PRILOG PROUČAVANJU
RAZNOVREDNOSNOG PREDIKATSKOG RAČUNA

DOKTORSKA DISERTACIJA

GRADIMIR D. VOJVODIĆ

BEOGRAD 1978.

S A D R Ž A J

U V O D

Blagodareći fundamentalnim radovima *E. Posta*, danas su dobro poznata svojstva algebre dvovalentne logike, koja se obično i naziva algebra logike. S druge strane, paralelno teoriji algebre logike pojavila se i počela se veoma brzo razvijati disciplina teorija Bulovih algebri. Prvi analog Bulovih algebri za slučaj m-valentnih logika uveo je takodje E. Post (dok je prvi nacrt m-valentne logike izneo *Lukasiewicz* (B. Šešić [32], Šešelja, B.,Vojvodić G.[32])). Osnovnu teoriju tih algebri dao je 1942.*Rosenbloom* [25],koji ih je i nazvao Postovim algebrama. 1960. godine *Epstein*,[9] je uveo jednostavniji pojam mreže Posta i dao teoriju predstavljanja tih mreža. *Trazyk*,[37] je prvi formulisao jednakostni sistem aksioma (engl. *Equational System of Axioms*) za Postove algebre. Klase algebre Posta i mreže Posta na raznim jezicima definišu jedan te isti objekt, koji odgovara m-valentnoj logici Posta. m-valentni iskazni računi *Lukasiewicz-a* i Posta nisu bili konstruisani kao formalizovani aksiomatski deduktivni sistemi. Prvi 3-valentni iskazni račun *Lukasiewicz-a* dao je *Wajserg (Rescher* [24]*)*. Standardni sistem m-valentnog iskaznog računa koji odgovara Postovim algebrama dao je *Rousseau* [26], [28]. Predikatski račun konstruisan na bazi tog iskaznog računa, i neke dalje osobine izučavali su *H. Rasiowa* [17],[18],[19], *B. Danh* [6], *L. Maksimova, D. Vakarelov* [12], *E. Orlovska* [16], *Z. Saloni* [29] i drugi.

Raznovrednosni predikatski račun (engl. *Mixed-Valued Predicate Calculi*) uvela je *H. Rasiowa* [20],[22], i on je uopštenje m-valentnog predikatskog računa Posta. Osnovno obeležje raznovrednosnog predikatskog računa je da za svaki predikat ρ, postoji m, $2 \leq m < \omega$, tako da je ρ m-valentno. Za raznovrednosni predikatski račun generalizovana Postova algebra reda ω^{+} sa uslovom konačne reprezentacije ima istu ulogu koju ima Bulova algebra u odnosu na klasični predikatski račun. Definicija generalizovane Postove algebre reda ω^{+} sa uslovom konačne reprezentacije koja se daje u ovom radu je rezultat *Rousseau-a* [28], (*Rasiowa* [22]), i sastoji se u sledećoj ideji. Generalizovana Postova algebra P reda ω^{+} sa uslovom konačne reprezentacije je objedinjenje lanca $C = \{e_0, e_1, \ldots, e_{\omega}\}$, $0 \leq e_0 \leq e_1 \leq \ldots \leq e_{\omega} = 1$, i Bulove algebre B_P sa jedinicom 1 i nulom 0, pri čemu C i B_P generiše P, tako da za svaku distributivnu mrežu U sa 0 i 1, ako je h_1 homomorfizam od C u U, i h_2 homomorfizam od B_P u U, onda postoji homomorfizam h od P u U, koji je zajedničko raširenje od h_1 i h_2, i svaki element iz P ima konačnu reprezentaciju. Za slučaj Postove algebre reda m uzima se za $C = \{e_0, e_1, \ldots, e_{m-2}, e_{\omega}\}$.

Važnije rezultate o polivalentnim logikama zasnovane na Postovim algebrama, i o Postovim algebrama dali su pored spomenutih i *C.C. Chang*, *A. Horn*, *P. Dvinger i A. Malcev*.

Medjusobni odnos predikatskog računa Posta, raznovrednosnog predikatskog računa i nekih drugih polivalentnih logika (*Lukasiewicz-a*, *Bochuar-a*, *Brower-a*, *Kleene-a*, ...) date su u *Rescher* [24], *Rasiowa* [21],[22].

Predmet ovog rada je, pre svega, izučavanje osnovnih rezultata vezanih za Teoriju modela raznovrednosnog predikatskog računa korišćenjem rezultata Teorije modela klasičnog predikatskog računa, i izučavanje strukture raznovrednosnih relacija ekvivalencije i relacija kongruencije, u skladu sa poznatim rezultatima iz univerzalne algebre koji se odnose na strukturu relacija ekvivalecije i relacija kongruencije.

Nulta glava obuhvata osnovne pojmove u vezi sa raznovrednosnim predikatskim računom, definicije i stavove od kojih su mnogi analogni odgovarajućim pojmovima i tvrdjenjima klasičnog predikatskog računa. Pristup je baziran na radu *H. Rasiowe* [22].

U prvoj glavi dati su osnovni rezultati rada. U prvom odeljku ističu se sledeća tri rezultata. Prvo, slaba separabilna teorema za k-modele (T.1.1.1.) koja je tipična za raznovrednosni predikatski račun, u odnosu na druge polivalentne logike koje su zasnovane na Postovim algebrama. Drugo, veza izmedju k-modela raznovrednosnog predikatskog računa i modela klasičnog predikatskog računa (iskazana T.1.1.7.), koja se bitno koristi u rezultatima prve i druge glave, omogućujući relativno jednostavno dokazivanje nekih važnijih rezultata Teorije k-modela raznovrednosnog predikatskog računa. Treće, posledica (P.1.1.8.) kojom se ističe različitost Teorije k-modela raznovrednosnog predikatskog računa i Teorije modela klasičnog predikatskog računa.

U drugom odeljku dati su neki tipični rezultati Teorije modela (teorema Loša o ultraproizvodu za k-modele (T.1.2.1.), teorema kompaktnosti za k-modele (T.1.2.2.), i teorema Morlija o kategoričnosti za k-modele (T.1.2.4.)) koji važe i za k-modele raznovrednosnog predikatskog računa, svodeći ih, na osnovu veze date teoremom T.1.1.7. na odgovarajuća tvrdjenja teorije modela klasičnog predikatskog računa. Deo ovih rezultata je objavljen u radu G. Vojvodić [39].

U drugoj glavi, koristeći prethodne rezultate, data su tvrdjenja analogna tvrdjenjima klasičnog predikatskog računa iskazana interpolacionom lemom Krejga, teoremom Beta o definišljivosti i II ε-teoremom.

U trećoj glavi dati su rezultati rada G. Vojvodić, B. Šešelja [40] (nešto modifikovani), vezani za strukturu raznovrednosnih relacija ekvivalencije i raznovrednosnih relacija kongruencije u skladu sa rezultatima iz univerzalne algebre, koji se odnose na strukturu relacija ekvivalencije i relacija kongruencije.
U prvom odeljku te glave proučena je struktura raznovrednosnih relacija ekvivalencije i dokazano je da one imaju strukturu kompletne mreže u odnosu na relaciju pripadanja (T.3.1.5.). Razmatran je takodje uslov pripadanja kompozicije relacija navedenoj mreži (T.3.1.6.). U drugom odeljku definisana je raznovrednosna relacija kongruencije na datoj algebri i dokazani su stavovi o razlaganju i sintezi raznovrednosnih relacija kongruencije pomoću kongruencija u klasičnom smislu. Izvedene su osobine raznovrednosnih kongruencija analogne onima u prvom odeljku, a rezultat toga je i stav koji utvrdjuje raznovrednosne relacije ekvivalencije kao algebarski sistem zatvaranja (T.3.2.5.).

Što se tiče daljih istraživanja može se očekivati da važe i sledeći rezultati: Prvo, rezultati koji se odnose na algebarske i skupovne strukture ultraproizvoda za k-modele, koji bi bili analogni rezultatima o ultraproizvodu modela klasičnog predikatskog računa (*J. Bell, A. Slomson* [2]). Zatim svojstva, analogna svojstvima data teoremom Erbrana za klasičan predikatski račun. Dalje, Gencenova aksiomatizacija raznovrednosnog predikatskog računa (*E. Orlowska* [16], *Z. Saloni* [29]). Isto tako, mogu se ispitivati i strukture n-arnih viševrednosnih relacija ekvivalencije i n-arnih viševrednosnih relacija kongruencije koristeći metode i rezultate treće glave.

Radi jednostavnijeg izražavanja u celom radu umesto izraza "ako i samo ako" koristi se skraćenica "akko". Znakom o označava se kraj dokaza tvrdjenja, a definiendum u definiciji dat je kurzivom ili je podvučen.

Posebnu zahvalnost dugujem prof. Dr Slaviši Prešiću, koji me je zainteresovao za probleme matematičke logike i pružio niz stručnih i naučnih saveta i usmerenja. Takodje se zahvaljujem prof. Dr Svetozaru Miliću na korisnim sugestijama i primedbama koje su mi u mnogome olakšale rad. Zahvaljujem se i svim učesnicima Seminara za matematičku logiku koji su , otkrivajući i sebi, otkrili i meni lepotu matematičke logike.

0. O RAZNOVREDNOSNOM PREDIKATSKOM RAČUNU

U ovoj glavi date su osnovne osobine raznovrednosnog predikatskog računa, prema radu *H. Rasiowe* [22]*(Mixed-Value predicate calculi, Studia Logica, 34(1975.) pp. 215-234)*.

U prvom delu data su osnovna svojstva Generalizovane Postove algebre reda ω^+ sa uslovom konačne reprezentacije.

U drugom delu uvodi se pojam raznovrednosnog predikatskog računa.

U trećem delu dati su rezultati koji se odnose na algebru raznovrednosnih teorija.

U četvrtom delu posmatra se semantika raznovrednosnog predikatskog računa.

Teorema kompletnosti za raznovrednosni predikatski račun data je u petom delu.

Svi pojmovi, oznake (kao i numeracija) i dokazi svih navedenih teorema dati su u gore spomenutom radu, odnosno u radovima na koje se on oslanja.

0.1. GENERALIZOVANA POSTOVA ALGEBRA REDA ω^+ SA USLOVOM KONAČNE REPREZENTACIJE

Neka je *$\mathcal{P}$ generalizovana Postova algebra reda ω^+*, tj. to je apstraktna algebra

(i) $\mathcal{P} = (P, 1, \cup, \cap, \Rightarrow, \neg, (D_i)_{0<i<\omega}, (e_i)_{0 \le i \le \omega})$,

gde su D_i za $0 < i < \omega$ unarne operacije i e_i za $0 \le i \le \omega$ nularne operacije i sledeći uslovi su zadovoljeni:

(p_0) $(P, 1, \cup, \cap, \Rightarrow, \neg)$ je pseudo-Bulova algebra,

(p_1) $D_i(a \cup b) = D_i(a) \cup D_i(b)$,

(p_2) $D_i(a \cap b) = D_i(a) \cap D_i(b)$,

(p_3) $D_i(a \Rightarrow b) = (D_i(a) \Rightarrow D_i(b)) \cap \ldots \cap (D_i(a) \Rightarrow D_i))$,

(p_4) $D_i(\neg a) = \neg D_1(a)$

(p_5) $D_i(D_k(a)) = D_k(a)$

(p_6) $D_i(e_j) = 1,\ i \le j\ ;\ D_i(e_j) = \neg 1$ za $i > j$

(p_7) $D_{i+1}(a) \le D_i(a)$,

(p_8) $e_\omega = 1$, najveći element; $e_0 = 0$, $0 = \neg 1$, najmanji element,

(p_9) $D_1(a) \cup \neg D_1(a) = e_\omega$.

(p_{10}) $a = \bigcup_{i=1}^{\infty} (D_i(a) \cap e_i)$

za svako $a, b \in P$, $0 < i < \omega$, $0 < k < \omega$, $0 \le j \le \omega$.

Primetimo da u svakoj generalizovanoj Postovoj algebri reda ω^+ važi:

(i) $(P, 1, \cup, \cap)$ je distributivna mreža

(ii) $0 = e_0 \leq e_1 \leq e_2 \ldots \leq e_\omega = 1$

(iii) ako $a \leq b$, tada $D_i(a) \leq D_i(b)$, $0 < i < \omega$,

(iv) ako je P nedegenerisana, tada $i \neq j$ implicira $e_i \neq e_j$, $0 \leq i \leq \omega$, $0 \leq j \leq \omega$,

(v) $a = b$ akko $D_i(a) = D_i(b)$, $0 < i < \omega$,

Generalizovana Postova algebra P reda ω^+ zadovoljava uslov *konačne reprezentacije* ako

(fλ) za svako $a \in P$, postoji $2 \leq m < \omega$, tako da

$$a = \bigcup_{i=1}^{m-2} (D_i(a) \cap e_i) \cup D_{m-1}(a).$$

Teorema 0.1.1.

Ako apstraktna algebra (1) zadovoljava aksiome (p_0) - (p_6), (p_9) i (fλ), tada je ona generalizovana Postova algebra.○

Primer:

Generalizovana Postova algebra sa uslovom konačne reprezentacije, je $e_0 \leq e_1 \ldots \leq e_\omega$ posmatran kao pseudo-Bulova algebra, (tj. mreža kojoj su dodate operacije $\Rightarrow$, $\neg$ definisane sa $e_i \Rightarrow e_j = e_\omega$, dok $i \leq j$; $e_i \Rightarrow e_j = e_j$, dok $i > j$, $\neg e_i = e_i \Rightarrow e_0$) sa operacijama D_i, $0 < i < \omega$ definisane sa (p_6). Takvu algebru označavaćemo sa P_ω. Tako

$$P_\omega = (P_\omega, \cup, \cap, \Rightarrow, \neg, (D_i)_{0 < i < \omega}, (e_i)_{0 \leq i \leq \omega})$$

gde je P_ω skup elemenata e_i, $0 \leq i \leq \omega$, i $e_0 \leq e_1 \leq \ldots \leq e_\omega$. P_ω je kompletna mreža.

Teorema 0.1.2.

Ako je P generalizovana Postova algebra, tada skup B_P

svih elemenata $D_i(a)$, $a \in P$, $0 < i < \omega$, u odnosu na operacije $\cup, \cap, \Rightarrow, \neg$ obrazuje Bulovu algebru koju ćemo označavati sa B_P.○

Neka je P generalizovana Postova algebra sa uslovom konačne reprezentacije. Pod *redom elementa* a, mi podrazumevamo najmanje m, $2 \le m < \omega$, tako da važi

$$a = \bigcup_{i=1}^{m-2} (D_i(a) \cap e_i) \cup D_{m-1}(a).$$

Red elemenata označavamo sa *ord (a)*.

Teorema 0.1.3.

U svakoj nedegenerisanoj generalizovanoj Postovoj algebri sa uslovom konačne reprezentacije P

$$\mathrm{ord}(e_\omega) = 2,\ \mathrm{ord}(e_i) = i + 2 \quad \text{za svako} \quad 0 \le i < \omega\ .○$$

Postova algebra reda $m \ge 2$ je algebra

(5) $$P = (p, \cap, \cup, \Rightarrow, \neg, D_1, \ldots, D_{m-1}, e_0, e_1, \ldots, e_{m-2}, e_\omega)$$

koja zadovoljava aksiome $(p_0) - (p_6)$, (p_9), gde $0 < i \le m-1$, $0 < k \le m-1$, $j \in \{0, \ldots, m-2, \omega\}$ i osim toga za svako $a \in P$

(P_m) $$a = \bigcup_{i=1}^{m-2} (D_i(a) \cap e_i) \cup D_{m-1}(a).$$

Za svako $m \ge 2$, podalgebra

$$P_m = (P_m, \cup, \cap, \Rightarrow, \neg, D_1, \ldots, D_{m-1}, e_0, \ldots, e_{m-2}, e_\omega),$$

$P_m = \{e_0, \ldots, e_{m-2}, e_\omega\}$, koja odgovara reduktu od P_ω je m-elementna Postova algebra reda m.

Teorema 0.1.4.

Ako je P generalisana Postova algebra sa uslovom konačne reprezentacije, tada za svako $m \geq 2$, skup

$$P^m = \{a \in P,\ ord(a) \leq m\}$$

je zatvoren u odnosu na operacije $\cup, \cap, \Rightarrow, \neg, D_1, \dots, D_{m-1}, e_0, \dots, e_{m-2}, e_\omega$ i u odnosu na te operacije, to je Postova algebra reda m (u oznaci P^m). Osim toga

$$D_j(a) = D_{m-1}(a) \qquad \text{za } j > m-1. \circ$$

Teorema 0.1.5.

