U N I V E R Z I T E T   U   B E O G R A D U

Dušan R. Georgijević

P R O S T O R I $H^p(e)$ I $B^p(E)$

A N A L I T I Č K I H   F U N K C I J A

(Doktorska disertacija)

BEOGRAD, avgusta 1979.

U V O D

Rezultati koji se izlažu u ovoj disertaciji mogu da se podele na dve grupe. Prvu grupu bi činili rezultati o prostorima $H^p(e)$, a drugu — o prostorima $B^p(E)$. Same klase $\{H^p(e)\}$ i $\{B^p(E)\}$ su inače u tesnoj medjusobnoj vezi. Zajedničko za obe grupe rezultata je prožimanje teorije analitičkih funkcija i funkcionalne analize. Ovo prožimanje srećemo i u širem kontekstu: ono je karakteristično za (noviju) teoriju prostora analitičkih funkcija. Naime, radi se o primeni pojmova i rezultata funkcionalne analize pri izučavanju nekih klasa analitičkih funkcija. Pritom tačka gledišta funkcionalne analize dovodi do formulisanja novih zanimljivih problema u teoriji analitičkih funkcija. Sem toga, primena funkcionalne analize dovodi do elegantnijih i jednostavnijih dokaza mnogih stavova o analitičkim funkcijama, te tako omogućuje i njihovo uopštavanje.

Grupu rezultata o prostorima $H^p(e)$ možemo smatrati prilogom teoriji H^p - prostora. Klasa prostora $\{H^p(e)\}$ izučava se kao zaseban objekt (uz oslanjanje na teoriju H^p-prostora), ali se navode i teoreme o razlaganju H^p-prostora pomoću $H^p(e)$-prostora, tako da rezultati o $H^p(e)$-prostorima predstavljaju, u krajnjoj liniji, rezultate o H^p-prostorima. Teorija H^p-prostora nastala je dvadesetih godina ovog veka. Značajna imena u tom ranom periodu su: G. H. Hardy (H u oznaci H^p potiče upravo od ovog imena), J. E. Littlewood, Н. И. Привалов, F. Riesz, M. Riesz, В. И. Смирнов, G. Szegö. U prvom periodu razvitka teorije težište je bilo na ispitivanju svojstava pojedinačnih funkcija klase H^p (granična svojstva,

svojstva glatkosti, brzina rasta i sl.). Razvitak funkcionalne analize podstakao je novo interesovanje za klase H^p kao linearne prostore. Vrlo značajnu ulogu u tome odigrali su Beurling-ovi rezultati iz 1949-te, o invarijantnim potprostorima. Sem A. Beurling-a, u ovom drugom periodu razvitka teorije H^p-prostora treba spomenuti imena: L. Carleson, H. Helson, D. Lowdenslager, S. Havinson, H. S. Shapiro, J. Wermer, P. L. Duren, E. Hille, J. D. Tamarkin i dr.

Problematika na koju se odnosi druga grupa rezultata u ovoj disertaciji razvija se u toku poslednjih 20 godina, a ja se bavim ovim problemima osam godina. Ta druga grupa rezultata predstavlja uopštenje de Branges-ovih rezultata o prostorima $\mathcal{H}(E)$. Klasa $\{B^p(E)\}$ šira je od klase de Branges-ovih prostora $\{\mathcal{H}(E)\}$, i to u dva pravca: prostori $\mathcal{H}(E)$ su prostori tipa $B^p(E)$, pri čemu je $p = 2$ i E je cela funkcija. Prostori $\mathcal{H}(E)$ pojavili su se pri uopštavanju Paley-Wiener-ove teoreme koja karakteriše Fourier-ove transformacije na konačnom intervalu $(-a,a)$ kao cele funkcije eksponencijalnog tipa $(\leqslant a)$ čiji je kvadrat integrabilan duž realne ose. Naime, takve funkcije obrazuju jedan prostor tipa $\mathcal{H}(E)$, pri čemu je $E(z) = e^{-iaz}$. Teorija prostora $\mathcal{H}(E)$, koju je razvio de Branges, predstavlja jedno uopštenje Fourier-ove analize. Medjutim, prostori $\mathcal{H}(E)$ imaju i druge primene, kao, naprimer, konstruisanje mera sa datim nosačem i sa specijalnim svojstvima, konstruisanje celih funkcija sa nulama u datom skupu i sa specijalnim svojstvima, aproksimacija polinomima ili celim funkcijama eksponencijalnog tipa itd.

Materijal izložen u ovoj disertaciji rasporedjen je u tri glave, a svaka glava se deli na odeljke. Numeracija definicija, teorema, lema i relacija zasebna je za svaki odeljak i svaku glavu, s tim što se upotrebljavaju dva broja: prvi označava redni broj u okviru odeljka, a drugi redni broj odeljka u okviru kojeg se numeracija sprovodi. Naprimer, teorema 1.2. je prva teorema u drugom odeljku (iste glave u kojoj se na tu teoremu pozivamo). Ako citiramo teoremu iz neke prethodne glave, tada uz numeraciju teoreme navodimo i u kojoj je glavi: naprimer teorema 1.2. gl. I. Sem toga, za sve poznate definicije i stavove navedeni su izvori pri formulisanju, sem u glavi I, a na mnogim mestima su date i detaljnije napomene u tom smislu. Za one definicije i stavove koji su novi (bar prema našem uvidu u literaturu), razume se, nema naznaka izvora pri formulisanju, ali ponegde ima napomena o njihovom nastanku, o vezi i analogiji sa poznatim rezultatima i sl. Izuzetno, definicije, teoreme i leme u glavi I kod kojih nije naveden izvor ne treba smatrati novim (to su adaptacije, jednostavne kombinacije ili direktne posledice već poznatih rezultata).

U kratkoj prvoj glavi navode se neki poznati rezultati (Cauchy-eva teorema za H^p (reproduktivno jezgro), teorema M. Riesz-a, faktorizacija H^p-funkcija, Phragmén-Lindelöf-ov princip) koji se koriste u narednim dvema glavama. Formulacije teorema su prilagodjene kontekstu, što u pojedinim slučajevima iznači navodjenje varijante rezultata koja u literaturi nije istaknuta. Tako, naprimer, teorema o projektovanju iz L^p na H^p (teor. 1.2.), koja se oslanja na teoremu M. Riesz-a o harmonijskim funkcijama, dokazana je u literaturi samo za slučaj H^p nad jediničnim diskom, a ovde je formulisana za H^p nad gornjom poluravni, jer se ta varijanta kasnije koristi.

U drugoj glavi definišemo i izučavamo prostore $H^p(e)$. Treba ovde odmah napomenuti da smo se ograničili na izlaganje o prostorima $H^p(e)$ samo nad gornjom poluravni uglavnom zbog toga što su i de Branges-ovi prostori takvog tipa. Analogni rezultati važe, medjutim, i za prostore nad jediničnim diskom. Posle definisanja prostora $H^p(e)$, u prvom odeljku se utvrdjuju njihova osnovna svojstva. Dokazuje se da je $H^p(e)$ potprostor od H^p, da $H^p(e)$ ima reproduktivno jezgro (teor. 1.1.), utvrdjuje se da su prostori $H^p(e)$ i $H^q(e^{*-1})$ $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$ u izvesnom smislu uzajamno dualni (teor. 2.1.) i da je, pod izvesnim uslovom, unija $\bigcup_{n=1}^{\infty} H^p(E_n)$ $\left(E_n=\prod_{k=1}^{n} e_k\right)$ svuda gusta u H^p (teor. 4.1.). Na kraju je ukratko obradjen slučaj $p=2$. Glavni primeri prostora $H^p(e)$ dobijaju se kad je operator e množenje nekom funkcijom $e(z)$. Izlaganje u odeljcima 2. i 3. odnosi se upravo na ovaj slučaj. U drugom odeljku se, posle karakterisanja funkcije $e(z)$ (lema 1.2.), dokazuje da su funkcije f iz $H^p(e)$ faktički regularne i izvan gornje poluravni, tačnije u tačkama skupa C u kom je funkcija e regularna, da ove funkcije imaju iste rubne funkcije iz donje, kao i iz gornje poluravni, i da konvergencija po normi u $H^p(e)$ povlači ravnomernu konvergenciju unutar C (teor. 1.2.). Sem toga, u tom slučaju prostor H^p može (u izvesnom smislu ortogonalno) da se razloži pomoću potprostorâ $H^p(e_n)$: $H^p=\sum_{n=1}^{\infty}\oplus E_{n-1}H^p(e_n)$ (gde je $\{e_n\}$ niz unutrašnjih funkcija, $E_n=\prod_{k=1}^{n} e_k$, $E_o=1$), pod odredjenim uslovom (teor. 2.2.). Ovaj rezultat predstavlja preciziranje teoreme 4.1. za posmatrani slučaj. Specijalno, kad je $E_n=e^n$, uslov je uvek ispunjen i razlaganje važi. U odeljku

3. obradjeno je pitanje zatvorenosti jedne klase ortogonalnih sistema u $H^p(e)$, koji se jednostavno formiraju pomoću reproduktivnog jezgra (teor. 1.3.). Odeljak 4. posvećen je ekstremalnim problemima u $H^p(e)$ (u opštem slučaju). Dobijen je opšti rezultat o egzistenciji i jedinosti ekstremalne funkcije i ekstremalnog jezgra (teor. 1.4.), potpuno analogan poznatom rezultatu za H^p .

U trećoj glavi su obradjeni prostori $B^p(E)$. Definicija je data u prvom odeljku. Dokazano je takodje da je svaki prostor $B^p(E)$ izometrično izomorfan nekom prostoru $H^p(e)$ (teor. 1.1.). Odatle odmah izlazi da je $B^p(E)$ Banach-ov prostor, da su funkcije F iz $B^p(E)$ regularne u skupu $\mathcal{C}$ u kome je funkcija E regularna, da konvergencija po normi u $B^p(E)$ implicira ravnomernu konvergenciju unutar $\mathcal{C}$ (teor. 2.1.), da $B^p(E)$ ima reproduktivno jezgro (teor. 3.1.) itd. Dokazana je i teorema o zatvorenosti ortogonalnih sistema (teor. 5.1.), analogna teoremi 1.3. gl. II. Ova teorema predstavlja uopštenje jedne de Branges-ove teoreme. Na kraju odeljka dat je potreban i dovoljan uslov da neka dva prostora $B^p(E_1)$ i $B^p(E)$ imaju isto reproduktivno jezgro (teor. 6.1.). Po analogiji sa de Branges-ovim rezultatom o domenu množenja sa z u prostoru $\mathcal{H}(E)$, u drugom odeljku je i za $B^p(E)$ odredjen domen množenja sa z (teor. 1.2.), a onda je u istom smislu razmotreno i množenje sa $(z-s)^{-1}$, ako je s neki singularitet funkcije E (teor. 2.2.). Treći odeljak takodje sledi analogiju sa de Branges-ovim istraživanjima. Sem prenošenja de Branges-ovih rezultata na sve prostore $B^p(E)$ (teor. 1.3.), izvršeno je i dalje uopštavanje teoreme o funkcijama asociranim sa $B^p(E)$ (teor. 2.3.). Najvažniji rezultat treće glave sadržan je u četvrtom odeljku (teor. 2.4.). Polazi se od rešenja (A_t, B_t) jednog sistema integralnih jednačina, koji zavisi od parametra z, i posmatraju se prostori $B^p(E_t)$, $E_t = A_t - iB_t$. Uz odredjene pretpostavke, ispostavlja se da je za $s \leq t$ $B^p(E_s)$ topološki potprostor od $B^p(E_t)$ i da je $\langle F, G \rangle_t = \langle F, G \rangle_s$ za $F \in B^p(E_s)$, $G \in B^q(E_s)$. U slučaju $p = 2$ važi precizniji rezultat: $B^2(E_s)$ je Hilbert-ov potprostor od $B^2(E_t)$. Iz ovih rezultata može da se dobije kao specijalni slučaj jedna varijanta de Branges-ovih rezultata o familijama prostora $\mathcal{H}(E)$.

G L A V A I

U okviru ove glave navodimo osnovne oznake, definicije i poznate rezultate koje ćemo u daljem tekstu koristiti. Neke od spomenutih rezultata prilagodićemo potrebama izlaganja u narednim glavama.

§1. Skalarni proizvod, ortogonalnost

Obeležimo sa C^+ (C^-) otvorenu gornju (donju) poluravan kompleksne ravni: $C^{\pm} = \{ z \,/\, \operatorname{Im} z \gtrless 0 \}$, a sa R — realnu osu. Neka D bude oznaka za jedinični disk: $D = \{ z \,/\, |z| < 1 \}$, a U za jedinični krug: $U = \{ z \,/\, |z| = 1 \}$. Sa p ćemo uvek označavati proizvoljan broj veći od 1, a sa q broj za koji je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Upotrebljavaćemo i uobičajenu oznaku $L^p(R)$, ili L^p, za prostor funkcija f merljivih na R i takvih da je

$$\|f\|_{L^p} = \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p dx \right\}^{1/p} < \infty .$$

(Pritom svake dve funkcije iz L^p koje se poklapaju skoro svuda na R (skraćeno: s.s. na R) smattramo identičnim.) Isto tako, sa $L^p(U)$ ćemo označavati prostor funkcija f merljivih na U i takvih da je

$$\|f\|_{L^p(U)} = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{1/p}$$

Umesto $\|f\|_{L^p}$ često ćemo pisati samo $\|f\|_p$ ili $\|f\|$, ako je jasno o kom se prostoru radi. Ako je τ neka funkcija merljiva na R, možemo da posmatramo i prostor τL^p obrazovan od funkcija f za koje je $\tau^{-1}f \in L^p$ i

$$\|f\|_{\tau L^p} \overset{def}{=} \|\tau^{-1}f\|_{L^p} .$$

Umesto $\|f\|_{\tau L^p}$ pisaćemo često samo $\|f\|_p$ ili $\|f\|_\tau$ ili $\|f\|$.

D e f i n i c i j a 1.1. Neka je $f \in \tau L^p$ i $g \in \tau L^q$. Skalarnim proizvodom funkcija f i g (u odnosu na τL^p i τL^q) nazivaćemo integral

$$\langle f , g \rangle_{\tau L^{p,q}} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}|\tau(x)|^{-2} dx .$$

Za $p = q = 2$ ovo je akalarni proizvod u Hilbert-ovom prostoru τL^2.

Polazeći od ovakve definicije skalarnog proizvoda možemo vršiti razmatranja analogna nekim razmatranjima u Hilbert-ovim prostorima.

D e f i n i c i j a 2.1. Ako je $\langle f,g \rangle = 0$, $f \in \tau L^p$, $g \in \tau L^q$, govorićemo da su funkcije f i g uzajamno ortogonalne : $f \perp g$. Ako je $f \in \tau L^p$, $M \subset \tau L^q$ i ako je $f \perp g$ za svako $g \in M$, govorićemo da je funkcija f ortogonalna na skup M : $f \perp M$. Najzad, ako je $N \subset \tau L^p$, $M \subset \tau L^q$ i $f \perp g$ za $f \in N$ i $g \in M$, reći ćemo da su skupovi N i M uzajamno ortogonalni.

D e f i n i c i j a 3.1. Neka je M (zatvoren) potprostor od L^p. Sve funkcije $f \in L^q$ koje su ortogonalne na M čine potprostor od L^q koji ćemo zvati anihilatorom potprostora M i obeležavati sa $M^\perp$.

Ovo je u saglasnosti sa definicijom anihilatora za potprostor proizvoljnog Banach-ovog prostora, s obzirom na reprezentaciju ograničenih linearnih (skraćeno: o. l.) funkcionala na L^p .

D e f i n i c i j a 4.1. Ako je M potprostor od τL^p i ako je $\{f_\nu\}_{\nu\in I}$ sistem vektora iz $M \cap \tau L^q$, takav da je $f_\nu \perp f_\mu$ za $\nu \neq \mu$ i $f_\nu \neq 0$ za $\nu \in I$, tada ćemo za sistem $\{f_\nu\}$ govoriti da je ortogonalan u M . Ako je taj sistem još i zatvoren u M , onda on čini ortogonalnu bazu u M .

T e o r e m a 1.1. Neka je M potprostor od L^p i neka je $\{M_\nu / \nu \in I\}$ kolekcija njegovih potprostora, totalno uredjena inkluzijom. Ako iz $g \in L^q$ i $g \perp \bigcup_\nu M_\nu$ uvek izlazi $g \perp M$, tada je

$$\overline{\bigcup_{\nu\in I} M_\nu} = M .$$

(Crta iznad skupa ovde označava adherenciju.)

D o k a z . Neka je $\overline{\bigcup_\nu M_\nu} = M^1$. M^1 je potprostor od L^p . Ako je $M^1 \not\equiv M$, tada, prema Hahn-Banach-ovoj teoremi, postoji o. l. funkcional Φ na M koji se anulira na M^1 , ali ne i na čitavom M . Na osnovu iste teoreme, Φ može da se produži na L^p . Ako se uzme u obzir i reprezentacija o. l. funkcionala na L^p , sledi da postoji funkcija $g \in L^q$ takva da je $g \perp M^1$, a da nije $g \perp M$, što je u protivrečnosti sa pretpostavkom. Dakle $M^1 \equiv M$, i teorema je dokazana.

T e o r e m a 2.1. Neka je M potprostor od L^p i neka je $\{f_\nu / \nu \in I\}$ skup funkcija iz M takav da iz $g \in L^q$ i $g \perp \{f_\nu\}$ uvek izlazi $g \perp M$. Tada je sistem $\{f_\nu\}$ zatvoren u M .

D o k a z . Skup $\{f_\nu\}$ može se totalno urediti, nekom relacijom $\prec$. Obeležimo sa M_μ zatvoreni lineal nad vektorima f_ν , $f_\nu \prec f_\mu$, pri čemu je $\mu \in I$. Tvrdjenje sada sledi direktno iz teoreme 1.1.

D e f i n i c i j a 5.1. Neka je M potprostor od L^p i neka je $\{M_n\}$ konačan ili beskonačan niz njegovih potprostora, takav da je $M_n \cap M_k = \{0\}$ za $n \neq k$. Ako se svaka funkcija $f \in M$ može na jedinstven način predstaviti u obliku $f = \sum_n f_n$, pri čemu je $f_n \in M_n$ za sve dopuštene vrednosti n i red $\sum f_n$ konvergira po L^p-normi, reći ćemo da je <u>M razložen na potprostore $\{M_n\}$</u> : $M = \sum_n \oplus M_n$. Pritom ćemo f_n zvati <u>projekcijom funkcije</u> f na potprostor M_n . Specijalno, kad je $M = M_1 \oplus M_2$, pisaćemo ponekad i $M_1 = M \ominus M_2$.

§ 2. <u>H^p - p r o s t o r i , r e p r o d u k t i v n o j e z g r o</u>

D e f i n i c i j a 1.2. ([1]) <u>Prostorom H^p nad C^+</u> zvaćemo skup funkcija f analitičkih u C^+ i takvih da za svako $y > 0$ postoji

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^p dx$$

i da je

$$\|f\|_{H^p} = \sup_{y>0} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^p dx \right\}^{1/p} < \infty .$$

D e f i n i c i j a 2.2. ([2]) <u>Prostorom H^p nad D</u> zvaćemo skup funkcija f analitičkih u D i takvih da je

$$\|f\|_{H^p} = \sup_{\rho<1} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{1/p} < \infty .$$

Kad budemo istovremeno govorili o H^p nad C^+ i o H^p nad D, pisaćemo $H^p(C^+)$ i $H^p(D)$. Pisaćemo samo H^p ako je reč o H^p nad C^+.

Poznato je da su $H^p(C^+)$ i $H^p(D)$ Banach-ovi prostori i da su izometrično izomorfni (npr. [3] str. 39. i str. 130.). Izomorfno preslikavanje Φ može da se dobije pomoću konformnog preslikavanja poluravni C^+ na disk D:

$$\varepsilon(z) = \frac{z-i}{z+i}, \quad z \in C^+,$$

čije ćemo inverzno preslikavanje obeležiti sa Ψ ($\Psi(z) = i\frac{1+z}{1-z}$, $z \in D$). Ako je $f \in H^p(C^+)$, tada neka je $\Phi f = g$, gde je

$$g(z) = f(\Psi(z)) \frac{(4\pi)^{1/p}}{(1-z)^{2/p}} \quad \text{i} \quad g \in H^p(D).$$

Može se primetiti da isto preslikavanje Φ ostvaruje izometrični izomorfizam i izmedju $L^p(R)$ i $L^p(D)$. Na osnovu toga, često ćemo, bez naročitog isticanja, primenjivati na $H^p(C^+)$ stavove koji su u literaturi formulisani samo za $H^p(D)$, ako se ovi pomoću Φ direktno prenose na $H^p(C^+)$.

Za svaku funkciju $f \in H^p$ postoji

$$\text{(1.2.)} \qquad \lim_{y \to 0+} f(x+iy) \stackrel{\text{def}}{=} F(x)$$

za s. s. $x \in R$ ([4]). Pritom je $F \in L^p$ i $\|F\|_{L^p} = \|f\|_{H^p}$ ([5]).

D e f i n i c i j a 3.2. Ako je f harmonijska funkcija u C^+, svaku funkciju F za koju važi (1.2.) za s. s. $x \in R$ zvaćemo <u>rubnom funkcijom</u> (iz C^+). Analogno definišemo i rubnu funkciju iz C^-.

Skup svih rubnih funkcija za funkcije iz H^p obeležavaćemo sa $\tilde{H}^p$.

Očigledno, svake dve rubne funkcije za jednu istu funkciju f poklapaju se s. s. na R . S druge strane, za svaku funkciju $F \in \tilde{H}^p$ postoji samo jedna funkcija $f \in H^p$ za koju važi (1.2.) ([4]). Sem toga, $\tilde{H}^p$ je potprostor od L^p i prostori $\tilde{H}^p$ i H^p su izometrično izomorfni. Imajući sve ovo u vidu, identifikovaćemo svaku funkciju iz H^p sa njenim rubnim funkcijama, a na osnovu toga i prostore $\tilde{H}^p$ i H^p . U tom smislu ćemo i smatrati da je H^p potprostor od L^p .

D e f i n i c i j a 4.2. Neka je M potprostor od L^p. Svaku funkciju $K_w(z)$ takvu da za fiksirano $w \in C^+$ važi $K_w \in L^q$ i da je, za $f \in M$ i $w \in C^+$,

$$f(w) = \langle F , K_w \rangle \tag{2.2.}$$

zvaćemo reproduktivnim jezgrom za M .

L e m a 1.2. Potprostor $M \subset L^p$ ima reproduktivno jezgro ako i samo ako je svaki funkcional $J_w : f \longrightarrow f(w)$, $f \in M$, $w \in C^+$, ograničen.

D o k a z . Ovo je direktna posledica teoreme o reprezentaciji o. l. funkcionala na L^p .

Pojam reproduktivnog jezgra definisan je u literaturi isključivo za Hilbert-ove prostore. Pritom se, što je i prirodno, od jezgra zahteva, sem svojstva (2.2.) , još i svojstvo $K_w \in M$ ([6]). Reproduktivno jezgro u Hilbert-ovom prostoru je jedinstveno (ako postoji). Analogon leme 1.2. važi za reproduktivno jezgro u Hilbert-ovom prostoru, što je očigledno.

D e f i n i c i j a 5.2. ([6]) Funkciju $K(w,z)$

definisanu na nekom skupu oblika $M \times M$ nazivamo pozitivno definitnom ako ima svojstvo da je

$$\sum_{k,j=1}^{n} \alpha_k \overline{\alpha_j} K(w_k, w_j) \geqslant 0$$

za proizvoljan niz brojeva $\{\alpha_k\}$ i za proizvoljan niz tačaka $\{w_k\}$ iz M.

L e m a 2.2. ([6]) Reproduktivno jezgro Hilbert-ovog prostora je pozitivno definitna funkcija.

Za H^p (jedno) reproduktivno jezgro je funkcija $k_w(z) = [2\pi i(\bar{w} - z)]^{-1}$, što sledi iz Cauchy-eve teoreme za H^p ([1]).

Neka je f funkcija definisana na nekom skupu M. Sa Sf ćemo obeležavati funkciju definisanu na skupu $SM = \{z / \bar{z} \in M\}$, za koju je $Sf(z) = \overline{f(\bar{z})}$, $z \in SM$. Ako je f regularna u nekoj tački $z \in M$, Sf je regularna u tački $\bar{z}$. Preslikavanje S primenjeno na funkcije iz L^p predstavlja jedan ograničeni ($\|S\| = 1$) antilinearni operator ($S(\alpha f + \beta g) = \bar{\alpha} Sf + \bar{\beta} Sg$), sa svojstvima $S^2 = I$ (I — identično preslikavanje u L^p) i $\langle Sf, Sg \rangle = \overline{\langle f, g \rangle}$, $f \in L^p$, $g \in L^q$.

L e m a 3.2. Sistem $\{k_w / w \in C^+\} \cup \{Sk_w / w \in C^+\}$ je zatvoren u L^p.

D o k a z . Ako je $g \in L^q$ i $g \perp \{Sk_w\}$, tada je $g \in H^q$ (npr. [7], str. 195.). Ako je i $g \perp \{k_w\}$, tada je $g(w) = \langle g, k_w \rangle = 0$ za $w \in C^+$, tj. $g = 0$. Sada ostaje još samo da se primeni teorema 2.1.

Poznata je teorema M. Riesz-a ([8]): ako su u i v uzajamno spregnute harmonijske funkcije u D, $v(0) = 0$, i ako je $u \in L^p(U)$, tada je $v \in L^p(U)$ i $\|v\| \leqslant A_p \cdot \|u\|$, pri čemu A_p ne zavisi od u. Polazeći od ove teoreme, izvešćemo teoremu o razlaganju L^p.

T e o r e m a 1.2. $L^p = H^p \oplus SH^p$. Ako je $f \in L^p$ i Pf je projekcija na H^p, onda je

$$\|Pf\| \leq C_p \cdot \|f\|, \tag{3.2.}$$

za neku konstantu C_p, koja ne zavisi od f.

