UNIVERZITET U BEOGRADU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

ASIMPTOTSKI OGRANIČENA I PERIODIČNA REŠENJA DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

- Doktorska disertacija -

Одбрана је 17.09.1979. г.

Julka Knežević

Чланови комисије

1. Бор. Рашајски
2. М. Бертолино
3. Р. Милошевић

BEOGRAD, 1979.

SADRŽAJ

U V O D

U radu se razmatraju dovoljni uslovi za postojanje asimptotski ograničenih, periodičnih, skoro periodičnih rešenja i singularnih tačaka za obične diferencijalne jednačine.

U § 1. data je definicija i osnovni pojmovi retrakcije i retrakata prema radu K. Borsuka, i metoda retrakcije T.Važevskog za utvrdjivanje egzistencije asimptotski ograničenih rešenja diferencijalnih jednačina. Drugi deo paragrafa sadrži neke opšte teoreme za utvrdjivanje postojanja periodičnih rešenja diferencijalnih jednačina.

U § 2. se prvo za diferencijalne jednačine čija je desna strana polinom po nepoznatoj funkciji (po obliku predstavljaju jednačine koje su proučavali M.Petrović i M.Bertolino) dokazuje postojanje asimptotski ograničenih rešenja. Dokazuje se da postoje i periodična i skoro periodična rešenja, i utvrdjuje se broj periodičnih rešenja. U drugom delu za diferencijalnu jednačinu

$$y' = \frac{\prod_{j\in A} (y-\phi_j(x))^{\alpha_j}}{\prod_{i\in B} (y-\phi_i(x))^{\alpha_i}}, \quad i \neq j$$

dokazuje se postojanje asimptotski ograničenih, periodičnih i skoro periodičnih rešenja. Dokazuje se da je (0,0) singularna tačka bilo tipa čvora - sedlo, bilo tipa čvora.

j trećem delu ovog paragrafa proučava se isti problem za diferencijalnu jednačinu

$$y' = F(x, y, \phi(x)).$$

Utvrdjuje se asimptotika rešenja u poredjenju sa nekim posebno odabranim funkcijama $\phi(x)$, što predstavlja nastavak istraživanja Z.Mikolajske. Takodje se dokazuje postojanje periodičnih rešenja.

U § 3. data je iterativna metoda za nalaženje dobijenih periodičnih rešenja i naveden je primer uradjen na računskoj mašini.

U ovom radu teoreme drugih autora nisu numerisane, dok su dobijene teoreme numerisane.

§ 1. OSNOVI NEKIH OPŠTIH METODA

1. Metod retrakta

Posmatraćemo sistem diferencijalnih jednačina

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

gde su y i f n- merni vektori, i pretpostavićemo da važi

Hipoteza H1 Realene funkcije f realnih promenljivih x, y su neprekidne na otvorenom skupu Ω. Kroz svaku tačku Ω prolazi jedan jedini integral sistema (1).

Topološkom metodom retrakta za sistem (1) ispitivaćemo asimptotski ograničena rešenja. Pod asimptotski ograničenim rešenjem sistema (1) podrazumeva se rešenje $y=y(x)$ za koje postoje realni brojevi x_0 i $M>0$ takvi da je

$$|y(x)| < M \quad \text{za} \quad x_0 \leq x < +\infty$$

1.1. Retrakcije i retrakti

Navešćemo sledeću definiciju retrakcije i retrakata ([26] ,[5]).

Definicija Posmatrajmo u ma kakvom prostoru dva skupa A i B takva da je $B \subset A$. Neprekidno preslikavanje $r: A \to B$, definisano na A, naziva se retrakcija A na B ako je restrikcija r na B identičko preslikavanje tj.

$$r(a) \in B \quad \text{za sve} \quad a \in A$$

$$r(b) = b \quad \text{za sve} \quad b \in B.$$

Ako retrakcija A na B postoji, B je retrakt od A.

Važe sledeća svojstva:

(1) Svaki skup je retrakt sebe samog; retrakcija se ostvaruje identitetom,

(2) Svaka tačka je retrakt skupa koji je sadrži; retrakcija se ostvaruje konstantnim preslikavanjem u tu tačku,

(3) Retrakt retrakta nekog skupa A je retrakt skupa A,

(4) Retrakt prostora sa nepokretnom tačkom ima takodje nepokretnu tačku,

(5) Neka je A n- dimenziona sfera $\|y\| < r$ u Euklidovom y- prostoru, i B njena granica $\|y\| = r$. Tada B nije retrakt od A.

Naime, ako bi postojala retrakcija A na B, onda bi postojalo i preslikavanje A u sebe. Na primer, takvo preslikavanje se ostvaruje preslikavanjem tačaka skupa A u suprotne tačke, i ovo preslikavanje nema nepokretnih tačaka. Ovo protivureči klasičnoj teoremi Brauera o nepokretnoj tačci pri neprekidnom preslikavanju sfere u sebe.

(6) Svojstvo da je jedan skup retrakt invarijanta je homeomorfije.

Na primer, ako je A_1 retrakt B_1, i ako homeomorfno preslikavanje prevodi A_1 u A_1', B_1 u B_1' tada je A_1' retrakt skupa B_1'. U praksi se nailazi na teškoće prilikom odredjivanja da li je neki skup retrakt nekog skupa, ali invariantnost u odnosu na homeomorfiju je ovde vrlo važno praktično svojstvo. Tako, na osnovu činjenice da granica sfere nije retrakt sfere dobijamo analogan zaključak za sve skupove homeomorfne sferi.

1.2. Navešćemo definicije potrebne u primeni metode retrakta, a zatim ćemo dokazati teoreme T.Važevskog koje se koriste za utvrdjivanje asimptotski ograničenih rešenja diferencijalnih jednačina ([26],[28]).

Označimo sa $J(x, P_0)$ integral sistema (1) koji prolazi kroz tačku (x_0, P_0) tj.

$J(x, P_0) = P_0$.

Neka je Ω prostor od $(n + 1)$ - dimenzije, a ω otvoren skup istog prostora i $\omega \subset \Omega$.

Granične tačke skupa ω čine apsolutnu granicu od ω, u oznaci front abs (ω).

Relativna granica skupa ω u odnosu na Ω je skup graničnih tačaka ω koje su i tačke od Ω. Koristićemo oznaku front (ω, Ω), i po definiciji je

$$\text{Front}(\omega, \Omega) = \text{front abs}(\omega) \cap \Omega.$$

Tačke skupa ω čine unutrašnjost skupa ω, a tačke skupa ω^* čine spoljašnost skupa ω u odnosu na skup Ω i

$$\omega^* = \Omega - \omega - \text{front}(\omega, \Omega).$$

Za proizvoljnu tačku P_0 posmatrajmo odgovarajući integral $J(x, P_0)$. Neka je $A(P_0)$ deo integrala $J(x, P_0)$ "levo" od tačke P_0 tj.

$$A(P_0) = \{(x, J(x, P_0)) : x_0 - \varepsilon < x \leqq x_0\}.$$

Analogno neka je $B(P_0)$ deo integrala $J(x, P_0)$ "desno" od P_0 tj.

$$B(P_0) = \{(x, J(x, P_0)) : x_0 \leqq x < x_0 + \varepsilon\}$$

gde je $\varepsilon > 0$ dovoljno malo.

Specijalno

$$\text{demi}(+)\, J(P_0) = \{(x, J(x, P_0)) : P_0 \in \omega,\ x_0 \leqq x < \beta(P_0)\}$$

$$\text{demi}(-)\, J(P_0) = \{(x, J(x, P_0)) : P_0 \in \omega,\ \alpha(P_0) < x \leqq x_0\}$$

gde je $(\alpha(P_0), \beta(P_0))$ maksimalni interval za koji $J(x, P_0) \in \omega$.

Za proizvoljnu tačku $P \in$ front (ω,Ω) mogući su sledeći slučajevi:

(a) $A(P) \subset \omega^*$, $B(P) \subset \omega$ – P je tačka striktog ulaza

(b) $A(P) \subset \omega$, $B(P) \subset \omega^*$ – P je tačka striktnog izlaza

(c) $A(P) \subset \omega$, $B(P) \subset \omega$ – P je tačka unutrašnjeg dodira

(d) $A(P) \subset \omega^*$, $B(P) \subset \omega^*$ – P je tačka spoljašnjeg dodira.

Posmatrajmo odnos integralne krive demi (+) J (P) i skupa ω. Moguća su sledeća dva slučaja:

(1) demi (+) J (P) $\subset \omega$ tj. integralna kriva je u skupu ω što je traženo svojstvo,

(2) demi (+) J (P) $\cap$ front $(\omega,\Omega) \neq \Phi$; tada za neku tačku P skupa ω postoji tačka na integralnoj krivoj koja je na granici skupa ω. Takvu tačku

$$Q = \text{conseq}\ (P;\ \omega,\Omega)$$

nazivamo sledećom u odnosu na P.

Skup svih tačaka Q za koje postoje odgovarajuće tačke $P \in \omega$ čini skup tačaka izlaza iz ω u Ω u odnosu na sistem (1) u oznaci Sortie (ω,Ω). Očigledno je

$$\text{Sortie}\ (\omega,\Omega) \subset \text{front}\ (\omega,\Omega).$$

Skup tačaka striktnog izlaza u odnosu na ω, Ω definiše se kao podskup front (ω,Ω) sa svojstvom

$$A\ (P) \subset \omega, \quad B\ (P) \subset \omega^* \quad P \in \text{front}\ (\omega,\Omega).$$

Označimo ovaj skup sa Sortie stricte (ω,Ω). Pretpostavimo da važi sledeća hipoteza.

<u>Hipoteza H2</u> Svaka tačka izlaza je tačka striktnog izlaza tj.

S = Sortie (ω,Ω) = Sortie stricte (ω,Ω).

Neka je $g(x, y) \in C^1(R \times R^n)$ i neka je $J(x, P)$ jedan integral sistema (1). Formirajmo

$$\phi(x) = g(J(x,P)).$$

Izvod $\phi'(x)$ je nagib funkcije $g(x,y)$ u odnosu na sistem (1) i rešenje kroz tačku P. Nagib funkcije se može izračunati sa

$$\phi'(x) = g_x + (\text{grad}_y\, g)\ f$$

gde je f desna strana sistema (1). Dakle, za odredjivanje nagiba nije potrebno poznavanje rešenja sistema (1).

Neka je $g(P_0) = 0$. Sada je moguće definisati pozitivnost, negativnost odnosno nepozitivnost, nenegativnost ovako definisane funkcije.

Funkcija $\phi(x)$ ima pozitivan nagib ako postoji $\delta>0$ takav da je

$$g(J(x,P_0)) < 0 \quad \text{za} \quad x_0 - \delta<x<x_0$$

$$g(J(x,P_0)) > 0 \quad \text{za} \quad x_0 < x< x_0 + \delta.$$

Analogno se definiše negativan nagib funkcije.

Pokažimo kako se primenjuje uvedeni pojam nagiba. Funkciju $g(x,y)$ biramo tako da je definisana na Ω i da je

$$\omega = \{ (x,y) : g(x,y) < 0\}.$$

Na ovaj način sve tačke P granice ω zadovoljavaju uslov $g(P) = 0$. Posmatrajmo integral $J(x,P)$ kroz tačku P i odgovarajuću funkciju nagiba. Tačka P je tačka striktnog izlaza ako je

$$\phi'(P) > 0$$

a ovo znači da integral koji prolazi kroz tačku P prelazi u ω^*. Analogno, tačka P je tačka striktnog ulaza ako je

$$\phi'(P) < 0$$

tj. u ovom slučaju pripadni integral ulazi u unutrašnjost skupa ω.

Uvedimo sada definiciju višegranog regularnog skupa u odnosu na sistem (1). Pretpostavimo da su funkcije

$$\ell^{\alpha}(x,y) \quad m^{\beta}(x,y) \quad (\alpha = 1,\dots,p;\ \beta = 1,\dots,q)$$

klase C^1 na Ω. Označimo sa ω skup tačaka koje zadovoljavaju sistem relacija

$$P \in \Omega$$

$$\ell^{\alpha}(P) < 0 \quad m^{\beta}(P) < 0 \quad (\alpha = 1,\dots,p;\ \beta = 1,\dots,q).$$

Neka su L^{γ} i M^{δ} $(\gamma = 1,\dots,p;\ \delta = 1,\dots,q)$ skupovi tačaka P koji zadovoljavaju sistem relacija

$$P \in \omega \quad \ell^{\gamma}(P) = 0$$

$$\ell^{\alpha}(P) \leqq 0 \quad (\alpha = 1,\dots,p) \quad m^{\beta}(P) \leqq 0 \quad (\beta = 1,\dots,q)$$

(skup L^{γ})

i

$$P \in \omega \quad m^{\delta}(P) = 0$$

$$\ell^{\alpha}(P) \leqq 0 \quad (\alpha = 1,\dots,p) \quad m^{\beta}(P) \leqq 0 \quad (\beta = 1,\dots,q)$$

(skup M^{δ})

Pretpostavimo da $\ell^{\gamma}(P)$ za $1 \leqq \gamma \leqq p$ ima pozitivan nagib u svakoj tački L^{γ}, a da funkcija $m^{\delta}(P)$ za $1 \leqq \delta \leqq q$ ima negativan nagib u svakoj tački M^{δ}. Ovako definisan skup ω zvaćemo višegrani regularni skup u odnosu na sistem (1), koji ima pozitivne strane L^{γ} i negativne strane M^{δ}.

Dokažimo sada sledeće teoreme T. Važevskog.

<u>Teorema</u> Pretpostavimo da za sistem (1) važe hipoteze H1 i H2. Neka su skupovi Z i S_1 takvi da je

$$S_1 \subset S$$

$$Z \subset \omega \cup S_1.$$

$Z \cap S_1$ je retrakt od S_1, $Z \cap S_1$ nije retrakt od Z. Tada postoji bar jedna tačka $P_0 \in Z \setminus S_1$ takva da ili

$$\text{conseq } (P_0;\ \omega, \Omega) \in S \setminus S_1$$

ili

$$\text{conseq } (P_0;\ \omega, \Omega) \text{ ne postoji.}$$

<u>Dokaz</u> Neka teorema nije tačna. Tada za svaku tačku $P \in Z \setminus S_1$ postoji conseq $(P;\ \omega, \Omega) \in S_1$. Definišimo transformaciju

$$Q = K\ (P) : Z \to S_1$$

sa

$$K(P) = \begin{cases} \text{conseq } (P;\ \omega, \Omega) & P \in Z \setminus S_1 \\ P & P \in Z \cap S_1 \end{cases}$$

koja je neprekidna zbog H1. Pošto je $Z \cap S_1$ retrakt od S_1 postoji transformacija

$$R = U\ (Q) : S_1 \to Z \cap S_1$$

data sa

$$U(Q) = \begin{cases} Z \cap S_1 & Q \in S_1 \\ Q & Q \in Z \cap S_1\ . \end{cases}$$

Složena transformacija

$$R = T\ (P)$$
$$T\ (P) = U\ (K\ (P)) : Z \to Z \cap S_1$$

je neprekidna i data sa

$$T(P) = \begin{cases} Z \cap S_1 & P \in Z \\ P & P \in Z \cap S_1. \end{cases}$$

Ova transformacija vrši retrakciju Z na $Z \cap S_1$, što je u suprotnosti s pretpostavkom teoreme i time je naša teorema dokazana.

<u>Teorema</u> Neka važe hipoteze H1 i H2 za sistem (1) i neka postoji skup Z takav da je

$$Z \subset \omega \cup S.$$

$Z \cap S$ je retrakt od S, $Z \cap S$ nije retrakt od Z. Tada postoji bar jedna tačka

$$P_0 \in Z \setminus S$$

takva da

$$\text{demi } (+)\ J\ (P_0) \subset \omega.$$

Ovakav poluintegral je asimptotski u odnosu na ω i Ω.

Dokaz U teoremu stavimo da je $S = S_1$. Skup $S \setminus S_1 = \Phi$, pa relacija

$$\text{conseq } (P_0;\ \omega,\Omega) \in S \setminus S_1$$

nije moguća. Dakle, conseq $(P_0;\ \omega,\Omega)$ ne postoji, a odatle sledi da je

$$\text{demi } (+)\ J\ (P_0) \subset \omega.$$

Definišimo pojam dodira apsolutnih granica skupova ω,Ω.

Definicija Neka su ω i Ω otvoreni skupovi, $\omega \subset \Omega$. Front abs (ω) dodiruje front abs (Ω) isključivo na ravni $x=b$ (b je konačno ili $+\infty$) ako za svaki niz tačaka $P_n \in \omega$ koji konvergira ka front abs (Ω) važi da $x_n \to b$.

Teorema Neka važe hipoteze H1 i H2 za sistem (1). Neka front abs (ω) dodiruje front abs (Ω) isključivo na ravni $x = b$ (b je konačno ili $+\infty$). Neka postoji skup Z sa svojstvom

$$Z \subset \omega \cup S.$$

$Z \cap S$ je retrakt od S, $Z \cap S$ nije retrakt od Z. Tada postoji tačka $P_0 \in Z \setminus S$ čiji pripadni integral ostaje u skupu ω tj.

$$\text{demi } (+)\ J\ (P_0) \subset \omega.$$

Ovaj integral je asimptotski u odnosu na ω,Ω i važi $J\ (x,\ P_0) \subset \omega$ za $x_0 \leq x < b$.

Dokaz Prema prethodnoj teoremi postoji $P_0 \in Z \setminus S$ takva da je

demi (+) $J(P_0) \subset \omega$

tj. $J(x, P_0) \in \omega$ za $x_0 \leq x < \beta(P_0)$.

Dokažimo da je $\beta(P_0) = b$. Neka je

$$x_0 < x_n < \beta(P_0), \quad x_n \to \beta(P_0).$$

Tada

$$J(x_n, P_0) \to \text{front abs } (\Omega)$$

pa na osnovu prethodne definicije $x_n \to b$ i odatle $b = \beta(P_0)$.

Navedena metoda se primenjuje i na rešavanje sledećeg graničnog problema. Neka su Z i T dva skupa iz $\omega \cup \text{front } (\omega, \Omega)$. Da li postoje dve tačke $A \subset Z$ i $B \subset T$ koje mogu biti povezane lukom integrala sistema (1) koji pripada $\omega \cup \text{front } (\omega, \Omega)$?

Definicija Neka su ω, Ω otvoreni skupovi, $\omega \subset \Omega$. Front abs (ω) ne dodiruje front abs (Ω) kada ne postoji niz $P_n \in \omega$ da

$$P_n \to \text{front abs } (\Omega).$$

Teorema Neka važe hipoteze H1 i H2 za sistem (1) i neka front abs (ω) ne dodiruje front abs (Ω). Neka postoje skupovi Z i T sa svojstvima

$$T \subset S$$

$$Z \subset \omega \cup (S \setminus T).$$

$Z \cap (S \setminus T)$ je retrakt od $S \setminus T$, $Z \cap (S \setminus T)$ nije retrakt od Z. Tada postoje dve tačke

$$P_0 \in Z \cap \omega \quad Q_0 \in T$$

koje pripadaju jednom integralu sistema (1) a luk

$$[P_0, Q_0] \subset \omega.$$

Dokaz Neka je $S_1 = S \setminus T$ pa su ispunjeni uslovi prve teoreme. Dakle, postoji $P_0 \in Z \setminus S_1$. Dokažimo da postoji

$$Q_0 = \text{conseq}\ (P_0\ ;\ \omega,\Omega).$$

Izaberimo niz x_n takav da je

$$x_0 < x_n < \beta\ (P_0) \quad \text{i} \quad x_n \to \beta\ (P_0).$$

Tada

$$J\ (x_n,\ P_0) \to \text{front abs}\ (\Omega)$$

jer $x_n \to \beta\ (P_0)$. Dakle, za neki indeks $n = m$

$$J\ (x_m,\ P_0) \in \Omega \setminus \omega$$

jer se front abs (ω) i front abs (Ω) ne dodiruju. Luk

$$J\ ([x_0,\ x_m],\ P_0)$$

seče front (ω,Ω) pa

$$Q_0 = \text{conseq}\ (P_0\ ;\ \omega,\Omega)$$

postoji i

$$Q_0 \in S \setminus S_1 = T.$$

Tačke P_0 i Q_0 su tražene.

Teorema Pretpostavimo da je ω višegrani regularni skup sa pozitivnim stranama L^γ i negativnim stranama M^δ, i neka važe hipoteze H1 i H2 u odnosu na sistem (1). Tada je

$$S = \sum_{\gamma=1}^{p} L^\gamma - \sum_{\delta=1}^{q} M^\delta.$$

Dokaz Dokažimo prvo da je

$$\text{front}\ (\omega,\Omega) \subset \Sigma\ L^\gamma + \Sigma\ M^\delta.$$

Neka je $P_0 \in \text{front}\ (\omega,\ \Omega)$, tada je

$$P_0 \in \Omega$$

$$\ell^\alpha\ (P_0) \leq 0 \qquad m^\beta\ (P_0) \leq 0 \qquad (\alpha = 1,\ldots,p;\ \beta = 1,\ldots,q).$$

Medjutim, ne može se desiti da sve ove nejednakosti budu stroge, jer bi P_0 bila unutrašnja tačka od ω. Dakle, postoji bar jedna jednakost

$$\ell^{\alpha}\ (P_0) = 0 \quad \text{ili} \quad m^{\beta}\ (P_0) = 0,$$

pa ili $P_0 \in L^{\gamma}$ ili $P_0 \in M^{\delta}$ i prethodna relacija je dokazana.

Dokažimo sada da je

$$(\Sigma\ M^{\delta})\ \text{Sortie}\ (\omega,\Omega) = 0.$$

Neka je P_0 ma koja tačka iz M^{δ}. Funkcija m^{δ} (P) u tački P_0 ima negativan nagib, pa za $\varepsilon > 0$ dovoljno malo

$$m^{\delta}\ (J(x,\ P_0)) > 0 \quad \text{za} \quad x_0 - \varepsilon < x < x_0.$$

Dakle, $J\ (x,\ P_0)$ ne pripada ω za $x_0 - \varepsilon < x < x_0$, tj. $J\ (x,\ P_0)$ ne pripada izlazu.

Koristeći prethodne relacije dobijamo

$$\text{Sortie stricte}\ (\omega,\Omega) \subset \text{Sortie}\ (\omega,\Omega) \subset \text{front}\ (\omega,\Omega) -$$
$$- \Sigma\ M^{\delta} \subset \Sigma\ L^{\gamma} + \Sigma\ M^{\delta} - \Sigma\ M^{\delta} = \Sigma\ L^{\gamma} - \Sigma\ M^{\delta}$$

tj.

$$\text{Sortie stricte}\ (\omega,\Omega) \subset \Sigma\ L^{\gamma} - \Sigma\ M^{\delta} \tag{2}$$

Dokažimo i da je

$$\Sigma\ L^{\gamma} - \Sigma\ M^{\delta} \subset \text{Sortie stricte}\ (\omega,\Omega) \tag{3}$$

Neka je

$$P_0 \in \Sigma\ L^{\gamma} - \Sigma\ M^{\delta}.$$

Za sve indekse δ važi

$$m^{\delta}\ (P_0) < 0 \quad (\delta = 1, \ldots, q).$$

Tačka P_0 pripada nekim stranama L^{σ} $(\sigma = \alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ a ne pripada L^{ρ} $(\rho = \alpha_1', \ldots, \alpha_{p-r}')$. Dakle,

$$\ell^{\sigma}\ (P_0) = 0 \quad (\sigma = \alpha_1, \ldots, \alpha_r)$$
$$\ell^{\rho}\ (P_0) < 0 \quad (\rho = \alpha_1', \ldots, \alpha_{p-r}').$$

Kako su L^σ pozitivne biće za $\varepsilon > 0$ dovoljno malo

$$\ell^\sigma (J(x,P_0)) < 0 \quad \text{za} \quad x_0 - \varepsilon \leqq x < x_0$$

$$\ell^\sigma (J(x,P_0)) > 0 \quad \text{za} \quad x_0 < x \leqq x_0 + \varepsilon.$$

Poslednja nejednakost daje zbog definicije skupa ω da

$$J((x_0, x_0+\varepsilon], P_0) \in \omega^*.$$

Kako je $J(x_0, P_0) = P_0$ sledi da je

$$m^\delta (J(x,P_0)) < 0$$

$$\ell^\sigma (J(x, P_0)) < 0 \quad \text{za} \quad x_0 - \varepsilon \leqq x < x_0.$$

Dakle, sledi da

$$J([x_0 - \varepsilon, x_0), P_0) \subset \omega .$$

Pokazali smo da

$$P_0 \in \text{Sortie stricte } (\omega,\Omega)$$

pa važi (3). Iz (2) i (3) sledi da važi naša teorema.

1.3. Osnovni problemi pri praktičnoj primeni prethodnih rezultata nastaju kod odredjivanja skupova ω,Ω, S, Z, T o kojima se govori u teoremama. Sada ćemo za neke diferencijalne jednačine konstruisati skupove ω, Z i S i primeniti metodu retrakta.

