U N I V E R Z I T E T   U   B E O G R A D U

P R I R O D N O - M A T E M A T I Č K I   F A K U L T E T

Mgr LJUBOMIR B. ĆIRIĆ

POSTOJANE I PERIODIČNE TAČKE KONTRAKTIVNIH OPERATORA

DOKTORSKA DISERTACIJA

B E O G R A D

1970.

S A D R Ž A J

Strana

U V O D

1. Teorija postojanih tačaka našla je široku primenu u algebri, analizi i funkcionalnoj analizi. To je jedan od razloga da je ova problematika uvek veoma aktuelna. Posebno je od velikog interesa ispitivanje egzistencije jedinstvenih postojanih tačaka.

Postojanim (nepokretnim, fiksnim) tačkama nekog operatora A koji preslikava prostor X u sebe sama nazivaju se svi oni elementi prostora X koji su rešenja jednačine

$$Ax = x.$$

Elementi prostora X koji su rešenja jednačine

$$A^k x = x$$

nazivaju se periodične tačke.

Najjednostavniji primeri pokazuju da operator A može ali i ne mora imati postojanih tačaka. Tako naprimer, ako je A identično preslikavanje, tada su sve tačke postojane, a nezavisno od strukture prostora X. Medjutim, ako je operator A u linearnom topološkom prostoru X definisan sa

$$Ax = x + x_0 \; ; \qquad x_0 \neq 0$$

tada ovakav operator nema ni jedne postojane tačke.

Prvi veliki rezultat iz teorije postojanih tačaka dobio je 1911. godine holandski matematičar L. Brouwer u [14]. Brouwer je dokazao da svako neprekidno preslikavanje konačno-dimenzionog simpleksa euklidskog prostora u sebe sama ima bar jednu postojanu tačku. G. Birkofi i A. Kellog su 1922. godine u [11] prvi pokazali kako se stavovi o postojanim tačkama, kao metod, mogu koristiti u dokazima stavova o egzistenciji rešenja raznih tipova jednačina. J. Schauder [88] 1927. godine proširuje Brouwer-ov stav na kompaktne konveksne podskupove Banach-ovih prostora. Ovo je dalje A. Tihonov [97] 1935. godine proširio na kompaktne konveksne podskupove lokalno konveksnih linearnih topoloških prostora. Ovde treba pomenuti i novija istraživanja Brouwer-ovog stava, kao npr. F. Browder-a [15] i [16] koji uopštavaju Schauder-ov rezultat, a R. Halpern i M. Bergman [42] uopštavaju stav Tihonov-a.

I u slučajevima višeznačnih preslikavanja poznato je više generalizacija rezultata navedenih autora. Tako je S. Kakutani [48] 1941. godine uopštio Brouwer-ov stav, a I. Glicksberg [41] stav Tihonov-a za slučaj zatvorenih višeznačnih preslikavanja koja svakoj tački pridelјuju zatvoren konveksan podskup. Nedavno je N. Glebov [40] dobio rezultat Glicksberg-a za nešto opštiju klasu delimično zatvorenih višeznačnih preslikavanja.

Prvi rezultat iz oblasti koju tretira dosertacija nalazimo 1922. godine kod poljskog matematičara Stefana Banach-a. S. Banach (1892-1945) dobio je sledeći rezultat [6, stav 6, str.160] "Neka neprekidan operator U preslikava potpun normiran prostor E u sebe sama. Ako postoji realan broj $0 < M < 1$ sa svojstvom da je za svako X' i X''

$$\| U(X') - U(X'') \| \leq M \| X' - X'' \|$$

tada postoji jedan element X takav da je $X = U(X)$." Za dokaz ovog stava koji se zasniva na konvergenciji geometrijskog reda

$$1 + M + \ldots + M^n + \ldots$$

algebarska struktura prostora nije bitna. Zato se taj stav može formulisati i za kontrakcije koje preslikavaju potpun metrički prostor u sebe sama, odnosno za operatore koji ispunjavaju uslov

$$d(Ax,Ay) \leq M \cdot d(x,y).$$

Ovaj elegantni stav nalazi naročito široku primenu, kako u algebri i analizi, tako i u funkcionalnoj analizi i njenim primenama u diferencijalnim i integralnim jednačinama. Za ilustraciju primene Banach-ovog stava u algebri videti Đuru Kurepu [59, str.1040-1052], a u funkcionalnoj analizi Kolmogorov-Fomin-a [55, str.74-82]. Rezultat Banach-a otvara nov pravac istraživanja u teoriji postojanih tačaka koji je nezavisan od Brouwer-ovog stava. Smisao uopštenja Banach-ovog stava je u tome da se oslabi uslov kontrakcije, a isto tako i da se rezultat prenese na prostore opštije od metričkih.

R. Caccioppoli [19] i [20] pokazuje da Banach-ov stav važi i za one operatore koji ispunjavaju uslov

$$d(A^n x, A^n y) \leq c_n d(x,y),$$

gde je $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < +\infty$.

Jedno direktno proširenje Banach-ovog stava u okviru potpunih metričnih prostora dao je M. Edelstein [32]. Koristeći pojam ε-lančastog metričkog prostora on dobija stav o nepokretnim tačkama operatora koji su kontrakcije samo za dovoljno bliske tačke. Milosav Marjanović [76] uvodi pojam (U,q,k)-kontrakcije, daje nemetričku formu pojmu ε-lančanosti i tako proširuje rezultat Edelstein-a.

E. Rakoch [84] uopštava Banach-ov stav na one operatore kod kojih je koeficijent kontrakcije za svaki par tačaka manji od jedan ali je supremum svih tih koeficijenata jednak jedinici. Ovo dalje uopštavaju D. Boyd i J. Wong u [13] i J. Wong u [100].

M. Edelstein [33] proširuje rezultat Banach-a na kontraktivne operatore, odnosno na operatore kod kojih je koeficijent kontrakcije jedinica, uz jedan dodatni uslov (koji je kod kompaktnih prostora ispunjen). Ovaj rezultat Edelstein-a, W. Kammerer i R. Kasriel [49] uopštavaju na kompaktne uniformne prostore.

U svojoj doktorskoj disertaciji [4] i radu [5] D. Bailey dobija Banach-ov rezultat za neprekidne operatore u kompaktnim metričkim prostorima koji ispunjavaju slabiji uslov kontraktivnosti nego što je onaj koga ispunjavaju operatori koje je posmatrao M. Edelstein u [33].

Pojam kontraktivnosti drugačije prirode od napred izloženih uveli su nedavno L. Belluce i W. Kirk [8]. Oni razmatraju operatore koji imaju svojstvo da umanjuju dijametar orbite $O(x) = \{x, Ax, \ldots, A^n x, \ldots\}$ svake tačke x i uz dodatne uslove dobija ju rezultate slične Banach-ovom stavu. Dalja istraživanja u tom pravcu vrše pomenuti autori u [9] i W. Kirk u [54].

Koristeći činjenicu da se uniformni prostori mogu rekonstruisati dovoljnim mnoštvom kvazi metrikâ, a lokalno konveksni linearni topološki prostori dovoljnim mnoštvom semi normi, N. Gheorghiu [23] uopštava Banach-ov stav na uniformne a A. Deleanu i G.

Marinescu [30] na lokalno konveksne linearne topološke prostore. Menjajući jedan uslov u stavovima Deleanu-a i Marinescu-a, Olga Hadžić i Bogoljub Stanković [43] dobijaju stavove opštije formulacije i navode primenu tih stavova na rešavanje operatorskih diferencijalnih jednačina.

Istraživanje postojanih tačaka monotonih operatora koji preslikavaju uredjene skupove u sebe same je treći pravac u teoriji postojanih tačaka. Ovde je osnovan klasični rezultat A. Tarsky-og [96] da skup postojanih tačaka uzlaznog operatora koji preslikava potpunu mrežu u sebe samu je neprazan i obrazuje potpunu mrežu. S. Abian i A. Brown [1] uopštavaju ovaj rezultat na potpune uredjene skupove, a Đuro Kurepa [67] na levo, odnosno desno potpune uredjene skupove.

Topološki smisao Banach-ovog stava iskazuje se u tzv. obrnutim Banach-ovim stavovima. L. Janos [47] za kompaktne metrizabilne a P. Meyers [80] za metrizabilne topološke prostore M dokazuju, da ako operator A

1^o ima jedinstvenu postojanu tačku $p \in M$,

2^o toj tački p konvergiraju nizovi $\{A^n x\}$ za svako $x \in M$, i

3^o postoji neka okolina V tačke p, takva da za svaku okolinu U tačke p postoji prirodan broj n_u sa svojstvom $A^n V \subset U$ za svako $n > n_u$,

tada postoji metrika d, koja definiše topologiju identičnu datoj, u odnosu na koju je A kontrakcija.

Stavove čija tvrdnja sadrži ovde navedena svojstva $1^o, 2^o$ i 3^o zvaćemo <u>stavovima Banach-ovog tipa</u>. Ostale rezultate sa uvek prisutnom, u nekom smislu, pretpostavkom o kontraktivnosti zvaćemo <u>rezultatima tipa kontrakcije</u>.

2. Cilj ovog rada je nastavak istraživanja u okvirima rezultata Banach-ovog tipa i tipa kontrakcije, a koja se odnose na dobijanje dovoljnih uslova za egzistenciju postojanih i periodičnih tačaka šire klase operatora, koji ispunjavaju oslabljeni uslov kontraktivnosti. Naime, u radu se takodje vrši uopštavanje Banach-ovog rezultata preko radova M. Edelstein-a, E. Rakoch-a, D. Bailey-a, W. Kammerer-a, R. Kasriel-a i M. Marjanovića.

Rad se sastoji iz pet odeljaka.

U prvom odeljku ispituju se dovoljni uslovi za egzistenciju postojanih i periodičnih tačaka jedne klase q-kontraktivnih operatora. Odeljak se završava stavom koji proširuje rezultat E. Rakoch-a. Kod svih ovih operatora je moguće vršiti procenu greške približnog od traženog rešenja jednačine $Ax = x$.

Drugi odeljak se sastoji iz dva dela i odnosi se na istraživanja dovoljnih uslova za egzistenciju postojanih i periodičnih tačaka operatora kod kojih je, kratko rečeno, koeficijenat kontraktivnosti jednak jedinici.

Treći odeljak je posvećen istraživanju dovoljnih uslova za egzistenciju postojanih i periodičnih tačaka operatora koji preslikavaju pseudometrički ili Kurepin prostor u sebe sama, gde pseudometrika uzima vrednosti u topološkom polupolju.

U četvrtom odeljku, koji se sastoji iz dva dela, ispituju se dovoljni uslovi za egzistenciju postojanih i periodičnih tačaka kontraktivnih operatora koji preslikavaju uniformne prostore u sebe same.

U petom odeljku dati su izvesni stavovi o egzistenciji zajedničkih postojanih i periodičnih tačaka operatora. Ovaj odeljak je i u vezi sa svim predhodnim.

Na kraju želim da izrazim svoje poštovanje rukovodiocima disertacije dr Đuri Kurepi, profesoru univerziteta i dr Milosavu Marjanoviću, docentu univerziteta, što su mi ukazali i uputili me na ovu problematiku. U toku izrade ovog rada oni su pokazali potrebno interesovanje. Ovo je bila velika podrška za koju ću im uvek biti zahvalan.

Moja opredeljenost na probleme topologije javlja se na predavanjima dr Zlatka Mamuzića, profesora univerziteta, na postdiplomskom tečaju na Prirodno-matematičkom fakultetu. Saradnja sa profesorom Mamuzićem na Univerzitetu i Odseku za topologiju Matematičkog instituta mnogo je uticala na dalji rad.

I. POSTOJANE I PERIODIČNE TAČKE GOTOVO q-KONTRAKTIVNIH OPERATORA U POTPUNIM METRIČKIM PROSTORIMA

U ovom odeljku dokazaćemo nekoliko stavova Banach-ovog tipa u potpunim metričkim prostorima, odnosno proširićemo Banach-ov stav i na operatore, koje smo nazvali gotovo q-kontraktivni operatori, koji nemoraju biti kontrakcije ali su takvi da se još uvek sačuvavaju sva tri dobra svojstva Banach-ovog stava za kontrakcije, naime:

1^{o} Postoji jedinstvena postojana tačka operatora A.

2^{o} Za proizvoljno $x_o \in M$ niz $x_n = Ax_{n-1}$ $(n=1,2,...)$ konvergira jedinstvenoj postojanoj tački, i

3^{o} Mogućnost ocene greške približnog od traženog rešenja jednačine $Ax = x$.

Dobijeni stav I.1. o gotovo q-kontraktivnim operatorima je, kao što pokazuje naš primer I.1, pravo proširenje dosadašnjih rezultata o postojanim tačkama operatora kod kojih, na izvestan način, figuriše jedinstven koeficijent kontraktivnosti $q < 1$ (M.Edelstein [32] i K. Singh [90]). Takodje je ilustrovano kako se pomenuti stav može primeniti na rešavanje integralne jednačine tipa Volterr-a.

Pošto je prethodno uveden pojam gotovo (U,q)-kontraktivnog operatora, dat je stav o periodičnim tačkama takvih operatora, te tako imamo stav ove vrste i za operatore koji preslikavaju potpun metrički prostor u sebe sama. Posle uvodjenja pojma U-lančanosti nekoga skupa, koji je nezavisan od toga da li je sam skup snabdeven nekom strukturom, dokazan je stav o postojanim tačkama gotovo (U,q)-kontraktivnog operatora. Taj stav se nadovezuje na rad Milosava Marjanovića [76], koji je uveo pojmove (U,q,k)-kontrakcije i U-lančanosti metričkog prostora.

Odeljak se završava stavom za operatore koje je razmatrao E. Rakotch [84]. Taj stav je jedno proširenje rezultata Rakotch-a sa preciznijom procenom greške približnog od traženog rešenja jednačine $Ax = x$.

Neka je (M,d) metrički prostor i neka operator A preslikava prostor M u sebe sama.

D e f i n i c i j a.- I.1. Operator A naziva se gotovo q-kontraktivan ili gotovo q-sažimanje ako postoji neki realan broj $0 \leq q < 1$ i ako za svako $x,y \in M$ postoji prirodan broj $m = m(x,y)$, koji zavisi od x i y, i realan broj $D(x,y) \geq d(A^m x, A^m y)$ tako da za svaki prirodan broj $n > m$ vredi

(1) $$d(A^n x, A^n y) \leq q^{n-m} D(x,y).$$

S t a v.- I.1. Neka neprekidan gotovo q-kontraktivan operator A preslikava potpun metrički prostor M u sebe sama. Tada

1° Operator A ima jednu jedinu postojanu tačku $p \in M$,

2° Ta postojana tačka p je granična vrednost niza

(2) $$x_0, x_1 = Ax_0, \ldots, x_n = Ax_{n-1}, \ldots ,$$

pri čemu početni član x_0 može biti proizvoljan element prostora M.

3° Brzina konvergencije $x_n \longrightarrow p$ $(n > m = m(x_0,x_1))$ ocenjuje se nejednačinom

$$d(x_n,p) \leq \frac{q^{n-m}}{1-q}\, D(x_0,x_1)$$

D o k a z.- Najpre ćemo dokazati da je niz (2) Cauchy-jev. Neka su n i s prirodni brojevi takvi da je $s > n > m = m(x_0,x_1)$. Tada je na osnovu definicije niza (2) i relacije trougla

$$d(x_n,x_s) \leq d(x_n,x_{n+1}) + d(x_{n+1},x_{n+2}) +\ldots+ d(x_{s-1},x_s) \leq$$

$$\leq d(A^n x_0,A^n x_1)+d(A^{n+1}x_0,A^{n+1}x_1)+\ldots+d(A^{s-1}x_0,A^{s-1}x_1).$$

Pošto je operator A gotovo q-kontraktivan odavde imamo

$$d(x_n,x_s) \leq q^{n-m}.D(x_0,x_1) + q^{n+1-m}.D(x_0,x_1)+\ldots+q^{s-1-m}.D(x_0,x_1) \leq$$

$$\leq D(x_0,x_1)\cdot(q^{n-m} + q^{n+1-m} +\ldots+ q^{s-1-m} +\ldots),$$

odnosno

$$d(x_n,x_s) \leq \frac{q^{n-m}}{1-q}\cdot D(x_0,x_1)\,. \tag{3}$$

Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ znači, prema (3) da za svaki realan broj $\varepsilon > 0$ postoji neki indeks n_0 tako da za $n,s > n_0$ izlazi $d(x_n,x_s) < \varepsilon$. Dakle, niz (2) je Cauchy-jev pa zato u prostoru M postoji element

$$p = \lim_{n\to\infty} x_n\,.$$

Pošto je operator A neprekidan na osnovu definicije niza (2) sledi

$$Ap = A \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} A x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = p,$$

tj. p je postojana tačka operatora A.

Dokažimo da je p jedinstveno i da ne zavisi od x_o. Ako umesto x_o uzmemo u M element $x_o' \neq x_o$, tada istim postupkom dolazimo do odredjenog niza $x_n' = Ax_{n-1}'$, $(n=1,2,...)$ i do elementa $p'=\lim_{n\to\infty} x_n'$ za koji je $p' = Ap'$.

Kako je A gotovo q-kontraktivan, postoji prirodan broj $s = s(p,p')$ sa svojstvom

$$d(A^n p, A^n p') \leq q^{n-s} D(p,p')$$

za svako $n > s$. Zato

$$d(p,p') = d(A^n p, A^n p') \leq q^{n-s} \cdot D(p,p') \to 0 \quad \text{kada } n \to \infty$$

daje $d(p,p') = 0$, tj. $p' = p$.

Nejednačinu koja služi za ocenu greške dobijamo iz (3). Naime, ako u (3) potražimo graničnu vrednost kada $s \to \infty$ dobija se

$$d(x_n, p) \leq \frac{q^{n-m}}{1-q} \cdot D(x_o, x_1);$$

Ovim je dokaz stava završen.

Uzimajući $m(x,y) = 0$ za sve $x,y \in M$ i $D(x,y) = d(x,y)$, gornji stav se svodi na Banach-ov stav.

Za sledeće posledice gornjeg stava biće nam potreban pojam ε-lančastog prostora.

Metrički prostor (M,d) je ε- l a n č a s t ako za svako $x,y \in M$ postoji ε - l a n a c $L(x,y)$, tj. konačan skup tačaka

$$x = x_0, x_1, \ldots, x_s = y$$

tako da je $d(x_{i-1}, x_i) < \varepsilon$; $(i=1,2,\ldots,s)$.

P o s l e d i c a.- I.1.2. Ova posledica odnosi se na stav M. Edelstein-a [32, str.8]. Neka je M potpun ε-lančast metrički prostor i neka (ε,q)-uniformna lokalna kontrakcija A preslikavanje prostora M u sebe sama, odnosno A je takvo preslikavanje da postoje realni brojevi $\varepsilon > 0$ i $0 \leq q < 1$ sa svojstvom

$$(4) \qquad 0 < d(x,y) < \varepsilon \Longrightarrow d(Ax,Ay) < q\, d(x,y).$$

Tada postoji jedinstvena tačka $p \in M$ sa osobinom $Ap = p$.

D o k a z.- Pošto je M ε-lančast, za svako $x,y \in M$ stavimo

$$D(x,y) = \inf\{ \sum d(x_{i-1},x_i)$$

gde je infimum uzet po svim ε-lancima $L(x,y)$ koji spajaju tačke x i y.

Lako je videti da iz (4) sledi da je preslikavanje A (uniformno) neprekidno i da ispunjava uslov (1) sa $m(x,y) = 0$ za svako $x,y \in M$, tj.

$$d(A^n x, A^n y) \leqq q^n D(x,y)$$

za svaki prirodan broj n.

P o s l e d i c a.- I.1.2. Ova posledica se odnosi na stav 5.2. K. Singh-a [90, str.36]. Neka je A preslikavanje potpunog ε-lančastog metričkog prostora M u sebe sama i neka postoji obostrano jednoznačno preslikavanje K prostora M na sebe sama koje je takvo da je preslikavanje $B = K^{-1}AK$ (ε,q)-uniformna lokalna kontrakcija. Tada postoji jedinstvena postojana tačka operatora A.

D o k a z.- Prema stavu Chu-a i Diaz-a [24] preslikavanje A ima jedinstvenu postojanu tačku tada i samo tada kada složeno preslikavanje $K^{-1}AK$ ima jedinstvenu postojanu tačku. Kako prema predhodnoj posledici preslikavanje $B = K^{-1}AK$ ima jedinstvenu postojanu tačku, sledi tvrdjenje ove posledice.

P r i m e r.- I.1. Navedimo jednostavan primer koji pokazuje da postoje takvi potpuni metrički prostori u kojima dejstvuju neprekidni gotovo q-kontraktivni operatori, koji na osnovu stava I.1. poseduju jedinstvene postojane tačke, ali gde nije mogućno primeniti stav Banach-a, Edelstein-a, niti stav Singh-a.