D o k a z . Na osnovu leme 3.2., dovoljno je samo da dokažemo (3.2.) za slučaj kad je f linearna kombinacija funkcija k_w, $w \in C^+$, i funkcija $Sk_w, w \in C^+$. Neka je, dakle, $f = f_1 + f_2$, pri čemu je f_1 linearna kombinacija nekih funkcija k_w, a f_2 linearna kombinacija nekih funkcija Sk_w. Tada je $f_1 \in H^p$, $f_2 \in SH^p$. Neka je $0 < r < 1$ i D_r slika diska $|z| < r$ pri preslikavanju Υ. D_r je disk sadržan u C^+, sa centrom u nekoj tački ai $(a > 0)$ na imaginarnoj osi. Neka je ρ poluprečnik diska D_r i neka je $U_r = \{z \,/\, |z-ai| = \rho\}$. Posmatraćemo prostor $L^p(U_r)$, definisan analogno prostoru $L^p(U)$. Za normu u $L^p(U_r)$ upotrebljavaćemo oznaku $\|\cdot\|_{r,p}$. Teorema M. Riesz-a važi i za D_r, što se lako dokazuje pomoću preslikavanja $w = (z-ai)\rho^{-1}$, kojim se D_r preslikava na D. Razložimo f_1 i f_2 na sledeći način:

$$f_1 = 4a\pi \langle f, k_{ai}\rangle k_{ai} + F_1, \quad f_2 = 4a\pi \langle f, Sk_{ai}\rangle Sk_{ai} + F_2 .$$

Tada je $F_1 \perp k_{ai}$ i $F_2 \perp Sk_{ai}$, zbog $\langle f, k_{ai}\rangle = \langle f_1, k_{ai}\rangle$ i $\langle f, Sk_{ai}\rangle = \langle f_2, Sk_{ai}\rangle$. To znači da je $F_1(ai) = 0$ i $SF_2(ai) = 0$. Funkcija $F_2(x)$ je rubna funkcija za funkciju $\overline{SF_2(z)}$, $z \in C^+$, koja je harmonijska u C^+. Radi jednostavnosti označavanja, neka je $\overline{SF_2(z)} = F_2(z)$, $z \in C^+$. Tako možemo da produžimo u C^+ i funkciju f_2 , a na osnovu toga i f . Uvedemo li oznaku $F = F_1 + F_2$, možemo reći da su funkcije F i $G = i\cdot(F_2 - F_1)$ uzajamno harmonijski spregnute, a zbog $F_1(ai) = SF_2(ai) = 0$ važi i $G(ai) = 0$. Na restrikcije funkcija F i G na disk D_r može sada da se primeni teorema M. Riesz-a:

$$\|G\|_{r,p} \leqslant A_p\cdot\|F\|_{r,p} \ .$$

Prema tome,

$$(4.2.) \qquad \|F_1\|_{r,p} \leqslant (1 + A_p)\cdot 2^{-1}\cdot\|F\|_{r,p} \ .$$

S obzirom na produžavanje u C^+ , biće

$$F(z) = f(z) - 4a\pi\langle f \, , k_{ai}\rangle k_{ai}(z) - 4a\pi\langle f \, , Sk_{ai}\rangle \overline{k_{ai}(z)} \ .$$

Ako je $g \in H^p$, tada je, na osnovu Hardy-eve teoreme o monotonosti ([2]),

$$(2\pi\rho)^{1/p}\|g\|_{r,p} = r^{1/p}\|\phi g(rz)\|_{L^p(U)} \leqslant \|\phi g\|_{L^p(U)} = \|g\|_p \ .$$

Primenivši ovo na k_{ai} , a imajući u vidu i da je $\|k_{ai}\|_p = a^{(1/p)-1}\|k_i\|_p$, za $p > 1$, dobićemo

$$(2\pi\rho)^{1/p}\|F\|_{r,p} \leqslant (2\pi\rho)^{1/p}\|f\|_{r,p} + 2B_p\|f\|_p \ ,$$

gde je stavljeno $B_p = 4\cdot\|k_i\|_q\|k_i\|_p$. Na isti način se dobija i

$$(2\pi\rho)^{1/p}\|f_1\|_{r,p} \leqslant (2\pi\rho)^{1/p}\|F_1\|_{r,p} + B_p\|f\|_p \ .$$

Zajedno sa (4.2.) , ovo znači da je

$$(5.2.) \qquad (2\pi\rho)^{1/p}\|f_1\|_{r,p} \leqslant (2\pi\rho)^{1/p}(1 + A_p)\cdot 2^{-1}\|f\|_{r,p} +$$

$+ B_p\ (2 + A_p)\ \|f\|_p$.

Poznato je da za $g \in H^p(D)$ važi

$$\lim_{r \to 1-} \|g - g_r\|_{L^p(U)} = 0 ,$$

pri čemu je $g_r(z) = g(rz)$, $z \in D$ ([5]) . Važiće, očigledno, i

(6.2.) $$\lim_{r \to 1-} \|g - r^{1/p} g_r\|_{L^p(U)} = 0 ,$$

odakle se dobija

$$\lim_{r \to 1-} (r^{1/p}\|g_r\|_{L^p(U)}) = \|g\|_{L^p(U)} .$$

Ako se uzme da je $g = \phi f_1$, zbog

$(2\pi\rho)^{1/p}\|f_1\|_{r,p} = r^{1/p}\|g_r\|_{L^p(U)}$ i $\|f_1\|_p = \|g\|_{L^p(U)}$,

iz poslednje relacije izlazi

$$\lim_{r \to 1-} \left[(2\pi\rho)^{1/p}\|f_1\|_{r,p}\right] = \|f_1\|_p .$$

Kako (6.2.) važi za ϕf_1 i za $\phi S f_2$, važiće i za ϕf (jer je $\phi f_2(z) = \overline{\phi S f_2(z)}\ (1 - z)^{2/p}(1 - z)^{-2/p}$), tako da je i

$$\lim_{r \to 1-} \left[(2\pi\rho)^{1/p}\|f\|_{r,p}\right] = \|f\|_p .$$

Ostaje još da u (5.2.) pustimo da $r \to 1-$ (tada $\rho \to \infty$) pa ćemo dobiti (3.2.) , sa konstantom $C_p = (1 + A_p)2^{-1} + B_p(2 + A_p)$.

T e o r e m a 2.2. Anihilator za H^p je SH^q , a za SH^q je H^p .

D o k a z . Neka je $g_n(z) = z^{n-1}$, $z \in D$, i $f_{n,p} =$

$=\phi^{-1}g_n$, $n = 1,2,\ldots$. Kako je sistem $\{g_n\}$ zatvoren u $H^p(D)$ ([7] , str. 36.) , to je sistem $\{f_{n,p}\}$ zatvoren u H^p , a sistem $\{Sf_{n,q}\}$ — u SH^q . Kako je za $n \geqslant m$

$$\langle f_{n,p} , Sf_{m,q}\rangle = \mathrm{const}\cdot\langle\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{n-m}(z+i)^{-1} , Sk_i\rangle = 0 ,$$

to je $f_{n,p} \perp Sf_{m,q}$. Na sličan način se ovo dokazuje i za $n < m$. Prema prethodnom, $H^p \perp SH^q$.

S druge strane, ako je $g \in L^p$ i $g \perp SH^q$, onda je $g \perp \{Sk_w\}$, što znači da $g \in H^p$ (npr. [7] , str. 195.). Dakle, $(SH^q)^\perp = H^p$. Slično se dokazuje da je $(H^p)^\perp = SH^q$.

T e o r e m a 3.2. Sistem $\{k_w / w \in C^+\}$ je zatvoren u H^p .

D o k a z . Neka je $g \in L^q$ i $g \perp \{k_w\}$. Tada je, prema teoremi 1.2., $g = g_1 + g_2$, $g_1 \in H^q$, $g_2 \in SH^q$, tako da je i $g_1 \perp \{k_w\}$ (teor. 2.2.), a to znači da je $g_1(w) = \langle g_1 , k_w\rangle = 0$ za $w \in C^+$, tj. $g_1 = 0$, i $g \in SH^q$. Prema teoremi 2.2., $g \perp H^p$. Ostatak dokaza sastoji se u primeni teoreme 2.1.

§3. F a k t o r i z a c i j a H^p - f u n k c i j a

D e f i n i c i j a 1.3. ([9]) Svaki proizvod oblika

$$\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{m-1} \prod_n \frac{|z_n^2+1|}{z_n^2+1}\,\frac{z-z_n}{z-\bar{z}_n} ,$$

gde je m neki prirodan broj i $\{z_n\} \subset C^+$, nazivaćemo Blaschke-ovim proizvodom.

L e m a 1.3. ([1]) Ako je $f \in H^p$ i $f \neq 0$, ako je

$m-1$ red nule funkcije f u tački $z = i$, a $\{z_n\}$ — skup nula funkcije f u C^+ različitih od i , pri čemu je svaka nula računata onoliko puta koliki joj je red, tada odgovarajući Blaschke-ov proizvod konvergira za $z \in C^+$ i predstavlja jednu funkciju b , regularnu u C^+ , koja ima iste nule kao f , i to istog reda. (Ako je $f(z) \neq 0$ za $z \in C^+$, smatra se da je Blaschke-ov proizvod za f : $b(z) \equiv 1$.)

D e f i n i c i j a ([10]) Svaku funkciju oblika

$$G(z) = e^{i\gamma} \cdot \exp\left\{\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+xz)\ln\omega(x)}{(x-z)(1+x^2)}\, dx\right\},$$

gde je $\gamma \in R$, a ω neka merljiva funkcija na R , nenegativna i takva da je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln\omega(x)}{1+x^2}\, dx > -\infty \quad \text{i} \quad \omega \in L^p ,$$

nazivaćemo <u>spoljašnjom H^p-funkcijom</u>.

D e f i n i c i j a 3.3. <u>Singularnom funkcijom</u> ćemo zvati svaku funkciju oblika

$$s(z) = \exp\left\{i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+xz}{x-z}\, d\nu(x)\right\} ,$$

pri čemu je ν neopadajuća funkcija ograničene varijacije na R i $\nu'(x) = 0$ s. s. na R .

D e f i n i c i j a 4.3. ([10]) <u>Unutrašnjom funkcijom</u> zvaćemo svaku funkciju e regularnu u C^+ , sa svojstvima $|e(z)| \leq 1$, $z \in C^+$, i $|e(x)| = 1$ s. s. na R , pri čemu je

$$e(x) = \lim_{y \to 0+} e(x+iy) .$$

Primetimo da iz principa maksimuma modula sledi da je $|e(z)| < 1$ za $z \in C^+$ ako unutrašnja funkcija e nije konstantna u C^+ .

T e o r e m a 1.3. ([11]) Svaka funkcija $f \in H^p$ može na jedinstven način da se predstavi u obliku

$$(1.3.) \qquad f(z) = \exp(i\alpha z)\cdot b(z)\cdot s(z)\cdot G(z) \quad ,$$

gde je $\alpha \geqslant 0$, b — Blaschke-ov proizvod za f (kao u lemi 1.3.) , s — neka singularna funkcija i G spoljašnja funkcija za koju je $\omega(x) = |f(x)|$ s. s. na R . Obrnuto, ako f ima oblik (1.3.) , pri čemu je $\alpha \geqslant 0$, b — proizvoljan Blaschke-ov proizvod konvergentan u C^+ , s — proizvoljna singularna funkcija i G — proizvoljna spoljašnja H^p-funkcija , tada $f \in H^p$.

U vezi sa faktorizacijom (1.3.) uobičajeno je da se G naziva spoljašnjim delom od f , a $\exp(i\alpha z)\cdot b\cdot s$ — unutrašnjim delom.

L e m a 2.3. Neka je $f \in H^p$ i neka je

$$g(w) = f\left(\frac{sw-1}{s+w}\right)(s+w)^{-2/p} \quad , \quad w \in C^+ \quad ,$$

pri čemu je s neki realan broj, a uzeta je proizvoljna grana funkcije $(s+w)^{-2/p}$ u C^+. Tada je i $g \in H^p$.

D o k a z . S obzirom na faktorizaciju (1.3.) iz teoreme 1.3., dovoljno je da se tvrdjenje dokaže samo za slučaj kad je f spoljašnja funkcija. Neka je, dakle,

$$f(z) = \exp\left\{\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(1+xz)\ln|f(x)|}{(x-z)(1+x^2)}\,dx\right\} \quad , \quad z \in C^+ \ .$$

Uvodjenjem smene $x = \frac{st-1}{s+t}$ i $z = \frac{sw-1}{s+w}$ dobijamo

$$f(\tfrac{sw-1}{s+w}) = \exp\left\{\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(1+tw)\ln\left|f(\frac{st-1}{s+t})\right|}{(t-w)(1+t^2)}\,dt\right\}\ , \quad w\in C^+ .$$

Standardnim postupkom izračunavanja integrala pomoću reziduuma, može se izvesti i ova relacija

$$(s+w)^{-2/p} = \text{const.}\cdot\exp\left\{\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(1+tw)\ln|s+t|^{-2/p}}{(t-w)(1+t^2)}\,dt\right\}\ , \quad w\in C^+ .$$

Na osnovu ove i prethodne relacije, dobija se da je

$$g(w) = \text{const.}\cdot\exp\left\{\frac{1}{\pi\cdot i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(1+tw)\ln|g(t)|}{(t-w)(1+t^2)}\,dt\right\}\ , \quad w\in C^+ ,$$

odakle, prema teoremi 1.3., kad se uzme u obzir i da je $g\in L^p$, sledi da je $g\in H^p$.

T e o r e m a 2.3. Svaka unutrašnja funkcija e može da se predstavi u obliku

(2.3.) $$e(z) = \beta\cdot\exp(\alpha iz)\cdot b(z)\cdot s(z)\ ,$$

gde je $|\beta| = 1$, $\alpha \geqslant 0$, b — odgovarajući Blaschke-ov proizvod, a s neka singularna funkcija. Obrnuto, svaki proizvod oblika (2.3.) , gde je $|\beta| = 1$, $\alpha\geqslant 0$, b proizvoljan konvergentan Blaschke-ov proizvod i s proizvoljna singularna funkcija, predstavlja jednu unutrašnju funkciju.

D o k a z . Ovo je posledica teoreme 1.3. Ako je G proizvoljna spoljašnja H^p-funkcija, tada na osnovu teoreme 1.3., $G\in H^p$ i $\omega(x) = |G(x)|$ s. s. na R . Zbog toga i f =

$= eG \in H^p$. Pritom je $|f(x)| = |G(x)|$ s. s. na R . Faktorizacija (2.3.) sada sledi na osnovu jedinstvenosti faktorizacije (1.3.) .

Ako je e oblika (2.3.) , tada je $f = \beta \cdot \exp(i\alpha z) \cdot b \cdot s \cdot G \in H^p$ za bilo koju spoljašnju funkciju G (teor. 1.3.) i iz $|\omega(x)| = |f(x)| = |G(x)|$ s. s. na R , sledi da je $|e(x)| = 1$ s. s. na R . Da je $|e(z)| \leqslant 1$ za $z \in C^+$, proverava se direktno na osnovu definicija 1.3. i 3.3. Da je e regularna u C^+ sledi iz regularnosti f i G i iz poklapanja nula od f i nula od b .

L e m a 3.3. Svaka unutrašnja funkcija može da se dodefiniše u tačkama $z \in C^-$ za koje je $e(\bar{z}) \neq 0$, tako da u tim tačkama bude regularna i da bude

$$\lim_{y \to 0-} e(x+iy) = e(x)$$

s. s. na R .

D o k a z . Ako je $z \in C^-$ i $e(\bar{z}) \neq 0$, dodefinisaćemo e na sledeći način: $e(z) = \overline{e(\bar{z})}^{-1}$. Ostalo je jasno.

Sem u tačkama $z \in C^+$ i tačkama spomenutim u lemi 3.3., e može biti regularna i u nekim tačkama na R , pri čemu podrazumevamo da je $e(x) = \lim_{y \to 0} e(x+iy)$ u onim tačkama $x \in R$ za koje ova granična vrednost postoji. Skup regularnih tačaka za funkciju e obeležavaćemo sa C .

D e f i n i c i j a 5.3. Ako je μ neka mera na R , zatvorenim nosačem mere μ zvaćemo komplement unije svih otvorenih podskupova od R koji imaju μ-meru 0 .

L e m a 4.3. ([3] , str. 68.) Ako je e singularna funkcija, tada se komplement skupa C , $\mathbb{C}C$, poklapa sa zatvorenim nosačem mere $d\nu$. Šta više, funkcija e (pa ni $|e|$) ne može da se neprekidno produži iz C^+ ni u jednoj tački iz $\mathbb{C}C$.

D o k a z . Dobija se prenošenjem analognog rezultata za D ([3] , str. 68.) na C^+ , pomoću preslikavanja $\mathcal{E}$.

L e m a 5.3. ([3] , str. 68.) Ako je e neki Blaschke-ov proizvod, skup $\mathbb{C}C$ se sastoji od tačaka z iz C^- za koje je $e(\bar{z}) = 0$ i tačaka nagomilavanja nula za e .

D o k a z . Analogan rezultat za D ([3] , str. 68.) prenosi se na C^+ pomoću preslikavanja $\mathcal{E}$.

T e o r e m a 3.3. Za proizvoljnu unutrašnju funkciju e skup $\mathbb{C}C$ se sastoji od tačke $z = \infty$ ako je u faktorizaciji (2.3.) $\alpha > 0$, od tačaka z iz C^- za koje je $e(\bar{z}) = 0$, tačaka nagomilavanja nula od e i od tačaka zatvorenog nosača mere $d\nu$ koja odredjuje singularnu funkciju s u faktorizaciji (2.3.) .

D o k a z . Tvrdjenje je posledica teoreme 2.3. , leme 4.3. i leme 5.3.

L e m a 6.3. Neka je e nekonstantna unutrašnja funkcija koja u nekoj tački $t \in C \cap R$ (može biti i $t = \infty$) uzima vrednost α ($|\alpha| = 1$) . Tada funkcija $\alpha - e$ u tački t ima nulu prvog reda.

D o k a z . Kako je i $\alpha^{-1}e$ unutrašnja funkcija, dovoljno je da se dokaz izvede samo za $\alpha = 1$. Neka je $g = \frac{e+1}{e-1}$ i $e_1 = \exp g$. Kako je $\operatorname{Re} g(z) \leqslant 0$ za $z \in C^+$ i $Sg = -g$, to je i e_1 unutrašnja funkcija. Funkcija e_1 nema nula u C^+, pa se primenom teoreme 2.3. i teoreme 3.3. na e_1 dobija da je

$g = i d\nu(t) \frac{1+tz}{t-z} + g_1$ (za $t = \infty$, umesto $\frac{1+tz}{t-z}$ bilo bi z , a umesto $d\nu(t)$ bilo bi α), gde je g_1 neka funkcija regularna u tački t . Znači, g ima prost pol u tački t , tj. $1 - e$ ima nulu prvog reda.

§ 4. Neki rezultati iz teorije analitičkih funkcija

Na kraju ove glave navešćemo neke poznate rezultate o funkcijama analitičkim u C^+ , u obliku u kom ćemo ih kasnije koristiti.

T e o r e m a 1.4. (Phragmén-Lindelöf-ov princip; npr. [12], str. 1.) Ako je funkcija f analitička u C^+ , ako $|f|$ može neprekidno da se produži na zatvorenu gornju poluravan $\overline{C^+}$ i ako je ispunjen uslov

$$\liminf_{a \to +\infty} \left[a^{-1} \int_0^{\pi} \ln^+ |f(ae^{i\theta})| \sin\theta d\theta \right] = 0$$

(gde je $\ln^+ x = \ln x$ za $x \geq 1$ i $\ln^+ x = 0$ za $0 \leq x \leq 1$), tada iz ograničenosti $|f|$ na R sledi ograničenost $|f|$ na čitavom skupu $\overline{C^+}$.

D e f i n i c i j a 1.4. ([13]) Funkciju f analitičku u C^+ (C^-) nazivamo <u>funkcijom ograničenog tipa</u> u $C^+(C^-)$, ako je $f = f_1/f_2$, gde su f_1 i f_2 neke ograničene analitičke funkcije u C^+ (C^-) i $f_2 \neq 0$.

D e f i n i c i j a 2.4. ([12] , str. 23.) Neka je f funkcija ograničenog tipa u C^+ (C^-) i neka je $f \neq 0$. Broj

$$h = \limsup_{\substack{y \to +\infty \\ (y \to -\infty)}} \left[|y|^{-1} \ln |f(iy)| \right]$$

zvaćemo srednjim tipom funkcije f u C^+ (C^-) . Ako je $f = 0$ smatraćemo da je srednji tip od f jednak $-\infty$.

Da broj h postoji ako je $f \neq 0$ dokazano je u [12] , str. 26.

Poznato je da se za celu funkciju f kaže da je eksponencijalnog tipa ako je

$$h = \limsup_{|z| \to \infty} \frac{\ln|f(z)|}{|z|} < \infty .$$

Broj h se zove eksponencijalnim tipom funkcije f .

T e o r e m a 2.4. (Крейн-ova teorema; [14]) Ako je cela funkcija f ograničenog tipa C^+ i u C^- , tada je f cela funkcija eksponencijalnog tipa i njen eksponencijalni tip je jednak većem od njenih srednjih tipova u C^+ i u C^- .

L e m a 1.4. (npr. [7] , str. 16.) Ako je $f \in H^p$, tada je f ograničenog tipa u C^+ .

D o k a z . Na osnovu teoreme 1.3., napišimo f u obliku (1.3.) . Kako su funkcije $\exp(i\alpha z)$, b i s ograničene u C^+ , tvrdjenje treba da se dokaže jedino za G . No, ova funkcija se lako može predstaviti u traženom obliku, ako se funkcija $\ln\omega(x)$ predstavi kao razlika dve nenegativne merljive funkcije: $\ln\omega(x) = -\ln^-\omega(x) + \ln^+\omega(x)$ (gde je $\ln^- x = -\ln^+ x^{-1}$, $x > 0$) .

GLAVA II

PROSTORI $H^p(e)$

§1. Definicija i osnovna svojstva prostora $H^p(e)$

Izlaganje u ovom odeljku odnosiće se na proizvoljan prostor tipa $H^p(e)$. Definisaćemo $H^p(e)$, naći reproduktivno jezgro i utvrditi druga osnovna svojstva $H^p(e)$, a zatim pokazati da su unije nekih ovakvih prostora svuda guste u H^p.

Definicija 1.1. Neka je e jedan ograničeni linearni operator koji L^p uzajamno jednoznačno preslikava na L^p, i za koji je $eH^p \subset H^p$ i $SeS = e^{-1}$. Klasom $H^p(e)$ nazivaćemo skup svih funkcija $f \in H^p$ sa svojstvom $eSf \in \tilde{H}^p$.

Zbog $eSeS = I$, ako je $f \in H^p(e)$, tada je eSf rubna funkcija za neku funkciju iz $H^p(e)$.

Sem toga, kad god postoji prostor $H^p(e)$, tada postoji i prostor $H^q(e^{*-1})$, gde je e^* operator konjugovan sa e. Naime, relacija $Se^{*-1}S = e^*$ se dobija direktno. Neka je $g \in H^q$. Dokažimo da je $e^{*-1}g \in H^q$. Za $f \in SH^p$ imamo

$$\langle f , e^{*-1}g \rangle = \langle SeSf , g \rangle = 0 ,$$

zbog $eSf \in H^p$. Dakle, $e^{*-1}g \perp SH^p$, pa zato $e^{*-1}g \in H^q$, prema teoremi 2.2. gl. I.

Svaki operator e oblika $e = ASA^{-1}S$, gde je A ograničen linearan operator koji L^p uzajamno jednoznačno preslikava na L^p i ima svojstva $AH^p \subset H^p$ i $A^{-1}(SH^p) \subset SH^p$, ispunjava uslove za formiranje prostora $H^p(e)$. Na osnovu ovoga dobija se jedna široka klasa primera za prostore $H^p(e)$.

T e o r e m a 1.1. $H^p(e)$ je zatvoren potprostor od H^p . Funkcija

$$(1.1.) \qquad K_w(z) = k_w(z) - e^{*-1}\overline{ek_z(w)} \qquad (w,z \in C^+)$$

ima svojstva: $K_w \in H^q(e^{*-1})$ za svako fiksirano $w \in C^+$, i

$$(2.1.) \qquad f(w) = \langle f , K_w \rangle , \quad \text{za} \quad f \in H^p(e) , \ w \in C^+ .$$

D o k a z . Ako je $\{f_n \ / \ n = 1,2,\dots\}$ Cauchy-ev niz u $H^p(e)$, onda je, očigledno, i niz $\{eSf_n \ / \ n=1,2,\dots\}$ Cauchy-ev (u $\tilde{H}^p$). Neka $f_n \longrightarrow f \in H^p$. Kako je $eSf_n \in \tilde{H}^p$, $n = 1,2,\dots$, to je i funkcija $eSf = \lim\limits_{n \to \infty} eSf_n$ u $\tilde{H}^p$. Znači, $f \in H^p(e)$ za svaki Cauchy-ev niz u $H^p(e)$, tj. $H^p(e)$ je zatvoren potprostor od H^p .

Da bismo dokazali drugi deo tvrdjenja, primetimo da je, za $w \in C^+$, linearni funkcional J_w: $f \longrightarrow ef(w)$, $f \in H^p$, ograničen: $|ef(w)| = |\langle ef , k_w \rangle| \leqslant \|e\|\cdot\|k_w\|_q\cdot\|f\|_p$. Prema Hahn-Banach-ovoj teoremi, ovaj funkcional može da se produži na L^p , bez uvećavanja norme, tako da u L^q postoji bar jedna funkcija G_w takva da je

$$J_w(f) = ef(w) = \langle f , G_w \rangle , \quad f \in H^p .$$

Neka je g_w projekcija ove funkcije na H^q (def. 5.1. gl. I. i teor. 1.2. gl. I.) . Tada je $G_w - g_w \perp H^p$, što znači

$$(3.1.) \qquad ef(w) = \langle f , g_w \rangle , \quad f \in H^p .$$

Uzmimo da je $f = k_v$, gde je v fiksirana tačka iz C^+ . Ako to zamenimo u (3.1.) , dobijamo

$$ek_v(w) = \langle k_v \, , \, g_w \rangle = \overline{g_w(v)} \, .$$

Prema tome, za svako z i w iz C^+ mora biti $g_w(z) = \overline{ek_z(w)}$. Kako je, dalje, $e^{*-1}H^q \subset H^q$, to je

$$e^{*-1}\overline{ek_z(w)} \in H^q \, ,$$

odnosno $K_w \in H^q$, za $w \in C^+$. No, i funkcija $e^{*-1}SK_w$ leži u H^q , jer leži u L^q i ortogonalna je na SH^p , što se vidi iz sledećeg:

$$f \in SH^p \Longrightarrow \langle e^{*-1}SK_w \, , \, f \rangle = \langle eSf \, , \, k_w \rangle - \langle Sf \, , \, g_w \rangle = eSf(w) -$$

$$- e(Sf)(w) = 0$$

(na osnovu (3.1.)).

