U N I V E R Z I T E T   U   B E O G R A D U

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Dragić Banković

REPRODUKTIVNA REŠENJA JEDNAČINA
doktorska disertacija

Beograd, 1980. godine

U ovom radu se razmatraju razni opšti problemi u vezi sa jednačinama, pri čemu osnovu gotovo svih razmatranja predstavlja ideja reproduktivnosti.

U prvoj glavi se navode definicije i tvrdjenja koja obezbedjuju dalji rad u ovoj oblasti, izmedju ostalih i tvrdjenje koje se odnosi na funkcionalnu jednačinu $f^2=f$ (prvo razmatranje u radu /23/ S. Prešića), koja je veoma prisutna u ovom radu. Zatim se navode razni primeri rešavanja jednačina korišćenjem pomenutog tvrdjenja.

Druga glava je posvećena Bulovim jednačinama. Istorijski gledano, reproduktivnost, koja je u ovoj glavi posebno prisutna, najpre je proučavana kod ovih jednačina. S druge strane, Bulove algebre, kao strukture, predstavljaju dobro tle za reproduktivnost. Izlaganje o Bulovim algebrama je, dobrim delom, podredjeno jednakosti $f^2=f$, odnosno njenim posledicama. Tako, neka poznata tvrdjenja (kao, na primer, teoreme **Levenhajma**) izvode se iz te jednakosti. U ovoj glavi takodje se daje potreban i dovoljan uslov da Bulova funkcija bude reproduktivna (tvrdjenje II.14). Pored reproduktivnosti, kao moćno sredstvo za rešavanje raznih problema u vezi sa Bulovim jednačinama, u ovoj glavi se javlja hornovski prilaz, odnosno primena poznate Votove teoreme. To se posebno odnosi na dokaz tvrdjenja II.16. Hornovski način rešavanja ovih problema baziran je na radovima /16/ i /17/.

Cilj druge glave je da, pored reproduktivnosti, izloži Bulove jednačine kao celinu.

Treća glava je posvećena opisivanju svih opštih (reproduktivnih) rešenja date jednačine, ukoliko je poznato jedno opšte rešenje te jednačine. Dobar deo rezultata u ovoj glavi baziran je na radu /24/ S. Prešića. U ovoj glavi je izložen jedan način za opisivanje svih opštih rešenja date jednačine u obliku proizvoda fh, gde je f poznato opšte rešenje te jednačine (tvrdjenje III.10.). Tvrdjenje III.12. predstavlja jedno uopštenje pomenutog rada /24/. U istoj glavi se razmatraju sistemi proizvoljnih jednačina. Dat je i jedan način za rešavanje sistema jednačine, pri čemu se koristi potreban i dovoljan uslov neprotivurečnosti jedne pomoćne jednačine (tvrdjenje III.14.).

Četvrta glava se odnosi na rešavanje jednačina na konačnim skupovima. Polazni rezultat u ovoj oblasti bio je rad "Une methode de resolutions appartiennent a un ensemble fini donne" S. Prešića. Dalja istraživanja se odnose na realizaciju metode i spomenutog rada na konkretnim strukturama i dobijanju drugih metoda. U ovoj glavi se daju i neka uopštenja pomenute metode (tvrdjenja IV.6. i IV.7.). Suština svih ovih metoda je u tome da se odredi podesna funkcija koja bi delovala tako što bi svaki element domena jednačine preslikala u neki drugi element domena, ovaj u treći itd., sve dok se ne dodje do elementa iz skupa rešenja, koji ta funkcija preslikava u samog sebe.

Pored svakog tvrdjenja, leme, posledice, zapažanja, primera i dokaza u ovom radu stoji broj rada (iz spiska korišćene literature koji je dat na kraju) iz koga se navodi to tvrdjenje, lema i sl. Ukoliko se neka činjenica navodi iz rada koji nije publikovan, umesto broja rada u zagradi stoji samo ime autora.

Ona tvrdjenja, leme, dokazi itd. kod kojih se ne navodi ime autora smatram originalnim doprinosima.

Za sve što sam uradio u istraživanju ove oblasti, uključujući i ovaj rad, najveću zahvalnost dugujem profesoru dr Slaviši Prešiću, rukovodiocu ovog rada, koji mi je davao izuzetnu podršku od samog početka mog bavljenja ovom problematikom. Profesor Prešić me je upoznao sa rezultatima u ovoj oblasti a zatim uputio u neposredno istraživanje. Od posebnog značaja je to što mi je profesor Prešić u neposrednim i čestim razgovorima ukazivao na suštinske činjenice koje se ne nalaze u literaturi.

Zahvalnost dugujem i dr Žarku Mijajloviću, docentu, koji je veoma podrobno pregledao ovaj rad u rukopisu i predložio izmene koje su znatno doprinele poboljšanju klvaliteta rada. Takodje mi je ukazao na mogućnosti primene rezultata iz teorije modela, koje su našle mesto u ovom radu.

S A D R Ž A J

I OSNOVNE DEFINICIJE, TVRDJENJA I PRIMERI REPRODUKTIVNOSTI

Jedan od centralnih matematičkih problema je odredjivanje nepoznatih elemenata koji zadovoljavaju odredjene uslove, odnosno, može se reći, rešavanje jednačina. Imajući u vidu da postoje vrlo različite jednačine od interesa je proučavanje osobina što opštijih jednačina (jedna od tih osobina je reproduktivnost). U ovom radu se razmatraju najopštije jednačine. To su jednačine izrazive u obliku $r(x)=\top$, gde je r relacija datog skupa S (domena jednačine), tj. preslikavanje skupa S u skup $\{\top, \bot\}$. Ovakve jednačine uključuju u sebe sve jednačine, nejednačine, sis‑eme jednačina i uopšte formula. Naime, rešiti datu formulu F(x) po nepoznatoj x datog skupa S logički je isto što i rešiti jednačinu $v(F(x))=\top$, gde je v istinitosna vrednost, a $\top$ odgovara reči tačan. Konkretno, rešiti nejednačinu $2x+3>5$ po x iz R može se formulisati: rešiti jednačinu $v(2x+3>5)=\top$ po x iz R.

Zadržaćemo se na problemu rešavanja formula. Neka je F formula jezika L. Uglavnom se pojavljuju dva slučaja rešavanja

1. Pored formule F zadata je i struktura $\mathcal{S}$ jezika $L'\subset L$ i pretpostavlja se da su neki relacijski i operacijski znaci formule F (upravo oni koji se nalaze u L') interpretirani u toj strukturi. U takvom slučaju problem rešavanja formule F svodi se na traženje nepoznatih funkcija i relacija. To

su, u stvari, razne funkcionalne, diferencijalne, diferencne, relacijske jednačine. Može se dogoditi da je L'=L, ali se traže vrednosti promenljivih x,y,... za koje je ispunjena formula F. U takvom slučaju kažemo i ovako: formula F, potpuno interpretirana, rešava se u odnosu na istaknute nepoznate. Na primer, ako se rešava formula $\neg p \vee q \Rightarrow p$ po p i q iz $\{\top,\bot\}$ pretpostavlja se da su znaci $\Rightarrow$, $\vee$, $\neg$ interpretirani kao operacije implikacija, disjunkcija i negacija skupa $\{\top,\bot\}$.

2. Data formula F jezika L rešava se u odnosu na članove jezika L. Drugačije rečeno traže se svi modeli (jezika L) te formule. Ovakva problematika se proučava u teoriji modela. Primera radi, u slučaju formula

$$(\forall x,y,z)(x * y) * z = x * (y * z)$$

$$(\forall x)(x * e = e * x = x)$$

$$(\forall x)(\exists y)(x * y = e \wedge y * x = e)$$

($*$ je operacija dužine dva, e je znak konstante) treba odrediti domen S, operaciju $*$ domena S i jedan član e domena S tako da budu zadovoljene sve tri formule. Jedno rešenje, odnosno model, ovih formula može ovako da se opiše: domen je skup Z celih brojeva, $*$ je operacija sabiranja, e je broj nula. U stvari, date tri formule predstavljaju aksiome grupa, pa su modeli tih formula razne odredjene grupe.

U slučaju navedene formule $\neg p \vee q \Rightarrow p$, tj. jednačine $v(\neg p \vee q \Rightarrow p) = \top$, postoji element (p,q), gde su p i q iz $\{\top,\bot\}$ takav da je data formula zadovoljena (jedan takav element je, recimo, $(\top,\top)$). Medjutim, ako takav element ne postoji, kaže se da je formula protivurečna (nemoguća). U slučaju da takav element postoji, tj. važi

$$(\exists x \in S)\ F(x)$$

što je zamena za $(\exists x)(x \in S \wedge F(x))$, kaže se da je formula $F(x)$ neprotivurečna ili moguća po x. Opštije, ako umesto pretpostavke da x, pored toga što zadovoljava formulu F, pripada skupu S imamo pretpostavku da x ima neku osobinu $C(x)$ tada imamo sledeći zapis neprotivurečnosti formule F

$$(\exists x)(C(x) \wedge F(x)).$$

Definicija I.1. Neka je R skup svih elemenata domena S koji zadovoljavaju jednačinu $r(x)=\top$, gde je r relacija datog skupa S tj.

(1) $$x \in R \overset{def}{\Longleftrightarrow} r(x)=\top$$

R se tada naziva skup rešenja date jednačine, element x koji zadovoljava datu jednačinu naziva se partikularno rešenje, dok se preslikavanje $g\colon S \to R$ naziva funkcija rešenja date jednačine. Često se za g kaže da je rešenje jednačine. Činjenica da se preslikavanjem g skup S preslikava u skup R može se izraziti ovako:

$$(\forall t \in S)(r(g(t))=\top).$$

Ako je preslikavanje g "na" tj. ako važi

$$x \in R \Longrightarrow (\exists t \in S)(x=g(t))$$

tada je formulom $x=g(t)$ definisano opšte rešenje jednačine $r(x)=\top$.

U definiciji opšteg rešenja pojavljuju se dva uslova: jedan je $(\forall t \in S)(r(g(t))=\top)$ a drugi da je g preslikavanje skupa S na skup R. Ova dva uslova mogu da se zamene jednim uslovom što pokazuje sledeće

Tvrdjenje I.1. /35/ Neka je $r(x)=\top$ data jednačina, gde je r relacija skupa S. Neka je formulom $x=g(t)$ definisano opšte rešenje te jednačine tj.

(2) $$(\forall t \in S)(r(g(t))=\top) \wedge (\forall x \in S)(r(x)=\top \Longrightarrow (\exists t \in S)(x=g(t))$$

Konjukcija (2) ekvivalentna je sa

(3) $$(\forall x \in S)(r(x)=\top \Longleftrightarrow (\exists t \in S)(x=g(t)).$$

Dokaz. /24/ Implikacija

$$(\forall x \in S)(r(x)=\top \Longrightarrow (\exists t \in S)(x=g(t))$$

je deo ekvivalencije (3). Dalje je

$$(\forall x \in S)((\exists t \in S)(x=g(t)) \Longrightarrow r(x)=\top)$$

$$\Longleftrightarrow (\forall x \in S)(\forall t \in S)(x=g(t) \Longrightarrow r(x)=\top)$$

(valjana formula $(\exists x)B(x) \Longrightarrow A \Longleftrightarrow (\forall x)(B(x) \Longrightarrow A)$, gde promenljiva x nije slobodna u formuli A)

$$\Longleftrightarrow (\forall t \in S)(r(g(t))=\top)$$

(primena valjane formule $(\forall x)(x=u \Longrightarrow A(x)) \Longleftrightarrow A(u)$, gde je term u slobodan za promenljivu x u formuli A). $\dashv$

Kao što se vidi, jednačina $r(x)=\top$ ekvivalentna je sa formulom $(\exists t \in S)(x=g(t))$. Poslednja formula se naziva rešen oblik jednačine $r(x)=\top$ i iz nje se neposredno čitaju rešenja. Rešen oblik obuhvata i slučaj

$$x=x_1 \vee x=x_2 \vee \ldots \vee x=x_k$$

jer u slučaju konačnog skupa kvantifikator $\exists$ prelazi u konačnu disjunkciju.

Kao što je rečeno, pod opštim rešenjem jednačine $r(x)=\top$ se podrazumeva preslikavanje g koje domen jednačine S preslikava na skup rešenja te jednačine. Tačnije, g ne mora da bude preslikavanje domena S jednačine $r(x)=\top$, već i nekog drugog, pomoćnog skupa P. Jedini uslov koji skup P pri tom treba da zadovoljava jeste da je $\mathrm{card}P \geqslant \mathrm{card}R$, kako bi preslikavanjem g mogli da se dobiju svi elementi skupa rešenja. Postavlja se pitanje da li za svaku neprotivurečnu jednačinu $r(x)=\top$ postoji skup P i preslikavanje g tako da važi

(4) $\quad (\forall x \in S)(r(x)=\top \Longleftrightarrow (\exists t \in P)\ x=g(t))$.

Odgovor je potvrdan, jer za P može da se uzme baš skup rešenja R a za preslikavanje g identičko preslikavanje, tj. $g(x)=x$.

Kako je skup rešenja obično nepoznat to ćemo za skup P najčešće uzimati domen jednačine, tj. skup S. Ovo ide u prilog ideji da je odredjivanje rešenja jednačine $r(x)=\top$ domena S, u stvari, postupak kojim se medju elementima skupa S izdvajaju oni koji zadovoljavaju tu jednačinu (kao što se eksplicitno vidi kod metoda za rešavanje jednačina na konačnim skupovima) a krajnji rezultat je formula rešenja. S druge strane, preslikavanjem skupa S dobijaju se svi elementi skupa rešenja, pa nema potrebe da se uvodi neki širi skup P. Naprotiv, cilj je da se dobije što uži skup P, a da se njegovim preslikvanjem dobije čitav skup R. Idealan slučaj za praktičan rad bio bi da opšte rešenje bude preslikavanje "1-1", odnosno da svakom partikularnom rešenju odgovara samo jedna vrednost iz skupa P (kao u tvrdjenju II.6.).

Napominjemo da je ekvivalencija (4) uslovna, odnosno važi uz pretpostavku da je jednačina $r(x)=\top$ neprotivurečna, tj. uz uslov $(\exists x)(x\in S \wedge r(x)=\top)$, što može da se napiše u obliku

$$(\exists x)(x\in S \wedge r(x)=\top) \Rightarrow (\forall P)(\forall g)\left[g:P\xrightarrow{na}\{x \mid x\in S \wedge r(x)=\top\}\right.$$
$$\left.\Rightarrow (\forall x\in S)(r(x)=\top \Leftrightarrow (\exists t\in P)(x=g(t)))\right].$$

Istaknimo još i to da postupak rešavanja date jednačine zavisi od P i od g i da je poseban slučaj reproduktivnost.

Često se postavlja pitanje rešavanja jednačina oblika $r(x,a_1,\dots,a_n)=\top$, koja pored nepoznate x sadrži n parametara koji pripadaju skupu S. To, naravno, znači da je u pitanju rešavanje više jednačina, tj. svih onih jednačina $r(x,a_1^1,\dots,a_n^1)=\top$, $r(x,a_1^2,\dots,a_n^2)=\top,\dots$ koje nastaju kada se parametri na sve načine zamene elementima iz S. Znači svakoj n-torki $(a_1,\dots,a_n)$ iz S^n odgovara po jedna jednačina. U vezi sa jednačinom koja sadrži parametre, postavlja se pitanje da li je ona neprotivurečna ili ne. Naime, kao što je već rečeno, potreban i dovoljan uslov neprotivurečnosti takve jednačine izražava se formulom

(5) $(\exists x)(x \in S \wedge r(x,a_1,\ldots,a_n)=\top)$

Mnogo češće se pod potrebnim i dovoljnim uslovom neprotivurečnosti jednačine $r(x,a_1,\ldots,a_n)=\top$ podrazumeva formula $U(a_1,\ldots,a_n)$ koja je ekvivalentna sa (5) a nastaje iz (5) eliminacijom kvantifikatora $\exists x$. Tako, na primer, za Bulovu jednačinu $ax \cup bx'=0$ može da se dokaže

$$(\exists x)(ax \cup bx'=0) \Longleftrightarrow ab=0$$

Uslov $U(a_1,\ldots,a_n)$ takodje može da se smatra jednačinom $(v(U(a_1,\ldots,a_n))=\top)$. Označimo sa R_u skup rešenja te jednačine. Taj skup, u stvari, predstavljaju sve one n-torke $(a_1,\ldots,a_n)$ koje zadovoljavaju uslov $U(a_1,\ldots,a_n)$. Svakoj takvoj n-torki $(a_1^u,\ldots,a_n^u)$ iz R_u odgovara jednačina $r(x,a_1^u,\ldots,a_n^u)=\top$ Obeležimo sa $R(a_1^u,\ldots,a_n^u)$ odgovarajući skup rešenja. Tada postoji neki skup $P(a_1^u,\ldots,a_n^u)$ i neka funkcija $g(a_1^u,\ldots,a_n^u)$ tako da važi

(6) $r(x,a_1^u,\ldots,a_n^u)=\top \Longleftrightarrow (\exists t \in P(a_1^u,\ldots,a_n^u))x=g(a_1^u,\ldots,a_n^u)(t).$

Na jednom primeru u /31/ pokazuje se kako se odredjuje skup P i objedinjavajuća funkcija g tako da za sve n-torke iz R_u važi

(7) $r(x,a_1,\ldots,a_n)=\top \Longleftrightarrow (\exists t \in P)x=g(t,a_1,\ldots,a_n).$

Slično može da se postupi i u opštem slučaju. Naime, neka je za sve $(a_1,\ldots,a_n) \in R_u$

$$P(a_1,\ldots,a_n)=S$$

Neka je $(a_1^o,\ldots,a_n^o) \in R_u$. Tada je $g(a_1^o,\ldots,a_n^o)$ preslikavanje koje preslikava skup S u skup rešenja $R(a_1^o,\ldots,a_n^o)$. Sva preslikavanja $g(a_1,\ldots,a_n)$ gde su $(a_1,\ldots,a_n) \in R_u$ možemo da objedinimo na sledeći način:

$$g(t,a_1,\ldots,a_n)=g(a_1,\ldots,a_n)(t).$$

Lako se proverava da ovako definisan skup P i funkcija g zadovoljavaju (7).

Pojam reproduktivnosti, iako relativno novijeg datuma, je veoma prisutan u mnogim matematičkim problemima. Reproduktivnost, na neki način, predstavlja završetak nekog postupka, odnosno rešenje nekog problema. Naime, ako se neki matematički postupak odvija u više koraka i ako se počev od nekog koraka ne dobijaju novi objekti, već daljom primenom postupka dobijamo ponovo isti objekat koji zadovoljava polazne uslove, onda je tu prisutna reproduktivnost. Specijalno, kod jednačina to znači da se primenom funkcije rešenja na neki element skupa rešenja dobija taj isti element. Od posebne važnosti su takozvane reproduktivne funkcije, tj. one kod kojih je za svako x $f(f(x))=f(x)$ ili, kraće, $f^2=f$. Ovakve funkcije se nazivaju i retrakti.

U slučaju da je kod jednačine $x=f(x)$ funkcija f reproduktivna, tada je, prema radu /23/, formulom $x=f(t)$ odredjeno opšte rešenje date jednačine. Zbog toga se nastoji da se datoj jednačini odredi ekvivalentna jednačina oblika $x=f(x)$ i da funkcija f bude reproduktivna, što se postiže na različite načine. Slična ideja je prisutna i kod drugih načina za rešavanje jednačina. Ova ideja je prisutna, na primer kod iterativnih postupaka. Kada se primenjuje Banahov stav o fiksnoj tački (i ovaj pojam je vezan za reproduktivnost) za kompletne metričke prostore, polazi se od jednačine $F(x)=0$, pa se ovoj jednačini pridružuje ekvivalentna jednačina $x-pF(x)=x$, gde se p odredjuje tako da funkcija $f(x)=x-pF(x)$ bude kontrakcija na nekom odsečku $[a,b]$, čime se omogućava primena pomenutog stava.

Prva poznata ideja o reproduktivnosti, prema /35/, pojavila se kod Šredera, medjutim prvi put termin "reproduktivan" upotrebio je Levenhajm u radu "Über die Auflösungen von Gleichungen in logischen Gebietskalkul". U početku rada sa reproduktivnim rešenjima nije se išlo dalje od konstatacije da je neko rešenje reproduktivno. Medjutim, u poslednjoj deceniji reproduktivnosti se pridaje veći značaj a reproduktivnost dobija i operativni karakter. Neke metode za rešavanje jednačina zasnivaju se baš na ideji da se odredi funkcija koja bi elemente skupa rešenja preslikala u same sebe, odnosno na reproduktivnosti. S druge strane, reproduktivnost funkcija postaje moćno sredstvo za dokazivanje opštosti rešenja.

<u>Definicija I.2</u>. Formula $x=g(t)$ definiše opšte reproduktivno rešenje jednačine $r(x)=\top$ ako je $g\colon S\rightarrow R$ rešenje koje zadovoljava uslov

(8) $(\forall x\in S)(r(x)=\top \Longleftrightarrow x=g(x))$

U radu /24/ su dati uslovi, koji su ekvivalentni uslovima definicije reproduktivnog rešenja, ali su operativniji i služe kao osnova u nekim daljim tvrdjenjima.

<u>Tvrdjenje I.2</u>. /24/ Formulom $x=g(t)$ je definisano reproduktivno rešenje jednačine $r(x)=\top$ ako i samo ako su ispunjeni uslovi

(9) $(\forall x\in S)(r(x)=\top \Longrightarrow x=g(x))$

(10) $(\forall x\in S)(r(x)=\top \Longrightarrow r(g(x)=\top)$

Dokaz. /24/

$x=g(t)$ je reproduktivno rešenje jednačine $r(x)=\top$

$$\Longleftrightarrow (\forall t\in S)(r(g(t))=\top)\wedge(\forall x\in S)(r(x)=\top \Longrightarrow (\exists t\in S)(x=g(t))$$
$$\wedge (\forall x\in S)(r(x)=\top \Longrightarrow x=g(x))$$

(prema definiciji)

$\Longleftrightarrow (\forall t\in S)(r(g(t))=\top) \wedge (\forall x\in S)(r(x)=\top \Longrightarrow x=g(x))$

$\Longleftrightarrow (\forall t\in S)(r(t)\neq\top \Longrightarrow r(g(t))=\top) \wedge (\forall t\in S)(r(t)=\top \Longrightarrow r(g(t))=\top)$

$\wedge (\forall x\in S)(r(x)=\top \Longrightarrow x=g(t))$

(tautologija $q \Longleftrightarrow (p\Rightarrow q)\wedge(\neg p\Rightarrow q)$, p je $r(x)=\top$)

$\Longleftrightarrow (\forall x\in S)(r(x)=\bot \Longrightarrow r(g(x))=\top) \wedge (\forall x\in S)(r(x)=\top \Longrightarrow x=g(x)))$

(jer $(\forall x\in S)(r(x)=\top \Longrightarrow x=g(x)) \Longrightarrow (\forall t\in S)(r(x)=\top \Longrightarrow r(g(t))=\top)$)

$\Longleftrightarrow (9)\wedge(10).$ $\dashv$

Drugim rečima reproduktivno rešenje je ono preslikavanje koje elemente skupa rešenja preslikava u same sebe a ostale elemente u neke elemente skupa rešenja.

