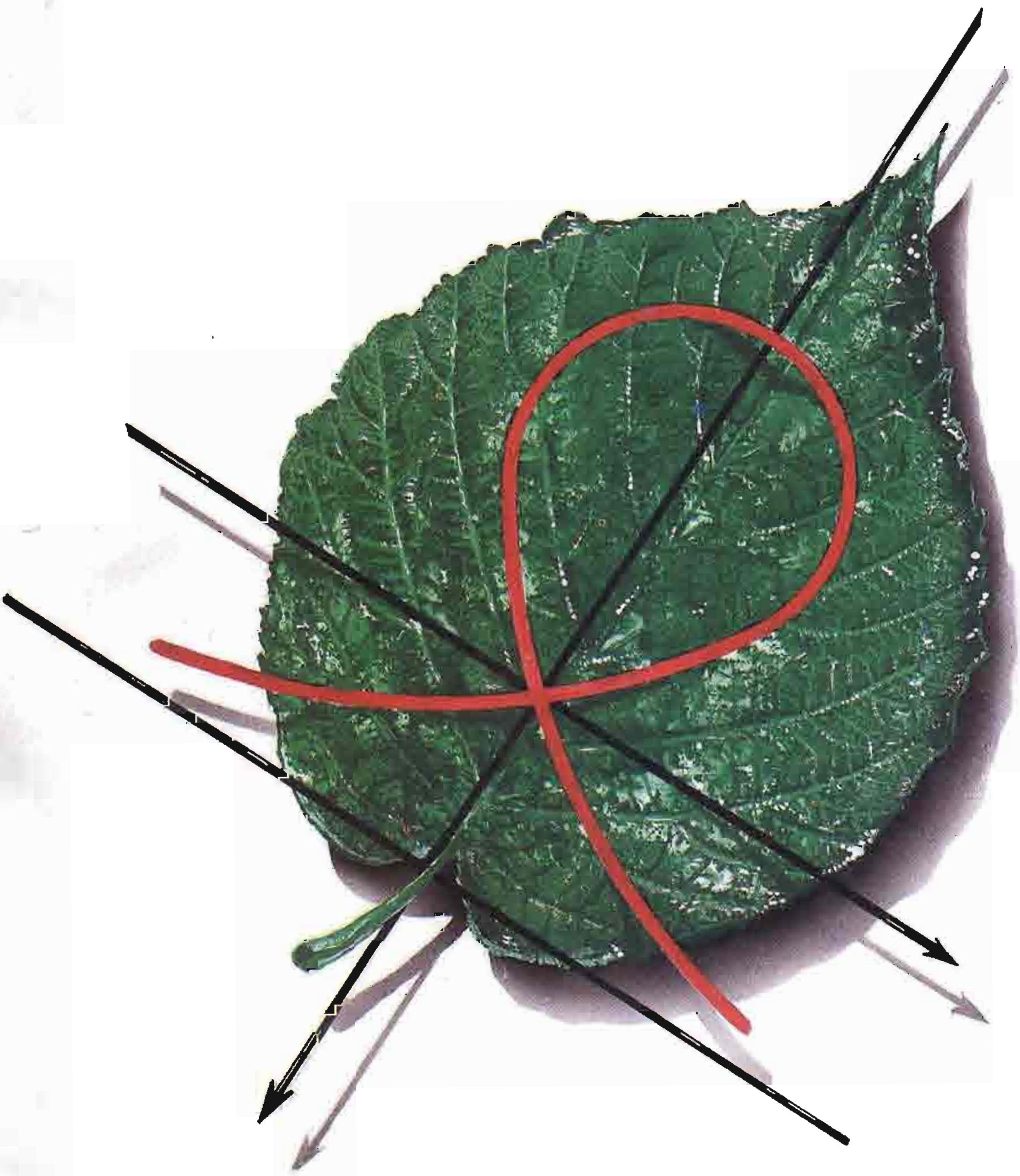
YU ISSN 0354-656X

1
1995/96

ТАНГЕНТА

ЧАСОПИС ЗА МАТЕМАТИКУ И РАЧУНАРСТВО
ЗА УЧЕНИКЕ СРЕДЊИХ ШКОЛА



НОВИ САД
1995

YU ISSN 0354-656*X*

САВЕЗ ДРУШТАВА МАТЕМАТИЧАРА ЈУГОСЛАВИЈЕ
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

ТАНГЕНТА – часопис за математику и рачунарство за ученике средњих школа

Излази у четири броја током школске године. Тираж: 10000 примерака.

Адреса часописа је:
"Тангента", Институт за математику, Трг Доситеја Обрадовића 4, 21000 Нови Сад

Претплата за 1995/96. годину износи 20 динара. Цена једног броја је 6 динара. Уплате на жиро рачун: *Друштво математичара Србије – Подружница Нови Сад, број 45700-678-0-36703.* На уплатници као сврху уплате назначити "За Тангенту".

САДРЖАЈ:

Штампа: *STYLOS i SPRINT*, Нови Сад, др Илије Ђуричића 3

РЕЧ РЕДАКЦИЈЕ

Драги читаоци

Пред вама је први број математичко–рачунарског часописа "Тангента", за ученике средњих школа. Од сада па убудуће он ће четири пута годишње уносити у ваш дом нову количину знања. Читајући овај часопис научићете много интересантних и корисних ствари из области две међусобно веома блиске и нераздвојно повезане науке – математике и рачунарства.

Математика је по времену свог постанка веома стара наука али по својој суштини вечно млада, јер се из дана у дан подмлађује новим открићима. Рачунарство је, с друге стране, релативно млада наука, која је, међутим, за врло кратко време продрла у све области људске делатности, обележивши наше време у већој мери него било која друга наука. Вековима је математика припремала плодно тло на коме је процветало рачунарство; сада рачунарство враћа дуг, снажно утичући на појаву нових математичких идеја и њихов развој.

Часопис "Тангента" састоји се из више повезаних делова. У првом делу објављиваће се чланци о различитим проблемима математичких и рачунарских наука. У одељку "Новости из науке", појављиваће се мањи чланци о најновијим достигнућима из математике, рачунарства и њихових примена. Рубрика "Информације" садржаће материјале о такмичењима средњошколаца из математике и рачунарства, од регионалних до савезних, балканијадама, олимпијадама, турнирима градова итд. Редовно ће се објављивати задаци са тих такмичења и њихова решења. У рубрици "Практикум" објављиваће се задаци и решења са пријемних и квалификационих испита из математике са свих природно–математичких, техничких и других факултета у нашој земљи, на којима је полагање таквих испита из математике предвиђено.

Посебно место у часопису заузима рубрика "Задаци". У њој ће се предлагати задаци чије решавање подразумева способност самосталног и стваралачког мишљења, као и задаци у којима се појављују занимљиве и лепе идеје. Та рубрика биће и својеврсно стално такмичење. У њој ће се објављивати најбоља, најпотпунија и најинтересантнија решења пристигла од наших читалаца у предвиђеном року. Коначни резултати такмичења објављиваће се у првом броју часописа сваке године за претходну календарску годину. За победнике су предвиђене и награде.

То су само неке од ствари које вас очекују у овом и будућим бројевима нашег часописа. У њему ћете наћи и зврчке (главоломке – задатке чије решавање захтева извесну домишљатост), задатке намењене програмерима, приказе нових књига које могу бити интересантне за наше читаоце, прилоге из рекреативне математике итд. Од следећег броја очекујемо и писма наших читалаца. Шаљите нам прилоге, предлоге задатака, решења, интересантне програме, примедбе и сугестије.

Очекујемо да часопис буде од помоћи не само средњошколцима него и њиховим професорима, посебно за рад са ученицима у оквиру ваннаставних активности, те да ће добро доћи студентима и свима онима које интересују математика и рачунарство. Потрудићемо се да се на страницама нашег часописа нађе понешто интересантно и за ученике старијих разреда основних школа.

Драги читаоци, желимо вам много успеха на тешком али лепом и интересантном путовању кроз науку.

ИЗОПЕРИМЕТРИЈСКИ ПРОБЛЕМ

др Владимир Јанковић, Математички факултет, Београд

Увод

Под изопериметријским проблемом у ужем смислу подразумева се проблем одређивања просте, затворене, равне криве задате дужине која обухвата област највеће површине. Под изопериметријским проблемом у ширем смислу подразумева се проблем одређивања фигуре највеће површине у задатој фамилији фигура које имају једнаке обиме. Споменимо неколико карактеристичних проблема тог типа:

- међу n-тоугловима задатих дужина страница одредити онај који има највећу површину;
- међу n-тоугловима задатог обима и задатих углова одредити онај који има највећу површину;
- међу n-тоугловима задатог обима одредити онај који има највећу површину.

Није тешко наслутити да је решење основног изопериметријског проблема круг. У савременој математици постоји више доказа ове чињенице. Неки од њих су елементарни, а неки не, али ниједан није тривијалан и сваки од њих представља прави математички бисер. У овом чланку биће изложено прво елементарно решење изопериметријског проблема.

Изопериметријским проблемом су се бавили математичари античке Грчке. Из многих сачуваних записа види се, посредно или непосредно, да се још тада наслућивало да круг обухвата већу површину од простих затворених кривих исте дужине. Неки историчари математике баш у том смислу тумаче Питагорин (Πυθαγόρα) став да је "најлепше од свих тела лопта, најлепша од свих равних фигура круг". Најзначајније дело античке математике посвећено изопериметријском проблему био је Зенодоров трактат (*Ζηνόδωροσ*, 2. век пре Христа) који, нажалост, није сачуван. О овом делу данас се зна посредно, преко текстова Папа александријског (*Πάπποσ ἀλεχανδρεύσ*, 3. век) и Теона (*Θεόν*, 4. век). Зенодор је прво решавао изопериметријски проблем за n-тоуглове, а потом је општи изопериметријски проблем решавао апроксимирањем произвољне криве полигоном. Основни недостатак Зенодоровог поступка је тај што полази од недоказане претпоставке да у фамилији n-тоуглова задатог обима постоји фигура максималне површине. Зато се Зенодорово решење изопериметријског проблема за n-тоуглове не може сматрати комплетним. Такође се не може сматрати комплетним Зенодоров доказ да је круг решење изопериметријског проблема.

Прве следеће значајне покушаје да реши овај проблем учинио је Штајнер (Steiner) у прошлом веку. Он је дао пет доказа да је круг решење изопериметријског проблема. Међутим, сви његови докази имају исти недостатак као и онај Зенодоров: није доказана егзистенција решења. Без обзира на то, Штајнерови покушаји су важан корак ка циљу јер се у њима појавило неколико веома добрих идеја које су касније донеле важне резултате. Између осталог на основу Штајнерових идеја настало је прво комплетно елементарно решење изопериметријског проблема које је дао Едлер (Edler) 1882. године.

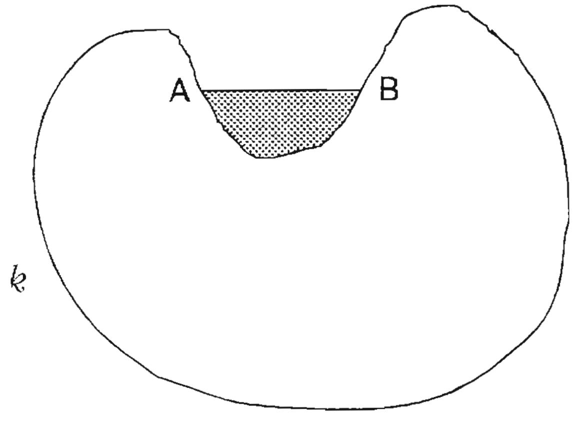
Изопериметријски проблем спада у ширу класу математичких проблема које називамо екстремални проблеми. То су проблеми одређивања објеката из задате фамилије који су најбољи у задатом смислу. Такви проблеми су се појављивали у математици од њених најранијих почетака. Такође се појављују у другим наукама, техници и економији. Током XVII века расло је интересовање за екстремалне проблеме што је довело до појаве диференцијалног рачуна, чије су темеље поставили Њутн (Newton) и Лајбниц (Leibnitz). У XVIII веку настала је још једна математичка дисциплина која развија апарат за решавање екстремалних проблема. То је варијациони рачун. Темеље су му поставили Ојлер (Euler) и Лагранж (Lagrange). У варијационом рачуну се изучава аналитички апарат за решавање екстремалних проблема у којима су променљиве криве и површи, какав је нпр. изопериметријски проблем. Прво комплетно решење изопериметријског проблема појавило се управо у оквиру варијационог рачуна. Дао га је Вајерштрас (Weierstrass) у курсу варијационог рачуна којег је држао својим студентима. Интересантно је да Вајерштрас није објавио свој резултат већ је он остао сачуван захваљујући студентским белешкама.

Штајнерово (непотпуно) решење

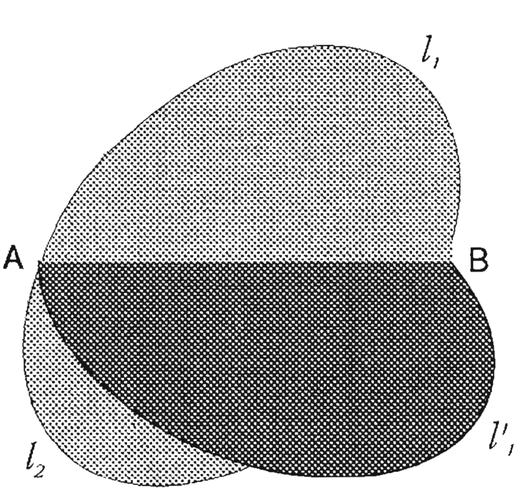
Резултат првог Штајнеровог покушаја формулисаћемо у облику теореме.

ТЕОРЕМА 1 *Ако проста затворена равна крива није круг, постоји проста затворена равна крива исте дужине која обухвата област веће површине.*

Доказ. Нека крива k обухвата област која није конвексна. Тада на кривој k постоје две тачке A и B, такве да све унутрашње тачке дужи AB леже у спољашњој области криве k (слика 1). Ако се један део криве k замени отсечком AB, добиће се крива k' чија је дужина мања од дужине криве k и која обухвата област веће површине од површине области обухваћене кривом k. Нека је k'' крива која је слична кривој k', чија је дужина једнака дужини криве k. Како је дужина криве k'' већа од дужине криве k', коефицијент њихове сличности већи је од 1. Следи да је површина области обухваћене кривом k'' већа од површине области обухваћене кривом k', а тим пре је већа од површине области обухваћене кривом k.



Слика 1

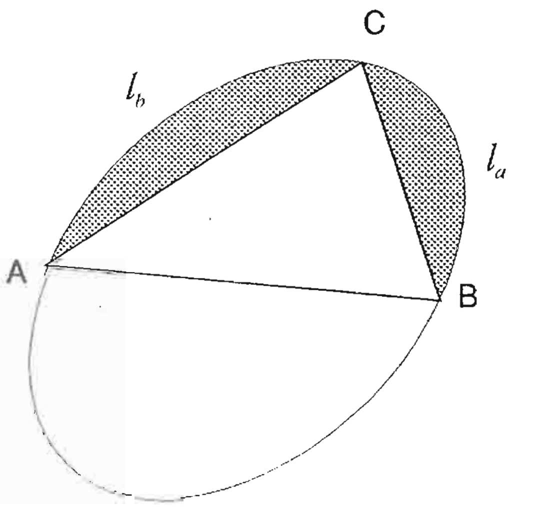


Слика 2

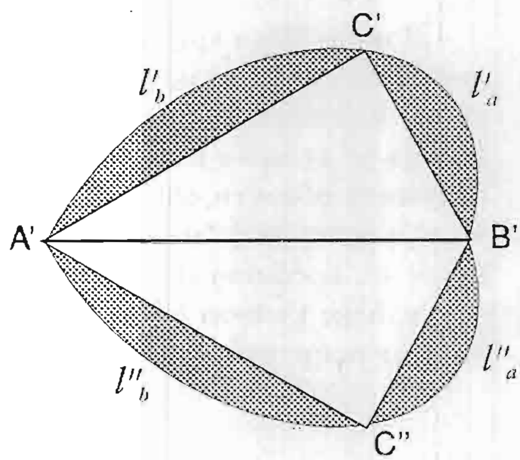
Надаље ћемо претпостављати да је област обухваћена кривом k конвексна. Нека су A и B две тачке које криву k разлажу на два лука l_1 и l_2 чије су дужине једнаке.

Нека површина области коју ограничавају лук l_1 и дуж AB није једнака површини области коју ограничавају лук l_2 и дуж AB; нека нпр. прва од ове две области има већу површину. Крива k' састављена од лука l_1 и лука l_1' симетричног луку l_1 у односу на праву AB има исту дужину као и крива k, а површина области коју она ограничава већа је од површине области коју ограничава крива k (слика 2).

Надаље ћемо претпостављати да су површине области ограничене луком l_1 и дужи AB и области ограничене луком l_2 и дужи AB једнаке међу собом. Како по претпоставци теореме крива k није круг, на њој постоји тачка C из које се дуж AB види под углом који није прав (слика 3). Нека је $A'B'C'$ троугао чији је угао код темена C' прав и чије су странице $A'C'$ и $B'C'$ једнаке дужима AC и BC (слика 4). Даље, нека су лукови l_a' и l_b' над катетама $B'C'$ и $A'C'$ подударни луковима l_a и l_b које странице BC и AC троугла ABC одсецају на кривој k и нека су лукови l_a'' и l_b'' симетрични луковима l_a' и l_b' у односу на праву $A'B'$. Крива k' састављена од лукова l_a', l_b', l_b'' и l_a'' има исту дужину као и крива k: лукови l_a' и l_b' подударни су луковима l_a и l_b; збир дужина лукова l_a' и l_b' једнак је половини дужине криве k', док је збир дужина лукова l_a и l_b једнак половини дужине криве k. Како је површина троугла $A'B'C'$ већа од површине троугла ABC, то је област ограничена луковима l_a' и l_b' и дужи $A'B'$ већа од површине области ограничене луковима l_a и l_b и дужи AB. Површине ових двеју области једнаке су половинама површина области које обухватају криве k' и k. Стога је површина области обухваћене кривом k' већа од површине области обухваћене кривом k.



Слика 3



Слика 4

У доказу претходне теореме коришћено је једно помоћно тврђење које ћемо формулисати у облику задатка:[1]

Задатак 1. Међу троугловима чије су две странице једнаке датим дужима највећу површину има онај код кога је угао захваћен тим страницама прав.

Штајнерова симетризација

Развијајући методе за решавање изопериметријског проблема, Штајнер је смислио трансформацију којом се од једне конвексне фигуре добија нова конвексна фигура којој дата права представља осу симетрије, чија је површина једнака површини оригинала и чији обим није већи од обима оригинала, при чему су обими слике и оригинала

[1] Предлажемо читаоцима да задатке из овог чланка сами реше.

