_s a^l - \alpha_s \alpha^l) \sin^2 \omega - \\
 & \quad - g_i^s (a_s a^i - 2a_s \alpha^i + \alpha_s \alpha^i) \sin \omega \cos \omega.
 \end{aligned}$$

Заменяя здесь $a_l^s \sin \omega = g_l^s \cos \omega - \tilde{c}_l^s$, окончательно находим

$$\Delta_2 \omega = \tilde{c}_i^s (a_{s|}^i - a_s a^i - \alpha_{s|}^i + \alpha_s \alpha^i) \sin \omega + g_i^s (a_s \alpha^i - \alpha_s a^i) \sin 2\omega. \quad (18)$$

Уравнения (10), (11), (12) не независимы: каждые два из них являются следствием третьего уравнения этой группы и алгебраических зависимостей между векторами сети. Аналогичное заключение справедливо и для уравнений (14), (15), (16). Другим способом эти уравнения будут получены в § 31.

§ 27. Ковариантная производная тензора сети.
Тензоры D и S сети

Если в формуле (25;1) трансверсальные векторы t_s и t_s сети заменить согласно (26;1), то придем к следующему разложению ковариантной производной тензора сети:

$$a_{is|h} = -c_{is} \frac{2\tilde{c}_h}{\sin \omega} - d_{is} \Omega_h. \quad (1)$$

Заменяя здесь векторы \tilde{c}_h и Ω_h по формулам (26;5,6), придадим этому разложению следующий вид:

$$a_{is|h} = -c_{is} d_k^j (a_j + \alpha_j) + d_{is} c_k^j (a_j - \alpha_j). \quad (2)$$

Для изогональной сети $\Omega_i = 0$, $a_j = \alpha_j$, следовательно,

$$a_{is|h} = -c_{is} \frac{2\tilde{c}_h}{\sin \omega} = -2c_{is} d_k^j a_j. \quad (3)$$

В случае ортогональной сети $d_0^j = g_h^j$, так что

$$a_{0|k} = -2c_{0is}\tilde{a}_k.$$

В частности, для биссекторных сетей произвольной сети имеем

$$c_{0|k} = -2\tilde{c}_{0is}\tilde{c}_k, \quad \tilde{c}_{0|k} = 2c_{0is}\tilde{c}_k. \quad (4)$$

Отделяя в формуле (2) члены, содержащие геодезический вектор, приходим к тензору

$$D_{isk} = a_{0|k} + (c_{0is}d_k^j - d_{0is}c_k^j) a_j = -(c_{0is}d_k^j + d_{0is}c_k^j) a_j, \quad (5)$$

обращение которого в нуль характеризует геодезическую сеть. Этот тензор будем называть *тензором D сети*. В силу соотношений

$$\begin{aligned} c_{0is}d_k^j - d_{0is}c_k^j &= (c_{0is}^j d_{ks} + \delta_s^j c_{0i\gamma} d_k^\gamma) - \\ &- (d_{ks}^j c_i + \varepsilon_{ik} d_{\gamma s} c^{j\gamma}) = -\delta_s^j a_{ik} - \varepsilon_{ik} a_s^j, \end{aligned}$$

тензор D приводится к виду

$$D_{isk} = a_{0|k} - a_{ik} a_s - \varepsilon_{ik} a_s^j a_j = a_{0|k} - a_{ik} a_s - a_{ks} a_i + a_{si} a_k. \quad (6)$$

С другой стороны, на основании (22;13) и (11;4—5) имеем

$$\begin{aligned} c_{0is}d_k^j a_j + d_{0is}c_k^j a_j &= [c_{0is}(\varepsilon\omega_k - \varepsilon\nu_k) + d_{0is}(\varepsilon\omega_k + \varepsilon\nu_k)] \frac{1}{\sin^2 \omega} = \\ &= [\varepsilon\omega_k (d_{0is} + c_{0is}) + \varepsilon\nu_k (d_{0is} - c_{0is})] \frac{1}{\sin^2 \omega} = \\ &= \frac{2}{\sin^3 \omega} (\varepsilon\nu_i \nu_s \nu_k + \varepsilon\omega_i \omega_s \omega_k). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$D_{isk} = -\frac{2}{\sin^3 \omega} (\varepsilon\nu_i \nu_s \nu_k + \varepsilon\omega_i \omega_s \omega_k). \quad (7)$$

Эти формулы показывают, что тензор D симметричен по всем индексам, аполярна тензору сети a_{sh} :

$$D_{ish}a^{sh} = 0$$

и что обращение его в нуль характеризует геодезическую сеть. Впервые тензор D появился в работах Я. С. Дубнова [26] под названием *первого геодезического тензора сети*. Нулевые линии тензора сети, определяемые дифференциальным уравнением

$$D_{ish} du^i du^s du^h = 0,$$

называются *линиями D сети*. Линии, направления которых сопряжены направлениям линий D относительно сети, называются *линиями S* . Эти линии определяются *тензором S сети* или, по терминологии Я. С. Дубнова, *вторым геодезическим тензором сети*:

$$S_{ish} = a_i^\alpha a_s^\beta a_h^\gamma D_{\alpha\beta\gamma} = a_i^\alpha D_{\alpha sh} = \frac{-2}{\sin^3 \omega} (g v_i v_s v_h - g \omega_i \omega_s \omega_h).$$

Тензоры D и S вырождаются или, что то же, три семейства линий D и S сливаются в одно только для полугеодезической сети.

По терминологии § 9 эти тензоры присоединены друг другу, а сеть a_{is} является их общей сетью Гессе.

Три направления линий D p_i ($\alpha = 1, 2, 3$) и три соответствующих им направления линий S ($\bar{p}_i = a_i^k p_k$) определяют три сети $(p_i \bar{p}_j)$, аполярные сети Гессе a_{ij} .

§ 28. Сети пространства A_2

Многие понятия и результаты теории сетей, развитые сначала для случая римановой геометрии, были затем обобщены для сетей произвольного пространства A_2 . Рассмотрение дифференциальных свойств сетей пространства A_2 мы начнем с разложения ковариантных производных аффинов тройки сетей, что приведет нас к важнейшим понятиям чебышевского и геодезического векторов сети.

Такой путь естествен для дифференциальной геометрии: для множества всех сетей A_2 тройки сетей играют роль реперов (аффинор любой сети линейно раскладывается по аффинорам тройки сетей), а формулы, дающие линейные разложения ковариантных производных аффиноров тройки сетей по этим же аффинорам, играют роль деривационных формул. Коэффициенты деривационных формул приводят обычно к инвариантным понятиям, так, например, коэффициенты деривационных формул для касательного и нормального векторов плоской кривой приводят к ее инвариантам — кривизне и кручению. И в нашем случае подобного рода коэффициенты приведут нас к чебышевскому и геодезическому векторам сети. То обстоятельство, что задание чебышевских и геодезических векторов сети позволяет, как мы увидим, записать деривационные формулы, объясняет, во-первых, выбор этих векторов как основных для теории сетей и, во-вторых, достаточность этих векторов для построения этой теории.

1. Пусть A_α ($\alpha = 1, 2, 3$) — приведенные аффиноры произвольной тройки сетей. Производную $A_\alpha^i|_k$ всегда можно представить в следующем виде:

$$A_\alpha^i|_k = A_\alpha^i P_k + A_\beta^i Q_k + A_\gamma^i R_k, \quad (1)$$

где векторы P_k , Q_k , R_k легко определяются свертыванием обеих частей последнего равенства последовательно с A_i^s , A_i^s , A_i^s :

$$-2P_k = A_i^s A_s^i|_k = \frac{1}{2} (A_i^s A_s^i)|_k = 0,$$

$$-2Q_k = A_i^s A_s^i|_k, \quad -2R_k = A_i^s A_s^i|_k.$$

Заменяя в (1) два вектора Q_k и R_k векторами a_k и α_k по формулам

$$Q_k = -A_k^p (a_p + \alpha_p), \quad R_k = A_k^p (a_p - \alpha_p),$$

получаем искомые *деривационные формулы*

$$A_{s|h}^i = -A_{\beta}^i A_{\gamma}^p (a_p + \alpha_p) + A_{\gamma}^i A_{\beta}^p (a_p - \alpha_p). \quad (2)$$

Отсюда находим

$$A_{s;i}^i = -A_{\alpha}^p (a_p + \alpha_p) - A_{\alpha}^p (a_p - \alpha_p) = -2A_{\alpha}^p a_p. \quad (3)$$

Следовательно, вектор

$$a_p = \frac{1}{2} A_{\alpha}^s A_{s;i}^i = -\frac{1}{2} A_{\alpha}^i A_{\nu;i}^s \quad (4)$$

определяется одной сетью A и не зависит от выбора сетей

A и A . Назовем его *чебышевским вектором сети A* .

2. Чтобы найти вектор α , рассмотрим выражение

$$A_{\beta}^s A_{s|h}^i A_{\gamma}^h = -(a_p + \alpha_p) + (a_p - \alpha_p) = -2\alpha_p.$$

Следовательно,

$$\alpha_p = -\frac{1}{2} A_{\beta}^s A_{s|h}^i A_{\gamma}^h = -\frac{1}{2} A_{\gamma}^s A_{s|h}^i A_{\beta}^h \quad (5)$$

(второе равенство получается аналогично первому). Этот вектор, в отличие от чебышевского вектора, зависит от выбора тройки сетей, в которую включена сеть A . Мы будем называть его *геодезическим вектором сети A* относи-

тельно тройки сетей A , A , A или *относительно сети A* .

Предположим, что вместо сетей A и A взяты сети

$$\left. \begin{aligned} A_{\beta}^* &= A_{\beta}^i \cos \omega + A_{\gamma}^i \sin \omega, \\ A_{\gamma}^* &= A_{\alpha}^p A_{\beta}^* = -A_{\beta}^i \sin \omega + A_{\gamma}^i \cos \omega. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Геодезический вектор сети A относительно сети A

$$\begin{aligned} \alpha_i &= -\frac{1}{2} A_{\beta}^* A_{s|h}^p A_{\gamma}^* = \frac{1}{2} A_{\beta}^* A_{s|h}^p A_{\beta}^* \cos \omega \sin \omega + \\ &+ \alpha_i \cos^2 \omega - \alpha_i \sin^2 \omega - \frac{1}{2} A_{\gamma}^* A_{s|h}^p A_{\beta}^* \sin \omega \cos \omega, \end{aligned}$$

Внося в это равенство

$$\begin{aligned} A_{\beta \alpha}^s A_{s|h}^p A_{\beta}^k &= -A_{\alpha \gamma}^j A_j^s A_{s|h}^p A_{\beta}^k = 2A_{\alpha \alpha}^j \alpha_j, \\ A_{\gamma \alpha}^s A_{s|h}^p A_{\gamma}^k &= -2A_{\alpha \alpha}^j \alpha_j, \end{aligned}$$

получаем следующий закон преобразования геодезического вектора сети A при замене тройки сетей, содержащих эту сеть, по формуле (6)

$$\alpha_i^* = \alpha_i \cos 2\omega + A_{\alpha \alpha}^s \alpha_s \sin 2\omega. \quad (7)$$

3. Определения, данные в римановой геометрии для геодезической, полугеодезической, чебышевской и получебышевской сетей, основаны на понятии параллельного переноса векторов и могут быть поэтому сохранены для случая произвольного пространства A_2 . Покажем, что инвариантные признаки этих сетей имеют в A_2 такой же вид, как и в геометрии Римана. Пусть v_i и w_i — произвольно нормированные направляющие векторы сети A . Выбирая за бивектор

$$\varepsilon_{is} = v_i w_s - v_s w_i, \quad (8)$$

будем иметь $v_i w^i = 1$ и получим следующее представление приведенного аффинора сети A :

$$A_{\alpha}^s = i(v^s w_{\alpha} + v_{\alpha} w^s) \quad (i^2 = -1). \quad (9)$$

Бивектор (8) и аффинор (9) не меняются при следующем перенормировании направляющих векторов:

$$v^i \rightarrow \lambda v^i, \quad w_i \rightarrow \frac{1}{\lambda} w_i. \quad (10)$$

Всякий выбор нормирования векторов v_i и w_i определяет также две сети A_2 и A_3 , дополняющие сеть A_1 до тройки сетей. Приведенные аффиноры этих сетей —

$$\left. \begin{aligned} A_{\alpha}^s &= i(w^s w_{\alpha} - v^s v_{\alpha}), \\ A_{\alpha}^s &= v^s v_{\alpha} + w^s w_{\alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Выполнение равенств $A_{\alpha\beta}^s A_{\gamma}^k = A_{\gamma}^k$ для этих аффиноров легко проверяется, если принять во внимание, что $v_i w^i = 1$. Очевидны также формулы

$$\left. \begin{aligned} A_{11}^s v_s &= i v_i, \\ A_{11}^s w_s &= -i w_i, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

из которых дифференцированием находим

$$\begin{aligned} A_{11}^s v_s &= i v_{i|k} - A_{11}^s v_{s|k} = v_{s|k} (i \delta_i^s - A_{11}^s) = -2i v_{s|k} v^s w_i, \\ A_{11}^s w_s &= -2i w_{s|k} w^s v_i. \end{aligned}$$

Последние равенства позволяют выразить чебышевский и геодезический векторы сети A_1 через ее направляющие векторы:

$$a_i = -\frac{1}{2} A_{11}^s A_{i1}^k = -\frac{1}{2} i A_{i1}^k (v^s w_k + v_k w^s) = \mathcal{Y} v_i + \mathcal{Y} w_i, \quad (13)$$

$$\alpha_i = \Gamma v_i + \Gamma w_i, \quad (14)$$

где инварианты

$$\mathcal{Y} = -v_{i|k} v^i w^k, \quad \mathcal{Y} = -w_{i|k} w^i v^k, \quad (15)$$

$$\Gamma = -v_{i|k} v^i v^k, \quad \Gamma = -w_{i|k} w^i w^k \quad (16)$$

не являются абсолютными инвариантами сети, а зависят от нормирования ее направляющих векторов: при перенормировании (10) они изменяются по следующему закону:

$$\mathcal{Y} \rightarrow \lambda \mathcal{Y}, \quad \mathcal{Y} \rightarrow \frac{1}{\lambda} \mathcal{Y}, \quad (17)$$

$$\Gamma \rightarrow \lambda^3 \Gamma, \quad \Gamma \rightarrow \frac{1}{\lambda^3} \Gamma. \quad (18)$$

Имея в виду это обстоятельство и аналогию со случаем римановой геометрии, назовем эти инварианты *относительными чебышевскими и геодезическими кривизнами линий сети A_1* .

Теперь нетрудно проверить, что чебышевская и геодезическая сети характеризуются обращением в нуль

соответственно чебышевского и геодезического векторов, а получебышевская и полугеодезическая сети — соответственно равенствами

$$\begin{aligned} A_{11}^s a_s &= \pm i a_i, & A_{11}^{is} a_i a_s &= 0, \\ A_{11}^s \alpha_s &= \pm i \alpha_i, & A_{11}^{is} \alpha_i \alpha_s &= 0. \end{aligned}$$

Пусть, для примера, направление w_i переносится параллельно по линии (v) . Тогда $w_{i|s} v^s = \sigma w_i$ и $\overset{n}{\bar{C}} = -w_{i|s} w^i v^s = 0$. Чебышевский вектор этой получебышевской сети принимает вид $a_i = \overset{w}{C} w_i$, откуда и следует инвариантная характеристика получебышевской сети.

4. Чебышевские и геодезические векторы a_s и α_s тройки сетей A, A, A связаны тремя алгебраическими соотношениями, для получения которых продифференцируем обе части равенства $A_{\beta\gamma}^s A_s^k A_k^j = -\delta_j^i$:

$$\begin{aligned} (A_{\beta\gamma}^s A_s^k A_k^j)_{|j} &= A_{i|j}^s A_s^j + A_{\beta\gamma}^s A_s^k A_k^j + A_{\alpha}^k A_k^j = \\ &= -2a_i - 2\alpha_i + 2a_i = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$a_i - a_i = \alpha_i, \quad a_i - a_i = \alpha_i, \quad a_i - a_i = \alpha_i. \quad (19)$$

Отметим также, что

$$\alpha_i + a_i + \alpha_i = 0. \quad (20)$$

Так как при проективном преобразовании все чебышевские векторы получают одинаковые приращения, то из формул (19) следует, что геодезический вектор сети при проективном преобразовании инвариантен.

5. В качестве первого приложения полученных результатов найдем выражение чебышевского вектора сети B , аполярной сети A , через векторы a и α тройки сетей A, A, A . Приведенный аффино́р сети B можно представить

в следующем виде:

$$B_i^s = A_i^s \cos \omega + A_i^s \sin \omega, \quad (21)$$

где функция ω есть потенциал сетей B и A . Действительно, если θ — взаимный угол этих сетей, то

$$-B_i^s A_s^i = 2 \operatorname{cth} \theta = -A_s^i (A_i^s \cos \omega + A_i^s \sin \omega) = 2 \cos \omega,$$

$$|\omega| = |\ln(\cos \omega + i \sin \omega)| = |\ln(\operatorname{cth} \theta + i \sqrt{1 - \operatorname{cth}^2 \theta})| = \\ = \left| \ln \left(\frac{\operatorname{ch} \theta + 1}{\operatorname{sh} \theta} \right) \right| = \left| \ln \operatorname{cth} \frac{\theta}{2} \right|.$$

Отсюда для чебышевского вектора b_i сети B имеем

$$B_{i|s}^s = -2B_i^s b_s = -2A_i^s a_s \cos \omega - 2A_i^s a_s \sin \omega - \\ - (A_i^s \sin \omega - A_i^s \cos \omega) \omega_s.$$

Свернем обе части этого равенства с B_k^i :

$$2b_k = -2(-\delta_k^s \cos \omega - A_k^s \sin \omega) a_s \cos \omega - \\ - 2(A_k^s \cos \omega - \delta_k^s \sin \omega) a_s \sin \omega - B_k^i (B_i^s A_s^i) \omega_s = \\ = 2a_k \cos^2 \omega + A_k^s a_s \sin 2\omega - A_k^s a_s \sin 2\omega + 2a_k \sin^2 \omega + A_k^s \omega_s = \\ = a_k (1 + \cos 2\omega) + A_k^s (a_s - a_s) \sin 2\omega + a_k (1 - \cos 2\omega) + A_k^s \omega_s.$$

Заменяя согласно (19) $a_s - a_s = \alpha_s$, получаем искомую формулу

$$2b_k = a_k + a_k + a_k \cos 2\omega + A_k^s a_s \sin 2\omega + A_k^s \omega_s. \quad (22)$$

6. Вычитая из обеих частей последнего равенства вектор $2a_k$ и заменяя согласно (19) $a_k - a_k = -\alpha_k$, получаем

$$2(b_k - a_k) = 2 \sin \omega (-\delta_k^s \sin \omega + A_k^s \cos \omega) \alpha_s + A_k^s \omega_s. \quad (23)$$

Отсюда легко следует теорема Дубнова: *если для двух отдельных сетей (B и A) из трех требований:*

- 1) их чебышевские векторы равны ($b_k = a_k$),
- 2) их взаимный угол постоянен ($\omega = \text{const}$),
- 3) их главная сеть геодезическая ($\alpha_k = 0$) выполнены два,

то выполняется и третье.

7. Пользуясь дважды формулой (22), найдем выражение чебышевского вектора произвольной сети B , приведенный аффиноор которой всегда можно разложить по аффиноорам A, A, A произвольной тройки сетей следующим образом:

$$B_s^i = A_1^i \cos \theta + (A_2^i \cos \omega + A_3^i \sin \omega) \sin \theta. \quad (24)$$

Введем в рассмотрение тройку сетей A, A, A , $A_1^i = A_1^i \cos \omega + A_3^i \sin \omega$, $A_2^i = A_1^i A_2^i = -A_2^i \sin \omega + A_3^i \cos \omega$. Тогда для чебышевских векторов a_s и b_s сети A и сети $B = A \cos \theta + A \sin \theta$ по формуле (22) имеем

$$2a_s^* = a_s^* + a_s^* + \alpha_s \cos 2\omega + A_1^k \alpha_k \sin 2\omega + A_1^k \omega_k,$$

$$2b_s = a_s^* + a_s^* + \alpha_s \cos 2\theta + A_3^k \alpha_k \sin 2\theta + A_3^k \theta_k.$$

Внося во второе равенство значение вектора a_s^* из первого равенства и заменяя $\alpha_s = a_s - a_s^*$, получаем искомую формулу

$$\begin{aligned} 2b_s &= 2a_s + (a_s^* - a_s) + (a_s - a_s^*) \cos 2\theta + A_3^k (a_k - a_k^*) \sin 2\theta + \\ &+ A_3^k \theta_k = 2a_s + 2(\delta_s^k \sin \theta - A_3^k \cos \theta) (a_k - a_k^*) \sin \theta + A_3^k \theta_k = \\ &= 2a_s + (\delta_s^k \sin \theta - A_3^k \cos \theta) (a_k + a_k - 2a_k + \alpha_k \cos 2\omega + \\ &+ A_1^i \alpha_i \sin 2\omega + A_1^i \omega_i) \sin \theta + A_3^k \theta_k. \quad (25) \end{aligned}$$

8. Рассмотрим преобразование связности A_2 в связность A_2^* , определяемое тензором аффинной деформации (20; 1):

$$T_{sk}^i = \Gamma_{sk}^{*i} - \Gamma_{sk}^i,$$

и найдем соответствующую формулу преобразования чебышевского вектора. Согласно (3) и (20; 2) находим

$$\begin{aligned} \nabla_s^* A_i^s &= -2A_i^s a_s = \nabla_s A_i^s + T_{sl}^s A_l^i - T_{si}^l A_l^s = \\ &= -2A_i^s a_s + T_{sl}^s A_l^i - T_{si}^l A_l^s. \end{aligned}$$

Следовательно, искомая формула имеет вид

$$a_i^* = a_i - \frac{1}{2} T_{si}^s - \frac{1}{2} A_i^k A_l^s T_{sk}^l. \quad (26)$$

При проективном соответствии, когда

$$T_{sk}^i = \delta_s^i p_k + \delta_k^i p_s,$$

чебышевские векторы преобразуются следующим образом:

$$a_i^* = a_i - p_i. \quad (27)$$

9. По аналогии с § 27 построим, пользуясь формулами (2), (11) и (13), тензор D сети A :

$$\begin{aligned} D_{sk}^i &= A_{s|h}^i + (A_{\beta \gamma}^i A_k^p - A_{\gamma \beta}^i A_k^p) a_p = A_{s|h}^i + (A_s^p \delta_k^i - A_k^i \delta_s^p) a_p = \\ &= -(A_{\beta \gamma}^i A_k^p + A_{\gamma \beta}^i A_k^p) a_p = -2i (\Gamma_w^i v_s v_k + \Gamma_w^i \omega_s \omega_k) \end{aligned}$$

и ее тензор S :

$$S_{sk}^i = A_s^l D_{lk}^i = 2 (\Gamma_w^i v_s v_k - \Gamma_w^i \omega_s \omega_k).$$

Свойства этих тензоров, отмеченные для случая римановой геометрии в § 27, остаются справедливыми и для произвольного пространства аффинной связности.

§ 29. Построение сети с данным чебышевским вектором

Докажем теорему: *в произвольном A_2 сеть (p, q) однозначно определяется заданием своего чебышевского вектора a_i и заданием направлений вектора p_i в точках произволь-*

ной линии L_1 , и направлений вектора q_i в точках произвольной линии L_2 .

Пусть (v, w) — произвольная регулярная сеть. Разложим направляющие векторы p_i и q_i искомой сети по векторам v_i и w_i :

$$p_i = v_i + \sigma w_i, \quad q_i = v_i + \rho w_i.$$

Рассмотрим связность $\overset{*}{A}_2$, полученную из данной связности A_2 проективным преобразованием с вектором a_i . Теорема будет доказана, если мы установим существование чебышевской в $\overset{*}{A}_2$ сети, удовлетворяющей второму ее условию. Требование задачи приводит к двум дифференциальным уравнениям

$$p_{i1s} p^i q^s = 0, \quad q_{i1s} q^i p^s = 0 \quad (1)$$

с частными производными первого порядка и двумя неизвестными функциями σ и ρ . Если сеть (v, w) принять за координатную, то $v^1 = w^2 = v_2 = w_1 = 0$, а система (1) примет вид

$$\omega^1 \sigma_1 = f(\sigma, \rho, \sigma_2, u^1, u^2), \quad \omega^1 \rho_1 = f(\sigma, \rho, \rho_2, u^1, u^2).$$

Так как в силу регулярности сети (v, w) $\omega^1 \neq 0$, то эта система имеет согласно общей теории однозначное решение, если заданы значения функций σ и ρ на кривых L_1 и L_2 соответственно. Однако эти значения в свою очередь однозначно определяются заданием направлений вектора p_i в точках кривой L_1 , и направлений вектора q_i в точках кривой L_2 . Отсюда следует справедливость высказанной теоремы.

Отметим два ее следствия:

1. Сеть однозначно определяется своим чебышевским вектором и своими направлениями в точках произвольной линии. Для доказательства считать линии L_1 и L_2 совпадающими.

2. Сеть однозначно определяется своим чебышевским вектором и двумя пересекающимися линиями L_1 и L_2 , входящими в различные семейства ее линий. Для доказательства направления векторов p_i и q_i задать в точках линий L_1 и L_2 касательными к этим линиям,

§ 30. Полугеодезические сети

1. Пусть две связанные сети (v, w) и (v, w) пространства A_2 имеют равные чебышевские векторы a_i . Докажем, что их общее семейство (v) геодезическое. После проективного преобразования с вектором a_i обе рассматриваемые сети станут чебышевскими и направление вектора v_i будет переноситься параллельно как по линиям семейства (w) , так и по линиям семейства (w) . Отсюда следует, что

поле v_i будет полем абсолютно параллельных направлений новой связности. Следовательно, линии (v) — геодезические и в преобразованной и в исходной связностях.

2. Рассмотрим геодезическое семейство (v) и найдем условие, при котором вектор a_i может быть чебышевским вектором сети (v, w) , содержащей данное семейство. Для существования такой сети необходимо и достаточно, чтобы в связности A_2^* , полученной из данной проективным преобразованием с вектором a_i , направляющие векторы v_i определили поле абсолютно параллельных направлений.

Действительно, семейство линий (v) в новой связности A_2^* можно бесконечным числом способов дополнить до чебышевской сети, выбирая за второе семейство ее линий линии $\varphi(u^i) = \text{const}$, так, чтобы функция φ удовлетворяла одному дифференциальному уравнению

$$\varphi_{i||s}\varphi^i v^s = 0. \quad (1)$$

В силу этого уравнения касательные направления линий (φ) переносятся вдоль линий (v) параллельно в связности A_2^* и сеть (v, φ) будет чебышевской, но тогда ее чебышевский вектор в исходной связности будет равен a_i .

Переходя к условиям, которым должен удовлетворять вектор a_i , заметим, что в исходной связности

$$v_{i||s}v^i = \sigma v_s, \quad (2)$$

а в связности A_2^* производная

$$v_{i||s} = \partial_s v_i - \overset{*}{\Gamma}_{si}^k v_k = v_{i||s} - v_i a_s - v_s a_i$$

должна удовлетворять условию $v_{i||s}v^i = 0$. Таким образом,

искомое условие имеет вид

$$a_s v^s = \sigma, \quad (3)$$

где σ определено равенством (2). Итак, для того чтобы данное геодезическое семейство (v) можно было дополнить до сети (v, w) с данным чебышевским вектором a_i , необходимо и достаточно, чтобы вектор a_i удовлетворял условию (3), где множитель σ определен уравнением (2).

3. Уточним предыдущий результат теоремой: *если вектор a_i удовлетворяет уравнению (3), то сеть (v, w) с данным геодезическим семейством (w) и чебышевским вектором a_i определяется однозначно заданием направлений линий семейства (v) вдоль произвольной кривой L .*

Для доказательства построим произвольную сеть (v, p) с чебышевским вектором a_i в данной связности A_2 и, следовательно, чебышевскую в связности A_2 . Направляющий вектор w_i искомого семейства (w) разложим по векторам v_i и p_i :

$$w_i = \lambda v_i + p_i. \quad (4)$$

Если $a_i^s = v_i p^s + p_i v^s$ — аффиноор сети (v, p) , то аффиноор b_i^s сети (v, w) можно записать в виде

$$b_i^s = v_i w^s + w_i v^s = a_i^s + 2\lambda v_i v^s. \quad (5)$$

Действительно, $b_i^s b_s^i = a_i^s a_s^i = 2$. Потребуем, чтобы сеть b в связности A_2^* была чебышевской:

$$\begin{aligned} b_{i||s}^s &= a_{i||s}^s + 2\lambda_s v_i v^s + 2\lambda v_{i||s} v^s + 2\lambda v_i v_{||s}^s = \\ &= 2v_i [\lambda_s v^s + \lambda (v_{||s}^s + q_s v^s)] = 0, \end{aligned}$$

где вектор q_i определен производной $v_{i||s} = v_i q_s$ вектора v_i , направления которого в связности A_2^* абсолютно параллельны. Таким образом, функция λ должна быть решением уравнения

$$\partial_s \ln \lambda v^s + v_{||s}^s + q_s v^s = 0$$

и однозначно определяется заданием ее значений на линии L . Эти значения в свою очередь однозначно определяются заданием направлений вектора w_i в точках кривой L , что и доказывает теорему.

Если направления вектора w_i в точках кривой L задать касательными к этой кривой, то кривая L войдет в семейство (w) , следовательно, *полугеодезическая сеть* (v, w) *однозначно определяется заданием геодезического семейства* (v) , *чебышевского вектора* a_i , *удовлетворяющего условию* (3), *и одной линией* L *семейства* (w) .

Предположим, что нам известна сеть (v, w) с геодезическим семейством (v) и чебышевским вектором a_i . Условие (3) для вектора a_i необходимо выполнено, следовательно, для каждой полугеодезической сети (v, w) можно построить бесконечное число связанных с ней сетей (v, w) , имеющих такой же чебышевский вектор, как и сеть (v, w) . Выбор сети (v, w) однозначно определяется заданием одной линии семейства (w) .

4. Для того чтобы в данном A_2 существовала сеть (v, w) с геодезическим семейством (v) и данным чебышевским вектором a_i , необходимо и достаточно, чтобы после проективного преобразования с вектором a_i новая связность A_2^* имела поле абсолютно параллельных направлений. Линии этого поля составят одно семейство линий (v) искомой сети, второе ее семейство (w) определится, согласно п. 3, заданием одной своей линии.

5. Докажем теорему: *если в данном* A_2 *существуют две несвязанные полугеодезические сети* (v, w) *и* (v, w) *с равными чебышевскими векторами* a_i , *то геодезическая сеть* (v, v) , *полученная объединением геодезических семейств данных сетей, имеет тот же чебышевский вектор* a_i .

Для доказательства произведем проективное преобразование с вектором a_i . Направления векторов v_i и v_i будут в новой связности A_2^* абсолютно параллельны, следовательно, сеть (v, v) будет в этой связности декартовой, а в исходной—геодезической с чебышевским вектором a_i .

Существование трех несвязанных полугеодезических сетей с равными чебышевскими векторами влечет за собой существование ∞^2 таких сетей, так как связность A_2^* в этом случае будет иметь три, а следовательно, и ∞^1

полей абсолютно параллельных направлений. Но тогда исходное A_2 имеет бесконечное число особых геодезических сетей с чебышевским вектором a_i .

6. Рассмотрим случай, когда чебышевский вектор a_i искомой сети с данным геодезическим семейством линий (v) — градиент. Направляющий псевдовектор v_i^* этого семейства удовлетворяет условию $v_{i|s}^* v^s = \rho v_i$.

Если λ — одно из решений уравнения $\partial_s \ln \lambda v^s = -\rho$, то вектор $v_i = \lambda v_i^*$ удовлетворяет условию

$$v_{i|s} v^s = (v_{s|i} + \varepsilon_{is} v_{r|}^k) v^s = v_{s|i} v^s - v_i v_{s|}^s = 0. \quad (6)$$

Признак существования искомой сети (3) принимает теперь вид

$$a_s v^s - \rho = -a^s v_s - v_{s|}^s = -e^{-\alpha} (e^\alpha v_s)_{|}^s = 0.$$

Таким образом, для того чтобы геодезическое семейство линий (v) можно было включить в сеть с чебышевским вектором $a_i = \partial_i a$, необходимо и достаточно, чтобы функция e^α была интегрирующим множителем направляющего вектора v_i , пронормированного так, что выполняется равенство (6).

В римановой геометрии равенство (6) выполняется для направляющего орта каждого геодезического семейства, следовательно, признак существования полугеодезической сети с данным геодезическим семейством (v) и чебышевским вектором $a_i = \partial_i a$ имеет в римановой геометрии вид

$$e^\alpha v_i = \text{grad}, \quad (7)$$

где v_i — направляющий орт геодезического семейства (v) .

7. Чтобы указать признак существования в данном A_2 полугеодезической сети с чебышевским вектором a_i , произведем проективное преобразование этого A_2 с вектором a_i . Направления геодезического семейства (v) искомой сети должны стать абсолютно параллельными и, следовательно (§ 19, п. 3), двойными направлениями нового тензора Риччи.

Направляющий вектор v_i этого семейства, таким образом, должен быть решением уравнения

$$R_{is}^* v^i v^s = (R_{is} - a_{i|s} + a_i a_s) v^i v^s = 0.$$

Используя предыдущий результат, мы можем сказать: для существования в данном A_2 полугеодезической сети с чебышевским вектором a_i необходимо и достаточно, чтобы: 1) сеть, определяемая тензором $R_{(is)} - a_{(i|s)} + a_i a_s$, была полугеодезической, 2) направляющий вектор v_i ее геодезического семейства удовлетворял условию $a_i v^i = \sigma$, где σ определено равенством $v_i |_{s} v^i = \sigma v_s$.

В случае, когда связность риманова и вектор a_i градиентен ($a_i = \partial_i a$), второе условие, согласно п. 6, можно заменить условием (7).

§ 31. Условия интегрируемости деривационных формул

Для симметрии дальнейших выкладок введем векторы

$$M_s = a_s + \alpha_s = a_s - \alpha_s = a_s + a_s - a_s; \quad (1)$$

(тройка номеров α, β, γ принимает, как и выше, значения (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)). Векторы тройки сетей выражаются через введенные векторы следующим образом:

$$2a_s = M_s + M_s, \quad 2\alpha_s = M_s - M_s. \quad (2)$$

В этих обозначениях деривационные формулы (28; 2) примут вид

$$A_{i|k}^s = -A_i^s A_k^p M_p + A_i^s A_k^p M_p. \quad (3)$$

Составим условия их интегрируемости:

$$\begin{aligned} A_{i|k}^s \cdot^k &= R_{\cdot i}^k A_k^s - R_{\cdot k}^s A_i^k = \\ &= -(-A_i^s A^k M_p + A_i^s A^k M_p) A_k^q M_q + A_i^s A_k^p \times \\ &\times (M^k + M^k) M_p - A_i^s A_k^p M_p \cdot^k + (-A_i^s A^k M_p + \\ &+ A_i^s A^k M_p) A_k^q M_q - A_i^s A_k^p (M^k + M^k) M_p + A_i^s A_k^p M_p \cdot^k = \\ &= A_i^s A^{pq} [M_{p|q} + M_p M_q - M_p (M_q + M_q)] - \\ &- A_i^s A^{pq} [M_{p|q} + M_p M_q - M_p (M_q + M_q)]. \quad (4) \end{aligned}$$

Если зафиксировать номер α , то полученные три уравнения эквивалентны трем скалярным уравнениям, полученным при свертывании обеих частей (4) с аффинорами $A_{\alpha}^i, A_{\beta}^i, A_{\gamma}^i$. Свертывание с A_{α}^i приводит к тождеству.

Свертывание с A_{β}^i дает

$$\begin{aligned} A_{\gamma}^{pq} R_{pq} &= A_{\gamma}^{pq} [M_{p|q} + M_p M_q - M_p (M_q + M_q)] = \\ &= (A_{\gamma}^{pq} M_p)_{|q} + A_{\gamma}^{pq} M_p M_q. \end{aligned} \quad (5)$$

Свертывание с A_{γ}^i приводит к уравнению, получаемому из (5) заменой номеров $(\gamma\alpha\beta) \rightarrow (\beta\gamma\alpha)$. Следовательно, все условия интегрируемости содержатся в равенствах:

$$A_{1|1}^{pq} [M_{p|q} + M_p M_q - M_p (M_q + M_q) - R_{pq}] = 0, \quad (6)$$

$$A_{2|2}^{pq} [M_{p|q} + M_p M_q - M_p (M_q + M_q) - R_{pq}] = 0, \quad (6')$$

$$A_{3|3}^{pq} [M_{p|q} + M_p M_q - M_p (M_q + M_q) - R_{pq}] = 0. \quad (6'')$$

Предположим, что нам даны аффинная связность и три вектора a_i ($\alpha = 1, 2, 3$). Тогда формулы (1) определяют векторы M_i и уравнения (6) в общем случае определяют тройку сетей A с заданными чебышевскими векторами a_i . Векторы a_i произвольно задать нельзя: если из уравнений (6) найти аффиноры A_{α}^i и потребовать, чтобы чебышевские векторы определяемых ими сетей имели заданные значения, то мы получим шесть дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка, наложенных на шесть координат векторов a_i .

В случае римановой геометрии выразим векторы a_i и α_i нормальной тройки сетей через три вектора $a_i = a_i$, $c_i = a_i$, $\alpha_i = \alpha_i$.

Векторы M_i будут

$$M_1 = 2c_i - a_i - \alpha_i, \quad M_2 = a_i - \alpha_i, \quad M_3 = a_i + \alpha_i, \quad (7)$$

и уравнения (6) примут вид

$$a^{pq} R_{pq} = 2K \operatorname{ctg} \omega = a^{pq} (-a_{p|q} + 3a_p a_q - \\ - \alpha_{p|q} - \alpha_p \alpha_q + 2c_{p|q} + 2a_p \alpha_q - 4c_p a_q), \quad (8)$$

$$c^{pq} R_{pq} = c^{pq} (a_{p|q} - a_p a_q - \alpha_{p|q} - \alpha_p \alpha_q + 4c_p a_q - 2a_p \alpha_q) = 0, \quad (8')$$

$$d^{pq} R_{pq} = \frac{2K}{\sin \omega} = d^{pq} (a_{p|q} - a_p a_q + \alpha_{p|q} + \\ + 3\alpha_p \alpha_q + 2a_p \alpha_q - 4c_p a_q). \quad (8'')$$

Найденные иным способом в § 26 формулы (26; 10—13) являются следствиями формул (8) и (8'') и получаются из них заменой вектора c_i через векторы a_i , α_i , сетевой угол ω и его градиент ω_i . Формулы (26; 14—16) получаются аналогичным способом из формулы (8').

§ 32. Сопряженные связности

В работе [6] А. П. Норден развил теорию пар сопряженных связностей, имеющую широкие приложения в различных вопросах дифференциальной геометрии. Мы изложим некоторые факты этой теории и применим ее к ряду вопросов теории сетей.

1. Две аффинные связности Γ_{is}^h и Γ_{is}^{*h} называются сопряженными относительно сети A , если при параллельном перенесении произвольного направления v_i по произвольной кривой L в одной из них направление w_i , сопряженное направлению v_i относительно сети A , переносится параллельно по той же кривой L в другой связности. Сеть A называется при этом базисом пары сопряженных связностей.

Если сеть A и связность Γ_{sh}^i заданы, то, как сейчас будет показано, связность Γ_{sh}^{*i} , сопряженная с Γ_{sh}^i относи-

тельно сети A , определяется однозначно ¹⁾. Будем искать тензор аффинной деформации

$$T_{sk}^i = \overset{*}{\Gamma}_{sk}^i - \Gamma_{sk}^i. \quad (1)$$

Пусть v и w — две последовательности направлений, сопряженных относительно сети A , заданные вдоль кривой L . Будем считать, что эти последовательности принадлежат двум полям направлений v_i и w_i соответственно. Запишем условия

$$w_{i|s} w^i du^s = 0, \quad (2)$$

$$v_{i|s} v^i du^s = v_{is} v^i du^s - T_{is}^k v_k v^i du^s = 0 \quad (3)$$

параллельного переноса направления w_i в связности $\overset{*}{\Gamma}$ и параллельного переноса направления v_i в связности $\overset{*}{\Gamma}$ по одной и той же кривой L (две черты обозначают дифференцирование в связности $\overset{*}{\Gamma}$). Полагая $w_i = A_i^s v_s$ и учитывая условие (3), из (2) находим

$$\begin{aligned} w_{i|s} w^i du^s &= (A_i^k v_k)_{|s} A^i v^p du^s = \\ &= -A_i^k v_{k|s} A_p^i v^p du^s - A_{i|s}^k v_k A_p^i v^p du^s = \\ &= v_{p|s} v^p du^s - A_{i|s}^k A_p^i v_k v^p du^s = \\ &= (T_{ps}^k - A_{i|s}^k A_p^i) v_k v^p du^s = 0. \end{aligned}$$

Так как направление кривой L (то есть du^s) и направления v_i и w_i в каждой точке можно выбрать произвольно, то последнее равенство возможно лишь при

$$T_{ps}^k = A_{i|s}^k A_p^i + \delta_p^k x_s.$$

Вектор x_s легко определяется: из условия симметрии

$$\epsilon^{ps} T_{ps}^k = A_{i|s}^k A_p^i + x^k = 0$$

находим $x^k = -A_{i|s}^k A_p^i = 2a^k$, где a^k — чебышевский век-

¹⁾ Как и всюду выше, мы рассматриваем связности без кручения.

тор базиса в связности Γ . Следовательно, тензор

$$T_{ps}^k = A_{i|s}^k A_p^i + 2a_s \delta_p^k \quad (4)$$

определен однозначно, и наше утверждение доказано.

Условие (4) является необходимым и достаточным для сопряженности связностей Γ и $\overset{*}{\Gamma}$ относительно сети A . Необходимость его следует из того, что оно является следствием выполнимости условий (2) и (3) для произвольной кривой L и произвольной пары направлений v и w , сопряженных относительно сети A . Если же оно выполнено, то любое одно из условий (2) или (3) есть следствие другого из них и условия (4), в чем легко убедиться.

Из равенства (4) имеем

$$T_{ks}^k = A_{i|s}^k A_k^i + 4a_s = 4a_s. \quad (5)$$

Обозначим через $\overset{*}{a}_s$ чебышевский вектор сети A в связности $\overset{*}{\Gamma}$. Если теперь поменять ролями связности Γ и $\overset{*}{\Gamma}$, то тензор (1) изменит знак, следовательно, по аналогии с (4) и (5) имеем

$$T_{ps}^k = -T_{ps}^k = A_{i|s}^k A_p^i + 2\overset{*}{a}_s \delta_p^k, \quad (6)$$

$$T_{ks}^k = 4\overset{*}{a}_s = -T_{ks}^k = -4a_s. \quad (7)$$

Из второго равенства видно, что чебышевские векторы базисной сети в сопряженных связностях отличаются только знаком. Учитывая это и складывая почленно равенства (4) и (6), получаем

$$(A_{i|s}^k + A_{i||s}^k) A_p^i = 0, \quad A_{i|s}^k + A_{i||s}^k = 0. \quad (8)$$

Величины

$$e_{sk}^i = \frac{1}{2} (\Gamma_{sk}^i + \overset{*}{\Gamma}_{sk}^i) \quad (9)$$

преобразуются при замене криволинейных координат, как коэффициенты связности, и, следовательно, определяют связность, которая называется *средней связностью пары сопряженных связностей*. Производная аффинора сети в этой связности обращается в нуль в силу (8):

$$\overset{\circ}{\nabla}_s A_i^k = \partial_s A_i^k - e_{is}^p A_p^k + e_{ps}^k A_i^p = \frac{1}{2} (A_{i|s}^k + A_{i||s}^k) = 0, \quad (10)$$

следовательно, базис пары сопряженных связностей является декартовой сетью средней связности, а средняя связность в общем случае есть связность Вейля.

Если B_i^s — аффинор произвольной сети, то

$$\begin{aligned} \overset{c}{\nabla}_s B_i^s &= -2B_i^s b_s = \frac{1}{2} (B_{i|s}^s + B_{i||s}^s) = \\ &= -B_{i1}^s b_s - B_{i2}^s b_s = -B_{i1}^s (b_s + b_s), \end{aligned}$$

следовательно, чебышевский вектор b_s произвольной сети в средней связности равен среднему арифметическому чебышевских векторов b_s и b_s этой сети в сопряженных связностях:

$$b_s = \frac{1}{2} (b_s + b_s). \quad (11)$$

2. Понятие сопряженности связностей позволяет дать простое и важное истолкование геодезического вектора сети: геодезический вектор сети A относительно сети A является ее чебышевским вектором в связности G , сопряженной со связностью G относительно сети A . Для доказательства обозначим ковариантное дифференцирование в связности G символом $\overset{\gamma}{\nabla}_s$. Если, далее, $\overset{\gamma}{\Gamma}_{sk}^i$ — коэффициенты этой связности, то, согласно (4),

$$\overset{\gamma}{T}_{sk}^i = \overset{\gamma}{\Gamma}_{sk}^i - \overset{\gamma}{\Gamma}_{sk}^i = A_{p|k}^i A_s^p + 2a_k \delta_s^i. \quad (12)$$

По формуле (28; 26) находим чебышевский вектор a_r сети A в связности G

$$\begin{aligned} 2a_r &= 2a_r - A_r^k \overset{\gamma}{T}_{sk}^i A_i^s - \overset{\gamma}{T}_{sr}^s = \\ &= 2a_r + A_r^k A_{p|k}^i A_i^s - 4a_r = 2a_r + A_r^k (A_{k|p}^i + \varepsilon_{pk} A_{m|}^i) A_i^s - \\ &- 4a_r = 2a_r - 2a_r + 2a_r - 4a_r = 2(a_r - a_r - a_r) = 2a_r, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Важным следствием этого результата является следующее предложение: *если сеть, аполлярная базису пары, чебышевская (геодезическая) в одной ее связности, то она геодезическая (чебышевская) во второй связности.*

§ 33. Четверки сопряженных связностей

Если в связности G дана тройка сетей A , то можно построить три связности G , сопряженные с данной связностью относительно сетей тройки. Пусть G ($\alpha=1, 2, 3$) — связность, сопряженная со связностью G относительно сети A . Докажем, что связности G и G сопряжены относительно сети A . Если произвольное направление v_i переносится параллельно по кривой L в связности G , то ввиду сопряженности связностей G и G относительно сети A направление $A_i^s v_s$ переносится параллельно по той же кривой в связности G , а в силу сопряженности связностей G и G относительно сети A направление $A_i^h (A_i^s v_s) = -A_i^y v_s$ переносится параллельно по кривой L в связности G , а это и есть условие сопряженности связностей G и G относительно сети A . Полученные четыре связности, из которых каждые две сопряжены относительно одной из сетей тройки, назовем *четверкой сопряженных связностей*.

При рассмотрении многих вопросов, связанных с тройками сетей и четверками сопряженных связностей, очень удобна следующая, так называемая *треугольная схема I* ([58], § 4). Изобразим сети тройки тремя прямыми проективной плоскости. Четыре области, на которые они разбивают плоскость, будем считать образами четырех связностей G и G . Как видно из схемы, обозначения можно выбрать так, что каждая пара связностей будет изображаться такими областями, которые разделяются прямой, изо-

бражающей сеть, относительно которой эти связности сопряжены. Внутри каждой области вдоль ограничивающих ее прямых расставим чебышевские векторы сетей, изображаемых этими прямыми, в связности, изображаемой этой областью.

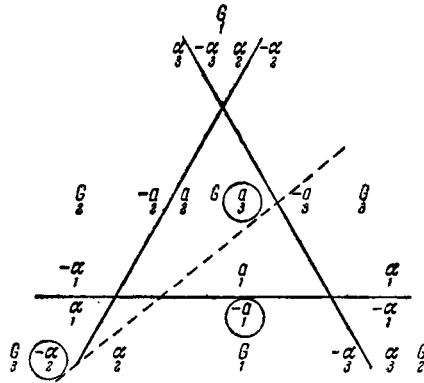


Схема I.

треугольника схемы; тогда сумма векторов, «встречаемых» при движении по этой прямой, равна нулю. Так, для секущей на схеме I имеем («встречаемые» векторы обведены кружками)

$$-\frac{a}{2} - \frac{a}{1} + \frac{a}{3} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{a}{3} - \frac{a}{1} = \frac{a}{2}.$$

§ 34. Специальные пары сопряженных связностей

1. *Кодацциева пара.* Выбирая произвольный бивектор ε_{is} и принимая тензор $A_{is} = \varepsilon_{ks} A_i^k$ базисной сети за основной тензор средней метрики, ее дополнительный вектор ω_s найдем из равенств

$$\varepsilon_{sk|i} = 2\omega_i \varepsilon_{sk}, \quad \varepsilon_{sk||i} = 2\omega_i^* \varepsilon_{sk},$$

$$\nabla_i^c \varepsilon_{sk} = 2\omega_i^c \varepsilon_{sk} = \frac{1}{2} (\varepsilon_{sk|i} + \varepsilon_{sk||i}) = (\omega_i + \omega_i^*) \varepsilon_{sk}.$$

где ω_i и ω_i^* — дополнительные векторы выбранного бивектора ϵ_{is} в связностях Γ и Γ^* . На основании (13;3), (32;7) и (32;9) имеем

$$\begin{aligned} 2\omega_s^c &= \omega_s + \omega_s^* = -\frac{1}{2}(\Gamma_{ks}^k + \Gamma_{ks}^{*k}) + \partial_s \ln \epsilon_{12} = \\ &= -\Gamma_{ks}^k + \partial_s \ln \epsilon_{12} - \frac{1}{2}(\Gamma_{ks}^{*k} - \Gamma_{ks}^k) = \\ &= 2\omega_s - \frac{1}{2}T_{ks}^k = 2\omega_s - 2a_s = 2\omega_s^* - 2a_s^*, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\omega_s - \omega_s^* = 2a_s. \quad (2)$$

Отсюда легко следует теорема: *если для пары сопряженных связностей Γ и Γ^* выполнено одно из трех требований:*

1) *базис пары — кодацциева сеть ¹⁾ в связности Γ*

$$(a_s - \omega_s = \text{grad}),$$

2) *базис пары — кодацциева сеть в связности Γ^**

$$(a_s^* - \omega_s^* = \text{grad}),$$

3) *средняя метрика — риманова*

$$(\omega_s^c = \text{grad}),$$

то выполнены все три. Пара сопряженных связностей, удовлетворяющая этим условиям, называется кодацциевой парой.

2. *Эквивалентная пара.* Из сравнения равенств (1) и (2) легко получается еще одна теорема: *если для пары сопряженных связностей Γ и Γ^* выполнены два из следующих четырех условий:*

1) *связность Γ эквивалентна ($\omega_s = \text{grad}$),*

2) *связность Γ^* эквивалентна ($\omega_s^* = \text{grad}$),*

3) *средняя метрика эквивалентна ($\omega^c = \text{grad}$),*

4) *базисная сеть пары градиентная ($a_i = \text{grad}$), то выполнены все четыре. Пара связностей, удовлетворяющая этим условиям, называется эквивалентной парой.*

¹⁾ См. § 48 и формулу (48;2).

Отметим связь между основными компонентами ε_1 и ε_2 эквиваффинных бивекторов двух сопряженных связностей и их средней связности. Из равенств (19;3)

$$\Gamma_{sh}^s = \partial_k \ln \varepsilon_1, \quad \Gamma_{sh}^{*s} = \partial_k \ln \varepsilon_2, \quad \varepsilon_{sh}^s = \partial_k \ln \varepsilon_c$$

находим

$$\partial_k \ln \varepsilon_c = \frac{1}{2} (\Gamma_{sh}^s + \Gamma_{sh}^{*s}) = \frac{1}{2} \partial_k \ln (\varepsilon_1 \varepsilon_2),$$

откуда

$$\varepsilon_c = c \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \quad (c = \text{const}). \quad (3)$$

Так как основные компоненты определяются с точностью до постоянного множителя, то можно считать $c = 1$, следовательно, *основная компонента эквиваффинного бивектора средней метрики эквиваффинной пары есть среднее геометрическое основных компонент эквиваффинных бивекторов связностей этой пары.*

Чебышевский вектор базиса эквиваффинной пары, согласно (32;5) и (32;1), следующим образом выражается через компоненты ε_1 и ε_2 эквиваффинных бивекторов:

$$a_i = \frac{1}{4} T_{st}^s = \frac{1}{4} (\Gamma_{st}^{*s} - \Gamma_{st}^s) = \frac{1}{4} \partial_i \ln \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \quad (4)$$

3. *Вейлева пара.* Если одна из связностей пары вейлева, то другая связность тоже вейлева. Действительно, два поля направлений v_i и w_i , абсолютно параллельных в первой связности, переносятся параллельно по любому пути, но это значит, что сопряженные им направления ${}^*v_i = A_i^j v_s$ и ${}^*w_i = A_i^j w_s$ будут переноситься параллельно по любому пути во второй связности, что и доказывает наше утверждение.

Если $g_{is} = v_{(i} w_{s)}$ — метрический тензор первой связности, то метрический тензор второй связности будет

$${}^*g_{is} = {}^*v_{(i} {}^*w_{s)} = A_i^l A_s^m v_{(l} w_{m)} = A_i^l A_s^m g_{lm}. \quad (5)$$

Отсюда легко следует, что *угол между двумя направлениями в одной связности равен углу между направлениями, сопряженными данным относительно базиса, в другой связности, и что сетевые углы базиса и любой аполярной ему сети в обеих сопряженных связностях одинаковы.*

4. Минимальная пара. Так называется вейлева пара, базисная сеть которой ортогональна в одной, а следовательно, и во второй связности. Так как изотропные направления первой связности сопряжены относительно базиса, то они являются изотропными и для второй связности, следовательно, эти связности Вейля находятся в конформном соответствии.

Если ортогональную базисную сеть повернуть на постоянный угол в первой, а следовательно, и во второй метрике, то ее чебышевский вектор не изменится. Отсюда следует, что тензор аффинной деформации (32;4) тоже не изменится, так как для аффинора ортогональной сети выражение $A_i^h |_s A_p^i = -2g_p^h \tilde{a}_s$ не меняется при ее повороте на постоянный угол; а это означает, что *минимальная пара сопряженных связностей допускает ∞^1 базисов, получаемых друг из друга поворотом на постоянный угол.* Каждый такой базис будет декартовой сетью средней метрики, следовательно, *средняя метрика минимальной пары допускает ∞^1 декартовых сетей, то есть квазиевклидова.*

5. Квазиевклидова пара. Если одна из связностей пары квазиевклидова, то вторая тоже квазиевклидова, так как три поля направлений, сопряженных полям абсолютно параллельных направлений первой связности, будут абсолютно параллельны во второй связности. Пара таких сопряженных связностей называется *квазиевклидовой.*

6. Риманова пара. Так называют пару сопряженных геометрий Римана. Риманову пару можно охарактеризовать как эквивалентную пару Вейля (см. § 19, п. 5). Следовательно, произвольная кодацциева сеть римановой геометрии является базисом римановой пары, содержащей данную геометрию.

Найдем связь гауссовых кривизн сопряженных римановых геометрий. Для этого рассмотрим биссекторную сеть базиса в первой метрике. Так как она аполярна базису, то, согласно предыдущему, она будет ортогональна и во

второй геометрии, то есть будет биссекторной сетью базиса в обеих сопряженных геометриях. Рассмотрим теперь формулы (26;5)

$$\left. \begin{aligned} 2g_i^s c_s &= d_i^s (a_s + \alpha_s) \sin \omega, \\ 2g_i^{**} c_s &= d_i^{**} (a_s + \alpha_s) \sin \omega^* \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

для чебышевских векторов c_s, c_s^* биссекторной сети в первой и второй геометриях пары (рассматриваются нормальные тройки базисной сети). Из треугольной схемы II для тройки сетей

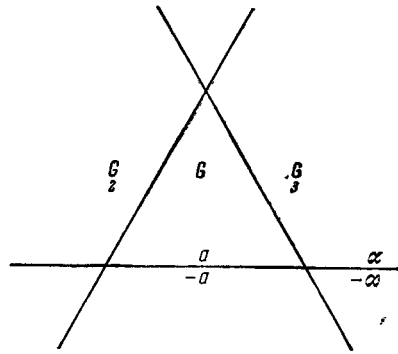


Схема II.

мы II для тройки сетей $a = A, d = A, c = A$ сле-

дует, что $a_s = -a_s$ и $\alpha_s = -\alpha_s$. Так как, далее, абсолютные величины сетевого угла базиса a и аффиноры его характеристической сети равны, то векторы (6) отличаются разве лишь знаком:

$$g_i^{**} c_s = \pm g_i^s c_s.$$

Вычисляя дивергенции векторов c и c^* , находим

$$\bar{K} = \varepsilon^{is} \partial_s (g_i^{**} c_k) = \pm \varepsilon^{is} \partial_s (g_i^s c_k) \frac{\varepsilon}{\varepsilon^*} = \pm K \frac{\varepsilon}{\varepsilon^*},$$

где $K, \varepsilon_{is}, \varepsilon$ и $\bar{K}, \varepsilon_{is}^*, \varepsilon^*$ являются соответственно гауссовыми кривизнами, дискриминантными бивекторами и их основными компонентами в первой и второй геометриях.

Сравнивая это равенство с (4), получаем искомое соотношение

$$\frac{1}{4} \partial_s \ln \frac{K}{\bar{K}} = a_s. \quad (7)$$

Если одна из геометрий римановой пары имеет постоянную гауссову кривизну (например, $\bar{K} = \text{const}$) то чебы-

шевский вектор базиса равен одной четвертой логарифмической производной гауссовой кривизны первой геометрии:

$$a_i = \frac{1}{4} \partial_i \ln K. \quad (8)$$

Обратно, если чебышевский вектор базиса в первой римановой связности выражается формулой (8), то кривизна сопряженной ей римановой связности постоянна.

Из равенства (7) легко получаем следующее предложение: *если для римановой пары из трех положений:*

- 1) *кривизна первой геометрии постоянна,*
- 2) *кривизна второй геометрии постоянна,*
- 3) *базисная сеть — чебышевская*

выполнены два, то выполняется и третье.

7. *Евклидова пара.* Так называют пару сопряженных евклидовых геометрий. Ее можно охарактеризовать как эквивалентную квазиевклидову пару. Чтобы получить евклидову пару, достаточно найти геометрию, сопряженную данной евклидовой геометрии относительно произвольной кодацциевой сети.

§ 35. Инвариантный пучок векторов сети

В римановой геометрии для тензора каждой сети можно было указать *метрическое* нормирование, при котором дискриминант этого тензора равен дискриминанту метрического тензора. В произвольном пространстве аффинной связности эта возможность отпадает. Однако для сети, *не содержащей геодезических семейств*, и в этом случае можно инвариантно пронормировать тензор сети, а риманову геометрию, определяемую нормированным таким способом тензором, использовать для изучения некоторых свойств сети.

1. Нормирование тензора сети A_1 , не содержащей геодезических семейств, основано на том, что у такой сети геодезический вектор α_s и вектор $\bar{\alpha}_s = A_s^i \alpha_i$ независимы: следовательно, тензор

$$\alpha_i \alpha_s + \bar{\alpha}_i \bar{\alpha}_s = (\delta_i^m \delta_s^n + A_s^m A_i^n) \alpha_m \alpha_n = A_{is} A^{mn} \alpha_m \alpha_n, \quad (1)$$

где A_{1s} — произвольно нормированный тензор сети, а A_1^{mn} — тензор, ему взаимный ($A_{1s}A_1^{sh} = \delta_s^h$), не обращается в нуль. Левая, а следовательно, и правая части этого равенства не зависят от выбора нормирования тензора сети A_1 . Поэтому каждое нормирование тензора сети определяет *инвариант*

$$J = A_1^{mn} a_{1m} a_{1n} = a_{1m} \bar{a}_1^m. \quad (2)$$

Однако для нас сейчас важнее то, что имеет место обратное — выбор значения инварианта J определяет нормирование тензора сети, а именно такое, при котором

$$A_{1s} = \frac{1}{J} (a_{1s} a_s + \bar{a}_1 \bar{a}_s). \quad (3)$$

Нам остается еще убедиться, что тензор (3) не зависит от выбора тройки сетей A_1, A_2, A_3 и, следовательно, от выбора геодезического вектора α_s . При замене сети A_1 на сеть A_2

$$A_2^s = A_2^s \cos \omega + A_3^s \sin \omega \quad (4)$$

новый геодезический вектор сети A_1 будет (см. 28;7)

$$\alpha_1^s = \alpha_s \cos 2\omega + \bar{\alpha}_s \sin 2\omega. \quad (5)$$

Однако при этом

$$a_{1s} a_s + \bar{a}_1 \bar{a}_s = a_{1s} a_s + \bar{a}_1 \bar{a}_s,$$

и наше утверждение доказано.

Назовем *нормальной метрикой сети* риманову геометрию V_2 с метрическим тензором

$$A_{1s} = a_{1s} a_s + \bar{a}_1 \bar{a}_s, \quad (6)$$

нормирование которого определяется значением инварианта $J = 1$. В этом случае векторы α_s и $\bar{\alpha}_s$ будут ортами

и определяют ортогональную сеть $(\alpha, \bar{\alpha})$ нормальной метрики. Чебышевский вектор этой сети в нормальной метрике

$$q_i = \bar{\alpha}_{s|_1} \cdot \alpha_i - \alpha_{s|_1} \cdot \bar{\alpha}_i \quad (7)$$

зависит от выбора тройки сетей A и при замене (4) , вызывающей поворот сети $(\alpha, \bar{\alpha})$ на угол 2ω , получает приращение $2\bar{\omega}_i = 2A_i^s \omega_s$. Следовательно, новый чебышевский вектор

$$q_i^* = q_i + 2\bar{\omega}_i. \quad (8)$$

Для того чтобы получить вектор, инвариантно связанный с сетью, рассмотрим связность G , сопряженную с данной связностью G относительно сети A и их среднюю вейлеву связность g , в которой сеть A будет ортогональна. Ее чебышевский вектор в этой связности, согласно (32;11), равен

$$\frac{1}{2} (a_i + \alpha_i)$$

и при замене (4) , то есть при повороте сети на угол $\frac{\omega}{2}$ преобразуется по следующему закону:

$$\frac{1}{2} (a_i^* + \alpha_i^*) = \frac{1}{2} (a_i + \alpha_i) + \frac{1}{2} \bar{\omega}_i.$$

Отсюда для вектора

$$\frac{1}{2} (a_i + \alpha_i) = \frac{1}{2} (a_i + \alpha_i + a_i)$$

получаем следующий закон преобразования:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (a_i^* + \alpha_i^*) &= \frac{1}{2} (a_i + \alpha_i + a_i) = \\ &= \frac{1}{2} (a_i + \alpha_i + \bar{\omega}_i + a_i) = \frac{1}{2} (a_i + \alpha_i) + \frac{1}{2} \bar{\omega}_i. \end{aligned} \quad (9)$$

Сравнение (9) и (8) показывает, что вектор

$$e_i = \frac{1}{2} (a_i + a_i) - \frac{1}{4} q_i = \frac{1}{2} (a_i + a_i) - \frac{\bar{\alpha}_s |^s \alpha_i - \alpha_s |^s \bar{\alpha}_i}{4\alpha_p \bar{\alpha}^p} \quad (10)$$

не зависит от выбора тройки сетей A и является инвариантным вектором сети. Мы будем его называть *вектором Грина сети*.

2. Другой инвариантный вектор сети мы получим рассматривая сети (p, \bar{p}) (§ 27). Эти сети ортогональны в нормальной метрике и имеют в ней равные чебышевские векторы θ_s , так как составляют друг с другом постоянные взаимные углы. Для вычисления этого чебышевского вектора обозначим через v_i орт какого-нибудь семейства линий D . Учитывая, что его производная в нормальной метрике

$$\nabla_r v_i = \bar{v}_i t_r = -\bar{v}_i \bar{\theta}_r,$$

находим

$$\begin{aligned} (D_{isk} v^i v^s v^k)_{|r} &= \nabla_r D_{isk} v^i v^s v^k - 3D_{isk} \bar{v}^i v^s v^k \bar{\theta}_r = \\ &= (\nabla_r D_{isk} + 3\bar{\theta}_r S_{isk}) v^i v^s v^k = 0, \end{aligned}$$

где $S_{isk} = A_i^l D_{lsh}$.

Так как это равенство должно выполняться для трех направляющих ортов линий D , то

$$\nabla_r D_{isk} = -3\bar{\theta}_r S_{isk} + v_r D_{isk}. \quad (11)$$

Отсюда, свертывая обе части с D^{isk} и учитывая, что $D_{isk} D^{isk} = 0$, $D^{isk} S_{isk} = -4$, получаем

$$\theta_r = \frac{1}{12} A_r^j \nabla_j D_{isk} D^{isk} \quad (12)$$

(индексы подняты дискриминантным бивектором нормальной метрики).

3. При различных значениях постоянной c линейная комбинация векторов (10) и (12)

$$t_i = c\theta_i + g_i \quad (13)$$

снова дает инвариантный вектор сети. При $c = -\frac{1}{2}$ назовем этот вектор *вектором проективной нормали*, при $c = \frac{1}{2}$ — *вектором Вильчинского*, при $c = \frac{1}{6}$ — *вектором Чеха*.

Эти названия для инвариантных векторов, равно как и название вектор Грина, нормальная метрика, заимствованы из проективно-дифференциальной геометрии: если поверхность проективного пространства P_3 нормализована [6], то есть в каждой ее точке M задана прямая, проходящая через точку M , но не лежащая в касательной плоскости (нормаль первого рода), и прямая касательной плоскости, не проходящая через точку M (нормаль второго рода), то возникает пара сопряженных относительно асимптотической сети A геометрий аффинной связности G и G , определяемых поверхностью с точностью до составного преобразования ([6] § 52). При любом выборе нормализации поверхности векторы (13) определяют в ее касательной плоскости инвариантно связанный с поверхностью пучок (так называемый канонический пучок) прямых. Отдельные прямые этого пучка называются осью Грина, проективной нормалью, директрисой Вильчинского и т. д.

§ 36. Формулы в специальной системе координат

1. *Риманова геометрия V_2* . Сеть a_{is} принята за координатную. Введены обозначения:

$$u^1 = u, \quad u^2 = v; \quad \frac{\partial f}{\partial u^1} = \partial_u f = f_u, \quad \frac{\partial f}{\partial u^2} = \partial_v f = f_v. \quad (1)$$

Линейный элемент

$$ds^2 = A^2 du^2 + 2AC \cos \omega du dv + C^2 dv^2. \quad (2)$$

Основная компонента дискриминантного бивектора

$$\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = \varepsilon = AC \sin \omega; \quad \varepsilon^{12} = -\varepsilon^{21} = \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{AC \sin \omega}. \quad (3)$$

Координаты метрического тензора и версора:

$$g_{11} = A^2, \quad g_{12} = AC \cos \omega, \quad g_{22} = C^2; \quad (4)$$

$$g^{11} = \frac{1}{A^2 \sin^2 \omega}, \quad g^{12} = -\frac{\operatorname{ctg} \omega}{AC \sin \omega}, \quad g^{22} = \frac{1}{C^2 \sin^2 \omega}; \quad (5)$$

$$g_1^1 = -g_2^2 = \operatorname{ctg} \omega, \quad g_2^1 = \frac{C}{A \sin \omega}, \quad g_1^2 = -\frac{A}{C \sin \omega}. \quad (6)$$

Направляющие орты сети и их дополнительные векторы:

$$\left. \begin{aligned} v^i \left(\frac{1}{A}, 0 \right), \quad v_i(0, C \sin \omega); \\ w^i \left(0, \frac{1}{C} \right), \quad w_i(-A \sin \omega, 0); \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{v}^i \left(-\frac{\operatorname{ctg} \omega}{A}, \frac{1}{C \sin \omega} \right), \quad \tilde{v}_i(-A, -C \cos \omega); \\ \tilde{w}^i \left(\frac{-1}{A \sin \omega}, \frac{\operatorname{ctg} \omega}{C} \right), \quad \tilde{w}_i(-A \cos \omega, -C). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Координаты метрически нормированного тензора и аффинора сети:

$$a_{ij} = \frac{1}{\sin \omega} (v_i w_j + v_j w_i);$$

$$a_{011} = a_{022} = 0, \quad a_{012} = -AC \sin \omega; \quad (9)$$

$$a_{01}^1 = -a_{02}^2 = -1, \quad a_{02}^1 = a_{01}^2 = 0. \quad (10)$$

Трансверсальные векторы полей v_i и w_i :

$$\left. \begin{aligned} t_s^v = -\varepsilon^{ih} (v_s \partial_k v_i + \tilde{v}_s \partial_k \tilde{v}_i), \\ t_s^w = -\varepsilon^{ih} (w_s \partial_k w_i + \tilde{w}_s \partial_k \tilde{w}_i); \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} t_s^v \left(-\omega_u + \frac{C_u \cos \omega - A_v}{C \sin \omega}, \frac{C_u - A_v \cos \omega}{A \sin \omega} \right), \\ t_s^w \left(\frac{C_u \cos \omega - A_v}{C \sin \omega}, \omega_v - \frac{A_v \cos \omega - C_u}{A \sin \omega} \right). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Коэффициенты связности:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \partial_u \ln \varepsilon - \Gamma_{21}^2 = \partial_u \ln (AC \sin \omega) - \Gamma_{21}^2, \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = -\frac{A_v \cos \omega - C_u}{C \sin^2 \omega}; \\ \Gamma_{22}^2 &= \partial_v \ln \varepsilon - \Gamma_{12}^1 = \partial_v \ln (AC \sin \omega) - \Gamma_{12}^1, \\ \Gamma_{21}^1 &= \Gamma_{12}^1 = -\frac{C_u \cos \omega - A_v}{A \sin^2 \omega}; \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{C}{A \sin \omega} \left(\omega_v + \frac{C_u - A_v \cos \omega}{A \sin \omega} \right), \\ \Gamma_{11}^2 &= -\frac{A}{C \sin \omega} \left(\omega_u + \frac{A_v - C_u \cos \omega}{C \sin \omega} \right). \end{aligned} \right\}$$

Направляющие орты биссекторной сети:

$$\left. \begin{aligned} m_i &= \frac{w_i + v_i}{2 \cos \frac{\omega}{2}}, \quad n_i = \frac{w_i - v_i}{2 \sin \frac{\omega}{2}}; \\ m_i &\left(-A \sin \frac{\omega}{2}, C \sin \frac{\omega}{2} \right), \\ n_i &\left(-A \cos \frac{\omega}{2}, -C \cos \frac{\omega}{2} \right); \\ m^i &\left(\frac{1}{2A \cos \frac{\omega}{2}}, \frac{1}{2C \cos \frac{\omega}{2}} \right), \\ n^i &\left(\frac{-1}{2A \sin \frac{\omega}{2}}, \frac{1}{2C \sin \frac{\omega}{2}} \right). \end{aligned} \right\}$$

Трансверсальный вектор поля m_i или n_i :

$$\left. \begin{aligned} t_i &= t_i = t_i + \frac{\omega_i}{2} = t_i - \frac{\omega_i}{2}, \\ t_i &\left(-\frac{\omega_u}{2} + \frac{C_u \cos \omega - A_v}{C \sin \omega}, \frac{\omega_v}{2} - \frac{A_v \cos \omega - C_u}{A \sin \omega} \right). \end{aligned} \right\}$$

Тензоры и аффиноры нормальной тройки сетей a, c, d :

$$\left. \begin{aligned} c_{ij} &= \frac{1}{\sin \omega} (\omega_i \omega_j - v_i v_j); & d_{ij} &= \frac{1}{\sin \omega} (v_i v_j + \omega_i \omega_j); \\ c_{11} &= A^2 \sin \omega, & c_{12} &= 0, & c_{22} &= -C^2 \sin \omega; \\ d_{11} &= A^2 \sin \omega, & d_{12} &= 0, & d_{22} &= C^2 \sin \omega; \\ c_1^1 &= c_2^2 = 0, & c_2^1 &= -e^{-2\varrho}, & c_1^2 &= -e^{2\varrho}; \\ d_1^1 &= d_2^2 = 0, & d_2^1 &= e^{-2\varrho}, & d_1^2 &= -e^{2\varrho}, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\text{где} \quad e^{2\varrho} = \frac{A}{C}. \quad (17)$$

(См. также (9) и (10).) Чебышевские и геодезические векторы нормальной тройки сети:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= -\Gamma_{21}^2 = \frac{A_v \cos \omega - C_u}{C \sin^2 \omega}, \\ a_2 &= -\Gamma_{12}^1 = \frac{C_u \cos \omega - A_v}{A \sin^2 \omega}; \\ c_1 &= \tilde{t}_1 = Q_u - \frac{1}{2} \Gamma_{11}^1 + \frac{1}{2} \Gamma_{22}^1 e^{4\varrho} = \\ &= -\frac{C_u}{C} - \frac{\omega_u \cos \omega}{2 \sin \omega} - \frac{A \omega_v}{2C \sin \omega}, \\ c_2 &= \tilde{t}_2 = -Q_v - \frac{1}{2} \Gamma_{22}^2 + \frac{1}{2} \Gamma_{11}^2 e^{-4\varrho} = \\ &= -\frac{A_v}{A} - \frac{\omega_v \cos \omega}{2 \sin \omega} - \frac{C \omega_u}{2A \sin \omega}; \\ d_1 &= Q_u - \frac{1}{2} \Gamma_{11}^1 - \frac{1}{2} \Gamma_{22}^1 e^{4\varrho}, \\ d_2 &= -Q_v - \frac{1}{2} \Gamma_{22}^2 - \frac{1}{2} \Gamma_{11}^2 e^{-4\varrho}; \\ \alpha_1 &= c_1 - d_1 = \Gamma_{22}^1 e^{4\varrho}, & \alpha_2 &= \Gamma_{11}^2 e^{-4\varrho}; \\ \alpha_i &= a_i - a_i; & \alpha_i &= a_i - a_i. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Конформно-чебышевский и конформно-геодезический векторы сети:

$$\left. \begin{aligned} A_i &= -g_i^k d_k^s a_s \sin \omega, & A_i &\left(-\frac{C_u}{C}, -\frac{A_v}{A} \right), \\ \mathfrak{A}_i &= 2c_i - A_i. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Геодезические кривизны линий сети a :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon = t_i v^i &= \frac{1}{A} \left(-\omega_u + \frac{C_u \cos \omega - A_v}{C \sin \omega} \right), \\ \varepsilon &= \frac{1}{C} \left(\omega_v - \frac{A_v \cos \omega - C_u}{A \sin \omega} \right). \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Гауссова кривизна:

$$\begin{aligned} K &= \varepsilon^{ik} \partial_k t_i = \varepsilon^{ik} \partial_k \tilde{t}_i, \\ K &= -\frac{1}{AC \sin \omega} \left[\omega_{uv} + \partial_u \left(\frac{C_u - A_v \cos \omega}{A \sin \omega} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \partial_v \left(\frac{A_v - C_u \cos \omega}{C \sin \omega} \right) \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

В случае ортогональной сети:

$$a_1 = -\partial_u \ln C, \quad a_2 = -\partial_v \ln A; \quad (22)$$

$$\varepsilon = -\frac{1}{C} \partial_v \ln A, \quad \varepsilon = \varepsilon = \frac{1}{A} \partial_u \ln C; \quad (23)$$

$$K = -\frac{1}{AC} \left[\partial_v \left(\frac{A_v}{C} \right) + \partial_u \left(\frac{C_u}{A} \right) \right]. \quad (24)$$

В случае изотермической сети (§ 38), отнесенной к изотермическим параметрам:

$$A = C = e^\sigma, \quad ds^2 = A^2 (du^2 + dv^2) = e^{2\sigma} (du^2 + dv^2); \quad (25)$$

$$a_1 = -\partial_u \ln A = -\sigma_u, \quad a_2 = -\partial_v \ln A = -\sigma_v; \quad (26)$$

$$K = -\frac{1}{A^2} [\partial_{uu} \ln A + \partial_{vv} \ln A] = -e^{-2\sigma} (\sigma_{uu} + \sigma_{vv}). \quad (27)$$

2. *Пространство аффинной связности A_2* . Сеть A тройки сетей A_1, A_2, A_3 принята за координатную. Приведенные аффины (см. (8; 1), (10) и (16)):

$$\left. \begin{aligned} A_2^1 = A_1^2 = 0, \quad A_1^1 = -A_2^2 = -i; \quad A_2^1 = A_2^2 = 0, \\ A_2^1 = -ie^{-2\sigma}, \quad A_2^2 = -ie^{2\sigma}; \quad A_3^1 = A_3^2 = 0, \\ A_3^1 = e^{-2\sigma}, \quad A_3^2 = -e^{2\sigma}. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Чебышевские и геодезические векторы сети:

$$\left. \begin{aligned}
 a_1 &= -\Gamma_{12}^2, & a_2 &= -\Gamma_{21}^1; \\
 a_1 &= \partial_1 Q - \frac{1}{2} \Gamma_{11}^1 + \frac{1}{2} \Gamma_{22}^1 e^{4Q}, \\
 a_2 &= -\partial_2 Q - \frac{1}{2} \Gamma_{22}^2 + \frac{1}{2} \Gamma_{11}^2 e^{-4Q}; \\
 a_1 &= \partial_1 Q - \frac{1}{2} \Gamma_{11}^1 - \frac{1}{2} \Gamma_{22}^1 e^{4Q}, \\
 a_2 &= -\partial_2 Q - \frac{1}{2} \Gamma_{22}^2 - \frac{1}{2} \Gamma_{11}^2 e^{-4Q};
 \end{aligned} \right\} (29)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \alpha_1 &= \Gamma_{22}^1 e^{4Q}, & \alpha_2 &= \Gamma_{11}^2 e^{-4Q}; \\
 \alpha_i &= a_i - a_i; \\
 \alpha_i &= a_i - a_i.
 \end{aligned} \right\} (30)$$

ГЛАВА IV
ДИАГОНАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА СЕТЕЙ

Я. С. Дубнов в статье [30] особо выделил понятие диагонального относительно сети скалярного поля. Семейство линий уровня этого поля он назвал диагональным относительно сети и показал, что многие свойства сетей тесно связаны с этими понятиями. Ниже, в несколько измененной форме, излагаются основные результаты Я. С. Дубнова.

§ 37. Шестиугольные три-ткани

1. Три-ткань называется *шестиугольной* (или *диагональной*), если ее линии можно отобразить на три семейства параллельных прямых аффинной плоскости.

Название «шестиугольная» связано со следующим свойством. Рассмотрим (рис. 1) три линии v_0, w_0, p_0 , проходящие через точку O , и точку A_0 на линии v_0 . Путь, получаемый перемещением точки A_0 по линии p до ее пересечения в точке A_1 с линией w_0 , затем перемещением точки A_1 по линии v до ее пересечения с линией p_0 в точке A_2 и так далее до точки A_6 будет замкнут, если три-ткань шестиугольна, и только в этом случае [9].

2. Найдем условие шестиугольности три-ткани (v, w, p) . Три семейства параллельных прямых на которые отображаются линии три-ткани, примем соответственно за линии $x = \text{const}, y = \text{const}, z = -x - y = \text{const}$, так что

$$\partial_i x = x_i = \lambda v_i, \quad y_i = \mu w_i, \quad z_i = \nu p_i. \quad (1)$$

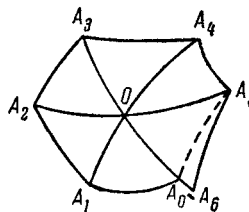


Рис. 1.

Из условия $x + y + z = \text{const}$ следует равенство

$$\lambda v_i + \mu \omega_i + \nu p_i = 0.$$

Сравнивая его с тождеством (см. (2; 2))

$$(\omega_s p^s) v_i + (p_s v^s) \omega_i + (v_s \omega^s) p_i = 0 \quad (2)$$

(индексы подняты произвольным бивектором), получаем

$$\sigma \omega_s p^s v_i = x_i, \quad \sigma p_s v^s \omega_i = y_i, \quad \sigma v_s \omega^s p_i = z_i. \quad (3)$$

Таким образом, шестиугольная три-ткань характеризуется тем, что три вектора

$$\omega_s p^s v_i, \quad p_s v^s \omega_i, \quad v_s \omega^s p_i \quad (4)$$

имеют общий интегрирующий множитель σ .

Мы доказали необходимость этого условия. Его достаточность очевидна: если (3) выполняются, то из (2) следует, что $x_i + y_i + z_i = 0$. Следовательно, $x + y + z = \text{const}$, и необходимое отображение найдено.

Заметим, что для диагональности три-ткани достаточно потребовать существование интегрирующего множителя только у двух векторов (4), так как тогда, в силу (2), тот же множитель будет интегрирующим и для третьего вектора.

§ 38. Диагональность относительно сети

1. Семейство линий (T) называется *диагональным относительно сети* (v, w), если три-ткань (v, w, T) шестиугольна. Найдем условия диагональности семейства (T) относительно сети (v, w). Если за бивектор выбрать $\varepsilon_{is} = v_i w_s - v_s w_i$, то $a_i^s = v_i w^s + v^s w_i$ будет аффинором сети (v, w) и будут справедливы следующие равенства:

$$-2\omega_s T^s v_i = 2(v_i \omega^s) T_s = a_i^s T_s + T_i,$$

$$2T_s v^s \omega_i = 2(\omega_i v^s) T_s = a_i^s T_s - T_i.$$

Отсюда следует, что семейство линий (T), диагональное относительно сети (v, w), характеризуется тем, что векторы

$$T_i, \quad a_i^s T_s = \bar{T}_i$$

имеют общий интегрирующий множитель ϱ :

$$\varrho T_i = \partial_i \varphi = \varphi_i, \quad \varrho \bar{T}_i = \partial_i \psi = \psi_i. \quad (1)$$

Семейство линий \bar{T}_i , сопряженное с линиями T_i относительно сети (v, w) , тоже диагонально относительно сети (v, w) , ибо для векторов \bar{T}_i и $a_i^s \bar{T}_s = T_i$ множитель q тоже интегрирующий. Две полученные аполярные сети (v, w) и (T, \bar{T}) допускают отображение на четыре семейства параллельных прямых аффинной плоскости и называются *взаимно изотермичными* или *диагональными*. Для того чтобы две сети были диагональными, необходимо и достаточно, чтобы какое-нибудь семейство одной из них было диагонально относительно другой.

При отображении двух диагональных сетей на четыре семейства параллельных прямых любая сеть, образующая с ними постоянные взаимные углы, тоже перейдет, очевидно, в два семейства параллельных прямых. Отсюда, в частности, следует, что если из трех аполярных сетей две изотермичны, то и любые две изотермичны и все эти три сети отображаются на шесть семейств параллельных прямых. Такую тройку сетей будем называть *изотермичной* или *диагональной*.

2. Полученное выше условие диагональности семейства (T) относительно сети (v, w) равносильно существованию функции q , удовлетворяющей уравнениям

$$\begin{aligned} e^{is} \partial_s (q T_i) &= q^i T_i + q T_{i1}^i = 0, \\ e^{is} \partial_s (q \bar{T}_i) &= q^i \bar{T}_i + q \bar{T}_{i1}^i = 0, \end{aligned}$$

в которых бивектор и аффинную связность можно выбрать произвольно. Из этих уравнений находим

$$\partial_i \ln q = \frac{\bar{T}_{s1}^s T_i - T_{s1}^s \bar{T}_i}{T_k \bar{T}^k}. \quad (2)$$

Следовательно, диагональное относительно сети (v, w) семейство (T) характеризуется градиентностью вектора, находящегося в правой части формулы (2). В римановой геометрии с метрическим тензором

$$a_{is} = T_i T_s + \sigma(a) \bar{T}_i \bar{T}_s$$

этот вектор, согласно (23; 6'), является чебышевским вектором ортогональной сети (T, \bar{T}) . Отсюда следует, что две взаимно изотермические сети характеризуются тем, что

чебышевский вектор одной из них в римановой геометрии, определяемой произвольно нормированным тензором другой, градиентен.

В римановой геометрии диагональное относительно изотропной сети семейство линий называют *изотермическим*. Два изотермических семейства линий, сопряженных относительно изотропной сети, составляют *изотермическую сеть*. Эта сеть характеризуется градиентностью своего чебышевского вектора.

Каждое семейство (T) , диагональное относительно сети, определяет две функции φ и ψ , удовлетворяющие уравнениям (1) или уравнениям

$$a_i^s \varphi_s = \psi_i. \quad (3)$$

По аналогии с тем случаем, когда сеть a — изотропная сеть поверхности, будем называть эти функции *сопряженными гармоническими функциями относительно сети a* .

Уравнения (3), таким образом, являются обобщениями уравнений Коши — Римана.

Гармоническая или *диагональная* относительно сети a функция является решением уравнения Лапласа:

$$\Delta_a \varphi = - (a_i^s \varphi_s)_{,i} = 0. \quad (4)$$

В параметрах сети a это уравнение приводится к виду

$$\partial_{12} \varphi = 0 \quad (5)$$

и имеет решение:

$$\varphi = U(u^1) + V(u^2). \quad (6)$$

Отсюда следует, что *диагональное относительно сети семейство определяется с произволом в две функции одного аргумента*.

Две сопряженные гармонические относительно данной сети функции, принятые за криволинейные координаты, определяют *изотермическую относительно этой сети систему координат*.

Если данная сеть является изотропной сетью, то такая система координат называется просто *изотермической*.

В изотермической относительно сети a системе координат уравнение (3) имеет своими решениями координаты

u^1 и u^2 , следовательно,

$$a_1^1 = a_2^2 = 0, \quad a_1^2 = \pm a_2^1 = 1,$$

и уравнение Лапласа (4) принимает вид

$$\partial_{11}\varphi \pm \partial_{22}\varphi = 0, \quad (7)$$

где верхний знак берется для эллиптической сети, а нижний — для гиперболической сети.

Изотермической относительно сети a называется произвольная функция F (φ) от гармонической функции φ . Замечая, что $\varphi = f(F)$, из равенства

$$\Delta_a \varphi = f' \Delta_a F + f'' \Delta_1 F = 0$$

заключаем, что

$$\frac{\Delta_a F}{\Delta_1 F} = -\frac{f''}{f'} = \Phi(F), \quad (8)$$

то есть что отношение первого и второго дифференциальных параметров изотермической функции зависит только от этой функции. Этим свойством изотермическая функция вполне характеризуется: если (8) выполнено, то функция

$$f(F) = c \int e^{-\int \Phi(F) dF} dF + c_1, \quad (9)$$

являющаяся решением уравнения (8), будет гармонической.

Обозначим через ψ гармоническую функцию, сопряженную с функцией f , тогда

$$a_i^s f_s = \frac{df}{dF} a_i^s F_s = f' \bar{F}_i = \psi_i.$$

Отсюда следует, что

$$f' = ce^{-\int \frac{\Delta_a F}{\Delta_1 F} dF} \quad (10)$$

является интегрирующим множителем для вектора $\bar{F}_i = a_i^s F_s$.

Рассмотрим криволинейный четырехугольник $A(u_1, v_1)$, $B(u_1, v_2)$, $C(u_2, v_2)$, $D(u_2, v_1)$, составленный из линий сети a , заданной уравнениями $u = \text{const}$, $v = \text{const}$.

Гармоническую относительно сети функцию (10) можно охарактеризовать тем, что суммы ее значений в противоположных вершинах произвольного четырехугольника указанного вида равны

$$\varphi(u_1, v_1) + \varphi(u_2, v_2) = \varphi(u_1, v_2) + \varphi(u_2, v_1). \quad (11)$$

Необходимость этого свойства очевидна. Его достаточность сразу следует из (11), если, зафиксировав значения u_2, v_2 , обозначить

$$\varphi(u_1, v_2) - \varphi(u_2, v_2) = U(u_1), \quad \varphi(u_2, v_1) = V(v_1),$$

ибо тогда $\varphi(u_1, v_1) = U(u_1) + V(v_1)$, а это и есть условие гармоничности.

§ 39. Теорема Ли об интегрируемости в квадратурах

Докажем предложение, известное под названием теоремы Ли [30]: *если известно семейство, диагональное относительно сети a , то конечные уравнения этого семейства, семейства, ему сопряженного, и конечные уравнения линий сети a определяются квадратурами.*

Действительно, если вектор T_i определяет такое семейство, то из (38;2) квадратурами можно найти интегрирующий множитель q .

Из вполне интегрируемых уравнений в полных дифференциалах (38;1) или

$$d\varphi = qT_i du^i, \quad d\psi = q\bar{T}_i du^i$$

находим конечные уравнения диагональных семейств

$$\varphi = \text{const}, \quad \psi = \text{const}$$

и конечные уравнения линий сети

$$\varphi \pm \sqrt{-\sigma(a)} \psi = \text{const}.$$

§ 40. Функция, гармоническая относительно двух изотермических сетей

Предположим, что функция θ гармонична относительно двух аполярных и взаимно изотермических сетей s и \tilde{s} . Рассмотрим риманову геометрию, изотропная сеть g_i

которой является главной сетью сетей c и \tilde{c} , так что $g_i^s = \tilde{c}_i^s c_k^s$. По условию $c_i^s \theta_s = \varphi_i = \partial_i \varphi$. В изотермических параметрах сети c

$$\theta = U(u) + V(v), \quad \tilde{c}_1^1 = \tilde{c}_2^2 = 0, \quad \tilde{c}_2^1 = \tilde{c}_1^2 = -1.$$

Следовательно,

$$\psi_1 = -\theta_2 = -V'(v), \quad \psi_2 = -\theta_1 = -U'(u).$$

Условие $\partial_{12}\psi = \partial_{21}\psi$ дает

$$U''(u) = V''(v) = c_1,$$

где $c_1 = \text{const}$. Далее имеем

$$U = c_1 u^2 + c_2 u + c_3, \quad V = c_1 v^2 + \bar{c}_2 v + \bar{c}_3.$$

$$\theta = c_1(u^2 + v^2) + c_2 u + \bar{c}_2 v + c_4.$$

Если теперь изменить начало отсчета, полагая $u^* = u + \frac{c_2}{2c_1}$, $v^* = v + \frac{\bar{c}_2}{2c_1}$, то гармоническая относительно сетей c и \tilde{c} функция примет вид

$$\theta = c^* (u^{*2} + v^{*2}) + c_4^*. \quad (1)$$

§ 41. Ромбические и конформно-геодезические сети

1. Рассмотрим вопрос о возможности с помощью конформного отображения

$$g_{is}^* = e^{2\sigma} g_{is} \quad (1)$$

преобразовать данную сеть в чебышевскую или геодезическую сеть. В этих целях найдем законы преобразований чебышевского и геодезического векторов сети при конформном отображении.

Начнем с закона преобразования трансверсального вектора поля v_i . Если в исходной связности v^i — орт, то соответствующий ему орт преобразованной связности будет

$$v^i = e^{-\sigma} v^i.$$

Учитывая связь бивекторов

$$e^{is} = e^{-2\sigma} e^{is}, \quad e_{is} = e^{2\sigma} e_{is},$$

находим:

$$g_i^s = \varepsilon^{sk} g_{ik}^* = \varepsilon^{sk} g_{ik} = g_i^s,$$

$$v_s^* = \varepsilon_{ks} v^k = e^{2\sigma} \varepsilon_{ks} e^{-\sigma} v^k = e^\sigma v_s, \quad \tilde{v}_s^* = e^\sigma \tilde{v}_s.$$

Трансверсальный вектор t_s^* поля v^i в новой связности подсчитаем по формуле (21;6):

$$t_s^* = -\varepsilon^{ih} (v_s \partial_h v_i + v_s \partial_h v_i) =$$

$$= -\varepsilon^{ih} (v_s \partial_h v_i + \tilde{v}_s \partial_h \tilde{v}_i) - \varepsilon^{ih} (v_i v_s + \tilde{v}_i \tilde{v}_s) \sigma_h,$$

или

$$t_s^* = t_s + \tilde{\sigma}_s, \quad (2)$$

что, согласно (23;6), приводит к следующему закону преобразования чебышевского вектора ортогональной сети при конформном преобразовании:

$$c_s^* = c_s - \sigma_s. \quad (3)$$

Градиент σ_s называется *вектором конформного преобразования*. Для кривизны K^* преобразованного V_2^* имеем из (2):

$$K^* = \varepsilon^{is} \partial_s t_i^* = e^{-2\sigma} \varepsilon^{is} \partial_s (t_i + \tilde{\sigma}_i)$$

или

$$K^* = e^{-2\sigma} (K - \Delta_2 \sigma). \quad (4)$$

Для произвольной сети a , учитывая, что при конформном преобразовании аффиноры сетей и сетевой угол инвариантны, из (26;7) и (3) получаем

$$a_s^* = -d_s^i \frac{c_i}{\sin \omega} - \frac{1}{2} c_s^i \Omega_i = -d_s^i \frac{\tilde{c}_i - \tilde{\sigma}_i}{\sin \omega} - \frac{1}{2} c_s^i \Omega_i.$$

Следовательно,

$$a_s^* = a_s + d_s^i \frac{\tilde{\sigma}_i}{\sin \omega}. \quad (5)$$

Аналогично получим закон преобразования геодезического вектора

$$\alpha_s^* = \alpha_s + d_0^i \frac{\tilde{\sigma}_i}{\sin \omega}. \quad (6)$$

2. Вектор σ_i конформного преобразования, переводящего данную сеть a в чебышевскую, определяется, согласно (5), уравнением

$$a_s + d_0^i \frac{\tilde{\sigma}_i}{\sin \omega} = 0.$$

Так как отсюда

$$\sigma_i = -g_i^s d_0^h a_h \sin \omega,$$

то указанное преобразование возможно лишь тогда, когда вектор

$$A_i = -g_i^s d_0^h a_h \sin \omega \quad (7)$$

градиентен. Этот вектор называется *конформно-чебышевским* или *ромбическим* вектором сети.

Сети, допускающие конформное отображение на чебышевские сети, называются *конформно-чебышевскими* или *ромбическими* и характеризуются, согласно предыдущему, *градиентностью своего ромбического вектора*. Этот вектор для ромбической сети равен вектору соответствующего конформного преобразования.

Предположим, что сеть a ромбическая. В римановой геометрии с основным тензором $g_{is}^* = e^{2\sigma} g_{is} = e^{2A} g_{is}$ она будет чебышевской, и в соответствующих параметрах этой сети новый линейный элемент приведет к виду

$$ds^* = g_{is}^* du^i du^s = du^2 - 2 \cos \omega du dv + dv^2.$$

Отсюда следует, что линейный элемент исходного V_2 в параметрах ромбической сети приводится к виду

$$ds^2 = g_{is} du^i du^s = e^{-2A} (du^2 - 2 \cos \omega du dv + dv^2), \quad (8)$$

где A — потенциал ромбического вектора сети.

Ромбический вектор ортогональной сети, как это следует из (7), равен ее чебышевскому вектору. Следовательно, *ромбическая ортогональная сеть является изотерми-*

ческой сетью. Если чебышевский вектор этой сети $a_i = \partial_i a$, то линейный элемент в ее изотермических параметрах принимает вид

$$ds^2 = e^{-2a} (du^2 + dv^2). \quad (9)$$

Сравнивая линейный элемент (8) с его выражением через направляющие орты (см. (11; 13))

$$ds^2 = \frac{1}{\sin^2 \omega} (v_i v_s - 2 \cos \omega v_i \omega_s + \omega_i \omega_s) du^i du^s,$$

приходим к заключению, что направляющие векторы ромбической сети

$$e^A \frac{v_i}{\sin \omega}, \quad e^A \frac{\omega_i}{\sin \omega} \quad (10)$$

градиентны. В частном случае ортогональной изотермической сети градиентными будут векторы

$$e^a v_i, \quad e^a \omega_i. \quad (10')$$

3. Совершенно аналогично приходим к следующему результату: *конформно-геодезическая сеть*, то есть сеть, отображаемая конформно на геодезическую сеть, характеризуется градиентностью своего *конформно-геодезического вектора*

$$\mathfrak{M}_i = -g_i^s d_s^k \alpha_k \sin \omega = \alpha_k - c_k^s \alpha_s \cos \omega. \quad (11)$$

Этот вектор для конформно-геодезической сети равен вектору соответствующего конформного преобразования.

4. Вводя в равенства (26;9) ромбический и конформно-геодезический векторы, приходим к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} 2c_i = A_i + \mathfrak{M}_i &= 2A_i + g_i^s a_s^k \omega_k = 2A_i + c_i^s \Omega_s - \partial_i \ln \sin \omega = \\ &= 2\mathfrak{M}_i - c_i^s \Omega_s + \partial_i \ln \sin \omega. \end{aligned} \quad (12)$$

5. Отсюда легко следует теорема Я. С. Дубнова [30]: *если для сети a из четырех условий: 1) она ромбическая, 2) она конформно-геодезическая, 3) ее биссекторная сеть изотермическая, 4) потенциал сети Ω диагонален относительно ее биссекторной сети — выполнены два, то выполнены и все четыре.*

§ 42. Диагональные свойства ромбических и конформно-геодезических сетей

1. Ромбическая сеть становится чебышевской после конформного преобразования $g_{is}^* = e^{2\sigma} g_{is}$. Согласно (41;10) отсюда следует, что векторы v_s и w_s имеют общий интегрирующий множитель, равный $\frac{e^\sigma}{\sin \omega}$. На основании (38;2) имеем

$$\sigma_s - \partial_s \ln \sin \omega = \frac{w_{i|}{}^i v_s - v_{i|}{}^i w_s}{v_k w^k}.$$

Для произвольной сети вектор, стоящий в правой части этого равенства, совпадает с ее ромбическим вектором. Действительно,

$$\begin{aligned} w_{i|}{}^i v_s - v_{i|}{}^i w_s &= t^i \tilde{w}_i v_s - t^i \tilde{v}_i w_s = \\ &= t^i (v_i \tilde{w}_s - \varepsilon_{is} \cos \omega) - t^i (w_i \tilde{v}_s - \varepsilon_{is} \cos \omega) = \\ &= -\chi \tilde{w}_s + \chi \tilde{v}_s - \cos \omega (t_s - t_s). \end{aligned}$$

Однако

$$\tilde{w}_s = g_s^k d_k^i v_i, \quad \tilde{v}_s = -g_s^k d_k^i w_i, \quad t_s - t_s = \omega_s,$$

а с другой стороны,

$$\begin{aligned} A_s &= -g_s^k d_k^i a_i \sin \omega = -g_s^k d_k^i (\chi v_i + \chi w_i) \frac{1}{\sin \omega} = \\ &= \frac{1}{\sin \omega} (-\chi \tilde{w}_s + \chi \tilde{v}_s). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$A_s = \frac{w_{i|}{}^i v_s - v_{i|}{}^i w_s}{v_k w^k} + \partial_s \ln \sin \omega = \frac{w_{i|}{}^i v_s - v_{i|}{}^i w_s}{v_k w^k}, \quad (1)$$

где

$$v_s^* = \frac{1}{\sin \omega} v_s, \quad w_s^* = \frac{1}{\sin \omega} w_s.$$

Рассмотрим две римановы геометрии с метрическими тензорами:

$$d_{is} = \frac{1}{\sin \omega} d_{is} = v_i v_s + w_i w_s, \quad c_{is} = \frac{1}{\sin \omega} (w_i w_s - v_i v_s).$$

В каждой из них сеть a ортогональна, а векторы v_s и w_s единичны. Следовательно, согласно (23;6) и (1), ромбический вектор сети a является ее чебышевским вектором в каждой из этих двух геометрий. Так как для ромбической сети он градиентен, то ромбическая сеть характеризуется тем, что она изотермична со своей биссекторной сетью или, равносильно этому, со своей характеристической сетью. Иначе говоря, ромбическая сеть характеризуется тем, что определяемая ею нормальная тройка сетей изотермична.

2. Конформно-геодезический вектор тоже просто выражается через ее направляющие орты:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_s &= -g_s^i d_i^k \alpha_k \sin \omega = -\frac{1}{\sin \omega} g_s^i d_i^k (z v_k + z w_k) = \\ &= -\frac{1}{\sin \omega} (z \tilde{w}_s - z \tilde{v}_s) = \frac{\tilde{w}_i \tilde{v}_s - \tilde{v}_i \tilde{w}_s}{\tilde{v}_k \tilde{w}^k}. \end{aligned} \quad (2)$$

Согласно (23; 6) этот вектор является чебышевским вектором сети a в римановой геометрии с основным тензором

$$c_{is} = \sin \omega c_{is} = w_i w_s - v_i v_s = \tilde{v}_i \tilde{v}_s - \tilde{w}_i \tilde{w}_s.$$

Отсюда следует, что векторы \tilde{v}_s и \tilde{w}_s конформно-геодезической сети (для которой $\mathfrak{A}_s = \partial_s \mathfrak{A}$) имеют общий интегрирующий множитель, равный $e^{\mathfrak{A}}$.

Будем говорить, что сеть (\tilde{v}, \tilde{w}) получена из сети (v, w) поворотом на прямой угол. Сравнивая теперь признак ромбической сети (векторы v_s и w_s имеют общий интегрирующий множитель) с признаком конформно-геодезической сети (векторы \tilde{v}_s и \tilde{w}_s имеют общий интегрирующий множитель), приходим к такому результату: *при повороте на прямой угол ромбическая сеть становится конформно-геодезической, и наоборот.*

3. В геометрии Вейля, как и в геометрии Римана, *ортогональная сеть, изотермичная с изотропной сетью, называется просто изотермической.*

Запишем формулу (21; 22) в виде

$$a_s - \omega_s = \frac{\tilde{v}_{i|} \cdot {}^i v_s - v_{i|} \cdot {}^i \tilde{v}_s}{v_k \tilde{v}^k}. \quad (3)$$

Из предыдущего следует, что изотермическая сеть геометрии Вейля характеризуется тем, что разность между ее чебышевским вектором a_s и дополнительным вектором ω_s градиентна.

4. Рассмотрим тройку сетей A и произвольное пространство A_2 . Для того чтобы эта тройка была изотермична, необходимо и достаточно, чтобы сеть A была изотермической в какой-нибудь геометрии W_2 , для которой сеть A изотропная. Одна из таких геометрий — средняя геометрия данного пространства A_2 и пространства, сопряженного с ним относительно сети A . Чебышевский вектор сети A в этой геометрии, согласно (32;11), равен $\frac{1}{2}(a_s + \alpha_s)$, а дополнительным вектором произвольного бивектора, согласно (34; 1), будет $\omega_s = \omega_s - a_s$. Согласно результатам п. 3 тройка сетей будет изотермической тогда и только тогда, когда вектор

$$\tau_s = \frac{1}{2}(a_s + \alpha_s) - (\omega_s - a_s) = \frac{1}{2}(a_s + a_s + \alpha_s - 2\omega_s) \quad (4)$$

будет градиентен. Заметим, что при замене бивектора дополнительный вектор ω_s получает градиентное слагаемое, так что высказанный признак не зависит от выбора бивектора. Нетрудно проверить, что при заданном бивекторе вектор (4) совершенно не зависит от выбора связности.

Каждая тройка сетей однозначно определяет связность, в которой $a_s = \alpha_s = \alpha_s = 0$, а сети A декартовы. Эту

квазиевклидову связность мы будем называть *присоединенной* к тройке сетей A . Вектор (4) в этой связности равен $-\omega_s$, то есть лишь знаком отличается от дополнительного вектора произвольного бивектора. Если он градиентен, то присоединенная связность будет евклидовой, и наоборот. Следовательно, для того чтобы тройка сетей была изотермической, необходимо и достаточно, чтобы ее присоединенная связность была евклидовой.

§ 43. Вращение сети

1. Если направляющие векторы сети $\overset{*}{a}$ получены из направляющих векторов сети a поворотом на угол φ , то говорят, что сеть $\overset{*}{a}$ получена из сети a поворотом на угол φ [38]. Тензор новой сети

$$\begin{aligned} \overset{*}{a}_{0i}^s &= (\varphi)_i^m (\varphi)_s^n a_{mn} = (\varphi)_m^n (\varphi)_{(i_0)s}^m + (\varphi)_{(i_0)s}^m (\varphi)_l^n a_n^l = \\ &= (2\varphi)_{(i_0)s}^m a_{sm} + g_{is} \sin^2 \varphi \operatorname{ctg} \omega, \end{aligned}$$

или

$$\overset{*}{a}_{0i}^s = a_{0i}^s \cos 2\varphi + g_{(i_0)s}^m a_{sm} \sin 2\varphi + g_{is} \sin^2 \varphi \operatorname{ctg} \omega. \quad (1)$$

В случае ортогональной сети формула упрощается:

$$\overset{*}{c}_{0i}^s = c_{0i}^s \cos 2\varphi + \tilde{c}_{0i}^s \sin 2\varphi = (2\varphi)_i^h c_{sh}. \quad (2)$$

Из закона преобразования трансверсального вектора при вращении поля (21; 7) и связи его с чебышевским вектором ортогональной сети (23; 6) легко находим закон преобразования чебышевского вектора ортогональной сети при вращении ее на угол φ :

$$\overset{*}{c}_s = c_s + \tilde{\varphi}_s. \quad (3)$$

Для получения законов преобразования чебышевского и геодезического векторов произвольной сети выразим их с помощью (26; 7) и (26; 8) через наиболее просто преобра-

зюемые элементы биссекторной сети:

$$a_s = \frac{c_s}{\sin^2 \omega} + c_0^k \left(\frac{\cos \omega}{\sin^2 \omega} c_k - \frac{1}{2} \Omega_k \right), \quad (4)$$

$$\alpha_s = \frac{c_s}{\sin^2 \omega} + c_0^k \left(\frac{\cos \omega}{\sin^2 \omega} c_k + \frac{1}{2} \Omega_k \right). \quad (5)$$

На основании (2) и (3) теперь находим

$$a_s^* = \frac{c_s + \tilde{\varphi}_s}{\sin^2 \omega} + (2\varphi)_s^k c_0^i \left[\frac{\cos \omega}{\sin^2 \omega} (c_i + \tilde{\varphi}_i) - \frac{1}{2} \Omega_i \right], \quad (6)$$

$$\alpha_s^* = \frac{c_s + \tilde{\varphi}_s}{\sin^2 \omega} + (2\varphi)_s^k c_0^i \left[\frac{\cos \omega}{\sin^2 \omega} (c_i + \tilde{\varphi}_i) + \frac{1}{2} \Omega_i \right]. \quad (7)$$

В случае вращения на постоянный угол формулы упрощаются:

$$\begin{aligned} a_s^* - \frac{c_s}{\sin^2 \omega} &= (2\varphi)_s^k c_0^i \left(\frac{\cos \omega}{\sin^2 \omega} c_i - \frac{1}{2} \Omega_i \right) = \\ &= (2\varphi)_s^k \left(a_k - \frac{c_k}{\sin^2 \omega} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\alpha_s^* - \frac{c_s}{\sin^2 \omega} = (2\varphi)_s^k \left(\alpha_k - \frac{c_k}{\sin^2 \omega} \right). \quad (9)$$

2. В качестве первого приложения этих формул рассмотрим вопрос о существовании сетей, сохраняющих свой чебышевский вектор при вращении на произвольный постоянный угол. Из (8) сразу следует, что для таких сетей

$$a_s - \frac{c_s}{\sin^2 \omega} = 0, \quad (10)$$

а из (4) — что

$$c_k = -\frac{1}{2} \partial_k \ln \cos \omega, \quad (11)$$

$$a_k = \frac{1}{2} \partial_k \ln \operatorname{tg} \omega. \quad (12)$$

Таким образом, искомые сети характеризуются тем, что их биссекторная сеть — изотермическая и чебышевский вектор биссекторной сети связан с сетевым углом соотношением (11).

Сети, обладающие указанным свойством, существуют в каждом V_2 : для построения такой сети самого общего вида

нужно произвольную изотермическую сеть с чебышевским вектором $c_k = \partial_k c$ принять за биссекторную для искомой; сетевой угол последней определится с точностью до произвольной постоянной равенством

$$\cos \omega = c_1 e^{-2c} \quad (c_1 = \text{const}).$$

3. Совершенно аналогично доказывается, что сеть, сохраняющая при вращении на произвольный постоянный угол свой нормальный геодезический вектор, характеризуется равенством

$$c_k = \frac{1}{2} \partial_k \ln \cos \omega. \quad (13)$$

Существование и способ построения таких сетей очевидны.

§ 44. Вращение ромбических и конформно-геодезических сетей

Сеть, обладающую свойством A и сохраняющую это свойство при вращении на произвольный постоянный угол, назовем вместе с А. М. Комиссаруком [38] A-сетью, допускающей вращение.

Рассмотрим ромбические сети, допускающие вращение (см. [98]). Согласно (41; 12) ромбический вектор сети

$$A_s = c_s - \frac{1}{2} c_s^k \Omega_k + \frac{1}{2} \partial_s \ln \sin \omega. \quad (1)$$

При вращении на угол $\varphi = \text{const}$ ромбический вектор новой сети

$$\begin{aligned} A_s^* &= c_s - \frac{1}{2} (2\varphi)_s^k c_k^i \Omega_i + \frac{1}{2} \partial_s \ln \sin \omega = \\ &= A_s + \sin \varphi (c_s^k \Omega_k \sin \varphi - \tilde{c}_s^k \Omega_k \cos \varphi). \end{aligned} \quad (2)$$

Для того чтобы ромбическая сеть допускала вращение, как это легко видеть из (2), необходимо и достаточно, чтобы векторы

$$c_s^k \Omega_k = a_s - a_s, \quad (3)$$

$$\tilde{c}_s^k \Omega_k = \tilde{a}_s - \tilde{a}_s, \quad (4)$$

были градиентами. При выполнении этих условий, как это следует из (1), биссекторная сеть будет изотермической. Из уравнений (41; 12) теперь следует, что вращаемая ромбическая сеть всегда будет вращаемой конформно-геодезической сетью. Отсюда приходим к следующему способу построения ромбической или конформно-геодезической сети, допускающей вращение: взяв произвольную изотермическую сеть за биссекторную для искомой сети, потенциал последней (заданием которого искомая сеть будет теперь полностью определена) определим как функцию, удовлетворяющую условиям

$$c_{i0}^s \Omega_s = \text{grad}, \quad \tilde{c}_{i0}^s \Omega_s = \text{grad},$$

то есть как функцию, диагональную относительно первой и второй биссекторных сетей, искомой сети. Существование такой функции доказано в § 40.

ГЛАВА V

СПЕЦИАЛЬНЫЕ СЕТИ

В этой главе будут рассмотрены сети римановой геометрии, обладающие некоторыми специальными свойствами. Наличие этих свойств выражается определенными соотношениями между теми или иными векторами сети. Совокупность таких соотношений, необходимых и достаточных для того, чтобы сеть обладала указанными свойствами и имеющих инвариантную форму, называется инвариантной характеристикой сети.

Рассмотрение специальных сетей мы начнем с изучения одного тензорного дифференциального уравнения, которое неоднократно встречается в дальнейшем.

§ 45. Обобщенное уравнение Киллинга

1. Рассмотрим систему четырех дифференциальных уравнений

$$p_{i|s} = \sigma g_{is} + \varrho \varepsilon_{is} \quad (1)$$

с частными производными первого порядка с четырьмя неизвестными функциями p_1 и p_2 , σ , ϱ .

При $\sigma = 0$ это уравнение, принимая вид $p_{(i|s)} = 0$, обращается в уравнение Киллинга ([14] § 51, см. также § 66). Это обстоятельство позволяет называть уравнение (1) обобщенным уравнением Киллинга. Докажем, что это уравнение всегда имеет решение и что это решение — вектор p_i — является направляющим вектором изотермического поля, а также обратное предложение: направляющий вектор произвольного изотермического семейства линий можно пронормировать так, что он будет удовлетворять уравнению (1).

На основании (24; 3) и (1) имеем

$$p_{i|s} = p_i \partial_s \ln p + \tilde{p}_i t_s = \sigma g_{is} + \varrho \varepsilon_{is}.$$

Свертывая обе части с векторами p^i и \tilde{p}^i , получаем

$$-p^2 t_s = -\sigma \tilde{p}_s + \varrho p_s, \quad p^2 \partial_s \ln p = \sigma p_s + \varrho \tilde{p}_s.$$

Чебышевский вектор сети (p, \tilde{p}) , согласно (23; 6), будет

$$c_s = \tilde{t}_s = -\frac{1}{p^2} (\sigma p_s + \varrho \tilde{p}_s) = -\partial_s \ln p. \quad (2)$$

Этот вектор градиентен, следовательно (§ 38), сеть (p, \tilde{p}) -изотермическая, что доказывает первую часть вышесказанного предложения.

Обозначая через c потенциал чебышевского вектора ($c_s = \partial_s c$) и полагая $v_i = \frac{1}{p} p_i$, найдем:

$$p = e^{-c}, \quad p_s = e^{-c} v_s, \quad (3)$$

$$t_s = e^c (\sigma \tilde{v}_s - \varrho v_s), \quad (4)$$

$$\sigma = -e^{-c} \varrho, \quad \varrho = -e^{-c} \varrho. \quad (5)$$

Пусть теперь v_i — орт изотермического семейства и c — потенциал чебышевского вектора сети (v, \tilde{v}) . Последовательно находим

$$\begin{aligned} p_{i|s} &= (e^{-c} v_i)_{|s} = e^{-c} (\tilde{v}_i t_s - v_i c_s) = \\ &= e^{-c} [\tilde{v}_i (\varrho v_s - \sigma \tilde{v}_s) - v_i (\varrho v_s + \sigma \tilde{v}_s)] = \\ &= -e^{-c} \varrho (\tilde{v}_i \tilde{v}_s + v_i v_s) - e^{-c} \sigma (v_i \tilde{v}_s - v_s \tilde{v}_i) = -e^{-c} \varrho g_{is} - e^{-c} \sigma \varepsilon_{is}, \end{aligned}$$

что доказывает обратное предложение.

