JOVAN V. MALEŠEVIĆ

OCENE KOEFICIJENATA FOURIER-A NEKIH KLASA FUNKCIJA IZ L

- doktorska teza -

Beograd, januara 1975.

UVOD

U kratkim crtama, glavni rezultati teze su sledeći.

U početnom delu date su majorante jedne kombinacije modula Fourier-ovih koeficijenata a_n i b_n funkcije $f(x) \in L$, gde (a_n), $(b_n) \in T$ - stavovi 1 i 2; koji dovode do majoranti za $\frac{|a_n|+|b_n|}{n}$ i $\frac{|a_n|+|b_n|}{n^2}$, sa odnosno bez dopunskog uslova da su nizovi $(|a_n|)$ i $(|b_n|)$ kvaziopadajući indeksa 1 - posledice 1 i 2.

Pomenuti stavovi i posledice dalje dovode do stavova 3, 4 i 5 i njihovih posledica, koji daju ocene koeficijenata Fourier-a funkcija iz klasa $K_{\varphi}^{(i)}$, $i = 1,2$, specijalno klasa: Lip α, $0 < \alpha \leq 1$, i ${}^{\alpha-1}W_s^{(2)}$, $1 < \alpha \leq 2$; te klase C - sve to za slučaj da (a_n), $(b_n) \in T$ i $(|a_n|)$, $(|b_n|)$ kvaziopadajući nizovi indeksa 1.

Tako se, kroz navedene stavove i posledice pokazalo, naprimer, da se ocene Fourier-ovih koeficijenata parnih i neparnih funkcija iz klase Lip α, $0 < \alpha \leq 1$, za slučaj opadajućih koeficijenata - rezultat Lorentz-a - prenose i na širu klasu funkcija $\{f(x)\} \subset$ Lip α, $0 < \alpha \leq 1$, definisanu sa

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \ (a_n), (b_n) \in T,$$

i nizovi $(|a_n|)$ i $(|b_n|)$ kvaziopadajući indeksa 1. Itd (videti str. 29-33). Posebno, stavovima 4 i 5 generalisana su četiri stava S. Aljančića i M. Tomića.

Stavom 6 je rešen inverzan problem o oceni koeficijenata Fourier-a funkcije iz novouvedene klase ${}^{\alpha-1}W_s^{(2)}$, $1<\alpha\leq 2$ (definicija (15)). Direktan i inverzan stav dovode do stava ekvivalencije (posledica 6) - pri uslovima (a_n), $(b_n)\in T$ i $(|a_n|)$ i $(|b_n|)$ kvaziopadajući nizovi indeksa 1.

Pri gornjim uslovima za koeficijente dat je i stav o identičnosti klasa ${}^{\alpha-1}W_s$ i ${}^{\alpha-1}W_s^{(2)}$ za $1<\alpha<2$ - stav 7; kao analogon Zygmund-ovom stavu o identičnosti klasa Lipα i Z_α, $0<\alpha<1$.

Stav lo svodi uslov Salema na jednostavniji oblik - posledica 7, dok stav 11 razmatra taj uslov za slučaj da su nizovi (a_n) i (b_n) opadajući nizovi indeksa 1 (pojam uveden definicijom 1).

Stav 12, koristeći lemu 1, daje ocene izraza $\tau_m^{(p)}$, $p\geq 1$, za klasu ${}^{\alpha-1}W_s^{(2)}$, $1<\alpha\leq 2$, kao generalizaciju Lorentz-ove ocene za klasu Lip α, $0<\alpha\leq 1$, na klasu ${}^{\alpha-1}W_s^{(2)}$, $1<\alpha\leq 2$.

Stav 13, koristeći leme 1 i 2, daje ocene izraza $\tau_m^{(p)}$, $p>1$, za novouvedenu klasu G (definicija 3), generališući time i jedan rezultat G.G. Lorentz-a.

U oceni koeficijenata, za slučaj funkcija iz L_2, išlo se i šire od klase funkcija sa kvaziopadajućim indeksa 1 modulima koeficijenata, odbacujući i uslov (a_n), $(b_n)\in T$. Naime, stavom 14 data je ocena modula reda Fourier-a ρ_n funkcije $f(x)\in L_2$, za slučaj da je niz (ρ_n) kvaziopadajući indeksa 1, odnosno, za taj slučaj, i ocene Fourier-ovih koeficijenata funkcija iz klasa $K_{\varphi}^{(i)}$, i = 1,2 (specijalno klasa $^{\alpha-1}W_s^{(i)}$ $(1<\alpha\leq 2)$ i Lip α $(o<\alpha\leq 1)$) - posledica 8; kao i ocena za ρ_n funkcije $f(x)\in N\cap V$ - posledica 9.

Stavom 15 su date ocene modula reda Fourier-a funkcije $f(x)\in L_2$ za slučaj da niz (ρ_n) pripada novouvedenoj klasi M_{β}, $o\leq\beta\leq 1$ (definicija 2); i ocenu za ρ_n kad $f(x)\in K_{\varphi}^{(i)}$, i = 1,2 - posledica lo (specijalno, za $(\rho_n)\in M_{\beta}$, ocene Fourier-ovih koeficijenata funkcija iz klasa $^{\alpha-1}W_s^{(i)}$ (i = 1,2), odnosno Lip α $(o<\alpha\leq 1)$).

Rezultati teze su i već pomenute novouvedene definicije: definicija 1, 2, 3 i definicija data relacijom (15), i u vezi sa tom definicijom stav 9. Sem toga klasa kvaziopadajućih nizova indeksa α, $\alpha > o$, razbijena je na podklase i na takvoj jednoj podklasi - klasi kvaziopadajućih nizova indeksa 1 - zasnovan je jedan veći deo rezultata teze.

Na kraju navedimo, i posebno, autore čiji su stavovi generalisani naznačenim stavovima u tezi:

1) S. Aljančić i M. Tomić - stavovi 4 i 5.

2) G.G. Lorentz - posledice 3 i 6, relacija (61), te stavovi 12 i 13.

3) S. Salem - stavovi lo i 11 (analogoni jednog rezultata S. Salema).

OCENE KOEFICIJENATA FOURIER-A

NEKIH KLASA FUNKCIJA IZ L

- doktorska teza -

Jovan V. Malešević

I

NOVOUVEDENI POJMOVI

U ovom odeljku su dati novi pojmovi na koje se, uz već poznate pojmove, nailazi u tezi. Uz neke od tih pojmova navedeni su i njima prateći pojmovi.

Definicija 1. Za numerički niz (a_n) sa pozitivnim članovima, kažemo da je opadajući indeksa α, ako je

$$(1) \qquad a_n \geq \left(1+\frac{\alpha}{n}\right) a_{n+1}, \quad \alpha \geq 0.$$

Za slučaj znaka $>$ u relaciji (1) reč je o strogo opadajućem nizu indeksa α.

Specijalno za $\alpha = 0$ reč je o klasičnom opadajućem (odnosno strogo opadajućem) nizu (a_n).

Svaki opadajući (strogo opadajući) niz indeksa α, $\alpha > 0$, je i opadajući (strogo opadajući), što je evidentno.

Specijalno za $\alpha = 1$ važi

$$(2) \qquad n a_n \geq (n+1) a_{n+1} ,$$

tj. za opadajući niz (a_n) indeksa 1 imamo, ne samo da je opadajući, već je i niz $(n.a_n)$ opadajući. Analogno je i za strogo opadajući niz indeksa 1.

Kao simetričan pojam pojmu regulisanom definicijom 1 je pojam rastućeg niza indeksa α, definisan sa

$$(3) \qquad a_{n+1} \geq \left(1+\frac{\alpha}{n}\right) a_n , \quad \alpha \geq 0 \quad (a_n > 0).$$

Za slučaj znaka $>$ u relaciji (3) reč je o strogo rastućem nizu indeksa α.

Opadajuće i rastuće nizove indeksa α, $\alpha > 0$, zvaćemo monotonim nizovima indeksa α; strogo opadajuće i strogo rastuće nizove indeksa α pak strogo monotonim nizovima indeksa α. Za $\alpha = 0$ reč je o klasičnim monotonim nizovima, odnosno strogo monotonim nizovima.

Za niz (a_n) sa pozitivnim članovima kažemo da je kvaziopadajući indeksa α [1], ako je

$$(4) \qquad a_{n+1} \leq \left(1+\frac{\alpha}{n}\right) a_n , \quad \alpha \geq 0 ,$$

odnosno za slučaj znaka $<$ u relaciji (4) - strogo kvaziopadajući indeksa α.

Gornja definicija se prenosi i na nizove (a_n) gde nejednakost (4) važi počev od izvesnog indeksa n_0, n_0 - dovoljno veliki broj.*) Ista primedba važi i za nejednakost (1) u definiciji 1.

*) U literaturi, kao naprimer u [1], navedenom definicijom je definisan kvazimonotoni niz; ovde je taj termin upotrebljen za širu klasu nizova kao što će se videti u narednom.

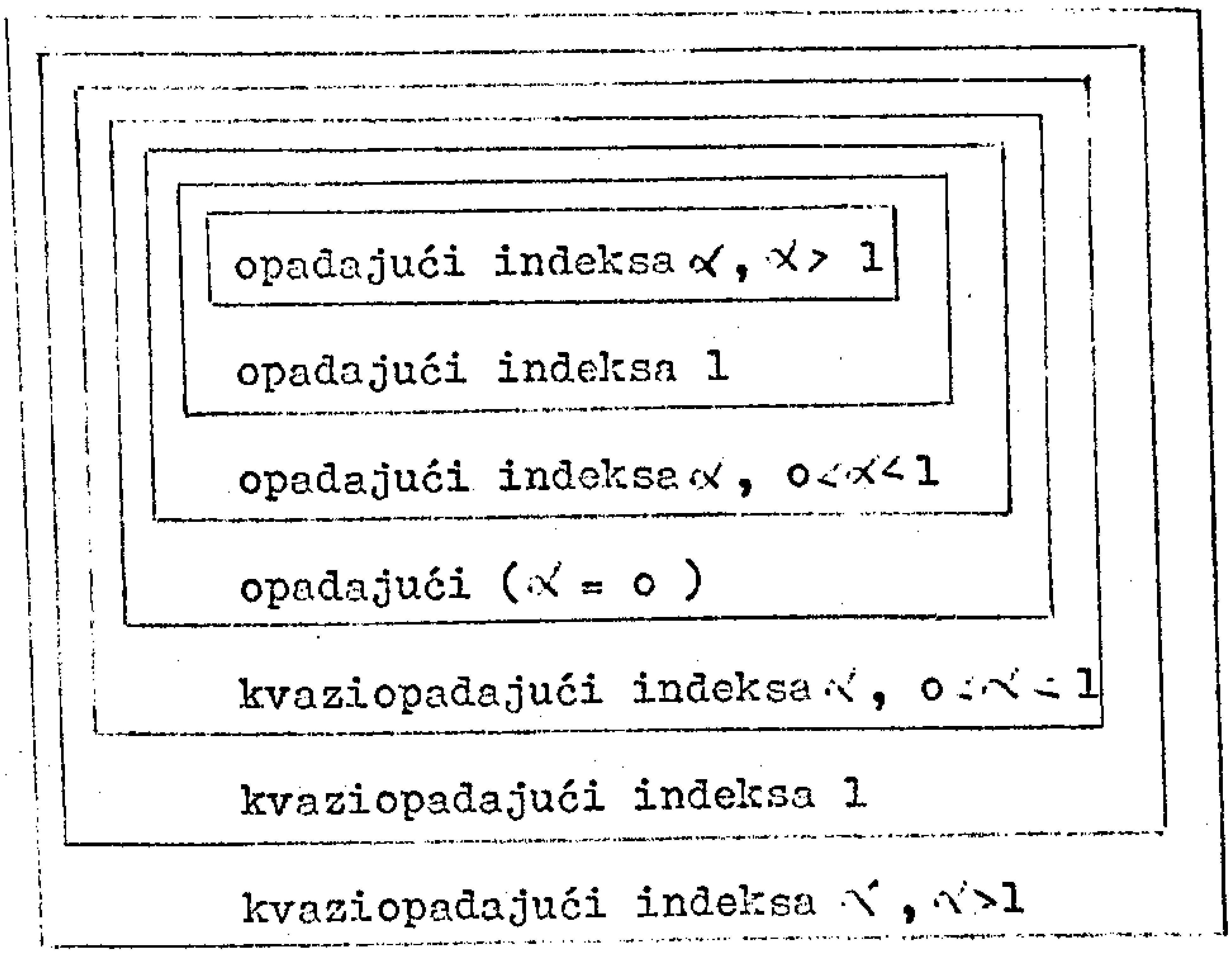
Za $\alpha = o$ reč je o klasičnom opadajućem (odnosno strogo opadajućem) nizu (a_n).

Specijalno za $\alpha = 1$ važi

$$(5) \qquad \frac{a_n}{n} \geq \frac{a_{n+1}}{n+1},$$

tj. kvaziopadanje indeksa 1 niza (a_n) je ekvivalentno opadanju niza $\left(\frac{a_n}{n}\right)$.

Ako je niz opadajući on je i kvaziopadajući indeksa α, $\alpha > o$, što je evidentno. Medjutim, kao što smo naveli, svaki opadajući niz indeksa α, $\alpha > o$, je i opadajući. Otuda ova skica (Skica 1). Tako za opadajući niz (a_n) indeksa 1 važi



Skica 1

$$a_n \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)a_{n+1} \Rightarrow \begin{cases} na_n \geq (n+1)a_{n+1} \\ a_n > a_{n+1} \\ \frac{a_n}{n} > \frac{a_{n+1}}{n+1} \end{cases}$$

Kao pandan pojmu kvaziopadajućeg niza indeksa α je pojam <u>kvazirastućeg niza indeksa α</u>, definisan sa

$$(6) \qquad a_n \leq \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)a_{n+1}, \quad \alpha \geq 0 \ (a_n > 0).$$

Kvaziopadajuće i kvazirastuće nizove indeksa α, $\alpha > 0$, nazvaćemo <u>kvazimonotonim nizovima indeksa α</u>, za $\alpha = 0$ reč je o klasičnim monotonim nizovima.

Iz (6) i (4) se vidi da recipročne vrednosti kvazirastućeg niza indeksa α, formiraju kvaziopadajući niz indeksa α, i obrnuto; dok iz (1) i (3) da recipročne vrednosti opadajućeg niza indeksa α formiraju rastući niz indeksa α, i obrnuto.

Primetimo na kraju, <u>da je kvaziopadajući niz indeksa α, $\alpha > 0$, za $n \geq n_0$, n_0 - dovoljno veliki broj, skoro opadajući sa konstantom $C > 1$.</u>

Za niz (a_n), $a_n > 0$, kažemo da je <u>skoro opadajući</u> ako egzistira pozitivna konstanta C da je [2] :

$$C \cdot a_n > a_{n+1}, \quad n = 1,2,\ldots$$

(ako je $a_{n+1} > C \cdot a_n$, $C > o$, $n = 1,2,\ldots$, onda se za gornji niz kaže da je <u>skoro rastući</u>). Iz

$$a_n > \frac{1}{c} a_{n+1}$$

za $C > 1$ imamo da je

$$a_n > (1-p)\, a_{n+1}, \quad o < p < 1.$$

Važi ($\alpha > o$)

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geqslant 1 - \frac{\alpha}{n+\alpha} \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 - p$$

za $n \geqslant n_o$, n_o - dovoljno veliki broj; čime je potvrdjeno gore rečeno.

<u>Definicija 2. Za numerički niz (a_n) kažemo da pripada klasi M_β, $o \leq \beta \leq 1$, ako je</u>

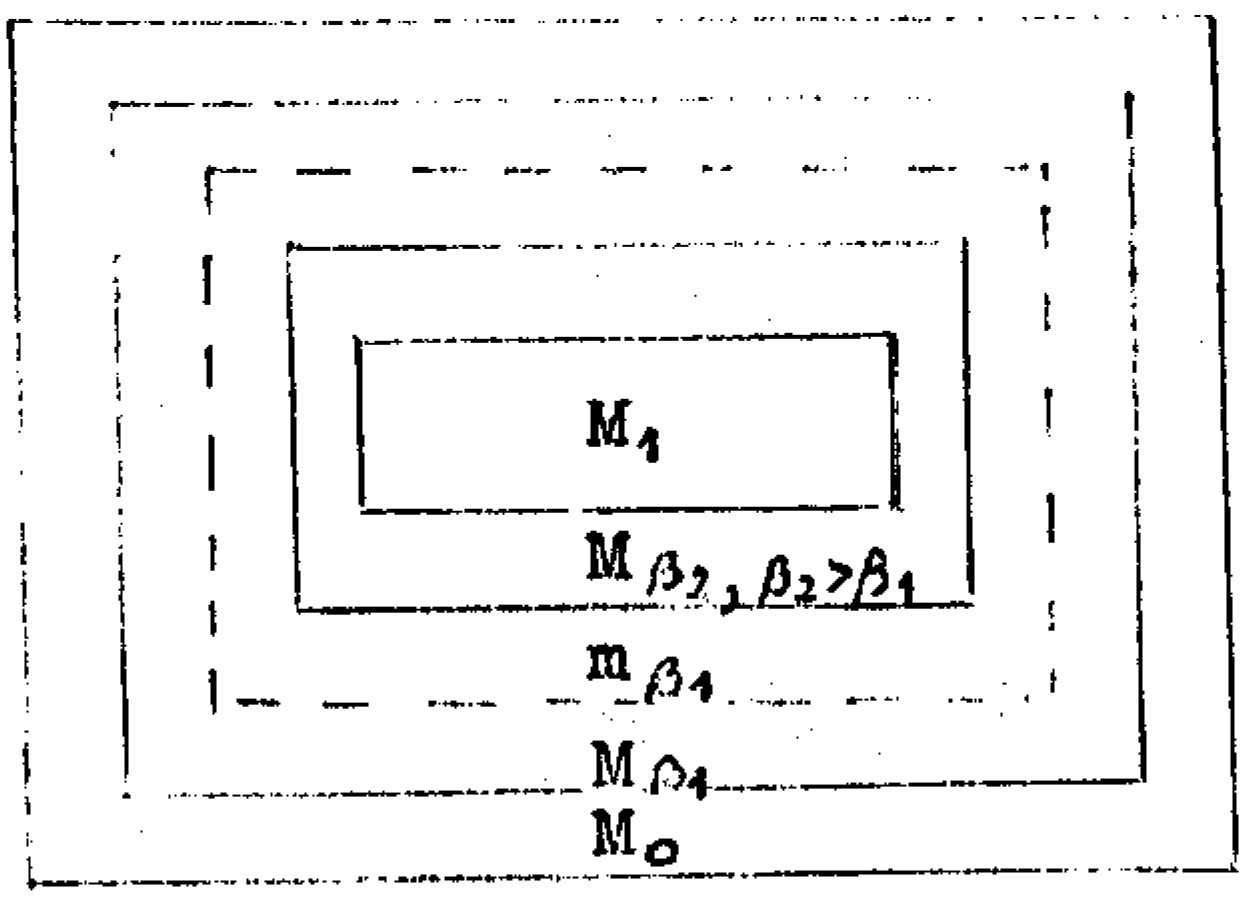
$$(7) \qquad m^\beta a_m^{\,2} = O\Big(\sum_{k=m}^{\infty} a_k^2\Big) \qquad \Big(\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < +\infty\Big)^{*)}.$$

Gornje klase nizova su neprazne; tako niz (n^{-1}), što nije teško proveriti, pripada klasi M_1, najužoj od treti-

---

*) Definisana klasa nizova razmatrana je u tezi za slučaj nizova modula ρ_n reda Fourier-a funkcije $f(x) \in L_2$, čime je konvergencija reda $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n^2$ zagarantovana - otuda i oblik formulacije (7).

ranih klasa ж)(naime za $\beta_2>\beta_1$ i $\beta_1,\beta_2\in(0,1]$, važi $M_{\beta_2}\subset M_{\beta_1}$, što sleduje iz: $n^{\beta_2} a_n^2 = O(\sum_{k=n}^{\infty} a_k^2) \Rightarrow n^{\beta_1} a_n^2 = o(\sum_{k=n}^{\infty} a_k^2)$ $\Rightarrow n^{\beta_1} a_n^2 = O(\sum_{k=n}^{+\infty} a_k^2)$ - sa $n^{\beta_1} a_n^2 = o(\sum_{k=n}^{\infty} a_k^2)$ definisana je klasa $m_{\beta_1}\subset M_{\beta_1}$; konstruisanjem odgovarajućih primera može se pokazati da je ova inkluzija striktna). Za $\beta = 0$ (klasa M_0) reč je o najširoj klasi (Skica 2) - klasi svih nizova (a_k) za koje je $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < +\infty$ (uvek je $a_n^2 \le \sum_{k=n}^{\infty} a_k^2$).



