UNIVERZITET U BEOGRADU
Prirodno-matematički fakultet

Dušan B.Stokić

PRIMENA VARIJACIONE METODE PRI PROUČAVANJU PRENOŠENJA TOPLOTE ZRAČENJEM KOD ČVRSTIH TELA SA TERMIČKI PROMENLJIVIM SVOJSTVIMA

- Doktorski rad -

Beograd, 1975. godine

Rad posvećujem seni svog plemenitog
oca Borivoja

D. B. Stokić

S A D R Ž A J

Strana

III GLAVA

IV GLAVA

OZNAKE I SIMBOLI

J_i - protok neke fizičke veličine (toplota, elektricitet i sl.)

L_{ik} - fenomenološki koeficijenti

X_k - termodinamička sila

ρ_E - gustina fizičke veličine koja je objekt prenosa

V - zapremina

S - granična površina zapremine V

$\vec{v}$ - brzina protoka gustine ρ_E

$\vec{n}$ - spoljašnja normala površine S

t - vreme

I_k - izdašnost izvora ili ponora (u I glavi)

ρ - gustina sredine

$\vec{w}$ - brzina jedinične mase

Ψ - potencijalna energija jedinične mase (u I glavi)

u - unutrašnja energija jedinične mase

J_e - protok energije kroz jediničnu površinu u jedinici vremena

F - sila

T - temperatura tela

Λ - tenzor koeficijenata toplotne provodnosti

λ - koeficijent toplotne provodnosti

c - specifična toplota

∇^2 - Laplasov operator

x_i i x_j - Dekartove koordinate

A_{ij} i B_{ij} - materijalne konstante sredine

τ - vreme relaksacije (u I glavi)

$C^2 = \frac{\lambda}{\rho c\,\tau}$ - kvadrat brzine toplotnog poremećaja

T_o - početna temperatura tela

υ - temperatura spoljašnjeg ambijenta

υ_o - početna temperatura spoljašnjeg ambijenta

H - koeficijent površinskog provodjenja toplote

σ - Stefan-Bolcmanova konstanta

E - stepen crnoće površine

$a^2 = \frac{\lambda}{\rho c}$ - konstantni koeficijent temperaturne vodljivosti

L_V - diferencijalni operator jednačine procesa

L_S - diferencijalni operator graničnog uslova

$f(x_j, t)$ - tačno rešenje zdataka

f^* - probna funkcija - aproksimativno rešenje

σ_V - ostatak dobijen zamenom aproksimativnog rešenja u jednačinu procesa

σ_S - ostatak dobijen zamenom aproksimativnog rešenja u granični uslov

σ_o - ostatak dobijen zamenom aproksimativnog rešenja u početni uslov

A_m i $A_m(t)$ - neodredjeni parametri u probnoj funkciji f^*

(t) - dubina penetracije (u II i IV glavi)

$F(\sigma_V)$ - funkcija ostatka

$W(x_j)$ - faktor kojim se ponderiše ostatak

$\varphi_m(x_j, t)$ - linearno nezavisne funkcije u probnom rešenju f^*

T^* - aproksimativno rešenje jednačine prostiranja toplote (u II glavi)

$\alpha = \frac{\lambda}{\rho c}$ - promenljivi koeficijent temperaturne vodljivosti (Gudmanova metoda, II glava)

I - akcioni integral

L - Lagranževa funkcija

E_k - kinetička energija

U - funkcija sile

Y - "zamrznuta funkcija"

T^o - "zamrznuta temperatura"

Ψ - lokalni potencijal (III glava)

$q(t)$ - realna generalisana koordinata (u III glavi)

$q^*(t)$ - apstraktna generalisana koordinata (u III glavi)

T^* - pridružena, apstraktna, temperatura (u III glavi)

$\vec{H}$ - vektorsko polje toplotnog fluksa (u III glavi)

θ - odstupanje temperature od ravnotežne (Bioov princip, III glava)

U - termodinamički potencijal (Bioov princip, III glava)

D - disipativna funkcija (Bioov princip, III glava)

q_i i q_v - generalisane koordinate

Q_v - generalisana sila

k - iščezavajući parametar

$\dot{T} = \frac{\partial T}{\partial t}$ - vremenski izvod temperature

$T,_j = \frac{\partial T}{\partial x_j}$ - izvod temperature po prostornoj koordinati x_j

$\vec{F}_i^k$ - i-ta konzervativna sila

$\vec{F}_i^{nk}$ - i-ta nekonzervativna sila

A_{nk} - rad nekonzervativnih sila

q - površinska temperatura (u III i IV glavi)

$\dot{q}$ - vremenski izvod površinske temperature

$\dot{\theta}$ - vremenski izvod dubine penetracije

h - Ajnštajn-Bolcmanova konstanta

$z = \frac{q}{T_o}$ - bezdimenziona temperatura

$z_o = \frac{\upsilon_o}{T_o}$ - bezdimenziona početna temperatura

τ - bezdimenziono vreme (u IV glavi)

U V O D

Jedna od karakteristika savremene fizike jeste sintetizovanje prirodnih pojava koje su izučavane u različitim, često disparatnim, oblastima po klasičnoj podeli naučnih disciplina. Sažimanje prirodnih pojava koje imaju izvesna zajednička svojstva u jedinstven matematički model omogućava da se uoči povezanost, na prvi pogled, nepodudarnih procesa, da se prouče njihova medjusobna dejstva iz kojih rezultiraju mnoge složene, uočene a neobjašnjene pojave. Neosporno je da makroskopski registrovane kontinualne pojave potiču iz diskretnog sveta mikročestica i predstavljaju samo produkt zbivanja u toj diskontinualnoj sredini. Proučavanje tih makroskopskih manifestacija trebalo bi vršiti simultano sa objašnjavanjem pojava u mikrosvetu u cilju dobijanja tačnih odgovora na mnoga pitanja na koja se nailazi pri savremenim istraživanjima i u cilju predvidjanja mogućih ponašanja sredina izloženih različitim spoljašnjim uticajima. Nedovoljno poznavanje te diskretne sredine kojoj se pripisuju svojstva analogna sa makroskopski diskretnim sredinama (napr., sa sistemom materijalnih tačaka i t.sl.) čini da tačnih i pouzdanih odgovora nema, da se samo sa izvesnom tačnošću u uzanom dijapazonu može predvideti dogadjaj, da u nekom drugom dijapazonu postoje drugačije zavisnosti izmedju istih fizičkih veličina, da naglo i znatno dodje do izražaja neko svojstvo sredine koje je u ranijem intervalu bilo zanemarljivo, da čak sredina izgubi svoje prvobitne fizičke karakteristike (promena agregatnog stanja pri zagrevanju ili hladjenju i t.s.). Ući u suštinu prirodnog procesa znači prodreti u zbivanja u mikrosvetu i obrnuto, makroskopsko posmatranje ukazuje na moguća zbivanja unutar mikrosveta. Postojanje mnogih teorija i zakona najbolji je pokazatelj koliko je napora, vremena i materijalnih sredstava utrošeno u cilju objašnjavanja i ovladavanja prirodnim procesima.

Matematički model - fenomenološki iskaz skupa prirodnih pojava sa nekim zajedničkim karakteristikama treba da, u analitičkoj formi, prikaže kvalitativne i kvantitativne odnose izmedju fizičkih veličina koje su prisutne u procesima, a da pri tome oblik tog modela bude što jednostavniji da bi dalje matematičko proučavanje bilo moguće. U principu se ni za jedan analitički izraz ne može tvrditi da u potpunosti i sasvim tačno opisuje prirodni proces, što znači da su i rešenja dobijena matematičkim tretmanom tih izraza samo aproksimacije zbivanja unutar fizičkog sistema. Razlog za ovo leži u činjenici da eksperiment i neposredno posmatranje, osnovni izvori podataka o procesu, nisu u stanju da ukažu na sve fizičke veličine prisutne u procesu zbog ograničenih mogućnosti aparata i uredjaja i neprimetnog uticaja nekih komponenata na proces. Usvajanje ove činjenice dovodi do saznanja da je apsurdno očekivati da se može doći do apsolutnog. Zbog toga se svi zakoni i matematički modeli moraju prihvatiti kao bolji ili lošiji prikaz stvarnih zbivanja.

Fenomenološki prikaz transportnih pojava u čiji okvir spada i proces prostiranja toplote nije izuzetak ovog pravila. Veoma komplikovana struktura izraza, koji bi obuhvatali sve komponente bez obzira na njihov stepen uticaja na procese, učinila je da se u cilju dobijanja neke slike o procesu izvrše izvesna zanemarivanja kao ustupak matematičkim teškoćama do kojih se dolazi pri proučavanju ovako složenih izraza. Linearizacija jednačina procesa, prva i prilično gruba aproksimacija koja nosi u sebi fizički malo opravdanu pretpostavku o prirodnim svojstvima sredina, dopušta uz nove restrikcije primenu elegantnih metoda matematičke analize. Rešenja ovakvih jednačina koja se nazivaju "tačnim", a tačna su samo u odnosu na matematički model procesa, jer zadovoljavaju postavljenu jednačinu i granične i početne uslove, najčešće su data u obliku beskonačnih redova, eliptičnih, gama, Beselovih, Ležandrovih i drugih funkcija i zbog toga imaju malu upotrebnu vrednost za inženjera - praktičara. Tretman jednačina putem numeričke analize u osnovi ima pretpostavku koja u rešenja unosi veću ili manju grešku zavisno od stepena razvijenosti, osetljivosti i brzine primenjenog računara. Zahvaljujući razvoju elektronike danas postoje računari izuzetnih kvaliteta, sposobni da u jednoj sekundi obave milione aritmetičkih operacija, što omogućava da se promenom podataka utiče na brzinu konvergencije tako dobijenih rešenja ka stvarnim rešenjima. Njihova je zasluga što postoje rešenja mnogih procesa do kojih se pre njih dolazilo putem, često, veoma skupih eksperimenata. Medjutim, ta rešenja se dobijaju u numeričkom ili grafičkom obliku, a ne u funkcionalnom što predstavlja njihov ozbiljan nedostatak.

Aproksimativne metode rešavanja diferencijalnih jednačina dovode do funkcionalnih rešenja koja su veoma pogodna za praktičnu upotrebu, često ne zahtevaju veliko poznavanje matematičke analize, operišu sa relativno malim brojem najuticajnijih parametara, ali zahtevaju od istraživača istančanu intuiciju pri izboru tih parametara i oblika aproksimativnog rešenja, što je povezano sa iskustvom i snalažljivošću istraživača. Oblici tih rešenja najčešće se odredjuju putem analogija sa proverenim rešenjima sličnih procesa bilo u okviru iste naučne discipline ili u nekoj drugoj pod uslovom da su matematički modeli isti ili bar slični. Od svih oblika aproksimativnih rešenja najčešće se koriste polinomi sa konstantnim ili funkcionalnim koeficijentima, ali povećavanje stepena tih polinoma često nije garancija brze konvergencije ka stvarnom rešenju što se u prvi mah može pretpostaviti. Analogije se najčešće traže sa procesima proučenim u okviru klasične mehanike. Medjutim,nije redak slučaj da je traženje takvih analogija bespredmetno ako se bar prividno ne odstupi od shvatanja osnovnih pojmova kao što su kretanje, sila, koordinate i t.sl. Ovo odstupanje ne znači prihvatanje mehanicizma kao pogleda na svet, već omogućava, formalnim prihvatanjem snažnih metoda klasične mehanike, reprodukciju aproksimativnih rešenja visoke tačnosti procesa kod kojih su poznate samo empirijske zakonitosti i slike stvorene na osnovu eksperimentalnih podataka.

Ovakvo shvatanje leži u osnovi ovoga rada čiji je cilj da potvrdi mogućnost primene formalizma varijacionih metoda klasične mehanike na oblast koja po klasičnoj podeli fizike izlazi iz okvira ove discipline, da kroz primer krajnje disipativnog procesa, kao što je radijacija, pokaže snagu, univerzalnost i opravdanost ideja sažetih u varijacionim pristupima proučavanja nepovratnih - ireverzibilnih - procesa koji jedino i egzistiraju u prirodi i konačno da preko rešenja fenomena prostiranja toplote kroz čvrsta tela sa termički promenljivim svojstvima, koja do danas nisu bila poznata, dokaže ispravnost svih iznetih pogleda.

I GLAVA

MATEMATIČKO MODELIRANJE FENOMENA PROSTIRANJA TOPLOTE

Po klasičnoj podeli fizike fenomen prostiranja toplote spada u okvir termodinamike i zbog toga su za njegovo proučavanje merodavne metode te discipline. Klasična termodinamička metoda zasnovana na proučavanju i analiziranju ravnotežnih stanja i uravnoteženih (povratnih) promena stanja omogućava da se termodinamički procesi podvrgnu formalnoj matematičkoj analizi i dopuštaju njihovo relativno prosto grafičko prikazivanje. Pretpostavka o postojanju ravnotežnih stanja i povratnih promena stanja u direktnoj je suprotnosti sa stvarnim procesima, koji nisu ni uravnoteženi niti su njihove promene stanja povratne. Medjutim, klasična termodinamička metoda je pokazala da ima veliku praktičnu vrednost, da nije u suprotnosti sa principima termodinamike, a to znači da je u suštini potpuno ispravna. Baš principi termodinamike opravdavaju klasičnu termodinamičku metodu |1|.

Drugim principom termodinamike uvodi se pojam entropije čiji je priraštaj presudan pri klasifikaciji procesa na neuravnotežene i uravnotežene. Prisustvo ovog priraštaja čini da je proces neuravnotežen, a njegovo odsustvo je karakteristično za ravnotežna stanja. Za proučavanje ravnotežnih stanja merodavan je klasični termodinamički metod i procesi koji spadaju u ovu kategoriju dobro su proučeni, matematički jasno oblikovani i grafički pregledno prikazani.

Medjutim, termodinamika neravnotežnih stanja, u čiji okvir spada i proces prostiranja toplote, koja se karakteriše prisustvom priraštaja entropije, malo je proučena. Klasična fenomenološka termodinamika primenom statističkih metoda - klasična Meksvel-Bolcmanova statistika, kvantna Boze-Ajnštajnova i Fermi - Dirakova - omogućila je dublje proučavanje i obrazlaganje čitavog niza fizičkih, fizikohemijskih, hemijskih, biohemijskih i drugih pojava i procesa kod kojih je evidentno prisustvo priraštaja entropije. Teorije razvijene iz statističkih metoda baziraju na poznatim modelima molekula i drugih čestica i zbog toga se mogu primeniti na relativno mali broj problema. Neposredno pred drugi svetski rat, a naročito po njegovom završetku, grupa holandskih i belgijskih naučnika - Onsager, Prigožin, de Donde, de Grot i dr. - dali su vidan doprinos izgradnji, razvoju i primeni termodinamike neravnotežnih stanja koja ne bazira na statističkim metodama, a u saglasnosti je sa principima klasične termodinamike. Osnov savremene termodinamike neuravnoteženih stanja su zakon linearnosti i Onsager-ova teorema |2-4| .

Prema zakonu linearnosti: "Brzina približavanja nekog sistema ravnotežnom stanju proporcionalna je termodinamičkoj pokretačkoj sili, koja može da se izrazi gradijentom nekog potencijala" |5| Analitički izraz ovog zakona dat je sledećom fenomenološkom zavisnošću

$$\vec{J}_i = \sum_{k=1}^{n} L_{ik} \vec{X}_k , \qquad (i = 1,2, \ldots ,n) \tag{1.1}$$

gde $\vec{J}_i$ predstavlja protok neke fizičke veličine (toplota, elektricitet, difuzioni tok itd), $\vec{X}_k$ termodinamičke pokretačke sile, a L_{ik} fenomenološke koeficijente. Koeficijenti L_{ii} bili bi, na primer, koeficijent toplotne provodljivosti, koeficijent difuzije, provodljivosti elektriciteta i dr.

Pojam "termodinamička pokretačka sila" nema ničeg zajedničkog sa pojmom sile u Njutnovom smislu. U termodinamici neravnotežnih stanja termodinamička pokretačka sila jeste *uzročnik*, pokretač, nepovratnog procesa, a proces se makroskopski manifestuje u vidu nekog protoka, kao što je toplotni protok pri postojanju gradijenta temperature, difuzioni tok pri postojanju gradijenta temperature ili koncentracije (termodifuzija i obična difuzija) itd. Egzistencija gradijenta neke fizičke veličine bitna je za stvaranje sile (uzročnika) koja može da izazove bilo koji protok (bilo koju pojavu). Gradijent temperature, na primer, može da izazove protok toplote, a isto tako i difuzioni tok, ili pojavu električne struje (termoelementi). Često se u prirodi ukrštaju i podudaraju (nadovezuju) dve pojave, što prouzrokuje stvaranje neke nove pojave. Već pomenuti proces termodifuzije jeste rezultat podudaranja dveju pojava - difuzije i toplotne provodljivosti. U ovom slučaju gradijent temperature izaziva pojavu gradijenta koncentracije i obrnuto, gradijent koncentracije izaziva pojavu gradijenta temperature. Fenomenološki koeficijenti L_{ik} u izrazu (1.1) odnose se na ovakve pojave (pojave sa podudaranjem dveju faza), i to za $i \neq k$.

Onsagerova teorema tvrdi da je matrica fenomenoloških koeficijenata simetrična, odnosno

$$L_{ik} = L_{ki} \qquad (i,k = 1,2, \ldots ,n)$$

Simetrija ovih koeficijenata odražava fizičku pretpostavku da u uslovima ravnoteže svaki molekularni proces i proces njemu suprotan protiču u proseku istom brzinom. Pojam ravnoteže, termodinamičke pokretačke sile, uzajamnost dejstva dva procesa i simetričnost fenomenoloških koeficijenata veoma podsećaju na treći Njutnov aksiom.

Sila u Njutnovom smislu je uzrok promene stanja kretanja neke materijalne tačke, sistema tačaka, ili tela, pri čemu se pod kretanjem podrazumeva promena geometrijskog položaja posmatranog objekta. Ako se pod pojmom kretanja, što je slučaj u klasičnoj mehanici, podrazumeva *samo* promena položaja pokretne tačke u geometrijskom prostoru, tada zaista termodinamička sila kao pokretač nepovratnog procesa nema ničeg zajedničkog, osim naziva, sa silom u Njutnovom smislu. Medjutim, ako se pojam kretanja uopšti, poveže sa stanjem nekog procesa i shvati kao "promena stanja procesa", a pojam "sila" prihvati kao uzročnik te promene stanja procesa, tada se uočava da izbor termina "sila" u termodinamici neravnotežnih stanja nije slučajan, već je suštinski povezan sa pojmom generalisane sile u mehanici. Savremena mehanika operiše sa pojmovima generalisana koordinata i generalisana sila i ne zahteva od generalisane koordinate da ima geometrijsku strukturu, niti od generalisane sile da bude samo i isključivo uzročnik promene položaja materijalnog sistema u geometrijskom prostoru. Ovakva razmatrnja nužno nameću da se pojmu prostora da novi kvalitet i da se "pod prostorom u fizici podrazumeva opšta koordinacija materijalnih objekata i njihovih stanja" |6| . Na primer, broj virusa dobijen razmnožavanjem i vreme posmatranog razmnožavanja čine "prostor Virus - Vreme" i ova se pojava može grafički prikazati.

Davanje novih kvaliteta pojmovima: kretanje, prostor i sila, omogućilo je da se mnogi fizički procesi proučavaju korišćenjem formalizma klasične mehanike, što pokazuje da njeni principi i zakoni nisu strogo vezani za kretanje u smislu promene geometrijskog položaja, već imaju mnogo dublji i sveobuhvatniji smisao. Kretanje shvaćeno kao promena stanja nekog fizičkog procesa i prostor definisan kao "skup uzastopnih stanja nekog procesa" dopuštaju da se uspostavi veza izmedju geometrijskog prostora i prostora nekog procesa.Osnovnom pojmu geometrijskog prostora - tački - odgovaralo bi trenutno stanje procesa, a to trenutno stanje procesa odredjeno je trenutnim vrednostima veličina, parametara koji definišu proces. U svakoj prirodnoj pojavi učestvuje n parametara, fizičkih veličina koje nju opisuju. Te veličine se menjaju sa vremenom, ili sve ili samo neke od njih, a te promene čine da se stanje procesa od trenutka do trenutka menja, baš kao što se i položaj materijalne tačke u raznim vremenima poklapa sa različitim tačkama geometrijskog prostora. Prema tome, pod tačkom prostora nekog procesa podrazumeva se skup vrednosti parametara tog procesa u jednom trenutku vremena. S obzirom da je, u opštem slučaju, proces definisan sa n parametara, skup njegovih stanja čini prostor od n dimenzija. Ovako definisan prostor poznat je kao konfiguracioni prostor koji je pridružen procesu, a on je u opštem slučaju neeuklidskog karaktera. Svaki parametar predstavlja jednu od koordinata tog prostora. Koordinatnu liniju bi, prema ovome, predstavljao skup uzastopnih stanja procesa u kojima se menja samo jedan od parametara, dok ostali ostaju nepromenjeni. Za koordinatni početak, isto kao i u geometrijskom prostoru, može se uzeti bilo koje stanje procesa, bilo koja tačka (nulto stanje), u odnosu na koje se posmatraju promene parametara procesa. Pod "vektorom položaja" u takvom prostoru može se podrazumevati skup razlika istih parametara u nekom trenutku i u nultom stanju.

Promene parametara procesa sigurno ne mogu da nastupe same od sebe. Neophodno je da se pojavi neki uzrok, pokretač, koji dovodi do promene jednog, više ili svih parametara procesa. Taj uzročnik se može prihvatiti kao generalisana sila, kao što je slučaj sa termodinamičkom silom, a ovo predstavlja potpunu analogiju sa pojmom sile u klasičnoj mehanici.

Cilj ovoga rada nije opšte proučavanje termodinamike neravnotežnih stanja, niti može da se upušta u pitanje geometrizacije procesa koji spadaju u okvir termodinamike nepovratnih i neravnotežnih stanja, već treba da potvrdi činjenicu da principi i zakoni mehanike, prvobitno stvoreni radi opisivanja i proučavanja promene položaja materijalne tačke, sistema tačaka ili tela u geometrijskom prostoru, a pod dejstvom konzervativnih sila, imaju mnogo dublji i sveobuhvatniji smisao i veliku upotrebnu vrednost. Tek kada se prihvati da osnovni pojmovi sa kojima operiše fizika imaju kvalitete koji su napred navedeni, mogu se pod principe, zakone i formalizam mehanike podvesti mnoge prirodne pojave koje po klasičnoj podeli fizike ne pripadaju mehanici. Ukratko, ova razmatranja potvrdjuju čuvenu misao V. Hajzenberga da ... "Mehanika služi kao konceptualni obrazac svim disciplinama savremene fizike" |7| .

1.1. Jednačina prostiranja toplote kao specijalan slučaj opšte jednačine transportnih pojava

U okvir širokog skupa transportnih pojava spadaju svi procesi sa zajedničkom karakteristikom održanja neke fizičke veličine svojstvene uočenom procesu kao što je masa u mehanici fluida ili toplotna energija u termodinamici. Opšti zakon održanja definiše brzinu razmene fizičke veličine, koja je objekt prenosa, izmedju oblasti V ograničene zatvorenom površinom S i spoljašnjeg ambijenta. Količina materije, pri čemu je izraz "materija" usvojen u svom najopštijem značenju, a odnosi se na svaku fizičku veličinu koja može biti objekt prenosa, u oblasti V iznosi

$$\int_V \rho_E \, dV ,$$

gde je ρ_E gustina materije (posmatrane fizičke veličine). Ukupna količina materije koja u jedinici vremena može da prodje kroz graničnu površinu S oblasti V je

$$\int_S \rho_E \, \vec{v}.\vec{n} \, dS ,$$

gde je $\vec{v}$ brzina protoka gustine ρ_E, a $\vec{n}$ spoljašnja normala površine S.

Ako se unutar zapremine V nalazi r izvora ili ponora izdašnosti I_k po jedinici vremena i zapremine, tada u ukupni bilans materije ulazi i ova pridošla ili odvedena količija koja iznosi

$$\int_V \sum_{k=1}^{r} I_k \, dV .$$

Opšti zakon održanja tvrdi da je: "Brzina promene materije u oblasti V jednaka sumi količine koja kroz graničnu površinu S predje u spoljašnji ambijent i količine koju stvaraju izvori unutar iste oblasti" |8| . Fenomenološki iskaz ovoga zakona prema rečenome glasi

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho_E \, dV = - \int_S \rho_E \, \vec{v}.\vec{n} \, dS + \int_V \sum_{k=1}^{r} I_k \, dV ,$$

što se korišćenjem Gausove teoreme svodi na

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho_E}{\partial t} + div \, (\rho_E \, \vec{v}) - \sum_{k=1}^{r} I_k \right] dV = 0.$$

S obzirom da svojstva neprekidne sredine ne zavise od veličine posmatrane oblasti, gornja jednakost dovodi do opšteg matematičkog oblika zakona o održanju materije,

$$(1.2) \qquad \frac{\partial \rho_E}{\partial t} + \mathrm{div} \, (\rho_E \, \vec{v}) - \sum_{k=1}^{r} I_k = 0.$$

Šta biva sa količinom materije koja kroz graničnu površinu S napušta oblast V, da li zadržava prvobitno svojstvo, kao što je slučaj u mehanici fluida da protekla fluidna masa i dalje ostaje fluidna masa, ili se mehanička energija pretvara u toplotnu u slučaju trenja, malo je važno, bitno je da se ukupna količina materije pokorava zakonu (1.2), koji je do te mere univerzalan da se iz njega mogu postaviti sve jednačine transportnih procesa definisanjem gustine ρ_E, one fizičke veličine koja je objekt prenosa. Osim toga, pogodnim specificiranjem gustine ρ_E mogu se definisati neprekidne sredine sa različitim fizičkim osobinama, što čini jednačinu (1.2) još univerzalnijom.

Kada u posmatranoj oblasti ne postoje izvori i ponori, tada je $I_k = 0$ i jednačina (1.2) se svodi na

(1.3) $$\frac{\partial \rho_E}{\partial t} = - div(_E \vec{v}) .$$

S obzirom da je ovaj rad posvećen proučavanju jednog slučaja transporta energije, prostiranju toplote kroz čvrsta tela, dalja rasmatranja će biti posvećena toj problematici za koju je merodavan zakon o održanju energije. U tom slučaju se gustina ρ_E svodi na $\rho_E = \rho e$, gde je ρ gustina sredine, a e energija po jedinici mase, proizvod $\rho_E \vec{v}$ predstavlja protok energije kroz jedinicu površine u jedinici vremena, $\vec{J}_e$, a jednačina (1.3) se svodi na

(1.4) $$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} = - div \vec{J}_e .$$

U opštem slučaju energija jedinične mase može se napisati u obliku

(1.5) $$e = \frac{1}{2} w^2 + \Psi + u ,$$

gde je w^2 kvadrat brzine jedinične mase, Ψ potencijalna energija izazvana prisustvom električnog, magnetnog ili gravitacionog polja, a u unutrašnja energija.

Čvrsta tela se karakterišu odsustvom relativnih kretanja elementarnih masa jednih u odnosu na druge, pa je $w^2 = 0$ i jednakost

(1.5) dobija jednostavniji oblik. Ukoliko se telo ne nalazi pod uticajem polja koja mogu stvarati potencijalnu energiju, ili su njihovi intenziteti tako mali da se sile $\vec{F} = - grad\, \Psi$ mogu zanemariti, izraz (1.5) se svodi na $e = u$ i jednačina (1.4) postaje

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} = - div\, \vec{J}_e \quad . \tag{1.6}$$

Protok energije $\vec{J}_e$ zavisi od termodinamičkih sila $\vec{X}_k$, $\vec{J}_e = \vec{J}_e(\vec{X}_k)$, a one sa svoje strane zavise od temperaturskog polja sredine, $\vec{X}_k = \vec{X}_k(T)$. Dalje proučavanje procesa opisanih jednačinom (1.6) nemoguće je bez uvodjenja dopunskih restrikcija i aproksimacija. Kao prvo usvaja se linearna zavisnost protoka od termodinamičkih sila, što dovodi do poznate relacije

$$\vec{J}_e = \sum_{k=1}^{n} L_{ik}\, \vec{X}_k \quad , \tag{1.7}$$

gde su L_{ik} fenomenološki koeficijenti koji u opštem slučaju zavise od temperature. Prema tome, zakon linearnosti matematički oblikovan izrazom (1.1) predstavlja prvu aproksimaciju opšteg postulata da su termodinamičke sile uzročnici, pokretači, nepovratnih procesa, koji se makroskopski manifestuju u vidu nekog protoka.

Razvijanjem u red termodinamičkih sila po temperaturi i zadržavajući samo prve članove tih redova jednakost (1.7) se svodi na

$$\vec{J}_e = \sum_{k=1}^{n} L_{ik} (grad\, T)_k \quad ,$$

a u dobijenom izrazu nije teško prepoznati veoma poznat Furijeov zakon |5,9|

$$\vec{J}_e = - \Lambda\, grad\, T \quad , \tag{1.8}$$

gde je Λ tenzor koeficijenata toplotne provodnosti. U cilju olakšavanja daljeg proučavanja procesa uvodi se pretpostavka o izotropnosti sredine, a to tenzor svodi na skalarnu veličinu $\lambda = \lambda(T)$, pa se jednačina (1.6) s obzirom na (1.8) i uvedenu pretpostavku transformiše u

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} = div \ \{\lambda(T) \ grad \ T\}. \tag{1.9}$$

S obzirom da je prema kinetičko-molekularnoj teoriji unutrašnja energija

$$du = c \ dT ,$$

gde je c specifična toplota koja u opštem slučaju zavisi od temperature, jednačina (1.9) se konačno svodi na

$$\frac{\partial(\rho c \ T)}{\partial t} = div \ \{\lambda(T) \ grad \ T\} , \tag{1.10}$$

najopštiji oblik jednačine prostiranja toplote kroz čvrsta tela u odsustvu termičkog generatora i električnog, magnetnog i gravitacionog polja.

I pored uvedenih uprošćavanja koja su omogućila da se formira jednačina (1.10) sa matematičkog stanovišta ona je nerešiva u zatvorenom obliku putem kvadratura bez obzira na to kakvi su početni i granični uslovi. Njena linearizacija zahteva da se uvede fizički malo opravdana pretpostavka o konstantnosti termofizičkih svojstava sredine, čime se mogućnost njene primene na proučavanje procesa ograničava na relativno uzam interval temperature.i vrlo ograničeni spektar realnih (eksploatacionih) materijala. Kada se izvrši ta linearizacija, jednačina (1.10) se svodi na

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \nabla^2 T , \tag{1.11}$$

gde je ∇^2 Laplasov operator, poznatu Furijeovu jednačinu, a sa matematičke tačke gledišta predstavlja parcijalnu diferencijalnu jednačinu paraboličkog tipa.

Istorijski posmatrano fenomen prostiranja toplote počinje da se proučava pojavom Furijeovog zakona |5,9,10| koji upravo reprodukuje jednačinu (1.11), a zasnovan je na pomenutoj pretpostavci o konstantnosti termofizičkih karakteristika sredine. Medjutim, mnogobrojni eksperimenti vršeni kasnije preciznijim instrumentima u odnosu na one kojima je Furije raspolagao nedvosmisleno su pokazali da sve fizičke i termičke osobine materijala strogo zavise od promene temperature, a naročito su izražene pri intenzivnim procesima |5,8,11-13| .

Osim ozbiljne kritike koja se odnosi na konstantnost termofizičkih koeficijenata - ρ , c i λ - u jednačini (1.11) postavlja se i pitanje opravdanosti oblika te jednačine. Jer, s obzirom da je ona parcijalna diferencijalna jednačina drugog reda paraboličkog tipa sledi da je brzina termičkog poremećaja beskonačna, da se u svim tačkama jednovremeno menja termičko stanje, što je očigledno u direktnoj suprotnosti sa prirodom |11| . Pored toga, ova osobina jednačine (1.11) je protivrečna sa teorijama koje se odnose na mikrostrukturu i svojstva materije, bilo da opisuje proces prostiranja toplote kao protok slobodnih elektrona, ili kao oscilovanje atoma u kristalnoj rešeci |14-17| . Dublja proučavanja pojava vezanih za promenu temperaturskog stanja sredina nalažu da se oblik te jednačine izmeni i prilagodi novim saznanjima. Teorije ovog tipa razvili su Mindlin |18| , Kalinski i Petikijevič |19| i mnogi drugi.