2. Нормирование направляющих векторов $p_i = e^{-c} v_i$, $\tilde{p}_i = e^{-c} \tilde{v}_i$ изотермической сети c_{is} , при котором они удовлетворяют уравнениям

$$p_{i|s} = \sigma g_{is} + \varrho \varepsilon_{is}, \quad \tilde{p}_{i|s} = \varrho g_{is} - \sigma \varepsilon_{is}, \quad (6)$$

наводит на мысль рассмотреть производную тензора сети

$$c_{ik}^* = 2p_{(i}\tilde{p}_{k)} = e^{-2c} c_{ik}^0.$$

Вычислим эту производную

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} c_{ik|s}^* &= (p_{(i}\tilde{p}_{k)})_{|s} = p_{i|s}\tilde{p}_k + p_i\tilde{p}_{k|s} = \\ &= \tilde{p}_k (\sigma g_{is} + \varrho \varepsilon_{is}) + p_k (\varrho g_{is} - \sigma \varepsilon_{is}) = \\ &= g_{is} (\sigma \tilde{p}_k + \varrho p_k) + \varepsilon_{is} (\varrho \tilde{p}_k - \sigma p_k) \quad (i, k) \end{aligned}$$

(скобки (i, k) справа обозначают, что везде производится симметрирование по индексам i, k). Вводя в рассмотрение вектор

$$\begin{aligned} T_k &= 2(\sigma p_k - \varrho \tilde{p}_k) = 2e^{-2c} (-\varepsilon_{\nu k} + \varepsilon_{\tilde{\nu} k}) = \\ &= -2e^{-2c} c_k^s (\varepsilon_{\nu s} + \varepsilon_{\tilde{\nu} s}) = -2e^{-2c} c_k^s c_s = c_k^s (e^{-2c})_{|s}, \quad (7) \end{aligned}$$

получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$c_{ik|s}^* = g_{is} T_k - \varepsilon_{is} T_k = g_{ik} \tilde{T}_s + \varepsilon_{sk} T_i + \varepsilon_{si} T_k, \quad (8)$$

которому удовлетворяет специально нормированный тензор произвольной изотермической сети. Составим условие его интегрируемости:

$$\begin{aligned} c_{ik|s}^{*s} &= K g_{is}^s c_{sk}^* + K g_{sk}^s c_{is}^* = 2K g_{is}^s c_{ks}^* = 2K \tilde{c}_{ik}^* = \\ &= g_{ik} \tilde{T}_{|s}^s + T_{i|k} + T_{k|i} = g_{is} \tilde{T}_{k|}^s + T_{k|i}. \quad (9) \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$2K c_{ik}^* = -g_i^l (g_{ls} \tilde{T}_{k|}^s + T_{k|l}) = -\tilde{T}_{k|i} - g_i^l (T_{l|k} + \varepsilon_{kl} T_{s|}^s),$$

или

$$2K c_{ik}^* = -\tilde{T}_{i|k} - \tilde{T}_{k|i} + g_{ik} T_{s|}^s. \quad (10)$$

Последнее уравнение показывает, что изотермическая сеть при $K \neq 0$ однозначно определяется вектором (7).

3. Рассмотрим частный случай уравнения (1) — уравнение Киллинга:

$$p_{i|s} = \varrho \varepsilon_{is}, \quad (11)$$

когда $\sigma = e^{-c_2} = 0$, то есть когда линии (v) сети (v, \tilde{v}) геодезические. Сеть (v, \tilde{v}) в этом случае изотермическая и полугеодезическая. Будем в дальнейшем называть такую сеть *сетью вращения*, а риманову геометрию, в которой такая сеть существует, — *метрикой вращения*.

Из уравнения (11) имеем:

$$\tilde{p}_{i|h} = Qg_{ih}. \quad (12)$$

Производная вектора \tilde{p}_i симметрична, следовательно, этот вектор градиентен: $\tilde{p}_i = \partial_i \omega$ и его потенциал — функция ω — удовлетворяет уравнению

$$\omega_{i|h} = Qg_{ih}. \quad (13)$$

Свертывая обе его части с g^{ih} , находим

$$2Q = \Delta_2 \omega. \quad (14)$$

С другой стороны,

$$\partial_h \Delta_1 \omega = (g^{is} \omega_i \omega_s)_h = 2g^{is} \omega_i \omega_{s|h} = 2g^{is} \omega_i Qg_{sh} = \Delta_2 \omega \omega_h.$$

Параметр Якоби $D(\Delta_1 \omega, \omega) = 0$, следовательно, $\Delta_1 \omega$ является функцией ω :

$$\Delta_1 \omega = \theta(\omega),$$

и предыдущее равенство можно записать в виде

$$\theta' = \frac{d\theta}{d\omega} = \Delta_2 \omega = 2Q. \quad (15)$$

Составим условие интегрируемости уравнения (13):

$$\omega_{i|s}{}^s = K \tilde{\omega}_i = -\tilde{Q}_i = -Q' \tilde{\omega}_i.$$

Следовательно, если $K \neq \text{const}$, то

$$K = K(\omega) = -Q' = -\frac{1}{2} \frac{d\Delta_2 \omega}{d\omega} = -\frac{1}{2} \theta', \quad (16)$$

и мы имеем

$$\Delta_1 K = Q'' \Delta_1 \omega = \frac{1}{4} (\theta'')^2 \theta,$$

$$\Delta_2 K = -Q'' \Delta_2 \omega - Q''' \Delta_1 \omega = -\frac{1}{2} \theta' \theta'' - \frac{1}{2} \theta \theta''.$$

Итак, для того чтобы уравнения (13) имели решение, необходимо, чтобы первый и второй дифференциальные параметры гауссовой кривизны были функциями этой кривизны:

$$\Delta_1 K = f(K), \quad \Delta_2 K = F(K). \quad (17)$$

Покажем достаточность этих условий. Считая, что они выполняются, будем искать функции $\omega = \omega(K)$ и $\varrho = \varrho(K)$, удовлетворяющие уравнению

$$\omega_{i|h} = \omega' K_{i|h} + \omega'' K_i K_h = \varrho g_{ih}. \quad (18)$$

Внося сюда значение производной (21;14)

$$K_{i|h} = K_i \partial_{\tilde{h}} \ln \sqrt{f} + \tilde{K}_i \tilde{K}_h \frac{F - \frac{1}{2} f'}{f}, \quad (19)$$

получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\omega' f'}{2f} + \omega'' \right) K_i K_h + \frac{F - \frac{1}{2} f'}{f} \omega' \tilde{K}_i \tilde{K}_h &= \\ &= \varrho g_{ih} = \frac{\varrho}{f} (K_i K_h + \tilde{K}_i \tilde{K}_h). \end{aligned}$$

Следовательно, тензорное уравнение (18) эквивалентно двум скалярным уравнениям:

$$\frac{\omega' f'}{2f} + \omega'' = \frac{\varrho}{f} = \frac{1}{f} \left(F - \frac{1}{2} f' \right) \omega'$$

с двумя неизвестными функциями ω и ϱ . Эти уравнения всегда разрешимы: находим сначала

$$\begin{aligned} \frac{\omega''}{\omega'} &= \frac{F - f'}{f}, \quad \omega' = c_1 e^{\int \frac{F - f'}{f} dK}, \\ \omega &= c_2 + c_1 \int e^{\int \frac{F - f'}{f} dK} dK, \end{aligned} \quad (20)$$

а затем

$$\varrho = c_1 \left(F - \frac{1}{2} f' \right) e^{\int \frac{F - f'}{f} dK}. \quad (21)$$

Таким образом, мы приходим к следующему результату: для того чтобы риманова геометрия V_2 при $K \neq \text{const}$

была метрикой вращения, необходимо и достаточно, чтобы первый и второй дифференциальные параметры гауссовой кривизны были функциями этой кривизны.

Обращаясь к случаю $K = \text{const}$, оставленному ранее в стороне, находим из (16)

$$\rho = -\omega K.$$

Уравнение (13) принимает в этом случае вид

$$\omega_{i;k} = -K\omega g_{ik} \quad (13')$$

и эквивалентно системе

$$\partial_k \omega_i = \Gamma_{ki}^s \omega_s - K\omega g_{ik}, \quad \partial_i \omega = \omega_i, \quad (13'')$$

линейных однородных уравнений в полных дифференциалах с тремя неизвестными функциями ω , ω_1 , ω_2 .

Так как условия интегрируемости (13') выполняются тождественно, то, согласно общей теории дифференциальных уравнений, в римановой геометрии постоянной кривизны система (13') имеет три линейно независимых решения, линейная комбинация которых, зависящая от трех произвольных постоянных коэффициентов, является ее общим решением.

Отсюда следует, что риманова геометрия постоянной кривизны имеет бесконечное число (∞^3) сетей вращения.

4. Гармоническая функция $\varphi(\omega)$ по данной изотермической функции ω определяется формулой (38; 9)

$$\varphi(\omega) = c \int e^{-\int \frac{\Delta_2 \omega}{\Delta_1 \omega} d\omega} d\omega,$$

но, согласно (15),

$$\frac{\Delta_2 \omega}{\Delta_1 \omega} d\omega = \frac{d\Delta_1 \omega}{\Delta_1 \omega} = d \ln \Delta_1 \omega,$$

следовательно,

$$\varphi(\omega) = c \int \frac{d\omega}{\Delta_1 \omega}. \quad (22)$$

Градиент этой гармонической функции

$$\Phi_i = \frac{\omega_i}{\Delta_1 \omega},$$

а градиент сопряженной ей гармонической функции ψ —

$$\psi_i = \tilde{\varphi}_i = \frac{\tilde{\omega}_i}{\Delta_1 \omega}. \quad (23)$$

Линейный элемент метрики вращения, таким образом, можно записать в следующем виде:

$$ds^2 = \frac{\varphi_i \varphi_s + \psi_i \psi_s}{\Delta_1 \varphi} du^i du^s = \frac{d\varphi^2 + d\psi^2}{\Delta_1 \varphi} = \frac{d\omega^2}{\Delta_1 \omega} + \Delta_1 \omega d\psi^2. \quad (24)$$

Произвольная функция гауссовой кривизны $\theta = \theta(K)$ метрики вращения будет изотермической. Более того, ее дифференциальные параметры будут, согласно (17), зависеть только от нее самой:

$$\Delta_1 \theta = \theta'^2 \Delta_1 K = \overset{*}{f}(\theta), \quad \Delta_2 \theta = \theta'' \Delta_1 K + \theta' \Delta_2 K = \overset{*}{F}(\theta).$$

Функции $\overset{*}{f}$ и $\overset{*}{F}$ не произвольны, а должны удовлетворять уравнению (21; 15), которое в данном случае принимает вид

$$\begin{aligned} K &= -\Delta_1 \left(\frac{\overset{*}{F}}{\overset{*}{f}}, \theta \right) - \frac{\overset{*}{F}^2}{\overset{*}{f}} + \frac{1}{2} \Delta_2 \ln \overset{*}{f} = \\ &= -\frac{\overset{*}{F}' \overset{*}{f} - \overset{*}{f}' \overset{*}{F}}{\overset{*}{f}^2} \Delta_1 \theta - \frac{\overset{*}{F}^2}{\overset{*}{f}} + \frac{\overset{*}{f} \overset{*}{F}' \Delta_2 \theta + (\overset{*}{f}'' \overset{*}{f} - \overset{*}{f}'^2) \Delta_1 \theta}{2 \overset{*}{f}^2}, \end{aligned}$$

или

$$K \overset{*}{f} + \overset{*}{F}^2 - \frac{3}{2} \overset{*}{F} \overset{*}{f}' + \overset{*}{F}' \overset{*}{f} - \frac{1}{2} \overset{*}{f}'' \overset{*}{f} + \frac{1}{2} \overset{*}{f}'^2 = 0, \quad (25)$$

что при $\theta = K, \overset{*}{f} = f, \overset{*}{F} = F$ приводит к уравнению, которому удовлетворяют дифференциальные параметры $\Delta_1 K = \overset{*}{f}$ и $\Delta_2 K = \overset{*}{F}$ гауссовой кривизны метрики вращения.

5. Покажем, что разрешимость тензорного уравнения

$$\omega_{i|s} = \sigma (g_{i_s} - m \omega_i \omega_s) \quad (m = \text{const}) \quad (26)$$

при условии $\Delta_1 \omega \neq \frac{1}{m}$ ¹⁾ тоже характеризует метрику вращения [77]. Условие интегрируемости этого уравнения

$$\omega_{i|s}{}^s = K \tilde{\omega}_i = -\tilde{\sigma}_i - m \sigma^s \omega_s \omega_i - m \sigma^2 \tilde{\omega}_i$$

¹⁾ В произвольном V_2 каждая функция ω , для которой $m \Delta_1 \omega = 1$, удовлетворяет, согласно (21; 14), уравнению (26).

с помощью замены $\omega_s \omega_i = \Delta_1 \omega g_{is} - \tilde{\omega}_i \tilde{\omega}_s$ приведем к виду

$$K \tilde{\omega}_i = -\tilde{\sigma}_i (1 - m \Delta_1 \omega) + (\sigma^s \tilde{\omega}_s - m \sigma^2) \tilde{\omega}_i,$$

откуда

$$\sigma_i (1 - m \Delta_1 \omega) = (\tilde{\sigma}^s \omega_s - m \sigma^2 - K) \omega_i. \quad (27)$$

Так как $m \Delta_1 \omega - 1 \neq 0$, то из (27) следует, что $\sigma = \sigma(\omega)$. Далее можно непосредственно продолжать исследование условий интегрируемости системы, однако скорее приводит к цели другой путь: предположим, что уравнение (26) разрешимо, и покажем, что в этом случае существует функция $\theta = \theta(\omega)$, удовлетворяющая уравнению $\theta_{ij} = \varrho g_{ij}$, чем наше утверждение будет полностью доказано. Имеем

$$\theta_{ij} = \theta' \omega_{ij} + \theta'' \omega_i \omega_j = \sigma \theta' g_{ij} - (m \sigma \theta' - \theta'') \omega_i \omega_j = \varrho g_{ij}.$$

Следовательно, θ и ϱ должны удовлетворять двум уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \theta'' &= m \sigma \theta', \\ \varrho &= \sigma \theta'. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Эти уравнения всегда разрешимы: из первого находим

$$\theta = c_1 \int e^{\int m \sigma d\omega} d\omega + c_2,$$

а из второго

$$\varrho = c_1 \sigma e^{\int m \sigma d\omega}.$$

Для интегрирования уравнения (26) можно, согласно предыдущему, найти сначала функции $\theta(K)$ и $\varrho(K)$ из уравнения $\theta_{ij} = \varrho g_{ij}$. Функция $\omega(K)$ определится затем из уравнения

$$d\omega = \frac{\sigma}{\varrho} d\theta,$$

полученного из второго уравнения (28).

§ 46. Изотермические сети

1. Изотермическая сеть a_{is} характеризуется условиями

$$g^{is} a_{is} = 0, \quad a_i = \partial_i a = \text{grad}. \quad (1)$$

Линейный элемент в параметрах изотермической сети принимает вид

$$ds^2 = e^{-2\alpha} (du^2 + dv^2). \quad (2)$$

Изотермическую сеть можно также охарактеризовать как такую ортогональную сеть, у которой геодезические кривизны ε_v и ε_w линий (v) и (w) связаны дифференциальным уравнением

$$-a_{s|s} = \varepsilon_v v^s + \varepsilon_w w^s = 0. \quad (3)$$

Классификация изотермических сетей связана со специализацией функции a . Изотермическая сеть называется L_m -сетью, если

$$e^{-2\alpha} = [U(u) + V(v)]^m. \quad (4)$$

Линейный элемент в параметрах этой изотермической сети имеет вид

$$ds^2 = (U + V)^m (du^2 + dv^2). \quad (5)$$

L_m -сеть характеризуется тем, что функция

$$e^{\frac{2\alpha}{m}} = U + V \quad (6)$$

диагональна относительно сети a_{is} . Условие диагональности

$$a^{is} \left(a_{i|s} - \frac{2(m+1)}{m} a_i a_s \right) = 0 \quad (7)$$

совместно с (1) составляет полную инвариантную характеристику L_m -сети.

С помощью инвариантов

$$a^{is} a_{i|s} = \varepsilon_v v^s - \varepsilon_w w^s - 2\varepsilon\varepsilon, \quad a^{is} a_i a_s = -2\varepsilon\varepsilon \quad (8)$$

и соотношения (3) L_m -сеть можно охарактеризовать как такую ортогональную сеть, у которой геодезические кривизны ε_v и ε_w линий (v) и (w) удовлетворяют соотношениям

$$\varepsilon_v v^s = -\varepsilon_w w^s = -\frac{m+2}{m} \varepsilon\varepsilon. \quad (9)$$

2. Рассмотрим некоторые частные типы L_m -сетей.

а) L_{-2} -сеть, или *сеть Бонне*. Линейный элемент в параметрах этой сети имеет вид

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{(U+V)^2}. \quad (10)$$

Условие (7) принимает вид

$$a^{is} (a_{i|s} - a_i a_s) = 0. \quad (11)$$

L_{-2} -сеть характеризуется, согласно (9), тем, что ее линии имеют постоянные геодезические кривизны.

б) L_1 -сеть, или *сеть Лиувилля*. Линейный элемент в параметрах сети Лиувилля имеет вид

$$ds^2 = (U+V)(du^2 + dv^2), \quad (12)$$

а условие (7) — вид

$$a^{is} (a_{i|s} - 4a_i a_s) = 0. \quad (13)$$

Вектор (45;7) для сети Лиувилля и только для нее градиентен:

$$T_s = a_s^i (e^{-2a})_i = \partial_s T. \quad (14)$$

Докажем, что *сеть Лиувилля является биссекторной для ∞^1 геодезических сетей*. Из уравнения (45;8) имеем:

$$g_j^k a_{i|k|s} = \tilde{a}_{i|j|s} = -T_j g_{is} - \varepsilon_{is} \tilde{T}_j. \quad (15)$$

Рассмотрим сеть b , определяемую тензором

$$b_{kj} = \tilde{a}_{kj} + T g_{kj} \quad (16)$$

и аполярную сети a . Его симметрированная производная обращается в силу (15) в нуль:

$$b_{(kj|s)} = \tilde{a}_{(kj|s)} + T_{(s} g_{kj)} = 0. \quad (17)$$

Это равенство характеризует геодезическую сеть. Действительно, если v^i — направляющий орт сети, то

$$(b_{jk} v^j v^k)_{|s} v^s = b_{(jk|s)} v^j v^k v^s + 2b_{jk} v^j \tilde{v}^k t_s v^s = 0.$$

Первое слагаемое обращается в нуль в силу (17), а так как $b_{jk}v^j\tilde{v}^k \neq 0$, то $t_s v^s = \frac{e}{v} = 0$, что и требовалось доказать.

Потенциал вектора T_s определяется с точностью до произвольного постоянного слагаемого:

$$T = \int T_s du^s + c,$$

следовательно, все сети, определяемые тензорами

$$b_{ij} = \tilde{a}_{ij} + (T + c) g_{ij} = b_{ij} + c g_{ij}, \quad (18)$$

геодезические, и наше утверждение доказано.

Интегральные кривые дифференциального уравнения

$$b_{ij} du^i du^j = (b_{ij} + c g_{ij}) du^i du^j = 0$$

составляют двупараметрическое семейство геодезических, то есть содержат все геодезические данного V_2 . Уравнение

$$\frac{b_{ij} du^i du^j}{g_{ij} du^i du^j} = b_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = c = \text{const} \quad (19)$$

является *первым интегралом уравнения геодезических* и называется *квадратичным интегралом геодезических*.

в) L_∞ -сеть. При $m \rightarrow \infty$ уравнение (7) принимает вид

$$a^{is} (a_{i|s} - 2a_i a_s) = - (a_i^s a_s)_{,i} = 0. \quad (20)$$

Чебышевский вектор в этом случае диагонален относительно сети и в изотермических параметрах его потенциал

$$a = \tilde{U}^*(u) + \tilde{V}^*(v) = -\frac{1}{2} (U(u) + V(v)), \quad (21)$$

а линейный элемент приводится к виду

$$ds^2 = e^{U+V} (du^2 + dv^2). \quad (22)$$

L_∞ -сеть будем также называть *обобщенной спиральной сетью*, сохраняя название *спиральная*, для того случая, когда одна из функций U или V приводится к uh или vh , где $h = \text{const}$. Пусть $U = 2hu$ и

$$ds^2 = e^{2hu+V} (du^2 + dv^2). \quad (23)$$

Какое дополнительное условие надо присоединить к условиям (1) и (20), характеризующим обобщенную спиральную сеть, чтобы получить инвариантный признак спиральной сети? Для выяснения этого рассмотрим градиентный, согласно (20), вектор

$$\bar{a}_i = a_i^s a_s = \partial_i \bar{a},$$

его потенциал $\bar{a} = -U + V$. Подсчитывая величины

$$\tilde{a}_{i| \cdot}^i = e^{2a} (-U'' - V''), \quad \tilde{a}_{i| \cdot}^i = e^{2a} (U'' - V'')$$

и замечая, что в нашем случае $U'' = 0$, приходим к заключению, что $(\tilde{a}_i - \tilde{a}_i)_{| \cdot}^i = 0$, то есть что поле вектора $a_i - \bar{a}_i$ лапласово, а функция $a - \bar{a}$ гармоническая. Таким образом, инвариантная характеристика спиральной сети содержится в равенствах (1) и (20) и в требовании, чтобы один из векторов $a_i \pm \bar{a}_i$ был лапласовым.

Подсчитаем коэффициент $q = -e^{-a} g_w$ уравнения (45;1), которому удовлетворяет вектор $p_i = e^{-a} v_i$ спиральной сети. Имеем

$$g_w = -v_{i| \cdot}^i = \varepsilon^{12} (\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1) = e^{2a} \partial_1 e^{-a} = -\frac{1}{2} e^a U' = -e^a h,$$

следовательно, $q = h$ и метрика поверхности, допускающей спиральную сеть, характеризуется тем, что система четырех уравнений

$$p_{i|s} = \sigma g_{is} + h \varepsilon_{is} \quad (h = \text{const}) \quad (24)$$

с тремя неизвестными функциями p_1, p_2, σ совместны. Условие интегрируемости системы (24):

$$K \tilde{p}_i = \sigma^s g_{is} = -\tilde{\sigma}_i. \quad (25)$$

Для того чтобы эти уравнения выполнялись тождественно, необходимо и достаточно, чтобы $K = 0$. Следовательно, на евклидовой плоскости система (24) вполне интегрируема. Как следует из (24), при $K = 0$ функция σ обращается в постоянную. В прямоугольных декартовых координатах плоскости, когда

$$g_{11} = g_{22} = \varepsilon_{12} = 1, \quad g_{12} = 0,$$

система (24) принимает вид

$$\partial_1 p_1 = \sigma, \quad \partial_2 p_1 = h, \quad \partial_1 p_2 = -h, \quad \partial_2 p_2 = \sigma$$

и имеет решениями

$$p_1 = \sigma x + h y + c_1, \quad p_2 = -h x + \sigma y + c_2.$$

Не ограничивая общности, можно положить $c_1 = c_2 = 0$, и тогда одно семейство линий спиральной сети определится дифференциальным уравнением

$$p_1 dx + p_2 dy = \sigma (x dx + y dy) + h (y dx - x dy) = 0,$$

из которого находим конечные уравнения линий этого семейства

$$\ln(x^2 + y^2) = \frac{h}{\sigma} \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \operatorname{arctg} \frac{y_0}{x_0} \right),$$

где $\frac{y_0}{x_0}$ — произвольная постоянная. В полярной системе координат линии сети определяются уравнением

$$\rho = e^{\frac{h}{\sigma}(\varphi + \varphi_0)}.$$

Таким образом, произвольная спиральная сеть евклидовой плоскости составлена из семейства логарифмических спиралей и их ортогональных траекторий.

Предполагая $K \neq 0$, из (25) находим

$$p_i = -\frac{1}{K} \sigma_i. \quad (26)$$

Если $K = \text{const}$, то вектор p_i градиентен, что, согласно (24), возможно лишь при $h = \frac{1}{2} \varepsilon^{is} p_{i|s} = 0$. Следовательно, на поверхностях постоянной кривизны вектор p_i удовлетворяет уравнению $p_{i|s} = \sigma g_{is}$, а спиральная сеть вырождается в сеть вращения.

Обратимся к случаю $K \neq \text{const}$. Исключая из (26) и (24) вектор p_i , получим вполне интегрируемую систему уравнений для функции σ :

$$\sigma_{i|s} = \frac{1}{K} \sigma_i K_s - K \sigma g_{is} - K h \varepsilon_{is}. \quad (27)$$

Из симметрии левой части следует, что

$$\sigma_i K^i = 2K^2 h. \quad (28)$$

Дифференцируя обе части этого равенства и пользуясь формулами (27), (28) и (21; 9), получаем

$$\sigma K \tilde{K}_s + \sigma_i \tilde{K}^i t_s = 3h K K_s - K^2 h \partial_s \ln \Delta_1 K. \quad (29)$$

Дальнейшее исследование распадается на три случая.

1) $\tilde{K}_s t_s \neq 0$. Свертывая обе части равенства (29) с t_s , найдем функцию σ :

$$\sigma = \frac{1}{\tilde{K}_s t_s} (3h K_i - h K \partial_i \ln \Delta_1 K) t^i.$$

Подстановка этого значения в (27) даст инвариантный признак спиральной поверхности *первого типа*.

2) $t_s = t_s = \lambda \tilde{K}_s$, $\lambda_s K^s \neq 0$. В этом случае, согласно (21;13), имеем

$$\tilde{K}^s t_s = -K^s \partial_s \ln \sqrt{\Delta_1 K} = 0,$$

так что $\Delta_1 K = f(K)$. Из равенства (29) теперь следует, что

$$3 - K \frac{f'}{f} = 0, \quad \lambda \sigma_i \tilde{K}^i + \sigma K = 0. \quad (30)$$

Интегрируя первое уравнение, находим

$$f = \Delta_1 K = c_1 K^3. \quad (31)$$

Второе уравнение совместно с уравнением (28) приводит к новому уравнению для функции σ :

$$\sigma_s = -\frac{\sigma}{c_1 \lambda K^2} K_s - \frac{2h}{c_1 K} \tilde{K}_s. \quad (32)$$

Составим условие его интегрируемости:

$$\begin{aligned} \sigma_{s1}^s &= \frac{\sigma_s K^s}{c_1 \lambda K^2} - \frac{\sigma \lambda_s K^s}{c_1 \lambda^2 K^2} - \frac{2h}{c_1 K^2} \tilde{K}^s K_s + \frac{2h}{c_1 K} \Delta_2 K = \\ &= \frac{2h}{c_1 \lambda} - 2hK + \frac{2h}{c_1 K} \Delta_2 K - \frac{\sigma \lambda_s K^s}{c_1 \lambda^2 K^2} = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Так как, по предположению, $\lambda_s K^s \neq 0$, то последнее уравнение определяет функцию σ :

$$\sigma = \frac{2h\lambda K^2}{\lambda_s K^s} \left(1 - c_1 \lambda K + \frac{\lambda}{K} \Delta_2 K \right). \quad (34)$$

Функцию λ найдем из уравнений $t_s = \lambda \tilde{K}_s$ и (21;13). Имеем

$$\lambda = -\frac{1}{\Delta_1 K} t_s K^s = \frac{\Delta_2 K}{\Delta_1 K} - \frac{f'}{2f} = \frac{1}{c_1 K^3} \left(\Delta_2 K - \frac{3c_1}{2} K^2 \right). \quad (35)$$

Внося значение функции σ (34) в уравнение (27) мы получим инвариантный признак спиральной поверхности *второго типа*.

3) $t_s = \lambda \tilde{K}_s$, $\lambda_s K^s = 0$. В этом случае $\lambda = \lambda(K)$ и, как это следует из (33) и (35),

$$\Delta_2 K = c_2 K^2, \quad (36)$$

где

$$c_2 = \frac{1}{4} (5c_1 \pm \sqrt{c_1^2 - 16c_1}). \quad (37)$$

Итак, *спиральная поверхность третьего типа наложима на поверхность вращения*. Инвариантная характеристика этой поверхности складывается из равенств (31), (36) и (37).

Интегрирующий множитель вектора \tilde{K}_i , согласно (38;10), есть

$$e^{-\int \frac{\Delta_2 K}{\Delta_1 K} dK} = K^{-\frac{c_2}{c_1}},$$

следовательно

$$K^{-\frac{c_2}{c_1}} \tilde{K}_i = q_i = \partial_i q,$$

и линейный элемент поверхности будет

$$ds^2 = \frac{1}{c_1 K^3} (dK^2 + K^{\frac{2c_2}{c_1}} dq^2), \quad (38)$$

или

$$ds^2 = du^2 + u^{2c} dv^2. \quad (39)$$

Если значение

$$\lambda = \frac{1}{(c_1 - c_2) K},$$

найденное из (33) при условии $\lambda_s K^s = 0$, внести в (32), то получим

$$\sigma_s + \frac{c_1 - c_2}{c_1} \sigma \frac{K_s}{K} = -\frac{2h}{c_1} \frac{\tilde{K}_s}{K} = -\frac{2h}{c_1} g_s K^{\frac{c_2 - c_1}{c_1}}$$

или

$$\partial_s (\sigma K^{\frac{c_1 - c_2}{c_1}}) = -\frac{2h}{c_1} g_s.$$

Отсюда находим

$$\sigma = -\frac{2h}{c_1} (g + c) K^{\frac{c_2 - c_1}{c_1}} \quad (c = \text{const}).$$

Семейство линий уровня функции σ , согласно (26), будет одним семейством линий спиральной сети. Ортогональные траектории линий $\sigma = \text{const}$ определяются уравнением

$$K^{\frac{2(c_1 - c_2)}{c_1}} + (c_2 - c_1)(g + c)^2 = \text{const}$$

и составляют второе семейство линий спиральной сети.

Так как функция σ зависит от одной произвольной постоянной c , то на исследуемой поверхности существует однопараметрическое семейство спиральных сетей.

3. Примем L_m -сеть a_{is} римановой геометрии V_2 за базис пары сопряженных связностей. Так как L_m -сеть всегда кодацциева и ортогональная, то, согласно § 34, вторая связность \check{V}_2 будет римановой и будет находиться с данной геометрией V_2 в конформном соответствии. Чебышевские векторы сети a_{is} в V_2 и \check{V}_2 отличаются только знаками, поэтому линейные элементы исходной и преобразованной геометрии будут

$$ds^2 = e^{-2a} (du^2 + dv^2) = (U + V)^m (du^2 + dv^2), \quad (40)$$

$$d\check{s}^2 = e^{2a} (du^2 + dv^2) = (U + V)^{-m} (du^2 + dv^2). \quad (41)$$

Таким образом, если базис пары сопряженных римановых геометрий является L_m -сетью в одной из них, то в другой он будет L_{-m} -сетью.

4. Применим этот результат к исследованию L_{-1} -сети a_{is} римановой геометрии V_2 [43]. В сопряженной с ней

относительно этой сети римановой геометрии \check{V}_2 данная сеть будет сетью Лиувилля. Но сеть Лиувилля допускает ∞^1 аполярных ей геодезических в \check{V}_2 сетей. Все эти сети в исходном V_2 будут чебышевскими. Мы получили теорему Либера: *L_{-1} -сеть римановой геометрии, в изотермических параметрах которой линейный элемент имеет вид*

$$ds^2 = \frac{1}{U+V} (du^2 + dv^2),$$

допускает ∞^1 аполярных ей чебышевских сетей.

Все эти сети, как геодезические сети сопряженного \check{V}_2 определяются формулами (16) и (18).

§ 47. L_m -сети, допускающие вращение [39]

1. Так как чебышевский вектор ортогональной сети при вращении на постоянный угол не изменяется, то для рассматриваемых сетей должны быть градиентными при любом значении угла поворота α оба вектора

$$\begin{aligned} a_i^s (e^{-\frac{2\alpha}{m}})_s &= \theta_i, \\ \check{a}_i^s (e^{-\frac{2\alpha}{m}})_s &= (a_i^s \cos 2\alpha + \check{a}_i^s \sin 2\alpha) (e^{-\frac{2\alpha}{m}})_s = \\ &= \theta_i \cos 2\alpha + \check{\theta}_i \sin 2\alpha. \end{aligned}$$

Для этого необходимо и достаточно, чтобы поле вектора θ_i было лапласовым. При выполнении этих условий функция $e^{-\frac{2\alpha}{m}}$ будет диагональна относительно двух аполярных и взаимно диагональных сетей a_{is} и \check{a}_{is} . В изотермических параметрах сети a_{is} , как это было показано в § 40, эта функция принимает вид

$$e^{-\frac{2\alpha}{m}} = c(u^2 + v^2) + c_1,$$

и мы получаем следующее выражение линейного элемента:

$$ds^2 = [c(u^2 + v^2) + c_1]^m (du^2 + dv^2).$$

2. Исследуем поверхности, допускающие вращаемые L_m -сети. Для такой сети выполняются условия

$$a^{is} \left(a_{ijs} - \frac{2(m+1)}{m} a_i a_s \right) = - \frac{m}{2(m+1)} a^{is} \left(e^{-\frac{2(m+1)a}{m}} \right)_{ijs} = 0,$$

$$\tilde{a}^{is} \left(e^{-\frac{2(m+1)a}{m}} \right)_{ijs} = 0.$$

Следовательно,

$$\left(e^{-\frac{2(m+1)a}{m}} \right)_{ijs} = \rho g_{is}, \quad (1)$$

поэтому вращаемые L_m -сети существуют только в метриках вращения. Инвариантный признак такой метрики мы получим, если потребуем, чтобы решение a уравнения (1) удовлетворяло дополнительному условию (23;7)

$$g^{ij} a_{ij} = K, \quad (2)$$

обеспечивающему существование ортогональной сети с чебышевским вектором a_i .

3. Пусть

$$ds^2 = e^{2A(u)} (du^2 + dv^2)$$

— линейный элемент метрики вращения, допускающей вращаемую L_m -сеть. Тогда

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0, \quad \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^2 = -\Gamma_{22}^1 = A' = \frac{dA}{du}.$$

Записывая уравнение (45;13) для функции $\omega = \omega(u)$, получаем

$$\omega_{1|1} = \partial_1 \omega_1 - A' \omega' = \rho e^{2A},$$

$$\omega_{2|2} = A' \omega' = \rho e^{2A}.$$

Отсюда находим

$$\omega'' = 2A' \omega', \quad \omega' = c e^{2A}, \quad (c = \text{const}).$$

В нашем случае $\omega = e^{na}$, где $n = -\frac{2(m+1)}{m}$ (считаем, что $m \neq -1$, $m \neq \infty$, то есть что $n \neq 0$, $n \neq -2$).

Условие (2) принимает вид

$$K = g^{ij} a_{ij} = e^{-2A} a'';$$

а так как $-A$ — тоже потенциал чебышевского вектора ортогональной координатной сети, то $K = -e^{-2A} A''$ и $a'' = -A''$. Следовательно,

$$a = -A + c_1 u + c_2.$$

Далее имеем

$$\omega' = c e^{2A} = (e^{na})' = n e^{na} a' = n e^{n(-A+c_1 u+c_2)} (-A' + c_1),$$

что приводит к следующему дифференциальному уравнению для функции A :

$$\frac{n}{c} (c_1 - A') e^{-(2+n)A} = e^{-c_1 n u - c_2 n}.$$

Решая его, находим

$$e^{2A} = e^{c u} (c' + c'' e^{c u})^m.$$

Следовательно, линейный элемент метрики вращения, допускающей вращаемую L_m -сеть ($m \neq -1$, $m \neq \infty$) приводится к виду

$$ds^2 = e^{c u} (c' + c'' e^{c u})^m (du^2 + dv^2). \quad (3)$$

Предоставляем читателю проверить, что в оставшихся случаях $m = -1$ и $m = \infty$ имеем соответственно

$$ds^2 = (c + c' e^{c u})^{-1} (du^2 + dv^2), \quad (4)$$

$$ds^2 = e^{c u + c' e^{-c u}} (du^2 + dv^2). \quad (5)$$

§ 48. Кодацциевы сети

Если в аффинной связности A_2 тензор сети можно про- нормировать так, что он будет удовлетворять уравнению

$$a_{i[s]k}^* = \frac{1}{2} \varepsilon_{sk}^* a_{ij}^*, \quad j = 0, \quad (1)$$

которое называется *уравнением Кодацци*, то сеть называется *кодацциевой*.

Пусть ε_{is} — произвольный бивектор и $\varepsilon_{is|h} = 2\omega_k \varepsilon_{is}$,
 $a_s^i = \sigma a_s^i$, где a_s^i — аффинор кодациевой сети a ; тогда

$$a_{ij|j}^i = (\varepsilon_{kj} \sigma a_i^k)_j = a_i^k (2a_k - 2\omega_k - \partial_k \ln \sigma) = 0.$$

Отсюда следует, что кодациева сеть пространства A_2 характеризуется градиентностью вектора

$$a_k - \omega_k = \frac{1}{2} \partial_k \ln \sigma. \quad (2)$$

В эквивалентных пространствах можно считать, что $\omega_k = 0$, и охарактеризовать кодациеву сеть градиентностью ее чебышевского вектора.

Кодациево нормирование тензора сети, при котором он удовлетворяет уравнению (1), определяется множителем σ . Этот множитель в произвольном A_2 определяется, согласно (2), формулой

$$\ln \sigma = 2 \int (a_k - \omega_k) du^k, \quad (3)$$

а в эквивалентных пространствах, когда бивектор ковариантно постоянен, — формулой

$$\sigma = e^{2\alpha}. \quad (4)$$

В римановой геометрии кодациев тензор сети связан с метрически нормированным тензором равенством

$$a_{is} = e^{2\alpha} a_{is}. \quad (5)$$

В римановом пространстве постоянной кривизны $K = \text{const}$ каждый тензор

$$a_{is} = \varphi_{is} + K \varphi g_{is}, \quad (6)$$

где g_{is} — метрический тензор, а φ — произвольная функция, определяет кодациеву сеть. Действительно, этот тензор удовлетворяет уравнению Кодацци

$$a_{is|j}^s = \varphi_{is|j}^s + K \varphi^s g_{is} = K \tilde{\varphi}_i - K \tilde{\varphi}_i = 0.$$

Обратно, если тензор a_{is} удовлетворяет уравнению Кодацци, то условие интегрируемости уравнения (6) с неизвестной функцией φ выполнено и ее можно найти.

§ 49. Геодезические сети

1. Геодезическая сеть римановой геометрии характеризуется обращением в нуль геодезического вектора или, как следует из (26;8), условием

$$\begin{aligned} \alpha_s &= -d_s^i \tilde{c}_i \frac{1}{\sin \omega} + \frac{1}{2} c_s^i \Omega_i = \\ &= a_s + c_s^i \Omega_i = -a_s - 2d_s^i \tilde{c}_i \frac{1}{\sin \omega} = 0. \end{aligned}$$

Из (26;9) и (26;5) следуют равенства

$$\begin{aligned} 2c_s &= a_s + \partial_s \ln \sin \omega = -c_s^i \Omega_i + \partial_s \ln \sin \omega = \\ &= -2c_s^i a_i \cos \omega + a_s - \partial_s \ln \sin \omega = -g_s^i d_i^k a_k \sin \omega = A_s, \quad (1) \end{aligned}$$

$$2\tilde{c}_i = d_i^s a_s \sin \omega = a_i^s \omega_s, \quad (2)$$

каждое из которых тоже характерно для геодезической сети.

Из последних соотношений легко следует теорема Я. С. Дубнова [28]: *если для геодезической сети выполнено одно из следующих пяти условий:*

- 1) она кодацциева ($a_i = \text{grad}$),
- 2) ее биссекторная сеть изотермическая ($c_i = \text{grad}$),
- 3) ее потенциал диагонален относительно биссекторной сети ($c_i^i \Omega_s = \text{grad}$),
- 4) она конформно-чебышевская ($A_i = \text{grad}$),
- 5) вектор $d_i^s \tilde{c}_s \frac{1}{\sin \omega} = \text{grad}$, то выполнены все пять.

Из (26;10—12) для геодезической сети получаем следующие выражения гауссовой кривизны:

$$2K = d^{is} (a_{i|s} - a_i a_s) \sin \omega = \quad (3)$$

$$= -a^{is} (\text{ctg } \omega)_{i|s} \sin^2 \omega - 2g^{is} \omega_i \omega_s = \quad (4)$$

$$= -\frac{1}{2} (a_i^s \omega_s)_{i|s}. \quad (5)$$

Геодезическую сеть можно охарактеризовать равенством

$$a_{0(is|h)} = a_{0(isa_h)}, \quad (6)$$

которое следует из соотношения

$$a_{0(is|h)} = a_{0(isa_h)} + D_{ish},$$

полученного симметрированием обеих частей равенства (27;6) и из того, что тензор D_{ish} геодезической сети обращается в нуль.

2. Геодезическая сеть в общем случае двузначно определяется своим сетевым углом. Действительно, если угол задан, то для метрически-нормированного тензора сети можно записать три уравнения (см. (4)):

$$\left. \begin{aligned} a_{0(is)}^{is} g_{is} &= \text{ctg } \omega, & a_{00}^{is} a_{is} &= -2, \\ a_{0(is)}^{is} (\text{ctg } \omega)_{i|s} &= -\frac{2(K + \Delta_1 \omega)}{\sin^2 \omega}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

и если $(\text{ctg } \omega)_{i|s} \neq \rho g_{is}$, то эти уравнения определяют сеть двузначно. Следовательно, в произвольном V_2 может существовать не более двух геодезических сетей с равными сетевыми углами.

Угол ω , общий для двух геодезических сетей, не произволен, а должен удовлетворять тем двум дифференциальным уравнениям, которые мы получим, если потребуем, чтобы сеть, определенная системой (7), была геодезической.

Для существования трех геодезических сетей с общим сетевым углом необходима, как это следует из предыдущего, пропорциональность

$$(\text{ctg } \omega)_{i|s} = \rho g_{is} = -\frac{K + \Delta_1 \omega}{\sin \omega \cos \omega} g_{is},$$

или

$$\omega_{i|s} = [2\omega_i \omega_s + (K + \Delta_1 \omega) g_{is}] \text{ctg } \omega.$$

Согласно (21;14) и (45;13,14) получаем отсюда

$$\begin{aligned} \frac{\omega_i \omega_s f'}{f} + \tilde{\omega}_i \tilde{\omega}_s \left(\frac{F}{f} - \frac{f'}{2f} \right) - 2\omega_i \omega_s \text{ctg } \omega &= \\ &= (K + f) \text{ctg } \omega \frac{\omega_i \omega_s + \tilde{\omega}_i \tilde{\omega}_s}{f}, \end{aligned}$$

где

$$f(\omega) = \Delta_1 \omega, \quad F(\omega) = \Delta_2 \omega,$$

что равносильно двум уравнениям

$$(K + f) \operatorname{ctg} \omega = \frac{f'}{2} - 2 \operatorname{ctg} \omega f = F - \frac{f'}{2}.$$

Исключая отсюда гауссову кривизну K , с помощью (45;25) получим систему двух уравнений с двумя неизвестными функциями f и F . Решения этих уравнений, найденные П. И. Токаревым [51], имеют вид

$$f = \sin^2 \omega (a + b \cos \omega), \quad F = -b \sin^3 \omega.$$

Интегрирующий множитель λ вектора $\tilde{\omega}$, найдем согласно (38;10):

$$\ln \lambda = - \int \frac{F}{f} d\omega = \int \frac{b \sin \omega d\omega}{a + b \cos \omega} = - \ln (a + b \cos \omega),$$

$$\lambda = \frac{1}{a + b \cos \omega}.$$

Следовательно, $\lambda \tilde{\omega}_i du^i = dq$, и линейный элемент может быть записан в виде

$$ds^2 = \frac{1}{\sin^2 \omega (a + b \cos \omega)} [d\omega^2 + (a + b \cos \omega) dq^2]. \quad (8)$$

Риманова геометрия, допускающая существование ∞^1 геодезических сетей с равными сетевыми углами, есть метрика вращения с линейным элементом (8) (см. [51]).

§ 50. Сети Дубнова

1. В общем случае римановой геометрии геодезическая сеть однозначно определяется своим чебышевским вектором. Действительно, пусть чебышевский вектор a_i геодезической сети a известен; тогда из (26;10), (26;14) и (26;18) имеем три соотношения:

$$2K = d_{00}^{i_s} (a_{i|s} - a_i a_s) \sin \omega = (a_{00}^{i_s} \cos \omega + g^{i_s} \sin \omega) (a_{i|s} - a_i a_s),$$

$$c_{00}^{i_s} (a_{i|s} - a_i a_s) = 0, \quad \tilde{c}_{00}^{i_s} (a_{i|s} - a_i a_s) = - \frac{\Delta_2 \omega}{\sin \omega},$$

с помощью которых в разложении

$$a_{(i|s)} - a_i a_s = \lambda g_{is} + \mu a_{is} + \nu c_{is}$$

можно найти все коэффициенты

$$\nu = 0, \quad \lambda d_{00}^{is} g_{is} = \frac{2\lambda}{\sin \omega} = \frac{2K}{\sin \omega},$$

$$\mu \tilde{c}_{00}^{is} a_{is} = \frac{2\mu}{\sin \omega} = -\frac{\Delta_2 \omega}{\sin \omega},$$

что приводит к формуле А. Е. Либера [43]

$$K g_{is} - (a_{(i|s)} - a_i a_s) = \frac{1}{2} \Delta_2 \omega a_{is}. \quad (1)$$

Если $\Delta_2 \omega \neq 0$, то эта формула определяет геодезическую сеть по ее чебышевскому вектору однозначно.

Геодезические сети, не определяемые своим чебышевским вектором, были исследованы Я. С. Дубновым [35] и названы им *особенными геодезическими сетями*. В ряде других работ ([45], [43]) эти сети названы *сетями Дубнова*. Сеть Дубнова характеризуется тем, что ее сетевой угол является гармонической функцией точки: $\Delta_2 \omega = 0$.

Чебышевский вектор кодацциевой сети Дубнова удовлетворяет уравнению

$$a_{i|s} - a_i a_s = K g_{is},$$

условия интегрируемости которого

$$K \tilde{a}_i - K \tilde{a}_i = -\tilde{K}_i = 0$$

показывают, что кодацциевы сети Дубнова существуют лишь в римановых геометриях постоянной кривизны.

2. Пусть a_{is} и b_{is} — тензоры двух сетей Дубнова с равными чебышевскими векторами $a_i = b_i$. По теореме Дубнова (§ 28 п. 6) взаимный угол этих сетей постоянен, так что $a_{is} b^{is} = c = \text{const}$. Если в выражении тензора

$$d_{is} = c_1 a_{is} + c_2 b_{is} \quad (2)$$

постоянные c_1 и c_2 связать условием

$$-\frac{1}{2} d_{is} d^{is} = c_1^2 - 2c_1 c_2 c + c_2^2 = 1,$$

то он будет метрически-нормированным и определит геодезическую сеть с тем же чебышевским вектором a_i , так как, согласно (2) и (49;6),

$$d_{(is|k)}^0 = d_{(is|a_k)}^0.$$

Таким образом, если в V_2 существует сеть Дубнова, то существует по крайней мере еще ∞^1 таких сетей, чебышевские векторы которых равны чебышевскому вектору данной сети. Взаимный угол любой пары таких сетей постоянен.

3. *Дробно-линейным интегралом геодезических* называют уравнение

$$\frac{p_i T^i}{q_s T^s} = c = \text{const}, \quad (3)$$

определяющее при любом значении постоянной c геодезическое поле T_i . Геодезические поля векторов p_i и q_i , соответствующие значениям $c = 0$ и $c = \infty$, назовем *базисными*. Очевидно, что за базисные можно принять любые два поля $T(c)$ и $T(c_1)$.

Пользуясь произволом совместного нормирования векторов p_i и q_i , положим $p_i = \lambda v_i$, $q_i = w_i$, где v_i и w_i — орты. Интеграл (3) можно теперь записать в виде

$$\lambda v_i + c w_i = \sigma T_i \quad (4)$$

(σ — некоторый множитель). Необходимым и достаточным условием того, что поле вектора (4) геодезическое, является равенство

$$\begin{aligned} & (\lambda v_i + c w_i)_{|s} (\lambda v^i + c w^i) (\lambda v^s + c w^s) = \\ & = (\lambda_s v_i + \lambda \tilde{v}_i t_s + c \tilde{w}_i t_s) [\lambda^2 v^i v^s + c \lambda (v^i w^s + v^s w^i) + c^2 w^i w^s] = 0. \end{aligned}$$

Пользуясь соотношениями

$$t_i v^i = 0, \quad t_i w^i = 0, \quad t_i w^i = (t_i - \omega_i) w^i = -\omega_i w^i, \quad t_i v^i = \omega_i v^i,$$

где ω — угол между векторами v_i и w_i , получим

$$\begin{aligned} & {}^2 [\omega_s (w^s - v^s \cos \omega) + \partial_s \ln \lambda v^s \sin \omega] + \\ & + c^2 \lambda [-\omega_s (v^s - w^s \cos \omega) + \partial_s \ln \lambda w^s \sin \omega] = 0. \end{aligned}$$

Так как это равенство должно выполняться при любых значениях постоянной c , то

$$\omega_s \frac{w^s - v^s \cos \omega}{\sin \omega} + \partial_s \ln \lambda v^s = [\omega_s + (\ln \lambda)_s] \tilde{v}^s = 0,$$

$$[\omega_s + (\ln \lambda)_s] \tilde{w}^s = 0,$$

что возможно лишь при

$$\omega_s = -(\ln \lambda)_s, \quad \tilde{\omega}_s = \partial_s \ln \lambda. \tag{5}$$

Угол ω является сетевым углом геодезической сети, составленной из базисных семейств v_i и w_i . В силу (5) ω — гармоническая функция точки, следовательно, сеть (v, w) — сеть Дубнова. Так как любую пару семейств $T(c)$ и $T(c_1)$ можно принять за базисные, то из существования дробно-линейного интеграла геодезических следует существование ∞^2 сетей Дубнова, получаемых объединением любой пары геодезических семейств $T(c)$ и $T(c_1)$. Взаимный угол любых двух таких сетей постоянен, как это легко следует из (3), следовательно, все эти сети имеют одинаковые чебышевские векторы.

Предположим теперь, что V_2 допускает сеть Дубнова (v, w) . Тогда уравнение

$$\frac{\tilde{\omega} v_i T^i}{w_s T^s} = \text{const},$$

где $\tilde{\omega}$ — гармоническая функция, сопряженная с функцией ω , будет дробно-линейным интегралом геодезических, что можно показать, обращая предыдущие выкладки. Мы пришли к следующему результату: существование сети Дубнова равносильно существованию дробно-линейного интеграла геодезических и влечет существование по крайней мере ∞^2 сетей Дубнова с равными чебышевскими векторами (см. [45]).

§ 51. Квадратичный интеграл геодезических

1. Геодезическая кодацциева сеть называется сетью Риччи. По теореме Дубнова (§ 49) биссекторная сеть сети Риччи изотермическая, а из формулы (26;16) теперь следует, что чебышевский вектор биссекторной сети

удовлетворяет уравнению

$$c^{is} (c_{i|s} - 4c_{is}) = 0. \quad (1)$$

Следовательно, биссекторная сеть сети Риччи есть сеть Лиувилля. Из результатов § 46 п. 2 следует, что поверхности, допускающие сеть Риччи, имеют квадратичный интеграл геодезических. Покажем также, что все геодезические сети (46;16) квадратичного интеграла геодезических являются сетями Риччи. Действительно, из (46;17) имеем

$$b_{(is|h)} = (\sigma b_{is})|_h = b_{(is} (\partial_h) \ln \sigma + 2b_h) = 0, \quad (2)$$

следовательно, чебышевский вектор сети b_{is} есть $b_s = -\frac{1}{2} \partial_s \ln \sigma$ и градиентен, что и требовалось доказать.

Отметим, что нормирование тензора b_{is} сети Риччи, при котором он удовлетворяет уравнению (2), определяется формулой

$$b_{is} = e^{-b} b_{is}. \quad (3)$$

2. Поверхности V_2 , допускающие квадратичный интеграл геодезических, называются *поверхностями Лиувилля* и характеризуются существованием сети Лиувилля.

Вектор (45;7) — $T_s = c_s^h (e^{-2c})_h$ — сети Лиувилля градиентен: $T_s = \partial_s T$. Его заданием сеть Лиувилля на поверхности с $K \neq 0$ определяется однозначно формулой (45;10):

$$2Kc_{is} = -\tilde{T}_{i|s} - \tilde{T}_{s|i}. \quad (4)$$

Подставляя выражение тензора (45;9)

$$\tilde{c}_{is} = \frac{1}{2K} (g_{is} \tilde{T}_{j|}^j + T_{i|s} + T_{s|i}) = \frac{1}{2K} (-g_{is} \Delta_2 T + 2T_{i|s})$$

в формулу (46;16), приходим к следующему выражению тензора сети Риччи через функцию T :

$$b_{is} = \frac{1}{K} T_{i|s} + \left(T - \frac{1}{2K} \Delta_2 T \right) g_{is}. \quad (5)$$

Тензор произвольной сети Риччи удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$3b_{(ih|s)} = b_{ih|s} + b_{hs|i} + b_{si|h} = 0$$

или

$$\begin{aligned} 3b_{ih|s} + (b_{hs|i} - b_{hi|s}) + (b_{si|h} - b_{sh|i}) = \\ = 3b_{ih|s} + \varepsilon_{si} b_{hj}{}^j + \varepsilon_{sh} b_{ij}{}^j = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Займемся преобразованием этой системы, которое приведет нас к уравнению для функции T . Из (5) находим

$$\begin{aligned} b_{ih|s} &= \left(\frac{T_{ih}}{K} \right)_{|s} + \left[T_s - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta_2 T}{K} \right)_s \right] g_{ih}, \\ b_{ij}{}^j &= \frac{T_{ij}{}^j}{K} - \frac{T_{ij} K^j}{K^2} + T^j g_{ij} - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta_2 T}{K} \right)^j g_{ij}, \end{aligned}$$

или, если заменить $T_{ij}{}^j = K \tilde{T}_i$,

$$b_{ij}{}^j = -\frac{T_{ij}}{K} \frac{K^j}{K} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta_2 T}{K} \right)_i.$$

Внося эти значения в (6), получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{T_{ih}}{K} \right)_{|s} &= \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta_2 T}{K} \right)_s - T_s \right] g_{ih} + \\ &+ \frac{1}{3} \varepsilon_{si} \left[\frac{T_{hj}}{K} \frac{K^j}{K} - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta_2 T}{K} \right)_h \right] + \\ &+ \frac{1}{3} \varepsilon_{sh} \left[\frac{T_{ij} K^j}{K} - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta_2 T}{K} \right)_i \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Чтобы разрешить эти уравнения относительно $\left(\frac{T_{ih}}{K} \right)_s$, свернем обе части с g^{ik} :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Delta_2 T}{K} \right)_s &= 2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\Delta_2 T}{K} \right)_s - T_s \right] + \\ &+ \frac{2}{3} \left[-\frac{\tilde{T}_{sij} K^j}{K} - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta_2 T}{K} \right)_s \right]. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\Delta_2 T}{K}\right)_s &= -6T_s - 2\frac{\tilde{T}_{sij} K^j}{K} , \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\tilde{\Delta}_2 T}{K}\right)_s - \frac{T_{sij} K^j}{K} &= -3\tilde{T}_s , \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

следовательно,

$$\left(\frac{\Delta_2 T}{K}\right)_s = -6T_s + 2\frac{T_{jls} \tilde{K}^j}{K} - 2\frac{\Delta_2 T K_s}{K} . \quad (9)$$

Подставим значения (8) и (9) в формулу (7):

$$\begin{aligned} \left(\frac{T_{ikh}}{K}\right)_{|s} &= \left[-4T_s + \frac{T_{\alpha js} \tilde{K}^\alpha}{K} - \frac{\Delta_2 T K_s}{K} \right] g_{ikh} + \\ &\quad + \varepsilon_{si} \tilde{T}_h + \varepsilon_{sh} \tilde{T}_i . \end{aligned}$$

Замечая, наконец, что $\varepsilon_{si} \tilde{T}_h = T_s g_{ikh} - T_i g_{sh}$, окончательно получаем (см. [23])

$$\left(\frac{T_{ikh}}{K}\right)_{|s} = \left(\frac{T_{\alpha js} \tilde{K}^\alpha}{K} - \frac{\Delta_2 T K_s}{K} - 2T_s\right) g_{ikh} - 2g_{s(i} T_{k)} . \quad (10)$$

Если ввести дополнительно неизвестные функции T_i и T_{ij} и дополнить систему (10) уравнениями

$$\partial_i T = T_i, \quad \partial_j T_i = T_{ij}, \quad (11)$$

то получим систему уравнений (10), (11) в полных дифференциалах с *шестью* неизвестными функциями.

Согласно общей теории эта система может иметь не более *шести* линейно независимых решений. Исключая тривиальное решение $T = \text{const}$, которое приводит к тривиальному первому интегралу $g_{ik} \frac{du^i}{ds} \frac{du^k}{ds} = \text{const}$, получаем следующий результат: *поверхность V_2 может допускать не более пяти нетривиальных линейно независимых решений.*

Каждое решение T определяет по формуле (5) тензор сети Риччи, нормирование которого соответствует правилу (3), то есть определяет квадратичный интеграл геодезических. Линейно независимым решениям системы (10), как это следует из линейности правой части формулы (5)

относительно функции T , соответствуют линейно независимые квадратичные интегралы геодезических. Это позволяет сказать, что поверхность V_2 может иметь не более пяти линейно независимых квадратичных интегралов (тривиальный интеграл при этом исключен).

Составим условие интегрируемости системы (10):

$$\left(\frac{T_{i|h}}{K}\right)_{|s} = 2g_{(i}^s T_{k)|s}.$$

Исключая производные $\left(\frac{T_{i|h}}{K}\right)_{|s}$, появляющиеся при дифференцировании правой части уравнений (10), с помощью этих же уравнений, получим одно уравнение

$$\tilde{K}^{is} \frac{T_{i|s}}{K} = 5K^s T_s \quad (\tilde{K}_{is} = g_i^k K_{k|s}). \quad (12)$$

Для того чтобы оно не накладывало дополнительных условий на неизвестные функции и не уменьшало тем самым числа линейно независимых решений, необходимо и достаточно, чтобы оно выполнялось тождественно, что возможно лишь при $K = \text{const}$. Следовательно, максимальное число — пять — независимых квадратичных интегралов геодезических имеют только поверхности постоянной кривизны.

Для дальнейшего исследования системы (10) продифференцируем обе части уравнения (12)

$$\tilde{K}^{ih} \frac{T_{i|h}}{K} + \tilde{K}^{ih} \left(\frac{T_{i|h}}{K}\right)_{|s} = 5K^i_{|s} T_i + 5K^i T_{i|s}$$

и исключим отсюда производные $\left(\frac{T_{i|h}}{K}\right)_{|s}$ с помощью (10):

$$(\tilde{K}^{ih} - 5K K^i \delta_s^h) \frac{T_{i|h}}{K} = (7K^i_{|s} - \Delta_2 K g_s^i) T_i. \quad (13)$$

Докажем, что существование точно четырех независимых решений невозможно: если существует четыре решения, то гауссова кривизна постоянна и, следовательно, существует и пятое решение. Действительно, для того чтобы существовало четыре независимых решения, необходимо, чтобы оба уравнения (13) были следствиями уравнений (10) и (12), то есть чтобы существовал такой

вектор λ_s , что

$$\begin{aligned}\tilde{K}_{(ih)s} + 5KK_{(ie_h)s} &= \lambda_s \tilde{K}_{(ih)}, \\ 7K_{i|s} - \Delta_2 K g_{is} &= \lambda_s 5K_i.\end{aligned}$$

Свертывая обе части первого равенства с g^{ih} , получаем

$$5K\tilde{K}_i = 0,$$

что и доказывает наше утверждение.

Для того чтобы существовало три независимых решения, необходимо, чтобы из трех уравнений (12) и (13) было только два линейно независимых, то есть чтобы существовал такой вектор x_s , что

$$(\tilde{K}_{(ih)s} + 5KK_{(ie_h)s})x^s = \tilde{K}_{(ih)}, \quad (14)$$

$$(7K_{i|s} - \Delta_2 K g_{is})x^s = 5K_i. \quad (15)$$

Из первого уравнения свертыванием с g^{ih} находим: $g^{ih}K_{i|s}x_h = 0$, следовательно, $x_s = \frac{1}{\varrho} \tilde{K}_s$. Внося это значение во второе уравнение, получаем

$$(5\varrho + \Delta_2 K)K_i = 7K_{s|i}\tilde{K}^s = 7(K_s N_i + \tilde{K}_{st_i})\tilde{K}^s = 7\Delta_1 K N_i. \quad (16)$$

Следовательно, $N = N(K) = \frac{1}{2} \ln f(K)$, где $f(K) = \Delta_1 K$, и соотношение (16) дает

$$\frac{7}{2} f'(K) = 5\varrho + \Delta_2 K. \quad (17)$$

Учитывая значение производных

$$K_{i|s} = \frac{1}{f} [K_i K_s \frac{f'}{2} + (\Delta_2 K - \frac{f'}{2}) \tilde{K}_i K_s], \quad (18)$$

$$\tilde{K}_{(i|s)} = \frac{1}{f} (f' - \Delta_2 K) \tilde{K}_{(i} K_s) \quad (19)$$

и значение вектора $x_s = \frac{1}{\varrho} \tilde{K}_s$, из (14) получаем одно уравнение

$$(\Delta_2 K)_s \tilde{K}^s = -5Kf + \varrho(\Delta_2 K - f') + f''f. \quad (20)$$

Сравнивая это с равенством

$$(\Delta_2 K)_s \tilde{K}^s = -Kf + \frac{3}{2} \Delta_2 K f' - \frac{f'^2}{2} + \frac{f''f}{2} - (\Delta_2 K)^2, \quad (21)$$

полученным из (21;15) в предположении, что $\Delta_1 K = f(K)$, и с равенством (17), заключаем, что $\Delta_2 K = F(K)$, $\varrho = \varrho(K)$. Следовательно, три независимых квадратичных интеграла геодезических допускают только поверхности вращения особого типа.

Если внесем значение $\varrho = \frac{1}{5} \left(\frac{7}{2} f' - F \right)$ в (20), то получим уравнение

$$F'f = -5Kf + f''f + \frac{1}{5}(F-f') \left(\frac{7}{2} f' - F \right), \quad (22)$$

которому необходимо удовлетворяют функции f и F метрики вращения с тремя независимыми квадратичными интегралами геодезических.

Согласно (14) и (15) свертывание обеих частей равенства (13) с вектором \tilde{K}^i дает уравнение, эквивалентное уравнению (12). Следовательно, второе из двух независимых уравнений системы (12), (13) можно получить, свертывая обе части равенства (13) с вектором K^i . Это приведет к уравнению

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{f} \left(\frac{1}{2} f' - F \right) (f' - F) (\tilde{K}^i \tilde{K}^k - K^i K^k) - 5KK^i K^k \right] \frac{T_{ik}}{K} = \\ = \left(\frac{7}{2} f' - 6F \right) \tilde{K}^i T_i. \quad (23) \end{aligned}$$

Если потребовать, чтобы результат дифференцирования (23) не давал новых условий, то получим три уравнения:

$$3 \left(4F - \frac{3}{2} f' \right) \left[5Kf + \left(F - \frac{1}{2} f' \right) (F - f') \right] = 25Kf^2, \quad (22_1)$$

$$\begin{aligned} \frac{S'}{S} + \frac{f'}{f} - \frac{1}{K} - \frac{P}{SK} = \frac{P'}{P} + \frac{f'}{f} + \frac{QK}{fP} = \\ = \frac{Q'}{Q} + \frac{f'}{2f} - \frac{2(S+2P)}{Q}, \quad (22_2, 3) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} P = \frac{1}{2} f' - F, \quad Q = \frac{\left(6F - \frac{7}{2} f' \right) f}{f' - F}, \\ S = \frac{\left(F - \frac{1}{2} f' \right) (f' - F) - 5Kf}{f' - F}, \end{aligned}$$

которые совместно с (22) составят инвариантный признак поверхности вращения с тремя квадратичными интегралами геодезических (см. [61]).

Переходя к решению системы уравнений (22), (22_{1, 2, 3}), запишем линейный элемент искомой метрики вращения в изотермическом виде

$$ds^2 = e^{2\sigma(u)}(du^2 + dv^2).$$

Учитывая, что гауссова кривизна $K = K(u)$, и обозначая штрихами производные по переменному u , найдем

$$K = -\sigma''e^{-2\sigma}, \quad f(K) = e^{-2\sigma}K'^2, \quad F(K) = e^{-2\sigma}K'',$$

$$\frac{df}{dK} = f' \frac{du}{dK} = e^{-2\sigma}(2K'' - 2\sigma'K'),$$

$$\frac{d^2f}{dK^2} = e^{-2\sigma} \left(4\sigma'^2 - 6\sigma' \frac{K''}{K'} - 2\sigma'' + \frac{2K'''}{K'} \right),$$

$$\frac{dF}{dK} = e^{-2\sigma} \left(\frac{K'''}{K'} - 2\sigma' \frac{K''}{K'} \right).$$

Внося эти значения в уравнение (22), получаем

$$5(T'' + 3\sigma'') = (T' + 3\sigma')(T' - 2\sigma'), \quad (22')$$

где введена новая неизвестная функция

$$T = \int \frac{K''}{K'} du.$$

Если в уравнении (22₁) произвести ту же замену, то получим

$$3(T' + 3\sigma')(-5\sigma'' + 2\sigma'^2 - \sigma'T') = 25K'e^{2\sigma}. \quad (22'_1)$$

Так как из (22'₁) следует, что $T' + 3\sigma' \neq 0$ (мы считаем, что $K \neq \text{const}$), то из (22') последовательно находим

$$\frac{T'' + 3\sigma''}{T' + 3\sigma'} = \frac{1}{5}(T' - 2\sigma'),$$

$$\ln(T' + 3\sigma') = \frac{1}{5}(T + 3\sigma) - \sigma + \ln c \quad (c = \text{const} \neq 0).$$

$$\left[e^{-\frac{1}{5}(T+3\sigma)} \right]' = -\frac{1}{5}ce^{-\sigma},$$

$$e^{-\frac{T+3\sigma}{5}} = -\frac{c}{5} \int e^{-\sigma} du \quad (24)$$

Введем новую неизвестную функцию

$$x = \int e^{-\sigma} du$$

и выразим через нее функцию T . Имеем

$$\begin{aligned} \sigma &= -\ln x', & K &= -\sigma'' e^{-2\sigma} = x' x'' - x''^2, \\ e^T &= K' = x' x^{IV} - x'' x'''. \end{aligned}$$

Уравнение (24) принимает теперь вид

$$x' x^{IV} - x'' x''' = \left(-\frac{c}{5}\right)^{-5} x^{-5} x'^3 = -12c_4 x^{-5} x'^3, \quad (25)$$

где положено $\left(-\frac{c}{5}\right)^{-5} = -12c_4 = \text{const} \neq 0$. Разделив обе части уравнения (25) на x'^2 , приведем его к виду

$$\frac{x' x^{IV} - x'' x'''}{x'^2} = \left(\frac{x'''}{x'}\right)' = -12c_4 x^{-5} x'.$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} x x' &= \sqrt{c_1 x^4 + c_2 x^3 + c_3 x^2 + c_4}, \\ u &= \int \frac{x dx}{\sqrt{c_1 x^4 + c_2 x^3 + c_3 x^2 + c_4}}. \end{aligned}$$

Если теперь выразить T и σ через x и его производные и внести эти значения в уравнение (22'), то получим $c_2 = 0$.

В зависимости от значений произвольных постоянных c_1 , c_3 и c_4 , из которых последняя $c_4 \neq 0$, возможны следующие случаи:

$$1^\circ. c_1 \neq 0, \quad \Delta = c_3^2 - 4c_1 c_4 \neq 0,$$

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2\sqrt{c_1}} \ln(2\sqrt{c_1(c_1 x^2 + c_3 x + c_4)} + 2c_1 x + c_3), \\ e^{2\sigma} &= \frac{1}{x'^2} = \frac{ae^u + be^{-u} + c}{(ae^u - be^{-u})^2}, \end{aligned}$$

что эквивалентно следующим значениям:

$$e^{2\sigma} = \frac{a \cos u + c}{\sin^2 u}, \quad e^{2\sigma} = \frac{a \operatorname{ch} u + b}{\operatorname{sh}^2 u}.$$

$$2^\circ. c_1 \neq 0, \quad \Delta = 0,$$

$$e^{2\sigma} = ae^u + be^{2u}.$$

$$3^\circ. c_1 = 0, \quad c_3 \neq 0,$$

$$e^{2\sigma} = \frac{a}{u^2} + b.$$

$$4^\circ. c_1 = c_3 = 0,$$

$$e^{2\sigma} = u.$$

Итак, линейный элемент метрики вращения с тремя независимыми квадратичными интегралами геодезических может принимать один из следующих четырех видов:

$$\left. \begin{aligned} 1^\circ. ds^2 &= \frac{ae^u + be^{-u} + c}{(ae^u - be^{-u})^2} (du^2 + dv^2), \\ 2^\circ. ds^2 &= (ae^u + be^{2u}) (du^2 + dv^2), \\ 3^\circ. ds^2 &= \left(\frac{a}{u^2} + b \right) (du^2 + dv^2), \\ 4^\circ. ds^2 &= u (du^2 + dv^2). \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Дальнейшее исследование системы (10), устанавливающее необходимые и достаточные условия существования двух или одного квадратичных интегралов, можно найти в статье [61].

§ 52. Линейный интеграл геодезических

Линейным интегралом уравнения геодезических поверхности V_2 называют уравнение

$$p_i v^i = c = \text{const} \quad (1)$$

(p_i — заданный вектор), каждое решение которого, орт v^i , определяет геодезическое поле. Дифференцируя обе части этого равенства в направлении геодезического поля, получаем

$$(p_{i|s} v^i + p_i \tilde{v}^i t_s) v^s = p_{i|s} v^i v^s = 0.$$

Так как это равенство должно выполняться для произвольного геодезического поля, принадлежащего линейному интегралу, то

$$p_{i|s} = \sigma \varepsilon_{is}.$$

При $\sigma = 0$ метрика V_2 будет евклидовой ($K = 0$). При $\sigma \neq 0$ приходим к произвольной метрике вращения, так

как вектор p_i удовлетворяет уравнению $\tilde{p}_{i|s} = \sigma g_{is}$, разрешимость которого характеризует такую метрику. Линии поля p_i являются в этом случае меридианами (ортогональными траекториями линий $K = \text{const}$).

Метрику вращения можно теперь охарактеризовать тем, что она допускает квадратичный интеграл геодезических

$$(p_i p_s - c g_{is}) du^i du^s = 0, \quad (2)$$

одна из сетей которого (при $c = 0$) вырождается.

Существование двух независимых линейных интегралов геодезических характеризует поверхность постоянной кривизны, так как в этом случае меридианы, а вместе с ними и линии $K = \text{const}$ неопределенны. На поверхности $K = \text{const}$, как это следует из результатов § 45, существует три линейно независимых линейных интеграла геодезических.

§ 53. Геодезическое отображение поверхностей

Теория квадратичных интегралов геодезических тесно связана с вопросами геодезического отображения поверхностей V_2 .

Пусть g — изотропная сеть поверхности V_2 , а g^* — изотропная сеть поверхности V_2^* , полученной из V_2 геодезическим преобразованием. Так как это преобразование сохраняет эквивалентность, то его вектор p_i градиентен.

Из закона преобразования чебышевских векторов при геодезических преобразованиях: $a_i^* = a_i - p_i$ следует, что сеть g^* до преобразования имела градиентный чебышевский вектор p_i . Так как эта сеть геодезическая (и до и после преобразования), то она является сетью Риччи метрики V_2 а метрика, таким образом, есть метрика Лиувилля.

Отсюда следует теорема Дини: *только лиувиллевы поверхности V_2 геодезически отображаются в поверхность V_2^* .*

Преобразованная поверхность V_2^* будет, очевидно, тоже лиувиллевой: сеть g будет в ней сетью Риччи.

На поверхности Лиувилля существует бесконечное число сетей Риччи, следовательно, ее можно отобразить на поверхность Лиувилля бесконечным числом способов: за вектор преобразования можно взять чебышевский вектор любой сети Риччи.

§ 54. Сети Дубнова в пространстве A_2

Понятие сети Дубнова было обобщено А. П. Норденом [45] на случай произвольного пространства A_2 . Он исходил из того, что и в пространстве A_2 геодезическая сеть в общем случае вполне определяется своим чебышевским вектором. Действительно, пусть a_{is} — геодезическая сеть и a_i — ее чебышевский вектор. После проективного преобразования с вектором a_i эта сеть станет декартовой сетью, следовательно, ее тензор будет пропорционален симметрической части тензора Риччи нового $\overset{*}{A}_2$ и, согласно (20;5), мы имеем равенство

$$\lambda a_{is} = \overset{*}{R}_{(is)} = R_{(is)} - a_{(i)s} + a_i a_s,$$

которое определяет тензор a_{is} геодезической сети по ее чебышевскому вектору. Исключение представляет случай, когда $\lambda = 0$, то есть когда

$$a_{(i)s} - a_i a_s = R_{(is)}.$$

Геодезическая сеть, чебышевский вектор которой удовлетворяет этому условию, не определяется своим чебышевским вектором и называется *сетью Дубнова*. Тензор Риччи $\overset{*}{R}_{is}$ в этом случае кососимметричен или обращается в нуль.

В обоих случаях пространство $\overset{*}{A}_2$ имеет ∞^1 полей абсолютно параллельных направлений и ∞^2 декартовых сетей [45]. В исходном пространстве A_2 все эти сети геодезические и имеют равные чебышевские векторы, то есть являются сетями Дубнова.

Итак, если пространство A_2 допускает одну сеть Дубнова, то оно допускает ∞^2 таких сетей. Взаимный угол любой пары таких сетей постоянен (§ 19).

Покажем, что пространство A_2 , допускающее сеть Дубнова, имеет дробно-линейный интеграл геодезиче-

ских. Принимая чебышевский вектор сети Дубнова за вектор проективного преобразования, получим евклидово или квазиевклидово пространство \dot{A}_2 . Пусть p_i , q_i и r_i — направляющие векторы трех полей абсолютно параллельных направлений пространства \dot{A}_2 , пронормированные так, что $r_i = p_i + q_i$. Тогда направляющий вектор r_i любого другого поля абсолютно параллельных направлений, составляющего с тремя данными полями постоянное ангармоническое отношение, можно представить в виде

$$r_i = p_i + cq_i.$$

В исходном пространстве A_2 линии поля r_i будут геодезическими, а их дифференциальное уравнение, записанное в виде

$$\frac{p_i du^i}{q_s du^s} = \text{const},$$

и дает дробно-линейный интеграл геодезических.

§ 55. Чебышевские сети

1. Чебышевская сеть поверхности V_2 характеризуется обращением в нуль чебышевского вектора или, как следует из (26;7), условием

$$a_i = -d_i^s \frac{\tilde{c}_s}{\sin \omega} - \frac{1}{2} c_i^s \Omega_s = \alpha_i - c_i^s \Omega_s = -\alpha_i - 2d_i^s \frac{\tilde{c}_s}{\sin \omega} = 0. \quad (1)$$

Из (26;9) и (26;5) следуют равенства:

$$2c_i = \alpha_i - \partial_i \ln \sin \omega = -2c_i^s \alpha_s \cos \omega + \alpha_i + \partial_i \ln \sin \omega = \\ = -g_i^s d_s^h \alpha_h \sin \omega = \mathfrak{A}_i, \quad (2)$$

$$2\tilde{c}_i = d_i^s \alpha_s \sin \omega = -a_i^s \omega_s, \quad (3)$$

$$\omega_i = -2a_i^s \tilde{c}_s = \frac{2}{\sin \omega} c_i^s c_s + 2c_i \operatorname{ctg} \omega, \quad (4)$$

каждое из которых характеризует чебышевскую сеть

Из последних формул легко получаем аналог теоремы Дубнова (§ 49) для чебышевской сети: если для чебышевской сети выполнено одно из пяти условий:

- 1) ее геодезический вектор градиентен ($\alpha_i = \text{grad}$),
- 2) ее биссекторная сеть изотермическая ($c_i = \text{grad}$),
- 3) ее потенциал диагонален относительно биссекторной сети ($c_i^s \Omega_s = \text{grad}$),
- 4) она конформно-геодезическая ($\mathfrak{A}_i = \text{grad}$),
- 5) вектор $d_i^s \frac{c_s}{\sin \omega}$ градиентен, то выполнены все пять.

Из (26;10–12) находим следующие выражения гауссовой кривизны через векторы чебышевской сети:

$$\begin{aligned} 2K &= a^{is} (\alpha_{i|s} - \alpha_i \alpha_s) \sin \omega \cos \omega + g^{is} (\alpha_{i|s} + \alpha_i \alpha_s) \sin^2 \omega = \\ &= -a^{is} \omega_{i|s} = (a_i^s \omega_s)_i^i. \end{aligned} \quad (5)$$

Чебышевская сеть может быть также охарактеризована тем, что производная ее метрически нормированного тензора симметрична и равна тензору D_{ish} (см. (27;6)):

$$a_{is|h} = D_{ish}. \quad (6)$$

2. Чебышевский вектор биссекторной сети чебышевской сети удовлетворяет, согласно (26;15), условию

$$c^{is} c_{i|s} = \cos \omega c_s^s. \quad (7)$$

Если биссекторная сеть изотермична, то она будет L_{-1} -сетью, так как тогда выполняются равенства $c_s^s = 0$, $c^{is} c_{i|s} = 0$. Следовательно, *изотермическая сеть, допускающая аполярную ей чебышевскую сеть, допускает ∞^1 таких сетей (§ 46, п. 4) и является L_{-1} -сетью.*

3. Чебышевская сеть в общем случае двузначно определяется своим сетевым углом ω . Действительно, если этот угол задан, то, согласно (5), имеем систему уравнений

$$a^i{}_0 a_{is} = -2, \quad a^{is} g_{is} = 2 \text{ctg } \omega, \quad a^{is} \omega_{i|s} = -2K \quad (8)$$

определяющих при $\omega_{i|s} \neq 0$ тензор a_{is} двузначно. Следовательно в общем случае существует не более двух чебы-

шевских сетей с данным сетевым углом. Сетевой угол таких сетей не произволен, а должен быть решением тех двух уравнений, которые получаются приравниванием нулю чебышевского вектора сети, определенной уравнениями (8).

Существование более чем двух чебышевских сетей с равными сетевыми углами влечет, согласно предыдущему, пропорциональность

$$\omega_{i|s} = \rho g_{is}$$

и характеризует, таким образом, метрику вращения. Множитель ρ находим с помощью (5):

$$a^{is} \omega_{i|s} = -2K = 2\rho \operatorname{ctg} \omega, \quad \rho = -K \operatorname{tg} \omega.$$

Итак, сетевой угол, общий для ∞^1 чебышевских сетей, удовлетворяет уравнению

$$\omega_{i|s} = -K \operatorname{tg} \omega g_{is}. \quad (9)$$

Составим условие интегрируемости уравнений (9). Учитывая, что $K = K(\omega)$, имеем

$$\begin{aligned} K \tilde{\omega}_i &= K' \operatorname{tg} \omega \tilde{\omega}_i + \frac{K}{\cos^2 \omega} \tilde{\omega}_i, \\ (K' \operatorname{tg} \omega + K \operatorname{tg}^2 \omega) \tilde{\omega}_i &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Отсюда следует, что на поверхностях постоянной не нулевой гауссовой кривизны чебышевских сетей с равными сетевыми углами не существует [43]. Действительно, предположение $K = \operatorname{const} \neq 0$ приводит к противоречию, так как из (10) следует, что $\tilde{\omega}_i = 0$, то есть что $\omega = \operatorname{const}$, а это возможно лишь при $K = 0$.

При $K \neq \operatorname{const}$ из (10) находим

$$\frac{K'}{K} = -\operatorname{tg} \omega, \quad K = c \cos \omega.$$

Обозначая $f = \Delta_1 \omega$, $F = \Delta_2 \omega$, из (9) получаем

$$\omega_i \omega_j \frac{f'}{2f} + \tilde{\omega}_i \tilde{\omega}_j \left(\frac{F}{f} - \frac{f'}{2f} \right) = -\frac{c \sin \omega}{f} (\omega_i \omega_j + \tilde{\omega}_i \tilde{\omega}_j).$$

Отсюда легко находим

$$\begin{aligned} -c \sin \omega &= \frac{f'}{2} = F - \frac{f'}{2}, \\ f &= 2c (\cos \omega + c_1), \quad F = f' = -2c \sin \omega. \end{aligned}$$

Интегрирующий множитель λ вектора $\tilde{\omega}_i$ найдем по формуле (38;10)

$$\ln \lambda = - \int \frac{F}{f} d\omega = \frac{c}{c_1} \ln (\cos \omega + c_1), \quad \lambda = \frac{1}{\cos \omega + c_1}.$$

Следовательно, $\tilde{\lambda}\omega_i du^i = dq$, и ([43]) *линейный элемент метрики вращения, допускающей чебышевскую сеть, не определяемую сетевым углом, приводится к виду*¹⁾

$$ds^2 = \frac{1}{2c(\cos \omega + c_1)} [d\omega^2 + (\cos \omega + c_1)^2 dq^2].$$

Чтобы охарактеризовать эту метрику инвариантно, вычислим дифференциальные параметры гауссовой кривизны:

$$\begin{aligned} \Delta_1 K &= \Delta_1 (c \cos \omega) = c^2 \sin^2 \omega f = 2(-K^3 - cc_1 K^2 + c^2 K + c^3 c_1), \\ \Delta_2 K &= -c \sin \omega F - c \cos \omega f = 2(-2K^2 - cc_1 K + c^2). \end{aligned}$$

Эти равенства и составляют инвариантную характеристику метрики, допускающей ∞^1 чебышевских сетей с равными сетевыми углами.

§ 56. Пропорциональные сети

Если ослабить те или иные требования, характеризующие чебышевскую сеть, то получается некоторое обобщение чебышевской сети. Так, мы уже встречались с получебышевскими и ромбическими сетями. В этом и следующих параграфах рассматриваются некоторые другие обобщения чебышевской сети.

Пропорциональной называют сеть, у которой любые три линии одного семейства отсекают на всех линиях другого семейства дуги, отношение длин которых постоянно. Рассмотрим три линии AA_1 , BB_1 , CC_1 первого семейства (v) пропорциональной сети (v, w). По условию, отношения $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$, $\frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{A_1B_1}}$ равны и не зависят от выбора линии w .

¹⁾ Исследование достаточности приведенных условий дано в § 74.

Будем считать, что уравнение линий (v) есть $v = \text{const}$, а линий (w) — $u = \text{const}$. Если линии AA_1 ($v = v'$) и BB_1 ($v = v''$) фиксированы, то очевидно, что \widehat{AB} не зависит от v , то есть $\widehat{AB} = U(u)$ и $\widehat{AC} : \widehat{AB} = f(v, v', v'') = V(v)$, следовательно,

$$\widehat{AC} = U(u)V(v).$$

Если длины дуг линий w отсчитывать от линии AA_1 , то $\widehat{AC} = s$. Из равенства

$$s_i w^i = \frac{s_i du^i}{ds} = 1 = \frac{v_i w^i}{\sin \omega}$$

находим

$$(\ln s)_i = \frac{1}{s} \frac{v_i}{\sin \omega} + \lambda \omega_i = \text{grad}. \quad (1)$$

Так как функция $\ln s = \ln U + \ln V$ диагональна относительно сети (v, w) , то

$$a_i^s (\ln s)_s = \frac{1}{s} \frac{v_i}{\sin \omega} - \lambda \omega_i = \text{grad}. \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует градиентность вектора

$$\frac{1}{s} \frac{v_i}{\sin \omega} = \frac{1}{UV} \frac{v_i}{\sin \omega} = \sigma_i = \partial_i \sigma.$$

Аналогично доказывается градиентность вектора $\frac{1}{U_1 V_1} \frac{w_i}{\sin \omega} = \rho_i$. Однако вектор σ_i (или ρ_i) при умножении на произвольную функцию переменного u (или v) остается градиентным, следовательно,

$$\frac{1}{U_1 V} \frac{v_i}{\sin \omega} = \frac{U}{U_1} \sigma_i = \text{grad},$$

$$\frac{1}{U_1 V} \frac{w_i}{\sin \omega} = \frac{V_1}{V} \rho_i = \text{grad}.$$

Векторы $\frac{v_i}{\sin \omega}$ и $\frac{w_i}{\sin \omega}$, таким образом, имеют общий инте-

грирующий множитель $\frac{1}{U_1 V}$, мультипликативно-диагонально распределенный относительно сети (v, w) . Отсюда следует, что *пропорциональная сеть может быть инвариантно охарактеризована как такая ромбическая сеть, ромбический вектор которой диагонален относительно этой сети*. Эта инвариантная характеристика содержится в равенствах

$$A_i = \text{grad}, \quad a_i^s A_s = \text{grad}. \quad (3)$$

Мы показали необходимость этих условий. Их достаточность доказывается обращением предыдущих рассуждений.

В соответствующих параметрах пропорциональной сети линейный элемент принимает вид

$$ds^2 = U(u) V(v) (du^2 + 2f du dv + dv^2). \quad (4)$$

Отметим, что обобщенная спиральная сеть является частным случаем пропорциональной сети и может быть охарактеризована как ортогональная и пропорциональная сеть.

По теореме Ли (§ 39) конечные уравнения пропорциональной сети определяются квадратурами, так как для такой сети известен вектор A_i , диагональный относительно этой сети.

§ 57. Метрически-получебышевская сеть

Частным случаем пропорциональной сети является введенная Я. С. Дубиным [30] *метрически-получебышевская сеть*, характеризуемая тем, что любые две линии одного семейства (для конкретности будем считать первого) отсекают на всех линиях другого семейства равные дуги.

Примем линию AA_1 первого семейства за начало отсчета длин дуг линий второго семейства. Тогда уравнение линий (v) метрически-получебышевской сети, согласно ее определению, будет $s = \text{const}$. Следовательно, $s_i = \lambda v_i$.

Множитель λ легко определяется:

$$\lambda v_i \omega^i = \lambda \sin \omega = s_i \omega^i = 1, \quad \lambda = \frac{1}{\sin \omega}.$$

Следовательно, метрически-получебышевская сеть характеризуется градиентностью вектора $\frac{v_i}{\sin \omega} = \partial_i s$. Достаточность этого условия доказывается так. Пусть $\frac{v_i}{\sin \omega} = \varphi_i = \partial_i \varphi$. Тогда для смещения $\frac{du^i}{w} = w^i \frac{ds}{w}$ имеем

$$\varphi_i w^i = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{v_i w^i}{\sin \omega} = 1, \quad \frac{d\varphi}{w} = \frac{ds}{w}$$

При соответствующем выборе начала отсчета дуг линий w получим $\varphi = s$, что и доказывает наше утверждение.

Если метрически-получебышевскую сеть принять за координатную и за первую координату принять $u = s$, то линейный элемент примет вид

$$ds^2 = du^2 + 2B \cos \omega du dv + B^2 dv^2. \quad (1)$$

При получении инвариантной характеристики метрически-получебышевской сети Я. С. Дубнов исходил из очевидной диагональности функции s относительно этой сети и показал, что ее ромбический вектор направлен, при наших соглашениях, по линии (v) . Действительно, для нашего случая ротации биссекторных векторов M_i и N_i равны в силу градиентности вектора $\frac{v_i}{\sin \omega}$, следовательно, чебышевский вектор сети, согласно (24;4),

$$a_i = \frac{1}{\sin \omega} M_{s|s} \left(\frac{M_i}{N^2} - \frac{N_i}{M^2} \right) = M_{s|s} \frac{v_i - w_i \cos \omega}{\sin^2 \omega},$$

и для ромбического вектора получаем

$$A_i = -g_i^k a_k \sin \omega = -\frac{M_{s|s}}{\sin \omega} g_i^k (w_k - v_k \cos \omega) = M_{s|s} v_i.$$

Таким образом, метрически-получебышевскую сеть можно охарактеризовать равенством

$$a^{is} A_i A_s = 0. \quad (2)$$

§ 58. Обобщенные L_m -сети

Подкласс ромбических сетей, в параметрах которых линейный элемент можно привести к виду

$$ds^2 = (U + V)^m (du^2 + 2f du dv + dv^2), \quad (1)$$

назовем *обобщенными L_m -сетями*. Эти сети были рассмотрены Я. С. Дубновым [30] и характеризуются, согласно (41;8), тем, что $e^{-2A} = (U + V)^m$, где A — потенциал их ромбического вектора. Отсюда следуют градиентность функции $e^{-\frac{2A}{m}}$ и инвариантная характеристика обобщенной L_m -сети:

$$a^{is} \left(A_{i|s} - \frac{2}{m} A_i A_s - 2A_i a_s \right) = 0. \quad (2)$$

Из теоремы Ли (§ 39) следует, что конечные уравнения обобщенной L_m -сети находятся квадратурами, так как в этом случае известен вектор, диагональный относительно этой сети.

§ 59. Сети равных путей

1. Если на линиях сети ввести положительные направления отсчета дуг, то всякий путь, соединяющий две точки A и B и составленный из различных дуг линий сети, можно охарактеризовать его длиной, равной алгебраической сумме длин дуг участков этого пути.

Сеть называется *равнопутной* или *сетью равных путей*, если длина указанного пути не зависит от выбора этого пути и определяется лишь его начальной и конечной точками [67], [68], [30], [40]. Чебышевская сеть является, очевидно, частным случаем сети равных путей.

Длина пути, соединяющего точки A и B , равна криволинейному интегралу

$$\int_{AB} \left(\frac{v_i - w_i}{\sin \omega} \right) du^i.$$

Действительно, если участок принадлежит, например, линии v , то $du^i = v^i ds$ и подынтегральное выражение

обращается в ds . Из независимости этого интеграла от пути следует¹⁾, что подынтегральная функция есть полный дифференциал, так что сеть равных путей характеризуется градиентностью вектора

$$-N_i = \frac{v_i - \omega_i}{\sin \omega} = \varphi_i = \partial_i \varphi. \quad (1)$$

Функцию φ можно назвать *потенциалом пути* равнопутной сети [5].

2. Сеть равных путей можно еще охарактеризовать тем, что ее чебышевский вектор направлен по биссектрисе (при наших предположениях внешнего) сетевого угла. Действительно, согласно (24;4) и (1),

$$a_s = -\frac{M_{i1}^i}{M^2 \sin \omega} N_s, \quad c_i^s a_s = -a_i. \quad (2)$$

Формула (11;13) в случае сети равных путей принимает вид

$$g_{is} = \frac{(v_i - \omega_i)(v_s - \omega_s) + 2(1 - \cos \omega)v_i \omega_s}{\sin^2 \omega} = \varphi_i \varphi_s - \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} a_{is}.$$

Следовательно, тензор такой сети однозначно определяется ее потенциалом:

$$a_{is} = a_{is} \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \varphi_i \varphi_s - g_{is}. \quad (3)$$

Если равнопутная сеть принята за координатную, то $g_{11} = \varphi_1 \varphi_1 - a_{11} = \varphi_1^2$, $g_{22} = \varphi_2^2$ и линейный элемент примет вид

$$ds^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 du^2 + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cos \omega du dv + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 dv^2.$$

Из вышесказанного следует, что на каждой поверхности V_2 существует бесконечное множество равнопутных сетей, зависящее от одной функции двух аргументов.

¹⁾ По сути дела мы здесь пользуемся очевидной теоремой анализа: если в области G сеть a регулярна и криволинейный интеграл $\int_{AB} \varphi_i du^i$, взятый по произвольному замкнутому контуру, составленному из дуг линий этой сети, обращается в нуль, то подынтегральное выражение $\varphi_i du^i$ есть полный дифференциал.

3. Специализируя выбор этой функции φ (потенциала), будем получать равнопутные сети специального типа. Рассмотрим равнопутную сеть, потенциал которой есть гармоническая функция. Если эту сеть повернуть на постоянный угол α , то она останется равнопутной, так как ее тензор приведет к виду

$$(\alpha)_i^n (\alpha)_s^* a_{mn} = \psi_i \psi_s - g_{is} \quad (\psi_i = \varphi_i \cos \alpha + \tilde{\varphi}_i \sin \alpha),$$

характеризующему такие сети. Из градиентности векторов

$$\varphi_i = \frac{v_i - w_i}{\sin \omega} = -\frac{n_i}{\cos \frac{\omega}{2}}, \quad \tilde{\varphi}_i = \frac{m_i}{\cos \frac{\omega}{2}}$$

следует, что орты n_i и m_i имеют общий интегрирующий множитель $\frac{1}{\cos \frac{\omega}{2}}$, поэтому биссекторная сеть рассматриваемой равнопутной сети изотермическая.

Так как, с другой стороны, этот интегрирующий множитель равен e^{-c} , где c — потенциал чебышевского вектора биссекторной сети, то

$$\ln c_1 \cos \frac{\omega}{2} = c \quad (c_1 = \text{const}). \quad (4)$$

Обратно, каждая изотермическая сеть является биссекторной для ∞^1 вращаемых равнопутных сетей, с сетевым углом, определяемым формулой (4).

4. Предположим, что равнопутная сеть является одновременно и геодезической [85], [29]. Из равенств (26;6), (26;7) и (2) имеем

$$\Omega_s = -c_s^i a_i = a_s = -c_s^i \Omega_i,$$

и из формул (26;9)

$$2c_i = -c_i^s \Omega_s + \partial_i \ln \sin \omega = 2\partial_i \ln \sin \frac{\omega}{2} = 2 \cos^2 \frac{\omega}{2} a_i$$

и (3) следует, что вектор c_i направлен по линии сети c , следовательно, биссекторная сеть полугеодезическая и является сетью вращения, а V_2 , допускающее равнопутную геодезическую сеть, есть метрика вращения.

Докажем, что каждая метрика вращения допускает ∞^1 равнопутных геодезических сетей, для которых сеть вра-

щения является биссекторной сетью, а сетевой угол определяется с точностью до постоянного формулой (4). По предыдущему, построенная сеть будет равнопутной. Так как далее вектор p_i линейного интеграла геодезических (52;1), согласно (45;3) и (4), имеет вид

$$p_i = e^c n_i = \frac{n_i}{c_1 \cos \frac{\omega}{2}}, \text{ то}$$

$$p_i v^i = -\frac{1}{c_1} = \text{const}, \quad p_i w^i = \text{const}$$

(v^i и w^i — направляющие орты построенной сети), а это означает, что линии (v) и (w) геодезические.

5. Назовем *полосатой* такую сеть, градиент сетевого угла которой направлен по биссектрисе касательных к линиям сети [67], [40].

Полосатая сеть характеризуется одним из равенств

$$c_i^2 \omega_s = \pm \omega_i, \quad c_i^2 \Omega_s = \pm \Omega_i. \quad (5)$$

Полосатая геодезическая сеть будет равнопутной, так как ее чебышевский вектор $a_i = -c_i^2 \Omega_s = \pm \Omega_i$ и направлен по биссектрисе сетевого угла. Следовательно, существование полосатой геодезической сети характеризует метрику вращения.

6. Рассмотрим полосатую чебышевскую сеть. Считая для определенности, что вектор Ω_i этой сети направлен по внутренней биссектрисе, имеем, согласно (26;8) и (26;9),

$$\alpha_i = c_i^2 \Omega_s = \Omega_i,$$

$$2c_i = -\Omega_i - \partial_i \ln \sin \omega = -2\partial_i \ln \cos \frac{\omega}{2}. \quad (6)$$

Следовательно, биссекторная сеть изотермическая и полу-геодезическая, то есть является сетью вращения, так что *существование чебышевской полосатой сети тоже характеризует метрику вращения*. Обратно, каждая метрика вращения допускает ∞^1 полосатых чебышевских сетей, для которых сеть вращения является биссекторной, а сетевой угол определяется с точностью до постоянного из формулы $\ln \cos \frac{\omega}{2} = -c + \text{const}$, получаемой из (6) интегрированием. Доказательство этого предложения аналогично

доказательству, приведенному при построении равнопутных геодезических сетей.

7. Рассмотрим, наконец, равнопутную сеть, которая является вместе с тем и ромбической и кодацциевой. Из (41;7) и (2) имеем

$$A_i = a_i - c_i^2 a_s \cos \omega = (1 + \cos \omega) a_i = \text{grad}.$$

Следовательно, $a = a(\omega)$, и вектор ω_i коллинеарен вектору n_i . Для чебышевского вектора биссекторной сети теперь имеем согласно (41;12) 117

$$c_i = A_i - \frac{1}{2} \partial_i \ln \sin \omega + \frac{1}{2} c_i^2 \Omega_s = A_i - \partial_i \ln \sin \frac{\omega}{2} = \lambda \omega_i,$$

так что вектор c_i тоже коллинеарен вектору n_i . Отсюда следует, что биссекторная сеть есть сеть вращения и что *существование равнопутной, ромбической и кодацциевой одновременно сети характеризует метрику вращения*. Из теоремы Дубнова (§ 41) следует, что рассматриваемая сеть является также конформно-геодезической.

§ 60. Сети со сходящимися направлениями

1. Определение такой сети основано на следующем обобщении параллельного переноса [66]. Если линию (v) развернуть на касательную плоскость (§ 14), то направления, переносимые вдоль этой линии параллельно, составят пучок параллельных прямых. Если же направления w_i , заданные вдоль этой линии, перейдут после ее развертывания на плоскость в пучок сходящихся прямых, то есть в пучок прямых, пересекающихся в собственной точке, то говорят, что направления w_i *сходятся* вдоль линии (v) .

Сеть называется *сетью со сходящимися направлениями* или, короче, *сходящейся*, если касательные направления каждого ее семейства сходятся вдоль всех линий другого семейства. Найдем условия сходимости направлений (w_i) вдоль линий (v) . Если при развертывании линии v центр сходящегося пучка принять за начало координат, то некоторые отрезки касательных к линиям (w) перейдут в радиусы-векторы R точек линии v . Единичный вектор касательной к линии v будет равен $\frac{dR}{ds} = \frac{d(\sigma R_i w^i)}{ds} = R_i v^i$.

Следовательно,

$$\frac{d\sigma w^i}{ds} = (\sigma w^i)_s v^s = v^i$$

или $\sigma_s v^s w^i + \sigma \tilde{w}^i_t v^s = v^i$. Свернув обе части этого равенства с w_i и \tilde{w}_i , получим два равносильных ему условия:

$$\sigma = -\frac{\sin \omega}{\frac{v}{w}} = -\frac{1}{a_i w^i}, \quad \sigma_i v^i = \cos \omega. \quad (1)$$

Таким образом,

$$\left(\frac{1}{a_i w^i}\right)_{|s} v^s = -\frac{a_{i|s} w^i v^s + a_i \tilde{w}^i_v}{(a_s w^s)^2} = -\cos \omega,$$

но

$$a_i \tilde{w}^i_v = a_i \frac{\cos \omega w^i - v^i}{\sin \omega} \sin \omega a_s w^s = \cos \omega (a_i w^i)^2 - a_i a_s v^i w^s,$$

следовательно, искомое условие имеет вид

$$(a_{i|s} - a_i a_s) w^i v^s = 0. \quad (2)$$

В его достаточности убедимся, полагая $a_i w^i = -\frac{1}{\sigma}$ и производя выкладку в обратном порядке. Меняя ролями линии (v) и (w) , найдем второе условие, характеризующее сходящуюся сеть:

$$(a_{i|s} - a_i a_s) v^i w^s = 0. \quad (3)$$

Складывая и вычитая левые части равенств (2) и (3), получим равносильные им условия

$$a_{s|}^s = 0, \quad a^{is} (a_{i|s} - a_i a_s) = 0. \quad (4)$$

Первое из них показывает, что *сходящаяся сеть кодацциева*, а второе, что функция e^a диагональна относительно сети a :

$$a_i^s (e^a)_{|s} = \text{grad}. \quad (5)$$

Если положить $e^a = u + v$ и принять u и v за координаты, то линейный элемент примет вид

$$ds^2 = \frac{1}{(u+v)^2} [\varphi_u du^2 - (u+v) \varphi_{uv} du dv + \varphi_v dv^2].$$

2. Линии ортогональной сходящейся сети, как это следует из определения, при разворачивании их на плоскость перейдут в окружности, следовательно, их геодезические кривизны будут постоянны, а рассматриваемая сеть — сетью Бонне. Это подтверждается также сравнением (46;14) с (4).

3. Сходящаяся равнопутная сеть будет также и ромбической, так как ее биссекторное направление совпадает с направлением чебышевского вектора, а последнее диагонально относительно сети. Из результатов § 59, п. 6 следует, что *существование сходящейся сети равных путей характеризует метрику вращения* [66].

§ 61. Задание сети ее сетевым углом и чебышевским или геодезическим вектором

Частные случаи этой задачи для чебышевской или геодезической сетей были рассмотрены в § 55, п. 3 и § 49, п. 2.

Предположим теперь, что чебышевский вектор a_i и угол ω сети даны. Три уравнения (см. (26;14))

$$\left. \begin{aligned} a_{ij} a^{ij} &= -2, \quad g^{ij} a_{ij} = 2 \operatorname{ctg} \omega, \\ a^{ij} \left(a_{ij} - 2a_i a_j + 2a_i \Omega_j \cos \omega - \frac{\omega_{ij}}{\sin^2 \omega} \right) \sin 2\omega &= \\ &= 2K - 2g^{ij} (a_{ij} + 2a_i \Omega_j \cos \omega) \sin^2 \omega \end{aligned} \right\} (1)$$

показывают, что в общем случае *сеть определяется своим углом и чебышевским вектором двузначно*. Три функции ω и a_i не произвольны: они должны удовлетворять тем трем уравнениям, которые получатся, если чебышевский вектор и угол сети, определенной уравнениями (1), приравнять заданным значениям.

Исключение представляет случай пропорциональности:

$$a_{(ij)} - 2a_i a_j + 2a_{(i} \Omega_{j)} \cos \omega - \frac{\omega_{ij}}{\sin^2 \omega} = \varrho g_{ij}. \quad (2)$$

Выполнение равенства (2) характеризует сеть, не определяемую углом и чебышевским вектором. Если в это

равенство внести значение множителя

$$\varrho = \frac{1}{2 \cos^2 \omega} [K - g^{ij} (a_{i|j} + 2a_i \Omega_j \cos \omega) \sin^2 \omega],$$

найденное с помощью (1), то получим систему, разрешимость которой характеризует метрику, допускающую сеть, не определяемую своим чебышевским вектором и сетевым углом. Случай чебышевской сети, рассмотренный в § 55, п. 3, показывает, что это уравнение не всегда разрешимо при $a_i = 0$. С другой стороны, в § 43, п. 2 было показано, что на каждой поверхности существуют сети, имеющие равные чебышевские векторы и получаемые одна из другой поворотом на постоянный угол.

Совершенно аналогично рассматривается вопрос задания сети ее углом и геодезическим (нормальным) вектором.

§ 62. E-нормирование тензора сети

1. Условимся говорить, что тензор сети a_{is}^* находится в евклидовом нормировании или, проще, является *E-тензором*, если риманова метрика $V_2(a_{is}^*)$, для которой этот тензор является метрическим, евклидова.

Найдем условия, которым должен удовлетворять множитель $e^{2\sigma}$ для того, чтобы тензор $a_{is}^* = e^{2\sigma} a_{is}$ был *E-тензором*.

Обозначим через $\overset{a}{\Gamma}_{jk}^i$ коэффициенты связности римановой метрики $V_2(a_{is})$ с метрическим тензором a_{is} , и через

$T_{jk}^i = \overset{a}{\Gamma}_{jk}^i - \Gamma_{jk}^i$ — тензор аффинной деформации данного V_2 в $V_2(a)$. Обозначая, наконец, дифференцирование в $V_2(a)$ двумя черточками, можем записать

$$a_{is|k} = a_{is|k} - 2T_{k(i}^j a_{s)j} = 0.$$

Отсюда

$$2T_{k(i}^j a_{s)j} = a_{is|k} + p_k \varepsilon_{is}, \quad (1)$$

где неизвестный вектор p_k легко найдется свертыванием

обеих частей этого равенства с бивектором ε^{hi} :

$$p_s = a_{is|k} \varepsilon^{hi} = -2a_s^i a_j.$$

Разрешая уравнение (1) относительно тензора T_{hi}^j , получаем

$$2\sigma(a) T_{hi}^r = (a_{is|k} + p_k \varepsilon_{is}) a^{sr} = -a_j^r a_{i|k}^j + 2a_i^r a_k^s a_s, \quad (2)$$

или, подставляя выражение производной (27;1) и считая для определенности, что $\sigma(a) = -1$:

$$-T_{ik}^r = d_i^r \frac{\tilde{c}_k}{\sin \omega} + \frac{1}{2} c_i^r \Omega_k + a_i^r a_k^s a_s. \quad (3)$$

Биссекторная сеть c_{ih} сети a будет в $V_2(a)$ ортогональной; ее чебышевский вектор c_s в этой метрике определяется по формуле (28;26)

$$c_s = c_s + \frac{1}{2} c_s^k T_{ki}^r c_r^i = c_s - \frac{1}{2} c_s^k \Omega_k. \quad (4)$$

При конформном преобразовании $a_{is}^* = e^{2\sigma} a_{is}$ новый чебышевский вектор сети c_{ik}

$$c_s^* = c_s - \sigma_s = c_s - \frac{1}{2} c_s^k \Omega_k - \sigma_s. \quad (5)$$

Для того чтобы тензор a_{is}^* был E -тензором, необходима и достаточна градиентность вектора

$$\theta_s = a_s^i c_i^* = a_s^i \left(c_i - \frac{1}{2} c_i^k \Omega_k - \sigma_i \right) = \partial_s \theta, \quad (6)$$

так как он является трансверсальным вектором направляющих векторов сети c

$$p_i = \frac{v_i + w_i}{\sqrt{\sin \omega}} e^\sigma, \quad q_i = \frac{v_i - w_i}{\sqrt{\sin \omega}} e^\sigma,$$

где $a_{is}^* p^i p^s = 2$ и $p^i = \varepsilon^{is} p_s = e^{-\sigma} \frac{v^i + w^i}{\sqrt{\sin \omega}}$. Таким образом, функция σ , определяющая евклидово нормирование тензора a_{is}^* , является решением дифференциального урав-

нения второго порядка с частными производными:

$$(a_i^s \sigma_s)_i^i = \left[a_i^s \left(c_s - \frac{1}{2} c_s^k \Omega_k \right) \right]_i^i \quad (7)$$

и определяется с произволом в две функции одного аргумента.

Для выяснения смысла функции θ запишем производные

$$p_{i||s} = a_0^k p_k \theta_s = q_i \theta_s, \quad q_{i||s} = a_0^k q_k \theta_s = p_i \theta_s.$$

Отсюда находим $(p_i \pm q_i)_{||s} = \pm (p_i \pm q_i) \theta_s$ или

$$[e^{\mp \theta} (p_i \pm q_i)]_{||s} = 0. \quad (8)$$

Следовательно, векторы

$$\frac{1}{2} e^{-\theta} (p_i + q_i) = \frac{v_i}{\sqrt{\sin \omega}} e^{\sigma - \theta}, \quad \frac{1}{2} e^{\theta} (p_i - q_i) = \frac{w_i}{\sqrt{\sin \omega}} e^{\sigma + \theta}$$

градиентны, и смысл функции θ выяснен.

Если известно какое-нибудь решение σ уравнения (7), то функция θ определяется из (6) квадратурами и определит затем направляющие градиенты φ_i и ψ_i сети. Следовательно, знание E-нормирования тензора сети позволяет найти конечные уравнения линий сети квадратурами.

2. С помощью формул (26;9) находим следующие выражения вектора θ_s :

$$\theta_s = a_s^i \left(c_i - \frac{1}{2} c_i^k \Omega_k - \sigma_i \right) = \quad (9)$$

$$= a_s^i \left(a_i - c_i^k a_k \cos \omega - \frac{1}{2} \partial_i \ln \sin \omega - \sigma_i \right) = \quad (10)$$

$$= a_s^i \left(a_i - c_i^k a_k \cos \omega + \frac{1}{2} \partial_i \ln \sin \omega - \sigma_i \right). \quad (11)$$

Отсюда для ряда специальных сетей легко указать E-нормирование их тензоров.

а) Изогональная сеть с изотермической биссекторной сетью ($\omega = \text{const}$, $c_i = \partial_i c$). Полагая $\sigma = c$, получаем E-тензор

$$a_{is}^* = e^{2c} a_{is} \quad (12)$$

и направляющие градиенты

$$\varphi_i = \frac{v_i}{\sqrt{\sin \omega}} e^c, \quad \psi_i = \frac{w_i}{\sqrt{\sin \omega}} e^c. \quad (13)$$

б) Ромбическая сеть. Вектор $A_s = a_s - c_s^k a_k \cos \omega = \partial_s A$.

Полагая $\sigma = A - \ln \sqrt{\sin \omega}$, находим

$$a_{is}^* = e^{2A} \frac{a_{is}}{\sin \omega}, \quad \varphi_i = \frac{v_i}{\sin \omega} e^A, \quad \psi_i = \frac{w_i}{\sin \omega} e^A. \quad (14)$$

В частном случае чебышевской сети $A_i = 0$, и мы приходим к результатам § 24.

в) Сеть Риччи ($\alpha_i = 0$, $a_i = \partial_i a$). Полагая $\sigma = a + \frac{1}{2} \ln \sin \omega$, находим

$$a_{is}^* = e^{2a} \sin \omega a_{is}, \quad \varphi_i = e^a v_i, \quad \psi_i = e^a w_i. \quad (15)$$

3. Применим полученные результаты к составлению инвариантных характеристик некоторых сетей.

а) Сеть, составленная из двух семейств геодезических параллелей, характеризуется градиентностью векторов v_i и w_i , следовательно,

$$a_{is}^* = a_{is} \sin \omega = 2v_{(i} w_{s)}. \quad (16)$$

Здесь $\sigma = \frac{1}{2} \ln \sin \omega$ и $\theta = 0$, следовательно, рассматриваемая сеть характеризуется одним из равенств

$$\partial_s \ln \sin \omega = A_s, \quad a_s = c_s^k a_k \cos \omega. \quad (17)$$

б) *Эквиареальной* называют такую сеть эквиаффинного A_2 , которая переходит при некотором эквиареальном, то есть сохраняющем площади, преобразовании в декартову сеть евклидова пространства. Эквиареальное преобразование характеризуется сохранением ковариантно постоянного бивектора. Эквиареальную сеть можно охарактеризовать тем, что ее тензор, согласованный с основным бивектором ($|a^*| = |\varepsilon_{12}|$), является *E*-тензором.

Ограничиваясь случаем римановой геометрии, получаем следующую характеристику эквиареальной сети:

$$a_i^s \left(c_s - \frac{1}{2} c_s^k \Omega_k \right) = \text{grad}, \quad (18)$$

так как в этом случае $\sigma = \text{const}$.

Ортогональная эквиареальная сеть характеризуется равенством $c_i^s = \text{grad}$, то есть является обобщенной спиральной сетью.

ГЛАВА VI

АВТОМОРФИЗМЫ ПОВЕРХНОСТИ

§ 63. Геометрические объекты

Геометрическим объектом $\Omega(u)$ называется упорядоченная совокупность N функций точки $\Omega_A(u)$ ($A = 1, 2, \dots, N$), называемых координатами объекта и заданных в каждой точке X_2 относительно некоторой начальной системы координат (u^i) . Далее требуется, чтобы был задан закон преобразования объекта при замене координат $\bar{u}^i = \bar{u}^i(u^s)$:

$$\bar{\Omega}_A(\bar{u}) = F_A \left[\Omega(u), \frac{\partial \bar{u}^k}{\partial u^i}, \dots, \frac{\partial^r \bar{u}^k}{\partial u^{i_1} \partial u^{i_2} \dots \partial u^{i_r}} \right], \quad (1)$$

по которому новые координаты объекта $\bar{\Omega}(\bar{u})$ выражаются только через его старые координаты и частные производные новых координат по старым до некоторого порядка r . Число r называется *классом объекта*.

Приведем несколько примеров геометрических объектов.

1. Скалярная функция $\varphi(u)$ — объект нулевого класса. Значение функции в каждой точке не зависит от системы координат, следовательно, закон преобразования будет

$$\bar{\varphi}(\bar{u}) = \varphi(u).$$

2. Тензор T_s^i — геометрический объект первого класса. Закон преобразования — тензорный:

$$\bar{T}_s^i = T_n^m \frac{\partial u^n}{\partial \bar{u}^s} \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^m}.$$

3. Совокупность только вторых частных производных функции не является геометрическим объектом, так как

закон их преобразования

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{u}^i \partial \bar{u}^s} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^m \partial u^n} \frac{\partial u^m}{\partial \bar{u}^i} \frac{\partial u^n}{\partial \bar{u}^s} + \frac{\partial^2 u^m}{\partial \bar{u}^i \partial \bar{u}^s} \frac{\partial \varphi}{\partial u^m}$$

содержит ее первые частные производные. Совокупность же и первых и вторых производных функции является объектом.

4. Коэффициенты связности $\Gamma_{s^k}^i$ — геометрический объект второго класса. Закон преобразования дается формулой (12;3).

§ 64. Группа преобразований Ли, определяемая векторным полем

Если в X_2 задано векторное поле $\xi^s(u)$, то система дифференциальных уравнений

$$\frac{du^i}{dt} = \xi^i(u) \quad (1)$$

однозначно определяет однопараметрическое семейство линий — траекторий этого поля. Рассмотрим две точки $M_1(u_1)$ и $M_2(u_2)$, лежащие на одной траектории. Задавая для дифференциального уравнения (1) начальные условия $u^i(t_1) = u_1^i$, получим уравнение этой траектории в виде

$$u^i = \theta^i(t - t_1, u_1). \quad (2)$$

Координаты точки M_2 получаются при некотором значении параметра $t = t_2$: $u_2^i = \theta^i(t_2 - t_1, u_1)$. Отсюда следует, что каждой паре точек одной траектории $M_1 M_2$, взятых в определенном порядке, однозначно ставится в соответствие число $t_{12} = t_2 - t_1$. Это число можно назвать *направленным расстоянием* между точками, имея в виду следующие свойства. Замена порядка точек M_1 и M_2 , как это следует из свойств единственности решения уравнения (1), изменяет знак расстояния: $t_{21} = t_1 - t_2 = -t_{12}$. Для трех точек $M_1 M_2 M_3$ имеем $t_{13} = t_{12} + t_{23}$. В соответствии с этими свойствами скажем, что векторное поле однозначно определяет однопараметрическое семейство *ориентированно метризованных кривых*.