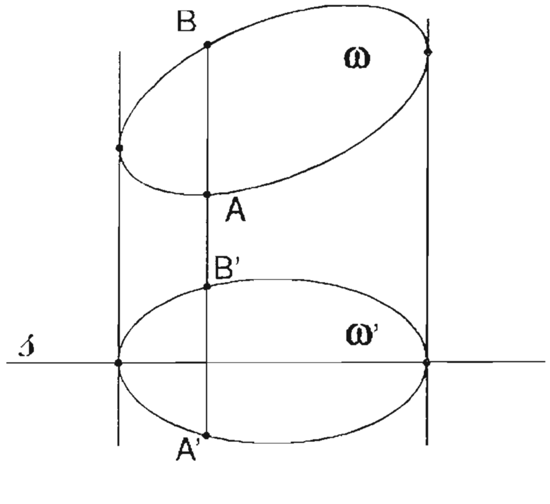
једнаки само у случају да оригинал има осу симетрије паралелну датој правој. Та трансформација се назива симетризација. У наставку овог параграфа даћемо дефиницију симетризације и доказаћемо она њена својства која ћемо користити у наставку чланка. Подразумеваћемо да се сва разматрања односе на фигуре које леже у једној равни.

Нека је дата права s (сматраћемо да је она хоризонтална). Симетризација у односу на праву s је трансформација која произвољну конвексну фигуру ω пресликава у фигуру ω' која задовољава следећа два услова:

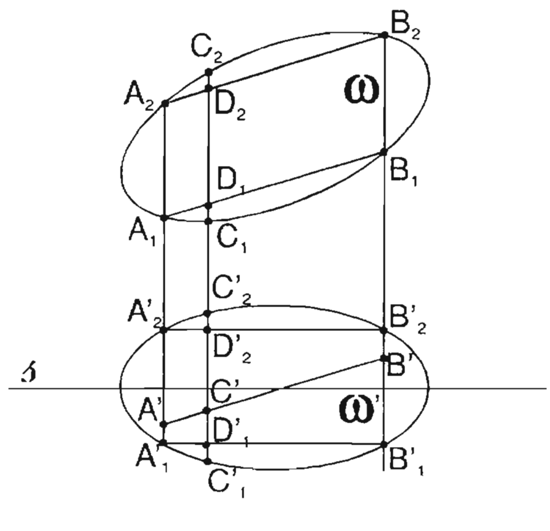
- фигура ω' је симетрична у односу на праву s;
- свака права управна на s (вертикала) пресеца фигуре ω и ω' по дужима једнаких дужина (слика 5).

Докажимо да је фигура ω', добијена симетризацијом конвексне фигуре ω, такође конвексна. Нека су A' и B' две тачке фигуре ω' и нека је C' унутрашња тачка дужи $A'B'$. Претпоставићемо да тачка C' дели дуж $A'B'$ у односу $p:q$ $(p,q>0,\ p+q=1)$. Треба доказати да тачка C' припада фигури ω'. Случај када тачке A' и B' леже на једној вертикали је тривијалан. Зато ћемо претпостављати да тачке A' и B' не леже на једној вертикали. Нека вертикале кроз тачке A', B' и C' пресецају фигуре ω и ω' по дужима A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, $A_1'A_2'$, $B_1'B_2'$ и $C_1'C_2'$, нека дужи A_1B_1 и A_2B_2 секу праву C_1C_2 у тачкама D_1 и D_2, и нека дужи $A_1'B_1'$ и $A_2'B_2'$ секу праву $C_1'C_2'$ у тачкама D_1' и D_2' (слика 6). Због конвексности фигуре ω, тачке D_1 и D_2 припадају фигури ω а самим тим и дужи C_1C_2. Имамо да је

$D_1'D_2' = qA_1'B_1' + pA_2'B_2' = qA_1B_1 + pA_2B_2 = D_1D_2 \leq C_1C_2 = C_1'C_2'$.



Слика 5



Слика 6

Имајући у виду да дужи $D_1'D_2'$ и $C_1'C_2'$ леже на истој правој и имају заједничко средиште и да прва од њих није дужа од друге, закључујемо да је дуж $D_1'D_2'$ садржана у дужи $C_1'C_2'$. Како тачка C' припада дужи $D_1'D_2'$ (због конвексности трапеза $A_1'A_2'B_2'B_1'$), она тим пре припада дужи $C_1'C_2'$, а самим тим и фигури ω'.

Надаље ћемо се бавити симетризацијом полигонских површи. Основни алат у разматрањима која следе биће тврђења садржана у следећа два задатка:

Задатак 2. а) Нека је l права паралелна страници AB троугла ABC која висину CD дели у односу $p:q$ $(p,q>0,\ p+q=1)$. Доказати да је дужина пресечне дужи MN праве l и троугла ABC дата са $MN=pAB$.

б) Нека је l права паралелна основицама AB и CD трапеза $ABCD$ која његову висину DE дели у односу $p:q$ $(p,q>0,\ p+q=1)$. Доказати да је дужина пресечне дужи MN праве l и трапеза $ABCD$ дата са $MN=pAB+qCD$.

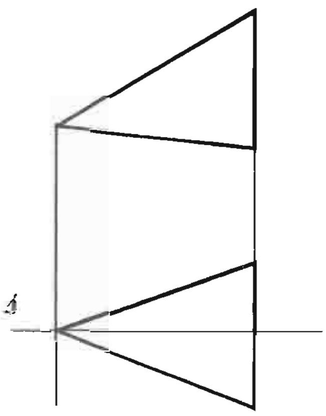
Задатак 3. а) Доказати да међу троугловима чије су једна страница и одговарајућа висина једнаке датим дужима, најмањи обим има троугао чије су преостале две странице једнаке.

б) Доказати да међу трапезима чије су основице и висина једнаке датим дужима, најмањи обим има једнакокраки трапез.

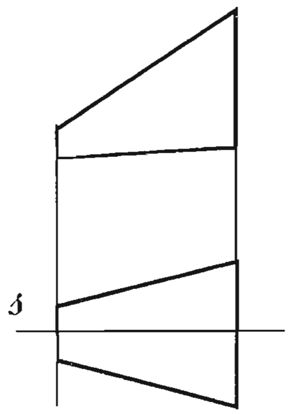
Непосредна последица ових тврђења су следеће чињенице:

–симетризацијом троугла у односу на праву паралелну једној његовој висини добија се једнакокраки троугао чија је површина једнака површини полазног троугла а обим није већи од обима полазног троугла, при чему једнакост обима важи само у случају када је полазни троугао једнакокрак (слика 7);

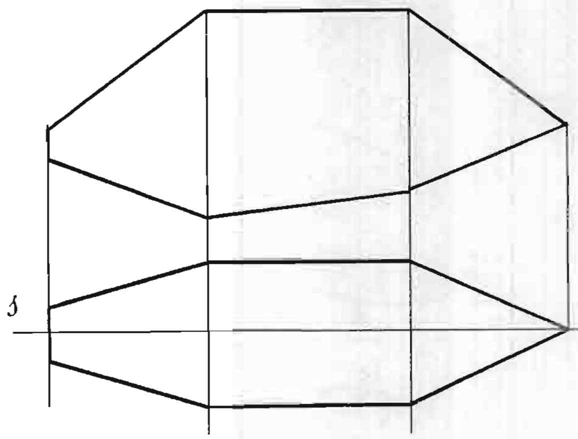
–симетризацијом трапеза у односу на праву која је паралелна његовој висини добија се једнакокраки трапез чија је површина једнака површини полазног трапеза а обим није већи од обима полазног трапеза, при чему једнакост обима важи само у случају када је полазни трапез једнакокрак (слика 8).



Слика 7



Слика 8



Слика 9

Нека је ω произвољна полигонска површ и нека је s хоризонтална права у односу на коју се врши симетризација фигуре ω. Вертикале које пролазе кроз темена полигонске површи ω разлажу ову површ на троуглове и трапезе који имају хоризонталне висине. Симетризацијом полигонске површи ω добија се фигура ω' која је једнака унији троуглова и трапеза добијених симетризацијом троуглова и трапеза поменутог разлагања. Није тешко закључити да је површина слике једнака површини оригинала и да обим слике није већи од обима оригинала, при чему једнакост обима важи само у случају када полигонска површ ω има хоризонталну осу симетрије.

Сада ћемо се позабавити проценом броја темена полигонске површи ω' добијене симетризацијом полигонске површи ω. Нека полигонска површ ω има n темена. Разматрајмо вертикале на којима се налазе та темена (слика 9). Издвајају се две крајње вертикале. Све заједничке тачке крајњих вертикала са полигонском површи ω леже на рубу од ω. Остале вертикале (зваћемо их унутрашње) пролазе кроз унутрашњу област полигонске површи ω. Постоје четири могућности односа вертикала и темена полигонске површи ω: вертикала може бити крајња или унутрашња и на њој може да лежи једно или два темена полигонске површи ω. Ако на крајњој вертикали лежи једно теме полигонске површи ω, онда на њој лежи једно теме полигонске површи ω' и оно се налази на правој s. Ако на крајњој вертикали леже два темена полигонске површи ω, онда на њој леже два темена полигонске површи ω' и она су симетрична у односу на праву s. На свакој унутрашњој вертикали леже два темена полигонске површи ω' и она су симетрична у односу на праву s. Из ових разматрања следи да број темена полигонске површи ω' која леже са једне стране праве s није већи од $n-2$. Тај број је мањи од $n-2$ за број вертикала које садрже пар темена полигонске површи ω и пролазе кроз њену унутрашњу област.

Едлерово решење проблема

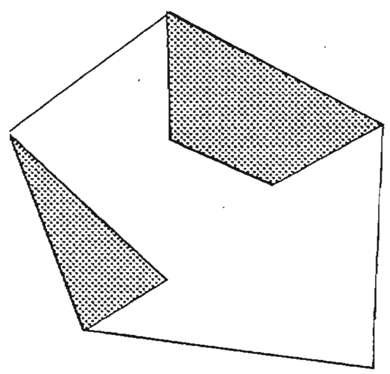
Пре него што пређемо на излагање Едлеровог доказа чињенице да је круг решење изопериметријског проблема формулишимо један задатак чије ће нам тврђење бити корисно у разматрањима која следе.

Задатак 4. Доказати да међу троугловима чија је једна страница једнака датој дужи а наспрамни угао једнак датом углу највећу површину има троугао чије су преостале две странице једнаке.

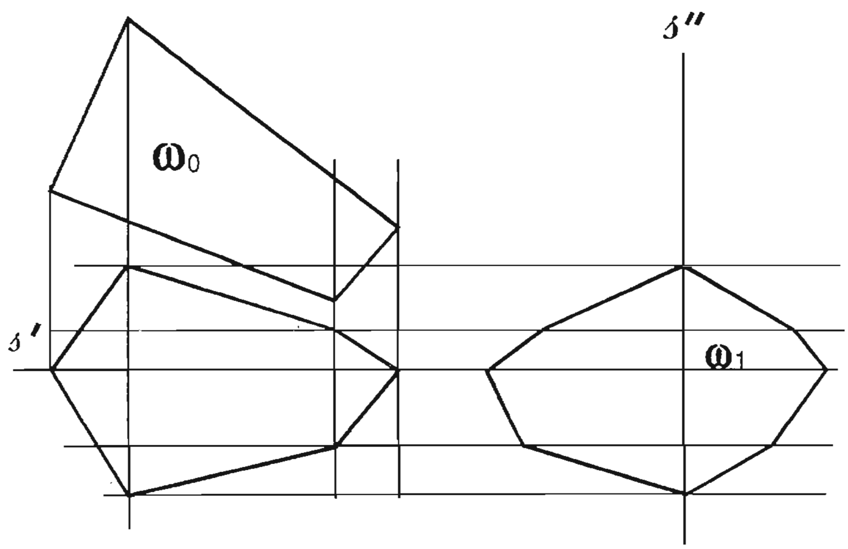
Најважнији и уједно најтежи део Едлеровог решења изопериметријског проблема садржан је у следећој леми.

Лема 1 *За сваку полигонску површ постоји правилна полигонска површ једнаког обима и не мање површине.*

Доказ. Нека је ω произвољна полигонска површ и нека је ω_0 њен конвексан омотач (слика 10). Као што је познато, ω_0 је полигонска површ чији обим није већи од обима полигонске површи ω а површина није мања од површине полигонске површи ω.



Слика 10

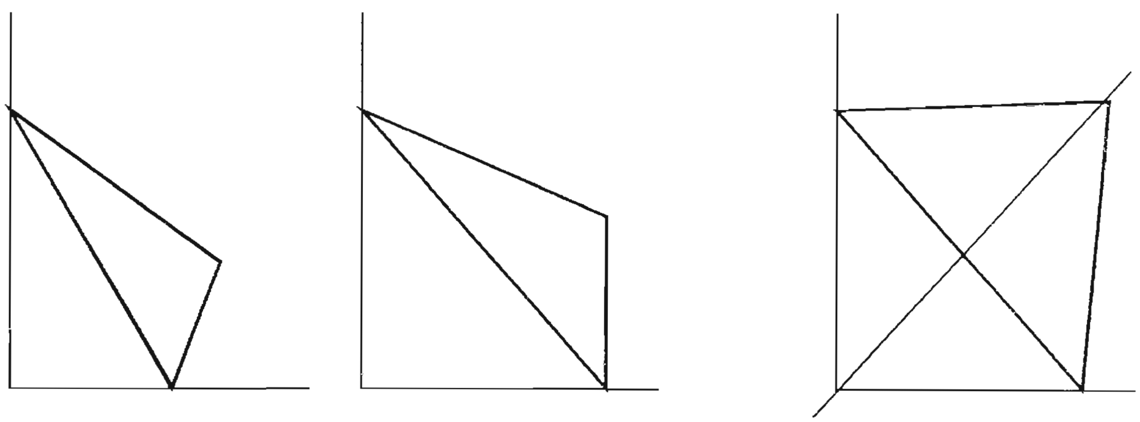


Слика 11

Изаберимо две произвољне међусобно нормалне праве и извршимо симетризацију полигонске површи ω_0 најпре у односу на једну од њих а потом и у односу на другу. Добићемо конвексну полигонску површ ω_1 чија је површина једнака површини полигонске површи ω_0 и чији обим није већи од обима полигонске површи ω_0. При том полигонска површ ω_1 има две осе симетрије које разлажу раван на четири једнака угла. Унутар сваког од тих углова налази се не више од $n-3$ темена полигонске површи ω_1 (слика 11.).

Уколико сва темена полигонске површи ω_1 не леже на његове две осе симетрије вршимо трансформацију чији опис следи. Најпре се, унутар сваког од углова на које осе симетрије разлажу раван, део руба полигонске површи ω_1 који лежи у том углу помери у положај у коме ће његови крајеви и даље бити на крацима угла али ће њихова растојања од пресечне тачке оса симетрије бити једнака. Потом се делови угаоних површи ограничени тако помереним деловима руба полигонске површи симетризују у односу на осе симетрије одговарајућих углова (слика 12). Унија тако добијених фигура је конвексна полигонска површ ω_2 која има четири осе симетрије које разлажу раван на осам једнаких углова. Унутар сваког од њих лежи не више од $n-4$ темена полигонске површи ω_2. На основу својстава симетризације и тврђења претходног задатка закључујемо да површина полигонске површи ω_2 није мања од површине полигонске површи ω_1, а обим полигонске површи ω_2 није већи од обима полигонске површи ω_1.

Уколико сва темена полигонске површи ω_2 не леже на његове четири осе симетрије трансформацијом која је слична горе описаној добијамо конвексну полигонску површ ω_3 која има осам оса симетрије које разлажу раван на шеснаест једнаких углова. Унутар сваког од њих лежи не више од $n-5$ темена полигонске површи ω_3. Површина полигонске површи ω_3 није мања од површине полигонске површи ω_2, а обим полигонске површи ω_3 није већи од обима полигонске површи ω_2.



Слика 12

Ако довољан број пута ($k \leq n-3$) поновимо описану трансформацију доћи ћемо до конвексне полигонске површи ω_{k+1} која има 2^{k+2} осе симетрије које садрже сва темена полигонске површи ω_{k+1} и разлажу раван на 2^{k+3} једнака угла. При том површина полигонске површи ω_{k+1} није мања од површине полигонске површи ω_k, а обим полигонске површи ω_{k+1} није већи од обима полигонске површи ω_k.

Унутар сваког од углова на које осе симетрије полигонске површи ω_{k+1} разлажу раван померимо део руба полигонске површи ω_{k+1} који лежи у том углу (то је дуж) у положај у коме ће његови крајеви и даље бити на крацима угла али ће њихова растојања од пресечне тачке оса симетрије бити једнака. Тако добијамо правилну полигонску површ ω' која има исти обим и не мању површину од одговарајућих величина полигонске површи ω_{k+1}.

Правилна полигонска површ ω' има површину не мању од површине полигонске површи ω и обим не већи од обима полигонске површи ω. Нека је ω'' правилна полигонска површ која је слична са ω' и има обим једнак обиму полигонске површи ω. Како обим полигонске површи ω'' није мањи од обима полигонске површи ω', коефицијент њихове сличности није мањи од 1. Следи да површина полигонске површи ω'' није мања од површине полигонске површи ω', а самим тим није мања ни од површине полигонске површи ω.

Пре него што пређемо на главну теорему у овом тексту докажимо још једно помоћно тврђење.

Лема 2 *Ако правилан полигон и круг имају једнаке обиме, површина полигона мања је од површине круга.*

Доказ. Нека правилан полигон p и круг k имају једнаке обиме. Даље нека је k' круг уписан у полигон p. Обим круга k' мањи је од обима полигона p, а самим тим и од обима круга k. Следи да је полупречник r' круга k' мањи од полупречника r круга k. Ако заједничку величину обима полигона p и круга k означимо са P, њихове површине биће једнаке $Pr'/2$ и $Pr/2$. Следи да је површина области ограничене полигоном p мања од површине области ограничене кругом k.

Пошто смо припремили апарат можемо прећи на теорему која у себи садржи решење изопериметријског проблема.

ТЕОРЕМА 2 *Међу простим затвореним равним кривим дате дужине, круг обухвата област највеће површине.*

Доказ. Нека је k проста затворена равна крива која није круг. Према Теореми 1 постоји проста затворена равна крива k_1 која има исту дужину као и крива k и која ограничава област веће површине од површине области која је обухваћена кривом k. За сваку просту затворену равну криву постоји полигон чија темена леже на тој кривој, такав да се његова површина разликује од површине области коју обухвата та крива за произвољно мали број. Зато постоји полигон p_1 чија темена леже на кривој k_1 и чија је површина већа од површине области коју обухвата крива k. Обим полигона p_1 није већи од обима криве k_1 а самим тим и од обима криве k. Нека је p_2 полигон који је сличан полигону p_1 и чији је обим једнак обиму криве k. Како обим полигона p_2 није мањи од обима полигона p_1, коефицијент њихове сличности није мањи од 1. Зато површина полигона p_2 није мања од површине полигона p_1 па тим пре није мања од површине области коју обухвата крива k. Нека је p_3 правилан полигон чија је обим једнак обиму полигона p_2 а чија површина није мања од површине полигона p_2 (егзистенцију таквог полигона потврђује Лема 1). Нека је k' круг чији је обим једнак обиму полигона p_3. Према Леми 2, површина круга k' већа је од површине полигона p_3, па круг k' има обим једнак обиму криве k, и површину већу од површине области обухваћене кривом k.