Da bi se izbegla ova fizička nesaglasnost mnogi autori za poslednjih deset godina predložili su razne reološke modele koji na neki način generališu osnovni Furijeov zakon (1.8) pomoću koga je izvedena osnovna jednačina prostiranja toplote (1.11). Tako na primer, Lord i Šulman |20| predlažu jednu generalisanu tenzorsku relaciju reološkog modela prenošenja toplote oblika

$$J_i + a\dot{J}_i + \sum_j A_{ij} J_j = b\frac{\partial T}{\partial x_i} + \sum_j B_{ij}\frac{\partial T}{\partial x_j} ,$$

$$(i,j = 1,2,3)$$

gde su a, A_{ij}, b,B_{ij} materijalne konstante sredine. U slučaju termodinamički izotropnog tela ovi autori predlažu sledeću uprošćenu varijantu gornjeg izraza

$$J_i + \tau \dot{J}_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} , \tag{1.12a}$$

gde je τ vreme relaksacije koje fizički predstavlja "vremenski defekt" koji je potreban da se uspostavi stacionarno temperatursko stanje elementa zapremine usled dejstva temperaturskog gradijenta koji u datom trenutku posmatranja iznenada dejstvuje na element zapremine. Jednačina (1.12a) predstavlja očigledno generalizaciju Furijevogo reološkog zakona do koje je prvi došao Čester |21| . U stvari, vreme relaksacije je jedan mikroskopski parametar koji zadire u složena pitanja kvantne mehanike. Osnovna teškoća na koju se danas nailazi pri praktičnim izračunavanjima korišćenjem relacije (1.12a) jeste činjenica da na današnjem stupnju eksperimentalne tehnike veličinu ovog parametra nije moguće izmeriti kod čvrstih tela. Izuzetak čini Helijum II kod koga je vrednost ovog parametra takva da je brzina prostiranja toplotnog poremećaja reda 19 - 21 m/s. U navedenoj literaturi |20,21| korišćenjem reološke relacije (1.12a) prvi put je izvedena sledeća ***generalisana jednačina provodjenja toplote koja je oblika***

$$\frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \nabla^2 T . \tag{1.12b}$$

gde je $C^2 = \lambda/(\rho c \tau)$ kvadrat brzine toplotnog poremećaja. Očigledno je da (1.12b) stavljanjem da $\tau \to 0$ prelazi u (1.11) što važi i za reološke relacije (1.12a) i (1.8).

Matematički je dokazano da rešenja jednačine (1.12b) konvergiraju ka rešenjima jednačine (1.11) |22| .

Mada linearna teorija zasnovana na jednačini (1.11) predstavlja prvu aproksimaciju fenomena prostiranja toplote i bazira na fizički malo pravdanim pretpostavkama, ni za njeno proučavanje nije poznat jedan siguran, sveobuhvatan metod; čak, u najopštijem slučaju, nije dokazana ni egzistencija rešenja jednačine (1.11) |23,24| . Izbor metode za proučavanje i rešavanje nekog problema iz domena linearne teorije strogo zavisi od početnih i graničnih uslova i može se reći da tih metoda ima skoro onoliko koliko ima početnih i graničnih uslova. Od niza problema čiji granični uslovi zavise od gradijenta temperature najmanje su, zbog matematičkih teškoća do kojih dovode, proučeni oni kod kojih taj gradijent na površini posmatranog tela zavisi od promene temperature - radijacioni granični uslovi.

Na neuporedivo veće teškoće nailazi se kada se u rasmatranje procesa unese i saznanje da termofizička svojstva materijala zavise od promene temperature. Tada, osim toga što se mesto linearne jednačine (1.11) mora usvojiti nelinearna (1.10), i granični uslovi postaju nelinearni. Uzrok kompleksnosti ove pojave i velikih teškoća do kojih dovodi njeno proučavanje treba tražiti u činjenici da taj fenomen prati skoro sve prirodne procese, da nije dobijen prihvatljiv odgovor na pitanje mehanizma ove pojave i da konačno stepen razvijenosti matematičkog aparata, a naročito u oblasti parcijalnih diferencijalnih jednačina, nije na toj visini da može dati postupak koji će biti sveobuhvatan i dovoditi do tačnih i jedinstvenih rešenja. Kao ustupak matematičkim teškoćama do kojih se dolazi pri poručavanju procesa prostiranja toplote i danas se svesno pribegava nerealnom uprošćavanju i prihvata da se fizičke osobine materijala za sve vreme procesa ne menjaju,da ostaju konstantne, a sve u cilju da se dobiju bar neki podaci i prihvatljiva rešenja procesa koji je veoma važan za tehničku praksu i nauku u celini.

1.2. Početni i granični uslovi

Diferencijalne jednačine prostiranja toplote i linearna (1.11) i nelinearna (1.10) imaju po bezbroj rešenja; postoji bezbroj funkcija $T = T(x_j,t)$ koje ih identički zadovoljavaju. Da bi te funkcije mogle da budu rešenja jednačine (1.10) ili (1.11), potrebno je da su definisane u posmatranom delu prostora i intervala vremena, a isto tako moraju u istoj prostornoj i vremenskoj oblasti imati prvi izvod po vremenu i prvi i drugi izvod po prostornim koordinatama. Da bi se iz tog mnoštva izdvojilo jedno rešenje koje jednoznačno karakteriše posmatrani proces, neophodno je osnovnoj jednačini pridodati još neke uslove koje mora da zadovolji funkcija $T(x_j,t)$ da bi zaista bila rešenje posmatranog procesa. Ti uslovi se mogu odrediti ili neposredno iz eksperimenta, ili se mogu dati u obliku nekog matematičkog izraza koji je stvoren na osnovu eksperimentalnih podataka. Ako funkcija $T(x_j,t)$ zadovoljava jednačinu (1.10) ili (1.11) - zavisno od toga da li posmatrani proce spada u grupu linearnih ili nelinearnih problema - i dodatne uslove, za nju se može tvrditi da je rešenje posmatranog procesa, odnosno da daje vrednost polja promenljive T u svakoj tački posmatrane prostorne oblasti V i u svakom trenutku vremena t počev od nekog t_o koje je izabrano za početno.

1.2.1. *Početni uslovi*

Početni uslovi definišu polje promenljive T u svim tačkama prostorne oblasti V u trenutku t_o koji je uzet za početni. Ako je funkcija $T_o(x_j,t_o)$ neprekidna, tada se traži takvo rešenje jednačine (1.10) ili (1.11) da zadovolji uslov

$$\lim_{t \to t_o} T(x_j,t) = T_o(x_j,t)$$

pri čemu je $T_o(x_j,t_o)$ unapred propisana funkcija. Kada je funkcija $T_o(x_j,t_o)$ prekidna, tada se posle kratkog intervala vremena dolazi do konačne vrednosti funkcije T u tačkama prekida, a funkcija mora da zadovolji uslov

$$T_o = T_o(x_j,t_o)$$

U praksi se često sreću problemi sa jednostavnim početnim uslovom

$$T_o(x_j, t_o) = T_o = const. ,$$

kod kojih je vrednost temperaturskog polja u svim tačkama sredine ista *pre* i neposredno *pre* početka procesa (zagrevanje ili hladjenje tela neke poznate početne temperature i dr.). U ovom slučaju se rešavanje jednačine (1.10) ili (1.11) znatno uprošćuje. Početni uslovi se mogu izostaviti iz proučavanja ako se proces posmatra nakon dovoljno dugog perioda vremena tako da postaje blizak stacionarnom stanju. Uopšte uzev, što je vremenski interval posmatranja procesa udaljeniji od početnog trenutka, uticaj početnog stanja procesa je manji.

1.2.2. Granični uslovi

Osim uslova koji se odnose na vrednosti temperaturskog polja u svim tačkama prostorne oblasti V u početnom trenutku vremena, propisuju se i uslovi koje polje temperature $T(x_j, t)$ mora zadovoljiti na površinama koje okružuju oblast V. Ovim uslovima se definiše zakonitost promene temperaturskog polja na graničnim površinama oblasti V, a za sve vreme trajanja procesa.

Ovi granični, ili površinski uslovi, igraju presudnu ulogu pri izboru metode za rešavanje posmatranog problema. Drugim rečima, karakteristika svakog od procesa prostiranja toplote leži upravo u njihovim graničnim uslovima,jer su svi oni (procesi) opisani istom jednačinom, ili (1.10) ili (1.11).

Pri definisanju graničnih uslova osim zahteva koji proističu iz samog procesa, veoma važnu ulogu igra i oblik posmatranog tela. U telima različitih oblika može se odigravati isti fizički proces, ali zbog različitog kontakta tela sa spoljašnjom sredinom koji je uslovljen oblikom tela, temperaturska polja nisu istog oblika, ne predstavljaju iste funkcionalne zavisnosti temperature od položaja i vremena unutar samog tela.

1.2.3. *Granični uslovi zadati temperaturom na površini tela*

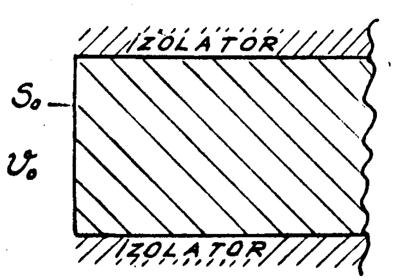
Temperatura na površini tela može biti konstantna, funkcija samo položaja ili samo vremena, ili jednovremeno i položaja i vremena. U literaturi |8,10,23-26| ovi granični uslovi su poznati kao granični uslovi prvog reda. Granične uslove ovog tipa imaju problemi vezani za procese zagrevanja i hladjenja tela pri zadatoj promeni temperature na granicama. Na primer, telo konačne zapremine V čija je temperatura u svim tačkama T_o dovede se u sredinu sa temperaturom υ_o, pri čemu može biti ili $T_o > \upsilon_o$, ili $T_o < \upsilon_o$. Ako se temperatura υ_o sredine ne menja, tada je za sve vreme procesa spoljašnja površina S tela izložena temperaturi

$$T(x_j,t)/_S = \upsilon_o$$

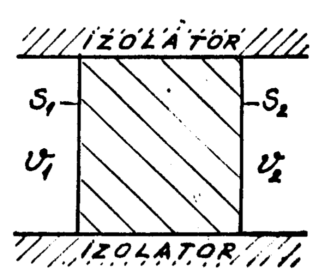
U slučaju prostiranja toplote kroz polubeskonačan ravan zid (slika 1.1), čija je čeona površina u dodiru sa sredinom stalne temperature, granični uslov glasi

$$T(x_j,t)/_{S_o} = \upsilon_o$$

pri čemu je sa S_o označena čeona površina tela.



sl. 1.1



sl. 1.2

Ako se posmatra ravna ploča konačne debljine (slika 1.2) i ako joj je jedna strana S_1 u dodiru sa sredinom temperature υ_1, a druga S_2 sa sredinom temperature υ_2, tada na površinama S_1 i S_2 temperatura mora da zadovolji granične uslove

$$T(x_{j1},t)/_{S_1} = \upsilon_1 \quad i \quad T(x_{j2},t)/_{S_2} = \upsilon_2$$

gde su sa x_{j1} označene tačke na površini S_1, a sa x_{j2} tačke na površini S_2.

Iako su ovi uslovi najjednostavniji, a procesi koji su njima opisani veoma dobro proučeni |13|, treba podvući da je u praksi prilično teško opisati i postaviti matematičku zakonitost promene površinske temperature posmatranog tela pri odvijanju procesa, a naročito kada je ona (površinska temperatura) funkcija položaja ili vremena, ili i položaja i vremena. Do ove teškoće dovodi pojava refleksije koja čini da posmatrano telo preko svoje spoljašnje površine dejstvuje na sredinu koja ga okružuje. Medjutim, za makroskopska posmatranja ova mikropojava se može zanemariti i sa dovoljnom tačnošću se može uzeti da je površinska temperatura tela jednaka sa temperaturom spoljašnjeg ambijenta.

1.2.4. Granični uslovi zadati gradijentom temperature na površini tela

Ovim graničnim uslovima opisani su mnogi procesi vezani za prostiranje toplote, u direktnoj su vezi sa realnim pojavama razmene toplotne energije izmedju tela i spoljašnjeg ambijenta koji ga okružuje. Preko spoljašnje površine toplota prodire u telo, ili telo spoljašnjoj sredini predaje deo svoje toplotne energije zavisno od toga koji element sistema Telo - Ambijent ima viši termički nivo. U svakom slučaju dolazi do promene temperature tačaka tela što izaziva različite fizičke pojave, kao na primer pojavu termičkih napona i deformacija i dr. Intenzitet i kvalitet pojave koju termička nejednakost u sistemu telo-ambijent izaziva zavisi od kvantiteta te termičke nejednakosti, vremenskog perioda dejstva ambijenta na telo i obrnuto i termofizičkih svojstava tela i spoljašnjeg ambijenta.

1.2.5. Gradijent temperature zavisi samo od vremena (granični uslovi drugog reda)

Analitički izraz

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} /_S = - q_o(t) ,$$

gde je sa $\frac{\partial}{\partial n}$ označeno diferenciranje u pravcu spoljašnje normale granične površine S, a $q_o(t)$ predstavlja protok toplote kroz površinu S, definiše granične uslove drugog reda. Mnogi fizički procesi imaju ovaj tip graničnih uslova. Na primer, kod sistema u kojima postoje unutrašnji izvori toplotne energije (kotlovi, nuklearni reaktori i dr.) tokom vremena se menja protok toplote kroz oblogu koja se nalazi oko toplotnog izvora.

U slučaju toplotnog izolatora ne postoji protok toplote kroz spoljašnji omotač obloge ($q_o = 0$), granični uslov se svodi na

$$\frac{\partial T}{\partial n}/_S = 0 , \tag{1.13}$$

što predstavlja specijalni slučaj graničnih uslova drugog reda.

1.2.6. Linearna zavisnost toplotnog protoka od temperature - radijacioni granični uslovi - (granični uslovi trećeg reda)

Radijacioni granični uslovi uspostavljaju vezu izmedju površinske temperature posmatranog tela i spoljašnje sredine koja ga okružuje. Po njima se uzima da je toplotni protok kroz površinu tela proporcionalan razlici izmedju površinske temperature tela i spoljašnje sredine, odnosno

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n}/_S = - H(T - \upsilon_o) \quad , \qquad (1.14)$$

gde je H konstanta (koeficijent površinskog provodjenja toplote), a υ_o temperatura spoljašnjeg ambijenta. Uvodjenjem konstante

$$h = \frac{H}{\lambda}$$

granični uslov (1.13) dobija oblik

$$\frac{\partial T}{\partial n}/_S = - h(T - \upsilon_o). \qquad (1.15)$$

Kada $h \to 0$ granični uslov (1.15) se svodi na specijalni slučaj (1.13) graničnog uslova drugog reda; kada $h \to \infty$ uslov (1.15) se svodi na granični uslov prvog reda (član 1.2.3.).

Koeficijent površinskog provodjenja toplote H zavisi od brzine kretanja i prirode spoljašnje sredine i oblika površine tela. Vrednost ovog koeficijenta se odredjuje eksperimentalno |27 - - 29| i, na primer, pri opstrujevanju kružnog cilindra prečnika d vazduhom iznosi

$$H = 5{,}5.10^{-6}\, u^{0{,}8}\, d^{-0{,}2} \qquad (cal/cm^2\, s\, ^oC),$$

gde je u brzina vazduha.

1.2.7. *Nelinearni granični uslovi*

Zračenje toplote kao jedan vid njenog prostiranja uvodi novi tip graničnih uslova kod kojih toplotni protok na površini tela nije linearno zavisan od temperature. Saglasno Stefan-Bolcmanovom zakonu protok toplotne energije koju telo emituje, ili dobija, zračenjem srazmeran je četvrtom stepenu apsolutne temperature, odnosno

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n}/_S = - \sigma E(T^4 - \upsilon_o^4) \qquad (1.16)$$

gde je σ Stefan-Bolcman-ova konstanta, a E stepen crnoće površine, koji daje odnos izmedju emitovane toplote posmatranog tela i apsolutnog crnog tela na istoj temperaturi.

Kada se uzme u obzir da se termičke karakteristike materijala menjaju sa promenom temperature, tada uslov (1.16) dobija komplikovaniji oblik

$$\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial n} /_S = -\sigma E (T^4 - \upsilon_o^4) \tag{1.17}$$

i znatno otežava proučavanje procesa prostiranja toplote.

Na ovom mestu su izneti samo neki od onih graničnih uslova koji se najčešće sreću u praksi. Osim njih postoje i mnogi drugi, kao što su: granični uslovi kod prirodne konvekcije, kod sredina sastavljenih od slojeva sa različitim termičkim osobinama, pokretni granični uslovi, itd.

Treba podvući da je mnoštvo medjusobno različitih prirodnih pojava opisano jednačinama difuzionog tipa (jednačina (1.10) i (1.11)), a to znači da samo te jednačine nisu u stanju da potpuno definišu uočenu pojavu. Neophodno je njima pridodati one početne i granične uslove koji su karakteristični za proces i presudni pri izboru metode za matematičku analizu posmatrane pojave.

II GLAVA

METODE ZA REŠAVANJE JEDNAČINE PROSTIRANJA TOPLOTE

Najopštija i najtačnija fenomenološka zavisnost izmedju fizičkih veličina koje učestvuju u procesu prostiranja toplote data je nelinearnom jednačinom (1.10) u prethodnoj glavi. Njeno rešenje bi najbolje prikazivalo promenu temperaturskog polja sredine kroz koju se prostire toplota. Medjutim, do danas nije pronadjena opšta analitička metoda koja bi mogla da dovede do takvog rešenja, do jedinstvene funkcije koja bi, sadržavajući u sebi proizvoljne parametre (bilo konstantnog ili funkcionalnog karaktera), jednovremeno mogla da zadovolji i jednačinu procesa i početne i granične uslove. Iz takve funkcije bi mogla da se izvedu rešenja svih zadataka koji su opisani jednačinom (1.10) i bilo kojim od početnih i graničnih uslova davanjem konkretnih vrednosti proizvoljnim parametrima. S obzirom da takva funkcija ne postoji, a u cilju da se dobije bar neka slika o promeni temperaturskog stanja sredine kroz koju se prostire toplota, proučavanju ovog fenomena koji pripada širokom krugu za makrofiziku važnih transportnih pojava pristupa se preko dve vrste aproksimacija. Pretpostavkom da su fizička svojstva sredine kroz koju se prostire toplota konstantna za sve vreme procesa opšta nelinearna jednačina (1.10) se aproksimira linearnom jednačinom (1.11) čija su rešenja, zbog toga, aproksimacije rešenja stvarnih pojava. Metode koje se koriste pri rešavanju jednačine (1.11) i koje dovode do tačnih rešenja tako formulisanih zadataka čine grupu analitičkih metoda.

Druga vrsta aproksimacija odnosi se na samo rešenje, unapred se pretpostavi oblik rešenja koje u sebi sadrži jedan ili više proizvoljnih parametara koji se odredjuju iz uslova da jednačina (1.10) bude sa propisanom tačnošću zadovoljena. Metode zasnovane na ovom konceptu čine grupu približnih metoda.

Prema tome, sve metode bez obzira kojoj grupi pripadaju u principu daju samo približna rešenja procesa. Ispravnost primenjene metode i stepen približenja rešenja fizičkom rešenju nije moguće oceniti analitičkim putem. U tu svrhu se vrši uporedjivanje rešenja sa eksperimentalno dobijenim rezultatima.

1. Analitičke metode

Postupci koji dovode do rešenja jednačine (1.11) i pri tome isključivo koriste metode matematičke analize mogu se svrstati u grupu analitičkih metoda. Njihova primena je moguća samo pri proučavanju jednostavnijih slučajeva prostiranja toplote, sa uspehom mogu rešavati probleme koji ispunjavaju uslove: 1. da je jednačina prostiranja toplote linearna; 2. da su granični uslovi linearni i 3. da je oblast integracije jednostavna.

Prva dva uslova su jasno definisana i o njima nije potrebno davati dopunska objašnjenja. Medjutim, treći uslov se mora bliže definisati. Pod jednostavnom oblašću integracije podrzumeva se oblast ograničena koordinatnim površinama i površinama kod kojih je jedna od koordinata konstantna. Na primer, u Dekartovom sistemu to bi bio paralelepiped, u polarno cilindričnom - cilinder, ili dva koaksijalna cilindra, u sfernom - sfera, ili dve koncentrične sfere.

Mada navedeni uslovi drastično sužavaju krug primene analitičkih metoda i isključuju ih iz proučavanja realnih procesa,kada se uzima u obzir i promenljivost fizičkih karakteristika sredine pri odvijanju procesa, ove metode daju dragocene podatke o obliku rešenja, o funkcionalnoj zavisnosti temperature od prostornih koordinata i vremena. U monografiji Karslou-Jegera |13| nalazi se mnoštvo rešenih problema linearnog slučaja prostiranja toplote za razne granične i početne uslove i različite oblike tela. Sva ta rešenja dobijena su elegantnim analitičkim postupcima i koriste se pri ispitivanju ispravnosti i opravdanosti približnih metoda.

1.1. Metoda razdvajanja promenljivih (Furijeova metoda)

Sa matematičke tačke gledišta problem je sveden na integraciju linearne parcijalne jednačine drugog reda paraboličkog tipa čije se rešavanje i rešenje može naći u svakom udžbeniku matematičke fizike. Osnovna ideja je da se rešenje jednačine

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} \tag{2.1}$$

gde su x_j Dekartove koordinate, pri početnom uslovu

$$T(x_j, 0) = \varphi(x_j) \qquad -\infty < x_j < \infty \tag{2.2}$$

traži u obliku proizvoda dveju funkcija od kojih jedna zavisi samo od prostornih koordinata x_j , a druga samo od vremena t:

$$T(x_j, t) = X(x_j)\,\phi(t) \tag{2.3}$$

Unošenjem rešenja (2.3) u jednačinu (2.1) dolazi se do dve diferencijalne jednačine, od kojih jedna sadrži samo funkciju $\phi(t)$ i njen izvod po vremenu, a druga samo funkciju $X(x_j)$ i njene izvode po prostornim koordinatama. Rešavanjem svake od dobijenih jednačina posebno i korišćenjem početnog uslova (2.2) dolazi se do rešenja

$$T(x_j, t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi_j) \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} \exp\left\{-\frac{\sum_{j=1}^{3}(\xi_j - x_j)^2}{4a^2 t}\right\} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$$

Funkcija

$$u(x_j, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} \exp\left\{-\frac{\sum_{j=1}^{3}(\xi_j - x_j)^2}{4a^2 t}\right\}$$

koja zadovoljava jednačinu (2.1) poznata je u literaturi |13,23,24| kao "fundamentalno rešenje jednačine prostiranja toplote". Svako rešenje linearne jednačine prostiranja toplote (2.1) sadrži funkciju (2.4) bez obzira na granične uslove koji predstavljaju karakteristiku i upotpunjuju matematički model proučavanog procesa. Do rešenja konkretnog zadatka koji je definisan jednačinom (2.1) i nekim graničnim uslovima dolazi se pripajanjem funkciji (2.4) neke nove funkcije koja takodje, u opštem slučaju,zavisi od prostornih koordinata x_j i vremena t, ali tako da nova funkcija zadovolji postavljene granične uslove, a da pri tome ne izmeni ulogu koju ima funkcija (2.4) - da zadovoljava jednačinu (2.1).

Ova metoda je istorijski najstarija. Njena osnovna ideja da rešenje traži u obliku proizvoda dveju funkcija nije svojstvena samo za rešenje problema vezanih za prostiranje toplote, već se koristi uvek kada se bilo koji proces opisuje jednačinom paraboličkog tipa, a to su, na primer, pojave vezane za termo ili običnu difuziju, granični sloj i dr. Uopšte uzev, ta ideja se široko koristi u mnogim oblastima mehanike kao, na primer, u Teoriji oscilacija gde su jednačine čak četvrtog reda (pri oscilovanju elastičnih tela), u mehanici fluida itd. Mada je metoda atraktivna, danas se veoma retko koristi, jer sa jedne strane zahteva veliko poznavanje matematičke analize što čini da je put kojim se do rešenja dolazi dug i mukotrpan, a sa druge strane ograničenja pod kojima se može koristiti onemogućavaju da se primeni na rešavanje danas aktuelnih problema moderne fizike.

1.2. Metod konačnih integralnih transformacija

Primena ove metode kao i metode razdvajanja promenljivih ograničena je na rešavanje linearne diferencijalne jednačine sa linearnim graničnim uslovima i kada je oblast integracije jednostavna. Činjenica je da ova metoda ne proširuje krug problema koji se proučavaju, ne omogućava rešavanje novih zdataka vezanih za pojavu prostiranja toplote i zbog toga se na prvi pogled čini da nema opravdanja uvodjenju i razvijanju nove metode - u ovom slučaju metode konačnih integralnih transformacija - kada već postoji tačan, isproban i uspešno primenjen način rešavanja zadataka kao što je, prethodno izneta, metoda razdvajanja promenljivih.

Medjutim, metoda konačnih integralnih transformacija koristi jednostavniju tehniku računanja u odnosu na onu koja se primenjuje pri rešavanju zadataka metodom razdvajanja promenljivih. Zbog toga je put kojim se dolazi do rešenja neuporedivo kraći, a rešenje se dobija u mnogo jednostavnijem obliku. Osim toga, ova metoda dopušta da se rešenje predstavi u najpogodnijem obliku za konkretan zadatak (na primer, rešenje u obliku reda koje ima potrebnu tačnost pri minimalnom broju članova). Ova osobina metode ima posebno veliku vrednost pri rešavanju praktičnih problema.

Integralne transformacije koje se koriste pri rešavanju jednačine prostiranja toplote dele se na dve klase: transformacije koje se odnose na vremensku koordinatu t i na transformacije koje se vrše nad prostornim koordinatama. Kada se integralnim transformacijama, u opštem slučaju, rešavaju parcijalne diferencijalne jednačine neopravdano je praviti razliku izmedju vremena i prostornih koordinata. Medjutim u slučaju jednačine prostiranja toplote takva podela je razumljiva, jer je: 1. u odnosu na vreme jednačina prvog reda, dok je u odnosu na prostorne koordinate - drugog reda; 2. u posmatranim problemima vreme se menja od nule do beskonačnosti, dok se u realnim zadacima prostorne koordinate menjaju unutar konačne oblasti. To su razlozi zbog kojih se vreme ne posmatra kao ravnopravna koordinata sa prostornim koordinatama i zbog toga se definišu i primenjuju dve grupe integralnih transformacija:

1) integralne transformacije primenjene na vremensku koordinatu. Sa matematičke tačke gledišta to su integralne transformacije sa beskonačnom oblašću integracije. Najpoznatija od njih je Laplasova transformacija;

2) integralne transformacije primenjene na prostorne koordinate. Oblast integracije u ovom slučaju je konačna.

Procedura ovih metoda može se sažeto izneti na sledeći način: kada se neka funkcija $f(x,y,z,t)$ koja zavisi od prostornih koordinata i vremena podvrgne sledećoj integraciji

$$\int_a^b f(x,y,z,t)\ K(x,\gamma)\ dx = F(y,z,t,\gamma),$$

kaže se da je nad funkcijom $f(x,y,z,t)$ izvršena integralna transformacija po promenljivoj x (ili po y, ili po z) u oblasti (a,b), a pri tome $K(x,\gamma)$ predstavlja jezgro transformacije. Rezultat integracije je neka nova funkcija $F(y,z,t,\gamma)$ koja ne zavisi od promenljive x. Očigledno je da originalu - polaznoj funkciji $f(x,y,z,t)$ - odgovara beskonačno mnogo transformata - funkcija $F(y,z,t,\gamma)$ - jer transformat zavisi od oblasti integracije i jezgra $K(x,\gamma)$. Medjutim, datoj oblasti i datom jezgru transformacije odgovara samo jedan potpuno odredjeni transformat.

Osnovna ideja integralnih transformacija |8,13,23,30-32| leži u tome da rešenje i rešavanje jednačine procesa u oblasti transformata bude jednostavnije nego u oblasti originala. To se postiže na taj način što se jednačina pomnoži nepoznatim jezgrom, a zatim izvrši integracija po promenljivoj od koje transformat ne zavisi. Nakon navedenih operacija jezgro se odredjuje iz uslova da transformat ne zavisi od jedne nezavisno promenljive, što kod parcijalnih jednačina dovodi do običnih diferencijalnih jednačina po jezgru. Iz njih se jezgra mogu odrediti čime je potpuno definisan i transformat. Rešenje jednačine u kojoj je tražena funkcija transformat podvrgne se zatim inverznoj transformaciji i na kraju dobija rešenje polazne jednačine.

Detaljno izlaganje metode i njena primena na rešavanje različitih zadataka može se naći u navedenoj literaturi, bespredmetno bi bilo njome opterećivati ovaj rad koji je posvećen nelinearnim procesima, a oni izlaze iz okvira mogućnosti pomenute metode.

1.3. Grinova metoda

Grinova metoda se sa uspehom može koristiti pri rešavanju linearne jednačine prostiranja toplote sa linearnim graničnim uslovima i unutar jednostavne oblasti integracije. Ova ograničenja, na žalost, su karakteristična za sve analitičke metode, pa prema tome ni Grinova metoda, koja spada u tu klasu, ne predstavlja izuzetak. Osnovna osobina ove metode je da složene zadatke, čije rešavanje zahteva komplikovan i ni malo lak matematički aparat, svede na jednostavnije zadatke koji se primenom jednostavnijih analitičkih postupaka mogu rešiti. Ovo preimućstvo Grinove metode nad ranije navedenim metodama naročito je korisno pri rešavanju praktičnih problema i zadataka.

Već je rečeno da sama diferencijalna jednačina (2.1) nije dovoljna da opiše pojavu prostiranja toplote, već joj se moraju pridodati početni i granični uslovi i tek tada skup koji čine: diferencijalna jednačina, početni i granični uslovi potpuno opisuje posmatranu pojavu.Kada se posmatra samo diferencijalna jednačina (2.1) bez graničnih uslova, tada se može pronaći bezbroj funkcija koje nju zadovoljavaju, odnosno ona ima beskonačno mnogo rešenja. U tom mnoštvu funkcija postoji samo jedna koja zadovoljava i granične uslove, drugim rečima samo je ona rešenje procesa koji je opisan jednačinom i datim graničnim uslovima. Može se postaviti pitanje: da li je moguće pronaći neko opšte - fundamentalno - rešenje date diferencijalne jednačine iz koga se, pomoću neke jednostavne algebarske operacije, može odrediti svako posebno rešenje koje odgovara procesu sa odredjenim graničnim uslovima? Na taj način bi se postiglo da rešavanje datog zadatka postaje krajnje jednostavno.Na primer, za jednačinu prostiranja toplote jednom se za svagda nadje fundamentalno rešenje iz koga se, ili pomoću koga se,zatim jednostavnim operacijama (daleko jednostavnijim nego ranije iznetim) dolazi do rešenja svakog postavljenog zadatka. Ovo je suština i osnovna ideja Grinove metode. Funkcija sa takvim osobinama postoji, naziva se Grinova funkcija, a to je fundamentalno rešenje (2.4) dobijeno metodom razdvajanja promenljivih. Mnogi zadaci sa složenim graničnim uslovima rešeni su primenom ove metode |33| .

Pomenute analitičke metode danas imaju skoro isključivo akademski značaj, prevazidjene su, jer linearizacija jednačine (1.10) kao prva aproksimacija realnih procesa, ne omogućava proučavanje pojava kod kojih je evidentna i nezanemarljiva promena termofizičkih svojstava sredine sa promenom temperature. I pored toga, rešenja dobijena ovim metodama imaju dve značajne karakteristike:

1. daju dragocene podatke o odnosima fizičkih veličina koje su prisutne u procesu prostiranja toplote, a takodje ukazuju i na pravce razvoja približnih metoda koje obuhvataju širi krug problema koji su bliži stvarnim procesima i 2. ta rešenja se uzimaju kao etaloni pri proveri ispravnosti rešenja dobijenih približnim metodama.

