U N I V E R Z I T E T U B E O G R A D U

P R I R O D N O M A T E M A T I Č K I F A K U L T E T

Jovan D. MALIŠIĆ

EKSTRAPOLACIJA I DRUGI LINEARNI PROBLEMI JEDNE KLASE STACIONARNIH SLUČAJNIH PROCESA SA NERACIONALNIM SPEKTRALNIM GUSTINAMA

(Doktorska disertacija)

B E O G R A D, juna 1973

S A D R Ž A J

P R E D G O V O R

Značajno područje izučavanja u teoriji stacionarnih slučajnih procesa zauzimaju linearni aproksimacioni problemi (linearna ekstrapolacija , interpolacija i filtracija). Rešavanje ovih problema važno je i zbog toga što su to osnovni problemi sa kojima se susrećemo i u teoriji optimalnih dinamičkih sistema.

Ovaj rad posvećen je efektivnom rešavanju aproksimacionih zadataka pri čemu se posmatraju procesi sa neracionalnim spektralnim gustinama. Pokazuje se da je moguće dati eksplicitni oblik rešenja ovih zadataka , nasuprot dosadašnjem uverenju mnogih matematičara da je to moguće jedino u slučaju racionalnih spektralnih gustina.

Rad je podeljen na četiri glave. U prva dva paragrafa prve glave daje se istorijat problema i njegovog rešavanja , a već u trećem paragrafu osnovne definicije , oznake i teoreme koje se u daljem tekstu koriste. Odatle pa nadalje su moji rezultati.

Druga glava obrađuje ekstrapolacione probleme i ona je najduža pošto se u njoj razrađuje metodika postupka. U trećoj glavi se rešavaju problemi interpolacije i filtracije, a u četvrtoj glavi se daju uopštenja na klasu procesa čije spektralne gustine su racionalne funkcije pomnožene i podeljene eksponencijalnim izrazima.

Pri rešavanju ovih problema imao sam na umu to da u osnovi mnogih matematičkih teorija leži neka osnovna nejednakost ili neka jasna geometrijska predstava. U ovom slučaju to je bila geometrija hilbertovog prostora.

U toku izrade disertacije veliku moralnu podršku i visoko-stručnu pomoć pružio mi je A.M. Jaglom , profesor Moskovskog državnog univerziteta i Instituta fizike atmosfere AN SSSR . Na tome sam mu veoma zahvalan.

Beograd , juna 1973.

Prva glava

ISTORIJAT I POSTAVKA PROBLEMA

1.1. ISTORIJAT PROBLEMA I NJEGOVOG REŠAVANJA

Kada se govori o slučajnom procesu omda se ima u vidu slučajna promenljiva , koja se menja sa vremenom. Preciznije rečeno, slučajni proces $X(t)$ je funkcija realnog parametra $t\in T$,pri čemu su $X(t)$ za svako $t\in T$ slučajne promenljive (u opštem slučaju to su kompleksne slučajne promenljive).

Neka je $E|X(t)|^2$ konačno za svako $t\in T$. Tada je srednja vrednost procesa $X(t)$ funkcija

$$(1.1.1) \qquad m_X(t) = E\,X(t)$$

koja je konačna kompleksna funkcija za svako $t\in T$. Korelaciona funkcija

$$(1.1.2) \qquad K_X(t,s) = E\{[X(t)-m_X(t)]\overline{[X(s)-m_X(s)]}\}$$

je, takođe, kompleksna funkcija i iz

$$(1.1.3) \qquad |K_X(t,s)|^2 \leq E|X(t)-m_X(t)|^2 \cdot E|X(s)-m_X(s)|^2$$

sledi da je za svako t i s konačna. Korelaciona funkcija je nenegativna definisana i

$$K_X(t,s) = \overline{K_X(s,t)} \,, \tag{1.1.4}$$

$$K_X(t,t) \equiv D_X(t) \geqslant 0 \,. \tag{1.1.4}$$

Slučajni proces $X(t)$ sa konačnim momentima drugog reda za koji je $EX(t)=m$ konstanta i $K_X(t,s)=K(t-s)$ spada u važnu klasu slučajnih procesa, u klasu stacionarnih u širokom smislu slučajnih procesa (mi ćemo ih prosto zvati- stacionarni procesi). Bez gubljenja opštosti može se smatrati da je $EX(t)=0$, jer se umesto $X(t)$ može posmatrati njegova "pulsacija" $X(t)-m$.

Slučajna promenljiva X za koju je $EX=0$ i $E|X|^2<\infty$ može se posmatrati i kao vektor nekog prostora slučajnih promenljivih H ([7], str. 22-25). Vektori iz H se mogu sabirati i množiti skalarima, kvadrat dužine vektora i skalarni proizvod dva vektora iz H se definišu sa

$$\|X\|^2 = E|X|^2 \,, \quad (X_1,X_2) = EX_1\overline{X}_2 \,. \tag{1.1.5}$$

Tada je H jedan hilbertov prostor i konvergencija nizova tačaka iz H je ekvivalentna sa srednjekvadratnim konvergencijom odgovarajućeg niza slučajnih promenlivih ([38], str. 1o3-111). To nam omogućava da iz proizvoljne tačke ξ iz H možemo spustiti jedinstvanu normalu na linearni podprostor $A \subset H$ i dužina te normale je najkraće rastojanje od tačke ξ do podprostora A ([1], [22]). Podnožje normale η ima osobinu da je razlika $\xi-\eta$ nekorelirana sa slučajnim promenljivim iz A. Projekcija η se smatra najboljom aproksimacijom ξ vektorimaiz A u smislu minimuma kvadrata rastojanja.

Za korelacione funkcije $K_X(t)$ stacionarnog slučajnog procesa $X(t)$ važi spektralna reprezentacija

$$K_X(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dF(\lambda) \, , \tag{1.1.6}$$

gde je $F(\lambda)$ realna neopadajuća i ograničena funkcija. $F(\lambda)$ je spektralna funkcija procesa $X(t)$ i ona je određena sa taćnošću do konstante te se može smatrati da je $F(-\infty)=0, F(\infty)=K_X(0)$. Ako je $F(\lambda)$ apsolutno neprekidna, tada njen ivod $f(\lambda)=F'(\lambda)$ je spektralna gustina stacionarnog procesa $X(t)$.

Za svaki stacionarni proces $X(t)$ postoji proces $Z(\lambda)$ sa ortogonalnim priraštajima, tako da za svako fiksirano t imamo spektralnu reprezentaciju

$$X(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dZ(\lambda) \, , \tag{1.1.7}$$

gde se stohastički integral podrazumeva u srednjekvadratnom. Proces $Z(\lambda)$ je određen sa tačnošću do aditimne slučajne promenljive. Ako se zahteva $Z(-\infty)=0$, tada je

$$E Z(\lambda)=0 \, , \; E|Z(\lambda)|^2=F(\lambda) \, , \; E\,|dZ(\lambda)|^2=dF(\lambda). \tag{1.1.8}$$

Primetimo i to da iz definicije izvoda i (1.1.7) sledi spektralna reprezentacija izvoda

$$X'(t)=\int_{-\infty}^{\infty} i\lambda e^{i\lambda t} dZ(\lambda) \, . \tag{1.1.9}$$

U važne probleme teorije stacionarnih procesa spadaju aproksimacioni problemi ili linearni problemi u koje se pored ostalih ubrajaju ekstrapolacija, interpolacija i filtracija.

Problem linearne ekstapolacije nad celom prošlošću $(-\infty, t]$ stacionarnog slučajnog procesa $X(t)$ se sastoji u nalaženju funkcionala $\hat{X}(t_0+\tau)$ od vrednosti $X(t)$ za $t\le t_0$ koji daje najbolju (u smislu metode najmanjih kvadrata) aproksima - ciju za $X(t_0+\tau), \tau>0$.

Problem linearne ekstrapolacije nad konačnim intervalom $[t_0-T, t_0], T>0$ se sastoji u nalaženju funkcionala $\hat{X}(t_0+\tau)$ od vrednosti $X(t)$ za $t_0-T\leq t\leq t_0$ koji daje najbolju aproksimaciju za $X(t_0+\tau), \tau>0$. U ovom slučaju se osim navedene ekstrapolacije "unapred" može posmatrati i ekstrapolacija "unazad" za vrednost $X(t_0-T-\tau), \tau>0$.

Problem linearne interpolacije se sastoji u nalaženju najbolje aproksimacije pomoću funkcionala $\hat{X}(s)$ od vrednosti $X(t)$ za $t\leq t_0$ i $t\geq t_0+T, T>0$.

Problem linearne filtracije za $X(t)=U(t)+V(t)$ sastoji se u nalaženju funkcionala od vrednosti $X(t)$ pri $t\leq t_0$ u slučaju poznavanja cele prošlosti, odnosno pri $t_0-T\leq t\leq t_0$ u slučaju konačnog intervala, koji daje najbolju aproksimaciju za $U(t_0+\tau)$, odnosno za $U(t_0+\tau)$ ili $U(t_0-T-\tau)$.

Linearne probleme teorije stacionarnih procesa prvi je počeo da rešava Kolmogorov 1939. godine ([14], [15]) posmatrajuću zadatak linearne ekstrapolacije nad celom prošlošću stacionarnih nizova. Posle toga, 1945. godine Krejn ([16]) je razmatrao neka pitanja teorije funkcija bliske teoriji ekstrapolacije i filtracije stacionarnih procesa, zadatih nad konačnim intervalom, a zatim i zadatak ekstrapolacije nad celom prošlošću za proizvoljne stacionarne procese. Posle taga, Jaglom ([9]) je 1949. godine rešio problem interpolacije za stacionarne nizove, a Karumen ([40]) 1952. godine neke primere ekstrapolacije stacionarnih procesa.

U svim tim radovima je osnovna pažnja posvećena nalaženju srednjeg kvadrata greške najbolje aproksimacije

$$\sigma_\tau^2 = E\,|X(t_0+\tau) - \hat{X}(t_0+\tau)|^2$$

ili uslovima pod kojima je $\sigma_\tau^2 \equiv 0$.

Prvi koji se pozabavio nalaženjem eksplicitnog oblika funkcionala $\hat{X}(t_0+\tau)$ bio je Viner ([48]), 1949. godine. Njegov rad je bio posvećen pitanjima ekstrapolacije, interpolacije i filtracije datih na $(-\infty, t_0]$ stacionarnih procesa sa racionalnom svuda pozitivnom spektralnom gustinom. Rad Vinera, mora se priznati, ne pretenduje na strogost u zaključivanju i dokazivanju rezultata. Nalaženje funkcionala $\hat{X}(t_0+\tau)$ svodi se na rešavanje integralnih jednačina specijalnog (i dosta složenog) tipa, radi čega je potrebno vršiti niz transformacija.

Ideje Vinera su Zade i Ragacini ([52]) 195o. godine iskoristili za slučaj konačnog intervala posmatranja.

Svođenje problema na rešavanje integralnih jednačina (tzv. integralnih jednačina tipa Vinera-Hopfa) nalazimo dosta kasnije, 1963. godine i kod Pisarenka i Rozanova ([21]) pri čemu se posmatra samo slučaj racionalne spektralne gustine. Ovoj vrsti rešavanja pripada i rad autora ([43]) iz 1972. godine u kome je pokazano da se rešenje eksplicitno može dobiti i u slučaju kada se posmatraju i neke neracionalne spektralne gustine.

U radovima [17], [18] i [19] iz 1953. i 1954. godine Krejn je pokazao da se zadatak ekstrapolacije ili filtracije stacionarnih procesa zadatih na konačnom intervalu može svesti na diferencijalne jednačine kolebanja nehomogene strune i nalaženje njene sopstvene funkcije prema odgovarajućoj spektralnoj funkciji. Koristeći efektivnu konstrukciju diferencijalne jednačine na osnovu njenog spektra, Krejn je pokazao da se funkcional $\hat{X}(t_0+\tau)$ može efektivno naći i tim načinom u slučaju racionalne spektralne gustine. No, praktično tu je i kraj mogućnosti primene ove metode. Sem toga, pri rešavanju se koristi dosta komlikovan matematički aparat.

Za razliku od drugih autora, Jaglom je pošao sasvim drugim putem. On je 1952. godine ([7]) pokazao da se svi rezultati Vinera mogu dobiti dovoljno elementarno (ali i matematički strogo) ako se spektralna gustina $f(\lambda)$ stacionarnog procesa $X(t)$ posmatra kao vrednost na realnoj osi neke analitičke fumkcije kompleksnog argumenta. Time se problem prebacuje na teren teorije kompleksnih funkcija. Ovaj metod je kasnije od strane Jagloma korišćem i u radovima [10], [11] i [12]. Metod Jagloma istovremeno pokazuje i način nalaženja tzv. spektralne karakteristike polazeći od zahteva kojima ona mora da udovolji.

Metod Jagloma objasnićemo u sledećem paragrafu detaljnije s obzirom na njegovu važnost za rešavanje naših problema.

1.2. METOD JAGLOMA

I Ekstrapolacija

Neka je $X(t)$ stacionaran slučajni proces sa $EX(t)=0$ i korelacionom funkcijom $K_X(\tau)$. Neka je H hilbertov prostor slučajnih promenljivih sa konačnom disperzijom i skalarnim proizvodom $(X_1,X_2)=EX_1\overline{X_2}$ i neka je $H(X)$ njegov podprostor slučajnih promenljivih $X(t), -\infty < t < +\infty$. Ako je

$H_{t_0-T,t_0}(X)$ hilbertov podprostor u $H(X) \equiv H_{-\infty,\infty}(X)$ generiran slučajnim promenljivim $X(t)$ za $t_0-T \leq t \leq t_0$, tada je

(1.2.1) $$\hat{X}(t_0+\tau) = \mathrm{Proj}_{H_{t_0-T,t_0}(X)} X(t_0+\tau).$$

Neka je, dalje, $L^2(F_X)$ hilbertov prostor kompleksnih funkcija $\varphi(\lambda)$ sa integrabilnim po meri $dF_X(\lambda)$ kvadratom modula

(1.2.2) $$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\lambda)|^2 dF_X(\lambda) < +\infty$$

i skalarnim proizvodom

(1.2.3) $$(\varphi, \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\overline{\psi(\lambda)}\, dF_X(\lambda) ,$$

a $L^2_{t_0-T,t_0}(F_X)$ njegov podprostor generiran funkcijama $e^{i\lambda t}$ za $t_0-T \leq t \leq t_0$. Zbog (1.1.6) se $L^2(F_X)$ izometrično preslikava u $H(X)$ uvodeći $e^{i\lambda t} \longleftrightarrow X(t)$.

Zadatak linearne ekstrapolacije $X(t_0+\tau)$ za vreme τ unapred prema vrednostima $X(t)$, $t_0-T \leq t \leq t_0$, tj. nalaženje $\hat{X}(t_0+\tau)$ se onda svodi na nalaženje elementa

(1.2.4) $$\phi^{\tau}_{t_0-T,t_0}(\lambda) = \mathrm{Proj}_{L^2_{t_0-T,t_0}(F_X)} e^{i\lambda(t_0+\tau)}$$

čija inverzna slika je $\hat{X}(t_0+\tau)$.
Iz stacionarnosti sledi

(1.2.5) $$\phi^{\tau}_{t_0-T,t_0}(\lambda) = e^{i\lambda t_0}\phi^{\tau}_{-T,0}(\lambda) ,$$

te se može smatrati da je $t_0=0$. Funkcija $\phi^{\tau}_{-T,0}(\lambda)$ je spektralna karakteristika ekstrapolacije i

(1.2.5') $$\hat{X}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{-T,0}^{\tau}(\lambda)\, dZ(\lambda),$$

a srednji kvadrat greške ekstrapolacije

(1.2.6) $$\sigma_\tau^2 = E|X(\tau)-\hat{X}(\tau)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{i\lambda\tau} - \phi_{-T,0}^{\tau}(\lambda)|^2 dF_X(\lambda) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dF_X(\lambda) - \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_{-T,0}^{\tau}(\lambda)|^2 dF_X(\lambda).$$

Funkcija $\phi_{-T,0}(\lambda)$ je jednoznačno, do proizvoljnog sabirka jednakog nuli skoro svuda po meri $dF_X(\lambda)$, određena sledećim uslovima:

(A_1) Razlika $e^{i\lambda\tau} - \phi_{-T,0}^{\tau}(\lambda) \perp e^{i\lambda t}$ za svako $-T \leq t \leq t_0$, tj.

(1.2.7) $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t}[e^{i\lambda\tau} - \phi_{-T,0}^{\tau}(\lambda)]\, dF_X(\lambda) = 0, -T \leq t \leq 0;$$

(B_1) $$\phi_{-T,0}^{\tau}(\lambda) \in L_{-T,0}^2(F_X).$$

U slučaju $T = \infty$ važi sledeća lema.

<u>Prva lema Jagloma</u>. U slučaju $T = \infty$ (ekstrapolacija na polupravoj) pri ograničenoj spektranoj gustini $f_X(\lambda)$, da bi funcija $\phi_{-T,0}^{\tau}(\lambda) \equiv \phi_\tau(\lambda)$ bila spekralna karakteristika ekstrapolacije dovoljno je da budu ispunjeni sledeći uslovi:

(a_1) Funkcija $\phi_\tau(\lambda)$ je analitička funkcija u donjoj poluravni i pri $|\lambda| \to \infty$ u toj poluravni ona raste na brže od nekog stepena od $|\lambda|$;

(b_1) Funkcija $\Psi_\tau(\lambda) = [e^{i\lambda\tau} - \phi_\tau(\lambda)] f_X(\lambda)$ je analitička funkcija u gornjoj poluravni i pri $|\lambda| \to \infty$ u toj poluravni opada ne sporije od $|\lambda|^{-h}$, $h > 1$;

(c_1) $$\phi_\tau(\lambda) \in L^2(F_x).$$

U slučaju konačnog T važi sledeća lema:

Druga lema Jagloma. Da bi funkcija $\phi^{\tau}_{-T,0}(\lambda) \equiv \phi_{-T;\tau}(\lambda)$ bila spektralna karakteristika ekstrapolacije nad konačnim intervalom u slučaju ograničene spektralne gustine $f_x(\lambda)$ dovoljno je da budu ispunjeni sledeći uslovi:

(a_2) $\phi_{-T;\tau}(\lambda)$ je cela funkcija λ oblika

(1.2.8) $$\phi_{-T;\tau}(\lambda) = \phi^{(1)}_{-T;\tau}(\lambda) + e^{-i\lambda T}\phi^{(2)}_{-T;\tau}(\lambda),$$

pri čemu su $\phi^{(1)}_{-T;\tau}(\lambda)$ i $\phi^{(2)}_{-T;\tau}(\lambda)$ racionalne funkcije;

(b_2) Funkcija $\psi_{-T;\tau}(\lambda) = [e^{i\lambda\tau} - \phi_{-T;\tau}(\lambda)]f_x(\lambda)$ je oblika

(1.2.9) $$\psi_{-T;\tau}(\lambda) = \psi^{(1)}_{-T;\tau}(\lambda) + e^{-i\lambda T}\psi^{(2)}_{-T;\tau}(\lambda),$$

gde je $\psi^{(1)}_{-T;\tau}(\lambda)$ - analitička funkcija u gornjoj poluravni, a $\psi^{(2)}_{-T;\tau}(\lambda)$ - analitička funkcija u donjoj poluravni i obe one opadaju pri $|\lambda| \to \infty$ u odgovarajućim poluravnima ne sporije od $|\lambda|^{-h}$, $h > 1$;

(c_2) $$\phi_{-T;\tau}(\lambda) \in L^2(F_x).$$

Neka je $X(t)$ proces sa svuda različitom od nule (na realnoj osi) racionalnom spektralnom gustinom

(1.2.10) $$f_x(\lambda) = B_0 \frac{|\lambda^m + B_1\lambda^{m-1} + \dots + B_m|^2}{|\lambda^n + C_1\lambda^{n-1} + \dots + C_n|^2} = B_0 \frac{|B(\lambda)|^2}{|C(\lambda)|^2},$$

gde je $B_0 > 0$, $m < n$ i

(1.2.11) $$\begin{cases} B(\lambda) = (\lambda-\beta_1)\cdots(\lambda-\beta_m), & \mathrm{Im}(\beta_k) > 0, \; k = \overline{1,m} \\ C(\lambda) = (\lambda-\gamma_1)\cdots(\lambda-\gamma_n), & \mathrm{Im}(\gamma_j) > 0, \; j = \overline{1,n} \end{cases}$$

Jaglom ([12]) je pokazao da tada u slučaju $T=\infty$ je $\phi_\tau(\lambda)$ oblika

(1.2.12) $$\phi_\tau(\lambda)=\frac{\omega(\lambda)}{B(\lambda)},$$

gde je $\omega(\lambda)$-polinom stepena (n-1) i nalaženje njegovih koeficijenata se svodi na rešavanje sistema linearnih jednačina.

U slučaju ekstrapolacije unapred ($\tau>0$) i konačnog vremena posmatranja $[-T, 0]$, Jaglom je pokazao da je funkcija $\phi_{-T;\tau}(\lambda)$ oblika

(1.2.13) $$\phi_{-T;\tau}(\lambda)=\frac{\omega^{(1)}(\lambda)+e^{-i\lambda T}\omega^{(2)}(\lambda)}{|B(\lambda)|^2},$$

gde su $\omega^{(1)}(\lambda)$ i $\omega^{(2)}(\lambda)$ polinomi (m+n-1)-og stepena i da sa nalaženje njihovih koeficijenata svodi ponovo na rešavanje sistema linearnih jednačina.

II Interpolacija.

Neka su poznate vrednosti stacionarnog slučajnog procesa $X(t)$ za $t\leq 0$ i $t\geq T$ i treba naći najbolju linearnu aproksimaciju $\hat{X}(s)$ za $X(s)$, $0<s<T$. Neka je $H_{0;T}(X)$ podprostor $H(X)$ generiran slučajnim promenljivim $X(t)$ za $t\leq 0$ i $t\geq T$ i $L^2_{0;T}(F_X)$ korespondentni podprostor $L^2(F_X)$. Ako je $\phi^s_{0;T}(\lambda)$ spektralna karakteristika interpolacije $X(s)$, tj.

(1.2.14) $$\hat{X}(s)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi^s_{0;T}(\lambda)\,dZ_X(\lambda),$$

tada je dovoljno da budu ispunjeni uslovi:

(A_2) Važi razlaganje

(1.2.15) $$\phi^s_{0;T}(\lambda)=\phi^{(1)}_{0;T}(\lambda)+e^{i\lambda T}\phi^{(2)}_{0;T}(\lambda),$$

gde je $\phi_{0;T}^{(1)}(\lambda)$ - racionalna funkcija bez singulariteta u donjoj, a $\phi_{0;T}^{(2)}(\lambda)$ - racionalna funkcija bez singulariteta u gornjoj poluravni ;

(B$_2$) $$\Psi_{0;T}^{s}(\lambda)\equiv [\,e^{i\lambda s}-\phi_{0;T}^{s}(\lambda)]f_x(\lambda)$$

je cela funkcija takva da u gornjoj poluravni pri $|\lambda|\to\infty$ ona opada ne sporije od $|\lambda|^{-h_1}, h_1>1$, a funkcija $e^{-i\lambda T}\Psi_{0;T}^{s}(\lambda)$ u donjoj poluravni opada ne sporije od $|\lambda|^{-h_2}, h_2>1$;

(C$_2$) $$\phi_{0;T}^{(1)}(\lambda),\ \phi_{0;T}^{(2)}(\lambda)\in L^2(F_x).$$

Jaglom je, dalje, pokazao da u slučaju racionalne spektralne gustine $f_x(\lambda)$ oblika (1.2.1o) je

$$\phi_{0;T}^{(1)}(\lambda)=\frac{\omega^{(1)}(\lambda)}{B(\lambda)}\ ,\quad \phi_{0;T}^{(2)}(\lambda)=\frac{\omega^{(2)}(\lambda)}{\overline{B(\lambda)}}\ ,$$

gde su $\omega^{(1)}(\lambda)$ i $\omega^{(2)}(\lambda)$ polinomi stepena (n-1) i njihovi koeficijenti se određuju putem rešavanja sistema 2n linearnih jednačina.

1.3. POSTAVKA PROBLEMA

U paragrafu 1.1. smo ukratko objasnili kako je tekla istorija rešavanja linearnih problema za stacionarne slučajne procese. To, što je Viner rešavao ove probleme samo za slučaj racionalnih spektralnih dustina, a i sam njegov stav doprineli su mnogo uverenju da je eksplicitno rešenje moguće samo u tom slučaju. Verovatno zbog toga nije ni bilo dugo pokušaja rešavanja u nekim opštijim slučajevima.

Prvi pokušaj ta vrste nalazimo tek kod Grigorijeva ([6]) u njegovoj disertaciji 1965. godine, gde je on posmatrao slučaj kada je spektralna dustina oblika

$$f_X(\lambda) = R(\lambda)\,|1-\beta e^{-i\lambda\theta}|^2 ,$$

gde je $R(\lambda)$ - racionalna funkcija, θ - fiksirano i $|\beta|<1$.

Grigorijev u svojim razmatranjima polazi od jednoparametarske grupe T_α, $-\infty<t<\infty$ sa zakonom kompozicije $T_\alpha T_\beta = T_{\alpha+\beta}$ linearnih preslikavanja skupa trajektorija procesa na sebe. Proces $X(t)$ je stacionaran u širem smislu u odnosu na grupu T_α ako je $E[T_\alpha X(t)\overline{T_\alpha X(s)}]$ nezavisno od α .

Nedostatak rada je u tome što Grigorijev faktički ne daje metod za rešavanje problema, već odmah ispisuje rešenje i zatim ga proverava. Rezultati Grigorjeva ([5], [6], [7]) se mogu jednostavno dobiti kao specijalan slučaj naših razmatranja.

Mi ćemo se u ovome radu pozabaviti rešavanjem linearnih aproksimacionih problema za stacionarne slučajne procese obuhvaćene donjom definicijom, pri čemu će nam, gotovo uvek, jedan od posmatranih procesa biti proces sa racionalnom spektralnom gustinom (a drugi, naravno, ne).

