U N I V E R Z I T E T   U   B E O G R A D U

PRIRODNOMATEMATIČKI FAKULTET - BEOGRAD

POTREBNI I DOVOLJNI USLOVI ZA NEZAVISNOST I MARKOVSKO SVOJSTVO NEKIH KLASA SLUČAJNIH VELIČINA

\- Doktorska disertacija -

Beograd
Maj, 1970.

mr. Jovan Ukšanović

S A D R Ž A J

U V O D

U procesu proučavanja prirode otkrivaju se nove veze među pojavama proučavaju i usvajaju. Čovek može uočiti i ispitati samo manji broj uzoka koji imaju uticaja na posmatranu pojavu. Međutim, većina pojava (događaja) i procesa određuje se dosta velikim skupom uzroka i tada govorimo o slučajnim pojavama, odnosno o slučajnim veličinama i slučajnim procesima.

U praktičnoj delatnosti čovek se često susreće sa slučajnim događajima. Kao primer navodimo kretanje čestice dovoljno malih dimenzija u nekoj tečnosti (braunovsko kretanje),čiji tačan položaj nismo u stanju da odredimo ni za jedan trenutak vremena. Primer slučajnog događaja jeste i gađanje na cilj,jer nismo u stanju da odredimo tačan ishod ni za jedan pojedinačni pokušaj.

Značajno područje izučavanja slučajnih veličina jeste njihov međusobni uticaj (zavisnost). Među slučajnim veličinama postoji jedan od tri sledeća odnosa:

a) funkcionalna zavisnost,

b) stohastička (slučajna) zavisnost i

c) nezavisnost.

Funkcionalna zavisnost i nezavisnost slučajnih veličina predstavljaju granične slučajeve stohastičke zavisnosti.

Ovaj rad razmatra probleme zavisnosti i markovskog svojstva na nekim klasama slučajnih veličina. Rad je podeljen na tri glave.

U glavi 1 dati su osnovni rezultati na koje sam se,u većoj ili manjoj meri, oslanjao u mojim istraživanjima.

Rezultate istraživanja izložio sam u glavama 2 i 3. Prema tome, sve definicije,leme,teoreme,posledice i napomene iz glave 2 i 3, sem definicija 2,3.1 i 3.2.2, jesu moj originalan doprinos.

Rezime sadržaja po glavama dat je na početku svake glave. Na kraju rada dat je zaključak u kome se ukazuje na još nerešene probleme koji proističu iz ovog rada.

G L A V A 1

KOEFICIJENTI KORELACIJE

U ovoj glavi navode se osobine nekih parametara kao što su: linearni koeficient korelacije, Pirsonov korelacioni količnik, višestruki koeficienat korelacije, maksimalni koeficienat korelacije i neki drugi rezultati, koji su u vezi sa koficientima korelacije, a koriste se u većoj ili manjoj meri u narednim glavama.

Linearni koeficienat korelacije, Pirsonov korelacioni količnik i višestruki koeficienat korelacije direktno se koriste u glavama 2 i 3 kao parametri za određivanje potrebnih i dovoljnih uslova za nezavisnost na klasama slučajnih veličina koje se izučavaju u ovom radu.

Korelaciona integralna jednačina ima poseban uticaj na rezultate izložene u glavama 2 i 3. Treba posebno istaći korišćenje jezgra korelacione integralne jednačine pri uvođenju pojma monotone klase u glavi 2.

Parametri, kao što su parcijalni i kanonični koeficienat korelacije, nisu razmatani jer se ne koriste niti imaju uticaja na rezultate izložene u ovom radu.

Markovsko svojstvo i izogena korelacija nisu razmatrani, jer se koriste samo njihove definicije. Osobine izogene korelacije, koje ne spadaju u predmet ovog rada, izložene su u radovima [2] i [13]. Osobine slučajnih veličina sa markovskim svojstvom nalaze se, naprimer, u monografijama i udžbenicima: [4], [5], [9], [24], [25].

Rezultati izloženi u ovoj glavi mogu se naći u priloženom spisku literature: [1], [4], [6], [9], [10], [11], [14], [15], [16], [17], [18], [19], [26].

1.1 LINEARNI KOEFICIENAT KORELACIJE

Neka je (R, ,P) prostor verovatnoće. Slučajne veličine (B-merljive funkcije) na prostoru verovatnoće označavaćemo sa X,Y,Z,U,V, sa ili bez indeksa, a sa x,y,z,u,v, njihove realizacije. ([9]; str.117-120)

Sa $F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ označavaćemo funkciju distribucije slučajnih veličina $X_1,X_2,\ldots,X_n$, a sa $F_n(x_n)$, $n=1,2,\ldots$, sa ili bez indeksa n, distribuciju slučajne veličine X_n.

Svaka funkcija distribucije inducira mere verovatnoće

$$P(B) = \int_B dF(x) \tag{1.1.1}$$

na Borelovim skupovima B, to je Lebeg-Stiljtesova mera.

Iz definicije nezavisnosti i iz (1.1.1) dobijamo da su slučajne veličine nezavisne tada i samo tada kada je

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n) = F_1(x_1) \cdot F_2(x_2)\ldots F_n(x_n) \ . \tag{1.1.2}$$

Ako postoji funkcija verovatnoće slučajnih veličina $X_1,X_2,\ldots,X_n$, koju ćemo obeležavati sa p ili q, sa ili bez indeksa, tada ekvivalent za (1.1.2) jeste

$$P(x_1,x_2,\ldots,x_n) = P_1(x_1).P_2(x_2)\ldots P_n(x_n) \ . \tag{1.1.3}$$

Sa EX označavaćemo matematičko očekivanje, a sa σ_x^2 disperziju slučajne veličine X, sa σ_{xy} kovarijaciju slučajnih veličina X i Y.

D e f i n i c i j a 1.1.1. Izraz

$$r_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \tag{1.1.4}$$

zovemo linearni koeficienat korelacije slučajnih veličina X i Y. Navedimo neke osobine linearnog koeficienta korelacije.

T e o r e m a 1.1.1. Ako su slučajne veličine X i Y nezavisne tada je $r_{xy}=0$. Obrnuto ne važi. ([4], str: 176,177)

Dokaz. Neka su slučajne veličine X i Y nezavisne, tada iz

$$F(x-EX,\ y-EY) = P\left\{\omega; X(\omega) - EX \leq x - EX,\ Y(\omega) - EY \leq y-EY\right\} =$$

$$= P\left\{\omega;\ X(\omega) \leq x,\ Y(\omega) \leq y\right\} = P\left\{\omega;\ X(\omega) \leq x\right\}.P\left\{\omega;\ Y(\omega) \leq y\right\} =$$

$$= P\left\{\omega;\ X(\omega) - EX \leq X - EX\right\}.P\left\{\omega;\ Y(\omega) - FY \leq y - EY\right\} =$$

$$= F_1(x-EX).F_2(y-EY)$$

dobijamo da su nezavisne i slučajne veličine X-EX i Y-EY, iz čega sledi

$$\sigma_{xy} = E(X-EX)(Y-EY) = E(X-EX)E(Y-EY) = (EX-EX)(EY-EY) = 0$$

odnosno $r_{xy} = 0$.

Obrnuto ne važi. Linearni koeficienat može biti nula, a da između slučajnih veličina postoji funkcionalna zavisnost. Neka je: $Y = X^2$, funkcija verovatnoće za slučajnu veličinu X simetrična u odnosu na tačku $x = 0$, i EX^4 konačno. Tada je

$$EX = \int_R x dF(x) = \int_R xP(x)dx \tag{1.1.5}$$

jednako nuli, a tada je i $EXY = EX^3 = 0$. Prema tome kovarijacija slučajnih veličina X i Y je

$$\sigma_{x_y} = E(X-EX)(Y-EY) = EXY-EX.EY = EXY = EX^3 = 0 \quad ,$$

odnosno $r_{xy} = 0$. q.e.d.

T e o r e m a 1.1.2. Ako između slučajnih veličina X i Y postoji skoro svuda linearna funkcionalna zavisnost $Y=aX+b$, tada je $r_{xy}=1$, za $a>0$, ili $r_{xy}=-1$, za $a<0$. Važi i obrnuto. Kada je $|r_{xy}|=1$, tada su slučajne veličine skoro svuda linearno zavisne. ([4] str.176)

Dokaz. Neka su slučajne veličine X i Y skoro svuda linearno zavisne, tada je

$$\sigma_{xy} = E(X-EX)(Y-EY) = E(X-EX)(aX+b-aEX-b) =$$

$$= E(X-EX)(aX-aEX) = aE(X-EX)^2$$

iz čega sledi da je

$$\sigma_{xy} = a\,\sigma_x^2 \tag{1.1.6}$$

Zatim pri istoj pretpostavci imamo

$$\sigma_y = \sqrt{E(Y-EY)^2} = \sqrt{E(aX+b-aEX-b)^2} = \pm\, a\sqrt{E(X-EX)^2}$$

iz čega sledi da je

$$\sigma_y = \pm\, a\,\sigma_x \tag{1.1.7}$$

Smenom (.1.16) i (1.1.7) u (1.1.4) dobijamo

$$r_{xy} = \frac{a\,\sigma_x^2}{\pm\, a\,\sigma_x^2} = \pm\, 1\,. \tag{1.1.8}$$

Kako je $\sigma_y>0$, iz jednakosti (1.1.7) i (1.1.8) sledi da je za $a>0$ $r_{xy} = 1$, a za $a<0$ $r_{xy} = -1$.

Važi i obrnuto. Nake je

$$r_{xy}^2 = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2 \cdot \sigma_y^2} = 1 \, ,$$

tada je $\dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = \dfrac{\sigma_y^2}{\sigma_{xy}} = t$, odnosno

$$\sigma_{xy} - t\sigma_x^2 = 0 \tag{1.1.9}$$

$$\sigma_y^2 - t\sigma_{xy} = 0 \, .$$

Množeći prvu jednačinu iz (1.1.9) sa $-t$ i sabirajući je sa drugom dobijamo

$$t^2\sigma_x^2 - 2t\sigma_{xy} + \sigma_y^2 = 0 \tag{1.1.10}$$

Iz (1.1.10) imamo

$$t^2E(X-EX)^2 - 2tE(X-EX)(Y-EY) + E(Y-EY)^2 =$$

$$= Et^2(X-EX)^2 - E2t(X-EX)(Y-EY) + E(Y-EY)^2 =$$

$$= E\left[t^2(X-EX)^2 - 2t(X-EX)(Y-EY) + (Y-EY)^2\right] = 0$$

odakle sledi

$$E\left[Y-EY-t(X-EX)\right]^2 = 0 \tag{1.1.11}$$

Iz (1.1.11) dobijamo

$$Y = t(X-EX)+EY \qquad \text{skoro svuda} \qquad \text{q.e.d}$$

T e o r e m a 1.1.3. Apsolutna vrednost linearnog koeficienta korelacije uvek je manja ili jednaka jedan.

Dokaz. Formirajmo izraz

(1.1.12) $\quad E\left[(X-EX)t-(Y-EY)\right]^2 \geqslant 0 \quad$ (t realan parametar)

Iz (1.1.12) dobijamo

$$E(X-EX)^2t^2-2tE(X-EX)(Y-EY)+E(Y-EY)^2=\sigma_x^2t^2-2t\sigma_{xy}+\sigma_y^2 \geqslant 0$$

iz čega sledi da je $\sigma_{xy}^2-\sigma_x^2\sigma_y^2 \leqslant 0$, odnosno

$$\sigma_{xy}^2 \leqslant \sigma_x^2\sigma_y^2 \quad . \qquad \text{q.e.d.}$$

T e o r e m a 1.1.4. Ako je r_{xy} linearni koeficienat korelacije za slučajne veličine X i Y tada je r_{xy} linearni koeficienat korelacije i za slučajne veličine

(1.1.13) $$\begin{aligned} U &= aX + b \\ V &= cY + d \end{aligned}$$

gde su a, b, c, d realne konstante.

Dokaz. Kovarijacija slučajnih veličina U i V, datih izrazom (1.1.13), je

$$\sigma_{uv}=E(U-EU)(V-EV) = E(aX+b-aEX-b)(cY+d-cEY-d) =$$

$$= E(aX-aEX)(cY-cEY) = aCE(X-EX)(Y-EY) \ .$$

Prema tome imamo

(1.1.14) $$\sigma_{uv} = ac\sigma_{xy}$$

Disperzija slučajnih veličina U i V, datih izrazima (1.1.13), je

$$\sigma_u^2=E(U-EU)^2=E(aX+b-aEX-b)^2=a^2E(X-EX)^2$$

$$\sigma_v^2 =E(V-EV)^2=E(xY+d-cEY=d)^2=c^2E(Y-EY)^2$$

iz čega sledi

$$\sigma_u = a\sigma_x \; ; \quad \sigma_v = c\sigma_y \, , \tag{1.1.15}$$

Smenom (1.1.14) i (1.1.15) u izraz za linearni koeficienat korelacije slučajnih veličina U i V dobijamo

$$r_{uv} = \frac{ac\,\sigma_{xy}}{a\sigma_x c\,\sigma_y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = r_{xy} \, . \qquad \text{q.e.d.}$$

Za slučajne veličine kažemo da su nekorelativne ako je njihov linearni koeficienat korelacije jednak nuli.

T e o r e m a 1.1.5. Slučajne veličine X i Y možemo uvek izraziti kao linearne funkcije dve međusobno nekorelativne slučajne veličine.

Dokaz. Rotacijom koordinatnog sistema za ugao φ i dovođenje koordinatnog početka u tačku (EX,EY)-težište sistema dobijamo nove slučajne veličine U i V, date izrazima

$$\begin{aligned} U(\omega) &= (X(\omega)-EX)\cos\varphi+(Y(\omega)-EY)\sin\varphi \\ V(\omega) &= -(X(\omega)-EX)\sin\varphi+(Y(\omega)-EY)\cos\varphi \end{aligned} \tag{1.1.16}$$

Rešenjem sistema (1.1.16) po X i Y dobijamo

$$X(\omega) = U(\omega)\cos\varphi - V(\omega)\sin\varphi + EX$$

$$Y(\omega) = U(\omega)\sin\varphi + V(\omega)\cos\varphi + EY$$

Kovarijacija slučajnih veličina U i V je

$$\sigma_{uv}(\varphi) = E(U-EU)(V-EV) = E\Big[(X-EX)\cos\varphi+(Y-EY)\sin\varphi -$$

$$- E(X-EX)\cos\varphi - E(Y-EY)\sin\varphi\Big]\Big[-(X-EX)\sin\varphi+(Y-EY)\cos\varphi +$$

$$+ E(X-EX)\sin\varphi - E(Y-EY)\cos\varphi\Big] = E\Big[(X-EX)\cos\varphi+(Y-EY)\sin\varphi\Big]\Big[-(X-EX)\sin\varphi +$$

$$+(Y-EY)\cos\varphi\Big]=-E(X-EX)^2\sin\varphi\cos\varphi-E(X-EX)(Y-EY)\sin^2\varphi+$$

$$+E(X-EX)(Y-EY)\cos^2\varphi+E(Y-EY)^2\sin\varphi\cos\varphi.$$

Iz prethodnog izraza dobijamo

$$\sigma_{uv}(\varphi)=E(X-EX)(Y-EY)\cos 2\varphi-\left[E(X-EX)^2-E(Y-EY)^2\right]\sin\varphi\cos\varphi$$

(1.1.17) $$\sigma_{uv}(\varphi)=\sigma_{xy}\cos 2\varphi-\frac{1}{2}(\sigma_x^2-\sigma_y^2)\sin 2\varphi.$$

Izraz (1.1.17) jednak je nuli ako je

$$\mathrm{tg}\,2\varphi=\frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_x^2-\sigma_y^2},$$

odnosno $r_{uv}=0$ ako je $\varphi=\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_x^2-\sigma_y^2}$. q.e.d.

L e m a 1.1.1. Ako je bar jedno uslovno matematičko očekivanje linearna funkcija, naprimer

(1.1.18) $$E(Y/x) = mx + n$$

tada je

(1.1.19) $$m = r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}.$$

Dokaz iz jednakosti (1.1.4) dobijamo

(1.1.20) $$r_x\sigma_x\sigma_y=\sigma_{xy}=E(X-EX)(Y-EY)$$

Izraz na desnoj strani jednakosti (1.1.20) možemo napisati u obliku

$$E(X-EX)(Y-EY) = E\left[(X-EX)\,E(Y-EY/x)\right]$$

pri čemu je $E(Y-EY/x)$ uslovno matematičko očekivanje slučajne veličine $Y-EY$ u odnosu na slučajnu veličinu X, iz čega imamo jednakost

$$r_{xy}\sigma_x\sigma_y = E\left[(X-EX)E(Y-EY/x)\right] \tag{1.1.21}$$

Smenom (1.1.18) u (1.1.21) dobijamo

$$r_{xy}\sigma_x\sigma_y = E(X-EX)(mX+n-EY)=E(X-EX)\left[m(X-EX)+mEX+n-EY\right]=$$

$$= mE(X-EX)^2+(mEX+n-EY)E(X-EX) = mE(X-EX)^2$$

Iz prethodnog izraza dobijamo

$$r_{xy}\sigma_x\sigma_y = m\sigma_x^2 . \qquad \text{q.e.d.}$$

1.2 PIRSONOV KORELACIONI KOLIČNIK

D e f i n i c i j a 1.2.1. Izraze

$$\eta_{x/y}^2 = \frac{E\left[E(X/y)-EX\right]^2}{\sigma_x^2} \tag{1.2.1}$$

$$\eta_{y/x}^2 = \frac{E\left[E(Y/x)-EY\right]^2}{\sigma_y^2} \tag{1.2.2}$$

zovemo korelacionim količnicima Pirsona i to prvi slučajne veličine X u odnosu na slučajnu veličinu Y, a drugi slučajne veličine Y u odnosu na X. (18 ; str: 322, 323)

Transformišimo izraz (1.2.1) u drugom obliku.

$$\sigma_x^2=E(X-EX)^2=E\left[X-E(X/y)+E(X/y)-EX\right]^2=E\left[X-E(X/y)\right]^2 +$$

$$+2E\left[X-E(X/y)\right]\left[E(X/y-EX\right]+E\left[E(X/y)-EX\right]^2$$

Kako je $E(X/y)-EX$ funkcija samo od y imamo

$$(1.2.3)\qquad E\left[X-E(X/y)\right]\left[E(X/y)-EX\right]=E\left[X-E(X/y)\right]\left[g(y)\right]=$$
$$= E(X.g(y))-E\left[E(X.g(y)/x)\right].$$

Neka je $G(X,Y)$ funkcija slučajnih veličina X i Y takva da je $E\left[G(X,Y)\right]=k<\infty$, tada je

$$(1.2.4)\qquad E\left[E(G(X,Y)/y)\right]=E\left[G(X,Y)\right]$$

Jednakost (1.2.3), koristeći (1.2.4), postaje

$$E\left[X-E(X/y)\right]\left[E(X/y)-EX\right]=E(X.g(y))-E(X.g(y))=0$$

Prema tome, dobijamo

$$(1.2.5)\qquad \sigma_x^2=E\left[X-E(X/y)\right]^2+E\left[E(X/y)-EX\right]^2$$

Iz (1.2.1) i (1.2.5) lako se dobija

$$(1.2.6)\qquad \eta_{x/y}^2=1-\frac{E\left[X-E(X/y)\right]^2}{\sigma_x^2}$$

Istim postupkom dobijamo i

$$(1.2.7)\qquad \eta_{y/x}^2=1-\frac{E\left[Y-E(Y/x)\right]^2}{\sigma_y^2}$$

Dalje ćemo posmatrati korelacioni količnik (1.2.1), odnosno (1.2.6) i svi zaključci o njemu važe i za količnik (1.2.3) odnosno (1.2.7). Navedimo neke osobine Pirsonovog korelacionog količnika.

T e o r e m a 1.2.1. Ako su slučajne veličine nezavisne tada je Pirsonov korelacioni količnik jednak nuli. Obrnuto ne važi.

Dokaz. Neka su slučajne veličine X i Y nezavisne. Iz nezavisnosti dobijamo $E(X/y) = EX$, a tada iz (1.2.1) neposredno sledi $\eta^2_{x/y} = 0$.

Obrnuto ne važi. Neka su slučajne veličine zavisne i neka je uslovna funkcija verovatnoće slučajne veličine X u odnosu na Y data sa

$$P(x/y) = \frac{2}{\pi}\,\frac{\varphi(y)}{\left[\varphi^2(y)(x+1)^2+1\right]^2}\;;\quad \varphi(y)>0,\ (-\infty<x<+\infty)$$

Uslovno matematičko očekivanje slučajne veličine X u odnosu na Y, za navedeni primer funkcije verovatnoće, dato je izrazom

$$E(X/y) = \frac{2}{\pi}\varphi(y)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\,dx}{\left[\varphi^2(y)(x+1)^2+1\right]^2}\;,$$

iz čega posle integracije dobijamo $E(X/y) = -1 = EX$, a tada iz (1.2.1) sledi $\eta^2_{x/y} = 0$ q.e.d.