Skica 2

Navedimo da kvaziopadajući niz indeksa 1: $a_n=2^{-n}$, ne pripada klasi M_1, što se lako proverava. Medjutim, ako je niz (a_n) kvaziopadajući indeksa 1, i sem toga uz $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < +\infty$, i

$$(8) \qquad \sum_{k=n}^{\infty} a_k^2 \sim \varphi(n), \quad \varphi(cn) = O[\varphi(n)]$$

ж) Može se pokazati da je za svako $\beta>1$ klasa M_β prazna.

(C - pozitivna konstanta), tada niz $(a_n) \in M_1$.

Zaista iz

$$\frac{a_n}{n} \geq \frac{a_{2m}}{2m}, \quad m \leq n \leq 2m,$$

za $\forall m$ (ili za $\forall m \geq n_0$), sleduje :

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n^2 \geq \sum_{n=m}^{2m} a_n^2 \geq \left(\frac{a_{2m}}{2m}\right)^2 \sum_{n=0}^{m} (m+n)^2 > c\,(2m)\,a_{2m}^2,$$

pa iz gornje relacije, i analogne relacije za $(2m-1)\, a_{2m-1}^2$, imamo

$$(9) \qquad \left.\begin{array}{l} c\,(2m)\,a_{2m}^2 \\ c_1(2m-1)\,a_{2m-1}^2 \end{array}\right\} < \sum_{n=m}^{\infty} a_n^2 \leq c_2\, \varphi(m) ;$$

odakle dobijamo, koristeći navedena svojstva funkcije $\varphi(m)$, da je

$$n\, a_n^2 = O\left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k^2\right),$$

tj. $a_n \in M_1$.

U narednom tretiraćemo realne 2π- periodične funkcije.

Definicija 3. Za funkciju $f(x) \in L$ i

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx ,$$

kažemo da pripada klasi G ako i samo ako je

$$(10) \qquad \sum_{n=m}^{\infty} \rho_n^2 = O(m^{-1}),$$

gde je $\rho_n^2 = a_n^2 + b_n^2$.

Izraz $\varrho_n = \sqrt{a_n^2+b_n^2}$ u daljem tekstu zvaćemo modulom reda Fourier-a.

Gornja klasa funkcija je neprazna; tako klasa Lip $\frac{1}{2} \subset G$. Zaista, prema [3](stav 1):

$$(11) \qquad f(x) \in Lip\frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{k=n}^{\infty} \varrho_k^2 = O(n^{-1}).$$

Gornjoj klasi funkcija pripada i klasa funkcija ograničene varijacije (V), i šire, klasa funkcija V^* jer [4] *):

$$(11_1) \qquad f(x) \in V^* \Rightarrow |a_n|, |b_n| \le \frac{C}{n} \Rightarrow \sum_{n=n}^{\infty} \varrho_n^2 \le \frac{C}{n} .$$

Predmet teze, pored ostalog, biće i klase funkcija date sledećim definicijama.

Za funkciju f(x) kažemo da pripada <u>klasi $K_\varphi^{(1)}$</u> ako je

$$(12) \qquad \omega_1(\delta, f) = \sup_{|h| \le \delta} |f(x+h) - f(x)| = O[\varphi(\delta)],$$

gde je $\varphi(\delta) > 0$ za $\delta > 0$ i $\varphi(\delta) \to 0$ kad $\delta \to 0_+$ ($\varphi(0) = 0$).

Za funkciju f(x) kažemo da pripada <u>klasi $K_\varphi^{(2)}$</u> ako je

$$(13) \qquad \omega_2(\delta, f) = \sup_{|h| \le \delta} |f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)| = O[\varphi(\delta)],$$

gde je $\varphi(\delta) > 0$ za $\delta > 0$ i $\varphi(\delta) \to 0$ kad $\delta \to 0_+$ ($\varphi(0) = 0$).

U oba gornja slučaja za funkciju $\varphi(\delta)$ na segmentu $[0, \pi]$ pretpostavljamo da je neopadajuća.

---

*) Neka je funkcija $f \in V$, označimo sa $(f)^*$ skup svih funkcija iz L koje se od funkcije f razlikuju na skupu mere nula (na fiksiranom segmentu). Skup $\{(f)^*\}$ kad f prolazi skup V nazivamo klasom funkcija V^*.

Evidentno je da ako za funkciju f(x) važi relacija (12) da važi i relacija (13), dok obrnuto uvek nije tačno, pa je u važnosti striktna inkluzija:

$$(14) \qquad K_\varphi^{(1)} \subset K_\varphi^{(2)} .$$

Specijalno, razmatraćemo klase definisane relacijama

$$(15) \qquad \omega_i(\delta, f) = O\left(\delta^{\alpha-1} |\ln \delta|^s\right), \quad i = 1, 2,$$

$1 < \alpha \leq 2$ i $s \in R_e$, notirane sa ${}^{\alpha-1}W_s^{(i)}$; koje u sebi sadrže (za s = o) poznate klase Lipschitz-ovu i Zygmund-ovu [5].*)

Klasu nizova čiji su članovi stalnog znaka označimo sa T (da su nizovi (a_n) i (b_n) iz klase T notiramo sa: (a_n), $(b_n) \in T$).

---

*) U tekstu teze ${}^{\alpha-1}W_s \equiv {}^{\alpha-1}W_s^{(1)}$ i $W_s \equiv {}^1W_s^{(1)}$ $(W_s^{(2)} \equiv {}^1W_s^{(2)})$.

II

OCENE KOEFICIJENATA FOURIER-A NEKIH KLASA FUNKCIJA IZ L

1° U sledeća dva stava su date minorantne ocene modula tretiranih ponovljenih integrala kroz Fourier-ove koeficijente a_n i b_n funkcije $f(x) \in L$ pri uslovu $a_n, b_n \geq 0$ ($a_n, b_n \leq 0$), odnosno $a_n \leq 0$, $b_n \geq 0$($a_n \geq 0$, $b_n \leq 0$). Pomenute ocene su ujedno i majorantne ocene jedne kombinacije modula Fourier-ovih koeficijenata te funkcije, pri gore navedenim uslovima za koeficijente. One nas dovode do ocena kombinacija: $\frac{|a_n|+|b_n|}{n^2}$, (a_n), $(b_n) \in T$; i $\frac{|a_n|+|b_n|}{n}$, (a_n), $(b_n) \in T$, uz dodatni uslov da su nizovi (a_n) i (b_n) kvaziopadajući indeksa 1 - posledice 1 i 2.

Stav 1. Za funkciju $f(x) \in L$ i

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

važi, za slučaj da je $a_n, b_n \geq 0$ ili $a_n, b_n \leq 0$:

$$(16) \quad \left| \int_0^{\pi/n} \left(\int_0^{h/2} [\Delta_{-h} f]\, dx \right) dh \right| \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^4} \sum_{n=1}^{2n} n^2 |a_n| + \frac{1}{n} \sum_{n=n}^{\infty} \frac{|b_n|}{n} \right);$$

i, za slučaj da je $a_n \leq 0$, $b_n \geq 0$ ili $a_n \geq 0$, $b_n \leq 0$:

$$(17) \quad \left| \int_{-\pi/n}^{0} \left(\int_{h/2}^{0} [\Delta_{-h} f]\, dx \right) dh \right| \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^4} \sum_{n=1}^{2n} n^2 |a_n| + \frac{1}{n} \sum_{n=n}^{\infty} \frac{|b_n|}{n} \right)$$

gde je $\Delta_{-h} f = f(x-h) - f(x)$.

<u>Dokaz.</u> Za funkciju o kojoj je reč imamo

$$f(x-h)-f(x)\sim -2\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{nh}{2}\cos n\left(x-\frac{h}{2}\right)+2\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{nh}{2}\sin n\left(x-\frac{h}{2}\right).$$

Sleduje

$$\int_{\frac{h}{2}}^{0}[\Delta_{-h} f]\,dx = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}\left(\sin\frac{nh}{2}\right)^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}\sin\frac{nh}{2}\left(1-\cos\frac{nh}{2}\right)$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}\left(\sin\frac{nh}{2}\right)^2 + 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}\sin^3\frac{nh}{4}\cos\frac{nh}{4},$$

tj.

$$(18)\quad \int_{\frac{h}{2}}^{0}[\Delta_{-h} f]\,dx = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}\left(\sin\frac{nh}{2}\right)^2 + 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}\sin^3\frac{nh}{4}\cos\frac{nh}{4},$$

odnosno

$$(19)\quad \int_{0}^{\pi/n}\left(\int_{\frac{h}{2}}^{0}[\Delta_{-h} f]\,dx\right)dh = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}\int_{0}^{\pi/n}\left(\sin\frac{nh}{2}\right)^2 dh + 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}\int_{0}^{\pi/n}\sin^3\frac{nh}{4}\cos\frac{nh}{4}\,dh$$

Važi

$$J_1 = 8\int_{0}^{\pi/n}\sin^3\frac{nh}{4}\cos\frac{nh}{4}\,dh = \frac{8}{n}\left(\sin\frac{n}{n}\frac{\pi}{4}\right)^4,$$

a za integral

$$(20)\qquad J_2 = \int_{0}^{\pi/n}\sin^2\frac{nh}{2}\,dh$$

imamo da je

$$(21) \qquad \frac{\pi}{4m} < J_2 \leq \frac{\pi}{m}, \quad n \geq m.$$

Zaista

$$J_2 = \int_0^{\pi/m} \sin^2 \frac{n t}{2}\, dt \leq \frac{\pi}{m}, \quad \forall n;$$

dok za $n \geq m$, tj. $\ell \leq \frac{n}{m} < \ell+1$, $\ell \in N$, važi

$$J_2 = \frac{2}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{n}{m}} \sin^2 t\, dt > \frac{2}{m(\ell+1)} \int_0^{\ell\cdot\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt$$

$$= \frac{2}{m(\ell+1)} \int_0^{\ell\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2}\, dt = \frac{\pi \ell}{2m(\ell+1)} \geq \frac{\pi}{4m},$$

$$\left(\frac{\ell}{\ell+1} \geq \frac{1}{2}, \ \ell \in N \right)$$

pa su relacije (21) dokazane.

Pored relacija (21) često će se koristiti, u daljnem, i relacija:

$$(22) \qquad \sin \frac{n}{m}\frac{\pi}{4} \geq \frac{1}{2}\frac{n}{m}, \quad n \leq 2m.$$

Relacija (22) sleduje iz nejednakosti

$$\sin t \geq \frac{2}{\pi} t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2},$$

stavljanjem $t = \frac{n}{m}\frac{\pi}{4}$.

Dalje se dokaz odvija u četiri etape.

1) Za $a_n, b_n \geq 0$ iz (19), koristeći levu stranu u relaciji (21), sleduje:

$$(23)\qquad \int_0^{\pi/m}\left(\int_{h/2}^{0}[\Delta_{-h} f]\,dx\right)dh \geq 8K + \frac{\pi}{2m}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{b_n}{n},$$

gde je

$$(24)\qquad K = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^2}\left(\sin\frac{n}{m}\frac{\pi}{4}\right)^4.$$

Nastavljući dalje sa minoriranjem, shodno relaciji (22), dolazimo do grublje minorante:

$$\int_0^{\pi/m}\left(\int_{h/2}^{0}[\Delta_{-h} f]\,dx\right)dh \geq \frac{1}{2m^4}\sum_{n=1}^{2m} n^2 a_n + \frac{\pi}{2m}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{b_n}{n},$$

odnosno, shodno pretpostavci za koeficijente, do minorante:

$$\int_0^{\pi/m}\left(\int_{h/2}^{0}[\Delta_{-h} f]\,dx\right)dh \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m^4}\sum_{n=1}^{2m} n^2 a_n + \frac{1}{m}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{b_n}{n}\right),$$

tj. relacije (16) date u stavu (dokazane za slučaj $a_n, b_n \geq 0$).

2) Za $a_n, b_n \leq 0$ imamo

$$-f(x) \sim -\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-a_n\cos nx - b_n\sin nx\right),$$

pa kako je $-a_n, -b_n \geq 0$ to je, prema prethodno dokazanom:

$$\left|\int_0^{\pi/m}\left(\int_0^{h/2}[\Delta_{-h}(-f)]\,dx\right)dh\right| \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m^4}\sum_{n=1}^{2m} n^2(-a_n)+\frac{1}{m}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{-b_n}{n}\right),$$

tj.

$$\left|\int_0^{\pi/m}\left(\int_0^{h/2}[\Delta_{-h} f]\,dx\right)dh\right| \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m^4}\sum_{n=1}^{2m} n^2|a_n|+\frac{1}{m}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{|b_n|}{n}\right),$$

čime se dokaz prvog dela stava završava.

3) Integriranje relacije (18) na segmentu $[-\frac{\pi}{m}, o]$ daje

$$(19_1)\quad \int_{-\pi/m}^{0}\left(\int_{h/2}^{0}[\Delta_{-h} f]\,dx\right)dh = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}\int_0^{\pi/m}\left(\sin\frac{nh}{2}\right)^2 dh - 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^2}\left(\sin\frac{n}{m}\frac{\pi}{4}\right)^4,$$

pa pri pretpostavkama $a_n \leq o$, $b_n \geq o$, koristeći (22) i

$$-8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^2}\left(\sin\frac{n}{m}\frac{\pi}{4}\right)^4 = 8\sum_{n=1}^{2m}\frac{-a_n}{n^2}\left(\sin\frac{n}{m}\frac{\pi}{4}\right)^4 + 8\sum_{n=2m+1}^{\infty}\frac{-a_n}{n^2}\left(\sin\frac{n}{m}\frac{\pi}{4}\right)^4,$$

dobijamo :

$$\int_{-\pi/m}^{0}\left(\int_{h/2}^{0}[\Delta_{-h} f]\,dx\right)dh \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{b_n}{n}+\frac{1}{m^4}\sum_{n=1}^{2m} n^2(-a_n)\right),$$

odakle sleduje relacija (17) (dokazana za $a_n \leq o$, $b_n \geq o$).

4) Za $a_n \geq o$ i $b_n \leq o$ iz

$$-f(x) \sim -\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-a_n \cos nx - b_n \sin nx) ,$$

prema prethodno dokazanom, sleduje

$$\left| \int_{-\pi/m}^{0} \left(\int_{h/2}^{0} [\Delta_{-h} (-f)] dx \right) dh \right| \geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m^4} \sum_{n=1}^{2m} n^2 |a_n| + \frac{1}{m} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{|b_n|}{n} \right);$$

čime je dokaz i drugog dela stava završen.

Posledica 1. Za funkciju $f(x) \in L$ i

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx , \quad a_n, b_n \geq 0 \quad \text{ili} \quad a_n, b_n \leq 0 ,$$

važi

$$(25) \qquad \left| \int_{0}^{\pi/m} \left(\int_{0}^{h/2} [\Delta_{-h} f] dx \right) dh \right| \geq \frac{1}{2} \frac{|a_m| + |b_m|}{m^2} ;$$

dok uz dodatni uslov: da su nizovi $(|a_n|)$ i $(|b_n|)$ kvaziopadajući indeksa 1, imamo

$$(26) \qquad \left| \int_{0}^{2\pi/n} \left(\int_{0}^{h/2} [\Delta_{-h} f] dx \right) dh \right| \geq \frac{1}{2} \frac{|a_n| + |b_n|}{n} .$$

Pri uslovu $a_n \leq 0$, $b_n \geq 0$ ili $a_n \geq 0$, $b_n \leq 0$, gornja tvrdjenja važe za izraze

$$\left| \int_{-\pi/m}^{0} \left(\int_{h/2}^{0} [\Delta_{-h} f] dx \right) dh \right| \quad \text{i} \quad \left| \int_{-\frac{2\pi}{n}}^{0} \int_{h/2}^{0} [\Delta_{-h} f] dx \right) dh \right|$$

respektivno.

Dokaz. Iz stava se, minorirajući zbirove u relacijama (16) m-tim članovima, dobija relacija (25).

