PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
UNIVERZITETA U BEOGRADU

REŠAVANJE DIFERENCIJALNIH I DIFERENCNIH JEDNAČINA POMOĆU REDOVA

(DOKTORSKA DISERTACIJA)

BRANKO SAVIĆ

- BGD.1978. -

S A D R Ž A J

JEDAN NOVI POSTUPAK ODREDJIVANJA KOEFICIJENATA TAYLOR-ovog REDA

Poznato je da se funkcija $f(x)$ analitička u tački $x=x_0$ može predstaviti stepenim redom

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-x_0)^i \tag{1}$$

gde su koeficijenti a_i jednoznačno odredjeni funkcijom f pomoću formule

$$a_i=\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}, \quad i=0,1,\dots \tag{2}$$

1. Izvešćemo jednu opštu formulu za odredjivanje koeficijenata reda /1/ koja kao poseban slučaj obuhvata formulu /2/.

TEOREMA. Ako je $f(x)$ analitička funkcija u tački $x=x_0$ tada za koeficijente $a_i (i\geq 0)$ njenog Taylor-ovog reda

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-x_0)^i$$

vredi formula

$$a_i=\frac{(i-p_i)!}{i!}\lim_{x\to x_0}\frac{1}{(x-x_0)^{i-p_i}}\cdot\frac{d^{p_i}R_{i-1}(x)}{dx^{p_i}}, \quad i=0,1,\dots \tag{3}$$

gde je p_i ma koji ceo broj koji zadovoljava uslov $0\leq p_i\leq i$.

D o k a z. Ako se p_i puta $(0\leq p_i\leq i)$ primeni L'Hospitall-ovo pravilo na desnu stranu jednakosti

$$a_i=\lim_{x\to x_0}\frac{R_{i-1}(x)}{(x-x_0)^i}$$

dobija se

$$a_i=\frac{1}{i(i-1)\dots(i-p_i+1)}\lim_{x\to x_0}\frac{1}{(x-x_0)^{i-p_i}}\cdot\frac{d^{p_i}R_{i-1}(x)}{dx^{p_i}},$$

odnosno

$$a_i=\frac{(i-p_i)!}{i!}\lim_{x\to x_0}\frac{1}{(x-x_0)^{i-p_i}}\cdot\frac{d^{p_i}R_{i-1}(x)}{dx^{p_i}}, \quad i=0,1,\dots$$

Teorema je dokazana.

$$\frac{1}{1-u}=1-u+u^2-u^3+\dots$$

(u ovom slučaju $u=8x+6x^2-7x^3$). Zatim se desna strana množi brojiocem $3-2x^2$. Kod izračunavanja većeg broja koeficijenata i ovaj postupak se veoma komplikuje. Redovan postupak traženja uzastopnih izvoda je takodje za veći broj koeficijenata veoma komplikovan.

Prema tome je najpraktičniji primeniti formulu (3) koja je izvedena u ovom redu.

Primenom formule (3) za $p_1=o$ (tj. primenom formule /5/ dobija se: $a_0=3, a_1=-24, a_2=172, a_3=-1211, a_4=8488,\dots$

$$\frac{3-2x^2}{1+8x+6x^2-7x^3}=3-24x+172x^2-1211x^3+8488x^4+\dots$$

Pokazaćemo i druge načine rešavanja prethodnog problema.

1.1 Ako je k-ti izvod funkcije $f(x)$ analitičke u tački $x=x_0$ racionalna funkcije $\frac{P(x)}{Q(x)}$ za koeficijente a_i $(i=k,k+1,\dots)$ njenog Taylor-ovog reda vredi formula

$$a_i=\frac{(i-k)!}{i!\,B_0}\Big[A_{i-k}-k!\,B_{i-k}a_k-\frac{(k+1)!}{1!}B_{i-k-1}a_{k+1}-\frac{(k+2)!}{2!}B_{i-k-2}-\dots-\frac{(i-2)!}{(i-k-2)!}B_2a_{i-2}-\frac{(i-1)!}{(i-k-1)!}B_1a_{i-1}\Big], \tag{6}$$

$$i=k,k+1,\dots.$$

gde su $A_l\ (l=\overline{0,r}$; $B_m\ (m=\overline{0,s})$ koeficijenti polinoma $P(x)$ čije je stepen r, odnosno Q(x) čiji je stepen s.

Po uslovu je funkcija $f(x)$ analitička pa je $B_0\neq 0$

to je na osnovu formule (6), za k=o; $a_0=0,\ a_1=1,\ a_2=0,\ a_3=\frac{1}{3},$
$a_4=0,\ a_5=\frac{2}{15},\ a_6=0,\ a_7=\frac{17}{315},\ a_8=0,\ a_9=\frac{62}{2835},\ldots$

$$\operatorname{tg} x = x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\frac{62}{2835}x^9+\ldots$$

P r i m e r 4. Funkciju

$$f(x)=\frac{\ln(1+x)}{1+x}$$

razviti u stepeni red u okolini tačke $x=0$.

Kako je

$$\frac{\ln(1+x)}{1+x}=\frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\ldots}{1+x}$$

to je na osnovu formule (6), za k=o,

$$a_0=0,\quad a_k=\frac{(-1)^{k-1}}{k!}-a_{k-1},\quad k=1,2,\ldots$$

$$\frac{\ln(1+x)}{1+x}=\sum_{i=1}^{\infty}a_i x^i,\quad a_i=\frac{(-1)^{i-1}}{i!}-a_{i-1},\quad i=1,2,\ldots$$

1.2 <u>Ako je k-ti izvod funkcije $f(x)$ oblika</u>

$$\frac{G(x)}{H(x)}$$

<u>gde su $G(x)$ i $H(x)$ analitičke funkcije u tački $x=x_0$ i ako je $H(x_0)\neq 0$</u> tada za koeficijente a_i $(i=k,k+1,\ldots)$ <u>njenog Taylor-ovog reda vredi formula</u>

$$(7)\qquad a_i=\frac{1}{i!\,[H]}\Big([G^{(i-k)}]-k!\,[H^{(i-k)}]a_k-\binom{i-k}{1}[H^{(i-k-1)}](k+1)!\,a_{k+1}-$$

$$-\binom{i-k}{2}[H^{(i-k-2)}](k+2)!\,a_{k+2}-\ldots-\binom{i-k}{i-k-2}[H^{(2)}](i-2)!\,a_{i-2}-$$

$$-\binom{i-k}{i-k-1}(i-1)!\,[H^{(1)}]a_{i-1}\Big),\quad i=k,k+1,\ldots$$

Koeficijent A_{i-k} u (10) ne zavisi od koeficijenata $b_{\ell,i-k+1}$, $b_{\ell,i-k+2}$, $b_{\ell,i-k+3}, \ldots$, koeficijenti B_{i-k}, $B_{i-k-1}, \ldots$, $B_2, . B_1$ ne zavise od koeficijenata $C_{s,i-k+1}$, $C_{s,i-k+2}$, $C_{s,i-k+3}, \ldots$, zato je dovoljno kod izračunavanja koeficijenta a_i ($i \geq k$) pomoću formule (6) funkcije φ_ℓ i ψ_s u (8) smeniti odsečkom (i-k)-tog stepena njihovih Taylor-ovih redova (9).

Prema predhodnom, ako se funkcije koje ulaze u desnu stranu u (8) smene odsečcima Taylor-ovih redova (9) r-tog stepena ($r \geq k$), tačnost izračunatih koeficijenata pomoću formule (6), (ili formule /7/) obezbedjena je zaključno sa koeficijentom a_{k+r}.

P r i m e r 6. Funkciju

$$f(x) = \frac{1+(1+x)\ln(e^x-x)}{(1+x)(1+\operatorname{tg} x)}$$

razviti u stepeni red u okolini tačke x=o.

Datu funkciju možemo napisati u obliku

$$f(x) = \frac{\frac{1}{1+x} + \ln(e^x+x)}{1+\operatorname{tg} x}.$$

stavimo:

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{1+x}, \quad \varphi_2(x) = \ln(e^x+x) = 2x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 - \frac{29}{12}x^4 + \ldots$$

$$\varphi_3(x) = 1+\operatorname{tg} x = 1 + x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \ldots$$

Smenom funkcija $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ odsečcima njihovih Taylor-ovih redova četvrtog stepena u datu funkciju dobija se

$$\tilde{f}(x) = \frac{1 + 3x - \frac{x^2}{2} + \frac{17}{6}x^3 - \frac{17}{12}x^4}{1 + x + \frac{x^3}{3}},$$

pa je na osnovu formule (6):

$$a_0 = 1, \; a_1 = 2, \; a_2 = -\frac{5}{2}, \; a_3 = 5, \; a_4 = \frac{35}{12},$$

$$\frac{1+(1+x)\ln(e^x+x)}{(1+x)(1+\operatorname{tg} x)} = 1 + 2x - \frac{5}{2}x^2 + 5x^3 + \frac{35}{12}x^4 + \ldots$$

Smenom funkcije $\varphi(x)$ iz (12) i (13) dobija se

$$f^{(k+1)}(x)=f_1'(x)\,\frac{f^{(k)}(x)-f_2(x)}{f_1(x)}+f_1(x)\varphi'(x)+f_2'(x)$$

odnosno

(14) $$f^{(k+1)}(x)-\frac{f_1'(x)f^{(k)}(x)}{f_1(x)}-f_1(x)\varphi'(x)-\frac{f_1(x)f_2'(x)-f_1'(x)f_2(x)}{f_1(x)}=0.$$

Ako se obe strane jednačine (14) pomnože funkcijom $\frac{1}{f_1(x)}$ dobija se jednačina

$$\frac{f^{(k)}(x)f_1(x)-f_1'(x)f^{(k)}(x)}{f_1^2(x)}-\varphi'(x)-\frac{f_1(x)f_2'(x)-f_1'(x)f_2(x)}{f_1^2(x)}=0$$

odnosno

(15) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{f^{(k)}(x)}{f_1(x)}-\varphi(x)-\frac{f_2(x)}{f_1(x)}\right)=0.$$

Ako jednačinu (15) integralimo dobićemo

$$\frac{f^{(k)}(x)}{f_1(x)}-\varphi(x)-\frac{f_2(x)}{f_1(x)}=C$$

odnosno

(16) $$f^{(k)}(x)=f_1(x)\varphi(x)+f_2(x)+Cf_1(x).$$

Za $x=x_0$ iz jednačine (16), uzimajući u obzir jednačinu (12), dobija se

$$C\cdot f_1(x_0)=0.$$

Kako je po pretpostavci $f_1(x_0)\neq 0$ to je za $x=x_0$, $C=0$.