T e o r e m a 1.2.2. Pirsonov korelacioni količnik jednak je jedan tada i samo tada ako između slučajnih veličina postoji skoro svuda funkcionalna zavisnost. ([18]; str. 323)

Dokaz. Uslov je potreban. Neka je korelacioni količnik jednak 1, tada iz (1.2.6) sledi da je

$$E\left[X-E(X/y)\right]^2 = 0\;,\quad \text{odnosno}\quad x = E(X/y) = g(y)\quad \text{skoro svuda.}$$

Uslov je dovoljan. Neka je $x = g(y)$. Smenom u (1.2.6) slučajne veličine X sa g(Y) dobijamo

$$\eta^2_{x/y} = 1 - \frac{E\left[g(y)-E(g(y)/y)\right]^2}{{}^2_x} = 1 - \frac{E\left[g(y)-g(y)\right]^2}{{}^2_x} = 1. \quad \text{q.e.d.}$$

Ako je uslovno matematičko očekivanje linearna funkcija tada je ono oblika

$$(1.2.8) \qquad E(X/y) = r_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-EY)+EX .$$

T e o r e m a 1.2.3. Pirsonov korelacioni količnik veći je ili jednak od kvadrata linearnog koeficienta korelacije. ($\eta^2_{x/y} \geqslant r^2_{xy}$). Ako je uslovno matematičko očekivanje linearna funkcija tada je $\eta^2_{x/y} = r^2_{xy}$. ([18]; str: 323)

Dokaz. Iz (1.2.6) dobijamo

$$(1.2.9) \qquad \sigma_x^2(-\eta^2_{x/y}) = E\left[X-E(X/y)\right]^2$$

Neka je

$$(1.2.10) \qquad ay+b=r_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(a-EY)+EX .$$

Posmatrajmo jednakost datu izrazom

$$(1.2.11) \qquad E(X-aY-b)^2=E\left[X-E(X/y)\right]^2+E\left[E(X/y)-aY-b\right]^2 + $$
$$+2E\left[X-E(X/y)\right]\left[E(X/y)-aY-b\right].$$

Koristeći (1.2.4) lako se dokazuje da je

$$E\left[X-E(X/y)\right]\left[E(X/y)-aY-b\right]= 0 .$$

Prema tome, (1.2.11) postaje

$$(1.2.12) \qquad E(X-aY-b)^2=E\left[X-E(X/y)\right]^2+ E\left[E(X/y)-aY-b\right]^2$$

Leva strana jednakosti (1.2.12), zbog pretpostavke (1.2.10), postaje

$$E(X-aY-b)^2=E(X-r_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(Y-EY)-EX)^2=$$

$$=E(X-EX)^2-2r_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(X-EX)(Y-EY)+r_{xy}^2\frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}E(Y-EY)^2=$$

$$=\sigma_x^2-2r_{xy}\sigma_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}+r_{xy}^2\sigma_x^2=\sigma_x^2-2r_{xy}^2\sigma_x^2+r_{xy}^2\sigma_x^2 .$$

Prema tome, imamo

(1.2.13) $$E(X-aY-b)^2=\sigma_x^2(1-r_{xy}^2)$$

Izjednačavanjem desnih strana jednakost (1.2.12) i (1.2.13) dobijamo

(1.2.14) $$\sigma_x^2(1-r_{xy}^2)-E(E(X/y)-aY-b)^2=E(X-E(X/y))^2$$

Izjednačavanjem levih strana jednakosti (1.2.9) i (1.2.14) dobijamo jednakost

$$\sigma_x^2(1-\eta_{x/y}^2)=\sigma_x^2(1-r_{xy}^2)-E(E(X/y)-aY-b)^2$$

koja rešena po $\eta_{x/y}^2$ daje

(1.2.15) $$\eta_{x/y}^2=r_{xy}^2+\frac{E(E(X/y)-aY-b)^2}{\sigma_x^2}$$

Iz (1.2.15) neposredno se vidi da je $\eta_{x/y}^2 \geqslant r_{xy}^2$.

Pri pretpostavci da je uslovno matematičko očekivanje linearna funkcija, iz jednakosti (1.2.8) i (1.2.10) dobijamo $ay+b=E(X/y)$, što smenjeno u (1.2.15) daje

$$\eta_{x/y}^2=r_{xy}^2 .$$ q.e.d.

1.3 VIŠESTRUKI KOEFICIENAT KORELACIJE

Matricu (vektor) čije su komponente slučajne veličine zovemo slučajna matrica (vektor).

Posmatrajmo slučajni vektor $\mathcal{X}$, od n komponenata, koji je razložen na dva podvektora

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \mathcal{X}^{(1)} \\ \mathcal{X}^{(2)} \end{pmatrix} \tag{1.3.1}$$

koji imaju respektivno q i n-q komponenata. Neka je

$$E\mathcal{X} = (EX_1, EX_2, \ldots, EX_n) = (0,0,\ldots,0) = (0) .$$

Neka je $\sum$ pozitivno definitna matrica kovarijacije slučajnog vektora $\mathcal{X}$ koja je prema podvektorima $\mathcal{X}^{(1)}$ i $\mathcal{X}^{(2)}$ razložena u blokove

$$\sum = \begin{pmatrix} \sum_{11} & \sum_{12} \\ \sum_{21} & \sum_{22} \end{pmatrix} \tag{1.3.2}$$

Ako funkcija distribucije $F(x)$, diskretne slučajne veličine X, ima samo jedan skok u tački $x^{(1)}$, u kojoj je koncentracija mase $p(x^{(1)})=1$, tada se X naziva degenerisana slučajna veličina i njena funkcija distribucije je

$$F(x) = \begin{cases} 1 & x \geqslant x^{(1)} \\ 0 & x < x^{(1)} \end{cases}$$

Navedmo jedan od prostijih kriterijuma za utvrđivanje pozitivne definitnosti kovarijacione matrice.

T e o r e m a 1.3.1. Potreban i dovoljan uslov da kovarijaciona matrica $\sum$, sa nedegenerisanim komponentama, bude pozitivno definitna, sastoji se u osustvu linearne zavisnosti između njenih komponenata. ([19]; str: 93)

D e f i n i c i j a 1.3.1. Maksimalnu vrednost linearne korelacije između slučajne veličine X_i $(i \leqslant q)$ i linearne kombi
ne kombinacije $a\mathcal{X}^{(2)}$ zovemo višestruki koeficienat korelacije između slučajne veličine X_i i slučajnog vektora $\mathcal{X}^{(2)}$ i obeležavamo sa $R_{i.(q+1)\ldots n}$, pri čemu je $a = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-q})$.
(1 ; str: 49)

L e m a 1.3.1. Linearna funkcija $a\mathcal{X}^{(2)}$ za koju $X_i - a\mathcal{X}^{(2)}$ ima minimalnu disperziju jeste

$$a\mathcal{X}^{(2)} = \sigma_{(i)} \Sigma_{22}^{-1} \mathcal{X}^{(2)} = b\,\mathcal{X}^{(2)} \tag{1.3.3}$$

pri čemu je $\sigma_{(i)}$ i-ta vrsta bloka Σ_{12} . ([1]; str: 47,48)

Dokaz. Za svaki skalar Z je $EZ^2 = EZZ'$. Disperzija slučajne veličine $X_i - a\mathcal{X}^{(2)}$ jednaka je

$$E(X_i - a\mathcal{X}^{(2)})^2 = E\left[(X_i - b\,\mathcal{X}^{(2)}) + (b-a)\,\mathcal{X}^{(2)}\right]^2 = E\left[(X_i - b\,\mathcal{X}^{(2)}) + (b-a)\,\mathcal{X}^{(2)}\right] \cdot$$

$$\cdot \left[(X_i' - \mathcal{X}^{(2)'} b') + \mathcal{X}^{(2)'}(b'-a')\right] = E(X_i - b\mathcal{X}^{(2)})(X_i' - \mathcal{X}^{(2)'} b') +$$

$$+ E\left[(b-a)\mathcal{X}^{(2)}(X_i' - \mathcal{X}^{(2)'} b')\right] + E\left[(X_i - b\,\mathcal{X}^{(2)})\,\mathcal{X}^{(2)'}(b'-a')\right] +$$

$$+ E\left[(b-a)\mathcal{X}^{(2)}\mathcal{X}^{(2)'}(b'-a')\right]$$

pri čemu su izrazi

$$E\left[(b-a)\,\mathcal{X}^{(2)}(X_i' - \mathcal{X}^{(2)'} b')\right] = E\left[(X_i - \mathcal{X}^{(2)} b)\,\mathcal{X}^{(2)'}(b'-a')\right]' \text{ i}$$

$$\text{i } E\left[(X_i - b\mathcal{X}^{(2)})\mathcal{X}^{(2)'}(b-a)'\right]$$

jednaki nuli, jer je

$$E(X_i - b\mathcal{X}^{(2)})\mathcal{X}^{(2)'} = \sigma_{(i)} - b\Sigma_{22} = \sigma_{(i)} - \sigma_{(i)}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{22} = 0 ,$$

pri čemu je $b = \sigma_{(i)}\Sigma_{22}^{-1}$. Prema tome, imamo

$$E(X_i - a\mathcal{X}^{(2)})^2 = E(X_i - b\mathcal{X}^{(2)})(X_i' - \mathcal{X}^{(2)'}b') + E\left[(b-a)\mathcal{X}^{(2)}\mathcal{X}^{(2)'}(b-a)'\right]$$

odnosno

$$(1.3.4) \quad E(X_i - a\mathcal{X}^{(2)})^2 = \sigma_{x_i}^2 - \sigma_{(i)}\Sigma_{22}^{-1}\sigma_{(i)}' + (b-a)\Sigma_{22}(b-a)' .$$

Kako je po pretpostavci Σ_{22} pozitivno definitna matrica, drugi sabirak s desne strane jednakosti (1.3.4) je nenegativan, a prvi sabirak istog izraza ne zavisi od a, pa će prema tome (1.3.4) biti minimalno za a=b. q.e.d.

T e o r e m a 1.3.2. Maksimum linearne korelacije između slučajne veličine X_i i $a\mathcal{X}^{(2)}$ dostiže se za a=b.

([1]; str: 48,49)

Dokaz. Kako je, na osnovu leme 1.3.1,

$$E(X_i - b\mathcal{X}^{(2)})^2 \leq E(X_i - ca\mathcal{X}^{(2)})^2 ,$$

za svaku linearnu kombinaciju $ca\mathcal{X}^{(2)}$, dobijamo

$$\sigma_{x_i}^2 + E(b\mathcal{X}^{(2)})^2 - 2EX_i b\mathcal{X}^{(2)} \leq \sigma_{x_i} + c^2 E(a\mathcal{X}^{(2)}) - 2cEX_i a\mathcal{X}^{(2)} ,$$

odnosno

$$(1.3.5)\qquad 2\,\frac{E(X_i b\mathcal{X}^{(2)})}{\sigma_{x_i}\sqrt{E(b\mathcal{X}^{(2)})^2}} - \frac{E(b\mathcal{X}^{(2)})^2}{\sigma_{x_i}\sqrt{E(b\mathcal{X}^{(2)})^2}} \geqslant$$

$$2c\,\frac{E(X_i . a\mathcal{X}^{(2)})}{\sigma_{x_i}\sqrt{E(b\mathcal{X}^{(2)})^2}} - c^2\,\frac{E(a\mathcal{X}^{(2)})^2}{\sigma_{x_i}\sqrt{E(b\mathcal{X}^{(2)})^2}}\ .$$

Neka je $c^2 = \dfrac{E(b\mathcal{X}^{(2)})^2}{E(a\mathcal{X}^{(2)})^2}$ tada (1.3.5) postaje

$$(1.3.6)\qquad \frac{E(X_i b\mathcal{X}^{(2)})}{\sigma_{x_i}\sqrt{E(b\mathcal{X}^{(2)})^2}} \geqslant \frac{E(X_i a\mathcal{X}^{(2)})}{\sigma_{x_i}\sqrt{E(a\mathcal{X}^{(2)})^2}}$$

Kako je po pretpostavci $EX_k=(0)$ za $k=1,2,3,\ldots,n$, nejednakost (1.3.6) je nejednakost odgovarajućih linearnih koeficijenata korelacije, tj. $r_{x_i b x^{(2)}} \geqslant r_{x_i a x^{(2)}}$ iz čega sledi da se maksimum korelacije dobija za $a=b$. q.e.d.

Iz definicije 1.3.1 i teoreme 1.3.2 sledi da je višestruki koeficijenat korelacije, između slučajne veličine x_i i slučajnog vektora $\mathcal{X}^{(2)}$ dat sa

$$R_{i(q+1)\ldots n} = \frac{E(X_i b\mathcal{X}^{(2)})}{\sigma_{x_i}\sqrt{E(b\mathcal{X}^{(2)})^2}} = \frac{\sigma_{(i)}\Sigma_{22}^{-1}E(X_i\mathcal{X}^{(2)})}{\sigma_{x_i}\sqrt{E\left[\sigma_{(i)}\Sigma_{22}^{-1}\mathcal{X}^{(2)}\mathcal{X}^{(2)'}(\sigma_{(i)}\Sigma_{22}^{-1})'\right]}}$$

odnosno

$$(1.3.6)\qquad R_{i(q+1)\ldots n} = \frac{\sqrt{\sigma_{(i)}\Sigma_{22}^{-1}\sigma'_{(i)}}}{\sigma_{x_i}}$$

Navedimo neke osobine višestrukog koeficienta korelacije.

1° Uvek je $0 \leqslant R_{i(q+1)\ldots n} \leqslant 1$.

Dokaz. Iz pretpostavke da je pozitivno definisana matrica sledi

$$\sigma_{(i)} \sum\nolimits_{22}^{-1} \sigma'_{(i)} \geqslant 0, \text{ tj.}$$

$$R_{i(q+1\ldots n} \geqslant 0 .$$

Iz definicije 1.3.1 sledi da je višestruki koeficienat korelacije $R_{i(q+1\ldots n}$ isto što i linearni koeficienat korelacije između slučajnih veličina X_i i $b\mathcal{X}^{(2)}$, pa na osnovu teoreme 1.1.3 imamo $R_{i(q+1\ldots n} \leqslant 1$.

2° Ako su slučajna veličina X_i i slučajni vektor $\mathcal{X}^{(2)}$ nezavisni, tada je $R_{i(a+1)\ldots n} = 0$. Obrnuto ne vredi.

Dokaz. Iz nezavisnosti X_i i $\mathcal{X}^{(2)}$ dobijamo

$$(1.3.7) \quad \sigma_{(i)} = (EX_iX_{q+1}, EX_iX_{q+2}, \ldots, EX_iX_n) = (0,0,\ldots,0)$$

što smenjeno u (1.3.6) daje $R_{i(q+1)\ldots n} = 0$.

Obrnuto ne važi. Neka je $R_{i(q+1)\ldots n} = 0$. Tada iz (1.3.6) zbog pozitivno definisane matrice $\sum\nolimits_{22}^{-1}$, dobijamo $\sigma_{(i)} = (0,0,\ldots,0)$.

Da bi utvrdili mogućnost zavisnosti i u ovom slučaju između slučajne veličine X_i i vektora $\mathcal{X}^{(2)}$, dovoljno je utvrditi da X_i može da zavisi bar od jedne komponente iz $\mathcal{X}^{(2)}$. Iz teoreme 1.1.1 sledi da slučajne veličine ne moraju biti nezavisne i ako je njihova kovarijacija jednaka nuli, čime je i drugi tvrđenja dokazan.

Međutim, ako slučajne veličine $X_1, X_2, \ldots, X_n$ pripadaju Gausovoj klasi, tada je $R_{i(q+1),..n} = 0$ potreban i dovoljan uslov za nezavisnost slučajne veličine X_i i slučajnog vektora $\mathcal{X}^{(2)}$.

3° Iz tepreme 1.1.2 sledi da je $R_{i(q+1)\ldots n} = 1$, ako između slučajne veličine X_i i $b\mathcal{X}^{(2)}$ postoji skoro svuda linearna zavisnost i obrnuto.

Iz izraza za disperziju slučajne veličine X_i, posle zamena X_i sa $b\mathcal{X}^{(2)}$, dobijamo

$$\sigma_{x_i}^2 = EX_i^2 = E(b\mathcal{X}^{(2)})^2 = E(b\mathcal{X}^{(2)}\mathcal{X}^{(2)'}b') = b\Sigma_{22}\, b',$$

odnosno

$$\sigma_{x_i} = \sqrt{b\Sigma_{22}\, b'} \tag{1.3.8}$$

Posle zamene X_i sa $b\mathcal{X}^{(2)}$, $\sigma_{(i)}$ postaje

$$\sigma_{(i)} = \left[E(b\mathcal{X}^{(2)}X_{q+1}), E(b\mathcal{X}^{(2)}X_{q+2}), \ldots, E(b\mathcal{X}^{(2)}X_n)\right] =$$

$$= bE(\mathcal{X}^{(2)}\mathcal{X}^{(2)'}),\text{ odnosno}$$

$$\sigma_{(i)} = b\Sigma_{22} \tag{1.3.9}$$

Smenom (1.3.8) i (1.3.9) u (1.3.6) dobijamo

$$R_{i(q+1)\ldots n} = \frac{\sqrt{b\Sigma_{22}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{22}'\, b'}}{\sqrt{b\Sigma_{22}\, b'}} = \frac{\sqrt{b\Sigma_{22}\, b'}}{\sqrt{b\Sigma_{22}\, b'}} = 1\,.$$

Prema tome, tvrđenje ima smisla za pozitivno definisanu matricu Σ_{22}.

1.4 KORELACIONA INTEGRALNA JEDNAČINA

Neka slučajne veličine X i Y imaju funkciju verovatnoće $f(x,y)$.

Integralnu jednačinu

$$h\int_a^b G(y)\,\frac{f(x,y)}{P(x)}\,dy = G(x) \tag{1.4.1}$$

kod koje je $p(x)$ funkcija verovatnoće slučajne veličine X, $G(x)$ nepoznata funkcija, a razmak integracije b-a može biti i beskonačan, zovemo korelaciona integralna jednačina. ([6]; str: 81, 82)

Cilj je utvrditi pri kakvim ograničenjima nametnutim na jezgro $f(x,y)/p(x) = q(y/x)$, koja je uslovna funkcija verovatnoće slučajne veličine Y u odnosu na slučajnu veličinu X, jednačina (1.4.1) ima monotonu sopstvenu funkciju i ukazati na metod uzastopnih aproksimacija za nalaženje monotone sopstvene funkcije.

Neka je

$$W_1(x,y) = \int_a^y \frac{\partial}{\partial x}\, q(u/x)du\,. \tag{1.4.2}$$

Iz (1.4.2) dobijamo

$$W_1(x,a) = W_1(x,b) = 0\,. \tag{1.4.3}$$

Druga iz jednakosti (1.4.3) sledi iz:

$$\int_a^b q(y/x)dy = 1 \tag{1.4.4}$$

Teorema 1.4.1. Neka funkcija definisana jednakošću (1.4.2) ne menja znak u celoj oblasti definisanosti $(a,b)\times(c,d)$, neka funkcija $G(x)$ zadovoljava uslov

(1.4.5) $$G(a)W_1(x,a)-G(b)W_1(x,b) = 0 .$$

ako je $G(x)$ monotona tada je funkcija

(1.4.6) $$G_1(x) = \int_a^b G(y)q(y/x)dy$$

monotona. ([14] ; str: 781-784)

Dokaz. Pri pretpostavci apsolutne kovergencije integrala (1.4.6) možemo diferencirati po x:

(1.4.7) $$G_1'(x) = \int_a^b G(y) \frac{\partial}{\partial x} q(y/x)dy$$

Parcijalnom integracijom, pri čemu je $u=G(y)$, $dv=\frac{\partial}{\partial x} q(y/x)dy$ dobijamo

$$G_1'(x) = G(y)W_1(x,y)\Big|_a^b - \int_a^b G'(y)W_1(x,y)dy$$

iz čega, zbog (1.4.3), sledi

(1.4.8) $$G_1'(x) = \int_a^b G'(y)W_1(x,y)dy$$

Kako, po pretpostavci, $W_1(x,y)$ ne menja znak, $G(y)$ je monotona funkcija, odnosno $G'(y)$ ne menja znak, sledi da $G_1'(y)$ ne menja znak, odnosno da je $G_1(x)$ monotona funkcija. q.e.d.

Neka je

(1.4.9) $$f(x,y) = f(y,x)$$

Pri pretpostavci (1.4.9) jednačina (1.4.1) simetrizuje se množeći je sa $\sqrt{p(x)}$ i postaje

(1.4.10) $$h\int_a^b G(y)\sqrt{p(y)}\frac{f(x,y)}{\sqrt{p(x)p(y)}}dy = G(x)\sqrt{p(x)}$$

Zbog (1.4.4) lako se dokazuje da je $h_0=1$ sopstvena vrednost, a $h_0(x)=1\cdot\sqrt{p(x)}$ sopstvena funkcija jednačine (1.4.10).