1. Posmatrajmo diferencijalnu jednačinu prvog reda

$$y' = f(x, y)$$

Kriva $y = \phi(x)$ je kriva stacionarnih tačaka ako je

$$f(x, \phi(x)) = 0.$$

Neka u okolini krive stacionarnih tačaka važi:

$$f(x, y) > 0 \quad y > \phi(x)$$

$$f(x, y) < 0 \quad y < \phi(x)$$

tj. na toj krivoj funkcija f (x, y) menja znak. Ako je $y = \phi(x)$ ograničena, postavimo prave

$$y = y_1 \quad y = y_2 \quad x \geqq x_0$$

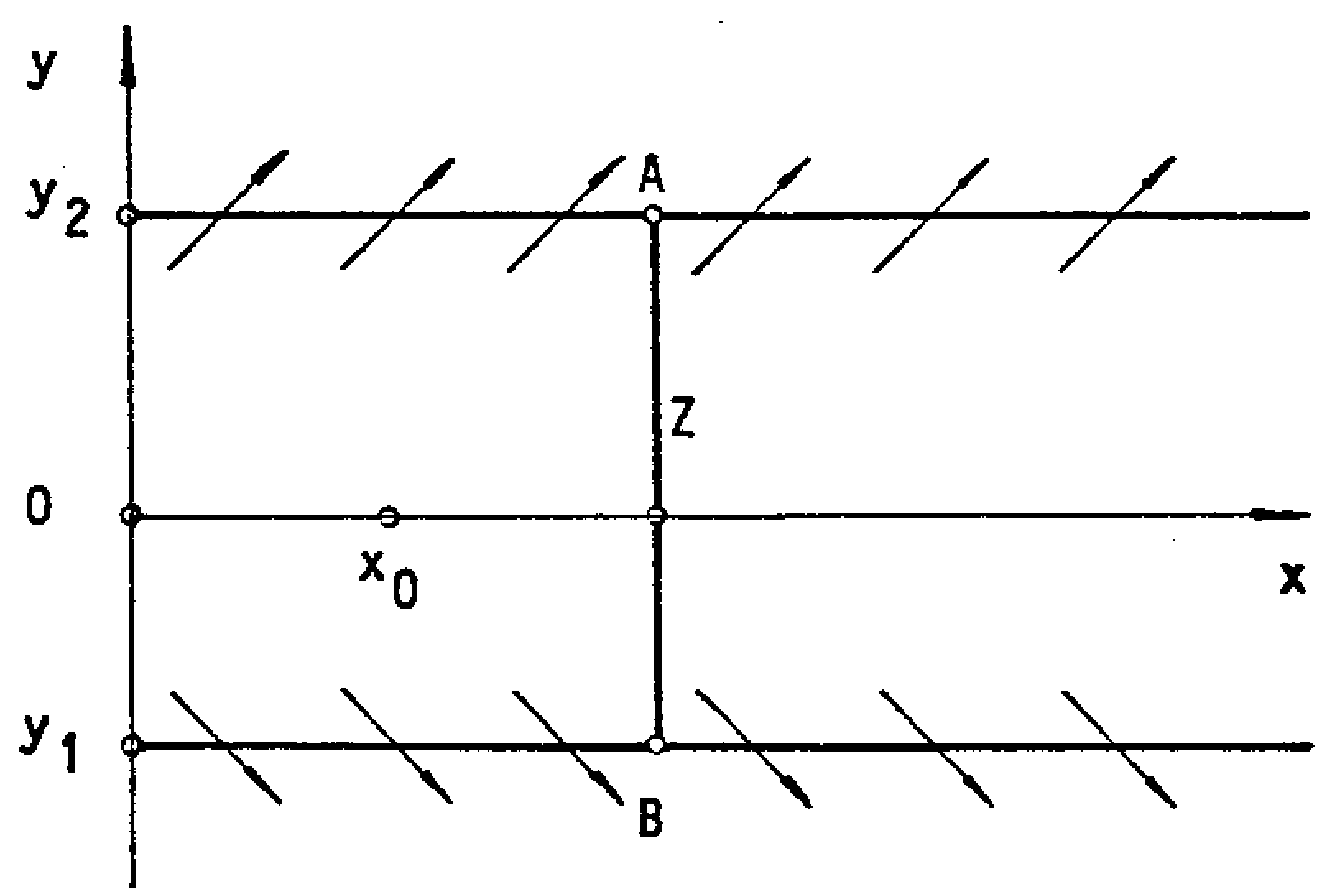
takve da je

$$y_1 < \phi(x) < y_2.$$

Neka je Ω cela ravan OXY, a skup ω

$$\omega = \{(x,y) : x \geqq x_0, \quad y_1 < y < y_2\}.$$

Skup $\omega \subset \Omega$, a granica skupa ω se sastoji iz pravih $y = y_1$ i $y = y_2$.



Dakle, $f(x, y_1) < 0$, $f(x, y_2) > 0$. Skup S čine tačke polupravih $y = y_1$, $y = y_2$, $x \geqq x_0$. Skup Z je duž tj.

$$Z = \{(x,y) : x = x_0 \quad y_1 < y < y_2\}.$$

Tada je

$$Z \subset \omega \cup S$$

$$Z \cap S = \{A,B\}.$$

Skup $Z \cap S$ je retrakt od S. Naime, tačka A je retrakt poluprave $y = y_2$, $x \geqq x_0$ jer je svaka tačka retrakt skupa kome pripada i u kome je moguće neprekidno preslikavanje. Isto tako tačka B je retrakt poluprave $y = y_1$, $x \geqq x_0$.

Skup $Z \cap S$ nije retrakt od Z jer se segment ne može neprekidno preslikati u svoje krajeve. Naime, segment je homeomorfan sferi, a kako granica sfere nije retrakt sfere na osnovu invariantnosti u odnosu na homeomorfiju sledi da krajevi segmenta nisu retrakt segmenta. Dakle, postoji tačka

$$P \in Z \setminus S = (A, B)$$

takva da je

$$\text{demi } (+)\ J\ (P) \subset \omega.$$

Takva tačka P' se može dobiti na analognom segmentu (A', B') ali se dobijeni asimptotski integral može poklopiti sa onim iz tačke P. Dakle, možemo da tvrdimo da postoji bar jedno asimptotski ograničeno rešenje.

Neka je sada

$$f\ (x,\ y) < 0 \qquad y > \phi\ (x)$$

$$f\ (x,\ y) > 0 \qquad y < \phi\ (x)$$

tj. sada je $f\ (x,\ y_1) > 0$, $f\ (x,\ y_2) < 0$. Dakle, sve tačke granice skupa ω su tačke striktnog ulaza, pa svi integrali ostaju u skupu ω.

Pokažimo da se i ovaj rezultat može interpretirati primenjujući metod retrakta. Za skup Z uzmimo ma koju tačku iz unutrašnjosti skupa ω. Skup $Z \cap S$ je prazan skup, pa je retrakt od S kao praznog skupa. $Z \cap S$ nije retrakt od Z. Naime, skup Z kao jednočlan skup ne može se neprekidno preslikati u prazan skup. Tački $P \in Z \setminus S = Z$ prema metodi retrakta pripada asimptotski ograničen integral. Tačka Z je proizvoljna pa sva rešenja ulaze u ω.

2. Posmatrajmo sistem

$$\frac{dy}{dx} = f\ (x,y,z)$$

$$\frac{dz}{dx} = g\ (x,y,z)$$

gde su funkcije $f\ (x, y, z)$ i $g\ (x, y, z)$ neprekidne u celom prostoru $OXYZ$ (smatraćemo ga skupom Ω) i pretpostavimo da kroz svaku tačku prolazi jedan jedini integral sistema.

Neka je skup ω paralelopiped

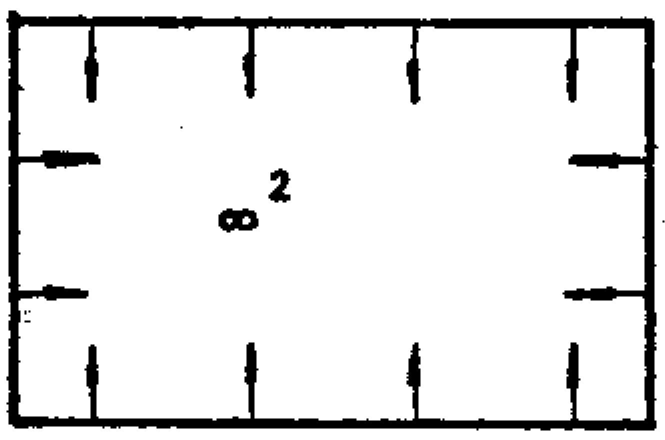
$$\omega = \{(x, y, z) : x_0 \leq x < + \infty \quad |y| < a, \ |z| < b \}$$

Granica od ω sastoji se od strana paralelopipeda E_1, E_2, E_3, E_4 redom na ravnima $y = - a$, $y = a$, $z = - b$, $z = b$. Neka je Z definisan sa

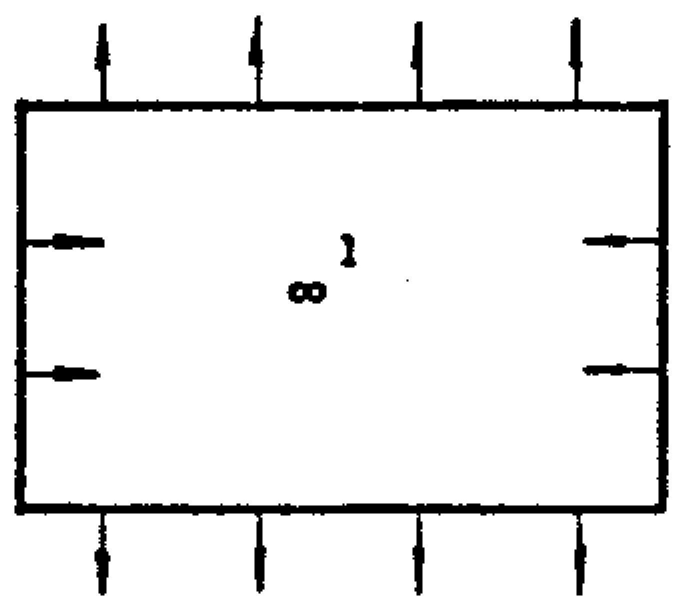
$$Z = \{(x,y,z) : \ x = x_0 \quad |y| < a, \ |z| < b \}$$

tj. uzimamo jedan presečni pravougaonik.

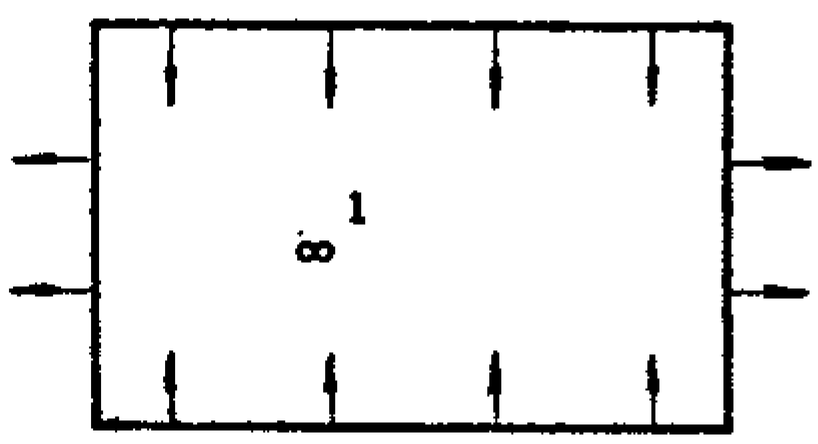
U zavisnosti od znaka desne strane gornjeg sistema diferencijalnih jednačina duž strana paralelopipeda tj. ivica skupa Z imamo sledeće slučajeve:



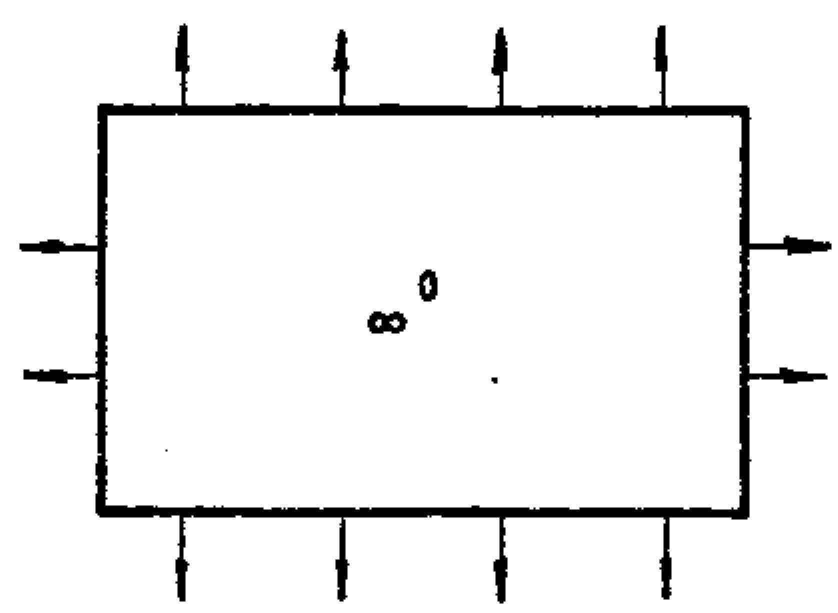
a)



b)



b)



c)

Dokazaćemo da u slučaju a) sva su rešenja asimptotski ograničena (∞^2), u slučaju b) postoji klasa asimptotski ograničenih rešenja (∞^1) i u slučaju c) postoji bar jedno asimptotski ograničeno rešenje (∞^0) ([3]).

Pretpostavimo da su ispunjeni uslovi

$y\ f\ (x,y,z) < 0$ na $E_1 \cup E_2$

$z\ g\ (x,y,z) < 0$ na $E_3 \cup E_4$

tj. sve strane paralelopipeda su ulazne (slučaj a)). Tada sledi da integral koji je jednom ušao u ω neće nikad izaći, i sva su rešenja asimptotski ograničena.

Pretpostavimo sada da je

$y\ f\ (x,y,z) > 0$ na $E_1 \cup E_2$

$z\ g\ (x,y,z) < 0$ na $E_3 \cup E_4$

tj. dobijamo slučaj b).

Skup tačaka striktnog izlaza je

$S = E_1 + E_2 - E_3 - E_4$.

Neka su A i B dve tačke sa koordinatama

$(\xi, -a, \tau) \quad (\xi, a, \tau) \quad x_0 \leq \xi < +\infty, \ |\tau| < b$

tj. A i B su proizvoljne tačke na izlaznim stranama E_1, E_2. Označimo sa Z segment čiji su krajevi tačke A i B. Skup $Z \cap S$ se sastoji iz tačaka A i B, pa nije retrakt od Z jer se segment ne može neprekidno preslikati u svoje krajeve. Tačka A je retrakt strane E_1, jer je svaka tačka retrakt skupa koji je sadrži, a tačka B je retrakt strane E_2. Sledi da je $Z \cap S$ retrakt od S. Na osnovu druge teoreme na segmentu $Z \setminus S =$ $= Z \setminus A \setminus B$ postoji tačka P takva da je demi (+) J $(P) \subset \omega$. Kako su A i B proizvoljne tačke postoji klasa asimptotski ograničenih rešenja.

Pretpostavimo da je

$y\ f\ (x,y,z) > 0$ na $E_1 \cup E_2$

$z\ g\ (x,y,z) > 0$ na $E_3 \cup E_4$

tj. pretpostavimo da su sve strane izlazne (slučaj c)), pa skup S tačaka striktnog izlaza su sve strane.

Neka je Z jedan presečni pravougaonik, definisan prethodnom relacijom, pa skup $Z\cap S$ su strane pravougaonika. Kako je pravougaonik homeomorfan sa krugom, a kako granica kruga nije retrakt kruga, na osnovu svojstva invariantnosti u odnosu na homeomorfiju $Z\cap S$ nije retrakt od Z. Skup $Z\cap S$ je retrakt od S jer odgovarajuće izlazne strane paralelopipeda retrakcijom prelaze u odgovarajuće strane pravougaonika. Dakle, na osnovu druge teoreme postoji tačka $P\in Z$ takva da demi (+) $J(P)\subset\omega$. Za svaki ovako definisan presek postoji takva tačka P, ali se sva prethodna rešenja mogu poklopiti, pa skup ω garantuje postojanje bar jednog asimptotski ograničenog rešenja.

3. Navedeni metod retrakta može se primeniti i na diferencijalnu jednačinu

$$x'' = f(x,x',t)$$

i dokazano je postojanje beskonačne porodice rešenja $x(t)$ ograničene za $t \geq 0$, a takodje beskonačne porodice rešenja ograničene za $t \leq 0$ ([22],[7]). Pri tome se pretpostavlja:

a) Funkcija $f(x,y,t)$ u oblasti

$$\Omega = \{a < x < b,\ -\infty < y,t < \infty\}$$

prostora $Oxyt$ je neprekidna i zadovoljava uslove postojanja i jedinosti rešenja diferencijalne jednačine.

b) Postoje dve vrednosti x_0 i x_1 $(a < x_0 < x_1 < b)$ takve da je

$$f(x_0, 0, t) < 0$$

$$f(x_1, 0, t) > 0$$

za svako t.

Neka je

$$x' = y$$
$$y' = f(x,y,t)$$

sistem koji je ekvivalentan sa datom jednačinom. Posmatrajmo otvoren skup

$$\omega = \{x_0 < x < x_1, -\infty < y, t < \infty\} \subset \Omega$$

čija se granica sastoji iz ravni $P_0 = \{x = x_0\}$ i $P_1 = \{x = x_1\}$. Ravan P_0 deli prava

$$\{A_0\} = \{(x_0, 0, \tau)\} \quad \tau \in (-\infty, +\infty)$$

na dve polu-ravni:

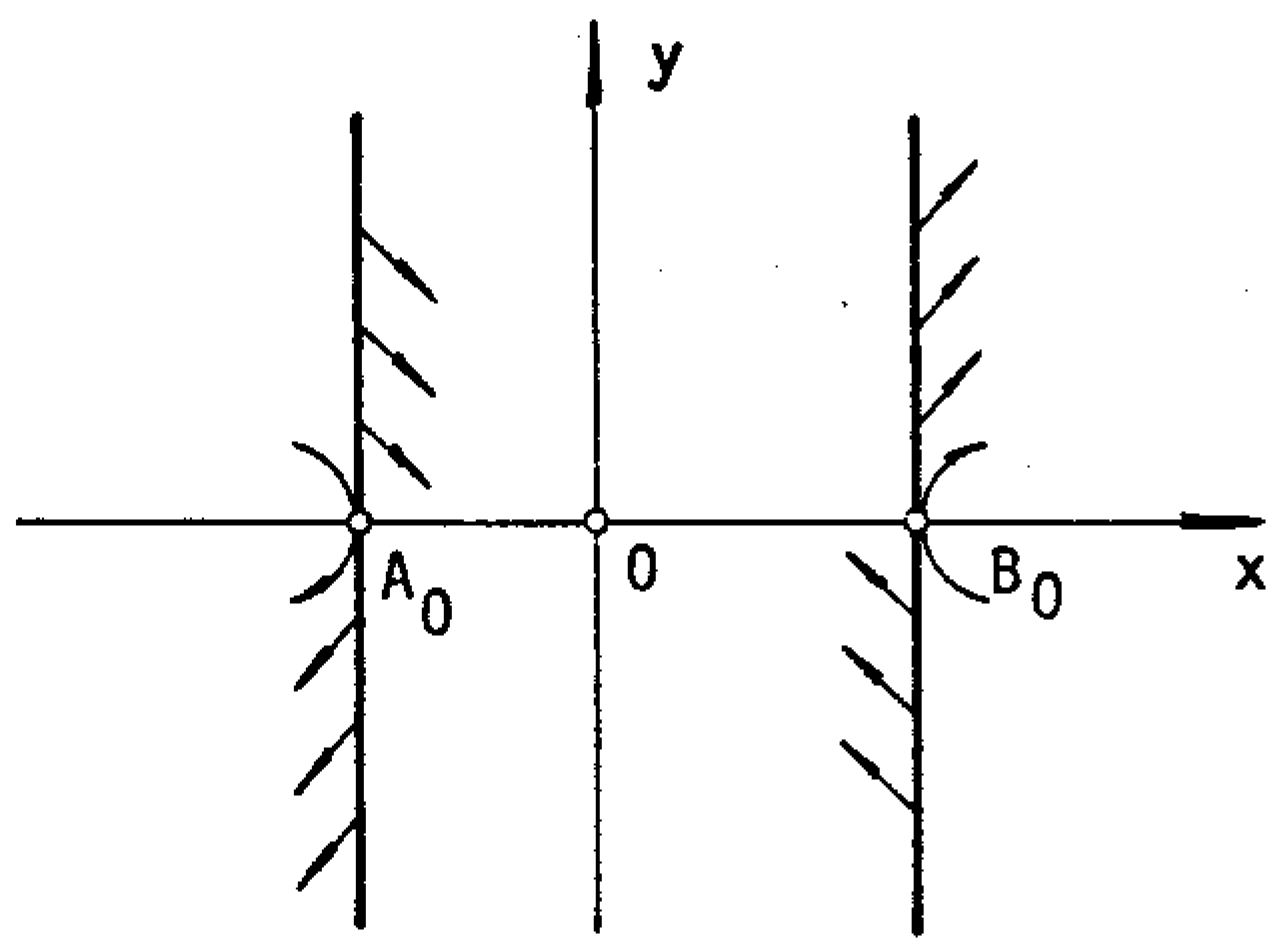
$$P_0^+ = P_0 \cap \{y > 0\}$$

$$P_0^- = P_0 \cap \{y < 0\}$$

duž kojih je $x'(t) > 0$ odnosno $x'(t) < 0$ respektivno. Na taj način skup P_0^+ se sastoji iz tačaka striktnog ulaza, a P_0^- iz tačaka striktnog izlaza za skup ω i dati sistem. Analogno, ravan P_1 je podeljena pravom

$$\{B_0\} = \{(x_1, 0, \tau)\} \quad \tau \in (-\infty, +\infty)$$

na P_1^+ za koju je $x'(t) > 0$ i P_1^- za koju je $x'(t) < 0$, pa se P_1^+ sastoji iz tačaka strogog izlaza, a P_1^- iz tačaka strogog ulaza.



Neka je sada $\overset{0}{L}_\tau = (x(t), y(t), t)$ integral sistema koji za $t = \tau$ prolazi kroz tačku $A_\tau = (x_0, 0, \tau)$.

Tada je

$$x'(\tau) = 0$$

$$x''(\tau) = f(x_0, 0, \tau) < 0$$

pa funkcija $x(\tau)$ prolazi kroz maksimum za $t = \tau$. Prava $\{A_0\}$ je skup tačaka spoljašnjeg dodira za skup ω. Na analogan način prava $\{B_0\}$ je skup tačaka spoljašnjeg dodira za ω i dati sistem. Granica skupa ω sastoji se iz

$$\text{Front } \omega = (P_0^+ \cup P_1^-) \cup (P_1^- \cup P_1^+) \cup \{A_0\} \cup \{B_0\}$$

i

$$P_0^+ \cap P_1^- = \Phi = P_0^- \cap P_1^+.$$

Skupovi P_0^+, P_1^-, P_0^-, P_1^+ su otvoreni i povezani u front (ω).

Neka je sada

$$S = \{P_0^-\} \cup \{P_1^+\}$$

i za skup Z uzmimo bilo koju neprekidnu krivu γ, koja unutar ω povezuje bilo koji par tačaka (P_0^-, P_1^+). Očigledno je $Z \cap S =$ $= Z$, i zato taj par tačaka ne može biti retrakt od Z jer se kriva γ ne može neprekidno preslikati na svoje krajeve. Ali $Z \cap S$ je retrakt skupa S, jer se $\{P_0^-\}$ neprekidno preslikava na P_0^-, a $\{P_1^+\}$ na P_1^+. Prema teoremi T.Važevskog unutar ω (u $Z \cap \omega$) postoji tačka P takva da demi $(+)$ $J(P) \subset \omega$.

Ako sada t zamenimo sa $-t$ dobijamo dokaz postojanja rešenja ograničenih za $t \leqq 0$.

4. U svojim radovima A.Pelczar nastavlja sa proučavanjem teorije retrakta T.Važevskog, i zatim te rezultate primenjuje na dinamičke sisteme i parcijalne jednačine ([18]).

Proučavan je sledeći Košijev problem

$$y' = f(y, z) \tag{4.1}$$

$$z' = g(y, z) \tag{4.2}$$

$$y(t^0) = y^0, \quad z(t^0) = z^0 \tag{4.3}$$

Pretpostavićemo da su c i d dva realna broja, takva da je $c < d$ i da su $f, g : R^2 \to R$ (ovde je $R = (-\infty, +\infty)$) neprekidne funkcije takve da je

$$f(c, z) < 0$$

$$f(d, z) > 0$$

za svako $z \in R$, i svako $t^0 \in R_* = [0, \infty)$. Neka je

$$M = \{y \quad R : c < y < d\}$$

a S neprazan skup iz $[c,d] \times R$. Dokazuje se da postoji tačka

$$(y^0, z^0) \in S \cap M$$

za koju postoji rešenje (y,z) problema (4.1) - (4.3), i važi nejednakost

$$c < y(t) < d$$

za $t \in R_*$.

2. Periodična rešenja diferencijalnih jednačina

Posmatraćemo diferencijalnu jednačinu

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{2}$$

i pretpostavićemo da je $f(x,y)$ neprekidna, da zadovoljava uslove o jedinosti rešenja za svako x, y i

$$f(x + \omega, y) = f(x, y)$$

tj. $f(x,y)$ je ω- periodična funkcija ([17]).

Teorema Ako je rešenje $y = \phi(x)$ jednačine (2) ograničena za $x \geqq x_0$ $(x \leqq x_0)$, tada je ono ili samo ω- periodično ili se asimptotski približava nekom ω- periodičnom rešenju za $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$).

