U N I V E R Z I T E T U B E O G R A D U

Dr DRAGOŠ CVETKOVIĆ

Dr MIRKO MILIĆ

TEORIJA GRAFOVA I NJENE PRIMENE

BIGZ 1831

BEOGRADSKI IZDAVAČKO-GRAFIČKI ZAVOD

U N I V E R Z I T E T U B E O G R A D U

Dr DRAGOŠ CVETKOVIĆ

Dr MIRKO MILIĆ

TEORIJA GRAFOVA I NJENE PRIMENE

BEOGRADSKI IZDAVAČKO-GRAFIČKI ZAVOD
BEOGRAD, 1971.

Rešenjem rektora Univerziteta u Beogradu, br. 06-468/1 od 8. aprila 1971. godine, na predlog Komisije za publikacije Beogradskog univerziteta, ova knjiga je odobrena kao stalni pomoćni udžbenik.

PREDGOVOR

Govoreći apstraktnim matematičkim jezikom, graf je konačan skup snabdeven binarnom relacijom. U primenama pojam grafa dobija svoju punu vrednost kada se skupovi i relacije na njima predstavljaju geometrijskim figurama koje su obrazovane od niza tačaka spojenih krivim linijama. Teorija grafova proučava osobine ovih figura koje ostaju invarijantne pri kontinualnim deformacijama, tj. neprekidnim preslikavanjima.

Teorija grafova je jedna od onih matematičkih disciplina koje poslednjih godina odlikuje izuzetno intenzivan razvoj[1]*. Gipkost aparata teorije grafova omogućava da se brojni problemi sa konačnim skupovima, iz veoma raznorodnih naučnih oblasti, formulišu i rešavaju na jedinstven način. Primena teorije grafova i njenih metoda zauzima danas značajno mesto u teoriji električnih kola, teoriji sistema automatskog upravljanja, teoriji konačnih automata, operacionom istraživanju, teoriji pouzdanog prenosa informacija, zatim u hemiji, ekonomskim naukama, sociologiji, biologiji i dr. Glavni razlog za ovako širok raspon primena leži, u prvom redu, u jasnoj geometrijskoj predstavi koju graf sadrži i koja je bliska intuitivnoj predstavi koju čovek ima o osobinama i ponašanju objekta koji se predstavlja grafom.*

Ova knjiga će poslužiti čitaocu da upozna osnovne pojmove i teoreme teorije grafova kao matematičke discipline, i neke mogućnosti njene primene. Knjiga ne pretenduje na iscrpnost; njen cilj je da uvede čitaoca u ovu oblast.

Prvi deo pod nazivom »Uvod u teoriju grafova« izrađen je na osnovu predavanja koja je prvopotpisani održao studentima Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu školske 1969/70. *godine u okviru jednosemestralnog fakultativnog kursa posvećenog teoriji grafova. U uvodnom delu su date definicije osnovnih pojmova, iznet je, u kratkim potezima, istorijat teorije grafova i prikazano je, fragmentarno, današnje stanje teorije grafova. Odabrana poglavlja, koja zatim slede, obrađuju teorijske osnove najvažnijih primena teorije grafova. Mnogobrojni primeri koji su uključeni u tekst služe kao ilustracija ali i ukazuju na mogućnosti primene. Primeri se odnose, na primer, na sledeće oblasti: elektrotehnika, hemija, organizacija rada, sociologija, šah i druge igre itd. Izvestan broj teorema se daje bez dokaza, ali se pri tom čitalac upućuje na literaturu gde se dokaz može naći. Citirana literatura može, u svakom slučaju, da posluži zainteresovanom čitaocu kao polazna osnova za uvođenje u inače obimnu literaturu teorije grafova. Za praćenje ovog dela knjige potrebno je elementarno znanje iz opšte algebre, teorije skupova i matričnog računa.*[2]

---

[1] Videti odeljak 1.4 (»Današnje stanje teorije grafova«) i tekst »Jedno mišljenje o teori grafova« iz Priloga.

[2] Videti, na primer, sledeće knjige:

1. D. S. Mitrinović, D. Ž. Đoković, *Polinomi i matrice*, Beograd, 1966.
2. Đ. Kurepa, *Algebra I, II*, Zagreb, 1965; II izdanje: Beograd, 1971.