Uvedimo novo ograničenje na jezgro:

$$(1.4.11)\quad \int_a^b\int_a^b K^2(x,y)dxdy = \int_a^b\int_a^b \frac{f^2(x,y)}{p(x)\cdot p(y)}dxdy = k^2 < +\infty$$

tada su tačne, za jednačinu (1.4.10), sve teoreme o razlaganju po sopstvenim funkcijama, o egzistenciji sopstvenih vrednosti itd.

Spektar jednačine (1.4.10) ima oblik

$$(1.4.12)\quad \frac{h_o=1}{1\cdot\sqrt{p(x)}},\ \frac{h_1}{G_1(x)\sqrt{p(x)}},\ \frac{h_2}{G_2(x)\sqrt{p(x)}},\ldots,\frac{h_m}{G_m(x)\sqrt{p(x)}},\ldots$$

pri čemu je $|h_m|>1$, za $m=1,2,3,\ldots$

Stavljajući u jednačinu (1.4.1) $G_m(x)$ mesto $G(x)$ dobijamo

$$(1.4.13)\quad 1 = \int_a^b G_m^2(x)p(x)dx = h_m\int_a^b\int_a^b G_m(x)G_m(y)f(x,y)dxdy.$$

Zbog ortonormiranosti sistema (1.4.12) imamo

$$EG_m(x)=0,\ EG_m^2(x)=1,\quad \text{za}\quad m=1,2,3,\ldots$$

iz čega sledi da

$$(1.4.14)\quad r_{G_mG_m} = \int_a^b\int_a^b G_m(x)G_m(y)f(x,y)dxdy,$$

predstavlja linearni koeficienat korelacije izmedju slučajnih veličina $G_m(X)$ i $G_m(Y)$.
Iz jednakosti (1.4.14) i (1.4.13) dobijamo

$$1 = |h_m|\,|r_{G_mG_m}|$$

iz čega sledi $|h_m|>1$.

Neka je $r(y)$ ma koja apsolutno integrabilna funkcija i $r^2(y)p(y)$ integrabilna funkcija, tada funkcija

$$(1.4.15) \qquad r_k(x) = \int_a^b r_{k-1}(y)q(y/x)dy\,, \qquad k=1,2,3,\dots$$

pri čemu je $r_0(y) = r(y)$, zovemo k-tim uzastopnim momentom funkcije $r(y)$, u odnosu na uslovnu funkciju verovatnoće $q(y/x)$.

Rastavljajući u red po sopstvenim funkcijama k-tu iteraciju jezgra $K(x,y)$, jednačine (1.4.10), što je moguće za $k \geqslant 2$, imamo

$$(1.4.16) \qquad K^{(k)}(x,y) = \sqrt{p(x)}\sqrt{p(y)} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sqrt{p(x)}G_i(x)\sqrt{p(y)}G_i(y)}{h_i^k}$$

Red (1.4.16) posle množenja sa $r(y)\sqrt{p(y)}$, možemo integraliti član po član. Posle integracije i delenja sa $\sqrt{p(x)}$ dobijamo

$$(1.4.17) \qquad r_k(x) = c_0 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i \frac{G_i(x)}{h_i^k}\,,$$

gde su $C_0, C_1, C_2, \dots$ Furijerovi koeficienti funkcije $r6y)\sqrt{p(y)}$ sistema funkcija (1.4.12), a $r_k(x)$ je

$$(1.4.18) \qquad r_k(x) = \int_a^b r(y)\sqrt{p(y)}\,\frac{K^{(k)}(x,y)}{\sqrt{p(x)}}\,dy\,.$$

Iz (1.4.18), koristeći izraz za iteraciju jezgra, dobijamo (1.4.15). Prema tome (1.4.17) je k-ti moment funkcije $r(y)$.

Izraz (1.4.17) napišimo u obliku

$$(1.4.19) \qquad \frac{r_k(x)-C_0}{C_1}h_1^k = G_1(x) + \frac{C_2}{C_1}\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^k G_2(x) + \frac{C_3}{C_1}\left(\frac{h_1}{h_3}\right)^k G_3(x) + \dots$$

Uvek možemo izabrati $r(y)$ neortogonalno na $G_1(y)\sqrt{p(y)}$. Prema tome možemo pretpostaviti da je $C_1 \neq 0$. Kako je $|h_1| \leqslant |h_2| \leqslant |h_3| \leqslant \dots$ i koeficienti $C_0, C_1, C_2, \dots$ ne zavise od 1, prvu sopstvenu funkciju dobijamo iz (1.4.19) kao graničnu vrednost izraza

$$\lim_{k\to\infty} \frac{r_k(x)-C_0}{C_1} h_i^k = G_i(x) \tag{1.4.20}$$

Ako je h_i ranga $s>1$, tada je

$$\lim_{k\to\infty}(r_k(x)-C_0)h_1^k = C_1G_1(x)+\ldots+C_sG_s(x) \tag{1.4.21}$$

T e o r e m a 1.4.2. Ako funkcija $W_1(x,y)$, definisana izrazom (1.4.2), ne menja znak u oblasti definisanosti, ako je $r(x)$ monotona funkcija čiji uzastopni momenti zadovoljavaju uslov

$$r_k(a)W_1(x,a)-r_k(b)W_1(x,b) = 0, \quad k=0,1,2,\ldots \tag{1.4.22}$$

korelaciona jednačina (1.4.1) sa simetričnom funkcijom verovatnoće $f(x,y)$ ima jedinstveno monotono rešenje određeno procesom uzastopnih aproksimacija (1.4.15), odnosno prva sopstvena funkcija biće monotono rešenje. ([14]; str: 781-784)

Dokaz. Uslov (1.4.22) zadovoljava svaka ograničenja i monotona funkcija, jer iz teoreme 1.4.1 sledi da su funkcije $r_k(x)$ $k=1,2,3,\ldots$ monotone ako je $r(x)$ monotona funkcija i pri tome ako je $|r(x)|\leq A$, tada je i $|r_k(x)|\leq A$, za svako k, a tada je očevidno da je uslov (1.4.22) zadovoljen. Iz (1.4.20) sledi da je $G_1(x)$, kao granična vrednost niza monotonih funkcija, monotona funkcija.

Jedinstvenost rešenja sledi iz leme 1.4.1 koju navodimo bez dokaza. q.e.d.

L e m a 1.4.1. Dve ortogonalne funkcije $r(x)$ i $G(x)$ sa masom $p(x)>0$, od kojih je jedna ortogonalna i sa 1, sa istom masom $p(x)$, ne mogu biti istovremeno i monotone.

Neka funkcija verovatnoće $f(x,y)$ ispunjava uslov (1.4.9) i neka je uslovno matematičko očekivanje, $E(Y/x)=(h(x)$ nelinearna funkcija. Odredimo uslove pri kojima se slučajne veličine X i Y mogu transformisati u nove slučajne veličine $U = G(X)$ i $V = G(Y)$ tako da je korelacija između U i V linearna funkcija. Problem određivanja transformacije G ekvivalentan je problemu nalaženja monotonog rešenja korelacione integralne jednačine (1.4.1). Ako je $G(x)$ monotono rešenje jednačine (1.4.1) transformacija $U = G(X)$ i $V = G(Y)$ je moguća i korelacija između U i V je linearna funkcija.

Dalje ćemo navesti dovoljne uslove za egzistenciju monotonog rešenja jednačine (1.4.1). Neka simetrično jezgro

$$K(x,y) = \frac{f(x,y)}{\sqrt{p(x)\, p(y)}}$$

ispunjava uslove (1.4.11). Tada možemo rastaviti u red k-tu iteraciju jezgra $K(x,y)$. Pretpostavimo da se prva sopstvena vrednost javlja s puta, tada smenom

$$K^{(k)}(x,y) = \frac{f^{(k)}(x,y)}{\sqrt{p(x)\ \ p(y)}}\ , \quad \text{pri čemu je}$$

$$f^{(k)}(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f^{(k-1)}(x,t) f(t,y)}{p(t)}\, dt\ , \text{ u (1.4.16) dobijamo}$$

$$\frac{f^{(k)}(x,y)}{p(x)} = p(y) + \frac{1}{h_1^k} \sum_{i=1}^{s} G_i(x) G_i(y) p(y) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{G_{s+i}(x) G_{s+1}(y) p(y)}{h_{s+i}^k}$$

Koristeći nejednačinu Besela i Švarca lako je dokazati da postoji granična vrednost izraza

$$\lim_{k\to\infty} h_1^k \left[\left(\frac{f^{(k)}(x+h,y)}{p(x+h)} - \frac{f^{(k)}(x,y)}{p(x)} \right] = \phi(x,y,h)$$

pri čemu je

$$\phi(x,y,h) = (G_1(x+h) - G_1(x)) G_1(y) p(y) + \dots + (G_s(x+h) - G_s(x)) G_s(y) p(y)$$

Pri učinjenim pretpostavkama važi sledeća teorema:

T e o r e m a 1.4.3. Ako postoji bar jedna vrednost $y=y_0$ za koju funkcija

$$\int_{-\infty}^{y_0} \phi(x,t,h)\, dt = W(x,y,h) \tag{1.4.22}$$

ne menja znak za svako x i $h > 0$, tada jednačina (1.4.1) ima u svom spektru jedinstveno monotono rešenje. ([15]; str:745-747)

Dokaz. Neka su ispunjeni uslovi teoreme, tada jednakost

(1.4.23) $$W(x,y_0,h)=(G_1(x+h)-G_1(x))\int_{-\infty}^{y_0} G_1(y)p(y)dy+\dots+$$
$$+G_s(x+h)-G_s(x))\int_{-\infty}^{y_0} G_s(y)p(y)dy$$

ne menja znak za svako x i $h>0$, odnosno funkcija $C_1G_1(x)+$ $+C_2G_2(x)+\dots+C_sG_s(x)$ koja pripada prvoj sopstvenoj vrednosti h_1 pri čemu je

$$C_i=\int_{-\infty}^{y_0} G_i(y)p(y)dy \qquad i=1,2,\dots,s$$

je monotona za sve vrednosti x. Jedinstvenost rešenja sledi iz leme 1.4.1. q.e.d.

Ako je prva sopstvena vrednost prost broj, tj. $s=1$, tada iz pretpostavke da funkcija (1.4.22) ne menja znak za neko y sledi da ne menja znak za svako y.

T e o r e m a 1.4.4. Ako je prva sopstvena vrednost prost broj tada za monotonost prve sopstvene funkcije potrebno je i dovoljno da funkcija (1.4.22) ne menja znak za sve vrednosti $x,y,h>0$. ([15]; str: 745-747)

Dokaz. Dovoljnost uslova sledi iz teoreme 1.4.3.

Uslov je potreban. Za $s=1$ jednakost (1.4.23) postaje

(1.4.24) $$W(x,y,h)=(G_1(x+h)-G_1(x))\int_{-\infty}^{y} G_1(t)p(t)dt$$

Neka je $G_1(x)$ prva sopstvena monotona funkcija tada $\int_{-\infty}^{y} G_1(t)p(t)dt$ ne menja znak za sve vrednosti y, a $G_1(x+h)-G_1(x)$ ne menja znak za sve vrednosti x i $h>0$. Prema tome $W(x,y,h)$ ne menja znak za sve vrednosti $x,y,h>0$. q.e.d.

U teoremi 1.4.2. za egzistenciju monotonog rešenja zahtevano je da funkcija (1.4.2) ne menja znak za sve vrednosti x i y. Lako je dokazati, koristeći se izrazom za funkciju $\overset{(k)}{f}(x,y)$, da zbog navedenog uslova ne menja znak i funkcija

$$\int_{-\infty}^{y}\left[\frac{\overset{(k)}{f}(x+h,t)}{p(x+h)} - \frac{\overset{(k)}{f}(x,t)}{p(x)}\right]dt \qquad \text{za svako } k>1,$$

iz čega sledi da W(x,y,h) ne menja znak za sve vrednosti $x,y,h>0$. U opštem slučaju važi: ako u nizu funkcija

$$W_k(x,y) = \int_{-\infty}^{y} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\overset{(k)}{f}(x,t)}{p(x)}\, dt \qquad k=1,2,\dots$$

jedna od njih ne menja znak za sve vrednosti x i y, tada i funkcija (1.4.22) ne menja znak za sve vrednosti $x,y,h>0$.

Neka je data nesimetrična funkcija verovatnoće slučajnih veličina X i Y, tj. neka je

$$f(x,y) \neq f(y,x) \tag{1.4.25}$$

definisana u celoj ravni. Neka su pri tome uslovna matematička očekivanja $E(Y/x)=h(x)$ i $E(X/y)=h_1(y)$ nelinearne funkcije.

I u ovom slučaju odredićemo uslove pri kojima se slučajne veličine X i Y mogu transformisati u nove slučajne veličine U=G(X) i V=S(Y), tako da su uslovna matematička očekivanja, za U u odnosu na V i za V u odnosu na U, linearne funkcije.

Problem odredjivanja transformacija G i S ekvivalentan je problemu odredjivanja para monotonih rešenja sistema korelacionih integralnih jednačina

$$G(x) = h\int_{-\infty}^{\infty} S(y)\,\frac{f(x,y)}{p(x)}dy$$

$$S(y) = h\int_{-\infty}^{\infty} G(x)\,\frac{f(x,y)}{q(y)}dx$$

Iz opšte teorije Gilberta-Šmida sledi da je sistem jednačina (1.4.26) ekvivalentan sistemu dveju integralnih jednačina sa simetričnim jezgrima:

$$G(x) = h^2 \int_{-\infty}^{\infty} G(y) \frac{f_1(x,y)}{p(x)} dy$$

(1.4.27)

$$S(y) = h^2 \int_{-\infty}^{\infty} S(x) \frac{f_2(x,y)}{q(y)} dx$$

pri čemu je

$$f_1(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x,t)f(y,t)}{q(t)} dt$$

(1.4.28)

$$f_2(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t,x)f(t,y)}{p(t)} dt$$

Iz (1.4.28) neposredno se vidi da su funkcije $f_1(x,y)$ i $f_2(x,y)$ simetrične, osim toga obe su i funkcije verovatnoće takve da je $p(x)$ i $p(y)$ jednodimenzionalne funkcije verovatnoće iz $f_1(x,y)$, a $q(x)$ i $q(y)$ jednodimenzionalne funkcije verovatnoće iz $f_2(x,y)$. Iz ekvivalentnosti sistema (1.4.26) i (1.4.27) dobija se sledeća teorema:

T e o r e m a 1.4.5. Da bi nesimetrična funkcija verovatnoće $f(x,y)$ dopuštala takvu transformaciju, $U=G(X)$ i $V=S(Y)$, slučajnih veličina X i Y da uslovna matematička očekivanja, novouvedenih slučajnih veličina U i V, budu linearne funkcije, potrebno je i dovoljno da to dopuštaju obe simetrične funkcije verovatnoće iz (1.4.28). ([16]; str: 816-819)

Dokaz. Zbog ekvivalentnosti sistema jednačina(1.4.26) i (1.4.27) dokaz je evidentan, jer u tom slučaju monotona rešenja $G(x)$ i $S(x)$ sistema (1.4.27) jesu rešenja sistema (1.4.26) i obrnuto. q.e.d.

Uslovi za egzistenciju monotonih rešenja korelacionih integralnih jednačina sa simetričnom funkcijom verovatnoće dati su teoremama 1.4.3 i 1.4.4. Uslov(1.4.11) u ovom slučaju glasi

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_1^2(x,y)}{p(x)p(y)}\,dxdy = K_1^2<\infty$$

(1.4.29)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_2^2(x,y)}{q(x)q(y)}\,dxdy = K_2^2<\infty$$

Međutim uslovi (1.4.29) biće ispunjeni ako se za nesimetričnu funkciju verovatnoće pretpostavi da je

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f^2(x,y)}{p(x)q(y)}\,dxdy = K^2<\infty$$

Iz teoreme 1.4.2 uslov da funkcija $W_1(x,y)$ ne menja znak u ovom slučaju ekvivalentan je uslov da funkcije:

$$\Psi_1(x,y) = \int_{-\infty}^{y}\frac{\partial}{\partial x}\frac{f_1(x,t)}{p(x)}\,dt$$

(1.4.31)

$$\Psi_2(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{f_2(t,y)}{q(y)}\,dt$$

ne menjaju znak za sve vrednosti x i y. Da nebi funkcije(1.4.31) menjale znak dovoljno je pretpostaviti da funkcije:

(1.4.32) $$W_1(x,y) = \int_{-\infty}^{y}\frac{\partial}{\partial x}\frac{f(x,t)}{p(x)}\,dt$$

(1.4.33) $$W_2(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{f(t,y)}{q(y)}\,dt$$

ne menjaju znak u oblasti definisanosti. Zaista, smenom izraza za $f_1(x,y)$ i $f_2(x,y)$ iz (1.4.28) i (1.4.31), posle parcijalne integracije, dobijamo izraze

$$\Psi_1(x,y) = -\int_{-\infty}^{\infty} W_1(x,t)W_2(y,t)dt$$

$$\Psi_2(x,y) = -\int_{-\infty}^{\infty} W_1(t,x)W_2(t,y)dt$$

iz kojih sledi, ako $W_1(x,y)$ i $W_2(x,y)$ ne menjaju znak, da $\Psi_1(x,y)$ i $\Psi_2(x,y)$ ne menjaju znak za sve vrednosti x i y. Iz izloženih rezultata dobijamo sledeću teoremu:

T e o r e m a 1.4.6. Ako su funkcije $W_1(x,y)$ i $W_2(x,y)$ definisane jednačinama (1.4.31), konstantnog znaka za sve vrednosti x i y tada, pod uslovom (1.4.30), postoji jedinstven par monotonih sopstvenih funkcija sistema jednačina (1.4.26), koji pripada prvoj sopstvenoj vrednosti $|h_1|>1$. ([16]; str: 816-819)

Monotone sopstvene funkcije možemo odrediti iz sistema jednačina (1.4.27) metodom uzastopnih aproksimacija.

Uzimajući mnotona sopstvea rešenja sistema jednačina (1.4.26) za transformacije slučajnih veličina X i Y, U=G(X) i V = S(Y) između U i V dobija se linearna korelacija:

$$E(U/v) = \frac{1}{h_1}v\ , \quad E(V/u) = \frac{1}{h_1}u$$

Opštije dovoljne uslove egzistencije monotonih rešenja sistema (1.4.26) nećemo navoditi jer su, obzirom na ekvivalentnost sistema jednačina (1.4.26) i (1.4.27), oni dati teoremama 1.4.3 i 1.4.4.

1.5. MAKSIMALNI KOEFICIENAT KORELACIJE

Neka realizacije slučajnih veličina X i Y pripadaju oblasti (a,b)x(a,b), koja može biti i beskonačna. Razmotrimo prvo slučaj kada je f(x,y) = f(y,x). Neka je ispunjen uslov (1.4.11), tada jezgro

$$K(x,y) = \frac{f(x,y)}{\sqrt{p(x)p(y)}} \tag{1.5.1}$$

ima spektar (1.3.12).

D e f i n i c i j a 1.5.1. $R = \frac{1}{h_1}$ zovemo maksimalni (po apsolutnoj vrednosti) koeficienat korelacije, odgovarajuće funkcije verovatnoće f(x,y). h_1 je prva sopstvena vrednost u spektru (1.4.12).