Dokaz Pretpostavimo da jednačina (2) ima ograničeno rešenje $y = \phi(x)$ za $x \geqq x_0$. Ne umanjujući opštost, možemo zbog periodičnosti funkcije $f(x,y)$ smatrati da je rešenje $y = \phi(x)$ zadana pri $x = 0$. Posmatrajmo niz

$$y_k = \phi(k\omega) \qquad (k = 0,1,\dots).$$

Ako je

$$\phi(0) = \phi(\omega)$$

tada je rešenje $y = \phi(x)$ ω- periodično, i za svako k i ℓ važi

$$\phi(k\omega) = \phi(\ell\omega) .$$

Neka je

$$\phi(0) \neq \phi(\omega).$$

Pokažimo da je u tom slučaju niz y_k monoton. Smatraćemo da je

$$\phi(0) < \phi(\omega).$$

Pokažimo da je

$$\phi(\omega) < \phi(2\omega).$$

Pretpostavimo stoga da ovo ne važi tj. neka važi nejednakost

$$\phi(\omega) \geqq \phi(2\omega). \tag{3}$$

Posmatraćemo rešenje $y = \psi(x)$ jednačine (2) s početnim uslovom

$$\psi(\omega) = \phi(0).$$

Zbog periodičnosti $f(x,y)$ sledi da je

$$\psi(x) = \phi(x-\omega).$$

Tako je $\psi(2\omega) = \phi(\omega)$. Imamo da je

$$\psi(\omega) = \phi(0) < \phi(\omega).$$

S druge strane iz (3) sledi nejednakost

$$\psi\ (2\omega) \geq \phi\ (2\omega).$$

Iz ovih nejednakosti sledi da na intervalu $\omega < x \leq 2\omega$ postoji takvo x^* da je

$$\phi\ (x^*) = \psi\ (x^*).$$

Ovo je nemoguće zbog jedinstvenosti rešenja jednačine (2) pa ne važi (3).

Analogno se dokazuje da za svako prirodno k važi nejednakost

$$\phi\ (k\omega) < \phi\ ((k+1)\ \omega).$$

Pretpostavimo da je rešenje $y = \phi\ (x)$ ograničeno za $x \geq 0$. Zato je niz $\phi\ (k\omega)$ ograničen i postoji

$$\lim_{k\to\infty} \phi\ (k\omega) = a. \tag{4}$$

Posmatrajmo rešenje $y = \chi\ (x)$ s početnim uslovom

$$\chi\ (0) = a.$$

Pokažimo da je ono periodično. Neka je

$$\phi_k\ (x) = \phi\ (x + k\omega).$$

Kako je desna strana jednačine (2) ω - periodična po x, tada je svaka funkcija $\phi_k\ (x)$ rešenje jednačine. Osim toga iz definisanosti $\phi_k\ (x)$ i (4) važi da

$$\phi_k\ (0) \to a \qquad k \to \infty.$$

Dakle, po teoremi o integralnoj neprekidnosti

$$\phi_k\ (\omega) \to \chi\ (\omega) \qquad k \to \infty.$$

Kako

$$\phi_k\ (\omega) = \phi((k+1)\ \omega\ ) \to a \quad \text{za} \quad k \to \infty,$$

odatle sledi da je

$$\chi\ (\omega) = a = \chi\ (0).$$

Na taj način rešenje $y = \chi\ (x)$ ima period ω .

Dokažimo sada da se rešenje $y = \phi(x)$ asimptotski približava rešenju $y = \chi(x)$ tj. da je

$$\lim_{x\to\infty} (\phi(x) - \chi(x)) = 0 \tag{5}$$

Uzmimo da je $\varepsilon > 0$, i tada za svako rešenje $y = y(x)$ postoji $\delta > 0$ da je

$$|y(x) - \chi(x)| < \varepsilon \quad \text{za} \quad 0 \leq x \leq \omega$$

ako je

$$|y(0) - a| < \delta.$$

Neka je k_1 dovoljno veliko, tako da je pri $k > k_1$

$$|\phi(k\omega) - a| < \delta.$$

Tada je za $x \geq k\omega$

$$|\phi(x) - \chi(x)| < \varepsilon$$

i time je dokazano (5), a i naša teorema.

Isto tako važi sledeća teorema.

<u>Teorema</u> (J.Masera, [13]) Posmatrajmo sistem

$$\dot{x} = X(x, t)$$

gde je x vektor u m - dimenzionalnom prostoru, $X(x, t)$ je vektor funkcija definisana u celom (x, t) prostoru i ispunjeni su uslovi za postojanje i jedinost rešenja. $X(x, t)$ je periodična perioda 1. Ako za sistem prvog reda $(m=1)$ postoji ograničeno rešenje tada je ono i harmonijska vibracija.

Zvaćemo harmonijska vibracija bilo koje periodično rešenje perioda 1. Period može biti bilo koji ceo ili racionalan broj.

Proučavaćemo i broj periodičnih rešenja za neke diferencijalne jednačine, koje je proučavao i V.A.Plis ([17]).

Neka je data linearna jednačina

$$y' = y + p_1(x)$$

$$y = e^x \left[x_0 + \int_0^x p_1(x)\, e^{-x}\, dx \right]$$

gde je $p_1(x)$ neprekidna, ω- periodična funkcija. Tada data jednačina ima jedno periodično rešenje tj.

$$y = e^x \left[\frac{e^\omega}{1-e^\omega} \int_0^\omega p_1(x)\, e^{-x}\, dx + \int_0^x p_1(x)\, e^{-x}\, dx \right]$$

Neka je data Rikatijeva jednačina

$$y' = y^2 + p_1(x)\, y + p_2(x)$$

gde su $p_1(x)$ i $p_2(x)$ neprekidne, ω - periodične funkcije. Dokažimo da data jednačina ne može imati više od dva periodična rešenja.

Pretpostavimo, suprotno našem tvrdjenju, da naša jednačina ima tri različita periodična rešenja y_1, y_2, y_3. Zbog teoreme o jedinstvenosti možemo smatrati da za svako x važi nejednakost.

$$y_1(x) < y_2(x) < y_3(x).$$

Stavljajući rešenja y_1, y_2, y_3 u jednačinu dobijamo:

$$y_1' = y_1^2 + p_1(x)\, y_1 + p_2(x)$$

$$y_2' = y_2^2 + p_1(x)\, y_2 + p_2(x)$$

$$y_3' = y_3^2 + p_1(x)\, y_3 + p_2(x)$$

Oduzimajući prvu i drugu jednačinu od treće dobijamo:

$$y_3' - y_1' = (y_3 - y_1)(y_3 + y_1) + p_1(x)(y_3 - y_1)$$

$$y_3' - y_2' = (y_3 - y_2)(y_3 + y_2) + p_1(x)(y_3 - y_2)$$

Po pretpostavci je

$$y_3 > y_2 \quad y_3 > y_1$$

pa iz poslednjih jednakosti dobijamo

$$\frac{y_3' - y_2'}{y_3 - y_2} - \frac{y_3' - y_1'}{y_3 - y_1} = y_2 - y_1.$$

Integrirajući dobijenu jednakost po x na intervalu $0 \leq x \leq \omega$ dobijamo

$$\ln (y_3 - y_2) \Big|_0^\omega - \ln (y_3 - y_1) \Big|_0^\omega = \int_0^\omega (y_2 - y_1)\, dx$$

Leva strana poslednje jednakosti jednaka je nuli, jer su funkcije y_1, y_2, y_3 ω - periodični. S druge strane $y_2 - y_1 > 0$ po pretpostavci pa je desna strana poslednje jednakosti pozitivna. Dobijena protivurečnost dokazuje da data Rikatijeva jednačina ne može imati više od dva različita periodična rešenja.

Posmatrajmo na kraju Abelovu jednačinu

$$y' = y^3 + p_1(x)\, y^2 + p_2(x)\, y + p_3(x)$$

gde su $p_1(x)$, $p_2(x)$ i $p_3(x)$ neprekidne, ω - periodične funkcije. Dokazaćemo da data jednačina ne može imati više od tri periodična rešenja.

Pretpostavimo da data jednačina ima četiri različita periodična rešenja:

$$y_1(x),\ y_2(x),\ y_3(x),\ y_4(x).$$

Zbog teoreme o jedinstvenosti rešenja za svako x važi

$$y_i(x) \neq y_k(x) \quad (i \neq k).$$

Stavljajući rešenja $y_i(x)$ $(i = 1,\dots,4)$ u jednačinu dobijamo

$$y_i' = y_i^3 + p_1(x)\, y_i^2 + p_2(x)\, y_i + p_3(x)$$

$$(i = 1,\dots,4).$$

Oduzimajući drugu i treću jednačinu od prve, zatim dobijene jednakosti podelimo sa $y_1 - y_2$ odnosno $y_1 - y_3$ dobijamo

$$\frac{y_1' - y_2'}{y_1 - y_2} = y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2 + p_1(x)(y_1+y_2) + p_2(x)$$

$$\frac{y_1' - y_3'}{y_1 - y_3} = y_1^2 + y_1y_3 + y_3^2 + p_1(x)(y_2+y_3) + p_2(x)$$

Oduzimajući ove jednakosti dobijamo

$$\frac{y_1' - y_2'}{y_1 - y_2} - \frac{y_1' - y_3'}{y_1 - y_3} = y_1(y_2-y_3)+y_2^2 - y_3^2+p_1(x)(y_2-y_3)$$

i analogno, zamenjujući y_1 sa y_4 dobijamo

$$\frac{y_4' - y_2'}{y_4 - y_2} - \frac{y_4' - y_3'}{y_4 - y_3} = y_4(y_2-y_3)+y_2^2 - y_3^2+p_1(x)(y_2-y_3)$$

Oduzimajući ove dve poslednje jednakosti dobijamo:

$$\frac{y_1' - y_2'}{y_1 - y_2} - \frac{y_1' - y_3'}{y_1 - y_3} - \frac{y_4' - y_2'}{y_4 - y_2} + \frac{y_4' - y_3'}{y_4 - y_3} = (y_1-y_4)(y_2-y_3)$$

Integrirajući ovu jednakost na intervalu $[0,\omega]$ dobijamo

$$\ln \frac{(y_1 - y_2)(y_4 - y_3)}{(y_1 - y_3)(y_4 - y_2)} \Big|_0^\omega = \int_0^\omega (y_1 - y_4)(y_2 - y_3)\, dx$$

Kako su y_i $(i = 1,\ldots,4)$ periodične funkcije leva strana ove jednakosti jednaka je nuli. Medjutim, na desnoj strani podintegralna funkcija je neprekidna i različita od nule, pa je desna strana jednakosti različita od nule. Dobijena protivurečnost dokazuje da Abelova jednačina ne može imati više od tri različita periodična rešenja.

Neka je data jednačina

$$y' = y^n + p_1\ (x)\ y^{n-1} + \ldots + p_{n-1}\ (x)\ y + p_n\ (x)$$

gde su $p_k(x)$ $(k = 1,\dots,n)$ neprekidne i ω - periodične funkcije. Dokazuje se da data jednačina može imati samo konačan broj periodičnih rešenja. Nije teško konstruisati i jednačinu gornjeg oblika koja ima n periodičnih rešenja. Dovoljno je zato za desni deo jednačine uzeti polinom s konstantnim koeficijentima koji ima n različitih realnih korena. Pokazano je da jednačina pri $n \leq 3$ ne može imati više od n različitih periodičnih rešenja. Medjutim, može se konstruisati primer gornje jednačine za $n = 4$ koja ima šest različitih periodičnih rešenja.

Neka je funkcija $p_1(x)$ u linearnoj diferencijalnoj jednačini

$$y' = y + p_1(x)$$

predstavljena redom Furije. Furijeov red predstavimo u kompleksnoj formi, mada su sve posmatrane funkcije realne za realno x. Ova forma se koristi zbog jednostavnijeg zapisa i jednostavnosti svih operacija. Neka je $p_1(x)$ predstavljena u obliku

$$p_1(x) = \sum_k a_k e^{ikx}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} p_1(x)\, dx$$

Tada se periodično rešenje nalazi metodom neodredjenih koeficijenata i oblika je

$$y(x) = \sum_k \frac{a_k}{ik-1} e^{ikx}.$$

§ 2. ISPITIVANJE ASIMPTOTSKI OGRANIČENIH I PERIODIČNIH REŠENJA

1. Diferencijalne jednačine

$$y' = (y - \phi_1(x))(y - \phi_2(x)) \dots (y - \phi_n(x))$$

Posmatraćemo diferencijalnu jednačinu

$$y' = (y - \phi_1(x))(y - \phi_2(x)) \dots (y - \phi_n(x)) \tag{6}$$

koju su proučavali M.Petrović i M.Bertolino. Ispitivaćemo dovoljne uslove za postojanje asimptotski ograničenih, periodičnih i skoro - periodičnih rešenja.

1.1. Za diferencijalnu jednačinu (6) prvo ćemo ispitivati postojanje periodičnih rešenja, pa stoga pretpostavimo da su sve funkcije $\phi_j(x)$ $(j = 1,\dots,n)$ neprekidne, ograničene, da nemaju zajedničkih tačaka za $x_0 \leq x < +\infty$, i da su ω - periodične. Ne umanjujući opštost razmatranja pretpostavlja se i

$$\phi_1(x) < \phi_2(x) < \dots < \phi_n(x) \tag{7}$$

Isto tako neka je

$$\inf \phi_k(x) > \sup \phi_\ell(x) \quad k > \ell,\ x \geq x_0. \tag{8}$$

<u>Teorema 1</u> Neka za datu diferencijalnu jednačinu (6) funkcije $\phi_j(x)$ $(j = 1,\dots,n)$ zadovoljavaju gornje uslove (7) i (8). Tada postoji klasa periodičnih rešenja.

Dokaz Da bismo dokazali teoremu prvo ćemo pokazati da data jednačina ima ograničenih rešenja.

U oblasti

$$y > \phi_1 (x), \; y > \phi_2 (x), \ldots, y > \phi_n (x)$$

svi faktori desne strane jednačine (6) tj. faktori oblika $(y - \phi_j (x))$ su pozitivni pa je znak desne strane jednačine (6) u ovoj oblasti pozitivan. U susednoj donjoj oblasti

$$y > \phi_1 (x), \; y > \phi_2 (x), \ldots, y < \phi_{n-1} (x), \; y > \phi_n (x)$$

pretposlednji faktor je negativan, a ostali su pozitivni pa je znak desne strane jednačine (6) u ovoj oblasti negativan. Ako nastavimo postupak dobijamo da se znak desne strane diferencijalne jednačine (6) u oblastima izmedju susednih funkcija $\phi_j (x)$ $(j = 1, \ldots, n)$ naizmenično menja.

Uslov (8) omogućava postojanje pravih

$$y = y_{\ell\kappa} = \text{const}$$

takvih da je

$$\sup \phi_\ell (x) < y_{\ell\kappa} < \inf \phi_\kappa (x) \quad \kappa > \ell, \; x \geqq x_0.$$

Neka je $\phi_j (x)$ bilo koja od gornjih funkcija, i neka je $y = y_j^*$ jedna takva prava u oblasti ispod funkcije $\phi_j(x)$, i $y = y_j^{**}$ jedna takva prava u oblasti iznad $\phi_j (x)$. Neka je u tačkama duž prave $y = y_j^{**}$ znak desne strane jednačine (6) pozitivan, a duž prave $y = y_j^*$ negativan. Dakle, skup tačaka striktnog izlaza je

$$S = \{y = y_j^*\} \cup \{y = y_j^{**}\}, \quad x \geqq x_0$$

pa prema metodi T.Važevskog ([24], [1]) u otvorenom skupu

$$\omega_j = \{x_0 \leqq x < +\infty, \; y_j^* < y < y_j^{**}\}$$

postoji bar jedno ograničeno rešenje koje ostaje u ω_j za $x_0 \leqq x < +\infty$.

Medjutim, ako je znak desne strane jednačine (6) duž prave $y = y_j^{**}$ negativan, a duž prave $y = y_j^*$ pozitivan, tada sva rešenja ulaze u ω_j i sva su ograničena za $x \geq x_0$. Dakle, u oblastima oko funkcija $\phi_j(x)$ $(j = 1,\dots,n)$ mogu se konstruisati skupovi ω_j koji garantuju postojanje ograničenih rešenja, pa data jednačina ima klasu ograničenih rešenja.

Kako je desna strana jednačine (6) ω - periodična funkcija i dokazali smo da postoje ograničena rešenja za $x \geq x_0$, to po teoremi Masere sledi da postoji klasa periodičnih rešenja.

Posebno pitanje je broja periodičnih rešenja. V.A. Plis ([17]) i V.M.Lebedeva ([10], [11]) ispitivali su gornju granicu broja periodičnih rešenja diferencijalne jednačine čija je desna strana polinom po nepoznatoj funkciji tj. jednačine

$$y' = p_0(x)\,y^n + p_1(x)\,y^{n-1} + \dots +$$
$$+ p_{n-1}(x)\,y + p_n(x) \tag{9}$$

gde je $n \geq 1$, $p_i(x)$ $(i = 0, 1, \dots, n)$ su neprekidne ω - periodične funkcije, pri čemu je $p_0(x)$ funkcija odredjenog znaka.

Kvalitativnim metodama (bez predstavljanja rešenja u eksplicitnom obliku) ovo je ispitivano za n = 1, 2, 3, i Plis ([17]) je pokazao da jednačina (9) ima ne više od n neprekidnih periodičnih rešenja. Za $n \geq 4$ ovi metodi su neprimenljivi.

U radu ([10]) pokazano je da jednačina (9) za $n \geq 4$ dopušta bilo koji broj $N < \infty$ periodičnih rešenja. Pri ispitivanju korišćeno je predstavljanje rešenja u vidu stepenog reda, tako da metod ispitivanja nije čisto kvalitativan. Ostalo je nejasno, da li je iscrpljena klasa jednačina za koje se pitanje gornje granice neprekidnih periodičnih rešenja rešava čisto kvalitativnim metodama.

Prema gore dokazanoj teoremi 1, dokazali smo da za jednačinu (6), metodom kvalitativne analize postoji klasa periodičnih rešenja, tj. postoji takodje $N < \infty$ periodičnih rešenja.

1.2. Ispitivaćemo postojanje skoro - periodičnih rešenja pa stoga dajemo sledeće definicije, koje je uveo H.Bor ([6], [8]) i osnovne osobine skoro - periodičnih funkcija.

Definicija Kompleksna funkcija $f(x) \in C(-\infty, +\infty)$ je skoro periodična u smislu Bora, ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji relativno gust skup skoro perioda τ funkcije $f(x)$ s tačnošću do ε tj. postoji broj $\ell = \ell(\varepsilon)$ takav da svaki interval $[a, a+\ell]$ sadrži najmanje jedan broj τ za koji važi

$$|f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon \text{ za } -\infty < x < +\infty.$$

Definicija Funkcija $F(x,y)$ je skoro periodična po x ravnomerno u odnosu na $y \in Y$, ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji relativno gust skup ε - skoro perioda koji ne zavisi od y, $\tau = \tau_F(\varepsilon)$ tj. za svako $x \in (-\infty, +\infty)$ i svako $y \in Y$ važi

$$|F(x+\tau, y) - F(x,y)| < \varepsilon.$$

Osnovna svojstva skoro periodičnih funkcija su:

(1) Skoro periodična funkcija je ravnomerno ograničena i ravnomerno neprekidna na realnoj osi.

(2) Za dve skoro periodične funkcije pri svakom $\varepsilon > 0$ postoji relativno gust skup njihovih zajedničkih ε - skoro perioda.

(3) Zbir dve skoro periodične funkcije je takodje skoro periodična funkcija.

Neka su f (x) i g (x) skoro periodične funkcije, i saglasno svojstvu (2) postoji njihov zajednički skoro - period

$$\tau = \tau_f\ (\tfrac{\varepsilon}{2}) = \tau_g\ (\tfrac{\varepsilon}{2})$$

i imamo

$$|[f(x+\tau) + g\ (x + \tau)] - [f\ (x) + g\ (x)]| \leq$$
$$\leq |f\ (x + \tau) - f\ (x)| + |g\ (x + \tau) - g\ (x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

tj. $\tau = \tau_{f+g}\ (\varepsilon)$ što i dokazuje skoro periodičnost sume $f\ (x) + g\ (x)$.

(4) Linearna kombinacija

$$f\ (x) = \sum_{k=1}^{n} c_k\ f_k\ (x) \qquad (c_k \text{ - konstante})$$

skoro periodičnih funkcija $f_k\ (x)$ $(k = 1,\dots, n)$ je skoro periodična funkcija.

(5) Proizvod dveju skoro periodičnih funkcija je skoro periodična funkcija.

(6) Količnik $\frac{f(x)}{g(x)}$ dveju skoro periodičnih funkcija f (x) i g (x), gde je

$$\inf_{x} |g\ (x)| > 0$$

je skoro periodična funkcija.

(7) Integral

$$F\ (x) = \int_{x_0}^{x} f\ (t)\ dt$$

skoro periodične funkcije f (x) je skoro periodična funkcija tada i samo tada ako je on ograničen tj. ako je

$$\sup_{-\infty<x<+\infty} |F(x)| < \infty.$$

Osnovni rezultat Borove teorije je da se svaka skoro periodična funkcija f (x) može uniformno aproksimirati trigonometrijskim polinomom. Naime, za svaku skoro periodičnu funkciju f (x) postoji konačna srednja vrednost

$$M\{f\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x)\, dx$$

Za skoro periodičnu funkciju f (x) spektralna funkcija je

$$a(\lambda) = M\{ f(x)\, e^{-i\lambda x} \}$$

i ona je različita od nule za konačni ili prebrojiv skup vrednosti λ.

Te vrednosti λ za koje je

$$a(\lambda) \neq 0$$

koje predstavljaju konačni ili prebrojiv niz realnih brojeva $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ nazivaju se stepenima Furije skoro periodične funkcije f (x) a brojevi

$$a(\lambda_n) = A_n$$

su koeficijenti reda Furije. Na taj način red Furije skoro periodične funkcije f (x) je

$$f(x) = \sum_n A_n\, e^{i\lambda_n x}$$

Za neprekidnu čisto periodičnu funkciju f (x) gornji Furijeov red poklapa se sa običnim redom Furije.

Primer Funkcija

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\, e^{\frac{ix}{n^2}}$$

je skoro periodična.

Primedba Pretpostavimo u teoremi 1 da su sve funkcije $\phi_j(x)$ $(j = 1,\ldots,n)$ skoro periodične. Tada je desna strana (6) skoro periodična funkcija, a kako postoje ograničena rešenja tada su ta rešenja i skoro periodična jer po teoremi Masere ([13]) svako skoro periodično rešenje je i harmonijska vibracija.

Metodom kvalitativne analize dokazaćemo postojanje skoro periodičnih rešenja za neke tipove diferencijalnih jednačina. Tako, poznat je rezultat B.P.Demidoviča ([9]) za nelinearnu jednačinu

$$\frac{dy}{dx} = f(y) + g(x) \tag{10}$$

Teorema Ako je $f(y)$ monotona funkcija s neprekidnim izvodom $f'(y)$ i $g(x)$ neprekidna skoro periodična funkcija sa ograničenim integralom

$$G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$$

tada je svako ograničeno rešenje diferencijalne jednačine (10) takodje skoro periodično.

Dokaz Pretpostavimo zbog definisanosti da je

$$f'(y) \geq 0. \tag{11}$$

Prema teoremi Bora funkcija $G(x)$ je skoro periodična. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno i τ period funkcije $G(x)$ s tačnošću do $\frac{\varepsilon}{3}$ tj.

$$|G(x+\tau) - G(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{za} \quad -\infty < x < +\infty. \tag{12}$$

Neka je $y = y^*(x)$ ograničeno rešenje jednačine (10) i

$$\Delta (x) = y^* (x + \tau) - y^* (x)$$

pa zbog jednačine (10) imamo

$$\frac{d \{ \Delta (x) \}}{dx} = [f (y^* (x + \tau)) - f (y^* (x))] + + [g (x + \tau) - g (x)]$$

i koristeći poznatu lemu Adamara dobijamo:

$$\frac{d \{ \Delta (x) \}}{dx} = k (x) \Delta (x) + [g (x + \tau) - g (x)]$$

gde je k (x) neprekidna funkcija, a zbog uslova (11) važi nejednakost

$$k (x) \geq 0. \tag{13}$$

Neka je vrednost x fiksirana. Izaberimo broj $x_0 > x$ takav da važi

$$| \Delta (x_0) | = |y^* (x_0 + \tau) - y^* (x_0) | < \frac{\varepsilon}{3} \tag{14}$$

Napišimo relaciju (13) u integralnoj formi tj.

$$\Delta (x) = \Delta (x_0) e^{-\int_x^{x_0} k(t)dt} - \int_x^{x_0} e^{-\int_x^t k (t) dt} [g(t+\tau)- -g(t)] dt$$

Kako je funkcija $\Phi (t) = e^{-\int_x^t k(t) dt}$ pozitivna i monotono opadajuća, to primenjujući drugu teoremu o srednjem, dobijamo:

$$\Delta (x) = \Delta (x_0) e^{-\int_x^{x_0} k(t)dt} - \int_x^{\xi} [g (t+\tau) - g (t)] dt$$

gde je $x < \xi < x_0$. Odavde dobijamo

$$\Delta (x) = \Delta (x_0) e^{-\int_x^{x_0} k(t)dt} + [G (x + \tau) - G (x)] - - [G (\xi + \tau) - G (\xi)].$$

Na osnovu nejednakosti (12), (13) i (14) imamo:

$$| \Delta (x) | = | y^* (x + \tau) - y^* (x) | < \varepsilon$$

za $- \infty < x < + \infty$ tj. funkcija $y^* (x)$ je skoro periodična.

Metodom retrakta T.Važevskog ([2], [26]) za ispitivanje asimptotski ograničenih rešenja moguće je proveriti gornji rezultat.

Naime, anulirajući desnu stranu jednačine (10) dobija se

$$y = f^{-1} (-g (x)) = \phi (x)$$

tj. dobija se ([8]) ograničena i skoro periodična funkcija. U oblasti $y > \phi (x)$, $y' > 0$ a u oblasti $y < \phi (x)$, $y' < 0$ i primenjujući metod retrakta postoji bar jedno asimptotski ograničeno rešenje u okolini $\phi (x)$, i rešenje će biti stalno vezano za funkciju $\phi (x)$.

Dokazaćemo da za diferencijalnu jednačinu (6) važi sledeća teorema.