Dakle, $K_w \in H^q(e^{*-1})$. Ostaje još da se dokaže relacija reproduktivnosti (2.1.) . Za proizvoljnu funkciju f iz $H^p(e)$ i $w \in C^+$ imaćemo

$$\langle f \, , \, K_w \rangle = \langle f \, , \, k_w \rangle - \langle Sg_w \, , \, eSf \rangle = f(w) \, ,$$

jer $eSf \in \widetilde{H}^p$.

Ovim je teorema u potpunosti dokazana.

U smislu definicije 4.2. gl. I., $K_w(z)$ je jedno reproduktivno jezgro za $H^p(e)$.

Prostori $H^p(e)$ i $H^q(e^{*-1})$ su, u izvesnom smislu, uzajamno dualni. Precizniji opis ove dualnosti sadržan je u formulaciji sledeće teoreme.

T e o r e m a 2.1. a) $H^p = H^p(e) \oplus eH^p$; b) $[H^p(e)]^\perp = SH^q \oplus e^{*-1}H^q$; c) skup svih funkcija oblika K_w , $w \in C^+$, je zatvoren u $H^q(e^{*-1})$.

D o k a z . a) Neka je $f \in H^p$. Kako je, prema teor. 1.2. gl. I., $e^{-1}f = f_1 + f_2$, gde $f_1 \in SH^p$ i $f_2 \in H^p$, to je $f = ef_1 + ef_2$, gde $ef_2 \in eH^p$ i $ef_1 \in H^p(e)$ (zbog $ef_1 = f - ef_2 \in H^p$ i $eS(ef_1) = Sf_1 \in \widetilde{H}^p$) . Dakle, svaka funkcija iz H^p može da se predstavi (i to na jedinstven način) kao zbir jedne funkcije iz $H^p(e)$ i jedne funkcije iz eH^p , tj. $H^p = H^p(e) \oplus eH^p$.

b) Dokazaćemo najpre da je $H^p(e) \perp SH^q \oplus e^{*-1}H^q$. Kako je $H^p(e) \perp SH^q$ (teor. 2.2. gl. I.) , treba dokazati samo $H^p(e) \perp e^{*-1}H^q$. Neka je $f \in H^p(e)$ i $g \in e^{*-1}H^q$. Tada je

$$\langle f , g \rangle = \overline{\langle eSf , Se^* g \rangle} = 0 ,$$

zbog $eSf \in \widetilde{H}^p$, $e^* g \in H^q$ i $\widetilde{H}^p \perp SH^q$ (teor. 2.2. gl. I.). Dakle, $f \perp g$, odnosno $H^p(e) \perp e^{*-1}H^q$.

Neka je sada $g \in L^q$ i $g \perp H^p(e)$. Dokažimo da tada mora biti $g \in SH^q \oplus e^{*-1}H^q$. Prema teor. 1.2. gl. I. i već dokazanom tvrdjenju a) (primenjenom na H^q i $H^q(e^{*-1})$), funkciju g možemo da predstavimo ovako: $g = g_1 + g_2 + g_3$, gde je $g_1 \in SH^q$, $g_2 \in e^{*-1}H^q$ i $g_3 \in H^q(e^{*-1})$. Kako je $g_1 \perp H^p(e)$, $g_2 \perp H^p(e)$ i $g \perp H^p(e)$, to je i $g_3 \perp H^p(e)$. No, na osnovu teoreme 1.1., funkcija

$$K_w^*(z) = k_w(z) - e\overline{e^{*-1}k_z(w)}$$

leži u $H^p(e)$ za svako $w \in C^+$, tako da je

$$g_3(w) = \langle g_3 , K_w^* \rangle = 0 , \quad w \in C^+ ,$$

što znači da je $g_3 = 0$ i $g \in SH^q \oplus e^{*-1}H^q$.

c) Prema teor. 2.1. gl. I., dovoljno je dokazati da svaka funkcija iz L^p koja je ortogonalna na sve funkcije K_w, $w \in C^+$, leži u anihilatoru prostora $H^q(e^{*-1})$, što se, shodno stavovima a) i b), svodi na dokaz da iz $f \in H^p(e)$ i $f \perp K_w$, $w \in C^+$, sledi $f = 0$. No, ovo poslednje je direktna posledica teoreme 1.1. (relacija 2.1.).

Za svaka dva uzajamno permutativna operatora e_1 i e_2, takva da prostori $H^p(e_1)$ i $H^p(e_2)$ postoje, njihov proizvod e_1e_2 takodje ispunjava uslove za formiranje prostora $H^p(e_1e_2)$. Pritom je $H^p(e_k) \subset H^p(e_1e_2)$, $k = 1,2$.

T e o r e m a 3.1. Ako su e_k, $k = 1,2$, medjusobno permutativni operatori za koje prostori $H^p(e_k)$, $k = 1,2$, postoje i ako je $e = e_1e_2$, tada je $H^p(e) = H^p(e_1) \oplus e_1H^p(e_2)$.

D o k a z . Neka je $f \in H^p(e)$. Tada je, na osnovu teoreme 2.1. a), $f = f_1 + f_2$, pri čemu $f_1 \in H^p(e_1)$ i $f_2 \in e_1H^p$. No, kako je $e_1^{-1}f_2 \in H^p$ i $e_2S(e_1^{-1}f_2) = e_2e_1Sf \in \tilde{H}^p$, to je $f_2 \in e_1H^p(e_2)$.

T e o r e m a 4.1. Neka je $\{e_n \,/\, n=1,2,\ldots\}$ niz uzajamno permutativnih operatora takvih da $H^p(e_n)$ postoji za svako n. Neka je $E_n = \prod_{k=1}^{n} e_k$, $n = 1,2,\ldots$, i neka je ispunjen uslov

$$(4.1.) \qquad \lim_{n \to \infty} E_n\overline{E_n^{*-1}k_z(w)} = 0 ,$$

u smislu slabe konvergencije niza funkcija po z u H^q, za svako fiksirano $w \in C^+$. Tada je

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} H^p(E_n)} = H^p$$

(gde crta iznad skupa označava adherenciju).

D o k a z . Shodno teoremi 1.1. gl. I., dokazaćemo da svaka funkcija f iz H^q koja je ortogonalna na $\bigcup_{n=1}^{\infty} H^p(E_n)$ mora biti identički jednaka nuli. Zaista, neka je $f \in H^q$ i $f \perp H^p(E_n)$, $n = 1,2,\dots$. Neka je $K_w^n(z)$ reproduktivno jezgro tipa (1.1.) za $H^q(E_n^{*-1})$, $n = 1,2,\dots$. Tada $K_w^n \in H^p(E_n)$ za $n = 1,2,\dots$. Kako je, za svako fiksirano $w \in C^+$ i $n = 1,2,\dots$,

$$f(w) = \langle f , k_w \rangle = \langle f , K_w^n \rangle + \langle f , \overline{E_n E_n^{*-1} k_z(w)} \rangle = \langle f , \overline{E_n E_n^{*-1} k_z(w)} \rangle ,$$

to je, s obzirom i na (4.1.) ,

$$f(w) = \lim_{n \to \infty} \langle f , \overline{E_n E_n^{*-1} k_z(w)} \rangle = 0$$

za svako $w \in C^+$, tj. $f = 0$.

Sem sposobnosti "reprodukovanja" funkcija iz prostora $H^p(e)$, izražene relacijom (2.1.) , funkcija $K_w(z)$ može posedovati još neka svojstva reproduktivnog jezgra, pod izvesnim dopunskim uslovima.

T e o r e m a 5.1. Neka je e operator u L^p koji ispunjava uslove za formiranje prostora $H^p(e)$ i neka je ispunjen još i uslov

$$e^{*-1} k_w = e k_w \ ; \quad w \in C^+ . \tag{5.1.}$$

Tada je

$$K_w(z) = K_w^*(z) = k_w(z) - \overline{e e k_z(w)} , \tag{6.1.}$$

funkcija $K_w(z)$ je pozitivno definitna i, za $w \in C^+$, $K_w \in H^p(e)$. Sem toga, e indukuje jednu izometriju u H^2 .

D o k a z . Iz (5.1.) najpre sledi

$$e^{*-1}\overline{ek_z(w)} = \langle \overline{ek_t(w)} \, , \, \overline{e^{*-1}k_t(z)} \rangle_t = \langle \overline{ek_t(w)} \, , \, \overline{ek_t(z)} \rangle_t =$$

$$= e\overline{ek_z(w)} \quad \text{i} \quad ee^{*-1}k_z(w) = e\overline{ek_z(w)} \; , \quad w,z \in C^+ \; ,$$

tako da važi (6.1.) . Kako je $K_w^* \in H^p(e)$, $w \in C^+$, to neposredno iz (6.1.) sledi $K_w \in H^p(e)$, $w \in C^+$. Sada iz (2.1.) možemo izvesti relaciju (za $f = K_v$)

$$(7.1.) \qquad K_v(w) = \langle K_v \, , \, K_w \rangle \; , \quad v,w \in C^+ \; ,$$

iz koje direktno sledi pozitivna definitnost $K_v(w)$. Isto tako, kad se u (7.1.) uzme $v = w$, vidi se da je $\|K_w\|_{L^2}^2 < \infty$, tj. $K_w \in H^2$, na osnovu teoreme 1.3. gl. I.

Preostaje još da se dokaže poslednji deo tvrdjenja. Kao prvo, na osnovu (5.1.) je jasno da je, za $w \in C^+$,

$$(8.1.) \qquad \langle ek_v \, , \, ek_w \rangle = \langle k_v \, , \, k_w \rangle \; ,$$

odakle se za $v = w$ dobija da e svaku funkciju k_w prevodi u funkciju koja opet leži u H^2 , i to uz očuvanje norme. Ako je f konačna linearna kombinacija funkcija oblika k_w , $w \in C^+$, tada iz (8.1.) izlazi da primena e na f takodje ne menja L^2-normu. Ne menja se ni skalarni proizvod takve dve funkcije. Sada se e na uobičajeni način produžuje do izometrije na čitavom H^2 , s obzirom na zatvorenost sistema $\{k_w\}$ u H^2 (teor. 3.2. gl. I.). Dokaz je završen.

Pozabavimo se sada, kratko, slučajem $p = 2$.

T e o r e m a 6.1. Svaka neunitarna izometrija e u H^2 može da se produži do unitarnog operatora u L^2 tako da važi uslov $SeS = e^{-1}$.

D o k a z . Najpre definišemo e na SeH^2 : za svaku funkciju f iz SeH^2 neka je $ef = Se^{-1}Sf$. Tako se prostor SeH^2 preslikava na SH^2 . Neka je sada $\{f_n \,/\, n=1,2,\ldots\}$ proizvoljna ortonormirana baza u prostoru $H^2 \ominus eH^2$, koji ćemo kraće obeležiti sa G^2 . Tada je $\{g_n = Sf_n\}$ ortonormirana baza u prostoru SG^2 . Definišimo e na ovoj bazi sa $eg_n = f_n$, $n = 1,2,\ldots$, a zatim produžimo ovo preslikavanje do linearnog izometrijskog preslikavanja prostora SG^2 na prostor G^2 . Kako je $L^2 = H^2 \oplus SeH^2 \oplus SG^2$, to se e dalje na uobičajen način produžuje do izometrije na L^2 . Da su pritom ispunjeni i uslovi $eL^2 = L^2$ i $SeS = e^{-1}$ dokazuje se bez teškoća.

P o s l e d i c a . Svaki netrivijalni potprostor M prostora H^2 , takav da je prostor $H^2 \ominus M$ beskonačno-dimenzionalan, predstavlja jedan prostor tipa $H^2(e)$.

D o k a z . Može se uzeti neka izometrija e iz H^2 na $H^2 \ominus M$ i zatim, shodno teoremi 6.1., produžiti e do unitarnog operatora na L^2 , uz uslov $SeS = e^{-1}$. Tada će moći da se formira prostor $H^2(e) = H^2 \ominus eH^2 = M$.

T e o r e m a 7.1. Neka je e operator u L^2 (linearan i ograničen) koji ispunjava uslove za konstruisanje prostora $H^2(e)$ i neka za e još važe uslov (5.1.) iz teoreme 5.1. i sledeći uslov: $\bigcap_{n=1}^{\infty} e^nH^2 = \{0\}$. Neka je d drugi unitaran operator na L^2 , koji je permutativan sa e i koji $H^2(e)$ preslikava u H^2 : $dH^2(e) \subset H^2$. Tada d preslikava H^2 opet u H^2 .

D o k a z . S obzirom na to da je e izometrija na H^2 i da je $H^2 \ominus eH^2 = H^2(e)$, H^2 može da se predstavi ovako

$$H^2 = \bigcap_{n=1}^{\infty} e^n H^2 \oplus H^2(e) \oplus eH^2(e) \oplus e^2H^2(e) \oplus \dots \quad .$$

Kako je, po pretpostavci, $\bigcap_{n=1}^{\infty} e^n H^2 = \{0\}$, to je $H^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus\, e^n H^2(e)$. Vidi se da je dovoljno dokazati da d preslikava svaki potprostor $e^n H^2(e)$ ($n=0,1,2,\dots$) u H^2. No, kako su d i e permutativni, to je

$$de^n H^2(e) = e^n dH^2(e) \ ,$$

pa će, zbog $dH^2(e) \subset H^2$ i $eH^2 \subset H^2$, biti i $de^nH^2(e) \subset H^2$. Ovim je dokaz završen.

§ 2. Slučaj kad je e množenje funkcijom

Obratićemo posebnu pažnju na prostore tipa $H^p(e)$ kod kojih se operator e svodi na množenje nekom funkcijom. Potrebno da se najpre opišu takve funkcije.

L e m a 1.2. Neka je e funkcija definisana s. s. na R i neka je množenje ovom funkcijom jedan operator u L^p (koji ćemo takodje obeležavati sa e), koji ispunjava uslove za formiranje prostora $H^p(e)$. Tada funkcija e može, na jedinstven način, da se produži na C^+ do jedne unutrašnje funkcije.

D o k a z . Iz uslova $SeS = e^{-1}$ za operator e, odmah izlazi da mora biti $\overline{e(x)} = e(x)^{-1}$ s. s. na R, tj. važi $|e(x)| = 1$ s. s. na R. To znači, izmedju ostalog, da je e izometrijski operator u svim prostorima L^p, za $1 < p < \infty$. Dalje, kako za $w \in C^+$, zajedno sa funkcijom k_w i funkcija ek_w leži u H^p, to se za $z \in C^+$ funkcija e može definisati sa $e(z) = [k_w(z)]^{-1} ek_w(z)$. Ovako dodefinisana, funkcija e

će očigledno biti analitička u C^+ i imaće rubnu funkciju $e(x)$. Ovakvo produžavanje je jedinstveno, jer za proizvoljnu H^p-funkciju f funkcija ef leži takodje u H^p, a funkcije iz H^p su potpuno odredjene svojim rubnim funkcijama ([4]). Prema teoremi 5.1., funkcija

$$K_w(z) = [1 - e(z)\overline{e(w)}]k_w(z) \qquad (w,z \in C^+)$$

je pozitivno definitna, pa je $K_w(w) \geq 0$, $w \in C^+$. Kako je $k_w(w) > 0$, to je $1-|e(w)|^2 \geqslant 0$, tj. $|e(w)| \leqslant 1$, za $w \in C^+$.

Važi i obrnuto tvrdjenje: ako je e unutrašnja funkcija i ako je operator e množenje funkcijom e u L^p, tada postoji prostor $H^p(e)$ za svako p, $1 < p < \infty$, pri čemu je ispunjen i uslov (5.1.) iz teoreme 5.1. Zato ćemo u ovom odeljku pod funkcijom e uvek podrazumevati neku unutrašnju funkciju. Smatraćemo uvek i da je funkcija e produžena kao u lemi 2.3. gl. I., i obeležavati sa C skup tačaka u kojima je funkcija e regularna.

T e o r e m a 1.2. Neka je $H^p(e)$ prostor kod kojeg je operator e množenje unutrašnjom funkcijom e. Tada se svaka funkcija iz $H^p(e)$ može produžiti tako da u svim tačkama skupa C bude regularna. Sem toga, konvergencija niza funkcija po normi u $H^p(e)$ implicira ravnomernu konvergenciju tog niza na kompaktnim podskupovima skupa C i, najzad, svaki funkcional

$$J_w : f \longrightarrow f(w) , \quad w \in C , \ f \in H^p(e) ,$$

je ograničen.

D o k a z . Neka je $f \in H^p(e)$. Dodefinisaćemo f prvo u tačkama z iz skupa $C \cap C^-$, i to na sledeći način:

$f(z) = e(z)\overline{f_1(\bar{z})}$, gde je f_1 funkcija iz H^p za koju je $eSf(x)$ rubna funkcija. U tački $\bar{z}$ je funkcija f_1 regularna, pa će i f biti regularna u tački z . Rubna funkcija, iz C^- , za funkciju f posle ovakvog produžavanja jednaka je $f(x)$ s. s. na R .

Specijalno, kad ovako produžimo funkciju $K_w(z)$ (i po z i po w), dolazimo do funkcije

$$K_w(z) = \left[1 - e(z)\overline{e(w)}\right]\left[2\pi i(\bar{w} - z)\right]^{-1}$$

koja je regularna po z u svim tačkama skupa C , za $w \in C$. Dokazaćemo da $K_w \in H^p(e)$ za $w \in C$. Kad je $w \in C^+$ to je jasno. Neka je $w \in C \cap C^-$. Kako je tada $K_w = \overline{e(w)} eSK_{\bar{w}}$, to je zaista $K_w \in H^p(e)$, a važi i relacija reproduktivnosti

$$\langle f , K_w \rangle = e(w)\langle K_{\bar{w}} , eSf \rangle = e(w)\overline{f_1(\bar{w})} = f(w) ,$$

što znači i da je funkcional J_w ograničen.

Sada neka je $w \in C \cap R$. Dokazaćemo da i sada važi $K_w \in H^p(e)$, tako što ćemo utvditi da je $K_w \in H^p$ i $eSK_w \in H^p$. Tačka w može da se okruži zatvorenim kvadratom stranice $2r$ u kojem je K_w regularna, dakle i ograničena, nekom konstantom M . Odatle sledi da je za $0 \leqslant y \leqslant r$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |K_w(x+iy)|^p dx = \int_{w-r}^{w+r} + \int_{|w-x|>r} \leqslant 2M^p r +$$

$$+ \pi^{-p} \int_{|w-x|>r} \frac{dx}{|w-x|^p} ,$$

a za $y > r$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |K_w(x+iy)|^p dx \leqslant \pi^{-p} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{|w-x-ri|^p} \quad .$$

Dakle, $K_w \in H^p$, $w \in C \cap R$. Dokaz da je i $eSK_w \in H^p$ je sasvim sličan, budući da je

$$eSK_w(z) = [e(z) - e(w)]\,[2\pi i(z-w)]^{-1} \quad .$$

Dodelićemo sada proizvoljnoj funkciji $f \in H^p(e)$ u tački $w \in C \cap R$ vrednost $f(w) \overset{\text{def}}{=} \langle f , K_w \rangle$. Na taj način f postaje regularna u w , što ćemo dokazati malo kasnije.

Na redu je dokaz da konvergencija u $H^p(e)$ povlači ravnomernu konvergenciju unutar C . Neka je B proizvoljan kompaktan podskup od C . Smestimo B u jedan otvoren skup B_1 , takav da je njegova adherencija $\bar{B}_1$ kompaktan podskup od C . (Ovo je moguće, jer je B kompaktan, a C otvoren skup.) Funkcija $K_w(z)$ je regularna u C po promenljivoj z $(w \in C)$ i u SC po $\bar{w}$ $(z \in C)$ (pri čemu je $SC = \{z \,/\, \bar{z} \in C\}$) , pa je regularna u svakoj tački $(\bar{w}, z) \in SC \times C$ kao funkcija dve promenljive. Zbog toga je ona ograničena na kompaktu $SB \times \bar{B}_1$ $(SB = \{z / \bar{z} \in B\})$:

$$|K_w(z)| \leqslant M \,, \quad w \in B \,, \quad z \in \bar{B}_1 \quad .$$

Uzmimo u obzir i da su skupovi $\complement B_1$ i B zatvoreni i medjusobno disjunktni, i da je jedan od njih kompaktan, odakle izlazi da je rastojanje δ izmedju njih veće od nule. Na osnovu toga dokazaćemo da je norma $\|K_w\|_q$ ograničena za $w \in B$ konstantom l_q nezavisnom od w :

$$\|K_w\|_q^q = \int_{R \cap \bar{B}_1} |K_w(x)|^q dx + \int_{R \cap \complement \bar{B}_1} |K_w(x)|^q dx \leqslant M^q \int_{R \cap \bar{B}_1} dx +$$

$$+ \left(\frac{1+N}{2\pi}\right)^q \left[\delta^{-q} \int_{\complement \bar{B}_1 \cap [-2m,2m]} dx + \int_{R \cap \complement \bar{B}_1 \cap \complement [2m,2m]} \frac{dx}{(|x|-m)^q}\right] = l_q^q \ ,$$

gde je $N = \max_{w \in B} |e(w)|$ i $m = \max_{w \in B} |w|$. Neka je $\{f_n \ / \ n= =1,2,\dots\}$ jedan niz u $H^p(e)$ koji konvergira (po normi) nekoj funkciji f . Tada će važiti

$$|f(w) - f_n(w)| = |\langle f-f_n \ , \ K_w \rangle| \leq \|f-f_n\|_p \cdot l_q$$

za svako $w \in B$, što dovoljno jasno pokazuje da niz $\{f_n\}$ konvergira ravnomerno na skupu B .

Ostaje još da se dokaže da je proizvoljna funkcija $f \in H^p(e)$ regularna i u tačkama skupa $C \cap R$. Funkcija f može da se predstavi kao granična vrednost (po normi) niza linearnih kombinacija funkcija oblika K_w , $w \in C^+$ (teor. 2.1.c)). Prema prethodnom, ovaj niz konvergira ka f i ravnomerno na kompaktnim podskupovima od C . Kako su svi članovi niza regularne funkcije u tačkama skupa $C \cap R$, to je i funkcija f u tim tačkama regularna.

Teorema je u potpunosti dokazana.

U slučaju kad je e množenje funkcijom teorema 4.1. može da se precizira.

T e o r e m a 2.2. Neka je $\{e_n \ / \ n=1,2,\dots\}$ niz unutrašnjih funkcija, neka je $E_n = \prod_{k=1}^{n} e_k$, $n = 1,2,\dots$, $E_0 = 1$, i neka je ispunjen uslov

$$\lim_{n \to \infty} E_n(z) = 0 \ , \quad z \in C^+ \ .$$

Tada je

$$H^p = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus E_{n-1} H^p(e_n) \quad .$$

D o k a z . Na osnovu teoreme 3.1. indukcijom se dokazuje da je

$$\sum_{k=1}^{n} \oplus E_{k-1} H^p(e_k) = H^p(E_n) \quad , \quad n = 1,2,\ldots \quad .$$

Neka je P_n operator projektovanja na $H^p(E_n)$. Tada, za $w \in C^+$,

$$\|k_w - P_n k_w\|_p = |E_n(w)| \cdot \|k_w\|_p \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \quad .$$

Ako je g linearna kombinacija funkcija k_w , $w \in C^+$, tada takodje važi

$$\|g - P_n g\| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \quad .$$

Za proizvoljno $f \in H^p$ gornja relacija sledi iz zatvorenosti sistema $\{k_w\}$ u H^p (teor. 3.2. gl. I.) i iz nejednakosti

$$\|f - P_n f\|_p \leqslant \|f - g\|_p + \|g - P_n g\|_p + C_p \|g - f\|_p \quad ,$$

gde C_p ne zavisi od n (teor. 1.2. gl. I.)

N a p o m e n a . U slučaju kad je $e_n = e$, $n = 1, 2,\ldots$, gde je e nekonstantna unutrašnja funkcija, uslovi za primenu teoreme 2.2. su ispunjeni i H^p može da se razloži na potprostore tipa $e^{n-1}H^p(e)$.

T e o r e m a 3.2. Neka je e unutrašnja funkcija i neka je mera skupa $R \setminus C$ jednaka nuli. Neka je $\{e_n \;/\; n=1,2,\ldots\}$ niz unutrašnjih funkcija regularnih u tačkama skupa C i neka je $\prod_{n=1}^{\infty} e_n(z) = e(z)$, $z \in C$, pri čemu ovaj proizvod konvergira ravnomerno na kompaktnim podskupovima C . Ako je $E_n =$

$= \prod_{k=1}^{n} e_k$, $n = 1,2,\dots$, i $E_0 = 1$, tada je

$$H^p(e) = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus E_{n-1} H^p(e_n) .$$

D o k a z . Ova teorema može da se dokaže na sličan način kao i teorema 2.2. Sistem $\{K_w \,/\, w \in C^+\}$ je zatvoren u $H^p(e)$ (teor. 2.1.c)) , pa je dovoljno da se za $f = K_w$, $w \in C^+$, dokaže da je

$$\|f - P_n f\|_p \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 ,$$

pri čemu je, kao u dokazu prethodne teoreme, P_n operator projektovanja na $H^p(E_n)$, $n = 1,2,\dots$. Kako je

$$\|K_w - P_n K_w\|_p = \|[\overline{E_n(w)} E_n - \overline{E(w)} E] k_w\|_p \leqslant |E_n(w) - E(w)| \cdot \|k_w\|_p +$$

$$+ \left\{ \int_{R \cap B} |E_n(x) - E(x)|^p |k_w(x)|^p dx + 2^p \cdot \int_{R \setminus B} |k_w(x)|^p dx \right\}^{1/p} ,$$

za $n = 1,2,\dots$ i za svaki kompaktan podskup B skupa C , i kako se integral

$$\int_{R \setminus B} |k_w(x)|^p dx$$

može učiniti proizvoljno malim biranjem pogodnog podskupa B , to iz ravnomerne konvergencije niza $\{E_n(z)\}$ na B i konvergencije niza $\{E_n(w)\}$ sledi potrebni rezultat.