2. Približne metode i aproksimativna rešenja

Nagli razvoj tehnike poslednjih decenija zahteva da se pronadju novi izvori energije koja može da pokreće velika industrijska postrojenja i transportna sredstva a da se stvara u malom prostoru, kao što je slučaj sa motorima sa unutrašnjim sagorevanjem, raketnim motorima i nuklearnim reaktorima. U svim ovim izvorima stvaraju se veoma visoke temperature. Pokazalo se da pri visokim temperaturama i velikim kolebanjima temperature rešenja linearne jednačine sa linearnim graničnim uslovima ne daju zadovoljavajuću tačnost, jer ona bitno odstupaju od rezultata dobijenih merenjima. Ova razlika je posledica pretpostavke o konstantnosti fizičkih karakteristika materijala tokom procesa i zbog toga se ona mora odbaciti, a tada se pojava prostiranja toplote opisuje nelinearnom jednačinom (1.10) sa nelinearnim graničnim uslovima. Danas poznati analitički postupci nisu u stanju da uspešno reše ovako definisane zadatke. Zbog toga se pribegava iznalaženju metoda koje će moći da dovedu do rešenja zadovoljavajuće tačnosti.

2.1. Numeričke metode

Numeričke metode koje se koriste za dobijanje rešenja karakterišu se zamenom diferencijala (beskonačno malog priraštaja) konačnim priraštajem (razlikom vrednosti veličine u dva susedna položaja). Rešenja dobijena ovim metodama daju se tabelarno ili grafički. Poslednjih godina su, zahvaljujući razvoju i usavršavanju računskih mašina a pre svega elektronskih računara, pronadjene i razradjene mnoge značajne metode |8,14,34-37| koje dovode do rešenja vrlo složenih prirodnih pojava, i to do rešenja željene tačnosti. Pitanje konvergencije tako dobijenih rešenja ka eksperimentalno dobijenim rezultatima i potrebne korekcije za dobijanje rešenja što veće tačnosti brzo se odvijaju zahvaljujući mogućnostima računskih mašina da u jednoj sekundi obave milione aritmetičkih operacija.

Nedostatak numeričkih metoda je u tome što ne mogu dati funkcionalna rešenja jednačine kojom je proces opisan, već svaka promena ma i jednog parametra iziskuje da se ceo postupak ponovi, moraju se davati numeričke vrednosti svim parametrima koji se nalaze u jednačini da bi se došlo do rešenja zadatka, ali samo za te vrednosti parametara. Osim toga, pomoću njih se dobija diskretni skup vrednosti temperaturskog polja u konačnom broju tačaka prostorno-vremenske oblasti. I pored ovih ozbiljnih nedostataka pokazalo se da su numeričke metode veoma upotrebljive kako pri rešavanju praktičnih zadataka, tako i pri teorijskim istraživanjima.

Dve najpoznatije i najviše korišćene metode su: metoda konačnih razlika i metoda mreže, pomoću kojih su uspešno rešeni mnogi zadaci kao na primer, problem prostiranja toplote kroz polubeskonačni štap, cilindar, ravan zid, kada su granični uslovi prvog, drugog, ili trećeg reda |38,39| .

Numeričke metode su svrstane u grupu približnih metoda, mada ne daju funkcionalna rešenja, a samim tim se ni oblik približnog rešenja ne može unapred propisati. Vrednosti temperaturskog polja u pojedinim tačkama prostorno vremenske oblasti samo su približne,a njihova odstupanja od stvarnih vrednosti zavise od broja podeoka na prostornoj i vremenskoj osi. Pri odredjivanju rekurentnih obrazaca koji povezuju vrednosti temperaturskog polja u susednim tačkama uzima se da je a priori zadovoljena linearna jednačina prostiranja toplote. S obzirom da se uzima linearna jednačina i da se o rešenju unapred ništa ne govori, trebalo bi sledstveno ranije iznetoj podeli, numeričke metode svrstati u grupu analitičkih. Medjutim,za diskretan skup vrednosti temperaturskog polja nikako se ne može tvrditi da predstavlja tačno rešenje jednačine.Zbog toga numeričke metode moraju pripasti grupi približnih metoda.

2.2. Integralne metode

Integralne metode pripadaju širokoj klasi metoda probnih funkcija koje se sa velikim uspehom koriste pri aproksimativnom rešavanju matematički modeliranih fizičkih pojava. Metoda probnih funkcija koristi se i pri konkretnom rešavanju varijaciono formulisanih procesa, biće iskorišćena u sledećoj glavi i zbog toga je potrebno odmah u kratkim crtama izneti osnovnu ideju te metode. Ona u prethodno iznetom smislu pripada grupi približnih metoda, jer se u njoj koristi unapred propisano aproksimativno rešenje - probna funkcija - koja sadrži prethodno nepoznate parametre, a oni se odredjuju tako da usvojeno rešenje sa dovoljnom tačnošću zadovolji jednačinu procesa, granične i početne uslove. Pri izboru aproksimativnog rešenja sve informacije o karakteru procesa dobijene iz različitih izvora, a sa kojima se u datom trenutku raspolaže, igraju presudnu ulogu pri izboru forme rešenja. Osim toga, aproksimativno rešenje treba da sadrži što manji broj parametara, samo one koji su najkarakterističniji za proces, ali dovoljan za dobijanje rešenja zadovoljavajuće tačnosti.Osnovni izvori podataka o procesu su eksperimenti koji daju fizičku sliku procesa i ukazuju na parametre - fizičke veličine - dominantne u procesu i tačna rešenja dobijena linearizacijom opšte jednačine procesa.

Diferencijalna jednačina ma kog procesa koji se odvija unutar oblasti V može se, u opštem slučaju, prikazati diferencijalnim operatorom L_v koji može biti linearan ili nelinearan, a tada se jednačina piše u obliku

$$L_v(f) = 0 , \tag{2.5}$$

gde je f tražena fizička veličina čija je promena po vremenu i položaju opisana jednačinom (2.5). S obzirom da veličina f na graničnoj površini S oblasti V mora da zadovolji granične uslove koji su, u opštem slučaju, dati u diferencijalnom obliku, to se i oni mogu prikazati pomoću nekog diferencijalnog operatora L_s, pa se granični uslovi ispisuju preko

(2.6) $$L_s(f) = 0$$

Tek kada je definisan i početni uslov

(2.7) $$f(x_j, 0) = f_o$$

fizički proces je potpuno matematički modeliran.

Funkcija $f(x_j, t)$ koja jednovremeno zadovoljava i jednačinu procesa (2.5) i granične uslove (2.6) i početni (2.7) je tačno rešenje koje u svim tačkama oblasti V za svaki trenutak vremena t daje tačnu numeričku vrednost fizičke veličine f. Cilj svih istraživanja je da se baš ta funkcija odredi, da se pronadje kvalitativna i kvantitativna zavisnost posmatrane fizičke veličine od položaja i vremena i svih fizičkih karakteristika sredine koje su s njom u vezi. U opštem slučaju ne samo da jedinstveni analitički postupak, koji do takve fizičke veličine dovodi, ne postoji, već nije poznat ni opšti kriterijum za dokazivanje egzistencije takve funkcije, u matematičkom obliku. Medjutim, ako matematički pristup nije u stanju da potvrdi postojanje takve funkcije, to ne znači da se proces ne odvija, da se unutar neke oblasti neka fizička veličina ne menja. Činjenica, do koje se dolazi neposrednim posmatranjem da proces postoji, nedvosmisleno tvrdi da se fizička veličina menja, da ima različite vrednosti u različitim tačkama prostorno-vremenske oblasti i da postoji neka neprekidna ili prekidna funkcija položaja i vremena kojom se ta promena opisuje. Drugim rečima, egzistencija rešenja je dokazana činjenicom da proces postoji.

Polazeći od ovog koncepta i ne obazirući se na nemoć matematičkog aparata usvaja se funkcija

(2.8) $$f^*(x_j, t, A_m) - \quad m = 1, 2, \ldots M,$$

- probna funkcija - koja pored prostornih koordinata i vremena sadrži i M proizvoljnih, neodredjenih, parametara A_m konstantnog ili funkcionalnog karaktera. U opštem slučaju funkcija (2.8) uneta u jednačinu (2.5) neće je zadovoljiti, već će postojati neki ostatak $L_v(f^*) = \sigma_v$, a takodje ne zadovoljava ni granične uslove (2.6), nego se i kod njih na desnoj strani mesto nule pojavljuje ostatak $L_s(f^*) = \sigma_s$. Parametri A_m se uvode sa ciljem da ostaci σ_v i σ_s budu što manji, da budu što bliži nuli, da bi probna funkcija (2.8) bila što bolje aproksimativno rešenje zadatka definisanog jednačinom (2.5) i graničnim uslovima (2.6). S obzirom na slobodu izbora oblika probne funkcije (2.8) ona se najčešće bira u obliku polinoma po koordinatama x_j pri čemu su parametri A_m konstante i odredjuju se iz sistema algebarskih jednačina. Medjutim,broj članova usvojenog polinoma zavisi od broja graničnih i početnih uslova, jer ako bi broj parametara M bio veći od zbira graničnih i početnih uslova, tada bi se dobio sistem algebarskih jednačina sa većim brojem nepoznatih nego što je broj jednačina i parametri A_m ne bi se mogli odrediti. Nije redak slučaj da povećanje reda polinoma neznatno poboljšava aproksimativno rešenje, da se ostaci σ_v i σ_s minimalno razlikuju od ostataka dobijenih polinomom nižeg reda, drugim rečima konvergencija probne funkcije ka stvarnom rešenju je veoma spora, mada je red polinoma povećan. Zbog toga je celishodnije usvojiti da su parametri A_m funkcije vremena i da je probna funkcija oblika

(2.9) $$f^* = f^*(x_j, A_m(t)),$$

a tada početni i granični uslovi dovode do sistema diferencijalnih jednačina po A_m . U varijaciono formulisanim problemima kod kojih se aproksimativno rešenje traži u klasi probnih funkcija parametri A_m imaju strogo definisan fizički smisao i uzimaju se za nezavisne generalisane koordinate po kojima se vrši variranje. Ovaj rad traži skromno mesto baš u skupu varijaciono formulisanih fizičkih pojava čijem se proučavanju i rešavanju prilazi metodama probnih funkcija.

Mnoštvo fizičkih pojava opisanih diferencijalnim jednačinama i odgovarajućim početnim i graničnim uslovima uspešno je rešeno usvajanjem jednog parametra $\theta(t)$ koji ima dimenziju dužine, a fizički predstavlja dubinu do koje u trenutku t dopire poremećaj u oblasti V, naziva se "dubina penetracije" i analogan je sa debljinom graničnog sloja u mehanici fluida. Ova analogija nije slučajna, jer su ideju probnih funkcija sa jednim vremenski zavisnim parametrom prvi primenili Karman i Polhauzen |40,41| pri rešavanju problema graničnog sloja u slučaju laminarnog i turbulentnog kretanja fluidne mase, usvajajući debljinu graničnog sloja za vremenski promenljivu generalisanu koordinatu. Bitna karakteristika ovakvog prilaza rešavanju postavljenih zadataka je u tome da se parcijalne diferencijalne jednačine svode na obične diferencijalne jednačine po usvojenom parametru, dubini penetracije, koje su često do te mere jednostavne da se konačno svode na rešavanje odredjenog integrala, što danas zahvaljujući moćnim elektronskim računarima ne predstavlja posebnu teškoću. Osim toga, dubinom penetracije se uvodi jedan važan, fizički opravdan uslov: da u oblasti izvan granice penetracije nije došlo do promene polja posmatrane fizičke veličine - $f(x_j,t)=f(x_j,0)$ za $x_j \geq \theta(t)$.

Na žalost, uvodjenje ovakvog parametra drastično smanjuje primenljivost metoda probnih funkcija ostajući u domenu jednodimenzionih procesa. Pokušaji primene metode sa jednim vremenski zavisnim parametrom na fenomene prenosa unutar višedimenzionih oblasti nisu doveli do željenih rezultata, a i u slučajevima gde su uspešno primenjeni, na primer u radovima G. Pudsa |42| , ostvareni su zahvaljujući pretpostavkama o izotropnosti fizičkih svojstava sredine i posebnim uslovima simetrije prostora.

U najopštijem slučaju probna funkcija ne zadovoljava ni jednačinu, ni početne, ni granične uslove zadatka, zamenjena u njih ostavlja ostatke σ_v, σ_s i σ_o i istraživač je stavljen pred problem da proizvoljne parametre A_m tako odredi da sva tri ostatka budu minimalna. Neuporedivo je zgodnije, što u neku ruku ograničava slobodu pri izboru probne funkcije, da se ona tako definiše da zadovolji ili jednačinu procesa, ili početne i granične uslove. U prvom slučaju kada je jednačina zadovoljena, odnosno kada je $\sigma_v = 0$, ostaje da parametri A_m miniziraju ostatke σ_s i σ_o, a u drugom kod kojih je $\sigma_s = 0$ i $\sigma_o = 0$, od parametara se zahteva da minimiziraju σ_v. Drugi slučaj je značajniji od prvog, jer je lakše definisati probnu funkciju f^* tako da granični i početni uslovi budu identički zadovoljeni, a da se minimizacija vrši nad ostatkom σ_v. S obzirom da se i u ovom radu od aproksimativnog rešenja zahteva da identički zadovolji granične i početne uslove, a da se generalisane koordinate - parametri $A_m(t)$ - zatim odredjuju iz uslova da ostatak σ_v

bude najmanji u svim tačkama oblasti V, da sve metode zasnovane na ovom konceptu imaju zajedničku karakteristiku, na ovom mestu je zgodno u nekoliko reči izneti osnovnu ideju sadržanu u tim metodama koje su poznate kao metode ponderisanih ostataka.

Da bi se ostvarila minimizacija ostatka σ_v, u svim tačkama prostora V nekoj funkciji ostatka $F(\sigma_v)$ atašira se neki težinski faktor $W(x_j)$ kojim se ponderiše ostatak, a zatim tako ponderisani ostatak usrednji po oblasti V što dovodi do integrala

$$J = \int_V F(\sigma_v)\, W(x_j)\, dV = \int_V F\{L_v(f^*)\}\, W(x_j)\, dV = 0 \tag{2.10}$$

i do uslova

$$\frac{\partial J}{\partial A_m} = 0\,, \tag{2.11}$$

koji je posledica zahteva da parametri A_m minimiziraju ostatak σ_v. Uslov (2.11) obezbdjuje stacionarnost integrala (2.10) po parametrima A_m, a ne minimalnost koja se mora ispitivati preko znaka drugog izvoda. Medjutim, izuzetna složenost takvog ispitivanja skopčana sa velikim matematičkim teškoćama do danas nije izvršena, u opštem slučaju, a činjenica da sve metode zasnovane na ovom konceptu daju dobra aproksimativna rešenja garancija je da uslov (2.11) u suštini obezbedjuje minimalnost integrala (2.10) po parametrima A_m.

Izbor funkcije ostatka $F(\sigma_v)$ je potpuno proizvoljan, a najčešće se uzima da je $F(\sigma_v) = L_v(f^*)$ kao što je slučaj u metodama: kolokacije, Galerkina, momenata itd., ili u obliku $F(\sigma_v) = \{L_v(f^*)\}^2$ što se sreće u metodi najmanjih kvadrata. Funkcija $W(x_j)$ - težinski faktor - kojom se ponderiše $F(\sigma_v)$ različita je za pojedine metode, čak se unutar iste metode njome mogu specificirati različite geometrije (u matematičkom smislu) oblasti V u kojoj se pojava proučava. Taj slučaj se sreće u metodi najmanjih kvadrata. Uslov (2.11) za odredjivanje optimalnih vrednosti parametara A_m u probnoj funkciji (2.8) svodi se na

$$\frac{\partial}{\partial A_m} \int_V \{L_v(f^*)\}^2\, W(x_j)\, dV = 0\,,$$

pri čemu je za jednodimenzione i simetrične probleme težinski faktor $W(x)$ oblika

$$W(x) = (1 - x^2)\, x^{\beta-1}.$$

Nosilac geometrijske specifičnosti oblasti V je konstanta β, jer ako je $\beta = 1$ u pitanju je ravna ploča, za $\beta = 2$ cilindar i za $\beta = 3$ sfera.

Težinska funkcija $W(x_j)$ u proučavanje uvodi se sa ciljem da se jednim analitičkim izrazom, kada je to moguće, objedine metode aproksimativnog rešavanja matematički modeliranih fizičkih pojava i da se obezbedi veća sloboda pri izboru probnih funkcija koje će zadovoljavati početne i granične uslove. To dopušta da se u metodi Galerkina aproksimativno rešenje traži u obliku

(2.12) $$f^* = \sum_{m=1}^{M} A_m\, \varphi_m(x_j, t)$$

gde su $_m$ linearno nezavisne funkcije u oblasti V, ali koje identički zadovoljavaju granične i početne uslove. Integral (2.10) u metodi Galerkina ima oblik

(2.13) $$\int_t \int_V L_v(f^*)\, \varphi_m(x_j, t)\, dV\, dt = 0 \qquad m=1,2,\dots M$$

i odmah se uočava da je, s obzirom na (2.12) funkcija ostatka ponderisana sa

$$W(x_j, t) = \frac{\partial f^*}{\partial A_m}.$$

Ako se od funkcija φ_m zahteva da zadovolje samo granične uslove, tada je njihova zavisnost svedena na zavisnost samo od prostornih koordinata ($\varphi_m = \varphi_m(x_j)$), ali onda parametri A_m ne m0gu biti konstantni, već se menjaju sa vremenom ($A_m = A_m(t)$), da bi probna funkcija (2.12) mogla da zadovolji početne uslove. Ovakav pristup olakšava izbor probnih funkcija, jer se u integralu (2.13) izostavlja integracija po vremenu, a za odredjivanje A_m dobija se sistem običnih diferencijalnih jednačina.

Neophodno je prikazati i metodu momenata, jer ona u sebi sadrži kao specijalan slučaj klasu široko primenjenih integralnih metoda. Za razliku od Galerkinove metode u metodi momenata parametri A_m odredjuju se neposredno iz integrala (2.10). Težinski faktor je u njoj m-ti stepen nezavisno promenljive ($W(x_j) = x_j^m$), ili probne funkcije ($W(x_j) = f^{*m}$), pa se parametri A_m odredjuju iz sistema od M jednačina oblika

$$(2.14) \qquad \int_V L_v(f^*)\, x_j^m\, dV = 0 \qquad ili \qquad \int_V L_v(f^*)\, f^{*m}\, dV = 0$$

Integralnim metodama, koje se dobijaju iz metode momenata kada se stavi da je $m = 0$, biće posvećeno malo pažnje, jer se mnogi problemi prenosa uspešno rešeni pomoću njih, a i zbog činjenice da je primena direktnih varijacionih metoda u mnogim varijaciono formulisanim problemima transporta ekvivalentna integralnim metodama |43| . Celovit prikaz integralnih metoda, koje se najčešće primenjuju na probleme transporta, može se naći u monografiji Gudmana |12| .

Ispravnost svih aproksimativnih metoda, pa i integralnih, opravdava se uporedjivanjem rešenja dobijenih pomoću njih sa rešenjima do kojih se dolazi drugim metodama za jednostavnije slučajeve. Ako uporedjivanja pokažu mala odstupanja izmedju rešenja, može se smatrati da je primenjena aproksimativna metoda ispravna i da će njena upotrebe pri proučavanju težih problema dati rešenja zadovoljavajuće tačnosti. Specijalno pri korišćenju integralnih metoda pri proučavanju procesa prostiranja toplote ta uporedjivanja se vrše pomoću linearne jednačine

$$(2.15) \qquad \frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

gde je

$$a^2 = \frac{\lambda}{\rho c} \qquad \left[\frac{m^2}{h}\right]$$

sa graničnim uslovom

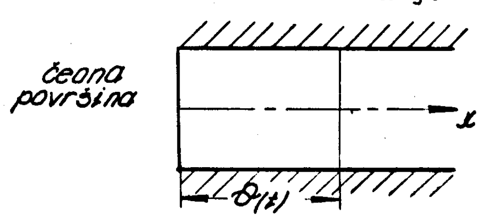
$$(2.16) \qquad \frac{\partial T}{\partial x} = -F(t), \qquad za\ x = 0$$

Tačno rešenje ovako postavljenog zadatka postoji i može se naći,na primer, u monografiji Karslou-Jegera |13| na strani 75. Jednodimenzioni slučaj je izabran, jer probna funkcija - aproksimativno rešenje - u integralnoj metodi Karman-Polhauzena za linearni slučaj i Gudmana za nelinearni slučaj, koje će biti prikazane, sadrži dubinu penetracije kao proizvoljni parametar A_m, a već je rečeno da se na proučavanje pojava transporta u višedimenzionim oblastima rešenja sa dubinom penetracije za sada ne mogu primeniti.

2.2.1. Karman-Polhauzenova metoda

Karman-Polhauzenova metoda |40,41| je razvijena i uspešno primenjena pri rešavanju problema graničnih slojeva u mehanici fluida, istorijski je najstarija, a njena ideja je uzeta kao konceptualni obrazac pri stvaranju i razvijanju drugih integralnih metoda koje su specijalni slučaj, kasnije stvorene, metode momenata što je već rečeno u prethodnom delu ove glave. S obzirom da su procesi u teoriji graničnih slojeva opisani jednačinama koje se pogodnim transformacijama mogu svesti na tip (2.15) (jednačine difuzionog tipa), Karman-Polhauzenova metoda je iskorišćena pri rešavanju mnoštva problema koje je moguće opisati jednačinom ovog tipa, kao što su: nestacionarno provodjenje toplote, nestacionarni protok fluida kroz porozne sredine, procesi obične i termodifuzije itd.

Kao ilustrativni primer efikasnosti metode izabran je linearni slučaj prostiranja toplote u bočno termički izolovanom polubeskonačnom štapu (sl.2.1), kada je protok temperature kroz čeonu površinu $(x=0)$ poznata funkcija vremena $F(t)$ za svako $t>0$.



sl. 2.1

Neka je u početnom trenutku $t=0$ temperatura T u svim tačkama štapa - T_0, što daje početni uslov

$$T(x,0) = -T_0\,. \tag{2.17}$$

Matematički model ovako postavljenog zadatka čine: jednačina (2.15) granični uslov (2.16) i početni (2.17). Fizička veličina $f(x,t)$ čija se promena proučava je temperatura $T(x,t)$, a funkcija ostatka $F(\sigma_v)$ je, saglasno izrazu (2.14.1) jednačina

$$L_v(T^*) = \frac{\partial T^*}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^2} = 0 .$$

Kada se prema (2.14.1.) izvrši integracija po x od 0 do $\theta(t)$, do dubine penetracije, jer se u toj oblasti proces odvija, dobija se

$$\frac{d}{dt}(\delta + T_o\,\theta) = a^2\left(\frac{\partial T^*}{\partial x}\Big/_{x=\theta} - \frac{\partial T^*}{\partial x}\Big/_{x=0}\right), \tag{2.18}$$

gde je

$$\delta = \int_0^{\theta(t)} T^*\,dx . \tag{2.19}$$

Probna funkcija - aproksimativno rešenje - neka je polinom drugog reda po x:

$$T^* = \beta_o + \beta_1 x + \beta_2 x^2 , \tag{2.20}$$

gde su koeficijenti β_i, u opštem slučaju, neke funkcije vremena koji se odredjuju iz zahteva da granični i početni uslovi budu zadovoljeni, sa ciljem da se ostaci σ_s i σ_o anuliraju. Ti uslovi glase:

1. da je na čeonoj površini štapa, $x = 0$, protok temperature data funkcija $F(t)$ - granični uslov (2.16);

2. da kroz granicu $x = \theta$ *ne postoji* protok temperature, $\frac{\partial T^*}{\partial x} = 0$ za $x = \theta$ i

3. da je za svako $x \geq \theta$ temperatura štapa jednaka početnoj - T_o, da nije došlo do promene temperaturskog polja preko dubine penetracije.

Kada se iz ovih uslova odrede koeficijenti β_i , za aproksimativno rešenje dobija se

(2.21) $$T^* = -T_o + \frac{T}{2\lambda\theta}(\theta - x)^2$$

koje sadrži vremenski promenljiv parametar $(\theta(t))$, a zadovoljava granične i početni uslov. Stavljanjem (2.21) u (2.19) i integracijom dobija se

(2.22) $$\delta = -T_o\theta + \frac{F}{6}\theta^2 \quad ,$$

što, zamenjeno u (2.18) i uzimanjem u obzir uslova 2. pri odredjivanju koeficijenata β_i, dovodi do obične diferencijalne jednačine

(2.23) $$\frac{1}{6}\frac{d}{dt}(\theta^2 F) = a^2 F \quad ,$$

sa početnim uslovom $\theta(0) = 0$.

Ako je $F(t) = F = const.$, rešenje jednačine (2.23) je

(2.24) $$\theta = \sqrt{6a^2 t} \ .$$

Za sve vreme procesa temperatura T se na čeonoj površini štapa, $x=0$, menja i do zakona njene promene sa vremenom lako se dolazi iz (2.21) kada se uzme u obzir (2.24). Promena te površinske temperature, q, će biti

$$q = T^*(0,t) = -T_o + \sqrt{\frac{3}{2}}\ \frac{aF\sqrt{t}}{\lambda} \ .$$

Tačno rešenje ovog zadatka je dato u knjizi |13| na strani 75. i ono glasi

(2.26) $$T(0,t) = -T_o + \sqrt{\frac{4}{\pi}}\ \frac{aF\sqrt{t}}{\lambda} \ .$$

Razlika izmedju rešenja (2.25) i (2.26) pojavljuje se u numeričkom faktoru, a greška koja se čini kada se mesto tačnog rešenja (2.26) usvoji aproksimativno (2.25) je oko 9%, što sa gledišta prakse predstavlja malo odstupanje. Ovo uporedjivanje opravdava primenu metode pri proučavanju problema prostiranja toplote i u izvesnom smislu garantuje da se ideja razvijena u njoj može iskoristiti pri analizi nelinearnih pojava.

2.2.2. *Gudmanova metoda*

Polazeći od ideje da uspešno primenjena integralna metoda na rešavanje linearnih problema može da se proširi i obuhvati i nelinearne procese Gudman |12,44,45| je razvio postupak baziran na Karman-Polhauzenovoj metodi i uspešno primenio na rešavanje problema procesa prostiranja toplote kroz polubeskonačni štap (slika 2.1) kada se uzima u obzir promenljivost fizičkih karakteristika materijala od temperature. Ova pojava je opisana jednačinom (2.10) u prethodnoj glavi. Ako se pretpostavi da je brzina promene fizičkih osobina materijala mala jednačina (1.10), za jednodimenzioni slučaj, svodi se na

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) . \tag{2.27}$$

Kada se, po Gudmanovoj sugestiji, uvede nova promenljiva

$$v = \int_0^T \rho c \; dT \tag{2.28}$$

koja zavisi od temperature T, jednačina (2.27) se svodi na

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{\partial v}{\partial x} \right) , \tag{2.29}$$

gde je $\alpha = \frac{\lambda}{\rho c}$.

U slučaju polubeskonačnog štapa kada je granični uslov dat gradijentom temperature, granični uslov (2.16) se svodi na

$$\frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{F(t)}{\alpha_0} , \qquad za \quad x = 0, \tag{2.30}$$

gde je α_o koeficijent koji zavisi samo od vremena.

Rešenje jednačine (2.29) može se tražiti u obliku polinoma, kao što je bilo i u slučaju Karman-Polhauzenove metode, a tada će kubni profil za v, s obzirom na granični uslov (2.30) imati oblik

$$v = \frac{F\,\theta}{3\alpha_o}\left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^3 \tag{2.31}$$

Izabrani profil (2.31) obezbedjuje fizički zahtev da preko granice penetracije, $x \geq \theta$, ne postoji protok toplote.

Dalje rešavanje postavljenog zadatka isto je kao i u slučaju Karman-Polhauzenove metode: uvodi se nova promenljiva integralom

$$\delta = \int_0^{\theta(t)} v\,dx\,, \tag{2.32}$$

pa se jednačina (2.29) pomnoži sa dx i izvrši integracija po x od 0 do $\theta(t)$. Ako je početna temperatura $T(x,0) = 0$, nakon navedenih operacija jednačina (2.29) se svodi na

$$\frac{d\delta}{dt} = F(t). \tag{2.33}$$

Promenljiva $\delta(t)$ lako se sračunava iz (2.32) za kubni profil (2.31) i na kraju se jednačina (2.33) svodi na

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{F\,\theta^2}{12\alpha_o}\right) = F(t)\,,$$

odakle se neposredno može izračunati dubina penetracije (t),

$$\theta(t) = 2\sqrt{3}\left(\frac{\alpha_o}{F}\int_0^t F\,dt\right)^{1/2}\,. \tag{2.34}$$

Kada je $F(t) = F = const.$ dubina penetracije (2.34) je

$$\theta = 2\sqrt{3}\sqrt{\alpha_o\,t} \tag{2.35}$$

pa rešenje (2.31) jednačine (2.29) postaje

$$v = \sqrt{\frac{4}{3}}\, F \sqrt{\frac{t}{\alpha_o}}\, \left(1 - \frac{x}{2\sqrt{3\,\alpha_o t}}\right)^3 \quad . \tag{2.36}$$

Ako se, radi uporedjivanja, pretpostavi da su fizičke karakteristike materijala konstantne, iz (2.15) i (2.27) se uočava da je $\alpha_o = a^2$, a tada iz (2.28) sledi da je

$$T = \frac{a^2}{\lambda}\, v \ .$$

Sada je lako iz (2.36) dobiti da je

$$T = \sqrt{\frac{4}{3}}\ \frac{aF\sqrt{t}}{\lambda}\, \left(1 - \frac{x}{2\sqrt{3}\ a\sqrt{t}}\right)^3 . \tag{2.37}$$

Odavde se dobija da je zakon promene površinske temperature

$$q = T(0,t) = \sqrt{\frac{4}{3}}\ \frac{aF\sqrt{t}}{\lambda} \quad . \tag{2.38}$$

Kada se u rešenju (2.26) stavi da je $T_o = 0$ izrazi (2.38) i (2.26) se razlikuju samo za numerički parametar i odmah se uočava da je izraz (2.38) bliži rešenju (2.26) nego što je bio izraz (2.25).

Činjenica da se iz rešenja (2.36) a preko veze (2.28) dobija veoma dobro aproksimativno rešenje (2.37), kada se pretpostavi da su fizičke karakteristike materijala konstantne, pokazuje da je Gudmanov metod ispravan, da je (2.36) dobro aproksimativno rešenje jednačine (2.29) i da je sa zadovoljavajućom tačnošću moguće, pomoću Gudmanove metode, dobiti rešenje nelinearne jednačine (2.27).

Osim navedenih integralnih metoda postoje i mnoge druge kao što su: Jangova |46| , Dorodnjicinova |47| i dr. Mada postoji veliki broj metoda koje su specijalno formulisane i razradjene sa ciljem da reše problem prostiranja toplote opisan ili linearnom (1.11) ili nelinearnom (1.10) jednačinom (Gl. I), ostaje i dalje veliki broj zadataka koje tek treba rešiti. Sa pravom se može konstatovati da je broj nerešenih problema vezanih za pojavu prostiranja toplote neuporedivo veći od broja rešenih problema, što pokazuje da ni pitanje mehanizma ove pojave nije dobilo zadovoljavajući odgovor, niti je današnji stepen razvijenosti matematičkog aparata sposoban da fenomenološki opisanu pojavu uspešno reši.

III GLAVA

VARIJACIONI PRINCIPI

Formulacija Hamiltonovog principa: "Svaki holonomni sistem na koji dejstvuju konzervativne aktivne sile kreće se tako da Hamiltonovo dejstvo ima stacionarnu vrednost na stvarnom putu u poredjenju sa vrednostima na zaobilaznim putevima" |48,49| , stavila ga je u okvir konzervativne mehanike, ograničila mu je primenljivost na uzanu klasu čisto mehaničkih kretanja koja u odnosu na stvarna predstavljaju prilično grubu aproksimaciju, ali je jednovremeno omogućila elegantnim postupcima matematičke analize da reprodukuju rešenja u zatvorenom obliku, čime je estetska strana bila zadovoljena na uštrb fizičke stvarnosti. Kod realnih kretanja uvek dolazi, u većoj ili manjoj meri, do disipacije energije, do odvodjenja dela mehaničke energije na razvoj nemehaničkih pojava koje su parazitski procesi neminovno prisutni pri stvarnim kretanjima dinamičkih sistema (toplota izazvana trenjem, elektricitet i tome slično). Samo u malom broju slučajeva, kada se može smatrati da disipativne sile imaju odredjeni oblik (na pr. da su linearne funkcije brzine), može se formirati tačan izraz za kinetički potencijal, osnovnu karakteristiku i glavni deo Hamiltonovog dejstva. Odsustvo univerzalnog pravila za formiranje Lagranževe funkcije pri proučavanju realnih kretanja čini da Hamiltonov princip ostaje strogo vezan za klasičnu mehaniku konzervativnih kretanja.

