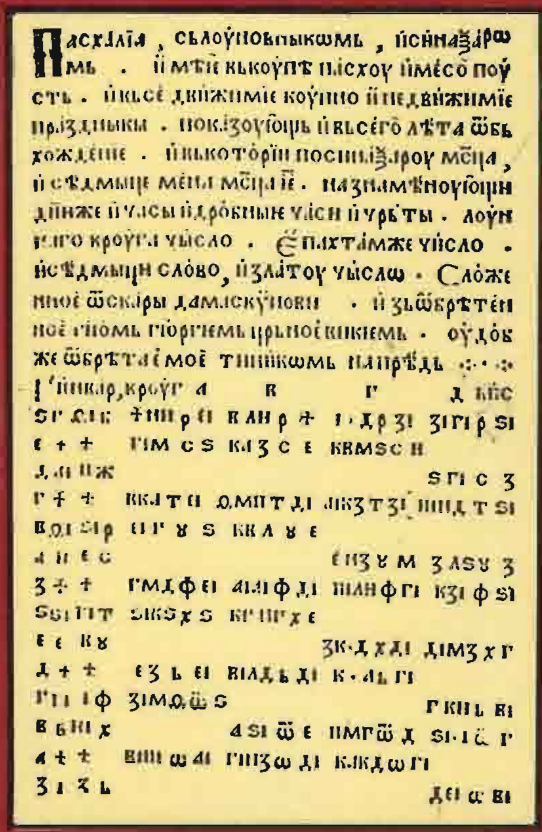

Mathematica Montisnigri

VOLUME VII 1996

The journal *Mathematica Montisnigri* is published by the Society of mathematicians and physicists of Montenegro and Department of Mathematics of The University of Montenegro.

Časopis *Mathematica Montisnigri* izdaju: Društvo matematičara i fizičara Crne Gore i Prirodno-matematički fakultet Univerziteta Crne Gore.

At the front page there is a detail from the first known text in astronomy-mathematics that appeared in Montenegro. It was published in the book *Psaltir* in 1495.

Psaltir was printed on September 22, 1495 in the printing shop of Djurdje Crnojević which was the first printing shop of South Slavs. In the book six, volume 23, Djurdje Crnojević, the sovereign of Montenegro, adapted the Tables of Jovan Damaskin and wrote the *Paschalia* with lunar calendar. He worked out a series of rules regarding the counting of days of Easter celebrations.

Djurdje's *Paschalia Tables* can be found in numerous written and printed books of later period.

Na naslovnoj strani časopisa *Mathematica Montisnigri* prikazan je detalj iz prvog astronomsko-matematičkog teksta sa ovog područja, koji je obavljen u *Psaltiru* 1495. godine.

Psaltir je izašao iz štamparije Djurdja Crnojevića, prve štamparije Južnih Slovena, 22. septembra 1495. godine. U knjizi 6, sveska 23 Djurdje Crnojević, gospodar Crne Gore, preradom Tablica Jovana Damaskina, sastavio je *Paskaliju* sa lunarnim kalendarom, gdje je izradio niz pravila vezanih za izračunavanje datuma za praznovanja Uskrsa. Djurdjeve *Paskalne tablice* pojavljivale su se u brojnim pisanim i štampanim knjigama kasnijeg perioda.

ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА И ФИЗИЧАРА ЦРНЕ ГОРЕ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
УНИВЕРЗИТЕТА ЦРНЕ ГОРЕ

МАТЕМАТИКА ЦРНЕ ГОРЕ

КЊИГА VII

MATHEMATICA MONTISNIGRI

VOLUME VII

UDK 51 YU ISSN 0354 2238

ПОДГОРИЦА, 1996.

MATHEMATICA MONTISNIGRI
Vol VII (1996) 1–86

CONTENTS

MATHEMATICA MONTISNIGRI
Vol VII (1996) 1–11

NEAR-RINGS WITH A MINIMAL DEFECT OF DISTRIBUTIVITY

V. DAŠIĆ AND V. PERIĆ

ABSTRACT. In this paper we consider a class δ_0 of near-rings. The near-rings in this class have the defect of distributivity which is either equal to zero or is minimal as a normal subgroup. Furthermore, we suppose, for some elements of a near-ring R in this class, the distributivity of elements in the multiplicative subgroup S of R generating the group $(R,+)$. The class δ_0 properly contains the class of distributively generated (d.g.) near-rings. In Section 1, we establish some basic properties of the class δ_0. In Section 2, some properties of the Levitzki radical as well as some properties of the prime, semiprime, nil-semiprime and reduced near-rings of the class δ_0 are investigated.

1. SOME PROPERTIES OF THE CLASS δ_0

Let $(R,+,\cdot)$ be a left zero-symmetrical near-ring and let $(S,\cdot)$ be a multiplicative subsemigroup of $(R,\cdot)$ whose elements generate $(R,+)$. The normal subgroup D of $(R,+)$ generated by the set

$$\{d:\ d=-(xs+ys)+(x+y)s;\ x,y\in R; s\in S\}$$

is called the *defect of distributivity* of the near-ring R. If we wish to stress the set S, we write (R,S) instead of R. Every element $r\in R$ can be represented as a finite sum $\sum_i(\pm s_i)$ $(s_i\in S)$. The elements from S act "distributively with a defect" on the sum or difference of

1991 *Mathematics Subject Classification.* 16Y30.

the elements in R. Namely, for all $x, y \in R$ and $s \in S$, there exists $d \in D$ such that

$$(x \pm y)s = xs \pm ys + d.$$

It was proved in [1] that D is an ideal of R. In particular, if $D = \{0\}$, then R is a d.g. near-ring.

Definition 1.1. A near-ring (R, S) is a near-ring with *minimal defect* D if either $D = \{0\}$ or D is minimal as a normal subgroup of $(R, +)$.

Observe that a minimal defect $D \neq \{0\}$ in the previous sense is minimal as an ideal of R. The converse if false. Namely, an ideal of R can be minimal, but not minimal as a normal group.

Lemma 1.1. *R is a near-ring with minimal defect D if and only if either $D \subseteq A$ or $D \cap A = \{0\}$, for every normal nonzero subgroup A of the group $(R, +)$.*

Proof. If $D = \{0\}$, then obviously $D \subseteq A$ and $D \cap A = \{0\}$ for any normal subgroup A of $(R, +)$. Let $D \neq \{0\}$ be the minimal defect of (R, S). For any normal subgroup A of $(R, +)$ we have

$$\text{either} D \cap A = \{0\} \text{ or } D \cap A \neq \{0\}.$$

If $D \cap A \neq \{0\}$, then we have $D \cap A = D$, i.e. $D \subseteq A$. Hence either $D \cap A = \{0\}$ or $D \subseteq A$.

Conversely, suppose that for every normal subgroup A of $(R, +)$, either $D \subseteq A$ or $D \cap A = \{0\}$. Let B be a normal subgroup of $(R, +)$ such that $B \subseteq D$, i.e. $B \cap D = B$. By the assumption, $D \subseteq B$ or $D \cap B = \{0\}$. Therefore $D = B$ or $B = \{0\}$. Thus, D is a minimal defect. $\square$

Lemma 1.2. *Let (R, S) be a near-ring with the defect of distributivity D and let A be a normal S-subgroup of $(R, +)$ such that $A \cap D = \{0\}$. Then A is a right ideal of R if and only if*

$$(x + a)s = xs + as \text{ for all } x \in R, s \in S, a \in A.$$

Proof. If $(x + a)s = xs + as$, then $(x + a)s - xs = xs + as - xs$, i.e. $(x + a)s - xs \in A$ for all $x \in R$, $s \in S$, $a \in A$. By induction we obtain

$$(x + a)r - xr \in A, \text{for all } x, r \in R, a \in A,$$

since $r = \sum_i (\pm s_i)$ $(s_i \in S)$.

Conversely, let A be a right ideal of R. By definition of the defect D, it follows that $(x+a)s-(xs+as) \in D$, for all $x \in R, s \in S, a \in A$. On the other hand, since $(x+a)s - xs \in A$, and $xs - as - xs \in A$, we have $(x+a)s - (xs+as) = (x+a)s - xs + xs - as - xs \in A$. Thus $(x+a)s - (xs+as) \in A \cap D = \{0\}$. Hence $(x+a)s = xs + as$. □

Definition 1.2. A near-ring (R, S) with the defect D is called *locally distributive* if for any normal subgroup A of $(R, +)$ such that $A \cap D = \{0\}$ the following holds

$$(x+a)s = xs + as, \text{for all } x \in R, s \in S, a \in A.$$

Lemma 1.3. *Let (R, S) be a near-ring with a defect D and let $\overline{B}$ be the normal subgroup of $(R, +)$ generated by a subset $B \subseteq R$ with $BS \subseteq B$.*

If $\overline{B} \cap D = \{0\}$, then $\overline{B}$ is a (normal) S-subgroup of $(R, +)$ iff for any $\overline{b} = \sum_i (x_i \pm b_i - x_i)$ $(x_i \in R, b_i \in B)$ and $s \in S$,

$$\overline{b}s = \sum_i (x_i s \pm b_i s - x_i s).$$

Proof. Every element from $\overline{B}$ can be written as

$$\overline{B} = \sum_i (x_i \pm b_i - x_i) \ (x_i \in R, b_i \in B).$$

If $\overline{B}$ is a (normal) S-subgroup, then $\overline{b}s \in \overline{B}$ for all $\overline{b} \in \overline{B}$ and $s \in S$. On the other hand,

$$\overline{b}s = \left(\sum_i (x_i \pm b_i - x_i)\right) s = \sum_i (x_i s \pm b_i s - x_i s) \ + d$$

for some $d \in D$. Since $b_i s \in B$, we have $\sum_i (x_i s \pm b_i s - x_i s) \in \overline{B}$, and hence $d \in \overline{B} \cap D = \{0\}$, i.e. $d = 0$.

The converse is immediate. □

Definition 1.3. Let (R, S) be a near ring with the defect D and let $\overline{B}$ be the normal subgroup od $(R, +)$ generated by a subset $B \subseteq R$ with $BS \subseteq B$. We say that (R, S) is *strictly locally distributive* if

1. (R, S) is locally distributive, and
2. for all $B \subseteq R$ with $BS \subseteq B$, $\overline{B} \cap D = \{0\}$ implies $\overline{B}$ is a (normal) S-subgroup of R.

Clearly, every d.g. near ring is a locally and strictly locally distributive near-ring. Now we define two classes of near-rings.

Definition 1.4. We denote by δ, resp. δ_0 the class of all near-rings (R, S) with minimal defect D which are locally distributive, resp. strictly locally distributive.

Lemma 1.4. *Let $(R, S) \in \delta$. A normal subgroup A of $(R, +)$ is a right ideal of R iff $AS \subseteq A$.*

Proof. Let $AS \subseteq A$. For all $x \in R, a \in A, s \in S$ there exists $d \in D$ such that $(x+a)s - xs = xs + as + d - xs$. By Lemma 1.1. we have $D \subseteq A$ or $D \cap A = \{0\}$. If $D \subseteq A$, then $(x+a)s - xs \in A$, and by induction it follows $(x+a)y - xy \in A$, for all $x, y \in R$, and $a \in A$, since $y = \sum_i (\pm s_i)$ $(s_i \in S)$. Thus, in the case $D \subseteq A$, A is a right ideal of R. In the case $A \cap D = \{0\}$, the result follows from Lemma 1.2.

The converse is immediate. □

Theorem 1.1. *If $(R, S) \in \delta_0$, then every homomorphic image $(\varphi(R), \varphi(S)) \in \delta_0$ and $\varphi(D)$ is the minimal defect of $(\varphi(R), \varphi(S))$.*

Proof. By Theorem 2.3.a [1], $\varphi(D)$ is the defect of distributivity of $(\varphi(R), \varphi(S))$. If B is any normal subgroup of $(\varphi(R), +)$, then $\varphi^{-1}(B)$ is a normal subgroup of $(R, +)$. According to Lemma 1.1, we obtain

$$D \subseteq \varphi^{-1}(B) \text{ or } D \cap \varphi^{-1}(B) = \{0\}.$$

From $D \subseteq \varphi^{-1}(B)$ it follows $\varphi(D) \subseteq B$.

Since φ is a homomorphism, for $D \cap \varphi^{-1}(B) = \{0\}$, we have

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(B \cap \varphi(D)) &= \varphi^{-1}(B) \cap (D + \operatorname{Ker}\varphi) \\ &= \varphi^{-1}(B) \cap D + \operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\varphi, \end{aligned}$$

i.e.

$$B \cap \varphi(D) = \varphi\varphi^{-1}(B \cap \varphi(D)) = \{0\}.$$

Consequently, $\varphi(D) \subseteq B$ or $B \cap \varphi(D) = \{0\}$. Thus, $\varphi(D)$ is the minimal defect in the near-ring $(\varphi(R), \varphi(S))$ (Lemma 1.1.).

Since (R, S) is a near ring with minimal defect D, we have

$$\text{either} D \subseteq \operatorname{Ker}\varphi \text{ or } D \cap \operatorname{Ker}\varphi = \{0\}.$$

In the first case, $\varphi(D) = \{0\}$ and $(\varphi(R), \varphi(S))$ is a d.g. near-ring.

Let now $D \cap \operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$.

Every normal subgroup of $(\varphi(R),+)$ is of the form $\varphi(A)$ for some normal subgroup A of $(R,+)$. For $\varphi(A)\cap\varphi(D)=\{0\}$, we have

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}\varphi &= \varphi^{-1}(\varphi(A)\cap\varphi(D)) = \varphi^{-1}(\varphi(A))\cap\varphi^{-1}(\varphi(D))\\ &= (A+\operatorname{Ker}\varphi)\cap(D+\operatorname{Ker}\varphi) = (A+\operatorname{Ker}\varphi)\cap D+\operatorname{Ker}\varphi,\end{aligned}$$

i.e.

$$(A+\operatorname{Ker}\varphi)\cap D\subseteq \operatorname{Ker}\varphi\cap D=\{0\},$$

hence, $A\cap D=\{0\}$.

Therefore,

$$(x+a)s = xa + xs \text{ for all } x\in R, a\in A, s\in S,$$

and therefore,

$$(\varphi(x)+\varphi(a))\varphi(s)=\varphi(x)\varphi(s)+\varphi(a)\varphi(s)$$

for all $\varphi(x)\in\varphi(R),\varphi(a)\in\varphi(A),\varphi(s)\in\varphi(S)$.

Thus, we have proved that $(\varphi(R),\varphi(S))$ is locally distributive.

The normal subgroup of $(\varphi(R),+)$ generated by a subset $\varphi(B)\subseteq\varphi(R)$ with $\varphi(B)\varphi(S)\subseteq\varphi(B)$ has the form $\varphi(\overline{B})$, where $\overline{B}$ is the normal subgroup or $(R,+)$ generated by B. Since $\varphi(BS)=\varphi(B)\varphi(S)\subseteq\varphi(B)$, we have

$$BS\subseteq\varphi^{-1}(\varphi(B))=B+\operatorname{Ker}\varphi.$$

If $\varphi(\overline{B})\cap\varphi(D)=\{0\}$, then, as before, we conclude that $\overline{B}\cap D=\{0\}$. Therefore,

$$(x+\overline{b})s = xs+\overline{b}s$$

for all $x\in R,\overline{b}\in\overline{B},s\in S$.

Especially,

$$(B+\operatorname{Ker}\varphi)S\subseteq BS+\operatorname{Ker}\varphi S\subseteq B+\operatorname{Ker}\varphi,$$

and thus, we can assume that $BS\subseteq B$, since otherwise we can take $B+\operatorname{Ker}\varphi$ instead of B. But then $\overline{B}$ is a (normal) S-subgroup of R, and consequently, $\varphi(\overline{B})$ is a (normal) $\varphi(S)$-subgroup of $\varphi(R)$. □

Corollary 1.1. *Let $(R,S)\in\delta_0$, and let D be the minimal defect of (R,S). If A is any ideal of (R,S), then $(\frac{R}{A},\frac{S}{A})\in\delta_0$, and $\frac{D}{A}$ is the minimal defect of $(\frac{R}{A},\frac{S}{A})$.*

Proof. $\frac{R}{A}$ is the image of the natural epimorphism $\pi : R \cong \frac{R}{A}$, $\pi(R) = \frac{R}{A}$, $\pi(S) = \frac{S}{A}$, $and \pi(D) = \frac{D}{A}$. Thus, the result follows from previous theorem. □

The following theorem gives a description of the elements of an ideal which is generated by some subset of a near-ring.

Theorem 1.2. *If $(R, S) \in \delta_0$, then the right ideal $\tilde{B}$ of R generated by a subset $B \subseteq R$ with $BS \subseteq B$ coincides with the normal subgroup $\overline{B}$ of $(R, +)$ generated by B, and thereby consists exactly of the elements having the form*

$$\bar{b} = \sum_i (x_i \pm b_i - x_i) \; (x_i \in R, b_i \in B).$$

Proof. Every element $\bar{b} \in \overline{B}$ has the above form and conversely. Now, since $\overline{B} \subseteq \tilde{B}$, we have only to prove that $\overline{B}$ is a right ideal of R, i.e. according to Lemma 1.4, that $\overline{B}S \subseteq \overline{B}$.

If D is the defect of (R, S), then for all $\bar{b} \in \overline{B}$, and $s \in S$, there is a $d \in D$ such that

$$\bar{b}s = \sum_i (x_i s \pm b_i s - x_i s) \; + \; d, \text{ i.e. } \bar{b}s = \overline{b'} + d,$$

where $\overline{b'} = \sum_i (x_i s \pm b_i s - x_i s) \in \overline{B}$, since $b_i s \in B$.

Since D is minimal, either $D \subseteq \overline{B}$ or $D \cap \overline{B} = \{0\}$. If $D \subseteq B$, then $\bar{b}s \in \overline{B}$ for all $\bar{b} \in \overline{B}$ and $s \in S$, i.e. $\overline{B}S \subseteq \overline{B}$. If $D \cap \overline{B} = \{0\}$, then by definition of δ_0, we have $\overline{B}S \subseteq \overline{B}$, again. □

Corollary 1.2. *If $(R, S) \in \delta_0$, then the ideal $\hat{B}$ of R generated by a subset $B \neq \phi$ is the normal subgroup $\overline{B'}$ of $(R, +)$ generated by the set $B' := B \cup BS \cup RB \cup RBS$, and thereby consists exactly of the elements having the following form*

$$\overline{b'} = \sum_i (x_i \pm b'_i - x_i) \; (x_i \in R, b'_i \in B').$$

Proof. Clearly, $\overline{B'} \subseteq \hat{B}$, and $\overline{B'}$ consists exactly of elements having the above mentioned form. Because of $B'S \subseteq B'$, $\overline{B'}$ is a right ideal of R in view of Theorem 1.2. □

Theorem 1.3. *Let $(R, S) \in \delta_0$. D the minimal defect of (R, S) and let R' be the commutator subgroup of the group $(R, +)$. Suppose that from $D \cap G' = \{0\}$ it follows $[x, y]s$ is a commutator in R for any commutator $[x, y] = xy - yx$ in R, and any $s \in S$.*

Then R' is an ideal of R and $(\frac{R}{R'}, \frac{S}{R'}) \in \delta_0$, where $\frac{D}{R'}$ is the minimal defect of $(\frac{R}{R'}, \frac{S}{R'})$.

Proof. R' is a normal subgroup of $(R, +)$ and consists of all finite sums of commutators. Since $(R, S) \in \delta_0$, it follows by lemma 1.1. $D \subseteq R'$ or $D \cap R' = \{0\}$. If $D \subseteq R'$, then R' is a (normal) S-subgroup of R. Namely, for all $x = \sum_i (x_i + y_i - x_i - y_i) \in R'$ and $s \in S$, there is $d \in D$ such that

$$xs = \sum_i (x_i s + y_i s - x_i s - y_i s) \; + \; d.$$

From this, according to the fact that $x_i s + y_i s - x_i s - y_i s \in R'$, and $d \in R'$ we have $R'S \subseteq R'$.

If $D \cap R' = \{0\}$, then by assumption, for the generating set $B = \{[x, y] : x, y \in R\}$ of the normal subgroup R', we have $BS \subseteq B$. Then applying Lemma 1.3, we obtain that R' is a (normal) S-subgroup, again.

According to Lemma 1.4, we have that R' is a right ideal of R, and hence it is an ideal of R. The last part of the assertion follows by Corollary 1.1. $\square$

2. The Levitzki radical and prime near-rings of the class δ_0

Recall that a near-ring R is *locally nilpotent* if every finite subset of R generates a nilpotent subnear-ring. Clearly, every nilpotent near-ring is locally nilpotent, and every locally nilpotent near-ring is a nil near-ring. The local nilpotency of any ideal of R coincides with its local nilpotency as a near-ring. The sum $L(R)$ of all locally nilpotent ideals of a near ring R is a locally nilpotent ideal which is called the *Levitzki nil radical.* If $L(R) = \{0\}$ we say that R is L-*semisimple.*

The following two Lemmas and Theorem 2.1 generalize the results in ([3], Theorems 1,2,3), respectively.

Lemma 2.1. *Let $(R, S) \in \delta_0$ and let A be an ideal of R. If $B \neq \{0\}$ is an ideal of A such that $BS \in B$, then for the ideal C of R which is generated by the subset B we have $C^3 \subseteq B$.*

Proof. By Corollary 1.2, the elements of C have the form

$$c = \sum_i (x_i \pm b_i' - x_i) \; (x_i \in R, b_i' \in B'),$$

where $B' = B \cup BS \cup RB \cup RBS = B \cup RB$.