<u>Definicija 1.3.1.</u>

Neka je $X(t), -\infty<t<\infty$ stacionaran slučajni proces. Proces

(1.3.1) $$Y(t) = X(t) - \beta X(t-\theta) ,$$

gde su $|\beta|<1, \theta>0$ -realni brojevi, zvaćemo θ -transformacijom prvog reda procesa $X(t)$.

Proces

$$(1.3.2) \qquad Y(t) = \sum_{k=0}^{N} a_k X(t-k\theta)$$

(N - prirodan broj, $a_0=1$, a_k - realni brojevi, $\theta>0$) ćemo zvati θ - transformacijom reda N procesa $X(t)$.

Primetimo odmah da (1.3.2) uključuje (1.3.1), ali i njega posebno navodimo jer je slučaj N=1 posmatrao Grigorjev, na čije rezultate se možemo pozivati.

Lako je utvrditi da su procesi (1.3.1) i (1.3.2) stacionarni ako je $X(t)$ stacionaran slučajni proces.

Lema 1.3.1.

$$(1.3.3) \qquad X(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j Y(t-j\theta),$$

gde red sa desne strane konvergira u srednjem kvadratnom.

D o k a z ove leme direktno sledi iz odnosa

$$(1.3.4) \qquad X(t) - \beta^{n+1} X(t-n\theta-\theta) = \sum_{j=0}^{n} \beta^j Y(t-n\theta)$$

koji se dobija iz (1.3.1) i iz činjenice da je $|\beta|<1$.

Lema 1.3.2.

Neka su svi koreni $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ jednačine

$$(1.3.5) \qquad z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_{N-1} z + a_N = 0$$

po modulu manji od jedinice. Tada iz (1.3.2) dobijamo

$$(1.3.6) \qquad X(t) = \sum_{j=0}^{\infty} d_j Y(t-j\theta),$$

gde red sa desne strane ima isti smisao kao i red u (1.3.3), a koeficijenti d_j , $j=0,1,2,\dots$ se nalaze iz rekurentnih relacija

$$(1.3.7)\quad \begin{cases} 1 = d_0 \\ 0 = a_0 d_\nu + a_1 d_{\nu-1} + \dots + a_{\nu-1} d_1 + a_\nu d_0 \,, \; 1 \le \nu \le N \\ 0 = a_0 d_\nu + a_1 d_{\nu-1} + \dots + a_{N-1} d_{\nu-N+1} + a_N d_{\nu-N} \,, \; \nu \geq N \,. \end{cases}$$

D o k a z. Ispišimo jednačine

$$Y(t-j\theta) = \sum_{k=0}^{N} a_k X(t-j\theta-k\theta) \,, \; j=0,1,2,\dots,n$$

zatim pomnožimo j -tu jednačinu sa d_j (gde je $d_0=1$), saberimo dobijene jednačine i izaberimo d_j iz uslova da koeficijenti uz $X(t-\nu\theta)$, $1\le\nu\le n$ budu jednaki nuli. Tim načinom ćemo, uprvo, i doći do sistema jednačina (1.3.7) koji nam omogućava da uzastopno određujemo koeficijente d_j . Takvim izborom koeficijenata imamo

$$(1.3.8)\quad \sum_{k=0}^{n} d_k Y(t-k\theta) = X(t) + (a_1 d_n + a_2 d_{n-1} + \dots + a_N d_{n-N+1}) X(t-n\theta-\theta) +$$
$$+ (a_2 d_n + \dots + a_N d_{n-N+2}) X(t-n\theta-2\theta) +$$
$$+ (a_{N-1} d_n + \dots + a_N d_{n-1}) X(t-n\theta-N\theta-\theta) + a_N d_n X(t-n\theta-N\theta) \,.$$

Da bismo dobili jednakost (1.3.6) neophodno je još pokazati da pri $n\to\infty$ svi koeficijenti uz $X(t-n\theta-\theta), X(t-n\theta-2\theta),\dots,$ $X(t-n\theta-N\theta)$ teže nuli kada $n\to\infty$. Radi toga, primetimo da zahvaljujući (1.3.5) i (1.3.7) koeficijenti d_j se poklapaju sa koeficijentima stepenog reda

$$\Big(\sum_{k_1=0}^{\infty} d_1^{k_1} z^{k_1}\Big) \cdots \Big(\sum_{k_N=0}^{\infty} d_N^{k_N} z^{k_N}\Big) = \frac{1}{z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_{N-1} z + a_N}$$

koji je konvergentan pri $|z|<1$. Prema tome, posmatrani koeficijenti d_j teže 0 kada $n\to\infty$, a odatle se odmah dobija da teže 0 i koeficijenti na desnoj strani (1.3.8), čime je dokaz leme završen. $\triangle$

Primetimo da iz (1.3.7) pri N=1 dobijamo

(1.3.7')
$$d_\nu - \beta d_{\nu-1} = 0 \ , \ \nu \geq 1 \ ;$$

isto tako pri N=2 dobijamo

(1.3.7")
$$d_\nu + a_1 d_{\nu-1} + a_2 d_{\nu-2} = 0 \ , \ \nu \geq 2 \ ;$$

a pri N=3

(1.3.7''')
$$d_\nu + a_1 d_{\nu-1} + a_2 d_{\nu-2} + a_3 d_{\nu-3} = 0 \ , \ \nu \geq 3 \, .$$

Zato je

(1.3.9)
$$d_\nu = \beta^\nu \ , \ N = 1 \ ;$$

(1.3.9)
$$\begin{cases} d_\nu = \dfrac{\alpha_1^{\nu+1} - \alpha_2^{\nu+1}}{\alpha_1 - \alpha_2} \ , \ \alpha_1 \neq \alpha_2 \, , \\ d_\nu = (\nu+1)\alpha^\nu \ , \ \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha \, . \end{cases} \qquad (N = 2)$$

Lema 1.3.3.

Neka je $H_{a,b}(X)$ podprostor hilbertovog prostora $H(X)$ kompleksnih slučajnih promenlivih $X(t), -\infty < t < \infty$, generiran ukupnošću slučajnih promanljivih $X(t), a \leq t \leq b$ (pri konačnom a) ili $a < t \leq b$ (pri $a = -\infty$). Tada za procese $X(t)$ i $Y(t)$ iz (1.3.2) imamo

(1.31o)
$$H_{-\infty, b}(X) = H_{-\infty, b}(Y) \, .$$

D o k a z ove leme neposredno sledi iz (1.3.2) i (1.3.6). Primetimo da u slučaju konačnog a iz tih jednakosti sledi samo slabiji rezultat

(1.3.11) $$H_{a,b}(X) \subset H_{a-N\theta,b}(Y).$$

Lema 1.3.4.

Ako su

(1.3.12) $$X(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dZ_x(\lambda), \quad Y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dZ_y(\lambda)$$

spektralne reprezentacije procesa $X(t)$ i $Y(t)$, tada u slučaju važenja (1.3.2) je

(1.3.13) $$dZ_y(\lambda)=\left(\sum_{j=0}^{N} a_j e^{-i\lambda j\theta}\right) dZ_x(\lambda).$$

Pri tome, ako jedan od procesa $X(t)$ i $Y(t)$ ima spektralnu gustinu, tada i drugi ima spektralnu gustinu i odgovarajuće spektralne gustine $f_x(\lambda)$ i $f_y(\lambda)$ vezane su jednakošću

(1.3.14) $$f_y(\lambda)=\left|\sum_{j=0}^{N} a_j e^{-i\lambda j\theta}\right|^2 f_x(\lambda).$$

D o k a z jednakosti (1.3.13) se lako dobija pomoću zamene (1.3.12) u (1.3.2) , a (1.3.14) je očigledna posledica (1.3.13)1

Navedena definicija i leme iz ovog paragrafa biće osnovni stožer naših razmatranja u sledećim glavama.

Druga glava

E K S T R A P O L A C I J A

2.1. EKSTRAPOLACIJA NA POLUPRAVOJ

U ovom paragrafu ćemo se pozabaviti rešavanjem linearnih ekstrapolacionih zadataka za procese $X(t)$ i $Y(t)$ vezane jednakošću (1.3.2), pri čemu će nam jedan od njih biti stacionaran slučajni proces sa racionalnim spektralnim gustinom.

Teorema 2.1.1.

Neka je $X(t)$ stacionaran slučajni proces sa racionalnom spektralnom gustinom (1.2.1o) i neka je $Y(t)$ vezano sa $X(t)$ jednakošću (1.3.2). Neka je

$$\hat{X}(s)=\sum_{\nu=0}^{n-m-1} A_\nu(s)\, X^{(\nu)}(0)+\int_{-\infty}^{0} B(s,t)\, X(t)\, dt \tag{2.1.1}$$

najbolja u smislu metode najmanjih kvadrata linearna ocena vrednosti $X(s), s\geq 0$ vrednostima $X(t)$ na $(-\infty, 0]$, tako da je specijalno

$$A_0(0)=1\,,\quad A_\nu(0)=0 \quad \text{pri}\quad \nu>0 \quad \text{i}\quad B(0,t)=0.$$

Tada najbolja ocena $\tilde{Y}(s)$ vrednosti $Y(s), s\geq 0$ preko vrednosti $Y(t)$ na $(-\infty, 0]$ pri $|\alpha_1|<1,\dots,|\alpha_N|<1$ ima oblik

(2.1.2) $$\tilde{y}(s)=\sum_{j=0}^{r} a_j\left\{\sum_{k=0}^{\infty} d_k\left[\sum_{\nu=0}^{n-m-1} A_\nu(s-j\theta)Y^{(\nu)}(-k\theta)\right]\right\}+$$

$$+\sum_{j=0}^{r} a_j\left\{\sum_{k=0}^{\infty} d_k\left[\int_{-\infty}^{-k\theta} B(s-j\theta,t+k\theta)Y(t)dt\right]\right\}+$$

$$+\sum_{j=r+1}^{N} a_j\left\{\sum_{k=0}^{\infty} d_k Y(s-j\theta-k\theta)\right\},$$

gde je $\left[\frac{s}{\theta}\right]=r$ i $0\leq r\leq N-1$;

(2.1.3) $$Y(s)=\sum_{j=0}^{N} a_j\left\{\sum_{k=0}^{\infty} d_k\left[\sum_{\nu=0}^{n-m-1} A_\nu(s-j\theta)Y^{(\nu)}(-k\theta)\right]\right\}+$$

$$+\sum_{j=0}^{N} a_j\left\{\sum_{k=0}^{\infty} d_k\left[\int_{-\infty}^{-k\theta} B(s-j\theta,t+k\theta)Y(t)dt\right]\right\},$$

gde je $\left[\frac{s}{\theta}\right]=r$ i $r\geq N$.

D o k a z se pri $r\leq N-1$ sastoji u sledećem:

$$\tilde{Y}(s)=\mathrm{Proj}_{H_{-\infty,0}(Y)}Y(s)=\sum_{j=0}^{N} a_j\,\mathrm{Proj}_{H_{-\infty,0}(X)}X(s-j\theta)=$$

$$=\sum_{j=0}^{r} a_j\hat{X}(s-j\theta)+\sum_{j=r+1}^{N} a_j X(s-j\theta)=$$

$$=\sum_{j=0}^{r} a_j\left\{\sum_{\nu=0}^{n-m-1} A_\nu(s-j\theta)X^{(\nu)}(0)+\int_{-\infty}^{0} B(s-j\theta,t)X(t)dt\right\}+\sum_{r+1}^{N} a_j X(s-j\theta)=$$

$$=\sum_{j=0}^{r} a_j\left\{\sum_{k=0}^{\infty} d_k\left[\sum_{\nu=0}^{n-m-1} A_\nu(s-j\theta)Y^{(\nu)}(-k\theta)\right]\right\}+$$

$$+\sum_{j=0}^{\tau} a_j \left\{\sum_{k=0}^{\infty} d_k \left[\int_{-\infty}^{-k\theta} B(s-j\theta, t+k\theta) y(t)\, dt\right]\right\} +$$

$$+\sum_{j=\tau+1}^{N} a_j \left\{\sum_{k=0}^{\infty} d_k\, y(s-j\theta-k\theta)\right\}.$$

Pri $\tau \geq N$ dokaz je potpuno analogan, samo je u tom slučaju

$$\tilde{y}(s)=\sum_{j=0}^{N} a_j \hat{x}(s-j\theta).$$

Posmatrajmo sada posebno dva specijalna slučaja ove teoreme: slučaj N=1 i slučaj N=2.

Slučaj N=1.

(a) Ako je $0 \leq s \leq \theta$, tada ćemo imati

$$\tilde{y}(s) = \hat{x}(s) - \beta x(s-\theta) =$$

$$=\sum_{\nu=0}^{n-m-1} A_\nu(s) x^{(\nu)}(0) + \int_{-\infty}^{0} B(s,t) x(t)\, dt - \beta x(s-\theta) =$$

$$=\sum_{\nu=0}^{n-m-1} A_\nu(s)\left[\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k y^{(\nu)}(-k\theta)\right] + \int_{-\infty}^{0} B(s,t)\left[\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k y(t-k\theta)\, dt\right] -$$

$$-\beta\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k y(s-k\theta-\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \left[\sum_{\nu=0}^{n-m-1} A_\nu(s)\, y^{(\nu)}(-k\theta)\right] +$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k \left[\int_{-\infty}^{-k\theta} B(s,t+k\theta) y(t)\, dt\right] - \sum_{k=1}^{\infty} \beta^k y(s-k\theta).$$

(b) Ako je $s \geq \theta$ imaćemo

$$\tilde{y}(s) = \hat{x}(s) - \beta \hat{x}(s-\theta) = \sum_{\nu=0}^{n-m-1} \left[A_\nu(s) - \beta A_\nu(s-\theta)\right] x^{(\nu)}(0) +$$

$$+\int_{-\infty}^{0}[B(s,t)-\beta B(s-\theta,t)]x(t)\,dt=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\beta^{k}\Big\{\sum_{\nu=0}^{n-m-1}[A_\nu(s)-\beta A_\nu(s-\theta)]\,y^{(\nu)}(-k\theta)\Big\}+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\beta^{k}\Big\{\int_{-\infty}^{-k\theta}[B(s,t+k\theta)-\beta B(s-\theta,t+k\theta)]\,y(t)\,dt\Big\}.$$

Slučaj N=2.

(a) Ako je $0\leq s\leq\theta$ koristeći ranije oznake imaćemo

$$Y(s)=\hat{X}(s)+a_1X(s-\theta)+a_2X(s-2\theta)=$$

$$=\sum_{\nu=0}^{n-m-1}A_\nu(s)X^{(\nu)}(0)+\int_{-\infty}^{0}B(s,t)X(t)\,dt+a_1X(s-\theta)+a_2X(s-2\theta)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}d_k\Big[\sum_{\nu=0}^{n-m-1}A_\nu(s)Y^{(\nu)}(-k\theta)\Big]+\sum_{k=0}^{\infty}d_k\Big[\int_{-\infty}^{0}B(s,t)Y(t-k\theta)\,dt\Big]+$$

$$+a_1\sum_{k=0}^{\infty}d_kY(s-k\theta-\theta)+a_2\sum_{k=0}^{\infty}Y(s-k\theta-2\theta)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}d_k\Big\{\Big(\sum_{j=0}^{k}\alpha_1^{j}\alpha_2^{k-j}\Big)\Big[\sum_{\nu=0}^{n-m-1}A_\nu(s)Y^{(\nu)}(-k\theta)\Big]\Big\}+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\Big\{\Big(\sum_{j=0}^{k}\alpha_1^{j}\alpha_2^{k-j}\Big)\Big[\int_{-\infty}^{-k\theta}B(s,t+k\theta)Y(t)\,dt\Big]\Big\}+$$

$$+a_1\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{k}\alpha_1^{j}\alpha_2^{k-j}\Big)Y(s-k\theta-\theta)+$$

$$+a_2\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{j=0}^{k}\alpha_1^{j}\alpha_2^{k-j}\Big)Y(s-k\theta-2\theta).$$

(b) Ako je $\theta \leq s \leq 2\theta$ imaćemo

$$\hat{y}(s) = \hat{x}(s) + a_1 \hat{x}(s-\theta) + a_2 x(s-2\theta) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n-m-1} A_\nu(s) x^{(\nu)}(0) + \int_{-\infty}^{0} B(s,t) x(t)\,dt +$$

$$+ a_1 \sum_{\nu=0}^{n-m-1} A_\nu(s-\theta) x^{(\nu)}(0) + a_1 \int_{-\infty}^{0} B(s-\theta,t) x(t)\,dt + a_2 x(s-2\theta) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n-m-1} [A_\nu(s) + a_1 A_\nu(s-\theta)]\, x^{(\nu)}(0) +$$

$$+ \int_{-\infty}^{0} [B(s,t) + a_1 B(s-\theta,t)]\, x(t)\,dt + a_2 x(s-2\theta) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} d_k \left\{ \sum_{\nu=0}^{n-m-1} [A_\nu(s) + a_1 A_\nu(s-\theta)]\, y^{(\nu)}(-k\theta) \right\} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} d_k \left\{ \int_{-\infty}^{0} [B(s,t) + a_1 B(s-\theta,t)]\, y(t-k\theta)\,dt \right\} +$$

$$+ a_2 \sum_{k=0}^{\infty} d_k\, y(s-k\theta-2\theta).$$

(c) Ako je $s \geq 2\theta$ imaćemo

$$\hat{y}(s) = \hat{x}(s) + a_1 \hat{x}(s-\theta) + a_2 \hat{x}(s-2\theta) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n-m-1} A_\nu(s) x^{(\nu)}(0) + \int_{-\infty}^{0} B(s,t) x(t)\,dt +$$

$$+ a_1 \sum_{\nu=0}^{n-m-1} A_\nu(s-\theta) x^{(\nu)}(0) + a_1 \int_{-\infty}^{0} B(s-\theta,t) x(t)\,dt +$$

$$+ a_2 \sum_{\nu=0}^{n-m-1} A_\nu(s-2\theta) x^{(\nu)}(0) + a_2 \int_{-\infty}^{0} B(s-2\theta,t) x(t)\,dt =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n-m+1} [A_\nu(s) + a_1 A_\nu(s-\theta) + a_2 A_\nu(s-2\theta)] X^{(\nu)}(0) +$$

$$+ \int_{-\infty}^{0} [B(s,t) + a_1 B(s-\theta,t) + a_2 B(s-2\theta,t)] X(t)\,dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} d_k \left\{ \sum_{\nu=0}^{n-m-1} [A_\nu(s) + a_1 A_\nu(s-\theta) + a_2 A_\nu(s-2\theta)] Y^{(\nu)}(-k\theta) \right\} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} d_k \left\{ \int_{-\infty}^{0} [B(s,t) + a_1 B(s-\theta,t) + a_2 B(s-2\theta,t)] Y(t-k\theta) \right\}.$$

Lako je proveriti da se i u slučaju N=1 i u slučaju N=2 pri $s \searrow 0$ dobija $Y(0)$. Isto tako, rezultati se u oba slučaja poklapaju kada $s \nearrow \theta$ i kada $s \searrow \theta$, a u slučaju N=2 to važi i za $s \nearrow 2\theta$ i za $s \searrow 2\theta$. Pri ovim zaključivanjima bitnu ulogu igraju osobine funkcija $A_\nu(s)$ i $B(s,t)$.

Primer 1. Neka je $X(t)$ gausovski markovski stacionaran slučajni proces, tj. proces sa spektralnom gustinom

$$f_X(\lambda) = \frac{B_0}{\lambda^2+\alpha^2} \qquad (B_0 > 0,\ \alpha > 0)$$

i neka je

$$Y(t) = X(t) - \beta X(t-\theta),\ |\beta| < 1,\ \theta > 0.$$

Kao što je poznato, tada pri ekstrapolaciji na polupravoj $(-\infty, 0]$ je $\hat{X}(s) = e^{-\alpha s} X(0)$.

Neka je $0 \le s \le \theta$. Tada imamo

$$\tilde{Y}(s) = \hat{X}(s) - \beta X(s-\theta) = e^{-\alpha s} X(0) - \beta X(s-\theta) =$$

$$= e^{-\alpha s}\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k y(-k\theta) - \sum_{k=1}^{\infty} \beta^k y(s-k\theta).$$

Ako je $s \geq \theta$ imaćemo

$$\tilde{y}(s) = \hat{x}(s) - \beta\,\hat{x}(s-\theta) = e^{-\alpha s}x(0) - \beta e^{-\alpha(s-\theta)}x(0) =$$

$$= e^{-\alpha s}(1-\beta e^{\alpha\theta})\sum_{k=0}^{\infty} \beta^k y(-k\theta).$$

Primer 2. Neka je $x(t)$ proces iz Primera 1, i neka je

$$y(t) = x(t) + a_1 x(t-\theta) + a_2 x(t-2\theta).$$

Ako je $0 \leq s \leq \theta$ imaćemo

$$\tilde{y}(s) = \hat{x}(s) + a_1 x(s-\theta) + a_2 x(s-2\theta) = e^{-\alpha s}x(0) +$$

$$+ a_1 x(s-\theta) + a_2 x(s-2\theta) = e^{-\alpha s}\sum_{k=0}^{\infty} d_k y(-k\theta) + a_1 y(s-\theta) + \sum_{k=2}^{\infty}(a_1 d_{k-1} + a_2 d_k) y(s-k\theta),$$

gde se koeficijenti d_k određuju formulom (1.3.9) u kojoj su α_1 i α_2 koreni jednačine $z^2 + a_1 z + a_2 = 0$ i gde se pretpostavlja da je $|\alpha_1| < 1$, $|\alpha_2| < 1$.

U slučaju $\theta \leq s \leq 2\theta$ dobijamo

$$\tilde{y}(s) = \hat{x}(s) + a_1\hat{x}(s-\theta) + a_2 x(s-2\theta) =$$

$$= e^{-\alpha s}x(0) + a_1 e^{-\alpha(s-\theta)}x(0) + a_2 x(s-2\theta) =$$

$$= e^{-\alpha s}(1 + a_1 e^{\alpha\theta})\sum_{k=0}^{\infty} d_k y(-k\theta) + a_2 \sum_{k=0}^{\infty} d_k y(s-k\theta-2\theta),$$

a u slučaju $s \geq 2\theta$ analogno

$$\tilde{y}(s) = \hat{x}(s) + a_1\hat{x}(s-\theta) + a_2\hat{x}(s-2\theta) =$$

$$= e^{-\alpha s}(1 + a_1 e^{\alpha\theta} + a_2 e^{2\alpha\theta}).\, x(0) =$$

$$= e^{-\alpha s}(1+a_1 e^{\alpha\theta}+a_2 e^{2\alpha\theta}) \sum_{k=0}^{\infty} d_k\, y(-k\theta)\, .$$

Teorema 2.1.2.

Neka je $X(t)$ stacionaran slučajni proces i $y(t)$ θ - transformacija reda N procesa $X(t)$, data formulom (1.3.2) i gde $|\alpha_1|<1,\dots,|\alpha_N|<1$. Neka je, dalje, $\phi_s^x(\lambda)$ - spektralna karakteristika ekstrapolacije procesa $X(t)$ u tačku $s\geq 0$ po vrednostima na polupravoj $(-\infty,0]$. Tada spektralna karakteristika ekstrapolacije procesa $y(t)$ u tački $s\geq 0$ zadaje formulama :

(2.1.4)
$$\phi_s^y(\lambda) = \frac{\sum_{j=0}^{r} \phi_{s-j\theta}^x(\lambda)\, a_j + \sum_{j=r+1}^{\infty} a_j\, e^{i\lambda(s-j\theta)}}{\sum_{j=0}^{N} a_j\, e^{-i\lambda j\theta}}$$

u slučaju $[\frac{s}{\theta}]=r$ i $0\leq r\leq N-1$;

(2.1.5)
$$\phi_s^y(\lambda) = \frac{\sum_{j=0}^{N} a_j\, \phi_{s-j\theta}^x(\lambda)}{\sum_{j=0}^{N} a_j e^{-i\lambda j\theta}}$$

u slučaju $[\frac{s}{\theta}]=r$ i $r\geq N$.

D o k a z. Neka je $r\leq N-1$. Tada koristeći (1.3.1o) i (1.3.13) dobijamo

$$\tilde{y}(s) = \mathrm{Proj}_{H_{-\infty,0}(y)}\, y(s) = \sum_{j=0}^{N} a_j\, \mathrm{Proj}_{H_{-\infty,0}(x)}\, X(s-j\theta) =$$

$$= \sum_{j=0}^{r} a_j\, \hat{X}(s-j\theta) + \sum_{j=r+1}^{N} a_j\, X(s-j\theta) =$$

$$= \sum_{j=0}^{r} a_j \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{s-j\theta}^x(\lambda)\, dZ_x(\lambda) + \sum_{j=r+1}^{N} a_j \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(s-j\theta)}\, dZ_x(\lambda) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{j=0}^{r} a_j \phi^{x}_{s-j\theta}(\lambda) + \sum_{j=r+1}^{N} a_j e^{i\lambda(s-j\theta)} \right\} dZ_x(\lambda) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sum_{j=0}^{r} a_j \phi^{x}_{s-j\theta}(\lambda) + \sum_{j=r+1}^{N} a_j e^{i\lambda(s-j\theta)}}{\sum_{j=0}^{N} a_j e^{-i\lambda j\theta}} \, dZ_y(\lambda).$$

U slučaju $r \geq N$ dokaz je potpuno analogan.

<u>Posledica teoreme 2.1.2.</u> Neka u teoremi 2.1.2. proces $X(t)$ ima racionalnu spektralnu gustinu. Tada je

(2.1.6) $$\phi^{y}_{s}(\lambda) = R_1(\lambda) \sum_{j=0}^{\infty} b_j^{(1)} e^{-i\lambda j\theta} + \sum_{j=r+1}^{\infty} c_j e^{i\lambda(s-j\theta)}$$

u slučaju $r \leq N-1$ i

(2.1.7) $$\phi^{y}_{s}(\lambda) = R_2(\lambda) \sum_{j=0}^{\infty} b_j^{(2)} e^{-i\lambda j\theta} + \sum_{j=r+1}^{\infty} c_j e^{i\lambda(s-j\theta)}$$

u slučaju $r \geq N$, gde su $R_1(\lambda)$ i $R_2(\lambda)$ racionalne funkcije određene sa

(2.1.8) $$R_1(\lambda) = \sum_{j=0}^{r} a_j \phi^{x}_{s-j\theta}(\lambda),$$

odnosno sa

(2.1.9) $$R_2(\lambda) = \sum_{j=0}^{N} a_j \phi^{x}_{s-j\theta}(\lambda).$$

Ova posledica je prećutno na izvestan način već korišćena u teoremi 2.1.1.