N a p o m e n a . Razlaganja u teoremi 2.2. i teoremi 3.2. su "ortogonalna", u ovom smislu: za $n \neq m$ je

$$E_{n-1} H^p(e_n) \perp E_{m-1} H^q(e_m) .$$

S obzirom na to da je $H^p(e) \subset H^p$, važi i za funkcije iz $H^p(e)$ teorema o faktorizaciji (teor. 1.3. gl. I.). Narednom teoremom se ta činjenica precizira.

T e o r e m a 4.2. Neka je e unutrašnja funkcija. Ako $f \in H^p(e)$ i $f = F \cdot h$, gde je h neka unutrašnja funkcija, a $F \in H^p$, tada $F \in H^p(e)$.

D o k a z . Kako je $F \in H^p$, treba dokazati još samo da je $eSF \in \widetilde{H}^p$. No, to je jasno, jer je $eSF = (eSf)h$ i $eSf \in \widetilde{H}^p$.

P o s l e d i c a 1. Ako je $f \in H^p(e)$, tada spoljašnji deo od f takodje leži u $H^p(e)$.

P o s l e d i c a 2. Ako je $f \in H^p(e)$, $w \in C \setminus R$ i $f(w) = 0$, tada i funkcija

$$f_1(z) = f(z) \frac{z - \bar{w}}{z - w}$$

leži u $H^p(e)$.

§ 3. Ortogonalni sistemi funkcija u $H^p(e)$

U ovom odeljku razmotrićemo pitanje zatvorenosti jedne specijalne klase ortogonalnih sistema u $H^p(e)$. Proizvoljan ovakav sistem sastoji se od funkcija oblika K_w, pri čemu se za w uzimaju samo vrednosti za koje je $e(w) = \alpha$, gde je α fiksiran broj i $|\alpha| = 1$. Mogućnost formiranja ovakvih sistema je posledica teoreme 1.2. To je jedna od osobenosti prostora $H^p(e)$.

T e o r e m a 1.3. Neka je e nekonstantna unutrašnja funkcija i neka je za nju skup $R \setminus C = M$ najviše prebrojiv. Neka je α broj jediničnog modula: $|\alpha| = 1$, i neka je

$$T = \left\{ t \;/\; t \in C \cap R \wedge e(t) = \alpha \right\}.$$

Neka je, za $t \in M \cup T$,

$$g_t(z) = \begin{cases} [1-\bar{\alpha}e(z)][2\pi i(t-z)]^{-1} & \text{za } t \neq \infty, \\ 1-\bar{\alpha}e(z) & \text{za } t = \infty, \end{cases}$$

$z \in C$. Sistem funkcija

$$(1.3.) \qquad \{ g_t \ / \ t \in T \}$$

leži u $H^p(e)$ za svako $p > 1$ i ortogonalan je. Potreban i dovoljan uslov da sistem (1.3.) bude zatvoren u $H^p(e)$ jeste da

$$(2.3.) \qquad g_s \notin H^q(e) \qquad \text{za } s \in M.$$

Pritom je skup $A = \{ \alpha \ / (|\alpha| = 1) \wedge$ (sistem (1.3.) nije zatvoren) $\}$ — najviše prebrojiv.

D o k a z . Ortogonalnost sistema (1.3.) sledi direktno iz svojstva reproduktivnosti jezgra (teor. 1.1., relacija (2.1.)), jer je $g_t = K_t$ za $t \in T$ i $t \neq \infty$, i na osnovu toga

$$\langle g_t , g_r \rangle = g_t(r) = 0$$

ako je $t \neq r$, $t \in T$, $r \in T$, $r \neq \infty$.

Potrebnost uslova (2.3.). Neka je $g_s \in H^q(e)$ za neko $s \in M$. Tada sistem (1.3.) nije zatvoren, jer je $g_s \neq 0$ i $g_s \perp g_t$ za $t \in T$. Naime, ako je $t \neq \infty$, onda je $\langle g_s , g_t \rangle = g_s(t) = 0$, a ako je $t = \infty$, onda je

$$\langle g_s , g_\infty \rangle = - \langle \tfrac{r-z}{s-z}[1-\bar{\alpha}e(z)] , K_r \rangle = 0 ,$$

pri čemu je r proizvoljna fiksirana tačka iz $T \setminus \{\infty\}$.

Dovoljnost uslova (2.3.). Ovaj deo dokaza izvešćemo samo za $\alpha = 1$, jer se opšti slučaj svodi na ovaj, tako što se umesto funkcije e uzme $e_1 = \bar{\alpha} e$, pri čemu je $H^p(e_1) \equiv H^p(e)$.

Neka je $f \in H^q(e)$ i neka je $f \perp g_t$ za $t \in T$. Treba dokazati da je tada $f = 0$ (teor. 2.1. gl. I.). Prema lemi 6.3. gl. I., funkcija $1 - e$ ima u svakoj tački $t \in T$ nulu prvog reda. Kako je $f(t) = 0$ za $t \in T$, to se f može napisati u obliku $f = (1-e)F$, gde je F neka funkcija analitička u oblasti CM . S obzirom na to da je $eSf \in H^p(e)$ i $eSf(t) = 0$, $t \in T$, možemo smatrati da F ispunjava uslov $SF = F$. Dokazaćemo da je $F = 0$, u nekoliko koraka.

Prvi korak. Neka je $e(z) = \exp(iaz) \cdot e_1(z)$, za neko $a > 0$ i neku unutrašnju funkciju e_1 . Ako je F cela funkcija, tada je $F(z) = \text{const.}$

Dokaz. Kao funkcija iz H^q , f je ograničenog tipa u C^+ (lema 1.4. gl. I.). Kako je funkcija $1 - e$ ograničena u C^+ , to je i F ograničenog tipa u C^+ , a zbog $SF = F$, i u C^- . Sem toga, $f(z) \longrightarrow 0$, $z \longrightarrow \infty$, unutar svake poluravni $y \geqslant \delta > 0$ ([1]) , tako da je f nepozitivnog srednjeg tipa (def. 2.4. gl. I.). Kako je $1 - e$ nultog srednjeg tipa, to je i F nepozitivnog srednjeg tipa u C^+ , a i u C^- . Na osnovu **Крейн**-ove teoreme (teor. 2.4. gl. I.) , F mora biti eksponencijalnog tipa, a kako je njen eksponencijalni tip jednak većem od srednjih tipova u C^+ i C^- , to je F cela funkcija nultog eksponencijalnog tipa ili je $F = 0$.

Zbog već spomenute činjenice da $f(z) \longrightarrow 0$, $z \longrightarrow \infty$, za $y \geqslant \delta > 0$, f je ograničena za $z = iy$, $y \geqslant \delta$. Kako je

$$|e(iy)| = e^{-ay}|e_1(iy)| \leqslant e^{-a\delta} \ (< 1)$$

za $y \geqslant \delta$, to je F ograničena duž pozitivnog, a time i duž negativnog dela imaginarne ose. Funkcija $F_1(z) = F(-iz)$ je ograničena duž realne ose, a pošto je nultog eksponencijalnog tipa, to ona sama, a i funkcija SF_1, ispunjavaju uslove za primenu Phragmén-Lindelöf-ovog principa (teor. 1.4. gl. I.), tako da je F_1 ograničena kako u C^+ tako i u C^-, tj. u celoj kompleksnoj ravni. To znači da je $F(z) \equiv \text{const.}$

<u>Drugi korak</u>. Neka je $e(z) = \exp(-iaz^{-1}) \cdot e_1(z)$, gde je $a > 0$ i e_1 neka unutrašnja funkcija. Ako je F cela funkcija, onda je $F(z) = \text{const.} + \text{const.} \cdot z$.

<u>Dokaz</u>. Shema dokaza je ista kao u prvom koraku, s tom razlikom što ćemo iz ograničenosti funkcije f duž pozitivnog dela imaginarne ose najpre izvesti ograničenost funkcije $[1 - \exp(-iaz^{-1})] \cdot F(z)$ duž pozitivnog dela imaginarne ose. Naime, to sledi iz nejednakosti

$$1 - e^{-a/y} \leqslant 1 - e^{-a/y}|e_1(iy)| \leqslant |1 - e(iy)| \quad , \quad y > 0 \ .$$

Dalje, kako je $1 - e^{-a/y} \underset{y \to +\infty}{\sim} \frac{a}{y}$, to je funkcija $F_1(z) = [F(z) - F(0)]z^{-1}$ ograničena duž pozitivnog, pa, dakle, i duž negativnog dela imaginarne ose. Kao u prvom koraku, sada možemo izvesti zaključak da je $F_1(z) \equiv \text{const.}$, a to znači $F(z) = \text{const.} + \text{const.} \cdot z$.

<u>Treći korak</u>. Ako je $e(z) = \exp\{ia(1+sz)(s-z)^{-1}\}e_1(z)$, za neko $a > 0$, $s \in M$, i za neku unutrašnju funkciju e_1, i ako je F cela funkcija, onda je $F(z) = \text{const.} + \text{const.} \cdot (s-z)$.

<u>Dokaz</u>. Preslikavanjem $w = z - s$, ovaj slučaj se svodi na prethodni.

Četvrti korak. Neka je $e(z) = \exp\left\{(z-z_o)(z-\bar{z}_o)^{-1}\right\}\cdot$ $\cdot e_1(z)$ za neko $z_o \in C^+$ i za neku unutrašnju funkciju e_1. Tada, ako je F cela funkcija, mora biti $F(z) = \text{const.}+\text{const.}\cdot z$.

D o k a z . Kako je, za $y > y_o$,

$$1 - \frac{y-y_o}{y+y_o} \leqslant 1 - \frac{y-y_o}{y+y_o}|e_1(x_o+iy)| \leqslant |1 - e(x_o+iy)| \quad ,$$

to je sada funkcija $[1 - (z-z_o)(z-\bar{z}_o)^{-1}]F(z)$ ograničena duž pozitivnog dela prave $x = x_o$. Prema tome, cela funkcija $[F(z) - F(0)]\cdot z^{-1}$ je ograničena duž prave $x = x_o$, pa je ograničena u celoj kompleksnoj ravni. Dakle, i sada je $F(z) =$ $= \text{const.} + \text{const.}\cdot z$.

Peti korak. Neka e ispunjava uslove iz formulacije teoreme, neka F ima singularitet samo u tački s, $s \in M$, i neka je $F(\infty) = 0$. Tada je $F(z) = \text{const.} + \text{const.}\cdot(s-z)^{-1} +$ $+ \text{const.}\cdot(s-z)^{-2} + \text{const.}\cdot(s-z)^{-3}$.

D o k a z . Preslikavanjem $z = \frac{sw-1}{s+w}$ funkcija F se prevodi u celu funkciju $F_1(w) = F(\frac{sw-1}{s+w})$, a e u unutrašnju funkciju $e_1(w) = e(\frac{sw-1}{s+w})$. Na osnovu leme 2.3. gl. I., biće

$$f_1(w) = [1 - e_1(w)]F_1(w)(s+w)^{-2/p} \in H^q$$

(pri čemu se uzima proizvoljna grana funkcije $(s+w)^{-2/p}$ u C^+). Kako je $2/p < 2$, a s obzirom na prethodnu relaciju, biće

$$f_2(w) = [1 - e_1(w)]F_1(w)(s+w)^{-1}(t-w)^{-1} \in H^q(e_1) \quad ,$$

ako je $t \in R$ takva vrednost da je $e_1(t) = 0$. Sada je funkcija $F_2(w) = F_1(w)(s+w)^{-1}$ cela (zbog $F(\infty) = 0$), što znači da je i $F_3(w) = [F_2(w) - F_2(t)](t-w)^{-1}$ cela funkcija.

Na osnovu teorema 2.3. gl. I. i 3.3. gl. I., a s obzirom i na prebrojivost skupa M_1 realnih singulariteta funkcije e_1, može se napisati

$$e_1(w) = \beta\cdot b(w)\exp\{aiw + \sum_{r\in M_1} ia_r\frac{1+rw}{r-w}\} ,$$

gde je $|\beta| = 1$, $a \geqslant 0$, b Blaschke-ov proizvod, $a_r = d\nu(r) \geqslant 0$, $r\in M_1$, i $\sum a_r < \infty$. S obzirom na to da mora biti $a > 0$ ili $b(w) \not\equiv 1$ ili $a_r > 0$ za bar jedno $r\in M_1$, možemo na funkciju $(1-e_1)F_3$ (koja leži u $H^q(e_1)$, jer se može napisati u obliku $f_2(w) - [1-e_1(w)](t-w)^{-1}F_2(t)$), da primenimo prvi ili četvrti ili treći korak, pa ćemo dobiti da je $F_1(w) = \text{const.} + \text{const.}\cdot(s+w) + \text{const.}\cdot(s+w)^2 + \text{const.}\cdot(s+w)^3$, odnosno $F(z) = \text{const.} + \text{const.}\cdot(s-z)^{-1} + \text{const.}\cdot(s-z)^{-2} + \text{const.}\cdot(s-z)^{-3}$.

<u>Šesti korak</u>. Neka funkcija e ispunjava iste uslove kao u formulaciji teoreme i neka je ispunjen uslov (2.3.). Ako je $f\in H^q(e)$ i $f\perp g_t$, $t\in T$, tada je $f = 0$.

<u>Dokaz</u>. Kao i ranije, napišimo $f = (1-e)\cdot F$. Neka je s konačan izolovani singularitet funkcije F (ako ova ima konačnih singulariteta). Jasno je da mora biti $s\in M$. Glavni deo Laurent-ovog razvitka ove funkcije oko tačke $z = s$ obeležićemo sa F_1. Tada F_1 ima singularitet samo u tački $z = s$ i $F_1(\infty) = 0$. Kako je funkcija $F - F_1$ regularna u okolini tačke $z = s$, to je integral

$$\int_{s-\delta}^{s+\delta} |[1 - e(x+iy)]F_1(x+iy)|^p dx$$

ograničen, kao funkcija od y, za dovoljno malo (fiksirano) $\delta > 0$ i dovoljno malo $y > 0$, a kako je i

$$F_1(z) \underset{z \to \infty}{\sim} \frac{\text{const.}}{z^m}$$

za neko $m \geqslant 1$ (jer je $F_1(\infty) = 0$), to je $(1-e)F_1 \in H^q(e)$. Na osnovu petog koraka, $F_1(z) = \text{const.} + \text{const.}\cdot(s-z)^{-1} + \text{const.}\cdot(s-z)^{-2} + \text{const.}\cdot(s-z)^{-3}$. No, kako $g_s \notin H^q(e)$, to je $F_1(z) \equiv \text{const.}$, što znači da s ustvari nije singularitet za F.

Funkcija F nema, dakle, konačnih izolovanih singulariteta, pa mora biti cela funkcija. Naime, skup svih singulariteta funkcije F, kao podskup od M, je najviše prebrojiv. Singulariteti koji leže na odsečku oblika $[-a,a]$, $a \in R$, $a > 0$, formiraju jedan kompaktan skup bez izolovanih tačaka, a kako je ovaj skup još i najviše prebrojiv, to on mora biti prazan, za svako $a > 0$.

Na osnovu prethodnih koraka, $F(z) = \text{const.} + \text{const.}\cdot z$. Ako je pritom $e(\infty) = 1$, tada, prema lemi 6.3. gl. I., mora biti $F(z) \equiv \text{const.}$, a zbog $f \perp g_\infty$ mora biti ustvari $F(z) \equiv 0$. Ako je, pak, $\infty \in M$, onda je $F(z) \equiv 0$, jer $g_\infty \notin H^q(e)$. Dakle, $f = 0$.

Da bi se kompletirao dokaz teoreme, ostaje još da se dokaže da je skup $\mathcal{A}$ najviše prebrojiv. To, medjutim, odmah sledi iz prebrojivosti skupa M i iz toga što $g_s \in H^q(e)$ može važiti za najviše jednu vrednost α, ako je $s \in M$ (jer bi inače bilo $(s-z)^{-1} \in H^q$ za $s \neq \infty$, odnosno $1 \in H^q$ za $s = \infty$).

Ovim je teorema u potpunosti dokazana.

N a p o m e n a . U teoremi 1.3. jedna od pretpostavki je bila da sistem (1.3.) ima bar jedan element, tj. da je $T \neq \emptyset$. Pokazaćemo sada da je ovaj uslov uvek ispunjen. Treba pokazati da e svaku vrednost α, $|\alpha| = 1$, uzima bar po jedanput. Ako je $M = \emptyset$, tada je, na osnovu teoreme 2.3. gl. I. i teoreme

3.3. gl. I., funkcija e proizvod broja β ($|\beta| = 1$) i Blaschke-ovog proizvoda sa konačno mnogo faktora, pa tvrdjenje sledi iz osnovne teoreme algebre. Ako je $M \neq \emptyset$, tada skup M ima bar jednu izolovanu tačku, jer je zatvoren i prebrojiv. Neka je s izolovana tačka iz M i neka e ne uzima npr. vrednost α , $|\alpha| = 1$. Funkcija $[1-\bar{\alpha}e(z)]^{-1}$ ima (esencijalni) izolovani singularitet u tački s . Prema velikoj Picard-ovoj teoremi, u proizvoljnoj okolini tačke s funkcija $[1-\bar{\alpha}e(z)]^{-1}$ uzima sve konačne vrednosti, sem najviše jedne. Dakle, sem α , e može imati još samo jednu nedostignutu vrednost. Posmatrajmo sada realnu funkciju $g(x) = \operatorname{Im} \ln e(x)$. U dovoljno maloj okolini tačke s $g(x)$ je neprekidna, sem u tački s . Kako je $|e(x+iy)| > 1$ za $y < 0$ i $|e(x+iy)| < 1$ za $y > 0$, to je

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Re} \ln e(x+iy) \right)_{y=0} \leqslant 0$$

odnosno $g'(x) \geqslant 0$ u spomenutoj okolini tačke s $(x \neq s)$, što znači da je g rastuća funkcija. S obzirom na ono što je malopre rečeno o funkciji e , $g(x) \not\equiv \text{const.}$ i postoje dve vrednosti x_1 i x_2 , $x_1 < x_2$, s iste strane od s , u toj okolini, za koje je $g(x_2) \equiv g(x_1) \pmod{2\pi}$. Prema tome, postoji poluzatvoreni interval dužine 2π koji leži u skupu vrednosti funkcije g , tj. e uzima svaku vrednost jediničnog modula bar po jedanput.

P o s l e d i c a 1. t e o r e m e 1.3. Ako je sistem (1.3.) zatvoren u $H^p(e)$ tada je sistem

(3.3.) $$\left\{ e^{m-1} g_t \;/\; t \in T \;;\; m=1,2,\ldots \right\}$$

zatvoren i ortogonalan u H^p .

D o k a z . Kako je

$$\lim_{m \to \infty} |e(w)|^m = 0$$

za svako $w \in C^+$, to je, na osnovu teoreme 2.2.,

$$(4.3.) \qquad H^p = \sum_{m=1}^{\infty} \oplus\, e^{m-1} H^p(e) \quad ,$$

za sve vrednosti $p > 1$. Ako je $m \neq n$, tada su prostori $e^{m-1}H^p(e)$ i $e^{n-1}H^q(e)$ uzajamno ortogonalni, pa je i sistem (3.3.) ortogonalan. Kad se fiksira m , iz sistema (3.3.) se izdvoji sistem $\left\{ e^{m-1} g_t \;/\; t \in T \right\}$ zatvoren u $e^{m-1}H^p(e)$, jer množenje sa e^{m-1} predstavlja izometrično preslikavanje prostora $H^p(e)$ na $e^{m-1}H^p(e)$. Posle ovoga, ostaje još samo da se primeni teorema 2.1. gl. I., pri čemu treba uzeti u obzir i relaciju (4.3.) .

P o s l e d i c a 2. t e o r e m e 1.3. U slučaju zatvorenosti sistema (1.3.) važi ovo: ako je $f \in H^2(e)$, tada je

$$(5.3.) \qquad \|f\|_2^2 = 2\pi \sum_{t \in T} |e'(t)|^{-1} |f(t)|^2 \quad .$$

(Za $t = \infty$ umesto $|f(t)|$ treba $|\lim_{z \to \infty}[zf(z)]|$, a umesto $|e'(t)|$ — $|\lim_{z \to \infty}\{z[1-\bar{\alpha}e(z)]\}|$).

D o k a z . Kad se f razvije po elementima sistema (1.3.) dobija se $f = \sum_{t \in T} a_t g_t$, gde je $a_t = \|g_t\|^{-2}\langle f, g_t\rangle$. Prelaskom na norme dobija se

$$(6.3.) \qquad \|f\|_2^2 = \sum_{t \in T} |a_t|^2 \|g_t\|^2 \quad .$$

Kako je $\langle f \,,\, g_t \rangle = f(t)$ i $\|g_t\|^2 = (2\pi)^{-1}|e'(t)|$ za $t \neq \infty$, a za $t = \infty$: $\langle f \,,\, g_\infty \rangle = 2\pi i \lim_{z \to \infty}[zf(z)]$ i $\|g_\infty\|^2 =$

$= 2\pi \,|\lim\limits_{z\to\infty}[zg_\infty(z)]|$, to se iz (6.3.) , zamenjivanjem ovih rezultata dobija (5.3.) .

T e o r e m a 2.3. Neka funkcija e ispunjava uslove kao u teoremi 1.3. i neka je njena faktorizacija (teor. 2.3. gl. I. i teor. 3.3. gl. I.): $e(z) = \beta\cdot b(z)\cdot s(z)$, gde je $|\beta| = 1$,

$$b(z) = \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^m \prod_{j=1}^{\infty} \frac{|z_j^2+1|}{z_j^2+1}\,\frac{z-z_j}{z-\bar{z}_j} \qquad (z_j \neq i)$$

i

$$s(z) = \exp\left\{ i\cdot\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+s_k z}{s_k-z}\, a_k \right\} \qquad (a_k \geqslant 0) \ .$$

(Za $s_k = \infty$ umesto $(1+s_kz)(s_k-z)^{-1}$ stavlja se z.) Neka je $t \in M$. Potreban i dovoljan uslov da $g_t \in H^2(e)$ za neko α , jeste da bude

$$(7.3.) \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} z_j}{|s-z_j|^2} < \infty \quad \text{i} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+s_k^2}{(s_k-t)^2}\, a_k < \infty \ .$$

Pritom mora biti $\alpha = \beta\cdot b(t)\cdot s(t)$.

D o k a z . Očigledno možemo smatrati da je $\beta = 1$. Ako sve funkcije

$$\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^m \ ; \quad \frac{|z_j^2+1|}{z_j^2+1}\,\frac{z-z_j}{z-\bar{z}_j} \ , \quad j = 1, 2, \ldots \ ; \quad \exp\left(i\frac{1+s_k z}{s_k-z}\, a_k\right) ,$$

$k = 1 , 2 , \ldots$;

poredjamo u jedan niz: $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, možemo e da predstavimo kao (beskonačni) proizvod unutrašnjih funkcija e_n : $e = \prod\limits_{n=1}^{\infty} e_n$. Na osnovu toga, prostor $H^2(e)$ se razlaže na direktnu sumu uzajamno ortogonalnih potprostora:

$$H^2(e) = \sum_{n=1}^{\infty} \oplus E_{n-1} H^2(e_n) \quad ,$$

gde je $E_o = 1$ i $E_n = \prod_{j=1}^{n} e_j$, $n=1,2,\ldots$ (npr. teor. 3.2.).

Neka je sada $g_t \in H^2(e)$, $t \in M$ $(t \neq \infty)$. Projekcija g_t na potprostor $E_{n-1}H^2(e_n)$ je funkcija

$$g_t^n(z) = \overline{E_{n-1}(t)} E_{n-1}(z)[1-\overline{e_n(t)}e_n(z)]\,[2\pi i(t-z)]^{-1} \quad .$$

S obzirom na to da

$$[1 - \overline{\alpha} \exp\{ia(1+tz)(t-z)^{-1}\}]\cdot[2\pi i(t-z)]^{-1}$$

$(a > 0)$ ni za jedno α ne leži u H^2 , to nijedna funkcija $e_n(z)$ nije jednaka $\exp\{ia(1+tz)(t-z)^{-1}\}$, tako da su sve funkcije e_n analitičke u tački t . Kako je

$$\|g_t^n\|^2 = g_t^n(t) = (2\pi)^{-1}|e_n'(t)| \quad \text{i} \quad |e_n'(t)| = \frac{2m}{s^2+1} \quad \text{ili}$$

$$|e_n'(t)| = \frac{2\operatorname{Im} z_j}{|t-z_j|^2} \quad \text{ili} \quad |e_n'(t)| = \frac{1+s_k^2}{(s_k-t)^2}\, a_k \quad ,$$

$$\text{i} \quad \|g_t\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|g_t^n\|^2 \quad ,$$

to je uslov (7.3.) zaista ispunjen.

Za $t = \infty$ biće: $\|g_\infty^n\|^2 = 2\pi|\lim_{n\to\infty}[z g_\infty^n(z)]|$, što iznosi 4π ili $4\pi \operatorname{Im} z_j$ ili $2\pi(1+s_k^2)$, a ostalo je isto kao i kad je $t \neq \infty$.