Since $C \subseteq A$ we have

$$C^3 \subseteq ACA.$$

Thus, for all $x \in C^3$, there exist $a, a_1 \in A, x_i \in R, b_i' \in B'$ such that

$$x = a(\sum_i (x_i \pm b_i' - x_i))a_1 = (\sum_i (ax_i \pm ab_i' - ax_i))a_1 .$$

But B is an ideal of A, and we obtain $x = ba_1$, where

$$b = \sum_i (ax_i \pm ab_i' - ax_i) \in B.$$

Therefore, for all $x \in C^3$, we have $x \in B$, i.e. $C^3 \subseteq B$. □

Lemma 2.2. *Let $(R, S) \in \delta_0$ and let A be an ideal of R. If $B \neq \{0\}$ is an ideal of A such that $BS \subseteq B$ and $\frac{A}{B}$ does not contains nonzero nilpotent ideals, then B is an ideal of R.*

Proof. Denote by C the ideal of R generated by the subset B. Then $B \subseteq C \subseteq A$. According to Lemma 2.1, $C^3 \subseteq B$. But, by assumption, $\frac{A}{B}$ does not contains nonzero nilpotent ideals; so $C \subseteq B$, i.e. $C = B$. Thus, B is an ideal of R. □

Theorem 2.1. *Let $(R, S) \in \delta_0$ and let A be an ideal of R. If $L(A)S \subseteq L(A)$, then $L(A)$ is a locally nilpotent ideal of R and*

$$L(A) = L(R) \cap A.$$

In particular,

$$L(L(A)) = L(A).$$

Proof. By definition, $L(A)$ is a locally nilpotent ideal. Therefore $\frac{A}{L(A)}$ does not contain nonzero locally nilpotent ideals. By Lemma 2.2, $L(A)$ is a locally nilpotent ideal of R. Thus, $L(A) = L(R) \cap A$.

Replacing A by $L(A)$, we obtain $L(L(A)) = L(R) \cap L(A) = L(A)$. □

Theorem 2.2. *Let D be the defect of $(R, S) \in \delta_0$ and let A be an ideal of R such that $L(A)S \subseteq L(A)$. Then $D \subseteq L(A)$ or $D \cap L(A) = \{0\}$. If $D \subseteq L(A)$, then $\frac{R}{L(A)}$ is a L-semisimple d.g. near-ring. If $D \cap L(A) = \{0\}$ and $L(A) + D$ is generated by some subset of S, then $L(A)$ is a d.g. near-ring.*

Proof. By Theorem 2.1, $L(A)$ is a locally nilpotent ideal of R. According to Lemma 1.1, $D \subseteq L(A)$ or $D \cap L(A) = \{0\}$. In the first case, $D \subseteq L(R)$. Therefore, $\frac{R}{L(R)}$ is not only a L-semisimple, but also a d.g. near-ring (Corollary of Theorem 2.6 in [1]). In the second case, the near-ring $R_1 = L(A) + D$ is, by assumption, additively generated by some subset S_1 of S and consequently (R_1, S_1) has a defect $D_1 \subseteq D$. Hence, by Theorem 2.6 in [1], $\frac{L(A)+D}{D}$ is a d.g. near-ring. Applying the first isomorphism theorem, we obtain

$$\frac{L(A) + D}{D} \cong \frac{L(A)}{L(A) \cap D} \cong L(A).$$

Thus, $L(A)$ is a d.g. near-ring, too.

Recall that a nonzero near-ring R is *prime* if the product of any two nonzero ideals of R is a nonzero ideal. A nonzero near-ring R is *semiprime*, resp. *nil-semiprime*, resp. *reduced* if it does not coutain nonzero nilpotent ideals, resp. nil ideals, resp. nilpotent elements.

Let A, B be subsets of R and

$$(B : A)_R = \{r \in R : Ar \subseteq B\}.$$

The following theorem generalize a part of the results in ([4], Th. 5.3, Th. 6.1), concerning d.g. near-rings to the near-rings of the class δ_0. Moreover, it contain also both semiprime and reduced cases, and an additional assertion about $(B : A)_R$. □

Theorem 2.3. *Let $(R, S) \in \delta_0$, A an ideal in R, $B \neq \{0\}$ an ideal of A such that $BS \subseteq B$, and $\frac{A}{B}$ a prime, resp. nil-semiprime, resp. reduced near-ring. Then B and $(B : A)_R$ are ideals of R and $\frac{R}{(B:A)_R}$ is a prime, resp. semiprime, resp. nil-semiprime, resp. reduced near-ring.*

Moreover, $((B:A)_R:A)_R=(B:A)_R$, $A\cap(B:A)_R=B$. *Further, for any ideal* C *of* R *with* $A\cap C=B$, *we have* $(C:A)_R=(B:A)_R$, *and if additionally,* $\frac{R}{C}$ *is prime, then also* $C=(B:A)_R$.

Proof. Obviously, in any case, $\frac{A}{B}$ does not contains nonzero nilpotent ideals. Hence, according to Lemma 2.2, B is an ideal of R. Therefore, also $(B:A)_R$ is an ideal of R ([2], Prop. 1.42).

First, we prove that $\frac{R}{(B:A)_R}$ is a prime, resp. semiprime, resp. nil-semiprime, resp. reduced near-ring.

For $\frac{A}{B}$ a prime, resp. nil-semiprime ring, this assertion can be proved in the same way as in ([4], Th.5.3, resp. Th. 6.1).

Similarly we can prove the assertion for the semiprime case.

Now we prove the assertion for the reduced case. Let $\frac{A}{B}$ be a reduced near-ring. Suppose $x+(B:A)_R\in\frac{R}{(B:A)_R}$ is a nilpotent element and let n be the minimal positive integer such that

$$(x+(B:A)_R)^n=0+(B:A)_R, \text{i.e. } x^n\in(B:A)_R.$$

For $n=1$, we have $x\in(B:A)_R$, i.e. $x+(B:A)_R=0+(B:A)_R$.

For $n>1$ we will get a contradiction. Namely, for any $a\in A$, $ax^{n-1}\in A$ and $p^{n-1}ap^{n-1}\in A$. Moreover,

$$(x^{n-1}ax^{n-1})^2\in B, \text{hence, } x^{n-1}ax^{n-1}\in B.$$

From this it follows

$$(ax^{n-1})^2\in B, \text{i.e. } ax^{n-1}\in B.$$

Consequently, $Ax^{n-1}\subseteq B$, i.e. $x^{n-1}\in(B:A)_R$, hence a contradiction.

Next we prove that $((B:A)_R:A)_R=(B:A)_R$, and $A\cap(B:A)_R=B$. Obviously, $(B:A)_R\subseteq((B:A)_R:A)_R$, and $A\cap(B:A)_R\supseteq B$. In any case, as just mentioned, $\frac{A}{B}$ is a semiprime near-ring. Moreover, $((B:A)_R:A)_R$ is an ideal of R and $A^2((B:A)_R:A)_R\subseteq B$. Hence, $A\cap((B:A)_R:A)_R$ is an ideal of A and $(A\cap((B:A)_R:A)_R)^3\subseteq B$. Because $\frac{A}{B}$ is semiprime, from this it follows

$$A\cap((B:A)_R:A)_R\subseteq B, \text{ i.e. } ((B:A)_R:A)_R\subseteq(B:A)_R.$$

hence, $((B:A)_R:A)_R=(B:A)_R$. Since $A\cap(B:A)_R$ is an ideal of A, and $(A\cap(B:A)_R)^2\subseteq B$, then $A\cap(B:A)_R\subseteq B$, i.e. $A\cap(B:A)_R=B$.

Finally, we prove the last assertion of our Theorem.

Let C be an ideal of R such that $A\cap C=B$. Then from $A\cap C=B$ we obtain $AC\subseteq B$, i.e. $C\subseteq(B:A)_R$. Consequently, $(C:A)_R\subseteq((B:A)_R:A)_R\subseteq(B:A)_R$. On the other hand, $A(B:A)_R\subseteq B\subseteq C$, hence $(B:A)_R\subseteq(B:C)_R$, i.e. $(B:A)_R=(C:A)_R$.

If $\frac{R}{C}$ is prime, then $A(B:A)_R\subseteq C$ implies $(B:A)_R\subseteq C$, i.e. $(B:A)_R=C$, since $A\not\subseteq C$ in view of $A\cap C=B\neq A$. $\square$

References

[1] V. Dašić, *A defect of distributivity of the near-rings*, Mathematica Balkanica **8** (1978), 63-75.

[2] G. Pilz, *Near-rings*, North Holland, Amsterdam, 1983.

[3] V. Dašić, *On the Levitzki radical in some near-rings*, Proceedings of the Conference "Algebra and Logic", Sarajevo 1987, 43-47.

[4] K. Kaarli, *Special'nye radikaly počti-kolec*, Turtuskiy gosud. univ. **610** (1982), 53-68.

Received October 10, 1996

University of Montenegro, Faculty of Science, P. O. Box 211, 81001 Podgorica, Yugoslavia

MATHEMATICA MONTISNIGRI
Vol VII (1996) 13–17

ON COMMON FIXED POINT FOR A COMPATIBLE MAPPINGS ON QUASI-GAUGE SPACES

LJILJANA GAJIĆ AND DANICA NIKOLIĆ-DESPOTOVIĆ

ABSTRACT. In this paper we discuss a common fixed point theorem that extends result from [1] for a class of compatible mappings on quasi-gauge spaces.

1. NOTIONS AND NOTATION

Definition 1 ([3]). A *quasi-pseudometric* on a non-empty set X is a non-negative real valued function on $X \times X$ such that any x, y, z in X

i) $p(x, x) = 0$;
ii) $p(x, y) \leqslant p(x, z) + p(z, y)$.

A quasi-gauge structure for a topological space (X, τ) is a family $\mathcal{P}$ of quasi-pseudometrics on X such that τ has as a subbase $\{B(x; p, \varepsilon) : x \in X, p \in \mathcal{P}, \varepsilon > 0\}$ where $B(x; p, \varepsilon)$ is the set $\{y \in X : p(x, y) < \varepsilon\}$. If topological space (X, τ) has a quasi-gauge structure $\mathcal{P}$ it is called a *quasi-gauge space* and denote by $(X, \mathcal{P})$.

Definition 2 ([1]). In space $(X, \mathcal{P})$ the sequence $\{x_n\}$ is called a *left (right) $\mathcal{P}$-Cauchy* if for each p in $\mathcal{P}$ and each $\varepsilon > 0$ there exists a point x in X and integer k such that $p(x, x_m) < \varepsilon$ $(p(x_m, x) < \varepsilon)$ for all $m \geqslant k$ (x and k may depend upon ε and p). A quasi-gauge

---

1991 *Mathematics Subject Classification.* 54H25.
Key words and phrases. Common fixed point, quasi-gauge spaces, compatible mappings.

space $(X, \mathcal{P})$ is *left (right) sequentially complete* if every left (right) $\mathcal{P}$-Cauchy sequence in X converges to some element X.

Now, let us define the notion of compatible pair of mappings in quasi-gauge space that is generalization of compatibility in metric space [2].

Definition 3. Let S and T be a mappings from a quasi-gauge space $(X, \mathcal{P})$ into itself. Then $\{S, T\}$ is said to be a *compatible* pair if every $p \in \mathcal{P}$

$$\lim_{n\to\infty} p(STx_n, TSx_n) = \lim_{n\to\infty} p(TSx_n, STx_n) = 0$$

whenever $\{x_n\}$ is the sequence in X such that

$$\lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} Sx_n = z$$

for some $z \in X$.

Remark. Every commuting pair is compatible pair but inverse is not true [2].

2. The result

Now we can prove the following result.

Theorem 1. *Let $\{T, I\}$ and $\{T, J\}$ be compatible pairs of mappings of left (right) sequentially complete quasi-gauge T_0 space $(X, \mathcal{P})$ into itself, satisfying for each p in $\mathcal{P}$ inequality*

$$p(Tx, Ty) \leqslant c \max\{p(Ix, Jy), p(Ix, Tx), p(Jy, Ty), p(Ix, Ty), p(Jy, Tx)\} \tag{1}$$

for all x, y in X where $0 \leqslant c < 1$. Suppose that for each x in X, there exists a y in X such that

$$Tx = Iy = Jy.$$

If T is continuous and whenever $Tx_n \to x$ then $p(Tx_n, x) \to 0$, as $n \to \infty$, for each p in $\mathcal{P}$, then T, I and J have a unique common fixed point z in X.

Proof. Let x_0 be an arbitrary point in X. Define a sequence $\{x_n\}$ inductively bu choosing

$$Tx_{n-1} = Ix_n = Jx_n,$$

for all $n \in \mathbb{N}$.

As in [1] one can prove that the set of real numbers

$$A = \{p(Tx_n, Tx_1) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{p(Tx_1, Tx_n) : n \in \mathbb{N}\}$$

is bounded for any $p \in \mathcal{P}$.

Namely, if your suppose contrary that this set is unbounded then there exists an integer n such that

$$(1-c)\max\{p(Tx_n, Tx_1), p(Tx_1, Tx_n)\} \\ > c\max\{p(Tx_1, Tx_0), p(Tx_0, Tx_1)\}$$

and

$$\max\{p(Tx_n, Tx_1), p(Tx_1, Tx_n)\} \\ > c\max\{p(Tx_r, Tx_1), p(Tx_1, Tx_r) : 0 \leqslant r < n\}$$

and further that

$$\max\{p(Tx_n, Tx_1), p(Tx_1, Tx_n)\} \\ \leqslant c^k \max\{p(Tx_r, Tx_s) : 1 \leqslant r, s \leqslant n\}$$

for every $k \in \mathbb{N}$. For proof see [1].

Letting k tend to infinity it follows that

$$\max\{p(Tx_n, Tx_1), p(Tx_1, Tx_n)\} = 0$$

which is contradiction to the assumption that the set A is unbounded.

Now, it follows that

$$\begin{aligned} M_p &= \sup\{p(Tx_r, Tx_s) : r, s = 0, 1, 2, \cdots\} \\ &\leqslant \sup\{p(Tx_r, Tx_1) + p(Tx_1, Tx_s) : r, s = 0, 1, 2, \cdots\} \end{aligned}$$

is finite

For an arbitrary $\varepsilon > 0$ and $p \in \mathcal{P}$ let us choose an integer n_p such that $c^{n_p} M_p < \varepsilon$. Then for $m \geqslant n_p$

$$\begin{aligned} p(Tx_m, Tx_{n_p+1}) \leqslant c^{n_p} \max \big\{ & p(Tx_r, Tx_s), p(Tx_r, Tx_{r'}), \\ & p(Tx_s, Tx_{s'}), p(Tx_s, Tx_r) : m - n_p \leqslant r, \\ & r' \leqslant m,\ 1 \leqslant s,\ s' \leqslant n_p + 1 \big\} \leqslant c^{n_p} M_p < \varepsilon \end{aligned}$$

and similarly

$$p(Tx_{n_p}, Tx_m) < \varepsilon.$$

Hence $\{Tx_n\}$ is left and right $\mathcal{P}$-Cauchy sequence in a left (right) sequentially complete quasi-gauge space, the sequence

$$\{Tx_n\} = \{Ix_{n+1}\} = \{Jx_{n+1}\}$$

converges to some z in X. The mapping T is continuous so $\{T^2x_n\} = \{TIx_{n+1}\} = \{TJx_{n+1}\}$ converges to Tz:

$$p(Tz, z) \leqslant p\big(Tz, T^2x_n\big) + p\big(T^2x_n, Tx_n\big) + p(Tx_n, z). \tag{2}$$

Since $Tx_n \to z$ implies $p(Tx_n, z) \to 0$ as $n \to \infty$, the first and third member tend to 0. Let us see the second one.

$$p(T^2x_n, Tx_n) \leqslant c\max\big\{p(ITx_n, Jx_n), p\big(ITx_n, T^2x_n\big),$$
$$p(Jx_n, Tx_n), p(ITx_n, Tx_n), p\big(Jx_n, T^2x_n\big)\big\}.$$

Now, we have to use condition (ii) and compatibility of pair $\{T, I\}$.

$$p(ITx_n, Jx_n) \leqslant p(ITx_n, TIx_n) + p(TIx_n, Jx_n),$$
$$p\big(ITx_n, T^2x_n\big) \leqslant p(ITx_n, TIx_n) + p\big(TIx_n, T^2x_n\big)$$

and similarly for $p(ITx_n, Tx_n)$ and $p\big(Jx_n, T^2x_n\big)$. Using this in (2) when $n \to \infty$, we have that

$$p(Tz, z) \leqslant c\max\{p(Tz, z), p(z, Tz)\}.$$

Using the same procedure one can prove that

$$p(z, Tz) \leqslant c\max\{p(z, Tz), p(Tz, z)\}$$

so since $c < 1$ it must be

$$p(z, Tz) = p(Tz, z) = 0.$$

There must exist ω in X such that $z = Tz = J\omega = I\omega$. Then we have

$$p(z, T\omega) \leqslant p(z, Tx_n) + p(Tx_n, T\omega) \leqslant p(z, Tx_n)$$
$$+c\max\big\{p(Tx_{n-1}, z), p(Tx_{n-1}, Tx_n), p(z, T\omega),$$
$$p(Tx_{n-1}, T\omega), p(z, Tx_n)\big\}.$$

On letting n to tend to infinity

$$p(z, T\omega) \leqslant cp(z, T\omega),$$

and similarly

$$p(T\omega, z) \leqslant cp(T\omega, z) = 0.$$

so $p(z, T\omega) = p(T\omega, z) = 0$. Hence $z = T\omega = I\omega = J\omega$. Since $\{J, T\}$ is a pair of compatible mappings and $T\omega = J\omega = z$, $p(TJ\omega, JT\omega) =$

$p(JT\omega, TJ\omega) = 0$, for every $p \in \mathcal{P}$ and hence $Tz = TJ\omega = JT\omega = Jz = z$. Similarly, $Tz = TI\omega = IT\omega = Iz = z$. Thus z is a common fixed point of T, I and J. As in [1] one can prove that this fixed point is unique so the proof is complete. $\square$

References

[1] J. Antony and P. V. Subrahmanyam, *Fixed point for three the mappings*, Univ. u Novom Sadu, Zb. rad. PMF. Ser. mat. (to be published).

[2] G. Jungck. *Compatible mappings and common fixed points*, Internat. J. Math. & Math. Sci. **9** (1986), 771-779.

[3] I. L. Reilly, *Quasi-Gauge Spaces*, J. London Math. Soc. **(2)6** 1973, 481–487.

Received February 8, 1996

Institute of Mathematics, University of Novi Sad, Trg D. Obradovića 4, 21000 Novi Sad, Yugoslavia

MATHEMATICA MONTISNIGRI
Vol VII (1996) 19–27

СПИН-ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ ПРОСТРАНСТВА МИНКОВСКОГО

С. Г. ЛЕЙКО

Резюме. В работе введен в рассмотрение специальный класс поверхностей (псевдо)римановых пространств, названных спин-поверхностями. Найдены все спин-гиперповерхности пространства Минсковского.

1. Рассмотрим риманово или псевдориманово пространство (M_n, g).

Определение 1. Кривую γ в пространстве (M_n, g) называем (локально) спин-кривой, если существует постоянная A и (канонический) параметр $t \in (t_0, t_1)$, такие, что

$$\nabla_t^3 \dot\gamma^h = R^h_{ijk} \dot\gamma^i \dot\gamma^j \nabla_t \dot\gamma^k + A \nabla_t \dot\gamma^h, \tag{1}$$

$$\langle \dot\gamma, \nabla_t \dot\gamma \rangle = \langle \nabla_t \dot\gamma, \nabla_t^2 \dot\gamma \rangle = 0, \tag{2}$$

где ∇ – риманова связность, R^h_{ijk} – тензор Римана, $\langle\ ,\ \rangle$ – скалярное произведение в (M_n, g).

Спин-кривые являются изопериметрическими экстремалями (стационарными кривыми) функционала поворота [1].

Из условий (2) вытекает, что если l – натуральный параметр, то всякий канонический параметр спин-кривой имеет вид $t = al + b$, $a, b - const$. Кроме того, эти условия говорят о том, что спин-кривая имеет постоянную первую кривизну Френе k_1.

В случае, когда пространство (M_4, g) порождено гравитационным полем, спин-кривые описывают траектории вращающихся частиц с тензором спина $S = \omega\dot{\gamma} \wedge \nabla_t\dot{\gamma}$, $\omega - const.$ [1]. Этот факт объясняет происхождение терминологии.

Если пространство имеет постоянную секционную кривизну, то его спин-кривые вследствие (1), (2) имеют следующие кривизны Френе: $k_1, k_2 - const.$, $k_3 = 0$, т.е. являются винтами первого ($k_2 = 0$) или второго порядка (или геодезическими в простейшем случае $k_1 = 0$). Т.о., здесь спин-кривые являются специальными p-геодезическими кривыми [2] ($p \leqslant 3$).

Определение 2. Подпространство $(\bar{M}_m, a)$ пространства (M_n, g) называем спин-подпространством (или спин-поверхностью), если каждая геодезическая кривая подпространства является (локально) спин-кривой объемлющего пространства. Здесь a – индуцированный метрический тензор.

Когда объемлющее пространство имеет постоянную секционную кривизну, его спин-поверхности являются специальными p-геодезическими поверхностями ($p \leqslant 3$) [3].

При этом частными случаями этих поверхностей будут винтовые геодезические поверхности порядка $p = 2, 3$ в смысле Сакамото [4]. Дополнительным требованием здесь является то, что при вложении все геодезические кривые поверхности становятся винтами порядка $p = 2, 3$ с одинаковыми кривизнами для всех геодезических.

Лемма 1. *Гиперповерхность* $(\bar{M}_{n-1}, a)$ *в плоском пространстве* $\mathbb{R}^n_{p,q}$ *является спин-поверхностью этого пространства тогда и только тогда, когда ее второй фундаментальный тензор* b *абсолютно параллельный:* $\bar{\nabla} b = 0$.

Доказательство. Пусть x^i – ортонормированные координаты в $\mathbb{R}^n_{p,q}$, e_i – соответствующий ортонормированный базис. Тогда $R^h_{ijk} = 0$; $p + q = n$, $0 \leqslant p, q \leqslant n$,

$$(g_{ij}(x)) = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{p}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{q}).$$

В свою очередь, пусть u^α, $\alpha = 1, \ldots, n-1$ – локальные координаты на гиперповерхности $\bar{M}_{n-1}$, и функции $x^i = x^i(u)$ дают погружение $\bar{M}_{n-1} \to \mathbb{R}^n_{p,q}$: $r = r\big(x(u)\big) = x^i(u) e_i$.

Запишем деривационные уравнения гиперповерхности $(\bar{M}_{n-1}, a)$:

$$r_{\alpha\beta} = \bar{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta} r_\gamma + b_{\alpha\beta} N, \quad \langle N, N \rangle = \epsilon = \pm 1; \tag{3}$$

$$N_\alpha = -\epsilon b^\beta_\alpha r_\beta, \quad b^\beta_\alpha = a^{\beta\gamma} b_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta, \ldots = 1, \ldots, n-1. \tag{4}$$

Здесь $\bar{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}$ – кристоффели индуцированного метрического тензора $a_{\alpha\beta}$; $b_{\alpha\beta}$ – второй фундаментальный тензор поверхности, N – орт нормали.