Postova algebra P_ω^m od elemenata $a \in P_\omega$, takvih da $ord(a) \leq m$, je m-elementna Postova algebra P_m reda m.∘

Filter ∇ u generalisanoj Postovoj algebri P zove se D-filter, ako za svaki elemenat a

$$a \in \nabla \quad \text{akko} \quad D_i(a) \in \nabla \quad , \quad i = 1,2,\dots .$$

D-filter zove se *prost*, ako je on prost filter.

Teorema 0.1.6.

Ako je ∇ prost D-filter u P generalisanoj Postovoj algebri i P zadovoljava $(f\lambda)$, tada P/∇ je izomorfno sa P_ω. Osim toga, za svako a iz P, ako $ord(a) \leq m$, tada $ord(|a|) \leq m$ u P_ω/∇.∘

Teorema 0.1.7.

Neka je P generalisana Postova algebra i neka je B_P Bulova algebra determinisana sa P. Za ma koje elemente a, a_t, $t \in T$, iz P,

$$a = \bigcup_t a_t \quad \text{akko} \quad D_i(a) = \bigcup_t D_i(a_t), \quad i = 1,2, \ldots$$

u $\mathcal{B}_P$,

$$a = \bigcap_t a_t \quad \text{akko} \quad D_i(a) = \bigcap_t D_i(a_t), \quad i = 1,2, \ldots$$

u $\mathcal{B}_P$.∘

Teorema 0.1.9.

Neka je P generalisana Postova algebra sa uslovom konačne reprezentacije. Ako postoji u P

$$a = \bigcup_{t \in T} a_t \quad (b = \bigcap_{t \in T} b_t),$$

i $\mathrm{ord}(a_t) \leq m$ $(\mathrm{ord}(b_t) \leq m)$, za svako $t \in T$, tada $\mathrm{ord}(a) \leq m$ $(\mathrm{ord}(b_t) \leq m)$. Dakle, za ma koji element a_t, $t \in T$ u P^m (za ma koji element b_t, $t \in T$ u P^m), beskonačna unija $\bigcup_t a_t$ u P i beskonačna unija $\bigcup_t a_t$ u P^m se poklapaju.
(Beskonačni presek $\bigcap_{t \in T} b_t$ u P i beskonačni presek $\bigcap_{t \in T} b_t$ u P^m se poklapaju).∘

Teorema 0.1.10.

Za ma koji element $a \neq e_\omega$ iz generalisane Postove algebre P i neka je Q prebrojiv skup beskonačnih unija i preseka u P, postoji prost D-filter ∇ tako da $a \notin \nabla$ i ∇ očuvava sve beskonačne preseke i unije iz Q.∘

0.2. RAZNOVREDNOSNI PREDIKATSKI RAČUN.

Za svako $m \geq 2$, neka je A^m definisano kao što sledi:

A^2 je unija sledećih disjunktnih skupova:

Beskonačni skup V slobodnih promenljivih x, y, z sa indeksima, ako je to potrebno; beskonačni skup θ zatvorenih promenljivih ξ, η, sa indeksima ako je to potrebno; proizvoljan skup Φ_k, $k = 0,1,2,\ldots$ k-narnih funkcija ϕ, ψ sa indeksima ako je to potrebno; proizvoljan skup Π_k^2, $k = 1,2,\ldots$ k-narnih dvovrednosnih predikata ρ^2, σ^2 sa indeksima ako je to potrebno; proizvoljan neprazan skup V_0^2 dvo-vrednosnih iskaznih slova p^2, q^2 sa indeksima ako je to potrebno; skup $\{e_0, e_\omega\}$ iskaznih konstanti; skup uparnih veznika $\{\neg, D_1\}$ binarnih $\{\cup, \cap, \Rightarrow,\}$ skup kvanora $\{\forall, \exists\}$, i skup zagrada $\{(,)\}$.

Neka je A^m definisano. Tada A^{m+1} sadrži A^m, i : proizvoljan skup Π_k^{m+1}, $k = 1,2,\ldots$ k-narnih $m+1$ - vrednosnih predikata p^{m+1}, q^{m+1}, sa indeksima ako je to potrebno; skup $\{e_{m-1}\}$, gde je e_{m-1} iskazna konstanta; proizvoljan neprazan skup V_0^{m+1}, $m+1$ - vrednosnih iskaznih promenljivih, p^{m+1}, q^{m+1} sa indeksima ako je to potrebno; skup od jednog uparnog veznika $\{D_{m-1}\}$.

Neka je

$$\Pi = \bigcup_{m=2}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \Pi_k^m, \quad \bar{\Phi} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Phi_k, \quad V_0 = \bigcup_{m=2}^{\infty} V_0^m$$

$$e = \{e_i\}_{0 \leq i \leq \omega}, \quad D = \{D_i\}_{0 < i < \omega}.$$

Neka je $A = \bigcup_{m=2}^{\infty} A^m$. Tada

$A = V \cup \theta \cup \Pi \vee V_0 \cup e \cup D \cup \{\neg, \cup, \cap, \Rightarrow\} \cup \{\forall, \exists\} \cup \{(\ ,\ )\}$

Skup A zove se *azbuka* raznovrednosnog računa. Tada je skup T terma azbuke A najmanji takav skup da je

$V \cup \Phi_0 \subset T$

Ako $\tau_1, \ldots, \tau_k \in T$ i $\phi \in \Phi_k$, $k > 0$, tada $\phi(\tau_1, \ldots, \tau_n) \in T$.

Skup svih formula F je najmanji takav skup da

$V_0 \cup e \subset F$,

Ako $\tau_1, \ldots, \tau_n \in T$ i $\rho^m \in \Pi_k^m$, tada $\rho^m(\tau_1, \ldots, \tau_n) \in F$ za $k > 0$, $m \geq 2$.

Ako $\alpha, \beta \in F$, tada $D_i\alpha$ za $0 < i < \omega$, $\neg\alpha$, $(\alpha \cup \beta)$ $(\alpha \cap \beta)$, $(\alpha \Rightarrow \beta)$ su u F.

Ako $\alpha(x) \in F$, gde je x slobodna promenljiva koja se pojavljuje u α i $\xi \in \theta$ se ne pojavljuje u α, tada $\exists\xi\,\alpha(x/\xi)$ i $\forall\xi\,\alpha(x/\xi)$ su u F, gde je $\alpha(x/\xi)$ dobijeno iz α zamenom svih pojavljivanja od x u α sa ξ.

Za svako $m \geq 2$, neka je F^m skup svih formula iz F koje su konstruisane sa elementima iz A^m. Jasno $F = \bigcup_{m=2}^{\infty} F^m$.

Za svaku formulu $\alpha \in F$, definišimo ord(f) kao najmanje m tako da $\alpha \in F^m$. Tada

$L = (A, T, F)$

zove se *formalizovani raznovrednosni predikatski račun*, i

$L^m = (A, T, F^m)$, $m \geq 2$

zove se *formalizovani raznovrednosni predikatski račun restrikcije m*.

Skup <u>aksioma A_L</u> od L su sledeće šeme aksioma:

(a_1) $(\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)$,

(a_2) $(\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)) \Rightarrow ((\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma))$,

(a_3) $(\alpha \Rightarrow (\alpha \cup \beta))$,

(a_4) $(\beta \Rightarrow (\alpha \cup \beta))$,

(a_5) $((\alpha \Rightarrow \gamma) \Rightarrow ((\beta \Rightarrow \gamma) \Rightarrow ((\alpha \cup \beta) \Rightarrow \gamma)))$,

(a_6) $((\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \alpha)$,

(a_7) $((\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \beta)$,

(a_8) $((\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow ((\alpha \Rightarrow \gamma) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow (\beta \cap \gamma))))$,

(a_9) $((\alpha \Rightarrow \neg \beta) \Rightarrow (\beta \Rightarrow \neg \alpha))$,

(a_{10}) $(\neg(\alpha \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \beta)$.

(b_1) $(D_i(\alpha \cup \beta) \Leftrightarrow (D_i\alpha \cup D_i\beta))$,

(b_2) $(D_i(\alpha \cap \beta) \Leftrightarrow (D_i\alpha \cap D_i\beta))$,

(b_3) $(D_i(\alpha \Rightarrow \beta)) \Leftrightarrow ((D_i\alpha \Rightarrow D_i\beta) \cap (\ldots \cap (D_i\alpha \Leftrightarrow D_i\beta)))$,

(b_4) $(D_i \neg \alpha \Leftrightarrow \neg D_i\alpha)$,

(b_5) $(D_i D_j \alpha \Leftrightarrow D_j\alpha)$,

(b_6) $D_i e_k$ za $i \leq k$, i $\neg D_i e_k$ za $i > k$;

(b_7) $(D_1\alpha \cup \neg D_1\alpha)$

(b_8) $(\alpha \Leftrightarrow ((D_1\alpha \cap e_1) \cup (\ldots \cup ((D_{m-2}\alpha \cap e_{m-2}) \cup D_{m-1}\alpha) \ldots)))$,

gde je ord $\alpha \leq m$.

U (a_1) - (b_8) α, β, γ su iz F, $0 < i < \omega$, $0 < j < \omega$, $0 \leq k \leq \omega$ i pišemo $\alpha \Leftrightarrow \beta$ umesto $((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha))$ i u (b_8) $2 \leq m < \omega$.

Skup <u>A_L^m aksioma za L^m</u> sastoji se od aksioma (a_1) - (a_{10}) (b_1) - (b_8) u kojima je $\alpha, \beta, \gamma \in F^m$, $0 < i \leq m-1$, $0 < j < m-1$, $k \in \{0, \ldots m-2, \omega\}$ i u (b_8), ako umesto m stavimo n, za $2 \leq n \leq m$.

Sledeća pravila izvodjenja pridodata su L: <u>modus ponens</u>, <u>pravilo zamenjivanja slobodne promenljive</u>, <u>pravilo zamenjivanja iskazne promenljive</u> iz V_0^m u formulama F^m, $2 \leq m < \omega$, <u>pravila uvodjenja i eliminisanja kvantifikatora</u>, *(Rasiowa, Sikorski,*

[23]), i

$$(r_{mix}) \quad \frac{\alpha}{D_i\alpha}, \quad 0 < i < \omega.$$

Ako je m utvrdjeno, $2 \leq m < \omega$, tada u L^m umesto (r_{mix}) uvodi se pravilo

$$(r_m) \quad \frac{\alpha}{D_{m-1}\alpha};$$

Ostala pravila u L^m su ista kao u L.

Za ma koji skup $A \subset F$ ($A \subset F^m$) definišimo $C(A)$ ($C^m(A)$) kao najmanji skup formula iz F (F^m) koji sadrži $A_L \cup A$ ($A_L^m \cup A$) i zatvoren je za pravila izvodjenja pridodatih L -u (L^m-u). Pišemo $A \vdash \alpha$ ako $\alpha \in C(A)$, i $\vdash \alpha$ ako $\alpha \in C(\Phi)$. Slično, pišemo $A \vdash_m \alpha$ ako $\alpha \in C^m(A)$, i $\vdash_m \alpha$ ako $\alpha \in C^m(\Phi)$, za svako $A \subset F^m$ i $\alpha \in F^m$, $r \leq m < \omega$.

Sistem $S = (L,C)$ za svaki raznovrednosni predikatski račun L naziva se *sistem računa L*, i $S(A) = (L, C, A)$, $A \subset F$, naziva se *raznovrednosna teorija*. Slično, $S^m = (L^m, C^m)$ naziva se sistem raznovrednosnog računa restrikcije m, i $S^m(A) = (L^m, C^m, A)$ $A \subset F^m$ je raznovrednosna teorija restrikcije m.

Teorija $S(A)$ ($S^m(A)$) je *neprotivurečna*, ako postoji formula α iz L(α iz L^m), tako da $\alpha \notin C(A)$ ($\alpha \notin C^m(A)$).

0.3. ALGEBRA RAZNOVREDNOSNIH TEORIJA

Neka je $S(A) = (L, C, A)$ raznovrednosna teorija. Posmatrajmo relaciju $\approx$ na F definisanu sa:

$$\alpha \approx \beta \quad \text{akko} \quad A \vdash (\alpha \Rightarrow \beta) \text{ i } A \vdash (\beta \Rightarrow \alpha).$$

Teorema 0.3.1.

$\mathcal{U}(S(A)) = (F/\approx, \cup, \cap, \Rightarrow, \neg, (D_i)_{0<i<\omega}, (e_i)_{0 \leq i \leq \omega})$ je generalisana Postova algebra sa uslovom konstantne reprezentacije. Ona je nedegenerisana akko $S(A)$ je neprotivurečno.o

Teorema 0.3.3.

U algebri $\mathcal{U}(S(A))$ sledeće beskonačne unije i preseci

$$\bigcup_{\tau\in T}|\alpha(x/_\tau)| = |\exists\xi\,\alpha(x/_\xi)|,\quad \bigcap_{\tau\in T}|\alpha(x/_\tau)| = |\forall\xi\alpha(x/_\xi)|$$

odgovaraju kvantifikatorima.o

Teorema 0.3.4.

Za svaku $\alpha(x) \in F$, ako $\mathrm{ord}(\alpha) \leq m$, tada sledeće beskonačne unije i preseci postoje u $\mathcal{U}(S(A))^m$

$$\bigcup_{\tau\in T}|\alpha(x/_\tau)| = |\exists\xi\alpha(x/_\xi)|,\quad \bigcap_{\tau\in T}|\alpha(x/_\tau)| = |\forall\xi\alpha(x/_\xi)|,$$

gde je $\mathcal{U}(S(S))^m$ Postova algebra reda m konstruisana od svih $|\alpha| \in F/_\approx$, tako da $\mathrm{ord}(|\alpha|) \leq m$.o

Odgovarajuća tvrdjenja važe i za raznovrednosnu teoriju restrikcije m, $2 \leq m < \omega$.

0.4. SEMANTIKA VIŠEVREDNOSNOG PREDIKATSKOG RAČUNA

Neka je $L = (A, T, F)$ raznovrednosni predikatski račun, i neka je U neprazan skup. *Valoacija* u U je ma koje preslikavanje $v: V \cup V^0 \to U \cup P_\omega$, koja zadovoljavaju uslove: $v(x) \in U$ za $x \in V$, $v(p^m) \in P_m = \{e_0, \ldots, e_{m-2}, e_\omega\}$ za svako $m \geq 2$ i $p^m \in V_0^m$. Skup svih valoacija u U označavamo sa W_U.

Realizacija R *od* L *u* U je ma koje preslikavanje koje dodeljuje svakom $\phi \in \Phi_k$, $0 \leq k < \omega$ funkciju $\phi_R : U^k \to U$, i za svako $\rho^m \in \Pi_k^m$, $m \geq 2$, $0 < k < \omega$, funkciju $\rho_R^m : U^k \to P_m$.

Svaka realizacija R od L u U dodeljuje svakom termu $\tau \in T$ funkciju $\tau_R : W_U \to U$, i za svaku formulu $\alpha \in F$ funkciju $\alpha_R : W_U \to P_\omega$. Definicija od τ_R je uobičajena (*Rasiowa, Sikorski*, [23]). Definicija α_R data je indukcijom po dužini formule.

(1) $\quad {e_i}_R(v) = e_i, \quad$ za $\quad 0 \leq i \leq \omega;$

$$P_R^m(v) = v(P^m), \quad m \geq 2,$$

(2) $\quad \rho^m(\tau_1, \ldots, \tau_n)_R(v) = \rho_R^m({\tau_1}_R(v), \ldots, {\tau_n}_R(v));$

(3) $\quad (D_i\alpha)_R(v) = D_i(\alpha_R(v)), \quad 0 < i < \omega,$

$$(\neg\, \alpha)_R(v) = \neg\, \alpha_R(v) \quad ,$$

(4) $\quad (\alpha \cup \beta)_R(v) = \alpha_R(v) \cup \beta_R(v),$

$$(\alpha \cap \beta)_R(v) = \alpha_R(v) \cap \beta_R(v));$$

(5) $\quad (\alpha \Rightarrow \beta)_R(v) = \alpha_R(v) \Rightarrow \beta_R(v);$

(6) $\quad (\exists \xi\, \alpha(x/_\xi))_R(v) = \bigcup_{u \in U} \alpha_R(v_u),$

$$(\forall \xi\, \alpha(x/_\xi))_R(v) = \bigcap_{u \in U} \alpha_R(v_u)$$

Sve operacije na desnoj strani tih jednakosti su u generalizovanoj Postovoj algebri P_ω.

Teorema 0.4.1.