P r i m e r 7. Funkciju datu sa

$$f(x)=(1+x)^{\alpha},\ \alpha\in R$$

razviti u stepeni red u obliku x=o.

Kako je

$$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}=\alpha\frac{(1+x)^{\alpha}}{1+x}=\alpha\frac{f(x)}{1+x},\quad f(0)=1.$$

Na osnovu formule (6), za k=1, $a_0=f(0)=1$, je

$$(1+x)^{1+x}=1+\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n,$$

$$a_n=\frac{1}{n}\left(a_{n-1}+a_{n-2}-\frac{1}{2}a_{n-3}+\frac{1}{3}a_{n-4}-\dots-(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right), n\geq 1.$$

2. Ako izjednačimo desne strane formula (3) i (4) dobijamo formulu

$$(17)\qquad f^{(i)}_{(x_0)}=(i-p_i)!\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(p_i)}_{(x)}-S^{(p_i)}_{i-1}}{(x-x_0)^{i-p_i}}, (i\geq 0, 0\leq p_i\leq i)$$

pomoću koje nalazimo vrednosti izvoda $f^{(i)}_{(x_0)}$ funkcije $f(x)$ za $x=x_0$.

Za $p_i=0$ i $p_i=i$, iz formule (17), dobijaju se ove formule:

$$(18)\qquad f^{(i)}_{(x_0)}=i!\lim\frac{f(x)-S_{i-1}}{(x-x_0)^i},\qquad (19)\qquad f^{(i)}_{(x_0)}=\lim_{x\to x_0} f^{(i)}_{(x)}.$$

Analogno dokazima stavova 1.1 i 1.2 dokazuju se sledeća dva stava.

2.1 <u>Ako je k-ti izvod funkcije $f(x)$ analitičke u tački $x=x_0$ racionalna funkcije $\frac{P(x)}{Q(x)}$ vrednosti njenih izvoda $f^{(i)}_{(x_0)}$ ($i\geq k$) izračunavaju se pomoću formule</u>

$$(20)\qquad f^{(i)}_{(x_0)}=\frac{(i-k)!}{B_0}\Big(A_{i-k}-B_{i-k}f^{(k)}_{(x_0)}-B_{i-k-1}f^{(k+1)}_{(x_0)}-\frac{1}{2}B_{i-k-2}f^{(k+2)}_{(x_0)}-$$

$$\dots-\frac{1}{(i-k-2)!}B_2 f^{(i-2)}_{(x_0)}-\frac{1}{(i-k-1)!}B_1 f^{(i-1)}_{(x_0)}\Big), i\geq k,$$

<u>gde su A_ℓ ($\ell=\overline{0,r}$), B_m ($m=\overline{0,s}$) koeficijenti polinoma $P(x)$ čiji je stepen r, odnosno Q(x) čiji je stepen s.</u>

II

PREDSTAVLJANJE IMPLICITNIH FUNKCIJA STEPENIM REDOVIMA

Odgovor na pitanje da li jednačina $F(x,y)=0$ definiše y kao funkciju od x i koja je to funkcija ne sastoji se u tome da se pomoću matematičkih operacija i simbola napiše funkcija $f(x)$ takva da je identički $F(x,f(x))=0$. Ponekad je i to moguće ali u većini slučajeva to nije moguće. A i kada je to moguće, posao je težak a sam oblik rešenja vrlo komplikovan.

Za neku odredjenu funkciju $F(x,y)$ problem se postavlja ovako: prvo, ako je dato x da li postoji y takvo da je $F(x,y)=0$ drugo, ako takvo y postoji kako će se ono efektivno izračunati. Prvi deo problema je principijelne prirode - pitanje egzistencije implicitnih funkcija. Odgovor na ovaj deo pitanja daje sledeća teorema:

Ako je $F(x,y)$ funkcija od x i y definisana u nekoj oblasti $D(x,y)$ u kojoj postoji tačka (x_0,y_0) i ako zadovoljava sledeće uslove:

1° $F(x_0,y_0)=0$,

2° Ima neprekidne izvode $F'_x(x,y)$ i $F'_y(x,y)$ u nekoj okolini tačke (x_0,y_0),

3° $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$

tada postoji jedno-značna funkcija $y=f(x)$ definisana u nekom intervalu oko x_0 takva da je identički $F(x,f(x))=0$, koja za $x=x_0$ uzima vrednost $y=y_0$. Implicitna funkcija definisana jednačinom $F(x,y)=0$ ima izvod

$$y'=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$$

koji je neprekidna funkcija.

odnosno

$$(24)\qquad y^{(k+1)}-\frac{1}{f_1}\cdot\frac{df_1}{dx}\cdot y^{(k)}=f_1\frac{df_2}{dx}+\frac{df_3}{dx}-\frac{f_3}{f_1}\cdot\frac{df_1}{dx}.$$

Desna strana jednačine (24) može da se napiše u obliku

$$f_1\frac{df_2}{dx}+\frac{df_3}{dx}-\frac{f_3}{f_1}\cdot\frac{df_1}{dx}=f_1\frac{df_2}{dx}+\frac{f_1\frac{df_3}{dx}-f_3\frac{df_1}{dx}}{f_1}=$$

$$=f_1\frac{df_2}{dx}+f_1\frac{d}{dx}\left(\frac{f_3}{f_1}\right)=f_1\frac{d}{dx}\left(f_2+\frac{f_3}{f_1}\right),$$

pa jednačina (24) dobija oblik

$$(25)\qquad y^{(k+1)}-\frac{1}{f_1}\frac{df_1}{dx}\cdot y^{(k)}=f_1\frac{d}{dx}\left(f_2+\frac{f_3}{f_1}\right).$$

Smenom

$$(26)\qquad y^{(k)}=\frac{d^k y}{dx^k}=z$$

jednačina (25) se svodi na linearnu jednačinu

$$(27)\qquad z'-\frac{1}{f_1}\frac{df_1}{dx}\cdot z=f_1\frac{d}{dx}\left(f_2+\frac{f_3}{f_1}\right).$$

Potražimo rešenje jednačine (27) u obliku

$$(28)\qquad z=u(x)\,v(x).$$

Stavljajući mesto z i z' u (27) vrednosti odredjene vezom (28) dobija se

$$v\left[u'+\frac{1}{f_1}\frac{df_1}{dx}\cdot u\right]+uv'=f_1\frac{d}{dx}\left(f_2+\frac{f_3}{f_1}\right).$$

Iz

$$u'+\frac{1}{f_1}\frac{df_1}{dx}\cdot u=0$$

dobija se

$$u=f_1$$

a iz

$$f_1 v'=f_1\frac{d}{dx}\left(f_2+\frac{f_3}{f_1}\right),$$

$$v=f_2+\frac{f_3}{f_1}+C$$

Smenom funkcije e^{xy} iz (30) u (31), na osnovu prethodnog stava, dobija se

$$y' = \frac{y^2 + xy - 2y - 1}{1 + 2x - xy - x^2}, \quad y(0) = 1.$$

Na osnovu formule (7) iz odeljka I imamo

$$a_1 = -2, \quad a_2 = \frac{3}{2!}, \quad a_3 = \frac{10}{3!}, \quad a_4 = \frac{24}{4!}, \ldots$$

$$y = 1 - 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{3}x^3 + x^4 + \ldots$$

Za sistem diferencijalnih jednačina

$$y_i' = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad , \quad (i=\overline{1,n})$$

sa početnim uslovima

$$x = x_0 \, , \; y_i = (y_i)_0 \quad , (i=\overline{1,n})$$

čije se rešenje traži u obliku Taylor-ovih redova u istom radu dokazuju se formule oblika (D), (D_1) i (D_2).

Primena metoda K.P.Orlova na sisteme diferencijalnih jednačina višeg reda data je u radu [7] M.Stojanović.

U ovom radu, oslanjajući se na metodu K.P.Orlova iz [1] dokazaćemo formule slične formulama iz radova [1] i [7] .Neposredna prednost formula koje dokazujemo u ovom radu je ta što je za izračunavanje koeficijenata potrebno izvršiti manji broj računskih operacija, a i vreme za izračunavanje koeficijenata je znatno kraće u poredjenju sa formulama iz radova [1] i [7]

Postavljene probleme rešavaćemo, najpre u opštem obliku a zatim detaljno analizirati posebne slučajeve i to: 1) slučaj kad je funkcija f u (A) polinom, 2) kad je funkcija f racionalna funkcija, 3) kad je funkcija f racionalna, ali takva da jedan njen deo predstavlja polinom, tj. kada se ona može napisati u obliku zbira polinoma i racionalne funkcije. Rezultate do kojih budemo došli za slučaj jedne diferencijalne jednačine proširićemo i na sistem diferencijalnih jednačina, čiji je broj proizvoljan kao i red najvišeg izvoda pojedinih traženih funkcija.