T e o r e m a 1.5.1. Izraz

$$J = \int_a^b \int_a^b G(x)G(y)f(x,y)dxdy \tag{1.5.2}$$

pod uslovom da je

$$\int_a^b G(x)p(x)dx=0 \quad \text{i} \quad \int_a^b G^2(x)p(x)dx=1 \tag{1.5.3}$$

postavlja linearni koeficienat između slučajnih veličina G(X) i G(Y). Maksimum apsolutne vrednosti izraza (1.5.2) dostiže se za $G(x) = G_1(x)$ i jednak je $1/h_1$. $G_1(x)$ je prva sopstvena funkcija iz spektra (1.4.12). ([17]; str: 715-718)

Dokaz. Iz (1.4.10) imamo

$$\frac{G_i(x)\sqrt{p(x)}}{h_i} = \int_a^b G_i(y)\sqrt{p(y)}\frac{f(x,y)}{\sqrt{p(x)p(y)}}\,dy \tag{1.5.4}$$

Leva strana jednakosti (1.5.4) predstavlja Furijerove koeficiente izraza (1.5.1), pa je u oblasti uniformne kovergencije

$$\frac{f(x,y)}{\sqrt{p(x)p(y)}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{G_i(x)\sqrt{p(x)}G_i(y)\sqrt{p(y)}}{h_i}, \tag{1.5.5}$$

pri čemu je $G_0(x) = 1$ i $h_0 = 1$. Posle množenja izraza (1.5.5) sa $G(x)\sqrt{p(x)}$ i $G(y)\sqrt{p(y)}$ i integracije po x i po y, koristeći pretpostavku (1.5.3), dobijamo

$$J=\int_a^b\int_a^b G(x)G(y)f(x,y)dxdy=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{C_i^2}{h_i}, \tag{1.5.6}$$

pri čemu je

$$C_i=\int_a^b G(x)G_k(x)p(x)dx, \qquad i=1,2,3,\ldots \tag{1.5.7}$$

Iz (1.5.6) sledi

$$\left|J\right|=\left|\sum_{i=1}^{\infty}\frac{C_i^2}{h_i}\right|\leqslant\left|\frac{1}{h_1}\right|\sum_{i=1}^{\infty}C_i^2 \tag{1.5.8}$$

Kako je uvek
$$\sum_{i=1}^{\infty}C_i^2\leqslant\int_a^b G^2(x)p(x)dx$$

iz (1.5.8) dobijamo

$$\left|J\right|\leqslant\left|\frac{1}{h_1}\right|\int_a^b G^2(x)p(x)dx=\left|\frac{1}{h_1}\right|. \tag{1.5.9}$$

Neka je $G(x)=G_1(x)$. Smenom $G(x)=G_1(x)$ u (1.5.7), obzirom na ortonormiranost sistema (1.4.12), dobijamo

$$C_i=\int_a^b G_1(x)G_i(x)p(x)dx=\int_a^b G_1(x)\sqrt{p(x)}G_i(x)\sqrt{p(x)}dx=\begin{cases}0 & i\neq 1\\ 1 & i=1\end{cases} \tag{1.5.10}$$

Iz (1.5.6) i (1.5.10) sledi
$$\left|J\right|=\left|\frac{1}{h_1}\right|. \qquad \text{q.e.d.}$$

Sopstvena funkcija $G_1(x)$ kao i koeficienat $R=\frac{1}{h_1}$ izračunavaju se metodom uzastopnih aproksimacija. Za nultu aproksimaciju možemo uzeti bilo koju funkciju $r_o(x)$ slučajne veličine X koja ima distribuciju. Ako je

$$C_0 = \int_a^b r_0(x)p(x)dx \neq 0,$$

tada, ne ograničavajući opštost, mesto $r_0(x)$ možemo uzeti $r_0(x)-C_0$, odnosno smatrati da je $C_0=0$. Aproksimacije $r_1(x)$, $r_2(x)$,... dobijamo sukcesivno smenom $r_0(x), r_1(x), \ldots$, u (1.4.15). Tada iz (1.4.20) imamo

$$C_1G_1(x) = \lim_{k\to\infty} r_k(x)h_1^k$$

Za dovoljno veliko k dobijamo

$$R = \frac{1}{h_1} \approx \frac{r_k(x)}{r_{k-1}(x)}$$

T e o r e m a 1.5.2) Potreban je dovoljan uslov da slučajne veličine X i Y, pod navedenim ograničenjima za funkciju verovatnoće, budu nezavisne jeste jednakost nuli maksimalnog koeficienta korelacije. ([17] ; str: 715-718)

Dokaz. Uslov je potreban. Ako su slučajne veličine X i Y nezavisne tada su $G_1(X)$ i $G_1(Y)$ takođe nezavisne slučajne veličine. Linearni koeficienat korelacije između $G_1(X)$ i $G_2(Y)$ jednak je maksimalnom koeficientu korelacije između X i Y, iz čega sledi da je R = 0.

Uslov je dovoljan. Neka je R = 0, tada spektar (1.4.12) poseduje samo sopstvenu funkciju $G_0(x)\sqrt{p(x)} = 1.\sqrt{p(x)}$.

Furijerov red

$$\sqrt{p(x)}\sqrt{p(y)} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{G_i(x)\sqrt{p(x)}G_i(y)\sqrt{p(y)}}{h_i}$$

kovergira u srednjem ka jezgru $\frac{f(x,y)}{\sqrt{p(x)p(y)}}$ odakle, obzirom na pretpostavku R = 0, dobijamo

$$\int_a^b\int_a^b \left[\frac{f(x,y)}{\sqrt{p(x)p(y)}} - \sqrt{p(x)p(y)}\right]^2 dxdy = 0$$

odnosno $f(x,y) = p(x)p(y)$ skoro svuda. q.e.d.

T e o r i j a 1.5.3. Na klasi parova slučajnih veličina kod kojih su uslovna matematička očekivanja linearne funkcije, maksimalni i linearni koeficienat korelacije se podudaraju ($R = r$).

Dokaz. Pri učinjenim pretpostavkama jednačina (1.4.1) ima monotono rešenje $\frac{X-EX}{\sigma_x}$. Ako u spektru stohatičkog jezgra postoji monotona funkcija ona uvek pripada prvoj sopstvenoj vrednosti (h_1). ([11]; str: 1021-1024)

Prema tome, maksimalni koeficienat korelacije slučajnih veličina X i Y jednak je linearnom koeficientu korelacije slučajnih veličina $\frac{X-EX}{\sigma_x}$ i $\frac{Y-EY}{\sigma_y}$, a ovaj se na osnovu teoreme 1.1.4 podudara sa linearnim koeficientom korelacije za X i Y. q.e.d.

Razmotrimo slučaj kada je $f(x,y) \neq f(y.x)$. Neka je ispunjen uslov (1.4.30). Nesimetrična funkcija verovatnoće $f(x,y)$ određuje par simetričnih funkcija verovatnoće, koji je dat izrazima (1.4.28), i dva simetrična jezgra

$$(1.5.11) \qquad K_1(x,y) = \frac{f_1(x,y)}{\sqrt{p(x)p(y)}} , \; K_2(x,y) = \frac{f_2(x,y)}{\sqrt{q(x)q(y)}}$$

Jezgra (1.5.11) su pozitivna i imaju jednak spektar sopstvenih vrednosti

$$1 < h_1^2 \leq h_2^2 \leq h_3^2 \leq \dots \leq h_i^2 \leq \dots$$

i u opštem slučaju različite spektre sopstvenih funkcija

$$\left\{G_i(x)\right\}, \; \left\{S_i(x)\right\} \qquad i=1,2,3,\dots$$

Na osnovu teorije sopstvenih funkcija Gilberta-Šmidta spektar jezgra

$$(1.5.12) \qquad K(x,y) = \frac{f(x,y)}{\sqrt{p(x)q(y)}}$$

ima oblik

$$(1.5.13)\qquad \frac{1}{\sqrt{p(x)},\sqrt{q(y)}}\,,\quad \frac{h_i}{\sqrt{p(x)}G_i(x),\sqrt{q(y)}S_i(y)}\qquad i=1,2,3,\ldots$$

pri čemu bilinearno razlaganje

$$(1.5.14)\qquad K(x,y)\sim\sqrt{p(x)}\sqrt{q(y)}+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{G_i(x)\sqrt{p(x)}S_i(y)\sqrt{q(y)}}{h_i}$$

kovergira u srednjem ka jezgru $K(x,y)$ u oblasti definisanosti funkcije $f(x,y)$.

D e f i n i c i j a 1.5.2. $R=\frac{1}{h_1}$ nazivamo maksimalni (po apsolutnoj vrednosti) koeficienat korelacije odgovarajuće funkcije verovatnoće $f(x,y)$.

Ova definicija svodi se na definiciju 1.5.1. U slučaju kada je $f(x,y)$ simetrična funkcija verovatnoće. Iz definicije 1.5.2 sledi da je $R^2=\frac{1}{h_1^2}$ maksimalni koeficienat korelacije za simetrične funkcije (1.4.28). Za izračunavanje maksimalnog koeficienta možemo se poslužiti procesom uzastopnih aproksimacija, čiji smo kovergenciju dokazali. Za "nultu aproksimaciju" $r_o(y)$ možemo uzeti bilo koju funkciju koja ima disperziju. Ne ograničavajući opštost, možemo pretpostaviti da je $EG_o(X)=0$. Neka je

$$r_{2k+1}(x)=\int_c^d r_{2k}(y)\,\frac{f(x,y}{p(x)}\,dy\,,\qquad r_{2k+2}(y)=\int_a^b r_{2k+1}(x)\,\frac{f(x,y)}{q(y)}dx$$

Tada, kao što sledi iz (1.4.20), prvi par sopstvenih funkcija, sa tačnošću do na normirajuće množitelje e_1 i h_1, određuje se jednakostima

$$e_1S_1(y)=\lim_{k\to\infty}r_{2k}(y)h_1^{2k},\quad h_1G_1(x)=\lim_{k\to\infty}r_{2k+1}(x)h_1^{2k+1}$$

Za dovoljno veliko k imamo

$$R^2=\frac{1}{h_1^2}\approx\frac{r_{2k}(y)}{r_{2k-2}(y)}\approx\frac{r_{2k+1}(x)}{r_{2k-1}(x)}$$

Smisao uvođenja pojma maksimalnog koeficienta korelacije opravdava se sledećom teoremom:

T e o r e m a 1.5.4. Za nezavisnost slučajnih veličina X i Y, ako je ispunjen uslov (1.4.30), potrebna je i dovoljna jednakost nuli maksimalnog koeficienta korelacije. ([18]; str: 52-55)

Dokaz. Uslov je potreban. Ako su slučajne veličine X i Y nezavisne tada su takođe nezavisne i slučajne veličine $G_1(X)$ i $S_1(Y)$, pa je njihov linearni koeficienat korelacije jednak nuli (R = 0).

Uslov je dovoljan. Neka je R = 0, tada jezgro (1.5.12), obzirom na spektar (1.5.13), nema sopstvenih funkcija osim 1. $\sqrt{p(x)}$ i 1. $\sqrt{q(y)}$. Prema tome, iz kovergencije u srednjem bilinearnog razlaganja (1.5.14) dobijamo

$$\int_c^d \int_a^b \left[\frac{f(x,y)}{\sqrt{p(x)q(y)}} - \sqrt{p(x)}\sqrt{q(y)} \right]^2 dxdy = 0 ,$$

odnosno $f(x,y) = p(x)q(y)$ skoro svuda. q.e.d.

T e o r e m a 1.5.5. Ako su uslovna matematička očekivanja linearne funkcije tada su linearni i maksimalni koeficienat korelacije jednaki (R = r). ([18]; str: 52-55)

Dokaz. Neka su uslovna matematička očekivanja linearne funkcije. Tada u spektru (1.5.13) postoji par linearnih, pa prema tome i monotonih sopstvenih funkcija,

$$G_1(x) = \frac{x-EX}{\sigma_x} , \quad S_1(y) \quad \frac{y-EY}{\sigma_y} .$$

Ako se u spektru nesimetričnog jezgra nalazi par monotonih funkcija on uvek pripada prvom sopstvenom broju, pa je linearni koeficienat korelacije za X i Y jednak linearnom koeficientu korelacije za $\frac{X-EX}{\sigma_X}$ i $\frac{Y-EY}{\sigma_y}$, a ovaj je jednak maksimalnom koeficientu korelacije. q.e.d.

G L A V A 2

NEZAVISNOST PAROVA SLUČAJNIH VELIČINA

Iz rezultata izloženih u glavi 1 sledi da je jednakost nuli linearnog koeficienta korelacije potreban i dovoljan uslov za nezavisnost slučajnih veličina ako ove pripdaju klasi parova slučajnih veličina kod koje su oba uslovna matematička očekivanja linearne funkcije.

U ovoj glavi dokazaćemo da i van klase parova slučajnih veličina, čija su uslovna matematička očekivanja linearne funkcije, postoje parovi slučajnih veličina za koje je jednakost nuli linearnog koeficienta korelacije potreban i dovoljan uslov za nezavisnost. U tom cilju uvešćemo pojam monotone klase parova slučajnih veličina $M^{(2)}$ i dokazati da ona proširuje klasu parova slučajnih veličina za koju je $r = 0$, potreban i dovoljan uslov za nezavisnost, odnosno da monotona klasa sadrži i parove čija uslovna matematička očekivanja nisu linearne funkcije. Drugim rečima, dokazaćemo da na monotonoj klasi linearni koeficient korelacije dobro karakteriše zavisnost.

Poznato je da na Gausovoj klasi linearni koeficienat dobro karakteriše zavisnost. Dokazaćemo da novouvedena monotona klasa sadrži Gausovu klasu parova slučajnih veličina.

U radovima O.V.Sarmanova [15], [16], koji su izloženi u glavi 1, dokazano je da se na klasi parova slučajnih veličina, koja je određena uslovom da funkcije $W_1(x,y)$ i $W_2(x,y)$, definisane izrazima (1.4.32) i (1.4.33), ne menjaju znak u oblasti definisanosti, mogu definisati nove slučajne veličine $U = G(X)$ i $V = S(Y)$ čija su uslovna matematička očekivanja linearne funkcije. Neposredno iz definicije monotone klase sledi da ona sadrži klasu koja je određena uslovom da funkcije $W_1(x,y)$ i $W_2(x,y)$ ne menjaju znak.

Nakon toga izučavaju se uslovi nezavisnosti na izogenoj klasi parova slučajnih veličina $I^{(2)}$ i dokazuje da je jednakost nuli Pirsonovog korelacionog količnika, odnosno jednakost uslovnog i neuslovnog matematičkog očekivanja, potreban i dovoljan uslov za nezavisnost. Zatim se izdvaja podklasa $I_M^{(2)}$ izogene klase za koju je jednakost nuli linearnog koeficienta korelacije potreban i dovoljan uslov za nezavisnost slučajnih veličina.

Uočavanjem preseka monotone i izogene klase parova dokazujemo da Gausova klasa slučajnih veličina pripada ovom preseku i da sam presek pripada izogenoj podklasi $I_M^{(2)}$. Nakon toga dokazuje se da postoje parovi slučajnih veličina koji pripadaju podklasi $I_M^{(2)}$, a ne pripadaju preseku monotone i izogene klase. Dakle, i van monotone klase postoje parovi slučajnih veličina za koje je $r = 0$ potreban i dovoljan uslov zanezavisnost, odnosno da monotona klasa ne iscrpljuje skup parova slučajnih veličina na kojima linearni koeficienat dobro karakteriše zavisnost.

Na kraju ove glave navode se neke poznatije funkcije verovatnoće koje pripadaju monotonoj ili izogenoj klasi parova slučajnih veličina.

2.1. LINEARNI KOEFICIENAT KORELACIJE I NELINEARNA KORELACIJA

U ovoj, kao i u ostalim tačkama ove glave, pretpostavljaćemo da postoje: bezuslovne i uslovne funkcije verovatnoće, bezuslovna i uslovna matematička očekivanja, disperzije i kovarijacija para slučajnih veličina.

Neka, kao i u glavi 1, $p(x)$, $q(y)$, $p(x/y)$, $q(y/x)$ označavju respektivno bezuslovne i uslovne fukkcije verovatnoće slučajnih veličina X i Y, u oblasti realizacije $[c \leq x \leq d ; a \leq y \leq b]$, koja može biti i beskonačna.

U radovima [17] i [18], pri pretpostavci da je ispunjen uslov (1.4.11), odnosno (1.4.30) dokazano je da je potreban i dovoljan uslov za nezavisnost slučajnih veličina X i Y jednakost nuli maksimalnog koeficienta korelacije ($R = 0$), (vidi teoreme 1.5.2 i 1.5.4). U citiranim radovima [17] i [18] dokazano je da su maksimalni i linearni koeficienat korelacije jednaki ako su oba uslovna matematička očekivanja linearne funkcije, tj. ako je

(2.1.1) $$E(Y/x) = mx+n$$ i

(2.1.2) $$E(X/y) = m_1y+n_1$$

Dakle, pri ograničenjima (2.1.1) i (2.1.2) potreban i dovoljan uslov za nezavisnost slučajnih veličina X i Y jeste $r_{xy} = 0$.

Sledeća teorema dokazuje da i van skupa parova slučajnih veličina određenog uslovima (2.1.1) i (2.1.2) postoje parovi slučajnih veličina za koje je r=0 potreban i dovoljan uslov za nezavisnost.

T e o r e m a 2.1.1. Potreban i dovoljan uslov da slučajne veličine X i Y budu nezavisne, ako ispunjavaju uslov (2.1.1) i ako funkcija $W_1(x,y)$ definisana izrazom (1.4.32), ne menja znak u oblasti definisanosti, a pri tome je

(2.1.3) $$aW_1(x,a) - bW_1(x,b) = 0$$

ili ako je ispunjen uslov (2.1.2) i ako funkcija $W_2(x,y)$, definisana izrazom (1.4.33), ne menja znak u oblasti definisanosti, a pri tome je

(2.1.4) $$cW_2(c,y) - dW_2(d,y) = 0 ,$$

jeste $r_{xy} = 0$. ([20]; str: 244)

Dokaz. Uslov je potreban. Ako su slučajne veličine nezavisne tada, na osnovu teoreme 1.1.1, imamo $r_{xy} = 0$.

Uslov je dovoljan. Korelaciona integralna jednačina

(2.1.5) $$G(x) = h\int_a^b G(y)q(y/x)dy$$

(pri čemu može biti $f(x,y) \neq f(y,x)$), ako je ispunjen uslov (2.1.1), ima sopstvenu funkciju $G(x) = x + \frac{n}{m-1}$ i sopstvenu vrednost $h = \frac{1}{m}$. Zaista

$$\int_a^b \left(y+\frac{n}{m-1}\right)q(y/x)dy = \int_a^b yq(y/x)dy + \frac{n}{m-1} = E(Y/x) + \frac{n}{m-1} =$$

$$= mx+n+\frac{n}{m-1} = m\left(x+\frac{n}{m}+\frac{n}{m(m-1)}\right) = m\left(x+\frac{n}{m-1}\right),$$

odnosno $G(x) = x + \dfrac{n}{m-1}$ i $h = \dfrac{1}{m}$

Diferenciranjem po x identiteta

$$x + \frac{n}{m-1} = \frac{1}{m}\int_a^b \left(y+\frac{n}{m-1}\right)q(y/x)dy \qquad \text{dobijamo}$$

$$(2.1.6) \qquad 1 = \frac{1}{m}\int_a^b \left(y+\frac{n}{m-1}\right)\frac{\partial}{\partial x}q(y/x)dy$$

Parcijalnom integracijom, uzimajući: $u=y+\frac{n}{m-1}$, $dv = \frac{\partial}{\partial x}q(y/x)dy$, (2.1.4) postaje

$$1 = \left(y+\frac{n}{m-1}\right)W_1(x,y)\Big|_a^b - \frac{1}{m}\int_a^b W_1(x,y)dy \text{ , odnosno}$$

$$1 = bW_1(x,b)-aW_1(x,a)+\frac{n}{m-1}(W_1(x,b)-W_1(x,a))-\frac{1}{m}\int_a^b W_1(x,y)dy$$

Zbog uslova (1.4.3) i (2.1.3) prethodni izraz postaje

$$(2.1.7) \qquad 1 = -\frac{1}{m}\int_a^b W_1(x,y)dy$$

Kako je E(Y/x) oblika (2.1.1), na osnovu leme 1.1.1 imamo $M = r_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$. Posle zamene izraza za m u (2.1.7) dobijamo

$$(2.1.8)\qquad r_{xy} = -\frac{\sigma x}{\sigma y}\int_a^b W_1(x,y)dy\,.$$

Neka je $r_{xy}=0$, tada iz (2.1.8) sledi

$$\int_a^b W_1(x,y)dy = 0$$

Kako po pretpostavci $W_1(x,y)$ ne menja znak dobijamo da je skoro svuda

$$(2.1.9)\qquad W_1(x,y) = \int_a^y \frac{\partial}{\partial x} q(t/x)dt = \frac{\partial}{\partial x}\int_a^y q(t/x)dt = 0\,.$$

$\int_a^y q(t/x)dt = F(y/x)$ je uslovna funkcija distribucije slučajne veličine Y u odnosu na X. Prema tome iz (2.1.9) dobijamo — $\frac{\partial}{\partial x}F(y/x) = 0$ skoro svuda, odnosno $F(y/x) = F_2(y)$, iz čega sledi nezavisnost slučajnih veličina X i Y.

Polazeći od toga da su ispunjeni uslovi (2.1.2)i(2.1.4) i da $W_2(x,y)$ ne menja znak u oblasti definisanosti, potpuno istim postupkom dobijamo da je skoro svuda $F(x/y) = F_1(x)$. q.e.d.

Primer. Neka je

$$f(x,y) = kx^2 e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)} \qquad [-\infty < x\,;\, y < +\infty]$$

gde je $K = \frac{2}{\pi c}(ac-b^2)^{3/2}$, $a>0$, $c>0$ i $ac-b^2>0$, tada je:

$$p(x) = k_1 x^2 e^{-\frac{1}{c}(ac-b^2)x^2}, \qquad k_1 = k\sqrt{\pi/C}\;;$$

$$q(y) = k_2(a+2b^2y^2)e^{-\frac{1}{a}(ac-b^2)y^2}, \qquad k_2 = \frac{k\sqrt{\pi/a}}{2a^2}\;;$$

$$q(y/x) = \sqrt{c/\pi}\cdot e^{-\frac{1}{c}(ay+bx)^2}\;;$$

$$p(x/y) = 2\sqrt{a/\pi}\cdot\frac{(ax)^2}{a+2b^2y^2}e^{-\frac{1}{a}(cx+by)^2}\;;$$

$$E(Y/x) = -\frac{bx}{c}\;;$$

$$E(X/y) = -\frac{by}{a} - \frac{2by}{a+2b^2y^2} ;$$

$$W_1(x,y) = \frac{b}{\sqrt{c\pi}} e^{-\frac{1}{c}(cy+bx)^2}$$

$$r_{xy} = -\sqrt{3}\,\frac{b}{\sqrt{ac+2b^2}}$$

Uslov (2.1.3) je ispunjen, jer je :

$$\lim_{h\to\infty} h \frac{b}{\sqrt{c\pi}} e^{-\frac{1}{c}(ch+bx)^2} = \lim_{h\to\infty} h \frac{b}{\sqrt{c\pi}} e^{-\frac{1}{c}(ch+bx)^2} = 0 ,$$

$E(Y/x)$ je linearna funkcija i $W_1(x,y)$ ne menja znak. Prema tome, navedeni primer zadovoljava uslove teoreme 2.1.1 i pri tome $E(X/y)$ nije linearna funkcija. Iz $r_{xy} = 0$ sledi $b = 0$, iz čega dobijamo $q(y/x) = q(y)$.