Закључни коментари

Решавање екстремалних проблема често се изводи у две фазе. У првој фази решавања локализује се ужи скуп објеката, најчешће једночлани скуп, међу којима се налази решење проблема, уколико оно уопште постоји. Тај део посла се најчешће обавља помоћу неког неопходног услова за екстремум. У нашем случају функцију ове фазе обавила је Штајнерова теорема. Друга фаза решавања проблема састоји се у доказивању да објекат који је локализован у првој фази решавања заиста представља решење проблема. Тај доказ се често изводи помоћу неког довољног услова за екстремум. У нашем случају тај део посла обавила је Едлерова теорема.

Постоји још једна шема по којој се решавају екстремални проблеми. У њој се решавање проблема такође обавља у две фазе. Једна од тих двеју фаза идентична је првој фази из претходне шеме: у њој се локализује објекат који би могао да буде решење проблема. У другој фази се доказује егзистенција решења, тј. егзистенција објекта који је решење проблема. У првој половини овог века немачки математичар Блашке (Blaschke) је развио апарат помоћу којег се може доказати егзистенција решења неких екстремалних проблема који се односе на конвексне скупове. Помоћу тог апарата може се доказати да међу конвексним фигурама задатог обима постоји фигура максималне површине. Одатле се лако добија егзистенција решења изопериметријског проблема, ако се има у виду да конвексан омотач неке фигуре има већу или једнаку површину и мањи или једнак обим од одговарајућих величина полазне фигуре.

Овај текст завршавамо формулацијом неколико задатака који су у вези са разматраном проблематиком.

Задатак 5. Међу равним фигурама дате површине одредити ону која има најмањи обим.

Задатак 6. Одредити криву дате дужине чији се крајеви поклапају са крајевима дате дужи и која заједно са том дужи ограничава област највеће површине.

Задатак 7. Одредити криву дате дужине која од дате полуравни одсеца област највеће површине (Дидонин проблем).

Задатак 8. Одредити најкраћу криву која дати једнакостранични троугао разлаже на два дела једнаких површина.

Задатак 9. Одредити криву дате дужине која од датог угла одсеца део највеће површине.

НАЛАЖЕЊЕ ПОДСКУПОВА БЕКТРЕКОМ

др Ђура Паунић, Природно-математички факултет, Нови Сад

Један од често коришћених комбинаторних објеката су комбинације без понављања. Опишимо један поступак за генерисање свих комбинација k-те класе од n елемената тако да га је лако испрограмирати.

Ако се са S означи скуп од n елемената од кога треба да направимо комбинације k-те класе, тада су комбинације без понављања од n елемената k-те класе у ствари онај подскуп T партитивног скупа $\mathcal{P}(S)$, који се састоји од свих k-елементних подскупова скупа S. Ради једноставности претпоставимо да је скуп $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ и нека је једна комбинација подскуп $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Ову комбинацију ћемо писати једноставно $a_1 a_2 \ldots a_k$ и претпоставићемо да је $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$, а овако уређене елементе a_i називати компоненте. Ако су $a_1 a_2 \ldots a_k$ и $b_1 b_2 \ldots b_k$ две комбинације, тада ћемо рећи да је $a_1 a_2 \ldots a_k < b_1 b_2 \ldots b_k$ ако и само ако је $a_1 < b_1$ или је за неко $j, 1 \leq j \leq k$, задовољено $a_i = b_i$ за $i = 1, \ldots, j-1$ и $a_j < b_j$. Овакво уређење се назива лексикографско.

Ако се комбинације лексикографски уреде тада се на пример за $n = 6$ и $k = 3$ добија следећи уређени низ комбинација:

$$123 < 124 < 125 < 126 < 134 < 135 < 136 < 145 < 146 < 156 <$$

$$< 234 < 235 < 236 < 245 < 246 < 256 < 345 < 346 < 356 < 456.$$

При оваквом уређењу свака следећа комбинација се добија тако што се повећава последња компонента која може да се повећа. Очигледно је да се последња компоненета може повећавати до n, претпоследња до $n-1$ итд. прва до $n-k+1$.

Дакле, поступак генерисања лексикографског низа комбинација је следећи:

За сваку компоненту узимамо најпре најмањи могући елемент, тако да је најмања, почетна комбинација $12\ldots k$, а следеће комбинације се добијају тако да се последња компонента $a_k = k$ повећава један по један до n. Затим се $a_{k-1} = k-1$ повећа за један. Добија се $a_{k-1} = k$, а последња компонента стави да је $a_k = k+1$, за један већа од a_{k-1}, јер је свака комбинација растући низ бројева. Затим се опет повећава последња компонента док је то могуће итд.

Генерисање комбинација овим поступком могуће је испрограмирати и итеративно и рекурзивно. Напишимо итеративну процедуру у Pascalu која реализује овај поступак и коју је лако могуће превести у било који програмски језик. Претпоставимо да су компоненте елементи низа тј. да је декларисано:

```
const
  maxn = 20;
type
  niz = array[0 .. maxn] of integer;
```

При том је узето да низ почиње од 0 да би се у неким случајевима избегла провера дефинисаности индекса низа при његовом смањивању.

Процедура има три параметра: n, величину скупа, $1 \leq n \leq maxn$, k величину подскупа, $1 \leq k \leq n$, а логичка променљива ok служи за проверу да ли су параметри n и k у дозвољеном опсегу. Коначно се добија процедура.

```
procedure iterkombinacije(n, k : integer;
                          var ok : boolean);
var
  a : niz;
  i, j : integer;
begin
  if (1 <= n) and (k <= maxn) and (1 <= k) and (k <= n) then
    begin
      ok := true;
      i := 1;
      a[1] := 0;
      while i > 0 do
        begin
          while a[i] < n - k + i do
            begin
              a[i] := a[i] + 1;
              if i < k then
                begin
                  a[i+1] := a[i];
                  i := i + 1
                end
              else
                begin
                  for j := 1 to k do
                    write(a[j]:4);
                  writeln
                end
            end;
          i := i - 1
        end
    end
  else
    ok := false
end;    (*  iterkombinacije  *)
```

Рекурзиван поступак је сличан. При том треба нагласити да се рекурзивне процедуре најједноставније реализују тако да се у процедури иницијализују и провере почетне вредности променљивих и по потреби израчуна неки специјални случај који се не уклапа у општи поступак, а направи се унутрашња рекурзивна процедура или функција у којој се изводи само израчунавање. У овом случају је унутрашња процедура процедура `nadji`.

```
procedure rekkombinacije(n, k : integer
                         var ok : integer);
var
  a : niz;
```

```
  i : integer;

  procedure nadji(i : integer);

  var
    j : integer;
  begin
    if i <= k then
      begin
        a[i] := a[i-1];
        while a[i] < n - k + i do
          begin
            a[i] := a[i] + 1;
            nadji(i+1)
          end
      end
    else
      begin
        for j := 1 to k do
          write(a[j]:4);
        writeln
      end
  end;  (*  nadji  *)

begin
  if (1 <= n) and (n <= maxn) and (1 <= k) and (k <= n) then
    begin
      ok := true;
      a[0] := 0;
      nadji(1)
    end
  else
    ok := false;
end;   (*  rekkombinacije  *)
```

Овим поступком је могуће генерисати и комбинације са понављањем, јер се комбинације са понављањем лако добијају од комбинација без понављања. Свака комбинација са понаваљањем од n елемената k-те класе се прави од комбинације без понављања од $n+k-1$ елемента тако што се од комбинације без понављања одузму редом бројеви од 0 до $k-1$. Дакле за генерисање комбинација са понављањем може да се користи поступак као у процедури за комбинације без понаљања, али од $n+k-1$ елемента k-те класе, а при испису комбинације уместо `a[j]` штампати `a[j] - j + 1` за $j = 0, 1, \ldots, k-1$. Наиме лако се доказује да се оваквим одузимањем различитим комбинацијама без понављања од $n+k-1$-ног елемента k-те класе придружују различите комбинације са понављањем од n елемената k-те класе и да се свака комбинација са понављањем добија као слика једне комбинације без понављања тј. да је описана конструкција бијекција.

Аналогно као што се генеришу комбинације, могу да се генеришу и варијације са понављањем. Ако је $\{1, 2, \ldots, n\}$ скуп над којим се генеришу варијације са понављањем, тада је n горња граница за сваку компоненту, а почетна варијација је $11\ldots1$. Следеће варијације се добијају, као и код комбинација, повећавањем последње компоненте до n, а затим се повећа претпоследња компонента за 1, а последња се стави да је 1 и настави се са повећававањем последње компоненте за по 1. У j-том кораку се повећава за један прва компонента гледано са десне стране, која може да се повећа, а све компоненте десно од повећане компоненте се стављају на 1.

Интересантно је да се варијације са понављањем доста често јављају у програмирању. Наиме генерисање свих варијација са понављањем k-те класе је сличан проблему генерисању свих индекса k петљи које се налазе једна у другој, тј. за задат променљив број k треба написати програмски фрагмент следећег типа

```
for i1 := dgr[1] to ggr[1] do
  for i2 := dgr[2] to ggr[2] do
    . . . . . . . . . . . . .

      for ik := dgr[k] to ggr[k] do
        obrada(k, i1, i2, ..., ik);
```

у коме се појављује k петљи. Решимо овај проблем када је k произвољан број из неког интервала, а индекси су елементи низа `indeks` и мењају се у интервалима од доње до горње границе које су задате у низовима `dgr` и `ggr`.

Наведимо итеративну верзију процедуре која генерише све индексе за k петљи, а за илустрацију узмимо да процедура `obrada` само штампа вредности индекса:

```
procedure obrada(var k : integer;
                 var indeks : niz);
var
  j : integer;
begin
  for j := 1 to k do
    write(indeks[j]:4);
  writeln
end; (* obrada *)

procedure indeksit(k : integer;
                   var dgr, ggr, indeks : niz);
var
  i : integer;
begin
  i := 1;
  indeks[1] := dgr[1] - 1;
  while i > 0 do
    begin
      while indeks[i] < ggr[i] do
        begin
```

```
        indeks[i] := indeks[i] + 1;
        if i < k then
          begin
            i := i + 1;
            indeks[i] := dgr[i] - 1
          end
        else
          obrada(k, indeks)
      end;
    i := i - 1
  end
end;   (*  indeksit  *)
```

Сада лако може да се напише процедура која генерише све варијације са понављањем од n елемената k-те класе, што се оставља за вежбу.

Сви ови примери су специјални случајеви следећег општег проблема:

Назовимо решење n-торку $(a_1, a_2, \ldots)$, коначне, али неодређене дужине, при чему компоненте a_i припадују подскуповима T_i коначних скупова S_i, $a_i \in T_i \subset S_i$, који за сваку компоненту могу бити различити. У скупу S, унији коначних Декартових производа скупова S_i,

$$S = S_1 \bigcup S_1 \times S_2 \bigcup S_1 \times S_2 \times S_3 \bigcup \cdots = \bigcup_{i=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{i} S_k,$$

треба наћи подскуп T, скуп решења – бар једног или свих, такав да за сваки елемент скупа T важи да свака компонента зависи само од претходних компонената.

За решавање овог проблема се користи општи алгоритам који се назива бектрек или претраживање са враћањем (енг. backtrack), чији су неки специјални случајеви коришћени у претходним процедурама. Бектрек се састоји у следећем:

На основу постојећих ограничења израчуна се скуп T_1, допустивих елемената за прву компоненту, $T_1 \subseteq S_1$. У скупу T_1 се бира елемент a_1 и изабрани елемент a_1 се избацује из T_1, T_1 постаје $T_1 \setminus \{a_1\}$, и формира се делимично решење (a_1). Затим се проверава да ли је добијени низ (a_1) решење. Ако јесте тада је готово – решење се штампа, а ако није тада се на основу делимичног решења (a_1) из скупа свих могућих елемената за другу компоненту S_2 одређује подскуп T_2, скуп допустивих елемената за другу компоненту. Из скупа T_2 се бира елемент a_2, a_2 се избацује из скупа T_2, T_2 постаје $T_2 \setminus \{a_2\}$, и образује се делимично решење (a_1, a_2). Ако делимично решење (a_1, a_2) није решење прелази се на одређивање треће компоненте решења итд. На основу делимичног решења $(a_1, a_2, \ldots, a_i)$ у скупу S_{i+1} одређује се подскуп допустивих елемената T_{i+1} за $i+1$-ву компоненту делимичног решења. Из скупа T_{i+1} се бира $i+1$-компонента, a_{i+1}, и проверава се да ли је $(a_1, \ldots, a_i, a_{i+1})$ решење. Уколико је нађено решење тада се решење штампа. Поступак се наставља све док скуп T_{i+1} не постане празан, или се нађе неко решење. Ако у неком кораку скуп T_{i+1} постане празан тада се враћа на i-ту компоненту, одбацује се елемент a_i из делимичног решења и за i-ту компоненту се бира неки други елемент из скупа T_i.

Овај алгоритам је описан следећом псеудо процедуром у којој се користе процедуре: `dopustiv`, која за дати скуп S_i налази скуп допустивих елемената T_i за i-ту компоненту, `print` која штампа решење, `izaberi` која из допустивог скупа T_i бира један елемент a_i, `izbaci` која из скупа T_i избацује елемент a_i и логичких функција `prazan`, којом се проверава да ли је скуп празан и `proveriresenje`, којом се проверава да ли је низ елемената $(a_1, \ldots, a_i)$ решење. Претпоставићемо да је низ елемената a дат као тип `niz`, при чему тај тип може да буде стваран паскалски низ довољне дужине за решавање проблема или листа. Елементе низа a означаваћемо са `a[i]` иако се за тип низа не мора подразумевати `array`.

```
procedure backtrack;

var
  i : integer;
begin
  i := 1;
  dopustiv(T[1], S[1]); (*  nalazi podskup T1 od S1  *)
  while  i > 0  do
    begin
      while not prazan(T[i]) do
        begin
          izaberi(a[i], T[i]);
          izbaci(a[i], T[i]);
          if  proveriresenje(a) then
            print(a);
          i := i + 1;
          dopustiv(T[i], S[i])
        end;
      i := i - 1
    end
end;  (*  backtrack  *)
```

Бектрек је по својој природи рекурзиван поступак тако да се врло лако може формулисати и рекурзивна процедура, што се оставља за вежбу.

За бектрек алгоритам су врло честе следеће две варијације које се не искључују.

Прва модификација се састоји у томе да се уместо целих скупова допустивих елемената T_i користе најмањи елементи тих скупова. Наиме сваки коначан скуп може да буде линеарно уређен, а функција избора елемента a_i, скупа T_i, `izaberi(a[i],T[i])`, може да буде избор минималног елемента скупа T_i, $a_i = \min(T_i)$. У овом случају је могуће реализовати бектрек тако да се израчунава само најмањи елемент a_i скупа T_i. При том се најчешће за скупове S_i користе подскупови скупа целих бројева, јер је тада функцију избора лако испрограмирати. Дакле уместо процедура `dopustiv(T[i],S[i])` и `izaberi(a[i],T[i])` потребна је функција `nadjimin` којом се налази минималан допустив елемент S_i, па се тада претходне две наредбе реализују са `a[i]:= nadjimin(S[i])`. Када је елемент a_i изабран, тада се одређује следећи најмањи елемент b_i,

$$b_i = \min(T_i \setminus \{a_i\}) = \min(x \in S_i \mid x > a_i).$$

Често се користи модификација ове идеје тако да се користи функција

```
b[i] := nadjisledeci(a[i],S[i]),
```

која налази минималан допустив елемент скупа S_i који је већи од елемента a_i. Тада се минимални елемент добија када се за a_i узме нека погодна вредност (најчешће број мањи од минимума скупа $T_i \subseteq S_i$).

У случају када се бирају елементи тада за сваки скуп T_i постоји природно ограничење одгоре тј. скуп T_i постаје празан уколико следећи елемент, b_i, треба да буде већи од неке природне границе, `granica[i]`, за сваки скуп T_i. Тиме се низ скупова замењује низом елемената, за које се најчешће користе цели бројеви, што у неким програмским језицима значајно поједностављује реализацију програма.

```
procedure ebacktrack;

var
  i : integer;
begin
  i := 1;
  a[1] := nadjisledeci(- maxint, S[1]);
  while  i > 0  do
    begin
      while a[i] <= granica[i] do
        begin
          resenje[i] := a[i];
          a[i] := nadjisledeci(a[i],S[i]);
          if  proveriresenje(resenje) then
            print(resenje);
          i := i + 1;
          a[i] := nadjisledeci( - maxint,S[i])
        end;
      i := i - 1
    end
end;  (*  ebacktrack  *)
```

Други чест случај је аутоматска провера да ли је конструисани низ решење. У великом броју проблема се зна да је решење низ од тачно n допустивих елемената, $(a_1, \ldots, a_n)$, где је n фиксан број. Тада отпада процедура за проверу решења, јер се са $i = n$ једноставно проверава да ли је решење нађено. У овом случају бектрек процедура се модификује на следећи облик:

```
procedure nbacktrack;

var
  i : integer;
```

```
  begin
    i := 1;
    dopustiv(T[1],S[1]);
    while  i > 0  do
      begin
        while not prazan(T[i]) do
          begin
            izaberi(a[i],T[i]);
            izbaci(a[i],T[i]);
            if  i < n then
              begin
                i := i + 1;
                dopustiv(T[i],S[i])
              end
            else
              print(a[1],...,a[n])
          end;
        i := i - 1
      end
  end;  (*  nbacktrack  *)
```

Бектрек може успешно да се примени за решавање проблема 8 краљица на шаховској табли. Проблем се састоји у томе да се пронађе бар један распоред или сви распореди 8 краљица на шаховској табли, тако да нема две краљице које се узајамно нападају, тј. ни један пар краљица није у истој врсти, истој колони и на истој дијагонали.