1. Data je diferencijalna jednačina

(1) $$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

sa početnim uslovima

(2) $$y^{(i)}(x_0) = y_0^{(i)} \quad , \quad i=\overline{0,n-1}$$

Traži se rešenje jednačine (1) pod uslovima (2) u obliku Taylor-ovih redova

(3) $$y = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-x_0)^i = S_{n+k-1} + R_{n+k-1} .$$

$$y^{(\ell)} = s_{k+\ell}^{(\ell)}, \quad \ell = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Ostatak R sadrži proizvode parcijalnih izvoda funkcije f i ostataka $R_{n+j}^{(j)}$, $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$. Svi parcijalni izvodi funkcije f su analitičke funkcije po istim argumentima kao i funkcije f i imaju tačku $(x_0, y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)})$ za običnu tačku pa se mogu razviti u Taylor-ov red u okolini tačke $x = x_0$. Prema tome, svaki sabirak na desnoj strani u (7), počev od drugog pa nadalje, može da se razvije u Taylor-ov red po stepenima od $x = x_0$. Najniži stepen $x - x_0$ veći je od k.

Ako jednačinu (7) napišemo u obliku

$$a_{n+k} = \frac{k!}{(n+k)!} \cdot \frac{f(x, s_k, s_{k+1}', s_{k+2}'', \ldots, s_{n+k-1}^{(n-1)}) - s_{n+k-1}^{(n)} - R_{n+k-1}}{(x-x_0)^k}$$

i pustimo da $x \to x_0$ dobijamo

$$a_{n+k} = \frac{k!}{(n+k)!} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, s_k, s_{k+1}', s_{k+2}'', \ldots, s_{n+k-1}^{(n-1)}) - s_{n+k-1}^{(n)}}{(x-x_0)^k}, \quad k \geq 0. \tag{8}$$

Stavimo $k = i - n$ i primenimo p_i $(0 \leq p_i \leq i - n)$ puta L'Hospital-ovo na desnu stranu u (8) pa dobijamo

$$a_i = \frac{(i-n-p_i)!}{i!} \lim_{x \to x_0} \frac{1}{(x-x_0)^{i-n-p_i}} \cdot \frac{d^{p_i} \delta_{i-1}^*}{dx^{p_i}}, \quad i \geq n \tag{9}$$

gde je

$$\delta_{i-1}^* = f(x, s_{i-n}, s_{i-n+1}', s_{i-n+2}'', \ldots, s_{i-1}^{(n-1)}) - s_{i-1}^{(n)}.$$

Teorema je dokazana.

P o s l e d i c a 1. Za najmanji p_i, tj. za $p_i = 0$, iz (9) dobija se formula

$$a_i = \frac{(i-n)!}{i!} \lim_{x \to x_0} \frac{\delta_{i-1}^*}{(x-x_0)^{i-n}}, \quad (i \geq n). \tag{10}$$

P o s l e d i c a 2. Za najveći p_i, tj. za $p_i = i - n$, iz (9) dobija se formula

Izraz δ_4^* je prostiji od izraza δ_4 . I izrazi $\delta_5^*, \delta_6^*, \ldots$ su prostiji od izraza $\delta_5, \delta_6, \ldots$ pa je i izračunavanje koeficijenata $a_6, a_7, \ldots$ pomoću formule (10) iz ovog rada brže i lakše u poredjenju sa formulom (19) iz rada [1] .

Dalje je na osnovu formule (10)

$$\delta_4^* = 3 + 2x^2, \qquad a_5 = \frac{3}{5!},$$

$$S_5 = 1 + 2x - x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{40}$$

$$\delta_5^* = S_1^3 + x^2 \cdot S_2' - S_1 \cdot S_3''' - S_5^V, \qquad a_6 = \frac{8}{6!},$$

$$S_6 = 1 + 2x - x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{40} + \frac{x^6}{90}$$

$$\delta_6 = S_2^3 + x^2 \cdot S_3' - S_2 \cdot S_4'' - S_6^V \qquad a_7 = \frac{8}{7!},$$

$$y = 1 + 2x - x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{40} + \frac{x^6}{90} + \frac{x^7}{630} + \ldots$$

Pored toga što u ostacima δ_{i-1} pri izračunavanju koeficijenata treba izvršiti veći broj računskih operacija i broj članova u ovim ostacima, nakon svodjenja, je znatno veći u odnosu na uprošćenje ostatke δ_{i-1}^* . Broj članova u $\delta_4, \delta_5, \delta_6, \delta_7$ za prethodni primer iznosi: 24, 31, 38, 45 a u $\delta_4^*, \delta_5^*, \delta_6^*, \delta_7^*$ 2, 10, 17, 24.

Ako desna strana diferencijalne jednačine (1) sadrži i funkcije argumenata $y^{(i)}, (i = 0, 1, \ldots, n-1)$ može se pokazati da se, kod izračunavanja koeficijenata $a_i \; (i \geq n)$ reda (3), one mogu smeniti odsečkom $(i-n)$– tog stepena njihovih Taylor-ovih redova.

gde je $$\frac{df_i}{dx} = \frac{\partial f_i}{\partial x} + \frac{\partial f_i}{\partial y} y' + \frac{\partial f_i}{\partial y'} y'' + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)}, \quad i = 1,2,3.$$

Smenom funkcije f_2 iz (12′) i (12") daje

$$y^{(n+1)} = \frac{y^{(n)} - f_3}{f_1} \cdot \frac{df_1}{dx} + f_1 \frac{df_2}{dx} + \frac{df_3}{dx}.$$

Ako se obe strane poslednje jednačine pomnože funkcijom $\frac{1}{f_1}$ dobija se

$$\frac{f_1 y^{(n+1)} - y^{(n)} \frac{df_1}{dx}}{f_1^2} - \frac{f_1 \frac{df_3}{dx} - f_3 \frac{df_1}{dx}}{f_1^2} - \frac{df_2}{dx} = 0,$$

odnosno

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y^{(n)}}{f_1} - \frac{f_3}{f_1} - f_2\right) = 0$$

a odavde

$$\frac{y^{(n)}}{f_1} - \frac{f_3}{f_1} - f_2 = C,$$

ili

$$y^{(n)} = f_1 f_2 + f_3 + C f_1.$$

Za $x = x_0$, iz poslednje jednačine je

$$C f_1(x_0, y_0, y_0', y_0'', \dots, y_0^{(n-1)}) = 0.$$

Kako je po pretpostavci $f_1(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}) \neq 0$ to je za $x = x_0$, $C = 0$.

Tvrdjenje je dokazano.

Pod uslovima teoreme 1 izvešćemo druge oblike formule (10). Stavimo $i - n = k$ u (10) pa imamo

$$a_{n+k} = \frac{k!}{(n+k)!} \lim_{x \to x_0} \frac{\delta^*_{n+k-1}}{(x-x_0)^k}, \quad k \geq 0 \tag{13}$$

gde je

$$\delta^*_{n+k-1} = f(x, S_k, S'_{k+1}, S''_{k+2}, \dots, S^{(n-1)}_{n+k-1}) - S^{(n)}_{n+k-1}. \tag{14}$$

Prema tome, kod primene formule (16), ako se u desnu stranu jednačine (1) y smeni odsečkom S_k, y' prvim izvodom odsečka S_{k+1}, y'' drugim izvodom odsečka S_{k+2}, itd. $y^{(n-1)}$ $(n-1)$-vim izvodom odsečka S_{n+k-1} reda (3), tačnost izračunatih koeficijenata reda (3) obezbedjena je zaključno sa koeficijentom a_{n+k}.

Primer 2. Naći u obliku potencijalnog reda rešenje jednačine

$$y''=1+xy'+y^2, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=2.$$

Rešenje:

Smenom y odsečkom S_4 a y' odsečkom S_5 reda

$$y=1+2x+a_2x^2+a_3x^3+\dots+a_kx^k+\dots$$

u desnu stranu date jednačine dobija se

$$\tilde{y}''=2+6x+(4+4a_2)x^2+(4a_2+5a_3)x^3+(a_2^2+4a_3+6a_4)x^4+\dots.$$

Na osnovu formule (16) je

$$a_2=\frac{0!}{2!}A_0=\frac{0!}{2!}\cdot 2=1, \quad a_3=\frac{1!}{3!}A_1=\frac{1}{3!}\cdot 6=1,$$

$$a_4=\frac{2!}{4!}A_4=\frac{2!}{4!}(4+4a_2)=\frac{2!}{4!}(4+4\cdot 1)=\frac{2}{3},$$

$$a_5=\frac{9}{20}, \quad a_6=\frac{3}{10},$$

$$y=1+2x+x^2+x^3+\frac{2}{3}x^4+\frac{9}{20}x^5+\frac{3}{10}x^6+\dots.$$

2. FUNKCIJA f JE RACIONALNA FUNKCIJA PROMENLJIVIH $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$

Neka je jednačina (1) oblika

$$(17) \qquad y^{(n)}=f(x,y,y',y'',\dots,y^{(n-1)})=\frac{P(x,y,y',y'',\dots,y^{(n-1)})}{Q(x,y,y',y'',\dots,y^{(n-1)})},$$

odnosno

$$(19)\quad a_{n+k}=\frac{k!}{(n+k)!\,B_0}\Big(A_k-n!\,B_k a_n-\frac{(n+1)!}{1!}B_{k-1}a_{n+1}-\frac{(n+2)!}{2!}B_{k-2}a_{n+2}-$$

$$\dots-\frac{(n+k-2)!}{(k-2)!}B_2 a_{n+k-2}-\frac{(n+k-1)!}{(k-1)!}B_1 a_{n+k-1}\Big),\ k\geq 0$$

gde je

$$B_0=Q(x_0,(s_k)_0,(s'_{k+1})_0,\dots,(s^{(n-1)}_{n+k-1})_0)=Q(x_0,y_0,y'_0,\dots,y_0^{(n-1)}).$$

Formula)19) je jedan od dva oblika formule (13) koje ovde izvodimo.