<u>Teorema 2.1.3.</u>

U slučaju relacije (1.3.2) važi formula

(2.1.10) $$\phi^{x}_{s}(\lambda) = \sum_{j=0}^{r} d_j \phi^{y}_{s-j\theta}(\lambda) \cdot \sum_{j=0}^{N} a_j e^{-i\lambda j\theta} + \sum_{j=r+1}^{N} b_j e^{i\lambda(s-j\theta)}$$

u kojoj je $r=[\frac{s}{\theta}]$, koeficijenti d_j se određuju formulama (1.3.7), a koeficijenti d_j formulama

(2.1.11) $$b_j = \sum_{\nu=0}^{j-r-1} a_\nu d_{j-\nu} \, , \quad r+1 \le j \le r+N.$$

D o k a z . Uz oznaku $[\frac{s}{\theta}]=r$ zahvaljujući formulama (1.3.10) i (1.3.13) dobijamo

$$\hat{X}(s) = \mathrm{Proj}_{H_{-\infty,0}(X)} X(s) = \mathrm{Proj}_{H_{-\infty,0}(Y)} \sum_{k=0}^{\infty} d_k Y(s-k\theta) =$$

$$= \sum_{j=0}^{r} d_k \mathrm{Proj}_{H_{-\infty,0}(Y)} Y(s-k\theta) + \sum_{j=r+1}^{\infty} d_k Y(s-k\theta) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{r} d_k \phi^{Y}_{s-k\theta}(\lambda) \cdot \sum_{j=0}^{N} a_j e^{-i\lambda j\theta} dZ_X(\lambda) +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=r+1}^{\infty} d_k \phi^{Y}_{s-k\theta}(\lambda) \cdot \sum_{j=0}^{N} a_j e^{-i\lambda j\theta} dZ_X(\lambda) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Big\{ \sum_{k=0}^{r} d_k \phi^{Y}_{s-k\theta}(\lambda) \cdot \sum_{j=0}^{N} a_j e^{-i\lambda j\theta} + \sum_{j=r+1}^{\infty} b_j e^{i\lambda(s-j\theta)} \Big\} dZ_X(\lambda),$$

gde je

$$\sum_{k=r+1}^{\infty} d_k e^{i\lambda(s-k\theta)} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} a_j e^{-i\lambda j\theta} = \sum_{j=r+1}^{\infty} b_j e^{i\lambda(s-j\theta)}$$

tako da konačno imamo

$$b_j = \sum_{\nu=0}^{j-r-1} a_\nu d_{j-\nu} \, , \quad r+1 \le j \le r+N ;$$

$$b_j = \sum_{\nu=0}^{N} a_\nu d_{j-\nu} \equiv 0, \quad j \geq r+N+1.$$

Kao i kod Teoreme 2.1.1. razmotrimo posebno dva specijalna slučaja: N=1 i N=2.

Slučaj N=1.

Koristeći ranije oznake i formule možemo dobiti

$$\hat{X}(s) = \sum_{j=0}^{r} \beta^j \tilde{Y}(s-j\theta) + \beta^{r+1} X(s-r\theta-\theta)$$

pošto je u ovom slučaju $b_{r+1} = a_0 d_{r+1} = 1 \cdot \beta^{r+1}$, $b_j = 0$ za $j \geq r+2$.

Slučaj N=2.

Iz $Y(t) = X(t) + a_1 X(t-\theta) + a_2 X(t-2\theta)$, $X(t) = \sum_0^\infty d_k Y(t-k\theta)$

pri $d_0 = 1$, $d_k = \frac{\alpha_1^k - \alpha_2^k}{\alpha_1 - \alpha_2}$, $k \geq 0$ imamo

$$\hat{X}(s) = \sum_{k=0}^{r} d_k \tilde{Y}(s-k\theta) + \sum_{k=r+1}^{\infty} d_k Y(s-k\theta)$$

tako da je

$$\phi_s^X(\lambda) = \left[\sum_{k=0}^{r} d_k \phi_{s-k\theta}^Y(\lambda) + \sum_{k=r+1}^{\infty} d_k e^{i\lambda(s-k\theta)}\right](1+a_1 e^{-i\lambda\theta} + a_2 e^{-2i\lambda\theta}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{r} d_k \phi_{s-k\theta}^Y(\lambda) \cdot (1+a_1 e^{-i\lambda\theta} + a_2 e^{-2i\lambda\theta}) +$$

$$+ \sum_{k=r+1}^{\infty} d_k e^{i\lambda(s-k\theta)} \cdot (1+a_1 e^{-i\lambda\theta} + a_2 e^{-2i\lambda\theta}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{r} d_k \phi_{s-k\theta}^Y(\lambda) \cdot (1+a_1 e^{-i\lambda\theta} + a_2 e^{-2i\lambda\theta}) +$$

$$+ b_{r+1} e^{i\lambda(s-r\theta-\theta)} + b_{r+2} e^{i\lambda(s-r\theta-2\theta)},$$

gde je

$$b_{r+1} = d_{r+1} = \frac{\alpha_1^{r+2} - \alpha_2^{r+2}}{\alpha_1 - \alpha_2} \quad , \quad (\alpha_1 \neq \alpha_2) \; ,$$

$$b_{r+2} = d_{r+2} + a_1 d_{r+1} = -\alpha_1\alpha_2 \cdot \frac{\alpha_1^{r+1} - \alpha_2^{r+2}}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

kao i

$$b_{r+j} = d_{r+j} + a_1 d_{r+j-1} + a_2 d_{r+j-2} \equiv 0 \; , \; j \geq 3 .$$

<u>Posledica Teoreme 2.1.3.</u>

Ako je $y(t)$ stacionaran proces sa racionalnim spektralnom gustinom, tada spektralna karakteristika ekstrapolacije procesa $x(t)$ povezanog sa procesom $y(t)$ formulom (1.3.2) je

(2.1.12) $$\phi_s^x(\lambda) = R(\lambda) \sum_{j=0}^{N} a_j e^{-i\lambda j\theta} + \sum_{j=r+1}^{\infty} b_j e^{i\lambda(s-j\theta)} ,$$

gde je $R(\lambda)$ racionalna funkcija:

(2.1.13) $$R(\lambda) = \sum_{j=0}^{r} d_j \, \phi_{s-j\theta}^y(\lambda) .$$

Osim toga

$$\hat{X}(s) = \sum_{j=0}^{r} d_j \left\{ \sum_{\nu=0}^{n-m-1} A_\nu^y(s-j\theta)\, y^{(\nu)}(0) + \int_{-\infty}^{0} B^y(s-j\theta,t) y(t)dt \right\} +$$

$$+ \sum_{j=r+1}^{r+N} b_j X(s-j\theta) = \sum_{j=0}^{r} d_j \left\{ \sum_{\nu=0}^{n-m-1} A_\nu^y(s-j\theta) \left[\sum_{k=0}^{N} a_k X^{(\nu)}(-k\theta) \right] \right\} +$$

$$+ \sum_{j=0}^{r} d_j \left\{ \int_{-\infty}^{0} B^y(s-j\theta,t) \left[\sum_{k=0}^{N} a_k X(t-k\theta) \right] \right\} + \sum_{j=r+1}^{r+N} b_j X(s-j\theta) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n-m-1} \sum_{k=0}^{N} A_{k,\nu} X^{(\nu)}(-k\theta) + \sum_{k=0}^{N} \int_{-\infty}^{-k\theta} B_k \cdot X(t)dt + \sum_{j=r+1}^{r+N} b_j X(s-j\theta) .$$

Proučimo u vezi sa ovom Posledicom opet slučajeve: N=1 i N=2.

Slučaj N=1.

Iz formule

$$\hat{X}(s) = \sum_{j=0}^{r} \beta^{j}\, \tilde{Y}(s-j\theta) + \beta^{r+1} X(s-r\theta-\theta)$$

koristeći

$$\tilde{Y}(s) = \sum_{\nu=0}^{n-m-1} A_{\nu}^{y}(s)\, Y^{(\nu)}(0) + \int_{-\infty}^{0} B^{y}(s,t)\, Y(t)\, dt$$

dobijamo

$$\hat{X}(s)=\sum_{j=0}^{r} \beta^{j} \sum_{\nu=0}^{n-m-1} A_{\nu}^{y}(s-j\theta) X^{(\nu)}(0) - \sum_{j=0}^{r} \beta^{j+1} \sum_{\nu=0}^{n-m-1} A_{\nu}^{y}(s-j\theta) X^{(\nu)}(-\theta) +$$

$$+\sum_{j=0}^{r} \beta^{j} \int_{-\infty}^{0} B^{y}(s-j\theta,t) X(t)\,dt - \sum_{j=0}^{r} \beta^{j+1} \int_{-\infty}^{-\theta} B^{y}(s-j\theta,t-\theta) X(t)\,dt + \beta^{r+1} X(s-r\theta-\theta).$$

Slučaj N=2.

Ako je proces $Y(t)$ θ- transformacija drugog reda procesa $X(t)$ imaćemo

$$\hat{X}(s)= \sum_{j=0}^{r} d_j\, \tilde{Y}(s-j\theta) + b_{r+1} X(s-r\theta-\theta) + b_{r+2} X(s-r\theta-2\theta) =$$

$$= \sum_{j=0}^{r} d_j \Big\{ \sum_{\nu=0}^{n-m-1} A_{\nu}^{y}(s-j\theta)\, Y^{(\nu)}(0) + \int_{-\infty}^{0} B^{y}(s-j\theta,t)\, Y(t)\, dt \Big\} +$$

$$+ b_{r+1} X(s-r\theta-\theta) + b_{r+2} X(s-r\theta-2\theta) =$$

$$= \sum_{j=0}^{r} d_j \Big\{ \sum_{\nu=0}^{n-m-1} A_{\nu}^{y}(s-j\theta) \big[X^{(\nu)}(0) + a_1 X^{(\nu)}(-\theta) + a_2 X^{(\nu)}(-2\theta) \big] +$$

$$+ \int_{-\infty}^{0} B_{y}(s-j\theta,t) \big[X(t) + a_1 X(t-\theta) + a_2 X(t-2\theta) \big]\, dt \Big\} +$$

$$+ b_{r+1} X(s-r\theta-\theta) + b_{r+1} X(s-r\theta-\theta) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n-r-1} \sum_{k=0}^{2} A_{\nu,k} X^{(\nu)}(-k\theta) + \sum_{k=0}^{2} \int_{-\infty}^{-k\theta} B_k \cdot X(t)\,dt +$$

$$+ b_{r+1} X(s-r\theta-\theta) + b_{r+2} X(s-r\theta-2\theta) .$$

Primer 3. Neka je $y(t)=X(t)-\beta X(t-\theta)$ i $f_y(\lambda)=\frac{c}{\lambda^2+\alpha^2}$.

Tada je

$$\tilde{y}(s)=e^{-\alpha s} y(0) , \quad A_0^y(s)=e^{-\alpha s} , \quad B^y(s,t)=0$$

te je

$$\hat{X}(s) = \sum_{j=0}^{r} \beta^j A_0^y(s-j\theta)[X(0)-\beta X(-\theta)] + \beta^{r+1} X(s-r\theta-\theta) =$$

$$= \sum_{j=0}^{r} \beta^j e^{-\alpha(s-j\theta)}[X(0)-\beta X(-\theta)] + \beta^{r+1} X(s-r\theta-\theta) =$$

$$= e^{-\alpha s} \cdot \frac{1-(\beta e^{\alpha\theta})^{r+1}}{1-\beta e^{\alpha\theta}} [X(0)-\beta X(-\theta)] + \beta^{r+1} X(s-r\theta-\theta) .$$

Primer 4. Neka je $y(t)=X(t)+a_1 X(t-\theta)+a_2 X(t-2\theta)$, $f_y(\lambda)=\frac{c}{\lambda^2+\alpha^2}$.

Tada se dobija

$$\hat{X}(s) = \sum_{j=0}^{r} d_j \left\{ \sum_{k=0}^{2} a_k e^{-\alpha(s-k\theta)} X(-k\theta) \right\} + 0 +$$

$$+ b_{r+1} X(s-r\theta-\theta) + b_{r+2} X(s-r\theta-2\theta) =$$

$$= e^{-\alpha s} \left(\sum_{j=0}^{r} d_j e^{\alpha j\theta} \right) [X(0)+a_1 X(-\theta)+a_2 X(-2\theta)] +$$

$$+ b_{r+1} X(s-r\theta-\theta) + b_{r+2} X(s-r\theta-2\theta) ,$$

gde je $d_j = \frac{\alpha_1^{j+1} - \alpha_2^{j+1}}{\alpha_1 - \alpha_2}$ (pri $\alpha_1 \neq \alpha_2$) ili $d_j = (j+1)\alpha_1^j$ (pri $\alpha_1 = \alpha_2$), $b_{r+1} = d_{r+1}$, $b_{r+2} = -\alpha_1\alpha_2 d_{r+1}$.

Primedba

Pri izvođenju gore izloženih rezultata osnovnu ulogu su imale formule (1.3.2) , (1.3.6) i (1.3.1o), koje su omogućavale da svedemo rešavanje problema ekstrapolacije jednog od dvaju procesa $X(t)$ i $Y(t)$ po podacima sa poluprave $(-\infty, 0]$ na rešavanje analognog problema za drugi od tih procesa. Lako je videti, ipak, da do istih rezultata možemo doći i drugim putem, koristeći sledeću lemu.

Lema 2.1.1.

Da bi funkcija $\phi_s^X(\lambda)$ bila spektralna karakteristika ekstrapolacija stacionarnog procesa $X(t)$ u tački $s \geq 0$ na osnovu poznavanja cele prošlosti ($-\infty < t \leq 0$) u slučaju ograničene s spektralne gustine $f_X(\lambda)$ dovoljno je da se funkcije $\phi_s^X(\lambda)$ i $\Psi_s(\lambda) = [e^{i\lambda s} - \phi_s^X(\lambda)] f_X(\lambda)$ mogu produžiti u oblast kompleksnih vrednosti λ tako da je:

1° Funkcija $\phi_s^X(\lambda)$ analitička funkcija u donjoj poluravni oblika

$$\phi_s^X(\lambda) = \sum_j e^{i\lambda t_j} R_j(\lambda) ,$$

gde je $-\infty < t_j \leq 0$ i gde su $R_j(\lambda)$ -racionalne funkcije;

2° Funkcija $\Psi_s(\lambda)$ - analitička funkcija u gornjoj poluravni λ i pri $|\lambda| \to \infty$ u toj poluravni opada ne sporije nego $|\lambda|^{-h}$, $h > 1$;

3° $\phi_s^X(\lambda) \in L^2(F_X)$.

D o k a z ove leme nećemo navoditi pošto je analogan sa dokazima lema Jagloma ([12]), koje su navedene u paragrafu 1.2.

Ipak, u slučaju ekstrapolacije na polupravoj korišćenje ove leme je dosta komplikovanije nego neposredno korišćenje formule (1.3.1o); zato taj metod i nismo koristili u ovom paragrafu. No, u primeni na probleme ekstrapolacije po vrednostima procesa na konačnom intervalu, formula oblika (1.3.1o) ne važi; ovde važi samo slabija formula (1.3.11) koja nije dovoljna za naše ciljeve.

Zato u slučaju ekstrapolacije na konačnom intervalu procesa tipa procesa kojima je posvećen ovaj rad, najprostijim načinom dobijanja eksplicitnih ekstrapolacionih formula javlja se korišćenje odgovarajuće modifikacije leme 2.1.1. Upravo, taj put će i biti korišćen u sledećem paragrafu.

2.2. EKSTRAPOLACIJA NA OSNOVU VREDNOSTI NA SEGMENTU

U ovom paragrafu ćemo smatrati da su poznate vrednosti posmatranog procesa na segmentu $[T, 0]$, $T<0$.

Osnovnu ulogu u ovom delu ima sledeća

Lema 2.2.1.

Da bi funkcija $\phi_{s,T}^{x}(\lambda)$ bila spektralna karakteristika ekstrapolacije u tački $s\geq 0$ stacionarnog slučajnog procesa $x(t)$, zadanog na $[T, 0]$ dovoljno je, u slučaju ograničene spektralne gustine, da se funkcije $\phi_{s,T}^{x}(\lambda)$ i $\Psi_{s,T}(\lambda)=[e^{i\lambda s}-\phi_{s,T}^{x}(\lambda)]f_x(\lambda)$ mogu produžiti u oblast kompleksnih vrednosti λ tako da:

1° Funkcija $\phi_{s,T}^{x}(\lambda)$ je cela funkcija λ oblika

$$\phi^{x}_{s,T}(\lambda) = \sum_{j=1}^{M} e^{i\lambda t_j} R_j(\lambda) , \qquad (2.2.1)$$

gde su $T \leq t_j \leq 0$, a R_j - racionalne funkcije λ pri svakom $j=\overline{1,M}$.

2^o Funkcija $\Psi^{x}_{s,T}(\lambda)$ je analitička funkcija λ oblika

$$\Psi^{x}_{s,T}(\lambda) = \Psi^{(1)}_{s,T}(\lambda) + e^{i\lambda T}\Psi^{(2)}_{s,T}(\lambda) , \qquad (2.2.2)$$

gde je $\Psi^{(1)}_{s,T}(\lambda)$- funkcija analitička u gornjoj poluravni i pri $|\lambda| \to \infty$ ona opada ne sporije od $|\lambda|^{h_1}$, $h_1 < -1$, a $\Psi^{(2)}_{s,T}(\lambda)$ - funkcija analitička u donjoj poluravni i pri $|\lambda| \to \infty$ u toj poluravni ona opada ne sporije od $|\lambda|^{h_2}$, $h_2 < -1$;

3^o $\qquad \phi^{x}_{s,T}(\lambda) \in L^2(F_x)$.

D o k a z lema analognih ovoj lemi može biti nađen u ([12]).

<u>Teorema 2.2.1.</u>

Neka je $X(t)$ stacionaran slučajni proces sa racionalnom spektralnom gustinom (1.2.1o), a $y(t)$ njegova θ- transformacija reda N. Neka su poznate vrednosti $y(t)$ za $t \in [T, 0]$, $T<0$. Uvedimo oznake $\tau = [\frac{s}{\theta}]$, $\ell = [-\frac{T}{\theta}]$ i neka T nije deljivo sa θ. Tada spektralna karakteristika ekstrapolacije poocesa $y(t)$ u tačku $s \geq 0$ na osnovu njegovih vrednosti na $[T, 0]$ ima pri $\tau \geq N$ oblik

$$\phi^{y}_{s,T}(\lambda) = R_1(\lambda) \sum_{j=0}^{\ell} c_j^{(1)} e^{-i\lambda j\theta} + e^{i\lambda T} R_2(\lambda) \sum_{j=0}^{\ell} c_j^{(2)} e^{i\lambda j\theta} , \qquad (2.2.3)$$

gde su $R_1(\lambda) = \frac{\omega^{(1)}(\lambda)}{|B(\lambda)|^2}$ i $R_2(\lambda) = \frac{\omega^{(2)}(\lambda)}{|B(\lambda)|^2}$ racionalne funkcije, kod kojih su polinomi $\omega^{(1)}(\lambda)$ i $\omega^{(2)}(\lambda)$ stepena (n-m-1).

D o k a z . Primetimo pre svega da funkcija (2.2.3) zadovoljava zahteve 1^o i 3^o Leme 2.2.1., tako da je potrebno proveriti samo zahtev 2°.

Ako je

$$\psi_{s,T}^{y}(\lambda)=[e^{i\lambda s}-\phi_{s,T}^{y}(\lambda)]f_y(\lambda)\equiv\psi^{*}(\lambda)f_x(\lambda)\ ,$$

tada funkcije $\psi_{s,T}^{y}(\lambda)$ i $\psi^{*}(\lambda)$ istovremeno zadovoljavaju (ili ne zadovoljavaju) uslov 2° Leme 2.2.1. Funkcija $\psi^{*}(\lambda)$ se može napisati u obliku

$$\psi^{*}(\lambda)=[e^{i\lambda s}-\phi_{s,T}^{y}(\lambda)]\,\Big|\sum_{j=0}^{N}a_j e^{-i\lambda j\theta}\Big|^2=$$

$$=[e^{i\lambda s}-\phi_{s,T}^{y}(\lambda)]\sum_{j=-N}^{N}a_j^{*}e^{i\lambda j\theta}=$$

$$=\sum_{j=-N}^{N}a_j^{*}e^{i\lambda(s+j\theta)}-R_1(\lambda)\sum_{j=0}^{\ell}c_j^{(1)}e^{-i\lambda j\theta}\cdot\sum_{j=-N}^{N}a_j^{*}e^{i\lambda j\theta}-$$

$$-R_2(\lambda)e^{i\lambda T}\sum_{j=0}^{\ell}c_j^{(2)}e^{i\lambda j\theta}\cdot\sum_{j=-N}^{N}a_j^{*}e^{i\lambda j\theta}=$$

$$=\sum_{j=-N}^{N}a_j^{*}e^{i\lambda(s+j\theta)}-R_1(\lambda)\sum_{j=-\ell-N}^{N}p_j e^{i\lambda j\theta}-e^{i\lambda T}R_2(\lambda)\sum_{j=-N}^{\ell+N}q_j e^{i\lambda j\theta}=$$

$$=\psi_1^{*}(\lambda)+e^{i\lambda T}\psi_2^{*}(\lambda)+\zeta(\lambda)\ ,$$

gde je

$$\psi_1^{*}(\lambda)=\sum_{j=-N}^{N}a_j^{*}e^{i\lambda(s+j\theta)}-R_1(\lambda)\sum_{j=0}^{N}p_j e^{i\lambda j\theta}-e^{i\lambda T}R_2(\lambda)\sum_{j=\ell+1}^{\ell+N}q_j e^{i\lambda j\theta}\ ,$$

$$\psi_2^{*}(\lambda)=-R_1(\lambda)\sum_{j=-\ell-N}^{-\ell-1}p_j e^{i\lambda j\theta}-R_2(\lambda)\sum_{j=-N}^{0}q_j e^{i\lambda j\theta}\ ,$$

$$\zeta(\lambda)=-R_1(\lambda)\sum_{j=-\ell}^{-1}p_j e^{i\lambda j\theta}-e^{i\lambda T}R_2(\lambda)\sum_{j=1}^{\ell}q_j e^{i\lambda j\theta}$$

odakle se vidi da će uslov 2° biti zadovolen ako je

$$\mathcal{F}(\lambda) \equiv 0$$

iz koga se dobija

$$p_j = 0,\ j = \overline{-\ell,-1}\ ;\ q_j = 0\ ,\ j = \overline{1,\ell}\ .$$

Da bismo našli vrednosti $C_j^{(2)}, j=\overline{0,\ell}$,tj. da bismo iskoristili uslove $q_j = 0, j=\overline{1,\ell}$, napišimo sledeći lanac jednačina:

$$\sum_{j=0}^{\ell} C_j^{(2)} e^{i\lambda j\theta}(1-\alpha_1 e^{-i\lambda\theta}) = \sum_{j=-1}^{\ell} A_j^{(1)} e^{i\lambda j\theta}\ ,$$

gde je

$$A_j^{(1)} = C_j^{(2)} - \alpha_1 C_{j+1}^{(2)}\ , j=\overline{0,\ell-1}\ ,\ A_\ell^{(1)} = C_\ell^{(2)},\ A_{-1}^{(1)} = -\alpha_1 C_0^{(2)}\ ;$$

odnosno

$$\sum_{j=-K}^{\ell} A_j^{(K)} e^{i\lambda j\theta}(1-\alpha_{K+1} e^{-i\lambda\theta}) = \sum_{j=-K-1}^{\ell} A_j^{(K+1)} e^{i\lambda j\theta},$$

gde je pri $1 \le K < N$

$$A_j^{(K+1)} = A_j^{(K)} - \alpha_{K+1} A_{j+1}^{(K)}\ , j=\overline{-K,\ell-1}\ ,\ A_\ell^{(K+1)} = A_\ell^{(K)},\ A_{-K-1}^{(\ell+1)} = -\alpha_{K+1} A_{-K}^{(K)}\ ;$$

kao i

$$\sum_{j=-N}^{\ell} A_j^{(N)} e^{i\lambda j\theta}(1-\alpha_1 e^{i\lambda\theta}) = \sum_{j=-N}^{\ell+1} B_j^{(1)} e^{i\lambda j\theta}$$

gde je

$$B_j^{(1)} = A_j^{(N)} - \alpha_1 A_{j+1}^{(N)}\ , j=\overline{-N+1,\ell}\ ,\ B_{\ell+1}^{(1)} = \alpha_1 A_\ell^{(N)},\ B_{-N}^{(1)} = A_{-N}^{(N)}\ ;$$

i najzad

$$\sum_{j=-N}^{\ell+\nu} B_j^{(\nu)} e^{i\lambda j\theta}(1-\alpha_{\nu+1} e^{i\lambda\theta}) = \sum_{j=-N}^{\ell+\nu+1} B_j^{(\nu+1)} e^{i\lambda j\theta},$$

gde je pri $1 \le \nu \le N-1$

$$B_j^{(\nu+1)} = B_j^{(\nu)} - \alpha_{\nu+1} B_{j-1}^{(\nu)}\ , j=\overline{-N+1,\ell+\nu},\ B_{\ell+\nu+1}^{(\nu+1)} = -\alpha_{\nu+1} B_{\ell+\nu}^{(\nu)}\ , B_{-N}^{(\nu+1)} = B_{-N}^{(\nu)}\ .$$

U našem slučaju je $B_j^{(N)} = q_j$ i iz $q_j = 0$ sledi

$$B_j^{(N-1)} - \alpha_N B_{j-1}^{(N-1)} = 0 \qquad \text{odnosno} \qquad B_j^{(N-1)} = B_0^{(N-1)} \alpha_N^j\ .$$

Zatim mi dolazimo do

$$B_j^{(N-2)} - \alpha_{N-1} B_{j-1}^{(N-2)} = B_0^{(N-1)} \alpha_N^j ,$$

a nastavljajući nalazimo redom $B_0^{(N-1)}, B_0^{(N-2)}, \dots, C_j^{(2)}$. Vrednosti svih konstanata $B_0^{(N-1)}, B_0^{(N-2)}, \dots$ osim jedne određuju se pomoću graničnih uslova.