Процедура **ndama** налази и штампа све могуће распореде дама за таблу $n \times n$ где је $3 < n < 20$. Ова процедура је добијена потребним модификацијама процедуре **ebektrek**, коришћена је и аутоматска провера решења из процедуре **nbektrek**. Унутрашња процедура nadjipolje налази прво слободно поље у колони **kolona** почев од поља mesto и оно се добија у промењивој mesto. Процедура nadjipolje одговара функцији nadjisledeci у процедури ebektrek. Неко поље није слободно ако већ постоји краљица на претходној вертикали i или у истој врсти, што се проверава са resenje[i] = mesto или на истој дијагонали што се проверава са abs(resenje[i] - mesto) = abs(i - **kolona**). Граница величине скупа је увек иста n.

```
procedure ndama(var resenje : niz;
                n : integer);
var
  br, i, kolona : integer;
  t : niz;

  procedure nadjipolje(var n, kolona, mesto : integer;
                       var resenje : niz);
  var
    slobodno : boolean;
    i : integer;
```

```
  begin
    if mesto <= n then
      repeat
        slobodno := true;
        i := 1;
        while (i < kolona) and slobodno do
          if (resenje[i] = mesto) or
             (abs(resenje[i] - mesto) = abs(i - kolona)) then
            slobodno := false
          else
            i := i + 1;
        if (mesto <= n) and not slobodno then
          mesto := mesto + 1
      until slobodno or (mesto > n)
  end;  (*  nadjipolje  *)
begin
  if (3 < n) and (n < 20) then
    begin
      br := 0;
      t[1] := 1;
      kolona := 1;
      while kolona > 0 do
        begin
          while t[kolona] <= n do
            begin
              resenje[kolona] := t[kolona];
              t[kolona] := t[kolona] + 1;
              nadjipolje(n, kolona, t[kolona], resenje);
              if kolona < n then
                begin
                  kolona := kolona + 1;
                  t[kolona] := 1;
                  nadjipolje(n, kolona, t[kolona], resenje)
                end
              else
                begin
                  br := br + 1;
                  write('br ',br:3,'  ');
                  for i := 1 to n do
                    write(resenje[i]:3);
                  writeln
                end
            end;
          kolona := kolona - 1
        end
    end
  else
    writeln('broj n mora da bude u intervalu (3 < n < ',maxn)
end;  (*  ndama  *)
```

ПРОСТИ БРОЈЕВИ

др Ратко Тошић, Природно-математички факултет, Нови Сад

I know numbers are beautiful. If you don't see why, someone can't tell you. If they aren't beautiful, nothing is.

Paul Erdös

Увод

У основи математике лежи аритметика – теорија природних бројева. У теорији бројева има много дубоких и лепих теорема, а такође и мноштво тешких и до сада нерешених проблема који стотинама година одолевају настојањима највећих математичара. Многи делови савремене математике настали су као резултат решавања и уопштавања проблема из теорије бројева. Карл Фридрих Гаус (1777–1855), који је учинио многа важна открића у математици, рекао је: "Математика је краљица наука, теорија бројева је краљица математике."

Бројеви су фасцинирали људе од најранијих почетака цивилизације. Питагора је открио да музичка хармонија зависи од односа целих бројева и закључио је да је све у природи број. Према Плутарху, Ксенократ је израчунао да је број слогова који се могу формирати од слова грчке азбуке једнак 1002000000000. То је први забележен покушај решавања неког тешког комбинаторног проблема који се односи на бројеве. У једном проблему који је поставио Архимед (проблем о биковима) као решење појављује се број који се у децималној нотацији (која није била позната Архимеду) записује помоћу 206545 цифара. Да би се наштампао тај број потребна је читава књижица од 50 страница. Леополд Кронекер (1823–1891) рекао је да је бог створио целе бројеве а све остало је дело човека. Управо на примеру теорије бројева најбоље се потврђује мисао да добра математика никад не застарева. Док Аристотелова физика са данашње тачке гледишта изгледа примитивна и рудиментарна, Архимедова и Еуклидова математика још увек блиста пуним сјајем.

Ниједна грана математике није толико омиљена код аматера као теорија бројева. У исто време, ниједна грана математике није постављала толико замки и проузроковала толико неуспеха и код највећих математичара. Од почетка рачунарске ере, програмери тестирају своје способности, квалитет својих програма и моћ рачунара решавајући проблеме из теорије бројева и откривајући разне куриозитете у тој области.

Заинтересовани читалац може да се позабави решавањем задатака датих на крају овог чланка. Решења задатака објавићемо у неком од наредних бројева часописа.

Неки основни појмови

У скупу целих бројева, један од основних појмова је *дељивост.*

Нека су a и b цели бројеви. Ако постоји цео број m такав да је $b = ma$, онда кажемо да је a *делитељ* или *фактор* броја b а да је b *садржалац* или *умножак* броја a. То записујемо са $a|b$. На пример, $5|15$, $7|28$, $5|0$.

Ако је $a|b$, очигледно је и $a|(-b)$, $(-a)|b$ и $(-a)|(-b)$. Зато се, при разматрању дељивости, најчешће ограничавамо на ненегативне целе бројеве, при чему се једино број 0 не појављује као делитељ.

Кажемо да је a *прави делитељ* од b, ако је $a|b$ и $a \neq b$.

Позитиван цео број p већи од 1 је *прост* ако су му једини позитивни делитељи бројеви 1 и p. За позитиван цео број који није прост, кажемо да је *сложен.* Сваки сложен број n, дакле, има делитељ различит од 1 и n.

Нека су a и b ненегативни цели бројеви од којих је бар један већи од нуле. За број k кажемо да је *заједнички делитељ* бројева a и b ако је $k|a$ и $k|b$. Највећи позитиван цео број који је делитељ и од a и од b, назива се *највећи заједнички делитељ* бројева a и b. Означавамо га са $NZD(a,b)$.

На пример, $NZD(4,20) = 4$, $NZD(0,5) = 5$, $NZD(30,80) = 10$, $NZD(8,15) = 1$.

Постоји врло једноставан алгоритам за одређивање највећег заједничког делитеља два броја. Алгоритам потиче од старогрчког математичара Еуклида, који је живео око 300. године пре нове ере. По њему је и добио назив *Еуклидов алгоритам.* О томе алгоритму детаљније ће бити речи другом приликом.

За два цела броја a и b, при чему је бар један различит од нуле, рећи ћемо да су *узајамно прости* ако је $NZD(a,b) = 1$. На пример, бројеви 14 и 25 су узајамно прости, као и бројеви 8 и 15.

Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ненегативни цели бројеви, при чему је бар један различит од нуле. За највећи позитиван број d, који је делитељ свих тих бројева, кажемо да је њихов *највећи заједнички делитељ.* Означавамо га са $NZD(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_n$ цели бројеви, при чему је бар један различит од нуле. Ако је $NZD(a_i, a_j) = 1$, за $1 \leq i < j \leq n$, кажемо да су бројеви $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *по паровима узајамно прости.* Ако је $NZD(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$, онда су бројеви $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *узајамно прости.* На пример, бројеви 6, 10 и 15 су узајамно прости али нису по паровима узајамно прости. То важи и за бројеве 6, 15 и 35. Бројеви 18, 25 и 77 су по паровима узајамно прости.

За цео број k кажемо да је *заједнички садржалац* целих бројева a и b ако је $a|k$ и $b|k$. Најмањи позитиван цео број m који је заједнички садржалац бројева a и b је *најмањи заједнички садржалац* тих бројева. Обележавамо га са $NZS(a,b)$. Јасно је да је

$$NZS(a,b) = NZS(-a,b) = NZS(a,-b) = NZS(-a,b).$$

Најмањи заједнички садржалац више бројева дефинише се као најмањи позитиван цео број који је садржалац сваког од њих.

Једно од најважнијих тврђења у теорији бројева је *основна теорема аритметике* која тврди да се сваки цео број већи од 1 може представити као производ простих бројева и то на један једини начин до на поредак фактора. Другим речима, сваки цео број већи од 1 може се на јединствен начин представити у облику

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k},$$

где су p_i прости бројеви и $\alpha_i > 0$, за $i = 1, 2, \ldots, k$; $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$. За такво представљање кажемо да је *канонски облик* броја n. Из практичних разлога, међутим, ми узимамо да је $\alpha_i \geq 0$, јер онда било који прост број може формално да фигурише у канонском представљању неког броја.

Ератостеново сито

Као што смо видели, сви природни бројеви се могу разврстати у три класе: просте, сложене и број 1, који није ни прост ни сложен. Прости бројеви се могу окарактерисати и као бројеви који имају тачно два делитеља.

Проблем добијања потпуне листе простих бројева мањих од датог броја n, заокупљао је пажњу математичара вековима. Један поступак за утврђивање простоте датог броја и налажење свих простих бројева мањих од датог броја n, дао је старогрчки математичар Ератостен. Пре него што опишемо његов алгоритам, доказаћемо следеће тврђење.

ТЕОРЕМА 3 *Позитиван цео број n је сложен ако и само ако има прост фактор p, такав да је $p \leq \sqrt{n}$.*

ДОКАЗ Ако n има прост фактор $p \leq \sqrt{n}$, онда је n, очигледно, сложен број.

Обрнуто, ако је p најмањи прост фактор сложеног броја n, тада је $n = pm$, за неки цео број m и при томе је $m \geq p$. Следи да је $p \leq \sqrt{n}$. □

Горње тврђење може се формулисати и на следећи начин:

Позитиван цео број $n > 1$ је прост ако и само ако не садржи прост фактор $p \leq \sqrt{n}$.

На овоме критеријуму се и заснива Ератостенов алгоритам, познат и под називом *Ератостеново сито*, по Ератостену из Кирене, који га је први применио у 3. веку пре нове ере.

Ератостенов алгоритам, мало модификован, састоји се у следећем:

1. *Исписати у низ све природне бројеве од 2 до n.*

2. *Уочити у низу први број који није ни подвучен ни прецртан и подвући га а затим прецтати све његове умношке у низу.*

3. *Ако су сви бројеви низа означени (подвучени или прецртани), поступак је завршен; у противном, применити корак 2.*

По завршетку рада, добијамо све просте бројеве не веће од n. То су подвучени бројеви.

Ако нам је циљ само да утврдимо да ли је број n прост или сложен, горњи алгоритам треба мало модификовати. Теорема 1 нам у том случају казује да се процес завршава или кад је прецртан број n (у ком случају је n сложен број), или кад за први следећи број p који треба подвући важи $p^2 > n$ (у ком случају је n прост број).

Ератостен из Кирене (око 276 – 194. године пре нове ере) школовао се у Александрији и Атини. Руководио је александријском библиотеком. Био је у врло пријатељским односима са Архимедом. Поред математике, бавио се астрономијом, филологијом, филозофијом, географијом, музиком. Поставио је основе математичке географије; први је нашао метод за мерење дужине лука меридијана. Пронашао је прибор за конструктивно решење проблема удвостручења коцке (мезолабиј). Ератостеново сито описано је у 13. глави прве књиге "Увод у аритметику" Никомаха из Герасе (1. век наше ере). Поступак се разликује од горе изложеног само у томе што се одмах полази од низа непарних бројева.

Бесконачност скупа простих бројева

Поменимо још и безуспешне покушаје многих математичара да се нађе општа формула за просте бројеве, тј. функција $f(n)$ чије би вредности, за све целобројне вредности од n, биле прости бројеви. На пример, функција $f(n) = n^2 - 79n + 1601$ даје просте бројеве за $0 \leq n \leq 79$, али "отказује" за $n = 80$, јер је $f(80) = 80^2 - 79 \cdot 80 + 1601 = 1681 = 41^2$ сложен број. Читалац који воли да ради са рачунаром, лако ће проверити ово тврђење.

У вези са "ловом" на формуле које дају просте бројеве, свакако је интересантно поменути Фермаову погрешну хипотезу. Он је изучавао бројеве облика $f_n = 2^{2^n} + 1$, где је n произвољан цео ненегативан број. Такви бројеви су по њему добили име *Фермаови бројеви*. За првих 5 вредности од n, он је добио редом бројеве $f_0 = 3$, $f_1 = 5$, $f_2 = 17$, $f_3 = 257$, $f_4 = 65537$ и провером утврдио да су сви они прости. Ферма је изрекао хипотезу да је и за сваки природан број $n \geq 5$, број f_n прост. Међутим, Ојлер је показао да је број f_5 производ два проста броја:

$$f_5 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417.$$

Са данашње тачке гледишта изгледа чудно да за математичаре у 17. и 18. веку није било лако да утврде да ли је неки десетоцифрени број прост. Лако је поделити 4294967297 са 641 или било којим другим целим бројем; међутим, како је $65536^2 < 4294967297 < 65537^2$, следи да би за проверу простоте броја f_5, по критеријуму из Теореме 1, било потребно испитати дељивост броја f_5 са свим простим бројевима мањим од 65537. У време кад нису постојале довољно ефикасне рачунске машине, па чак ни довољно велике таблице простих бројева, то је био прилично мукотрпан посао. Треба рећи да се и ми данас налазимо пред сличним тешкоћама кад треба да тестирамо на простоту неки 200–цифрени број, или кад треба да извршимо његову факторизацију, без обзира на чињеницу да располажемо неупоредиво моћнијим средствима за рачунање. Брза факторизација великих бројева нема само теоријски значај него налази и практичну примену, на пример, у криптоанализи. Што се самих Фермаових бројева тиче, без обзира да ли су прости или сложени, показало се да имају низ врло интересантних својстава. Следећа теорема односи се на једно такво својство.

ТЕОРЕМА 4 *Свака два различита Фермаова броја су узајамно прости.*

ДОКАЗ У доказу ћемо користити специјалан случај ($a = 2$, $b = 1$) идентитета познатог из средњошколске математике:

$$a^n - b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots - b^{n-1}),$$

који важи за сваки позитиван паран број n.

Нека су f_n и f_{n+k}, $k > 0$, два различита Фермаова броја. Претпоставимо да је m цео позитиван број, такав да је $m|f_n$ и $m|f_{n+k}$. Нека је $x = 2^{2^n}$. Тада је

$$\frac{f_{n+k} - 2}{f_n} = \frac{x^{2^k} - 1}{x + 1} = x^{2^k-1} - x^{2^k-2} + \cdots - 1,$$

па је $f_n|(f_{n+k} - 2)$. Следи да је $m|(f_{n+k} - 2)$. Како је и $m|f_{n+k}$, то је $m|2$. Међутим, Фермаови бројеви су непарни, па је $m = 1$, одакле следи тврђење. □

Пјер Ферма (Pierre de Fermat, 1601–1665), француски математичар. По образовању је био правник и зарађивао је за живот бавећи се адвокатуром. Математиком се бавио из љубави, као "аматер". Један је од оснивача теорије вероватноће. Неколико теорема из теорије бројева носе његово име. Један од проблема који је поставио (Фермаова велика теорема) остао је нерешен преко 300 година (све до прошле године) али су покушаји његовог решавања од стране многих великих математичара имали за резултат многа значајна открића у математици.

Питање простоте Фермаових бројева појављује се и у вези са проблемом конструкције правилних многоуглова помоћу шестара и лењира. Гаус је доказао следеће тврђење:

ГАУСОВА ТЕОРЕМА *Правилан многоугао са n страница може се конструисати шестаром и лењиром ако и само ако је n природан број облика $n = 2^s p_1 p_2 \ldots p_k$, где је s ненегативан цео број а $p_1, p_2, \ldots, p_k$ различити Фермаови прости бројеви или је $n = 2^s$, где је s цео број већи од 1.*

Ово Гаусово откриће утицало је на то да се повећа интерес за изучавање Фермаових бројева. Међутим, све до данас није пронађен ни један прост Фермаов број већи од f_4.

Карл Фридрих Гаус (Karl Friedrich Gauss, 1777–1855), немачки математичар кога су савременици називали "краљем математичара" (princeps mathematicorum). Његов математички таленат испољио се у раном детињству. Гаус је, сећајући се свог детињства, говорио у шали: "Научио сам да рачунам пре него да говорим." Родио се у Брауншвајгу. Више образовање стекао је на Универзитету у Гетингену, где је затим провео 50 година. Био је директор опсерваторије у Гетингену а на универзитету је предавао математику и астрономију. Као деветнаестогодишњи студент направио је значајно откриће: дао је дефинитиван одговор на питање за које n је могуће конструисати шестаром и лењиром правилан n–угао. Специјално, решавањем једначине $x^{17}-1=0$, доказао је могућност конструкције правилног 17–угла. Гаус је доказао основну теорему алгебре о постојању решења алгебарске једначине n–тог степена. У свом делу "Аритметичка истраживања" (Disquisitiones Arithmeticae) поставио је темеље савремене теорије бројева. Бавио се и астрономијом, теоријом магнетизма и оптиком.

Лако се проверава да међу првих 20 природних бројева има осам простих док их међу првих 20 троцифрених бројева (од 100 до 119) има само пет. Природно се поставља питање: да ли су почев од неког природног броја сви природни бројеви сложени, тј. да ли је број простих бројева коначан? Одговор на то питање дао је Еуклид. Следећа теорема, заједно са доказом, укључена је у његову књигу "Елементи". Ми ћемо овде изложити два доказа Еуклидове теореме. Први је оригинални Еуклидов, други је дао мађарски математичар Ђерђ Поја (G. Pólya, 1887–1985).

ТЕОРЕМА 5 *Број простих бројева је бесконачан.*

ДОКАЗ 1 Претпоставимо да је број простих бројева коначан и нека су $p_1, p_2, \ldots, p_n$ сви прости бројеви, при чему је p_n највећи од њих. Посматрајмо број

$$q = p_1 p_2 \cdots p_n + 1.$$

Број q није дељив ни са једним од простих бројева $p_1, p_2, \ldots, p_n$, јер при дељењу са сваким од њих даје остатак 1. Како је $q > 1$, следи да је q прост број већи од p_n или је сложен број који има прост фактор већи од p_n. У оба случаја долазимо у контрадикцију са претпоставком да је p_n највећи прост број. Дакле, број простих бројева не може бити коначан. □

ДОКАЗ 2 Из Теореме 2 следи да је сваки од Фермаових бројева дељив неким непарним простим бројем који није делитељ ниједног другог Фермаовог броја. Зато из претпоставке да је број простих бројева коначан, следи да је и број Фермаових бројева коначан, што је контрадикција. Дакле, број простих бројева је бесконачан. □

Сваки прост број већи од 2 је непаран, а сваки непаран број је или облика $4k-1$ или облика $4k+1$, за неки ненегативан цео број k. Следи да бар у једној од ове две класе има бесконачно много простих бројева. Уствари, може се доказати да свака од те две класе садржи бесконачно много простих бројева. Доказ те чињенице за просте бројеве облика $4k-1$ је једноставан (видети задатак 2), уз коришћење аргумената сличних оним у Еуклидовом доказу Теореме 5; то, међутим, није случај кад се ради о класи бројева облика $4k+1$.

Општији проблем је следећи: Нека су a и m узајамно прости природни бројеви. Да ли има бесконачно много простих бројева облика $a+km$, где је k природан број? Наводимо без доказа познато тврђење које даје одговор на то питање.

ДИРИХЛЕОВА ТЕОРЕМА *Нека су a и m узајамно прости природни бројеви. Тада аритметичка прогресија*

$$\{a,\ a+m,\ a+2m,\ a+3m,\ \dots\}$$

садржи бесконачно много простих бројева.