Zapažanje I.1. /35/ Ako je $x=g(t)$ rešenje jednačine $r(x)=\top$, ono je reproduktivno ako i samo ako je

$(\forall x)(r(x)=\top \Longleftrightarrow x=g(x)).$

Sada navodimo važno tvrdjenje S. Prešića, koje, prema Rudeanu, predstavlja "polaznu tačku za odredjivanje najopštijih formula reproduktivnih rešenja", što se u ovom radu i potvrdjuje. Neka je f preslikavanje nepraznog skupa S u samog sebe. Izmedju jednačina $f(f(x))=f(x)$ i $x=f(x)$ postoji sledeća veza

Tvrdjenje I.3. /23/ Neka je $f(x)$ preslikavanje za koje je $(\forall x)f(f(x))=f(x)$, ili kraće $f^2=f$. Tada

(a) Ako je p proizvoljan element iz S formulom $x=f(p)$ je odredjeno jedno partikularno rešenje jednačine $x=f(x)$.

(b) Ako je x rešenje jednačine $x=f(x)$ po x, postoji u S element p takav da je $x=f(p)$.

Imajući u vidu definiciju opšteg rešenja ovo tvrdjenje može da se iskaže i na sledeći način: pretpostavljajući da je ispunjen uslov $f^2=f$, opšte rešenje jednačine $x=f(x)$ je dato formulom $x=f(p)$, gde je $p\in S$.

Dokaz. /23/ (a) neposredno sledi iz činjenice

$$((\forall x)f(f(x))=f(x) \wedge x=f(p)) \Rightarrow x=f(x)$$

prema valjanoj formuli $u=a \wedge b(a) \Rightarrow b(u)$, dok (b) sledi iz

$$x=f(x) \Rightarrow (\exists y)(x=f(y)). \dashv$$

Sledeće tvrdjenje se odnosi na egzistenciju reproduktivne jednačine (jednačina $x=f(x)$ je reproduktivna ako je funkcija f reproduktivna) ekvivalentne sa datom jednačinom.

Tvrdjenje I.4. /23/ Za svaku neprotivurečnu jednačinu $x=g(x)$ gde je $g:S \rightarrow S$, postoji bar jedna reproduktivna jednačina ekvivalentna sa $x=g(x)$.

Dokaz. /23/ Ako se sa R označi skup rešenja jednačine $x=g(x)$, tada je

$$\emptyset \neq R \subset S \quad \text{i} \quad x \in R \Leftrightarrow x=g(x).$$

Neka je $h:S \setminus R \rightarrow R$. Definišemo preslikavanje $f:S \rightarrow S$ na sledeći način

$$f(x) = \begin{cases} h(x), & \text{za } x \in S \setminus R \\ x, & \text{za } x \quad R \end{cases}$$

Očigledno da ovakva konstrukcija funkcije f obezbedjuje da je $f^2=f$ i da su jednačine $x=f(x)$ i $x=g(x)$ ekvivalentne.

Primer I.1. Rešiti funkcionalnu jednačinu

(11) $\qquad f(x,y)=-f(y,x)$

po f, gde je $f:R_e \rightarrow R_e$ (R_e je skup realnih brojeva).

Podjimo od jednačine

(12) $\qquad f(x,y) = Af(x,y) + Bf(y,x)$

gde su A i B realni brojevi koje treba odrediti tako da jednačina (12) bude ekvivalentna sa (11) i da bude reproduktivna. Znači jednačine $(1-A)f(x,y) - Bg(y,x) = 0$ i $f(x,y) + f(y,x) = 0$ treba da budu ekvivalentne, a to se postiže ako je $B = A - 1$, tj. jednačina (12) je $f(x,y) = Af(x,y) + (A-1)f(y,x)$.

Desnu stranu poslednje jednakosti obeležićemo sa $G(f)$, tj. imamo $f=G(f)$. Sada odredjujemo

$$G(G(f)) = A(Af(x,y)+(A-1)f(y,x))+(A-1)(Af(y,x)+(A-1)f(x,y)) =$$
$$= (A^2+(A-1)^2)f(x,y) + 2A(A-1)f(y,x).$$

Uslov $G^2=G$ biće ispunjen ako su zadovoljene jednakosti

$$A^2 + (A-1)^2 = A \quad \text{i} \quad 2A(A-1) = A-1$$

koje su, inače, ekvivalentne. Tako se dobija da je $A=\frac{1}{2}$, tj. jednačina

$$f(x,y) = \tfrac{1}{2}f(x,y) - \tfrac{1}{2}f(y,x)$$

je ekvivalentna sa jednačinom (11) i još je reproduktivna, pa je formulom

$$f(x,y) = \tfrac{1}{2}F(x,y) - \tfrac{1}{2}F(y,x)$$

gde je $F:R_e \to R_e$ proizvoljna funkcija, odredjeno opšte rešenje funkcionalne jednačine (11), prema tvrdjenju I.3.

Primer I.2. (S. Prešić) Rešiti diferencijalnu jednačinu

(13) $$y'' = 0$$

Imamo da je $y'' = 0 \Leftrightarrow y'(x) = y'(0) \Leftrightarrow y(x) = y'(0)x+y(0)$.

Neka je $F(y) = y'(0)x+y(0)$. Tada je

$$F(F(y)) = F(xy'(0)+y(0)) = x(xy'(0)+y(0))'_{x=0}+0\cdot y'(0)+y(0) =$$
$$= xy'(0)+y(0) = F(y).$$

To znači da je formulom

$$y = F'(0)x+F(0) \quad (F:R_e \to R_e \text{ je proizvoljna funkcija}),$$

tj. $y = C_1x+C_2$, odredjeno opšte rešenje jednačine (13).

Primer I.3. Rešiti jednačinu $2x+3y+5 = 0$ po x i y iz R.

$$2x+3y+5 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{5-2x}{3} \Leftrightarrow x=x \wedge y = \frac{5-2x}{2} \text{ tj.}$$

(14) $$(x,y) = (x,\frac{5-2x}{2}).$$

Uvedimo oznake $(x,y) = X$, $F(X) = (x,\frac{5-2x}{2})$. Jednačina (14) postaje

$X = F(X)$. Kako je $F(F(X)) = F((x,\frac{5-2x}{2})) = (x,\frac{5-2x}{2}) = F(X)$, znači da je F reproduktivna funkcija, pa je formulom $X = F(P)$ ili, skalarno, $x=p$ i $y=1-p$, gde je $P=(p,t)$ $(p,t\in R)$, dato opšte rešenje jednačine $2x+3y+5 = 0$.

Primer I.4. /32/ U radu /32/ se razmatra jedna metoda rešavanja funkcionalne jednačine oblika

(15) $\quad a_1(x)f(p_1x)+a_2(x)f(p_2x)+\ldots+a_n(x)f(p_nx) = 0$

gde $x\in E$, $p_i:E\xrightarrow{na}E$, $a_i:E\longrightarrow K$, $f:E\longrightarrow K$, pri čemu su E i K dati skupovi, p_i date permutacije skupa E koje čine grupu, p_1 je identičko preslikavanje, $(K,+,\cdot)$ je polje a f je nepoznata funkcija.

Radi toga se najpre jednačina (15) piše u obliku

(16) $$A(x)\begin{bmatrix} f(x) \\ f(p_2x) \\ \vdots \\ f(p_nx) \end{bmatrix} = 0$$

gde je A odgovarajuća matrica. Formula rešenja je oblika

(17) $$\begin{bmatrix} f(x) \\ f(p_2x) \\ \vdots \\ f(p_nx) \end{bmatrix} = (BA + I)\begin{bmatrix} g(x) \\ g(p_2x) \\ \vdots \\ g(p_nx) \end{bmatrix} \quad \text{(g je proizvoljna funkcija)}$$

gde je B matrica koja zadovoljava uslove

(C_1) $\quad ABA + A = 0$

(C_2) $\quad B$ je saglasna sa grupom G (matrica B je saglasna sa grupom G, po definiciji, ako jednačina

$$\begin{bmatrix} f(x) \\ f(p_2x) \\ \vdots \\ f(p_nx) \end{bmatrix} = B\begin{bmatrix} g(x) \\ g(p_2x) \\ \vdots \\ g(p_nx) \end{bmatrix}$$

jednoznačno definiše funkciju f za neko $g:E\longrightarrow K$).

Zanimljivo je da se i formula (17) može posmatrati kao jedan primer nastao iz odgovarajuće reproduktivne jednačine. Naime, u vezi sa jednakošću (17) uočimo jednačinu

$$(18)\qquad \begin{bmatrix} f(x) \\ f(p_2x) \\ \vdots \\ f(p_nx) \end{bmatrix} = (BA + I) \begin{bmatrix} f(x) \\ f(p_2x) \\ \vdots \\ f(p_nx) \end{bmatrix}$$

gde B zadovoljava uslove (C_1) i (C_2). Dokazaćemo da je jednačina (18) ekvivalentna sa jednačinom (16) i da je funkcija na desnoj strani jednakosti (18) reproduktivna. Uvodjenjem oznaka

$$\begin{bmatrix} f(x) \\ f(p_2x) \\ \vdots \\ f(p_nx) \end{bmatrix} = F \qquad \begin{bmatrix} g(x) \\ g(p_2x) \\ \vdots \\ g(p_nx) \end{bmatrix} = G$$

jednakost (18) se može napisati u obliku

$$F = (BA + I)G$$

Neka važi $F = (BA + I)F$. Množenjem poslednje jednakosti sa A sa leve strane dobija se $AF = (ABA + A)F$ tj. $AF = 0$, jer je $ABA + A = 0$. Obratno, neka je $AF = 0$. Polazeći od $F=F$ i dodavanjem desnoj strani nula-matrice BAF dobijamo $F = BAF + F$ tj. $F = (BA + I)F$.

Dokažimo da je funkcija $F(G) = (BA + I)G$ reproduktivna

$$\begin{aligned} F(F(G)) &= (BA + I)((BA + I)G) = (BA + I)(BA + I)G = \\ &= (BABA + BA + BA + I)G = (B(ABA + A) + BA + I)G = \\ &= (BA + I)G = F(G) \end{aligned}$$

Prema tvrdjenju I.3. sledi da je formulom (17) odredjeno opšte rešenje jednačine (16), tj. (15).

Primer I.5. /33/ Uz pretpostavke prethodnog primera u radu /33/ se razmatra rešavanje jednačine

$$(19)\quad a_1(x)f(p_1x)+a_2(x)f(p_2x)+\ldots+a_n(x)f(p_nx) = g(x)$$

gde je $g:E \to K$. Najpre se dokazuje da jednačina (19), koja je inače ekvivalentna sa $AF = G$, neprotivurečna ako i samo ako je

(20) $\qquad (AB + I)G = 0$

gde je B matrica koja zadovoljava uslove (C_1) i (C_2). Pod pretpostavkom da je uslov (20) zadovoljen formulom

$$(21) \qquad \begin{bmatrix} f(x) \\ f(p_2) \\ \vdots \\ f(p_n x) \end{bmatrix} = - B(x) \begin{bmatrix} g(x) \\ g(p_2) \\ \vdots \\ g(p_n x) \end{bmatrix} + (B(x)A(x) + I) \begin{bmatrix} h(x) \\ h(p_2 x) \\ \vdots \\ h(p_n x) \end{bmatrix}$$

je odredjeno opšte rešenje jednačine (19) gde je h proizvoljna funkcija $h:E \to K$.

Dokaz ove činjenice može takodje da se izvede korišćenjem tvrdjenja I.3. Uvedimo oznaku

$$\begin{bmatrix} h(x) \\ h(p_2 x) \\ \vdots \\ h(p_n x) \end{bmatrix} = H$$

U vezi sa formulom (21) tj. $F = - BG + (BA + I)H$, dokažimo da su jednačine

(22) $\qquad AF + G$

(23) $\qquad F = - BG (BA + I)H$

ekvivalentne. Neka je $AF + G$. Tada (23) postaje

$$F = - BG + BAF + F$$

$$\Longleftrightarrow F = B(- G + AF) + F$$

$$\Longleftrightarrow F = F, \text{ jer je } - G + AF = 0.$$

Neka je, sada, $F = - BG + BAF + F$. Množenjem sa A sa leve strane dobijamo

$$AF = - ABG + ABAF + AF$$

$$\Longleftrightarrow AF = - ABG + (ABA + A)F$$

$$\Longleftrightarrow AF = - ABG$$

$$\Longleftrightarrow AF = G \quad , \text{ jer iz (20) sledi } ABG = - G.$$

Dokažimo da je funkcija $F = - BG + (BA + I)H$ reproduktivna, tj. da je $F(F(H)) = F(H)$.

$$
\begin{aligned}
F(F(H) &= - BG + (BA + I)(- BG + (BA + I)H) \\
&= - BG - BABG + (BABA + BA)H - BG + (BA + I)H \\
&= - BG - B(ABG) + B(ABA + A)H - BG + (BA + I)H \\
&= - BG + BG - BG + (BA + I)H \\
&= - BG + (BA + I)H \\
&= F(H).
\end{aligned}
$$

Na kraju, napominjemo da u slučaju kada jednačina $r(x) = \top$ ima jedinstveno rešenje, odnosno kada je $r(x) = \top$ ekvivalentno sa $x=c$, možemo takodje da primenimo tvrdjenje I.3., jer funkcija $F=c$ zadovoljava uslov $F(F(x)) = F(c) = c = F(x)$.

II REPRODUKTIVNOST BULOVIH JEDNAČINA

Definicija II.1. Pod Bulovom algebrom se podrazumeva sistem $(B, \cup, \cdot, ', 0, 1)$ gde je B skup, $\cup : B \times B \to B$ i $\cdot : B \times B \to B$ binarne operacije na B, $' : B \to B$ unarna operacija na B, 0 i 1 su nularne operacije, sa sledećim aksiomama

$$\begin{array}{rclcrcl}
x \cup y & = & y \cup x & \qquad & xy & = & yx \\
(x \cup y) \cup z & = & x \cup (y \cup z) & & (xy)z & = & x(yz) \\
x \cup xy & = & x & & x(x \cup y) & = & x \\
x \cup yz & = & (x \cup y)(x \cup z) & & x(y \cup z) & = & xy \cup xz \\
x \cup 1 & = & 1 & & x \cdot 0 & = & 0 \\
x \cup x' & = & 1 & & xx' & = & 0
\end{array}$$

$$0 \neq 1$$

Dogovorno, Bulovu algebru $(B, \cup, \cdot, ', 0, 1)$ obeležavaćemo sa B. Bulovu algebru čiji su elementi 0 i 1 obeležavaćemo sa B_2.

Definicija II.2. Za sve $x, y \in B$

$x \leq y$ ako i samo ako $x \cup y = y$

Definicija II.3. Atomska formula jezika L je formula oblika

1. $t_1 = t_2$, gde su t_1 i t_2 termi jezika L
2. $P(t_1, \ldots, t_n)$, gde je P n-arni relacijski simbol jezika L a $t_1, \ldots, t_n$ termi jezika L.

Definicija II.4.

1. Elementarne Hornove formule jezika L su atomske formule jezika L i sve formule oblika $p_1 \wedge \ldots \wedge p_n \Rightarrow p$, gde su $p_1, \ldots, p_n, p$ atomske formule.

2.1. Elementarne Hornove formule su Hornove formule

2.2. Ako su A i B Hornove formule tada su i $A \wedge B$, $\forall A$, $\exists A$ Hornove formule

Hornova rečenica je Hornova formula bez slobodnih promenljivih.

Sada navodimo važno tvrdjenje, poznato kao Votova teorema.

Tvrdjenje II.1. /17/ Neka je F Hornova rečenica jezika Bulovih algebri. Ako F važi u B_2 tada važi i u svakoj Bulovoj algebri B.

Dokaz. Videti, na primer, /17/.

Ističemo da ćemo prvim malim slovima latinice a,b,c,... obeležavati elemente skupa $\{0,1\}$, dok ćemo sa x,y,z,... obeležavati proizvoljne elemente Bulove algebre B. Slično važi i za vektore, koje obeležavamo velikim slovima. Naime, $A = (a_1,\ldots,a_n) \in \{0,1\}^n$, dok je $X = (x_1,\ldots,x_n) \in B^n$. Zatim uvodimo oznake $x^0 = x'$, $x^1 = x$ i $X^A = x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n}$. Oznake

$$\bigcup_A \qquad \prod_A \qquad \bigwedge_A$$

znače da unija, proizvod, odnosno konjukcija idu preko svih $A \in \{0,1\}^n$.

Definicija II.5. Bulova jednačina po nepoznatim $x_1,\ldots,x_n$ iz Bulove algebre B je jednačina oblika

$$f(X) = g(X) \qquad (X = (x_1,\ldots,x_n))$$

gde su $f,g: B^n \rightarrow B$ Bulove funkcije.

Slično se definiše Bulova nejednačina po n nepoznatih kao $f(X) \leqslant g(X)$.

Partikularno rešenje jednačine (nejednačine) je vektor $X \in B^n$ koji zadovoljava tu jednačinu (nejednačinu). Ako to rešenje pripada skupu $\{0,1\}^n$, onda se naziva elementarnim rešenjem.

<u>Tvrdjenje II.2.</u> /35/ Svaka Bulova jednačina, nejednačina i sistem (konjukcija konačnog broja Bulovih jednačina ili nejednačina) može da se svede na oblik $h(X)=0$, odnosno $k(X)=1$.

Dokaz. /35/ Neka su $f,g:B^n \to B$ Bulove funkcije. Tada je, za svako $X \in B^n$, $f(X)=g(X)$ ako i samo ako je $f(X)g'(X) \cup f'(X)g(X)=0$. Ovo sledi na osnovi formule

$$(\forall x,y \in B)(x=y \Leftrightarrow x'y \cup xy'=0)^{1/}$$

koja važi u svakoj Bulovoj algebri B. Slično, Bulova nejednačina $f(X) \leqslant g(X)$ je ekvivalentna sa jednačinom $f(X)g'(X)=0$ prema važećoj formuli $(\forall x,y \in B)(x \leq y \Leftrightarrow xy'=0)$.

Imajući u vidu osobinu $(\forall x,y \in B)(x \cup y=0 \Leftrightarrow x=0 \wedge y=0)$ lako se, korišćenjem indukcije, dokazuje da je sistem Bulovih jednačina

$$f_1(X) = 0 \wedge f_2(X) = 0 \wedge \ldots \wedge f_n(X) = 0$$

ekvivalentan sa Bulovom jednačinom

$$\bigcup_{i=1}^{n} f_i(X) = 0$$

Komplementiranjem jednačine $f(X)=0$ dobija se jednačina $g(X)=1$. $\dashv$

Osnovu rada sa Bulovim jednačinama predstavlja činjenica da je svaka Bulova funkcija potpuno odredjena ako su poznate vrednosti te funkcije na elementarnim vektorima. O tome govori naredno

<u>Tvrdjenje II.3.</u> /35/ Za Bulovu funkciju f sa n promenljivih na Bulovoj algebri B važi

$$(\forall X)\ f(X) = \bigcup_A f(A)X^A$$

Dokaz. /16/ Neka je f Bulov term na B. Lako se proverava da rečenica

---

1/ $x'y \cup xy'$ se često obeležava sa $x+y$ i zove se simetrična razlika

(1) $$(\forall X)(\forall Y)(\bigwedge_A f(A,Y) = 0 \Rightarrow f(X,Y) = 0)$$

važi u algebri B_2. Kako je rečenica (1) Hornova, to iz Votove teoreme sledi da rečenica (1) važi u svakoj Bulovoj algebri B. Jedna posledica ove činjenice je

1. Ako za sve $A \in \{0,1\}^n$ važi u B $f(A,Y)=0$ tada u B važi i $(\forall X)f(X,Y)=0$ $(Y \in B)$.

Imajući u vidu činjenicu da je jednakost $f_1=f_2$ ekvivalentna sa $f_1+f_2=0$ imamo

2. Ako za sve $A \in \{0,1\}^n$ u B važi $f_1(A)=f_2(A)$ tada u B važi $(\forall X)f_1(X)=f_2(X)$, gde su $f_1(X)$ i $f_2(X)$ Bulovi termi na B.

Neka je $C \in \{0,1\}^n$. Tada je

$$\bigcup_A f(A)C^A = f(C) \text{ tj. } \bigwedge_C f(C) = \bigcup_A f(A)C^A$$

te prema 2. imamo da u svakoj Bulovoj algebri B važi

$$(\forall X)\ f(X) = \bigcup_A f(A)X^A$$

Prema prethodnom, Bulova funkcija $f:B \to B$ jedne promenljive može da se napiše u obliku $f(x) = f(1)x \cup f(0)x'$.

<u>Tvrdjenje II.4.</u> /35/ Ako je $f(1)f(0)=0$ tada je formulom

$$x = f'(1)t \cup f(0)$$

definisano opšte reproduktivno rešenje Bulove jednačine $f(x)=0$.

Dokaz. Potražimo rešenje jednačine $f(x)=0$ u reproduktivnom obliku. Naime, odredimo funkciju $g(x)$ koja zadovoljava uslove

(2) $f(x)=0$ je ekvivalentno sa $x=g(x)$

(3) $(\forall x \in B)\ g(g(x)) = g(x)$.

$$x = g(x)$$

$$\Longleftrightarrow x = g(1)x \cup g(0)x'$$

$$\Longleftrightarrow x'(g(1)x \cup g(0)x') \cup x(g(1)x \cup g(0)x')' = 0$$

$$\Longleftrightarrow g'(1)x \cup g(0)x' = 0$$

Ako stavimo da je $g'(1)=f(1)$ i $g(0)=f(0)$, tj.

(4) $\quad g(1)=f'(1) \quad$ i $\quad g(0)=f(0)$

tada jednačina $g'(1)x \cup g(0)x'=0$ postaje $f(1)x \cup f(0)x'=0$ tj. $f(x)=0$, a to znači da su tada jednačine $x=g(x)$ i $f(x)=0$ ekvivalentne. S druge strane

$$g(g(x)) = g(1)(g(1)x \cup g(0)x') \cup g(0)(g(1)x \cup g(0)x')'$$
$$= (g(1) \cup g(0))x \cup g(1)g(0)x'$$

Uslov $g(g(x)) = g(x)$ je

$$(g(1) \cup g(0))x \cup g(1)g(0)x' = g(1)x \cup g(0)x'$$

pa imamo

(5) $\quad g(1) \cup g(0) = 1 \quad$ i $\quad g(0)g(1) = g(0)$.

Poslednja dva uslova su ekvivalentna. Kako je $g(1)=f'(1)$ a $g(0)=f(0)$, to se (5) svodi na $f(0)f'(1)=f(0)$ tj. $f(0)f(1)=0$.