Koeficijenti $C_j^{(1)}$ u formuli (2.2.1) se određuju potpuno analogno, koristeći uslove $p_j=0, j=\overline{-\ell,-1}$ i time bi dokaz teoreme bio u potpunosti završen.

Primetimo da navedeni dokaz Teoreme 2.2.1. istovremeno uključuje i opisivanje metoda određivanja koeficijenata $C_j^{(1)}$ i $C_j^{(2)}$, a takođe i svih koeficijenata polinoma $\omega^{(1)}(\lambda)$ i $\omega^{(2)}(\lambda)$, tj. opisuje nam metod eksplicitnog određivanja funkcije $\Phi_{s,T}^{y}(\lambda)$.

U svojstvu primera razrađene teoreme pokažimo kao i ranije posebno slučajeve N=1 i N=2.

<u>Slučaj N=1.</u>

Neka je $s \geq 0$ i $y(t)=x(t)-\beta x(t-\theta)$. Primenjujući metod naveden u dokazu Teoreme dobijamo

$$\Phi_{s,T}^{y}(\lambda) = R_1(\lambda)\sum_{j=0}^{\ell} C_j^{(1)} e^{-i\lambda j\theta} + e^{i\lambda T} R_2(\lambda) \sum_{j=0}^{\ell} C_j^{(2)} e^{i\lambda j\theta}$$

gde je

$$\Psi^*(\lambda) = \sum_{-1}^{1} a_j^* e^{i\lambda(s+j\theta)} - R_1(\lambda)\sum_{-\ell-1}^{1} p_j e^{i\lambda j\theta} - R_2(\lambda) e^{i\lambda T} \sum_{-1}^{\ell+1} q_j e^{i\lambda j\theta}$$

i mora biti

$$p_j = 0 , j=\overline{-\ell,-1} \quad ; q_j = 0 , j = \overline{1,\ell} .$$

Iz uslova

$$\sum_{j=0}^{\ell} C_j^{(2)} e^{i\lambda j\theta}(1-\beta e^{-i\lambda\theta}) = \sum_{j=-1}^{\ell} A_j e^{i\lambda j\theta}$$

gde je uvedena oznaka

$$A_{-1} = -\beta C_0^{(2)}, A_\ell = C_\ell^{(2)}, A_j = C_j^{(2)} - \beta C_{j+1}^{(2)} , j=\overline{0,\ell-1}$$

mi možemo preći na uslov

$$\sum_{j=-1}^{\ell} A_j e^{i\lambda j\theta}(1-\beta e^{i\lambda\theta}) = \sum_{j=-1}^{\ell+1} q_j e^{i\lambda j\theta}$$

pri čemu je

$$q_{-1}=A_{-1},\ q_{\ell+1}=-\beta A_\ell,\ q_j = A_j-\beta A_{j-1},\ j=\overline{0,\ell}.$$

Pošto mora biti $q_j=0,\ j=\overline{1,\ell}$ sledi da treba rešavati diferencnu jednačinu

$$A_j-\beta A_{j-1}=0\ ,\ j=\overline{0,\ell}$$

koja nam daje

$$A_j = A_0\beta^j\ ,\ j=\overline{0,\ell}$$

Iz uslova

$$c_j^{(2)}-\beta c_{j+1}^{(2)} = A_j$$

i graničnog uslova $c_\ell^{(2)}=A_0$ dobijamo

$$c_j^{(2)}=\frac{A_0}{1-\beta^2}\left(\beta^j-\beta^{2\ell+j-\ell}\right).$$

Navedimo još jedan način rešavanja zadatka o ekstrapolaciji za slučaj N=1 ; on je u slučaju $N\geq 1$ teže primenljiv od navedenog načina iz Teoreme 2.2.1.

Polazeći od funkcije $\psi^*(\lambda)$ i oznake $|1-\beta e^{-i\lambda\theta}|^2=\sum_{-1}^{1} a_j^* e^{i\lambda j\theta}$, gde je $a_{-1}^*=a_1^*=-\beta,\ a_0^*=1+\beta^2$ mi dobijamo formulu

$$\psi^*(\lambda)=\sum_{-1}^{1} a_j^* e^{i\lambda(s+j\theta)}-R_1(\lambda)\sum_{-\ell-1}^{1} p_j e^{i\lambda j\theta}-e^{i\lambda\tau}R_2(\lambda)\sum_{1}^{\ell+1} q_j e^{i\lambda j\theta}$$

u kojoj je

$$p_{-\ell-1}=a_{-1}^* c_\ell^{(1)},\quad p_\ell=a_0^* c_\ell^{(1)}+a_{-1}^* c_{\ell-1}^{(1)},$$

$$p_{-j}=a_1^* c_{j+1}^{(1)}+a_0^* c_j^{(1)}+a_{-1}^* c_{j-1}^{(1)}\ ,\ j=\overline{1,\ell-1},$$

$$p_0=a_1^* c_1^{(1)}+a_0^* c_0^{(1)}\ ,\ p_1=a_1^* c_0^{(1)},$$

a takođe i

$$q_{-1}=a_{-1}^{*}c_0^{(2)}, \quad q_0=a_{-1}^{*}c_1^{(2)}+a_0^{*}c_0^{(2)},$$

$$q_j=a_{-1}^{*}c_{j+1}^{(2)}+a_0^{*}c_j^{(2)}+a_1^{*}c_{j-1}^{(2)}, \quad j=\overline{1,\ell-1},$$

$$q_\ell=a_0^{*}c_\ell^{(2)}+a_1^{*}c_{\ell-1}^{(2)}, \quad q_{\ell+1}=a_1^{*}c_\ell^{(2)}.$$

Funkciju $\psi^{*}(\lambda)$ možemo napisati u obliku

$$\psi^{*}(\lambda)=\psi_1^{*}(\lambda)+e^{i\lambda T}\psi_2^{*}(\lambda)+\zeta(\lambda)$$

u kome je

$$\psi_1^{*}(\lambda)=\sum_{-1}^{1}a_j^{*}e^{i\lambda(s+j\theta)}-R_1(\lambda)\sum_{j=0}^{1}p_je^{i\lambda j\theta}-R_2(\lambda)q_{\ell+1}e^{i\lambda(T+\ell\theta+\theta)},$$

$$\psi_2^{*}(\lambda)=-R_1(\lambda)p_{-\ell-1}e^{-i\lambda(T+\ell\theta+\theta)}-R_2(\lambda)\sum_{j=-1}^{0}q_je^{i\lambda j\theta},$$

$$\zeta(\lambda)=-R_1(\lambda)\sum_{j=-\ell}^{-1}p_je^{i\lambda j\theta}-e^{i\lambda T}R_2(\lambda)\sum_{j=0}^{\ell}q_je^{i\lambda j\theta},$$

te da bi bio zadovoljen zahtev 2° Lema 2.2.1. mora biti $\zeta(\lambda)\equiv 0$, odnosno

$$p_j=0,\ j=\overline{-\ell,-1} \quad ; \quad q_j=0,\ j=\overline{1,\ell}$$

što znači da se naprimer koeficijenti $c_j^{(1)}$ određuju iz sledećeg sistema jednačina

$$\begin{aligned}
-a_1^{*}c_0^{(1)} &= a_0^{*}c_1^{(1)}+a_1^{*}c_2^{(1)}\\
0 &= a_1^{*}c_1^{(1)}+a_0^{*}c_2^{(1)}+a_1^{*}c_3^{(1)}\\
0 &= a_1^{*}c_2^{(1)}+a_0^{*}c_3^{(1)}+a_1^{*}c_4^{(1)}\\
&\vdots\\
0 &= a_1^{*}c_{\ell-2}^{(1)}+a_0^{*}c_{\ell-1}^{(1)}+a_1^{*}c_\ell^{(1)}\\
0 &= a_1^{*}c_{\ell-1}^{(1)}+a_0c_\ell^{(1)}
\end{aligned}$$

te je

$$C_j^{(1)} = \beta^j \cdot \frac{1+\beta^2+\dots+\beta^{2\ell-2j}}{1+\beta^2+\dots+\beta^{2\ell}}\, C_0^{(1)} .$$

Naglasimo da iz izraza koji određuju vrednosti q_j se može zaključiti da je

$$C_j^{(1)} = C_j^{(2)} \quad , \; j=\overline{1,\ell} \quad ,$$

a isto tako i to da u slučaju $T \to -\infty$ dobijamo da $C_j^{(1)}$ teže ka β^j , što se poklapa sa ranijim rezultatima.

Slučaj N=2.

Ako je $s \geqslant 2\theta$ i ako koristimo oznake

$$(1+a_1 e^{-i\lambda\theta}+a_2 e^{-2i\lambda\theta})(1+a_1 e^{i\lambda\theta}+a_2 e^{2i\lambda\theta}) = \sum_{j=-2}^{2} a_j^* e^{i\lambda j\theta}$$

dobićemo da je

$$\Psi^*(\lambda) = \Psi_1^*(\lambda) + e^{i\lambda T}\Psi_2^*(\lambda) + \zeta(\lambda)$$

pri čemu je

$$\Psi_1^*(\lambda) = \sum_{j=-2}^{2} a_j^* e^{i\lambda(s+j\theta)} - R_1(\lambda)\sum_{j=0}^{2} p_j e^{i\lambda j\theta} - R_2(\lambda)\sum_{j=\ell+1}^{\ell+2} q_j e^{i\lambda(T+j\theta)} ,$$

$$\Psi_2^*(\lambda) = -R_1(\lambda)\sum_{-\ell}^{-1} p_j e^{i\lambda j\theta} - R_2(\lambda)\sum_{-2}^{0} q_j e^{i\lambda j\theta} ,$$

$$\zeta(\lambda) = -R_1(\lambda)\sum_{-\ell}^{-1} p_j e^{i\lambda j\theta} - R_2(\lambda)\sum_{1}^{\ell} q_j e^{i\lambda(T+j\theta)} ,$$

te iz uslova $\zeta(\lambda) \equiv 0$ dobijamo

$$p_j = 0 \; , \; j=\overline{-\ell,-1} \quad ; \quad q_j = 0 \; , \; j=\overline{1,\ell} \; .$$

Pokažimo napr. kako se pomoću uslova $q_j=0, j=\overline{1,\ell}$ određuju koeficijenti $C_j^{(2)}$.

Neka je

$$\sum_{j=0}^{\ell} C_j^{(2)} e^{i\lambda j\theta}(1-\alpha_1 e^{-i\lambda\theta}) = \sum_{j=-1}^{\ell} A_j^{(1)} e^{i\lambda j\theta} ,$$

gde je

$$A_{-1}^{(1)}=-\alpha_1 C_0^{(2)},\ A_\ell^{(1)}=C_\ell^{(2)},\ A_j^{(1)}=C_j^{(2)}-\alpha_1 C_{j+1}^{(2)},\ j=\overline{0,\ell-1},$$

kao i

$$\sum_{j=-1}^{\ell} A_j^{(1)} e^{i\lambda j\theta}(1-\alpha_2 e^{-i\lambda j\theta})=\sum_{j=-2}^{\ell} A_j^{(2)} e^{i\lambda j\theta},$$

gde je

$$A_{-2}^{(2)}=-\alpha_2 A_{-1}^{(1)},\ A_\ell^{(2)}=A_\ell^{(1)},\ A_j^{(2)}=A_j^{(1)}-\alpha_2 A_{j+1}^{(1)},\ j=\overline{-1,\ell-1}.$$

Stavimo dalje da je

$$\sum_{j=-2}^{\ell} A_j^{(2)} e^{i\lambda j\theta}(1-\alpha_1 e^{i\lambda\theta})=\sum_{j=-2}^{\ell+1} B_j^{(1)} e^{i\lambda j\theta},$$

gde je

$$B_{-2}^{(1)}=A_{-2}^{(2)},\ B_{\ell+1}=-\alpha_1 A_\ell^{(2)},\ B_j^{(1)}=A_j^{(2)}-\alpha_1 A_{j-1}^{(2)},\ j=\overline{-1,\ell}$$

i na kraju

$$\sum_{j=-2}^{\ell+1} B_j^{(1)} e^{i\lambda j\theta}(1-\alpha_2 e^{i\lambda j\theta})=\sum_{j=-2}^{\ell+2} q_j e^{i\lambda j\theta},$$

gde je

$$q_{-2}=B_{-2}^{(1)},\ q_{\ell+2}=-\alpha_2 B_{\ell+1}^{(1)},\ q_j=B_j^{(1)}-\alpha_2 B_{j-1}^{(1)},\ j=\overline{-1,\ell+1}.$$

Iz uslova $q_j=0,\ j=\overline{1,\ell}$ sledi da je

$$B_j^{(1)}-\alpha_2 B_{j-1}^{(1)}=0,\ j=\overline{1,\ell} \quad tj.\quad B_j^{(1)}=B_0\alpha_2^{j},\ j=\overline{1,\ell},$$

a zamenjujući tu vrednost dobijamo diferencnu jednačinu za određivanje $A_j^{(2)}$:

$$A_j^{(2)}-\alpha_1 A_{j-1}^{(2)}=B_0\alpha_2^{j}$$

čije rešenje ima oblik

$$A_j^{(2)}=A_0^{(2)}\alpha_1^{j}+\frac{B_0\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1}\alpha_2^{j}.$$

Zamenjujući tu vrednost u jednačinu koja povezuje $A_j^{(2)}$ i $A_j^{(1)}$ mi dobijamo jednačinu

$$A_j^{(1)} - \alpha_2 A_{j+1}^{(1)} = A_0^{(2)} \alpha_1^j + \frac{B_0 \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} \alpha_2^j$$

čije je rešenje

$$A_j^{(1)} = A_0^{(1)} \alpha_2^{-j} + \frac{A_0^{(2)}}{1-\alpha_1\alpha_2} \alpha_1^j + \frac{B_0 \alpha_2}{(\alpha_2-\alpha_1)(1-\alpha_2^2)} \alpha_2^j$$

i na kraju odatle dobijamo jednačinu

$$C_j^{(2)} - \alpha_1 C_{j+1}^{(2)} = A_0^{(1)} \alpha_2^{-j} + \frac{A_0^{(2)}}{1-\alpha_1\alpha_2} \alpha_1^j + \frac{B_0 \alpha_2}{(\alpha_2-\alpha_1)(1-\alpha_2^2)} \alpha_2^j$$

čije rešenje je oblika

$$C_j^{(2)} = C_0^{(2)} \alpha_1^{-j} + \frac{A_0^{(1)}\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1} \alpha_2^{-j} + \frac{A_0^{(2)}}{(1-\alpha_1\alpha_2)(1-\alpha_1^2)} \alpha_1^j + \frac{B_0 \alpha_2}{(\alpha_2-\alpha_1)(1-\alpha_2^2)(1-\alpha_1\alpha_2)} \alpha_2^j.$$

U ovom rešenju možemo tri od konstanata $C_0^{(2)}, A_0^{(2)}, A_0^{(1)}, B_0$ odrediti koristeći uslove

$$A_\ell^{(1)} = C_\ell^{(2)}, \quad A_\ell^{(2)} = A_\ell^{(1)}, \quad A_0^{(1)} = C_0^{(2)} - \alpha_1 C_1^{(2)}.$$

Posledica 1 Teorema 2.2.1.

Ako je u Teoremi 2.2.1. $\ell=0$ tada je

$$\Phi_{\vartheta,T}^{y}(\lambda) = R_1(\lambda) + e^{i\lambda T} R_2(\lambda). \tag{2.2.4}$$

Posledica 2 Teoreme 2.2.1.

Ako je T delivo sa θ, tj. ako je $T=-\nu\theta$, tada stavljajući prvo da T nije deljivo sa θ, a zatim prelazeći u Teoremi 2.2.1. na limes $T \to -\nu\theta$ imamo

$$\Phi_{\vartheta,T}^{y}(\lambda) = R(\lambda) \sum_{j=0}^{\nu} c_j e^{-i\lambda j\theta}. \tag{2.2.5}$$

Teorema 2.2.2.

Ako je uz ranije oznake $\ell=0$ i $r<N$ tada pri $[\frac{s-T}{\theta}]=r+1$ je

$$\phi^{y}_{s,T}(\lambda)=R_1(\lambda)+e^{i\lambda T}R_2(\lambda)+Ae^{i\lambda(s-r\theta-\theta)}, \tag{2.2.6}$$

a pri $[\frac{s-T}{\theta}]=r$ je

$$\phi^{y}_{s,T}(\lambda)=R_1(\lambda)+e^{i\lambda T}R_2(\lambda). \tag{2.2.7}$$

Teorema 2.2.3.

Ako je $\ell>0$ i $r<N$ tada je

$$\phi^{y}_{s,T}(\lambda)=R_1(\lambda)\sum_{j=0}^{\ell}c_j^{(1)}e^{-i\lambda j\theta}+e^{i\lambda T}R_2(\lambda)\sum_{j=0}^{\ell}c_j^{(2)}e^{i\lambda j\theta}+\sum_{j=r+1}^{K}h_j e^{i\lambda(s-j\theta)}, \tag{2.2.8}$$

gde je $[\frac{s-T}{\theta}]=K$ tj. $K=r+\ell$ ili $K=r+\ell+1$.

D o k a z poslednjih dveju teorema je potpuno analogan dokazu Teoreme 2.2.1. Ti dokazi daju, takođe, metod jednoznačnog određivanja funkcije $\phi^{y}_{s,T}(\lambda)$, tj. uključujući u sebi efektivno rešenje problema ekstrapolacije. Umesto opšteg dokaza tih teorema zadovoljićemo se samo razmatranjem primera N=1 i N=2, koji sa svoje strane jasno ukazuju na put opšteg metoda dokazivanja.

Slučaj N=1.

(a) Neka je sada $s\leq\theta$, $\ell\geq1$. Tada ćemo spektralnu karakteristiku tražiti u obliku

$$\phi^{y}_{s,T}(\lambda)=R_1(\lambda)\sum_{j=0}^{\ell}c_j^{(1)}e^{-i\lambda j\theta}+e^{i\lambda T}R_2(\lambda)\sum_{j=0}^{\ell}c_j^{(2)}e^{i\lambda j\theta}+\sum_{j=1}^{K}h_j e^{i\lambda(s-j\theta)}$$

i prema ranijim oznakama ćemo imati

$$\Psi^{*}(\lambda)=\Psi_1^{*}(\lambda)+e^{i\lambda T}\Psi_2^{*}(\lambda)+\zeta(\lambda)\ ,$$

gde je

$$\Psi_1^{*}(\lambda)=\sum_{j=0}^{1}a_j^{*}e^{i\lambda(s+j\theta)}-R_1(\lambda)\sum_{j=0}^{\ell}p_j e^{i\lambda j\theta}-$$

$$-R_2(\lambda)q_{\ell+1}e^{i\lambda(T+\ell\theta+\theta)}+\tau_0 e^{i\lambda s}\ ,$$

$$\Psi_2^{*}(\lambda)=-R_1(\lambda)p_{-\ell-1}e^{-i\lambda(T+\ell\theta+\theta)}-R_2(\lambda)\sum_{-1}^{0}q_j e^{i\lambda j\theta}+\tau_{\ell+1}e^{-i\lambda(T+s+\ell\theta+\theta)}\ ,$$

$$\zeta(\lambda)=a_{-1}^{*}e^{i\lambda(s-\theta)}-R_1(\lambda)\sum_{-\ell}^{-1}p_j e^{i\lambda j\theta}-$$

$$-R_2(\lambda)=\sum_{1}^{\ell}q_j e^{i\lambda(T+j\theta)}+\sum_{1}^{\ell}\tau_j e^{i\lambda(s-j\theta)}$$

te iz uslova da važi 2^{0} u Lemi 2.2.1.,tj. iz uslova $\zeta(\lambda)\equiv 0$ dobijamo $\tau_1=\beta$ pri čemu je $(k=\ell)$

$$\sum_{j=1}^{\ell}h_j e^{i\lambda(s-j\theta)}(1-\beta e^{-i\lambda\theta})(1-\beta e^{i\lambda\theta})=\sum_{j=0}^{\ell+1}\tau_j e^{i\lambda(s-j\theta)}$$

kao i

$$\tau_0=a_1^{*}h_1\quad,\tau_1=a_1^{*}h_2+a_0^{*}h_1\ ,$$

$$\tau_j=a_1^{*}h_{j+1}+a_0^{*}h_j+a_{-1}^{*}h_{j-1}\quad,\ j=\overline{2,\ell-1}\ ,$$

$$\tau_\ell=a_0^{*}h_\ell+a_{-1}^{*}h_{\ell-1}\quad,\tau_{\ell+1}=a_{-1}^{*}h_\ell\ .$$

Pošto mora biti $\tau_j=0,\ j=\overline{2,\ell}$ dobijamo da je

$$h_j=(\beta^{j}-\beta^{2\ell+2-j})/(1-\beta^{2\ell+2})\quad,\ j=\overline{1,\ell}\ .$$

Vrednosti p_j i q_j se određuju po ranije navedenom načinu.

(b) Ako je $s\leq\theta,\ \ell=0\ ,s-\vartheta\leq T$, nema suštinske razlike u odnosu na predhodni slučaj; samo treba voditi ra čuna o tome da je $\ell=0$.

(c) Ako je $s \leq \theta$, $\ell = 0$, $s-\theta > T$ imaćemo

$$\phi^{y}_{s,T}(\lambda) = R_1(\lambda) + e^{i\lambda T} R_2(\lambda).$$

Slučaj N=2.

(a) Ako je $r=1, \ell=0, s-2\theta < T$ tada u suštini i nema razlike u odnosu na situaciju proučenu posle Teoreme 2.2.1.

(b) Ako je $r=1$, $\ell \geq 0$, $s-2\theta \geq T$ biće

$$\phi^{y}_{s,T}(\lambda) = R_1(\lambda)\sum_{0}^{\ell} C_j^{(1)} e^{-i\lambda j\theta} + e^{i\lambda T} R_2(\lambda) \sum_{0}^{\ell} C_j^{(2)} e^{i\lambda j\theta} + \sum_{j} h_j e^{i\lambda(s-j\theta)}$$

i koeficijenti $C_j^{(1)}$ i $C_j^{(2)}$ se određuju po metodi Teoreme 2.2.1, a koeficijenti h_j iz uslova Teoreme 2.2.2.

(c) Ako je $r=0$, $\ell=0$, $s-\theta \leq T$ biće

$$\phi^{y}_{s,T}(\lambda) = R_1(\lambda) + R_2(\lambda)\, e^{i\lambda T}.$$

(d) Ako je $r=0, \ell=0$, $s-\theta \geq T$ imaćemo

$$\phi^{y}_{s,T}(\lambda) = R_1(\lambda) + R_2(\lambda) e^{i\lambda T} + h_1 e^{i\lambda(s-\theta)}.$$

(e) Ako je $r=0$, $\ell \geq 1, s-2\theta < T < s-\theta$ imaćemo

$$\phi^{y}_{s,T}(\lambda) = R_1(\lambda)\sum_{0}^{\ell} C_j^{(1)} e^{-i\lambda j\theta} + e^{i\lambda T} R_2(\lambda) \sum_{0}^{\ell} C_j^{(2)} e^{i\lambda j\theta} + \sum_{j} h_j e^{i\lambda(s-j\theta)}.$$

Sada ćemo preći na rešavanje ekstrapolacionih problema na osnovu vrednosti na segmentu za procese $X(t)$ iz (1.3.2), odnosno na slučaj kada je θ - transformacija reda N proces sa racionalnom spektralnom gustinom. Za takve procese u slučaju poznatih vrednosti na segmentu važi sledeća teorema.

Teorema 2.2.4.

Neka su procesi X i Y povezani relacijom (1.3.2) i neka je spektralna funkcija procesa Y racionalna funkcija

(1.2.1o). Neka je, dalje, kao i ranije $[\frac{s}{\theta}]=r$, $[-\frac{T}{\theta}]=l$ i neka je $[\frac{s-T}{\theta}]=k$. Tada je

$$(2.2.9) \qquad \phi^{*}_{s,T}(\lambda)=R_1(\lambda)+e^{i\lambda T}R_2(\lambda)$$

pri $l=0, k=r$;

$$(2.2.1o) \qquad \phi^{*}_{s,T}(\lambda)=R_1(\lambda)+e^{i\lambda T}R_2(\lambda)+h\,e^{i\lambda(s-r\theta-\theta)}$$

pri $l=0$, $k=r+1$;

$$(2.2.11) \qquad \phi^{*}_{s,T}(\lambda)=R_1(\lambda)\sum_{0}^{l}c_j^{(1)}e^{-i\lambda j\theta}+e^{i\lambda T}R_2(\lambda)\sum_{j=0}^{l}c_j^{(2)}e^{i\lambda j\theta}+\sum_{j=r+1}^{k}h_j e^{i\lambda(s-j\theta)}$$

pri $0<l<N$;

$$(2.2.12) \qquad \phi^{*}_{s,T}(\lambda)=R_1(\lambda)\sum_{0}^{N}c_j^{(1)}e^{-i\lambda j\theta}+e^{i\lambda T}R_2(\lambda)\sum_{0}^{N}c_j^{(2)}e^{i\lambda j\theta}+\sum_{r+1}^{r+N}h_j e^{i\lambda(s-j\theta)}$$

pri $l\geq N$.