Dokazaćemo da postoji familija dvodimenzionalnih funkcija verovatnoće, čiji su jednodimenzionalni rasporedi negausovske funkcije funkcije verovatnoće i uslovna matematička očekivanja nelinearne funkcije, a da je jednakost nuli linearnog koeficienta korelacije potreban i dovoljan uslov za nezavisnost slučajnih veličina. ([21]; str: 43)

Neka je familija dvodimenzionalnih funkcija verovatnoće slučajnih veličina X i Y data sa

$$(2.1.10) \qquad f(x,y) = k(xy)^{2n}\exp\left\{-(ax^2+2bxy+cy^2)\right\}, \quad \left[-\infty < x ; y < +\infty\right]$$

pri čemu je $a > 0$, $c > 0$, $ac-b^2 > 0$, $n=1,2,3,\ldots$ i

$$1/k = \frac{\pi}{(ac-b^2)^{2n+1/2}} \sum_{v=0}^{n} b^{(2n-v)} \frac{(2n;1;2v)(1;2n-v)(ac-b^2)^v}{2^{2n+v}\, v!}$$

Iz (2.1.10) imamo:

$$(2.1.11)\quad p(x)=\frac{k\sqrt{\pi}}{c^{2n+1/2}}\sum_{v=0}^{n}\left(\frac{c}{4}\right)^{v}\frac{b^{2(n-v)}(an;-1;2v)}{v!}\,x^{2(2n-v)}\exp\left\{\frac{-(ac-b^{2})}{c}x^{2}\right\}$$

$$(2.1.12)\quad q(y)=\frac{k\sqrt{\pi}}{a^{2n+1/2}}\sum_{v=0}^{n}\left(\frac{a}{4}\right)^{v}\frac{b^{2(n-v)}(2n;-1;2v)}{v!}\,y^{2(2n-v)}\exp\left\{\frac{-(ac-b^{2})}{a}y^{2}\right\}$$

pri čemu je $(m;d;v)- m(m=d)(m+2d)\dots(m+(v-1)d)$, $(m;d;0) = 1$, $v=1,2,3,\dots$

Iz (2.1.11) i (2.1.12) neposredno sledi da su jednodimenzionalne funkcije verovatnoće negausovske. Iz (2.1.10) i (2.1.11) i iz (2.1.10) i (2.1.12) dobijamo respektivno

$$(2.1.13)\quad p(x/y)=\frac{\dfrac{a^{2n+1/2}}{\sqrt{\pi}}\,x^{2n}\exp\left\{-\dfrac{(by+ax)^{2}}{a}\right\}}{\displaystyle\sum_{v=0}^{n}\left(\frac{a}{4}\right)^{v}(by)^{2(n-v)}\frac{(2n;-1;2v)}{v!}}$$

$$(2.1.14)\quad q(y/x)=\frac{\dfrac{c^{2n+1/2}}{\sqrt{\pi}}\,y^{2n}\exp\left\{-\dfrac{(bx+cy)^{2}}{c}\right\}}{\displaystyle\sum_{v=0}^{n}\left(\frac{c}{4}\right)^{v}(bx)^{2(n-v)}\frac{(an;-1;2v)}{v!}}$$

Iz (2.1.13) i (2.1.14), po poznatom postupku, sledi:

$$(2.1.15)\quad E(X/y)=\frac{-by\displaystyle\sum_{v=0}^{n}(by)^{2(n-v)}\frac{a^{v}(2n+1;-1;2v)}{a^{2v}v!}}{a\,.\displaystyle\sum_{v=0}^{n}\left(\frac{a}{4}\right)^{v}(by)^{2(n-v)}\frac{(2n;-1;2v)}{v!}}$$

$$(2.1.16)\quad E(Y/x)=\frac{-bx\displaystyle\sum_{v=0}^{n}(bx)^{2(n-v)}\frac{c^{v}(2n+1;-1;2v)}{2^{2v}\,v!}}{c\,.\displaystyle\sum_{v=0}^{n}\left(\frac{c}{4}\right)^{v}(bx)^{2(n-v)}\frac{(2n;-1;2v)}{v!}}$$

Iz (2.1.15) i (2.1.16) neposredno se vidi da su uslovna matematička očekivanja nelinearne funkcije.

Kovarijacija i proizvod disperzija slučajnih veličina a X i Y sa funkcijom verovatnoće (2.1.10) je

(2.1.17)

$$\sigma_{xy} = \frac{-kb\pi}{2^{2n+1}(ac-b^2)^{2n+3/2}} \sum_{v=0}^{n} b^{2(n-v)} \frac{(ac-b^2)^v (an+1;-1;2v)(1;2;2n+1-v)}{2^v\, v!}$$

(2.1.18)

$$\sigma_x \sigma_y = \frac{k\pi (ac)^{1/2}}{2^{2n+1}(ac-b^2)^{2n+3/2}} \sum_{v=0}^{n} \frac{b^{2(n-v)}(ac-b^2)^v (2n;-1;2v)(1;2;2n+1-v)}{2^v\, v!}$$

Članovi zbira (211.17) i (2.1.18) su pozitivni, $k>0$, $ac-b^2>0$, iz čega sledi da je $\sigma_{xy}=0$ tada i samo tada kada je $b = 0$, a pri tome izraz (2.1.18) je različit od nule. Dakle, linearni koeficienat korelacije jednak je nuli tada i samo tada kada je $b = 0$. Smenom $b = 0$ u (2.1.10), (2.1.11) i (2.1.12) dobijamo da je $f(x,y) = p(x)q(y)$, odnosno nezavisnost slučajnih veličina.

Ilustrujmo prethodno za $n=1$.

$$f(x,y) = k(xy)^2 \exp\left\{-(ax^2+2bxy+cy^2)\right\}$$

$$1/k = \frac{\pi \cdot ac}{4(ac-b^2)^{5/2}}$$

$$p(x) = \frac{k\sqrt{\pi}x^2}{2c^{5/2}}(2b^2x^2+c)\exp\left\{-\frac{(ac-b^2)}{c}x^2\right\}$$

$$q(y) = \frac{k\sqrt{\pi}y^2}{2a^{5/2}}(2b^2y^2+a)\exp\left\{-\frac{(ac-b^2)}{a}y^2\right\}$$

$$p(x/y)=2\sqrt{a/\pi}\,\frac{(ax)^2}{a+2b^2y^2}\exp\left\{-\frac{(ax+by)^2}{a}\right\}$$

$$q(y/x(= 2\sqrt{c/\pi}\,\frac{(cy)^2}{c+2b^2x^2}\exp\left\{-\frac{(cy+bx)^2}{c}\right\}$$

$$E(X/y) = -\frac{by}{a} - \frac{2by}{a+2b^2y^2}$$

$$E(Y/x) = -\frac{bx}{c} - \frac{2bx}{c+2b^2x^2}$$

$$r_{xy} = -\frac{b(3ac+2b^2)}{(ac)^{1/2}(ac+4b^2)}\,.$$

2.2 MONOTONA KLASA PAROVA I USLOVI NEZAVISNOSTI PAROVA SLUČAJNIH VELIČINA

U ovoj klasi navešćemo pojam monotone klase parova slučajnih veličina i dokazati da na njoj linearni koeficienat korelacije dobro karakteriše zavisnost.

D e f i n i c i j a 2.2.1. Za slučajne veličine X i Y kažemo da pripadaju monotonoj klasi parova slučajnih veličina ako bar jedna od funkcija $W_1(x,y)$ ili $W_2(x,y)$, definisane izrazima (1.4.32), odnosno (1.4.33), ne menja znak u oblasti definisanosti.

Na osnovu teoreme 1.4.1 neposredno sledi - za ma koju monotonu funkciju $G(y)$, koja zadovoljava uslov (1.4.5), uslovno matematičko očekivanje slučajne veličine $G(Y)$ dato izrazom

$$E(G(Y)/x) = \int_a^b G(y)q(y/x)dy \tag{2.2.1}$$

je monotona funkcija, ako funkcija $W_1(x,y)$ ne menja znak u oblasti definisanosti $[c\leqslant x\leqslant d;\ a\leqslant y\leqslant b]$. Isto tako neposredno sledi da je $E(G(Y)/x)$ ograničena funkcija, ako je $G(y)$ ograničena funkcija.

Sve pretpostavke (ograničenja) koje se budu činile dovoljno je da ih zadovoljava bar jedna od funkcija $W_1(x,y)$ ili $W_2(x,y)$, pretpostavljaćemo da je to funkcija $W_1(x,y)$. Prema tome, bez ikakvog ograničenja opštosti u daljem radu koristiti se samo funkcijama $W_1(x,y)$.

L e m a 2.2.1. Za svako x (c,d) ispunjene su relacije:

(2.2.2) $$Q(x) = EX.F(x) - M(x) > 0 ,$$

(2.2.3) $$\lim_{x\to c} Q(x) = \lim_{x\to d} Q(x) = 0 ,$$

Pri čemu je

$$EX = \int_c^d xp(x)dx, \quad F(x) = \int_c^x p(t)dt, \quad M(x) = \int_c^x tp(t)dt$$

Dokaz. Diferenciranjem funkcije $Q(x)$ dobijamo

$$Q'(x) = EX.p(x)-xp(x) = (EX-x)p(x)$$

odakle sledi $Q'(EX)=0$. Neka je $x < EX$, tada je $Q'(x) > 0$, jer je $p(x) > 0$, iz čega sledi da je $Q(x)$ monotono rastuća funkcija u intervalu (c,EX). Neka je $x > EX$, tada je $Q'(x) < 0$, iz čega sledi da je $Q(x)$ monotono opadajuća funkcija u intervalu (EX,d).

Iz definicije funkcija $F(x)$ i $M(x)$ imamo:

$$\lim_{x\to c} F(x) = 0, \qquad \lim_{x\to d} F(x) = 1$$

$$\lim_{x\to c} M(x) = 0, \qquad \lim_{x\to d} M(x) = EX$$

iz čega neposredno sledi:

$$\lim_{x\to c} Q(x) = \lim_{x\to c}(EX.F(x)-M(x)) = EX.0-0=0$$

$$\lim_{x\to d} Q(x) = \lim_{x\to d}(EX.F(x)-M(x)) = EX-EX = 0$$

Iz dokazanih osobina lako zaključujemo da je $Q(x) > 0$. q.e.d.

L e m a 2.2.2. Neka je funkcija $G(y)$ takva da je:

$$\lim_{x \to c} E(G(Y)/x)Q(x) = 0 \quad \text{i} \tag{2.2.4}$$

$$\lim_{x \to d} E(G(Y)/x)Q(x) = 0 \, ,$$

tada je

$$\sigma_{xG(y)} = \int_c^d E'_x(G(Y)/x)Q(x)dx \tag{2.2.5}$$

pri čemu je $\sigma_{xG(y)}$ kovarijacija slučajnih veličina X i G(Y).

Dokaz. Izraz za kovarijaciju slučajnih veličina X i G(Y) je

$$\sigma_{xG(y)} = \int_c^d \int_a^b (x-EX)(G(y)-EG(Y))f(x,y)dydx \tag{2.2.6}$$

gde je

$$f(x,y)=p(x)q(y/x)=q(y)p(x/y), \quad EG(Y)=\int_a^b G(y)q(y)dy$$

Posle integracije po y izraz (2.2.6) postaje

$$\sigma_{xG(y)} = \int_c^d (x-EX)p(x)\int_a^b (G(y)-EG(Y))q(y/x)dydx =$$

$$= \int_c^d (x-EX)p(x)\left[E(G(y)/x)-EG(Y)\right]dx = \int_c^d E(G(Y)/x)(x-EX)p(x)dx -$$

$$- EG(Y)\int_c^d (x-EX)p(x)dx = \int_c^d E(G(Y)/x)(x-EX)p(x)dx - EG(Y)(EX-EX).$$

Prema tome, dobijamo da je kovarijacija za X i G(Y) data sa

$$\sigma_{xG(y)} = \int_c^d E(G(Y)/x)(x-EX)p(x)dx \tag{2.2.7}$$

Izraz (2.2.7) posle parcijalne integracije, uzimajući:

$u = E(G(Y)/x)$, $dv = (x-EX)p(x)dx$, postaje

$$\sigma_{xG(y)} = - E(G(Y)/x)Q(x)\Big|_c^d + \int_c^d E'_x(G(Y)/x)Q(x)dx,$$

iz čega, koristeći uslov (2.2.4) dobijamo jednakost (2.2.5).q.e.d.

Ako je (2.2.4) zadovoljeno za $G(Y) = Y$, tj. ako je

(2.2.8) $$\lim_{x\to c} E(Y/x)Q(x) = \lim_{x\to c} E(Y/x)Q(x) = 0,$$

tada je kovarijacija slučajnih veličina X i Y data sa:

(2.2.9) $$\sigma_{xy} = \int_c^d E'_x(Y/x)Q(x)dx .$$

T e o r e m a 2.2.1. Ako slučajne veličine X i Y pripadaju monotonoj klasi $M^{(2)}$ i ako su pri tome ispunjeni uslovi (2.1.3) i (2.2.8), tada je $r_{xy} = 0$ potreban i dovoljan uslov za nezavisnost slučajnih veličina.

Dokaz. Uslov je potreban. Poznato je da iz nezavisnosti slučajnih veličina sledi jednakost nuli linearnog koeficienta korelacije ($r_{xy} = 0$).

Uslov je dovoljan. Uslovno matematičko očekivanje slučajne veličine Y u odnosu na X datp je izrazom:

(2.2.10) $$E(Y/x) = \int_a^b yq(y/x)\, dy$$

Diferenciranjem po x izraza (2.2.10) dobijamo:

$$E'_x(Y/x) = \int_a^b y \frac{\partial}{\partial x} q(y/x)dy$$

Parcijalnom integracijom, uzimajući: $u = y$, $dv = \frac{\partial}{\partial x}q(y/x)du$, prethodni izraz postaje

$$E'_x(Y/x) = y\int_a^y \frac{\partial}{\partial x} q(t/x)dt\Big|_a^b - \int_a^b\int_a^y \frac{\partial}{\partial x} q(t/x)dtdy$$

Koristeći oznaku uvedenu izrazom (1.4.2) prethodni izraz možemo napisati u obliku:

$$E_x'(Y/x) = yW_1(x,y)\Big|_a^b - \int_a^b W_1(x,y)dy$$

Zbog pretpostavke da je ispunjen uslov (2.1.3) imamo:

$$E_x'(Y/x) = -\int_a^b W_1(x,y)dy \tag{2.2.11}$$

Iz pretpostavki teoreme sledi da su ispunjeni uslovi leme 2.2.2. Smenjujući kovarijaciju slučajnih veličina X i Y, datu izrazom (2.2.9) u (1.1.4) linearni koeficienat korelacije postaje

$$r_{xy} = \frac{1}{\sigma_x \sigma_y} \cdot \int_c^d E_x'(Y/x)Q(x)dx\,. \tag{2.2.12}$$

Neka je $r_{xy} = 0$, tada iz (2.2.12) imamo:

$$\int_c^d E_x'(Y/x)Q(x)dx = 0\,. \tag{2.2.13}$$

Iz leme 2.2.1 sledi da je $Q(x) > 0$. Prema tome izraz (2.2.13) zadovoljen je tada i samo tada kada je $E_x'(Y/x) = 0$, što na osnovu izraza (2.2.11) daje:

$$\int_a^b W_1(x,y)dy = 0\,. \tag{2.2.14}$$

Iz pretpostavke da slučajne veličine pripadaju klasi $M^{(2)}$ sledi da funkcija $W_1(x,y)$ ne menja znak u celoj oblasti definisanosti. Prema tome, jednakost (2.2.14) ispunjena je tada i samo tada kada je

$$W_1(x,y) = \int_a^y \frac{\partial}{\partial x} q(t/x)dt = 0 \tag{2.2.15}$$

Iz (2.2.15) sledi da je podintegralna funkcija skoro svuda jednaka nuli, odnosno $q(y/x) = q(y)$ skoro svuda. q.e.d.

Napomena 2.2.1. Stav 1 iz rada ([22]; str: 46), sadrži se u dokazu teoreme 2.2.1 i može se formulisati ovako:

Jednakost nuli Pirsonovog koeficienta korelacije, odnosno jednakost uslovnog i neuslovnog matematičkog očekivanja na monotonoj klasi parova potreba je i dovoljan uslov za nezavisnost slučajnih veličina, ako je ispunjen uslov (2.1.3).

Napomena 2.2.2. Ako uslovi teoreme nisu ispunjeni, bilo zbog uslova (2.1.3) ili zbog uslova (2.2.8), dovoljno je uzeti bilo koju monotonu i ograničenu funkciju G i definisati novu slučajnu veličinu G(Y) pa da $r_{xG(y)} = 0$ bude potreba i dovoljan uslov za nezavisnost slučajnih veličina X i Y iz klase $M^{(2)}$. Koristeći teoremu 1.4.1 učinjena napomena lako se dokazuje.

Primer 2.2.1. Neka je uslovna funkcija verovatnoće slučajne veličine Y u odnosu na X data sa:

$$q(y/x) = c.\frac{e^{hx}}{(ye^{hx}+b)^{m+1/2}}\,; \quad h>0,\ b>0,\ y\geqslant 0,\ x\geqslant 0.$$

$$c = \frac{2m-1}{2}\, b^{m-1/2}\,, \quad m\in N \text{ (prirodan broj) } m\geqslant 2$$

tada je

$$W_1(x,y) = c\,\frac{hye^{hx}}{(ye^{hx}+b)^{m+1/2}}\,,$$

$$E(Y/x) = \frac{2b}{2m-3}\, e^{-hx}$$

Slučjajne veličine sa uslovnom funkcijom verovatnoće iz primera 2.2.1 zadovoljavaju uslove teoreme 2.2.1, jer: funkcija $W_1(x,y)$, kao što se vidi iz njenog izraza, ne menja znak u oblasti definisanosti $0\leqslant x,\ y<\infty$, uslov(2.1.3) je zadovoljen jer je

$$\lim_{y \to 0} \frac{y^2}{(ye^{hx}+b)^{m+1/2}} = \lim_{y \to \infty} \frac{y^2}{(ye^{hx}+b)^{m+1/2}} = 0 ,$$

iz ograničenosti uslovnog matematčkog očekivanja u intervalu $(0,\infty)$ sledi da je ispunjen i uslov (2.2.8).

2.3 IZOGENA KLASA PAROVA I USLOVI NEZAVISNOSTI PAROVA SLUČAJNIH VELIČINA

U ovoj tački izučićemo potrebne i dovoljne uslove za nezavisnost parova slučajnih veličina koji pripadaju izogenoj klasi. Izdvojićemo podklasu izogene klase na kojoj je jednakost nuli linearnog koeficienat korelacije potreban i dovoljan uslov za nezavisnost parova slučajnih veličina i istovremeno dokazati da i van monotone klase postoje parovi slučajnih veličina čiju zavisnost dobro karakteriše linearni koeficienat korelacije.

Neka realizacije slučanih veličina X i Y pripadaju oblasti $[c \leqslant x \leqslant d;\ a \leqslant y \leqslant b]$, koja može biti i beskonačna.