Za svaku formulu α iz F, ako ord(α) $\leq$ m, tada $\alpha_R : W_u \to P_m$, i sve operacije i beskonačne unije i preseci u P_ω koje realizuju konektive i kvantifikatore koji se pojavljuju u α, možemo zameniti operacijama i beskonačnim unijama i presecima u P_m.o

Realizacija R u U $\neq \Phi$ zove se *model* formule $\alpha \in F$, ako $\alpha_R(v) = e_\omega$ za svako $v \in W_U$.

Realizacija R je *model skupa* $A \subset F$, ako je ona model svake formule $\alpha \in A$. Formula α se zove *tautologija* od L = (A, T, F) ako je svaka realizacija u svaki skup U $\neq \Phi$ model od α. Formula α je *semantička posledica skupa* $A \subset F$, ako je svaki model od A model od α (u oznaci $A \models \alpha$).

Teorema 0.4.5.

Ako $A \vdash \alpha$, tada $A \models \alpha$.o

Primetimo da važi, ako je R model za A , i $A \vdash \alpha$, to je R model za α.

Za račun L^m uvodi se, slično, pojam valoacije, skupa svih valoacija W_U^m, pojam realizacije, pojam modela (realizacija R od L^m u U je model od $\alpha \in F^m$, ako $\alpha_R(v) = e_\omega$), pojam semantičke posledice skupa $A \subset F^m$ ($A \models_m \alpha$)), i dokazuje se (*Rasiowa*, [22]) da važi

Teorema 0.4.8.

Za svaki skup $A \subset F^m$, i svaku formulu $\alpha \in F^m$, ako $A \vdash_m \alpha$, onda $A \models_m \alpha$.o

0.5. TEOREMA KOMPLETNOSTI

Teorema 0.5.8.

Neka je $L = (A,T,F)$ ma koji raznovrednosni račun. Tada za svako $A \subset F$ i ma koju formulu $\alpha \in F$, ako nije $A \vdash \alpha$, tada postoji model R od A u $U \neq \Phi$ i valoacija v iz W_U, tako da $\alpha_R(v) \neq e_\omega$.o

Teorema 0.5.12. (Teorema kompletnosti)

Neka je $L = (A,T,F)$ proizvoljan raznovrednosni predikatski račun. Tada za svako $A \in F$ i $\alpha \in F$

$A \vdash \alpha$ akko $A \models \alpha$.o

Primetimo da, ako $A \vdash \alpha$, tada postoji konačan podskup $A_1 \subset A$, tako da $A_1 \vdash \alpha$.

Navodimo još *teoremu dedukcije za L.*

Teorema 0.5.7.

Ako je $\alpha \in F$ zatvorena formula, tada za svako $A \subset F$ i $\beta \in F$

$A \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ akko $A \vdash (D_{m-1}\, \alpha \Rightarrow \beta)$, gde je

$\mathrm{ord}(\alpha) = m$.o

Odgovarajuća tvrdjenja važe i za L^m (*Rasiowa* [22]).

1. VEZA IZMEDJU k-MODELA RAZNOVREDNOSNOG PREDIKATSKOG RAČUNA I MODELA KLASIČNOG PREDIKATSKOG RAČUNA

U prvom odeljku ove glave osnovna su sledeća tri rezultata.

Prvo, slaba separabilna teorema za k-modele (T.1.1.1.), koja je tipična za raznovrednosni predikatski račun, u odnosu na druge polivalentne logike koje su zasnovane na Postovim algebrama.

Drugo, veza izmedju k-modela raznovrednosnog predikatskog računa i modela klasičnog predikatskog računa (iskazana teoremom T.1.1.7.), koja se bitno koristi u rezultatima drugog poglavlja prve glave, i u drugoj glavi.

Treće, posledica kojom se ističe različitost teorije k-modela raznovrednosnog predikatskog računa i teorije modela klasičnog predikatskog računa (P.1.1.8.).

Kao neposredna posledica T.1.1.7., i odgovarajućih osobina teorije modela klasičnog predikatskog računa, u drugom odeljku su dati sledeći rezultati: Teorema Loša o ultraproizvodu za k-modele (T.1.2.1.), teorema kompaktnosti za k-modele (T.1.2.2.), i teorema Morlija o kategoričnosti za k-modele (T.1.2.4.).

1.1. VEZA IZMEDJU k - MODELA RAZNOVREDNOSNOG PREDIKATSKOG RAČUNA I MODELA KLASIČNOG PREDIKATSKOG RAČUNA

Realizacija R od L u $U \neq \Phi$ zove se *k-model od* $\alpha \in F$, $(\mathrm{ord}(\alpha) \leq m,\ m \geq 2)$, ako $(\alpha)_R(v) \geq e_k$ za sve $v \in W_U$ i $0 < k < \omega$. Realizacija R u $U \neq \Phi$ zove se *k-model skupa formula* $F_1 \subset F$, ako je ona k-model za sve formule α iz F_1. Formula α iz F je *k-posledica skupa formula* $F_1 \subset F$ (u oznaci $F_1 \overset{k}{\models} \alpha$) akko svaki k-model od α je k-model od F_1. Formula α iz F je *k-tautologija*, ako je za svaku realizaciju R, $\alpha_R(v) \geq e_k$, $0 < k < \omega$ (u oznaci $\overset{k}{\models} \alpha$).

Realizacija R u $U \neq \Phi$ zove se *model* od $\alpha \in F$, $(\mathrm{ord}(\alpha) \leq m,\ m \geq 2)$, ako je $(\alpha)_R(v) \geq e_k$ za sve $v \in W_U$ i sve k, $0 < k < \omega$, tj. $(\alpha)_R(v) = e_\omega$.

Realizacija R u $U \neq \Phi$ zove se *model skupa formula* $F_1 \subset F$ ako je ona model za sve formule α iz F_1.

Formula α iz F je *posledica skupa formula* $F_1 \subset F$ (u oznaci $F_1 \models \alpha$) akko svaki model od α je model od F_1. Formula α iz F je *tautologija* ako je za svaku realizaciju R, $\alpha_R(v) = e_\omega$ (u oznaci $\models \alpha$).

Realizacija R od L^m u $U \neq \Phi$ zove se *k-model od* $\alpha \in F^m$, $\mathrm{ord}(\alpha) = n \leq m$, $m \geq 2$, ako $(\alpha)_R(v) \geq e_k$ za sve $v \in W_U^m$ i $0 < k < \omega$. Realizacija R od L^m u $U \neq \Phi$ zove se *k-model skupa formula* $F_1 \subset F^m$, ako je ona k-model za sve α iz F_1. Formula α iz F^m je *k-posledica skupa formula* $F_1 \subset F^m$ (u oznaci $F_1 \overset{k}{\underset{m}{\models}} \alpha$) akko svaki k-model od $\alpha \in F^m$ je k-model od $F_1 \subset F^m$. Formula α iz F^m je *k-tautologija*, ako je za svaku realizaciju R, $\alpha_R(v) \geq e_k$, $0 < k < \omega$ (u oznaci $\overset{k}{\underset{m}{\models}} \alpha$).

Realizacija R od L^m u $U \neq \Phi$ zove se *model od* $\alpha \in F^m$, $\mathrm{ord}(\alpha) = n \leq m$, $m \geq 2$, ako $(\alpha)_R(v) \geq e_k$ za sve $v \in W_U^m$ i sve k,

$0 < k < \omega$, tj. $(\alpha)_R(v) = e_\omega$.

Pojmovi *model skupa, formula, posledica i tautologija za L^m* definišu se slično kao odgovarajući pojmovi za L.

<u>*Teorema 1.1.1.*</u>*(Slaba separabilna teorema za k-modele).*

Za svaki skup $A \subset F^m$ i svako $\alpha \in F^m$, $A \models_k \alpha$ akko $A \models^m_k \alpha$. Specijalno $\models_k \alpha$ akko $\models^m_k \alpha$.

<u>*Dokaz:*</u>

Neka je R realizacija od L^m u $U \neq \Phi$, neka je $\bar{R}$ realizacija od L u $U \neq \Phi$, tako da je $\bar{R}$ raširenje (ekstenzija) od R, gde je raširenje realizacije definisano slično raširenju realizacije za klasičan predikatski račun. Detaljnije je dato u 2.3. Za svako $v \in W^m_U$, neka je $\bar{v} \in W_U$ proizvoljno raširenje (ekstenzija) od v. Tada za svako $\alpha \in F^m$ i svaku valoaciju $v \in W^m_U$ sledi na osnovu teoreme 0.4.1. (0 glava), da $\alpha_R(v) = \alpha_{\bar{R}}(v)$. Jasno da ako $\alpha_R(v) \geq e_k$ onda i $\alpha_{\bar{R}}(v) \geq e_k$, i obrnuto. Neposredno sledi iz uslova teoreme da važi $A \models_k \alpha$ akko $A \models^m_k \alpha$ .o

Neka je F^0 najmanji skup formula iz F, koji zadovoljava sledeće uslove:

1. $e_0, e_\omega \in F^0$;
2. $D_i(\rho^m(\tau_1, \ldots, \tau_n)) \in F^0$ za svako $\tau_1, \ldots, \tau_n \in T$ i $\rho^m \in \Pi^m_n$, za $0 < i < \omega$, $n > 0$, $m \geq 2$;
3. $D_i(p^m) \in F^0$ za svako $p^m \in V^m_0$, $0 < i < \omega$, $m \geq 2$;
4. Ako $\alpha, \beta \in F^0$, tada $\alpha \cup \beta$, $\alpha \cap \beta$, $\alpha \Rightarrow \beta$, $\neg\alpha$ su u F^0;
5. Ako je $\alpha(x)$ u F^0 i vezana promenljiva ξ se ne pojavljuje u $\alpha(x)$, tada $\exists\xi\,\alpha(\xi) \in F^0$ i $\forall\xi\,\alpha(\xi) \in F^0$.

Formule iz F^0 zvaćemo <u>*Bulove formule*</u>.

Teorema 1.1.2.

Za svaku formulu $\alpha \in F^0$, svaku realizaciju R i svaku valoaciju v, $\alpha_R(v) = e_0$ ili $\alpha_R(v) = e_\omega$.

Dokaz:

To sledi iz definicije realizacije i osobina generalizovane Postove algebre sa uslovom konačne reprezentacije (date primerom u 0. glavi (videti *Rasiowa*, [22], *str. 217.*)).▫

Teorema 1.1.3.

Za svaku formulu $\alpha \in F^0$, $0 < i < \omega$, svaku realizaciju R i valoaciju v $(D_i(\alpha))_R(v) = \alpha_R(v)$.

Dokaz:

Dokaz sledi iz T. 1.1.2 i (p_6) iz 0. glave.▫

Definišimo sada, simultano, indukcijom po dužini formule iz F, preslikavanja $f_i : F \to F^0$, $0 < i < \omega$ kao što sledi:

(I) $f_i(e_j) = e_\omega$ za $i \leq j$, $0 < i < \omega$, $0 \leq j \leq \omega$;
$f_i(e_j) = e_0$ za $i > j$, $0 < i < \omega$, $0 \leq j \leq \omega$;

(II) $f_i(\rho^m(\tau_1, \ldots, \tau_n)) = D_i(\rho^m(\tau_1, \ldots, \tau_n))$ za sve ρ^m iz Π_n^m, $n > 0$, $m \geq 2$ i $0 < i < \omega$;

(III) $f_i(p^m) = D_i(p^m)$ za sve $p^m \in V_0^m$, $m \geq 2$ i $0 < i < \omega$;

(IV) $f_i(\alpha \cup \beta) = f_i(\alpha) \cup f_i(\beta)$, $0 < i < \omega$;

(V) $f_i(\alpha \cap \beta) = f_i(\alpha) \cap f_i(\beta)$, $0 < i < \omega$;

(VI) $f_i(\alpha \Rightarrow \beta) = (f_1(\alpha) \Rightarrow f_1(\beta)) \cap \ldots \cap (f_i(\alpha) \Rightarrow f_i(\beta))$,

$0 < i < \omega$;

(VII) $f_i(\neg\alpha) = \neg f_1(\alpha)$, $0 < i < \omega$;

(VIII) $f_i(D_j(\alpha)) = f_j(\alpha)$, $0 < i,j < \omega$;

(IX) $f_i(\forall\xi\alpha(\xi)) = \forall\xi f_i'(\alpha(\xi))$, $0 < i < \omega$;

(X) $f_i(\exists\xi\alpha(\xi)) = \exists\xi f_i(\alpha(\xi))$, $0 < i < \omega$.

Lako se vidi da je $f_i(\alpha)$, $0 < i < \omega$, zatvorena formula akko je α zatvorena formula.

Teorema 1.1.4.

Za svaku formulu $\alpha \in F$ i svako $0 < i < \omega$, $(D_i(\alpha))_R(v) = (f_i(\alpha))_R(v)$ za svaku realizaciju R i valoaciju v.

Dokaz:

Dokaz se bazira na (p_0) - (p_6), T. 0.1.7. i T. 0.1.9. iz 0. glave.o

Neka je K jezik klasičnog predikatskog računa (*Prešić*, |*15*|), koji dodeljujemo jeziku L na sledeći način:

Pretpostavimo da K ima iste skupove slobodnih i vezanih promenljivih i ista funkcijska slova kao i L; i sa svakim n-arnim predikatom $\rho^m \in \Pi_n^m$, $m \geq 2$ iz L, $n = 1,2,\ldots$ neka u K postoje $(m-1)$ predikata $\rho^{m,i}$, $i = 1,\ldots,m-1$, koji su svi n-arni, i samo ti; i za svako $p^m \in V_0^m$, $m \geq 2$ iz L neka postoje iskazna slova $p^{m,i}$, $i = 1,\ldots,m-1$, i samo ta. Dalje, neka K ima logičke veznike $\cup, \cap, \Rightarrow, \neg$; iskazne konstante e_0, e_ω, kvantifikatore $\forall, \exists$ i simbole zagrada (,). Neka je $\bar{F}$ skup svih formula K. Neka je $f : F^0 \to \bar{F}$ preslikavanje od F^0 na $\bar{F}$ definisano sa

(A I) $f(e_0) = e_0$, $f(e_0) = e_\omega$

(A II) $f(D_i(\rho^m(\tau_1, \ldots, \tau_n)) = \rho^{m,i}(\tau_1, \ldots, \tau_n)$

za $0 < i < m$, i za $j \geq m$

$f(D_j(\rho^m(\tau_1, \ldots, \tau_n)) = \rho^{m,m-1}(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ za svako

$\rho^m \in \Pi_n^m$, $n \geq 0$ i $m \geq 2$;

(A III) $f(D_i(P^m)) = P^{m,i}$ za $0 < i < m$, i

$f(D_j(P^m)) = P^{m,m-1}$ za $j \geq m$ i za svako

$P^m \in V_0^m$, $m \geq 2$.

(A IV) $f(\alpha \cup \beta) = (f(\alpha) \cup f(\beta))$

(A V) $f(\alpha \cap \beta) = (f(\alpha) \cap f(\beta))$

(A VI) $f(\alpha \Rightarrow \beta) = (f(\alpha) \Rightarrow f(\beta))$

(A VII) $f(\neg \alpha) = \neg f(\alpha)$

(A VIII) $f(\forall \xi \alpha(\xi)) = \forall \xi f(\alpha(\xi))$

(A IX) $f(\exists \xi \alpha(\xi)) = \exists \xi f(\alpha(\xi))$.

Neka je $S = (K, C_K)$ sistem klasičnog predikatskog računa. Posmatrajmo elementarnu teoriju $S(A) = (K, C_K, A)$, gde je A skup formula iz $\bar{F}$ definisanih sa: za svako n-arno ($n \geq 1$) predikatsko slovo ρ^m iz Π_n^m, $m \geq 2$ iz L, neka je $A\rho^m$ konjukcija sledećih formula:

$$(1) \qquad \forall \xi_1 \ldots \forall \xi_n (\rho^{m,i}(\xi_1, \ldots, \xi_n) \Rightarrow \rho^{m,i-1}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$$

za $2 \leq i \leq m-1$. Neka je B_{pm} konjukcija sledećih formula za $P^m \in V_0^m$ i $m \geq 2$:

$$(2) \qquad (P^{m,i} \Rightarrow P^{m,i-1}), \text{ za } 2 \leq i \leq m-1.$$

Tada je A skup svih formula A_{ρ^m}, B_{P^m} za sve $\rho^m \in \Pi_n^m$

$(n > 0)$, sve $P^m \in V_a^m$, $m \geq 2$.