Петер Густав Лежен Дирихле (P. G. L Dirichlet, 1805–1859), немачки математичар, рођен у Дирену. Од 1822. до 1827. године радио је као домаћи учитељ у Паризу. Био је доцент у Вроцлаву, затим професор Универзитета у Берлину а после смрти Гауса, у Гетингену. Постигао је дубоке и фундаменталне резултате у теорији бројева. Значајни су, такође, његови радови у механици и математичкој физици, посебно теорији потенцијала. Његова предавања имала су огроман утицај на Г. Римана, Ф. Ајзенштајна, Л. Кронекера, Р. Дедекинда и друге познате математичаре.

Голдбах је 1742. године изрекао хипотезу да се сваки паран број већи од 2 може представити у облику збира два проста броја а да се сваки непаран број већи од 7 може представити као збир три непарна проста броја. И. М. Виноградов (1891– 1983) је 1937. године аналитичким методама доказао тачност тога тврђења за довољно велике непарне бројеве, тј. за све непарне бројеве веће од неког великог броја N_0.

У теорији бројева има много нерешених проблема који се односе на просте бројеве а који су врло једноставни по формулацији. Не зна се, на пример, да ли између свака два узастопна потпуна квадрата n^2 и $(n+1)^2$ постоји прост број. Исто тако, не знамо да ли има бесконачно много простих бројева облика $(2n)^2+1$. Кронекер (L. Kronecker, 1823–1891) је претпоставио, али то никад није доказано, да се сваки позитиван паран број може представити као разлика два проста броја на бесконачно много начина. Ако би то било тачно онда би се потврдила и хипотеза да има бесконачно много парова *простих бројева близанаца*, тј. парова простих бројева који се разликују за 2. На пример, прости бројеви близанци су 3 и 5, 5 и 7, 11 и 13, 101 и 103, 1000000000061 и 1000000000063.

Мерсенови бројеви

Следећа теорема даје један потребан али не и довољан услов да би број облика 2^n-1 био прост. У доказу теореме користићемо специјалан случај ($a=2^r$, $b=1$) познатог идентитета, који важи за сваки природан број n:

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1}).$$

ТЕОРЕМА 6 *Ако је n природан број и 2^n-1 прост, онда је и n прост број.*

ДОКАЗ Доказаћемо еквивалентно тврђење, тј. да је 2^n-1 сложен број, ако је n сложен број. Нека је $n=rs,\quad r>1, s>1$. Тада је

$$\begin{aligned} 2^n-1 &= 2^{rs}-1 \\ &= (2^r)^s-1 \\ &= (2^r-1)((2^r)^{s-1}+(2^r)^{s-2}+\cdots+1). \quad \square \end{aligned}$$

У следећој табели могу се уочити неке чињенице у вези са степенима броја 2 од 2^2 до 2^9 (4 до 512).

n	2^n	2^n-1			2^n+1		
2	4	3		прост	5		прост
3	8	7		прост	9	=	$3\cdot 3$
4	16	15	=	$3\cdot 5$	17		прост
5	32	31		прост	33	=	$3\cdot 11$
6	64	63	=	$3^2\cdot 7$	65	=	$5\cdot 13$
7	128	127		прост	129	=	$3\cdot 43$
8	256	255	=	$3\cdot 5\cdot 17$	257		прост
9	512	511	=	$3\cdot 7^2$	513	=	$3^3\cdot 19$

Примећујемо, на пример, да су оба суседа броја $2^6=64$ (63 и 65) сложени бројеви. То исто важи за број $2^9=512$. С друге стране, после пара простих бројева 3 и 5, у таблици не налазимо више ниједан пример да су и 2^n-1 и 2^n+1 прости бројеви. То није случајно. Наиме, од три узастопна броја 2^n-1, 2^n и 2^n+1, један мора бити дељив са 3, а то не може бити број 2^n. Следеће тврђење, заједно са Теоремом 6, битно сужава област вредности од n за које су 2^n-1 или 2^n+1 прости бројеви.

ТЕОРЕМА 7 *Ако природан број $n>1$ није степен броја 2, онда је 2^n+1 сложен број.*

ДОКАЗ У доказу користимо познати идентитет:

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots+b^{n-1}),$$

који важи за сваки позитиван непаран број n.

Претпоставимо да n није степен двојке. Следи да се n може написати у облику $n=rs$, где је r непаран број већи од 1. У случају кад је n непаран прост број, тврђење следи на основу горњег идентитета, за $a=2$, $b=1$, тј. у том случају је $3|(2^n+1)$. Дакле, преостаје да размотримо случај кад су и r и s већи од 1. Узмимо да је $a=2^s$. Тада је $2^n=a^r$, па је $2^n+1=a^r+1$. На основу истог идентитета, налазимо да је $a+1$ прави делитељ од 2^n+1. $\square$

На основу доказаног тврђења, закључујемо да број облика 2^s+1 може бити прост само ако је он Фермаов број.

Утврђивање простоте (сложености) бројева облика $2^n \pm 1$ је проблем којим су се бавили многи математичари. Ландри (Landry) је 1869. године нашао факторизацију броја $2^{58}+1$ и прокоментарисао то овим речима: "Ниједна од многобројних факторизација бројева облика $2^n \pm 1$ није нам задала више муке нити одузела више времена. Број $2^{58}+1$ дељив је са 5 и када извршимо дељење тим фактором добија се број од 17 цифара који има два деветоцифрена проста фактора. Ако бисмо загубили овај резултат, не бисмо имали стрпљења и храбрости да поновимо сва израчунавања и могуће је да би прошле многе године пре него што би неко поново нашао факторизацију овог броја. Само десетак година касније Орифеј (Aurifeuille) је приметио да је

$$2^{58}+1=(2^{29}-2^{15}+1)(2^{29}+2^{15}+1).$$

Тај резултат се лако уопштава:

$$2^{4n+2}+1=(2^{2n+1}-2^{n+1}+1)(2^{2n+1}+2^{n+1}+1).$$

Према Теореми 6, број облика 2^n-1 не може бити прост ако n није прост. Зато се користи следећа нотација. Пишемо $M_p = 2^p - 1$, где се подразумева да је p прост број. Бројеви M_p називају се *Мерсенови бројеви* по француском математичару из 17. века који их је изучавао у вези са савршеним бројевима. Мерсенови прости бројеви, као и прости бројеви облика 2^n+1 су од посебног значаја. Разлози за то су, делом историјски а делом се заснивају на чињеници да такви прости бројеви налазе примену у другим областима математике.

Марен Мерсен (Marin Mersenne, 1588–1648) био је математичар, физичар, филозоф, теоретичар музике и теолог. Био је пријатељ Р. Декарта, са којим је заједно похађао језуитски колеџ. На својим путовањима у Италију и Холандију упознао се са Каваљеријем, Паскалом, Фермаом и Хајгенсом, с којима је водио интензивну преписку. Био је централна личност једне од најзначајнијих научних група у Француској на почетку 17. века. Године 1644, у предговору његове књиге "Физичко–математичка размишљања" (Cogita Physico–Mathematica) дао је оригиналне доказе неких Фермаових тврђења о простим и савршеним бројевима.

Мерсен је тврдио да су 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127 и 257 једини прости бројеви, не већи од 257, за које је број 2^p-1 прост. Међутим, ова листа садржи грешке, које су откривене много времена после смрти М. Мерсена. Наиме, два броја за које је Мерсен тврдио да су прости, уствари су сложени, а испуштена су три проста броја. Первушин (1827–1900) је, 1883. године, доказао да је M_{61} прост. За бројеве M_{89} и M_{107} је, такође, утврђено да су прости. С друге стране, за бројеве M_{67} и M_{257} показано је да су сложени.

Највећи познати прости бројеви су Мерсенови бројеви. Наиме, за бројеве облика 2^n-1 постоје специјалне методе које, уз помоћ рачунара, омогућавају да се утврди њихова евентуална простота, лакше него у случају осталих бројева. Фирма CRAY RESEARCH користи генерисање простих бројева као ултимативни тест рачунара које пројектује, јер та изузетно интензивна нумеричка операција брзо указује на разне проблеме у дизајнирању и конструкцији суперрачунара. Највећи број за који, према нама доступним подацима, сада поуздано знамо да је прост је број $2^{859433}-1$. Провера је извршена у лабораторијама компаније CRAY RESEARCH у Минесоти (САД), прошле године, уз коришћење суперрачунара најновије генерације CRAY C90

Данас су позната укупно 33 Мерсенова броја. Потпуна листа простих бројева p за које су познати Мерсенови бројеви (према нама расположивим подацима) је: 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 69, 89, 107, 127, 521, 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253, 4423, 9689, 9941, 11213, 19937, 21701, 23209, 44497, 86243, 110503, 132049, 216091, 756839, 859433.

Дистрибуција простих бројева

Једна од најлепших теорема у математици је *теорема о простим бројевима* која са великом тачношћу даје одговор на питање колико има простих бројева не већих од датог природног броја n.

Обележимо са $\pi(n)$ број простих бројева не већих од n. На пример, $\pi(5)=3$, $\pi(15)=6$. Теорема о простим бројевима тврди да се за велике вредности од n функција $\pi(n)$ понаша као функција $\frac{n}{\ln n}$, (при чему је са $\ln n$ означен логаритам за базу $e = 2,718281828\ldots$). Ово тврђење се обично записује у облику

$$\pi(n) \sim \frac{n}{\ln n}.$$

Кажемо да је $\pi(n)$ асимптотски једнако са $\frac{n}{\ln n}$.

Гаус је ово тврђење изнео као хипотезу 1840 године. Теорему су независно доказали 1896 године Вале–Пусен (La Vallee Poussin, 1866–1962) и Адамар (J. S. Hadamard, 1865–1963). Касније су, 1946 године, Ердеш (P. Erdös, 1913) и Селберг (A. Selberg, 1907) дали елементаран, али не и лак доказ теореме. Теорема уствари тврди да ма како био мали реалан број $\varepsilon > 0$, може се наћи довољно велики природан број n_0 (који зависи од ε), такав да је за сваки природан број $n > n_0$,

$$1-\varepsilon < \frac{\pi(n)}{\frac{n}{\ln n}} < 1+\varepsilon.$$

Пре Вале–Пусена и Адамара, Чебишев (1821–1894) је доказао неке значајне особине функције $\pi(n)$. Он је, 1850 године, доказао да је за сваки природан број $n > 1$,

$$\frac{7}{8}\cdot\frac{n}{\ln n} \le \pi(n) \le \frac{9}{8}\cdot\frac{n}{\ln n}.$$

Ова оцена је слабија од оне коју даје теорема о простим бројевима, али има ту добру страну да важи за сваки природан број већи од 1.

Следећа табела илуструје вредност теореме о простим бројевима.

n	$\pi(n)$	$\frac{n}{\ln n}$	$\pi(n)\frac{\ln n}{n}$
1000	168	145	1.159
10000	1229	1086	1.132
100000	9592	8686	1.104
1000000	78498	72382	1.084
10000000	664579	620421	1.071
100000000	5761455	5428681	1.061

З А Д А Ц И

1. Доказати да је сваки прост број већи од 3 облика $6n-1$ или $6n+1$.

2. Доказати да постоји бесконачно много простих бројева облика $4k-1$, где је k позитиван цео број.

3. Доказати да не постоји највећи прост број облика $3k+2$, где је k позитиван цео број.

4. Наћи низ од 1995 узастопних природних бројева, међу којима нема простих.

5. Доказати да се непаран број облика $6n+1$, где је n природан број, не може представити као разлика два проста броја.

6. Наћи све просте бројеве p, такве да је $p+1$

(а) потпун квадрат;

(б) потпун куб.

7. Доказати да се сваки непаран прост број може на тачно један начин представити као разлика квадрата два природна броја.

8. Наћи све природне бројеве n, такве да су $n, n+10$ и $n+14$ прости бројеви.

9. Наћи све тројке простих бројева које образују аритметичку прогресију са разликом 2.

10. Нека је N производ свих простих бројева не већих од n, за $n>2$. Доказати да је $N>n$.

11. Нека је p_n n–ти прост број. Доказати да је $p_n>2n$, за $n>4$.

12. Доказати да између бројева n и $n!$ постоји бар један прост број, за $n>2$.

13. Користећи претходни задатак дати још један доказ да има бесконачно много простих бројева.

14. Прост број n записан у бинарном систему има све цифре јединице. Доказати да је онда и број његових цифара прост број.

15. Доказати да Фермаови бројеви задовољавају рекурентну релацију

$$f_{n+1} = f_0 f_1 f_2 \cdots f_n + 2.$$

16. Користећи претходни задатак доказати да су свака два различита Фермаова броја узајамно прости.

17. Доказати да за $n > 5$, сваки број облика $2^{2^n} - 1$ има прост фактор већи од 1000000.

18. Доказати да за сваки природан број n, број $2^{2^n} - 1$ има бар n различитих простих фактора.

19. (а) Колико има непарних природних бројева n мањих од 1000000000, таквих да се правилан n–угао може конструисати шестаром и лењиром?

(б) Колико има природних бројева n мањих од 1000 таквих да се правилан n–угао може конструисати шестаром и лењиром?

20. Да ли постоји скуп S од 1995 природних бројева који има следеће две особине:

(а) Сваки збир два или више бројева из скупа S је сложен број;

(б) Свака два броја из S су узајамно прости?

21. Нека је $f(x) = x^2 - x + 1$. Доказати да су, за сваки природан број $m > 1$, бројеви

$$m, \quad f(m), \quad f(f(m)), \ldots$$

по паровима узајамно прости.

22. Користећи претходни задатак, доказати да има бесконачно много простих бројева.

23. (а) Одредити сва решења једначине $\pi(n) = \frac{n}{2}$ у скупу природних бројева.

(б) Наћи најмањи природан број $n > 1$ за који је $\pi(n) < \frac{n}{3}$.

24. Одредити све природне бројеве n за које је

(а) $$\frac{\pi(n-1)}{n-1} < \frac{\pi(n)}{n};$$

(б) $$\frac{\pi(n-1)}{n-1} > \frac{\pi(n)}{n}.$$

25. Нека је

$$a_1, a_2, \ldots, a_k$$

ограничен низ такав да је

$$1 < a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leq n,$$

при чему ниједан члан није делитељ производа осталих.

Показати да је $k \leq \pi(n)$.

26. Дат је низ

$$a_1 = 3, \; a_2 = 3 + 2k, \; a_3 = 3 + 4k, \; a_4 = 3 + 6k, \ldots$$

где је k природан број. Доказати да у том низу не постоје три узастопна члана који су сви прости бројеви.

Задаци из математике

Рубрика "Задаци из математике" ће у сваком броју, почев од првог, доносити 8 задатака из разних области математике. Не претендује се да сви задаци буду оригинални али по правилу сви треба да буду у довољној мери нестандардни и занимљиви, тако да својим садржајем привуку пажњу читалаца. Уз оригиналне задатке биће наведено и име аутора.

Сви читаоци могу учествовати у решавачком такмичењу које ће се организовати у току сваке школске године. На адресу редакције слати откуцана или читко исписана решења; сваки задатак на засебном листу. Исто важи за предлоге задатака. У сваком наредном броју часописа публиковаће се комплетна решења свих задатака из претходног броја. На крају циклуса најуспешнији решавачи ће бити награђивани.

Предлоге и решења задатака слати на адресу: *"Тангента" – за рубрику "Задаци", Институт за математику, Трг Д.Обрадовића 4, 21000 Нови Сад.*

1. Часопис "Тангента" ће, почев од 1995. године, излазити бар 4 пута у току школске године. Ако бројеви буду нумерисани са $1, 2, 3, \ldots$, доказати да ће наступити тренутак када ће се број часописа поклопити са годином у којој је изашао.

2. Ако је разлика кубова два узастопна природна броја једнака n^2, тада је број n једнак збиру квадрата нека два природна броја. Доказати.

3. Производ полинома $P(x)$ и $Q(x)$ са целобројним коефицијентима је полином чији су сви коефицијенти дељиви са 5. Доказати да су сви коефицијенти бар једног од полинома $P(x)$ и $Q(x)$ дељиви са 5.

4. Доказати да за сваки реалан број x важи неједнакост

$$\sin(\cos x) < \cos(\sin x).$$

5. Нека је A центар произвољног поља шаховске табле 8×8. Обележимо са b и c збирове квадрата растојања тачке A од центара свих белих односно свих црних поља. Доказати да је $b = c$.

6. У једнакокраком троуглу ABC ($|AC| = |BC|$) је $\angle ABC = \angle BAC = 40°$. Симетрала угла A сече крак BC у тачки D. Доказати да је $|AD| + |DC| = |AB|$.

7. Може ли раван да се покрије кружницама, тако да кроз сваку тачку пролазе тачно 1994 кружнице?

8. Да ли постоји просторни петоугао чије су све странице једнаке и сви углови који образују суседне странице – прави? Шта се може рећи у случају n-угла ($n \geq 6$)?

Задаци из програмирања

Рубрика "Задаци из програмирања" ће у сваком броју, доносити 3 задатка из програмирања. Задаци неће увек бити оригинални, али ће бити бирани тако да илуструју или неку досетку на којој се заснива решење или употребу неке стандардне технике (или структуре података) у програмирању. Уз оригиналне задатке биће наведено и име аутора.

Сви читаоци могу учествовати у решавачком такмичењу које ће се организовати у току сваке школске године. На адресу редакције треба слати искључиво одштампане програме који су добро искоментарисани, као и одштампане резултате извршавања програма. Решења се могу слати и на дискети за PC рачунаре, уз обавезну напомену о називу, произвођачу и верзији преводиоца помоћу којег програм треба превести. Редакција ће настојати да дискете врати пошиљаоцу. Предлози задатака треба да садрже формулацију задатка и једно његово решење.

У сваком наредном броју часописа публиковаће се или комплетна решења задатака из претходног броја или ће бити дата детаљна упутства за самостално решавање. На крају циклуса најуспешнији решавачи ће бити награђивани.

Предлоге и решења задатака слати на адресу: *"Тангента" – за рубрику "Задаци из програмирања", Институт за математику, Трг Д.Обрадовића 4, 21000 Нови Сад.*

1. (са прве међународне олимпијаде из програмирања)

   Дато је $2 \times N$ кутија које су поређане у правој линији ($N \leq 5$). Две суседне кутије су празне, а остале кутије садрже $N-1$ слово "А" и $N-1$ слово "Б".

   Један пример за $N = 5$:

А	Б	Б	А			А	Б	А	Б

   Садржај кутија се може размењивати, али само тако да се садржај две суседне непразне кутије може преместити у две празне кутије, очувавајући њихов редослед.

   Написати програм који ће исписати редослед измена садржаја кутија, тако да се на крају сва слова A нађу лево од свих слова B, при чему положај празних кутија није битан. Уколико се до жељеног положаја не може доћи, исписати одговарајућу поруку. Број кутија и њихов почетни садржај су улазни подаци програма.

2. Дата је матрица формата $N \times N$ ($1 \leq N \leq 400$), која се састоји од бројева. Слика је задата бројевима 1.