Neka je M podskup numeričke prave koji sadrži sve tačke x oblika ($\pm 2^{-n}$) ; n = 0, 1, 2, ... i tačku 0. Na M definišimo preslikavanje A na sledeći način

$$Ax = \begin{cases} 2^{-n+1} & \text{za } x = 2^{-n}\ ; \quad n = 1,2,\dots \\ -2^{-n-1} & \text{za } x = -2^{-n}\ ; \quad n = 0,1,2,\dots \\ 0 & \text{za } x = 0 \\ -1 & \text{za } x = 1 \end{cases}$$

Lako je videti da preslikavanje A preslikava kompaktan prostor M na sebe sama, da je neprekidno i gotovo (1/2)-kontraktivno preslikavanje i da je 0 jedinstvena postojana tačka.

Navedimo primenu stava I.1. na rešavanje integralne jednačine tipa Volterra

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x,y) \cdot f(y)dy + g(x).$$

Ovde su $K(x,y)$ i $g(x)$ date neprekidne funkcije za $a \leq x \leq b$, $a \leq y \leq b$, $f(x)$-tražena neprekidna funkcija za $a \leq x \leq b$, a λ-proizvoljan parametar.

Posmatrajmo neprekidan operator A koji preslikava potpun prostor neprekidnih funkcija $C[a,b]$ u sebe sama i koji je definisan na sledeći način

$$Af(x) = \lambda \int_a^x K(x,y) \cdot f(y)dy + g(x).$$

Za proizvoljno $f_1, f_2 \in C[a,b]$ imamo

$$(5) \quad d(Af_1, Af_2) = \max |Af_1(x) - Af_2(x)| \leq |\lambda| \cdot K_M (x-a) \max |f_1(x) - f_2(x)| \leq$$

$$\leq |\lambda| \cdot K_M \cdot (b-a) \cdot d(f_1, f_2),$$

gde je

$$K_M = \max | K(x,y) | .$$

Odavde sledi da je A kontrakcija za $|\lambda| < \frac{1}{K_M \cdot (b-a)}$ i na osnovu Banach-ovog stava jednačina Volterra ima jedinstveno rešenje za svako takvo λ. Pokazaćemo sada da postoji jedinstveno rešenje za proizvoljnu vrednost parametra λ.

Iz (5) sledi

$$d(A^2 f_1, A^2 f_2) \leq |\lambda|^2 \cdot K_M^2 \cdot \frac{(x-a)^2}{2!} \cdot \max | f_1(x) - f_2(x) | ,$$

i uopšte

$$d(A^n f_1, A^n f_2) \quad \frac{|\lambda|^n \cdot K_M^n \cdot (x-a)^n}{n!} \max | f_1(x) - f_2(x) | \leq \frac{|\lambda|^n K_M^n (b-a)^n}{n!} \; d(f_1, f_2)$$

Za proizvoljno λ postoji prirodan broj m, koji ne zavisi od f_1 i f_2, tako da A ispunjava uslov (1), odnosno da je

$$d(A^n f_1, A^n f_2) \leq q^{n-m} \; D(f_1, f_2)$$

za svako $n > m$. Naime, taj uslov je ispunjen za $m \geq |\lambda| \cdot K_M \cdot (b-a)$,

$q = \frac{|\lambda| \cdot K_M (b-a)}{m+1}$ i $D(f_1, f_2) = \frac{|\lambda|^m K_M^m (b-a)^m}{m!} \cdot d(f_1, f_2)$. Znači, na osnovu stava I.1. Volterr-ova integralna jednačina ima jedinstveno rešenje za proizvoljnu vrednost parametra λ.

N a p o m e n a.- Kako ovde u izrazu za $D(f_1, f_2)$ ulazi i

$d(f_1,f_2)$, i m ne zavisi od f_1 i f_2, operator A se može posmatrati i kao operator čija je iteracija A^k kontrakcija. Potrebno je za k odabrati dovoljno veliki broj takav da je

$$\frac{|\lambda|^k K_M^k (b-a)^k}{k!} \leq q < 1 \text{ (v. [5], str. 80-82)}.$$

Dokažimo da za operatore koji ne moraju obavezno biti neprekidni i gotovo q-kontraktivni, ali je neka njihova iteracija sa takvim svojstvima, da tada za njih važi stav sličan stavu I.1.

S t a v.- I.2. Neka operator A preslikava potpun metrički prostor M u sebe sama i neka postoji prirodan broj k tako da je operator $A^k = A\circ A\circ\ldots\circ A$ neprekidan i gotovo q-kontraktivan. Tada

1° Jednačina $Ax = x$ ima jedinstveno rešenje $p \in M$,

2° To rešenje p je granična vrednost niza

$$x_n = Ax_{n-1} = A^n x_0 \quad (n = 1,2,\ldots),$$

pri čemu x_0 može biti proizvoljan element prostora M

3° Brzina konvergencije $x_n \to p$ $(n > m = \max\{m(x_0,x_r); r=1,2,\ldots,k\})$ ocenjuje se nejednačinom

$$d(x_n,p) \leq \frac{q^{n-m}}{1-q} \cdot D(x_0,x_{r_0}),$$

gde je

$$D(x_0,x_{r_0}) = \max\{D(x_0,x_r)\ ;\quad r = 1,2,\ldots,k\}.$$

D o k a z.- Na osnovu stava I.1. operator $B = A^k$ ima jedinstvenu postojanu tačku p. Dokazaćemo da je Ap = p. No, kako je

$$Ap = ABp = AA^k p = A^{k+1} p = A^k Ap = BAp,$$

znači da je Ap postojana tačka operatora B, tj. da A preslikava skup postojanih tačaka operatora B u sebe sama. Ali, taj skup se sastoji samo iz jednog jedinog elementa p i zato mora biti

$$Ap = p.$$

Jedinost rešenja jednačine $Ax = x$ sledi iz jedinosti rešenja jednačine $Bx=x$, jer je $Ap' = p'$ sledi $Bp' = A^k p' = p'$.

Tvrdnja 2^o ovog stava sledi iz odgovarajuće tvrdnje stava I.1. Neka je $x_o \in M$ proizvoljno i stavimo $x_n = A^n x_o$, $n = 1,2,\ldots$. Prema stavu I.1. svi nizovi

$$\begin{array}{l}
x_o, Bx_o, B^2x_o, \ldots, B^n x_o, \ldots \\
x_1, Bx_1, B^2x_1, \ldots, B^n x_1, \ldots \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
x_r, Bx_r, B^2x_r, \ldots, B^n x_r, \ldots \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot \\
x_{k-1}, Bx_{k-1}, B^2x_{k-1}, \ldots, B^n x_{k-1}, \ldots
\end{array} \tag{6}$$

konvergiraju jedinstvenoj postojanoj tački p. Zato isprepletani niz $\{x_n\}$, formiran od ovih k nizova, konvergira istoj tački p.

Takodje i tvrdnju 3^{o} ćemo dokazati pomoću odgovarajuće tvrdnje prethodnog stava. Prema tom stavu za nizove (6) važe relacije

$$d(B^{n}x_{r},p) \leq \frac{q^{n-m_r}}{1-q} \cdot D(x_0,x_r) \qquad (r = 1,2,\ldots,k)$$

za svako $n > m_r$, gde je $m_r = m(x_0,x_r)$ ($r = 1,2,..,k$). Kako je $0 \leq q < 1$, za svako $n \in N$ važi

$$\frac{q^{n-m_r}}{1-q} \cdot D(x_0,x_r) \leq \frac{q^{n-m}}{1-q} \cdot D(x_0,x_{r_0}),$$

gde je $m = \max\{ m_r : r = 1,2,\ldots, k\}$ i $D(x_0,x_{r_0}) = \max\{ D(x_0,x_r) : r = 1,2,\ldots,k \}$. Prema tome, za isprepletani niz $\{ x_n : n > m \}$ važi

$$d(x_n,p) \leq \frac{q^{n-m}}{1-q} \cdot D(x_0,x_{r_0}),$$

što je i trebalo dokazati.

Neka je (M,d) metrički prostor, $U \subset M^2$ i neka je A preslikavanje prostora M u sebe sama. Sledeći pojam (U,q,k)-kontrakcije dao je Milosav Marjanović u radu [76].

Preslikavanje $A: M \to M$ je (U,q,k)- k o n t r a k c i j a ako za svako $(x,y) \in U$ sledi $(Ax,Ay) \in U$ i

$$(7) \qquad d(A^{k}x,A^{k}y) \leq q \cdot \max\{ d(A^{i}x,A^{i}y) : i = 0,1,2,\ldots, k-1 \},$$

pri čemu je $0 \leq q < 1$.

Posmatrajmo jedan opštiji pojam (U,q)-kontrakcije (za $k=1$)

u smislu sledeće definicije.

D e f i n i c i j a.- I.2. Neka je $U \subset M^2$, $q \in [0,1)$; operator $A:M \to M$ naziva se gotovo (U,q)-kontraktivan ako za svako $x,y \in M$ i $(x,y) \in U$ postoji prirodan broj $m = m(x,y)$ i realan broj $D(x,y) \geq d(A^m x, A^m y)$ tako da za svaki prirodan broj $n \geq m$ vredi

$$(8) \qquad d(A^n x, A^n y) \leq q^{n-m} D(x,y).$$

Dokažimo sledeći

S t a v.- I.3. Neka neprekidan i gotovo (U,q)-kontraktivan operator A preslikava potpun metrički prostor M u sebe sama. Ako postoji neka tačka $x_0 \in M$ sa svojstvom da za neki prirodan broj i vredi

$$(x_0, A^i x_0) \in \bigcup \{ U^n : n \in N \},$$

gde je $U^n = U \circ U \circ . . . \circ U$, tada je skup periodičnih tačaka operatora A neprazan.

D o k a z.- Neka je $(x_0, A^i x_0) \in U^j$. To znači da postoji konačan skup elemenata prostora M

$$x_0 = u_0, u_1, \ldots, u_j = A^i x_0,$$

takvih da je

$$(9) \qquad (u_{k-1}, u_k) \in U \qquad (k = 1,2,\ldots,j).$$

Kako je A gotovo (U,q)-kontraktivan postoje brojevi $m_k = m(u_{k-1},u_k)$ $(k = 1,2,\dots,j)$ sa svojstvom

$$d(A^n u_{k-1}, A^n u_k) \leq q^{n-m_k} \cdot D(u_{k-1},u_k)$$

za svako n m_k $(k = 1,2,\dots,j)$.

Stavimo $m = \max\{ m_k : k = 1,2,\dots j \}$. Tada je za $n > m$

$$(10) \qquad d(A^n u_{k-1},A^n u_k) \leq q^{n-m} \cdot D'(u_{k-1}, u_k)$$

za svako $k = 1,2,\dots,j$, gde je $D'(u_{k-1},u_k) = q^{n-m_k} \cdot D(u_{k-1}, u_k)$.

Kako je na osnovu relacije trougla

$$d(x_0,A^i x_0) \leq d(x_0, u_1)+d(u_1, u_2)+\dots+ d(u_{j-1},A^i x_0),$$

prema (9) i (10) za svako $n > \frac{m}{i}$ imamo

$$d(A^{ni}x_0,A^{ni}A^i x_0) \leq d(A^{ni}x,A^{ni} u_1)+d(A^{ni} u_1,A^{ni} u_2) + \dots +$$

$$+d(A^{ni} u_{j-1}, A^{ni}A^i x_0) \leq q^{ni-m} D'(x_0,u_1)+q^{ni-m} D'(u_1, u_2)+\dots+$$

$$+q^{ni-m} D'(u_{j-1},A^i x_0),$$

odnosno

$$(11) \qquad d(A^{ni}x_0,A^{(n+1)i}x_0) \leq q^{ni-m} \cdot D'(x_0,A^i x_0),$$

gde je

$$D'(x_0, A^i x_0) = \sum_{k=1}^{j} D'(u_{k-1}, u_k).$$

Neka su n i s prirodni brojevi takvi da je $s > n > \frac{m}{i}$. Tada je na osnovu relacije trougla i (11)

$$d(A^{ni}x_0, A^{si}x_0) \leq d(A^{ni}x_0, A^{(n+1)i}x_0) + d(A^{(n+1)i}x_0, A^{(n+2)i}x_0) + \ldots +$$

$$+ d(A^{(s-1)i}x_0, A^{si}x_0) \leq q^{ni-m} \cdot D'(x_0, A^i x_0) + q^{(n+1)i-m} \cdot D'(x_0, A^i x_0) +$$

$$+ \ldots + q^{(s-1)i-m} \cdot D'(x_0, A^i x_0),$$

odnosno

$$(12) \qquad d(A^{ni}x_0, A^{si}x_0) \leq \frac{q^{ni-m}}{1-q^i} D'(x_0, A^i x_0).$$

Kako je $\lim_{n\to\infty} q^{ni-m} = 0$, znači prema (12) da za svaki proizvoljno mali realan broj $\varepsilon > 0$ postoji neki indeks n_0 tako da iz $si > ni > n_0$ izlazi $d(A^{ni}x_0, A^{si}x_0) < \varepsilon$. Drugim rečima, niz $\{x_{ni}\} = \{A^{ni}x_0\}$ je Cauchy-ev, pa zato u prostoru M postoji tačka

$$p = \lim_{n\to\infty} x_{ni} .$$

Pošto operator A je neprekidan sledi da je i $A^i = A \circ A \circ \ldots \circ A$, neprekidan i zato imamo

$$A^i p = A^i \lim_{n\to\infty} x_{ni} = \lim_{n\to\infty} A^i A^{ni} x_0 = \lim_{n\to\infty} A^{(n+1)i} x_0 = \lim_{n\to\infty} x_{(n+1)i} = p,$$

tj. p je postojana tačka operatora A^i, ili, što je isto, p je periodična tačka operatora A, čime je dokaz stava završen.

Neka je $X \times X$ kombinirani proizvod skupa X sa samim sobom i $U \subset X \times X$.

D e f i n i c i j a.- I.3. Skup $S \subseteq X$ naziva se U-lančast ako je

$$S \times S \subseteq \bigcup \{ U^n : n \in N \},$$

gde je $U^n = U \circ U \circ \cdots \circ U$.

S t a v.- I.4. Neka neprekidan operator A preslikava potpun metrički prostor M u sebe sama, neka je $U \subset M^2$ i $q \in [0,1)$. Ako je

$$\Gamma(A) = \{ (x, Ax) : x \in M \} \subset \bigcup \{ U^n : n \in N \} \tag{13}$$

i ako postoji takav prirodan broj k da je operator $A^k = A \circ A \circ \cdots \circ A$ gotovo (U,q)-kontraktivan, tada za svako $x_0 \in M$ niz $\{x_n\} = \{A^n x_0\}$ konvergira nekoj postojanoj tački operatora A. Ako je M U-lančast tada postoji jedinstvena postojana tačka operatora A.

D o k a z.- Neka je $x_0 \in M$ proizvoljno i predpostavimo da je $Bx_0 = A^k x_0 \neq x_0$. Prema (13) sledi da postoji neki prirodan broj s tako da je $(x_0, Bx_0) \in U^s$.

Primenjujući za $i = 1$ na operator B isti postupak koji je izložen u predhodnom stavu dokazuje se da postoji element prostora M

$$p = \lim_{n \to \infty} B^n x_0.$$

Zbog neprekidnosti operatora $B = A^k$ sledi da je $p = Bp$.

Dokažimo sada da je $p = Ap$. Prema (13) postoji konačan skup elemenata $p = u_0, u_1, \ldots, u_j = Ap$

tako da je $(u_{i-1}, u_i) \in U$; $i = 1,2,\ldots,j$. Istim postupkom kao u prethodnom stavu dokazuje se da je

$$\lim_{n\to\infty} d(B^n p, B^n Ap) = 0.$$

Kako je $B = A^k$ i $p = Bp$, za svako $n \in N$ je

$$p = B^n p, \qquad Ap = AB^n p = A^{nk+1} p = A^{nk} Ap = B^n Ap,$$

pa je

$$d(p,Ap) = d(B^n p, B^n Ap)$$

za svako $n \in N$. Dakle, mora biti

$$d(p,Ap) = 0,$$

što dokazuje da niz

$$x_0, Bx_0, \ldots, B^n x_0, \ldots$$

konvergira postojanoj tački p operatora A.

Pošto je A neprekidan i $Ap = p$, tvrdnja stava da niz

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

konvergira tački p dokazuje se na isti način kao tvrdnja 2^0 stava I.2.

Pokažimo sada da ako je $M^2 = \bigcup \{U^n : n \in N\}$ da tada operator A ima jedinstvenu postojanu tačku. Neka su elementi $p, p' \in M$ takvi da je $p = Ap$ i $p' = Ap'$. Kako je B gotovo (U,q)-kontraktivan i $(p,p') \subset U^r$ za neko $r \in N$, sledi

$$d(p,p') = d(B^n p, B^n p') \longrightarrow 0 \quad \text{kada} \quad n \to \infty \text{, odnosno}$$

mora biti $p = p'$.

Time je stav dokazan.

Kako se lako može pokazati da iz uslova (U,q,k)-kontrakcije preslikavanja A sledi da je preslikavanje A^k gotovo (U,q)-kontraktivno, imamo sledeću

P o s l e d i c u.- 1.4.1. Ova posledica se odnosi na stav Milosava Marjanovića [76]. Neka je A neprekidno preslikavanje potpunog metričkog prostora M u sebe sama. Ako je A (U,q,k)-kontrakcija i ako je ispunjen uslov (13), tada za proizvoljno $x_o \in M$ niz

$$x_o,\ x_1 = Ax_o, \ldots,\ x_n = Ax_{n-1},\ \ldots$$

konvergira nekoj postojanoj tački. Ako je M U-lančast, tada postoji jedinstvena postojana tačka.

Sada ćemo razmatrati slučaj kada je konstanta $0 \leq q < 1$ zamenjena fukcijom $q(x,y)$ koja ispunjava uslov $0 \leq q(x,y) < 1$, ali je $\sup q(x,y) = 1$.

Označimo sa $F = \{q(x,y)\}$ skup svih funkcija $q(x,y)$ koje zadovoljavaju sledeće uslove:

a) $q(x,y) = q[d(x,y)]$, tj. $q(x,y)$ zavisi jedino od rastojanja tačaka x i y.

b) $q(d)$ je monotona neuzlazna funkcija od d.

c) $0 \leq q(d) < 1$ za svako $d > 0$.

d) $\sup q(x,y) = 1$.

Dokazaćemo da važi sledeći

S t a v.- I.5. Neka neprekidan operator A preslikava potpun metrički prostor M u sebe sama i neka za svako $x,y \in M$ ($x \neq y$) postoji bar jedan broj $n \in N$ takav da je $d(A^n x, A^n y) \neq d(x,y)$. Ako postoji tačka $x_o \in M$ i neki prirodan broj $m = m(x_o)$ sa svojstvom da za svako

$$x_i, x_j \in O(x_o) = \{x_o, x_1 = Ax_o, \ldots, x_n = A^n x_o, \ldots\}$$

i svaki prirodan broj $n \geq m(x_o)$ vredi

$$d(A^{n+1}x_i, A^{n+1}x_j) \leq q(A^n x_i, A^n x_j) \cdot d(A^n x_i, A^n x_j), \tag{14}$$

gde je $q(x,y) \in F$, tada

1^o Postoji jedinstveno rešenje p jednačine $Ax = x$.

2^o To rešenje p je granična vrednost niza

$$x_n = A^n x_o \qquad (n = 1,2,\ldots)$$

3^o Brzina konvergencije $x_n \to p$ ($n > m = m(x_o)$) ocenjuje se nejednačinom

$$d(x_n, p) \leq \max \left\{ \frac{[q(x_{n-1}, x_{n-2})]^{n-m}}{1 - q(d_o)} d(x_m, x_{m+1});\ d_o \right\},$$

gde je $d_o > 0$ proizvoljan realan broj.

D o k a z.- Dokazaćemo najpre da je

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0 . \tag{15}$$

Za $n > m = m(x_0)$ niz $d_n(x_0,x_1) = d(A^n x_0, A^n x_1) = d(x_n, x_{n+1})$ je silazni niz pozitivnih brojeva i zato postoji njegova granična vrednost $\alpha \geqslant 0$.