Каждое приращение параметра δt определяет преобразование — сдвиг точек X_2 на расстояние δt по траекториям

поля. Точка u^i при этом преобразовании переходит в точку

$$\bar{u}^i = \theta^i(\delta t, u). \quad (3)$$

Два последовательно выполненных сдвига на расстояния $\delta_1 t$ и $\delta_2 t$ эквивалентны, очевидно, сдвигу на расстояние $\delta_1 t + \delta_2 t$. Отсюда следует, что рассматриваемая совокупность преобразований образует одночленную группу Ли. Уравнения (3) являются конечными уравнениями этой группы, а ее инфинитезимальный оператор

$$Xf = \xi^s \partial_s f.$$

Каждое преобразование этой группы отображает X_2 на себя, то есть является автоморфизмом X_2 .

§ 65. Инвариантность геометрического объекта относительно группы Ли. Производная Ли

Пусть в X_2 задана группа Ли, определенная векторным полем ξ^s . Рассмотрим инфинитезимальное преобразование этой группы:

$$\bar{u}^s = \theta^s(\delta t, u). \quad (1)$$

Наряду с исходной системой координат u^s это преобразование определяет в X_2 так называемую *увлеченную систему координат*, которую можно охарактеризовать тем, что координаты преобразованной точки \bar{M} в этой системе равны координатам исходной точки M в исходной системе координат. Координатные линии увлеченной системы координат являются образами исходных координатных линий в рассматриваемом преобразовании. Уравнения (1) являются уравнениями перехода *от увлеченной системы координат к исходной*, так как \bar{u}^s являются координатами точки \bar{M} в исходной системе координат, тогда как ее координаты в увлеченной системе координат равны u^s .

С помощью увлеченной системы координат для каждого геометрического объекта Ω определяется новый объект $\bar{\Omega}$ — увлеченное преобразованием (1) или полем ξ^s значение объекта Ω , координаты которого в точке \bar{M} в увлеченной системе координат численно равны координатам

там объекта Ω в точке M в исходной системе координат: $\bar{\Omega}(u) = \Omega(u)$. Координаты увлеченного объекта в точке \bar{M} в исходной системе координат мы получим, совершая переход от увлеченной системы координат к исходной по формулам (1), после чего они примут значения:

$$\bar{\Omega}^*(\bar{u}) = \bar{\Omega}(\bar{u}).$$

Геометрический объект называется *инвариантным относительно преобразования (1)*, если в каждой точке выполняется равенство

$$\bar{\Omega}^*(\bar{u}) = \bar{\Omega}(\bar{u}), \quad (2)$$

то есть если координаты увлеченного объекта в произвольной точке \bar{u} равны координатам исходного объекта в этой же точке.

Если геометрический объект инвариантен относительно всех преобразований одночленной группы Ли, то его называют *инвариантным относительно этой группы*.

Предел

$$L\Omega(u) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\Omega(\bar{u}) - \bar{\Omega}^*(\bar{u})}{\delta t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\Omega(\bar{u}) - \bar{\Omega}(\bar{u})}{\delta t} \quad (3)$$

называют *производной Ли* геометрического объекта Ω относительно группы Ли или относительно векторного поля ξ^s в точке u . Равенством

$$D\Omega(u) = L\Omega(u) \delta t \quad (4)$$

определяют так называемый *дифференциал Ли* объекта Ω .

Производная Ли характеризует скорость изменения объекта при увлечении его полем ξ^s . Для выяснения смысла дифференциала Ли заметим, что, согласно (4) и (3),

$$D\Omega(u) = \Omega(u) - \bar{\Omega}^*(u) + \varepsilon,$$

где ε — величины по крайней мере второго порядка малости относительно δt , так что с точностью до бесконечно малых первого порядка относительно δt

$$D\Omega(u) \approx \Omega(u) - \bar{\Omega}^*(u), \quad (5)$$

и мы можем сказать, что дифференциал Ли есть главная часть приращения, получаемого объектом при увлечении его полем.

Из предыдущего следует, что для инвариантности геометрического объекта относительно поля ξ^s необходимо и достаточно, чтобы его производная Ли была равна нулю. Объясним понятие инвариантности объекта на следующих примерах:

1) Скалярная функция $\varphi(u)$ определяет поле F числовых значений. Увлеченное значение этого поля в точке \bar{u} есть $\bar{\varphi}(\bar{u}) = \varphi(u)$. Если рассматриваемый геометрический объект инвариантен, то $\varphi(\bar{u}) = \varphi(u)$, то есть поле F под воздействием преобразований группы переходит в себя.

2) Вектор p^i однозначно определяет (как и в § 64) однопараметрическое ориентированно метризованное семейство кривых F и, как нетрудно убедиться, сам однозначно определяется таким семейством. Увлеченный объект тоже определяет семейство \bar{F} кривых, в которые переходят при данном преобразовании кривые семейства F . Для совпадения семейств кривых \bar{F} и F , то есть для того, чтобы семейство F было инвариантным относительно преобразований группы, необходимо и достаточно, чтобы объект p^i был инвариантен.

3) Коэффициенты связности Γ_{sh}^i однозначно определяют семейство ориентированно метризованных геодезических линий F и сами однозначно определяются таким семейством¹⁾. Увлеченный объект Γ_{sh}^i также связан с увлеченным семейством \bar{F} . Для того чтобы ориентированно метризованные геодезические переходили при преобразованиях группы в себя, необходимо и достаточно, чтобы объект Γ_{sh}^i был инвариантен.

С точностью до малых первого порядка относительно δt инфинитезимальное преобразование определяется формулой

$$\bar{u}^s = \theta^s(\delta t, u) = \theta^s(0, u) + \frac{d\theta^s}{dt} \delta t = u^s + \xi^s \delta t. \quad (6)$$

¹⁾ Это семейство, разумеется, должно быть виртуально-геодезическим, то есть семейством геодезических линий некоторой связности.

Для дальнейшего потребуются выражения частных производных $\frac{\partial \bar{u}^s}{\partial u^i}$ и $\frac{\partial u^s}{\partial \bar{u}^i}$. Первая находится сразу

$$\frac{\partial \bar{u}^s}{\partial u^i} = \delta_i^s + \partial_i \xi^s \delta t. \quad (7)$$

Чтобы получить вторую, продифференцируем обе части (6) по координате \bar{u}^i

$$\delta_i^s = \frac{\partial u^s}{\partial \bar{u}^i} + \frac{\partial \xi^s}{\partial u^k} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^i} \delta t = (\delta_k^s + \partial_k \xi^s \delta t) \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^i}.$$

Свертывая обе части этого равенства с $\delta_s^j - \partial_s \xi^j \delta t$, имеем

$$\frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^i} = \delta_i^j - \partial_i \xi^j \delta t. \quad (8)$$

Найдем дифференциал Ли для ряда объектов.

1) Для скалярной функции имеем:

$$\varphi(\bar{u}) - \bar{\varphi}(\bar{u}) \approx \varphi(u^s + \xi^s \delta t) - \varphi(u^s) \approx \xi^s \partial_s \varphi \delta t.$$

Следовательно, производная Ли скалярной функции равна

$$L\varphi = \xi^s \partial_s \varphi.$$

2) В случае контравектора v^i , согласно (7), имеем

$$\begin{aligned} v^i(u^s + \xi^s \delta t) - v^i(u) \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^k} &= \\ &= v^i(u) + \xi^s \partial_s v^i(u) \delta t - v^i(u) - v^k \partial_k \xi^i \delta t, \\ Dv^i &= (\xi^s \partial_s v^i - v^s \partial_s \xi^i) \delta t. \end{aligned}$$

В этом выражении обычные производные можно заменить ковариантными производными относительно произвольной связности:

$$Dv^i = (\xi^s v^i{}_{|s} - v^s \xi^i{}_{|s}) \delta t,$$

$$Lv^i = \xi^s v^i{}_{|s} - v^s \xi^i{}_{|s}.$$

3) Аналогично определяются, согласно (8), дифференциал Ли и производная Ли ковектора:

$$Dv_i = (\xi^s \partial_s v_i + v_s \partial_i \xi^s) \delta t = (\xi^s v_{i|s} + v_s \xi^s{}_{|i}) \delta t,$$

$$Lv_i = \xi^s v_{i|s} + v_s \xi^s{}_{|i}.$$

4) Для произвольного тензора таким же путем найдем:

$$\begin{aligned} LT_j^{i..} &= \xi^s \nabla_s T_j^{i..} + T_s^{i..} \xi^{.1j} - T_j^{s..} \xi^i_{.1s} + \dots = \\ &= \xi^s \partial_s T_j^{i..} + T_s^{i..} \partial_j \xi^s - T_j^{s..} \partial_s \xi^i + \dots \end{aligned}$$

Покажем, что дифференциал Ли тензора является его ковариантным дифференциалом в направлении траектории группы относительно некоторой аффинной связности. Учитывая, что вдоль этих траекторий $du^i = \xi^i \delta t$, имеем

$$\begin{aligned} DT_j^i &= du^s \partial_s T_j^i - T_j^s \partial_s \xi^i \delta t + T_s^i \partial_j \xi^s \delta t = \\ &= dT_j^i + (-\partial_s \xi^i) T_j^s \delta t - (-\partial_j \xi^s) T_s^i \delta t. \quad (9) \end{aligned}$$

Ковариантный дифференциал этого же тензора в связности Γ_{sh}^i в направлении траектории имеет вид

$$\delta T_j^i = dT_j^i + \Gamma_{sh}^i du^h T_j^s - \Gamma_{jh}^s du^h T_s^i, \quad (10)$$

и для его составления нужно иметь не коэффициенты связности Γ_{sh}^i , а так называемый *дифференциальный объект связности*

$$\omega_s^i = \Gamma_{sh}^i du^h. \quad (11)$$

Говорят, что объект связности (11) определяет связность на кривых однопараметрического семейства (в данном случае на траекториях группы). Легко проверить, что частные производные $-\partial_s \xi^i$ являются геометрическим объектом и что закон их преобразования совпадает с законом преобразования дифференциального объекта связности. Следовательно, однопараметрическая группа Ли или векторное поле ξ^s определяет вдоль траекторной группы аффинную связность, дифференциальный объект которой есть

$$\omega_s^i = -\partial_s \xi^i \delta t.$$

Из сравнения (9) и (10) заключаем, что дифференциал Ли тензора есть его ковариантный дифференциал относительно этой связности. Отсюда следует, что *все правила ковариантного дифференцирования тензоров справедливы для дифференцирования Ли*.

Другим следствием является сохранение ангармонического отношения четырех направлений, касательных к кривым четырех систем импримитивности.

§ 66. Пространства V_2 , допускающие группу движений

Движениями евклидовой плоскости называют такие ее автоморфизмы, при которых сохраняются длины отрезков и, следовательно, все другие метрические свойства. Такими же требованиями естественно, обобщая, определить движения риманова пространства. Так как все метрические свойства его определяются метрическим тензором g_{is} , то для того, чтобы группа преобразований с оператором $X = \xi^s \partial_s$ была группой движений, необходимо и достаточно, чтобы тензор g_{is} был инвариантен, то есть чтобы его производная Ли обращалась в нуль:

$$\xi^s g_{ih|s} + 2\xi^s \cdot |_{(i} g_{h)s} = 0.$$

Производя ковариантное дифференцирование относительно g_{is} , приходим к уравнению Киллинга (см. § 45)

$$\tilde{\xi}_{(i|h)} = 0, \quad \tilde{\xi}_{i|h} = -\sigma g_{ih}, \quad (1)$$

что равносильно следующему:

$$\xi_{i|h} = \sigma g_{ih}, \quad \sigma = \frac{1}{2} g^{ih} \xi_{i|h}.$$

В § 45 было показано, что разрешимость этого уравнения характеризует метрику вращения, следовательно, метрика вращения характеризуется также тем, что она допускает одночленную группу движений. Траектории группы движений совпадают с параллелями, а меридианы являются системами ее импримитивности. Действительно, производная Ли направляющего вектора ξ^s семейства меридианов равна нулю:

$$L\tilde{\xi}^i = \xi^s \tilde{\xi}^i \cdot |_{s} - \tilde{\xi}^s \xi^i \cdot |_{s} = \xi^s \sigma \delta_s^i - \tilde{\xi}^s \sigma g_s^i = 0.$$

Докажем, что пространство V_2 не может допускать двух различных одночленных групп движений с общими траекториями. Если $X = \xi_1^s \partial_s$ и $X = \xi_2^s \partial_s$ — операторы групп с общими траекториями, то $\xi_2^s = \lambda \xi_1^s$. Из уравнений Киллинга

$$\xi_{s|i} = \sigma g_{si}, \quad \xi_{s|i} = \sigma g_{si} \quad \text{находим}$$

$$\xi_{s|i} = \sigma g_{si} = (\lambda \xi_1^s)_i = \lambda_i \xi_1^s + \lambda \sigma g_{is},$$

что возможно лишь при $\lambda_i = 0$, $\lambda\sigma = \sigma$, так как тензор g_{is} не вырождается. Следовательно, $\lambda = \text{const}$ и оба оператора X и $X = cX$ определяют одну и ту же группу, что и требовалось доказать.

Если V_2 допускает две одночленные группы движений, то, согласно предыдущей теореме, их траектории различны. Однако вдоль траекторий группы (параллелей) гауссова кривизна постоянна, следовательно, эта кривизна должна быть всюду постоянной. Но тогда, как было показано в § 45, п. 3, уравнения Киллинга имеют три независимых решения и любое решение этого уравнения является их линейной комбинацией с постоянными коэффициентами.

Пользуясь этим, докажем, что три независимых решения уравнения Киллинга ξ_1, ξ_2, ξ_3 определяют трехчленную группу движений. Рассмотрим коммутатор двух операторов (XX) и докажем, что он тоже определяет одночленную группу движений. Действительно,

$$(XX) = (\xi_1^s \xi_2^i |_s - \xi_2^s \xi_1^i |_s) \partial_i = (-\sigma_{21}^{\xi_1^i} + \sigma_{12}^{\xi_2^i}) \partial_i = \xi_1^i \partial_i.$$

Из условий интегрируемости уравнений Киллинга

$$\xi_{i|s}^s = K \tilde{\xi}_i = (\sigma g_{is}) |_s = -\tilde{\sigma}_i$$

имеем $\sigma_{11} = -K \xi_1$, $\sigma_{22} = -K \xi_2$, следовательно,

$$\begin{aligned} \xi_{i|s}^s &= (-\sigma_{21}^{\xi_1^i} + \sigma_{12}^{\xi_2^i}) |_s = \tilde{K} \xi_s \xi_i - \tilde{K} \xi_s \xi_i + \sigma \sigma_{21}^{\xi_1^i} - \sigma \sigma_{12}^{\xi_2^i} = \\ &= K \xi_p \xi^p g_{is} = \sigma g_{is}, \end{aligned}$$

то есть вектор ξ_i тоже удовлетворяет уравнению Киллинга, что и доказывает наше утверждение. Таким образом, вектор ξ_α^s ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$) каждого коммутатора $(XX)_{\alpha\beta}$ ($\alpha \neq \beta$), являясь решением уравнения Киллинга, есть линейная комбинация (с постоянными коэффициентами)

векторов ξ_{α}^s , следовательно,

$$(XX)_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma=1}^3 C_{\alpha\beta\gamma}^{\gamma} X_{\gamma}$$

а это и доказывает, что операторы X_{α} определяют трехчленную группу движений.

§ 67. Импримитивные n -ткани

Назовем n -ткань *импримитивной* относительно одночленной группы Ли, если линии каждого из n ее семейств являются системами импримитивности этой группы, то есть если каждое семейство линий ткани преобразованиями группы переводится в себя. Группу, относительно которой ткань импримитивна, назовем *группой импримитивности ткани*.

Если ткань задана псевдотензором $a_{i_1 i_2 \dots i_n}$, то для ее импримитивности необходимо и достаточно, чтобы увлеченное значение этого псевдотензора было пропорционально ему самому, что, согласно § 65, равносильно пропорциональности:

$$L a_{i_1 i_2 \dots i_n} = \sigma a_{i_1 i_2 \dots i_n}. \quad (1)$$

Рассмотрим различные частные случаи.

1. Импримитивное семейство линий (p) характеризуется равенством

$$p^i L p_i = p^i (\xi^s p_{is} + p_s \xi^s_{|i}) = 0. \quad (2)$$

Семейство траекторий группы, очевидно, всегда импримитивно. Исключая этот случай, то есть считая, что $\xi^s p_s \neq 0$, преобразуем равенство (2) к следующему виду:

$$\begin{aligned} p^i (\xi^s p_{s|i} + p_s \xi^s_{|i} - \xi_i p_{s|s}) &= \\ &= (\xi^s p_s)_{|i} p^i + \xi^s p_s p_{i|s} = \left(\frac{p_i}{\xi^s p_s} \right)_{|i} (\xi^h p_h)^2 = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что импримитивное семейство линий характеризуется градиентностью вектора

$$\frac{p_i}{\xi^s p_s} = \partial_i \varphi. \quad (3)$$

2. Импримитивная сеть a_{is} характеризуется равенством

$$La_{is} = \sigma a_{is}. \quad (4)$$

Рассмотрим произвольно нормированный тензор a_{is} и определяемое им $V_2(a_{is})$. Дифференцируя ковариантно в этой геометрии, получаем уравнение

$$\xi^h_{\cdot |i} a_{hs} + \xi^h_{\cdot |s} a_{ih} = \sigma a_{is}, \quad (5)$$

эквивалентное обобщенному уравнению Киллинга (§ 45):

$$\tilde{\xi}_{i|s} = -\sigma a_{is} + \varrho e_{is}. \quad (6)$$

Из результатов § 45 следует, что траектории каждой группы импримитивности сети диагональны относительно этой сети, и обратно, каждое диагональное относительно этой сети семейство линий (не принадлежащих сети) однозначно определяет группу импримитивности этой сети. Следовательно, каждая сеть импримитивна, и группа ее импримитивности определяется с произволом в две функции одного аргумента.

Под воздействием инфинитезимального преобразования группы импримитивности сети ее тензор a_{is} , согласно (6;5) и (4), получает множитель:

$$^* a_{is} \approx a_{is} - Da_{is} = \lambda a_{is},$$

следовательно, группа с оператором $\xi^s \partial_s$, где ξ^s есть решение уравнения (6), является группой конформных преобразований пространства $V_2(a_{is})$.

Предположим, что ξ^s есть вектор группы импримитивности сети a_{is} , и докажем, что тензор

$$\check{a}_{is} = \frac{a_{is}}{a_{mn} \xi^m \xi^n} \quad (7)$$

является E -тензором. Пусть $a_{is} = v_{(i} w_{s)}$. Так как семейства (v_i) и (w_i) импримитивны, то, согласно (3),

$$\frac{v_i}{\xi^m v_m} = \partial_i \Phi = \Phi_i, \quad \frac{w_i}{\xi^m w_m} = \partial_i \Psi = \Psi_i.$$

Следовательно, $\check{a}_{is} = \Phi_{(i} \Psi_{s)}$, что и доказывает наше утверждение.

3. Импримитивная три-ткань характеризуется тем, что система четырех уравнений

$$\xi^s a_{ijk|s} + 3\xi^s |(i a_{jk})_s = 3\sigma a_{ijk} \quad (8)$$

с тремя неизвестными функциями ξ^s , σ имеет решение. Следовательно, *не каждая три-ткань импримитивна*. Простым примером импримитивной три-ткани является шестиугольная три-ткань: три семейства ее линий отображаются на три пучка параллельных прямых евклидовой плоскости, так что любой параллельный перенос является группой импримитивности этой три-ткани.

Найдем условия импримитивности три-ткани a_{ijk} . Пусть x_i, y_i, z_i — ее направляющие векторы. Один из них, например z_i , всегда веществен. Рассмотрим две аполярные сети $a_{ij} = x_{(i}y_{j)}$ и $b_{ij} = z_{(i}z_{j)}$, где $(x, y, z, \bar{z}) = -1$. Пусть, далее, c_{ij} — главная сеть этих сетей. Связность, в которой все три сети a, b, c чебышевские, определяется, как будет показано в § 73, п. 2, однозначно. Следовательно, каждая три-ткань однозначно определяет связность. Назовем эту связность *присоединенной* к три-ткани. Присоединенная связность всегда квазиевклидова: в силу соотношений (28;19) все три сети a, b, c будут не только чебышевскими, но и геодезическими и, следовательно, декартовыми.

Направления три-ткани абсолютно параллельны в присоединенной связности. Это свойство можно принять за определение присоединенной связности. Действительно, если x_i, y_i и z_i определяют поля абсолютно параллельных направлений, то направление \bar{z}_i тоже будет абсолютно параллельным (так как составляет с первыми тремя постоянное ангармоническое отношение), следовательно, сети a, b, c — декартовы, что и доказывает наше утверждение.

Коэффициенты присоединенной связности можно определить следующим образом. Зафиксируем псевдотензор три-ткани и, как в § 9, пронормируем направляющие векторы так, чтобы выполнялись следующие равенства:

$$x_i + y_i + z_i = 0, \quad (9)$$

$$a_{ijk} = 6x_{(i}y_j z_k), \quad b_{ij} = x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j, \quad \varepsilon_{ij} = 2x_{[i}y_{j]}. \quad (10)$$

Запишем равенства:

$$x_{i|j} = \omega_j x_i, \quad y_{i|j} = \omega_j y_i, \quad z_{i|j} = \omega_j z_i, \quad (11)$$

из которых последнее является] следствием] двух первых и (9).

Рассматривая первые два равенства как восемь уравнений с восемью неизвестными Γ_{ij}^s и ω_j , легко убедимся в их однозначной разрешимости. В определенной таким образом связности направления три-ткани будут абсолютно параллельны, следовательно, эта связность является присоединенной.

С помощью равенств (11) и (10) легко находим производные

$$a_{ijk|s} = 3\omega_s a_{ijk}, \quad b_{ij|s} = 2\omega_s b_{ij}, \quad \varepsilon_{ij|s} = 2\omega_s \varepsilon_{ij}. \quad (12)$$

При дифференцировании в присоединенной связности уравнения (8) принимают вид

$$3\xi^s \omega_s a_{ijk} + 3\xi^s_{|i} a_{jk|s} = 3\sigma a_{ijk}. \quad (13)$$

Свертывая обе части этого равенства с b^{ij} , получаем, согласно § 9,

$$-\xi^s_{|i} a_{jks} b^{ij} = \xi^{(s \cdot i)}_{\cdot |} \bar{a}_{ihs} = 0.$$

Так как тензор Гессе дополнительной три-ткани $\bar{a}_{ijk} = b_i^s a_{sjk}$ определяется однозначно и совпадает с b_{is} , то

$$\xi^{(s \cdot i)}_{\cdot |} = \lambda b^{si}, \quad \xi^s_{\cdot |i} = \lambda b_i^s + \varrho \delta_i^s. \quad (14)$$

Внося это значение производной $\xi^s_{\cdot |i}$ в (13), придем к равенству

$$(\xi^s \omega_s + \varrho - \sigma) a_{ijk} + \lambda \bar{a}_{ijk} = 0,$$

которое возможно лишь при

$$\sigma = \varrho + \xi^s \omega_s, \quad \lambda = 0.$$

Первое условие определяет множитель σ . Из второго и (14) находим

$$\xi^s_{\cdot |i} = \varrho \delta_i^s. \quad (15)$$

Отсюда следует, что поле вектора ξ^s геодезическое, поэтому траектории группы импримитивности три-ткани являются геодезическими присоединенной связности. Тен-

зор Риччи квазиевклидовой присоединенной связности запишем в виде

$$R_{ik} = \theta \varepsilon_{ik}. \quad (16)$$

Из условий интегрируемости

$$\varepsilon_{ij|s}{}^s = R^s{}_i \varepsilon_{sj} + R^s{}_j \varepsilon_{is} = 2\theta \varepsilon_{ji} = 2\omega_{s|}{}^s \varepsilon_{ij}$$

приходим к равенству

$$\omega_{s|}{}^s = -\theta. \quad (17)$$

Составим теперь условия интегрируемости уравнений (15):

$$\xi^s{}_{|i}{}^i = -R^s{}_i \xi^i = \theta \xi^s = \varrho^s.$$

Следовательно,

$$\varrho_s = \theta \xi_s. \quad (18)$$

Условие градиентности вектора ϱ_s

$$\begin{aligned} \varrho_{s|}{}^s &= \theta^s \xi_s + \theta (\varepsilon_{ks} \xi^k)_{|}{}^s = \theta^s \xi_s + 2\theta \varepsilon_{ks} \omega^s \xi^k + \theta \varepsilon_{ks} \xi^k{}_{|}{}^s = \\ &= \theta^s \xi_s - 2\theta \xi^s \omega_s - 2\theta \varrho = 0 \end{aligned}$$

можно записать в виде

$$\xi^s T_s = -\varrho, \quad (19)$$

где

$$T_s = \partial_s \ln \sqrt{\bar{\theta}} + \omega_s. \quad (20)$$

Дифференцируя обе части равенства (19), получаем

$$(\xi^s T_s)_i = \varrho T_i + T_{s|i} \xi^s = -\varrho_i = -\theta \xi_i$$

или

$$\xi^s (T_{s|i} - T_s T_i + \theta \varepsilon_{si}) = \xi^s (T_{i|s} - T_s T_i) = 0. \quad (21)$$

Если $T_{i|s} - T_s T_i = 0$, то $\varepsilon^{is} (T_{i|s} - T_s T_i) = \omega_{s|}{}^s = -\theta = 0$, следовательно, $R_{ij} = \theta \varepsilon_{ij} = 0$. Присоединенная связность в этом случае — евклидова, семейства линий три-ткани будут тремя семействами параллельных прямых, так что три-ткань диагональна и допускает ∞^1 параллельных переносов.

Пусть $T_{i|s} - T_s T_i \neq 0$. Для того чтобы три-ткань была диагональна, необходимо, чтобы уравнение (21), определяющее вектор ξ^s , имело решение. Следовательно, должно иметь место вырождение

$$T_{i|s} - T_s T_i = p_s q_i. \quad (22)$$

Условие этого вырождения имеет вид

$$(T_{i|s} - T_i T_s)(T_{m|n} - T_m T_n) \varepsilon^{im} \varepsilon^{sn} = 0. \quad (23)$$

При выполнении этого условия из (21) находим

$$\xi^s p_s = 0, \quad \xi_s = \mu p_s.$$

Множитель μ легко определяется: из (19) имеем

$$T^s \xi_s = \varrho = \mu T^s p_s.$$

Уравнение (18) принимает теперь вид

$$\partial_s \ln \varrho = \frac{\theta p_s}{T^k p_k}. \quad (24)$$

Для импримитивной три-ткани вектор правой части (24) должен быть градиентным. В случае выполнения и этого условия функция ϱ определяется квадратурой

$$\varrho = ce \int \frac{\theta p_s du^s}{T^k p_k} \quad (25)$$

и определяет вектор искомой группы импримитивности

$$\xi_s = \frac{1}{\theta} \varrho_s. \quad (26)$$

Итак, для импримитивности три-ткани необходимо и достаточно, либо чтобы присоединенная связность была евклидовой, либо чтобы выполнялись условия (23), (24) и чтобы вектор (26) удовлетворял уравнению (15).

§ 68. Потенциальные сети Егорова

1. Однопараметрической группе преобразований поверхности евклидова пространства в себя можно дать следующее кинематическое истолкование. Предположим, что по ней течет стационарный поток несжимаемой жидкости. Скорость движения частицы, находящейся в точке с координатами u^i , обозначим через $\xi^s = \xi^s(u^i)$. За время δt частица переместится в точку с координатами

$$\bar{u}^i = u^i + \xi^i \delta t.$$

Такое же перемещение точка совершит в результате инфинитезимального преобразования одночленной группы

с оператором $X = \xi^s \partial_s$. Траектории частиц будут совпадать с траекториями этой группы. Если точки кривой L за время t перенесутся потоком жидкости в точки кривой L' , то можно сказать, что кривая L' получена из кривой L конечным преобразованием группы, соответствующим параметру t .

2. В работе [32] Д. Ф. Егоров рассматривал ортогональные сети, переводимые в себя потенциальным движением жидкости, то есть движением с вектором скорости ξ^s , имеющим потенциал—функцию ω ,—градиент которой¹⁾

$$\partial_i \omega = \omega_i = -\tilde{\xi}_i. \quad (1)$$

Эти сети он назвал *потенциальными сетями*.

Я. С. Дубнов [30] указал следующую инвариантную характеристику потенциальной сети: вектор $\tilde{a}_s = g_s^k a_k$, дополнительный чебышевскому вектору a_k , должен быть диагонален относительно сети. Так как этот вектор только знаком отличается от общего трансверсального вектора семейств линий сети, то признак Дубнова можно сформулировать так: *для того, чтобы ортогональная сеть была потенциальной, необходимо и достаточно, чтобы общее семейство трансверсалей линий сети было диагональным относительно этой сети*.

Согласно (38;2) инвариантная характеристика потенциальной сети имеет вид:

$$\left[\begin{array}{cc} (a_i^s \tilde{a}_s)_i \tilde{a}_k - \tilde{a}_s^s a_k^i \tilde{a}_i & \\ 0 & 0 \end{array} \right]_k \begin{array}{c} \\ \\ a_{mn} a^m a^n \\ 0 \end{array} = 0. \quad (2)$$

Для установления этого признака обозначим через a_{is} тензор ортогональной сети. Так как эта сеть имприми-

1) Если r — радиус-вектор точки поверхности, то вектор скорости частицы будет $\frac{\partial r}{\partial u^i} \xi^i$, а его проекции на координатные векторы $\frac{\partial r}{\partial u^1}$ и $\frac{\partial r}{\partial u^2}$ —

$$\frac{\partial r}{\partial u^s} \frac{\partial r}{\partial u^i} \xi^s = g_{is} \xi^s = -\tilde{\xi}_i = \text{grad } \omega.$$

тивна относительно группы с оператором $X = \xi^s \partial_s = \tilde{\omega}^s \partial_s$, то производная Ли

$$\xi^i_{|(s} a_k)_i - \xi^i a_{i(s|h)} = \lambda a_{sk}. \quad (3)$$

Заменяя здесь, согласно (27;4), $a_{i(s|h)} = -2\tilde{a}_{is}\tilde{a}_h$, получим

$$\xi^i_{|(s} a_k)_i + 2\xi^i \tilde{a}_{i(s}\tilde{a}_h) = \lambda a_{sk},$$

а после свертывания обеих частей с \tilde{a}^{sh} —

$$\xi^i_{|s} g_i^s - 2\xi^s \tilde{a}_s = 0. \quad (3')$$

Так как по условию потенциальности движения первое слагаемое левой части $\xi^i_{|s} g_i^s = -\omega_{s|}{}^s = 0$, то вектор ξ_s коллинеарен вектору \tilde{a}_s и необходимость признака доказана, ибо траектории группы диагональны относительно каждой импримитивной ей сети (§ 67, п. 2).

Предположим теперь, что вектор \tilde{a}_s диагонален относительно сети a_{is} . Согласно § 67, п. 2 однозначно определяется группа импримитивности сети, вектор которой $\xi^s = \mu \tilde{a}^s$. Этот вектор удовлетворяет уравнению (3) и его следствию (3'), из которого, ввиду равенства $\xi^s \tilde{a}_s = 0$, имеем $\tilde{\xi}_{s|}{}^s = 0$. Следовательно, $\tilde{\xi}_s = \omega_s = \text{grad}$, что и требовалось доказать.

3. Если одно семейство линий потенциальной сети совпадает с траекториями группы, то это семейство, совпадая с семейством своих трансверсалей, будет геодезическим. Обратно, каждая ортогональная полугеодезическая сеть потенциальна. Действительно, семейство общих ее трансверсалей совпадает с ее геодезическим семейством и диагонально относительно сети.

4. Предположим, что на поверхности существует потенциальная сеть с геодезическими траекториями группы импримитивности и что эти траектории не являются линиями сети. В этом случае направляющие векторы v_i и w_i сети переносятся параллельно вдоль геодезических траекторий (ξ_i) и, таким образом, образуют с вектором ξ_i

постоянные углы. Следовательно,

$$v_i = \xi_i \cos \alpha + \tilde{\xi}_i \sin \alpha, \quad w_i = -\xi_i \sin \alpha + \tilde{\xi}_i \cos \alpha \quad (\alpha = \text{const}).$$

Из условия импримитивности (67;3)

$$\frac{v_i}{\xi^s v_s} = \frac{\xi_i \cos \alpha + \tilde{\xi}_i \sin \alpha}{\xi^s \tilde{\xi}_s \sin \alpha} = \text{grad},$$

$$\frac{w_i}{\xi^s w_s} = \frac{-\xi_i \sin \alpha + \tilde{\xi}_i \cos \alpha}{\xi^s \tilde{\xi}_s \cos \alpha} = \text{grad}$$

следует, что векторы ξ_i и $\tilde{\xi}_i$ имеют общий интегрирующий делитель $\xi^s \tilde{\xi}_s$, то есть что сеть $(\xi, \tilde{\xi})$ изотермическая и, следовательно, является сетью вращения. Сети рассматриваемого вида существуют лишь в метрике вращения. Траектории групп их импримитивности совпадают с меридианами.

5. Пусть сеть (v, w) потенциальна. Ее направляющие векторы v_i и w_i определяют, согласно (67;3), две функции φ и ψ — *потенциальные параметры сети* (v, w) , — градиенты которых

$$\varphi_i = \frac{v_i}{\xi^s v_s}, \quad \psi_i = \frac{w_i}{\xi^s w_s}. \quad (4)$$

Примем функции φ и ψ за координаты. Тогда

$$\varphi_1 = \frac{v_1}{\xi^1 v_1} = \frac{1}{\xi^1} = 1, \quad \varphi_2 = 0, \quad \psi_1 = 0, \quad \psi_2 = \frac{w_2}{\xi^2 w_2} = \frac{1}{\xi^2} = 1, \quad (5)$$

так что $\xi^1 = \xi^2 = 1$. Из равенства $\omega_i = g_{is} \xi^s$ имеем теперь

$$\omega_1 = \partial_1 \omega = g_{11} \xi^1 = g_{11}, \quad \omega_2 = \partial_2 \omega = g_{22},$$

и линейный элемент в потенциальных параметрах принимает вид

$$ds^2 = \partial_1 \omega d\varphi^2 + \partial_2 \omega d\psi^2. \quad (6)$$

Обратно, если линейный элемент имеет вид (6), то координатная сеть потенциальна и координаты φ и ψ являются ее потенциальными параметрами. Действительно, координаты

¹⁾ Неортогональные сети, в параметрах которых

$$ds^2 = \partial_1 \omega du^2 + 2f du dv + \partial_2 \omega dv^2,$$

рассматривал В. М. Майоров [44]. Он назвал их *обобщенно-потенциальными*.

наты вектора ξ^s , определяемого уравнениями $\omega_i = g_{is}\xi^s$, будут $\xi^1 = \xi^2 = 1$, и координатная сеть будет импримитивной, так как условия (5) импримитивности ее семейств выполняются.

6. Потенциальные параметры φ и ψ и потенциал ω , определяющие потенциальную сеть, удовлетворяют ряду дифференциальных уравнений. Первое из них

$$\Delta_1(\varphi, \psi) = 0 \quad (7)$$

выражает ортогональность потенциальной сети. Два других получаются из уравнений (4), согласно которым

$$\xi^i \varphi_i = \xi^i \psi_i = 1$$

или, после замены ξ^i на $\tilde{\omega}^i$,

$$\Delta_1(\omega, \varphi) = \Delta_1(\omega, \psi) = 1. \quad (8)$$

Мы получили систему трех уравнений (7), (8), определяющих потенциальную сеть.

Следуя Д. Ф. Егорову [32], исключим из этих уравнений функцию ω . Из (8) находим

$$\omega_i = \frac{\tilde{\varphi}_i - \tilde{\psi}_i}{\varphi_s \psi^s}. \quad (9)$$

Если обозначить

$$\Delta_1 \varphi = p^2, \quad \Delta_1 \psi = q^2, \quad (10)$$

то будут справедливы равенства

$$\tilde{\varphi}_i = \frac{p}{q} \psi_i, \quad \tilde{\psi}_i = -\frac{q}{p} \varphi_i, \quad \varphi_i \psi^i = pq, \quad (11)$$

$$\omega_i = \frac{\varphi_i}{p^2} + \frac{\psi_i}{q^2}. \quad (12)$$

Последнее приводит к уравнению

$$\begin{aligned} \omega_{i,i} &= \varphi_i \left(\frac{1}{p^2} \right)^i + \psi_i \left(\frac{1}{q^2} \right)^i = \\ &= D \left(\varphi, \frac{1}{\Delta_1 \varphi} \right) + D \left(\psi, \frac{1}{\Delta_1 \psi} \right) = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

которое можно также записать в виде

$$\Delta_1 \varphi \Delta_1(\varphi, \Delta_1 \psi) = \Delta_1 \psi \Delta_1(\psi, \Delta_1 \varphi), \quad (14)$$

предложенном Д. Ф. Егоровым (см. в [32] формулу (47)).

Для составления уравнения, определяющего функцию ω , из равенства (12) и его следствия

$$\tilde{\omega}_i = \frac{\tilde{\Phi}_i}{p^2} + \frac{\tilde{\Psi}_i}{q^2} = \frac{-\Phi_i + \Psi_i}{pq}$$

найдем

$$\Delta_1 \omega = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2}, \quad (15)$$

$$\Phi_i = \frac{1}{\Delta_1 \omega} \left(\omega_i - \frac{p}{q} \tilde{\omega}_i \right), \quad \Psi_i = \frac{1}{\Delta_1 \omega} \left(\omega_i + \frac{q}{p} \tilde{\omega}_i \right), \quad (16)$$

или

$$\Phi_i = s_i - l \tilde{s}_i, \quad \Psi_i = s_i + \frac{1}{l} \tilde{s}_i, \quad (17)$$

где

$$s_i = \frac{\omega_i}{\Delta_1 \omega}, \quad l = \frac{p}{q}. \quad (18)$$

Два уравнения

$$\Phi_{i|}^i = s_{i|}^i - l \tilde{s}_{i|}^i - l^i \tilde{s}_i = 0,$$

$$\Psi_{i|}^i = s_{i|}^i + \frac{1}{l} \tilde{s}_{i|}^i + \left(\frac{1}{l} \right)^i \tilde{s}_i = 0$$

равносильны следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} 2s_{i|}^i + \left(\frac{1}{l} - l \right) \tilde{s}_{i|}^i + \left(\frac{1}{l} - l \right)_{|}^i s_i &= \\ &= \left[2s_i + \left(\frac{1}{l} - l \right) \tilde{s}_i \right]_{|}^i = 0, \quad (19) \\ \left(\frac{1}{l} - l \right) s_{i|}^i - 2\tilde{s}_{i|}^i &= 0. \end{aligned}$$

Считая, что $s_{i|}^i \neq 0$ ¹⁾ и исключая из (19) функцию $l - \frac{1}{l}$, получаем уравнение (см. в [32] формулы (56;57))

$$\left[\frac{s_{i|}^i s_{k|}^i + \tilde{s}_{i|}^i \tilde{s}_{k|}^i}{s_{j|}^j} \right]_{|}^k = 0 \quad (20)$$

1) Если $s_{i|}^i = \left(\frac{\omega_i}{\Delta_1 \omega} \right)_{|}^i = 0$, то $\Delta_1 \omega = f(\omega)$ и траектории группы геодезические. Этот случай рассмотрен в п. 4.

или

$$(1 + \sigma^2) D(\omega, \Delta_1 \omega) + \Delta_1 \omega \Delta_1(\omega, \sigma) = 0, \quad (21)$$

где

$$\sigma = \frac{1}{D(\omega, \Delta_1 \omega)} (\Delta_1 \omega \Delta_2 \omega - \Delta_1(\omega, \Delta_1 \omega)). \quad (22)$$

Каждое решение ω этого уравнения определяет, согласно (19), функцию l , после чего квадратурами из формул (17) найдутся потенциальные параметры φ , ψ и потенциальная сеть.

7. Рассмотрим изотермическую потенциальную сеть. Коллинеарность векторов \tilde{a}_s и ξ_s и равенство (1) приводят к уравнению

$$-\tilde{\xi}_s = \omega_s = \lambda a_s.$$

В силу градиентности вектора $a_s = \partial_s a$ отсюда следует, что $\omega = f(a)$. Кроме того, в изотермических параметрах, согласно (6) и (36; 22), имеем

$$a_1 = -\frac{1}{2} \partial_1 \ln \omega_2, \quad a_2 = -\frac{1}{2} \partial_2 \ln \omega_1.$$

Следовательно,

$$\partial_{12} \ln \omega_1 = \partial_{12} \ln \omega_2.$$

Интегрируя, находим

$$\omega_1 \Phi(\varphi) = \omega_2 \Psi(\psi),$$

где $\Phi(\varphi)$ и $\Psi(\psi)$ — произвольные функции. Отсюда следует, что

$$\omega = f[\Phi_1(\varphi) + \Psi_1(\psi)],$$

то есть, что функция ω , а следовательно, и потенциал a чебышевского вектора являются изотермическими относительно сети a_{is} функциями.

Таким образом, изотермическая потенциальная сеть может быть охарактеризована как такая изотермическая сеть, у которой потенциал чебышевского вектора является изотермической относительно этой сети функцией.

Действительно, при указанных условиях линейный элемент можно записать в виде

$$ds^2 = e^{-2\alpha} (du_1^2 + dv_1^2) = F [U_1(u) + V_1(v)] (du^2 + dv^2) \quad (23)$$

или в виде

$$\begin{aligned} ds^2 &= \Phi' [U(u) + V(v)] (U' du^2 + V' dv^2) = \\ &= \frac{\partial \Phi}{\partial u} du^2 + \frac{\partial \Phi}{\partial v} dv^2, \end{aligned}$$

показывающем, что координатная сеть потенциальна.

Частными типами потенциальных сетей являются, как легко видеть из (23), все L_m -сети.

ГЛАВА VII

П-СЕМЕЙСТВА СЕТЕЙ

Основатель Московской геометрической школы К. М. Петерсон в 1866 г. опубликовал работу [48], в которой рассматривал такое изгибание поверхности, при котором некоторая сеть остается сопряженной. Сеть, которая остается сопряженной на двух изгибаниях поверхности, Петерсон назвал *простым основанием изгибания*. Им было доказано, что если существуют три изгибания поверхности, на каждом из которых данная сеть сопряжена, то возможно непрерывное однопараметрическое изгибание поверхности, при котором эта сеть остается сопряженной. В этом последнем случае сопряженная сеть называется *главным основанием изгибания*. Вопросы изгибания на главном основании интересовали многих русских геометров. Подробный исторический очерк этого вопроса можно найти в книге С. П. Финикова [11]. Там же приведены почти все результаты по изгибанию на главном основании, известные к тому времени и принадлежащие К. М. Петерсону, ее автору, С. С. Бюшгенсу, Д. Ф. Егорову, Б. К. Младзевскому, А. Ф. Маслоу и другим.

Известно (см., например, § 78), что виртуально-асимптотическая сеть, то есть сеть, которая служит асимптотической на некотором изгибании поверхности, характеризуется тем, что ее чебышевский вектор равен $\frac{1}{4} \partial_i \ln K$ (K — гауссова кривизна поверхности). Следовательно, простое основание изгибания характеризуется тем, что имеет две аполярные ей сети с равными чебышевскими векторами $b_i = \frac{1}{4} \partial_i \ln K$, а главное основание изгибания — тем, что таких сетей ∞^1 .

С этой точки зрения задача изгибания на главном основании снова, с привлечением тензорных методов, была рассмотрена Н. В. Ефимовым [37]. В этой работе было отмечено, что целый ряд задач классической дифференциальной геометрии можно сформулировать так: *найти условия, при которых среди сетей, апольярных данной сети, существует данное число сетей с данным чебышевским вектором*. Так, существование сопряженной чебышевской сети характеризует поверхность переноса, существование сопряженной виртуально-асимптотической сети характеризует поверхность Фосса. Во всех этих случаях рассматривалась риманова геометрия, а исходной служила асимптотическая сеть.

В работе [58] рассмотрена более общая задача: *найти условие того, что данная сеть A произвольного пространства аффинной связности A_2 допускает апольярную ей сеть B с данным чебышевским вектором b_i , к решению которой мы и переходим*.

§ 69. Семейства сетей II

1. Дополним данную сеть A произвольными сетями A_2 и A_3 до тройки сетей A_1, A_2, A_3 . Искомую сеть B можно задать одной функцией ω :

$$B_i^s = A_2^s \cos \omega + A_3^s \sin \omega, \quad (1)$$

и тогда, согласно (28; 22), ее чебышевский вектор определяется формулой

$$2b_i = a_2^i + a_3^i + \alpha_1^i \cos 2\omega + A_1^s \alpha_s \sin 2\omega + A_1^s \omega_s. \quad (2)$$

Разрешая эти уравнения относительно ω_s , находим

$$\omega_s = M_s \cos 2\omega + N_s \sin 2\omega + L_s, \quad (3)$$

где

$$M_s = A_1^i \alpha_i, \quad N_s = -\alpha_s, \quad L_s = A_1^i (a_2^i + a_3^i - 2b_i).$$

Таким образом, отыскание сети B приведено к решению уравнения (3) в полных дифференциалах с одной неизвест-

ной функцией ω . Составим условие интегрируемости этих уравнений, исключая из них вектор ω_s с помощью (3):

$$\begin{aligned} \omega_{s1}^s &= M_{s1}^s \cos 2\omega + N_{s1}^s \sin 2\omega + L_{s1}^s + \\ &+ 2(-M_s \sin 2\omega + N_s \cos 2\omega)(M^s \cos 2\omega + N^s \sin 2\omega + L^s) = \\ &= (M_{s1}^s + 2N_s L^s) \cos 2\omega + (N_{s1}^s + 2L_s M^s) \sin 2\omega + \\ &+ L_{s1}^s - 2M_s N^s = 0. \quad (4) \end{aligned}$$

Полученное уравнение — квадратное относительно $\operatorname{tg} \omega$ — определяет два значения ω_1 и ω_2 искомой функции. Если одно или два из них удовлетворяют уравнению (3), то существует одна или две, соответственно, сети, аполярные сети A с чебышевским вектором b_i , а результат подстановки решений ω_1 и ω_2 в (2) дает инвариантный признак существования одной или двух таких сетей.

Для существования трех таких сетей с указанными свойствами необходимо и достаточно, чтобы уравнение (4) обращалось в тождество относительно ω . В этом случае система (3) вполне интегрируема и определяет функцию ω с точностью до одной произвольной постоянной, следовательно, если существуют три сети с одинаковыми чебышевскими векторами, аполярные сети A , то существует

∞^1 таких сетей.

Совокупность сетей с общей аполярной сетью A и равными чебышевскими векторами b_i будем в дальнейшем называть семейством сетей $\Pi(b_i, A)$, а сеть A — основанием этого семейства. Основание семейства $\Pi(b_i, A)$ характеризуется обращением в нуль всех коэффициентов уравнения (4):

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad M_{s1}^s + 2N_s L^s &= 0, \\ 2) \quad N_{s1}^s + 2L_s M^s &= 0, \\ 3) \quad L_{s1}^s - 2M_s N^s &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Обозначая поворот вектора на прямой угол в метрике

тензора A_1 чертой: $A_1^s x_s = \bar{x}_i$ — и вводя вектор

$$p_i = 2b_i - a_2 - a_3, \quad (6)$$

придадим уравнениям (3), (4), (5) следующий вид:

$$\omega_s = -\alpha_1 \sin 2\omega + \bar{\alpha}_1 \cos 2\omega - \bar{p}_s, \quad (3')$$

$$\begin{aligned} (\alpha_1^s - 2\alpha_1 p^s) \sin 2\omega - (\bar{\alpha}_1^s - 2\bar{\alpha}_1 p^s) \cos 2\omega + \\ + \bar{p}_s + 2\alpha_1 \bar{\alpha}_1 = 0, \end{aligned} \quad (4')$$

$$\left. \begin{aligned} 1) \alpha_1^s - 2\alpha_1 p^s &= 0, \\ 2) \bar{\alpha}_1^s - 2\bar{\alpha}_1 p^s &= 0, \\ 3) \bar{p}_s + 2\alpha_1 \bar{\alpha}_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5')$$

Рассмотрим прежде всего случай, когда сеть A_1 не содержит геодезических семейств. Для преобразования полученных уравнений воспользуемся вектором Грина. Из (35;10) свертыванием с векторами α_1^s и $\bar{\alpha}_1^s$ находим

$$2(2g_s - a_2 - a_3) \alpha_1^s = -\alpha_1^s,$$

$$2(2g_s - a_2 - a_3) \bar{\alpha}_1^s = -\bar{\alpha}_1^s.$$

Кроме того, согласно (6) и (35;10),

$$p_i = 2b_i - (a_2 + a_3) = 2 \left(b_i - g_i - \frac{1}{4} q_i \right).$$

Следовательно,

$$\alpha_1^s + 2p_s \alpha_1^s = 4(b_s - g_s) \alpha_1^s,$$

$$\bar{\alpha}_1^s + 2p_s \bar{\alpha}_1^s = 4(b_s - g_s) \bar{\alpha}_1^s,$$

$$\bar{p}_s + 2\alpha_1 \bar{\alpha}_1 = 2 \left(\bar{b}_s - \bar{g}_s - \frac{1}{4} \bar{q}_s \right) + 2\alpha_1 \bar{\alpha}_1,$$

и уравнения (4'), (5') принимают вид

$$(b_s - z_s) \alpha^s \sin 2\omega - \bar{\alpha}^s \cos 2\omega + \frac{1}{2} (\bar{b}_s - \bar{z}_s) |_1^s - \frac{1}{8} \bar{q}_s |_1^s + \frac{1}{2} \alpha_s \bar{\alpha}^s = 0, \quad (4'')$$

$$\left. \begin{aligned} 1, 2) (b_s - z_s) \alpha^s &= (b_s - z_s) \bar{\alpha}^s = 0, \\ 3) \bar{q}_s |_1^s &= 4 (\bar{b}_s - \bar{z}_s) |_1^s + 4J, \end{aligned} \right\} \quad (5'')$$

где $J = \alpha_s \bar{\alpha}^s$.

Для основания семейства $\Pi(b_i, A)$ из первых двух уравнений (5'') следует, что $b_s = z_s$. Третье условие (5'') $\bar{q}_s |_1^s = 4J$ получает простой геометрический смысл: если бивектор будет дискриминантным бивектором нормальной метрики, то $J = 1$, а $\bar{q}_s |_1^s = -K$, где K — гауссова кривизна этой метрики, так что $K = -4$.

Мы доказали следующее предложение: для того чтобы сеть, не содержащая геодезических семейств, была основанием семейства $\Pi(b_i, A)$, необходимо и достаточно, чтобы нормальная метрика этой сети имела постоянную гауссову кривизну $K = -4$.

Чебышевский вектор b_i , общий для всех сетей семейства $\Pi(b_i, A)$, является вектором Грина сети A .

Для отыскания оснований семейств Π в произвольном A_2 нужно на две функции, определяющие сеть, наложить одно дифференциальное уравнение (5'''), следовательно, одну из этих функций можно выбрать произвольно, поэтому семейства Π существуют в каждом A_2 и определяются с произволом в одну функцию двух аргументов.

2. Если одну из сетей семейства $\Pi(b_i, A)$ принять за сеть A , то $b_i = a_i$, $p_i = a_i - a_i = -\alpha_i$ и уравнения (5') сводятся к двум уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} 1) \alpha_s |_1^s &= 0, \\ 2, 3) \bar{\alpha}_s |_1^s &= 2\alpha_s \bar{\alpha}^s = 2J. \end{aligned} \right\} \quad (5''')$$

Из первого следует, что $\alpha_i = \partial_i \alpha = \text{grad}$, а из второго

$$\bar{\alpha}_s |^s + 2\bar{\alpha}_s \alpha^s = \frac{1}{2} e^{-2\alpha} [A_i^s (e^{2\alpha})_s] |^i = 0, \quad (7)$$

что функция $e^{2\alpha} = \varphi$ диагональна относительно сети A , или что это гармоническая функция нормальной метрики. Таким образом, для того чтобы сеть A , аполярная сети A , принадлежала семейству $\Pi (a_i, A)$, необходимо и достаточно, чтобы геодезический вектор сети A относительно сети A был градиентен ($\alpha_i = \text{grad}$) и функция $e^{2\alpha} = \varphi$ была диагональна относительно сети A .

Считая, что в равенстве (5'') индексы подняты дискриминантным бивектором нормальной метрики, приходим к такому заключению: линии полей геодезических векторов α_i сети A — основания семейства Π — относительно сетей этого семейства геодезически параллельны (α_i — орт и $\alpha_i |^i = 0$) и их геодезические кривизны постоянны ($e = \bar{\alpha}_s |^s = 2J = 2 = \text{const}$). Отсюда следует, что каждая сеть $(\alpha, \bar{\alpha})$ является сетью вращения нормальной метрики сети A .

Внося полученное выше выражение вектора $p_i = -\alpha_i$ в (3') и производя очевидные преобразования, находим

$$\omega_s = \bar{\alpha}_s \cos 2\omega - \alpha_s \sin 2\omega + \bar{\alpha}_s, \quad (3'')$$

$$\frac{\omega_s}{\cos^2 \omega} = -2\alpha_s \text{tg } \omega + 2\bar{\alpha}_s = \frac{-\varphi_s \text{tg } \omega + \bar{\varphi}_s}{\varphi}.$$

Отсюда

$$\varphi (\text{tg } \omega)_s + \varphi_s \text{tg } \omega = (\varphi \text{tg } \omega)_s = \bar{\varphi}_s.$$

Следовательно,

$$\varphi \text{tg } \omega = \bar{\varphi} + c, \quad \text{tg } \omega = \frac{\bar{\varphi} + c}{\varphi}, \quad (8)$$

где $\bar{\varphi}$ — гармоническая функция, сопряженная с функцией φ .

Пусть ω соответствует значению $c = 0$, так что $\operatorname{tg} \omega = \frac{\bar{\varphi}}{\varphi}$ и B — сеть, соответствующая этому значению ω :

$$B_i^s = A_i^s \cos \omega + A_i^s \sin \omega. \quad (9)$$

Исключая отсюда и из (1) аффинор сети A , получаем

$$\frac{1}{\cos \omega} B_i^s = \frac{1}{\cos \omega} B_i^s + A_i^s (\operatorname{tg} \omega - \operatorname{tg} \omega), \quad (10)$$

или

$$\frac{\varphi}{\cos \omega} B_i^s = \frac{\varphi}{\cos \omega} B_i^s + c A_i^s. \quad (11)$$

Таким образом, задание двух сетей A и B семейства Π позволяет найти по формуле (11) все сети этого семейства.

3. После проективного преобразования исходной связности G с вектором b_i все сети семейства станут чебышевскими сетями новой связности \bar{G} и геодезическими сетями связности \bar{G}^* , сопряженной со связностью \bar{G} относительно основания A . Дифференциальное уравнение этих геодезических

$$B_{is} du^i du^s = 0$$

или

$$\frac{\frac{\varphi}{\cos \omega} B_{is} du^i du^s}{A_{is} du^i du^s} = \operatorname{const} \quad (12)$$

определяет двупараметрическое семейство геодезических полученной связности, что позволяет, по аналогии со случаем римановой геометрии, назвать это уравнение *дробно-квадратичным интегралом геодезических*.

Если, далее, проективным преобразованием связности $\overset{*}{G}$ сделать сеть A чебышевской (для этого за вектор проективного преобразования следует взять чебышевский вектор сети A в этой связности), то в новой связности $\overset{**}{G}$, а также в связности, ей сопряженной относительно сети A , сеть A станет декартовой, а обе эти связности — вейлевыми. Сети семейства П при этом станут сетями дробно-квадратичного интеграла геодезических вейлевой связности $\overset{**}{G}$. Назовем вейлеву связность $\overset{**}{G}$ канонической связностью семейства П относительно сети A . Для каждого семейства П существует ∞^1 канонических связностей Вейля, в каждой из которых сети семейства составляют дробно-квадратичный интеграл геодезических, а одна из них является изотропной сетью этой связности.

4. Рассмотрим две тройки сетей A_1, A_2, A_3 и $\overset{*}{A}_1 = A_1$,

$$\begin{aligned} \overset{*}{A}_2^s &= A_2^s \cos \omega + A_3^s \sin \omega, \\ \overset{*}{A}_3^s &= A_2^s \cos \left(\omega + \frac{\pi}{2} \right) + A_3^s \sin \left(\omega + \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Функция ω является потенциалом сетей A_2 и $\overset{*}{A}_2$. Из формулы (28;22) находим:

$$\left. \begin{aligned} 2\overset{*}{a}_2 &= a_2 + a_3 + \alpha_1 \cos 2\omega + \bar{\alpha}_1 \sin 2\omega + \bar{\omega}_s = \\ &= a_2 + a_3 + \overset{*}{\alpha}_1 + \bar{\omega}_s, \\ 2\overset{*}{a}_3 &= a_2 + a_3 - \overset{*}{\alpha}_1 + \bar{\omega}_s, \\ 2(\overset{*}{a}_3 - a_3) &= \alpha_1 - \overset{*}{\alpha}_1 + \bar{\omega}_s, \\ 2(\overset{*}{\alpha}_3 - \alpha_3) &= 2(a_2 - a_3 - \alpha_3) = \alpha_1 - \overset{*}{\alpha}_1 - \bar{\omega}_s. \end{aligned} \right\} (13)$$

Предположим, что сети A_1 и A_3 даны, и найдем условие существования сети A_3^* , чебышевский вектор которой равен чебышевскому вектору сети A_3 ($a_3^* = a_3$). Задавая сеть A_3^* функцией ω , из (3''') получим для нее следующее уравнение:

$$\frac{\omega_s}{2 \sin^2 \omega} = -\frac{1}{2} \sigma_s = \bar{\alpha}_s + \alpha_s \sigma, \quad (14)$$

где $\sigma = \text{ctg } \omega$.

Условие его интегрируемости имеет вид

$$-\frac{1}{2} \sigma_{s|s} = \bar{\alpha}_{s|s} + \sigma \alpha_{s|s} + \alpha_s \sigma^s = \bar{\alpha}_{s|s} + \sigma \alpha_{s|s} - 2\alpha_s \bar{\alpha}^s = 0. \quad (15)$$

Если $\alpha_{s|s} \neq 0$, то

$$\sigma = -\frac{\bar{\alpha}_{s|s} - 2\alpha_s \bar{\alpha}^s}{\alpha_{s|s}}. \quad (16)$$

Следовательно, для того чтобы существовала вторая сеть A_3^* , аполярная сети A_1 , с таким же чебышевским вектором $a_3^* = a_3$, как и данная сеть A_1 , тоже аполярная сети A_1 , необходимо и достаточно, чтобы геодезический вектор сети A_1 относительно сети A_3 удовлетворял уравнению (14), где функция σ определена равенством (16) (предполагается, что $\alpha_{s|s} \neq 0$).

Если же $\alpha_{s|s} = 0$ и сеть A_3^* с чебышевским вектором $a_3^* = a_3$ существует, то $\bar{\alpha}_{s|s} - 2\alpha_s \bar{\alpha}^s = 0$, и сеть A_1 является основанием семейства $\Pi(a_3, A_1)$. Разрешая уравнение (14) относительно вектора α_s , находим

$$2\alpha_s = \partial_s \ln \sin \omega + \bar{\omega}_s, \quad (17)$$

так что градиентность вектора $\bar{\alpha}_s$ влечет за собой градиентность вектора $\bar{\omega}_s$ и обратно.

Заметим еще, что в случае равенства чебышевских векторов сетей A и A^* ($a_i = a_i^*$) из третьей формулы (13) имеем

$$\bar{\alpha}_i - \alpha_i = \bar{\omega}_s.$$

В результате мы доказали такую теорему: для двух сетей A и A^* с равными чебышевскими векторами и их главной сети A выполнение одного из четырех условий:

1) их потенциал ω диагонален относительно сети

$$A \quad (A_i^s \omega_s = \bar{\omega}_i = \text{grad}),$$

2) геодезический вектор сети A относительно одной из сетей A или A^* градиентен ($\alpha_i = \text{grad}$ или $\alpha_i^* = \text{grad}$),

3) разность этих векторов градиентна

$$(\alpha_i - \alpha_i^* = \text{grad}),$$

4) выполняется одно из условий

$$\bar{\alpha}_s \cdot \bar{\alpha}_s - 2\alpha_s \bar{\alpha}_s = 0, \quad \bar{\alpha}_s \cdot \bar{\alpha}_s - 2\alpha_s^* \bar{\alpha}_s = 0,$$

влечет за собой выполнение всех остальных и является необходимым и достаточным для того, чтобы сеть A была основанием семейства $\Pi(a_i, A)$.

5. Предположим, что сеть A допускает две аполярные ей геодезические сети A и A^* . В этом случае из (13) имеем

$$\alpha_s - \alpha_s^* = \bar{\omega}_s, \quad \alpha_s - a_s = \frac{1}{2}(\alpha_s - \alpha_s^* + \bar{\omega}_s) = \bar{\omega}_s. \quad (18)$$

Заметим, далее, что чебышевские векторы сетей A_2, A_1 и A_2^* равны $a_2 = a_1 - \alpha_3 = a_1 = a_2^*$, а функция $\omega + \frac{\pi}{2}$ является потенциалом этих сетей. Если один из векторов (18) градиентен, то градиентны и все три. Функция $\omega + \frac{\pi}{2}$ будет в этом случае диагональной относительно сети A_1 и, согласно предыдущей теореме, сеть A_1 будет основанием семейства $\Pi (a_i = a_i, A_1)$. Главные сети для сетей этого семейства и основания будут геодезическими и составят дробно-квадратичный интеграл геодезических. Отсюда следует теорема: *если для двух геодезических сетей выполняется одно из трех требований:*

1) *их потенциал диагонален относительно их главной сети,*

2) *разность их чебышевских векторов градиентна,*

3) *разность геодезических векторов их главной сети относительно этих сетей градиентна,*
то выполняются все остальные и рассматриваемые геодезические сети принадлежат дробно-квадратичному интегралу геодезических.

В геометриях Римана и Вейля существование изотропной сети, которую всегда можно принять за сеть A_1 , позволяет придать последней теореме следующую форму: *если для геодезической сети пространства V_2 или W_2 выполнено одно из условий:*

1) *она градиентна,*

2) *ее потенциал есть гармоническая функция,*

то выполнено и второе, и эта сеть вместе с изотропной сетью определяет дробно-квадратичный интеграл геодезических.

§ 70. Семейства Π с полугеодезическим основанием

1. Если сеть A_1 полугеодезическая и геодезическим является, например, ее второе семейство, то любой геодезический вектор α_i этой сети коллинеарен направляющему

вектору v_i ее первого семейства, следовательно

$$\alpha_i = \sigma v_i, \quad \bar{\alpha}_i = A_i^s \alpha_s = i \alpha_i. \quad (1)$$

Уравнение (69; 3) для функции ω , определяющей сеть B , аполярную сети A , с данным чебышевским вектором, и условие его интегрируемости (69; 4) для случая полугеодезической сети принимают вид

$$\omega_s = -\alpha_s \sin 2\omega + i \alpha_s \cos 2\omega - \bar{p}_s = \alpha_s e^{i(2\omega + \frac{\pi}{2})} - \bar{p}_s, \quad (2)$$

$$(\alpha_s |^s - 2\alpha_s \bar{p}^s) e^{i(2\omega + \frac{\pi}{2})} - \bar{p}_s |^s = 0. \quad (3)$$

Второе уравнение определяет теперь только одно значение угла ω . Если оно удовлетворяет уравнению (1), то существует одна искомая сеть B . Если же полугеодезическая сеть допускает две аполярные ей сети с чебышевскими векторами b_i , то уравнение (2) обращается в тождество, и сеть A допускает таких сетей ∞^1 .

Докажем теорему: для того чтобы сеть A , аполярная полугеодезической сети A , принадлежала семейству $\Pi(a_i, A)$, необходимо и достаточно, чтобы геодезический вектор α_s сети A относительно сети A был градиентен. Действительно, для рассматриваемого случая $b_s = a_s$, $p_s = 2b_s - a_s - a_s = -\alpha_s$, и три условия (69; 5) сводятся к одному

$$\alpha_s |^s = 0.$$

2. Пусть α_s — геодезический вектор полугеодезической сети A относительно сети A . Тогда ее геодезический вектор α_s^* относительно сети $A_i^s = A_i^s \cos \omega + A_i^s \sin \omega$

будет, согласно (28; 7) и (1),

$$\alpha_s^* = \alpha_s \cos 2\omega + \bar{\alpha}_s \sin 2\omega = \alpha_s e^{2\omega i}. \quad (4)$$

По предыдущей теореме, каждый интегрирующий множитель $e^{2\omega i}$ вектора α_s определяет сеть $\overset{*}{A}_3$, принадлежащую семейству $\Pi(\overset{*}{a}_i, A_1)$. Так как такой множитель определяется с произволом в одну функцию одного аргумента, то с таким же произволом определяется и семейство Π с данным полугеодезическим основанием.

§ 71. Семейства Π с геодезическим основанием

Для геодезической сети A_1 условия (69; 5) выполняются тождественно, следовательно, каждая сеть A_3 , аполярная геодезической сети A_1 , определяет семейство $\Pi(\overset{*}{a}_i, A_1)$, которому принадлежит сама. Сеть, аполярная сети A_1 , определяется одной функцией двух аргументов, следовательно, геодезическая сеть является основанием бесконечного множества семейств Π , определяемых с произволом в одну функцию двух аргументов.

По теореме Дубнова (§ 28) взаимный угол любых двух сетей семейства Π с геодезическим основанием постоянен.

Разность чебышевских векторов любых двух сетей A_3 и $\overset{*}{A}_3$, аполярных геодезической сети A_1 , как это следует из (28; 22), просто связана с их потенциалом ω :

$$\overset{*}{a}_i - a_i = \frac{1}{2} \bar{\omega}_i \quad (1)$$

и удовлетворяет уравнению

$$A_i^s (\overset{*}{a}_s - a_s) = \text{grad}. \quad (2)$$

Отсюда легко следует такая теорема: для того чтобы геодезическая сеть A_1 допускала аполярную ей сеть $\overset{*}{A}_3$

с чебышевским вектором $\overset{*}{a}_i$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (2), где $\overset{*}{a}_i$ чебышевский вектор какой-нибудь сети A , апольярной сети A .

Для доказательства достаточно отметить, что условие (2) является условием интегрируемости уравнения (1), записанного в виде $\omega_i = -A_i^s (\overset{*}{a}_s - a_s)$, решение которого — функция ω — определяет сеть A по формуле $\overset{*}{A}_i^s = A_i^s \cos \omega + A_i^s \sin \omega$, где $A_i^s = A_i^h A_k^s$.

§ 72. Преобразование Петерсона

Петерсоном было указано преобразование поверхности, изгибаемой на главном основании, в поверхность того же типа с тем же сферическим изображением главного основания [48]. Это преобразование является частным случаем более общего преобразования Петерсона, основания семейства Π .

Предположим, что сеть A является основанием семейства Π и сеть A — одна из сетей этого семейства. Чебышевский вектор α_i сети A в связности G , сопряженной с данной связностью G относительно сети A , удовлетворяет условиям (69;5'''). Рассмотрим произвольную сеть $\overset{*}{A}$, апольярную сети A , и связность $\overset{*}{G}$, сопряженную связности G относительно сети $\overset{*}{A}$. В этой связности вектор α_i будет геодезическим вектором сети A относительно сети $\overset{*}{A}$ и будет по-прежнему удовлетворять условию (69;5'''), а это означает, что сеть A в этой связности является основанием семейства Π ($\overset{*}{a}, A$). Связность $\overset{*}{G}$ и есть

преобразование Петерсона связности G . Выбор связности G^* зависит от выбора сети A_3^* , аполярной сети A_1 , то есть от одной функции двух аргументов.

§ 73. Дифференциально-топологическая характеристика семейств Π

1. Сети, принадлежащие семейству Π , образуют однопараметрическое семейство комполярных сетей. Связность, в которой чебышевские векторы этих сетей равны, определяется не однозначно: если G — одна из таких связностей, то, подвергая ее такому преобразованию, при котором связность G_1 , сопряженная ей относительно основания семейства A_1 , претерпевает проективное преобразование, мы не изменим чебышевских векторов сетей, аполярных сети A_1 , так как эти векторы в связности G_1 являются геодезическими (§ 28, п. 4), следовательно, в новой связности сети рассматриваемого семейства опять образуют семейство Π . Другим преобразованием связности, при котором семейство Π остается семейством Π , является проективное преобразование, сохраняющее равенство чебышевских векторов. В связи с этим возникает вопрос, чем характеризуется однопараметрическое семейство сетей, для которого можно найти связность, в которой оно будет семейством Π ? Чтобы ответить на него, рассмотрим две сети A_3 и A_3^* семейства Π (a_i, A_1) и две тройки сетей A_1, A_2, A_3 и A_1, A_2^s, A_3^s . Согласно (28;7) геодезический вектор сети A_3^s относительно сети A_1

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_s &= \alpha_s \cos 2 \left(\omega - \frac{\pi}{2} \right) + \bar{\alpha}_s \sin 2 \left(\omega - \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= -(\alpha_s \cos 2\omega + \bar{\alpha}_s \sin 2\omega). \end{aligned}$$

Из равенства (69;3''') находим

$$\omega_s = -\bar{\alpha}_s + \bar{\alpha}_s, \quad \bar{\omega}_s = \alpha_s^* - \alpha_s. \quad (1)$$

Так как, по предыдущему, векторы α_s^* и α_s градиентны, то $\bar{\omega}_s = \text{grad}$ и функция ω диагональна относительно сети A . Эта функция является потенциалом сетей A и A^* (см. § 28, п. 5), следовательно, потенциал любой пары сетей семейства Π диагонален относительно основания этого семейства.

2. Для дальнейшего докажем следующее предложение: *аффинная связность вполне определяется заданием чебышевских векторов a_1, a_2, a_3 трех некомплярных сетей A_1, A_2, A_3 . В принятых обозначениях*

$$\begin{aligned} A_{i|s}^s &= -2A_i^s a_s = \partial_s A_i^s - \Gamma_{is}^h A_h^s + \Gamma_{sh}^s A_i^h = \\ &= \partial_s A_i^s - \Gamma_{sp}^h (A_h^s \delta_i^p - A_i^s \delta_h^p) = \\ &= \partial_s A_i^s + \Gamma_{sp}^h e_{hi} A^{sp} \quad (\alpha = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Задание векторов a_i приводит к системе шести уравнений

$$\Gamma_{sp, i} A^{sp} = -\partial_s A_i^s - 2A_i^s a_s = 2\theta_i \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad (2)$$

с шестью неизвестными функциями Γ_{sp}^i . Определитель этой системы $\Delta = A_1^s A_2^h A_3^i$ отличен от нуля, так как сети A не комплярны, следовательно, эта система однозначно разрешима, и наше предложение доказано.

Если сети A аполярны, то решение системы (2):

$$\Gamma_{sp}^i = \sum_{\alpha=1}^3 A_{sp} \theta^\alpha.$$

Предположим теперь, что a_s и a_s^* — чебышевские векторы сетей A в связностях Γ_{sp}^i и Γ_{sp}^{*i} соответственно. Из последних двух формул находим тензор аффинной деформации:

$$T_{sp}^i = \Gamma_{sp}^{*i} - \Gamma_{sp}^i = \sum_{\alpha=1}^3 A_{sp} A_{\alpha}^{ih} (a_h - a_h^*).$$

3. Рассмотрим произвольную тройку сетей A_1, A_2, A_3 и докажем, что можно найти связность, в которой сеть A_1 будет основанием семейства Π , содержащего сеть A_3 . Зададим произвольную функцию ω , диагональную относительно сети A_1 , и найдем функцию α как решение уравнения

$$\omega_s = -\alpha_s \sin 2\omega + \bar{\alpha}_s \cos 2\omega + \bar{\alpha}_s = 2 \cos^2 \omega (-\alpha_s \operatorname{tg} \omega + \bar{\alpha}_s). \quad (3)$$

Полагая $\operatorname{tg} \omega = \sigma$, получаем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s &= -2\alpha_s \sigma + 2\bar{\alpha}_s, & \bar{\sigma}_s &= -2\bar{\alpha}_s \sigma - 2\alpha_s, \\ -2\alpha_s &= \frac{\sigma \sigma_s + \bar{\sigma}_s}{1 + \sigma^2} = \omega_s \operatorname{tg} \omega + \bar{\omega}_s. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Диагональность функции ω относительно сети A_1 обеспечивает полную интегрируемость системы (4). Ее решение:

$$\alpha = \frac{1}{2} \ln \cos \omega - \frac{1}{2} \bar{\omega} \quad (\bar{\omega} = \int \bar{\omega}_i du^i).$$

Если теперь построить связность так, чтобы геодезический вектор сети A_1 относительно сети A_3 был равен α_i , то эта связность и будет искомой. Действительно, вектор α_s удовлетворяет уравнениям (69;5):

$$1) \alpha_{s|s} = 0,$$

$$2) \bar{\alpha}_{s|s} + 2\bar{\alpha}_s \alpha^s = -\frac{1}{2} (\bar{\omega}_s \operatorname{tg} \omega - \omega_s)^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} (\bar{\omega}_s \operatorname{tg} \omega - \omega_s) (\bar{\omega}^s \operatorname{tg} \omega - \omega^s) =$$

$$= -\frac{1}{2} \bar{\omega}_s \omega^s \frac{1}{\cos^2 \omega} + \frac{1}{2} \bar{\omega}_i \omega^i (1 + \operatorname{tg}^2 \omega) = 0.$$

Для построения этой связности, согласно п. 2, достаточно задать чебышевские векторы a_s сетей A , наложив на них единственное требование $a_2 - a_3 = \alpha$. Произвол в построении такой связности, таким образом, четыре функции двух аргументов.

Из всего сказанного следует утверждение: для того чтобы две сети принадлежали семейству $\bar{\Pi}$ в некоторой связности, необходимо и достаточно, чтобы их потенциал был диагонален относительно их главной сети.

§ 74. Семейства сетей $\bar{\Pi}$

1. Рассмотрим следующее обобщение задачи, решенной в § 69: найти сеть B с данным чебышевским вектором b_i , образующую данный взаимный угол с данной сетью A . Выбрав произвольную тройку сетей A_1, A_2, A_3 , аффинор искомой сети можно представить в виде

$$B_i^s = A_1^s \cos \theta + (A_2^s \cos \omega + A_3^s \sin \omega) \sin \theta. \quad (1)$$

Функция $\frac{\pi}{2} - \theta$ является потенциалом сетей B и A_1 и по условию задачи известна. Искомая сеть B , таким образом, определяется заданием одной функции ω . Согласно (28;25) для чебышевского вектора сети B имеем

$$2(b_s - a_s) - A_3^s \theta_i = (\delta_s^i \sin \theta - A_3^s \cos \theta) (a_i + a_i - 2a_i + \\ + \alpha_i \cos 2\omega + \bar{\alpha}_i \sin 2\omega + \bar{\omega}_i) \sin \theta.$$

Свернем обе части этого равенства с $\delta_k^s + A_3^s \operatorname{ctg} \theta$:

$$(\delta_k^s + A_3^s \operatorname{ctg} \theta) (2b_s - 2a_s - A_3^s \theta_i) = \\ = a_k + a_k - 2a_k + \alpha_k \cos 2\omega + \bar{\alpha}_k \sin 2\omega + \bar{\omega}_k = \\ = 2b_k - 2a_k + \partial_k \ln \sin \theta + A_3^s (2a_s - 2a_s + \partial_s \ln \cos \theta) \operatorname{ctg} \theta.$$

Если ввести обозначения:

$$p_s = 2b_s + \partial_s \ln \sin \theta - \frac{a_s}{2} - \frac{a_s}{3}, \quad (2)$$

$$s_s = \operatorname{ctg} \theta (2b_s - 2a_s + \partial_s \ln \cos \theta), \quad (3)$$

$$N_s = -A_s^i s_i, \quad \bar{N}_s = A_s^i N_i = A_s^i s_i,$$

то для искомой функции ω получим следующее уравнение:

$$\omega_s = -\alpha_s \sin 2\omega + \bar{\alpha}_s \cos \omega - N_s \sin \omega + \bar{N}_s \cos \omega - \bar{p}_s. \quad (4)$$

Составляя условие его интегрируемости и исключая при этом производные ω_i с помощью (4), приходим к уравнению

$$-M \sin 2\omega + M \cos 2\omega - N \sin \omega + N \cos \omega - L = 0, \quad (5)$$

где

$$M = \alpha_s^i s_i^s - 2\alpha_s p^s, \quad \bar{M} = \bar{\alpha}_s^i s_i^s - 2\bar{\alpha}_s p^s, \quad (6_{1,2})$$

$$L = \bar{p}_s^i s_i^s + 2\alpha_s \bar{\alpha}_s^i - s_s s^s, \quad (6_3)$$

$$\begin{aligned} N &= N_{s_i}^s - N_s (p^s + 3\alpha^s) = \\ &= A_s^i (-s_{s_i}^i + 2b_s s^i + 2\alpha_s s^i + \partial_s \ln \sin \theta s^i), \end{aligned} \quad (6_4)$$

$$\begin{aligned} \bar{N} &= \bar{N}_{s_i}^s - N_s (p^s - 3\alpha^s) = \\ &= A_s^i (-s_{s_i}^i + 2b_s s^i - 2\alpha_s s^i + \partial_s \ln \sin \theta s^i), \end{aligned} \quad (6_5)$$

Это уравнение определяет четыре значения функции ω . Если n (≤ 4) этих решений удовлетворяет уравнению (4), то существует n искомого сетей. Если же таких сетей пять, то уравнение (5) должно обратиться в тождество. В этом случае уравнение (4) вполне интегрируемо и определяет функцию ω с точностью до произвольной постоянной. Следовательно, если существует пять сетей с равными чебышевскими векторами, образующие одинаковые взаимные углы с данной сетью A_1 , то существует ∞^1 таких сетей. Назовем совокупность этих сетей семейством $\bar{\Pi}(\theta, b_i, A)$, а сеть A_1 — основанием семейства $\bar{\Pi}$.

Основание семейства $\bar{\Pi}$ характеризуется обращением в нуль всех коэффициентов уравнения (5). Считая сеть A_1 известной, мы получаем в общем случае для трех неизвестных функций b_1 , $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, определяющих семейство $\bar{\Pi}(\theta, b_1, A_1)$, пять уравнений, следовательно, не всякая сеть является основанием семейства $\bar{\Pi}$.

Семейства $\bar{\Pi}$ в данном A_2 определяются пятью уравнениями с пятью неизвестными функциями: b_1 , θ и две функции, определяющие сеть A_1 . Следовательно, семейства $\bar{\Pi}$ существуют в каждом A_2 .

Примером семейства $\bar{\Pi}$ в геометрии Римана является семейство сетей, получаемое из данной сети вращением, сохраняющим ее чебышевский вектор (§ 43, п. 2).

2. В качестве приложения будем искать чебышевскую сеть в V_2 по ее углу φ (см. § 55 п. 3). По условию задачи

$$A_1^s = g_1^s, \quad A_2^s = ic_0^s, \quad A_3^s = i\tilde{c}_s^s, \quad b_1 = a_1 = \alpha_1 = 0,$$

$$\operatorname{ctg} \theta = i \cos \varphi, \quad p_s = -\partial_s \ln \sin \varphi, \quad s_s = -i\varphi (\sin \varphi)^{-1},$$

уравнение (1) и условие их интегрируемости (5) примут вид:

$$b_{0s} = \operatorname{ctg} \varphi g_{1s} + (c_{0s} \cos \omega + \tilde{c}_{0s} \sin \omega) (\sin \varphi)^{-1},$$

$$c_{0s}^s \varphi_{1s} \cos \omega - \tilde{c}_{0s}^s \varphi_{1s} \sin \omega - \sin \varphi (2K + \Delta_2 \varphi \operatorname{ctg} \varphi) = 0.$$

Это уравнение определяет, в общем случае, два значения ω и, следовательно, две искомые сети. Если таких сетей три, то их ∞^1 . Необходимыми и достаточными условиями этого будут: 1) $c_{0s}^s \varphi_{1s} = \tilde{c}_{0s}^s \varphi_{1s} = 0$, или 1) $\varphi_{1s} = 0$ и 2) $K + \operatorname{ctg} \varphi \Delta_2 \varphi = 0$. Дальнейшее исследование проведено в § 55 п. 3.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ
ПОВЕРХНОСТИ И КОНГРУЭНЦИИ
ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

ГЛАВА VIII
ТЕОРИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

§ 75. Общие понятия

При изучении двумерных поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве E_3 будем пользоваться их векторно-параметрическими уравнениями

$$r = r(u^1, u^2) = r(u^s). \quad (1)$$

Векторная функция (1) считается непрерывно дифференцируемой столько раз, сколько это требуется в каждом конкретном случае.

Каждая точка поверхности определяется двумя координатами u^s , следовательно, совокупность всех точек поверхности представляет собой пространство X_2 .

Линии $u^s = \text{const}$ называются *параметрическими* и в своей совокупности образуют *координатную сеть*. В дальнейшем в рассматриваемой области поверхности координатная сеть предполагается *регулярной*.

Линия на поверхности задается внутренними параметрическими уравнениями

$$u^s = u^s(t). \quad (2)$$

Внося значения криволинейных координат (2) в (1), мы приходим к параметрическому уравнению этой линии во внешнем пространстве — $r = r(u^s(t)) = r(t)$.

Каждый вектор, расположенный в касательной плоскости поверхности, называется *принадлежащим поверх-*

ности. Касательные векторы к координатным линиям

$$r_1 = \frac{\partial r}{\partial u^1}, \quad r_2 = \frac{\partial r}{\partial u^2},$$

в силу предположения о регулярности координатной сети, независимы, что выражается условием

$$[r_1 r_2] \neq 0. \quad (3)$$

Совокупность величин r_1, r_2 является геометрическим объектом: при замене криволинейных координат $u^i = u^i(u^{i'})$ они изменяются по тензорному закону:

$$r_{i'} = A_i^{i'} r_i, \quad A_i^{i'} = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}.$$

В связи с этим обстоятельством Я. С. Дубнов предложил называть этот объект *тензором с векторными компонентами* [75].

Векторы r_1, r_2 в каждой точке поверхности независимы и могут быть приняты за координатные векторы аффинной системы координат касательной плоскости данной точки поверхности. Каждый вектор, принадлежащий поверхности в этой точке, определяется своими координатами p^1, p^2 и может быть записан в виде

$$p = r_1 p^1 + r_2 p^2 = r_s p^s.$$

Для того чтобы это выражение сохраняло свой вид при замене криволинейных координат, необходимо и достаточно, чтобы p^i изменялись при этом как координаты контравектора: $p^{i'} = A_i^{i'} p^i$, так как при этом условии $r_{i'} p^{i'} = r_i p^i$.

Отсюда следует, что между векторами поверхности и векторами X_2 установлено взаимно однозначное соответствие $p \longleftrightarrow p^i$, при котором $p = r_i p^i$.

§ 76. Внутренняя геометрия поверхности

1. Наличие метрики во внешнем пространстве E_3 индуцирует в X_2 риманову геометрию V_2 , которая называется *внутренней геометрией поверхности*.

Линейный элемент этого V_2 является главной частью квадрата расстояния между двумя бесконечно близкими

точками $M(u^i)$ и $M'(u^i + du^i)$. Так как с точностью до бесконечно малых первого порядка относительно du^i

$$\overrightarrow{MM'} = r(u^i + du^i) - r(u^i) \approx r_i du^i = dr,$$

то линейный элемент

$$I = ds^2 = (r_i du^i)^2 = (dr)^2 = r_i r_j du^i du^j = g_{ij} du^i du^j, \quad (1)$$

где скалярные произведения

$$r_i r_j = g_{ij} \quad (2)$$

являются координатами симметричного тензора — *основного тензора внутренней геометрии поверхности*. Этот тензор называют *первым тензором поверхности*.

Квадратичная форма (1) называется *первой квадратичной формой поверхности*.

У вещественной поверхности эта форма всегда *положительно определенная*.

Установленное выше (§ 75) взаимно однозначное соответствие между векторами поверхности и векторами V_2 , которое после внесения в него метрики обращается в V_2 , распространяется на метрические понятия и операции. Так, скалярное произведение векторов поверхности во внешнем пространстве равно скалярному произведению соответствующих им векторов в V_2 : $pq = r_i p^i r_j q^j = g_{ij} p^i q^j$. Отсюда следует равенство длин соответствующих векторов и углов между ними:

$$p^2 = g_{ij} p^i p^j = p^2, \quad \cos(\widehat{p, q}) = \frac{pq}{pq} = \frac{g_{ij} p^i q^j}{pq}.$$

2. Направляющим ортам v^i, w^i произвольной сети V_2 соответствуют во внешнем пространстве орты

$$v = r_i v^i, \quad w = r_i w^i,$$

касательные к линиям этой сети.

Считая в дальнейшем все рассматриваемые области поверхности *двусторонними*, а единичный вектор нормали n — указывающим внешнюю сторону поверхности, будем так ориентировать (§ 4) координатную сеть, чтобы тройка векторов r_1, r_2, n была правой (одноименной с тройкой координатных векторов).

Указанная ориентация координатной сети приводит к равенству

$$n = \frac{[r_1 r_2]}{|[r_1 r_2]|} \quad (3)$$

и определяет в каждой точке поверхности *местную систему координат* с координатными векторами n, r_1, r_2 .

Выбор внешней нормали поверхности определяет *положительное направление отсчета углов* в ее внутренней геометрии: поворот от вектора v к вектору w считается положительным, если тройка векторов n, v, w правая.

Чтобы найти бивектор внутренней геометрии, соответствующий выбранному направлению отсчета углов (§ 10), найдем двумя способами синус угла ω между двумя векторами $v = r_s v^s$ и $w = r_s w^s$. Во внешнем пространстве $\sin \omega = n[vw] = (nr_i r_s) v^i w^s$, во внутренней геометрии $\sin \omega = \varepsilon_{is} v^i w^s$.

Сравнивая эти выражения, имеем

$$\varepsilon_{is} = (nr_i r_s). \quad (4)$$

Первый тензор поверхности g_{is} и версор $g_i^s = \varepsilon^{sk} g_{ki}$ в силу положительной определенности первой квадратичной формы удовлетворяют равенствам

$$g^{is} g_{ik} = \delta_k^s, \quad g_i^s g_k^i = -\delta_k^s. \quad (5)$$

§ 77. Дериивационные уравнения. Вторая квадратичная форма

1. Вторые производные $\partial_{is} r = \frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^s}$ радиуса-вектора точки поверхности можно разложить по векторам n, r_1, r_2 местной системы координат:

$$\partial_{is} r = \Gamma_{is}^j r_j + h_{is} n. \quad (1)$$

Эти уравнения носят название *дериивационных уравнений Гаусса*. Умножением обеих частей (1) скалярно на вектор n находим коэффициенты

$$h_{is} = n \partial_{is} r.$$

Дифференцируя равенство $r_i n = 0$, находим $\partial_{is} r_i n = -r_i n_s = -r_s n_i$, следовательно, объект

$$h_{is} = n \partial_{is} r = -n_i r_s = -n_s r_i \quad (3)$$

и является симметричным тензором, так как при замене криволинейных координат

$$h_{i's'} = -n_{i'} r_{s'} = -A_i^i A_s^s n_i r_s = A_i^i A_s^s h_{is}.$$

Квадратичная форма

$$\Pi = h_{is} du^i du^s = n d^2 r = -dn dr$$

называется *второй квадратичной формой поверхности*, а тензор h_{is} — тензором этой формы или, короче, *вторым тензором поверхности*.

Докажем, что величины Γ_{is}^j являются коэффициентами связности внутренней геометрии поверхности.

Умножим обе части равенства (1) скалярно на r_k и, пользуясь симметрией вторых производных $\partial_{is} r = \partial_{si} r$, произведем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \Gamma_{is}^j g_{jk} &= r_k \partial_{is} r = \frac{1}{2} (r_k \partial_i r_s + r_k \partial_s r_i) = \\ &= \frac{1}{2} [(r_k \partial_i r_s + r_s \partial_i r_k) + (r_k \partial_s r_i + r_i \partial_s r_k) - (r_s \partial_k r_i + r_i \partial_k r_s)] = \\ &= \frac{1}{2} (\partial_i g_{ks} + \partial_s g_{ik} - \partial_k g_{si}). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\Gamma_{is}^j = \frac{1}{2} g^{jk} (\partial_i g_{ks} + \partial_s g_{ik} - \partial_k g_{si}),$$

что при сравнении с (12;2) доказывает наше утверждение.

Выражение $\partial_s r_i - \Gamma_{is}^j r_j$ назовем *ковариантной производной тензора r_i с векторными компонентами*. Эта производная обозначается через $r_i | s$ и снова является тензором с векторными компонентами. Координаты этого тензора, как легко видеть, равны ковариантным производным от соответствующих координат вектора r_i . В принятых обозначениях деривационные уравнения Гаусса имеют следующий вид:

$$r_i | s = h_{is} n. \quad (4)$$

2. С помощью второго тензора поверхности можно дать часто употребляемую формулу для разложения векторов n_i по векторам r_i . Векторы n_i ортогональны вектору n , как производные единичного вектора, следовательно, $n_i = l_i^s r_s$. Для определения коэффициентов l_i^s умножим обе части этого равенства скалярно на вектор r_k :

$$n_i r_k = -h_{ik} = l_i^s g_{sk}.$$

Отсюда $l_i^s = -h_{ik} g^{ks}$, так что искомое разложение имеет вид

$$n_i = -h_{ik} g^{ks} r_s = h_i^k g_k^s r_s \quad (5)$$

и называется *дериационными уравнениями Веингартена*.

Другая форма этого разложения получается при рассмотрении векторов $[nr_i]$. Эти два вектора ортогональны векторам r_i и, следовательно, независимы в силу независимости векторов r_i . Отсюда следует возможность разложения $n_i = p_i^s [nr_s]$. Умножая обе части этого равенства скалярно на вектор r_k , находим

$$r_k n_i = -h_{ik} = p_i^s (nr_s r_k) = p_i^s \varepsilon_{sk} = p_{ik},$$

так что

$$n_i = -h_i^s [nr_s]. \quad (6)$$

Из сравнения (5) и (6) получаем

$$[nr_s] = -g_s^k r_k, \quad (7)$$

$$r_s = g_s^k [nr_k]. \quad (8)$$

Из последних формул легко выводятся следующие равенства:

$$[n_i r_k] = h_i^s g_{sk} n, \quad (9)$$

$$[r_i r_s] = \varepsilon_{is} n, \quad n = \frac{1}{2} \varepsilon^{is} [r_i r_s]. \quad (10)$$

§ 78. Кривизны линий на поверхности.

Асимптотическая сеть

1. Рассмотрим однопараметрическое семейство линий (v) на поверхности и линию Γ этого семейства, проходящую через данную точку M . Орт касательной к линии Γ

в точке M есть $v = \frac{dr}{ds} = r_i \frac{du^i}{ds} = r_i v^i$, а его производная по длине дуги s линии Γ по первой формуле Френе — Серре для кривых

$$\frac{dv}{ds} = k \nu, \quad (1)$$

где ν — вектор главной нормали кривой.

Вектор (1) называется *вектором кривизны кривой*. Для его вычисления воспользуемся ковариантным дифференцированием и формулами (77;4) и (21;1)

$$\frac{dv}{ds} = (r_s v^s)_i v^i = h_i v^i v^s n + r_s \tilde{v}^s t_i v^i.$$

Проекция вектора кривизны на нормаль поверхности

$$\sigma = h_i v^i v^s \quad (2)$$

называется *нормальной кривизной* линии.

Проекция того же вектора на касательную плоскость равна $t_i v^i = g$, то есть совпадает с геодезической кривизной линии во внутренней геометрии поверхности.

Если θ — угол между нормалью поверхности и главной нормалью ν кривой Γ ($n\nu = \cos \theta$), то из (1) находим

$$\sigma = k \cos \theta, \quad g = k \sin \theta. \quad (3)$$

Линии с нулевой нормальной кривизной называются *асимптотическими*. Из первого равенства (3) следует, что асимптотическая линия либо прямая ($k = 0$), либо характеризуется тем, что ее соприкасающаяся плоскость совпадает с касательной плоскостью поверхности. Асимптотические линии поверхности определяются уравнением $h_{is} du^i du^s = 0$ и в своей совокупности образуют *асимптотическую сеть*.

На развертывающейся поверхности и только на ней асимптотическая сеть вырождается в дважды взятое семейство прямолинейных образующих.

2. Линия на поверхности называется *геодезической*, если она является геодезической линией внутренней гео-

метрии поверхности. Так как для геодезической линии $g = k \sin \theta = 0$, то эта линия либо прямая ($k = 0$), либо характеризуется тем, что ее главная нормаль совпадает с нормалью поверхности ($\theta = 0$).

Каждая прямая линия поверхности является, таким образом, и асимптотической и геодезической линией одновременно.

Нормальная кривизна каждой геодезической линии равна ее абсолютной кривизне или отличается от нее знаком:

$$\sigma = k \cos \theta = \pm k.$$

3. Уравнение Гаусса (77;4) после замены вектора n по формуле (77;10) принимает вид системы дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка и неизвестным вектором r :

$$r_{i|s} = h_{is} n = \frac{1}{2} h_{is} e^{mn} [r_m r_n]. \quad (4)$$

Для каждой пары одноименных координат векторов левой и правой части равенства (4) условие интегрируемости составляется по обычным правилам § 18. Полученные таким способом три скалярных уравнения, можно, очевидно, объединить в одно векторное:

$$r_{i|s}{}^s = K g^s r_s = h_{i|s}{}^s n + h_{is} n^s = h_{i|s}{}^s n - h_i^k h_k^l g_l^s r_s.$$

В силу независимости векторов n и r_s имеем отсюда

$$\left. \begin{array}{l} 1. K \delta_i^s = -h_i^k h_k^s, \\ 2. h_{i|s}{}^s = 0. \end{array} \right\} \quad (5)$$

Полученные уравнения показывают, что второй тензор поверхности не может быть произвольно выбран, если задан ее первый тензор.

Первое алгебраическое условие, наложенное на второй тензор поверхности, равносильно тому, что

$$\frac{1}{2} h_{is} h^{is} = \frac{h}{g} = \frac{h_{11} h_{22} - h_{12}^2}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2} = K. \quad (6)$$

Отношение $\frac{h}{g}$ называется *полной кривизной* поверхности. Равенство (6) выражает теорему Гаусса: *полная кривизна поверхности равна кривизне ее внутренней геометрии и, следовательно, выражается через коэффициенты одной первой квадратичной формы*. Полная кривизна поверхности называется также *гауссовой кривизной*.

Второе условие (5) дифференциальное. Оно показывает, что асимптотическая сеть поверхности кодацива. Ее метрически нормированный тензор, согласно (6):

$$h_{is} = \sigma h_{is}, \quad \sigma = \frac{1}{\sqrt{|K|}}. \quad (7)$$

Отсюда находим чебышевский вектор h_i этой сети (предполагая, конечно, что она не вырождается):

$$h_{i|s}^* = h_i^* (-\partial_s \ln \sigma - 2h_s) = 0, \\ h_s = \frac{1}{4} \partial_s \ln K. \quad (8)$$

Первое условие (5) называется *условием Гаусса*. Второе условие (5) в указанном здесь виде найдено Кодаци, несколько раньше его получил Майнард. Однако еще раньше, правда в несколько иной форме, оно встречается в работах Петерсона, оставшихся долгое время неизвестными. В дальнейшем это условие мы будем называть *условием Петерсона*.

Оба условия Гаусса и Петерсона равносильны одному условию (8).

Действительно, если для сети h_{is} оно выполнено, то тензор $h_{is} = \sqrt{|K|} h_{is}$ удовлетворяет обоим условиям (5).

Сеть римановой геометрии V_2 с положительно определенной квадратичной формой называется *виртуально-асимптотической*, если существует поверхность, для которой данное V_2 служит внутренней геометрией, а данная сеть — асимптотической сетью.

Условия Гаусса — Петерсона (5) необходимы и достаточны, чтобы сеть h_{is} была виртуально-асимптотической.

Это предложение, называемое *теоремой Бонне*, будет доказано в § 84.

§ 79. Сопряженные направления и сети

1. Направления du^i и δu^i называются *сопряженными*, если они сопряжены относительно асимптотической сети (§ 5).

Условие сопряженности

$$-h_{is} du^i \delta u^s = n_i du^i r_s \delta u^s = dn \delta r = \delta n dr = 0$$

равносильно ортогональности векторов dn и δr или, что то же, коллинеарности векторов δr и $[n dn] = [(n + dn) dn]$. Последний вектор имеет направление характеристики касательной плоскости поверхности при смещении в направлении du^i , следовательно, *направление характеристики касательной плоскости при смещении в данном направлении сопряжено направлению смещения.*

Если через каждую точку произвольной кривой Γ , лежащей на поверхности, провести прямые в направлении, сопряженном направлению этой кривой, то они составят развертывающуюся поверхность, так как будут характеристиками однопараметрического семейства плоскостей, касающихся поверхности в точках кривой.

Сеть называется *сопряженной сетью* поверхности, если она аполярна асимптотической сети. Касательные к линиям одного из семейств сопряженной сети, взятые вдоль произвольной кривой второго ее семейства, образуют развертывающуюся поверхность.

2. Условие сопряженности сети $a_{is} - a^{is} h_{is} = 0$ — в силу уравнений Гаусса (78;4) равносильно следующему:

$$a^{is} r_{i|s} = 0. \quad (1)$$

Равенство (1) можно рассматривать как уравнение относительно неизвестной векторной функции r . Это уравнение называется *точечным уравнением Лапласа*. С помощью метрически-нормированного тензора a_{is} оно пишется в виде

$$a_{i|j}^i r_{i|j}^s = (a_{i|j}^i r_i)^s + 2a_{i|j}^i r_i a^s = \epsilon^{s^i} [\partial_k (a_{i|j}^i r_i) + 2a_{i|j}^i a_k r_i] = 0, \quad (2)$$

где a_k — чебышевский вектор сети a_{is} . Координаты x ,

y, z вектора r являются, таким образом, тремя решениями уравнения

$$\varepsilon^{sk} [\partial_k (a_s^i \theta_i) + 2a_s^i a_k \theta_i] = 0 \quad (\theta_i = \partial_i \theta), \quad (3)$$

которое называется *точечным уравнением Лапласа для скалярной функции* θ . Если сеть a_{is} принять за координатную, то (3) примет вид

$$\partial_{12} \theta + a_1 \theta_2 + a_2 \theta_1 = 0. \quad (4)$$

Обратно, если в X_2 задана сеть с аффинором a_s^i , то каждые три решения x, y, z уравнения (3), в которых вектор a_i произволен, определяют поверхность $r(x, y, z)$, на которой сеть a_{is} сопряжена и вектор a_i является чебышевским вектором этой сети. Для доказательства заметим, что вектор r удовлетворяет уравнению

$$\varepsilon^{ks} [\partial_k (a_s^i r_i) + 2a_s^i a_k r_i] = 0.$$

Пользуясь независимостью этого уравнения от бивектора, будем считать, что он является бивектором внутренней геометрии поверхности r . Частное дифференцирование заменим ковариантным дифференцированием во внутренней геометрии и воспользуемся уравнениями Гаусса (78; 4)

$$\varepsilon^{ks} [(a_s^i r_i)_{|k} + 2a_s^i a_k r_i] = \varepsilon^{ks} [a_{s|k}^i r_i + a_s^i h_{ik} n + 2a_s^i a_k r_i] = 0.$$

Так как векторы n и r_i независимы, то последнее влечет за собой равенства $a_{s|k}^i h_{ik} = 0$, $a_{s|k}^i = -2a_s^i a^k$, которые полностью доказывают наше утверждение.

3. Сопряженная и кодацциева во внутренней геометрии поверхности сеть называется *сетью равных точечных инвариантов*.

Пусть тензор сопряженной сети a_{is} имеет кодацциево нормирование. Тогда $a_{s|k}^i = 0$, и точечное уравнение Лапласа (1) принимает вид

$$(a_s^i r_i)_{|k} = \varepsilon^{sk} \partial_k (a_s^i r_i) = 0.$$

Приняв сеть равных точечных инвариантов за координатную, получим вместо (4)

$$\partial_{12}\theta + \partial_1 a \theta_2 + \partial_2 a \theta_1 = 0,$$

где a — потенциал чебышевского вектора сети a_{i_s} .

Сеть равных точечных инвариантов характеризуется тем, что она сопряжена и ее чебышевский вектор во внутренней геометрии поверхности градиентен.

§ 80. Линии кривизны

1. Ортогональная и сопряженная одновременно сеть называется *сетью линий кривизны*, а каждая линия этой сети — *линией кривизны*.

Каждую отдельную линию кривизны можно определить как линию, вдоль которой нормали поверхности образуют развертывающуюся поверхность. Действительно, для того чтобы нормали поверхности вдоль линии с направляющим вектором du^i образовывали торс, необходима и достаточна компланарность векторов n , dn , dr :

$$(n \, dn \, dr) = 0.$$

Мы получили дифференциальное уравнение линий кривизны, которое с помощью формулы (77; 9) запишется в виде

$$h_i^k g_{ks} du^i du^s = c_{is} du^i du^s = 0, \quad (1)$$

где

$$c_{is} = h_{(i}^k g_{s)k}. \quad (2)$$

Отсюда следует, что линии кривизны составляют в общем случае сеть аполярную и изотропной и асимптотической сети, то есть ортогональную и сопряженную одновременно.

Квадратичную форму

$$IV = c_{is} du^i du^s = (n \, dn \, dr) \quad (3)$$

назовем *четвертой квадратичной формой*, а тензор (2) — *четвертым тензором поверхности*. Этот тензор можно записать в следующем виде:

$$c_{is} = h_i^k g_{sk} + \frac{1}{2} e_{is} h_{kj} g^{kj} = h_i^k g_{sk} + e_{is} H, \quad (2')$$

где инвариант $H = \frac{1}{2} h_{is} g^{is}$ называется *средней кривизной* поверхности.

2. Сеть линий кривизны становится неопределенной, если имеет место пропорциональность

$$h_{is} = \lambda g_{is}. \quad (4)$$

Для исследования этого случая запишем (4) в виде

$$(n_i + \lambda r_i) r_s = 0.$$

Так как векторы r_s независимы, то

$$n_i = -\lambda r_i, \quad n_i \cdot^i = -\lambda^i r_i = 0. \quad (5)$$

В силу той же независимости $\lambda_i = 0$, $\lambda = \text{const}$. Интегрируя уравнение (5), получаем

$$n = -\lambda r + c \quad (c = \text{const}).$$

Если $\lambda = 0$, то $n = \text{const}$, $n dr = d(nr) = 0$, а поверхность с нулевым вторым тензором будет плоскостью, так как ее радиус-вектор удовлетворяет уравнению

$$nr = \text{const}.$$

Если же $\lambda \neq 0$, то, полагая $c = \lambda r_0$, получаем для радиуса-вектора поверхности уравнение

$$\lambda (r - r_0) = -n, \quad (r - r_0)^2 = \frac{1}{\lambda^2},$$

показывающее, что поверхность в этом случае является сферой.

Геометрически смысл полученного результата очевиден: каждая линия плоскости или сферы есть линия кривизны, так как нормали плоскости или сферы вдоль любой линии образуют либо цилиндр, либо конус, то есть развертывающуюся поверхность.

3. Направления линии кривизны называются *главными направлениями*, а их нормальные кривизны

$$\sigma_1 = h_{is} v^i v^s, \quad \sigma_2 = h_{is} w^i w^s \quad (6)$$

(v^i и w^i — орты главных направлений) — *главными кривизнами*.

Учитывая сопряженность главных направлений, из (6) легко находим

$$h_i^s v_s = \sigma \omega_i, \quad h_i^s \omega_s = -\sigma v_i, \quad (7)$$

$$h_{is} = \sigma v_i v_s + \sigma \omega_i \omega_s. \quad (8)$$

Последняя формула дает возможность выразить полную и среднюю кривизны поверхности через ее главные кривизны:

$$K = \frac{1}{2} h^{is} h_{is} = \sigma \sigma, \quad (9)$$

$$H = \frac{1}{2} g^{is} h_{is} = \frac{1}{2} (\sigma + \sigma). \quad (10)$$

Нормальная кривизна σ поверхности в произвольном направлении p^i выражается через главные кривизны известной формулой Эйлера.

Для ее вывода обозначим угол между ортом p^i и ортом v^i главного направления через φ , тогда

$$p^i = v^i \cos \varphi + \omega^i \sin \varphi$$

и искомая формула будет

$$\sigma = h_{is} p^i p^s = \sigma \cos^2 \varphi + \sigma \sin^2 \varphi. \quad (11)$$

Для четвертого тензора (2) поверхности из (7) имеем

$$h_i^s g_{ks} = h_i^s (v_s v_k + \omega_s \omega_k) = \sigma \omega_i v_k - \sigma v_i \omega_k, \quad (12)$$

$$c_{is} = (\sigma - \sigma) v_i \omega_s = \frac{1}{2} (\sigma - \sigma) c_{is}. \quad (13)$$

Инвариант

$$E = -\frac{c}{g} = -\frac{1}{2} c_{is} c^{is} = \frac{1}{4} (\sigma - \sigma)^2 = H^2 - K \quad (14)$$

называется *эйлеровой разностью*. Эйлера разность, как легко видеть, не отрицательна. Точки, в которых $E = 0$, называются *омбилическими*. В таких точках $\sigma = \sigma = \sqrt{K}$, первый и второй тензоры пропорциональны:

$h_{is} = \sqrt{K}(v_i v_s + w_i w_s) = \sqrt{K} g_{is}$, и нормальные кривизны по всем направлениям равны (см. (11)).

Теорему, доказанную в п. 2, можно теперь выразить так: *поверхность, все точки которой омбилические, есть либо плоскость, либо сфера.*

4. Теорема Родрига: *для того чтобы направление p^i было главным, необходимо и достаточно, чтобы векторы $n_i p^i$ и $r_i p^i$ были коллинеарны:*

$$n_i p^i = \lambda r_i p^i. \quad (15)$$

Необходимость следует из того, что для каждого главного направления векторы n , $n_i p^i$, $r_s p^s$ компланарны ($(n n_i p^i r_s p^s = c_{is} p^i p^s = 0)$), а так как два последних вектора ортогональны первому, то они коллинеарны.

Для доказательства достаточности умножим обе части равенства (15) скалярно на $[n r_s p^s]$. Имеем

$$n_i p^i [n r_s p^s] = -(n n_i r_s) p^i p^s = -c_{is} p^i p^s = \lambda (n r_i r_s) p^i p^s = 0,$$

что и требовалось доказать.

Для главных направлений v^i и w^i формула (15) переходит в так называемые *формулы Родрига*

$$n_i v^i = -\sigma r_i v^i, \quad n_i w^i = -\sigma r_i w^i. \quad (16)$$

5. Рассмотрим точечное уравнение Лапласа (79;1) для сети линий кривизны c_{is} :

$$c^{is} r_{i|s} = 0.$$

Этому уравнению удовлетворяет функция $\varrho = r^2$. Действительно:

$$\frac{1}{2} c^{is} \varrho_{i|s} = c^{is} (r r_i)_{|s} = c^{is} (g_{is} + n_{is} r n) = 0,$$

так как $c^{is} g_{is} = c^{is} h_{is} = 0$.

Имеет место обратное: *если координаты x , y , z вектора r и функция $\varrho = r^2$ являются решениями уравнения*

$$e^{is} [\partial_s (c_i^k \theta_k) + 2c_i^k c_s \theta_k] = 0 \quad (17)$$

(c_i^k — аффинор сети, c_s — произвольный вектор), *то сеть c_{ik} является сетью линий кривизны поверхности, а c_s — ее чебышевским вектором.*

По теореме § 79, п. 2 сеть c_{ik} сопряжена и c_s — ее чебышевский вектор. Остается доказать, что эта сеть ортогональная. Подставляя в уравнение (17) его решение $\varrho = r^2$, считая e^{is} — дискриминантным бивектором поверхности r и заменяя частное дифференцирование ковариантным, получим

$$\begin{aligned} e^{is} [(c_i^k r r_k)_s + 2c_i^k c_s r r_k] &= c_{0i}^k r r_k - c^{ik} r_i r_k - c^{ik} r r_{ik} + 2c_i^k c^i r r_k = \\ &= -c^{ik} g_{ik} + r (-2c_i^k c^i r_k - c^{ik} h_{ik} n + 2c_i^k c^i r_k) = 0. \end{aligned}$$

Выражение в скобках обращается в нуль, следовательно, $c^{ik} g_{ik} = 0$, сеть c_{ik} ортогональна и предложение доказано.

6. Воспользуемся этим результатом, чтобы доказать теорему: *при инверсии линии кривизны поверхности переходят в линии кривизны преобразованной поверхности.*

При инверсии точка с радиусом-вектором r преобразуется в точку с радиусом-вектором

$$R = k \frac{r}{\varrho}, \quad \varrho = r^2,$$

где коэффициент $k = \text{const}$ называется *степенью инверсии*. Пусть c_i^s — аффинор сети линий кривизны поверхности r , тогда r и ϱ удовлетворяют уравнению (17). Внося в это уравнение вместо θ выражение радиуса-вектора $r = \frac{\varrho}{k} R$ и учитывая, что ϱ удовлетворяет этому уравнению, получаем

$$e^{is} [\partial_s (c_i^k R_k) + 2c_i^k R_k (\partial_s \ln \varrho + c_s)] = 0.$$

Мы получили уравнение Лапласа для поверхности R . Легко проверяется, что ему удовлетворяет функция R^2 .

Из доказанной теоремы следует, что сеть c_{i_s} является сетью линий кривизны преобразованной поверхности R и ее чебышевский вектор на этой поверхности

$$c_s^* = c_s + \partial_s \ln \varrho. \quad (18)$$

7. Поверхность называется *изотермической*, если сеть ее линий кривизны изотермическая. Инвариантным признаком изотермической поверхности является градиентность чебышевского вектора сети линий кривизны.

Из закона преобразования (18) чебышевского вектора сети линий кривизны поверхности при инверсии следует, что *изотермическая поверхность при инверсии остается изотермической*.

§ 81. Геодезическое кручение

Рассмотрим на поверхности семейство линий (v) и вычислим кручение τ одной из линий этого семейства. Если θ — угол между главной нормалью \mathbf{v} линии v и нормалью поверхности \mathbf{n} , то вектор \mathbf{v} и вектор бинормали β кривой будут

$$\mathbf{v} = \mathbf{n} \cos \theta + \tilde{\mathbf{v}} \sin \theta, \quad \beta = [v\mathbf{v}] = -\tilde{\mathbf{v}} \cos \theta + \mathbf{n} \sin \theta. \quad (1)$$

Воспользуемся третьей формулой Френе — Серре:

$$\frac{d\beta}{ds} = -\tau \mathbf{v} = -\tilde{v} v^i \cos \theta + n_i v^i \sin \theta + (\tilde{v} \sin \theta + n \cos \theta) \frac{d\theta}{ds}.$$

Отсюда имеем:

$$\begin{aligned} n \frac{d\beta}{ds} &= -\tau \cos \theta = \left(n \tilde{v} v^i + \frac{d\theta}{ds} \right) \cos \theta = \\ &= \left(-h_{is} \tilde{v}^i v^s + \frac{d\theta}{ds} \right) \cos \theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{v} \frac{d\beta}{ds} &= -\tau \sin \theta = \left(\tilde{v} n_i v^i + \frac{d\theta}{ds} \right) \sin \theta = \\ &= \left(-h_{is} \tilde{v}^i v^s + \frac{d\theta}{ds} \right) \sin \theta^1), \end{aligned}$$

1) Вторую проекцию $\tilde{v} \frac{d\beta}{ds}$ надо было вычислить, чтобы уста-

новить справедливость формулы (2) при $\theta = \frac{\pi}{2}$, то есть для случая, когда линия v асимптотическая.

поэтому

$$\tau = h_{is} \tilde{v}^i v^s - \frac{d\theta}{ds}. \quad (2)$$

Инвариант

$$\tilde{\tau} = h_{is} \tilde{v}^i v^s = c_{is} v^i v^s = \frac{1V}{I} = \tau + \frac{d\theta}{ds} \quad (3)$$

зависит в данной точке поверхности лишь от направления линии v . Если в этом направлении провести на поверхности линию, главная нормаль которой образует с нормалью поверхности постоянный угол θ , то рассматриваемый инвариант будет равен кручению этой линии. В частности, он совпадает с кручением асимптотической линии или геодезической линии, проходящей в направлении линии v (здесь $\theta = \frac{\pi}{2}$ или 0). В связи с этим инвариант (3) называется *геодезическим кручением*.

Отметим, что *обращение геодезического кручения в нуль характеризует линию кривизны*.

Формула (2) называется *второй формулой Форсайта*. Из этой формулы легко следует ряд известных теорем:

- 1) Если линия кривизны поверхности плоская, то ее плоскость пересекает поверхность под постоянным углом.
- 2) Если соприкасающаяся плоскость линии кривизны пересекает поверхность под постоянным углом, то эта линия кривизны плоская.
- 3) Если плоскость пересекает поверхность под постоянным углом, то линия их пересечения есть линия кривизны поверхности.
- 4) Если сфера пересекает поверхность под постоянным углом, то линия их пересечения есть линия кривизны поверхности.

Для доказательства этой теоремы следует произвести инверсию, переводящую данную сферу в плоскость. Эта плоскость пересечет преобразованную поверхность под постоянным углом, то есть по линии кривизны. Справедливость высказанного утверждения теперь следует из теоремы § 80, п. 6 о сохранении линий кривизны при инверсии.

5) Если геодезическая линия является линией кривизны, то она плоская.

6) Если геодезическая линия плоская, но не прямая, то она является линией кривизны.

§ 82. Сферическое отображение поверхности

1. Отображение ориентированной поверхности r , при котором каждой ее точке M ставится в соответствие точка M' единичной сферы с радиусом-вектором n , равным орту нормали поверхности в точке M , называется *сферическим отображением поверхности*.

Такое же название — *сферическое отображение* — носит та область сферы, на которую произведено отображение.

Первая квадратичная форма сферы, на которую отображена поверхность, называется *третьей квадратичной формой поверхности* и записывается в виде

$$\text{III} = \gamma_{is} du^i du^s. \quad (1)$$

Тензор

$$\gamma_{is} = n_i n_s \quad (2)$$

называется *третьим тензором поверхности*.