Написати програм који учитава матрицу у једнодимензионални низ по врстама, па затим део матрице - слику, копира на нову позицију. Слика коју треба копирати се задаје координатама горњег левог угла, дужином и ширином, а нова позиција слике се задаје новим координатама горњег левог угла. Резултујућу матрицу приказати на екрану у облику матрице.

При копирању слике користити једнодимензионални низ у коме је матрица и никакве помоћне низове или матрице.

Улазни подаци су: елементи матрице, горњи леви угао, ширина и дужина оригиналне слике и горњи леви угао копије слике. Излазни податак је резултујућа матрица.

3. Написати програм који ће исписати што је више могуће природних бројева чији је бинарни запис периодичан. Бинарни запис броја је периодичан са периодом $n(\geq 2)$, ако се састоји од k истоветних сегмената дужине n, при чему је дужина читавог бинарног записа $k \times n$. На пример, бинарни запис броја 10 (1010) јесте периодичан (периода дужине 2), док бинарни запис броја 9 (1001) није периодичан.

Зврчке

1. При одређивању производа два комплексна броја на уобичајени начин, вршимо четири множења и два сабирања у скупу реалних бројева (за налажење реалног и имагинарног дела производа). Међутим, операција множења реалних бројева сматра се много скупљом од операције сабирања. Показати да се производ два комплексна броја увек може добити помоћу три множења и пет сабирања у скупу реалних бројева.

2. Нека је
$$5,\ 14,\ 19,\ 23,\ 28,\ 32, \ldots$$
низ свих природних бројева код којих је збир цифара дељив са 5, поређаних у растућем поретку. Које све вредности може имати разлика два узастопна члана у томе низу?

3. Андреја, Соња, Марија и Снежана рођене су исте године у четири различита месеца. Андреја је старија од Соње 15 дана, Соња од Марије 22 дана, Марија од Снежане 23 дана. Марија се родила у понедељак, а шести рођендан је славила, такође у понедељак. У који дан недеље је Марија славила трећи рођендан? (Претпоставља се да су девојчице рођене у 20. веку.)

Наградни задатак

На колико се начина може прочитати реченица АНА ВОЛИ МИЛОВАНА на приказаној шеми? (Реченица може да почне са било којим словом А а после сваког слова прелази се на њему суседно слово по хоризонтали или вертикали у било ком смеру у коме се реченица може наставити.)

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & A & & & & & & & \\
 & & & & & & A & N & A & & & & & & \\
 & & & & & A & N & A & N & A & & & & & \\
 & & & & A & N & A & V & A & N & A & & & & \\
 & & & A & N & A & V & O & V & A & N & A & & & \\
 & & A & N & A & V & O & L & O & V & A & N & A & & \\
 & A & N & A & V & O & L & I & L & O & V & A & N & A & \\
A & N & A & V & O & L & I & M & I & L & O & V & A & N & A \\
 & A & N & A & V & O & L & I & L & O & V & A & N & A & \\
 & & A & N & A & V & O & L & O & V & A & N & A & & \\
 & & & A & N & A & V & O & V & A & N & A & & & \\
 & & & & A & N & A & V & A & N & A & & & & \\
 & & & & & A & N & A & N & A & & & & & \\
 & & & & & & A & N & A & & & & & & \\
 & & & & & & & A & & & & & & &
\end{array}
$$

Првих 10 читалаца који на адресу редакције пошаљу тачна решења биће награђени књигама.

Задаци за најмлађе читаоце

1. Одредити најмањи природан број код кога је производ цифара једнак 5040.
2. Написати три троцифрена броја, користећи сваку цифру различиту од нуле тачно једанпут, тако да разлика највећег и најмањег од тих бројева буде најмања могућа.
3. Кроз једно теме датог паралелограма повући две праве које тај паралелограм деле на три дела једнаких површина.
4. Ученик је залутао у шуми чија је површина 100 km^2. Ученик зна да шума покрива конвексну област, али не зна ништа више о облику те области. Доказати да он може изаћи из шуме, а да при томе пређе пут краћи од 30 km.

Рекреативна математика

ПАЛИНДРОМИ

др Ратко Тошић, Природно-математички факултет, Нови Сад

Речи које се читају исто и унапред и уназад називају се *палиндроми.* На пример, следеће речи су палиндроми: ОКО, ПОП, АДА, ПОТОП, НЕВЕН, НЕРАЖАРЕН. И целе реченице могу бити палиндроми. На пример:

АНА ВОЛИ МИЛОВАНА.
И РУЖАМА МАМА ЖУРИ.
ПЕРИЦА РЕЖЕ РАЦИ РЕП.
СИР ИМА МИРИС.
У РИМУ УМИРУ.
САВА ЗИДАР ГРАДИ ЗА ВАС.
УДОВИЦА БАЦИ ВОДУ.

Слично, за број написан у неком позиционом систему кажемо да је палиндром ако се не мења при исписивању његових цифара обрнутим редом. На пример, бројеви 5, 44, 232, 1991, 111111, 123454321 су палиндроми. Очигледно, сви једноцифрени бројеви су палиндроми. У овом чланку, ако није друкчије наглашено, подразумева се да су бројеви написани у декадном систему. Иначе, бројеви палиндроми могу се посматрати и у другим бројевним системима.

Природан број палиндром одређен је са првом половином свог записа, тј. са првих k цифара, ако му је укупан број цифара $2k$, односно са првих $k+1$ цифара, ако му је укупан број цифара $2k+1$.

Задатак 1. Доказати да је број n–цифрених бројева палиндрома једнак $9 \cdot 10^{\frac{n-1}{2}}$, ако је n непаран, односно $9 \cdot 10^{\frac{n-2}{2}}$, ако је n паран број.

Задатак 2. Одредити број природних бројева палиндрома мањих од

(а) 1000000;

(б) 1000000000.

Читалац који је решио претходна два задатка, што није нимало тешко, увидеће да је међу природним бројевима релативно мало палиндрома. Међутим, показује се да многи природни бројеви имају извесне "палиндромске" особине.

Ако цифре броја 87 испишете обрнутим редом и добијени број 78 додате броју 87, и са добијеним збиром наставите исти поступак, после само четири корака добићете палиндром 4884: 87+78=165, 165+561=726, 726+627=1353, 1353+3531=4884.

Који природни бројеви имају наведену особину? Одговор на то питање није познат. Проверено је да се сви двоцифрени бројеви описаним поступком, после коначног броја корака (обртање–додавање) трансформишу у палиндроме. Ако број n производи палиндром после k примена операције "обртање–додавање", рећи ћемо да је његова *палиндромска отпорност* једнака k. Обележимо палиндромску отпорност броја n са $\alpha(n)$. Међу двоцифреним бројевима, највећу палиндромску отпорност имају бројеви 89 и 98: $\alpha(87) = \alpha(98) = 24$. Број 89 после 24 корака даје палиндром 8813200023188.

Задатак 3. *Написати програм за одређивање палиндромске отпорности бројева.*

Обележимо са $\tilde{n}$ број који се добија обртањем k–цифреног броја n тј. исписивањем цифара броја n обрнутим редом. Очигледно је $\tilde{\tilde{n}} = n$ и $\alpha(\tilde{n}) = \alpha(n)$.

Задатак 4. *Доказати следеће тврђење: Збир $n + \tilde{n}$ је палиндром ако је збир цифара i–тог разреда бројева n и $\tilde{n}$ мањи од 10, за $1 \leq i \leq k$. Другим речима, $n + \tilde{n}$ је палиндром ако се при сабирању бројева n и $\tilde{n}$ ниједанпут не врши преношење у старији разред.*

Да ли је наведени услов и потребан да би број $n + \tilde{n}$ био палиндром?

Провером помоћу рачунара утврђено је да сви троцифрени бројеви, изузев њих 13, производе палиндроме. При томе, чак њих 735 захтева највише пет корака до претварања у палиндром. Према задатку 1, међу троцифреним бројевима има их 90 који су сами палиндроми, тј. за које је $\alpha(n) = 0$. Преосталих 75 троцифрених бројева могу се разврстати у неколико класа, тако да сви бројеви из исте класе, после највише два корака производе један исти број. Једна од тих класа састоји се од бројева 187, 286, 385, 583, 682, 781, 869, 880 и 968, који сви после највише два корака дају исти број 1837 и коначно дају палиндром после 23 корака.

У истом смислу су еквивалентни бројеви 196, 295, 394, 493, 592, 689, 691, 788, 790, 887 и 986. Сваки од њих после највише два корака производи број 1675. Настављајући даље од овог броја, сав труд се показао узалудан. После 50000 корака (обртање – додавање), добија се број са више од 26000 цифара а да се при томе не појави палиндром.

Наведених 11 бројева из ове последње класе спадају у групу од оних 13 за које нисмо утврдили да имају коначну палиндромску отпорност. Преостала два броја су 879 и 978. Остављамо читаоцу да се позабави испитивањем палиндромске отпорности ова два броја, који се један из другог добијају обртањем. То ће представљати добру вежбу за рад са аритметиком вишеструке прецизности.

Ево сада један, по нашем мишљењу мало тежи, "теоријски" задатак.

Задатак 5. *Одредити број k–цифрених природних бројева n за које је $\alpha(n) =$ 1.*

Информације

11. БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

др Павле Младеновић, Математички факултет, Београд

Балканска математичка олимпијада (БМО) је математичко такмичење ученика средњих школа балканских земаља. 11 БМО одржана је у Новом Саду у времену од 8. до 14. маја 1994. године. Организатори такмичења били су Друштво математичара Србије и Универзитет у Новом Саду, а покровитељ Савезно министарство за просвету и културу. На такмичењу су учествовале шесточлане екипе из Бугарске, Кипра, Грчке, Румуније и Југославије. Чланови југословенске екипе били су:

1. **Давидовић Милена**, IV **разред Математичке гимназије, Београд;**
2. **Ирић Игор**, IV **разред Гимназије "Бора Станковић", Врање;**
3. **Каделбург Весна**, IV **разред Математичке гимназије, Београд;**
4. **Кртинић Ђорђе**, III **разред Математичке гимназије, Београд;**
5. **Салом Игор**, III **разред Математичке гимназије, Београд;**
6. **Тремл Мирослав**, III **разред Гимназије у Ијијашу, Илијаш.**

Такмичари су решавали 4 задатка које је одабрао Жири БМО, дозвољено време за израду задатака било је 4,5 часова, а сваки задатак вредео је 10 поена, тј. максималан број поена је 40. Границе за доделу златних, сребрних и бронзаних медаља биле су 34, 14, и 8 поена. Додељено је 15 медаља и то: 4 златне, 5 сребрних и 6 бронзаних. Само један ученик Николај Николов из Бугарске освојио је максималан број поена. Расподела медаља приказана је у следећој табели:

ЗЕМЉА	ЗЛАТО	СРЕБРО	БРОНЗА	ПОЕНИ
Бугарска	3	2	-	156
Румунија	1	2	1	85
Југославија	-	1	2	57
Грчка	-	-	2	34
Кипар	-	-	1	21

Напомена: Седмочлана екипа ученика Московске специјалне школе интерната "А. Н. Колмогоров" учествовала је независно на 11. БМО и освојила у збиру 41 поен.

ЗАДАЦИ

1. Дат је оштар угао XAY и тачка P унутар њега. Конструисати (помоћу лењира и шестара) праву која пролази кроз тачку P и сече краке AX и AY редом у тачкама B и C, тако да је површина троугла ABC једнака AP^2.

(Кипар)

2. Доказати да полином

$$x^4 - 1994x^3 + (1993+m)x^2 - 11x + m,$$

где је m цео број, има највише један целобројни корен.

(Грчка)

3. Нека је $(a_1, a_2, ..., a_n)$ пермутација бројева 1, 2, ..., n, где је $n \geq 2$. Израчунати највећу могућну вредност израза

$$\sum_{k=1}^{n-1} \mid a_{k+1} - a_k \mid .$$

(Румунија)

4. Наћи најмањи број $n > 4$, за који постоји скуп од n људи, тако да свака два који се познају немају заједничких познаника, а свака два који се не познају имају тачно два заједничка познаника.
(Познанство је симетрична релација: ако A познаје B, онда и B познаје A.)

(Бугарска)

Решења:

1. Нека је ABC тражени угао и нека су D и E тачке на правој AB, тако да је $PD \| AC$ и $PE \perp AB$, слика 1. Означимо $AP = p$, $AD = d$, $PE = h$ и $DB = x$.Дужи p, d и h су дате, а задатак је да се конструише дуж x.
Из услова $PD \| AC$, следи да је $\Delta ABC \sim \Delta DBP$. Користећи ту чињеницу и означавајући површину троугла XYZ са S_{XYZ} < добијамо

$$\frac{(d+x)^2}{x^2} = \frac{AB^2}{DB^2} = \frac{S_{ABC}}{S_{DBP}} = \frac{p^2}{xh/2} = \frac{2p^2}{xh},$$

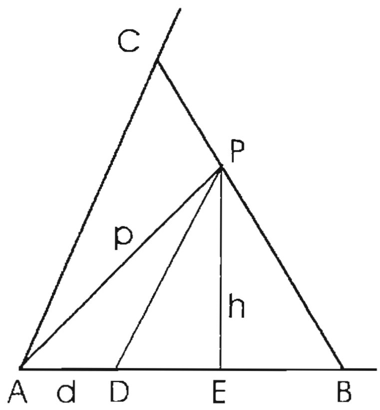
и следствено томе

$$x^2 - 2\frac{p^2 - dh}{h}x + d^2 = 0. \tag{1}$$

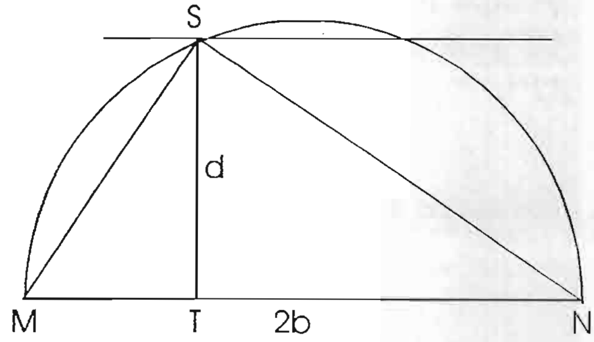
Означимо $b = \dfrac{p^2 - dh}{h}$. Тада се једначина (1) може записати у следећем облику

$$x^2 - 2bx + d^2 = 0. \tag{2}$$

Ако су x_1 и x_2 решења једначине (2), онда је $x_1 + x_2 = 2b$ и $x_1x_2 = d^2$.



Слика 1.



Слика 2.

Конструкција. Прво конструишемо дуж $b = \dfrac{p^2 - dh}{h} = \dfrac{p^2}{h} - d$. Затим конструишемо дуж $MN = 2b$ и круг k са пречником MN. Конструишемо праву s тако да је $s||MN$ и да је растојање између s и MN једнако d. Нека је S пресечна тачка праве s и круга k. Конструишимо праву t која садржи тачку S и нормална је на праву MN. Нека је T пресечна тачка правих t и MN. Тада, дужи MT и NT могу бити узете за дуж x.
Заиста, из конструкције следи да је $\Delta SMT \sim \Delta NST$ и $MT : ST = ST : TN$. Даље добијамо да је

$$MT \cdot TN = ST^2 = d^2, \qquad MT + TN = MN = 2b.$$

Према томе, $x_1 = MT$, $x_2 = TN$. Приметимо да задатак има два решења ако је $d > b$, тј. $2dh < p^2$, односно једно решење ако је $2dh = p^2$.

2. **(Решење ученика Мирослава Тремла)**
Нека су x_1, x_2, x_3, x_4 нуле датог полинома. Претпоставимо да су бар две од њих, на пример x_1 и x_2, цели бројеви. На основу Виетове теореме добијамо

$$x_1x_2x_3x_4 = m, \tag{1}$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = 11, \tag{2}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = 1993 + m, \tag{3}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1994 \tag{4}$$

Једнакости (2) и (3) могу се записати у облику:

$$(x_1 + x_2)x_3x_4 + x_1x_2(x_3 + x_4) = 11, \tag{5}$$

$$x_1x_2 + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_3x_4 = 1993 + m \tag{6}$$

Из једнакости (4) следи да је $x_3 + x_4$ цео број. Користећи ту чињеницу добијамо из (6) да је x_3x_4 такође цео број. Размотримо следећа два случаја:

Случај 1. Бар један од бројева x_1 и x_2 је паран. Претпоставимо, на пример, да је x_1 паран број. Из (1) следи да је m паран број. Из (5) следи да је сваки од бројева $x_1 + x_2$ и x_3x_4 непаран. Користећи ове чињенице добијамо из (6) да је x_3+x_4 паран број, а из (4) следи да је x_3+x_4 непаран број.
Контрадикција.
Случај 2. Бројеви x_1 и x_2 су оба непарна. Из (4) следи да је $x_3 + x_4$ паран број, а из (5) следи да је $x_3 + x_4$ непаран број.
Контрадикција.

3. **(Решење Жирија 11. БМО)**
За сваку пермутацију $(a_1, a_2, ..., a_n)$ броје192 ва 1, 2, ...,n размотримо збир

$$S(a_1, a_2, ..., a_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \mid a_{k+1} - a_k \mid + \mid a_1 - a_n \mid .$$

Тај збир се може представити у облику

$$S(a_1, a_2, ..., a_n) = \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k(a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=1}^{n}(\epsilon_{k-1} - \epsilon_k)a_k,$$

где је $\epsilon_k \in \{-1, 1\}$ и $a_{n+1} = a_1$, $\epsilon_0 = \epsilon_n$. Означимо $b_{a_k} = \epsilon_{k-1} - \epsilon_k$ за $k \in \{1, 2, ..., n\}$. Тада се збир $S(a_1, a_2, ..., a_n)$ може представити у облику

$$S(a_1, a_2, ..., a_n) = \sum_{k=1}^{n} b_k \cdot k,$$

где је $b_k \in \{-2, 0, +2\}$ и $b_1 + b_2 + ... + b_n = 0$. Према томе, бројеви $+2$ и -2 појављују се једнак број пута међу b_k- овима. Следи да је

$$S(a_1, a_2, ..., a_n) = 2(x_1 + x_2 + ... + x_m) - 2(y_1 + y_2 + ... + y_m),$$

где су $x_1, x_2, ..., x_m$, $y_1, y_2, ..., y_m$ различити бројеви из $\{1, 2, ..., n\}$. Лако је установити да се максимална вредност израза $2(x_1 + x_2 + ... + x_m) - 2(y_1 + y_2 + ... + y_m)$ достиже када је $m = \left[\frac{n}{2}\right]$ и

$$\{x_1, x_2, ..., x_m\} = \{n, n-1, ..., n-m+1\},$$

$$\{y_1, y_2, ..., y_m\} = \{1, 2, ..., m\},$$

а та максимална вредност је $2m(n-m)$. Сада, размотримо следећу пермутацију бројева $1, 2, ..., n$; $a_{2k-1} = n - m + k$ и $a_{2k} = k$ за $k \leq \left[\frac{n}{2}\right] = m$, и, ако је n непаран број, $a_n = m+1$. За ту пермутацију важи $S(a_1, a_2, ..., a_n) = 2m(n-m)$ и $\mid a_1 - a_n \mid = 1$. Према томе, тражени максимум збира $S(a_1, a_2, ..., a_n) - \mid a_1 - a_n \mid$ једнак је

$$2\left[\frac{n}{2}\right]\left(n - \left[\frac{n}{2}\right]\right) - 1,$$

тј. $\frac{n^2-2}{2}$ ако је n паран број, односно $\frac{n^2-3}{2}$ ако је n непаран број.