Dakle, ako je $f(0)f(1)=0$, tada za funkciju $g(x) = f'(1)x \cup f(0)x$ važi da je $x=g(x)$ ekvivalentno sa $f(x)=0$ i još je $g^2=g$, pa je prema tvrdjenju I.3. formulom

$$x = f'(1)t \cup f(0)t'$$

definisano opšte reproduktivno rešenje jednačine $f(x)=0$. Ako je $f(0)f(1)=0$ tada je i $f(0) \leq f'(1)$ pa je

$$f'(1)t \cup f(0)t' = (f'(1) \cup f(0))t \cup f(0)t' = f'(1)t \cup f(0)(t \cup t') =$$
$$= f'(1)t \cup f(0). \dashv$$

Za dokaz tvrdjenja koje se odnosi na potreban i dovoljan uslov neprotivurečnosti Bulovih jednačina potrebna je

Lema II.1. /16/ Ako je $f(X)$ Bulov term na B tada postoji term $h(X)$ na B takav da u B važi

$$(\forall X)\ h(X)f(X) = \prod_A f(A)$$

Dokaz. /16/ Neka je za $C \in \{0,1\}^n$ $g(X)$ definisano sa

$$g(C) = \prod_{A \in \{0,1\}^n \setminus C} f(A)$$

Neka je $h(X) = \bigcup_C g(C)X^C$. Za svako $C \in \{0,1\}^n$ važi u B

$$h(C)f(C) = \prod_A f(A)$$

pa je prema tvrdjenju II.3.

$$(\forall X)\ h(X)f(X) = \prod_A f(A). \dashv$$

<u>Tvrdjenje II.5.</u> /35/ Neka je $f(X)$ Bulov term na B. Jednačina $f(X)=0$ ima rešenje u B ako i samo ako je $\prod_A f(A)=0$, tj.

$$(\exists X)f(X)=0 \Longleftrightarrow \prod_A f(A)=0.$$

Dokaz. /16/ Implikacija

$$(\exists X)\ f(X) = 0 \Longrightarrow \prod_A f(A) = 0$$

sledi iz Leme II.1., jer $f(X) = 0$ povlači $f(X)h(X)=0$, tj. $\prod_A f(A)=0$.

Dokažimo implikaciju

$$\prod_A f(A)=0 \Longrightarrow (\exists X)f(X)=0$$

Rečenica

$$(6) \qquad \forall u_1 u_2 \ldots u_{2^n} \exists x_1 \ldots x_n \ (\bigcup_A u_A = 1 \Longrightarrow \bigwedge_A (X^A \leqslant u_A))$$

je Hornova. Kako je za sve $A,B \in \{0,1\}^n$

$$A^B = 1 \quad , \quad \text{za } A = B$$

$$A^B = 0 \quad , \quad \text{za } A \neq B$$

to je rečenica (6) tačna u B_2. Zaista, činjenica da je $\bigcup_A u_A = 1$ u B_2 znači da je bar jedan $u_A = 1$. Neka je to u_C. Stavljajući da je $X = C$ imamo da je $X^C = C^C = 1 \leqslant u_C = 1$. Ostali X^A jednaki su nuli. Prema Votovoj teoremi rečenica (6) je tačna u svakoj Bulovoj algebri B. Neka je u B $\prod_A f(A) = 0$. Tada je $\bigcup_A f'(A) = 1$. Kako (6) važi u B, to postoji $Y \in B$ tako da je $Y^A \leqslant f'(A)$ za sve $A \in \{0,1\}^n$. Otuda je za svako $A \in \{0,1\}^n$ $f(A)Y^A = 0$, a to znači da je i $\bigcup_A f(A)Y^A = 0$ tj. prema tvrdjenju II.3. $f(Y) = 0. \dashv$

Iz dokazanog tvrdjenja se vidi da je uslov iz tvrdjenja II.4. $f(0)f(1)=0$, u stvari, uslov neprotivurečnosti Bulove jednačine $f(x)=0$.

Za rešavanje Bulove jednačine po n nepoznatih osnovu predstavlja rešavanje jednačina po jednoj nepoznatoj. Suština je u tome što jednačina sa n nepoznatih može da se posmatra kao jednačina po jednoj nepoznatoj, a da ostale nepoznate igraju ulogu parametra. Ta, izdvojena, nepoznata se eliminiše, gde eliminisati nepoznatu x iz jednačine $f(x)=0$ znači odrediti potreban i dovoljan uslov neprotivurečnosti jednačine $f(x)=0$ po nepoznatoj x. Uzastopnim eliminacijama dobija se rešenje date jednačine. Postupak uzastopnih eliminacija iz koga se neposredno vidi i dokaz (dokaz je dao Rudeanu) može da se izloži i ovako:

Neka je $f(X)=0$ neprotivurečna Bulova jednačina, gde je $f:B^n \rightarrow B$. Neka je

$$f_p(x_1,\dots,x_p) = \prod_{(a_{p+1},\dots,a_n)\in\{0,1\}^{n-p}} f(x_1,\dots,x_p,a_{p+1},\dots,a_n)$$

Posebno to znači da je $f_n=f$. Jednačina $f_n(x_1,\dots,x_n)=0$ može da se napiše u obliku

$$f_n(x_1,\dots,x_{n-1},1)x_n \cup f_n(x_1,\dots,x_{n-1},0)x_n' = 0.$$

Korišćenjem tvrdjenja II.4. imamo da je

$$x_n = f_n'(x_1,\dots,x_{n-1},1)t_n \cup f_n(x_1,\dots,x_{n-1},0)$$

uz uslov

$$f_n'(x_1,\dots,x_{n-1},1)f_n(x_1,\dots,x_{n-1},0) = 0.$$

Poslednji uslov je, u stvari, jednačina

$$f_{n-1}(x_1,\dots,x_{n-1}) = 0.$$

Ako se nastavi na ovaj način, dolazi se do jednačine

$$f_p(x_1,\dots,x_p) = 0$$

koja može da se napiše u obliku

$$f_p(x_1,\dots,x_{p-1},1)x_p \cup f_p(x_1,\dots,x_{p-1},0)x_p' = 0$$

a čije je rešenje

$$x_p = f_p'(x_1,\ldots,x_{p-1},1)t_p \cup f_p(x_1,\ldots,x_{p-1},0)$$

uz uslov

$$f_p(x_1,\ldots,x_{p-1},1)f_p(x_1,\ldots,x_{p-1},0) = 0,$$

tj. $\quad f_{p-1}(x_1,\ldots,x_{p-1}) = 0.$

Pri n-tom koraku se dolazi do jednačine $f_1(x_1) = 0$, čije je rešenje $x_1 = f_1'(0)t_1 \cup f_1(0)$ uz uslov $f_o = f_1(0)f_1(1) = 0$. Odgovarajućim zamenjivanjem dobija se formula reproduktivnog rešenja jednačine $f(X) = 0$.

Pri konkretnom odredjivanju rešenja može da se koristi sledeći postupak. Najpre se odredi $x_1^o \in B$ koje zadovoljava jednačinu $f_1(x_1)=0$ tj. $f_1(0) \leqslant x_1^o \leqslant f_1'(1)$ (lako se dokazuje da je $f_1(x_1)=0$ ekvivalentno sa $f_1(0) \leqslant x_1 \leqslant f_1'(1)$). Elemenata koji zadovoljavaju $f_1(x_1)=0$, odnosno $f_1(0) \leqslant x_1 \leqslant f_1'(1)$ može da ima više pa se bira jedan od njih. Zamenom x_1^o dobija se jednačina $f_2(x_1^o,x_2)=0$. Bira se x_2^o koje zadovoljava ovu jednačinu itd. Tako se dobija partikularno rešenje $(x_1^o,x_2^o,\ldots,x_n^o)$. Imajući u vidu različite mogućnosti izbora dobijaju se različita rešenja.

Primer II.1. /35/ Rešiti sistem jednačina

$$xy' = ab' \wedge x'y = a'b$$

u slobodnoj Bulovoj algebri $SB(a,b)$ generisanoj sa a i b.

Najpre se sistem svodi na jednačinu oblika $f(X)=0$, tj.

$$xy' = ab' \wedge x'y = a'b$$

$$\Longleftrightarrow xy'(a' \cup b) \cup (x' \cup y)ab'=0 \wedge x'y(a \cup b') \cup (x \cup y')a'b=0$$

$$\Longleftrightarrow a'bx \cup ab'x' \cup ab'y \cup a'by' \cup (a' \cup b)xy' \cup (a \cup b')x'y=0$$

$$\Longleftrightarrow (a'b \cup ab')xy \cup (a' \cup b)xy' \cup (a \cup b')x'y \cup (ab' \cup a'b)x'y'=0$$

$$(7) \Longleftrightarrow ((ab' \cup a'b)x \cup (a \cup b')x')y \cup ((a' \cup b)x \cup (ab' \cup a'b)x')y'=0$$

odakle se eliminacijom y dobija $a'bx \cup ab'x'=0$ tj. $ab' \leqslant x \leqslant a \cup b'$ pri čemu je uslov neprotivurečnosti $a'b \cdot ab=0$ ispunjen. (7) sada postaje $(ab'x \cup (a \cup b')x')y \cup ((a' \cup b)x \cup a'bx')y'=0$ odakle je

$$y = (a' \cup b)x \cup a'bx'.$$

Kako je $a \cup b' = ab \cup ab' \cup a'b'$, to je

$$[ab', a \cup b'] = \{ab', ab' \cup ab, ab' \cup a'b', ab' \cup ab \cup a'b'\}$$
$$= \{ab', a, b', a'b\} \text{ , pa}$$

za $x = ab'$ dobija se $y = a'b$

za $x = a$ dobija se $y = b$

za $x = b$ dobija se $y = a'$

za $x = a \cup b'$ dobija se $y = a' \cup b$,

odnosno skup rešenja je

$$R = \{(ab', a'b), (a, b), (b', a'), (a \cup b', a' \cup b)\}.$$

Skup rešenja može da se dobije i iz reproduktivnog oblika. Medjutim, skup S tj. B za jednačinu sa većim brojem nepoznatih je često vrlo veliki, odnosno ima veliki kardinalni broj , često veći od kardinalnog broja skupa rešenja, tj. jednom partikularnom rešenju x može da odgovara više elemenata t iz B. Zato se, u takvim slučajevima, uvode ograničenja za t tako da rešenje postaje preslikavanje "1-1". To je tzv. svedeno rešenje.

Tvrdjenje II.6. /35/ Neka je $ax \cup bx' = 0$ Bulova jednačina. Formulom $x = b \cup t$, gde je $t \leqslant a'b'$, se definiše bijekcija izmedju skupa svih elemenata $t \in B$ koji zadovoljavaju uslov $t \leqslant a'b'$ i skupa rešenja date jednačine. Ovo rešenje nije reproduktivno.

Dokaz. /35/ Za svako $t \leqslant a'b'$ važi $at=0$, odakle sledi $a(b \cup t) \cup bb't' = 0$, tj. $x = b \cup t$ je rešenje. Ako je x rešenje, tada je $b \leqslant x \leqslant a'$, pa je $x = b \cup x = b \cup xb'$ i $xb' \leqslant a'b'$.

Neka su $t_1, t_2 \leqslant a'b'$ i neka je $t_1 \neq t_2$. Neka je $x_1 = b \cup t_1$ i $x_2 = b \cup t_2$. Tada je $t_1 \leqslant b'$ i $t_2 \leqslant b'$. Otuda je

$$x_1x_2' \cup x_1'x_2 = (b \cup t_1)b't_2' \cup b't_1'(b \cup t_2) = b't_1t_2' \cup b't_1't_2 =$$
$$= t_1t_2' \cup t_1't_2 \neq 0 \quad , \quad \text{tj.} \quad x_1 \neq x_2.$$

Pošto se u daljem radu na neke Bulove funkcije primenjuju druge Bulove funkcije potrebna je sledeća

Lema II.2. Neka je $G(X) = (g_1(X),\ldots,g_n(X)$, gde su $g_i : B^n \to B$ $(i=1,\ldots,n)$ i neka je $F : B^n \to B$. Tada je

$$F(G(X)) = \bigcup_B \big(\bigcup_A F(A)(G(B))^A \big) X^B$$

Dokaz. Dokažimo da je

$$F(G(C)) = \bigcup_B \big(\bigcup_A F(A)G(B)^A \big) C^B$$

za svako $C \in \{0,1\}^n$. Zaista, imajući u vidu da je

$$C^B = 1 \quad , \quad \text{za } C = B$$
$$C^B = 0 \quad , \quad \text{za } C \neq B$$

imamo

$$\bigcup_B \big(\bigcup_A F(A)G(B)^A \big) C^B = \bigcup_B (F(G(B)))C^B = F(G(C)).$$

Imajući u vidu tvrdjenje II.3. dokaz je završen.

Naredna tvrdjenja II.7., II.8., II.9., II.11. su poznata kao teoreme Levenhajma.

Tvrdjenje II.7. /35/ Neka je P partikularno rešenje jednačine $f(X)=0$. Tada je formula

$$X = Pf(T) \cup Tf'(T) \ ,$$

ili skalarno

$$x_i = p_i f(t_1,\ldots,t_n) \cup t\ f'(t_1,\ldots,t_n) \quad (i=1,\ldots,n),$$

definisano opšte reproduktivno rešenje date jednačine.

Dokaz. Dokažimo najpre da su jednačine $X = Pf(X) \cup Xf'(X)$ i $f(X)=0$ ekvivalentne. Ako je $f(X)=0$ tada jednačina $X=Pf(X) \cup Xf'(X)$ postaje $P\cdot 0 \cup X \cdot 1 = X$, tj. i ona je zadovoljena. Obratno,

$$X = Pf(X) \cup Xf'(X)$$
$$\iff X'Pf(X) \cup Xf'(X)) \cup X(Pf(X) \cup Xf'(X))' = 0$$

$\Longleftrightarrow X'Pf(X) \cup X(P' \cup f'(X))(X \cup f(X)) = 0$

$\Longleftrightarrow PX'f(X) \cup Xf(X)(P' \cup f'(X)) = 0$

$\Longleftrightarrow PX'f(X) \cup P'Xf(X) = 0$

$\Longleftrightarrow f(X)(PX' \cup P'X) = 0$

(8) $\Longleftrightarrow f(X)(P + X) = 0$

Dokažimo da iz poslednje jednakosti sledi da je $f(X)=0$. Kako je P rešenje jednačine $f(X)=0$, to $P + X = 0$, tj. $X=P$, implicira $f(X)=0$. Hornova rečenica

(9) $(\forall X)(\forall P)((f(P) = 0 \wedge (P+X)f(X) = 0) \Longrightarrow f(X) = 0)$

je tačna u B_2, što se lako dokazuje. Znači, prema Votovoj teoremi, tačna je i u svakoj Bulovoj algebri B. Imajući u vidu (8) kao i $f(P)=0$ sledi da je $f(X)=0$.

Dokažimo da je funkcija $F(X) = Pf(X) \cup Xf'(X)$ reproduktivna. Neka je $V = (v_1,\ldots,v_n)$, $W = (w_1,\ldots,w_n)$ i neka je

$$g_1(t) = tv_1 \cup t'w_1,\ldots,g_n(t) = tv_n \cup t'w_n$$

Primenom Leme II.2. na proizvoljnu Bulovu funkciju $h:B^n \longrightarrow B$ imamo

$$h(tV \cup t'W_1) = \bigcup_B \Big(\bigcup_A f(A)(g_1(B),\ldots,g_n(B))^A\Big)t^B$$

$$= \bigcup_A f(A)(g_1(1),\ldots,g_n(1))^A t \cup \bigcup_A f(A)(g_1(0),\ldots,g_n(0))^A t'$$

($B \in \{0,1\}$ jer su g_i funkcije jedne promenljive)

$$= t \bigcup_A f(A)(v_1,\ldots,v_n)^A \cup t' \bigcup_A f(A)(w_1,\ldots,w_n)^A$$

$$= th(V) \cup t'h(W) \quad \text{tj.}$$

(10) $$h(tV \cup t'W) = th(V) \cup t'h(W).$$

Otuda je

$$F(F(X)) = Pf(Pf(X) \cup Xf'(X)) \cup (Pf(X) \cup Xf'(X))f'(Pf(X) \cup Xf'(X))$$

$$= P(f(X)f(P) \cup f(X)f'(X)) \cup (Pf(X) \cup Xf'(X))(f(P)f(X) \cup f(X)f'(X))'$$

$$= P \cdot 0 \cup (Pf(X) \cup Xf'(X)) \cdot 1 = F(X).$$

Otuda, prema tvrdjenju I.3., zaključujemo da je formulom

$$X = Pf(X) \cup Xf'(X)$$

definisano opšte rešenje jednačine $f(X) = 0$. $\dashv$

Kao što se vidi, opšte rešenje Bulove jednačine može lako da se odredi ako se zna jedno partikularno rešenje te jednačine. Partikularno rešenje može da se dobije razvijanjem funkcije $f(X)$ u kanonsku disjunktivnu formu. Svaki izraz X^A koji nedostaje u toj formi ukazuje da je $f(A)=0$, gde je A, naravno, elementarno rešenje. Medjutim, ima Bulovih jednačina koje nemaju elementarnih rešenja, pa se u tom slučaju koristi metoda uzastopnih eliminacija, s tim što se ide na dobijanje samo jednog partikularnog rešenja.

Sledeće tvrdjenje je poznato pod imenom verifikaciona teorema.

Tvrdjenje II.8. /35/ Svaka Bulova jednačina (nejednačina, sistem) je identički zadovoljena na Bulovoj algebri B ako i samo ako je zadovoljena za sve elementarne vektore.

Dokaz sledi iz tvrdjenja II.3.

Tvrdjenje II.9. /35/ Neka su $f,g:B^n \longrightarrow B$ Bulove funkcije i neka je $f(X)=0$ neprotivurečna jednačina. Tada su formule

(11) $(\forall X)(f(X) = 0 \Longrightarrow g(X) = 0)$ i

(12) $(\forall X)(\ g(X) \leqslant f(X)\ )$

ekvivalentne.

Ovo tvrdjenje može da se zapiše u obliku

$$(\exists X)f(X)=0 \Longrightarrow ((\ \forall X)(f(X)=0 \Longrightarrow g(X)=0) \Longleftrightarrow (\ \forall X)(g(X) \leqslant f(X))).$$

Dokaz. /35/ Neka je $P \in B^n$ rešenje jednačine $f(X)=0$, tj. $f(P)=0$. Otuda je, prema (11), $g(P)=0$. Element $Y=Pf(X) \cup Xf'(X)$ zadovoljava jednačinu $f(Y)=0$ prema tvrdjenju II.7. Otuda je $g(Y)=0$. Primenom (10) poslednja jednakost postaje $g(P)f(X) \cup g(X)f'(X)=0$, odakle sledi $g(X)f'(X)=0$, tj. $g(X) \leqslant f(X)$. Time je dokazano (11)$\Longrightarrow$(12). Ako je $g(X) \leqslant f(X)$ i ako je $f(X)=0$ tada je

$$0 = f(X) \geqslant g(X) = 0.$$

Posledica II.1. /35/ Ako je jedna od jednačina $f(X)=0$ ili $g(X)=0$ neprotivurečna tada su te dve jednačine ekvivalentne ako i samo ako je $(\forall X)\ f(X) = g(X)$.

Sada dajemo jedno uopštenje tvrdjenja II.9.

Tvrdjenje II.10. Neka su $f{:}B^n{\times}B^m \longrightarrow B$ i $g{:}B^n\times B^m \longrightarrow B$ Bulove funkcije i neka je za svako $Y\in B^m$ jednačina po X $f(X,Y)=0$ neprotivurečna. Tada su za sve $Y\in B$ sledeći uslovi ekvivalentni

(a) $\quad (\forall X)(\ f(X,Y) = 0 \Longrightarrow g(X,Y) = 0)$

(b) $\quad (\forall X)(\ g(X,Y) \leqslant f(X,Y)\ )$

Ovo tvrdjenje može da se zapiše u obliku

$$(\forall Y)(\exists X)f(X,Y)=0 \Longrightarrow (\forall Y)\Big[(\forall X)(\ f(X,Y)=0 \Rightarrow g(X,Y)=0) \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow (\forall X)(\ g(X,Y)\leqslant f(X,Y))\Big]$$

Dokaz. Pošto za svako $Y\in B$ postoji $X\in B$ tako da je $f(X,Y)=0$, neka je X_Y element koji odgovara elementu Y tako da je $f(X_Y,Y)=0$. Pretpostavimo da važi (a). Tada za svako Y

$$f(X_Y,Y) = 0 \Longrightarrow g(X_Y,Y) = 0$$

tj. X_Y je rešenje jednačine $g(X_Y,Y)$. Prema tvrdjenju II.7. važi i $f((X_Y,Y)f(X,Y)\cup(X,Y)f'(X,Y)) = 0$, pa iz (a) sledi

$$g((X_Y,Y)f(X,Y)\cup(X,Y)f'(X,Y)) = 0$$

odakle primenom jednakosti (10) dobijamo

$g(X_Y,Y)f(X,Y)\cup g(X,Y)f'(X,Y) = 0$, tj. $g(X,Y)f'(X,Y) = 0$,

odnosno $g(X,Y)\leqslant f(X,Y)$.

Dokaz za (b) $\Longrightarrow$ (a) je očigledan.

Tvrdjenje II.11. /35/ Neka su $f,g{:}B^n \longrightarrow B$ Bulove funkcije i neka je P partikularno rešenje sistema

(13) $\qquad f(X) = 0 \ \wedge\ g(X) = 0 \quad ,$

a $X = F(T)$ je opšte reproduktivno rešenje jednačine $f(X)=0$.

Tada je formulom

(14) $$X = Pg(F(T)) \cup F(T)g'(F(T))$$

dato opšte reproduktivno rešenje sistema (13).

Dokaz. Neka je P partikularno rešenje sistema (13) i neka je $X=F(T)$ reproduktivno rešenje jednačine $f(X)=0$. Dokažimo da je jednačina

(15) $$X = Pg(F(X)) \cup F(X)g'(F(X))$$

ekvivalentna sa sistemom (13) i da je funkcija

$$G(X) = Pg(F(X)) \cup F(X)g'(F(X))$$

reproduktivna.

Neka je $X = Pg(F(X)) \cup F(X)g'(F(X))$. Tada je

$$X = Pg(F(X)) \cup F(X)g'(F(X))$$

$$\Longleftrightarrow X'(Pg(F(X)) \cup F(X)g'(F(X))) \cup X(Pg(F(X)) \cup F(X)g'(F(X)))'=0$$

$$\Longleftrightarrow (X+P)g(F) \cup (F+X)g'(F) \cup XP'F' = 0$$

(16) $$\Longrightarrow (X+P)g(F) \cup (F+X)g'(F) = 0$$

Kako $X+P=0 \Longrightarrow X=P \Longrightarrow X=F(X) \Longrightarrow X+F(X)=0$ to prema tvrdjenju II.9. sledi da je $X+P \geqslant X+F(X)$ pa je

$$0 = (X+P)g(F(X)) \cup (F(X)+X)g'(F(X)) \geqslant (X+F(X))g(F) \cup (X+F(X))g'(F(X))$$

tj. $(X+F(X))g(F(X)) \cup (X+F(X))g'(F(X)) = 0$, odnosno

$(X+F(X))(g(F(X)) \cup g'(F(X))=0$, odakle je $X+F(X)=0$ tj. $F(X)=X$.

Iz (16) imamo da je $(X+P)g(F(X))=0$. Dalje je

$X = P \Longrightarrow X=F(X) \Longrightarrow g(F(X))=g(X)=0$, tj. $X+P=0 \Longrightarrow g(F(X))=0$.