D e f i n i c i j a 2.3.1. Za slučajne veličine X i Y, kod kojih je uslovna funkcija verovatnoće oblika

$$(2.3.1) \qquad q(y/x)=h(x)f(h(x)y+\varphi(x)); \quad h(x)>0$$

pri čemu u slučaju kada $h(x)$ nije konstantna neka je $\varphi(x)=\alpha h(x)+\beta$ (α, β-konstante) kažemo da pripadaju izogenoj klasi parova slučajnih veličina ($J^{(2)}$). ([13]; str:170)

Kada slučajna veličina Y ima jednu ili obe granice intervala realizacije konačne pretpostavljaćemo da je

$$(2.3.2) \qquad f(h(x)a+\varphi(x)) = 0 \quad \text{ili} \quad f(h(x)b+\varphi(x)) = 0 .$$

T e o r e m a 2.3.1. Kod izogene klase parova uslovno matematičko očekivanje slučajne veličine Y u odnosu na slučajnu veličinu X dato je izrazom

$$E(Y/x) = \frac{c(f,h,\varphi)-\varphi(x)}{h(x)} \tag{2.3.3}$$

pri čemu je $c(f,h,\varphi)$ konstanta data sa

$$c(f,h,\varphi) = \int_{h(x_0)a+\varphi(x_0)}^{h(x_0)b+\varphi(x_0)} tf(t)dt$$

Dokaz. Smenom (2.3.1) u (2.2.10) dobijamo

$$E(Y/x) = h(x)\int_a^b yf(h(x)y+\varphi(x))dy\ . \tag{2.3.4}$$

Diferenciranjem po x jednakosti (2.3.4) imamo

$$E_x'(Y/x) = h'(x)\int_a^b yf(h(x)y+\varphi(x))dy +$$

$$h(x)\int_a^b yf'(h(x)y+\varphi(x))(h'(x)y+\varphi'(x))dy\ , \text{ odnosno}$$

$$E_x'(Y/x) = \frac{h'(x)}{h(x)}\, h(x)\int_a^b yf(h(x)y+\varphi(x)dy + \tag{2.3.5}$$

$$+ h(x)h'(x)\int_a^b y^2f'(h(x)y+\varphi(x))dy+h(x)\varphi'(x)\int_a^b yf'(h(x)y+\varphi(x))\ dy.$$

Neka je:

$$J_1(x) = \int_a^b y^2f'(h(x)y+\varphi(x))dy,\quad J_2(x) = \int_a^b yf'(h(x)y+\varphi(x))dy\ .$$

Unoseći oznaku $J_1(x)$ u drugi sabirak, a oznaku $J_2(x)$ u treći sabirak izraza (2.3.5) dobijamo

$$E_x'(Y/x) = \frac{h'(x)}{h(x)}h(x)\int_a^b yf(h(x)y+\varphi(x))dy+J(x)\ , \tag{2.3.6}$$

Pri čemu je

$$J(x) = h(x)h'(x)J_1(x)+h(x)\varphi'(x)J_2(x) \tag{2.3.7}$$

Iz izraza (2.3.4) i (2.3.6) imamo

$$E'_x(Y/x) = \frac{h'(x)}{h(x)} E(Y/x)+J(x) \tag{2.3.8}$$

Parcijalnom integracijom, uzimajući: $u=y^2$, $dv=f'(h(x)y+\varphi(x))dy$, izraz $J_1(x)$ postaje

$$J_1(x)=y^2\int_a^y f'(h(x)t+\varphi(x))dt\Big|_a^b-2\int_a^b y\int_a^y f(h(x)t+\varphi(x))dtdy \tag{2.3.9}$$

Neka je $u=h(x)t+\varphi(x)$ tada je

$$\int_a^y f'(h(x)t+\varphi(x))dt = \frac{1}{h(x)}\int_{h(x)a+\varphi(x)}^{h(x)y+\varphi(x)} f'(u)du = \frac{1}{h(x)}\Big[f(h(x)y+\varphi(x))\Big]-$$

$$-\frac{1}{h(x)}\Big[f(h(x)a+\varphi(x))\Big]$$

Odakle primenom uslova (2.3.2) dobijamo

$$\int_a^y f'(h(x)t+\varphi(x))dt = \frac{1}{h(x)} f(h(x)y+\varphi(x)) \ . \tag{2.3.10}$$

Smenom (2.3.10) u (2.3.8) imamo

$$J_1(x) = \frac{y^2}{h(x)} f(h(x)y+\varphi(x)\Big|_a^b - \frac{2}{h(x)}\int_a^b yf(h(x)y+\varphi(x))dy =$$

$$= \frac{1}{h(x)}\Big[b^2f(h(x)b+\varphi(x))-a^2f(h(x)a+\varphi(x))\Big]-\frac{2}{h(x)}\int_a^b yf(h(x)y+\varphi(x))dy$$

iz čega, koristeći (2.3.4), sledi

$$J_1(x)= \frac{1}{h(x)}\Big[b^2f(h(x)b+\varphi(x))-a^2f(h(x)a+\varphi(x))\Big]- \frac{2}{h(x)}E(Y/x) \tag{2.3.11}$$

Parcijalnom integracijom, uzimajući $u=y$, $dv=f'(h(x)y+\varphi(x))dy$ izraz $J_2(x)$ postaje

$$J_2(x)=y\int_a^y f'(h(x)t+\varphi(x))dt\Big|_a^b-\int_a^b\int_a^y f'(h(x)t+\varphi(x))dtdy$$

Istim postupkom kao i za $J_1(x)$, dobijamo

$$J_2(x)=\frac{1}{h(x)}\Big[bf(h(x)b+\varphi(x))-af(h(x)a+\varphi(x))\Big]-\frac{1}{h^2(x)} \tag{2.3.12}$$

Ako je interval realizacija (a,b) slučajne veličine Y konačan, tada su izrazi u srednjim zagradama, kod (2.3.11) i (2.3.12), jednaki nuli. Ako je razmak realizacije beskonačan, odnosno bilo koja od granica intervala (a,b) može biti beskonačna, tada iz pretpostavke o postojanju uslovne disperzije, slučajne veličine Y u odnosu na X, koja je data izrazom

$$\sigma^2_{y/x}=h(x)\int_a^b (y-E(Y/x))^2 f(h(x)y+\varphi(x))dy<+\infty$$

odnosno

$$\sigma^2_{y/x}=h(x)\int_a^b y^2 f(h(x)y+\varphi(x))dy - E^2(Y/x)<+\infty$$

sledi da su izrazi u srednjim zagradama kod (2.3.11) i (2.3.12) jednaki nuli i u slučaju kada je razmak realizacije slučajne veličine Y beskonačan. Prema tome imamo

$$J_1(x)=-\frac{2}{h^2(x)}E(Y/x)\ ,\quad J_2(x)=-\frac{1}{h^2(x)}$$

Smenom izraza za $J_1(x)$ i $J_2(x)$ u (2.3.7) dobijamo

$$J(x)=-\frac{2h'(x)}{h(x)}E(Y/x)-\frac{\varphi'(x)}{h(x)} \tag{2.3.13}$$

Unoseći izraz (2.3.13) u (2.3.8) dobijamo

$$E'_x(Y/x)+\frac{h'(x)}{h(x)}E(Y/x)+\frac{\varphi'(x)}{h(x)}=0\ . \tag{2.3.14}$$

Prema tome, (2.3.14) je linearna diferencijalna jednačina čije je opšte rešenje dato sa

$$E(Y/x) = e^{-\int \frac{h'(x)}{h(x)}dx}\left(C_1 - \int \frac{\varphi'(x)}{h(x)} e^{\int \frac{h'(x)}{h(x)}dx} dx\right).$$

Posle izvršenja naznačenih integracija prethodni izraz postaje

$$(2.3.15) \qquad E(Y/x) = \frac{C-\varphi(x)}{h(x)}$$

Izjednačavanjem identiteta (2.3.4) i (2.3.15) dobijamo

$$(2.3.16) \qquad C \equiv \varphi(x_0)+h^2(x_0)\int_a^b y f(h(x_0)y+\varphi(x_0))dy$$

Obzirom da je C konstanta, dakle ne zavisi od promenljive x, izraz (2.3.16) zadovoljava bilo koje x, pa prema tome i $x=x_0$. U identitet (2.3.16) uvedimo smenu $h(x_0)y+\varphi(x_0)=t$, tada dobijamo

$$C \equiv \varphi(x_0)+\frac{h^2(x_0)}{h^2(x_0)}\int_{h(x_0)a+\varphi(x_0)}^{h(x_0)b+\varphi(x_0)}(t-\varphi(x_0))f(t)dt \equiv$$

$$\equiv \varphi(x_0) + \int_{h(x_0)a+\varphi(x_0)}^{h(x_0)b+\varphi(x_0)} tf(t)dt - \varphi(x_0)\int_{h(x_0)a+\varphi(x_0)}^{h(x_0)b+\varphi(x_0)} f(t)dt .$$

Koristeći se za drugi interval ponovo smenom $t=h(x_0)y+\varphi(x_0)$ prethodni izraz postaje

$$C \equiv \varphi(x_0)+\int_{h(x_0)a+\varphi(x_0)}^{h(x_0)b+\varphi(x_0)} tf(t)dt - (x_0)h(x_0)\int_a^b f(h(x_0)y+\varphi(x_0))dy$$

Kako je $\int_a^b f(h(x_0)y+\varphi(x_0)dy = \frac{1}{h(x_0)}$ imamo

$$C \equiv \int_{h(x_0)a+\varphi(x_0)}^{h(x_0)b+\varphi(x_0)} tf(t)dt = C(f,h,\varphi) . \qquad \text{q.e.d}$$

Posledica 2.3.1. Iz teoreme 2.3.1. sledi da je na klasi $J^{(2)}$ $\eta_{y/x} = 0$, odnosno $E(Y/x) = EY$ potreban i dovoljan uslov za nezavisnost slučajnih velučina X I Y.

D e f i n i c i j a 2.3.2. Za parove slučajnih veličina X i Y iz klase $J^{(2)}$ kažemo da pripadaju podklasi $J_E^{(2)}$ ako je uslovno matematičko očekivanje monotona funkcija.

L e m a 2.3.1. Klasa $J_E^{(2)}$ nije podskup klase $M^{(2)}$ i klasa $M^{(2)}$ nije podskup klase $J^{(2)}$.

Dokaz. Da bi dokazali da je $J_E^{(2)}$ nije podskup od $M^{(2)}$ treba dokazati da postoje slučajne veličine iz $J^{(2)}$ čije je uslovno matematičko očekivanje monotona funkcija i da pri tome odgovarajuća funkcija $W_1(x,y)$ menja znak u oblasti definisanosti.

Iz (1.4.32) i iz (2.3.1) imamo

$$W_1(x,y) = \int_a^y \frac{\partial}{\partial x}\Big[h(x)f(h(x)t+\varphi(x))\Big]dt$$

Posle diferenciranja po x dobijamo

$$(2.3.17) \quad W_1(x,y)=h'(x)\int_a^y f'(h(x)t+\varphi(x))dt+h(x)h'(x)\int_a^y tf'(h(x)t+\varphi(x))dt + h(x)\varphi'(x)\int_a^y f'(h(x)t+\varphi(x))dt .$$

Parcijalnom integracijom, uzimajući: $u=t$, $dv=f'(h(x)t+\varphi(x))dt$, odnosno $v = \int_a^t f'(h(x)\xi+\varphi(x))d\xi = \frac{1}{h(x)}\int_{h(x)a+\varphi(x)}^{h(x)b+\varphi(x)} f'(\omega)d\omega = \frac{1}{h(x)}f(h(x)t+\varphi(x)) - \frac{1}{h(x)}f(h(x)a+\varphi(x))$, a posle primene uslova (2.3.2) v postaje $v = \frac{1}{h(x)}f(h(x)t+\varphi(x))$, drugi integral iz (2.3.17) postaje

$$\int_a^y t f'(h(x)t+\varphi(x))dt = \frac{t}{h(x)} f(h(x)t+\varphi(x))\Big|_a^y - \frac{1}{h(x)}\int_a^y f(h(x)t+\ (x))dt$$

Primenom uslova (2.3.2) na prethodni izraz dobijamo

$$(2.3.18)\qquad \int_a^y t f'(h(x)t+\varphi(x))dt = \frac{y}{h(x)} f(h(x)y+\varphi(x)) - \frac{1}{h(x)}\int_a^y f(h(x)t+\varphi(x))\,dt\,.$$

Uz korišćenje uslova (2.3.2), lako se dokazuje da je

$$(2.3.19)\qquad \int_a^y f'(h(x)t+\varphi(x))dt = \frac{1}{h(x)} f(h(x)y+\varphi(x))\,.$$

Zamenom izraza (2.3.18) i (2.3.19) u (2.3.17), posle odgovarajućih potiranja i skraćivanja, dobijamo

$$(2.3.20)\qquad W_1(x,y) = (h'(x)y+\varphi'(x))f(h(x)y+\varphi(x))\,.$$

Neka je: $(-\infty,+\infty)$ razmak realizacije slučajne veličine Y, h $h(x)$ monotona funkcija i $\varphi(x)$ konstanta. Unošenjem učinjenih pretpostavki u (2.3.15) dobijamo da je $E(Y/x)$ monotona funkcija, a istovremeno, pri učinjenim pretpostavkama, sledi da je funkcija (2.3.20) istog znaka kao i promenjiva y-on, tj. $W_1(x,y)$ menja znak. Time je prvi deo leme dokazan.

Drugi deo leme dokazaćemo navodeći primer uslovne funkcije verovatnoće, čije slučajne veličine pripadaju klasi $M^{(2)}$, a ne pripadaju klasi $J^{(2)}$. Slučajne veličine sa uslovnom funkcijom verovatnoće Vejbula

$$(2.3.21)\qquad q(y/x) = \alpha h(x) y^{\alpha-1} e^{-h(x)y^{\alpha}}\,;\quad h(x)>0, \alpha>0,\ y\geqslant 0,$$

ne pripadaju izogenoj klasi parova, jer funkcija (2.3.21) nije oblika $h(x)f(h(x)y+\varphi(x))$.

Za uslovnu funkciju verovatnoće (2.3.21) funkcija $W_1(x,y)$ je

$$W_1(x,y) = h'(x)y^{\alpha}e^{-h(x)y^{\alpha}},$$

iz čega dobijamo da $W_1(x,y)$, za monotonu funkciju $h(x)$, ne menja znak. q.e.d.

L e m a 2.3.2. Parovi slučajnih veličina iz Gausove klase pripadaju i klasi $M^{(2)}$ i klasi $J_E^{(2)}$.

Dokaz. Upoređujući uslovnu funkciju verovatnoće za Gausove slučajne veličine, za koju znamo da je oblika

$$q(y/x) = ce^{-\frac{1}{2}(ky+mx+n)^2} \tag{2.3.22}$$

sa formom $h(x)f(h(x)y+\varphi(x))$ lako zaključujemo da izogena klaa sadrži Gausovu klasu parova, a smenom $h(x) = k$ i $\varphi(x) = mx + n$ u izraz za uslovno matematičko očekivanje (2.3.3) neposredno dobijamo da parovi Gausove klase pripadaju podklasi $J_E^{(2)}$.

Funkcija $W_1(x,y)$ za uslovnu funkciju verovatnoće (2.3.22) data je sa

$$W_1(x,y) = C_1e^{-\frac{1}{2}(ky+mx+n)^2},$$

odakle zaključujemo da $W_1(x,y)$ ne menja znak u oblasti definisanosti, odnosno da monotona klasa sadrži Gausovu klasu parova slučajnih veličina. q.e.d.

T e o r e m a 2.3.2. Potreban i dovoljan uslov za nezavisnost slučajnih veličina X i Y iz klase $J_E^{(2)}$, ako je ispunjen uslov (2.2.8), jeste $r_{xy} = 0$.

Dokaz. Poznato je da je uslov potreban.

Uslov je dovoljan. Neka je $r_{xy} = 0$. Zbog uslova (2.2.8), kao i u teoremi 2.2.1, dobijamo

$$\int_c^d E'_x(Y/x)Q(x)dx = 0. \tag{2.3.23}$$

Na osnovu leme 2.2.1 imamo $Q(x) > 0$, a iz pretpostavke da slučajne veličine pripadaju klasi $J_E^{(2)}$ sledi da je $E(Y/x)$ monotona funkcija, odnosno da $E(Y/x)$ ne menja znak. Prema tome, u izrazu (2.3.23), podintegralna funkcija ne menja znak, iz toga sledi

$$E'x(Y/x)Q(x) = 0 .$$

Iz uslova (2.3.3) i $Q(x) > 0$ imamo

$$E'x(Y/x) = \left(\frac{C(f,h,\varphi)-\varphi(x)}{h(x)}\right)' = 0,$$

odakle dobijamo

$$\frac{C(f,h,\varphi)-\varphi(x)}{h(x)} = -k , \qquad k\text{-konstanta},$$

odnosno

$$\varphi(x) = C(f,h,\varphi)+kh(x) \tag{2.3.24}$$

Iz definicije izogene klase sledi da je (2.3.24) ispunjeno tada i samo tada kada su $h(x)$ i $\varphi(x)$ konstante, što prema (2.3.1) daje $q(y/x) = q(y)$. q.e.d.

Da bi opravdali smisao dokazane teoreme 2.3.2 potrebno je dokazati da klasa $J_E^{(2)}$, van klase $M^{(2)}$, nije prazna. Dokaz ćemo izvesti navodeći primer uslovne funkcije verovatnoće čije slučajne veličine pripadaju klasi $J_E^{(2)}$, a ne pripadaju klasi $M^{(2)}$.

Neka je uslovna funkcija verovatnoće slučajnih veličina Y u odnosu na X data sa

$$q(y/x) = \frac{2}{\pi}\,\frac{h(x)}{\left[(h(x)y+\varphi(x))^2+1\right]^2};\ h(x)>0,\ (-\infty<y<+\infty)$$

pri čemu funkcije $h(x)$ i $\varphi(x)$ zadovoljavaju uslove navedene u definiciji 2.3.1, odnosno neka je $\varphi(x) \neq kh(x)$, za bilo koju konstantu k, i neka je $\frac{\varphi(x)}{h(x)}$ monotona i ograničena funkcija.

Lako se dokazuje da je uslovno matematičko očekivanje

$$E(Y/x) = -\frac{\varphi(x)}{h(x)}$$

iz čega sledi da je $E(Y/x)$ monotona funkcija, kako slučajne veličine sa uslovnom funkcijom verovatnoće, koja je data gore navedenim primerom, pripadaju izogenoj klasi, sledi da pripadaju i klasi $J_E^{(2)}$.

Da bi dokazali da slučajne veličine iz navedenog primera ne pripadaju monotonoj klasi parova treba dokazati da funkcija $W_1(x,y)$ menja znak u oblasti realizacije slučajnih veličina X i Y. Koristeći izraz (2.3.20) iz datog primera sledi

$$W_1(x,y) = (h'(x)y+\varphi'(x)).\frac{2}{\pi}\,\frac{1}{\left[(h(x)y+\varphi(x))^2+1\right]^2},$$

iz čega se vidi (za fiksiranu vrednost $x = x_0$) da $W_1(x,y)$ menja znak u intervalu $(-\infty<y<+\infty)$.

2.4 NEKE ZNAČAJNIJE FUNKCIJE VEROVATNOĆE ČIJE SLUČAJNE VELIČINE PRIPADAJU MONOTONOJ ILI IZOGENOJ KLASI PAROVA

U ovoj tački navešćemo neke funkcije verovatnoće čija je praktična primena utvrđena i čije slučajne veličine pripadaju monotonoj ili izogenoj klasi, sa ciljem da ukažemo na značaj poznavanja uslova za nezavisnost slučajnih veličina iz navedenih klasa.

1° Pokazali smo da slučajne veličine sa Gausovom (normalnom) funkcijom verovatnoće (2.3.22) pripadaju monotonoj i izogenoj podklasi $J_E^{(2)}$.

2° Funkcije verovatnoće Vejbula. ([3]; str:28,102,242)

Poslednjih godina funkcija verovatnoće (2.3.21) poznata je pod imenom funkcije verovatnoće Vejbula. Vejbul je funkciju verovatnoće (2.3.21) koristio za ispitivanje eksperimentalnih podataka o opadanju čvrstine čelika, granice njegove elastičnosti, veličine čestica rđe itd. U poslednje vreme funkcija verovatnoće Vejbula koristi se i za izučavanje otkaza elektronske aparature.

Pokazali smo da slučajne veličine sa uslovnom funkcijom verovatnoće Vejbula za monotono $h(x)$ pripadaju monotonoj klasi parova, a da ne pripadaju izogenoj klasi (lema 2.3.1).

3^{o} Gama-raspodela (Pirsonove krive tipa III).
([7]; str: 213).

Za slučajnu veličinu Y čija je uslovna funkcija verovatnoće, u odnosnu na slučajnu veličinu X, data sa

$$(2.4.1)\qquad q(y/x) = \frac{h(x)}{\Gamma(\nu)}(h(x)y)^{\nu-1} e^{-h(x)y}; \qquad h(x)>0,\ \nu\geq 1,\ y>0,$$

kažemo da ima gama-raspodelu.

Za $\nu = 1$ dobijamo eksponencijalnu funkciju verovatnoće

$$q(y/x) = h(x)e^{-h(x)y}$$

Za celobrojno $\nu = k$ funkciju (2.4.1) možemo interpretirati kao funkciju verovatnoće čija je slučajna veličina dužina intervala između prvog i (k+1)-og otkaza složenog sistema ili interval između dva poziva na telefonskoj centrali vremenski radeljenog na još k drugih poziva. Uopšteno rečeno gama-raspodela se široko koristi u teoriji pouzdanosti sistema.