3. **Решење В.Јанковића)**
Нека је
$$S(a_1,a_2,...,a_n)=\sum_{k=1}^{n-1}\mid a_{k+1}-a_k\mid+\mid a_1-a_n\mid,$$
где је $(a_1,a_2,...,a_n)$ пермутација бројева $1,2,...,n$. Даље, нека су A_k, $k=1,2,...,n$, тачке реалне праве са координатама a_k, $k=1,2,...,n$, респективно. $S(a_1,a_2,...,a_n)$ је дужина затворене полигоналне линије $A_1A_2...A_n$. Ако је $k<\frac{n}{2}$, одсечак $[k,\ k+1]$ покрива највише $2k$ сегмената посматране полигоналне линије. Заиста, сваки сегмент који покрива одсечак $[k,k+1]$ мора имати један крај у скупу $\{1,2,...,k\}$, а свака тачка је крај тачно два сегмента. На сличан начин закључујемо да у случају $\frac{n}{2}\le k<n$ број сегмената који покривају одсечак $[k,k+1]$ није већи од $2(n-k$. Следи да за $n=2m$ важи
$$S(a_1,a_2,...,a_n)\le 2[1+2+...+(m-1)+m+(m-1)+...+2+1]=2m^2,$$
а за $n=2m+1$ важи
$$S(a_1,a_2,...,a_n)\le 291+2+...+m+m+...+2+1]=2m(m+1).$$
Ове две неједнакости можемо записати у јединственом облику
$$S(a_1,a_2,...,a_n)\le 2m(n-m),\quad \text{где је}\quad m=\left[\frac{n}{2}\right].$$
Вредност разматране суме није већа од $2m(n-m)-1$. Ова вредност се достиже нпр. за пермутацију задату са $a_{2k-1}=n-m+k$ и $a_{2k}=k$, $k=1,2,...,m$ и $a_n=m+1$, ако је n непаран број. Према томе, тражени максимум једнак је $2\left[\frac{n}{2}\right]\left(n-\left[\frac{n}{2}\right]\right)-1$.

4. **(Решење Жирија 11. БМО)**
Нека је A из скупа од n људи, за који важе услови задатка. Означимо са $a_1,a_2,...,a_n$ све познанике лица A, а са $u_1,u_2,...,u_q$ сва лица која не познају особу A. Постоји бијекција између скупа $\{u_1,u_2,...,u_q\}$ и скупа свих парова (a_i,a_j), где је $1\le i\le p$, $1\le j\le p$ и $i\ne j$. Затим, пошто су a_i и a_j познаници лица A, то се они међусобно познају (ако би се познавали, онда би (A,a_i,a_j) била тројка познаника, каква не постоји сагласно условима задатка). Следи да постоји лице B које познаје и a_i и a_j истовремено. Лице B не познаје A (ако B познаје A, тада су (A,B,a_i) и (A,B,a_j) тројке познаника, што је немогуће).
Обрнуто, ако B не познаје A, тада сагласно условима задатка постоје тачно

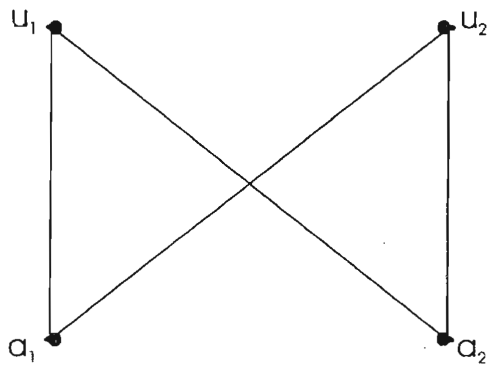
две особе a_i и a_j које су познаници и A и B истовремено. Пар (a_i, a_j) коренспондирамо лицу B. Ова кореспонденција је ињективна. Заиста, ако су (a_i, a_j) и (a_k, a_l) различити парови који су кореспондирани истој особи B које не познаје A, тада међу a_i, a_j, a_k, a_l постоје најмање три различита познаника лица A и B, што је немогуће. На основу претходно реченог закључујемо да је

$$q = \frac{p(p-1)}{2} \quad \text{и према томе} \quad n = \frac{p(p-1)}{2} + p + 1.$$

Дакле, $p^2 + p - 2(n-1) = 0$ и та једначина има тачно једно позитивно решење. Према томе, број p је исти за све чланове датог скупа од n људи. Даље добијамо:

$$\begin{array}{llll}
\text{ако је} & p = 1, & \text{онда је} & n = 2; \\
\text{ако је} & p = 2, & \text{онда је} & n = 4; \\
\text{ако је} & p = 3, & \text{онда је} & n = 7; \\
\text{ако је} & p = 4, & \text{онда је} & n = 11; \\
\text{ако је} & p = 5, & \text{онда је} & n = 16; \quad \text{итд.}
\end{array}$$

Размотримо случај $p \geq 3$. Следи да постоје две особе a_1 и a_2 које се не познају међусобно. На основу услова задатка постоје тачно две особе u_1 и u_2 које су познаници пара (a_1, a_2). Имамо следећи граф:



У сваком врху постоје још $p-2$ страница графа. Дакле, има најмање $4(p-2)+4 = 4(p-1)$ страница. Даље добијамо да је $n \geq 4(p-1)$, што не важи за $p = 3$ и $p = 4$. Случај $p = 5 (n = 16)$ има конкретну реализацију. То показује пример скупа од 16 људи $\{1, 2, ..., 16\}$, где су сви парови познаника следећи парови: (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,10), (2,13), (2,15), (2,16), (3,9), (3,12), (3,14), (3,16), (4,8), (4,11), (4,14), (4,15), (5,7), (5,11), (5,12), (5,13), (6,7), (6,8), (6,9), (6,10), (7,14), (7,15), (7,16), (8,12), (8,13), (8,16), (9,11), (9,13), (9,15), (10,11), (10,12), (10,14), (11,16), (12,15), (13,14). Према томе, одговор је $n = 16$.

4. **(Решење В. Јанковића)**
Нека је a једна особа из скупа од n људи који задовољава услове задатка. Нека она има r познаника: $a_1, a_2, ..., a_r$. Очигледно је да се сваке две

особе a_i и a_j, $1 \leq i < j \leq r$, међусобно не познају и да имају тачно једног заједничког познаника a_{ij} различитог од a. Никоје две особе a_{ij} се не познају, јер би у противном постојала особа која има три заједничка познаника са a. Скуп особа a_{ij}, $1 \leq i < j \leq r$, поклапа се са скупом особа које не познају a. Следи да је $n = 1+r+\binom{r}{2}$, а одавде је $r = (\sqrt{8n-7}-1)/2$. Дакле, сваке две особе из разматраног скупа имају исти број познаника. За $r = 2$ имамо да је $n = 4$. Нека је $r \geq 3$. Познаници особе a_{12} су a_1, a_2 и још $r-2$ особе из скупа који се састоји од $\binom{r-2}{2}$ особе a_{ij}, $3 \leq i < j \leq r$. Следи да је $r - 2 \leq \binom{r-2}{2}$, а одавде да је $r \geq 5$ и $n \geq 16$. Скуп од 16 особа $\{a, a_1, ..., a_5, a_{1,2}, a_{1,3}, ..., a_{4,5}$ међу којима се познају следећи парови

1. (a, a_1), $1 \leq i \leq 5$;
2. $(a_i, a_{ij}), (a_j, a_{ij})$, $1 \leq i < j \leq 5$;
3. (a_{ij}, a_{kl}), $1 \leq i < j \leq r$, $1 \leq k < l \leq r$, $\{i,j\} \cap \{k,l\} = \emptyset$,

задовољава услове задатка. Према томе, решење задатка је $n = 16$.

4. **Напомене**

Жири је задатке предложене на такмичењу класификовао по тежини на следећи начин: први - лак, други - лак, трећи - средње тежине, четврти - тежак.

Резултати наших ученика били су следећи:

Име ученика	1	2	3	4	Σ	медаља
Давидовић Милена	0	2	4	2	8	бронза
Ирић Игор	0	0	4	3	7	-
Каделбург Весна	1	1	3	3	8	бронза
Кртинић Ђорђе	0	2	2	0	4	-
Салом Игор	0	0	2	4	6	-
Тремл Мирослав	0	10	9	5	24	сребро
Σ	1	15	24	17	57	

Нове књиге

У овој рубрици, даваћемо приказе нових књига које би могле интересовати наше читаоце. Потребан услов за приказ књиге у нашем часопису је да издавач на адресу часописа пошаље три примерка књиге.

Р. Тошић, В. Вукославчевић: ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРИЈЕ БРОЈЕВА, изд. "АЛЕФ", Нови Сад, 1995, стр. 160.

Књига представља несвакидашње богат, јасан, методолошки уједначен текст, намењен врло широкој читалачкој публици, који читаоца систематски води кроз теорију бројева. Читалац се постепено упознаје са основним појмовима из теорије бројева, основном теоремом аритметике, аритметичким функцијама, простим и сложеним бројевима и основним методама за налажење целобројних решења неких једначина. Обрађен је основни део елементарне теорије бројева са применама, укључујући и најновије примене у теорији шифровања.

Аутори су успели да материју прикажу јасно и једноставно. Редослед теорема, последица и примера у оквиру сваког поглавља показује велико педагошко искуство и фини осећај за природан ток и развој математичких мисли и идеја. На низу места су наведене кратке биографије значајних математичара који су дали допринос развоју теорије бројева, што чини текст веома занимљивим за читање.

Разна домаћа и међународна такмичења из математике указују на чињеницу да решавање задатака из теорије бројева причињава приличне тешкоће нашим ученицима због непознавања неких основних теорема из елементарне теорије бројева. Ова књига може у великој мери помоћи да се те тешкоће превазиђу. Тврђења су поткрепљена низом примера, а дат је и велики број задатака (око 500 задатака), чије ће решавање сигурно допринети подизању нивоа математичке зрелости и развоју стваралачких способности ученика и читалаца уопште. За већину задатака су дати одговори, упутства за решавање, а за теже задатке и комплетна решења, тако да је књига врло погодна за самосталан рад. Међу задацима има и известан број таквих за чије је решавање потребно и коришћење рачунара, што овој књизи даје наглашену црту савремености.

На крају, за читаоце дајемо и неколико задатака узетих из разних поглавља књиге.

Задаци:

1. Одредити природан број b такав да је у систему са основом b број 792 дељив са 297.

2. Одредити природан број b мањи од 100 такав да је у систему са основом b број 2101 потпун квадрат.

3. Доказати да између бројева n и $n!$ постоји бар један прост број, за $n > 2$. На основу тога извести доказ да има бесконачно много простих бројева.

4. (а)Колико има непарних бројева n мањих од 10^9, таквих да се правилан n–угао може конструисати шестаром и лењиром?

   (б) Колико има природних бројева мањих од 1000, таквих да се правилан n–угао може конструисати шестаром и лењиром?

5. Запис природног броја n у бинарном систему садржи r јединица. Доказати да је 2^{n-r} највећи степен двојке који је делитељ од $n!$.

6. Наћи најмањи природан број n са тачно

   (а) 1995 делитеља;

   (б) 1997 делитеља.

7. Нека је $\tau(n)$ број различитих делитеља броја n. Доказати да су бројеви $\tau(m^k)$ и k узајамно прости.

8. Нека је $\delta(n)$ производ свих делитеља броја n. Доказати да је $\delta(n) = \sqrt{n^{\tau(n)}}$.

9. Којих природних бројева има више у скупу природних бројева мањих од 1000: бројева са 8 или бројева са 9 делитеља?

10. Колико највише делитеља може имати природан број мањи од 10^9?

11. Доказати да је број $2^{1997\cdot1996} - 1$ дељив са 1997^2.

12. Доказати да се у декадном запису броја $2^{4882812514}$ појављује 10 узастопних нула.

13. (а) Доказати да је број $2^{341} - 2$ дељив са 341.

    (б) Доказати да има бесконачно много сложених бројева n, таквих да је број $2^n - 2$ дељив са n.

др Раде Дорословачки
Факултет техничких наука
Нови Сад

Новости из науке

ДОКАЗАНА ЈЕ ФЕРМАОВА ВЕЛИКА ТЕОРЕМА ?

др Ратко Тошић, Природно-математички факултет, Нови Сад

Прошла година донела је једно од најважнијих открића у новијој историји математике. Коначно је решен проблем који је у 17. веку поставио француски математичар Пјер Ферма. Историја овог проблема, међутим, сеже у много даљу прошлост.

Пример проблема из најраније фазе теорије бројева је *Питагорин проблем.* Као што знамо, за дужине страница правоуглог троугла важи једнакост $z^2 = x^2 + y^2$, где је z дужина хипотенузе, x и y дужине катета, што нам омогућава да одредимо дужину једне странице правоуглог троугла ако су познате друге две. Ова чињеница била је позната Вавилонцима скоро 2000 година пре Питагоре. Грци су са посебним интересом изучавали правоугле троуглове код којих су све три дужине страница цели бројеви. Такви троуглови називају се *Питагорини троуглови* а одговарајуће тројке бројева (x, y, z) су *Питагорине тројке.* На пример, $(3, 4, 5)$ и $(5, 12, 13)$ су Питагорине тројке бројева.

Да ли је број Питагориних тројки бесконачан?

Одговор на ово питање је, очигледно, потврдан. Наиме, лако се види да ако је (x, y, z) Питагорина тројка, онда је за сваки природан број k, тројка (kx, ky, kz), такође, Питагорина. Тако, на пример, из Питагорине тројке $(3, 4, 5)$, добијамо бесконачан низ Питагориних тројки $(6, 8, 10)$, $(9, 12, 15), \ldots$

Питагорин проблем припада типу Диофантових проблема. Таквим проблемима се бавио грчки математичар Диофант, који је живео у Александрији у трећем веку наше ере. Диофантово велико дело је "Аритметика". Састојала се од 13 књига, од којих је шест сачувано. У суштини, то је колекција примера једначина различитих степена, где је основни проблем да се нађу целобројна или рационална решења. Диофантова дела су представљала полазну тачку за истраживања Фермаа, Ојлера, Гауса и других математичара у области теорије бројева.

У овој истој свесци, у чланку "Прости бројеви", наведени су укратко неки подаци о Пјеру Фермау. Ферма је практиковао да на маргинама свог примерка Диофантове "Аритметике" записује белешке које су се односиле на проблеме из теорије бројева којима се бавио. Те белешке су често имале облик тврђења без доказа. Сва та тврђења су касније, од стране других математичара потврђена као коректна, уз малобројне изузетке.

У Диофантовој књизи наведен је и следећи проблем:

За сваки позитиван цео број a, једначина $x^2 + y^2 = a^2$ *има бесконачно много рационалних решења.*

На маргини, поред овог Диофантовог текста, Ферма је записао следећи коментар:

Међутим, немогуће је представити куб као збир два куба, четврти степен као збир два четврта степена, и уопште, било који степен већи од другог као збир два таква степена. Нашао сам заиста диван доказ овог тврђења, али на маргини нема довољно места да га запишем.

Другим речима, Ферма тврди да Диофантова једначина

$$x^n + y^n = z^n,$$

где је n цео број већи од 2, нема позитивних решења. У Фермаовој заоставштини није пронађен доказ о коме је говорио Ферма. Заувек је остала загонетка да ли је и каквим доказом располагао Ферма.

Овај проблем сада је познат под именом *Фермаова велика теорема.* Најбољи математичари су у току последњих 300 година покушавали да докажу Фермаово тврђење, примењујући разне приступе. У тим покушајима добијени су многи важни и интересантни резултати из теорије бројева. За $n = 3$ и $n = 4$, тврђење је доказао Ојлер, за $n = 5$, Дирихле.

Велики напредак у правцу решења Фермаовог проблема направио је познати немачки математичар Кумер (Ernst Eduard Kummer, 1810–1893). Доказао је да Фермаово тврђење важи за све природне бројеве $n \leq 100$; за тај резултат добио је награду Париске академије наука. Кумер је, 1843. године чак саопштио решење комплетног проблема, али је Дирихле указао на грешку у његовом доказу. Без обзира на то, може се рећи да је највећи прогрес у правцу решавања Фермаовог проблема који су учинили разни математичари текао у складу са Кумеровим идејама. Од почетка рачунарске ере, упоредо са покушајима решавања Фермаовог проблема, вршена су и проверавања помоћу рачунара. На тај начин је Фермаово тврђење, било проверено за све природне бројеве $n \leq 150000$.

Фермаов проблем привукао је у овом веку пажњу и многих нематематичара, делом захваљујући и чињеници да је 1908. године Немац Волфскел (Wolfskehl) завештао награду од 100000 марака ономе ко први реши проблем. Последица тога била је поплава "решења" од стране аматера, од којих многи нису ни схватили суштину проблема. Интересовање аматера је спласнуло након што је поменута сума обезвређена хиперинфлацијом која је у Немачкој наступила после Првог светског рата. Коначно је, прошле године, као резултат сарадње већег броја математичара, Фермаова велика теорема доказана.

Комплетан доказ Фермаове велике теореме још није публикован у неком научном часопису. Због тога се не може тврдити да је он у потпуности изложен суду научне јавности. Због тога је и онај знак питања у наслову овог чланка. Међутим, имена математичара који су били ангажовани у целом подухвату доказивања теореме и његовог дотеривања, уливају наду да је овај пут заиста у питању завршни чин једне математичке драме.

Практикум

ЗАДАЦИ СА ПРИЈЕМНИХ ИСПИТА У 1994. ГОДИНИ

др Раде Дорословачки, Факултет техничких наука, Нови Сад

ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА У НОВОМ САДУ

1. Наћи комплексан број z_0, који образује аритметичку прогресију са решењима квадратне једначине $z^2-4iz-7-4i=0$.

2. Решити неједначину $\frac{|x+2|}{x^2-3x+2}\leq 1$.

3. Одредити реални параметар m, за који је сума квадрата корена једначине $x^2-mx+m-3=0$, најмања.

4. Решити једначину $\sin x=\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$.

5. Решити једначину $2^{\sqrt{-x^2+2x+3}}=4^{x-2}$.

6. Решити једначину $\log_{32}2x-\log_8 4x+\log_2 x=3$.

7. Ако су D, E и F редом средине страница BC, CA и AB троугла ABC, доказати векторске једнакости $2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=2\overrightarrow{FC}$ и $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$.