Teorema 2 Neka je data diferencijalna jednačina (6), i pretpostavimo da su sve funkcije $\phi_j (x)$, $j \in N$ neprekidne, ograničene, nemaju zajedničkih tačaka za $x_0 \leqq x < + \infty$ i neka su ispunjeni uslovi (7) i (8). Tada postoji bar jedno skoro periodično rešenje.

Dokaz Kao u teoremi 1 dokazuje se primenom metode retrakta da u oblastima oko $\phi_j (x)$, $j \in N$ postoje asimptotski ograničena rešenja tj. u oblastima

$$\omega_j = \{ x \geqq x_0 , y_j^* < y < y_j^{**} \}$$

postoje ograničena rešenja.

Prema definiciji skoro periodičnih funkcija, postoji rešenje $p (x, y) = 0$ diferencijalne jednačine (6), takvo da za svako $\varepsilon > 0$ postoji pozitivan broj $\ell = \ell (\varepsilon)$

takav da svaki interval

$$[\, y_j^* (x_0),\; y_j^* (x_0) + \ell \,]$$

sadrži najmanje jedan broj τ za koji važi

$$| \, p\,(x,\, y + \tau) - p\,(x,\, y) \, | < \varepsilon \quad -\infty < y < +\infty,\; x \geq x_0$$

tj. rešenje $p\,(x,\, y) = 0$ je skoro periodično po y ravnomerno po x, za $x \geq x_0$.

Teorema 3 Neka je data diferencijalna jednačina (6). Pretpostavimo da su sve funkcije neprekidne, ograničene, nemaju zajedničkih tačaka za $x_0 \leq x < +\infty$, neka važi uslov (7) i neka je

$$\lim_{x\to\infty} \phi_j\,(x) = c_j \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{15}$$

Tada postoji bar jedno skoro periodično rešenje.

Dokaz Primenom metode retrakta dokazuje se kao u teoremi 1 da u oblastima oko funkcija $\phi_j\,(x)$ $(j = 1, \ldots, n)$ postoje asimptotski ograničena rešenja.

Dokažimo da ova rešenja teže ka c_j za $x \to +\infty$ ([2]). Posmatrajmo proizvoljnu funkciju $\phi_j\,(x)$ koja teži ka c_j za $x \to +\infty$. U okolini $\phi_j\,(x)$ postoji ograničeno rešenje i

$$\lim_{x\to\infty} y\,(x) = c.$$

Tada je

$$\lim_{x\to\infty} y'\,(x) = (\, c - c_j) \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} (c - c_k\,)$$

Ovo je nemoguće, jer ako prvi izvod funkcije teži konstanti kada funkcija teži konstanti za $x \to +\infty$, on može da teži samo nuli. Dakle, mora biti

$$c = c_j.$$

Dakle, postoji bar jedno rešenje $p(x, y) = 0$ diferencijalne jednačine (6), takvo da za svako $\varepsilon > 0$ postoji pozitivan broj $\ell = \ell(\varepsilon)$ takav da svaki interval

$$[\, c_j, c_j + \ell \,]$$

sadrži najmanje jedan broj τ za koji važi

$$| p(x, y + \tau) - p(x, y) | < \varepsilon, \quad -\infty < y < +\infty,$$

$x \geq x_0$ tj. rešenje $p(x, y) = 0$ je skoro periodično po y ravnomerno po x.

Posmatrajmo sada diferencijalnu jednačinu

$$y' = f(\phi(x)) - f(y) \tag{16}$$

koja je proučavana u radovima [2], [31].

<u>Teorema 4</u> Neka je data diferencijalna jednačina (16), gde je $\phi(x)$ neprekidna, diferencijabilna i

$$\lim_{x \to \infty} \phi(x) = c$$

a funkcija $f(y)$ je neprekidna, diferencijabilna i periodična. Tada postoji bar jedno skoro periodično rešenje.

<u>Dokaz</u> Neka je $f(y)$ takva periodična funkcija da na svakom intervalu I dužine ω (neka su krajevi ovog intervala maksimalne - M (minimalne - M_1) vrednosti funkcije $f(y)$) monotono raste do maksimuma i monotono opada do minimuma. Ne umanjujući opštost razmatranja neka je interval I

$$M_1 - \omega < y < M_1$$

(krajevi su minimalne vrednosti), tako da $f(y)$ monotono raste za $M_1 - \omega < y < M$, a monotono opada za $M < y < M_1$.

Za konstantu c iz intervala I neka je c_1 konstanta iz intervala I takva da je

$$f(c) = f(c_1).$$

Neka je $c \neq M$ (odnosno M_1) i neka je

$$M_1 - \omega < c < M.$$

Zbog periodičnosti funkcije $f(y)$

$$f(\phi(x) + k\omega) = f(\phi(x)) \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

a kako je

$$\lim_{x\to\infty} f(\phi(x)) = f(c)$$

i $f(c + k\omega) = f(c)$ posmatraćemo funkcije

$$\phi(x) + k\omega, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

koje teže ka $c + k\omega$ kada $x \to +\infty$.

Za ovako definisanu funkciju $f(y)$ postoje prave paralelne osi y koje seku $f(y)$ u više tačaka, i stoga je njena inverzna funkcija višeznačna. Tako, za konstantu c postoji konstanta c_1 takva da je $f(c) = f(c_1)$. Isto tako za sve vrednosti $y = \phi(x)$ koje se nalaze na intervalu rašćenja (opadanja) funkcije $f(y)$ postojaće različite vrednosti $y = \psi(x)$ na intervalu opadanja (rašćenja) funkcije $f(y)$ takve da je

$$f(\phi(x)) = f(\psi(x)).$$

Za $M < y < M_1$ postoji jednoznačna funkcija f^{-1}, tako da iz prethodne relacije sledi

$$\psi(x) = f^{-1}(f(\phi(x)).$$

Kako je

$$\lim_{x\to\infty} f(\psi(x)) = \lim_{x\to\infty} f(\phi(x)) = f(c) = f(c_1)$$

sledi da je

$$\lim_{x\to\infty} \psi(x) = c_1.$$

Zbog periodičnosti f (y)

$$f(\psi(x) + k\omega) = f(\psi(x)) \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

i kako je

$$\lim_{x\to\infty} f(\psi(x) + k\omega) = f(c_1 + k\omega) = f(c_1), k=0,\pm 1, \ldots$$

posmatraćemo funkcije

$$\psi(x) + k\omega \qquad k = 0, \pm 1, \ldots$$

koje teže ka $c_1 + k\omega$ za $x \to +\infty$.

Na intervalu I $\phi(x)$ i $\psi(x)$ mogu da imaju zajedničkih tačaka (za $\phi(x) = \psi(x) = M$) ali ne moraju. Stoga ćemo za $M_1 - \omega < y < M$ posmatrati oblasti oko funkcija $\phi(x)$ i $\psi(x)$ za $x \geq x_0$ gde x_0 biramo tako da u ovom intervalu ne postoji x za koje je $\phi(x) = \psi(x)$ i da se $\phi(x)$ (odnosno $\psi(x)$) nalazi stalno u oblasti rašćenja (opadanja) funkcije f (y). Ovakav interval uvek postoji s obzirom na činjenicu da $\phi(x)$ i $\psi(x)$ teže ka c, c_1 za $x \to +\infty$.

Neka je

$$M_1 - \omega < y < M, \qquad x \geq x_0.$$

U ovoj oblasti f (y) je monotono rastuća funkcija i za $y < \phi(x)$ znak desne strane jednačine (16) je pozitivan, a za $y > \phi(x)$ negativan. Neka je sada

$$M < y < M_1, \qquad x \geq x_0$$

tj. posmatraćemo oblast opadanja funkcije f (y). U oblasti $y < \psi(x)$ znak desne strane jednačine (16) je negativan, a u oblasti $y > \psi(x)$ pozitivan.

Za oblasti oko funkcije $\phi(x)$ dokazuje se ([2]) da postoji klasa rešenja koja teže ka c za $x \to +\infty$. Isto tako u oblasti oko funkcije $\psi(x)$ dokazuje se da postoji bar jedno rešenje koje teži ka c_1 za $x \to +\infty$.

Zbog periodičnosti funkcije f (y) zaključujemo da svakoj konstanti

$$c + k\,\omega, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

odgovara jedna klasa rešenja koja teže ka ovim konstantama za $x \to +\infty$, a da svakoj konstanti

$$c_1 + k\,\omega, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

odgovara bar jedno rešenje koje teži ka ovoj konstanti za $x \to +\infty$.

Ako se konstanta c nalazi na intervalu opadanja funkcije $f(y)$ dokaz je analogan prethodnom slučaju.

Neka je $c = M$. Funkcije $\phi(x)$ i $\psi(x)$ imaju istu vrednost $y = M$, pa je $c = c_1$ i ove funkcije teže ka c za $x \to +\infty$. Posmatraćemo oblast

$$M_1 - \omega < y < M_1, \quad x \geq x_0$$

gde x_0 biramo tako da u ovom intervalu ne postoji x za koje je $\phi(x) = \psi(x)$ i da se $\phi(x)$ stalno nalazi u oblasti rašćenja (opadanja) $f(y)$, a $\psi(x)$ u oblasti opadanja (rašćenja) $f(y)$. Na primer, neka je $\phi(x)$ u oblasti opadanja, a $\psi(x)$ u oblasti rašćenja $f(y)$. Tada, na sličan način kao u prethodnim slučajevima dokazuje se da u oblasti oko $\psi(x)$ postoji klasa rešenja koja teže ka c za $x \to +\infty$. Oblast oko $\phi(x)$ garantuje postojanje bar jednog rešenja koje teži ka c za $x \to +\infty$. Dakle, postoji klasa rešenja koja teže ka c. Zbog periodičnosti $f(y)$ svakoj konstanti

$$c + k\,\omega, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

odgovara klasa rešenja koja teže ka ovim konstantama za $x \to +\infty$.

Dakle, postoji bar jedno rešenje $p(x, y) = 0$ takvo da za svako $\varepsilon >$ postoji pozitivan broj $\ell = \ell(\varepsilon)$ takav da svaki interval

$$[M + k\,\omega, M + k\,\omega + \ell], \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

na y - osi sadrži najmanje jedan broj τ za koji važi

$$| p(x, y+\tau) - p(x, y) | < \varepsilon, \quad -\infty < y < +\infty,$$

$x \geq x_0$ tj. prema definiciji $p(x, y)$ je skoro periodično rešenje diferencijalne jednačine (16).

Posmatraćemo sledeću diferencijalnu jednačinu

$$y' = (f(\phi_1(x))-f(y))(f(\phi_2(x))-f(y))\dots (f(\phi_n(x))-f(y)) \tag{17}$$

<u>Teorema 5</u> Neka je data diferencijalna jednačina (17). Sve funkcije $\phi_s(x)$ $(s = 1,\dots, n)$ su neprekidne, diferencijabilne,

$$\lim_{x\to\infty} \phi_s(x) = c_s \qquad (s = 1,\dots, n)$$

i važi relacija (7). Funkcija $f(y)$ je periodična i važe iste pretpostavke kao u teoremi 4. Tada jednačina ima bar jedno skoro periodično rešenje.

<u>Dokaz</u> Pretpostavimo da se konstante c_s $(s = 1,\dots, n)$ iz I nalaze na rastućem delu funkcije $f(y)$, pa tada postoje konstante c_{s+n} $(s = 1,\dots, n)$ iz I takve da je

$$f(c_s) = f(c_{2n+1-s}) \quad (s = 1,\dots, n).$$

Za funkcije $\phi_s(x)$ postoje funkcije $\psi_s(x)$ takve da je

$$\lim_{x\to\infty} \psi_s(x) = c_{2n+1-s} \ (s = 1,\dots, n).$$

S obzirom da se $\psi_s(x)$ nalaze na opadajućem delu intervala I sledi da je

$$\phi_1(x) < \phi_2(x) < \dots < \phi_n(x) < \psi_n(x) < \dots < \psi_1(x)$$

$$c_1 < c_2 < \dots < c_n < c_{n+1} < \dots < c_{2n}.$$

Kao u prethodnom slučaju dokazuje se da se znak desne strane jednačine (17) na intervalu I naizmenično menja u oblastima oko funkcija $\phi_s(x)$ i $\psi_s(x)$. Tako, u oblasti $y < \phi_1(x)$ znak desne strane jednačine (17) je pozitivan, u sledećoj oblasti je negativan i dalje se naizmenično menja.

Dokazuje se ([31]) da svakoj konstanti

$$c_j + k\omega, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad j = 1,3,\dots, 2n-1$$

odgovara klasa rešenja koja teže ka ovim konstantama, a svakoj konstanti

$$c_j + k\omega, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad j = 2,4,\dots, 2n$$

odgovara bar jedno rešenje koje teži ka ovim konstantama za $x \to +\infty$. Dalje, analogno teoremi 4 dokazuje se da postoji bar jedno rešenje $p(x, y) = 0$ koje je skoro periodično.

1.3. Posmatraćemo sledeći sistem diferencijalnih jednačina

$$\begin{aligned} y' &= \prod_{j=1}^{n} (y - \phi_j(x)) \\ z' &= \prod_{j=1}^{n} (z - \psi_j(y)) \end{aligned} \tag{18}$$

Sve funkcije $\phi_j(x)$ i $\psi_j(y)$ $(j = 1, \dots, n)$ su neprekidne, ograničene, nemaju zajedničkih tačaka za $x_0 \leqq x < +\infty$, $y_0 \leqq y < +\infty$, i ω - periodične. Pretpostavimo da je

$$\begin{aligned} \inf \ \phi_k(x) &> \sup \ \phi_\ell(x) \\ \inf \ \psi_k(y) &> \sup \ \psi_\ell(y) \end{aligned} \tag{19}$$

za $k > \ell$ i $x \geqq x_0$, $y \geqq y_0$. Pretpostavimo i da je

$$\begin{aligned} \phi_1(x) < \phi_2(x) < \dots < \phi_n(x) \\ \psi_1(y) < \psi_2(y) < \dots < \psi_n(y) \end{aligned} \tag{20}$$

Teorema 6 Neka je dat sistem diferencijalnih jednačina (18), i neka funkcije ϕ_j (x) i ψ_j (y) (j = 1,...,n) zadovoljavaju gornje uslove (19) i (20). Tada postoji klasa periodičnih rešenja.

Dokaz Prvo ćemo dokazati da postoje asimptotski ograničena rešenja.

Znak desne strane sistema (18) u oblastima izmedju površi

$$y = \phi_s (x), \quad z = \psi_s (y) \quad (s = 1, \dots, n)$$

se naizmenično menja. Tako na primer, ako je n paran broj u oblasti

$$y < \phi_1 (x) \qquad z < \psi_1 (y)$$

svi faktori desne strane jednačine (18) su negativni, pa je $y' > 0$, $z' > 0$. U sledećoj oblasti

$$\phi_1 (x) < y < \phi_2 (x)$$
$$\psi_1 (y) < z < \psi_2 (y)$$

prvi faktori proizvoda desne strane jednačine (18) su pozitivni, pa je $y' < 0$, $z' < 0$. Nastavljajući postupak dobijamo da se znak desne strane sistema (18) naizmenično menja.

Posmatrajmo bilo koju od površi $y = \phi_j (x)$ i bilo koju površ $z = \psi_j (y)$, i za svaku od ovih površi posmatraćemo njihove dve susedne oblasti. Izmedju ma koje dve površi $y = \phi_j (x)$ i $z = \psi_j (y)$ postoje najmanje po jedna ravan

$$y = y_{\ell\kappa} = \text{const}$$
$$z = z_{\ell\kappa} = \text{const}$$

takve da je

$$\sup \phi_\ell (x) < y_{\ell\kappa} < \inf \phi_\kappa (x)$$
$$\sup \psi_\ell (y) < z_{\ell\kappa} < \inf \psi_\kappa (y),$$

$\kappa > \ell$, $x \geq x_0$, $y \geq y_0$, i ove ravni u prostoru obrazuju paralelopipede. Neka je

$$S_1 = \{ y = y_j^* \}$$

$$S_3 = \{ z = z_j^* \}$$

jedna takva ravan u susednoj oblasti ispod $\phi_j(x)$ odnosno $\psi_j(y)$, i

$$S_2 = \{ y = y_j^{**} \}$$

$$S_4 = \{ z = z_j^{**} \}$$

jedna takva ravan u susednoj oblasti iznad $\phi_j(x)$ odnosno $\psi_j(y)$ za $x \geq x_0$ i $y \geq y_0$. Ove ravni obrazuju paralelopiped u prostoru. Dakle, posmatraćemo otvoren skup

$$\omega_j = \{ x \geq x_0,\ y_j^* < y < y_j^{**},\ z_j^* < z < z_j^{**} \} \subset R^3.$$

Sa S_1^+ (odnosno S_1^-) označimo da je znak desne strane jednačine (18) pozitivan (odnosno negativan) duž ove ravni. Označimo sa

$$\text{front } \omega_j$$

granicu od ω_j. U zavisnosti od znaka desne strane jednačine (18) duž ovih strana paralelopipeda razlikujemo sledeće slučajeve:

a) $\text{front } \omega_j = S_1^+ \cup S_2^+ \cup S_3^+ \cup S_4^+$

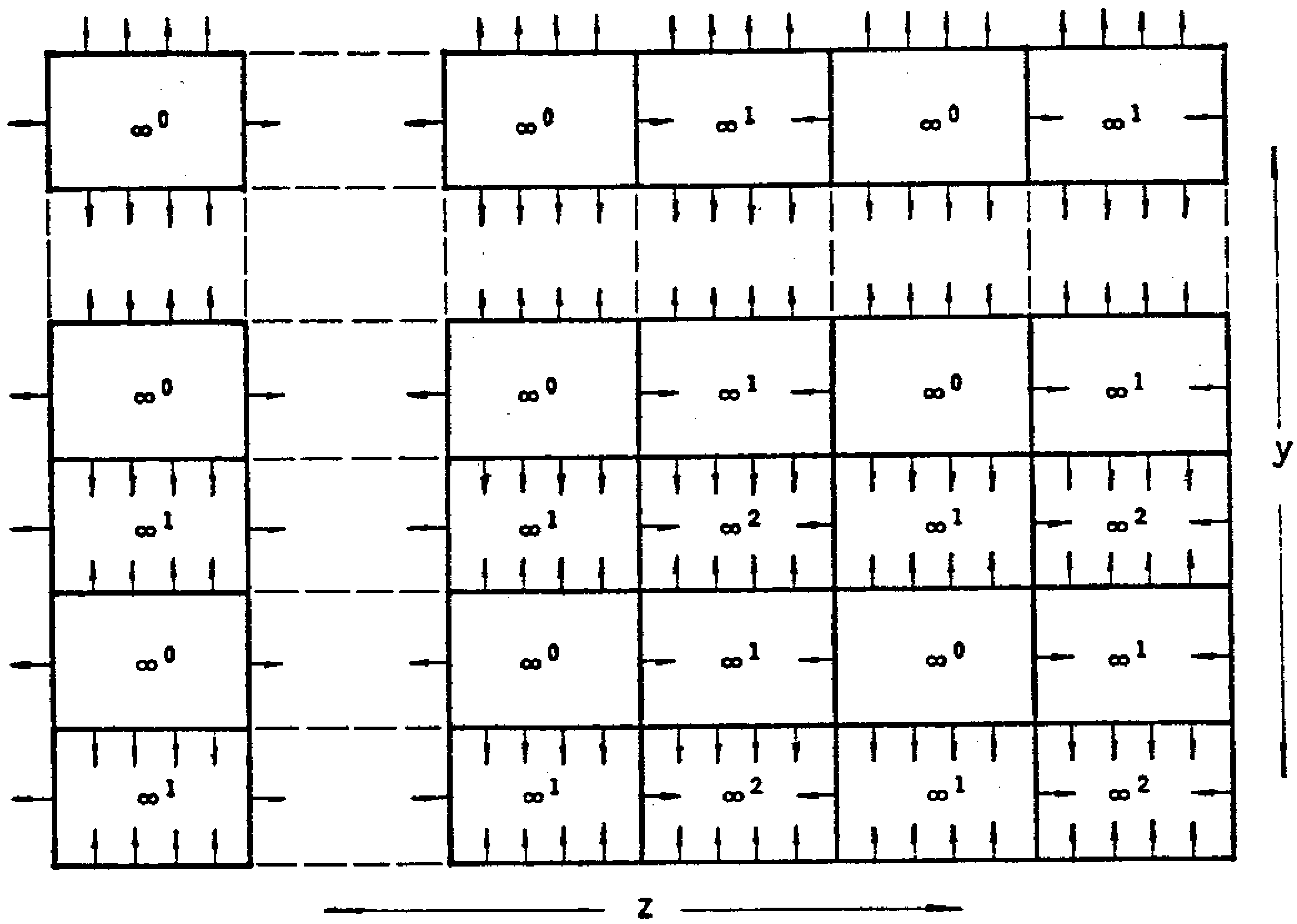
b) $\text{front } \omega_j = S_1^- \cup S_2^- \cup S_3^- \cup S_4^-$

c) $\text{front } \omega_j = S_1^+ \cup S_2^+ \cup S_3^- \cup S_4^-$

d) $\text{front } \omega_j = S_1^- \cup S_2^- \cup S_3^+ \cup S_4^+$

Metodom retrakta ([30]) zaključujemo da u ω_j u slučaju a) sva su rešenja asimptotski ograničena (∞^2), u slučaju b) postoji bar jedno asimptotski ograničeno rešenje (∞^0) i u slučajevima c) i d) postoji klasa ograničenih rešenja (∞^1).

Poprečni presek ovih paralelopipeda sa ravni $x = x_0$ dat je na sledećoj slici. Ovde je pretpostavljeno da je n paran broj.



Ako je n neparan broj dokaz je analogan. Dakle, zaključujemo da dati sistem (18) ima klasu ograničenih rešenja za $x \geq x_0$, $y \geq y_0$.

Desna strana sistema (18) je ω - periodična funkcija, pa kako postoji klasa ograničenih rešenja sledi na osnovu teoreme Masere da postoji klasa periodičnih rešenja, i time je naša teorema dokazana.

<u>Teorema 7</u> Neka je dat sistem diferencijalnih jednačina (18) i pretpostavimo da su sve funkcije $\phi_j(x)$ i $\psi_j(y)$, $j \in N$ neprekidne, ograničene za $x_0 \leq x < +\infty$, $y_0 \leq y < +\infty$ i da važe uslovi (19) i (20). Tada postoji klasa skoro

periodičnih rešenja.

Dokaz Kao u teoremi 6 dokazuje se postojanje klase asimptotski ograničenih rešenja. Dakle, postoje rešenja

$$f_{1k}\ (x, y, z) = 0$$

$$g_{i1}\ (x, y, z) = 0, \qquad i, k \in N$$

takva da za svako $\varepsilon > 0$ postoji pozitivan broj $\ell = \ell\ (\varepsilon)$ takav da svaki interval

$$[z_j^*\ (y_0),\ z_j^*\ (y_0) + \ell]$$

$$[y_j^*\ (x_0),\ y_j^*\ (x_0) + \ell]$$

sadrži najmanje jedan broj τ za koji važi

$$|f_{1k}(x, y, z + \tau) - f_{1k}(x, y, z)\ | < \varepsilon$$

$$|g_{i1}(x, y + \tau, z) - g_{i1}(x, y, z)\ | < \varepsilon$$

gde je $i,\ k \in N$, $x \geqq x_0$, $y \geqq y_0$ tj. ova rešenja su skoro periodična. Dakle, za sistem (18) dokazano je da postoje

$$F\ (x, y, z) = (f_{1k}(x, y, z))$$

$$G\ (x, y, z) = (g_{i1}(x, y, z))$$

skoro periodične matrice rešenja tj. postoji klasa skoro periodičnih rešenja.

2. Diferencijalne jednačine $y' = \dfrac{\prod\limits_{j\in A}(y-\phi_j(x))^{\alpha_j}}{\prod\limits_{i\in B}(y-\phi_i(x))^{\alpha_i}}$

Posmatraćemo diferencijalnu jednačinu

$$y' = \frac{\prod\limits_{j\in A}(y-\phi_j(x))^{\alpha_j}}{\prod\limits_{i\in B}(y-\phi_i(x))^{\alpha_i}} \tag{21}$$

gde je $A \cup B = \{1, 2, \ldots, m\}$, $A \cap B = \Phi$ i φ_i, α_j su prirodni brojevi ([1]).

Za jednačinu (21) ispitivaćemo postojanje asimptotski ograničenih rešenja, postojanje periodičnih rešenja i ispitivati ponašanje rešenja u okolini koordinantnog početka, tj. ispitivaćemo postojanje singularne tačke za koju se može uzeti koordinatni početak. Stoga, prvo izložimo neke osnove o singularnim tačkama izložene u knjizi S. Lefšeca [12].