Svaka realizacija R od L u $U \neq \Phi$ dodeljuje sledeću *realizaciju* R_0 od *K* u $U \neq \Phi$: za svako funkcisko slovo ϕ, $\phi_{R_0} = \phi_R$ za svako n-arno $(n > 0)$ predikatsko slovo $\rho^{m,i}$, $m \geq 2$ i svaku valoaciju v:

(3) $\rho_{R_0}^{m,i}(\tau_1,\ldots,\tau_n)(v) = D_i(\rho_R^m(\tau_1,\ldots,\tau_n))(v)$

za $0 < i < m$;

(4) $\rho_{R_a}^{m,m-1}(\tau_1,\ldots,\tau_n)(v) = D_j(\rho_R^m(\tau_1,\ldots,\tau_n))(v)$

za $0 \leq j \leq \omega$; i za svako iskazno slovo $P^{m,i}$, $n \geq 2$;

(5) $P_{R_a}^{m,i}(v) = D_i(P_R^m(v))$ za $0 < i < m$, i

(6) $P_{R_a}^{m,m-1}(v) = D_j(P_R^m(v))$ za $m \leq j \leq \omega$.

Teorema 1.1.5.

Za svaku realizaciju R od L u $U \neq \Phi$, realizacija R_0 od *K* je model (klasičnog predikatskog računa) za *S*(*A*) i sledeća jednakost je zadovoljena za svaku formulu $\alpha \in F^a$ i svaku valoaciju v:

$$\alpha_R(v) = (f\alpha)_{R_a}(v).$$

Dokaz:

Dokaz prvog dela tvrdjenja sledi iz (3) - (6) i činjenica da za svaki element $a \in P_\omega$, $D_{i+1}(a) \leq D_i(a)$, i T. 0.1.6. i T. 0.1.7. iz 0. glave.

Dokaz drugog dela tvrdjenja je indukcijom po dužini formule, osobinama preslikavanja f i jednakostima koje važe u P_ω (*Rasiowa*, [22]).○

Teorema 1.1.6.

Ako je R_0 model (klasičnog predikatskog računa) od $S(A)$ u $U \neq \Phi$, tada jednakosti:

$$\phi_R = \phi_{R_0} \text{ za sve } \phi \in \bar{\Phi},$$

$$\rho^m_{R_0}(\tau_1,\ldots,\tau_n)(v) = (\rho^{m,1}_{R_0}(\tau_1,\ldots,\tau_n)(v) \cap e_1) \cup \ldots \cup$$
$$(\rho^{m,m-2}_{R_0}(\tau_1,\ldots,\tau_n)(v) \cap e_{m-2}) \cup$$
$$(\rho^{m,m-1}_{R_0}(\tau_1,\ldots,\tau_n)(v)$$

i

$$P^m_R(v) = (P^{m,1}_{R_0}(v) \cap e_1) \cup \ldots \cup (P^{m,m-2}_{R_0}(v) \cap e_{m-2}) \cup$$
$$P^{m,m-1}_{R_0}(v)$$

definišu realizaciju R od L u U, tako da za svaku valoaciju v:

$$D_i(\rho^m_R(\tau_1,\ldots,\tau_n)(v)) = \rho^{m,i}_R(\tau_1,\ldots,\tau_n)(v) \quad \text{za } 0 < i < m,$$

i

$$D_j(\rho^m_R(\tau_1,\ldots,\tau_n)(v)) = \rho^{m,m-1}_{R_0}(\tau_1,\ldots,\tau_n)(v) \text{ za}$$

$m \leq j < \omega$, i

$$D_i(P^m_R(v)) = P^{m,i}_{R_0}(v) \quad \text{za} \quad 0 < i < m,\ m \geq 2,$$

i

$$D_j(P^m_R(v)) = P^{m,m-1}_{R_0}(v) \quad \text{za} \quad m \leq j < \omega,\ m \geq 2.$$

Dalje, za svaku formulu $\alpha \in F^a$ i svaku valoaciju v važi:

$$(\alpha)_R(v) = (f\alpha)_{R_0}(v).$$

Dokaz:

Dokaz sledi iz (1) i (2) uslova konačne reprezentacije datih u 0. glavi. Dokaz jednakosti za formule iz F^0 sledi iz prvog dela i T. 1.1.5.○

Teorema 1.1.7.

Za svaku formulu α iz F i svaku valoaciju v:

R je k-model za α, $0 < k < \omega$, akko R_0 je model (klasičnog predikatskog računa) za $ff_k(\alpha)$, tj.

$$(\alpha)_R(v) \geq e_k \text{ akko } (ff_k\alpha)_{R_0}(v) = e_\omega,$$

gde su realizacije R i R_0 definisane kao u teoremi T. 1.1.6.

Dokaz:

Dokaz sledi iz teorema T. 1.1.4. i T. 1.1.5. i T. 0.4.1. date u 0. glavi.○

Posledica 1.1.8.

Neprotivurečna teorija raznovrednosnog predikatskog računa L nije stabilna u odnosu na homomorfizme.

Dokaz:

To je direktna posledica T.1.1.5., T.1.1.6, T.1.1.7 i teoreme "Neprotivurečna teorija (klasičnog predikatskog računa) stabilna je u odnosu na homomorfizme akko ona ima skup pozitivnih aksioma". *(Chang, CC, Kiesler, J., [4], T.3.2.4.)*.○

1.2. NEPOSREDNA PRIMENA

Neka je N proizvoljan neprazan skup i neka su za svako $n \in N$, R_n realizacije od $L = (A,T,F)$ u $U_n \neq \Phi$. Neka je ∇ prost filter nad N. Tada *ultraproizvod* $R = \underset{n \in N}{P} R_n/_\nabla$ realizacija R_n, $n \in N$, po filtru ∇ je realizacija u Dekartov proizvod U skupova U_n, $n \in N$, definisana kao što sledi:

Za svaku

$$u_1 = (u_{1n})_{n \in N}, \ \ldots, \ u_2 = (u_{1n})_{n \in N} \quad u\ U,$$

$$\phi_R(u_1, \ldots, u_\ell) = (\phi_{R_n}(u_{1n}), \ldots, u_{\ell n}))_{n \in N} \quad \text{za sve}$$

$$\phi \in \Phi_s, \quad s = 0,1,2,\ldots,$$

$$\rho^m_R(u_1, \ldots, u_\ell) \geq e_k \quad \text{akko} \quad \{n \in N \mid \rho^m_{R_n}(u_{1n}, \ldots, u_{\ell n}) \geq$$

$$\geq e_k\} \in \nabla$$

za sve $\rho^m \in \Pi^m$, $2 \leq m < \omega$, $1 \leq \ell < \omega$, $0 < k < \omega$.

Neka je W_U skup svih valoacija u U. Svako $v \in W_u$ definiše valoaciju v^n u U kao što sledi:

$$v^n(P^m) = v(P^m)$$

za svako $P^m \in V^m_Q$, $2 \leq m < \omega$, i $n \in N$; i ako $v(x) = (u_n)_{n \in N}$, tada $v^n(x) = u_n$, $n \in N$.

<u>*Teorema 1.2.1.*</u>*(Uopštena teorema Loš-a za k-modele).*

Ako je ∇ prost filter nad $N \neq \Phi$, za svaku formulu α iz F i svaku valoaciju v važi:

$$\{n \in N : \alpha_{R_n}(v^n) \geq e_k\} \in \nabla$$

akko $\quad \alpha_{\underset{n \in N}{P} R_n/_\nabla}(v) \geq e_k.$

Dokaz:

$$\{n \in N : \alpha_{R_n}(v^n) \geq e_k\} \in \nabla$$

akko

$$\{n \in N : ff_k\ R_{n_0}(v^n) = e_\omega\} \in \nabla ,$$

po teoremi T. 1.1.7. akko

$$ff_k\ \alpha_{\underset{n \in N}{P}}\ R_{n_0/\nabla}(v) = e_\omega ,$$

po teoremi Loš-a za klasičan predikatski račun (*Bell, Slomson*, [2]), akko

$$\alpha_{\underset{n \in N}{P}}\ R_n /_{\nabla}(v) \geq e_k ,$$

po teoremi T. 1.1.7.⊖

Teorema 1.2.2.(Teorema kompaktnosti za k-modele)

$F_1 \models^k \alpha$ ($F_1 \subset F$, $\alpha \in F$) akko postoji konačan podskup F_1' od F_1, tako da $F_1' \models^k \alpha$.

Dokaz:

$F_1 \models^k \alpha$ akko $A \cup \{ff_k\beta : \beta \in F_1\} \models ff_k\alpha$,

po T. 1.1.5., T. 1.1.6. i T. 1.1.7.

akko

$A \cup \{ff_k\beta : \beta \in F_1', F_1' \subset F$ i F_1' je konačan skup$\} \models ff_k\alpha$, po teoremi kompaktnosti za klasičan predikatski račun (*Bell, Slomson*, [2])

akko

$F_1' \models^k \alpha$, po T. 1.1.5., T. 1.1.6. i T. 1.1.7.⊖

Neka su R i R´ dve realizacije od L sa domenima U i U´ respektivno. Ako je $g : U \to U'$ ma koje preslikavanje i $v : V \cup V^0 \to U \cup P_\omega$ valoacija, tada gv označava valoaciju definisanu sa $gv(x) = g(v(x))$ za svako $x \in V$, tj, $gv : V \cup V^0 \to U' \cup P_\omega$

Neka je $g : U \to U'$ bijekcija, tada se dve realizacije R i R´ od L zovu *izomorfizam* ako za svaku valoaciju $v : V \cup V^0 \to U \cup P_\omega$, svako $i \leq \omega$, svako $\phi \in \overline{\Phi}$, svako $\rho^m \in \Pi^m_n$, $n > 0$, $m \geq 2$, svako $P^m \in V^m_0$, $m \geq 2$, važi:

$$(\phi(x_1,\dots,x_n) = x_0)_R(v) = e_\omega$$

akko

$$(\phi(x_1,\dots,x_n) = x_0)_{R'}(gv) = e_\omega\ ;$$

$$\rho^m(x_1,\dots,x_n)_R(v) = e_i$$

akko

$$\rho^m(x_1,\dots,x_n)_R(gv) = e_i\ ;$$

$$P^m_R(v) \in P_m$$

akko

$$P^m_{R'}(gv) \in P_m\ .$$

Teorema 1.2.3.

Neka su R i R´ dve realizacije od L i neka su R_0 i R_0' definisane kao u teoremi T. 1.1.5. Tada su R i R´ izomorfne realizacije akko su R_0 i R_0' izomorfne.o

Neka je s proizvoljan beskonačan kardinal. Neka je F´ podskup od F. F´se zove (s,k)-*kategoričan* ako svaka dva k-modela od F´sa domenima kardinalnosti s su izomorfni. Kategoričnost za skup rečenica definiše se uobičajeno (*C. Chang, H. Keisler,* [4]) *Teorema 1.2.4.* (*Teorema Morlija*)

F' je (s,k)-kategorično za neki beskonačan kardinal s akko F' je (s,k)-kategorično za svaki beskonačni kardinal s.

Dokaz:

F' je (s,k)-kategorično za neki beskonačni kardinal s
akko

$ff_k F'$ je s-kategorično za neki beskonačan kardinal s,
po T. 1.2.3., T. 1.1.6. i T. 1.1.7., akko

$ff_k F'$ je s-kategorično za svaki beskonačni kardinal s,
po teoremi Morlija za klasičan predikatski račun (*C. Chang, H. Keisler,* [4]) akko

F' je (s,k)-kategorično za svaki beskonačni kardinalni broj s, po T. 1.2.3., T. 1.1.6. i T. 1.1.7.o

2. PRIMENA

U ovoj glavi posmatraju se svojstva koja su, po duhu, analogna svojstvima klasičnog predikatskog računa datih lemom Krejga, teoremom Beta i II ε- teoremom.

Teorema Beta data je u nešto opštijem obliku.

Dokazi leme Krejga i teoreme Beta za raznovrednosni predikatski račun svode se, koristeći rezultate prethodnih glava, na odgovarajuće rezultate klasičnog predikatskog računa (*Rasiowa, H.* [19], *Shoenfild, R.* [34]).

Dokaz II ε - teoreme dat je analogno odgovarajućem dokazu II ε - teoreme za klasičan predikatski račun, (*Rasiowa, H. Sikorski, R.* [23]). Razlog za to je odnos operacije D_i prema kvantifikatorima $\forall$, $\exists$ iskazan osobinama datim u nultoj glavi:

$$D_i(\forall \xi\ \alpha(\xi)) = \forall \xi\ D_i\alpha(\xi), \quad \text{i}$$

$$D_i(\exists \xi\ \alpha(\xi)) = \exists \xi\ D_i\alpha(\xi).$$

2.1. O INTERPOLACIONOJ LEMI KREJGA

U ovom delu pokazaćemo da važi interpolaciona teorema Krejga. Pre toga navodimo neke dalje osobine raznovrednosnog predikatskog računa.

Prvo, podsetimo se da važi teorema potpunosti.

Teorema 2.1.1.

Neka je $L = (A,T,F)$ proizvoljan raznovrednosni predikatski račun. Tada za svako $A \subset F$ i $\alpha \in F$

$A \vdash \alpha$ akko $A \models \alpha$ .o

Teorema 2.1.2.

Formula $\alpha \Rightarrow \beta$ $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$ je teorema od L akko

$$\alpha_R(v) \leq \alpha_R(v) \quad (\alpha_R(v) = \alpha_R(v))$$

za svaku realizaciju R i valoaciju v.

Dokaz:

Ako $\vdash \alpha \Rightarrow \beta$, po T. 2.1.1. akko
je $\models \alpha \Rightarrow \beta$ akko
za svaku realizaciju R i valoaciju v je

$(\alpha \Rightarrow \beta)_R(v) = e_\omega$ akko

$\alpha_R(v) \Rightarrow \beta_R(v) = e_\omega$ akko

$$\alpha_R(v) \le \beta_R(v)$$

(iz osobina e_ω - najveći element,

$$e_i \Rightarrow e_j = \begin{cases} e_\omega & i \le j \\ e_j & i > j \end{cases},$$

$$e_i \cap e_j = e_{\max(i,j)}$$

(Primer je dat u 0. glavi).∘

<u>*Teorema 2.1.3.*</u>

Ako su $\alpha, \beta \in F$ i ord $\beta = m$, tada

$\alpha \vdash \beta$ akko $\alpha \vdash D_m(\beta)$.

<u>*Dokaz:*</u>

Ako $\alpha \vdash \beta$, onda $\alpha \vdash D_i(\beta)$ za $0 < i < \omega$ iz pravila (r_{mix}), pa time i $\alpha \vdash D_{m-1}(\beta)$.

Da dokažemo obrnuto koristimo da je

$D_{m-1}(\beta) \Rightarrow \beta$ teorema od L.

Kako je ord$\beta = m$, to je

$$\beta = (D_1(\beta) \cap e_1) \cup \ldots \cup (D_{m-2}(\beta) \cap e_{m-2}) \cup (D_{m-1}(\beta) \cap e_\omega),$$

iz uslova konačne reprezentacije. Dalje, u svakoj generalisanoj Postovoj algebri reda ω^+ sa uslovom konačne reprezentacije važi:

$$D_i(a) \le D_j(a) \quad \text{za} \quad 0 < j \le i < \omega,$$

i svako $a \in P_\omega$, zatim da je $(P_\omega, \cup, \cap)$ distributivna mreža i da $e_0 \leq e_1 \leq \ldots \leq e_\omega$. Tada imamo da je

$$\beta \cap D_{m-1}(\beta) = ((D_1(\beta) \cap e_1) \cup \ldots \cup (D_{m-1}(\beta) \cap e_\omega))\cap$$

$$\cap D_{m-1}(\beta) = D_{m-1}(\beta), \quad \text{tj.}$$

tj. $\quad D_{m-1}(\beta) \leq \beta,$

pa po T. 2.1.2. to znači da $\vdash D_{m-1}(\beta) \Rightarrow \beta$.

Neka je sada $\alpha \vdash D_{m-1}(\beta)$, tada, pošto je $\vdash D_{m-1}(\beta) \Rightarrow \beta$, to i $\alpha \vdash D_{m-1}(\beta) \Rightarrow \beta$, primenom pravila modus ponens na $\alpha \vdash D_{m-1}(\beta)$ i $\alpha \vdash D_{m-1}(\beta) \Rightarrow \beta$ dobijamo $\alpha \vdash \beta$.o

Teorema 2.1.4.

Za svaku formulu $\alpha \in F^0$, $f_i(\alpha) = \alpha$, $0 < i < \omega$.

Dokaz:

Direktno se dokazuje koristeći definiciju preslikavanja f_i (datoj u 1. glavi).o

Teorema 2.1.5.

Ako $\gamma_i \in F^0$ za $0 < i < \omega$, i formule $\gamma_i \Rightarrow \gamma_{i-1}$ su teoreme od L za $2 \leq i < \omega$, i γ je formula

$$((\gamma_1 \cap e_1) \cup \ldots \cup (\gamma_i \cap e_i)),$$

tada

$$(D_i(\gamma))_R(v) = \gamma_{i_R}(v)$$

za svaku realizaciju R i valoaciju v.