2.2. Stavimo

$$P_0=P(x,y,y',\dots,y^{(n-1)}),\quad Q_0=Q(x,y,y',\dots,y^{(n-1)}),$$

sa $P_1, P_2,\dots,P_k$ označimo prvi, drugi, ..., k-ti izvod po x funkcije P_0, a sa $Q_1, Q_2,\dots,Q_k$ prvi, drugi, ..., k-ti izvod funkcije Q_0.

Na osnovu jednakosti

$$\left(s^{(\ell)}_{n+k-1}\right)_{x=x_0}=y^{(\ell)}(x_0)\quad,\left(k=0,1,\dots;\ \ell=\overline{0,n+k-1}\right)$$

formula (13) za diferencijalnu jednačinu (17) može da se napiše u obliku

$$(20)\qquad a_{n+k}=\frac{k!}{(n+k)!}\lim_{x\to x_0}\frac{P_0-Q_0\cdot s^{(n)}_{n+k-1}}{Q_0\cdot(x-x_0)^k},\ k\geq 0.$$

Primenimo k-puta L'Hospital-ovo pravilo na desnu stranu u (20) pa dobijamo

$$a_{n+k}=\frac{1}{(n+k)!}\lim_{x\to x_0}\frac{1}{Q_0}\Big[P_k-\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}Q_{k-i}\cdot s^{(n+i)}_{n+k-1}\Big]$$

$$=\frac{1}{(n+k)!}\lim_{x\to x_0}\frac{1}{Q_0}\Big[P_k-Q_k\cdot s^{(n)}_{n+k-1}-\binom{k}{1}Q_{k-1}\cdot s^{(n+1)}_{n+k-1}-$$

$$a_5 = \frac{2!}{5!\cdot 4}\left[2 - 3\cdot\frac{1}{24} - 3!\cdot 3 - \frac{4!}{1}\cdot 2\left(-\frac{1}{32}\right)\right] = \frac{1}{160},$$

$$a_6 = \frac{23}{11520}, \ldots$$

$$y = 1 - x + x^2 + \frac{x^3}{24} - \frac{x^4}{32} + \frac{x^5}{160} + \frac{23x^6}{11520} + \ldots$$

Primer 4.

$$y'' = xy^9 + \ln(y+e^y),\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1.$$

R e š e n j e: Stavimo

$$\varphi(y) = \ln(y+e^y) = 2y - \frac{3}{2}y^2 + \frac{11}{6}y^3 - \frac{29}{12}y^4 + \ldots,$$

a $\overline{S}_k$ označimo odsečak ovog reda k-tog stepena pa formula (21) u ovom slučaju ima oblik

$$a_{k+2} = \frac{k!}{(k+2)!}\left[P_k\right],\quad P_k = \frac{d^k}{dx^k}\left(xy^9 + \overline{S}_k\right),\quad k \geq 0.$$

Računamo:

$$P_0 = xy^9 + \overline{S}_0,\quad [P_0] = 0,\quad a_2 = 0;$$

$$P_1 = (xy^9 + \overline{S}_1)'_x,\quad [P_1] = 2,\quad a_3 = \frac{1}{3};$$

$$P_2 = (xy^9 + \overline{S}_2)'_x,\quad [P_2] = -3,\quad a_4 = -\frac{1}{8};$$

$$a_5 = \frac{1}{60},\quad a_6 = -\frac{7}{360}, \ldots$$

$$y = x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{60} - \frac{7x^6}{360} + \ldots$$

Formula (25) je jedan od dva oblika formule (13) koje ovde izvodimo, za jednačinu (22).

3.2. Na osnovu jednakosti

$$\left(S^{(\ell)}_{n+k-1}\right)_{x=x_0} = y^{(\ell)}(x_0), \quad \left(k \geq 0,\ \ell = \overline{0, n+k-1}\right)$$

formula (23) možemo da napišemo u obliku

$$(26)\qquad a_{n+k} = \frac{k!}{(n+k)!} \lim_{x \to x_0} \frac{P_0 + Q_0 R_0 - Q_0 \cdot S^{(k)}_{n+k-1}}{(x-x_0)^k \cdot Q_0}\ ; \ k \geq 0$$

gde je $P_0 = P(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$, $Q_0 = Q(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$

$R_0 = R(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$.

Ako primenimo k-puta L'Hospitalovo pravilo na desnu stranu u (26), nakon elementarnih transformacija, dobijamo

$$(27)\qquad a_{n+k} = \frac{1}{(n+k)!\,[Q_0]}\Bigg([P_k] + \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}[Q_{k-i}]\cdot[R_i] - n!\,[Q_k]\,a_n - \binom{k}{1}[Q_{k-1}](n+1)!\,a_{n+1} - \binom{k}{2}[Q_{k-2}](n+2)!\,a_{n+2} - \ldots - \binom{k}{k-1}[Q_1](n+k-1)!\,a_{n+k-1}\Bigg), \quad k \geq 0$$

gde su

$$[P_r],\ [Q_r]\ i\ [R_r],\quad r = \overline{0, k}$$

vrednost r-tih izvoda funkcija P, Q i R za $x = x_0$.

Formula (27) je drugi od dva oblika formule (13) za diferencijalnu jednačinu (22).

P r i m e r 5.

$$y''' = \frac{x^3 y''}{1 + x - 2x^3 + x^4} + 3y' + y^6,$$

$$y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 2.$$

b) Pomoću formule (21).

Stavimo $\varphi(x) = \dfrac{x^3}{1+x-2x^3+x^4} = x^3 - x^4 + x^5 + x^6 + \ldots$

Sa $\overline{S}_k$ označimo odsečak k-tog stepena reda za funkciju (prethodnog reda) pa formula (21) u ovom slučaju ima oblik

$$a_{k+3} = \frac{k!}{(k+3)!}\left[P_k\right], \quad a = 1;$$

$$P_k = \frac{d^k}{dx^k}\left(y''\overline{S}_k + 3y' + y^6\right), \quad k \geq 0.$$

Računamo

$$P_0 = y''\overline{S}_0 + 3y' + y^6, \quad [P_0] = 1, \quad a_3 = \frac{1}{6}$$

$$P_1 = \left(y''\overline{S}_1 + 3y' + y^6\right)'_x, \quad [P_1] = 6, \quad a_4 = \frac{1}{4}$$

$$P_2 = \left(y''\overline{S}_2 + 3y' + y^6\right)''_x, \quad [P_2] = 15, \quad a_5 = \frac{1}{8}$$

$$P_3 = \left(y''\overline{S}_3 + 3y' + y^6\right)'''_x, \quad [P_3] = 36, \quad a_6 = \frac{1}{20}$$

$$y = 1 + x^2 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{8} + \frac{x^6}{20} + \ldots$$

2. Rezultati do kojih smo došli u prethodnoj tački mogu se proširiti i na sisteme diferencijalnih jednačina.

2.1. Dat je sistem diferencijalnih jednačina

$$y_i^{(m)} = f_i\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n; y_1', y_2', \ldots, y_n'; \ldots; y_1^{(m-1)}, \ldots, y_n^{(m-1)}\right) \tag{28}$$

$$(m \geq 1;\ i = \overline{1,n})$$

(33) $$a_{i,m+k} = \frac{1}{(m+k)!} \lim_{x \to x_0} \frac{d^k \overset{*}{C}_{i,m+k-1}}{dx^k}, \quad k \geq m.$$

Dokaz ove teoreme potpuno je analogan ~~ikx~~ dokazu teoreme 1 iz tačke 1.