Hornova rečenica

$$(\forall X)(\forall P)((g(F(P))=0 \wedge (X+P)g(F(X))=0) \Longrightarrow g(F(X))=0)$$

važi u B_2 (slično kao (9)), pa važi i u svakoj Bulovoj algebri B.

Otuda iz $(X+P)g(F(X))=0$ imamo da je $g(F(X))=0$, a kako je $F(X)=X$ to je $g(X)=0$.

Neka je sada $f(X)=0$ i $g(X)=0$. Jednačina (15) postaje $X=Pg(X) \cup Xg'(X)$, jer je $F(X)=X$ tj. $X=P \cdot 0 \cup X \cdot 1$, jer je $g(X)=0$.

Dalje je, uz korišćenje oznake $F(X)=F$,

$$G(G(X)) = Pg(F(Pg(F)\cup Fg'(F))\cup F(Pg(F)\cup Fg'(F))g'(F(Pg(F)\cup Fg'(F)))$$

$$=Pg(F(P)g(F)\cup F(F)g'(F))\cup(F(P)g(F)\cup F(F)g'(F))g'(F(P)g(F)\cup F(F)g'(F)$$

(primenom (10))

$$=P(g(F(P))g(F)\cup g(F)g'(F))\cup(Pg(F)\cup Fg'(F))(g(F(P))g(F)\cup g(F)g'(F)))$$

$$=P\cdot 0\cup(Pg(F)\cup Fg'(F))\cdot 1$$

(jer je $g(F)g'(F)=0$ i $g(F(P))=g(P)=0$)

$$=Pg(F)\cup Fg'(F) = G(X).$$

Prema tvrdjenju I.3. znači da je formulom (14) odredjeno reproduktivno rešenje sistema. $\dashv$

Za datu Bulovu jednačinu $f(X)=0$ formula $X=G(T)$ definiše rešenje ove jednačine ako izmedju funkcija $f(X)$ i $g(X)$ postoji odredjena veza na skupu $\{0,1\}^n$. To je rezultat narednih tvrdjenja.

Tvrdjenje II.12. /35/ Neka je $f(X)=0$ Bulova jednačina po n nepoznatih. Formula

$$X = G(T)$$

tj. $\quad x_i = g_i(T) \qquad (i=1,\ldots,n)$

definiše opšte rešenje jednačine $f(X)=0$ ako i samo ako je

$$(\forall A\in\{0,1\}^n)\ (f'(A) = \bigcup_B (G(B))^A\ )$$

tj. $$(\forall X)(\ f(X) = \prod_B \bigcup_{i=1}^{n} (g_i(B)+x_i)\ )$$

Dokaz. /35/ Prema tvrdjenju I.1. formula $X=G(T)$ definiše opšte rešenje jednačine $f(X)=0$ ako je za svako $X\in B^n$

$$f(X) = 0 \Longleftrightarrow (\exists T)\ (X = G(T))$$

tj. $$f(X) = 0 \Longleftrightarrow (\exists T) \bigcup_{i=1}^{n} (g_i(T)+x_i) = 0$$

što je, prema uslovu neprotivurečnosti Bulove jednačine, ekvivalentno sa

$$f(X) = 0 \Longleftrightarrow \prod_B \bigcup_{i=1}^{n} (g_i(B)+x_i) = 0$$

Iz ekvivalentnosti poslednjih dveju jednačina, prema posledici II.1., sledi da je

$$f(X) = \prod_B \bigcup_{i=1}^{n} (g_i(B)+x_i) \qquad \text{za svako } X \in B^n.$$

Prema verifikacionoj teoremi poslednja jednakost je ekvivalentna sa

$$f(A) = \prod_B \prod_{i=1}^{n} (g_i(B)+a_i) \qquad \text{za svako } A \in \{0,1\}^n.$$

Komplementiranjem se dobija

$$f'(A) = \bigcup_B \prod_{i=1}^{n} (g_i(B)+a_i') = \bigcup_B \prod_{i=1}^{n} (g_i(B))^{a_i} = \bigcup_B (G(B))^A$$

gde je korišćeno

$$(u+a)'=u+a'=u^a, \quad \text{za } a \in \{0,1\} \quad \text{i} \quad u \in B. \; \dashv$$

<u>Tvrdjenje II.13.</u> /35/ Ako je $X=G(T)$ rešenje jednačine $f(X)=0$, tada je formulom $X=G(T)$, gde je $G=(g_1,\dots,g_n)$ a $g_i : B^n \longrightarrow B$, definisano reproduktivno rešenje Bulove jednačine $f(X)=0$ ako i samo ako je

(17) $$f'(A) \leqslant (G(A))^A \qquad \text{za svako } A \in \{0,1\}^n$$

ili ekvivalentno

(18) $$f'(A) = (G(A))^A \qquad \text{za svako } A \in \{0,1\}^n$$

ili ekvivalentno

(19) $$f(X) = \bigcup_{i=1}^{n} (g_i(X)+x_i) \qquad \text{za svako } X \in B^n.$$

Dokaz. /35/ Prema zapažanju I.1., ako je $X=G(T)$ rešenje jednačine $f(X)=0$ ono je reproduktivno ako i samo ako je

$$f(X) = 0 \iff X = G(X)$$

tj. $$f(X) = 0 \iff \bigcup_{i=1}^{n} (g_i(X)+x_i) = 0, \quad \text{što daje}$$

$$f(X) = \bigcup_{i=1}^{n} (g_i(X)+x_i), \quad \text{a ovo je (19).}$$

Ako primenimo verifikacionu teoremu dobijamo

$$f(A) = \bigcup_{i=1}^{n} (g_i(A)+a_i)$$

Komplementiranjem se dobija

$$f'(A) = \prod_{i=1}^{n}(g_i(A)+a_i) = \prod_{i=1}^{n}(g_i(A))^{a_i} = (G(A))^A.$$

Treba još da se dokaže da je $(17)\Longleftrightarrow(18)$. Očigledno je da $(18)\Longrightarrow(17)$. Dokazaćemo da je

$$(\forall A\in\{0,1\}^n)((G(A))^A \leqslant f'(A))$$

što zajedno sa (17) daje (18). Kako je $X=G(T)$ rešenje jednačine $f(X)=0$, imamo da je $f(G(A))=0$ za svako $A\in\{0,1\}$ ili u kanonskoj disjunktivnoj formi

$$\bigcup_C f(C)(G(A))^C = 0 \qquad \text{za svako } A\in\{0,1\}^n$$

pa je i

$$f(C)(G(A))^C = 0 \qquad \text{za sve } A,\ C\in\{0,1\}^n$$

pa i za $C=A$ tj. $f(A)(G(A))^B = 0$, odnosno

$$(G(A))^A \leqslant f'(A) \qquad \text{za svako } A\in\{0,1\}^n. \ \dashv$$

Sada dajemo potreban i dovoljan uslov da Bulova funkcija bude reproduktivna.

<u>Tvrdjenje II.14.</u> Neka je $F(X)=(f_1(X),\dots,f_n(X))$, gde su $f_i:B^n\longrightarrow B$. Potreban i dovoljan uslov da funkcija F bude reproduktivna jeste

$$\bigcup_{i=1}^{n}\ \bigcup_B (f_i(B)+\bigcup_A f_i(A)(F(B))^A) = 0$$

Dokaz. Kako je

$$F(F(X)) = F(f_1(X),\dots,f_n(X)) =$$
$$= (f_1(f_1(X),\dots,f_n(X)),\dots,f_n(f_1(X),\dots,f_n(X)))$$

uslov reproduktivnosti $F(F(X))=F(X)$ postaje

(18) $$(\forall i\in\{1,\dots,n\})f_i(f_1(X),\dots,f_n(X)) = f_i(X)$$

Prema lemi II.2. imamo

$$f_i(f_1(X),\dots,f_n(X)) = \bigcup_B\Big[\bigcup_A f_i(A)(F(B))^A\Big]\,X^B$$

pa (18) postaje

$$(\forall i\in\{1,\dots,n\})\ \bigcup_B\Big[\bigcup_A f_i(A)(F(B))^A\Big]X^B = \bigcup_B f_i(B)X^B$$

$$\Longleftrightarrow (\forall i\in\{1,\dots,n\})\ \bigcup_A f_i(A)(F(B))^A = f_i(B) \quad \text{za svako } B\in\{0,1\}^n$$

$$\Longleftrightarrow (\forall i\in\{1,\dots,n\})(\forall B\in\{0,1\}^n)\ \bigcup_A f_i(A)(F(B))^A + f_i(B) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \bigcup_{i=1}^n\ \bigcup_B\ (f_i(B)+\bigcup_A f_i(A)(F(B))^A) = 0.$$

<u>Posledica II.2.</u> Ako su zadovoljeni uslovi

(19) $(\forall A\in\{0,1\}^n)\ f'(A)\leqslant(F(A))^A$ i

(20) $\bigcup_{i=1}^n\ \bigcup_B\ (f_i(B)+\bigcup_A f_i(A)(F(B))^A) = 0$

tada je formulom $X=F(T)$, gde je $F=(f_1,\dots,f_n)$, definisano reproduktivno rešenje jednačine $f(X)=0$.

Dokaz. Uslov (19), kao što se vidi iz dokaza tvrdjenja II.12. je, u stvari, uslov ekvivalentnosti jednačine $X=F(X)$ i $f(X)=0$, dok je (20) uslov reproduktivnosti funkcije $F(X)$, pa je, prema tvrdjenju I.3., formulom $X=F(T)$ definisano opšte reproduktivno rešenje jednačine $f(X)=0$. $\dashv$

Ako funkcija $f(X)$ na skupu $\{0,1\}^n$ zadovoljava odredjene uslove onda rešenje jednačine $f(X)=0$ može da se izrazi pomoću same funkcije $f(X)$, tj. važi

<u>Tvrdjenje II.15.</u> /35/ Ako je

(21) $(\forall A\in\{0,1\}^n) f(A)f(A') = 0$

tada je formulom

$$X = T + f(T)$$

definisano opšte reproduktivno rešenje jednačine $f(X)=0$.

Dokaz. Kako je $x+u=x$ ekvivalentno sa $u=0$ to je $X=X+f(X)$ ekvivalentno sa $f(X)=0$. Neka je $F(X) = X+f(X)$. Tada je

$$\begin{aligned} F(F(X)) &= F(X)+f(F(X)) = X+f(X)+f(X+f(X)) = \\ &= X+f(X)+f(X'f(X)\cup Xf'(X)) = \\ &= X+f(X)+(f(X)f(X')\cup f(X)f'(X)) = \\ &= X+f(X)+f(X)f(X'). \end{aligned}$$

Ako važi (21), tada je, prema verifikacionoj teoremi, $f(X)f(X')=0$ za svako $X\in B^n$. Tada je

$$F(F(X)) = X+f(X) = F(X)$$

pa je, prema tvrdjenju II.3., formulom $X=F(T)$ definisano reproduktivno rešenje jednačine $f(X)=0$. ⊣

U slučaju Bulove jednačine $f(x)=0$ po jednoj nepoznatoj uslov (21) je $f(0)f(1)=0$, tj. to je uslov neprotivurečnosti jednačine $f(x)=0$, pa je za neprotivurečnu Bulovu jednačinu $f(x)=0$ reproduktivno rešenje dato formulom

$$x = t + f(t).$$

Na kraju ovog dela o Bulovim jednačinama razmatraćemo sisteme jednačina, tj. razmatraćemo matrične jednačine oblika $AX=B$ i $XA=B$, gde su A, X i B matrice čiji elementi pripadaju odredjenoj Bulovoj algebri B.

<u>Definicija II.6.</u> Neka su $Q=\|q_{ij}\|$ $i=1,\ldots,m$; $j=1,\ldots,n$ i $R=\|r_{ij}\|$ $j=1,\ldots,n$; $k=1,\ldots,p$ dve matrice sa elementima iz B takve da je broj kolona u Q jednak broju vrsta u R. Tada je proizvod QR matrica oblika $m\times p$ definisana na sledeći način:

$$(QR)_{ik} = \bigcup_{j=1}^{n} q_{ij}r_{jk} \quad (i=1,\ldots,m;\ k=1,\ldots,p).$$

Matrice Q^T i Q' definišu se sa

$$(Q^T)_{ij} = q_{ji} \qquad (i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n)$$
$$(Q')_{ij} = q'_{ij}$$

dok se matrica I definiše sa

$$I = \|\delta_{ij}\|$$

gde je $\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ij} = 0$ $(i\neq j)$.

<u>Definicija II.7.</u> Za vektor $(x_1,\ldots,x_n)\in B^n$ kaže se da je normalan ako je $\bigcup_{i=1}^{n} x_i = 1$

Ako vektor $(x_1,\ldots,x_n)\in B^n$ zadovoljava uslove

$$a_i a_j = 0 \qquad (i,j=1,\ldots,n \quad i \quad i\neq j)$$

tada se kaže da je ortogonalan. Normalan i ortogonalan vektor zove se ortonormalan.

<u>Tvrdjenje II.16</u>. /35/ Neka su $A=\|a_{ij}\|$ i $I=\|\delta_{ij}\|$ kvadratne matrice reda n. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni

(a) matrica A ima desnu inverznu matricu, tj. sistem jednačina $AX=I$ je neprotivurečan

(b) matrica A ima levu inverznu matricu, tj. sistem jednačina $XA=I$ je neprotivurečan

(c) za svaku kvadratnu matricu B reda n sistem jednačina $AX=B$ je neprotivurečan

(d) $(\forall X)(\forall Y)(\ AX = AY \Longrightarrow X = Y)$

(e) $A^T A = I$

(f) $(A^T I')' = (T' A^T)' = A^T$

(g) $\bigcup\limits_{j=1}^{n} a_j^i = 1 \qquad (i=1,\ldots,n)$

gde je $a_j^i = a_{ij} \prod\limits_{\substack{h=1 \\ h\neq i}} a'_{hj}$

(h) svaka vrsta i svaka kolona matrice A je ortonormalna .

Dokaz ovog tvrdjenja dat je u pomenutoj knjizi /35/, pri čemu se koristi veliki broj lema. U radu /17/ Ž. Mijajlović je dokazao (c)$\Longleftrightarrow$(e) korišćenjem Votove teoreme, pri čemu dokaz postaje znatno kraći, odnosno svodi se na dokazivanje u Bulovoj algebri B_2. Na ovaj način dokazujemo i ostale ekvivalencije.

Dokaz. (a)$\Longrightarrow$(c): Polazeći od $A\cdot A^{-1}=I$ i množenjem te jednakosti sa desne strane sa B dobijamo $A\cdot A^{-1}\cdot B=B$, tj. matrica $A^{-1}B$ zadovoljava jednačinu $AX=B$ za svako B (naravno, imajući u vidu asocijativnost množenja matrica).

(c)$\Longrightarrow$(a): Ako važi $(\forall B)(\exists X)(AX=B)$ tada za $B=I$ imamo $(\exists X)(AX=I)$.

(b)$\Longrightarrow$(c): Množenjem jednakosti $A^{-1}A=I$ sa leve strane sa B, dobijamo $BA^{-1}A=B$, tj. matrica BA^{-1} je rešenje jednačine $XA=B$.

(a)$\Longrightarrow$(h): Napišimo najpre rečenicu "Svaka vrsta i svaka kolona matrice A su ortonormalne" na pogodniji način. Ortogonalnost i-te vrste se definiše sa

$$a_{ij}a_{ik} = 0 \ (\ j,k=1,\dots,n \quad i \quad j\neq k \ ).$$

To je, u stvari, konjukcija od n^2-n jednakosti. Normalnost i-te vrste se definiše sa $\bigcup\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$. Dakle, ortonormalnost jedne vrste se definiše kao konjukcija n^2-n+1 jednakosti, dok se ortonormalnost svih vrsta izražava pomoću konjukcije od $n(n^2-n+1)$ jednakosti. Neka je $p=n(n^2-n+1)2$. Slično, ortonormalnost kolona može da se izrazi pomoću p jednakosti. Dakle, rečenica (h) može da se izrazi kao konjukcija od p jednakosti. Ako sve te jednakosti napišemo u obliku $a=0$ (tj. na desnoj strani jednakosti stoji 0) i ako sve leve strane tih jednakosti obeležimo sa $m_1,m_2,\dots,m_p$, tada se rečenica (h) piše u obliku

$$\bigcup_{i=1}^{p} m_i = 0$$

Tada (a)$\Longrightarrow$(h) može da se napiše u obliku

$$(\exists X)(AX = I) \Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{p} m_i = 0$$

tj.
$$(\forall X)(\ AX = I \Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{p} m_i = 0 \ )$$

Ovo znači da je (a)$\Longrightarrow$(h) Hornova rečenica pa je dovoljno dokazati da važi u B_2. Neka u B_2 važi $(\exists X)AX=I$. Tada je za neko X

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_{11} \cup a_{12}x_{21} \cup \dots \cup a_{1n}x_{n1} = 1 \\
a_{21}x_{11} \cup a_{22}x_{21} \cup \dots \cup a_{2n}x_{n1} = 0 \\
\vdots \\
a_{n1}x_{11} \cup a_{n2}x_{21} \cup \dots \cup a_{nn}x_{n1} = 0
\end{array}
\tag{22}
$$

Bar jedan element leve strane prve jednakosti jednak je 1. Neka je to, na primer, $a_{1i}x_{i1}$, tj. $a_{1i}=1$ i $x_{i1}=1$. Kako je $x_{i1}=1$ to je $a_{2i}=0$, $a_{3i}=0,\ldots,a_{ni}=0$, tj. matrica A u i-toj koloni ima tačno jednu jedinicu. Slično, iz

$$(23)\qquad \begin{array}{l} a_{11}x_{12}\ \ a_{12}x_{22}\ \cdots\ a_{1n}x_{n2}=0 \\ a_{21}x_{12}\ \ a_{22}x_{22}\ \cdots\ a_{2n}x_{n2}=1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_{12}\ \ a_{n2}x_{22}\ \cdots\ a_{2n}x_{n2}=0 \end{array}$$

sledi da je neki $a_{2k}x_{k2}=1$, tj. $a_{2k}=1$ i $x_{k2}=1$. Ovde je $k\neq i$, jer u i-toj koloni matrice A svi članovi su, sem a_{1i}, jednaki nuli. Da bi jednakosti (23) bile zadovoljene potrebno je da svi ostali članovi k-te kolone matrice A budu jednaki 0.

Slično se dokazuje i za ostale kolone. Dakle svaka kolona matrice A ima tačno jednu jedinicu i to svaka u različitoj vrsti, tj. sve vrste i kolone matrice A su ortonormalne.

(h)$\Longrightarrow$(a): Ova rečenica može da se napiše u obliku

$$\bigcup_{i=1}^{p} m_i = 0 \Longrightarrow (\exists X)\ AX = I$$

tj.

$$(\exists X)(\bigcup_{i=1}^{p} m_i = 0 \Longrightarrow AX = I)$$

što znači da je Hornova, pa je dokazujemo u B_2. Neka u B_2 važi (h) tj. neka sve vrste i kolone matrice A sadrže tačno jednu jedinicu. Tada je dovoljno uzeti $X=A^T$ pa je jednakost $AX=I$ zadovoljena.

(h)$\Longrightarrow$(b): kao prethodno

(h)$\Longrightarrow$(e): Rečenica (h)$\Longrightarrow$(e), tj.

$$\bigcup_{i=1}^{p} m_i = 0 \Longrightarrow A^TA = I$$

je Hornova. Pretpostavka da u B_2 svaka vrsta i kolona matrice A sadrže po tačno jednu jedinicu dovodi do $A^TA = I$.

(e)$\Longrightarrow$(b): Pretpostavka da je $A^TA = I$ znači $(\exists X)\ XA = I$.

(h)$\Longrightarrow$(g): Uslov $\bigcup_{j=1}^{n} a_j^i = 1 \quad (i=1,\ldots,n)$ može da se napiše u obliku

$$\prod_{i=1}^{n}(\bigcup_{j=1}^{n} a_j^i) = 1$$

pa (h)$\Longrightarrow$(g) može da se napiše u obliku

$$\bigcup_{i=1}^{p} m_i = 0 \Longrightarrow \prod_{i=1}^{n}(\bigcup_{j=1}^{n} a_j^i) = 1$$

što predstavlja Hornovu rečenicu. Otuda je, prema Votovoj teoremi, dovoljno dokazati da (h)$\Longrightarrow$(g) u B_2.

Pretpostavimo da (h) važi u B_2, tj. da svaka vrsta i svaka kolona matrice A sadrže tačno jednu jedinicu. Neka, na primer, i-ta vrsta na j-tom mestu (u j-toj koloni) sadrži jedinicu. Tada je

$$a_j^i = 1\cdot 0'\cdot 0'\ldots 0' = 1 \quad \text{pa je} \quad \bigcup_{j=1}^{n} a_j^i = 1$$

Slično važi i za ostale vrste.

(g)$\Longrightarrow$(h): Kako rečenica (g)$\Longrightarrow$(h) može da se napiše u obliku

$$\prod_{i=1}^{n}(\bigcup_{j=1}^{n} a_j^i) = 1 \Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{p} m_i = 0$$

ona je Hornova, pa je dovoljno da se proveri u B_2. Ako je $\bigcup_{j=1}^{n} a_j^i = 1$, onda u B_2 jedan element te unije je jednak 1. Neka je to a_k^i, tj. $a_{ik}a'_{1k}a'_{2k}\ldots a'_{i-1,k}a'_{i+1,k}\ldots a'_{nk} = 1$. To znači da je

$$a_{ik}=1, a_{1k}=0, a_{2k}=0, \ldots, a_{i-1,k}=0, a_{i+1,k}=0, \ldots, a_{nk}=0$$

tj. bar jedan element i-te vrste matrice A je jednak 1 a svi ostali elementi kolone u kojoj se taj element nalazi jednaki su 0. Mogućnost da se u nekoj vrsti nadje više od jedne jedinice značilo bi da (imajući u vidu da svaka vrsta ima bar jednu jedinicu) ima više od n jedinica, pa bi se u nekoj koloni našlo više od jedne jedinice, što je već isključeno. Otuda svaka vrsta i svaka kolona matrice A imaju po tačno jednu jedinicu, što u B_2 znači da su sve vrste i sve kolone matrice A ortonormalne.

(h)$\Longrightarrow$(f): $(A^T I')' = (I'A^T)' = A^T$ može da se napiše kao

$$(A^T I')' = A^T \;\wedge\; (I'A^T)' = A^T.$$

Svaka od poslednjih dveju jednakosti u sebi sadrži n^2 jednakosti.

Ako sve te jednakosti (ima ih $2n^2$) napišemo u obliku $s_1=0 \wedge s_2=0 \wedge \dots \wedge s_q=0$, gde je $q=2n^2$, tada poslednja konjukcija postaje $\bigcup_{m=1}^{q} s_m = 0$. Otuda je rečenica (h)$\Longrightarrow$(f) Hornova, pa je dovoljno da dokažemo da ona važi u B_2. Neka u B_2 važi (h), tj. sve vrste i kolone matrice A sadrže tačno jednu jedinicu. Tada se to odnosi i na matricu A^T. Ako je $(A^T)_{ij}=1$ tada je $(A^TI')_{ij}=0$, jer se $(A^T)_{ij}$ množi sa $(I')_{jj}$, tj. sa nulom, a ostali članovi i-te vrste matrice A^T jednaki su nuli. Primenom operacije ' dobija se $(A^TI')'_{ij}=1$. Ako je $(A^T)_{ij}=0$, tada je neki drugi element i-te vrste matrice A^T jednak 1 pa se množenjem i-te vrste matrice A^T i j-te kolone matrice I' dobija 1, tj. $(A^TI')_{ij}=1$, pa je $(A^TI')'_{ij}=0$. Znači $(A^TI')'=A^T$. Slično se dobija da je $(I'A^T)'=A^T$.