Posmatraćemo autonomni sistem

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y)$$

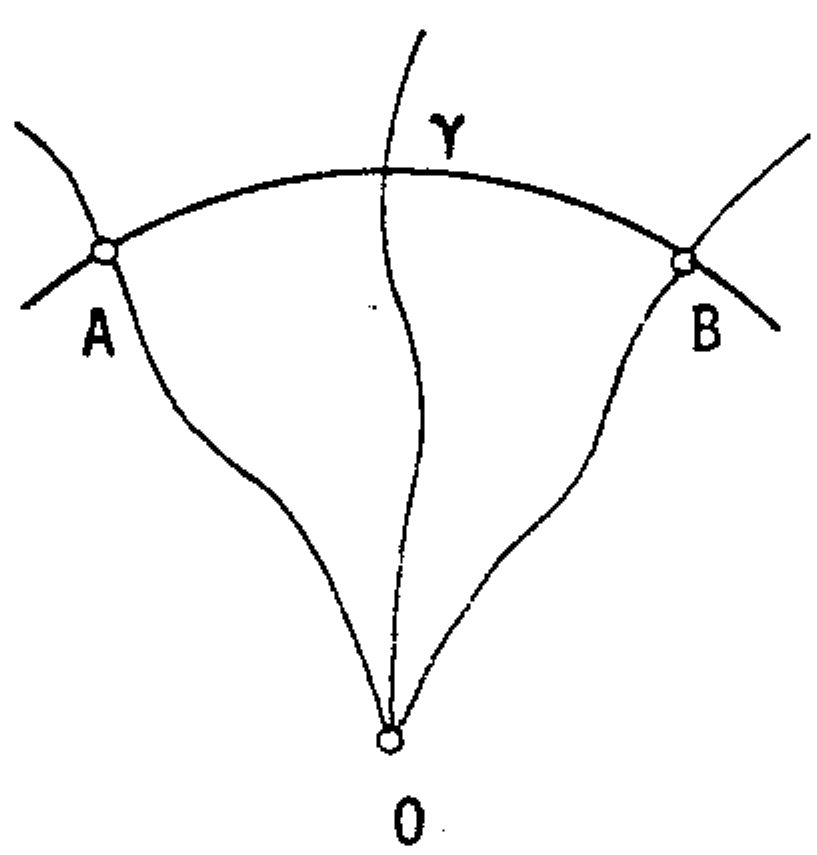
$$\frac{dy}{dt} = Y(x, y)$$

i pretpostavićemo da ovaj sistem ima izolovanu singularnu tačku O za koju se može uzeti koordinatni početak. Posmatrajmo sada krivu

$$r\,\frac{dr}{dt} = x\,X(x, y) + y\,Y(x, y) = Z(x, y)$$

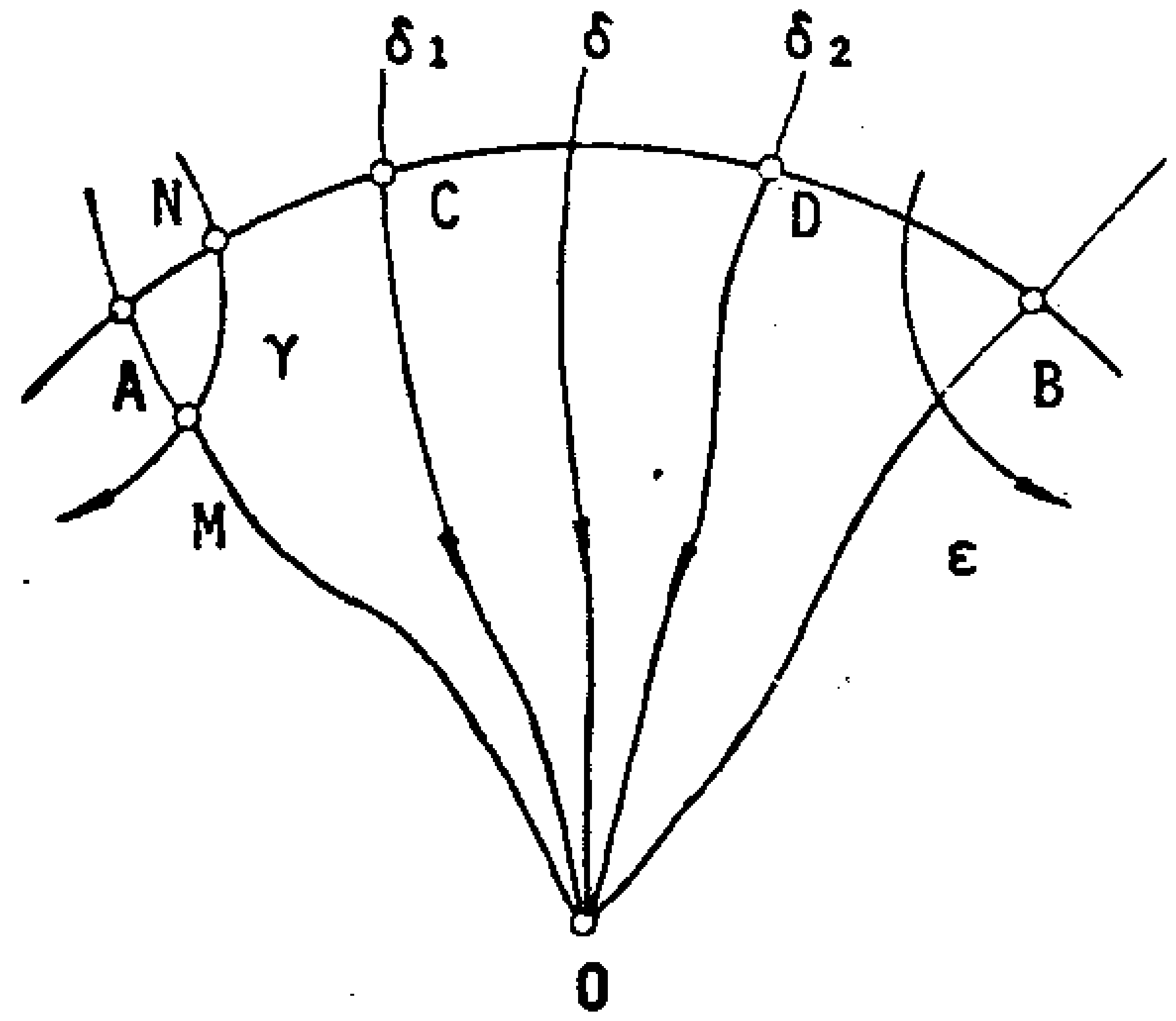
Neka je C_ρ krug radijusa ρ sa centrom O. Ako je ρ dovoljno malo svaka grana krive $Z(x, y) = 0$ seče C_ρ u jednoj tačci i u C_ρ jedina zajednička tačka svih grana je koordinatni početak. Dakle, unutrašnjost C_ρ zajedno sa C_ρ je podeljena granama krive na konačan skup trouglastih sektora, a u svakom od njih $\frac{dr}{dt}$ ima odredjen znak.

Ako rešenje γ ulazi (izlazi) u sektor OAB i ne izlazi (ulazi) iz njega kroz jednu od strana OA, OB, tada kad $t \to +\infty$ $(t \to -\infty)$ γ mora težiti ka vrhu O sektora.



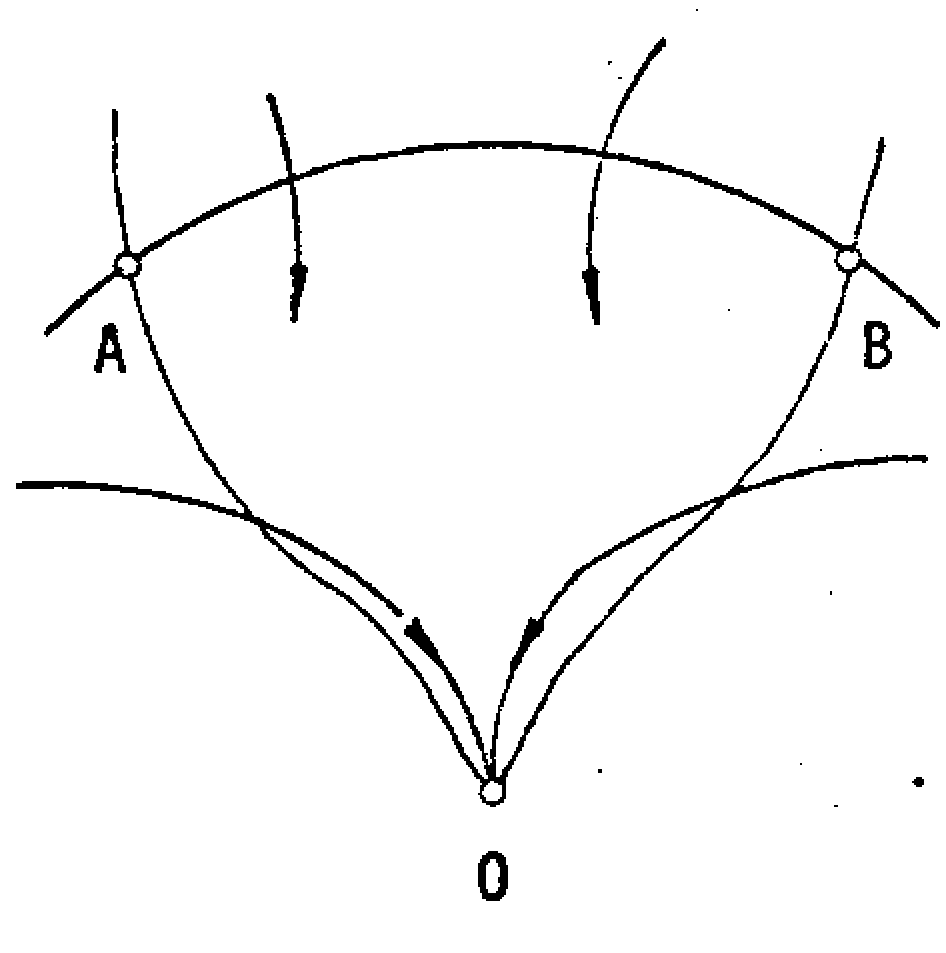
Pretpostavljajući da Z (x, y) ima samo realne grane razlikujemo sledeće tipove sektora OAB.

Slučaj I



Kroz strane OA i OB rešenja γ i ε izlaze, a rešenja δ koja prolaze kroz [CD] ostaju u sektoru i teže O kad $t \to +\infty$. Granični slučaj je kada je C = D, i kada postoji samo jedno δ. Za rešenja δ koja ulaze u singularnu tačku dobijamo čvor, a rešenjima γ, ε odgovara sedlo, tako da je ova singularna tačka tipa čvor - sedlo.

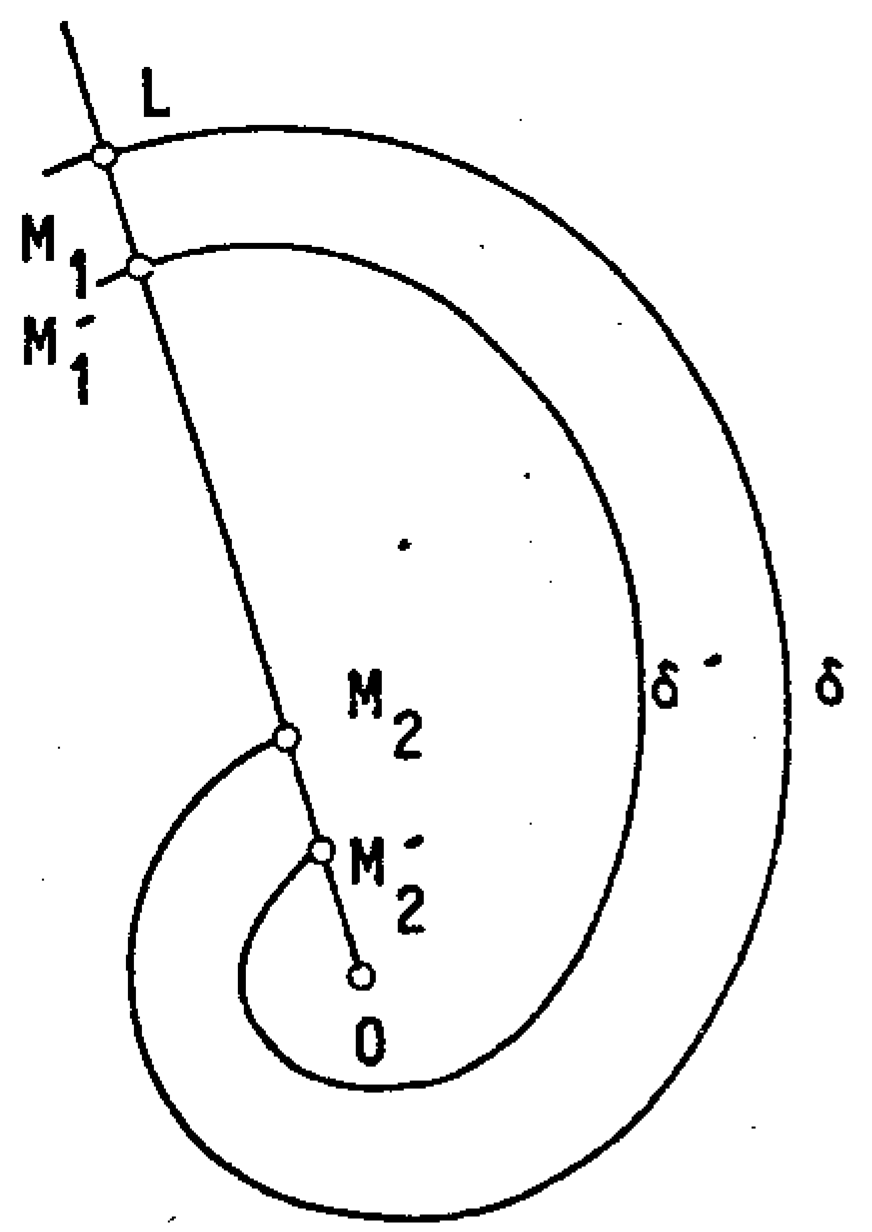
Slučaj II



Sva rešenja teže ka O, i dobijena singularna tačka je čvor.

Pretpostavimo sada da kriva $Z(x, y) = 0$ nema realnih grana.

Slučaj III



Pretpostavimo da postoji zrak L koji prolazi kroz O i koji nije rešenje. Svako rešenje δ koje seče L, recimo u tačci M_1, seći će ga ponovo u tačci M_2. Za drugo rešenje δ' postojaće M_1', M_2' i $M_1' \to M_2'$ definiše topološko preslikavanje

$$[OM_1] \to [OM_2]$$

koje smanjuje interval OM_1. Sledi, da δ i svako drugo rešenje dovoljno blizu 0 spiralno teži ka 0. Dobili smo da je 0 singularna tačka tipa fokusa. Specijalno, ako je $M_1' = M_2'$ 0 je centar.

U knjizi V.V. Stepanova [23] posmatraju se trouglovi OAB, a realnim granama odgovaraju realni koreni odgovarajuće karakteristične jednačine.

I tako, sve trajektorije koje se nalaze u dovoljno maloj okolini singularne tačke dele se na sledeće klase:

1. Paraboličke - rešenja jednim delom ulaze u singularnu tačku, a drugim izlaze.

2. Hiperboličke - rešenja izlaze iz singularne tačke.

3. Eliptičke - rešenja ulaze u singularnu tačku.

4. Fokus

5. Centar

U radu [25] posmatrana je diferencijalna jednačina

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y_m(x, y) + Y(x, y)}{X_m(x, y) + X(x, y)} \tag{22}$$

gde su Y_m, X_m - homogeni polinomi od x i y stepena $m \geq 1$, Y, X - stepeni redovi od x i y s realnim koeficijentima, koji počinju sa članovima $m + 1$ stepena i konvergiraju u nekoj okolini koordinatnog početka. Ne smanjujući opštost, pretpostavlja se da je

$$Y_m^2 + X_m^2 \not\equiv 0$$

$$X_m(0, y) + X(0, y) \not\equiv 0.$$

Za jednačinu (22) ispitivano je postojanje i broj eliptičkih (e), hiperboličkih (h) i paraboličkih (p) oblasti.

Poznato je da postoji konačan broj e, h, p oblasti, a u klasičnom radu Bendiksona pokazano je da je $e \leq 2m$, $h \leq 2(m+1)$.

2.1. Posmatraćemo jednačinu

$$y' = \frac{\prod_{j=n+1}^{2n} (y-\phi_j(x))}{\prod_{i=1}^{n} (y-\phi_i(x))} \tag{23}$$

tj. ispitivaćemo neke oblike jednačine (21) za koje je koordinatni početak singularna tačka tipa čvora - sedlo i ispitivaćemo postojanje periodičnih rešenja.

Pretpostavićemo da su sve funkcije ϕ_s (x) (s = 1,..., 2n) neprekidne,

$$\phi_s (0) = 0 \quad (s = 1,\dots, 2n) \tag{24}$$

ograničene, da nemaju zajedničkih tačaka za $x_0 \leq x < +\infty$,

$$\inf \phi_\kappa (x) > \sup \phi_\ell (x) \quad \kappa > \ell,\ x \geq x_0 \tag{25}$$

i da su ω periodične.

<u>Teorema 8</u> Neka za datu jednačinu (23) važe uslovi (24) i (25). Tada jednačina ima klasu periodičnih rešenja a koordinatni početak je singularna tačka tipa čvor - sedlo.

<u>Dokaz</u> Dokažimo prvo da je koordinatni početak singularna tačka tipa čvor - sedlo.

Zbog uslova (24) imenilac i brojilac jednačine (23) se anuliraju u (0, 0) i nemaju drugih nula u okolini koordinatnog početka, pa je (0, 0) izolovana singularna tačka.

Posmatrajmo sada krivu

$$Z (x, y) = r \frac{dr}{dt} = x \prod_{i=1}^{n} (y - \phi_i (x)) + \\ + y \prod_{j=n+1}^{2n} (y - \phi_j (x)) = 0.$$

Realne grane krive Z (x, y) su

$$y = \phi_s (x) \quad (s = 1,\dots, 2n),$$

i ako je ρ dovoljno malo svaka ova grana seče krug C_ρ u jednoj tačci, a zajednička tačka svih ovih krivih u krugu C_ρ je koordinatni početak.

Kako se $\frac{dr}{dt}$ može napisati i kao

$$\frac{\prod\limits_{j=n+1}^{2n} (y - \phi_j (x))}{\prod\limits_{i=1}^{n} (y - \phi_i (x))} + \frac{x}{y}$$

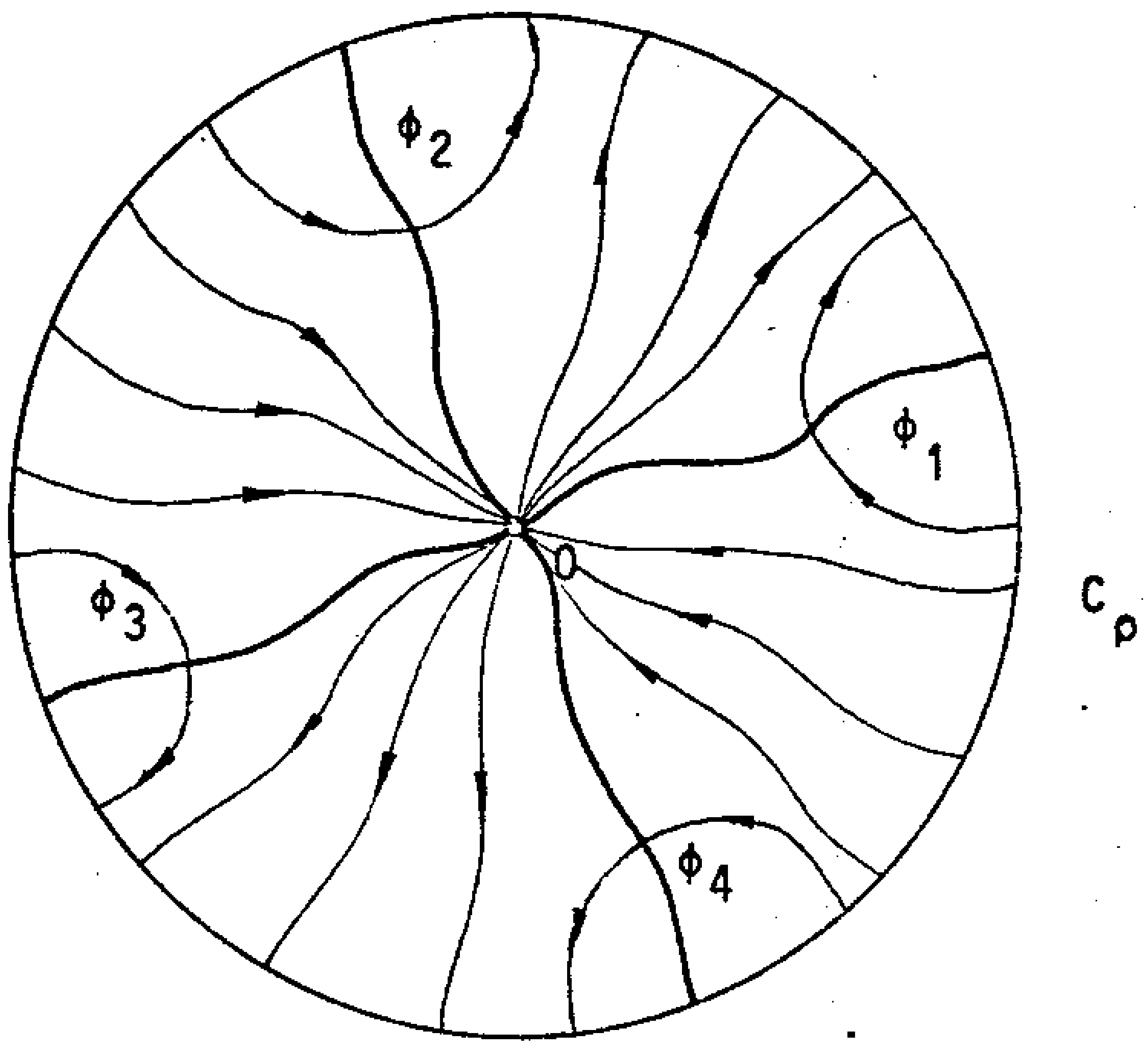
to znak $\frac{dr}{dt}$ za dovoljno malo ρ zavisi samo od prvog sabirka. Realne grane $y = \phi_s (x)$ $(s = 1, \ldots, n)$ odredjuju sektore, a znak $\frac{dr}{dt}$ se naizmenično menja kada se ide iz jednog sektora u drugi. Naime, u sektoru

$$y < \phi_1 (x), \; y < \phi_2 (x), \ldots, \; y < \phi_{2n} (x)$$

svi faktori $y - \phi_s (x)$ su negativni, a kako je ukupan broj faktora paran, znak $\frac{dr}{dt}$ je pozitivan. U sledećoj oblasti

$$y > \phi_1 (x), \; y < \phi_2 (x), \; \ldots, \; y < \phi_{2n} (x)$$

prvi faktor je pozitivan, pa je znak $\frac{dr}{dt}$ negativan.



Postavlja se pitanje broja sektora, tj. broja realnih grana. Ako bi postojale samo dve realne grane, postojala bi samo dva sektora suprotnog znaka. U tom slučaju skup tačaka izlaza nije izdvojen od skupa tačaka ulaza, i postojale bi tačke unutrašnjeg dodira. Stoga najmanji broj sektora mora biti 4, i tada skup tačaka izlaza ima najmanje dve razdvojene komponente na krugu C_ρ. Inače, ukupan broj sektora je paran, da bi se znak $\frac{dr}{dt}$ prvog i poslednjeg sektora poklopio.

Dakle, dobijeni sektori su tipa I , i koordinatni početak je singularna tačka tipa čvor - sedlo.

Dokažimo sada da postoje i periodična rešenja. Stoga, prvo dokažimo da postoje asimptotski ograničena rešenja.

Posmatrajmo krive $y = \phi_i(x)$ $(i = 1,\dots, n)$ (krive koje pripadaju imeniocu). Rešenja koja pripadaju oblasti izmedju ma koje dve ove krive su svakako ograničena jer ne mogu izaći iz oblasti koja je ograničena dvema krivama duž kojih desna strana jednačine (23) teži ∞. Rešenja koja pripadaju ovakvim oblastima zovemo "redukovana klasa ograničenih rešenja".

Posmatrajmo sada krive $y = \phi_j(x)$ $(j = n+1, \dots, 2n)$ (krive koje pripadaju brojiocu). Znak desne strane diferencijalne jednačine (23) se u oblastima izmedju ovih krivih naizmenično menja. Uslov (25) omogućuje postavljanje pravih izmedju ovih krivih. Dakle, moguće je konstruisati skupove

$$\omega_j = \{ x_0 \leqq x < +\infty, \ y_j^* < \phi_j(x) < y_j^{**} \}.$$

U zavisnosti od znaka desne strane jednačine (23) duž ovih pravih dokazuje se metodom retrakta da ili sva rešenja ulaze u ω_j ili postoji u ω_j bar jedno asimptotski ograničeno rešenje za $x \geqq x_0$.

Dokazali smo da postoji klasa asimptotski ograničenih rešenja, a kako je desna strana jednačine (23) ω - periodična to su ta rešenja za $x \geqq x_0$ i periodična prema teoremi Masere, i data jednačina ima klasu periodičnih rešenja.

Primedba Ako se izostavi uslov da su $\phi_s(x)$ $(s = 1,\dots, 2n)$ ω - periodične, analogno teoremi 2 dokazuje se da data jednačina (23) za $x \geq x_0$ ima bar jedno skoro periodično rešenje.

2.2. Posmatrajmo sada jednačinu

$$y' = \frac{\prod_{j=n+1}^{m} (y - \phi_j(x))^{2j}}{\prod_{i=1}^{n} (y - \phi_i(x))^{2i}} \qquad (26)$$

Za sve funkcije $\phi_s(x)$ $(s = 1,\dots, m)$ uvode se pretpostavke kao u teoremi 8. U ovom slučaju koordinatni početak je singularna tačka tipa čvora.

Naime, uočavaju se sektori u kojima je sada zbog stepenovanja faktora $y - \phi_s(x)$ $(s = 1,\dots, m)$ parnim brojevima, znak $\frac{dr}{dt}$ pozitivan. Svi dobijeni sektori su tipa II, rešenja teže ka koordinatnom početku, i dobijena tačka je tipa čvora.

Isto tako, za $x \geq x_0$ u oblastima oko funkcija $y=\phi_j(x)$ $(j = n + 1,\dots, m)$ sva rešenja ulaze u ω_j, a u oblastima oko funkcija $y = \phi_i(x)$ $(i = 1,\dots, n)$ postoje redukovane klase ograničenih rešenja, i sva su rešenja ograničena, pa se dokazuje i da postoji klasa periodičnih rešenja.