D o k a z. Ovde je, takođe, jasno da su uslovi 1° i 3° Leme 2.2.1. ispunjeni, tako da samo treba proveravati uslov 2°. Zbog sličnosti u dokazivanju zadržaćemo se samo na dokažu jednakosti (2.2.12), tj. samo na slučaj $l\geq N$. Tada je

$$\Psi^*(\lambda)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}e^{i\lambda s}d_j^{(N)}e^{i\lambda j\theta}-R_1(\lambda)\sum_{j=0}^{\infty}\tau_j^{(N)}e^{i\lambda j\theta}-$$

$$-e^{i\lambda T}\sum_{j=0}^{\infty}\tau_j^{(N)}e^{-i\lambda j\theta}\cdot R_2(\lambda)-\sum_{j=r+1}^{r+N}h_j\,e^{i\lambda(s-j\theta)}\cdot\sum_{j=-\infty}^{\infty}d_j^{(N)}e^{i\lambda j\theta},$$

gde je

$$\frac{1}{1+a_1 e^{+i\lambda\theta}+\dots+a_N e^{i\lambda N\theta}}=\sum_{j=0}^{\infty}\tau_j^{(N)}e^{i\lambda j\theta},$$

$$\frac{1}{1+a_1 e^{-i\lambda\theta}+\dots+a_N e^{-i\lambda N\theta}}=\sum_{j=0}^{\infty}\tau_j^{(N)}e^{-i\lambda j\theta},$$

gde je lako zapaziti na osnovu rezultata dobijenih ranije da važi sledeća jednakost koja se dobija vodeći računa o pravilu za množenje redova

$$\sum_{j=0}^{\infty}\tau_j^{(N)}e^{i\lambda j\theta}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\tau_j^{(N)}e^{-i\lambda j\theta}=\sum_{j=-\infty}^{\infty}d_j^{(N)}e^{i\lambda j\theta}.$$

Pošto je

$$\sum_{j=r+1}^{r+N}h_j e^{i\lambda(s-j\theta)}\cdot\sum_{j=-\infty}^{\infty}d_j^{(N)}e^{i\lambda j\theta}=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\delta_j^{(N)}e^{i\lambda(s+j\theta)}$$

sa $\delta_j^{(N)}=\sum_{\nu=r+1}^{r+N}h_\nu d_{\nu+j}^{(N)}$ imaćemo

$$\Psi^*(\lambda)=\Psi_1^*(\lambda)+e^{i\lambda T}\Psi_2^*(\lambda)+\zeta(\lambda)$$

pri čemu je

$$\Psi_1^*(\lambda)=\sum_{j=-r}^{\infty}d_j^{(N)}e^{i\lambda(s+j\theta)}-R_1(\lambda)\sum_{j=0}^{\infty}\tau_j^{(N)}e^{i\lambda j\theta}-\sum_{j=-r}^{\infty}\delta_j^{(N)}e^{i\lambda(s+j\theta)},$$

$$\Psi_2^*(\lambda)=-\sum_{-\infty}^{-K}d_j^{(N)}e^{i\lambda(s+j\theta)-i\lambda T}-R_2(\lambda)\sum_{0}^{\infty}\tau_j^{(N)}e^{-i\lambda j\theta}-\sum_{-\infty}^{-K}\delta_j^{(N)}e^{i\lambda(s+j\theta-T)},$$

$$\zeta(\lambda)=\sum_{j=-K+1}^{-r-1}\left(d_j^{(N)}-\delta_j^{(N)}\right)e^{i\lambda(s+j\theta)}$$

tako da dobijamo sistem jednačina iz koga određujemo vrednosti h_j, $j=\overline{r+1,r+N}$ i gde je $\delta_j^{(N)}=d_j^{(N)}$, $j=\overline{-k+1,-r-1}$.

Razmotrimo ponovo posebne slučajeve N=1 i N=2 zbog njihove praktične važnosti.

<u>Slučaj N=1.</u>

(a) Ako je $\ell=0$, $k=r$ imaćemo

$$\phi_{s,T}^{x}(\lambda)=R_1(\lambda)+e^{i\lambda T}R_2(\lambda).$$

(b) Ako je $\ell=0$, $k=r+1$ imaćemo

$$\phi_{s,T}^{x}(\lambda)=R_1(\lambda)+e^{i\lambda T}R_2(\lambda)+h\,e^{i\lambda(s-r\theta-\theta)},$$

gde je potrebno odrediti vrednost koeficijenta h. To se može postići na sledeći način: Iz

$$|1-\beta e^{-i\lambda\theta}|^{-2}=\sum_{j=0}^{\infty}\beta^j e^{-i\lambda j\theta}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\beta^j e^{i\lambda j\theta}=\sum_{j=\infty}^{\infty}d_j^{(1)}e^{i\lambda j\theta},$$

gde je

$$d_{-j}^{(1)}=d_j^{(1)}=\frac{\beta^j}{1-\beta^2},\quad j=0,1,2,\ldots$$

dobijamo

$$d_j^{(1)}-\beta d_{j-1}^{(1)}=0,\quad j=1,2,\ldots$$

i zato je

$$\psi^*(\lambda)=\psi_1^*(\lambda)+e^{i\lambda T}\psi_2^*(\lambda)+\zeta(\lambda)$$

pri čemu je

$$\psi_1^*(\lambda)=\sum_{j=-r}^{\infty}d_j^{(1)}e^{i\lambda(s+j\theta)}-R_1(\lambda)\sum_{j=0}^{\infty}d_j^{(1)}e^{i\lambda j\theta}-$$
$$-e^{i\lambda T}R_2(\lambda)\sum_{j=1}^{\infty}d_j^{(1)}e^{i\lambda j\theta}-\sum_{j=1}^{\infty}h\,d_j^{(1)}e^{i\lambda(s+j\theta-r\theta-\theta)},$$

$$\psi_2^*(\lambda)=\sum_{j=-\infty}^{-r-2} d_j^{(1)} e^{i\lambda(s+j\theta-T)} - R_1(\lambda)\sum_{j=-\infty}^{-1} d_j^{(1)} e^{i\lambda j\theta} -$$

$$- R_2(\lambda)\sum_{j=-\infty}^{0} d_j^{(1)} e^{i\lambda j\theta} - \sum_{j=-\infty}^{-1} h d_j^{(1)} e^{i\lambda(s+j\theta-r\theta-\theta)},$$

$$\zeta(\lambda)= d_{-r-1}^{(1)} e^{i\lambda(s-r\theta-\theta)} - h d_0^{(1)} e^{i\lambda(s-r\theta-\theta)}.$$

Tada iz uslova $\zeta(\lambda)\equiv 0$ dobijamo $h=\beta^{r+1}$.

(c) Ako bismo u slučaju $\ell\geq 1$ tražili $\phi_{s,T}^{x}(\lambda)$ u obliku

$$\phi_{s,T}^{x}(\lambda)=R_1(\lambda)\sum_{0}^{\ell} c_j^{(1)} e^{-i\lambda j\theta}+e^{i\lambda T}R_2(\lambda)\sum_{0}^{\ell} c_j^{(2)} e^{i\lambda j\theta}+\sum_{r+1}^{K} h_j e^{i\lambda(s-j\theta)}$$

dobili bismo

$$h_{r+1}=\beta^{r+1},\ h_j=0 \text{ za } j\neq r+1,\ c_1^{(1)}=c_1^{(2)}=\beta c_0,\ c_j^{(1)}=c_j^{(2)}=0, j>1$$

tako da je

$$\phi_{s,T}^{x}(\lambda)=R_1(\lambda)(1-\beta e^{-i\lambda\theta})+e^{i\lambda T}R_2(\lambda)(1-\beta e^{i\lambda\theta})+\beta^{r+1} e^{i\lambda(s-r\theta-\theta)}.$$

Slučaj N=2.

Sada je, znači, $a_1=-(\alpha_1+\alpha_2),\ a_2=\alpha_1\alpha_2$, gde je $|\lambda_1|<1$ kao i $|\alpha_2|<1$. Kao i ranije, smatraćemo da je $\alpha_1\neq\alpha_2$; pri $\alpha_1=\alpha_2$ treba uzimati granične vrednosti dobijenih rezultata kada $\alpha_1\to\alpha_2=\alpha$.

U ovom slučaju je

$$|1+a_1e^{-i\lambda\theta}+a_2e^{-2i\lambda\theta}|^{-2}=\sum_{j=-\infty}^{\infty} d_j^{(2)} e^{i\lambda j\theta}$$

gde je

$$d_{-j}^{(2)} = d_j^{(2)} \quad , j = 1,2,\dots$$

$$d_j^{(2)} = \frac{1}{(\alpha_1-\alpha_2)^2}\left[\frac{\alpha_1^{j+2}}{1-\alpha_1^2} + \frac{\alpha_2^{j+2}}{1-\alpha_2^2} - \frac{\alpha_1\alpha_2(\alpha_1^j+\alpha_2^j)}{1-\alpha_1\alpha_2}\right], j=0,1,2,\dots$$

Gornja jednakost sledi iz sledećih razmatranja :

$$(1+a_1e^{-i\lambda\theta}+a_2e^{-2i\lambda\theta})(1+a_1e^{i\lambda\theta}+a_2e^{2i\lambda\theta}) =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\alpha_1^j e^{-i\lambda j\theta} \cdot \sum_{j=0}^{\infty}\alpha_2^j e^{-i\lambda j\theta} \cdot \sum_{j=0}^{\infty}\alpha_1^j e^{i\lambda j\theta} \cdot \sum_{j=0}^{\infty}\alpha_2^j e^{i\lambda j\theta} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\alpha_1^{j+1}-\alpha_2^{j+1}}{\alpha_1-\alpha_2}e^{-i\lambda j\theta} \cdot \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\alpha_1^{j+1}-\alpha_2^{j+1}}{\alpha_1-\alpha_2}e^{i\lambda j\theta} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\tau_j e^{-i\lambda j\theta} \cdot \sum_{j=0}^{\infty}\tau_j e^{i\lambda j\theta} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} d_j^{(2)} e^{i\lambda j\theta},$$

gde je pri $j \geq 0$

$$d_j^{(2)} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\tau_\nu\tau_{\nu+j} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\alpha_1^{\nu+1}-\alpha_2^{\nu+1}}{\alpha_1-\alpha_2}\cdot\frac{\alpha_1^{\nu+j+1}-\alpha_2^{\nu+j+1}}{\alpha_1-\alpha_2} =$$

$$= \frac{1}{(\alpha_1-\alpha_2)^2}\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\alpha_1^{2\nu+j+2}+\alpha_2^{2\nu+j+2}-\alpha_1^{\nu+1}\alpha_2^{\nu+1}(\alpha_1^j+\alpha_2^j)\right] =$$

$$= \frac{1}{(\alpha_1-\alpha_2)^2}\left[\frac{\alpha_1^{j+2}}{1-\alpha_1^2} + \frac{\alpha_2^{j+2}}{1-\alpha_2^2} - \frac{\alpha_1\alpha_2(\alpha_1^j+\alpha_2^j)}{1-\alpha_1\alpha_2}\right].$$

(a) Ako je $\ell \geq 2$, tada ćemo $\phi^{*}_{s,T}(\lambda)$ tražiti u obliku

$$\phi^{*}_{s,T}(\lambda)=R_1(\lambda)(1+a_1e^{-i\lambda\theta}+a_2e^{-2i\lambda\theta})+e^{i\lambda T}R_2(\lambda)(1+a_1e^{i\lambda\theta}+a_2e^{2i\lambda\theta})+$$
$$+h_1e^{i\lambda(s-r\theta-\theta)}+h_2e^{i\lambda(s-r\theta-2\theta)}$$

te je

$$\Psi^{*}(\lambda)=\Psi_1^{*}(\lambda)+e^{i\lambda T}\Psi_2^{*}(\lambda)+\zeta(\lambda)$$

pri čemu je

$$\Psi_1^{*}(\lambda)=\sum_{j=-r}^{\infty}d_j^{(2)}e^{i\lambda(s+j\theta)}-R_1(\lambda)\sum_{j=0}^{\infty}\tau_j e^{i\lambda j\theta}-$$
$$-\sum_{j=1}^{\infty}h_1d_j^{(2)}e^{i\lambda(s-r\theta-\theta+j\theta)}-\sum_{j=2}^{\infty}h_2d_j^{(2)}e^{i\lambda(s+j\theta-r\theta-2\theta)},$$

$$\Psi_2^{*}(\lambda)=\sum_{j=-\infty}^{-K}d_j^{(2)}e^{i\lambda(s-T+j\theta)}-R_2(\lambda)\sum_{j=0}^{\infty}\tau_j e^{-i\lambda j\theta}-$$
$$-\sum_{j=-\infty}^{-K+r+1}h_1d_j^{(2)}e^{i\lambda(s-r\theta-\theta-T+j\theta)}-\sum_{j=-\infty}^{-K+r+2}h_2d_j^{(2)}e^{i\lambda(s-r\theta-\theta-T+j\theta)},$$

$$\zeta(\lambda)=\sum_{j=-K+1}^{-r-1}d_j^{(2)}e^{i\lambda(s+j\theta)}-\sum_{j=-K+r+2}^{0}h_1d_j^{(2)}e^{i\lambda(s-r\theta-\theta+j\theta)}-$$
$$-\sum_{j=-\nu+r+3}^{1}h_2d_j^{(2)}e^{i\lambda(s-r\theta-2\theta+j\theta)}.$$

Iz uslova $\zeta(\lambda)\equiv 0$ dobijamo sistem linearnih jednačina koji se zbog ranije navedenih osobina koeficijenata $d_j^{(2)}$ svodi na sistem

$$h_1 d_0^{(2)} + h_2 d_1^{(2)} = d_{r+1}^{(2)}$$

$$h_1 d_1^{(2)} + h_2 d_0^{(2)} = d_{r+2}^{(2)}$$

iz koga se dobijaju h_1 i h_2 $(h_1 = \tau_{r+1}, h_2 = -\alpha_1\alpha_2\tau_r)$.

(b) Ako je $\ell = 1, k = r+2$ imaćemo

$$\phi_{s,T}^{x}(\lambda) = R_1(\lambda)[1 + c_1^{(1)} e^{-i\lambda\theta}] + e^{i\lambda T} R_2(\lambda)[1 + c_1^{(2)} e^{i\lambda j\theta}] +$$
$$+ h_1 e^{i\lambda(s - r\theta - \theta)} + h_2 e^{i\lambda(s - r\theta - 2\theta)}.$$

(c) Ako je $\ell = 1$, $k = r+2$ imaćemo za razliku od (b) da je $h_2 = 0$.

(d) Ako je $\ell = 0, k = 1$ biće

$$\phi_{s,T}^{x}(\lambda) = R_1(\lambda) + e^{i\lambda T} R_2(\lambda) + h_1 e^{i\lambda(s - r\theta - \theta)}.$$

(e) Ako je $\ell = 0, k = 0$ biće

$$\phi_{s,T}^{x}(\lambda) = R_1(\lambda) + e^{i\lambda T} R_2(\lambda).$$

2.3. INTEGRALNE JEDNAČINE EKSTRAPOLACIJE

Ako je $X(t)$ stacionaran slučajni proces i $X(s), s \geq 0$ treba ekstrapolirati na osnovu poznatih vrednosti u celoj prošlosti $(-\infty, 0]$, tada se njegova projekcija $\hat{X}(s), s \geq 0$ preslikava u element $\phi_s^x(\lambda)$ prostora $L^2(F_x)$, tj. u spektralnu karakteristiku, koju ćemo u ovom paragrafu obeležiti (kratkoće radi) sa $\varphi(\lambda)$. Znači

(2.3.1) $$\hat{X}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\, dZ_x(\lambda)$$

odnosno

(2.3.2) $$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\lambda)|^2\, dF_x(\lambda) < \infty ,$$

što u slučaju postojanja spektralne gustine postaje

(2.3.3) $$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\lambda)|^2 f_x(\lambda)\, d\lambda < \infty .$$

Da bismo imali put za određivanje spektralne karakteristike ekstrapolacije moraćemo prethodno da dokažemo dve leme.

Lema 2.3.1.

Korelaciona funkcija stacionarnog slučajnog procesa sa racionalnom spektralnom gustinom (1.2.1o) u slučaju jednostrukih korena polinoma u imeniocu ima oblik

(2.3.4) $$K_x(\tau) = \sum_{j=1}^{n} A_j\, e^{i\gamma_j \tau} , \tau \geqslant 0$$

gde je

$$A_j = 2\pi i B_0 \frac{B(\gamma_j)\, \overline{B(\gamma_j)}}{\overline{C(\gamma_j)}\,(\gamma_j-\gamma_1)\cdots(\gamma_j-\gamma_{j-1})(\gamma_j-\gamma_{j+1})\cdots(\gamma_j-\gamma_n)} .$$

U slučaju kada je γ_1-koren reda ν_1 , ..., γ_p - koren reda ν_p ($\nu_1+\ldots+\nu_p = n$) biće

(2.3.5) $$K_x(\tau) = \sum_{j=1}^{p} \tilde{A}_j\, e^{i\gamma_j \tau} , \tau \geqslant 0 ,$$

gde su $\tilde{A}_j = \tilde{A}_j(\tau)$ - polinomi stepena $\gamma_j - 1$.

D o k a z ove leme može se dati koristeći teoriju reziduma.

Zbog sličnosti oblika (2.3.4) i (2.3.5) mi ćemo se zadržati samo na slučaju jednostrukih korena.

Lema 2.3.2.

Korelacijone funkcije procesa $X(t)$ i $Y(t)$ iz (1.3.2) vezane su relacijom

$$K_y(\tau) = \sum_{-N}^{N} p_j K_x(\tau - j\theta) \tag{2.3.6}$$

gde je

$$p_j = \sum_{\nu=0}^{N-j} a_\nu a_{N-\nu}, \; j \geq 0 \; ; \; p_{-|j|} = p_{|j|} \, .$$

Iz Leme 2.3.2. sledi da pri fiksiranom $s \geq 0$ i pri bilo kom $t \leq 0$ u slučaju $\tau \geq N$ imamo

$$K_y(s-t) = \sum_{1}^{n} \tilde{B}_j e^{-i\gamma_j t}, \quad \tilde{B}_j = A_j \sum_{-N}^{N} p_k e^{i\gamma_j (s - k\theta)} \tag{2.3.7}$$

i tada iz (2.3.3) dobijamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} \varphi_y(\lambda) \left| \sum_{0}^{N} a_j e^{-i\lambda j \theta} \right|^2 f_x(\lambda) d\lambda = K_y(s-t),$$

odnosno

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} \varphi_1(\lambda) \sum_{0}^{N} a_j e^{i\lambda j\theta} f_x(\lambda) d\lambda = \sum_{1}^{N} \tilde{B}_j e^{-i\gamma_j t}, \tag{2.3.8}$$

gde je

$$\varphi_1(\lambda) = \varphi_y(\lambda) \sum_{0}^{N} a_j e^{-i\lambda j\theta} . \tag{2.3.9}$$

Ako uvedemo oznaku

$$\xi(\lambda) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} \varphi_1(\lambda) f_x(\lambda) d\lambda \tag{2.3.10}$$

dobićemo diferencnu jednačinu

$$\sum_{0}^{N} a_j \xi(t-j\theta) = \sum_{1}^{n} \tilde{B}_j e^{-i\gamma_j t} \tag{2.3.11}$$

čije rešenje je

$$\xi(t) = \sum_{1}^{N} c_j \alpha_j^{t/\theta} + \sum_{1}^{n} b_j e^{-i\gamma_j t} \tag{2.3.12}$$

i zato je

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} \varphi_1(\lambda) f_x(\lambda) d\lambda = \sum_{1}^{N} c_j \alpha_j^{t/\theta} + \sum_{1}^{n} b_j e^{-i\gamma_j t}. \tag{2.3.13}$$

Ako je

$$\eta(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} \varphi_1(\lambda) \frac{d\lambda}{|P(i\lambda)|^2} \; ; \; f_x(\lambda) = \frac{|Q(i\lambda)|^2}{|P(i\lambda)|^2} \tag{2.3.14}$$

dobijamo

$$\xi(t) = Q\left(-\frac{d}{dt}\right) Q\left(\frac{d}{dt}\right) \eta(t)$$

što znači da $\eta(t)$ zadovoljava diferencijalnu jednačinu sa konstantnim koeficijentima

$$Q\left(-\frac{d}{dt}\right) Q\left(\frac{d}{dt}\right) \eta(t) = \sum_{1}^{N} c_j \alpha_j^{t/\theta} + \sum_{1}^{n} b_j e^{-i\gamma_j t} \tag{2.3.15}$$

čije rešenje je

$$\eta(t) = \sum_{1}^{2m} D_j \eta_j(t) + \sum_{1}^{N} \tilde{c}_j \alpha_j^{t/\theta} + \sum_{1}^{n} \tilde{b}_j e^{-i\gamma_j t}.$$

Posle ovoga se može ići po metodu razrađenom u [21].

U slučaju $n<N$ ćemo imati

$$K_y(s,t) = \sum_{-N}^{N} p_j K_x(s-t-j\theta) =$$

$$= \sum_{j=-N}^{N} p_j \left\{ \sum_{K=1}^{n} A_K e^{i\gamma_K^{\ell}(s-t-j\theta)} \cdot [1-H(t-s+j\theta)] + \right.$$

$$+ \sum_{K=1}^{n} \overline{A}_K e^{-i\overline{\gamma}_K^{\ell}(s-t-j\theta)} \cdot H(t-s+j\theta) = \sum_{j=1}^{n} D_j e^{-i\gamma_j t} +$$

$$+ \sum_{j=r+1}^{N} p_j \left\{ \sum_{K=1}^{n} A_{K,j}^{(1)} e^{-i\gamma_K t} + A_{K,j}^{(2)} e^{i\overline{\gamma}_K t} \right\} H(t-s+j\theta) \equiv B(t),$$

gde je $H(t)$ - Hevisajdova uopštena funkcija i,

$$D_j = A_j \sum_{-N}^{N} p_K e^{i\gamma_K(s-K\theta)}, \quad A_{K,j}^{(1)} = -A_K e^{i\gamma_K^{\ell}(s-j\theta)}, \quad A_{K,j}^{(2)} = -\overline{A}_K e^{-i\overline{\gamma}_K^{\ell}(s-j\theta)}.$$

Znači, treba rešavati jednačinu

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} \varphi_1(\lambda) \sum_{0}^{N} a_j e^{i\lambda j\theta} f_X(\lambda)\, d\lambda = B(t).$$

Iz

$$\xi(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} \varphi_1(\lambda) f_X(\lambda)\, d\lambda$$

i odgovarajuće diferencne jednačine

$$\sum_{0}^{N} a_j \xi(t-j\theta) = B(t)$$

sledi da je

$$\xi(t) = \sum_{1}^{n} b_j e^{-i\gamma_j t} + \sum_{1}^{N} c_j \alpha_j^{t/\theta} +$$

$$+ \sum_{j=r+1}^{N} p_j \left\{ \sum_{K=1}^{n} A_{K,j}^{(1)} e^{-i\gamma_j^{\ell} t} + A_{K,j}^{(2)} e^{i\gamma_K^{\ell} t} \right\} H(t-s+j\theta).$$

U daljem se može koristiti način naveden u slučaju $r \geq N$.

Primer 5.

Neka je $X(t)$ Gausovski markovski slučajni proces sa spektralnom gustinom

$$f_x(\lambda) = \frac{c}{\lambda^2+\alpha^2}, \quad c>0, \alpha>0$$

i neka je $Y(t)$ njegova θ - transformacija prvog reda.

(a) Ako je $s \geq \theta$ tada jednačina

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda t} \varphi_y(\lambda) f_y(\lambda) d\lambda = K_y(s-t), \quad t \leq 0$$

prelazi u jednačinu

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} \varphi_1(\lambda) \frac{1-\beta e^{i\lambda\theta}}{\lambda^2+\alpha^2} = B(t),$$

gde je

$$\varphi_1(\lambda) = \varphi_y(\lambda)(1-\beta e^{-i\lambda\theta}), \; B(t) = Be^{\alpha t}, \; B = \frac{\pi}{\alpha}(1-\beta e^{-\alpha\theta})(1-\beta e^{\alpha\theta}) e^{-\alpha s}.$$

Ako uvedemo oznaku

$$\xi(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} \varphi_1(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda^2+\alpha^2}$$

imaćemo diferencnu jednačinu

$$\xi(t) - \beta\, \xi(t-\theta) = Be^{\alpha t}$$

čije rešenje je $(\beta>0)$

$$\xi(t) = C_1 \beta^{t/\theta} + \frac{\pi}{\alpha}(1-\beta e^{\alpha\theta}) e^{-\alpha s} e^{\alpha t}$$

i ako je $P(i\lambda) = \alpha + i\lambda$ imaćemo $(\beta>0)$

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)\xi(t) = C_1\left(\alpha + \frac{\ln\beta}{\theta}\right)\beta^{t/\theta} + 2\pi(1-\beta e^{\alpha\theta}) e^{-\alpha s} e^{\alpha t},$$

$$P\left(-\frac{d}{dt}\right)\xi(t) = C_1\left(\alpha - \frac{h_1\beta}{\theta}\right)\beta^{t/\theta}$$

i iz graničnog uslova

$$P\left(-\frac{d}{dt}\right)\xi(t) \to 0, t \to -\infty$$

dobijamo $C_1 = 0$, tako da ostaje

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)\xi(t) = 2\bar{u}\,(1-\beta e^{\alpha\theta})[1-H(t)]\,e^{-\alpha s}e^{\alpha t}.$$

Zato je

$$P\left(-\frac{d}{dt}\right)P\left(\frac{d}{dt}\right)\xi(t) = 2\bar{u}\,(1-\beta e^{\alpha\theta})e^{-\alpha s}\delta(t)$$

što znači da je

$$\varphi_1(\lambda) = (1-\beta e^{\alpha\theta})e^{-\alpha s}$$

odnosno

$$\varphi(\lambda) = \frac{(1-\beta e^{\alpha\theta})e^{-\alpha s}}{1-\beta e^{-i\lambda\theta}}.$$

(b) Ako je $s \leq \theta$ imaćemo

$$K_y(s-t) = cp\,e^{\alpha t} + cq\left[e^{-\alpha(t-s+\theta)} - e^{\alpha(t-s+\theta)}\right]H(t-s+\theta),$$

gde je

$$p = \frac{\pi}{\alpha}(1-\beta e^{-\alpha\theta})(1-\beta e^{\alpha\theta})e^{-\alpha s}, \quad q = -\frac{\pi\beta}{\alpha},$$

tako da dobijamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t}\varphi_1(\lambda)\frac{1-\beta e^{i\lambda\theta}}{\lambda^2+\alpha^2}\,d\lambda =$$

$$= pe^{\alpha t} + q\left[e^{-\alpha(t-s+\theta)} - e^{\alpha(t-s+\theta)}\right]H(t-s+\theta)$$

što znači da je

$$\xi(t) = C_1\beta^{t/\theta} + K_1 e^{\alpha t} + K_2\,[e^{-\alpha(t-s+\theta)} - e^{\alpha(t-s+\theta)}]\,H(t-s+\theta)$$

gde je C_1-proizvoljno, $K_1 = \frac{\pi}{\alpha}(1-\beta e^{-\alpha\theta})\,e^{-\alpha s}$, $K_2 = \mathcal{Q}$.