Drugi deo je posvećen primeni teorije grafova u analizi električnih mreža. Pošto se uvodi pojam električne mreže i njenog grafa, iznose se osobine topoloških matrica koje se koriste za formulisanje jednačina električne mreže. Na kraju se ukratko diskutuje problem rešavanja jednačina električnih mreža pomoću topoloških formula. Uopšteno govoreći, električna mreža se može shvatiti kao graf kome je pridružena jedna algebarska struktura. Poznato je da se modelom električne mreže mogu predstaviti razni fizički sistemi i pojave (toplotne, hemijske, atomske, optičke, ekonomske, biološke i dr.). Informacija dobijena analizom električne mreže pruža na jedan pregledan način sve potrebne podatke o polaznom sistemu, ističući pri tome strukturalne osobine koje su upravo i dobijaju pomoću grafa. Otuda i potiče interes za analizu električnih mreža u okvirima teorije grafova. Podrazumeva se da čitalac poznaje osnove linearne algebre, a za praćenje 4. i 5. glave ovog dela korisno je poznavanje osnova teorije električnih kola, na primer, u obimu u kome se predaje studentima druge godine Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu. Treća glava sadrži u sažetom obliku neophodni minimum iz teorije grafova koji je potreban postdiplomskim studentima za praćenje predmeta Odabrana poglavlja iz analize električnih mreža.

Treći deo, Prilozi, sadrži, između ostalog, primere još nekih primena teorije grafova.

Iako se pojedini delovi knjige ne nadovezuju direktno jedan na drugi, autori su se trudili da knjiga u konačnom obliku predstavlja celinu. Velike teškoće autorima je zadavalo pitanje terminologije koja ni u literaturi na stranim jezicima nije standardizovana. Opšte šarenilo u terminologiji teorije grafova potiče otuda što se aparat teorije grafova dugi niz godina razvijao nezavisno u raznim i međusobno nepovezanim naučnim disciplinama. Uz to, situacija je kod nas još utoliko specifična što je na srpskohrvatskom jeziku objavljeno vrlo malo tekstova koji su posvećeni teoriji grafova. Autori su u knjizi koristili jedinstvenu terminologiju osim u nekim slučajevima, na šta je čitaocu skrenuta pažnja u fusnotama. Autori ne smatraju da su upotrebljeni termini najbolje odabrani ni da su konačni; svaka korisna primedba ili ideja čitalaca biće rado prihvaćena.

Knjiga je namenjena širokom krugu čitalaca, počev od studenata većine fakulteta do stručnjaka raznih specijalnosti. Posebno, na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu elementi teorije grafova ulaze u programe sledećih predmeta: Matematika I, Teorija električnih kola, Odabrana poglavlja iz analize električnih mreža, Sistemi automatskog upravljanja, Regulacija i dr. Stoga studenti pomenutog fakulteta mogu koristiti ovu knjigu kao pomoćni udžbenik.

Autori zahvaljuju profesoru D. S. Mitrinoviću, koji je dao inicijativu za izradu ove knjige. Profesor Đ. Kurepa je pročitao prvi i drugi deo ove knjige, a profesor R. Horvat drugi deo. Oni su dali više korisnih primedbi, te su na taj način doprineli poboljšanju teksta, na čemu im autori zahvaljuju. Zahvaljujemo takođe M. Stojiću i B. Laziću na prilozima koje su pripremili za ovu knjigu.

Beograd, februara 1971. *Autori*

OZNAKE

$\{\cdots\}$	skup
$\{x \mid S(x)\}$	skup elemenata x za osobinom $S(x)$
$\lvert X \rvert$	broj elemenata skupa X
$\Rightarrow$	implikacija
$\Leftrightarrow$	ekvivalencija
$\in$	pripada
$\notin$	ne pripada
$\forall$	za svako
$\subset$	inkluzija
$\cup$	unija skupova
$\cap$	presek skupova
$\varnothing$	prazan skup
$\times$	*Descartesov* proizvod skupova, jaki proizvod grafova
	Matrice i vektori su označeni polumasnim slovima.
$[a_{ij}]_1^n$	kvadratna matrica reda n čiji je elemenat iz i-te vrste i j-te kolone jednak a_{ij}
$\mathbf{I}$	jedinična matrica
$\mathbf{A}^t$	transponovana matrica matrice $\mathbf{A}$
det $\mathbf{A}$	determinanta kvadratne matrice $\mathbf{A}$
r ($\mathbf{A}$)	rang matrice $\mathbf{A}$
max . . . (min . . .)	najveći (najmanji) od brojeva koji su navedeni posle simbola max (min)
$G = (X, U)$	graf sa skupom čvorova X i skupom grana U
$\overline{G}$	komplement grafa G

I DEO

UVOD U TEORIJU GRAFOVA

Dr DRAGOŠ CVETKOVIĆ

1. UVODNI DEO

1.1. POJAM GRAFA

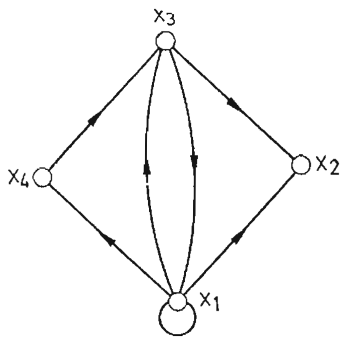
Postoji više načina da se definiše graf. Počećemo sa definicijom grafa prema *C. Bergeu* [6].