Уравнение Гаусса и Петерсона–Кодацци соответственно имеют вид

$$\bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \epsilon(b_{\alpha\gamma} b_{\beta\delta} - b_{\alpha\delta} b_{\beta\gamma}); \tag{5}$$

$$\bar{\nabla}_\gamma b_{\alpha\beta} = \bar{\nabla}_\beta b_{\alpha\gamma}. \tag{6}$$

Допустим, что $(\bar{M}_{n-1}, a)$ является спин-поверхностью. Возьмем произвольную геодезическую γ на этой поверхности, которую отнесем к каноническому параметру t: $u^\alpha = u^\alpha(t)$. Тогда

$$\bar{\nabla}_t \lambda^\alpha \equiv \frac{d\lambda^\alpha}{dt} + \bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} \lambda^\beta \lambda^\gamma = 0, \quad \lambda^\alpha = \frac{du^\alpha}{dt}. \tag{7}$$

В объемлющем пространстве вдоль этой кривой γ имеем $r = r\Big(x\big(u(t)\big)\Big)$, $\dot{r} = r_\alpha \lambda^\alpha$. Дальнейшее дифференцирование на основании (3) и (7) дает $\ddot{r} = b_{\alpha\beta} \lambda^\alpha \lambda^\beta N$. Поскольку поверхность погружена изометрично, то, не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что параметр t является каноническим и на спин-кривой. Тогда на основании (2) мы должны иметь вдоль γ: $\langle \ddot{r}, \ddot{r} \rangle = const.$, т.е. $b_{\alpha\beta} \lambda^\alpha \lambda^\beta = const.$ и вследствие (7): $\bar{\nabla}_\gamma b_{\alpha\beta} \lambda^\alpha \lambda^\beta \lambda^\gamma = 0$.

Т.к. последнее равенство должно выполнятся для всякой геодезической, то отсюда с учетом (6) получаем

$$\bar{\nabla}_\gamma b_{\alpha\beta} = 0. \tag{8}$$

Обратно. если условие (8) выполнено, то для того, чтобы убедиться в том, что $(\bar{M}_{n-1}, a)$ является спин-поверхностью, остается вдоль каждой геодезической проверить условие (1): $\overset{\cdots}{r} = A\dot{r}$, A – $const$. В самом деле, вследствие (8), а также (3), (4), (7) вдоль всякой геодезической имеем

$$\ddot{r} = - \epsilon b_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta b^\delta_\gamma\lambda^\gamma r_\delta,$$
$$\overset{\cdots}{r} = - \epsilon b_{\alpha\beta}\lambda^\alpha\lambda^\beta b^\varepsilon_\gamma\lambda^\gamma b_{\varepsilon\delta}\lambda^\delta N.$$

Положим $A = -\epsilon b^\varepsilon_\gamma\lambda^\gamma b_{\varepsilon\delta}\lambda^\delta$. Величина A зависит в общем случае от выбора геодезической γ, однако, вдоль каждой геодезической, вследствие (7), (8) имеем $\tilde{\nabla}_t A = 0$, т.е. $A = const$. Лемма доказана. □

Поверхности евклидовых пространств с абсолютной параллельной второй фундаментальной формой классифицировал Д. Ферус [5].

Специальные классы параллельных подмногообразий в псевдоевклидовых пространствах изучал М. Мейджид [6]. Учитывая, что спин-поверхности представляют определенный интерес с точки зрения теории гравитации, изучим такие поверхности в пространстве Минковского:

$$\mathbb{R}^4_{1,3}\{(x^0, x^1, x^2, x^3)\}, \quad (g_{ij}) = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1).$$

2. Рассмотрим условия интегрируемости уравнений (8). На основании тождества Риччи и уравнений Гаусса (5), получаем

$$b_{\alpha\beta}B_{\beta\gamma} - b_{\alpha\gamma}B_{\beta\delta} + b_{\beta\delta}B_{\alpha\gamma} - b_{\beta\gamma}B_{\alpha\delta} = 0, \quad B_{\alpha\beta} = b_{\alpha\delta}b^\delta_\beta. \tag{9}$$

Отметим, что тензор $B_{\alpha\beta}$ – симметричен, а случай $b_{\alpha\beta} = 0$ приводит к вполне геодезической поверхности. В другом случае из (9) вытекает

$$B_{\alpha\beta} = Bb_{\alpha\beta}, \quad B = const. \tag{10}$$

Используем далее тот факт, что тензор Римана всякого трехмерного пространства $(\bar{M}_3, a)$ имеет структуру [7, с. 282]

$$\begin{aligned}\bar{R}_{\delta\alpha\beta\gamma} =& \frac{\bar{R}}{2}(a_{\alpha\gamma}a_{\delta\beta} - a_{\alpha\beta}a_{\delta\gamma}) + \\ & \bar{R}_{\alpha\beta}a_{\delta\gamma} + \bar{R}_{\delta\gamma}a_{\alpha\beta} - \bar{R}_{\delta\beta}a_{\alpha\gamma} - \bar{R}_{\alpha\gamma}a_{\delta\beta},\end{aligned}$$

где $\bar{R}$ – скалярная кривизна пространства, $\bar{R}_{\alpha\beta}$ – тензор Риччи. Сопоставив это представление с уравнением Гаусса (5), имеем

$$\begin{aligned} b_{\alpha\gamma}b_{\delta\beta} - b_{\alpha\beta}b_{\delta\gamma} =&(B-2H)[H(a_{\alpha\gamma}a_{\delta\beta} - a_{\alpha\beta}a_{\delta\gamma}) + \\ & b_{\alpha\beta}a_{\delta\gamma} + b_{\delta\gamma}a_{\alpha\beta} - b_{\delta\beta}a_{\alpha\beta} - b_{\alpha\gamma}a_{\delta\beta}], \\ \bar{R} =& e2H(B-2H), \\ b^{\alpha}_{\alpha} =& 2H. \end{aligned} \tag{11}$$

1) Случай $B = 2H$ дает поверхность нулевой кривизны: $\bar{K} = 0$. В противном случае, свернув (11) с $b^{\delta\gamma}$, получим, учитывая (10):
2) $b_{\alpha\beta} = \frac{2}{3}Ha_{\alpha\beta}$ или
3) $B = H \neq 0$.

В первом и втором случае мы приходим к поверхностям постоянной кривизны $\bar{K}$. Как известно, [8, с. 88], тогда $(\bar{M}_3, a)$ локально изометрична псевдоримановой сферической поверхности кривизны $\bar{K} = 1/R^2$:

$$S^3_3 = \left\{(x^0, x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^4_{1,3} : (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = R^2\right\};$$

псевдоримановой гиперболической поверхности кривизны $\bar{K} = -1/R^2$:

$$H^3_2 = \left\{(x^0, x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^4_{1,3} : (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = -R^2\right\}$$

(или гиперплоскости, когда $\bar{K} = 0$).

Поскольку поверхности $(\bar{M}_3, a)$ вложены в $\mathbb{R}^4_{1,3}$, то локально с точностью до движения они в случае 1), 2) являются гиперплоскостями или S^3_3, H^3_2.

В третьем случае мы можем считать, что аффинор b^{β}_{α} – вырожденный (иначе вследствие (10) будем иметь случай 1)). Тогда у него существует собственный вектор d^{β}, отвечающий нулевому собственному значению: $b^{\beta}_{\alpha}d^{\alpha} = 0$.

Свернув (11) с $d^{\gamma}d^{\delta}$, получим

$$b_{\alpha\beta}d_{\gamma}d^{\gamma} = H(d_{\gamma}d^{\gamma}a_{\alpha\beta} - d_{\alpha}d_{\beta}).$$

Отсюда вытекает, что собственный вектор d^{α} не может быть изотропным и, считая его уже нормированным, имеем $d_{\alpha}d^{\alpha} =$

$\tilde{\epsilon} = \pm 1$. Т.о.,

$$b_{\alpha\beta} = H(a_{\alpha\beta} - \tilde{\epsilon} d_\alpha d_\beta), \quad H - const. \neq 0. \tag{12}$$

Вследствие (8) из (12) вытекает

$$\bar{\nabla}_\beta d_\alpha = 0. \tag{13}$$

Т.о., уравнения (12), (13) характеризуют спин-гиперповерхности не постоянной кривизны.

Полагая $x^\alpha = u^\alpha$, $x^0 = f(u^1, u^2, u^3)$, запишем локальное представление спин-погружения. Для него $r = (f, u^1, u^2, u^3)$,

$$a_{\alpha\beta} = f_\alpha f_\beta - \delta_{\alpha\beta}, \qquad f_\alpha = \frac{\partial f}{\partial u^\alpha};$$

$$\bar{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta} = f^\gamma f_{\alpha\beta}, \qquad f^\gamma = a^{\alpha\gamma} f_\alpha = \frac{f_\gamma}{a},$$

$$a = \det(a_{\alpha\beta}) = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 - 1,$$

$$a^{\alpha\beta} = a f^\alpha f^\beta - \delta^{\alpha\beta}, \qquad f_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^\alpha \partial u^\beta};$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{-\epsilon a}}(1, f_1, f_2, f_3); \qquad b_{\alpha\beta} = \langle r_{\alpha\beta}, N\rangle = \frac{f_{\alpha\beta}}{\sqrt{-\epsilon a}}.$$

Уравнения (13) в силу градиентности вектора d_α принимает вид

$$d_{\alpha\beta} - d_\gamma f^\gamma f_{\alpha\beta} = 0, \quad d_\gamma = \frac{\partial d}{\partial u^\gamma}, \quad d_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 d}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}. \tag{14}$$

Поскольку вектор d^γ собственный для аффинора b^β_α, то $f_{\alpha\beta} d^\beta = 0$. Отсюда вытекает, что $\bar{\nabla}_\gamma(d_\alpha f^\alpha) = 0$, т.е. $d_\alpha f^\alpha = C = const.$ В свою очередь, из (14) получаем

$$d = Cf + p_\alpha u^\alpha + q, \ p_\alpha, q - const., \ p_1 f_1 + p_2 f_2 + p_3 f_3 = -C. \tag{15}$$

Если теперь примем во внимание (12), будем иметь

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = C^2 - \tilde{\epsilon}, \tag{16}$$

$$f_{\alpha\beta} = H\sqrt{-\epsilon(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 - 1)} \times \big(f_\alpha f_\beta - \delta_{\alpha\beta} - \tilde{\epsilon}(Cf_\alpha + p_\alpha)(Cf_\beta + p_\beta)\big). \tag{17}$$

Укажем на геометрический смысл условий (15) и (16).

Для этого рассмотрим постоянный вектор $\nu = (-c, p_1, p_2, p_3)$. Тогда эти суловия дают $\langle N, \nu\rangle = 0$, $\langle \nu, \nu\rangle = \tilde{\epsilon}$. Отсюда можем заключить, что движение нормального вектора поверхности происходит ортогонально постоянному направлению с ортом ν. Для заданного вектора ν всегда можем специализировать галилееву систему координат (x^0, x^1, x^2, x^3) так, чтобы в ней $p_1 = p_2 = 0$, $p_3 > 0$, (достаточно повернуть пространственную систему (x^1, x^2, x^3) не меняя временной оси Ox^0). Считаем дальше (не вводя новых обозначений), что исходная система уже таким образом адаптирована. Тогда

$$p_3 f_3 = -C, \quad p_3^2 = C^2 - \tilde{\epsilon}, \quad f_3 = \frac{-C}{\sqrt{C^2 - \tilde{\epsilon}}}.$$

Отсюда

$$f = \frac{1}{\sqrt{C^2 - \tilde{\epsilon}}}\big(-Cu^3 + F(u^1, u^2)\big), \tag{18}$$

где F – некоторая функция. В силу (17) на нее получаем условия

$$F_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} = -\tilde{\epsilon}H\sqrt{-\epsilon(F_1^2 + F_2^2 + \tilde{\epsilon})}(F_{\tilde{\alpha}}F_{\tilde{\beta}} + \tilde{\epsilon}\delta_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}), \quad \tilde{\alpha}, \tilde{\beta} = 1, 2. \tag{19}$$

Рассмотрим движение в $\mathbb{R}^4_{1,3}$ (изометрическое преобразование Лоренца) вида

$$x'^0 = \frac{x^0 - \beta x^3}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad x'^1 = x^1, \quad x'^2 = x^2, \quad x'^3 = \frac{x^3 - \beta x^0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{20}$$

Положив при $\tilde{\epsilon} = -1$, $\beta = -C/\sqrt{C^2+1}$, уравнение (18) приведем к виду $x'^0 = F(x'^1, x'^2)$. Отсюда и из уравнений (19) вытекает, что каждое сечение спин-поверхности плоскостью $x'^3 = const.$ является двумерной поверхностью постоянной кривизны $K' = \epsilon H^2$ в пространстве $\mathbb{R}^2_{1,2}$. Т.о., в этом случае поверхность $(\bar{M}_3, a)$ локально изометрична $S^2_2 \times \mathbb{R}$ при $\epsilon = 1$ и $H^2_1 \times \mathbb{R}$ при $\epsilon = -1$.

Аналогично, положив при $\tilde{\varepsilon} = 1$, $\beta = \sqrt{C^2 - 1}/C$, $(c = -1)$, уравнение (18) приведем к виду $x'^3 = F(x'^1, x'^2)$, что вместе с (19) означает, что сечения поверхности плоскостями $x'^0 = const.$ являются двумерными поверхностями постоянной кривизны $K' = H^2$ в пространстве $\mathbb{R}^3$. Т.о., в этом случае поверхность $(\bar{M}_3, a)$ локально изометрична $\mathbb{R} \times S_0^2$.

Подводя итог приходим к следующему результату.

Теорема. *Спин-гиперповерхности пространства Минковского разбиваются (локально с точностью до движения) на следующие классы:*

1) *гиперплоскости;*
2) *псевдоримановы сферические поверхности S_3^3;*
3) *псевдоримановы гиперболические поверхности H_2^3;*
4) *цилиндрические поверхности $S_2^2 \times \mathbb{R}$ с направляющей псевдоримановой сферической поверхностью S_2^2 и образующми, параллельными какой-либо пространственной оси;*
5) *цилиндрические поверхности $H_1^2 \times \mathbb{R}$ с направляющей псевдоримановой гиперболической поверхностью H_1^2 и образующими, параллельными какой-либо пространственной оси;*
6) *цилиндрические поверхности $\mathbb{R} \times S_0^2$ с направляющей сферической поверхностью S_0^2 и образующей, параллельной временной оси.*

В случае 1) поверхности являются вполне геодезическими. Как известно, [8, с. 84] геодезические кривые на псевдоримановых поверхностях S_3^3, H_2^3 являются их плоскими сечениями, проходящими через начало координат. Следовательно, все эти кривые имеют в объемлющем пространстве одну и ту же постоянную первую кривизну Френе. Тем самым поверхности S_3^3, H_2^3 являются винтовыми геодезическими.

В оставшихся случаях 4), 5), 6) спин-поверхности не являются винтовыми геодезическими и представляют специальный класс 3-геодезических поверхностей.

Литература

[1] С. Г. Лейко, *Вариационные задачи для функциоанлов поворота и спин-отображения псевдоримановых пространств*. Изв. вузов. Математика (1990). №10, 9–17.

[2] ———, *P-геодезические отображения пространств аффинной связности*, Revue Roum. de Mat. pur. et appl. **XXVIII** (1983), №1, 3–27.

[3] ———, *Специальные P-геодезические отображения пространств аффинной связности*, Revue Roum. de Mat. pur. et appl. **XXVII** (1982), №10, 1003–1026.

[4] K. Sakamoto. *Helical immersions into a unit sphere*, Math. Ann. (1982), no. 261, 63–80.

[5] D. Ferus, *Symmetric submanifolds of Euclidean space*, Math. Ann. (1980), no. 247, 81–93.

[6] M. A. Magid, *Isometric immersions of Lorentz space with parallel second fundamental forms*, Tsukuba J. Math. (1984), no. 1, 31–54.

[7] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия*, Наука, Москва, 1979.

[8] Дж. Вольф, *Пространства постоянной кривизны*, Наука, Москва, 1982.

Поступила в редакцию 11 ноября 1994 г.

Институт математики, экономики и механики Одесского государственного университета имени "И. И. Мечникова", Украина

MATHEMATICA MONTISNIGRI
Vol VII (1996) 29–34

A CHARACTERIZATION OF AN SUBCLASS OF THE SMIRNOV CLASS

ROMEO MEŠTROVIĆ

ABSTRACT. In this paper, we give a short proof of the Canonical factorization theorem for the Class N_*^+ of holomorphic functions, introduced by Privalov with the notation C in [2]. We prove that the class N_*^+ contains all polynomials, and hence it is a dense subset of the Smirnov class N^+.

1. INTRODUCTION

The Smirnov class N^+ consists of those functions f holomorphic on the unit disk D in the complex plane for which

$$\lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi} \log^+ |f(r\,e^{i\theta})|\frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} \log^+ |f(e^{i\theta})|\frac{d\theta}{2\pi} < \infty.$$

(The boundedness of the integrals on the left implies that f is in the Nevanlinna class N, and so has non-tangential limits almost everywhere on the unit circle. It is this boundary function that we mean in the second integral).

As in [2, p. 89], where N_*^+ is denoted as C, a function $f \in N$ is said to belong to the class N_*^+ if there holds

$$\lim_{r\to 1}\int_0^{2\pi} \Big|\log |f(r\,e^{i\theta})|\Big|\frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} \Big|\log |f(e^{i\theta})|\Big|\frac{d\theta}{2\pi} < \infty,$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 30H05.

which is equivalent to the fact that the family $\left\{\left|\log\left|f(r\,\mathrm{e}^{i\theta})\right|\right| : 0 \leqslant r < 1\right\}$, is uniformly integrable if r is near to 1. This means (see [3, p. 25]) that for given $\varepsilon > 0$, there exists $\delta > 0$ and $r_0 < 1$ so that

$$\int\limits_E \left|\log\left|f(r\,\mathrm{e}^{i\theta})\right|\right| \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi} < \varepsilon \quad (r_0 < r < 1), \tag{1.1}$$

whenever $E \subset [0, 2\pi]$ with its Lebesgue measure $|E| < \delta$.

By [1, p. 25], every function f of class N can be factored as

$$f(z) = B(z)\big(S_1(z)/S_2(z)\big)F(z),$$

where $B(z)$ is the Blaschke product with respect to zeros of $f(z)$, $S_k(z)$, $k = 1, 2$, are the singular inner functions with no common factor and $F(z)$ is an outer function for the class N, i.e.,

$$S_k(z) = \exp\left(-\int\limits_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{it} + z}{\mathrm{e}^{it} - z}\,\mathrm{d}\mu_k(t)\right)$$

with positive singular measures $\mathrm{d}\mu_k$, $k = 1, 2$, and

$$F(z) = \omega \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{it} + z}{\mathrm{e}^{it} - z} \log\left|f(\mathrm{e}^{it})\right| \mathrm{d}t\right),$$

with ω a constant of unit modulus. Furthermore $\log\left|f(\mathrm{e}^{i\theta})\right| \in L^1(0, 2\pi)$ unless $f \equiv 0$. It is known that a function $f \in N$ belongs to N^+ if and only if $S_2 \equiv 0$. See, e.g., [1, p. 26] or [2, p. 89]. It was showed in Privalov [2, pp. 90-93] that a function $f \in N$ belongs to N_*^+ if and only if $S_1 \equiv 0$ and $S_2 \equiv 0$. This means that $f \in N_*^+$ cannot have a (nontrivial) singular factor.

In the next section, using a result of Stoll [4], we obtain a simple proof of this Canonical factorization. In Section 3, we observe that all univalent function is in class N_*^+. In Section 4, we show that the polynomials are dense in N_*^+, and therefore N_*^+ is a dense topological multiplicative submonoid of N^+.

2. A FACTORIZATION THEOREM FOR THE CLASS N_*^+

Theorem 2.1 ([2, Sec. 9.2, p. 93]). *Every function $f \in N_*^+$ has a unique factorization of the form*

$$f(z) = B(z)F(z),$$

where $B(z)$ is the Blaschke product with respect to zeros of $f(z)$, and $F(z)$ is an outer function. Conversely, every such product $B(z)F(z)$ belongs to N_*^+.

For the proof of the Theorem, we will need three Lemmas. The following result was proved by Stoll [4, Theorem 4], for an arbitrary bounded symmetric domain D in $\mathbb{C}^m$ with Bergman-Shilov boundary B and $0 \in D$.

Lemma 2.2. *If $F \in N^+$ is outer, then*

$$\lim_{r\to 1} \int_0^{2\pi} \Big| \log |F(r\,e^{i\theta})| - \log |F(e^{i\theta})| \Big| \frac{d\theta}{2\pi} = 0. \tag{2.1}$$

Conversely, if $F \in N^+$, $F(z) \neq 0$ for all $z \in D$, satisfies (2.1) *then F is outer.*

The following lemma follows immediately from [1, p. 21, Lemma 1] and the definition of N_*^+.

Lemma 2.3. *Every function $F \in N_*^+$ satisfies the condition* (2.1) *from Lemma* 2.2.

The following lemma is proved in the proof of Theorem 2.10 of [1, p. 26], which is in fact the factorization theorem for elements of the Smirnov class N^+.

Lemma 2.4. *If $B(z)$ is an arbitrary Blaschke product, then*

$$\lim_{r\to 1} \int_0^{2\pi} \log |B(r\,e^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi} = 0.$$

Proof of Theorem 2.1. Suppose first that $f \in N_*^+$. Since $N_*^+ \subset N^+$, f can be factored in the form $f = BSF$, where B, S, F are as above.

Put $G = SF$. By the inequality $\big|\log|xy|\big| \leqslant \big|\log|x|\big| + \big||\log|y|\big|$, and the fact that $|B(z)| < 1$, we have

$$\int_E \Big|\log\big|G(r\,e^{i\theta})\big|\Big| \frac{d\theta}{2\pi} \leqslant \int_E \Big|\log\big|f(r\,e^{i\theta})\big|\Big| \frac{d\theta}{2\pi} - \int_0^{2\pi} \log\big|B(r\,e^{i\theta})\big| \frac{d\theta}{2\pi}$$

for any measurable set $E \subset [0, 2\pi)$. From this and Lemma 2.4, we see that $\Big\{\Big|\log\big|f(r\,e^{i\theta})\big|\Big| : r \to 1^-\Big\}$ form a uniformly integrable family in the sense of (1.1). Hence G is in N_*^+, and by Lemma 2.3, G satisfies (2.1). Since $G(z) \neq 0$ for all $z \in D$, by Lemma 2.2, we conclude that G is outer. Therefore $f = BG$, as desired.