Kako je $d_n(x_0,x_1) \geqslant \alpha$ prema b) sledi $q_n(x_0,x_1) = q(A^n x_0, A^n x_1) \leqslant q(\alpha)$ za svako $n = m, m+1, \ldots$ Dalje,

$$\alpha \leqslant d_{n+1}(x_0,x_1) \leqslant q_n(x_0,x_1)\cdot d_n(x_0,x_1) \leqslant q(\alpha)\cdot d_n(x_0,x_1) \leqslant q(\alpha)\cdot \alpha$$

daje

$$[1 - q(\alpha)]\cdot \alpha \leqslant 0,$$

odakle sledi $\alpha = 0$, tj.

$$\lim_{n\to\infty} d_n(x_0,x_1) = \lim_{n\to\infty} d(A^n x_0, A^n x_1) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0.$$

Dokažimo sada da je niz $\{x_n : n \geqslant m(x_0)\}$ Cauchy-jev. Primetimo da za proizvoljne prirodne brojeve $s > n \geqslant m$ važi sledeća relacija

$$d(x_n,x_s) \leqslant d(x_n,x_{n+1}) + d(x_{n+1},x_{s+1}) + d(x_{s+1},x_s) \leqslant$$

$$\leqslant d(x_n,x_{n+1}) + q(x_n,x_s)\cdot d(x_n,x_s) + d(x_s,x_{s+1}),$$

odnosno

$$(16) \qquad d(x_n,x_s) \leq \frac{d(x_n,x_{n+1}) + d(x_s,x_{s+1})}{1 - q(x_n,x_s)}$$

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno mali realan broj. Prema (15) postoji indeks n_0 tako da je

$$(17) \qquad d_n(x_0,x_1) = d(x_n,x_{n+1}) < \frac{1 - q(\varepsilon)}{2} \cdot \varepsilon \;; \quad n > n_0.$$

Predpostavka da niz $\{x_n : n \geqslant m\}$ nije Cauchy-jev znači da za svako n postoji broj $p(n)$ tako da je

$$(18) \qquad d(x_n,x_{n+p(n)}) \geqslant \varepsilon .$$

Za $n > n_0$, $s = n + p(n)$ relacija (16) postaje

$$d(x_n,x_{n+p(n)}) \leq \frac{d(x_n,x_{n+1}) + d(x_{n+p(n)}, x_{n+p(n)+1})}{1 - q(x_n,x_{n+p(n)})} \leq$$

$$\leq \frac{2\, d(x_n,x_{n+1})}{1 - q(x_n,x_{n+p(n)})} ,$$

pa prema (17) i (18) imamo

$$\varepsilon \leq \frac{2\, d(x_n,x_{n+1})}{1-q(x_n,x_{n+p(n)})} < \frac{1 - q(\varepsilon)}{1 -q(x_n,x_{n+p(n)})} \cdot \varepsilon ,$$

odakle se dobija relacija

$$q(x_n,x_{n+p(n)}) > q(\varepsilon).$$

koja je protivna sa (18) i svojstvima a) i b) funkcije $q(x,y)$.

Znači, niz $\{x_n : n \geq m\}$ je Cauchy-jev i zato u potpunom prostoru M postoji

$$p = \lim_{n\to\infty} x_n .$$

Zbog neprekidnosti operatora A je

$$Ap = A \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = p,$$

tj. p je rešenje jednačine $Ax = x$. .

Tačka p je jedina za koju je $p = Ap$. Jer, ako za neko $p' \in M$ je $p' = Ap'$, tada je $d(A^n p, A^n p') = d(p,p')$ za svako $n \in N$, pa prema uslovu stava mora biti $p' = p$. Time smo dokazali tvrdnje 1^0 i 2^0.

Dokažimo sada tvrdnju 3^0. Za svako $s > n > m(x_o)$ za koje je

$$d(x_n, x_s) > d_o,$$

relacija (16), zbog $q(x_n,x_s) \leq q(d_o)$, postaje

$$d(x_n,x_s) \leq \frac{d(x_n,x_{n+1}) + d(x_s,x_{s+1})}{1 - q(d_o)}$$

odakle se prema (15), pri prelazu na graničnu vrednost kada $s \to \infty$ dobija

$$d(x_n,p) \leq \frac{d(x_n,x_{n+1})}{1-q(d_o)} .$$

Kako je $q(d)$ monotona neuzlazna funkcija, prema (14) odavde sledi za $n \geqslant m(x_o)$

$$d(x_n, p) \leqslant \frac{\{q(x_{n-1}, x_{n-2})\}^{n-m}}{1 - q(d_o)} \cdot d(x_m, x_{m+1}),$$

odnosno dobija se tražena relacija.

Ovim je stav dokazan.

P o s l e d i c a.- I.5.1. Ova posledica odnosi se na korolar stava 2. E. Rakotch-a [84, str.463]. Neka je M potpun metrički prostor i A preslikavanje prostora M u sebe sama koje ispunjava uslov

$$(19) \qquad d(Ax, Ay) \leqslant q(x,y)\, d(x,y)$$

za svako $x,y \in M$, gde je $q(x,y) \in F$. Tada postoji jedinstvena postojana tačka.

D o k a z.- Iz (19) neposredno sledi da je preslikavanje A (uniformno) neprekidno i da je uslov (14) ispunjen za svako $x \in M$ sa $m(x) = 0$.

II. POSTOJANE I PERIODIČNE TAČKE KONTRAKTIVNIH OPERATORA U METRIČKIM PROSTORIMA

Ovde ćemo dokazati nekoliko stavova tipa kontrakcije. U prvom delu stavovi se odnose na operatore, koje smo nazvali gotovo kontraktivni i gotovo ε-kontraktivni operatori, koji ispunjavaju uslov širi nego što je uslov za kontraktivne i ε-kontraktivne operatore.

Napomenimo odmah da uslov koga ispunjavaju kontraktivni operatori, odnosno

$$d(Ax,Ay) < d(x,y)$$

za svako $x,y \in M (x \neq y)$ i kompaktnost operatora A koji preslikava potpun metrički prostor M u sebe sama nisu dovoljni za egzistenciju postojane tačke. Naprimer, neka je $M = R^1_+ = [0,\infty)$ skup nenegativnih realnih brojeva i neka je M definisan operator A na sledeći način

$$Ax = x + e^{-x}.$$

Lako je videti da je

$$|Ax_1 - Ax_2| = (1-e^{-c})|x_1-x_2| < |x_1-x_2|$$

(c-tačka izmedju x_1 i x_2) i da je A kompaktan (upravo potpuno neprekidan), ali ni jedan realan broj nije rešenje jednačine $Ax = x$.

Medjutim, ako je M kompaktan metrički prostor tada se može pokazati (v.[50, str.565]) da

$$d(Ax,Ay) < d(x,y) \Longrightarrow d(Ax,Ay) < qd(x,y),$$

gde je $q < 1$ i ne zavisi od x i y.

M. Edelstein je u radu [33], koji se često navodi u radovima o postojanim i periodičnim tačkama, dao neke stavove o postojanim i periodičnim tačkama kontraktivnih i ε-kontraktivnih operatora koji preslikavaju metrički prostor M u sebe sama. Prostor M nemora biti kompaktan, ali se zahteva jedan uslov koji je kod kompaktnih prostora ispunjen. Naime, zahteva se da je operator A takav da postoji neki element $x \in M$ sa svojstvom da niz $\{A^n x\}$ sadrži konvergentan podniz $\{A^{n_i} x\}$. Takav uslov je uvek ispunjen, nezavisno od strukture prostora M, ako se, na primer, za neko $k \in N$ operator $A^k = A \circ A \circ \ldots \circ A$ svodi na konstantu.

Naš cilj su dalja istraživanja u pravcu Edelstein-ovih rezultata. Takodje se vrše i uopštavanja stavova Edelstein-a, kao što pokazuje naš primer II.1.1.

U drugom delu smo, oslobadjajući se zahteva da je prostor kompaktan na način sličan onom što ga je učinio Edelstein za kontraktivne operatore, dobili stavove o postojanim i periodičnim tačkama za operatore koje je D. Bailey u svojoj disertaciji [4] i radu [5] razmatrao u kompaktnim metričkim prostorima, uz uslov da su neprekidni na čitavom prostoru. Naš primer II.2.1. pokazuje da su ovde dobijeni rezultati opštiji od rezultata Bailey-a.

II.1. POSTOJANE I PERIODIČNE TAČKE GOTOVO KONTRAKTIVNIH OPERATORA

Neka je (M,d) metrički prostor i neka operator A preslikava prostor M u sebe sama.

D e f i n i c i j a.- II.1.1. Operator A se naziva gotovo kontraktivan na skupu $S \subsetneq M$ ako za svako $x,y \in S$ $(x \neq y)$ postoji prirodan broj $m = m(x,y)$ sa svojstvom da za svaki prirodan broj $n \geqslant m$ za koji je $A^n x \neq A^n y$ vredi

$$(1) \qquad d(A^{n+1}x,\ A^{n+1}y) < d(A^n x,\ A^n y).$$

Ako je u (1) zadovoljena i jednakost, tj. ako je

$$(1') \qquad d(A^{n+1}x,\ A^{n+1}y) \leqq d(A^n x,\ A^n y),$$

tada se A naziva slabo gotovo kontraktivan na skupu S.

D e f i n i c i j a.- II.1.2. Neka je realan broj $\varepsilon > 0$; operator A se naziva gotovo ε-kontraktivan na skupu $S \subsetneq M$ ako za svako $x,y \in S$ i $0 < d(x,y) < \varepsilon$ postoji prirodan broj $m = m(x,y)$ sa svojstvom da za svaki prirodan broj $n \geqslant m$ za koji je $A^n x \neq A^n y$ vredi

$$(2) \qquad d(A^{n+1}x, A^{n+1}y) < d(A^n x, A^n y) \leqslant d(x,y).$$

Ako je u (2) zadovoljena i jednakost, tj. ako je

(2') $\quad (A^{n+1}x, A^{n+1}y) \leq d(A^n x, A^n y) \leq d(x,y)$

tada se A naziva slabo gotovo ε -kontraktivan na skupu S.

Neka je X topološki prostor i A preslikavanje prostora X u sebe sama.

Skup svih onih tačaka $p \in X$ sa svojstvom da za neko $x \in X$ je p tačka nagomilavanja niza $\{A^n x\}$ označavaćemo sa X_A, tj.

$$X_A = \{ p : p \in \{A^n x\} \text{ za neko } x \in X \}$$

Ako pri tome tačka x ima još i svojstvo da za svaki niz $\{A^{n_i}x\}$ $(i=1,2,\ldots)$ postoji tačka nagomilavanja, tada ćemo takav skup X_A označavati sa X^*A, tj.

$$X^*A = \{ p : p \in \{A^n x\}' \text{ i } \{A^{n_i}x\}' \neq \emptyset \text{ za svaki niz } \{A^{n_i}x\}\}.$$

S t a v.- II.1.1. Neka operator A preslikava metrički prostor M u sebe sama i neka je skup M_A neprazan. Ako je A slabo gotovo kontraktivan na M i neprekidan i gotovo kontraktivan na M_A, tada operator A ima jedinstvenu postojanu tačku.

D o k a z.- Neka je $p \in M_A$ i neka je x_o takva tačka prostora M da je p tačka nagomilavanja niza $\{A^n x_o\}$. Takvo $x_o \in M$ postoji na osnovu definicije skupa $M_A \subset M$ i uslova $M_A \neq \emptyset$.

Dokazaćemo sada da je $p = Ap$. Po predpostavci p je tačka nagomilavanja niza $\{A^n x_o\}$. Znači, postoji niz pozitivnih celih brojeva $(n_1 < n_2 < \ldots < n_i < \ldots)$ tako da je

$$\lim_{i\to\infty} A^{n_i}x_o = p.$$

Zbog neprekidnosti operatora A na M_A sledi neprekidnost složenog preslikavanja $A^S=A\circ A\circ \dots \circ A$ na M_A za svako $S\in N$. Kako je

$$Ap = A\lim_{i\to\infty} A^{n_i}x_o = \lim_{i\to\infty} AA^{n_i}x_o = \lim_{i\to\infty} A^{n_i}x_1 ,$$

to znači da $Ap\in M_A$.

Ako bi bilo $p \neq Ap$ na osnovu definicije gotovo kontraktivnosti operatora A na M_A postojao bi broj $m = m(p,Ap)$ sa svojstvom

$$(3) \qquad d(A^{m+1}p,A^{m+1}Ap) < d(A^m p,A^m Ap).$$

Kako je A slabo gotovo kontraktivan na M za svako $s\geq n\geq m(x_o,x_1)$ imamo

$$d(A^s x_o,A^s x_1) \leq d(A^n x_o,A^n x_1).$$

Neka je $i_o\in N$ odabran tako da je $n_{i_o} + m + 1 \geq m(x_o,x_1)$.

Kako je $n_{i+1} + m \geq n_i + m + 1 \geq m(x_o,x_1)$ za svako $i\geq i_o$, sledi

$$(4) \qquad d(A^{n_{i+1}+m}x_o,A^{n_{i+1}+m}x_1) \leq d(A^{n_i+m+1}x_o,A^{n_i+m+1}x_1)$$

za svako $i \geq i_o$. Pošto je

$$A^m p = A^m \lim_{i\to\infty} A^{n_i}x_o = \lim_{i\to\infty} A^{n_i+m}x_o = \lim_{i\to\infty} A^{n_{i+1}+m}x_o ,$$

$$A^m Ap = A^{m+1}p = \lim_{i\to\infty} A^{n_i+m+1}x_o = \lim_{i\to\infty} A^{n_{i+1}+m}x_1 ,$$

$$A^{m+1}Ap = \lim_{i\to\infty} A^{n_i+m+1}x_1 ,$$

prema (4) sledi

$$d(A^m p,\ A^m Ap) = \lim_{i\to\infty} d(A^{n_{i+1}+m}x_o,\ A^{n_{i+1}+m}x_1) \leq$$

$$\leq \lim_{i\to\infty} d(A^{n_i+m+1}x_o,\ A^{n_i+m+1}x_1) = d(A^{m+1}p,\ A^{m+1}Ap) ,$$

odnosno

$$d(A^m p,\ A^m Ap) \leq d(A^{m+1}p,\ A^{m+1}Ap),$$

što je protivno sa (3). Znači, predpostavka da je $p \neq Ap$ nije ispravna. Time smo dokazali da je p postojana tačka.

Dokažimo sada da je p jedina postojana tačka operatora A. Jedinost tačke p sledi zbog gotovo kontraktivnosti operatora A na skupu M_A. Ako je $p' \in M$ takvo da je $p' = Ap'$ tada je $p' \in M_A$. No, kako je

$$d(A^{n+1}p, A^{n+1}p') = d(A^n p, A^n p') = d(p,p')$$

za svako $n \in N$, sledi da je $p' = p$.

Tako je stav dokazan.

P o s l e d i c a.- II.1.1.1. Neka operator A preslikava metrički prostor M u sebe sama. Ako postoji obostrano jednoznačno preslikavanje K prostora M na sebe sama sa svojstvom da je preslikavanje $B = K^{-1} AK$ slabo gotovo kontraktivno na M, skup M_B neprazan i B neprekidno i gotovo kontraktivno na M_B, tada postoji jedinstvena postojana tačka operatora A.

D o k a z.- Prema stavu II.1.1. operator B ima jedinstvenu postojanu tačku p. Iz činjenice da operator A ima jedinstvenu postojanu tačku tada i samo tada kada operator $K^{-1} AK$ ima jedinstvenu postojanu tačku sledi da je Kp jedinstvena postojana tačka operatora A.

P o s l e d i c a.- II.1.1.2. Neka u kompaktnom metričkom prostoru M dejstvuje slabo gotovo kontraktivan operator A. Ako je A neprekidan i gotovo kontraktivan na M_A, tada operator A ima jedinstvenu postojanu tačku p i za svako $x \in M$ je $\lim_{n\to\infty} A^n x = p$.

D o k a z.- Zbog kompaktnosti prostora M sledi da za proizvoljno $x \in M$ niz iteracija $\{A^n x\}$ ima bar jednu tačku nagomilavanja $p = \lim_{i\to\infty} A^{n_i} x$. Prema dokazu stava II.1.1. sledi da je p jedinstvena postojana tačka.

Dokažimo sada da

$$(5) \qquad p = \lim_{i\to\infty} A^{n_i} x \Longrightarrow p = \lim_{n\to\infty} A^n x.$$

Kako je niz realnih brojeva $d_n = d(p, A^n x) = d(A^n p, A^n x)$ za $n \geq m(p,x)$ monoton i sadrži kofinalan podniz $d_{n_i} = d(p, A^{n_i} x)$ koji konvergira nuli, sledi da i sam taj niz konvergira nuli, tj. da je $p = \lim_{n\to\infty} A^n x$.

P o s l e d i c a.- II.1.1.3. Ova posledica se odnosi na stav M. Edelstein-a [33, str.74] -. Neka je M metrički prostor i A kontraktivno preslikavanje prostora M u sebe sama, odnosno takvo da je za svako $x,y \in M (x \neq y)$

$$d(Ax,Ay) < d(x,y). \tag{6}$$

Ako postoji takvo $x \in M$ da niz iteracija $\{A^n x\}$ sadrži konvergentni podniz $\{A^{n_i} x\}$, tada preslikavanje A ima jedinstvenu postojanu tačku.

D o k a z.- Iz (6) neposredno sledi da je operator A (uniformno) neprekidan na celom prostoru M i da na M ispunjava uslov (1) sa $m(x,y) = 0$. Uslov da je za neko $x \in M$ $\lim_{i\to\infty} A^{n_i}x = p \in M$ znači da je M_A neprazan.

P o s l e d i c a.- II.1.1.4. Ova posledica se odnosi na stav 7.1. K. Singh-a [90, str.39] -. Neka je A preslikavanje metričkog prostora M u sebe sama i neka postoji obostrano jednoznačno preslikavanje K prostora M na sebe sama koje je takvo da je preslikavanje $B = K^{-1}AK$ kontraktivno, tj. da ispunjava uslov

$$d(Bx,By) < d(x,y)$$

za svako $x,y \in M (x \neq y)$. Ako postoji tačka $x \in M$ takva da niz iteracija $\{B^n x\}$ sadrži konvergentan podniz $\{B^{n_i} x\}$, tada je $p=\lim_{i\to\infty} B^{n_i}$ jedinstvena postojana tačka operatora A.

P r i m e r.- II.1.1. Ovaj primer pokazuje da postoje operatori koji ispunjavaju uslov (1) ali nije mogućno odabrati m tako da ne zavisi od x i y, tj. da je $\sup\limits_{x,y\in M} m(x,y) = \infty$.

Neka je M podskup euklidske ravni definisan sa

$$M = \left\{ (x,y) : \begin{array}{l} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{array} ;\ \theta = 0, \pm \frac{\pi}{2^n} ;\ n \in N \right\}.$$

Preslikavanje A prostora M na sebe sama definišimo na sledeći način:

$$A\theta = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2^{n+1}} & \text{za } \theta = \dfrac{\pi}{2^n} ; \quad n = 1,2,\dots \\ -\dfrac{\pi}{2^{n-1}} & \text{za } \theta = -\dfrac{\pi}{2^n} ; \quad n = 2,3,\dots \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{za } \theta = -\dfrac{\pi}{2} \\ 0 & \text{za } \theta = 0 \end{cases}$$

Ovde je preslikavanje A neprekidno i gotovo kontraktivno na potpunom prostoru M gde je još ispunjen uslov $M_A \neq \emptyset$. Zato na osnovu stava II.1.1. postoji jedinstvena postojana tačka.

S t a v.- II.1.2. Neka operator A preslikava metrički prostor M u sebe sama i neka je skup M_A neprazan. Ako je A slabo gotovo ε-kontraktivan na M i neprekidan i gotovo ε-kontraktivan na M_A, tada je skup periodičnih tačaka neprazan.

D o k a z.- Neka je $p \in M_A$ i neka je $x \in M$ takva tačka da je

$$p = \lim_{i\to\infty} A^{n_i} x \qquad (n_1 < n_2 < \dots < n_i < \dots).$$

Tada postoji broj $i_o \in N$ takav da je

$$d(p,A^{n_i}x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

za svako $i > i_o$. Stavimo $r = n_{i_o+1}$, $s = n_{i_o+2}$, $k = s - r$, $y = A^r x$ i $z = A^s x = A^k y$. Tada je

$$(7) \qquad d(y,z) = d(A^r x, A^s x) \leq d(A^r x,p) + d(p,A^s x) < \varepsilon .$$

Dokazaćemo da je $A^k p = p$.

Predpostavimo da je $A^k p \neq p$. Kako je A neprekidan na M_A neprekidan je i operator A^k na M_A, pa je

$$A^k p = A^k \lim_{i\to\infty} A^{n_i}x = \lim_{i\to\infty} A^{n_i+k}x ,$$

tj. $A^k p \in M_A$. Zbog gotovo ε-kontraktivnosti A na M_A i $A^k p \neq p$ sledi da postoji prirodan broj $m = m(p,A^k p)$ sa svojstvom

$$(8) \qquad d(A^{m+1}p,\ A^{m+1}A^k p) < d(A^m p,\ A^m A^k p).$$

Neka je i_1 takav da je $n_{i_1} - r + m + 1 \geq m(y,z)$ i stavimo $i_2 = \max\{ i_o, i_1 \}$.