2.3. Prethodna razmatranja mogu se primeniti i na jednačinu

$$y' = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i(x)\, y^i}{\sum_{i=0}^{m} b_i(x)\, y^i}$$

jer se prema poznatom stavu ([27]) svaki polinom

$$F\ (x,\ z) = z^n + A_1\ z^{n-1} + \ldots + A_n$$

čiji su koeficijenti analitičke funkcije, može potpuno rastaviti na linearne faktore

$$F\ (x,\ z) = (z - P_1)(z - P_2)\ldots\ (z - P_n)$$

gde su P_1, P_2, ..., P_n stepeni redovi sa razlomljenim stepenima po x.

3. Diferencijalne jednačine $y' = F\ (x,\ y,\ \phi\ (x))$

Posmatraćemo diferencijalnu jednačinu

$$y' = F\ (x,\ y,\ \phi\ (x)) \tag{27}$$

gde funkcija ϕ (x) ima izvesno kvalitativno svojstvo P.

<u>Definicija</u> Oblast Ω (x, y) je "zona kvalitativnog uticaja funkcije ϕ (x)" ako se polazeći od svojstva P funkcije ϕ (x) može pokazati da sva rešenja jednačine (27), koja pripadaju Ω (x, y), imaju isto svojstvo P.

U radu [4] proučavana je jednačina

$$y^m + y'^n = f\ (x)$$

(m, n - prirodni brojevi) gde je f (x) neprekidna i diferencijabilna za $x \geq x_0$, i gde ulogu funkcije ϕ (x) ima funkcija

$$y = \sqrt[m]{f\ (x)}$$

(geometrijsko mesto stacionarnih tačaka). Pod raznim pretpostavkama o $\sqrt[m]{f\ (x)}$ (svojstvo P) pokazano je da postoje klase rešenja koje imaju isto svojstvo P.

U radu Z.Mikolajske [14] proučavana je jednačina

$$y'(x) = v(x)\, F(x, y, u(x))$$

gde je funkcija $u(x)$ klase C^1 za $x > 0$,

$$\lim_{x\to 0} u(x) = 0, \quad u(x) > 0 \quad \text{za } x > 0.$$

Uvodi se funkcija $\phi(u(x), k)$ koja je klase C^1 u odnosu na (u, k), a funkcije $v(x)$, $F(x, y, u(x))$ zadovoljavaju izvesne uslove, i dokazuje se da postoje rešenja date jednačine takva da

$$\lim_{x\to 0} y(x) = 0.$$

Nadovezujući se na dobijene rezultate Z.Mikolajske, proučavaćemo jednačine koje će imati rešenja sa istim svojstvom kao i funkcija $\phi(x)$.

3.1. Neka je data jednačina (27). Pretpostavićemo da je $F(x, y, \phi(x))$ neprekidna po x i ϕ, a da je funkcija $\phi(x)$ klase C^1 za $x \geq x_0$, i

$$\lim_{x\to\infty} \phi(x) = c \tag{28}$$

Neka je $f(\phi(x), c)$ funkcija klase C^1 u odnosu na (ϕ, c) i neka je

$$\begin{aligned} &1^\circ \quad \lim_{x\to\infty} F(x, f(\phi(x), c), \phi(x)) = \tilde{F}(k) \\ &2^\circ \quad \lim_{x\to\infty} f(\phi(x), c) = c \end{aligned} \tag{29}$$

Ispitivaćemo da li postoji za jednačinu (27) rešenje takvo da je

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = c$$

ili

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{f(\phi(x), c)} = 1\ ?$$

Pretpostavimo stoga da je

$$1^\circ \lim_{x\to\infty} \phi'(x) = 0 \qquad\qquad (30)$$

$$2^\circ \lim_{\substack{x\to\infty \\ k\to s}} \frac{f(\phi(x), k)}{f(\phi(x), s)} = 1$$

i da za $\varepsilon_0 > 0$ važi

$$1^\circ \tilde{F}(k+\varepsilon) > 0 \quad \text{za} \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \qquad\qquad (31)$$

$$2^\circ \tilde{F}(k-\varepsilon) < 0 \quad \text{za} \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$$

Teorema 9 Pretpostavljajući da važe uslovi (28) -(31) za diferencijalnu jednačinu (27) se dokazuje da postoji bar jedno rešenje $y(x)$ takvo da je

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{f(\phi(x),c)} = 1.$$

Dokaz Posmatrajmo skup

$$\omega_{\varepsilon_0} = \{ (x, y) \mid x \geqq x_0,\ f(\phi(x), c-\varepsilon_0) \leqq y \leqq \leqq f(\phi(x), c+\varepsilon_0) \}$$

i neka su

$$S_1 = \{ (x, y) \mid x \geqq x_0,\ y = f(\phi(x), c-\varepsilon_0) \}$$

$$S_2 = \{ (x, y) \mid x \geqq x_0,\ y = f(\phi(x), c+\varepsilon_0) \}$$

Neka je (x, y) bilo koja tačka integrala $y(x)$ takva da $(x, y) \in S_1$, pa je

$$y' - f_\phi(\phi, c-\varepsilon_0)\phi' = F(x, f(\phi, c-\varepsilon_0), \phi) - - f_\phi(\phi, c-\varepsilon_0)\phi'$$

Prema uslovima (30.1) i (31.2) sledi da je

$$\{ y - f(\phi, c-\varepsilon_0) \}' < 0.$$

Analogno na S_2 dobijamo da je

$$\{ y - f(\phi, c + \varepsilon_0) \}' > 0.$$

Tačke skupa $S_1 + S_2$ su tačke striktnog izlaza, i prema teoremi T.Važevskog postoji skup

$$Z(\varepsilon_0) = \{ (x, y) \mid x = \delta(\varepsilon_0),\ f(\phi(\delta(\varepsilon_0)), c-\varepsilon_0) \leq y \leq \leq f(\phi(\delta(\varepsilon_0)), c+\varepsilon_0) \}$$

i tačka $P \in Z(\varepsilon_0)$ takva da pripadni integral ostaje u skupu ω_{ε_0} za $x \geq \delta(\varepsilon_0)$. Na analogan način dobijamo niz $\{ \varepsilon_\nu \}$, $\varepsilon_\nu \to 0$, i tačke P_ν čiji pripadni integrali ostaju u skupu

$$\omega_{\varepsilon_\nu} = \{ (x, y) \mid x \geq x_0,\ f(\phi(x), c - \varepsilon_\nu) \leq y_\nu \leq \leq f(\phi(x), c + \varepsilon_\nu) \}$$

za $x \geq x_0 \geq \delta(\varepsilon_\nu)$. Dobijeni integrali y_ν se mogu poklopiti, pa dakle postoji bar jedan asimptotski ograničen integral $y^*(x)$ takav da je

$$f(\phi(x), c - \varepsilon_\nu) \leq y^*(x) \leq f(\phi(x), c + \varepsilon_\nu)$$

ili

$$\frac{f(\phi(x), c - \varepsilon_\nu)}{f(\phi(x), c)} \leq \frac{y^*(x)}{f(\phi(x), c)} \leq \frac{f(\phi(x), c + \varepsilon_\nu)}{f(\phi(x), c)}$$

pa zbog uslova (30.2) sledi

$$\lim_{x \to \infty} \frac{y^*(x)}{f(\phi(x), c)} = 1.$$

Pretpostavimo sada da važi

$$\begin{aligned} &\tilde{F}(k + \varepsilon) < 0 \quad \text{za} \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \\ &\tilde{F}(k - \varepsilon) > 0 \quad \text{za} \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \end{aligned} \tag{32}$$

Teorema 10 Neka za jednačinu (27) važe uslovi (28) - (30) i (32), tada za sva rešenja važi

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{f(\phi(x), c)} = 1.$$

Dokaz Na analogan način kao i teorema 9 dokazuje se i ova teorema. U ovom slučaju skupovi S_1, S_2 su skupovi tačaka striktnog ulaza, tj. za svako $(x, y) \in S_1$

$$\{ y(x) - f(\phi(x), c - \varepsilon_0) \}' > 0$$

a za svako $(x, y) \in S_2$

$$\{ y(x) - f(\phi(x), c + \varepsilon_0) \}' < 0$$

pa sva rešenja ulaze u ω_{ε_0}. Dakle je

$$f(\phi(x), c - \varepsilon_0) < y < f(\phi(x), c + \varepsilon_0)$$

za $x \geqq x_0$.

Primedba Dokazali smo da postoje asimptotski ograničena rešenja i ako se za diferencijalnu jednačinu (27) pretpostavi još da je funkcija $F(x, y, \phi(x))$ ω - periodična, primenom teoreme Masere dokazuje se da su ta rešenja takodje periodična.

3.2. Posmatrajmo sada diferencijalnu jednačinu

$$y' = F(x, y, \phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)) \tag{33}$$

Pretpostavićemo da je funkcija $F(x, y, \phi_1(x), \dots, \phi_n(x))$ neprekidna po x i $\phi_i(x)$ $(i = 1,\dots, n)$, a funkcije $\phi_i(x)$ $(i = 1,\dots, n)$ su klase C^1 za $x \geqq x_0$ i

$$\lim_{x\to\infty} \phi_i(x) = c_i \quad (i = 1,\dots, n) \tag{34}$$

Neka su $f_i(\phi_i(x), c_i)$ funkcije klase C^1 u odnosu na (ϕ_i, c_i) i neka je

1° $\lim\limits_{x\to\infty} f_i\ (\phi_i\ (x),\ c_i$

2° $\lim\limits_{x\to\infty} F\ (x,\ f_1\ (\phi_1\ (x),\ c_1),\ \phi_1\ (x),\dots,\ \phi_n\ (x)) =$

$= \tilde{F}\ (k_1)$

$$\lim_{x\to\infty} F\ (x,\ f_2\ (\phi_2\ (x),\ c_2),\ \phi_1\ (x),\dots,\ \phi_n\ (x)) = \tilde{F}\ (k_2) \qquad (35)$$

....

$$\lim_{x\to\infty} F\ (x,\ f_n\ (\phi_n\ (x),\ c_n),\ \phi_1\ (x),\dots,\ \phi_n\ (x)) = \tilde{F}\ (k_n)$$

Neka je

1° $\lim\limits_{x\to\infty} \phi_i'\ (x) = 0$

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ k\to s}} \frac{f_i(\phi_i(x),\ k)}{f_i(\phi_i(x),\ s)} = 1 \qquad (36)$$

Ne umanjujući opštost razmatranja možemo pretpostaviti da je

$$\phi_1\ (x) < \phi_2\ (x) < \dots < \phi_n\ (x) \qquad (37)$$

Pretpostavimo da za $\varepsilon_0 > 0$ važe sledeće nejednakosti

$$\begin{aligned} &1^{\circ}\ \tilde{F}\ (k_i + \varepsilon) > 0 \quad \text{za} \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \\ &\quad\ \tilde{F}\ (k_i - \varepsilon) < 0 \qquad\quad i = 1,\ 3,\ \dots,\ 2\ k + 1 \\ &2^{\circ}\ \tilde{F}\ (k_i + \varepsilon) < 0 \quad \text{za} \quad 0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \\ &\quad\ \tilde{F}\ (k_i - \varepsilon) > 0 \qquad\quad i = 2,\ 4,\ \dots,\ 2\ k \end{aligned} \qquad (38)$$

<u>Teorema 11</u> Neka za jednačinu (33) važe uslovi (34) - (38), tada postoji po bar jedno rešenje takvo da je

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{f(\phi_i(x),\ c_i)} = 1, \qquad i = 1, 3, \ldots, 2k + 1$$

i klase rešenja takvih da je

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{f(\phi_i(x),\ c_i)} = 1, \qquad i = 2, 4, \ldots, 2k$$

Dokaz Analogno kao teorema 9 dokazuje se i ova teorema. Za svaku od funkcija $\phi_i\ (x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ konstruišu se funkcije

$$f_i\ (\phi_i\ (x),\ c_i) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

i odgovarajući skupovi S_1 i S_2. U zavisnosti od uslova (38.1) ili (38.2) uočeni skupovi

$$\omega^i_{\varepsilon_0} = \{\ (x,\ y)\ |x \geq x_0,\ f_i\ (\phi_i\ (x),\ c_i - \varepsilon_0) \leq y \leq \\ \leq f_i\ (\phi_i\ (x),\ c_i + \varepsilon_0)\ \}$$

će omogućavati postojanje bar jednog ili klase asimptotski ograničenih rešenja.

3.3. Posmatraćemo sada sledeći sistem diferencijalnih jednačina

$$\begin{aligned} y' &= F_1\ (x,\ y,\ \phi_1\ (x)) \\ z' &= F_2\ (y,\ z,\ \phi_2\ (y)) \end{aligned} \tag{39}$$

Pretpostavimo da su funkcije $F_1\ (x,\ y,\ \phi_1\ (x))$ i $F_2\ (y,\ z,\ \phi_2\ (y))$ neprekidne, a funkcije $\phi_1\ (x)$, $\phi_2\ (y)$ neprekidne i diferencijabilne za $x \geq x_0$, $y \geq y_0$ i

$$\lim_{x\to\infty} \phi_1 (x) = c_1$$
$$\lim_{y\to\infty} \phi_2 (y) = c_2 \tag{40}$$

Neka su funkcije $f_1 (\phi_1 (x), c_1)$ i $f_2 (\phi_2 (y), c_2)$ klase C^1 i neka je

1° $\lim_{x\to\infty} F_1 (x, f_1 (\phi_1 (x), c_1), \phi_1 (x)) = \tilde{F}_1 (k_1)$

$\lim_{y\to\infty} F_2 (y, f_2 (\phi_2 (y), c_2), \phi_2 (y)) = \tilde{F}_2 (k_2)$

2° $\lim_{x\to\infty} \phi_1' (x) = 0$ (41)

$\lim_{y\to\infty} \phi_2' (y) = 0$

3° $\lim_{x\to\infty} f_1 (\phi_1 (x), c_1) = c_1$

$\lim_{y\to\infty} f_2 (\phi_2 (y), c_2) = c_2$

Pretpostavimo da je

1° $\tilde{F}_i (k_i + \varepsilon) > 0$ za $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$

$\tilde{F}_i (k_i - \varepsilon) < 0$ $i = 1, 2$

2° $\tilde{F}_i (k_i + \varepsilon) < 0$ za $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$

$\tilde{F}_i (k_i - \varepsilon) > 0$ $i = 1, 2$

(42)

3° a) $\tilde{F}_1 (k_1 + \varepsilon) > 0$ $\tilde{F}_2 (k_2 + \varepsilon) < 0$

$\tilde{F}_1 (k_1 - \varepsilon) < 0$ $\tilde{F}_2 (k_2 - \varepsilon) > 0$

$0 < \varepsilon < \varepsilon_0$

3^{0} b) $\tilde{F}_1\ (k_1 + \varepsilon) < 0 \qquad \tilde{F}_2\ (k_2 + \varepsilon) > 0$

$\tilde{F}_1\ (k_1 - \varepsilon) > 0 \qquad \tilde{F}_2\ (k_2 - \varepsilon) < 0$

$0 < \varepsilon < \varepsilon_0$

Teorema 12 Pretpostavićemo da za sistem diferencijalnih jednačina (39) važe uslovi (40), (41). Tada ako važi uslov (42.1) sistem ima bar jedno asimptotski ograničeno rešenje, za uslov (42.2) sva rešenja sistema su asimptotski ograničena, i za uslov (42.3) postoji klasa asimptotski ograničenih rešenja.

Dokaz 1^{0} Neka je ispunjen uslov (42.1). Posmatrajmo skup

$$\omega_{\varepsilon_0} = \{ (x, y, z) \mid x \geq x_0, \quad f_1(\phi_1(x), c_1-\varepsilon_0) \leq y \leq f_1(\phi_1(x), c_1+\varepsilon_0), \quad f_2(\phi_2(y), c_2-\varepsilon_0) \leq z \leq f_2(\phi_2(y), c_2+\varepsilon_0) \}$$

i neka su skupovi S_1, S_2, S_3, S_4 dati sa

$$S_1 = \{ (x, y, z) \mid x \geq x_0, \quad y = f_1(\phi_1(x), c_1-\varepsilon_0) \}$$

$$S_2 = \{ (x, y, z) \mid x \geq x_0, \quad y = f_1(\phi_1(x), c_1+\varepsilon_0) \}$$

$$S_3 = \{ (x, y, z) \mid y \geq y_0, \quad z = f_2(\phi_2(y), c_2-\varepsilon_0) \}$$

$$S_4 = \{ (x, y, z) \mid y \geq y_0, \quad z = f_2(\phi_2(y), c_2+\varepsilon_0) \}$$

Ispitujući znak desne strane sistema (39) dokazuje se da su tačke skupa S_1, S_2, S_3, S_4 tačke striktnog izlaza, i označićemo skup tačaka striktnog izlaza sa

$$S_1^- + S_2^- + S_3^- + S_4^- .$$

Postojaće skup

$$
\begin{aligned}
Z\ (\varepsilon_0) = \{\ (x,\ y,\ z)\ |\ & x = \delta\ (\varepsilon_0), \\
& f_1(\phi_1(\delta(\varepsilon_0)),\ c_1-\varepsilon_0) \leq y \leq \\
& \leq f_1(\phi_1(\delta(\varepsilon_0),\ c_1+\varepsilon_0), \\
& f_2(\phi_2(\delta(\varepsilon_0)),\ c_2-\varepsilon_0) \leq z \leq \\
& \leq f_2(\phi_2(\delta(\varepsilon_0),\ c_2+\varepsilon_0)\ \}
\end{aligned}
$$

i tačka $P \in Z\ (\varepsilon_0)$ takva, da po teoremi Važevskog pripadni integral ostaje u ω_{ε_0}. Mogu se formirati i skupovi ω_{ε_ν} kao u teoremi 9, koji dokazuju da postoji bar jedan asimptotski ograničen integral.

2° Ako su ispunjeni uslovi (42.2), tada je znak desne strane sistema (39) negativan na granici skupa ω_{ε_0}, pa su skupovi S_1, S_2, S_3, S_4 skupovi tačaka striktnog ulaza, tj. važi

$$S_1^+ + S_2^+ + S_3^+ + S_4^+ .$$

Dakle, svi integrali su asimptotski ograničeni.

3° Neka su ispunjeni uslovi (42.3). Ispitujući znak desne strane sistema (39) dobijamo sledeće:

a) $S_1^- + S_2^- + S_3^+ + S_4^+$

b) $S_1^+ + S_2^+ + S_3^- + S_4^-$

Za slučaj a) neka su A i B dve tačke s koordinatama

$$A\ (\xi,\ f_1\ (\phi_1\ (x),\ c_1 - \varepsilon_0),\ \eta)$$

$$B\ (\xi,\ f_1\ (\phi_1\ (x),\ c_1 + \varepsilon_0),\ \eta)$$

$$\xi \geq x_0,\ f_2\ (\phi_2\ (y),\ c_2 - \varepsilon_0) \leq \eta \leq f_2\ (\phi_2\ (y),\ c_2 + \varepsilon_0)$$

Neka je $Z\ (\varepsilon_0)$ segment čiji su krajevi tačke A i B. Tada po teoriji retrakta postoji tačka $P \in Z\ (\varepsilon_0)$ čiji pripadni integral ostaje u ω_{ε_0}. Tačke A i B su proizvoljne pa postoji klasa asimptotski ograničenih rešenja.

Analogno se dobija i za slučaj pod b).

<u>Primedba</u> Ako se pretpostavi da su funkcije $F_1\ (x, y, \phi_1\ (x)), F_2\ (y, z, \phi_2\ (y))$ i ω - periodične dokazuje se primenom teoreme Masere da su dobijena asimptotski ograničena rešenja takodje i periodična.

§ 3. ITERATIVNI METOD ZA NALAŽENJE PERIODIČNIH REŠENJA

U ovoj glavi izložen je jedan iterativni metod za nalaženje periodičnih rešenja, koji je primenjen na jednačinu (27). Konstruisan je algoritam za nalaženje sukcesivnih aproksimacija za traženo periodično rešenje, i takodje se razmatra pitanje praktične realizacije ovog algoritma na računskoj mašini.

Prvo će biti izložene osnove ove teorije primenjene na funkcionalne jednačine koje zavise od malog parametra. Zatim, se ovaj iterativni postupak primenjuje na nalaženje periodičnih rešenja diferencijalnih jednačina koje zavise od malog parametra. Osnovi ove teorije izloženi su u monografiji D.K.Like i J.A.Rjabova ([19]), a mi ćemo je primeniti na jednačinu (27).

3.1. Posmatraćemo funkcionalne jednačine oblika

$$u = f\,(u,\,\varepsilon) \tag{43}$$

gde je $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ vektorska funkcija vektorske promenljive $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ i pozitivnog vektora - parametra $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$, koja je definisana za

$$u \geqq 0 \qquad \varepsilon \geqq 0,$$

neprekidna po u, ε, neprekidno diferencijabilna po u u toj oblasti pri čemu je

$$f\,(0,\,0) = 0 \qquad \frac{\partial f\,(0,\,0)}{\partial u} = 0$$

$$f\,(0,\,\varepsilon) \neq 0 \quad \text{za} \quad \varepsilon \neq 0$$

i da pripada klasi pozitivnih, monotono rastućih i nelinearno koneksnih funkcija.

Za jednačinu (43) interesuju nas sledeća pitanja. Posmatraćemo sledeće uzastopne aproksimacije

$$\begin{aligned} u_k &= f\,(u_{k-1},\ \varepsilon) \qquad k = 1,\ 2,\ \dots \\ u_0 &= 0 \end{aligned} \tag{44}$$

za fiksirano ε. U kom slučaju one konvergiraju i dozvoljavaju da se nadje rešenje sistema (43)? Koja je oblast vrednosti ε, za koje proces konvergira i kako naći tu oblast? Koje su osobine rešenja $u = \bar{u}$ sistema (43), ka kojemu konvergiraju ove sukcesivne aproksimacije, pri čemu razmatramo ovo rešenje kao funkciju parametra ε?

Osnovni rezultati koji su dobijeni pri ispitivanju sistema (43) izloženi su u sledećim teoremama.

1° Uzastopne aproksimacije (44) konvergiraju i to monotono tada i samo tada kad sistem (43) ima bar jedno pozitivno (prirodno,realno) rešenje.

2° Ako uzastopne aproksimacije (44) konvergiraju pri nekom $\varepsilon = \varepsilon^0$, to one konvergiraju i za sve pozitivne $\varepsilon \leqq \varepsilon^*$.

3° Ako je $u = \bar{u}$ rešenje sistema (43) ka kojemu konvergiraju uzastopne aproksimacije (44) za neko fiksirano ε, tada ka tom rešenju konvergiraju i aproksimacije (44) pri proizvoljnoj početnoj aproksimaciji u_0, koja zadovoljava nejednakost $u_0 \leqq \bar{u}$.

4° Ako posmatrano rešenje $u = \bar{u}$ sistema (43), ka kojemu konvergiraju aproksimacije (44) kao funkcija vektora - parametra ε, tada je to rešenje za $\varepsilon \neq 0$ jedinstveno pozitivno rešenje ovog sistema, i koji teži nuli za $\varepsilon = 0$ i monotono raste s rastom ε.

Celokupnost nenegativnih vrednosti ε, za koje takvo rešenje $\bar{u} = \bar{u}(\varepsilon)$ postoji, obrazuje zatvorenu oblast D_ε.

Osnovi ove teorije primenjuju se na nalaženje periodičnih rešenja diferencijalnih jednačina koje zavise od malog parametra. Da bi se dokazala konvergencija redova, pomoću kojih se konstruiše rešenje diferencijalne jednačine, i da bi se ocenila oblast konvergencije tih redova, može se koristiti i metod majorantnih jednačina Ljapunova.

Neka je data skalarna funkcija $F(x, t, \varepsilon)$, vektorske promenljive $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, i koja je funkcija pozitivnog parametra ε i vremena t u nekoj oblasti

$$D\,(\|x\| \leq R,\ 0 \leq t \leq T,\ 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon^0)$$

i koja je neprekidna po x, t i ε i diferencijabilna po x.

<u>Definicija</u> Majoranta Ljapunova za funkciju $F(x,t,\varepsilon)$ naziva se funkcija $\Phi(u, \varepsilon)$ vektorske promenljive $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ i parametra ε i koja ne zavisi od t, koja je definisana u oblasti

$$\|u\| < R, \qquad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon^0$$

i koja pripada klasi neprekidnih, diferencijabilnih koneksnih funkcija, i koja takodje zadovoljava nejednakosti

$$|F(x, t, \varepsilon)| \leq \Phi(u, \varepsilon)$$

$$\left| \frac{\partial F(x, t, \varepsilon)}{\partial x} \right| \leq \frac{\partial \Phi(u, \varepsilon)}{\partial u}$$

za sve x, t, ε u oblasti D, ako je

$$|x| \leq u.$$

Iz poslednje nejednakosti sledi sledeće svojstvo majoranti. Neka su data dva para vektora

$$x^{(s)} = (x_1^{(s)}, x_2^{(s)}, \dots, x_n^{(s)}) \qquad s = 1, 2$$

$$u^{(s)} = (u_1^{(s)}, u_2^{(s)}, \ldots, u_n^{(s)}) \qquad s = 1, 2$$

takvi da je

$$| x^{(s)} | \leq u^{(s)} \qquad s = 1, 2$$

$$| x^{(2)} - x^{(1)} | \leq u^{(2)} - u^{(1)}$$

tada za sve $t \in [0, T]$ važi

$$| F (x^{(2)}, t, \varepsilon) - F (x^{(1)}, t, \varepsilon) | \leq$$

$$\leq \Phi (u^{(2)}, \varepsilon) - \Phi (u^{(1)}, \varepsilon)$$

Neka je dat sistem

$$x = L F (x, t, \varepsilon)$$

gde je L neki operator, tada važi sledeća teorema:

Ako sve uzastopne aproksimacije

$$u_k = \Phi (u_{k-1}, \varepsilon)$$

$$u_0 = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

ostaju u oblasti D, tada su one majorante za uzastopne aproksimacije

$$x_k = L F (x_{k-1}, t, \varepsilon)$$

$$x_0 = 0 \qquad k = 1, 2, \ldots$$

tj. za svako k važi

$$| x_k (t, \varepsilon) | \leq u_k (\varepsilon)$$

$$| x_k (t, \varepsilon) - x_{k-1} (t, \varepsilon) | \leq u_k (\varepsilon) - u_{k-1} (\varepsilon),$$

i sve $x_k (t, \varepsilon)$ ostaju u oblasti D.