2. Между тремя первыми квадратичными формами поверхности существует линейная зависимость

$$K \cdot \text{I} + \text{III} - 2H \cdot \text{II} = 0, \quad (3)$$

позволяющая в общем случае каждую из них выразить через две остальные.

Для доказательства соотношения (3) обратимся к формулам (77;6): $n_i = -h_i^p [nr_p]$ и подсчитаем третий тензор:

$$\gamma_{is} = h_i^p h_s^q [nr_p] [nr_q] = h_i^p h_s^q g_{pq}. \quad (4)$$

Отсюда, заменяя $h_s^q g_{pq} = h_p^q g_{sq} + \varepsilon_{sp} h_r^q h_r^s$, $h_i^p h_p^q = -K \delta_i^q$ и $h_r^q g_q^r = -2H$, получаем

$$\gamma_{is} = -K g_{is} + 2H h_{is}, \quad (3')$$

что равносильно равенству (3).

3. Если равенство (4) записать в виде

$$\gamma_{is} = h_{ip} h_{sq} g^{pq}, \quad (4')$$

то из него легко получается выражение дискриминанта

третьей квадратичной формы

$$\gamma = |\gamma_{is}| = |h_{ip}| |h_{sq}| |g^{pq}| = \frac{h^2}{g} \quad (5)$$

и следующие равенства:

$$\gamma g = h^2, \quad \frac{\gamma}{g} = K^2. \quad (6)$$

4. Связь бивектора сферического отображения

$$e_{is} = (nn; n_s) \quad (7)$$

и бивектора внутренней геометрии ϵ_{is} :

$$e_{is} = K \epsilon_{is}, \quad e^{is} = \frac{1}{K} \epsilon^{is} \quad (8)$$

легко получается из подсчета отношения их основных компонент

$$\frac{e_{12}}{\epsilon_{12}} = \frac{(nn_1 n_2)(nr_1 r_2)}{(nr_1 r_2)(nr_1 r_2)} = \frac{h}{g} = K.$$

Применяя бивектор (7) для перебрасывания индексов, будем искать коэффициенты разложения

$$r_i = l_i^s [nn_s].$$

Умножим обе части этого равенства скалярно на вектор n_k :

$$r_i n_k = -h_{ik} = l_i^s (nn_s n_k) = l_i^s e_{sk} = l_{ik}.$$

Следовательно,

$$r_i = -h_i^s [nn_s], \quad (9)$$

где индекс s у второго тензора поднят бивектором (7). Если же воспользоваться формулами

$$[nn_s] = -\gamma_s^k n_k, \quad n_k = \gamma_k^s [nn_s], \quad (10)$$

которые получаются из (77;7) заменой r на n и g_{is} на γ_{is} , то вместо (9) получим

$$r_i = h_i^s \gamma_s^k n_k. \quad (9')$$

Четвертый тензор поверхности, согласно (9'), выражается формулой

$$c_{is} = (nn_{(i} r_{s)}) = [nn_{(i} h_{s)}^k \gamma_k^l n_l = -h_{(s}^k \gamma_{i)k} = \gamma_{(i}^k h_{s)k}$$

или

$$c_{is} = \gamma_i^k h_{sk} - \frac{1}{2} e_{is} \gamma_i^k h_k^l.$$

Заменяя здесь, согласно (3') и (8),

$$\begin{aligned} -\gamma_l^k h_k^l &= \gamma_{kl} h^{kl} = e^{km} e^{ln} \gamma_{kl} h_{mn} = \\ &= \frac{1}{K^2} e^{km} e^{ln} (-Kg_{kl} + 2Hh_{kl}) h_{mn} = \\ &= \frac{1}{K^2} (-2HK + 4HK) = \frac{2H}{K}, \end{aligned}$$

получим

$$c_{is} = \gamma_i^k h_{sk} + \frac{H}{K} e_{is}. \quad (11)$$

5. Обозначим через $\check{\Gamma}_{is}^k$ коэффициенты связности сферического отображения поверхности и условимся индекс ковариантного дифференцирования в этой связности отделять двумя черточками.

Так как второй тензор сферы — $n_i n_s$ отличается лишь знаком от ее первого тензора (2), то, по формулам Гаусса (77;4),

$$n_{i||s} = -\gamma_{is} n. \quad (12)$$

Введем коэффициенты аффинной деформации

$$T_{is}^k = \check{\Gamma}_{is}^k - \Gamma_{is}^k \quad (13)$$

и вычислим ковариантные производные второго тензора поверхности в двух связностях:

$$\left. \begin{aligned} h_{is|k} &= -n_{i||k} r_s - n_i r_{s|k} = \\ &= -(n_{i||k} r_s + T_{ik}^m n_m r_s) - n_i h_{sk} n = T_{ik}^m h_{ms}, \\ h_{is||k} &= -n_{s||k} r_i - n_s r_{i||k} = \\ &= \gamma_{sk} n r_i - n_s (r_{i|k} - T_{ik}^m r_m) = -T_{ik}^m h_{ms}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Эти производные отличаются лишь знаком:

$$h_{is|k} = -h_{is||k}, \quad (15)$$

и тензор (13)

$$T_{sk}^i = h_{ms|k} \tilde{h}^{mi} = -h_{ms||k} \tilde{h}^{mi}, \quad (16)$$

где \tilde{h}^{mi} — тензор, взаимный тензору h_{mi} .

6. Докажем, что внутренняя геометрия поверхности и ее сферическое отображение сопряжены относительно асимптотической сети. Для доказательства обозначим

через H_i^s приведенный аффинор асимптотической сети и заметим, что

$$h_{is} = \sqrt{K} \varepsilon_{hi} H_s^k = \sqrt{K} H_{is}, \quad \tilde{h}^{is} = \frac{1}{\sqrt{K}} H^{is}.$$

Из (16) теперь имеем

$$T_{sh}^i = (\sqrt{K} H_{ms})_{|h} \frac{1}{\sqrt{K}} H^{mi} = H_{ms|h} H^{mi} + \frac{1}{2} \partial_h \ln K \delta_s^i.$$

Так как, согласно (78;8), $\partial_h \ln K = 4h_h$, а

$$H_{ms|h} H^{mi} = -H_{ms} H^{mi}_{|h} = H_{m|h}^i H_s^m,$$

то

$$T_{sh}^i = H_{m|h}^i H_s^m + 2h_h \delta_s^i.$$

Однако последнее соотношение является необходимым и достаточным условием (32;4) доказываемой сопряженности. Другим способом эта же теорема будет доказана в § 83, п. 4.

Из общих свойств пар сопряженных связностей, отмеченных в § 32, для рассматриваемого случая вытекает ряд следствий.

Рассмотрим тройку аполлярных сетей: асимптотическую сеть $A_1^s = h_1^s$ и две сопряженные сети A_2 и A_3 и построенную для

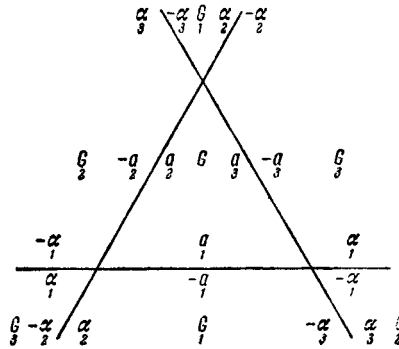


Схема III.

них треугольную схему III (§ 33). Здесь G внутренняя геометрия поверхности, G — геометрия ее сферического отображения. Следствия формулируются так:

1) Чебышевский вектор $\tilde{h}_1^s = a_1$ асимптотической сети поверхности в метрике сферического отображения отличается лишь знаком от чебышевского вектора h_i этой сети во внутренней геометрии:

$$\tilde{h}_i^s = -h_i = -\frac{1}{4} \partial_i \ln K. \tag{17}$$

2) Чебышевский вектор a сопряженной сети A поверхности равен геодезическому вектору этой сети относительно асимптотической сети в метрике сферического отображения.

2а) Полуچهбышевская (чебышевская) сопряженная сеть поверхности переходит при сферическом отображении в полугеодезическую (геодезическую) сеть. Признак такой сети

$$A_{22}^{i3} a_i a_s = 0, \quad (a_i = 0).$$

3) Геодезический вектор α сопряженной сети A поверхности относительно ее асимптотической сети равен чебышевскому вектору этой сети в сферическом отображении.

3а) Полугеодезическая (геодезическая) сопряженная сеть поверхности переходит при сферическом отображении в полуچهбышевскую (чебышевскую) сеть.

Признак такой сети:

$$A_{22}^{i3} \alpha_i \alpha_s = 0, \quad (\alpha_i = 0).$$

4) Линейчатая поверхность вполне характеризуется тем, что сферическое отображение ее асимптотической сети — полугеодезическая сеть, или равенством $h_{11}^{i3} \alpha_i \alpha_s = 0$.

5) Поверхность второго порядка вполне характеризуется тем, что сферическое отображение ее асимптотической сети — геодезическая сеть, или равенством $\alpha_i = 0$.

Сопряженная сеть A поверхности называется *изотермически сопряженной*, если она изотермична (диагональна) асимптотической сети. Инвариантный признак такой сети можно найти следующим образом. Средняя связность (§ 32) сопряженных связностей G и G есть риманова связность, изотропная сеть которой совпадает с асимптотической сетью. Для того чтобы сеть A была изотермически сопряженной, необходимо и достаточно, чтобы в этой связности ее чебышевский вектор был градиентен (§ 38, п. 2). Чебышевский вектор a_i сети A в средней

связности сопряженных связностей G и G равен, согласно (32;11), полусумме чебышевских векторов этой сети в связностях G и G :

$$a_i^c = \frac{1}{2} (a_i + a_i). \quad (18)$$

Следовательно, инвариантным признаком изотермически сопряженной сети поверхности является градиентность полусуммы (18) ее чебышевских векторов в метрике поверхности и в метрике ее сферического отображения.

§ 83. Подвижной трехгранник поверхности

1. По аналогии с теорией кривых свяжем с каждой точкой поверхности прямой трехгранник, составленный из орта нормали n и двух взаимно ортогональных ортов v, w , принадлежащих поверхности. Будем считать тройку векторов n, v, w правой, так что

$$(nvw) = 1, \quad [nv] = w, \quad [vw] = n, \quad [wn] = v.$$

Все свойства поверхности так или иначе отражаются в законах перемещения трехгранника v, w, n , когда его вершина описывает поверхность. Систематическое применение этого трехгранника поверхности к изучению ее свойств привело Дарбу [1] к методу подвижного трехгранника.

Этот метод в известной мере послужил поводом к развитию теории внешних форм Картана.

Систематическое сочетание метода подвижного трехгранника с теорией внешних форм мы находим в ряде работ С. П. Финикова [11], [13] и его учеников. Сочетание двух таких теорий привело к очень сильному аппарату, особенно в исследовании вопросов существования геометрических образов со специальными свойствами.

2. Перемещение подвижного трехгранника при движении его вершины по поверхности r определено, если заданы частные производные радиуса-вектора точки поверхности и векторов $n, v = r_s v^s, w = r_s w^s$.

Разложим производные этих векторов по векторам самого трехгранника. Для вектора r_i имеем

$$r_i = -\omega_i v + v_i w. \quad (1)$$

Матрица разложения производных векторов трехгранника будет, ввиду их ортонормированности, кососимметрична:

$$\left. \begin{aligned} v_i &= * & t_i w + q_i n, \\ w_i &= -t_i v & * & -p_i n, \\ n_i &= -q_i v + p_i w & * & . \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Коэффициенты полученных *деривационных* формул трехгранника (1) и (2) называются *коэффициентами перемещения* трехгранника. Коэффициент t_i является трансверсальным вектором t_i поля ортов v_i или w_i . Действительно,

$$t_i = w v_i = -w_i v = w (r_s v^s)_i = w (h_{is} v^s n + r_s \omega^s t_i) = t_i.$$

Нетрудно найти остальные коэффициенты:

$$\left. \begin{aligned} q_i &= n v_i = -n_i v = -n_i r_s v^s = h_{is} v^s, \\ p_i &= -n w_i = n_i w = n_i r_s \omega^s = -h_{is} \omega^s. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

3. С помощью разложений (1) и (2) все четыре тензора поверхности легко выразить через коэффициенты перемещения:

$$g_{is} = r_i r_s = v_i v_s + \omega_i \omega_s, \quad (4)$$

$$h_{is} = -n_i r_s = -q_i \omega_s - p_i v_s = -n_s r_i = -q_s \omega_i - p_s v_i, \quad (5)$$

$$\gamma_{is} = n_i n_s = p_i p_s + q_i q_s, \quad (6)$$

$$c_{is} = (n n_i r_s) = -q_i v_s + p_i \omega_s. \quad (7)$$

4. Пусть с поверхностью связан трехгранник n, v, w . К соответствующим точкам сферического отображения можно, очевидно, присоединить трехгранник с теми же векторами. Деривационные формулы (2) для сферического отображения сохраняются, а формула (1) примет вид

$$n_i = -q_i v + p_i w. \quad (8)$$

Отсюда следует, что

$$v = n_s p^s, \quad w = n_s q^s, \quad p_s q^s = 1. \quad (9)$$

Следует заметить, что в равенствах (9) индексы у векторов p^s и q^s подняты бивектором сферического отображения e_{is} .

Коэффициенты перемещения t_i будут теперь координатами трансверсального вектора поля p_i (или q_i) в сферическом отображении, следовательно, *трансверсальный вектор произвольного поля v_i во внутренней геометрии поверхности равен трансверсальному вектору поля $h_i^s v_s$ в ее сферическом отображении.*

Из последнего предложения легко следует сопряженность внутренней геометрии поверхности с геометрией сферического отображения относительно асимптотической сети: если вектор v_i переносится на поверхность параллельно по некоторой трансверсали, то ввиду указанного равенства трансверсальных векторов по образу этой трансверсали на сфере переносится вектор $h_i^s v_s = -q_i$, сопряженный вектору v_i относительно асимптотической сети.

5. Рассмотрим трехгранник, присоединенный к сети линий кривизны (v_i и w_i — направляющие орты линий кривизны). В этом случае (см. (80;7))

$$q_i = h_{is} \sigma_1^s = -\sigma_1 \omega_i, \quad p_i = -\sigma_2 v_i,$$

где σ_1 и σ_2 — главные кривизны, а формулы (2) и (5) — (7) примут вид

$$\left. \begin{aligned} v_i &= t_i w - \sigma_1 \omega_i n, \\ w_i &= -t_i v + \sigma_2 v_i n, \\ n_i &= \sigma_1 \omega_i v - \sigma_2 v_i w, \end{aligned} \right\} \quad (2')$$

$$h_{is} = \sigma_2 v_i v_s + \sigma_1 \omega_i \omega_s, \quad (5')$$

$$\gamma_{is} = \sigma_2^2 v_i v_s + \sigma_1^2 \omega_i \omega_s, \quad (6')$$

$$c_{is} = (\sigma_1 - \sigma_2) v_i \omega_s. \quad (7')$$

§ 84. Основная теорема теории поверхностей

1. Предположим, что нам заданы десять коэффициентов перемещения трехгранника v_i , w_i , t_i , p_i , q_i ; выясним, при каких условиях и насколько они определяют поверхность.

2. Если такая поверхность S существует, то движение ее трехгранника определяется уравнениями (83;2) и (83;1):

$$v_i = t_i w + q_i n, \quad w_i = -t_i v - p_i n, \quad n_i = -q_i v + p_i w, \quad (\text{A})$$

$$r_i = -w_i v + v_i w. \quad (\text{B})$$

Эти уравнения мы можем рассматривать как систему линейных дифференциальных уравнений, определяющих векторы n , v , w , а также и радиус-вектор r , то есть поверхность S , по коэффициентам перемещения.

Уравнения (A) не содержат вектора r и их можно интегрировать самостоятельно и независимо от системы (B).

Предположим прежде всего, что система (A) проинтегрирована и ее решения n , v , w образуют ортонормированную тройку векторов.

Определение поверхности в этом случае приводится к решению уравнений (B):

$$r = \int dr = \int (-w_i v + v_i w) du^i + r_0. \quad (\text{C})$$

Для того чтобы это решение существовало, должны выполняться условия интегрируемости системы (B), составлением которых мы сейчас займемся.

По заданным векторам v_i , w_i построим риманову геометрию с основным тензором $g_{is} = v_i v_s + w_i w_s$ и дискриминантным бивектором $\varepsilon_{is} = v_i w_s - v_s w_i$. Заметим, что при этих условиях основная квадратичная форма $ds^2 = (v_i du^i)^2 + (w_i du^i)^2$ будет положительно определенной и вектор w_i получен из вектора v_i поворотом на прямой угол в положительном направлении вращения.

В дальнейшем будем пользоваться ковариантным дифференцированием в этой римановой геометрии и ее бивектором.

Составим условия интегрируемости уравнений (B), заменяя производные векторов n , v , w по формулам (A):

$$\begin{aligned} r_{i|j}{}^k &= -w_{i|j}{}^k v - w_i (t^j w + q^j n) + v_{i|j}{}^k w + v_i (-t^j v - p^j n) = \\ &= (t_i v^j - w_{i|j}{}^k) v + (t_i w^j + v_{i|j}{}^k) w + (q_i w^j + p_i v^j) n = 0. \end{aligned}$$

Сделанное выше предположение о независимости векторов n , v , w приводит теперь к трем скалярным условиям

интегрируемости:

$$t_i v^i = w_{i|j}^i, \quad t_i w^i = -v_{i|j}^i, \quad (1)$$

$$q_i w^i = -p_i v^i. \quad (2)$$

Первые два из них равносильны одному векторному:

$$t_i = -(v_{s|j}^s) v_i - (w_{s|j}^s) w_i = \underset{v}{t^s} (v_s w_i - v_i w_s) = \underset{v}{t_i}, \quad (3)$$

имеющему во внутренней геометрии поверхности простой смысл: коэффициенты перемещения t_i равны координатам трансверсального вектора поля ортов v_i (или, что то же, поля w_i).

Итак, если выполняются условия (2) и (3), то уравнения (В) определяют вектор (С), то есть определяют поверхность с точностью до параллельного переноса.

3. Обратимся теперь к интегрированию системы (А). Составим сначала условия интегрируемости этой системы:

$$\begin{aligned} v_{i|j}^i &= t_{i|j}^i w + t_i (-t^i v - p^i n) + q_{i|j}^i n + q_i (-q^i v + p^i w) = \\ &= (t_{i|j}^i + q_i p^i) w + (q_{i|j}^i + p_i t^i) n = 0, \end{aligned}$$

$$w_{i|j}^i = -(t_{i|j}^i + q_i p^i) v - (p_{i|j}^i + t_i q^i) n = 0,$$

$$n_{i|j}^i = -(q_{i|j}^i + p_i t^i) v + (p_{i|j}^i + t_i q^i) w = 0.$$

Требую, чтобы условия выполнялись тождественно, мы придем к трем независимым условиям

$$t_{i|j}^i = p_i q^i, \quad (4)$$

$$q_{i|j}^i = t_i p^i; \quad p_{i|j}^i = q_i t^i. \quad (5)$$

Если эти условия выполняются, то система (А) имеет, и притом единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$v(u_0^s) = v_0, \quad w(u_0^s) = w_0, \quad n(u_0^s) = n_0. \quad (6)$$

4. Докажем лемму: *если начальная тройка векторов (6) ортонормирована, то соответствующее ей решение — тройка векторов v, w, n — тоже ортонормировано.*

Рассматривая тройку векторов

$$v^* = [wn], \quad w^* = [nv], \quad n^* = [vw],$$

легко убеждаемся, что она тоже удовлетворяет системе (А). Так, например,

$$v_i = [(-t_i v - p_i n)n] + [w(-q_i v + p_i w)] = t_i w + q_i n.$$

Однако в начальный момент эта тройка совпадает с тройкой (6): $v_0 = [w_0 n_0] = v_0$, $w_0 = w_0$, $n_0 = n_0$. Следовательно, в силу единственности решения системы (А) вообще

$$v = [wn] = v, \quad w = [nv] = w, \quad n = [vw] = n.$$

Отсюда имеем

$$v = [[nv][vw]] = v(vwn), \quad (vwn) = 1.$$

Полученные равенства доказывают наше утверждение.

5. Полученные выше результаты позволяют сформулировать теорему: *десять коэффициентов v_i, w_i, t_i, p_i, q_i , удовлетворяющих условиям (1), (2), (4), (5), определяют с точностью до положения в пространстве единственную поверхность и являются для этой поверхности коэффициентами перемещения некоторого ее подвижного трехгранника.*

Действительно, при высказанных предположениях система (А) однозначно определяет ортонормированную тройку векторов v, w, n , удовлетворяющую начальным условиям (6), а эти векторы позволяют найти квадратурами из системы (В) поверхность (С). Изменение начальной тройки (6) и постоянного вектора r_0 в формуле (С) приводит, как легко убедиться, к движению поверхности в пространстве как твердого тела.

6. Теперь нетрудно доказать основную теорему теории поверхностей: *пусть даны две квадратичные формы $I = g_{is} du^i du^s$ и $II = h_{is} du^i du^s$, причем первая положительно определенная и определяет риманову геометрию V_2 , в которой коэффициенты второй удовлетворяют условиям Гаусса*

$$\frac{h}{g} = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \frac{1}{2} h^{is} h_{is} = K \quad (7)$$

(K — гауссова кривизна V_2) и Петерсона

$$h_{is|s} = 0; \quad (8)$$

тогда определяется с точностью до положения в пространстве единственная поверхность, для которой эти

две формы служат соответственно первой и второй квадратичными формами.

Для доказательства выберем в V_2 произвольное поле ортов v_i и ортогональное ему поле ортов $w_i = g_i^s v_s$, обозначим через t_i общий трансверсальный вектор этих полей и построим векторы

$$q_i = h_{is} v^s, \quad p_i = -h_{is} w^s.$$

Векторы v_i, w_i, t_i, p_i, q_i удовлетворяют всем условиям (1, 2, 4, 5). Действительно, условия (1) выполнены в силу выбора вектора t_i . Условия (2) являются следствием симметрии тензора h_{is} :

$$q_i w^i = h_{is} w^i v^s = h_{is} w^s v^i = -p_i v^i.$$

Условие (4) есть следствие условий Гаусса (7) и равенства $t_{s|}^s = K$, так как

$$p_i q^i = -h_{is} w^s h_r^i v^h = h_{is} h^{ih} w^s v_h = K v_h w^h = K = t_{s|}^s.$$

Наконец, условия (5) являются следствиями условий Петерсона (8):

$$q_{i|}^i = (h_{is} v^s)_{|}^i = h_{is|}^i v^s + h_{is} w^i t^s = t_i p^i,$$

$$p_{i|}^i = -(h_{is} w^s)_{|}^i = q_i t^i.$$

По теореме п. 5 с точностью до положения в пространстве определяется единственная поверхность, для которой v_i, w_i, p_i, q_i, t_i являются коэффициентами перемещения. Первый и второй тензоры этой поверхности вычисляются по формулам (83;4) и (83;5) и в силу выбора векторов v_i, w_i, p_i, q_i совпадут с тензорами g_{is} и h_{is} . Действительно,

$$v_i v_s + w_i w_s = g_{is},$$

$$-q_s w_i - p_s v_i = h_{ks} (-v^h w_i + w^h v_i) = h_{ks} \delta_i^k = h_{is}.$$

Теорема доказана полностью.

§ 85. Задание поверхности различными квадратичными формами

Выше для поверхности были введены четыре квадратичные формы. Первые две из них при выполнении условий Гаусса и Петерсона определяют поверхность до ее положения в пространстве.

Возникает вопрос: насколько и при каких условиях поверхность определяется заданием каких-нибудь двух других ее форм?

Исключая из рассмотрения развертывающиеся поверхности, сделаем одно общее замечание: если задана третья квадратичная форма III поверхности, то это означает, что заданы первая $I' = III$ и вторая $II' = -III$ квадратичные формы сферического отображения.

Если форма III положительно определенная и ее гауссова кривизна равна 1, то, по основной теореме, радиус-вектор n сферического отображения можно считать известным. В дальнейшем этим замечанием мы несколько раз воспользуемся.

Переходим к рассмотрению следующих пяти случаев.

1. Заданы формы $II = h_{is} du^i du^s$ и $III = \gamma_{is} du^i du^s$. Если третья форма положительно определенная и ее гауссова кривизна равна 1, то радиус-вектор n , согласно сказанному выше, можно считать известным. Но тогда по формулам (82;9) и (82;10) для радиуса-вектора r искомой поверхности имеем уравнение в полных дифференциалах:

$$r_i = h_i^s \gamma_s^k n_k.$$

Условие его интегрируемости

$$r_{i||j}{}^i = h_{i||j}^s \gamma_s^k n_k = 0,$$

ввиду того что векторы n_k независимы и тензор γ_{sk} не вырождается, равносильно одному условию

$$h_{is||j}{}^i = 0. \quad (1)$$

Таким образом, положительно определенная форма III с единичной гауссовой кривизной и форма II, тензор которой удовлетворяет условию (1), определяют поверхность до ее положения в пространстве.

Полученному результату можно придать следующую форму: каждая кодацциева сеть h_{is} единичной сферы определяет с точностью до параллельного переноса и подобного преобразования поверхность и является для этой поверхности сферическим отображением асимптотической сети.

Действительно, тензор кодацциевой сети h_{is} всегда можно с точностью до постоянного множителя пронормировать так, что он будет удовлетворять условию (1).

Переход от тензора h_{is} к тензору ch_{is} ($c = \text{const}$) вызывает, как легко убедиться, подобное преобразование поверхности с коэффициентом подобия c .

2. Заданы формы I = $g_{is} du^i du^s$ и IV = $c_{is} du^i du^s$. Тензоры c_{is} и g_{is} должны быть аполярны:

$$c_{is}g^{is} = 0. \quad (2)$$

В этом случае известна гауссова кривизна K искомой поверхности и ее эйлерова разность $E = -\frac{c}{g} = H^2 - K$, следовательно, известна с точностью до знака и средняя кривизна

$$H = \pm \sqrt{K + E}.$$

Чтобы поверхность была вещественной, необходимо выполнение неравенства

$$K + E \geq 0. \quad (3)$$

Из формулы (80;2')

$$c_{is} = -h_{ik}g_s^k + \varepsilon_{is}H$$

находим второй тензор искомой поверхности

$$h_{is} = g_{is}H + \tilde{c}_{is}, \quad (4)$$

где

$$\tilde{c}_{is} = g_s^k c_{ki}. \quad (5)$$

Условия Гаусса для тензора (4) выполняются при любом выборе знака H :

$$\frac{1}{2} h_{is}h^{is} = H^2 + \frac{1}{2} \tilde{c}_{is}\tilde{c}^{is} = H^2 + \frac{1}{2} c_{is}c^{is} = H^2 - E = K.$$

Составим условие Петерсона:

$$h_{is|s} = g_{is}H^s + \tilde{c}_{is|s} = 0$$

или

$$c_{is|s} = H_s = \pm (\sqrt{K + E})_{|s}. \quad (6)$$

Предположим сначала, что $H \neq \text{const}$. Тогда равенство (6) определяет знак H , и мы можем сказать, что *положительно определенная форма I и форма IV при выполнении условий (2), (3) и (6) определяют второй тензор поверхности (4) однозначно, а саму поверхность, следовательно, — до ее положения в пространстве.*

Если $H = 0$ и выполнены условия

$$K = -E, \quad c_{is|s} = 0,$$

то $h_{is} = \tilde{c}_{is}$ определяется однозначно, а поверхность — до положения в пространстве.

При $H = \text{const} \neq 0$ и выполнении условия

$$c_{is|s} = 0$$

второй тензор (4) удовлетворяет условиям Гаусса и Петерсона при любом выборе знака H . В этом случае существуют, с точностью до положения в пространстве, две искомые поверхности. Эти две поверхности наложимы друг на друга и имеют одинаковые постоянные средние кривизны.

3. Заданы формы I = $g_{is} du^i du^s$ и III = $\gamma_{is} du^i du^s$. Из связи между тремя формами (82;3') находим

$$2Hh_{is} = \gamma_{is} + Kg_{is},$$

а свертывая обе части с g^{is} :

$$4H^2 = g^{is}\gamma_{is} + 2K, \quad H = \pm \frac{1}{2} \sqrt{g^{is}\gamma_{is} + 2K}.$$

Чтобы поверхность была вещественной, необходимо выполнение неравенства

$$g^{is}\gamma_{is} + 2K \geq 0. \quad (7)$$

Итак, тензор второй квадратичной формы определяется заданными формами с точностью до знака:

$$h_{is} = \frac{\gamma_{is} + Kg_{is}}{\pm \sqrt{g^{is}\gamma_{is} + 2K}}. \quad (8)$$

Условие Гаусса для этого тензора, очевидно, всегда выполнено. Следовательно, *если положительно определенные формы I и III, из которых вторая имеет единичную*

гауссову кривизну, удовлетворяют условию (7) и условию

$$\left(\frac{\gamma_{is} + K g_{is}}{\sqrt{g^{is} \gamma_{is} + 2K}} \right)_{|s} = 0, \quad (9)$$

то они определяют поверхность с точностью до положения в пространстве и зеркального отражения¹⁾.

Наши рассуждения теряют смысл при $H = 0$. В этом случае поверхность называется *минимальной*. Асимптотическая сеть ее ортогональна, а ее чебышевский вектор —

$$h_i = \frac{1}{4} \partial_i \ln K$$

должен удовлетворять условию

$$g^{is} h_{is} = \frac{1}{4} g^{is} (\ln K)_{i|s} = K. \quad (10)$$

При выполнении этого условия существуют ∞^1 ортогональных виртуально асимптотических сетей, получаемых друг из друга поворотом на постоянный угол, следовательно, существуют ∞^1 наложимых друг на друга искомым минимальных поверхностей, имеющих общее сферическое отображение.

4. Заданы формы III = $\gamma_{is} du^i du^s$ и IV = $c_{is} du^i du^s$.

Тензоры c_{is} и γ_{is} должны быть аполярны:

$$c^{is} \gamma_{is} = 0. \quad (11)$$

Из формулы (82;11) находим

$$h_{is} = \sigma \gamma_{is} - \tilde{c}_{is}, \quad (12)$$

где

$$\sigma = \frac{H}{K}, \quad \tilde{c}_{is} = \gamma_i^k c_{ks}. \quad (13)$$

Для определения коэффициента σ потребуем, согласно рассмотренному выше случаю 1, чтобы

$$h_{is||s} = \gamma_{is} \sigma^s - \tilde{c}_{is||s} = 0.$$

Отсюда

$$\sigma_i = -c_{is||s}. \quad (14)$$

¹⁾ Нетрудно проверить, что при зеркальном отражении (например, при изменении знака одной из координат радиуса-вектора точки поверхности) второй тензор поверхности меняет знак.

Тензор c_{is} должен, таким образом, удовлетворять условию

$$c_{is||..}{}^{is} = 0. \quad (15)$$

Если оно выполнено, то множитель σ определяется формулой (14) с точностью до постоянного слагаемого σ_0 , а тензор h_{is} — формулой (12) с точностью до слагаемого $\sigma_0 \gamma_{is}$:

$$h_{is} = \sigma \gamma_{is} - \tilde{c}_{is} + \sigma_0 \gamma_{is}. \quad (16)$$

Итак, *положительно определенная форма III с единичной гауссовой кривизной и форма IV, удовлетворяющая условию (15), определяют ∞^1 поверхностей.*

Для выяснения связи между этими поверхностями рассмотрим две из них, соответствующие значениям $\sigma_0 = \sigma_1$ и $\sigma_0 = \sigma_2$. Разность их вторых тензоров

$$h_{is} - h_{is} = (\sigma_1 - \sigma_2) \gamma_{is}.$$

Полагая $\gamma_{is} = n_i n_s$, $h_{is} = -r_i n_s$, $h_{is} = -r_i n_s$, имеем

$$(r_1 - r_2)_i n_s = (\sigma_1 - \sigma_2) n_i n_s,$$

следовательно,

$$(r_1 - r_2)_i = (\sigma_1 - \sigma_2) n_i, \quad r_1 - r_2 = (\sigma_1 - \sigma_2) n + r_0.$$

Таким образом, все эти поверхности можно (полагая $r_0 = 0$) расположить так, что они будут иметь общие нормали. Такие поверхности называются *параллельными*. Расстояние между соответствующими точками двух параллельных поверхностей постоянно.

Отметим один частный случай, когда тензор c_{is} в метрике сферического отображения имеет кодацциево нормирование:

$$c_{is||..}{}^s = 0.$$

В этом случае $\sigma_i = 0$, $\sigma = \frac{H}{K} = \text{const}$ и одна из ∞^1 получаемых поверхностей минимальная (при $\sigma = 0$).

5. Заданы формы $\Pi = h_{is} du^i du^s$ и $IV = c_{is} du^i du^s$ ¹⁾. Будем исходить из формулы (82;11)

$$c_{is} = \gamma_i^h h_{hs} + e_{is} \frac{H}{K}.$$

Пользуясь бивектором e_{is} , находим отсюда

$$\frac{1}{K} \gamma_{ih} = h_h^s c_{is} + h_{ih} \frac{H}{K}. \quad (17)$$

Введем бивектор ε^{is} , согласованный с заданным тензором h_{is} :

$$\varepsilon^{i2} = \frac{1}{\sqrt{|h|}} = \sqrt{\frac{\gamma}{|h|}} e^{i2} = \sqrt{|K|} e^{i2}.$$

С его помощью находим

$$h_h^s c_{si} = e^{sj} h_{hj} c_{si} = \frac{1}{\sqrt{|K|}} d_{ih},$$

где тензор

$$d_{ih} = \varepsilon^{sj} h_{hj} c_{si}$$

вычисляется по заданным величинам. Равенство (17) примет теперь вид

$$\frac{1}{\sqrt{|K|}} \gamma_{ih} = d_{ih} + h_{ih} \frac{H}{\sqrt{|K|}}. \quad (18)$$

Покажем, что множитель $\frac{H}{\sqrt{|K|}}$ тоже определяется заданными формами. Имеем

$$\frac{H}{\sqrt{|K|}} = \sqrt{\left|1 + \frac{H^2 - K}{K}\right|} = \sqrt{\left|1 + \frac{E}{K}\right|} = \sqrt{\left|1 - \frac{c}{h}\right|}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{|K|}} \gamma_{is} = a_{is} = d_{is} + \sqrt{\left|1 - \frac{c}{h}\right|} h_{is}. \quad (19)$$

¹⁾ Впервые этот случай рассмотрел Д. Е. Рускол.

Таким образом, третий тензор поверхности определен с точностью до множителя

$$\gamma_{is} = e^{2\sigma} a_{is}; \quad \sigma = \frac{1}{4} \ln |K|. \quad (20)$$

Если K_α — гауссова кривизна формы $a_{is} du^i du^s$, то после конформного преобразования $a_{is}^* = \gamma_{is} = e^{2\sigma} a_{is}$, согласно (41;4), будем иметь

$$K_\alpha^* = 1 = e^{-2\sigma} (K_\alpha - \Delta_2 \sigma). \quad (21)$$

Пусть, далее, h_i — известный нам чебышевский вектор сети h_{is} в метрике тензора a_{is} . Так как в метрике сферического отображения чебышевский вектор этой сети $h_i^* = -\frac{1}{4} \partial_i \ln K = -\sigma_i$, то по формуле (41;5) имеем

$$-\sigma_i = h_i + d_i^s \tilde{\sigma}_s \frac{1}{\sin \omega}, \quad (22)$$

где d_i^s — аффинор характеристической для h_{is} сети и ω — сетевой угол той же сети h_{is} в метрике тензора a_{is} или γ_{is} . Из этого соотношения находим σ_s :

$$\sigma_s = -a_s^i h_i^k h_k \operatorname{tg} \omega \quad (23)$$

(h_s^i и a_s^i — аффиноры соответствующих сетей) и саму функцию σ :

$$\sigma = - \int a_s^i h_s^k h_k \operatorname{tg} \omega du^i + c. \quad (24)$$

Постоянная интегрирования c определяется подстановкой этого значения σ в (21). В результате всего этого будет найден тензор γ_{is} .

Таким образом, если: 1) тензоры h_{is} и c_{is} аполярны, 2) сеть c_{is} вещественна, 3) вектор правой части (23) градиентен, 4) при некотором значении постоянной c функция (24) удовлетворяет условию (21), то с точностью до положения в пространстве существует единственная поверхность, для которой h_{is} и c_{is} будут вторым и четвертым тензорами.

Остается рассмотреть случай $H = 0$, к которому мы приходим, когда дискриминанты заданных тензоров h_{is}

и c_{is} равны: $h = c$. Искомая поверхность в этом случае минимальна. Из (18) следует, что тензор

$$d_{ih} = \frac{1}{\sqrt{|K|}} \gamma_{ih} = a_{ih}. \quad (25)$$

Сеть h_{is} в метрике этого тензора будет чебышевской. Действительно, в формуле (22) следует положить $\omega = \frac{\pi}{2}$, $d_{is}^s a_s^k \sigma_k = -\sigma_i$, после чего получим $h_i = 0$. По сравнению с предыдущим мы не имеем кроме (21) никакого дополнительного уравнения для функции σ . Окончательный результат таков: если: 1) тензоры h_{is} и c_{is} аполярны, 2) их дискриминанты равны, 3) сети h_{is} и c_{is} вещественны, 4) сеть h_{is} чебышевская в метрике тензора d_{is} , то каждое решение σ уравнения (21) определяет минимальную поверхность, на которой h_{is} и c_{is} будут вторым и четвертым тензорами. Все поверхности, получаемые таким способом, находятся в конформном соответствии, так как первый тензор поверхности, соответствующей решению σ , есть

$$g_{ih} = \frac{1}{K} \gamma_{ih} = e^{-2\sigma} d_{ih}.$$

§ 86. Основная тройка сетей

Асимптотическая сеть, сеть линий кривизны и их главная сеть, называемая *характеристической*, однозначно определены на каждой поверхности. Если поверхность не развертывающаяся, то эти сети не вырождаются и образуют тройку сетей (см. § 11). Эта тройка сетей играет важную роль во многих вопросах. Назовем ее *основной*, и вычислим ее чебышевские и геодезические векторы.

Примем асимптотическую сеть за сеть A_1 , сеть линий кривизны — за сеть A_2 и характеристическую сеть — за сеть A_3 .

Найдем алгебраические соотношения между тензорами этих сетей.

Тензор сети линий кривизны, согласно (80;2'),

$$c_{ih} = h_i^s g_{sh} + \varepsilon_{ih} H. \quad (1)$$

Согласно (80;14) имеем

$$c_{ik}c^{is} = -E\delta_k^s, \quad E = H^2 - K. \quad (2)$$

Тензор характеристической сети d_{is} , как главной для сетей h_{is} и c_{is} , можно взять в виде

$$\begin{aligned} d_{is} &= h_i^h c_{hs} = h_i^h (h_h^l g_{ls} + e_{hs}H) = \\ &= -Kg_{is} + Hh_{is} = \gamma_{is} - Hh_{is}. \end{aligned} \quad (3)$$

Далее находим

$$\frac{1}{2} d_{is} d^{is} = \frac{h}{g} \frac{c}{g} = -KE, \quad (4)$$

$$d_{is} d^{ih} = -KE\delta_s^h, \quad (5)$$

$$c^{is} d_{sh} = -Eh_h^i, \quad (6)$$

$$d^{is} h_{sh} = Kc_h^i. \quad (7)$$

Рассмотрим еще биссекторную сеть линий кривизны, полагая ее тензор равным

$$\tilde{c}_{is} = g_i^h c_{hs} = h_{is} - Hg_{is}. \quad (8)$$

При этих условиях выполняются равенства

$$\tilde{c}_{is} \tilde{c}^{ih} = -E\delta_s^h, \quad (9)$$

$$h_{is} = \tilde{c}_{is} + Hg_{is}, \quad (10)$$

$$d_{is} = Eg_{is} + H\tilde{c}_{is}. \quad (11)$$

Перейдем к отысканию чебышевских и геодезических векторов основной тройки сетей. Чебышевский вектор асимптотической сети известен (78;8):

$$h_i = \frac{1}{4} \partial_i \ln K. \quad (12)$$

Чебышевский вектор c_i сети линий кривизны, или, что то же, сети \tilde{c}_{is} , найдем, вычисляя косую производную тензора (10) и принимая во внимание формулы (78;5) и (9):

$$h_{is|s} = \tilde{c}_i^s (\partial_s \ln \sqrt{E} - 2c_s) + g_s^i H_s = 0. \quad (13)$$

Следовательно,

$$2c_h = \partial_h \ln \sqrt{E} + \frac{1}{E} c_h^s H_s. \quad (14)$$

Аналогично вычисляется чебышевский вектор d_i характеристической сети. Из (3) находим

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{K} d_i^s\right)_{|s} &= \left(\sqrt{\frac{E}{|K|}} d_i^s\right)_{|s} = \\ &= \frac{1}{K} d_i^s \left(\partial_s \ln \sqrt{\frac{E}{K}} - 2d_s\right) = h_i^s \left(\frac{H}{K}\right)_s. \end{aligned} \quad (15)$$

Отсюда

$$2d_k = \partial_k \ln \sqrt{\frac{E}{K}} - \frac{K}{E} c_k^s \left(\frac{H}{K}\right)_s. \quad (16)$$

Для нахождения других векторов положим

$$2a_k = 2h_k = \partial_k \ln \sqrt{K}, \quad (17)$$

$$2a_k = 2c_k = \partial_k \ln \sqrt{E} + \frac{H}{E} c_k^s \partial_s \ln H, \quad (18)$$

$$2a_k = 2d_k = \partial_k \ln \sqrt{\frac{E}{K}} + \frac{H}{E} c_k^s \partial_s \ln \frac{K}{H} \quad (19)$$

и воспользуемся соотношениями (28; 19)

$$\alpha_k = a_k - a_k. \quad *$$

Имеем

$$2a_k = \partial_k \ln \sqrt{K} + \frac{H}{E} c_k^s d_s \ln \frac{H^2}{K}, \quad (20)$$

$$2a_k = \partial_k \ln \frac{\sqrt{E}}{K} + \frac{H}{E} c_k^s \partial_s \ln \frac{K}{H}, \quad (21)$$

$$2a_k = \partial_k \ln \sqrt{\frac{K}{E}} - \frac{H}{E} c_k^s \partial_s \ln H. \quad (22)$$

§ 87. Тангенциальное уравнение поверхности

1. Каждую поверхность можно рассматривать как огибающую своих касательных плоскостей. Уравнение семейства касательных плоскостей, записанное в виде

$$rn = W, \quad (1)$$

где r — радиус-вектор точки, а n — орт нормали, называется *тангенциальным уравнением поверхности*. Совокупность четырех функций — трех координат вектора n

и функции W называется *тангенциальными координатами* (неоднородными) поверхности. Функцию W называют также *четвертой тангенциальной координатой*.

Задание тангенциальных координат поверхности определяет сферическое отображение поверхности (то есть вектор n) и расстояние W ее касательной плоскости от начала координат.

2. В дальнейшем рассматриваются неразвертывающиеся поверхности, для которых сферическое отображение не вырождается, а векторы n_1 и n_2 независимы.

Найдем выражение радиуса-вектора r поверхности через ее тангенциальные координаты. Вектор r , при сделанном выше предположении, можно разложить по векторам n, n_1, n_2 :

$$r = n_i \sigma^i + \lambda n. \quad (2)$$

Из уравнения (1) находим $rn = W = \lambda$. Для определения коэффициентов σ^i продифференцируем обе части равенства (1):

$$r_i n + rn_i = rn_i = W_i.$$

Отсюда следует, что

$$(n_k \sigma^k + Wn) n_i = \gamma_{ik} \sigma^k = W_i, \quad \sigma^k = \tilde{W}^k,$$

где индексы перебрасываются бивектором e_{ik} сферического отображения. Внося найденные значения коэффициентов λ и σ^k в (2), получаем искомое выражение

$$r = n_k \tilde{W}^k + Wn. \quad (3)$$

3. Теперь можно получить выражение второго тензора h_{is} поверхности через ее тангенциальные координаты. Продифференцируем в метрике сферического отображения обе части равенства (3):

$$r_i = -\gamma_{ik} \tilde{W}^k n + n_k \tilde{W}^k_{||i} + W_i n + W n_i = n_k \tilde{W}^k_{||i} + W n_i. \quad (4)$$

Отсюда получаем выражение второго тензора поверхности через четвертую тангенциальную координату:

$$h_{is} = -r_i n_s = -W_{i||s} - W \gamma_{is}. \quad (5)$$

4. Произвольная функция W определяет по формуле (5) кодацциеву сеть на сфере. Выполнение условий Кодаци

легко проверяется:

$$h_{i||s}{}^s = -W_{i||s}{}^s - W^s \gamma_{is} = -\tilde{W}_i + \tilde{W}_i = 0.$$

Обратно, для тензора произвольной кодацциевой сети сферы h_{is} , находящегося в кодацциевом нормировании, можно найти с произволом в три постоянные такую функцию W , что будет выполняться равенство (5). Справедливость высказанного свойства легко следует из общей теории дифференциальных уравнений. Другое ее доказательство следует из того, что тензор h_{is} , принятый за второй тензор поверхности, определяет, согласно § 85, п. 1, эту поверхность с точностью до параллельного переноса. Четвертая тангенциальная координата W этой поверхности и есть искомая функция. При параллельном переносе ($\tilde{r} = r + r_0$, $r_0 = \text{const}$) эта координата получает приращение $W_0 = r_0 n$, зависящее от трех произвольных постоянных координат вектора r_0 . Общее решение уравнения (5) при заданном тензоре h_{is} есть, таким образом, $W + W_0$, где W — частное решение этого уравнения, а W_0 — общее решение однородного уравнения $W_{i||s} + W \gamma_{is} = 0$.

5. Формула (5) позволяет выразить инварианты поверхности через дифференциальные параметры четвертой тангенциальной координаты. Имеем (см. § 82, п. 4)

$$\frac{1}{2} \gamma^{is} h_{is} = \frac{H}{K} = \frac{1}{2} \gamma^{is} (-W_{i||s} - W \gamma_{is}) = -\frac{1}{2} (\Delta'_2 W + 2W), \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} e^{im} e^{kn} h_{ik} h_{mn} &= \frac{1}{K} = \frac{1}{2} (W^i{}_{||k} + W \gamma^{ik}) (W_{i||k} + W \gamma_{ik}) = \\ &= \Delta'_{22} W + W \Delta'_2 W + W^2 \quad (7) \end{aligned}$$

(штрихи над Δ_2 и Δ_{22} указывают, что эти дифференциальные параметры вычислены в метрике сферического отображения).

§ 88. Построение поверхности по сферическому отображению сопряженной сети

1. Рассмотрим на сфере произвольную сеть a_{is} и будем искать поверхность, для которой эта сеть является сферическим отображением сопряженной сети. Сферическое отображение асимптотической сети искомой поверхности

должно быть кодацциевой сетью, аполярной сети a_{is} . Оба эти требования будут выполнены, если мы найдем решение W уравнения

$$a^{is}(W_{i||s} + W\gamma_{is}) = 0 \quad (1)$$

и за второй тензор искомой поверхности примем тензор $h_{is} = -W_{i||s} - W\gamma_{is}$. Следовательно, каждое решение уравнения (1) определяет поверхность с заданным сферическим отображением, на которой сеть a_{is} сопряжена.

2. Уравнение (1) с помощью аффинора a_i^s и чебышевского вектора a_i сети a_{is} можно записать в виде

$$a_i^s(W_{s||i} + W\gamma_s^i) = e^{ik}[\partial_k(a_i^s W_s) + 2a_i^s W_s a_k + a_i^s \gamma_{sk} W] = 0 \quad (2)$$

или в виде

$$e^{ik}[\partial_k(a_i^s W_s) + 2a_i^s W_s a_k + \lambda W e_{ik}] = 0, \quad (3)$$

где

$$\lambda = \frac{1}{2} a_i^s \gamma_s^i.$$

Уравнение (3) не зависит от выбора бивектора и называется *тангенциальным уравнением Лапласа*. В параметрах сети a_{is} оно имеет следующий вид:

$$\partial_{12}W + a_2W_1 + a_1W_2 + 2\lambda W = 0. \quad (4)$$

Предположим сначала, что найдены четыре независимых решения n_x, n_y, n_z, W уравнения (3), из которых три первых являются координатами *единичного* вектора n , то есть удовлетворяют условию

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = n^2 = 1. \quad (5)$$

Тогда на поверхности с тангенциальным уравнением (87;1) сеть a_{is} будет сопряженной, а вектор a_i будет ее чебышевским вектором в сферическом отображении этой поверхности.

Для доказательства заметим, что вектор n должен удовлетворять уравнению (3). Пользуясь тем, что это уравнение не зависит от выбора бивектора e_{is} будем считать его основным бивектором сферы с радиусом-вектором n и обычное дифференцирование заменим ковариантным дифферен-

цированием в метрике этой сферы:

$$\begin{aligned} e^{ik} [\partial_k (a_i^s n_s) + 2a_i^s n_s a_k + \lambda n e_{ik}] &= (a_i^s n_s)_{||}^i + 2a_i^s n_s a^i + 2\lambda n = \\ &= (a_{i||}^s + 2a_i^s a^i) n_s + (2\lambda - a_i^s \gamma_s^i) n = 0. \end{aligned}$$

В силу независимости векторов n и n_s находим

$$\lambda = \frac{1}{2} a_i^s \gamma_s^i, \quad a_{i||}^s = -2a_i^s a^i.$$

Отсюда следует, что a_i есть чебышевский вектор сети a_{is} на сфере и что уравнение (3) можно записать в виде (1), а это означает, что сеть a_{is} сопряжена на построенной поверхности. Утверждение доказано полностью.

Предположим теперь, что найдены четыре независимых решения уравнения (3) N_x, N_y, N_z, W и что вектор $N(N_x, N_y, N_z)$ не единичный: $N^2 = N^2 \neq 1$. Производя в уравнении (3) замену неизвестной функции

$$W = N\tilde{W},$$

придем опять к уравнению того же вида для функции \tilde{W}

$$e^{ik} [\partial_k (a_i^s \tilde{W}_s) + 2a_i^s \tilde{W}_s a_k + \lambda \tilde{W} e_{ik}] = 0,$$

где

$$a_k^* = a_k + \partial_k \ln N,$$

$$\lambda^* = \lambda + \varepsilon^{mn} \left[a_m^s \partial_s \ln N a_n + \frac{1}{2N} \partial_n (a_m^s N_s) \right].$$

Решения $n_x = \frac{N_x}{N}$, $n_y = \frac{N_y}{N}$, $n_z = \frac{N_z}{N}$ этого уравнения удовлетворяют условию $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$.

Предыдущий результат позволяет теперь утверждать, что любые четыре независимых решения N_x, N_y, N_z, W уравнения (3) определяют поверхность с тангенциальным уравнением $rN = W$, на которой сеть a_{is} сопряжена. Чебышевский вектор этой сети в сферическом отображении

поверхности равен $a_i^* = a_i + \partial_i \ln N$.

3. Сопряженная и кодацциева в метрике сферического отображения поверхности сеть называется *сетью равных тангенциальных инвариантов*.

Чебышевский вектор этой сети в метрике сферического отображения градиентен.

4. Пусть A_2 и A_3 — две аполярные сопряженные сети и A_1 — асимптотическая сеть поверхности. Тогда (см. схему III, стр. 255)

$$a_1 = \frac{1}{4} \partial_i \ln K = a_3 - a_2.$$

Отсюда следует предложение: *если одна из двух сопряженных и аполярных сетей имеет равные точечные инварианты, то другая сеть имеет равные тангенциальные инварианты, и наоборот.*

§ 89. Формулы Лельевра

Если в формулах (82; 9) $r_i = h_i^s [n_s n]$ выразить второй тензор h_i^s через метрически нормированный в сферическом отображении тензор асимптотической сети $h_{is} = \frac{1}{\sqrt{-K_0}} h_{is}$ и положить

$$\xi = \sqrt{\varrho} n, \quad \varrho = \frac{1}{\sqrt{-K}}, \quad (1)$$

то они перейдут в формулы Лельевра

$$r_i = h_i^s [{}^s_0 \xi_s \xi]. \quad (2)$$

Вектор ξ будем называть *вектором Лельевра*. Считая, что сеть h_{is} вещественна, и принимая ее за координатную, мы получим вместо (2)

$$r_1 = -[{}^1_0 \xi_1 \xi], \quad r_2 = [{}^2_0 \xi_2 \xi]. \quad (2')$$

Рассматривая (2) как систему уравнений с неизвестным вектором r , составим условие ее интегрируемости:

$$r_{i||}{}^i = [(h_i^s \xi_s)_{||}{}^i \cdot \xi] + [h_i^s \xi_s \xi^i] = [(h_i^s \xi_s)_{||}{}^i \cdot \xi] = 0.$$

Отсюда следует коллинеарность векторов

$$({}^i_0 h_i^s \xi_s)_{||}{}^i = M \xi. \quad (3)$$

Чтобы найти коэффициент M , умножим обе части (3) на вектор ξ :

$$\begin{aligned} M\xi^2 &= M\varrho = \sqrt{\varrho} n \left[h_0^s (\sqrt{\varrho})_s n + h_0^s \sqrt{\varrho} n_s \right]_{||}^i = \\ &= \sqrt{\varrho} \left[h_0^s (\sqrt{\varrho})_s \right]_{||}^i + \varrho n h_0^s n_s \left[\right]_{||}^i = \sqrt{\varrho} \left[h_0^s (\sqrt{\varrho})_s \right]_{||}^i - \varrho h_0^s \gamma_s^i. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{\sqrt{\varrho}} \left[h_0^s (\sqrt{\varrho})_s \right]_{||}^i - h_0^s \gamma_s^i = \\ &= e^{ik} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\varrho}} \partial_k \left[h_0^s (\sqrt{\varrho})_s \right] - h_0^s \gamma_{sk} \right\} \quad (4) \end{aligned}$$

или, в принятой выше специальной системе координат,

$$M = \frac{2}{\gamma} \left[-\frac{\partial_{12} \sqrt{\varrho}}{\sqrt{\varrho}} + \gamma_{12} \right]. \quad (4')$$

Таким образом, уравнение (3) можно записать в виде

$$e^{ik} \partial_k (h_0^s \xi_s) = e^{ik} p_{ik} \xi, \quad (5)$$

где

$$p_{ik} = \frac{1}{\sqrt{\varrho}} \partial_k \left[h_0^s (\sqrt{\varrho})_s \right] - h_0^s \gamma_{sk}.$$

Это уравнение называют *уравнением Мутара*. Мы встретимся с ним при рассмотрении конгруэнций. В специальной системе координат вместо (5) получим

$$\partial_{12} \xi = N \xi, \quad (5')$$

где

$$N = \frac{\partial_{12} \sqrt{\varrho}}{\sqrt{\varrho}} - \gamma_{12}.$$

Координаты вектора Лельевра ξ , таким образом, являются частными решениями уравнения Мутара

$$e^{ik} [\partial_k (h_0^s \theta_s) - p_{ik} \theta] = 0. \quad (6)$$

В результате мы пришли к теореме: если ξ_x, ξ_y, ξ_z — три независимых решения (6), где h_0^s — аффинор произвольной

сети и $e^{ik}p_{ik}$ — произвольная функция, то уравнения (2), в которых вектор ξ имеет координаты ξ_x, ξ_y, ξ_z , вполне интегрируемы и позволяют одними квадратурами найти поверхность, на которой сеть h_{is} асимптотическая. Гауссова кривизна этой поверхности

$$K = -\frac{1}{\xi^4}.$$

Рассмотрим частный случай уравнения (6) при $p_{ik} = 0$ или уравнения (5') при $N = 0$:

$$\partial_{12}\xi = 0.$$

Выбирая за решение $\xi(v, V(v), u)$, найдем, интегрируя систему (2), радиус-вектор поверхности

$$r = \left\{ uV, -uv, \int (V - vV') dv \right\}.$$

Эта поверхность — прямой коноид, так как линии $v = \text{const}$ — прямые, пересекающие ортогонально ось Oz .

§ 90. Соответствие Петерсона. Параллельные сети

1. Соответствие двух поверхностей S и S^* , при котором их касательные плоскости в соответствующих точках параллельны, называется *соответствием Петерсона*.

Примером соответствия Петерсона является соответствие поверхности и ее сферического отображения.

Орты нормалей n и n^* поверхностей S и S^* в соответствующих точках, очевидно, равны: $n = n^*$. Если эти поверхности имеют, кроме того, общую параметризацию, то

$$\gamma_{is}^* = \gamma_{is}.$$

Пусть r и r^* — радиусы-векторы поверхностей S и S^* . Векторы r_i компланарны с векторами r_i , следовательно,

$$r_i^* = A_i^s r_s. \quad (1)$$

Умножая скалярно обе части этого равенства на $-n_k$, находим

$$\begin{aligned} -r_i n_k &= \dot{h}_{ik} = -A_i^s r_s n_k = A_i^s h_{sk}, \\ A_i^s &= K \dot{h}_{ik} h^{ks} \end{aligned} \quad (2)$$

(K — гауссова кривизна поверхности S , индексы подняты бивектором сферического отображения).

Главная сеть $a_{is} = \dot{h}_{(i} h_{s)k}$ асимптотических сетей поверхностей S и \dot{S} сопряжена на каждой из этих поверхностей. Эта сеть определяется однозначно, если сети \dot{h}_{is} и h_{is} не имеют общих семейств линий, вырождается, если эти сети связаны, и становится неопределенной, когда эти сети соответствуют друг другу. В последнем случае $\dot{h}_{is} = \lambda h_{is}$. Отсюда

$$\dot{h}_{is|j}^s = \lambda^s h_{is} + \lambda h_{is|j}^s = \lambda^s h_{is} = 0.$$

Следовательно, при условии, что поверхности S и \dot{S} неразвертывающиеся, а тензор h_{is} не вырождается, λ должно быть постоянным. Поэтому

$$\dot{h}_{is} - \lambda h_{is} = -n_i (r^* - \lambda r)_s = 0,$$

следовательно,

$$(r^* - \lambda r)_s = 0, \quad r^* = \lambda r + \text{const},$$

так что поверхности S и \dot{S} подобны.

Докажем, что соответствующие касательные к линиям сети a_{is} на поверхностях S и \dot{S} параллельны. Направляющие векторы v^i и w^i этой сети удовлетворяют в силу ее аноплярности к сетям h_{is} и \dot{h}_{is} , равенствам

$$\dot{h}_{is} v^s = \lambda w_i, \quad h_{is} w^s = \mu v_i.$$

Следовательно, согласно (1) и (2),

$$r_i v^i = K \dot{h}_{ik} h^{ks} r_s v^i = -K \lambda \mu r_i v^i, \quad r_i w^i = \nu r_i w^i,$$

что и требовалось доказать.

2. Предположим теперь, что поверхности S и \tilde{S} находятся в общей параметризации. Две сети, определяемые на этих поверхностях тензором $a_{is} = 2v_{(i}w_{s)}$, назовем *параллельными*, если касательные к их соответствующим семействам линий параллельны.

Докажем теорему: *каждая из двух параллельных невырождающихся сетей сопряжена на своей поверхности.*

Рассматриваемые поверхности S и \tilde{S} находятся в соответствии Петерсона и для них выполняются условия параллельности

$$r_i v^i = r_i^* v^{*i}, \quad r_i w^i = r_i^* w^{*i} \quad (3)$$

(v^i и w^i — орты на поверхности S , $v^{*i} = \lambda v^i$ и $w^{*i} = \mu w^i$ — орты на поверхности \tilde{S}). Умножая скалярно на n_s , находим

$$\left. \begin{aligned} h_{is} v^i &= h_{is}^* v^{*i}, & h_{is} w^i &= h_{is}^* w^{*i}, \\ h_{is} v^{*i} w^s &= (h_{is}^* v^{*i}) \mu w^s = \mu h_{is} v^i w^s = \\ &= (h_{is}^* w^{*i}) \lambda v^s = \lambda h_{is} v^i w^s. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Следовательно, $(\lambda - \mu) h_{is} v^i w^s = 0$, и либо $h_{is} v^i w^s = 0$, что доказывает наше утверждение, либо $\lambda = \mu$. В последнем случае из (4) находим $(h_{is} - \lambda h_{is}^*) v^i = (h_{is} - \lambda h_{is}^*) w^i = 0$, откуда следует, что $h_{is} = \lambda h_{is}^*$. Как показано в п. 1, поверхности S и \tilde{S} при этом условии подобны и каждые две их соответствующие сети параллельны.

3. Частный случай соответствия Петерсона, при котором сохраняются линии кривизны, называется *соответствием Комбескюра* (см. §§ 112 и 134).

§ 91. Конформное соответствие Петерсона

Кристоффелем была поставлена и решена следующая задача: *для каких поверхностей соответствие Петерсона является в то же время конформным?*

Если поверхности S и \tilde{S} находятся в указанном соответствии, то

$$\gamma_{is} = \gamma_{is}^*, \quad g_{is} = e^{2\sigma} g_{is}^*. \quad (1)$$

Из связи трех квадратичных форм имеем

$$\begin{aligned} \gamma_{is} &= -Kg_{is} + 2Hh_{is} = -\overset{*}{K}g_{is} + 2\overset{*}{H}h_{is}, \\ 2Hh_{is} - 2\overset{*}{H}h_{is} &= (K - e^{2\sigma}\overset{*}{K})g_{is}. \end{aligned} \quad (2)$$

Рассмотрим следующие возможные случаи.

1. $H = 0$, $\overset{*}{H} \neq 0$. Поверхность S минимальная. Равенство (2) принимает вид $h_{is}^* = \lambda g_{is}^*$. Следовательно, поверхность $\overset{*}{S}$ является сферическим отображением поверхности S .

2. $H = \overset{*}{H} = 0$ — обе поверхности минимальные. В этом случае

$$\overset{*}{K} = e^{-2\sigma}K.$$

С другой стороны, согласно (41;4),

$$\overset{*}{K} = e^{-2\sigma}(K - \Delta_2\sigma),$$

следовательно, $\Delta_2\sigma = 0$, поэтому вектор σ_i конформного отображения Петерсона минимальной поверхности в минимальную поверхность образует поле Лапласа.

3. $H \neq 0$, $\overset{*}{H} \neq 0$, $h_{is}^* = \lambda h_{is}$. Поверхности S и $\overset{*}{S}$ подобны.

4. Общий случай $H \neq 0$, $\overset{*}{H} \neq 0$, $h_{is}^* \neq \lambda h_{is}$. Из равенства (2) следует, что сети h_{is} , h_{is}^* и g_{is} комполярны. Их главная сеть будет сетью линий кривизны. Следовательно, линии кривизны на поверхностях S и $\overset{*}{S}$ соответствуют.

Докажем, что сети линий кривизны на обоих рассматриваемых поверхностях изотермические.

Сети линий кривизны на рассматриваемых поверхностях параллельны, следовательно, согласно (90;3),

$$r_i v^i = \overset{*}{r}_i \overset{*}{v}^i, \quad r_i w^i = \overset{*}{r}_i \overset{*}{w}^i$$

(v_i, w_i — орты линий кривизны на поверхности S , $\overset{*}{v}_i = \lambda v_i, \overset{*}{w}_i = \mu w_i$ — орты линий кривизны на поверхности $\overset{*}{S}$).

Сравнивая выражения первых тензоров

$$g_{is} = v_i v_s + w_i w_s,$$

$$g_{is}^* = v_i^* v_s^* + w_i^* w_s^* = \lambda^2 v_i v_s + \mu^2 w_i w_s = e^{2\sigma} g_{is},$$

находим $\lambda^2 = \mu^2 = e^{2\sigma}$. Следовательно, либо $\lambda = \mu$, либо $\lambda = -\mu$. В первом случае

$$(r_i - \lambda r_i^*) v^i = (r_i - \lambda r_i^*) w^i = 0,$$

$$r_i = \lambda r_i^*,$$

а поверхности S и S^* подобны.

Во втором случае из равенств

$$r_i v^i = \lambda r_i^* v^i, \quad r_i w^i = -\lambda r_i^* w^i$$

имеем

$$r_i (v^i w_s + v_s w^i) = \lambda r_i^* (v^i w_s - v_s w^i) = r_i c_s^i = -\lambda r_i^* c_s^i = -\lambda r_s^*$$

или

$$c_s^i r_i = -r_s^*,$$

где $c_s^i = \frac{1}{\lambda} c_s^i$ — тензор сети линий кривизны. Составим условие интегрируемости:

$$-r_{s|}^* = c_{s|}^i r_i + c_s^i h_i^s n = c_{s|}^i r_i = 0.$$

Отсюда следует, что тензор сети линий кривизны удовлетворяет уравнению Кодацци

$$c_{s|}^i = 0.$$

Таким образом, сеть c_{is} изотермическая и ее чебышевский вектор

$$c_i = \frac{1}{2} \partial_i \ln \lambda = \frac{1}{2} \sigma_i.$$

Утверждение доказано.

Нетрудно показать, что для каждой изотермической поверхности S определяется с точностью до подобного преобразования другая изотермическая поверхность S^* , находящаяся с ней в конформном соответствии Петерсона. Действительно, тензор сети линий кривизны $c_{is} = e^{2\sigma} c_{is}$

(c — потенциал чебышевского вектора этой сети) находится в кодацциевом нормировании, так что

$$c_{i|s}{}^i = 0.$$

Следовательно, уравнение

$$r_i^* = c_i^s r_s$$

с неизвестным радиусом-вектором r^* искомой поверхности \bar{S} интегрируемо, так как

$$r_{i|s}{}^i = c_{i|s}^s r_s + c_i^s h_s^i n = 0.$$

Соответствие Петерсона между поверхностями S и \bar{S} будет конформным:

$$g_{is}^* = r_i^* r_s^* = c_i^m c_s^n r_m r_n = e^{4c} c_i^m c_s^n g_{mn} = e^{4c} g_{is}.$$

Так как при подобном преобразовании поверхности \bar{S} указанная связь ее с поверхностью S не нарушается, то наше предложение доказано.

§ 92. Поверхность, присоединенная данной относительно сопряженной сети

1. Докажем сначала теорему: *если тензор A_i^s некоторой сети поверхности r определяет уравнением*

$$A_i^s r_s = R_i = \partial_i R \quad (1)$$

вектор R , то эта сеть сопряжена, ее точечные инварианты равны и тензор $A_{ih} = \varepsilon_{sh} A_i^s$ находится в кодацциевом нормировании. Для доказательства составим условие интегрируемости уравнения (1)

$$R_{i|s}{}^i = A_{i|s}^s r_s + A_i^s h_s^i n = 0.$$

В силу независимости векторов n и r_s , отсюда следуют равенства

$$A_i^s h_s^i = 0, \quad A_{i|s}^s = 0,$$

доказывающие все утверждения теоремы.

2. Согласно предыдущему, каждая сопряженная кодацциева сеть поверхности S определяет поверхность \bar{S}

с радиусом-вектором

$$R = \int A_i^s r_s du^i, \quad (2)$$

где A_{is} — кодацциев тензор этой сети. Будем говорить, что поверхность $\overset{*}{S}$ *присоединена поверхности S относительно сети A* .

Из равенства (1) находим

$$r_s = \tilde{A}_s^i R_i,$$

где $\tilde{A}_s^i A_i^k = \delta_s^k$. Следовательно, по доказанной выше теореме, поверхность S присоединена поверхности $\overset{*}{S}$, и тензор \tilde{A}_s^i , взаимный тензору A_i^s , находится на поверхности $\overset{*}{S}$ в кодацциевом нормировании. Таким образом, *понятие присоединенности поверхности взаимно*, и мы можем говорить о паре *присоединенных друг другу поверхностей*, относительно их общей сопряженной сети. Две такие поверхности, как это следует из (1), находятся в соответствии Петерсона.

Радиусы-векторы r и R двух поверхностей, находящихся в произвольном соответствии Петерсона, тоже связаны условием (1). Особенность рассматриваемого соответствия Петерсона между присоединенными поверхностями состоит в том, что след A_i^i тензора A_i^s равен нулю или в симметрии тензора A_{is} . Геометрически это отличие выражается тем, что асимптотической сети одной присоединенной поверхности соответствует на другой сопряженная сеть, или, иначе говоря, тем, что асимптотические сети h_{is} и H_{is} этих поверхностей аполярны.

Для доказательства достаточно умножить обе части равенства (1) на вектор n_k (n — общий орт нормали поверхностей S и $\overset{*}{S}$), что дает

$$A_i^s h_{sk} = H_{ik}.$$

3. Рассмотрим треугольную схему IV, где A — асимптотическая сеть h_{is} поверхности S , A — асимптотическая сеть H_{is} поверхности $\overset{*}{S}$, A — общая сопряженная сеть этих поверхностей, h_i , H_i , a_i — чебышевские векторы этих

сетей, связанные уравнением

$$h_i = a_i + H_i, \quad (3)$$

и G — общая геометрия сферического отображения.

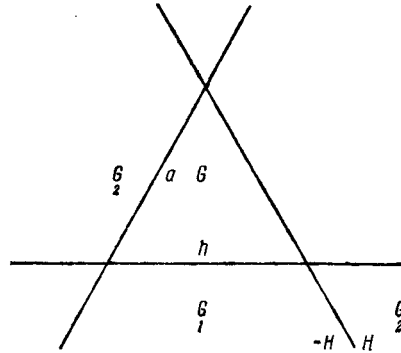
¹ Внутренние геометрии G и G ₂ присоединенных поверхностей сопряжены, как видно из этой схемы, относительно их общей сопряженной сети A . Асимптотической сети одной ² присоединенной поверхности соответствует на другой сеть равных тангенциальных инвариантов. Гауссовы кривизны K и $\overset{*}{K}$ присоединенных поверхностей связаны, согласно (3), равенством

$$\frac{1}{4} \ln K = a + \frac{1}{4} \ln \overset{*}{K}$$

или

$$|K| = e^{4a} |\overset{*}{K}|, \quad (4)$$

где a — потенциал чебышевского вектора сети A .



Из равенства (1) приходим к следующим соотношениям между метрическими тензорами g_{is} и $\overset{*}{g}_{is}$ и бивекторами ϵ_{is} и $\overset{*}{\epsilon}_{is}$ поверхностей S и $\overset{*}{S}$:

$$g_{is} = A_i^m A_s^n \overset{*}{g}_{mn}, \quad g = |g_{is}| = |A_i^s|^2 |g_{mn}| = e^{4a} \overset{*}{g}, \quad (5)$$

$$\epsilon_{is} = e^{2a} \overset{*}{\epsilon}_{is}.$$

§ 93. Инварианты линий сети

В каждой точке поверхности для линий сети (v, w) мы ввели инварианты (§§ 78 и 81)

$$\sigma_v = h_{is} v^i v^s, \quad \sigma_w = h_{is} w^i w^s,$$

$$\tilde{\tau}_v = h_{is} v^i \tilde{v}^s = c_{is} v^i v^s, \quad \tilde{\tau}_w = h_{is} w^i \tilde{w}^s = c_{is} w^i w^s.$$

В этом параграфе рассматриваются выражения различных квадратичных форм поверхности и инвариантов K и H через инварианты линий сети, а также соотношения между этими инвариантами для различных специальных сетей.

1. Произвольный симметричный тензор a_{is} допускает разложение

$$a_{is} = \lambda v_i v_s + 2\mu v_{(i} w_{s)} + \nu w_i w_s. \quad (1)$$

Коэффициенты этого разложения определяются свертыванием обеих частей равенства (1) последовательно с $w^i w^s$, $v^i w^s$, $v^i v^s$. Имеем

$$a_{is} w^i w^s = \lambda (v_i w^i)^2 = \lambda \sin^2 \omega, \quad a_{is} v^i w^s = -\mu \sin^2 \omega,$$

$$a_{is} v^i v^s = \nu \sin^2 \omega.$$

Следовательно,

$$a_{is} = \frac{1}{\sin^2 \omega} (a_{mn} w^m w^n v_i v_s - 2a_{mn} v^m w^n v_{(i} w_{s)} + a_{mn} v^m v^n w_i w_s). \quad (2)$$

2. Применяя эту формулу для метрического тензора, находим

$$g_{is} = \frac{1}{\sin^2 \omega} (v_i v_s - 2 \cos \omega v_{(i} w_{s)} + w_i w_s). \quad (3)$$

3. Предположим, что $a_{is} = h_{is}$, и вычислим двумя способами инвариант

$$\begin{aligned} h_{is} v^i w^s &= h_{is} v^i (v^s \cos \omega + \tilde{v}^s \sin \omega) = h_{is} w^i (w^s \cos \omega - \tilde{w}^s \sin \omega) = \\ &= \underset{v}{\sigma} \cos \omega + \underset{v}{\tilde{\tau}} \sin \omega = \underset{w}{\sigma} \cos \omega - \underset{w}{\tilde{\tau}} \sin \omega. \end{aligned} \quad (4)$$

Отсюда имеем выражение сетевого угла ω через инварианты линий сети

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\underset{w}{\sigma} - \underset{v}{\sigma}}{\underset{w}{\tilde{\tau}} + \underset{v}{\tilde{\tau}}}. \quad (5)$$

По формуле (2) получим разложение второго тензора поверхности

$$\begin{aligned} h_{is} &= \frac{1}{\sin^2 \omega} [\sigma v_i v_s - 2(\sigma \cos \omega + \tilde{\tau} \sin \omega) v_{(i} w_{s)} + \sigma w_i w_s] = \\ &= \frac{1}{\sin^2 \omega} [\sigma v_i v_s - 2(\sigma \cos \omega - \tilde{\tau} \sin \omega) v_{(i} w_{s)} + \sigma w_i w_s] = \\ &= \frac{1}{\sin^2 \omega} \left\{ \sigma v_i v_s - [(\sigma + \sigma) \cos \omega + (\tilde{\tau} - \tilde{\tau}) \sin \omega] v_{(i} w_{s)} + \sigma w_i w_s \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

4. Для разложения четвертого тензора c_{is} вычислим инвариант

$$\begin{aligned} 2c_{is} v^i w^s &= -(g_i^k h_{ks} + g_s^k h_{ki}) v^i w^s = h_{ks} \tilde{v}^k w^s + h_{ki} \tilde{w}^k v^i = \\ &= h_{ks} \left[\left(\frac{1}{\sin \omega} w^k - v^k \operatorname{ctg} \omega \right) w^s + \left(-\frac{1}{\sin \omega} v^k + w^k \operatorname{ctg} \omega \right) v^s \right] = \\ &= \frac{1}{\sin \omega} (\sigma - \sigma) = \frac{1}{\cos \omega} (\tilde{\tau} + \tilde{\tau}). \end{aligned} \quad (7)$$

Далее, согласно (2), имеем

$$c_{is} = \frac{1}{\sin^2 \omega} \left(\tilde{\tau} v_i v_s - \frac{\tilde{\tau} + \tilde{\tau}}{\cos \omega} v_{(i} w_{s)} + \tilde{\tau} w_i w_s \right). \quad (8)$$

5. Найдем теперь инварианты поверхности

$$\begin{aligned} 2H &= g^{is} h_{is} = \\ &= \frac{g^{is}}{\sin^2 \omega} \left\{ \sigma v_i v_s - [(\sigma + \sigma) \cos \omega + (\tilde{\tau} - \tilde{\tau}) \sin \omega] v_{(i} w_{s)} + \sigma w_i w_s \right\} \end{aligned}$$

или

$$2H = (\sigma + \sigma) - \frac{(\tilde{\tau} - \tilde{\tau})}{w} \operatorname{ctg} \omega, \quad (9)$$

$$K = \frac{1}{2} h^{is} h_{is} = \sigma \sigma + \frac{\tilde{\tau} \tilde{\tau}}{v w} + \frac{(\sigma \tilde{\tau} - \sigma \tilde{\tau})}{v w} \operatorname{ctg} \omega, \quad (10)$$

$$E = -\frac{1}{2} c_{is} c^{is} = \frac{1}{\sin^2 2\omega} [(\tilde{\tau} + \tilde{\tau})^2 - 4 \frac{\tilde{\tau} \tilde{\tau}}{v w} \cos^2 \omega]. \quad (11)$$

6. Рассмотрим случаи, когда сеть (v, w) имеет специальный характер. Если эта сеть ортогональна, то $\omega = \frac{\pi}{2}$

и из (4) следует

$$\tilde{\tau}_v = -\tilde{\tau}_w = \tilde{\tau}, \quad (12)$$

так что *геодезические кручения двух ортогональных направлений равны по величине и обратны по знаку. Средняя кривизна*

$$H = \frac{\sigma_v + \sigma_w}{2} \quad (13)$$

равна полусумме нормальных кривизн двух произвольных ортогональных направлений. Наконец, гауссова кривизна в этом случае выражается так:

$$K = \sigma\sigma - \tilde{\tau}_{vw}^2. \quad (14)$$

Если сеть (v, w) сопряжена, то $h_{is}v^i w^s = 0$, и из (4) находим связь нормальных кривизн и геодезических кручений произвольных сопряженных направлений:

$$\frac{\sigma_v}{\tau_v} = -\frac{\sigma_w}{\tau_w} = -\operatorname{tg} \omega. \quad (15)$$

Учитывая эти соотношения, находим

$$\left. \begin{aligned} h_{is} &= \frac{1}{\sin^2 \omega} (\sigma v_i v_s + \sigma w_i w_s), \\ H &= \frac{\sigma_v + \sigma_w}{2 \sin^2 \omega}, \quad K = \frac{\sigma\sigma}{\sin^2 \omega}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

В случае, когда сеть (v, w) асимптотическая, то $\sigma_v = \sigma_w = 0$, а геодезические и абсолютные кручения совпадают ($\tilde{\tau}_v = \tau_v$, $\tilde{\tau}_w = \tau_w$). Из (4) следует, что $\tau_v = -\tau_w = \tau$, а из (10) —

$$K = \tau\tau = -\tau^2, \quad (17)$$

поэтому

$$\tau_v = -\tau_w = \pm \sqrt{-K}.$$

Последнее равенство доказывает теорему Эннепера — Бельтрами: *кручения двух асимптотических линий в их общей точке имеют одинаковые абсолютные значения, равные $\sqrt{-K}$, и отличаются знаками.*

§ 94. Уравнения изгибания поверхности

Две поверхности называются *наложимыми*, если между их точками можно установить такое соответствие, при котором длины дуг соответствующих линий равны.

Если поверхности S и \tilde{S} имеют общую параметризацию, то условие их наложимости состоит в равенстве их первых квадратичных форм или коэффициентов этих форм.

Вторые формы этих поверхностей должны отличаться, так как в противном, по основной теореме § 84, эти поверхности отличались бы только положением в пространстве.

Переход от поверхности S к наложимой на нее поверхности \tilde{S} называется *изгибанием поверхности*.

Основная проблема изгибания состоит в отыскании всех поверхностей, наложимых на данную поверхность или, более общо, в отыскании всех поверхностей, для которых данная квадратичная форма $ds^2 = g_{is} du^i du^s$ является первой формой.

Решение этой проблемы сводится к решению дифференциальных уравнений, носящих название *уравнений изгибания*.

1. Проекцию ra радиуса-вектора точки поверхности на произвольный постоянный единичный вектор a А. П. Норден [5] называет *горизонтальной функцией на поверхности*. Каждая координата вектора r является примером горизонтальной функции.

Задание горизонтальной функции, как показал Бианки, позволяет найти и саму поверхность. Введем обозначение

$$ra = \varphi. \quad (1)$$

Запишем теперь разложение вектора a :

$$a = r_i g^{ik} (r_k a) + (na) n = r_i \tilde{\varphi}^i + (na) n. \quad (2)$$

Вычисляя квадрат этого вектора

$$a^2 = 1 = \Delta_1 \varphi + (na)^2,$$

находим

$$na = \sqrt{1 - \Delta_1 \varphi}. \quad (3)$$

Вычислим теперь производные

$$\varphi_i = r_i a, \quad \varphi_{i|s} = h_{is}(na).$$

Предполагая, что в рассматриваемой окрестности $na \neq 0$, находим, согласно (3),

$$h_{is} = \frac{\varphi_{i|s}}{\sqrt{1 - \Delta_1 \varphi}}. \quad (4)$$

Итак, второй тензор поверхности выражен через горизонтальную функцию. Эта функция для данного линейного элемента не произвольна, а подчинена таким условиям, при которых тензор (4) удовлетворяет уравнениям Гаусса и Петерсона. Потребуем выполнения условия Гаусса:

$$\frac{1}{2} h_{is} h^{is} = K = \frac{\frac{1}{2} \varphi_{i|s} \varphi^{i|s}}{1 - \Delta_1 \varphi}$$

или

$$K(1 - \Delta_1 \varphi) = \Delta_{22} \varphi. \quad (5)$$

Условие Петерсона приводит точно к такому же уравнению:

$$\begin{aligned} h_{i|s}{}^s &= \frac{1}{1 - \Delta_1 \varphi} (\varphi_{i|s}{}^s \sqrt{1 - \Delta_1 \varphi} - \varphi_{i|s} (\sqrt{1 - \Delta_1 \varphi})_{|s}) = \\ &= (1 - \Delta_1 \varphi)^{-\frac{3}{2}} [K \tilde{\varphi}_i (1 - \Delta_1 \varphi) - \varphi_{i|s}{}^s \tilde{\varphi}^k \varphi_{k|s}] = 0. \end{aligned}$$

Вычислим слагаемое

$$\varphi_{i|s}{}^s \varphi_{k|s} \tilde{\varphi}^k = \frac{1}{2} \varepsilon_{ikh} \varphi_{p|s}{}^s \varphi^p{}_{|s} \tilde{\varphi}^k = \tilde{\varphi}_i \Delta_{22} \varphi.$$

Таким образом, условие Петерсона принимает вид

$$(1 - \Delta_1 \varphi)^{-\frac{3}{2}} \tilde{\varphi}_i [K(1 - \Delta_1 \varphi) - \Delta_{22} \varphi] = 0$$

и эквивалентно условию (5).

Уравнение (5) представляет собой уравнение с частными производными второго порядка типа Монжа — Ампера и называется *первым уравнением изгиба*.

Каждое решение этого уравнения определяет по формуле (4) тензор h_{is} , удовлетворяющий, как мы показали, условиям Гаусса и Петерсона, и следовательно, определяет поверхность до ее положения в пространстве.

2. Дарбу предложил другой способ получения первого уравнения изгибаения.

Рассмотрим линейный элемент поверхности

$$ds^2 = dr^2 = g_{is} du^i du^s = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (6)$$

Дифференциальная форма

$$g_{is}^* du^i du^s = (g_{is} - z_i z_s) du^i du^s = dx^2 + dy^2 \quad (7)$$

имеет нулевую гауссову кривизну. Обратное, если найдена функция z такая, что тензор

$$g_{is}^* = g_{is} - z_i z_s \quad (7')$$

является E -тензором, то, приводя форму (7) к сумме квадратов, мы найдем функции x и y такие, что будут выполнены равенства (7) и (6), откуда следует, что функции x, y, z будут координатами радиуса-вектора точки искомой поверхности. Преимущество метода Дарбу перед вышеизложенным методом Бианки в том, что две координаты x, y здесь определяются приведением квадратичной формы (7) к сумме квадратов.

Условия, при которых форма (7) имеет нулевую кривизну, найдем следующим образом. Обозначая направляющие орты сети $z_i \tilde{z}_s$ в метрике тензора g_{is} через

$$v_i = \frac{z_i}{\sqrt{\Delta_1 z}}, \quad \omega_i = \frac{\tilde{z}_i}{\sqrt{\Delta_1 z}},$$

находим из (7')

$$g_{is}^* = v_i v_s + \omega_i \omega_s - z_i z_s = v_i v_s (1 - \Delta_1 z) + \omega_i \omega_s.$$

Отсюда следует, что

$$v_i^* = v_i \sigma, \quad \omega_i^* = \omega_i \quad (\sigma = \sqrt{1 - \Delta_1 z})$$

являются направляющими ортами той же сети (z, \tilde{z}) в метрике тензора g_{is}^* . Это позволяет легко найти бивекторы

$$\varepsilon_{is}^* = v_i^* \omega_s^* - v_s^* \omega_i^* = \sigma \varepsilon_{is}, \quad \varepsilon^{is} = \frac{1}{\sigma} \varepsilon^{is}.$$

Найдем теперь трансверсальный вектор t_s^* поля v_i^* в метрике тензора g_{is}^* . Согласно (21;6) имеем

$$\begin{aligned} t_s^* &= \varepsilon^{mn} [v_s \partial_m v_n^* + w_s \partial_m w_n^*] = \\ &= \frac{1}{\sigma} \varepsilon^{mn} [\sigma v_s \partial_m (\sigma v_n) + w_s \partial_m w_n] = \\ &= \frac{1}{\sigma} \varepsilon^{mn} [v_s \partial_m v_n + w_s \partial_m w_n] + \frac{1}{\sigma} \varepsilon^{mn} [\sigma_m v_n \sigma + (\sigma^2 - 1) \partial_m v_n] v_s. \end{aligned}$$

Первое слагаемое равно $\frac{1}{\sigma} t_s$, где t_s — трансверсальный вектор поля z_s в исходной метрике $V_2(g_{is})$, а второе обращается в нуль:

$$\begin{aligned} &\varepsilon^{mn} [\sigma_m \sigma v_n + (\sigma^2 - 1) \partial_m v_n] = \\ &= \frac{(\sigma^2)_m z^m}{2 \sqrt{\Delta_1 z}} - \Delta_1 z \left(\frac{z_m}{\sqrt{\Delta_1 z}} \right)_| \cdot^m = -\frac{(\Delta_1 z)_m z^m}{2 \sqrt{\Delta_1 z}} + \frac{\Delta_1 z, z_m (\Delta_1 z)^m}{2 (\Delta_1 z)^{\frac{3}{2}}} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$t_s^* = \frac{1}{\sigma} t_s = (1 - \Delta_1 z)^{-\frac{1}{2}} t_s, \quad (8)$$

а гауссова кривизна формы (7)

$$K^* = \varepsilon^{sk} \partial_k t_s^* = \frac{1}{\sigma} \varepsilon^{sk} \partial_k \left(\frac{1}{\sigma} t_s \right) = \frac{1}{\sigma^2} (K + t^s \partial_s \ln \sigma).$$

Условие $K^* = 0$ приводит к уравнению

$$\begin{aligned} K &= t_s (\ln \sqrt{1 - \Delta_1 z})_| \cdot^s = \left(\frac{z^i}{\sqrt{\Delta_1 z}} \right)_| \cdot^s \frac{z_i}{\sqrt{\Delta_1 z}} \frac{-(\Delta_1 z)^s}{2(1 - \Delta_1 z)} = \\ &= \frac{1}{\Delta_1 z (1 - \Delta_1 z)} z_{i|s} z_{k|} \cdot^s \tilde{z}^k z^i = \\ &= \frac{1}{2\Delta_1 z (1 - \Delta_1 z)} z_{j|s} z_{i|} \cdot^j \cdot^s \varepsilon_{ikh} \tilde{z}^k z^i = \frac{\Delta_{22z}}{1 - \Delta_1 z}, \quad (9) \end{aligned}$$

совпадающему с первым уравнением изгиба (5).

Каждое решение этого уравнения z , для которого $\Delta_1 z \neq 1$, придает форме (7) нулевую кривизну. Приведем ее к сумме квадратов $dx^2 + dy^2$, мы найдем три координаты x, y, z поверхности, для которой заданный тензор g_{is} является метрическим.

3. Перейдем к составлению второго уравнения изгиба-
ния, в котором неизвестной функцией, определяющей
поверхность по ее первому тензору g_{ik} , является

$$\varrho = \frac{1}{2} r^2. \quad (10)$$

Найдем производные этой функции

$$Q_i = r r_i, \quad Q_{i|k} = g_{ik} + W h_{ik}, \quad (11)$$

где $W = r n$, и составим ее дифференциальные параметры

$$\Delta_2 \varrho = g^{ik} Q_{i|k} = 2 + 2HW, \quad (12)$$

$$\Delta_{22} \varrho = \frac{1}{2} Q_{i|k} Q^{i|k} = 1 + 2HW + KW^2. \quad (13)$$

Записывая разложение радиуса-вектора

$$r = r_i g^{ik} (r r_k) + (r n) n = r_i \tilde{q}^i + W n,$$

находим

$$r^2 = 2\varrho = \Delta_1 \varrho + W^2, \quad W^2 = 2\varrho - \Delta_1 \varrho. \quad (14)$$

Исключая из уравнений (12)–(14) функции H и W ,
получим искомое второе уравнение изгиба-
ния

$$\Delta_{22} \varrho + 1 = \Delta_2 \varrho + K (2\varrho - \Delta_1 \varrho). \quad (15)$$

Смысл этого уравнения в следующем. Каждое его реше-
ние ϱ позволяет найти по формуле (14) функцию W , и, со-
гласно (11), тензор

$$h_{ik} = \frac{Q_{i|k} - g_{ik}}{\sqrt{2\varrho - \Delta_1 \varrho}} \quad (16)$$

(предполагается, что $2\varrho - \Delta_1 \varrho > 0$).

Докажем, что этот тензор вместе с данным тензором g_{ik}
определяет поверхность. Условие Гаусса

$$\frac{1}{2} h_{is} h^{is} = \frac{\Delta_{22} \varrho - \Delta_2 \varrho + 1}{2\varrho - \Delta_1 \varrho} = K$$

выполняется в силу (15). Проверим условие Петерсона:

$$\begin{aligned} h_{i|k}{}^k &= (2\varrho - \Delta_1 \varrho)^{-\frac{3}{2}} [Q_{i|k} (2\varrho - \Delta_1 \varrho) - (Q_{i|k} - g_{ik}) \times \\ &\times (Q^k - \tilde{q}^s Q_s{}^k)] = (2\varrho - \Delta_1 \varrho)^{-\frac{3}{2}} [K \tilde{q}_i (2\varrho - \Delta_1 \varrho) - \\ &- Q_{i|k} Q^k + Q_{i|k} \tilde{q}^s Q_s{}^k + g_{ik} Q^k - g_{ik} \tilde{q}^s Q_s{}^k]. \quad (17) \end{aligned}$$

Подсчитаем отдельные слагаемые:

$$e_{i|h} q_{s|}^h \tilde{q}^s = \frac{1}{2} e_{i s} e_{j|h} q^j \tilde{q}^s = -\Delta_{22} q \tilde{q}_i,$$

$$g_{ih} \tilde{q}^s q_{s|}^h = g_{h}^s \tilde{q}_i q_{s|}^h + \delta_i^s g_{jh} \tilde{q}^j q_{s|}^h = -\Delta_2 q \tilde{q}_i + q_{i|}^h q_h.$$

Внося их значения в (17), получим

$$h_{is|}^s = (2q - \Delta_1 q)^{-\frac{3}{2}} [K(2q - \Delta_1 q) - \Delta_{22} q - 1 + \Delta_2 q] = 0$$

в силу того же уравнения (15). Предложение доказано.

Полученные здесь уравнения изгиба мы не раз используем в теории конгруэнций.

ГЛАВА IX
СПЕЦИАЛЬНЫЕ КЛАССЫ ПОВЕРХНОСТЕЙ

§ 95. Поверхности вращения

1. Вращая кривую $z = f(x)$ плоскости xOz вокруг оси Oz , мы получаем *поверхность вращения*

$$z = f(u) = f(\sqrt{x^2 + y^2}), \quad (1)$$

где $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ — расстояние точки поверхности от оси вращения. Параметрическое уравнение поверхности вращения:

$$r = u \cos v i + u \sin v j + f(u) k, \quad (2)$$

а ее линейный элемент в выбранной параметризации:

$$ds^2 = (1 + f'^2) du^2 + u^2 dv^2. \quad (3)$$

При изменении одного v точка поверхности описывает *параллель* — окружность, расположенную в плоскости $z = f(u)$, перпендикулярной оси вращения, и с центром на этой оси. Линии u (*меридианы*) — плоские; их плоскости проходят через ось вращения. Касательная к параллели в некоторой ее точке перпендикулярна плоскости меридиана, проходящего через эту точку. Отсюда следует, что нормаль поверхности вращения лежит в плоскости меридиана и совпадает с его главной нормалью. Это означает, что меридианы являются геодезическими линиями и линиями кривизны. Их ортогональные траектории — *параллели* — составляют второе семейство линий кривизны. Сеть линий кривизны будет изотермической, ибо замена параметра $u = \int \frac{1}{u} \sqrt{1 + f'^2} du$ приводит линейный элемент (3) к изотермическому виду

$$ds^2 = U^2(u) (du^2 + dv^2). \quad (4)$$

Так как, кроме того, эта сеть полугеодезическая, то она — сеть вращения, а метрика поверхности вращения является метрикой вращения.

2. К тому же результату можно прийти иначе. Рассмотрим точку поверхности вращения,двигающуюся равномерно по параллели. Если $\omega = \text{const}$ — вектор угловой скорости, то ее линейная скорость

$$\frac{dr}{dt} = r_k p^k = [\omega r], \quad (5)$$

где t — время и $p^k = \frac{du^k}{dt}$. Дифференцируя ковариантно обе части этого равенства, получаем

$$h_{ik} p^k n + r_k p^k{}_{|i} = [\omega r_i]. \quad (6)$$

Умножение обеих частей этого равенства на вектор $[r_s n]$ приводит к уравнению

$$p_{s|i} = \sigma g_{si}, \quad \sigma = -(\omega n), \quad (7)$$

которое является одной из форм уравнения Киллинга. Отсюда опять следует, что метрика поверхности вращения есть метрика вращения.

Запишем линейный элемент этой метрики в виде

$$ds^2 = \frac{dp^2}{\Delta_1 p} + \Delta_1 p dq^2, \quad (8)$$

где

$$p = \int p_k du^k, \quad q_k = \frac{\tilde{p}_k}{\Delta_1 p}, \quad q = \int q_k du^k. \quad (9)$$

Так как линии поля q_i , как геодезические, являются меридианами, а линии поля p_i — параллелями, то сравнение линейных элементов (3) и (8) дает

$$\frac{dp}{\sqrt{\Delta_1 p}} = \sqrt{1+f'^2} du, \quad u dv = \sqrt{\Delta_1 p} dq. \quad (10)$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} u &= c \sqrt{\Delta_1 p}, & dv &= \frac{1}{c} dq, & v &= \frac{1}{c} q, \\ dp &= \frac{u}{c} \sqrt{1+f'^2} du, & p &= \frac{1}{c} \int u \sqrt{1+f'^2} du, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где $c = \text{const}$,

Рассмотрим теперь произвольную метрику вращения с положительно определенной метрической формой. Чтобы построить соответствующую ей поверхность вращения, приведем линейный элемент к виду (8).

Задавая искомую поверхность уравнениями (2), будем, согласно предыдущему, иметь

$$u = c \sqrt{\Delta_1 p}, \quad v = \frac{1}{c} q, \quad du = cd \sqrt{\Delta_1 p},$$

$$\frac{dp^2}{\Delta_1 p} = du^2 + df^2$$

и профиль $z = f(u)$ искомой поверхности вращения определится квадратурой

$$f(u) = \int \sqrt{\frac{dp^2}{\Delta_1 p} - c^2 (d \sqrt{\Delta_1 p})^2}. \quad (12)$$

Изменяя постоянную c , мы будем получать различные поверхности вращения, наложимые друг на друга. Поверхность вращения, таким образом, допускает непрерывное однопараметрическое изгибание в поверхность вращения. При этом изгибании сеть линий кривизны (сеть вращения) сохраняется и является главным основанием изгибания.

3. Чтобы найти изгибания данной поверхности вращения (2) непостоянной кривизны в поверхность вращения $r(u_1 \cos v_1, u_1 \sin v_1, f_1(u_1))$, следует заметить, что

$$u_1 = c_1 \sqrt{\Delta_1 p} = \frac{c_1}{c} u = hu, \quad v_1 = \frac{1}{h} v.$$

Действительно, на такой поверхности сеть вращения (она же сеть линий кривизны) единственна, в силу чего линии кривизны ($p = \text{const}$, $q = \text{const}$) сохраняются. Далее,

$$df_1^2 = \frac{dp^2}{\Delta_1 p} - du_1^2 = df^2 + du^2 - h^2 du^2.$$

Отсюда находим уравнение новой поверхности

$$r = hu \cos \frac{v}{h} i + hu \sin \frac{v}{h} j + f_1(u_1) k, \quad (13)$$

где профиль $z = f_1(u_1)$ определяется квадратурой

$$f_1 = \int \sqrt{1 - h^2 + f'^2} du. \quad (14)$$

4. Геодезические линии поверхности вращения можно найти, пользуясь тем, что ее метрика допускает линейный интеграл геодезических (§ 52)

$$\tilde{p}_i v^i = \tilde{p}_i \frac{du^i}{ds} = \text{const.} \quad (15)$$

Координаты вектора \tilde{p}_i найдем, умножая обе части равенства (5) на r_i :

$$\begin{aligned} g_{ik} p^k &= -\tilde{p}_i = (\omega r r_i), \\ \tilde{p}_1 &= -(\omega r r_1) = 0, \quad \tilde{p}_2 = -u^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Уравнение (15) примет вид

$$\tilde{p}_2 \frac{dv}{ds} = \frac{-u^2 dv}{\sqrt{(1+f'^2) du^2 + u^2 dv^2}} = c$$

и определяет уравнение геодезических линий поверхности вращения

$$v = c \int \frac{\sqrt{1+f'^2}}{u \sqrt{u^2 - c^2}} du. \quad (17)$$

Уравнение (15) имеет следующее геометрическое истолкование. Если ψ — угол между геодезической линией и параллелью, то

$$\cos \psi = \frac{g_{is} p^i v^s}{\sqrt{\Delta_1 p}} = -\frac{c \tilde{p}_i v^i}{u} = \frac{c_1}{u}$$

и равенство

$$u \cos \psi = c_1 = \text{const} \quad (18)$$

выражает теорему Клеро: *произведение косинуса угла, под которым геодезическая линия пересекает параллель, на радиус параллели постоянно вдоль этой геодезической.*

5. Рассмотрим для примера *катеноид* — поверхность вращения цепной линии $z = a \operatorname{arcch} \frac{x}{a}$ вокруг оси Oz . Параметрическое уравнение (2) катеноида:

$$r = u \cos v i + u \sin v j + a \operatorname{arcch} \frac{u}{a} k,$$

а его линейный элемент:

$$ds^2 = \frac{u^2 du^2}{u^2 - a^2} + u^2 dv^2, \quad (19)$$

или

$$ds^2 = a^2 \operatorname{ch}^2 t (dt^2 + dv^2), \quad (20)$$

где положено

$$u = a \operatorname{ch} t.$$

§ 96. Одно характеристическое свойство поверхностей вращения

Докажем, что поверхность вращения характеризуется тем, что на ней полная и средняя кривизны K и H поверхности сохраняют постоянное значение на каждой линии кривизны одного из семейств этих линий. Необходимость этого условия очевидна: на каждой параллели поверхности вращения H и K сохраняют постоянные значения.

Предположим, что H и K , а следовательно, и главные кривизны σ_1 и σ_2 постоянны вдоль линий кривизны (v) .

Это значит, что

$$\sigma_i v^i = \sigma_i v^i = 0. \quad (1)$$

Если w^i — орт второго семейства линий кривизны, то второй тензор

$$h_{is} = \sigma_2 v_i v_s + \sigma_1 w_i w_s.$$

Учитывая равенства (1), имеем

$$\begin{aligned} h_{is|k} v^k &= [\sigma_2 (w_i v_s + v_i w_s) t_k - \sigma_1 (v_i w_s + w_i v_s) t_k] v^k = \\ &= (\sigma_2 - \sigma_1) \varepsilon (v_i w_s + w_i v_s), \end{aligned} \quad (2)$$

но $h_{is|k} = h_{ik|s}$, так что

$$\begin{aligned} h_{is|k} v^k &= h_{ik|s} v^k = (h_{ik} v^k)|_s - h_{ik} v^k|_s = \\ &= (-\sigma_1 w_i)|_s - h_{ik} w^k t_s = -\sigma_1 w_i + \sigma_1 v_i t_s - \sigma_2 v_i t_s = \\ &= -\sigma_1 w_i + (\sigma_1 - \sigma_2) v_i t_s. \end{aligned} \quad (3)$$

Сравнивая (2) и (3), получаем

$$(\sigma_2 - \sigma_1) \varepsilon (v_i w_s + w_i v_s) = -\sigma_1 w_i + (\sigma_1 - \sigma_2) v_i t_s, \quad (4)$$

что при свертывании с v^i дает

$$\sigma_s = (\sigma - \sigma) \varepsilon v_s. \quad (5)$$

Внося это значение для σ_s в (4), приходим к равенству

$$(\sigma - \sigma) (\varepsilon w_s + t_s) = 0.$$

Отсюда либо $\sigma = \sigma$, но тогда все точки поверхности омби-
лические и поверхность — либо сфера, либо плоскость
(§ 80, п. 3), либо $t_s = -\varepsilon w_s$. В последнем случае линии
кривизны (w) будут геодезическими и, следовательно,
плоскими (§ 81). Абсолютные кривизны этих линий, сов-
падая с их нормальными кривизнами σ , будут постоянны
вдоль любой линии кривизны семейства (v). Если, далее,
за начало отсчета дуг на линиях (w) принять точки одной
из линий (v), то, ввиду того что линии (v) являются орто-
гональными траекториями геодезических, длины дуг раз-
личных линий (w) в точках одной линии (v) будут равны.
Отсюда следует, что кривизны различных линий (w) явля-
ются одинаковыми функциями их длин, то есть что все
линии (w) конгруэнтны.

Докажем теперь, что линии кривизны семейства (v)
являются окружностями. Вектор v_s в правой части равен-
ства (5) градиентен ($v_{s_i}^s = -\varepsilon = 0$), а следовательно, его
интегрирующий множитель $(\sigma - \sigma) \varepsilon$ постоянен на ли-
ниях (v), но тогда на этих линиях постоянны и нормальная
и геодезическая кривизны, а потому постоянна и абсолют-
ная кривизна $K = \sqrt{\sigma^2 + \varepsilon^2}$. Кроме того, линии (v) плос-
кие. Действительно, вектор бинормали этой линии $\beta =$
 $= \sigma w + \varepsilon n$, а его производная

$$\frac{d\beta}{ds} = \beta_k v^k = 0.$$

Отсюда следует равенство нулю кручения этих линий.

Таким образом, линии (v) — окружности.

Рассмотрим одну из этих окружностей v_0 . Исследуемая
поверхность составлена из плоских конгруэнтных между

собой линий (w), соответствующие точки которых лежат на окружности v_0 .

Плоскость этой окружности пересекает поверхность под постоянным углом $\theta \left(\operatorname{tg} \theta = \frac{v}{\sigma} \right)$, следовательно, касательные к линиям (w) в различных точках окружности v_0 образуют с ее плоскостью постоянный угол и получаются, таким образом, друг из друга вращением вокруг оси этой окружности (то есть вокруг перпендикуляра к плоскости этой окружности в ее центре).

Последнее и означает, что наша поверхность есть поверхность вращения.

§ 97. Винтовые поверхности

1. Если кривая L совершает *винтовое движение*, то есть, равномерно вращаясь вокруг оси, одновременно совершает равномерное поступательное перемещение в направлении этой же оси, то она описывает *винтовую поверхность*. Не ограничивая общности, можно считать, что кривая L лежит в плоскости оси вращения. Принимая ось Oz за ось вращения и задавая уравнение образующей кривой L уравнением $z = f(u)$, получим параметрическое уравнение винтовой поверхности

$$r = u \cos v i + u \sin v j + (f(u) + hv) k \quad (h = \text{const}) \quad (1)$$

и ее линейный элемент

$$ds^2 = (1 + f'^2) du^2 + 2hf' du dv + (u^2 + h^2) dv^2. \quad (2)$$

2. Обозначим, как и в случае поверхности вращения, через $\omega(0, 0, 1)$ вектор угловой скорости вращения. Линейную скорость $\frac{dr}{dt}$ точки винтовой поверхности, приобретаемой в результате винтового движения, которым образована винтовая поверхность, можно записать так:

$$\frac{dr}{dt} = r_s p^s = [\omega r] + h\omega, \quad (3)$$

где $h = \text{const}$ — скорость поступательного движения.

Дифференцируя обе части этого равенства, находим

$$\begin{aligned} h_{is} p^s n + r_s p^s |i &= [\omega r_i], \\ g_{ks} p^s |i &= -\tilde{p}_{k|i} = \omega r_i r_k = (\omega n) \varepsilon_{ik}, \\ p_{k|i} &= \sigma g_{ik}, \quad \sigma = -\omega n. \end{aligned} \quad (4)$$

Вектор p_k удовлетворяет уравнению Киллинга. Отсюда следует теорема Бура: метрика винтовой поверхности есть метрика вращения, и винтовую поверхность можно наложить на поверхность вращения так, что винтовые линии — траектории винтового движения, образующего поверхность, — наложатся на параллели. Этот же результат сразу получится из того, что винтовое движение переводит винтовую поверхность в себя, откуда следует, что метрика этой поверхности допускает одночленную группу движений, а винтовые линии являются траекториями этой группы.

Принимая за координатные линии винтовые линии и их ортогональные траектории, то есть линии сети вращения, линейный элемент винтовой поверхности можно записать в виде (45;24)

$$ds^2 = \frac{dp^2}{\Delta_1 p} + \Delta_1 p dq^2, \quad (5)$$

где p — потенциал вектора p_i будет функцией u .

Если теперь записать линейный элемент (2) в виде

$$ds^2 = \left(1 + \frac{u^2 f'^2}{u^2 + h^2}\right) du^2 + (u^2 + h^2) \left(dv + \frac{hf' du}{u^2 + h^2}\right)^2 \quad (6)$$

и сравнить с (5), то получим

$$\begin{aligned} u^2 + h^2 &= c^2 \Delta_1 p, \quad dv + \frac{hf'}{c^2 \Delta_1 p} = \frac{1}{c} dq, \\ \frac{dp^2}{\Delta_1 p} &= \left(1 + \frac{u^2 f'^2}{u^2 + h^2}\right) du^2. \end{aligned} \quad (7)$$

3. Отыскание винтовой поверхности по ее внутренней геометрии проводится аналогично соответствующей задаче для поверхности вращения: задавая искомую поверхность уравнением (1), а линейный элемент — формулой (5), находим, согласно (7),

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{c^2 \Delta_1 p - h^2}, \quad f = c \int \sqrt{\frac{dp^2 - \Delta_1 p du^2}{c^2 \Delta_1 p - h^2}}, \\ v &= \frac{1}{c} q - \frac{h}{c^2} \int \frac{df}{\Delta_1 p}. \end{aligned} \quad (8)$$

Функции u , f , v выражены через известные величины. Их подстановка в (1) определит искомую винтовую поверхность. Наличие постоянной c показывает, что винтовая поверхность допускает непрерывное однопараметрическое изгибание в винтовую же поверхность.

При $h = 0$ винтовая поверхность переходит в поверхность вращения, а второе из уравнений (8) — в уравнение (95;12).

4. Рассмотрим для примера винтовую поверхность, наложимую на катеноид. Линейный элемент ее:

$$ds^2 = a^2 \operatorname{ch}^2 t (dt^2 + d\tau^2).$$

Сравнивая его с (5), находим

$$\Delta_1 p = a^2 \operatorname{ch}^2 t, \quad dp = a^2 \operatorname{ch}^2 t dt, \quad q = \tau.$$

Полагая в (8) $a = c = h = 1$, найдем

$$u = \operatorname{sh} t, \quad f = c_1 = \operatorname{const}, \quad v = \tau. \quad (9)$$

Искомая поверхность получается винтовым движением прямой $z = f(u) = c_1$, перпендикулярной оси этого движения, и называется *геликоидом*. Уравнение геликоида, согласно (1) и (9):

$$r = u \cos \tau i + u \sin \tau j + (c_1 + \tau) k.$$

§ 98. Спиральные поверхности

Если кривая, совершая винтовое движение, одновременно подвергается подобному преобразованию с коэффициентом подобия, пропорциональным углу поворота, и с постоянным центром подобия, расположенным на оси вращения, то она описывает *спиральную поверхность*. Найдем траектории точек кривой в указанном движении. Совместим начало координат с центром подобия, ось Oz — с осью вращения и обозначим через

$$\omega (0, 0, \omega), \quad l = \operatorname{const}, \quad k = th \quad (h = \operatorname{const})$$

вектор угловой скорости, поступательную скорость и коэффициент подобия. Скорость точки будет

$$\frac{dr}{dt} = r_k p^k = [\omega r] + l\omega + hr. \quad (1)$$

Перенося начало координат в точку $-\frac{l}{h}\omega$, мы уничтожим среднее слагаемое правой части и придем в координатной записи к системе

$$\frac{dx}{dt} = -\omega y + hx, \quad \frac{dy}{dt} = \omega x + hy, \quad \frac{dz}{dt} = hz. \quad (2)$$

Решение этой системы:

$$x = ce^{ht} \cos(b + \omega t), \quad y = ce^{ht} \sin(b + \omega t), \quad z = de^{ht}, \quad (3)$$

где b, c, d — произвольные постоянные.

Полученные траектории точек будут располагаться на конусах $\frac{1}{z^2}(x^2 + y^2) = \text{const}$. Их проекции на плоскость xOy — логарифмические спирали. Если за b, c, d принять произвольные функции переменного τ , то уравнения (3) определяют произвольную спиральную поверхность.

Дифференцируя ковариантно обе части равенства (1), получаем

$$h_{ik}p^k n + r_k p^k |_{i} = [\omega r_i] + hr_i,$$

откуда после умножения на вектор $[r_k n]$ приходим к уравнению

$$p_{i|k} = \sigma g_{ik} + h\varepsilon_{ik}. \quad (4)$$

Это уравнение — частный случай обобщенного уравнения Киллинга — рассмотрено в п. 2в), § 46. Сеть (p, \tilde{p}) , составленная из траекторий спирального движения и их ортогональных траекторий, будет спиральной сетью. Инвариантный признак метрики, допускающей спиральную сеть, найденный в § 46, является инвариантным признаком поверхности, наложимой на спиральную.

В параметрах спиральной сети линейный элемент приводится к виду (46;23)

$$ds^2 = U^2(u) e^{2v} (du^2 + dv^2). \quad (5)$$

Чтобы найти спиральную поверхность с заданным линейным элементом (5), запишем ее уравнение в виде

$$r = \varrho(u) e^v \cos(\omega(u) + hv) i + \varrho(u) e^v \sin(\omega(u) + hv) j + \sigma(u) e^v k. \quad (6)$$

Сравнивая линейный элемент этой поверхности с линейным элементом (5), получаем

$$\begin{aligned} U^2 &= \varrho^2 (1 + h^2) + \sigma^2, \\ 0 &= \varrho\varrho' + \sigma\sigma' + h\varrho^2\omega', \\ U^2 &= \varrho^2\omega'^2 + \sigma'^2 + \varrho'^2. \end{aligned}$$

Определяя из первых двух уравнений

$$\varrho^2 = \frac{U^2 - \sigma^2}{1 + h^2}, \quad \omega' = -\frac{h\sigma\sigma' + \frac{1}{h}UU'}{U^2 - \sigma^2} \quad (7)$$

и внося эти значения в третье уравнение, приходим к дифференциальному уравнению

$$\sigma^2 + \sigma'^2 = U^2 - \frac{1}{h^2} U'^2. \quad (8)$$

Каждое решение σ этого уравнения позволяет найти из (7) функции ϱ и ω , то есть определяет искомую спиральную поверхность. Его общее решение определяет ∞^1 наложимых друг на друга спиральных поверхностей.

§ 99. Линейчатые поверхности

1. Поверхность, описанная непрерывным перемещением прямой линии, называется *линейчатой*. Прямые, принадлежащие этой поверхности, называются *прямолинейными образующими*, а каждая кривая, пересекающая все прямолинейные образующие, — *направляющей кривой*.

Если $\varrho = \varrho(v)$ — радиус-вектор точки направляющей кривой, а $m = m(v)$ — единичный вектор образующей, проходящей через точку $\varrho(v)$, то уравнение линейчатой поверхности будет

$$r = \varrho(v) + um(v), \quad (1)$$

где u — абсцисса точки на прямолинейной образующей. Линейный элемент этой поверхности:

$$ds^2 = du^2 + 2m\varrho' du dv + (\varrho'^2 + 2m'\varrho'u + m'^2u^2) dv^2. \quad (2)$$

2. Прямолинейные образующие линейчатой поверхности составляют одно семейство асимптотических и вместе с тем геодезических линий. Обратно, если асимптотическая

сеть поверхности — полугеодезическая, то поверхность будет линейчатой. Частным случаем линейчатых поверхностей являются поверхности второго порядка. Асимптотическая сеть поверхности второго порядка — геодезическая и составлена из двух семейств прямолинейных образующих (вещественных или комплексно сопряженных).

Таким образом, линейчатая поверхность характеризуется тем, что ее асимптотическая сеть полугеодезическая, а квадрика — тем, что эта сеть геодезическая.

Прямая линия линейчатой поверхности, не принадлежащая семейству прямолинейных образующих, называется *прямолинейной направляющей*. Поверхность с одной прямолинейной направляющей представляет собой геометрическое место прямых, пересекающих одну данную прямую. Если эта прямая несобственная (бесконечно удалена), то все прямолинейные образующие параллельны одной направляющей плоскости. Такие поверхности называются *поверхностями Каталана*. *Коноидом* называют поверхность Каталана, на которой есть вторая (собственная) прямолинейная направляющая. Поверхности с двумя прямолинейными направляющими являются проективными преобразованиями коноидов. Наконец, поверхность с тремя прямолинейными направляющими есть поверхность второго порядка.

3. Обратимся к инвариантному признаку поверхности, наложимой на линейчатую поверхность или квадрику.

Для того чтобы поверхность налагалась на линейчатую, необходимо и достаточно существование виртуально-асимптотической полугеодезической сети, чебышевский вектор которой $a_i = \frac{1}{4} \partial_i \ln K$. В соответствии с результатами § 30, п. 7 *инвариантный признак поверхности, наложимой на линейчатую, складывается из требований: 1) сеть, определяемая тензором*

$$b_{is} = a_{i|s} - a_s a_i - K g_{is}, \quad (3)$$

полугеодезическая, 2) направляющий орт v^i геодезического семейства этой сети становится градиентом после умножения на e^a , так что

$$e^a v_i = \varphi_i = \partial_i \varphi. \quad (4)$$

Второе условие можно также записать в виде

$$a_i v^i + v_i |^i = 0. \quad (5)$$

Инвариантный признак поверхности, наложимой на неразвертывающуюся quadriку, состоит из требования: сеть, определяемая тензором (3), — геодезическая и виртуально-асимптотическая.