Medjutim, osnovna ideja principa, ideja stacionarnosti neke veličine, može se primeniti na proučavanje mnogih procesa koji po klasičnoj podeli fizike izlaze iz okvira mehanike. Da bi ova ideja mogla uspešno da se iskoristi pri proučavanju nemehaničkih pojava, struktura procesa mora biti takva da ga karakteriše konačan broj nezavisnih fizičkih veličina - generalisanih koordinata u širem smislu - što odgovara zahtevu holonomnosti mehaničkog sistema, a samo kretanje treba shvatiti uopštenije, kao što je izneto u I glavi ovog rada.

Mogućnost primene Hamiltonovog principa na proučavanje i rešavanje širokog spektra, često disparatnih, fizičkih pojava posledica je triju osnovnih osobina koje ga karakterišu i čine univerzalnim, a nalaze se u osnovi svakog makrofizičkog procesa; to su:

1. globalnost, jer sadrži integral po vremenu kojim je obuhvaćen ceo vremenski interval u kome se proces odvija i integral po prostoru u kome se proces odvija. Ova osobina isključuje vremenski lokalno proučavanje procesa, prati proces u konačnom vremenskom intervalu, tako da obuhvata i uticaj promene stanja procesa u jednom vremenskom trenutku na promene stanja procesa u sledećim vremenima. U isto vreme egzistencija ovakvog integrala distribuira grešku na čitav prostorno-vremenski interval u kome se proces odvija, što dobijene rezultate prilikom približnih izračunavanja, čini tačnijim;

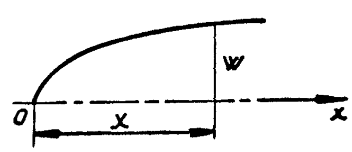
2. minimalnost - svaki proces se odvija tako da je duž stvarnih puteva dejstvo u minimumu. Ideja minimalnosti neke veličine svojstvena je svim principima mehanike bilo da pripadaju grupi diferencijalnih ili integralnih principa. Ova karakteristika svih principa ima duboko fizičko značenje i potiče od činjenice da se prelaskom procesa iz jednog u drugo stanje koristi najmanja "količina" energije, pri čemu u tu količinu energije ulazi i onaj deo koji se "gubi" pri odvijanju stvarnih procesa. Hamiltonov princip zahteva da dinamički sistem bude konzervativan, da se tokom kretanja ukupna mehanička energija kvantitativno ne menja;

3. invarijantnost - dejstvo je invarijantno u odnosu na smenu promenljivih u obliku konačnih transformacija. I ovo svojstvo je zasnovano i obuhvata realnu činjenicu, da stvarni proces ne zavisi od izbora koordinatnog sistema koji je, strogo govoreći, fikcija,ne egzistira u prirodi. Ova misao se odnosi na geometrijski koordinatni sistem, a ne na koordinate o kojima je bilo reči u

glavi ovog rada.

Zbog navedenih osobina koje su tesno povezane sa fizičkom stvarnošću principi i postupci zasnovani ili razvijeni iz Hamiltonovog varijacionog principa dali su vredne rezultate u mnogim oblastima savremene fizike, a u nekim oblastima su jedino orudje pri proučavanju procesa. Mada su veoma snažni i sa širokim spektrom primenljivosti, varijacioni postupci nisu u stanju da kreiraju zakone fizike, već se njihova uloga svodi na izvodjenje jednačina procesa sa potrebnim brojem graničnih uslova koji su propisani već postavljenim zadatkom. Ako ne postoji dovoljan broj informacija o procesu, varijacioni principi su sposobni da daju dopunski broj prirodnih graničnih uslova. Ova činjenica je posebno značajna i predstavlja privilegiju samo varijacionih principa. Kao ilustrativni primer za ovo tvrdjenje može se navesti slučaj oscilovanja žice (sl. 3.1).

Poznato je da je na kraju $x_0=0$ žica učvršćena, dok podaci o drugom kraju, $x_1 = \ell$, nisu poznati.



sl. 3.1

Diferencijalna jednačina oscilovanja žice glasi:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \tag{3.1}$$

gde je $w = w(x,t)$ ugib žice na mestu x, a c^2 koeficijent krutosti. Jedan granični uslov je dat zadatkom, činjenicom da je na kraju $x_0 = 0$ žica učvršćena:

$$w(0,t) = 0 . \tag{3.2}$$

Medjutim o ponašanju funkcije $w(x,t)$ na drugom kraju ništa nije poznato, tako da ne postoji dovoljan broj graničnih uslova za rešavanje zadatka.

Integral dejstva za ovaj slučaj ima oblik

$$I = \int_t \int_x \{ \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial t})^2 - \frac{c^2}{2}(\frac{\partial w}{\partial x})^2 \} \, dx \, dt \, ,$$

pa se njegova varijacija, s obzirom na jednačinu (3.1) i uslov (3.2), svodi na

$$(3.3) \qquad I = \int_x \frac{\partial w}{\partial t} \delta w \Big|_{t_2}^{t_1} dx - c^2 \int_t \frac{\partial w}{\partial x} \delta w \Big|_{x_1 = \ell} dt$$

S obzirom da se varijacija δw na vremenskim granicama t_1 i t_2 anulira, da bi varijacija integrala dejstva (3.3) bila jednaka nuli, mora biti

$$\frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{x_1 = \ell} = 0.$$

Dobijeni izraz je drugi granični uslov (prirodni granični uslov) koji sa uslovom (3.2) čini da je zadatak potpuno definisan.

Ideja o minimalnosti ne potiče od Hamiltona. Još u drugoj polovini XVII veka, tačnije 1662. godine, Pjer Ferma je proučavajući fenomen prelamanja svetlosti iskazao misao da "priroda dejstvuje najlakšim dopuštenim putevima, a ne najkraćim, kao što mnogi misle". Objašnjavajući bliže ovu ideju koja se može primeniti na sve prirodne procese bez izuzetaka, on kaže: "Slično kao Galilej kada je posmatrao kretanje teškog tela i merio odnose ne pomoću rastojanja već vremenom i mi ćemo posmatrati ne najkraća rastojanja ili linije, nego one koje se mogu preći lakše, udobnije i za najkraće vreme".

U klasičnu mehaniku ideju o minimalnosti uvodi I. Bernuli zadatkom brahistohrone: date su dve tačke u vertikalnoj ravni, naći oblik krive linije tako da, spuštajući se niz nju, teško telo predje put izmedju tačaka za najkraće vreme. Rešenje i rešavanje ovog zadatka može se naći u svakom udžbeniku Racionalne mehanike, a njegov najveći značaj leži u tome da je postavio kamen temeljac varijacionom računu i varijacionim metodama.

Medjutim, uspešno korišćenje ideje o minimalnosti u celokupnoj fizici, a ne samo u mehanici, zahteva da se pronadje ona veličina koju treba minimizirati u cilju dobijanja jednačine posmatranog procesa. U svojim radovima o dinamici Lajbnic je tu veličinu nazvao dejstvom, "actio formalis", i ona po Lajbnicu predstavlja proizvod mase materijalne tačke, njene brzine i dužine puta, a kako se dužina puta može predstaviti u obliku proizvoda brzine i vremena, to je veličina dejstva proizvod žive sile i vremena.

Velika zasluga za razvoj ideje minimuma pripada Mopertijiu i njegovom principu najmanjeg dejstva kao univerzalnom zakonu prirode. Mada je svoj princip mistificirao i povezao sa promišlju Stvaraoca, Mopertiji je otvorio put razvoju mnogih metoda koje su dovele do značajnih otkrića u savremenoj fizici. Klasična fizika konzervativnih, reverzibilnih, procesa zasniva se na već navedenom Hamiltonovom principu u kome je dejstvo tačno i jednoznačno odredjeno izrazom

$$I = \int_{t_1}^{t_2} (E_k + U)\, dt ,$$

gde je $L = E_k + U$ Lagranževa funkcija, kinetički potencijal, zbir kinetičke energije i funkcije sile.

Prvi pokušaji da se varijacioni principi mehanike primene na proučavanje i rešavanje nemehaničkih i ireverzibilnih pojava pojavljuju se sredinom XIX veka, a vezani su za imena Bolcmana, Klauzijusa i Čilija. Čili je verovao |50| da je direktno iz Hamiltonovog principa uspeo da izvede drugi princip termodinamike, dok su Bolcman i Klauzijus |51,52| sa pravom bili oprezni tvrdeći da je za rešavanje tog zadatka neophodno suštinski izmeniti Hamiltonov princip, proširiti ga i dati mu drugi smisao. Ta izmena se pre svega odnosi na Lagranževu funkciju, jer se od integrala dejstva zahteva da reprodukuje matematički model nekonzervativnog, ireverzibilnog, procesa.

Fizički smisao Hamiltonovog principa najboje je izražen teoremom Emi Neter |53| i, po mišljenju mnogih fizičara, ona je osnovno orudje za ispitivanje simetrije elementarnih čestica i zauzima centralno mesto u savremenoj teorijskoj fizici, a glasi: "Ako je integral dejstva invarijantan u odnosu na grupu Liovih infinitezimalnih transformacija, kao posledica te invarijantnosti sledi neki prvi integral odgovarajućeg fizičkog sistema". Teorema je proširena i na sisteme sa beskonačno mnogo stepeni slobode i tada glasi: "Ako neka infinitezimalna Liova grupa održava invarijantnim akcioni integral nekog polja, tada kao posledica ove invarijantnosti sledi neki zakon održanja polja tipa divergencije". Danas se osobine elementarnih čestica ispituju isključivo proučavanjem simetrije odgovarajućih Lagranžijana.

U klasičnoj mehanici teorema E. Neter služi za pronalaženje prvih integrala dinamičkih sistema korišćenjem simetrije konfiguracionog prostora i njegovim osobinama invarijantnosti u odnosu na infinitezimalne Liove transformacione grupe. Problem prvih integrala je jedan od osnovnih zadataka svih fizičkih teorija.

3.1. Direktne metode varijacionog računa

Ove metode koje na esencijalni način koriste pomenute osobine globalnosti i minimalnosti (stacionarnosti) razvijene su u ovom veku, a započete u prvoj deceniji radovima Valtera Rica. U prvo vreme su imale čisto akademski karakter, a nalgi razvoj su doživele tokom poslednje tri decenije kada je naročito porastao interes rešavanja nelinearnih problema. Kako teorije rešavanja nelinearnih sistema ne postoje, to su direktne metode varijacionog računa, koje minimiziraju akcioni integral po nekim veličinama, naglo dobile u svom značaju.

Ideja svih ovih metoda je veoma jednostavna, a sastoji se u sledećem: koristeći sve raspoložive informacije koje su poznate o procesu, a dobijene ili iz eksperimentalnih podataka ili iz studije sličnosti samog problema, vrše se osnovne pretpostavke o karakteru rešenja. Ovo rešenje se pretpostavlja u funkcionalnom obliku koji sadrži neke poznate funkcije i nepoznate parametre, pri čemu ovi parametri mogu biti neke funkcije. Posle zamene ovog rešenja u integral dejstva vrši se minimizacija ovako dobijenog izraza po uvedenim nepoznatim parametrima čime se dobija traženo rešenje koje je "optimalno" s obzirom na zadati integral dejstva.

Sa stanovišta stroge matematičke teorije ovakva procedura je samo potreban uslov za egzistenciju minimuma. Dovoljan uslov koji obezbedjuje strogi minimum dobija se ispitivanjem znaka druge varijacije. Medjutim, ovakva ispitivanja su veoma teška i složena, pa se u praktičnim slučajevima ne vrše. Mnogi autori zbog toga za Hamiltonov princip upotrebljavaju oslabljeni izraz "stacionarnog dejstva". Činjenica je, medjutim, da su dugogodišnja ispitivanja raznih problema opisanih preko Hamiltonovog principa pokazala da je integral dejstva u velikom broju slučajeva u strogom minimumu za stvarni proces, mada strogi matematički uslov nije dokazan (Nevzgljadov).

Ove metode su tako dobro izgradjene u matematičkom smislu da se za složene probleme dobijaju rešenja visoke tačnosti.

3.1.1. Ricova metoda

Uspešno korišćenje ove metode je moguće samo kod problema koji dopuštaju varijaciono opisivanje, jer je potrebno odrediti Lagranževu funkciju tako da prva varijacija akcionog integrala izjednačena sa nulom reprodukuje jednačinu posmatranog procesa.

Aproksimativno rešenje se traži u klasi probnih funkcija tako da zadovolji granične uslove problema, a usvaja se kao linearna kombinacija funkcija $\varphi_j(x_i, t)$ od kojih se zahteva da budu diferencijabilne po x_i do potrebnog reda u prostoru V i po t u vremenskom intervalu posmatranja procesa. Drugim rečima rešenje se bira u obliku reda

$$f^*(x_i, t) = \sum_{j=1}^{n} A_j \varphi_j(x_i, t) , \tag{3.1.1}$$

gde su A_j nepoznate konstante. Odredjivanje ovih konstanata vrši se pomoću akcionog integrala

$$I(f^*) \tag{3.1.2}$$

čija prva varijacija izjednačena sa nulom daje jednačinu procesa. U akcioni integral (3.1.2) unese se pretpostavljeno rešenje (3.1.1) i iz zahteva stacionarnosti tako dobijenog integrala dejstva po svim konstantama,

$$\frac{\partial I(f^*)}{\partial A_j} = 0 \,, \tag{3.1.3}$$

a nakon integracije po prostorno-vremenskoj oblasti, u kojoj se proces odvija, dobija se sistem algebarskih jednačina po traženim konstantama A_j.

Oblik aproksimativnog rešenja (3.1.1) istovetan je sa rešenjem (2.12) iz prethodne glave, a koje se odnosi na metodu Galerkina, medjutim procedure odredjivanja konstanata A_j kvalitativno se razlikuju. Dok se u metodi Galerkina minimizacija vrši nad ponderisanim ostatkom jednačine, pri čemu se ponderisanje vrši težinskom funkcijom $\partial f^*/\partial A_j$, u Ricovoj metodi se minimizira akcioni integral koji reprodukuje jednačinu procesa.

Izbor funkcija $\varphi_j(x_i, t)$ u velikoj meri zavisi od intuicije i iskustva istraživača. Njihov srećan izbor dovodi do kvalitetnih aproksimativnih rešenja koja brzo konvergiraju ka tačnim rešenjima.

Metoda posmatrana kao čisto matematički postupak aproksimativnog rešavanja običnih ili parcijalnih diferencijalnih jednačina sa zadatim graničnim uslovima u prvi plan stavlja "srećan" izbor funkcija $\varphi_j(x_i, t)$. Medjutim, ako je diferencijalna jednačina sa početnim i graničnim uslovima matematički model nekog fizičkog procesa o kome postoje informacije dobijene eksperimentalno ili na neki drugi način, tada ti podaci sužavaju krug raspoloživih funkcija i unapred ukazuju na mogući oblik aproksimativnog rešenja, što olakšava istraživaču opredeljivanje pri izboru oblika funkcija $\varphi_j(x_i, t)$.

Veća tačnost aproksimativnog rešenja postiže se usvajanjem većeg broja članova reda (3.1.1), ali se tada procedura vremenski produžava, a sistem algebarskih jednačina iz kojih se dobijaju konstante A_j se komplikuje. Ovo povećanje broja članova reda (3.1.1) ne obezbedjuje uvek brzu konvergenciju aproksimativnog ka stvarnom rešenju. Zbog toga se poslednjih godina razvijaju druge metode koje su u stanju da reprodukuju aproksimativna rešenja visoke tačnosti.

3.1.2. Kantorovičeva metoda delimične integracije

Kantorovičeva metoda |54,55| je naročito pogodna, jer brzo i lako dovodi do aproksimativnih rešenja visoke tačnosti, pri rešavanju prostorno dvodimenzionih ili jednodimenzionih problema, a specijalno kada se dubina penetracije, o kojoj je bilo reči u pret hodnoj glavi, usvoji kao generalisana koordinata.

Konstatacija izneta u prethodnoj glavi, da se pri proučavanju mnogih procesa aproksimativna rešenja traže u klasi probnih funkcija koje zavise od prostornih koordinata x_i i skupa vremenski promenljivih parametara $A_m(t)$, u punoj meri se odnosi na metodu Kantorovića. U njoj se aproksimativno rešenje specificira po jednom argumentu, a drugi uvodi skupom neodredjenih parametara koji zavise od tog argumenta. Zahtev da prva varijacija akcionog integrala, koji reprodukuje jednačinu procesa, identički iščezava i dovodi do sistema običnih diferencijalnih jednačina uvedenih parametara po drugom argumentu. Granični uslovi zadatka vezani za taj drugi argument postaju početni uslovi za odredjivanje integracionih konstanata dobijenog sistema običnih diferencijalnih jednačina.

Sličnost ideje i oblika probne funkcije u Ricovoj i Kantorovičevoj metodi navodi na uporedjivanje i ukazivanje na razlike koje medju njima postoje. Aproksimativno rešenje u Ricovoj metodi sadrži skup linearno nezavisnih funkcija po svim argumentima i skup nepoznatih konstanata koje se odredjuju iz uslova stacionarnosti akcionog integrala po tim konstantama. Uvedene linearno nezavisne funkcije su potpuno specificirane po svim argumentima i od njih se zahteva da zadovolje početne i granične uslove zadatka. Tako formirano aproksimativno rešenje unosi se u akcioni integral, postavi zahtev njegove stacionarnosti po svim nepoznatim konstantama, izvrši integracija na taj način dobijenih izraza po svim argumentima u prostornoj ili prostorno-vremenskoj oblasti posmatranja procesa, što konačno dovodi do sistema algebarskih jednačina po uvedenim neodredjenim konstantama.

Aproksimativno rešenje u metodi Kantoroviča sadrži skup linearno nezavisnih potpuno specificiranih funkcija po jednom argumentu ($\varphi_m(x_i)$ koje zadovoljavaju granične uslove zadatka vezane za taj argument i skup proizvoljnih parametara $A_m(y_i)$ koji zavise od drugog argumenta. Prema iznetom aproksimativno rešenje se traži u klasi probnih funkcija oblika

$$f^* = \sum_{m=1}^{M} F(\varphi_m(x_i),\ A_m(y_i)). \tag{3.1.4.}$$

Aproksimativno rešenje (3.1.4) stavlja se u akcioni integral, izvrši integracija po argumentu od koga zavise specificirane funkcije $\varphi_m(x_i)$, a zatim postavi zahtev iščezavanja prve varijacije sračunatog akcionog integrala koji u sebi sadrži proizvoljne parametre $A_m(y_i)$. Variranje se vrši po parametrima $A_m(y_i)$, a kako su oni linearno nezavisni, to su i njihove varijacije nezavisne, pa uslov identičke jednakosti prve varijacije akcionog integrala sa nulom dovodi do sistema običnih diferencijalnih jednačina parametara $A_m(y_i)$ po argumentu y_i.

Razlika prikazanih metoda je očigledna, a problem "srećnog" odredjivanja specificiranih funkcija prisutan je u obe metode.

U ovom radu se koristi izneti metod Kantoroviča, jer se aproksimativno rešenje traži u klasi probnih funkcija sa dubinom penetracije.

3.2. Novije varijacione formulacije

Poslednjih decenija problemi prenosa predstavljaju ozbiljan izazov plejadi vrhunskih naučnika od kojih se očekuju zadovoljavajući odgovori na pitanja proistekla iz ove problematike povezane sa različitim oblastima realnosti i za koje se može reći da imaju multidisciplinarni karakter.

U cilju korišćenja preimućstva koje pruža varijaciono opisivanje procesa, koja su pomenuta, poslednjih godina bilo je vrlo mnogo pokušaja da se i klasični nekonzervativni sistemi, koji tradicionalno ne pripadaju poznatim varijacionim formulacijama, opišu preko izvesnih varijacionih iskaza. Svi ovi principi imaju zajedničku karakteristiku, da na veći ili manji način krše osnovne postulate klasičnog varijacionog računa, a potiču iz proučavanja ireverzibilnih procesa termodinamike. Galerija ovih pokušaja obiluje nizom različitih ideja o obliku funkcionala koji treba da reprodukuje matematički model procesa, od uvodjenja "zamrznutih funkcija", imaginarnih sistema, pri čemu ostaje diskutabilno pitanje fizikalnosti uvedenih veličina, do odbacivanja komutativnósti operacija variranja i diferenciranja. Izvesna grupa autora (Bio i dr.) potpuno odbacuje ispitivanje funkcionala, već uvodjenjem veličina koje su slične sa veličinama klasične mehanike neposredno iz Lagranževih jednačina dolazi do jednačina procesa. Medjutim, rešavanje konkretnih problema neostvarljivo je bez prethodnog specificiranja oblika aproksimativnog rešenja, a cilje je svih ovih principa i metoda da dobijeno približno rešenje bude što bliže stvarnom. Razvoj ovih metoda bi bio besmislen kada bi postojao tačan matematički algoritam za rešavanje parcijalnih i običnih diferencijalnih jednačina bez obzira na njihov red i strukturu.

3.2.1. Glansdorf - Prigožinov princip lokalnog potencijala

Tvorci principa lokalnog potencijala imali su ambicioznu želju da formulišu termodinamičku funkciju koja bi za disipativne sisteme igrala ulogu Lagranževe funkcije u mehanici |56| . Pri tome usvajaju osnovna načela Onsagerističke termodinamike: zakon linearnosti i postulat simetričnosti fenomenoloških koeficijenata, o čemu je bilo reči u glavi I ovog rada. Valja napomenuti da je Onsageristička termodinamika zadnjih godina podvrgnuta ozbiljnoj i oštroj kritici (Truzdel i dr.) upravo zbog postulata o simetričnosti fenomenoloških koeficijenata koji ne dopuštaju, na primer, egzistenciju naponskih spregova u mehanici neprekidnih sredina, a njihovo postojanje je dokazano i eksperimentalno i kroz teorijske radove velikog broja istraživača, medju kojima je veoma značajno mesto zauzimao naš, u zenitu naučnog stvaralštva, preminuli profesor dr Rastko Stojanović. Mada Glansdorf i Prigožin pri razvoju svog principa polaze od teoreme o produkciji entropije, pri formiranju funkcionala koriste ideju Rozena o delimičnom variranju.

U cilju da se pri proučavanju i nalaženju aproksimativnih rešenja nepovratnih procesa termodinamike iskoristi Ricov direktni metod, ideja Rozena je bila da se formira funkcional koji sadrži i funkcije, "zamrznute funkcije", koje ne podležu variranju, ali se nakon variranja specificiraju tako da se dobija željena diferencijalna jednačina. Tako na primer, za linearnu diferencijalnu jednačinu prostiranja toplote funkcional ima oblik

$$L = \rho c T Y + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)^2 ,$$

a u njemu je funkcija Y "zamrznuta funkcija", funkcija koja je konstantna u odnosu na variranje, ali koja se nakon variranja integrala

$$(3.2.1) \qquad \int_V \left\{ \rho c T Y + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)^2 \right\} dV ,$$

proglašava za $\partial T/\partial t$.

Pogodnim izborom funkcionala uz specificiranje "zamrznutih funkcija" moguće je varijaciono formulisati svaku diferencijalnu jednačinu. U pitanje fizičkog značenja "zamrznutih funkcija" Rozen se nije upuštao, već svoju ideju preporučuje kao jedan uspešan algoritam pri iznalaženju aproksimativnih rešenja zadataka linearnih ireverzibilnih procesa.

Kao lokalni potencijal Glansdorf i Prigožin definišu vremenski integral Rozenovog akcionog integrala, s tim što "zamrznute funkcije" odmah specificiraju. Na primer, za slučaj linearnog provodjenja toplote Rozenov integral je oblika (3.2.1), a lokalni potencijal po Glansdorfu i Prigožinu:

$$(3.2.2) \qquad \Psi = \int_t \int_V \left\{ \rho c T \frac{\partial T^o}{\partial t} + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)^2 \right\} dt \, dV .$$

Zamrznuta temperatura T^o je konstantna u odnosu na variranje, ali se nakon obavljene te operacije izjednačava sa temperaturom T što dovodi do poznate linearne jednačine prostiranja toplote. Samo dobijanje jednačine procesa iz lokalnog potencijala nema naročitu vrednost ako nije u stanju da dovede do aproksimativnog rešenja zadovoljavajuće tačnosti. Reprodukcija takvog rešenja je jednovremeno i potvrda ispravnosti principa.

Efikasna primena principa pri rešavanju konkretnih graničnih problema vrši se prethodnim izborom aproksimativnog rešenja u klasi probnih funkcija koje zadovoljavaju granične i početne uslove zadatka. Pri tome se koriste probne funkcije ili oblika (2.8) ili (2.9). Dualitet intenzivne veličine stanja čija se promena polja u prostoru i vremenu proučava zadržava se i u aproksimativnom rešenju. Ako, na primer, probno rešenje sadrži proizvoljne funkcije vremena, tada one u "zamrznutom" aproksimativnom rešenju, koje se stavlja u lokalni potencija,ne podležu variranju, već se posle svih obavljenih potrebnih operacija izjednačavaju sa odgovarajućim funkcijama u "nesmrznutom" rešenju. Postupak za dobijanje aproksimativnih rešenja, prema tome, isti je kao i pri dobijanju diferencijalne jednačine procesa. Pokazalo se da su rešenja dobijena ovim postupkom veoma dobra i zbog toga su učinjeni pokušaji da se dualistička priroda fizičkih veličina u lokalnom potencijalu fizički opravda. Prigožin, jedan od tvoraca iznete metode, svestan da je makroskopski evidentirana promena temperaturskog polja neke sredine odraz zbivanja u mikrosvetu, razdvajanje temperature na: T koja podleže variranju i T^o koja je konstantna u odnosu na variranje, objašnjava na sledeći način: T^o je srednja temperaturska raspodela koja zadovoljava Furijeovu jednačinu, dok je T raspored temperature posmatran kao fluktuirajuća veličina. Izjednačavanje T^o sa T posle variranja objašnjava na sledeći način: "najverovatnija raspodela temperature u odnosu na male fluktuacije mora se u opštem slučaju poklapati sa srednjom raspodelom u odnosu na sve fluktuacije" |57| .

Mada je ideja ove metode uspešno iskorišćena pri proučavanju mnogih nepovratnih procesa, ostavljeno je intuiciji i umešnosti istraživača da u funkcionalu izabere "zamrznute funkcije" (srednje vrednosti) koje ne podležu variranju i funkcije (fluktuirajuće veličine) koje se variraju. Kada se i pod kojim uslovima fizičkoj veličini može pripisati dualistička priroda ostaje otvoreno pitanje, a Šehter jednostavno konstatuje da je to (dualitet): "cena koja se mora platiti za opšti varijacioni princip" |55| .

Sloboda pri izboru zamrznutih funkcija omogućila je da se ideja, u suštini Rozenova, o formiranju funkcionala sa fizičkim veličinama dualističke prirode iskoristi pri proučavanju mnogih disipativnih pojava, a posebno za transportne procese i Onsagerističku termodinamiku nepovratnih procesa.

3.2.2. Bejtmenov princip konjugovanih funkcija

U skupu mnogih pokušaja da se dobiju aproksimativna rešenja zadovoljavajuće tačnosti disipativnih pojava korišćenjem preimućstava koja pruža varijaciono opisivanje procesa značajno mesto zauzima Bejtmenov princip formulisan 1929. godine. Kako je u poslednje tri decenije naglo poraslo interesovanje prema nepovratnim i disipativnim pojavama, to su i sve ranije metode vezane za ove oblasti doživele renesansu. Najveća zasluga za oživljavanje Bejtmenove ideje konjugovanih funkcija imaju Morze i Fešbah |58| koji su uspeli da prvobitno razvijenu ideju na primeru matematičkog modela nekonzervativnog mehaničkog sistema primene na linearnu jednačinu provodjenja toplote.

U želji da se varijaciono formuliše disipativni proces, koji se po strogim Hamiltonovim kriterijumima ne može na taj način opisati, po ideji Bejtmena uvodi se u Lagranžijan pored realne funkcije i imaginarna, pridružena, apstraktna funkcija koja nema fizičko značenje, niti je u nekoj matematičkoj vezi sa realnom funkcijom. Uvodjenjem ovakve funkcije koja je u odnosu na variranje ravnopravna sa realnom i čije varijacije, isto kao i kod realne funkcije, iščezavaju na granici S oblasti V u kojoj se proces posmatra, postiže se da akcioni integral reprodukuje dve jednačine, jer su realna i imaginarna funkcija nezavisne, od kojih jedna predstavlja jednačinu procesa, a druga daje jednačinu bez fizičkog značenja.

Slučaj linearnih prigušenih oscilacija je jednostavan proces u kome dolazi do disipacije energije i zbog toga je zgodan kao ilustrativni primer primene Bejtmenove ideje. Ako je $q(t)$ realna generalisana koordinata, a $q^*(t)$ imaginarna, apstraktna, generalisana koordinata, tada, saglasno ideji Bejtmena, treba formirati Lagranževu funkciju oblika $L(q,q^*,\dot{q},\dot{q}^*)$ tako da se iz uslova stacionarnosti akcionog integrala $\int_t L\,dt$ po obe generalisane koordinate dobije jednačina

(3.2.3) $$\ddot{q} + 2b\dot{q} + \omega^2 q = 0$$

U ovom slučaju Lagranževa funkcija je oblika

$$L = \dot{q}\dot{q}^* + b(\dot{q}^*q - \dot{q}q^*) - \omega^2 qq^* \;,$$

pa akcioni integral

$$I = \int_t \{\dot{q}\dot{q}^* + b(\dot{q}^*q - \dot{q}q^*)\ \omega^2 qq^* \}\ dt$$

reprodukuje dve jednačine, od kojih je jedna, uz varijaciju δq^*, baš jednačina (3.2.3), a druga, uz varijaciju δq:

$$\ddot{q}^* - 2b\dot{q}^* + \omega^2 q^* = 0 \;,$$

predstavlja model sistema bez fizičkog značenja. Jednačina (3.2.3) se može dobiti i iz integrala dejstva oblika

(3.2.3a) $$I = \int_t \frac{1}{2}\,(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2)\ e^{2bt}\ dt \;,$$

bez uvodjenja neke nove apstraktne koordinate čiji fizički smisao nije jasan. Ovaj jednostavan primer opravdava ranije iznetu konstataciju da je za jednu diferencijalnu jednačinu moguće formirati više akcionih integrala koji se suštinski razlikuju, a to je posledica nedostatka univerzalnog algoritma koji bi dovodio do jedinstvenog funkcionala za jednu jednačinu.

Ovu konstataciju potvrdjuje i činjenica da se korišćenjem ideje Bejtmena može dobiti i linearna jednačina prostiranja toplote iz akcionog integrala oblika

$$(3.2.4) \qquad I = \int_t \int_V \{\tfrac{1}{2}(\frac{\partial T}{\partial t} T^* - \frac{\partial T^*}{\partial t} T) + a^2 \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial T^*}{\partial x_i}\} dt\, dV \,,$$

gde je T^* pridružena temperatura potpuno nezavisna od realne T , a koja, iz uslova stacionarnosti integrala (3.2.4), zadovoljava jednačinu

$$(3.2.5) \qquad \frac{\partial T^*}{\partial t} + a^2 \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_i^2} = 0$$

Sa matematičke tačke gledišta ova jednačina je ravnopravna sa svim parcijalnim jednačinama i sigurno je da postoji takva funkcija $T^*(x_i, t)$ koja nju zadovoljava, ali je teško pronaći realan proces čiji bi ona bila matematički model. Zbog toga Morze i Fešbah, tvorci integrala (3.2.4), funkciji T^* ne nameću uslove koje treba da zadovolji na granici S oblasti V, niti početni uslov, osim da na granici S varijacija δT^* izščezava. Drugim rečima, ona im služi kao pomoćno orudje pri dobijanju jednačine prostiranja toplote iz integrala (3.2.4). Činjenica da funkcija T^* ne remeti reprodukciju jednačine procesa iz akcionog integrala i da ne podleže bilo kakvim restrikcijama olakšavajuća je okolnost pri proučavanju konkretnog procesa, jer dopušta da se izabere u s najpogodnijem obliku pri traženju aproksimativnog rešenja.