Dalje, prema stavu je

$$\left|\int_0^{\pi/m}\left(\int_0^{h/2}[\Delta_h f]dx\right)dh\right| \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m^4}\sum_{n=1}^{2m} n^2|a_n| + \frac{1}{m}\sum_{n=m}^{2m}\frac{|b_n|}{n}\right)$$

$$\geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m^4}\sum_{n=1}^{2m-1} n^2|a_n| + \frac{1}{m}\sum_{n=m}^{2m-1}\frac{|b_n|}{n}\right),$$

pa za slučaj da su nizovi $(|a_n|)$ i $(|b_n|)$ kvaziopadajući indeksa 1, imamo

$$\frac{1}{m^4}\sum_{n=1}^{2m} n^2|a_n| = \frac{1}{m^4}\sum_{n=1}^{2m} n^3\frac{|a_n|}{n} \geq \frac{1}{m^4}\,\frac{a_{2m}}{2m}\sum_{n=1}^{2m} n^3 > \frac{a_{2m}}{2m},$$

i

$$\frac{1}{m^4}\sum_{n=1}^{2m-1} n^2|a_n| = \frac{1}{m^4}\sum_{n=1}^{2m-1} n^3\frac{a_n}{n} \geq \frac{1}{m^4}\,\frac{a_{2m-1}}{2m-1}\sum_{n=1}^{2m-1} n^3 \geq \frac{a_{2m-1}}{2m-1}.$$

Dalje je

$$\frac{1}{m}\sum_{n=m}^{2m}\frac{|b_n|}{n} \geq \frac{1}{m}\sum_{n=m+1}^{2m}\frac{|b_{2m}|}{2m} = \frac{|b_{2m}|}{2m},$$

i

$$\frac{1}{m}\sum_{n=m}^{2m-1}\frac{|b_n|}{n} \geq \frac{1}{m}\sum_{n=m}^{2m-1}\frac{|b_{2m-1}|}{2m-1} = \frac{|b_{2m-1}|}{2m-1}.$$

Sleduje konačno

$$\left|\int_0^{\pi/n}\left(\int_0^{h/2}[\Delta_{-h}f]dx\right)dh\right| \geq \frac{1}{2}\,\frac{|a_n|+|b_n|}{n},$$

za n = 2m, 2m-1; odakle dobijamo traženi zaključak (za n-neparno, znak $\geq$ u relaciji (26) prelazi u znak $>$).

<u>Stav 2.</u> <u>Za funkciju f(x) $\in$ L i</u>

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

<u>važi, za slučaj da je $a_n, b_n \geq 0$ ili $a_n, b_n \leq 0$:</u>

$$(27)\quad \left|\int_0^{\pi/m}\left(\int_0^{h/2}[\Delta_h^{(2)}f]dx\right)dh\right| \geq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{m^4}\sum_{n=1}^{2m} n^2|a_n| + \frac{1}{m}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{|b_n|}{n}\right);$$

<u>i, za slučaj da je $a_n \leq 0$, $b_n \geq 0$ ili $a_n \geq 0$, $b_n \leq 0$:</u>

$$(28)\quad \left|\int_{-\pi/m}^{0}\left(\int_{h/2}^{0}[\Delta_h^{(2)}f]dx\right)dh\right| \geq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{m^4}\sum_{n=1}^{2m} n^2|a_n| + \frac{1}{m}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{|b_n|}{n}\right),$$

<u>gde je</u> $\Delta_h^{(2)}f = f(x+h) - f(x-h) - 2f(x)$.

Dokaz. Za funkciju o kojoj je reč imamo

$$f(x+h)+f(x-h)-2f(x)\sim -4\sum_{n=1}^{\infty}\sin^2\frac{nh}{2}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right),$$

odakle sleduje

$$\int_{h/2}^{\pi}[\Delta_h^{(2)}f]dx=-4\left[-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}\sin^3\frac{nh}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}\sin^2\frac{nh}{2}\left(1-\cos\frac{nh}{2}\right)\right]$$

$$=32\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}\sin^4\frac{nh}{4}\cos^2\frac{nh}{4}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}\sin^3\frac{nh}{2},$$

tj. važi

$$(29)\quad \int_{h/2}^{\pi}[\Delta_h^{(2)}f]dx=32\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}\sin^4\frac{nh}{4}\cos^2\frac{nh}{4}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}\sin^3\frac{nh}{2},$$

odnosno

$$(30)\quad \int_0^{\pi/\omega}\left(\int_{\frac{h}{2}}^{\pi}[\Delta_h^{(2)}f]dx\right)dh=32\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}\int_0^{\pi/\omega}\sin^4\frac{nh}{4}\cos^2\frac{nh}{4}dh+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}\int_0^{\pi/\omega}\sin^3\frac{nh}{2}dh.$$

1) Pretpostavimo prvo da su koeficijenti a_n, $b_n\geq 0$,

imamo

$$B=32\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}\int_0^{\pi/\omega}\sin^4\frac{nh}{4}\cos^2\frac{nh}{4}dh\geq 32\sum_{n=\omega}^{\infty}\frac{b_n}{n}\int_0^{\pi/\omega}\sin^4\frac{nh}{4}\cos^2\frac{nh}{4}dh$$

$$=4\sum_{n=\omega}^{\infty}\frac{b_n}{n}\left[\int_0^{\pi/\omega}\sin^2\frac{nh}{2}dh-\int_0^{\pi/\omega}\sin^2\frac{nh}{2}\cos\frac{nh}{2}dh\right].$$

Važi

$$-\int_0^{\pi/m} \sin^2\frac{nt}{2}\cos\frac{nt}{2}\,dt = -\frac{2}{3n}\left(\sin\frac{n}{m}\frac{\pi}{2}\right)^3,$$

pa je, koristeći levu stranu relacije (21) i gornje,

$$B \geq 4\sum_{n=m}^{\infty}\frac{b_n}{n}\left(\frac{\pi}{4m} - \frac{2}{3n}\sin^3\frac{n}{m}\frac{\pi}{2}\right) \geq 4\sum_{n=m}^{\infty}\frac{b_n}{n}\left(\frac{\pi}{4m} - \frac{2}{3n}\right)$$

$$\geq 4\sum_{n=m}^{\infty}\frac{b_n}{n}\left(\frac{\pi}{4m} - \frac{2}{3m}\right) = 4\sum_{n=m}^{\infty}\frac{b_n}{n}\,\frac{3\pi-8}{12m} \geq \frac{1}{3m}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{b_n}{n},$$

tj.

$$(31) \qquad B \geq \frac{1}{3m}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{b_n}{n} .$$

Dalje je

$$A = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}\int_0^{\pi/m}\sin^3\frac{nt}{2}\,dt = 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^2}\int_0^{\frac{n}{m}\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\,dt = \ldots =$$

$$= \frac{32}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^2}\sin^4\frac{n}{m}\frac{\pi}{4}\left(1+2\cos^2\frac{n}{m}\frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{32}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^2}\left(\sin\frac{n}{m}\frac{\pi}{4}\right)$$

tj.

$$(32) \qquad A \geq \frac{32}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^2}\left(\sin\frac{n}{m}\frac{\pi}{4}\right)^4,$$

pa relacija (3o) daje

$$(33)\quad \left|\int_0^{\pi/m}\left(\int_0^{h/2}[\Delta_h^{(2)}f]\,dx\right)dh\right| \geq \frac{32}{3}K+\frac{1}{3m}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{b_n}{n},$$

gde je $K=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^2}\left(\sin\frac{n}{m}\frac{\pi}{4}\right)^4.$

Iz (33) daljnim minoriranjem, koristeći relaciju (22), dobijamo grublju minorantu:

$$\left|\int_0^{\pi/m}\left(\int_0^{h/2}[\Delta_h^{(2)}f]\,dx\right)dh\right| \geq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{m^4}\sum_{n=1}^{2m}n^2|a_n|+\frac{1}{m}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{|b_n|}{n}\right),$$

datu u tekstu stava.

2) Za slučaj $a_n,\ b_n \leq 0$ imamo

$$-f(x)\sim -\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-a_n\cos nx-b_n\sin nx\right),$$

te prema dokazu pod 1) sleduje tvrdjene i u ovom slučaju, čime je prvi deo stava dokazan.

3) Integriranje relacije (29) na segmentu $[-\pi/m,\ 0]$ daje

$$(30_1)\quad \int_{-\pi/m}^{0}\left(\int_{h/2}^{0}[\Delta_h^{(2)}f]\,dx\right)dh = 32\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}\int_{-\pi/m}^{0}\sin^4\frac{nh}{4}\cos^2\frac{nh}{4}\,dh+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}\int_{-\pi/m}^{0}\sin^3\frac{nh}{2}\,dh$$

$$=32\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}\int_0^{\pi/m}\sin^4\frac{nh}{4}\cos^2\frac{nh}{4}\,dh-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}\int_0^{\pi/m}\sin^3\frac{nh}{2}\,d$$

što pri pretpostavkama $a_n \leq 0$, $b_n \geq 0$, koristeći relaciju:

$$(34) \qquad \frac{1}{96n} < \int_0^{\pi/n} \sin^4 \frac{nh}{4} \cos^2 \frac{nh}{4}\, dh \leq \frac{\pi}{n}, \quad n \geq m,$$

implicira

$$(35) \qquad \int_{-\pi/n}^{0} \Big(\int_{h/2}^{0} [\Delta_h^{(2)} f]\, dx \Big) dh \geq \frac{1}{3n} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{b_k}{k} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|}{k} \int_0^{\pi/n} \sin^3 \frac{kh}{2}\, dh.$$

Iz (35), pozivajući se na (32) i (22), dalje proizilazi

$$\int_{-\pi/n}^{0} \Big(\int_{h/2}^{0} [\Delta_h^{(2)} f]\, dx \Big) dh \geq \frac{1}{3n} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|b_k|}{k} + \frac{32}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|}{k^2} \Big(\sin \frac{k}{n} \frac{\pi}{4} \Big)^4$$

$$\geq \frac{1}{3n} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|b_k|}{k} + \frac{32}{3} \sum_{k=1}^{2n} \frac{|a_k|}{k^2} \Big(\sin \frac{k}{n} \frac{\pi}{4} \Big)^4$$

$$\geq \frac{1}{3} \Big(\frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^{2n} k^2 |a_k| + \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|b_k|}{k} \Big),$$

čime je relacija (28), za $a_n \leq 0$ i $b_n \geq 0$, potvrdjena.

4) Slučaj $a_n \geq 0$ i $b_n \leq 0$, razmatranjem funkcije $-f(x)$, se svodi na prethodni slučaj.

Ovim je dokaz relacije (28) okončan.

Posledica 2. Za funkciju $f(x) \in L$ i

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad a_n, b_n \geq 0 \ \text{ili} \ a_n, b_n \leq 0,$$

važi

$$(36) \quad \left| \int_0^{\pi/n} \left(\int_0^{h/2} [\Delta_h^{(2)} f] \, dx \right) dh \right| \geq \frac{1}{3} \, \frac{|a_n| + |b_n|}{n^2} ;$$

dok pri dodatnom uslovu: da su nizovi $(|a_n|)$ i $(|b_n|)$ kvazi-opadajući indeksa 1, imamo

$$(37) \quad \left| \int_0^{2\pi/n} \left(\int_0^{h/2} [\Delta_h^{(2)} f] \, dx \right) dh \right| \geq \frac{1}{3} \, \frac{|a_n| + |b_n|}{n} .$$

Pri uslovu $a_n \geq 0$, $b_n \leq 0$ ili $a_n \leq 0$, $b_n \geq 0$, gornja tvrdjenja važe za izraze

$$\left| \int_{-\pi/n}^{0} \left(\int_{h/2}^{0} [\Delta_h^{(2)} f] \, dx \right) dh \right| \quad \text{i} \quad \left| \int_{-2\pi/n}^{0} \left(\int_{h/2}^{0} [\Delta_h^{(2)} f] \, dx \right) dh \right|$$

respektivno*).

Dokaz je identičan dokazu posledice 1.

---

*) Slučaj (a_n), $(b_n) \in S$ i nizovi $(|a_n|)$ i $(|b_n|)$ skoro opadajući sa konstantom $C > 1$, biće razmatran u jednom od nastavaka teze.

2° Dobijene ocene kombinacija modula Fourier-ovih koeficijenata u stavovima 1 i 2, kroz posledice 1 i 2, dovode do ocena koeficijenata Fourier-a nekih klasa funkcija iz klase L - stavovi 3, 4 i 5, i njihove posledice. Preciznije, stav 3 tretira ocene koeficijenata Fourier-a a_n i b_n, (a_n), $(b_n) \in T$, klasa funkcija datih definicijama (12) i (13) pri dopunskom uslovu da su nizovi $(|a_n|)$ i $(|b_n|)$ kvaziopadajući indeksa 1. Posledica stava 3, pri gore navedenim uslovima stava, tretira ocene koeficijenata specijalno uvedene klase date definicijom (15) i klase Lip α, $0 \leq \alpha \leq 1$. Stav 4 daje ocene jedne kombinacije Fourier-ovih koeficijenata funkcije $f(x) \in L$ kroz integralne module neprekidnosti prvog i drugog reda, dok stav 5 pak daje ocene analogne kombinacije, za slučaj funkcije $f(x) \in C$, kroz module neprekidnosti prvog i drugog reda - sve to pri uslovu (a_n), $(b_n) \in T$. Specijalno, posledica stava 5 daje ocene koeficijenata Fourier-a funkcije $f(x) \in C$ pri uslovu (a_n), $(b_n) \in T$ za slučaj da su nizovi $(|a_n|)$ i $(|b_n|)$ kvaziopadajući indeksa 1.

Stav 3. Ako funkcija $f(x) \in L$ i

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \; (a_n), (b_n) \in T,$$

gde su nizovi $(|a_n|)$ i $(|b_n|)$ kvaziopadajući indeksa 1; tada za $f(x) \in K_{\varphi}^{(i)}$, $i=1,2$, važi

$$(38) \qquad |a_n| + |b_n| = O\left[n^{-1} \varphi\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right].$$

Dokaz. Iz

$$\sup_{0\le h\le \frac{2\pi}{n}} |\Delta_{-h}^{(i)} f|,\ \sup_{-\frac{2\pi}{n}\le h\le 0} |\Delta_{-h}^{(i)} f| \le \sup_{0\le |h|\le \frac{2\pi}{n}} |\Delta_{h}^{(i)} f| \le C\varphi\left(\frac{2\pi}{n}\right),\ i=1,2;$$

sleduje

$$\int_0^{h/2} \sup_{0\le h\le \frac{2\pi}{n}} |\Delta_h^{(i)} f|\,dx,\ \int_{\frac{h}{2}}^{0} \sup_{-\frac{2\pi}{n}\le h\le 0} |\Delta_{-h}^{(i)} f|\,dx \le \int_{-\frac{|h|}{2}}^{\frac{|h|}{2}} \sup_{0\le |h|\le \frac{2\pi}{n}} |\Delta_h^{(i)} f|\,dx \le C\varphi\left(\frac{2\pi}{n}\right)\frac{2\pi}{n},$$

pa je po posledici 1, odnosno posledici 2:

$$\frac{C_1}{n^2}\varphi\left(\frac{2\pi}{n}\right) \ge \frac{|a_n|+|b_n|}{n},$$

tj.

$$|a_n|+|b_n| \le \frac{C_1}{n}\varphi\left(\frac{2\pi}{n}\right),$$

što je i trebalo dokazati.

Posledica 3. Ako funkcija $f(x)\in L$ i

$$f(x)\sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx,\ (a_n),(b_n)\in T,$$

gde su nizovi $(|a_n|)$ i $(|b_n|)$ kvaziopadajući indeksa 1; tada:

$$1/\ f(x)\in \mathrm{Lip}\,\alpha,\ 0\le\alpha\le 1 \Rightarrow |a_n|,|b_n| = O\left[n^{-(\alpha+1)}\right],\ 0\le\alpha\le 1; \quad (39)$$

$$2/\ f(x) \overset{*)}{\in} {}^{\alpha-1}W_S^{(2)},\ 1<\alpha\le 2 \Rightarrow |a_n|,|b_n| = O\left[n^{-\alpha}(\ln n)^S\right],\ 1<\alpha\le 2. \quad (4$$

*) Pri navedenim pretpostavkama u posledici važi ${}^{\alpha-1}W_S \equiv {}^{\alpha-1}W_S^{(2)}$, $1<\alpha\le 2$ - stav 7, odeljak III.

Zaista, za funkciju $f(x) \in Lip\alpha$, $0 \le \alpha \le 1$, je $\varphi(\frac{2\pi}{n}) = \frac{C}{n^\alpha}$, pa shodno relaciji (38) imamo

$$|a_n|, |b_n| \le C_1 n^{-(\alpha+1)}.$$

Za $f(x) \in {}^{\alpha-1}W_s^{(2)}$, $1 < \alpha \le 2$, je $\varphi(\frac{2\pi}{n}) = C\, n^{-(\alpha-1)}(\ln n)^s$, što prema (38) daje

$$|a_n|, |b_n| \le C_1 n^{-\alpha}(\ln n)^s,$$

čime je posledica 3 konačno potvrdjena.

Primetimo da se za $\alpha = 1+\beta$, $0<\beta<1$, i $s = 0$ implikacija (40) svodi na implikaciju (39) (bez tih rubnih slučajeva), naime [5]:

$$(41) \qquad {}^{\beta}W_0^{(2)} = Z_\beta \equiv Lip\,\beta, \quad 0<\beta<1.$$

<u>Stav 4.</u> <u>Ako funkcija $f(x) \in L$ i</u>

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad (a_n),(b_n) \in T,$$

<u>tada za integralne module neprekidnosti prvog i drugog reda funkcije $f(x)$ važi:</u>

$$(42) \qquad \omega_i^{(1)}\left(\frac{1}{n}, f\right) \ge C_i \left(\frac{1}{n^3}\sum_{\nu=1}^{2n} \nu^2 |a_\nu| + \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{|b_\nu|}{\nu}\right), \quad i = 1,2$$

<u>(C_i - pozitivne konstante</u>).