(f)$\Longrightarrow$(h): Formula (f)$\Longrightarrow$(h) je Hornova, jer može da se napiše u obliku

$$\bigcup_{m=1}^{q} s_m = 0 \Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{p} m_i = 0$$

pa je dokazujemo u B_2

Kako je

$$(A^TI')' = A^T$$

$$\Longleftrightarrow ((A^TI')')^T = A \qquad (\text{ jer je } (A^T)^T = A\ )$$

$$\Longleftrightarrow ((A^TI')^T)' = A \qquad (\text{ jer za proizvoljnu matricu } M \text{ sa elementima iz } B \text{ važi } (M')^T = (M^T)'\ )$$

$$\Longleftrightarrow ((I')^TA)' = A \qquad (\text{ jer za matrice } R_{k\times n} \text{ i } Q_{n\times l} \text{ sa elementima iz } B \text{ važi } (RQ)^T = Q^TR^T\ )$$

$$\Longleftrightarrow I'A = A'$$

to su uslovi $(A^TI')'=A^T$ i $I'A=A'$ ekvivalentni. Neka je u B_2 $(A^TI')'=A^T$, tj. $I'A=A'$. Ako je $a_{ij}=0$ tada je bar jedan član j-te kolone matrice A jednak 1, jer je element $(I'A)_{ij}=a_{1j}\cup a_{2j}\cup \dots \cup a_{j-1,j}\cup 0 \cup a_{j+1,j}\cup \dots \cup a_{nj}$ jednak 1.

Ako je, medjutim, $a_{ij}=1$ tada su svi članovi j-te kolone jednaki nuli, jer je element

$(I'A)_{ij}=a_{1j}\cup\ldots\cup a_{j-1,j}\cup 0\cup a_{j+1,j}\cup\ldots\cup a_{nj}$ jednak 0. To znači da svaka kolona matrice A sadrži tačno jednu jedinicu.

Slično se, polazeći od $(I'A^T)'=A'$, što je ekvivalentno sa $AI'=A'$, dokazuje da svaka vrsta matrice A sadrži tačno jednu jedinicu.

(d)$\Longrightarrow$(h): Matrične jednakosti

$$AX = AY \qquad \text{i} \qquad X = Y$$

mogu da se napišu, redom, u obliku

$$\bigwedge_{i=1}^{n}\bigwedge_{j=1}^{n}\left((AX)_{ij}=(AY)_{ij}\right) , \quad \bigwedge_{i=1}^{n}\bigwedge_{j=1}^{n}\left((X)_{ij}=(Y)_{ij}\right)$$

tj. u obliku

$$(24) \qquad \bigwedge_{i=1}^{n}\bigwedge_{j=1}^{n}\left((AX)_{ij}+(AY)_{ij}=0\right), \quad \bigwedge_{i=1}^{n}\bigwedge_{j=1}^{n}\left((X)_{ij}+(Y)_{ij}=0\right)$$

Ako sve članove prve konjukcije u (24) obeležimo sa $p_1,\ldots,p_{n^2}$ a druge sa $r_1,\ldots,r_{n^2}$ dobijamo umesto (24)

$$\bigcup_{k=1}^{n^2} p_k = 0 \quad , \quad \bigcup_{m=1}^{n^2} r_m = 0$$

pa implikacija $(\forall X)(\forall Y)(AX=AY \Longrightarrow X=Y)$ postaje

$$(25) \qquad (\forall X)(\forall Y)\left(\bigcup_{k=1}^{n^2} p_k=0 \Longrightarrow \bigcup_{m=1}^{n^2} r_m=0 \right)$$

Pošto elementi $p_k(k=1,\ldots,n^2)$ zavise od elemenata matrica X,Y i A a elementi $r_m(m=1,\ldots,n^2)$ zavise od elemenata matrica X i Y, to (25) može da se napiše u obliku

$$(26) \qquad (\forall Z)(f(Z,M)=0 \Longrightarrow g(Z,M)=0)$$

gde je $Z=(x_{11},\ldots,x_{nn},y_{11},\ldots,y_{nn})$ a $M=(a_{11},\ldots,a_{nn})$, pri čemu funkcija g, u stvari, ne zavisi od M. Prema tvrdjenju II.10. formula (26) je, uz uslov $(\forall M)(\exists Z)f(Z,M)=0$ ekvivalentna sa

$$(\forall Z)(g(Z,M) \leqslant f(Z,M)).$$

Uslov $(\forall M)(\exists Z)f(Z,M)=0$ je zadovoljen, jer je ekvivalentan sa $(\forall A)(\exists X,Y)(AX=AY)$, a dovoljno je uzeti da je $X=Y=I$.

Sada koristimo činjenicu da ako je $A \Longleftrightarrow B$ uz uslov C, tada je uz uslov C $(A \Longrightarrow D) \Longleftrightarrow (B \Longrightarrow D)$, tj. iz $C \Longrightarrow (A \Longleftrightarrow B)$ sledi $C \Longrightarrow ((A \Longrightarrow D) \Longleftrightarrow (B \Longrightarrow D))$, što se lako dokazuje. Otuda je formula $(d) \Longrightarrow (h)$, tj.

$$(\forall Z)(\ f(Z,M)=0 \Longrightarrow g(Z,M)=0\ ) \Longrightarrow b(M)=0,$$

gde je $b(M)=\bigcup_{i=1}^{p} m_i$, ekvivalentna sa formulom

$$(\forall Z)(\ g(Z,M) \leqslant f(Z,M)\ ) \Longrightarrow b(M)=0.$$

Posle izvlačenja kvantifikatora dobijamo

$$(\exists Z)(\ g(Z,M) \leqslant f(Z,M) \Longrightarrow b(M)=0\ )$$

odnosno formula $(d) \Longrightarrow (h)$ je Hornova, pa je dovoljno da je dokažemo u B_2. Pretpostavimo da nisu sve vrste i kolone matrice A ortonormalne (postoji, znači, neka vrsta ili kolona koja ne sadrži tačno jednu jedinicu). Ako, na primer, i-ta vrsta sadrži sve nule, onda jednakosti

$$(AX)_{i1}=(AY)_{i1},\ldots,(AX)_{in}=(AY)_{in}$$

važe i u slučaju da odgovarajući članovi i-te vrste matrica X i Y nisu jednaki. Iz ostalih n^2-n jednakosti ne sledi jednakost odgovarajućih elemenata i-te vrste matrica X i Y, jer oni u tim matricama ne učestvuju. U slučaju da neka vrsta ima dve jedinice, recimo da j-ta vrsta ima jedinicu na k-tom i h-tom mestu, to znači da je

$$x_{hi} \cup x_{ki} = y_{hi} \cup y_{ki} \qquad (i=1,\ldots,n) \tag{27}$$

Iz jednakosti (27) ne sleduje jednakost odgovarajućih elemenata

$$x_{hi} = y_{hi} \quad i \quad x_{ki} = y_{ki}\ (i=1,\ldots,n),$$

jer je dovoljno da je $x_{hi}=y_{hi}=1$ pa da jednakost (27) važi, dok elementi x_{ki} i y_{ki} $(i=1,\ldots,n)$ mogu da budu proizvoljni. U ostalih n^2-n jednakosti (koje se dobijaju izjednačavanjem ostalih elemenata matrica AX i AY) elementi i-te vrste matrice A ne učestvuju.

U slučaju da neka kolona matrice A sadrži sve nule, neka je to recimo k-ta kolona, tada u jednakostima

(28) $$(AX)_{kj} = (AY)_{kj} \qquad (j=1,\dots,n)$$

ne učestvuju elementi k-te vrste matrica X i Y, tj. jednakosti (28) važe i kada su odgovarajući elementi x_{ki} i y_{ki} $(i=1,\dots,n)$ različiti.

Ako neka kolona matrice A sadrži bar dve jedinice, na primer k-ta kolona sadrži na i-tom i j-tom mestu jedinicu, onda to znači da u jednakostima

(29) $$(AX)_{ih} = (AY)_{ih} \quad \text{i} \quad (AX)_{jh} = (AY)_{jh} \qquad (h=1,\dots,n)$$

učestvuju elementi x_{kh} i y_{kh} $(h=1,\dots,n)$. Pošto je isključena mogućnost postojanja dve jedinice u jednoj vrsti, to znači da su jednakosti (29) oblika

$$x_{kh} = y_{kh} \quad \text{i} \quad x_{kh} = y_{kh} \qquad (h=1,\dots,n),$$

odnosno svode se na iste jednakosti. Prema tome, pošto u n^2 jednakosti, dobijenih izjednačavanjem odgovarajućih elemenata matrica AX i AY, ima jednakih, to postoje odgovarajući elementi x_{rs} i y_{rs} koji ne figurišu u tim jednakostima, tj. oni mogu da budu i različiti.

(e)$\Longrightarrow$(h): Ako je $A^TA=I$, tada se množenjem jednakosti $AX=AY$ sa leve strane matricom A dobija $X=Y$.

<u>Tvrdjenje II.17.</u> /17/ Neka je sistem Bulovih jednačina

(S) $$\begin{aligned} a_{11}x_1 \cup a_{12}x_2 \cup \dots \cup a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 \cup a_{n2}x_2 \cup \dots \cup a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

zapisan u obliku $AX = B$, gde je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}\dots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n1}\dots a_{nn} \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Tada važi implikacija

(30) $A^TA=I \Longrightarrow \forall b_1,\ldots,b_n\ \forall x_1,\ldots,x_n(AX=B \Longleftrightarrow x_1=D_1 \wedge \ldots \wedge x_n=D_n)$,

D_i je determinanta dobijena iz matrice A zamenom i-te kolone vektorom $(b_1,\ldots,b_n)$ a determinenta matrice A se definiše sa

$$\det(A) = \bigcup_{p\in P} a_{1p_1}\ldots a_{np_n},$$

gde je P skup svih permutacija skupa $\{1,2,\ldots,n\}$, a $p=(p_1,\ldots,p_n)$.

Dokaz./17/ Dokaz se izvodi u B_2, jer je očigledno da je (30) Hornova formula. Iz prethodnog tvrdjenja je očigledno da $A^TA=I$ povlači $AA^T=I$. Ako je + znak za simetričnu razliku tada je $(b_2,+,\cdot,0,1)$ polje. Zbog ortonormalnosti vrsta i kolona matrice A, sistem $(S)^+$, dobijen iz (S) zamenom znaka $\cup$ sa + , ekvivalentan je sa (S). Ako u definiciji determinante operaciju $\cup$ zamenimo sa + , imamo

$$\det(A^T)\det(A) = 1 \quad \text{tj.} \quad \det(A) = 1,$$

pa je prema Kramerovom pravilu

$$AX=B \Longleftrightarrow x_1=D_1^+ \wedge \ldots \wedge x_n=D_n^+$$

gde je D_i^+ determinanta sa + . Zbog ortonormalnosti vrsta i kolona matrice A, simetrična razlika + u D_i^+ može da se zameni sa $\cup$ pa je

$$AX=Y \Longleftrightarrow x_1=D_1 \wedge \ldots \wedge x_n=D_n.$$

III OPISIVANJE OPŠTIH I REPRODUKTIVNIH REŠENJA DATE JEDNAČINE

Data je jednačina $r(x)=\top$, gde je $r(x)$ relacija nekog skupa S. Neka je R skup svih rešenja date jednačine, tj. $r(x)=\top \iff x\in R$. Neka su $+:(S\cup\{\top,\bot\})^2\longrightarrow S$, $\cdot:(S\cup\{\top,\bot\})^2\longrightarrow S\cup\{\top,\bot\}$, $':\{\top,\bot\}\longrightarrow\{\top,\bot\}$ proizvoljna preslikavanja koja zadovoljavaju zakone

(1) $0+x=x$, $x+0=x$, $0\cdot x=0$, $1\cdot x=x$, $0'=1$, $1'=0$

za svako $x\in S$. Tada važi

<u>Tvrdjenje III.1.</u> /25/ Formulom

$$F(x) = r(x)x + r'(x)A(f(x))$$

sa parametrom $f:S\longrightarrow S$ opisuju se sve funkcije $F:S\longrightarrow S$ za koje je

$$x = F(t)$$

reproduktivno rešenje jednačine $r(x)=\top$, pri čemu je $x=A(t)$ opšte rešenje jednačine $r(x)=\top$.

Dokaz. /25/

$x=F(t)$ je reproduktivno rešenje jednačine $r(x)=\top$

$\iff(\forall x\in R)(x=F(x))\wedge(\forall x\in S\setminus R)(F(x)\in R)$ (prema tvrdjenju I.2.)

$\iff(\forall x\in R)(x=F(x))\wedge(\forall x\in S\setminus R)(\exists t\in S)(F(x)=A(t))$

($x=A(t)$ je opšte rešenje jednačine $r(x)=\top$)

$\iff(\forall x\in R)(x=F(x))\wedge(\exists \bar{f}:S\setminus R\longrightarrow S)(\forall x\in S\setminus R)(F(x)=A(\bar{f}(x)))$

(primena aksiome izbora)

$\iff(\exists f:S\longrightarrow S)(\forall x\in S)(\,F(x)=r(x)x+r'(x)A(f(x))\,)$

(primena zakona (1), a f je proširenje od $\bar{f}$). $\dashv$

Primer III.1. /25/ Odrediti sva reproduktivna rešenja Bulove jednačine

$$r(x_1,\ldots,x_n) = 1 \qquad (x_i \in \{0,1\})$$

Primenom Levenhajmove formule dobijamo opšte rešenje

$$x_1 = p_1 r'(t_1,\ldots,t_n) \cup t_1 r(t_1,\ldots,t_n)$$
$$\vdots$$
$$x_n = p_n r'(t_1,\ldots,t_n) \cup t_n r(t_1,\ldots,t_n),$$

gde je $(p_1,\ldots,p_n)$ partikularno rešenje jednačine $r(x_1,\ldots,x_n)=1$. Sva reproduktivna rešenja date jednačine odredjena su formulama

$$x_1 = x_1 r(t_1,\ldots t_n) \cup r'(t_1,\ldots,t_n)(p_1 r'(f_1,\ldots,f_n) \cup f_1 r(f_1,\ldots,f_n)$$
$$\vdots$$
$$x_n = x_n r(t_1,\ldots,t_n) \cup r'(t_1,\ldots,t_n)(p_n r'(f_1,\ldots,f_n) \cup f_n r(f_1,\ldots,f_n)$$

gde su $f_i : \{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}$ parametri.

Prethodno tvrdjenje predstavlja osnovnu inspiraciju za nekoliko narednih tvrdjenja. U njemu je dat algoritam za odredjivanje reproduktivnog rešenja date jednačine ako se zna jedno opšte rešenje date jednačine. Postavlja se pitanje da li pomoću jednog opšteg rešenja mogu da se opišu sva opšta i sva reproduktivna rešenja. U radu /4/ ovaj problem se svodi na rešavanje funkcionalnih jednačina oblika fhkf=f i fhf=f, o čemu govore dva naredna tvrdjenja.

Radi lakšeg rada, rečenice "f je opšte rešenje jednačine $r(x)=1$ " i "g je reproduktivno rešenje jednačine $r(x)=1$ " obeležavamo respektivno sa $G(f)$ i $R_p(g)$.

Tvrdjenje III.2. /4/

$$(\forall f,g:S \to S)(G(f) \Rightarrow (G(g) \Longleftrightarrow (\exists h,k:S \to S)(g=fk \quad f=fkhf))$$

Dokaz. /4/ Neka je f dato opšte rešenje. Prema tvrdjenju I.1. imamo da je $G(g) \Longleftrightarrow (\forall x \in S)(r(x)=1 \Longleftrightarrow (\exists t \in S)(x=g(t))$.

Dalje imamo

$$(\forall x \in S)(r(x)=T \Leftrightarrow (\exists t \in S)(x=g(t))$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in S)(r(x)=T \Rightarrow (\exists t \in S)(x=g(t))$$

$$\wedge (\forall x \in S)((\exists t \in S)(x=g(t) \Rightarrow r(x)=T)$$

(prema definiciji ekvivalencije)

$$\Leftrightarrow (\forall x \in S)(\exists t \in S)(r(x)=T \Rightarrow x=g(t))$$

$$\wedge (\forall x \in S)(\forall t \in S)(x=g(t) \Rightarrow r(x)=T)$$

(primenom valjanih formula

$((\exists x)A(x) \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\forall x)(A(x) \Rightarrow B)$ i

$(B \Rightarrow (\exists x)A(x)) \Leftrightarrow (\exists x)(B \Rightarrow A(x))$, gde x nije

slobodna promenljiva u B)

$$\Leftrightarrow (\exists h:S \to S)(\forall x \in S)(r(x)=T \Rightarrow x=g(h(x)) \wedge (\forall t \in S)(\forall x \in S)(x=g(t) \Rightarrow r(x)=T)$$

(primena aksiome izbora)

$$\Leftrightarrow (\exists h:S \to S)(\forall x \in S)(r(x)=T \Rightarrow x=g(h(x)) \wedge (\forall t \in S)(r(g(t))=T)$$

(primenom valjane formule $(\forall x)(x=u \Rightarrow A(x)) \Leftrightarrow A(u)$,

gde term u nije slobodan za promenljivu x)

$$\Leftrightarrow (\exists h:S \to S)(\forall x \in S)((\exists t \in S)(x=f(t)) \Rightarrow x=g(h(x))$$

$$\wedge (\forall t \in S)(\exists s \in S)(g(t)=f(s))$$

(f je opšte rešenje, tj. $r(x)=T \Leftrightarrow (\exists s \in S)(x=f(s))$)

$$\Leftrightarrow (\exists h:S \to S)(\forall x \in S)(\forall t \in S)(x=f(t) \Rightarrow x=g(h(x)))$$

$$\wedge (\exists k:S \to S)(\forall t \in S)(g(t) = f(k(t)))$$

(primena aksiome izbora)

$$\Leftrightarrow (\exists h:S \to S)(\forall t \in S)(\forall x \in S)(x=f(t) \Rightarrow x=g(h(x)))$$

$$\wedge (\exists k:S \to S)(g=fk)$$

$$\Leftrightarrow (\exists h:S \to S)(\forall t \in S)(f(t)=g(h(t)))) \wedge (\exists k:S \to S)(g=fk)$$

$$\Leftrightarrow (\exists h:S \to S)(ghf=f) \wedge (\exists k:S \to S)(g=fk)$$

$$\Leftrightarrow (\exists h,k:S \to S)(f=ghf \wedge g=fk)$$

$$\Leftrightarrow (\exists h,k:S \to S)(g=fk \wedge f=fkhf). \dashv$$

Znači, ako je f opšte rešenje, tada su sva opšta rešenja oblika fk gde funkcija $k:S \to S$ sa funkcijom $h:S \to S$ zadovoljava funkcionalnu jednačinu $f=fkhf$.

<u>Tvrdjenje II.3.</u> /4/

$(\forall f,g:S\rightarrow S)(G(f)\Rightarrow(R_p(g)\Leftrightarrow(\exists k:S\rightarrow S)(t=fkf\wedge g=fk)$

Dokaz. /4/ Neka je f dato opšte rešenje i neka je g reproduktivno rešenje, tj. $G(f)$ i $R_p(g)$. Tada je

$$
\begin{aligned}
& R_p(g) \\
\Leftrightarrow\ & G(g)\wedge(\forall x\in S)(r(x)=\top\Longrightarrow x=g(x)) \\
& \qquad\text{(prema definiciji)} \\
\Leftrightarrow\ & G(g)\wedge(\forall x\in S)((\exists t\in S)(x=f(t))\Longrightarrow x=g(x)) \\
& \qquad\text{(prema pretpostavci da je f opšte rešenje)} \\
\Leftrightarrow\ & G(g)\wedge(\forall x\in S)((\exists t\in S)(x=f(t)\Rightarrow x=g(x))) \\
\Leftrightarrow\ & G(g)\wedge(\forall x\in S)(\forall t\in S)(x=f(t)\Longrightarrow x=g(x)) \\
\Leftrightarrow\ & G(g)\wedge(\forall t\in S)(\forall x\in S)(x=f(t)\Longrightarrow x=g(x)) \\
\Leftrightarrow\ & G(g)\wedge(\forall t\in S)(f(t)=g(f(t))) \\
\Leftrightarrow\ & G(g)\wedge f=gf \\
\Leftrightarrow\ & (\exists h,k:S\rightarrow S)(g=fk\wedge fkhf=f)\wedge f=gf \\
& \qquad\text{(prema prethodnom tvrdjenju)} \\
\Leftrightarrow\ & (\exists h,k:S\rightarrow S)(g=fk\wedge fkhf=f\wedge f=gf) \\
\Leftrightarrow\ & (\exists h,k:S\rightarrow S)(g=fk\wedge fkhf=f\wedge fkf=f) \\
\Leftrightarrow\ & (\exists k:S\rightarrow S)(g=fk\wedge fkf=f)\wedge(\exists h:S\rightarrow S)(f=fkhf) \\
\Leftrightarrow\ & (\exists k:S\rightarrow S)(g=fk\wedge fkf=f)
\end{aligned}
$$

(jer je formula $fkf=f\Rightarrow(\exists h:S\rightarrow S)(f=fkhf)$ tačna pošto h može da bude, na primer, identičko preslikavanje skupa S na skup S)

Kao što je dokazano, problem odredjivanja svih reproduktivnih rešenja date jednačine, pod pretpostavkom da je poznato opšte rešenje f te jednačine, svodi se na odredjivanje funkcije k koja zadovoljava funkcionalnu jednačinu fkf=f. Ovaj problem rešava sledeće tvrdjenje. Dogovorno sa $f^{-1}(s)$ označavamo skup svih članova x iz f(S) čija je slika s, tj.

$$f^{-1}(s) = \{ x \mid f(x) = s \}$$

Tvrdjenje III.4. /4/

$$fkf = f \iff (\forall x \in S)(r(x)=\top \implies k(x) \in f^{-1}(x))$$

Dokaz. /4/

$$(\forall x \in S)(r(x)=\top \implies k(x) \in f^{-1}(x))$$
$$\iff (\forall x \in S)(r(x)=\top \implies f(k(x))=x)$$
$$\iff (\forall x \in S)((\exists t \in S)(x=f(t)) \implies f(k(x))=x))$$
$$\iff (\forall x \in S)(\forall t \in S)(x=f(t) \implies f(k(x))=x)$$
$$\iff (\forall t \in S)(\forall x \in S)(x=f(t) \implies f(k(x))=x)$$
$$\iff (\forall t \in S)(f(k(f(t)))=f(t))$$
$$\iff fkf = f. \quad \dashv$$

Rudeanu je u radu /36/, nadovezujući se na radove /24/ i /4/ dao veze izmedju rešenja f i g date jednačine, pri čemu se problem opet svodi na rešavanje funkcionalnih jednačina, ali drugog tipa. U ovom radu se rešenja posmatraju kao preslikavanja skupa S u skup rešenja R, pri čemu se ne pominje sama jednačina. To je inače ekvivalentno sa dosadašnjim načinom posmatranja ovih problema, jer svakom rešenju, tj. preslikavanju $f:S \longrightarrow R$ odgovara jednačina $x \in R$ i, obratno, svakoj neprotivurečnoj jednačini odgovara rešenje, tj. preslikavanje skupa S u skup R. Tako i činjenica da je, recimo, f funkcija rešenja može da se izrazi u obliku $(\forall t)(f(t) \in R)$.