Zbog

$$g_t(z) = \sum_{n=1}^{\infty} g_t^n(z) = [1 - \prod_{n=1}^{\infty} \overline{e_n(t)} e(z)]\,[2\pi i(t-z)]^{-1}$$

mora biti $\alpha = \prod_{n=1}^{\infty} e_n(t) = b(t)\cdot s(t)$, pri čemu $b(t)$ i $s(t)$

postoje zato što uslov (7.3.) implicira

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} z_j}{|t-z_j|\cdot|z_j+i|} < \infty \quad \text{i} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{1+s_k t}{s_k-t}\right| a_k < \infty .$$

Ako je uslov (7.3.) ispunjen, tada je $\sum_{n=1}^{\infty} \|g_t^n\|^2 < < \infty$, te je $\sum_{n=1}^{\infty} g_t^n \in H^2(e)$. Medjutim,

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_t^n(z) = \Big[1 - \prod_{n=1}^{\infty} \overline{e_n(t)}e(z)\Big]\cdot\big[2\pi i(t-z)\big]^{-1} ,$$

tako da je $g_t \in H^2(e)$ za $\alpha = \prod_{n=1}^{\infty} e_n(t)$.

Teorema je dokazana.

T e o r e m a 3.3. Ako sistem (1.3.) nije zatvoren u $H^2(e)$ (pod istim pretpostavkama za e kao u teoremi 1.3.) , on se može dopuniti svim onim funkcijama g_s , $s \in M$, koje leže u $H^2(e)$, posle čega se dobija ortogonalan i zatvoren sistem (u $H^2(e)$) .

D o k a z . Zatvorenost dopunjenog sistema dokazuje se sasvim slično kao i zatvorenost sistema (1.3.) u teoremi 1.3.

Ostaje da se dokaže još ortogonalnost. Neka su s i v dve različite tačke iz M . Koristeći se oznakama iz teoreme 2.3., možemo da napišemo

$$g_s = \sum_{n=1}^{\infty} g_s^n \quad \text{i} \quad g_v = \sum_{n=1}^{\infty} g_v^n .$$

Odatle sledi

$$\langle g_s , g_v \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle g_s^n , g_v^n \rangle =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \overline{E_{n-1}(s)}E_{n-1}(v)\big[1 - \overline{e_n(s)}e_n(v)\big]\big[2\pi i(s-v)\big]^{-1} =$$

$$= \Big[1 - \prod_{j=1}^{\infty} \overline{e_j(s)}e_j(v)\Big]\cdot\big[2\pi i(s-v)\big]^{-1} = 0 ,$$

jer je, prema teoremi 2.3., $\prod_{j=1}^{\infty} e_j(s) = \prod_{j=1}^{\infty} e_j(v) = \alpha.$

Dokaz je ovim završen.

§ 4. Ekstremalni problemi

U vezi sa prostorima $H^p(e)$ mogu da se posmatraju sledeća dva tipa ekstremalnih problema:

1) Ako je Φ proizvoljan linearni ograničeni funkcional na $H^p(e)$, naći

$$(1.4.) \qquad \sup_{f \in H^p(e),\, \|f\| \leq 1} |\Phi(f)| = \|\Phi\| ,$$

ili (s obzirom na reprezentaciju o. l. funkcionala) za datu funkciju $k \in L^q$ naći

$$(1'.4.) \qquad \sup_{f \in H^p(e),\, \|f\| \leq 1} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{k(x)}dx \right| .$$

2) Ako je $k \in L^q$ i ako sa H obeležimo anihilator prostora $H^p(e)$, naći

$$(2.4.) \qquad \inf_{g \in H} \|k - g\|_q .$$

Može se postaviti i zadatak odredjivanja funkcije f koja ostvaruje supremum u (1.4.) , tj. (1'.4.) (ukoliko takva funkcija postoji). Takvu funkciju ćemo nazivati <u>ekstremalnom</u> za dati problem. Od interesa je i da li je ekstremalna funkcija jedinstvena.

Probleme tipa 2) zvaćemo <u>dualnim ekstremalnim problemima</u>, a probleme tipa 1) — <u>prvobitnim.</u> Funkciju k u problemu 2) zvaćemo <u>jezgrom</u>, a svaka dva jezgra h i k za koje je $h - k \in H$ — <u>ekvivalentnim jezgrima:</u> $h \sim k$. Uz problem 2) moće se postaviti i pitanje egzistencije ekstremalnog jezgra, tj. takvog jezgra $h \sim k$ koje ostvaruje infimum u (2.4.) ili, što je isto, jezgra $h \sim k$ za koje je

$$\|h\|_q = \min_{K \sim k} \|K\|_q .$$

I ovde će nas zanimati i jedinstvenost.

Poznat je sledeći opšti rezultat o Banach-ovim prostorima ([7] , str. 110.): ako je M potprostor Banach-ovog prostora X i $M^{\perp}$ anihilator za M , tada je količnik-prostor $X^{*}/M^{\perp}$ izometrično izomorfan sa M^{*} . Šta više, za fiksirano $\phi \in X^{*}$ važi

$$\sup_{f \in M, \|f\| \leq 1} |\phi(f)| = \min_{\Psi \in M^{\perp}} \|\phi + \Psi\|$$

gde "min" označava da je infimum dostignut. Dakle, u našem slučaju će biti

$$\sup_{f \in H^{p}(e), \|f\|_p \leq 1} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{k(x)}dx \right| = \min_{g \in H} \|k - g\|_q$$

Ovo je tzv. relacija dualnosti. Izmedju ostalog, ona tvrdi da ekstremalno jezgro uvek postoji.

Dokažimo da za prvobitni problem uvek postoji ekstremalna funkcija. Opet ćemo koristiti jedan opšti rezultat. Ako je M potprostor Banach-ovog prostora X , tada je prostor $(X/M)^{*}$ izometrično izomorfan sa $M^{\perp}$ i za fiksirano $f \in X$ važi

$$\max_{\phi \in M^{\perp}, \|\phi\| \leq 1} |\phi(f)| = \inf_{g \in M} \|f + g\| ,$$

pri čemu je supremum dostignut ([7] , str. 111.). Ako za M uzmemo H , onda će biti $M^{\perp} = H^{p}(e)$. Naime, na osnovu teoreme

2.1.b) , $H = SH^q \oplus e^{*-1}H^q$, pa bi se dokaz da je $H^{\perp} = H^p(e)$ bazirao na zatvorenosti sistema $\{Sk_w \;/\; w \in C^+\}$ u SH^q i zatvorenosti sistema $\{e^{*-1}\overline{ek_z(w)} \;/\; w \in C^+\}$ u $e^{*-1}H^q$. Shvativši integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)}k(x)dx$$

kao vrednost funkcionala Ψ na L^q , odredjenog funkcijom f , u "tački" k , možemo supremum u (1'.4.) da napišemo ovako

$$\sup_{\Psi \in H^{\perp}, \|\Psi\| \leq 1} |\Psi(k)|$$

a prema ranije rečenom, ovaj supremum je dostignut.

Pošto smo utvrdili da prvobitni i dualni problem imaju rešenja, pozabavimo se jedinstvenošću tih rešenja. U tome će nam sledeća lema biti od koristi.

L e m a 1.4. Da bi funkcija $f \in H^p(e)$ za koju je $\|f\|_p = 1$ i $\Phi(f) > 0$ bila ekstremalna funkcija i da bi K ($K \sim k$) bilo ekstremalno jezgro, potrebno je i dovoljno da bude

(3.4.) $\qquad f(x)K(x) \geqslant 0 \qquad$ s. s. na R

i

(4.4.) $\qquad \|f(x)\|^p = |K(x)|^q \, \|K\|^{-q} \qquad$ s. s. na R .

D o k a z . Na osnovu relacije dualnosti f će biti ekstremalna funkcija za koju je $\|f\|_p = 1$ i $\Phi(f) > 0$, a K ekstremalno jezgro, ako i samo ako je $\Phi(f) = \|K\|$. Lema sada sledi iz uslova da u Hölder-ovoj nejednakosti važi znak jednakosti.

S obzirom na to da je $|\Phi(e^{i\alpha}f)| = |\Phi(f)|$ za svako realno α, ekstremalna funkcija, strogo uzev, nije jedinstvena. Zato ćemo nazvati normalizovanim one ekstremalne funkcije f za koje je $\Phi(f) = \|\Phi\|$.

Formulišimo sada glavnu teoremu o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja problema 1) i 2).

T e o r e m a 1.4. Ako je Φ netrivijalni o. l. funkcional na $H^p(e)$ (tj. $k \notin H$), tada za prvobitni ekstremalni problem postoji jedinstvena normalizovana ekstremalna funkcija, a za dualni problem postoji jedinstveno ekstremalno jezgro.

D o k a z. Treba da se dokaže samo još jedinstvenost. Neka su f i K normalizovana ekstremalna funkcija i ekstremalno jezgro. Zbog $k \notin H$, mora biti $K(x) \neq 0$ na nekom skupu $E \subset R$ pozitivne mere ([4]). Relacije (3.4.) i (4.4.) pokazuju da K odredjuje i $\operatorname{sgn} f(x)$ i $|f(x)|$ s. s. na E, tako da se sve normalizovane ekstremalne funkcije poklapaju s.s. na E, a to znači da se poklapaju svuda u C^+ ([4]), tj. da postoji samo jedna normalizovana ekstremalna funkcija.

Kako je $f \in H^p$ i $\Phi(f) > 0$ (tj. $f \neq 0$), to je $f(x) \neq$ $\neq 0$ s. s. na R. Pretpostavimo li da sem K postoji još jedno ekstremalno jezgro K_1, dobićemo, na osnovu (3.4.) i (4.4.),

$$K_1(x) = [\operatorname{sgn} f(x)]^{-1} |f(x)|^{p/q} \|K_1\| = K(x) \|K_1\| \cdot \|K\|^{-1} ,$$

za s. s. $x \in R$. No, kako mora biti $K_1 - K \in H$ i $K \notin H$, to je $\|K_1\| = \|K\|$ i $K_1(x) = K(x)$ s. s. na R, čime je dokazana jedinstvenost ekstremalnog jezgra.

G L A V A III

PROSTORI $B^p(E)$

§ 1. Definicija i veza sa $H^p(e)$

Izučavanje prostorâ $H^p(e)$ može da posluži, u nekom smislu, kao osnova za izučavanje prostorâ $B^p(E)$. Ovi prostori su vrlo bliski prostorima $H^p(e)$, ali imaju i svojih specifičnih svojstava, što će se videti u daljem izlaganju.

D e f i n i c i j a 1.1. Neka je E funkcija analitička u C^+ i C^- koja ispunjava uslove:

a) postoji $\lim_{y \to 0} E(x+iy) \; (\stackrel{def}{=} E(x))$ za s.s. $x \in R$;

b) $|SE(z)| < |E(z)|$ za $z \in C^+$.

Sa $B^p(E)$ obeležimo skup svih funkcija F analitičkih u C^+ i C^-, koje ispunjavaju uslov a) i sledeći uslov:

c) $\frac{F}{E} \in H^p$ i $\frac{SF}{E} \in H^p$.

$B^p(E)$ postaje normirani prostor ako se uvede norma sa

$$\|F\|_{B^p(E)} = \|\tfrac{F}{E}\|_{L^p} .$$

S obzirom na to da je $B^p(E) \subset \tau L^p$ za $\tau(x)=E(x)$ (s.s. na R), to se u vezi sa prostorima $B^p(E)$ može govoriti o skalarnom proizvodu i ortogonalnosti (def. 1.1. gl. I., def. 2.1. gl. I. i sl.).

Prostore $B^2(E)$, u slučaju kad je E cela funkcija, izučio je de Branges, ([12] ; [15] - [19]). Mi ćemo najvažnije de Branges-ove rezultate preneti na širu klasu prostorâ $B^p(E)$. Potrebno je prvo da uspostavimo vezu izmedju $B^p(E)$ i $H^p(e)$.

T e o r e m a 1.1. Prostor $B^p(E)$ je izometrično izomorfan sa $H^p(e)$, gde je $e=\frac{SE}{E}$.

D o k a z . S obzirom na uslove a) i b) za funkciju E, neposredno je jasno da je e (nekonstantna) unutrašnja funkcija, tako da prostor $H^p(e)$ postoji. Ako je $F \in B^p(E)$ i $f=\frac{F}{E}$ biće $eSf = \frac{SF}{E}$, što pokazuje da je preslikavanje

$$\Psi : F \longrightarrow f$$

jedan izometrični homomorfizam iz $B^p(E)$ u $H^p(e)$. Medjutim, ako je f proizvoljna funkcija iz $H^p(e)$, tada $F = Ef$ leži u $B^p(E)$. Ovo se lako utvrdjuje proveravanjem uslovâ, a jedino što pritom zaslužuje pažnju je analitičnost F u tačkama z za koje je $e(\bar{z}) = 0$. Naime, u tim tačkama (koje obavezno leže u C^-) e ima polove (a E nule), tako da ponašanje funkcije f u blizini proizvoljne takve tačke treba posebno ispitati.

Neka je w proizvoljna tačka za koju je $e(\bar{w}) = 0$, tj. $E(w) = 0$. Funkcija

$$-\frac{E(\bar{w})e(z)}{2\pi i(\bar{w}-z)} = g_w(z)$$

leži u $H^q(e)$ i jednaka je

$$\lim_{v \to w} \left[\overline{E(v)}K_v(z)\right]$$

po metrici u $H^q(e)$. Da bismo ovo uvideli, dovoljno će biti samo da primetimo da je

$$\begin{aligned} \|\overline{E(v)}K_v - g_w\|_q \leq & \ |E(v)|\cdot\|[2\pi i(\bar{v}-z)]^{-1}\|_q + \\ & + |E(\bar{w}) - E(\bar{v})|\cdot\|[2\pi i(\bar{v}-z)]^{-1}\|_q + \\ & + |E(\bar{w})|\cdot\|[2\pi i(\bar{w}-z)]^{-1} - [2\pi i(\bar{v}-z)]^{-1}\|_q . \end{aligned}$$

Dakle, funkcija Ef, gde je $f \in H^p(e)$, može neprekidno da se produži u tački w, i to na ovaj način

$Ef(w) = \langle f, g_w \rangle$.

Prema tome, Ψ preslikava $B^p(E)$ na $H^p(e)$, što znači da su $B^p(E)$ i $H^p(e)$ zaista izometrično izomorfni. Dokaz je završen.

Narednih nekoliko teorema predstavljaju posledice prethodne i odgovarajućih teorema za $H^p(e)$.

T e o r e m a 2.1. $B^p(E)$ je Banach-ov prostor, a za $p=2$ je Hilbert-ov. Ako je $\mathcal{C}$ skup svih tačaka u kojima je funkcija E analitička, onda je svaka funkcija iz $B^p(E)$ takodje analitička u $\mathcal{C}$. Konvergancija po normi u $B^p(E)$ implicira ravnomernu konvergenciju na kompaktnim podskupovima skupa $\mathcal{C}$.

D o k a z . Prvo tvrdjenje je jasno. Što se tiče drugog, dovoljno je napomenuti da je svaka funkcija F iz $B^p(E)$, po definiciji 1.1., analitička u $\mathcal{C} \setminus R$, dok je u svakoj tački skupa $\mathcal{C} \cap R$ funkcija e analitička, jer ako je neka tačka na R nula za E, ona je nula i za SE, i to istog reda.

Za dokaz trećeg tvrdjenja, uzmimo neki kompaktan skup $B \subset \mathcal{C}$. U B može biti najviše konačno mnogo nulâ funkcije E. Predstavimo B kao uniju jednog kompaktnog skupa koji ne sadrži ni jednu nulu funkcije E, i najviše konačno mnogo kompaktnih skupova dovoljno malih dijametara, od kojih svaki sadrži tačno po jednu nulu funkcije E i ne seče se sa R. S obzirom na teoremu 1.2. gl. II., dovoljno je da se tvrdjenje dokaže samo za kompaktne skupove ovog drugog tipa. Neka je B_1 neki takav skup i u njemu tačka w za koju je $E(w) = 0$. Dokažimo da konvergencija po normi niza funkcija $\{ f_n / n=1,2,\dots \}$ u $H^p(e)$ implicira ravnomernu konvergenciju niza $\{ Ef_n \}$ na skupu B_1.

U dokazu teoreme 1.1. videli smo da

$$\overline{E(v)}K_v \xrightarrow[v \to w]{} g_w$$

po normi u $H^q(e)$, tako da je norma $\|\overline{E(v)}K_v\|_q$ ograničena u nekoj okolini tačke w , npr. konstantom M . Možemo smatrati da je B_1 sadržan u takvoj okolini, jer ako to nije, može se postići dovoljnim smanjivanjem njegovog dijametra. Zato će biti, za $v \in B_1$,

$$|E(v)f_n(v) - E(v)f_m(v)| = |\langle f_n - f_m , \overline{E(v)}K_v\rangle| \leq \|f_n - f_m\|_p \cdot M ,$$

odakle i sledi tvrdjenje.

T e o r e m a 3.1. Svaki funkcional

$$J_w : F \longrightarrow F(w) , \quad w \in \mathcal{C},$$

je neprekidan na $B^p(E)$. Funkcija

$$L_w(z) = \left[\overline{E(w)}E(z) - E(\bar{w})SE(z)\right]\cdot\left[2\pi i\cdot(\bar{w} - z)\right]^{-1}$$

leži u $B^p(E)$ kao funkcija od z , za fiksirano w iz $\mathcal{C}$, i to za sve vrednosti p , $1 < p < \infty$. Sem toga, važi relacija reproduktivnosti

$$F(w) = \langle F , L_w\rangle , \quad F \in B^p(E) , \ w \in \mathcal{C} .$$

D o k a z . Kako iz $w \in \mathcal{C}$ i $E(w) \neq 0$ sledi $w \in C$, i kako je tada

$$L_w(z) = \overline{E(w)}E(z)K_w(z) ,$$

to za taj slučaj tvrdjenje sledi iz teoreme 1.1. i odgovarajućih svojstava $H^p(e)$. Ako je $E(w) = 0$, onda je $L_w(z) = E(z)g_w(z)$

pa je, prema dokazu teoreme 1.1.,

$$\langle F , L_w \rangle_{EL^{p,q}} = \langle \frac{F}{E} , g_w \rangle_{L^{p,q}} = F(w) ,$$

za $F \in B^p(E)$. Teorema je dokazana.

Teorema koju smo upravo dokazali je uopštenje odgovarajućeg rezultata za de Branges-ove prostore $\mathcal{H}(E)$ ([12] , teor. 19., str. 50 ; [15] , lema 4.).

Funkcija E može da se predstavi kao $E = A - iB$, pri čemu je $SA = A$ i $SB = B$. Naime, funkcije A i B bi glasile

$$A = \frac{E + SE}{2} , \quad B = i\frac{E - SE}{2} .$$

Pomoću ovih funkcija L_w može da se napiše u obliku

$$L_w(z) = [B(z)\overline{A(w)} - A(z)\overline{B(w)}]\cdot[\pi(z - \bar{w})]^{-1} .$$

Sledećom teoremom utvrdjuje se da svi prostori $B^p(E)$, pored do sada dokazanih, imaju i druga svojstva koja su poznata za prostore $\mathcal{H}(E)$ ([12] , problem 50., str. 56.).

T e o r e m a 4.1. a) Ako $F \in B^p(E)$, tada i $SF \in B^p(E)$ i $\|SF\| = \|F\|$. b) Ako je $w \in CR$, $F \in B^p(E)$ i $F(w) = 0$, tada je $F_1(z) = F(z)(z - \bar{w})(z - w)^{-1} \in B^p(E)$ i $\|F_1\| = \|F\|$. c) Ako je $w \in C \cap R$, $F \in B^p(E)$ i $\frac{F}{E}(w) = 0$, tada je $F(z)(z - w)^{-1} \in$ $\in B^p(E)$.

Dokaz izostavljamo, jer je jednostavan.

Ortogonalne sisteme formirane evaluacijom jezgra razmotrićemo i u $B^p(E)$, kao što smo to učinili za $H^p(e)$ u teoremi 1.3. gl. II. Naredna teorema sadrži kao specijalan slučaj teoremu o ortogonalnim sistemima u $\mathcal{H}(E)$ ([12] , teor. 2.2., str. 55.; [20]).

T e o r e m a 5.1. Neka je $B^p(E)$ dati prostor i neka je za funkciju E skup $R \setminus \mathcal{C}$ najviše prebrojiv. Neka je α proizvoljan broj jediničnog modula i neka je

$$T = \left\{ t \ / \ t \in R \cap C \wedge \frac{SE}{E}(t) = \alpha \right\}$$

(gde je C skup tačaka u kojima je funkcija $e = \frac{SE}{E}$ analitička). Neka je, dalje,

$$g_t(z) = \begin{cases} [E(z) - \bar{\alpha} SE(z)] \cdot [2\pi i(t - z)]^{-1}, & t \neq \infty \\ E(z) - \bar{\alpha} SE(z), & t = \infty \end{cases}$$

za $z \in \mathcal{C}$. Sistem funkcija

(2.1.) $\qquad \{ g_t \ / \ t \in T \}$

leži u $B^p(E)$ i ortogonalan je. Potreban i dovoljan uslov da sistem (2.1.) bude zatvoren u $B^p(E)$ jeste da $g_s \notin B^q(E)$ za $s \in R \setminus C$. Pritom je skup vrednosti α za koje sistem (2.1.) nije zatvoren — najviše prebrojiv. Za $p = 2$ važi: ako sistem (2.1.) nije zatvoren u $B^2(E)$, on se može dopuniti svim onim funkcijama g_s, $s \in R \setminus C$, koje leže u $B^2(E)$, posle čega se dobija zatvoren i ortogonalan sistem.

Ova teorema je direktna posledica teoreme 1.1. i teoremâ 1.3. i 3.3. gl. II.

Na kraju ovog odeljka opisaćemo skup funkcija E koje daju isto "reproduktivno jezgro" $L_w(z)$ za odgovarajuće prostore $B^p(E)$. Za $p = 2$ poklapanje jezgara dovoljno je za poklapanje samih prostora. Rezultat sadržan u narednoj teoremi sadrži kao specijalan slučaj odgovarajući rezultat za prostore $\mathcal{H}(E)$

([16] , teor. I.).

T e o r e m a 6.1. Potreban i dovoljan uslov da prostori $B^p(E)$ i $B^p(E_1)$ ($E = A - iB$, $E_1 = A_1 - iB_1$) imaju isto reproduktivno jezgro $I_w(z)$, jeste da postoje realni brojevi a, b, c i d, takvi da je $ad - bc = 1$ i

$$(3.1.)\qquad (A_1,B_1) = (A,B)\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

odnosno da postoje kompleksni brojevi m i n takvi da je $|m|^2 - |n|^2 = 1$ i

$$(4.1.)\qquad E_1 = mE + nSE .$$

D o k a z . Lako se proverava da iz (3.1.) sledi

$$(5.1.)\qquad B_1(z)\overline{A_1(w)}-A_1(z)\overline{B_1(w)} = (ad-bc)[B(z)\overline{A(w)}-A(z)\overline{B(w)}],$$

i dovoljnost uslova (3.1.) je jasna.

Što se tiče potrebnosti, iz

$$B_1(z)\overline{A_1(w_k)} - A_1(z)\overline{B_1(w_k)} = B(z)\overline{A(w_k)} - A(z)\overline{B(w_k)} ,$$

$k = 1,2$, gde su w_1 i w_2 proizvoljne fiksirane tačke iz $\mathcal{C}$, sledi

$$A_1(z)[\overline{B_1(w_1)}\overline{A_1(w_2)} - \overline{B_1(w_2)}\overline{A_1(w_1)}] =$$

$$= B(z)[\overline{A(w_2)}\overline{A_1(w_1)} - \overline{A(w_1)}\overline{A_1(w_2)}] + A(z)[\overline{B(w_1)}\overline{A_1(w_2)}-\overline{B(w_2)}\overline{A_1(w_1)}]$$

Kako su funkcije A_1 i B_1 linearno nezavisne (jer bi inače bilo $|SE_1| = |E_1|$), to je A_1 linearna kombinacija A i B. Na isti način i B_1. Tako dobijamo (3.1.). Da su a, b, c, d pritom realni brojevi izlazi iz $SA = A$, $SB = B$, $SA_1 = A_1$ i

$SB_1 = B_1$, a da je $ad - bc = 1$ sledi iz (5.1.).

Da bi se dokaz završio, treba još samo da se pokaže da su relacije (3.1.) i (4.1.) ekvivalentne, što ne predstavlja teškoću.

N a p o m e n a 1. Interesantno je primetiti da su funkcije e_1 i e u sledećoj relaciji

$$e_1(z) = \frac{\bar{m}}{m} \frac{e(z) + \bar{n}/\bar{m}}{1 + (n/m)e(z)} ,$$

ako je ispunjeno (4.1.). Pritom je $|n/m| < 1$, zbog $|m|^2 - |n|^2 = 1$.

N a p o m e n a 2. Prostori $B^p(E)$ i $B^p(E_1)$ imaju istu topologiju, ako važi (3.1.), odnosno (4.1.). Zaista, iz (4.1.) odmah možemo dobiti ocenu

$$\left| \frac{E_1}{E}(z) \right| = |m + n \cdot e(z)| \leqslant |m| + |n| , \qquad z \in C^+,$$

a kad E i E_1 medjusobno zamene mesta dobija se da je i količnik $\frac{E}{E_1}$ ograničen u C^+. Na osnovu toga lako se sada dokazuje da se skupovi $B^p(E_1)$ i $B^p(E)$ poklapaju i da imaju istu topologiju.

N a p o m e n a 3. Sem navedenih, prostori $B^p(E)$ i $B^p(E_1)$ imaju u posmatranom slučaju još jedno zanimljivo svojstvo. Ako je $F \in B^p(E)$ i $G \in B^q(E)$, tada važi

$$(6.1.) \qquad \langle F , G \rangle_E = \langle F , G \rangle_{E_1} .$$

(Za $p = 2$ ovo označava ustvari identičnost prostora $B^2(E)$ i $B^2(E_1)$.) Naime, kako $B^p(E)$ i $B^p(E_1)$ imaju isto reproduktivno jezgro $L_w(z)$, to jednakost (6.1.) važi ako su F

i G konačne linearne kombinacije funkcija oblika L_w, $w \in C^+$. No, kako je sistem $\{L_w \,/\, w \in C^+\}$ zatvoren u $B^p(E)$, $B^p(E_1)$, $B^q(E)$ i $B^q(E_1)$ (na osnovu teoreme 2.1. gl. II i teoreme 1.1.) to (6.1.) važi i u opštem slučaju.