Zato je

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)\xi(t) = C_1\left(\alpha + \frac{\ln\beta}{\theta}\right)\beta^{t/\theta} + 2\alpha K_1 e^{\alpha t} - $$
$$- 2\alpha K_2\, e^{\alpha(t-s+\theta)}\,H(t-s+\theta),$$

$$P\left(-\frac{d}{dt}\right)\xi(t) = C_1\left(\alpha - \frac{\ln\beta}{\theta}\right)\beta^{t/\theta} + 2\alpha K_2\, e^{-\alpha(t-s+\theta)}\,H(t-s+\theta)$$

i iz graničnog uslova dobijamo da je $C_1 = 0$ i

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)\xi(t) = 2\alpha K_1 e^{\alpha t}[1 - H(t)] +$$
$$+ 2\alpha K_2\, e^{\alpha(t-s+\theta)}[H(t) - H(t-s+\theta)],$$

$$P\left(-\frac{d}{dt}\right)\xi(t) = 2\alpha K_2\, e^{-\alpha(t-s+\theta)}[H(t-s+\theta) - H(t)].$$

Prema tome, biće

$$P\left(-\frac{d}{dt}\right)P\left(\frac{d}{dt}\right)\xi(t) = 2\alpha K_2\,\delta(t-s+\theta) + 2\alpha\,[K_1 - K_2 e^{-\alpha(s-\theta)}]\,\delta(t),$$

$$\varphi_1(\lambda) = e^{-\alpha s} - \beta e^{i\lambda(s-\theta)}, \quad \varphi(\lambda) = \frac{e^{-\alpha s} - \beta e^{i\lambda(s-\theta)}}{1 - \beta e^{-i\lambda\theta}},$$

$$\tilde{y}(s) = e^{-\alpha s}\sum_{k=0}^{\infty}\beta^k x(-k\theta) - \sum_{k=0}^{\infty}\beta^k x(s-k\theta).$$

<u>Primer 6.</u>

Neka je $X(t)$ kao i u predhodnom primeru i neka je $Y(t)$ θ-transformacija drugog reda procesa $X(t)$.

(a) Ako je $s \geq 2\theta$ biće $(\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0)$

$$K_y(s-t) = cKe^{\alpha t}, \quad K = \frac{\pi}{\alpha}(1+a_1e^{-\alpha\theta}+a_2e^{-2\alpha\theta})(1+a_1e^{\alpha\theta}+a_2e^{2\alpha\theta}),$$

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t}\varphi_1(\lambda)\frac{d\lambda}{\lambda^2+\alpha^2},$$

$$\xi(t) = c_1\alpha_1^{t/\theta} + c_2\alpha_2^{t/\theta} + pe^{\alpha t},$$

$$p = \frac{\pi}{\alpha}(1+a_1e^{+\alpha\theta}+a_2e^{2\alpha\theta})e^{-\alpha s},$$

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)\xi(t) = c_1\left(\alpha + \frac{\ln\alpha_1}{\theta}\right)\alpha_1^{t/\theta} + c_2\left(\alpha + \frac{\ln\alpha_2}{\theta}\right)\alpha_2^{t/\theta} + 2\alpha pe^{\alpha t},$$

$$P\left(-\frac{d}{dt}\right)\xi(t) = c_1\left(\alpha - \frac{\ln\alpha_1}{\theta}\right)\alpha_1^{t/\theta} + c_2\left(\alpha - \frac{\ln\alpha_2}{\theta}\right)\alpha_2^{t/\theta}.$$

Iz graničnog uslova

$$P\left(-\frac{d}{dt}\right)\xi \to 0 \quad, t \to -\infty$$

dobijamo $C_1 = C_2 = 0$, tako da je

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)\xi(t) = 2\alpha pe^{\alpha t}[1-H(t)], \quad P\left(-\frac{d}{dt}\right)P\left(\frac{d}{dt}\right)\xi(t) = 2p\alpha\,\delta(t),$$

$$\varphi_1(\lambda) = \frac{\alpha}{\pi}p = (1+a_1e^{\alpha\theta}+a_2e^{2\alpha\theta})e^{-\alpha s},$$

$$\varphi(\lambda) = \frac{(1+a_1e^{\alpha\theta}+a_2e^{2\alpha\theta})e^{-\alpha s}}{(1-\alpha_1e^{-i\lambda\theta})(1-\alpha_2e^{-i\lambda\theta})},$$

$$\varphi(\lambda) = \frac{\phi_s^{x}(\lambda)+a_1\phi_{s-\theta}^{x}(\lambda)+a_2\phi_{s-2\theta}^{x}(\lambda)}{(1-\alpha_1e^{-i\lambda\theta})(1-\alpha_2e^{-i\lambda\theta})}.$$

(b) Ako je $\theta \leq s \leq 2\theta$ imaćemo

$$K_y(s-t)=c\left[pe^{\alpha t}+(q_1e^{-\alpha t}+q_2e^{\alpha t})H(t-s+2\theta)\right],$$

$$q_1=a_1^*\cdot\frac{\pi}{\alpha}e^{-\alpha(s-2\theta)},\quad q_2=-a_2^*\cdot\frac{\pi}{\alpha}e^{-\alpha(s-2\theta)},$$

$$\xi(t)=pe^{\alpha t}+(q_1e^{-\alpha t}+q_2e^{\alpha t})H(t-s+\theta)+c_1\alpha_1^{t/\theta}+c_2\alpha_2^{t/\theta},$$

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)\xi(t)=c_1\left(\alpha+\frac{\ln\alpha_1}{\theta}\right)\alpha_1^{t/\theta}+c_2\left(\alpha+\frac{\ln\alpha_2}{\theta}\right)\alpha_2^{t/\theta}+$$

$$+2\alpha pe^{\alpha t}+2\alpha q e^{\alpha t}H(t-s+2\theta),$$

$$P\left(-\frac{d}{dt}\right)\xi(t)=c_1\left(\alpha-\frac{\ln\alpha_1}{\theta}\right)\alpha_1^{t/\theta}+c_2\left(\alpha-\frac{\ln\alpha_2}{\theta}\right)\alpha_2^{t/\theta}+$$

$$+2\alpha q_1e^{-\alpha t}H(t-s+2\theta),$$

$$c_1=0,\quad c_2=0,$$

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)\xi(t)=2\alpha pe^{\alpha t}[1-H(t)]+2\alpha q_2e^{\alpha t}[H(t-s+2\theta)-H(t)],$$

$$P\left(-\frac{d}{dt}\right)P\left(\frac{d}{dt}\right)\xi(t)=2(\alpha p+q_2)\delta(t)-2q_2e^{\alpha(s-2\theta)}\delta(t-s+2\theta),$$

$$\varphi_1(\lambda)=e^{-\alpha s}(1+a_1e^{\alpha\theta})+a_2e^{i\lambda(s-2\theta)},$$

$$\varphi(\lambda)=\frac{e^{-\alpha s}(1+a_1e^{\alpha\theta})+a_2e^{i\lambda(s-2\theta)}}{(1-\alpha_1e^{-i\lambda\theta})(1-\alpha_2e^{-i\lambda\theta})}.$$

(c) Ako je $0 \leq s \leq \theta$ imaćemo

$$K_y(s-t) = C\left[p e^{\alpha t} + (q_1 e^{-\alpha t} + q_2 e^{\alpha t}) H(t-s+2\theta) + \right.$$

$$\left. + (r_1 e^{-\alpha t} + r_2 e^{\alpha t}) H(t-s+\theta)\right],$$

$$r_1 = \frac{\pi}{\alpha} a_1 (1+a_2) e^{\alpha(s-\theta)}, \quad r_2 = -\frac{\pi}{\alpha} a_1 (1+a_2) e^{-\alpha(s-\theta)},$$

$$\varphi_1(\lambda) = e^{-\alpha s} + a_1 e^{i\lambda(s-\theta)} + a_2 e^{i\lambda(s-2\theta)},$$

$$\varphi(\lambda) = \frac{e^{-\alpha s} + a_1 e^{i\lambda(s-\theta)} + a_2 e^{i\lambda(s-2\theta)}}{(1-\alpha_1 e^{-i\lambda\theta})(1-\alpha_2 e^{-i\lambda\theta})}.$$

Treća glava

INTERPOLACIJA I FILTRACIJA

3.1. INTERPOLACIJA

Neka su poznate vrednosti procesa $X(t)$ (sa $EX(t)=0$) pri $t\leq 0$ i $t\geq T$ ($T>0$) i neka je potrebno naći najbolju linearnu aproksimaciju $\hat{X}(s)$ vrednosti $X(s), 0<s<T$ pomoću tih poznatih vrednosti. Neka je $H_{0;T}(X)$ podprostor $H(X)$, generiran familijom vektora $X(t)$ za koje je $t\leq 0$ ili $t\geq T$. Tada je $\hat{X}(s)$ podnožje normale spuštene iz $\xi(s)$ na $H_{0;T}(X)$. Ako je

$$\hat{X}(s)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi_{s,T}^{X}(\lambda)\,dZ(\lambda)$$

tada se funkcija $\phi_{s,T}^{X}(\lambda)$ naziva spektralna karakteristika interpolacije. Ona je jednoznačno određena sledećim uslovima :

$$1^\circ \quad \int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda t}[e^{i\lambda s}-\phi_{s,T}^{X}(\lambda)]f_X(\lambda)\,d\lambda=0,\ t\leq 0 \text{ ili } t\geq T,$$

$$2^\circ \quad \phi_{s,T}^{X}(\lambda)\in L_{0;T}^{2}(F_X),$$

gde je $L_{0;T}^{2}(X)$ podprostor funkcija sa integrabilnim po $dF_X(\lambda)=f_X(\lambda)d\lambda$ kvadratom modula, generiran funkcijama $e^{i\lambda t}$ za $t\leq 0$ ili $t\geq T$.

Offormi spektralne karakteristike interpolacije govori sledeća lema.

Lema 3.1.1.

Da bi funkcija $\phi(\lambda)$ bila spektralna karakteristika interpolacije po vrednostima stacionarnog procesa za $t \leq 0$ i $t \geq T$ ($T>0$) dovoljno je da se funkcije $\phi(\lambda)$ i $\psi(\lambda) = [e^{i\lambda s} - \phi(\lambda)] f(\lambda)$ mogu produžiti u oblast kompleksnih vrednosti λ tako da budu ispunjeni sledeći uslovi :

(a) Važi razlaganje

$$\phi(\lambda) = \sum_j e^{-i\lambda t_j^{(1)}} \cdot R_j^{(1)}(\lambda) + e^{i\lambda T} \sum_j e^{i\lambda t_j^{(2)}} \cdot R_j^{(2)}(\lambda), \tag{3.1.1}$$

gde je $t_j^{(1)} \geq 0$, $t_j^{(2)} \geq 0$ i $R_j^{(1)}$ i $R_j^{(2)}$ - racionalne funkcije argumenta λ i

$$\phi_1(\lambda) = \sum_j e^{-i\lambda t_j^{(1)}} R_j^{(1)}(\lambda) \tag{3.1.2}$$

je analitička funkcija u donjoj poluravni, a funkcija

$$\phi_2(\lambda) = \sum_j e^{+i\lambda t_j^{(2)}} R_j^{(2)}(\lambda) \tag{3.1.3}$$

je analitička funkcija u gornjoj poluravni λ ;

(b) Funkcija $\psi(\lambda) = [e^{i\lambda s} - \phi(\lambda)] f(\lambda)$, gde je $f(\lambda)$ spektralna gustina procesa je cela funkcija λ , koja opada pri $|\lambda| \to \infty$ u gornjoj poluravni ne sporije od $|\lambda|^{-\varepsilon_1}$, $\varepsilon_1 > 1$, a funkcija $e^{-i\lambda T}\psi(\lambda)$ opada pri $|\lambda| \to \infty$ u donjoj poluravni ne sporije od $|\lambda|^{-\varepsilon_2}$, $\varepsilon_2 > 1$.

(c) $\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_j(\lambda)|^2 f(\lambda) d\lambda < \infty$, $j = 1, 2$.

D o k a z lema ovog tipa se može naći u [12] . Mi ga ovde nećemo navoditi.

Teorema 3.1.1.

Neka je $0<s<T$ i neka je $y(t)$ θ -transformacija reda N procesa $X(t)$ sa racionalnom spektralnom gustinom (1.2.10). Neka je, dalje, $[\frac{s}{\theta}]=r$, $[\frac{T}{\theta}]=\ell$, $[\frac{T-s}{\theta}]=\nu$ i neka je potrebno izvršiti linearnu interpolaciju vrednosti $X(s)$ na osnovu podataka za $t\leq 0$ i $t\geq T$. Tada spektralna karakteristika interpolacije procesa $y(t)$ ima oblik

$$\text{(3.1.4)} \quad \phi_{s,T}^{y}(\lambda)=\left|\sum_{k=0}^{N}a_k e^{-i\lambda k\theta}\right|^{-2}\cdot\left\{R_1(\lambda)\sum_{j=0}^{\ell}A_j e^{i\lambda j\theta}+\right.$$

$$\left.+e^{i\lambda T}R_2(\lambda)\sum_{j=-\ell}^{0}B_j e^{i\lambda j\theta}+e^{i\lambda s}\sum_{j=-r}^{\nu}C_j e^{i\lambda j\theta}\right\}.$$

pri čemu se koeficijenti A_j, B_j , C_j određujum iz sistema linearnih jednačina

$$\text{(3.1.5)} \quad \sum_{k=0}^{\ell}A_k d_{-k+j}=0 \quad , \; j=\overline{1,\ell} \; ,$$

$$\text{(3.1.6)} \quad \sum_{k=-\nu-r}^{0}B_k d_{-k+j}=0 \quad , \; j=\overline{-r-\nu,0} \; ,$$

$$\text{(3.1.7)} \quad \sum_{k=-r}^{\nu}C_k d_{-k+j}=0 \quad , \; j=\overline{-r,\nu}$$

u kojima su koeficijenti d_k određeni jednakošću

$$\text{(3.1.8)} \quad \left|\sum_{k=0}^{N}a_k e^{-i\lambda k\theta}\right|^{-2}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}d_k e^{i\lambda k\theta}$$

i funkcije $R_1(\lambda)$ i $R_2(\lambda)$ su racionalne funkcije.

D o k a z . Polazeći od forme koju ima spektralna karakteristika interpolacije u slučaju racionalnih spektralnih gustina i od forme spektralne karakteristike ekstrapolacije unapred i unazad, zaključujemo da spektralnu karakteristiku interpolacije u našem slučaju treba tražiti u obliku

$$\phi^{y}_{s,T}(\lambda)=\left|\sum_{k=0}^{N}a_k e^{-i\lambda k\theta}\right|^{-2}\Big\{R_1(\lambda)\sum_{j=-\infty}^{\infty}A_j e^{i\lambda j\theta}+$$
$$+e^{i\lambda T}R_2(\lambda)\sum_{j=-\infty}^{\infty}B_j e^{i\lambda j\theta}+e^{i\lambda s}\sum_{j=-\infty}^{\infty}c_j e^{i\lambda j\theta}\Big\}.$$

Prema ranijim oznakama dobijamo da je

$$\psi^{*}(\lambda)=e^{i\lambda s}\Big[\sum_{j=-N}^{N}a_j^{*}e^{i\lambda j\theta}-\sum_{j}c_j e^{i\lambda j\theta}\Big]-$$
$$-R_1(\lambda)\sum_{j}A_j e^{i\lambda j\theta}-e^{i\lambda T}R_2(\lambda)\sum_{j}B_j e^{i\lambda j\theta}$$

kao i

$$e^{-i\lambda T}\psi^{*}(\lambda)=e^{i\lambda(s-T)}\Big[\sum_{-N}^{N}a_j^{*}e^{i\lambda j\theta}-\sum_{j}c_j e^{i\lambda j\theta}\Big]-$$
$$-e^{-i\lambda T}R_1(\lambda)\sum_{j}A_j e^{i\lambda j\theta}-R_2(\lambda)\sum_{j}B_j e^{i\lambda j\theta}.$$

Odatle zaključujemo da u slučaju $\tau\geqslant N$, $\nu\geqslant N$, $\ell\geqslant\tau+N$ mora biti ispunjeno

$$A_j=0\ ,\ j\leq -1\ \ i\ \ j\geqslant \ell+1\,;$$
$$B_j=0\ ,\ j\leq -\tau-\nu-1\ \ i\ \ j\geqslant 1\,;$$
$$C_j=0\ ,\ j\leq -\tau-1\ \ i\ \ j\geqslant \nu+1$$

da bi bili ispunjeni svi uslovi leme 3.1.1. To znači da u tom slučaju je

$$\phi^{y}_{s,T}(\lambda)=\left|\sum_{k=0}^{N}a_k e^{-i\lambda k\theta}\right|^{-2}\Big\{R_1(\lambda)\sum_{j=0}^{\ell}A_j e^{i\lambda j\theta}+$$
$$+e^{i\lambda T}R_2(\lambda)\sum_{j=-\tau-\nu}^{0}B_j e^{i\lambda j\theta}+e^{i\lambda s}\sum_{j=-\tau}^{\nu}c_j e^{i\lambda j\theta}\Big\}.$$

Za određivanje koeficijenata $A_0, A_1,\dots, A_\ell\,; B_{-\tau-\nu}, B_{-\tau-\nu+1},\dots, B_0, C_{-\tau}, C_{-\tau+1},\dots, C_\nu$ koji se u poslednjem izrazu javljaju poslužićemo se sledećim činjenicama .

Iz (3.1.8) i jednakosti

$$\left|\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-i\lambda k\theta}\right|^{-2} \cdot \sum_{j=0}^{\ell} A_j e^{i\lambda j\theta} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j^{*} e^{i\lambda j\theta},$$

$$\left|\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-i\lambda k\theta}\right|^{-2} \cdot \sum_{j=-r-\nu}^{0} B_j e^{i\lambda j\theta} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} B_j^{*} e^{i\lambda j\theta},$$

$$\left|\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-i\lambda k\theta}\right|^{-2} \cdot \sum_{j=-r}^{\nu} c_j e^{i\lambda j\theta} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j^{*} e^{i\lambda j\theta},$$

a da bi bili ispunjeni uslovi (3.1.1) , (3.1.2) i (3.1.3) leme 3.1.1. mora biti

$$A_j^{*} \equiv \sum_{k=0}^{\ell} A_k d_{-k+j} = 0, \quad j=\overline{1,\ell}$$

$$B_j^{*} \equiv \sum_{k=-r-\nu}^{0} B_k d_{-k+j} = 0, \quad j=\overline{-r-\nu,-1}$$

$$c_j^{*} \equiv \sum_{k=-r}^{\nu} c_k d_{-k+j} = 0, \quad j=\overline{-r,\nu}$$

odnosno moraju važiti (3.1.5) , (3.1.6) i (3.1.7).

To i jeste sistem linearnih jednačina iz kojeg se određuju koeficijenti $A_j, j=\overline{0,\ell}$, zatim $B_j, j=\overline{-\ell,0}$ odnosno $c_j, j=\overline{-r,\nu}$, pri čemu možemo smatrati kao i ranije da je $A_0=B_0=C_0=1$.

Teorema 3.1.2.

Neka su uz oznake iz predhodne teoreme $r\geq N$, $\nu<N$ (tj. $\ell\geq N$). Tada je

$$(3.1.10)\quad \phi^{y}_{s,T}(\lambda)=\Big|\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-i\lambda k\theta}\Big|^{-2}\Big\{R_1(\lambda)\sum_{j=0}^{\ell} A_j e^{i\lambda j\theta}+ e^{i\lambda T}R_2(\lambda)\sum_{j=-\ell}^{0} B_j e^{i\lambda j\theta}+e^{i\lambda s}\sum_{j=-r}^{N} c_j e^{i\lambda j\theta}\Big\},$$

gde su $c_j=a_j^*$ za $j=\overline{\nu+1, N}$, a ostali koeficijenti se određuju iz sistema linearnih jednačina.

Teorema 3.1.3.

U slučaju $r<N, \nu\geqslant N$ spektralna karakteristika interpolacije $\phi^{y}_{s,T}(\lambda)$ ima oblik

$$(3.1.11)\quad \phi^{y}_{s,T}(\lambda)=\Big|\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-i\lambda k\theta}\Big|^{-2}\Big\{R_1(\lambda)\sum_{j=0}^{\ell} A_j e^{i\lambda j\theta}+ e^{i\lambda T}R_2(\lambda)\sum_{j=-\ell}^{0} B_j e^{i\lambda j\theta}+e^{i\lambda s}\sum_{j=-N}^{\nu} c_j e^{i\lambda j\theta}\Big\},$$

gde je $c_j=a_j^*$ za $j=\overline{-N, -r-1}$.

Teorema 3.1.4.

U slučaju $r<N$, $\nu<N$, $\ell\geqslant N$ spektralna karakteristika interpolacije $\phi^{y}_{s,T}(\lambda)$ je oblika

$$(3.1.12)\quad \phi^{y}_{s,T}(\lambda)=\Big|\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-i\lambda k\theta}\Big|^{-2}\Big\{R_1(\lambda)\sum_{j=0}^{\ell} A_j e^{i\lambda j\theta}+ e^{i\lambda T}R_2(\lambda)\sum_{j=-\ell}^{0} B_j e^{i\lambda j\theta}+e^{i\lambda s}\sum_{j=-N}^{N} c_j e^{i\lambda j\theta}\Big\},$$

gde je $c_j=a_j^*$ pri $j=\overline{-N,-r-1}$ kao i pri $j=\overline{\nu+1, N}$

D o kaa z u svakoj od poslednjih triju teorema je analogan dokazu teoreme 3.1.1. Umesto toga posmatrajmo posebno slučaj N = 1 iz koga će se moći da vidi ideja dokaza.

<u>Slučaj N = 1.</u>

Spektralnu karakteristiku interpolacijetražimo u obliku

$$\phi^{y}_{s,T}(\lambda)=\frac{1}{(1-\beta e^{-i\lambda\theta})(1-\beta e^{i\lambda\theta})}\Big\{R_1(\lambda)\sum_{k=-\infty}^{\infty}A_k e^{i\lambda k\theta}+$$
$$+e^{i\lambda T}R_2(\lambda)\sum_{k=-\infty}^{\infty}B_k e^{i\lambda k\theta}+e^{i\lambda s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{i\lambda k\theta}\Big\}$$

te dobijamo

$$\psi^*(\lambda)=e^{i\lambda s}\Big[\sum_{j=-1}^{1}a_j^* e^{i\lambda s}-\sum_{k}c_k e^{i\lambda k\theta}\Big]-$$
$$-R_1(\lambda)\sum_{k}A_k e^{i\lambda k\theta}-e^{i\lambda T}R_2(\lambda)\sum_{k}B_k e^{i\lambda k\theta},$$

odnosno

$$e^{-i\lambda T}\psi^*(\lambda)=e^{i\lambda(s-T)}\Big[\sum_{-1}^{1}a_j^* e^{i\lambda j\theta}-\sum_{k}c_k e^{i\lambda k\theta}\Big]-$$
$$-R_1(\lambda)e^{-i\lambda T}\sum_{k}A_k e^{i\lambda k\theta}-R_2(\lambda)\sum_{k}B_k e^{i\lambda k\theta}.$$

(a) U slučaju $l=0$ (koji povlači i $r=0$, $\nu=0$) imamo sledeće uslove iz kojih određujemo koeficijente :

$A_j=0\quad,\ j\neq 0;$

$B_j=0\quad,\ j\neq 0;$

$C_j=0\quad,\ j=\pm 2,\pm 3,\dots\quad,\ c_{-1}=c_1=a_1^*.$

Zato je

$$\phi^{y}_{s,T}(\lambda)=\frac{1}{(1-\beta e^{-i\lambda\theta})(1-\beta e^{i\lambda\theta})}\Big\{A_0R_1(\lambda)+$$
$$+B_0 e^{i\lambda T}R_2(\lambda)+e^{i\lambda s}(c_{-1}e^{-i\lambda\theta}+c_0+c_1e^{i\lambda\theta})\Big\}$$

gde je $c_{-1}=c_1=-\beta, c_0=2\beta^2$. Pošto možemo smatrati da je $A_0 = B_0 = 1$ imamo

$$\phi^{y}_{s,T}(\lambda)=\frac{R_1(\lambda)+e^{i\lambda T}R_2(\lambda)+e^{i\lambda s}(2\beta^2-\beta e^{-i\lambda\theta}-\beta e^{i\lambda\theta})}{(1-\beta e^{-i\lambda\theta})(1-\beta e^{i\lambda\theta})},$$

gde su R_1 i R_2 racionalne funkcije

$$R_1(\lambda)=\frac{\omega^{(1)}(\lambda)}{|B(\lambda)|^2}, \quad R_2(\lambda)=\frac{\omega^{(2)}(\lambda)}{|B(\lambda)|^2}$$

kod kojih su polinomi u brojiocu stepena (n - m - 1).

Iz forme pisanja

$$\phi^{y}_{s,T}(\lambda)=\sum_{-\infty}^{\infty} b_k e^{i\lambda k\theta}\{R_1(\lambda)+e^{i\lambda T}R_2(\lambda)+$$
$$+e^{i\lambda s}(c_0-\beta e^{-i\lambda\theta}-\beta e^{i\lambda s})=R_1(\lambda)\sum_{-\infty}^{\infty} b_k e^{i\lambda k\theta}+$$
$$+e^{i\lambda T}R_2(\lambda)\sum_{-\infty}^{\infty} b_k e^{i\lambda k\theta}+c_0 e^{i\lambda s}\sum_{-\infty}^{\infty} b_k e^{i\lambda k\theta}-$$
$$-\beta e^{i\lambda(s-\theta)}\sum_{-\infty}^{\infty} b_k e^{i\lambda k\theta}-\beta e^{i\lambda(s+\theta)}\sum_{-\infty}^{\infty} b_k e^{i\lambda k\theta}\equiv$$
$$\equiv g_1(\lambda)+e^{i\lambda T}g_2(\lambda)$$

i leme 3.1.1. zaključujemo da kod funkcije $g_1(\lambda)$ svi eksponenti moraju biti ≤ 0 , a kod funkcije $g_2(\lambda)$ svi moraju biti ≥ 0. Te uslove ne zadovoljavaju jedino vrednosti pri k = 0 u trećoj, pri k = 1 u četvrtoj i pri k = -1 u petoj sumi. Znači, mora biti $c_0 b_0-\beta b_1-\beta b_{-1}=0$ što i daje $c_0=2\beta^2$.