Tvrdjenje III.5. /36/ Neka je f opšte rešenje i neka je $g:S \longrightarrow S$. Tada je g opšte rešenje ako i samo ako $g(S) \subset R$ (R je skup rešenja) i $f=gh$ za neko $h:S \longrightarrow S$.

Dokaz. /36/ Ako je g opšte rešenje, tada je $g(S) \subset R$. Ovde je, čak, $g(S)=R$, jer je g preslikavanje "na". Za svako $t \in S$ imamo da je $f(t) \in R=g(S)$. Biramo $x \in S$ tako da je $g(x)=f(t)$ i stavimo da je $h(t)=x$. Tada sledi da je za svako $t \in S$

$$gh(t) = g(x) = f(t).$$

Obratno, ako je $g(S) \subset R$ i $gh=f$, tada za svako $s \in R$ uzimamo $t \in S$ tako da je $s=f(t)$, pa je $s=g(h(t))$. $\dashv$

<u>Tvrdjenje III.6.</u> /36/ Neka je f opšte rešenje i neka je g reproduktivno rešenje. Tada je $f=gf$.

Dokaz. /36/ Kako je f opšte rešenje imamo da je $f(t) \in R$ za svako $t \in S$, pa je $g(f(t))=f(t)$, zbog reproduktivnosti rešenja g. $\dashv$

<u>Tvrdjenje III.7.</u> /36/ Neka je f reproduktivno rešenje i neka $g:S \to S$ zadovoljava uslove $g(S) \subset R$ i $f=gf$. Tada je g reproduktivno rešenje.

Dokaz. /36/ Prema tvrdjenju III.5. g je opšte rešenje pošto zadovoljava uslove $g(S) \subset R$ i $f=gf$. Medjutim, kako je $x=f(x)$ za svako $x \in R$, to je $g(x)=g(f(x))=gf(x)=f(x)=x$. $\dashv$

<u>Tvrdjenje III.8.</u> /36/ Neka su $f,h:S \to S$. Tada

(a) Jednačina $f=gh$ po g je neprotivurečna ako i samo ako

(a1) $$(\forall x,x' \in S)(h(x)=h(x') \Longrightarrow f(x)=f(x'))$$

(b) Kada je uslov (a1) zadovoljen sva rešenja g jednačine $f=gh$ su data formulom

(b1) $$g(t) = \begin{cases} f(x) \text{ , ako je } t=h(x) \\ \text{proizvoljno, u drugim slučajevima} \end{cases}$$

Dokaz. /36/ Neka jednačina $f=gh$ ima rešenje g. Tada $h(x)=h(x')$ implicira $f(x)=g(h(x))=g(h(x'))=f(x')$. Obratno, neka važi (a1). Tada je formulom (b1) odredjeno preslikavanje g za koje je

$$g(h(x)) = f(x) \quad \text{za svako } x \in S,$$

čime je dokazano postojanje rešenja g. Neka je $gh=f$. Ako je $t=h(x)$, tada je $g(t)=gh(x)=f(x)$, odnosno g je oblika (b1). $\dashv$

Iz poslednjeg tvrdjenja se neposredno zaključuje da su sva rešenja funkcionalne jednačine $f=gf$ oblika

$$g(t) = \begin{cases} t \text{ , ako je } t \in f(S) \\ \text{proizvoljno, u drugim slučajevima} \end{cases}$$

Tvrdjenje III.9. /36/ Neka je $f:S \to S$. Tada postoji obostrano jednoznačno preslikavanje izmedju svih funkcija h koje zadovoljavaju uslov (al) prethodnog tvrdjenja i svih parova (H,k), gde je H particija skupa S finija od $F=\{f^{-1}(s) \mid s \in f(s)\}$ a $k:H \to S$ je preslikavanje "1-1".

Inače za particiju P kažemo da je finija od particije P_1 istog skupa ako je svaka klasa iz P podskup neke klase iz P_1. Očigledno da je F particija skupa S.

Dokaz. /36/

(i) Neka je h funkcija koja zadovoljava uslov (al). Tada je, očigledno, particija

$$H = \{ h^{-1}(s) \mid s \in h(S)\}$$

finija od F, dok je $k:H \to S$, definisana sa

$$(\forall s \in H(S))(k(h^{-1}(s))=s),$$

preslikavanje "1-1". Ovo je bio način da se datom preslikavanju h pridruži par (H,k).

(ii) Neka je H particija finija od F a $k:H \to S$ preslikavanje "1-1". Preslikavanje h se odredjuje na sledeći način:

$$(\forall x \in S)(h(x) = k(C))$$

gde je $C \in H$ klasa koja sadrži x. Tada preslikavanje $h:S \to S$ zadovoljava uslov (al), jer $h(x)=h(x')$ znači $k(C)=k(C')$, gde $x' \in C' \in H$, a kako je k preslikavanje "1-1", sledi da je $C=C'$. To znači da x i x' pripadaju istoj klasi, recimo $f^{-1}(s)$, pa je $f(x)=s=f(x')$. Ovim je dat način za odredjivanje funkcije h koja odgovara paru (H,k).

Treba da se dokaže da je preslikavanje izmedju svih funkcija h koje zadovoljavaju uslov (al) i uredjenih parova (H,k) "1-1" i "na".

(iii) Neka je h funkcija koja zadovoljava (al) i neka su

H i k odredjeni kao u (i). Treba da se pokaže da se funkcija h', konstruisana kao u (ii), poklapa sa funkcijom h. Za dato $x \in S$ klasa iz H koja sadrži x je ona klasa $h^{-1}(s)$ za koju je $h(x)=s$, pa je

$$h'(x) = k(h^{-1}(s)) = s = h(x).$$

(iv) Slično, polazeći od particije H finije od F i preslikavanja $k:H \to S$ koje je "na", konstruišemo funkciju h kao u (ii). Od te funkcije h dobijamo par (H',k') odredjen sa

$$H' = \{h^{-1}(s) \mid s \in h(S)\}$$

dok je

$$k'(h^{-1}(s)) = s \qquad \text{za svako } s \in h(S).$$

Treba da pokažemo da se par (H',k') poklapa sa parom (H,k). Neka je $C \in H$ i neka je $k(H)=s$. Ako $x \in H$, tada je

$$h(x) = k(C) = s \qquad (s \in h(S)).$$

Obratno, neka je $x' \in h^{-1}(s)$ i neka je C' klasa iz H koja sadrži x'. Tada je

$$k(C') = h(x') = s = h(x) = k(C)$$

pa je $C'=C$, tj. $x' \in H$. Time je dokazano da je $h^{-1}(s) = C \in H$, odnosno, sa prethodnim, da je

$$H' = \{h^{-1}(s) \mid s \in h(S)\} = H.$$

Neka je $C=h^{-1}(s) \in H$. Tada je $k'(h^{-1}(s))=s$. Medjutim, uzimajući da je $x \in H$, dobijamo $k(C)=h(x)=s$, tj. $k'(C)=k(C)$. $\dashv$

Kao što se vidi, odredjivanje opštih, odnosno reproduktivnih rešenja date jednačine svodi se na rešavanje funkcionalnih jednačina $f=gh$, odnosno $f=gf$. Medjutim, kako funkcija g treba da zadovoljava i uslov $g(S) \subset R$, iz skupa svih rešenja funkcionalnih jednačina treba uzeti ona koja zadovoljavaju taj uslov.

Sada dajemo dva tvrdjenja kojima se odredjuju sva opšta, odnosno reproduktivna rešenja date jednačine u obliku proizvoda preslikavanja fh, gde je f dato opšte rešenje date jednačine.

Neka je $F=\{f^{-1}(s) \mid s\in f(S)\}$ tj. F je količnik skup koji odgovara relaciji $\sim$ skupa S definisanoj na sledeći način

$$x_1 \sim x_2 \Longleftrightarrow f(x_1)=f(x_2).$$

Označimo sa H skup svih preslikavanja h sa svojstvom

$$(\forall s\in f(S))(\exists x\in S)(h(x)\in f^{-1}(s)),$$

tj. u svakoj klasi $f^{-1}(s)\in F$ nalazi se bar po jedan element oblika h(x) (kaže se još da h sadrži transverzalu). Tada važi

<u>Tvrdjenje II.10</u>. Neka je $f:S\xrightarrow{na}R$, gde je R skup rešenja jednačine $r(x)=\top$ (r(x) je relacija skupa S), tj. f je opšte rešenje. Tada se sva preslikavanja $g:S\xrightarrow{na}R$ (odnosno sva opšta rešenja jednačine $r(x)=\top$) mogu ovako opisati:

$$g = fh \quad , \quad \text{gde je} \quad h\in H,$$

tj. vredi ekvivalencija

$$g:S\xrightarrow{na}R \Longleftrightarrow (\exists h\in H)(g=fh).$$

Dokaz. Neka je, najpre, g opšte rešenje. Prema aksiomi izbora iz svake klase $f^{-1}(y), y\in R$, može da se izabere po jedan element. Obeležimo ga sa x_y. Za svako $t\in S$ imamo $g(t)\in R$, odnosno $g(t)=s$ za neko $s\in R$. Neka je $h(t)=x_s$. Kako je $f(x_s)=s=g(t)$, to je za svako $t\in S$

$$f(h(t)) = f(x_s) = g(t).$$

Preslikavanje h pripada skupu H, jer kako je g opšte rešenje, to za svako $s\in R$ postoji $t\in S$, tako da je $g(t)=s$, a to znači da za svako x_s postoji t tako da je $h(t)=x_s$.

Obratno, neka je $g=fh$ za neko $h\in H$. Tako je za svako $t\in S$

$$g(t) = f(h(t)) = f(x)\in R,$$

jer je $h(t)=x\in S$. Znači da je g rešenje. Prema pretpostavci da je $h\in H$ imamo

$$(1)\qquad (\forall s\in R)(\exists t\in S)(h(t)\in f^{-1}(s)).$$

Obeležimo sa t_s odgovarajući, u smislu (1), element za s. Tada je

$$g(t_s) = f(h(t_s)) = s$$

jer je $f(f^{-1}(s))=s$, pa je i $f(h(t_s))=s$, pošto $h(t_s)\in f^{-1}(s)$. $\dashv$

Ako se funkcija h iz skupa H posebno izabere, dobija se reproduktivno rešenje. Iz prethodnog tvrdjenja se vidi da za svaku funkciju h važi uslov: za svaku klasu $f^{-1}(x)$ postoji bar jedan element $t\in S$ takav da je $h(t)\in f^{-1}(x)$. Medjutim, u opštem slučaju, ne mora da bude $h(x)\in f^{-1}(x)$. Ako je $h(x)\in f^{-1}(x)$, dobijeno rešenje $g=fh$ je reproduktivno.

<u>Tvrdjenje III.11</u>. Neka je $f:S\to R$ opšte rešenje jednačine $r(x)=\top$. Preslikavanje $g:S\to S$ je reproduktivno rešenje ako i samo ako je $g=fh$ za neko h sa osobinom da je za svako $x\in R$ $h(x)\in f^{-1}(x)$.

Dokaz. Ako je $x\in S\setminus R$ tada je

$$g(x) = f(h(x))\in R$$

Ako je $x\in R$ tada je

$$g(x) = f(h(x) = f(f^{-1}(x)) = x$$

tj. g je reproduktivno rešenje. Obratno, neka je g reproduktivno rešenje. Odredimo funkciju $h|R$ tako da je za svako $x\in R$ $(h|R)(x)\in f^{-1}(x)$, što je prema aksiomi izbora moguće. Tada je za svako $x\in R$

$$f(h(x)) = f(f^{-1}(x)) = x = g(x).$$

Ako $x \in S \setminus R$ tada je

(2) $$g(x) = s$$

za neko $s \in R$, jer je g rešenje. Kako je f opšte rešenje, to za svako $s \in R$ postoji t tako da je $f(t)=s$, odnosno $t \in f^{-1}(s)$. Iz svake klase odaberimo po jedan takav element t. Obeležimo ga sa t_s. Odredimo preslikavanje $h|S \setminus R$ tako da je za svako x koje zadovoljava uslov (2)

$$(h|S \setminus R)(x) = t_s.$$

Tada je za svako $x \in S \setminus R$

$$f(h(x)) = f(t_s) = s = g(x).$$

Poslednje tvrdjenje je, u stvari, posledica tvrdjenja III.3. i tvrdjenja III.4.

Zapažanje III.1. Tvrdjenje III.11. može da se izvede iz tvrdjenja III.1.

Dokaz. Polazi se od ekvivalencije

$x = f(t)$ je reproduktivno rešenje jednačine $r(x)=\top$

$$\Longleftrightarrow (\forall x \in R)(f(x)=x) \wedge (\exists f: S \setminus R \to S)(\forall x \in S \setminus R)(f(x)=g(h(x)))$$

koja figuriše u dokazu tvrdjenja III.1. Izvodjenje se sastoji u transformisanju desnog dela poslednje konjukcije, kako bi se preslikavanje f dobilo u obliku proizvoda preslikavanja. Poslednja konjukcija je ekvivalentna sa

$$(\forall x \in R)(f(x)=x) \wedge (\forall x \in R)(\exists t \in S)(x=g(t))$$
$$\wedge (\exists f: S \setminus R \to S)(\forall x \in S \setminus R)(f(x)=g(h(x)))$$

(jer je g opšte rešenje)

$$\Longleftrightarrow (\forall x \in R)(f(x)=x \wedge (\exists t \in S)(x=g(t)))$$
$$\wedge (\exists f: S \setminus R \to S)(\forall x \in S \setminus R)(f(x)=g(h(x)))$$

(prema valjanoj formuli

$(\forall x)A(x) \wedge (\forall x)B(x) \Longleftrightarrow (\forall x)(A(x) \wedge B(x))$)

$$\Longleftrightarrow (\forall x \in R)(\exists t \in S)(f(x)=x \wedge x=g(t))$$
$$(\exists f: S \setminus R \to S)(\forall x \in S \setminus R)(f(x)=g(h(x)))$$

(prema valjanoj formuli $(\exists x)A(x) \wedge B \Longleftrightarrow (\exists x)(A(x) \wedge B)$

$$\Longleftrightarrow (\forall x\in R)(\exists t\in S)(f(x)=g(t)\wedge t\in g^{-1}(x))$$
$$\wedge(\exists f:S\setminus R\longrightarrow S)(\forall x\in S\setminus R)(g(x)=g(h(x)))$$
$$\Longleftrightarrow (\exists k:R\longrightarrow S)(\forall x\in R)(k(x)\in g^{-1}(x)\wedge f(x)=g(k(x)))$$
$$\wedge(\exists f:S\setminus R\longrightarrow S)(\forall x\in S\setminus R)(f(x)=g(h(x)))$$
$$\Longleftrightarrow (\exists k:R\longrightarrow S)(\exists f:S\setminus R\longrightarrow S)\big[(\forall x\in R)(k(x)\in g^{-1}(x)$$
$$\wedge f(x)=g(k(x))\wedge(\forall x\in S\setminus R)(f(x)=g(h(x))\big]$$
$$\Longleftrightarrow (\exists k:R\longrightarrow S)(\exists f:S\setminus R\longrightarrow S)\big[(\forall x\in R)(k(x)\in g^{-1}(x))$$
$$\wedge(\forall x\in R)(f(x)=g(k(x)))\wedge(\forall x\in S\setminus R)(f(x)=g(h(x))\big]$$
$$\Longleftrightarrow (\exists j:S\longrightarrow S)\big[(\forall x\in R)(j(x)\in g^{-1}(x)\wedge(\forall x\in S)(f(x)=g(j(x))\big]$$
$$\Longleftrightarrow (\exists j:S\longrightarrow S)\big[f=gj\wedge(\forall x\in R)(j(x)\in g^{-1}(x))\big]$$

gde je $\quad j(x) = \begin{cases} k(x), & \text{za } x\in R \\ h(x), & \text{za } x\in S\setminus R \end{cases}$

Kao što je već navedeno, tvrdjenje III.1. daje algoritam za odredjivanje svih reproduktivnih rešenja date jednačine $r(x)=\top$, gde je $r(x)$ relacija datog skupa S, što se postiže formulom

$$F(t) = r(t)t + r'(t)\,A(f(t))$$

gde su operacije + , · i ' posebno definisane. U radu /21/, koji razmatra druge probleme, ukazuje se na mogućnost formiranja funkcije $F(t)$ na drugi način. U svakom slučaju, funkcija F zavisi od same jednačine, odnosno relacije $r(x)$, od promenljive x i od datog opšteg rešenja, tj. izraza $A(f(x))$. Ovde dajemo izvesne dovoljne uslove za funkciju od tri promenljive

$G:S\times\{\top,\bot\}\times R\longrightarrow S$ (R je skup rešenja jednačine $r(x)=\top$)

da bi formulom

$$x = G(t,r(t),A(f(t)))$$

bila definisana sva opšta reproduktivna rešenja date jednačine $r(x)=\top$.

<u>Tvrdjenje III.12.</u> Formulom

(3) $\qquad x = G(t,r(t),A(f(t))),\qquad$ gde je $f:S\longrightarrow S$,

se opisuju sva opšta reproduktivna rešenja jednačine $r(x)=\top$, ako je funkcija $G(x,y,z)$ definisana ovako

$$G(x,\top,z) = x$$

$$G(x,\bot,z) = z$$

Dokaz. Dokažimo da je formulom (3) definisano rešenje jednačine $r(x)=\top$. Očigledno, ako je $t\in R$, tada je $G(t,r(t),A(f(t))=t$. Ako je $t\in S\setminus R$, tada je

$$G(t,r(t),A(f(t)))=A(f(t))\in R.$$

Neka je $F(t)$ opšte reproduktivno rešenje jednačine $r(x)=\top$. Dokažimo da ono može da se dobije iz (3). Ako je $t\in R$, tada je $F(t)=t=G(t,r(t),A(f(t)))$. Neka je za neko $t\in S\setminus R$ $F(t)=x\in R$. Kako je A opšte rešenje, to postoji $u\in S$ za koje je $A(u)=x$. Neka je $f:S\longrightarrow S$ takvo da je $f(t)=u$. Tada je

$$A(f(t)) = A(u) = x = F(t). \quad \dashv$$

Napominjemo da je dokaz mogao da se izvede i iz ekvivalencije

$x=F(t)$ je reproduktivno rešenje jednačine $r(x)=\top$

$\Longleftrightarrow(\forall x\in R)(F(x)=x)\wedge(\exists f:S\longrightarrow S)(\forall x\in S\setminus R)(F(x)=A(f(x)))$

tvrdjenja III.1.

Kada se rešava sistem jednačina onda se obično, kao kod Bulovih jednačina, najpre sistem redukuje na jednu jednačinu, pa se onda rešava. Medjutim, ovo redukovanje nije u svim strukturama pogodno ili je, pak, dobijena jednačina suviše složena za rešavanje. Zato se postavlja problem rešavanja sistema jednačine bez prethodnog redukovanja sistema na jednu, njemu ekvivalentnu jednačinu. U /35/ Rudeanu postavlja ovaj problem za Bulove jednačine. Ovde dajemo dva načina za rešavanje ovog problema za sistem proizvoljnih jednačina.

<u>Tvrdjenje III.13</u>. Neka je $x=g(t)$ $(g:S\longrightarrow S)$ opšte rešenje jednačine $r_1(x)=\top$ a $t=h(u)$ $(h:S\longrightarrow S)$ opšte

rešenje jednačine $r_2(g(t))=\top$. Tada je formulom

(4) $\qquad x = g(h(u))$

odredjeno opšte rešenje sistema jednačina

(5) $\qquad r_1(x) = \top \ \wedge \ r_2(x) = \top$,

gde su $r_1(x)$ i $r_2(x)$ relacije datog skupa S. Rešenje definisano sa (4) je reproduktivno ako i samo ako

(6) $\qquad (\forall u \in R)(h(u) \in g^{-1}(u))$,

pri čemu je R skup rešenja sistema (5).

Dokaz. Očigledno je da je (4) rešenje sistema. Dokažimo da je opšte.

$$(r_1(x) = \top \wedge r_2(x) = \top)$$

$\Longleftrightarrow (\exists t)(x = g(t)) \wedge r_2(x) = \top$

(g je opšte rešenje jednačine $r_1(x)=\top$)

$\Longleftrightarrow (\exists t)(x = g(t) \wedge r_2(x) = \top)$

(prema formuli

(7) $\qquad (\exists x)A(x) \wedge B \Longleftrightarrow (\exists x)(A(x) \wedge B)$

gde x nije slobodna u B)

$\Longleftrightarrow (\exists t)(x = g(t) \wedge r_2(g(t)) = \top)$

(prema formuli $x=a \wedge b(x) \Longleftrightarrow x=a \wedge b(a)$)

$\Longleftrightarrow (\exists t)(x = g(t) \wedge (\exists u)(t = h(u))$

(h je opšte rešenje jednačine $r_2(g(t)) = \top$)

$\Longleftrightarrow (\exists t)(\exists u)(x = g(t) \wedge t = h(u))$

(prema formuli (7))

$\Longrightarrow (\exists t)(\quad u)(x = g(h(u)))$

(prema formuli $x=a \wedge b(x) \Longrightarrow b(a)$)

$\Longrightarrow (\exists u)(x = g(h(u)))$.

Dokaz za reproduktivnost je očigledan. $\dashv$

Posledica III.1. Neka je $x=g(t)$ $(g:S \longrightarrow S)$ opšte rešenje sistema

$$r_1(x)=\top \wedge r_2(x)=\top \wedge \dots \wedge r_{n-1}(x)=\top$$

a $t=h(u)$ $(h:S \longrightarrow S)$ je opšte rešenje jednačine $r_n(g(t))=\top$. Tada je formulom $x=g(h(u))$ odredjeno opšte rešenje sistema

$$r_1(x)=\top \wedge r_2(x)=\top \wedge \dots \wedge r_n(x)=\top .$$

Dokaz. Korišćenjem indukcije po n.