Kako je $n_{i+1} - r + m \geq n_i + 1 - r + m$ za svako $i \in N$, zbog (7) i slabe gotovo ε-kontraktivnosti A na M imamo

$$(9) \qquad d(A^{n_{i+1}-r+m}y, A^{n_{i+1}-r+m}z) \leq (A^{n_i+1-r+m}y, A^{n_i+1-r+m}z)$$

za svako $i > i_2$. Pošto je

$$A^m p = A^m \lim_{i\to\infty} A^{n_i} x = A^m \lim_{i\to\infty} A^{n_{i+1}} x = A^m \lim_{i\to\infty} A^{n_{i+1}-r} y = \lim_{i\to\infty} A^{n_{i+1}-r+m} y,$$

$$A^{m+1} p = \lim_{i\to\infty} A^{n_i-r+m+1} y ,$$

$$A^m A^k p = A^{m+k} p = A^{m+k} \lim_{i\to\infty} A^{n_{i+1}-r+k} z = \lim_{i\to\infty} A^{n_{i+1}-r+m} z,$$

$$A^{m+1} A^k p = \lim_{i\to\infty} A^{n_i-r+m+1} z ,$$

prema (9) sledi:

$$d(A^m p, A^m A^k p) = \lim_{i\to\infty} d(A^{n_{i+1}-r+m} y, A^{n_{i+1}-r+m} z) \leq$$

$$\leq \lim_{i\to\infty} d(A^{n_i+1-r+m} y, A^{n_i+1-r+m} z) = d(A^{m+1} p, A^{m+1} A^k p),$$

što je protivno sa (8). Znači, $A^k p = p$ čime je stav dokazan.

P o s l e d i c a.- II.1.2.1. Ova posledica se odnosi na stav 2 M. Edelstein-a [33, str.76] -. Neka je M metrički prostor i A preslikavanje prostora M u sebe sama. Ako postoji realan broj $\varepsilon > 0$ takav da

(10) $$0 < d(x,y) < \varepsilon \Longrightarrow d(Ax,Ay) < d(x,y); \quad x,y \in M,$$

i ako za neko $x \in M$ niz iteracija $\{A^n x\}$ sadrži konvergentan podniz, tada je skup periodičnih tačaka neprazan.

D o k a z.- Lako je videti da iz (10) sledi da je preslikavanje A neprekidno na celom prostoru M i da na M ispunjava uslov (2) sa $m(x,y) = 0$. Uslov da za neko $x \in M$ niz $\{A^n x\}$ sadrži konvergentan podniz znači da je skup M_A neprazan.

S t a v.- II.1.3. Neka operator A dejstvuje u metričkom prostoru M. Ako je A neprekidan i gotovo ε-kontraktivan, tada je skup periodičnih tačaka zatvoren. Ako je M kompaktan, tada je skup periodičnih tačaka neprazan i konačan i za svako $x \in M$ postoji periodična tačka p i prirodan broj k tako da niz $\{A^{nk}x\}$ $(n=1,2,\ldots)$ konvergira tački p.

D o k a z.- Predpostavimo da je M_A neprazan. Prema dokazu stava II.1.2. svaki element $p \in M_A$ je periodična tačka. Znači, skup svih periodičnih tačaka je tačno skup M_A. Neka je q tačka nagomilavanja skupa M_A. Treba dokazati da je $q \in M_A$, tj. da postoji neka tačka $x_0 \in M$ takva da je q tačka nagomilavanja niza $\{A^n x_0\}$.

Neka je $V(q,\delta)$ $(0<\delta<\varepsilon)$ proizvoljna okolina tačka q i K proizvoljan prirodan broj. Pošto je q tačka nagomilavanja skupa periodičnih tačaka sledi da postoji takvo x da je

$$d(q,x) < \frac{\delta}{2}$$

i da je $A^k x = x$ za neko $k \in N$. Neka je n_0 takav prirodan broj da je $n_0 k \geqslant \max\{K, m(q,x)\}$. Tada na osnovu gotovo ε-kontraktivnosti operatora A imamo da je

$$d(A^{n_0 k}q, A^{n_0 k}x) = d(A^{n_0 k}q, x) \leq d(q,x) < \frac{\delta}{2}$$

odakle sledi

$$d(q, A^{n_o k} q) \leq d(q,x) + d(x, A^{n_o k} q) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta ,$$

t j.

$$A^{n_o k} q \in V(q, \delta).$$

Time smo dokazali da je q tačka nagomilavanja niza $\{A^n q\}$, odnosno da q pripada skupu M_A. Dakle, skup periodičnih tačaka je zatvoren.

Dokažimo sada da ako su p i q takve da je $p = A^k p$ i $q = A^s q$ i ako je $d(p,q) < \varepsilon$, da su tada tačke p i q identične. Zaista, kako je $d(p,q) < \varepsilon$ i $d(A^{nks} p, A^{nks} q) = d(p,q)$ za svako $n \in N$, na osnovu gotovo ε-kontraktivnosti operatora A sledi $p = q$.

Neka je $\{V(p, \varepsilon): p \in M_A\}$ otvoreni pokrivač skupa M_A. Pošto je M_A zatvoren podskup kompaktnog prostora M sledi da je M_A kompaktan i zato ovaj pokrivač sadrži konačan podpokrivač. Prema pokazanom svaki član ovog podpokrivača sadrži samo po jednu periodičnu tačku, odakle sledi da je skup periodičnih tačaka konačan.

Dokažimo sada da za svako $x \in M$ postoji $p \in M_A$ i $k \in N$ tako da je

$$\lim_{n \to \infty} A^{nk} x = p.$$

Neka je x proizvoljna tačka kompaktnog prostora M. Tada postoji tačka nagomilavanja $p' \in M$ niza $\{A^n x\}$, koja je periodična. Znači, za neki prirodan broj k je $A^k p' = p'$.

Kako je

$$\{A^n x\} = \bigcup_{i=0}^{k-1} \{A^{nk-i}x\} \quad (n=1,2,\ldots),$$

tačka p' je tačka nagomilavanja niza $\{A^{nk-i_o}x\}$ za neko $0 \le i_o \le k-1$. Tada je tačka $p = A^{i_o}p'$ tačka nagomilavanja niza $\{A^{nk}x\}$. za proizvoljno $0 < \delta < \varepsilon$ postoji broj n_o tako da je

$$d(p, A^{n_o k}x) < \delta < \varepsilon.$$

Kako je $A^k p = p$ i A gotovo ε-kontraktivan sledi da za svako $n \geq n_o + \frac{1}{k}\, m(p, A^{n_o k}x)$ imamo:

$$d(A^{nk-n_o k}p, A^{nk}x) = d(p, A^{nk}x) \leq d(p, A^{n_o k}x) < \delta.$$

Iz proizvoljnosti broja δ sledi da je

$$\lim_{n\to\infty} A^{nk}x = p.$$

Ovim je stav dokazan.

Neka je (L) klasa ε-lančastih metričkih prostora M sa svojstvom da za svako $x,y \in M$ postoji neki ε-lanac $L_o(x,y) = \{x=x_o,\ldots,x_n=y\}$ na kome je postignut $\inf\{\sum d(x_{i-1},x_i)\}$ uzet po svim ε-lancima $L(x,y)$, tj.

$$\sum_{i=1}^{n} d(x_{i-1},x_i) = \inf_{L(x,y)} \{\sum d(x_{i-1},x_i)\}$$

S t a v.- II.1.4. Neka operator A preslikava ε-lančast metrički prostor M klase (L) u sebe sama i neka je skup M_A neprazan.

Ako je A gotovo $\mathcal{E}$-kontraktivan na M i neprekidan na M_A onda postoji jedinstvena postojana tačka.

D o k a z.- Neka je $p \in M_A$. Na osnovu stava II.1.2. postoji prirodan broj k sa svojstvom $A^k p = p$. Dokazacemo da je p jedina tačka sa navedenim svojstvom.

Predpostavimo da je $p' \neq p$ takva tačka prostora M da je $A^k p' = p'$ i neka je $L_o(p,p') = \{ p = x_o, x_1, \ldots, x_r = p' \}$ $\mathcal{E}$-lanac sa svojstvom

$$\sum_{i=1}^{r} d(x_{i-1},x_i) = \inf_{L(p,p')} \{ \sum d(x_{i-1},x_i) \} .$$

Kako za svako $i = 1,2,\ldots, r$ je $d(x_{i-1},x_i) < \mathcal{E}$, na osnovu gotovo $\mathcal{E}$-kontraktivnosti operatora A sledi da postoje takvi brojevi $m_i = m(x_{i-1},x_i)$ $(i = 1,2,\ldots,r)$ da je za svako $n > m_i$

$$d(A^n x_{i-1}, A^n x_i) < d(x_{i-1},x_i) \qquad (i = 1,2,\ldots,r).$$

Neka je $m = \max \{ m_i : i = 1,2,\ldots,r \}$. Tada je

$$d(A^n x_{i-1}, A^n x_i) < d(x_{i-1},x_i)$$

za svako $n > m$. Neka je n_o takav prirodan broj da je $n_o k > m$. Tada $\mathcal{E}$-lanac

$$L_1 (p,p') = \{ p = A^{n_o k} x_o, A^{n_o k} x_1, \ldots, A^{n_o k} x_r = p' \}$$

za svako $n > m(i = 1,2,\dots,r)$.

Kako je $d(p,x_1) < \mathcal{E}$ prema uslovu stava postoji tačka nagomilavanja q' niza $\{A^n x_1\} = \bigcup_{i=0}^{k-1} \{A^{nk+i} x_1\}$. Znači, za neko $0 \leq i_0 \leq k-1$ je q' tačka nagomilavanja niza $\{A^{nk+i_0} x_1\}$. Zbog neprekidnosti operatora A^{k-i_0} je tada tačka $q = A^{k-i_0} q'$, tačka nagomilavanja niza $\{A^{nk} x_1\}$. Na osnovu stava II.1.2. q je periodična i kako je $d(p,q) < \mathcal{E}$ sledi da je $q = p$.

Odavde sledi da možemo odabrati prirodan broj $n_0 > \frac{m}{k}$ tako da je

$$d(p,A^{n_0 k} x_1) < \mathcal{E} - d(x_1,x_2).$$

No, tada bi imali

$$d(p,A^{n_0 k} x_2) \leq d(p,A^{n_0 k} x_1) + d(A^{n_0 k} x_1, A^{n_0 k} x_2) <$$

$$< d(p,A^{n_0 k} x_1) + d(x_1,x_2) < \mathcal{E},$$

pa bi $\mathcal{E}$-lanac

$$p = A^{n_0 k} x_0, A^{n_0 k} x_2, \dots, A^{n_0 k} x_r = p'$$

bio $\mathcal{E}$-lanac sa $s = r - 1$, što je protivno sa (11). Znači, tačka p je jedina postojana tačka operatora A^k. Odavde sledi da je p jedinstvena postojana tačka i operatora A.

P o s l e d i c a.- II.1.5.1. Neka operator A preslikava kompaktan $\mathcal{E}$-lančast metrički prostor M u sebe sama. Ako je A gotovo

ε-kontraktivan na M i neprekidan na skupu M_A, tada postoji jedinstvena postojana tačka.

P o s l e d i c a.- II.1.5.2. Ova posledica se odnosi na stav M. Edelstein-a [33, str.78] -. Neka preslikavanje A preslikava ε-lančast metrički prostor M u sebe sama i neka je za neko $x \in M$ $\lim_{i\to\infty} A^{n_i}x = p \in M$. Ako za svako $x,y \in M$ vredi

$$0 < d(x,y) < \varepsilon \Longrightarrow d(Ax,Ay) < d(x,y)$$

i tačka p ima kompaktnu sfernu okolinu poluprečnika $r \geq \varepsilon$, tada je p jedinstvena postojana tačka.

II.2 POSTOJANE I PERIODIČNE TAČKE UOPŠTENO KONTRAKTIVNIH OPERATORA

Neka je (M,d) metrički prostor i neka operator A preslikava prostor M u sebe sama.

D e f i n i c i j a.- II.2.1. Operator A se naziva uopšteno kontraktivan na skupu $S \subseteq M$ ako za svako $x,y \in S (x \neq y)$ postoji prirodan broj $m = m(x,y)$, koji zavisi od x i y, sa svojstvom

(1) $$d(A^m x, A^m y) < d(x,y).$$

Ako je u (1) zadovoljena i jednakost, tj. ako je

(1') $$d(A^m x, A^m y) \leq d(x,y)$$

tada se A naziva slabo uopšteno kontraktivan na skupu S.

D e f i n i c i j a.- II.2.2. Neka je realan broj $\varepsilon>0$; operator A se naziva uopšteno ε-kontraktivan na skupu $S \subseteq M$ ako za svako $x,y \in S$ postoji neki prirodan broj $m = m(x,y)$ sa svojstvom

$$(2) \qquad 0<d(x,y)<\varepsilon \Rightarrow d(A^m x, A^m y) < d(x,y).$$

Ako je u (2) zadovoljena i jednakost, tj. ako

$$(2') \qquad 0<d(x,y)<\varepsilon \Rightarrow d(A^m x, A^m y) \leq d(x,y),$$

tada se A naziva slabo uopšteno ε-kontraktivan na skupu S.

S t a v.- II.2.1. Neka operator A preslikava metrički prostor M u sebe sama i neka je skup M^*A neprazan. Ako je A slabo uopšteno kontraktivan na M i neprekidan i uopšteno kontraktivan na M^*A, tada operator A ima jedinstvenu postojanu tačku.

D o k a z.- Neka je $p \in M^*A$. Prema definiciji skupa M^*A postoji tačka $x_o \in M$ sa svojstvom da je p tačka nagomilavanja niza $\{A^n x_o\}$ i da za svaki niz iteracija $\{A^{n_i} x_o\}$ postoji tačka nagomilavanja u M.

Dokazaćemo najpre da postoji bar jedna postojana tačka. Stavimo $x_1 = Ax_o$.

Ako za neki prirodan broj n_o je $A^{n_o} x_o = A^{n_o} x_1$ tada je $A^{n_o} x_o$ nepokretna tačka, jer je onda

$$A^{n_o}x_o = A^{n_o}x_1 = A^{n_o}Ax_o = AA^{n_o}x_o$$

i gornje tvrdjenje bi bilo dokazano. Predpostavimo zato da je $A^n x_o \neq A^n x_1$ za svaki prirodan broj n.

Kako je A slabo uopšteno kontraktivan na M i $x_o \neq x_1$ postoji prirodan broj $m_1 = m_1(x_o, x_1)$ takav da je

$$d(A^{m_1}x_o,\ A^{m_1}x_1) \leq d(x_o, x_1).$$

Predpostavimo da je m_1 odabran tako da je to prvi, odnosno najmanji broj sa navedenim svojstvom i stavimo $n_1 = m_1$.

Pošto je $A^{n_1}x_o \neq A^{n_1}x_1$ iz istog razloga postoji - predpostavimo najmanji - prirodan broj $m_2 = m_2(A^{n_1}x_o, A^{n_1}x_1)$ sa svojstvom

$$d(A^{m_2}A^{n_1}x_o, A^{m_2}A^{n_1}x_1) = d(A^{n_2}x_o, A^{n_2}x_1) \leq d(A^{n_1}x_o, A^{n_1}x_1),$$

gde je $n_2 = n_1 + m_2$.

Predpostavimo sada da su

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_i$$

već definisani prirodni brojevi. Tada ćemo odabrati najmanji prirodan broj $m_{i+1} = m_{i+1}(A^{n_i}x_o, A^{n_i}x_1)$ sa svojstvom

$$d(A^{m_{i+1}}A^{n_i}x_o, A^{m_{i+1}}A^{n_i}x_1) \leq d(A^{n_i}x_o, A^{n_i}x_1)$$

i staviti

$$n_{i+1} = n_i + m_{i+1}\ .$$

Napomenimo da ovako definisan niz ima svojstvo da za svaki njegov podniz $\{n_{i_j}\}$ $(j=1,2,\ldots)$ i bilo koji prirodan broj K vredi

$$(3) \qquad n_{i_j} \geq K \Rightarrow d(A^{n_{i_j}}x_0, A^{n_{i_j}}x_1) \leq d(A^K x_0, A^K x_1).$$

Neka je sada p tačka nagomilavanja niza $\{A^{n_i}x_0\}$. Tada postoji podniz

$$\{A^{n_{i_j}}x_0\} \quad (n_{i_{j+1}} > n_{i_j} \geq n_j; \quad j=1,2,\ldots)$$

toga niza sa svojstvom

$$p = \lim_{j\to\infty} A^{n_{i_j}}x_0 .$$

Pošto je $p \in M^{*}A$ i A neprekidan na $M^{*}A$ sledi

$$Ap = A \lim_{j\to\infty} A^{n_{i_j}}x_0 = \lim_{j\to\infty} A^{n_{i_j}}Ax_0 = \lim_{j\to\infty} A^{n_{i_j}}x_1$$

i zato

$$Ap \in M^{*}A.$$

Dokazaćemo sada da je $Ap = p$. Ako je $p \neq Ap$ na osnovu kontraktivnosti operatora A na $M^{*}A$ sledi da postoji prirodan broj $m = m(p,Ap)$ sa svojstvom

$$(4) \qquad d(A^m p, A^m Ap) < d(p, Ap).$$

Kako je $n_{i_{j+m}} \geq n_{i_j} + m$ za svako $j \in N$, prema (3) sledi

$$(5)\qquad d(A^{n_{i_j}+m}x_0,\ A^{n_{i_j}+m}x_1) \leq d(A^{n_{i_j}+m}x_0, A^{n_{i_j}+m}x_1)$$

za svako $j \in N$. Pošto je

$$Ap = A \lim_{j\to\infty} A^{n_{i_j}}x_0 = \lim_{j\to\infty} A^{n_{i_j}}Ax_0 = \lim_{j\to\infty} A^{n_{i_j}+m}x_1\ ,$$

$$A^m p = \lim_{j\to\infty} A^{n_{i_j}+m} x_0\ ,$$

$$A^m Ap = \lim_{j\to\infty} A^{n_{i_j}+m+1} x_0 = \lim_{j\to\infty} A^{n_{i_j}+m} x_1\ ,$$

prema (5) sledi

$$d(p,Ap) = \lim_{j\to\infty} d(A^{n_{i_j}+m}x_0, A^{n_{i_j}+m}x_1) \leq$$

$$\leq \lim_{j\to\infty} d(A^{n_{i_j}+m} x_0, A^{n_{i_j}+m} x_1) = d(A^m p, A^m Ap),$$

odnosno

$$d(p,Ap) \leq d(A^m p, A^m Ap),$$

što je protivno sa (4). Znači, mora biti $Ap = p$, tj. p je postojana tačka.

Jedinost postojanja tačke sledi iz uopštene kontraktivnosti operatora A na M^*A i činjenice da M^*A sadrži sve postojane tačke. Zaista, ako je p' takva tačka da je $Ap' = p'$ i $p' \neq p$ tada mora postojati prirodan broj $s = s(p,p')$ sa svojstvom

$$d(A^s p, A^s p') < d(p,p')$$

što je nemoguće, jer je

$$d(A^s p, A^s p') = d(p,p').$$

Time je stav dokazan.

P o s l e d i c a.- II.2.1.1. Neka operator A preslikava metrički prostor M u sebe sama. Ako postoji obostrano jednoznačno preslikavanje K prostora M na sebe sama sa svojstvom da je preslikavanje $B = K^{-1}AK$ slabo uopšteno kontraktivno na M, skup $M^{*}B$ neprazan i B neprekidno i uopšteno kontraktivno preslikavanje na $M^{*}B$, tada postoji jedinstvena postojana tačka operatora A.

P o s l e d i c a.- II.2.1.2. Ova posledica se odnosi na korolar 2. stava 1.D.Bailey-a [5, str.102].- Neka preslikavanje A preslikava kompaktan metrički prostor M u sebe sama. Ako je preslikavanje A neprekidno i uopšteno kontraktivno na M tada postoji jedinstvena postojana tačka.

Navedimo primer nekompaktnog metričkog prostora M u kome dejstvuje uopšteno kontraktivan operator A koji nije neprekidan na M ali su ispunjeni svi uslovi našeg stava II.2.1. i A ima jedinstvenu postojanu tačku.

P r i m e r.- II.2.1. Neka su u euklidskoj ravni zadati skupovi

$$B_n = \{(n,i);\quad i = -1,0,1\};\quad n = 1,2,\ldots,$$

$$C_n = \{ (\frac{1}{2^n}, \pm \frac{1}{2^i}) : i = 0,1,2,\ldots,n\} \cup \{(\frac{1}{2^n},0)\};\ n=1,2,\ldots$$

i

$$C_o = \{ (0, \pm \frac{1}{2^i}) : i = 0,1,2,\ldots\} \cup \{(0,0)\} .$$

Stavimo $M = (\bigcup_{n\in N} B_n) \cup (\bigcup_{n\in N} C_n) \cup C_o$ i na prostoru M definišimo operator A na sledeći način:

Za tačku $(p,q) \in B_n (n=1,2,\ldots)$ stavimo $A(n,i) = (n,i-1)$ za $i = 0,1$ i $A(r,i) = (n-1,1)$ za $i = -1$. Ako je $(p,q) \in C_n (n=1,2,\ldots)$ stavimo $A(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^i}) = (\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}})$ za $0 \leq i < n$, $A(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}) =$

$= (\frac{1}{2^n}, 0)$; $A(\frac{1}{2^n},0) = (\frac{1}{2^n}, -\frac{1}{2^n})$ i $A(\frac{1}{2^n}, -\frac{1}{2^i}) = (\frac{1}{2^n}, -\frac{1}{2^{i-1}})$

za $0 < i \leq n$, a za $i = 0$ $A(\frac{1}{2^n}, -1) = (\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n+1}})$.