(b) Neka je $n=0$, $\nu=0$, $\ell=1$. Tada se koeficijenti određuju iz uslova

$$A_j = 0 \quad \text{za} \quad j \le -1 \quad \text{i} \quad j \ge 2 ,$$
$$B_j = 0 \quad , \quad j \le -2 \quad , \quad j \ge 1$$
$$C_j = 0 \quad , \quad |j| \ge 2 \quad , c_{-1} = c_1 = a_1^* = -\beta$$

te se zato dobija

$$\phi_{s,T}^{y}(\lambda) = \frac{1}{(1-\beta e^{-i\lambda\theta})(1-\beta e^{i\lambda\theta})} \{ R_1(\lambda)[1 + A_1 e^{i\lambda\theta}] +$$
$$+ e^{i\lambda T} R_2(\lambda)[1 + B_1 e^{-i\lambda\theta}] + e^{i\lambda s}[c_{-1} e^{-i\lambda\theta} + c_0 + c_{-1} e^{i\lambda\theta}]\}.$$

(c) Neka je $r=1$, $\nu=0$ (tj. $\ell=1$ ili $\ell=2$). Tada se koeficijenti određuju iz uslova

$$A_j = 0 , \; j \le -1 \quad , \; j \ge \ell+1 ,$$
$$B_j = 0 \; , j \le -\ell-1 \; , \; j \ge 1 ,$$
$$c_j = 0 \quad , |j| \ge 2 \quad , \; c_{-1} = c_1 = a_1^* = -\beta$$

koji će nam dati

$$\phi_{s,T}^{y}(\lambda) = \frac{1}{(1-\beta e^{-i\lambda\theta})(1-\beta e^{i\lambda\theta})} \{ R_1(\lambda) \sum_{0}^{\ell} A_j e^{i\lambda j\theta} +$$
$$+ e^{i\lambda T} R_2(\lambda) \sum_{-\ell}^{0} B_j e^{+i\lambda j\theta} + e^{i\lambda s} \sum_{-1}^{1} c_j e^{i\lambda j\theta} \}.$$

(d) U slučaju $r=0$, $\nu=1$ (iz kojih sledi $\ell=1$ ili $\ell=2$ koeficijenti se određuju iz uslova

$$A_j = 0 , \; j \le -1 \; , \; j \ge \ell+1 ;$$
$$B_j = 0 \; , j \le -\ell-1 \; , \; j \ge 1 ,$$
$$C_j = 0 \quad , |j| \ge 2 \quad , \; c_{-1} = c_1 = -\beta$$

i dobija se rešenje u formi iz slučaja (c).

(e) Ako je $r \geq 1$, $\ell \geq 1$ koeficijenti se određuju iz

$A_j = 0$, $j \leq -1$, $j \geq \ell+1$,

$B_j = 0$, $j \leq -\ell-1$, $j \geq 1$,

$C_j = 0$, $j \leq -r-1$, $j \geq \nu+1$

i zato je

$$\phi^{Y}_{s,T}(\lambda) = \frac{1}{(1-\beta e^{-i\lambda\theta})(1-\beta e^{i\lambda\theta})} \Big\{ R_1(\lambda) \sum_{0}^{\ell} A_j e^{i\lambda j\theta} +$$

$$+ e^{i\lambda T} R_2(\lambda) \sum_{-\ell}^{0} B_j e^{i\lambda j\theta} + e^{i\lambda s} \sum_{-r}^{\nu} C_j e^{i\lambda j\theta} \Big\}.$$

Teorema 3.1.5.

Ako su procesi $X(t)$ i $Y(t)$ povezani u (3.1.2) i ako je $Y(t)$ proces sa racionalnom spektralnom gustinom (1.2.10), tada spektralna karakteristika interpolacije $X(s)$ na osnovu poznavanja tog procesa za $t \leq 0$ i $t \geq T$ ima oblik

$$\phi^{X}_{s,T}(\lambda) = \Big| \sum_{0}^{N} a_j e^{-i\lambda j\theta} \Big|^2 \Big\{ R_1(\lambda) \sum_{0}^{\ell} A_j e^{i\lambda j\theta} + \tag{3.1.13}$$

$$+ e^{i\lambda T} R_2(\lambda) \sum_{-\ell}^{0} B_j e^{i\lambda j\theta} + e^{i\lambda s} \sum_{-r}^{\nu} C_j e^{i\lambda j\theta} \Big\}$$

pri čemu se koeficijenti A_j, B_j i C_j određuju iz sistema linearnih jednačina

$$A_j^{*} = 0, \quad j = \overline{1,\ell} \tag{3.1.14}$$

$$B_j^{*} = 0, \quad j = \overline{-\ell,-1} \tag{3.1.15}$$

$$C_j^{*} = 0, \quad j = \overline{-r,\nu} \tag{3.1.16}$$

pri čemu su koeficijenti d_j određeni sa (3.1.8).

D o k a z . Kao i u slučaju teoreme 3.1.1. zaključujemo da funkciju $\phi^{x}_{s,T}(\lambda)$ treba tražiti u obliku

$$\phi^{x}_{s,T}(\lambda)=|\sum_{0}^{N} a_j e^{-i\lambda j\theta}|^2 \{R_1(\lambda)\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{i\lambda k\theta}+$$

$$+e^{i\lambda T}R_2(\lambda)\sum_{-\infty}^{\infty} B_k e^{i\lambda k\theta}+e^{i\lambda s}\sum_{-\infty}^{\infty} c_k e^{i\lambda k\theta}\}$$

i zato je

$$\psi^*(\lambda)=e^{i\lambda s}\left[|\sum_{0}^{N} a_k e^{-i\lambda k\theta}|^{-2}-\sum_{k} c_k e^{i\lambda k\theta}\right]-$$

$$-R_1(\lambda)\sum_{k} A_k e^{i\lambda k\theta}-e^{i\lambda T}R_2(\lambda)\sum_{k} B_k e^{i\lambda k\theta}=$$

$$=e^{i\lambda s}\left[\sum_{-\infty}^{\infty}(d_k-c_k)e^{i\lambda k\theta}\right]-$$

$$-R_1(\lambda)\sum_{k} A_k e^{i\lambda k\theta}-e^{i\lambda T}R_2(\lambda)\sum_{k} B_k e^{i\lambda k\theta}$$

odnosno

$$e^{-i\lambda T}\psi^*(\lambda)=e^{i\lambda(s-T)}\sum_{-\infty}^{\infty}(d_k-c_k)e^{i\lambda k\theta}-$$

$$-e^{-i\lambda T}R_1(\lambda)\sum_{k} A_k e^{i\lambda k\theta}-R_2(\lambda)\sum_{k} B_k e^{i\lambda k\theta}.$$

Da bi bili ispunjeni uslovi leme 3.1.1. mora biti

$$A_j=0\ ,\ j\le -1\ ,\ j\ge \ell+1$$

$$B_j=0\ ,\ j\le -\ell-1\ ,\ j\ge 1$$

$$c_j = d_j \;,\; j \leq -r-1 \;,\; j \geq \nu+1$$

što daje

$$\Phi^{*}_{s,T}(\lambda) = \Big|\sum_{0}^{N} a_k e^{-i\lambda k\theta}\Big|^2 \Big\{ R_1(\lambda)\sum_{0}^{\ell} A_k e^{i\lambda k\theta} +$$

$$+ e^{i\lambda T} R_2(\lambda) \sum_{-\ell}^{0} B_k e^{i\lambda k\theta} + e^{i\lambda s}\sum_{-r}^{\nu} c_k e^{i\lambda k\theta} \Big\}.$$

Ako se uvede oznaka

$$\Big|\sum_{0}^{N} a_k e^{-i\lambda k\theta}\Big|^2 = \sum_{-N}^{N} a_k^{*} e^{i\lambda k\theta}$$

imaćemo

$$\sum_{-N}^{N} a_j^{*} e^{i\lambda j\theta} \cdot \sum_{0}^{\ell} A_j e^{i\lambda j\theta} = \sum_{-N}^{N+\ell} A_j^{*} e^{i\lambda j\theta},$$

$$\sum_{-N}^{N} a_j^{*} e^{i\lambda j\theta} \cdot \sum_{-\ell}^{0} B_j e^{i\lambda j\theta} = \sum_{-N-\ell}^{N} B_j^{*} e^{i\lambda j\theta},$$

$$\sum_{-N}^{N} a_j^{*} e^{i\lambda j\theta} \cdot \sum_{-r}^{\nu} c_j e^{i\lambda j\theta} = \sum_{-N-r}^{N+r} c_j^{*} e^{i\lambda j\theta}$$

i tako dobijamo sisteme linearnih jednačina (3.1.14), (3.1.15) i (3.1.16).

Razmotrimo sada jedan specijalan slučaj.

<u>Slučaj N = 1.</u>

Uslovi za određivanje koeficijenata u ovom slučaju glase

$$d_j = c_j \;,\; j \leq -r-1 \;;\; j \geq \nu+1,$$

$$A_j = 0 \ , \ j \leq -1 \quad i \quad j \geq \ell+1 \, ,$$

$$B_j = 0 \ , \ j \leq -\ell-1 \quad i \quad j \geq 1$$

i pomoću njih se dobija

$$\phi^{*}_{s,T}(\lambda) = (1-\beta e^{-i\lambda\theta})(1-\beta e^{i\lambda\theta})\Big[R_1(\lambda)\sum_{0}^{\ell} A_j e^{i\lambda j\theta} +$$

$$+ e^{i\lambda T} R_2(\lambda) \sum_{-\ell}^{0} B_j e^{i\lambda j\theta} + \sum_{-\infty}^{\infty} C_j e^{i\lambda j\theta}\Big] \, ,$$

gde je $d_j = c_j$ za $j \leq -r-1$ i za $j \geq \nu+1$.

Iz jednakosti

$$(1-\beta e^{-i\lambda\theta})(1-\beta e^{i\lambda\theta}) = (1+\beta^2) - \beta e^{-i\lambda\theta} - \beta e^{i\lambda\theta} \, ,$$

$$(1-\beta e^{-i\lambda\theta})(1-\beta e^{i\lambda\theta}) \sum_{-\infty}^{\infty} A_j e^{i\lambda j\theta} = \sum_{-\infty}^{\infty} A_j^{*} e^{i\lambda j\theta}$$

koristeći lemu 3.1.1. dobijamo sistem jednačina

$$-\beta A_{j-1} + (1+\beta^2) A_j - \beta A_{j+1} = 0 \ , \ j = \overline{1,\ell}$$

iz kojeg se određuju $A_1, A_2, \dots, A_\ell$ (pošto je $A_0 = 1$, $A_{\ell+1} = 0$). Koeficijenti B_j i C_j se nalaze analognim načinom.

Na osnovu dosadašnjih zaključaka i metodike dokazivanja nije teško ustanoviti da važe i sledeće dve teoreme.

Teorema 3.1.6.

Ako je $X(t)$ proces sa racionalnom spektralnom gustinom, proces $Y(t)$ određen sa (1.3.2) i poznate su njegove realizacije na dva segmenta $[T_1, 0]$ i $[0, T_2]$, tada njegova spektralna karakteristika interpolacije ima oblik

(3.1.17) $$\Phi_s^y(\lambda) = R_1(\lambda)\Big\{\sum_{j_1} A_{j_1} e^{-i\lambda j_1\theta} + \sum_{j_2} B_j e^{i\lambda j_2\theta}\Big\} + e^{i\lambda T} R_2(\lambda)\Big\{\sum_{j_3} C_{j_3} e^{-i\lambda j_3\theta} + \sum_{j_4} D_{j_4} e^{i\lambda j_4\theta}\Big\} + e^{i\lambda s}\Big\{\sum_{j_5} P_{j_5} e^{-i\lambda j_5\theta} + \sum_{j_6} Q_{j_6} e^{i\lambda j_6\theta}\Big\},$$

gde se sumiranje vrši po svim onim vrednostima j_1 za koje je $-j_1\theta \in [T_1, 0]$, isto tako mora biti $j_2\theta \in [T, T_2]$, $T - j_3\theta \in [T_1, 0]$, $T_1 + j_4\theta \in [T, T_2]$, $s - j_5\theta \in [T_1, 0]$, $s + j_6\theta \in [T, T_2]$.

<u>Teorema 3.1.7.</u>

Ako je proces $Y(t)$ iz (1.3.2) sa racionalnom spektralnom gustinom i poznate su vrednosti procesa $X(t)$ za $t \in [T_1, 0]$ i $t \in [T, T_2]$, tada njegova spektralna karakteristika interpolacije ima oblik kao (3.1.17) i broj sabiraka u četvrtoj sumi ne može biti veći od (N + 1), a u ostalim ne može biti veći od N.

3.2. FILTRACIJA

Neka je dat stacionaran slučajni proces

(3.2.1) $$Y(t) = U(t) + V(t)$$

kod koga su "koristan signal" $U(t)$ i "šum" $V(t)$, takođe, stacionarni slučajni procesi. Pretpostavljaćemo da je $EU(t) = EV(t) = 0$, da su poznate vrednosti procesa $Y(t)$ u celoj prošlosti, da je potrebno ustanoviti vrednost $U(t)$ u momentu s ($s>0$). Ako se radi o realnim slučajnim procesima $U(t)$ i $V(t)$ koji su međusobno nekorelirani: $EU(t_1)V(t_2)=0$ i ako su poznate njihove spektralne gustine $f_u(\lambda)$, $f_v(\lambda)$ i $f_y(\lambda)$ tada problem najbolje (u smislu metode najmanjih kvadrata) linearne ocene - aproksimacije se sastoji u nalaženju spektralne karakteristike ekstrapolacije $\phi_s(\lambda)$ tako da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t}\left[e^{i\lambda s} f_u(\lambda) - \phi_s(\lambda) f_y(\lambda)\right] d\lambda = 0,\ t \leq 0 . \tag{3.2.2.}$$

<u>Lema 3.2.1.</u>

Da bi funkcija $\phi_s(\lambda)$ bila spektralna karakteristika filtracije dovoljno je da budu ispunjeni sledeći uslovi :

1° Funkcija $\phi_s(\lambda)$ je analitička funkcija λ u donjoj poluravni i pri $|\lambda|\to\infty$ raste ne brže od nekog stepena od $|\lambda|$;

2° Funkcija

$$\Psi_s(\lambda) = e^{i\lambda s} f_u(\lambda) - \phi_s(\lambda) f_y(\lambda) \tag{3.2.3}$$

je analitička funkcija u gornjoj poluravni i pri $|\lambda|\to\infty$ opada brže nego $|\lambda|^{-\varepsilon}$, $\varepsilon>1$;

3° $$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_s(\lambda)|^2 f_y(\lambda) d\lambda < \infty .$$

Navedena lema je , ustvari, lema Jagloma i njen dokaz se može naći u [12] .

S obzirom na to da je metod koji primenjujemo kod filtracije sličan metodima koji su primenjivani kod ekstrapolacije i interpolacije, nećemo davati ovde rešenja u najopštijem slučaju. Zadovoljićemo se samo slučajem kada je $Y(t)$ jedna θ-transformacija prvog reda, pošto ni taj slučaj još nije proučavan. (Grigorjev koji je prvi, a faktički dosada i jedini, proučavao slučajeve neracionalnih spektralnih gustina, nije se bavio pitanjima filtracije).

Teorema 3.2.1.

Neka je koristan signal $U(t)$ iz (3.2.1) stacionaran slučajni proces sa racionalnom spektralnom gustinom

(3.2.4) $$f_U(\lambda)=C_1\frac{|Q(\lambda)|^2}{|P(\lambda)|^2}=C_1\cdot\frac{|(\lambda-q_1)\cdots(\lambda-q_m)|^2}{|(\lambda-p_1)\cdots(\lambda-p_n)|^2}$$

i neka je proces $Y(t)$ iz (3.2.1) sa gustinom

(3.2.5) $$f_Y(\lambda)=C_2\frac{|D(\lambda)|^2}{|C(\lambda)|^2}=C_2\frac{|(\lambda-\delta_1)\cdots(\lambda-\delta_\ell)|^2}{|(\lambda-\gamma_1)\cdots(\lambda-\gamma_k)|^2}|1-\beta e^{-i\lambda\theta}|^2,$$

gde je $C_1>0, \operatorname{Im}(q_j)>0, \operatorname{Im}(p_j)>0, m<n, C_2>0, \operatorname{Im}(\delta_j)>0, \operatorname{Im}(\gamma_j)>0, \ell<k, |\beta|<1, \theta>0$ i svi koreni polinoma su jednostruki. Tada spektralna karakteristika fultracije na osnovu poznavanja cele prošlosti ima oblik

(3.2.6) $$\Phi_s(\lambda)=\frac{C(\lambda)}{D(\lambda)(1-\beta e^{-i\lambda\theta})}\sum_{j=0}^{n}\frac{A_j}{\lambda-p_j}.$$

D o k a z . Neka je $p_j=\gamma_j$, $j=\overline{1,\nu}$. Uvedimo oznake

(3.2.7) $$p_\nu^*(\lambda)=(\lambda-p_{\nu+1})\cdots(\lambda-p_n),$$

(3.2.8) $$C_\nu^*(\lambda)=(\lambda-\gamma_{\nu+1})\cdots(\lambda-\gamma_k).$$

Tada je

$$\varphi_s(\lambda)=e^{i\lambda s}f_U(\lambda)-\Phi_s(\lambda)f_Y(\lambda)=$$

$$\frac{c_1 e^{i\lambda s}|Q(\lambda)|^2 C_\nu^*(\lambda)\overline{C_\nu^*(\lambda)} - c_2\phi_s(\lambda)|D(\lambda)|^2 P_\nu^*(\lambda)\overline{P_\nu^*(\lambda)}\,|1-\beta e^{-i\lambda\theta}|^2}{|P(\lambda)|^2 C_\nu^*(\lambda)\overline{C_\nu^*(\lambda)}}$$

i iz analitičnosti produženja funkcije $\psi_s(\lambda)$ u gornjoj poluravni λ sledi da brojilac mora biti jednak nuli za vrednosti $\lambda=p_1,\dots,p_n,\gamma_{\nu+1},\dots,\gamma_k$. Drugim rečima, pri tim vrednostima $\lambda=\lambda_j$ mora biti

$$(3.2.9)\qquad \phi_s(\lambda)=\frac{c_1}{c_2}e^{i\lambda_j s}\frac{|Q(\lambda)|^2 C_\nu^*(\lambda_j)\overline{C_\nu^*(\lambda_j)}}{P_\nu^*(\lambda_j)\overline{P_\nu^*(\lambda_j)}|D(\lambda_j)|^2|1-\beta e^{-i\lambda_j\theta}|^2}$$

Iz analitičnosti funkcije $\phi_s(\lambda)$ u donjoj poluravni λ sledi da od singularitata ona može imati samo polove u tačkama $\lambda=\delta_1,\dots,\delta_\ell,p_{\nu+1},\dots,p_n$, a takođe (moguće) i u tačkama λ u gornjoj poluravni u kojima je $|1-\beta e^{-i\lambda\theta}|^2$ jednako nuli. Znači,

$$(3.2.10)\qquad \phi_s(\lambda)=\frac{\pi(\lambda)}{D(\lambda)P_\nu^*(\lambda)(1-\beta e^{-i\lambda\theta})}$$

gde je $\pi(\lambda)$ cela funkcija. Zato je

$$(3.2.11)\qquad \psi_s(\lambda)=\frac{c_1 e^{i\lambda s}|Q(\lambda)|^2\overline{C_\nu^*(\lambda)}-c_2\omega(\lambda)\overline{D(\lambda)}\,\overline{P_\nu^*(\lambda)}(1-\beta e^{i\lambda\theta})}{|P(\lambda)|^2\,\overline{C_\nu^*(\lambda)}}$$

pošto zbog uslova (3.2.9) mora biti

$$\pi(\lambda)=C_\nu^*(\lambda)\,\omega(\lambda)\,,$$

pri čemu je $\omega(\lambda)$ polinom stepena (n - 1). Koeficijenti tog polinoma se određuju iz sledećeg sistema linearnih jednačina

$$(3.2.12)\qquad e^{i\lambda s}\frac{|Q(\lambda)|^2\,\overline{C_\nu^*(\lambda)}}{\overline{D(\lambda)}\,\overline{P_\nu^*(\lambda)}(1-\beta e^{i\lambda\theta})}-\omega(\lambda)=0,\ \lambda=p_1,\dots,p_n.$$

Umesto tih uslova (kojih može biti i veliki broj) možemo posmatrati samo jedan uslov :

Funkcija

$$(3.2.13)\qquad g(\lambda)=e^{i\lambda s}\frac{|Q(\lambda)|^2 C_\nu^*(\lambda)}{P(\lambda)\overline{D(\lambda)}\,\overline{P_\nu^*(\lambda)}(1-\beta e^{-i\lambda\theta})}-\frac{\vartheta(\lambda)}{P(\lambda)}$$

nema polove u tačkama $\lambda=p_1,\dots,p_n$. Pošto imamo razlaganje

$$(3.2.14)\qquad g(\lambda)=\frac{e^{i\lambda s}}{1-\beta e^{i\lambda\theta}}\Big\{\rho(\lambda)+\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j^{(1)}}{\lambda-p_j}+$$

$$+\sum_{j=\nu+1}^{n}\frac{a_j^{(2)}}{\lambda-\overline{p}_j}+\sum_{j,\mu}\frac{b_{j,\mu}}{(\lambda-\delta_j)^{\mu}}-\sum_{j=1}^{n}\frac{\varepsilon_j}{\lambda-p_j}$$

mora biti

$$(3.2.15)\qquad\begin{cases}\varepsilon_j=\dfrac{e^{isp_j}}{1-\beta e^{ip_j\theta}}\,a_j^{(1)}\,, & j=\overline{1,n}\\[2ex] \vartheta(\lambda)=P(\lambda)\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{e^{isp_j}}{1-\beta e^{ip_j\theta}}-\frac{a_j^{(1)}}{\lambda-p_j}\end{cases}$$

što i dovodi do (3.2.6).

<u>Teorema 3.2.2.</u>

Ako je proces $y(t)$ iz teoreme (3.2.1) θ -transformacija reda N procesa $x(t)$ sa racionalnom spektralnom gustinom tada je

$$(3.2.16)\qquad \phi_s(\lambda)=\frac{c(\lambda)}{D(\lambda)\sum_{0}^{N}q_j e^{-i\lambda j\theta}}\sum_{j=1}^{n}\frac{A_j}{\lambda-p_j}\,.$$

<u>Teorema 3.2.3.</u>

Spektralna karakteristika filtracije procesa $y(t)$ iz (1.3.2) na osnovu poznatih vrednosti na segmentu $[T,0]$, $T<0$ ima pri $s>0$ oblik

(3.2.17) $$\varphi_{s,T}(\lambda)=\frac{c(\lambda)}{P(\lambda)D(\lambda)}\Big\{\omega^{(1)}(\lambda)\sum_{j=0}^{\ell}c_j^{(1)}e^{-i\lambda j\theta}+ +\omega^{(2)}(\lambda)\sum_{0}^{\ell}c_j^{(2)}e^{i\lambda(T+j\theta)}\Big\},$$

gde je $\ell=\left[-\frac{T}{\theta}\right]$.

D o k a z . Za funkciju $\Psi_{s,T}(\lambda)$ imamo

$$\Psi_{s,T}(\lambda)=e^{i\lambda s}C_1\frac{|Q(\lambda)|^2}{|P(\lambda)|^2}-C_2\frac{c(\lambda)}{P(\lambda)D(\lambda)}\Big\{\omega^{(1)}(\lambda)\sum_{0}^{\ell}c_j^{(1)}e^{-i\lambda j\theta}+$$

$$+e^{i\lambda T}\omega^{(2)}(\lambda)\sum_{0}^{\ell}c_j^{(2)}e^{i\lambda j\theta}\Big\}\Big|\sum_{0}^{N}a_je^{-i\lambda j\theta}\Big|^2=$$

$$=R_0(\lambda)+R_1(\lambda)\sum_{-N-\ell}^{N}B_j^{(1)}e^{i\lambda j\theta}+e^{i\lambda T}R_2(\lambda)\sum_{-N}^{N+\ell}B_j^{(2)}e^{i\lambda j\theta}=$$

$$=\Big\{R_0(\lambda)+R_1(\lambda)\sum_{0}^{N}B_j^{(1)}e^{i\lambda j\theta}+R_2(\lambda)\sum_{\ell+1}^{N}B_j^{(2)}e^{i\lambda(T+j\theta)}\Big\}+$$

$$+e^{i\lambda T}\Big\{R_1(\lambda)\sum_{-N-\ell}^{-\ell-1}B_j^{(1)}e^{i\lambda(j\theta-T)}+R_2(\lambda)\sum_{0}^{N}B_j^{(2)}e^{i\lambda j\theta}\Big\}+$$

$$+\Big\{R_1(\lambda)\sum_{-\ell-1}^{-1}B_j^{(1)}e^{i\lambda j\theta}+R_2(\lambda)\sum_{1}^{\ell}B_j^{(2)}e^{i\lambda(T+j\theta)}\Big\}=$$

$$=\Psi_{s,T}^{(1)}(\lambda)+e^{i\lambda T}\Psi_{s,T}^{(2)}(\lambda)+\zeta(\lambda),$$

gde je

$$R_0(\lambda)=C_1e^{i\lambda s}\frac{|Q(\lambda)|^2}{|P(\lambda)|^2},$$

$$R_1(\lambda)=-C_2\frac{c(\lambda)\,\omega^{(1)}(\lambda)}{P(\lambda)D(\lambda)},$$

$$R_2(\lambda)=-C_2\frac{c(\lambda)\,\omega^{(2)}(\lambda)}{P(\lambda)D(\lambda)}.$$

Da bi bili ispunjeni uslovi leme 3.2.1. mora biti $\mathfrak{Z}(\lambda)\equiv 0$, a to nas dovodi do uslova

$$B_j^{(1)}=0\,,\quad j=\overline{-\ell,-1}\,,$$

$$B_j^{(2)}=0\,,\quad j=\overline{1,\ell}$$

iz kojih se i određuju vrednosti $C_j^{(1)}$ i $C_j^{(2)}$. (Smatramo da je kao i ranije $C_0^{(1)}=C_0^{(2)}=1$). Posle toga se sve radi kao u slučaju racionalnih spektralnih gustina.kod procesa $Y(t)$.