4. Из теорем § 30 о полугеодезических сетях следует ряд теорем о изгибании линейчатых поверхностей.

Теорема Бонне: *если поверхность изгибается с сохранением одного семейства асимптотических, то это семейство геодезическое, а поверхность линейчатая, так как асимптотические сети данной поверхности и ее изгибания связанные, а их чебышевские векторы равны (§ 30, п. 1).*

Теорема Бельтрами: *линейчатую поверхность всегда можно, и притом единственным способом, изогнуть так, что данная произвольная ее линия станет асимптотической, ибо полугеодезическая сеть с данным семейством геодезических и данным чебышевским вектором однозначно определяется одной линией второго семейства (§ 30, п. 3).*

Вторая теорема Бонне: *если неразвертывающиеся линейчатые поверхности S и \dot{S} наложимы, то либо семейства (v) и (w) их прямолинейных образующих соответствуют, либо обе они изгибаются в поверхность второго порядка, на которой сеть (v, w) асимптотическая. Действительно, если семейства (v) и (w) различны, то мы имеем две отдельные полугеодезические сети (асимптотические сети поверхностей S и \dot{S}) с равными чебышевскими векторами $a_i = \frac{1}{4} \partial_i \ln K$.*

Но тогда сеть (v, w) геодезическая и виртуально-асимптотическая (§ 30, п. 5), что и доказывает теорему.

5. Рассмотрим две бесконечно сближающиеся прямолинейные образующие и предельное положение их общего перпендикуляра. Точка прямолинейной образующей, через которую в пределе проходит этот общий перпендикуляр, называется *стрикционной точкой*. Геометрическое место стрикционных точек называется *стрикционной линией* или *линией сжатия*.

Если $\mathbf{q} + t\mathbf{u}$ и $\mathbf{q} + \Delta\mathbf{q} + (t + \Delta t)(\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u})$ — радиусы-векторы точек стрикционной линии на двух смежных

образующих, то главная часть их разности $d\mathbf{q} + u\,dm + m\,du$ должна быть ортогональна векторам m и $m + dm$. Из вытекающей отсюда ее ортогональности вектору dm находим абсциссу стрикционной точки

$$u = -\frac{d\mathbf{q}\,dm}{dm^2} = -\frac{\mathbf{q}'m'}{m'^2}. \quad (6)$$

В случае цилиндрической поверхности $m = \text{const}$ и стрикционная точка неопределенна. На разvertyвающихся поверхностях (6) определяет точку ребра возврата.

6. Докажем, что стрикционная линия есть геометрическое место точек, в которых обращаются в нуль геодезические кривизны $\tilde{\varepsilon}$ ортогональных траекторий прямолинейных образующих.

Орт прямолинейной образующей v^i , по формулам § 36 для линейного элемента (2) имеет координаты $v^1 = \frac{1}{A} = 1$, $v^2 = 0$, следовательно,

$$v_1 = 0, \quad v_2 = \varepsilon_{12}v^1 = \varepsilon = \sqrt{\mathbf{q}'^2 + 2m'\mathbf{q}'u + m'^2u^2 - (m\mathbf{q}')^2},$$

$$\tilde{\varepsilon} = -v_{k1}{}^k = \varepsilon^{12}(\partial_1v_2 - \partial_2v_1) = \partial_1 \ln \varepsilon = \frac{m'\mathbf{q}' + m'^2u}{\varepsilon^2}.$$

В точках стрикции, где u принимает значение (6), эта кривизна обращается в нуль, что и требовалось доказать.

Таким образом, стрикционная линия определена ее свойствами во внутренней геометрии линейчатой поверхности, и мы можем утверждать, что при изгибании линейчатой поверхности стрикционная линия сохраняется. Исключение представляет изгибание линейчатой поверхности, наложимой на квадрату, рассмотренное в п. 4.

По теореме Бельтрами п. 4 существует единственное изгибание линейчатой поверхности S в поверхность S_0 , на которой стрикционная линия является одновременно и асимптотической. Будем в дальнейшем называть поверхность S_0 канонической формой для совокупности наложимых друг на друга линейчатых поверхностей.

Чтобы построить линейчатую поверхность, на которой данная произвольная кривая L , заданная уравнением $\mathbf{q} = \mathbf{q}(v)$ (v — длина дуги), асимптотическая и стрикционная, примем ее за направляющую кривую. Так как ее соприкасающаяся плоскость должна совпадать с касатель-

ной плоскостью искомой поверхности, то орт $m(v)$ прямой образующей можно разложить по ортам τ и ν касательной и главной нормали кривой L :

$$m = \tau \cos \theta + \nu \sin \theta.$$

Кривая L будет стрикционной тогда и только тогда, когда

$$m'q' = m'\tau = -\sin \theta (\theta' + k) = 0,$$

где k — кривизна этой кривой. Следовательно, угол θ определяется квадратурой

$$\theta = - \int k dv + \text{const.}$$

7. Вычислим геодезическую кривизну ε_0 направляющей кривой. Геодезическая кривизна линий (w) (то есть линий $u = \text{const}$) линейного элемента (2) вычисляется по формуле (36;20), где следует положить $A = 1$,

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{C} \left(\omega_v - \frac{A_v \cos \omega - C_u}{A \sin \omega} \right) = \frac{1}{C} \left(\omega_v + \frac{C_u}{\sin \omega} \right), \quad (7)$$

где

$$C \cos \omega = m q', \quad C^2 = q'^2 + 2m'q'u + m'^2 u^2.$$

Если для простоты считать, что v есть длина дуги направляющей, то $q'^2 = 1$ и $m q' = \cos \theta$, где θ — угол наклона направляющей кривой к образующим.

При этих условиях имеем

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_w|_{u=0} = \frac{m'q'}{\sin \theta} + \theta'.$$

Отсюда следует теорема Бонне: *если для линии на линейчатой поверхности из трех требований:*

- 1) она геодезическая,
 - 2) она стрикционная,
 - 3) угол ее наклона к прямолинейным образующим постоянен,
- выполнены два, то выполнено и третье.

Произвольная линейчатая поверхность специального вида, на которой эти три требования выполняются, может быть построена следующим образом. Произвольную кривую L принимаем за направляющую, а за прямолинейные обра-

зующие берем прямые спрямляющей плоскости, составляющие с касательными кривой L постоянный угол. В частности, каждая кривая является геодезической стрикционной линией поверхности ее бинормалей.

Рассмотрим каноническую форму такой поверхности. Ее стрикционная линия будет на ней и асимптотической и геодезической, то есть прямой линией. Следовательно, линейчатые поверхности с геодезической стрикционной линией изгибаются в поверхность с прямолинейной направляющей, пересекающей прямолинейные образующие под постоянным углом.

Принимая стрикционную геодезическую за направляющую, мы приведем линейный элемент поверхности к виду

$$ds^2 = du^2 + 2 \cos \theta_0 du dv + (1 + m'^2 u^2) dv^2, \quad (8)$$

где θ_0 — угол наклона стрикции к образующим, а v — длина дуги стрикции. При $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ канонической формой поверхности является прямой коноид, а ее линейный элемент

$$ds^2 = du^2 + (1 + m'^2 u^2) dv^2. \quad (9)$$

Рассмотрим теперь линейчатую поверхность, образованную бинормалью произвольной кривой постоянного кручения. Если эта кривая принята за направляющую, то m'^2 , как квадрат производной вектора бинормали по длине дуги, будет равен квадрату кручения τ и будет постоянен. Но тогда вид линейного элемента

$$ds^2 = du^2 + (1 + \tau^2 u^2) dv^2 \quad (10)$$

показывает, что эта поверхность наложима на геликоид.

8. Рассмотрим *линейчатую поверхность, наложимую на поверхность вращения*. Семейство (v) ее прямолинейных образующих при автоморфизмах внутренней геометрии переходит либо в новые геодезические семейства, либо в себя. В первом случае поверхность допускает ∞^1 полу-геодезических сетей с равными чебышевскими векторами и может быть только развертывающейся (§ 30, п. 5).

Рассмотрим второй случай. Если каждая линия (v) переходит в себя, то траектории группы, то есть меридианы, будут геодезическими, а сеть вращения будет

декартовой. На поверхности с вещественными образующими эта сеть отлична от изотропной, но тогда существуют две декартовы сети и поверхность развертывающаяся. Если же эта сеть совпадает с изотропной, то поверхность — шар. Предположим теперь, что линии (v) переходят друг в друга. Стрикционная линия в этом случае должна переходить в себя, но тогда она совпадает с одной из параллелей и пересекает все линии (v) под постоянным углом. По теореме Бонне (п. 7) эта линия будет геодезической. Принимая ее за направляющую, мы приведем линейный элемент к виду (8). Гауссова кривизна его

$$K = -\frac{m'^2 \sin^2 \theta_0}{(m'^2 u^2 + \sin^2 \theta_0)^2} \quad (11)$$

в точках стрикции (где $u = 0$) принимает значение $K_0 = -\frac{m'^2(v)}{\sin^2 \theta_0}$ и должна, как на всякой параллели, быть постоянна. Следовательно, $m'^2(v) = a^2 = \text{const}$ и линейный элемент принимает вид

$$ds^2 = du^2 + 2 \cos \theta_0 du dv + (1 + a^2 u^2) dv^2. \quad (12)$$

Если $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, то $ds^2 = du^2 + (1 + a^2 u^2) dv^2$, и поверхность наложима на катеноид (см. § 95, п. 5) или на прямой геликоид (п. 7).

Пусть $\theta_0 \neq \frac{\pi}{2}$. Докажем, что поверхность является изгибанием однополостного гиперboloида вращения.

Горловой круг гиперboloида $\mathbf{p}(v) = l(\cos v \mathbf{i} + \sin v \mathbf{j})$ примем за направляющую. Вектор образующей будет $\mathbf{m} = (-\sin v \mathbf{i} + \cos v \mathbf{j}) \cos \theta_0 + \sin \theta_0 \mathbf{k}$, где θ_0 угол наклона образующей к плоскости xOy . Линейный элемент гиперboloида

$$ds^2 = du^2 + 2l \cos \theta_0 du dv + (l^2 + u^2 \cos^2 \theta_0) dv^2$$

заменой $lv = v^*$, $\cos^2 \theta_0 = l^2 a^2$ приведется к виду (12).

Таким образом, *линейчатая поверхность с вещественными прямолинейными образующими, наложимая на поверхность вращения, есть либо изгибание прямого геликоида, либо изгибание однополостного гиперboloида вращения.*

9. Однополостный гиперboloид вращения есть линейчатая поверхность вращения. Докажем, что других нераз-

вертывающихся линейчатых поверхностей вращения нет. Автоморфизмы такой поверхности соответствуют вращениям ее вокруг оси. Прямолинейные образующие при этих вращениях должны переходить в себя, ибо в противном случае поверхность будет развертывающейся. Но тогда поверхность образована вращением одной из образующих вокруг оси. Исключив случай, когда эта образующая пересекает ось, приводящий к конусу или плоскости, мы получим однополостный гиперболоид.

10. Докажем, что *прямой геликоид есть единственная линейчатая минимальная поверхность.*

Так как асимптотическая сеть такой поверхности ортогональна, то ортогональные траектории ее прямолинейных образующих, являются асимптотическими линиями. Главные нормали этих линий должны лежать в касательных плоскостях и совпадают, таким образом, с прямолинейными образующими. Следовательно, второе семейство асимптотических линий есть семейство кривых Бертрана с общими главными нормальными. Каждая такая кривая является винтовой линией ([7]), а рассматриваемая поверхность, как поверхность нормалей винтовой линии, — геликоид.

11. Предел отношения кратчайшего расстояния между двумя бесконечно сближающимися образующими линейчатой поверхности к углу между ними называется *параметром распределения.*

Так как кратчайшее расстояние двух бесконечно близких образующих

$$\Delta l \approx \frac{m \, dm \, dr}{|[m \, dm]|},$$

а квадрат элемента угла между ними

$$\Delta \varphi^2 \approx [m \, dm]^2 = dm^2,$$

то параметр распределения p выражается формулой

$$p = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{\Delta \varphi} = \frac{m \, dm \, dr}{dm^2}. \quad (13)$$

Развертывающаяся поверхность характеризуется тем, что ее параметр распределения равен нулю.

§ 100. Поверхности переноса

Рассмотрим две кривые $R = U_1(u)$ и $R = V_2(v)$, пересекающиеся в некоторой точке M_0 с радиусом-вектором $U(u_0) = V(v_0)$. Если одну из них переносить параллельно так, чтобы ее точка M_0 скользила по другой, то получим *поверхность переноса*

$$r = U(u) + V(v) - U(u_0). \quad (1)$$

Линии $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ называются ее *линиями переноса*, а сеть, составленная ими, — *сетью переноса*.

Поверхности переноса были предметом исследования многих авторов. С. Ли подробно исследовал поверхности с двумя или большим числом сетей переноса. Основным результатом, полученным им, является теорема: *если поверхность имеет две сети переноса, то несобственные точки касательных к линиям этих сетей лежат на алгебраической кривой четвертого порядка*; обратно, по произвольной алгебраической кривой четвертого порядка, лежащей на несобственной плоскости, можно построить поверхность с двумя сетями переноса, так что несобственные точки касательных к линиям переноса будут описывать выбранную кривую [94].

Другие доказательства этой теоремы были предложены Пуанкаре [95], [96] и Дарбу [1] т. I.

Рейдемейстер [98] доказал, что каждая линейчатая поверхность переноса имеет ∞^1 сетей переноса.

Поверхность переноса можно охарактеризовать тем, что одна из ее кривых (линия переноса) переходит в линию, лежащую на той же поверхности, под воздействием преобразований одночленной группы параллельных переносов.

Заменяя эту группу произвольной непрерывной одночленной группой G , Н. Г. Чеботарев [84] пришел к обобщенной поверхности переноса относительно группы G .

Н. В. Ефимов [37], применяя тензорные методы, дал инвариантную характеристику поверхностей с одной, двумя или бесчисленным числом сетей переноса.

В работе автора [64] получены конечные уравнения всех аффинно различных поверхностей переноса с ∞^1 сетей переноса.

1. Касательные к одному семейству линий переноса, взятые вдоль линий другого семейства, параллельны, отсюда следует, что *сеть переноса есть чебышевская сопряженная сеть*. К тому же результату мы придем аналитически, если заметим, что вектор (1) диагонален¹⁾ относительно сети переноса. Если A_i^s — аффинор этой сети, то последнее означает, что

$$A_i^s r_s = R_i = \partial_i R. \quad (2)$$

Из условия интегрируемости

$$[A_i^s r_s]_i^{\dagger} = A_{ij}^s r_s + A_i^s h_s^i n = 0 \quad (3)$$

следует, что $A_{ij}^s = 0$, $A_i^s h_s^i = 0$, то есть справедливость утверждения. Обратное, *чебышевская и сопряженная сеть является сетью переноса*, а поверхность, допускающая такую сеть, — поверхностью переноса. Для доказательства достаточно заметить, что выполнение равенства (3) означает диагональность вектора r относительно сети A_i^s , и если сеть A_i^s координатная, то $r = U(u) + V(v)$.

Поверхность переноса (1), как отметил С. Ли, можно рассматривать как геометрическое место середин всевозможных отрезков, соединяющих точки двух кривых

$$r_1 = 2U(u) \text{ и } r_2 = 2V(v).$$

2. Предположим, что поверхность переноса является развертывающейся. Асимптотическая сеть такой поверхности вырождается в дважды взятое семейство прямолинейных образующих, в силу чего направление образующей сопряжено произвольному направлению. Отсюда следует, что одно семейство линий сети переноса совпадает с семейством прямолинейных образующих. Переноса параллельно одну из линий второго семейства вдоль одной из этих образующих, мы получим либо цилиндр, либо плоскость, следовательно, *развертывающаяся поверхность переноса может быть только цилиндрической или плоскостью*.

3. Инвариантным признаком поверхности переноса является признак существования сопряженной чебышевской сети. Принимая асимптотическую сеть поверхности

¹⁾ Мы называем вектор *диагональным* относительно сети, если этим свойством обладает каждая его координата.

за сеть A_1 и определяя сеть переноса аффинором

$$B_i^s = A_2^s \cos \omega + A_3^s \sin \omega, \quad (4)$$

где A_1 и A_2 — две произвольные аполярные друг другу сопряженные сети, мы приходим к задаче § 69. Угол ω определяется уравнением (69;3')

$$\omega_i = -\alpha_1 \sin 2\omega + \bar{\alpha}_1 \cos 2\omega - \bar{p}_i, \quad (5)$$

где

$$p_i = 2b_i - a_2 - a_3 = -a_2 - a_3.$$

Условие интегрируемости этого уравнения (69;4')

$$\begin{aligned} (\alpha_{i1}^i - 2\alpha_1 p^i) \sin 2\omega - (\bar{\alpha}_{i1}^i - 2\bar{\alpha}_1 p^i) \cos 2\omega + \\ + (\bar{p}_{i1}^i - 2\bar{\alpha}_1 \alpha^i) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

определяет два значения угла ω . Внося эти значения в уравнение (5), мы получим признак существования одной или двух сетей переноса.

Из теоремы § 69 следует, что поверхность с тремя сетями переноса имеет ∞^1 таких сетей и характеризуется обращением в нуль всех коэффициентов уравнения (6):

$$\left. \begin{aligned} 1) \alpha_{i1}^i - 2\alpha_1 p^i = 0, \\ 2) \bar{\alpha}_{i1}^i - 2\bar{\alpha}_1 p^i = 0, \\ 3) \bar{p}_{i1}^i - 2\bar{\alpha}_1 \alpha^i = 0. \end{aligned} \right\} (7)$$

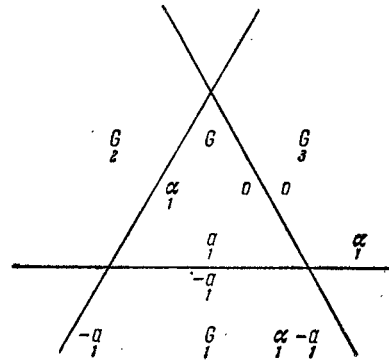


Схема V.

Поверхность переноса назовем *специальной*, если ее сеть переноса изотермически сопряженная. Если эта сеть переноса принята за сеть A_3 тройки сетей A_1, A_2, A_3 , то мы придем к схеме V. Условие изотермичности

сети A (§ 82, п. 6):

$$\alpha_i - a_i = \text{grad.}$$

Так как в нашем случае чебышевский вектор $a_i = a_i$ асимптотической сети градиентен, то специальная поверхность переноса характеризуется градиентностью геодезического вектора α_i асимптотической сети относительно сети переноса.

Сопряженная сеть A имеет равные точечные инварианты (ее чебышевский вектор $\alpha_i = \partial_i \alpha = \text{grad}$) и определяет поверхность Q_2 , присоединенную исходной поверхности S . Радиус-вектор R этой поверхности является решением уравнения

$$R_i = e^{2\alpha} A_i^s r_s. \quad (8)$$

Поверхность Q_2 будет поверхностью второго порядка. Действительно, ее асимптотическая сеть соответствует сети A , так как

$$H_{ik} = -R_i n_k = -e^{2\alpha} A_i^s r_s n_k = e^{2\alpha} A_i^s A_{sk} = -e^{2\alpha} A_{ik},$$

а сеть A во внутренней геометрии G поверхности Q_2 геодезическая.

Докажем, что касательные к линиям сети переноса параллельны прямолинейным образующим поверхности Q_2 . Пусть v_i и w_i — направляющие векторы сети переноса и, следовательно, асимптотической сети поверхности Q_2 . Из (8) получаем, в силу аполлярности сетей A и A ,

$$R_i v^i = e^{2\alpha} A_i^s v^i r_s = \sigma r_s w^s,$$

что и доказывает наше утверждение.

Развертывающиеся поверхности касательных к различным линиям переноса одного семейства пересекают несобственную плоскость по одной и той же кривой. Назовем эту кривую s -кривой данного семейства линий переноса,

а совокупность двух таких кривых (c - и c -кривых), соответствующих семействам (v) и (w) линий сети переноса, — c -кривой сети переноса. Из предыдущего результата следует, что c -кривая специальной сети переноса есть кривая второго порядка — та кривая, по которой присоединенная поверхность второго порядка Q_2 пересекает несобственную плоскость.

Докажем обратное предложение: если c -кривая сети переноса есть кривая второго порядка, то эта сеть переноса специальная. Заметим сначала, что если рассматриваемая поверхность переноса неразвертывающаяся (то есть не цилиндр и не плоскость), то ее касательные плоскости, а следовательно, и несобственные прямые этих плоскостей зависят от двух параметров. Так как каждая такая прямая пересекает c -кривую в двух различных точках, то эта кривая не может вырождаться в пару совпавших прямых.

Из этого замечания следует, что через рассматриваемую c -кривую можно провести бесконечное число неразвертывающихся поверхностей второго порядка¹⁾. Пусть Q_2 одна из таких поверхностей. Ее прямолинейные образующие пересекают несобственную плоскость по c -кривой. Между S и Q_2 можно установить соответствие Петерсона так, что сети переноса поверхности S будет соответствовать асимптотическая сеть поверхности Q_2 : если M_1 и M_2 — несобственные точки касательных к сети переноса в точке поверхности M , то ей ставится в соответствие точка M' поверхности Q_2 , лежащая на прямолинейных образующих, проходящих через точки M_1 и M_2 . Пусть в этом соответствии установлена общая параметризация, v^i и w^i — направляющие векторы сети переноса поверхности S , следовательно, асимптотической сети поверхности Q_2 , а r и R — радиусы-векторы этих поверхностей. Касательные к линиям сети (v , w) на поверхностях S и Q_2 параллельны. Если бы были параллельны соответствующи-

¹⁾ Если $f(x, y, z) = 0$ — уравнение c -кривой в однородных координатах, то проходящая через нее поверхность второго порядка определяется уравнением

$$f(x, y, z) + Ax + By + Cz + D = 0.$$

щие касательные, то сеть (v, w) была бы сопряженной, а не асимптотической сетью поверхности Q_2 (§ 90). Следовательно, параллельными будут несоответствующие касательные

$$r_i v^i = \lambda R_i w^i, \quad r_i w^i = \mu R_i v^i;$$

отсюда находим $r_i = A_i^s R_s$, где тензор $A_{is} = \sigma(\mu v_i v_s - \lambda w_i w_s)$ и симметричен. Согласно результатам § 90 сеть A_{is} — общая сопряженная сеть поверхностей S и Q_2 , имеющая равные точечные инварианты. Так как эта сеть аполярна сети переноса (чебышевской сети (v, w)), то ее чебышевский вектор равен (см. схему V на стр. 317) геодезическому вектору асимптотической сети поверхности S относительно сети переноса и из градиентности вектора α_i следует, что сеть переноса (v, w) специальная.

s -кривая каждой сети переноса, составленной из плоских линий, представляет собой пару прямых, которую можно рассматривать как кривую второго порядка. Следовательно, сеть переноса, образованная плоскими кривыми, специальная.

Предыдущее приводит к следующему способу построения произвольной специальной поверхности переноса: рассмотрим произвольную поверхность второго порядка Q_2 . Найдем на этой поверхности произвольную изотермически сопряженную сеть с аффинором A_i^s и чебышевским вектором $-\alpha_i = \alpha_i = -\partial_i a$ (см. схему V). Пусть R — радиус-вектор поверхности Q_2 , тогда уравнение

$$r_i = e^{-2a} A_i^s R_s \quad (9)$$

определяет присоединенную поверхность S . Асимптотической сети A_i^s поверхности Q_2 будет соответствовать на поверхности S чебышевская и изотермически сопряженная сеть, следовательно, поверхность S будет искомой специальной поверхностью переноса. Предположим, что на Q_2 асимптотическая сеть H_{is} принята за координатную, тогда $H_1^1 = H_2^2 = 1$. Произвольная изотермически

сопряженная сеть H_2^i определится аффинором

$$H_2^1 = H_2^2 = 0, \quad H_2^1 = \sqrt{\frac{V}{U}}, \quad H_2^2 = -\sqrt{\frac{U}{V}},$$

$$(U = U(u), V = V(v)),$$

а аполярная ей изотермически сопряженная сеть H_3^i — аффинором

$$H_3^1 = H_3^2 = 0, \quad H_3^1 = H_2^2 H_2^1 = \sqrt{\frac{V}{U}}, \quad H_3^2 = \sqrt{\frac{U}{V}}.$$

По формулам § 36 находим чебышевский вектор h_2 сети H_2 (в нашем случае $e^2 \varrho = \sqrt{\frac{U}{V}}$, $\varrho = \frac{1}{4}(\ln U - \ln V)$):

$$h_2^1 = \varrho_u - \frac{1}{2} \Gamma_{11}^1 + \frac{1}{2} \Gamma_{22}^1 e^{4\varrho} = \frac{U'}{4U} - \frac{1}{2} \Gamma_{11}^1,$$

$$h_2^2 = -\varrho_v - \frac{1}{2} \Gamma_{22}^2 + \frac{1}{2} \Gamma_{11}^2 e^{-4\varrho} = \frac{V'}{4V} - \frac{1}{2} \Gamma_{22}^2.$$

Коэффициенты Γ_{11}^1 и Γ_{22}^2 можно найти следующим образом: ковариантные производные от координаты x поверхности

$$x_{1|1} = \partial_{11}x - \Gamma_{11}^1 x_1 - \Gamma_{11}^2 x_2 = \partial_{11}x - \Gamma_{11}^1 x_1 = \lambda H_{11} = 0,$$

$$x_{2|2} = \partial_{22}x - \Gamma_{22}^2 x_2 = 0,$$

следовательно,

$$\Gamma_{11}^1 = \partial_1 \ln x_1, \quad \Gamma_{22}^2 = \partial_2 \ln x_2.$$

Отсюда находим потенциал h вектора h_2 :

$$h = \int_2 h_i du^i = \frac{1}{4} \ln(UV) - \frac{1}{2} \int \partial_1 \ln x_1 du + \partial_2 \ln x_2 dv. \quad (10)$$

Радиус-вектор r искомой поверхности определится интегрированием системы (9), имеющей в нашем случае вид

$$r_1 = e^{\frac{2h}{2}} \left(-\sqrt{\frac{U}{V}} \right) R_2, \quad r_2 = e^{\frac{2h}{2}} \sqrt{\frac{V}{U}} R_1. \quad (11)$$

Рассмотрим для примера поверхность

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1. \quad (12)$$

Ее параметрические уравнения в асимптотической системе координат:

$$R = \alpha \frac{u+v}{1+uv} i + \beta \frac{u-v}{1+uv} j + \gamma \frac{1-uv}{1+uv} k, \quad (12')$$

где $\alpha = \frac{1}{\sqrt{A}}$, $\beta = \frac{1}{\sqrt{-B}}$, $\gamma = \frac{1}{\sqrt{C}}$. Имеем

$$\Gamma_{11}^1 = \partial_1 \ln x_1 = \frac{-2v}{1+uv}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{-2u}{1+uv},$$

$$2h_2 = \frac{1}{2} \ln(UV) + 2 \ln(1+uv) = \ln \sqrt{UV} (1+uv)^2.$$

Из формул (11) следует, что

$$r_1 = -(1+uv)^2 \sqrt{UV} \sqrt{\frac{U}{V}} R_2 = -(1+uv)^2 UR_2,$$

$$r_2 = (1+uv)^2 VR_1.$$

Внося сюда значения производных R_1 и R_2 , определяемые согласно (12') уравнениями

$$(1+uv)^2 R_1 = \alpha(1-v^2)i + \beta(1+v^2)j - 2\gamma vk,$$

$$(1+uv)^2 R_2 = \alpha(1-u^2)i - \beta(1+u^2)j - 2\gamma uk,$$

и интегрируя, приходим к следующему уравнению искомой поверхности:

$$\begin{aligned} r = \alpha \left[\int -(1-u^2)U du + (1-v^2)V dv \right] i + \\ + \beta \left[\int (1+u^2)U du + (1+v^2)V dv \right] j + \\ + 2\gamma \left[\int uU du - vV dv \right] k. \quad (13) \end{aligned}$$

Как будет показано ниже, эта формула является обобщением формул Вейерштрасса для минимальных поверхностей.

4. При аффинном преобразовании пространства поверхность переноса переходит в поверхность переноса. Действительно, совокупность параллельных касательных

к одному из семейств линий переноса, взятых вдоль одной линии переноса второго семейства, перейдет в параллельные касательные. Следовательно, сеть переноса перейдет в сеть переноса, что и доказывает наше утверждение.

5. Каждая минимальная поверхность есть специальная поверхность переноса. Действительно, изотропная сеть минимальной поверхности и сопряженная, и чебышевская, то есть является сетью переноса. Так как эта сеть, кроме того, геодезическая, то она изотермически сопряжена и является специальной сетью переноса.

Отсюда следует, что произвольная минимальная поверхность может быть получена способом, указанным в п. 3. Чтобы выяснить, какую поверхность нужно выбрать за поверхность Q_2 , заметим, что линии переноса минимальной поверхности есть изотропные кривые. Длина дуг этих линий равна нулю, и если $r = r(t)$ — радиус-вектор изотропной кривой, то $ds^2 = dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$. Последнее показывает, что касательные к изотропным кривым параллельны образующим изотропного конуса $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ или образующим сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Следовательно, принимая в формуле (12) $A = B = C = 1$, а в формуле (13) — $\alpha = \gamma = 1$, $\beta = i$, мы получим уравнение всех минимальных поверхностей по формулам

$$\left. \begin{aligned} x &= \int (1 - u^2) U(u) du - \int (1 - v^2) V(v) dv, \\ y &= i \left[\int (1 + u^2) U(u) du + \int (1 + v^2) V(v) dv \right], \\ z &= 2 \left[\int u U(u) du - \int v V(v) dv \right], \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

которые называются *формулами Вейерштрасса*.

Если комплексные переменные u и v и их функции U и V произвольны, то формулы Вейерштрасса определяют мнимую поверхность. Чтобы получить по этим формулам вещественную поверхность, заметим, что на такой поверхности изотропная сеть составлена из комплексно сопряженных линий, следовательно, переменные u и v должны быть комплексно сопряжены: $\bar{v} = u$. При выполнении этого условия правые части равенства будут вещественны

тогда и только тогда, когда будут комплексно сопряжены функции U и $-V$ ($V = -\bar{U}$). Считая эти условия выполненными и полагая $u = \tau$, $U = 2F(\tau)$, формулы Вейерштрасса (14) можно будет записать так:

$$\left. \begin{aligned} x &= R \int (1 - \tau^2) F(\tau) d\tau, \\ y &= Ri \int (1 + \tau^2) F(\bar{\tau}) d\tau, \\ z &= 2R \int \tau F(\tau) d\tau, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где R — знак вещественной части, а $F(\tau)$ — произвольная аналитическая функция.

В § 69, п. 4 было доказано, что если две сети с равными чебышевскими векторами аполярны сети A и геодезический вектор сети A относительно одной из этих сетей градиентен, то сеть A допускает ∞^1 аполярных ей сетей с равными чебышевскими векторами, в числе которых содержатся и две данные сети.

Чебышевский вектор асимптотической сети относительно специальной сети переноса градиентен, следовательно, если специальная поверхность переноса имеет еще одну сеть переноса, то она имеет ∞^1 таких сетей.

В частности, если минимальная поверхность имеет сеть переноса, отличную от изотропной, то она имеет ∞^1 сетей переноса.

Уравнение (1) показывает, что произвольная поверхность переноса определяется заданием шести произвольных функций одного аргумента. Специальные поверхности переноса определяются двумя произвольными функциями одного аргумента, что легко видеть из формулы (13). На вопрос, каков произвол в выборе поверхности, имеющей две сети переноса, и как построить все такие поверхности, ответ дается теоремой Ли [94]: *точки s -кривых двух сетей переноса одной поверхности принадлежат одной алгебраической кривой четвертого порядка*. Если $F(x, y) = 0$ — уравнение этой кривой, а x_1, x_2, x_3, x_4 — абсциссы точек ее пересечения с произвольной прямой, то уравнения дан-

ной поверхности можно записать либо в виде

$$\begin{aligned} x &= \varphi(x_1) + \varphi(x_2), & y &= \psi(x_1) + \psi(x_2), \\ z &= \chi(x_1) + \chi(x_2), \end{aligned} \quad (16)$$

либо в виде

$$\begin{aligned} x &= -\varphi(x_3) - \varphi(x_4), & y &= -\psi(x_3) - \psi(x_4), \\ z &= -\chi(x_3) - \chi(x_4), \end{aligned} \quad (16')$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$ — абелевы интегралы

$$\varphi(x) = \int \frac{x dx}{F_y}, \quad \psi(x) = \int \frac{y dx}{F_y}, \quad \chi(x) = \int \frac{dx}{F_y}. \quad (17)$$

Приведем доказательство этой теоремы, принадлежащее Дарбу ([1], т. I). Запишем двумя способами уравнения неразвертывающейся поверхности с двумя сетями переноса:

$$\left. \begin{aligned} x &= X_1(t_1) + X_2(t_2) = -X_3(t_3) - X_4(t_4), \\ y &= Y_1(t_1) + Y_2(t_2) = -Y_3(t_3) - Y_4(t_4), \\ z &= Z_1(t_1) + Z_2(t_2) = -Z_3(t_3) - Z_4(t_4). \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Функции X_i , Y_i , Z_i ($i = 1, 2, 3, 4$) и их аргументы удовлетворяют уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^4 X_i = \sum X_i = 0, & \quad \sum Y_i = 0, \quad \sum Z_i = 0, \\ t_3 = t_3(t_1, t_2), & \quad t_4 = t_4(t_1, t_2). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Дифференциалы dX_i , dY_i , dZ_i являются однородными координатами несобственной точки касательной к i -й линии переноса.

Если координаты вектора нормали поверхности обозначить, как обычно, через p , q , -1 ($p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$), то уравнение несобственной прямой касательной плоскости поверхности будет

$$\xi p + \eta q - \zeta = 0,$$

где ξ , η , ζ — однородные координаты. Отсюда следует, что

$$p dX_i + q dY_i = dZ_i,$$

или

$$y_i = p + qx_i, \quad (20)$$

где

$$x_i = \frac{dY_i}{dX_i}, \quad y_i = \frac{dZ_i}{dX_i} \quad (21)$$

— неоднородные координаты несобственной точки c_i -кривой i -й линии переноса. Так как мы рассматриваем неразвертывающуюся поверхность, то p и q являются независимыми переменными. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $x_i \neq \text{const}$. Действительно, меняя обозначения, можно за x_i принять любую из координат x_i или y_i . Если же и $x_i = \text{const}$, и $y_i = \text{const}$, то p и q оказываются зависимыми, а поверхность развертывающейся. Таким образом, x_i является переменной, а X_i , Y_i , Z_i , y_i — ее функциями. Учитывая это при дифференцировании уравнений (19), находим

$$\sum dX_i = 0, \quad \sum x_i dX_i = 0, \quad \sum y_i dX_i = 0. \quad (22)$$

Заметим, что третье соотношение в силу (20) есть следствие двух первых.

Полагая $y_i = f_i(x_i)$, из (20) находим

$$\frac{\partial y_i}{\partial p} = f_i \frac{\partial x_i}{\partial p} = 1 + q \frac{\partial x_i}{\partial p}, \quad \frac{\partial y_i}{\partial q} = f_i \frac{\partial x_i}{\partial q} = x_i + q \frac{\partial x_i}{\partial q},$$

так что x_i удовлетворяет уравнению с частными производными

$$\frac{\partial x_i}{\partial q} = x_i \frac{\partial x_i}{\partial p}. \quad (23)$$

Этому же уравнению удовлетворяет и любая функция x_i , в частности

$$\frac{\partial X_i}{\partial q} = x_i \frac{\partial X_i}{\partial p}, \quad (24)$$

что приводит к следующему равенству:

$$dX_i = \frac{\partial X_i}{\partial p} dp + \frac{\partial X_i}{\partial q} dq = \frac{\partial X_i}{\partial p} (dp + x_i dq). \quad (25)$$

Внося эти значения в два первых равенства (22), получим

$$\sum \frac{\partial X_i}{\partial p} = 0, \quad \sum x_i \frac{\partial X_i}{\partial p} = 0, \quad \sum x_i^2 \frac{\partial X_i}{\partial p} = 0. \quad (26)$$

Пусть h — произвольная постоянная. Из равенств (24) и (26) следует

$$\sum \frac{\frac{\partial X_i}{\partial q} - h \frac{\partial X_i}{\partial p}}{x_i - h} = \sum \frac{(x_i - h) \frac{\partial X_i}{\partial p}}{x_i - h} = 0. \quad (27)$$

Введем функцию

$$\theta = \sum \frac{1}{x_i - h} \frac{\partial X_i}{\partial p} = \frac{1}{h} \sum \frac{1}{x_i - h} \frac{\partial X_i}{\partial q}. \quad (28)$$

Эта функция удовлетворяет уравнению

$$h \frac{\partial \theta}{\partial p} = \sum \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{x_i - h} \frac{\partial X_i}{\partial q} \right) = \sum \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{x_i - h} \frac{\partial X_i}{\partial p} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial q},$$

показывающему, что θ есть функция аргументов h и $p + qh$:

$$\theta = \frac{1}{F(h, p + qh)}.$$

Если слагаемые правой части (28) привести к общему знаменателю, а при вычислении числителя учесть равенства (26), то окажется, что

$$\theta = \frac{x_1 x_2 x_3 x_4 \sum \frac{1}{x_i} \frac{\partial X_i}{\partial p}}{(x_1 - h)(x_2 - h)(x_3 - h)(x_4 - h)}. \quad (29)$$

Следовательно, $F(h, p + qh)$ есть многочлен четвертой степени относительно h при любых значениях p и q , и его частная производная пятого порядка по h обращается в нуль. Обозначая для краткости $r = p + qh$, имеем при любых p и q

$$q^5 \frac{\partial^5 F}{\partial r^5} + 5q^4 \frac{\partial^5 F}{\partial r^4 \partial h} + 10q^3 \frac{\partial^5 F}{\partial r^3 \partial h^2} + 10q^2 \frac{\partial^5 F}{\partial r^2 \partial h^3} + \\ + 5q \frac{\partial^5 F}{\partial r \partial h^4} + \frac{\partial^5 F}{\partial h^5} = 0.$$

Отсюда следует, что все производные $\frac{\partial^5 F}{\partial r^\alpha \partial h^{5-\alpha}} = 0$, то есть

что $F(h, p + qh)$ есть многочлен четвертой степени относительно h и $p + qh$. Если взять $h = x_i$, то $p + qh = p + qx_i = y_i$ и мы получаем

$$F(x_i, y_i) = 0. \quad (30)$$

Итак, координаты x_i, y_i всех точек c_i -кривых линий переноса удовлетворяют одному и тому же уравнению четвертой степени. Первая часть теоремы Ли доказана. Остается выразить функции X_i через многочлен $F(x, y)$. Вычислим двумя способами предел

$$\begin{aligned} A &= \lim_{h \rightarrow x_h} (x_h - h) \theta = \lim_{h \rightarrow x_h} (x_h - h) \sum \frac{1}{x_i - h} \frac{\partial X_i}{\partial p} = \frac{\partial X_h}{\partial p} = \\ &= \lim_{h \rightarrow x_h} \frac{1}{\frac{F(h, p + qh) - F(x_h, p + qx_h)}{x_h - h}} = \lim_{h \rightarrow x_h} \frac{-1}{\frac{\partial F(x_h, y_h)}{\partial x_h} + q \frac{\partial F(x_h, y_h)}{\partial y_h}} = \\ &= - \frac{1}{\frac{\partial F(x_h, y_h)}{\partial x_h} + q \frac{\partial F(x_h, y_h)}{\partial y_h}}. \end{aligned}$$

На основании полученного равенство (25) принимает вид

$$dX_i = - \frac{dp + x_i dq}{\frac{\partial F}{\partial x_i} + q \frac{\partial F}{\partial y_i}}.$$

Если же продифференцировать равенство $y_i = p + qx_i$, то найдем $dy_i + x_i dq = dx_i$. Следовательно,

$$dX_i = \frac{q dx_i - dy_i}{\frac{\partial F}{\partial x_i} + q \frac{\partial F}{\partial y_i}} = \frac{(q dx_i - dy_i) dx_i}{\frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i + q \frac{\partial F}{\partial y_i} dx_i}.$$

Учитывая, наконец, что, согласно (30), $\frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial F}{\partial y_i} dy_i = 0$, окончательно получаем

$$dX_i = \frac{dx_i}{\frac{\partial F}{\partial y_i}} = - \frac{dy_i}{\frac{\partial F}{\partial x_i}}, \quad dY_i = x_i dX_i = \frac{x_i dx_i}{\frac{\partial F}{\partial y_i}},$$

$$dZ_i = y_i dX_i = \frac{y_i dx_i}{\frac{\partial F}{\partial y_i}},$$

$$X_i = \varphi(x_i), \quad Y_i = \psi(x_i), \quad Z_i = \chi(x_i),$$

где

$$\varphi(x) = \int \frac{dx}{F_y}, \quad \psi(x) = \int \frac{x dx}{F_y}, \quad \chi(x) = \int \frac{y dx}{F_y}. \quad (31)$$

Теорема Ли доказана полностью.

Переходя к отысканию произвольной поверхности с двумя сетями переноса, следует доказать, что за кривую $F(x, y) = 0$ можно взять любую алгебраическую кривую четвертой степени (из предыдущего это утверждение не следует). Рассмотрим произвольную кривую $F(x, y) = 0$. Абсциссы x_i ($i = 1, 2, 3, 4$) точек ее пересечения с произвольной прямой $y = p + qx$ являются корнями уравнения

$$\theta(x) = F(x, p + qx) = 0. \quad (32)$$

Как известно (см., например, Фаддеев и Сомицкий, Сборник задач по высшей алгебре. Физматгиз, 1961. Задача 645):

$$\sum_{i=1}^4 \frac{1}{\theta'(x_i)} = \sum_{i=1}^4 \frac{x_i}{\theta'(x_i)} = \sum_{i=1}^4 \frac{x_i^2}{\theta'(x_i)} = 0.$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \sum \frac{dp + x_i dq}{\theta'(x_i)} = 0, \quad \sum x_i \frac{dp + x_i dq}{\theta'(x_i)} = 0, \\ \sum y_i \frac{dp + x_i dq}{\theta'(x_i)} = \sum (p + qx_i) \frac{dp + x_i dq}{\theta'(x_i)} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Будем считать в уравнении (32) p и q переменными, тогда

$$\theta'(x_i) dx_i + \frac{\partial F(x_i, y_i)}{\partial y_i} (dp + x_i dq) = 0 \quad (34)$$

и на основании (33) находим

$$\begin{aligned} \sum \frac{dx_i}{F_{y_i}(x_i, y_i)} &= - \sum \frac{dp + x_i dq}{\theta'(x_i)} = 0, \\ \sum \frac{x_i dx_i}{F_{y_i}(x_i, y_i)} &= 0, \quad \sum \frac{y_i dx_i}{F_{y_i}(x_i, y_i)} = 0. \end{aligned}$$

Если ввести теперь функции (31), то, согласно (34),

$$\sum \varphi(x_i) = c, \quad \sum \psi(x_i) = c', \quad \sum \chi(x_i) = c''. \quad (35)$$

Постоянные c, c', c'' можно, очевидно, считать равными нулю и по формулам (14) и (16) определить поверхность с двумя сетями переноса.

Заметим, что в ходе доказательства мы пришли к теореме Абеля [94], выражаемой равенствами (35).

Так как многочлен $F(x, y)$ произволен, то произвольна и определяемая им кривая четвертого порядка. Если эта кривая распадается на прямую и неприводимую кривую третьего порядка, то линии одного семейства сети переноса будут плоскими, так как все их касательные параллельны плоскости, проходящей через рассматриваемую прямую.

Дальнейшее распадение приводит нас к двум кривым L_1 и L_2 второго порядка (распадающимся или нераспадающимся).

Чтобы рассмотреть различные возможности, которые могут здесь представиться, докажем, что на поверхности с ∞^1 сетей переноса все эти сети специальные.

Принимая асимптотическую сеть поверхности за сеть A , а одну из ее сетей переноса — за сеть A , придем к схеме V (стр. 317). Условие существования ∞^1 сетей переноса в этом случае сводится к двум уравнениям (69;5''')

$$\alpha_{ij}^i = 0, \quad \bar{\alpha}_{ij}^i - 2\alpha_i \bar{\alpha}^i = 0.$$

Следовательно, $\alpha_i = \text{grad}$, что и требовалось доказать.

Пусть теперь кривая $F(x, y) = 0$ распадается на две кривые L_1 и L_2 второго порядка, из которых хотя бы одна не вырождается.

Если построить поверхность с двумя сетями переноса так, что ветви s -кривой одной (а следовательно, и другой) сети переноса принадлежат одна кривой L_1 , а другая кривой L_2 , то полученные сети переноса не будут специальными, ибо, как мы доказали, s -кривая специальной сети переноса есть кривая второго порядка. Других сетей переноса на полученных поверхностях не будет. Если же мы построим, отправляясь от той же самой кривой, поверхность с двумя сетями переноса, так что s -кривая одной сети совпадет с L_1 , а s -кривая другой сети — с L_2 , то на поверхности будут две специальные сети переноса, откуда следует, что таких сетей будет ∞^1 .

Если же обе кривые L_1 и L_2 распадаются на пары прямых, то при любом способе построения поверхности переноса обе сети переноса будут специальными, а поверхность будет иметь ∞^1 сетей переноса.

Замечая, что s -кривая сети переноса, составленной из плоских линий, есть пара прямых, легко заключаем, что

поверхность с двумя сетями переноса, составленными из плоских линий, всегда имеет ∞^1 сетей переноса.

Если поверхность имеет ∞^1 сетей переноса, то все сети переноса — специальные и каждой такой сети соответствует s -кривая второго порядка. Докажем, что s -кривые сетей переноса поверхности с ∞^1 сетей переноса образуют пучок второго порядка.

Пусть c_1 , c_2 и c_3 — три s -кривые второго порядка трех сетей переноса. Первые две кривые определяют пучок (c_1, c_2) кривых второго порядка. Как известно, каждая прямая l пересекает кривые пучка в парах точек, принадлежащих одной инволюции. Двойными точками этой инволюции будут несобственные точки A и B касательных к линиям асимптотической сети, ибо эти касательные гармонически разделяют пары касательных к любой сети переноса. Пусть кривая c_3 пересекается с прямой l в точках P_1 и P_2 . Если через точку P_1 провести кривую c'_3 пучка (c_1, c_2) , то ее вторая точка пересечения P'_2 с прямой l совпадет с точкой P_2 , так как она, как и точка P_2 , гармонически сопряжена с точкой P_1 в инволюции с двойными точками A и B . Вращая прямую l вокруг точки P_1 , мы убедимся, что точки ее пересечения с кривыми c_3 и c'_3 все время совпадают, следовательно, совпадают и кривые c_3 и c'_3 . Наше утверждение доказано.

К тому же результату можно прийти аналитически. Пусть кривая $F(x, y) = 0$ распадается на две кривые второго порядка:

$$F(x, y) = A(x, y)B(x, y) = 0.$$

Если $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ — точки пересечения произвольной прямой с кривой $A(x, y) = 0$, то поверхность определится уравнениями

$$\frac{dX_i}{1} = \frac{dY_i}{x_i} = \frac{dZ_i}{y_i} = \frac{dx_i}{F_y(x_i, y_i)} = \frac{dx_i}{B(x_i, y_i) \frac{\partial A(x_i, y_i)}{\partial y_i}}. \quad (36)$$

Эти уравнения не изменятся, если кривую $B(x, y) = 0$ заменить любой кривой пучка

$$B_c(x, y) = B(x, y) + cA(x, y).$$

Следовательно, каждая кривая этого пучка является s -кривой какой-нибудь сети переноса построенной поверхности.

6. Чтобы получить все аффинно различные поверхности с бесконечным числом сетей переноса, нужно, согласно предыдущему, взять все проективно различные пучки кривых второго порядка, для каждого из них построить соответствующую поверхность переноса.

Вычисления проще всего производить по формулам (36), хотя можно было бы воспользоваться и методом построения специальных поверхностей переноса п. 3 (см. также [64]).

Займемся сначала проективной классификацией пучков кривых второго порядка. Каждый пучок вполне определяется четырьмя базисными точками A, B, C, D , принадлежащими всем его кривым. Если ограничиться вещественными преобразованиями, то можно выделить следующие проективно различные четверки точек (пучок, определяемый точками A, B, C, D , обозначен через $(ABCD)$, A и \bar{A} — комплексно сопряженные точки).

- | | |
|---------------------------|--|
| 1. $(A\bar{A}B\bar{B})$. | 7. $(A\bar{A}A\bar{A})$. |
| 2. $(A\bar{A}BC)$. | 8. $(AAAB)$. |
| 3. $(ABCD)$. | 9. $(AAAA)$, кривые пучка не распадаются. |
| 4. $(AABC)$. | 10. $(AAAA)$, кривые вещественные, распавшиеся. |
| 5. $(AAB\bar{B})$. | 11. $(AAAA)$, кривые мнимые, распавшиеся. |
| 6. $(AABB)$. | |

В приведенной ниже таблице даны уравнения поверхностей с ∞^1 сетей переноса, соответствующие этим пучкам кривых. Изменением постоянной a в правых частях параметрических уравнений мы получим все ∞^1 сетей переноса данной поверхности.

Если среди кривых пучка имеется мнимый круг $x^2 + y^2 + 1 = 0$, то соответствующая ему сеть переноса будет изотропной, так как касательные к линиям этой сети параллельны изотропному конусу $x^2 + y^2 + z^2 = 0$,

№ пучка и его уравнение	Уравнение поверхности	
	явное	параметрическое
1. $x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(y + mx)(x + ny) = 0$	$z = \frac{1}{1 - mn} \ln \frac{\cos(y + mx) \sqrt{1 + n^2}}{\cos(x + ny) \sqrt{1 + m^2}}$	
		<p>Минимальная поверхность евклидова пространства. В частном случае при $m = n = 0$ переходит в поверхность Шерка:</p> $\begin{aligned} x &= \operatorname{arctg} u + \operatorname{arctg} v \\ y &= \operatorname{arctg} au + \operatorname{arctg} av \\ z &= \ln \frac{a \sqrt{1 + u^2} \sqrt{1 + v^2}}{\sqrt{1 + a^2 u^2} \sqrt{1 + a^2 v^2}} \end{aligned}$
2. $x^2 - y^2 + z^2 + \lambda xy = 0$	$z = \ln \frac{\cos y}{\cos x}$	$\begin{aligned} x &= \operatorname{arctg} u + \operatorname{arctg} v \\ y &= \operatorname{arctg} au - \operatorname{arctg} av \\ z &= \ln a \frac{\sqrt{1 + u^2} \sqrt{1 + v^2}}{\sqrt{1 - a^2 u^2} \sqrt{a^2 v^2 - 1}} \end{aligned}$
3. $x^2 + y^2 - z^2 + \lambda xy = 0$	$z = \ln \frac{\operatorname{ch} y}{\operatorname{ch} x}$	$\begin{aligned} x &= \operatorname{arctg} u + \operatorname{arctg} v \\ y &= \operatorname{arctg} au + \operatorname{arctg} av \\ z &= \ln a \frac{\sqrt{1 - u^2} \sqrt{v^2 - 1}}{\sqrt{1 - a^2 u^2} \sqrt{a^2 v^2 - 1}} \end{aligned}$

№ пучка и его уравнение	Уравнение поверхности	
	явно	параметрическое
4. $x^2 - y^2 + \lambda xz = 0$	$z = \frac{e^u \operatorname{ch} x}{e^x + e^u + e^z} = 1$	$\begin{aligned} x &= u + v \\ y &= \ln \frac{a}{\operatorname{sh} u \operatorname{ch} v} \\ z &= a (\operatorname{cth} u + \operatorname{th} v) \end{aligned}$
5. $x^2 + y^2 + \lambda xz = 0$	$z = i y \cos x$	$\begin{aligned} x &= u + v \\ y &= \ln \frac{a}{\sin u \cos v} \\ z &= a (\operatorname{ctg} u - \operatorname{tg} v) \end{aligned}$
6. $x^2 - y^2 + \lambda xz = 0$	$z = \operatorname{arcth} \frac{y}{x}$	$\begin{aligned} x &= a (\operatorname{ch} u + \operatorname{ch} v) \\ y &= a (\operatorname{sh} u + \operatorname{sh} v) \\ z &= \frac{u+v}{2} \end{aligned}$
7. $x^2 + y^2 + \lambda xz = 0$	$z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ (геликоид)	$\begin{aligned} x &= a (\cos u + \cos v) \\ y &= a (\sin u + \sin v) \\ z &= \frac{u+v}{2} \end{aligned}$

Продолжение

№ пучка и его уравнение	Уравнение поверхности	
	явное	параметрическое
8. $2y^2 - az + \lambda xy = 0$	$z = y^2 + ex$	$x = \ln \frac{2}{uv}$ $y = \frac{a}{u} - \frac{1}{av}$ $z = \frac{a^2}{u^2} + \frac{1}{a^2 v^2}$
9. $y^2 - az + \lambda x^2 = 0$	$x^2 - 6xy + 6z = 0$ <p>(поверхность Кэли)</p>	$x = u + v$ $y = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + a(v - u)$ $z = \frac{1}{3}(u^3 + v^3) + a(v^2 - u^2)$
10, 11. $x^2 \pm y^2 + \lambda xy = 0$	$z = x^2 \pm y^2$ (параболоиды)	$x = u + av$ $y = v \mp au$ $z = (u^2 \pm v^2)(1 \pm a^2)$

следовательно, поверхность, определяемая этим пучком, будет минимальной. К пучкам рассматриваемого вида принадлежат пучки 1 и 7. Укажем ход вычислений для пучка 1.

За кривые A и B принимаем

$$A(x, y) = (y + mx)(x + ny) = 0, \quad B(x, y) = x^2 + y^2 + 1 = 0.$$

За точки (x_i, y_i) можно принять $x_1 = u, y_1 = -mu, x_2 = nv, y_2 = -v$. Находим

$$F_y(x_1, y_1) = B(x_1, y_1) A_y(x_1, y_1) = [u^2(1+m^2) + 1](1-mn)u;$$

$$F_y(x_2, y_2) = -[v^2(1+n^2) + 1](1-mn)vn.$$

Записываем системы

$$\frac{dX_1}{1} = \frac{dY_1}{u} = \frac{dZ_1}{-mu} = \frac{du}{(1-mn)[u^2(1+m^2) + 1]u},$$

$$\frac{dX_2}{1} = \frac{dY_2}{nv} = \frac{dZ_2}{-v} = \frac{dv}{-(1-mn)[v^2(1+n^2) + 1]v}.$$

Интегрируя их, приходим к следующим параметрическим уравнениям поверхности:

$$x = X_1(x_1) + X_2(x_2) = \frac{1}{1-mn} \ln \frac{u \sqrt{v^2(1+n^2) + 1}}{v \sqrt{u^2(1+m^2) + 1}},$$

$$y = \frac{1}{1-mn} \left(\frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \operatorname{arctg} u \sqrt{1+m^2} - \frac{n}{\sqrt{1+n^2}} \operatorname{arctg} v \sqrt{1+n^2} \right),$$

$$z = \frac{1}{1-mn} \left(-\frac{m}{\sqrt{1+m^2}} \operatorname{arctg} u \sqrt{1+m^2} + \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} \operatorname{arctg} v \sqrt{1+n^2} \right).$$

Положив

$$U = \operatorname{arctg} u \sqrt{1+m^2}, \quad V = \operatorname{arctg} v \sqrt{1+n^2},$$

$$x' = x - \frac{1}{1-mn} \ln \frac{\sqrt{1+n^2}}{\sqrt{1+m^2}},$$

приведем эти уравнения к виду

$$\begin{aligned}x' &= \frac{1}{1-mn} \ln \frac{\sin U}{\sin V}, \\y &= \frac{1}{1-mn} \left(\frac{U}{\sqrt{1+m^2}} - \frac{nV}{\sqrt{1+n^2}} \right), \\z &= \frac{1}{1-mn} \left(-\frac{mU}{\sqrt{1+m^2}} + \frac{V}{\sqrt{1+n^2}} \right).\end{aligned}$$

Исключение параметров U и V приводит к уравнению минимальной поверхности в прямоугольных координатах:

$$x' = \frac{1}{1-mn} \ln \frac{\sin [(y+nz)\sqrt{1+m^2}]}{\sin [(z+my)\sqrt{1+n^2}]}.$$

Среди полученных поверхностей есть линейчатые. Можно заранее указать, какие пучки кривых приводят к этим поверхностям: если в пучке есть двойная прямая l , то одна из несобственных точек A , B асимптотических касательных лежит на этой прямой, так как эта пара точек должна гармонически разделять две совпадающие точки прямой l . Все касательные к одному семейству асимптотических линий параллельны одной плоскости, проходящей через прямую l . Это означает, что асимптотическая линия плоская и, следовательно, прямая. Сеть переноса, соответствующая дважды взятой прямой l , в этом случае выражается в дважды взятое семейство прямолинейных образующих.

Наличие в пучке двух двойных прямых приводит к дважды линейчатой поверхности, то есть к поверхности второго порядка.

Таким образом, линейчатыми будут поверхности 6, 7, и 9, а поверхностями второго порядка — поверхности 10 и 11.

7. В заключение докажем теорему Рейдемейстера: *если линейчатая поверхность имеет одну сеть переноса, то она имеет ∞^1 таких сетей* [98].

Если асимптотическую сеть поверхности принять за сеть A_1 , а сеть переноса за сеть A_2 , то в сферическом отображении поверхности мы приходим к схеме VI и следующему эквиваленту высказанной теоремы: *если кодацциева*

полугеодезическая сеть A римановой геометрии постоянной кривизны $K = 1$ допускает одну апольярную ей геодезическую сеть, то она допускает ∞^1 таких сетей, то есть является основанием семейства $\Pi(a, A)$. Теорема

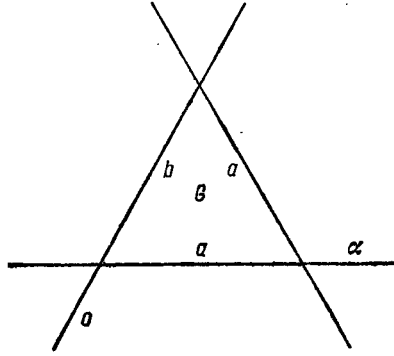


Схема VI.

остается справедливой при любом постоянном значении гауссовой кривизны K . Для доказательства вычислим векторы (31;1)

$$M_i = b_i + a_i - a_i = b_i,$$

$$M_i = 2a_i - b_i, \quad M_i = b_i,$$

и запишем условия (31;6)

$$A^{is} (b_{i|s} - b_i b_s - K g_{is}) = 0 \quad (\alpha = 1, 3), \quad (37)$$

$$A^{is} (2a_{i|s} - b_{i|s} + 3b_i b_s - 4a_i b_s - K g_{is}) = 0. \quad (38)$$

Первые два из них дают разложение производной $b_{i|s}$:

$$b_{i|s} = K g_{is} + b_i b_s + \varrho A_{is} + \sigma \varepsilon_{is}. \quad (39)$$

Подставим это значение производной в (38):

$$A^{is} (a_{i|s} + b_i b_s - 2a_i b_s - K g_{is}) = \varrho. \quad (40)$$

Если учесть, что $\alpha_i = b_i - a_i$, то из (40) и (39) получим

$$A^{is} (\alpha_{i|s} - 2\alpha_i b_s) = (A^{is} \alpha_i)_s = \varrho. \quad (41)$$

Для доказательства теоремы, согласно § 70, п. 1, достаточно установить, что $2\sigma = b_{s|s} = \alpha_{s|s} = 0$.

Вектор α_s , как геодезический вектор полугеодезической сети A , касателен к негеодезическому семейству ее линий.

Направляющий вектор τ_s геодезического семейства линий этой сети можно получить по формуле $\tau_s = A_s^i \alpha_i$. Согласно

но (41) он удовлетворяет условию

$$\tau^s|_s = \varrho. \quad (42)$$

Тензоры тройки сетей A_1, A_2, A_3 с помощью векторов α_i и τ_i можно записать так:

$$\left. \begin{aligned} A_{1s} &= \frac{i}{\theta} (\alpha_i \tau_s + \alpha_s \tau_i), \\ A_{2s} &= \frac{1}{\theta} (\alpha_i \alpha_s + \tau_i \tau_s), \\ A_{3s} &= \frac{i}{\theta} (\alpha_i \alpha_s - \tau_i \tau_s), \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

где

$$i^2 = -1, \quad \theta = \alpha_s \tau^s. \quad (44)$$

Подвергнем связность G схемы VI проективному преобразованию с вектором a_i . В новой связности сеть A_1 станет чебышевской и останется полугеодезической, следовательно, ее геодезическое семейство (τ_s) станет изотропным, а вектор τ_s станет нулевым направлением нового тензора Риччи:

$$\check{R}_{is} \tau^i \tau^s = (Kg_{is} - a_{i|s} + a_i a_s) \tau^i \tau^s = 0.$$

В силу этого

$$a_{i|s} = Kg_{is} + a_i a_s + \tau_i q_s + \lambda \varepsilon_{is}, \quad (45)$$

где q_s — некоторый вектор и

$$2\lambda = q_s \tau^s. \quad (46)$$

Из (45) и (39) находим

$$\alpha_{i|s} = b_{i|s} - a_{i|s} = b_i b_s - a_i a_s + \varrho A_{2s} + (\sigma - \lambda) \varepsilon_{is} - \tau_i q_s,$$

$$\tau_{i|s} = (A_{2s}^h \alpha_h)|_s = b_i \tau_s + \tau_i a_s + \alpha_i q_s + (\sigma - \lambda) A_{2s} - \varrho \varepsilon_{is}.$$

Так как поле вектора τ_s геодезическое, то

$$\tau_{i|s} \tau^i \tau^s = \alpha_i \tau^i q_s \tau^s + (\sigma - \lambda) \alpha_s \tau^s = \theta (\lambda + \sigma) = 0.$$

Имея в виду, что $\theta \neq 0$ (в противном случае сеть A_1

вырождается), находим $\lambda = -\sigma$ и

$$\tau_{i|s} = b_i \tau_s + \tau_i a_s + a_i q_s + 2\sigma A_{is} - \varrho e_{is}. \quad (47)$$

Отсюда, согласно (42), имеем

$$\varrho = \tau^s|_s = b^s \tau_s + \tau^s a_s + q_s \alpha^s + 2\varrho = -\alpha_s \tau^s + q_s \alpha^s + 2\varrho,$$

или

$$q_s \alpha^s = \theta - \varrho, \quad (48)$$

что вместе с (46) определяет вектор q_s :

$$q_s = \frac{1}{\theta} [-2\sigma \alpha_s + (\varrho - \theta) \tau_s]. \quad (49)$$

Условия интегрируемости уравнений (39) и (45) $b_{i|s}{}^s = K \tilde{b}_i$, $a_{i|s}{}^s = K \tilde{a}_i$ имеют вид

$$3\sigma b_i - \sigma_i = -\frac{A_i^s}{2} (3\varrho b_s - \varrho_s),$$

$$3\sigma a_i - \sigma_i = \left\{ (\theta - \varrho) + \frac{1}{\theta} [3a_s \tau^s (\varrho - \theta) - \varrho_s \tau^s + \theta_s \tau^s] \right\} \tau_i = \mu \tau_i,$$

и равносильны следующим двум уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s &= 3\sigma a_s - \mu \tau_s, \\ \varrho_s &= 3\varrho b_s - 3\sigma \tau_s + \mu a_s. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Условия интегрируемости этих уравнений ($\sigma_{s|}{}^s = \varrho_{s|}{}^s = 0$)

$$\left. \begin{aligned} \mu_s \tau^s &= \mu (3a_s \tau^s - \varrho), \\ \mu_s \alpha^s &= 9\sigma \varrho - 9\sigma \theta + 2\mu \sigma + 3\mu a_s \alpha^s \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

определяют градиент μ_s :

$$\mu_s = \frac{1}{\theta} [\mu (3a_i \tau^i - \varrho) \alpha_s - (9\sigma \varrho - 9\sigma \theta + 2\mu \sigma + 3\mu a_i \alpha^i) \tau_s].$$

Из равенства $\mu_{s|}{}^s = 0$ теперь следует

$$10\mu\sigma\theta = 0.$$

Так как $\theta \neq 0$, то либо $\sigma = 0$ и теорема доказана, либо $\mu = 0$. В последнем случае, согласно (51), $\theta = \varrho$. Но тогда из (50) находим

$$\varrho_s \alpha^s = \theta_s \alpha^s = 3\varrho b_s \alpha^s - 3\sigma \tau_s \alpha^s$$

или

$$7\theta\sigma = 0,$$

что возможно лишь при $\sigma = 0$. Теорема доказана.

§ 101. Минимальные поверхности

Поверхности нулевой средней кривизны называются *минимальными*. Это название связано с тем, что условие

$$2H = g^{ij} h_{ij} = 0$$

является *необходимым*, чтобы среди всех поверхностей, проходящих через замкнутый контур, данная имела наименьшую площадь.

1. Асимптотическая сеть минимальной поверхности ортогональна, а ее изотропная сеть сопряжена. Так как изотропная сеть чебышевская, то она — сеть переноса, и минимальная поверхность является поверхностью переноса изотропной кривой $U = U(u)$ по изотропной кривой $V = V(v)$. Пусть

$$U = ui + f(u)j + f_1(u)k, \quad V = vi + \varphi(v)j + \varphi_1(v)k.$$

Из условия изотропности кривой $U'^2 = 0$ находим

$$f_1^2 = -(1 + f'^2), \quad f_1 = i \int \sqrt{1 + f'^2} du;$$

аналогично

$$\varphi_1 = i \int \sqrt{1 + \varphi'^2} dv.$$

Отсюда следует *формула Монжа*:

$$r = (u + v)i + (f(u) + \varphi(v))j + \\ + i \left[\int \sqrt{1 + f'^2(u)} du + \int \sqrt{1 + \varphi'^2(v)} dv \right] k, \quad (1)$$

определяющая минимальную поверхность при произвольном выборе функций $f(u)$ и $\varphi(v)$.

2. Чебышевский вектор ортогональной асимптотической сети минимальной поверхности градиентен: $h_i = \frac{1}{4} \partial_i \ln K = \partial_i h$, следовательно, эта сеть изотермическая. Если v_i и w_i — ее направляющие орты, то, согласно (41;10'),

$$\varphi_i = \partial_i \varphi = e^h v_i, \quad \psi_i = \partial_i \psi = \tilde{\varphi}_i = e^h w_i \quad (2)$$

будут направляющими градиентами этой сети. Первый

тензор поверхности в этих обозначениях принимает вид

$$g_{ik} = v_i v_k + \omega_i \omega_k = e^{-2h} (\varphi_i \varphi_k + \psi_i \psi_k) = \frac{1}{\sqrt{-K}} (\varphi_i \varphi_k + \psi_i \psi_k). \quad (3)$$

Из формулы $\gamma_{ik} = -Kg_{ik} + 2Hh_{ik}$ в случае минимальной поверхности имеем

$$\gamma_{ik} = -Kg_{ik} = \sqrt{-K} (\varphi_i \varphi_k + \psi_i \psi_k). \quad (4)$$

Отсюда следует ряд признаков поверхности, наложимой на минимальную.

1) Для того чтобы поверхность отрицательной гауссовой кривизны¹⁾ налагалась на минимальную, необходимо и достаточно, чтобы ее гауссова кривизна удовлетворяла условию

$$\Delta_2 \ln K = 4K. \quad (5)$$

При выполнении этого условия существует, согласно § 23, ортогональная сеть с чебышевским вектором $h_i = \frac{1}{4} \partial_i \ln K$.

Эта сеть и все сети, получаемые из нее поворотом на постоянный угол, при котором чебышевский вектор не меняется, будут виртуально-асимптотическими. Отсюда следует, что минимальная поверхность допускает непрерывное изгибание, оставляющее ее минимальной. При этом изгибании асимптотическая сеть вращается на постоянный угол.

2) Для того чтобы поверхность налагалась на минимальную, необходимо и достаточно, чтобы ее первая квадратичная форма при умножении на $\sqrt{-K}$ обращалась в форму нулевой кривизны или чтобы при умножении ее на $-K$ кривизна формы была равна 1.

Доказательства следуют из формулы (41;4) преобразования гауссовой кривизны при конформном соответствии $g_{ik}^* = e^{2\sigma} g_{ik}$:

$$K^* = e^{-2\sigma} (K - \Delta_2 \sigma).$$

В первом случае $K^* = 0$, $\sigma = \frac{1}{4} \ln(-K)$, а во втором

¹⁾ На вещественной минимальной поверхности асимптотическая сеть, ввиду ее ортогональности, вещественна, следовательно, гауссова кривизна $K < 0$.

$\bar{K}^* = 1$, $\sigma = \frac{1}{2} \ln(-K)$, и в обоих случаях условие (5) выполнено.

3. Поверхность \bar{S}^* с радиусом-вектором

$$r^* = \int g_i^k r_k du^i = - \int [nr_i] du^i, \quad (6)$$

присоединенная данной минимальной поверхности S с радиусом-вектором r относительно изотропной сети (§ 92), называется просто *присоединенной*.

Поверхности S и \bar{S}^* наложимы, так как

$$r_i^* = -[nr_i], \quad g_{ik}^* = [nr_i][nr_k] = g_{ik}.$$

Однако сеть g_{ik} сопряжена и на поверхности \bar{S}^* (§ 92), следовательно, *поверхность \bar{S}^* , присоединенная минимальной поверхности S , тоже минимальная.*

Семейство ∞^1 поверхностей S_φ с радиусами-векторами

$$r = r \cos \varphi + r^* \sin \varphi \quad (\varphi = \text{const}) \quad (7)$$

называются *ассоциированными* поверхности S . Все эти поверхности находятся в соответствии Петерсона и наложимы друг на друга, так как $n = n$ и в силу косой симметрии тензора

$$r_i r_k^* = -r_i [nr_k] = \varepsilon_{ik},$$

имеем

$$g_{ik} = r_i r_k = g_{ik} \cos^2 \varphi + r_i r_k^* \sin 2\varphi + g_{ik} \sin^2 \varphi = g_{ik}.$$

Второй тензор поверхности S_φ выражается формулой

$$h_{ik} = h_{ik} \cos \varphi + h_{ik}^* \sin \varphi. \quad (8)$$

Действительно, $n_i = n_i^* = n_i$ и

$$\begin{aligned} h_{ik} &= -n_i r_k = -n_i (r_k \cos \varphi + r_k^* \sin \varphi) = \\ &= -n_i r_k \cos \varphi - n_i r_k^* \sin \varphi = h_{ik} \cos \varphi + h_{ik}^* \sin \varphi. \end{aligned}$$

Все эти поверхности будут минимальными, так как

$$g^{ih} = g^{*ik} = g_{\varphi}^{ih},$$

$$\begin{aligned} H &= g_{\varphi}^{ih} h_{ih} = g_{\varphi}^{ik} (h_{ih} \cos \varphi + h_{ih}^* \sin \varphi) = \\ &= g^{ih} h_{ih} \cos \varphi + g^{*ih} h_{ih}^* \sin \varphi = H \cos \varphi + H^* \sin \varphi \end{aligned}$$

и $H = 0$ в силу минимальности поверхностей S и S^* . Так как тензоры h_{ih} и h_{ih}^* — одинаково нормированные тензоры двух аполлярных ортогональных сетей, то асимптотическая сеть поверхности S_{φ} получена из асимптотической сети поверхности S поворотом на угол $\frac{\varphi}{2}$ (43;2).

4. Производные радиусов-векторов присоединенных минимальных поверхностей S и S^* удовлетворяют уравнению

$$r_i = g_i^k r_k^*,$$

из которого следует, что каждая координата (и даже каждая горизонтальная функция) минимальной поверхности является гармонической функцией и что соответствующие координаты поверхностей S и S^* являются сопряженными гармоническими функциями. Координаты комплексного вектора

$$R = r + ir^* = r - i \int [nr_i] du^i = r - i \int [n dr] \quad (9)$$

будут, таким образом, аналитическими на поверхности функциями и будут однозначно определены в круге сходимости заданием этого вектора на некоторой кривой. Но тогда мы можем утверждать, в силу формулы (9), что минимальная поверхность однозначно определена одной своей полосой, то есть принадлежащей ей кривой $r = r(t)$ и вектором ее нормали $n = n(t)$ в точках этой кривой, где n и r — аналитические функции комплексного параметра $t = u + iv$. Радиусы-векторы искомой поверхности S и ее присоединенной S^* будут соответственно вещественной

и мнимой частями вектора (9):

$$r = R \left[r(t) - i \int [n dr] \right], \quad r^* = I \left[r(t) - i \int [n dr] \right]. \quad (10)$$

Мы получили так называемые *формулы Шварца*.

Применим эти формулы для отыскания минимальной поверхности по ее плоской геодезической линии, заданной уравнением $\mathbf{q}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$. Орт касательной этой линии $\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{q}}{ds}$, а орт главной нормали и, следовательно, нормали к поверхности $\mathbf{v} = \mathbf{n} = [k\boldsymbol{\tau}]$.

Вычислим теперь вектор (9):

$$R(t) = \mathbf{q}(t) - i \int [[k\boldsymbol{\tau}] \boldsymbol{\tau}] ds = \mathbf{q}(t) + is(t)\mathbf{k}.$$

Полагая $t = u + iv$, $\bar{t} = u - iv$, получаем уравнения искомых минимальных поверхностей

$$r = \frac{1}{2} [\mathbf{q}(t) + \mathbf{q}(\bar{t})] + \frac{i}{2} [s(t) - s(\bar{t})]\mathbf{k},$$

$$r^* = -\frac{i}{2} [\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}(\bar{t})] + \frac{1}{2} [s(t) + s(\bar{t})]\mathbf{k}.$$

Если за плоскую геодезическую взять окружность

$$\mathbf{q} = a(\cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}),$$

то

$$\mathbf{q}(t) = a[\cos(u + iv)\mathbf{i} + \sin(u + iv)\mathbf{j}],$$

$$s(t) = a(u + iv).$$

Минимальная поверхность будет катеноидом и ее уравнение

$$r = a(\cos u \operatorname{ch} v\mathbf{i} + \sin u \operatorname{ch} v\mathbf{j} - v\mathbf{k}),$$

а присоединенная — геликоидом, уравнение которого

$$r^* = a(-\sin u \operatorname{sh} v\mathbf{i} + \cos u \operatorname{sh} v\mathbf{j} + u\mathbf{k}).$$

При изгибании катеноида его горловой круг, уравнение которого $v = 0$, перешел в прямолинейную направляющую (ось Qz) геликоида. Этот факт есть следствие более общего предложения. Рассмотрим произвольную геодезическую линию L минимальной поверхности S . Орт ее

касательной τ можно представить с помощью присоединенной поверхности так:

$$\tau = \frac{dr}{ds} = - \left[n \frac{dr^*}{ds} \right].$$

Однако линия L переходит в геодезическую линию L^* поверхности S^* и ее главная нормаль $\check{\nu}^*$ совпадает по направлению с вектором n , следовательно,

$$\tau = - \left[n \frac{dr^*}{ds} \right] = \pm \check{\beta}^*,$$

где $\check{\beta}^*$ — орт бинормали кривой L^* . Производные этих векторов по общей длине дуги имеют вид

$$\frac{d\tau}{ds} = \pm kn, \quad \frac{d\check{\beta}^*}{ds} = \pm \tau n,$$

значит, у двух соответствующих геодезических линий присоединенных минимальных поверхностей кривизна (k) одной равна кручению (τ) другой. Поэтому плоской геодезической минимальной поверхности на присоединенной поверхности соответствует прямая линия, и наоборот.

Применяя этот результат к геликоиду, можем утверждать, что прямолинейные образующие геликоида переходят в плоские геодезические и, следовательно, в линии кривизны катеноида.

5. Из формул Шварца следует два интересных свойства минимальной поверхности:

1) Каждая вещественная прямая, принадлежащая минимальной поверхности, является ее осью симметрии. Полоса, определяемая этой прямой и касательными плоскостями вдоль нее, не изменится при вращении поверхности вокруг этой прямой на 180° , следовательно, после этого вращения поверхность наложится на себя.

2) Минимальная поверхность симметрична относительно каждой плоскости, пересекающей ее ортогонально. Линия пересечения поверхности с такой плоскостью определяет полосу, которая не меняется при симметрии относительно этой плоскости, следовательно, при этой симметрии поверхность переходит в себя. Так как линия L геодезическая, то можно сказать, что минимальная поверх-

ность симметрична относительно плоскости любой своей плоской геодезической.

6. Рассмотрим поверхности, наложимые и на минимальную поверхность S , и на линейчатую поверхность \tilde{S}^* . Пусть (w, \tilde{w}) — асимптотическая (значит, ортогональная) сеть поверхности S . Ее чебышевский вектор $a_i = \frac{1}{4} \partial_i \ln K$. Рассмотрим также сеть (v, \tilde{v}) , образованную геодезическими линиями, переходящими в прямолинейные образующие поверхности \tilde{S}^* , и их ортогональными траекториями. Так как линии (v) геодезические, то

$$v_{i|k} = \tilde{v}_i \varepsilon v_k, \quad t_k = -\tilde{c}_k = \varepsilon v_k, \quad c_k = \varepsilon \tilde{v}_k, \quad \tilde{v}_k = \partial_k \tilde{v},$$

где c_k — чебышевский вектор сети (v, \tilde{v}) . Пусть ω — угол между сетями (v, \tilde{v}) и (w, \tilde{w}) , так что $\sin \omega = v_k w^k$, тогда

$$t_k - t_k = -\tilde{a}_k + \tilde{c}_k = \omega_k, \quad a_k - c_k = \tilde{\omega}_k.$$

Так как, согласно (23;5), $a_k v^k = -\varepsilon = -\varepsilon$ и $c_k v^k = \varepsilon \tilde{v}_k v^k = -\varepsilon$, то $(a_k - c_k) v^k = \tilde{\omega}_k v^k = -\omega_k \tilde{v}^k = 0$. Следовательно, ω есть функция одного \tilde{v} и

$$\omega_k = \frac{d\omega}{d\tilde{v}} \tilde{v}_k = \omega' \tilde{v}_k.$$

Вычислим еще ротации

$$t_{k|l} = K = \varepsilon^k v_k + \varepsilon v_{k|l} = \varepsilon^k v_k - \varepsilon^2,$$

$$a_{k|l} = (c_k + \tilde{\omega}_k)_{|l} = (\varepsilon v_k - \omega' v_k)_{|l} = \varepsilon^k \tilde{v}_k - \omega'' + \varepsilon \omega' = 0.$$

Отсюда находим разложение градиента ε_k :

$$\varepsilon_k = (K + \varepsilon^2) \tilde{v}_k + (\varepsilon \omega' - \omega'') v_k.$$

Учитывая, что $K_k = 4K a_k$, приравняем нулю ротацию этого вектора:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k|l} &= K^k \tilde{v}_k + 2\varepsilon \varepsilon^k \tilde{v}_k + (\varepsilon \omega' - \omega'') v_{k|l} + \varepsilon^k v_k \omega' + \varepsilon \omega'' - \omega''' = \\ &= 5K \omega' - 2\varepsilon \omega'' - \omega''' = 0. \end{aligned}$$

Вычислим производную левой части в направлении вектора \tilde{v}^k :

$$(5K\omega' - 2g\omega'' - \omega''')_k \tilde{v}^k = -20K\omega'^2 - 2\omega''(g\omega' - \omega'') = 0.$$

Если предположить, что $\omega' \neq 0$, то и $\omega'' \neq 0$, но тогда K и g были бы функциями одного переменного \tilde{v} , что противоречит предположению, ибо при этом условии

$$a_k \tilde{v}^k = -\omega' = \frac{1}{4K} K_k \tilde{v}^k = 0.$$

Следовательно, $\omega' = 0$, и чебышевский вектор сети (v, \tilde{v})

$$c_k = a_k = \frac{1}{4} \partial_k \ln K.$$

Таким образом, эта сеть ортогональная, виртуально-асимптотическая и полугеодезическая. Отсюда следует, что искомые поверхности являются изгибаниями геликоида и их можно получить как поверхности бинормалей произвольной кривой постоянного кручения (§ 99, п. 7).

7. В § 100, п. 5 были получены формулы Вейерштрасса, определяющие произвольную минимальную поверхность. Укажем другой способ получения этих формул.

Будем исходить из того, что задание минимальной поверхности равносильно заданию аналитической функции $z = \varphi + i\psi$ на сфере. Действительно, функции φ и ψ — сопряженные гармонические функции, значит,

$$\psi_i = \gamma_i^k \varphi_k, \quad \varphi_i = -\gamma_i^k \psi_k.$$

Они определяют изотермическую сеть с тензором

$$h_{ik} = -(\varphi_i \psi_k + \varphi_k \psi_i), \quad (11)$$

находящимся в кодацциевом нормировании. Принимая эту сеть за асимптотическую, мы найдем радиус-вектор r минимальной поверхности по формуле

$$r = - \int h_{ik} \gamma^{ks} n_s du^i = \int (\psi_k d\varphi + \varphi_k d\psi) \gamma^{ks} n_s. \quad (12)$$

Обратно, сферическое отображение асимптотической сети поверхности есть изотермическая сеть. Эта сеть определяется по формулам (38:3) две гармонические на сфере функ-

ции φ и ψ и, следовательно, аналитическую функцию $z = \varphi + i\psi$.

Сеть с тензором

$$\tilde{h}_{ik} = -\gamma_i^s h_{sk} = \psi_i \psi_k - \varphi_i \varphi_k$$

тоже изотермическая и определяет поверхность

$$r = - \int \tilde{h}_{ik} \gamma^{ks} n_s du^i = \int (\varphi_k d\varphi - \psi_k d\psi) \gamma^{ks} n_s, \quad (13)$$

присоединенную поверхности (12). Рассмотрим комплексный вектор

$$\begin{aligned} R = r + ir^* &= \int [\varphi_k d\varphi - \psi_k d\psi + i(\varphi_k d\psi + \psi_k d\varphi)] \gamma^{ks} n_s = \\ &= \int z_k \gamma^{ks} n_s dz. \end{aligned} \quad (14)$$

Вещественная часть и коэффициент при мнимой части этого вектора равны радиусам-векторам двух присоединенных минимальных поверхностей.

Обозначим через v и u долготу и полярное расстояние точки единичной сферы, то есть положим

$$n = \sin u \cos v i + \sin u \sin v j + \cos u k.$$

Линейный элемент этой сферы

$$d\sigma^2 = du^2 + \sin^2 u dv^2 = \sin^2 u \left(\frac{du^2}{\sin^2 u} + dv^2 \right)$$

после введения комплексной переменной

$$\tau = x + iy = \operatorname{tg} \frac{u}{2} e^{iv} \quad (15)$$

принимает вид

$$d\sigma^2 = \frac{4}{(1 + \tau\bar{\tau})^2} d\tau d\bar{\tau} = \frac{4}{(1 + x^2 + y^2)^2} (dx^2 + dy^2). \quad (16)$$

Координаты X и Y — точки сферы — называются *стереографическими*.

Векторы n , $n_1 = \frac{\partial n}{\partial x}$ и $n_2 = \frac{\partial n}{\partial y}$ будут определяться формулами

$$\begin{aligned} (1 + \tau\bar{\tau}) n &= 2xi + 2yj + (1 - \tau\bar{\tau}) k, \\ (1 + \tau\bar{\tau})^2 n_1 &= 2(1 + y^2 - x^2) i - 4xyj - 4x^2k, \\ (1 + \tau\bar{\tau})^2 n_2 &= -4xyi + 2(1 + x^2 - y^2) j - 4y^2k. \end{aligned}$$

Из сравнения (16) с линейным элементом сферического отображения (4) минимальной поверхности

$$d\sigma^2 = e^{2h} (d\varphi^2 + d\psi^2) = e^{2h} dz d\bar{z}$$

следует, что z есть функция τ , и мы можем положить

$$z' = \frac{dz}{d\tau} = \sqrt{2F(\tau)}.$$

При этих условиях

$$dz = \sqrt{2F(\tau)} d\tau, \quad d\bar{z} = \sqrt{2F(\bar{\tau})} d\bar{\tau}, \quad z_1 = \frac{\partial z}{\partial x} = \sqrt{2F(\tau)},$$

$$z_2 = \frac{\partial z}{\partial y} = i \sqrt{2F(\tau)}, \quad \sqrt{-K} = e^{2h} = \frac{2}{(1 + \tau\bar{\tau})^2 \sqrt{F(\tau)F(\bar{\tau})}}.$$

Линейный элемент (3) минимальной поверхности принимает вид

$$ds^2 = e^{-2h} dz d\bar{z} = (1 + \tau\bar{\tau})^2 F(\tau) F(\bar{\tau}) d\tau d\bar{\tau}. \quad (17)$$

Внося найденные выше значения n , n_1 , n_2 и $\gamma^{11} = \gamma^{22} = (1 + \tau\bar{\tau})^2$ в (14), получим координаты вектора R

$$\begin{aligned} X &= \int (1 - \tau^2) F(\tau) d\tau, & Y &= i \int (1 + \tau^2) F(\bar{\tau}) d\bar{\tau}, \\ Z &= 2 \int \tau F(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (18)$$

а координаты точки минимальной поверхности будут

$$\begin{aligned} x &= R \int (1 - \tau^2) F(\tau) d\tau, & y &= Ri \int (1 + \tau^2) F(\bar{\tau}) d\bar{\tau}, \\ z &= 2R \int \tau F(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (19)$$

где R — знак вещественной части.

8. Рассмотрим в заключение минимальную поверхность S , наложимую на поверхность вращения \check{S} . Подвергая внутреннюю геометрию поверхности S автоморфизму, которому соответствует вращение поверхности \check{S} вокруг ее оси, мы не изменим поверхности \check{S} , а следовательно, не изменим и поверхности S . Аналитически такой автоморфизм задается преобразованием $\check{v} = v + \alpha$, где v — долгота точки сферы, и $\alpha = \text{const}$ — величина соответ-

ствующего угла поворота поверхности \check{S} вокруг ее оси. Комплексная переменная сферы $\tau = \operatorname{tg} \frac{u}{2} e^{iv}$ приобретает множитель $e^{i\alpha}$, ибо $\check{\tau} = \operatorname{tg} \frac{u}{2} e^{i(v+\alpha)} = \tau e^{i\alpha}$. Так как линейный элемент (17) при этом не должен меняться, то должно быть

$$|F(\tau)| = |F(\tau e^{i\alpha})|$$

или

$$F(\tau e^{i\alpha}) = e^{i\beta} F(\tau), \quad (20)$$

где β — вещественная константа. Вычисляя логарифмическую производную и умножая на τ , получаем

$$\frac{\tau e^{i\alpha} F'(\tau e^{i\alpha})}{F(\tau e^{i\alpha})} = \frac{\check{\tau} F'(\check{\tau})}{F(\check{\tau})} = \frac{\tau F'(\tau)}{F(\tau)},$$

что говорит о постоянстве функции $\frac{\tau F'(\tau)}{F(\tau)}$ на единичном круге плоскости τ с центром в точке $\tau = 0$, но тогда эта функция в силу ее аналитичности постоянная всюду, следовательно,

$$\frac{\tau F'(\tau)}{F(\tau)} = k = \operatorname{const}, \quad F = c\tau^k, \quad (21)$$

где c и k — постоянны и k вещественна, так как из (20) следует, что

$$(\tau e^{i\alpha})^k = \tau^k e^{i\beta}, \quad \alpha k = \beta + 2n\pi.$$

Рассмотрим асимптотическую сеть (v, w) поверхности S . При автоморфизмах она либо переходит в себя, либо повертывается на постоянный угол, так как при этих автоморфизмах поверхность остается минимальной. В первом случае линии (v) составляют с каждой параллелью, переходящей в себя, постоянный угол ω . Градиент этого угла $\omega_i = \check{t}_i - t_i$, где \check{t}_i — трансверсальный вектор поля v_i , получаемый из чебышевского вектора $\frac{1}{4} \partial_i \ln K$ сети (v, w) поворотом на прямой угол, и t_i — трансверсальный вектор семейства параллелей. Оба вектора \check{t}_i и t_i ортогональны параллелям, а градиент ω_i направлен по параллелям,

следовательно, равенство $\omega_i = t_i - t_i$ возможно лишь при $\omega_i = 0$, $\omega = \text{const}$. Значит, $t_i = t_i$ и чебышевский вектор сети вращения

$$c_i = \frac{1}{4} \partial_i \ln K.$$

Таким образом, эта сеть виртуально-асимптотическая и полугеодезическая. Отсюда следует, что поверхность наложима на минимальную линейчатую поверхность, то есть на геликоид. Можно проверить, что этот случай соответствует значению $k = 2$.

Во втором случае $k \neq 2$ при автоморфизмах поверхность, с одной стороны, переходит в себя, с другой стороны, переходит в ассоциированную ей поверхность. Поэтому все ее ассоциированные поверхности совпадают с ней самой.

Полагая, например, $k = 0$, $F(\tau) = \frac{3}{4}$, мы получим алгебраическую минимальную поверхность Эннепера

$$x = \frac{1}{4}(u^3 - 3u - 3uv^2), \quad y = \frac{1}{4}(3v + 3u^2v - v^3),$$

$$z = \frac{3}{4}(v^2 - u^2),$$

которая наложима на поверхность вращения.

§ 102. Эволютная поверхность

Линейчатая поверхность, составленная из нормалей поверхности вдоль кривой, лежащей на ней, называется *нормалией* этой кривой.

Нормалия каждой линии кривизны является развертывающейся поверхностью и образована касательными к некоторой кривой — ребру возврата. Случай вырождения ребра возврата в точку из общего рассмотрения исключается.

Геометрическое место ребер возврата нормалей линий кривизны поверхности S называется *эволютной поверхностью* или просто *эволютой* поверхности S .

Это название оправдывается следующим обстоятельством. Точка ребра возврата Γ нормали линии кривизны v лежит на нормали поверхности и ее радиус-вектор можно представить в виде

$$R = r + \lambda n.$$

Касательная к линии Γ совпадает с нормалью поверхности, следовательно, если $v^i = \frac{du^i}{ds}$ — направляющий орт линии кривизны, то

$$\frac{dR}{ds} = R_i v^i = r_i v^i + \lambda_i v^i n + \lambda n_i v^i = \sigma n.$$

Умножая обе части этого равенства на вектор $r_s v^s$, находим

$$\lambda = \varrho = \frac{1}{\sigma},$$

где $\sigma = h_{is} v^i v^s$ — нормальная кривизна линии v .

Называя $\varrho = \frac{1}{\sigma}$ радиусом нормальной кривизны,

а точку $r + \varrho n$ — центром нормальной кривизны линии v , можем сказать, что эволюта описывается центрами нормальных кривизн линий кривизны. Каждая линия кривизны является эвольвентой ребра возврата своей нормали. В связи с этим поверхность по отношению к своей эволюте называется эвольвентной поверхностью (или просто эвольвентой).

Эволютная поверхность состоит из двух полостей S и S .

Каждая полость является геометрическим местом центров нормальных кривизн одного семейства линий кривизны. Радиусы-векторы R и R эволютных поверхностей S и S можно записать так:

$$R = r + \varrho n, \quad R = r + \varrho n. \quad (1)$$

§ 103. Квадратичные формы эволютной поверхности

Обозначим через v и w направляющие орты сети линий кривизны и запишем деривационные формулы (83;2') трехгранника v, w, n :

$$\left. \begin{aligned} v_i &= -\tilde{c}_i w - \sigma \omega_i n, \\ w_i &= \tilde{c}_i v + \sigma v_i n, \\ n_i &= \sigma \omega_i v - \sigma v_i w, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где c_i — чебышевский вектор сети линий кривизны.

Найдем производные радиусов-векторов (102;1):

$$\begin{aligned} R_i &= r_i + \varrho_i n + \varrho n_i = -w_i v + v_i w + \varrho_i n + \varrho (\sigma \omega_i v - \sigma v_i w) = \\ &= \frac{\varrho - \varrho}{w} v_i w + \varrho_i n, \end{aligned} \quad (2)$$

$$R_i = \frac{\varrho - \varrho}{w} w_i v + \varrho_i n. \quad (2')$$

Отсюда видно, что вектор $R_i (R_i)$ ортогонален вектору $v (w)$, следовательно, орт нормали $N (N)$ поверхности $S (S)$ совпадает с касательным ортом $v (w)$:

$$N = v, \quad N = w.$$

Найдем первый тензор поверхности $S (S)$:

$$G_{is} = R_i R_s = \left(\frac{\varrho - \varrho}{w} \right)^2 v_i v_s + \varrho_i \varrho_s, \quad (3)$$

$$G_{is} = \left(\frac{\varrho - \varrho}{v} \right)^2 w_i w_s + \varrho_i \varrho_s. \quad (3')$$

Таким образом, ортогональные траектории ребер возврата Γ поверхности S совпадают с линиями уровня функции ϱ и являются геодезическими параллелями, так как направляющий орт этих траекторий равен ϱ_i и градиентен. Отсюда следует, что ребра возврата являются геодезическими линиями.

Последнее легко установить геометрически, если заметить, что соприкасающаяся плоскость ребра возврата Γ проходит через вектор v и, следовательно, содержит нормаль поверхности S , а это означает, что главная нормаль ребра возврата совпадает с нормалью поверхности.

Вычисление вторых и четвертых тензоров поверхности S (S) приводит к следующим формулам:

$$h_{is} = -R_i v_s = \frac{\varrho - \varrho}{w} v_i \tilde{c}_s + \sigma \varrho_i \omega_s, \quad (4)$$

$$h_{is} = -R_i w_s = \frac{\varrho - \varrho}{v} w_i \tilde{c}_s - \sigma \varrho_i v_s, \quad (4')$$

$$\begin{aligned} c_{is} &= 2 [v v_{(i} R_{s)}] = 2 (-\tilde{c}_{(i} n + \sigma \omega_{(i} w) R_{s)} = \\ &= -2 \tilde{c}_{(i} \varrho_{s)} + 2 (\sigma - \sigma) \omega_{(i} v_{s)}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$c_{is} = -2 \tilde{c}_{(i} \varrho_{s)} + 2 (\sigma - \sigma) v_{(i} \omega_{s)}. \quad (5')$$

Отметим еще две формулы

$$\frac{\varrho - \varrho}{w} \tilde{c}_s v^s = \sigma \varrho_s \omega^s, \quad \frac{\varrho - \varrho}{v} \tilde{c}_s w^s = -\sigma \varrho_s v^s, \quad (6)$$

получаемые из условий симметрии тензоров (4) и (4'):

$$\varepsilon^{is} h_{is} = \varepsilon^{is} h_{is} = 0.$$

Принимая во внимание эти соотношения, найдем дискриминанты тензоров G_{i_s} и h_{i_s} и гауссову кривизну K_v поверхности S :

$$G_v = \frac{1}{2} g_{i_s} G^{i_s} = g \left(\frac{Q-Q}{w} \right)^2 (Q_s v^s)^2,$$

$$h_v = \frac{1}{2} g h_{i_s} h^{i_s} = -g \frac{(Q-Q)}{Q_s w} Q_i v^i \tilde{c}_s w^s = -g \frac{Q_i v^i}{w} Q_s v^s,$$

$$K_v = \frac{h_v}{G_v} = - \frac{Q_i v^i}{Q_s v^s (Q-Q)^2}. \quad (7)$$

Аналогично найдется гауссова кривизна поверхности S_w

$$K_w = - \frac{Q_i w^i}{Q_s w^s (Q-Q)^2}. \quad (7')$$

Вычислим трансверсальный вектор T_s поля v_i на поверхности S . Единичный вектор, касательный к линиям этого поля, совпадает с вектором n нормали исходной поверхности, следовательно,

$$T_s = n_s [Nn] = n_s [vn] = -n_s w = \sigma v_s. \quad (8)$$

Найдем, наконец, чебышевский вектор \tilde{T}_s сети, составленный на поверхности S из ребер возврата и их ортогональных траекторий:

$$\tilde{T}_s = \varepsilon^{ik} G_{sR} T_i.$$

Здесь $\varepsilon_{ik} = V_i W_k - V_k W_i$, а орты V_i и W_i удовлетворяют условию (83;1)

$$R_i = -W_i V + V_i W,$$

причем следует считать, что $V = n$, $N = v$ и $W =$
 $= [Nn] = [vn] = -w$, следовательно,

$$R_i = -W_i n - V_i w,$$

что при сравнении с (2) дает

$$V_i = \frac{q-w}{v} v_i, \quad W_i = -q_i, \quad (9)$$

$$\varepsilon_{is} = \frac{q-w}{w} (v_i q_s - v_s q_i) = \frac{q-w}{w} v_k q^k \varepsilon_{is},$$

$$\varepsilon^{is} = \frac{q}{(q-w) q^k v^k} \varepsilon^{is}, \quad (10)$$

$$\tilde{T}_s = \varepsilon^{ik} G_{ks} \sigma v_i = \frac{q_s}{q-w} . \quad (11)$$

§ 104. Средняя эволютная и средняя эвольвентная поверхности

1. *Средней эволютной (или средней огибающей) поверхностью Σ данной поверхности S называется огибающая плоскостей, параллельных касательным плоскостям поверхности S и проходящих через середину M отрезка между центрами нормальных кривизн линий кривизны. Радиус-вектор точки M*

$$R = r + \frac{1}{2} (q + \varrho) n = r + \frac{H}{K} n,$$

а тангенциальное уравнение средней эволютной поверхности

$$Rn = rn + \frac{1}{2} (q + \varrho) = W + \frac{H}{K} .$$

Отсюда следует, что четвертая тангенциальная координата

искомой поверхности

$$W = W + \frac{H}{K}. \quad (1)$$

Если обе части равенства (87;5)

$$W_{i||s} = -h_{is} - W\gamma_{is}$$

свернуть с γ^{is} , то получим

$$\gamma^{is}W_{i||s} = \Delta'_2 W = -2\frac{H}{K} - 2W. \quad (2)$$

Следовательно,

$$W = -\frac{1}{2}\Delta'_2 W \quad (3)$$

и тангенциальное уравнение средней эволютной поверхности —

$$Rn = -\frac{1}{2}\Delta'_2 W. \quad (4)$$

Поставим обратную задачу: *найти среднюю эвольвентную поверхность S поверхности Σ* , то есть такую поверхность S , для которой поверхность Σ является средней эволютной поверхностью.

Для ее решения надо найти одну четвертую тангенциальную координату W поверхности S . Решение дается формулой (4): если W удовлетворяет уравнению

$$\Delta'_2 W = -2W, \quad (5)$$

то поверхность $rn = W$ будет искомой.

2. Рассмотрим *поверхности Бонне*, средняя огибающая которых вырождается в плоскость. Чтобы инвариантно охарактеризовать такую поверхность, вычислим второй тензор h_{is} средней огибающей.

Согласно (1) и (87;5) имеем

$$\begin{aligned} h_{is} &= -\left(W + \frac{H}{K}\right)_{i||s} - \left(W + \frac{H}{K}\right)\gamma_{is} = \\ &= h_{is} - \left[\left(\frac{H}{K}\right)_{i||s} + \frac{H}{K}\gamma_{is}\right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Для рассматриваемых поверхностей $h_{is} = 0$, и их можно инвариантно охарактеризовать каждым из следующих равенств:

$$h_{is} = \left(\frac{H}{K}\right)_{i||s} + \left(\frac{H}{K}\right) \gamma_{is}, \quad (7)$$

$$(\Delta'_2 W)_{i||s} = -\Delta'_2 W \gamma_{is}. \quad (8)$$

Если точка средней огибающей принята за начало координат, то

$$W = 0, \quad \Delta'_2 W = 0, \quad W = -\frac{H}{K} \quad \text{и} \quad \Delta'_2 \left(\frac{H}{K}\right) = 0.$$

Отыскание поверхности Бонне с данным сферическим отображением сводится к определению ее тангенциальной координаты из уравнения (8).

3. Поверхность, гомотетичная своей средней огибающей, называется *поверхностью Гурса* ([2], § 159).

Чтобы найти дифференциальное уравнение поверхности Гурса с данным сферическим отображением, предположим, что начало координат совпадает с центром подобия поверхностей S и Σ . В этом случае $W = cW$ ($c = \text{const}$).

Таким образом, поверхность Гурса определяется своей четвертой тангенциальной координатой, удовлетворяющей, согласно (5), уравнению

$$\Delta'_2 W = -2cW. \quad (9)$$

Минимальная поверхность является частным случаем поверхности Гурса: она совпадает со своей средней огибающей, а ее четвертая тангенциальная координата удовлетворяет уравнению

$$\Delta'_2 W = -2W. \quad (10)$$

4. Рассмотрим поверхность S , которая является средней огибающей для своей средней огибающей Σ .

В прежних обозначениях, согласно (3), имеем

$$W = -\frac{1}{2} \Delta'_2 W, \quad W = -\frac{1}{2} \Delta'_2 W,$$

что приводит к следующей инвариантной характеристике рассматриваемых поверхностей:

$$\Delta'_2 (\Delta'_2 W) = 4W. \quad (11)$$

Каждое решение этого уравнения определяет поверхность, обладающую указанным свойством.

С помощью (2) можно равенство (11) привести к следующему виду:

$$\Delta'_2 \left(\frac{H}{K} \right) = 2 \frac{H}{K}. \quad (12)$$

Условия (11) и (12) эквивалентны.

§ 105. Поверхности W

Если инварианты поверхности H и K связаны функциональной зависимостью $f(H, K) = 0$, то поверхность называется *поверхностью Вейнгартена* или, проще, *поверхностью W* .

Можно сказать, что поверхность W характеризуется функциональной зависимостью $\varphi(\sigma_1, \sigma_2) = 0$ главных радиусов кривизны. Вейнгартен, а затем и другие нашли много интересных свойств поверхностей W , которые будут рассмотрены ниже.

1. Для того чтобы поверхность S была поверхностью W , необходимо и достаточно, чтобы обе полости ее эволюты были наложимы на поверхности вращения и ребра возврата нормалей линий кривизны поверхности S налагались на меридианы.

Необходимость этого условия сразу следует из формулы (103;11): если $\varrho_w = \varphi(\varrho_v)$, то чебышевский вектор

$$\tilde{T}_s = \frac{\varrho_s}{\varrho_w - \varrho_v}$$

градиентен, сеть (v_i, ϱ_i) на поверхности S_v и аналогичная сеть на поверхности S_w будут изотермическими, а так как они всегда полугеодезические, то необходимость выказанного условия доказана.

Если на поверхности S_v за первую координату принять функцию ϱ_v , то, согласно (103;3), ее линейный элемент

примет вид

$$dS^2 = d\varrho^2 + B^2 d\theta^2 \quad (B = B(\varrho)). \quad (1)$$

Чебышевский вектор \tilde{T}_s координатной сети будет иметь своими координатами

$$\tilde{T}_1 = \frac{1}{\varrho - \varrho} = \frac{\frac{dB}{d\varrho}}{B}, \quad \tilde{T}_2 = 0.$$

Следовательно,

$$B = e^{\int \frac{d\varrho}{\varrho - \varrho}} \psi(\theta).$$

Выбором параметра θ функцию $\psi(\theta)$ можно привести к единице, и тогда линейный элемент (1) примет вид

$$dS^2 = d\varrho^2 + e^2 \int \frac{d\varrho}{\varrho - \varrho} d\theta^2. \quad (2)$$

Таким образом, профиль поверхности вращения, на которую наложима поверхность S вполне определяется видом функциональной зависимости $\varrho = \varphi(\varrho)$.

Линейный элемент полости S аналогично приведем к виду

$$dS^2 = d\varrho^2 + e^2 \int \frac{d\varrho}{\varrho - \varrho} d\theta^2. \quad (2')$$

Полости S и S оказываются наложимыми в том частном случае, когда функциональная зависимость $F(\varrho, \varrho) = 0$ симметрична относительно ϱ и ϱ . Так, например, наложимыми являются полости эволюты поверхности постоянной средней или гауссовой кривизн.

2. Прежде чем доказывать достаточность нашей теоремы, проведем следующее геометрическое исследование.

Рассмотрим на произвольной поверхности S семейство линий (v) и совокупность их касательных. Вдоль каждой сопряженной траектории v^* семейства линий (v) ($h_{is}v^i v^{s*} = 0$) эти касательные образуют развертывающуюся поверхность. Ребра возврата всех таких поверхностей составят новую поверхность S_1 , которую называют *преобразованием Лапласа* поверхности S относительно семейства линий (v) . Найдем радиус-вектор r_1 поверхности S_1 .

Прежде всего его можно записать в виде

$$r_1 = r + \sigma v.$$

Так как при движении по линии v^* соответствующая точка поверхности S_1 описывает ребро возврата, касательная к которому совпадает с касательной к линии (v) , то

$$r_1 v^{*i} = \lambda v = r_i v^{*i} + \sigma_i v^i v + \sigma v_i v^{*i}.$$

Умножим обе части этого равенства скалярно на вектор $w = [nv]$:

$$(nvr_i) v^{*i} + \sigma (nvv_i) v^{*i} = \varepsilon_{ih} v^h v^{*i} + \sigma t_i v^i = 0.$$

Отсюда находим расстояние между точками поверхностей S и S_1 :

$$\sigma = -\frac{\sin \omega}{\chi}, \quad (3)$$

где $\chi = t_i v^{*i}$ — чебышевская кривизна линии (v) сети (v, v^*) .

Пусть теперь семейство линий (v) геодезическое. В этом случае $t_i v^i = \varepsilon = 0$ и чебышевская кривизна выражается так:

$$\chi = t_i v^{*i} = t_i (v^i \cos \omega + w^i \sin \omega) = \varepsilon \sin \omega,$$

а расстояние между точками поверхностей S и S_1 равно по абсолютной величине радиусу геодезической кривизны

ортогональной траектории геодезических линий (v):

$$\sigma = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{w}. \quad (4)$$

Так как каждую линию можно рассматривать как геодезическую параллель к семейству ортогональных ей геодезических, то формула (4) приводит к известной теореме Бельтрами о построении радиуса геодезической кривизны [2].

Докажем теперь, что совокупность касательных к семейству непрямолинейных геодезических линий представляет собой совокупность нормалей для семейства параллельных поверхностей.

Обозначим через σ геодезический потенциал семейства (v), то есть положим

$$\partial_i \sigma = \sigma_i = w_i = \tilde{v}_i, \quad \sigma = \int w_i du^i + c \quad (c = \text{const}).$$

Тогда радиусом-вектором искомых поверхностей S_c будет

$$R_c = r + \sigma v = r + \left(\int w_i du^i + c \right) v, \quad (5)$$

так как в силу

$$R_{i;c} v = r_{i;c} v + \sigma_i = -w_i + \sigma_i = 0$$

вектор v является вектором нормали поверхности S_c .

Для каждой поверхности S_c исходная поверхность S служит одной полостью эволюты, а ее преобразование Лапласа относительно семейства геодезических (v) — второй полостью этой эволюты.

Из теоремы Бельтрами следует теперь, что расстояние $(\rho - \rho)$ между соответствующими точками полостей S и S эволюты поверхности S равно радиусу геодезической кривизны ортогональной траектории ребер возврата, лежащих на поверхности S (или S).

3. На основе предыдущего доказательства достаточно теоремы п. 1 проводится так. Пусть полость S эволюты поверхности S наложима на поверхность

вращения, и ребра возврата нормалей линий кривизны (v) поверхности S налагаются на меридианы.

Ортогональные траектории этих линий, как следует из вида линейного элемента (103;3), будут линиями $q = \text{const}$, а радиус геодезической кривизны этих траекторий (наложимых на параллели) зависит только от q и равен расстоянию $q - q$ между точками полостей эволюты.

Это приводит к функциональной зависимости

$$q - q = F(q),$$

показывающей, что поверхность есть поверхность W .

4. Для того чтобы поверхность была поверхностью W , необходимо и достаточно, чтобы асимптотические линии на полостях ее эволюты соответствовали.

Докажем необходимость. Рассматривая вторые тензоры (103;4,4) полостей эволюты

$$h_{is} = \left(1 - \frac{q}{w}\right) v_i \tilde{c}_s + \sigma_{qv} q_i w_s,$$

$$h_{is} = \left(1 - \frac{q}{v}\right) w_i \tilde{c}_s - \sigma_{qw} v_i v_s,$$

замечаем, что сети линий кривизны (v , w) на каждой из них соответствует сопряженная сеть, ибо

$$h_{is} v^i w^s = h_{is} w^i v^s = 0.$$

В случае поверхности W $q_i = \lambda_{qv} q_i$ и на полостях эволюты S и S есть вторая общая сопряженная сеть (\tilde{c}_s, q_s) , что следует из равенств

$$h_{is} \tilde{c}_s^i q^i = h_{is} \tilde{c}_s^i q^i = 0.$$

Если сети (\tilde{c}_s, q_s) и (v_s, w_s) различны, то на поверхностях S и S имеется две пары сопряженных соответствующих

щих сетей, следовательно, соответствующими будут и их главные, то есть асимптотические, сети. Если же эти сети совпадают, то, например, $\tilde{c}_s w^s = 0$, $q_s v^s = 0$. Из первого следует, что линии кривизны (w) будут геодезическими и потому плоскими, а из второго и из (103;3) — что полость S вырождается ($G_{is} = \lambda v_i v_s$) либо в линию, либо в точку, и говорить о соответствии асимптотических линий нет смысла.

Поверхность W в этом случае является либо поверхностью вращения, либо принадлежит к более общему классу поверхностей с одним семейством плоских линий кривизны, который будет рассмотрен в § 107.

Для доказательства достаточности заметим, что из соответствия асимптотических линий следует пропорциональность $h_{is} = \lambda h_{is}$ и равенство

$$h_{is} \tilde{c}^s = \sigma q_i w_s \tilde{c}^s = -\lambda \sigma q_i v_s \tilde{c}^s.$$

Исключая случаи вырождения поверхности S , когда обращаются в нуль две из следующих четырех величин: σ , σ , $\tilde{c}_s w^s$, $\tilde{c}_s v^s$, приходим к заключению, что $q_i = \mu q_i$, $F(q, q) = 0$ и что поверхность является поверхностью W .

5. Произведение гауссовых кривизн двух полостей эволюты поверхности W обратно четвертой степени расстояния между соответствующими точками этих полостей.

Действительно, полагая $q = f(q)$, $q_i = f'(q) q_i$, находим из (103;7,7')

$$KK = \frac{1}{(q - q)^4}.$$

6. Если линии кривизны на двух полостях S и S эволюты поверхности S соответствуют, то поверхность S будет поверхностью W .

Расстояние между соответствующими точками поверхностей S_v и S_w в этом случае постоянно, а полости S_v и S_w имеют равные постоянные гауссовы кривизны.

Если линии кривизны соответствуют, то тензоры (103;5) и (103;5') пропорциональны: $c_{is} = \lambda c_{is}$. Отсюда получаем

$$(c_{is} - \lambda c_{is}) \tilde{c}^i \tilde{c}^s = \frac{2}{\varrho_v \varrho_w} (\varrho_w - \varrho_v) (1 - \lambda) \tilde{c}_i v^i \tilde{c}_s w^s = 0.$$

Если $\tilde{c}_i v^i = 0$, то, согласно (103;6), $\varrho_i w^i = 0$ и $\varrho_i = \mu w_i$, а полость S_w вырождается в линию.

Исключая этот случай, имеем $\lambda = 1$, $c_{is} = c_{is}$ или

$$\tilde{c}_{(i} (\varrho_w - \varrho_v)_{s)} = 0.$$

Исключая случай $\tilde{c}_i = 0$, заключаем, что $\varrho_i - \varrho_i = 0$.

Из формул (103;7,7'), ввиду $\varrho_i = \varrho_i$, сразу следует, что

$$K_v = K_w = -\frac{1}{c^2}.$$

Верно обратное предложение: если расстояние между соответствующими точками полостей эволюты постоянно ($\varrho_w - \varrho_v = c$), то эти полости имеют равные гауссовы кривизны $K_v = K_w = -\frac{1}{c^2}$, линии кривизны на них соответствуют, а исходная поверхность является поверхностью W .

7. Поверхность W характеризуется тем, что ее четвертая квадратичная форма имеет нулевую гауссову кривизну.

Из результатов § 62 следует, что тензор

$$c_{is} = e^{2\sigma} c_{is} \quad (e^{2\sigma} = \sqrt{E})$$

будет E -тензором тогда и только тогда, когда будет градиентен вектор

$$\theta_s = c_s^i \left(c_i - \frac{1}{2} \tilde{c}_i^k \Omega_k - \sigma_i \right).$$

Так как в нашем случае $\Omega_h = 0$, $c_i = \frac{1}{4} \partial_i \ln E + \frac{1}{\sqrt{E}} c_i^s H_s$,

$\sigma_i = \frac{1}{4} \partial_i \ln E$, то

$$\theta_s = -\frac{H_s}{\sqrt{E}}.$$

Градиентность этого вектора означает функциональную зависимость H и E , что и доказывает наше утверждение.

Из результатов того же § 62 следует, что *линии кривизны поверхности W определяются квадратурами.*

§ 106. Поверхность с двумя семействами плоских линий кривизны

1. Так как касательная к линии кривизны параллельна касательной к ее сферическому отображению, то все касательные к сферическому отображению плоской линии кривизны параллельны плоскости этой линии. Отсюда следует, что сферическое отображение плоской линии кривизны есть плоская линия — окружность, плоскость которой параллельна плоскости самой линии кривизны. Обратно, если сферическим отображением линии кривизны служит окружность, то эта линия плоская, и ее плоскость параллельна плоскости этой окружности.

Таким образом, для того чтобы все линии кривизны были плоскими, необходимо и достаточно, чтобы сферическое отображение сети линий кривизны было сетью Бонне. Действительно, сферическое отображение плоских линий кривизны состоит из двух семейств ортогональных семейств окружностей, а так как каждая окружность сферы имеет постоянную геодезическую кривизну, то рассматриваемая сеть является сетью Бонне (§ 46). Инвариантный признак сети Бонне (46;11)

$$c_{i||}^t = 0, \quad c^{is} (c_{i||s} - c_i c_s) = 0, \quad (1)$$

где c_{is} — тензор сети линий кривизны, c_i — чебышевский вектор этой сети в сферическом отображении. Равенства (1) являются вместе с тем инвариантным признаком поверхности с плоскими линиями кривизны.