Dokaz. Važi

$$\left|\int_0^{\pi/n}\left(\int_0^{h/2}[\Delta_{-h}^{(i)}f]\,dx\right)dh\right| \le \int_0^{\pi/n}\left(\int_0^{h/2}|\Delta_{-h}^{(i)}f|\,dx\right)dh$$

$$\le \int_0^{\pi/n}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|\Delta_{-h}^{(i)}f|\,dx\right)dh$$

$$\le \frac{\pi}{n}\,\omega_i^{(1)}\left(\frac{\pi}{n}, f\right);$$

$$\left(|h| \le \delta = \frac{\pi}{n}\right)$$

i analogno za $\left|\int_{-\pi/n}^{0}\left(\int_{h/2}^{0}[\Delta_{h}^{(i)}f]\,dx\right)dh\right|$, te koristeći stavove 1 i 2 sleduje tvrdjenje (42).

Stav 4 je jedna generalizacija analognih stavova 5 i 8 za slučaj kosinusnog reda, datih u radu S. Aljančića i M. Tomića [6].

Posledica 4. Ako funkcija $f(x) \in L$ i

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad (a_n), (b_n) \in T,$$

tada je

$$(43) \qquad \omega_i^{(1)}\left(\frac{1}{n}, f\right) \ge C_i \sum_{\nu=n}^{\infty} \frac{|b_\nu|}{\nu}, \quad i = 1, 2$$

(C_i - pozitivne konstante).

U radu [6] S. Aljančića i M. Tomića za slučaj opadajućih koeficijenata i funkcije $f(x) \in L$: $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, navode se rezultati (stavovi 6 i 7):

$$(44) \quad \omega_1^{(1)}\left(\frac{1}{n}, f\right) \geq A\left(n^{-2}\sum_{n=1}^{n} n b_n + \sum_{n=n+1}^{\infty} n^{-1} b_n\right)$$

i

$$(45) \quad \omega_2^{(1)}\left(\frac{1}{n}, f\right) \geq A\left(n^{-2}\sum_{n=1}^{n} n b_n + \sum_{n=n+1}^{\infty} n^{-1} b_n\right)$$

(A - konst.); odakle sleduje

$$(46) \qquad \omega_i^{(1)}\left(\frac{1}{n}, f\right) \geq A \sum_{n=n}^{\infty} \frac{|b_n|}{n}, \quad i = 1, 2.$$

Rezultat (47) je uopštenje rezultata (46). (Rezultat (46) se tretira i u radu S. Teljakovskog : Ocena integralnog modula neprekidnosti funkcije sa kvazikonveksnim koeficijentima Fourier-a ; Sibirski matematički žurnal, 11, № 5 (1970), 1140 - 1145).

Stav 5. Ako funkcija $f(x) \in C$ i

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad (a_n), (b_n) \in T,$$

tada za module neprekidnosti prvog i drugog reda funkcije $f(x)$ važi:

$$(47) \quad \omega_i\left(\frac{1}{n}, f\right) \geq C_i\left(\frac{1}{n^2}\sum_{n=1}^{2n} n^2 |a_n| + n\sum_{n=n}^{\infty} \frac{|b_n|}{n}\right), \quad i = 1, 2$$

(C_i - pozitivne konstante).

Stav se dokazuje analogno dokazu stava 4.

Gornji stav je jedna generalizacija analognih stavova 1 i 4 za slučaj sinusnog reda, datih u pomenutom radu [6] S. Aljančića i M. Tomića.

Posledica 5. Ako funkcija $f(x) \in C$ i

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad (a_n), (b_n) \in T,$$

tada, za slučaj da su nizovi $(|a_n|)$ i $(|b_n|)$ kvaziopadajući indeksa 1, važi

$$(48) \qquad \omega_i\left(\frac{1}{n}, f\right) \geq C_i\, n(|a_n| + |b_n|), \quad i = 1, 2$$

(C_i - pozitivne konstante).

Primetimo da se posledica 3 može dati i kao posledica relacije (48).

U vezi nekih rezultata u ovoj tački primetimo sledeće.

1. Posledica 3 pod 1) prenosi ocene Fourier-ovih koeficijenata parnih i neparnih funkcija sa opadajućim koeficijentima iz klase Lip α, $0<\alpha\leq 1$, - rezultat Lorentz-a koji je ušao u poznatu monografiju N. Bari: Trigonometrijski redovi, str. 678 [7] - na funkcije $f(x)\in \mathrm{Lip}\,\alpha$, $0<\alpha\leq 1$, gde

$$(49)\quad f(x)\sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n \sin nx,\ (a_n), (b_n)\in T,$$

i nizovi $(|a_n|)$ i $(|b_n|)$ kvaziopadajući indeksa 1, čime je definisana šira klasa funkcija od klase na koju se odnosi rezultat Lorentz-a.

Time je ujedno potvrdjeno postojanje još šire podklase funkcija iz klase Lip α, $0<\alpha\leq 1$, od podklase parnih i neparnih funkcija sa opadajućim koeficijentima, kod koje se uslov Bernštajna $\alpha>\frac{1}{2}$ [8] za apsolutnu konvergenciju redova Fourier-a funkcija iz klase Lip α $(0<\alpha\leq 1)$, zamenjuje, za slučaj funkcija iz te šire podklase, uslovom $\alpha>0$.

2. Shodno relaciji (39) za slučaj funkcije $f(x)\in \mathrm{Lip}\ 1$, sa Fourier-ovim koeficijentima a_n i b_n, gde $(a_n), (b_n)\in T$ i nizovi $(|a_n|)$ i $(|b_n|)$ kvaziopadajući indeksa 1, važi ocena

$$(50)\qquad |a_n|, |b_n| = O(n^{-2}).$$

Pri gornjim uslovima za koeficijente a_n i b_n, implikacija (40) za $\alpha = 2$ i $s = 0$ daje implikaciju:

$$(51)\quad f'(x)\in Z \Rightarrow |a_n|,\ |b_n| = O(n^{-2}),$$

tj. ocena (50) pod navedenim uslovima se prenosi i na Fourier-ove koeficijente funkcija iz šire klase Z.

3. Takodje gornja implikacija pokazuje da se apsolutna konvergencija reda Fourier-a ravnomerno glatnih funkcija [9], prenosi i na neke funkcije iz komplementa klase ravnomerno glatnih funkcija u odnosu na klasu Z; naime klasu funkcija definisanu sa $(a_n), (b_n) \in T$ i nizovi $(|a_n|), (|b_n|)$ kvaziopadajući indeksa 1, a_n i b_n - Fourier-ovi koeficijenti funkcije $f(x)$ iz pomenutog komplementa (skica 3)

Ravnomerno glatne funkcije

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

$(a_n), (b_n) \in T$ i $(|a_n|), (|b_n|)$ -

- kvaziopadajući indeksa 1

Z

Skica 3

Primetimo da se navedenim postupkom ocenjivanja Fourier-ovih koeficijenata a_n i b_n pri uslovima (a_n), $(b_n) \in T$ i nizovi $(|a_n|)$ i $(|b_n|)$ kvaziopadajući indeksa 1, obuhvaćena oba rubna slučaja za slučaj klase Lipα, $0 \leq \alpha \leq 1$: $\alpha = 0$ (klasa ograničenih funkcija) i $\alpha = 1$.

4. U vezi sa rezultatima ove tačke, ostaje otvorenim pitanje: <u>da li se rezultati dobijeni pri uslovu (a_n), $(b_n) \in T$, održavaju i pri totalnom oslabljenju tog uslova (odnosno ne nagajući na znakove koeficijenata a_n i b_n nikakva ograničenja)</u>. Jedan delimičan rezultat u tom pravcu daju relacije (19) i (19_1) odnosno (3o) i $(3o_1)$. Naime, iz relacija (19) i (19_1), ne nalagajući na koeficijente a_n nikakva ograničenja u smislu znaka, sleduje

$$\int_{-\pi/a_n}^{0} \left(\int_{h/2}^{0} [\Delta_{-h} f]\, dx \right) dh + \int_{0}^{\pi/a_n} \left(\int_{h/2}^{0} [\Delta_{-h} f]\, dx \right) dh$$

$$= 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \int_{0}^{\pi/a_n} \sin^2 \frac{nh}{2}\, dh .$$

Takodje iz relacija (3o) i $(3o_1)$ sleduje:

$$-\int_{-\pi/4}^{0}\left(\int_{h/2}^{0}[\Delta_h^{(2)} f]\,dx\right)dh+\int_{0}^{\pi/4}\left(\int_{h/2}^{0}[\Delta_h^{(2)} f]\,dx\right)dh=$$

$$=64\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}\int_0^{\pi/4}\sin^4\frac{nh}{4}\cos^2\frac{nh}{4}\,dh,$$

ne nalagajući na koeficijente a_n nikakva ograničenja u smislu znaka.

Otuda je (koristeći (21))

$$(52)\quad\left|\int_0^{\pi/4}\left(\int_0^{h/2}[\Delta_{-h} f]\,dx\right)dh\right|+\left|\int_{-\pi/4}^{0}\left(\int_{h/2}^{0}[\Delta_{-h} f]\,dx\right)dh\right|>\frac{\pi}{4}\sum_{n=4}^{\infty}\frac{|b_n|}{n},$$

za $(b_n)\in T$; i (koristeći (34))

$$(53)\quad\left|\int_0^{\pi/4}\left(\int_0^{h/2}[\Delta_h^{(2)} f]\,dx\right)dh\right|+\left|\int_{-\pi/4}^{0}\left(\int_{h/2}^{0}[\Delta_h^{(2)} f]\,dx\right)dh\right|>\frac{2}{3\pi}\sum_{n=4}^{\infty}\frac{|b_n|}{n},$$

za $(b_n)\in T$.

Takodje iz relacija (19) i (19_1), ne nalagajući sada na koeficijente b_n nikakva ograničenja u smislu znaka, sleduje

$$\int_0^{\pi/4}\left(\int_{h/2}^{0}[\Delta_{-h} f]\,dx\right)dh-\int_{-\pi/4}^{0}\left(\int_{h/2}^{0}[\Delta_{-h} f]\,dx\right)dh=16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^2}\left(\sin\frac{n\pi}{4}\right)^4,$$

te koristeći relaciju (22) dobijamo za $(a_n) \in T$:

$$(54)\quad \left|\int_0^{\pi/n}\left(\int_0^{h/2}[\Delta_{-h} f]\,dx\right)dh\right| + \left|\int_{-\pi/n}^{0}\left(\int_{h/2}^{0}[\Delta_{-h} f]\,dx\right)dh\right| \geq \frac{1}{n^4}\sum_{\nu=1}^{2n} \nu^2 |a_\nu|.$$

Isto tako relacije (3o) i ($3o_1$) daju

$$\int_0^{\pi/n}\left(\int_{h/2}^{0}[\Delta_h^{(2)} f]\,dx\right)dh - \int_{-\pi/n}^{0}\left(\int_{h/2}^{0}[\Delta_h^{(2)} f]\,dx\right)dh =$$

$$= 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}\int_0^{\pi/n}\sin^3\frac{nh}{2}\,dh = \dots = \frac{64}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^2}\sin^4\frac{n}{n}\frac{\pi}{4}\left(1+2\cos^2\frac{n}{n}\frac{\pi}{4}\right).$$

Koristeći relaciju (22) za $(a_n) \in T$ (koeficijenti b_n su proizvoljni po znaku) sleduje:

$$(55)\quad \left|\int_0^{\pi/n}\left(\int_0^{h/2}[\Delta_h^{(2)} f]\,dx\right)dh\right| + \left|\int_{-\pi/n}^{0}\left(\int_{h/2}^{0}[\Delta_h^{(2)} f]\,dx\right)dh\right| \geq \frac{4}{3}\frac{1}{n^4}\sum_{\nu=1}^{2n}\nu^2|a_\nu|.$$

Shodno (52), (53), (54) i (55), tvrdjenja u ovoj tački, kad jedan od nizova (a_n), (b_n) ne pripada klasi T, ostaju u važnosti za onaj koeficijent kod kojeg korespodentni niz pripada klasi T.

3° Sledeći stav 6 je inverzan stav stavu iznetom u posledici 3 pod 2); naime pri zadatoj oceni koeficijenata funkcije $f(x)\sim a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ (bez ikakvih dopunskih uslova za koeficijente) sa:

$$|a_n|, |b_n| = O\left[n^{-\alpha}(\ln n)^s\right],$$

odredjena je klasa funkcija kojoj funkcija f(x) pripada. Pomenuti stav i posledica 3 pod 2) dovode do stava ekvivalencije - posledica 6.

<u>Stav 6.</u> <u>Ako funkcija $f(x)\in L$ i</u>

$$f(x)\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

<u>tada</u>

$$(56)\qquad |a_n|, |b_n| = O[n^{-\alpha}(\ln n)^s] \Rightarrow f(x)\in {}^{\alpha-1}W_s^{(2)},\quad 1<\alpha\le 2.$$

<u>Dokaz.</u> Neka je funkciji $f(x)\in L$ korespondiran Fourier-ov red

$$f(x)\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

gde je $|a_k|, |b_k| \le C\, k^{-\alpha}(\ln k)^s$. Važi

$$|f(x+h)+f(x-h)-2f(x)| \le 4\sum_{k=1}^{2^n} \frac{k^2h^2}{4}(|a_k|+|b_k|) + 4\sum_{k=2^n+1}^{\infty}(|a_k|+|b_k|)$$

$$\le 2C\sum_{k=1}^{2^n} h^2 k^{2-\alpha}(\ln k)^s + 8C\sum_{k=2^n+1}^{\infty}\frac{(\ln k)^s}{k^{\alpha}}.$$

Imamo, za n dovoljno veliki broj, da je

$$(57)\quad P = 2h^2 \sum_{k=1}^{2^n} k^{2-\alpha}(\ln k)^s < 2h^2\, 2^n (2^n)^{2-\alpha}(\ln 2^n)^s ,$$

i

$$(58)\quad Q = 8 \sum_{k=2^n+1}^{\infty} \frac{(\ln k)^s}{k^\alpha} < 8 \int_{2^n}^{+\infty} \frac{(\ln x)^s}{x^\alpha}\,dx .$$

Kako je

$$(59)\qquad \int_x^{+\infty} \frac{(\ln t)^s}{t^\alpha}\,dt = O\left[\frac{(\ln x)^s}{x^{\alpha-1}}\right],$$

što sleduje iz

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{(\ln t)^s}{t^\alpha}\,dt}{\dfrac{(\ln x)^s}{x^{\alpha-1}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\dfrac{(\ln x)^s}{x^\alpha}}{\dfrac{s(\ln x)^{s-1}-(\alpha-1)(\ln x)^s}{x^\alpha}} = \frac{1}{\alpha-1}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1-\dfrac{s}{\alpha-1}\dfrac{1}{\ln x}},$$

to je

$$(60)\qquad Q < 8\int_{2^n}^{+\infty} \frac{(\ln x)^s}{x^\alpha}\,dx \le c\,\frac{(\ln 2^n)^s}{(2^n)^{\alpha-1}} .$$

Iz

$$\frac{1}{2^n} \le |h| < \frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow 2^n < \frac{2}{|h|} ;$$

pa shodno (57) i (6o) imamo

$$P+Q < 2h^2\left(\frac{2}{|h|}\right)^{3-\alpha} C_1 |l_n|h||^s + C_2 |l_n|h||^s |h|^{\alpha-1}$$

$$= C_3 |h|^{\alpha-1} |l_n|h||^s + C_2 |h|^{\alpha-1} |l_n|h||^s = C_4 |h|^{\alpha-1} |l_n|h||^s,$$

tj.

$$|f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)| < C|h|^{\alpha-1} |l_n|h||^s,$$

odakle sleduje zaključak.

Iz gornjeg stava sleduje: ako $f(x) \in L$ i

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

tada

$$(61) \quad |a_n|, |b_n| = O[n^{-(\alpha+1)}], \ 0 < \alpha \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} f(x) \in Lip\,\alpha, & 0 < \alpha < 1 \\ f(x) \in Z, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Prva implikacija je implikacija Lorentz-a [10], i dobija se iz stava za $1 < \alpha < 2$ i s = o koristeći identičnost (41); druga pak sleduje iz stava za α = 2 i s = o. Otuda je relacija (61) jedno proširenje implikacije Lorentz-a.

Iz posledice 3 pod 2) i gornjeg stava proizilazi sledeći stav.

<u>Posledica 6 (stav ekvivalencije).</u> <u>Ako funkcija $f(x) \in L$ i</u>

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad (a_n), (b_n) \in T,$$

<u>gde su nizovi $(|a_n|)$ i $(|b_n|)$ kvaziopadajući indeksa 1; tada važi</u>
<u>ekvivalencija</u>:

$$(62) \quad |a_n|, |b_n| = O[n^{-\alpha}(L_n n)^s] \Longleftrightarrow f(x)\, {}^{\alpha-1}W_s^{(2)}, \quad 1 < \alpha \leq 2.$$

Ekvivalencija (62) sadrži specijalno za

a) $1 < \alpha < 2$ i $s = 0$, b) $\alpha = 2$ i $s = 0$;

sledeće dve ekvivalencije respektivno:

$$1/ \quad |a_n|, |b_n| = O[n^{-(\alpha+1)}], \ 0 < \alpha < 1 \Longleftrightarrow f(x) \in Lip\,\alpha, \ 0 < \alpha < 1; \quad (63)$$

$$2/ \quad |a_n|, |b_n| = O(n^{-2}) \Longleftrightarrow f(x) \in Z \quad (64)$$

$((a_n), (b_n) \in T)$. <u>Prva ekvivalencija sadrži ekvivalenciju Lorentz-a - slučaj kad su koeficijenti a_n i b_n opadajući</u> ([7] i [10]).

Na kraju ovog odeljka napomenimo da su za slučaj kosinusnog i sinusnog reda:

$$(65) \quad f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad g(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

S. Aljančić i M. Tomić u radu [6] i S. Aljančić u radu [11], dali ocene modula neprekidnosti reda k u prostoru C i L, pri dopunskim uslovima za koeficijente. Pojedine od tih ocena mogu se koristiti i za dobijanje ocena koeficijenata Fourier-a, pri dopunskim uslovima za koeficijente, izvesnih klasa funkcija; dok druge rešavaju inverzan problem: pri zadatoj brzini opadanja koeficijenata, uz dopunske uslove za koeficijente, daju odgovarajuće klase funkcija - sve to za slučaj parnih i neparnih funkcija (65). Tako, ocene koeficijenata Fourier-a dobijene pri dopunskom uslovu da su koeficijenti nenegativni, odnosno koeficijenti pozitivni i opadajući, koje imaju korespodentne ocene u tački 2°; se stavovima o tim ocenama prenose i na Fourier-ove koeficijente funkcija f(x) iz šire klase $\{f(x)\}$ definisane sa

$$(66)\quad f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx\,, \quad f(x),\ f(x) \in T,$$

odnosno definisane sa (66) uz dopunski uslov kvaziopadanja indeksa 1 nizova $(|a_n|)$ i $(|b_n|)$.