Posmatraćemo sada diferencijalnu jednačinu

$$\frac{dz}{dt} = A\,z + \Psi\,(t) + \varepsilon\,Z\,(z,\,t,\,\varepsilon)$$

gde je A - konstantna (n x n) - matrica; ε - mali parametar (smatraćemo da je pozitivan); $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n)$, $Z = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ - vektorske funkcije obe neprekidne po t i 2π - periodične; funkcija $Z\,(z,\,t,\,\varepsilon)$ je neprekidna i diferencijabilna po z i neprekidna po ε u nekoj oblasti

$$D_{z\varepsilon} = D\,(\,|\,z\,| \leq R_0,\quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon^0)$$

Za $\varepsilon = 0$ imamo sistem

$$\frac{dz_0}{dt} = A\,z_0 + \Psi\,(t)$$

koji ima jedinstveno 2π - periodično rešenje $z_0 = z_0\,(t)$. Postavlja se pitanje o postojanju 2π - periodičnog rešenja sistema za $\varepsilon \neq 0$, koje je neprekidno po ε i koje teži za $\varepsilon = 0$ ka $z_0\,(t)$.

Uvedimo smenu

$$z = z_0 + x$$

gde je $x = x\,(t,\,\varepsilon)$ rešenje za $\varepsilon \neq 0$. Uvodeći ovu smenu u datu jednačinu dobijamo jednačinu po x tj. dobijamo

$$\frac{dx}{dt} = A\,x + \varepsilon\,f\,(x,\,t,\,\varepsilon)$$

gde je

$$f\,(x,\,t,\,\varepsilon) = Z\,(z_0 + x,\,t,\,\varepsilon) - Z\,(z_0,\,t,\,\varepsilon).$$

Vektorska funkcija $f\,(x,\,t,\,\varepsilon)$ promenljivih $x,\,t,\,\varepsilon$ je neprekidna i 2π - periodična po t u nekoj oblasti

$$D_{x\varepsilon} = D\,(\|\,x\,\| < R,\; 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon^0)$$

i koja je neprekidna po x, ε i diferencijabilna po x, pri čemu je

$$f(0, t, 0) = \frac{\partial f(0, t, 0)}{\partial x} = 0.$$

Periodično rešenje date jednačine je

$$x = \varepsilon L f(x, t, \varepsilon)$$

gde je L linearni ograničeni operator. Rešenje $x(t, \varepsilon)$ je 2π periodično, i zajedno sa njim postoji 2π periodično rešenje

$$z(t, \varepsilon) = z_0(t) + x(t, \varepsilon)$$

početnog sistema koje teži $z_0(t)$ za $\varepsilon = 0$.

Uzastopne aproksimacije $x_k(t, \varepsilon)$, $k = 1, 2, \ldots$ pomoću kojih se traži periodično rešenje date su sa

$$x_k(t, \varepsilon) = \varepsilon L f(x_{k-1}(t, \varepsilon), t, \varepsilon)$$

$$x_0 = 0 \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Naime, $x_k(t, \varepsilon)$ su periodična rešenja sistema

$$\frac{dx_k}{dt} = A x_k + \varepsilon f(x_{k-1}, t, \varepsilon)$$
$$k = 1, 2, \ldots$$

Dalje, je konstruisan algoritam za nalaženje periodičnih rešenja za neke diferencijalne jednačine. Rešenja su tražena ovakvom iterativnom metodom u obliku Furijeovog reda. Naveden je primer poznate diferencijalne jednačine Van-der-Pola, i periodično rešenje je dobijeno pomoću računske mašine.

3.2. Neka je data diferencijalna jednačina (27) tj. jednačina

$$y' = F(x, y, \phi(x))$$

i neka su ispunjeni uslovi teoreme 9. Pretpostavimo da je funkcija $F(x, y, \phi(x))$ 2π - periodična, tj. može se prikazati u obliku Furijeovog reda

$$F(x, y, \phi(x)) = \sum_{k=0}^{N_0} A_k(y) \cos kx + B_k(y) \sin kx \qquad (45)$$

Periodično rešenje jednačine (27) tražićemo iterativnom metodom ([19]), tražeći ga takodje u obliku Furijeovog reda.

Iteracije će glasiti

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= F(x, 0, \phi(x)) \\ \frac{dy_j}{dx} &= F(x, y_{j-1}, \phi(x)) \qquad j = 2, 3, \ldots \end{aligned} \qquad (46)$$

Furijeov razvoj za funkciju $F(x, 0, \phi(x))$ dobijamo stavljajući $y = 0$ u (45) tj.

$$F(x, 0, \phi(x)) = \sum_{k=0}^{N_0} A_k(0) \cos kx + B_k(0) \sin kx$$

Periodično rešenje $y_1(x)$ tražimo u istom tom obliku tj.

$$y_1 = \sum_{k=0}^{N_0} C_k^{(1)} \cos kx + D_k^{(1)} \sin kx \qquad (47)$$

Stavljajući ove vrednosti u (46) dobijamo:

$$\sum_{k=0}^{N_0} - k\, C_k^{(1)} \sin kx + k\, D_k^{(1)} \cos kx =$$

$$\sum_{k=0}^{N_0} A_k(0) \cos kx + B_k(0) \sin kx$$

tj. dobijamo

$$- k\, C_k^{(1)} = B_k^{(0)} \qquad (48)$$

$$k\, D_k^{(1)} = A_k^{(0)}$$

gde je

$$A_k^{(0)} = A_k\ (0) \qquad B_k^{(0)} = B_k\ (0).$$

Dobijena prva iteracija je Furijeov polinom reda N_0, gde su koeficijenti (48) dobijeni pomoću poznatih koeficijenata $A_k^{(0)}$ i $B_k^{(0)}$.

Za sledeću iteraciju imamo

$$\frac{dy_2}{dx} = F\ (x,\ y_1,\ \phi\ (x))$$

gde je funkcija $F\ (x,\ y_1,\ \phi\ (x))$ predstavljena Furijeovim razvojem nekog reda N_1, tj.

$$F\ (x,\ y_1,\ \phi\ (x)) = \sum_{k=0}^{N_1} A_k^{(1)} \cos kx + B_k^{(1)} \sin kx$$

i dobija se stavljajući dobijeni Furijeov polinom (47) u razvoj (45). Koeficijenti $A_k^{(1)}$ i $B_k^{(1)}$ dobijaju se pomoću koeficijenata $C_k^{(1)}$ i $D_k^{(1)}$. Obim ovih izračunavanja je veliki, pa je praktična realizacija moguća na računskim mašinama. Za ove operacije se sastavljaju standardni programi.

Rešenje $y_2\ (x)$ tražimo u obliku

$$y_2\ (x) = \sum_{k=0}^{N_1} C_k^{(2)} \cos kx + D_k^{(2)} \sin kx$$

i stavljajući ove vrednosti u (46) dobijamo za koeficijente iteracije $y_2\ (x)$ vrednosti

$$- k\, C_k^{(2)} = B_k^{(1)}$$

$$k\, D_k^{(2)} = A_k^{(1)}.$$

Analogno se dobijaju y_3 (x), y_4 (x), ... čiji su polinomi Furije reda N_2, N_3,... .

Označimo sa y_N (x) polinom Furije reda N, koji smo dobili prethodnim izračunavanjima s zadanom greškom izračunavanja koeficijenata, tj.

$$y_N(x) = \sum_{k=0}^{N} C_k^{(N)} \cos kx + D_k^{(N)} \sin kx$$

Tada je

$$\frac{dy_N(x)}{dx} = \sum_{k=0}^{N} - k\, C_k^{(N)} \sin kx + k\, D_k^{(N)} \cos kx$$

i neka je $F(x, y_N, \phi(x))$ Furijeov polinom reda $N_1 > N$, tj.

$$F(x, y_N, \phi(x)) = \sum_{k=0}^{N_1} A_k^{(N)} \cos kx + B_k^{(N)} \sin kx$$

Dobijamo da je

$$\begin{aligned}\delta(y_N) &= \frac{dy_N}{dx} - F(x, y_N, \phi(x)) \\ &= \sum_{k=0}^{N} (- k\, C_k^{(N)} - B_k^{(N)}) \sin kx + \\ &\quad + (k\, D_k^{(N)} - A_k^{(N)}) \cos kx - \\ &\quad - \sum_{k=N+1}^{N_1} (A_k^{(N)} \cos kx + B_k^{(N)} \sin kx)\end{aligned}$$

Kako je

$$- k\, C_k^{(N)} - B_k^{(N)} = 0$$

$$k\, D_k^{(N)} - A_k^{(N)} = 0$$

dobijamo da je

$$\delta(y_N) = - \sum_{k=N+1}^{N_1} (A_k^{(N)} \cos kx + B_k^{(N)} \sin kx).$$

Neka je maksimalna greška δ_0 tada ako je

$$\delta(y_N) = \sum_{k=N+1}^{N_1} | A_k^{(N)} | + | B_k^{(N)} | < \delta_0$$

tada se za rešenje uzima $y_N(x)$ i proces se završava. Ako je pak

$$\delta(y_N) \geq \delta_0$$

računanje se produžava, i pri tome možemo uzeti $y_N(x)$ za novu početnu iteraciju.

Najteži deo rada je nalaženje koeficijenata polinoma Furije $A_k^{(j)}$, $B_k^{(j)}$ funkcije $F(x, y, \phi(x))$. Računanje se može prekinuti ako je razlika izmedju svih susednih odgovarajućih koeficijenata dve susedne iteracije y_{j-1} i y_j manja od nekog ε. Izračunavanje se može vršiti i tako ako se na samom početku zada dovoljno veliki red N svih polinoma Furije. Tada ako su koeficijenti polinoma Furije $y_N(x)$ manji od ε, traženo rešenje je nadjeno. Proces ne mora konvergirati ako je red N svih polinoma $y_j(x)$ mali.

3.3. Navešćemo algoritam za nalaženje koeficijenata C_k, D_k rešenja $y(x)$, i on se sastoji u sledećem.

Zadaje se red polinoma N za sve iteracije, greška ε izračunavanja svih koeficijenata polinoma Furije, i funkcija $F(x, y, \phi(x))$.

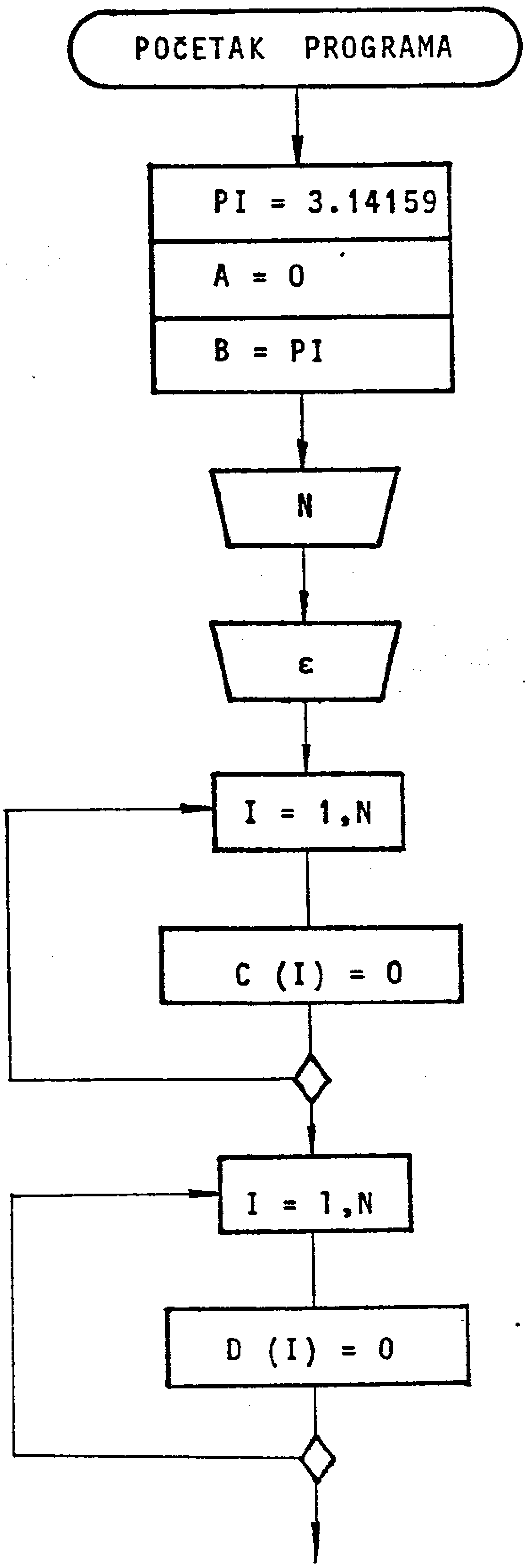
Koeficijenti Furije funkcije $F(x, y, \phi(x))$ računaju se trapeznim pravilom za izračunavanje integrala. Za tako dobijene koeficijente računaju se koeficijenti C_k, D_k. Proces računanja se završava kada je razlika izmedju dve susedne iteracije za nalaženje C_k, D_k manja od zadanog ε.

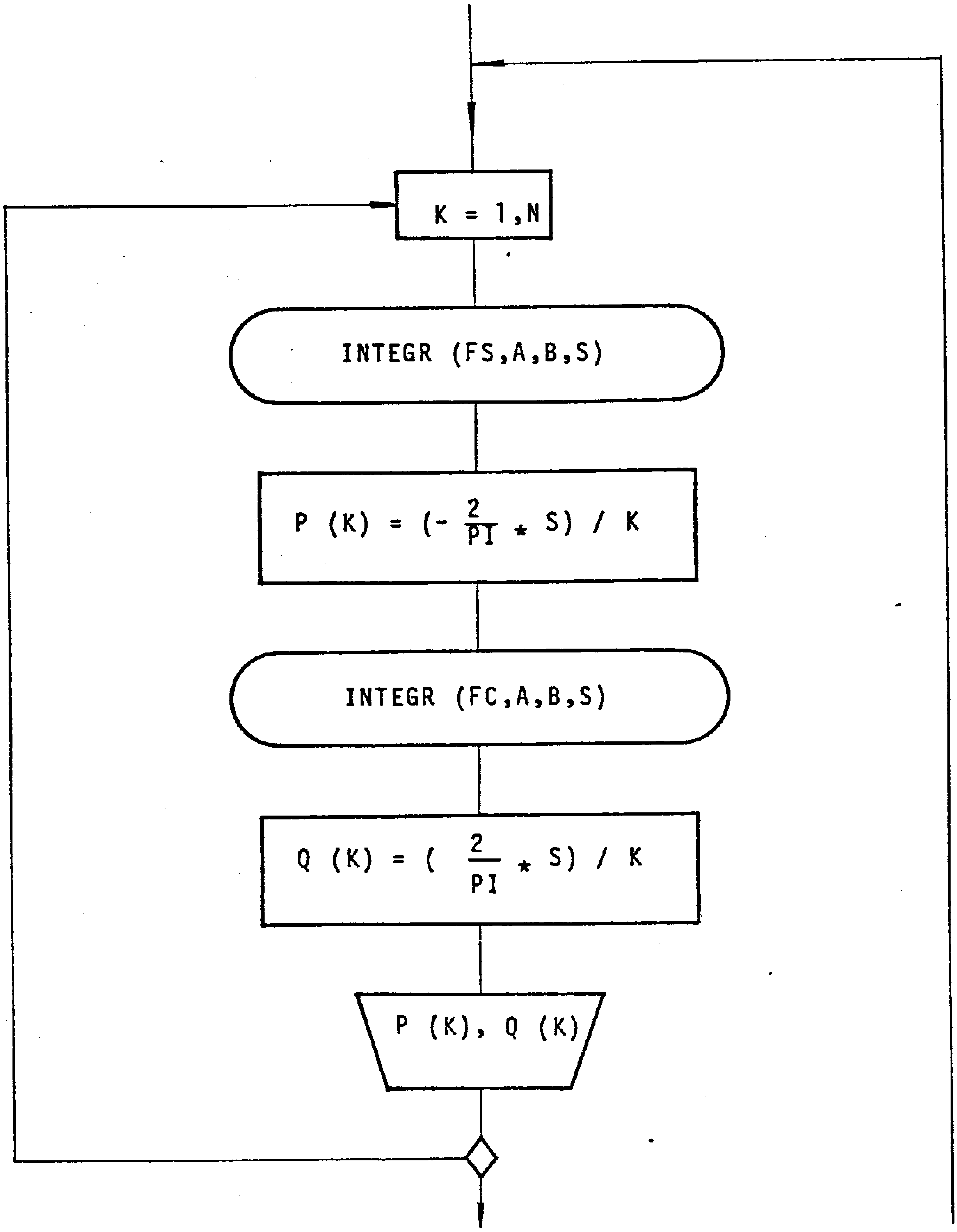
Neka je data diferencijalna jednačina

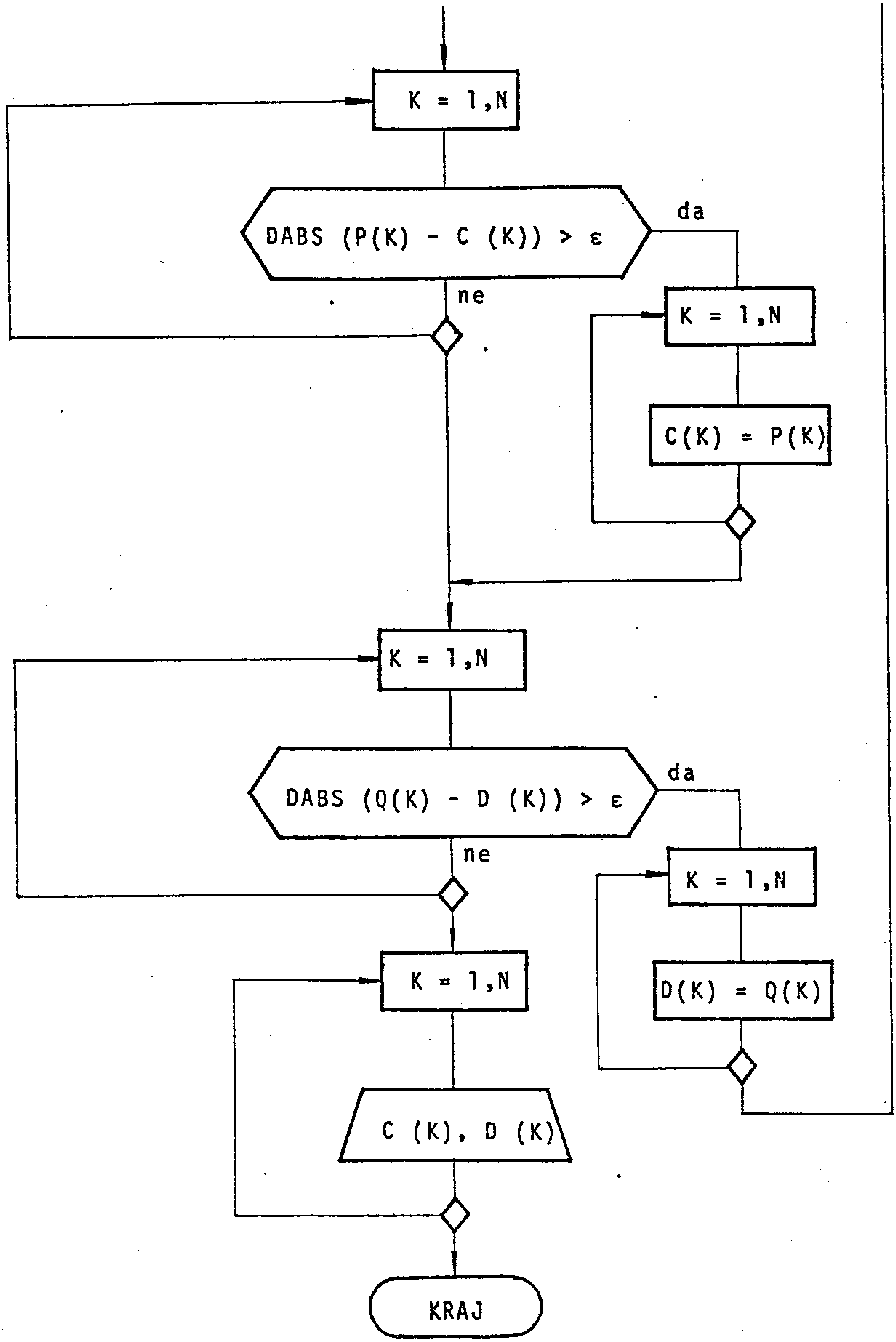
$$y' = y^2 + \frac{1}{5 - 4\cos x} \tag{49}$$

i neka je $N = 10$, a $\varepsilon = 0.1\ D - 10$. Navešćemo algoritam za nalaženje periodičnih rešenja, i zatim primenjujući dati algoritam za jednačinu (49) nadjeno je periodično rešenje tj. koeficijenti C_k, D_k reda Furije.

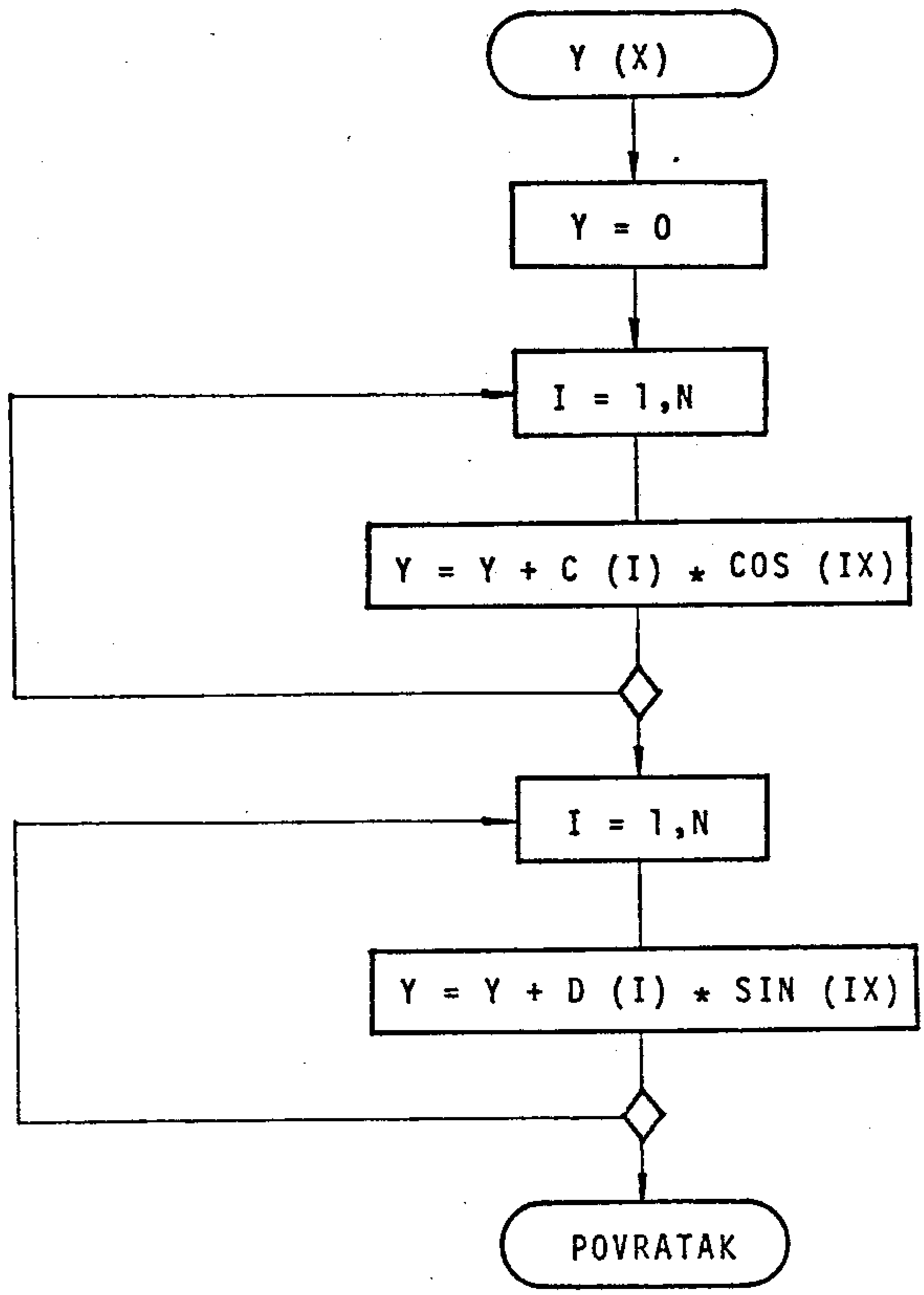
Algoritam programa:

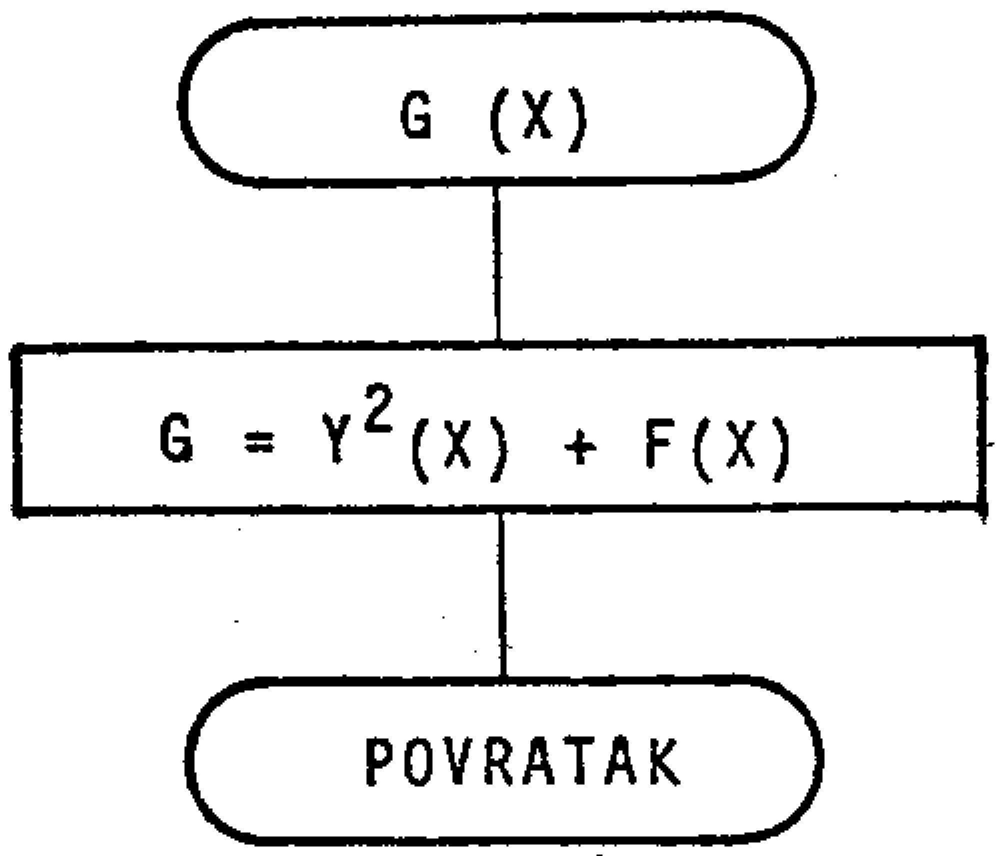


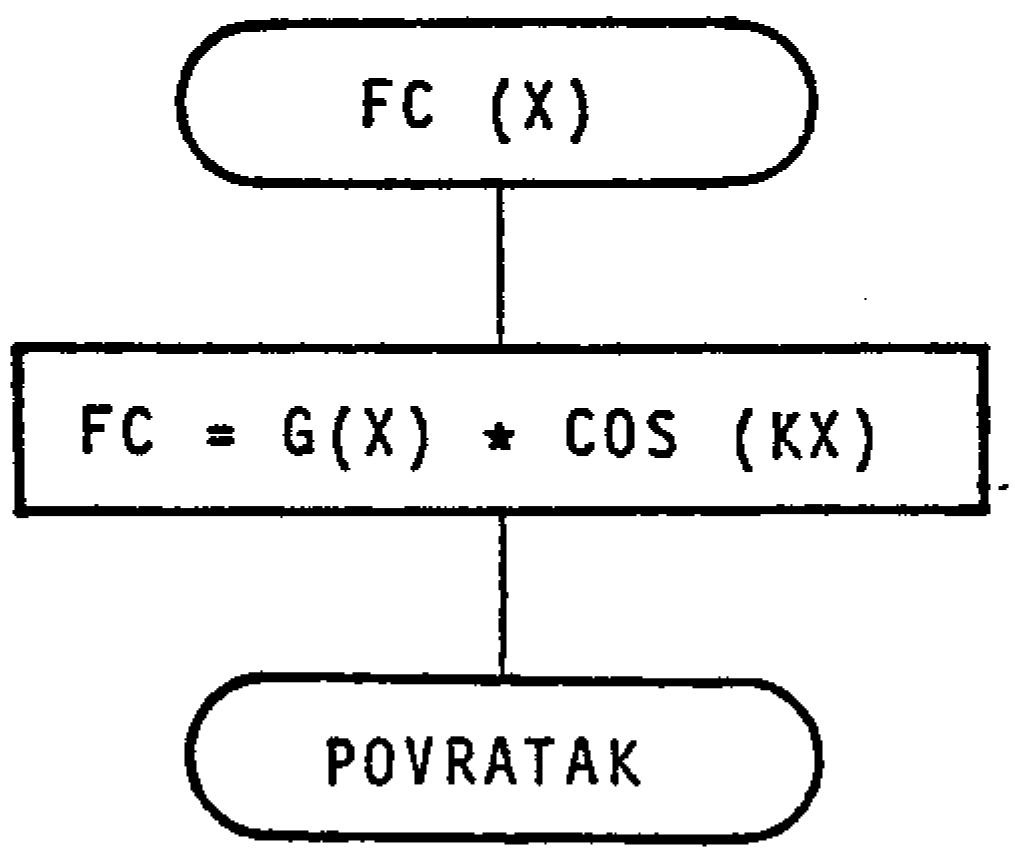

K = 1,N
INTEGR (FS,A,B,S)
P (K) = (- 2/PI * S) / K
INTEGR (FC,A,B,S)
Q (K) = (2/PI * S) / K
P (K), Q (K)

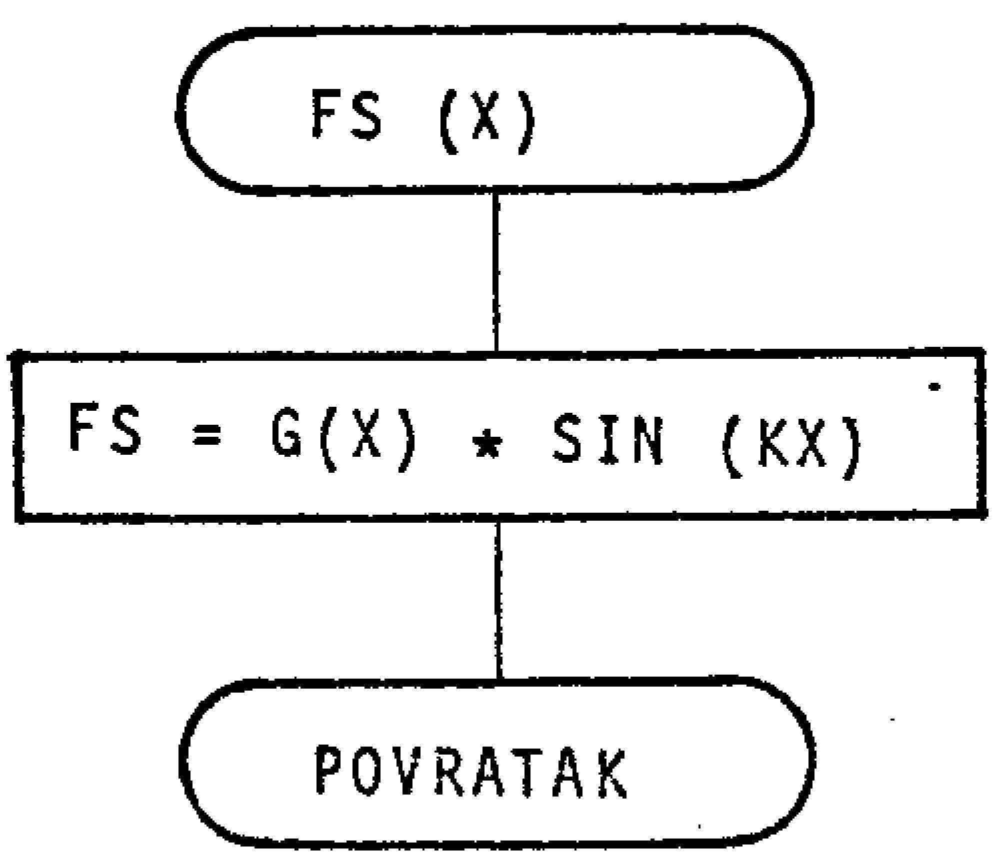

K = 1,N
DABS (P(K) - C (K)) > ε
da
ne
K = 1,N
C(K) = P(K)
K = 1,N
DABS (Q(K) - D (K)) > ε
da
ne
K = 1,N
D(K) = Q(K)
K = 1,N
C (K), D (K)
KRAJ

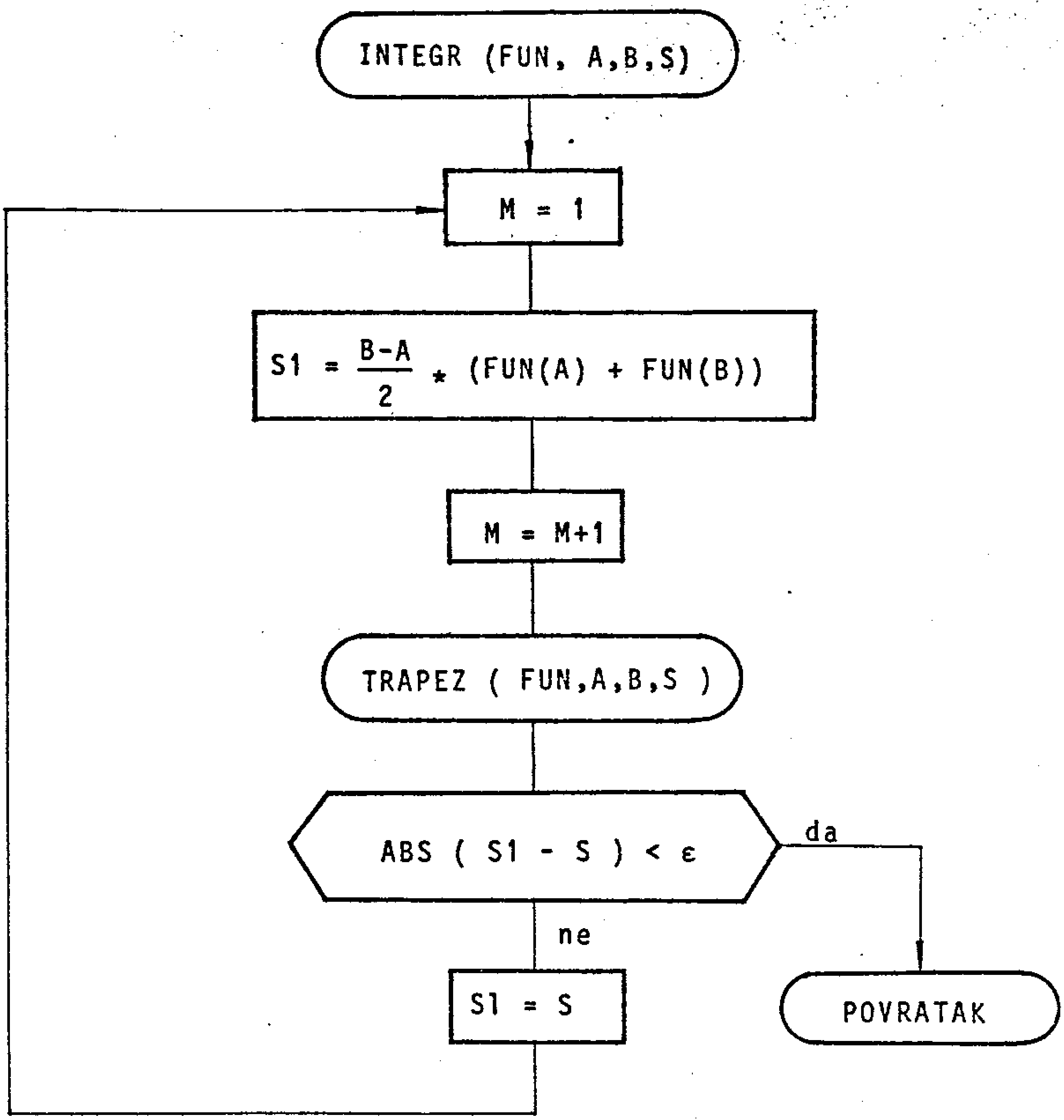
Algoritamske šeme potprograma:

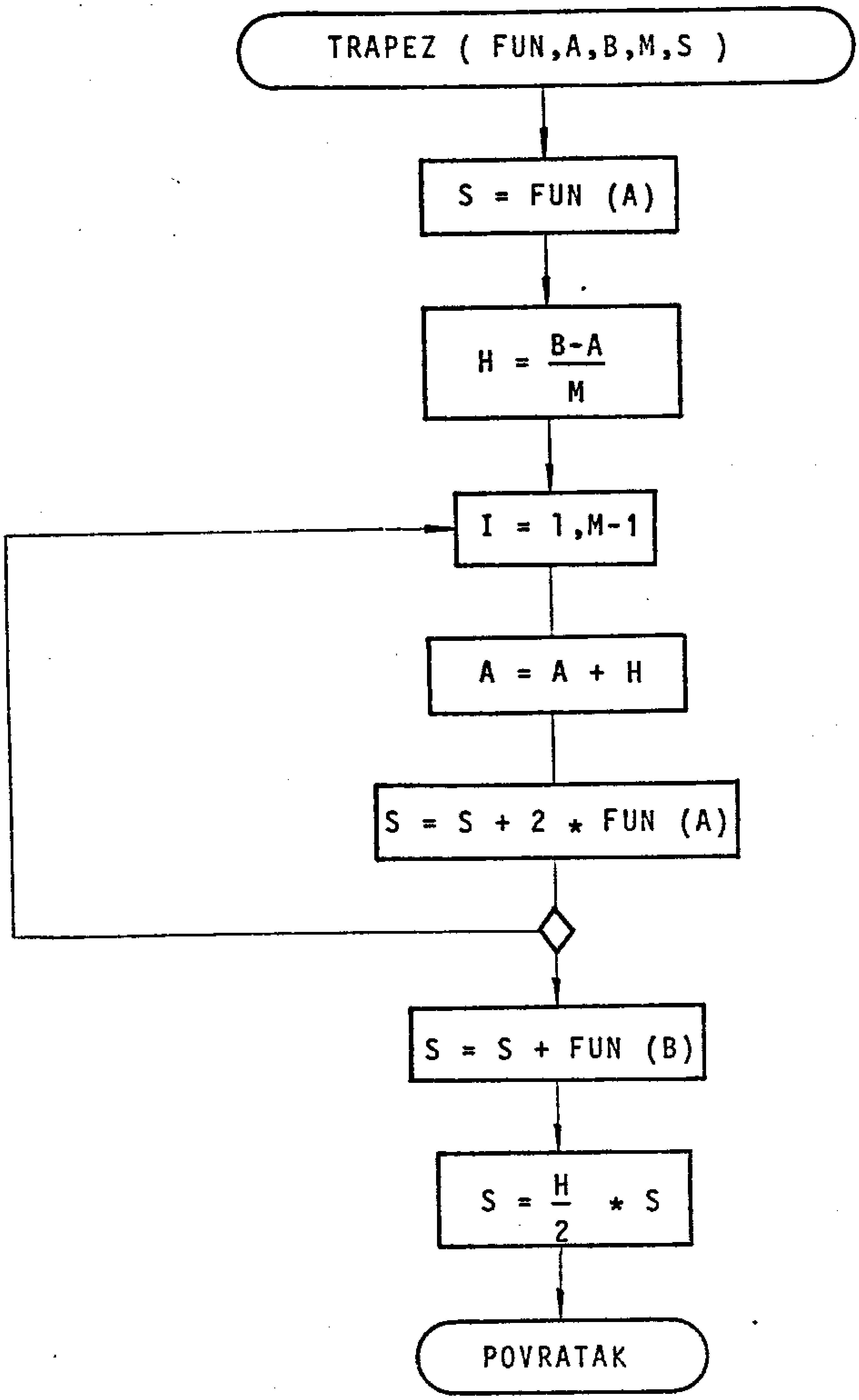



G (X)
G = Y2(X) + F(X)
POVRATAK


FC (X)
FC = G(X) * COS (KX)
POVRATAK


FS (X)
FS = G(X) * SIN (KX)
POVRATAK


INTEGR (FUN, A,B,S)
M = 1
S1 = $\frac{B-A}{2}$ * (FUN(A) + FUN(B))
M = M+1
TRAPEZ (FUN,A,B,S)
ABS (S1 - S) < ε
da
ne
S1 = S
POVRATAK


TRAPEZ (FUN,A,B,M,S)
S = FUN (A)
H = B-A / M
I = 1,M-1
A = A + H
S = S + 2 * FUN (A)
S = S + FUN (B)
S = H / 2 * S
POVRATAK

Program:

```
          REAL*8 C,D,P,Q,PI,A,B,Y,F,G,FC,FS,FUN,EPS,S
          COMMON N,K,C(100),D(100),P(100),Q(100)
          EXTERNAL Y,F,G,FC,FS,FUN
          PI=3.14159D0
          A=0.D0
          B=PI
          WRITE(5,1001)
    1001  FORMAT(' N=')
          READ(5,1002)N
    1002  FORMAT(I2)
          WRITE(6,10002)N
   10002  FORMAT(' N=',I2)
          WRITE(5,3001)
    3001  FORMAT(' EPSILON=')
          READ(5,3002)EPS
    3002  FORMAT(D7.1)
          WRITE(6,30002)EPS
   30002  FORMAT(' EPSILON=',D7.1/)
          DO 1 I=1,N
    1     C(I)=0.D0
          DO 2 I=1,N
    2     D(I)=0.D0
    1111  DO 1003 K=1,N
          CALL INTEGR(FS,A,B,S)
          P(K)=-((2.D0/PI)*S)/K
          CALL INTEGR(FC,A,B,S)
          Q(K)=((2.D0/PI)*S)/K
          WRITE(5,2002)K,P(K),K,Q(K)
          WRITE(6,2002)K,P(K),K,Q(K)
    2002  FORMAT(' P(',I2,')=',D13.6,10X,'Q(',I2,')=',D13.6)
    1003  CONTINUE
          WRITE(5,2345)
          WRITE(6,2345)
    2345  FORMAT(' ')
          DO 1101 K=1,N
          IF(DABS(P(K)-C(K)).GT.EPS)GOTO 1102
    1101  CONTINUE
          GOTO 1104
    1102  DO 1103 K=1,N
          C(K)=P(K)
    1103  CONTINUE
    1104  DO 1105 K=1,N
          IF(DABS(Q(K)-D(K)).GT.EPS)GOTO 1107
    1105  CONTINUE
          WRITE(5,1234)
          WRITE(6,1234)
    1234  FORMAT(////'            C                              D'//)
          DO 1106 K=1,N
          WRITE(5,1109)C(K),D(K)
    1106  WRITE(6,1109)C(K),D(K)
    1109  FORMAT(' ',D13.6,10X,D13.6)
          STOP
    1107  DO 1108 K=1,N
          D(K)=Q(K)
```

```
 1108 CONTINUE
      GOTO 1111
      STOP
      END
```

```
      REAL FUNCTION Y*8(X)
      REAL*8 C,D,P,Q,PI,A,B,X
      COMMON N,K,C(100),D(100),P(100),Q(100)
      Y=0.D0
      DO 10 I=1,N
   10 Y=Y+C(I)*DCOS(I*X)
      DO 20 I=1,N
   20 Y=Y+D(I)*DSIN(I*X)
      RETURN
      END
```

```
      REAL FUNCTION F*8(X)
      REAL*8 C,D,P,Q,PI,A,B,X
      COMMON N,K,C(100),D(100),P(100),Q(100)
      F=1.D0+1.D0/(5.D0-4.D0*DCOS(X))
      RETURN
      END
```

```
      REAL FUNCTION G*8(X)
      REAL*8 C,D,P,Q,PI,A,B,X,Y,F
      COMMON N,K,C(100),D(100),P(100),Q(100)
      G=Y(X)*Y(X)+F(X)
      RETURN
      END
```

```
      REAL FUNCTION FC*8(X)
      REAL*8 C,D,P,Q,PI,A,B,X,G
      COMMON N,K,C(100),D(100),P(100),Q(100)
      FC=G(X)*DCOS(K*X)
      RETURN
      END
```

```
      REAL FUNCTION FS*8(X)
      REAL*8 C,D,P,Q,PI,A,B,X,G
      COMMON N,K,C(100),D(100),P(100),Q(100)
      FS=G(X)*DSIN(K*X)
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE INTEGR(FUN,A,B,S)
      REAL*8 C,D,P,Q,PI,A,B,X,FUN,S,TRAPEZ,S1
      COMMON N,K,C(100),D(100),P(100),Q(100)
      M=1
      S1=((B-A)/2.D0)*(FUN(A)+FUN(B))
10    M=M+1
      CALL TRAPEZ(FUN,A,B,M,S)
      IF(DABS(S1-S).LT..1D-5)GOTO 20
      S1=S
      GOTO 10
20    RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE TRAPEZ(FUN,A,B,M,S)
      REAL*8 C,D,P,Q,PI,A,B,X,FUN,S,H
      COMMON N,K,C(100),D(100),P(100),Q(100)
      S=FUN(A)
      H=(B-A)/M
      DO 10 I=1,M-1
      A=A+H
10    S=S+2.D0*FUN(A)
      S=S+FUN(B)
      S=(H/2.D0)*S
      RETURN
      END
```

Rešenje:

C	D
-0,309948D-16	-0,584013D-11
0,774866D-17	0,730016D-12
-0,193711D-17	-0,121660D-12
0,484200D-18	0,228038D-13
-0,120972D-18	-0,455487D-14
0,302169D-19	0,948932D-15
-0,750213D-20	-0,201940D-15
0,187553D-20	0,441744D-16
-0,416785D-21	-0,872581D-17
0,104196D-21	0,000000D+00

L I T E R A T U R A

[1] M.Bertolino: Solutions asymptotiques d'une équations diff. au deuxiémme membre rationnel. Mat. vesnik 3(18) sv.4, 1966, 275-285.

[2] M.Bertolino: Generalisation de "l'equation chimique" de Petrovitch. Mat.vesnik 7(22) sv.1, 1970, 95-102.

[3] M.Bertolino: Egzistencija asimptotskih rešenja jedne klase diferencijalnih jednačina. Vesnik Društva mat. i fizičara SRS, XV 1963, 79-124.

[4] M.Bertolino: Zone d'influence qualitative de certaines functions. Mat.vesnik 5(20) sv.2, 1966, 189-194.

[5] К.Борсук: Теория ретрактов, Москва 1971.

[6] H.Bohr: Almost periodic functions, New York 1951.

[7] I.Barbalat: Applications du principe topologique de T.Ważewski aux équations diff. du second ordre. Annales Pol.Math. V, 1958.

[8] Б.П.Демидович: Лекции по математической теории устойчивости, 1967.

[9] Б.П.Демидович: Об одном случае почти периодичности решения обыкнного дифф. уравнения 1-го порядка. УМН Т VIII, № 6 /58/, 1953.

[10] В.М.Лебедева: О количестве периодических решений дифф. уравнения первого порядка с полинсминалной правой частью. Дифф.ур. 4, № 8, 1968.

[11] В.М.Лебедева: О числе периодических решений дифф. уравнения первого порядка с правой частью в виде неполного многочлена. Дифф.уравнения 5, № 6, 1969.

[12] S.Lefschetz: Differential equations: Geometric theory, New York 1957.

[13] J.Massera: The existence of periodic solutions of system of differential equations. Duke Math. Journal 17 (1950), 457-475.

[14] Z.Mikołajska: Une remarque sur l'allure des solutions d'une équations différentielle, Ann.Polonici Math. XXXV, 1977.

[15] Z.Mikołajska: Sur l'allure asymptotique des intégrales des systémes d'équations diff. au voisiuage d'un point asymptotiquement singulier, Ann.Pol.Math. VI (1955).

[16] Н.В.Митрохина: Периодические решения дифф. уравнения первого порядка $\frac{dy}{dt} = A(t)\, y + f(t, y)$, Дифф. ур. Труды techинститутов РСФСР вы 3, 1974.

[17] В.А.Плисс: Нелокальные проблемы теории колебаний, "Наука" 1964, 127-130.

[18] A.Pelczar: On some extensions of the retract theorem of T. Ważewski V, Bulletin de l'Académie Pol. des sciens, vol.XXI, No 5, 1973.

[19] Ю.А.Рябов, Д.Н.Лика: Методы итераций и мажорирующие уравнения Ляпунова в теории нелинейных колебаний, Кишинев 1974.

[20] Ю.А. Рябов: Построение периодических и условно - периодических численно - аналитических решений с помощью ЭВМ, Summer school on ordinary diff. equations, Difford, 1974.

[21] Ю.Ю.Рябов, М.Ф.Королев: О построении периодических решений некоторых линейных и квазилинейных уравнений, Дифф. ур. Т 21, № 2, 1975.

[22] Р.Рейссиг, Г.Сансоне, Р.Конти: Качественная теория нелинейных дифф. уравнений, "Наука" Москва 1974.

[23] В.В.Степанов: Курс дифференциальных уравнений, Москва, 1958.

[24] В.В.Степанов, В.В.Непыцкий: Качественная теория дифференциальных уравнений, 1947.

[25] М.Е.Сагалович: О топологической структуре окресности особой точки дифференциального уравнения, Дифф. ур. Т XI, № 11, 1975.

[26] T.Ważewski: Sur un principe topologique de l'allure asymptotique des intégrales des équations diff. ordinaries, Ann. de la Soc. Pol. Math. T. 20, 279-313.

[27] B.L.Van der Waerden: Einführung in die algebraische geometrie, Berlin, 1939.

[28] Ф.Хартман: Обыкновенные дифференциальные уравнения, Москва, 1970.

[29] В.А.Якубович, В.М.Старжинский: Линейные дифф. уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения, Москва, 1972.

[30] J.Knežević: Asimptotska rešenja nekih sistema diferencijalnih jednačina, Mat.vesnik 13 (28), 1976, str. 63-69.

[31] J.Knežević: Slučaj periodičnih funkcija kod generalizacije "hemijske jednačine", Mat.vesnik 13,(28), 1976, str. 70-74.

[32] J.Knežević: Jedna diferencijalna jednačina racionalne desne strane, Mat.vesnik 13 (28), 1976, str.75-79.

[33] Ю.Кнежевич: Исследование периодических и почти периодических решений обыкновенных дифф. уравнений, Publications de l'Institut Mathematique, T 25 (39) 1979, 51-54.