8. Наћи $n\in N$, тако да је збир коефицијената другог и трећег члана у развоју $(\sqrt[5]{x^2}+\frac{1}{\sqrt[6]{x}})^n$, једнак 153. За то n, одредити члан који не садржи x.

9. Нека је $ABCD$ правилни тетраедар ивице a. Ако је $k(O,R)$ описана, а $k(O,r)$ уписана сфера датог тетраедра, наћи однос $R:r$.

10. Нека су t_1 и t_2 заједничке тангенте параболе $y^2=4x$ и хиперболе $3x^2-4y^2=12$. Ако t_1 и t_2 додирују параболу редом у тачкама A и B, а хиперболу редом у тачкама C и D, наћи површину четвороугла $ABCD$.

РЕШЕЊА:

1. Нека су $z_1=a+ib$ и $z_2=c+id$ решења дате једначине. Тада по Виетовим правилима имамо да је $a+c+i(b+d)=4i$, $ac-bd+i(ad+bc)=-7-4i$. Одавде следе једначине $c=-a$, $d=4-b$, $ac-bd=-7$, $ad+bc=-4$. Заменом прве две у последње две једначине следи $a^2+4b-b^2=7$ и $a(b-2)=2$. Заменом $a=\frac{2}{b-2}$ у $a^2+4b-b^2=7$ добија се $4+(4b-b^2)(b^2-4b+4)=$

$7(b^2-4b+4)$, одакле сменом $4b-b^2=t$ следи $t^2-11t+24=0 \Leftrightarrow t=8 \vee t=3$. Једино за $t=3$ добијамо реалне вредности за b, тј. $b=1$ или $b=3$. Значи, једина решења даје једначине су $z_1=-2+i$ и $z_2=2+3i$. Како бројеви z_0, z_2, z_2 чине аритметичку прогресију, то је бар један од њих аритметичка средина она друга два, па имамо три решења за z_0, односно $z_0'=\frac{1}{2}(z_1+z_2)=2i$, $z_0''=2z_1-z_2=-6-i$, $z_0'''=2z_2-z_1=6+5i$.

2. Нека је R_1 скуп решења неједначине над доменом $x\in[-2,\infty)$, а R_2 скуп решења над доменом $x\in(-\infty,-2)$ и решење задатка ће бити $R=R_1\cup R_2$. Значи $x\in R_1 \Leftrightarrow (\frac{x+2}{x^2-3x+2}\le 1 \wedge x\ge -2) \Leftrightarrow (\frac{x(-x+4)}{(x-1)(x-2)}\le 0 \wedge x\ge -2) \Leftrightarrow$ $x\in[-2,0]\cup(1,2)\cup[4,\infty)$, док је $x\in R_2 \Leftrightarrow (\frac{-(x+2)}{x^2-3x+2}\le 1 \wedge x<-2) \Leftrightarrow$ $(\frac{x^2-2x+4}{(x-1)(x-2)}\ge 0 \wedge x<-2) \Leftrightarrow x\in(-\infty,-2)$, па је $R=R_1\cup R_2=(-\infty,-2)\cup[-2,0]\cup(1,2)\cup[4,\infty)=(-\infty,0]\cup(1,2)\cup[4,\infty)$.

3. Како је $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=m^2-2(m-3)=(m-1)^2+5$, то је $m=1$, јер најмања вредност променљиве ненегативне величине је нула.

4. $\sin x=\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \Leftrightarrow \sin x\ge 0 \wedge \sin^2 x=\frac{1+\cos x}{2} \Leftrightarrow \sin x\ge 0 \wedge 2(1-\cos^2 x)=1+\cos x \Leftrightarrow \sin x\ge 0 \wedge 2\cos^2 x+\cos x-1=0 \Leftrightarrow \sin x\ge 0 \wedge (\cos x=-1 \vee \cos x=\frac{1}{2}) \Leftrightarrow x\in\{(2k+1)\pi | k\in Z\} \vee x\in\{\frac{\pi}{3}+2k\pi | k\in Z\}$.

5. $2^{\sqrt{-x^2+2x+3}}=4^{x-2} \Leftrightarrow 2^{\sqrt{-x^2+2x+3}}=2^{2x-4} \Leftrightarrow \sqrt{-x^2+2x+3}=2x-4 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (2x-4\ge 0 \wedge 5x^2-18x+13=0 \wedge -x^2+2x+3\ge 0) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x\ge 2 \wedge x\in\{1,\frac{13}{5}\} \wedge x\in[-1,3]) \Leftrightarrow x=\frac{13}{5}$.

6. $\log_{32}2x-\log_8 4x+\log_2 x=3 \Leftrightarrow \log_{2^5}2x-\log_{2^3}4x+\log_2 x=3 \Leftrightarrow \frac{1}{5}\log_2 2x-\frac{1}{3}\log_2 4x+\log_2 x=3 \Leftrightarrow 3(1+\log_2 x)-5(2+\log_2 x)+15\log_2 x=45 \Leftrightarrow 13\log_2 x=52 \Leftrightarrow \log_2 x=4 \Leftrightarrow x=16$.

7. а) $2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}=\vec{0}+2\overrightarrow{FB}+2\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{FC}$

б) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA})+(\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB})=$
$=\frac{3}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})=\frac{3}{2}\cdot\vec{0}=\vec{0}$.

8. $\binom{n}{1}+\binom{n}{2}=153 \Leftrightarrow n=17$, а члан развоја бинома чији редни број је $k+1$ износи $T_{k+1}=\binom{n}{k}a^kb^{n-k}=\binom{17}{k}(x^{\frac{2}{5}})^k(x^{-\frac{1}{6}})^{17-k}=\binom{17}{k}x^{\frac{17k-85}{30}}$. Члан који не садржи x је за $k=5$, тј. шести члан $T_6=\binom{17}{5}$ је тражени члан.

9. Ако је H висина тетраедра, тада је $(\frac{a\sqrt{3}}{3})^2+H^2=a^2$, тј. $H=\frac{a\sqrt{6}}{3}$. Како је $R=H-r$ то је $(\frac{a\sqrt{6}}{3}-r)^2=r^2+\frac{a^2}{3}$ тј. $r=\frac{a\sqrt{6}}{12}$, па је $R:r=3$.

10. Ако је $y=kx+n$ заједничка тангента, тада дискриминенте $D_1=16(1-kn)$ и $D_2=48(n^2-4k^2+3)$ квадратних једначина које се добијају заменом $y=kx+n$ у једначине параболе и хиперболе морају да су једнаке нули. Одатле следи да су заједничке тангенте $y=\pm(x+1)$, па имамо $A(1,2)$, $B(1,-2)$, $C(-4,-3)$ и $D(-4,3)$ и тражена површина је $P=25$.

ТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТИ, МАТЕМАТИЧКИ, ФИЗИЧКИ И ФАКУЛТЕТ ЗА ФИЗИЧКУ ХЕМИЈУ У БЕОГРАДУ

1. јули 1994.

1. Израз $(81^{-2^{-2}}):(81^{(-2)^{-2}})$ има вредност:
   А) 3^8; Б) 3^{-8}; В) 3^{-5}; Г) 3^{-2}; Д) 1.

2. Дат је правоугли троугао ABC са правим углом код темена C. Ако је дужина висине CC' из темена C једнака $\sqrt{\frac{2}{3}}$ и дужина одсечка $C'B$ једнака $\frac{2}{\sqrt{3}}$, тада је полупречник описане кружнице око троугла ABC једнак:
   А) 1; Б) $\frac{2}{3}$; В) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; Г) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; Д) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Дата је једначина $(k^2-1)x+k-1=0$ (k је реалан број) и искази:
   I За $k=1$, дата једначина има бесконачно много решења. II За $k=-1$, дата једначина има више од једног решења. III За $k\notin\{-1,1\}$, дата једначина има јединствено решење.
   Тачни су:
   А) Само I и III; Б) Само I и II; В) Сви искази; Г) Само II; Д) Само I.

4. Ако је $f(2x-1)=x$, тада је $f(f(x))$ једнако:
   А) $(2x-1)^2$; Б) x^2; В) $\frac{x-3}{4}$; Г) $2x-1$; Д) $\frac{x+3}{4}$.

5. Растојање центра кружнице $x^2+y^2+2x-4y+4=0$ од тачке $M(-1,2)$ је:
   А) 0; Б) -1; В) 1; Г) $\sqrt{2}$; Д) 2.

6. Нека је S скуп свих бројева x_k дефинисаних са $x_k=i^k+i^{-k}$, где је k природан број а $i^2=-1$. Скуп S има:
   А) 1 елемент; Б) 4 елемента; В) Више од 4 елемента; Г) 2 елемента; Д) 3 елемента.

7. Однос висина два правилна тетраедра је $1:2$, а ивица мањег тетраедра је $a=\sqrt{6}$. Површина већег тетраедра једнака је:
   А) $24\sqrt{3}$; Б) $30\sqrt{3}$; В) $12\sqrt{3}$; Г) $16\sqrt{3}$; Д) $20\sqrt{3}$.

8. Неједнакост $\frac{5-2x}{x^2-6x+8}\geq 1$ тачна је ако и само ако x припада скупу:
   А) $[1,3]$; Б) $(-\infty,2)\cup[\frac{5}{2},4)$; В) $[1,2)\cup[3,4)$; Г) $(0,2)\cup(3,4]$; Д) $[1,2)\cup[3,5)$.

9. Најмања вредност функције $f(x)=\cos x+\sin x$ је:
   А) $-\sqrt{2}$; Б) $-\sqrt{3}$; В) 0; Г) -1; Д) -2.

10. Ако је $\log_{10}5=a$, $\log_{10}3=b$, тада је $\log_{30}8$ једнако:
    А) $\frac{3a+1}{1-b}$; Б) $\frac{3(1-a)}{1+b}$; В) $\frac{3(a+1)}{1-b}$; Г) $\frac{3(1-a)}{b-1}$; Д) $\frac{2-a}{1+b}$.

11. Број рационалних чланова у развоју степена бинома $(\sqrt{6}+\sqrt[3]{3})^{1994}$ је:
    А) 333; Б) 334; В) 330; Г) 331; Д) 332.

12. Број решења (x, y) система једначина $x + y = 3$, $|x|^{x^2-y^2-6} = 1$:
А) 4; Б) 1; В) 3; Г) 0; Д) 2.

13. Дате су тачке $A(0, a)$ и $B(0, b)$, $0 < a < b$. Ако се из тачке $C(x, 0)$, $x > 0$, дуж AB види под максималним углом, тада је x једнако:
А) $\sqrt{b(b-a)}$; Б) $\sqrt{ab}$; В) ab; Г) $\frac{a+b}{2}$; Д) $\sqrt{a(b-a)}$.

14. Ако су x_1, x_2 и x_3 решења једначине $125x^3 - 64 = 0$, тада је $x_1x_2x_3 - (x_1 + x_2 + x_3)$ једнако:
А) $\frac{8}{25}$; Б) $-\frac{64}{125}$; В) 0; Г) $\frac{125}{64}$; Д) $\frac{64}{125}$.

15. Збир $tg\, 9^o + tg\, 81^o + tg\, 117^o + tg\, 153^o$ једнак је:
А) $-\frac{13\sqrt{3}}{5}$; Б) -3; В) 1; Г) 4; Д) $3\sqrt{3}$.

16. Дат је полином $P(x)$ степена $n(n \geq 3)$. Ако је остатак дељења $P(x)$ са $x-1$ једнак 1, а остатак дељења $P(x)$ са x^2+1 једнак $2+x$, онда је остатак дељења $P(x)$ са $(x-1)(x^2+1)$ једнак:
А) $2 + x$; Б) $x^2 + x$; В) $-x^2 + x + 1$; Г) $3 + x$; Д) $x^2 - x + 2$.

17. Нека је p цео број и $\alpha \in (0, \frac{\pi}{4}]$. Ако су $x_1 = \cos\alpha$ и $x_2 = \sin\alpha$ решења једначине $18x^2 - 6(p+3)x + p(p+6) = 0$ број уређених парова (p, α) је:
А) 3; Б) већи од 3; В) 0; Г) 1; Д) 2.

18. Нека је S скуп свих реалних бројева x за које важи
$\log_{tgx} \sin x - \log_{ctgx} \cos x \geq 3$ и $0 \leq x \leq 2\pi$.
Тада је, за неке реалне бројеве a, b, $c(a < b < c)$, скуп S облика:
А) $[a, b)$; Б) (a, b); В) $(a, b) \cup (b, c)$; Г) $[a, b]$; Д) $[a, b) \cup (b, c]$.

19. У орману се налази 10 различитих пари ципела. На колико начина можемо изабрати 4 ципеле тако да међу изабраним ципелама буде бар један пар исте врсте?
А) 1440; Б) 2100; В) 3360; Г) 1485; Д) 1530.

20. Број решења једначине $2\cos^2 \frac{x^2+x}{3} = 3^x + 3^{-x}$ је:
А) 3; Б) већи од 3; В) 0; Г) 1; Д) 2.

Задаци 1-5 вреде по 3 поена, задаци 6-10 по 4 поена, задаци 11-14 по 5 поена, задаци 15-17 по 7 поена и задаци 18-20 по 8 поена. Погрешан одговор доноси -10% од броја поена за тачан одговор. У случају заокруживања више од једног одговора, као и незаокруживања ниједног одговора, добија се -1 поен.

ОДГОВОРИ:

1) Г; 2) В; 3) А; 4) Д; 5) А; 6) Д; 7) А; 8) В; 9) А; 10) Б; 11) А; 12) В; 13) Б; 14) Д; 15) Г; 16) В; 17) Г; 18) А; 19) Г; 20) Г.

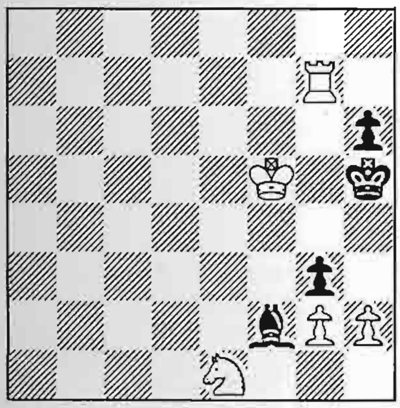
Шаховска страна

ИЗ ЛОЈДОВОГ СТВАРАЛАШТВА

Када се поведе реч о шаховским проблемима немогуће је заобићи име Самјуела Лојда. Тај генијални американац оставио је за собом праву ризницу како шаховских, тако и математичких проблема.

Следећа прича анегдотског садржаја сматра се ремек делом шаховске композиције.

1713. године за време турске опсаде Бендера краљ Карло XII играјући шах са својим министром Гротхаузеном доспео је у следећу позицију.

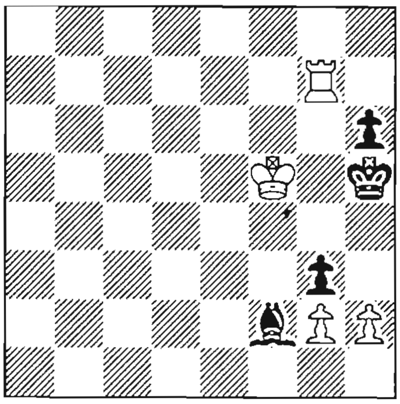


Угледавши ефектну варијанту: **1. ♖g3** (Са претњом 2. ♖h3 и 3. g4 мат), **♗g3 2. ♘f3, ♗~ 3. g4 мат,** Карло је објавио мат у 3 потеза.

У то време играч који би најавио мат био је дужан да покаже да мат следи у обећаном или мањем броју потеза, без обзира на отпор противника.

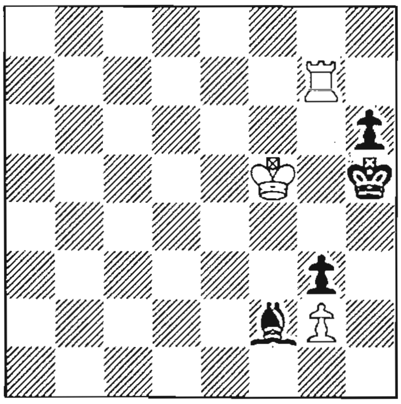
У противном, губио би партију без обзира на позицију.

И баш се Карло спремао да повуче први потез, кад кроз прозор улете турско тане и са табле однесе белог скакача. Настала је позиција



Збуњени министар је још увек трагао за другим скакачем, кад Карло примети: "Не морате га тражити. И без њега је мат, али у 4 потеза." Имао је у виду следеће, ништа мање ефектно матирање: **1. hg3** (Претња је 2. ♖g4 и 3. ♖h4 мат.), **♗e3 2. ♖g4, ♗g5** (Црни се грчевито брани али ...) **3. ♖h4!!, ♗h4 4. g4 мат.**

Карло је управо посегао за h-пешаком кад у просторију улете друго тане и однесе баш тог пешака. На табли је остала позиција



Министар се задовољно смешкао, али Карло се није дао збунити. Мирно је додао: "Данас стварно немате среће. И без овог пешака је мат али сад у 5 потеза".

Овога пута спољашњи фактори нису успели да га ометy у демонстрацији своје блиставе замисли.

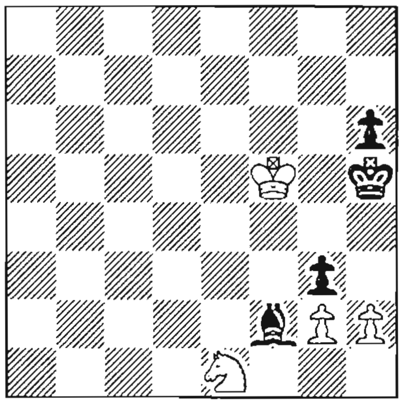
1. ♖b7! (Једини потез којим се бели топ брзо пребацује на h-линију. Сви остали покушаји одлажу матирање за бар један потез.), **♗e3 2. ♖b1, ♗g5 3. ♖h1, ♗h4 4. ♖h2!!, gh2 5. g4 мат.**

Истина, црни може да "прегради" h-линију и на пољу h2, али ни то не помаже. Наиме, после **1. ... , ♗g1 2. ♖b1, ♗h2 3. ♖c1!, ♔h4** (Разуме се, ништа не вреди 3. ... , ♗g1 због 4. ♖g1, ♔h4 5. ♖h1 мат.) **4. ♔g6, ~ 5. ♖e4 мат.**

"А шта би се десило да је тане у почетној позицији однело белог топа?"

"Тада би следио мат у 6 потеза", као из топа је одговорио Карло XII.

Вероватно вас интересује како? Е, то препуштамо вама драги читаоци. Дакле, задатак је



Мат у 6 потеза

Решења слати на адресу редакције са назнаком за "Шаховску страну"

10 најуспешнијих решавача биће награђени шаховском литературом издавачке куће **"ШАХОВСКИ ИНФОРМАТОР", Београд, Француска 31.**

Војислав Петровић