III

INKLUZIVNI ODNOSI NEKIH KLASA FUNKCIJA

Klasa funkcija ${}^{\alpha-1}W_s^{(2)}$, $1<\alpha\leq 2$, razmatrana u prethodnom, za $1<\alpha<2$ i $s=0$ se svodi na Zygmund-ovu klasu Z_β identičnu sa klasom $Lip\,\beta$, za $0<\beta<1$. U ovom odeljku će biti pokazano da su i klase ${}^{\alpha-1}W_s^{(2)}$ i ${}^{\alpha-1}W_s$, za $1<\alpha<2$, posmatrane na klasi funkcija $f(x)\in L$ sa Fourier-ovim koeficijentima (a_n), $(b_n)\in T$, i nizovi $(|a_n|)$ i $(|b_n|)$ kvaziopadajući indeksa 1, identične - stav 7; za $\alpha=2$ pak važi: $W_s^{(2)}\subseteq W_{s+1}$ $(s\neq -1)$ - stav 8.

Inkluzivne odnose klasa ${}^{\alpha-1}W_s$, $1<\alpha\leq 2$, i $Lip\,\beta$, $0<\beta\leq 1$, za fiksno α i svako s, daje stav 9.

Stav 7. Ako funkcija $f(x)\in L$ i

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx,\ (a_n),(b_n)\in T,$$

gde $f(x)$ pripada klasi funkcija $\{f(x)\}$ svojstva: nizovi $(|a_n|)$ i $(|b_n|)$ su kvaziopadajući indeksa 1; važi sledeća identičnost klasa

$$(67)\qquad {}^{\alpha-1}W_s\equiv{}^{\alpha-1}W_s^{(2)},\quad 1<\alpha<2.$$

Dokaz. Važi za $f(x)\in L$:

$$(68)\quad |f(x+h)-f(x)|\leq\sum_{k=1}^{n_0}k|h|(|a_k|+|b_k|)+\sum_{k=n_0+1}^{n}k|h|(|a_k|+|b_k|)+\sum_{k=n+1}^{\infty}(|a_k|+|b_k|)$$

$$=C_1|h|+P|h|+Q\ ,$$

gde je n_0 izabrano tako da je funkcija $\varphi(x) = \frac{(\ln x)^s}{x^{\alpha-1}}$ opadajuća za $x > n_0$, a samim tim i funkcija $\frac{\varphi(x)}{x} = \frac{(\ln x)^s}{x^\alpha}$.

Za $f(x) \in {}^{\alpha-1}W_s^{(2)}$, $1<\alpha<2$, što je prema posledici 6 ekvivalentno sa

$$|a_k|, |b_k| \leq \frac{C}{k^\alpha}(\ln k)^s ,$$

imamo

$$(69) \qquad P \leq C_2 \sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{(\ln k)^s}{k^{\alpha-1}} \leq C_2 \int_{n_0}^{n} \frac{(\ln t)^s}{t^{\alpha-1}} dt .$$

Kako je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_{n_0}^{n} \frac{(\ln t)^s}{t^{\alpha-1}}}{\frac{(\ln n)^s}{n^{\alpha-2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_{n_0}^{x} \frac{(\ln t)^s}{t^{\alpha-1}} dt}{\frac{(\ln x)^s}{x^{\alpha-2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{(\ln x)^s}{x^{\alpha-1}}}{\frac{(\ln x)^s}{x^{\alpha-1}}\left(2-\alpha-\frac{s}{\ln x}\right)} = \frac{1}{2-\alpha},$$

tj.

$$(70) \qquad \int_{n_0}^{n} \frac{(\ln t)^s}{t^{\alpha-1}} dt = O\left(\frac{(\ln n)^s}{n^{\alpha-2}}\right),$$

to je

$$(71) \qquad P \leq C_3 \frac{(\ln n)^s}{n^{\alpha-2}} \leq C_3 |h|^{\alpha-2} |\ln |h||^s ,$$

ukoliko je $n(>n_0)$ izabrano tako da bude

$$(72) \qquad \frac{1}{n+1} \leq |h| < \frac{1}{n} \left(\Rightarrow \frac{1}{n} \leq 2|h| \wedge n < \frac{1}{|h|}\right).$$

Dalje,

$$(73)\qquad Q=\sum_{k=n+1}^{\infty}(|a_k|+|b_k|)\le C_4\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(\ln k)^s}{k^{\alpha}}\le C_4\int_{n}^{+\infty}\frac{(\ln t)^s}{t^{\alpha}}\,dt$$

$$\le C_5\,\frac{(\ln n)^s}{n^{\alpha-1}}\le C_6\,|h|^{\alpha-1}|\ln|h||^s,$$

koristeći relaciju (59) i (72).

Otuda je prema (68), (71) i (73):

$$|f(x+h)-f(x)|\le C_1|h|+C_7|h|^{\alpha-1}|\ln|h||^s\le C_8|h|^{\alpha-1}|\ln|h||^s,$$

tj. $f(x)\in {}^{\alpha-1}W_s$, za $1<\alpha<2$; dok je obrnuta inkluzija evidentna, čime je dokazana identičnost (67).

<u>Stav 8</u>. <u>Ako funkcija $f(x)\in L$ i</u>

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx,\ (a_n),(b_n)\in T,$$

<u>gde $f(x)$ pripada klasi funkcija $\{f(x)\}$ svojstva: nizovi $(|a_n|)$ i $(|b_n|)$ su kvaziopadajući indeksa 1; važi sledeća inkluzija</u>

$$(74)\qquad W_s^{(2)}\subseteq W_{s+1}\,,\qquad s\neq-1\,.$$

<u>Dokaz</u>. Neka $f(x)\in W_s^{(2)}$, tada je prema posledici 6 ($\alpha=2$):

$$|a_k|,|b_k|\le\frac{C}{k^2}(\ln k)^s,$$

te imamo da je

$$|f(x+h)-f(x)| \leq \sum_{k=1}^{n_0} k|h|(|a_k|+|b_k|)+\sum_{k=n_0+1}^{n} k|h|(|a_k|+|b_k|)+\sum_{k=n+1}^{\infty}(|a_k|+|b_k|)$$

$$\leq c|h|\sum_{k=1}^{n_0}\frac{(\ln k)^s}{k}+c|h|\sum_{k=n_0+1}^{n}\frac{(\ln k)^s}{k}+c\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(\ln k)^s}{k^2},$$

gde je broj n_0 izabran tako da je funkcija $\varphi(t) = \frac{(\ln t)^s}{t}$ opadajuća za $t > n_0$. Imajući to u vidu i $\frac{1}{n+1} \leq |h| < \frac{1}{n}$ $(\Rightarrow n < \frac{1}{|h|} \wedge \frac{1}{n} \leq 2|h|)$ sleduje dalje:

$$|f(x+h)-f(x)| \leq c_1|h|+c_2|h|\int_{n_0}^{n}\frac{(\ln t)^s}{t}dt+c_3\int_{n}^{+\infty}\frac{(\ln t)^s}{t^2}dt$$

$$\leq c_1|h|+c_2|h|\frac{1}{s+1}\left[(\ln n)^{s+1}-(\ln n_0)^{s+1}\right]+c_4\frac{(\ln n)^s}{n}$$

$$\leq c_1|h|+c_5|h||\ln|h||^{s+1}+c_6|h||\ln|h||^{s}\leq c_7|h||\ln|h||^{s+1},$$

tj. $f(x) \in W_{s+1}$, čime je dokaz završen.

Ostaje otvorenim: da li u gornjem slučaju važi stroga inkluzija ili identičnost pomenutih klasa.

Stav 9. Važe sledeće striktne inkluzije

$$(75)\qquad {}^{\alpha-1}W_s \subset \operatorname{Lip}\beta,\ 0<\beta<\alpha-1,\ \forall s,$$

gde je $1<\alpha\leq 2$, i

$$(76)\qquad {}^{\alpha-1}W_s \supset Lip\,\beta, \quad \alpha-1<\beta\leq 1, \quad \forall s,$$

gde je $1<\alpha<2$.

Relacija (76) važi i za $\beta=\alpha-1$, $1<\alpha\leq 2$, uz uslov $s>0$ ($Lip\,(\alpha-1)\subset {}^{\alpha-1}W_s$, $s>0$).

Dokaz. Neka $f(x)\in {}^{\alpha-1}W_s$, $1<\alpha\leq 2$, tada je

$$\omega_1(\delta,f)\leq c\,\delta^{\alpha-1}|\ln\delta|^s \qquad (c>0)$$

$$\Rightarrow \frac{\omega_1(\delta,f)}{\delta^\beta}\leq c\,\frac{|\ln\delta|^s}{\delta^{\beta-(\alpha-1)}} \xrightarrow[\delta\to 0_+]{} 0, \quad \text{za } 0<\beta<\alpha-1 \text{ i } \forall s$$

odakle proizilazi da je [12]:

$$f(x)\in Lip\,\beta, \quad 0<\beta<\alpha-1.$$

Time je dokazana inkluzija (75) i to očigledno kao striktna inkluzija.

Neka je $f(x)\in Lip\,\beta$, $\alpha-1<\beta\leq 1$, tada je

$$\omega_1(\delta,f)\leq c\,\delta^\beta \qquad (c>0),$$

i otuda

$$\frac{\omega_1(\delta,f)}{\delta^{\alpha-1}|\ln\delta|^s}\leq \frac{\delta^\beta}{\delta^{\alpha-1}|\ln\delta|^s}=\frac{\delta^{\beta-(\alpha-1)}}{|\ln\delta|^s}\xrightarrow[\delta\to 0_+]{} 0, \quad \forall s,$$

odakle proizilazi da $f(x) \in {}^{\alpha-1}W_s$. Ovim je dokazana i striktna inkluzija (76).

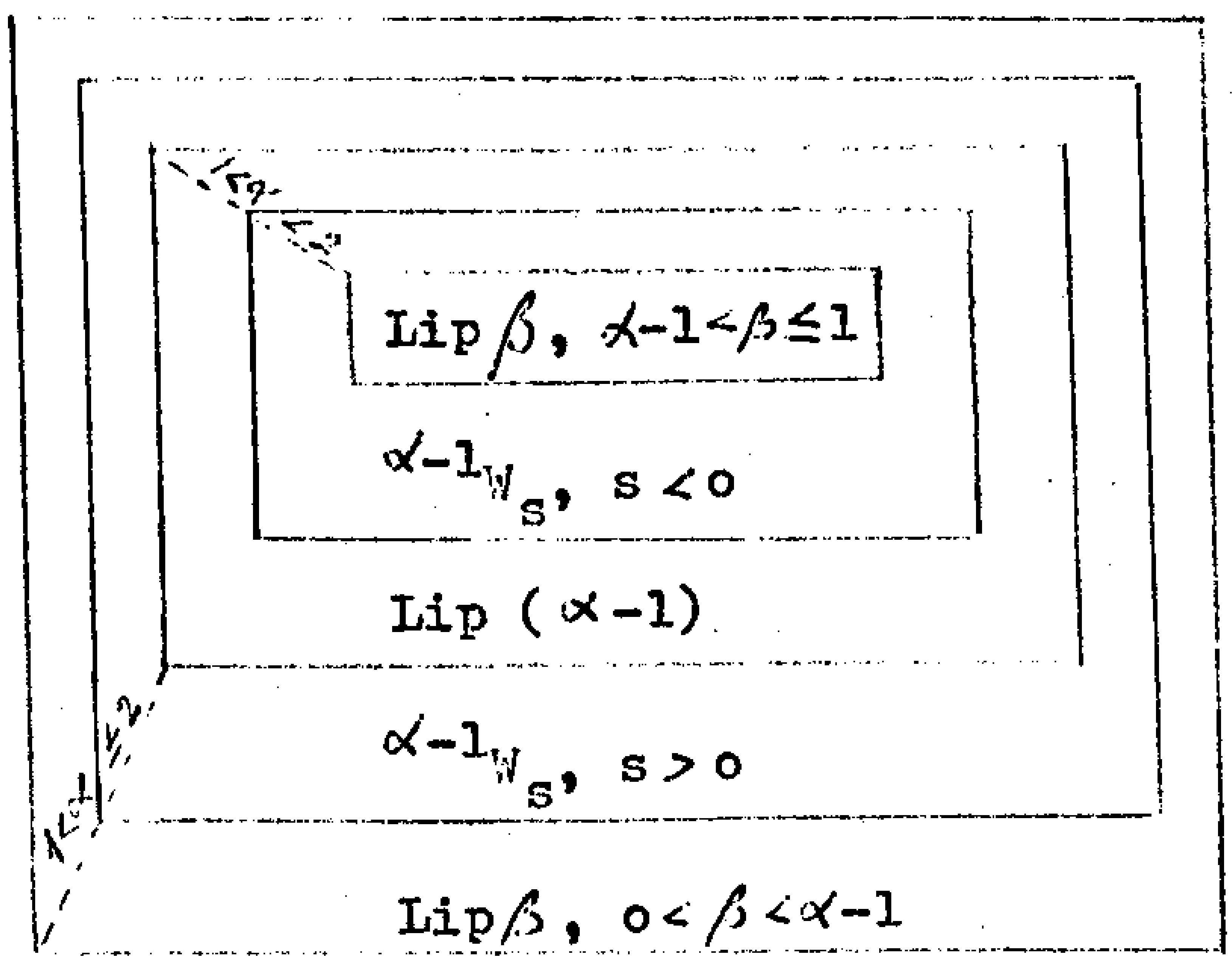
Za $\beta = \alpha - 1$, $1 < \alpha \leq 2$, iz $\omega_1(\delta, f) \leq \delta^{\alpha-1}$ sleduje:

$$\frac{\omega_1(\delta, f)}{\delta^{\alpha-1}|\ln\delta|^s} \leq \frac{\delta^{\alpha-1}}{\delta^{\alpha-1}|\ln\delta|^s} = \frac{1}{|\ln\delta|^s} \xrightarrow[\delta \to 0_+]{} 0, \text{ za } s > 0,$$

odakle proizilazi da je

$$Lip\,(\alpha-1) \subset {}^{\alpha-1}W_s, \quad s > 0,$$

čime je stav u celosti dokazan (skica 4).



Skica 4

Navedimo da za s = o relacije (75) i (76) prelaze u poznatu inkluziju (razmatranja su na konačnom segmentu)[13]:

$$(77) \qquad Lip\, \gamma_1 \supset Lip\, \gamma_2 \quad \text{za} \quad \gamma_1 < \gamma_2 ;$$

a za $\beta = \alpha - 1$ i s = o u identičnost.

IV

ANALOGONI NEKIH SALEM-OVIH POTREBNIH USLOVA

Salem je dokazao sledeći stav (koji je ušao u monografiju N. Bari [14]): Da bi trigonometrijski red

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

bio red Fourier-a L - integrabilne funkcije, neophodno je da bude

$$(78)\qquad \lim_{p\to\infty} p\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(p+\frac{1}{2})^2-n^2}=0 \wedge \lim_{p\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\, b_n}{(p+\frac{1}{2})^2-n^2}=0 .$$

U ovom odeljku je dat stav 10 [15], koji gornji uslov svodi na jednostavniji oblik - posledica 7. Na kraju, stav 11 razmatra innavedeni uslov za slučaj da su nizovi (a_n) i (b_n) opadajući indeksa 1.

Stav 1o. Da bi trigonometrijski red

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

bio red Fourier-a L - integrabilne funkcije, potrebno je da bude

$$(79)\qquad \lim_{p\to\infty}\sum_{n=1}^{2p}\frac{a_n}{2p+1-2n}=0 .$$

Gornje tvrdjenje važi i za trigonometrijski red

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx ,$$

pod pretpostavkom da je niz $(n\cdot b_n)$ ograničen.

Dokaz. Neka je $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ Fourier-ov red L - integrabilne funkcije. Iz tada ispunjenog uslova

$$\lim_{p\to\infty} p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2 - n^2} = 0 ,$$

sleduje

$$\lim_{p\to\infty} p \left[\sum_{n=1}^{2p} \frac{a_n}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2 - n^2} + \sum_{n=2p+1}^{\infty} \frac{a_n}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2 - n^2} \right] = 0 .$$

Pokazaćemo da je

$$\lim_{p\to\infty} p \sum_{n=2p+1}^{\infty} \frac{a_n}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2 - n^2} = 0 .$$

Kako je

$$0 \leq \left| p \sum_{n=2p+1}^{\infty} \frac{a_n}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2 - n^2} \right| \leq p \sum_{n=2p+1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^2 - \left(p+\frac{1}{2}\right)^2} ,$$

to ostaje da pokažemo da je

$$(80) \qquad \lim_{p\to\infty} p \sum_{n=2p+1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^2 - \left(p+\frac{1}{2}\right)^2} = 0 .$$

Za $n \geq 2p+1$ imamo:

$$\frac{n^2}{4} \geq \left(p+\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow n^2 \geq \left(p+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} n^2 \Rightarrow n^2 - \left(p+\frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{3}{4} n^2 ,$$

te je otuda

$$\sum_{n=2p+1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^2-(p+\frac{1}{2})^2} \leq \sum_{n=2p+1}^{\infty} \frac{\max\limits_{n\geq 2p+1}|a_n|}{n^2-(p+\frac{1}{2})^2} \leq \frac{4}{3}\sum_{n=2p+1}^{\infty}\frac{\max\limits_{n\geq 2p+1}|a_n|}{n^2}$$

$$= \frac{4}{3}\max_{n\geq 2p+1}|a_n| \sum_{n=2p+1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \frac{4}{3}\max_{n\geq 2p+1}|a_n| \int_{2p}^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$$

$$= \frac{4}{3}\max_{n\geq 2p+1}|a_n|\,\frac{1}{2p} = \frac{2}{3}\,\frac{\max\limits_{n\geq 2p+1}|a_n|}{p},$$

tj.

$$p\sum_{n=2p+1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n^2-(p+\frac{1}{2})^2} < \frac{2}{3}\max_{n\geq 2p+1}|a_n| \to 0, \text{ kad } p\to\infty,$$

pa je relacija (8o) potvrdjena.