Za $(p,q) \in C_o$ definišimo A na ovaj način:

$A(0,\frac{1}{2^i}) = (0, -1)$ za $i = 0,1,2,\ldots$, $A(0,-\frac{1}{2^i}) = (0,-\frac{1}{2^{i-1}})$ za

$i = 1,2,\ldots$; $A(0,-1) = (0,0)$ i $A(0,0) = (0,0)$.

S t a v.- II.2.2. Neka operator A preslikava metrički prostor M u sebe sama, i neka je skup M^*A neprazan. Ako je A slabo uopšteno ε-kontraktivan na M i neprekidan i uopšteno ε-kontraktivan na M^*A tada je skup periodičnih tačaka neprazan. Ako je M kompaktan tada je skup periodičnih tačaka konačan.

D o k a z.- Neka je $p_o \in M^*A$ i neka je $x \in M$ takva tačka da je p_o tačka nagomilavanja niza $\{A^n x\}$ i da svaki podniz $\{A^{n_i} x\}$ ima tačku nagomilavanja. Tada postoje prirodni brojevi $r < s$ takvi da je

$$d(p_o, A^r x) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{i} \quad d(p_o, A^s x) < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Stavimo

$$k = s - r, \quad y = A^r x \quad \text{i} \quad z = A^s x = A^k y.$$

Tada je

$$d(y,z) \leq d(A^r x, p) + d(p, A^s x) < \varepsilon \quad . \tag{6}$$

Dokažimo da postoji bar jedna periodična tačka. Ako je $A^{n_o} y = A^{n_o} z$ za neki prirodan broj n_o tada je $A^{n_o} y$ periodična tačka, jer je onda

$$A^{n_o} y = A^{n_o} z = A^{n_o} A^k y = A^k A^{n_o} y$$

i gornje tvrdjenje bi bilo dokazano. Predpostavimo da je $A^n y \neq A^n z$ za svaki prirodan broj n.

Kako je $d(y,z) < \varepsilon$ i A slabo uopšteno ε-kontraktivan na M istim postupkom kao u stavu II.2.1. odaberimo niz prirodnih brojeva $\{n_i\}$ $(n_1 < n_2 < \ldots < n_i < \ldots)$ tako da je

$$d(y,z) \geq d(A^{n_1} y, A^{n_1} z) \geq d(A^{n_2} y, A^{n_2} z) \geq \cdots \geq d(A^{n_i} y, A^{n_i} z) \geq \ldots$$

i da niz $\{n_i\}$, a odatle i svaki njegov podniz $\{n_{i_j}\}$ ima svojstvo

(3), tj. da

$$n_{i_j} \geqslant K \Longrightarrow d(A^{n_{i_j}}y, A^{n_{i_j}}z) \leqslant d(A^K y, A^K z).$$

Neka je p tačka nagomilavanja niza $\{ A^{n_i+r} x \} = \{ A^{n_i} y \}$,
tj. neka je

$$p = \lim_{j\to\infty} A^{n_{i_j}} y .$$

Istim postupkom kao u stavu II.2.1. dokazuje se da je

$$p = \lim_{j\to\infty} A^{n_{i_j}} z = \lim_{j\to\infty} A^{n_{i_j}+k} y = A^k p,$$

odnosno da je p periodična tačka operatora A.

Dokažimo sada da ako su p i q periodične tačke da tada mora biti

$$d(p,q) \geqslant \varepsilon .$$

Predpostavimo suprotno da je $A^k p = p$, $A^s q = q$ i $d(p,q) < \varepsilon$. Neka je $0 \leqslant i_o < ks - 1$ takav prirodan broj da je

(7) $$d(A^{i_o}p, A^{i_o}q) = \min \{ d(A^i p, A^i q) : i = 0,1,2,\ldots, ks-1 \}.$$

Kako je

$$d(A^{i_o}p, A^{i_o}q) \leqslant d(p,q) < \varepsilon$$

sledilo bi da postoji prirodan broj $m = m(A^{i_o}p, A^{i_o}q)$ sa svojstvom

(8) $$d(A^m A^{i_o}p,\ A^m A^{i_o}q) < d(A^{i_o}p, A^{i_o}q).$$

Medjutim, kako je $m + i_o = nks+j$ $(n = \left[\frac{m+i_o}{ks}\right]$, $0 \leq j \leq ks-1)$ i $A^{nks}p = p$, ; $A^{nks}q = q$, iz (8) sledi

$$d(A^{i_o}p, A^{i_o}q) > d(A^{m+i_o}p, A^{m+i_o}q) = d(A^j p, A^j q)$$

$(0 \leq j \leq ks-1)$, što je protivno sa (7).

Još je ostalo da dokažemo da ako je M kompaktan prostor da je tada skup periodičnih tačaka P konačan. Već smo dokazali da je ovaj skup neprazan i da je

$$d(p,q) \geq \mathcal{E}$$

za svako $p,q \in P$ $(p \neq q)$. Kako je P podskup kompaktnog prostora M sledi da je P totalno ograničen. To znači da za proizvoljno $\mathcal{E} > 0$ postoji konačno mnogo tačaka $p_i \in P (i = 1,2,\ldots,n)$ sa svojstvom da je

$$P \subset \bigcup_{i=1}^{n} V(p_i, \quad),$$

gde je

$$V(p_i, \mathcal{E}) = \{ x: d(p_i,x) < \mathcal{E}, \quad x \in M \} \quad (i = 1,2,\ldots,n).$$

Kako je $P \cap V(p_i, \delta) = p_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ sledi da je P konačan.

P o s l e d i c a.- II.2.2.1. Ova posledica se odnosi na korolar 2. stava 2. D. Bailey-a [5, str. 105] -. Neka operator A preslikava kompaktan metrički prostor M u sebe sama. Ako je A neprekidan i uopšteno $\mathcal{E}$ - kontraktivan na M tada je skup periodičnih tačaka neprazan i konačan.

III. POSTOJANE I PERIODIČNE TAČKE KONTRAKTIVNIH OPERATORA U PSEUDOMETRIČKIM ILI KUREPINIM PROSTORIMA

Činjenica da postoje topološki prostori koji nisu metrizabilni nametnula je uvodjenje neke opštije "metrike" u odnosu na koju bi i takvi prostori bili "metrizabilni". Takvu metriku prvi je uveo Đuro Kurepa 1934.godine u radu [60] i dalje razradjivao u radovima [61], [62], [63], [65] i [66]. Vrednost ovakve "metrike su u nepraznom skupu M koji je snabdeven strukturom manje bogatom nego prostor nenegativnih realnih brojeva R^1_+, a u specijalnom slučaju M može biti R^1_+. Skup M se odabira u zavisnosti od posmatranog prostora S, koji se tada naziva pseudometrički prostor i označava sa (S,d,M). Šta više Zlatko Mamužić je u radu [71] pokazao da se svaki okolinski prostor može rekonstruisati jednim simetričnim i jednim antisimetričnim apstraktnim razmakom.

Pseudometrički prostori su našli široku primenu i u numeričkoj matematici. L. Collatz primećuje da prostori uvedeni Hilbert-om i Banach-om pokazali su se nedovoljno opštim za sve šire potrebe primene i on u predgovori svoje knjige [27, str. VIII] kaže: "... ; und da sind wohl die von KUREPA eingeführten pseudometrischen Räume derzeit die für die Numerik wichtigste Verallgemeinerung der bisher betrachteten Räume ..."

U ovom odeljku mi ćemo razmatrati operatore u prostorima koji su metrički nad M kada je u specijalnom slučaju M zatvorenost skupa K pozitivnih elemenata topološkog polupolja E (v.Kurepa [66, str.8]). Topološka polupolja kao i metričke prostore nad njima detaljno su proučavali ruski matematičari M. Antonovskij, V.

Boltjanskij i T. Sarimsakov (konsultovati [2],[3] i [12]). Na teoriji postojanih i periodičnih tačaka u metričkim prostorima nad topološkim polupoljima, koliko je nama poznato, veoma je malo radjeno. Naime, japanski matematičar K. Iseki [46] je proširio Banach-ov stav na ove prostore, ali je koeficijent kontraktivnosti i dalje pripadao skupu realnih brojeva, odnosno topološkom polju koje je izomorfno numeričkoj pravoj. Ovo je sasvim slično rezultatu S. Naimpally-a [81, stav 2.12], gde on daje izvesne stavove za uniformne prostore u terminima pseudometrike i gde je koeficijent kontraktivnosti takodje realan broj izmedju nule i jedinice.

Mi ćemo ovde dati izvesne stavove za operatore kod kojih je koeficijenat kontraktivnosti proizvoljan elemenat q polupolja E sa svojstvom $0 \ll q < 1$, gde je 0 nula a 1 jedinica polupolja E. Tako dobijamo stav čija posledica je potpuno analogna Banach-ovom stavu. *Takodje se vrši uopštenje rezultata M. Edelstenin-a [32] na* ove pseudometričke prostore. Odeljak se završava stavom o periodičnim tačkama.

Neka operator A preslikava u sebe sama metrički prostor (S,d,E) nad topološkim polupoljem E ([3, str. 42], ili [12,str.108]). Neka za elemente a i b polupolja E $a \ll b$ znači $a - b \in \bar{K}$, a $a < b$ neka znači $a - b \in K$, gde je $K \subset E$ skup pozitivnih elemenata polupolja E. Uvodimo sledeće pojmove kontraktivnosti operatora A.

D e f i n i c i j a.- III.1. Operator $A:(S,d,E) \longrightarrow (S,d,E)$ naziva se gotovo (q,E)-kontraktivan ako postoje elementi $0 \ll q < 1$ i $D(x,y) \gg d(x,y)$ polupolja E sa svojstvom

$$(1) \qquad d(A^n x, A^n y) \leqslant q^n D(x,y)$$

za svako $x, y \in S$ i $n \in N$.

D e f i n i c i j a.- III.2. Operator $A:(S,d,E) \rightarrow (S,d,E)$ naziva se (q,E)-kontrakcija ako postoji elemenat $0 \leqslant q < 1$ polupolja sa svojstvom

$$(2) \qquad d(Ax,Ay) \leqslant q\, d(x,y)$$

za svako $x,y \in S$.

D e f i n i c i j a.- III.3. Neka su $\varepsilon > 0$ i $0 \leqslant q < 1$ elementi polupolja E; operator $A:(S,d,E) \rightarrow (S,d,E)$ naziva se (ε, q, E)-uniformna lokalna kontrakcija ako

$$(3) \qquad 0 < d(x,y) < \varepsilon \implies d(Ax,Ay) \leqslant q\, d(x,y)$$

za svako $x,y \in S$.

S t a v.- III.1. Neka neprekidan gotovo (q,E)-kontraktivan operator A preslikava u sebe sama nizovno potpun metrički prostor (S,d,E) nad topološkim polupoljem E. Tada postoji jedinstvena postojana tačka. Ta postojana tačka $p \in S$ je granična vrednost niza

$$(4) \qquad x_o, x_1 = Ax_o, \ldots, x_n = Ax_{n-1}, \ldots,$$

pri čemu početni član x_o može biti proizvoljan element prostora S.

D o k a z.- Treba pokazati da je niz (4) Cauchy-jev, tj. da za svaku okolinu V nule polupolja E postoji takav prirodan broj n_V da je $d(x_n,x_s) \in V$ za svako $s > n > n_V$.

Prema definiciji niza (4) i uslova (1) imamo

$$d(x_n,x_{n+1}) = D(A^n x_o, A^n x_1) \leqslant q^n D(x_o,x_1)$$

za svako $n \in \mathbb{N}$. Odavde i na osnovu relacije trougla sledi da je za svako $s > n$

$$d(x_n,x_s) \leqslant d(x_n,x_{n+1}) + d(x_{n+1},x_{n+2}) + \ldots + d(x_{s-1},x_s)$$

$$\leqslant q^n D(x_o,x_1) + q^{n+1} D(x_o,x_1) + \ldots + q^{s-1} D(x_o,x_1) =$$

$$= q^n(1 + q + \ldots + q^{s-n-1}) D(x_o,x_1),$$

odnosno

$$(5) \qquad d(x_n,x_s) \leqslant q^n(1 + q + \ldots + q^{s-n-1}) D(x_o,x_1).$$

Označimo sada sa $\Delta = \{r\}$ skup svih nerazloživih korena polupolja E (v. [3]) i stavimo $x_r = xr = r \cdot x$ za svako $x \in E$. Tada su za svako $r \in \Delta$ ideali

$$r \cdot E = \{ x_r : x \in E \}$$

izomorfni polju realnih brojeva sa običnom topologijom (v. [3,p. 8.11]). Isto tako polupolje E možemo shvatiti (u smislu izomorfizma) i kao podpolupolje polupolja

$$T = \prod_{r \in \Delta} rE$$

sa proizvod topologijom, gde sva polja $r \cdot E$ imaju (u smislu izomorfizma) običnu topologiju realnih brojeva (v. [3, p.10.2.]).

Neka je sada V proizvoljna okolina polupolja E. Prema prethodnim napomenama znači da postoji okolina nule $U \subset V$ oblika

$$U = \prod_{r \in \Delta} U_r ,$$

gde je

$$U_r = \{ x_r : -\varepsilon_r < x_r < \varepsilon_r , \quad x \in E \}$$

za neki element $\varepsilon > 0$ polupolja E i $r \in \overset{*}{\Delta}$, gde je $\overset{*}{\Delta}$ neki konačan podskup skupa Δ , i

$$U_r = r \cdot E$$

za $r \in \Delta \setminus \overset{*}{\Delta}$.

Kako je svaki element $r \in \Delta$ rešenje bazne jednačine $x^2 - x = 0$ to je $0 < r = r^k = r^m$ za svako $k, m \in N$. Prema tome, na osnovu (5) imamo

$$r \cdot d(x_n, x_s) \leqslant r^n \cdot q^n (r \cdot 1 + r \cdot q + \ldots + r^{s-n-1} q^{s-n-1}) r \cdot D(x_o, x_1),$$

odnosno

$$d_r(x_n, x_s) \leqslant q_r^n \; (1_r + q_r + \ldots + q_r^{s-n-1}) \; D_r(x_o, x_1).$$

Neka je $r \in \Delta$ proizvoljno. Pošto je $q < 1$ imamo $q_r < 1_r$ i na osnovu izomorfizma ideala rE sa poljem realnih brojeva sledi da $q_r^n \longrightarrow 0$ kada $n \to \infty$. Znači, za $\varepsilon_r > 0$ postoji broj $n_r = n(\varepsilon_r)$

sa svojstvom

$$d_r(x_n,x_s) \leqslant q_r^n\,(1_r+q_r+\ldots+q_r^{s-n-1})\,D_r(x_o,x_1) < \varepsilon_r$$

za svako $s > n > n_r$.

Ako stavimo $n_u = \max\{n_r : r \in \Delta^*\}$ tada je

$$0 \leqslant d_r(x_n,x_s) < \varepsilon_r$$

za svako $r \in \Delta^*$ i svako $s > n > n_u$, odnosno

$$d_r(x_n,x_s) \in U_r$$

za svako $r \in \Delta^*$ i svako $s > n > n_u$.

Kako je za svako $r \in \Delta$, pa prema tome i za $r \in \Delta \setminus \Delta^*$,

$$d_r(x_n,x_s) \in r.E$$

sledi da je

$$d(x_n,x_s) \in U \subset V$$

za svako $s > n > n_u = n_v$. Pošto je V proizvoljna okolina nule znači da je niz (4) Cauchy-jev. Kako je po pretpostavci prostor S nizovno potpun znači da postoji element $p \in S$ sa svojstvom

$$p = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Iz neprekidnosti operatora A i definicije niza $\{x_n\}$ sledi

$$Ap = \lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = p.$$

Dokažimo da je p jedinstveno i da ne zavisi od x_0. Ako umesto x_0 uzmemo elemenat $x'_0 \neq x_0$ tada istim postupkom dolazimo do odredjenog niza $x'_n = Ax'_{n-1}$ $(n = 1,2,\ldots)$ i do elementa $p' = \lim_{n\to\infty} x'_n$ za koji je $p' = Ap'$.

Kako je $d(A^n p, A^n p') = d(p,p')$ za svako $n \in N$ i operator A gotovo (q,E)-kontraktivan, prema (1) sledi da mora biti $d(p,p') = 0$, tj. $p' = p$.

Time je stav dokazan.

Sledeća posledica ovog stava predstavlja uopštenje Banachovog stava na prostore koje su metrički nad topološkim polupoljima.

P o s l e d i c a.- III.1.1. Neka je S nizovno potpun metrički prostor nad topološkim polupoljem E i neka je A (q,E)-kontrakcija koja preslikava prostor S u sebe sama. Tada postoji jedinstvena postojana tačka.

P o s l e d i c a.- III.1.2. Ova se posledica odnosi na stav K. Iseki-ja [46]. Neka je S nizovno potpun metrički prostor nad topološkim polupoljem E, f preslikavanje prostora S u sebe sama takvo da je za svako $x,y \in S$

$$d(f(x),f(y)) \ll \alpha\, d(x,y),$$

gde je α pozitivan broj manji od 1 i $\ll$ označava uredjenje u E. Tada postoji jedinstvena postojana tačka.

D o k a z.- Prethodna posledica se svodi na ovaj stav Iseki-ja kada je preslikavanje f specijalan slučaj napred definisane (q,E)-kontrakcije, a koji se dobija kada se elementu q stavi još ograničenje da pripada podskupu polupolja E koji je izomorfan sa numeričkom pravom.

Dokazaćemo sada stav za operatore koji su (q,E)-kontrakcije samo za dovoljno "bliske" tačke i tako proširiti rezultat M. Edelsteina [32].

Za proizvoljan elemenat $\varepsilon > 0$ polupolja E stavimo

$$U_{\varepsilon} = \{ (x,y) : d(x,y) < \varepsilon \; ; \quad x,y \in S \}.$$

S t a v.- III.2. Neka su $\varepsilon > 0$ i $0 \ll q < 1$ elementi polupolja E i neka (ε, q, E)-uniformna lokalna kontrakcija A preslikava u sebe sama nizovno potpun U_{ε}-lančast metrički prostor S nad topološkim polupoljem E. Tada postoji jedinstvena postojana tačka.

D o k a z.- Pošto je S U_{ε}-lančast, za svako $x,y \in S$ postoji U_{ε}-lanac $L(x,y)$ koji spaja tačke x i y, tj. postoji konačan niz elemenata iz S

$$L(x,y) = \{ x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y \}$$

sa svojstvom $d(x_{i-1}, x_i) < \varepsilon$ $(i = 1,2,\ldots,n)$. Neka je r takav broj da je

$$L_0(x,y) = \{ x = x_0, x_1, \ldots, x_r = y \}$$

i da za svaki drugi U_ε -lanac

$$x = y_0, y_1, \ldots, y_s = y$$

sledi $s \geq r$. Stavimo

$$D(x,y) = d(x,x_1) + d(x_1,x_2) + \ldots + d(x_{r-1},y).$$

Na osnovu relacije trougla i uslova (3) za svako $n \in N$ je

$$d(A^n x, A^n y) \leqslant q^n d(x,x_1) + q^n d(x_1,x_2) + \ldots + q^n d(x_{r-1},y) = q^n D(x,y).$$

Znači, operator A je gotovo (q,E)-kontraktivan. Kako je svaka (ε,q,E)-uniformna lokalna kontrakcija neprekidna znači da A zadovoljava sve uslove stava III.1. i prema tome postoji jedinstvena postojana tačka operatora A.

S t a v.- III.3 Neka su $\varepsilon > 0$ i $0 \leqslant q < 1$ elementi polupolja E i neka (ε,q,E)-uniformna lokalna kontrakcija A preslikava u sebe sama nizovno potpun metrički prostor S nad topološkim polupoljem E. Ako postoji neka tačka $x_0 \in S$ i neki prirodan broj $\underline{i}$ tako da je

$$d(x_0, A^i x_0) < \varepsilon$$

tada je skup periodičnih tačaka operatora A neprazan.

D o k a z.- Stavimo $y_0 = x_0$, $y_1 = A^i x_0$, $y_2 = A^{2i} x_0, \ldots,$ $y_n = A^{ni} x_0$, ... Pokazaćemo da je niz

$$y_o, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$$

Cauchy-jev niz.