Conversely, assume that $f = BF$, where $B(z)$ is the Blaschke product with respect to zeros of $f(z)$, and $F(z)$ is an outer function. Then for any measurable set $E \subset [0, 2\pi)$, we have

$$\begin{aligned}\int_E \Big|\log\big|f(r\,e^{i\theta})\big|\Big| \frac{d\theta}{2\pi} &\leqslant \int_E \Big|\log\big|F(r\,e^{i\theta})\big|\Big| \frac{d\theta}{2\pi} - \int_E \log\big|B(r\,e^{i\theta})\big| \frac{d\theta}{2\pi} \\ &\leqslant \int_0^{2\pi} \Big|\log\big|F(r\,e^{i\theta})\big| - \log\big|F(e^{i\theta})\big|\Big| \frac{d\theta}{2\pi} \\ &\quad + \int_E \Big|\log\big|F(e^{i\theta})\big|\Big| \frac{d\theta}{2\pi} - \int_E \log\big|B(r\,e^{i\theta})\big| \frac{d\theta}{2\pi},\end{aligned}$$

whence by Lemmas 2.2 and 2.4, we conclude that $\Big\{\Big|\log\big|G(r\,e^{i\theta})\big|\Big| : r \to 1^-\Big\}$ form a uniformly integrable family (in the sense of (1.1)). Thus f is in N_*^+, which completes the proof of Theorem. □

3. A CHARACTERIZATION OF UNIVALENT FUNCTIONS

A function holomorphic in a domain is said to be schlicht (or univalent) if does not take any value twice; that is, if $f(z_1) \neq f(z_2)$ whenever $z_1 \neq z_2$. Let H^p $(0 < p \leqslant \infty)$ denote the classical Hardy space on the unit disk D. It is known (see [1, pp. 50–51]) that if f is holomorphic and schlicht in D, then $f \in H^p$ for all $p < 1/2$, and its singular factor $S(z) \equiv 1$. As an immediate consequence of this fact and Theorem 2.1, we obtain the following result.

Corollary 3.1. *If f is holomorphic and schlicht in D, then f belongs to the class N_*^+.*

4. N_*^+ AS A DENSE SUBCLASS OF N^+

The space N^+ with the metric ρ given by

$$\rho(f,g) = \int_0^{2\pi} \log\left(1 + \left|f(e^{i\theta}) - g(e^{i\theta})\right|\right) \frac{d\theta}{2\pi} \tag{4.1}$$

is an F-algebra, i.e., a topological vector space with a complete translation invariant metric in which multiplication is continuous (see [5] and [4]).

For any $f \in N^+$ put $fr(z) = f(rz)$ $(0 < r < 1)$. Then by [5, Lemma 3], $\rho(fr, f) \to 0$ as $r \to 1^-$. Since fr can be uniformly approximated by polynomials on the closed unit disk, it can be approximated in N^+ by polynomials. Hence, the polynomials are dense in N^+. By the inequality $\left|\log|xy|\right| \leqslant \left|\log|x|\right| + \left|\log|y|\right|$, we see that N_*^+ is a multiplicative monoid. The following theorem shows that N_*^+ is separable, but is not complete with respect to the metric ρ given by (4.1).

Theorem 4.1. *N_*^+ contains the set of all polynomials. Therefore, N_*^+ is a dense topological submonoid of N^+.*

Proof. Since N_*^+ is a multiplicative monoid, it is sufficient to show that N_*^+ contains all polynomials of the form $z - \alpha$ with a complex number α. It is easy to see that $z - \alpha$ is in N_*^+ for all α such that $|\alpha| \neq 1$. It is known (see [3, p. 85]) that the function $\log(1/(1-z))$ is in $\bigcap_{0<p<\infty} H^p$, and hence $\log(1/(e^{ic} - z))$ is in H^1 for all real number c. By the mean convergence theorem [1, p. 21] and the inequality $\left|\log|\xi|\right| \leqslant |\log \xi|$, we conclude that the family $\left\{\left|\log\left|e^{ic} - re^{i\theta}\right|\right| : 0 \leqslant r < 1\right\}$ is uniformly integrable. Therefore, $z - e^{ic}$ is in N_*^+ for all real number c. This completes the proof. $\square$

REFERENCES

[1] P. L. Duren, *Theory of H^p spaces*, Academic Press, New York, 1970.
[2] I. I. Privalov, *Boundary properties of analytic functions*, Moscow University Press, Moscow, 1941 (Russian).

[3] I. I. Privalov, *Boundary properties of analytic functions*, 2 nd ed., GITTL, Moscow. 1950; German transl., VEB, Deutscher Verlag, Berlin, 1956.
[4] M. Stoll. *The space N_* of holomorphic functions on bounded symmetric domains*, Ann Polon. Math. **32** (1972), 95–110.
[5] N. Yanagihara, *Multipliers and linear functionals for the class N^+*, Trans. Amer. Math. Soc. **180** (1973), 449–461.

Received March 11, 1996

University of Montenegro, Maritime Faculty,
85330 Kotor, Yugoslavia

MATHEMATICA MONTISNIGRI
Vol VII (1996) 35–40

KNOPP'S CORE LIKE THEOREMS

MURSALEEN* AND QAMARUDDIN**

ABSTRACT. In this paper we prove some analogues of Knopp's core theorem by using sublinear functionals which involve the concept of almost convergence.

1. INTRODUCTION

Let l_∞ be the linear space of real bounded sequences $x = (x_k)$. We list the following functionals (see [3], [4], [6]):

$$
\begin{aligned}
l(x) &= \liminf_k x_k, \\
L(x) &= \limsup_k x_k, \\
l^*(x) &= \liminf_n \sup_i \frac{1}{n+1} \sum_{r=i}^{i+n} x_r, \\
L^*(x) &= \limsup_n \sup_i \frac{1}{n+1} \sum_{r=i}^{i+n} x_r, \\
w(x) &= \inf\{L(x+z) : z \in bs\}, \quad \text{and} \\
w^*(x) &= \inf\{L^*(x+z) : z \in bs\},
\end{aligned}
$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 40C05, 40J05, 46A45.
Key words and phrases. Knopp's core theorem, sublinear functionals, infinite matrices, almost convergence.
*Research of the first author was supported UGC under grant No. F.8-14/94.

where bs denotes the space of all bounded sequences $x = (x_k)$ such that $\sup_n |\sum_{k=0}^{n} x_k| < +\infty$. We note the following inequalities (see [1], [6], [7], [9], [10], [11])

$$l \leqslant w \leqslant L \leqslant \|\cdot\|; \quad w \leqslant \|\cdot\|;$$
$$l \leqslant l^* \leqslant L^* \leqslant L; \quad w^* \leqslant L^*.$$

Above functionals which are marked with $*$ are of special interest to us in this paper and we call them as $*$-functionals. In fact these are related to the concept of Banach limit. It is well known that the functional

$$q(x) = \inf_{n_1, n_2, \cdots, n_r} \limsup_m \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} x_{m+n_i}$$

is sublinear on l_∞. If $q(x) = -q(-x) = s$, then x is said to be the *almost convergent* to s (see [8]). It was also shown in [5] that $q(x) = L^*(x)$.

If f and q are any two the above functionals, we shall write $fA \leqslant gB$ to denote that, for every $x \in l_\infty$, Ax and Bx are defined and bounded and $fA(x) \leqslant gB(x)$.

Let X, Y are non-empty sets of sequences $x = (x_k)$. We use (X, Y) to denote the set of all infinite matrices $A = (a_{nk})$ such that for all $x \in X$, $\sum_k a_{nk} x_k$ converges for each n and $Ax \in Y$, where $Ax = (A_n(x))$, $A_n(x) = \sum_k a_{nk} x_k$.

The matrix A is called *normal* if it is lower-semitriangular with non-zero diagonal entries, and in this case A has its reciprocal, say $A^{-1} = (a_{nk}^{-1})$.

Necessary and sufficient conditions for A to be regular are

(i) $\|A\| = \sup_n \sum_k |a_{nk}| < +\infty$;
(ii) $\sum_k a_{nk} \to 1$ $(n \to \infty)$;
(iii) $a_{nk} \to 0$ $(n \to \infty)$ for every fixed k.

A matrix A is called *strongly regular* if $A \in (f, c)$ and $\lim Ax = f - \lim x$ for all $x \in f$; where f is the space of almost convergent sequences. A matrix A is strongly regular iff it is regular and

$$\lim_n \sum_k |a_{nk} - a_{n,k+1}| = 0 \quad \text{(cf. Lorentz [8])}.$$

A matrix A is called *f-regular* if $A \in (f, f)$ and $f - \lim Ax = f - \lim x$ for all $x \in f$.

A regular matrix A is *almost positive* iff $\lim_n \sum_k |a_{nk}| = 1$.

The following is well-known Knopp's core theorem [3]:

Theorem K. *In order that $L(Ax) \leqslant L(x)$ for every $x \in l_\infty$, it is necessary and sufficient that A should be regular and almost positive.*

In this paper, we prove such type of results by using $*$-functionals, which generalize the results due to Choudhary [2].

In order to prove our results, we shall need the following:

Lemma 1.1 (see [2]). *In order that, whenever Bx is bounded, $(Ax)_n$ should be defined for fixed n, iff*

(1.1.1) $$c_{nk} = \sum_{j=k}^{\infty} a_{nj} b_{jk}^{-1} \quad \text{exists for all} \quad k$$

(1.1.2) $$\sum_k |c_{nk}| < \infty,$$

and for any fixed n,

(1.1.3) $$\sum_{k=0}^{J} \left| \sum_{j=J+1}^{\infty} a_{nj} b_{jk}^{-1} \right| \to 0 \quad (J \to \infty).$$

If these conditions hold then, for bounded Bx

(1.1.4) $$(Ax)_n = \sum_k c_{nk} y_k = (Cy)_n.$$

where $y_k = (Bx)_k$.

2. Main results

Throughout this paper we shall consider the matrix $B = (b_{nj})$, a normal matrix.

Theorem 2.1. *For any matrix $A = (a_{nk})$, in order that, whenever Bx is bounded, Ax should exist and bounded and satisfy*

(2.1.1) $$L^*(Ax) \leqslant L^*(Bx),$$

it is necessary and sufficient that

(2.1.2) $$C = AB^{-1} \quad \text{exists;}$$

(2.1.3) $$C \quad \text{is } f\text{-regular;}$$

$$\limsup_{n} \sum_{i} \sum_{k} \left| \frac{1}{n+1} \sum_{r=i}^{i+n} c_{rk} \right| = 1 \tag{2.1.4}$$

for any fixed n,

$$\sum_{k=0}^{J} \left| \sum_{j=J+1}^{\infty} a_{nj} b_{jk}^{-1} \right| \to o \quad as \quad J \to \infty. \tag{2.1.5}$$

Proof. Let the conditions (2.1.2)–(2.1.5) hold. Then (2.1.2), (2.1.3) and (2.1.4) imply that conditions of Lemma 1.1 are satisfied and hence, (1.1.4) holds; moreover Cy is bounded for $y \in l_\infty$. Further (2.1.3) and (2.1.4) together give $L^*(Cy) \leqslant L^*(y)$ for $y \in l_\infty$ (see Orhan [10]). Putting $y = Bx$ we get (2.1.1).

Conversely, suppose that (2.1.1) holds and assume that $(Ax)_n$ exists for every n whenever $Bx =: y$ is bounded. Then by Lemma 1.1, it follows that the conditions (2.1.2) and (2.1.5) hold, also (1.1.2) of Lemma 1.1 holds for every n. Further, for every $y \in l_\infty$, (1.1.4) holds. Therefore, by (2.1.1) we have

$$L^*(Cy) \leqslant L^*(y), \quad y \in l_\infty,$$

and hence by Theorem 4 of Orhan [10], it follows that (2.1.3) and (2.1.4) hold. □

Theorem 2.2. *For a row-finite matrix, A*

$$L^*(Ax) \leqslant L^*(Bx)$$

for all $x \in l_\infty$ *iff* (2.1.3) *and* (2.1.4) *hold.*

Remark. For a row-finite matrix A, the expression inside the modulus in (2.1.5) is 0 for sufficiently large J (and all k). Thus (2.1.5) is necessarily satisfied and we get Theorem 2.2.

Theorem 2.3. *In order that, whenever* Bx *is bounded,* Ax *should exist and satisfy*

$$L^*(Ax) \leqslant w^*(Bx) \tag{2.3.1}$$

iff conditions (2.1.2)–(2.1.5) *of Theorem* 2.1 *hold.*

Proof. Sufficiency follows on the same lines as in the proof of Theorem 2.1. For necessity, let Ax be defined whenever $y := Bx$ be bounded. Using Lemma 1.1, we get (1.1.4), i.e., $Ax = Cy$. Now

$$w^*(Bx) = \inf\left\{L^*(Bx+z) : z \in bs\right\} \leqslant L^*(Bx+z).$$

Taking $z = 0$, we have $w^*(Bx) \leqslant L^*(Bx)$. By (2.3.1), it follows that

$$L^*(Ax) \leqslant L^*(Bx)$$

which is (2.1.1) of Theorem 2.1 and hence necessity follows. □

The following result is a consequence of above theorem.

Theorem 2.4. *For a row-finite matrix, A*

$$L^*(Ax) \leqslant w^*(Bx), \quad x \in bs,$$

iff (2.1.3) *and* (2.1.4) *of Theorem* 2.1 *hold.*

REFERENCES

[1] Z. U. Ahmad, Mursaleen, and Q. A. Khan, *Generalized almost convergence and Knopp's core theorem*, Math. Slovaca, 46(2), 1996.

[2] R. Choudhary, *An extension of Knopp's core theorem*, J. Math. Analy. Appl. **132** (1988), 226-233.

[3] R. G.Cooke, *Infinite Matrices and Sequence Spaces*, McMillan, 1950.

[4] G. Das, *Sublinear functionals and a claass of conservative matrices*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica **15** (1987), 89–106.

[5] G. Das and S. K. Mishra, *A note of a theorem of Maddox on strong almost convergence*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **89** (1981), 393–396.

[6] S. L. Devi, *Banach limits and infinite matrices*, J. London Math. Soc. **12** (1976), 397–401.

[7] B. Kuttner and I. J. Maddox, *Inequalities between functionals on bounded sequences*, Indian J. Math. **25** (1983), 1–10.

[8] G. G. Lorentz, *A contribution to the theory of divergent sequences*, Acta Math. **80** (1948), 167–190.

[9] I. J. Maddox, *Some analogues of Knopp's core theorem*, Intern. J. Math. and Math. Sci. **2** (1979), 605–614.

[10] C. Orhan, *Sublinear functionals and Knopp's core theorem*, Intern. J. Math. and Math. Sci. **13** (1990), 461–468.

[11] S. Simons, *Banach limits, infinite matrices and sublinear functionals*, J. Math. Analy. Appl. **26** (1969), 640–655.

Received September 11, 1996

* Department of Mathematics, Aligarh Muslim University, Aligarh–202002, India

** Department of Applied Mathematics, Z. H. College of Engg. and Tech., Aligarh Muslim University, Aligarh–202002, India

MATHEMATICA MONTISNIGRI
Vol VII (1996) 41–52

ОБ ОЦЕНКАХ МОДУЛЕЙ ГЛАДКОСТИ ФУНКЦИЙ, ИМЕЮЩИХ ДРОБНУЮ ПРОИЗВОДНУЮ

М. К. ПОТАПОВ♣, Б. ЛАКОВИЧ♡, Б. В. СИМОНОВ♠

1. Введение

Пусть L_p $(1 < p < \infty)$ – пространство всех 2π-периодических измеримых функций, для которых

$$\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p} < \infty;$$

$\omega_\beta(f,t)_p$ – модуль гладкости (в метрике L_p) порядка β $(\beta > 0)$ функции $f \in L_p$:

$$\omega_\beta(f,t)_p = \sup_{|h| \leqslant t} \left(\int_0^{2\pi} \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\beta(\beta-1)\cdots(\beta-\nu+1)}{\nu!} \times f\big(x + (\beta-\nu)h\big) \right|^p \mathrm{d}x \right)^{1/p}.$$

Всюду ниже мы не будем различать эквивалентные функции (отличающиеся на множестве меры нуль).

Работа выполнена при подержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00094.

Ряд Фурье функции f будем записывать в действительной форме, то есть

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} A_m(x). \tag{1}$$

Пусть, далее

$$\theta = \min(p, 2), \qquad \tau = \max(p, 2), \quad \text{где} \quad 1 < p < \infty.$$

$$\Delta_0 = A_0(x), \qquad \Delta_m = \sum_{n=2^{m-1}}^{2^m-1} A_n(x), \quad m = 1, 2, \dots,$$

$f^{(r)}$ – дробная производная порядка r ($r > 0$) в смысле Вейля функции $f \in L_p$.

Обозначим через M_τ – класс функций, имеющих ряд Фурье

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx,$$

где $a_n n^\tau \downarrow 0$ ($n \uparrow \infty$) для данного неотрицательного числа τ; Λ – класс функций имеющих ряд Фурье

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos 2^n x.$$

Для функций F, G, неотрицательных на $[0, 1]$, запись $F(\eta) \ll G(\eta)$ будет означать, что существует положительная постоянная c, не зависящая от η и такая, что $F(\eta) \ll cG(\eta)$. Если одновременно $F(\eta) \ll G(\eta)$ и $G(\eta) \ll F(\eta)$, то будем писать $F(\eta) \asymp G(\eta)$.

В данной работе рассматривается вопрос об оценках модулей гладкости дробных производных (в смысле Вейля) функций через модули гладкости исходных функций.

В работах [1], [2] доказаны следующие оценки

$$\omega_\alpha\big(f^{(r)}, \delta\big)_p \ll \left\{ \int_0^\delta t^{-r\theta-1} \omega_{k+\alpha}^\theta(f, t)_p \, dt \right.$$
$$\left. + \delta^{\alpha\theta} \int_\delta^1 t^{-\theta(r+\alpha)-1} \omega_{k+\alpha}^\theta(f, t)_p \, dt \right\}^{1/\theta},$$

$$\omega_\alpha\big(f^{(r)},\delta\big)_p \gg \left\{ \int\limits_0^\delta t^{-r\tau-1}\omega_{k+\alpha}^\tau(f,t)_p\,\mathrm{d}t \right.$$
$$\left. + \delta^{\alpha\tau}\int\limits_\delta^1 t^{-\tau(r+\alpha)-1}\omega_{k+\alpha}^\tau(f,t)_p\,\mathrm{d}t \right\}^{1/\tau},$$

где $0 < r < k < \infty$. В работе [2] для случая $k = r$ доказаны следующие оценки

$$\omega_\alpha\big(f^{(r)},\delta\big)_p \ll \left\{ \int\limits_0^\delta t^{-r\theta-1}\omega_{k+\alpha}^\theta(f,t)_p\,\mathrm{d}t \right\}^{1/\theta},$$

$$\omega_\alpha\big(f^{(r)},\delta\big)_p \gg \left\{ \int\limits_0^\delta t^{-r\tau-1}\omega_{k+\alpha}^\tau(f,t)_p\,\mathrm{d}t \right\}^{1/\tau}.$$

В данной работе получены оценки для случая $0 < k < r$.

2. Формулировка основных утверждений

Теорема 1. *Пусть $f \in L_p$. Если для некоторого положительного числа α*

$$\int\limits_0^1 t^{-r\theta-1}\omega_{r+\alpha}^\theta(f,t)_p\,\mathrm{d}t < \infty, \tag{2}$$

то функция f имеет дробную производную порядка r в смысле Вейля, принадлежащую L_p, и для каждого положительного числа k такого, что $r < k+\alpha < r+\alpha$, при всех $\delta \in (0,1/2]$ справедливы неравенства

$$\left\{ \delta^{(k+\alpha-r)\tau}\int\limits_\delta^1 t^{-(k+\alpha-r)\tau-1}\omega_\alpha^\tau\big(f^{(r)},t\big)_p\,\mathrm{d}t \right\}^{1/\tau} \tag{3}$$
$$\ll \left\{ \int\limits_0^\delta t^{-r\theta-1}\omega_{k+\alpha}^\theta(f,t)_p\,\mathrm{d}t \right\}^{1/\theta}.$$

Теорема 2. *Если функция $f \in L_p$ имеет дробню производную порядка r в смысле Вейля, принадлежащую L_p, и $r < k + \alpha < r + \alpha$, $0 < k$, $\alpha < \infty$, то для любых $\delta \in (0, 1/2]$ справедливы неравенства*

$$\left\{\delta^{(k+\alpha-r)\theta} \int_\delta^1 t^{-(k+\alpha-r)\theta-1} \omega_\alpha^\theta\left(f^{(r)}, t\right)_p \mathrm{d}t\right\}^{1/\theta} \gg \left\{\int_0^\delta t^{-r\tau-1} \omega_{k+\alpha}^\tau(f, t)_p \, \mathrm{d}t\right\}^{1/\tau}.$$

Теоремы 1 и 2 на классах функций M_r и Λ уточняются следующим образом.