2.2. Dat je sistem diferencijalnih jednačina

(34) $$y_\ell^{(m_\ell)} = f(x, y_{\ell,1}, y_{\ell,2}, \dots, y_{\ell,k}; y'_{\ell,1}, \dots, y'_{\ell,k}; \dots; y_{\ell,1}^{(m_\ell-1)}, \dots, y_{\ell,k}^{(m_\ell-1)})$$
$$(\ell = \overline{1,k};\ m_\ell \geq 1)$$

gde funkcija $y_{\ell,i}$ $(i = \overline{1,k})$ zavise samo od promenljive x, sa početnim uslovima

(35) $$y_\ell^{(i)}(x_0) = y_{\ell,0}^{(i)}, \quad (\ell = \overline{1,k};\ i = \overline{0, m_\ell - 1})$$

Traži se rešenje sistema (33) pod uslovima (34) u obliku Taylor-ovih redova

(36) $$y_\ell = \sum_{i=0}^{m_\ell - 1} \frac{y_{\ell,0}^{(i)}}{i!}(x-x_0)^i + \sum_{i=m_\ell}^{\infty} a_{\ell,i}(x-x_0)^i$$
$$(\ell = \overline{1,k};\ i = 0, 1, \dots)$$

T e o r e m a 2.2. Ako su u sistemu (33) funkcije f_ℓ analitičke, a tačka

$$(x_0, y_{1,0}, y_{2,0}, \dots, y_{k,0}; y'_{1,0}, y'_{2,0}, \dots, y'_{k,0}; \dots; y_{1,0}^{(m_\ell-1)}, \dots, y_{k,0}^{(m_\ell-1)})$$

njihova obična tačka, sistem (34) pod uslovima (35) ima rešenje u obliku redova (36) za čije koeficijente $a_{\ell,m_\ell+k}$, $(\ell = \overline{1,k};\ k \geq m_\ell)$ vredi formula

(37) $$a_{\ell,m_\ell+k} = \frac{(k - p_{\ell,k})!}{(m_\ell+k)!} \lim_{x \to x_0} \frac{1}{(x-x_0)^{k-p_{\ell,k}}} \cdot \frac{d^{p_{\ell,k}} \overset{*}{C}_{\ell,m_\ell+k-1}}{dx^{p_{\ell,k}}}$$

$$(\ell = \overline{1,k};\ k \geq m_\ell;\ 0 \leq p_{\ell,k} \leq k)$$

R e š e n j e: Označimo sa $T_{1,k}(t)$ i $T_{2,k}(t)$ odsečke k-tog stepena Taylor-ovih redova funkcija costcht i $t\ln(1+t)$:

$$T_1(t) = \cos t \operatorname{ch} t = 1 - \frac{t^4}{6} + \frac{t^8}{360} - \dots$$

$$T_2(t) = t\ln(1+t) = t^2 - \frac{t^3}{2} + \frac{t^4}{3} - \frac{t^5}{4} + \dots$$

Iz početnih uslova je

$S_{1,0} = 1$

$S_{2,1} = t$

$S_{3,3} = 1 + \frac{t^3}{3}$

pa je na osnovu formule (31)

$$\delta^*_{1,0} = S'_{2,1} \cdot T_{1,0} + S'''_{3,3} - 1 - S'_{1,0} \, ; \qquad a_{1,1} = 2,$$

$$\delta^*_{2,1} = S_{1,0} - S''_{3,2} \cdot T_{2,0} + S''_{3,3} - S''_{2,1} \, ; \qquad a_{2,2} = \frac{3}{2},$$

$$\delta^*_{3,3} = S_{1,0} + S_{2,0} + S_{3,0} - 2t + 1 - S^{IV}_{3,3} \, ; \qquad a_{3,4} = \frac{1}{8}.$$

Dalje je $S_{1,1} = 1 + 2t$

$S_{2,2} = t + \frac{3}{2}t^2$

$S_{4,4} = 1 + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{8}$

$$\delta^*_{1,1} = S'_{2,2} \cdot T_{1,1} + S'''_{3,4} - 1 - S'_{1,1} \, ; \qquad a_{1,2} = 3,$$

$$\delta^*_{2,2} = S_{1,1} - S'''_{3,3} \cdot T_{2,1} + S'''_{3,4} - S''_{2,2} \, ; \qquad a_{2,3} = \frac{5}{3!},$$

$$\delta^*_{3,4} = S_{1,1} + S_{2,1} + S_{3,1} - 2t + 1 - S^{IV}_{3,4} \, ; \qquad a_{3,5} = \frac{1}{5!}$$

Izraz:
$$\lim_{x\to x_0}\frac{\delta^*_{l,m+k-1}}{(x-x_0)^k}$$
je konačan za svaki $k\geq 0$ na osnovu teoreme 2.1. a to znači da formula (41) obezbedjuje postupno izračunavanje koeficijenata $a_{l,m}$, $a_{l,m+1},\ldots,a_{l,m+k}$.

Prema tome kod primene formule (40), ako se u desnu stranu sistema (28) funkcija y_l smeni odsečkom $S_{l,k}$ reda (30), y_l' prvim izvodom odsečka $S_{l,k+1}$, ..., $y_l^{(m-1)}$ odsečkom $S_{l,m+k-1}$ tačnost izračunatih koeficijenata pomoću formule (41) obezbedjena je zaključno sa koeficijentom a_{m+k}.

2. <u>DESNE STRANE U SISTEMU (28) SU RACIONALNE FUNKCIJE</u>

Neka je sistem (28) oblika

$$(42)\qquad y_l^{(m)}=\frac{P_l(x,y_1,y_2,\ldots,y_n;y_1',y_2',\ldots,y_n';\ldots;y_1^{(m-1)},y_2^{(m-1)},\ldots,y_n^{(m-1)})}{Q_l(x,y_1,y_2,\ldots,y_n;y_1',y_2',\ldots,y_n';\ldots;y_1^{(m-1)},y_2^{(m-1)},\ldots,y_n^{(m-1)})}$$

gde su funkcije P_l i Q_l polinomi po promenljivim $x,y_1,y_2,\ldots,y_n;\ldots;$ $y_1^{(m-1)},\ldots,y_n^{(m-1)}$

Neka su P_l i Q_l analitičke funkcije u okolini tačaka

$y_{1,0},y_{2,0},\ldots,y_{n,0};y_{1,0}',y_{2,0}',\ldots;y_{1,0}^{(m-1)},\ldots;y_{n,0}^{(m-1)}$ i neka je
$$Q_l(x_0,y_{1,0},y_{2,0},\ldots,y_{n,0};y_{1,0}',y_{2,0}',\ldots,y_{n,0}';\ldots;y_{1,0}^{(m-1)},\ldots,y_{n,0}^{(m-1)})\neq 0.$$

Formulu (32) možemo da napišemo u obliku

$$(43)\qquad a_{l,m+k}=\frac{k!}{(m+k)!}\lim_{x\to x_0}\frac{P_l-Q_l\cdot S^{(m)}_{l,m+k-1}}{Q_l\cdot(x-x_0)^k}.$$

2.1 Označimo sa $A_{l,p}$ $(l=\overline{1,n};\ p=\overline{0,n_1})$ odnosno sa $B_{l,q}$ $(l=\overline{1,n};\ q=\overline{0,n_2})$ koeficijente polinoma koji se dobijaju kada se u funkciji P_l odnosno Q_l $(l=\overline{1,n})$ funkcija y_l smeni odsečkom $S_{l,k}$, funkcija y_l' prvim izvodom odsečka $S_{l,k+1}$, y_l'' drugim izvodom odsečka $S_{l,k+2}$, itd. $y_l^{(m-1)}$, $(m-1)$-vim izvodom odsečka $S_{l,m+k-1}$ reda (30).

Formulu (32) za sistem diferencijalnih jednačina (42) možemo da napišemo u obliku

$$-\binom{k}{1}\left[Q_{\ell,k-1}\right](m+1)!\,a_{\ell,m+1}-\binom{k}{2}\left[Q_{\ell,m-2}\right](m+2)!\,a_{\ell,m+2}-\cdots$$

$$\left.-\binom{k}{k-1}\left[Q_{\ell,1}\right](m+k-1)!\,a_{\ell,m+k-1}\right),\quad \ell=\overline{1,n}\,;\; k\geq 0$$

gde je $\left[P_{\ell,k}\right]$ odnosno $\left[Q_{\ell,k}\right]$ rezultat koji se dobija kada se u funkciji $P_{\ell,k}$ odnosno $Q_{\ell,k}$ izvrši smena:

$$x=x_0,\ y_1=y_{1,0},\ y_1'=y_{1,0}',\ y_1''=y_{1,0}'',\ldots,y_1^{(m-1)}=y_{1,0}^{(m-1)},\ldots,y_1^{(m+k-1)}=(m+k-1)!\,a_{1,m+k-1},$$

$$y_2=y_{2,0},\ y_2'=y_{2,0}',\ldots,y_2^{(m-1)}=y_{2,0}^{(m-1)},\ldots,y_2^{(m+k-1)}=(m+k-1)!\,a_{2,m+k-1},$$

$$\vdots$$

$$y_n=y_{n,0},\ y_n'=y_{n,0}',\ldots,y_n^{(m-1)}=y_{n,0}^{(m-1)},\ldots,y_n^{(m+k-1)}=(m+k-1)!\,a_{n,m+k-1}.$$

Formula (46) je drugi od dva nova oblika formule (32) za sistem (44).

3. DESNE STRANE U SISTEMU (28) SU ZBIR POLINOMA I RACIONALNE FUNKCIJE

Neka je sistem (28) oblika

$$(47)\quad y_\ell^{(m)}=\frac{P_\ell(x,y_1,y_2,\ldots,y_n;y_1',\ldots,y_n';\ldots,y_n^{(m-1)})}{Q_\ell(x,y,y_1,\ldots,y_n;y_1',\ldots,y_n^{(m-1)})}+R_\ell(x,y,y_1,\ldots,y_n;\ldots,y_n^{(m-1)})$$

gde su P, Q i R polinomi po promenljivim

$$x,y,y_2,\ldots,y_n;\ldots;y_1^{(m-1)},y_2^{(m-1)},\ldots,y_n^{(m-1)}$$

Na analogan način izvodimo nove oblike formule (38) za slučaj kada su desne strane sistema (34), polinomi, racionalne funkcije ili zbir polinoma i racionalne funkcije.

Sve ove formule dobijamo iz formula (41), (45), (46), (50) i (51) ako se mesto m stavi m_ℓ.