Upoređivanjem izraza (2.4.1) sa (2.3.1) zaključujemo da slučajne veličine sa uslovnom funkcijom verovatnoće (2.4.1) pripadaju izogenoj klasi parova, pri čemu je $(x) \equiv 0$
Ispunjen je uslov (2.3.2) jer je

$$\lim_{y\to 0}(h(x/y)^{\nu-1} e^{-h(x)y} = \lim_{y\to\infty}(h(x)y^{\nu-1} e^{-h(x)y} = 0$$

a time i uslovi teoreme 2.3.1. Prema tome, imamo

$$C(f,h,\varphi) = \int_0^{\infty}\frac{t}{\Gamma(\nu)}t^{\nu-1}e^{-t}dt = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^{\infty}t^{\nu}e^{-t}dt = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu)} = \nu$$

odakle sledi da je

$$(2.4.2) \qquad E(Y/x) = \frac{\nu}{h(x)}$$

U slučaju kada je h(x) monotona funkcija iz

$$W_1(x,y) = \frac{h'(x)}{\Gamma(\nu)}\, y(h(x)y)^{\nu-1} e^{-h(x)y}$$

zaključujemo da slučajne veličine X i Y sa uslovnom funkcijom verovatnoće (2.4.1) pripadaju monotonoj klasi parova, a iz (2.4.2) da pripadaju i podklasi $J_E^{(2)}$ izogene klase. Za monotono h(x) lako se dokazuje da uslovna funkcija verovatnoće zadovoljava uslove (2.1.3) i (2.2.8), a time i uslove teoreme 2.2.1, odnosno teoreme 2.3.2.

4^{o} Pirsonove krive tipa VII. ([7]; str: 88)

Neka je uslovna funkcija verovatnoće slučajne veličine Y, u odnosu na X, data sa

$$(2.4.3) \quad q(y/x) = \frac{(m-1)!\,2^{m-1}}{\pi(1;2;m-1)h(x)}\left(1+\left(\frac{y}{h(x)}\right)^2\right)^{-m} =$$

$$= c(m)\,\frac{1}{h(x)}\left(1+\left(\frac{y}{h(x)}\right)^2\right)^{-m}$$

tada slučajne veličine X i Y pripadaju izogenoj klasi parova, a ako je h(x) monotona funkcija tada pripadaju i izogenoj podklasi $J_E^{(2)}$, a ne pripadaju monotonoj klasi parova. Navedeno tvrđenje vidi se iz sledećih izraza:

$$E(Y/x) = ch(x)$$

$$W_1(x,y) = -C(m)\,\frac{h'(x)y}{h^2(x)}\left(1+\left(\frac{y}{h(x)}\right)^2\right)^{-m}$$

Prema tome, uslovna funkcija verovatnoće (2.4.3) jeste primer funkcije verovatnoće za koju je $r_{xy}= 0$ potreban i dovoljan uslov za nezavisnost, na osnovu teoreme 2.3.2, a da pri tom slučajne veličine ne pripadaju monotonoj klasi parova.

5^{0} Funkcija verovatnoće Maksveka. ([24] ; str: 49)

Slučajne veličine X i Y sa uslovnom funkcijom verovatnoće

$$q(y/x) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{y^{3}}{h^{3}(x)}e^{-\left(\frac{y}{h(x)}\right)^{2}} ; \quad h(x)>0, \quad y>0, \tag{2.4.4}$$

pripadaju izogenoj klasi parova, a ako h(x) monotona funkcija tada slučajne veličine pripadaju izogenoj klasi $J_{E}^{(2)}$ i monotonoj klasi parova. Lako se dokazuje za funkciju verovatnoće (2.4.4) da je

$$W_{1}(x,y) = -\frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{h'(x)}{h(x)}\left(\frac{y}{h(x)}\right)^{3}e^{-\left(\frac{y}{h(x)}\right)^{2}}$$

$$E(Y/x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}h(x)$$

iz čega neposredno sledi tvrđenje za slučajne veličine sa uslovnom funkcijom verovatnoće Maksvela.

Za monotonu i ograničenu funkciju h(x) ispunjeni su uslovi teorema 2.2.1 i 2.3.2.

6^{0} Funkcija verovatnoće Ralea. ([12] ; str: 143)

Slučajne veličine sa uslovnom funkcijom verovatnoće

$$q(y/x) = \frac{2y}{h^{2}(x)}e^{-\left(\frac{y}{h(x)}\right)^{2}} ; \quad h(x)>0, \quad y\geqslant 0 , \tag{2.4.5}$$

pripadaju izogenoj klasi parova, a kada je h(x) monotona funkcija i izogenoj podklasi $J_{E}^{(2)}$ i monotonoj klasi parova, što sledi iz

$$E(Y/x) = c.h(x)$$

$$W_1(x,y) = -2\,\frac{h'(x)}{h^3(x)}\,y^2 e^{-\left(\frac{y}{h(x)}\right)^2} .$$

Ako ukinemo ograničenje da je $h(x) > 0$, tada slučajne veličine sa uslovnom funkcijom verovatnoće (2.4.5) pripadaju izogenoj klasi i podklasi $J_E^{(2)}$ za monotono $h(x)$, a ne pripadaju monotonoj klasi parova.

GLAVA 3

MARKOVSKO SVOJSTVO I NEZAVISNOST SLUČAJNE VELIČINE I SLUČAJNOG VEKTORA

U ovoj glavi razmatra se nezavisnost i markovsko svojstvo za n slučajnih veličina.

U prvom delu glava dokazuje se da i van Gausove klase od n slučajnih veličina postoji klasa za koju je jednakost nuli višestrukog koeficienta korelacije (1.3.6) potreban i dovoljan uslov za nezavisnost slučajne veličine i slučajnog vektora. U tom cilju koristeći klasu $M^{(2)}$, uvedenu u glavi 2, određuju se uslovi pri kojima jednakost nuli višestrukog koeficienta korelacije jeste potreban i dovoljan uslov za nezavisnost slučajne veličine i slučajnog vektora i ako slučajne veličine ne pripadaju Gausovoj klasi n-torki.

Poznato je da na Gausovoj klasi od n slučajnih veličina jednakost

$$\text{(A)} \qquad E(X_k/x_1,x_2,\ldots,x_{k-1}) = E(X_k/\ k-1) \qquad k=3,4,\ldots,n$$

predstavlja potreban i dovoljan uslov za markovsko svojstvo (vidi naprimer [24]). Analogno klasi $M^{(2)}$ definiše se klasa $M^{(n)}$ i dokazuje da ova proširuje klasu od n slučajnih veličina za koju je uslov (A) potreban i dovoljan za markovsko svojstvo. Tako na primer, u klasi $M^{(n)}$ postoje i n-torke slučajnih veličina čije uslovno matematičko očekivanje (A) nije linearna funkcija.

Isto tako, analogno klasi $I^{(2)}$ definiše se klasa $I^{(n)}$ i dokazuje da Gausova klasa od n slučajnih veličina pripada preseku klasa $M^{(n)}$ i $I^{(n)}$. Nakon toga iz klase $I^{(n)}$ izdvaja se podklasa $I_M^{(n)}$ koja sadrži presek klasa $M^{(n)}$ i $I^{(n)}$ i na njoj dokazuje da se klasom $M^{(n)}$ ne iscrpljuje skup n-torki slučajnih veličina za koje je uslov (A) potreban i dovoljan za markovsko svojstvo.

Za klase $M^{(n)}$ i $I^{(n)}$ biće navedeni potrebni i dovoljni uslovi za nezavisnost slučajne veličine i slučajnog vektora.

3.1. MONOTONA KLASA PAROVA I USLOVI NEZAVISNOSTI SLUČAJNE VELIČINE I SLUČAJNOG VEKTORA

Posmatrajmo slučajni vektor $\mathcal{X}$, dat izrazom (1.3.1), i shodno izrazu (1.3.2) obeležimo sa $\sum_{22}$ matricu kovarijacije vektora $\mathcal{X}^{(2)}$.

Formirajmo parove slučajnih veličina od komponente X_i vektora $\mathcal{X}^{(1)}$ i komponenata vektora $\mathcal{X}^{(2)}$,

(3.1.1.) $$(X_i,X_{q+1}),\ (X_i,X_{q+2}),\ldots,(X_i,X_n)$$

T e o r e m a 3.1.1. Neka parovi slučajnih veličina (3.1.1) pripadaju klasi $M^{(2)}$, neka su ispunjeni uslovi (2.1.3) i (2.2.8) za svaki par iz (3.1.1) i neka je $\sum_{22}$ pozitivno definisana matrica(1) tada je jednakost nuli višestrukog koeficienta korelacije ($R_{i(q+1)\ldots n} = 0$) potreban i dovoljan uslov da slučajna veličina X_i ne zavisi od slučajnog vektora $\mathcal{X}^{(2)}$.

Dokaz. Uslov je potreban. Iz nezavisnosti slučajne veličine X_i i slučajnog vektora $\mathcal{X}^{(2)}$ sledi $EX_iX_{q+j} = 0$ za svako $j=1,2,\ldots,n-q$, iz čega dobijamo da su komponente vektora $\sigma(i)$ određenog izrazom (1.3.7), jednake nuli. Smenom u izraz za višestruki koeficienat korelacije (1.3.6) dobijamo da je $R_{i(q+1)\ldots,n} = 0$.

---

(1) Ako slučajni vektor $\mathcal{X}^{(2)}$ sadrži samo dve komponente, tada iz nejednakosti $r_{xy}^2 + r_{xz}^2 - 2r_{xy}r_{xz}r_{yz} > 0$ sledi da je $\sum_{22}$ pozitivno definisana matrica. Kada vektor $\mathcal{X}^{(2)}$ sadrži tri i više komponenata uslovi da matrica $\sum_{22}$ bude pozitivno definisana određeni su teoremom 1.3.1.

Uslov je dovoljan. Neka je $R_{i(q+1)\dots n} = 0$, odnosno kako to iz izraza (1.3.6) sledi,

$$\sigma_{(i)} \Sigma_{22}^{-1} \sigma_{(i)}' = 0 . \tag{3.1.2}$$

Iz jednakosti (3.1.2) imamo $\sigma_{(i)} = 0$, jer je Σ_{22} po pretpostavci pozitvno definitna matrica, a tada iz jednakosti (1.3.7) dobijamo

$$\sigma_{x_i x_{q+j}} = EX_i X_{q+j} = 0 \qquad j=1,2,\dots,n-q \tag{3.1.3}$$

Linearni koeficienat korelacije za slučajne veličine X_i i X_{q+1}, kao što sledi iz (1.1.4), jeste

$$r_{x_i x_{q+j}} = \frac{\sigma_{x_i x_{q+j}}}{\sigma x_i \sigma x_{q+j}}, \qquad j=1,2,\dots,n-q \tag{3.1.4}$$

Iz (3.1.3) i (3.1.4) dobijamo

$$r_{x_i x_{q+j}} \sigma x_i \sigma x_{q+j} = 0 \qquad j=1,2,\dots,n-q \tag{3.1.5}$$

Iz jednakosti (3.1.5) sledi da su svi linearni koefivienti korelacije za parove slučajnih veličina (3.1.1), jednaki nuli ($r_{x_i x_{q+1}} = 0$, $j=1,2,\dots,n-q$).

Kako po pretpostavci parovi (3.1.1) pripadaju klasi $M^{(2)}$, ispunjeni su uslovi (2.1.3) i (2.2.8) za svaki par iz (3.1.1), tada jednakost (3.1.5), po teoremi 2.2.1, predstavlja potreban i dovoljan uslov za nezavisnost slučajnih veličina X_i i X_{q+1}, za svako $j=1,2,\dots,n-q$, iz čega, po definiciji nezavisnosti slučajne veličine i slučajnog vektora sledi nezavisnost između komponente X_i i vektora $\mathfrak{X}^{(2)}$. q.e.d.

Napomena 3.1.1. Ako uslovi teoreme 3.1.1 nisu ispunjeni, bilo zbog uslova (2.1.3) ili zbog uslova (2.2.8) dovoljno je uzeti bilo koju monotonu i ograničenu funkciju G i definisati novu slučajnu veličinu $G(X_1)$, tada je jednakost nuli višestrukog koeficienta korelacije slučajne veličine $G(X_1)$ i slučajnog vektora $\mathcal{X}^{(2)}$ potreban i dovoljan uslov za nezavisnost slučajne veličine X_1 i slučajnog vektora $\mathcal{X}^{(2)}$, a ako parovi slučajnih veličina pripadaju monotonoj klasi i ako je matrica kovarijacije $\sum_{22}$ vektora $\mathcal{X}^{(2)}$ pozitivno definisana.

3.2 MARKOVSKO SVOJSTVO I NEZAVISNOST NA MONOTONOJ KLASI n-TORKI SLUČAJNIH VELIČINA

Neka u ovoj, kao i u sledećoj tački ove glave, postoje bezuslovne i uslovne funkcije verovatnoće i bezuslovna i uslovna matematička očekivanja slučajnih veličina $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Neka $q_k(x_k/x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, \ldots, x_r)$ označava uslovnu funkciju verovatnoće, a $E(X_k/x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_r)$ uslovno matematičko očekivanje slučajne veličine X_k u odnosu na slučajne veličine $X_1, X_2, \ldots, X_{k-1}, X_{k+1}, \ldots, X_r$ za $k \leq r \leq n$, pri čemu oblast realizacije $\prod_{j=1}^{n}(a_j \leq x_j \leq b_j)$ slučajnih veličina $X_1, X_2, \ldots, X_n$ može biti beskonačna.

U ovoj tački, analogno pojmu monotone klase parova, uvešćemo pojam monotone klase n-torki slučajnih veličina i na njoj izučiti markovsko svojstvo i nezavisnost.

D e f i n i c i j a 3.2.1. Za slučajne veličine $X_1, X_2, \ldots, X_n$ kažemo da pripadaju monotonoj klasi $M^{(n)}$, ako za svako par slučajnih veličina $X_i X_k$ $(i < k \leq r)$ postoje takve realizacije $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_r$ slučajnih veličina $X_1, X_2, \ldots, X_{i+1}, X_{i+1}, \ldots, X_{k-1}, X_{k+1}, \ldots, X_r$ da funkcija

(3.2.1) $\quad W_{ik}(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_r) =$

$$=\int_{a_k}^{x_k}\frac{\partial}{\partial x_i}\, q_k(t_k/x_1,x_2,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_r)dt_k$$

za svako $r\in\{2,3,\ldots,n\}$, u odnosu na argumente x_i,x_k ne menja znak u oblasti $(a_i,b_i)\mathrm{x}(a_k,b_k)$, koja može biti beskonačna.

Iz jednakosti (3.2.1) neposredno se vidi da je

$$W_{ik}(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_{k-1},a_k,x_{k+1},\ldots,x_r)\equiv 0$$

i

$$W_{ik}(x_1;x_2;\ldots,x_{i-1};x_i;x_{i+1};\ldots,x_{k-1};b_k;x_{k+1};\ldots;x_r)\equiv 0$$

Pretpostavimo da je ispunjen uslov analogan uslovu (2.1.3), tj. neka je

$$(3.2.2)\quad a_kW_{ik}(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots x_{k-1},a_k,x_{k+1},\ldots,x_r) - b_kW_{ik}(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_{k-1},b_k,x_{k+1},\ldots,x_r) = 0$$

U slučaju konačnog razmaka (a_k,b_k) uslov (3.2.2) uvek je ispunjen.

D e f i n i c i j a 3.2.2. Za slučajne veličine $X_1X_2,\ldots,X_n$ kažemo da poseduju markovsko svojstvo ako je za svako $3\leq k\leq n$

$$q_k(x_k/x_1,x_2,\ldots,x_{k-1}) = q_k(x_k/x_{k-1}).\qquad ([24]\ ;\ \text{str: } 122)$$

T e o r e m a 3.2.1. Da bi niz slučajnih veličina $X_1,X_2,\ldots,X_n$ iz klase $M^{(n)}$ posedovao markovsko svojstvo potrebno je i dovoljno da je za svako $3\leq k\leq n$ ispunjen uslov

$$(3.2.3)\qquad E(X_k/x_1,x_2,\ldots,x_{k-1}) = E(X_k/x_{k-1})$$

Dokaz. Uslov je potreban. Jednakost uslovnih funkcija verovatnoće povlači i jednakost uslovnih matematičkih očekivanja.

Uslov je dovoljan. Uslovno matematičko očekivanje, pri pretpostavci postojanja uslovne funkcije verovatnoće, definiše se izrazom

$$(3.2.4)\quad E(X_k/x_1,x_2,\dots,x_{k-1})=\int_{a_k}^{b_k} x_k q_k(x_k/x_1,x_2,\dots,x_{k-1})dx_k \,.$$

Za fiksirano k, diferenciranjem identiteta (3.2.4) po x_i, pri čemu je $1\leq i\leq k-2$, dobijamo

$$(3.2.5)\quad E'_{x_i}(X_k/x_1,x_2,\dots,x_{k-1})=\int_{a_k}^{b_k} x_k \frac{\partial}{\partial x_i} q_k(x_k/x_1,x_2,\dots,x_{k-1})dx_k$$

Parcijalnom integracijom, uzimajući

$$u=x_k\,,\qquad dv=\frac{\partial}{\partial x_i} q_k(x_k/x_1,\dots,x_{k-1})dx_k$$

jednakost (3.2.5) postaje

$$(3.2.6)\quad E'_{x_i}(X_k/x_1,x_2,\dots,x_{k-1})=x_k\int_{a_k}^{x_k}\frac{\partial}{\partial x_i} q_k(t_k/x_1,x_2,\dots,x_{k-1})dt_k\Big|_{a_k}^{b_k}-$$
$$-\int_{a_k}^{b_k}\int_{a_k}^{x_k}\frac{\partial}{\partial x_i} q_k(t_k/x_1,x_2,\dots,x_{k-1})dt_k dx_k \,.$$

Koristeći jednakost (3.2.1) identitet (3.2.6) postaje

$$(3.2.7)\quad E'_{x_i}(X_k/x_1,x_2,\dots,x_{k-1}=a_k\, W_{ik}(x_1,x_2,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,$$
$$,\dots,x_{k-1},a_k) - b_k W_{ik}(x_1x_2,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_{k-1},b_k) -$$
$$-\int_{a_k}^{b_k} W_{ik}(x_1,x_2,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_{i-1},x_k)dx_k \,.$$

Pri pretpostavci da je ispunjen uslov (3.2.2) jednakost (3.2.7) postaje

$$(3.2.8)\quad E'_{x_i}(X_k/x_1,x_2,\ldots,x_{k-1}) = -\int_{a_k}^{b_k} W_{ik}(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,\ldots,x_{k-1},x_k)dx_k$$

Iz jednakosti (3.2.3) i (3.2.8) dobijamo

$$(3.2.9)\quad \int_{a_k}^{b_k} W_{ik}(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_{k-1},x_k)dx_k = 0 .$$

Iz pretpostavke da niz slučajnih veličina $X_1,X_2,\ldots,X_n$ pripada klasi $M^{(n)}$ sledi da funkcija $W_{ik}(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,\ldots,x_{k-1},x_k)$ u odnosu na argumente x_i,x_k, a za fiksirane vrednosti ostalih argumenata, ne menja znak. Prema tome, iz jednakosti (3.2.9) dobijamo

$$(3.2.10)\quad W_{ik}(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_{k-1},x_k) = 0$$

Zbog (3.2.1) jednakost (3.2.10) je

$$\int_{a_k}^{x_k} \frac{\partial}{\partial x_i} q_1(t_k/x_1,x_2,\ldots,x_{k-1})dx_k = 0 \text{ , odnosno}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} q_k(x_k/x_1,x_2,\ldots,x_{k-1}) = 0 \qquad \text{skoro svuda.}$$

Prema tome imamo

$$q_k(x_k/x_1,x_2,\ldots,x_{k-1}) = q_k(x_k/x_{k-1}) \quad \text{skoro svuda}$$

$$k = 3,4,\ldots,n-1,\ n \qquad \text{q.e.d.}$$

Napomena 3.2.1. Ako uslov (3.2.2) nije zadovoljen dovoljno je uzeti bilo koju monotonu i ograničenu funkciju G i definisati novu slučajnu veličinu $G(X_k)$,$(k=3,4,\dots,n)$,tada je

$$E(G(X_k)/x_1,x_2,\dots,x_{k-1}) = E(G(X_k)/x_{k-1}),$$

za svako $3\leq k\leq n$, potreban i dovoljan uslov za markovsko svojstvo slučajnih veličina $X_1,X_2,\dots,X_n$.

Diferenciranjem i parcijalnom integracijom dobijamo

$$(3.2.7)' \qquad E'_{x_i}(G(X_k)/x_1,x_2,\dots,x_{k-1}) =$$

$$= G(a_k)W_{ik}(x_1,x_2,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_{k-1},a_k) -$$

$$- G(b_k)W_{ik}(x_1,x_2,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_{k-1},b_k) -$$

$$-\int_{a_k}^{b_k} G'(x_k)W_{ik}(x_1,x_2,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_{k-1},x_k)dx_k$$

Zbog ograničenosti funkcije $G(x_k)$,(3.2.7) postaje

$$(3.2.8)' \qquad E'_{x_i}(G(X_k)/x_1,x_2,\dots,x_{k-1}) =$$

$$=\int_{a_k}^{b_k} G(x_k)W_{ik}(x_1,x_2,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_{k-1},x_k)\, dx_k$$

Zbog monotonosti funkcije $G(x_k)$ iz (3.2.8) dobijamo (3.2.10),iz čega, kao i u prethodnoj teoremi, sledi markovsko svojstvo za slučajne veličine $X_1,X_2,\dots,X_n$.