U prethodnom odeljku je naveden akcioni integral (3.2.2), sa zamrznutom temperaturom T^0 iz koga se na opisani način može dobiti jednačina prostiranja toplote, ali se toj temperaturi ne može dati tačno fizičko značenje, mada je Prigožin nju želeo da poveže sa srednjom temperaturskom podelom. Oblici akcionih integrala kvalitativno se razlikuju, jer se u prvom zamrnuta temperatura nakon izvršenih operacija izjednačava sa realnom, dok se u drugom pridružena temperatura ničim ne definiše. Ova činjenica i formiranje akcionih integrala u principu iščezavajućeg parametra i principu sa nekomutativnim varijacijama, o kojima će kasnije biti reči, nedvosmisleno pokazuju da varijaciono formulisanje realnih procesa ima za cilj dobijanje aproksimativnih rešenja čija se tačnost kontroliše eksperimentalno dobijenim rezultatima. Sve varijacione pristupe za sada treba posmatrati u tom svetlu, mada u osnovi osobine varijacionih pristupa Hamiltonovog tipa imaju veoma duboko fizičko značenje.

3.2.3. Bioov princip

Bioov princip se kvalitetno razlikuje od iznetih principa, jer ne poseduje Lagranževu funkciju, a time ni akcioni integral čija varijacija dovodi do jednačine procesa, ne koristi direktne metode varijacionog računa i zbog toga bi se pre mogao nazvati kvazivarijacioni metod. Metoda M. Bioa u suštini je pokušaj da se formiraju Lagranževe jednačine nepovratnih procesa termodinamike koje su slične sa jednačinama disipativnih sistema u mehanici, da formulacijom disipativne funkcije i termičkog potencijala koje bi bile analogni disipativnoj funkciji i potencijalnoj energiji u mehanici, pa korišćenjem Lagranževih jednačina druge vrste, dodje do jednačina nepovratnih termodinamičkih procesa. Izvodjenje jednačina procesa jeste kvalitet, ali bez praktičnog značaja, ako ne može dovesti do valjanih aproksimativnih rešenja. Zbog toga pri rešavanju konkretnih zadataka M. Bio i njegovi sledbenici uvode kao generalisane koordinate fizičke veličine zavisne od vremena, a od čije promene zavisi polje, na primer, temperature kada se metoda primenjuje na proučavanje fenomena prostiranja toplote. Na taj način postiže se, potpuna analogija sa klasičnom mehanikom.

Metoda je formulisana i razvijena sa ciljem da se dodje do aproksimativnih rešenja pojave prostiranja toplote. U tom se cilju postulira egzistencija vektorskog polja toplotnog fluksa $\vec{H}$ čiji vremenski izvod $\partial \vec{H}/\partial t$ predstavlja gustinu fluksa kroz površinu S, a kolinearan je sa normalom te površine |59,60| . Pomoću uvedenog vektora $\vec{H}$ jednačina energijskog bilansa se piše u obliku

$$\int_S H_i n_i \, dS + \int_V \rho c \theta \, dV = 0$$

gde je θ odstupanje temperature od ravnotežne, što primenom teoreme o divergenciji dovodi do

(3.2.6) $$\rho c \theta + div \vec{H} = 0.$$

S obzirom da u izrazu (3.2.6) ne postoji vremenski izvod M. Bio mu, dosledan stavu traženja analogija sa klasičnom mehanikom, pripisuje svojstvo holonomne veze.

Jednačina prostiranja toplote, po Biou, zapisuje se u obliku

(3.2.7) $$grad\theta + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0 ,$$

koja povezana sa (3.2.6) čini, sa matematičke tačke gledišta, sistem iz koga se može, bar teorijski, odrediti skalarno polje temperature θ i vektor toplotnog fluksa $\vec{H}$.

Medjutim, ako se izvrši integracija jednačine (3.2.7), koja se prethodno pomnoži sa $\delta\vec{H}$, po oblasti V, iskoristi teorema divergencije i relacija (3.2.6), dobija se

(3.2.8) $$-\int_V \{\theta div(\delta\vec{H})\}\, dV + \int_V \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\,\delta\vec{H}\, dV = -\int_S \theta\vec{n}.\delta\vec{H}\, dS .$$

Relacija (3.2.8) se može napisati u obliku

(3.2.9) $$\delta U + \delta D + \int_S \theta\vec{n}.\delta\vec{H}\, dS = 0,$$

gde je

(3.2.10) $$U = \frac{1}{2}\int_V \rho c \theta^2\, dV$$

veličina koju Bio naziva "termički potencijal", a

(3.2.11) $$D = \frac{1}{2}\int_V \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\right)^2 dV$$

sa nazivom "disipativna funkcija".

Ako se veličine U i D postuliraju izrazima (3.2.10) i (3.2.11), a relacija (3.2.9) prihvati kao iskaz varijacionog principa, tada se lako, uz pomoć "holonomne veze" (3.2.6), dolazi do Furijeove jednačine

(3.2.12) $$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} = div\ (\lambda\ grad\,\theta\ ) .$$

Pri traženju aproksimativnog rešenja u klasi probnih funkcija Bio usvaja da vektor toplotnog fluksa $\vec{H}^*$ i polje temperature θ^* zavise, pored prostornih koordinata x_i vremena t, i od skupa "generalisanih koordinata" q koje zavise samo od vremena tako da je

(3.2.13) $$\vec{H}^* = \vec{H}^*(q_\nu, x_i, t)$$

i

(3.2.14) $$\theta^* = \theta^*\ (q_\nu, x_i, t) .$$

Varijacije ovih funkcija, $\delta\vec{H}^*$ i $\delta\theta^*$, zavise samo od varijacija δq_ν . S obzirom na ovako usvojene probne funkcije (3.2.13) i (3.2.14) varijacioni princip (3.2.9) reprodukuje jednačinu

(3.2.15) $$\frac{\partial U}{\partial q_\nu} + \frac{\partial D}{\partial q_\nu} = Q_\nu ,$$

koja je po obliku identična sa jednačinom za disipativne sisteme klasične mehanike, s tim što generalisane koordinata q_ν imaju smisao iznet u I glavi, a generalisane sile Q_ν se definišu na isti način kao i u klasičnoj mehanici,

$$\sum_\nu Q_\nu\ q_\nu = \int_S \theta\,\vec{n}_i\,\delta\vec{H}\,dS ,$$

kao "rad izvršen temperaturom θ na virtualnom pomeranju $\delta\vec{H}$".

Ako se temperatursko polje pretpostavi u obliku linearne kombinacije generalisanih koordinata q_ν sa stacionarnim poljima $\theta_\nu(x_i)$,

$$\theta^* = \sum_{\nu} q_\nu \theta_\nu ,$$

tada se za termički potencijal (3.2.10) i disipativnu funkciju (3.2.11) dobijaju kvadratne forme

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\nu\mu} a_{\nu\mu} q_\nu q_\mu \quad i \quad D = \frac{1}{2} \sum_{\nu\mu} b_{\nu\mu} q_\nu q_\mu ,$$

sa simetričnim matricama $\{a_{\nu\mu}\}$ *i* $\{b_{\nu\mu}\}$, a Lagranževa jednačina (3.2.15) postaje

$$\sum_{\mu} a_{\nu\mu} q_\mu + \sum_{\mu} b_{\nu\mu} q_\mu = Q_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

Analogija sa klasičnom mehanikom sada je potpuna.

Primenjujući svoj metod pri proučavanju problema prostiranja toplote kroz čvrsta tela M. Bio je uočio da je za generalisane koordinate q_ν najpogodnije izabrati površinsku temperaturu i dubinu penetracije. Izbor dubine penetracije za jednu od generalisanih koordinata učinio je da se Bioovim principom mogu rešavati samo jednodimenzioni problemi.

Pri izboru oblika aproksimativnog rešenja u klasi probnih funkcija preporučljivo je da ono (aproksimativno rešenje) unapred zadovolji početne i granične uslove zadatka. Ovaj zahtev je relativno lako zadovoljiti za granične uslove prve i druge vrste, medjutim u slučaju radijacionih graničnih uslova, kada su oni dati fluksom, nije lako pretpostaviti oblik aproksimativnog rešenja koji će zadovoljiti ovaj uslov. Zbog toga je T. Lardner |61| predložio da se jednačini (3.2.15) pridruži bilansna jednačina

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho c \theta \, dV - \int_S F \, dS = 0 ,$$

gde je F toplotni fluks na granici S oblasti V, koja zbog (3.2.6) prelazi u

$$\left. \frac{\partial \vec{H}^*}{\partial t} \right|_S = F . \tag{3.2.16}$$

Izrazom (3.2.16) uspostavlja se veza izmedju nezavisnih generalisanih koordinata q_ν pa se njihov broj smanjuje na $n - 1$. Ovim postupkom Lardner je uspeo da reši nelinearne jednodimenzione probleme sa konstantnim, konvektivnim i radijacionim fluksom na površini. Lardnerova ideja je iskorišćena i u ovom radu, što je dovelo do svodjenja parcijalne jednačine na običnu diferencijalnu jednačinu sa jednom nepoznatom funkcijom.

3.2.4. Princip iščezavajućeg parametra

Na osnovu obimnih matematičkih ispitivanja koja datiraju još od vremena Bolce (1890) sa sigurnošću je utvrdjeno da parabolična jednačina prostiranja toplote nema egzaktnu Lagranževu gustinu čiji bi varijacioni izvod reprodukovao jednačinu (1.11). U svojim radovima |62-64| B. Vujanović je pokazao da se generalisana jednačina prostiranja toplote (1.12b) može izvesti iz tačnog Lagranžijana

$$(3.2.17) \qquad L = \left\{ \frac{\rho c k}{2} \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)^2 - \frac{\lambda}{2} \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j}\right)^2 \right\} e^{t/k} .$$

Zaista, prostom zamenom (3.2.17) u Ojler-Lagranževu jednačinu

$$(3.2.18) \qquad \frac{\partial L}{\partial T} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{T}} - \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial L}{\partial T,_j} = 0$$

Lako se dobija da je (3.2.18) ekvivalentno sa (1.12b). I obrnuto, jednačina (1.12b) predstavlja varijacioni zadatak o pronalaženju stacionarne vrednosti integrala

$$(3.2.19) \qquad I = \int_{t_1}^{t_2} \int_V L \, dV \, dt ,$$

gde je L dato sa (3.2.17). Drugim rečima, varijaciona jednačina $\delta I = 0$ pod standardnim restrikcijama za varijacije:

$$\delta T/_{t_1} = \delta T/_{t_2} = 0 \qquad i \qquad \delta T/_S = 0$$

gde je S granična površina oblasti V, ekvivalentna je generalisanoj jednačini prostiranja toplote. Interesantno je i vredno podvući da za generalisanu jednačinu (1.12b) postoji tačna varijaciona formulacija, dok za klasičnu Furijeovu jednačinu (1.11) ovakva mogućnost ne postoji. Prirodno se nameće pitanje: dali je mogućnost varijacionog opisivanja prirodne pojave povezana sa ispravnošću njenog reološkog modela? Odgovor na ovo važno i interesantno pitanje za sada nije sasvim jasan, te su neophodna ispitivanja u tom pravcu.

Varijacionu formulaciju (3.2.19) B. Vujanović je upotrebio kao polaznu tačku za rešavanje klasičnih problema linearnog i nelinearnog provodjenja toplote nalažući sledeće pravilo na varijacioni mehanizam koje glasi: kada je variranje akcionog integrala završeno, a nakon deobe sa faktorom $e^{t/k}$, nužno je primeniti granični proces

$$k \to 0\,, \tag{3.2.20}$$

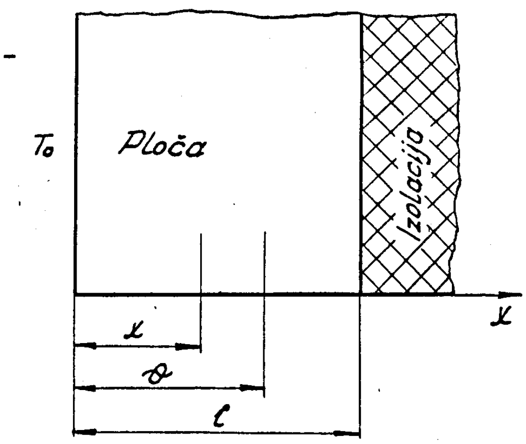
što je i prirodno s obzirom na primedbu navedenu neposredno posle jednačine (1.12b). Ovo pravilo opravdava usvojeni termin "princip izščezavajućeg parametra".

Od interesa je napomenuti da je princip iščezavajućeg parametra, kao metoda za dobijanje aproksimativnih rešenja, primenjen i u slučajevima nelinearnih ireverzibilnih fenomena koji nisu u direktnoj vezi sa prostiranjem toplote. U tim oblastima fizički smisao parametra k nije jasan, mada se rezultati dobijeni preko ovog principa veoma dobro slažu sa poznatim rešenjima koja su dobijena drugim metodama.

Nelinearna varijanta ove varijacione formulacije biće navedena u IV glavi.

Sama reprodukcija jednačine (1.11) iz Lagranžijana (3.2.17) uz uslov (3.2.20) još nije garancija ispravnosti principa. Tek ako je on u stanju da dovede do dobrih aproksimativnih rešenja posmatranog procesa, može se bez rezerve prihvatiti kao ispravan metod pri proučavanju postavljenog zadatka. U tom cilju se iznosi sledeći primer čiji je zadatak dvojak: 1. da ilustruje kako se metoda efektivno primenjuje i 2. da pokaže da su aproksimativna rešenja njome dobijena visoke tačnosti u poredjenju sa tačnim rešenjima.

Kao ilustrativni primer izabran je problem rasporeda temperaturskog polja u ravnom zidu konačne dužine (sl. 3.2.) sa konstantnim termofizičkim osobinama. Rešenje ovog problema postoji i može se naći u monografiji |59| , str. 16-19.



Sl. 3.2

Čeona površina ravnog zida, $x = 0$, dovede se u kontakt sa telom stalne temperature T_o i ona se održava konstantnom tokom procesa, tako da je i temperatura čeone površine za sve vreme procesa konstantna i jednaka T_o. Druga površina zida je izolovana i ne dolazi do razmene toplote tela preko nje sa spoljašnjim ambijentom. Neka je pre uspostavljanja kontakta izmedju zida i tela temperature T_o, temperatura zida bila $T(x,0) = 0$.

Proce se može podeliti u dve faze: prva se odnosi na proučavanje temperaturskog polja u zidu do trenutka t_1 kada toplotni poremećaj dospe do izolovane površine $x = \ell$, a druga na proučavanje zagrevanja izolovane površine.

Lagranževa funkcija

$$L = \{ c\,\frac{k}{2}\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)^2 - \frac{\lambda}{2}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 \}\, e^{t/k} \,, \tag{3.2.21}$$

korišćenjem Ojler-Lagranževih jednačina (3.2.18) dovodi do Furijeove jednačine za jednodimenzioni slučaj prostiranja toplote, u koji spada i izabrani primer, kada se granični proces (3.2.20) izvrši tek posle deobe izraza dobijenog preko Ojler-Lagranževe jednačine sa $e^{t/k}$. Redosled pomenutih operacija je bitan i uvek se mora prvo izvršiti deoba sa $e^{t/k}$, a zatim pristupiti graničnom procesu (3.2.20).

U akcionom integralu

$$I = \int_{t_o}^{t_1} \int_{0}^{\Theta} L \, dt \, dx \, , \tag{3.2.22}$$

gde je $\Theta = \Theta(t)$ dubina penetracije, oblast integracije je od 0 do Θ, jer preko granice penetracije, $x \geq \Theta$, ne dolazi do termičkog poremećaja. Zbog toga prvoj fazi odgovaraju granični uslovi $T(0,t) = T_o$ i $T(\Theta,t) = 0$, pa se aproksimativno rešenje pretpostavlja u obliku

$$T = T_o(1 - \frac{x}{\Theta})^2 \, , \tag{3.2.23}$$

jer očigledno zadovoljava granične uslove. Prema tome, aproksimativno rešenje se traži u klasi probnih funkcija sa dubinom penetracije koja ima ulogu generalisane koordinate, a njena funkcionalna zavisnost od vremena se odredjuje Kantorovičevom metodom delimične integracije.

Stavljanjem aproksimativnog rešenja (3.2.23) u Lagranžijan (3.2.21) dobija se

$$L = \{2ck \frac{T_o^2 x^2 \dot{\theta}^2}{\theta^4}(1 - \frac{x}{\theta})^2 - 2\lambda \frac{T_o^2}{\theta^2} (1 - \frac{x}{\theta})^2 \} \, e^{t/k} \, ,$$

što uneto u akcioni integral (3.2.22) posle integracije po x dovodi do

$$I = \int_t (\frac{ck \, T_o^2}{15} \frac{\dot{\theta}^2}{\theta} - \frac{2}{3} \frac{\lambda T_o^2}{\theta}) \, e^{t/k} \, dt \, .$$

Pri variranju ovog integrala usvaja se komutativnost operacija variranja i diferenciranja, pa se posle sredjivanja dobija

$$\delta I = \int_t \{- \frac{c \, T_o^2}{15} \frac{2\theta\dot{\theta} + k(2\theta\ddot{\theta} - \dot{\theta}^2)}{\theta^2} + \frac{2}{3} \frac{\lambda T_o^2}{\theta^2}\} \, e^{t/k} \, \delta T \, dt \, .$$

Iz uslova stacionarnosti $\delta I = 0$ dobija se izraz koji podeljen sa $e^{t/k}$ dovodi do

$$2\lambda - \frac{2}{5} c\,\theta\dot{\theta} = \frac{1}{5} c\, k(2\,\theta\ddot{\theta} - \dot{\theta}^2) ,$$

a kada se, saglasno uslovu (3.2.20), izvrši granični proces dolazi se do veoma jednostavne obične diferencijalne jednačine

$$\theta\dot{\theta} = 5\,\frac{\lambda}{c} .$$

čije se rešenje, s obzirom na početni uslov da je za $t = 0$ i $\theta = 0$

$$\theta = \sqrt{10\,\frac{\lambda}{c}\,t} = 3.16\sqrt{\frac{\lambda}{c}\,t} ,$$

dobro slaže sa Bioovim rešenjem $\theta = 3,36\sqrt{\frac{\lambda}{c}\,t}$.

Vreme t_1 kada se prva faza završava, potrebno da toplotni poremećaj stigne do izolovane površine $x = \ell$, je

$$t_1 = 0,1\,\frac{c\,\ell^2}{\lambda} ,$$

a po Biou ono iznosi $t_1 = 0,0885\,\frac{c\,\ell^2}{\lambda}$, što opet predstavlja dobro slaganje.

S obzirom da drugoj fazi odgovaraju granični uslovi $T(0,t) = T_0$ i $T(\ell,t) = q$, gde je $q = q(t)$ temperatura na izolovanoj površini $x = \ell$, koja se usvaja za generalisanu koordinatu, aproksimativno rešenje se pretpostavlja u obliku

$$T = (T_0 - q)(1 - \frac{x}{\ell})^2 + q .$$

Lagranževa funkcija (3.2.21) postaje

$$L = \{ \frac{c\,k}{2}\,\dot{q}^2\,(2\frac{x}{\ell} - \frac{x^2}{\ell^2})^2 - \frac{2\lambda}{\ell^2}(T_0 - q)^2\,(1 - \frac{x}{\ell})^2 \}\, e^{t/k} ,$$

pa se integral dejstva (3.2.22) posle integracije po x od 0 do ℓ

(gornja granica je u ovom slučaju ℓ, jer je cela oblast zahvaćena termičkim poremećajem), svodi na

$$I = \int_{t} \{\frac{4}{15}\, c\, k\, \ell\, \dot{q}^2 - \frac{2}{3}\frac{\lambda}{\ell}\,(T_o - q)^2\}\, e^{t/k}\, dt\ .$$

Sprovodjenjem procedure propisane principom dolazi se do diferencijalne jednačine

$$4\, t_1 \dot{q} + q = T_o\ ,$$

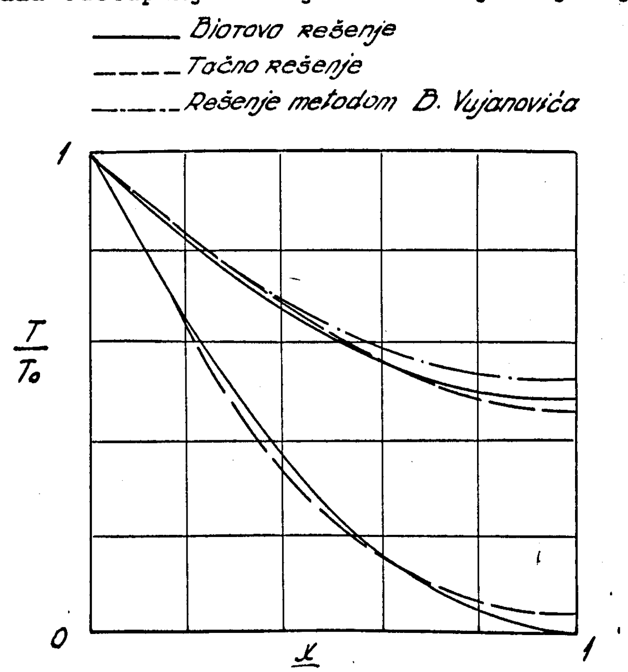
čije je rešenje zbog početnog uslova $q = 0$ za $t = t_1$

$$\frac{q}{T_o} = 1 - exp\,\{-\,0{,}25\,(\frac{t}{t_1} - 1)\}$$

Rešenje dobijeno metodom M. Bioa je

$$\frac{q}{T_o} = 1 - exp\,\{-\,0{,}218\,(\frac{t}{t_1} - 1)\}\ ,$$

a koliko su mala odstupanja dobijenih rešenja najbolje se vidi na slici 3.3.



Prikazani primer nedvosmisleno pokazuje: 1. da je varijaciono formulisanje pojave prostiranja toplote kroz čvrsta tela sa konstantnim termofizičkim osobinama moguće primenom principa iščezavajućeg parametra; 2. da se dobijaju aproksimativna rešenja visoke tačnosti (ovaj zaključak nije izveden samo na osnovu prikazanog primera, nego se oslanja na mnoge rezultate do kojih su došli B. Vujanović, DJ. Djukić, M. Pavlović i autor ovog rada) i 3. da se baš zahvaljujući iščezavajućem parametru dolazi do jednostavnih matematičkih izraza koji pri daljem tretmanu ne zahtevaju ni veliko poznavanje matematičke analize niti utrošak velikog vremena.Ova osobina principa je naročito značajna za inženjersku praksu.

Neophodni uslovi da je varijaciona formulacija ispravna su, prema svemu što je izneto, ispunjeni i može se očekivati da će se primenom ove metode na proučavanje pojava kod kojih su termofizička svojstva promenljiva dobiti rezultati zadovoljavajuće tačnosti.

3.2.5. Varijacioni princip sa nekomutativnim varijacijama

Sve varijacione formulacije disipativnih pojava imaju u većoj ili manjoj meri nedostatke, sadrže izraze i veličine bez jasnog fizičkog značenja, ali sve strogo zadržavaju osnovni postulat varijacionog računa o komutativnosti variranja i diferenciranja. Variranje je u mehniku uvedeno u doba kada je u centru pažnje naučnika bila problematika vezana za konzervativne sisteme i procese i da bi se oni mogli varijaciono formulisati, neophodnost je bila postulirati komutativnog variranja i diferenciranja. Ojler-Lagranževe jednačine, osnov konzervativne mehanike, mogu se dobiti samo usvajanjem ovog postulata.

Polazeći od činjenice da osobine varijacionog opisivanja fizičkih pojava, globalnost, minimalnost i invarijantnost, odražavaju suštinu prirode i da ih zbog toga poseduje svaki realni proces, B. Vujanović je pošao od ideje da korišćenjem ovih prednosti pronadje varijacioni iskaz disipativnih pojava koje tradicionalno, bez dopunskih restrikcija, nije bilo moguće uklopiti u klasični Hamiltonov princip. Sa konzervativnim, reverzibilnim, procesima stvar je jasna i jednoznačna: funkcional je razlika kinetičke energije i funkcije sile. Ali disipativni, ireverzibilni, procesi koji evidentno egzistiraju u prirodi, čak se može reći da samo oni i postoje, a da su povratni, samo njihove aproksimacije, nemaju opšti varijacioni iskaz i zbog toga su i danas prisutne mnoge varijacione metode koje pretenduju na zvučni naziv opšteg varijacionog principa prirode, mada to nikada ne mogu postati, jer svaki od njih sadrži bar jednu fizički malo opravdanu pretpostavku.

Ostajući dosledan svojoj ideji B. Vujanović |65,66| je pošao od Lagranž-Dalamberove opšte dinamičke jednačine holonomnog materijalnog sistema

$$\sum_i (\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i)\, \delta\vec{r}_i = 0, \tag{3.2.24}$$

u kojoj je $\sum_i \vec{F}_i$ rezultanta svih konzervativnih $\sum_i \vec{F}_i^k$ i nekonzervativnih sila $\sum_i \vec{F}_i^{nk}$, odnosno

$$\sum_i \vec{F}_i(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t) = \sum_i \vec{F}_i^k(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t) + \sum_i \vec{F}_i^{nk}(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t) \quad .$$

Elementarni rad ovih sila je

$$\delta A = \sum_i \vec{F}_i^k\, \delta\vec{r}_i + \sum_i \vec{F}_i^{nk}\, \delta\vec{r}_i = \delta U + \delta A_{nk} \quad , \tag{3.2.25}$$

gde je $U = U(\vec{r}_i, t)$ funkcija sile konzervativnih sila $\vec{F}_i^k$, a $\delta A_{nk} = \sum_i \vec{F}_i^{nk}\, \delta\vec{r}_i$ elementarni rad nekonzervativnih sila.

Unoseći dobijeni izraz (3.2.25) za elementarni rad aktivnih sila u jednačinu (3.2.24) dobija se

$$\delta U + \delta A_{nk} - \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i\, \delta\vec{r}_i = 0 \ ,$$

što se korišćenjem identiteta

$$\sum_i \frac{d}{dt}(m_i\, \dot{\vec{r}}_i\, \delta\vec{r}_i) = \sum_i m_i\, \ddot{\vec{r}}_i\, \delta\vec{r}_i + \sum_i m_i\, \dot{\vec{r}}_i\, \frac{d}{dt}(\delta\, \vec{r}_i)$$

svodi na

$$(3.2.26) \qquad \delta U + \delta A_{nk} - \sum_i \frac{d}{dt}(m_i \dot{\vec{r}}_i \, \delta\vec{r}_i) + \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{d}{dt}(\delta\vec{r}_i) = 0 \; .$$

Kinetička energija sistema je $E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2$, a njena varijacija $\delta E_k = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \, \delta\dot{\vec{r}}_i$. Jednačina (3.2.26) se neće promeniti ako joj se doda nula u obliku $\delta E_k - \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \, \delta\dot{\vec{r}}_i = 0$, a tada postaje

$$(3.2.27) \qquad \begin{aligned} &\delta E_k + \delta U - \sum_i \frac{d}{dt}(m_i \dot{\vec{r}}_i \, \delta\vec{r}_i) + \\ &+ \delta A_{nk} - \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \, \delta\dot{\vec{r}}_i + \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \frac{d}{dt}(\delta\vec{r}_i) = 0. \end{aligned}$$

Jednačina (3.2.27) će biti zadovoljena i onda kada se članovi grupišu na sledeći način

$$(3.2.28) \qquad \delta E_k + \delta U - \sum_i \frac{d}{dt}(m_i \dot{\vec{r}}_i \, \delta\vec{r}_i) = 0$$

i

$$(3.2.29) \qquad \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i (\delta\dot{\vec{r}}_i - \frac{d}{dt} \delta\vec{r}_i) = \delta A_{nk} \; .$$

Integracija jednačine (3.2.28) po vremenu t od $t_o - t_1$ dovodi do

$$(3.2.30) \qquad \sum m_i \dot{\vec{r}}_i \, \delta\vec{r}_i \Big|_{t_o}^{t_1} = \int_{t_o}^{t_1} (\delta E_k + \delta U)\, dt = \delta\int_{t_o}^{t_1} L \, dt \; .$$

Kako se na početku i kraju vremenskog intervala varijacije vektora položaja anuliraju, leva strana jednakosti (3.2.30) iščezava i jednačina se svodi na Hamiltonov princip koji važi samo za konzervativne procese.

Ako materijalni sistem nije izložen dejstvu nekonzervativnih sila, tada ni njihov rad ne postoji, $\delta A_{nk}=0$, pa se iz (3.2.29) dobija

$$\delta\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\delta\vec{r}_i\right) \quad , \tag{3.2.31}$$

postulat komutativnosti variranja i diferenciranja, a jednačina (3.2.27) reprodukuje Hamiltonov princip, što je već pokazano, znači da daje tačnu jednačinu konzervativnog procesa. Medjutim, ako postoje nekozervativne sile, tada je $\delta A_{nk} \neq 0$ pa postulat komutativnosti nije održiv.

Iz iznetog razmatranja se mogu izvući veoma interesantni i značajni zaključci:

1. posledica konzervativnosti procesa je postulat komutativnosti variranja i diferenciranja po vremenu;

2. nekozervativni, ireverzibilni, procesi mogu se varijaciono formulisati bez dopunskih restrikcija samo ako se odbaci postulat komutativnosti variranja i diferenciranja;

3. prirodni proces se može podeliti na: povratni deo za koji važi Hamiltonov princip i nepovratni koji ne dopušta egzistenciju postulata (3.2.31).

Ranije izneti varijacioni principi konstruisani sa ciljem da varijaciono opišu disipativne pojave morali su da sadrže pseudofizičke veličine (zamrznute ili konjugovane funkcije,ili iščezavajući parametar), jer se u njihovoj osnovi nalazi postulat komutativnosti za koji je upravo pokazano da je neodrživ pri tretmanu tih procesa.

Ove izuzetno važne konstatacije predstavljaju krupan korak u razvoju metoda za varijaciono opisivanje fizičkih procea. Tačno postuliranje veze izmedju variranja i diferenciranja čini bespredmetnim uvodjenje dubioznih veličina kao što su zamrznute ili konjugovane funkcije i t. sl. Medjutim, iz činjenice da ireverzibilni procesi ne dozvoljavaju egzistenciju komutativnosti (3.2.31) ne može se izvući zaključak o vezi izmedju variranja i diferenciranja, već ponovo postaje aktuelna snalažljivost i intuicija istraživača koji pored dobrog izbora funkcionala mora pravilno da propiše i zakon variranja i diferenciranja da bi akcioni integral reprodukovao jednačinu procesa.

Izraziti predstavnik ireverzibilnih procesa je fenomen prostiranja toplote i zbog toga je izabran za ilustrovanje načina efektivne primene iznetog principa. U slučaju kada sredina kroz koju se prostire toplota ima konstantna termofizička svojstva za sve vreme procesa, pojava je opisana jednačinom

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \nabla^2 T \, . \tag{3.2.32}$$

Neka je gradijent temperature na površini S oblasti V konstantan tokom procesa,

$$\frac{\partial T}{\partial x_j} \Big/_S = - F = const. \tag{3.2.33}$$

Po ideji B. Vujanovića |67| neka se varijacija brzine temperature pokorova zakonu

$$\delta\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\delta T) + \frac{\partial T}{\partial t}\,\delta T \quad , \tag{3.2.34}$$

a variranje i diferenciranje po prostornim koordinatama neka zadrže osobinu komutativnosti, tj.:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\,(\delta T) = \delta\left(\frac{\partial T}{\partial x_j}\right) \, .$$

Treba pronaći akcioni integral koji će reprodukovati jednačinu (3.2.32) i granični uslov (3.2.33), ali uvažavanjem zakona (3.2.34) Takav akcioni integral je oblika

$$I = \int_t \int_V \left\{\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\alpha}{2} \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial T}{\partial x_j}\right)^2\right\} dV\,dt + \int_t \alpha F \; T\Big/_S \, dt \tag{3.2.35}$$

jer kada se odredi njegova varijacija, iskoristi zakon (3.2.34),izvrši integracija po t gde je moguće, uvede uslov da varijacije temperature iščezavaju na krajevima vremenskog intervala i primeni teorema divergencije, dobija se

$$(3.2.36) \qquad \delta I = \int_t \int_V \{(\frac{\partial T}{\partial t}) - \alpha\nabla^2 T)\delta T\} dV\, dt + \int_t \alpha\{(\frac{\partial T}{\partial x_j} + F)\delta T\}/_S\, dt$$

Iz uslova stacionarnosti, $\delta I = 0$, odmah se dobija i jednačina (3.2.32) i granični uslov (3.2.33), što znači da je akcioni integral (3.2.35) dobro izabran i da čak reprodukuje prirodni granični uslov, a to nije bio slučaj u ranije iznetim varijacionim metodama.