P r i m e r 7. Naći u obliku stepenih redova rešenje sistema jednačina

$$x''' = y^2 - z'' + x'\ln\cos t \ ; \ x(0)=1,\ x'(0)=0,\ x''(0)=2,$$
$$y''' = x' + e^t\sin t - 1 \ ; \ y(0)=1,\ y'(0)=1,\ y''(0)=-2,$$
$$z''' = y'' + z' - z(1+t)e^{-t} ; \ z(0)=1,\ z'(0)=-1,\ z''(0)=0.$$

R e š e n j e: Stavimo

$$\varphi_1(t) = \ln\cos t = -\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{12} - \frac{t^6}{25} - \ldots$$

$$\varphi_2(t) = e^t\sin t = t + t^2 + \frac{t^3}{3} + \ldots$$

$$\varphi_3(t) = (1+t)e^{-t} = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{8} + \frac{t^5}{30} - \ldots$$

$$S_{1,5} = 1 - t^2 + a_{1,3}t^3 + a_{1,4}t^4 + a_{1,5}t^5$$

$$S_{2,5} = t + t^2 + a_{2,3}t^3 + a_{2,4}t^4 + a_{2,5}t^5$$

$$S_{3,5} = 1 - t + a_{3,3}t^3 + a_{3,4}t^4 + a_{3,5}t^5$$

P r i m e r 8.

$$x' = \frac{z''' - 1}{y' \cos t \, ch t} \quad ; \ x(0) = 1$$

$$y'' = \frac{t \ln(1+t)}{x - z'} \quad ; \ y(0) = 0, \ y'(0) = 1$$

$$z^{IV} = y' - 2t + 2 \quad ; \ z(0) = 1, \ z'(0) = z''(0) = 0, \ z'''(0) = 2$$

$$\varphi_1(t) = 1 - \frac{t^4}{6} + \frac{2 t^8}{7!} - \dots$$

$$\varphi_2(t) = t \ln(1+t) = t^2 - \frac{t^3}{2} + \frac{t^4}{3} - \frac{t^5}{4} + \dots$$

$$S_{1,5} = 1 + a_{1,1} t + a_{1,2} t^2 + a_{1,3} t^3 + a_{1,4} t^4 + a_{1,5} t^5$$

$$S_{2,5} = t + a_{2,2} t^2 + a_{2,3} t^3 + a_{2,4} t^4 + a_{2,5} t^5 + a_{2,6} t^6$$

$$S_{3,8} = t + \frac{t^3}{3} + a_{3,4} t^4 + a_{3,5} t^5 + a_{3,6} t^6 + a_{3,7} t^7 + a_{3,8} t^8$$

$$\bar{x}' = \frac{1 + 24 a_{3,4} t + 60 a_{3,5} t^2 + 120 a_{3,6} t^3 + 210 a_{3,7} t^4 + 336 a_{3,8} t^5}{1 + 2 a_{2,2} t + 3 a_{2,3} t^2 + 4 a_{2,4} t^3 + (5 a_{2,5} - \frac{1}{6}) t^4 + (6 a_{2,6} - \frac{1}{3} a_{2,2}) t^5}$$

$$\bar{y}'' = \frac{t^2 - \frac{t^3}{2} + \frac{t^4}{3}}{1 + a_{1,1} t + (a_{1,2} - 1) t^2 + (a_{1,3} - 4 a_{3,4}) t^3 + (a_{1,4} - 5 a_{3,5}) t^4}$$

$$\bar{z}^{IV} = 3 + (2 a_{2,2} - 2) t + 3 a_{2,3} t^2.$$

IV

RAZVIJANJE FUNKCIJA U JEDAN SPECIJALAN FUNKCIONALAN RED

Poznato je da se funkcija $f(x)$ koja ima izvode proizvoljnog reda u tački $x=x_0$ može razviti u Taylor-ov red

$$(1) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

1. Pokazaćemo da postoji jedan red sličan redu (1) u koji se funkcija $f(x)$ može razviti.

T e o r e m a 1. Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna i ima neprekidne izvode do n-tog reda u intervalu $[a, b]$ i ako ima konačan $(n+1)$-vi izvod u ovom intervalu onda za svaki $x \in [a,b]$ vredi formula

$$(2) \qquad f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{(x-x_0)^i}{i!} f^{(i)}(x) + R_n(x), \qquad x_0 \in [a,b]$$

gde je

$$R_n(x) = (-1)^n \int_{x_0}^{x} \frac{(\tau-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\tau)\, d\tau.$$

D o k a z. Ako se jednačina

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(\tau)\, d\tau$$

napiše u obliku

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(\tau)\, d(\tau - x_0)$$

gde je x_0 neka fiksirana vrednost x u $[a, b]$, uzastopnom primenom formule za parcijalnu integraciju dobija se formula (2).

Teorema je dokazana.

pa je
$$\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| \le \frac{M}{(n+2)!} \lim_{n\to\infty} |x-x_0|^{n+2} = 0,$$
što znači da se funkcija $f(x)$ može razviti u red /3/ na segmentu $[a, b]$.

Kako je
$$|U_n(x)| = (-1)^{n-1}\frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x) < M \frac{(x-x_0)^n}{n!} < M \frac{|m|^n}{n!},$$
$m > |x-x_0|$,

i kako brojni red $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|m|^n}{n!}$ konvergira, to red /3/ uniformno konvergira.

P r i m e d b a. Formalnom zamenom $x \to x_0$ red /3/ prelazi u Taylor-ov red za funkciju $f(x)$ u okolini tačke $x=x_0$.

P r i m e r 1. Red /3/ za funkciju $\frac{1}{x-x_0}$ $x_0=0$
$$\frac{1}{1-x} = 1 + \frac{x}{(1-x)^2} - \frac{x}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1-x)^4} - \dots, \quad x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right).$$

P r i m e r 2. Red /3/ za funkciju ln/1+x/, $x_0=0$,
$$\ln(1+x) = \frac{x}{x+1} + \frac{x^2}{2(1+x)^2} + \frac{x^3}{3(1+x)^3} + \dots, \quad x \in \left(-\frac{1}{2}, \infty\right).$$

za x = 1 imamo
$$\ln 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 2^2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} + \dots + \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} + \dots$$

P r i m e r 3. Red /3/ za funkciju
$$f(x) = (1+x)^m, \quad m \in R$$

glasi

/A/
$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \binom{m}{n} x^n (1+x)^{m-n},$$
$$x \in \left(-\frac{1}{2}, \infty\right).$$

Ako se red (4a) integrali član po čaln u granicama od 0 do x , $x\in(-\frac{1}{2},\infty)$ dobija se

$$(4b)\qquad \int_0^x \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 - \frac{3}{4}\left(\frac{x}{1+x}\right)^4 - \dots - \frac{n-1}{n}\left(\frac{x}{1+x}\right)^n - \dots$$

Za funkciju lu(l+x) imali smo, primer 2,

$$(4c)\qquad \ln(1+x) = \frac{x}{1+x} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \dots ;\ x\in(-\frac{1}{2},\infty).$$

Redovi (4b) i (4c) su dva različita reda za funkciju ln(l+x), ali je njihova razlika za svaki $x\in(-\frac{1}{2},\infty)$ jednaka nuli:

$$\ln(1+x) - \int_0^x \frac{dx}{1+x} = \frac{x}{1+x} - x + \left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \left(\frac{x}{1+x}\right)^4 + \dots$$

$$= -\frac{x^2}{1+x} + \frac{\left(\frac{x}{1+x}\right)^2}{1-\frac{x}{1+x}} = -\frac{x^2}{1+x} + \frac{x^2}{1+x} = 0,$$

Zbir radova (4b) i (4c) je red

$$(4d)\qquad \ln(1+x) = \frac{1}{2}\left[\frac{2x}{1+x} + \frac{x^2}{1+x} - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 - \frac{2}{4}\left(\frac{x}{1+x}\right)^4 - \frac{3}{5}\left(\frac{x}{1+x}\right)^5 - \dots\right.$$

$$x\in(-\frac{1}{2},\infty).$$

Za x=l na osnovu reda (4d) imamo

$$(4e)\qquad \ln 2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{3\cdot 2^4} - \frac{2}{4\cdot 2^5} - \frac{3}{5\cdot 2^6} - \frac{4}{6\cdot 2^7} - \dots$$

a na osnovu (4b)

$$(4f)\qquad \ln 2 = 1 - \frac{1}{2\cdot 2^2} - \frac{2}{3\cdot 2^3} - \frac{3}{4\cdot 2^4} - \frac{4}{5\cdot 2^5} - \dots$$

Imali smo, primer 2,

$$(4g)\qquad \ln 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 2^2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{4\cdot 2^4} + \dots$$

Prema tome je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{V_n}{2^{n+1}} = \sum \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 2^2} + \frac{1}{3\cdot 2^2} + \cdots$$

Kako je red (4h) konvergentan, konvergentan je i red

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{V_n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 2^2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{4\cdot 2^4} + \cdots$$

i imaju isti zbir $\ln 2$.

Prema tome Euler-ovom transformacijom iz reda (4h) dobili smo red

$$\ln 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 2^2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{4\cdot 2^4} + \cdots$$

a ovo je red (4g) koji je, kako smo kazali, jedino dobijen redovnim putem za x=1 iz razvoja (3) za funkciju $f(x) = \ln(1+x)$ (primer 2).

Brojni redovi što se dobijaju iz reda (3) za vrednosti promenljive x za koje i red (3) i Taylor-ov red konvergiraju, brže konvergiraju od brojnih redova što se dobijaju iz Taylor-ovog reda.