Primer III.2. Rešiti sistem Bulovih jednačina

$$ax \cup bx' = 0 \quad \wedge \quad cx \cup dx' = 0$$

Opšte rešenje prve jednačine je $x=b \cup a't$, uz uslov $ab=0$. Jednačina $r_2(g(t))=\top$ je u ovom slučaju

$$c(b \cup a't) \cup d(b'(a \cup t')) = 0$$

$$\Longleftrightarrow cb \cup a'ct \cup ab'd \cup b'dt' = 0$$

$$\Longleftrightarrow (a'c \cup cb \cup ab'd)t \cup (b'd \cup cb \cup ab'd)t' = 0$$

$$\Longleftrightarrow (a'c \cup cb \cup ad)t \cup (b'd \cup cb)t' = 0$$

jer je $ab'=b$, pošto je $ab=0$. Uslov neprotivurečnosti je

$$(a'c \cup cb \cup ab'd)(b'd \cup cb) = 0$$

$$\Longleftrightarrow a'b'cd \cup a'cb \cup cb \cup ab'd = 0$$

$$\Longleftrightarrow a'cd \cup cb \cup ab'd = 0 \qquad (\, b'c=c \,)$$

$$\Longleftrightarrow a'cd \cup cb \cup ad = 0 \qquad (\, a'd=d \,)$$

$$\Longleftrightarrow cd \cup cb \cup ad = 0$$

Zajedno sa uslovom neprotivurečnosti prve jednačine sistema dobijamo $ab \cup ad \cup cb \cup cd = 0$ tj. $ab=0 \wedge ad=0 \wedge cb=0 \wedge cd=0$. Tako jednačina $r_2(g(t))=\top$ postaje $a'ct \cup b'dt'=0$, odakle je $t=b'd \cup (a'c)'u$ tj. $t=b'd \cup (a \cup c')u$, pa je

$$x = b \cup a'(b'd \cup (a \cup c')u)$$

$$x = b \cup a'b'd \cup a'c'u$$

$$x = b \cup a'd \cup a'c'u \qquad (\, p \cup qp'=p \cup q \,)$$

$$x = b \cup d \cup a'c'u \qquad (\, ad=d, \text{ jer je } ad=0 \,).$$

<u>Primer III.3.</u> Rešiti sistem Bulovih jednačina

$$ax' = 0 \wedge by' = 0 \wedge c'xy \cup cx' \cup cy' = 0$$

Ovaj sistem (/35/) može da se reši svodjenjem na jednu jednačinu ili korišćenjem teoreme Levenhajma uz poznavanje jednog partikularnog rešenja. Ovde ovaj sistem rešavamo korišćenjem tvrdjenja III.13.

Opšte rešenje prve jednačine je $x=b\cup t$ a druge $y=b\cup u$. Istovremeno to je rešenje sistema prvih dveju jednačina. Zamenom u trećoj jednačini dobija se

$$c'(a\cup t)(b\cup u)\cup c(a\cup t)'\cup c(b\cup u)'=0$$

$$\Longleftrightarrow c'(ab\cup au\cup bt\cup tu)\cup ca't'\cup cb'u'=0$$

$$\Longleftrightarrow (c't\cup ac'\cup a'ct')u\cup(cb'\cup abc'\cup bc't\cup a'ct')u'=0$$

iz čega se dobija

$$u = (cb'\cup abc'\cup bc't\cup a'ct')\cup(c't\cup ac'\cup a'ct')'p$$

uz uslov

$$(cb'\cup abc'\cup bc't\cup a'ct')(c't\cup ac'\cup a'ct')=0$$

$$\Longleftrightarrow a'ct'\cup bc't\cup abc'=0$$

$$\Longleftrightarrow c'bt\cup(a'c\cup abc')t'=0$$

Uslov neprotivurečnosti poslednje jednačine je

$$c'b(a'c\cup abc')=0 \quad , \text{ tj. } abc'=0,$$

dok je $t=(a'c\cup abc')\cup(c'b)'q$ tj. $t=(a'c\cup(c\cup b')q$.

Otuda je $t'=(a\cup c')(c'b\cup q')$ pa je

$$u=cb'\cup abc'\cup bc't\cup a'ct'\cup(c\cup t')(c\cup a')(c'\cup a\cup t)p.$$

Posle zamene izraza t i t' i sredjivanjem dobija se

$$u = cp\cup a'bc'p\cup a'c'pq'\cup cb'$$

Sada je

$$y = b\cup cp\cup a'bc'p\cup a'c'pq'\cup cb'$$

$$y = b\cup c\cup cp\cup a'c'pq'$$

$$y = b\cup c\cup a'c'pq'$$

$$y = b\cup c\cup a'pq', \qquad \text{dok je}$$

$$x = a \vee a'c \vee cq \vee b'q$$

$$x = a \cup c \cup cq \cup b'q$$

$$x = a \vee c \cup b'q$$

pri čemu je korišćeno $p \vee pq = p$ i $p \cup p'q = p \cup q$.

Tvrdjenje III.14. Neka je $x=f(t)$ opšte rešenje jednačine $r_1(x)=\top$ i $x=g(t)$ opšte rešenje $r_2(x)=\top$, gde su r_1 i r_2 relacije datog skupa S. Neka je $u=h(s)$ opšte rešenje jednačine $B(u)$, gde je $B(u)$ uslov neprotivurečnosti jednačine po t $f(t)=g(u)$. Tada je formulom

(8) $\qquad x = g(h(s))$

definisano opšte rešenje sistema

(9) $\qquad r_1(x) = \top \;\wedge\; r_2(x) = \top$.

Ako su rešenja $x=g(t)$ i $u=h(s)$ reproduktivna, tada je i rešenje (8) reproduktivno.

Dokaz. Neka je $x_o=g(h(s_o))$ za neko s_o. Dokažimo da x_o zadovoljava sistem (9). Očigledno je da je $r_2(g(h(s_o)))=\top$, jer je g opšte rešenje jednačine $r_2(x)=\top$. Kako je $h(s_o)$ rešenje jednačine $B(u)$ to je jednačina $f(t)=g(h(s_o))$ moguća po t. Neka je za neko t_o $f(t_o)=g(h(s_o))$. Kako je $r_1(f(t_o))=\top$, to je $r_1(g(h(s_o)))=\top$. Obratno, neka je x_1 rešenje sistema (9). Dokažimo da postoji s_1 tako da je $x_1=g(h(s_1))$. Kako je x_1 rešenje jednačine $r_1(x)=\top$, to postoji t_1 tako da je $x_1=f(t_1)$. Slično postoji u_1 tako da je $x_1=g(u_1)$. Pošto je $g(u_1)=f(t_1)$, u_1 je rešenje jednačine $B(u)$ a kako je $u=h(s)$ opšte rešenje te jednačine to postoji s_1 tako da je $u_1=h(s_1)$, pa je

$$x_1 = g(u_1) = g(h(s_1)).$$

Neka je x^o rešenje sistema (9). Pošto je x^o rešenje jednačine $r_2(x)=\top$ i pošto je g reproduktivno rešenje, to je $g(x^o)=x^o$. Imajući u vidu da je f opšte rešenje jednačine $r_1(x)=\top$

to postoji t tako da je $f(t)=g(x^o)=x^o$, pa je jednačina $f(t)=g(x^o)$ moguća po t, tj. x^o pripada skupu rešenja jednačine $B(u)$.
Kako je h reproduktivno rešenje to je $h(x^o)=x^o$. Otuda je

$$g(h(x^o)) = g(x^o) = x^o. \dashv$$

Primer III.4. Rešiti sistem Bulovih jednačina

$$ax = 0 \wedge bx' = 0.$$

Opšte rešenje prve jednačine je $x=a't$ a druge $x=b \vee u'$. Tada je jednačina $f(t)=g(u)$

$$a't=b \vee u'$$

$$\Longleftrightarrow a'tb'u \vee (a \vee t')(b \vee u')=0$$

$$\Longleftrightarrow (a'b'u \vee au')t \vee (au' \vee b \vee u')t'=0$$

pa je uslov neprotivurečnosti poslednje jednačine, tj. jednačina $B(u)$

$$(a'b'u \vee au')(b \vee u')=0 ,$$

što je ekvivalentno sa $au'=0$. Rešenje poslednje jednačine je $u=a \vee s'$ pa je

$$x = b \vee (a \vee s')'$$

tj. $$x = b \vee a's.$$

IV JEDNAČINE NA KONAČNIM SKUPOVIMA I UOPŠTENJA

Osnovna ideja narednog dela je u tome da se "prolaženjem" kroz dati skup odabiraju oni elementi tog skupa koji zadovoljavaju datu jednačinu. Ovaj postupak se realizuje pomoću funkcija, odnosno na kraju se dobija formula rešenja. Ideja da se na ovakav način dodje do rešavajuće funkcije jednačine zadate na konačnom skupu prvi put se pojavljuje u radu /25/. Već u ovom radu se vidi da ova metoda može da dâ rešenja jednačina koje su zadate na beskonačnom skupu (Bulove jednačine). Najpre dajemo prikaz ove metode.

Neka je $S=\{s_1,\dots,s_k\}$ konačan skup od k elemenata, neka je E skup koji sadrži element 0 i neka je $J:S\longrightarrow E$ preslikavanje skupa S u skup E. Treba da se reši jednačina

(1) $\qquad J(x) = 0 .$

Neka svakom elementu $q\in S$ odgovara ciklus C_q skupa S, tj. niz

$$q,\ C_q(q),\ C_q^2(q),\ \dots\ ,\ C_q^{k-1}(q)$$

gde je $C_q^2(q)=C_q(C_q(q))$, $C_q^3(q)=C_q(C_q^2(q))$, ...

Polazeći od elementa q pomoću ciklusa C_q prolazi se kroz čitav skup S. Ciklus može da se obrazuje na različite načine. Način odredjivanja ciklusa je veoma važan, jer je cilj da se izabere takav ciklus koji se jednostavno opisuje, što utiče na skraćivanje broja koraka potrebnih za dobijanje formule rešenja.

Neka je funkcija $A:S\times E^{k-1}\longrightarrow S$, koja se naziva rešavajuća, definisana na sledeći način:

$$
(2) \qquad
\begin{aligned}
&A(q,0,U_2,\dots,U_{k-1}) = q\\
&A(q,u_1,0,U_3\dots,U_{k-1} = C_q(q)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
&A(q,u_1,\dots,u_i,0,U_{i+2},\dots,U_{k-1}) = C_q^i(q)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
&A(q,u_1,\dots,u_{k-2},0) = C_q^{k-2}(q)\\
&A(q,u_1,\dots,u_{k-1}) = C_q^{k-1}(q)
\end{aligned}
$$

gde su $u_1,\dots,u_{k-1},U_2,\dots,U_{k-1}\in E$ i $u_1\neq 0,\dots,u_{k-1}\neq 0, q\in S$.

<u>Tvrdjenje IV.1</u>. /25/ Ako je jednačina (1) neprotivurečna, tada je opšte rešenje te jednačine dato sa

$$(3) \qquad x = A(q,J(q),J(C_q(q)),\dots,J(C_q^{k-1}(q)) \quad , q\in S.$$

Dokaz. /25/ Dokažimo, najpre, da je formulom (3) definisano rešenje jednačine (1). Kako je jednačina (1) neprotivurečna, to je bar jedan od članova niza

$$J(q),J(C_q(q)),\dots,J(C_q^{k-1}(q))$$

jednak 0. Neka je to, na primer, $J(C_q^i(q))$, tj. neka je $C_q^i(q)$ rešenje jednačine (1). Tada je, prema (2),

$$A(q,J(q),\dots,J(C_q^{k-1}(q)) = C_q^i(q)$$

tj. $x=A(q,J(q),\dots,J(C_q^{k-1}(q))$ je rešenje jednačine (1).

Neka je, sada, x rešenje jednačine (1). Dokažimo da postoji $q\in S$ za koje je

$$x = A(q,J(q),\dots,J(C_q^{k-1}(q)).$$

Kako je x rešenje, imamo da je

$$A(x,J(x),\dots) = A(x,0,\dots) = x$$

tj. $q=x$, odnosno rešenje definisano sa (2) je reproduktivno.

Formulama (2) dati su uslovi koje treba da zadovoljava rešavajuća funkcija A. Medjutim, potrebno je dati formulu oblika

$$x = A(q,J(q),\dots)$$

kojim bi bila definisana funkcija $A: S \times E^{k-1} \longrightarrow S$, a koja bi zadovoljavala uslove (2). Jedan od načina je sledeći:

Neka su $+$ i $\cdot$ binarne operacije na skupu $T \overset{def}{=} S \cup E$ sa osobinama

$$0 \cdot e = e \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0, \quad e \cdot e = e, \quad 0 \cdot q = 0, \quad e \cdot q = q$$

$$q + 0 = 0 + q = q, \quad 0 + 0 = 0$$

($q \in S$, e je odredjeni element skupa E različit od 0 koji ima ulogu jediničnog elementa). Neka su, još, $*$ i $\overline{}$ preslikavanja skupa E u skup E definisana sa

$$x^* = 0 \quad \text{za } x=0 \qquad \overline{x} = e \quad \text{za } x=0$$

$$x^* = e \quad \text{za } x \neq 0 \qquad \overline{x} = 0 \quad \text{za } x \neq 0$$

Tada je rešavajuća funkcija data sa

$$A(q, U_1, \ldots, U_{k-1}) = \overline{U}_1 q + U_1^* \overline{U}_2 (C_q(q) + \ldots \tag{4}$$
$$\ldots + U_1^* U_2^* \ldots U_{k-2}^* \overline{U}_{k-1} C_q^{k-2}(q) + U_1^* U_2^* \ldots U_{k-1}^* C_q^{k-1}(q),$$

gde je

$$U+V+W+\ldots+R \overset{def}{=} (\ldots((U+V)+W)+\ldots+R),$$
$$U \cdot V \cdot W \ldots R \overset{def}{=} (\ldots(U \cdot V) \cdot W) \ldots R).$$

Napominjemo da je jedan od problema koji se ovde javlja upravo realizacija operacije $*$. Tako, na primer, važi

Tvrdjenje IV.2. /20/ Ne postoji Bulov term U takav da je $x^* = U$, gde je

$$x^* = \begin{cases} 0 \ , & \text{za } x=0 \\ 1 \ , & \text{za } x \neq 0 \end{cases} .$$

Dokaz./20/ Ako bi postojao takav term U, tada bi, prema tvrdjenju II.3., bilo $U = ax \cup bx'$ za neke $a, b \in B$, tj. $x^* = ax \cup bx'$. Ako je $x=0$ tada je $0^* = 0$ pa je $b=0$. Slično, ako je $x=1$ imamo $a=1$, pa je $x^* = x$. Medjutim, jasno je da je u Bulovoj algebri sa četiri elementa $x^* \neq x$.

Tvrdjenje IV.2. ne znači da ovom metodom ne mogu da se rešavaju jednačine na proizvoljnim Bulovim algebrama. Takvo rešavanje obezbedjuje sledeće

Tvrdjenje IV.3. /Vaught/ Ako je formulom $X=g(T)$ definisano opšte rešenje jednačine $f(X)=0$ na Bulovoj algebri B_2, tada je tom istom formulom definisano opšte rešenje jednačine $f(X)=0$ na proizvoljnoj Bulovoj algebri B.

Dokaz. Prema tvrdjenju I.1. $X=g(T)$ je opšte rešenje jednačine $f(X)=0$ ako i samo ako je

$$(\forall X)(f(X)=0 \Longleftrightarrow (\exists T)(X=g(T)))$$

što je ekvivalentno sa

$$(\forall X)(\exists T)(f(X)=0 \Longrightarrow X=g(T)) \wedge (\forall X)(\forall T)(X=g(T) \Longrightarrow f(X)=0)$$

Poslednja rečenica je Hornova, pa ako važi u B_2, tada, prema Votovoj teoremi, važi i u svakoj Bulovoj algebri B.

Primer IV.1. /25/ Rešiti Bulovu jednačinu

$$ax \cup bx' = 0 .$$

Rešimo ovu jednačinu na B_2. U ovom slučaju je $e=1$, $x^*=x$, $\bar{x}$ je negacija od x, dok je $C_0(x)=C_1(x)=\bar{x}$. Primenom formule (4) dobija se

$$x = J'(q)q \cup J(q)q'$$

gde je ' oznaka za negaciju, pa je

$$x = (aq \cup bq')'q \cup (aq \cup bq')q' = (a' \cup q')(b' \cup q)q \cup bq'$$
$$= a'b'q \cup a'q \cup bq' = a'q \cup bq'$$

gde je q proizvoljan element algebre B_2. Dobijeno rešenje je, što je i ranije pokazano, istovremeno i rešenje jednačine $ax \cup bx'=0$ na proizvoljnoj algebri B.

Primer IV.2. Rešiti po x i y jednačinu $ax+by+c=0$ na polju F_2.

Napominjemo, a što je u vezi i sa ovim primerom, da metoda definisana tvrdjenjem IV.1. može da se primenjuje na proizvoljne jednačine $J(X)=0$, tj. X može da bude i vektor. U ovom primeru je $X=(x,y)$. Ciklus se obrazuje kao preslikavanje

$$C(u,v) = \begin{pmatrix} (u,v) & (u',v) & (u,v') & (u',v') \\ (u',v) & (u,v') & (u',v') & (u,v) \end{pmatrix}$$

U primeru se koristi definicija množenja skalara i vektora

$$a(u,v) \overset{\mathrm{def}}{=} (au,av) .$$

Rešenje se dobija u obliku

$$\begin{aligned}(x,y) &= (J(p,q)+1)(p,q)+J(p,q)(J(C(p,q))+1)C(p,q)+\\ &\quad +J(p,q)J(C(p,q))(J(C^2(p,q))+1)C^2(p,q)+\\ &\quad +J(p,q)J(C(p,q))J(C^2(p,q))C^3(p,q)=\\ &= (ap+bq+c+1)(p,q)+(ap+bq+c)(ap+b(q+1)+c+1)(p,q+1)+\\ &\quad +(ap+bq+c)(ap+b(q+1)+c)(a(p+1)+bq+c+1)(p+1,q)+\\ &\quad +(ap+bq+c)(ap+b(q+1)+c)(a(p+1)+bq+c)(p+1,q+1).\end{aligned}$$

Ako uvedemo oznaku $A=ap+bq+c$, imamo

$$\begin{aligned}(x,y) &= (A+1)(p,q)+A(A+b+1)(p,q+1)+A(A+b)(A+a+1)(p+1,q)+\\ &\quad +A(A+b)(A+a)(p+1,q+1) \qquad \text{tj.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= (A+1)p+A(A+b+1)p+A(A+b)(A+a+1)(p+1)+A(A+b)(A+a)(p+1)=\\ &= p+A+Ab\\ &= p+ap+bq+c+(ap+bq+c)b\\ &= p+ap+bq+c+abp+bq+bc\\ &= p(ab+a+1)+c(b+1).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y &= (A+1)q+A(A+b+1)(q+1)+A(A+b)(A+a+1)q+A(A+b)(A+a)(q+1)=\\ &= q+A+Aa+Aab\\ &= q+ap+bq+c+(ap+bq+c)a+(ap+bq+c)ab\\ &= q+ap+bq+c+ap+abq+ac+abp+abq+abc\\ &= (b+1)q+abp+abc+ac+c.\end{aligned}$$

Polazeći od rada /25/, M. Prešić je u radu /21/ dala metodu za rešavanje jednačina na konačnim poljima, pri čemu je dat novi način za dobijanje rešavajuće funkcije.

Tvrdjenje IV.4. /21/ Neka je

$$J(x) = 0 \tag{5}$$

jednačina na polju Galua $GP(p^n)$ i neka je e generatorni element ciklične grupe toga polja. Ako je jednačina (5) neprotivurečna, tada je njeno rešenje dato formulom

$$\begin{aligned} x = {} & t+(J(t))^{p^n-1}+e(J(t)J(t+1))^{p^n-1}+e^2(J(t)J(t+1)J(t+1+e))^{p^n-1}+ \\ & \ldots+e^{p^n-3}(J(t)J(t+1)\ldots J(t+1+e+\ldots+e^{p^n-4}))^{p^n-1}+ \\ & +(e^{p^n-2}+s)(J(t)J(t+1)+\ldots+J(t+1+e+\ldots+e^{p^n-3}))^{p^n-1} \end{aligned} \tag{6}$$

gde je $s=2+3e+\ldots+(p^n-1)e^{p^n-3}$, a t je proizvoljan element polja.

Pre dokaza tvrdjenja navodimo dve važne činjenice.

(a) Ako je $x\in GP(p^n)$, tada je

$$x\neq 0 \Longrightarrow x^{p^n-1}=1 \quad \text{i} \quad x=0 \Longrightarrow x^{p^n-1}=0$$

(b) Pod pretpostavkom tvrdjenja IV.4. elementi

$$0,1,1+e,\ldots,1+e+\ldots+e^{p^n-3}$$

su različiti.

Ako se pretpostavi da su neka dva elementa jednaka tj.

$$1+e+\ldots+e^m = 1+e+\ldots+e^n \quad (0\leqslant n<m\leqslant p^n-3)$$

primenom zakona kancelacije dobija se

$$e^{n+1}+\ldots+e^m = 0 .$$

Korišćenjem distributivnog zakona dobija se

$$e^{n+1}(1+e+e^2+\ldots+e^{m-n-1}) = 0, \quad \text{tj.}$$

$$1+e+e^2+\ldots+e^{m-n-1} = 0 .$$

Ako se poslednja jednakost pomnoži sa e-1 zaključuje se da je $e^{m-n}=1$, što je nemoguće jer je $m-n<p^n-3$. Slično se dokazuje da su elementi

$$1,1+e,\ldots,1+e+\ldots+e^{p^n-3} \quad \text{različiti od nule.}$$

Elementi $1,1+e,+\ldots,1+e+\ldots+e^{p^n-3}$, kojih ima p^n-2, su rešenja jednačine $x^{p^n-1}=1$. Ako sa s obeležimo rešenje ove jednačine različito od navedenih, primenom Vijetovih formula dobija se

$$1+(1+e)+\ldots+(1+e+\ldots+e^{p^n-3})+s = 0$$

tj.

$$s = 2 + 3e + \ldots + (p^n-1)e^{p^n-3}$$

gde je korišćeno da je k suprotni element od p^{n-k} tj.

$$p^n-k+k \equiv 0(\mathrm{mod}\ p^n).$$

Posledica dokazane činjenice je da su

$$(7) \qquad t,t+1,t+1+e,\ldots,t+1+e+\ldots+e^{p^n-3},t+s$$

različiti, pri čemu je t element polja $GP(p^n)$, odnosno skup

$$\{t,t+1,t+1+e,\ldots,t+1+e+\ldots+e^{p^n-3},t+s\}$$

je jednak skupu $GP(p^n)$.

Dokaz tvrdjenja IV.4. /21/ Neka je t proizvoljan element polja $GP(p^n)$. Ako je t rešenje jednačine (5), tada se po formuli (6) dobija $x=t$, jer su svi članovi zbira (6), sem prvog, jednaki nuli. Ako je jednačina (5) neprotivurečna, a t nije njeno rešenje, tada je neki član niza (7) rešenje. Neka je to, na primer,

$$t+1+e+\ldots+e^m \qquad (m < p^n-3).$$

Kako je $J(t)\neq 0$, $J(t+1)\neq 0$, ... , $J(t+1+\ldots+e^{m-1})\neq 0$, $J(t+1+\ldots+e^m)=0$, prema (a) i formuli (6) dobija se

$$x = t+1+e+\ldots+e^m.$$

U slučaju da je t+s prvi član niza (7) koji zadovoljava jednačinu (5), tada se, prema formuli (6), dobija

$$(8) \qquad x = t+1+e+\ldots+e^{p^n-2}+s.$$

Zbir $1+e+\ldots+e^{p^n-2}$ je jednak nuli (prema Vijetovoj formuli, jer su $1,e,\ldots,e^{p^n-2}$ sva rešenja jednačine $x^{p^n-1}=1$), pa samo formalno stoji u formuli (8).