Тангенциальное уравнение поверхности $rn = W$, для которой данная сеть c_{is} является сферическим отображением сети линий кривизны, определяется четвертой тангенциальной координатой W , удовлетворяющей уравнению (88;1)

$$c^{is}W_{i||s} = 0. \quad (2)$$

В случае сети Бонне легко найти общее решение этого уравнения: введем новую неизвестную функцию

$$W = We^c \quad (\partial_i c = c_i).$$

Эта функция должна удовлетворять уравнению (см. (2) и (1))

$$c^{is}(We^c)_{i||s} = e^{-c}c^{is}(W_{i||s} - 2c_s W_i - W(c_{i||s} - c_i c_s)) = e^{-c}(c^{is}W_i)_{i||s} = 0$$

и, следовательно, является произвольной диагональной относительно сети c_{is} функцией. Итак, чтобы построить самую общую поверхность с плоскими линиями кривизны, нужно взять на сфере произвольную сеть Бонне c_{is} с чебышевским вектором $c_i = \partial_i c$ и произвольную диагональную относительно сети c_{is} функцию W . Поверхность с тангенциальным уравнением

$$rn = We^{-c} \quad (3)$$

будет искомой.

2. Для полного решения вопроса остается указать, как найти на сфере сеть Бонне. Эта сеть состоит из двух семейств взаимно ортогональных окружностей. Плоскости всех окружностей, пересекающих две данные окружности сферы ортогонально, образуют, как известно, пучок, ось которого соединяет полюсы двух данных окружностей. Следовательно, все сети Бонне на сфере можно найти, рассматривая пересечение этой сферы двумя пучками плоскостей, оси которых полярны относительно этой сферы. Возможны следующие три случая:

1°. Оси пучков пересекаются и являются, следовательно, двумя ортогональными касательными сферы. Если

за пару таких осей принять прямые

$$\frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{0}, \quad \frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z-1}{0},$$

то уравнение соответствующих пучков плоскостей будет

$$x + u(z-1) = 0, \quad y + v(z-1) = 0, \quad (4)$$

где u и v — параметры пучков. Определяя координаты x , y , z из уравнений (4) и уравнения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, найдем параметрические уравнения этой сферы:

$$x = \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \quad y = \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \quad z = \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1}. \quad (5)$$

Линии u и v будут линиями сети Бонне. Линейный элемент сферы в этих координатах имеет вид

$$ds^2 = \frac{4(du^2 + dv^2)}{(u^2 + v^2 + 1)^2}.$$

Потенциал чебышевского вектора координатной сети Бонне определяется равенством

$$e^{-c} = \frac{2}{u^2 + v^2 + 1}.$$

2°. Оси пучков не пересекаются. Если уравнение одной оси

$$\frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z-a}{0} \quad (0 < a < 1),$$

то уравнение другой, очевидно, будет

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z-\frac{1}{a}}{0}.$$

Уравнения соответствующих пучков записываются так:

$$x - \lambda(z-a) = 0, \quad y - \mu\left(z - \frac{1}{a}\right) = 0.$$

Если ввести новые параметры пучков u и v , полагая

$$\lambda = \frac{\operatorname{tg} u}{\sqrt{1-a^2}}, \quad \mu = \frac{a \operatorname{th} v}{\sqrt{1-a^2}},$$

то параметрические уравнения сферы примут вид

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{1-a^2} \sin u}{\operatorname{ch} v + a \cos u}, & y &= -\frac{\sqrt{1-a^2} \operatorname{sh} v}{\operatorname{ch} v + a \cos u}, \\ z &= \frac{\cos u + a \operatorname{ch} v}{\operatorname{ch} v + a \cos u}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Линейный элемент сферы, отнесенный к этой координатной сети Бонне:

$$ds^2 = \frac{(1-a^2)(du^2 + dv^2)}{(\operatorname{ch} v + a \cos u)^2}.$$

Потенциал c чебышевского вектора координатной сети определяется равенством

$$e^{-c} = \frac{\sqrt{1-a^2}}{\operatorname{ch} v + a \cos u}.$$

3°. Предельный случай, когда одна ось совпадает с диаметром сферы $x = y = 0$, а другая бесконечно удалена. Сеть Бонне в этом случае совпадает с сетью меридианов и параллелей. Линейный элемент сферы принимает вид

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{\operatorname{ch}^2 v},$$

а ее параметрические уравнения

$$x = \frac{\cos u}{\operatorname{ch} v}, \quad y = \frac{\sin u}{\operatorname{ch} v}, \quad z = \operatorname{th} v. \quad (7)$$

Потенциал чебышевского вектора координатной сети определяется равенством

$$e^{-c} = \frac{1}{\operatorname{ch} v}.$$

В первом случае уравнение искомой поверхности (3) примет вид

$$rn = W e^{-c} = \frac{2(U+V)}{u^2 + v^2 + 1}$$

(где U и V — произвольные функции одного u и v : $U = U(u)$, $V = V(v)$) или, согласно (5),

$$2ux + 2vy + (u^2 + v^2 - 1)z = 2(U + V) \quad (8)$$

Во втором случае это уравнение

$$\sqrt{1-a^2} x \sin u - \sqrt{1-a^2} y \operatorname{sh} v + (\cos u + a \operatorname{ch} v) z = U + V. \quad (9)$$

И, наконец, в третьем случае тангенциальное уравнение поверхности будет

$$x \cos u + y \sin u + z \operatorname{sh} v = U + V. \quad (10)$$

3. Дарбу [1] указал следующий способ построения рассматриваемых поверхностей. Плоскость (8) является радикальной плоскостью двух сфер

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + \left(u^2 - \frac{1}{2}\right)z &= 2U, \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2vy - \left(v^2 - \frac{1}{2}\right)z &= -2V. \end{aligned}$$

Центры первой сферы описывают параболу

$$x^2 = 2 \left(\frac{1}{4} - z\right), \quad y = 0, \quad (11)$$

а центры второй — параболу

$$y^2 = 2 \left(\frac{1}{4} + z\right), \quad x = 0. \quad (12)$$

Две кривые второго порядка называются *фокальными*, если их плоскости ортогональны и вершины одной являются фокусами другой. Параболы (11) и (12), как легко проверить, фокальны.

Во втором случае плоскость (9) является радикальной плоскостью сфер

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 + \sqrt{1-a^2} \sin ux + \cos uz &= U, \\ x^2 + y^2 + z^2 + \sqrt{1-a^2} \operatorname{sh} vy - a \operatorname{ch} vz &= -V, \end{aligned}$$

центры которых описывают фокальные эллипс и гиперболу

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{\frac{1}{4}(1-a^2)} + \frac{z^2}{\frac{1}{4}} &= 1, \quad y = 0, \\ \frac{z^2}{\frac{1}{4}a^2} - \frac{y^2}{\frac{1}{4}(1-a^2)} &= 1, \quad x = 0. \end{aligned}$$

Совершенно аналогично в третьем случае плоскость (10) есть радикальная плоскость сфер

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 + x \cos u + y \sin u &= U, \\x^2 + y^2 + z^2 - z \operatorname{sh} v &= -V,\end{aligned}$$

центры которых описывают окружность и прямую

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= \frac{1}{4}, \quad z = 0 \\ \frac{x}{0} &= \frac{y}{0} = \frac{z}{1},\end{aligned}$$

представляющие собой третий (вырождающийся) возможный случай пары фокальных кривых.

Из этих свойств следует такой способ Дарбу построения произвольной поверхности с плоскими линиями кривизны: возьмем два семейства сфер с центрами на двух фокальных кривых второго порядка с радиусами, меняющимися по произвольному закону для каждого семейства. Двупараметрическое семейство радикальных плоскостей этих сфер огибает искомую поверхность.

§ 107. Поверхность с одним семейством плоских линий кривизны

Сферическим отображением линий кривизны таких поверхностей является ортогональная сеть, одно семейство линий которой состоит из окружностей, то есть из линий постоянной геодезической кривизны. Если $c_{is} = v_i w_s + v_s w_i$ — тензор этой сети, а постоянные геодезические кривизны ε имеют линии w , то

$$\varepsilon_i \omega^i = 0. \quad (1)$$

Четвертая тангенциальная координата W поверхности, для которой сеть c_{is} является сферическим отображением сети линий кривизны, определяется уравнением

$$\frac{1}{2} c^{is} W_{i||s} = W_{i||s} v^i w^s = 0.$$

Это уравнение в силу (1) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} (W_i v^i)_{||s} \omega^s - W_i v^i_{||s} \omega^s &= (W_i v^i)_{||s} \omega^s - W_i \omega^i \underset{w}{\varepsilon} - W \underset{w}{\varepsilon}_s \omega^s = \\ &= (W_i v^i - W \underset{w}{\varepsilon})_s \omega^s = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$W_i v^i - W \underset{w}{\varepsilon} = U, \quad (2)$$

где U — функция, постоянная на линиях w , то есть такая, что $U_s \omega^s = 0$. Если сеть c_{is} принять за координатную, то линейный элемент сферы примет вид

$$ds^2 = A^2 du^2 + B^2 dv^2.$$

Геодезическая кривизна $\underset{w}{\varepsilon} = \frac{1}{AB} \partial_u B$ и функция U будут зависеть от одного u , следовательно,

$$\underset{w}{\varepsilon} = \frac{1}{AB} \partial_u B = \varphi(u), \quad U = U(u).$$

Так как далее $v^1 = \frac{1}{A}$, $v^2 = 0$, то уравнение (2) примет вид

$$\partial_u W - W \frac{B_u}{B} = B \partial_u \left(\frac{W}{B} \right) = AU$$

и имеет следующее общее решение:

$$W = B \left(V + \int_0^u \frac{AU}{B} du \right), \quad (3)$$

где V — произвольная функция аргумента v .

Таким образом, чтобы построить произвольную поверхность с одним семейством плоских линий кривизны, нужно взять на сфере произвольную ортогональную сеть, одно семейство линий которой состоит из окружностей. Если эта сеть принята за координатную и функция W определена формулой (3), то поверхность с тангенциальным уравнением $gn = W$ будет искомой.

§ 108. Резные поверхности

1. *Резными* называются поверхности, у которых плоскости одного семейства плоских линий кривизны ортогональны поверхности. Семейство (w) плоских линий кривизны рассматриваемой поверхности будет геодезическим, так как главные нормали этих линий лежат в их плоскостях и, следовательно, совпадают с нормальными поверхностями. Резную поверхность можно также охарактеризовать как поверхность с геодезическим семейством линий кривизны. Действительно, геодезические линии кривизны будут плоскими (§ 84) и их плоскости будут ортогональны поверхности.

Уравнение произвольной резной поверхности можно получить по формулам предыдущего параграфа, считая, что $g = 0$ или что функция B не зависит от координаты u .

Плоскости геодезических линий кривизны (w) резной поверхности S ортогональны ей и огибаются некоторой развертывающейся поверхностью Σ . Линии кривизны второго семейства (v) являются, очевидно, ортогональными траекториями однопараметрического семейства касательных плоскостей поверхности Σ . Обратно, всякая поверхность S , составленная из ортогональных траекторий (v) однопараметрического семейства плоскостей, будет резной поверхностью. Для доказательства рассмотрим одну из линий (w) пересечения поверхности с плоскостью семейства. Нормали этой линии лежат в ее плоскости и ортогональны к тем ортогональным траекториям (v), которые ее пересекают, следовательно, эти главные нормали совпадают с нормальными поверхностями, а так как это означает, что линии (w) будут геодезическими линиями кривизны, то предложение доказано.

Если семейство плоскостей вырождается в пучок, то поверхность, составленная из его ортогональных траекторий, будет поверхностью вращения. Ортогональные траектории плоскостей пучка будут параллелями, а второе семейство линий кривизны составят меридианы. Имея в виду этот частный случай, геодезические линии кривизны (w) резной поверхности А. П. Норден [5] называет *меридианами*, а их ортогональные траектории — *параллелями*.

Докажем, что все меридианы резной поверхности конгруэнтны. Кривизна k каждого меридиана (w), как кривизна геодезической линии, равна его нормальной кривизне $k = \sigma$. Если w^i — касательный орт меридиана, а h_{is} — второй тензор поверхности, то $\sigma = h_{is} w^i w^s$.

Докажем сначала, что эта кривизна постоянна вдоль параллелей (v). Вычислим производную

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{ds} &= (h_{is} w^i w^s)_k v^k = h_{is|k} w^i w^s v^k + 2h_{is} w^i w^s{}_{|k} v^k = \\ &= h_{is|k} w^i w^s v^k - 2h_{is} w^i v^s t_k w^k. \end{aligned}$$

Второе слагаемое равно нулю, так как линии v^i и w^i сопряжены. Чтобы доказать равенство нулю первого слагаемого, вычислим производную:

$$(h_{is} w^i v^s)_{|k} w^k = h_{is|k} w^i v^s w^k - h_{is} v^i v^s t_k w^k + h_{is} w^i w^s t_k w^k = 0.$$

Два последних слагаемых обращаются в нуль, так как линии (w) геодезические ($e = t_k w^k = t_k w^k = 0$). В силу симметрии тензора $h_{is|k}$ теперь следует, что

$$\frac{d\sigma}{ds} = h_{is|k} w^i w^s v^k = h_{is|k} w^i v^s w^k = 0.$$

Мы доказали, что в точках одной параллели все меридианы имеют равные кривизны. Однако каждые две параллели, как ортогональные траектории геодезических, отсекают на этих геодезических (меридианах) равные дуги. Если точки одной из параллелей принять за начала отсчета дуг на всех меридианах, то кривизны плоских меридианов будут одинаковыми функциями их дуг; отсюда и следует, что все меридианы конгруэнтны.

Последний результат позволяет определить резную поверхность как поверхность, образованную движением плоской линии (меридиана), плоскость которой катится без скольжения по некоторой развертывающейся поверхности, которая называется ее *направляющей поверхностью*.

2. Если направляющая поверхность резной поверхности цилиндрическая, то все ее параллели будут плоскими линиями, расположенными в параллельных плоскостях, ортогональных образуящим направляющего цилиндра.

Обратно, пусть плоскости одного семейства (v) линий кривизны параллельны. Сферическое отображение этого семейства состоит из параллелей сферы, а их ортогональные траектории (w) отображаются в меридианы. Плоскости линий кривизны семейства (w) огибают, очевидно, цилиндр, а линии (v) являются ортогональными траекториями этих плоскостей. Следовательно, если плоскости одного семейства линий кривизны поверхности параллельны, то эта поверхность будет резной поверхностью с цилиндрической направляющей. Уравнение произвольной поверхности этого типа получено в § 107.

3. Направляющая поверхность Σ каждой резной поверхности S является также ее эволютной поверхностью, так как все нормали поверхности S касаются поверхности Σ . Обратно, каждая поверхность S , одна из эволютных поверхностей Σ которой развертывающаяся, есть резная поверхность. Нормаль второй эволюты Σ' поверхности S параллельна касательной к ее меридиану, лежит в плоскости этого меридиана, следовательно, тоже касается поверхности Σ , а это означает, что Σ' — тоже резная поверхность. Меридианы поверхности Σ' , как касательные к нормальям поверхности S , являются эволютами меридианов этой поверхности.

4. Рассмотрим в заключение резную поверхность с конической направляющей. Нормальные плоскости параллелей такой поверхности, как касательные плоскости конуса, проходят через его вершину. Параллели, таким образом, являются сферическими кривыми, расположенными на концентрических сферах с центрами в вершине направляющего конуса. Докажем обратное: *поверхность, одно семейство (v) линий кривизны которой располагается на концентрических сферах, есть резная поверхность с конической направляющей.* Рассмотрим нормальную плоскость сферической линии кривизны (v). Она проходит через общий центр сфер O и касается линии кривизны второго семейства (w), следовательно, эта плоскость

ортогональна поверхности и содержит ее нормаль. Предположим, что такие плоскости в различных точках одной линии (w) различны и, следовательно, огибают конус с вершиной в точке O . Нормали поверхности лежат в касательных плоскостях этого конуса и образуют вдоль линии кривизны (w) развертывающуюся поверхность. Направление нормали сопряжено направлению линии (w) конуса, а это означает, что она совпадает с образующей конуса (образующая конуса сопряжена всем направлениям) и проходит постоянно через точку O . Поверхность в этом случае будет сферой, что следует исключить. Следовательно, соприкасающаяся плоскость вдоль каждой линии (w) постоянна, линии (w) плоские, их плоскости огибают конус, а линии (v) являются ортогональными траекториями этих плоскостей, что и требовалось доказать.

§ 109. Поверхности Иоахимстала

Если одно семейство (v) линий кривизны поверхности лежит в плоскостях одного пучка, то эту поверхность называют *поверхностью Иоахимстала*. По теореме Кёнигса (151, § 27) второе семейство (w) линий кривизны поверхности состоит из линий ее касания с конусами, вершины которых принадлежат оси пучка плоскостей. Так как каждая линия (w) ортогональна всем линиям (v) , то линии (w) являются ортогональными траекториями образующих своих конусов и, следовательно, лежат на сферах с центрами в различных точках оси пучка. Линии кривизны (v) являются, очевидно, ортогональными траекториями этих сфер.

Обратно, пусть линии семейства (v) поверхности состоят из ортогональных траекторий однопараметрического семейства сфер с центрами на прямой D . Касательные к линиям (v) проходят через центры соответствующих сфер и, следовательно, все пересекают прямую D . Это означает, что все линии (v) плоские и их плоскости образуют пучок с осью D . Рассмотрим теперь одну из линий (w) пересечения сферы семейства с поверхностью. Касательные к линиям (v) вдоль этой линии (w) проходят через центр выбранной сферы, образуют развертывающуюся поверхность (конус) и, следовательно, их направления сопряжены

линии (w). Так как линии (v) и линии (w), кроме того, ортогональны, то они являются линиями кривизны, а рассматриваемая поверхность — поверхностью Иоакимстала.

Последний результат показывает, что все поверхности Иоакимстала можно найти как поверхности, образованные ортогональными траекториями однопараметрического семейства сфер с центрами на одной прямой. Если эту прямую принять за ось Oz , аппликату центра сферы обозначить через u , а радиус этой сферы через $R = R(u)$, то радиус-вектор $r = r(u)$ произвольной точки M сферы можно записать так:

$$r = uk + R(xi + yj + zk), \quad (1)$$

где $x = x(u)$, $y = y(u)$, $z = z(u)$ — координаты орта, направленного из центра сферы в точку M — удовлетворяют равенству

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1. \quad (2)$$

Отыскание ортогональных траекторий семейства сфер приводится к решению уравнения $\frac{dr}{du} = \lambda(xi + yj + zk)$ или

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{\frac{1}{R} + z'}{z}. \quad (3)$$

Отсюда $y = cx$ ($c = \text{const}$), что при подстановке в (2) определяет x :

$$x^2 = \frac{1 - z^2}{1 + c^2}.$$

Для определения z из (3) получаем уравнение

$$\frac{-zz'}{1 - z^2} = \frac{\frac{1}{R} + z'}{z},$$

или

$$\frac{z'}{z^2 - 1} = \frac{1}{R}.$$

Интегрируя его, находим

$$\left. \begin{aligned} z &= \text{th } \tau, \quad \tau = \int \frac{du}{R} + c_1 \quad (c_1 = \text{const}), \\ x &= \frac{1}{\text{ch } \tau \sqrt{1 + c^2}}, \quad y = \frac{c}{\text{ch } \tau \sqrt{1 + c^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Уравнения (1) и (4) определяют двухпараметрическое семейство ортогональных траекторий. Параметрами служат постоянные c и c_1 . Чтобы выделить однопараметрическое семейство траекторий, достаточно, например, положить $c = \operatorname{tg} v$, $c_1 = V(v)$ (V — произвольная функция аргумента v). Внося эти значения в (1) и (4), получим

$$x = \frac{R \cos v}{\operatorname{ch} \tau}, \quad y = \frac{R \sin v}{\operatorname{ch} \tau}, \quad z = u + R \operatorname{th} \tau,$$

$$\tau = \int \frac{du}{R} + V(v)$$

— параметрические уравнения произвольной поверхности Иохимстала, зависящей от двух произвольных функций $R = R(u)$, $V = V(v)$ одного аргумента [2].

§ 110. Каналовые поверхности

1. *Каналовой* называется поверхность, одно семейство линий кривизны которой состоит из окружностей. Плоскость каждой такой окружности пересекает поверхность под постоянным углом (§ 81). Отсюда следует, что нормаль каждой рассматриваемой линии кривизны будет конусом и что одна полость эволюты каналовой поверхности вырождается в кривую Γ , являющуюся геометрическим местом вершин этих конусов.

Сферы с центрами в точках кривой Γ , проходящие через соответствующую окружность, касаются поверхности, следовательно, *каналовая поверхность является огибающей однопараметрического семейства сфер*.

Обозначим через $\mathbf{q} = \mathbf{q}(s)$ радиус-вектор кривой Γ — геометрического места центров сфер семейства, и пусть $R = R(s)$ — радиус соответствующей сферы (s — длина дуги кривой Γ). Уравнение семейства сфер имеет теперь вид

$$(\mathbf{r} - \mathbf{q})^2 = R^2. \quad (1)$$

Характеристика семейства — окружность — есть пересечение сферы (1) и плоскости

$$(\mathbf{r} - \mathbf{q}) \mathbf{t} + RR' = [\mathbf{r} - (\mathbf{q} - RR' \mathbf{t})] \mathbf{t} = 0, \quad (2)$$

где

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{q}}{ds}, \quad R' = \frac{dR}{ds}.$$

Центр этой окружности лежит на касательной к кривой Γ . Его радиус-вектор есть $\mathbf{q} - RR't$. Радиус характеристической окружности $R_1 = \sqrt{R^2 - (RR')^2} = R\sqrt{1 - R'^2}$. Если σ — угол пересечения этой окружности с огибающей поверхностью, то $\cos \sigma = \frac{\sqrt{R^2 - R_1^2}}{R} = R'$. Для того чтобы огибающая поверхность была вещественна, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $|R'| \leq 1$.

2. Рассмотрим поверхность, у которой окружности одного семейства линий кривизны имеют постоянный радиус $R_1 = a$. Радиус сферы R для такой поверхности есть решение уравнения

$$R_1 = R\sqrt{1 - R'^2} = a. \quad (3)$$

Решение $R = a$ этого уравнения приводит к *трубчатой поверхности — огибающей однопараметрического семейства сфер постоянного радиуса*. Характеристическая окружность такого семейства лежит в нормальной плоскости кривой Γ , которая пересекает огибающую поверхность ортогонально ($\cos \sigma = R' = 0$). Следовательно, *трубчатая поверхность принадлежит к числу реальных поверхностей*.

Если $R \neq \text{const}$, то общее решение уравнения (3) будет

$$R = \sqrt{(s+c)^2 + a^2}.$$

Центр характеристической окружности определяется вектором

$$\mathbf{q} + (s+c)t$$

и, следовательно, лежит на одной из эвольвент кривой Γ . Отсюда получается следующий способ построения произвольной каналовой поверхности, одно семейство линий кривизны которой состоит из равных окружностей: точки произвольной кривой Γ принимаются за центры окружностей постоянного радиуса. Если плоскости этих окружностей будут параллельны нормальным плоскостям одной из эволют кривой Γ , то искомая поверхность будет геометрическим местом этих окружностей.

3. Докажем, что произвольное семейство окружностей единичной сферы является сферическим отображением

семейства круговых линий кривизны бесконечного числа каналовых поверхностей.

Окружность c — линия кривизны поверхности S — имеет своим сферическим отображением некоторую окружность c_1 . Геометрическое место сферических центров различных окружностей c_1 есть сферическая индикатриса касательных кривой Γ (Γ , как и выше, — геометрическое место центров сфер, огибающих каналовую поверхность), так как плоскости окружностей c , а следовательно и c_1 , ортогональны касательным кривой Γ . Таким образом, произвольное семейство окружностей единичной сферы определяет сферическую индикатрису Γ_1 кривой Γ . Если $t = t(s_1)$ — радиус-вектор кривой Γ_1 и s_1 — длина ее дуги, то радиус-вектор r кривой Γ определяется квадратурами:

$$r = \int t f(s_1) ds_1,$$

где $f(s_1)$ — произвольная функция. Для определения радиуса R сферы заметим, что дуговой радиус окружности c_1 равен углу σ пересечения плоскости окружности c с искомой поверхностью. Из п. 2 теперь имеем $\cos \sigma = R' = \frac{dR}{ds}$, где $ds = f(s_1) ds_1$, следовательно,

$$R = \int \cos \sigma f(s_1) ds_1.$$

Если семейство окружностей c_1 дано, то кривая Γ_1 и угол σ известны. Задавая произвольно функцию $f(s_1)$, найдем кривую Γ , радиусы сфер R и искомую поверхность.

§ 111. Циклиды Дюпена

Циклидой Дюпена или просто *циклидой* называют поверхность, оба семейства линий кривизны которой состоят из окружностей. Циклида является частным случаем каналовой поверхности. Можно сказать, что это — дважды каналовая поверхность: обе ее эволютные поверхности вырождаются в кривые Γ_1 и Γ_2 , поэтому циклиду можно получить либо как огибающую семейства сфер с центрами в точках кривой Γ_1 , либо как огибающую сфер с центрами в точках кривой Γ_2 . Если радиусы-векторы

кривых Γ_1 и Γ_2 обозначить через $U(u)$ и $V(v)$ соответственно, то уравнения этих двух семейств сфер будут

$$(r - U)^2 = A^2(u), \quad (r - V)^2 = B^2(v). \quad (1)$$

В каждой точке M циклиды ее касается одна сфера первого семейства и одна сфера второго семейства, следовательно, любые две сферы различных семейств касаются друг друга. Отсюда легко следует, что циклида является огибающей семейства сфер, касательных к трем фиксированным сферам: возьмем, например, какие-нибудь три сферы первого семейства, тогда любая касающаяся их сфера будет принадлежать второму семейству.

Условие касания двух сфер различных семейств (1)

$$(U - V)^2 = (A + B)^2 \quad (2)$$

представляет собой векторное функциональное уравнение. Можно показать, что его решение — кривые Γ_1 ($r = U$) и Γ_2 ($r = V$) — есть фокальные кривые второго порядка.

К тому же результату можно прийти другим путем. Циклида является геометрическим местом точек касания сфер (1), следовательно, огибает общие касательные, или, что то же, радикальные плоскости этих сфер, уравнения которых

$$(2r - U - V)(V - U) = B^2 - A^2$$

или

$$r(U - V) = A_1(u) + B_1(v), \quad (3)$$

где

$$A_1 = \frac{1}{2}(A^2 + U^2), \quad B_1 = -\frac{1}{2}(B^2 + V^2).$$

С другой стороны, ту же циклиду, как поверхность с плоскими линиями кривизны, можно получить (§ 106) как огибающую плоскостей

$$r(\dot{U}(\dot{u}) - \dot{V}(\dot{v})) = \dot{A}(\dot{u}) + \dot{B}(\dot{v}), \quad (4)$$

где $r_1 = \dot{U}$ и $r_2 = \dot{V}$ — две фокальные кривые второго порядка $\dot{\Gamma}_1$ и $\dot{\Gamma}_2$. Так как \dot{u} и \dot{v} являются параметрами линий кривизны циклиды, то можно считать, что $\dot{u} = u$ и $\dot{v} = v$ и что касательные плоскости (3) и (4) для равных значений u и v совпадают. Последнее возможно лишь при $\dot{U} - \dot{V} =$

$= c(U - V)$, а отсюда следует, что $c = \text{const}$, $U^* = cU + a$, $V^* = cV + a$, $a = \text{const}$, так что кривые Γ_1^* и Γ_2^* совпадают с кривыми Γ_1 и Γ_2 с точностью до подобия с центром в начале координат и совместного параллельного переноса на вектор a . Наше предложение доказано.

Чтобы получить уравнение *циклиды первого типа*, эволютами которой служат фокальные эллипс и гипербола

$$x = b \sin u, \quad y = 0, \quad z = a \cos u;$$

$$x = 0, \quad y = b \operatorname{sh} v, \quad z = c \operatorname{ch} v, \quad b = \sqrt{a^2 - c^2},$$

требуем, чтобы сферы

$$(x - b \sin u)^2 + y^2 + (z - a \cos u)^2 = U^2,$$

$$x^2 + (y - b \operatorname{sh} v)^2 + (z - c \operatorname{ch} v)^2 = V^2$$

касались, то есть чтобы выполнялось равенство

$$\begin{aligned} \sqrt{b^2 \sin^2 u + b^2 \operatorname{sh}^2 v + (a \cos u - c \operatorname{ch} v)^2} = \\ = c \cos u - a \operatorname{ch} v = U + V. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$U = c \cos u + d, \quad V = -a \operatorname{ch} v - d \quad (d = \text{const}).$$

Точку искомой циклиды проще всего, пожалуй, найти как точку, делящую отрезок центров сфер (1) в отношении $\frac{U}{V}$, равном отношению радиусов этих сфер:

$$x = \frac{Vb \sin u}{U+V}, \quad y = \frac{Ub \operatorname{sh} v}{U+V}, \quad z = \frac{Va \cos u + Uc \operatorname{ch} v}{U+V}. \quad (5)$$

Мы получили параметрические уравнения циклиды первого типа.

Уравнение *циклиды второго типа*, эволюты которой являются фокальными парабололами

$$x = u, \quad y = 0, \quad z = \frac{2u^2 - p^2}{4p}; \quad x = 0, \quad y = v, \quad z = \frac{-2v^2 + p^2}{4p}$$

получим аналогично: требуем, чтобы сферы

$$(x - u)^2 + y^2 + \left(z - \frac{2u^2 - p^2}{4p}\right)^2 = U^2,$$

$$x^2 + (y - v)^2 + \left(z + \frac{2v^2 - p^2}{4p}\right)^2 = V^2$$

касались:

$$\sqrt{u^2 + v^2 + \frac{(u^2 + v^2 - p^2)^2}{4p^2}} = \frac{u^2 + v^2 + p^2}{2p} = U + V.$$

Отсюда находим

$$U = \frac{2u^2 + p^2 + q}{4p}, \quad V = \frac{2v^2 + p^2 - q}{4p} \quad (q = \text{const}),$$

и параметрические уравнения циклиды второго типа будут

$$x = \frac{Vu}{U+V}, \quad y = \frac{Uv}{U+V}, \quad z = \frac{V(2u^2 - p^2) - U(2v^2 - p^2)}{4p(U+V)}. \quad (6)$$

Для циклиды третьего типа эволютами служат фокальные окружность и прямая:

$$x = a \cos u, \quad y = a \sin u, \quad z = 0,$$

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = v.$$

Условие касания сфер

$$(x - a \cos u)^2 + (y - a \sin u)^2 + z^2 = U^2$$

и

$$x^2 + y^2 + (z - v)^2 = V^2$$

имеет вид

$$\sqrt{a^2 \cos^2 u + a^2 \sin^2 u + v^2} = \sqrt{a^2 + v^2} = U + V,$$

следовательно,

$$U = b = \text{const}, \quad V = \sqrt{a^2 + v^2} - b.$$

Параметрические уравнения этой циклиды —

$$x = \frac{Va \cos u}{\sqrt{a^2 + v^2}}, \quad y = \frac{Va \sin u}{\sqrt{a^2 + v^2}}, \quad z = \frac{bv}{\sqrt{a^2 + v^2}}. \quad (7)$$

Переход от параметрических уравнений (5), (6), (7) к неявным уравнениям показывает, что циклиды являются алгебраическими поверхностями четвертого порядка в первом и третьем случаях и третьего порядка во втором случае. Так, например, исключая u и v из (7), получаем

$$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - b^2)^2 = 4(x^2 + y^2)a^2.$$

Следовательно, циклида третьего типа есть тор: она получена вращением окружности $(x - a)^2 + z^2 = b^2$, $y = 0$ вокруг оси Oz .

§ 112. Поверхности с одним семейством сферических линий кривизны

Между поверхностями с одним сферическим семейством линий кривизны и поверхностями с одним плоским семейством линий кривизны существует тесная связь, позволяющая каждую из них получить некоторым преобразованием другой.

1. Любая ортогональная сеть сферы является сферическим отображением линий кривизны бесконечного числа поверхностей. При каких условиях среди этих поверхностей есть поверхности со сферическим семейством линий кривизны? Предположим, что сеть (v, w) сферы является такой сетью, и линии (v) являются сферическим отображением сферических линий кривизны поверхности r . Так как нормальные плоскости каждой линии (v) проходят через центр r содержащей ее сферы, то вектор $r - r_0$ ортогонален вектору $v = n_\alpha v^\alpha$ (v^α — орт касательной линии (v) на сфере). Следовательно,

$$r = r_0 + Aw + Bn \quad (w = n_\alpha w^\alpha). \quad (1)$$

Вдоль линий (v) центр сферы r_0 неподвижен, так что (см. формулы (83;2))

$$\begin{aligned} r_i v^i &= r_i v^i - A_i v^i w - B_i v^i n - A(-t_i v - v_i n) v^i - \\ &\quad - B(-w_i v + v_i w) v^i = \\ &= r_i v^i + A_2 v - Bv - A_i v^i w - B_i v^i n = 0. \end{aligned}$$

По формулам Родрига (§ 80) $r_i v^i = -\rho n_i v^i = -\rho v$.

В силу этого из последнего равенства имеем:

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad A_i v^i &= B_i v^i = 0, \\ 2) \quad \rho - A_2 + B &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Эти условия необходимы и достаточны, чтобы линии кривизны (v) поверхности были сферическими. Действительно, необходимость этого условия доказана. Предположим теперь, что эти условия выполнены. Тогда точка с радиусом-

вектором

$$\mathbf{r} = \mathbf{r} - A\mathbf{w} - B\mathbf{n} \quad (3)$$

лежит в нормальной плоскости линии (v) , и для каждой линии (v) ее положение в этой плоскости неизменно, так как в силу (2) и равенства $h_{is}v^i w^s = 0$, показывающего, что линии (v) и их ортогональные траектории (w) есть линии кривизны, получим $r_i v^i = 0$. Расстояние точек линии (v) от точки \mathbf{r} тоже будет постоянно, так как $(\mathbf{r} - \mathbf{r})^2 = A^2 + B^2$ и постоянно вдоль линий (v) в силу первого равенства (2). Отсюда следует, что линии (v) лежат на сферах с центрами в точках \mathbf{r} .

2. Второе условие (2) содержит нормальную кривизну σ , определяемую самой поверхностью, и чтобы охарактеризовать поверхность одним сферическим отображением, это условие следует заменить. Предположим, что для данной ортогональной сети сферы (v, w) выбраны постоянные вдоль линий (v) вектор \mathbf{r} и функции A и B , так что

$$r_i v^i = A_i v^i = B_i v^i = 0. \quad (4)$$

Для того чтобы поверхность с радиусом-вектором (1) имела сеть (v, w) — сферическим отображением своих линий кривизны, необходимо и достаточно, чтобы ее нормаль была параллельна соответствующему вектору сферы, что выражается равенствами

$$r_i v^i \mathbf{n} = 0, \quad r_i w^i \mathbf{n} = 0,$$

и чтобы векторы $r_i v^i$ и $n_i v^i$ были коллинеарны. Действительно, из их коллинеарности следует, что линия (v) — линия кривизны, а так как линии (w) на сфере ортогональны линиям (v) , то они будут сферическим отображением второго семейства линий кривизны. Считая (4) выполненным, находим

$$r_i v^i = (-A_i + B) n_i v^i = \lambda n_i v^i,$$

$$r_i w^i \mathbf{n} = n r_i w^i - A + B_i w^i.$$

Следовательно, искомым необходимым и достаточным условием является одно условие:

$$nr_i \omega^i - A + B_i \omega^i = 0. \quad (5)$$

Иначе, для того чтобы ортогональная сеть (v, w) сферы была сферическим отображением линий кривизны поверхности и чтобы семейство линий кривизны (v) было сферическим, необходимо и достаточно существование постоянных вдоль линий (v) вектора r и функций A и B , для которых выполняется одно условие (5).

3. Если условие (5) выполнено для данных r , A и B , то оно будет выполняться, если: 1) к функции B прибавить произвольную постоянную, что означает переход от поверхности r к поверхности $r + cn$, ей параллельной, 2) прибавить к r постоянный вектор, что приводит к параллельному переносу поверхности r , 3) заменить r , A , B на

$$\check{r} = \int \lambda r_i \omega^i ds, \quad \check{A} = \lambda A, \quad \check{B} = \int \lambda B_i \omega^i ds, \quad (6)$$

где λ постоянна вдоль линий (v) . Последнее преобразование поверхности есть преобразование Комбескюра, так как сохраняет сферическое отображение поверхности и ее линии кривизны. Следовательно, каждую поверхность со сферическим семейством линий кривизны можно подвергнуть такому преобразованию Комбескюра, при котором сферические линии кривизны останутся сферическими (теорема Блютеля).

Обратно, каждое преобразование Комбескюра поверхности рассматриваемого типа в такую же поверхность есть преобразование вида (6). Действительно, если для новой поверхности выполнены условия $n\check{r}_i \omega^i - \check{A} + \check{B}_i \omega^i = 0$ и если $\check{A} = \lambda A$ (заметим, что λ будет постоянной вдоль линий (v)), то из (5) имеем

$$\begin{aligned} n(\check{r}_i \omega^i - \lambda r_i \omega^i) + \check{B}_i \omega^i - \lambda B_i \omega^i = \\ = [n(\check{r}_i - \lambda r_i) + \check{B}_i - \lambda B_i] \omega^i = 0. \end{aligned}$$

Если это соотношение не является тождественным, то при движении вдоль какой-нибудь линии (v) вектор n будет описывать окружность, так как будет удовлетворять уравнению $na + b = 0$, где a и b постоянны, но тогда линии (v) будут плоскими, что противоречит предположению. Следовательно, $\check{B}_i = \lambda B_i$, $\check{r}_i = \lambda r_i$ или $\check{B} = \int \lambda B_i \omega^i ds$, $\check{r} = \int \lambda r_i \omega^i ds$, что и требовалось доказать.

4. Рассмотренное выше преобразование Комбескюра можно подобрать так, что произвольная поверхность со сферическим семейством линий кривизны перейдет в поверхность, у которой все сферы, содержащие линии кривизны, будут проходить через фиксированную точку. Действительно, для того чтобы после этого преобразования все сферы $(\check{r} - \check{r}_0)^2 = A^2 + B^2$ проходили через фиксированную точку (например, через начало координат), достаточно потребовать, чтобы выполнялось равенство $\check{r}_0^2 = A^2 + B^2$ или чтобы λ удовлетворяло уравнению

$$\left(\int \lambda r_i \omega^i ds \right)^2 = \lambda^2 A^2 + \left(\int \lambda B_i \omega^i ds \right)^2$$

(s — длина дуги линии w), которое имеет бесконечное число решений (дифференцированиями и исключениями его можно привести к дифференциальному уравнению для λ ([1], т. IV, стр. 250)).

Последний результат указывает на существование простой связи между поверхностями, у которых одно семейство линий кривизны плоское или сферическое. Рассмотрим поверхность S , у которой линии кривизны (v) сферические. Ее можно преобразовать в поверхность \check{S} , все линии кривизны (v) которой лежат на сферах, проходящих через начало координат. Подвергнем поверхность \check{S} инверсии с полюсом в начале координат. Линии кривизны (v) перейдут при этом в линии кривизны новой поверхности и станут плоскими, так как все сферы, проходящие через полюс, преобразуются в плоскости. Новая

поверхность будет иметь семейство плоских линий кривизны.

Обратно, чтобы получить самую общую поверхность со сферическим семейством линий кривизны, возьмем произвольную поверхность с семейством плоских линий кривизны и подвергнем ее преобразованию инверсии. Получим поверхность, у которой одно семейство линий кривизны будет лежать на сферах, проходящих через полюс инверсии. Преобразование Комбескюра этой поверхности, оставляющее линии (v) сферическими, даст искомую поверхность.

Этот результат позволяет считать известными все поверхности со сферическим семейством линий кривизны, так как в § 107 найдены все поверхности с семейством плоских линий кривизны.

§ 113. Изгибание поверхности с сохранением средней кривизны

Изгибанием поверхности, при котором сохраняется ее средняя кривизна, занимались многие авторы, начиная с О. Бонне, Хаццидакиса, Э. Картана. Позднее его рассматривали С. П. Фиников [13], С. В. Бахвалов [69], С. Г. Гаспарян [74]. Наиболее краткое изложение вопроса в тензорной форме дано в работе А. Е. Либера [43].

1. Начнем с вопроса о том, насколько первая форма и средняя кривизна определяют поверхность. Случай, когда поверхность определяется многозначно, и приведет нас к рассматриваемому изгибанию.

Известны два алгебраических соотношения для второго тензора поверхности

$$g^{is}h_{is} = 2H, \quad \frac{1}{2}h_{is}h^{is} = K. \quad (1)$$

Для того чтобы этот тензор выразить алгебраически через среднюю кривизну H и метрику поверхности, нужно еще одно алгебраическое соотношение. Чтобы получить его, рассмотрим чебышевский вектор сети линий кривизны (86;14)

$$2c_s = \partial_s \ln \sqrt{E} + \frac{1}{E} c_s^i H_i. \quad (2)$$

Полагая $E = e^{2\varphi}$, находим

$$2c_s = \varphi_s + c_s^i e^{-2\varphi} H_i, \quad (3)$$

$$2\tilde{c}_s = \tilde{\varphi}_s + \tilde{c}_s^i e^{-2\varphi} H_i = \tilde{\varphi}_s + h_s^i e^{-2\varphi} H_i - H\tilde{H}_s e^{-2\varphi}. \quad (4)$$

Теперь, согласно (4), имеем

$$\begin{aligned} 2\tilde{c}_{s|s} = -2K = -\Delta_2\varphi - h^{is} (e^{-2\varphi} H_i)_{|s} + \\ + e^{-2\varphi} [\Delta_1 H + H\Delta_2 H - 2H\Delta_1(H, \varphi)]. \end{aligned}$$

Отсюда приходим к искомому уравнению

$$\begin{aligned} h^{is} (e^{-2\varphi} H_i)_{|s} = 2K - \Delta_2\varphi + \\ + e^{-2\varphi} [\Delta_1 H + H\Delta_2 H - 2H\Delta_1(H, \varphi)]. \quad (5) \end{aligned}$$

Три уравнения (1) и (5) определяют в общем случае тензор через среднюю кривизну и метрику поверхности двузначно (так как второе уравнение (1) квадратное), и мы можем сказать, что заданием средней кривизны и метрики поверхность в общем случае определяется до положения в пространстве. Среднюю кривизну произвольно задать нельзя: она должна удовлетворять тем двум дифференциальным уравнениям с частными производными третьего порядка, которые получаются, если найденный из (1) и (5) тензор h_{is} подчинить условию Петерсона $h_{i|s|s} = 0$.

2. Сделанное заключение теряет силу, во-первых, когда $H = \text{const}$ (в этом случае уравнение (5) обращается в тождество). Случай $H = 0$ приводит к минимальным поверхностям и был нами рассмотрен в § 85, из результатов которого следует, что минимальная поверхность допускает непрерывное изгибание, зависящее от одного параметра и сохраняющее ее нулевую среднюю кривизну.

Пусть теперь $H = \text{const} \neq 0$.

Чебышевский вектор сети линий кривизны на такой поверхности

$$c_i = \frac{1}{2} \partial_i \ln \sqrt{E}.$$

Отсюда следует, во-первых, что *поверхности постоянной средней кривизны являются изотермическими* и, во-вторых, что на этих поверхностях четвертый тензор c_{is} , как

и тензор \tilde{c}_{is} , находится в кодацциевом нормировании, так что

$$c_{is|s} = \tilde{c}_{is|s} = 0. \quad (6)$$

Предположим теперь, что $\overset{*}{h}_{is}$ и $\overset{*}{c}_{is}$ — второй и четвертый тензоры поверхности, наложимой на данную поверхность и имеющей ту же среднюю кривизну $H = \text{const}$. Тогда

$$\overset{*}{h}_{is} = \tilde{c}_{is} + Hg_{is}. \quad (7)$$

Разложение тензора ортогональной сети $\overset{*}{c}_{is}$ по тензорам c_{is} и \tilde{c}_{is} имеет, ввиду того что дискриминанты их равны, следующий вид:

$$\tilde{c}_{is} = c_{is} \cos \alpha + \overset{*}{c}_{is} \sin \alpha,$$

где $\alpha = \alpha(u^i)$. Теперь из (7) находим

$$\overset{*}{h}_{is} = \tilde{c}_{is} \cos \alpha + c_{is} \sin \alpha + Hg_{is}. \quad (8)$$

Условие Петерсона для тензора (8) имеет, согласно (6), вид

$$\overset{*}{h}_{is|s} = (-\tilde{c}_{is} \sin \alpha + c_{is} \cos \alpha) \alpha^s = 0 \quad (9)$$

и возможно лишь при $\alpha = \text{const}$.

Обратно, при $\alpha = \text{const}$ тензор $\overset{*}{h}_{is}$, построенный по формуле (8), удовлетворяет и условию Гаусса

$$\overset{*}{h}_{is} \overset{*}{h}^{is} = \tilde{c}_{is} \tilde{c}^{is} \cos^2 \alpha + c_{is} c^{is} \sin^2 \alpha + 2H^2 = -2E + 2H^2 = 2K,$$

и, согласно (9), условию Петерсона.

Итак, каждая поверхность постоянной средней кривизны допускает непрерывное однопараметрическое изгибание в поверхность той же средней кривизны. Тензор второй квадратичной формы изогнутой поверхности выражается формулой (8) при $\alpha = \text{const}$.

3. Другое исключение из общего случая наступает тогда, когда система уравнений (4), (5) неопределенна. Если она имеет три решения, то необходима пропорциональность

$$(e^{-2\varphi} H_{(i)s}) = \rho g_{is}. \quad (10)$$

При выполнении этого равенства уравнение (5) выполняется тождественно.

Поверхности, на которых выполнено условие (10), будут изотермическими. Действительно, в этом случае

$$2c_{s,i}{}^s = \varphi_{s,i}{}^s + c_s^i [-2c^s + \varphi^s] H_i e^{-2\varphi} + c_s^i (e^{-2\varphi} H_i)_i{}^s = \\ = (-2c^s + \varphi^s) (2c_s - \varphi_s) + \varrho c_s^i g_i^s = 0.$$

Свертывая обе части (10) последовательно с g^{is} и h^{is} , находим, согласно (5),

$$2\varrho = g^{is} (e^{-2\varphi} H_i)_i{}^s = e^{-2\varphi} (\Delta_2 H - 2\Delta_1(H, \varphi)) = \\ = \frac{1}{H} h^{is} (e^{-2\varphi} H_i)_i{}^s = \frac{1}{H} (2K - \Delta_2 \varphi + e^{-2\varphi} \Delta_1 H) + \\ + e^{-2\varphi} (\Delta_2 H - 2\Delta_1(H, \varphi)).$$

Отсюда получаем

$$\Delta_2 \varphi = 2K + e^{-2\varphi} \Delta_1 H. \quad (11)$$

Уравнение (10) является обобщенным уравнением Киллинга (§ 45) и показывает, что на рассматриваемых поверхностях средняя кривизна является изотермической функцией, поэтому можно положить

$$\Delta_2 H = \lambda \theta', \quad \Delta_1 H = \lambda \theta \quad (12) \\ \left(\theta = \theta(H), \quad \theta' = \frac{d\theta}{dH}, \quad \lambda = \lambda(u^i) \right).$$

Чтобы найти множитель λ , обратимся к равенству (45;2), согласно которому чебышевский вектор h_s изотермической сети, составленной из линий $H = \text{const}$ и их ортогональных траекторий (сети (H_i, \tilde{H}_i)), выражается так:

$$h_s = -\frac{1}{2} \partial_s \ln g^{ih} (e^{-2\varphi} H_i) (e^{-2\varphi} H_h) = 2\varphi_s - \frac{1}{2} \partial_s \ln \Delta_1 H. \quad (13)$$

С другой стороны, этот вектор $h_s = \tilde{t}_s$, где t_s — трансверсальный вектор поля H_i и, согласно (21;13),

$$h_s = \tilde{t}_s = \frac{1}{2} \partial_s \ln \Delta_1 H - \frac{\Delta_2 H}{\Delta_1 H} H_s = \\ = \frac{1}{2} \partial_s \ln \Delta_1 H - \frac{\theta'}{\theta} H_s = \frac{1}{2} \partial_s \ln \Delta_1 H - \partial_s \ln \theta. \quad (14)$$

Сравнивая (13) и (14), получаем

$$e^{2\varphi} = \frac{\Delta_1 H}{\theta} = \lambda = E = H^2 - K. \quad (15)$$

Отсюда находим

$$h_s = \varphi_s - \frac{1}{2} \partial_s \ln \theta = \varphi_s - \frac{\theta'}{2\theta} H_s,$$

$$g^{is} h_{1s} = K = \Delta_2 \varphi - \frac{\theta'}{2\theta} \Delta_2 H - \frac{\theta''\theta - \theta'^2}{2\theta^2} \Delta_1 H = \Delta_2 \varphi - \frac{\theta''}{2} (H^2 - K). \quad (16)$$

Исключая, наконец, из равенств (11) и (16) функцию $\Delta_2 \varphi$, приходим к следующему соотношению:

$$K(\theta'' + 2) = H^2 \theta'' - 2\theta. \quad (17)$$

Если $\theta'' = -2$, то $\theta = -H^2$, что на вещественных поверхностях невозможно, так как $\theta = \frac{\Delta_1 H}{E} > 0$. Однако именно этот случай подробно рассмотрен Хаццидакисом, который нашел конечные уравнения однопараметрического семейства наложимых друг на друга мнимых поверхностей, имеющих равные средние кривизны.

Обращаясь к вещественным поверхностям, мы заключаем из (17), что $K = K(H)$, поэтому эти поверхности принадлежат к поверхностям W .

Кроме того, эти поверхности наложимы на поверхность вращения, ибо из равенств (12) теперь следует, что $\Delta_2 K = F(K)$, $\Delta_1 K = f(K)$.

Итак, каждая поверхность, изгибаемая с сохранением средней кривизны, является изотермической поверхностью W' наложимой на некоторую поверхность вращения.

В результате всего вышесказанного мы нашли необходимые условия изгибаемости поверхности с сохранением средней кривизны. На этом же пути можно найти и достаточные условия. Однако мы предпочтем дать другое решение этой задачи, при котором сразу будут найдены и необходимые и достаточные условия.

4. При изгибании поверхности с сохранением средней кривизны сохраняется (как и при всяком изгибании) ее полная кривизна; отсюда следует, что неизменным остается

угол между асимптотическими линиями или взаимный угол асимптотической и изотропной сетей. Задача отыскания таких сетей решена в § 74. Аффинор B_i^s искомой сети задавался в виде (74;1)

$$B_i^s = A_1^s \cos \theta + (A_2^s \cos \omega + A_3^s \sin \omega) \sin \theta.$$

В нашем случае роль сети A_1^s играет изотропная сеть, поэтому $A_1^s = g_1^s$, $a_1 = \alpha_1 = 0$, а чебышевские векторы a_i и a_i двух произвольных ортогональных сетей A_2^s и A_3^s равны: $a_i = a_i = a_i$.

Сеть B_i^s в данном случае — асимптотическая сеть. Предполагая для конкретности эту сеть вещественной, мы должны положить

$$B_i^s = ih_0^s = \frac{i}{\sqrt{-K}} h_i^s, \quad b_s = \frac{1}{2} \partial_s \ln \sqrt{-K}.$$

Далее находим

$$\frac{1}{2} A_1^s B_s^i = -\cos \theta = \frac{1}{2} g_1^s \frac{i}{\sqrt{-K}} h_s^i = -\frac{iH}{\sqrt{-K}},$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{-K}},$$

$$p_s = 2b_s + \partial_s \ln \sin \theta - a_2 - a_3 = \partial_s \ln \sqrt{E} - 2a_s,$$

$$s_i = \operatorname{ctg} \theta (2b_i - 2a_i + \partial_i \ln \cos \theta) = \frac{iH_i}{\sqrt{E}}.$$

Коэффициенты M и M в уравнении (74;5) в нашем случае тождественно равны нулю, так что это уравнение определяет в общем случае два значения функции ω и, следовательно, две наложимые поверхности с равными средними кривизнами. Для существования бесконечного числа таких поверхностей необходимо и достаточно обращение в нуль

коэффициентов

$$L = (g^i_s p_i)_s + 2g^{is} \alpha_i \alpha_s - g^{is} s_i s_s = -g^{is} (\partial_s \ln \sqrt{E} - 2\alpha_s)_i + \\ + g^{is} \frac{H_i H_s}{E} = -\Delta_2 \varphi + 2K + \frac{\Delta_1 H}{E} = 0, \quad (11')$$

$$N = A^{is} (s_{i|s} + 2b_s s_i + \partial_s \ln \sin \theta s_i) = \\ = iA^{is} \left[\left(\frac{H_i}{\sqrt{E}} \right)_s + \frac{H_i}{\sqrt{E}} \left(\partial_s \ln \sqrt{-K} + \partial_s \ln \sqrt{\frac{E}{-K}} \right) \right] = \\ = iA^{is} \left(\frac{H_i}{E} \right)_s = 0, \\ N = iA^{is} \left(\frac{H_i}{E} \right)_s = 0.$$

Так как два последних условия равносильны пропорциональности

$$\left(\frac{1}{E} H_i \right)_s = \varrho g_{is}, \quad (10')$$

то мы вновь пришли к уравнениям (10) и (11), с той разницей, что теперь нам известна достаточность этих условий для изгибаемости поверхности с сохранением средней кривизны.

Полученные условия дают возможность охарактеризовать внутреннюю геометрию поверхности, допускающей такое изгибание. Как мы уже доказали, эта поверхность наложима на поверхность вращения и является поверхностью W . Следовательно, для этой поверхности $E = E(H)$ и уравнение (10') можно записать без скобок симметрирования:

$$\left(\frac{H_i}{E} \right)_s = \varrho g_{is}. \quad (18)$$

С другой стороны, известно (§ 45), что решение уравнения

$$\omega_{i|s} = \varrho g_{is} \quad (19)$$

в метрике вращения (при $K \neq \text{const}$) имеет вид (45;20)

$$\omega = c_2 + c_1 \int e^{\int \frac{F-f'}{f} dK} dK, \\ F(K) = \Delta_2 K, \quad f(K) = \Delta_1 K.$$

Из сравнения (18) и (19) находим $\frac{H_1}{E} = \omega_1$, или, полагая $H = H(K)$, $H' = \frac{dH}{dK}$, $\omega' = \frac{d\omega}{dK}$,

$$H' = (H^2 - K) \omega'. \quad (20)$$

Таким образом, функция H определяется внутренней геометрией как решение уравнения Риккати (20). Если это решение подставить в уравнение (10), то получим необходимый и достаточный признак того, что данная геометрия является внутренней геометрией поверхности, изгибающейся с сохранением средней кривизны.

§ 114. Главное основание изгибаия

1. Простое основание изгибаия было охарактеризовано (гл. VII) как сеть A_1 , допускающая две аполярные виртуально-асимптотические сети. Рассмотрим произвольную тройку сетей A_1, A_2, A_3 и виртуально-асимптотическую сеть, аполярную сети A_1 , зададим аффинором:

$$B_i^s = A_2^s \cos \omega + A_3^s \sin \omega. \quad (1)$$

Для того чтобы данная сеть A_1 была простым основанием изгибаия данного V_2 , необходимо и достаточно, как это следует из результатов § 69, чтобы два корня ω уравнения (69;4')

$$(\alpha_{s1}^s - 2\alpha_s p^s) \sin 2\omega - (\bar{\alpha}_{s1}^s - 2\bar{\alpha}_s p^s) \cos 2\omega + \bar{p}_{s1}^s + 2\bar{\alpha}_s \alpha^s = 0 \quad (2)$$

удовлетворяли уравнению (69;3')

$$\omega_s = -\alpha_s \sin 2\omega + \bar{\alpha}_s \cos 2\omega - \bar{p}_s, \quad (3)$$

где следует положить $p_s = 2b_s - a_s - a_s$, $b_s = \frac{1}{4} \partial_s \ln K$. Если нам дана поверхность, на которой сеть A_1 сопряжена, то ее асимптотическая сеть является одной из искомых

сетей. Приняв эту сеть за сеть A , придем, согласно § 69, п. 4, к следующей инвариантной характеристике простого основания данной поверхности: функция (69;16)

$$\sigma = -\frac{1}{\alpha_s} (\bar{\alpha}_s - 2\alpha_s) \quad (4)$$

удовлетворяет уравнению (69;14)

$$-\frac{1}{2} \sigma_s = \alpha_s \sigma + \bar{\alpha}_s, \quad (5)$$

где α_s — геодезический вектор сети A относительно асимптотической сети.

2. Из теоремы § 69, п. 1 следует теорема Петерсона: *если поверхность допускает три наложимые на нее поверхности, на каждой из которых данная сеть сопряжена, то она допускает ∞^1 таких поверхностей.* Непрерывное изгибание, оставляющее данную сеть сопряженной, называется *изгибанием на главном основании*, а данная сеть — *главным основанием изгибания*. Инвариантным признаком главного основания данного V_2 является обращение уравнения (2) в тождество, то есть обращение в нуль всех его коэффициентов:

$$\alpha_s - 2\alpha_s p^s = 0, \quad \bar{\alpha}_s - 2\bar{\alpha}_s p^s = 0, \quad p_s - 2\bar{\alpha}_s \alpha^s = 0. \quad (6)$$

Чтобы найти главное основание A данного V_2 , включим сеть A в тройку сетей A, A, A , считая, что A — виртуально-асимптотическая сеть, так что $a_i = \frac{1}{4} \partial_i \ln K$. Дифференциальные уравнения (31;3) вместе с уравнениями (6) составят систему шести уравнений с тремя неизвестными функциями, определяющими три аффинора A, A, A . Исследования

совместности этой системы в общем случае является, по-видимому, очень сложным. Подробности этого вопроса изложены в книге С. П. Финикова [11]. Там же получен следующий замечательный результат: *если поверхность*

имеет ∞^2 главных оснований, то все эти основания геодезические, а поверхность является геликоидом.

3. Обращаясь к главному основанию A_1 данной поверхности, примем ее асимптотическую сеть за сеть A_3 . Уравнения (6) в этом случае примут вид (69;5^m)

$$\alpha_{s|1}^s = 0, \quad \bar{\alpha}_{s|1}^s + 2\bar{\alpha}_s \alpha^s = 0 \quad (7)$$

и составят инвариантный признак главного основания данной поверхности. Вектор α_s является чебышевским вектором главного основания в метрике сферического отображения. Записав уравнения (7) в виде

$$\alpha_{s|1}^s = 0, \quad \bar{\alpha}_{s|1}^s + 2\bar{\alpha}_s \alpha^s = 0, \quad (8)$$

где две черты означают ковариантное дифференцирование на сфере, мы получим так называемые условия Коссера, характеризующие главное основание его сферическим отображением. Из этих уравнений следует, что вектор α_i градиентен и если его потенциал обозначить через α , то функция $e^{2\alpha}$ диагональна относительно сети A_1 .

Если принять сеть A_1 за координатную сеть сферического отображения, то $\alpha_1 = -G_{12}^2$, $\alpha_2 = -G_{21}^1$ (G_{sh}^i — коэффициенты связности сферического отображения) и условия Коссера (8) примут вид, в котором они были впервые найдены:

$$\partial_1 G_{12}^1 = \partial_2 G_{21}^2 = 2G_{12}^1 G_{21}^2. \quad (9)$$

Сеть A_1 , как кодацциева сеть сферы, является сферическим отображением асимптотической сети некоторой поверхности. Если K — гауссова кривизна этой поверхности, то $\alpha_i = -\frac{1}{4} \partial_i \ln K$, следовательно, $e^{2\alpha} = |K|^{-\frac{1}{2}}$. Из диагональности этой функции относительно сети A_1

следует, что в асимптотических параметрах поверхности

$$K = -\frac{1}{[U(u)+V(v)]^2}. \quad (10)$$

Поверхности такого типа называются *поверхностями Бианки* или *поверхностями В* (см. § 124, п. 6). Инвариантный признак поверхности Бианки состоит в том, что функция $|K|^{-\frac{1}{2}}$ диагональна относительно ее асимптотической сети, и во внутренней геометрии этой поверхности его можно записать в виде

$$(A_i^s \partial_s K^{-\frac{1}{2}})_i = 0, \quad (11)$$

где A_i^s — аффинор асимптотической сети. Учитывая, что второй тензор этой поверхности $h_{is} = |K|^{\frac{1}{2}} A_{is}$, признаку поверхности Бианки можно придать вид

$$\left[h^{is} \left(\frac{1}{K} \right)_i \right]_s = h^{is} \left(\frac{1}{K} \right)_{is} = 0, \quad (12)$$

предложенный С. С. Бюшгенсом [10].

4. Рассмотрим поверхность S и ее простое основание изгибаия A . Сеть A характеризуется условиями (4), (5). Эти условия можно, пользуясь ковариантным дифференцированием в сферическом отображении, записать в виде

$$\sigma = -\frac{1}{\alpha_s | \cdot } (\bar{\alpha}_s | \cdot^s - 2\alpha_s \bar{\alpha}^s), \quad -\frac{1}{2} \sigma_s = \alpha_s \sigma + \bar{\alpha}_s.$$

Так как, далее, вектор α_s является чебышевским вектором сферического отображения сети A , то простое основание изгибаия, так же как и главное основание (см. п. 3), характеризуется лишь своим сферическим отображением. Этот факт привел Петерсона к преобразованию поверхности с простым и главным основанием, обобщение которого рассмотрено в § 72. Пусть A — простое или главное основание поверхности S . Найдем на сфере произвольную кодацциеву сеть B , аполярную сферическому отображе-

нию этого основания и, приняв ее за отображение асимптотической сети, построим новую поверхность S^* , на которой сеть A , согласно предыдущему, будет тоже простым или главным основанием изгибания. Так как произвольная кодацциева сеть сферы определяется тензором $\varphi_{i||s} + \varphi\gamma_{is}$ (§ 87), где φ — произвольная функция, то для построения сети B следует решить уравнение

$$A^{is} B_{is} = A^{is} (\varphi_{i||s} + \varphi\gamma_{is}) = 0.$$

Решение этого уравнения зависит от двух произвольных функций одного аргумента, следовательно, с таким же произволом совершается преобразование Петерсона.

5. Докажем теорему: *прямоугольное главное основание всегда полугеодезическое* [11].

Пусть A — прямоугольное главное основание поверхности и A — ее асимптотическая сеть.

В сферическом отображении исходной поверхности сеть A будет ортогональной и ее чебышевский вектор α_i будет удовлетворять условиям (7):

$$1) \alpha_{i|}^i = 0, \quad 2) (a_i^s \alpha_s)_i^i + 2a_i^s \alpha_s \alpha^i = 0.$$

Считая, что дифференцирование производится в метрике сферического отображения, получим

$$(a_i^s \alpha_s)_i^i + 2a_i^s \alpha_s \alpha^i = a_i^s \alpha_{s|}^i - 2a_i^s \alpha_s \alpha^i + 2a_i^s \alpha_s \alpha^i = a_i^s \alpha_{s|}^i = 0. \quad (13)$$

Отсюда следует, что

$$\alpha_{i|s} = \lambda g_{is} + \mu \tilde{a}_{is},$$

где g_{is} — метрический тензор сферического отображения, а $\tilde{a}_{is} = g_{i^k}^k a_{ks}$ — тензор бисекторной для a_{is} сети. Кроме того, чебышевский вектор α_i ортогональной сети удовле-

творяет уравнению

$$g^{is} \alpha_{i|s} = K = 1.$$

Это определяет коэффициент λ :

$$g^{is} \alpha_{i|s} = g^{is} (\lambda g_{is} + \mu \tilde{a}_{is}) = 2\lambda = 1.$$

Таким образом,

$$\alpha_{i|s} = \frac{1}{2} g_{is} + \mu \tilde{a}_{is}.$$

Составим условие интегрируемости этого уравнения:

$$K \tilde{a}_i = \tilde{a}_i = \mu^s \tilde{a}_{is} - 2\mu \tilde{a}_{is} a^s.$$

Отсюда для функции μ получаем уравнение

$$\mu_i = 2\mu \alpha_i - a_i^s \alpha_s. \quad (14)$$

Из условия его интегрируемости

$$\mu_{i|j} = 2\mu^i \alpha_i + 2a_i^s \alpha_s \alpha^i - a_i^s \alpha_s^i = 0$$

имеем, согласно (13) и (14),

$$4a_i^s \alpha_s \alpha^i = 0,$$

что и доказывает теорему.

§ 115. Поверхности Фосса

1. Сопряженная и геодезическая сеть называется *сетью Фосса*, а поверхность, допускающая такую сеть, — *поверхностью Фосса*.

Минимальная поверхность является поверхностью Фосса, так как ее изотропная сеть сопряженная и геодезическая, то есть является сетью Фосса.

Пусть A_1 — асимптотическая сеть поверхности, A_2 — ее сеть Фосса. Из схемы VII видно, что сопряженная сеть A_3 , аполярная сети Фосса, является виртуально-асимптоти-

ческой, так как ее чебышевский вектор $a_i = a_i = \frac{1}{4} \partial_i \ln K$.

Это позволяет охарактеризовать поверхность Фосса тем, что на ней существует сопряженная виртуально-асимптотическая сеть.

Каждая сеть Фосса является главным основанием изгибания. Действительно, все аполярные ей сети, образующие с асимптотической сетью постоянные взаимные углы, будут, согласно § 71, виртуально-асимптотическими.

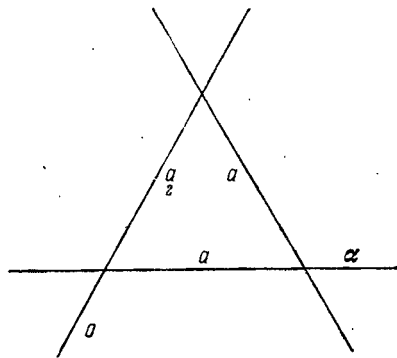


Схема VII.

Отыскание сети Фосса на заданной поверхности равносильно, таким образом, отысканию сопряженной виртуально-асимптотической сети с чебышевским вектором $b_i = a_i = \frac{1}{4} \partial_i \ln K$, то есть к задаче § 74.

Если A_2 и A_3 — две произвольные аполярные сопряженные сети поверхности, то аффиноры искомой сети B_i^s и сети Фосса B_i^{*s} можно определить заданием функции ω :

$$B_i^s = A_2^s \cos \omega + A_3^s \sin \omega, \quad B_i^{*s} = A_2^s \sin \omega - A_3^s \cos \omega. \quad (1')$$

В обозначениях § 69 уравнение (69;3) для функции ω примет вид

$$\omega_i = -\alpha_i \sin 2\omega + \bar{\alpha}_i \cos 2\omega - \bar{p}_i, \quad (2')$$

где

$$p_i = 2\alpha_i - \alpha_2 - \alpha_3, \quad \bar{\alpha}_i = A_1^s \alpha_s, \quad \bar{p}_i = A_1^s p_s.$$

Условие интегрируемости этого уравнения —

$$(\alpha_{i1}^i + 2p_i \alpha^i) \sin 2\omega - (\bar{\alpha}_{i1}^i + 2\alpha_i \bar{p}^i) \cos 2\omega + (\bar{p}_{i1}^i + 2\alpha_i \bar{\alpha}^i) = 0. \quad (3')$$

Инвариантный признак поверхности с одной или двумя сетями Фосса состоит в том, что один или два корня уравнения (3') удовлетворяют уравнению (2').

2. Докажем, что невырождающаяся поверхность второго порядка не может быть поверхностью Фосса. Предположим, что на поверхности второго порядка имеется сеть Фосса. В схеме VII для такой поверхности следует положить

$\alpha_i = 0$, $a_i = a_i = \frac{1}{4} \partial_i \ln K$. Три геодезические сети

A_1, A_2, A_3 после проектив-

ного преобразования ее внутренней геометрии с вектором a_i станут декартовыми сетями новой связ-

ности \hat{A}_2 . Так как вектор этого преобразования гра-

диентен, то связность \hat{A}_2 евклидова, а внутренняя геометрия поверхности,

как риманова и проективно-евклидова, имеет постоянную кривизну, но тогда $a_i = 0$ и поверхность вырождается.

3. С. П. Фиников ([11], стр. 37) указывает теорему: *не существует поверхностей Фосса постоянной отрицательной кривизны*, ссылаясь при этом на статью Эйзенхарта [93]¹⁾. Методами тензорного исчисления А. Е. Либер доказал следующую теорему: *геодезическая сеть римановой геометрии V_2 постоянной кривизны $K \neq 0$ не может быть аполярна чебышевской сети*. Из треугольной схемы VIII для геодезической сети A_1 и аполярной ей чебышевской сети A_2

видно, что высказанная теорема имеет своими следствиями теорему, указанную С. П. Финиковым, и теорему: *не существует поверхностей переноса постоянной кривизны $K = \text{const} \neq 0$* .

¹⁾ Выяснить, была ли доказана или высказана Эйзенхартом эта теорема, нам не удалось.

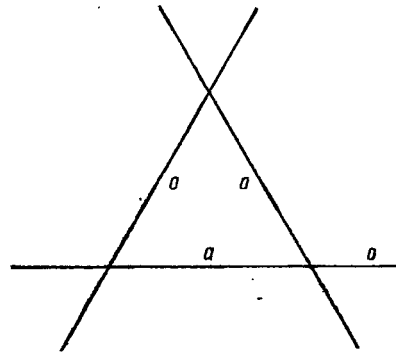


Схема VIII.

Ниже приводится доказательство А. Е. Либера. Векторы M_i для схемы VIII будут

$$M_1^i = -a_i, \quad M_2^i = M_3^i = a_i,$$

а уравнения (31;6) примут вид

$$\left. \begin{aligned} A_1^{is} (a_{i|s} - 3a_i a_s + Kg_{is}) &= 0, \\ A_\alpha^{is} (a_{i|s} - a_i a_s - Kg_{is}) &= 0 \quad (\alpha = 2, 3). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Из последних двух уравнений получаем, как и для каждой геодезической сети,

$$a_{i|s} = a_i a_s + Kg_{is} + \rho A_1^{is} + \sigma \epsilon_{is}, \quad (2)$$

где ρ и σ — некоторые коэффициенты. Внося это значение $a_{i|s}$ в первое уравнение, находим коэффициент ρ :

$$\rho = A_1^s (Kg_s^i - a^i a_s). \quad (3)$$

Коэффициент σ определяется из равенства (2):

$$\epsilon^{is} a_{i|s} = a_{i|}^i = 2\sigma. \quad (4)$$

Составим условие интегрируемости уравнений (2):

$$\begin{aligned} a_{i|s}^s &= K\tilde{a}_i = a_{i|}^s a_s + a_i a_{s|}^s + \rho^s A_{1s}^i - 2\rho A_{1s}^i a^s - \sigma_i = \\ &= K\tilde{a}_i - \rho A_{1s}^i a^s + \sigma a_i + 2\sigma a_i - A_1^s \rho_s - 2\rho A_{1s}^i a^s - \sigma_i. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\sigma_i = 3\sigma a_i + 3\rho A_1^s a_s - A_1^s \rho_s. \quad (5)$$

Учитывая значение производной тензора A_1^s

$$A_{i|h}^s = (A_h^s \delta_i^l - \delta_h^s A_i^l) a_l,$$

для производной ρ_h получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \rho_h &= (A_h^s \delta_i^l - \delta_h^s A_i^l) a_l (Kg_s^i - a^i a_s) - 2A_1^s a_s a_{i|h}^i = \\ &= 3\rho a_h + 2\sigma A_h^s a_s - 4Kg_h^s A_1^i a_i, \end{aligned} \quad (6)$$

с помощью которого (5) приводится к виду

$$\sigma_i = 5\sigma a_i + 4K A_i^k g_k^s A_s^l a_l. \quad (7)$$

Мы получили систему уравнений в полных дифференциалах с одной неизвестной функцией σ . Составим условие ее интегрируемости, пользуясь уравнениями (2) — (5), (7):

$$\begin{aligned} \sigma_{i_1}^i = 5\sigma^i a_i + 10\sigma^2 - 8K A_i^s g_s^k A_k^l a_l a^i + 4K A_i^k g_k^s A_s^l a_l + \\ + 4K A_i^k g_k^s A_s^l a_l^i = 0. \end{aligned}$$

После ряда упрощений получаем

$$5\sigma^2 - 12K A_i^k g_k^s A_s^l a_l a^i = 4K^2. \quad (8)$$

При $\sigma \neq 0$ тождественно эти условия выполняться не могут. Для дальнейшего исследования системы (7) следует значение σ , получаемое из равенства (8), внести в (7) или, проще, продифференцировать обе части (8) и производные σ_i заменить их значениями (7). В результате этих вычислений получим

$$(5\sigma^2 + 4K^2) a_i + 8K A_i^k g_k^s A_s^l a_l = 0. \quad (9)$$

Если $a_i = 0$, то сети A_1, A_2, A_3 декартовы, и кривизна исследуемого V_2 равна нулю, что противоречит предположению. Если же $a_i \neq 0$, то из (9) находим

$$(5\sigma^2 + 4K^2) A_s^p g_p^q A_q^i a_i - 8K a_s = - \left[\frac{(5\sigma^2 + 4K^2)^2}{8K} + 8K \right] a_i = 0,$$

что при $K \neq 0$ невозможно. Теорема доказана.

4. С. П. Фиников доказал замечательную теорему¹⁾: *поверхность с бесконечным числом сетей Фосса есть прямой геликоид [11].*

¹⁾ Для линейчатых поверхностей эта теорема высказана Эйзенхартом [93]. Однако доказательство Эйзенхарта содержит ошибку: он считал, что линейный элемент любой линейчатой поверхности в асимптотических координатах приводится к виду

$$ds^2 = du^2 + 2 \cos \theta du dv + (M^2 u^2 + 2Nu + 1) dv^2,$$

где функции θ, M, N зависят от одного v .

Доказательству этой теоремы предположим два вспомогательных предложения:

А) Если неортогональная сеть a_{is} римановой геометрии V_2 допускает бесконечное число аполярных ей сетей Риччи, то это V_2 имеет по крайней мере три независимых квадратичных интеграла геодезических. Пусть b_{1s} и b_{2s} — две сети Риччи, аполярные сети a_{is} . Сеть \tilde{b}_{1s} , биссекторная для сети b_{1s} , отличная от сети a_{is} , по предположению, является сетью Лиувилля и допускает ∞^1 аполярных ей сетей Риччи. Если b_{1s} — одна из этих сетей Риччи, отличная от сети a_{is} и от изотропной сети, то сети b_{1s} , \tilde{b}_{1s} и b_{2s} независимы. Действительно, если предположить, что

$$\lambda b_{1s} + \lambda \tilde{b}_{1s} + \lambda b_{2s} = 0,$$

то $\lambda \neq 0$, так как сети b_{1s} и \tilde{b}_{1s} различны, но тогда

$$\lambda b_{2s} \tilde{b}_{1s} = -(\lambda b_{1s} + \lambda \tilde{b}_{1s}) \tilde{b}_{1s} = 0$$

и ортогональная сеть \tilde{b}_{1s} , как главная для сетей b_{1s} и b_{2s} , совпадает с сетью a_{is} , что исключено условиями теоремы. Так как эти три независимые сети Риччи b_{1s} , \tilde{b}_{1s} и b_{2s} определяют три независимых квадратичных интеграла геодезических, то предположение доказано. Из результатов § 51 следует теперь, что рассматриваемая риманова метрика является метрикой вращения, и ее линейный элемент приводится к одному из следующих четырех видов:

$$\left. \begin{aligned} 1. ds^2 &= u(du^2 + dv^2). \\ 2. ds^2 &= \left(\frac{a}{u^2} + b \right) (du^2 + dv^2). \\ 3. ds^2 &= (ae^u + be^{2u}) (du^2 + dv^2). \\ 4. ds^2 &= \frac{a \operatorname{ch} u + b}{\operatorname{sh}^2 u} (du^2 + dv^2), \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Б) Если чебышевская сеть риманова пространства V_2 постоянной кривизны допускает аполярную ей сеть Риччи, то кривизна этого V_2 равна нулю.

Это предложение является следствием теоремы п. 3, но может быть просто доказано самостоятельно. Воспользуемся схемой VIII, где сеть A чебышевская, а сеть A гео-

дезическая и кодацциева. Риманово пространство $\overset{*}{V}_2$, сопряженное с данным V_2 относительно сети A , имеет тройку сетей Риччи A_1, A_2, A_3 с равными чебышевскими векто-

рами a_i . Проективное преобразование с этим градиентным вектором a_i приводит к эквивалентному пространству с тремя декартовыми сетями A_1, A_2, A_3 , то есть к простран-

ству Евклида, значит, кривизна K этого $\overset{*}{V}_2$ постоянна. Из ее связи с кривизной K исходного V_2 (34;7)

$$a_i = \frac{1}{4} \partial_i \ln \frac{K}{K^*}$$

следует, что $a_i = 0$, но тогда сети A_1, A_2, A_3 в пространстве V_2 тоже декартовы и его кривизна равна нулю.

Переходим к доказательству теоремы Финикова. Докажем сначала, что асимптотическая сеть a_{i8} неразвертывающейся поверхности с бесконечным числом сетей Фосса ортогональна.

Как следует из схемы VII, сеть a_{i8} рассматриваемой поверхности является главным основанием изгиба-

ния, так как допускает ∞^1 аполярных ей виртуально-асимптотических сетей с чебышевскими векторами

$a_i = a_i = \frac{1}{4} \partial_i \ln K$. Отсюда следует, что вектор $\alpha_i = \text{grad}$, но тогда все сети Фосса на поверхности будут сетями Риччи, ибо $a_i = a_i + \alpha_i = \text{grad}$.

Если предположить, что сеть a_{i8} неортогональна, то, по предыдущему, рассматриваемая поверхность будет поверхностью вращения, а ее линейный элемент приведет к одному из четырех видов (10). На этой поверхности всегда существует вырожденный квадратичный интеграл

(квадрат линейного интеграла геодезических; § 52), определяемый тензором $p_i p_s$, где вектор p_i и его дополнительный вектор \tilde{p}_i удовлетворяют уравнениям

$$p_{i|s} = \sigma g_{is}, \quad \tilde{p}_{i|s} = -\sigma \varepsilon_{is}.$$

Наряду с этим интегралом рассмотрим три квадратичных интеграла, определяемых тензорами b_{is} , $\overset{*}{b}_{is}$, $\overset{**}{b}_{is}$, участвующими в доказательстве предложения А), имеющими здесь и во всем дальнейшем изложении *специальное нормирование* (51;3). Если бы эти четыре интеграла были линейно независимы, то кривизна поверхности была бы постоянной (§ 51), вектор $a_i = \frac{1}{4} \partial_i \ln K$ обратился бы в нуль и, по предложению Б), поверхность была бы развертывающейся, что противоречит предположению. Следовательно, эти интегралы зависимы:

$$cb_{is} + \overset{**}{cb}_{is} + cb_{is} + cp_i p_s = 0.$$

Сети b_{is} , $\overset{*}{b}_{is}$ и изотропная сеть g_{is} имеют общую аполярную им сеть Лиувилля \tilde{b}_{is} , следовательно, в принятом выше нормировании их тензоры связаны зависимостью

$$\overset{**}{cb}_{is} = cb_{is} + cg_{is},$$

и из последних двух уравнений имеем

$$\overline{cb}_{is} + \overline{cb}_{is} + cg_{is} + cp_i p_s = cb_{is} + cg_{is} + cp_i p_s = 0,$$

где

$$cb_{is} = \overline{cb}_{is} + \overline{cb}_{is}$$

— тензор одной из сетей Риччи, аполярных сети a_{is} . Так как, очевидно, $c \neq 0$, то возможны следующие два случая:

1) $c = 0$. Сеть b_{is} вырождается, и в силу аполярности $ca_{is} b^{is} = -ca_{is} p^i p^s = 0$ меридианы образуют одно семей-

ство асимптотических, что, согласно § 30, п. 6, приводит к градиентности вектора $e^a \frac{p_i}{\sqrt{x}}$, где

$$a = \frac{1}{4} \ln K, \quad x = g_{is} p^i p^s = g_{is} \tilde{p}^i \tilde{p}^s = \Delta_i \tilde{p}^i, \quad \tilde{p}_i = \partial_i \tilde{p}.$$

Следовательно, градиентен вектор

$$\sqrt[4]{|K|} \frac{p_i}{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{|K|} \sqrt{x} \frac{p_i}{x}.$$

Однако вектор $\frac{p_i}{x} = \text{grad}$, а множитель $\sqrt[4]{|K|} \sqrt{x}$ зависит только от K или, что то же, от \tilde{p} . Следовательно, $Kx^2 = \text{const}$. Покажем, что это противоречит нашему предположению, ибо ни для одного линейного элемента вида (10) это равенство невозможно. Рассмотрим для примера первый линейный элемент (10). Из сравнения с линейным элементом (45;24)

$$ds^2 = x \left[\left(\frac{d\tilde{p}}{x} \right)^2 + \left(\frac{p_i du^i}{x} \right)^2 \right]$$

следует, что

$$x = u, \quad x du = d\tilde{p}.$$

Гауссова кривизна, согласно (45;16), имеет вид

$$K = -\frac{1}{2} \frac{d^2x}{d\tilde{p}^2} = \frac{x'^2 - xx''}{2x^3},$$

где

$$x' = \frac{dx}{d\tilde{p}}, \quad x'' = \frac{d^2x}{d\tilde{p}^2}.$$

В нашем случае $x' = 1$, $x'' = 0$ и равенство

$$Kx^2 = \frac{1}{2u} = \text{const}$$

невозможно. Для других элементов доказательство невозможности аналогично предыдущему.

2) $c \neq 0$. Сеть $cb_{is} = -c \underset{2}{g_{is}} - c \underset{3}{p_i p_s}$ не вырождается и аполярна сети вращения $p_{(i} p_{s)}$. Чебышевский вектор этой сети вращения $c_i = -\frac{1}{2x} \frac{dx}{d\tilde{p}} \tilde{p}_i$ и вектор $a_i = \frac{1}{4} \partial_i \ln K$, как

чебышевские векторы двух сетей, аполярных геодезической сети b_{is} , удовлетворяют уравнению (71;2)

$$b_{is}^s(a_s - c_s) = \text{grad}. \quad (11)$$

Так как тензор b_{is} определен с точностью до постоянного множителя, то можно положить $b_{is} = cg_{is} + p_i p_s$, где $c = \text{const}$; тогда $b_{is} = \frac{1}{\sqrt{c(c+x)}} b_{is}$, и (11) принимает вид

$$\frac{1}{\sqrt{c+x}} \frac{d \ln \frac{d^2 x}{d\tilde{p}^2} x^2}{d\tilde{p}} (c+x) x \frac{p_i}{x} = \text{grad}.$$

Отсюда следует, что множитель при векторе $\frac{p_i}{x}$ постоянен. Переходя, как и выше, к производным по параметру u , получим условие

$$\left[\ln \left(\frac{x'^2 - xx''}{x} \right) \right]' = \frac{c_1}{\sqrt{c+x}}, \quad (12)$$

невыполнимое ни для одного линейного элемента вида (10). Для первого из них, когда $x = u$, мы приходим к невозможному равенству

$$-\frac{1}{u} = \frac{c_1}{\sqrt{c+u}}.$$

Сделаем проверку для третьего линейного элемента (10). Здесь $x = ae^u + be^{2u}$, $\frac{x'^2 - xx''}{x} = \frac{-ab}{ae^{-2u} + be^{-u}}$, и условие (11), принимающее вид

$$(2a + be^u)^2 (c + ae^u + be^{2u}) = c_1^2 (a + be^u)^2,$$

возможно лишь при $a = b = 0$, что не имеет смысла. Невозможность равенства (12) в остальных случаях доказывается аналогично предыдущему.

Полученное противоречие доказывает, что сеть a_{is} ортогональна. Так как эта сеть, как было отмечено выше, является главным основанием изгибаия, то по теореме § 114, п. 5 она полугеодезическая, а рассматриваемая поверхность линейчатая и минимальная, то есть геликоид. Теорема Финикова доказана.

Так как каждая сеть Фосса является главным основанием изгиба (см. п. 1), то теорема Финикова равносильна следующей: *поверхность с бесконечным числом геодезических главных оснований есть геликоид.*

Другую формулировку этой теоремы мы получим, если рассмотрим сферическое отображение поверхности. В этом отображении асимптотическая сеть кодацциева, а сеть Фосса чебышевская. Обратно, если кодацциева сеть A римановой геометрии V_2 постоянной кривизны $K = 1$ допускает ∞^1 аполярных ей чебышевских сетей, то поверхность, построенная по сферическому отображению V_2 и асимптотической сети A , будет иметь бесконечное число сетей Фосса. Можно показать, что требование $K = 1$ можно заменить требованием $K = \text{const}$, и тогда теорема Финикова сформулируется так: *если кодацциева сеть римановой геометрии постоянной кривизны допускает ∞^1 аполярных ей чебышевских сетей, то эта сеть полугеодезическая.*

ГЛАВА X
КОНГРУЭНЦИИ ПРЯМЫХ

§ 116. Общие понятия

Множество прямых, зависящее от двух параметров, называется *конгруэнцией прямых*.

Примером конгруэнции, уже встречавшимся нам, является множество нормалей произвольной поверхности.

Конгруэнция называется *регулярной* в данной области, если через каждую точку этой области проходит одна и только одна прямая, принадлежащая конгруэнции. *Все дальнейшие рассуждения относятся к областям, в которых конгруэнция регулярна.*

Через каждую точку поверхности, принадлежащую области регулярности конгруэнции, проходит один луч конгруэнции, следовательно, конгруэнцию можно задать радиусом-вектором r произвольной поверхности, называя ее *опорной поверхностью конгруэнции*, и единичным направляющим вектором a луча конгруэнции, заданным в каждой точке поверхности. Опорную поверхность конгруэнции можно выбрать произвольно. Радиусы-векторы r и \check{r} двух опорных поверхностей связаны равенством

$$\check{r} = r + \psi a. \quad (1)$$

Отображение лучей конгруэнции на точки единичной сферы, при котором каждому лучу ставится в соответствие точка сферы с радиусом-вектором a , параллельным лучу, называется *сферическим отображением*.

Такое же название — *сферическое отображение* — имеет та область единичной сферы, на которую произведено отображение.

Конгруэнции, сферические отображения которых вырождаются в линию, называются *цилиндрическими* и из дальнейшего общего рассмотрения исключаются.

Первая квадратичная форма сферического отображения

$$I = da^2 = a_{is} du^i du^s, \quad a_{is} = a_i a_s$$

определяет квадрат бесконечно малого угла между двумя бесконечно близкими лучами конгруэнции и называется *первой квадратичной формой конгруэнции*, а тензор a_{is} — *первым тензором конгруэнции*. Риманова геометрия сферического отображения конгруэнции существенно применяется во всем дальнейшем изложении. Для перебрасывания индексов применим бивектор

$$e_{is} = (aa_i a_s). \quad (2)$$

По аналогии со сферическим отображением поверхности (§ 82) имеем следующие формулы:

$$[a_i a_k] = e_{ik} a, \quad [aa_i] = -a_i^s a_s, \quad (3)$$

$$a_i = a_i^s [aa_s], \quad a_{i|s} = -a_{is} a, \quad (4)$$

$$a_{i|s|k} = 0, \quad e_{i|s|k} = 0, \quad a_i^s|_k = 0. \quad (5)$$

§ 117. Линейчатые поверхности конгруэнции.

Вторая квадратичная форма

Всякое уравнение $\varphi(u^i) = 0$ или $u^i = u^i(t)$ выделяет однопараметрическое семейство прямых или *линейчатую поверхность, принадлежащую конгруэнции*. В сферическом отображении этой поверхности соответствует линия (v) .

Орт $v^i = \frac{du^i}{ds}$ касательной к линии (v) будем называть *направляющим ортом линейчатой поверхности*.

Вектор $v = a_i v^i$ является ортом *стрикционной нормали* поверхности (v) , то есть ортом нормали этой поверхности в ее стрикционной точке. Действительно, если на линейчатой поверхности стрикционная линия принята за направляющую, то по формуле (99;6) $\frac{dr}{ds} \frac{da}{ds} = 0$. Так как,

кроме того, $a \frac{da}{ds} = 0$, то вектор $\frac{da}{ds}$ ортогонален двум

векторам $\frac{dr}{v}$ и a , принадлежащим касательной плоскости в стрикционной точке, что и требовалось доказать.

Параметр распределения p этой поверхности определяется формулой (99;13)

$$p = \frac{(a da dr)}{da^2}. \quad (1)$$

Тензор

$$\check{b}_{is} = (aa_{ir_s}) \quad (2)$$

называется *вторым тензором конгруэнции*. Для его симметрической части примем обозначение

$$\check{b}_{(is)} = b_{is}. \quad (3)$$

Квадратичная форма

$$\Pi = (a da dr) = b_{is} du^i du^s \quad (4)$$

называется *второй квадратичной формой* конгруэнции.

В этих обозначениях параметр распределения p линейчатой поверхности (v) можно представить в виде отношения квадратичных форм

$$p = \frac{\Pi}{I}. \quad (5)$$

При переходе от опорной поверхности r к опорной поверхности $r + \psi a$ тензор \check{b}_{is} переходит в тензор

$$\check{b}_{is} + \psi e_{is}. \quad (6)$$

Симметрическая часть этого тензора, таким образом, не зависит от выбора опорной поверхности и связана инвариантно с самой конгруэнцией.

§ 118. Семейства и сети линейчатых поверхностей

Поле вектора $v^i = v^i(u^1, u^2)$ определяет однопараметрическое семейство линейчатых поверхностей (v) конгруэнции, сферические отображения которых совпадают с семейством линий (v), определяемых тем же векторным

полем. Совокупность двух однопараметрических семейств линейчатых поверхностей (v) и (w) будем называть *сетью поверхностей* (v, w) . В сферическом отображении сети поверхностей (v, w) соответствует сеть линий (v, w) .

Среди линейчатых поверхностей конгруэнции имеются торсы. Дифференциальное уравнение, определяющее их, мы получим, приравняв нулю параметр распределения, что приводит к дифференциальному уравнению первого порядка второй степени

$$b_{is} du^i du^s = 0.$$

Следовательно, в общем случае существует два семейства торсов. Сеть, составленная из этих семейств, определяется тензором b_{is} .

В области *гиперболических* лучей (где $b_{is}b^{is} < 0$) сеть торсов вещественна, в области *эллиптических* лучей (где $b_{is}b^{is} > 0$) торсы конгруэнции мнимо сопряжены, в области *параболических* лучей (где $b_{is}b^{is} = 0$) два семейства торсов сливаются в одно.

§ 119. Фокальные поверхности конгруэнции

Рассмотрим в области гиперболических лучей одно из семейств торсов конгруэнции (v) . Геометрическое место ребер возврата их составляет так называемую *фокальную поверхность* F конгруэнции. Так как каждый луч конгруэнции принадлежит к одной из поверхностей семейства торсов (v) , то все лучи конгруэнции касаются фокальной поверхности F . Второму семейству торсов (w) соответствует вторая фокальная поверхность F . Следовательно, в области гиперболических лучей конгруэнция состоит из общих касательных двух фокальных поверхностей. Точки, в которых луч касается фокальных поверхностей, называются его *фокусами*.

В области параболических лучей две фокальные поверхности сливаются, а в области эллиптических лучей они комплексно сопряжены.

Семейство торсов (v) состоит из касательных к семейству линий (ребер возврата), расположенных на фокальной

поверхности F . Второму семейству торсов (w) на фокальной поверхности F соответствует семейство линий (w), сопряженное семейству линий (v), так как касательные к линиям (w) вдоль линий (v) составляют развертывающиеся поверхности. Таким образом, *сети торсов на каждой фокальной поверхности соответствует сопряженная сеть.*

Плоскость, проходящая через луч конгруэнции и касающаяся торса, называется *фокальной плоскостью*. Через каждый гиперболический луч конгруэнции проходят две фокальные плоскости. Каждая фокальная плоскость касается одной из фокальных поверхностей и является соприкасающейся плоскостью ребра возврата, расположенного на второй фокальной поверхности.

В случае параболического луча фокальные плоскости сливаются с касательной плоскостью единственной фокальной поверхности. Так как эта плоскость является соприкасающейся для ребра возврата, то последнее совпадает с асимптотической линией фокальной поверхности, следовательно, *параболическая область конгруэнции состоит из касательных к асимптотическим линиям некоторой поверхности.*

§ 120. Специальные сети линейчатых поверхностей. Инварианты конгруэнции

Рассмотрим произвольную сеть (v, w) линейчатых поверхностей конгруэнции. Плоскость, проходящая через луч конгруэнции и стрикционную нормаль линейчатой поверхности (v) на этом луче, касается линейчатой поверхности (w) в некоторой точке P . На этом же луче аналогично определяется точка P . Две такие точки назовем *P -точками* сети (v, w).

Пусть λ_v и λ_w — абсциссы P -точек на данном луче, так что

$$\underset{v}{p} = r + \lambda_v a, \quad \underset{w}{p} = r + \lambda_w a \quad (1)$$

являются радиусами-векторами этих точек. Так как стрикционная нормаль поверхности (w) определяется вектором

$a_s w^s$ (§ 117), то, по определению, векторы a , $a_s w^s$ и $p_i v^i$ компланарны, в силу чего

$$(a, a_s w^s, p_i v^i) = \check{b}_{si} \omega^s v^i + \lambda e_{si} \omega^s v^i = 0.$$

Следовательно, абсциссами P -точек на луче будут

$$\lambda = \frac{\check{b}_{si} \omega^s v^i}{v_k \omega^k}, \quad \lambda = - \frac{\check{b}_{si} v^s \omega^i}{v_k \omega^k}. \quad (2)$$

Расстояние между P -точками дается формулой

$$\lambda - \lambda = \frac{1}{v_k \omega^k} \check{b}_{si} (\omega^s v^i + v^s \omega^i) = \frac{2}{v_k \omega^k} b_{is} v^i \omega^s, \quad (3)$$

а радиус-вектор середины отрезка между ними есть

$$m = \frac{1}{2} (p_v + p_w) = r - \psi a, \quad (4)$$

где

$$\psi = \frac{1}{2v_s \omega^s} \check{b}_{ik} (\omega^i v^k - v^i \omega^k) = \frac{1}{2} \check{b}_{ik} e^{ik} = \frac{1}{2} \check{b}_s^s. \quad (5)$$

Последняя формула показывает, что средняя точка P -точек одна и та же для всех сетей. Эта точка внутренним образом связана с лучом конгруэнции и называется *средней точкой* или *центром луча*.

Геометрическое место средних точек называется *средней поверхностью* конгруэнции.

Расстояние от средней точки луча до его опорной точки определяется формулой (5). Если средняя точка луча принята за опорную, то $\psi = \frac{1}{2} e^{is} \check{b}_{is} = 0$. Следовательно, радиус-вектор m средней точки луча характеризуется тем, что тензор

$$\check{b}_{is} = a a_{(i} m_{s)} = a a_i m_s = b_{is}$$

симметричен.

Если одно семейство поверхностей сети составлено из торсов, а другое произвольно, то P -точки этой сети следует считать совпадающими с фокусами, следовательно, центр луча есть середина *фокального отрезка*, то есть отрезка,

соединяющего фокусы. В эллиптической области фокусы комплексно сопряжены, однако и здесь средняя точка луча вещественна. Аналитически это подтверждается так. Пусть v^i — орт торса конгруэнции и $f = r + \sigma a$ — радиус-вектор соответствующего фокуса. При смещении в направлении v^s смещение фокуса параллельно лучу, следовательно,

$$[aa_i] \partial_s (r + \sigma a) v^s = (\check{b}_{is} + \sigma e_{is}) v^s = 0.$$

Приравнявая нулю определитель этой однородной относительно v^s системы, приходим к квадратному уравнению

$$\sigma^2 + \check{b}_s^s \sigma + \frac{1}{2} \check{b}_{is} \check{b}^{is} = 0. \quad (6)$$

Это уравнение определяет абсциссы σ и σ фокусов луча, с помощью которых радиусы-векторы f и f фокусов выражаются формулами

$$f = r + \sigma a, \quad f = r + \sigma a.$$

Если опорная точка совпадает с центром луча, то, согласно (5), $\check{b}_{is}^s = 2\psi = 0$. В этом случае корни уравнения (6) равны по величине и обратны по знаку ($\sigma = -\sigma = \sigma$), и мы снова убеждаемся, что центр луча есть середина фокального отрезка. Отсюда же следует, что расстояние между фокусами

$$2\sigma = \sqrt{-2\check{b}_{is} \check{b}^{is}}. \quad (7)$$

Сеть поверхностей (v, w) назовем *сопряженной*, если

$$b_{is} v^i w^s = 0.$$

Сферическое отображение этой сети и сети торсов аполярны. Приняв среднюю поверхность конгруэнции за опорную, получим следующие выражения для абсцисс P -точек сопряженной сети:

$$\lambda = \frac{b_{is} v^i w^s}{v^k w^k} = -\lambda = 0.$$

следовательно, сопряженная сеть характеризуется тем, что ее P -точки совпадают с центром луча.

Сеть (v, w) назовем ортогональной, если ее сферическое отображение ортогонально, то есть если

$$a_{is}v^i w^s = 0.$$

Орты стрикционных нормалей $a_i v^i$ и $a_i w^i$ двух ортогональных поверхностей ортогональны, следовательно, P -точки ортогональной сети являются стрикционными точками поверхностей этой сети.

Стрикционную точку поверхности (v) можно найти как P -точку ортогональной сети (v, \tilde{v}) . Абсциссы этой точки на луче относительно его центра есть

$$t = \lambda = \frac{b_{is}v^i \tilde{v}^s}{v_k \tilde{v}^k} = -a_k^s b_{is} v^i v^k \quad (8)$$

или

$$t = -c_{ki} v^k v^i = -c_{ki} v^k v^i, \quad (9)$$

где приняты следующие обозначения:

$$\check{c}_{ik} = a_k^s b_{is} = a_k^s (a_a s m_i) = a_k m_i, \quad c_{ik} = \check{c}_{(ik)}. \quad (10)$$

Сеть c_{ik} ортогональна и сопряжена. Ее называют сетью поверхностей кривизны.

Сеть поверхностей кривизны становится неопределенной, если тензоры a_{is} и b_{is} пропорциональны, то есть если сферическое отображение сети торсов совпадает с изотропной сетью. Конгруэнции, обладающие этим свойством, называются изотропными. Каждая ортогональная сеть изотропной конгруэнции сопряжена. Так как, кроме того, P -точки ортогональной и сопряженной сети являются, по предыдущему, стрикционными точками ее поверхностей и совпадают с центром луча, то изотропную конгруэнцию можно охарактеризовать тем, что стрикционные линии всех ее поверхностей лежат на средней поверхности.

Поверхности кривизны, составляющие сеть кривизны не изотропной конгруэнции, характеризуются тем, что их стрикционные точки совпадают с центром луча, так как для этих поверхностей $t = t = 0$.

$v \quad w$

Параметры распределения поверхностей кривизны не изотропной конгруэнции

$$p = b_{is}v^i v^s, \quad \tilde{p} = b_{is}\tilde{v}^i \tilde{v}^s \quad (11)$$

называются *главными параметрами распределения*.

Совместные инварианты тензоров a_{is} и b_{is}

$$k = -\sigma^2 = \frac{b}{a} = \frac{1}{2} b_{is} b^{is}, \quad (12)$$

$$h = \frac{1}{2} b_{is} a^{is} \quad (13)$$

называются *полным и средним параметрами конгруэнции*. Зависящий от них инвариант d , определяемый формулой

$$d^2 = 4(h^2 + \sigma^2) = 4(h^2 - k), \quad (14)$$

называется *эйлеровой разностью*.

Для выяснения геометрического смысла этих инвариантов рассмотрим произвольную ортогональную сеть поверхностей (v, w) . Учитывая, что $e_{is} = v_i w_s - v_s w_i$ и $a_{is} = v_i v_s + w_i w_s$, находим

$$k = \frac{1}{2} (v^i \omega^\alpha - w^i v^\alpha) (v^k \omega^\beta - w^k v^\beta) b_{\alpha\beta} b_{ik} = pp - \frac{1}{4} \left(\frac{t}{v} - \frac{t}{w} \right)^2, \quad (15)$$

где, согласно (8),

$$\left. \begin{aligned} \frac{t}{v} &= b_{is} v^i \tilde{v}^s = b_{is} v^i w^s, \\ \frac{t}{w} &= b_{is} w^i \tilde{w}^s = -b_{is} w^i v^s \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

являются абсциссами стрижционных точек поверхностей сети (v, w) , а

$$\frac{t}{v} - \frac{t}{w} = 2b_{is} v^i w^s \quad (17)$$

равно расстоянию между ними.

Для инвариантов h и d имеем

$$h = \frac{1}{2} (v^i v^\alpha + w^i w^\alpha) b_{i\alpha} = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{v} + \frac{p}{w} \right), \quad (18)$$

$$d^2 = 4(h^2 + \sigma^2) = \left(\frac{p}{v} - \frac{p}{w} \right)^2 + \left(\frac{t}{v} - \frac{t}{w} \right)^2, \quad (19)$$

следовательно, *средний параметр конгруэнции равен полусумме параметров распределения произвольной пары ортогональных поверхностей.*

Поверхности, стрикционные точки которых наиболее удалены от центра луча, называются *главными поверхностями*. Так как, согласно (16), абсциссы стрикционных точек t_v и t_w двух ортогональных поверхностей равны по величине и обратны по знаку, то главные поверхности, проходящие через данный луч, можно искать как такие пары ортогональных поверхностей (v) и (w), для которых $|t_v - t_w|$ максимально. Учитывая, что для данного луча эйлера разность и средний параметр $h = \frac{1}{2}(p_v + p_w)$ фиксированы, из формулы (19) заключаем, что наибольшее значение $|t_v - t_w|$ соответствует наименьшему значению $|p_v - p_w|$ и достигается при $p_v = p_w = h$. Отсюда следует, что направляющие орты главных поверхностей удовлетворяют уравнениям

$$p_v - h = (b_{is} - ha_{is})v^i v^s = (b_{is} - ha_{is})w^i w^s = 0$$

и что эти поверхности составляют *главную сеть* поверхностей, тензор которой

$$\tilde{c}_{ik} = -b_{ik} + ha_{ik} = a_i^s (a_s^l b_{lk} + h e_{sk}) = a_i^s c_{sk}. \quad (20)$$

Так как для главных поверхностей

$$p_v = p_w = h, \quad (21)$$

то их можно охарактеризовать как два семейства ортогональных поверхностей с равными параметрами распределения.

Учитывая последнее соотношение и формулу (19), находим

$$d = |t_v - t_w|.$$

Таким образом, *эйлерова разность есть длина отрезка между граничными точками луча, то есть между стрикционными точками главных поверхностей.*

Принимая за поверхности v и w поверхности кривизны, получаем из формул (11), (13) и (14) следующие выражения параметров конгруэнции через главные параметры распределения

$$k = \frac{pp}{v\bar{v}}, \quad h = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{v} + \frac{p}{\bar{v}} \right), \quad d^2 = \left(\frac{p}{v} - \frac{p}{\bar{v}} \right)^2. \quad (22)$$

Угол ω между фокальными плоскостями конгруэнции равен углу между стрикционными нормальными $a_s v^s$ и $a_s w^s$ ее торсов, где v^s и w^s — орты торсов. Следовательно,

$$\sin \omega = e_{is} v^i w^s = v_s w^s.$$

Метрически нормированный тензор торсовой сети есть

$$b_{is} = \frac{1}{\sin \omega} (v_i w_s + v_s w_i), \quad (23)$$

а тензор второй квадратичной формы, согласно (23) и (12), имеет вид

$$b_{is} = \frac{\sigma}{\sin \omega} (v_i w_s + v_s w_i). \quad (23')$$

Отсюда получаем следующие соотношения между инвариантами конгруэнции:

$$\left. \begin{aligned} h &= \frac{\sigma}{2} b_{is} a^{is} = \sigma \operatorname{ctg} \omega, & d \sin \omega &= 2\sigma, \\ d \cos \omega &= 2h. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

§ 121. Задание конгруэнции квадратичными формами

Производную r_i радиуса-вектора точки опорной поверхности разложим по независимым векторам a , a_i :

$$r_i = l_i^s a_s + \check{\mu}_i a.$$

Умножая обе части этого равенства на a и $[aa_k]$, находим

$$\check{\mu}_i = a r_i, \quad l_{ik} = -\check{b}_{ik}$$

и получаем систему дифференциальных уравнений

$$r_i = -\check{b}^s_{\cdot i} a_s + \check{\mu}_i a. \quad (4)$$

Составим условие интегрируемости этой системы:

$$r_{i| \cdot}^i = -\check{b}^s_{\cdot i| \cdot} a_s + \check{b}^s_{\cdot i} a_s^i + \check{\mu}_{i| \cdot}^i a - \check{\mu}^i a_i = 0.$$

В силу независимости векторов a и a_i имеем

$$\check{\mu}_s = -\check{b}_{si| \cdot}^i = \check{b}_{s \cdot | i}^i, \quad (2)$$

$$\check{\mu}_{si| \cdot}^s = -\check{b}^s_{\cdot i} a_s^i = 2h \quad (3)$$

или

$$\check{b}_{si| \cdot}^{is} + 2h = 0. \quad (4)$$

Если заданы: 1) положительно определенная квадратичная форма $I = a_{is} du^i du^s$ с кривизной $K = 1$, 2) тензор \check{b}_{is} , удовлетворяющий условию (4), то уравнения $a_{is} = a_i a_s$ определяют радиус-вектор a сферического отображения конгруэнции с точностью до вращения, а уравнения

$$r_i = -\check{b}^s_{\cdot i} a_s + \check{b}_{i \cdot | s}^s a \quad (5)$$

определяют опорную поверхность с точностью до параллельного переноса. Таким образом, мы доказали следующее предложение: *система «конгруэнция с опорной поверхностью» определяется тензорами a_{is} и \check{b}_{is} , удовлетворяющими высказанным двум требованиям, с точностью до положения в пространстве.*

Если за опорную принять среднюю поверхность конгруэнции, то в формулах (4), (5) следует тензор \check{b}_{is} заменить тензором b_{is} . Так как средняя поверхность определяется самой конгруэнцией, то высказанное выше предложение принимает в этом случае следующий вид: *две квадратичные формы $I = a_{is} du^i du^s$ и $II = b_{is} du^i du^s$, из которых первая положительно определенная и имеет кривизну $K = 1$, а вторая удовлетворяет условию*

$$b_{is| \cdot}^{is} + b_{is} a^{is} = 0, \quad (4')$$

определяют конгруэнцию до положения в пространстве.

Если опорная поверхность не совпадает с фокальной поверхностью, то тензор \check{b}_{is} не вырождается, так как

$$\check{b}_{is} \check{b}^{is} = (b_{is} + \psi e_{is})(b^{is} + \psi e^{is}) = 2(\psi^2 - \sigma^2) \neq 0. \quad (6)$$

В этих предположениях уравнение

$$\check{\mu}_s = \check{b}^i_s \check{\theta}_i \quad (7)$$

однозначно определяет тензор $\check{\theta}_i$. Последнее позволяет уравнению (1) и условию его интегрируемости (4) придать следующий вид:

$$r_i = \check{b}^{\alpha}_i (\check{\theta}_\alpha a - a_\alpha), \quad (8)$$

$$\check{b}^{\alpha\beta} (\check{\theta}_{\alpha|\beta} + \check{\theta}_\alpha \check{\theta}_\beta + a_{\alpha\beta}) = 0. \quad (9)$$

Для случая, когда опорная поверхность совпадает со средней поверхностью конгруэнции, примем следующие обозначения:

$$r = m, \quad \mu_i = am_i, \quad b^s_i \theta_s = \mu_i;$$

при этом формулам (8) и (9) будут соответствовать формулы

$$m_i = b^{\alpha}_i (\theta_\alpha a - a_\alpha), \quad (8')$$

$$b^{\alpha\beta} (\theta_{\alpha|\beta} + \theta_\alpha \theta_\beta + a_{\alpha\beta}) = 0. \quad (9')$$

Из формул (2) и (7) имеем

$$\mu_i = b^{\alpha}_i \theta_\alpha = b^{\alpha}_{i|\alpha} = b^{\alpha}_i (\partial_\alpha \ln \sigma - 2b_\alpha), \quad (10)$$

$$\theta_\alpha = \partial_\alpha \ln \sigma - 2b_\alpha, \quad (11)$$

где b_α — чебышевский вектор сети торсов в сферическом отображении. Внося значение вектора θ_α (11) в (9'), приходим к уравнению

$$b^{is} (\sigma_{i|s} - 4\sigma_i b_s + 4\sigma b_i b_s + \sigma a_{is} - 2\sigma b_{i|s}) = 0. \quad (12)$$

Это уравнение называется *уравнением Гишара* ([3], § 153) и имеет следующий смысл: если дано сферическое отображение конгруэнции (то есть задан вектор $a = a(u^i)$) и сферическое отображение ее торсовой сети (то есть тензор b_{is}), то каждое решение σ уравнения Гишара определяет вектор $\theta_\alpha = \partial_\alpha \ln \sigma - 2b_\alpha$ такой, что система уравнений

$$m_i = \sigma b^{\alpha}_i (\theta_\alpha a - a_\alpha) \quad (13)$$

вполне интегрируема, определяет вектор m с точностью до постоянного слагаемого, а саму конгруэнцию — до параллельного переноса.

§ 122. Опорная и опорная огибающая поверхности конгруэнции

1. Орт нормали опорной поверхности запишем в следующем виде:

$$\check{n} = \frac{1}{p} (a_\alpha l^\alpha + a).$$

Из условия ортогональности

$$r_i \check{n} = \frac{1}{p} ((a_\alpha r_i) l^\alpha + a r_i) = \frac{1}{p} (a_\alpha^\beta (a a_\beta r_i) l^\alpha + \check{\mu}_i) = 0$$

находим

$$\check{\mu}_i = -a_\alpha^\beta \check{b}_{\beta i} l^\alpha = -\check{b}_{.i}^\alpha \check{\tau}_\alpha.$$

Так как, с другой стороны, $\check{\mu}_i = \check{b}_{.i}^\alpha \check{\theta}_\alpha$, то

$$\check{\tau}_\alpha = -\check{\theta}_\alpha, \quad l_\alpha = \check{\theta}_\alpha.$$

Следовательно,

$$\check{n} = \frac{1}{p} (a_\alpha \check{\theta}^\alpha + a), \tag{1}$$

где множитель $\frac{1}{p}$ определяется одним из равенств

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{p} &= \cos(\widehat{a\check{n}}), \\ (\check{n}p)^2 &= p^2 = a^\alpha \check{\theta}_\alpha \check{\theta}_\beta + 1. \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

Тензор второй квадратичной формы опорной поверхности

$$\begin{aligned} h_{is} &= -\check{n}_i r_s = -\frac{1}{p} (a_\alpha \check{\theta}^\alpha + a) \check{b}_s^\beta (\check{\theta}_\beta a - a_\beta) = \\ &= -\frac{1}{p} (-\check{\theta}_i a + a_\alpha \check{\theta}^\alpha_{|i} + a_i) \check{b}_s^\beta (\check{\theta}_\beta a - a_\beta) = \\ &= \frac{1}{p} \check{b}_{.s}^\alpha (\check{\theta}_{\alpha|i} + \check{\theta}_\alpha \check{\theta}_i + a_{\alpha i}). \end{aligned} \tag{3}$$

Условие того, что торсам конгруэнции на опорной поверхности соответствует сопряженная сеть, есть

$$b^{is} h_{is} = \check{b}^{is} h_{is} = 0$$

или

$$\check{\theta}_{\alpha i}^{\alpha} = 0. \quad (4)$$

2. Плоскости, ортогональные лучу конгруэнции в опорной точке, огибают некоторую поверхность. Назовем ее *опорной огибающей поверхностью* и запишем ее радиус-вектор в виде

$$R = r + a_k l^k.$$

Из условия ортогональности

$$R_i a = r_i a - a_{ki} l^k = \check{\mu}_i + \check{l}_i = 0$$

находим

$$l_i = \check{\mu}_i.$$

Следовательно,

$$R = r + a_{\alpha} \check{\mu}^{\alpha}. \quad (5)$$

Тензор второй квадратичной формы опорной огибающей

$$\check{h}_{is} = -a_i R_s = -a_i r_s - a_{\alpha i} \check{\mu}^{\alpha}_{|s} = \check{b}^{\alpha}_{.s} a_{\alpha i} - \check{\mu}_{i|s}. \quad (6)$$

Условие того, что торсам конгруэнции соответствует на опорной огибающей сопряженная сеть, есть

$$b^{is} h_{is} = \check{b}^{is} h_{is} = -\check{b}^{is} \check{\mu}_{i|s} = 0. \quad (7)$$

Пользуясь равенством (121;2), это условие можно записать в виде

$$(\check{b}^i_{.s} \check{\mu}_i)^s = 0. \quad (8)$$

Огибающая плоскостей, ортогональных лучу конгруэнции в его центре, называется *средней огибающей*. Второй тензор средней огибающей

$$h_{is} = b^{\alpha}_{.s} a_{\alpha i} - \mu_{i|s}. \quad (6')$$

Условие того, что торсам конгруэнции на средней огибающей соответствует сопряженная сеть, имеет вид

$$(b^i_{.s} \mu_i)^s = 0. \quad (8')$$

§ 123. Специальные конгруэнции

Приложим полученные результаты к рассмотрению некоторых классов специальных конгруэнций.

1. *Нормальные конгруэнции*. Так называются конгруэнции, допускающие поверхность, ортогональную всем своим лучам. Чтобы найти такую поверхность, представим ее радиус-вектор в виде

$$R = r + \lambda a$$

и составим условие ортогональности

$$R_i a = r_i a + \lambda_i = \check{\mu}_i + \lambda_i = 0.$$

Для существования искомой поверхности необходимо и достаточно, чтобы вектор $\check{\mu}_i$ был градиентен. Следовательно, нормальная конгруэнция характеризуется условием

$$\check{\mu}_i = \text{grad.}$$

При выполнении этого условия множитель λ определяется с точностью до постоянного слагаемого:

$$\lambda = - \int \check{\mu}_i du^i + c.$$

Это означает, что нормальная конгруэнция допускает ∞^1 ортогональных ее лучам поверхностей

$$R = r + \lambda a + ca,$$

параллельных между собой, то есть таких, что расстояние между соответственными точками двух поверхностей, измеренное по их общей нормали, постоянно.