Vrednosti funkcija $f^{(k)}(x)$, $k=1,2,\ldots$ koje figurišu u razvoju (3):

(5) $$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x) - \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x) + \frac{(x-x_0)^3}{3!}f'''(x) - \cdots$$

ne zavise od izbora $x_0 \in [a,b]$. Neka funkcija $f(x)$ u (5) zadovoljava uslove teoreme 2. Za neko fiksirano $x=\overline{x}$, $\overline{x} \in [a,b]$ iz (5) imamo

(6) $$f(\overline{x}) = f(x_0) + (\overline{x}-x_0)f'(\overline{x}) - \frac{(\overline{x}-x_0)^2}{2!}f''(\overline{x}) + \frac{(\overline{x}-x_0)^3}{3!}f'''(\overline{x}) - \cdots$$

V

JEDAN NOVI POSTUPAK REŠAVANJA LINEARNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE BESKONAČNOG REDA SA KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA

U ovom odeljku se razmatra najpre jedan poseban oblik linearne diferencijalne jednačine sa funkcionalnim koeficijentima beskonačnog reda, zatim se uvodi jedan postupak rešavanja linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima beskonačnog reda. I najzad, pomenuti postupak se koristi za dobijanje rešenja linearne diferencne jednačine sa konstantnim koeficijentima.

1. Neka je data linearna diferencijalna jednačina beskonačnog reda oblika

(1) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x)}{n!}(x-x_0)^n = y(x_0)$$

Pokazaćemo da jednačina (1) dopušta rešenje u obliku Tajlorovog reda

(2) $$y(x) = y(x_0) + \sum_{i=1}^{\infty} a_i (x-x_0)^i .$$

Smenom reda (2) u jednačinu (1) dobija se

$$y(x_0) + \sum_{i=1}^{\infty} a_i (x-x_0)^i - (x-x_0)\Big(y(x_0) + \sum_{i=1}^{\infty} a_i (x-x_0)\Big)' +$$

$$+ \frac{(x-x_0)^2}{2!}\Big(y(x_0) + \sum_{i=1}^{\infty} a_i (x-x_0)^i\Big)'' + \cdots + (-1)^{i-1}\frac{(x-x_0)^i}{i!}\Big(y(x_0) + \sum_{i=1}^{\infty} a_i (x-x_0)^i\Big)^{(n)} =$$

$$= y(x_0) + [a_1 - a_1](x-x_0) + [a_2 - 2a_2 + \frac{1}{2!}a_2](x-x_0)^2 +$$

$$C+\sum_{i=1}^{n}C_i(x-x_0)^i-(x-x_0)\Big(C+\sum_{i=1}^{n}C_i(x-x_0)^i\Big)'+$$

$$+\frac{(x-x_0)^2}{2!}\Big(C+\sum_{i=1}^{n}C_i(x-x_0)^i\Big)''-\frac{(x-x_0)^3}{3!}\Big(C+\sum_{i=1}^{n}(x-x_0)^i\Big)'''+\dots$$

$$+(-1)^n\frac{(x-x_0)^n}{n!}\Big(C+\sum_{i=1}^{n}C_i(x-x_0)^i\Big)^{(n)}$$

$$=C+[C_1-C_1](x-x_0)+\Big[C_2-2C_2+\frac{1}{2!}2C_2\Big](x-x_0)^2+$$

$$+\Big[C_3-3C_3+\frac{1}{2!}3\cdot 2C_3+\frac{1}{3!}3\cdot 2\cdot 1C_3\Big](x-x_0)^3+\dots$$

$$+\Big[C_n+nC_n+\frac{1}{2!}n(n-1)C_n-\frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)C_3-$$

$$+(-1)^n\frac{n!}{n!}C_n\Big](x-x_0)^n+\dots$$

$$=C+\sum_{k=1}^{n}\Big[\binom{k}{0}-\binom{k}{1}+\binom{k}{2}+\dots+(-1)^k\binom{k}{k}\Big]C_k(x-x_0)^k$$

$$=C,$$

jer je

$$\sum_{k=1}^{n}\Big[\binom{k}{0}-\binom{k}{1}+\binom{k}{2}-\dots+(-1)^k\binom{k}{k}\Big]=0.$$

Smenom funkcije $f_0(x)$ u desnu stranu u (7) dobija se

$$A_0\varphi(x)-\frac{a_1}{a_0}A_0\varphi'(x)-\frac{a_2}{a_0}A_0\varphi''(x)-\ldots .$$

Za $f_1(x)$ uzmimo

$$f_1(x)=A_0\varphi(x)-\frac{a_1}{a_0}A_0\varphi'(x)=A_0\varphi(x)+A_1\varphi'(x),$$

$$\left(A_1=-\frac{a_1}{a_0}A_0\right).$$

Smenom funkcije $f_1(x)$ u desnu stranu u (7) daje

$$A_0\varphi(x)-\frac{a_1}{a_0}A_0\varphi'(x)-\frac{a_2}{a_0}\varphi''(x)-\ldots-\frac{a_1}{a_0}A_1\varphi''(x)-\ldots$$

Za funkciju $f_2(x)$ uzećemo

$$f_2(x)=A_0\varphi(x)-\frac{a_1}{a_0}A_0\varphi'(x)-\frac{1}{a_0}(a_1A_1+a_2A_0)\varphi''(x)$$

$$=A_0\varphi(x)+A_1\varphi'(x)+A_2\varphi''(x),$$

$$\left(A_2=-\frac{1}{a_0}(a_1A_1+a_2A_0)\right).$$

Smenom $f_2(x)$ u desnu stranu u (7) dobija se

$$A_0\varphi(x)-\frac{a_1}{a_0}A_0\varphi'(x)-\frac{a_2}{a_0}A_0\varphi''(x)-\frac{a_3}{a_0}A_0\varphi'''(x)-\ldots$$

$$-\frac{a_1}{a_0}A_1\varphi''(x)-\frac{a_2}{a_0}A_1\varphi'''(x)-\ldots-\frac{a_1}{a_0}A_2\varphi'''(x)-\ldots .$$

Za funkciju $f_3(x)$ uzmimo (zaključno sa trećim izvodom)

$$f_3(x)=A_0\varphi(x)-\frac{a_1}{a_0}A_0\varphi'(x)-\frac{1}{a_0}(a_1A_1+a_2A_0)\varphi''(x)-$$

$$-\frac{1}{a_0}(a_1A_2+a_2A_1+a_3A_0)\varphi'''(x)=$$

$$=A_0\varphi(x)+A_1\varphi'(x)+A_2\varphi''(x)+A_3\varphi'''(x)$$

$$\left(A_3=-\frac{1}{a_0}(a_1A_2+a_2A_1+a_3A_0)\right).$$

a iz

$$a_0 A_0 \varphi(x) + \sum_{k,n=1}^{\infty} a_k A_n \psi^{(n+k)}(x) = \psi(x)$$

$$\psi(x) = \varphi(x).$$

P r i m e d b a 1. Dokazani postupak za nalaženje partikularnog rešenja jednačine (5) može se primeniti i na linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima konačnog reda.

Primer 1. Pomoću formule (6) naći rešenje jednačine

$$y + 2y' + y'' = x^3.$$

Ovde je $a_0 = 1,\ a_1 = 2,\ a_2 = 1,\ a_i = 0,\ i = 3, 4, \ldots$
pa je na osnovu formule (6)

$$A_0 = 1,\ A_1 = -A_0(a_1 A_0) = -2,\ a_2 = -A_0(a_1 A_1 + a_2 A_0) = 3,$$

$$A_3 = -A_0(a_1 A_2 + a_2 A_1 + a_3 A_0) = -4;$$

$$y = x^3 - 2\cdot 3x^2 + 3\cdot 2\cdot 2x - 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$$

$$= x^3 - 6x^2 + 12x - 24.$$

P r i m e d b a 2. Ako je jednačina (5) oblika

(8) $$b_0 y^{(k)} + b_1 y^{(k+1)} + \ldots + b_n y^{(n+k)} + \ldots = h(x)$$

do njenog rešenja možemo doći ili da prvo primenimo formulu (6), pri čemu dobijamo

(9) $$y^{(k)} = B_0 h(x) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n h^{(n)}(x)$$

a zatim k-puta integralimo obe strane jednačine (9), ili da prvo k-puta integralimo obe strane jednačine (8) a zatim primenimo formulu (6).

Primer 2. $y'' + y^{IV} = e^x$

1. Ako dva puta integralimo obe strane date jednačine dobijamo

$$y + y'' = e^x + C_1 x + C_2$$

2.1 Na osnovu dokazanog postupka u tački 2. i na osnovu reda (9), odeljak IV:

$$f(x+\alpha)=f(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^{n}}{n!}f^{(n)}(x)\,,\quad \begin{cases} x\in[a+\alpha,\,b],\ \alpha>0\,,\\ x\in[a,\,b+\alpha],\ \alpha<0. \end{cases}$$

pokazaćemo kako se dolazi do rešenja za dva oblika jednačine (5).