§2. Domen množenja sa z, odnosno sa $(z - s)^{-1}$

Ako je $F \in B^p(E)$, tada $zF(z)$ može i da ne bude u $B^p(E)$. Od interesa je da se opiše skup svih funkcija F iz $B^p(E)$ za koje $zF(z) \in B^p(E)$, tj. da se odredi domen množenja sa z u prostoru $B^p(E)$. U vezi sa ovim, dokazaćemo teoremu koja predstavlja uopštenje teoreme o množenju sa z u de Branges-ovim prostorima ([12] , str. 84.; [17] , teor. I.), a zatim razmotriti analogon ovog zadatka u odnosu na množenje sa $(z - s)^{-1}$.

T e o r e m a 1.2. Potreban i dovoljan uslov da funkcija T iz $B^q(E)$ bude ortogonalna na sve funkcije F iz $B^p(E)$ za koje je $zF(z) \in B^p(E)$, jeste da postoje neki broj λ i unimodularni broj α, takvi da je

$$(1.2.) \qquad T = \lambda \cdot g_\infty ,$$

gde je $g_\infty(z) = E(z) - \bar{\alpha} SE(z)$.

D o k a z . Dovoljnost uslova. Neka je ispunjeno (1.2.) za neko λ i neko α, $|\alpha| = 1$. Lako se proverava da je tada, za $w \in \mathbb{C}R$,

$$T(z)L_w(w) - L_w(z)T(w) = [T(z)L_{\bar{w}}(\bar{w}) - L_{\bar{w}}(z)T(\bar{w})]\frac{w - z}{\bar{w} - z} .$$

Ako je $F \in B^p(E)$ i $zF(z) \in B^p(E)$, tada je

$$\langle (w-z)F(z)\ ,\ T(z)L_w(w)\rangle = \langle (w-z)F(z)\ ,\ T(z)L_w(w) - L_w(z)T(w)\rangle =$$

$$= \langle (w-z)F(z)\ ,\ [T(z)L_{\bar{w}}(\bar{w}) - L_{\bar{w}}(z)T(\bar{w})]\frac{w-z}{\bar{w}-z}\rangle =$$

$$= \langle (\bar{w}-z)F(z)\ ,\ T(z)L_{\bar{w}}(\bar{w}) - L_{\bar{w}}(z)T(\bar{w})\rangle = \langle (\bar{w}-z)F(z),\ T(z)L_{\bar{w}}(\bar{w})\rangle .$$

Odatle, zbog $L_w(w) = L_{\bar{w}}(\bar{w}) \neq 0$ (što sledi iz uslova b), def. 1.1.) i $w \neq \bar{w}$, izlazi da je $\langle F\ ,\ T\rangle = 0$.

<u>Potrebnost uslova</u>. Neka je sada T proizvoljna funkcija iz $B^q(E)$ ortogonalna na domen množenja sa z u $B^p(E)$. Neka je F iz ovog domena i neka je $w \in \mathbb{C}R$. Tada je

$$\langle (w-z)F(z)\ ,\ T(z)L_w(w) - L_w(z)T(w)\rangle = \langle (w-z)F(z)\ ,\ T(z)L_w(w)\rangle =$$

$$= \langle (\bar{w}-z)F(z)\ ,\ T(z)L_{\bar{w}}(\bar{w})\rangle = \langle (\bar{w}-z)F(z),\ T(z)L_{\bar{w}}(\bar{w}) - L_{\bar{w}}(z)T(\bar{w})\rangle =$$

$$= \langle (w-z)F(z)\ ,\ [T(z)L_{\bar{w}}(\bar{w}) - L_{\bar{w}}(z)T(\bar{w})]\frac{w-z}{\bar{w}-z}\rangle .$$

Kako se svaka funkcija iz $B^p(E)$ koja ima nulu u tački w može predstaviti u obliku $(w-z)F(z)$, $F \in B^p(E)$ (teor. 4.1.), to je funkcija

$$G(z) = T(z)L_w(w) - L_w(z)T(w) -$$

$$- [T(z)L_{\bar{w}}(\bar{w}) - L_{\bar{w}}(z)T(\bar{w})]\frac{w-z}{\bar{w}-z}$$

ortogonalna na sve funkcije iz $B^p(E)$ koje se anuliraju u tački w. No, kako je $G(w) = 0$ i kako se svaka funkcija $F_1 \in B^p(E)$ može napisati u obliku

$$\left[F_1 - \frac{F_1(w)}{L_w(w)}L_w\right] + \frac{F_1(w)}{L_w(w)}L_w\ ,$$

to je $G \perp B^p(E)$, što znači $G = 0$. (Ovo je posledica relacija $\frac{G}{E} \in H^q(e)$ (teor. 1.1.) i $H^q(e) \perp SH^p \oplus eH^p$ (teor. 2.1. gl. II.), iz kojih slédi $\frac{G}{E} \perp L^p$.) Iz $G(z) \equiv 0$ sledi da je $T = \beta E + \gamma SE$, za neke brojeve β i γ. Kako ST mora biti kolinearno sa T (jer bi inače bilo $E \in B^q(E)$), to je $\beta\bar{\beta} = \gamma\bar{\gamma}$, pa se potreban oblik za T dobija kad se stavi $\lambda = \beta$ i $\bar{\alpha} = -\frac{\gamma}{\beta}$.

Ovim je teorema dokazana.

Umesto množenja sa z može se posmatrati množenje sa $z-s$ ili sa $(z-s)^{-1}$. U prvom slučaju se ne dobija ništa novo, jer je , za $F \in B^p(E)$, uslov $(z-s)F(z) \in B^p(E)$ ekvivalentan sa $zF(z) \in B^p(E)$. Što se tiče drugog slučaja, ako je $s \in \mathcal{C}$, domen množenja sa $(z-s)^{-1}$ se poklapa sa potprostorom funkcija koje se anuliraju u tački s, tako da potreban i dovoljan uslov da funkcija T iz $B^q(E)$ bude ortogonalna na taj domen jeste da bude $T = \lambda \cdot L_s$. Preostalu mogućnost, $s \in R \setminus \mathcal{C}$, obradićemo u narednoj teoremi.

T e o r e m a 2.2. Neka je $s \in R \setminus \mathcal{C}$. Potreban i dovoljan uslov da funkcija $T \in B^q(E)$ bude ortogonalna na domen množenja sa $(z-s)^{-1}$ u $B^p(E)$ jeste da bude $T = \lambda \cdot g_s$, za neki broj λ i za neki unimodularni broj α. Pritom je

$$g_s(z) = [E(z) - \bar{\alpha} SE(z)]\,[2\pi i(s - z)]^{-1}.$$

D o k a z . Dovoljnost uslova. Ako je $T = \lambda \cdot g_s$, $|\alpha| = 1$, tada je, slično kao u dokazu prethodne teoreme, za $w \in \mathbb{C}R$,

$$(s-\bar{w})^{-1}[T(z)L_w(w) - L_w(z)T(w)] =$$

$$= (s-w)^{-1}[T(z)L_{\bar{w}}(\bar{w}) - L_{\bar{w}}(z)T(\bar{w})]\,\frac{z - w}{z - \bar{w}} \;.$$

Nastavak ovog dela dokaza je analogan odgovarajućem delu dokaza prethodne teoreme. Tako ćemo sada za proizvoljnu funkciju F iz domena množenja sa $(z-s)^{-1}$ u $B^p(E)$ dobiti relaciju

$$\left\langle \frac{z-w}{z-s}\frac{1}{s-w}F(z)\ ,\ T(z)L_w(w)\right\rangle = \left\langle \frac{z-\bar{w}}{z-s}\frac{1}{s-\bar{w}}F(z)\ ,\ T(z)L_{\bar{w}}(\bar{w})\right\rangle .$$

Odatle, zbog $L_w(w) = L_{\bar{w}}(\bar{w}) \neq 0$ i

$$\frac{z-w}{z-s}\frac{1}{s-w} - \frac{z-\bar{w}}{z-s}\frac{1}{s-\bar{w}} = \frac{w-\bar{w}}{|s-w|^2} \neq 0\ ,$$

sledi $\langle F\ ,\ T\rangle = 0$.

Potrebnost uslova. Neka je funkcija T iz $B^q(E)$ ortogonalna na domen množenja sa $(z-s)^{-1}$ u $B^p(E)$. Uzmimo neko $w \in \mathbb{C}R$ i proizvoljnu funkciju iz spomenutog domena. Tada je, zbog $\frac{z-w}{z-s}\frac{1}{s-w} = \frac{1}{z-s} - \frac{1}{w-s}$,

$$\left\langle \frac{z-w}{z-s}\frac{1}{s-w}F(z)\ ,\ T(z)L_w(w) - L_w(z)T(w)\right\rangle =$$

$$= \left\langle \frac{z-w}{z-s}\frac{1}{s-\bar{w}}F(z)\ ,\ [T(z)L_{\bar{w}}(\bar{w}) - L_w(z)T(\bar{w})]\frac{z-w}{z-\bar{w}}\right\rangle,$$

što znači da je funkcija

$$G(z) = \frac{1}{s-\bar{w}}[T(z)L_w(w) - L_w(z)T(w)] -$$

$$- \frac{1}{s-w}[T(z)L_{\bar{w}}(\bar{w}) - L_{\bar{w}}(z)T(\bar{w})]\frac{z-w}{z-\bar{w}}$$

ortogonalna na sve funkcije oblika $\frac{z-w}{z-s}F(z)$, gde F leži u domenu množenja sa $(z-s)^{-1}$. Medjutim, skup ovakvih funkcija poklapa ~~se~~ sa skupom funkcija koje se anuliraju u w . Zaista, neka je $F_1 \in B^p(E)$ i $F_1(w) = 0$. Tada, prema teoremi 4.1. b),

$F_1(z)(z-w)^{-1} \in B^p(E)$ i $F(z) = \frac{z-s}{z-w} F_1(z) \in B^p(E)$, pa je $F_1(z) = \frac{z-w}{z-s} F(z)$, s tim što F leži u domenu množenja sa $(z-s)^{-1}$. Znači, funkcija G je ortogonalna na sve funkcije iz $B^p(E)$ koje se anuliraju u tački w , a kako je i $G(w) = 0$, to je $G \perp B^p(E)$, kao u dokazu prethodne teoreme. Tako dolazimo do zaključka da je $G = 0$.

Iz $G(z) \equiv 0$ izlazi da je funkcija $T(z)$ oblika $[\beta E(z) + \gamma SE(z)](z-s)^{-1}$. Iz kolinearnosti T i ST (kao u dokazu prethodne teoreme) izlazi $|\beta| = |\gamma|$, tako da se može uzeti $\lambda = -2\pi i\beta$ i $\overline{\alpha} = -\frac{\gamma}{\beta}$, da bi se funkcija T predstavila u potrebnom obliku.

Ovim je dokaz završen.

§3. Funkcije asocirane sa $B^p(E)$

Na osnovu teoreme 4.1. b) i c), ako su F i T proizvoljne funkcije iz $B^p(E)$, tada i funkcija

$$[F(z)T(w) - T(z)F(w)](z-w)^{-1} \tag{1.3.}$$

leži u $B^p(E)$, za svako w iz $\mathcal{C}$. No, ova funkcija može pripadati $B^p(E)$ i u slučaju kad, npr., T ne pripada $B^p(E)$.

T e o r e m a 1.3. Neka je T funkcija analitička u $\mathcal{C}$ i koja ispunjava uslov a) iz definicije 1.1. Potreban i dovoljan uslov da funkcija (1.3.) pripada $B^p(E)$ za svaku funkciju $F \in B^p(E)$ i za svako $w \in \mathcal{C}$, jeste da $T \in B^p((z+i)E)$.

D o k a z . Potrebnost uslova. Ako je funkcija (1.3.) u $B^p(E)$, onda je

$$[F(z)T(w) - T(z)F(w)][(z+i)E(z)]^{-1} \in H^p , \tag{2.3.}$$

za svako $w \in \mathcal{C} \setminus R$. U $B^p(E)$ postoji funkcija F sa svojstvom $F(w) \neq 0$ (npr. $F = L_w$) . Kako je uvek $F(z)\cdot[(z+i)E(z)]^{-1} \in H^p$, to mora biti i $T(z)\cdot[(z+i)E(z)]^{-1} \in H^p$. S obzirom na svojstvo $B^p(E)$ izraženo teoremom 4.1. a), na isti način se dobija da je i $ST(z)\cdot[(z+i)E(z)]^{-1} \in H^p$, što znači da $T \in B^p((z+i)E)$.

Dovoljnost uslova. Sada neka je $T \in B^p((z+i)E)$, $w \in \mathcal{C}$ i $F \in B^p(E)$. Tada važi (2.3.) , jer $F(z)\cdot[(z+i)E(z)]^{-1} \in H^p$. No, kako se funkcija (2.3.) anulira za $z = w$, to je i

$$[F(z)T(w) - T(z)F(w)]\cdot[(z-w)E(z)]^{-1} \in H^p .$$

Isto tako i količnik

$$[SF(z)\overline{T(\bar{w})} - ST(z)\overline{F(\bar{w})}]\cdot[(z-\bar{w})E(z)]^{-1}$$

leži u H^p , s obzirom na to da je $ST \in B^p((z+i)E)$ i $SF \in B^p(E)$. Dakle, zaista je funkcija (1.3.) u $B^p(E)$, za svaku funkciju F iz $B^p(E)$ i za $w \in \mathcal{C}$.

Ovim je dokaz završen.

Ova teorema predstavlja uopštenje odgovarajuće teoreme za $\mathcal{H}(E)$ ([12] , str. 62.; [16] , teor. III.).

U dokazu teoreme 1.3. ne koristi se stvarno uslov $F \in B^p(E)$, već samo $F \in B^p((z+i)E)$, tako da je jasno da važi i sledeća teorema.

T e o r e m a 1'.3. Neka je T funkcija analitička u $\mathcal{C}$ i neka ona ispunjava uslov a) iz definicije 1.1. Potreban i dovoljan uslov da funkcija (1.3.) pripada $B^p(E)$ za svaku funkciju F iz $B^p((z+i)E)$ i za svako $w \in \mathcal{C}$ jeste da $T \in B^p((z+i)E)$.

Poslednje tvrdjenje može na prirodan način da se uopšti.

Ako su T i F dve funkcije analitičke u $\mathcal{C}$, koje ispunjavaju uslov a) iz definicije 1.1., tada i funkcija oblika (1.3.) ima ista svojstva za svako $w \in \mathcal{C}$. Obeležimo tu funkciju sada sa $Q(T,F,w,z)$. Kad je dat niz funkcija $F_1, F_2, \dots, F_n$ i fiksira se $w \in \mathcal{C}$, označimo $Q(T,F,w,z)$ sa $G_1(z)$, a $Q(G_{k-1}, F_k, w, z)$ sa $G_k(z)$, za svako $k = 2,3,\dots,n$.

T e o r e m a 2.3. Neka je T proizvoljna funkcija analitička u $\mathcal{C}$, koja ispunjava uslov a). Potreban i dovoljan uslov da za svako $w \in \mathcal{C}$ i svakih n funkcija $F_1, F_2, \dots, F_n$ takvih da je $F_k \in B^p((z+i)^{n+1-k}E)$ za $k = 1,2,\dots,n$, funkcija G_n bude u $B^p(E)$, jeste da $T \in B^p((z+i)^n E)$.

D o k a z. Potrebnost uslova. Primenimo indukciju po n. Za $n = 1$ tvrdjenje je istovetno sa teoremom 1'.3. Pretpostavimo sada da za neko n tvrdjenje važi. Prelazeći na $n+1$, primetimo prvo da, kad fiksiramo funkcije $F_1, F_2, \dots, F_n$, a F_{n+1} ostavimo proizvoljnom funkcijom iz $B^p((z+i)E)$, tada funkcija G_n, prema teoremi 1'.3., leži u $B^p((z+i)E)$. Ako sada umesto $E(z)$ uzmemo $(z+i)E(z)$, T će ispunjavati uslove za primenu tvrdjenje za n. To znači da $T \in B^p((z+i)^{n+1}E)$.

Dovoljnost uslova. Neka je $T \in B^p((z+i)^n E)$ i $F_k \in B^p((z+i)^{n+1-k}E)$, za $k = 1,2,\dots,n$, i neka je $w \in \mathcal{C}$. Tada $G_1 \in B^p((z+i)^{n-1}E)$, na osnovu teoreme 1'.3. Dalje, na osnovu iste teoreme, G_2 leži u $B^p((z+i)^{n-2}E)$ itd. Najzad, $G_n \in B^p(E)$.

§ 4. F a m i l i j e p r o s t o r a $B^p(E)$ t o t a l n o u r e d j e n e i n k l u z i j o m

Familiji funkcija $E_t(z) = \exp\{-i(a+t)z\} = \cos(a+t)z - i \cdot \sin(a+t)z = A_t(z) - iB_t(z)$, $a > 0$ fiksirano, $t \geqslant 0$, odgovara familija prostora $B^p(E_t)$, za svako $p > 1$. (Za $p = 2$ ovi prostori spadaju u klasu Paley-Wiener-ovih prostora.) Za fiksirano p i za $0 \leqslant s \leqslant t$ važi $B^p(E_s) \subset B^p(E_t)$. Ako je $F \in B^p(E_s)$ i $G \in B^q(E_s)$, $s \geqslant 0$, tada je, za svako $t \geqslant s$

$$\langle F , G \rangle_t = \langle F , G \rangle_s .$$

Sem ovoga, funkcije A_t i B_t zadovoljavaju sistem integralnih jednačina

$$A_t(z) - A_o(z) = -z\int_0^t B_s(z)ds , \quad B_t(z) - B_o(z) = z\int_0^t A_s(z)ds ,$$

i važi $E_t(0) = 1$, za $t \geqslant 0$. U ovom odeljku ćemo razmatrati opštije situacije ovakvog tipa.

Neka su $\alpha(t)$ i $\beta(t)$ neprekidne neopadajuće funkcije na intervalu $[0,+\infty)$ i neka je $\alpha(0) = \beta(0) = 0$. Formirajmo pomoću ovih funkcija sistem integralnih jednačina

$$(1.4.) \qquad \begin{aligned} A_t(z) - A_o(z) &= -z\int_0^t B_s(z)d\alpha(s) , \\ B_t(z) - B_o(z) &= z\int_0^t A_s(z)d\beta(s) . \end{aligned}$$

Priključimo tom sistemu još i sledeće "početne " uslove:

(2.4.)

1° A_o i B_o su analitičke funkcije u C^+ i C^- $SA_o = A_o$, $SB_o = B_o$, i funkcija $E_o = A_o - iB_o$ ispunjava uslove a) i b) iz definicije 1.1.;

2° skup $R \setminus \mathcal{C}$ je najviše prebrojiv (gde je sa $\mathcal{C}$ obeležen skup svih tačaka u kojima je funkcija E_o analitička) i pritom $\infty \notin \mathcal{C}$ $0 \in \mathcal{C}$ i $E_o(0) = 1$;

3° prostor $B^2(E_o)$ ne sadrži ni jednu funkciju oblika $g^o_{r,\sigma}(z) = [E_o(z) - \sigma SE_o(z)] \cdot [2\pi i(r-z)]^{-1}$ ($|\sigma| = 1$, $r \in R \setminus C$, $r \neq \infty$).

U nizu lema i teorema izučićemo familije prostora $B^p(E)$ generisane sistemom (1.4.) i uslovima (2.4.). Cilj nam je da utvrdimo da ove familije imaju svojstva slična svojstvima familija koje odgovaraju funkcijama $\exp\{-i(a+t)z\}$. Opšti plan izlaganja u ovom odeljku sačinjen je po ugledu na [21].

Neophodno je da se najpre izuči priroda rešenja sistema (1.4.). Pritom ćemo, da bismo skratili pisanje, koristiti oznaku

$$[f_1,f_2]_m(s;t) = \int_s^t df_1(s_m) \int_s^{s_m} df_2(s_{m-1}) \int_s^{s_{m-1}} df_1(s_{m-2}) \dots \int_s^{s_2} df_\varepsilon(s_1),$$

gde je $\varepsilon = 1$ za neparno m i $\varepsilon = 2$ za parno m, $0 \leq s \leq t$, a f_1 i f_2 su neprekidne neopadajuće funkcije od t na intervalu $[0,\infty)$. Radi jednoobraznosti označavanja neka je $[f_1,f_2]_o(s,t) = 1$.

T e o r e m a 1.4. Za svako $z \in \mathcal{C}$ sistem (1.4.) ima jedinstveno rešenje $(A_t(z),B_t(z))$ neprekidno po t i koje teži ka $(A_o(z),B_o(z))$ kad $t \to 0$. Za fiksirano $t \geq 0$, funkcije A_t i B_t su analitičke u oblasti $\mathcal{C}$, i $SA_t = A_t$, $SB_t = B_t$, $A_t(0) = 1$, $B_t(0) = 0$. Sem toga, postoje cele funkcije a_t, b_t, c_t i d_t takve da je $Sa_t = a_t$, $Sb_t = b_t$, $Sc_t = c_t$, $Sd_t = d_t$,

$$(A_t,B_t) = (A_o,B_o)\begin{pmatrix} a_t & b_t \\ c_t & d_t \end{pmatrix} \tag{3.4.}$$

i $a_t d_t - b_t c_t = 1$.

D o k a z . Rešenje sistema (1.4.) dato je sa

$$(4.4.)\qquad (A_t(z),B_t(z))=\sum_{m=0}^{\infty} z^m (A_o(z),B_o(z))\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}^m \begin{pmatrix}[-\alpha,\beta]_m(0;t) & 0\\ 0 & [\beta,-\alpha]_m(0\end{pmatrix}$$

Naime, lako se dokazuje, indukcijom, da je

$$(5.4.)\qquad |[-\alpha,\beta]_m(s;t)| \leqslant \frac{[\alpha(t)-\alpha(s)+\beta(t)-\beta(s)]^m}{m!} = \frac{[\gamma(s;t)]^m}{m!}$$

i

$$(5'.4.)\qquad |[\beta,-\alpha]_m(s;t)| \leqslant \frac{[\gamma(s;t)]^m}{m!} \quad ,$$

za $0 \leqslant s \leqslant t$ i $m = 0,1,2,\dots$. Na osnovu ovih ocena, rutinskim postupkom se utvrdjuje da red (4.4.) konvergira apsolutno i uniformno ako je t ograničeno, a z se kreće unutar nekog kompaktnog podskupa oblasti $\mathcal{C}$. Zato red (4.4.) predstavlja vektor-funkciju neprekidnu po $t \geqslant 0$,a analitičku po z u oblasti $\mathcal{C}$. Da funkcije (4.4.) zadovoljavaju sistem (1.4.) proverava se direktno. Takodje se običnim putem pokazuje da je $(A_t(z),B_t(z))$ jedinstveno neprekidno rešenje koje teži ka $(A_o(z),B_o(z))$ kad $t \longrightarrow 0$. I svojstva funkcija A_t i B_t proveravaju se bez teškoća na osnovu relacije (4.4.) .

Najzad, relacija (4.4.) može da se napiše i u obliku (3.4.) , ako se uzme da je

$$a_t(z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^{2m}[-\alpha,\beta]_{2m}(0;t) \ ,$$

$$b_t(z) = \sum_{m=1}^{\infty} z^{2m-1}[\beta,-\alpha]_{2m-1}(0;t) \ ,$$

$$c_t(z) = \sum_{m=1}^{\infty} z^{2m-1}[-\alpha,\beta]_{2m-1}(0;t) \ ,$$

$$d_t(z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^{2m}[\beta,-\alpha]_{2m}(0;t) \ ,$$

za $t > 0$. Pritom ovi redovi konvergiraju uniformno kad su t

i z ograničeni, tako da su ovo cele funkcije po z, za fiksirano t. Očigledno da tada važi $Sa_t = a_t$ i slično za ostale funkcije. Da važi i $a_t d_t - b_t c_t = 1$ za $t > 0$ može se proveriti množenjem redova i uporedjivanjem koeficijenata, uz primenu parcijalne integracije. Dokaz je završen.

L e m a 1.4. Funkcija

$$L_w^t(z) = [B_t(z)\overline{A_t(w)} - A_t(z)\overline{B_t(w)}]\cdot[\pi(z-\bar{w})]^{-1} \quad , \quad z,w\in\mathbb{C} \ , \ t \geqslant 0 \ ,$$

može da se napiše u obliku

$$L_w^t(z) = L_w^o(z) + \pi^{-1}\Big[\int_0^t A_s(z)\overline{A_s(w)}d\beta(s) + \int_0^t B_s(z)\overline{B_s(w)}d\alpha(s)\Big] \ .$$

D o k a z . Iz jednačina (1.4.) sleduje

$$z\int_0^t A_s(z)\overline{A_s(w)}d\beta(s) = \int_0^t \overline{A_s(w)}dB_s(z) \ .$$

Parcijalnom integracijom dobija se dalje

$$\int_0^t \overline{A_s(w)}dB_s(z) = \overline{A_s(w)}B_s(z)\Big|_0^t - \int_0^t B_s(z)d\overline{A_s(w)} \ .$$

No, kako je

$$\int_0^t B_s(z)d\overline{A_s(w)} = -\bar{w}\int_0^t B_s(z)\overline{B_s(w)}d\alpha(s) \ ,$$

to je

$$z\int_0^t A_s(z)\overline{A_s(w)}d\beta(s) - \bar{w}\int_0^t B_s(z)\overline{B_s(w)}d\alpha(s) = \overline{A_s(w)}B_s(z)\Big|_0^t \ .$$

Na isti način dobija se da je i

$$z\int_0^t B_s(z)\overline{B_s(w)}d\alpha(s) - \bar{w}\int_0^t A_s(z)\overline{A_s(w)}d\beta(s) = -\overline{B_s(w)}A_s(z)\Big|_0^t \ .$$

Tražena relacija dobija se sabiranjem poslednjih dveju.