Prema (3) sledi

$$d(y_1,y_2) = d(A^i x_o, A^i A^i x_o) \preccurlyeq q^i\, d(x_o, A^i x_o),$$

i uopšte

(6) $$d(y_n,y_{n+1}) = d(A^{ni} x_o, A^{ni} A^i x_o) \preccurlyeq q^{ni}\, d(x_o, A^i x_o).$$

Neka su n i s, $n < s$, proizvoljni prirodni brojevi. Na osnovu relacije trougla i (6) imamo

$$d(y_n,y_s) \preccurlyeq d(y_n,y_{n+1}) + d(y_{n+1},y_{n+2}) + \dots + d(y_{s-1},y_s) \preccurlyeq$$

$$\preccurlyeq q^{ni} d(x_o,A^i x_o) + q^{(n+1)i} d(x_o,A^i x_o) + \dots + q^{(s-1)i} d(x_o,A^i x_o) =$$

$$= q^{ni}(1+q^i+\dots+q^{(s-1-n)i})\, d(x_o,A^i x_o).$$

Istim postupkom kao u stavu III.1. pokazuje se da za proizvoljnu okolinu V nule polupolja E postoji prirodan broj n_V sa svojstvom

$$d(y_n,y_s) \in V$$

za svako $s > n > n_V$, odnosno da je niz $\{y_n\}$ Cauchy-jev. Pošto je po predpostavci prostor S nizovno potpun sledi da postoji neko $p \in S$ sa svojstvom

$$p = \lim_{n \to \infty} y_n .$$

Kako je prema (3) operator A neprekidan sledi da je neprekidan i operator $A^i = AoAo\cdots oA$. Prema tome je

$$A^i p = A^i \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} A^i A^{ni} x_o = \lim_{n\to\infty} y_{n+1} = p;$$

odnosno tačka p je periodična tačka operatora A, što je i trebalo dokazati.

IV. POSTOJANE I PERIODIČNE TAČKE KONTRAKTIVNIH OPERATORA U UNIFORMNIM PROSTORIMA

Koristeći pojam obilate baze uniformne strukture i rezultat T. Brown-a i N. Comfort-a [17] za totalno ograničene Hausdorff-ove uniformne prostore, W. Kammerer i R. Kasriel [49] su, uvodeći pojam $\mathcal{B}$-kontraktivnog operatora, dobili rezultat tipa kontrakcije u kompaktnim Hausdorff-ovim uniformnim prostorima, proširujući tako rezultat M. Edelstein-a [33] za metričke prostore na uniformne prostore.

U prvom delu ovog odeljka daju se stavovi o postojanim i periodičnim tačkama za operatore koje smo nazvali gotovo $\mathcal{U}$-kontraktivni i gotovo $(U, \mathcal{B})$-kontraktivni operatori, pri čemu se ne zahteva da je prostor kompaktan, niti pak da je baza uniformne strukture obilata. Tako smo neke naše rezultate iz prvog dela odeljka II proširili i na Hausdorff-ove uniformne prostore. Takodje se vrši uopštenje pomenutog rezultata Kammerer-a i Kasriel-a.

U drugom delu se najpre uvode pojmovi uopšteno $\mathcal{U}$-kontraktivnih i uopšteno $(U, \mathcal{B})$-kontraktivnih operatora u uniformnim prostorima, a zatim daju stavovi o postojanim i periodičnim tačkama ovih operatora. Tako smo naše rezultate iz drugog dela odeljka II proširili na Hausdorff-ove uniformne prostore, a samim tim i osnovne rezultate koje je dobio D. Bailey u svojoj disertaciji [4] i radu [5] uopštili smo na Hausdorff-ove uniformne prostore.

IV.1. POSTOJANE I PERIODIČNE TAČKE GOTOVO KONTRAKTIVNIH OPERATORA

Neka je $(X,\mathcal{U})$ uniforman prostor, $\mathcal{B}$ baza uniformne strukture i neka operator A preslikava prostor X u sebe sama.

D e f i n i c i j a.- IV.1.1. Operator $A:(X,\mathcal{U})\rightarrow(X,\mathcal{U})$ naziva se gotovo $\mathcal{U}$-kontraktivan na skupu $S\subsetneq X$ ako postoji podfamilija $\mathcal{U}^{x}$ familije $\mathcal{U}$, tako da je

1^{o} $\mathcal{U}^{x}$ kofinalna sa $\mathcal{U}$ (u odnosu na uredjenje $U\geqslant V\Leftrightarrow U\subsetneq V$),

2^{o} $X\times X=\bigcup\{U:U\in\mathcal{U}^{x}\}$

i ako za svako $U\in\mathcal{U}^{x}$ i $(x,v)\in U$, $x,y\in S$ $(x\neq y)$ postoji neki prirodan broj $m=m(x,y)$, koji zavisi od x i y, sa svojstvom da za svaki prirodan broj n m za koji je $A^{n}x\neq A^{n}y$ postoje V, $W\in\mathcal{U}^{x}$ tako da vredi

$$(1)\qquad (A^{n+1}x,A^{n+1}y)\in W\subset V\subsetneq U\ \text{ i }\ (A^{n}x,A^{n}y)\in V\setminus\overline{W}.$$

Ako je u (1) za elemente V i W familije $\mathcal{U}^{x}$ zadovoljena i jednakost, tj. ako je

$$(1')\qquad (A^{n+1}x,A^{n+1}v)\in W\subseteq V\subseteq U\ \text{ i }\ (A^{n}x,A^{n}y)\in V,$$

tada se A naziva slabo gotovo $\mathcal{U}$-kontraktivan na skupu S.

D e f i n i c i j a.- IV.1.2. Neka je U $\mathcal{B}$; operator $A:(X,\mathcal{U})\longrightarrow(X,\mathcal{U})$ naziva se gotovo $(U,\mathcal{B})$-kontraktivan na skupu

$S \subseteq X$ ako postoji podfamilija $\mathfrak{B}^*$ familije $\mathfrak{B}$ koja je kofinalna sa $\mathfrak{B}$ i ako za svako $T \in \mathfrak{B}^*$ i $(x,y) \in T \subseteq U \in \mathfrak{B}^*$, $x,y \in S(x \neq y)$ postoji neki prirodan broj $m = (x,y)$ sa svojstvom da za svaki prirodan broj $n \geq m$ za koji je $A^n x \neq A^n y$ postoje V, $W \in \mathfrak{B}^*$ tako da vredi

$$(2) \qquad (A^{n+1}x, A^{n+1}y) \in W \subseteq V \subseteq T \quad \text{i} \quad (A^n x, A^n y) \in V \sim \overline{W}.$$

Ako je u (2) za elemente V i W familije $\mathfrak{B}^*$ zadovoljena i jednakost, tj. ako je

$$(2') \qquad (A^{n+1}x, A^{n+1}y) \in W \subseteq V \subseteq T \quad \text{i} \quad (A^n x, A^n y) \in V ,$$

tada se A naziva gotovo $(U, \mathcal{U})$-kontraktivan na skupu S.

S t a v.- IV.1.1. Neka operator A preslikava Hausdorff-ov uniforman prostor $(X, \mathcal{U})$ u sebe sama, neka je uniformna struktura $\mathcal{U}$ otvorena i neka je p tačka nagomilavanja niza $\{A^n x_0\}$ za neko $x_0 \in X$. Ako je A slabo gotovo $\mathcal{U}$-kontraktivan na X i neprekidan gotovo $\mathcal{U}$-kontraktivan na X_A, tada je p jedinstvena postojana tačka i vredi

$$p = \lim_{n \to \infty} A^n x_0$$

D o k a z.- Stavimo $x_1 = Ax_0$ i predpostavimo da je $A^n x_0 \neq A^n x_1$ za svako $n \in N$, jer bi u protivnom odmah sledilo da postoji postojana tačka.

Sada ćemo dokazati da je $p = Ap$. Zbog neprekidnosti operatora A u tački p sledi da je Ap tačka nagomilavanja niza $\{AA^n x_0\} = \{A^n x_1\}$

i zato $Ap \in X_A$.

Pretpostavimo da je $p \neq Ap$. Pošto je A gotovo $\mathcal{U}$-kontraktivan na X_A sledi da postoji prirodan broj $m = m(p,Ap)$ i takvi $V, W \in \mathcal{U}^*$ da je

$$(3) \qquad (A^{m+1}p, A^{m+1}Ap) \in W \subset V \quad i \quad (A^m p, A^m Ap) \in V \setminus \overline{W}.$$

Kako je prema definiciji otvorene uniformne strukture $\mathcal{U}$ svaki njen elemenat otvoren skup u topološkom proizvodu $X \times X = X^2$, sledi prema (3) da postoji $W_1 \in \mathcal{U}$ sa svojstvom

$$(4) \qquad W_1 [A^{m+1}p] \times W_1 [A^{m+1} Ap] \subset W.$$

Pošto je $A^{m+1}Ap = AA^{m+1}p$ i A neprekidan u tački $A^{m+1}Ap \in X_A$, sledi da postoji takav $W_2 \in \mathcal{U}$ da je $W_2 \subset W_1$ i

$$(5) \qquad AW_2 [A^{m+1}p] \subset W_1 [A^{m+1} Ap].$$

Iz neprekidnosti operatora A u tački p sledi da je u toj tački neprekidan i operator $A^{m+1} = A \circ A \circ \ldots \circ A$, pa je $A^{m+1}p$ tačka nagomilavanja niza $\{A^{m+1} A^n x_o\} = \{A^{n+m+1} x_o\}$ $(n = 1,2,\ldots)$. Znači, za okolinu $W_2 [A^{m+1}p]$ tačke $A^{m+1}p$ postoji broj $n_o \geq m(x_o,x_1)$ sa svojstvo da je

$$A^{n_o+m+1} x_o \in W_2 [A^{m+1} p].$$

No, tada je prema (5)

$$A^{n_o+m+1} x_1 = AA^{n_o+m+1} x_o \in W_1 [A^{m+1} Ap]$$

i zatò prema (4) sledi

$$(A^{n_o+m+1}x_o,\ A^{n_o+m+1}x_1) \in W \in \mathcal{U}^*.$$

Kako je A slabo gotovo $\mathcal{U}$-kontraktivan na X, sledi da je

$$(A^{n+m+1}x_o,\ A^{n+m+1}x_1) \in W$$

za svako $n \geq n_o \geq m(x_o,x_1)$. Prema tome, sve tačke nagomilavanja niza

$$\{ (A^{n+m}x_o,\ A^{n+m}x_1) \} \quad (n = n_o+1, n_o+2, \dots)$$

koji je sadržan u X^2 moraju pripadati skupu $\overline{W}$, pa bi imali

$$(A^m p,\ A^m Ap) \in \overline{W},$$

što je protivno sa (3). Znači, mora biti $Ap = p$.

Jedinost postojane tačke sledi iz činjenice da X_A sadrži sve postojane tačke i da je A na X_A gotovo $\mathcal{U}$-kontraktivan.

Dokažimo sada da je

$$p = \lim_{n\to\infty} A^n x_o.$$

Kako je p tačka nagomilavanja niza $\{A^n x_o\}$, za proizvoljno $V \in \mathcal{U}^*$ postoji prirodan broj $n_o \geq m(p,x_o)$ tako da je

$$A^{n_o} x_o \in V[p],$$

odnosno

$$(p,\ A^{n_o}x_o) \in V.$$

Kako je za svako $n \in N$ $A^n p = p$ i operator A gotovo $\mathcal{U}$-kontraktivan na X, za svako $n \geq n_0$ je

$$(p, A^n x) \in V,$$

odnosno gotovo ceo niz $\{A^n x_0\}$ se nalazi u okolini $V\{p\}$. Iz proizvoljnosti okoline $V\{p\}$ tačke p sledi da je p granična vrednost niza $\{A^n x_0\}$.

Time je stav dokazan

P o s l e d i c a.- IV.1.1.1. Neka operator A preslikava prebrojivo kompaktan Hausdorff-ov uniforman prostor $(X,\mathcal{U})$ u sebe sama i neka je uniformna struktura $\mathcal{U}$ otvorena. Ako je A slabo gotovo $\mathcal{U}$-kontraktivan na X i neprekidan i gotovo $\mathcal{U}$-kontraktivan na X_A, tada postoji jedinstvena postojana tačka p i za svako $x \in X$ je

$$p = \lim_{n\to} A^n x.$$

D o k a z.- Po definiciji prebrojivo kompaktnog prostora X svaki niz koji je sadržan u X ima tačku nagomilavanja. Prema tome, za proizvoljno $x_0 \in X$ niz $\{A^n x_0\}$ ima neku tačku nagomilavanja p, koja je prema predhodnom stavu postojana i vredi $p = \lim_{n\to\infty} A^n x_0$. Kako je p jedinstvena postojana tačka sledi tvrdjenje posledice.

S t a v.- IV.1.2. Neka operator A preslikava Hausdorff-ov uniforman prostor $(X,\mathcal{U})$ u sebe samo čija je uniformna struktura $\mathcal{U}$ otvorena. Neka postoje podskup $S \subseteq X$ i tačka $x_0 \in S$ sa svojstvom da, ako je $(x_0, Ax_0) \in U \in \mathcal{U}^*$, (Ax_0, x_0) $V \in \mathcal{U}^*$, tada za svako $W \in \mathcal{U}^*$ i $(Ax_0, Ax) \in W$ vredi

(7) $\qquad (x_o,x) \in X^2 \smallsetminus U o W o V$ kad je $x \in X \smallsetminus S$.

Ako operator A preslikava S u prebrojivo kompaktan podskup od X i A je slabo gotovo $\mathcal{U}$-kontraktivan na X, a neprekidan i gotovo $\mathcal{U}$-kontraktivan na X_A, tada postoji jedinstvena postojana tačka.

D o k az.- Predpostavimo da je $x_o \neq Ax_o$ i definišimo niz

(8) $$x_n = Ax_{n-1} = A^n x_o \quad . \ (n = 1,2,\dots).$$

Prema posledici IV.1.1.1. dovoljno je pokazati da se gotovo ceo niz (8) nalazi u skupu S, jer se S preslikava u prebrojivo kompaktan skup.

Predpostvimo da je $x_{n+1} \neq x_n$ za svako $n \in N$, jer bi u protivnom odmah sledilo da postoji postojana tačka, i neka je $m=m(x_1,x_o)$. Dalje, označimo sa W_n onaj element podfamilije $\mathcal{U}^*$ za koji je $(Ax_o,Ax_n) \in W_n$ $(n = 1,2,\dots)$. Kako je A slabo gotovo $\mathcal{U}$-kontraktivan na X i $(x_1,x_o) \in V$, sledi da je za svako $n \geq m(x_1,x_o)$

$$(x_{n+1},x_n) = (A^n x_1, A^n x_o) \in V.$$

Pošto je

$$(x_o,x_n) = (x_o,x_1) \circ (x_1,x_{n+1}) \circ (x_{n+1},x_n)$$

imamo da je

$$(x_o,x_n) \in U \circ W_n \circ V$$

za svako $n \geq m$, što prema (7) znači da $\{x_n : n \geq m\} \subset S$. Znači, niz

$\{x_n : n \geq m+1\}$ je sadržan u prebrojivo kompaktnom prostoru pa postoji tačka nagomilavanja p tog niza. Prema stavu IV.1.1. tačka p je postojana i to jedinstvena postojana tačka.

S t a v.- IV.1.3. Neka operator A preslikava Hausdorff-ov uniforman prostor $(X,\mathcal{U})$ u sebe sama, neka je baza $\mathcal{B}$ uniformna struktura $\mathcal{U}$ otvorena i neka je skup X_A neprazan. Ako je $U \in \mathcal{B}$ i A slabo gotovo $(U,\mathcal{B})$- kontraktivan na X i neprekidan i gotovo $(U,\mathcal{B})$-kontraktivan na X_A, tada jeskup periodičnih tačaka neprazan. Ako $(p,p') \in U$ i p i p' su periodične tačke, tada je $p = p'$.

D o k a z.- Neka su V_o, U_o, $U_1 \in \mathcal{B}$ takvi da je $\bar{V}_o \in U$, $U_o \circ U_o \subset V_o$ i $U_1 \subset U_o \cap U_o^{-1}$ i neka je $p \in X_A$. To znači da postoji takav element x_o prostora X da je p tačka nagomilavanja niza $\{A^n x_o\}$. Prema tome, za okolinu $U_1[p]$ tačke p postoje prirodni brojevi r i s; $r < s$, tako da

$$A^r x_o,\ A^s x_o \in U_1[p].$$

Stavimo $k = s - r$, $y = A^r x_o$ i $z = A^s x_o = A^k y$. Tada je

$$(y,z) = (A^r x_o, A^s x_o) = (A^r x_o, p)\circ(p, A^s x_o) \in U_1 \circ U_1 \subset V_o \subset \bar{V}_o \subset U, \tag{9}$$

pa na tačke y i z možemo primeniti isti postupak koji je u stavu IV.1.1. primenjen na tačke x_o i x_1. Kako je p tačka nagomilavanja niza $\{A^n x_o\} = \{A^{n-r} y\}$ $(n = r, r+1, \ldots)$, zbog neprekidnosti operatora A u tački p sledi da je i $A^k = A \circ A \circ \ldots \circ A$ neprekidan u toj tački, pa je $A^k p$ tačka nagomilavanja niza $\{A^{n-r} z\}$ $(n=r,r+1,\ldots)$.

Dokazaćemo da je $A^k p = p$. Pošto je A slabo gotovo $(U,\mathcal{B})$-kontraktivan operator na X, prema (9) imamo da je

$$(A^n y, A^n z) \in V_o \in \mathfrak{B}^*$$

za svako $n \geq m(y,z)$, odakle sledi da sve tačke nagomilavanja niza $\{(A^n y, A^n z): n \geq m(y,z)\}$ u X^2 pripadaju zatvorenosti skupa $\overline{V}_o \subset U$. Prema tome, $(p, A^k p) \in U$.

Predpostavimo sada da je $p \neq A^k p$. Pošto je $(p, A^k p) \in U$ i operator A gotovo $(U, \mathfrak{B})$-kontraktivan na X_A, po definiciji IV.1.2. sledi da postoji neki prirodan broj $m = m(p, A^k p)$ i takvi $V, W \in \mathfrak{B}^*$ da je

$$(10) \qquad (A^{m+1}p, A^{m+1}A^k p) \in W \subset V \quad \text{i} \quad (A^m p, A^m A^k p) \in V - \overline{W}.$$

Odabiranjem odgovarajućih elemenata $W_1, W_2 \in \mathfrak{B}^*$ i pripenom istog postupka kao u stavu IV.1.1. dolazi se do protivnosti sa (10), odakle sledi da mora biti $A^k p = p$, odnosno da postoji bar jedna periodična tačka.

Pokažimo sada da ako je

$$(p, p') \in U$$

i p i p' su periodične tačke, da tada sledi da je $p' = p$. Neka su k i s takvi prirodni brojevi da je $p = A^k p$ i $p' = A^s p'$. Kako je $(p, p') \in U$, i

$$(A^{nks}p, A^{nks}p') = (p, p')$$

za svaki prirodan broj n, prema definiciji gotovo $(U, \mathfrak{B})$-kontraktivnog operatora A mora biti $A^{n_o}p = A^{n_o}p'$ za neki prirodan broj

n_o, što je moguće jedino kada je $p' = p$.

S t a v.- IV.1.4. Neka operator A preslikava prebrojivo kompaktan Hausdorff-ov uniforman prostor $(X,\mathcal{U})$ u sebe sama i neka je baza $\mathcal{B}$ uniformne strukture $\mathcal{U}$ otvorena. Ako je $U \in \mathcal{B}$ i A slabo gotovo $(U,\mathcal{B})$-kontraktivan na X i neprekidan i gotovo $(U,\mathcal{B})$-kontraktivan na X_A, tada je skup periodičnih tačaka P neprazan i za svako $x \in X$ postoji neka tačka $p \in P$ i prirodan broj k tako da je $p = \lim_{n\to\infty} A^{nk}x$. Ako je X kompaktan, tada je skup P konačan.

D o k a z.- Kako je podskup X_A prebrojivo kompaktnog prostora X neprazan, prema prethodnom stavu sledi da je skup periodičnih tačaka P neprazan.

Dokažimo sada da za svako $x \in X$ postoji neko $p \in P$ i $k \in N$ tako da je

$$\lim_{n\to\infty} A^{nk}x = p.$$

Neka je x proizvoljan element prebrojivo kompaktnog prostora X. Tada postoji tačka nagomilavanja p' niza $\{A^n x\}$, koja je prema prethodnom stavu periodična. Znači, za neki prirodan broj k je $A^k p' = p'$.

Kako je

$$\{A^n x\} = \bigcup_{i=0}^{k-1} \{A^{nk-i}x\} \qquad (n=1,2,\dots),$$

tačka p' je tačka nagomilavanja niza $\{A^{nk-i_o}x\}$ za neko $0 \le i_o \le k-1$. Tada je zbog neprekidnosti operatora A tačka $p = A^{i_o}p'$ tačka nagomilavanja niza $\{A^{nk}x\}$ i za proizvoljno $W \in \mathfrak{B}^{*}$ $(W \subset U)$ postoji prirodan broj n_0 tako da je

$$A^{n_0k}x \in W[p],$$

odnosno

$$(p, A^{n_0k}x) \in W.$$

Pošto je $A^kp = p$ i A gotovo $(U, \mathfrak{B})$-kontraktivan, sledi da za svako $n \geq n_0 + \frac{1}{k} \cdot m(p, A^{n_0k}x)$ imamo

$$(A^{nk-n_0k}p, A^{nk}x) = (p, A^{nk}x) \in W,$$

odnosno

$$A^{nk}x \in W[p],$$

što dokazuje da je $p = \lim_{n\to\infty} A^{nk}x$.