Отметим ряд свойств, характерных для нормальной конгруэнции:

а) *средний параметр равен нулю*; действительно, согласно (121;3),

$$h = \frac{1}{2} \check{\mu}_s{}^s = 0;$$

б) *граничные точки луча совпадают с его фокусами*, так как, согласно (120;24), $d = 2\sigma$;

в) фокальные плоскости ортогональны, так как, согласно (120;24), $\cos \omega = \frac{2h}{a} = 0$;

г) ребра возврата на фокальных поверхностях являются геодезическими линиями, так как соприкасающаяся плоскость ребра возврата совпадает с фокальной плоскостью и ортогональна касательной плоскости фокальной поверхности, совпадающей с другой фокальной плоскостью. Справедливо обратное предложение: касательные к линиям произвольного геодезического поля данной поверхности образуют нормальную конгруэнцию;

д) главные поверхности совпадают с торсами, так как тензор главной сети, согласно (120;20), $\tilde{c}_{is} = ha_{is} - b_{is} = -b_{is}$;

е) тензор $\check{c}_{ik} = a_k m_i$ симметричен: $\check{c}_i^i = a^{is} b_{is} = 2h = 0$.

2. Конгруэнции Гишара — Пето. Так называются конгруэнции нормалей минимальной поверхности. Примем эту поверхность за опорную. Тогда по формуле (122;1) должны получить $\check{n} = a$, следовательно, $\check{\theta}_i = 0$. Условие минимальности опорной поверхности

$$a^{is} \check{h}_{is} = a^{is} \frac{1}{p} \check{b}_{is}^{\alpha} (\check{\theta}_{\alpha|i} + \check{\theta}_{\alpha} \check{\theta}_i + a_{\alpha i}) = \frac{1}{p} \check{b}_{is}^{\alpha} = 0$$

показывает, что тензор \check{b}_{is} должен быть симметричен, то есть что эта поверхность — средняя поверхность конгруэнции. Последнее легко следует и из геометрических соображений: точка минимальной поверхности делит пополам отрезок между точками соответствующих эволютных поверхностей, то есть является центром луча конгруэнции нормалей.

Инвариантный признак конгруэнции Гишара — Пето дается любым из следующих равенств (см. (121;7), (121;11), (121;2)):

$$\theta_k = 0, \quad \check{\mu}_k = 0, \quad b_k = \frac{1}{4} \partial_k \ln k, \quad b_{ik|k} = 0.$$

Необходимость каждого из них очевидна. Достаточность можно доказать так: если $\theta_k = 0$, то орт нормали средней поверхности, как это следует из (122;1), $n = a$, следовательно, средняя поверхность ортогональна лучам конгру-

энции. Ее второй тензор $h_{is} = \frac{1}{p} b_s^\alpha a_{\alpha i}$, и сферическое отображение ее асимптотической сети ортогонально, так как $a^{is} h_{is} = 0$, что доказывает ее минимальность.

3. *Изотропные конгруэнции.* Некоторые свойства такой конгруэнции были уже рассмотрены в § 120. Торсам этой конгруэнции соответствует изотропная сеть сферического отображения, следовательно, $b_{is} = \lambda a_{is}$. Свертыванием обеих частей этого равенства с a^{is} находим

$$\lambda = h, \quad b_{is} = h a_{is}.$$

Отсюда следует, что

$$k = \frac{1}{2} b_{is} b^{is} = h^2 = -\sigma^2.$$

Так как чебышевский вектор сети торсов (то есть изотропной сети) $b_s = 0$, то уравнение Гизара принимает вид

$$a^{is} (h_{i|s} + h a_{is}) = \Delta_2 h + 2h = 0. \quad (1)$$

Так как в случае изотропной конгруэнции вектор

$$\mu_i = b_{i|k}^k = (h a_i^k)_{|k} = \tilde{h}_i,$$

то по формуле (122;5) радиус-вектор средней огибающей

$$R = m - a_h h^k.$$

Если средняя огибающая изотропной конгруэнции не вырождается, то она минимальная. Действительно, второй тензор этой поверхности, согласно (122;6), есть

$$h_{is} = h e_{is} - \tilde{h}_{i,s} \quad (2)$$

и удовлетворяет условию

$$a^{is} h_{is} = 0,$$

доказывающему наше утверждение.

Рассмотрим поверхность с тангенциальным уравнением

$$R a = h.$$

Ее асимптотическая сеть определяется тензором

$$H_{is} = -h_{i|s} - a_{is} h = -a_i^k h_{ks}.$$

Отсюда следует, что рассматриваемая поверхность является минимальной и присоединена средней огибающей.

Обратно, к каждой минимальной поверхности можно присоединить изотропную конгруэнцию, для которой эта поверхность служит средней огибающей. Для доказательства обозначим через $h_{i|s}$ тензор второй квадратичной формы данной минимальной поверхности и будем рассматривать (2) как систему дифференциальных уравнений, определяющих h . Запишем эту систему в следующем виде:

$$h_{i|s} = -h a_{is} + a_i^\alpha h_{\alpha s}. \quad (2')$$

Одно из условий интегрируемости — симметрия производной $h_{i|s}$ — выполняется, так как для минимальной поверхности тензор $a_i^\alpha h_{\alpha s}$ симметричен. Следующее условие интегрируемости

$$h_{i|s}{}^s = \tilde{h}_i = -h^s a_{is} - a_i^\alpha h_{\alpha s}{}^s = \tilde{h}_i$$

выполняется тождественно, так как $h_{\alpha s}{}^s = 0$. Если дополнить систему (2') уравнениями $h_i = \partial_i h$, то получим вполне интегрируемую систему в полных дифференциалах. Общее решение ее зависит от трех произвольных постоянных. Если h — частное решение этой системы, то, как легко проверить, общим ее решением будет

$$h = h_0 + (ca) \quad (c = \text{const}).$$

Радиус-вектор m средней точки луча изотропной конгруэнции найдем, используя формулу (122;5),

$$r = m + a_\alpha \tilde{m}^\alpha,$$

где r — радиус-вектор точки данной минимальной поверхности.

Имеем

$$m = r - a_\alpha \tilde{m}^\alpha = r + a_\alpha h^\alpha = r + a_\alpha h^\alpha + a_\alpha (ca^\alpha) = m_0 + [ca],$$

где

$$m_0 = r + a_\alpha h^\alpha, \quad [ca] = a_\alpha (ca^\alpha).$$

Полученный результат позволяет указать следующий простой способ преобразования изотропной конгруэнции в конгруэнцию такого же типа с тем же сферическим отображением: к радиусу-вектору средней точки луча данной конгруэнции прибавим вектор $[ca]$; получим среднюю точку луча новой изотропной конгруэнции.

Вычислим производную радиуса-вектора средней огибающей:

$$R_i = r_i + a_{ik} h^k a - a_k h^k |_{,i} = -(h_{i|}^k + h a_i^k) a_k.$$

Для того чтобы средняя огибающая изотропной конгруэнции вырождалась в точку, необходимо и достаточно, чтобы h удовлетворяло уравнению

$$h_{i|h} + h a_{ik} = 0.$$

Общее решение этого уравнения есть $h = ac$, где $c = \text{const}$. Вычислим радиусы-векторы средней точки луча

$$\begin{aligned} m &= \int m_i du^i = \int (-h a_i^k a_k + \tilde{h}_i a) du^i = \\ &= - \int a_i^k [a_k(ac) - a(a_k c)] du^i = \\ &= - \int a_i^k [[a a_k] c] du^i = [ca] + c_0 \end{aligned}$$

и средней огибающей

$$R = m - a_k h^k = [ca] + c_0 - a_k (ac)_k = c_0.$$

Таким образом, если через каждую точку с радиусом-вектором $m = [ca] + c_0$, принадлежащую плоскости $(R - c_0)c = 0$, провести луч параллельно радиусу-вектору a единичной сферы, то получим произвольную изотропную конгруэнцию, средняя огибающая которой вырождается в точку с радиусом-вектором c_0 .

Докажем, что средняя огибающая изотропной конгруэнции не может быть ни кривой, ни развертываемой поверхностью. Для этого вычислим сначала векторное произведение

$$\begin{aligned} [R_i R_k] &= (h_{i|}^p + h a_i^p) (h_{k|}^q + h a_k^q) [a_p a_q] = \\ &= (h_{i|p} + h a_{ip}) (h_{k|}^p + h a_k^p) a = e_{ik} (\Delta_{22} h + h \Delta_2 h + h^2) a. \end{aligned}$$

Если бы средняя огибающая вырождалась в кривую, то мы имели бы $[R_i R_k] = 0$ или

$$\Delta_{22}h + h\Delta_2h + h^2 = 0.$$

Учитывая это равенство, находим

$$(h_{i|k} + ha_{ik})(h^{i|k} + ha^{ik}) = 2(\Delta_{22}h + h\Delta_2h + h^2) = 0.$$

Отсюда следует, что тензор $h_{i|k} + ha_{ik}$ вырождается. Кроме того, согласно равенству (1), записанному в виде

$$a^{ik}(h_{i|k} + ha_{ik}) = 0,$$

он аполярен тензору a_{ik} , что возможно лишь при обращении его в нуль. Однако в этом случае, как было показано выше, средняя огибающая вырождается не в линию, а в точку.

Средняя огибающая изотропной конгруэнции не может также быть развертывающейся поверхностью, так как ее второй тензор (2) аполярен метрическому и его вырождение возможно лишь тогда, когда он обращается в нуль. Последнее влечет за собой обращение в нуль тензора $h_{i|k} + ha_{ik}$ и вырождение средней огибающей в точку.

4. *Конгруэнции с вырождающимися фокальными поверхностями.*

а) Если одна фокальная полость конгруэнции вырождается в точку, то ее лучи образуют связку прямых.

Докажем, что связка прямых характеризуется обращением в нуль симметричной части второго тензора. Пусть

$$R = r + \lambda a$$

— радиус-вектор центра этой связки, так что

$$R_i = r_i + \lambda_i a + \lambda a_i = 0.$$

Умножая обе части этого равенства на $[aa_s]$, получим

$$\check{b}_{si} + \lambda e_{si} = 0, \quad \check{b}_{(si)} = b_{si} = 0. \quad (3)$$

Обратно, если (3) выполнено, то

$$(\check{b}_{si} + \lambda e_{si})^i = -\check{\mu}_s - \lambda_s = -(ar_s + \lambda_s) = 0. \quad (4)$$

Точка луча с радиусом-вектором $R = r + \lambda a$ будет неподвижной, так как проекции

$$R_i a = ar_i + \lambda_i, \quad R_i [aa_s] = \check{b}_{si} + \lambda e_{si}$$

обращаются в нуль в силу (4) и (3). Отсюда следует, что $R_i = 0$, $R = \text{const}$. Утверждение доказано.

б) Для того чтобы одна полость фокальной поверхности с радиусом-вектором $f = m + \sigma a$ вырождалась в кривую, необходимо и достаточно обращение в нуль векторного произведения $[f_i f_s]$.

Производная f_i с помощью (121;8') приводится к виду

$$f_i = m_i + \sigma_i a + \sigma a_i = (b_i^\alpha \theta_\alpha + \sigma_i) a + (\sigma \delta_i^\alpha - b_i^\alpha) a_\alpha. \quad (5)$$

Вычислим теперь векторное произведение $[f_i f_s]$, предполагая, что $b_i^\alpha \theta_\alpha + \sigma_i \neq 0$:

$$\begin{aligned} [f_i f_s] &= (b_i^\alpha \theta_\alpha + \sigma_i) (\sigma \delta_s^\beta - b_s^\beta) [aa_\beta] + (\sigma \delta_i^\alpha - b_i^\alpha) (b_s^\beta \theta_\beta + \sigma_s) \times \\ &\times [a_\alpha a] = \{(b_i^\alpha \theta_\alpha + \sigma_i) (\sigma \delta_s^\beta - b_s^\beta) - (b_s^\beta \theta_\beta + \sigma_s) \times \\ &\times (\sigma \delta_i^\alpha - b_i^\alpha)\} [aa_\beta] = e_{is} (b_\gamma^\alpha \theta_\alpha + \sigma_\gamma) (\sigma e^{\gamma\beta} - b^{\gamma\beta}) [aa_\beta] = \\ &= e_{is} (b_\gamma^\alpha \theta_\alpha + \sigma_\gamma) \left\{ \frac{\sigma}{\sin \omega} (\nu^\gamma \omega^\beta - \nu^\beta \omega^\gamma) - \right. \\ &\left. - \frac{\sigma}{\sin \omega} (\nu^\gamma \omega^\beta + \nu^\beta \omega^\gamma) \right\} [aa_\beta] = - \frac{2\sigma}{\sin \omega} e_{is} (b_\gamma^\alpha \theta_\alpha + \sigma_\gamma) \times \\ &\times \omega^\gamma \nu^\beta [aa_\beta] = - \frac{2\sigma^2}{\sin \omega} e_{is} (\theta_\gamma + \partial_\gamma \ln \sigma) \omega^\gamma \nu^\beta [aa_\beta], \end{aligned}$$

что после замены $\theta_\gamma = \partial_\gamma \ln \sigma - 2b_\gamma$ (см. (121;11)) принимает вид

$$[f_i f_s] = \frac{4\sigma^2}{\sin \omega} e_{is} (b_\gamma - \partial_\gamma \ln \sigma) \omega^\gamma [aa_\beta] \nu^\beta. \quad (6)$$

Так как цилиндрические конгруэнции из рассмотрения исключены, то $[aa_\beta] \nu^\beta \neq 0$, следовательно, конгруэнция прямых, пересекающих некоторую кривую, характеризуется одним из равенств

$$(b_\gamma - \partial_\gamma \ln \sigma) \nu^\gamma = 0, \quad (b_\gamma - \partial_\gamma \ln \sigma) \omega^\gamma = 0 \quad (7)$$

или равносильным этому равенством

$$b^{ik} (b_i - \partial_i \ln \sigma) (b_k - \partial_k \ln \sigma) = 0. \quad (7')$$

К числу таких конгруэнций принадлежат конгруэнции нормалей каналовых поверхностей.

в) Конгруэнции, у которых обе фокальные полости вырождаются в кривые, представляют собой совокупность общих секущих двух произвольных кривых. Инвариантная характеристика таких конгруэнций дается равенствами (7) или равносильным им равенством

$$b_\gamma = \partial_\gamma \ln \sigma. \quad (8)$$

К рассматриваемому классу конгруэнций принадлежат конгруэнции нормалей циклид Дюпена и *линейные конгруэнции*, образованные общими секущими двух прямых.

5. *Конгруэнция Аппеля — Бианки*. Так называются конгруэнции, средняя огибающая поверхность которых вырождается в точку ([2], § 188). Эти конгруэнции впервые рассмотрены Бианки. Нормальные конгруэнции этого класса рассматривал Аппель, и их называют *конгруэнциями Аппеля*. Инвариантная характеристика конгруэнции Аппеля — Бианки содержится в равенстве

$$b_i^\alpha a_{\alpha s} + \mu_{i|s} = 0, \quad (9)$$

которое следует из равенства нулю производной радиус-вектора (122;5) точки средней огибающей поверхности.

Конгруэнции рассматриваемого класса можно охарактеризовать особым строением их второго тензора. Примем точку, с которой совпадает средняя огибающая, за начало координат. Тогда радиус-вектор m центра луча будет ортогонален лучу, так что

$$m = -a_\alpha l^\alpha, \quad m_i = -l_{i|\alpha}^\alpha a_\alpha - \tilde{l}_i a. \quad (10)$$

Сравнивая последнее с (121;8'), находим

$$\begin{aligned} b_{is} &= l_{i|s}, \\ -\tilde{l}_i &= b_i^\alpha \theta_\alpha = \mu_i. \end{aligned} \quad (11)$$

Из первого равенства следует, что вектор $l_i = \text{grad} = \partial_i l$, следовательно, *второй тензор конгруэнции Аппеля — Бианки равен второй ковариантной производной функции l* .

Равенство (11) характеризует конгруэнции Аппеля — Бианки. Действительно, тензор b_{is} , определенный этим равенством, при произвольном выборе функции l , удовле-

творяет условию интегрируемости (121;4), так как

$$b_{is|s}^{si} = (l_{is}^s)_i = \tilde{l}_{i|s}^i = -a^{is}l_{i|s} = -a^{is}b_{is} = -2h.$$

Радиус-вектор средней огибающей, согласно (122;5), есть

$$R = m + a_\alpha \tilde{m}^\alpha = m + a_\alpha l^\alpha,$$

а его производная

$$R_i = m_i + \tilde{l}_i a + a_\alpha l^\alpha_{|i} = 0.$$

Следовательно, $R = \text{const}$, что и требовалось доказать.

Чтобы получить конгруэнцию Аппеля, нужно на функцию l наложить требование нормальности конгруэнции

$$a^{is}b_{is} = a^{is}l_{i|s} = \Delta_2 l = 0,$$

то есть выбрать за l произвольную гармоническую функцию.

6. *Конгруэнции Гишара.* Торсам каждой конгруэнции на фокальных поверхностях соответствуют сопряженные сети. Если обе эти сети являются сетями линий кривизны, то конгруэнция называется *конгруэнцией Гишара*, или, кратко, *конгруэнцией Г.* Для получения инвариантного признака этой конгруэнции найдем тензор первой квадратичной формы фокальной поверхности с радиусом-вектором $f = m + \sigma a$. На основании (121;8') имеем

$$\begin{aligned} G_{is} = f_i f_s &= (b_i^\alpha \theta_\alpha + \sigma_i) (b_s^\beta \theta_\beta + \sigma_s) + \\ &+ (b_i^\alpha - \sigma \delta_i^\alpha) (b_s^\beta - \sigma \delta_s^\beta) a_{\alpha\beta} = b_i^\alpha b_s^\beta (\theta_\alpha \theta_\beta + a_{\alpha\beta}) + \\ &+ 2(\theta_\alpha \sigma_{(s} - \sigma a_{\alpha(s)}) b_i^\alpha + \sigma_i \sigma_s + \sigma^2 a_{is}. \end{aligned}$$

Сеть, соответствующая сети торсов, будет составлена из линий кривизны, если она ортогональна, то есть если

$$\begin{aligned} G_{is} b^{is} &= -\sigma^2 b^{is} (\theta_i \theta_s - a_{is}) + 2\sigma^2 e^{\alpha s} (\theta_\alpha \sigma_s - \sigma a_{\alpha s}) + \\ &+ b^{is} \sigma_i \sigma_s + \sigma^2 b^{is} a_{is} = -\sigma^2 b^{is} (\partial_i \ln \sigma - 2b_i) \times \\ &\times (\partial_s \ln \sigma - 2b_s) + 2\sigma^2 e^{\alpha s} (\partial_\alpha \ln \sigma - 2b_\alpha) \sigma_s + \\ &+ b^{is} \sigma_i \sigma_s = 4\sigma^2 (b^{is} - \sigma e^{is}) b_i (b_s - \partial_s \ln \sigma) = 0. \end{aligned}$$

Заменив здесь

$$\begin{aligned} b^{is} - \sigma e^{is} &= \frac{\sigma}{\sin \omega} (v^i \omega^s + v^s \omega^i) - \\ &- \frac{\sigma}{\sin \omega} (v^i \omega^s - v^s \omega^i) = \frac{2\sigma}{\sin \omega} v^s \omega^i, \end{aligned}$$

находим

$$\omega^i b_i v^s (b_s - \partial_s \ln \sigma) = 0.$$

Второй множитель не может обратиться в нуль, ибо тогда, как это следует из (123; 7), фокальная полость с радиусом-вектором $f = m - \sigma a$ вырождается, что исключается самим определением конгруэнции Гишара. Следовательно, для того чтобы торсам конгруэнции на этой полости соответствовала сеть линий кривизны, необходимо и достаточно, чтобы $b_i w^i = 0$, то есть чтобы сферическое отображение сети торсов было получебышевским. Аналогичные вычисления относительно второй фокальной полости приводят к условию $b_i v^i = 0$. Отсюда следует, что конгруэнция Гишара характеризуется выполнением равенств $b_i v^i = 0$, $b_i w^i = 0$, что в силу независимости векторов v и w возможно лишь при $b_i = 0$. Следовательно, конгруэнция Гишара характеризуется тем, что сферическое отображение ее торсов является чебышевской сетью.

Фокальные полости конгруэнции Гишара называются *поверхностями Гишара*.

7. *Конгруэнции Рибокура*. Так называются конгруэнции, торсы которых пересекают среднюю поверхность по сопряженной сети. Инвариантный признак конгруэнции Рибокура, как это следует из (122;4) и (121;11), выражается равенством

$$\theta_{i|}{}^i = (\partial_i \sigma - 2b_i)|{}^i = -2b_i|{}^i = 0,$$

то есть тем, что сферическое отображение сети торсов такой конгруэнции есть кодацциева сеть.

Другое характеристическое свойство конгруэнции Рибокура состоит в том, что среди конгруэнций, имеющих с ней общее сферическое отображение сети торсов, существуют конгруэнции с плоской средней поверхностью. Действительно, если средняя поверхность — плоскость, то ее второй тензор (122;3) обращается в нуль, что равносильно равенству

$$\theta_{\alpha|s} + \theta_\alpha \theta_s + a_{\alpha s} = 0. \quad (12)$$

Отсюда следует, что эта конгруэнция рибокурова, так как $\theta_{\alpha|}{}^\alpha = 0$. Обратно, если $b_\alpha = \text{grad}$, то уравнение

(12) интегрируется, так как условие этого

$$\theta_{i|s}{}^s = \tilde{\theta}_i = -\theta_{i|}{}^s \theta_s - \theta_i \theta_{s|}{}^s = \tilde{\theta}_i - \theta_i \theta_{s|}{}^s$$

приводится к виду $\theta_{s|}{}^s = -2b_{s|}{}^s = 0$ и, следовательно, выполнено. Каждое решение θ этого уравнения определяет по формуле $\partial_i \ln \sigma = \theta_i + 2b_i$ решение σ уравнения Гишара (121;12). Конгруэнция, соответствующая этому решению, будет иметь плоскую среднюю поверхность, так как второй тензор этой поверхности обращается в нуль в силу (12).

Из рассмотренных выше классов конгруэнций рибокуровыми являются конгруэнции Гишара — Пето, изотропные и конгруэнции Гишара.

Нормали произвольной изотермической поверхности образуют конгруэнцию Рибокура общего вида.

8. *Обобщенные конгруэнции Гишара — Пето* [76]. Торсам такой конгруэнции соответствует на средней огибающей сопряженная сеть. Ее инвариантный признак, согласно (122;8), есть

$$b_i^s \mu_s = \sigma^2 \theta_i = \sigma^2 \partial_i \ln \sigma - 2\sigma^2 b_i = \text{grad}$$

или

$$\sigma^2 b_i = \text{grad}.$$

§ 124. Соответствие полостей фокальной поверхности

Лучи гиперболической конгруэнции устанавливают между точками двух полостей фокальной поверхности (будем говорить между фокальными поверхностями) конгруэнции соответствие. Различные свойства этого соответствия и ограничения, накладываемые на него, приводят к некоторым классам специальных конгруэнций, рассматриваемых в этом параграфе.

1. Начнем с установления ряда необходимых формул. Если v^i и w^i — орты торсов конгруэнции, то

$$b_k^i = \sigma b_k^i = \frac{1}{2} d(v^i w_k + w^i v_k), \quad \sigma \delta_k^i = \frac{1}{2} d(v_k w^i - w_k v^i), \quad (1)$$

$$b_k^i + \sigma \delta_k^i = d v_k w^i, \quad b_k^i - \sigma \delta_k^i = d w_k v^i, \quad (2)$$

$$v_{s|k} = -\tilde{v}_s \tilde{c}_k, \quad \omega_{s|k} = -\tilde{\omega}_s \tilde{c}_k, \quad (3)$$

где c_k и c_k^* — чебышевские векторы ортогональных в сферическом отображении сетей (v, \tilde{v}) и (w, \tilde{w}) .

Радиусы-векторы фокальных поверхностей R и R^* запишем в виде

$$R = m + \sigma a, \quad R^* = m - \sigma a. \quad (4)$$

Производные этих векторов, принимая обозначения

$$s_i = b_i^\alpha \theta_\alpha - \sigma_i, \quad s_i^* = b_i^\alpha \theta_\alpha + \sigma_i, \quad (5)$$

приведем к следующему виду:

$$R_i = s_i a + d v_i a_\alpha w^\alpha, \quad R_i^* = s_i^* a - d w_i a_\alpha v^\alpha. \quad (6)$$

Орты нормалей фокальных поверхностей обозначим через

$$N = a_\alpha \tilde{w}^\alpha, \quad N^* = a_\alpha \tilde{v}^\alpha. \quad (7)$$

Вычислим производные этих векторов:

$$N_i = -w_i a + \tilde{c}_i a_\alpha w^\alpha, \quad N_i^* = -v_i a + \tilde{c}_i^* a_\alpha v^\alpha. \quad (8)$$

С помощью полученных формул без труда вычисляются тензоры G_{ik} , B_{ik} , E_{ik} , C_{ik} 1-й, 2-й, 3-й, 4-й квадратичных форм фокальных поверхностей:

$$G_{ik} = R_i R_k = s_i s_k + d^2 v_i v_k, \quad G_{ik}^* = s_i^* s_k^* + d^2 w_i w_k; \quad (9)$$

$$B_{ik} = -N_i R_k = w_i s_k + d \tilde{c}_i v_k, \quad B_{ik}^* = v_i s_k^* + d \tilde{c}_i^* w_k; \quad (10)$$

$$E_{ik} = N_i N_k = w_i w_k + \tilde{c}_i \tilde{c}_k, \quad E_{ik}^* = v_i v_k + \tilde{c}_i^* \tilde{c}_k^*; \quad (11)$$

$$c_{ik} = N N_{(i} R_{k)} = d w_{(i} v_{k)} - \tilde{c}_{(i} s_{k)}, \quad c_{ik}^* = d v_{(i} w_{k)} - \tilde{c}_{(i}^* s_{k)}^*. \quad (12)$$

Симметрия тензоров B_{ik} и B_{ik}^* приводит к равенствам

$$s_k w^k = d \tilde{c}_k v^k = -2\sigma b_k w^k, \quad s_k^* v^k = d \tilde{c}_k^* w^k = 2\sigma b_k v^k. \quad (13)$$

Учитывая их, находим следующие разложения:

$$s_h = Bv_h + Cw_h, \quad s_h^* = B^*w_h + C^*v_h; \quad (14)$$

$$\tilde{d}c_h = Av_h - Bw_h, \quad \tilde{d}c_h^* = A^*w_h - B^*v_h, \quad (15)$$

где

$$A \sin \omega = \tilde{d}c_h w^h, \quad A^* \sin \omega = -\tilde{d}c_h^* v^h; \quad (16)$$

$$B \sin \omega = s_h w^h = \tilde{d}c_h v^h, \quad B^* \sin \omega = -s_h^* v^h = -\tilde{d}c_h^* w^h; \quad (17)$$

$$C \sin \omega = -s_h v^h = C^* \sin \omega = s_h^* w^h = \\ = 2\sigma (\partial_h \ln \sigma - b_h) v^h, \quad = 2\sigma (\partial_h \ln \sigma - b_h) w^h. \quad (18)$$

В этих обозначениях формулы (9) — (12) принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} G_{sh} &= (B^2 + d^2) v_s v_h + 2BCv_{(s}w_{h)} + C^2\omega_s\omega_h, \\ \tilde{G}_{sh} &= (\tilde{B}^2 + d^2) \omega_s\omega_h + 2\tilde{B}\tilde{C}v_{(s}w_{h)} + \tilde{C}^2v_s v_h; \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$B_{sh} = Av_s v_h + Cw_s\omega_h, \quad B_{sh}^* = A^*w_s\omega_h + C^*v_s v_h; \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned} d^2 E_{sh} &= A^2 v_s v_h - 2ABv_{(s}w_{h)} + (B^2 + d^2) \omega_s\omega_h, \\ d^2 \tilde{E}_{sh} &= \tilde{A}^2 \omega_s\omega_h - 2\tilde{A}\tilde{B}v_{(s}w_{h)} + (\tilde{B}^2 + d^2) v_s v_h; \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$$\left. \begin{aligned} dc_{sh} &= BC\omega_s\omega_h - BAv_s v_h + (d^2 + B^2 - AC) v_{(s}w_{h)}, \\ \tilde{d}c_{sh}^* &= \tilde{B}C^*v_s v_h - \tilde{B}A^*w_s\omega_h + (d^2 + \tilde{B}^2 - \tilde{A}C^*) v_{(s}w_{h)}; \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Для дискриминантов этих тензоров имеем соответственно:

$$G = ad^2C^2 \sin^2 \omega, \quad \tilde{G} = a\tilde{d}^2\tilde{C}^2 \sin^2 \omega \quad (a = |a_{ik}|); \quad (23)$$

$$B = aAC \sin^2 \omega, \quad B^* = aA^*C^* \sin^2 \omega; \quad (24)$$

$$E = \frac{a}{d^2} A^2 \sin^2 \omega, \quad \tilde{E} = \frac{a}{\tilde{d}^2} \tilde{A}^2 \sin^2 \omega; \quad (25)$$

$$\left. \begin{aligned} c &= -\frac{a \sin^2 \omega}{4d^2} [(d^2 + B^2 - AC)^2 + 4ACB^2], \\ c^* &= -\frac{a \sin^2 \omega}{4\tilde{d}^2} [(d^2 + \tilde{B}^2 - \tilde{A}C^*)^2 + 4\tilde{A}C^*\tilde{B}^2]. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Полные и средние кривизны фокальных поверхностей будут

$$K = \frac{B}{G} = \frac{A}{Cd^2}, \quad \overset{*}{K} = \frac{\overset{*}{A}}{\overset{*}{C}d^2}; \quad (27)$$

$$\left. \begin{aligned} H = \tilde{G}^{sh} B_{sh} = \frac{a}{G} G^{sh} B_{sh} = \frac{d^2 + B^2 + AC}{Cd^2}, \\ \overset{*}{H} = \frac{d^2 + \overset{*}{B}^2 + \overset{*}{A}\overset{*}{C}}{\overset{*}{C}d^2}. \end{aligned} \right\} (28)$$

Применим полученные формулы к рассмотрению следующих классов конгруэнций:

2. *Конгруэнции W*. Если асимптотические линии фокальных поверхностей соответствуют, то конгруэнция называется конгруэнцией *W*.

Для того чтобы данная конгруэнция была конгруэнцией *W*, необходимо и достаточно, чтобы имела место пропорциональность вторых тензоров (20) фокальных поверхностей, то есть чтобы выполнялось равенство

$$\frac{A}{C} = \frac{\overset{*}{C}}{\overset{*}{A}}. \quad (29)$$

Из формул (27) и (120;24) для конгруэнции *W* получаем

$$K\overset{*}{K} = \frac{1}{d^4} = \frac{\sin^4 \omega}{(2\sigma)^4}. \quad (30)$$

Так как условия (29) и (30) равносильны, то конгруэнция *W* характеризуется тем, что произведение гауссовых кривизн ее фокальных поверхностей, взятых в точках одного луча, обратно четвертой степени расстояния между граничными точками этого луча.

Этому признаку конгруэнции *W* можно придать следующую форму. Пусть ξ и $\overset{*}{\xi}$ — векторы Лельевра (§ 89) фокальных поверхностей:

$$\xi = \frac{1}{\sqrt[4]{-K}} N, \quad \overset{*}{\xi} = \frac{1}{\sqrt[4]{-\overset{*}{K}}} \overset{*}{N}. \quad (31)$$

Так как

$$[\xi \overset{*}{\xi}] = \frac{1}{\sqrt[4]{K\overset{*}{K}}} [N\overset{*}{N}] = \frac{\sin \omega}{\sqrt{K\overset{*}{K}}} a = 2\sigma a, \quad (32)$$

то конгруэнция W характеризуется тем, что векторное произведение векторов Лелъевра ее фокальных поверхностей, взятых в точках одного луча, равно вектору, соединяющему фокусы этого луча:

$$R - \check{R} = [\xi \check{\xi}]. \quad (33)$$

3. *Конгруэнции V* ([11], § 44). Если асимптотической сети одной фокальной полости соответствует на другой сопряженная сеть, то конгруэнция называется конгруэнцией V . Эта конгруэнция характеризуется аполярностью вторых тензоров (20) или равенством

$$\frac{A}{C} = -\frac{\check{C}}{\check{A}}, \quad (34)$$

которое только знаком отличается от равенства (29). Аналогично предыдущему, для конгруэнции V получим

$$K\check{K} = -\frac{1}{d^4}. \quad (35)$$

4. *Псевдосферические конгруэнции*. Конгруэнции, у которых расстояние между фокусами и угол между фокальными плоскостями постоянны, называются псевдосферическими. У псевдосферической конгруэнции постоянны все величины σ , ω , d , h . Из (5) следует, что $s_i^* = s_i$. Кроме того, сети (v, \check{v}) и (w, \check{w}) получены друг из друга поворотом на постоянный угол, и их чебышевские векторы c_i и \check{c}_i равны. Из формул (14), (15) и (27) теперь получаем

$$A = -\check{B} = -C, \quad \check{A} = -B = -\check{C}, \quad (36)$$

$$K = \check{K} = -\frac{1}{d^2}. \quad (37)$$

Таким образом, псевдосферическая конгруэнция есть частный случай конгруэнции W , ее фокальные поверхности — псевдосферы с равными кривизнами. Четвертые тензоры этих псевдосфер равны, и их линии кривизны соответствуют. Вторые тензоры B_{sh} и \check{B}_{sh} пропорциональны тензору сети поверхностей кривизны конгруэнции:

$$B_{sh} = A(v_s v_h - w_s w_h) = -\frac{A}{\check{A}} \check{B}_{sh}.$$

Следовательно, поверхности кривизны касаются фокальных полостей по их асимптотическим линиям.

Построение псевдосферической конгруэнции по ее фокальной полости указано в § 139.

5. *Конгруэнции В*. С. П. Фиников ([12], § 45) характеризует их тем, что их главные поверхности касаются фокальных полостей по линиям сопряженной сети. Если исключить нормальные конгруэнции, для которых это условие всегда выполнено, так как их главные поверхности

совпадают с торсами, то асимптотические сети B_{is} и $\overset{*}{B}_{is}$ фокальных полостей будут аполярны и сети торсов и сети главных поверхностей, в силу чего они будут соответствовать сети поверхностей кривизны. В сферическом отображении конгруэнции асимптотическим сетям фокальных полостей будут соответствовать ортогональные сети. Обратно, если выполнено последнее, то сети B_{is} и $\overset{*}{B}_{is}$ как ортогональные в сферическом отображении и аполярные сети торсов будут соответствовать сети поверхностей кривизны, а главные поверхности будут высекать на фокальных полостях сопряженные сети.

Инвариантный признак конгруэнции B , таким образом, складывается из требований ортогональности сетей B_{is} и $\overset{*}{B}_{is}$ в сферическом отображении конгруэнций, что равносильно равенствам

$$a^{is}B_{is} = A + C = 0, \quad a^{is}\overset{*}{B}_{is} = \overset{*}{A} + \overset{*}{C} = 0. \quad (38)$$

Отсюда следует, что конгруэнция B есть частный случай конгруэнции W . Фокальные полости конгруэнции B имеют в соответствующих точках равные кривизны:

$$K = \overset{*}{K} = -\frac{1}{d^2}. \quad (39)$$

Обратно, если у конгруэнции W кривизны фокальных полостей в соответствующих точках равны и отрицательны, то она будет конгруэнцией B . Действительно, из равенств (27) и (29), предполагая $K = \overset{*}{K} < 0$, получаем условие (38).

6. Докажем, что фокальные полости конгруэнции B являются поверхностями B (§ 114). С помощью тензора

$$c_{is} = \frac{1}{\sin \omega} (w_i w_s - v_i v_s)$$

сети поверхностей кривизны

условия (38) можно записать так:

$$\sin \omega (A + C) = \tilde{d}c_h \omega^h - s_h v^h = - (dc_h^s \tilde{c}_s + s_h) v^h = 0,$$

$$\sin \omega (A^* + C^*) = - \tilde{d}c_h^* v^h + s_h^* \omega^h = (dc_h^s \tilde{c}_s^* + s_h^*) \omega^h = 0.$$

Сравнивая это с равенствами (13), записанными в виде

$$\begin{aligned} \tilde{d}c_h v^h - s_h \omega^h &= - (dc_h^s \tilde{c}_s + s_h) \omega^h = 0, \\ - \tilde{d}c_h^* \omega^h + s_h^* v^h &= (dc_h^s \tilde{c}_s^* + s_h^*) v^h = 0, \end{aligned}$$

находим, в силу независимости векторов v^h и ω^h ,

$$\begin{aligned} s_h &= - dc_h^s \tilde{c}_s, & s_h^* &= - dc_h^s \tilde{c}_s^*, \\ s_h - s_h^* &= dc_h^s (\tilde{c}_s^* - \tilde{c}_s), \end{aligned}$$

или, если заменить $s_h - s_h^* = -2\sigma_h$, $\tilde{c}_s^* - \tilde{c}_s = \frac{t_s}{v} - \frac{t_s}{w} = -\omega_s$ и поделить на 2σ ,

$$\partial_h \ln \sigma = \frac{d}{2\sigma} c_h^s \omega_s = c_h^s \frac{\omega_s}{2 \sin \omega} = c_h^s \Omega_s, \quad \Omega_h = c_h^s \partial_s \ln \sigma,$$

где $\Omega_s = \partial_s \ln \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}$. В параметрах сети поверхностей кривизны или, что то же, в параметрах асимптотических линий фокальных поверхностей будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma &= U(u) V(v), \quad \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{U(u)}{V(v)}, \\ d &= \frac{\sigma}{\sin \omega} = \frac{1}{4} (U^2 + V^2) = U_1(u) + V_1(v). \end{aligned}$$

Следовательно, кривизны фокальных поверхностей

$$K = K^* = -\frac{1}{d^2} = -\frac{1}{(U_1 + V_1)^2},$$

что и требовалось.

7. *Конгруэнции Г.* Эти конгруэнции были рассмотрены в § 123, п. 6. Так как торсам конгруэнции Г соответствуют

линии кривизны фокальных полостей, то четвертые тензоры (22) фокальных полостей конгруэнции Γ пропорциональны тензору $v_{(i}w_{s)}$ сети торсов, следовательно,

$$AB = BC = 0, \quad \overset{*}{A}\overset{*}{B} = \overset{*}{B}\overset{*}{C} = 0.$$

Если $B \neq 0$ и $\overset{*}{B} \neq 0$, то $A = C = \overset{*}{A} = \overset{*}{C} = 0$, $\overset{*}{B}_{is} = B_{is} = 0$ и фокальные полости вырождаются. Следовательно, конгруэнция Γ характеризуется равенствами

$$B = \overset{*}{B} = 0. \quad (40)$$

Отсюда, согласно (5), (17) и (121;14), получаем

$$B \sin \omega = s_k \omega^k = (b_k^\alpha \theta_\alpha - \sigma_k) \omega^k = (\sigma \theta_k - \sigma_k) \omega^k = -2\sigma b_k \omega^k = 0, \\ \overset{*}{B} \sin \omega = -\overset{*}{s}_k v^k = -2\sigma b_k v^k = 0,$$

что приводит к прежнему необходимому и достаточному признаку конгруэнции Гишара, согласно которому $b_i = 0$.

§ 125. Конгруэнции лучей, параллельных нормальям поверхности

1. В этом и в ряде следующих параграфов рассматриваются вопросы, относящиеся к так называемой «геометрии около поверхности», начало которой положено Рибокуром [97]. В этой геометрии с каждой точкой поверхности связывается какой-нибудь геометрический образ (луч, окружность, сфера), в результате чего получается двухпараметрическое множество (*конгруэнция*) этих образов. Исходная поверхность при этом называется опорной поверхностью конгруэнции.

Между свойствами опорной поверхности и свойствами полученной конгруэнции возникают самые неожиданные и разнообразные связи, позволяющие с новой точки зрения рассматривать и решать некоторые геометрические задачи.

Выберем на поверхности произвольную ортогональную сеть (v, w) и построим сопровождающий трехгранник n, v, w . Положение геометрического образа (луча, окружности, сферы) определяется относительно этого трех-

гранника рядом величин — координат образа. Так, например, координатами сферы будут координаты ее центра и ее радиус.

Подвергнем теперь исходную поверхность изгибанию, а присоединенную ей конгруэнцию — такому преобразованию, при котором координаты ее элементов относительно трехгранников, соответствующих исходным трехгранникам, сохраняются. Полученное преобразование будем называть *изгибанием конгруэнции относительно данной поверхности*. Впервые такого рода преобразования рассматривал для частного случая нормальных конгруэнций Бельтрами, а в более общем случае и более подробно — Рибокур [97].

Для краткости дальнейшего изложения условимся в следующей терминологии. Будем говорить, что поверхность и конгруэнция прямых, между элементами которых установлено взаимно однозначное соответствие, *аполярны*, если торсовой сети конгруэнции соответствует на поверхности сопряженная сеть. В том частном случае этого соответствия, когда лучи конгруэнции проходят через соответствующие точки или лежат в касательных плоскостях к поверхности в этих точках, принято говорить, что конгруэнция и поверхность *сопряжены* или *гармоничны* соответственно.

2. Отнесем каждой точке r неразвертывающейся поверхности луч конгруэнции, параллельный ее нормали в этой точке. За опорную точку луча конгруэнции примем его точку, лежащую в касательной плоскости, и определим ее векторами:

$$R = r + b, \quad b = r_\alpha p^\alpha.$$

Второй тензор конгруэнции, согласно (117;2), есть

$$\begin{aligned} \check{b}_{ik} &= [nn_i] R_k = h_i^\alpha r_\alpha (r_k + b_k) = h_i^\alpha (g_{\alpha k} + g_{\alpha\beta} p^\beta_{||k}) = \\ &= h_i^\alpha (g_{\alpha k} - \tilde{p}_{\alpha||k}), \end{aligned} \quad (1)$$

где индексы перебрасываются дискриминантным бивектором поверхности r , две черты обозначают дифференцирование в метрике этой же поверхности, $g_{ik} = r_i r_k$, $h_{ik} = -n_i r_k$.

3. Условие аполярности поверхности и конгруэнции

$$h^{ik}\check{b}_{ik} = 0$$

или

$$\tilde{p}_{\alpha||}{}^{\alpha} = 0, \quad \tilde{p}_{\alpha} = -br_{\alpha} = \text{grad}. \quad (2)$$

Это условие не зависит от коэффициентов ее второй квадратичной формы, следовательно, при изгибании конгруэнции относительно поверхности, нормали которой параллельны ее лучам, свойство аполярности этой поверхности и конгруэнции сохраняется.

Для того чтобы к данной поверхности присоединить указанным способом аполярную ей конгруэнцию, достаточно взять произвольную функцию φ и определить опорную точку конгруэнции вектором $b = r_{\alpha}\tilde{\varphi}^{\alpha}$. Действительно, условие аполярности при этом выполняется:

$$-\tilde{p}_{\alpha} = br_{\alpha} = g_{\alpha\beta}\tilde{\varphi}^{\beta} = \varphi_{\alpha} = \text{grad}.$$

Тензор второй квадратичной формы построенной конгруэнции есть

$$\check{b}_{ik} = h_i^{\alpha} (g_{\alpha k} + \varphi_{\alpha||k}). \quad (3)$$

Для того чтобы торсы этой конгруэнции соответствовали линиям данной сопряженной сети d_{ik} , необходимо и достаточно, чтобы сеть, определяемая тензором $g_{ik} + \varphi_{i||k}$, была аполярна сети d , то есть чтобы функция φ была решением дифференциального уравнения

$$d^{ik} (g_{ik} + \varphi_{i||k}) = 0. \quad (4)$$

4. Абсцисса средней точки луча относительно опорной точки есть, согласно (120;5) и (1),

$$\psi = -\frac{1}{2}\check{b}_s{}^s = \frac{1}{2}h^{\alpha\beta} (g_{\alpha\beta} - \tilde{p}_{\alpha||\beta}).$$

Для того чтобы положение средней точки на луче сохранялось при изгибании конгруэнции относительно поверхности, необходимо и достаточно, чтобы ψ оставалось неизменным, а это означает, что сеть, определяемая тензором $g_{\alpha\beta} - \tilde{p}_{(\alpha||\beta)}$, должна быть кинематически сопряженным основанием изгибания (§ 145), если средняя

точка не лежит в касательной плоскости, и простым основанием этого изгибания, если средняя точка лежит в касательной плоскости, так как при этом $\psi = 0$.

Если указанное последнее свойство сохраняется при непрерывном изгибании поверхности, то это будет изгибание на главном основании, определенном тензором $g_{\alpha\beta} = \tilde{p}_{(\alpha||\beta)}$.

Для того чтобы средняя точка луча оставалась в касательной плоскости при всех изгибаниях, равенство $\psi = 0$ должно выполняться при любых допустимых значениях тензора $h_{\alpha\beta}$ (удовлетворяющих условиям Гаусса — Петерсона), что возможно лишь при

$$g_{\alpha\beta} = \tilde{p}_{(\alpha||\beta)}.$$

Из результатов § 98 следует, что поверхность r в этом случае налагается на спиральную поверхность, и обратно, с каждой поверхностью, наложимой на спиральную поверхность, можно связать конгруэнцию лучей, параллельных ее нормальям, так, что средняя точка луча этой конгруэнции будет лежать в касательной плоскости поверхности при всех изгибаниях.

5. Теорема Рибокура: *произведение расстояний от фокусов луча конгруэнции, параллельного нормали поверхности, до касательной плоскости этой поверхности есть инвариант изгибания* [97]. Действительно, это произведение, согласно (120;6) и (1), равно

$$\frac{1}{2} \check{b}_{sk} \check{b}^{sk} = \frac{1}{2K} (2 - 2p_{s||s} + p_{i||s} p^{i||s}) \quad (5)$$

и не содержит коэффициентов второй квадратичной формы поверхности. Теорема Гаусса об инвариантности гауссовой кривизны при изгибании есть частный случай теоремы Рибокура для конгруэнции нормалей поверхности.

6. Конгруэнция лучей, параллельных нормальям поверхности, будет нормальной при выполнении одного из условий

$$\begin{aligned} R_i n &= b_i n = h_{i\alpha} p^\alpha = \text{grad}, \\ (h_{i\alpha} p^\alpha)_{||i} &= h^{\alpha\beta} p_{\alpha||\beta} = 0. \end{aligned}$$

Если при однопараметрическом изгибании конгруэнции свойство ее нормальности сохраняется, то это изгибание

будет изгибанием опорной поверхности на главном основании. Главное основание изгибания определяется тензором $P_{(\alpha||\beta)}$.

Для сохранения свойства нормальности при всех изгибаниях поверхности необходимо и достаточно выполнение равенства

$$P_{(\alpha||\beta)} = 0. \quad (6)$$

Отсюда следует, что опорная поверхность налагается на поверхность вращения, и обратно, с каждой поверхностью, наложимой на поверхность вращения, можно связать конгруэнцию лучей, параллельных ее нормальям, остающуюся нормальной при всех изгибаниях этой поверхности.

7. В сферическом отображении поверхности вектор b , определяющий, как и выше, опорную точку луча конгруэнции, можно задать в виде

$$b = n_\alpha q^\alpha. \quad (7)$$

Дифференцируя в метрике сферического отображения, получаем

$$\check{b}_{is} = (nn_i R_s) = (nn_i r_s) + (nn_i n_\alpha) q^\alpha_{|s} = \check{c}_{is} - q_{i|s}, \quad (8)$$

где \check{c}_{is} — второй тензор конгруэнции нормалей поверхности. Условие аполярности в этих обозначениях принимает вид

$$br_i = -h_{i\alpha} q^\alpha = \text{grad}, \quad (9)$$

а условие нормальности —

$$bn_i = \gamma_{i\alpha} q^\alpha = -\check{q}_i = \text{grad} \quad (10)$$

и показывает, что вектор q_i соленоидален.

8. Применим последние формулы к решению задачи: *найти все поверхности, имеющие с данной поверхностью общую среднюю огибающую поверхность*, то есть среднюю огибающую конгруэнции ее нормалей.

Для решения этой задачи нужно найти все нормальные конгруэнции, лучи которых параллельны нормальям исходной поверхности, а средние огибающие совпадают со средней огибающей этой поверхности. Так как искомые конгруэнции нормальны, то вектор q_i должен быть,

согласно (10), соленоидальным. Для совпадения средних огибающих должны совпадать абсциссы средних точек этих конгруэнций, равные $-\frac{1}{2} \check{b}_s^s$, и абсцисса средней точки конгруэнции нормалей исходной поверхности, равная $-\frac{1}{2} \check{c}_s^s$, следовательно, согласно (8),

$$\check{b}_s^s - \check{c}_s^s = -q_{s|s} = 0.$$

Таким образом, все поверхности, имеющие с данной поверхностью общую среднюю огибающую, являются нормальными поверхностями конгруэнций лучей, параллельных нормалям исходной поверхности, с опорными точками $r + n_\alpha q^\alpha$, где вектор q_i образует лапласово поле ($q_{s|s} = 0, \check{q}_{s|s} = 0$).

§ 126. Конгруэнции лучей, лежащих в касательных плоскостях поверхности

1. Направляющий орт луча, лежащего в касательной плоскости поверхности r , зададим вектором $v = r_\alpha v^\alpha$, а его опорную точку вектором

$$R = r + b, \quad b = p\tilde{v}, \quad \tilde{v} = r_\alpha \tilde{v}^\alpha, \quad (1)$$

где вектор b есть перпендикуляр, опущенный из точки поверхности на луч. Вычислим второй тензор конгруэнции:

$$\begin{aligned} \check{b}_{is} &= (v v_i R_s) = (v, h_{i\alpha} v^\alpha n + \tilde{v} t_i, r_s + p_s \tilde{v} + p h_{s\beta} \tilde{v}^\beta n) = \\ &= (-h_{i\alpha} v^\alpha \tilde{v} + t_i n, r_s + p_s \tilde{v} + p h_{s\beta} \tilde{v}^\beta n) = \\ &= -h_{i\alpha} v^\alpha (v_s + p_s) + p h_{s\beta} \tilde{v}^\beta t_i = \\ &= -h_{i\alpha} v^\alpha (v_s + p_s) + p h_{s\alpha} v^\alpha |_{|i} = \\ &= -h_{\alpha(i} (v^\alpha v_s) + v^\alpha p_s) - p v_{\alpha|s}) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \varepsilon_{is} h^{\alpha\beta} (v_\alpha v_\beta + v_\alpha p_\beta - p v_{\alpha|\beta}) = \\ &= h_{\alpha(i} \left[p^2 \left(\frac{v^\alpha}{p} \right)_{|s} - v^\alpha v_s \right] + \\ &\quad + \frac{1}{2} \varepsilon_{is} h^{\alpha\beta} \left[p^2 \left(\frac{v_\alpha}{p} \right)_{|\beta} - v_\alpha v_\beta \right]. \quad (2) \end{aligned}$$

Условие аполярности конгруэнции и поверхности $h^{is} \check{b}_{is} = 0$ имеет вид

$$\left(\frac{v^\alpha}{p}\right)_{||\alpha} = 0, \quad (3)$$

то есть эквивалентно градиентности вектора

$$\frac{v_\alpha}{p} = \frac{br_\alpha}{p^2} = \partial_\alpha \varphi = \varphi_\alpha. \quad (4)$$

Если это условие выполнено, то $p^2 = \frac{1}{\Delta_1 \varphi}$, и симметричная часть второго тензора может быть записана так:

$$b_{is} = \frac{1}{\Delta_1 \varphi} h_{(i}^\alpha (\varphi_{s)||\alpha} - \varphi_s) \varphi_\alpha). \quad (5)$$

Полученный результат позволяет построить без интегрирования конгруэнцию лучей, лежащих в касательных плоскостях данной поверхности и аполярную ей: для этого достаточно выбрать произвольную функцию φ и задать орт луча искомой конгруэнции вектором $v_i = \frac{\varphi_i}{\sqrt{\Delta_1 \varphi}}$,

а опорную точку — вектором $r + r_\alpha \frac{\tilde{\varphi}_\alpha}{\Delta_1 \varphi}$.

2. Применим формулу (5) к решению следующей задачи: *в касательных плоскостях данной поверхности найти аполярную ей конгруэнцию, торсы которой соответствуют данной сопряженной сети l_{is} .*

Функция φ , определяющая искомую конгруэнцию, должна удовлетворять уравнению

$$l^{is} (\varphi_{i||s} - \varphi_i \varphi_s) = 0. \quad (6)$$

Действительно, в этом случае сеть $\varphi_{i||s} - \varphi_i \varphi_s = q_{is}$ и асимптотическая сеть поверхности h_{is} аполярны сети l_{is} , следовательно, сеть (5), как главная для сетей q_{is} и h_{is} , совпадает с сетью l_{is} и с сетью торсов построенной конгруэнции.

3. Конгруэнция лучей, лежащих в касательной плоскости, будет нормальной, если

$$\check{\mu}_i = R_i v = (r_i + b_i) v = -\tilde{v}_i - p l_i = \text{grad}. \quad (7)$$

4. Условие нормальности (7) и условие аполярности (3) не зависят от второй квадратичной формы поверхности, следовательно, *конгруэнция лучей, лежащих в касательной плоскости поверхности, сохраняет свойство быть нормальной или аполярной поверхностью при всех изгибаниях относительно этой поверхности.*

5. Предположим, что вектор $f = r_\alpha f^\alpha$, соединяет точку поверхности с фокусом луча, лежащим на ребре возврата торса (v). При смещении в направлении v^i смещение фокуса луча происходит по лучу и, следовательно, лежит в касательной плоскости. Из условия ортогональности этого смещения к нормали поверхности

$$(r + r_\alpha f^\alpha)_\beta v^\beta n = h_{\alpha\beta} f^\alpha v^\beta = 0$$

следует, что *направление, соединяющее точку поверхности с фокусом луча, и направление касательной к линии, соответствующей торсу, сопряжены.*

Если конгруэнция аполярна поверхности, то направление w^i , соответствующее второму ее торсу, сопряжено направлению v^i и, следовательно, будет совпадать с направлением f^i . Отсюда следует, что *фокусы луча аполярной поверхности конгруэнции лежат на касательных к линиям сопряженной сети, отвечающей ее торсам.*

Очевидно и обратное предложение: *если направления, соединяющие точку поверхности с фокусами луча, сопряжены, то конгруэнция этих лучей аполярна поверхности.*

§ 127. Конгруэнции лучей, исходящих из точек поверхности

1. Орт луча, исходящего из точки поверхности r , обозначим через a . Второй тензор конгруэнции таких лучей, в предположении, что поверхность r является опорной, есть $\check{b}_{is} = (aa_i r_s)$. Условие аполярности поверхности и конгруэнции $h^{is} \check{b}_{is} = h^{is} (aa_i r_s) = 0$ с помощью замены $h^{is} r_s = [nn^i]$ приводится к виду

$$[aa_s] [nn^s] = (an)^2 \left(\frac{a_s n}{an} \right)_1^s = - (an)^2 \left(\frac{an_s}{an} \right)_1^s = 0 \quad (1)$$

и равносильно градиентности одного из векторов

$$\frac{an_s}{an} = \text{grad}, \quad \frac{a_s n}{an} = \frac{(an)_s}{an} - \frac{an_s}{an} = \text{grad}. \quad (2)$$

При выполнении этого условия будем говорить, что вектор a аполярен поверхности.

Отметим, что в последних формулах векторы a и n можно заменить произвольными векторами, коллинеарными им. Простая форма условия аполярности позволяет легко получить ряд следствий.

2. Если поверхности r и \check{r} находятся в соответствии Петерсона, то вектор a , аполярный одной из них, аполярен и другой: условие аполярности в обоих случаях одно и то же $\frac{an_s}{an} = \text{grad}$.

3. Если вектор нормали n поверхности r аполярен поверхности \check{r} , то обратно, вектор нормали \check{n} поверхности \check{r} аполярен поверхности r : условие аполярности в обоих случаях одно и то же: $\frac{\check{n}\check{n}_s}{\check{n}\check{n}} = \text{grad}$.

4. Конгруэнция лучей, соединяющих точки двух поверхностей r и R , находящихся в соответствии Петерсона, аполярна этим поверхностям, так как

$$\frac{(r_i - R_i)n}{(r - R)n} = 0.$$

5. Предыдущее свойство допускает обращение: каждая конгруэнция лучей, исходящих из точек поверхности r , и аполярная ей является конгруэнцией лучей, соединяющих точки поверхности r с точками некоторого ее преобразования Петерсона — поверхности R .

Для доказательства будем искать на лучах конгруэнции с направляющим вектором a и аполярной поверхности r такие точки $R = r + \lambda a$, которые описывают преобразование Петерсона поверхности r . Для функции λ из условия ортогональности

$$R_i n = \lambda_i a_i n + \lambda a_i n = 0$$

получаем уравнение

$$\partial_i \ln \lambda = - \frac{a_i n}{an}. \quad (3)$$

Так как условие его интегрируемости выполнено в силу (2), то искомая поверхность существует, и теорема доказана.

Уравнением (3) функция λ определяется с точностью до произвольного постоянного множителя

$$\lambda = ce^{-\int \frac{nda}{na}}$$

Следовательно, существует ∞^1 поверхностей, находящихся попарно в соответствии Петерсона. Соответствующие точки этих поверхностей лежат на одном луче, а простое отношение любых трех таких точек постоянно.

6. Пусть между лучами двух конгруэнций (a) и (a') установлено соответствие так, что соответствующие лучи параллельны и торсы (v) и (w) этих конгруэнций соответствуют. Обозначим через F и F' фокусы лучей конгруэнций (a) и (a') , лежащие на ребрах возврата торсов (v) и через F и F' — вторые фокусы этих лучей. Фокальные поверхности (F) и (F') ((F) и (F')) находятся в соответствии

Петерсона, так как их нормали в силу соответствия торсов определяются одним и тем же вектором $[aa_\alpha]v^\alpha$ ($[aa_\alpha]w^\alpha$), (a — общий направляющий орт лучей конгруэнций (a) и (a')). Из результатов п. 4 следует, что торсы конгруэнции лучей FF' и (FF') соответствуют торсам исходных конгруэнций. Рассмотрим теперь поверхность r , огибающую общих плоскостей лучей a и a' . Согласно предложению § 126, п. 5 касательная к линии v^i на этой поверхности сопряжена направлению, соединяющему ее точку и с фокусом F и с фокусом F' , следовательно, точка касания этой огибающей лежит на пересечении лучей FF' и FF' . С другой стороны, при смещении в направлении w^i луч FF' описывает торс. Однако вторая система торсов конгруэнции FF' описывается при движении вдоль линий поверхности r , касательных к лучам FF' . Следовательно, направление w^i совпадает с направлением, сопряженным направлению v^i , и два направления v^i и w^i на поверхности r

сопряжены. Мы доказали следующее предложение [1]: *если соответственные лучи двух конгруэнций параллельны и их торсы соответствуют, то обе конгруэнции аполярны поверхности, огибающей общие плоскости лучей этих конгруэнций. Прямые, соединяющие соответствующие фокусы этих конгруэнций, пересекаются в точке огибающей поверхности.*

7. Рибокуром была доказана следующая теорема: *лучи конгруэнции, аполярной некоторой поверхности, остаются ей аполярны после отражения от этой поверхности [97].*

Для доказательства достаточно заметить, что направляющие векторы падающего и отраженного лучей можно записать соответственно в следующих видах: $a = c + n$ и $\check{a} = c - n$, где вектор c принадлежит поверхности. Так как, далее, $an = -\check{a}n = 1$, то условие аполярности и того и другого луча одно и то же:

$$an_i = \check{a}n_i = cn_i = \text{grad.}$$

8. Рассмотрим две поверхности r и \check{r} , между точками которых установлено взаимно однозначное соответствие по равенству криволинейных координат. Лучи a , соединяющие точки этих поверхностей, и лучи \check{a} , по которым пересекаются их касательные плоскости в соответствующих точках, образуют две конгруэнции (a) и (\check{a}) . Докажем следующую теорему: *для того чтобы конгруэнция (a) была аполярна поверхности \check{r} , необходимо и достаточно, чтобы конгруэнция лучей (\check{a}) была аполярна поверхности r .*

Направляющий вектор \check{a} луча конгруэнции (\check{a}) ортогонален нормальям n и \check{n} поверхностей r и \check{r} , следовательно, можно положить $\check{a} = [n\check{n}]$. Перпендикуляр b , опущенный из точки поверхности r на луч конгруэнции (\check{a}) , ортогонален векторам \check{a} и n , следовательно,

$$b = \lambda [[n\check{n}] n] = \lambda (\check{n} - n \cos(\widehat{n\check{n}})).$$

Множитель λ найдем из условия $[\check{r} - (r + b)] \check{n} = 0$, выражающего то, что точка с радиусом-вектором $r + b$

лежит в касательной плоскости поверхности \check{r} . Имеем

$$(\check{r} - r)\check{n} = b\check{n} = \lambda(1 - \cos^2(\widehat{n\check{n}})) = \lambda \sin^2(\widehat{n\check{n}}).$$

Условие (126;4) аполярности конгруэнции (\check{a}) к поверхности r принимает вид:

$$\frac{br_i}{b^2} = \frac{\lambda(\check{n} - n \cos(\widehat{n\check{n}}))r_i}{\lambda^2(\check{n} - n \cos(\widehat{n\check{n}}))^2} = \frac{\check{n}r_i}{\lambda \sin^2(\widehat{n\check{n}})} = \frac{\check{n}r_i}{(\check{r} - r)\check{n}} = \text{grad.}$$

Так как $\check{r}_i\check{n} = 0$, то оно равносильно условию

$$\frac{(\check{r} - r)_i\check{n}}{(\check{r} - r)\check{n}} = \text{grad.}$$

выражающему аполярность конгруэнции (a) и поверхности r , что и доказывает наше утверждение.

9. Отметим ряд очевидных следствий предыдущей теоремы.

а) Для того чтобы конгруэнция линий пересечения касательных плоскостей двух поверхностей была им обеим аполярна, необходимо и достаточно, чтобы конгруэнция прямых, соединяющих точки этих поверхностей, была тоже аполярна этим поверхностям.

Если лучи, соединяющие соответственные точки двух поверхностей, образуют конгруэнцию, аполярную им, то говорят, что эти поверхности находятся в соответствии F . Соответствие Петерсона есть частный случай соответствия F .

б) Если прямая, соединяющая соответственные точки двух поверхностей, проходит через фиксированную точку, то конгруэнция прямых пересечения касательных плоскостей этих поверхностей аполярна им обеим.

в) Если линии пересечения касательных плоскостей двух поверхностей лежат в фиксированной плоскости, то конгруэнция прямых, соединяющих точки этих поверхностей, аполярна им обеим.

§ 128. Теорема Дюпена

Дюпену принадлежит следующая теорема: если торсы конгруэнций падающих и отраженных от поверхности лучей соответствуют, то обе эти конгруэнции нормальны и аполярны поверхности [2].

Доказательству этой теоремы предпошлем вывод некоторых более общих формул. Зададим луч a , исходящий из точки поверхности, ортом

$$a = r_\alpha p^\alpha + \sigma n. \quad (1)$$

Из условия $a^2 = 1$ находим

$$\sigma^2 = 1 - p^2. \quad (2)$$

Вычислим, дифференцируя в метрике поверхности r , производную

$$a_i = h_{i\alpha} p^\alpha n + r_\alpha p^\alpha_{|i} + \sigma_i n + \sigma n_i.$$

Из (2) имеем

$$2\sigma\sigma_i = -2g_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta_{|i} = 2p^\alpha \tilde{p}_{\alpha|i}, \quad \sigma_i = \frac{1}{\sigma} p^\alpha \tilde{p}_{\alpha|i}. \quad (3)$$

Заменяя, согласно (77;5), $n_i = h_i^\alpha g_\alpha^\beta r_\beta$, находим

$$\begin{aligned} a_i &= \left(h_{i\alpha} + \frac{1}{\sigma} \tilde{p}_{\alpha|i} \right) p^\alpha n - r_\beta g^{\alpha\beta} \tilde{p}_{\alpha|i} + \sigma h_i^\alpha g_\alpha^\beta r_\beta = \\ &= \left(h_{i\alpha} + \frac{1}{\sigma} \tilde{p}_{\alpha|i} \right) p^\alpha n - \sigma g^{\alpha\beta} r_\beta \left(h_{i\alpha} + \frac{1}{\sigma} \tilde{p}_{\alpha|i} \right) \end{aligned}$$

или

$$a_i = \tau_{i\alpha} (p^\alpha n - \sigma g^{\alpha\beta} r_\beta), \quad (4)$$

где введено обозначение

$$\tau_{i\alpha} = h_{i\alpha} + \frac{1}{\sigma} \tilde{p}_{\alpha|i}. \quad (5)$$

Полученная формула позволяет вычислить первый тензор конгруэнции:

$$a_{is} = a_i a_s = \tau_{i\alpha} \tau_{s\beta} T^{\alpha\beta}, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta} &= p_\alpha p_\beta + \sigma^2 g_{\alpha\beta} = p_\alpha p_\beta + (1 - p^2) \frac{p_\alpha p_\beta + \tilde{p}_\alpha \tilde{p}_\beta}{p^2} = \\ &= g_{\alpha\beta} - \tilde{p}_\alpha \tilde{p}_\beta, \end{aligned} \quad (7)$$

и второй ее тензор

$$\begin{aligned} \check{b}_{is} &= (aa_i r_s) = -a_i [ar_s] = \\ &= -\tau_{i\alpha} (p^\alpha n - \sigma g^{\alpha\beta} r_\beta) (p_s n - \sigma g_s^\gamma r_\gamma) = \\ &= -\tau_{i\alpha} (p^\alpha p_s + \sigma^2 g_s^\alpha) = -\tau_{i\alpha} T_s^\alpha. \end{aligned} \quad (8)$$

Переходим к доказательству теоремы Дюпена. После отражения от поверхности r луч a (1) перейдет, очевидно, в луч $\check{a} = r_\alpha p^\alpha - \sigma n$. Следовательно, формулы, соответствующие предыдущим для конгруэнции отраженных лучей, получатся из них изменением знака у σ . В частности, вторые тензоры конгруэнций падающих и отраженных лучей будут пропорциональны тензорам

$$\frac{1}{\sigma} \tilde{p}_{\alpha|i} T_s^\alpha \pm h_{\alpha i} T_s^\alpha.$$

Для того чтобы торсы этих конгруэнций соответствовали, необходимо и достаточно, чтобы тензоры $\tilde{p}_{\alpha|i} T_s^\alpha$ и $h_{\alpha(i} T_s^\alpha$ были пропорциональны, то есть чтобы выполнялось равенство

$$\tilde{p}_{\alpha|i} T_s^\alpha = \lambda h_{\alpha(i} T_s^\alpha. \quad (9)$$

Условия, эквивалентные этим, получатся при свертывании обеих частей (9) с тензорами T^{is} и h^{is} . В результате такого свертывания получаем:

$$\left. \begin{aligned} 1) \tilde{p}_{\alpha i}^\alpha &= 0; \\ 2) h^{is} \tilde{p}_{\alpha|i} T_s^\alpha &= h^{is} \tilde{p}_{\alpha|i} (p^\alpha p_s + \sigma^2 g_s^\alpha) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Второе равенство с помощью (3) приводится к виду

$$h^{is} (-\sigma^2 p_{i|s} + \sigma \sigma_i p_s) = -\sigma^3 \left(h^{is} \frac{p_s}{\sigma} \right)_{|i} = 0. \quad (11)$$

Таким образом, оба условия эквивалентны градиентности векторов:

$$\left. \begin{aligned} 1) \tilde{p}_\alpha &= -ar_\alpha = \text{grad}; \\ 2) h^s_i \frac{p_s}{\sigma} &= \frac{an_i}{an} = \text{grad}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Так как из первого следует, что конгруэнция (a) нормальна,

а из второго — что она аполярна поверхности r , то теорема Дюпена полностью доказана.

Предположим теперь, что конгруэнция (a) нормальна и аполярна поверхности r . Тогда выполняются равенства (12), а следовательно, и эквивалентное им равенство (9), поэтому, для того чтобы нормальная конгруэнция сохраняла свои торсы после отражения от поверхности, необходимо и достаточно, чтобы она была ей аполярна. Эта теорема является обратной по отношению к теореме Дюпена.

ГЛАВА XI
КОНГРУЭНЦИИ СФЕР И ОКРУЖНОСТЕЙ

§ 129. Конгруэнции сфер

1. Множество сфер, зависящее от двух параметров, называется *конгруэнцией сфер*.

Геометрическое место центров сфер данной конгруэнции является *поверхностью центров*.

Конгруэнция сфер вполне определяется заданием поверхности центров $r = r(u^i)$ и функции $\varrho = \varrho(u^i)$, равной радиусу сферы с центром в точке (u^i) поверхности r .

Чтобы найти *огibaющую конгруэнции сфер*, запишем радиус-вектор ее точки R в виде

$$R = r + \varrho a, \quad (1)$$

где единичный вектор

$$a = r_h p^h + \sigma n \quad (2)$$

направлен из центра сферы в соответствующую точку огибающей. Вектор a является вектором нормали огибающей поверхности, в силу чего

$$R_i a = (r_i + \varrho_i a + \varrho a_i) a = r_i a + \varrho_i = -\tilde{p}_i + \varrho_i = 0.$$

Отсюда определяется вектор

$$p_i = -\tilde{\varrho}_i. \quad (3)$$

Для определения коэффициента σ воспользуемся тем, что вектор a единичный и вычислим его квадрат:

$$\begin{aligned} a^2 &= 1 = (r_h p^h + \sigma n)(r_i p^i + \sigma n) = g_{ik} p^i p^k + \sigma^2 = \\ &= g_{ik} \tilde{\varrho}^i \tilde{\varrho}^k + \sigma^2 = \Delta_1 \varrho + \sigma^2. \end{aligned}$$

Следовательно, функция σ , а с нею и вектор (2), при $\Delta_1 \varrho \neq 1$ определяется двузначно:

$$\sigma = \pm \sqrt{1 - \Delta_1 \varrho}. \quad (4)$$

Таким образом, огибающая поверхность конгруэнции сфер имеет две полости, радиусы-векторы которых

$$\left. \begin{aligned} \overset{+}{R} &= r + \varrho (-r_k \tilde{q}^k + \sqrt{1 - \Delta_1 \varrho} n); \\ \overset{-}{R} &= r + \varrho (-r_k \tilde{q}^k - \sqrt{1 - \Delta_1 \varrho} n). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Соответствующие точки двух полостей огибающей, как следует из этих формул, симметричны относительно касательной плоскости поверхности центров.

Для того чтобы огибающая поверхность была вещественной, необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\Delta_1 \varrho \leq 1.$$

Если имеет место равенство $\Delta_1 \varrho = 1$, то линии $\varrho = \text{const}$ будут геодезически параллельны, а функция ϱ будет потенциалом геодезического поля $p_i = -\tilde{q}_i$. Вектор (2) в этом случае располагается в касательной плоскости поверхности центров и является направляющим ортом геодезического поля \tilde{q}_i . Касательные к линиям этого поля образуют нормальную конгруэнцию (§ 123, п. 1), которая является конгруэнцией общих нормалей двух полостей огибающей. Из дальнейшего общего рассмотрения этот случай исключается.

2. Рассмотрим конгруэнцию (p) прямых p , соединяющих соответствующие точки двух полостей огибающей конгруэнции сфер. Ее лучи, согласно предыдущему, параллельны нормальям поверхности центров, а точка этого луча, лежащая в касательной плоскости поверхности центров, является серединой отрезка, соединяющего соответствующие точки двух полостей огибающей, и ее радиус-вектор есть

$$\frac{1}{2} (\overset{+}{R} + \overset{-}{R}) = r + b,$$

где вектор

$$b = -r_k \tilde{q}^k.$$

Так как

$$br_i = -qq_i = \partial_i \left(-\frac{1}{2} q^2 \right) = \text{grad},$$

то, согласно (125;2), конгруэнция (p) аполярна поверхности центров.

Легко решается обратная задача: дана конгруэнция (p) прямых, параллельных нормальям данной поверхности r , и аполярная ей. Найти конгруэнцию сфер с центрами на данной поверхности так, чтобы точки огибающей этих сфер лежали на лучах данной конгруэнции. Действительно, если $r + b$ — радиус-вектор опорной точки этой конгруэнции и $b = r_\alpha p^\alpha$, то $br_i = -\tilde{p}_i = \text{grad}$ и радиусы сфер искомой конгруэнции определяются равенством

$$-\tilde{p}_i = -qq_i = -\frac{1}{2} (q^2)_i, \quad q^2 = 2 \int \tilde{p}_i du^i + c. \quad (6)$$

3. Касательные плоскости к двум полостям огибающей поверхности пересекаются по прямой \bar{p} , лежащей в касательной плоскости поверхности центров. Эта прямая является, очевидно, полярной прямой p (п. 2) относительно соответствующей сферы. Если b и \bar{b} — перпендикуляры, опущенные из центра сферы на лучи p и \bar{p} , то $\bar{b} = q^2 \frac{b}{b^2}$. Так как

$$\frac{\bar{b}r_i}{\bar{b}^2} = \frac{br_i}{q^2} = -\frac{r_\alpha q^\alpha \tilde{q}^\alpha}{q^2} = -\partial_i \ln q = \text{grad}, \quad (7)$$

то, согласно (126;4), конгруэнция прямых (\bar{p}) тоже аполярна поверхности центров.

Аналогично предыдущему решается обратная задача: дана конгруэнция прямых (p) , лежащих в касательных плоскостях поверхности r , и аполярная ей. Найти конгруэнцию сфер с центрами на поверхности r , для которой прямые \bar{p} являются полярными прямыми, соединяющими соответствующие точки двух полостей огибающей этой конгруэнции сфер.

Обозначим через \bar{b} перпендикуляр, опущенный из точки поверхности r на луч \bar{p} . В силу аполярности

конгруэнции (\bar{p}) и поверхности r имеем

$$\frac{\bar{b}r_i}{\bar{b}^2} = \partial_i \varphi = \text{grad}.$$

Радиус сфер искомой конгруэнции, согласно (7), определяется одной квадратурой

$$\varrho = ce^{-\int \frac{\bar{b}r_i}{\bar{b}^2} du^i}.$$

4. Поставим более общую задачу: дана конгруэнция (p) , найти конгруэнцию сфер, так чтобы точки ее огибающей поверхности лежали на лучах этой конгруэнции. Для ее решения сначала найдем поверхность, аполярную конгруэнции (p) и имеющую с ней общее сферическое отображение, после чего задача сведется к задаче, решенной в п. 2. Искомая поверхность является одной из опорных огибающих конгруэнции (p) и ее радиус-вектор, согласно (122;5), может быть представлен в виде

$$R = r + a_k \tilde{\mu}^k. \quad (8)$$

Если радиус-вектор точки огибающей сфер $r + \lambda a$, то вектор $R - (r + \lambda a)$ будет нормален к ней, следовательно,

$$\begin{aligned} (r + \lambda a)_i (R - r - \lambda a) &= (r_i + \lambda_i a + \lambda a_i) (a_k \tilde{\mu}^k - \lambda a) = \\ &= r_i a_k \tilde{\mu}^k - \lambda \check{\mu}_i - \lambda \lambda_i + \lambda \check{\mu}_i = r_i [a a_s] a_s^k \tilde{\mu}^k - \lambda \lambda_i = 0 \end{aligned}$$

или

$$\check{b}^k_{i\check{\mu}_k} = -\lambda \lambda_i. \quad (9)$$

Условие интегрируемости этого уравнения

$$(\check{b}^k_{i\check{\mu}_k})_{|i} = 0 \quad (10)$$

совпадает, как и следовало ожидать, с условием (122;8) аполярности конгруэнции и опорной огибающей. Если m — радиус-вектор центра луча и $r = m + \psi a$, то, согласно (117;6) и (121;2),

$$\check{b}_{ik} = b_{ik} + \psi e_{ik}, \quad \check{\mu}_k = \mu_k + \psi_k,$$

а условие (10) принимает вид

$$[(b^{ik} + \psi e^{ik})(\mu_k + \psi_k)]_{|i} = 0. \quad (11)$$

Каждое решение ψ этого уравнения определяет опорную точку $r = m + \psi a$, вектор $\check{\mu}_i = \mu_i + \psi_i$, а поверхность центров искомой конгруэнции сфер определится формулой (8). Далее можно найти квадратурой из (9) функцию λ

$$\lambda^2 = -2 \int \check{b}^{\alpha}_{;i} \check{\mu}_\alpha du^i + c \quad (12)$$

и, наконец, радиус сферы ϱ как длину вектора $R - r - \lambda n = a_\alpha \check{\mu}^\alpha - \lambda n$, соединяющего центр сферы с точкой огибающей:

$$\varrho = \sqrt{a_{ik} \check{\mu}^i \check{\mu}^k + \lambda^2}.$$

5. Наложим на искомую конгруэнцию сфер дополнительное требование, состоящее в том, что точки A и B полостей огибающей разделяют гармонически фокусы Φ_1 и Φ_2 конгруэнции (p).

Пусть M — середина отрезка AB , принятая за опорную точку луча. Поставленное условие выражается равенством

$$\lambda^2 = \left(\frac{AB}{2} \right)^2 = M\Phi_1 \cdot M\Phi_2. \quad (13)$$

Произведение абсцисс фокусов луча $M\Phi_1 \cdot M\Phi_2$ равно свободному члену уравнения (120;6), то есть

$$\lambda^2 = \frac{1}{2} \check{b}^{ik} \check{b}_{ik} = \frac{1}{2} (b^{ik} + \psi e^{ik}) (b_{ik} + \psi e_{ik}) = \psi^2 - \sigma^2. \quad (14)$$

Отсюда следует, что $\check{b}_i^s \check{b}_s^k = -\lambda^2 \delta_i^k$. Пользуясь этим равенством, разрешим уравнение (9) относительно вектора $\check{\mu}_i$:

$$\check{b}_r^i \check{b}^s_{;i} \check{\mu}_s = -\lambda^2 \check{\mu}_k = -\lambda b_r^i \lambda_i. \quad (15)$$

Согласно (121;2) имеем отсюда

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda^2} (\lambda \check{b}_r^i{}_{;i} - \check{b}_r^i \lambda_i) &= \left(\frac{1}{\lambda} \check{b}_r^i \right)_{;i} = \left(\frac{1}{\lambda} b_r^i + \frac{\psi}{\lambda} \delta_r^i \right)_{;i} = \\ &= \left(\frac{\sigma}{\lambda} b_r^i + \frac{\psi}{\lambda} \delta_r^i \right)_{;i} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Соотношение $\left(\frac{\psi}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)^2 = 1$ позволяет ввести новую неизвестную функцию t , удовлетворяющую уравнениям

$$\frac{\psi}{\lambda} = \operatorname{ch} t, \quad \frac{\sigma}{\lambda} = \operatorname{sh} t,$$

и привести уравнение (16) к виду

$$(b_k^i \operatorname{sh} t + \delta_k^i \operatorname{ch} t)_{|i} = (b_k^i \operatorname{ch} t + \delta_k^i \operatorname{sh} t) t_i - 2b_k^i b_i \operatorname{sh} t = 0$$

или, после умножения на $b_s^h \operatorname{ch} t - \delta_s^h \operatorname{sh} t$, к виду

$$(\operatorname{cth} t)_i = -2b_i \operatorname{cth} t + 2b_i^s b_s. \quad (17)$$

Условие интегрируемости этого уравнения

$$(\operatorname{cth} t)_{i|j} = -2b_{i|j} \operatorname{cth} t - 2b_i 2b^{is} b_s - 4b_i^s b_s b^i + 2b_i^s b_{s|i} = 0$$

или

$$b_{i|j} \operatorname{cth} t + b^{is} b_{i|s} = 0. \quad (18)$$

Если $b_{i|j} \neq 0$ и единственный корень уравнения (18) удовлетворяет системе (17), то существует одна конгруэнция сфер, удовлетворяющая условиям задачи. Такая конгруэнция называется *циклической*. Если задача имеет два решения, то (18) непременно обращается в тождество, уравнение (17) определяет $\operatorname{cth} t$ с произволом в одну постоянную и существует ∞^1 конгруэнций сфер, точки огибающей которых лежат на лучах данной конгруэнции и разделяют фокусы этого луча гармонически. Такая конгруэнция называется *вполне циклической* и характеризуется двумя условиями

$$\left. \begin{array}{l} 1) b_{i|j} = 0; \\ 2) b^{is} b_{i|s} = 0. \end{array} \right\} \quad (19)$$

Конгруэнция прямых, соединяющих соответствующие точки двух полостей огибающей циклической или вполне циклической конгруэнции сфер, тоже называется *циклической* или *вполне циклической конгруэнцией прямых* соответственно. Первое из условий (19) показывает, что

вполне циклическая конгруэнция прямых является конгруэнцией Рибокура, а второе — что сферическое отображение ее торсов совпадает со сферическим отображением главного основания изгиба (§ 114).

Так как на всех поверхностях центров торсам конгруэнции соответствуют сопряженные сети, то все эти сети являются главными основаниями изгиба своих поверхностей и связаны между собой преобразованиями Петерсона главного основания (§ 114).

Коссера [92] заметил, что соответствующие точки всех ∞^1 полученных поверхностей центров лежат на одной прямой. Действительно, рассмотрим радиусы-векторы двух поверхностей центров

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= m + \psi_1 a + a_k (\tilde{\mu}^k + \tilde{\psi}_1^k), \\ R_2 &= m + \psi_2 a + a_k (\tilde{\mu}^k + \tilde{\psi}_2^k), \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

соответствующие двум решениям ψ_1 и ψ_2 уравнения (17):

$$\begin{aligned} (\operatorname{cth} t)_i &= \left(\frac{\psi_1}{\sigma} \right)_i = -2b_i \frac{\psi_1}{\sigma} + 2b_i^s b_s, \\ (\operatorname{cth} t)_i &= \left(\frac{\psi_2}{\sigma} \right)_i = -2b_i \frac{\psi_2}{\sigma} + 2b_i^s b_s. \end{aligned}$$

Почленным вычитанием находим

$$\begin{aligned} \left(\frac{\psi_1 - \psi_2}{\sigma} \right)_i &= -2b_i \frac{\psi_1 - \psi_2}{\sigma}, \\ \partial_i \ln (\psi_1 - \psi_2) &= -2b_i + \partial_i \ln \sigma. \end{aligned}$$

Если обозначить $2b_i = -\partial_i \ln \varphi$, то

$$\partial_i \ln (\psi_1 - \psi_2) = \partial_i \ln \sigma \varphi, \quad \psi_1 - \psi_2 = c_{12} \sigma \varphi \quad (c_{12} = \text{const}).$$

С помощью последнего равенства разность $R_1 - R_2$ радиусов-векторов (20) двух соответствующих точек

поверхностей центров приводится к виду

$$R_1 - R_2 = a(\psi_1 - \psi_2) + a_k(\tilde{\psi}_1^k - \tilde{\psi}_2^k) = c_{12}[a\sigma\varphi + a_k(\tilde{\sigma}\varphi)^k], \quad (21)$$

показывающему, что направление этого вектора не зависит от выбора поверхностей R_1 и R_2 , что и доказывает наше утверждение.

§ 130. Огибающая поверхность конгруэнции сфер

1. Для единичного вектора a , направленного из центра сферы в точку огибающей поверхности, мы получили следующее выражение:

$$a = -r_k \tilde{Q}^k + \sigma n, \quad (1)$$

где Q — радиус сферы и

$$\sigma = \pm \sqrt{1 - \Delta_1 Q}.$$

Выражение производной этого вектора можно получить из формулы (128;4), полагая в них

$$p_k = -\tilde{Q}_k, \quad \tilde{p}_k = Q_k, \quad (2)$$

так как именно эта замена приводит выражение вектора (128;1) к виду (1). Имеем

$$a_i = -\tau_{ik}(\tilde{Q}^k n + \sigma g^{kj} r_j), \quad (3)$$

где, согласно (128;5) и (2), тензор

$$\tau_{is} = \frac{1}{Q} Q_{i|s} + h_{is}. \quad (4)$$

С помощью той же замены (2) из (128; 6—8) находим тензор сферического отображения огибающей поверхности

$$a_{is} = a_i a_s = \tau_{ik} \tau_{sj} T^{kj}, \quad (5)$$

тензор

$$T_{is} = \tilde{Q}_i \tilde{Q}_s + \sigma^2 g_{is} = g_{is} - Q_i Q_s \quad (6)$$

и второй тензор конгруэнции ее нормалей:

$$\check{b}_{is} = (aa_i r_s) = -\tau_{ik} T_s^k = -\left(\frac{\pm 1}{\sqrt{1-\Delta_1 \varrho}} \varrho_{k|i} + h_{ki} \right) T_s^k. \quad (7)$$

2. В качестве первого приложения этих формул рассмотрим вопрос о возможности такого изгибания конгруэнции сфер относительно поверхности ее центров (§ 125, п. 1), при котором одна из полостей огибающей обращается либо в плоскость, либо в точку.

В первом случае надо так выбрать второй тензор h_{is} поверхности центров, чтобы вектор a был постоянен, то есть чтобы $a_i = 0$ или, как это следует из (3) и (4), чтобы

$$\tau_{is} := \frac{1}{\sigma} \varrho_{i|s} + h_{is} = 0.$$

Отсюда находим

$$h_{is} = -\frac{\varrho_{i|s}}{\sqrt{1-\Delta_1 \varrho}}.$$

Из результатов § 94 следует, что для существования искомого изгибания функция ϱ должна удовлетворять первому уравнению изгибания (94;5)

$$K(1 - \Delta_1 \varrho) = \Delta_{22} \varrho.$$

Обратно, если ϱ есть решение этого уравнения, то одна из полостей огибающей сфер будет плоскостью.

Во втором случае постоянным должен быть вектор R (129;1), следовательно,

$$R_i = r_i + \varrho_i a + \varrho a_i = 0,$$

что, согласно (1) и (3), эквивалентно двум следующим условиям:

$$\begin{aligned} g_{is} - \varrho_i \varrho_s - \varrho (\varrho_{i|s} + \sigma h_{is}) &= 0, \\ \varrho_i \sigma^2 - \varrho (\varrho_{i|s} + \sigma h_{is}) \tilde{q}^s &= 0. \end{aligned}$$

Второе равенство есть следствие первого, так как получается из него свертыванием с \tilde{q}^s . Из первого находим

$$h_{is} = \frac{g_{is} - \varrho_i \varrho_s - \varrho \varrho_{i|s}}{\sigma \varrho} = \frac{g_{is} - \frac{1}{2} (\varrho^2)_{i|s}}{\sigma \varrho}. \quad (8)$$

Если ввести новую функцию $q = \frac{1}{2} q^*$, то будем иметь

$$\sigma = \sqrt{1 - \Delta_1 q} = \sqrt{1 - \frac{\Delta_1 q^*}{2q^*}},$$

и (8) примет вид

$$h_{is} = \frac{g_{is} - q_{is}}{\sqrt{2q^* - \Delta_1 q^*}}.$$

Из сравнения этого выражения h_{is} с (94;16), заключаем, что функция q должна удовлетворять второму уравнению изгибания (94;15)

$$K(2q^* - \Delta_1 q^*) = 1 - \Delta_2 q^* + \Delta_{22} q^*.$$

Обратно, если q есть решение этого уравнения, то все сферы соответствующей конгруэнции проходят через одну точку.

§ 131. Конгруэнции сфер Рибокура

Конгруэнция сфер называется конгруэнцией Рибокура или R-конгруэнцией, если линии кривизны на двух полостях ее огибающей поверхности соответствуют.

Из определения R-конгруэнции следует, что торсы конгруэнций нормалей ее огибающих соответствуют. Однако эти конгруэнции получаются одна из другой отражением от поверхности центров, следовательно, по теореме Дюпена (§ 128) обе эти конгруэнции аполярны поверхности центров. Это свойство показывает, что каждая из полостей огибающей поверхности находится с поверхностью центров R-конгруэнции сфер в соответствии F (§ 127). Касательные плоскости поверхности центров и каждой полости огибающей поверхности пересекаются по одной прямой, следовательно, эта прямая аполярна обоим полостям огибающей поверхности и две полости огибающей поверхности R-конгруэнции сфер находятся в соответствии F. Последнее в свою очередь показывает, что конгруэнция прямых, соединяющих соответственные точки полостей огибающей, аполярна этим полостям.

Итак, *каждые две из трех поверхностей:*

- 1, 2) *две полости огибающей,*
- 3) *поверхность центров R -конгруэнции сфер находятся в соответствии F .*

Докажем несколько теорем обратного характера.

1. *Если конгруэнция нормалей какой-нибудь полости огибающей поверхности аполярна поверхности центров конгруэнции сфер, то эта конгруэнция сфер рибокурова.*

По теореме, обратной теореме Дюпена (§ 128), торсы конгруэнции нормалей одной полости огибающей поверхности и торсы ее отражения (то есть торсы нормалей второй полости) соответствуют, следовательно, соответствуют и линии кривизны этих полостей.

Условие аполярности конгруэнции нормалей полостей огибающей поверхности и поверхности центров (127;2)

$$\frac{an_i}{an} = \frac{h_{is}\tilde{Q}^s}{\sigma} = \partial_i\omega = \text{grad} \quad (1)$$

является инвариантным признаком R -конгруэнции сфер.

Этот признак позволяет утверждать, что каждая поверхность является поверхностью центров бесконечного числа R -конгруэнций сфер, определяемых с произволом в две функции одного аргумента.

Действительно, радиус ϱ сферы R -конгруэнции определяется уравнением с частными производными второго порядка:

$$\left(\frac{h_{is}\tilde{Q}^s}{\sqrt{1-\Delta_2\varrho}} \right)_i = 0. \quad (2)$$

2. *Если конгруэнция прямых пересечения касательных плоскостей двух полостей огибающей конгруэнции сфер аполярна одной из этих полостей, то конгруэнция сфер рибокурова.*

Так как прямая \bar{p} пересечения касательных плоскостей двух полостей огибающей содержится в касательной плоскости поверхности центров и конгруэнция этих прямых аполярна одной полости, то по теореме § 127, п. 8 конгруэнция нормалей этой полости аполярна поверхности центров. Отсюда, согласно предыдущей теореме, следует, что конгруэнция сфер рибокурова.

3. Если конгруэнция прямых, соединяющих соответствующие точки двух полостей огибающей поверхности конгруэнции сфер, аполярна одной из этих полостей, то эта конгруэнция сфер рибокурова.

По теореме § 127, п. 8 из аполярности прямых p одной полости огибающей следует, что их поляры \bar{p} , то есть прямые пересечения касательных плоскостей к двум полостям огибающей, аполярны другой полости. Теперь справедливость доказываемой теоремы следует сразу же из предыдущей теоремы.

§ 132. Примеры R -конгруэнций

Простейшим примером R -конгруэнции является конгруэнция сфер постоянного радиуса. Точки огибающей поверхности такой конгруэнции лежат на нормалях поверхности центров, так как $\varrho = \text{const}$ и $a = n$. Поверхности r , R и R в этом случае параллельны и их линии кривизны соответствуют горсам их общей конгруэнции нормалей.

Примерами R -конгруэнций служат также конгруэнции сфер, касательных к фиксированной плоскости или шару, или конгруэнции сфер, проходящих через фиксированную точку. Действительно, любую сеть плоскости или шара можно считать сетью линий кривизны, а так как в рассматриваемом случае плоскость или шар являются одной полостью огибающей поверхности, то линии кривизны на полостях соответствуют.

Последние примеры позволяют без интегрирования указать ряд решений уравнения (131;2). Если все сферы R -конгруэнции с центрами в точках поверхности r касаются некоторой фиксированной сферы радиуса c с центром в начале координат, то радиусы ϱ этих сфер будут выражаться так:

$$\varrho = |r| \pm c.$$

При $c = 0$ все сферы проходят через фиксированную точку (начало координат).

Если все сферы касаются фиксированной плоскости

$$Rl = c = \text{const},$$

то одно из значений вектора a совпадает с вектором l , и радиусы q сфер определяются из условия

$$Rl = (r + qa)l = rl + q = c.$$

Следовательно, частными решениями уравнения (131;2) являются соответственно:

$$1) q = |r| + c; \quad 2) q = -rl + c. \quad (1)$$

Чтобы подтвердить этот результат аналитически, заметим, что в первом случае $q_i = r_i$, и рассмотрим разложение радиуса-вектора r :

$$r = r_k (\tilde{r}^k) + Wn = r_k (q - c) \tilde{q}^k + Wn \quad (W = rn).$$

Возводя обе части в квадрат, находим

$$r^2 = (q - c)^2 = (q - c)^2 \Delta_1 q + W^2,$$

так что

$$(q - c)^2 (1 - \Delta_1 q) = W^2,$$

$$\sigma = \sqrt{1 - \Delta_1 q} = \frac{W}{q - c} = \frac{W}{r}.$$

Левая часть уравнения (131;1) приводится теперь к виду

$$h_{ik} g^{kj} \frac{q_j}{\sigma} = \check{c}_i^k \frac{q_k}{\sigma} = \check{c}_i^k \frac{r_k r}{W} = \text{grad}.$$

Умножая обе части равенства $h_{ik} g^{ks} r_s = \check{c}_i^k r_k = -n_i$ на вектор r , получаем

$$\check{c}_i^k r r_k = \check{c}_i^k (q - c) \tilde{q}^k = -n_i r = -W_i.$$

Отсюда следует, что

$$\check{c}_i^k \frac{q_k}{\sigma} = -\frac{W_i}{W} = -\partial_i \ln W = \text{grad},$$

то есть справедливость нашего утверждения для первого случая.

Во втором случае, когда $q = -rl + c$, рассмотрим разложение постоянного орта

$$l = r_k (\tilde{r}^k) + (nl) n = -r_k \tilde{q}^k + (nl) n.$$

Вычисляя квадрат этого вектора, находим

$$1 = \Delta_1 q + (nl)^2, \quad \sigma = nl = \sqrt{1 - \Delta_1 q}.$$

Левая часть уравнения (131;1) приводится теперь к виду

$$\check{c}_i^h \frac{Q_h}{\sigma} = \check{c}_i^h \frac{r_h l}{nl}.$$

Умножая обе части равенства $\check{c}_i^h r_h = -n_i$ на вектор l , находим: $\check{c}_i^h r_h l = -(nl)_i$; отсюда следует, что

$$\check{c}_i^h \frac{Q_h}{\sigma} = -\frac{(nl)_i}{nl} = -\partial_i \ln (nl) = \text{grad},$$

то есть справедливость нашего утверждения во втором случае.

§ 133. Изгибание R -конгруэнций сфер

Если изгибать R -конгруэнцию сфер относительно ее поверхности центров (§ 125), то, вообще говоря, она перестает быть R -конгруэнцией.

Пример R -конгруэнции, сохраняющей свои свойства при любых изгибаниях, представляет конгруэнция сфер постоянного радиуса.

Если при некотором изгибании поверхности центров R -конгруэнция осталась R -конгруэнцией, то радиусы ϱ ее сфер должны удовлетворять уравнениям (131;2):

$$h^{is} \left(\frac{\tilde{Q}_i}{\sigma} \right)_{|s} = 0, \quad \check{h}^{is} \left(\frac{\tilde{Q}_i}{\sigma} \right)_{|s} = 0, \quad (1)$$

где h_{is} и \check{h}_{is} — вторые тензоры поверхности центров до и после изгибания. Из этих равенств следует, что сеть, определяемая тензором $\left(\frac{1}{\sigma} \tilde{Q}_{(i)} \right)_{|s}$ является простым основанием изгибания поверхности центров.

Если существует два таких изгибания, то их существует ∞^1 , и сеть $\left(\frac{1}{\sigma} \tilde{Q}_{(i)} \right)_{|s}$ является главным основанием изгибания.

R -конгруэнция, остающаяся R -конгруэнцией при всех изгибаниях относительно поверхности центров, называется *бесконечно изгибаемой* и характеризуется тем, что радиус ϱ ее сфер удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{1}{\sigma} \tilde{Q}_{(i)} \right)_{|s} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\Delta_4 \varrho}} \tilde{Q}_{(i)} \right)_{|s} = 0. \quad (2)$$

Отсюда следует, что поверхность центров бесконечно изгибаемой R -конгруэнции наложима на поверхность вращения.

§ 134. Преобразование Комбескюра R -конгруэнций

R -конгруэнция сфер характеризуется тем, что тензоры (130;7)

$$\left(h_{k(i} + \frac{1}{\sigma} \varrho_{k|(i)} \right) T_s^k \quad \text{и} \quad \left(h_{k(i} - \frac{1}{\sigma} \varrho_{k|(i)} \right) T_s^k,$$

определяющие линии кривизны на полостях огибающей, пропорциональны, что равносильно равенству

$$T_{(i\varrho_s)k}^h = \lambda T_{(i}^h h_{s)k}.$$

Сеть линий кривизны огибающей, таким образом, аполярна сетям T_{is} , h_{is} , $\varrho_{i|s}$. Отсюда следует, что R -конгруэнцию сфер можно охарактеризовать либо комполярностью этих сетей:

$$\lambda T_{is} + \mu h_{is} + \nu \varrho_{i|s} = 0, \tag{1}$$

либо выполнением двух следующих условий:

$$c^{is} T_{is} = 0, \quad c^{is} \varrho_{i|s} = 0, \tag{2}$$

где c_{is} — тензор сети линий кривизны огибающей или тензор соответствующей ей сопряженной сети на поверхности центров S .

Предположим, что поверхность $\overset{*}{S}$ находится с поверхностью S в таком соответствии Петерсона, при котором сеть c_{is} является их общей сопряженной сетью. Радиусы-векторы r_i и $\overset{*}{r}_i$ поверхностей S и $\overset{*}{S}$ связаны равенствами

$$\overset{*}{r}_i = l_i^s r_s, \quad r_i = \overset{*}{l}_i^s r_s, \tag{3}$$

в которых тензоры l_i^s и $\overset{*}{l}_i^s$ взаимны и

$$l_i^s = \lambda c_i^s + \mu \delta_i^s.$$

Из условий интегрируемости уравнений (3)

$$r_{i|j}^* = l_{i|j}^s r_s + l_i^s h_j^i n = 0$$

следует, что

$$\nabla^i l_i^s = \overset{*}{\nabla}^i \overset{*}{l}_i^s = 0,$$

где ∇ и $\overset{*}{\nabla}$ — знаки дифференцирования в метриках поверхностей S и $\overset{*}{S}$ соответственно.

Условия (2), характеризующие R -конгруэнцию, с помощью тензора l_{is} можно записать в следующей эквивалентной форме:

$$l^{is} T_{is} = l^{is} (g_{is} - \varrho_i \varrho_s) = 0, \quad (4)$$

$$l_i^s \varrho_{s| \cdot}^i = (l_i^s \varrho_s)_{| \cdot}^i = 0. \quad (5)$$

Из последнего равенства следует существование такой функции $\overset{*}{\varrho}$, что

$$l_i^s \varrho_s = \overset{*}{\varrho}_i, \quad \varrho_i = \overset{*}{l}_i^s \overset{*}{\varrho}_s.$$

Покажем, что конгруэнция сфер с центрами на поверхности $\overset{*}{S}$ и радиусом $\overset{*}{\varrho}$ есть R -конгруэнция. Действительно, в силу равенств

$$g_{is} = r_i^* r_s^* = l_i^m l_s^n r_m r_n = l_i^m l_s^n g_{mn},$$

$$\overset{*}{l}^{mn} l_m^i l_n^s = l^{is}$$

имеем, согласно (4),

$$\overset{*}{l}^{is} (g_{is} - \overset{*}{\varrho}_i \overset{*}{\varrho}_s) = \overset{*}{l}^{is} l_i^m l_s^n (g_{nm} - \varrho_n \varrho_m) = l^{is} (g_{is} - \varrho_i \varrho_s) = 0. \quad (4')$$

Так как, кроме того, выполняется условие

$$(\overset{*}{l}_i^s \varrho_s)_{| \cdot}^i = \varrho_{i| \cdot}^i = 0, \quad (5')$$

то наше утверждение доказано.

Докажем теперь, что соответствующие полости огибающих поверхностей Σ и $\overset{*}{\Sigma}$ ($\overset{+}{\Sigma}$ и $\overset{-}{\Sigma}$) этих конгруэнций находятся в соответствии Петерсона. Основные компоненты дискриминантных бивекторов поверхностей S и $\overset{*}{S}$ связаны равенством

$$\overset{*}{e}_{12} = \sqrt{\overset{*}{g}} = l \sqrt{g} = l e_{12},$$

так как

$$g^* = \|g_{is}^*\| = \|g_{is} l_\alpha^i l_\beta^s\| = \|g_{is}\| \cdot \|l_\alpha^i\|^2 = gl^2.$$

Следовательно,

$$r_\alpha \tilde{Q}^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon^{\gamma\delta} g_{\beta\delta} Q_\gamma r_\alpha = \frac{1}{l^2} \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon^{\gamma\delta} l_\beta^i l_\delta^r g_{kr} l_\gamma^p l_\alpha^q Q_p r_q = r_\alpha \tilde{Q}^\alpha,$$

$$\Delta_1 Q^* = (r_\alpha \tilde{Q}^\alpha)^2 = \Delta_1 Q,$$

а отсюда следует равенство векторов

$$a^* = -r_\alpha \tilde{Q}^\alpha \pm \sqrt{1 - \Delta_1 Q} n = a.$$

Так как эти векторы нормальны поверхностям $\tilde{\Sigma}^*$ и Σ , то предложение доказано.

Поверхности $\tilde{\Sigma}^*$ и Σ ($\tilde{\Sigma}^*$ и Σ) находятся в таком соответствии Петерсона, при котором их линии кривизны тоже соответствуют, так как они соответствуют общей сопряженной сети поверхностей S и \tilde{S}^* ; следовательно, это соответствие является соответствием Комбескюра.

§ 135. Преобразование Рибокура

1. О двух полостях огибающей поверхности R -конгруэнции сфер говорят, что они находятся в соответствии Рибокура.

Рассмотрим подвижные трехгранники, присоединенные к соответствующим сетям линий кривизны на полостях R и R . Соответствующие ребра этих двух трехгранников попарно пересекаются. Действительно, нормали поверхностей R и R пересекаются, так как обе проходят через центр соответствующей сферы. Пересечение двух других ребер, касающихся линий кривизны на поверхностях R и R , следует из теоремы § 126, п. 5. В самом деле, линиям кривизны огибающей соответствуют торсы конгруэнции прямых, по которым пересекаются касатель-

ные плоскости поверхностей R и R , а по указанной теореме каждая касательная к линии кривизны проходит через соответствующий фокус этой конгруэнции. Заметим также, что расстояния от точек поверхностей R и R до точек пересечения соответствующих ребер трехгранников равны.

Более общее соответствие двух поверхностей, при котором оси трехгранников, присоединенных к их линиям кривизны пересекаются, рассмотрено С. П. Финиковым [11].

2. Задача отыскания преобразования Рибокура данной поверхности r равносильна отысканию такой R -конгруэнции сфер, для которой данная поверхность является одной из полостей огибающей поверхности.

Для решения этой задачи обозначим радиус искомого сфер через q . Радиус-вектор поверхности центров R можно представить в виде суммы

$$R = r + qn, \quad (1)$$

где n — вектор нормали поверхности r . В дальнейших вычислениях будем пользоваться сферическим отображением поверхности r . Вектор нормали поверхности центров R (не единичный)

$$N = n_s q^s + n \quad (2)$$

определяется вектором q , удовлетворяющим условию ортогональности

$$R_i N = (r + qn)_i (n_s q^s + n) = -h_{is} q^s + q_i - q \tilde{q}_i = 0. \quad (3)$$

Для того чтобы определенная радиусом q конгруэнция сфер была рибокуровой, необходимо и достаточно, согласно теоремам § 131, чтобы конгруэнции нормалей поверхности r и поверхности центров были аполярны. Условие этой аполярности (127;2) имеет вид

$$\frac{N n_i}{N n} = n_i n_s q^s = -\tilde{q}_i = \text{grad} = \partial_i \ln \lambda. \quad (4)$$

Внося получаемое отсюда выражение вектора

$$q_i = \frac{\tilde{\lambda}_i}{\lambda} \quad (5)$$

в (3), получаем систему дифференциальных уравнений в полных дифференциалах

$$\lambda \varrho_i + \lambda_i \varrho = \partial_i (\lambda \varrho) = -h_i^s \tilde{\lambda}_s = \partial_i \varphi. \quad (6)$$

Условие интегрируемости этой системы

$$(h_i^s \tilde{\lambda}_s)_i^i = h_i^s \gamma_s^k \lambda_k \lambda_i^i = c^{ik} \lambda_i \lambda_k = 0, \quad (7)$$

где c_{ik} — тензор сети линий кривизны поверхности r , представляет собой дифференциальное уравнение для определения функции $\lambda \varrho$. Каждому решению этого уравнения соответствует ∞^1 искомым R -конгруэнций. Действительно, если λ удовлетворяет этому уравнению, то система (6) вполне интегрируема и определяет с точностью до произвольного постоянного c произведение $\lambda \varrho = \varphi + c$, где

$$\varphi = - \int h_i^k \tilde{\lambda}_k du^i. \quad (8)$$

Для поверхности

$$R = r + \varrho n = r + \frac{\varphi + c}{\lambda} n$$

вектор

$$N = n_k q^k + n = n_k \frac{\tilde{\lambda}^k}{\lambda} + n$$

будет вектором нормали, так как условие ортогональности (3) выполняется в силу (6). Условие аполяльности (4) тоже выполнено, следовательно, построенная конгруэнция сфер будет рибокуровой.

Радиус-вектор \check{r} второй полости этой конгруэнции, или, что то же, радиус-вектор рибокурова преобразования данной поверхности r можно явно выразить с помощью введенных функций λ и φ . Представим этот вектор в виде суммы

$$\check{r} = r + \check{b},$$

где вектор \check{b} параллелен нормали поверхности центров R и по длине равен удвоенной проекции на этот вектор

вектора qn , то есть

$$\begin{aligned} b &= 2 \left(\frac{N}{N} qn \right) \frac{N}{N} = \frac{2q}{N^2} (Nn) N = \frac{2q}{N^2} N = \\ &= \frac{2(\varphi+c)}{\lambda^2 + \Delta_1 \lambda} (n_k \tilde{\lambda}^k + \lambda n). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\check{r} = r + \frac{2(\varphi+c)}{\lambda^2 + \Delta_1 \lambda} (n_k \tilde{\lambda}^k + \lambda n). \quad (9)$$

§ 136. Конгруэнции окружностей

1. Двупараметрическое семейство окружностей называется *конгруэнцией окружностей*. Аналитически конгруэнцию окружностей можно задать поверхностью $r(u^i)$ их центров, радиусами окружностей $q(u^i)$ и конгруэнцией осей окружностей, то есть перпендикуляров к плоскостям окружностей в их центрах. Направляющий орт оси обозначим через $a(u^i)$. Радиус-вектор произвольной точки окружности можно представить в виде суммы

$$R = r + qa_k v^k, \quad (1)$$

где v^k — орт сферического отображения конгруэнции осей.

2. Наиболее интересным для конгруэнции окружностей является вопрос существования поверхности, ортогональной всем окружностям. Конгруэнцию окружностей, допускающих такую поверхность, называют *нормальной*. Чтобы охарактеризовать нормальную конгруэнцию окружностей, будем искать поверхность, заданную радиусом-вектором (1), ортогональную всем окружностям. Орт нормали n этой поверхности ортогонален векторам a и $a_i v^i$, следовательно, $n = [aa_i]v^i$. Составим условие ортогональности

$$\begin{aligned} R_s [aa_i] v^i &= (aa_i r_s) v^i + q [aa_i] v^i a_\beta v^\beta \Big|_s = \\ &= \check{b}_{is} v^i + q v_\alpha v^\alpha \Big|_s = \check{b}_{is} v^i + q t_s = 0. \quad (2) \end{aligned}$$

Здесь $\check{b}_{is} = (aa_i r_s)$ — второй тензор конгруэнции осей, за опорную точку которых принят центр окружности,

t_s — трансверсальный вектор поля ортов v^α в сферическом отображении конгруэнции осей. Равенство (2) представляет собой систему дифференциальных уравнений с неизвестным вектором v^α .

Составим условие ее интегрируемости:

$$t_s|_v^s = 1 = - \left(\frac{1}{\varrho} \check{b}_{is} v^i \right)|_v^s = - \left(\frac{1}{\varrho} \check{b}_{is} \right)|_v^s v^i - \frac{1}{\varrho} \check{b}_{is} \tilde{v}^i t_s^s.$$

Заменяя здесь, согласно (2),

$$t_s = - \frac{1}{\varrho} \check{b}_{is} v^i \quad (3)$$

и пользуясь формулой (120;7), получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\varrho} \check{b}_{is} \right)|_v^s v^i &= -1 + \frac{1}{\varrho^2} \check{b}_{is} \tilde{v}^i \check{b}_k^s v^k = \\ &= -1 - \frac{1}{\varrho^2} (b_{is} + \psi e_{is}) (b^{ks} + \psi e^{ks}) \tilde{v}^i v_k = \\ &= -1 - \frac{1}{\varrho^2} (-\sigma^2 + \psi^2) \tilde{v}^i v_i \end{aligned}$$

или, окончательно,

$$\left(\frac{1}{\varrho} \check{b}_{is} \right)|_v^s v^i = \frac{\sigma^2 - \psi^2 - \varrho^2}{\varrho^2}. \quad (4)$$

Это уравнение совместно с равенством $a_{is} v^i v^s = 1$ определяет два значения орта v^i . Если одно или два из них удовлетворяют системе (2), то существует одна или две поверхности, ортогональные всем окружностям.

3. Докажем следующую теорему Рибокура [97]: *если конгруэнция окружностей допускает три поверхности, ортогональные всем ее окружностям, то она допускает ∞^1 таких поверхностей.*

Конгруэнция окружностей, обладающая последним свойством, называется *циклической*.

Если выбрать произвольное поле ортов p_i , а орт v_i определить углом ω , который он составляет с ортом p_i :

$$v_i = p_i \cos \omega + \tilde{p}_i \sin \omega,$$

то уравнение (2) примет вид

$$\check{b}_{is} (p^i \cos \omega + \tilde{p}^i \sin \omega) + \varrho (t_s + \omega_s) = 0,$$

то есть будет уравнением в полных дифференциалах с неизвестной функцией ω вида

$$\frac{\omega_i}{2 \cos^2 \frac{\omega}{2}} = \partial_i \left(\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \right) = A_i \operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2} + B_i \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} + C_i. \quad (5)$$

Условие его интегрируемости есть, очевидно, (4). Если существуют три поверхности, ортогональные всем окружностям, то уравнение (4), допуская три различных решения, непременно обращается в тождество, так что имеют место равенства:

$$1) \left(\frac{1}{\varrho} \check{b}_{is} \right)_i^s = 0; \quad 2) \sigma^2 = \psi^2 + \varrho^2. \quad (6)$$

При выполнении этих равенств система (5) вполне интегрируема, и ее решение ω зависит от одного произвольного постоянного. Отсюда следует существование ∞^1 ортогональных всем окружностям поверхностей. Теорема Рибокура доказана.

Уравнение (5) есть уравнение Риккати. Ангармоническое отношение любых четырех решений:

$$\left(\operatorname{tg} \frac{\omega_1}{2}, \operatorname{tg} \frac{\omega_2}{2}, \operatorname{tg} \frac{\omega_3}{2}, \operatorname{tg} \frac{\omega_4}{2} \right)$$

постоянно, следовательно, *точки четырех поверхностей, ортогональных окружностям циклической конгруэнции, образуют на каждой окружности постоянное ангармоническое отношение.* Это свойство позволяет по трем поверхностям, ортогональным к окружностям, построить без всякого интегрирования все ∞^1 таких поверхностей.

4. Докажем следующую теорему [97]: *каждые две поверхности, ортогональные окружностям циклической конгруэнции, находятся в соответствии Рибокура. Линиям кривизны на них соответствует сеть торсов конгруэнции осей.*

Нормали двух таких поверхностей Σ и Σ' пересекаются, как касательные к одной окружности, и точка их пересечения может быть принята за центр сферы соответствующего радиуса, которая касается поверхностей Σ и Σ' . Последние, таким образом, являются двумя полостями огибающей конгруэнции сфер. Касательные

плоскости поверхностей Σ и Σ' пересекаются по оси соответствующей окружности. Если мы докажем, что конгруэнция осей аполярна хотя бы одной из поверхностей Σ или Σ' , то из теоремы § 131, п. 1 будет следовать, что построенная нами конгруэнция сфер рибокурова, и справедливость высказанной теоремы будет установлена. Пусть $R = r + \varrho a_k v^k$ — радиус-вектор точки поверхности Σ . Перпендикуляр, опущенный из точки этой поверхности на ось, есть $b = \varrho a_k v^k$. Условие (126;4) аполярности поверхности Σ и конгруэнции осей принимает вид

$$\frac{bR_i}{b^2} = \frac{1}{\varrho} a_k v^k [r_i + \varrho_i a_j v^j + \varrho (a_j v^j)_i] = \frac{1}{\varrho} \check{b}_{ki} \tilde{v}^k + \frac{\varrho_i}{\varrho} = \text{grad}$$

или

$$\left(\frac{1}{\varrho} \check{b}_{ki} \tilde{v}^k \right)_i = \left(\frac{1}{\varrho} \check{b}_{ki} \right)_i \tilde{v}^k - \frac{1}{\varrho} \check{b}_{ki} v^k t^i = 0. \quad (7)$$

Это условие выполняется, так как первое слагаемое обращается в нуль в силу (6), а второе — в силу (3). Теорема доказана.