Теорема 3. *Если $f \in M_r \cap L_p$, то для того, чтобы она имела дробную производную порядка r в смысле Вейля, принадлежащую L_p, необходимо и достаточно, чтобы для некоторого положительного числа α*

$$\int_0^1 t^{-rp-1} \omega_{r+\alpha}^p(f, t)_p \, \mathrm{d}t < \infty,$$

причем для каждого положительного числа k такого, что $r < k + \alpha < r + \alpha$, при всех $\delta \in (0, 1/2]$

$$\left\{\delta^{(k+\alpha-r)p} \int_\delta^1 t^{-(k+\alpha-r)p-1} \omega_\alpha^p\left(f^{(r)}, t\right)_p \mathrm{d}t\right\}^{1/p} \asymp \left\{\int_0^\delta t^{-rp-1} \omega_{k+\alpha}^p(f, t)_p \, \mathrm{d}t\right\}^{1/p}. \tag{4}$$

Теорема 4. *Если $f \in \Lambda \cap L_p$, то для того, чтобы она имела дробную производную порядка r в смысле Вейля, принадлежащую L_p, необходимо и достаточно, чтобы для некоторого положительного числа α*

$$\int_0^1 t^{-2r-1} \omega_{r+\alpha}^2(f, t)_p \, \mathrm{d}t < \infty,$$

причем для каждого положительного числа k такого, что $r < k + \alpha < r + \alpha$, при всех $\delta \in (0, 1/2]$

$$\left\{\delta^{(k+\alpha-r)2}\int_\delta^1 t^{-(k+\alpha-r)2-1}\omega_\alpha^2\left(f^{(r)}, t\right)_p \mathrm{d}t\right\}^{1/2} \asymp \left\{\int_0^\delta t^{-2r-1}\omega_{k+\alpha}^2(f,t)_p\,\mathrm{d}t\right\}^{1/2}.$$

Следствие. *Если $f \in L_2$, то для того, чтобы она имела дробную производную порядка r в смысле Вейля, принадлежащую L_p, необходимо и достаточно, чтобы для некоторого положительного числа α*

$$\int_0^1 t^{-2r-1}\omega_{r+\alpha}^2(f,t)_p\,\mathrm{d}t < \infty,$$

причем для каждого положительного числа k такого, что $r < k + \alpha < r + \alpha$, при всех $\delta \in (0, 1/2]$

$$\left\{\delta^{(k+\alpha-r)2}\int_\delta^1 t^{-(k+\alpha-r)2-1}\omega_\alpha^2\left(f^{(r)}, t\right)_2 \mathrm{d}t\right\}^{1/2} \asymp \left\{\int_0^\delta t^{-2r-1}\omega_{k+\alpha}^2(f,t)_2\,\mathrm{d}t\right\}^{1/2}.$$

Замечание. Пусть $k + \alpha \leqslant r$, $0 < k, \alpha, r < \infty$. Если для $f \in L_p$ и некоторого положительного числа s

$$\int_0^1 t^{-rs-1}\omega_{k+\alpha}^s(f,t)_p\,\mathrm{d}t < \infty,$$

то функция f есть постоянная.

3. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Для любых положительных чисел α и r и функции $f \in L_p$ $(1 < p < \infty)$ при всех $\delta \in (0, 1/2]$ справедливы соотношения:*

$$\left\{\delta^{\alpha\tau}\int\limits_{\delta}^{1} t^{-\alpha\tau-1}\omega^{\tau}_{\alpha+r}(f,t)_p\,\mathrm{d}t\right\}^{1/\tau}$$

$$\ll \omega_\alpha(f,\delta)_p \ll \left\{\delta^{\alpha\theta}\int\limits_{\delta}^{1} t^{-\alpha\theta-1}\omega^{\theta}_{\alpha+r}(f,t)_p\,\mathrm{d}t.\right\}^{1/\theta}.$$

Эта лемма 1 при целых α и r доказана в работе [3], для любых положительных α и r – в работе [2].

Лемма 2 ([4]). *Пусть a_ν, b_ν и γ_ν таковы, что $a_\nu \geqslant 0$, $b_\nu \geqslant 0$, $\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = a_n\gamma_n$, тогда для p из промежутка $1 \leqslant p < \infty$ справедливо неравенство*

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\left(\sum_{\mu=\nu}^{\infty} b_\mu\right)^p \leqslant p^p\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu(b_\nu\gamma_\nu)^p.$$

Лемма 3 ([4]). *Пусть a_ν, b_ν и β_ν таковы, что $a_\nu \geqslant 0$, $b_\nu \geqslant 0$, $\sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu = a_n\beta_n$, тогда для p из промежутка $1 \leqslant p < \infty$ справедливо неравенство*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu\left(\sum_{\mu=1}^{n} b_\mu\right)^p \leqslant p^p\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu(b_\nu\beta_\nu)^p.$$

Лемма 4 ([2]). *Пусть $f \in L_p$, $1 < p < \infty$, $0 < r, \alpha < \infty$.*

а) *Если*

$$\int\limits_{0}^{1} t^{-r\theta-1}\omega^{\theta}_{k+\alpha}(f,t)_p\,\mathrm{d}t < \infty,$$

то функция f имеет дробную производную порядка r в смысле Вейля, принадлежащую L_p, и для любого $\delta \in (0,1/2]$ справедливо неравенство

$$\omega_\alpha\big(f^{(r)},\delta\big)_p \ll \left(\int\limits_{0}^{\delta} t^{-r\theta-1}\omega^{\theta}_{r+\alpha}(f,t)_p\,\mathrm{d}t\right)^{1/\theta}.$$

б) *Если функция $f \in L_p$ имеет дробную производную порядка r в смысле Вейля, принадлежащую L_p, то длуа любого $\delta \in$*

$(0, 1/2]$ *справедливо неравенство*

$$\omega_\alpha\left(f^{(r)}, \delta\right)_p \gg \left(\int\limits_0^\delta t^{-r\tau-1}\omega_{r+\alpha}^\tau(f,t)_p\,\mathrm{d}t\right)^{1/\tau}.$$

Лемма 5 ([4], [2]). *Пусть* $f \in L_p$, $1 < p < \infty$. *Тогда*

а) *если* $f \in M_\tau$, *то*

$$\omega_\beta\left(f, \frac{1}{m}\right)_p \asymp m^{-\beta}\left[\sum_{n=1}^m a_n^p n^{\beta p+p-2}\right]^{1/p} + \left[\sum_{n=m+1}^\infty a_n^p n^{p-2}\right]^{1/p},$$

б) *если* $f \in \Lambda$, *то*

$$\omega_\beta\left(f, 2^{-m}\right) \asymp 2^{-\beta m}\left[\sum_{\nu=0}^m a_\nu^2 2^{2\nu\beta}\right]^{1/2} + \left[\sum_{\nu=m+1}^\infty a_\nu^2\right]^{1/2}.$$

Лемма 6 ([1]). *Пусть* $f \in L_p$, $1 < p < \infty$. *Тогда*

$$\omega_{r+\beta}(f,t)_p \ll t^r\omega_\beta\left(f^{(r)}, t\right)_p.$$

4. Доказательство теоремы 1

Так как по условию теоремы 1 выполнено условие (2), то применима лемма 4, а), по которой функция f имеет дробную производную порядка r в смысле Вейля, принадлежащую L_p. Оценим теперь левую часть (3). Предварительно докажем эквивалентность

$$\int\limits_0^1 t^{-r\theta-1}\omega_{k+\alpha}^\theta(f,t)_p\,\mathrm{d}t \asymp \int\limits_0^1 t^{-r\theta-1}\omega_{r+\alpha}^\theta(f,t)_p\,\mathrm{d}t. \tag{5}$$

Используя свойства модуля гладкости, будем иметь

$$\int\limits_0^1 t^{-r\theta-1}\omega_{r+\alpha}^\theta(f,t)_p\,\mathrm{d}t \ll \int\limits_0^1 t^{-r\theta-1}\omega_{k+\alpha}^\theta(f,t)_p\,\mathrm{d}t.$$

Применяя лемму 1 и изменяя порядок суммирования, получим

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 t^{-r\theta-1}\omega_{k+\alpha}^{\theta}(f,t)_p\,dt &\ll \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\nu r\theta}\omega_{k+\alpha}^{\theta}\big(f,2^{-\nu}\big)_p \\
&\ll \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\nu r\theta}2^{-\nu\theta(k+\alpha)}\sum_{m=0}^{\nu} 2^{m\theta(k+\alpha)}\omega_{r+\alpha}^{\theta}\big(f,2^{-m}\big)_p \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} 2^{m\theta(k+\alpha)}\omega_{r+\alpha}^{\theta}\big(f,2^{-m}\big)_p\sum_{\nu=m}^{\infty} 2^{-\nu\theta(k+\alpha-r)} \\
&\ll \sum_{m=0}^{\infty} 2^{mr\theta}\omega_{r+\alpha}^{\theta}\big(f,2^{-m}\big)_p \ll \int_0^1 t^{-r\theta-1}\omega_{r+\alpha}^{\theta}(f,t)_p\,dt.
\end{aligned}
$$

Таким образом, (5) доказано, и доказано, что интеграл в левой части (5) сходится. что будет использовано при доказательстве (3).

Пусть n — натуральное число такое, что $2^{-n} \leqslant \delta < 2^{-(n+1)}$. Согласно леммам 4, а) и 2

$$
\begin{aligned}
&\delta^{\tau(k+\alpha-r)}\int_\delta^1 t^{-\tau(k+\alpha-r)-1}\omega_{\alpha}^{\tau}\big(f^{(r)},t\big)_p\,dt \\
&\ll 2^{-n\tau(k+\alpha-r)}\sum_{\nu=0}^{n} 2^{\nu\tau(k+\alpha-r)}\omega_{\alpha}^{\tau}\big(f^{(r)},2^{-\nu}\big)_p \\
&\ll 2^{-n\tau(k+\alpha-r)}\sum_{\nu=0}^{n} 2^{\nu\tau(k+\alpha-r)}\left\{\sum_{m=\nu}^{\infty} 2^{mr\theta}\omega_{r+\alpha}^{\theta}\big(f,2^{-m}\big)_p\right\}^{\tau/\theta} \\
&\ll 2^{-n\tau(k+\alpha-r)}\sum_{\nu=0}^{n} 2^{\nu\tau(k+\alpha-r)}\left\{\sum_{m=\nu}^{n} 2^{mr\theta}\omega_{r+\alpha}^{\theta}\big(f,2^{-m}\big)_p\right\}^{\tau/\theta} \\
&+\left\{\sum_{m=n+1}^{\infty} 2^{mr\theta}\omega_{r+\alpha}^{\theta}\big(f,2^{-m}\big)_p\right\}^{\tau/\theta} \ll 2^{-n\tau(k+\alpha-r)} \\
&\times\sum_{m=0}^{n} 2^{m\tau(k+\alpha)}\omega_{r+\alpha}^{\tau}\big(f,2^{-m}\big)_p+\left\{\sum_{m=n+1}^{\infty} 2^{mr\theta}\omega_{r+\alpha}^{\theta}\big(f,2^{-m}\big)_p\right\}^{\tau/\theta}
\end{aligned}
$$

К первой сумме применим лемму 1, а для оценки второй суммы используем свойства модуля гладкости. Тогда получим:

$$\left\{\delta^{\tau(k+\alpha-r)}\int\limits_{\delta}^{1} t^{-\tau(k+\alpha-r)-1}\omega_{\alpha}^{\tau}\big(f^{(r)},t\big)_p\,dt\right\}^{1/\tau}$$

$$\ll 2^{nr}\omega_{k+\alpha}(f,2^{-n})_p+\left\{\sum_{m=n+1}^{\infty}2^{mr\theta}\omega_{k+\alpha}^{\theta}(f,2^{-m})_p\right\}^{1/\theta}$$

$$\ll\left\{\int\limits_{0}^{\delta}t^{-r\theta-1}\omega_{k+\alpha}^{\theta}(f,t)_p\,dt\right\}^{1/\theta}.$$

Это и завершает доказательство теоремы 1.

5. Доказательство теоремы 2

Пусть n – натуральное число такое, что $2^{-n}\leqslant\delta<2^{-(n+1)}$. Применяя лемму 1, будем иметь:

$$\int\limits_{0}^{\delta}t^{-r\tau-1}\omega_{k+\alpha}^{\tau}(f,t)_p\ll\sum_{\nu=n}^{\infty}2^{\nu r\tau}\omega_{k+\alpha}^{\tau}(f,2^{-\nu})_p$$

$$\ll\sum_{\nu=n}^{\infty}2^{\nu r\tau}2^{-\nu\tau(k+\alpha)}\left\{\sum_{m=0}^{\nu}2^{-m\theta(k+\alpha)}\omega_{r+\alpha}^{\theta}(f,2^{-m})_p\right\}^{\tau/\theta}$$

$$\ll 2^{-n\tau(k+\alpha-r)}\left\{\sum_{m=0}^{n-1}2^{-m\theta(k+\alpha)}\omega_{r+\alpha}^{\theta}(f,2^{-m})_p\right\}^{\tau/\theta}$$

$$+\sum_{\nu=n}^{\infty}2^{-\nu\tau(k+\alpha-r)}\left\{\sum_{m=n}^{\nu}2^{-m\theta(k+\alpha)}\omega_{r+\alpha}^{\theta}(f,2^{-m})_p\right\}^{\tau/\theta}.$$

Применяя к первой сумме лемму 6, а ко второй – лемму 3, а потом лемму 4, б), окончательно получим

$$\left\{\int\limits_{0}^{\delta}t^{-r\tau-1}\omega_{k+\alpha}^{\tau}(f,t)_p\,dt\right\}^{1/\tau}\ll 2^{-n(k+\alpha-r)}$$

$$\times\left\{\sum_{m=0}^{n-1}2^{-m\theta(k+\alpha-r)}\omega_{\alpha}^{\theta}\big(f^{(r)},2^{-m}\big)_p\right\}^{1/\theta}$$

$$
+\left\{\sum_{\nu=n}^{\infty} 2^{\nu r\tau}\omega_{r+\alpha}^{\tau}(f,2^{-\nu})_p\right\}^{1/\tau} \ll 2^{-n(k+\alpha-r)}
$$
$$
\times\left\{\sum_{m=0}^{n-1} 2^{-m\theta(k+\alpha-r)}\omega_{\alpha}^{\theta}\big(f^{(r)},2^{-m}\big)_p\right\}^{1/\theta} + \omega_\alpha\big(f^{(r)},2^{-m}\big)_p
$$
$$
\ll\left\{\delta^{\theta(k+\alpha-r)}\int_{\delta}^{1} t^{-\theta(k+\alpha-r)-1}\omega_{\alpha}^{\theta}\big(f^{(r)},t\big)_p\,\mathrm{d}t\right\}^{1/\theta}.
$$

Теорема 2 доказана.

6. Доказательство теоремы 3

Учитывая свойства модуля гладкости, будем иметь:

$$
I=\int_0^1 t^{-rp-1}\omega_{r+\alpha}^{p}(f,t)_p\,\mathrm{d}t \asymp \sum_{m=1}^{\infty} m^{rp-1}\omega_{r+\alpha}^{p}\left(f,\frac{1}{m}\right)_p.
$$

Так как $f\in M_r$, то можно применить лемму 5, a):

$$
I\asymp\sum_{m=1}^{\infty} m^{rp-1}\left\{m^{-(r+\alpha)p}\sum_{n=1}^{m} a_n^p n^{(r+\alpha)p+p-2}+\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n^p n^{p-2}\right\}
$$
$$
=\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p n^{(r+\alpha)p+p-2}\sum_{m=n}^{\infty} m^{-\alpha p-1}+\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}^p (n+1)^{p-2}\sum_{m=1}^{n} m^{rp-1}
$$
$$
\asymp\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p n^{rp+p-2}\asymp \big\|f^{(r)}\big\|_p.
$$

Отсюда видно, что если функция $f\in M_r\cap L_p$ имеет дробную производную порядка r в смысле Вейля, принадлежащую L_p, то интеграл I сходится, и наоборот. Таким образом, сходимость интеграла I является необходимым и достаточным условием для того, чтобы функция $f\in M_r\cap L_p$ имела дробную произвбодную порядка r в смысле Вейля, принадлежащую L_p. Оценим теперь правую часть (4).

Пусть натуральное число m таково, что $m>1$, $1/m\leqslant\delta<1/(m+1)$. Тогда используя свойства модуля гладкости, будем иметь:

$$\int_0^\delta t^{-rp-1}\omega_{k+\alpha}^p(f,t)_p\,dt \asymp \sum_{\nu=m}^\infty \nu^{rp-1}\omega_{k+\alpha}^p\left(f,\frac{1}{m}\right)_p.$$

Так как $f\in M_r$, то можно применить лемму 5, a):

$$\int_0^\delta t^{-rp-1}\omega_{k+\alpha}^p(f,t)_p\,dt \asymp \sum_{\nu=m}^\infty \nu^{rp-1}\Bigg\{\nu^{-(k+\alpha)p}$$

$$\times\sum_{n=1}^{\nu} a_n^p n^{(k+\alpha)p+p-2} + \sum_{n=\nu+1}^\infty a_n^p n^{p-2}\Bigg\} \asymp \sum_{n=m}^\infty a_n^p n^{(k+\alpha)p+p-2}$$

$$\times\sum_{\nu=n}^\infty \nu^{-(k+\alpha-r)p-1} + \sum_{\nu=m}^\infty \nu^{rp-1}\nu^{-(k+\alpha)p}\sum_{n=1}^{m-1} a_n^p n^{(k+\alpha)p+p-2}$$

$$+\sum_{n=m}^\infty a_{n+1}^p(n+1)^{p-2}\sum_{\nu=m}^{n}\nu^{rp-1} \asymp \sum_{n=m+1}^\infty a_n^p n^{rp+p-2}$$

$$+m^{-(k+\alpha-r)p}\sum_{n=1}^m a_n^p n^{(k+\alpha)p+p-2} = I_1+I_2.$$

Оценим I_2. Так как $k<r$, то

$$I_2 \asymp m^{-(k+\alpha-r)p}\sum_{n=1}^m a_n^p n^{(\alpha+r)p+p-2}\Bigg\{\sum_{\nu=n}^m \nu^{(k-r)p-1}$$

$$+m^{(k-r)p}\Bigg\} \asymp m^{-(k+\alpha-r)p}\sum_{\nu=1}^m \nu^{(k-r)p-1}\sum_{n=1}^{\nu} a_n^p$$

$$\times n^{(\alpha+r)p+p-2} + m^{-\alpha p}\sum_{n=1}^m a_n^p n^{(\alpha+r)p+p-2} = I_2'+I_2''.$$

Нетрудно проверить, что

$$I_1+I_2' \asymp m^{-(k+\alpha-r)p}\sum_{\nu=1}^m \nu^{(k+\alpha-r)p-1}\sum_{n=\nu}^\infty a_n^p n^{rp+p-2}.$$

Таким образом, окончательно имеем

$$\int_0^\delta t^{-rp-1}\omega_{k+\alpha}^p(f,t)_p\,dt \asymp m^{-(k+\alpha-r)p}\sum_{\nu=1}^m \nu^{(k+\alpha-r)p-1}$$

$$\times \left\{ \nu^{-\alpha p} \sum_{n=1}^{\nu} a_n^p n^{(\alpha+r)p+p-2} + \sum_{n=\nu}^{\infty} a_n^p n^{rp+p-2} \right\}$$

$$\asymp m^{-(k+\alpha-r)p} \sum_{\nu=1}^{m} \nu^{(k+\alpha-r)p-1} \omega_\alpha^p \left(f^{(r)}, \frac{1}{\nu} \right)_p$$

$$\asymp \delta^{(k+\alpha-r)p} \int_\delta^1 t^{-(k+\alpha-r)p-1} \omega_\alpha^p \big(f^{(r)}, t\big)_p \, dt.$$

Теорема 3 доказана.

Теорема 4 доказывается так же, как теорема 3, только вместо леммы 5. а) надо воспользоваться леммой 5, б).

Литература

[1] М. К. Потапов, Б. Лакович, *О вложении и совпадении классов функций Бесова–Никольского и Вейля–Никольского*, Вест. МГУ. Математика, механика (1992), № 4, 44–52.

[2] Б. В. Симонов, *О свойствах преобразованного ряда Фурье*, Деп. в ВИНИТИ 22. 06. 1981. № 3031, 81.

[3] М. Ф. Тиман, *Особенности основных теорем конструктивной теории функций в пространствах L_p*, В сб. "Исследование по современным проблемам конструктивной теории функций", изд-во Академии Наук Аз. ССР, Баку, 1965.

[4] М. К. Потапов, М. Берипа, *Модули гладкости и коэффициенты Фурье периодических функций одного переменного*, Publications de l'Institute mathematique **26(40)** (1979), 215–228.

Поступила в редакцию 28 сентября 1996 г.

♣МГУ "М. В. Ломоносов", Механико-математический факультет, 117234 Москва, Россия

♡Университет Черногории, Економический факультет, 81000 Подгорица, Югославия

♠ Технический университет, Волгоград, Россия

MATHEMATICA MONTISNIGRI
Vol VII (1996) 53–63

К ВОПРОСУ О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ, АНАЛИТИЧЕСКИХ В ПОЛОСЕ

М. К. ПОТАПОВ♣, Й. М. ШАРОВИЧ♠

Резюме. Вопросам приближения функций, аналитических в полосе, посвящен целый ряд исследований, обзор которых, в частности, содержится в работе [1]. В данной публикации уточняется один из результатов работы [1]

1. Вспомогательные определения и обозначения

Будем писать, что $F \in L_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, если F есть 2π-периодическая вещественная функция, такая, что

а) при $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ она измерима и

$$\|F\|_p = \left(\int\limits_0^{2\pi} |F|^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p} < \infty;$$

б) при $p = \infty$ она непрерывна и $\|F\|_\infty = \|F\|_C = \max |F(x)|$.

Через $\omega_k(F, t)_p$ обозначим модуль гладкости порядка k в метрике пространства L_p функция $F \in L_p$, то есть

$$\omega_k(F, t)_p = \sup_{|h| \leqslant t} \left\| \Delta_h^k F(x) \right\|_p,$$

Работа выполнена при подержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00094.

где

$$\Delta_h^k F(x) = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{k-\nu} C_k^\nu F(x+\nu h).$$

Через $E_n(F)_p$ обозначим наилучшее приближение в метрике L_p функции $F \in L_p$ при помощи тригонометрических полиномов порядка не выше чем $n-1$, то есть

$$E_n(f)_p = \inf_{T_n} \|F(x) - T_n(x)\|_p,$$

где

$$T_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} (\alpha_\nu \cos \nu x + \beta_\nu \sin \nu x),$$

α_ν и β_ν – действительные числа.

Будем говорить, что функция $\Psi(\delta)$ есть функция типа модуля гладкости и писать $\Psi \in MH(\sigma)$, если

1) $\Psi(\delta)$ – неотрицательна и непрерывна на $(0,1]$, $\Psi(\delta) \not\equiv 0$.
2) Существует число $\sigma \geqslant 0$ такое, что для любого $\lambda \geqslant 0$ выполнено неравенство $\Psi(\lambda\delta) \geqslant C(\lambda+1)^\sigma \Psi(\delta)$, где положительная постоянная C не зависит од δ и λ.

Обозначим через $B^\Psi_{p\theta}(\sigma)$ множество всех функций $F \in L_p$, для каждой из которых справедливо неравенство

$$\int_0^1 \left[\frac{\omega_k(F,t)_p}{\Psi(t)}\right]^\theta \frac{dt}{t} < \infty,$$

где $\Psi \in MH(\sigma)$, $K > \sigma$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и $\theta \in [1,\infty)$.