S obzirom da će za ovaj zadatak aproksimativno rešenje biti traženo u klasi probnih funkcija sa dubinom penetracije, a to je moguće samo u jednodimenzionim slučajevima, to će varijacija akcionog integrala (3.2.36) biti izneta za taj slučaj. Ona glasi

$$(3.2.37) \qquad \delta I = \int_t \int_x \{(\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2})\delta T\} dx\, dt + \int_t \alpha\{(\frac{\partial T}{\partial x} + F)\delta T\}\Big|_0^\theta dt$$

Granični uslov (3.2.38) zapisuje se u obliku

$$(3.2.38) \qquad \frac{\partial T}{\partial x} = -F \qquad \text{za } x = 0\ .$$

Varijacija (3.2.37) može se rastaviti na tri

$$(3.2.39) \qquad \delta I = \delta I_1 + \delta I_2 + \delta I_3\ ,$$

gde je

$$\delta I_1 = \int_t \int_x (\frac{\partial T}{\partial t}\,\delta T)\, dx\, dt\ ,$$

$$(3.2.40) \qquad I_2 = \int_t \int_x \frac{\alpha}{2}(\frac{\partial T}{\partial x})^2\, dx\, dt\ ,$$

$$I_3 = \int_t \alpha\, F\, T \Big|_o^\theta \, dt$$

i zbog toga će pri traženju aproksimativnog rešenja biti iskorišćeni izrazi (3.2.40).

Aproksimativno rešenje se usvaja u obliku polinoma po dubini penetracije θ

(3.2.41) $$T = \sum_i^n q_i \left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^i .$$

Izbor početne vrednosti ideksa i nije proizvoljan, nego se odredjuje iz uslova glatkosti rešenja koji zahteva da je za $x = \theta$:

(3.2.42) $$T(\theta, t) = 0 \ ; \quad \frac{\partial T}{\partial x}\Big/_{x=\theta} = 0 \ ; \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\Big/_{x=\theta} = 0 \ .$$

Ako se u profilu temperature (3.2.41) stavi da je $i=0$, dobija se

$$T(x,t) = q_o = const.,$$

odakle je, s obzirom na (3.2.42), $q_o = 0$. Prema tome,najniža vrednost za i može biti 1. Medjutim, kako je

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{1}{\theta} q_1 - \sum_{i=2}^n \frac{1}{\theta}\, i\, q_i \left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^{i-1}$$

zbog drugog od uslova (3.2.42) dobija se da mora biti $q_1 = 0$, pa je moguća početna vrednost $i = 2$. Ali kada se odredi:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{2}{\theta^2} q_2 + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=3}^n i(i-1)\, q_i \left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^{i-2}$$

i iskoristi treći od uslova (3.2.42),dobija se da je i $q_2=0$. Prema tome aproksimativno rešenje treba tražiti u obliku:

(3.2.43) $$T = \sum_{i=3}^{n} q_i \left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^i .$$

Koeficijenti q_i nisu nezavisni, jer je na čeonoj površini tela za vreme procesa temperatura neka funkcija vremena, $q(t)$, pa se dobija uslov

(3.2.44) $$T(0,t) = \sum_{i=3}^{n} q_i = q(t) .$$

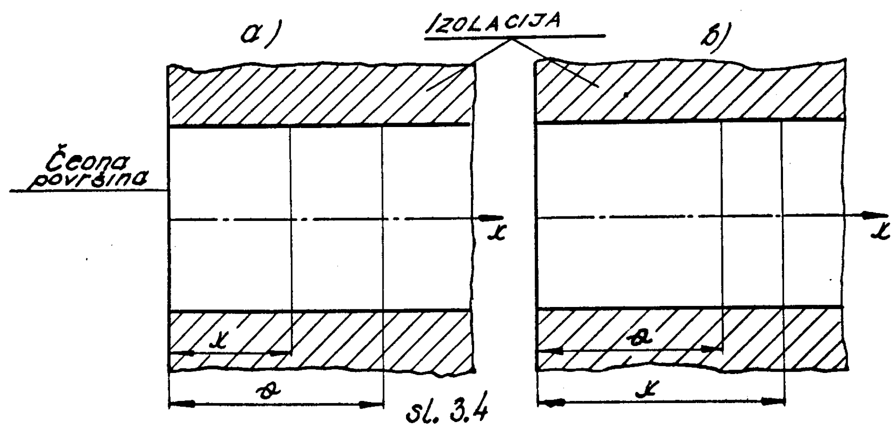
Osim toga, koeficijentima q_i i granični uslov (3.2.38) nameće zavisnost:

(3.2.45) $$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = - \frac{1}{\theta} \sum_{i=3}^{n} i\, q_i = - F .$$

Ako bi se usvojilo da je $n \geq 5$ uslovi (3.2.44) i (3.2.45) bi predstavljali algebarski sistem od dve jednačine sa tri ili više nepoznatih veličina q_i i do rešenja se ne bi moglo doći bez uvodjenja novih pretpostavki o karakteru profila temperature (3.2.43) Zbog toga se u daljem radu aproksimativno rešenje traži u obliku:

(3.2.46) $$T(x,t) = q_3 \left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^3 + q_4 \left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^4 .$$

Neophodno je potrebno podvući da je promenljiva x uvek manja od dubine penetracije θ , jer odredjuje položaj preseka tela u kome se traži vrednost temperaturskog polja, a u delu tela od čeone površine do dubine prodora toplote (sl. 3.4a). U svim presecima tela koji su od čeone površine na većem udaljenju nego što je dubina penetracije θ , preko dubine penetracije (sl. 3.4b), temperatura tela je konstantna i jednaka početnoj temperaturi T_0.



sl. 3.4

Odavde se izvodi zaključak da $1 - \frac{x}{\theta}$ mora biti uvek pozitivno, jer je $\frac{x}{\theta} < 1$.

Treba naglasiti još i to da je $T(x,t)$ apsolutna temperatura i da zbog toga nikada ne može biti negativna, odnosno

$$T(x,t) > 0.$$

S obzirom na ovu činjenicu aproksimativno rešenje (3.2.46) nameće uslov

$$(1 - \frac{x}{\theta})^3 \{ q_3 + q_4 (1 - \frac{x}{\theta}) \} > 0, \qquad (3.2.47)$$

a kako je $1 - \frac{x}{\theta}$, kao što je već rečeno, uvek pozitivno, da bi $T(x,t)$ bilo pozitivno koeficijenti q_3 i q_4 moraju takodje biti pozitivni.

Po pravilima matematike ova analiza bi trebalo da se odvija na sledeći način.

Proizvod (3.2.47) je veći od nule kada su činioci istog znaka. Kako je već ustanovljeno da izraz $1 - \frac{x}{\theta}$ mora da bude pozitivan, to znači da i drugi činilac, $q_3 + q_4(1 - \frac{x}{\theta})$, mora takodje da bude pozitivan, odakle se dobija:

$$(1 - \frac{x}{\theta}) > -\frac{q_3}{q_4} ,$$

a pošto je $1 - \frac{x}{\theta} > 0$, mora biti

$$-\frac{q_3}{q_4} < 0$$

iz čega se odmah dobija uslov:

(3.2.48) $$\frac{q_3}{q_4} > 0 .$$

Dobijeni uslov (3.2.48) je zadovoljen kada su koeficijenti istog znaka. Medjutim, ako bi oni bili negativni, uslov (3.2.47) ne bi bio zadovljen, jer je $1 - \frac{x}{\theta} > 0$. Ova analiza potvrdjuje stav koji je već iznet posmatranjem procesa sa fizičkog stanovišta, da koeficijenti q_3 i q_4 moraju biti pozitivni. Ako bi koeficijent q_3 bio jednak nuli, profil temperature (3.2.46) bio bi sasvim izmenjen i eventualno takvo rešenje bi trebalo na drugi način analizirati. Mogućnost da q_4 bude nula, pored toga što menja karakter profila temperature, ne bi dozvolila da se izvrši prethodna analiza. Prema tome, da bi se obezbedilo da temperatura $T(x,t)$ bude uvek pozitivna, koeficijenti q_3 i q_4 moraju biti pozitivni.

Uslovi (3.2.44) i (3.2.45) daju sistem algebarskih jednačina

$$q_3 + q_4 = q$$

$$3q_3 + 4q_4 = F\theta ,$$

iz kojih se dobija da je

(3.2.49) $$q_3 = 4q - F\theta \quad i \quad q_4 = F\theta - 3q.$$

Stavljanjem ovih vrednosti u (3.2.46) dobija se posle sredjivanja:

$$T(x,t) = q\,\{4(1-\frac{x}{\theta})^3-3(1-\frac{x}{\theta})^4\}-F\theta\{(1-\frac{x}{\theta})^3-(1-\frac{x}{\theta})^4\} \tag{3.2.50}$$

Dubina penetracije θ i površinska temperatura q zavise samo od vremena t. Zbog toga su veličine koje figurišu i izrazima (3.2.40) oblika:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \dot{q}\,\{4(1-\frac{x}{\theta})^3-3(1-\frac{x}{\theta})^4\}+\frac{qx\dot{\theta}}{\theta^2}\{12(1-\frac{x}{\theta})^2-12(1-\frac{x}{\theta})^3\}-$$

$$-F\dot{\theta}\,\{(1-\frac{x}{\theta})^3-(1-\frac{x}{\theta})^4\}-\frac{Fx\dot{\theta}}{\theta}\{3(1-\frac{x}{\theta})^2-4\,(1-\frac{x}{\theta})^3\},$$

$$\delta T = \{4(1-\frac{x}{\theta})^3-3(1-\frac{x}{\theta})^4\}\delta q+\frac{qx}{\theta^2}\{12(1-\frac{x}{\theta})^2-12(1-\frac{x}{\theta})^3\}\,\delta\theta\,-$$

$$-F\{(1-\frac{x}{\theta})^3-(1-\frac{x}{\theta})^4\}\,\delta\theta-\frac{Fx}{\theta}\{3(1-\frac{x}{\theta})^2-4(1-\frac{x}{\theta})^3\}\,\delta\theta,$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{q}{\theta}\,\{12(1-\frac{x}{\theta})^2-12(1-\frac{x}{\theta})^3\}+F\{3(1-\frac{x}{\theta})^2-4(1-\frac{x}{\theta})^3\}\ .$$

Posle sredjivanja izraza (3.2.40) integracije i variranja dobija se:

$$\delta I_1 = \int_t\{\left[\frac{2}{7}\,\theta\dot{q}+\frac{1}{28}\,\dot{\theta}(4q-F\theta)\right]\,\delta q\,+$$

$$+\left[\frac{1}{28}\,\dot{q}(4q-F\theta)+\frac{1}{70}\,\frac{\dot{\theta}}{\theta}\,(4q-F\theta)^2\right]\delta\theta\}dt\ ,$$

$$\delta I_2 = \int_t \alpha\{(\frac{48}{35}\,\frac{q}{\theta}-\frac{2}{35}\,F)\,\delta q-(\frac{24}{35}\,\frac{q^2}{\theta^2}-\frac{3}{70}\,F^2)\delta\theta\}\,dt$$

$$\delta I_3 = \int_t\,(-F\delta q)\,dt.$$

Iz uslova (3.2.39) sada se dobijaju jednačine:

$$\begin{aligned}&40\theta^2\dot{q}+5\theta\dot{\theta}(4q-F)+\alpha(192q-148F\theta) = 0\\&5\theta^2\dot{q}(4q-F)+2\theta\dot{\theta}(4q-F\theta)^2-6\alpha(16q^2-F^2\theta^2) = 0.\end{aligned} \tag{3.2.51}$$

S obzirom da su, po početnoj pretpostavci, veličine q i θ uzete za nezavisne koordinate, to razlika $4q-F\theta$ ne može da bude jednaka nuli. Izraz $4q-F\theta = 0$ uspostavlja vezu izmedju nezavisnih koordinata i čini da one postaju zavisne, a kada je to slučaj ceo prethodni postupak nije ispravan. Tada i koeficijent q_3 postaje identički jednak nuli pa uslov (3.2.48) nije zadovoljen, a profil temperature (3.2.46) dobija oblik

$$T(x,t) = \frac{1}{4} F\theta\left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^4 .$$

Iz ovih razloga mora biti $4q - F\theta \neq 0$, pa je drugu od jednačina (3.2.51) moguće podeli tim izrazom. Kada se to učini i uvedu slične promenljive

$$(3.2.52) \qquad \begin{aligned} q &= FAf(t) & \qquad \dot{q} &= FA\dot{f} \\ \theta &= Bf(t) & \qquad \dot{\theta} &= B\dot{f} \end{aligned}$$

jednačine (3.2.51) se svode na

$$B^2 f\dot{f}(60A - 5B) = \alpha(148B - 192A)$$

$$B^2 f\dot{f}(13A - 2B) = \alpha(24A + 6B) \; .$$

Iz prve od ovih jednačina se dobija

$$(3.2.53) \qquad B^2 f\dot{f} = \frac{148B - 192A}{60A - 5B}\,\alpha \, ,$$

a iz druge

$$(3.2.54) \qquad B^2 f\dot{f} = \frac{24A + 6B}{13A - 2B}\,\alpha \, .$$

Kada se izjednače desne strane izraza (3.2.53) i (3.2.54) dobija se kvadratna jednačina

$$1968\left(\frac{A}{B}\right)^2 - 1034\left(\frac{A}{B}\right) + 133 = 0,$$

čija su rešenja

$$\frac{A}{B} = 0{,}2248653 \quad \text{i} \quad \frac{A}{B} = 0{,}3005411$$

a) Ako se uzme prvo rešenje

(3.2.55) $$A = 0,2248653B$$

i zameni bilo u (3.2.53) ili u (3.2.54), dobija se

$$B^2 f\dot{f} = 12,344194\alpha .$$

Odavde se posle integracije i vadjenja korena dobija da je

$$Bf(t) = 4,9687\sqrt{\alpha t}$$

i da je iz (3.2.55)

$$Af(t) = 1,1173\sqrt{\alpha t} .$$

Sa ovim vrednostima iz (3.2.52) dobija se za dubinu penetracije i površinsku temperaturu

$$\theta = 4,9687\sqrt{\alpha t} \quad \text{i} \quad q = 1,1173\sqrt{\alpha t} .$$

Koeficijenti q_3 i q_4 aproksimativnog rešenja (3.246) izračunavaju se iz (3.2.49) pomoću dobijenih vrednosti i iznose

$$q_3 = -0,4996F\sqrt{\alpha t} \quad \text{i} \quad q_4 = 1,6169F\sqrt{\alpha t} .$$

S obzirom da u ovom slučaju koeficijenti q_3 i q_4 ne zadovoljavaju uslov (3.2.48) rešenje (3.2.55)mora se odbaciti.

b) Ako je

(3.2.56) $$A = 0,3005411B$$

jednačine (3.2.53) ili (3.2.54) svode se na

$$B^2 f\dot{f} = 6,928551\alpha ,$$

odakle se posle integracije i vadjenja korena dobija

$$Bf(t) = 3{,}7225\sqrt{\alpha t}\,,$$

pa je iz (3.2.56)

$$Af(t) = 1{,}1188\sqrt{\alpha t}\,.$$

Sa ovim vrednostima za dubinu penetracije i površinsku temperaturu iz (3.2.52) dobija se

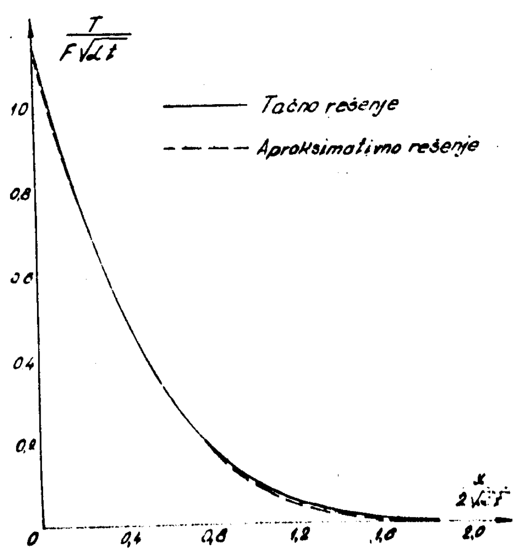
(3.2.57)
$$\theta = 3{,}7225\sqrt{\alpha t}, \qquad q = 1{,}1188\sqrt{\alpha t}\,.$$

Ako se ove vrednosti unesu u (3.2.49), za koeficijente q_3 i q_4 se dobija

$$q_3 = 0{,}7525\sqrt{\alpha t} \qquad q_4 = 0{,}3662\sqrt{\alpha t}\,.$$

Ovi koeficijenti ispunjavaju uslov (3.2.48), obezbedjuju da temperatura T za sve vreme procesa bude pozitivna i zbog toga je aproksimativno rešenje problema

$$T(x,t) = 0{,}7525F\sqrt{\alpha t}\,\left(1 - \frac{x}{3{,}7225\sqrt{\alpha t}}\right)^3 + 0{,}3662F\sqrt{\alpha t}\,\left(1 - \frac{x}{3{,}7225\sqrt{\alpha t}}\right)^4.$$



Sa slike 3.5 jasno se uočava veliko slaganje izmedju tačnog |5| i aproksimativnog rešenja.

IV GLAVA

VARIJACIONO PROUČAVANJE FENOMENA PROSTIRANJA TOPLOTE KROZ ČVRSTA TELA SA PROMENLJIVIM TERMOFIZIČKIM SVOJSTVIMA

Transportni procesi su do te mere složeni da se njihovom proučavanju čak i u linearnom slučaju prilazi usvajanjem niza više ili manje fizički opravdanih pretpostavki, a najvažnija je da su termofizičke karakteristike sredine konstantne za sve vreme procesa, jer ona čini da diferencijalne jednačine postaju linearne, što u znatnoj meri olakšava njihovo proučavanje putem analitičkih metoda matematike. Uzan je krug procesa kod kojih se može smatrati da je ova pretpostavka održiva, a naročito danas kada je i sa teorijske i praktične strane porastao interes ka proučavanju intenzivnih procesa, kao što su oni koji se odvijaju u termonuklearnim reaktorima, pri trenju kosmičkih letilica sa vazduhom u gušćim slojevima atmosfere itd. Usvajanje činjenice da termofizičke karakteristike sredina zavise od promene njihovih temperaturskih polja dovodi do nelinearne diferencijalne jednačine, a kada se tome doda da su na površini S oblasti V temperatura i njen gradijent takodje promenljivi, sa matematičke tačke gledišta problem postaje krajnje složen i pomoću postupaka stroge matematičke analize nerešiv. Razvoj metoda koje dovode do aproksimativnih rešenja zadovoljavajuće tačnosti diktirala je inženjerska praksa kojoj su potrebni podaci o procesima radi uspešnog projektovanja mašina, mehanizama i drugih konstrukcija.

Jedan veoma složen, ali danas aktuelan, proces je fenomen prostiranja toplote kroz čvrsta tela koji je rešavan za različite geometrijske oblike tela i razne granične uslove, ali pod pretpostavkom konstantnosti termofizičkih karakteristika. Obilje radova posvećenih ovoj problematici nedvosmisleno potvrdjuje značaj koji ovaj proces ima kako za inženjersku praksu, tako isto i za teorijska izučavanja i upoznavanja mirkosveta čiji procesi dovode do ovog makrofenomena. Proučavanje ovog fenomena komplikuje i činjenica da čak ni za linearnu diferencijalnu jednačinu paraboličnog tipa, a ona je matematički model ovog procesa, nema dokaza o egzistenciji rešenja, a da se i ne govori o nelinearnoj, koja je matematički model kada se prihvati da su termofizička svojstva sredine zavisna od termičkog stanja.

Ovaj rad tretira složen a do danas nerešen problem prostiranja toplote kroz čvrsta tela sa promenljivim termofizičkim svojstvima što dovodi do rešavanja nelinearne parcijalne jednačine paraboličkog tipa. Osim toga proučava se slučaj kada je telo izloženo radijaciji, tako da se Stefan-Balcmanov zakon pojavljuje kao granični uslov zadatka. Grafički prikazana rešenja uporedjena sa rešenjima linearnih slučajeva pokazuju da je izbor varijacionog principa sa iščezavajućim parametrom pri aproksimativnom rešavanju ovog zadatka pravilno i opravdano izvršen.

4.1. Izvodjenje jednačine prostiranja toplote kroz sredine sa termički promenljivim termofizičkim svojstvima varijacionim metodama

Mogućnost primene varijacionih metoda pri proučavanju nekog procesa pokazuje se sposobnošću akcionog integrala da reprodukuje jednačinu tog procesa. Zbog toga je u sledeća dva odeljka pokazano da se korišćenjem varijacionog principa sa iščezavajućim parametrom i varijacionog principa sa nekomutativnim varijacijama dolazi do najopštije nelinearne jednačine provodjenja toplote i koje, u tim slučajevima, oblike imaju Lagranževe funkcije.

4.1.1. Korišćenje varijacionog principa sa iščezavajućim parametrom

U Lagranževoj funkciji, saglasno principu, figuriše i proizvoljni parametar i zbog toga se propisuje Lagranžijan oblika

$$L = \{ \frac{\lambda^2(T)}{2} \sum_{j=1}^{3} (T,_j)^2 - \frac{k}{2}\lambda(T) \frac{\partial}{\partial t}\Big[u(T)T\Big] (\frac{\partial T}{\partial t})\} e^{t/k} , \tag{4.1.1}$$

gde je k proizvoljni parametar, a $u(T) = \rho(T)c(T)$ unutrašnja energija po jedinici mase. Uslov stacionarnosti akcionog integrala

$$I = \int_t \int_V L \; dV \; dt ,$$

ekvivalentan je sa Ojler-Lagranževim jednačinama kada se pretpostavi da na površini S oblasti V varijacija δT iščezava i da su u početnom i krajnjem trenutku vremena varijacije δT jednake nuli. Kada se iz (4.1.1) odrede izvodi koji figurišu u Ojler-Lagranževoj jednačini (3.2.18), ona se posle sredjivanja svodi na

$$\{ \frac{\partial}{\partial t}\Big[u(T) \; T\Big] - \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big[\lambda \; (T) \; (T,_j)\Big]\} \; e^{t/k} = \tag{4.1.2}$$

$$\frac{k}{\lambda(T)}(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial T} \{\lambda (T)\frac{\partial}{\partial t}\Big[u(T)T\Big]\} (\frac{\partial T}{\partial t}) - \frac{\partial}{\partial t}\{\lambda (T)\frac{\partial}{\partial t}\Big[u(T)T\Big]\}) \; e^{t/k}.$$

Deobom dobijene jednakosti (4.1.2) sa $e^{t/k}$ a zatim, saglasno principu iščezavajućeg parametra, sprovodjenjem graničnog procesa (3.2.20) dolazi se do

$$\frac{\partial}{\partial t} \{u(T)T \} = div\{\lambda \; (T) \; grad \; T\} , \tag{4.1.3}$$

najopštije jednačine provodjenja toplote (1.10), čime je dokazano: 1. da se proces prostiranja toplote kroz čvrsta tela sa termički promenljivim termofizičkim osobinama može varijaciono formulisati i 2. da je Lagranževa funkcija (4.1.1) dobro izabrana.

4.1.2. Korišćenje varijacionog principa sa nekomutativnim varijacijama

Fizički proces koji se proučava u ovom radu je krajnje disipativan i zbog toga se, što je pokazano u odeljku 3.2.5, ne može prihvatiti komutativnost variranja i diferenciranja po vremenu bez dopunskih restrikcija. U pomenutom odeljku je pokazano (izraz (3.2.34)) kakav zakon treba propisati za variranje brzine temperaturskog polja da bi stacionarnost akcionog integrala dovela do linearne jednačine provodjenja toplote. S obzirom da u nelinearnoj jednačini (4.1.3) ne figuriše samo brzina temperaturskog polja nego i brzine termofizičkih osobina tela, predlažemo da se pravilo variranja proširi na brzine svih veličina koje zavise od temperaturskog polja i da glasi:

$$\delta\{\frac{\partial f(T)}{\partial t}\} = \frac{\partial}{\partial t}\{\delta f(T)\} + \frac{\partial f(T)}{\partial t}\delta T , \tag{4.1.4}$$

gde je $f(T)$ neprekidna funkcija temperaturskog polja. Postulat komutativnosti variranja i diferenciranja po prostornim koordinatama ostaje u važnosti, tj.

$$\delta\{\frac{\partial f(T)}{\partial x_j}\} = \frac{\partial}{\partial x_j}\{\delta f(T)\} .$$

Osim toga zadržava se petpostavka da je na prostornoj granici S i vremenskim, t_1 i t_2, varijacija temperaturskog polja δT jednaka nuli.

Neka je akcioni integral oblika

$$I = \int\limits_t\int\limits_V \{\lambda(T)\frac{\partial}{\partial t}\left[u(T)T\right] + \frac{\lambda^2(T)}{2}\sum_{j=1}^{3}(T,_j)^2\}dV\,dt . \tag{4.1.5}$$

Usvajanjem pravila o variranju brzine (4.1.4) njegova prva varijacija postaje

$$\begin{aligned}\delta I = \int\limits_t\int\limits_V \{&\frac{\partial\lambda}{\partial T}\frac{\partial}{\partial t}\left[u(T)\,T\right]\delta T+\lambda(T)\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial u}{\partial T}T\delta T+u(T)\,\delta T\right] + \\ &+\lambda(T)\frac{\partial}{\partial t}\left[u(T)T\right]\delta T+\delta\left[\frac{\lambda^2}{2}\sum_{j=1}^{3}(T,_j)^2\right]\}\,dV\,dt ,\end{aligned} \tag{4.1.6}$$

što se s obzirom na identit

$$\delta\{\frac{\lambda^2}{2}\sum_{j=1}^{3}(T_{,j})^2\} = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\{\lambda^2(T)\;T_{,j}\;\delta T\} -$$

$$-\lambda^2(T)\sum_{j=1}^{3}T_{,jj}\;\delta T - \lambda(T)\frac{\partial\lambda}{\partial T}\sum_{j=1}^{3}(T_{,j})^2\;\delta T\;,$$

svodi na

$$\begin{aligned}\delta I = &\int_V\{\int_t \lambda(T)\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\;T\,\delta\,T + u(T)\delta T\right]dt\}\;dV + \\ &+\int_t\{\int_V\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\lambda^2(T)\;T_{,j}\;\delta\,T\right]dV\}\;dt\; + \\ &+\int_t\int_V\{\frac{\partial\lambda}{\partial T}\frac{\partial}{\partial t}\left[u(T)\;T\right] + \lambda(T)\;\frac{\partial}{\partial t}\left[u(T)\;T\right] - \\ &-\lambda(T)\;\frac{\partial\lambda}{\partial T}\sum_{j=1}^{3}(T_{,j})^2 - \lambda^2(T)\sum_{j=1}^{3}T_{,jj}\}\;\delta T\;dV\;dt.\end{aligned} \tag{4.1.7}$$

Kada se u prvom integralu izraza (4.1.7) izvrši parcijalna integracija po t, u drugom primeni Gausova teorema, iskoristi uslov da na prostornim i vremenskim granicama varijacija temperature δT iščezava, a zatim sve sredi,dobija se

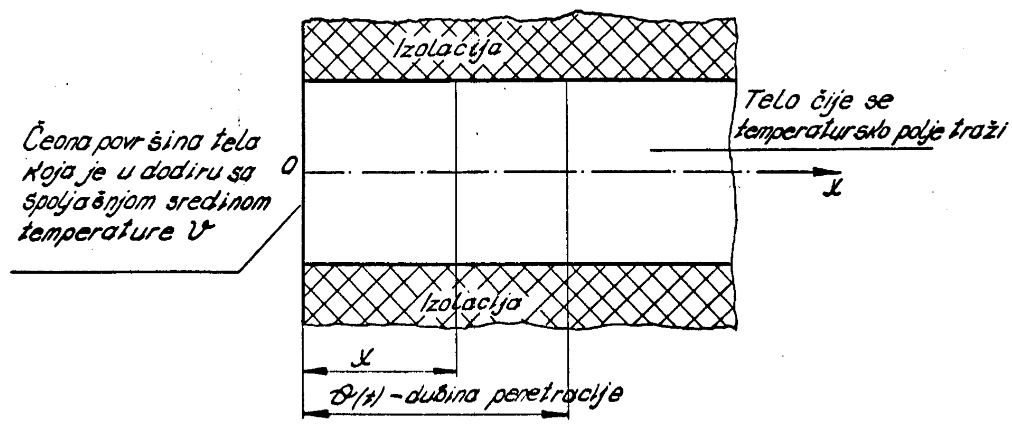
$$I = \int_t\int_V\lambda(T)\{\frac{\partial}{\partial t}\left[u(T)T\right] - \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\lambda(T)T_{,j}\right]\}\,\delta\,T\;dV\;dt\;. \tag{4.1.8}$$

Uslov stacionarnosti akcionog integrala (4.1.5) zbog (4.1.8) i s obzirom da se unutar prostorno-vremenske oblasti koeficijent toplotne provodnosti $\lambda(T)$ i varijacija temperature δT ne anuliraju identički, dovodi do najopštije jednačine provodjenja toplote.

Prema tome, proces prostiranja toplote kroz čvrsta tela sa promenljivim termofizičkim osobinama moguće je varijaciono formilisati i varijacionim principom sa nekomutativnim varijacijama, propisivanjem pravila za variranje brzine u obliku (4.1.4)

4.2. Postavljanje i matematičko modeliranje problema

Ovaj deo rada je posvećen aproksimativnom rešavanju procesa prostiranja toplote kroz polubeskonačan prizmatičan štap čije su bočne strane termički izolovane (sl. 4.1). Termofizičke karakteristike tela - štapa - zavise od promene temperaturskog polja i zbog toga je pri aproksimativnom rešavanju merodavna jedna-



sl. 4.1

čina (4.1.3). S obzirom da se proučava slučaj kada je čeona površina štapa, koja je u dodiru sa spoljašnjim ambijentom temperature υ, izložena radijaciji, ili telo preko nje zračenjem gubi toplotu (a tada se pretpostavlja da je spoljašnja sredina apsolutni toplotni ponor), granični uslov se svodi na Stefan-Bolcmanov zakon, kao što je izneto u I glavi. Ako se ovome doda da je temperatura štapa u svim tačkama pre početka procesa bila konstantna i iznosila

T_o i ako se pretpostavi da je brzina promene unutrašnje energije, $\frac{\partial u(T)}{\partial t}$, zanemarljivo mala, može se pristupiti matematičkom modeliranju.

Imajući u vidu uzete pretpostavke, matematički model procesa sačinjavaju:

a) nelinearna parcijalna diferencijalna jednačina paraboličkog tipa

$$u(T)\,\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\,\{\lambda(T)\,\frac{\partial T}{\partial x}\}\,, \tag{4.2.1}$$

b) nelinearni granični uslov

$$\lambda(T)\,\frac{\partial T}{\partial x} - h\,\{(T + T_o)^m - \upsilon_o^m\}\quad \text{za } x = 0 \tag{4.2.2}$$

gde je h Ajnštajn-Bolcmanova konstanta, υ_o početna apsolutna temperatura spoljašnjeg ambijenta, a eksponent m definiše telo koje se proučava. Ako je $m = 1$, radi se o sivom telu (sva gvoždja i čelici), a ako je $m = 4$, reč je o apsolutno crnom telu. Kod realnih materijala vrednost eksponenta m je izmedju ovih graničnih, $1<m<4$.

c) početni uslov

$$T(x,0) = T_o\,. \tag{4.2.3}$$

Ovako definisan problem do danas nije rešavan, a sva rešenja koja su data u radu su potpuno originalna. Srećna je okolnost šro varijaciona formulacija tipa iščezavajućeg parametra dopušta primenu direktnih metoda varijacionog računa i zbog toga se ona i u ovom radu koristi u cilju odredjivanja aproksimativnih rešenja.