Dokaz:

Ako primenimo D_j, $0 < j < \omega$ na γ , imamo

$$(D_j((\gamma_1 \cap e_1) \cup \dots \cup (\gamma_i \cap e_i)))_R(v) =$$

$$= ((D_j(\gamma_1) \cap D_j(e\ )) \cup \dots \cup (D_j(\gamma_i) \cap D_j(e_i)) = \gamma_{j_R}(v)$$

iz osobina datih u 0. glavi (p_1), (p_2), (p_6) i T. 1.1.2. i T. 1.1.3.o

Teorema 2.1.6.

Za sve formule $\alpha, \beta \in F^{\alpha}$, formula $\alpha \Rightarrow \beta$ $(ord(\alpha \Rightarrow \beta) = m \geq 2)$ je teorema od L akko $(f(\alpha) \Rightarrow f(\beta))$ je teorema od $K(A)$.

Dokaz:

Predpostavimo da

$$(f(\alpha) \Rightarrow f(\beta))$$

nije teorema od $K(A)$. Onda postoji model R_{α} od $K(A)$ i valoacija v tako da

$$(f(\alpha))_{R_\alpha}(v) = e_\omega \quad \text{i} \quad (f(\beta))_{R_\alpha}(v) = e_0.$$

Po T. 1.1.6. postoji realizacija R od L tako da $\alpha_R(v) = e_\omega$ i $\beta_R(v) = e_0$. Dakle, po T. 2.1.1. $\alpha \Rightarrow \beta$ nije teorema od L. Obrnuto, ako $\alpha \Rightarrow \beta$ nije teorema od L, tada po T. 2.1.1. postoji realizacija R od L i valoacija v tako da

$$(\alpha \Rightarrow \beta)_R(v) = \alpha_R(v) \Rightarrow \beta_R(v) \neq e_\omega.$$

Dakle, po T. 1.1.2. $\alpha_R(v) = e_\omega$ i $\beta_R(v) = e_0$. Sledi iz T. 1.1.6.

$$(f\alpha)_{R_\alpha}(v) = e_\omega \quad \text{i} \quad (f\beta)_{R_\alpha}(v) = e_0.$$

Pošto je R_0 model od $K(A)$, to implicira da

$$(f\alpha \Rightarrow f\beta)$$

nije teorema od $K(A)$.o

Teorema 2.1.7. (Interpolaciona lema Krejga)

Ako su α i β formule od L, α zatvorena formula $\mathrm{ord}(\alpha \Rightarrow \beta) = m$, $2 \leq m < \omega$ i $\alpha \Rightarrow \beta$ je teorema od L, tada postoji zatvorena formula γ koja sadrži samo predikatska slova koja se pojavljuju i u α i u β, i formule $\alpha \Rightarrow \gamma$ i $\gamma \Rightarrow \beta$ su teoreme od L. Specijalno, ako α i β nemaju zajednička predikatska slova, tada je γ jedna od iskaznih konstanti $e_0, e_1, \ldots, e_{m-2}, e_\omega$.

Dokaz:

Pretpostavimo da su ρ, σ svi predikati koji se pojavljuju u α, i da su σ, θ svi predikati koji se pojavljuju u β. Ako je $\alpha \Rightarrow \beta$ teorema od L, tada po T. 2.1.3. je i teorema $D_{m-1}(\alpha \Rightarrow \beta)$, a to povlači po T. 2.1.2. i (p_3) da su $D_i(\alpha) \Rightarrow D_i(\beta)$ teoreme od L za $0 < i \leq m-1$. Po T. 1.1.4. formule $(f_i(\alpha) \Rightarrow f_i(\beta))$ su teoreme od L za $0 < i \leq m-1$.

Formule $f_i(\alpha)$, $f_i(\beta)$ sadrže ista predikatska slova kao i α, β respektivno. Jasno $f_i(\alpha)$, $f_i(\beta)$ su iz F^0. Neka je $K(A)$ dato kao u teoremi T. 1.1.5. Iz T. 2.1.6. imamo da su $ff_i\alpha \Rightarrow ff_i\beta$ $0 < i < m$ teoreme u $K(A)$. Sledi da su u predikatskom računu K formule

$$(A_\rho \cap A_\sigma \cap A_\theta) \Rightarrow (ff_i\alpha \Rightarrow ff_i\beta)$$

teoreme za $0 < i < m$. Odatle

$$(A_\rho \cap A_\sigma \cap ff_i\alpha) \Rightarrow (A_\theta \Rightarrow ff_i\beta)$$

su teoreme u K za $0 < i < m$. Zajednički predikati za oba dela svake implikacije (ascedent i konsekvent) su neki iz A_σ, a pošto je $\mathrm{ord}(\alpha \Rightarrow \beta) = m$, to je $\mathrm{ord}\sigma \leq m$, pa su to neki $\sigma_1, \ldots, \sigma_{m-1}$.

$(A_\rho \cap A_\sigma \cap ff_i\alpha)$ su zatvorene formule za $0 < i < m$.

Po interpolacionoj teoremi Krejga za klasičan predikatski račun (*G. Kreisel, J. Krivine,* [11]), postoje zatvorene formule γ_i^*, $0 < i < m$ u $\bar{F}$, tako da γ_i^* sadrži samo predikatska slova koja se pojavljuju i u

$$(A_\rho \cap A_\sigma \cap ff_i\alpha)$$

i u

$$(A_\theta \Rightarrow ff_i\beta)$$

i formule

$$((A_\rho \cap A_\sigma \cap ff_i\alpha) \Rightarrow \gamma_i^*)$$

$$((\gamma_i^* \Rightarrow (A_\theta \Rightarrow ff_i\beta))$$

za $0 < i < m$ su teoreme od K. Kako je f preslikavanje od F^α na $\bar{F}$, to sigurno postoji $\gamma_i \in F^\alpha$, tako da $f(\gamma_i) = \gamma_i^*$, $0 < i < m$. Dakle, imamo da su sledeće formule teoreme od $K(A)$ za $0 < i < m$:

$$(ff_i\alpha \Rightarrow (f\gamma_i)), \qquad (f\gamma_i \Rightarrow ff_i\beta).$$

Sledi iz T. 2.1.6. da su

$$(f_i\alpha \Rightarrow \gamma_i), \quad (\gamma_i \Rightarrow f_i\beta)$$

teoreme od L za $0 < i < m$. Sve formule γ_i su zatvorene i sadrže samo predikatska slova σ. Sledi iz T. 1.1.4. i T. 2.1.2. da su teoreme od L i formule

$$D_i\alpha \Rightarrow \gamma_i \quad \text{i} \quad \gamma_i \Rightarrow D_i(\beta), \qquad 0 < i < m.$$

Neka je $\gamma_i' = \gamma_1 \cap \ldots \cap \gamma_i$. Tada su $\gamma_i' \Rightarrow \gamma_{i-1}'$ teoreme od L, $2 \leq i \leq m-1$.

Koristeći činjenice da $D_{i+1}(a) \leq D_i(a)$ (p_7) i da $D_1(\alpha) \Rightarrow \gamma_1$, $D_2(\alpha) \Rightarrow \gamma_2$, ... $D_i(\alpha) \Rightarrow \gamma_i$, dobijamo da važi

$$D_1(\alpha) \cap \ldots \cap D_i(\alpha) \Rightarrow \gamma_1 \cap \ldots \cap \gamma_i,$$

tj.

$$D_i(\alpha) \Rightarrow \gamma_i'$$

su teoreme od L za $0 < i < m$. Sa druge strane

$$\gamma_i' \Rightarrow \gamma_i \quad \text{i} \quad \gamma_i \Rightarrow D_i(\beta)$$

su teoreme, pa su i formule $\gamma_i' \Rightarrow D_i(\beta)$ teoreme od L za $0 < i < m$. γ_i' su zatvorene formule i sadrže samo predikatsko slovo σ. Neka je γ formula oblika

$$(\gamma_1' \cap e_1) \cup \ldots \cup (\gamma_i' \cap e_i)$$

za $0 < i < m-1$ i za $i = m-1$

$$(\gamma_1' \cap e_1) \cup \ldots \cup (\gamma_{m-1}' \cap e_\omega).$$

Tada iz ispunjenja uslova $\gamma_i' \Rightarrow \gamma_{i-1}'$, T. 2.1.5. i T. 2.1.2. sledi da je $D_i(\gamma) = \gamma_i'$, pa su teoreme u L formule

$$D_i(\alpha) \Rightarrow D_i(\gamma) \quad \text{i} \quad D_i(\gamma) \Rightarrow D_i(\beta)$$

za $0 < i < m$. Koristeći osobine D_i, teoreme su i $D_{m-1}(\alpha \Rightarrow \gamma)$ i $D_{m-1}((\gamma) \Rightarrow (\beta))$ (zbog (p_3)) u L. Po T. 2.1.3. sledi da su formule

$$\alpha \Rightarrow \beta \quad \text{i} \quad \gamma \Rightarrow \beta$$

teoreme u L.

Koristeći isto razmišljanje dokaz se može dati i u opštem slučaju.o

2.2. O DEFINIŠLJIVOSTI

U ovom delu pokazaćemo da za raznovrednosni predikatski račun važi teorema Beta o definišljivosti, u nešto opštijem obliku.

Neka je $\rho^{m*} \in \Pi \setminus \Pi'$ za $m \geq 2$ i neka je $\Phi' \subset \bar{\Phi}$. Neka je $\mathcal{B} \subseteq F$ neprotivurečan skup rečenica. ρ^{m*} je *k-definišljivo* sa termima iz Π' i Φ' u $\mathcal{B}$ ako postoji $\alpha \in F$, $\mathrm{ord}\,\alpha = m$ i α sadrži samo nelogičke simbole iz V, θ, Φ', Π' tako da

$$\mathcal{B} \models^{k} \forall \xi_1 \ldots \forall \xi_n (\rho^{m*}(\xi_1, \ldots, \xi_n) \Leftrightarrow \alpha.$$

Neka su R i R' dve realizacije od L sa domenima U i U' respektivno. Neka je $g : U \to U'$ ma koje preslikavanje. Neka je v valoacija, tada neka je gv valoacija data kao u prvoj glavi, neka je g izomorfizam dat kao u prvoj glavi (u oznaci (Φ,Π)-izomorfizam).

g se zove *k-izomorfizam* ako za svako $v \in W_U$, svako $i \leq k < \omega$, svako $\phi \in \bar{\Phi}$, $\rho^m \in \Pi^m$, $P^m \in V_0^m$, $m \geq 2$.

$$(\phi(x_1, \ldots, x_n) = x_0)_R(v) = e_\omega$$

akko

$$(\phi(x_1, \ldots, x_n) = x_0)_{R'}(gv) = e_\omega;$$

$$\rho^m(x_1, \ldots, x_n)_R(v) = e_i$$

akko

$$\rho^m(x_1, \ldots, x_n)_{R'}(gv) = e_i \;;$$

$$P^m_R(v) \in P_m \quad \text{akko} \quad P^m_{R'}(gv) \in P_m$$

k-izomorfizam označavaćemo sa $(\Pi,\bar{\Phi})$-k-izomorfizam.

Teorema 2.2.1. (*Teorema Beta*)

Neka je $\rho^{m*} \in \Pi$ $(\mathrm{ord}\rho^{m*} = m)$, $\Phi' \subseteq \bar{\Phi}$, $\Pi' \subseteq \Pi$ i neka $\rho^{m*} \notin \Pi'$. Neka je $F_1 \subseteq F$ neprotivurečan skup rečenica, i neka je $k < \omega$. Tada ρ^{m*} je k-definišljivo sa termima iz Π' i Φ' u F_1 akko svaki (Π',Φ')-izomorfizam od k-modela od $S(F_1)$ je $(\{\rho^{m*}\})$-izomorfizam.

Dokaz:

Pretpostavimo prvo neka je $0 < k < m$.

$$F_1 \models^k \forall\xi_1 \ldots \forall\xi_n(\rho^{m*}(\xi_1,\ldots,\xi_n) \Leftrightarrow \alpha) \quad \text{akko}$$

$$A \cup \{ff_k\beta : \beta \in F_1\} \models ff_k(\forall\xi_1 \ldots \forall\xi_n(\rho^{m*}(\xi_1,\ldots,\xi_n) \Leftrightarrow \alpha))$$

po T. 1.1.5., T. 1.1.6. i T. 1.1.7. akko

$$A \cup \{ff_k\beta : \beta \in F_1\} \models \forall\xi_1 \ldots \forall\xi_n((\rho^{m*}(\xi_1,\ldots,\xi_n) \Leftrightarrow ff_k\alpha) \wedge$$
$$\wedge \ldots \wedge(\rho_k^{m*}(\xi_1,\ldots,\xi_n) \Leftrightarrow ff_k\alpha)),$$

po (IX), (V), (VI), (II), i po definiciji preslikavanja f (videti 1.1.), tj. ρ^{m*} je k-definišljivo sa termima iz Π' i Φ' u F_1 akko postoji $\alpha \in F$, $\mathrm{ord}(\alpha) = m$, koja sadrži nelogičke simbole iz V, θ, Φ', i Π', tako da za svako i, $1 \leq i \leq k$, $ff_i\alpha$ definiše ρ_i^{m*} u

$$A \cup \{ff_k\beta : \beta \in F_1\},$$

(*G. Shoenfild*, [*34*]).

$ff_i\alpha$ sadrži samo relaciske simbole iz skupa $\{\rho_\ell : \rho \in \Pi',$ $1 \leq \ell \leq m-1\}$, jer $\mathrm{ord}\alpha = m$.

Neka je ρ^{m*} k-definisano sa α, ordα = m sa termima iz Π' i Φ' u F_1, i neka postoji (Π',Φ')-izomorfizam $g : U \to U'$ od k-modela R i R' od $S(F_1)$ koji nije $(\{\rho^{m*}\},\bar{\Phi})$-k-izomorfizam. Tada postoji $i \leq k$ i valoacija v tako da

$$\rho^{m*}_R(x_1,\ldots,x_n)(v) = e_i \quad \text{i} \quad \rho^{m*}_{R'}(x_1,\ldots,x_n)(v) = e_j$$

i $i \neq j$ i $i,j \leq k$. Tada mogu nastupiti slučajevi:

a) $i < j$

b) $i > j$

Neka je $i < j$. Tada

$$\rho^{m*}_j(x_1,\ldots,x_n)_{R_0}(v) = e_0 \quad \text{i} \quad \rho^{m*}_j(x_1,\ldots,x_n)_{R_0'}(v) = e_\omega,$$

gde su R_0 i R_0' definisane kao u T. 1.1.5.

Slično važi i za slučaj b), pa imamo

$$\rho^{m*}_\ell(x_1,\ldots,x_n)_R(v) = e_0 \quad \text{i} \quad \rho^{m*}_\ell(x_1,\ldots,x_n)(v) = e_\omega,$$

gde je $\ell = \max(i,j)$, tj. g nije ρ^{m*}_ℓ-izomorfizam u klasičnom smislu (*J. Shoenfild*, [34]). Ali, pošto je $g(\Pi',\Phi')$-izomorfizam, on je takodje $\{\rho_\ell,\ \rho\in\Pi',\ 1 \leq \ell \leq m-1\} \cup \Phi'$-izomorfizam od R_0 i R_0'. To je u suprotnosti sa teoremom Beta za klasičan predikatski račun (*J. Shoenfild*, [34]).

Neka je sada ispunjen uslov o izomorfizmima i neka su R_0 i R_0' proizvoljni modeli od $A \cup \{ff_i\beta : \beta \in F_i\}$. Tada svaki $\{\rho_\ell : \rho\in\Pi',\ 1 \leq \ell \leq m-1\} \cup \Phi'$-izomorfizam od R_0 i R_0' je ρ^{m*}_i-izomorfizam (*J. Shoenfild*, [34]) za svako $i \leq k$ po T. 1.1.6. Tada po teoremi Beta za klasičan predikatski račun postoje formule $Z_1,\ldots,Z_k$ od K koje sadrže nelogičke simbole iz V, θ, $\{\rho_\ell,\ \rho \in \Pi',\ 1 \leq \ell \leq m-1\}$, Φ' tako da

$$A \cup \{ff_k\beta : \beta \in F_1\} \models \forall\xi_1 \ldots \forall\xi_n(\rho^{m*}_i(\xi_1,\ldots,\xi_n) \Rightarrow Z_i)$$

$1 \leq i \leq k$.