5. Рассмотрим теперь произвольную R -конгруэнцию сфер. Пусть M и M' — две соответствующие точки ее огибающих поверхностей Σ и Σ' . Окружность, проходящая через точки M и M' и ортогональная сфере, будет ортогональна и поверхностям Σ и Σ' . Докажем, что эти окружности допускают ∞^1 ортогональных поверхностей, то есть образуют циклическую конгруэнцию. Для доказательства рассмотрим конгруэнцию осей этих окружностей. Так как исходная конгруэнция сфер рибокурова, то эта конгруэнция аполярна поверхностям Σ и Σ' . В принятых выше обозначениях условие аполярности поверхности Σ и конгруэнции осей содержится в равенстве (7). Второе слагаемое его по-прежнему обращается в нуль в силу (3), следовательно,

$$\left(\frac{1}{\varrho} \check{b}_{ki} \right)_i \tilde{v}^k = 0. \quad (8)$$

Аналогичным образом, отправляясь от поверхности Σ' , мы придем к равенству

$$\left(\frac{1}{\varrho} \check{b}_{ki} \right)_i \tilde{v}^k = 0, \quad (9)$$

где v^k — орт, определяющий радиус-вектор этой поверхности: $R = r + \rho a_k v^k$. Ввиду независимости векторов \tilde{v}^k и v^k из (8) и (9) следует, что

$$\left(\frac{1}{\rho} \check{b}_{ki}\right)_l = 0. \quad (10)$$

Обратимся теперь к уравнению (4), определяющему поверхности, ортогональные окружности. Так как это уравнение заведомо имеет два решения, соответствующих поверхностям Σ и Σ' , то его правая часть непременно равна нулю:

$$\sigma^2 - \psi^2 - \rho^2 = 0. \quad (11)$$

Однако равенства (10) и (11) доказывают, что построенная конгруэнция окружностей циклическая, следовательно, доказана следующая теорема: *конгруэнция окружностей, проходящих через соответствующие точки двух полостей огибающей R-конгруэнции сфер и ортогональных этим полостям, является циклической конгруэнцией.*

§ 137. Вполне циклические конгруэнции окружностей

1. В § 129, п. 5 рассматривалась циклическая конгруэнция прямых. Она была охарактеризована существованием конгруэнции сфер, точки A и B полостей огибающей которой лежат на лучах и разделяют фокусы F_1 и F_2 этого луча гармонически. Аналитически циклическая конгруэнция характеризовалась существованием функции λ , удовлетворяющей уравнениям (129;14) и (129;16):

$$1) \lambda^2 = \psi^2 - \sigma^2; \quad 2) \left(\frac{1}{\lambda} \check{b}_{ks}\right)_l = 0. \quad (1)$$

Рассмотрим теперь такую конгруэнцию сфер, у которой огибающая поверхность мнимая. Точки A и B в этом случае комплексно сопряжены и λ чисто мнимое. Переходя к вещественной функции $\check{\lambda} = i\lambda$, получим вместо (1)

$$1) \check{\lambda}^2 = \sigma^2 - \psi^2; \quad 2) \left(\frac{1}{\check{\lambda}} \check{b}_{ks}\right)_l = 0. \quad (1')$$

При $\lambda = \rho$ эти уравнения точно совпадают с уравнениями (136;6), которые характеризуют циклическую конгруэнцию окружностей. Геометрически это совпадение объясняется следующим образом. За опорную точку конгруэнции прямых в § 129 была принята середина отрезка M между соответствующими точками двух полостей огибающей конгруэнции сфер. Длина этого отрезка $AB = 2\lambda$. Отсюда следует, что окружности с центрами в точках M и радиусами $\rho = \lambda$, расположенные в плоскостях, ортогональных лучу AB , образуют циклическую конгруэнцию окружностей. Первое из равенств (1) показывает, что окружность этой конгруэнции принадлежит сфере, построенной на фокальном отрезке F_1F_2 как на диаметре. Так как центр окружности M является серединой отрезка AB , то ее плоскость касается поверхности центров конгруэнции сфер.

Итак: с каждой конгруэнцией сфер, соответствующие точки A и B двух полостей огибающей которой делят фокусы F_1 и F_2 луча AB гармонически, связана циклическая конгруэнция окружностей, получаемых пересечением касательных плоскостей поверхности центров сфер со сферой, построенной на фокальном отрезке F_1F_2 , как на диаметре, и обратно, плоскость каждой циклической конгруэнции окружностей огибает поверхность центров конгруэнции сфер, точки A и B двух полостей огибающей которой гармонически разделяют фокусы конгруэнции осей.

2. Полученные результаты позволяют просто доказать следующую теорему: *если конгруэнция прямых служит осями двух циклических конгруэнций окружностей, то она является осями для ∞^1 таких конгруэнций и будет вполне циклической конгруэнцией.* Каждая из этих конгруэнций окружностей называется тоже *вполне циклической*. Ее окружности лежат на сферах, для которых фокальный отрезок конгруэнции осей является диаметром. Плоскости окружностей каждой вполне циклической конгруэнции огибают поверхности, изгибаемые на главном основании. Главным основаниям этих поверхностей соответствует сеть торсов конгруэнции осей.

Существование двух циклических конгруэнций окружностей с общими осями, в силу последней теоремы п. 1,

приводит к существованию двух конгруэнций сфер, точки полостей огибающих которых лежат на осях и делят фокусы этих осей гармонически. Отсюда по теореме § 129, п. 5 следует, что таких конгруэнций сфер существует ∞^1 и что конгруэнция осей будет вполне циклической.

§ 138. Конгруэнции окружностей, расположенных в касательных плоскостях поверхности

1. Конгруэнцию окружностей, расположенных в касательных плоскостях данной поверхности $r(u^i)$, можно задать радиусами-векторами их центров $r+p=r+r_k p^k(u^i)$ и их радиусами $\varrho = \varrho(u^i)$.

Найдем условие, при котором такая конгруэнция будет нормальной. Точку поверхности, ортогональной всем окружностям, зададим радиусом-вектором

$$R = r + p + \varrho v, \quad v = r_k v^k.$$

Так как нормаль искомой поверхности является касательной к окружности в точке R , то ее можно представить в виде векторного произведения $[nv]$, следовательно, условие ортогональности имеет вид

$$\begin{aligned} R_i [nv] &= (r_i + r_k p^k|_i + \varrho r_k v^k|_i) [nr_j] v^j = \\ &= (\varepsilon_{hi} - p_{k|i}) v^k + \varrho t_i = 0 \end{aligned}$$

(дифференцирование производится в метрике поверхности r) и представляет собой систему дифференциальных уравнений, определяющих орт v . Запишем эту систему так:

$$t_i = \tau_{hi} v^h, \quad (1)$$

где

$$\tau_{hi} = \frac{1}{\varrho} (p_{k|i} - \varepsilon_{hi}),$$

и составим условие ее интегрируемости

$$\begin{aligned} t_{i|j} - t_j|_i &= K = \tau_{hi|j} v^h + \tau_{hi} \tilde{v}^h|_j - \tau_{hi|j} v^h - \tau_{hi} \tau_j^i v^j v^h = \\ &= \tau_{hi|j} v^h + \frac{1}{2} \varepsilon_{sj} \tau_{hi} \tau^{hi} v^j v^s = \tau_{hi|j} v^h - \frac{1}{2} \tau_{hi} \tau^{hi}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем уравнение

$$\tau_{hi}|.v^h = K + \frac{1}{2} \tau_{kj}\tau^{kj}, \quad (2)$$

которое вместе с уравнением $g_{hi}v^h v^i = 1$ определяет два значения искомого орта v^h . Если одно или два из них удовлетворяют уравнению (1), то конгруэнция окружностей будет допускать одну или две поверхности, ортогональные всем окружностям. Результат подстановки одного из решений уравнения (2) в (1) можно рассматривать также как систему двух дифференциальных уравнений с тремя неизвестными функциями p_i и q , определяющими нормальную конгруэнцию окружностей, следовательно, *в касательной плоскости произвольной поверхности можно построить нормальную конгруэнцию окружностей с произволом в одну функцию двух аргументов* (одну из функций p_1, p_2, q можно выбрать произвольно).

2. Для того чтобы построенная в п. 1 конгруэнция окружностей была циклической, необходимо и достаточно, чтобы условие интегрируемости (2) выполнялось тождественно, то есть чтобы выполнялись равенства

$$1) \tau_{hi}|.^i = 0; \quad 2) \tau_{hi}\tau^{hi} = -2K. \quad (3)$$

Первое из них приводится к виду

$$\left[\frac{1}{q} (p_{k|i} - \varepsilon_{ki}) \right]^i = \frac{K\tilde{p}_k}{q} - \frac{(p_{k|i} - \varepsilon_{ki}) q^i}{q^2} = \frac{1}{q} (K\tilde{p}_k - \tau_{ki}q^i) = 0$$

или

$$\tau_{ki}q^i = K\tilde{p}_k. \quad (4)$$

Второе условие эквивалентно тому, что $\tau_{hi}\tau^{hs} = -K\delta_i^s$. Пользуясь последним соотношением, разрешим уравнения (4) относительно вектора q_s :

$$\tau^{hs}\tau_{ki}q^i = -Kq^s = K\tau^{hs}\tilde{p}_k = \frac{K}{q} (p^{h.s} - \varepsilon^{hs})\tilde{p}_k,$$

$$qq_s = -\tilde{p}_s - \tilde{p}_k p^k|_s = -\tilde{p}_s + \frac{1}{2} (g^{hj} p_k p_j)|_s,$$

что можно записать в следующем виде:

$$\partial_s(q^2 - \Delta_1 p) = -2\tilde{p}_s. \quad (5)$$

Полученное равенство показывает, что вектор \tilde{p}_s градиентен. Этот факт можно было предвидеть, так как геометрически он означает аполярность конгруэнции осей окружностей и поверхности r , которая огибает плоскости этих окружностей (§ 125, п. 3). Если положить

$$\tilde{p}_s = \varphi_s, \quad p_s = -\tilde{\varphi}_s, \quad (6)$$

то из (5) получим

$$q^2 = \Delta_1 \varphi - 2\varphi. \quad (7)$$

Таким образом, неизвестные вектор p_s и функция q выражены через одну новую неизвестную функцию φ . Эта функция должна быть решением двух уравнений (3), в которые вместо p_s и q подставлены их выражения (6) и (7). Вычисления показывают, что оба эти уравнения одинаковы. Действительно, первое из них можно преобразовать так:

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{q} (\tilde{\varphi}_{k|i} + \varepsilon_{ki}) \right]_{|i} &= -\frac{K\varphi_k}{q} - \frac{1}{q^2} (\tilde{\varphi}_{k|i} + \varepsilon_{ki}) q^i = 0, \\ -Kq^2 \varphi_k &= K(2\varphi - \Delta_1 \varphi) \varphi_k = \tilde{\varphi}_{k|i} q q^i - q q_k = \\ &= \tilde{\varphi}_{k|i} (\tilde{\varphi}^s \varphi_{s|i} - \varphi^i) - \tilde{\varphi}^s \varphi_{s|k} + \varphi_k = \\ &= \varphi^i (\tilde{\varphi}_{i|k} - \tilde{\varphi}_{k|i}) - \tilde{\varphi}^s \tilde{\varphi}_{k|i} \tilde{\varphi}_{s|i} + \varphi_k = \\ &= \varphi^i \varepsilon_{ik} \tilde{\varphi}_{s|i}^s - \frac{1}{2} \varphi^s \varepsilon_{ks} \tilde{\varphi}_{j|i} \tilde{\varphi}^j + \varphi_k = \\ &= (\Delta_{22} \varphi - \Delta_2 \varphi + 1) \varphi_k, \end{aligned}$$

что в силу независимости векторов φ_k равносильно уравнению

$$K(2\varphi - \Delta_1 \varphi) = \Delta_{22} \varphi - \Delta_2 \varphi + 1. \quad (8)$$

Точно такое же уравнение получается и во втором случае:

$$K = -\frac{1}{2} \tau^{ki} \tau_{hi} = -\frac{(\tilde{\varphi}_{k|i} + \varepsilon_{ki})(\tilde{\varphi}^k + \varepsilon^{ki})}{2q^2} = \frac{\Delta_{22} \varphi - \Delta_2 \varphi + 1}{2\varphi - \Delta_1 \varphi}.$$

Итак, каждое решение φ уравнения (8) определяет по формулам (6) и (7) вектор p_k и функцию q и, следовательно, циклическую конгруэнцию окружностей.

3. Уравнение (8) совпадает со вторым уравнением изгибания (94;15). Этот факт находит интересное гео-

метрическое применение. Две точки оси окружности, расположенные на расстояниях $\pm iq$ ($i^2 = -1$) от ее центра называются фокусами этой окружности. В местной системе координат точки поверхности r уравнение окружности можно записать в виде

$$(\check{r} - p)^2 - q^2 = (\check{r} - p + iqn)^2 = 0,$$

показывающем, что она лежит на сфере нулевого радиуса с центром в одном из фокусов. Рассмотрим теперь сферу с центром в точке M поверхности r , проходящую через фокусы F_1 и F_2 окружности, лежащей в касательной плоскости этой точки. Радиус R этой сферы определяется равенством

$$R^2 = MF_1^2 = p^2 + (iqn)^2 = p^2 - q^2 = \Delta_1\varphi - (\Delta_1\varphi - 2\varphi) = 2\varphi.$$

Половина квадрата этого радиуса $\frac{R^2}{2} = \varphi$ и удовлетворяет второму уравнению изгиба (8). Отсюда, согласно § 130, п. 2, следует, что поверхность r можно подвергнуть такому изгибанию, что все построенные сферы будут проходить через фиксированную точку. Эта точка совпадет с фокусами окружностей конгруэнции, так как ее радиус-вектор, вычисленный по формуле (129;5), есть

$$\begin{aligned} R &= r - Rr_k \tilde{R}^k + R \sqrt{1 - \Delta_1 R} n = \\ &= r - r_k \tilde{\varphi}^k + iqn = r + p + iqn. \end{aligned}$$

Второй тензор изогнутой поверхности найдется по формуле (94;16)

$$h_{is} = \frac{g_{is} - \varphi_{is}}{\sqrt{2\varphi - \Delta_1\varphi}} = \frac{1}{iq} (g_{is} - \varphi_{is}). \quad (9)$$

Все изложенное приводит к следующей теореме Дарбу: чтобы построить циклическую конгруэнцию окружностей самого общего вида, надо взять произвольную поверхность S и ее изгибание S_0 . Сферы нулевого радиуса с центром в фиксированной точке пересекают касательные плоскости поверхности S_0 по окружностям конгруэнции, изгибание которой относительно изгиба поверхности S в поверхность S_0 приводит к искомой циклической конгруэнции окружностей.

4. С. П. Фиников [11] предложил в известной мере аналогичный предыдущему способ построения вполне циклической конгруэнции прямых, торсы которых соответствуют главному основанию изгибающей данной поверхности r . Пусть d_{is} — тензор главного основания изгибающей данной поверхности r . вполне циклическая конгруэнция прямых, сферическое отображение торсов которой совпадает со сферическим отображением главного основания d_{is} , определяется, как было показано в § 125, опорной точкой $r + p = r - r_h \tilde{\theta}^i$, где функция θ есть решение уравнения $\tilde{d}^{is} (g_{is} - \theta_{i|s}) = 0$ (см. (125;4)). Предположим, что одно решение этого уравнения найдено и соответствующая ему вполне циклическая конгруэнция прямых построена.

Рассмотрим одну из вполне циклических конгруэнций окружностей, связанных с этой конгруэнцией. Плоскости этих окружностей огибают поверхность S , находящуюся с поверхностью r в соответствии Петерсона. Сеть d на поверхности S будет, очевидно, главным основанием изгибающей. Согласно предыдущему п. 3, поверхность S можно изогнуть в поверхность S_0 так, что фокусы всех окружностей конгруэнции, подвергнутой соответствующему изгибанию, совпадут с фиксированной точкой пространства, через которую пройдут и все оси окружностей. Заметим, что изгибание поверхности S в поверхность S_0 является изгибанием на главном основании d_{is} . Действительно, в обозначениях предыдущего п. 3, тензор сети d_{is} есть $h_{(i}^k (g_{s)h} - \varphi_{s|h})$, а второй тензор поверхности S_0 дается формулой (9): $\check{h}_{is} = \frac{1}{i_Q} (g_{is} - \varphi_{i|s})$. Очевидная аполярность этих тензоров доказывает наше утверждение.

В результате всего сказанного мы приходим к теореме С. П. Финикова: *чтобы построить вполне циклическую конгруэнцию прямых самого общего вида, нужно взять произвольную поверхность; изгибаемую на главном основании d , преобразование Петерсона этой поверхности — поверхность S , — на которой сеть d — тоже главное основание изгибающей, изогнуть на этом главном основании поверхность S в поверхность S_0 . Если теперь из фиксированной точки пространства опустить на касательные плоскости*

поверхности перпендикуляры и полученную конгруэнцию подвергнуть изгибанию относительно изгибания поверхности S_0 в поверхность S , то придем к искомой вполне циклической конгруэнции прямых.

§ 139. Преобразование Бианки псевдосферических поверхностей

Рассмотрим конгруэнцию окружностей, лежащих в касательных плоскостях поверхности S , с центрами в точках этой поверхности и с постоянными радиусами $\rho = \text{const}$. Для того чтобы эта конгруэнция была нормальной, необходимо и достаточно, чтобы поверхность S имела постоянную гауссову кривизну

$$K = -\frac{1}{\rho^2} = \text{const}.$$

Действительно, предположим, что рассматриваемая конгруэнция нормальна и радиус-вектор ортогональной ее окружностям поверхности \tilde{S} есть

$$R = r + \rho v. \tag{1}$$

Из условия

$$R_i [nv] = v_i + \rho t_i = 0$$

находим

$$t_i = -\frac{1}{\rho} v_i, \tag{2}$$

$$K = t_i t^i = -\frac{1}{\rho^2} v_i v^i = -\frac{1}{\rho^2} \tilde{v}_i \tilde{v}^i = \frac{1}{\rho^2} \tilde{v}_i v^i = -\frac{1}{\rho^2},$$

и необходимость высказанного утверждения доказана.

Линии (v) , как это следует из (2), геодезические, а их ортогональные траектории (\tilde{v}) имеют постоянную отрицательную геодезическую кривизну, то есть являются орициклами, действительно,

$$\tilde{g} = \tilde{t}_i \tilde{v}^i = -\frac{1}{\rho} v_i \tilde{v}^i = -\frac{1}{\rho}.$$

Чебышевский вектор сети (v, \tilde{v})

$$a_i = \tilde{t}_i = -\frac{1}{\rho} \tilde{v}_i$$

градиентен, следовательно, эта сеть изотермична и является сетью вращения.

Докажем теперь достаточность. Пусть дана поверхность с кривизной $K = -\frac{1}{\rho^2}$. Уравнение (2), определяющее геодезическое семейство (v) , вполне интегрируемо, так как условие его интегрируемости

$$t_{|i}^i = K = -\frac{1}{\rho} v_{|i}^i = -\frac{1}{\rho} t_i \tilde{v}^i$$

выполняется в силу уравнения (2) и имеет ∞^1 решений v_i . Каждое такое поле определяет по формуле (1) поверхность \tilde{S} , нормальную всем циклам.

Если в касательных плоскостях любой поверхности \tilde{S} построить окружности радиусов ρ с центрами в точках этой поверхности, то они будут проходить через соответствующие точки поверхности S и будут ортогональны ей. Следовательно, все поверхности \tilde{S} будут тоже псевдосферами с той же гауссовой кривизной $K = -\frac{1}{\rho^2}$.

Переход от поверхности S к поверхности \tilde{S} называется *преобразованием Бианки* поверхностей постоянной отрицательной кривизны.

Г Л А В А XII
БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ИЗГИБАНИЯ.
КОНГРУЭНЦИИ W

§ 140. Бесконечно малые изгибания

1. Наиболее общая проблема изгибания — отыскание всех поверхностей, наложимых на данную, — очень сложна и решена лишь для некоторых классов специальных поверхностей.

В этой главе рассматриваются бесконечно малые изгибания, к которым можно прийти следующим путем. Предположим, что радиус-вектор $R = R(u^i, t)$ определяет однопараметрическое семейство наложимых друг на друга поверхностей (t — параметр семейства). Поверхность, соответствующую значению параметра $t = 0$, обозначим через $r = R(u^i, 0)$ и будем считать заданной. Запишем разложение в ряд Маклорена относительно параметра t

$$R(u^i, t) = r + r_1(u^i) t + r_2(u^i) t^2 + \dots \quad (1)$$

Линейный элемент поверхности $R = R(u^i, t)$ будет

$$dR^2 = dr^2 + 2dr_1 dr t + 2\left(\frac{1}{2} dr_1^2 + dr_2 dr\right) t^2 + \\ + 2(dr_3 dr + dr_1 dr_2) t^3 + \dots \quad (2)$$

Так как при любом значении параметра t должно выполняться равенство $dR^2 = dr^2$, то

$$dr_1 dr = 0, \quad dr_2 dr = -\frac{1}{2} dr_1^2, \quad dr_3 dr = -dr_1 dr_2, \dots \quad (3)$$

Если найдены последовательно общие решения r_1, r_2, \dots системы (3) и ряд (1) сходится в некоторой области значений параметра t , то этот ряд определяет однопараметрическое изгибание данной поверхности r .

2. Рассмотрим решение r_1 первого уравнения системы (3)

$$dr_1 dr_1 = r_{i1} r_{i1} du^i du^i = 0 \quad (4)$$

и определяемую им поверхность с радиусом-вектором

$$r^* = r + tr_1.$$

Если t бесконечно мало, то линейные элементы поверхностей r и r^* отличаются на бесконечно малые второго порядка относительно t :

$$dr^* = dr + t^2 dr_1^2,$$

поэтому говорят, что они наложимы друг на друга с точностью до малых первого порядка относительно параметра t или, что то же, относительно расстояния $|r^* - r| = |tr_1|$ между их соответствующими точками.

Поверхность r^* , построенная выше, называется *бесконечно малым изгибанием* поверхности r . Теория бесконечно малых изгибаний находит многочисленные приложения в самых различных разделах дифференциальной геометрии, в частности, в теории поверхностей, в теориях конгруэнций прямых, сфер, окружностей.

3. В координатной записи каждое векторное уравнение системы (3), имеющее вид

$$r_A (r_k) = c_{ik} \quad (A = 1, 2, 3, \dots),$$

дает три скалярных линейных дифференциальных уравнения:

$$\begin{aligned} r_A r_1 &= \partial_1 x \partial_1 x + \partial_1 y \partial_1 y + \partial_1 z \partial_1 z = c_{11} \\ r_A (r_2) &= \partial_{(1} x \partial_2) x + \partial_{(1} y \partial_2) y + \partial_{(1} z \partial_2) z = c_{12} \\ r_A r_2 &= \partial_2 x \partial_2 x + \partial_2 y \partial_2 y + \partial_2 z \partial_2 z = c_{22}, \end{aligned}$$

где x, y, z — координаты вектора r , а $\underset{A}{x}, \underset{A}{y}, \underset{A}{z}$ — координаты вектора $\underset{A}{r}$.

Для различных значений номера A эти системы отличаются только правыми частями. Если найдено общее решение первой однородной (так как $c_{ih} = 0$) системы, то, согласно общей теории, решения других систем определяются одними квадратурами. Иными словами, *общее решение задачи бесконечно малого изгиба данной поверхности позволяет одними квадратурами найти ее однопараметрические изгибания.*

4. Равенство (4) имеет простой геометрический смысл: поверхности с радиусами-векторами r и $\underset{1}{r}$ находятся в общей параметризации и каждому направлению смещения на одной из них, определяемому дифференциалами du^i , соответствует на другой направление, ортогональное первому, так как $d\underset{1}{r} \underset{1}{dr} = 0$. Имея в виду это свойство, говорят, что поверхности r и $\underset{1}{r}$ *соответствуют друг другу ортогональностью линейных элементов* или, короче, *находятся в соответствии O .*

Прямая, проходящая через точку поверхности r параллельно радиусу-вектору $\underset{1}{r}$, называется *директрисой бесконечно малого изгиба* и определяет направление смещения точек поверхности r при ее бесконечно малом изгибании в поверхность $\underset{*}{r}$.

5. Рассмотрим две поверхности $\underset{1}{R}$ и $\underset{2}{R}$. Условие их наложимости $d\underset{1}{R}^2 = d\underset{2}{R}^2$ можно записать в виде

$$d \frac{1}{2} (\underset{1}{R} + \underset{2}{R}) d \frac{1}{2} (\underset{1}{R} - \underset{2}{R}) = 0.$$

Это означает, что поверхности с радиусами-векторами $\underset{1}{r} = \frac{1}{2} (\underset{1}{R} + \underset{2}{R})$, $\underset{2}{r} = \frac{1}{2} (\underset{1}{R} - \underset{2}{R})$ соответствуют ортогональностью линейных элементов. Обратно, по двум поверхностям $\underset{1}{r}$ и $\underset{2}{r}$, находящимся в соответствии O , можно

построить однопараметрическое семейство пар наложимых поверхностей с радиусами-векторами $R = r_1 + cr_2$, $R = r_1 - cr_2$ ($c = \text{const}$). Действительно, из условия $dr_1 dr_2 = 0$ имеем

$$dR^2 = dR^2.$$

§ 141. Характеристическая функция изгиба

1. Отыскание поверхности r_1 , соответствующей данной поверхности r ортогональностью линейных элементов, приводится к решению системы (140;4). Как было показано Вейнгартеном, решение этой системы можно заменить решением одного линейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка с одной неизвестной функцией и последующими квадратурами.

Условие ортогональности линейных элементов (140;4) ввиду произвольности дифференциалов du^i , равносильно косо́й симметрии скалярного произведения $r_i r_h$, в силу чего можно положить

$$r_i r_h = \varphi \varepsilon_{ih}, \quad (1)$$

где ε_{ih} — дискриминантный бивектор поверхности r . Коэффициент φ и есть та функция, о которой шла речь. Ее называют *характеристической функцией изгиба*. Покажем, что задание этой функции позволяет найти поверхность r_1 квадратурами. Запишем разложение

$$r_s = l_s^k r_k + q_s n, \quad (2)$$

где n — орт нормали поверхности r . Используя равенство (1), находим

$$r_i r_s = \varphi \varepsilon_{is} = l_s^k r_i r_k = l_s^k g_{ki}, \quad l_s^k = \varphi g_s^k.$$

Умножая обе части равенства (2) на вектор n , находим

$$q_s = nr_s.$$

Учитывая это, вычислим косую производную

$$(r_i r_s)_1^s = h_i^s n r_s = h_i^s q_s = (\varphi e_{is})_1^s = -\varphi_i.$$

Отсюда имеем

$$q_s = \frac{1}{K} h_s^i \varphi_i.$$

Разложение (2) принимает теперь вид

$$r_s = \frac{1}{K} h_s^i \varphi_i n + \varphi g_s^i r_i \quad (3)$$

и позволяет найти вектор r_1 квадратурами

$$r_1 = \int \left(\frac{1}{K} h_s^i \varphi_i n + \varphi g_s^i r_i \right) du^s. \quad (4)$$

Характеристическая функция φ , конечно, не произвольна, так как должна удовлетворять дифференциальному уравнению, которое мы получим, составляя условие интегрируемости системы (3). Это условие имеет вид

$$r_{s1}^s = \frac{1}{K} h_s^i \varphi_i n^s + h_s^i \left(\frac{\varphi_i}{K} \right)_1^s n + \varphi g_s^i h_i^s n + g_s^i \varphi^s r_i = 0.$$

Первое и последнее слагаемые взаимно уничтожаются, следовательно, *характеристическое уравнение*, которому должна удовлетворять функция φ , есть

$$h^{is} \left[\left(\frac{\varphi_i}{K} \right)_{1s} + \varphi g_{is} \right] = 0. \quad (5)$$

Каждое решение этого уравнения приводит к вполне интегрируемой системе (3), определяющей поверхность r_1 квадратурами.

2. Уравнение (3) и характеристическое уравнение (5) можно записать в элементах сферического отображения поверхности r . Пользуясь связью бивекторов $e^{is} = K e^{is}$ и формулой (77;5), находим

$$\begin{aligned} r_i &= \varphi g_i^s r_s + \frac{1}{K} h_i^s \varphi_s n = -\frac{\varphi}{K} h_i^s n_s + \frac{1}{K} h_i^s \varphi_s n = \\ &= \frac{1}{K} e^{sh} h_{hi} (-\varphi n_s + \varphi_s n) = e^{sh} h_{hi} (-\varphi n_s + \varphi_s n), \end{aligned}$$

или

$$r_i = h_i^s (\varphi_s n - \varphi n_s), \quad (6)$$

где индекс у h_i^s поднят бивектором e^{ts} .

Характеристическое уравнение (5) можно преобразовать аналогичным путем, а можно заново получить как условие интегрируемости системы (6)

$$r_{i||s}^i = h_i^s (\varphi_{s||i} n + \varphi_s n^i - \varphi^i n_s + \varphi \gamma_s^i n) = 0,$$

что равносильно условию:

$$h^{ts} (\varphi_{i||s} + \varphi \gamma_{is}) = 0. \quad (7)$$

3. С помощью четвертой тангенциальной координаты ψ поверхности r ее второй тензор записывается в виде (87;5) $h_{is} = -\psi_{i||s} - \psi \gamma_{is}$, а характеристическое уравнение (7) — в виде

$$(\psi^{i||s} + \psi \gamma^{is}) (\varphi_{i||s} + \varphi \gamma_{is}) = 0. \quad (8)$$

Если теперь рассмотреть поверхность R с тангенциальным уравнением $Rn = \varphi$, то из симметрии уравнения (8) относительно функций φ и ψ следует, что функция ψ является характеристической функцией бесконечно малого изгиба поверхности R . Пусть далее $H_{is} = -\varphi_{i||s} - \varphi \gamma_{is}$ — второй тензор поверхности R ; тогда уравнение (8), записанное в виде $H^{ts} h_{is} = 0$, показывает, что асимптотической сети одной из двух рассматриваемых поверхностей соответствует на другой сопряженная сеть, то есть что эти поверхности присоединены относительно главной сети сетей h_{is} и H_{is} .

4. По формулам § 89 для поверхности r имеем

$$r_i = h_i^s [\xi_s \xi], \quad \xi = \sqrt{\varrho} n, \quad \varrho = (-K)^{-\frac{1}{4}}, \quad (9)$$

$$(h_i^s \xi_s)_{||i} = M \xi. \quad (10)$$

Полагая дополнительно

$$\theta = \varphi \sqrt{\varrho},$$

получим вместо (6)

$$r_i = h_i^s (\theta_s \xi - \theta \xi_s). \quad (11)$$

Условие интегрируемости этой системы

$$r_{1||}^i = (h_i^s \theta_s)_{||}^i \xi - \theta (h_i^s \xi_s)_{||}^i = 0$$

приводят в силу (10) к уравнению Мутара

$$(h_i^s \theta_s)_{||}^i = M\theta. \tag{12}$$

Если решение θ этого уравнения не выражается линейно через координаты вектора ξ^1 , которые тоже являются его решениями, то квадратурами из (11) мы найдем поверхность r , соответствующую поверхности r ортогональностью линейных элементов.

Если сеть h_{is} принять за координатную, то (12) примет вид (ср. (89;5'))

$$\partial_{12}\theta = N\theta.$$

В частности, бесконечно малые изгибания прямого коноида с радиусом-вектором (см. § 89)

$$r = r \left(uV, -uv, \int (V - vV') dv \right)$$

определяются решением уравнения $\partial_{12}\theta = 0$. Пусть

$$\theta = U_1(u) + V_1(v).$$

Так как для рассматриваемого коноида вектор Лельёвра

$$\xi = \xi(v, V, u),$$

то по формулам (11) найдем радиус-вектор

$$r = r \left[(V_1 - U_1)v - 2 \int V_1 dv, (V_1 - U_1)V - 2 \int V_1 V' dv, (V_1 - U_1)u + 2 \int U_1 du \right],$$

зависящий от двух произвольных функций $U_1(u)$, $V_1(v)$ и определяющий поверхность, соответствующую коноиду ортогональностью линейных элементов.

¹⁾ В случае линейной зависимости, как легко проверить, вместо изгибания получается движение.

5. Формулу (6) можно записать в виде

$$r_i = -\varphi^2 h_i^s \left(\frac{n}{\varphi} \right)_{||s}$$

Отсюда следует, что асимптотической сети одной из двух поверхностей, находящихся в соответствии O , соответствует на другой поверхности сеть равных точечных инвариантов.

Радиус-вектор $\frac{n}{\varphi}$ определяет поверхность, присоединенную поверхности r относительно сети h_{is} .

§ 142. «Венок» поверхностей Дарбу

1. Предположим, что на данной поверхности r известна сопряженная сеть равных точечных инвариантов и пусть A_{is} — ее тензор, находящийся в координатном нормировании. Система уравнений

$$r_i = A_i^s r_s$$

определяет, как и в § 92, поверхность, присоединенную данной относительно сети A . Рассмотрим конгруэнцию лучей, исходящих из точек поверхности r параллельно радиусам-векторам r . Второй тензор этой конгруэнции

$$\check{b}_{ik} = \frac{1}{r^2} (r r_i r_k) = \frac{1}{r^2} A_i^s (r r_s r_k) = \frac{r n}{r^2} A_{ik},$$

где n — орт нормали поверхности r , симметричен, следовательно, поверхность r является средней поверхностью этой конгруэнции. Торсы ее пересекают поверхность r по линиям сопряженной сети A . Мы доказали теорему: каждая конгруэнция лучей, исходящих из точек данной поверхности и параллельных радиусам-векторам поверхности, присоединенной ей относительно сопряженной сети A , есть конгруэнция Рибокура. Данная поверхность

является ее средней поверхностью, а ее торсам соответствуют линии сети A .

2. Задание сети равных точечных инвариантов A на поверхности r_1 позволяет квадратурами найти поверхность R_1 , соответствующую поверхности r_1 ортогонально-стью линейных элементов. Действительно, найдем сначала, как в п. 1, поверхность r_2 и рассмотрим уравнения

$$R_1 = [r_1 r_2], \quad R_2 = [r_2 r_1]. \quad (1)$$

Условия их интегрируемости выполняются:

$$R_{1i}^i = [r_1 r_2^i] = A^{is} [r_1 r_s] = 0, \quad R_{2i}^i = 0.$$

Следовательно, эти уравнения определяют две поверхности с радиусами-векторами

$$R_1 = \int [dr_1 r_2], \quad R_2 = \int [dr_2 r_1]. \quad (2)$$

Условимся во всех дальнейших вычислениях обозначать через

$$n_A, \quad h_{ik}^A, \quad \varepsilon_{ik}^A$$

орт нормали, второй тензор и дискриминантный бивектор поверхности r_A и через

$$N_A, \quad H_{ik}^A$$

орт нормали и второй тензор поверхности R_A .

Поверхности r_1 и R_1 , как и поверхности r_2 и R_2 , находятся в соответствии O , так как

$$r_k R_i = (r_k r_i r) = (nr) \varepsilon_{ki}, \quad r_k R_i = (nr) \varepsilon_{ki}.$$

Согласно (141;1) функции

$$\varphi = nr = nr, \quad \varphi = nr = nr \quad (3)$$

являются характеристическими функциями бесконечно малых изгибаний поверхностей r_1 и r_2 соответственно.

3. Поверхности R_1 и R_2 определены формулами (2) с точностью до параллельного переноса. Докажем, что при соответствующем расположении они будут двумя полостями одной конгруэнции W . Замечая сначала, что вектор r_2 нормален поверхности R_1 ($N_1 = \frac{1}{|r_2|} r_2$), находим ее второй тензор

$$H_{1s} = -\frac{1}{|r_2|} R_{1i} r_{2s} = -\frac{1}{|r_2|} [r_i r_2] A_s^h r_{1h} = -\frac{\Phi_1}{|r_2|} A_{1s}.$$

Аналогично найдем второй тензор поверхности R_2

$$H_{2s} = -\frac{\Phi_2}{|r_1|} A_{2s}.$$

Следовательно, асимптотические сети поверхностей R_1 и R_2 соответствуют сети A_{1s} и соответствуют друг другу.

Рассмотрим теперь разность

$$R_2 - R_1 = \int \{ [drr]_{21} - [drr]_{12} \} = \int d[rr]_{21} = [rr]_{21} + c.$$

Полагая постоянный вектор c равным нулю, получаем

$$R_2 - R_1 = [rr]_{21}. \quad (4)$$

Отсюда следует, что прямая, соединяющая соответствующие точки поверхностей R_1 и R_2 , касается их, так как она ортогональна вектору $[rr]_{21} = |r_1| |r_2| [N_1 N_2]$, то есть ортогональна нормальям этих поверхностей. Утверждение доказано.

4. Формулы (1) можно преобразовать следующим образом:

$$R_i = [r_i r] = -h_i^s [[nn_s] r] = h_i^s [(n_s r) n - (nr) n_s].$$

Имея в виду, что $n_1 = n_2$, и формулы (3), находим отсюда

$$R_{i1} = -\varphi_1^2 h_{i1}^s \left(\frac{n_1}{\varphi_1} \right)_{\parallel s}, \quad R_{i2} = -\varphi_2^2 h_{i2}^s \left(\frac{n_2}{\varphi_2} \right)_{\parallel s}. \quad (5)$$

Таким образом, сеть B , определяемая тензором h_{i1} и соответствующая асимптотической сети поверхности r_1 , является сопряженной сетью равных точечных инвариантов поверхности R_1 . Точно так же сеть C , соответствующая сети h_{i2} , сопряжена и имеет равные точечные инварианты на поверхности R_2 .

Так как сети B и C , как асимптотические сети двух присоединенных относительно сети A поверхностей r_1 и r_2 , аполярны, то сети A , B , C образуют тройку попарно аполярных сетей.

5. Предыдущие построения показывают, что задание сопряженной сети A равных точечных инвариантов на поверхности r_1 позволяет одними квадратурами найти четыре поверхности r_1, r_2, R_1, R_2 .

Различные взаимоотношения между этими поверхностями можно изобразить схемой

$$\left. \begin{array}{l} r_1 - A - r_2 \\ R_1 - W - R_2 \end{array} \right\} \quad (6)$$

в которой запись $r_1 - A - r_2$ указывает, что поверхности r_1 и r_2 присоединены относительно сети A , а запись $R_1 - W - R_2$, что поверхности R_1 и R_2 являются двумя полостями одной конгруэнции W . Соответствие O между поверхностями r_1 и R_1 , так же как и между поверхностями r_2 и R_2 , указано тем, что их радиусы-векторы стоят в одном столбце.

Если добавить сверху и снизу еще две строчки из букв, указывающих асимптотические сети поверхностей верхнего и нижнего ряда, то вместо (6) получим

$$\left. \begin{array}{cc} B & C, \\ r_1 - A - r_2, \\ R_1 - W - R_2, \\ A & A. \end{array} \right\} \quad (7)$$

Как было показано в § 141, п. 5, асимптотической сети каждой из четырех поверхностей r_1, r_2, R_1, R_2 соответствует на поверхности, находящейся с ней в соответствии O , сопряженная сеть равных точечных инвариантов, следовательно, равные точечные инварианты имеют сеть B на поверхности r_1 , сеть C на поверхности R_2 и сеть A на поверхностях r_2 и r_1 .

6. В силу последнего замечания каждая из этих четырех поверхностей может быть принята за исходную поверхность предыдущего построения, начатого с поверхности r_1 и сети A . То же самое можно сказать и о поверхностях, получаемых при этих построениях. Возникает естественный вопрос: к чему приведут эти построения? Исследование Дарбу ([1], т. IV) показало, что цепь таких построений не бесконечна, а замыкается и приводит к «венку» Дарбу, состоящему из двенадцати поверхностей. В принятых выше обозначениях поверхностям «венка» Дарбу соответствует схема

$$\left. \begin{array}{cccccccc} B & B & C & C & A & A & B \\ r_1 - W - r_1 - A - r_2 - W - r_3 - B - r_4 - W - r_5 - C - r_6 = r_6, \\ R_1 - B - R_1 - W - R_2 - C - R_3 - W - R_4 - A - R_5 - W - R_6 = R_6 \\ C & A & A & B & B & C & C \end{array} \right\} \quad (8)$$

В этой схеме поверхность r совпадает с поверхностью r ,
а поверхность R — с поверхностью R .

Чтобы доказать справедливость этой схемы, заметим сначала, что, согласно предыдущему, радиусы-векторы поверхностей

$$R, R, r, r \quad (9)$$

удовлетворяют равенствам

$$dR = [dr \ r], \quad dr = [dR \ R]. \quad (10)$$

Докажем обратное: условия (10) достаточны, чтобы поверхности (9) были связаны всеми соотношениями, следующими для них из схемы (8).

Соответствие O между поверхностями r и R очевидно, так как

$$dR \ dr = [dr \ r]dr = 0.$$

Если A и B — асимптотические сети поверхностей R и r то, согласно § 141, п. 5, на поверхностях r и R соответственно они будут сопряженными сетями равных точечных инвариантов.

Согласно (141; 6) имеем

$$R_i = h_i^s (\varphi_s n - \varphi n_s) = -\varphi^2 h_i^s \left(\frac{n}{\varphi} \right)_{||s}, \quad (11)$$

что приводит, в силу равенств (3) и (10), к следующему

$$\begin{aligned} R_i &= h_i^s (\varphi_s n - \varphi n_s) = [r_i r] = -h_i^s [[n n_s] r] = \\ &= h_i^s [n (n_s r) - n_s (nr)]. \end{aligned}$$

Считая, что тензор h_{is} не вырождается и, следовательно, что векторы n и n_s независимы, получаем отсюда

$$\varphi = nr, \quad \varphi_s = n_s r. \quad (12)$$

Однако из первого следует, что $\varphi_s = n_s r + nr_s$, что при сравнении со вторым дает $nr_s = 0$. Таким образом, поверхности r и r находятся в соответствии Петерсона, и мы можем считать, что $n = n$. Аналогично этому $N = N$.

Так как, далее, согласно (10), $R dr = 0$, то $R = \pm |R| n$, в силу чего из (10) и (11) имеем

$$r_i = -h_i^s [nr_s] = [R_i R] = h_i^s [\varphi_s n - \varphi n_s, \pm |R| n] = -h_i^s [n_s \varphi R],$$

что возможно лишь при

$$R = -\frac{n}{\varphi} = -\frac{n}{nr} = -\frac{n}{nr}. \quad (13)$$

Равенство (11) принимает теперь вид

$$R_i = \varphi^2 h_i^s R_s, \quad (14)$$

откуда и следует, что поверхности R и R присоединены относительно сети h_{is} , принятой за сеть B . Аналогично доказывается, что

$$r = -\frac{N}{NR}. \quad (15)$$

и что поверхности r и r присоединены относительно сети A .

Асимптотические сети поверхностей R и r , главные для сетей A и B , будут соответствовать друг другу и сети C .

Все соотношения между поверхностями (9) установлены. Для продолжения полученной схемы рассмотрим четверку поверхностей

$$r, r, R = R + [rr], \quad R = -\frac{R}{Rr}. \quad (16)$$

Условия, аналогичные условиям (10), для них выполнены. Действительно, в силу (10) и (13)

$$dR = dR + [dr \ r] + [r \ dr] = [dr \ r], \quad (17)$$

$$[dR \ R] = \left[[dr \ r] \left(-\frac{R}{Rr} \right) \right] = dr. \quad (18)$$

Следовательно, все соотношения схемы (8) для поверхностей (16) верны. Кроме того, асимптотические сети поверхностей R и R соответствуют. Прямая, соединяющая соответствующие точки этих поверхностей, касается их, так как она параллельна вектору $R - R = [r \ r]$, а векторы r и r , как это следует из (15) и (17), нормальны поверхностям R и R соответственно.

Продолжая аналогичные построения, мы получим следующие четверки поверхностей:

$$R, \ R, \ r = r + [RR], \ r = -\frac{r}{rR}; \quad (19)$$

$$r, \ r, \ R = R + [rr], \ R = -\frac{R}{Rr}; \quad (20)$$

$$R, \ R, \ r = r + [RR], \ r = -\frac{r}{rR}; \quad (21)$$

$$r, \ r, \ R = R + [rr], \ R = -\frac{R}{Rr}; \quad (22)$$

$$R, \ R, \ r = r + [RR], \ r. \quad (23)$$

Выразим радиусы-векторы всех полученных поверхностей через векторы (9), учитывая, что, согласно (13),

$$Rr = -1. \quad (24)$$

Последовательно находим:

$$R_2 = R_1 + [rr]_{21}, \quad R_3 = -\frac{R_1}{Rr_1},$$

$$r_3 = r_2 + \left[-\frac{R_1}{Rr_1} (R_1 + [rr]_{21}) \right] = -\frac{r_1 + [RR]_1}{Rr_1}, \quad r_4 = -\frac{r_1}{rR_{11}},$$

$$R_4 = -\frac{R_1}{Rr_1} + \left[-\frac{r_1}{rR_{11}} \left(-\frac{r_1 + [RR]_1}{Rr_1} \right) \right] = -\frac{R_1}{Rr_{11}},$$

$$R_5 = -\frac{R_1 + [rr]_{21}}{Rr_{12}}, \quad r_5 = -\frac{r_2}{rR_{21}}, \quad r_6 = r_1 + [RR]_1,$$

$$R_6 = -\frac{R_1 + [rr]_{21}}{Rr_{12}} + \left[(r_1 + [RR]_1) \left(-\frac{r_2}{rR_{21}} \right) \right] = R.$$

Поверхности R_6 и R_1 совпали, следовательно, следующая поверхность R_7 совпадает с R_1 , но тогда

$$r_7 = r_6 + [RR]_{76} = r_6 + [RR]_1 + [RR]_1 = r_1.$$

Таким образом, совпадают поверхности r_7 и r_1 , а следовательно, и поверхности r_7 и r_1 . Цикл построений замкнулся и справедливость схемы (8) доказана.

Отметим еще некоторые связи между поверхностями этой схемы. Будем искать поверхность r_2^* , полярную поверхность R относительно единичной сферы с центром в начале координат. Касательная плоскость этой поверхности ортогональна радиусу-вектору R и отстоит от начала координат на расстоянии $\frac{1}{|R|}$. Уравнение этой плоскости, записанное в виде

$$Rr_2^* = 1, \quad (24')$$

является тангенциальным уравнением поверхности r_2^* .

Рассмотрим теперь равенство (24). Вектор R , как это следует из (10), нормален поверхности r_1 и, следовательно, поверхности r_2 . Но тогда это равенство можно рассматривать как тангенциальное уравнение поверхности r_2 . Из сравнения (24) и (24') следует, что $r_2 = -r_2^*$, то есть, что поверхности r_2 и r_2^* симметричны относительно начала координат.

Таким образом, поверхность r_2 получена из поверхности R произведением полярного преобразования относительно единичной сферы и симметрии относительно центра этой сферы. Можно сказать, что поверхности r_2 и R полярны относительно мнимой сферы единичного радиуса, определяемой уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = -1. \quad (25)$$

Так как все поверхности схемы (8) равноправны, то полярными относительно сферы (25) будут следующие пары поверхностей:

$$(R_2, r_1), (R_1, r_5), (R_2, r_4), (R_3, r_1), (R_4, r_6), (R_5, r_3). \quad (26)$$

Соответствие поверхностей называется *радиальным*, если их радиусы-векторы коллинеарны. Подвергая полярному относительно сферы преобразованию пару поверхностей, находящихся в соответствии Петерсона, мы получим пару поверхностей, радиусы-векторы которых параллельны нормальным исходных поверхностей, то есть пару поверхностей, находящихся в радиальном соответствии.

Отсюда легко следует, что пары поверхностей

$$(R_6 = R_3, R_3), (R_5, R_2), (R_4, R_1), (r_6 = r_3, r_3), (r_5, r_2), (r_4, r_1) \quad (27)$$

находятся в таких радиальных соответствиях, при

которых асимптотической сети одной поверхности соответствует сопряженная сеть равных точечных инвариантов другой. Тот же результат сразу следует из формул (16) и (19) — (23) и связей между поверхностями, указанных в схеме (8).

7. Предположим, что на поверхности r известны две сопряженные сети равных точечных инвариантов. Если их тензоры A_{is} и A_{is}^* находятся в кодационном нормировании, то такое же нормирование имеют все ∞^1 тензоров:

$$A_{is}^c = \frac{1}{1+c} (A_{is} + cA_{is}^*),$$

где $c = \text{const}$. Каждый тензор A_{is}^c определяет на поверхности r сопряженную сеть равных точечных инвариантов.

Радиусы-векторы поверхностей «венка» Дарбу, построенных по сети A^c (A^*) будем отмечать сверху значком c (*). Это приведет к следующим равенствам:

$$r_2^c = \frac{1}{1+c} (r_2 + cr_2^*), \quad R_1^c = \frac{1}{1+c} (R_1 + cR_1^*), \quad R_2^c = \frac{1}{1+c} (R_2 + cR_2^*). \quad (28)$$

Отсюда следует, что соответствующие точки поверхностей r_2^c лежат на одной прямой, порождающей конгруэнцию прямых, обозначаемую в дальнейшем через $K_2^c(r)$. Аналогично этому мы получим конгруэнции $K_1^c(R)$ и $K_2^c(R)$.

Вводя для характеристических функций бесконечно малых изгибов поверхности r , определяемых сетями

A , A^* и A^c , обозначения φ , φ^* и φ^c , будем иметь, согласно (3),

$$\left. \begin{aligned} \varphi = nr_{22}, \quad \varphi^* = nr_{22}^*, \quad \varphi^c = nr_{22}^c, \\ \varphi^c = \frac{1}{1+c} (\varphi + c\varphi^*). \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Все поверхности r_2^c находятся в соответствии Петерсона с поверхностью r_1 и, следовательно, друг с другом. Отсюда следует, что торсам конгруэнции $K(r_2^c)$ соответствует общая сопряженная сеть поверхностей r_2^c , то есть асимптотическая сеть h_{1s} поверхности r_1 (§ 127, п. 4).

Из выражения производной $R_i = [r_i r_1^c]$ следует, что вектор r_1 нормален поверхностям R_2^c , в силу чего все эти поверхности находятся в соответствии Петерсона, а торсам конгруэнции $K(R_2^c)$ соответствует на поверхности r_1 асимптотическая сеть h_{1s} или сеть B схемы (8).

Рассмотрим конгруэнцию $K(R_1^c)$. Вектор нормали поверхности R_1^c , как это следует из формулы $R_i = [r_i r_2^c]$, коллинеарен вектору r_2^c . Уравнение касательной плоскости поверхности R_1^c будет

$$\Phi = \left(\rho - \frac{R + cR_1^*}{1+c} \right) \left(\frac{r + cr_2^*}{1+c} \right) = 0. \quad (30)$$

Огибающая касательных плоскостей к поверхностям R_1^c в точках одного луча конгруэнции $K(R_1^c)$ определяется уравнением (30) и уравнением $\frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0$. Легко проверить, что эта огибающая будет цилиндром второго порядка, образующие которого параллельны вектору $[r_2^*]$.

Рассмотрим поверхности R , $\overset{*}{R}$, $\overset{c}{R}$. Их радиусы-векторы будут

$$R = -\frac{n}{\varphi}, \quad \overset{*}{R} = -\frac{n}{\overset{*}{\varphi}}, \quad \overset{c}{R} = -\frac{n}{\overset{c}{\varphi}}. \quad (31)$$

Эти поверхности находятся в радиальном соответствии.

Для радиусов-векторов поверхностей r , $\overset{*}{r}$, $\overset{c}{r}$, согласно (23), где следует заменить r на r , r на r и R на R , имеем:

$$\varphi(r - r) = [Rn], \quad \overset{*}{\varphi}(\overset{*}{r} - r) = [\overset{*}{R}n], \quad \overset{c}{\varphi}(\overset{c}{r} - r) = [\overset{c}{R}n].$$

Отсюда следует, что

$$\overset{c}{r} = \frac{\varphi r + c \overset{*}{\varphi} r}{1 + c}. \quad (32)$$

Таким образом, соответствующие точки поверхностей r лежат на одной прямой, принадлежащей касательной плоскости поверхности r . Каждая из этих поверхностей

составляет с поверхностью r две полости конгруэнции $\overset{c}{W}$.

У всех конгруэнций $\overset{c}{W}$ имеется общая фокальная плоскость — касательная плоскость поверхности r . Все их вторые фокальные плоскости образуют пучок плоскостей. Действительно, все эти плоскости проходят через точку поверхности r . Нормали этих плоскостей, или нормали

поверхностей r , как это следует из равенств

$$\overset{c}{r}_i = [\overset{c}{R}_i \overset{c}{R}], \quad \overset{c}{R} = \frac{R + c \overset{*}{R}}{1 + c},$$

ортогональны вектору $[\overset{*}{R}R]$. Прямая, проходящая через точку поверхности r параллельно вектору $[\overset{*}{R}R]$, и будет

общей для рассматриваемых плоскостей, то есть будет осью пучка этих плоскостей.

Переход от данной поверхности к поверхности, составляющей с ней две полости конгруэнции W , называется *асимптотическим преобразованием*. Пользуясь этим определением, полученные выше результаты можно сформулировать так: *задание на поверхности r сопряженной сети A равных точечных инвариантов определяет асимптотическое преобразование поверхности r в поверхность r* . Если известны два асимптотических преобразования поверхности r в поверхности r и r , то определен пучок таких преобразований (пучок преобразований Мутара (см. § 143, п. 2 и [12], § 76) поверхности r в поверхности r) (32).

Соответствующие точки поверхностей r лежат на одной прямой, а касательные плоскости к ним в этих точках образуют пучок с осью, проходящей через соответствующую точку поверхности r .

§ 143. Конгруэнции W

1. Из результатов предыдущего параграфа и формулы (142;4)

$$R_2 = R_1 + [r_2 r_1] \quad (1)$$

следует, что задание бесконечно малого изгибания поверхности R_1 определяет конгруэнцию W , одна фокальная полость которой совпадает с этой поверхностью; луч этой конгруэнции лежит в касательной плоскости поверхности R_1 и ортогонален директрисе ее бесконечно малого изгибания, параллельной вектору r_1 .

Так как, согласно (142;1), $R_2 = [r_2 r_1]$, то вектор r_2 нормален поверхности R_2 (второй полости этой конгруэнции). Этими свойствами обладает, как будет показано ниже,

произвольная конгруэнция W ; именно: для каждой полости произвольной конгруэнции W можно квадратурами найти ее бесконечно малое изгибание; директриса этого изгибания параллельна вектору нормали второй полости этой конгруэнции.

2. Построение конгруэнции W по заданной ее фокальной полости r зависит от решения уравнения Мутара (141;12)

$$(h_i^s \theta_s)_i^t = M\theta. \quad (2)$$

Вектор Лельевра ξ поверхности r удовлетворяет этому уравнению

$$(h_i^s \xi_s)_i^t = M\xi. \quad (3)$$

Действительно, если это решение θ известно, то из уравнений (141;11)

$$R_i = h_i^s (\theta_s \xi - \theta \xi_s) = -\theta^2 h_i^s \left(\frac{\xi}{\theta} \right)_s \quad (4)$$

мы находим поверхность R , соответствующую поверхности r ортогональностью линейных элементов. Радиус-вектор

$$R_1 = -\frac{\xi}{\theta} \quad (5)$$

определяет поверхность, присоединенную поверхности R относительно сети h_{is} , и поверхность r с радиусом-вектором

$$r_1 = r_1 + [R_1 R_1], \quad (6)$$

являющуюся второй полостью искомой конгруэнции W . Вектор R ввиду равенства $r_1 = [R_1 R_1]$ нормален поверхности r , и если ξ — вектор Лельевра этой поверхности, то мы можем записать (см. (124;33)):

$$r_1 - r_1 = [\xi_1 \xi_1],$$

что при сравнении с (6) и (5) дает

$$R = \theta \xi. \quad (7)$$

Вектор ξ удовлетворяет уравнению Мутара с тем же тензором h_i^s :

$$(h_i^s \xi_s)^i = M \xi. \quad (8)$$

Внося сюда значение $\xi = \frac{R}{\theta}$ и учитывая, что, согласно (4) и (5), $\frac{1}{\theta^2} h_i^s R_s = R_i$, получаем

$$\begin{aligned} \left[h_i^s \left(\frac{R}{\theta} \right)_s \right]^i &= \left[\frac{1}{\theta^2} h_i^s R_s \theta + R h_i^s \left(\frac{1}{\theta} \right)_s \right]^i = \\ &= \left(\frac{1}{\theta^2} h_i^s R_s \right)^i \theta + R \left[h_i^s \left(\frac{1}{\theta} \right)_s \right]^i = \theta \xi \left[h_i^s \left(\frac{1}{\theta} \right)_s \right]^i = M \xi. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$M = \theta \left[h_i^s \left(\frac{1}{\theta} \right)_s \right]^i. \quad (9)$$

Таким образом, с помощью частного решения θ уравнения Мутара (2) мы получили новое уравнение Мутара (8), коэффициент M которого определен формулой (9), и с помощью квадратур решение ξ первого уравнения преобразовали в решение ξ второго. Указанное преобразование называется *преобразованием Мутара* ¹⁾. Такое же название нос и переход от поверхности r к поверхности r .

3. Имеет место обратная теорема: *фокальные полости r и r произвольной конгруэнции W связаны преобразованием Мутара*.

¹⁾ Мы рассмотрели преобразование Мутара векторного решения. Ясно, что оно возможно и для скалярного решения, например для каждой координаты вектора ξ .

Пусть ξ и ξ_1 — векторы Лельевра поверхностей r и r_1 . Тогда имеют место формулы

$$r_1 - r = [\xi_1 \xi], \quad r_i = h_i^s [\xi_s \xi], \quad r_{i1} = h_i^s [\xi_s \xi_1]; \quad (10)$$

$$(h_i^s \xi_s)_1^i = M \xi, \quad (h_i^s \xi_s)_1^i = M \xi_1, \quad (11)$$

с помощью которых находим

$$r_{i1} - r_i = [\xi_1 \xi] + [\xi \xi_1] = h_i^s [\xi_s \xi] - h_i^s [\xi_s \xi_1],$$

что можно записать в виде

$$[h_s^k \xi_k + \xi_s, h_i^s \xi - \delta_i^s \xi] = 0. \quad (12)$$

Пусть v^i и w^i — направляющие векторы сети h_{is} , такие что $h_i^s v^i = -v^s$, $h_i^s w^i = w^s$, тогда из (12) находим

$$[(\xi_s - \xi_s) v^s, \xi + \xi_1] = 0, \quad [(\xi_s + \xi_s) w^s, \xi - \xi_1] = 0.$$

Отсюда следует, что

$$(\xi_s - \xi_s) v^s = \alpha (\xi + \xi_1), \quad (\xi_s + \xi_s) w^s = \beta (\xi - \xi_1). \quad (13)$$

С помощью вектора

$$p_s = \frac{\beta v_s - \alpha w_s}{v_s w^s},$$

для которого $p_s v^s = \alpha$, $p_s w^s = \beta$, уравнения (13) приводятся к виду

$$(\xi_s + h_s^k \xi_k) v^s = (p_s \xi - h_s^k p_k \xi) v^s,$$

$$(\xi_s + h_s^k \xi_k) w^s = (p_s \xi - h_s^k p_k \xi) w^s.$$

В силу независимости векторов v^s и w^s отсюда имеем

$$\xi_s + h_s^k \xi_k = p_s \xi - h_s^k p_k \xi. \quad (14)$$

Вычисление кривой производной по индексу s дает

$$\xi_{s1}^s + (h_s^k \xi_k)_1^s - p_{s1}^s \xi + \xi_s p^s + (h_s^k p_k)_1^s \xi + h_s^k p^s \xi_k = 0.$$

Заменяя здесь $(h_s^k \xi_k)_1^s = M \xi_1^s$, $\xi_{s1}^s = 0$ и, согласно (14),

$$\xi_1^s p^s = -h_s^k \xi_k p^s - h_s^k p^s p_k \xi_1^s,$$

находим

$$M \xi_1^s - p_{s1}^s \xi_1^s - h_s^k p^s p_k \xi_1^s + (h_s^k p_k)_1^s \xi_1^s = 0. \quad (15)$$

Векторы ξ и ξ_1 не коллинеарны (противное приводит к совпадению поверхностей r и r_1), поэтому (15) влечет за собой равенства

$$p_{s1}^s = 0, \quad -(h_s^k p_k)_1^s + h_s^k p_k p^s = M.$$

Из первого следует градиентность вектора p_s , второе, если положить $p_s = \partial_s p$, $e^{-p} = \theta$, примет вид

$$(h_s^k \theta_k)_1^s = M \theta. \quad (16)$$

Таким образом, функция θ есть частное решение уравнения Мутара (11).

Если теперь свернуть обе части (14) с h_i^s , то получим

$$\xi_i + h_i^s \xi_s = -p_i \xi + h_i^s p_s \xi. \quad (17)$$

Следовательно, замена ξ на ξ_1 изменяет знак вектора p_s , то есть заменяет θ на $\frac{1}{\theta}$, поэтому вместо (16) из (17) получим,

$$M \frac{1}{\theta} = \left[h_s^k \left(\frac{1}{\theta} \right)_k \right]_1^s.$$

Последнее означает, что второе уравнение Мутара (11) получено из первого преобразованием Мутара относительно частного решения θ . Теорема доказана. Вместе с тем доказано утверждение, высказанное в п. 1 этого параграфа.

Отыскание частного решения θ уравнения Мутара (11) для данной конгруэнции W требует только квадратур: из (14) находим

$$-p_s = \partial_s \ln \theta = \frac{1}{[\xi \xi_1]^2} ([\xi \xi_s] - r_s) [\xi \xi_1], \quad (18)$$

причем вектор правой части, по доказанному, будет градиентным.

После того как θ найдено, определяются радиусы-векторы $R = \theta \xi$ и $R = -\frac{1}{\theta} \xi$ поверхностей R и R , находящихся в соответствиях O с фокальными полостями r и r соответственно. Продолжая далее, как в § 142, мы построим все поверхности Дарбу схемы (142;8).

4. Пусть данная конгруэнция W нормальна. Тогда директриса бесконечно малого изгиба одной ее фокальной полости, параллельная нормали второй полости, лежит в касательной плоскости первой поверхности. Это значит, что радиус-вектор R поверхности, находящейся с фокальной поверхностью r в соответствии O , можно записать в виде $R = r_j p^j$. Из формулы (141;1) имеем

$$r_i R_k = r_i r_j p^j{}_{|k} = -\tilde{p}_{i|k} = \varphi e_{ik}.$$

Вектор \tilde{p}_i удовлетворяет уравнению Киллинга; отсюда следует, что фокальные полости нормальной конгруэнции W наложимы на поверхности вращения. Другим способом этот результат был получен в § 105.

5. Рассмотрим уравнение Мутара вида

$$(h_i^s \xi_s)_i = 0, \quad (19)$$

допускающее решение

$$\xi = U(u) + V(v). \quad (20)$$

Формулы Лельевра

$$r_i = h_i^s [\xi_s \xi]$$

определяют поверхность, на которой сеть h_{is} асимптотическая.

Примем за преобразующее частное решение уравнения (19) $\theta = 1$. Из уравнения (14), принимающего вид $\xi_s = -h_s^k \xi_k$, найдем

$$\xi = U(u) - V(v). \quad (21)$$

Вторая полость конгруэнции W определится вектором

$r_1 = r + [\xi_1 \xi_1]$, а ее средняя поверхность — вектором $r_0 = \frac{1}{2}(r_1 + r_1)$. Пользуясь равенствами

$$\xi_{1i} = -h_{i0}^s \xi_s, \quad \xi_i = -h_{i1}^s \xi_s,$$

находим

$$\begin{aligned} r_{i0} &= \frac{1}{2}(r_i + r_i) = \frac{1}{2} h_i^s \{[\xi_s \xi_1] + [\xi_s \xi_1]\} = \\ &= -\frac{1}{2} \{[\xi_i \xi_1] + [\xi_i \xi_1]\} = [UU_i] + [VV_i]. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$r_0 = \int [U dU] + [V dV] = U_1 + V_1, \quad (22)$$

то есть средняя поверхность конгруэнции является поверхностью переноса; ее линиям переноса соответствуют асимптотические линии фокальных поверхностей.

Так как $dU = [U dU]$ и $dV = [V dV]$, то вектор U коллинеарен бинормали первой линии переноса, а вектор V — бинормали второй линии переноса. Кроме того, луч конгруэнции параллелен вектору $r_1 - r_1 = [\xi_1 \xi_1] = 2[UV]$, следовательно, он является пересечением соприкасающихся плоскостей линий переноса.

Имеет место обратное: *соприкасающиеся плоскости линий переноса произвольной поверхности переноса пересекаются по лучам конгруэнции W, для которой данная поверхность является средней, а сети переноса соответствуют асимптотические сети фокальных поверхностей.*

Пусть поверхность переноса задана вектором (22), β и β — орты бинормалей, а τ и τ — кручения линий переноса. Положим

$$U = (\tau_u)^{-\frac{1}{2}} \beta_u, \quad V = (-\tau_v)^{-\frac{1}{2}} \beta_v$$

и за u и v примем длины дуг линий переноса, тогда

$$[UU'] = U', \quad [VV'] = V'.$$

Если теперь за векторы Лельевра принять векторы (20) и (21), то построенные по ним поверхности r и r_1 будут фокальными для конгруэнции прямых пересечений соприкасающихся плоскостей линий переноса, асимптотические линии их будут соответствовать сети переноса и друг другу. Вещественными эти поверхности будут лишь тогда, когда кручения τ и τ_1 будут иметь разные знаки (в этом случае векторы U и V будут вещественными).

Для того чтобы построенная таким способом конгруэнция была нормальной, необходимо и достаточно, чтобы векторы ξ и ξ_1 были ортогональны. В этом случае

$$\xi_1 \xi = (U + V)(U - V) = U^2 - V^2 = \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_1} = 0.$$

Отсюда следует, что $\tau = -\tau_1 = \text{const}$, то есть что линии переноса искомой поверхности должны иметь постоянные кручения, равные по абсолютной величине и обратные по знаку.

ГЛАВА XIII

ИЗГИБАНИЕ НА КИНЕМАТИЧЕСКИ СОПРЯЖЕННОМ ОСНОВАНИИ

§ 144. Качение поверхности по ее изгибанию

1. Рассмотрим поверхность S и некоторое ее изгибание \dot{S} . Произвольному трехграннику $T(M)$ поверхности S в ее точке M , связанному с ортогональной сетью (v, w) , однозначно соответствует трехгранник $\dot{T}(\dot{M})$ поверхности \dot{S} в точке \dot{M} , соответствующей точке M , связанной с сетью, соответствующей сети (v, w) . Считая поверхность \dot{S} неподвижной, мы можем для каждой ее точки однозначно определить такое положение поверхности S в пространстве, при котором ее трехгранник $T(M)$ совмещен с трехгранником $\dot{T}(\dot{M})$.

Перемещение поверхности S , как жесткого тела, при котором она занимает положения, соответствующие различным значениям точки \dot{M} , называется *качением поверхности S по ее изгибанию \dot{S}* ([1], т. IV). В общем случае качение имеет две степени свободы. До единицы число степеней свободы понижается в случае двух наложимых линейчатых поверхностей, который рассмотрен ниже.

2. Бесконечно малое смещение поверхности S при качении ее по поверхности \dot{S} в некотором направлении du^i есть вращение вокруг некоторой оси, проходящей через точку M . Докажем, что эта ось лежит в общей касательной плоскости поверхностей S и \dot{S} в точке $M = \dot{M}$. При бесконечно малом смещении подвижного трехгранника из точки M в точку M' , определяемом дифференциалом

лами du^i , его векторы получают, согласно (83;2), приращения

$$\left. \begin{aligned} dv &= (t_i w + q_i n) du^i, & dw &= (-t_i v - p_i n) du^i, \\ dn &= (-q_i v + p_i w) du^i. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Если ввести вектор Дарбу

$$\Omega_i = t_i n - p_i v - q_i w, \quad (2)$$

то (1) можно записать в виде

$$dv = [\Omega_i du^i v], \quad dw = [\Omega_i du^i w], \quad dn = [\Omega_i du^i n]. \quad (3)$$

Отсюда следует, что бесконечно малое смещение трехгранника $T(M)$, когда его вершина смещается из точки M в точку M' , есть вращение вокруг оси, проходящей через точку M в направлении вектора $\Omega_i \frac{du^i}{dt}$, и что этот вектор является вектором угловой скорости полученного вращения.

Пусть точке M' соответствует на поверхности \tilde{S} точка M^* . Движение, переводящее поверхность S из положения, соответствующего точке M , в положение, соответствующее точке M' , совмещает трехгранники $T(M')$ и $T(M^*)$. Это движение можно совершить двумя вращениями, из которых первое обратное вращению, совмещающему трехгранники $T(M)$ и $T(M')$, а второе совмещает трехгранники $T(M)$ и $T(M^*)$. Первое вращение определяется вектором $-\Omega_i \frac{du^i}{dt}$, а второе — вектором

$$\Omega_i^* \frac{du^i}{dt} = (t_i^* n^* - p_i^* v^* - q_i^* w^*) \frac{du^i}{dt} = (t_i n - p_i v - q_i w) \frac{du^i}{dt}.$$

Вектор суммарного вращения будет равен сумме

$$(-\Omega_i + \Omega_i^*) \frac{du^i}{dt}.$$

Учитывая, что в силу наложимости поверхностей S и \tilde{S} трансверсальные векторы t_i^* и t_i равны, и пользуясь формулами (83;3), находим

$$(\Omega_i^* - \Omega_i) du^i = (h_i^k - h_i^k) (-w_k v + v_k w) du^i = r_k (h_i^k - h_i^k) du^i.$$

Так как этот вектор лежит в касательной плоскости поверхности S , то наше утверждение доказано. Направление этого вектора

$$\delta u^k = (\overset{*}{h}_i^k - h_i^k) du^i,$$

совпадающего с направлением мгновенной оси вращения, и направление качения du^i называются *кинематически сопряженными относительно пары наложимых поверхностей S и $\overset{*}{S}$* . Эти направления определяются условием

$$(\overset{*}{h}_{ik} - h_{ik}) du^i \delta u^k = 0, \quad (4)$$

из которого видно, что соотношение кинематической сопряженности двух направлений обладает свойством взаимности.

3. Сеть, определяемую тензором $\overset{*}{h}_{ik} - h_{ik}$, Фосс [99] называет *характеристической системой*. Нормальные кривизны линий этой сети на поверхностях S и $\overset{*}{S}$ равны, так как их направляющие орты удовлетворяют уравнению

$$(\overset{*}{h}_{ik} - h_{ik}) v^i v^k = \overset{*}{\sigma} - \sigma = 0.$$

4. Если кинематически сопряженные направления всегда сопряжены в обычном смысле на одной из поверхностей, то, как это следует из (4), они будут сопряжены и на другой. Последнее возможно лишь тогда, когда тензоры $\overset{*}{h}_{ik}$ и h_{ik} пропорциональны. Однако ввиду наложимости поверхностей S и $\overset{*}{S}$ отсюда следует, что $\overset{*}{h}_{ik} = \pm h_{ik}$, то есть что рассматриваемые поверхности либо конгруэнтны, либо симметричны.

5. Если любая пара кинематически сопряженных направлений вместе с тем ортогональна, то

$$\overset{*}{h}_{ik} - h_{ik} = \lambda g_{ik}. \quad (5)$$

Из условий Петерсона и Гаусса находим

$$(\overset{*}{h}_{ik} - h_{ik})_{|j}^k = \lambda^h g_{ih} = -\tilde{\lambda}_i = 0,$$

$$K = \overset{*}{K} = \frac{1}{2} \overset{*}{h}_{ik} \overset{*}{h}^{ik} = \frac{1}{2} (h_{ik} + \lambda g_{ik}) (h^{ik} + \lambda g^{ik}) = K + 2\lambda H + \lambda^2.$$

Из первого следует, что $\lambda = \text{const}$, а из второго находим среднюю кривизну поверхности S :

$$H = -\frac{1}{2}\lambda.$$

Средняя кривизна второй поверхности

$$\dot{H}^* = \frac{1}{2}g^{ik}\dot{h}_{ik}^* = \frac{1}{2}g^{ik}(h_{ik} - 2Hg_{ik}) = -H.$$

Средние кривизны рассматриваемых поверхностей постоянны и отличаются только знаками.

Линии кривизны этих двух поверхностей соответствуют, так как, согласно (5),

$$g_{(i}^s \dot{h}_{k)s}^* = g_{(i}^s \dot{h}_{k)s}.$$

Обратно, если дана поверхность S постоянной средней кривизны H , то тензор

$$\dot{h}_{ik}^* = h_{ik} - 2Hg_{ik},$$

удовлетворяя условиям Гаусса и Петерсона, определяет наложимую на нее поверхность \dot{S}^* с постоянной средней кривизной $\dot{H}^* = -H$, и каждая пара кинематически сопряженных относительно этих поверхностей направлений будет ортоговальна.

6. Предположим, что сеть $\dot{h}_{ik}^* - h_{ik}$ вырождается в дважды взятое семейство линий (v) . В этом случае

$$\dot{h}_{ik}^* - h_{ik} = \lambda v_i v_k, \quad \dot{h}_{ik}^* = h_{ik} + \lambda v_i v_k.$$

Из условий Гаусса имеем

$$\dot{h}_{ik}^* \dot{h}^{ik} = 2\dot{K}^* = (h_{ik} + \lambda v_i v_k)(h^{ik} + \lambda v^i v^k) = 2K + 2\lambda h_{ik} v^i v^k.$$

Однако $\dot{K}^* = K$, следовательно,

$$h_{ik} v^i v^k = \dot{h}_{ik}^* v^i v^k = 0.$$

Таким образом, наложимые поверхности S и \dot{S}^* имеют общее семейство (v) асимптотических линий. По теореме Бонне (§ 99, п. 4) обе эти поверхности линейчатые. Каче-

ние в данном случае имеет одну степень свободы. Для доказательства предположим, что две соответствующие точки M и M^* этих поверхностей, прямолинейные образующие, на которых они лежат, и касательные плоскости в этих точках совмещены. Покажем, что при этих условиях касание имеет место вдоль всей общей образующей. Если $v = r_k v^k$ — единичный вектор образующей, то при смещении вдоль нее

$$dn = -q_i du^i v + p_i du^i w.$$

Однако $q_i du^i = h_{ik} v^k du^i = 0$, так как направление $du^i = v^i ds$ асимптотическое, а

$$p_i du^i = -h_{ik} \tilde{v}^k ds = -\sqrt{-K} h_{ik} \tilde{v}^k ds = \sqrt{-K} ds$$

и зависит только от коэффициентов первой формы. Если \tilde{n}^* — орт нормали поверхности S^* , то, согласно предыдущему, $dn = \sqrt{-K} ds w$, $d\tilde{n}^* = \sqrt{-K} ds w^*$. Следовательно, векторы n и \tilde{n}^* , совпадая в одной точке образующей, совпадают на ней всюду, что и требовалось доказать.

Качение поверхности S вдоль любой прямолинейной образующей поверхности S^* , в силу доказанного, оставляет ее неподвижной, а качение в любом другом направлении сводится к мгновенному вращению вокруг образующей, так что это качение имеет одну степень свободы.

7. Возвращаясь к общему случаю, рассмотрим качение поверхности S по поверхности S^* вдоль кривой L , заданной уравнением $u^i = u^i(t)$. Мгновенные оси вращения, связанные жестко с этими поверхностями, описывают две линейчатые поверхности R и R^* . Докажем, что эти поверхности наложимы. Уравнение первой поверхности

$$R = r + \lambda v = r(u^i(t)) + \lambda r_k v^k,$$

где v^k удовлетворяет условию кинематической сопряженности

$$\tilde{h}_{ik} du^i v^k = h_{ik} du^i v^k. \quad (6)$$

Ее линейный элемент

$$\begin{aligned} dR^2 &= (dr + \lambda dv + v d\lambda)^2 = \\ &= (g_{ik} + \lambda^2 t_i t_k + \lambda^2 q_i q_k + 2\lambda v_i t_k) \frac{du^i}{dt} \frac{du^k}{dt} dt^2 + d\lambda^2. \end{aligned}$$

Единственное слагаемое, содержащее элементы второй квадратичной формы, есть

$$\lambda^2 (q_i du^i)^2 = \lambda^2 (h_{ik} du^i du^k)^2.$$

В силу (6) оно равно соответствующему слагаемому в линейном элементе поверхности $\overset{*}{R}$, что доказывает наше утверждение. Таким образом, при рассматриваемом качении происходит качение подвижной аксоиды R по наложимой на нее неподвижной аксоиде $\overset{*}{R}$.

Если R — торс, то $\overset{*}{R}$ — тоже торс, а кинематически сопряженные направления du^i и v^i просто сопряжены на обеих поверхностях S и $\overset{*}{S}$ и являются касательными к линиям простого основания изгибаения рассматриваемых поверхностей.

§ 145. Изгибание на кинематически сопряженном основании

1. Рассмотрим три наложимые друг на друга не линейчатые поверхности $S, \overset{*}{S}, \overset{**}{S}$. Они однозначно определяют сеть — *кинематически сопряженное основание изгибаения*, — направления которой кинематически сопряжены на каждой паре поверхностей $(S, \overset{*}{S}), (\overset{*}{S}, \overset{**}{S}), (\overset{**}{S}, S)$. Тензор этой сети

$$a_{is} = (h_{(i}^k - \overset{*}{h}_{(i}^k) (h_{s)k} - \overset{**}{h}_{s)k}) = h_{(i}^k \overset{*}{h}_{s)k} + \overset{*}{h}_{(i}^k \overset{**}{h}_{s)k} + \overset{**}{h}_{(i}^k \overset{*}{h}_{s)k}.$$

Сеть a_{is} образует с асимптотическими сетями поверхностей $S, \overset{*}{S}$ и $\overset{**}{S}$ равные взаимные углы. Действительно, если $a_i^s, H_i^s = \frac{1}{\sqrt{-K}} h_i^s, \overset{*}{H}_i^s = \frac{1}{\sqrt{-K}} \overset{*}{h}_i^s$ — аффиноры соответ-

вующих сетей, то из условия кинематической сопряженности направлений сети a_{i_s} следует равенство

$$a_i^s H_s^i = a_i^s \overset{*}{H}_s^i,$$

доказывающее утверждение.

Изгибание поверхности, при котором асимптотическая сеть образует равные взаимные углы с данной сетью a_{i_s} , называется *изгибанием на кинематически сопряженном основании*.

Примером такого изгибания является изгибание с сохранением средней кривизны (§ 113). Роль кинематически сопряженного основания в этом случае играет изотропная сеть.

2. Задача отыскания изгибания данной поверхности на данном кинематически сопряженном основании a_{i_s} сводится к отысканию виртуально-асимптотических сетей этой поверхности, образующих с сетью a_{i_s} одинаковые взаимные углы, равные взаимному углу сети a_{i_s} и асимптотической сети исходной поверхности.

Эта задача является частным случаем задачи, решенной в § 74, из результатов которого следует теорема С. П. Финикова [11]: *данная поверхность может допускать $n \leq 3$ дискретных изгибаний на данном кинематически сопряженном основании. Если таких изгибаний четыре, то поверхность допускает непрерывное однопараметрическое изгибание рассматриваемого типа.*

ЛИТЕРАТУРА

Общие курсы

- Darboux G., Leçons sur la théorie générale des surfaces, I—IV. Paris, 1887—1896; 2 éd., 1914—1925.
- Bianchi L., Lezioni di geometria differenziale, I—II. Bologna — Pisa, 1923, 1927.
- Bianchi L., Vorlesungen über Differentialgeometrie. Leipzig, 1899; 2. Aufl., 1910.
- Каган В. Ф., Основы теории поверхностей. Гостехиздат, М.—Л., ч. I, 1947; ч. II, 1948.
- Норден А. П., Теория поверхностей. Гостехиздат, М., 1956.
- Норден А. П., Пространства аффинной связности. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
- Норден А. П., Дифференциальная геометрия. Учпедгиз, М., 1948. Изд. 2-е, Краткий курс дифференциальной геометрии. Физматгиз, М., 1958.
- Фиников С. П., Теория поверхностей. ГТТИ, М.—Л., 1934.

Монографии по отдельным вопросам

- Бляшке В., Введение в геометрию тканей. Физматгиз, М., 1959.
- Бюшгенс С. С., Об изгибании поверхностей на главном основании. М., 1917.
- Фиников С. П., Изгибание на главном основании. ОНТИ, М.—Л., 1937.
- Фиников С. П., Теория конгруэнций. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
- Фиников С. П., Метод внешних форм Картана. Гостехиздат, М.—Л., 1948.
- Эйзенхарт Л. П., Непрерывные группы преобразований. ИЛ, М., 1947.
- Dubourdieu, Sur les réseaux de courbes et de surfaces. Leipzig, 1930.
- Peterson K., Ueber Kurven und Flächen. Moskau und Leipzig, 1868.

Работы по теории сетей

17. Б л а н к Я. П., О линейчатых поверхностях с сопряженной сетью плоских конических сечений. Зап. Харьковского матем. о-ва (4), 7 (1933), 15—24.
18. Б л а н к Я. П., Поверхности с двумя плоскими сетями конических сечений. Зап. Харьковского матем. о-ва (4), 11 (1935), 55—68.
19. Б л а н к Я. П., Поверхности с сопряженными системами пангеодезических линий. Учен. зап. Харьковского ун-та 4 (1936), 5—10.
20. Б л а н к Я. П., Клиффордово сопряженные сети. ДАН 59 (1948), 1231—1234.
21. Б л а н к Я. П., Сопряженные сети конических линий. ДАН 64 (1949), 755—758
22. Б л а н к Я. П., Конические сети. Зап. Харьковского матем. о-ва (4), 23 (1952), 113—141.
23. В а г н е р В. В., К вопросу об определении инвариантной характеристики поверхностей Ляувилля. Труды сем. по вект. и тенз. анализу, V (1941), 246—249.
24. Д у б н о в Я. С., Sur les caractéristiques tensorielles de certaines classes de surface et de leurs réseaux. C. R. Acad. Sci. 192 (1931), 261—264.
25. Д у б н о в Я. С., К дифференциальной геометрии сетей. ДАН 4 (1935), 7—10.
26. Д у б н о в Я. С., О тензорах, инвариантно связанных с сетью. Труды сем. по вект. и тенз. анализу V (1941), 13—14.
27. Д у б н о в Я. С. и Е ф и м о в Н. В., О парах и пучках сетей. ДАН 4 (1936), 43—46.
28. Д у б н о в Я. С., Тензорные характеристики некоторых классов поверхностей и принадлежащих им сетей. Труды сем. по вект. и тенз. анализу IV (1937), 197—204.
29. Д у б н о в Я. С., Сети равных путей на поверхности. Учен. зап. Московского ун-та 100 (1946), 212—216.
30. Д у б н о в Я. С., Диагональные свойства сетей. Труды сем. по вект. и тенз. анализу IX (1952), 7—48.
31. Д у б н о в Я. С., Теория полутензоров сети. Учен. зап. Казанского ун-та 115 : 10 (1955), 16—17.
32. Е г о р о в Д. Ф., Об одном классе ортогональных систем. Учен. зап. Московского ун-та 18 (1901).
33. Е ф и м о в Н. В., О тензорах взаимно сопряженных сетей. Труды 2-го Всесоюзного матем. съезда, т. 2, Л. (1934) 80—83.
34. Е ф и м о в Н. В., О некоторых сопряженных сетях и связанных с ними инвариантах. ДАН 4 (1935), 3—6.
35. Е ф и м о в Н. В. и Д у б н о в Я. С., Об особенных геодезических сетях и поверхностях Ли. ДАН 15 (1937), 415—416.
36. Е ф и м о в Н. В., О геодезических сетях на поверхности с аффинной связностью. Матем. сб. 3 (45), (1938), 191—199.
37. Е ф и м о в Н. В., Инвариантные характеристики некоторых сетей и поверхностей. Труды сем. по вект. и тенз. анализу V (1941), 148—172.

38. Комиссарук А. М., Поля векторов в двумерном римановом пространстве. Учен. зап. Минского пед. ин-та 5 (1956), 15—40.
39. Комиссарук А. М., Ортогональные обобщенно-лиувилевы сети, допускающие вращение. Учен. зап. Минского пед. ин-та 6 (1956), 271—300.
40. Комиссарук А. М., Сети равных путей и сети равных кривизн. Учен. зап. Минского пед. ин-та 7 (1957), 11—20.
41. Комиссарук А. М., Неизогональные сети, допускающие вращение. Учен. зап. Минского пед. ин-та 9 (1958), 35—64.
42. Комиссарук А. М., Исследование поля сетевого угла геодезических сетей. Изв. вузов, Математика 2 (24), (1961), 54—62.
43. Либер А. Е., Инвариантная теория сетей. Диссертация. Саратов, 1941.
44. Майоров В. М., Инвариантная характеристика обобщенно-потенциальной сети. ДАН 90 (1953), 965—968.
45. Норден А. П., Об особенных геодезических сетях в неметрической геометрии. Труды сем. по вект. и тенз. анализу, V (1941), 226—245.
46. Норден А. П., Об инвариантах сопряженных сетей. ДАН, 53 (1946), 499—502.
47. Норден А. П. и Бушманова Г. В., Об инвариантах сетей в метрических пространствах. Учен. зап. Казанского ун-та, 111 : 8 (1952), 5—12.
48. Петерсон К. М., Об отношениях и средствах между кривыми поверхностями. Матем. сб. 1 (1866).
49. Писарева Н. М., О дробно-квадратичном интеграле геодезических линий пространства аффинной связности. Матем. сб. 36 (78), (1955), 169—200.
50. Тевзадзе Г. Н., О некоторых сетях пространств аффинной связности. Сообщ. АН ГрССР 19 (1957), 641—648.
51. Токарев П. И., Геодезические сети, не определяемые сетевым углом. Труды сектора матем. и мех. АН КазССР 1 (1958), 194—201.
52. Чахтаури А. И., Внутренние геометрии плоских сетей. Труды Матем. ин-та АН ГрССР 15 (1947), 101—148.
53. Чахтаури А. И., О канонических пучках прямых. ДАН 59 (1948), 1257—1259.
54. Чахтаури А. И., Об обобщении конфигурации Лапласа. Труды Тбилисского пед. ин-та 8 (1950), 407—413.
55. Чахтаури А. И., О проективном изгибании плоских сетей. Сообщ. АН ГрССР 11 (1950), 531—532.
56. Чахтаури А. И., Приложение внутренних геометрий плоских сетей в теории поверхностей. Труды Матем. ин-та АН ГрССР 20 (1954), 89—130.
57. Чахтаури А. И., Об инвариантной характеристике поверхностей Лиувилля. Труды Тбилисского ун-та 56 (1955), 69—73.
58. Шуликовский В. И., О тройках и семействах сетей. Учен. зап. Казанского ун-та 111 : 8 (1951), 13—41.
59. Шуликовский В. И., Поля векторов на поверхности. Учен. зап. Казанского ун-та 112 : 10 (1952), 49—56.

60. Шуликовский В. И., Теория сетей и некоторые вопросы классической дифференциальной геометрии. В кн.: «Сто двадцать пять лет неевклидовой геометрии Лобачевского». Гостехиздат, М.—Л., 1952, 201—205.
61. Шуликовский В. И., Инвариантный признак поверхности Лиувилля. ДАН 94 (1954), 29—32.
62. Шуликовский В. И., Инвариантная характеристика метрики спиральной поверхности. ДАН 99 (1954), 35—36.
63. Шуликовский В. И., Об одном способе нормирования тензора сети. Учен. зап. Казанского ун-та 115 : 14 (1955), 53—59.
64. Шуликовский В. И., Аффинная классификация поверхностей с бесконечным числом сетей переноса. ДАН 105 (1955), 430—432.
65. Шуликовский В. И., Дифференциально-топологическая характеристика семейства сетей с равными чебышевскими векторами и общей аполлярной сетью. Труды сем. по вект. и тенз. анализу XI (1961), 141—151.
66. Maurer O., Études sur les réseaux de M. Myller. Ann. Sci. de l'Univ. de Jassy, XIV, f. III—IV (1926—1927), 169—204.
67. Stauber P., Über Kurvennetze ohne Umwege. Jahresber. DMV, XLVII, H. 1—4 (1937), 1—35.
68. Weise K. H., Invariante Charakterisierung von Kurvennetzen. Math. Z. 46 (1940), 665—691.

Работы по различным вопросам

69. Бахвалов С. В., К вопросу об изгибании поверхностей с сохранением главных радиусов кривизны. М., Изв. асс. интов ун-та 1—2 (1928), 3—14.
70. Бушманова Г. В., Вейлева и Риманова геометрии, индуцируемые на поверхности прямыми канонического пучка. Учен. зап. Казанского ун-та 112 : 10 (1952), 109—115.
71. Бушманова Г. В., Конформное отображение поверхностей с сохранением линий постоянной геодезической кривизны. Учен. зап. Казанского ун-та 116 : 1 (1956), 3—6.
72. Бушманова Г. В. и Норден А. П., Проективные инварианты нормализованной поверхности. ДАН 60 (1948), 1309—1312.
73. Ведерников В. И., Конформная наложимость поверхностей. Учен. зап. Казанского ун-та 110 : 3 (1950), 35—55.
74. Гаспарян С. Г., Изгибание поверхностей с сохранением главных кривизн. Сб. научн. трудов Ереванского пед. ин-та 5 (1955), 159—188.
75. Дубнов Я. С., О тензорах с нескаллярными компонентами. Труды сем. по вект. и тенз. анализу I (1933), 196—222.
76. Дубнов Я. С., Дифференциальная геометрия прямолинейных конгруэнций в тензорном изложении. Труды сем. по вект. и тенз. анализу I (1933), 223—303.
77. Дубнов Я. С., Ковариантное интегрирование в римановых пространствах двух и трех измерений. Труды сем. по вект. и тенз. анализу II—III (1935), 174—199.

78. Дубнов Я. С., Прямолинейная конгруэнция аффинного градиента. ДАН 81 (1951), 349—352.
79. Либер А. Е., Первые целые алгебраические интегралы уравнений геодезических. ДАН 31 (1941), 840—841.
80. Норден А. П., Обобщенная геометрия двумерного линейчатого пространства. Матем. сб. 18 (60), (1946), 139—152.
81. Тевзадзе Г. Н., О внутренних римановых геометриях постоянной кривизны на поверхностях проективного пространства. Труды Тбилисского ун-та 56 (1955), 145—171.
82. Тевзадзе Г. Н., О внутренних римановых геометриях поверхностей проективного пространства. Труды Матем. ин-та АН ГрССР 22 (1956), 103—126.
83. Тевзадзе Г. Н., О прямых канонического пучка. Сообщ. АН ГрССР. 18 (1957), 513—519.
84. Чеботарев Н. Г., 1) О поверхностях переноса. 2) Об одном обобщении поверхностей переноса. Собр. соч., т. II, М.—Л., 1949.
85. Шапиро Я. Л., Об одном характеристическом свойстве метрики поверхности вращения. ДАН 28 (1940), 23—24.
86. Шапиро Я. Л., Пространства типа Лиувилля. Учен. зап. Горьковского ун-та 16 (1950), 135—139.
87. Шуликовский В. И., Тензорные методы в теории конгруэнций. Учен. зап. Казанского ун-та 112 : 10 (1952), 57—76.
88. Шуликовский В. И., О бесконечно малых изгибаниях поверхности. Учен. зап. Казанского ун-та 114 : 2 (1954), 79—87.
89. Шуликовский В. И., О поверхностях переноса. Учен. зап. Казанского ун-та 115 : 10 (1955), 19—20.
90. Шуликовский В. И., Тензорное изложение метода подвижного трехгранника поверхности в E_3 . Учен. зап. Казанского ун-та 115 : 14 (1955), 61—68.
91. Шуликовский В. И., Определение двухразмерного движения жидкости по заданным значениям модуля, дивергенции и ротации ее скорости. Учен. зап. Казанского ун-та, 116 : 1 (1956).
92. Cosserrat E., Sur la convergence de droit. Ann. de Toulouse, t. VII (1893).
93. Eisenhart L., Applicable surfaces. Trans. Amer. Math. Soc., vol. 8 (1907), 113—134.
94. Lie S., Die Theorie der Translationsflächen Berichte über Verhandl. Leipzig, II—III (1896).
95. Poincaré H., Sur les surfaces des translation. Bull. Soc. Math. de France, XXIX (1901).
96. Poincaré H., Remark diverses sur les fonctions abeliennes. Journ. Mathém., t. 5 (1895).
97. Ribaucour A., Sur la théorie générale des surfaces courbes J. de Math. pures et appl., t. 7, 3 (1891), 211—271.
98. Reidemeister K., Die Differentialgleichung der Schiebflächen. Abh. Hamb. Sem., Bd. I (1922).
99. Voss A., Über isometrischen Flächen. Math. Ann., Bd. 46 (1895).
100. Voss A., Zur Theorie der Krümmung der Flächen. Math. Ann. 39 (1891).

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абель 329
Апшель 434
- Бахвалов 389
Бельтрами 61, 291, 309, 363, 445
Бертран 314
Бианки 291, 293, 399, 434, 489
Блютель 387
Бонне 242, 309, 311, 358, 389
Бур 304
Бюшгенс 214, 399
- Вейерштрасс 322, 323, 348
Вейль 54
Вейнгартен 239, 360, 494
Вильчинский 113
- Гаспарян 389
Гаусс 70, 237, 242, 262
Гессе 31
Гишар 424, 428, 435, 437
Грин 112, 113
Гурса 359
- Дарбу 257, 293, 315, 371, 487, 498, 502, 520
Дини 171
Дубнов 37, 83, 89, 119, 128, 156, 158, 159, 174, 178, 179, 180, 207
Дюпен 381, 455
- Егоров 206, 207, 210, 214
Ефимов 215, 315
- Иоахимсталь 377
- Картан 257, 389
Каталан 308
Кёнигс 377
- Киллинг 136
Клеро 300
Кодацци 61, 154, 242
Комбескюр 282, 387, 473, 475
Комиссарук 134
Коссера 398, 465
Кристоффель 40, 282
- Лаплас 50, 122, 244, 362
Лельевр 278, 512, 514, 516, 518
Ли 124, 193, 324
Либер 18, 20, 152, 159, 389, 403
- Майнарди 242
Майоров 209
Маслов 214
Млодзеевский 214
Монж 341
Мутар 279, 497, 511, 513
- Норден 12, 21, 37, 53, 57, 99, 172, 291, 374
- Петерсон 214, 227, 242, 262, 280, 282, 397, 465
Пето 428, 437
Пуанкаре 315
- Рейдемейстер 315, 337
Рибокур 436, 444, 445, 447, 454, 465, 468, 475, 479
Риччи 51, 161
Родриг 248
Рускол 269
- Токарев 158
- Фиников 214, 257, 389, 397, 403, 405, 442, 476, 488, 525

Форсайт 251
Фосс 401, 521

Хапцидакис 389, 393

Чеботарев 315
Чех 113

Шварц 345

Эйзенхарт 403, 405
Эйлер 247, 420
Эннепер 291, 352

Якоби 50, 70

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аполярность поверхности и конгруэнции прямых 445
— сетей 20
— сети и три-ткани 32
Аффинор поворота 37
— сети 18
— — приведенный 26
- Базис пары сопряженных связностей 99
Бивектор 11, 15
— внутренней геометрии поверхности 237
— дискриминантный 35
—, согласованный с тензором сети 17
—, — — — три-ткани 30
— сферического отображения 253
— эквиаффинный 54
- Вектор 14
— аполярный поверхности 452
— Вильчинского 113
— геодезический 71, 85, 102, 186
— Грина 112
— Дарбу 520
— диагональный 316
— дополнительный бивектора 44
— — геометрии Вейля 55
— — данного вектора 36
— изотропный 34
— касательный (направляющий) семейства линий 16
— конформно-геодезический 128
— — чебышевский (ромбический) 127
— конформного преобразования 126
- Вектор кривизны кривой 240
— Лельевра 278
— направляющий (касательный) семейства линий 16
—, принадлежащий поверхности 234
— проективного преобразования связности 59
— проективной нормали 113
— ромбический (конформно-чебышевский) 127
— трансверсальный 62, 66
— чебышевский 71, 85, 102, 186
— Чеха 113
- Векторы биссекторные 39, 74
— коллинеарные 14
— направляющие сети 16
— сети 77
«Венок» поверхностей Дарбу 498
Версор 36, 57, 237
Вертор (см. Бивектор) 12, 35
Вращение сети 132, 134
- Геликоид 305
Геометрия, см. Пространство
Градиент сети 77
— функции 49
Группа движений V_2 199
— импримитивности ткани 201
— преобразований L и 193
- Дивергенция векторного поля 49
Директриса бесконечно малого изгиба 493
— Вильчинского 113
Дифференциал вектора абсолютный 41
— L и 195
- Изгибание конгруэнции 445
— — сфер Рибокура 472

- Изгибание поверхности 291
 — — бесконечно малое 491
 — — на главном основании 214, 396
 — — на кинематически сопряженном основании 524
 — — на простом основании 214, 396
 — — с сохранением средней кривизны 389, 525
 Инвариант совместный двух сетей 20
 Инварианты векторных полей 48
 — конгруэнции прямых 420
 — линий сети 287
 Инволюция (a -инволюция) 20
 Интеграл геодезических дробно-квадратичный 220
 — — дробно-линейный 160, 172
 — — квадратичный 146, 161
 — — линейный 170

 Кatenоид 300
 Качение поверхности 519
 Конгруэнция 444
 — окружностей 478
 — — вполне циклическая 482
 — — нормальная 478
 — — циклическая 479
 — прямых 412
 — — Аппеля 434
 — — Аппеля—Бианки 434
 — — вполне циклическая 464
 — — гармоническая поверхности 445
 — — Гизара (коигруэнция Γ) 435, 443
 — — Гизара—Пето 428
 — — — обобщенная 437
 — — изотропная 419, 429
 — — линейная 434
 — — нормальная 427
 — — псевдосферическая 441
 — — регулярная 412
 — — Рибокура 436
 — — с вырождающимися фокальными поверхностями 432
 — —, сопряженная поверхности 445
 — — циклическая 464
 — — цилиндрическая 413

 Конгруэнция прямых Γ (коигруэнция Гизара) 435, 443
 — — B 442
 — — V 441
 — — W 440, 511
 — сфер 459
 — — вполне циклическая 464
 — — Рибокура (R -конгруэнция) 468—478
 — — — бесконечно-изгибаемая 472
 — — — циклическая 464
 Коноид 308
 Координаты стереографические 349
 — тангенциальные 274
 Коэффициенты перемещения трехгранника поверхности 258
 — связности 44
 Кривизна дифференциальной квадратичной формы гауссова (гауссова кривизна V_2) 53
 — — линии геодезическая 67, 240
 — — нормальная 240
 — — сети геодезическая 70
 — — — — относительная 87
 — — — — чебышевская 71
 — — — — относительная 87
 — — уровня геодезическая 68
 — поверхности гауссова (полная) 242
 — — главная 246
 — — полная (гауссова) 242
 — — средняя 246
 — V_2 гауссова (гауссова кривизна дифференциальной квадратичной формы) 53
 Кривые Бертраиа 314
 — фокальные 371
 Кручение геодезическое 250

 Линия асимптотическая 240
 — геодезическая 47, 240
 — кривизны 245
 — переноса 315
 — стрикционная \mathfrak{S} (линия сжатия, стрикция) 309
 — D сети 83
 — S сети 83

- Лучи конгруэнции гиперболические 415
 — — параболы 415
 — — эллиптические 415
- Метрика вращения 139, 141, 199
 — сети нормальная 110
- Направления кинематически сопряженные 521
 — на поверхности главные 246
 — — — сопряженные 243
 —, сопряженные относительно сети (a -сопряженные) 20
- Нормалия 352
 Нормаль проективная 113
 — стрикционная линейчатой поверхности 413
- Нормирование тензора сети евклидово (E -нормирование) 187
 — — — кодацциево 155
 — — — метрическое 37
- Объект геометрический 192
 — связности дифференциальный 198
- Орт 35
 — направляющий линейчатой поверхности 413
- Основание изгибающего главного 214, 396
 — — кинематически сопряженное 524
 — — простое 214
 — семейства сетей Π 216
 — — — Π 232
- Ось Грина 113
- Отношение четырех направлений ангармоническое 19
- Отображение, см. также Преобразование и Соответствие конгруэнции прямых сферическое 412
 — поверхности геодезическое 171
 — — сферическое 252
- Пара связностей сопряженная 99
 — — — вейлева 106
 — — — евклидова 109
- Пара связностей сопряженная квазиевклидова 107
 — — — кодацциева 104
 — — — минимальная 107
 — — — риманова 107
 — — — эквивариантная 105
- Параллели геодезические 69
- Параметр дифференциальный второй ($\Delta_2\varphi$) 50
 — — первый ($\Delta_1\varphi$) 50
 — — смешанный ($\Delta_1(\varphi, \psi)$) 50
 — — Якоби ($D(\varphi, \psi)$) 50
 — — $\Delta_1\varphi$ (первый) 50
 — — $\Delta_2\varphi$ (второй) 50
 — — $\Delta_2\varphi$ 50
 — — $\Delta_1(\varphi, \psi)$ (смешанный) 50
 — — $D(\varphi, \psi)$ (Якоби) 50
- канонический геодезической линии 48
 — конгруэнции полный 420
 — — средний 420
 — — распределения 314
 — — главный 420
- Перенос параллельный вектора 40
 — — направления псевдовектора 47
- Плоскость фокальная 416
- Поверхности наложимые 291
 — параллельные 268
 —, присоединенные друг другу 285, 286, 343
- Поверхность ассоциированная 343
 — Бианки (поверхность B) 399
 — Бонне 358
 — Вейнгартена (поверхность W) 360
 — винтовая 303
 — вращения 297
 — Гишара 436
 — главная конгруэнции прямых 421
 — Гурса 359
 — двумерная (поверхность X_2 , пространство X_2) 11
 — изотермическая 250
 — Иоакимстала 377
 — каналовая 379
 — Каталана 308

- Поверхность конгруэнции, см. соответствующие названия
- кривизны конгруэнции прямых 419
 - Кэли 335
 - линейчатая 307
 - — конгруэнции прямых 413
 - Лиувилля 162, 171
 - минимальная 267, 341
 - направляющая 375
 - огибающая конгруэнции сфер 466
 - опорная конгруэнции прямых 412, 425
 - — огибающая конгруэнции прямых 425
 - переноса 315
 - — специальная 317
 - постоянной средней кривизны 266, 390, 522
 - присоединенная 285, 286, 343
 - резная 374
 - с двумя семействами плоских линий кривизны 367
 - с одним семейством плоских линий кривизны 372
 - — — сферических линий кривизны 385
 - сопряженная конгруэнции прямых 445
 - спиральная 149, 305
 - средняя конгруэнции прямых 417
 - — огибающая (средняя эволютная) 357
 - — — конгруэнции прямых 426
 - — эвольвентная 357
 - — эволютная (средняя огибающая) 357
 - трубчатая 380
 - фокальная конгруэнции прямых 415, 437
 - Фосса 401
 - центров конгруэнции сфер 459
 - Шерка 333
 - эвольвентная (эвольвента) 353
 - эволютная (эволюта) 352, 354, 357
- Поверхность Эннепера 352
- B (поверхность Бианки) 399
 - W (поверхность Вейнгартена) 360
 - X_2 (двумерная поверхность, двумерное пространство) 11
- Поле абсолютно параллельное 54
- — параллельных векторов 53
 - — — направлений (абсолютно параллельное) 54
 - геодезическое 68
 - лапласово 49
 - потенциальное 49
 - соленоидальное 49
- Поля изогональные 64
- Потенциал поля векторного 49
- — геодезического 69
 - — чебышевский 75
- Преобразование, см. также Отображение и Соответствие
- Комбескюра R -конгруэнции 473
 - поверхности асимптотическое 511
 - — Бианки 489
 - —, инверсия 249
 - — Лапласа 362
 - — Мутара 511, 513
 - — Рибокура 475
 - связностей 58
 - — геодезическое (проективное) 59
 - — конформное 125
 - — Петерсона 227
 - — проективное (геодезическое) 59
- Произведение аффиноров векторное 27
- — диадное 27
 - — скалярное 27
 - — смешанное 27
 - векторов косое 14, 48
 - — скалярное 35, 48
- Производная ковариантная вектора 41
- — тензора 41, 238
 - косая вектора 49
 - — тензора 52
 - Ли 195

- Пространство аффинной связности A_2 43
 — Вейля W_2 54
 — двумерное (пространство X_2 , поверхность X_2) 11
 — евклидово 53
 — касательное аффинное 41
 — квазиевклидово 57
 — проективно-евклидово 60
 — псевдориманово 35
 — риманово V_2 34, 57
 — эквиаффинное 53
 — эквивпроективное 61
 — A_2 (аффинной связности) 43
 — S_2 53
 — V_2 (риманово) 34, 57
 — W_2 (Вейля) 54
 — X_2 (двумерное пространство, двумерная поверхность) 11
 Псевдовектор (псевдотензор) 16
 Пучок преобразований Мутара 511

 Радиус нормальной кривизны 353
 Развертывание кривой метрическое 46
 — на аффинное пространство 45
 Разность эйлера 247, 420
 Ротор векторного поля 49

 Связность, см. также Пространство
 — каноническая семейства Π относительно сети 221
 —, присоединенная к три-ткани 203
 —, — к тройке сетей 132
 — средняя пары сопряженных связностей 101
 Семейство линейчатых поверхностей конгруэнции 414
 — линий геодезически параллельных 69
 — — геодезическое 47
 — — диагональное относительно сети 120
 — — изотермическое 122
 — — изотропное 54
 — — однопараметрическое 16

 Семейство сетей Π 215
 — — Π 231
 Сети аполлярные 20, 21
 — взаимно изотермические (диагональные) 121
 — диагональные (взаимно изотермические) 121
 — комполлярные 24
 — параллельные 282
 — раздельные 20
 — связанные 20
 Сеть 16
 — асимптотическая 240
 — биссекторная 38
 — — вторая 39
 — Бонне (сеть L_{-2}) 145, 186
 — виртуально-асимптотическая 242
 — вещественная (гиперболическая) 17
 — вращения 139, 141
 — вырожденная 17
 — геодезическая 71, 155
 — Гессе 31, 83
 — гиперболическая (вещественная) 17
 — главная пары сетей 23
 — — линейчатых поверхностей конгруэнции 421
 — декартова 55
 — Дубнова 158, 172
 — Егорова (потенциальная) 206
 — изотермическая 122, 131, 143
 — изотермически сопряженная 256
 — изотропная 34
 — импримитивная 202
 — кодацциева 154, 184
 — комплексно-сопряженная (эллиптическая) 17
 — конформно-геодезическая 125, 129, 134
 — — чебышевская (ромбическая) 125, 129, 134, 184, 186
 — линий кривизны 245
 — Лиувилля (сеть L_1) 145, 162
 — метрически-получебышевская 178
 — обобщенная спиральная (сеть L_∞) 146, 191
 — — L_m 180

- Сеть обобщенно-потенциальная 209
- ориентированная 18
 - ортогональная 38
 - — линейчатых поверхностей конгруэнции 419
 - переноса 315
 - поверхностей конгруэнции 415
 - — — главная 421
 - — — ортогональная 419
 - — — сопряженная 418
 - — кривизны конгруэнции 419
 - полосатая 183
 - полугеодезическая 71, 93
 - получебышевская 72
 - потенциальная (сеть Егорова) 206
 - пропорциональная 176
 - равных путей 180
 - — тангенциальных инвариантов 277
 - — точечных инвариантов 244
 - Риччи 161, 171
 - ромбическая (конформно-чебышевская) 125, 129, 134, 184, 186
 - сопряженная 243
 - — линейчатых поверхностей конгруэнции 418
 - со сходящимися направлениями (сходящаяся) 184
 - спиральная 146
 - сходящаяся (со сходящимися направлениями) 184
 - торсов конгруэнции 415
 - Фосса 401
 - характеристическая 38, 271
 - чебышевская 72, 173
 - эквиареальная 190
 - эллиптическая (комплексно-сопряженная) 17
 - L_m 144
 - L_m обобщенная 180
 - L_1 (сеть Лиувилля) 145, 162
 - L_{-1} 151, 174
 - L_{-2} (сеть Бонне) 145
 - L_∞ (обобщенная спиральная сеть) 146, 191
- Символ Кристоффеля второго рода 40
- Кронекера 12
- Система координат изотермическая 122
- Соответствие, см. также Отображение и Преобразование
- поверхностей Комбескюра 282
 - — Петерсона 280
 - — — конформное 282
 - — радиальное 507
 - — Рибокура 475
 - — F 455
 - — O 493
 - — — полосостей фокальных поверхностей 437
- Стрикция (стрикционная линия, линия сжатия) 309
- Схема треугольная 103
- Тензор аффинный деформации 58
- Гессе 31
 - конгруэнции второй 414
 - — первый 413
 - кривизны пространства A_2 50
 - — — V_2 52
 - метрический 34, 55
 - поверхности второй 238
 - — первый 236
 - — третий 252
 - — четвертый 245
 - Риччи 51
 - сети 16
 - — геодезический второй (S) 81, 91
 - — — первый (D) 81, 91
 - — E -нормированный (E -тензор) 187
 - — метрически-нормированный 37
 - —, согласованный с бивектором 17
 - D (первый геодезический тензор сети) 81, 91
 - E (E -нормированный тензор сети) 187
 - S (второй геодезический тензор сети) 81, 91

- Ткань (n -ткань) 16
 — импримитивная 201
 Точка омбилическая 247
 — средняя (центр) луча конгруэнции 417
 — стрикционная 309
 — P 416
 Трансверсаль 64
 Трехгранник поверхности подвижной 257
 Три-ткань 29
 — диагональная (шестиугольная) 119
 — импримитивная 203
 — ориентированная 29
 — присоединенная 33
 — шестиугольная (диагональная) 119
 Тройка сетей 25
 — — диагональная (изотермичная) 121
 — — изотермичная (диагональная) 121
 — — нормальная 38
 — — основная 271
 Угол взаимный двух сетей 21
 — сетевой 37, 157, 186
 Уравнение Гизара 424
 — изгибания второе 295
 — — первое 292
 — Киллинга обобщенное 136
 — Кодацци 61, 154
 — Лапласа 50
 — — тангенциальное 276
 — — точечное 243, 244
 — Мутара 279, 497
 — поверхности тангенциальное 273
 — характеристическое 495
 Уравнения деривационные Вейнгартена 239
 — — Гаусса 237
 — — тройки сетей 85, 97
 — изгибания поверхности 291
 — Коши—Римана (условия Коши—Римана) 49
 — — — обобщенные 122
 Условие Гаусса 242, 262
 Условие Петерсона — Майнард — Кодацци 242, 262
 Условия интегрируемости в A_2 52
 — — в V_2 53
 — Коссера 398
 — Коши—Римана (уравнения Коши—Римана) 49
 Фокусы луча конгруэнции 415
 Форма дифференциальная квадратичная конгруэнции вторая 413, 422
 — — — — первая 413, 422
 — — — — поверхности вторая 238, 262, 264, 269
 — — — — первая 236, 262, 265, 266
 — — — — третья 252, 264, 266, 267
 — — — — четвертая 245, 265, 267, 269
 Формулы деривационные трехгранника поверхности 258
 Функция гармоническая (диагональная) относительно сети 122, 124
 — горизонтальная 291
 — диагональная (гармоническая) относительно сети 122, 124
 — изгибания характеристическая 494
 — изотермическая относительно сети 123
 Центр (средняя точка) луча конгруэнции 417
 — нормальной кривизны линии 353
 Циклиды Дюпена 381
 Четверка сопряженных связностей 103
 Эвольвента (эвольвентная поверхность) 353
 Эволюта (эволютная поверхность) 352

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

X_2	11	$R_{ij/k}^s$
V_2	34	R_{ij}
A_2	43	$a_{s }^s, \theta_{s }^s, \theta_{ks }^s$
W_2	54	K
E_3	234	T_{jk}^i
δ_i^j	11	t_i
$\varepsilon_{ij}, \varepsilon^{ij}$	11, 12, 35, 237	v
p_s, p	14	t_i
$v_s \omega^s, \langle vw \rangle$	14	φ
$v_i, (v)$	16	ε
$v_i, \omega_i; (v, \omega)$	16	v
$a_{ij}, b_{ij}, \dots; a, b, \dots$	16, 20	$\varepsilon, \tilde{\varepsilon}$
$\sigma(a), a_i^j$	17	ε, ε
$\delta, (vw pq)$	19	$v w$
H	20	α_i
ab		u, u
Φ	21	$v w$
a, c, d	25	a_i
a_i^j, c_i^j, d_i^j	26	M_i, N_i
A_i^j	26	Ω_i
α		D_{isk}
g_{ij}, g^{ij}, g_i^j	34—36, 55, 236	S_{isk}
pq, p^2, p	35	a_i, α_i
\tilde{p}_i, \tilde{p}	36	α, α
$(\varphi)_i^j$	37	φ, φ
a_{ij}, c_{ij}, \dots	37	$v w$
ω	37	Γ, Γ
m_i, n_i	39	$v w$
$\tilde{c}_i^j, \tilde{c}_{ij}$	39	D_{sk}^i, S_{sk}^i
Γ_{jk}^i	40, 43	α, α
$T_{j.. k}^i = \nabla_k T_{j..}^i$	41	M_i
ω_k	44	α
$\text{rot } a, \text{div } a; \text{grad } \varphi$	49	G, G
$\Delta_1 \varphi, \Delta_2 \varphi, \Delta_{22} \varphi$	50	α
$\Delta_1(\varphi, \psi), B(\varphi, \psi)$	50	I
		σ_s
		A_i
		\mathfrak{A}_i
		τ_s
		L_m
		$\Omega(u)$

$L\Omega(u), D\Omega(u)$	195	σ, σ	246
$LT_{j\dots}^{i\dots}, DT_{j\dots}^{i\dots}$	198	$\tau, \tilde{\tau}$	251
$\Pi, \Pi(b_i, A)$	216	v, \tilde{v}	
$\bar{\Pi}, \bar{\Pi}(\theta, b_i, A)$	232	e_{ij}, e^{ij}	253
r	234	n, v, w	257
r_i	235	i_i, p_i, q_i	258
I, g_{ij}	236	W	273
II, h_{ij}	238	ξ	278
III, γ_{ij}	252	p	314
IV, c_{ij}	245	Q	353
n	237	v	
n_i	239	a_{is} (I)	413
σ, e	240	\tilde{b}_{is}, b_{is} (II)	414
h_{is}, h_s	242	p	414
K	52, 241	v	
H	246	m, ψ	417
E	247	k, h, d, σ	420
		μ_i	422
		θ_i	424
		K, h_{ij}	426
		$\bullet \bullet$	