Četvrta glava

NEKA UOPŠTENJA

4.1. UZAJAMNE θ -TRANSFORMACIJE PRVOG REDA

U dosadašnjim glavama smo posmatrali procese $X(t)$ i $Y(t)$ pri čemu je jedan od njih bio proces sa racionalnom spektralnom gustinom . Tada je drugi od njih bio proces čija spektralna gustina je proizvod ili količnik racionalne funkcije i jednog eksponencijalnog izraza. Opštiji slučaj bi bio kada se eksponencijalni izrazi kod spektralne gustine javljaju i u brojiocu i u imeniocu. Procesima te vrste je i posvećena ova glava.

<u>Definicija 4.1.1.</u>

Ako su procesi $X(t)$ i $Y(t)$ stacionarni i

(4.1.1) $$Y(t) - \gamma Y(t-\theta) = X(t) - \beta X(t-\theta)$$

gde $|\beta| < 1$, $|\gamma| < 1$ i $\beta, \gamma, \theta > 0$ - realni brojevi, reći ćemo da su oni uzajamne θ - transformacije prvog reda.

<u>Lema 4.1.1.</u>

Ako je $H_{-\infty,0}(X)$ podprostor slučajnih promenljivih

$X(t), t \leq 0$ i $H_{-\infty,0}(Y)$ ima analogno značenje, tada je

(4.1.2) $$H_{-\infty,0}(X) = H_{-\infty,0}(Y).$$

Lema 4.1.2.

Iz (4.1.1) sledi

(4.1.3) $$Y(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j X(t-j\theta)$$

pri čemu je red sa desne strane konvergentan u srednjekvadratnom i

(4.1.4) $$\gamma_0 = 1, \quad \gamma_j = (\gamma - \beta)\gamma^{j-1}, \quad j \geq 1.$$

D o k a z ove leme sledi iz jednakosti

(4.1.5) $$Y(t) - \gamma^n Y(t-n\theta) = X(t) + (\gamma-\beta)\sum_{j=1}^{n-1} \gamma^{j-1} X(t-j\theta) - \gamma^{n-1} X(t-n\theta)$$

koja pri $|\gamma| < 1$ daje

(4.1.6) $$Y(t) = X(t) + (\gamma-\beta)\sum_{j=1}^{\infty} \gamma^{j-1} X(t-j\theta).$$

Teorema 4.1.1.

Neka je $X(t)$ proces sa racionalnom spektralnom gustinom (1.2.10) i neka je $\Phi_\Delta^X(\lambda)$ njegova spektralna karakteristika ekstrapolacije za $\Delta \geq 0$ na osnovu poznavanja prošlosti $(-\infty < t \leq 0)$ tog procesa. Tada spektralna karakteristika ekstrapolacije procesa $Y(t)$ iz (4.1.1) u tačku $\Delta \geq 0$ na osnovu poznavanja cele njegove prošlosti ima oblik

(4.1.7) $$\phi_s^{y}(\lambda)=\frac{R(\lambda)\,(1-\gamma e^{-i\lambda\theta})+(\gamma-\beta)\gamma^{\tau}e^{i\lambda(s-\tau\theta-\theta)}}{1-\beta e^{-i\lambda\theta}}$$

gde je $\tau=[\frac{s}{\theta}]$, $R(\lambda)=\sum_0^{\tau}\gamma_j\phi^{x}_{s-j\theta}(\lambda)$ i vrednosti γ_j su određene sa (4.1.4).

D o k a z . Neka je $\tilde{y}(s)$ projekcija $y(s)$, $s\geq 0$ na podprostor $H_{-\infty,0}(y)$. Tada, koristeći (4.1.1) i spektralno predstavljanje, dobijamo

$$\tilde{y}(s)=\sum_{j=0}^{\tau}\gamma_j\hat{x}(s-j\theta)+\sum_{j=\tau+1}^{\infty}\gamma_j x(s-j\theta)=$$

$$=\sum_{j=0}^{\tau}\gamma_j\int_{-\infty}^{+\infty}\phi^{x}_{s-j\theta}(\lambda)\frac{1-\gamma e^{-i\lambda\theta}}{1-\beta e^{-i\lambda\theta}}\,dZ_y(\lambda)+$$

$$+\sum_{j=\tau+1}^{\infty}\gamma_j\Big[\sum_{k=0}^{\infty}\delta_k\,y(s-j\theta-k\theta),$$

gde analogno (4.1.3) je

(4.1.8) $$x(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta_k\,y(t-k\theta).$$

Zato je

$$\tilde{y}(s)=\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\sum_{j=0}^{\tau}\gamma_j\phi^{x}_{s-j\theta}(\lambda)\Big]\frac{1-\gamma e^{-i\lambda\theta}}{1-\beta e^{-i\lambda\theta}}\,dZ_y(\lambda)+$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\Big[\sum_{j=\tau+1}^{\infty}c_j\,e^{i\lambda(s-j\theta)}\Big]\,dZ_y(\lambda)$$

i koeficijenti c_j su

$$c_j = (\gamma-\beta)\gamma^{r}\beta^{j-r-1}, \quad j \geq r+1.$$

To onda znači da je

$$\phi_s^{y}(\lambda) = \sum_{j=0}^{r} \gamma_j \phi_{s-j\theta}^{x}(\lambda) \cdot \frac{1-\gamma e^{-i\lambda\theta}}{1-\beta e^{-i\lambda\theta}} + \sum_{j=r+1}^{\infty} c_j e^{i\lambda(s-j\theta)} =$$

$$= \sum_{j=0}^{r} \gamma_j \phi_{s-j\theta}^{x}(\lambda) \frac{1-\gamma e^{-i\lambda\theta}}{1-\beta e^{-i\lambda\theta}} + (\gamma-\beta)\gamma^{r}\beta^{-r-1} \sum_{j=r+1}^{\infty} \beta^{j} e^{i\lambda(s-j\theta)} =$$

$$= \sum_{j=0}^{r} \gamma_j \phi_{s-j\theta}^{x}(\lambda) \frac{1-\gamma e^{-i\lambda\theta}}{1-\beta e^{-i\lambda\theta}} + (\gamma-\beta)\gamma^{r} \frac{e^{i\lambda(s-r\theta-\theta)}}{1-\beta e^{-i\lambda\theta}}$$

što je i trebalo dokazati.

<u>Teorema 4.1.2.</u>

Ako su poznate vrednosti procesa $Y(t)$ iz (4.1.1) na segmentu $[T,0]$, tada njegova spektralna karakteristika ekstrapolacije pri $r \geq 1$, $[-\frac{T}{\theta}] = \ell$ ima oblik

$$(4.1.9) \quad \phi_{s,T}^{y}(\lambda) = R_1(\lambda) \sum_{j=0}^{\ell} c_j^{(1)} e^{-i\lambda j\theta} + e^{i\lambda T} R_2(\lambda) \sum_{j=0}^{\ell} c_j^{(2)} e^{i\lambda j\theta} + \sum_{j=r+1}^{\nu} \ell_j e^{i\lambda(s-j\theta)}$$

i u toj formuli je $\nu = r+\ell$ ili $\nu = r+\ell+1$ ili su svi koeficijenti ℓ_j jednaki nuli (u slučaju kada je $s-j\theta \notin [T,0], \forall j \geq 1$).

<u>Primer.</u> Neka je spektralna gustina procesa $X(t)$ iz (4.1.1) $f_X(\lambda) = \frac{c}{\lambda^2+\alpha^2}, c>0, \alpha>0$, neka su poznate vrednosti procesa $Y(t)$ iz (4.1.1) u celoj prošlosti i neka je $s \geq 0$. Tada iz (4.1.7), (4.1.3) i (4.1.4) dobijamo

$$\phi^{y}_{s,T}(\lambda) = \Big[\sum_{j=0}^{r} \gamma_j\, e^{-\alpha(s-j\theta)}(1-\gamma e^{-i\lambda\theta}) + (\gamma-\beta)\gamma^{r} e^{i\lambda(s-r\theta-\theta)}\Big]\frac{1}{1-\beta e^{-i\lambda\theta}} =$$

$$= \Big\{ e^{-\alpha s}(1-\gamma e^{-i\lambda\theta})\Big[1+\sum_{j=0}^{r}(\gamma-\beta)\gamma^{j-1}e^{\alpha j\theta}\Big] +$$

$$+ (\gamma-\beta)\gamma^{r}e^{i\lambda(s-r\theta-\theta)}\Big\}\frac{1}{1-\beta e^{-i\lambda\theta}} =$$

$$= \Big[e^{-\alpha s}(1-\gamma e^{-i\lambda\theta})\frac{1-\beta e^{\alpha\theta}-(\gamma-\beta)\gamma^{r}e^{\alpha(r+1)\theta}}{1-\gamma e^{\alpha\theta}} +$$

$$+ (\gamma-\beta)\gamma^{r}e^{i\lambda(s-r\theta-\theta)}\Big]\frac{1}{1-\beta e^{-i\lambda\theta}} .$$

To znači da u slučaju $\gamma=0$ je

$$\phi^{y}_{s,T}(\lambda) = \frac{e^{-\alpha s}-\beta e^{i\lambda(s-\theta)}}{1-\beta e^{-i\lambda\theta}}, \quad r=0 ,$$

$$\phi^{y}_{s,T}(\lambda) = \frac{e^{-\alpha s}(1-\beta e^{\alpha\theta})}{1-\beta e^{-i\lambda\theta}}, \quad r>0 ,$$

a u slučaju $\beta=0$

$$\phi^{y}_{s,T}(\lambda) = e^{-\alpha s}(1-\gamma e^{-i\lambda\theta})\frac{1-\gamma^{r+1}e^{\alpha(r+1)\theta}}{1-\gamma e^{\alpha\theta}} + \gamma^{r+1}e^{i\lambda(s-r\theta-\theta)} ,$$

što znači da se rezultati dobijeni tim načinom slažu sa rezultatima dobijenim ranije(II glava).

4.2. UZAJAMNE θ- TRANSFORMACIJE VIŠEG REDA

<u>Definicija 4.2.1.</u>

Neka su $X(t)$ i $Y(t)$ stacionarni procesi i neka je

$$(4.2.1) \qquad \sum_{j=0}^{M} b_j\, y(t-j\theta) = \sum_{j=0}^{N} a_j\, x(t-j\theta)\ , \ b_0 = a_0 = 1$$

pri čemu su svi koreni polinoma

$$(4.2.2) \qquad z^M + b_1 z^{M-1} + \dots + b_{M-1} z + b_M = 0\ ,$$

$$(4.2.3) \qquad z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_{N-1} z + a_N = 0$$

po modulu manji od jedinice. Tada ćemo reći da su procesi $x(t)$ i $y(t)$ uzajamne θ-transformacije višeg reda.

U ovom paragrafu mi ćemo se pozabaviti slučajem

$$(4.2.4) \qquad y(t) - \gamma\, y(t-\theta) = x(t) + a_1 x(t-\theta) + a_2 x(t-2\theta)$$

gde je $|\gamma| < 1$, $a_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2)$, $a_2 = \alpha_1 \alpha_2$.

Lema 4.2.1.

Za proces $y(t)$ iz (4.2.4) je

$$(4.2.5) \qquad y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k\, x(t-k\theta)$$

gde je

$$(4.2.6) \qquad \begin{cases} \gamma_0 = 1\ , \\ \gamma_1 = \gamma + a_1\ , \\ \gamma_k = \gamma^{k-2}(\gamma^2 + a_1\gamma + a_2)\ , \quad k \geq 2. \end{cases}$$

Lema 4.2.2.

Za proces $x(t)$ iz (4.2.4) je

(4.2.7) $$X(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \delta_j\, Y(t-j\theta)$$

i vrednosti δ_j su određene sa

(4.2.8) $$\delta_0 = 1\,, \quad \delta_j = d_j - \gamma\, d_{j-1}\,,\ j \geq 1$$

gde je

(4.2.9) $$d_j = \frac{\alpha_1^{j+1} - \alpha_2^{\alpha+1}}{\alpha_1 - \alpha_2}\,,\ \alpha_1 \neq \alpha_2\,;\ d_j = (j+1)\alpha\,,\ \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha.$$

<u>Teorema 4.2.1.</u>

Neka su poznate vrednosti za $t \leq 0$ procesa $Y(t)$ iz (4.2.4) i neka je $\left[\frac{s}{\theta}\right] = r$. Tada projekcija elementa $Y(s)$ na podprostor $H_{-\infty,0}(Y)$ je

(4.2.10) $$\tilde{Y}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{j=0}^{r} \gamma_j\, \phi^{x}_{s-j\theta}(\lambda) \right\} \frac{1-\gamma e^{-i\lambda\theta}}{1+a_1 e^{-i\lambda\theta} + a_2 e^{-2i\lambda\theta}}\, dZ_y(\lambda) +$$

$$+ \sum_{j=r+1}^{\infty} \delta_j^{*}\, Y(s-j\theta)$$

gde je

(4.2.11) $$\delta_j^{*} = d_{j-r-1}\, \gamma^{r-1} (\gamma^2 + a_1\gamma + a_2)\,,\ j \geq r+1.$$

Dokaz sledi iz

$$\tilde{Y}(s) = \sum_{j=0}^{r} \gamma_j\, \hat{X}(s-j\theta) + \sum_{j=r+1}^{\infty} \gamma_j\, X(s-j\theta) =$$

$$+ \sum_{j=0}^{r} \gamma_j \int_{-\infty}^{\infty} \phi^{x}_{s-j\theta}(\lambda)\, \frac{1-\gamma e^{-i\lambda\theta}}{1+a_1 e^{-i\lambda\theta} + a_2 e^{-2i\lambda\theta}}\, dZ_y(\lambda) +$$

$$+\sum_{j=\tau+1}^{\infty} \gamma_j \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n y(s-j\theta-n\theta) \right\}$$

pri čemu je $\phi_s^x(\lambda)$ spektralna karakteristika ekstrapolacije procesa $X(t)$.

Teorema 4.2.2.

Spektralna karakteristika ekstrapolacije na osnovu poznavanja cele prošlosti procesa $y(t)$ iz (4.2.4) ima za $\tau \geq 1$ oblik

$$\phi_s^y(\lambda) = \left\{ \left[\sum_{j=0}^{\tau} \gamma_j \phi_{s-j\theta}^x(\lambda) \right] (1-\gamma e^{-i\lambda\theta}) + \gamma^{\tau-1}(\gamma^2+a_1\gamma+a_2) e^{i\lambda(s-\tau\theta-\theta)} \right\} \cdot \frac{1}{1+a_1 e^{-i\lambda\theta}+a_2 e^{-2i\lambda\theta}} . \tag{4.2.12}$$

D o k a z sledi iz sledećih zaključaka

$$\tilde{y}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{j=0}^{\tau} \gamma_j \phi_{s-j\theta}^x(\lambda) \right] \frac{1-\gamma e^{-i\lambda\theta}}{1+a_1 e^{-i\lambda\theta}+a_2 e^{-2i\lambda\theta}} dZ_y(\lambda) + \sum_{\tau+1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_j^* e^{i\lambda(s-j\theta)} dZ_y(\lambda) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{j=0}^{\tau} \gamma_j \phi_{s-j\theta}^x(\lambda) \right] \cdot \frac{1-\gamma e^{-i\lambda\theta}}{1+a_1 e^{-i\lambda\theta}+a_2 e^{-2i\lambda\theta}} dZ_y(\lambda) +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{j=\tau+1}^{\infty} d_{j-\tau-1} \gamma^{\tau-1} (\gamma^2+a_1\gamma+a_2) e^{i\lambda(s-j\theta)} \right] dZ_y(\lambda) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{j=0}^{\tau} \gamma_j \phi_{s-j\theta}^x(\lambda) \right] \frac{1-\gamma e^{-i\lambda\theta}}{1+a_1 e^{-i\lambda\theta}+a_2 e^{-i\lambda 2\theta}} dZ_y(\lambda) +$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{j=0}^{r} d_j\, \gamma^{r-1}(\gamma^2+a_1\gamma+a_2)\, e^{i\lambda(s-j\theta-r\theta-\theta)}\right]dZ_y(\lambda)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{j=0}^{r} \gamma_j\, \phi^{x}_{s-j\theta}(\lambda)\right]\frac{1-\gamma e^{-i\lambda\theta}}{1+a_1 e^{-i\lambda\theta}+a_2 e^{-2i\lambda\theta}}\, dZ_y(\lambda)+$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty} \gamma^{r-1}(\gamma^2+a_1\gamma+a_2)\, e^{i\lambda(s-r\theta-\theta)}\left[\sum_{j=0}^{\infty} d_j e^{-i\lambda j\theta}\right]dZ_y(\lambda)$$

pri čemu je korišćena spektralna reprezentacija procesa.

U slučajevima procesa iz (4.2.1) koji nisu obuhvaćeni sa (4.1.4) svi zaključci se izvode analogno predhodnim, samo što će se dobijati glomazniji izrazi i zbog toga te slučajeve i nismo specijalno razmatrali.

Z A K L J U Č A K

Rezultati izloženi u ovom radu znatno su proširili klasu stacionarnih slučajnih procesa za koju je moguće dati eksplicitni oblik rešenja linearnih aproksimacionih zadataka.

Prema rezultatima N. Vinera , A.M. Jagloma i nekih drugih matematičara ta klasa je bila klasa procesa sa racionalnim spektralnim gustinama. Grigorjev je pokazao da ta klasa sadrži i slučajeve kada je racionalna funkcija pomnožena ili podeljena sa $|1 - b \exp(-i\lambda\theta)|^2$, a ovim radom je pokazano da ta klasa obuhvata i slučajeve kada se racionalna funkcija množi sa kvadratom modula jednog i deli sa kvadratom modula drugog polinoma od exp $(-i\lambda\theta)$. Šta više, umesto polinoma se mogu uzimati i konvergentni redovi.

Samim ovim radom otvoreni su novi problemi koji iziskuju ulaganje napora za njihovo rešavanje. Neki od njih se sigurno i mogu rešiti metodom ovog rada. Na primer , ako se umesto θ - transformacije reda N posmatra uopštena $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N$ transformacija definisana sa

$$Y(t) = X(t) + a_1 X(t-\theta_1) + \dots + a_N X(t-\theta_N)$$

u kojoj su svi θ_j pozitivni i imaju zajednički pozitivan delilac , onda je rešenje svakako efektivno moguće dobiti. Po svoj prilici to je moguće postići i u slučaju kada se skup $\{\theta_1, \dots, \theta_N\}$ može razbiti na k podskupova sa po bar dva elementa. U ostalim slučajevima , verovatno , treba tražiti drugi put rešavanja.

Dosadašnja moja istraživanja (koja nisu navedena u tezi) pokazuju da ovaj metod omogućava da se osim ekstrapolacije, interpolacije i filtracije mogu da dobiju efektivna rešenja i za slučaj ocenjivanja srednje vrednosti stacionarnog slučajnog procesa. Metod je, prema tome, primenljiv i na slučaj ocenjivanja koeficijanata regresije.

— • —

LITERATURA

1. Ахиезер , Н. И. - Лекции по теории аппроксимации , Изд. Наука , Москва 1965.
2. Ахиезер , Н.И. и Глазман , И.М. - Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве , Москва 1950.
3. Гихман , И.И. и Скороход , А.В. - Теория случайных процесов , Москва 1971.
4. Гнеденко , Б.В. - Курс теории вероватностей , Москва 1961.
5. Григорьев , С.В. - Явные экстраполяционые формулы для некоторых вероятностных процесов , Ученные записки Казаньского ун - та, 125 (6) , 1965.
6. Григорьев , С.В. - Процесы стационарные относительно некоторой группы линейных преобразованый и решение линейных задач , Диссертация , Казань , 1965.
7. Яглом , А.М. - Введение в теорию стационарных случайных функций , Успехы , 7 (5) , 3 - 168 , 1952.
8. Яглом , А.М. - Корреляционная теория процесов со стационарными -ми приращениями , Мат. сборник , 1955 , в. 1 , 37 (79) , 141 - 196 .
9. Яглом , А,М. - К вопросу о линейном интерполировании стационарных случайных последовательностей и процессов , Успехы , 1949 , IV , 4 (32) , 171 - 178.

10. Яглом , А.М. - Теория экстраполирования и фильтрации случайных процессов , Укр. матем. журнал , 1954 , 6 (1) , 43 - 47 .

11. Яглом , А.М. - Эффективные решения линейных аппроксимационных задач для процессов со случайными стационарными приращениями , ДАН СССР , 1954, 98(2) , 189-192.

12. Яглом , А.М. - Экстраполирование , интерполирование и фильтрация стационарных процессов с рациональной спектральной плотностью , Труды ММО , 1955 , 4 , 333-374.

13. Колмогоров , А.Н. - Спираль Винера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовском пространстве , ДАН СССР , 1940 , 26 (2) , 115 - 118.

14. Колмогоров , А.Н. - Стационарные последовательности в гильбертовом пространстве , Бюллтен МГУ , 1941 , 2 (6) , 1-40 .

15. Колмогоров , А.Н. - Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей , Известия АН СССР , 1941 , 5 (1) , 3 - 14.

16. Крейн , М.Г. - Об одной экстраполяционой проблеме А.Н. Колмогорова , ДАН СССР , 1945 , 46 (8) , 339-342.

17. Крейн , М.Г. - О некоторых случаях эффективного определения плотности неоднородной струны по ее спектральной функции , ДАН СССР , 1954 , 93 (4) , 617-620.

18. Крейн , М.Г. - Об одном методе эффективного решения обратной краевой задачи , ДАН СССР , 1954 , 94 (6) , 987-990.

19. Крейн , М.Г. - Об основной аппроксимационной задаче теории экстраполяции и фильтрации стацонарных случайных процесов , ДАН СССР , 1954 , 94(1) , 13-16.

20. Лэннинг , Д.Х. и Бэттин , Р.Г. - Случайные процессы в задачах автоматического регулирования , Москва 1958.

21. Писаренко , В.Ф. и Розанов , Ю.А. - О некоторых задачах для стационарных процессов , приводящих к интегральным уравнениям, родственным уравнению Винера - Хопфа , Проблемы передачи информации , 1964 , 113-135.

22. Плеснер , А.И. - Спектральная теория операторов , Москва 1965.

23. Розанов , Ю.А. - О линейном интерполировании стационарных процессов с дискретным временем , ДАН СССР , 1957 , 116 , 923-926.

24. Розанов , Ю.А. - Стационарные случайные процессы , Москва 1963.

25. Солодовников , В.В. - Введение в статистическую динамику систем автоматического управления, Москва 1952.

26. Хинчин , А.Я. - Теория корреляции стационарных стохастических процессов , Успехы , 1938 , 5 , 42-51

27. Doob J.L - Stochastic processes, New York, 1953.

28. Dunford N. and Schwartz J - Linear operators I, New York - London, 1958.

29. Feller W.- An introduction to probabilitu theory and its applications, New York, 1966.

30. Grenander U. - Stochastic processes and statistical inference, Ark.f. math. T. 1, N° 3(1950),195 - 277.

31. Grenander U. - On empirical spectral analysis of stochstic processes, Ark . f. math. T.1, N° 6(1952), 503 -531.

32. Grenander U. and Rozenblatt M. - Statistical Analysis of stacionary time series, Stockholm, 1956.

33. Hajek Y. - On linear estimation theory for an infinite number of observation, Teor. verojatn. G,N° 2 (1961), 182 - 193.

34. Hajek Y. - On linear statistical problems in stachastic procceses, 1962.

35. Hannan - Time series analysis.

36. Halmos P. - Measure theory, New York, 1950.

37. Jaglom A.M. - Ontline of some fopics in linear extrapolation of stationary random processes, Proc. of the Fifth Berkeley Simp. on math. stat. and prob. , 1965.

38. Cramer H. and Leadbetter M. - Stationaru and related stochastic proccesses, New York 1967.

39. Karhunen K. - Zur spektraltheorie stoshastischer Prozesse, Ann. Acad. Sei. Fennicae, Ser A, vol.1, N° 34(1946),3-7.

40. Karhunen K. - Zur Interpolation von stationaren zufälligen Funktionnen, Ann. Acad. Sci. Fennical, A, I, N° 142 (1952), 3-8.

41. Loeve M. ÷ Fuctions aleatoires de second ordre, C.R.Acad. Sci., 220 (1945).

42. Loeve M. - Probability theory , New York 1961.

43. Mališić J. - Spektralna karakteristika ekstrapolacije jedne klase stacionarnih slučajnih procesa, Matem. vesnik 9(24), N° 2,1972.

44. Parzen E. - Regression analisis of continuals parameter time series, Proc. of 4-th Berkeley Simp. of Math. Stat. and Prob., v.1,1960.

45. Paley R. and Wienner N. - Fourier transformations in the complex Domain,New York, 1934.

46. Rao R.- Linear statistical interence and its applications, New York, 1965.

47. Taylor A. - Introduction to functional analyses,Wiley,1958.

48. Wiener N. -Exrapolation, interpolation and smoothind of stationary time series, Combridge- New York, 1949.

49. Wiener N. and Masani N.- The prediction theory of multivariote stochastic processes, I, Acta math. 98(1957), 111-150; II, 99(1958), 93-137.

50. Wold H.- A studu of the analisis of stationary time series, Uppsala, 1938.

51. Wold H. - On prediction in stationary time series, Ann. Math. Stat. 19, N$^{\underline{o}}$ 4(1948) , 558-567.

52. Zadeh L. and Ragazzini R. - Extension of Wiener's theory of prediction, J. Appl. Phys. 21, N$^{\underline{o}}$ 7(195o), 645-655.