2. Определение класса функций $B^\delta H^\Psi_{p\theta}(\sigma)$

Для функций, аналитических в полосе, известны (см. [2] и [3]) следующие факты.

1. Пусть функция $f(z) = f(x+iy)$ – вещественная на оси x $(y=0)$, 2π-периодическая по x, аналитическая в полосе $\Delta = \{-\infty < x < +\infty, |y| < \delta\}$. Если для любого y такого, что $|y| < \delta$ и некоторого $p \in (1,\infty)$ функция $\varphi_y(x) = \operatorname{Re} f(x+iy)$ (как функция одного переменного x) обладает свойством

$$\|\varphi_y\|_p \leqslant \mu,$$

где положительная постоянная μ не зависит от y, то существует, и при том только одна, функция $\varphi \in L_p$ такая, что почти для всех x существуют $\lim_{y\to\delta} \operatorname{Re} f(x+iy)$ и $\lim_{y\to-\delta} \operatorname{Re} f(x+iy)$, причем почти для всех x

$$\lim_{y\to+\delta} \operatorname{Re} f(x+iy) = \lim_{y\to-\delta} \operatorname{Re} f(x+iy) = \varphi(x),$$

при том $\|\varphi\|_p \leqslant \mu$ и

$$(1) \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left\{ 1 + 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^m}{1+q^{2m}} \cos m(x-t) \right\} \varphi(t)\,\mathrm{d}t,$$

где $q = e^{-\delta}$.

2. Если $\varphi \in L_p$ для некоторого $p \in (1,\infty)$ и $\|\varphi\|_p \leqslant \mu$, где μ – положительная постоянная, то функция $f(x)$, определяемая равенством (1), такова, что функция $f(z) = f(x+iy)$ – вещественная на оси x $(y=0)$, 2π-периодическая по x, аналитическая в полосе $\Delta = \{-\infty < x < +\infty, |y| < \delta\}$ и для y такого, что $|y| < \delta$, функця $\varphi_y(x) = \operatorname{Re} f(x+iy)$ (как функция одного переменного x) обладает свойством

$$\|\varphi_y\|_p \leqslant \mu$$

и почти для всех x

$$\lim_{y\to+\delta} \operatorname{Re} f(x+iy) = \lim_{y\to-\delta} \operatorname{Re} f(x+iy) = \varphi(x).$$

Функцию $\varphi(x)$ называют граничной функцией для функции $f(z)$.

Будем говорить, что $f(x) \in Б^\delta B^\Psi_{p\theta}(\sigma)$, если $f(z)$ – вещественная 2π-периодическая функция такая, что она представима в виде (1) и такая, что ее граничная функция $\varphi \in B^\Psi_{p\theta}(\sigma)$.

3. Вспомогательные утверждения

Лемма 1 ([2]). *Если функция* $f \in L_\infty$ *и* $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{E_n(f)_\infty} \leqslant e^{-\delta}$, *то функция* $f(z) = f(x+iy)$ *– аналитическая в полосе* $\Delta = \{-\infty < x < +\infty, |y| < \delta\}$.

Лемма 2 ([4]). *Пусть функция* $f(x) \in \mathcal{L}_q$ $(1 \leqslant q \leqslant \infty)$. *Пусть ее ряд Фурье есть* $\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k\, e^{ikx}$.

а) *Пусть функция* $f(z) = f(x+iy)$ *аналитическая в полосе* $\Delta = \{-\infty < x < +\infty, |y| < \delta\}$, *тогда для любого* y $(|y| < \delta)$ *существует функция* $\varphi_y(x) = \operatorname{Re} f(x+iy)$: *пусть ее ряд Фурье есть*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k(y)\, e^{ikx},$$

тогда $|A_k(y)| \leqslant e^{|k|\delta}\, |C_k|$.

б) *Пусть кроме того функция* $f(x)$ *представлена в виде* (1) *и пусть граничная функция* $\varphi(x)$ *имеет ряд Фурье*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k\, e^{ikx},$$

тогда

$$|\alpha_k| \leqslant e^{|k|\delta}\, |C_k|.$$

Лемма 3 ([5]). *Пусть функция* $\varphi \in \mathcal{L}_p$, $2 \leqslant p < \infty$ *и пусть она имеет ряд Фурье* $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k\, e^{ikx}$, *тогда справедливы неравенства:*

а)
$$\omega_k\left(\varphi, \frac{1}{\nu}\right)_p \leqslant C\left\{\frac{1}{\nu^k}\left(\sum_{|\mu|=1}^{\nu} |\alpha_\mu|^p |\mu|^{(k+1)p-2}\right)^{1/p} + \left(\sum_{|\mu|=\nu+1}^{\infty} |\alpha_\mu|^p |\mu|^{p-2}\right)^{1/p}\right\},$$

б)
$$\omega_k\left(\varphi, \frac{1}{\nu}\right)_p \leqslant C\left\{\frac{1}{\nu^k}\left(\sum_{|\mu|=1}^{\nu} |\alpha_\mu|^{p'} |\mu|^{kp'}\right)^{1/p'} + \left(\sum_{|\mu|=\nu+1}^{\infty} |\alpha_\mu|^{p'}\right)^{1/p'}\right\},$$

где постоянная C не зависит от ν и f и

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Лемма 4 ([6]). *Пусть числа a_k и b_k таковы, что $a_k \geqslant 0$ и $b_k \geqslant 0$. Пусть $p \in [1, +\infty)$, тогда справедливы неравенства*

а) $$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \left(\sum_{\mu=\nu}^{\infty} b_\mu \right)^p \leqslant p^p \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu (b_\nu \beta_\nu)^p$$

где $\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = a_n \beta_n$.

б) $$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \left(\sum_{\mu=1}^{\nu} b_\mu \right)^p \leqslant p^p \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu (b_\nu \gamma_\nu)^p.$$

где $\sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu = a_n \gamma_n$.

Лемма 5 ([7]). *Если функция $f \in \mathcal{L}_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, и имеет ряд Фурье $\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \, e^{ikx}$, то $|C_k| \leqslant C E_{|k|}(f)_p$, $|k| \geqslant 1$, где постоянная C не зависит от k и f.*

Лемма 6 ([8]). *Если $F \in \mathcal{L}_p$, $1 < p < \infty$, имеет ряд Фурье $\sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k \, e^{ikx}$, то*

$$\left\| F(x) - \sum_{|k|=0}^{n-1} b_k \, e^{ikx} \right\|_p \leqslant C E_n(F)_p,$$

где постоянная C не зависит от F и n ($n \in \mathbb{N}$).

4. Формулировка и доказательство основного результата

Теорема. *Пусть даны числа q, θ, σ, δ и функција Ψ такие, что $q \in [1, \infty]$, $\theta \in [1, \infty]$, $\delta > 0$, $\sigma \geqslant 0$, $\Psi \in \mathcal{M}H(\sigma)$. Пусть для функции $f \in \mathcal{L}_q$ справедливо неравенство:*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{\nu\delta\theta}}{\nu \Psi^\theta \left(\frac{1}{\nu}\right)} E_\nu^\theta(f)_q < \infty. \tag{2}$$

а) *Если существуют числа p, σ_1 и функция Ψ_1 такие, что $p \in [2, \theta]$, $\sigma_1 \geqslant 0$, $\Psi_1 \in \mathcal{M}H(\sigma_1)$,*

$$\sum_{\nu=1}^{\mu} \frac{1}{\nu \Psi_1^\theta \left(\frac{1}{\nu}\right)} \leqslant \frac{C}{\mu^{p-1} \Psi_1^{\theta-p} \left(\frac{1}{\mu}\right) \Psi^p \left(\frac{1}{\nu}\right)}, \tag{3}$$

где постоянная C не зависит од μ $(\mu \in \mathbb{N})$, то $f \in Б^\delta B^{\Psi_1}_{p\theta}(\sigma_1)$.

б) *Если существуют числа p, σ_2 и функция Ψ_2 такие, что $p \in [2, +\infty)$, $p' \geqslant 1/\theta$, $\sigma_2 \geqslant 0$, $\Psi_2 \in \mathcal{M}H(\sigma_2)$,*

$$\sum_{\nu=1}^{\mu} \frac{1}{\nu \Psi_2^\theta\left(\frac{1}{\nu}\right)} \leqslant \frac{C}{\mu \Psi_2^{\theta-p'}\left(\frac{1}{\mu}\right) \Psi^{p'}\left(\frac{1}{\mu}\right)}, \tag{4}$$

где

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

и постоянная C не зависит от μ $(\mu \in \mathbb{N})$, то $f \in Б^\delta B^{\Psi_2}_{p\theta}(\sigma_2)$.

Доказательство. Из условия (2) теоремы вытекает, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{E_n(f)_\infty} \leqslant e^{-\delta}.$$

Но тогда по лемме 1 функция f такова, что функция $f(z) = f(x+iy)$ – аналитическая в полосе $\Delta = \{-\infty < x < +\infty, |y| < \delta\}$ и что для каждого y $(|y| < \delta)$ существует функция $\varphi_y(x) = \operatorname{Re} f(x+iy)$.

Сначала рассмотрим случай а). Рассматривая функцию $\varphi_y(x)$, как функцию одного переменного x покажем, что $\|\varphi_y\|_p \leqslant M$, где постоянная M не зависит от y.

Действительно, очевидно, что

$$\|\varphi_y\|_p \leqslant \|\varphi_y - A_0(y)\|_p + (2\pi)^{1/p}|A_0(y)|.$$

Применяя леммы 6 и 2, получаем, что

$$\|\varphi_y\|_p \leqslant C_1\{E_1(\varphi_y)_p + |C_0|\}.$$

Используя очевидные оценки, имеем

$$\|\varphi_y\|_p \leqslant C_2\{E_1(\varphi_y)_p + \|f\|_p\}$$
$$\leqslant C_2\left\{\|f\|_p + \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu \Psi_1^\theta\left(\frac{1}{\nu}\right)} E_\nu^\theta(\varphi_y)_p\right)^{1/\theta}\right\}.$$

Применяя сначала теорему Пэли, а затем лемму 4а), получаем, что

$$\mathcal{J}_1 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu \Psi_1^\theta\left(\frac{1}{\nu}\right)} E_\nu^\theta(\varphi_y)_p$$

$$\leqslant C_3 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu \Psi_1^{\theta}\left(\frac{1}{\nu}\right)} \left[\sum_{|n|=\nu}^{\infty} \left|A_n(y)\right|^p |n|^{p-2} \right]^{\theta/p}$$

$$\leqslant C_4 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu \Psi_1^{\theta}\left(\frac{1}{\nu}\right)} \left[\left|A_{|\nu|}(y)\right|^p \nu^{p-2} \beta_\nu \right]^{\theta/p},$$

где

$$\beta_\nu = \nu \Psi_1^{\theta}\left(\frac{1}{\nu}\right) \sum_{n=1}^{\nu} \frac{1}{n \Psi_1^{\theta}\left(\frac{1}{n}\right)},$$

$$\left|A_{|\nu|}(y)\right| = \left|A_\nu(y)\right| + \left|A_{-\nu}(y)\right|.$$

Учитывая условия случая a) теоремы, имеем

$$\beta_\nu \leqslant \frac{C_5}{\nu^{p-2}} \frac{\Psi_1^p\left(\frac{1}{\nu}\right)}{\Psi^p\left(\frac{1}{\nu}\right)},$$

но тогда

$$\mathcal{J}_1 \leqslant C_6 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\left|A_{|\nu|}(y)\right|^{\theta}}{\nu \Psi^{\theta}\left(\frac{1}{\nu}\right)}.$$

Применяя теперь сначала лемму 2, а затем лемму 5, получаем, что

$$\mathcal{J}_1 \leqslant C_7 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{\nu\delta\theta}}{\nu \Psi^{\theta}\left(\frac{1}{\nu}\right)} E_\nu^{\theta}(f)_q.$$

Поэтому справедливо неравенство

$$\|\varphi_y\|_p \leqslant C_8 \left\{ \|f\|_p + \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{\nu\delta\theta}}{\nu \Psi^{\theta}\left(\frac{1}{\nu}\right)} E_\nu^{\theta}(f)_q \right)^{1/\theta} \right\},$$

где постоянная C_8 не зависит от функций f и φ_y. Но тогда по утверждению 1 из главы 2 существует граничная функция $\varphi \in \mathcal{L}_p$ такая, что функция f представлена в виде (1). Для доказательства теоремы в случае a) остается показать, что $\varphi \in B_{p\theta}^{\Psi_1}(\sigma_1)$. Используя свойства модуля гладкости и условие $\Psi_1 \in \mathcal{M}H(\sigma_1)$, имеем

$$\mathcal{J} = \int_0^1 \left[\frac{\omega_k(\varphi, t)_p}{\Psi_1(t)} \right]^{\theta} \frac{dt}{t} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{1/(\nu+1)}^{1/\nu} \left[\frac{\omega_k(\varphi, t)_p}{\Psi_1(t)} \right]^{\theta} \frac{dt}{t}$$

$$\leqslant C_9 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \left[\frac{\omega_k\left(\varphi, \frac{1}{\nu}\right)_p}{\Psi_1\left(\frac{1}{\nu}\right)} \right]^\theta,$$

где постоянная C_9 не зависит от функции φ. Применяя лемму 3 а), получаем, что

$$\mathcal{J} \leqslant C_{10} \left[\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{k\theta+1} \Psi_1^\theta\left(\frac{1}{\nu}\right)} \left(\sum_{|\mu|=1}^{\nu} \left|\alpha_\mu\right|^p |\mu|^{(k+1)p-2} \right)^{\theta/p} \right.$$

$$\left. + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu \Psi_1^\theta\left(\frac{1}{\nu}\right)} \left(\sum_{|\mu|=1}^{\infty} \left|\alpha_\mu\right|^p |\mu|^{p-2} \right)^{\theta/p} \right] = C_{10}[\mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3],$$

где постоянная C_{10} не зависит от функции φ. Используя лемму 4 а), имеем

$$\mathcal{J}_3 \leqslant C_{11} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu \Psi_1^\theta\left(\frac{1}{\nu}\right)} \left(\left|\alpha_{|\nu|}\right|^p \nu^{p-2} \beta_\nu \right)^{\theta/p},$$

где

$$\left|\alpha_{|\nu|}\right| = \left|\alpha_\nu\right| + \left|\alpha_{-\nu}\right|.$$

Учитывая условие случая а) теоремы, получаем, что

$$\beta_\nu = \nu \Psi_1^\theta \left(\frac{1}{\nu}\right) \sum_{n=1}^{\nu} \frac{1}{n \Psi_1^\theta\left(\frac{1}{n}\right)} \leqslant \frac{C_{12} \Psi_1^p\left(\frac{1}{\nu}\right)}{\nu^{p-2} \Psi^p\left(\frac{1}{\nu}\right)},$$

но тогда

$$\mathcal{J}_3 \leqslant C_{13} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\left|\alpha_{|\nu|}\right|^\theta}{\nu \Psi^\theta\left(\frac{1}{\nu}\right)}. \tag{5}$$

Применяя лемму 4 б), имеем

$$\mathcal{J}_2 \leqslant C_{14} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{k\theta+1} \Psi_1^\theta\left(\frac{1}{\nu}\right)} \left(\left|\alpha_{|\nu|}\right|^p \nu^{(k+1)p-2} \gamma_\nu \right)^{\theta/p},$$

где

$$\gamma_\nu = \nu^{k\theta+1} \Psi_1^\theta \left(\frac{1}{\nu}\right) \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{1}{n^{k\theta+1} \Psi^\theta\left(\frac{1}{n}\right)}.$$

Учитывая, что $\Psi_1 \in \mathcal{M}H(\sigma_1)$, получаем, что

$$\gamma_\nu \leqslant C_{15} \nu^{k\theta+1} \Psi_1^\theta \left(\frac{1}{\nu}\right) \frac{\nu^{\sigma\theta}}{\Psi_1^\theta\left(\frac{1}{\nu}\right)} \sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{1}{n^{(k-\sigma)\theta-1}} \leqslant C_{16} \nu,$$

где постоянная C_{16} не зависит от ν. Но тогда

$$\mathcal{J}_2 \leqslant C_{17} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\left|\alpha_{|\nu|}\right|^{\theta}}{\nu^{1+(1/p-1)\theta} \Psi_1^{\theta}\left(\frac{1}{\nu}\right)}.$$

Учитывая, что функция $\Psi \in \mathcal{M}H(\sigma_1)$ имеем

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu \Psi_1^{\theta}\left(\frac{1}{\nu}\right)} \geqslant C_{18} \sum_{\nu=1}^{\mu} \frac{1}{\nu\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{\sigma_1 \theta} \Psi_1^{\theta}\left(\frac{1}{\mu}\right)} = \frac{C_{19}}{\Psi_1^{\theta}\left(\frac{1}{\mu}\right)},$$

но тогда, используя условие (3) теоремы, получаем, что

$$\frac{1}{\Psi_1^{\theta}\left(\frac{1}{\mu}\right)} \leqslant \frac{C_{20}}{\mu^{p-1} \Psi_1^{\theta-p}\left(\frac{1}{\mu}\right) \Psi^{p}\left(\frac{1}{\mu}\right)},$$

откуда следует, что

$$\Psi\left(\frac{1}{\mu}\right) \leqslant C_{21} \Psi_1\left(\frac{1}{\mu}\right) \mu^{1/p-1},$$

но тогда

$$\mathcal{J}_2 \leqslant C_{22} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\left|\alpha_{|\nu|}\right|^{\theta}}{\nu \Psi^{\theta}\left(\frac{1}{\nu}\right)}. \tag{6}$$

Объединая оценки (5) и (6) получаем, что

$$\mathcal{J} \leqslant C_{23} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\left|\alpha_{|\nu|}\right|^{\theta}}{\nu \Psi^{\theta}\left(\frac{1}{\nu}\right)}.$$

Применяя теперь сначала лемму 2, а затем лемму 5, имеем

$$\mathcal{J} \leqslant C_{24} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\nu\theta\delta} E_{\nu}^{\theta}(f)_q}{\nu \Psi^{\theta}\left(\frac{1}{\nu}\right)}.$$

Учитывая условие (2) теоремы, отсюда получаем, что $\mathcal{J} < \infty$, что и означает, что $\varphi \in B_{p\theta}^{\Psi_1}(\sigma_1)$. И тем самым случай а) теоремы доказан полностью.

Доказательство случая б) проводится аналогичными рассуждениями, только вместо ссылки на лемму 3 а) надо сделать ссылку на лемму 3 б). $\square$

5. Следствия и дополнения

1. Если функция $\Psi_1(t) = t^{1/p-1}\Psi(t)$ степенного типа, то из доказанной теоремы вытекает теорема IV_2 работы [1]. Если функция $\Psi_2(t) = t^{1/p-1}\Psi(t)$ степенного типа, то из доказанной теоремы вытекает теорема IV_3 работы [1].

2. Функции $\Psi(t) = t^{1-1/p}\big(\ln(2/t)\big)^{-\beta}$ и $\Psi_1(t) = \big(\ln(2/t)\big)^{-\beta+1/p}$, где $\beta = 1/p - 1/\theta$, удовлетворяют условию (3) доказанной теоремы, однако они не удовлетворяют условию теоремы IV_2 работы [1], и поэтому для этих функций доказанная теорема дает новый результат по сравнению с работой [1].

3. Функции $\Psi(t) = t^{1-1/p}\big(\ln(2/t)\big)^{-\beta}$ и $\Psi_2(t) = \big(\ln(2/t)\big)^{-\beta+1/p}$, где $\beta = 1/p' - 1/\theta$, удовлетворяют условию (4) доказанной теоремы, однако они не удовлетворяют условию теорему IV_3 работы [1], и поэтому для этих функций теорема дает новый результат по сравнению с работой [1].

Литература

[1] М. К. Потапов, Й. М. Шарович, *О приближении функций, аналитических в полосе*, Конструктивная теория функции, 84, София, 1984, 66–75.

[2] Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимаций*, Гостехиздат, 1947.

[3] С. М. Никольский, *О равномерных дифференциальных свойствах аналитической функции в полосе*, Mathematica (Cluj) **2(25)**, 1 (1960), 149–157.

[4] М. К. Потапов, *К вопросу о граничных свойствах функций, аналитических в полосе*, Mathematica (Cluj) **7(30)**, 2 (1965), 341–356.

[5] М. К. Потапов, М. Бериша, *Модули гладкости и коэффициенты Фурье периодических функций одной переменной*, Publications de l'Institute Mathematique (Belgrade), **26(40)** (1979), 215-228.

[6] М. К. Потапов, *Об одной теории вложения*, Mathematica (Cluj) **4(37)**, 1 (1972), 123–146.

[7] Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды*, Физматгиз, Москва, 1961.

[8] М. К. Потапов, *О наилучшешем приближении аналитических функций многих пременных*, Ученные записки Ивановского гос. пед. института, **XVIII** (1958), 75–108.

Поступила в редакцию 28 сентября 1996 г.

♣МГУ "М. В. Ломоносов", Механико-математический факультет, 117234 Москва, Россия

♠ Грађевински факултет у Приштини, Универзитет у Приштини, 38000 Приштина, Југославија

MATHEMATICA MONTISNIGRI
Vol VII (1996) 65–69

THE RADIUS OF CONVEXITY AND STARLIKENESS OF A PARTICULAR FUNCTION

IOAN ŞERB

ABSTRACT. The radius of convexity and starlikeness of the function $f_0(z) = (e^z - 1)/z$ is computed. As an application one obtains a simplified proof of a sharp criterion for starlikeness given in [3].

Let f be an analytic function in $\mathbb{C}$,

$$f = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots, \quad z \in \mathbb{C}.$$

The function f is said to be *convex* (*starlike*) in $D_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$, $r > 0$ if the image of D_r is convex (starlike with respect to a_0) respectively. The *radius of convexity* (*starlikeness*) of the function f is the supremum of all $r > 0$ for which f is convex (starlike) in D_r. It is well known [1] that if f is analytic in $\mathbb{C}$, with $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, then f is convex (starlike) in D_r if and only if

$$\operatorname{Re}\left(1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) \geqslant 0, \quad \left(\operatorname{Re} z\frac{f'(z)}{f(z)} \geqslant 0\right), \quad |z| = r,$$

respectively.