P o s l e d i c a 1. Funkcija $E_t = A_t - iB_t$ zadovoljava uslove a) i b) iz definicije 1.1. za $t \geq 0$.

D o k a z . Kako E_o ispunjava ove uslove (zbog (2.4.) 1^o) i kako su funkcije a_t , b_t, c_t i d_t cele, to E_t ispunjava uslov a) iz definicije 1.1.

Što se tiče uslova b) , prema lemi 1.4. biće, kao prvo,

$$L_w^t(w) = L_w^o(w) + \pi^{-1}\left[\int_o^t |A_s(w)|^2 d\beta(s) + \int_o^t |B_s(w)|^2 d\alpha(s)\right] ,$$

što znači da je

(6.4.) $$L_w^t(w) \geq L_w^o(w) \text{ , za } t \geq 0 \text{ i } w \in \mathcal{C} .$$

Zatim, kako je

$$L_w^t(w) = \left[|E_t(w)|^2 - |SE_t(w)|^2\right](4\pi \operatorname{Im} w)^{-1} \text{ , } t \geq 0 ,$$

to je, za $w \in C^+$,

$$|E_t(w)|^2 - |SE_t(w)|^2 \geq |E_o(w)|^2 - |SE_o(w)|^2 > 0 ,$$

tako da E_t ispunjava uslov b) .

P o s l e d i c a 2. Ako je $0 \leq s \leq t$, tada je

$$L_w^s(w) \leq L_w^t(w) \text{ , } w \in \mathcal{C} .$$

D o k a z . Dokazuje se isto kao relacija (6.4.) , samo što se umesto E_o uzima E_s .

Do sada smo utvrdili da za svako $t \geq 0$ funkcija E_t ispunjava uslove (2.4.) 1^o,2^o.

L e m a 2.4. Funkcija E_t ispunjava i uslov (2.4.) 3^o za svako $t \geq 0$.

D o k a z . Polazeći od relacije (3.4.) lako se dobija da je

$$E_t = m_t E_o + n_t SE_o \ , \quad SE_t = Sn_t E_o + Sm_t SE_o \ ,$$

gde je $m_t = (a_t + d_t)2^{-1} - i(b_t - c_t)2^{-1}$ i $n_t = (a_t - d_t)2^{-1} - i(b_t + c_t)2^{-1}$, pri čemu na osnovu $a_t d_t - b_t c_t = 1$ imamo $m_t Sm_t - n_t Sn_t = 1$. Dalje može E_o da se izrazi preko E_t i SE_t:

$$E_o = Sm_t E_t - n_t SE_t \ ,$$

a isto tako i SE_o:

$$SE_o = -Sn_t E_t + m_t SE_t \ .$$

Neka je sada $r \in R \setminus C$ $(r \neq \infty)$. Dokazaćemo da, ako za neko η , $|\eta| = 1$, funkcija $g^t_{r,\eta}(z) = [E_t(z) - \bar{\eta}\, SE_t(z)] \cdot [2\pi i(r-z)]^{-1}$ leži u $B^2(E_t)$, onda i funkcija $g^o_{r,\delta}$ leži u $B^2(E_o)$, gde je $\delta = [\eta \cdot m_t(r) - \overline{n_t(r)}] \cdot [\overline{m_t(r)} - \eta \cdot n_t(r)]^{-1}$. Ovo se svodi na dokaz da iz $h_t(z) \doteq [1 - \bar{\eta}\, e_t(z)] \cdot [2\pi i(r-z)]^{-1} \in H^2$ izlazi $h_o(z) = [1 - \bar{\delta}\, e_o(z)] \cdot [2\pi i(r-z)]^{-1} \in H^2$, gde je stavljeno $e_t(z) = \dfrac{SE_t}{E_t}$, $t \geqslant 0$.

Dokazaćemo da su integrali funkcije $|h_o(z)|^2$ duž pravih $z = x + iy$, $y \geqslant 0$, ograničeni svi istim brojem. Neka je k neki polukrug koji leži u C^+ , centar mu je u tački r , a prečnik leži na R . Kako je funkcija h_o uvek ograničena u $C^+ \setminus k$, dovoljno je pokazati da postoji dovoljno mali polukrug k takav da su integrali funkcije $|h_o(z)|^2$ duž onih delova pravih $z = x + iy$ koji leže u k — ograničeni svi istim brojem. Funkcija h_o može da se predstavi u obliku

$$h_o(z) = \left\{ 2\pi i(r-z)[m_t(r) - \bar{\eta}\, \overline{n_t(r)}] \cdot [Sm_t(z) - n_t(z) e_t(z)] \right\}^{-1} .$$

$$\cdot\Big\{\bar{\eta}\cdot\big[Sn_t(z)\overline{m_t(r)} - Sm_t(z)\overline{n_t(r)}\big] + Sm_t(z)m_t(r) - m_t(z)\overline{m_t(r)} +$$

$$+ n_t(z)\overline{n_t(r)} - Sn_t(z)n_t(r) + e_t(z)\big[m_t(z)n_t(r) - n_t(z)m_t(r)\big] +$$

$$+ \big[m_t(z)\overline{m_t(r)} - n_t(z)\overline{n_t(r)}\big]\big[1 - \bar{\eta}e_t(z)\big]\Big\} .$$

Polukrug k može da se učini toliko malim da $|Sm_t(z)|$ bude vrlo blisko $|m_t(r)|$, a $|n_t(z)|$ vrlo blisko $|n_t(r)|$, što znači da će u takvom krugu funkcija $[Sm_t(z) - n_t(z)e_t(z)]^{-1}$ biti ograničena, i to zbog toga što je $|Sm_t(z) - n_t(z)e_t(z)| \geqslant$ $\geqslant |Sm_t(z)| - |n_t(z)|$ za $z \in C^+$ i što je $|m_t(r)| - |n_t(r)| >$ > 0. Zatim, kako se funkcije $Sn_t(z)\overline{m_t(r)} - Sm_t(z)\overline{n_t(r)}$, $Sm_t(z)m_t(r) - m_t(z)\overline{m_t(r)}$, $n_t(z)\overline{n_t(r)} - Sn_t(z)n_t(r)$ i $m_t(z)n_t(r) - n_t(z)m_t(r)$ anuliraju za $z = r$, to će podeljene sa $r - z$ one biti ograničene u k. Kako je, sem spomenutih, i funkcija $m_t(z)\overline{m_t(r)} - n_t(z)\overline{n_t(r)}$ ograničena u k, a h_t leži u H^2, to su zaista integrali funkcije $|h_o(z)|^2$ ograničeni u dovoljno malom polukrugu k istim brojem.

Ovim je dokaz završen.

N a p o m e n a . Može lako da se dokaže opštije tvrdjenje od leme 2.4.: ako je $r \in R \setminus C$ ($r \neq \infty$), onda funkcija $g^t_{r,\eta}$ leži u $B^p(E_t)$ ako i samo ako $g^o_{r,\delta}$ leži u $B^p(E_o)$. Dokaz se ne bi bitno razlikovao od dokaza leme 2.4.

Sada je na redu ispitivanje medjusobnog odnosa prostorâ $B^p(E_t)$, $t \geqslant 0$.

L e m a 3.4. Ako su funkcije α i β linearne na segmentu $[s,t]$ i strogo rastuće, tada je $B^p(E_s)$ topološki potprostor od $B^p(E_t)$ i važi

$$\langle F , G\rangle_{E_s} = \langle F , G\rangle_{E_t}$$

za svaki par funkcija F i G takvih da je $F \in B^p(E_s)$ i $G \in B^q(E_s)$.

D o k a z . Neka je $\frac{d\alpha}{du} = a > 0$ i $\frac{d\beta}{du} = b > 0$, za $s \leqslant u \leqslant t$. Tada se A_t i B_t mogu ovako napisati

$$A_t(z) = A_s(z)\cos\lambda z - B_s(z)(a/b)^{1/2}\sin\lambda z \quad ,$$

$$B_t(z) = A_s(z)(b/a)^{1/2}\sin\lambda z + B_s(z)\cos\lambda z \quad ,$$

pri čemu je $\lambda = (ab)^{1/2}(t-s)$. Ako stavimo da je $(b/a)^{1/4} = c$, zatim $cA_s = \mathcal{A}_s$, $c^{-1}B_s = \mathcal{B}_s$, $cA_t = \mathcal{A}_t$, $c^{-1}B_t = \mathcal{B}_t$, $\mathcal{A}_s - i\mathcal{B}_s = \mathcal{E}_s$ i $\mathcal{A}_t - i\mathcal{B}_t = \mathcal{E}_t$, tada iz gornjih dveju jednakosti izlazi

$$\mathcal{E}_t(z) = \mathcal{E}_s(z)\cdot e^{-i\lambda z} \quad . \tag{7.4.}$$

Na osnovu napomena 2. i 3. posle teoreme 6.1., skupovi $B^p(E_u)$ i $B^p(\mathcal{E}_u)$ se poklapaju za svako $p > 1$, i imaju iste topologije, i važi

$$\langle F , G\rangle_{E_u} = \langle F , G\rangle_{\mathcal{E}_u} \quad ,$$

za $F \in B^p(E_u)$, $G \in B^q(E_u)$, pri čemu u uzima vrednosti s i t . Kako je, direktno na osnovu (7.4.) , $B^p(\mathcal{E}_s)$ potprostor od $B^p(\mathcal{E}_t)$ i važi

$$\langle F , G\rangle_{\mathcal{E}_s} = \langle F , G\rangle_{\mathcal{E}_t} \quad , \quad F \in B^p(\mathcal{E}_s), \quad G \in B^q(\mathcal{E}_s) \ ,$$

to će, s obzirom i na neposedno prethodno, biti $B^p(E_s)$ topološki potprostor od $B^p(E_t)$ i važiće

$$\langle F , G\rangle_{E_s} = \langle F , G\rangle_{E_t} \quad , \quad F \in B^p(E_s) \ , \ G \in B^q(E_s) \ .$$

Dokaz je završen.

L e m a 4.4. Za dato $\varepsilon > 0$, neka je α_ε (odnosno β_ε) delimično linearna, neprekidna i strogo rastuća funkcija koja na segmentu $[s,t]$ uniformno aproksimira funkciju α (odnosno β):

$$|\alpha(u) - \alpha_\varepsilon(u)| < \varepsilon \quad (|\beta(u) - \beta_\varepsilon(u)| < \varepsilon),$$

$s \leqslant u \leqslant t$. Neka je $(A_u^\varepsilon, B_u^\varepsilon)$ rešenje sistema oblika (1.4.) kad se α i β zamene sa α_ε i β_ε na segmentu $[s,t]$ i neka je $E_t^\varepsilon = A_t^\varepsilon - iB_t^\varepsilon$. Tada $E_t^\varepsilon(z)$ teži ka $E_t(z)$ kad $\varepsilon \to 0$, i to uniformno po z na svakom kompaktnom podskupu oblasti $\mathcal{C}$.

D o k a z . Neka je $\varepsilon > 0$, $|\alpha(u) - \alpha_\varepsilon(u)| < \varepsilon$ i $|\beta(u) - \beta_\varepsilon(u)| < \varepsilon$ za $u \in [s,t]$. Obeležimo sa $\gamma_\varepsilon(s;t)$ sledeći zbir

$$\gamma_\varepsilon(s;t) = \alpha(t) - \alpha(s) + \beta(t) - \beta(s) + \alpha_\varepsilon(t) - \alpha_\varepsilon(s) + \beta_\varepsilon(t) - \beta_\varepsilon(s$$

Pokazaćemo da tada, za $m \geqslant 1$, važe nejednakosti

$$|[\alpha,\beta]_m(s;t) - [\alpha_\varepsilon,\beta_\varepsilon]_m(s;t)| \leqslant \frac{2\varepsilon[2\gamma_\varepsilon(s;t)]^{m-1}}{(m-1)!},$$

(8.4.)

$$|[\beta,\alpha]_m(s;t) - [\beta_\varepsilon,\alpha_\varepsilon]_m(s;t)| \leqslant \frac{2\varepsilon[2\gamma_\varepsilon(s;t)]^{m-1}}{(m-1)!}.$$

Dokaz ćemo izvesti primenom indukcije. Za $m = 1$ ove nejednakosti očigledno važe. Neka sada važe za $m-1$. Tada je, npr.,

$$|[\alpha,\beta]_m(s;t) - [\alpha_\varepsilon,\beta_\varepsilon]_m(s;t)| \leqslant I_1 + I_2,$$

gde je

$$I_1 = \int_s^t |[\beta,\alpha]_{m-1}(s;u) - [\beta_\varepsilon,\alpha_\varepsilon]_{m-1}(s;u)|\,d\alpha(u) \ ,$$

$$I_2 = |\int_s^t [\beta_\varepsilon,\alpha_\varepsilon]_{m-1}(s;u)\,[d\alpha(u) - d\alpha_\varepsilon(u)]| \ .$$

Kako nejednakosti (8.4.) važe za $m-1$, to imamo ove ocene za I_1 i I_2 (pri čemu se u izvodjenju ocene za I_2 primenjuje i parcijalna integracija) :

$$I_1 \leqslant \frac{2\varepsilon\cdot\int_s^t [2\gamma_\varepsilon(s;u)]^{m-2}d\alpha(u)}{(m-2)!} \leqslant \frac{2\varepsilon\cdot\int_s^t [2\gamma_\varepsilon(s;u)]^{m-2}d\gamma_\varepsilon(s;u)}{(m-2)!} =$$

$$= \varepsilon\cdot\frac{[2\gamma_\varepsilon(s;t)]^{m-1}}{(m-1)!} \ ,$$

$$I_2 = |[\alpha(t) - \alpha_\varepsilon(t)]\,[\beta_\varepsilon,\alpha_\varepsilon]_{m-1}(s;t) -$$

$$- \int_s^t [\alpha(u) - \alpha_\varepsilon(u)]\,d\,[\beta_\varepsilon,\alpha_\varepsilon]_{m-1}(s;u)| \leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon[\beta_\varepsilon,\alpha_\varepsilon]_{m-1}(s;t) \leqslant \frac{2\varepsilon[\gamma_\varepsilon(s;t)]^{m-1}}{(m-1)!} \ .$$

Tako se dalje dobija

$$I_1 + I_2 \leqslant \frac{2\varepsilon[2\gamma_\varepsilon(s;t)]^{m-1}}{(m-1)!} \ ,$$

čime je prva nejednakost (8.4.) dokazana. Druga nejednakost se izvodi na isti način.

Nejednakosti (8.4.) daju mogućnost da se oceni i apsolutna vrednost razlike $E_t(z) - E_t^\varepsilon(z)$. Naime, $(A_t^\varepsilon, B_t^\varepsilon)$ može ovako da se napiše

$$(A_t^\varepsilon, B_t^\varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m (A_s, B_s) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^m \begin{pmatrix} [-\alpha_\varepsilon, \beta_\varepsilon]_m(s;t) & 0 \\ 0 & [\beta_\varepsilon, -\alpha_\varepsilon]_m(s;t) \end{pmatrix} .$$

Ako se tako predstavi i (A_t, B_t) , onda iz (3.4.) sledi

$$|E_t - E_t^\varepsilon| \leqslant |A_t - A_t^\varepsilon| + |B_t - B_t^\varepsilon| \leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|z|^m}{(m-1)!} [2\gamma_\varepsilon(s;t)]^{m-1} (|A_s| + |B_s|) =$$

$$= 2\varepsilon |z| \exp \{ |z| 2\gamma_\varepsilon(s;t) \} \cdot (|A_s| + |B_s|) .$$

Na osnovu ove ocene neposredno je jasno da $E_t^\varepsilon(z)$ teži ka $E_t(z)$, kad $\varepsilon \to 0$, uniformno po z na kompaktnim podskupovima oblasti $\mathcal{C}$.

L e m a 5.4. Ako je $0 \leqslant s \leqslant t$ i $F \in B^2(E_s)$, tada je $F \in B^2(E_t)$ i $\|F\|_t \leqslant \|F\|_s$.

D o k a z . Neka je $\varepsilon = 1/n$ i neka (A_t^n, B_t^n) označava odgovarajući par $(A_t^\varepsilon, B_t^\varepsilon)$, a saglasno sa tim neka je i $E_t^n = A_t^n - iB_t^n$, $n = 1,2,\dots$. Prema lemi 4.4., $E_t^n(z)$ teži ka $E_t(z)$ uniformno na kompaktnim podskupovima od $\mathcal{C}$, kad $n \to \infty$. Neka je $F \in B^2(E_s)$. Tada je, na osnovu leme 3.4., $F \in B^2(E_t^n)$ i

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x)|^2 |E_t^n(x)|^{-2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x)|^2 |E_s(x)|^{-2} dx ,$$

za $n = 1,2,\dots$. Prema Fatou-ovoj lemi, iz ovih jednakosti sledi nejednakost

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x)|^2 |E_t(x)|^{-2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n \to \infty} [|F(x)|^2 |E_t^n(x)|^{-2}] dx \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x)|^2 |E_t^n(x)|^{-2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x)|^2 |E_s(x)|^{-2} dx .$$

Drugim rečima, $\|F\|_t \leqslant \|F\|_s$, gde je $\|F\|_t$ norma F u $E_t L^2$, a $\|F\|_s$ norma u $E_s L^2$. Dakle $\frac{F}{E_t} \in L^2$. Medjutim, koristeći

Schwartz-ovu nejednakost i posledicu 2. leme 1.4., možemo da izvedemo nejednakost za $F(z)$ kad je $z = r + \rho e^{i\vartheta}$, $r \in R$ i $0 < \vartheta < \pi$:

$$|F(z)| \leqslant \|F\|_s [L_z^s(z)]^{1/2} \leqslant \|F\|_s [L_z^t(z)]^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant 2\|F\|_s \pi^{-1/2} |E_t(z)| (\rho \sin\vartheta)^{-1/2} ,$$

koju možemo i ovako da napišemo

$$\left|\frac{F}{E_t}(z)\right| \leqslant M\cdot(\rho\sin\vartheta)^{-1/2} \quad (M = (4\pi)^{-1/2}\|F\|_s) .$$

Iskoristićemo sada ovu poslednju nejednakost da pokažemo da za $\frac{F}{E_t}$ važi Cauchy-eva formula u C^+ . U tom cilju je dovoljno da dokažemo da integrali funkcije $\frac{F}{E_t}(z)\frac{1}{z-w}$ po polukrugovima $|z| = \rho$, $z \in C^+$, teže nuli kad $\rho \longrightarrow \infty$ i da integrali te funkcije po polukrugovima $|z-r| = \rho$, $z \in C^+$, gde je r proizvoljna tačka iz $R \setminus \mathcal{C}$, teže nuli kad $\rho \longrightarrow 0$. No, to se vidi iz sledećih ocena, koje važe za fiksirano $w \in \mathcal{C} \setminus R$ i za dovoljno veliko ρ (prva) , odnosno za dovoljno malo ρ (druga):

$$\left| \int_{|z|=\rho,\, z\in C^+} \frac{F}{E_t}(z)\frac{dz}{z-w} \right| \leqslant \int_0^{\pi} \frac{M}{(\rho\sin\vartheta)^{1/2}} \frac{\rho}{\rho-|w|}\, d\vartheta$$

i

$$\left| \int_{|z|=\rho,\, z\in C^+} \frac{F}{E_t}(z)\frac{dz}{z-w} \right| \leqslant \int_0^{\pi} \frac{M}{(\rho\sin\vartheta)^{1/2}} \frac{\rho}{|w-r|-\rho}\, d\vartheta .$$

Sada nam Cauchy-eva formula daje relaciju $\frac{F}{E_t} \perp Sk_w$ za svako $w \in C^+$, odakle sledi $\frac{F}{E_t} \in H^2$ ([7] , str. 195.). Na isti način se dokazuje i da je $\frac{SF}{E_t} \in H^2$, što znači da F zaista leži u $B^2(E_t)$.

Kako je nejednakost za norme u $B^2(E_t)$ i $B^2(E_s)$ već izvedena, dokaz je završen.

L e m a 6.4. Ako je $s \leqslant t$, tada za svaku funkciju F iz $B^2(E_s)$ za koju je $zF(z) \in B^2(E_s)$, važi $\|F\|_t = \|F\|_s$.

D o k a z . Utvrdićemo da je

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x)|^2 |E_t^n(x)|^{-2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x)|^2 |E_t(x)|^{-2} dx . \tag{9.4.}$$

Prethodno ćemo oceniti ove integrale u okolini ptoizvoljne tačke r iz $R \setminus \mathcal{C}$ i u "okolini" tačke $z = \infty$. Neka je, dakle, $r \in R \setminus \mathcal{C}$ i neka je najpre F funkcija iz $B^2(E_s)$ za koju i $(z-r)^{-1}F(z)$ leži u $B^2(E_s)$. Tada će za proizvoljno mali pozitivan broj Δ biti

$$\int_{r-\Delta}^{r+\Delta} |F(x)|^2 |E_t^n(x)|^{-2} dx \leqslant \Delta^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |(x-r)^{-1} E_t^n(x)^{-1} F(x)|^2 dx =$$
$$= \Delta^2 \|(z-r)^{-1} F(z)\|_s^2 , \quad n = 1,2,\ldots$$

(lema 3.4.). Proizvoljna funkcija F iz $B^2(E_s)$ može da se aproksimira nekom funkcijom G iz $B^2(E_s)$ za koju i $(z-r)^{-1}G(z) \in B^2(E_s)$, jer, na osnovu leme 2.4., nijedna funkcija $g^s_{\sigma,r}$ ne leži u $B^2(E_s)$, tako da je, prema teoremi 2.2., domen množenja sa $(z-r)^{-1}$ svuda gust u $B^2(E_s)$. Dakle, neka je $\|F-G\|_s \leqslant \eta$. Prema lemi 3.4. biće i

$\int |F-G|^2 |E_t^n|^{-2} dx \leqslant \eta^2$, $n = 1,2,\ldots$. Zato je, za $n=1,2,\ldots$,

$$\int_{r-\Delta}^{r+\Delta} |F(x)|^2 |E_t^n(x)|^{-2} dx \leqslant \eta^2 + \Delta^2 \|(z-r)^{-1} G(z)\|_s^2 ,$$

što pokazuje da se integral na levoj strani ove nejednakosti može učiniti proizvoljno malim nezavisno od n, ako se Δ izabere dovoljno malo.

Neka je sada $F \in B^2(E_s)$ i $zF(z) \in B^2(E_s)$. Za proizvoljno veliki pozitivan broj ρ važiće

$$\int_{|x|>\rho} |F(x)|^2 |E_t^n(x)|^{-2} dx \leqslant \frac{1}{\rho^2}\int_{-\infty}^{+\infty} |xF(x)|^2 |E_t^n(x)|^{-2} dx = $$
$$= \rho^{-2} \| zF(z)\|_s^2$$

(lema 3.4.), na osnovu čega se integral

$$\int_{|x|>\rho} |F(x)|^2 |E_t^n(x)|^{-2} dx ,$$

biranjem dovoljno velikog ρ , može učiniti proizvoljno malim, nezavisno od n .

S obzirom na pretpostavku da je skup $R\setminus\mathcal{C}$ najviše prebrojiv, možemo svaku tačku $r\in R\setminus\mathcal{C}$ da okružimo dovoljno malim intervalom oblika $(r-\Delta(r), r+\Delta(r))$ i da izaberemo dovoljno veliko ρ tako da integral

$$\int_M |F(x)|^2 |E_t^n(x)|^{-2} dx ,$$

gde je

$$M = (-\infty, -\rho) \cup (\rho, +\infty) \cup \bigcup_{r\in R\setminus\mathcal{C}} (r-\Delta(r), r+\Delta(r)) ,$$

bude proizvoljno mali nezavisno od n , kao i da integral

$$\int_M |F(x)|^2 |E_t(x)|^{-2} dx$$

bude proizvoljno mali. Kako je $R\setminus M$ kompaktan podskup oblasti $\mathcal{C}$, to se razlika

$$\int_{R\setminus M} |F(x)|^2 |E_t^n(x)|^{-2} dx - \int_{R\setminus M} |F(x)|^2 |E_t(x)|^{-2} dx$$

može (po apsolutnoj vrednosti) učiniti proizvojlno malom, biranjem dovoljno velikog n , zbog toga što $E_t^n \to E_t$, kad $n\to\infty$ uniformno na kompaktnim podskupovima od $\mathcal{C}$ (lema 4.4.).

Iz svega dosad rečenog sledi da je ispunjeno (?.4.) . Kako je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x)|^2 |E_t^n(x)|^{-2} dx = \|F\|_s^2$$

(prema lemi 3.4.), to je zaista $\|F\|_t = \|F\|_s$, i dokaz je završen.

L e m a 7.4. Neka funkcije α i β , sem uslova navedenih na početku ovog odeljka, ispunjavaju još i ove uslove na segmentu $[s,t]$: jedna od njih je konveksna nagore, a druga nadole, i u tački s im je desni izvod, a u tački t levi izvod, različit od 0 i od ∞ . Tada je, za svako $p > 1$, $B^p(E_s)$ topološki potprostor od $B^p(E_t)$.