Posledica (3.2.1. Iz dokazane teoreme neposredno sledi da je na klasi $M^{(n)}$ $E(X_n/x_1,x_2,\dots,x_{n-1}) = EX_n$ potreban i dovoljan uslov za nezavisnost slučajne veličine X_n i slučajnog vektora $\mathcal{X}= (X_1,X_2,\dots,X_{n-1})$.

3.3 MARKOVSKO SVOJSTVO I NEZAVISNOST NA IZOGENOJ KLASI n-TORKI SLUČAJNIH VELIČINA

U ovoj tački, analogno pojmu izogene klase parova, uvešćemo pojam izogene klase n-torki slučajnih veličina i na njoj izučiti markovsko svojstvo i nezavisnost.

Posmatrajmo slučajni vektor $\mathcal{X}$ dat izrazom (1.3.1).

D e f i n i c i j a 3.3.1. Za slučajnu veličinu X_k i slučajni vektor $\mathcal{X}^{(2)}$ kažemo da pripadaju izogenoj klasi $J^{(n-q+1)}$ ako je uslovna funkcija verovatnoće slučajne veličine X_k u odnosu na $\mathcal{X}^{(2)}$ oblika

$$(3.3.1) \qquad q_k(x_k/x_{q+1},\dots,x_n) =$$

$$= h_k(x_{q+1},\dots,x_n)f(h_k(x_{q+1},\dots,x_n)x_k + {}_k(x_{q+1},\dots,x_n)$$

pri čemu samo u slučaju kada $h_k(x_{q+1},x_{q+2},\dots,x_n)$ nije konstanta neka je $\varphi_k(x_{q+1},x_{q+2},\dots,x_n) \neq \alpha_k h_k(x_{q+1},x_{q+2},\dots,x_n) + \beta_k \alpha_k, \beta_k$ - konstante.

U slučaju kada su jedna ili obe granice intervala realizacije konačne pretpostavljaćemo da je

$$(3.3.2) \qquad f_k(h_k(x_{q+1},x_{q+2},\dots,x_n)a_k + {}_k(x_{q+1},x_{q+2},\dots,x_n)) = 0$$

ili

$$(3.3.3) \qquad f_k(h_k(x_{q+1},x_{q+2},\dots,x_n)b_k + {}_k(x_{q+1},x_{q+2},\dots,x_n)) = 0 .$$

T e o r e m a 3.3.1. Kod izogene klase $J^{(n-q+1)}$ uslovno matematičko očekivanje slučajne veličine X_k u odnosu na slučajni vektor $\mathcal{X}^{(2)}$ dato je sa

(3.3.4)
$$E(X_k/x_{q+1},x_{q+2},\dots,x_n) =$$
$$\frac{C(f_k,h_k,\ _k)-\varphi_k(x_{q+1},x_{q+2},\dots,x_n)}{h_k(x_{q+1},x_{q+2},\dots,x_n)},$$

pri čemu je $C(f_k,h_k,\varphi_k)$ konstanta koja zavisi od funkcija f_k, h_k,φ_k.

Dokaz. Na klasi $J^{(n-q+1)}$ uslovno matematičko očekivanje slučajne veličine x_k u odnosu na slučajni vektor $\mathcal{X}^{(2)}$ definiše se izrazom

(3.3.5)
$$E(X_k/x_{q+2},\dots,x_n) =$$
$$= h_k(x_{q+1},\dots,x_n)\int_{a_k}^{b_k} x_k f(h_k(x_{q+1},\dots,x_n)x_k+\varphi_k(x_{q+1},\dots,x_n))dx_k$$

Neka su f_k, h_k,φ_k diferencijabilne funkcije. Diferenciranjem jednakosti (3.3.5) po x_i $(i\in\{q+1,q+2,\dots,n\})$, analogno kao i kod teoreme 2.3.1 dobijamo

(3.3.6)
$$E'_{x_i}(X_k/x_{q+1},\dots,x_n) =$$
$$= \frac{h'_k(x_{q+1},\dots,x_n)x_i}{h_k(x_{q+1},\dots,x_n)}E(X_k/x_{q+1},\dots,x_n) + J(x_{q+1},\dots,x_n)$$

pri čemu je

(3.3.7)
$$J(x_{q+1},\dots,x_n)=h_k(x_{q+1},\dots,x_n)h'_k(x_{q+1},\dots,x_n)+$$
$$+ J_1(x_{q+1},\dots,x_n) + h_k(x_{q+1},\dots,x_n)\varphi_k(x_{q+1},\dots,x_n) +$$
$$+ J_2(x_{q+1},\dots,x_n),$$
$$J_1(x_{q+1},\dots,x_n) = \int_{a_k}^{b_k} x_k^2 f'_k(h_k(x_{q+1},\dots,x_n)x_k+\ _k(x_{q+1},\dots,x_n))dx_k,$$

$$J_2(x_{q+1},\dots,x_n)=\int_{a_k}^{b_k} x_k f_k'(h_k(x_{q+1},\dots,x_n)x_k+\varphi_k(x_{q+1},\dots,x_n))dx_k$$

Parcijalnom integracijom izrazi $J_1(x_{q+1},\dots,x_n)$ i $J_2(x_{q+1},\dots x_n)$, koristeći uslove (3.3.2) i (3.3.3), postaju:

$$J_1(x_{q+1},\dots,x_n)=\frac{1}{h_k(x_{q+1},\dots,x_n}\Big[b_k^2 f_k(h_k(x_{q+1},\dots,x_n)b_k+\varphi_k(x_{q+1},\dots,$$

$$,\dots,x_n)) - a_k^2 f_k(h_k(x_{q+1},\dots,x_n)a_k + \varphi_k(x_{q+1},\dots,x_n)\Big] -$$

$$-\frac{2}{h_k^2(x_{q+1},\dots,x_n)}\,E(X_k/x_{q+1},\dots,x_n)$$

$$J_2(x_{q+1},\dots,x_n)=\frac{1}{h_k(x_{q+1},\dots,x_n)}\Big[b_k f_k(h_k(x_{q+1}\dots x_n)b_k+\varphi_k(x_{q+1},\dots x_n)) -$$

$$- a_k f_k(h_k(x_{q+1},\dots,x_n)a_k+ {}_k(x_{q+1},\dots,x_n))\Big] - \frac{1}{h_k^2(x_{q+1},\dots,x_n)}$$

Izrazi u srednjim zagradama kod J_1 i J_2, zbog uslova (3.3.2) i (3.3.3), u slučaju konačnog razmaka (a_k,b_k) jednaki su nuli, a u slučaju beskonačnog razmaka jednaki su nuli zbog pretpostavke o postojanju disperzije. Dakle,

$$(3.3.8)\quad J_1(x_{q+1},\dots,x_n)=-\frac{2}{h_k^2(x_{q+1},\dots,x_n}E(X_k/x_{q+1},\dots,x_n)$$

$$(3.3.9)\quad J_2(x_{q+1},\dots,x_n) = -\frac{1}{h_k^2(x_{q+1},\dots,x_n)}$$

Smenom izraza (3.3.8) i (3.3.9) u (3.3.7), a zatim smenom(3.3.7) u (3.3.6) dobijamo linearnu diferencijalnu jednačinu

(3.3.10) $$E'_{x_i}(X_k/x_{q+1},\dots,x_n) +$$

$$+\frac{h'_k(x_{q+1},\dots,x_n)\,x_i}{h_k(x_{q+1},\dots,x_n)}\,E(X_k/x_{q+1},\dots,x_n) + \frac{\varphi_k(x_{q+1},\dots,x_n)}{h_k(x_{q+1},\dots,x_n)} = 0$$

Pretpostavimo da je diferenciranje izraza (3.3.5) izvršeno na $i = q+1,q+2,\dots,n$, tada dobijamo sistem od n-q linearnih diferencijalnih jednačina oblika (3.3.10), čija su rešenja

(3.3.11) $$E(X_k/x_{q+1},\dots,x_n) =$$

$$= \frac{C(f_k,h_k,\varphi_k;x_{q+1},\dots,x_{i-1},\dots,x_n) - \varphi_k(x_{q+1},\dots,x_n)}{h_k(x_{q+1},\dots,x_n)}$$

$$i = q+1,q+2,\dots,n$$

Sva rešenja (3.3.11), zbog (3.3.5) moraju biti medjusobno jednaka, iz čega sledi da je $C(f_k,h_k,\varphi_k,x_{q+1},\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n)$ konstanta, odnosno ne zavisi od $x_{q+1},x_{q+2},\dots,x_n$. q.e.d.

Posledica 3.3.1. Na izogenoj klasi $J^{(n-q+1)}$ potreban i dovoljan uslov za nezavisnost slučajne veličine X_k i slučajnog vektora $\mathcal{X}^{(2)}$ je

$$E(X_k/x_{q+1},\dots,x_n) = EX_k$$

L e m a 3.3.1. Klasa slučajnih veličina $J^{(n)}$ nije podskup klasa $M^{(n)}$ i obrnuto, a njihov presek nije prazan skup.

Dokaz. Funkcija definisana izrazom (3.2.1), kada slučajne veličine pripadaju klasi $J^{(n)}$, data je sa

(3.3.12) $$W_{ik}(x_1,x_2,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_{k-1},x_k,x_{k+1},\dots,x_n) =$$

$$= \int_{a_k}^{X_k} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[h_k(x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_n) f_k(h_k(x_1,\ldots,x_i,\ldots,\right.$$

$$\left.\ldots,x_{i-1},x_{k+1},\ldots,x_n)x_k + \varphi_k(x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_{k-1},x_{k+1}\ldots x_n)\right\} dx_k$$

Posle diferenciranja i integracije izraz (3.3.12) postaje

(3.3.13) $$W_{ik}(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_{k-1},x_k,x_{k+1},\ldots,x_n) =$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial x_i} h_k(x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_n)x_k + \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi_k(x_1,x_2,\ldots\right.$$

$$\left.\ldots,x_i,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_n)\right]\cdot f_k(h_k(x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots$$

$$\ldots,x_n)\, x_k + \varphi_k(x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_n))\ .$$

Neka je: $(-\infty,+\infty)$ razmak realizacije slučajne veličine X_k, $\frac{\partial}{\partial x_i} h_k(x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_n) > 0$, u odnosu na argument x_i, i $\varphi_k(x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_n)$ konstanta, tada funkcija (3.3.13) u razmaku $(-\infty,+\infty)$ menja znak, iz čega sledi da $J^{(n)}$ nije podskup od $M^{(n)}$.

Neka je uslovna funkcija verovatnoće slučajne veličine X_k u odnosu na slučajni vektor $\mathcal{X}^{(r)} = (X_1,X_2,\ldots,X_{k-1},X_{k+1},\ldots,X_r)$ za svako $2\leqslant r\leqslant n$ data sa

(3.3.14) $$q_k(x_k/x_1,x_2,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_r) =$$

$$=\alpha h_k(x_1,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_r)\, x_k^{\alpha-1}\cdot$$

$$\cdot\, e^{-h_k(x_1,x_2,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_r)\, x_k^{\alpha}}\ ;$$

$$x_k \geqslant 0,\ h_k(x_1,\ldots,x_r) > 0, \alpha > 0,$$

tada je

$$(3.3.15)\quad W_{ik}(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_{k-1},x_k,x_{k+1},\ldots,x_r) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i} h_k(x_1,x_2,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_r)x_k^{\alpha} \cdot$$

$$\cdot\, e^{-h_k(x_1,x_2,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_r)x_k^{\alpha}}$$

Pri pretpostavci da funkcija $\frac{\partial}{\partial x_i}h_k(x_1,x_2,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_r)$, u odnosu na argument x_i, ne menja znak za svako $i<k\leq r\leq n$ iz (3.3.15) sledi da slučajne veličine $X_1,X_2,\ldots,X_n$ pripadaju klasi $M^{(n)}$, a iz (3.3.14) neposredno sledi da ne pripadaju klasi $J^{(n)}$.

Neka slučajne veličine X_k i vektor $\mathcal{X}^{(r)}$ za svako $2\leq r\leq n$, pripadaju izogenoj klasi $J^{(r)}$ i neka je za fiksirane vrednosti argumenata $x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_r$, $h_k(x_1,x_2,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_r)$ konstanta i $\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi_k(x_1,x_2,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_r)$ ne menja znak za svako $i<k\leq r$, tada slučajne veličine pripadaju i monotonoj klasi $M^{(n)}$ što se neposredno vidi unoseći učinjene pretpostavke u (3.3.13).

Posledica 3.3.2. n-dimenzionalni slučajni vektor sa normalnom funkcijom verovatnoće pripada klasi $M^{(n)}$ i, u odnosu na bilo koju njegovu komponentu, klasi $J^{(n)}$.

T e o r e m a 3.3.2. Neka slučajna veličina X_k i slučajni vektor $\mathcal{X}=(X_1,X_2,\ldots,X_{k-1})$, za svako $2\leq k\leq n$, pripadaju izogenoj klasi $J^{(k)}$, pri čemu samo u slučaju $h_k(x_1,x_2,\ldots,x_{k-1})$ nije oblika $\phi(x_{k-1})$ neka je $\varphi_k(x_1,x_2,\ldots,x_{k-1})\neq C(f_k,h_k,\varphi_k) - \phi_1(x_{k-1})\cdot h_k(x_1,x_2,\ldots,x_{k-1})$, pri čemu su ϕ i ϕ_1 funkcije argumenta x_{k-1}, tada je za slučajne veličine $X_1,X_2,\ldots,X_m$

$$E(X_k/x_1,x_2,\ldots,x_{k-1}) = E(X_k/x_{k-1}),$$

$3\leq k\leq n$, potreban i dovoljan uslov za markovsko svojstvo.

Dokaz. Izjednačavajući (3.3.4) sa $E(X_k/x_{k-1})$ dokaz se neposredno dobija.

Sledeći primer pokazuje da izdvojena podklasa klase $J^{(k)}$ u teoremi 3.3.2 nije prazna.

Primer 3.3.1. Neka je

$$q_k(X_k/x_1,x_2,\dots,x_{k-1}) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\,\frac{h_k(x_1,x_2,\dots,x_{k-1})}{\left[(h_k(x_1,x_2,\dots,x_{k-1})x_k+\varphi_k(x_1,x_2,\dots,x_{k-1}))^2+1\right]^2}$$

$$h_k(x_1,x_2,\dots,x_{k-1}) > 0\,, \qquad (-\infty < x_k < +\infty).$$

Iz datog primera imamo

$$E(X_k/x_1,x_2,\dots,x_{k-1}) = -\frac{\varphi_k(x_1,x_2,\dots,x_{k-1})}{h_k(x_1,x_2,\dots,x_{k-1})}\,.$$

Neka je $\varphi_k(x_1,x_2,\dots,x_{k-1}) \neq \phi_1(x_{k-1})h_k(x_1,x_2,\dots,x_{k-1})$, tada su ispunjeni uslovi teoreme. Navedeni primer, bez dodatnih ograničenja ne pripada klasi $M^{(k)}$.

Z A K L J U Č A K

Rezultati izloženi u ovom radu značajno su proširili skup slučajnih veličina na kome poznati parametri (linearni koeficienat korelacije, Pirsonov korelacioni količnik, višestruki koeficienat korelacije) dobro karakterišu zavisnost slučajnih veličina. Isto tako, proširena je klasa slučajnih veličina na kojoj jednakost odgovarajućih uslovnih matematičkih očekivanja karakteriše markovsko svojstvo.

Otvoreni su novi problemi koji iziskuju ulaganje daljih napora za njihovo rešavanje. Navedimo neke od njih.

Iz rada proizilazi da se monotonom klasom parova ne iscrpljuje skup na kome linearni koeficienat korelacije dobro karakteriše zavisnost. Naime dokazano je preko podklase $J_E^{(2)}$ izogene klase parova i preko konkretnih primera uslovnih funkcija verovatnoće da postoje parovi slučajnih veličina za koje je $r_{xy} = 0$ potreban i dovoljan uslov za nezavisnost i ako slučajne veličine ne pripadaju monotonoj klasi parova. Prema tome, dalja istraživanja treba usmeriti na iznalaženje opštije klase parova slučajnih veličina čiju bi zavisnost dobro karakterisao linearni koeficienat ili neki drugi od navedenih parametara. Tako na primer, treba izučiti klasu slučajnih veličina koja je odredjena zahtevom da je uslovno matematičko očekivanje monotona funkcija, jer je ona za parove iz monotone klase monotona funkcija, obrnuto ne važi. Pored toga, ovaj uslov je dovoljan i za izogenu klasu da bi linearni koeficienat dobro karakterisao zavisnost.

Iz rada proizilazi da se monotonom klasom $M^{(n)}$ ne iscrpljuje skup n-torki slučajnih veličina za koje je uslov $E(X_k/x_1,x_2,\dots,x_{k-1}) = E(X_k/x_{k-1})$ potreban i dovoljan za markovsko svojstvo, što je dokazano teoremom 3.3.2. I u ovom slučaju dalja istraživanja treba usmeriti na iznalaženje opštije klase n-torki na kojoj će navedeni uslov biti potreban i dovoljan za markovsko svojstvo.

L I T E R A T U R A

[1] Т. АНДЕРСЕН, Введение в многомерный статистический анализ, ГИФМЛ Москва 1963, 14-21, 28-29, 43-45, 47-49.

[2] BERNSTEIN S. Fodement geometriques de la theorie des correlations, Metron, VII, 2, 1928.

[3] Б.В. ГМЕДЕНКО, Ю.К.БЕЛЯЕВ, А.Д.СОЛОВЬЕВ, Математические методы в теорий надежности, "Наука" Москва 1965, стр: 28, 102, 242.

[4] Б.В. ГНЕДЕНКО, Курс теории вероятностей, ГИФМЛ Москва 1961, страна: 176.

[5] Е.Б. ДЫНКИН, Основанийя теории марковских процессов, ГИФМЛ Москва 1959.

[6] П.П. ЗАВРЕЙКО, А.И. КОШЕЛЕВ, М.А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ, С.Г.МИХЛИН, Л.С. РАКОВЩИК, В.Я. СТЕЦЕНКО, Интегральные уравнения. "Наука" Москва 1968, стр: 81, 82.

[7] М. КЕНКАЛЛ,А.СТЬЮАРТ, Теория распределений, "Наука" Москва 1966, стр: 213, 88.

[8] Б.Р.ЛЕВИН, Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике,"Советское радио" Москва 1957, стр: 62.

[9] М.ЛОЭВ, Теория вероятностей, ИИЛ Москва 1962, стр: 117-120.

[10] Я.И. ЛУКОМСКИЙ, Теория корреляции и ее применение к анализу производства, ГОССТАТИЗДАТ Москва 1958.

[11] М.К. НОМОКОНОВ, О простоте второго характеристического числа корреляционых интегральных уравненый,ДАН СССР,72,Н^{o} 6 1950 (1021 - 1024).

[12] В.С. ПУГАЧЕВ, Теория случайных функций, ФИЗМАТГИЗ Москва 1962, стр.143.

[13] О.В. САРМАНОВ, Об изогеной корреляции, Известя академии наук СССР, Серия математическая 9 (1945) стр: 170.

[14] О.В.САРМАНОВ, О монотонных решениях корреляционных интегральных уравненый, ДАН СССР, 53, N^o 9 (194$\dot{5}$) (781-784).

[15] О.В. САРМАНОВ, О выпрямлении симетричной корреляции, ДАН СССР, 58, N^o 5, (1947) 745 - 747.

[16] О.В. САРМАНОВ, О выпрямлении несимметричной корреляции, ДАН СССР, 59, N^o 5 (1948) 816 - 819.

[17] О.В. САРМАНОВ, Максимальный коэффициент корреляции (симетричний случай) ДАН СССР, 120, N^o 4 (1958) 715 - 718.

[18] О.В. САРМАНОВ, Максимальный коэффициент корреляции (несимметрикний случай) ДАН СССР, 121 N^o 1 (1958) 52 - 55.

[$\hat{18}$] Н.В. СМИРНОВ, И.В.ДУНИН-БАРКОВСКИЙ, Курс теории вероятностей и математической статистики,"Наука" Москва 1965 стр: 322.

[19] С.УИЛКС, Математическая статистика,"Наука" Москва 1957 срт: 93.

[20] J.Б.УКШАНОВИЋ, О неким особинама линеарног коефицијента корелације, Математички весник 4 (19) 1967, стр: 243 - 246.

[21] J.Б.УКШАНОВИЋ, Линеарни коефицијент корелације и нелинеарна корелација, Математички весник, 6 (21) 1969, стр: 43 - 45.

[22] J.Б.УКШАНОВИЋ, Пирсонов количник и независност случајних величина, Математички весник, 6 (21) 1969, стр: 46 - 48.

[23] В.ФЕЛЛЕР, Введение в теорию вероятностей и ее применения 1, "МИР" Москва 1967 стр: 241 - 242.

[24] В. ФЕЛЛЕР, Введение в теорию вероятностей и ее применения 2, "МИР" Москва 1967 стр: 49, 122.

[25] ЧЖУН КАЙ-ЛАЙ, Однородние цепи маркова, "МИР" Москва 1964.

[26] А.А. ЧУПРОВ, Основные проблемы теории кореляции, Госстатиздат Москва 1960.