Otuda polazni potreban uslov možemo zameniti uslovom:

$$(81) \qquad \lim_{p\to\infty} p\sum_{n=1}^{2p}\frac{a_n}{(p+\frac{1}{2})^2-n^2} = 0 .$$

Kako je

$$\frac{1}{(p+\frac{1}{2})^2-n^2} = \frac{4}{(2p+1)^2-(2n)^2} = \frac{2}{2p+1}\left(\frac{1}{2p+1+2n}+\frac{1}{2p+1-2n}\right),$$

to je uslov (81) ekvivalentan uslovu

$$(82)\qquad \lim_{p\to\infty} \frac{2p}{2p+1}\sum_{n=1}^{2p} a_n\left(\frac{1}{2p+1+2n}+\frac{1}{2p+1-2n}\right)=0.$$

Medjutim važi

$$0\le \lim_{p\to\infty}\left|\frac{2p}{2p+1}\sum_{n=1}^{2p}\frac{a_n}{2p+1+2n}\right| \le \lim_{p\to\infty}\sum_{n=1}^{2p}\frac{|a_n|}{2p+1+2n}\le \lim_{p\to\infty}\frac{1}{2p}\sum_{n=1}^{2p}|a_n|=0$$

pa uslov (82) dobija oblik

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{n=1}^{2p}\frac{a_n}{2p+1-2n}=0,$$

čime je prvi deo stava dokazan.

Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ Fourier-ov red L - integrabilne funkcije. Iz tada ispunjenog uslova

$$\lim_{p\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,b_n}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2-n^2}=0,$$

sleduje

$$(83)\qquad \lim_{p\to\infty}\left[\sum_{n=1}^{2p}\frac{n\,b_n}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2-n^2}+\sum_{n=2p+1}^{\infty}\frac{n\,b_n}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2-n^2}\right]=0.$$

Važi

$$\left| \sum_{n=2p+1}^{\infty} \frac{n b_n}{(p+\frac{1}{2})^2 - n^2} \right| \leq \sum_{n=2p+1}^{\infty} \frac{|n b_n|}{n^2 - (p+\frac{1}{2})^2} \leq \max_{n \geq 2p+1} |n b_n| \sum_{n=2p+1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - (p+\frac{1}{2})^2}$$

$$\leq \frac{4}{3} \max_{n \geq 2p+1} |n b_n| \sum_{n=2p+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \to 0, \text{ kad } p \to \infty,$$

pa se uslov (83) svodi na uslov

$$(84) \qquad \lim_{p \to \infty} \sum_{n=1}^{2p} \frac{n b_n}{(p+\frac{1}{2})^2 - n^2} = 0 .$$

Medjutim

$$\sum_{n=1}^{2p} \frac{n b_n}{n^2 - (p+\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{2p} \left[\frac{b_n}{n - (p+\frac{1}{2})} + \frac{b_n}{n+p+\frac{1}{2}} \right] \xrightarrow[p \to \infty]{} 0$$

i

$$0 \leq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{2p} \frac{|b_n|}{n+p+\frac{1}{2}} < \frac{1}{2p} \sum_{n=1}^{2p} |b_n| \xrightarrow[p \to \infty]{} 0 ,$$

svode uslov (84) na uslov

$$(85) \qquad \lim_{p \to \infty} \sum_{n=1}^{2p} \frac{b_n}{2p+1-2n} = 0 ,$$

što je i trebalo pokazati. Ovim je stav u celosti dokazan.

Posledica 7. Da bi trigonometrijski red

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

bio red Fourier-a L - integrabilne funkcije, potrebno je da bude

$$(86) \qquad \lim_{p\to\infty} \sum_{n=1}^{2p} \frac{a_n}{2p+1-2n} = 0 \ \wedge \ \lim_{p\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot b_n}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2 - n^2} = 0 .$$

Pod pretpostavkom ograničenosti niza $(n\cdot b_n)$, uslov (86) se svodi na uslov

$$(87) \qquad \lim_{p\to\infty} \sum_{n=1}^{2p} \frac{a_n}{2p+1-2n} = 0 \ \wedge \ \lim_{p\to\infty} \sum_{n=1}^{2p} \frac{b_n}{2p+1-2n} = 0 ;$$

a ovaj dalje, uz dopunski uslov $a_n, b_n \downarrow 0$, na uslov

$$(88) \qquad \lim_{n\to\infty} \Delta a_n \cdot \ln n = 0 \ \wedge \ \lim_{n\to\infty} \Delta b_n \cdot \ln n = 0 .$$

Stav 11. Da bi trigonometrijski red

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad a_n, b_n > 0,$$

gde su nizovi (a_n) i (b_n) opadajući indeksa 1, bio red Fourier-a L - integrabilne funkcije, potrebno je da bude

$$(89) \qquad \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \ln n = 0 \ \wedge \ \lim_{n\to\infty} b_n \cdot \ln n = 0 .$$

Dokaz. Iz pretpostavke da je niz (b_n) opadajući indeksa 1 sleduje da je niz $(n \cdot b_n)$ ograničen, pa važe uslovi (87). Prvi uslov u relaciji (87) se svodi na oblik (analognu relaciju daje i drugi uslov):

$$(90) \quad \frac{a_p - a_{p+1}}{1} + \frac{a_{p-1} - a_{p+2}}{3} + \frac{a_{p-2} - a_{p+3}}{5} + \dots + \frac{a_1 - a_{2p}}{2p-1} \to 0,$$

kad $p \to \infty$. Shodno pretpostavci o nizu (a_n) važe relacije

$$(91) \quad (p-k)\, a_{p-k} \geq (p+k+1)\, a_{p+k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, p-1;$$

što je ekvivalentno sa

$$(92) \quad \frac{a_{p-k} - a_{p+k+1}}{2k+1} \geq \frac{a_{p+k+1}}{p-k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, p-1)$$

pa je otuda

$$(93) \quad \begin{cases} \dfrac{a_p - a_{p+1}}{1} + \dfrac{a_{p-1} - a_{p+2}}{3} + \dfrac{a_{p-2} - a_{p+3}}{5} + \dots + \dfrac{a_1 - a_{2p}}{2p} \\[2ex] \geq \dfrac{a_{p+1}}{p} + \dfrac{a_{p+2}}{p-1} + \dfrac{a_{p+3}}{p-2} + \dots + \dfrac{a_{2p}}{1}. \end{cases}$$

Relacije (93) i (90) dovode do uslova

$$(94) \quad \frac{a_{p+1}}{p} + \frac{a_{p+2}}{p-1} + \frac{a_{p+3}}{p-2} + \dots + \frac{a_{2p}}{1} \to 0, \text{ kad } p \to$$

odnosno

$$(95)\qquad a_{2p}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p-1}+\dots+1\right)\to 0, \text{ kad } p\to\infty,$$

tj.

$$(96)\qquad a_{2p}\cdot \ln p\to 0, \text{ kad } p\to\infty.$$

Iz (96) dalje sleduje

$$(97)\qquad a_{2p}\cdot \ln 2p\to 0, \text{ kad } p\to\infty,$$

i odatle da

$$a_{2p+1}\cdot \ln 2p\to 0 \text{ i } a_{2p+1}\cdot \ln(2p-1)\to 0,$$

kad $p\to\infty$; tj.

$$a_{2p+1}[\ln 2p(2p-1)]\to 0, \text{ kad } p\to\infty,$$

odnosno

$$(98)\qquad a_{2p+1}\cdot \ln(2p+1)\to 0, \text{ kad } p\to\infty$$

($2p(2p-1)> 2p+1$ za $p\geq 2$). Iz (98) i (97) sleduje konačno

$$a_p\cdot \ln p\to 0, \text{ kad } p\to\infty,$$

čime je dokaz stava završen.

V

OCENE MODULA REDA FOURIER-A NEKIH KLASA FUNKCIJA IZ L

1° U radu [3] (stav 1) G.G. Lorentz je ocenjivao kombinaciju

$$(99)\qquad \tau_m^{(p)} = \left[\sum_{k=m}^{\infty}(|a_k|^p + |b_k|^p)\right]^{1/p}, \quad p \geq 1,$$

Fourier-ovih koeficijenata a_k, b_k funkcije iz klase Lipα, $0<\alpha\leq 1$, i pokazao da

$$(100)\qquad 1\leq p\leq 2 \wedge f(x)\in \mathrm{Lip}\,\alpha \Rightarrow \tau_m^{(p)} = O\left(m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}-\alpha}\right), \quad \alpha > \frac{1}{p}-\frac{1}{2};$$

dok

$$(101)\qquad p\geq 2 \wedge f(x)\in \mathrm{Lip}\,\alpha \Rightarrow \tau_m^{(p)} = O(m^{-\alpha}).$$

Gornji stav je ušao u monografiju N. Bari: Trigonometrijski redovi [16]. Ovde se dokazuje lema 1 na osnovu koje se dolazi do stava 12 i stava 13, koji daju ocene izraza $\tau_m^{(p)}$, $p\geq 1$, u klasama ${}^{\alpha-1}W_s^{(2)}$ i G respektivno. Naime, lema 1 na osnovu datog oblika ocene za p = 2 : $[\tau_m^{(2)}]^2 = O[m^{-r}(\ln m)^{2s}]$, daje ocene za $\tau_m^{(p)}$, $p\geq 1$. Za klase Lipα, $(0<\alpha\leq 1)$, ${}^{\alpha-1}W_s^{(2)}$ $(1<\alpha\leq 2)$ i G, ocene za $[\tau_m^{(2)}]^2$ su navedenog oblika, što se za slučaj klasa Lipα i ${}^{\alpha-1}W_s^{(2)}$ lako evidentira nejednakostima (107), te primenom leme dobijamo i ocene za opšti slučaj.

Lema 1. Ako je

$$(102)\qquad \sum_{k=m}^{\infty} \varrho_k^2 = O\left[\frac{(\ln m)^{2s}}{m^r}\right], \quad r>0,$$

onda je

$$(103)\qquad [\tau_n^{(p)}]^p = O\left[\frac{(\ln n)^{ps}}{n^{(r+1)\frac{p}{2}-1}}\right],\ 1\le p\le 2,\ r>\frac{2}{p}-1;$$

i

$$(104)\qquad [\tau_n^{(p)}]^p = O\left[\sup\left[\max_{k\ge n}\left(|a_k|,|b_k|\right)\right]^{p-2}\frac{(\ln n)^{2s}}{n^r}\right],\ p>2.$$

gde je

$$\tau_n^{(p)} = \left[\sum_{k=n}^{\infty}\left(|a_k|^p+|b_k|^p\right)\right]^{1/p},\quad \rho_k^2 = a_k^2+b_k^2,\ a_k, b_k \in$$

Dokaz. Za $1\le p\le 2$, primenom nejednakosti Heldera, imamo

$$\sum_{k=n}^{2n-1}|a_k|^p \le \left[\sum_{k=n}^{2n-1}\left(|a_k|^p\right)^{\frac{2}{p}}\right]^{\frac{p}{2}}\left[\sum_{k=n}^{2n-1}1\right]^{1-\frac{p}{2}} =$$

$$=\left[\sum_{k=n}^{2n-1}a_k^2\right]^{\frac{p}{2}}\cdot n^{1-\frac{p}{2}} \le \left[\sum_{k=n}^{2n-1}\left(a_k^2+b_k^2\right)\right]^{p/2}\cdot n^{1-\frac{p}{2}}$$

te koristeći (1o2) sleduje

$$\sum_{k=n}^{2n-1}|a_k|^p \le \frac{C}{n^{\frac{rp}{2}+\frac{p}{2}-1}}(\ln n)^{ps}.$$

Istu takvu nejednakost imamo za $\sum_{k=n}^{2n-1}|b_k|^p$, pa je

$$\sum_{k=n}^{2n-1}\left(|a_k|^p+|b_k|^p\right) \le \frac{C_1}{n^{\frac{rp}{2}+\frac{p}{2}-1}}(\ln n)^{ps},$$

odnosno

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=n\cdot 2^j}^{2n\cdot 2^j-1}\left(|a_k|^p+|b_k|^p\right)\leq C_1\sum_{j=0}^{\infty}\frac{[l_n(n\cdot 2^j)]^{sp}}{(n\cdot 2^j)^{\frac{rp}{2}+\frac{p}{2}-1}}\ .$$

Dalje, za $s\geq o$ pozivajući se na

$$(a+b)^s\leq 2^s(a^s+b^s),\quad a, b>o,\ s\geq o\ ;$$

imamo ($sp\geq o$):

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(l_n n+l_n 2^j)^{sp}}{(n\cdot 2^j)^{\frac{rp}{2}+\frac{p}{2}-1}}\leq\sum_{j=0}^{\infty}2^{sp}\frac{(l_n n)^{sp}}{n^{\frac{rp}{2}+\frac{p}{2}-1}}\frac{1}{(2^j)^{\frac{rp}{2}+\frac{p}{2}-1}}$$

$$+\sum_{j=0}^{\infty}2^{sp}\frac{(l_n 2^j)^{sp}}{n^{\frac{rp}{2}+\frac{p}{2}-1}}\frac{1}{(2^j)^{\frac{rp}{2}+\frac{p}{2}-1}}\ .$$

Iz $r>\frac{2}{p}-1$ sleduje $\frac{rp}{2}+\frac{p}{2}-1>o$, pa prvi red na desnoj strani gornje nejednakosti konvergira, a takodje i drugi, te je otuda

$$\sum_{k=n}^{\infty}\left(|a_k|^p+|b_k|^p\right)\leq C_2\frac{(l_n n)^{ps}}{n^{(r+1)\frac{p}{2}-1}}+C_3\frac{1}{n^{(r+1)\frac{p}{2}-1}}$$

$$=\frac{(l_n n)^{sp}}{n^{(r+1)\frac{p}{2}-1}}\left[C_2+\frac{C_3}{(l_n n)^{ps}}\right],$$

tj.

$$\left[\tau_n^{(p)}\right]^p=O\left[\frac{(l_n n)^{ps}}{n^{(r+1)\frac{p}{2}-1}}\right].$$

Za $s < o$ ($sp < o$) evidentna je relacija

$$\sum_{k=n}^{\infty}(|a_k|^p+|b_k|^p) < C_1 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(l_1 n)^{sp}}{n^{\frac{rp}{2}+\frac{p}{2}-1}} \frac{1}{(2^j)^{\frac{rp}{2}+\frac{p}{2}-1}},$$

odakle sleduje gornje tvrdjenje i u ovom slučaju.

Za $p \geq 2$ pak imamo

$$\sum_{k=n}^{2n-1}|a_k|^p \leq \sum_{k=n}^{2n-1}|a_k|^{p-2}|a_k|^2 \leq \left(\max_{n \leq k \leq 2n-1}|a_k|\right)^{p-2} \sum_{k=n}^{2n-1} a_k^2,$$

te je

$$\sum_{k=n}^{2n-1}(|a_k|^p+|b_k|^p) \leq \left[\max_{n \leq k \leq 2n-1}(|a_k|,|b_k|)\right]^{p-2} \sum_{k=n}^{2n-1}(a_k^2+b_k^2),$$

pa koristeći pretpostavku (1o2) dobijamo

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=n\cdot 2^j}^{n\cdot 2^{j+1}-1}(|a_k|^p+|b_k|^p) \leq \sup_{k \geq n}\left[\max(|a_k|,|b_k|)\right]^{p-2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c\,[l_1(n\cdot 2^j)]^{2s}}{(n\cdot 2^j)^r}.$$

Važi, za $s \geq o$:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{[l_1(n\cdot 2^j)]^{2s}}{(n\cdot 2^j)^r} \leq C_1 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(l_1 n)^{2s}}{n^r (2^j)^r} + C_1 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j\, l_1 2)^s}{n^r (2^j)^r}$$

$$= C_1 \frac{(l_1 n)^{2s}}{n^r}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2^j}\right)^r + \frac{C_1 (l_1 2)^{2s}}{n^r} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j^{2s}}{(2^j)^r},$$

gde, zbog $r > o$, oba gornja reda na desnoj strani nejednakosti konvergiraju, pa je otuda

$$\sum_{k=n}^{\infty}\left(|a_k|^p+|b_k|^p\right) \le \sup_{k\ge n}\left[\max\left(|a_k|, |b_k|\right)\right]^{p-2}\left[C_2\frac{(\ell_n n)^{2s}}{n^r}+C_3\frac{1}{n^r}\right],$$

tj.

$$\sum_{k=n}^{\infty}\left(|a_k|^p+|b_k|^p\right) \le \sup_{k\ge n}\left[\max\left(|a_k|, |b_k|\right)\right]^{p-2}\frac{(\ell_n n)^{2s}}{n^r}\left[C_2+C_3\frac{1}{(\ell_n n)^{2s}}\right]$$

odnosno

$$\left[\tau_n^{(p)}\right]^p = O\left(\sup_{k\ge n}\left[\max\left(|a_k|, |b_k|\right)\right]^{p-2}\frac{(\ell_n n)^{2s}}{n^r}\right].$$

Za s < o evidentna je relacija

$$\sum_{k=n}^{\infty}\left(|a_k|^p+|b_k|^p\right) < \sup_{k\ge n}\left[\max\left(|a_k|, |b_k|\right)\right]^{p-2} C_2\frac{(\ell_n n)^{2s}}{n^r},$$

odakle sleduje tvrdjenje u ovom slučaju.

Ovim je lema u celosti dokazana.

Ocenu izraza $\left[\tau_m^{(2)}\right]^2$ oblika (1o2) ima naprimer klasa Lip α, o $< \alpha \le$ 1. Naime shodno nejednakosti

$$(105)\quad \frac{c}{n}\sum_{k=n}^{\infty}\varrho_k^2 < \int_0^{\pi/n}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left[\Delta_h f\right]^2 dx\right)dh, \quad f\in L_2,$$

C - pozitivna konstanta, imamo:

$$(106)\qquad f(x)\in \mathrm{Lip}\,\alpha \Rightarrow \sum_{k=n}^{\infty}\rho_k^2 \leq \frac{C}{n^{2\alpha}}\quad (0<\alpha\leq 1),$$

te primenom leme 1($r = 2\alpha$, $s = o$) sleduju već navedene ocene Lorentz-a za $\left[\hat{\ell}_m(p)\right]^p$ u klasi Lipα.

Na nejednakost (105) nailazi se u jednom dokazu teoreme Szasz-a datom od strane S.B.Stečkina [17], preciznije važe nejednakosti:

$$(107)\qquad \frac{C_i}{n}\sum_{\nu=n}^{\infty}\rho_\nu^2 < \int_0^{\pi/n}\left(\int_{-\pi}^{\pi}[\Delta_h^{(i)}f]^2dx\right)dh,\quad i=1,2,$$

$f(x)\in L_2$, C_1, C_2 - pozitivne konstante.