4.3. Aproksimativna rešenja

Zbog pretpostavke o brzini promene unutrašnje energije i s obzirom da se posmatra jednodimenzioni slučaj svrsishodno je Lagranževu funkciju (4.1.1) ispisati u obliku koji i ove činjenice uzima u obzir. Tada ona glasi

$$L = \{\frac{\lambda^2(T)}{2} (\frac{\partial T}{\partial x})^2 - \frac{k}{2} u(T) \lambda(T) (\frac{\partial T}{\partial t})^2 \} e^{t/k} , \tag{4.3.1}$$

a akcioni integral se svodi na

$$I = \int_t \int_x \{\frac{\lambda^2(T)}{2} (\frac{\partial T}{\partial x})^2 - \frac{k}{2} u(T)\lambda(T)(\frac{\partial T}{\partial t})^2\} e^{t/k} \, dx \, dt. \tag{4.3.2}$$

Aproksimativna rešenja za različito specificirane zavisnosti termofizičkih karakteristika tela od temperatuskog polja biće tražena u klasi probnih funkcija oblika (2.9) sa dubinom penetracije kao jednom od generalisanih koordinata, a zbog toga je od direktnih metoda varijacionog računa najpogodnije izabrati Kantorovičevu metodu delimične integracije (odeljak 3.1.2), što je u ovom radu i učinjeno. Eksperimenti su pokazali |11,68| da najčešće termofizička svojstva tehničkih materijala zavise od temperature po linearnom zakonu, $a + bT$, ili stepenom, αT^{β}. Linearna zavisnost je karakteristična za plastične mase i neke obojene metale, i na primer, za bakar vrednosti termičkih koeficijenata su:

$$\lambda(T) = 241 - 0{,}019\ T$$
$$c(T) = 50 + 0{,}0086\ T\ .$$

U II i III glavi je rečeno da je preporučljivo probne funkcije specificirati tako da odmah zadovolje granične i početne uslove, da ostaci σ_S i σ_o još izborom oblika probnih funkcija budu eliminisani, a da se ostatak σ_V usrednji po celoj prostornoj oblasti. Kada su granični uslovi prvog, drugog ili trećeg reda (glava I), ovaj zahtev je relativno lako ispuniti, ali kada su oni nelinearni, što je slučaj u ovom radu, taj zahtev je izuzetno teško zadovoljiti, skoro nemoguće, a to čini da minimizaciju ostatka σ_S treba povezati sa minimizacijom ostatka σ_V. Imajući baš to u vidu Lardner |61| je predložio da se pomoću graničnog uslova uspostavi veza izmedju generalisanih koordinata i time omogućio da se aproksimativna rešenja traže u klasi probnih funkcija sa većim brojem vremenski zavisnih nepoznatih parametara $A_m(t)$ (glava III izraz (3.1.4)), koji u ovom radu imaju tačno definisan fizički smisao, a to dovodi do kvalitetnijih aproksimativnih rešenja. Koristeći se iskustvom M. Bioa i njegovih sledbenika koji su kroz svoje radove sistematizirali oblike probnih funkcija koji su najpovoljniji pri proučavanju procesa prostiranja toplote u cilju dobijanja kvalitetnih aproksimativnih rešenja, u ovom radu se aproksimativna rešenja traže u obliku

$$T(x,t) = -(T_o - q)\left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^n \qquad (4.3.3)$$
$$T = \upsilon - T_o$$

gde je $T(x,t)$ temperatursko polje polubeskonačnog štapa, T_o početna tempertura tela, $q = q(t)$ temperatura tela na slobodnoj površini koja je u dodiru sa spoljašnjim ambijentom (površinska temperatura), $\theta = \theta(t)$ dubina prodora toplote u telo (dubina penetracije), a x koordinata položaja preseka (sl. 4.1), dok je υ promena temperature spoljašnjeg ambijenta. Površinska temperatura $q(t)$ i dubina penetracije $\theta(t)$ su nepoznate funkcije vremena, odgovaraju nepoznatim parametrima $A_m(t)$ i pri korišćenju Ojler-Lagranževih jednačina igraju ulogu generalisanih koordinata.

Linearni slučaj, kada su termičke osobine materijala za sve vreme procesa konstantne, $u(T) = u_o = const.$, $\lambda(T) = \lambda_o = const.$, ovde postavljenog problema rešavali su Lardner |61| i Rafalski i Žiškovski |69| za kvadratni profil temperature, $n = 2$, korišćenjem Biovog principa. Opštiji slučaj kada n nema posebnu vrednost, razmatrali su B. Vujanović i Dj. Djukić |64| i pokazali da se njihova rešenja vrlo dobro slažu sa rešenjima Rafalskog i Žiškovskog. Navedeni radovi će služiti kao potvrda tačnosti u ovom radu dobijenih rešenja.

4.3.1. Slučaj konstantne unutrašnje energije i linearno zavisnog koeficijenta toplote provodnosti od temperature

Pri proučavanju ovog slučaja polazi se od jednačine(4.2.1) sa graničnim (4.2.2) i početnim (4.2.3) uslovom i usvaja se da je unutrašnja energija polubeskonačnog štapa konstantna za sve vreme procesa, $u(T) = u_o = const.$, a da je koeficijent toplotne provodnosti linearna funkcija temperature,

$$\lambda(T) = \lambda_o \left(1 + \beta \frac{T}{T_o}\right), \tag{4.3.4}$$

koji zbog usvojenog aproksimativnog rešenja (4.3.3) postaje

$$\lambda(T) = \lambda_o \left\{1 - \frac{\beta}{T_o}(T_o - q)\left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^n\right\}. \tag{4.3.5}$$

Formiranje Lagranževe funkcije (4.3.1) korišćenjem aproksimativnog rešenja (4.3.3) i izraza (4.3.5) ne predstavlja posebnu teškoću, a kada se to učini, zatim stavi u akcioni integral (4.3.2) i izvrši integracija po x od 0(od čeone površine koja je u dodiru sa spoljašnjim ambijentom (sl. 4.1) do dubine penetracije θ dobija se

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \lambda_o^2 \frac{n^2 (T_o - q)^2}{2\theta} \phi_1(q) - \right.$$

$$\left. - \frac{k}{2} u_o \lambda_o \theta \left[\phi_2 - \frac{\beta}{T_o}(T_o - q)\phi_3\right]\right\} e^{t/k}\, dt, \tag{4.3.6}$$

gde je

$$\phi_1(q) = \frac{1}{2n-1} - \frac{2}{3n-1}\frac{\beta}{T_o}(T_o - q) + \frac{1}{4n-1}\frac{\beta^2}{T_o^2}(T_o - q)^2,$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2n+1}\left\{\dot{q}^2 - \frac{T_o - q}{\theta}\dot{q}\dot{\theta} + \frac{n}{2n-1}\frac{(T_o - q)^2}{\theta^2}\dot{\theta}^2\right\}, \tag{4.3.7}$$

$$\phi_3 = \frac{1}{3n+1}\left\{\dot{q}^2 - \frac{2}{3}\frac{T_o - q}{\theta}\dot{q}\dot{\theta} + \frac{2}{3}\frac{n}{3n-1}\frac{(T_o - q)^2}{\theta^2}\dot{\theta}^2\right\}.$$

U sprovodjenju procedure pri dobijanju akcionog integrala (4.3.6) iskorišćena je Kantorovičeva metoda delimične integracije, jer je integracija izvršena samo po promenljivoj x, po kojoj je aproksimativno rešenje (4.3.3) potpuno specificirano, dok se druga promenljiva pojavljuje u rešenju preko nepoznatih funkcija q i θ, koje su uzete za generalisane koordinate. S obzirom da Ojler-Lagranževe jednačine proističu iz zahteva stacionarnosti akcionog integrala, u posmatranom slučaju se iz (4.3.6) formira takva jednačina za generalisanu koordinatu θ. Kada se, saglasno principu iščezavajućeg parametra, tako dobijena jednačina podeli izrazom $e^{t/k}$, a zatim stavi da $k \to 0$, dolazi se do

$$(4.3.8)\quad \lambda_o \frac{n^2(T_o-q)^2}{\theta^2} \phi_1(q) \; 0 \; u_o \theta \{ \frac{\partial \phi_2}{\partial \theta} - \frac{\beta}{T_o} (T_o - q) \frac{\partial \phi_3}{\partial \theta} \} = 0 \, .$$

Parcijalni izvodi koji se nalaze u jednačini (4.3.8) lako se odredjuju iz (4.3.7) i kada se stave u (4.3.8), čine da ova jednačina postaje obična diferencijalna jednačina po nepoznatim funkcijama vremena $q(t)$ i $\theta(t)$,

$$(4.3.9)\qquad - \frac{1}{2n+1} \dot{q} + \frac{2n}{4n^2-1} \frac{T_o - q}{\theta} \dot{\theta} +$$

$$+ \frac{2}{3} \frac{\beta}{T_o} \frac{(T_o-q)}{3n+1} \{ \dot{q} - \frac{2n}{3n-1} \frac{T_o - q}{\theta} \dot{\theta} \} -$$

$$- \frac{\lambda_o}{u_o} \frac{n^2(T_o - q)}{\theta^2} \{ \frac{1}{2n-1} - \frac{2}{3n-1} \frac{\beta}{T_o} (T_o-q) +$$

$$+ \frac{1}{4n-1} \frac{\beta^2}{T_o^2} (T_o - q)^2 \} = 0 \, .$$

Zbog toga što sadrži dve nepoznate funkcije, $q(t)$ i $\theta(t)$, jednačina (4.3.9) je nerešiva. Potrebno je naći još jednu jednačinu ili vezu izmedju nepoznatih funkcija kako bi sistem mogao da dovede do rešenja. I drugu jednačinu može da reprodukuje akcioni integral (4.3.6) formiranjem Ojler-Lagranževe jednačine za koordinatu q, a to bi značilo da je izvršena minimizacija samo ostatka σ_V. Zbog toga se ne može tvrditi da tako dobijene funkcije $q(t)$ i $\theta(t)$ automatski minimiziraju i ostatak σ_S, jer izborom oblika aproksimativnog rešenja (4.3.3)nije postignuto anuliranje tog ostatka (rešenje (4.3.3.) ne zadovoljava identički granični uslov (4.2.2.)). U cilju da se jednovremeno sa minimizacijom ostatka σ_V izvrši i minimizacija ostatka σ_S, prihvaćena je sugestija Lardnera i preko graničnog uslova (4.2.2), a pomoću (4.3.3) i (4.3.5) uspostavljena veza izmedju generalisanih koordinata $q(t)$ i $\theta(t)$, koja glasi

$$\theta = \frac{\lambda_o\, n(T_o - q)}{h}\,\frac{1 - \frac{\beta}{T_o}(T_o - q)}{q^m - \upsilon_o^m} \tag{4.3.10}$$

Unoženjem (4.3.10) u (4.3.9) konačno se dobija

$$- \frac{1}{2n+1} + \frac{2n}{4n^2-1}\left\{ \frac{2\beta(1-z)-1}{1-\beta(1-z)} - m\,\frac{z^{m-1}(1-z)}{z^m - z_o^m} \right\} +$$

$$+ \frac{2}{3}\,\frac{\beta(1-z)}{3n+1}\left\{ 1 - \frac{2n}{3n-1}\left[\frac{2\beta(1-z)-1}{1-\beta(1-z)} - m\,\frac{z^{m-1}(1-z)}{z^m - z_o^m} \right] \right\} =$$

$$= \frac{(z^m - z_o^m)^2}{(1-z)\{1-\beta(1-z)\}^2}\left\{ \frac{1}{2n-1} - \frac{2}{3n-1}\beta(1-z) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4n-1}\beta^2(1-z)^2 \right\} \frac{d\tau}{dz} ,$$

gde je

$$z = \frac{q}{T_o}\ ; \qquad z_o = \frac{\upsilon_o}{T_o}\ ; \qquad \tau = \frac{h^2\, T_o^{2(m-1)}}{u_o\,\lambda_o} .$$

Dobijena obična diferencijalna jednačina (4.3.11) razdvaja promenljive i zbog toga je veoma pogodna za numeričku integraciju. Iz početnog uslova (4.2.3) dolazi se do počtnih uslova za rešavanje jednačine (4.3.11) i oni glase za

$$t_o = 0 \qquad \tau_o = 0 \qquad z = 1 .$$

4.3.1a. Analiza dobijenih rešenja

Rešenja diferencijalne jednačine (4.3.11) zavisiće od četiri parametra n, m, β i z_o, jer se oni pojavljuju u jednačini. Da bi se pokazalo da se dobijena rešenja mogu prihvatiti kao dobra aproksimativna rešenja problema, treba pokazati da integral dejstva (4.3.6) i jednačine (4.3.11) sadrže, kao specijalne slučajeve, ranije odredjene iste izraze, ali za posebne vrednosti parametara. Zaista, ako se u integralu dejstva (4.3.6) stavi da je $\beta = 0$, a to znači da se posmatra slučaj sa konstantnim koeficijentom toplotne provodnosti, dobija se izraz identičan sa izrazom (60) u radu |64| . Kada se u jednačini (4.3.11) usvoji da je $\beta = 0$, dobija se jednačina (64) iz rada |64| . Osim toga, ako se usvoje sledeće vrednosti parametara: $\beta = 0$; $n = 2$; $m = 4$; $z_o = 0$, posle integracije jednačine (4.3.11), dobija se

$$(1-70\tau)\, z^8 + 21z^2 - 50z + 28 = 0 .$$

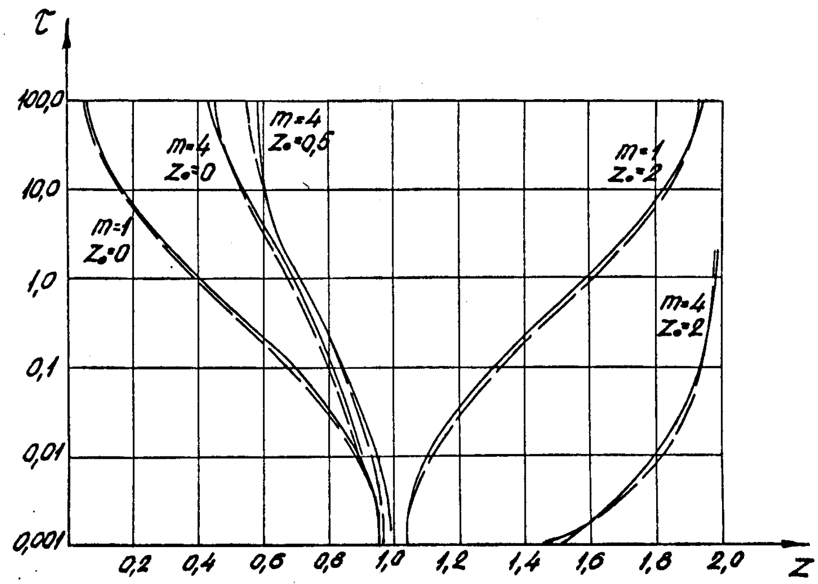
Rad |66| Rafalskog i Žiškovskog odnosi se na slučaj kada je $\beta = 0$ i $n = 2$. Kada se uzme da je $m = 4$ i $z_o = 0$ u njihovom radu posle integracije, dobija se

$$(1 - 88{,}2\tau)\, z^8 + 24{,}5z^2 - 57z + 31{,}5 = 0$$

što, s obzirom da su u pitanju aproksimativna rešenja dobijena različitim metodama, predstavlja dovoljnu jednakost.

Parametar z_o kao odnos početne temperature spoljašnje sredine i početne temperature tela definiše dva slučaja: 1. kada telo zrači energiju u spoljašnji ambijent ($z_o < 1$) i 2. kada je telo izloženo zračenju ($z_o > 1$). Kada je $z_o = 0$, onda je i $\upsilon_o = 0$, temperatura spoljašnjeg ambijenta je apsolutna nula i ta sredina predstavlja apsolutni toplotni ponor, apsorbuje svu količinu energije koju telo zrači. Parametar m definiše model tela koje se proučava, o čemu je ranije bilo reči. Oba ova parametra usko su povezana sa fizikom procesa.

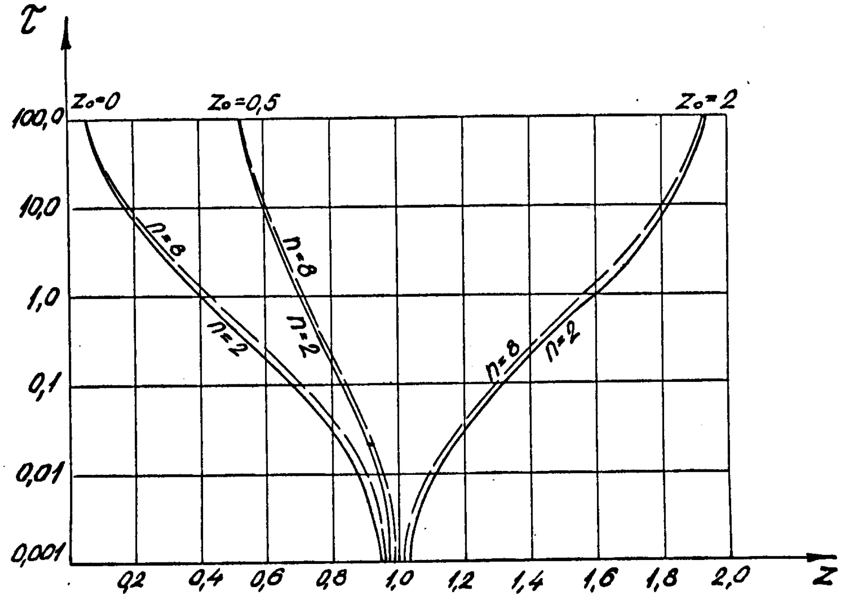
Slika 4.2. pokazuje vrlo dobro slaganje izmedju rezultata



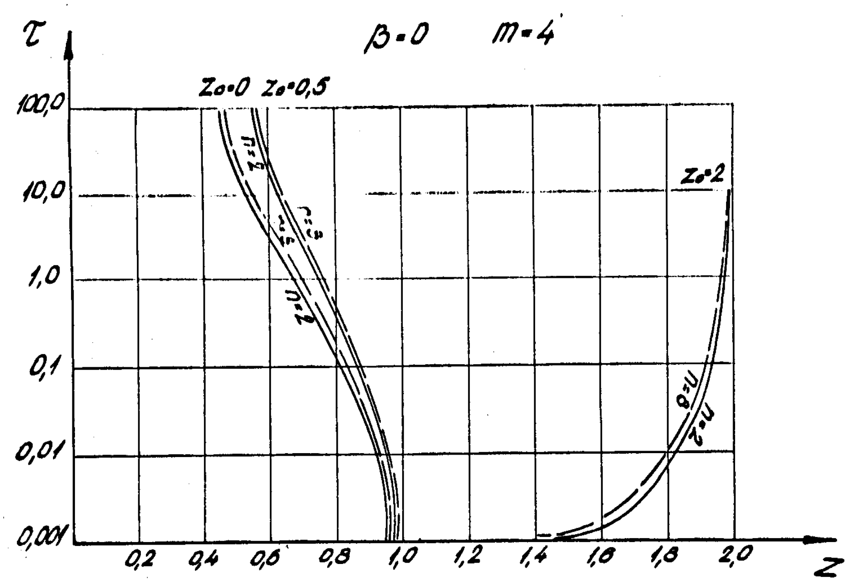
sl. 4.2

dobijenih u ovom radu (tačkasta linija) preko jednačine (4.3.11), a za slučaj kada je $n = 2$ i $\beta = 0$, sa rezultatima koje su dobili Rafalski i Žiškovski |69| (puna linija)

Interesantno je proučiti uticaj eksponenta n aproksimativnog rešenja (4.3.3), što je dato na sl. 4.3 i 4.4 za slučaj $\beta = 0$.


τ
Zo=0
Zo=0,5
Zo=2
100,0
10,0
1,0
0,1
0,01
0,001
n=8
n=2
n=8
n=2
n=8
n=2
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
1,6
1,8
2,0
Z

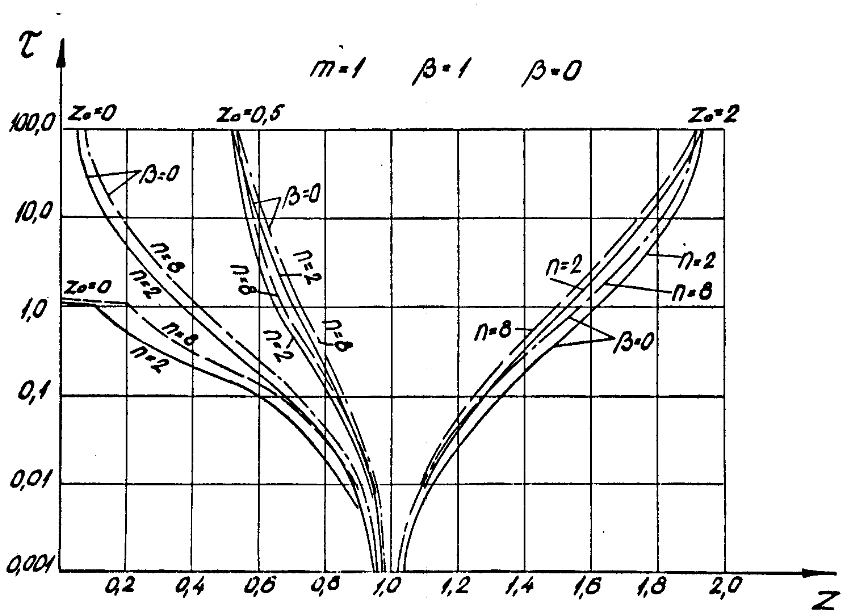
sl. 4.3


τ
β=0 m=4
Zo=0 Zo=0,5
Zo=2
100,0
10,0
1,0
0,1
0,01
0,001
n=2
n=8
n=2
n=8
n=2
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
1,6
1,8
2,0
Z

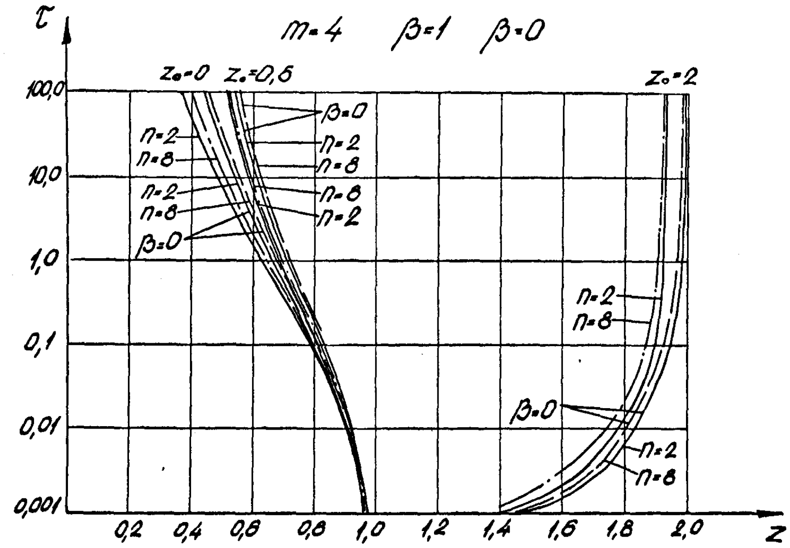
sl. 4.4

Odmah se uočava da eksponent *n* ne utiče bitno na aproksimativno rešenje, bilo da je u pitanju sivo *(m = 1, sl. 4.3.)* ili apsolutno crno telo *(m = 1, sl. 4.4.)* . Ova činjenica opravdava ranije izneto tvrdjenje da povećanje reda polinoma nije garancija brže konvergencije aproksimativnog rešenja ka stvarnom.

Parametar β definiše materijal posmatranog tela i njegov uticaj na promenu površinske temperature sa vremenom dat je na sl. 4.5. i 4.6.



sl. 4.5



sl. 4.6

Prethodna analiza i slike 4.2-4.6 nedvosmisleno potvrdjuju da su rešenja jednačine (4.3.11) vrlo dobra aproksimativna rešenja problema prostiranja toplote kod tela sa termički promenljivim koeficijentom toplotne provodnosti i konstantnom unutrašnjom energijom. Da su krive na slikama 4.5 i 4.6 za $\beta = 1$ znatno odstupile od krivih za $\beta = 0$, jednačina (4.3.11) bi bila sumnjive tačnosti.

4.3.2. Slučaj kada su unutrašnja energija i koeficijent toplotne provodnosti linearne funkcije temperature

Aproksimativno rešenje i u ovom slučaju traži se u obliku (4.3.3) i pretpostavlja se da je pored koeficijenta toplotne provodnosti i unutrašnja energija $u(T)$ linearna funkcija temperature oblika

$$u(T) = u_o(1 - \frac{\alpha T}{T_o}) .$$

što se s obzirom na (4.3.3) svodi na

$$u(T) = u_o\{ 1 - \frac{\alpha}{T_o} (T_o - q)(1 - \frac{x}{\theta})^n \} \tag{4.3.12}$$

Procedura formiranja Lagranževe funkcije (4.3.1) i izračunavanje akcionog integrala (4.3.2) korišćenjem Kantorovičeve metode delimične integracije ista je kao i u prethodnom slučaju. Kada se obave sve operacije propisane u akcionom integralu (4.3.2) i izvrši integracija po x od 0 do θ, integral dejstva će, za ovaj slučaj, biti oblika

$$
I = \int_{t_1}^{t_2} \{ \lambda_o^2 \frac{n^2(T_o - q)^2}{2\theta} \phi_1(q) - \frac{k}{2} u_o \lambda_o \theta \Big[\phi_2 - \tag{4.3.13}
$$

$$
- \frac{(\alpha+\beta)(T_o - q)}{T_o} \phi_3 + \phi_4 \frac{\alpha}{T_o} \frac{\beta}{T_o} (T_o - q)^2 \Big] \} e^{t/k} dt ,
$$

gde su veličine ϕ_1, ϕ_2 i ϕ_3 date izrazima (4.3.7) dok je

$$
\phi_4 = \frac{1}{2} \frac{1}{4n+1} \{ 2 \dot{q}^2 - \frac{T_o - q}{\theta} \dot{q}\dot{\theta} + \frac{1}{4n-1} \frac{(T_o - q)^2}{\theta^2} \dot{\theta}^2 \} . \tag{4.3.14}
$$

Iz integrala dejstva (4.3.13) nije teško formirati Ojler-Lagranževu jednačinu za koordinatu θ, a kada se tako dobijena jednačina podeli sa $e^{t/k}$ i zatim pristupi graničnom procesu (3.2.23), dobija se

$$
\lambda_o \frac{n^2(T_o - q)^2}{\theta^2} \phi_1(q) - u_o \theta \{ \frac{\partial \phi_1}{\partial \dot{\theta}} - \tag{4.3.15}
$$

$$
- \frac{(\alpha+\beta)(T_o - q)}{T_o} \frac{\partial \phi_3}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\alpha}{T_o} \frac{\beta}{T_o} (T_o - q)^2 \frac{\partial \phi_4}{\partial \dot{\theta}} \} = 0
$$

Parcijalni izvodi koji figurišu u (4.3.15) lako se odredjuju iz (4.3.7) i (4.3.14).

Granični uslov (4.2.2) ne zavisi od unutrašnje energije $u(T)$ i zbog toga veza izmedju generalisanih koordinata (4.3.10) i u ovom slučaju ostaje ista kao i u prethodnom.

Kada se odrede parcijalni izvodi iz (4.3.7) i (4.3.14), iskoristi veza izmedju generalisanih koordinata (4.3.10) i smenom uvedu bezdimenzione veličine iste kao i u prethodnom slučaju,

$$z = \frac{q}{T_o}\ ; \qquad z_o = \frac{\upsilon_o}{T_o}\ ; \qquad \tau = \frac{h^2\ T_o^{2(m-1)}}{u_o\ \lambda_o}$$

jednačina (4.3.15) postaje

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2n+1} + \frac{2n}{4n^2-1}\left\{\frac{2\beta(1-z)-1}{1-\beta(1-z)} - m\,\frac{z^{m-1}(1-z)}{z^m-z_o^m}\right\} + \\ & + \frac{2(\alpha+\beta)(1-z)}{3(3n+1)}\left\{1 - \frac{2n}{3n-1}\left[\frac{2\beta(1-z)-1}{1-\beta(1-z)} - m\,\frac{z^{m-1}(1-z)}{z^m-z_o^m}\right]\right\} - \\ & - \frac{\alpha\beta(1-z)^2}{4n+1}\left\{\frac{1}{2} - \frac{n}{16n^2-1}\left[\frac{2\beta(1-z)-1}{1-\beta(1-z)} - m\,\frac{z^{m-1}(1-z)}{z^m-z_o^m}\right]\right\} = \\ & = \frac{(z^m - z_o^m)^2}{(1-z)\{1-\beta(1-z)\}^2}\left\{\frac{1}{2n-1} - \frac{2\beta}{3n-1}(1-z) + \right. \\ & \left. + \frac{\beta^2}{4n-1}(1-z)^2\right\}\frac{d\tau}{dz}\,, \end{aligned} \tag{4.3.16}$$

obična diferencijalna jednačina prvog reda koja razdvaja promenljive i zbog toga je veoma pogodna za numeričku integraciju, pri početnim uslovima

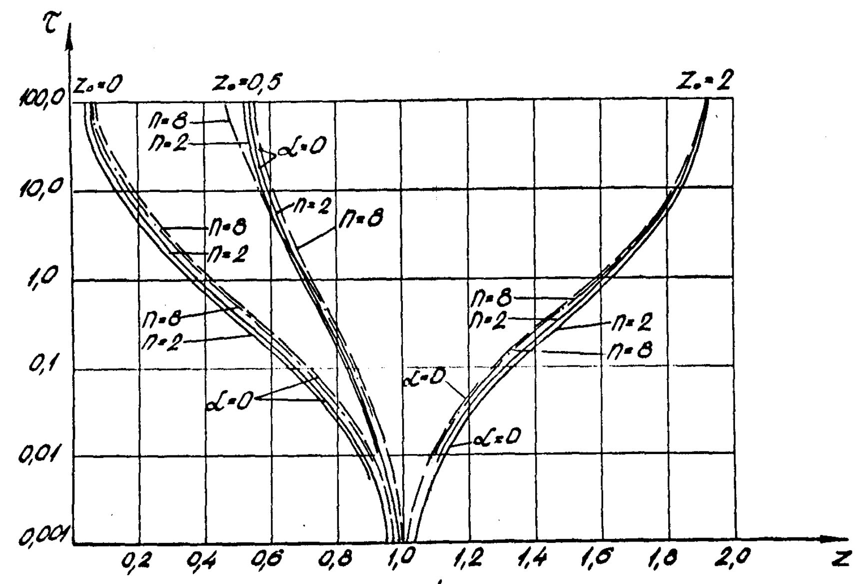
$$t_o = 0\ ; \qquad \tau_o = 0\ ; \qquad z = 1 \quad ,$$

koji se dobijaju iz (4.2.3)

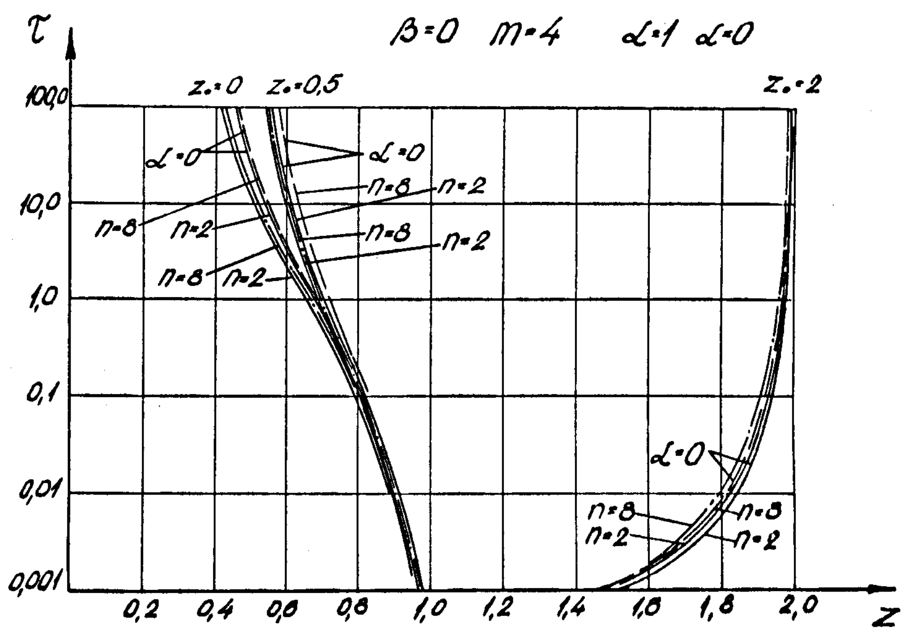
4.3.2a. Analiza dobijenih rezultata

Itegral dejstva (4.3.6) i jednačina (4.3.11) iz prethodnog odeljka dobijaju se iz akcionog integrala (4.3.13) i jednačine (4.3.16) kada se stavi da je parametar $\alpha = 0$. Ove činjenice pokazuju da se jednačina (4.3.16) može usvojiti kao jednačina čiji integrali daju dobra aproksimativna rešenja postavljenog problema. Priložene slike potvrdjuju ovaj zaključak, jer su za $\alpha = 0$ grafici na slikama 4.7-4.10 identični sa graficima na slikama 4.3.-4.6.