Za slučaj polja Galua GP(p) slično može da se dokaže da je rešenje jednačine (5) dato formulom

$$x = t+(J(t))^{p-1}+(J(t))^{p-1}(J(t+L))^{p-1}+\dots+$$
$$+(J(t))^{p-1}(J(t+1))^{p-1}\dots(J(t+p-2))^{p-1},$$

gde je t, opet, proizvoljni element polja GP(p).

Primer IV.3. /21/ Rešiti jednačinu $x^2+bx+c=0$ na polju GP(3).

Ova jednačina je neprotivurečna ako je $(b^2+2c)^2 = b^2+c$. Opšte rešenje je

$$x = t+J^2(t)+J^2(t)J^2(t+1) =$$
$$= t+(t^2+bt+c)^2+(t^2+bt+c)^2((t+1)^2+b(t+1)+c)^2.$$

Posle sredjivanja dobija se

$$x = cb+(b^2+2c)(2t^2+(2b+1)t+c^2).$$

Kao što je već rečeno metoda definisana tvrdjenjem IV.1. može da se primeni i na jednačine sa više nepoznatih, tj. i na jednačine oblika $J(x)=0$, gde je x vektor. Medjutim, u slučaju kada je broj nepoznatih veliki obrazovanje ciklusa može da bude dosta teško, pa onda može da se primeni metoda uzastopnih eliminacija za jednačine date na konačnom skupu koju je dao K. Gilezan u radu /8/, pri čemu se problem svodi na rešavanje jednačina sa jednom nepoznatom, koja se rešava već pomenutom metodom S. Prešića.

Neka je $S = \{s_o, s_1, \dots, s_k\}$ konačan skup i neka je E skup koji sadrži elemente 0 i 1 a

(9) $f: S^n \longrightarrow E.$

Na skupu $S \cup E$ definišemo dve binarne operacije + i · koje zadovoljavaju:

(10) $a+b=b+a \qquad a,b \in E$

(11) $(a+b)+c=a+(b+c),\ (ab)c=a(bc), \qquad a,b,c \in E$

(12) $1\cdot 0=0,\ 0\cdot 0=0,\ 1\cdot 1=1,\ q\cdot 0=0,\ q\cdot 1=q$

$u+0=u \qquad , \qquad u \in E, \quad q \in S$

(13) postoji $a^o \in E$ takav da je $a^o + a = 0$, $a \in E$.

Takodje definišemo

(14) $$x_i^a = \begin{cases} 1, & \text{za } x_i = a \\ 0, & \text{za } x_i \neq a \end{cases} \qquad x_i, a \in S.$$

Iz ovoga sledi da je

(15) $$\sum_{a \in S} x_i^a = 1, \quad x_i^a \cdot x_i^a = x_i^a, \quad x_i^a \cdot x_i^b = 0 \text{ za } a \neq b, \quad a, b, x_i \in S.$$

Da bi neka jednačina oblika

(16) $$f(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

mogla da se rešava metodom uzastopnih eliminacija potrebno je da se funkcija f napiše u pogodnom obliku, odnosno da se nepoznata koja treba da se eliminiše, posebno izdvoji.

Tvrdjenje IV.5. /8/ Funkcija f oblika (9) može da se napiše u obliku

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{a \in S \setminus \{b\}} x_i^a q_{ai}(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) + \\ + h_i(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

gde je b neki fiksirani element iz S, a q_{ai} i h su funkcije tipa (9).

Dokaz. /8/ Funkcija f može da se napiše u obliku

(17) $$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{a \in S \setminus \{b\}} x_i^a((f(x_1, \ldots, x_n) + \\ + f^o(x_1, \ldots, x_{i-1}, b, x_{i+1}, \ldots, x_n)) + f(x_1, \ldots, x_{i-1}, b, x_{i+1}, \ldots, x$$

jer ako se odredjuje vrednost funkcije f za $x_i = b$, onda je $\sum = 0$ pa se formula (17) svodi samo na $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, b, x_{i+1}, \ldots, x_n)$. U ostalim slučajevima $\sum$ se svodi na jedan član i to onaj za koji je $x_i = a$ a tada se koristi da je

$f^o(x_1, \ldots, x_{i-1}, b, x_{i+1}, \ldots, x_n) + f(x_1, \ldots, x_{i-1}, b, x_{i+1}, \ldots, x_n) = 0$.

Na osnovi poslednjeg tvrdjenja i (14) jednačina (16) može da se transformiše u

(18) $$f_1(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{k} x_i^{s_i} g_{i1}(x_2, x_3, \ldots, x_n) = 0 ,$$

gde su g_{i1} $(i=0,1,2,\ldots,k)$ funkcije oblika

$$g_{i1}:S^{n-1}\longrightarrow E.$$

Ako napišemo uslov neprotivurečnosti jednačine (18)

$$\prod_{i=0}^{k} g_{i1}(x_2,x_3,\ldots,x_n)=0 \tag{19}$$

time smo eliminisali nepoznatu x_1. Uslov (19) može da se napiše u obliku

$$f_2(x_2,x_3,\ldots x_n)=\sum_{i=0}^{k} x_2^{s_i} g_{i2}(x_3,\ldots,x_n)=0 \tag{20}$$

gde su g_{i2} $(i=0,1,2,\ldots,k)$ funkcije oblika

$$g_{i2}:S^{n-2}\longrightarrow E.$$

Uslov neprotivurečnosti jednačine (20) je

$$\prod_{i=0}^{k} g_{i2}(x_3,x_4,\ldots,x_n)=0$$

odakle se dobija transformisani oblik

$$f_3(x_3,x_4,\ldots,x_n)=\sum_{i=0}^{k} x_3^{s_i} g_{i3}(x_4,x_5,\ldots,x_n)=0$$

gde su g_{i3} $(i=0,1,2,\ldots,k)$ funkcije oblika

$$g_{i3}:S^{n-3}\longrightarrow E.$$

Na kraju se dobija jednačina oblika

$$f_n(x_n)=\sum_{i=0}^{k} x_n^{s_i} g_{in}=0 \tag{21}$$

gde su g_{in} $(i=0,1,2,\ldots,k)$ konstate skupa E. To znači da se dobija jednačina sa jednom nepoznatom. Jednačina (21) je neprotivurečna ako i samo ako je

$$\prod_{i=1}^{k} g_{in}=0$$

Ukoliko je poslednji uslov ispunjen, iz jednačine (21) se odredjuje rešenje x_n. Dobijeno rešenje se zamenjuje u jednačini $f_{n-1}(x_{n-1},x_n)=0$ iz koje se tada odredjuje x_{n-1}. Ako se tako nastavi na kraju se dolazi do jednačine $f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0$ sa nepoznatom x_1. Rešavanjem ove jednačine dobija se x_1, odnosno $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ je rešenje jednačine (16). Sve pomenute jednačine sa jednom nepoznatom rešavaju se korišćenjem tvrdjenja IV.1.

Neka je $r(x)=\top$ neprotivurečna jednačina na prebrojivom skupu S. Neka je $p:S \longrightarrow S$ funkcija koja zadovoljava uslov

(22) $$(\forall t\in S)(\forall x\in S)(\exists n\in N\cup\{0\})(x=p^n(t)),$$

(N je skup prirodnih brojeva) gde se $p^n(t)$ definiše sa

1. $p^0(t)=t$
2. $p^{n+1}(t)=p(p^n(t))$

Definišimo funkciju $B:S\times\{\top,\bot\}\longrightarrow S$ na sledeći način

$$B(x,y)=\begin{cases} x\ , & y=\top \\ p(x), & y=\bot \end{cases}$$

Uz pretpostavku da je jednačina $r(x)=\top$ neprotivurečna i uz pretpostavku da važi (22), očigledno je da važi

$$(\forall t\in S)(\exists i\in N^0)(\forall m\geqslant i)(M^m(t)=M^i(t))$$

($N^0=N\cup\{0\}$, $m\in N^0$) odakle prema aksiomi izbora sledi

(23) $$(\exists g:S\longrightarrow N^0)(\forall t\in S)(M^m(t)=M^{g(t)}(t)).$$

Neka je $g_0(t)$ jedna od funkcija za koju važi (23).

<u>Zapažanje IV.1.</u> Neka je $r(x)=\top$ neprotivurečna jednačina. Tada je formulom

$$x = M^{g_0(t)}(t)$$

odredjeno opšte reproduktivno rešenje jednačine $r(x)=\top$.

Dokaz. Prema (22) skup

(24) $$\{t,p(t),p^2(t),\dots\}$$

jednak je skupu S, za svako t. Ako je $r(x)=\top$ neprotivurečna jednačina, tada u skupu (24), tj. u skupu S, postoji bar jedan element koji zadovoljava jednačinu $r(x)=\top$. Neka je $p^k(t)$ prvi element u nizu

$$t,p(t),p^2(t),\dots$$

koji zadovoljava jednačinu $r(x)=\top$. Tada je

$$p^k(t)=M^k(t)=M^{k+1}(t)=M^{k+2}(t)=\ldots=M^{g_o(t)}(t)$$

tj. $M^{g_o(t)}(t)$ zadovoljava jednačinu $r(x)=\top$.

Neka je x_o rešenje jednačine $r(x)=\top$. Tada je $x_o=M(x_o)=M^2(x_o)=\ldots=M^{g_o(x_o)}$.

Posledica IV.1. Ako je S konačan skup od k elemenata, tada je formulom

$$x = M^{k-1}(t)$$

definisano opšte reproduktivno rešenje jednačine $r(x)=\top$.

Dokaz sledi iz činjenice da je skup

$$\{t,p(t),p^2(t),\ldots,p^{k-1}(t)\}$$

jednak skupu S.

Ukoliko je jednačina data u obliku $J(x)=0$ gde je $J:S\longrightarrow E$, tada se funkcija $B:S\times E\longrightarrow S$ definiše sa

$$B(x,y) = \begin{cases} x\ , & y=0 \\ p(x), & y\neq 0 \end{cases}$$

ili se jednačina $J(x)=0$ prevodi na oblik $r(x)=\top$, kao što se to čini u radu /25/.

Primer IV.4. Rešiti jednačinu $ax\cup bx'=0$ na B_2.

Ovde je $p(t)=t'$.

$$M(t)=B(t,J(t))=J'(t)\cdot t\cup J(t)\cdot p(t)=J'(t)t\cup J(t)\cdot t', \text{ tj.}$$

$$x=M^{2-1}(t)=M(t)=(at\cup bt')'t\cup(at\cup bt')t'=$$

$$=(a'\cup t')(b'\cup t)t\cup bt'=(a'b'\cup a't\cup b't')t\cup bt'=$$

$$=a'b't\cup a't\cup bt'=a't\cup bt'$$

Primer IV.5. Rešiti jednačinu $J(x)=0$ na polju $(\{0,1,2\},+_3,\cdot_3)$.

U ovom slučaju je $p(t)=t+1$, dok je

$$M(t)=(J^2(t)+2)^2t+J^2(t)p(t)=(2J^2(t)+1)t+J^2(t)p(t),$$

jer je $x^{p^n-1}=0$ za $x=0$ i $x^{p^n-1}=1$ za $x\neq0$, pa je

$$x = M^2(t) \quad , \quad tj.$$

$$x=(2J^2((2J^2(t)+1))t+J^2(t)p(t))+1)t+J^2((2J^2(t)+1)t+J^2(t)p(t))p(t).$$

Problem odredjivanja funkcije M može da se rešava slično kao i problem odredjivanja funkcije A u radu /25/. Naime, neka su + i $\cdot$ binarne operacije na skupu $T=S\cup E$ sa osobinama

$$0\cdot e = e\cdot 0 = 0\cdot 0 = 0$$

$$e\cdot e = e$$

$$0\cdot q = 0$$

$$e\cdot q = q$$

$$q+0 = 0+q = q$$

$$0+0 = 0 \quad .$$

Neka su još $*$ i $^{-}$ preslikavanja skupa E u skup E definisana sa

$$x^* = \begin{cases} 0 & , \quad \text{za } x=0 \\ e & , \quad \text{za } x\neq 0 \end{cases} \qquad \overline{x} = \begin{cases} e & , \quad \text{za } x=0 \\ 0 & , \quad \text{za } x\neq 0 \end{cases}$$

Tada je $\quad M(t) = \overline{J}(t)\cdot t+J^*(t)\cdot p(t).$

Formulom $\quad x = M^{g_0(t)}(t)$, što ćemo obeležiti sa $x=D(t)$, definisano je jedno opšte rešenje jednačine $r(x)=\top$. Koristeći tvrdjenje III.12. mogu se opisati sva opšta reproduktivna rešenja te jednačine. Naime, formulom

$$x = G(t,r(t),D(f(t)))$$

definisana su sva opšta reproduktivna rešenja jednačine $r(x)=\top$.

Zapažanje IV.2. Ukoliko je u tvrdjenju IV.1. ciklus C jedinstven za sve elemente i ako je niz

$$t,C(t),C^2(t),\ldots,C^{k-1}(t)$$

jednak nizu

$$t,p(t),p^2(t),\ldots,p^{k-1}(t)$$

onda je formulama

$$x=A(t,r(t),r(C(t)),r(C^2(t)),\ldots,r(C^{k-1}(t))) \text{ i}$$

$$x=M^{k-1}(t)$$

definisano isto rešenje jednačine $r(x)=T$, što se lako dokazuje (pri čemu, naravno, u definiciji funkcije A ulogu elementa 0 igra T).

Zapažanje IV.3. Ako je data jednačina $J(x)=0$ na skupu celih brojeva, funkcija $p(t)$ može biti definisana rekurzivno sa

$$p^{o}(t) = t$$
$$p^{n}(t) = p^{n-1}(t) + (-1)^{n}n$$

dok je

(25) $$M(t)=B(t,J(t))=(1-\mathrm{Sgn}|J(t)|)t+\mathrm{Sgn}|J(t)|p(t).$$

Za praktičan rad formula (25) nije pogodna, pa bi dalja istraživanja u ovoj oblasti mogla da budu usmerena ka odredjivanju onih funkcija koje bi dobro aproksimirale funkciju $y=\mathrm{Sgn}|x|$. Jedna takva funkcija je, na primer,

$$y=\frac{ax^2}{1+ax^2} \quad \text{ili} \quad y=\frac{a(x)x^2}{1+a(x)x^2}$$

gde bi se sa a "intervenisalo" da greška ne bude veća od unapred odredjenog broja. Na taj način bi moglo da se dodje do rešenja jednačine u obliku beskonačnog reda s tim da se koristi uopštenje funkcije (4) iz tvrdjenja IV.1. S druge strane, mogle bi da se istražuju one funkcije $M(t)$ za koje je

$$M^{n}(t) = K(n,t)$$

pa bi se rešenje jednačine odredjivalo pomoću granične vrednosti Od posebnog interesa bi bilo da se odredi funkcija $M(t)$ koja bi bila reproduktivna, tj. za koju je $M^{2}(t)=M(t)$, pa bi bilo $M^{n}(t)=M(t)$, čime bi se rešenje jednačine svelo na $x=M(t)$.

Osnovna ideja prethodnih tvrdjenja je bila u tome da se odredi funkcija koja obezbedjuje "prolaženje" kroz dati skup počev od nekog elementa t, a da rešavajuća funkcija registruje samo one elemente za koje je data jednačina zadovoljena.

Neka je $r(x)$ relacija datog skupa S. Definišimo funkciju $B: S \times \{\top, \bot\} \longrightarrow P(S)$, gde je $P(S)$ partitivni skup skupa S, na sledeći način:

$$B(x,y) = \begin{cases} \{x\} \; , & \text{za } y=\top \\ \emptyset \; , & \text{za } y=\bot \end{cases}$$

Uvedimo oznaku $B(x,r(x))=N(x)$. Tada važi

<u>Tvrdjenje IV.6.</u> Skup rešenja jednačine $r(x)=\top$ opisuje se formulom

$$R = \bigcup_{t \in S} N(t). \tag{26}$$

Dokaz sledi direktno iz definicije funkcije $N(x)$. Napominjemo da u slučaju kada je jednačina $r(x)=\top$ protivurečna, odnosno kada je $(\forall x)(r(x)=\bot)$, formula (26) daje $R=\emptyset$.

Sada prelazimo na odredjivanje formule rešenja jednačine zadate na dobro uredjenom skupu. Naime, neka je S skup dobro uredjen relacijom $\leqslant$. Neka je $r(x)=\top$ neprotivurečna jednačina, gde je $r(x)$ relacija skupa S. Definišimo funkciju

$$B(x,y) = \begin{cases} \{x\} \; , & y=\bot \\ \{a\} \; , & y=\bot \end{cases}$$

gde je $a=\min S$. Uvedimo oznaku

$$B(t,r(t)) = N(t).$$

Tada važi

<u>Tvrdjenje IV.7.</u> Opšte rešenje jednačine $r(x)=\top$ odredjeno je formulom

$$x = \max\,(N(t) \cup \min \bigcup_{p \in S} N(p)) \quad , \quad t \in S. \tag{27}$$

Ovo rešenje je reproduktivno.

Dokaz. Uvedimo, radi kraćeg pisanja, oznaku

$$\max\,(N(t) \cup \min \bigcup_{p \in S} N(p)) = g(t).$$

Ako t zadovoljava jednačinu $r(x)=T$, tada je $N(t)=\{t\}$. Prema prethodnom tvrdjenju $\min \bigcup_{p\in S} N(p)$ je minimalan element skupa rešenja, pa je $\max(\{t\} \cup \min \bigcup_{p\in S} N(p))=t$. Ovim je dokazana i reproduktivnost rešenja $g(t)$. Ako je $r(t)=T$, tada je $N(t)=\{a\}$, pa je

$$\max(\{a\} \cup \min \bigcup_{p\in S} N(p))=\min \bigcup_{p\in S} N(p),$$

jer je $a=\min S$.

Formulom (27) je odredjeno jedno opšte (čak i reproduktivno) rešenje jednačine $r(x)=T$. Da bi se dobila sva opšta reproduktivna rešanja može da se koristi formula

$$x = G(t,r(t),g(f(t)))$$

tvrdjenja III.12.

L I T E R A T U R A

/1/ S. Aljančić, Uvod u realnu i funkcionalnu analizu, Gradjevinska knjiga, Beograd 1968.

/2/ D. Banković, Bulove jednačine i uopštenja, magistarski rad, PMF Beograd 1978.

/3/ D. Banković, On general and reproductive solutions of arbitrary equations, Publ. Inst. Math. Beograd, 26 (40) 31-33.

/4/ M. Božić, A note on reproductive solutions, Publ. Inst. Math. Beograd, 19 (33) 33-35.

/5/ N. Bourbaki, Theorie des ensembles, Fasc. resultats, Paris 1958.

/6/ C. C. Chang, H. J. Keisler, Model Theory, North-Holland 1973.

/7/ I. Daleckij, M. Kejn, Ustojčivost rešenij diferencijalnih uravnenij v Banahovom prostranstve, Nauka, Moskva 1970.

/8/ C. Ghilezan, Methode des eliminations successives pour resoudre les equations dout les solutions appartiennent a un ensemble fini, Zbornik na trudovite, Skopje 1973. tom I, 99-107.

/9/ K. Gilezan, B. Latinović, Bulova algebra i primene, Matematički institut, Beograd 1977.

/10/ J. Kečkić, Algebra I, Privredni pregled, Beograd 1973.

/11/ G. Kreisel, J. L. Krivine, Elements of Mathematical Logic (Model Theory), North-Holland, Amsterdam - London 1971.

/12/ Dj. Kurepa, Viša algebra, Školska knjiga, Zagreb 1965.

/13/ K. Kuratowski, A. Mostovski, Set theory, North-Holland, Amsterdam 1968.

/14/ Marek Kuczma, Functional equations in a single variable, P.W.N. Warszawa 1968.

/15/ E. Mendelson, Introduction to Mathematical Logic, New York 1952.

/16/ Ž. Mijajlović, Some remarks on Boolean terms - model theoretic approach, Publ. Inst. Math. Beograd 21 (35) 1977, 135-140.

/17/ Ž. Mijajlović, Two remarks on Boolean algebras, (u štampi)

/18/ Ž. Mijajlović, Bulove algebre u logici, magistarski rad, PMF Beograd 1973.

/19/ Ž. Mijajlović, Prilog teoriji modela i Booleovih algebri, doktorska disertacija,PMF Beograd 1977.

/20/ Ž. Mijajlović, On decidability of one class of Boolean formulas, Matematički vesnik 11 (26) 1974. str. 48-54, Beograd

/21/ M. Prešić, A method for solving equation in finite fields, Publ. Inst. Math. Beograd 7 (22), 1970, 507-509.

/22/ S. Prešić, Elementi matematičke logike, Zavod za izdavanje udžbenika, Beograd 1968.

/23/ S. Prešić, Une classe d'equations matricielles et equation fonctionnelle $f^2=f$, Publ. Inst. Math. Beograd, 8 (22), 1968, 143-148.

/24/ S. Prešić, Ein Satz über röproduktive Lösungen, Publ. Inst. Math. Beograd 14 (28), 1972, 133-136.

/25/ S. Prešić, Une methode de resslution des equations dout toutes les solutions appartiennent a un ensemble fini donne, C. R. Acad. Sc. Paris, t 272, p 654-657 (1971)

/26/ S. Prešić, Opšta lagebra (skripta) PMF Beograd 1968.

/27/ S. Prešić, Zbirka zadataka iz apstraktne algebre, PMF Beograd 1962.

/28/ S. Prešić, Sur l'equation fonctionnelle $f(x)=f(g(x))$, Publ. Elek. Fak. Univ. Beograd, 64, 1961, 29-31.

/29/ S. Prešić, Certaines equations matricielles, Publ. Elek. Fak. Univ. Beograd, 121, 1963, 31-32.

/30/ S. Prešić, M. Prešić, Uvod u matematičku logiku, Matematički institut, Beograd 1979.

/31/ S. Prešić, M. Prešić, Rešavanje jednačina, nejednačina, formula, Školska knjiga, Zagreb 1980.

/32/ S. Prešić, Methode de resolution d'une classe d'equations fonctionnelles lineaires, Publ. Elek. Fak. Univ. Beograd, No 119 (1963) 21-28.

/33/ S. Prešić, Methode de resolution d'une classe d'equations fonctionnelles lineaires non homogenes, Publ. Elek. Fak. Univ. Beograd, No 273 (1969) 67-79.

/34/ N. Prior, Historija logike, Naprijed, Zagreb 1970.

/35/ S. Rudeanu, Boolean Functions and Equations, North-Holland Amsterdam/London and Elsevier, New York 1974.

/36/ S. Rudeanu, On reproductive solutions of arbitrary equations, Publ. Inst. Math. Beograd, 24 (38) 1978, 143-145.

/37/ R. Sikorski, Boolean Algebras, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1967.

/38/ M. Stojaković, Algoritmi i automati, R.U. Radivoj Ćirpanov, Novi Sad 1972.

/39/ J. Shoenfield, Mathematical logic, Addison - Wesley, London 1967.

/40/ Laurent Schwartz, Analyse mathematique, Hermann, Paris 1967.