Zaista za $f(x)\in L_2$, iz

$$\Delta_h f \sim \sum_{n=1}^{\infty}\left(2b_n\sin\frac{nh}{2}\left[\cos n\left(x+\frac{h}{2}\right)\right]-2a_n\sin\frac{nh}{2}\left[\sin n\left(x+\frac{h}{2}\right)\right]\right)$$

sleduje po Parsevalu

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\Delta_h f]^2dx = 4\sum_{n=1}^{\infty}\sin^2\frac{nh}{2}\left(a_n^2+b_n^2\right),$$

i dalje

$$(108)\quad \int_0^{\pi/m}\left(\int_{-\pi}^{\pi}[\Delta_h f]^2dx\right)dh = 4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\rho_n^2\int_0^{\pi/m}\sin^2\frac{nh}{2}\,dh,$$

odakle, shodno relaciji (21) : $\int_0^{\pi/m}\sin^2\frac{nh}{2}\,dh > \frac{\pi}{4m}$, $n \geq m$,
sleduje nejednakost

$$(109)\quad \int_0^{\pi/m}\left(\int_{-\pi}^{\pi}[\Delta_h f]^2dx\right)dh > \frac{\pi^2}{4}\sum_{n=m}^{\infty}\rho_n^2 .$$

Takodje iz

$$\Delta_h^{(2)} f \sim -4\sum_{n=1}^{\infty}\sin^2\frac{nh}{2}\left(a_n\cos nx + b_n\sin nx\right),$$

po Parsevalu, sleduje

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\Delta_h^{(2)} f]^2dx = 16\sum_{n=1}^{\infty}\sin^2\frac{nh}{2}\left(a_n^2+b_n^2\right),$$

i dalje

$$(110)\quad \int_0^{\pi/m}\left(\int_{-\pi}^{\pi}[\Delta_h^{(2)} f]^2dx\right)dh = 16\pi\sum_{n=1}^{\infty}\rho_n^2\int_0^{\pi/m}\sin^4\frac{nh}{2}\,dh.$$

Za $n \geq m$, odnosno $\ell \leq \frac{n}{m} < \ell + 1$, $\ell \in N$, važi

$$\int_0^{\pi/m} \sin^4 \frac{nh}{2}\, dh = \frac{2}{n}\int_0^{\frac{n}{m}\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\, dt > \frac{2}{m(l+1)}\int_0^{l\cdot\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\, dt = \frac{3\pi}{8}\,\frac{l}{l+1} \geq \frac{3\pi}{16m},$$

tj.

$$(111) \qquad \int_0^{\pi/m} \sin^4 \frac{nh}{2}\, dh > \frac{3\pi}{16m}, \quad n \geq m;$$

te je otuda

$$(112) \qquad \int_0^{\pi/m} \left(\int_{-\pi}^{\pi} [\Delta_h^{(2)} f]^2 dx \right) dh > \frac{3\pi^2}{m} \sum_{n=m}^{\infty} \rho_n^2,$$

pa je konačno

$$(113) \qquad \int_0^{\pi/m} \left(\int_{-\pi}^{\pi} [\Delta_h^{(i)} f]^2 dx \right) dh > \frac{c_i}{m} \sum_{n=m}^{\infty} \rho_n^2, \quad i=1,2,$$

gde je $c_1 = \pi^2$, $c_2 = 3\pi^2$.

Nejednakosti (107) koristićemo u ovom odeljku (tačke 1° i 3°).

Stav 12. Ako funkcija $f(x) \in L$ i

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx ,$$

tada

$$(114)\quad f(x) \in {}^{\alpha-1}W_S^{(p)},\ 1 < \alpha \leq 2 \Rightarrow [T_n^{(p)}]^p = O\left[\frac{(l_n n)^{pS}}{n^{p(\alpha-1)+\frac{p}{2}-1}}\right],$$

$1 \leq p \leq 2,\ \alpha - 1 > \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$; i

$$(115)\quad f(x) \in {}^{\alpha-1}W_S^{(2)},\ 1 < \alpha \leq 2 \Rightarrow [T_n^{(p)}]^p = O\left[\frac{(l_n n)^{pS}}{n^{p(\alpha-1)}}\right];\ p > 2.$$

Dokaz. Koristeći sledeću nejednakost iz (107):

$$\int_0^{\pi/n}\left(\int_{-\pi}^{\pi}[\Delta_h^{(2)} f]^2 dx\right) dh > \frac{C_1}{n}\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 ,$$

za $f(x) \in {}^{\alpha-1}W_S^{(2)}$, $1 < \alpha \leq 2$, dobijamo

$$\frac{C_1}{n}\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 < \int_0^{\pi/n}\left(\int_{-\pi}^{\pi}[\Delta_h^{(2)} f]^2 dx\right) dh \leq C_2 \frac{(l_n n)^{2S}}{n^{2\alpha-1}} ,$$

$$|h| \leq \delta = \pi/n$$

tj.

$$(116)\quad f(x) \in {}^{\alpha-1}W_S^{(2)} \Rightarrow \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 = O\left[n^{-2(\alpha-1)}(l_n n)^{2S}\right].$$

Iz gornje relacije i leme 1 za $r = 2\alpha - 2 = 2(\alpha - 1) > o$ i $2\alpha - 2 > \frac{2}{p} - 1$ tj. $\alpha - 1 > \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$, imamo da je

$$\left[\tilde{\tau}_m^{(p)}\right]^p = O\left[\frac{(\ln m)^{ps}}{m^{(2\alpha-1)\frac{p}{2}-1}}\right] = O\left[\frac{(\ln m)^{ps}}{m^{p(\alpha-1)+\frac{p}{2}-1}}\right], \quad 1 \le p \le 2 .$$

Za $p \geq 2$ pak imamo, shodno lemi 1, da je

$$\left[\tilde{\tau}_m^{(p)}\right]^p = O\left[\sup_{k \geq m}\left[\max(|a_k|, |b_k|)\right]^{p-2} \frac{(\ln m)^{2s}}{m^{2(\alpha-1)}}\right], \quad p \geq 2,$$

i dalje koristeći $\rho_m = O\left[m^{-(\alpha-1)}(\ln m)^s\right]$, što sleduje iz (116), imamo

$$\left[\tilde{\tau}_m^{(p)}\right]^p = O\left[\left(O\left[\frac{(\ln m)^s}{m^{\alpha-1}}\right]\right)^{p-2} \frac{(\ln m)^{2s}}{m^{2(\alpha-1)}}\right] = O\left[\frac{(\ln m)^{ps}}{m^{p(\alpha-1)}}\right],$$

čime se dokaz završava.

Dobijene ocene za $\left[\tilde{\tau}_m^{(p)}\right]^p$, $p \geq 1$, su generalizacije Lorentz-ovih ocena za klasu Lip α $(o < \alpha \leq 1)$ na klasu ${}^{\alpha-1}W_s^{(2)}$, $1 < \alpha \leq 2$ (za $s = o$ one se svode na te Lorentz-ove ocene - ocene (1oo) i (1o1)).

2° Relacije (loo) i (lol) za $\alpha = \frac{1}{2}$ impliciraju

$$(117)\quad f(x) \in Lip\,\tfrac{1}{2} \Rightarrow \tau_n^{(p)} \leq \frac{C}{n^{1/q}},\quad 1 < p \leq 2 \wedge \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$(\alpha = \frac{1}{2} > \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$ za $p > 1)$; i

$$(118)\quad f(x) \in Lip\,\tfrac{1}{2} \Rightarrow \tau_n^{(p)} \leq \frac{C}{n^{1/2}},\quad p \geq 2 .$$

Shodno teoremi 4 Lorentz-a iz rada [3], relacije (117) i (118) važe i za klasu V^{*}. Navedene relacije se prenose i na širu klasu G, što potvrdjuje stav 13, tj. pomenuti stav je jedna generalizacija navedene teoreme G. G. Lorentz-a. Tome prethodi lema.

Lema 2. Za niz $(\rho_n) \in M_1$ važi sledeća ekvivalencija:

$$(119)\quad \rho_n = O\left[n^{-\frac{r+1}{2}}\sqrt{\varphi(n)}\right] \Longleftrightarrow \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^{\,2} = O\left[n^{-r}\varphi(n)\right],$$

$r > 0$, $\varphi(t) > 0$ (za $t > t_0 > 0$) i $t \cdot \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \to 0$, kad $t \to +\infty$.

Ako funkcija $\varphi(t)$ poseduje još i svojstvo

$$(120)\quad \varphi(t)\downarrow \;\wedge\; \varphi(ct) = O[\varphi(t)]$$

(C - pozitivna konstanta), onda je gornja ekvivalencija u važnosti i za slučaj da je niz (ρ_n) kvaziopadajući indeksa 1.

Ekvivalencija (119) je u važnosti, za $(\rho_n) \in M_1$ ili (ρ_n) kvaziopadajući niz indeksa 1, i za $\varphi(t) \equiv 1$.

Dokaz. Neka je $\sum_{k=m}^{\infty} \rho_k^2 \leq C\, m^{-r}\varphi(m)$. Iz

$$m\rho_m^2 \leq C_1 \sum_{k=m}^{\infty} \rho_k^2 \leq C_2\, m^{-r}\varphi(m),$$

sleduje

$$\rho_m \leq C_3\, m^{-\frac{r+1}{2}}\sqrt{\varphi(m)}.$$

Za slučaj da je niz (ρ_n) kvaziopadajući indeksa 1 imamo, prema (9) i učinjenoj pretpostavci:

$$\left.\begin{array}{l} c_1\, 2m\, \rho_{2m}^2 \\ c_2\,(2m-1)\,\rho_{2m-1}^2 \end{array}\right\} < C_3\, m^{-r}\varphi(m) \;;$$

odakle, koristeći svojstva (12o), dobijamo

$$n\rho_n^2 < C_4\, n^{-r}\varphi(n),$$

tj.

$$\rho_n < C_5\, n^{-\frac{r+1}{2}}\sqrt{\varphi(n)}.$$

Za $\varphi(t) \equiv 1$ i $(\rho_n) \in M_1$ imamo

$$m\rho_m^2 \leq C_2\, m^{-r},$$

odnosno

$$\rho_m \leq \sqrt{C_2}\, m^{-\frac{r+1}{2}}\;;$$

dok za slučaj da je niz (ρ_n) kvaziopadajući indeksa 1, iz

$$\left.\begin{array}{l} c_1\, 2m\, \rho_{2m}^2 \\ c_2\,(2m-1)\,\rho_{2m-1}^2 \end{array}\right\} < \frac{C_3}{m^r},$$

sleduje

$$n\rho_n^2 < \frac{c_4}{n^r} ,$$

tj. ponovo je

$$\rho_n < c_5 n^{-\frac{r+1}{2}} .$$

Za dokaz inverznog stava dovoljno je za funkciju $\varphi(t)$ pretpostaviti samo pozitivnost i uslov $t \cdot \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \to 0$, kad $t \to +\infty$ (za $\varphi(t) \equiv 1$ tvrdjenje je evidentno).

Neka je

$$\rho_k \leq c\, k^{-\frac{r+1}{2}} \sqrt{\varphi(k)} , \quad k \geq m,$$

sleduje

$$\sum_{k=m}^{\infty} \rho_k^2 \leq c \sum_{k=m}^{\infty} k^{-(r+1)} \varphi(k) .$$

Važi (za dovoljno veliko m):

$$\sum_{k=m}^{\infty} k^{-(r+1)} \varphi(k) < \int_{m-1}^{+\infty} t^{-(r+1)} \varphi(t)\, dt ,$$

gde je funkcija $t^{-(r+1)}\varphi(t)$ opadajuća za $t \geq m-1$, m - dovoljno veliki broj (funkcija $t^{-(r+1)}\varphi(t)$ je opadajuća za $\frac{t \cdot \varphi'(t)}{\varphi(t)} < r+1$, što je ispunjeno za $t \geq m-1$ i m dovoljno veliki broj, jer $\frac{t \cdot \varphi'(t)}{\varphi(t)} \to 0$, kad $t \to +\infty$). Kako je

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\int_{u-1}^{+\infty} t^{-(r+1)}\varphi(t)\,dt}{u^{-r}\varphi(u)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_{x-1}^{+\infty} t^{-(r+1)}\varphi(t)\,dt}{x^{-r}\varphi(x)} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{\varphi(x)}{x^{r+1}}}{-r x^{-r-1}\varphi(x) + \varphi'(x) x^{-r}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{r - x\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}} = \frac{1}{r},$$

to je

$$\sum_{k=u}^{\infty} k^{-(r+1)}\varphi(k) = O\left[u^{-r}\varphi(u)\right],$$

tj.

$$\sum_{k=u}^{\infty} S_k^2 = O\left[u^{-r}\cdot\varphi(u)\right],$$

što je i trebalo dokazati.

Ovim je stav u celosti dokazan.

Primeri funkcija $\varphi(t)$ za koje je ispunjen uslov

$$(121) \qquad t\cdot\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \to 0 \quad \text{kad} \quad t\to+\infty,$$

bile bi funkcije $\varphi(t) = (\ln t)^s$, $s \in R_e$, $\varphi(t) = \ln(\ln t)$, itd.

Gornji uslov je analogon uslovu Šilova [18]:

$$(122) \qquad t\cdot\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \to 0 \quad \text{kad} \quad t\to 0;$$

i kao i uslov Šilova, ima analognu geometrijsku interpretaciju: pri uslovu (121) otsečak na ordinatnoj osi koga formira tangenta na krivu $\Upsilon(t)$ kad $t \to +\infty$, je ekvivalentan ordinati te krive u tački dodira.

Napomenimo, da bi jedno ispitivanje gornje ekvivalencije bilo i ispitivanje svake od implikacija, iz kojih se sastoji ekvivalencija (119), pod širim uslovima - naprimer uslovima kojim se mogu formulisati pomoću sporo promenljivih [19] i sličnih funkcija.

Stav 13. Za funkciju $f(x) \in L$ i

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \quad ,$$

važi

$$(123) \quad f(x) \in G \Rightarrow \begin{cases} \tilde{\tau}_n^{(p)} = O\left(\frac{1}{n^{1/q}}\right), & 1 < p \le 2 \wedge \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \\ \tilde{\tau}_n^{(p)} = O\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right), & p \ge 2 \end{cases} \quad ;$$

dok za slučaj da niz $(\tilde{\tau}_n) \in M_1$, ili je niz $(\tilde{\tau}_n)$ kvaziopadajući indeksa 1, važi ekvivalencija

$$(124) \quad f(x) \in G \Leftrightarrow \tilde{\tau}_n^{(p)} = O\left(\frac{1}{n^{1/q}}\right), \; p \ge 2 \wedge \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \, .$$

Dokaz. Za $1 < p \leq 2$ stavljajući u (1o2) i (1o3) $r = 1$, $s = 0$, $1 < p \leq 2$ ($r > \frac{2}{p} - 1$ za $r = 1$ implicira $p > 1$), imamo

$$\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \leq \frac{C}{n} \Rightarrow \left[\tilde{\tau}_n^{(p)}\right]^p \leq \frac{C}{n^{p-1}} \Rightarrow \tilde{\tau}_n^{(p)} \leq \frac{C}{n^{1/q}} .$$

Stavljajući pak u (1o2) i (1o4): $s = 0$, $r = 1$, $p \geq 2$, dobijamo implikaciju

$$(125) \quad \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \leq \frac{C}{n} \Rightarrow \left[\tilde{\tau}_n^{(p)}\right]^p \leq C_1 \frac{\sup\left[\max\limits_{k \geq n}\left(|a_k|, |b_k|\right)\right]^{p-2}}{n} .$$

Iz

$$\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 \leq \frac{C}{n} \Rightarrow \rho_k^2 \leq \frac{C}{n} \underset{k \geq n}{} \Rightarrow |a_k|, |b_k| \leq \frac{C_2}{\sqrt{n}} \underset{k \geq n}{} ,$$

tj.

$$\max_{k \geq n}\left(|a_k|, |b_k|\right) \leq \frac{C_2}{\sqrt{n}} ,$$

pa je

$$\left[\tilde{\tau}_n^{(p)}\right]^p \leq C_3\left(n^{-1/2}\right)^{p-2} n^{-1} = C_3 n^{-p/2} ,$$

odnosno

$$\tilde{\tau}_n^{(p)} \leq \frac{C_4}{n^{1/2}} \quad (p \geq 2) .$$

Ovim je implikacija (123) u celosti dokazana.

Dokažimo ekvivalenciju (124). Shodno pretpostavkama, prema lemi 2 za $\varphi(t) \equiv 1$ i $r = 1$, imamo

$$(126)\quad \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^{\,2} = O(n^{-1}) \Leftrightarrow \rho_n = O(n^{-1}).$$

Tako za $f(x) \in G$ i niz $(\rho_n) \in M_1$, ili niz (ρ_n) kvaziopadajući indeksa 1, važi

$$(127)\qquad \rho_k \leq \frac{c}{n}\,,\quad k \geq n\,.$$

Sada iz (127) dobijamo

$$\max_{k \geq n}(|a_k|, |b_k|) \leq \frac{c}{n}\,,$$

pa za $p \geq 2$ relacija (125) daje

$$[\tau_n^{(p)}]^p \leq c_1 \frac{1}{n^{p-2}}\,\frac{1}{n} = \frac{c_1}{n^{p-1}}\,,$$

tj.

$$\tau_n^{(p)} = \frac{c_2}{n^{1-\frac{1}{p}}} = \frac{c_2}{n^{1/2}}\,.$$

<u>Relacija (126) ujedno daje i ocenu modula reda Fourier-a:</u>

$$(128)\qquad \rho_n = O(n^{-1})\,,$$

<u>za funkciju $f(x) \in G$, gde $(\rho_m) \in M_1$, ili je niz (ρ_m) kvaziopadajući indeksa 1.</u>

Obrnuto, neka je

$$(129)\qquad \tau_n^{(p)} = \Big(\sum_{k=n}^{\infty} |a_k|^p + |b_k|^p\Big)^{1/p} \leq \frac{c}{n^{1/2}}\,,\ p \geq 2\,.$$

Shodno Helderu, za $p \geq 2$, važi

$$\sum_{k=n}^{2n-1} a_k^2 \leq \left[\sum_{k=n}^{2n-1} (a_k^2)^{\frac{p}{2}}\right]^{\frac{2}{p}} \left(\sum_{k=n}^{2n-1} 1\right)^{1-\frac{2}{p}} = \left(\sum_{k=n}^{2n-1} |a_k|^p\right)^{\frac{2}{p}} n^{1-\frac{2}{p}}$$

$$\leq \left[\sum_{k=n}^{2n-1} \left(|a_k|^p + |b_k|^p\right)\right]^{\frac{2}{p}} \cdot n^{1-\frac{2}{p}},$$

tj.

$$(130) \quad \sum_{k=n}^{2n-1} (a_k^2 + b_k^2) < c_1 \left[\sum_{k=n}^{2n-1} |a_k|^p + |b_k|^p\right]^{\frac{2}{p}} \cdot n^{1-\frac{2}{p}}.$$

Sada, koristeći (129), relacija (130) implicira

$$\sum_{k=n}^{2n-1} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{c_2}{n^{2/q}} n^{1-\frac{2}{p}} = \frac{c_2}{n^{-1+2\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)}} = \frac{c_2}{n},$$

odnosno

$$\sum_{k=n}^{2n-1} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{c_2}{n},$$

odakle sleduje

$$\sum_{k=n}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\sum_{k=2^{j-1} \cdot n}^{(2^j-1) \cdot n} (a_k^2 + b_k^2)\right] \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_2}{2^{j-1} \cdot n} \leq \frac{c_3}{n},$$

pa je konačno

$$\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 < \frac{c_3}{n},$$

tj. $f(x) \in G$, čime se dokaz završava.