Za $\alpha=1$ i $\alpha=-1$ imamo ove razvoje

(10) $$f(x+1)=f(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\,,$$

(11) $$f(x-1)=f(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n!}f^{(n)}(x)\,.$$

Ako je $f(x)=e^{x}$ tada je na osnovu (10)

$$e^{x+1}=e^{x}+e^{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

odakle je za x = o

$$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,,$$

a na osnovu (11)

$$e^{x-1}=e^{x}+e^{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n!}$$

odakle je za x = 1

$$e=\frac{1}{1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n!}}=\frac{1}{\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\dots}$$

Na osnovu razvoja (10) i (11) i postupka iz tačke (2) pokazaćemo da jednačina

(12) $$y-y'+\frac{y''}{2!}-\frac{y'''}{3!}+\dots+(-1)^{n}\frac{y^{(n)}}{n!}+\dots=h(x)$$

ima partikularno rešenje $y=h(x+1)$

a da jednačina

(13) $$y+y'+\frac{y''}{2!}+\frac{y'''}{3!}+\dots+\frac{y^{(n)}}{n!}+\dots=g(x)$$

odakle je $\binom{n}{1}-\binom{n}{2}+\dots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n}=\binom{n}{0}=1$

pa je

$$A_n=\frac{1}{n!}.$$

Prema tome rešenje jednačine (12) je

$$(\ast)\qquad y=h(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h^{(n)}(x)}{n!}.$$

Na osnovu razvoja (10) nadjeno rešenje ($\ast$) možemo napisati u obliku

$$y = h(x+1).$$

Na analogan način nalazimo da je rešenje jednačine (13)

$$y = g(x-1).$$

<u>Primer 3</u>. Jednačina

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{y^{(n)}}{n!}=\frac{1}{x-1}$$

ima rešenje

$$y=\frac{1}{(x+1)-1}=\frac{1}{x}.$$

Zaista, smenom funkcije $y=\frac{1}{x}$ u levu stranu date jednačine dobija se

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\dots+\frac{1}{x^n}+\dots=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=\frac{1}{x-1}$$

<u>Primer 4</u>. Jednačinu

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}}{n!}=e^{-x}$$

zadovoljava funkcija $y=e^{-x+1}$.

Zaista, smenom funkcije $y=e^{-x+1}$ u levu stranu date daate jednačine daje

$$e^{-x+1}\left(1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\dots\right)=e^{-x+1}\cdot\frac{1}{e}=e^{-x}.$$

N a p o m e n a 2. Ako je jednačina konačnog reda a desna strana polinom,

3. REŠENJE DIFERENCNE JEDNAČINE $\Delta f(x) = \varphi(x)$

Poznato je opšte rešenje diferencne jednačine

$$f(x+1) - f(x) = \varphi(x) \tag{14}$$

gde je $\varphi(x)$ data funkcija. tzv. Ojlerovo rešenje

$$f(x) = \int \varphi(x)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n!}\varphi^{(n)}(x) + H, \tag{15}$$

gde su B_n, ($n=1,2\ldots$) Bernulijevi brojevi, a H proizvoljna periodična funkcija periode 1.

Pokazaćemo kako se rešenje (15) jednačine (14) može dobiti pomoću formule (6) iz tačke (2) ovog odeljka.

Na osnovu razvoja (10)

$$f(x+1) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}$$

iz jednačine (14) dobija se jednačina

$$f'(x) + \frac{f''(x)}{2!} + \frac{f'''(x)}{3!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!} + \ldots = \varphi(x), \tag{16}$$

dakle diferencijalna jednačina beskonačnog reda.

Ako integralimo obe strane jednačine (16) dobijamo

$$f(x) + \frac{f'(x)}{2!} + \frac{f''(x)}{3!} + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{n!} + \ldots = \int \varphi(x)\,dx + C. \tag{17}$$

Potražimo rešenje jednačine (17) pomoću postupka iz tačke 2.

Ovde je:

$$a_0 = 1,\ a_1 = \frac{1}{2!},\ a_2 = \frac{1}{3!},\ a_4 = \frac{1}{4!}, \ldots, a_n = \frac{1}{n!}, \ldots$$

$$A_0 = 1,\ A_1 = -\frac{1}{2!},\ A_2 = -\left(\frac{1}{2!}A_1 + \frac{1}{3!}\cdot 1\right),\ A_3 = -\left(\frac{1}{2}A_2 + \frac{1}{3!}A_1 + \frac{1}{4!}\cdot 1\right),$$

Poznato je da izmedju Bernulijevih i Ojlerovih brojeva postoji veza

$$A_n = \frac{B_n}{n!}$$

a to znači da izmedju jednakosti (19') i (20') nema razlike.

Što se tiče konstante C u (18) ona se, kao što je poznato, može zameniti proizvoljnom periodičnom funkcijom periode 1.

Da zaključimo, izmedju našeg rešenja (18) i Ojlerovog (15) diferencne jednačine (14) nema nikakve razlike.

4. REŠAVANJE LINEARNE DIFERENCNE JEDNAČINE SA KONSTANTNIM KOEFICIJENTIMA

Opšte rešenje linearne diferencne jednačine k-tog reda

$$a_0 f(x+k) + a_1 f(x+k-1) + \dots + a_k f(x) = Q(x) \tag{21}$$

gde su $a_i\ (i=\overline{0,k})$ realni brojevi sastoji se iz opšteg rešenja $\bar{f}(x)$ jednačine

$$\sum_{i=0}^{k} a_i f(x+k-i) = 0$$

i partikularnog rešenja $f^*(x)$ jednačine (21):

$$f(x) = \bar{f}(x) + f^*(x). \tag{22}$$

Partikularno rešenje možemo naći pomoću postupka iz tačke 2 i na osnovu razvoja

$$f(x+\alpha) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} f^{(n)}(x)\ ,\ \alpha > 0. \tag{23}$$

data jednačina se transformiše u jednačinu

$$(25)\qquad -3f(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}f^{(n)}(x)=x^3.$$

Primenom formule (6) dobijamo partikularno rešenje prethodne jednačine

$$f^*(x) = -\frac{x^3}{3}-\frac{2x^2}{3}-\frac{20x}{9}-\frac{88}{27},$$

pa je na osnovu (22) opšte rešenje date jednačine

$$f(x) = C_1.2^x + C_2.(-2)^x-\frac{x^3}{3}-\frac{2x^2}{3}-\frac{20}{9}x-\frac{88}{27}.$$

Očigledno, opšte rešenje date diferencne jednačine nije i rešenje (opšte ili partikularno) diferencijalne jednačine (25).

Prema tome, prelaz sa diferencne jednačine (21) na diferencijalnu jednačinu beskonačnog reda (24) na osnovu razvoja (23) omogućava da se nadje jedno zajedničko partikularno rešenje ovih jednačina.

5. U tački 2 ovog odeljka utvrdili smo jedan postupak za nalaženje partikularnog rešenja jednačine (5) za slučaj kada su funkcije $f(x)$ i $\varphi(x)$ realne analitičke funkcije realne promenljive.

Neka je data linearna diferencijalna jednačina beskonačnog reda

$$(26)\qquad \sum_{n=0}^{\infty}a_n f^{(n)}(z)=\varphi(z)$$

gde je $\varphi(z)$ data cela funkcija normalnog tipa i najviše prvog poretka, a a_n konstante.

Rešenje (27) jednačine (26) utvrdjeno je prethodnom teoremom za slučaj kada je $\varphi(z)$ u (26) cela funkcija.

Postupak iz tačke 2 može se proširiti i na jednačinu (26) i to za slučaj da je $\varphi(z)$ proizvoljna regularna funkcija u nekoj konačnoj oblasti Z-ravni.

Ako je $\varphi(z)$ regularna funkcija u nekoj oblasti D konačne Z-ravni, jednačina (26) ima rešenje u obliku reda

$$f(z) = A_0\varphi(z) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \varphi^{(n)}(z) \tag{28}$$

$$A_0 = \frac{1}{a_0}, \quad A_n = -A_0 \sum_{i=1}^{n} a_i A_{n-i}$$

pod uslovom da ovaj red uniformno, a dvostruki red

$$\sum_{k,n=0}^{\infty} a_k A_n \varphi^{(n+k)}(z)$$

apsolutno konvergira u oblasti D.

Dokaz analogan dokazu teoreme 2.1.

Sledeći primer pokazuje kako se pomoću našeg postupka dolazi mnogo brže do rešenja jednačine (26) u poredjenju sa poznatim postupkom (27).

Primer 7. Primenom postupka iz tačke 2 (formula (6)) naći rešenje jednačine

$$f(z) - 2f'(z) + 3f''(z) - 4f'''(z) + \cdots + (-1)^{k+1} k f^{(k)}(z) + \cdots = e^{z}$$

Funkcija e^{z} je cela funkcija normalnog tipa prvog poretka.

R e š e n j e: Primenjujemo postupak iz tačke 2.

Ovde je:

te je transformisani red

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + 0 + 0 + \cdots$$

konvergentan i ima zbir $\frac{1}{4}$. Na osnovu napomene 1. prihvatamo ispravnost (29) pa prema tome i funkciju $f(z)=4e^{\frac{z}{2}}$ za rešenje date jednačine.

0 B.SAVIĆ, Jedan novi postupak odredjivanja koeficijenata Taylor-ovog reda, Matematički vesnik, Beograd, 1(14)(29), sv. 1, 1977.

0 B.SAVIĆ, Nota o rešavanju diferencijalnih jednačina pomoću Taylor-ovih redova, Matematički vesnik, Beograd, 1(14)(29), sv. 3, 1977.

1 B.SAVIĆ, Novi postupak odredjivanja koeficienata Taylor-ovog reda, Zbornik radova Vojne akademije KoV i intendantske službe, Beograd, broj 4, 1977.

2 M.PETROVIĆ, Integracija diferencijalnih jednačina pomoću redova, Gradjevinska knjiga, Beograd, 1969.

3. А. О. ГЕЛЬФОНД Исчисление конечных разностей, Москва, 1967 год.

4 B.M.Okiljevic, D.Sc-Khartoum, Analysis of a certain class of differential equations, Giornale di Matematiche di Battaglini, vol.XIII (3° della 6ª Serie),Napoli, 1965.

5 Konrad KNOP, Theorie und anwendung der unendlichen reihen, Berlin, 1931.