Dokažimo sada onaj deo koji se odnosi na kompaktne prostore.

Kako je P podskup kompaktnog prostora sledi da je P totalno ograničen. Neka je $V \in \mathfrak{B}^{*}$ takav da je $V \subseteq U$ i K konačan podskup skupa P sa svojstvom da je

$$P \subset V[K] = \bigcup_{p \in K} \{V[p]\}.$$

Pošto je prema predhodnom stavu

$$P \cap V[p] = p \quad \text{za svako } p \in K,$$

sledi da je $P = K$, tj. da je skup periodičnih tačaka konačan.

Za sledeću posledicu biće nam potrebni pojmovi obilate baze uniformne strukture i -kontraktivnih preslikavanja, posmatranih u [49].

Baza $\mathfrak{B}$ uniformne strukture je o b i l a t a (engl.ample) ako za svako $U \in \mathfrak{B}$ i $(x,y) \in U$ postoji $W \in \mathfrak{B}$ sa svojstvom

$$(x,y) \in W \subset \overline{W} \subset U.$$

Preslikavanje $A:(X,\mathcal{U}) \to (X,\mathcal{U})$ je $\mathfrak{B}$-k o n t r a k t i v n o ($\mathfrak{B}$ baza uniformnosti $\mathcal{U}$) ako za svako $U \in \mathfrak{B}$ i $(x,y) \in U$ $(x \neq y)$ postoji $W \in \mathfrak{B}$ sa svojstvom

$$(Ax,Ay) \in W \subset U \qquad i\ (x,y) \bar{\in} W.$$

P o sl e d i c a.- IV.1.4.1. Ova posledica se odnosi na deo (a) teoreme W. Kammerer-a i R. Kasriel-a [49, str.289] - Neka operator A preslikava komkaptan Hausdorff-ov uniforman prostor $(X,\mathcal{U})$ u sebe sama i neka je baza $\mathfrak{B}$ uniformne strukture otvorena i obilata. Ako je preslikavanje A $\mathfrak{B}$-kontraktivno, tada je skup periodičnih tačaka neprazan i konačan, i za svako $x \in X$ postoji neka periodična tačka p i prirodan broj k tako da je $p = \lim\limits_{n\to\infty} A^{nk}x$.

D o k a z.- Lako je videti da ako je preslikavanje A $\mathfrak{B}$-kontraktivno da je tada i (uniformno) neprekidno na X. Ostaje još da pokažemo da A ispunjava uslove naše definicije IV.1.2.

Neka je $(x,y) \in U \in \mathfrak{B}$. Pošto je A $\mathfrak{B}$-kontraktivno postoji neki $W \in \mathfrak{B}$ sa svojstvom

$$(Ax,Ay) \in W \subset U \qquad i\ (x,y) \bar{\in} W.$$

Kako je $\mathfrak{B}$ obilata, postoji tada neko $V \in \mathfrak{B}$ sa svojstvom

$$(Ax, Ay) \in V \subset \overline{V} \subset W.$$

Prema tome, za $V \in \mathcal{B}$ imamo

$$(Ax,\ Ay) \in V \subset U \qquad i\ (x,y) \in U - \overline{V}\ ,$$

što dokazuje da A ispunjava uslove naše definicije sa $m(x,y) = 0$ za svako $x,y \in X$ $(x \neq Y)$.

S t a v.- IV.1.5. Neka operator A preslikava Hausdorff-ov uniforman prostor $(X,\mathcal{U})$ u sebe sama, neka je baza $\mathcal{B}$ uniformne strukture otvorena i neka je $p \in M_A$. Ako je $U \in \mathcal{B}$ i A gotovo $(U,\mathcal{B})$-kontraktivan na X i neprekidan u tački p, ako je X U-lančast i ako niz iteracija $\{A^n x\}$ ima tačku nagomilavanja kad god je $(p,x) \in U$, tada postoji jedinstvena postojana tačka.

D o k a z.- Na osnovu stava IV.1.3. postoji $k \in N$ tako da je $A^k p = p$. Dokazaćemo da je p jedina postojana tačka operatora A^k, jer je tada p jedinstvena postojana tačka i operatora A.

Predpostavimo da postoji neka tačka $p' \neq p$ sa svojstvom $A^k p' = p'$. Pošto je prostor X U-lančast, tj.

$$X^2 = \cup \{U^n : n \in N\}$$

sledi da postoji neki prirodan broj s tako da je

$$(p,\ p') \in U^s,$$

što znači da postoje elementi prostora X

$$p = x_0, x_1, \ldots, x_s = p'$$

tako da

$$(x_{i-1},x_i) \in U \qquad (i = 1,2,\dots,s).$$

Pretpostavimo da je s namanji broj sa takvim svojstvom, tj. da

$$(11) \qquad (p,p') \in U^r \Rightarrow r \geq s.$$

Neka su $W_i \in \mathcal{U}^*$ takvi da $(x_{i-1},x_i) \in W_i \subset U$ $(i = 1,2,\dots,s)$ i neka je prirodan broj $m = \max\{m(x_{i-1},x_i): i = 1,2,\dots,s)\}$. Tada je

$$(A^n x_{i-1}, A^n x_i) \in W_i \subset U$$

za svako $n \geq m$ $(i = 1,2,\dots,s)$.

Kako je $(p,x_1) \in U$ prema uslovu stava postoji tačka nagomilavanja niza $\{A^n x_1\}$. Tada postoji i tačka nagomilavanja q podniza $\{A^{nk} x_1\}$. Na osnovu stava IV.1.3. q je periodična i kako je $(p,q) \in U$ sledi da je $q = p$. Iz dokaza stava IV.1.4. sledi da je

$$P = q = \lim_{n\to\infty} A^{nk} x_1.$$

Odavde sledi da možemo odabrati prirodan broj $n_0 > \frac{m}{k}$ tako da je

$$(p, A^{n_0 k} x_2) \in U.$$

Kako je

$$(p,p') = (A^{n_0 k} x_0, A^{n_0 k} x_2)\ (A^{n_0 k} x_2, A^{n_0 k} x_3) \circ \dots \circ (A^{n_0 k} x_{s-1}, A^{n_0 k} x_s),$$

imali bi da

$$(p,p') \in U^{s-1}$$

što je u protivnosti sa (11). Znači, p je jedina postojana tačka operatora A^k, pa prema tome i operatora A.

Time je stav dokazan.

P o s l e d i c a.- IV.1.5.1. Neka operator A preslikava prebrojivo kompaktan U-lančast uniforman prostor $(X,\mathcal{U})$ u sebe sama i neka je baza $\mathcal{B}$ uniformne strukture otvorena. Ako je A neprekidan i gotovo $(U,\mathcal{B})$-kontraktivan, tada postoji jedinstvena postojana tačka.

P o s l e d i c a.- IV.1.5.2. Ova posledica se odnosi na deo (b) teoreme W. Kammerer-a i R. Kasriel-a [49, str. 289] - Neka preslikavanje A preslikava kompaktan U-lančast Hausdorff-ov uniforman prostor $(X,\mathcal{U})$ u sebe sama i neka je baza $\mathcal{B}$ uniformne strukture otvorena i obilata. Ako je preslikavanje A $\mathcal{B}$-kontraktivno, tada postoji jedinstvena postojana tačka.

IV.2. POSTOJANE I PERIODIČNE TAČKE UOPŠTENO KONTRAKTIVNIH OPERATORA

Neka je $(X,\mathcal{U})$ uniforman prostor, $\mathcal{B}$ baza uniformne strukture $\mathcal{U}$ i neka operator A preslikava prostor X i sebe sama.

D e f i n i c i j a.- IV.2.1. Operator $A: (X,\mathcal{U})\to(X,\mathcal{U})$ naziva se uopšteno $\mathcal{U}$-kontraktivan na skupu $S\subseteq X$ ako postoji podfamilija $\mathcal{U}^*$ familije $\mathcal{U}$, tako da je

1° $\mathcal{U}^*$ kofinalna sa $\mathcal{U}$ (u odnosu na uredjenje $U\geq V\Longleftrightarrow U\subseteq V$),

2° X $X=\cup\{U : U\in\mathcal{U}^*\}$

i ako za svako $V\in\mathcal{U}^*$ i $(x,y)\in V, x,y\in S$ $(x\neq y)$ postoji neki prirodan broj $m=m(x,y)$, koji zavisi od x i y, sa svojstvom da postoji $W\in\mathcal{U}^*$ tako da vredi

$$(1)\qquad (A^mx,A^my)\in W\subset V \qquad\qquad i\quad (x,y)\in V\sim\overline{W}.$$

Ako je u (1) za elemente V i W familije $\mathcal{U}^*$ zadovoljena i jednakost, tj, ako je

$$(1')\qquad (A^mx,A^my)\in W\subseteq V \qquad\qquad i\ (x,y)\in V\ ,$$

tada se A naziva slabo uopšteno $\mathcal{U}$-kontraktivan na skupu S.

D e f i n i c i j a.- IV.2.2. Neka je $U\in\mathcal{B}$; operator $A : (X,\mathcal{U})\longrightarrow(X,\mathcal{U})$ naziva se uopšteno $(U,\mathcal{B})$-kontraktivan na skupu $S\subseteq X$ ako postoji podfamilija $\mathcal{B}^*$ familije $\mathcal{B}$ koja je kofinalna sa $\mathcal{B}$ i ako za svako $V\in\mathcal{B}^*$ i $(x,y)\in V\subseteq U\in\mathcal{B}^*$, $x,y\in S$ $(x\neq y)$ postoji neki prirodan broj $m = m(x,y)$ sa svojstvom da postoji $W \in \mathcal{B}^*$ tako da vredi

$$(2) \qquad (A^m x, A^m y) \in W \subset V \subseteq U \quad \text{i} \quad (x,y) \in V - \overline{W}.$$

Ako je u (2) za elemente V i W familije $\mathcal{B}^*$ zadovoljena i jednakost, tj. ako je

$$(2') \qquad (A^m x, A^m y) \in W \subseteq V \subseteq U \quad \text{i} \quad (x,y) \in V,$$

tada se A naziva slabo uopšteno $(U, \mathcal{B})$-kontraktivan na skupu S.

S t a v.- IV.2.1. Neka operator A preslikava Hausdorff-ov uniforman prostor $(X, \mathcal{U})$ u sebe sama čija je uniformna struktura $\mathcal{U}$ otvorena i neka je skup X^*A neprazan. Ako je A slabo uopšteno $\mathcal{U}$-kontraktivan na X i neprekidan i uopšteno $\mathcal{U}$-kontraktivan na X^*A, tada postoji jedinstvena postojana tačka.

D o k a z.- Neka je $p_0 \in X^*A$ i $x_0 \in X$ takav element da je p_0 tačka nagomilavanja niza $\{A^n x_0\}$ i da za svaki niz iteracija $\{A^{n_i} x_0\}$ $(i = 1,2,\ldots)$ tačke x_0 postoji tačka nagomilavanja.

Dokazaćemo najpre da postoji bar jedna postojana tačka. Stavimo $x_1 = Ax_0$ i predpostavimo da je $(x_0,x_1) \in V_0 \in \mathcal{U}^*$, $x_0 \neq x_1$ i $A^n x_0 \neq A^n x_1$ za svako $n \in N$.

Kako je A slabo uopšteno $\mathcal{U}$-kontraktivan na X i $x_0 \neq x_1$ postoji prirodan broj $n_1 = m(x_0,x_1)$ - predpostavimo prvi, odnosno najmanji sa svojstvom da je za neko $V_1 \in \mathcal{U}^*$

$$(A^{n_1}x_0,\ A^{n_1}x_1) \in V_1 \subseteq V_0.$$

Definišimo podniz prirodnih brojeva $\{n_i\}$ $(n_1 < n_2 < \dots < n_i < \dots)$ indukcijom na sledeći način. Neka je n_i već odredjen i

$$(A^{n_i}x_0,\ A^{n_i}x_1) \quad V_i \in \mathcal{U}^*.$$

Definišimo tada n_{i+1} da je to onaj najmanji prirodan broj koji ima svojstvo da postoji neki elemenat familije $\mathcal{U}^*$, koga ćemo označiti sa V_{i+1}, tako da je

$$(A^{n_{i+1}}x_0,\ A^{n_{i+1}}x_1) \in V_{i+1} \subseteq V_i .$$

Primetimo da ovako definisan niz $\{n_i\}$ ima svojstvo da za svako $K \in N$ vredi

(3) $\quad n_i \geq K$ i $(A^K x_0,\ A^K x_1) \in W \in \mathcal{U}^* \Longrightarrow (A^{n_i}x_0, A^{n_i}x_1) \in W.$

Neka je p tačka nagomilavanja niza $\{A^{n_i}x_0\}$. Kako je A neprekidan u tački $p \in X^*A$ sledi da je Ap tačka nagomilavanja niza $\{AA^{n_i}x_0\} = \{A^{n_i}x_1\}$ i $Ap \in X^*A$.

Dokazaćemo da je $Ap = p$. Predpostavimo da je $p \neq Ap$ i $(p,Ap) \in V \in \mathcal{U}^*$. Kako je A udpšteno $\mathcal{U}$-kontraktivan na $\bar{X}^*A$ postoji neki prirodan broj $m = m(p,\ Ap)$ i $W \in \mathcal{U}^*$ sa svojstvom

(4) $\quad (A^m p, A^m Ap) \in W \subseteq V \quad$ i $\quad (p,Ap) \bar{\in} \bar{W}.$

Pošto je po uslovu stava uniformnost $\mathcal{U}$ otvorena, skup W je otvoren u prostoru X^2 i zato postoji $W_1 \in \mathcal{U}$ sa svojstvom

(5) $$W_1[A^m p] \times W_1[A^m Ap] \subset W.$$

Kako je $A^m Ap = AA^m p$ i A neprekidan u tački $A^m p \in X^* A$ sledi da postoji takav $W_2 \in \mathfrak{U}$ da je $W_2 \subset W_1$ i

(6) $$AW_2[A^m p] \subset W_1[A^m Ap].$$

Iz neprekidnosti operatora A u tački p sledi da je u toj tački neprekidan i operator $A^m = A \circ A \circ \cdots \circ A$, pa je $A^m p$ tačka nagomilavanja niza $\{A^m A^{n_i} x_o\} = \{A^{n_i+m} x_o\}$ $(i = 1,2,\ldots)$, jer je p tačka nagomilavanja niza $\{A^{n_i} x_o\}$. Znači, za okolinu $W_2[A^m p]$ tačke $A^m p$ postoji broj i_o sa svojstvom da je

$$A^{n_{i_o}+m} x_o \in W_2[A^m p].$$

Prema (6) je tada

$$A^{n_{i_o}+m} x_1 = AA^{n_{i_o}+m} x_o \in W_1[A^m Ap]$$

i zato prema (5) sledi

$$(A^{n_{i_o}+m} x_o, A^{n_{i_o}+m} x_1) \in W \in \mathfrak{U}^*.$$

Kako je $n_{i_o+m} \geq n_{i_o}+m$ na osnovu osobine (3) niza $\{n_i\}$ sledi

$$(A^{n_{i_o+m}} x_o, A^{n_{i_o+m}} x_1) \in W.$$

No, kako je A slabo uopšteno $\mathfrak{U}$-kontraktivan na X prema (3) imamo da je

$$(A^{n_{i+m}} x_o, A^{n_{i+m}} x_1) \in W$$

za svako $i \geqslant i_0$, pa sledi da su sve tačke nagomilavanja niza $\{(A^{n_i}x_0, A^{n_i}x_1)\}$ u prostoru X^2 sadržine u $\overline{W}$. Prema tome, imali bi

$$(p, Ap) \in \overline{W},$$

što je protivno sa (4). Znači, mora biti $Ap = p$, čime je dokazano da postoji bar jedna postojana tačka.

Jedinost postojane tačke sledi iz činjenice da X^*A sadrži sve postojane tačke i da je A na X^*A uopšteno $\mathcal{U}$-kontraktivan.

P o s l e d i c a.- IV.2.1.1. Neka operator A preslikava u sebe sama prebrojivo kompaktan Hausdorff-ov uniforman prostor $(X, \mathcal{U})$ čija je uniformna struktura $\mathcal{U}$ otvorena. Ako je A neprekidan i uopšteno $\mathcal{U}$-kontraktivan tada postoji jedinstvena postojana tačka.

Ako je X metrički prostor tada možemo staviti

$$\mathcal{U}^* = \mathcal{U} = \{ U_\varepsilon \; : \; 0 < \varepsilon < +\infty \},$$

gde je $U_\varepsilon = \{ (x,y) ; \; d(x,y) < \varepsilon \; ; \; x,y \in M \}$. Prema tome, važi

P o s l e d i c a.- IV.2.1.2. Ova posledica se odnosi na korolar 2. stava 1. L. Bailey-a [5, str. 102] .- Neka preslikavanje A preslikava kompaktan metrički prostor X u sebe sama. Ako je preslikavanje A neprekidno i uopšteno kontraktivno tada postoji jedinstvena postojana tačka.

S t a v.- IV.2.2. Neka operator A preslikava Hausdorff-ov uniforman prostor $(X, \mathcal{U})$ u sebe sama, neka je baza $\mathcal{B}$ uniformnosti

$\mathfrak{U}$ otvorena i neka je skup X^*A neprazan. Ako je $U\in\mathfrak{U}$ i A slabo uopšteno $(U, \mathfrak{U})$-kontraktivan na X i neprekidan i uopšteno $(U, \mathfrak{U})$-kontraktivan na X^*A, tada je skup periodičnih tačaka neprazan. Ako je X kompaktan, tada je skup periodičnih tačaka neprazan i konačan.

D o k a z.- Neka su V_0, U_0, $W \in \mathfrak{U}^*$ takvi da je $\overline{V}_0 \subset U$, $U_0 o U_0 \subset V_0$ i $W \subset U_0 \cap U_0^{-1}$. Pošto je $X^*A \neq \emptyset$ znači da postoje tačke

$$p_0, x_0 \in X$$

tako da je p_0 tačka nagomilavanja niza $\{A^n x_0\}$ i svaki niz $\{A^{n_i} x_0\}$ ima tačku nagomilavanja. Znači, za okolinu $W[p_0]$ tačke p_0 postoje takvi prirodni brojevi $r < s$ da je

$$A^r x_0, A^s x_0 \in W[p_0] .$$

Stavimo $k = s - r$, $y = A^r x_0$ i $z = A^s x_0 = A^k y$. Tada je

$$(7) \qquad (y,z) = (A^r x_0, A^s x_0) = (A^r x_0, p_0) o (p_0, A^s x_0) \in W o W \subset V_0 \subset \overline{V}_0 \subset U,$$

pa za tačke y i z možemo odabrati niz $\{n_i\}$ sa svojstvom (3) istim postupkom kao u stavu IV.2.1.

Ako je p tačka nagomilavanja niza $\{A^{n_i} y\} = \{A^{n_i+r} x_0\}$, tada je $A^k p$ tačka nagomilavanja niza $\{A^{n_i} z\}$. Istim postupkom kao u prethodnom stavu dokazuje se da mora biti

$$A^k p = p,$$

tj. da je p periodična tačka operatora A.

Napomenimo da ako su p i q različite periodične tačke da tada mora biti $(p,q) \in X \times X \setminus U$.

Neka je $V \in \mathcal{B}^{*}$ takav da je $V \subseteq U$. Tada V prema prethodnoj napomeni ima svojstvo

(8) $$(p,q) \in V \Rightarrow p = q.$$

Neka je sada X kompaktan uniforman prostor. Kako je skup periodičnih tačaka P podskup kompaktnog prostora X sledi da je P totalno ograničen. To znači da za svako $U \in \mathcal{U}$ postoji konačan podskup K skupa P sa svojstvom da je

$$P \subset U[K] = \cup \{U[p] : p \in K\}.$$

Prema (8) za $V \subseteq U$ imamo da je

$$P \cap V[p] = p \text{ za svako } p \in K,$$

odakle sledi da je $P = K$, tj. da je skup periodičnih tačaka konačan.

Slično kao i kod stava IV.2.1. imamo sledeće dve posledice ovog stava.

P o s l e d i c a.- IV.2.2.1. Neka operator A preslikava u sebe sama prebrojivo kompaktan Hausdorff-ov uniforman prostor $(X,\mathcal{U})$ čija je baza $\mathcal{B}$ uniformnosti $\mathcal{U}$ otvorena i neka je $U \in \mathcal{B}$. Ako je A neprekidan i uopšteno $(U,\mathcal{B})$-kontraktivan, tada je skup periodičnih tačaka neprazan. Ako je X kompaktan tada je skup periodičnih tačaka konačan.