3° U ovoj tački se razmatra ocena modula reda Fourier-a za slučaj da je niz (ρ_n) kvaziopadajući indeksa 1, funkcije $f(x) \in L_2$ - stav 14, koji dovodi do ocene za ρ_n, odnosno koeficijenata a_n i b_n, funkcija iz klasa $K_\varphi^{(i)}$, i = 1,2, i specijalno klasa ${}^{\alpha-1}W_s^{(i)}$, i klase Lipα - posledica 8; i dalje, ocenu za ρ_n funkcije iz klase neprekidnih funkcija ograničene varijacije $(C \cap V)$ - posledica 9, kao i specijalni slučajevi te posledice. Stav 15 pak daje ocenu za ρ_n, gde $(\rho_n) \in M_\beta$, $0 \le \beta \le 1$, i $f(x) \in L_2$; i specijalno ocenu kad $f(x) \in K_\varphi^{(i)}$, i = 1,2 - posledica 10, kao i specijalni slučajevi te posledice.

<u>Stav 14</u>. <u>Ako je funkcija $f(x) \in L_2$ i</u>

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

<u>gde je niz (ρ_n) kvaziopadajući indeksa 1, tada važi</u>

$$(131) \qquad \rho_n = O\left(\left[\int_0^{2\pi/n} \left(\int_{-\pi}^{\pi} [\Delta_h^{(i)} f]^2 dx \right) dh \right]^{1/2} \right), \quad i = 1,2.$$

<u>U terminima kvadratnih modula neprekidnosti i glatkosti</u>:

$$(132) \qquad \rho_n = O\left[\frac{\omega_i^{(2)}(\frac{1}{n}, f)}{\sqrt{n}} \right], \quad i = 1,2.$$

<u>Dokaz</u>. Za slučaj kvaziopadajućeg indeksa 1 niza (ρ_n), shodno (9), važi

$$\left.\begin{array}{l} c_1\,\rho_{2m}^2 \\ c_2\,\rho_{2m-1}^2 \end{array}\right\} < \frac{1}{m}\sum_{n=m}^{\infty}\rho_n^2$$

(red $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\rho_n^2$ za $f(x)\in L_2$ konvergira [20]), pa je prema (1o7):

$$\left.\begin{array}{l} c_1\,\rho_{2m}^2 \\ c_2\,\rho_{2m-1}^2 \end{array}\right\} < \int_0^{\pi/m}\left(\int_{-\pi}^{\pi}[\Delta_h^{(i)}f]^2dx\right)dh\ ,$$

odakle sleduje

$$(131_1)\qquad \rho_n^2 = O\left[\int_0^{2\pi/n}\left(\int_{-\pi}^{\pi}[\Delta_h^{(i)}f]^2dx\right)dh\right]\ ,$$

što je i trebalo dokazati.

U terminima kvadratnih modula neprekidnosti i glatkosti [21] *): $\omega_i^{(2)}(\delta, f)$, $i = 1,2$, imamo, prema (131_1), ocenu

$$\rho_n^2 < c\,\frac{2\pi}{n}\left[\omega_i^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right)\right]^2\ ,\qquad i=1,2\ ;$$

odnosno sledeći oblik ocene za ρ_n:

---

*) $\omega_i^{(2)}(\delta, f) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\limits_{0\le|h|\le\delta}\|\Delta_h^{(i)}f\|_{L_2} = \sup\limits_{0\le|h|\le\delta}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}[\Delta_h^{(i)}f]^2\,dx\right\}^{1/2}$,

$i=1,2.$

$$\rho_n = O\left[\frac{\omega_i^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right)}{\sqrt{n}}\right], \quad i=1,2,$$

čime se dokaz u celosti završava.

Posledica 8. Ako je funkcija $f(x) \in L_2$ i

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

gde je niz (ρ_n) kvaziopadajući indeksa 1, tada važi

$$(133) \quad f(x) \in K_{\varphi}^{(i)} \Rightarrow \rho_n = O\left[n^{-1/2}\varphi\left(\tfrac{2\pi}{n}\right)\right], \quad i=1,2.$$

Tvrdjenje je evidentno iz definicije tretiranih klasa i relacije (131).

Primetimo, da ako su nizovi $(|a_n|)$ i $(|b_n|)$ kvaziopadajući indeksa 1, da je tada i niz (ρ_n) kvaziopadajući indeksa 1, dok obrnuto ne važi, te otuda imamo, pri pomenutoj pretpostavci za niz (ρ_n), sledeće ocene:

$$(134) \quad f(x) \in K_{\varphi}^{(i)} \Rightarrow |a_n|, |b_n| = O\left[\frac{\varphi(2\pi/n)}{\sqrt{n}}\right], \quad i=1,2;$$

odnosno, u terminima modula neprekidnosti

$$(134_1) \quad f(x) \in C \Rightarrow |a_n|, |b_n| = O\left[\frac{\omega_i\left(\frac{1}{n}, f\right)}{\sqrt{n}}\right], \quad i=1,2.$$

Specijalno ,

$$(135)\quad f(x) \in {}^{\alpha-1}W_s^{(i)} \Rightarrow |a_n|, |b_n| = O\left[\frac{(\ln n)^s}{n^{\alpha-1/2}}\right], 1<\alpha\leq 2\ (i=1,2),$$

odnosno za klasu Lip α :

$$(135_1)\quad f(x) \in \mathrm{lip}\,\alpha \Rightarrow |a_n|, |b_n| = O\left(\frac{1}{n^{\alpha+1/2}}\right), 0<\alpha\leq 1.$$

Gornje ocene su slabije od korespodentnih ocena za slučaj da (a_n), $(b_n) \in T$ i nizovi $(|a_n|)$ i $(|b_n|)$ kvaziopadajući indeksa 1 - stav 3 i posledice 3 i 5 - ali zato one važe za širu klasu nizova $(|a_n|)$ i $(|b_n|)$ od klase kvaziopadajućih indeksa 1 nizova $(|a_n|)$, $(|b_n|)$; naime za klasu nizova $(|a_n|)$, $(|b_n|)$ za koje ne niz (ρ_n) kvaziopadajući indeksa 1.

<u>Posledica 9.</u> <u>Ako je funkcija $f(x) \in L_2$ i</u>

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx ,$$

<u>gde je niz (ρ_n) kvaziopadajući indeksa 1, tada za $f(x) \in C \cap V$</u>

<u>važi</u>

$$(136)\qquad \rho_n = O\left[\frac{\sqrt{\omega_1(1/n)}}{n}\right] .$$

Zaista, za funkciju f(x) ograničene varijacije važi [22]:

$$\sup_{|h|\leq\delta} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+h)-f(x)|\,dx \leq c\cdot\delta,$$

te kako je funkcija f(x) i neprekidna, to imamo

$$|f(x+h)-f(x)| \leq \omega_1(\delta, f) \qquad (|h|\leq\delta),$$

pa relacija (131_1) daje

$$\rho_n^{\,2} \leq \frac{c}{n^2}\,\omega_1\left(\frac{2\pi}{n}\right) \qquad \left(|h|\leq\delta=\frac{2\pi}{n}\right),$$

tj.

$$\rho_n = O\left[\frac{\sqrt{\omega_1(1/n)}}{n}\right],$$

što je i trebalo pokazati.

Gornja ocena je, pri pretpostavci kvaziopadanja indeksa 1 niza (ρ_n), ocena i za $|a_n|$ i $|b_n|$:

$$(137) \qquad |a_n|, |b_n| = O\left[\frac{\sqrt{\omega_1(1/n)}}{n}\right].$$

Specijalno, za funkciju $f(x)\in{}^{\alpha-1}W_s^{(i)} \cap V$, i = 1,2, u ovom slučaju imamo

$$(138) \quad |a_n|, |b_n| = O\left(\left[\frac{(\ln n)^5}{n^{\alpha+1}}\right]^{1/2}\right), \quad 1 < \alpha \leq 2 ;$$

odnosno za $f(x) \in \mathrm{Lip}\alpha \cap V$:

$$(138_1) \quad |a_n|, |b_n| = O\left(\frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}+1}}\right), \quad 0 < \alpha \leq 1 .$$

Navedimo da se iz gornje ocene <u>očitava i ekvivalencija</u>: Ako je $f(x) \in L_2$ i

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx ,$$

gde je niz (ρ_n) kvaziopadajući indeksa 1, tada važi

$$(139) \quad f(x) \in C \cap V \Longleftrightarrow \rho_n = o\left(\frac{1}{n}\right) .$$

Zaista za $f(x) \in C \cap V$, pri navedenoj pretpostavci za niz (ρ_n), imamo $\rho_n \leq C \frac{\sqrt{\omega_1(1/n)}}{n}$, tj. $n\rho_n \to 0$, kad $n \to \infty$. Obrnuto, neka $n\rho_n \to 0$ kad $n \to \infty$, važi: $\frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} n . \rho_n \to 0$, kad $m \to \infty$, pa po stavu Wiener-a [23] sleduje da $f(x) \in C \cap V$.

<u>Stav 15. Ako funkcija $f(x) \in L_2$ i</u>

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx ,$$

gde niz (ρ_n) pripada klasi M_β $(0 \leq \beta \leq 1)$, tada za modul reda Fourier-a važi ocena:

$$(140) \qquad \rho_n = O\left(\left[n^{1-\beta}\int_0^{\pi/n}\left(\int_{-\pi}^{\pi}[\Delta_h^{(i)} f]^2 dx\right)dh\right]^{1/2}\right), \quad i=1,2.$$

U terminima kvadratnih modula neprekidnosti i glatkosti:

$$(141) \qquad \rho_n = O\left[\frac{\omega_i^{(2)}\left(\frac{1}{n}, f\right)}{n^{\beta/2}}\right], \quad i=1,2.$$

Dokaz. Za $(\rho_m) \in M_\beta$ $(0 \leq \beta \leq 1)$ i $f(x) \in L_2$ imamo

$$n^\beta \rho_n^2 \leq C \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k^2 ,$$

pa je, prema (107):

$$(140_1) \qquad \rho_n^2 = O\left[n^{1-\beta}\int_0^{\pi/n}\left(\int_{-\pi}^{\pi}[\Delta_h^{(i)} f]^2 dx\right)dh\right],$$

odakle sleduje tvrdjenje.

Za $\beta = 1$ $((\rho_n) \in M_1)$ gornja ocena je identična sa ocenom za slučaj da je niz (ρ_n) kvaziopadajući indeksa 1; za $\beta = 0$ pak imamo ocenu za $f(x) \in L_2$.

U terminima kvadratnih modula neprekidnosti i glatkosti: $\omega_i^{(2)}(\delta, f)$, $i = 1,2$, imamo prema (140), ocenu

$$\rho_m^2 \leq c\, m^{-\beta}\left[\omega_i^{(2)}\left(\tfrac{1}{m}, f\right)\right]^2, \quad i = 1,2 ;$$

odnosno sledeći oblik ocene za ρ_m:

$$\rho_m = O\left[\frac{\omega_i^{(2)}\left(\frac{1}{m}, f\right)}{m^{\beta/2}}\right], \quad i = 1,2,$$

čime se dokaz u celosti završava.

Posledica lo. Ako funkcija $f(x) \in L_2$ i

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx ,$$

gde niz (ρ_n) pripada klasi M_β $(0 \leq \beta \leq 1)$, tada važi

$$(142) \quad f(x) \in K_\varphi^{(i)} \Rightarrow \rho_m = O\left[m^{-\frac{\beta}{2}} \varphi\left(\tfrac{\pi}{m}\right)\right], \quad i = 1,2 .$$

Tvrdjenje je evidentno iz definicije tretiranih klasa i relacije (14o).

Primetimo da ako nizovi (a_n), (b_n) pripadaju klasi M_β, $0 \le \beta \le 1$, da tada i niz (ρ_n) pripada klasi M_β, $0 \le \beta \le 1$, dok obrnuto ne važi, sem za $\beta = 0$, te otuda imamo za $(\rho_n) \in M_\beta$, $0 \le \beta \le 1$, sledeće ocene:

$$(143) \quad f(x) \in \mathcal{K}_\varphi^{(i)} \Rightarrow |a_n|, |b_n| = O\left[\frac{\varphi(\pi/n)}{n^{\beta/2}}\right], \; i=1,2;$$

odnosno u terminima modula neprekidnosti

$$(143_1) \quad f(x) \in C \Rightarrow |a_n|, |b_n| = O\left[\frac{\omega_i(\frac{1}{n}, f)}{n^{\beta/2}}\right], \; i=1,2.$$

Specijalno

$$(144) \quad f(x) \in {}^{\alpha-1}W_S^{(i)} \wedge \rho_n \in M_\beta \Rightarrow |a_n|, |b_n| = O\left[\frac{(\ln n)^S}{n^{\alpha-1+\frac{\beta}{2}}}\right], \; i=1,2 \begin{pmatrix} 1<\alpha\le 2 \\ 0\le\beta\le 1 \end{pmatrix},$$

odnosno za klasu Lipα:

$$(144_1) \quad f(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha \wedge \rho_n \in M_\beta \Rightarrow |a_n|, |b_n| = O\left(\frac{1}{n^{\alpha+\frac{\beta}{2}}}\right) \quad \begin{pmatrix} 0<\alpha\le 1 \\ 0\le\beta\le 1 \end{pmatrix}.$$

Tako za $\beta = 0$ iz relacije (144_1) dobijamo Lebesgue-ovu ocenu Fourier-ovih koeficijenata za klasu Lip α $(0<\alpha\le 1)$.

*

L I T E R A T U R A

[1] Реферативный журнал"Математика", 1962, № 2,Б.84 (Shah S.M.: Trigonometric series with quasi-monotone coefficients, "Proc. Amer. Math. Soc.", 1962,13, № 2,266-273).

[2] Н.К.Бари: Тригонометрические ряды, Москва 1961, 773.

[3] G.G. Lorentz: Fourier - koeffizienten und Funktionen - klassen, Mathematische Zeitschrift Bd.51 (1949), 135-149.

[4] М.К.Потапов: О коэффициентах Фурье функций с ограниченным изменением, Вестник Московского университета, № 1, 1966,12-20.

[5] S.Aljančić: O nekim novijim rezultatima iz trigonometrijske aproksimacije, Zbornik radova SANU-LXIX, Matematički institut SANU, knj. 8, Beograd 1960, 9 - 52.

[6] S.Aljančić i M. Tomić: O donjoj granici modula neprekidnosti izraženoj pomoću Fourier-ovih koeficijenata funkcije, Glas SANU-CCLXIX, Odelenje prirodno-matematičkih nauka, N.S. knj. 30, Beograd 1967, 65-77.

[7] Н.К.Бари: Тригонометрические ряды, Москва 1961, 678.

[8] Н.К.Бари: Тригонометрические ряды, Москва 1961, 608.

[9] Н.К.Бари: Тригонометрические ряды, Москва 1961, 612.

[10] Н.К.Бари: Тригонометрические ряды, Москва 1961, 210.

[11] S.Aljančić: O modulu specijalnih Fourier-ovih redova i o modulu Fourier-ovih redova transformisanih multiplikatorima različitih tipova, Glas SANU-CCLXIX, Odelenje prirodno-matematičkih nauka, N.S. knj. 30, Beograd 1967, 37-64.

[12] И.П.Натансон: Конструктивная теория функций, Москва 1949, 11[illegible]

[13] И.П.Натансон: Конструктивная теория функций, Москва 1949,1[illegible]

[14] Н.К.Бари: Тригонометрические ряды, Москва 1961,228-231.

[15] J.V. Malešević: Neki rezultati u teoriji Fourier-ovih koeficijenata u vezi sa stavovima Zygmund-a, Lorentz-a i Salem-a; magistarska teza, Beograd 1971.

[16] Н.К.Бари: Тригонометрические ряды, Москва 1961, 208.

[17] Н.К.Бари: Тригонометрические ряды, Москва 1961, 609.

[18] Н.К.Бари: Тригонометрические ряды, Москва 1961, 632.

[19] D. Adamović: Sur quelques propriétés des fonctions à croissance lente de Karamata (I), Matematički vesnik, 3(18),1966,123-136.

[20] Н.К.Бари: Тригонометрические ряды, Москва 1961, 70.

[21] Н.К.Бари: Тригонометрические ряды, Москва 1961, 878

[22] Н.К.Бари: Тригонометрические ряды, Москва 1961, 51

[23] Н.К.Бари: Тригонометрические ряды, Москва 1961, 205.

S A D R Ž A J

	Strana
UVOD	
I NOVOUVEDENI POJMOVI...........................	1
II OCENE KOEFICIJENATA FOURIER-A NEKIH KLASA FUNKCIJA IZ L...........................	10
III INKLUZIVNI ODNOSI NEKIH KLASA FUNKCIJA........	39
IV ANALOGONI NEKIH SALEM-OVIH POTREBNIH USLOVA....	46
V OCENE MODULA REDA FOURIER-A NEKIH KLASA FUNKCIJA IZ L...........................	54
LITERATURA	