In this paper, we will consider the particular function $f_0(z) = (e^z - 1)/z = 1 + z/2! + z^2/3! + \cdots$, $z \in \mathbb{C}$. We show that the radius of convexity r_c of f_0 is the positive root of the transcendental equation

$$e^r = r^2 + r + 1,$$

1991 *Mathematics Subject Classification.* 30C45.
Key words and phrases. Convex functions, starlike functions.

and the radius of starlikeness r_s of f_0 (with respect to 1) is the root in $(0, 2\pi)$ of the equation

$$\frac{2}{r} - \cot\frac{r}{2} = 1.$$

Finally, using the radius of convexity of f_0 one obtains a simplified proof of a result in [3].

Proposition 1. *The radius of convexity of the function f_0 is the positive root $r_c \approx 1.793282\ldots$ of the equation:*

$$\mathrm{e}^r = r^2 + r + 1.$$

Proof. Denoting by $g_0(z) = 2\big(f_0(z) - 1\big) = z + (2/3!)z^2 + \cdots$, we have that f_0 is convex in D_r if and only if g_0 is so. A simple calculation gives:

$$\begin{aligned} 1 + z\frac{g_0''(z)}{g_0'(z)} &= 1 + z\frac{f_0''(z)}{f_0'(z)} = 1 + \frac{z^2\,\mathrm{e}^z - 2z\,\mathrm{e}^z + 2\,\mathrm{e}^z - 2}{z\,\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^z + 1} \\ &= -1 + \frac{z^2\,\mathrm{e}^z}{z\,\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^z + 1} = -1 + \frac{z^2}{z - 1 + \mathrm{e}^{-z}} = -1 + \frac{1}{h_0(z)}. \end{aligned}$$

The condition of convexity of f_0 in D_r is equivalent to:

$$\operatorname{Re}\frac{1}{h_0(z)} = \operatorname{Re}\frac{1}{(\mathrm{e}^{-z} + z - 1)/z^2} \geqslant 1, \quad |z| = r.$$

Now, if $h_0(z) = u(x,y) + iv(x,y) = u + iv$, then $\operatorname{Re} 1/h_0(z) = u/(u^2 + v^2)$ and $\operatorname{Re} 1/h_0(z) \geqslant 1$ is equivalent to $(u - 1/2)^2 + v^2 \leqslant (1/2)^2$, i.e. $|h_0(z) - 1/2| \leqslant 1/2$. But

$$\left|\frac{\mathrm{e}^{-z} + z - 1}{z^2} - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{1}{2}, \quad |z| = r \quad \Leftrightarrow$$

$$\left|\frac{1 - z + z^2/2! - z^3/3! + \cdots + z - 1}{z^2} - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{1}{2}, \quad |z| = r, \quad \Leftrightarrow$$

$$\sup_{|z|=r}\left|-\frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} - \frac{z^3}{5!} + \cdots\right| \leqslant \frac{1}{2}.$$

From the triangle inequality this supremum is:

$$\frac{r}{3!} + \frac{r^2}{4!} + \cdots$$

and is attained for $z = -r$.

This means

$$\frac{e^r - r - 1}{r^2} - \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2},$$

that is $e^r \leqslant r^2 + r + 1$. An elementary analysis of the behaviour of the real function $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $\varphi(r) = e^r - r^2 - r - 1$ shows that $\varphi(0) = 0$ and that the equation $\varphi(r) = 0$ has a unique root $r_c > 0$. We have $r_c \approx 1.793282\ldots$. □

We mention that P. T. Mocanu [2] proved that f_0 is convex in $D_{3/2}$.

Proposition 2. *The function f_0 has the radius of starlikeness $r_s \approx 4.085573\ldots$, where r_s is the unique root in $(0, 2\pi)$ of the equation*

$$\frac{2}{r} - \cot\frac{r}{2} = 1.$$

Proof. Denoting by g_1 the function defined by:

$$g_1(z) = f_0(2z) - 1 = z + \frac{2^2}{3!}z^2 + \frac{2^3}{4!}z^3 + \cdots, \qquad z \in \mathbb{C},$$

it is clear that $f_0(D_{2r})$ is starlike with respect to 1 if and only if $g_1(D_r)$ is starlike with respect to origin. The starlikeness of g_1 in D_r is equivalent to:

$$\operatorname{Re} z\frac{g_1'(z)}{g_1(z)} = \operatorname{Re}\frac{2z\,e^{2z} - e^{2z} + 1}{e^{2z} - 1 - 2z} \geqslant 0, \quad |z| = r, \quad \Leftrightarrow$$

$$\operatorname{Re}\frac{2z(e^{2z} - 1)}{e^{2z} - 1 - 2z} \geqslant 1, \quad |z| = r, \quad \Leftrightarrow$$

$$\operatorname{Re}\frac{1}{\frac{1}{2z}\left(1 - \frac{2z}{e^{2z}-1}\right)} \geqslant 1, \quad |z| = r, \quad \Leftrightarrow$$

$$\left|\frac{1}{2z}\left(1 - \frac{2z}{e^{2z} - 1}\right) - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{1}{2}, \quad |z| = r.$$

Using the Taylor expansion of the generating function of Bernoulli numbers $\left(g_2(z) = z/(e^z - 1)\right)$ one obtains:

$$\sup_{|z|=r}\left|\frac{1}{2z}\left(1 - 1 + \frac{2z}{2} - \sum_{k\geqslant 1}\frac{B_{2k}2^{2k}z^{2k}}{(2k)!}\right) - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{1}{2},$$

where B_{2k}, $k = 1, 2, \ldots$ are the Bernoulli numbers. It follows that

$$\sup_{|z|=r} \left| \sum_{k\geqslant 1} \frac{B_{2k} 2^{2k-1} z^{2k-1}}{(2k)!} \right| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Using the triangle inequality and the fact that $\operatorname{sign} B_{2k} = (-1)^{k-1}$, $k = 1, 2, \ldots$, it implies that the supremum is attained for $z = ir$. This means that:

$$\left| \frac{1}{2ir} - \frac{1}{e^{2ir} - 1} - \frac{1}{2} \right| \leqslant \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\left| \frac{i\big(r\sin(2r) + \cos(2r) - 1\big)}{2r\big(1 - \cos(2r)\big)} \right| \leqslant \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{r} - \cot r \leqslant 1.$$

It follows that the radius of starlikeness of g_1 is the root in $(0, \pi)$ of the equation $1/r - \cot r = 1$ and, finally the radius of starlikeness of f_0 is the root in $(0, 2\pi)$ of the equation

$$\frac{2}{r} - \cot\frac{r}{2} = 1.$$

The monotony of the function $\psi : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}, \psi(r) = 2/r - \cot(r/2) - 1$, in $(0, 2\pi)$, with $\psi(2) = -\pi/4$ and $\lim_{r\nearrow 2\pi} \psi(r) = +\infty$ implies the uniqueness of this root. We have $r_s \approx 4.085573\ldots$. □

In the sequel we give a simple application of Proposition 1. Let $\mathcal{A}$ denote the class of the functions

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$$

that are analytic in the unit disk D_1. The problem of finding the best constant $M_0 > 0$ such that from $f \in \mathcal{A}$ and from

$$\left| \frac{f''(z)}{f'(z)} \right| \leqslant M_0, \quad \forall z \in D_1,$$

to have

$$\left| z\frac{f'(z)}{f(z)} - 1 \right| < 1, \quad \forall z \in D_1,$$

has solved in [3]. The value of $M_0 \approx 1.593624\ldots$ is the positive root of the equation $(2 - M)\,e^M - 2 = 0$. The central step in the final part of this proof is to obtain the maximum value of M such that

$$\operatorname{Re} f_0(Mz) = \operatorname{Re} \frac{e^{Mz} - 1}{Mz} \geqslant 1/2, \quad \forall z \in D_1.$$

The desired M_0 was obtained in [3] after a hard calculation. Now, from the convexity of f_M defined by

$$f_M(z) = f_0(Mz), \quad \forall z \in D_1,$$

for all $M < r_c \approx 1.79\ldots$ it follows that

$$\min_{|z|=1} \operatorname{Re} \frac{e^{Mz} - 1}{Mz},$$

is attained for $z = -1$, for every fixed $M < r_c$. Then we have $(e^{-M} - 1)/(-M) \geqslant 1/2$, or equivalently $(2 - M)\,e^{M} \geqslant 2$, and the best constant M_0 is the positive root of the equation $(2 - M)\,e^{M} = 2$. This root $M_0 \approx 1.593624\ldots$ verifies indeed the relation $M_0 < r_c$.

References

[1] P. L. Duren, *Univalent Functions*, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg Tokyo, 1983.

[2] P. T. Mocanu, *On certain subclasses of starlike functions*, Studia Univ. Babeş -Bolyai, Math. 34, 4 (1994), 3-9.

[3] P. T. Mocanu, I. Şerb, *A sharp simple criterion for a subclass of starlike functions*, (to appear in Complex Variables. Theory and Applications).

Received September 22, 1996

Department of Mathematics, Babeş -Bolyai Unversity,

3400 Cluj-Napoca, România

E-mail address: ivserb@math.ubbcluj.ro

MATHEMATICA MONTISNIGRI
Vol VII (1996) 71–78

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД И РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Р. ШЋЕПАНОВИЋ, Н. МИХАЉЕВИЋ

Резюме. В данной статье рассматривается вариационный подход разрешимости нелинейных уравнений. Получны новые результаы в смысле работ [2] и [3].

Пусть X вещественное рефлексивное банахово пространство; X^* пространство, сопряженное пространству X; $f(x)$ – вещественный функционал на X, дифференцируемый по Гато, $\operatorname{grad} f(x) = F(x)$ и A линейный ограниченый оператор из X в X^*.

Пусть $\omega(x,y)$, $x \in X$, $y \in X$, вещественный функционал, удовлетворяющий условиям:

а) $\operatorname{grad}_y \omega(x,y) = 0$ при $y = x$,
б) непрерывный на любом конечномерном подпространстве из $X \times X$,
в) для фиксированного $y \in X$ слабо полунепрерывен сверху по x.

Лемма 1. *Пусть $G : D_G \subset X \to X^*$ деминепрерывный оператор. Положим $S_R(U) = S_R \cap U$, где $S_R = \{x \in X : \|x\| \leqslant R\}$ и $U \subset D_G$ конечномерное пространство. Пусть далее, для фиксированного $x \in X$ функционал $\omega(x,y) + f(y)$ строго выпуклый.*

1991 *Mathematics Subject Classification.* 47H05.

Тогда

$$\begin{aligned}\exists x_u \in & S_R(U)\forall y \in S_R(U) : \langle Ax_u, x_u\rangle \\ & +\langle G(x_u), x_u\rangle + \omega(x_u, x_u) + f(x_u) \\ & \leqslant (Ax_u, y) + \langle G(x_u), y\rangle + \omega(x_u, y) + f(y).\end{aligned}$$

Доказательство. Положим $\psi(x,y) = \langle Ax, y\rangle + \langle G(x), y\rangle + \omega(x,y) + f(y)$. Пусть ψ_U сужение ψ на $S_R(U)$. Для фиксированного $x \in S_R(U)$ существует $\varphi(x) \in S_R(U)$ такое, что

$$\psi_U\big(x, \varphi(x)\big) \leqslant \psi_U(x,y), \quad \forall y \in S_R(U).$$

Оказывается, что отображение $\varphi : S_R(U) \to S_R(U)$ непрерывно. В силу теоремы Брауэра о неподвижной точке имеем

$$\exists x_u \in S_R(U) : \varphi(x_u) = x_u$$

т.е.

$$\exists x_u \in S_R(U)\forall y \in S_R(U) : \psi_U(x_u, x_u) \leqslant \psi_U(x_u, x_u),$$

что и требовалось доказать. □

Следствие 1. *Если выполнены условия леммы 1 и*

(1) $$\forall x \in U,\ \|x\| = R : \langle Ax + T(x), x\rangle > 0,$$

где $T(x) = G(x) + F(x)$*. тогда* $\|x_u\| < R$.

Доказательство. Допустим противное, т.е. $\|x_u\| = R$. Тогда вещественная функция $\varphi(t) = \psi_U\big(x_u, x_u + t(-x_u)\big)$ для достаточно малых $t > 0$ удовлетворяет неравенству $\varphi(t) \geqslant \varphi(0)$, т.е. $\varphi'(+0) \geqslant 0$. Но

$$\begin{aligned}\varphi'(+0) = \lim_{t\to+0} & \frac{\psi_U\big(x_u, x_u + t(-x_u)\big) - \psi(x_u, x_u)}{t} \\ & = \langle \mathrm{grad}_y\, \psi_u(x_u, x_u), -x_u\rangle = \langle Ax_u + T(x_u), -x_u\rangle \\ & = -\langle Ax_u + T(x_u), x_u\rangle < 0,\end{aligned}$$

что невозможно. □

Пусть P_U проектор из X на U. Тогда, в силу леммы 1 и следствия 1 имеем, что

$$P_U^* Ax_u + P_U^* G(x_u) + P_U^* F(x_u) = 0.$$

Замечание 1. Условие (1) будет выполнено если, например:

а) $A > 0$, $\langle T(x), x\rangle \geqslant 0$, $x \in U$, $\|x\| = R$, или
б) $A \geqslant 0$, $\langle T(x), x\rangle > 0$, $x \in U$, $\|x\| = R$.

Пусть $G : D_G \subset X \to X^*$ деминепрерывный оператор, D_G – линейное многообразие всюду плотно в X и F ограниченный оператор в S_R. Через Γ обозначим семейство конечномерных подпространств $U \subset D_G$ частично упорядоченых по включению. Положим, как и раньше, $T(x) = G(x) + F(x)$.

Лемма 2. *Пусть выполены условия:*

1° *для фиксированного $x \in X$ функционал $\omega(x, y) + f(y)$ строго выпуклый по y.*

2° $\forall x \in D_G$, $\|x\| = R : \langle Ax + T(x), x\rangle > 0$.

Тогда существуют $x_0 \in S_R$ и $\omega_0 \in X^*$ такие, что для всякого подпространства $E \in \Gamma$ ($x_0 \in E$) можно найти подпоследовательность $\langle x_u^s\rangle$, $x_u^s \in U_s$, $x_u^s \xrightarrow{w} x_0$, $s \to +\infty$, $\forall s \in N : E \subset U_s$ и

$$\varlimsup_{s\to+\infty} \left(\langle Ax_u^s + G(x_u^s), x_u^s\rangle + \omega(x_u^s, x_u^s) + f(x_u^s)\right)$$
$$\leqslant \langle Ax_0 + \omega_0, y\rangle + \omega(x_0, y) + f(y), \quad y \in S_R(E).$$

Доказательство. Для всякого $U \in \Gamma$, в силу леммы 1, определим $x_u \in S_R(U)$. Из ограниченности последовательности $\langle x_u\rangle$ можно выделить последовательность $\langle x_u^\alpha\rangle$, которая слабо сходится к некоторому $x_0 \in S_R$; при чем имеет место равенство

$$P_{U_\alpha}^* Ax_u^\alpha + P_{U_\alpha}^* G(x_u^\alpha) + P_{U_\alpha}^* F(x_u^\alpha) = 0.$$

Отсюда следует ограниченность последовательности

$$\langle P_{U_\alpha}^* G(x_u^\alpha)\rangle.$$

Значить, существует подпоследовательность последовательности $\langle P_{U_\alpha}^* G(x_u^\alpha)\rangle$, обозначим ее снова $\langle P_{U_\alpha}^* G(x_u^\alpha)\rangle$, которая слабо сходится к некоторому $\omega_0 \in X^*$.

Пусть $E \in \Gamma$, $x_0 \in E$. Рассмотрим все возможные конечномерные подпространства $U_\alpha \in \Gamma$, $E \subseteq U_\alpha$. В силу теоремы Эберлейна–Шмульмана о слабой компактности, существует счетная подпоследовательность $\langle x_u^s\rangle$ такая, что $x_u^s \xrightarrow{w} x_0$, $s \to +\infty$.

Далее, для $y \in S_R(E)$ имеем

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{s\to+\infty}} \left(\left\langle Ax_u^s + G(x_u^s), x_u^s\right\rangle + \omega(x_u^s, x_u^s) + f(x_u^s)\right)\\
&= \overline{\lim_{s\to+\infty}} \left(\left\langle Ax_u^s, x_u^s\right\rangle + \left\langle P_{U_s}^* G(x_u^s), x_u^s\right\rangle + \omega(x_u^s, x_u^s) + f(x_u^s)\right)\\
&\leqslant \overline{\lim_{s\to+\infty}} \left(\left\langle Ax_u^s, y\right\rangle + \left\langle P_{U_s}^* G(x_u^s), y\right\rangle + \omega(x_u^s, y) + f(y)\right)\\
&\leqslant \overline{\lim_{s\to+\infty}} \left(\left\langle Ax_u^s, y\right\rangle + \left\langle P_{U_s}^* G(x_u^s), y\right\rangle + f(y)\right) + \overline{\lim_{s\to+\infty}} \omega(x_u^s, y)\\
&\leqslant \langle Ax_0 + \omega_0, y\rangle + f(y) + \omega(x_0, y),
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □

Теорема 1. *Пусть выполнены условия леммы 2 и*

1° *отображение $G : D_G \subset X \to X^*$ максимально монотоно,*
2° *функциоанл $\langle Ax, x\rangle + \omega(x, x) + f(x)$ слабо полунепрерывен снизу.*

Тогда $\exists x \in S_R : Ax + T(x) = 0.$

Доказательство. В начале покажем, что

$$\forall x \in D_G \cap S_R : \langle G(x) - \omega_0, x - x_0\rangle \geqslant 0$$

(x_0 и ω_0 из леммы 2). Пусть $x \in D_G \cap S_R$ и $E \in \Gamma$ – подпространство которое содержит x и x_0. Пусть далее, $\langle x_u^s\rangle$ последовательность, определенная леммой 2. Тогда

$$\begin{aligned}
&\langle Ax_0, x_0\rangle + \omega(x_0, x_0) + f(x_0) + \overline{\lim_{s\to+\infty}} \left\langle G(x_u^s), x_u^s\right\rangle\\
&\quad\leqslant \underline{\lim_{s\to+\infty}} \Big(A\left\langle x_u^s, x_u^s\right\rangle + \omega\left(x_u^s, x_u^s\right) + f\left(x_u^s\right)\Big) + \overline{\lim_{s\to+\infty}} \left\langle G(x_u^s), x_u^s\right\rangle\\
&\quad\leqslant \overline{\lim_{s\to+\infty}} \Big(\left\langle Ax_u^s + G\left(x_u^s\right), x_u^s\right\rangle + \omega\left(x_u^s, x_u^s\right) + f\left(x_u^s\right)\Big)\\
&\quad\leqslant \langle Ax_0 + \omega_0, y\rangle + \omega(x_0, y) + f(y), \qquad y \in S_R(E).
\end{aligned}$$

Так как $x_0 \in S_R(E)$, то полагая $y = x_0$ получаем

$$\overline{\lim_{s\to+\infty}} \left\langle G\left(x_u^s\right), x_u^s\right\rangle \leqslant \langle \omega_0, x_0\rangle. \tag{2}$$

Далее

$$
\begin{aligned}
&\langle G(x) - \omega_0, x - x_0\rangle = \langle G(x), x - x_0\rangle - \langle \omega_0, x\rangle + \langle \omega_0, x_0\rangle \\
\geqslant &\langle G(x), x - x_0\rangle - \langle \omega_0, x\rangle + \varlimsup_{s\to+\infty} \big\langle G\big(x_u^s\big), x_u^s\big\rangle \\
= &\varlimsup_{s\to+\infty} \Big(\big\langle G(x), x - x_u^s\big\rangle - \big\langle P_{U_s}^* G\big(x_u^s\big), x\big\rangle\Big) + \varlimsup_{s\to+\infty} \big\langle G\big(x_u^s\big), x_u^s\big\rangle \\
= &\varlimsup_{s\to+\infty} \Big(\big\langle G(x), x - x_u^s\big\rangle - \big\langle G\big(x_u^s\big), x\big\rangle\Big) + \varlimsup_{s\to+\infty} \big\langle G\big(x_u^s\big), x_u^s\big\rangle \\
\geqslant &\varlimsup_{s\to+\infty} \Big(\big\langle G(x), x - x_u^s\big\rangle - \big\langle G\big(x_u^s\big), x\big\rangle + \big\langle G\big(x_u^s\big), x_u^s\big\rangle\Big) \\
= &\varlimsup_{s\to+\infty} \big\langle G(x) - G\big(x_u^s\big), x - x_u^s\big\rangle \geqslant 0,
\end{aligned}
$$

что и требовалось доказать.

В силу условия 2° теоремы следует, что $x_0 \in D_G$, $\omega_0 \in G(x_0)$ и (см. (2))

$$\varlimsup_{s\to+\infty} \big\langle G\big(x_u^s\big), x_u^s\big\rangle \leqslant \langle G(x_0), x_0\rangle.$$

Из

$$\big\langle G\big(x_u^s\big) - G(x_0), x_u^s - x_0\big\rangle \geqslant 0$$

получаем

$$\big\langle G\big(x_u^s\big), x_u^s\big\rangle \geqslant \big\langle G(x_0), x_u^s - x_0\big\rangle + \big\langle G\big(x_u^s\big), x_0\big\rangle,$$

т.е.

$$\varliminf_{s\to+\infty} \big\langle G\big(x_u^s\big), x_u^s\big\rangle \geqslant \varliminf_{s\to+\infty} \big(\big\langle G(x_0), x_u^s - x_0\big\rangle + \big\langle G\big(x_u^s\big), x_0\big\rangle\big),$$

$$\varliminf_{s\to+\infty} \big\langle G\big(x_u^s\big), x_u^s\big\rangle \geqslant \langle G(x_0), x_0\rangle. \tag{3}$$

Из (2) и (3) следует, что

$$\lim_{s\to\infty} \big\langle G\big(x_u^s\big), x_u^s\big\rangle = \langle G(x_0), x_0\rangle.$$

Пусть теперь $y \in S_R$ и $E \in \Gamma$ выбрано так, что $x_0, y \in E$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\langle Ax_0 + G(x_0), x_0\rangle + \omega(x_0, x_0) + f(x_0)\\
\leqslant &\varliminf_{s\to+\infty} \Big(\langle Ax_u^s, x_u^s\rangle + \omega(x_u^s, x_u^s) + f(x_u^s)\Big) + \varliminf_{s\to+\infty} \langle G(x_u^s), x_u^s\rangle\\
\leqslant &\varliminf_{s\to+\infty} \Big(\langle Ax_u^s + G(x_u^s), x_u^s\rangle + \omega(x_u^s, x_u^s) + f(x_u^s)\Big)\\
\leqslant &\varlimsup_{s\to+\infty} \Big(\langle Ax_u^s + G(x_u^s), x_u^s\rangle + \omega(x_u^s, x_u^s) + f(x_u^s)\Big)\\
\leqslant &\langle Ax_0 + \omega_0, y\rangle + \omega(x_0, y) + f(y)\\
= &\langle Ax_0 + G(x_0), y\rangle + \omega(x_0, y) + f(y).
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что x_0 точка абсолютного минимума функционала $\psi(x_0, y)$ в шаре S_R. Так как функционал $\psi(x_0, y)$ дифференцируемый по Гато, то

$$\operatorname{grad}_y \psi(x_0, y) = 0 \quad \text{при} \quad y = x_0$$

т.е.

$$Ax_0 + T(x_0) = 0.$$

$\square$

В доказательстве следующих трех теорем достаточно проверить выполнения условия теоремы 1.