Po definiciji od $\bar{A}$ važi:

(*) $\bar{A} \cup \{ff_k\beta : \beta \in F_1\} \models \forall\xi_1 \ldots \forall\xi_n(Z_\ell \vee Z_{\ell-1} \Leftrightarrow Z_{\ell-1})$.

Neka je α_i dobijeno iz Z_i zamenom svih pojavljivanja od ρ_ℓ sa $D_\ell\rho$, i definišimo

$$\alpha = (\alpha_1 \cap e_1) \cup \ldots \cup (\alpha_k \cap e_k).$$

Tada

$$ff_i\alpha = ff_i\alpha_i \cup \ldots \cup ff_k\alpha_k$$

(iz definicije f i f_k), ali po definiciji $ff_i\alpha_\ell = Z_\ell$, i koristeći osobinu (*), dobijamo:

$$\bar{A} \cup \{ff_k\beta : \beta \in F_1\} \models ff_i\alpha \Leftrightarrow Z_i,$$

zato

$$\bar{A} \cup \{ff_k\beta : \beta \in F_i\} \models \forall\xi_1 \ldots \forall\xi_n(\rho_i^{m*}(\xi_1, \ldots, \xi_n) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ff_i\alpha),$$

za $i \leq i \leq k$, tj. ρ^{m*} je k-definišljivo i ordα = m.o

2.3. O II ε - TEOREMI

Neka su L i L´ dva formalizovana jezika nad istom azbukom A (*H. Rasiowa, R. Sikorski*, [23]). Jezik L´ naziva se *raširenje* (ekstenzija) jezika L, ako je skup formula F jezika L podskup skupa F´ formula jezika L´.

Neka je L´ raširenje jezika L. Teorija S´ = (L´,C´,A´)

ako za svaku formulu α iz L, iz toga što je α teorema teorije S, sledi da je α teorema teorije S'. Ako je L' raširenje jezika L, onda je teorija (L',C,A) raširenje teorije (L,C,A).

Teorija $S' = (L',C',A')$ naziva se *nebitno raširenje teorije* $S = (L,C,A)$ ako za svaku formulu α iz L, α je teorema teorije S akko je α teorema teorije S'.

Neka je L' raširenje jezika L. Realizacija R' jezika L' u $U \neq \Phi$ naziva se *raširenje* (ekstenzija) *realizacije* R jezika L u $U \neq \Phi$, akko

$\phi_{R'} = \phi_R$ za svako funkcijsko slovo ϕ iz L,

$\rho_{R'} = \rho_R$ za svako predikatsko slovo ρ iz L,

$p_{R'} = p_R$ za svako iskazno slovo p iz L

Formula α je u *preneks normalnoj formi* ako je oblika $Q\alpha$, gde je Q konačan niz simbola $\forall, \exists$, a α je slobodna od kvantifikatora.

Teorema 2.3.1.

Svaka formula α jezika L ima formulu β u preneks normalnoj formi, tako da je $\alpha \Leftrightarrow \beta$ teorema.

Dokaz:

Dokaz je indukcijom po dužini formule i analogan je dokazu za klasičan predikatski račun (*G. Kreisel, J. Krivine,* |*11*|, *T.4., str. 20.*). Ako je $D_i\alpha$ zatvorena formula, onda zbog T. 0.1.7. važi razmena operacije D_i i kvantifikatora.o

Teorija $S' = (L',C,A)$ naziva se *bogata* ako za svaku egzistencijalnu formulu $\exists\xi\beta(\xi)$ jezika L', postoji term τ jezika L', takav da je formula

$$\exists\xi\beta(\xi) \Rightarrow \beta(\tau)$$

teorema teorije S'.

Pokazaćemo prvo da svaka neprotivurečna teorija $S = (L,C,A)$ ima nebitno bogato raširenje $S' = (L',C,A')$.

Jezik L' konstruišemo na sledeći način: Prvo definišimo po indukciji prebrojiv niz formalizovanih jezika $L_n = (A_n, T_n, F_n)$ $(n = 1,2,3,\ldots)$ i prebrojiv niz funkcija ψ^n $(n = 1,2,3,\ldots)$ na sledeći način:

1) L_1 se poklapa sa L

2) L_{n+1} je raširenje jezika L_n, dobijen dodavanjem nekog skupa Ψ_n funkcijskih znakova, i $\Psi_n \cap A_n = \Phi$,

gde je A_n azbuka za L_n $(n = 1,2,3,\ldots)$

3) ψ^n je uzajamno jednoznačno preslikavanje skupa E_n (skup svih egzistencijalnih formula jezika L_n koje nisu u L_{n-1}) na skup Ψ_n, takvo, da ako je $\alpha \in E_n$ egzistencijalna formula sa m slobodnih promenljivih, slika $\psi^n\alpha$ formule α je m-arna funkcija.

Jezik $L' = (A',T',F')$ dobija se iz L dodavanjem skupu Φ skup

$$\Psi = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Psi_n .$$

Skup E' svih egzistencijalnih formula je unija E_n, $n = 1,2,3,\ldots$,

$$(E' = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n),$$

i zbog 3) sva preslikavanja ψ^n $(n = 1,2,3,\ldots)$ zajedno odredjuju uzajamno-jednoznačno preslikavanje ψ skupa E' na Ψ, pri čemu

4) ψ je preslikavanje E_n na Ψ_n,

5) ako je α egzistencijalna formula jezika L' sa m slobodnih promenljivih, tj. α je oblika

$$\exists\xi\beta(\xi, x_1,\ldots,x_m)$$

to slika ψ_α formule α je m-arni funkciski znak iz ψ koji se ne pojavljuje u α.
Jezik L' dobijen na gore opisani način zove se *bogato raširenje jezika* L.

Za svaku egzistencijalnu formulu α iz L' oblika (1) neka α' označava formulu

$$\beta(\psi_\alpha(x_1,\dots,x_m),\ x_1,\dots,x_m)$$

a α'' označava implikaciju

$$\alpha \Rightarrow \alpha'.$$

Neka je $\bar{B}$ skup svih formula α'', gde je α proizvoljna egzistencijalna formula iz L'. Tada važi:

Teorema 2.3.2.

Svaka realizacija R jezika L u $U \neq \Phi$ može biti raširena do realizacije R' jezika L' u $U \neq \Phi$ na takav način da je R' model za $\bar{B}$. Dalje, ako je R' model za egzistencijalnu formulu α iz L, to je R' model i za α'.

Dokaz:

Definišimo indukcijom takav niz da realizacija R_n $(n = 1,2,3,\dots)$, tako da:

6) R_n je realizacija jezika L_n u $U \neq \Phi$ $(n = 1,2,\dots)$ i R_1 se poklapa sa R;

7) R_{n+1} je raširenje realizacije R_n.

Predpostavimo da je R_n definisano zbog 2) i 7) za potpuno definisanje realizacije R_{n+1} dosta je definisati $\phi_{R_{n+1}}$ za svako funkcisko slovo $\phi \in \psi_n$. Zbog 3) i 4) važi $\phi = \psi_\alpha$, gde je α

neka egzistencijalna formula oblika (1), dok formula

$$\beta(x\ , x_1, \ldots, x_m)$$

pripada jeziku L_n. Zato, po pretpostavci indukcije, β_{R_n} je preslikavanje skupa U^{m+1} u generalisanu Postovu algebru sa uslovom konačne reprezentacije P_ω, zbog 5) ϕ je m-arna funkcija. Ako za date elemente $j_1, \ldots, j_m \in U$ postoji $j \in U$ tako da β_{R_n} $(j, j_1, \ldots, j_m) = 1$, onda uzmimo da je

$$\phi_{R_{n+1}}(j_1, \ldots, j_m) = j$$

U suprotnom slučaju element $\phi_{R_{n+1}}(j_1, \ldots, j_m)$ definišimo na proizvoljan način.

Odavde imamo da

$$\alpha_{R_n}(j_1, \ldots, j_m) = 1 \text{ povlači } \alpha'_{R_{n+1}}(j_1, \ldots, j_m) = 1$$

Zato za ma koje $\alpha \in E_n$ imamo da je

(3) R_{n+1} model za α''.

Zbog 6) i 7) sve realizacije R_n zajedno odredjuju realizaciju R' za L' datu sa:

$\rho_{R'} = \rho_R$ za svaki predikat ρ iz L,

$p_{R'} = p_R$ za svako iskazno slovo p iz L,

$\phi_{R'} = \phi_{R_{n+1}}$ za svako funkcijsko slovo ϕ iz ψ_n, $(n = 1,2,\ldots)$

$\phi_{R'} = \phi_R$ za svako funkcijsko slovo ϕ iz L.

Po definiciji ako formula α je iz L_n, to je

$$\alpha_{R'} = \alpha_{R_n} .$$

Zato, zbog (3), R' je model za α'', za ma koju egzistencijalnu formulu α iz L'.∘

Teorema 2.3.3.

Ako formula α iz L nije teorema teorije $S = (L,C,A)$ to α nije teorema ni teorije $S' = (L',C,A \cup B)$.

Dokaz:

Neka je α teorema teorije S'. Tada postoje konačni skupovi $A_1 \subset A$ i $B_1 \subset B$ tako da je α posledica $A_1 \cup B_1$. (Dato u 0. glavi). Kako α nije teorema teorije S, to α nije teorema teorije $S_1 = (L,C,A_1)$. Zato zbog T. 0.5.8. postoji model R za S_1 i valoacija v, tako da $\alpha_R(v) = 0$. Zbog T. 2.3.2. realizaciju R možemo raširiti do takve realizacije R' za L', tako da će R' biti model za $\bar{B}$. Zato je R' model za teoriju $S_1' = (L',C,A_1 \cup B_1)$. Iz T. 0.4.5. sledi da je $\alpha_{R'}(v) = 1$. Sa druge strane je $\alpha_{R'}(v) = \alpha_R(v) = 0$, jer je R' raširenje za R, što je u suprotnosti sa predhodnim.∘

Neka je teorija $S' = (L',C,A \cup B)$.
Tada neposredno sledi da:

Teorema 2.3.4.

Svaka teorija $S = (L,C,A)$ ima bogato nebitno raširenje $S' = (L',C,A \cup B)$ i iz neprotivurečnosti teorije S sledi neprotivurečnost teorije S'.∘

Neka je α formula jezika L' koja počinje sa kvantorom. Ako je formula α oblika (1), onda formulu α' (tj. formulu oblika (2)) nazivamo formula dobijana iz α eliminacijom prvog kvantifikatora. Ako je formula α oblika $\forall\xi\beta(\xi, x_1,\ldots,x_m)$, onda se formula oblika $\beta(x,x_1,\ldots,x_m)$, gde je x slobodna promenljiva, koja se ne pojavljuje u α, naziva formula dobijena iz α eliminacijom prvog kvantifikatora.

Teorema 2.3.5.

Neka je γ formula, dobijena iz α eliminacijom prvog kvantora, to

(i) $\alpha \in C(\gamma)$

(ii) ako je realizacija R' za L' model za $\mathcal{B}$ i α, to je i za γ.

Dokaz:

Ako je prvi kvantifikator u α kvantifikator $\forall$, to (i) sledi iz pravila generalizacije (datoj u 0. glavi), a (ii) sledi iz induktivne definicije preslikavanja α_R (datog u 0. glavi).

Ako je α egzistencijalna formula, onda je formula $(\gamma \Rightarrow \alpha)$ teorema. Pomoću modus ponens-a dobijamo (i).

Ako je $(\alpha \Rightarrow \gamma) \in \bar{\mathcal{B}}$, onda imamo

$$(\alpha_{R'}(v) \Rightarrow \gamma_{R'}(v)) = (\alpha \Rightarrow \gamma)_R(v) = 1$$

za svaku valoaciju v. Ako je $\alpha_{R'}(v) = 1$ za svaku valoaciju v, to je i $\gamma_{R'}(v) = 1$ za svaku valoaciju v, tj. važi (ii).

Neka je α formula jezika L'. Otvorenu formulu α^* nazivamo formulom dobijenom iz α eliminacijom kvantifikatora, ako postoji niz formula

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$$

tako da

1° α_1 je u preneks normalnoj formi za α (T. 2.3.1.)

2° α_{k+1} dobijena je iz α_k eliminacijom prvog kvantifikatora ($k=1, \ldots, n-1$)

3° α_n je formula α^*.

Za svaku formulu α iz L´ postoji niz formula $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tako da su ispunjeni uslovi 1^o, 2^o i 3^o.

Posledica 2.3.6.

Ako je α^* dobijena iz α, eliminacijom kvantifikatora, onda

(i) $\alpha \in C_{L'}(\alpha^*)$

(ii) ako je realizacija R´ za L´ model za $\bar{B}$ i α, to je i za α^* .o

Neka je A neki skup formula jezika L. Dodelimo svakoj formuli α iz A otvorenu formulu α^* (iz L´), dobijenu iz α eliminacijom kvantifikatora. Neka je A^* skup svih takvih formula α^*, dok je α iz A. Neka je L^* jezik dobijen iz L dodavanjem skupa Ψ^* svih funkcijskih znakova iz Ψ, koji se pojavljuju u formulama iz A^*.

Teorema 2.3.7.

Teorija $S^* = (L^*,C,A^*)$ je nebitno raširenje teorije $S = (L,C,A)$.

Svaki model R za S može biti raširen do modela R^* za S^*. Obrnuto, za svaki model R^* teorije S^*, suženje R realizacije R^* do jezika L je model za S.

Dokaz:

Iz posledice 2.3.6. (i) i osobina zatvorenja C, sledi $C_L(A) \subset C_{L^*}(A)$, tj. teorija S^* je raširenje teorije S.Dalje, ako je R^* model za S^*, to suženje realizacije R^* do R za L, je model za S.

Predpostavimo da je R model za S. Neka je R´ takvo raširenje za R, da je R´ realizacija za L´i R´ je model za $\bar{B}$. Suženje realizacije R´ do R^* za jezik L^* je raširenje realizacije R i model za S^*. To sledi iz P. 2.3.6., jer $\beta_{R'}(v) = \beta_{R^*}(v)$

za svaku formulu β iz L.

Ako formula β iz L nije teorema teorije S, to zbog T. 0.5.8. postoji takav model R za S, i valoacija v, da $\beta_R(v) = 0$. Na osnovu prethodnog dela dokaza T. 2.3.7. R može biti rašireno do modela R* za S*. Sledi da $\beta_{R*}(v) = \beta_R(v) = 0$. Dalje sledi da β nije teorema teorije S*. Znači, S* je nebitno raširenje teorije S.o

3. OSOBINE I STRUKTURA RAZNOVREDNOSNIH RELACIJA EKVIVALENCIJE I VIŠEVREDNOSNIH KONVERGENCIJA

U ovoj glavi posmatraju se raznovrednosne relacije ekvivalencije i relacije kongruencija. Naglasak je na proučavanju struktura skupa tih relacija, respektivno.

U tekstu se pod familijom $\{a_i \mid i \in I\}$ elemenata nekog skupa A, podrazumeva preslikavanje proizvoljnog skupa indeksa I u skup A.

Kada se govori o algebri, misli se na uredjen par $\langle A,O\rangle$, gde je A neprazan skup, a O familija konačnih operacija na A.

Slično, relacioni sistem je par $\langle B,\mathcal{R}\rangle$, gde je B neprazan, a $\mathcal{R}$ familija relacija na B.

Rezultati koji slede su modifikacija rezultata rada G. Vojvodić, B. Šešelja [40].

3.1. STRUKTURA RAZNOVREDNOSNIH RELACIJA EKVIVALENCIJE

Neka su dati skup E i generalizovana Postova algebra sa uslovom konačne reprezentacije P_ω (P_ω je kompletna distributivna mreža (videti 0. glavu)). *Binarna raznovrednosna relacija* ρ na skupu E × E definiše se sa

$$\rho \overset{\mathrm{Def}}{=} \{((x,y),\, m_\rho(x,y)) : x,y \in E,\ m_\rho : E \times E \to P_\omega\},$$

Funkcija $m_\rho(x,y)$ zove se *funkcija pripadanja*.

(U slučaju da nas interesuje ord ρ, tada ako je ord $\rho = m$, umesto P_ω, dosta je uzeti $P_m \subset P_\omega$. Sa tim u vezi može se istaći da kako je svaka generalisana Postova algebra sa uslovom konačne reprezentacije istovremeno i generalisana Postova algebra, (T. 0.1.1.), te će svi rezultati važiti i za slučaj generalisane Postove algebre. T. 0.1.1. nam omogućava da svaki element $a \in P_m$ možemo predstaviti kao

$$a = \bigcup_{i=1}^{\infty} (D_i(a) \cap e_i)).$$

Neka su ρ i q raznovrednosne relacije na $E \times E$. Tada je:

$$\rho \leq q$$

akko je za svako $x, y \in E$, $m_\rho(x,y) \leq m_q(x,y)$, gde je za $a,b \in P_\omega$, $a \leq b \leftrightarrow a \cup b = b$.