D o k a z . Ako funkcija $E = A - iB$ ispunjava uslove a) i b) iz definicije 1.1. i ako je $E_1 = A_1 - iB_1$ i $A_1 = cA$, $B_1 = c^{-1}B$, za neki pozitivan broj c , tada je

$$|E_1(z)| \leqslant \max\{c, c^{-1}\} \cdot |E(z)| \quad , \quad z \in C^+ . \tag{10.4.}$$

Naime, kako je $|SE(z)|^2 < |E(z)|^2$ za $z \in C^+$, to je $2i[A(z)\overline{B(z)} - \overline{A(z)}B(z)] > 0$ za $z \in C^+$, odakle sledi

$$|E_1(z)|^2 = c^2|A(z)|^2 + c^{-2}|B(z)|^2 + i[A(z)\overline{B(z)} - \overline{A(z)}B(z)] \leqslant$$

$$\leqslant \max\{c^2, c^{-2}\} \cdot \{|A(z)|^2 + |B(z)|^2 + i[A(z)\overline{B(z)} - \overline{A(z)}B(z)]\} =$$

$$= \max\{c^2, c^{-2}\} |E(z)|^2 ,$$

tj. važi (10.4.) . Na sličan način izvodi se i nejednakost

$$|E_1(z)| \geqslant \min\{c, c^{-1}\} \cdot |E(z)| \quad , \quad z \in C^+ . \tag{10'.4.}$$

Razmotrimo sada ovakvu situaciju. Neka su α i β linearne na segmentima $[s,u_1]$ i $[u_1,t]$ $(s < u_1 < t)$ i neka su tamo i strogo rastuće. Neka je $\frac{d\alpha}{du} = a_1$, $\frac{d\beta}{du} = b_1$, za $u \in [s,u_1]$, i $\frac{d\alpha}{du} = a_2$, $\frac{d\beta}{du} = b_2$, za $u \in [u_1,t]$. Ozančimo $(b_k/a_k)^{1/4}$ kraće sa c_k , $k = 1,2$. Tada je, na osnovu relacije (7.4.) iz leme 3.4.,

$$|c_1A_s(z) - ic_1^{-1}B_s(z)| \leqslant |c_1A_{u_1}(z) - ic_1^{-1}B_{u_1}(z)| ,$$

(11.4.)

$$|c_2A_{u_1}(z) - ic_2^{-1}B_{u_1}(z)| \leqslant |c_2A_t(z) - ic_2^{-1}B_t(z)| ,$$

za $z \in C^+$. Jednakost se u ovim nejednakostima ostvaruje za $z \in \mathcal{C} \cap R$. Na osnovu relacija (10.4.) i (10'.4.) , biće

$$|c_1A_{u_1}(z) - ic_1^{-1}B_{u_1}(z)| = |\frac{c_1}{c_2}c_2A_{u_1}(z) - i\frac{c_2}{c_1}c_2^{-1}B_{u_1}(z)| \leqslant$$

$$\leqslant \max\left\{\frac{c_1}{c_2}, \frac{c_2}{c_1}\right\} |c_2A_{u_1}(z) - ic_2^{-1}B_{u_1}(z)| , \quad z \in C^+ ,$$

i

$$|c_1A_{u_1}(z) - ic_1^{-1}B_{u_1}(z)| \geqslant \min\left\{\frac{c_1}{c_2}, \frac{c_2}{c_1}\right\} |c_2A_{u_1}(z) - ic_2^{-1}B_{u_1}(z)$$

za $z \in C^+$. Povezujući nejednakosti (11.4.) sa pretposlednjom, dobijamo

(12.4.) $$|c_1A_s(z)-ic_1^{-1}B_s(z)| \leqslant \max\left\{\frac{c_1}{c_2},\frac{c_2}{c_1}\right\} |c_2A_{u_1}(z)-c_2^{-1}B_{u_1}(z)| ,$$

$z \in C^+$. Ako je $z \in \mathcal{C} \cap R$, tada u (11.4.) važi znak jednakosti, pa je

(13.4.) $$|c_1A_s(z)-ic_1^{-1}B_s(z)| \geqslant \min\left\{\frac{c_1}{c_2},\frac{c_2}{c_1}\right\} |c_2A_{u_1}(z)-ic_2^{-1}B_{u_1}(z)| .$$

Neka sada funkcije α i β ispunjavaju uslove leme, i to neka, odredjenosti radi, α bude konveksna nadole, a β nagore. Poznato je da se neprekidne funkcije α i β na segmentu $[s,t]$ mogu proizvoljno dobro aproksimirati delimično linearnim funkcijama α_ε i β_ε koje na krajevima svojih intervala linearnosti imaju iste vrednosti kao α i β. Pritom će i α_ε, odnosno β_ε, biti konveksna nadole, odnosno nagore, na segmentu $[s,t]$. Neka su $u_0(=s), u_1, u_2, \dots, u_{m-1}$, $u_m(=t)$ krajevi intervala linearnosti za α_ε i β_ε i neka je $\frac{d\alpha_\varepsilon}{du} = a_k$, $\frac{d\beta_\varepsilon}{du} = b_k$ za $u \in (u_{k-1}, u_k)$, $k = 1,2,\dots,m$. S obzirom na konveksnost funkcija α_ε i β_ε, važiće $a_k \leqslant a_{k+1}$ i $b_k \geqslant b_{k+1}$, za $k = 1,2,\dots,m-1$. Kako je $a_1 \geqslant \alpha'(s+) > 0$ i $b_m \geqslant \beta'(t-) > 0$, to je $a_k > 0$ i $b_k > 0$ za $k = 1,2,\dots,m$. Označimo $(b_k/a_k)^{1/4}$ sa c_k, $k = 1,2,\dots,m$. Jasno je da je $c_k \geqslant c_{k+1}$ $(k = 1,2,\dots,m-1)$.

Primenimo li sada nekoliko puta uzastopce (12.4.), a u poslednjem koraku (13.4.), dobićemo, za $z \in C^+$,

$$|c_1 A_s(z) - ic_1^{-1} B_s(z)| \leqslant \frac{c_1}{c_m} |c_m A_t^\varepsilon(z) - ic_m^{-1} B_t^\varepsilon(z)| .$$

Kad se uzme u obzir i (10.4.), izlazi

$$|E_s(z)| \leqslant \frac{c_1}{c_m} \max\{c_1, c_1^{-1}\} \cdot \max\{c_m, c_m^{-1}\} \cdot |E_t^\varepsilon(z)|, \quad z \in C^+.$$

Kako je $\beta'(t-) \leqslant b_m \leqslant b_1 \leqslant \beta'(s+)$ i $\alpha'(s+) \leqslant a_1 \leqslant a_m \leqslant \leqslant \alpha'(t-)$, to je $c_t \leqslant c_1 \leqslant c_s$ i $c_t \leqslant c_m \leqslant c_s$, gde je stavljeno $c_t = (\beta'(t-)/\alpha'(t-))^{1/4}$, $c_s = (\beta'(s+)/\alpha'(s+))^{1/4}$. Iz ovih nejednakosti izlazi da postoji konstanta M, nezavisna od α_ε i β_ε, takva da je

$$|E_s(z)| \leqslant M \cdot |E_t^\varepsilon(z)|, \quad z \in C^+ . \tag{14.4.}$$

Ako je $z \in \mathcal{C} \cap R$, možemo dobiti i nejednakost u obrnutom smeru, ako najpre više puta primenimo (13.4.) , a u poslednjem koraku (11.4.) (jednakost) :

$$|c_1 A_s(z) - ic_1^{-1} B_s(z)| \geqslant \frac{c_m}{c_1} |c_m A_t^{\varepsilon}(z) - ic_m^{-1} B_t^{\varepsilon}(z)| \ ,$$

što nam dalje daje

$$(15.4.) \qquad |E_s(z)| \geqslant N \cdot |E_t^{\varepsilon}(z)| , \quad z \in \mathcal{C} \cap R \ ,$$

slično kao malopre, pri čemu ni N ne zavisi od α_ε i β_ε .

Ako se u (14.4.) i (15.4.) pusti da $\varepsilon \to 0$, izlazi, na osnovu leme 4.4.,

$$|E_s(z)| \leqslant M \cdot |E_t(z)| \ , \quad z \in C^+ \ ,$$

i

$$|E_s(z)| \geqslant N \cdot |E_t(z)| \ , \quad z \in \mathcal{C} \cap R \ .$$

Prva od ovih nejednakosti implicira da je $B^p(E_s) \subset B^p(E_t)$, a obe zajedno, primenjene za $z \in \mathcal{C} \cap R$, daju nejednakost

$$N \cdot \|F\|_s \leqslant \|F\|_t \leqslant M \cdot \|F\|_s \ ,$$

koja važi za svaku funkciju F iz $B^p(E_s)$. Na osnovu toga, relativna topologija na $B^p(E_s)$ kao podskupu od $B^p(E_t)$ poklapa se sa njegovom topologijom, tako da je $B^p(E_s)$ topološki potprostor od $B^p(E_t)$.

Dokaz je završen.

L e m a 8.4. Svaka funkcija oblika $g^t_{\infty,\delta}$, $(t \geqslant 0, |\delta| = 1)$, koju ćemo kraće obeležavati sa g_δ , "ortogonalna" je na domen množenja sa z u $B^p(E_t)$, u smislu da je

$$\langle F , g_\delta \rangle \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\overline{g_\delta(x)}\,|E_t(x)|^2 dx = 0$$

za svako $F \in B^p(E_t)$ *za koje* $zF(z) \in B^p(E_t)$.

D o k a z . Prema napomeni posle teoreme 1.3. gl.II., postoji neka tačka $k \in C \cap R$ za koju je $e_t(k) = \delta$ ili je $e_t(z) = \text{const.} \cdot \frac{z-z_o}{z-\bar{z}_o}$ za neko $z_o \in C^+$. U ovom drugom slučaju tvrdjenje se direktno proverava. Neka, dakle, postoji $k \in C \cap R$ takvo da je $e_t(k) = \delta$. Tada je, ako F leži u domenu množenja sa z u $B^p(E_t)$,

$$\langle F , g_\delta \rangle = -2\pi i \left\langle (k-z)\frac{F}{E_t}(z) , K_k^t(z) \right\rangle = 0 ,$$

gde je $K_w^t(z)$ reproduktivno jezgro za $H^p(e_t)$ i

$$(k-z)\frac{F}{E_t}(z) \in H^p(e_t) .$$

Dokaz je završen.

Napomenimo da za $\delta = -1$, odnosno $\delta = 1$, iz leme 8.4. dobijamo da su funkcije A_t i B_t ortogonalne na domen množenja sa z u $B^p(E_t)$ (u gornjem smislu).

L e m a 9.4. Ako je $0 \leqslant u < t$, tada $[B_t(z) - B_u(z)]z^{-1} \in B^2(E_t)$, $[A_t(z) - A_u(z)]z^{-1} \in B^2(E_t)$ i važe nejednakosti

$$\| (B_t - B_u)z^{-1}\|^2_{E_t L^2} \leqslant \pi\,[\beta(t) - \beta(u)] , \tag{16.4.}$$

$$\| (A_t - A_u)z^{-1}\|^2_{E_t L^2} \leqslant \pi\,[\alpha(t) - \alpha(u)] . \tag{17.4.}$$

D o k a z . Funkcija $(B_t - B_u)z^{-1} = \pi \cdot (L_o^t - L_o^u)$ pripada $B^2(E_t)$ na osnovu leme 5.4. Kako je $L_w^u \in B^2(E_t)$ za svako $w \in \mathbb{C}$ i kako su funkcije A_u i B_u linearno nezavisne, to je $A_u \in B^2((z+i)E_t)$, tako da $A_t - A_u \in B^2((z+i)E_t)$, što znači da i funkcija $(A_t - A_u)z^{-1}$ leži u $B^2(E_t)$ (teor. 1'.3.).

Neka su funkcije α i β najpre linearne i strogo rastuće na segmentu $[u,t]$. Koristeći iste oznake kao u dokazu leme 3.4. (samo što umesto s sada pišemo u) i relaciju (7.4.), dobijamo da je

$$\|(\mathcal{E}_t - \mathcal{E}_u)z^{-1}\|^2_{E_tL^2} = \|(1 - e^{i\lambda z})z^{-1}\|_{L^2} = 2\pi\lambda ,$$

jer je $(1 - e^{i\lambda z})z^{-1} = K_o(z) \in H^2(e^{i\lambda z})$. Lako se izračunava i $\|(B_t - B_u)z^{-1}\|$:

$$\|(B_t - B_u)z^{-1}\|^2_t = \left\langle \frac{B_t-2B_u}{z}, \frac{B_t}{z}\right\rangle_t + \left\langle \frac{B_u}{z}, \frac{B_u}{z}\right\rangle_u = \tag{18.4.}$$

$$= [B'_t(0) - 2B'_u(0) + B'_u(0)] = \pi[\beta(t) - \beta(u)] = \pi b(t - u) .$$

Da bismo izračunali i $\|(A_t - A_u)z^{-1}\|$, primetimo da je

$$\|(\mathcal{E}_t - \mathcal{E}_u)z^{-1}\|^2_t = \|c(A_t - A_u)z^{-1}\|^2_t + \|ic^{-1}(B_t - B_u)z^{-1}\|^2_t -$$

$$-2\mathrm{Re}\left\langle c\frac{A_t-A_u}{z}, ic^{-1}\frac{B_t-B_u}{z}\right\rangle_t = c^2\left\|\frac{A_t-A_u}{z}\right\|^2_t + c^{-2}\left\|\frac{B_t-B_u}{z}\right\|^2_t ,$$

i odatle izračunajmo traženu normu:

$$\|(A_t - A_u)z^{-1}\|^2_t = \pi a(t - u) \quad (= \pi[\alpha(t) - \alpha(u)]). \tag{19.4.}$$

Ako su funkcije α i β delimično linearne i strogo rastuće na segmentu $[u,t]$, i ako su $[m,l]$ i $[v,r]$ neka dva (različita) segmenta linearnosti za α i β, tada je

$$(B_l - B_m)z^{-1} \perp (B_r - B_v)z^{-1} \quad \text{i} \tag{20.4.}$$

$$(A_l - A_m)z^{-1} \perp (A_r - A_v)z^{-1} .$$

Zaista, neka je $l \leqslant v$. Prva relacija (20.4.) sledi tada iz

$$\left\langle \frac{B_1-B_m}{z}, \frac{B_r-B_v}{z} \right\rangle_t = \pi \left\langle \frac{B_1-B_m}{z}, L_o^r \right\rangle_r - \pi \left\langle \frac{B_1-B_m}{z}, L_o^v \right\rangle_v = 0 .$$

Druga relacija (20.4.) je posledica leme 8.4. i činjenice da (za $1 \leqslant v$) $(A_1 - A_m)z^{-2}$ leži u domenu množenja sa z u $B^2(E_r)$, kao i u $B^2(E_v)$, zbog čega je

$$\left\langle \frac{A_1-A_m}{z}, \frac{A_r-A_v}{z} \right\rangle_t = \left\langle \frac{A_1-A_m}{z^2}, A_r \right\rangle_r - \left\langle \frac{A_1-A_m}{z^2}, A_v \right\rangle_v = 0 .$$

Relacije (20.4.) dozvoljavaju da se i u slučaju delimične linearnosti α i β izvedu jednakosti (18.4.) i (19.4.), na osnovu toga što takve jednakosti važe za svaki segment linearnosti.

U opštem slučaju, nejednakosti (16.4.) i (17.4.) se dokazuju na osnovu prethodnih rezultata, naime aproksimiranjem funkcija α i β delimično linearnim funkcijama na $[u,t]$ i korišćenjem graničnog procesa, uz primenu leme 4.4. i Fatou-ove leme:

$$\|(B_t - B_u)z^{-1}\|_t^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |(B_t - B_u)x^{-1}|^2 |E_t|^{-2} dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |(B_t - B_u)x^{-1}|^2 \lim_{\varepsilon \to 0} |E_t^{\varepsilon}|^{-2}\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \liminf_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |(B_t - B_u)x^{-1}|^2 |E_t^{\varepsilon}|^{-2} dx = \pi\,[\beta(t) - \beta(u)] ,$$

i slično za nejednakost (17.4.).

D e f i n i c i j a 1.4. Reći ćemo da je $t \in (0,\infty)$ tačka raščenja (za par funkcija α i β) ako je

$$[\alpha(t) - \alpha(s)]\,[\beta(t) - \beta(s)] > 0$$

za svako $s < t$.

D e f i n i c i j a 2.4. Reći ćemo da je $t \in [0, \infty)$ regularna tačka (za par (α, β)) ako je t ili tačka rašćenja ili tačka nagomilavanja tačaka rašćenja.

L e m a 10.4. Ako je t tačka rašćenja, tada nijedna funkcija oblika $g^{t}_{\infty,\delta} = g_{\delta}$ ne leži u $B^2(E_t)$.

D o k a z . Neka je $\alpha(t) - \alpha(s) > 0$ za svako $s < t$ i neka je $g_{\delta} \in B^2(E_t)$ za neko δ $(|\delta| = 1)$. Tada mora da bude $\delta = 1$, što se vidi iz sledećeg:

$$0 = \lim_{s \to t-} \left\langle g_{\delta} , \frac{A_t - A_s}{z^2[\alpha(t)-\alpha(s)]} \right\rangle_t = - \left\langle g_{\delta} , \frac{B_t}{z} \right\rangle_t = -\pi g_{\delta}(0) =$$

$$= -\pi (1 - \bar{\delta}) .$$

Treba još opravdati ove jednakosti. Prva je posledica ortogonalnosti g_{δ} na domen množenja sa z u $B^2(E_t)$ (lema 8.4.) ,jer $(A_t - A_s)z^{-2}$ leži u tom domenu. Da bismo opravdali drugu jednakost, dovoljno je da pokažemo da

$$\frac{B_t}{z} + \frac{A_t - A_s}{z^2[\alpha(t) - \alpha(s)]} = [\alpha(t) - \alpha(s)]^{-1} \int_s^t \frac{B_t - B_u}{z} \, d\alpha(u)$$

teži nuli u $B^2(E_t)$ kad $s \to t-$. No, kako je, na osnovu (16.4.) (lema 9.4.) ,

$$\left\| \int_s^t \frac{B_t - B_u}{z} \, d\alpha(u) \right\|_t^2 \leqslant \left\{ \int_s^t \|(B_t - B_u)z^{-1}\|_t \, d\alpha(u) \right\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int_s^t \left\{ \pi [\beta(t) - \beta(u)] \right\}^{1/2} d\alpha(u) \right\}^2 ,$$

to i druga jednakost zaista važi.

Uzmimo sada u obzir i da je $\beta(t) - \beta(s) > 0$ za svako $s < t$, te dokažimo da ni $g_1 = g^{t}_{\infty,1} = -2iB_t$ ne može pripadati

$B^2(E_t)$. Dokaz je po duhu sličan dokazu da je $\sigma = 1$. Pretpostavka da $B_t \in B^2(E_t)$ dovodi do sledeće protivrečnosti

$$\pi = \lim_{s \to t-} \left\langle \frac{B_t - B_s}{z[\beta(t)-\beta(s)]} , \frac{B_t}{z} \right\rangle_t = \left\langle A_t , \frac{B_t}{z} \right\rangle = 0 .$$

Ovim je dokaz završen.

T e o r e m a 2.4. Ako je $0 \leqslant s \leqslant t$, onda je $B^2(E_s) \subset B^2(E_t)$ i važi nejednakost $\|F\|_t \leqslant \|F\|_s$, $F \in B^2(E_s)$. Kada je s regularna tačka, tada je $B^2(E_s)$ Hilbert-ov potprostor od $B^2(E_t)$, tj. tada je $\|F\|_t = \|F\|_s$, $F \in B^2(E_s)$. Ako funkcije α i β , sem što su neprekidne i neopadajuće, ispunjavaju još i ovaj dopunski uslov:segment $[s,t]$ može da se podeli na konačno mnogo segmenata u kojima su α i β ili linearne i strogo rastuće ili je jedna konveksna nagore a druga nadole, i levi izvod u t , kao i desni u s , im je različit od 0 i od ∞ , tada je, za svako $p > 1$, $B^p(E_s)$ topološki potprostor od $B^p(E_t)$. Sem toga, ako je s regularna tačka, važi jednakost

$$\langle F , G \rangle_t = \langle F , G \rangle_s , \quad F \in B^p(E_s) , \ G \in B^q(E_s) .$$

D o k a z . Da je $B^2(E_s) \subset B^2(E_t)$, za $0 \leqslant s \leqslant t$, i $\|F\|_t \leqslant \|F\|_s$ za $F \in B^2(E_s)$, tvrdi lema 5.4. U slučaju kad je s regularna tačka, ona može biti tačka rašćenja ili tačka nagomilavanja tačaka rašćenja. Ako je s tačka rašćenja, tada, prema lemi 10.4., nijedna funkcija oblika $g^s_{\infty,\sigma}$ ne leži u $B^2(E_s)$. Prema teoremi 1.2., domen množenja sa z u prostoru $B^2(E_s)$ je tada svuda gust u $B^2(E_s)$. Na osnovu leme 6.4., važiće $\|F\|_t = \|F\|_s$, za $F \in B^2(E_s)$. Ako je s granična vrednost rastućeg niza tačaka rašćenja, onda je i s tačka rašćenja,tako da se opšti slučaj regularnosti s sada može svesti na slučaj kad je s granična vrednost niza tačaka rašćenja. Neka je $s_1 > s_2 > \ldots (> s)$ jedan takav niz. Primenom leme 5.4. i Fatou-ove leme dobija se, za $F \in B^2(E_s)$,

$$\|F\|_t^2 \leqslant \|F\|_s^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{F}{E_{s_n}}\right|^2 dx \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|F\|_{s_n}^2 = \|F\|_t^2 ,$$

tj. $\|F\|_t = \|F\|_s$.

Neka sada α i β ispunjavaju i dopunski uslov. Da je tada $B^p(E_s)$ topološki potprostor od $B^p(E_t)$ $(0 \leqslant s \leqslant t)$ sledi na osnovu lema 3.4. i 7.4. Što se tiče jednakosti skalarnih proizvoda, primetimo najpre da, u slučaju da je s regularna tačka, važi $\langle F, G\rangle_t = \langle F, G\rangle_s$, $F \in B^2(E_s)$, $G \in B^2(E_s)$, što je posledica jednakosti $\|F\|_{E_tL^2} = \|F\|_{E_sL^2}$, $F \in B^2(E_s)$. Specijalno, ovo važi kad su F i G linearne kombinacije funkcija oblika L_w^s, $w \in C^+$. Neka je sada $F \in B^p(E_s)$, $G \in B^q(E_s)$. Tada je F granična vrednost, u smislu konvergencije u $B^p(E_s)$, nekog niza linearnih kombinacija funkcija oblika L_w^s, $w \in C^+$, a G je granična vrednost u $B^q(E_s)$ nekog takvog niza (teor. 2.1. c), gl. II.). Ovi nizovi konvergiraju ka F, odnosno ka G, i u smislu konvergencije u $B^p(E_t)$, odnosno u $B^q(E_t)$. Kako za članove tih nizova važi jednakost skalarnih proizvoda, to će, na osnovu neprekidnosti skalarnog proizvoda, jednakost važiti i za F i G, tj. biće

$\langle F, G\rangle_t = \langle F, G\rangle_s$.

Ovim je dokaz završen.

N a p o m e n a . Ako se u sistemu (1.4.) umesto z kao množilac uz integrale na desnim stranama jednakosti stavi $(k-z)^{-1}$, gde je k neka tačka iz $R \setminus \mathcal{C}$, mogu se dobiti rezultati analogni teoremama 1.4. i 2.4.

Teorema 2.4. je u tesnoj vezi sa teoremom 40. iz [12] (str. 136.) (ili [18] , teor. I,II) . Naime, tamo je razmotren slučaj kad je $p = 2$ i kad su E_t cele funkcije, s tim što je umesto sistema (1.4.) uzet sistem opštijeg oblika. Teorema 2.4. je uopštenje teoreme 5.2. iz [21] , gde je, kao i u [12], obradjen slučaj kad je $p = 2$ i kad su E_t cele funkcije Pri dokazivanju teorema 1.4. i 2.4. jednim delom je korišćen i materijal sadržan u [21] .

L I T E R A T U R A

[1] E. Hille, J. D. Tamarkin: On the absolute integrability of Fourier transforms, Fund. Math. 25(1935), 329 - 352.

[2] G. H. Hardy: The mean value of the modulus of an analytic function, Proc. London Math. Soc., 14(1915), 269 - 277

[3] K. Hoffman: Banach spaces of analytic functions, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.

[4] F. Riesz, M. Riesz: Über die Randwerte einer analytischen Funktion, Quatriéme Congrès des Math. Scand., Stockholm (1916), 27 - 44.

[5] F. Riesz: Über die Randwerte einer analytischen Funktion, Math. Z. 18(1923), 87 - 95.

[6] N. Aronszajn: Theory of reproducing kernels, Trans. Amer. Math. Soc. 68(1950), 337 - 404.

[7] P. L. Duren: Theory of H^p spaces, Acad. Press, New York and London, 1970.

[8] M. Riesz: Sur les fonctions conjugées, Math. Z. 27 (1927), 218 - 244.

[9] W. Blaschke: Eine Erweiterung des Satzes von Vitali über Folgen analytischer Funktionen, S. - B. Sächs. Akad. Wiss., Leipzig Math. - Natur. Kl. 67(1915), 194 - 200.

[10] A. Beurling: On two problems concerning linear transformations in Hilbert space, Acta Math. 81(1949), 239 - 25

[11] В. И. Крылов: Об функциях регулярных в полуплоскости, Мат. сб. 6(48)(1939), 95 - 138.

[12] L. de Branges: Hilbert spaces of entire functions, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1968.

[13] F. Nevanlinna, R. Nevanlinna: Über die Eigenschaften analytischer Funktionen in der Umgebung einer singulären Stelle oder Linie, Acta Soc. Sci. Fenn. 50(1922), № 5.

[14] М. Г. Крейн: *О некоторых случаях эффективного определения плотности неоднородной струны через ее спектральную функцию*, Докл. Акад. Наук СССР 93(1953), 617-62

[15] L. de Branges: Some Hilbert spaces of entire functions, Proc. Amer. Math. Soc. 10(1959), 840 - 846.

[16] L. de Branges: Some Hilbert spaces of entire functions, Trans. Amer. Math. Soc. 96(1960), 259 - 295.

[17] L. de Branges: Some Hilbert spaces of entire functions II, Trans. Amer. Math. Soc. 99(1961), 118 - 152.

[18] L. de Branges: Some Hilbert spaces of entire functions III, Trans. Amer. Math. Soc. 100(1961), 73 - 115.

[19] L. de Branges: Some Hilbert spaces of entire functions IV, Trans. Amer. Math. Soc. 105(1962), 43 - 83.

[20] L. de Branges: Some mean squares of entire functions, Proc. Amer. Math. Soc. 10(1959), 833 - 839.

[21] H. Dym: An introduction to de Branges spaces of entire functions with applications to differential equations of the Sturm-Liouville type, Advances in Math. 5(1971), 395 - 471.

S A D R Ž A J