Пусть $X = H$ – вещественное гильбертово пространство, $G : D_G \subset H \to H$ радиально непрерывный максимально монотонный оператор, D_G – линейное многообразие всюду плотно в H; $A \in L(H, H)$; f вещественный слабо полунепрерывный снизу функционал на H, дифференцируемый по Гато,

$$\operatorname{grad} f(x) = F(x);$$

отображение F ограничено (в смысле: любое ограниченное множество переводит в ограниченное множество). Положим $T(x) = F(x) + G(x)$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия:*

1° $(Ax, x) \geqslant \alpha\|x\|^2$, $\alpha > 0$;
2° $\alpha\|x\|^2 + f(x)$ *строго выпуклый функционал;*
3° $\forall x \in D_G$, $\|x\| = R : \langle T(x), x\rangle > 0$.

Тогда $\exists x_0 \in S_R : Ax_0 + T(x_0) = 0$.

Достаточно рассмотреть функционал

$$\psi(x,y) = \big(Ax + G(x), y\big) + \alpha\|y\|^2 - 2\alpha(x,y) + f(y), \quad x, y \in S_R.$$

Замечание 2. Из условия теоремы 2 следует разрешимость уравнения типа Гаммерштейна

$$x_0 + BT(x_0) = 0,$$

где $B = A^{-1}$.

Замечание 3. Отображение $\Phi = A + T : D_G \subset H \to H$ из теоремы 2 необязательно монотоно. Действительно, для

$$\begin{aligned}\forall x, y \in D_G : \big(\Phi(x) - \Phi(y), x - y\big) &= \big(A(x-y), x-y\big) \\ &+ \big(F(x) - F(y), x - y\big) + \big(G(x) - G(y), x - y\big) \\ &\geqslant \alpha\|x-y\|^2 - 2\alpha\|x-y\|^2 = -\alpha\|x-y\|^2.\end{aligned}$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия:*

1° $(Ax, x) \geqslant \alpha\|Ax\|^2$, $\alpha > 0$;
2° $\alpha\|Ax\|^2 + f(x)$ *строго выпуклый функционал;*
3° $\forall x \in D_G$, $\|x\| = R : \langle T(x), x\rangle > 0$.

Тогда $\exists x_0 \in S_R : Ax_0 + T(x_0) = 0$.

Рассмотреть функционал

$$\psi(x,y) = \big(Ax + G(x), y\big) + \alpha\|Ax\|^2 - 2\alpha(Ax, Ay) + f(y), \; x, y \in S_R.$$

Пусть $A = PB$, где $B \geqslant 0$, $B = B^*$ и P частичная изометрия.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия:*

1° $(Px, y) \geqslant \alpha\|x\|^2$, $\alpha \in]0,1[$;
2° $PB^{1/2} = B^{1/2}P$;
3° $\alpha\|B^{1/2}y\|^2 + f(y)$ *строго выпуклый функционал;*
4° $\forall x \in D_G$, $\|x\| = R : \langle T(x), x\rangle > 0$.

Тогда $\exists x_0 \in S_R : Ax_0 + T(x_0) = 0$.

Рассмотреть функционал

$$\psi(x,y) = \big(PBx + G(x), y\big) + \alpha\|B^{1/2}y\|^2 - 2\alpha(Bx, y) + f(y).$$

Литература

[1] Р. Шћепановић, *Варијациони метод и нелинеарне функционалне једначине*, Докторска дисертација, ПМФ, Београд, 1979.

[2] Р. Шћепановић, *Вариационный метод и нелинейные уравнения*, Мат. весник **41** (1989), 39–49.

[3] И. М. Лаврентьев, *О разрешимости нелинейных уравнений с немонотонными операторами* Mathematica Montisnigri, **1** (1993), 39–50.

[4] М. М. Вайнберг, *Вариационный метод и метод монотонных операторов*, Мир, Москва, 1978.

Поступила в редакцию 15 октября 1996 года

Универзитет Црне Горе, Природно-математички факултет,
81000 Подгорица, П. фах 211, Югославия

MATHEMATICA MONTISNIGRI
Vol VII (1996) 79–86

FINITE ELEMENT METHOD FOR SOLVING SELF ADJOINT SINGULARLY PERTURBED BOUNDARY VALUE PROBLEMS

VANJA VUKOSLAVČEVIĆ* AND KATARINA SURLA**

ABSTRACT. The family of difference schemes via finite element method is derived. The Hegarty scheme [4] is a member of the family. The scheme having the forth order of the classical convergence and second order of the uniform convergence derived via spline collocation method in [7] is a memeber of the family, also.

1. INTRODUCTION

Let us consider the following singularly perturbed problem

$$\begin{cases} Ly = -\varepsilon y'' + p(x)y = f(x), & x \in I = [0,1], \\ y(0) = 0, & y(1) = 0, \end{cases}$$

where ε is a small positive parameter, p and f are sufficiently smooth functions and $p(x) \geqslant p > 0$. By using exponential spline $e(x)$ from [3], $e(x) \in C^1(I)$, as a collocation function a family of difference schemes is derived in [6]. The Hegarty scheme [4] is a member of this family. The linear combination of the Hegarty scheme and one new scheme from the family is considered in [7]. The combination has the fourth

1991 *Mathematics Subject Classification.* 65L10.
Key words and phrases. Finite element, difference scheme, singular perturbation problem, uniform convergence.

order of the classical convergence and second order of the uniform convergence.

In this paper the mentioned schemes are derived via finite element method by using suitable test functions.

2. The weak form

The weak form of the problem (1) is: Find $y \in H^1(0,1)$ so that

$$B(y,v) = \varepsilon(y',v') + (py,v) = (f,v),$$

for all $v \in H^1(0,1)$, where $H^1(0,1)$ is Sobolev's space with norm $\|u\|_1 = ((u,u)+(u',u'))^{1/2}$, $(\cdot,\cdot)$ denotes inner product in $L_2(0,1)$. If we choose subspaces S^h (trial space) and T^h (test space) from $H^1(0,1)$ we can define the problem: Find $u^h \in S^h$ such that

$$B(u^h,v^h) = (f,v^h), \tag{1}$$

for all $v^h \in T^h$. Let $\{\phi_j\}_1^{n-1}$ and $\{\psi_j\}_1^{n-1}$ be a set of basis functions for S^h and T^h, respectively. Let $x_j = h * j$, $j = 0(1)n$, $h = 1/n$. Then

$$u^h = \sum_{j=1}^{n-1} u_j\phi_j, \qquad v^h = \sum_{j=1}^{n-1} v_j\psi_j.$$

Since

$$supp(\phi_j) = [x_{j-1}, x_{j+1}]; \quad \phi(x_j) = 1;$$
$$\sum_{j=1}^{n-1} \phi_j(x) = 1, \qquad x \in [x_1, x_{n-1}]$$

and the same relations are valid for function ψ, we have $u^h(x_j) = u_j$. With this, (2) reduces to

$$\sum_{k=j-1}^{j+1} ((\phi_k', -\varepsilon\psi_j') + (\phi_k, -p(x)\psi_j))u_k = (f,\psi_j), \tag{2}$$
$$j = 1(1)n-1, \quad u_0 = u_n = 0.$$

3. Choice of Trial and Test function

The test function we choose in the form

$$\psi_j(x) = \lambda\tilde{\psi}_j(x) + (1-\lambda)\dot{\psi}_j(x),$$

where

$$\tilde{\psi}_j(x) = \begin{cases} \tilde{e}_j(x - x_{j-1}) & \text{za} \quad x \in I_j \\ \tilde{e}_{j+1}(x_{j+1} - x) & \text{za} \quad x \in I_{j+1}, \end{cases}$$

$\tilde{e}_j(x) = \sinh(\tilde{\rho}_j x/h)/\sinh(\tilde{\rho}_j)$, $\tilde{\rho}_j = h\sqrt{\tilde{p}_j/\varepsilon}$, and

$$\dot{\psi}(x) = \begin{cases} \dot{e}_j(x - x_{j-1}) & \text{za} \quad x \in I_j \\ \dot{e}_{j+1}(-x + x_{j+1}) & \text{za} \quad x \in I_{j+1}, \end{cases}$$

and $\dot{e}_j(x) = \sinh(\dot{\rho}_j x/h)/\sinh(\dot{\rho}_j)$ $\dot{\rho}_j = h\sqrt{\dot{p}_j/\varepsilon}$. $\tilde{p}_j = (p_{j-1} + p_j)/2$, $\dot{p}_j = p(x_j - h/2)$, $I_j = [x_{j-1}, x_j]$ and λ is real number. Note that the function $\tilde{e}_j(x)$ is the solution of the problem

$$-\varepsilon\tilde{e}_j'' + \tilde{p}_j\tilde{e}_j = 0$$

$$\tilde{e}_j(0) = 0, \quad \tilde{e}_j(h) = 1.$$

The similarly is for $\dot{e}_j$. For some details about test functions see [2] or [5].

Throughout the paper$M$ denotes any positive constant that may take different values in different formulas, but that are allways independent of ε and discretization mesh.

4. Discretization of the Problem

The quadrature rules in (3) we determine in the following way

$$(p(x)\psi_j, \phi_i)_j \simeq \lambda\tilde{p}_j(\phi_i, \tilde{\psi}_j)_j + (1-\lambda)\dot{p}_j(\phi_i, \dot{\psi}_j)_j,$$

$$(f(x), \psi_j)_j \simeq \lambda\tilde{f}_j(1, \tilde{\psi}_j)_j + (1-\lambda)\dot{f}_j(1, \dot{\psi}_j)_j,$$

where index j behind brackets denotes the integral on the interval $[x_{j-1}, x_j]$ and integrals $(\phi_i, \tilde{\psi}_j)_j$ and $(\phi_i, \dot{\psi}_j)_j$ are evaluted exactly. After some elementary calculations we obtain the family:

$$\begin{cases} Ru_j = Qf_j, & j = 1(1)n \\ u_0 = 0, & u_n = 0. \end{cases}$$

where

$$
\begin{aligned}
Ru_j &= r_j^- u_{j-1} + r_j^c u_j + r_j^+ u_{j+1}, \\
Qf_j &= \lambda q_j^- f_{j-1} + (1-\lambda) q_j^{\mp} f_{j-1/2} + \lambda q_j^c f_j \\
&\qquad + (1-\lambda) q_j^{\pm} f_{j+1/2} + (1-\lambda) q_j^+ f_{j+1} \\
r_j^- &= \lambda r_1^- + (1-\lambda) r_2^-, \qquad r_j^+ = \lambda r_1^+ + (1-\lambda) r_2^+. \\
r_j^c &= \lambda r_1^c + (1-\lambda) r_2^c, \\
r_1^- &= a(\tilde{\rho}_j), \qquad r_2^- = a(\dot{\rho}_j) \\
r_1^+ &= a(\tilde{\rho}_{j+1}), \qquad r_2^+ = a(\dot{\rho}_{j+1}) \\
r_1^c &= -b(\tilde{\rho}_j) - b(\tilde{\rho}_{j+1}) \\
r_2^c &= -b(\dot{\rho}_j) - b(\dot{\rho}_{j+1}) \\
a(t) &= t/\big(h \sinh(t)\big), \qquad b(t) = t\coth(t)/h, \\
q_j^- &= \frac{h^2}{2\varepsilon \tilde{\rho}_j}\big(b(\tilde{\rho}_j) - a(\tilde{\rho}_j)\big), \qquad q_j^+ = \frac{h^2}{2\varepsilon \tilde{\rho}_{j+1}}\big(b(\tilde{\rho}_{j+1}) - a(\tilde{\rho}_{j+1})\big). \\
q_j^c &= q_j^- + q_j^+, \\
q_j^{\mp} &= \frac{h^2}{\varepsilon \dot{\rho}_j}\big(b(\dot{\rho}_j) - a(\dot{\rho}_j)\big), \qquad q_j^{\pm} = \frac{h^2}{\varepsilon \dot{\rho}_{j+1}}\big(b(\dot{\rho}_{j+1}) - a(\dot{\rho}_{j+1})\big).
\end{aligned}
$$

Thus, when $\lambda = 1$ we obtain the Hegarty scheme which is the result from [5]. When $\lambda = 0$ we obtain the scheme derived in [6]. In order to determine λ so that the obtained scheme has greater accuracy, we analyse the truncation error $\tau_j(y)$:

$$\tau_j(y) = Ry_j - Q(Ly_j) = T_{j0} y_j + T_{j1} y_j' + T_{j2} y_j'' + O(h^5/\varepsilon^2)$$

where $T_{j0} = T_{j1} = 0$. After some Taylor's expansions we obtain

$$T_{j2} = \lambda \frac{-h^3}{6\varepsilon} p_j + (1-\lambda) \frac{-h^3}{24\varepsilon} p_j + O\left(\frac{h^5}{\varepsilon^2}\right).$$

We put $\lambda = -1/3$ and then we have

$$T_{j2} = O\left(\frac{h^5}{\varepsilon^2}\right).$$

In that case the scheme (4) becomes the scheme derived in [7]. The following theorems holds.

Theorem 1. *Let $y(x) \in C^4(I)$. Let u_j be approximation to $y(x_j)$ obtained using scheme (4) for $\lambda = 0$ or for $\lambda = 1$. Then*

$$|y(x_j) - u_j| \leqslant Mh^2$$

where M is constant independent of ε and h.

Proof. For $\lambda = 1$ we obtain the Hegarty scheme and the proof is given in [4]. For $\lambda = 0$ the scheme reduces to the scheme from [6] and the proof is given there. □

Theorem 2. *Let $y(x) \in C^6(I)$. Let u_j be approximation to $y(x_j)$ obtained using scheme (4) for $\lambda = -1/3$. Then*

$$|y(x_j) - u_j| \leqslant M\frac{h^4}{h^2 + \varepsilon}$$

where M is constant independent of ε and h.

Proof. For $\lambda = -1/3$ the scheme reduces to one derived in [7] and the proof is given there. □

5. Numerical results

In this section we present results of some numerical experiments using the scheme described in previous theorem. Our examples are taken from [1].

Example 1.

$$-\varepsilon y'' + (1 + x(1 - x))y = f(x), \qquad u(0) = 0, \qquad u(1) = 0.$$

The exact solution has the form

$$y(x) = 1 - (1 - x)\exp\left(\frac{-x}{\sqrt{\varepsilon}}\right) - x\exp\left(\frac{x-1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$$

Example 2.

$$-\varepsilon y'' + (1 + x)^2 y = 4(3x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x - 1),$$
$$y(0) = -1, \quad y(1) = 0.$$

We denote by E_n the maximum of $|y(x_j) - u_j|$, $j = 0(1)n+1$. Here $[u_0, u_1, \ldots, u_{n+1}]^\top$ is corresponding numerical solution obtained by using scheme (4). Also, we define in the usual way the order of

k	n							
	16	32	64	128	256	512	1024	
3	3.05(−6)	1.91(−7)	1.23(−8)	2.21(−9)	4.52(−9)	2.16(−8)	5.82(−8)	E_n
			4.00	4.00	4.12	Error	Error	Ord
4	5.95(−6)	3.73(−7)	2.35(−8)	2.04(−9)	3.18(−9)	9.91(−9)	4.80(−8)	E_n
			3.99	4.03	3.98	Error	Error	Ord
5	1.35(−5)	8.53(−7)	5.36(−8)	3.58(−9)	1.63(−9)	3.37(−9)	2.19(−8)	E_n
			3.99	4.00	4.63	Error	Error	Ord
6	3.32(−5)	2.15(−6)	1.37(−7)	8.59(−9)	1.36(−9)	3.62(−9)	1.47(−8)	E_n
			3.98	3.99	4.10	Error	Error	Ord
7	8.80(−5)	5.58(−6)	3.53(−7)	2.21(−8)	1.75(−9)	1.28(−9)	4.36(−9)	E_n
			3.97	3.99	4.02	Error	Error	Ord
8	2.32(−4)	1.49(−5)	9.43(−7)	5.95(−8)	3.98(−9)	1.04(−9)	4.90(−9)	E_n
			3.97	3.99	3.99	4.07	Error	Ord
9	5.50(−4)	4.00(−5)	2.54(−6)	1.62(−7)	1.02(−8)	7.33(−10)	1.24(−9)	E_n
			3.94	3.98	3.99	4.00	3.76	Ord
10	1.09(−3)	1.10(−4)	7.06(−6)	4.44(−7)	2.80(−8)	1.83(−9)	1.42(−9)	E_n
			3.92	3.95	3.99	4.00	4.34	Ord
11	1.73(−3)	2.70(−4)	1.90(−5)	1.22(−6)	7.76(−8)	4.93(−9)	6.42(−10)	E_n
			3.96	3.95	3.99	3.98	4.08	Ord
12	2.09(−3)	5.52(−4)	5.39(−5)	3.43(−6)	2.16(−7)	1.36(−8)	1.19(−9)	E_n
			4.14	3.93	3.96	3.99	4.03	Ord

Table 1. Example 1.

convergence Ord for two succesive values of n with $Q_n = \max_j |u_j^n - u_j^{2n}|$ and Q_{2n}:

$$Ord = \frac{\log Q_n - \log Q_{n_2}}{\log n_2 - \log n},$$

where $n_2 = 2n$ and u_j^n is u_j calculated with $h = 1/n$. Different values of $\varepsilon = 2^k$ and n are considered.

k	n					
	64	128	256	512	1024	
3	4.00	3.97	3.38	Error	Error	*Ord*
4	3.99	4.00	3.94	Error	Error	*Ord*
5	3.97	3.99	3.97	Error	Error	*Ord*
6	3.96	4.00	3.99	3.88	Error	*Ord*
7	3.92	3.98	3.98	3.82	Error	*Ord*
8	3.83	3.94	3.99	3.98	Error	*Ord*
9	3.66	3.91	3.96	3.98	3.69	*Ord*
10	3.40	3.82	3.95	3.99	3.93	*Ord*
11	3.03	3.66	3.90	3.97	3.97	*Ord*
12	2.61	3.37	3.81	3.95	3.98	*Ord*
13	2.27	3.01	3.65	3.89	3.97	*Ord*
14	2.07	2.58	3.83	3.81	3.94	*Ord*
15	2.01	2.25	2.99	3.64	3.90	*Ord*
16	2.00	2.07	2.57	3.37	3.80	*Ord*
17	2.00	2.00	2.24	3.00	3.63	*Ord*
18	2.00	2.00	2.07	2.58	3.37	*Ord*

Table 2. Example 2.

Numerical results presented in [7] compare mentoned schemes.

References

[1] E. P. Doolan, J. J. H. Miller, and W. H. A. Schilders, *Uniform numerical methods for problems with initial and boundary layers*, Dublin, Boole Press, 1980, pp. 301-305.

[2] P. W. Hemker. *A Numerical Study of Stiff Two-Point Boundary Problems*, Mathematical Centre, Amsterdam, 1977.

[3] W. Hess and W. J. Schmidt. *Convexity Preserving Interpolation with Exponential Splines*, Computing **36** (1986), 335–342.

[4] A. F. Hegarty, J. J. H. Miller, and E. O'Riordan, *Uniform Second Order difference scheme for Singular Perturbation Problem*, in: Boundary and Interior Layers-Computational and Asymptotic methods, edited by J. J. H. Miller, Boole Press, Dublin, 1980, pp. 301-305.

[5] E. O'Riordan, *Finite Element Methods for Singularly Perturbed Problems*, Ph. D. Thesis, Trinity College, Dublin, 1982.

[6] K. Surla, D. Herceg, and Lj. Cvetković, *A family of exponentialy spline difference schemes*, Zb. Rad. Prirod. Mat. Fak. Ser. Mat. (Univ. u Novom Sadu) **19** (1991), no. 2, 12–23.

[7] K. Surla, V. Vukoslavčević, *A spline Difference Scheme for Boundary Value Problems with Small Parameter*, Zb. Rad. Prirod. Mat. Fak. Ser. Mat. (Univ. u Novom Sadu) **20** (1995), no. 2, 159–167.

Received January 27, 1996

*University of Montenegro, Faculty of Science, P. O. Box 211, 81001 Podgorica, Yugoslavia

**Institute of Mathematics, University of Novi Sad, 21000 Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4, Yugoslavia

E-mail address: `surla@uns.ns.ac.yu`

The journal *Mathematica Montisnigri* publishes original scientific works from all fields of mathematics which comprise new and significant results with complete proofs, which are of interest for a larger mathematical community. It also contains expository articles. The journal does not publish works of polemical or methodological interest, as well as works that have been offered for publishing in other journals. The journal publishes papers in English, Russian, French and German. It is usually issued twice a year.

Instructions to the authors:

Papers typed in usual form should be sent in two copies to the following address:

Mathematica Montisnigri
Department of Mathematics
University of Montenegro
Cetinjski put b.b.
P.O. Box 211
81000 Podgorica, Yugoslavia

For papers that authors typeset using TEX, AMS-TEX, LATEX or AMS-LATEX it is preferable to send them also at diskette or by *e-mail* at the following address:

VUJICIC@CASTOR.PHY.BG.AC.YU

The papers should have a precise and informative title. The first page of the paper should contain AMS (1991) subject classification, UDK classification and key words and phrases. Theorems, other statements and formulae must be clearly marked, separating the results of the authors from the already known results. The list of references has to be enclosed in alphabetical or chronological order at the end of the paper as well as the affiliation of the author.

Subscription for one volume is 40 USA dollars for institutions and 20 USA dollars for individuals.

For subscriptions and exchange please refer to the above address.

Publishing of this volume is supported by the Ministry of Science and Education of Montenegro.

Kompjuterski slog dr Borko Vujičić
Štampa: "Montenegropublic", Podgorica, 19. decembra 19.