Treba ukazati i na to da se sa slika 4.8-4.10 odmah uočava mali uticaj promenljivosti unutrašnje energije sa promenom temperature na proučavani proces. Svi zaključci i objašnjenja dati u analizi 4.3.1a ostaju na snazi i u ovom slučaju.

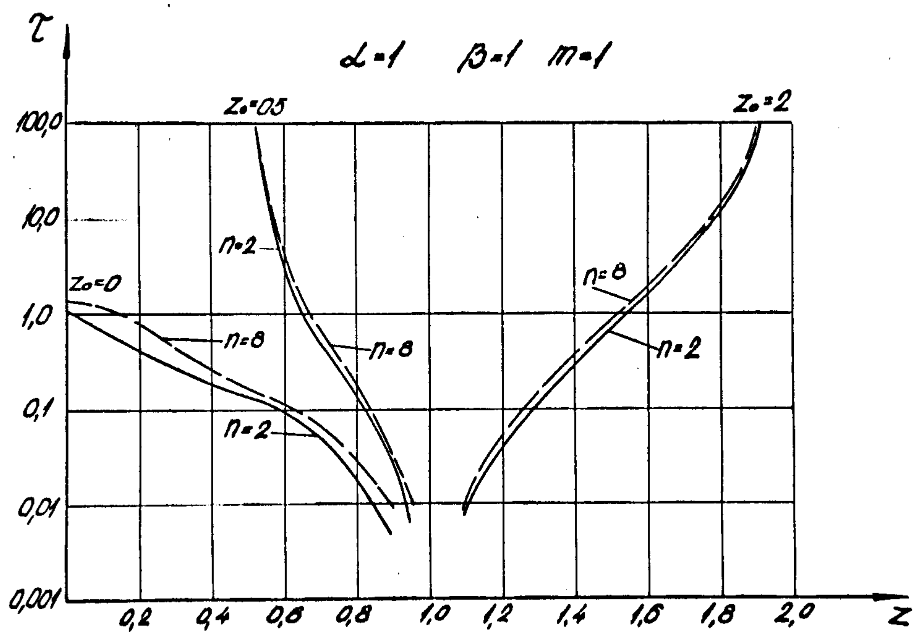


sl. 4.7



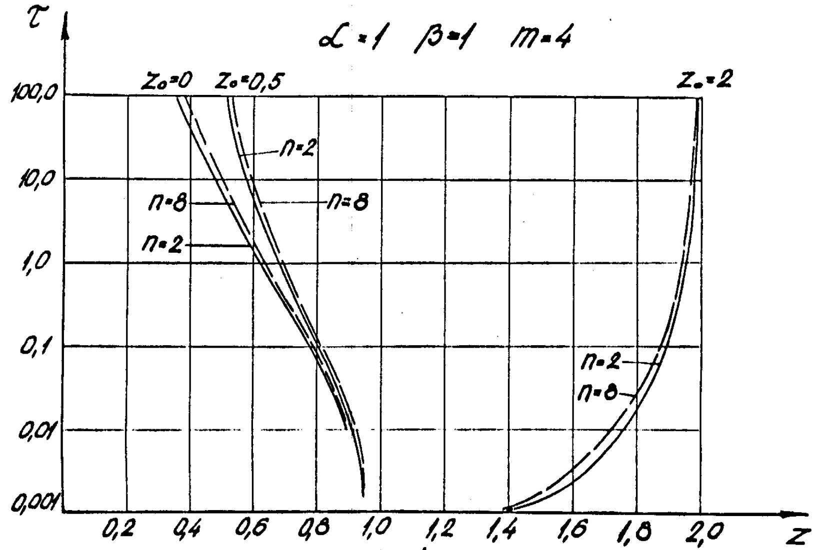
β=0 m=4 α=1 α=0
τ
z₀=0 z₀=0,5
z₀=2
100,0
10,0
1,0
0,1
0,01
0,001
α=0
n=8
n=2
0,2 0,4 0,6 0,8 1,0 1,2 1,4 1,6 1,8 2,0
z

sl. 4.8



α=1 β=1 m=1
τ
z₀=05
z₀=2
z₀=0
n=2
n=8
100,0
10,0
1,0
0,1
0,01
0,001
0,2 0,4 0,6 0,8 1,0 1,2 1,4 1,6 1,8 2,0
z

sl. 4.9



sl. 4.10

4.3.3. *Slučaj stepene zavisnosti termičkih koeficijenata tela od temperature*

Metodom iščezavajućeg parametra moguće je proučiti i proces prostiranja toplote kroz čvrsta tela čija termička svojstva po stepenom zakonu zavise od promene temperature,

$$u(T) = u_o\, T^{\alpha} \quad ; \qquad \lambda(T) = \lambda_o\, T^{\beta} .$$

S obzirom da se i u ovom slučaju aproksimativno rešenje traži u obliku (4.3.3), termička svojstva tela zapisuju se u obliku

$$u(T) = u_o(-1)^{\alpha}\,(T_o-q)^{\alpha}\,(1 - \frac{x}{\theta})^{n+\alpha}$$

(4.3.17)

$$\lambda(T) = \lambda_o(-1)^{\beta}\,(T_o-q)^{\beta}\,(1 - \frac{x}{\theta})^{n+\beta}$$

Postupak formiranja integrala dejstva (4.3.2) isti je kao i u prethodna dva slučaja, s tom razlikom što se termički koeficijenti uzimaju u obliku (4.3.17). Kada se formira Lagranževa funkcija (4.3.1) i izvrše sve potrebne operacije uključujući i integraciju po x, akcioni integral se svodi na

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \Big\{ \frac{\lambda_o^2\, n^2}{2(2\beta n + 2n - 1)} \, \frac{(T_o - q)^{2\beta+2}}{\theta} - \tag{4.3.18}$$

$$- \frac{k}{2}\, u_o\, \lambda_o\, (T_o - q)^{\alpha+\beta}\, \phi \Big\} e^{t/k}\, dt \, ,$$

gde je

$$\phi = \frac{1}{(\alpha+\beta+2)\, n+1}\, \dot q^2 - \frac{2(T_o - q)}{(\alpha+\beta+2)\{(\alpha+\beta+2)n+1\}}\, \dot q \dot\theta +$$

$$+ \frac{2n}{(\alpha+\beta+2)\,\{(\alpha+\beta+2)^2\, n^2 - 1\}}\, \frac{(T_o - q)^2}{\theta}\, \dot\theta^2 \, .$$

Ojler-Lagrančeva jednačina formirana iz (4.3.18) za koordinatu θ , podeljena sa $e^{t/k}$, a potom stavljanjem da $k \to 0$, daje

$$\frac{\lambda_o\, n^2}{2\beta n + 2n - 1}\, \frac{(T_o - q)^{\beta+1}}{q^2} + \frac{2u_o\, (T_o - q)^{\alpha}}{(\alpha+\beta+2)\,\{(\alpha+\beta+2)n+1\}} \{ \dot q - \tag{4.3.19}$$

$$- \frac{2n}{(\alpha+\beta+2)\, n - 1}\, \frac{T_o - q}{\theta}\, \dot\theta \} = 0$$

Veza izmedju generalisanih koordinata, kao i u prethodna dva slučaja, uspostavlja se pomoću graničnog uslova (4.2.2) korišćenjem (4.3.17). Ona glasi:

$$\theta = \frac{\lambda_o n}{h} \frac{(q - T_o)^{\beta+1}}{q^m - \upsilon_o^m} \tag{4.3.20}$$

Na kraju, uvodjenjem bezdimenzionih veličina,

$$z = \frac{q}{T_o} \; ; \quad z_o = \frac{\upsilon_o}{T_o} \; ; \quad \tau = \frac{h^2}{u_o \lambda_o} T_o^{(2m-2-\alpha-\beta)} t$$

i korišćenjem veze (4.3.20) izmedju generalisanih koordinata, jednačina (4.3.19) se svodi na oblik

$$\frac{1}{2\beta n + 2n - 1} (z^m - z_o^m)^2 \, d\tau +$$

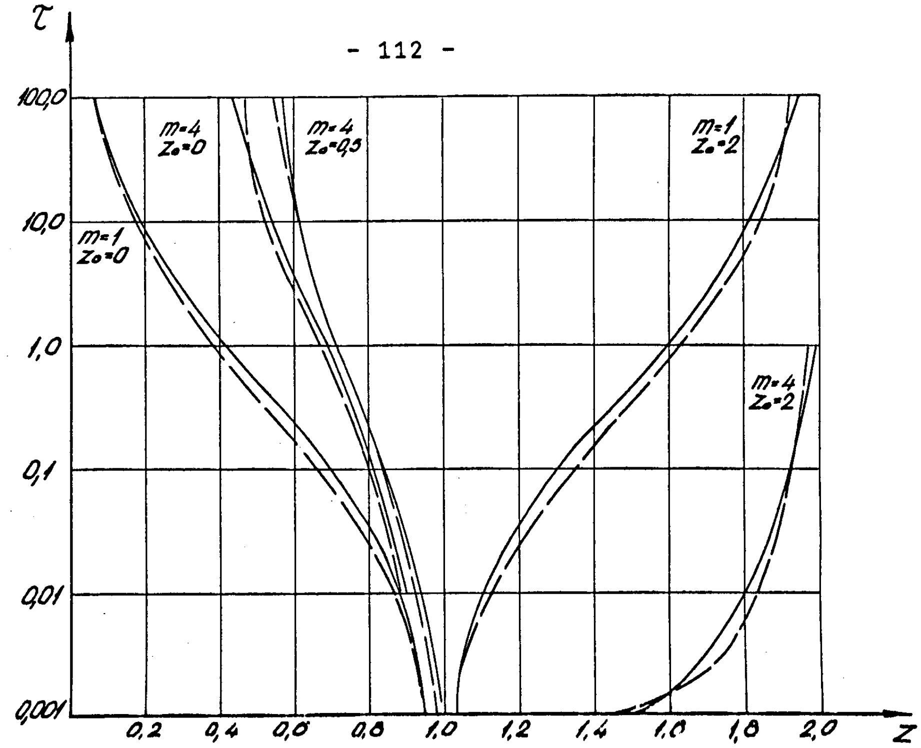
$$+ \frac{2(1-z)^{\alpha+\beta+1}}{(\alpha+\beta+2)\{(\alpha+\beta+2)n-1\}} \{ 1 + \tag{4.3.21}$$

$$+ \frac{2n}{(\alpha+\beta+2)n-1} \left[(\beta+1) + m \frac{z^{m-1}(1-z)}{z^m - z_o^m} \right] \} \, dz = 0.$$

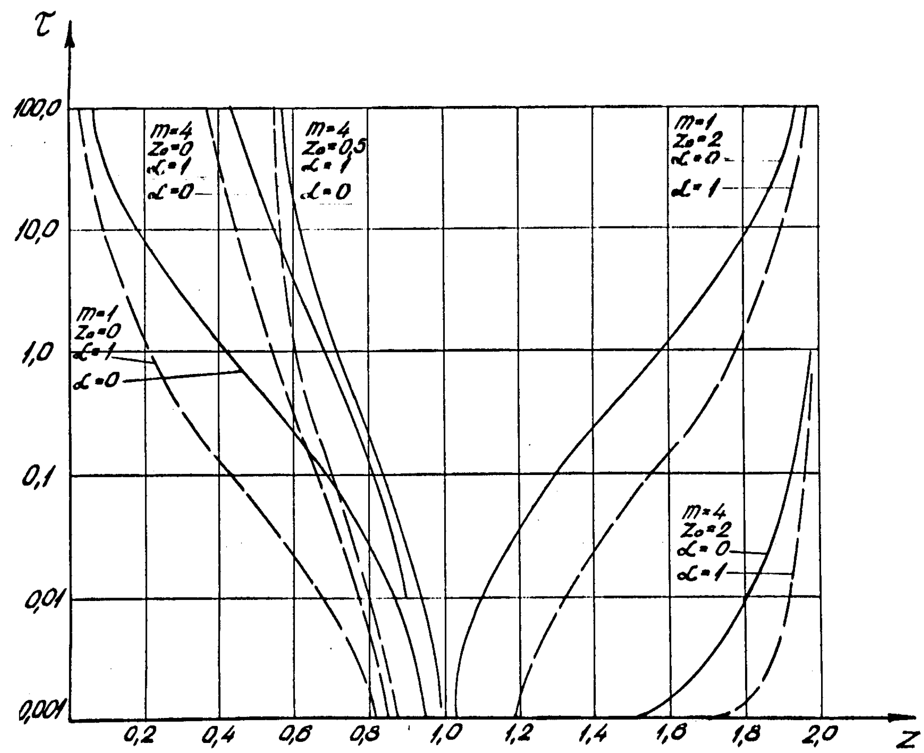
Ova obična diferencijalna jednačina prvog reda veoma je pogodna za numeričku integraciju, jer razdvaja promenljive.

4.3.3a. Analiza dobijenih rešenja

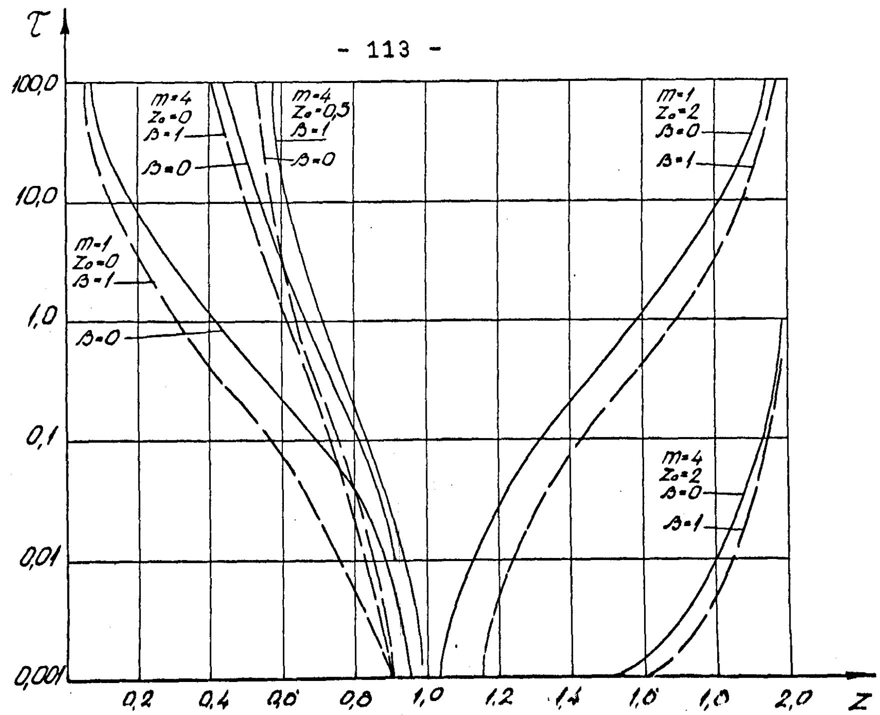
Kada se u jednačini (4.3.21) stavi da je $\alpha = \beta = 0$, ona se svodi na jednačinu (64) iz rada |61| . Grafici prikazani na slici 4.11 pokazuju vrlo dobro slaganje izmedju rezultata prikazanih u radu |69| (pune linije) sa rešenjima koja se dobijaju iz jednačine (4.3.21) (isprekidane linije). Na slikama 4.12-4.14. je prikazano da ni u ovom slučaju zavisnost termičkih koeficijenata od promene temperature ne utiču bitno na fenomen prostiranja toplote kroz čvrsto telo.


τ
100,0
10,0
1,0
0,1
0,01
0,001
m=4
Z₀=0
m=4
Z₀=0,5
m=1
Z₀=2
m=1
Z₀=0
m=4
Z₀=2
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
1,6
1,8
2,0
Z

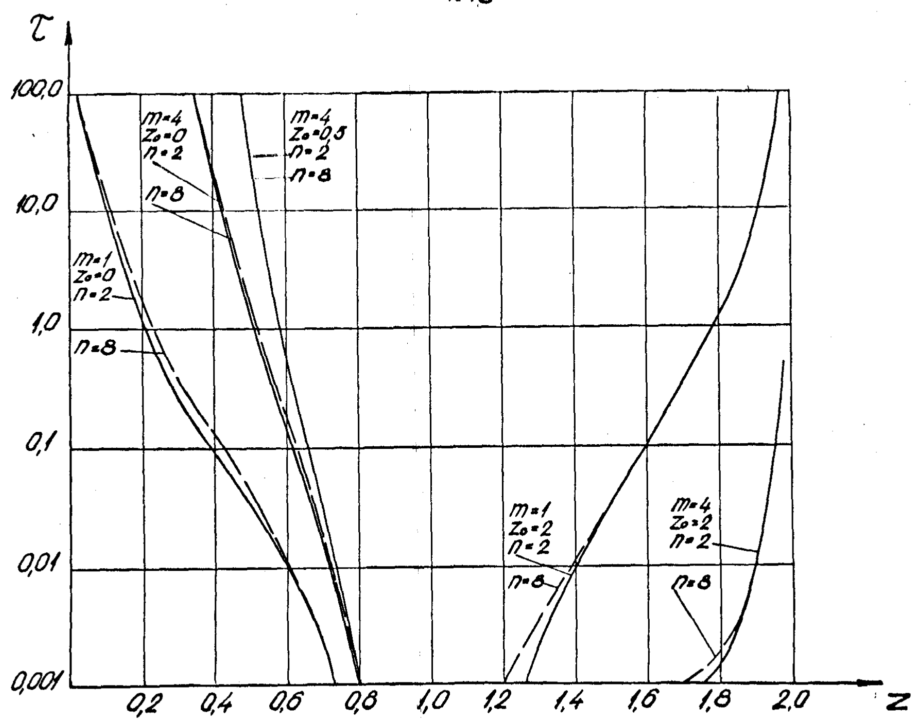
sl. 4.11


τ
100,0
10,0
1,0
0,1
0,01
0,001
m=4
Z₀=0
α=1
α=0
m=4
Z₀=0,5
α=1
α=0
m=1
Z₀=2
α=0
α=1
m=1
Z₀=0
α=1
α=0
m=4
Z₀=2
α=0
α=1
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
1,6
1,8
2,0
Z

sl. 4.12


τ
100,0
10,0
1,0
0,1
0,01
0,001
m=4
Z₀=0
β=1
β=0
m=4
Z₀=0,5
β=1
β=0
m=1
Z₀=2
β=0
β=1
m=1
Z₀=0
β=1
β=0
m=4
Z₀=2
β=0
β=1
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
1,6
1,8
2,0
Z

sl. 4.13


τ
100,0
10,0
1,0
0,1
0,01
0,001
m=4
Z₀=0
n=2
n=8
m=4
Z₀=0,5
n=2
n=8
m=1
Z₀=0
n=2
n=8
m=1
Z₀=2
n=2
n=8
m=4
Z₀=2
n=2
n=8
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
1,6
1,8
2,0
Z

sl. 4.14

ZAKLJUČAK

Dužnost mi je da na kraju ukažem na one delove teksta koji su od bitnog značaja za shvatanje i razumevanje osnovne koncepcije ovoga rada, sadrže u sebi "ideju vodilju", ili predstavljaju originalni naučni doprinos, ili pak mogu da posluže kao putokaz za dalja istraživanja.

1. Osnovni cilj izloženog rada jeste da se podvuče mogućnost varijacionog opisivanja fenomena prostiranja toplote u čvrstim telima preko integralnih varijacionih principa mehanike Hamiltonovog tipa. Zadatak se sastoji kako u dobijanju tačnih diferencijalnih jednačina procesa zajedno sa odgovarajućim graničnim uslovima, tako i u dobijanju aproksimativnih rešenja nelinearnih problema upotrebom direktnih metoda varijacionog računa.

2. Mada strogo nekonzervativni i ireverzibilni, procesi prostiranja toplote u čvrstim telima poseduju izvesnu unutrašnju optimalnost koja je karakteristična za konzervativne sisteme. Ova osobina i jeste polazna tačka za garanciju kvalitetnih rešenja dobijenih varijacionim metodama. Sa toga gledišta varijacioni principi nelinearnog provodjenja toplote, u jednom povratnom smislu, pružaju doprinos klasičnoj mehanici nekonzervativnih sistema u kojoj ovi fenomeni do sada nisu ni proučavani.

3. Originalni naučni doprinos ovoga rada predstavlja rešenje problema provodjenja toplote u termodinamički nelinearnoj homogenoj sredini sa radijacionim graničnim uslovima tela različite emisivnosti ($m = 1$ i $m = 4$, u IV glavi).

U radu je takodje prvi put primenjen princip nekomutativnih varijacija u studiji provodjenja toplote linearnog tela sa graničnim uslovima drugog rada (III glava).

4. Da bi program opisan pod tačkama 1. i 3. mogao biti realizovan bilo je neophodno izvršiti generalizaciju nekih fundamentalnih pojmova klasične mehanike i to:

a) generalisane koordinate ne predstavljaju samo skup geometrijskih parametara koji jednoznačno odredjuju *položaj* materijalnog sistema u geometrijskom prostoru i vremenu, već skup parametara koji jednoznačno definišu *stanje fizičog procesa* koji se proučava.

b) Sledstveno tome, pojam generalisane sile u svetlu ovog razmatranja znatno je obogaćen, shvaćen je kao *uzrok promene stacionarnog stanja fizičkog sistema* u najširem smislu reči. Ova i ovome slična razmatranja mogu da doprinesu smanjenju jaza izmedju savremene fenomenološke ireverzibilne termodinamike i klasične dinamike disipativnih sistema.

v) Varijacioni principi klasične mehanike zbog svojih osobina predstavljaju, govoreći idejno i praktično, veliki "rezervoar" koji obuhvata daleko veći spektar fizičkih procesa od onoga za koji su bili formulisani.

g) Posebno treba naglasiti da su ovakve analogije vrlo zahvalne i sadržajne i da su u ovom pravcu neophodna specijalna istraživanja u cilju unifikacije disparatnih fizičkih pojava u kojima klasična mehanika može da odigra znatnu kohezionu ulogu.

5. U tekstu su izneti hronološkim redom svi osnovni integralni varijacioni principi Hamiltonovog tipa koji se upotrebljavaju u savremenim proučavanjima fenomena ireverzibilne termodinamike; takodje je dat i kratak kriticizam ovih formulacija.

6. I konačno, ovaj rad treba gledati u svetlu mogućnosti primene snažnog aparata klasične analitičke mehanike na probleme fizike koji trenutno, zbog svoje ireverzibilnosti, leže van magistralnih pravaca ove discipline. Drugim rečima, pada u oči da osim marginalnih pokušaja kanonske jednačine dinamike, Hamilton-Jakobijeva metoda, klasična teorija poremećaja itd., nisu uopšte proširene, čak ni na dinamiku idealne tačnosti (opisane Ojlerovim koordinatama), a

pogotovu na savremenu teoriju transporta.

Prema tome, ovaj rad treba smatrati kao skroman doprinos varijacione analitičke mehanike na ireverzibilnu teoriju transporta. Može se očekivati da će se primenom pomenutih oblasti analitičke mehanike na teoriju provodjenja dobiti daleko spektakularniji rezultati.

LITERATURA

1. D. Malić: Lés évolutions reversibles et irreversibles et leur representation graphique, Chaleur et Industrie, Paris 1953.

2. de Groot, Mazur: Non-Equilibrium Thermodynamics,Amsterdam 1961.

3. de Groot: Thermodynamics of Irreversible Processes, Amsterdam 1952.

4. I. Prigožin: Uvod u termodinamiku nepovratnih procesa, prevod D. Malića sa engleskog, Gradjevinska knjiga, Beograd, 1967.

5. D. Malić: Termodinamika i termotehnika, Gradjevinska knjiga, Beograd, 1972.

6. Советская Энциклопедия - Физика

7. W. Heisenberg: Phylisophycal Problems of Modern Physics, Premier Book, New York 1965.

8. Г.Ф.Мучник, И.В.Рубашов: Методы Теории Теплообмена, часть 1, Теплопроводность, Высшая школа, Москва 1970.

9. J. Fourier: Theorie analytique de la chaleur, Paris 1822; Trans. by A. Freeman, New York, Dover Publications 1955.

10. D.B. Milinčić: Prostiranje toplote, SS Maš.fak. Beograd 1965.

11. A.M. Freudenthal, B.A. Boley, H.Liebowitz: High Temperature Structures and Materials, Procidings of the third symposium on Naval structural mechanics heldt at Columbia University, N.Y., Pergamon Press, New York 1964.

12. T.F. Irvine, J.P. Hartnett: Advances in Heat Transfer, Vol. 1. Academic Press, New York 1964.

13. H.S. Carslaw, J.C. Jaeger: Conduction of Heat in Solids, Sec. Ed., Oxford at the Clarendon Press 1959.

14. R.L. Sproull: The Conduction of Heat in Solids, Scientific American, 207, 6,9 - 104, 1962.

15. J.D. Eshelby: The Fundamental Physics of Heat Conduction, Proc of General Discussion on Heat Transfer, 267 - 270, Inst. of Mech. Eng., London 1951.

16. М.И. Алиев: Теплопроводность полупроводников, Баку 1963.

17. Г.Бете, А.Зоммерфеьд: Электронная Теория Металов, ГНТТЛ, Москва 1938.

18. R.D. Mindlin: On the Equations of Motion of Piezoelectric Crystals, Problems of Continuum Mechanics, 282-290, Philadélphia, Soc. for Industrial and Applied Mathematics, 1961.

19. S. Kaliski, J. Petykiewicz: Dynamilac Equations of Motion Coupled with the Field of Temperatures and Resolving Functions for Elastic and Inelastic Anisotropic Bodies in the Magnetic Field, Proc, of Vibration Problems, No. 3, 81-94, 1960.

20. Lord and Schulmann: A Generalized Dynamical Theory of Thermoelasticity, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 15, 299-309, 1967.

21. M. Chester: Second Suond in Solids, Ph. Rev. Vol. 131. No 5, 1963.

22. W. Fulks, R.B. Guenter: Damped Wave Equations and the Heat Equation, Czech. Math. J. 21, 4, 1971.

23. Н.С. Кошляков, В. Глинер, М.М. Смирнов: Основные дифференциальные уравнения математической физики, Гос.изд.физ-мат. литературы, Москва 1962.

24. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский: Уравнения математической физики, Гостехиздат., Москва 1953.

25. А.В. Ликов: Теория теплопроводности, Высшая школа, Москва 1967.

26. А.В. Ликов, Ю.А. Михайлов: Теория тепло-и массопереноса, Госэнергоиздат., Москва 1963.

27. Fishenden and Saundres: Heat Transfer, Oxford 1950.

28. Jakob: Heat Transfer, Wiley 1949.

29. McAdams: Heat Transmission, McGraw-Hill, 1942.

30. К.Трантер: Интегралные преобразования в математической физики, Гостехиздат., Москва 1956.

31. D.V. Widder: The Laplace Transforms, Princeton University Press, Princeton 1941.

32. H. Bateman: Tables of Integral Transforms, Vol. I, McGraw-Hill New York 1954.

33. А.В.Иванов: Операционный метод в задачах теплопроводности и тепло-и массопереноса, Теплофизика в литейном производствие, АН БССР, 1963.

34. Hartree: Numerical Analysis, Oxford 1952.

35. Dusinberre: Numerical Analysis od Heat Flow,McGraw-Hill 1949.

36. Ingersoll, Zobel and Ingersoll: Heat Conduction, University of Wisconsin Press, 1954.

37. Milne: Numerical Calculus, Prencetone 1949.

38. Г.Ф. Мучник: Новый графо-аналитический метод расчета температури, Теплоэнергетика, № 6, 1956.

39. Г.Ф. Мучник: Решение задач теплопроводности методом сеток, Тепло-и массоперенос, Изд.АН БССР, том 5, Минск 1963.

40. Th. v. Karman: Uber laminare und turbulente Reibung, ZAMM, Bd. 1, 1921.

41. H. Schlichting: Boundary Layer Theory, Ch. 12, McGraw-Hill, New York 1955.

42. G. Poots, Intern. J. Heat Mass Transfer 5, 339, 1962.

43. B.A. Finlayson, L.E. Scriven: On the Search for Variational Principles, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 10, 1967.

44. T.R. Goodman; Fourth U.S. Natl. Congr. Appl. Mech.Proc. ASME, 1257, 1962.

45. T.R. Goodman: J. Heat Transfer, 83, 83, 1961.

46. H. Fujita: Nem. Coll. Agr. Kyoto Univ. 59, 31, 1951.

47. A.A. Dorodnitsyn: Advances in Aeronautical Sciences, Vol. 1, 207, Pergamon Press, Oxford 1962.

48. A. Bilimović: Racionalna mehanika II, mehanika sistema, Naučna knjiga, Beograd 1951.

49. T. Andjelić, R. Stojanović: Racionalna mehanika, Zavod za izdavanje udžbenika SR Srbije, Beograd 1965.

50. C. Szily: Das Hamilton'sche Princip und der zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie, Pogg. Ann. 145, 1872.

51. L. Boltzmann: Über die mechanischen Bedeutung des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie, Sitzungberich, Wien, Acad. t. 53,1866.

52. R. Clausius: Uber die Zurückführung des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie auf allgemeine mechanische Principien, Pogg. Ann. 142, 1871.

53. Н.Н. Боголюбов, Д.В.Ширков: Введение в теорию квантованных полей, Гостехиздат, 1957ю

54. V.L. Kantorovich, V.I.Krylov: Approximate Methods of Higher Analysis, Intersciece Publishers, Inc, New York 1958.

55. R.S. Schechter: The Variational Methods in Engineering, McGraw-Hill, Series in Chemical Engineering, New York 1967.

56. I. Prigogine: Evolution Criteria, Variational Properties and Fluctuations, Non-Equalibrium Thermodynamics, Variational Tehniques and Stability, Ed. R.J. Donnely, R. Herman, I. Prigogine, the University of Chicago Press, Chicago 1966.

57. F. Glansdorff, I. Prigogine: Thermodynamic Theory of Structures, Stability and Fluctuations, John-Wiley and Sons,New York 1971.

58. M. Morse, H. Feshbach: Methods of Theoretical Physics,McGraw-Hill, New York 1953.

59. M. Biot: Variational Principles in Heat Transfer, Oxford, Mathematical Monographs, Oxford at the Clarendon Press 1970.

60. M. Biot: New Methods in Heat Flow Analysis with Application to Flight Structures, J.Aeronautical Sciences Vol.24, No 12, 1957.

61. T.J. Lardner: Biot's Variational Principlex in Heat Conduction, AIAA Journal, Vol. 1, 1963.

62. B. Vujanović: An approach to linear and nonlinear heat-transfer problem using a Lagrangian, AIAA J. 1, Vol. 9, No 1, 1971.

63. B. Vujanović and Dj. Djukić: A Variational Principle for the Theory of Laminar Boundary Layers in Incompressible Fluida, L Institut Mathématique, T.11 (25), Beograd, 1971.

64. B. Vujanović and Dj. Djukić: On one Variational Principle of Hamilton's Type for Nonlinear Heat Transfer Problem, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 15, Pergamon Press 1972.

65. B. Vujanović: On Some Variational principles for the Conduction of Heat, Preprints of papers presented at the* "First Heat Transfer Conference", Iasi, Romania, Vol. I, 1973.

66. B. Vujanović: On One Variational Principle for Irreversible Phenomena, ~~xxxxxxxxx~~ Acta Meshanica, 19, 259 - 275, 1974.

67. B. Vujanović: A Variational Principle for Non-Conservative Dynamical Sistems, ZAMM 55, 321 - 331, 1975.

68. Эш и Кроссмен: Влияние зависимости от температуры на ступенчатый нагрев полубесконачного твердого тела, Теплопередача, № 2б 116-118, 1971.

69. P. Rafalsky and W. Zyskowsky: Lagrangian Approach to the Non--Linear Boyndary Heat-Transfer Problem, AIAA J. 6, 1606-1608, 1968.