Teorema 3.1.1.

Neka je ρ raznovrednosna relacija na $E \times E$ i neka je P_ω generalizovana Postova algebra sa uslovom konačne reprezentacije. Tada se ρ može razložiti na dvovrednosne relacije ρ_i na sledeći način:

$$\rho = \bigcup_{i=1}^{\infty} (\rho_i \cap e_i), \quad 0 < i < \omega,$$

i $\rho_i \leq \rho_{i-1}$ za $2 \leq i < \omega$.

Dokaz:

Ovo sledi iz definicije P_ω, ako se uzme da je $D_i(\rho) = \rho_i$.
(Ako ordρ = m, tada $\rho_i \leq \rho_{i-1}$ za $i = 2,\dots,m-1$ i $\rho_j = \rho_{m-1}$ za $m < j < \omega$ (T. 0.1.1.).o

Neka su ρ i q raznovrednosne relacije na $E \times E$.

Kompozicija raznovrednosnih relacija ρ i q u oznaci $\rho \circ q$ je raznovrednosna relacija kod koje je funkcija pripadanja data sa

$$m_{\rho o q}(x,z) = \sup_{y} (\inf(m_{\rho}(x,y),\ m_{q}(y,z))),$$

gde je sup (a,b) zamena za $a \cup b$ i inf(a,b) zamena za $a \cap b$ u P_{ω}, (te oznake su pogodnije za dalji rad).

Teorema 3.1.2.

Ako su ρ, q, q' i θ raznovrednosne relacije na $E \times E$, onda važi:

a) $\rho \circ (q \circ \theta) = (\rho \circ q) \circ \theta$

b) $\rho \circ (q \cup q') = (\rho \circ q) \cup (\rho \cup q')$

c) $q \subseteq q'$ povlači $\rho \circ q \subseteq \rho \circ q'$.

Dokaz:

a) $m_{\rho o (q o \theta)}(x,w) = \sup_{y}(\inf(m_{\rho}(x,y),\ m_{q o \theta}(y,w))) =$

$\sup_{y}(\inf(m_{\rho}(x,y),\ \sup_{z}(\inf(m_{q}(x,z),\ m_{\theta}(z,w)))) =$

$\sup_{y}(\sup_{z}\ (\inf(m_{\rho}(x,y),\ \inf(m_{q}(y,z),\ m_{\theta}(z,w))))) =$

$\sup_{y,z}(\inf(m_{\rho}(x,y),\ m_{q}(y,z),\ m_{\theta}(z,w) = m_{(\rho o q) o \theta}(x,w)$

Dakle,

$\rho \circ (q \circ \theta) = (\rho \circ q) \circ \theta.$

Na sličan način dokazuje se tačnost tvrdjenja navedenih u b) i c).o

Binarna raznovrednosna relacija ρ je *refleksivna* akko je za svako x iz E,

(R1) $\qquad m_\rho(x,y) = e_\omega.$

Binarna raznovrednosna relacija ρ je *simetrična* akko je za sve x,y iz E,

(S1) $\qquad m_\rho(x,y) = m_\rho(y,x).$

Binarna raznovrednosna relacija ρ je *tranzitivna* akko je za sve x,y i z iz E zadovoljen uslov:

(T1) $\qquad$ ako $m_\rho(x,y) = a$ i $m_\rho(y,z) = b$, onda $m_\rho(x,z) \geq a \cap b$, gde a,b su iz P_ω.

Uslov tranzitivnosti (T1) ekvivalentan je sa uslovom

(T1´) $\qquad m_\rho(x,z) \geq \sup\limits_y(\inf(m_\rho(x,y),\ m_\rho(y,z))).$

Zaista, ako važi (T1), onda je

$$m_\rho(x,z) \geq \inf(m_\rho(x,y),\ m_\rho(y,z)),$$

a kako ovo važi za svako y, tačno je i tvrdjenje (T1´).

Obrnuto, polazeći od nejednakosti (T1´), prilagodjavanjem oznaka odmah se dobija uslov (T1).

Takodje, sa obzirom na definiciju kompozicije relacija, tranzitivnost se može zadati i sa

$$\rho \circ \rho \subseteq \rho.$$

Neka je dat skup E i neka je P_ω kompletna generalisana Postova algebra sa uslovom konačne reprezentacije. Binarna raznovrednosna relacija ρ na E × E, koja je refleksivna, simetrična i tranzitivna (R1, S1, T1) naziva se *raznovrednosna relacija ekvivalencije*.

Stav o razlaganju važi i za raznovrednosne relacije ekvivalencije, ali on je u ovom slučaju nešto precizniji i glasi:

Teorema 3.1.3.

Neka je ρ raznovrednosna relacija ekvivalencije na $E \times E$ i neka je P_ω kompletna generalisana Postova algebra sa uslovom konačne reprezentacije. Tada se ρ može razložiti na sledeći način:

$$\rho = \bigcup_{i=1}^{\infty} (D_i(\rho) \cap e_i)$$

pri čemu iz

$$e_i \leq e_j \text{ sledi } D_j(\rho) \leq D_i(\rho)$$

i relacije $D_i(\rho)$ su relacije ekvivalencije u klasičnom smislu.

Dokaz:

S obzirom na T. 3.1.1. treba pokazati samo da su $D_i(\rho)$ (u oznaci ρ_i) relacije ekvivalencije.

1) Iz

$$m_\rho(x,x) = e_\omega \text{ , za svako } x \text{ iz } E,$$

sledi da (x,x) pripada ρ_i za svako $1 \leq i < \omega$, tj. sledi da ρ_i je refleksivna relacija.

2) Ako par (x,y) pripada ρ_i $(0 < i < \omega)$, znači da je

$$m_\rho(x,y) \geq e_i,$$

a po simetriji relacije ρ (S1) sledi (za $0 < i < \omega$)

$$m_\rho(y,x) \geq e_i \;,$$

tj. (y,x) pripada relaciji ρ_i, koja je zato simetrična.

3) Ako relaciji ρ_i pripadaju (x,y) i (y,z) onda važi

$$m_\rho(x,y) \geq e_i \quad i \; m_\rho(y,z) \geq e_i,$$

a kako je ρ tranzitivna raznovrednosna relacija (T1), sledi

$$m_\rho(x,z) \geq e_i, \text{ tj. } (x,z) \text{ pripada } \rho_i,$$

koja je na osnovu toga tranzitivna.

Prema 1), 2) i 3) ρ_i su relacije ekvivalencije $(0 < i < \omega)$.o

Naravno,može se formulisati i obrnuti stav.

Teorema 3.1.4.

Ako su ρ_i $(e_i \in P_\omega,\ 0 < i < \omega)$ relacije ekvivalencije za koje iz

$$e_i \leq e_j \quad \text{sledi} \quad \rho_j \leq \rho_i,$$

onda je relacija ρ definisana sa:

$$\rho = \bigcup_{i=1}^{\infty} (\rho_i \cap e_i)$$

raznovrednosna relacija ekvivalencije.

Dokaz:

ρ refleksivna raznovrednosna relacija, jer (x,x) pripada svim relacijama ρ_i.

ρ je simetrična, jer su i sve ρ_i simetrične relacije.

Najzad, neka je

$$m_\rho(x,y) = e_i \quad \text{i} \quad m_\rho(y,z) = e_j, \quad \text{za} \quad e_i, e_j \in P_\omega .$$

Tada

(x,y) i (y,z) pripadaju relaciji ρ_k, $k = \min(i,j)$, jer u P_ω važi:

$$e_i \cap e_j \leq e_i \quad \text{i} \quad e_i \cap e_j \leq e_j ,$$

(a $e_i \cap e_j = e_{\min(i,j)}$).

Zbog tranzitivnosti relacije ρ_k, (x,z) pripada ρ_k, pa je dakle i

$$m_\rho(x,z) \geq e_k,$$

što znači da je i ρ tranzitivna raznovrednosna relacija.o

Dakle, ρ je raznovrednosna relacija ekvivalencije.

Neka je E dati neprazan skup i neka je $\rho[E]$ oznaka za skup *svih raznovrednosnih relacija ekvivalencije na* E. Neka je P_ω kompletna generalisana Postova algebra sa uslovom konačne reprezentacije. Posmatrajmo relacioni sistem

$$< \rho[E] , \leq >,$$

gde je za a i b iz P_ω, $a \leq b$ na uobičajen način uvedena oznaka za $a \cup b = b$.

Teorema 3.1.5.

$< \rho[E], \leq >$ je kompletna mreža.

Dokaz:

Treba pokazati da svaka familija $\{_j\rho : j \in J\}$ iz

$\rho[E]$, ima infinum i supremum.

Prema stavu o razlaganju raznovrednosnih relacija ekvivalencije (T. 3.1.3.), za svako ${}_j\rho$ iz gornje familije važi

$$ {}_j\rho = \bigcup_{i=1}^{\infty} ({}_j\rho_i \cap e_i). $$

Za svako i posmatrajmo sve relacije $\{{}_j\rho_i : j \in J\}$, $(0 < i < \omega)$. Ovakva familija relacija pripada skupu relacija ekvivalencija nad E, a taj skup, kao što je poznato (*Cohn*, [5]) ima strukturu kompletne mreže. Zato za svako i familija $\{{}_j\rho_i : j \in J\}$ ima infinum i supremum, u oznaci $\inf\rho_i$ i $\sup\rho_i$, respektivno.

Pokazaćemo da su raznovrednosne relacije $\mathrm{unf}_j\rho$ i $\sup_j\rho$, definisane sa

$$ \inf_j\rho = \bigcup_{i=1}^{\infty} (\inf\rho_i \cap e_i) \quad \text{i} $$

$$ \sup_j\rho = \bigcup_{i=1}^{\infty} (\sup\rho_i \cap e_i). $$

Traženi infinum i supremum familije raznovrednosnih relacija ekvivalencije $\{{}_j\rho : j \in J\}$.

a) $\inf_j\rho$ je raznovrednosna relacija ekvivalencije prema T. 3.1.4.

b) Važi

$$ \inf_j \rho(x,y) \le {}_j\rho(x,y), \text{ za sve } x,y \in E. $$

Zaista za svako i je:

$$ \inf\rho_i(x,y) \le {}_j\rho_i(x,y), $$

$\inf\rho_i(x,y) \cap e_i \le {}_j\rho_i(x,y) \cap e_i,$

$\bigcup_i(\inf\rho_i(x,y) \cap e_i) \le \bigcup_i({}_j\rho_i(x,y) \cap e_i),$

$\inf_j\rho(x,y) \le {}_j\rho(x,y).$

c) Neka je $q \in \rho[E]$ i $q \le {}_j\rho$, $j \in J$. Tada je i

$q \le \inf_j\rho.$

Zaista, neka je

$q(x,y) \le {}_j\rho(x,y) = e_i.$

Tada je prema stavu T. 3.1.3. i osobinama relacija ekvivalencija,

ako $q_i(x,y) = e_\omega$, onda $\inf\rho_i(x,y) = e_\omega$.

Odavde je prema T. 3.1.4.

$q(x,y) \le \inf_j\rho(x,y).$

a') $\sup_j\rho$ je raznovrednosna relacija ekvivalencije prema T. 3.1.4.

b') Za sve x,y iz E važi

$\sup_j\rho \le {}_j\rho(x,y).$

Zaista, za svako i je

$\sup\rho_i(x,y) \le \rho_i(x,y),$

jer to važi za relacije ekvivalencije, pa je po konstrukciji za supremum

$$\sup_j \rho(x,y) \leq (\sup \rho_i(x,y) \cap e_i).$$

Poslednja nejednakost je tačna za sve x,y iz E, tj. prema T. 3.1.4. je

$$\sup_j \rho(x,y) \leq {}_j\rho(x,y).$$

c´) Neka je $q \in \rho[E]$ i $q \geq {}_j\rho$, $j \in J$. Tada je i

$$q \geq \sup_j \rho.$$

Zaista, neka je

$$q(x,y) \geq {}_j\rho(x,y) = e_i.$$

Prema T. 3.1.3. i osobinama relacije ekvivalencije

ako $\sup \rho_i(x,y) = e_\omega$, onda $q_i(x,y) = e_\omega$.

Odavde je prema T. 3.1.4.

$$q(x,y) \geq \sup_j \rho(x,y).$$

Na osnovu a), b), c), a´), b´) i c´), definisane raznovrednosne relacije $\inf_j \rho$ i $\sup_j \rho$ jesu traženi infinum i supremum.○

Napomenimo da je *najmanji element* u $\langle \rho[E], \leq \rangle$ u oznaci θ, raznovrednosna relacija ekvivalencije kod koje je

$$m_\theta(x,y) = \begin{cases} e_\omega, & \text{za } x = y \\ e_0, & \text{za } x \neq y \end{cases}$$

Najveći element ove mreže u oznaci I je raznovrednosna relacija ekvivalencije za koju je

$$m_I(x,y) = e_\omega, \quad \text{za sve } x \text{ i } y \text{ iz } E.$$

U vezi sa navedenom kompletnom mrežom raznovrednosnih relacija ekvivalencije, mogu se razmatrati uslovi pod kojima operacija kompozicije sa tim relacijama održava pripadanje mreži. Važi:

Teorema 3.1.6.

Ako su ρ i q raznovrednosne relacije ekvivalencije, onda je $\rho \circ q$ raznovrednosna relacija ekvivalencije akko je zadovoljena jednakost $\rho \circ q = q \circ \rho$.

Dokaz:

Neka je prvo

$$\rho \circ q = q \circ \rho.$$

Prema definiciji kompozicije

a) $\rho \circ q(x,x) = \sup\limits_y(\inf(\rho(x,y),\ q(y,x)) = e_\omega$, za

$y = x$.

b) $\rho \circ q(x,y) = \sup\limits_z(\inf(\rho(x,z),\ q(z,y))) =$

(zbog simetrije relacija ρ i q)

$= \sup\limits_z(\inf(q(y,z),\ \rho(z,x)) =$

(zbog komutativnosti proizvoda)

$= \rho \circ q(y,x)$

c) $(\rho \circ q)\circ(\rho \circ q) = (\rho \circ q)\circ(q \circ \rho) =$

$= \rho \circ (q \circ q) \circ \rho \subseteq \rho \circ q \circ \rho =$

$= \rho \circ \rho \circ q \subseteq \rho \circ q.$

Prema a), b) i c) $\rho \circ q$ zadovoljava uslove refleksivnosti, simetrije i tranzitivnosti za raznovrednosne relacije, te je zato raznovrednosna relacija ekvivalencije.

Neka je sada $\rho \circ q$ raznovrednosna relacija ekvivalencije. Tada je

$$\rho \circ q(x,y) = \sup_z(\inf(\rho(x,z), q(z,y)) =$$

$$= \sup_z(\inf(q(y,z), \rho(z,x)) =$$

$$= q \circ \rho(y,x) = q \circ \rho(x,y).\circ$$

3.2. RAZNOVREDNOSNE RELACIJE KONGRUENCIJE

Odnos izmedju relacija i operacija na univerzalnoj algebri prirodno vodi do proučavanja kongruencija. Na sličan način postupamo i ovde, izdvajamo one raznovrednosne relacije ekvivalencije, koje zadovoljavaju uslov supstitucije, koji odgovara prirodi ovih relacija.

Neka je data algebra $\langle E, O \rangle$ i neka je ρ raznovrednosna relacija ekvivalencije na E. ρ *je raznovrednosna relacija kongruencije* ako za $m_1, m_2, \ldots, m_n$ iz P_ω zadovoljava uslov supstitucije:

$\rho(a_1, b_1) = m_1$

$\rho(a_2, b_2) = m_2$

. . . .

. . . .

$\rho(a_n, b_n) = m_n$

sledi:

$$(o(a_1,\dots,a_n),\ o(b_1,\dots,b_n)) = m \geq \inf m_k, \quad k = 1,\dots,n$$

$m \in \mathcal{P}_\omega$, za svako $o \in O$

Smisao ove definicije može se sagledati u sledeća dva tvrdjenja. Oni raznovrednosne kongruencije povezuju sa kongruencijama u klasičnom smislu, a sve u skladu sa stavovima o razlaganju i sintezi raznovrednosnih relacija ekvivalencije (T. 3.1.3. i T. 3.1.4.).

Teorema 3.2.1.

Ako je ρ raznovrednosna relacija kongruencije na algebri $\langle E, O \rangle$, onda je

$$\rho = \bigcup_i (\rho_i \cap e_i),$$

gde su ρ_i kongruencije na istoj algebri i iz $e_i \leq e_j$ sledi $\rho_j \leq \rho_i$.