P o s l e d i ca.- IV.2.2.2. Ova posledica se odnosi na korolar 2. stav 2. D. Bailey-a [5, str.103] - Neka preslikavanje A preslikava kompaktan metrički prostor X u sebe sama. Ako je preslikavanje A neprekidno i uopšteno ε-kontraktivno na X, tada je skup periodičnih tačaka neprazan i konačan.

V. ZAJEDNIČKE POSTOJANE I PERIODIČNE TAČKE KOMUTATIVNIH OPERATORA

U ovom odeljku razmatraćemo neke dovoljne uslove za egzistenciju zajedničkih postojanih i periodičnih tačaka komutativnih operatora koji preslikavaju jedan isti skup u sebe sama.

Dokazuju se stavovi o zajedničkim postojanim i periodičnim tačkama a potom se uspostavlja veza ovih stavova sa stavovima u prethodnim glavama i daju samo neke posledice radi ilustracije te veze.

S t a v.- V.1. Neka je E neprazan skup i neka operatori $A_i (i = 1,2,\ldots n)$ preslikavaju skup E u sebe sama. Ako složeni operator $A_1 \circ A_2 \circ \cdots \circ A_n$ ima jedinstvenu postojanu tačku $p \in E$ i ako je $A_i \circ A_j = A_j \circ A_i$ $(i,j = 1,2,\ldots,n)$ tada je tačka p zajednička postojana tačka svih operatora A_i $(i = 1,2,\ldots,n)$. Ako je $A_i = A$ za svako $i = 1,2,\ldots, n$ tada je tačka p jedinstvena postojana tačka operatora A.

D o k a z.- Dokažimo da je tačka p postojana tačka proizvoljnog operatora A_{i_0} $(1 \leq i_0 \leq n)$. Kako su operatori $A_i (i = 1,2,\ldots,n)$ komutativni u tački p imamo

$$p = A_1 \circ A_2 \circ \cdots \circ A_{i_0} \circ \cdots \circ A_n p = A_{i_0} \circ A_1 \circ \cdots \circ A_n p = A_1 \circ A_2 \circ \cdots \circ A_n \circ A_{i_0} p.$$

Odavde sledi

$$A_{i_o}p = A_{i_o}(A_1 \circ A_2 \circ \dots \circ A_n A_{i_o})p = (A_{i_o} \circ A_1 \circ A_2 \circ \dots \circ A_n) A_{i_o} p,$$

što znači da je tačka $A_{i_o}p$ postojana tačka operatora

$$A_{i_o} \circ A_1 \circ A_2 \circ \dots \circ A_n = A_1 \circ A_2 \circ \dots \circ A_{i_o} \circ \dots \circ A_n.$$

Pošto je tačka p jedinstvena postojana tačka operatora

$$A_1 \circ A_2 \circ \dots \circ A_{i_o} \circ \dots \circ A_n$$

mora biti

$$A_{i_o} p = p,$$

čime se završava dokaz prvog dela stava.

Drugi deo stava sledi iz činjenice da svaka tačka koja je postojana tačka operatora A mora biti postojana tačka i operatora $A \circ A \circ \dots \circ A = A^n$. Kako prema pretpostavci operator A^n ima jedinstvenu postojanu tačku sledi da i operator A ima jedinstvenu postojanu tačku.

Radi ilustracije veze ovog stava i stavova i posledica prethodnih odeljaka navodimo samo jednu posledicu koja se odnosi na posledicu IV.2.1.1.

P o s l e d i c a.- V.1.1. Neka operatori $A_i (i=1,2,\dots,n)$ preslikavaju prebrojivo kompaktan Hausdorff-ov uniforman prostor $(X,\mathcal{U})$ u sebe sama i neka je uniformna struktura $\mathcal{U}$ otvorena. Ako su operatori $A_i(i = 1,2,\ldots,n)$ neprekidni i komutativni i ako su takvi da je operator $A_1 \circ A_2 \circ \ldots \circ A_n$ uopšteno $\mathfrak{A}$-kontraktivan, tada postoji zajednička postojana tačka svih operatora $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Ako je $A_i = A$ za svako $i = 1,2,\ldots,n$, tada je tačka p jedinstvena postojana tačka operatora A.

Sada ćemo navesti stav koji se odnosi takodje na posledicu IV.2.1.1.

S t a v.- V.2. Neka operatori A i B preslikavaju Hausdorff-ov uniforman prostor X u sebe sama. Ako je skup $I(B) = \{x : x = Bx; x \in X\}$ neprazan i prebrojivo kompaktan i operator A na tome skupu neprekidan i uopšteno $\mathfrak{A}$-kontraktivan, tada postoji jedinstvena zajednička postojana tačka operatora A i B.

D o k a z.- Za proizvoljno $x_0 \in I(B)$ je

$$BAx_0 = A\,Bx_0 = A\,x_0$$

što znači da operator A preslikava prebrojivo kompaktan skup I(B) u sebe sama. Tada na osnovu posledice IV.2.1.1. operator A ima jedinstvenu postojanu tačku u skupu I(B), koja je prema definiciji skupa I(B) postojana tačka i operatora B.

Dokažimo sada sledeći stav o zajedničkim periodičnim tačkama komutativnih operatora.

S t a v.- V.3. Neka je E neprazan skup i neka komutativni operatori A i B preslikavaju skup E u sebe sama. Ako operator B ima neprazan i konačan skup periodičnih tačaka P tada postoji konačno mnogo zajedničkih periodičnih tačaka operatora A i B.

D o k a z.- Najpre ćemo pokazati da operator A preslikava skup P u sebe sama.

Neka je $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_s\}$ i p proizvoljan elemenat skupa P. To znači da postoji neko $k \in N$ tako da je

$$p = B^k p.$$

Tada je zbog komutativnosti operatora A i B

$$Ap = AB^k p = A \circ B \circ B \circ \ldots \circ Bp = B \circ B \circ \ldots \circ B \circ Ap = B^k Ap,$$

što znači da je i Ap periodična tačka operatora B, odnosno da operator A preslikava skup P u sebe sama.

Primetimo sada da postoji podskup skupa P koga operator A preslikava na sebe sama. Kako je P konačan, lako je zaključiti da je to skup

$$P^* = A^{s-1}P = \bigcap_{i=0}^{s-1} A^i P,$$

gde je s kardinalni broj skupa P.

Iz činjenice da A preslikava konačan skup P^* na sebe sama sledi da je svaka tačka tog skupa periodična tačka operatora A. Znači, za svako $p \in P^*$ postoji par prirodnih brojeva $(n(p), m(p))$ tako da je

$$A^{n(p)}p = p = B^{m(p)}p,$$

što je i trebalo dokazati.

Radi ilustracije veze ovog stava i stavova i posledica koje daju dovoljne uslove za egzistenciju konačno mnogo periodičnih tačaka navodimo sledeću posledicu koja se odnosi na posledicu IV.2.2.1.

P o s l e d i c a.- V.3.1. Neka komutativni operatori A i B preslikavaju kompaktan Hausdorff-ov uniforman prostor $(X, \mathcal{U})$ u sebe sama i neka je baza $\mathcal{B}$ uniformne strukture otvorena. Ako je $U \in \mathcal{B}$ i operator A neprekidan i uopšteno $(U, \mathcal{B})$-kontraktivan tada postoji konačno mnogo zajedničkih periodičnih tačaka operatora A i B.

L I T E R A T U R A

[1] ABIAN S., BROWN A. - A theorem on partially ordered sets, with applications to fixed point theorems, Can. J. Math. 13 (1961), 78-82.

[2] ANTONOVSKIJ M. - Metričeskie prostranstva nad polupoljami, (Proc. int. symposium Topology - Algebra Prague 1961), Prague 1962, 64-68.

[3] ANTONOVSKIJ M., BOLTJANSKIJ V., SARYMSKOV T. - Topologičeskie polupolja, Izdateljstvo SamGU, Taškent, 1960.

[4] BAILEY D. - On contractive and expansive mappings, Dissert. Abstracts, vol. 26, N^{o} 4, 2332-2333.

[5] ___________ Some theorems on contractive mappings, Jour. London Math. Soc., 41 (1966), 101-106.

[6] BANACH S. - Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur applications aux équations intégrales, Fund. Math. 3 (1922), 133-181.

[7] BELLUCE L., KIRK W. - Fixed point theorems for families of contraction mappings, Pacific J. Math., 18 (1966), 213-217.

[8] ___________ Fixed point theorems for certain classes of nonexpansive mappings, Proc. Amer. Math. Soc., 20 (1969), 141-146.

[9] ___________ Some fixed point theorems in metric and Banach spaces, Canad. Math. Bull. 12 (1969), 481-491.

[10] BIRKHOFF G. - Lattice theory, Providence, 1948

[11] BIRKHOFF G., KELLOG A. - Invariant points in function space, Trans. Amer. Math. Soc., 23 (1922), 96-115.

[12] BOLTJANSKIJ V. - Topologičeskie polupolja i ih primenenija, (Proc. int. symposium Topology - Algebra), Prague 1962, 106-111.

[13] BOYD D., WONG JAMES S.W., - On nonlinear contractions, Proc. Amer. Math. Soc., 20 (1969), 458-464.

[14] BROUWER L. - Über Abbildung von mannigfaltigkeiten, Math. Ann. 71 (1911), 97-115.

[15] BROWDER F. - On a generalization of the Schauder fixed point theorem, Duke Math., 26 (1959), 291-304.

[16] ________ A further generalization of the Schauder fixed point theorem, Duke Math., 32 (1965), 575-578.

[17] BROWN T., COMFORT W. - New methods for expansion and contraction maps in uniform spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 11 (1960), 483-486.

[18] BRYANT V. - A remark on a fixed point theorem for iterated mappings, Amer. Math. Monthly, 75 (1968), N° 4, 399-400.

[19] CACCIOPPOLI R. - Sugli elementi transformazioni funzionali, Atti Accad. Naz. Lincei (6), 13 (1931), 498-502.

[20] ________ Un teorema generalle sull' esistenza di elementi uniti in una transformazione funzionale, Atti Accad. Naz. Lincei (6), 11 (1930), 794-799.

[21] CANO J. - On commuting mappings by successive approximations, Amer. Math. Monthly, 75 (1968), 393-394.

[22] CHANDLER R., A generalized contraction principle, Fund. Math., 65 (1969), 193-195.

[23] CHEORGHIU N. - Teorema contractiilor in spatii uniforme, Studii si cercetari Mat. Acad. RSR, 19 (1967), 119-122.

[24] CHU S., DIAZ J.- On "in the large" application of the contraction principle, Atti Accad. Sci. Torino, 99 (1964-65), 351-353.

[25] ______________ Remarks on a Generalization of Banach's Principle of Contraction Mappings, J. Math. Analysis and Appl., 11 (1965), 440-446.

[26] ĆIRIĆ LJ. - O jednoj klasi preslikavanja u metričkim prostcrima, Mat. vesnik, T.7 (22), (1970), 159-164.

[27] COLLATZ L. - Funktionalanalysis und Numerische Mathematik, Grundlehren der Math. Wiss. Band 120, Springer, Berlin, 1968.

[28] DANEŠ J. - Some fixed point theorems, Comment. Math. Univ. Carolinae, 9 (1968), N^{0} 2, 223-235.

[29] DAVIS A. - Fixpoint theorem for contraction of a well-chained topological space, Proc. Amer. Math. Soc., 14 (1963), 981-985.

[30] DELEANU A., MARINESCU G. - Teoreme o nepodvyžnoj točke i nejavnih funkcijah v lokalno- vypuklih prostranstvah, Revue Math. pures et appl., 8 (1963), 91-99.

[31] DIAZ J., METCALF F. - On the structure of the set of subsequential limit points of successive approximations, Bull. Amer. Math. Soc., 73 (1967), N^{0} 4, 516-519.

[32] EDELSTEIN M. - An extension of Banach's contraction principle, Proc. Amer. Math. Soc., 12 (1961), 7-10.

[33] ______________ On fixed and periodic pcints under contractive mappings, J. London Math. Soc., 37 (1962), 74-79.

[34] EDELSTEIN M. - On nonexpansive mappings, Proc. Amer. Math. Soc., 15 (1964), 689-695.

[35] ______________ On predominantly contractive mappings, J. London Math. Soc., 38 (1963), 81-86.

[36] EDREI A. - On mappings which do not increase small distances. Proc. London Math. Soc., 2 (1952), 272-278.

[37] FADELL E. - Recent results in the fixed point theory of continuous maps, Bull. Amer. Math. Soc., 76 (1970), 10-[illegible].

[38] FREUDENTHAL H., HUREWICZ W. - Dehnungen, Verkürzungen, Isometrien, Fund. Math., 26 (1936), 120-122.

[39] FUČIK S. - Fixed point theorems for sum of nonlinear mappings. Comment. Math. Univ. Carolinae, 9 (1968), 133-143.

[40] GLEBOV N. - Ob odnom obobščenii teoremi Kakutani o nepodvižnoj točki, dokladi Ak. N. SSSR, 185 (1969), N°6, 981-983.

[41] GLICKSBERG I. - A further generalization of the Kakutani fixed point theorem with application to Nash equilibrim points, Proc. Amer.Math.Soc., 3 (1952), 170-174.

[42] HALPERN R., BERGMAN M., - A fixed point theorem for inward and outward maps, Trans. Amer. Matt. Soc., 130 (1968), 353-358.

[43] HADŽIĆ O., STANKOVIĆ B. - Some theorems on the fixed point in locally convex spaces, Publ. Inst. Math. Beograd, T.10 (24), (1970).

[44] HOCKING J., YOUNG G. - Topology,Addison-Wesley, 1961,9+374.

[45] HONG D. - A note on fixed point theorems for a family of nonexpansive mappings, Proc.Amer. Soc., 19 (1968),1223-1224.

[46] ISEKI K. - On Banach Theorem of Contraction Mappings, Proc. Japan Acad., 41 (1965), 145-146.

[47] JANOS L. - A converse of Banach's contraction principle, Proc. Amer. Math. Soc., 18 (1967), N^{o} 2, 287-289.

[48] KAKUTANI S. - A generalization of Brouwer's fixed point theorem, Duke Math. Journ., 8 (1941), 457-459.

[49] KAMMERER W., KASRIEL R. - On contractive mappings in uniform spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 15 (1964), 288-290.

[50] KANTOROVIĆ L., AKILOV G. - Funkcionalnij analiz v normirovanih prostranstvah, Fizmatgiz, 1959.

[51] KASAHARA S.- A Remark on the Contraction Principle, Proc. Japan Acad., 44 (1968), 21-26.

[52] KELLEY J. L. - General topology, New-York: Van Nostand, 1955.

[53] KIRK W. - A fixed point for mappings which do not increase distances, Amer. Math. Monthly, 73 (1965), 1004-1006.

[54] ________ On mappings with diminishing orbital diameters J. London Math. Soc., 44 (1969), 107-111.

[55] KOLMOGOROV A., FOMIN S. - Elementi teorii funkcij i funkcionalnogo analiza, Izdatelstvo "Nauka", 1968.

[56] KRASNOSELSKIJ M. - Dva zamečanija o metode posledovatelnih približenij, UMN, 10 (1955), 123-127.

[57] ________________ Topologičeskie metodi v teorii nelinejnih integralnih uravnenij, Gostehizdat, 1956.

[58] KUREPA Đ. - Teorija skupova, Zagreb, 1951, 22+444.

[59] __________ Viša algebra II, Školska knjiga, Zagreb, 1965, (20^{00}) + 765-1380.

[60] KUREPA Đ. - Tableaux ramifiés d'ensembles. Espaces pseudo-distanciés, C. R. 198 (1934), 1563-1565.

[61] __________ Le probléme de Suslin et les espaces abstraits, C. R.203 (1936), 1049-1052.

[62] __________ Un critére de distânciabilité, "Mathématica", Cluj, 13 (1937), 59-65.

[63] __________ Sur les clàsses (E) et (D), Publ. Math. Belgrade 5 (1936), 124-132.

[64] __________ Ensembles ordonnés et ramifiés. Thèse Paris, 1935, p. 1-138; "Publ. Math. Beograd, 4 (1935), 1-138.

[65] __________ Sur l'écart abstrait, Glasnik Mat. Fiz. Zagreb, 11 (1956), 105-134.

[66] __________ Distanza numerica e distanza non numerica, Conferenze Sem. di Mat. dell'Univ. di Bari 1963, Bologna 1965, 90.

[67] __________ Fixpoints of monotone mappings of ordered sets, Glasnik Mat. Fiz. Zagreb, 19 (1964), 167-173.

[68] LEFSCHETZ S. - Topology, New-York, 1956.

[69] LEVIN A., LIFŠIC E. - K principu obobščennogo sžatija M. A. Krasnoselskogo, Problemi mat. an. složnih sistem, Vyp. 1, Voronež, 1967.

[70] MAMUZIĆ Z. - Uvod u opštu topologiju, "Matematička biblioteka", Beograd, 1960, str. 144.

[71] __________ Note sur l'écart abstrait et les espaces (V), Publ. Inst. Math. Belgrade 13 (1959), 129-131.

[72] __________ Abstract distance and neighborghood spaces,(Proc. int.symposium Topology-Algebra Prague 1961),Prague 1962, 261-266.

[73] MARAVALL D. - Aplicaciones U-contractivas en los espacios uniformes. Teorema del punto fijo, Rev. Mat. Hisp.-Amer., 25 (1965), 106-111.

[74] ______________ Las aplicaciones T_2-contractivas en los espacios topologicos, Rev. Mat. Hisp. - Amer., 26 (1966), 37-41.

[75] MARGOLIS B. - On some fixed points Theorems in generalized complete metric spaces, Bull. Amer. Math. Soc., 74(1968), 275-282.

[76] MARJANOVIĆ M. - A further extension of Banach contraction principle, Proc. Amer. Math. Soc., 19 (1968), 411-414.

[77] ______________ On topological isometries, Indag. Math., 31 (1969), 184-189.

[78] MARJANOVIĆ M., PREŠIĆ S. - Remark on the convergence of a sequance, Publ. Elek. Fak., 155 (1965).

[79] MEIR A., KEELER E.,- A Theorem on Contraction Mappings, J. Math. Anal. Appl., 28 (1969), 326-329.

[80] MEYERS P.R. - A converse to Banach contraction principle, J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B 71 B (1967), 73-76.

[81] NAIMPALLY S. - Contractive mappings in uniform spaces, Indag. Math., 27 (1965), N°3, 477-481.

[82] PAPIĆ P. - Pseudodistancijalni prostori, Thése Zagreb, 1953, str. 79.

[83] PREŠIĆ S. - Sur la convergence des mites. Comptes Rendus, 260 (1965).

[84] RAKOTCH E. - A note on contractive mappings. Proc.Amer. Math. Soc., 13 (1962) N°3, 459-465.

[85] REINERMANN J.- Über Fixpunkte kontrahierender Abbildungen in uniformen Räumen und deren Darstellung durch konvergente Iterationsverfahren, Ber. Ges. Math. und Datenverarb, 1968, N°4.

[86] RHODES F. - A generalization of isometries to uniform spaces, Proc. Cambridge Phil. Soc., 52 (1956), 399-405.

[87] SADOVSKIJ B. - Ob odnom principe nepodvyžnoj točke, Funk. Analiz i Priloženija, 1 (1967), N°2, 74-76.

[88] SCHAUDER J. - Zur theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen, Math. Z., 26 (1927), 47-65.

[89] SCHRÖDER J. - Das Iterationsverfahren bei allgemeinerem Abstandsbegriff, Math. Z., 66 (1956), 111-116.

[90] SINGH K.- Contraction mappings and fixed point theorems, Ann. Soc. Scient. Bruxelles, 83 (1969), 34-44.

[91] SINGH S. - Sequence of mappings and fixed points, Ann. Soc. Scient. Bruxelles, 83 (1969), 197-201.

[92] SONNENSCHEIN J. - Opérateurs de méme coeficient de contraction, Bull, cl. Scient. Acad. roy Belg., 52 (1966), N°9, 1078-1082.

[93] STANKOVIĆ B. - Solution de l'équation differentielle dans in sous-ensemble des opérateurs de J. Mikusinski, Publ. Inst. Math. Beograd, T. 5 (19), (1965), 89-95.

[94] ____________ Operator Linear Differential Equation of order m, J. of Differential Equations, 5 (1969), N°1, 1-11.

[95] ____________ The Existence and the Unicity of solution of a system of operator differential equations, Publ. Inst. Math., Beograd, T. 9 (23), (1969), 85-92.

[96] TARSKI A. - A lattice theoretical fixpoint theorem and its application, Pacific J. Math., 5 (1955), 285-309.

[97] TYCHONOFF A. - Ein Fixpunktsatz, Math. Ann., 111 (1935).

[98] WONG JAMES S.W. - Common fixed points of commuting monotone mappings, Can. J. Math., 19 (1967), N°3, 617-620.

[99] ________________ On common fixed and periodic points, Portugal. Math., 26 (1967), 159-163.

[100] ________________ Two extension of the Banach contraction mappings principle, J. Math. Analysis and Applic., 22 (1968), N°3, 438-443.

R E G I S T A R