Dokaz:

Prema T. 3.1.3. ρ se može razložiti na relacije ekvivalncije u klasičnom smislu, tj.

$$\rho = \bigcup_i (\rho_i \cap e_i),$$

gde su ρ_i relacije ekvivalencije ($\rho_i = D_i(\rho)$).

Da su to i kongruencije sledi iz:

Neka je:

$$\rho_i(a_1, b_1) = e_\omega$$

$$\begin{array}{l} \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

$$\rho_i(a_n, b_n) = e_\omega .$$

Tada je:

$$(a_1, b_1) = e_i$$

$$\begin{array}{l} \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

$$(a_n, b_n) = e_i,$$

pa kako je ρ kongruencija, to sledi da

$$\rho(o(a_1, \ldots, a_n), o(b_1, \ldots, b_n)) = m \geq e_i, \quad m \in P_\omega$$

a odavde je

$$\rho_i(o(a_1, \ldots, a_n), o(b_1, \ldots, b_n)) = e_\omega .\text{o}$$

Važi i obrnut stav.

Teorema 3.2.2.

Neka su ρ_i, $0 < i < \omega$, kongruencije na algebri $\langle E, \hat{O} \rangle$ i neka je za

$$e_i \leq e_j, \quad \rho_j \leq \rho_i .$$

Raznovrednosna relacija ρ, definisana sa

$$\rho = \bigcup_i (\rho_i \cap e_i)$$

jeste raznovrednosna relacija kongruencije na istoj algebri.

Dokaz:

ρ je raznovrednosna relacija ekvivalencije prema T. 3.1.4. Dokazaćemo da je ona i kongruencija, tj. da zadovoljava i uslov supstitucije. Neka je za $m_1, \ldots, m_n$ iz P_ω

$$\rho(a_1, b_1) = m_1$$
$$\rho(a_2, b_2) = m_2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\rho(a_n, b_n) = m_n,$$

i neka je

$$m = \inf m_i, \quad i = 1, \ldots, m, \quad m \in P_\omega.$$

Tada je i

$$\rho_m(a_1, b_1) = e_\omega$$
$$\rho_m(a_2, b_2) = e_\omega$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$_m(a_n, b_n) = e_\omega$$

a kako je ρ_m kongruencija, važi

$$\rho_m(o(a_1, \ldots, a_n), o(b_1, \ldots, b_n)) = e_\omega, \quad \text{tj.}$$

$$\rho(o(a_1, \ldots, a_n), o(b_1, \ldots, b_n)) = h \geq m = \inf m_i,$$

$i = 1,2,\ldots,m$ i $h \in P_\omega$.o

Neka je $C[<E,O>]$ oznaka za *skup svih raznovrednosnih relacija kongruencija na algebri* $<E,O>$. Posmatrajmo relacioni sistem

$$< C[<E,O>] , \leq >.$$

Važi

Teorema 3.2.3.

$< C|<E,O>| , \leq >$ je kompletna mreža.

Dokaz:

Neka je data familija raznovrednosnih relacija kongruencija $\{_j\rho : j \in J\}$. Prema T. 3.1.5., s obzirom da su $_j\rho$ raznovrednosne relacije ekvivalencije, postoje $\inf_j\rho$ i $\sup_j\rho$ koje su takodje raznovrednosne relacije ekvivalencije i kao takve one su infinum i supremum uočene familije. Pokazaćemo da su i kongruencije.

Prema T. 3.1.5. svaka $_j\rho$ se može razložiti na relacije ekvivalencije:

$$_j\rho = \bigcup_i (_j\rho_i \cap e_i).$$

Prema T. 3.2.1., relacije $_j\rho_i$ su baš kongruencije. Zato za svako i možemo posmatrati familiju kongruencija $\{_j\rho_i : j \in J\}$, koja prema (*Gräzer*, [*10*]) ima infinum i supremum, i koje su kongruencije.

Neka

$$\inf{}_j\rho = \bigcup_i (\inf\rho_i \cap e_i) \qquad i$$

$$\sup{}_j\rho = \bigcup_i (\sup\rho_i \cap e_i).$$

Ove relacije zadovoljavaju uslov supstitucije na osnovu gornjeg razmatranja i na osnovu T. 3.2.2. su kongruencije.○

Teorema 3.2.4.

$< C[<E,0>], \leq >$ je kompletna podmreža mreže $<\rho[E], \leq>$.○

Teorema 3.2.5.

$C[<E,0>]$ je algebarski sistem zatvaranja nad $E \times E$.

Dokaz:

a) Sam skup $E \times E$ je u $C[<E,0>]$, (a to je najveći element).

b) Skup raznovrednosnih kongruencija $C[<E,0>]$ zatvoren je u odnosu na formiranje proizvoljnih preseka svojih elemenata, jer ako je $\{{}_j\rho : j \in J\}$ familija raznovrednosnih relacija kongruencije iz $C[<E,0>]$, njihov presek

$$\cap_j\rho = \inf({}_j\rho \mid j \in J)$$

je raznovrednosna relacija ekvivalencije.

Zaista, ako su ${}_j\rho$ raznovrednosne kongruencije za svako x iz E je

$$\cap_j\rho\ (x,x) = \inf({}_j\rho(x,x)) = \inf(e_\omega) = e_\omega,$$

pa je presek refleksivna raznovrednosna relacija.

Simetričnost preseka takodje sledi iz simetrije svih raznovrednosnih relacija u familiji.

Najzad $\cap_j \rho$ je tranzitivna raznovrednosna relacija, jer je

$$(*) \qquad \cap_j \rho(x,y) = \inf({}_j\rho(x,y)) = {}_k\rho(x,y)$$

za neku raznovrednosnu relaciju ekvivalencije ${}_k\rho$. Sada zbog tranzitivnosti koju zadovoljava ${}_k\rho$ je:

$$(**) \qquad \begin{aligned} {}_k\rho(x,y) &\geq \sup_z(\inf({}_k\rho(x,z),\ {}_k\rho(z,y)) \geq \\ &\sup_z(\inf(\inf_j \rho(x,z),\ \inf_j \rho(z,y))) = \\ &\sup_z(\inf(\cap_j \rho(x,z),\ \cap_j \rho(z,y))) \end{aligned}$$

Na osnovu (*) i (**) je:

$$\cap_j \rho(x,y) \geq (\inf(\cap_j \rho(x,z),\ \cap_j \rho(z,y)))$$

čime je pokazana i tranzitivnost relacije $\cap_j \rho$, pa je $\cap_j \rho$ raznovrednosna relacija ekvivalencije.

Pokazaćemo da je zadovoljen i uslov supstitucije za ovaj presek.

S obzirom da su ${}_j\rho$ raznovrednosne kongruencije za svako ${}_j\rho$ važi supstitucija, tj.

$${}_j\rho(a_1,\ b_1) = m_{j_1}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$${}_j\rho(a_n,\ b_n) = m_{j_n} \quad , \qquad m_{j_\ell} \in P_\omega,$$

Sledi

$${}_j\rho(o(a_1,\ldots,\ a_n),\ o(b_1,\ldots,\ b_n)) = m_j \geq \inf m_{j_\ell},$$

$\ell = 1,\ldots,n$, za neko m_j iz P_ω i svaku n-arnu operaciju $o \in O$.

Na osnovu toga je

$$\bigcap_j \rho(a_1, b_1) = \inf_j \rho(a_1, b_1) = \inf m_{j_1} = h_1$$

$$\bigcap_j \rho(a_2, b_2) = \inf_j \rho(a_2, b_2) = \inf m_{j_2} = h_2$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$\bigcap_j \rho(a_n, b_n) = \inf_j \rho(a_n, b_n) = \inf m_{j_n} = h_n,$$

a takodje i

$$\bigcap_j \rho(o(a_1,\ldots, a_n), o(b_1,\ldots, b_n) =$$

$$\inf_j \rho(o(a_1,\ldots,a_n), o(b_1,\ldots,b_n) = h \geq \inf h_\ell,$$

$\ell = 1,2,\ldots,n$, za neke vrednosti h, h_ℓ iz P_ω i za svaku n-arnu operaciju $o \in O$.

Dakle, presek raznovrednosnih relacija kongruencije i sam je raznovrednosna relacija kongruencija.

c) Neka je $\{_j\rho : j \in J\}$ usmerena familija* raznovrednosnih kongruencija na $C[<E,O>]$. Tada je

$$\bigcup (_j\rho : j \in J) = \sup(_j\rho : j \in J).$$

Zaista, prema stavu o razlaganju raznovrednosnih relacija kongruencija (T. 3.2.1.)

$$\bigcup (_j\rho : j \in J) = \bigcup_i ((\bigcup \rho_i) \cap e_i)$$

---

* Poznato je da je familija elemenata parcijalnog uredjenog skupa $<S \leq>$ usmerena, ako svaki njen dvoelementni podskup ima supremum u S (*Birkhoff*, [3]).

ρ_i su kongruencije u klasičnom smislu i za njih, kao što je poznato, važi (*Grätzer*, [10]):

$$\bigcup(\rho_i : i \in \dot{I}) = \sup(\rho_i : i \in \dot{I}).$$

Na osnovu toga je

$$\bigcup({}_j\rho : j \in J) = (\sup({}_j\rho : j \in J).$$

Na osnovu a), b) i c) $C[<E,0>]$ je algebarski sistem zatvaranja nad $E \times E$.o

L I T E R A T U R A

1. Abboott, J.C.,
   SEMI-BOOLEAN ALGEBRA, Matematički Vesnik, 4(1967) pp. 177-198.

2. Bell, J.L.,
   MODELS AND ULTRAPRODUCTS, North-Holland, Amsterdam (1969).

3. Birkhoff, G.,
   LATTICE THEORY, A.M.S. Colloq. Publ. Vol. 25, Amer. Math. Soc., Providence, R.I.(1961).

4. Chang, C.C., Keisler, H.J.,
   MODEL THEORY, North-Holland, Amsterdam (1973).

5. Cohn, P.M.,
   UNIVERSAL ALGEBRA, Harper & Row, London (1965).

6. Danh, B.,
   META-MATHEMATICS OF SOME MANY-VALUED CALCULI, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astr. Phys. №.8(1974) pp. 747-750.

7. Dvinger, P.,
   GENERALIZED POST ALGEBRAS, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astr. Phys. 16 (1968), pp. 559-563.

8. Dwingwr, P.,
   IDEALS IN GENERALIZED POST ALGEBRAS, Bull. Ac. Polon

Sc., Ser. Sci. Math. Astr. Phys. 17 (1969), pp. 483-485.

9. Epstein, G.,
THE LATTICE THEORY OF POST ALGEBRAS, Trans. Amer. Math. Soc. 95 (1960), pp. 300-317.

10. Gräzer, G.G.,
UNIVESAL ALGEBRA, Van Nostrand New York (1968).

11. Kreisel, G., Krivine, J.L.,
ELEMENTS OF MATHEMATICAL LOGIC MODEL THEORY, North-Holland, Amsterdam (1967).

12. Maksimowa, L., Vakarelov, D.,
REPRESENTATION THEOREMS FOR GENERALIZED POST ALGEBRAS OF ORDER ω^+, Bull. Ac. Polon. Sci., Ser. Sci. Math. Astr. Phys., 22 (1974), pp. 757-764.

13. Maksimowa, L., Vakarelov, D.,
SEMANTICS FOR ω^+ *VALUED PREDICHTE CALCULI*, Bull. Ac. Polon. Sci., Ser. Sci. Math. Astr. Phys. 22 (1974), pp. 765-771.

14. Malcev, A.I.,
ITERATIVNYE ALGEBRY I MNOGOOBRAZIJA POSTA, Algebra i logika, Novosibirsk, (1966), Vol. 5, 8-24.

15. Prešić, S.
ELEMENTI MATEMATIČKE LOGIKE, Beograd, (1968).

16. Orlowska, E.,
THE GENTZEN STYLE AXIOMATION OF ω^+*- VALUED LOGIC*, Studia Logic. 35 (1974), pp. 433-445.

17. Rasiowa, H.,
A THEOREM ON THE EXISTENCE OF PRIME FILTERS IN POST ALGEBRAS AND THE COMPLETENESS THEOREM FOR SOME MANY-

VALUED PREDICATE CALCULI, Bull. Ac. Pol. Sci., Ser. Math. Astr. Phys. 17 (1969), pp. 347-354.

18. Rasiowa, H.,
ULTRAPRODUCTS OF m-VALUED MODELS AND A GENERALIZATION OF THE LÖWENHEIM - SKOLEM - GÖDEML - MALCEV THEOREM FOR THEORIES BASED ON m-VALUED LOGIC, Bull. Ac. Pol. Sci., Ser. Sci. Math. Astr. Phys. 18 (1970), pp. 415-420.

19. Rasiowa, H.,
THE CRAIG INTERPOLATION THEOREM FOR m-VALUED PREDICATE CALCULI, Bull. Ac. Pol. Sci., Ser. Sci. Math. Astr. Phys. 20 (1972), pp. 341-346.

20. Rasiowa, H.,
ON A LOGICAL STRUCTURE OF MIX-VALUED PROGRAMS AND THE + - VALUED ALGORITMIC LOGIC, Bull. Ac. Pol. Sci., Ser. Sci. Math. Astr. Phys. 21(1973), pp. 451-458.

21. Rasiowa, H.,
AN ALGEBRAIC APPROACH TO NON-CLASSICAL LOGIC, North-Holland, Amsterdam (1974).

22. Rasiowa, H.,
MIXED-VALUED PREDICATE CALCULI, Studia Logic 34(1975) pp. 215-234.

23. Rasiowa, H., Sikorski, R.,
THE MATHEMATICS OF THE METAMATHEMATICS, Warszawa, (1963).

24. Rescher, N.,
MANY-VALUED LOGIC, Mc Graw-Hill Book Comp. (1969).

25. Rosenbloom, P.C.,
POST ALGEBRAS I. POSTULATES AND GENERAL THEORY, Amer. Journ. of Mathem. 64(1942), pp. 167-188.

26. Rousseau, G.,
SEQUENTS IN MANY-VALUED LOGIC, I, Fund. Math. 60 (1967), pp. 23-33.

27. Rousseau, G.,
SEQUENTS IN MANY-VALUES LOGIC, II, Fund. Math. 67, (1970), pp. 125-131.

28. Rousseau, G.,
POST ALGEBRAS AND PSEUDO-POST ALGEBRAS, Fund. Math. 67(1970), pp. 133-145.

29. Saloni, Z.,
GENZEN RULES FOR m-VALUED LOGIC, Bull. Ac. Pol. Sci., Ser. Sci. Math. Astr. Phys. 20(1972), pp 819-824.

30. Sikorski, R.,
ALGEBRA OF FORMALIZED LANGUAGES, Colloq. Math. 9 (1961), pp. 1-31.

31. Sikorski, R.
PRODUCTS OF GENERALIZED ALGEBRAS AND PRODUCTS OF REALIZATIONS, Colloq. Math. 10(1963), pp. 1-13.

32. Šešelja, B., Vojvodić, G.
IMPLIKACIJA U TROVALENTNOJ LOGICI KAO EKSPONENCIJALNA FUNKCIJA, Mat. Vesnik, 11(26)(1974), pp. 137-142.

33. Šešić, B.,
OSNOVI LOGIKE, Beograd, (1974).

34. Shoenfild, R.,
MATHEMATICAL LOGIC, Adison-Wesley, Reading. Mass. (1967).

35. Speed, T.,
A NOTE ON POST ALGEBRAS, Colloq. Math. 24(1972), pp 37-44.

36. Traczyk, T.,
AXIOMS AND SOME PROPERTIES OF POST ALGEBRAS, Colloq. Math. 10(1963), pp. 198-209.

37. Traczyk, T.,
AN EQUATIONAL DEFINITION OF A CLASS OF POST ALGEBRAS, Bull. Ac. Pol. Sci., Ser. Sci. Math. Astr. Phys. 12, (1964), pp. 147-149.

38. Traczyk, T.,
PRIME IDEALS IN GENERALIZED POST ALGEBRAS, Bull. Ac. Pol. Sci., Ser. Sci. Math. Astr. Phys. 16(1968), pp. 369-373.

39. Vojvodić, G.,
SOME THEOREMS FOR MODEL THEORY OF MIXED-VALUED CALCULI, Publ. Inst. Math. 23(37), 1978, pp. 229-234.

40. Vojvodić, G., Šešelja, B.,
O STRUKTURI SLABIH RELACIJA EKVIVALENCIJE I SLABIH RELACIJA KONGRUENCIJA, Matematički Vesnik, 1(14)(29) (1977), pp. 147-152.