Posmatrajmo neprazan skup $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Partitivni skup $P(X)$ skupa X je skup svih delova (podskupova) skupa X, tj. $P(X) = \{\varnothing, \{x_1\}, \ldots, \{x_n\}, \{x_1, x_2\}, \ldots, X\}$. Neka je Γ jednoznačno preslikavanje skupa X u skup $P(X)$, tj. neka je $(\forall x_i \in X), \Gamma x_i \in P(x)$. Preslikavanjem Γ se, dakle, svakom elementu x_i skupa X pridružuje jedan podskup A_{x_i} skupa X. Γ se može protumačiti i kao višeznačno preslikavanje skupa X u samoga sebe.

Graf je definisan nepraznim skupom X i višeznačnim preslikavanjem Γ skupa X u X. Preciznije, graf G je uređen par koji se sastoji od X i Γ. Simbolički se piše $G = (X, \Gamma)$.

Primer. Neka je $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, a Γ dato sa $\Gamma x_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $\Gamma x_2 = \varnothing$, $\Gamma x_3 = \{x_1, x_2\}$, $\Gamma x_4 = \{x_3\}$. Ovim je definisan jedan graf.

Graf se može očigledno predstaviti crtežom na sledeći način. Elemente skupa X, koje ćemo zvati *čvorovima* grafa, predstavljamo proizvoljnim međusobno različitim tačkama u ravni. (Na slikama su čvorovi označeni relativno velikim kružićima.) Za svako i povezujemo tačku, koja predstavlja čvor $x_i \in X$, posebnim neprekidnim glatkim linijama sa svakom od tačaka koje predstavljaju čvorove iz A_{x_i}. Ove linije koje spajaju po dva čvora zovu se *grane*[1] grafa. Svaka grana je orijentisana (na slici se to označava strelicom) od čvora x_i ka čvoru iz A_{x_i}. Osim kroz pomenuta dva čvora, grana ne prolazi kroz druge čvorove grafa.



Sl. 1

Na sl. 1 je predstavljen graf iz napred navedenog primera.

Grana čija se oba kraja nalaze u istom čvoru naziva se *petlja*. Orijentacija petlje nema posebnog značaja, jer ma kako da postavimo strelicu, petlja vodi iz čvora, recimo, x_1 u isti čvor x_1. Stoga se kod petlje strelica na crtežu obično izostavlja. Pojedini parovi čvorova mogu biti spojeni sa dve grane suprotnih orijentacija. Obično se ove dve grane na crtežu pred-

[1] U radovima M. Stojakovića upotrebljen je termin *spojnica*. Termin *grana* je usvojen zato što je on u opštoj upotrebi u literaturi iz oblasti elektrotehnike.

stavljaju jedinstvenom linijom koja se dvostrano orijentiše. Uz ovu konvenciju graf sa sl. 1. može se predstaviti kao na sl. 2.

Graf kod kojeg su sve grane jednostrano orijentisane naziva se *orijentisan* ili *antisimetričan* graf.

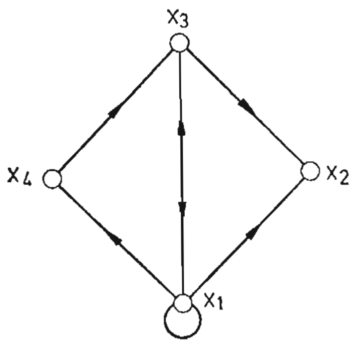
Drugu važnu klasu grafova čine grafovi kod kojih su sve grane (osim petlji) orijentisane dvostrano. Pošto su sada oba smera kretanja po grani ravnopravna, možemo smatrati da su grane neorijentisane, te se na crtežu izostavljaju strelice. Ovakvi grafovi nazivaju se *neorijentisani* ili *simetrični grafovi.* Dva čvora neorijentisanog grafa zovu se *susedna* ako su spojena granom. Broj susednih čvorova nekog čvora zove se *stepen* čvora.

Grafovi se dele na *konačne* i *beskonačne* grafove prema tome da li je skup čvorova X konačan ili beskonačan. U ovoj knjizi razmatraćemo, uglavnom, konačne grafove.

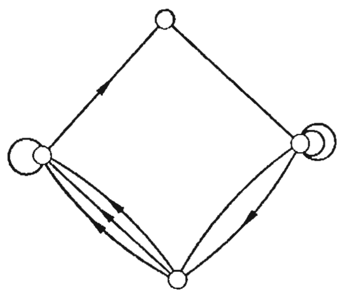
Napomenimo da se graf može definisati i opisom njegovog crteža, tj. kao skup tačaka u ravni, od kojih neke međusobno povezane neprekidnim glatkim orijentisanim ili neorijentisanim linijama.

Geometrijska predstava grafa (crtež grafa) sugeriše nam generalizaciju pojma grafa. Mogu se zamisliti grafovi kod kojih se između dva čvora nalazi više od jedne grane iste orijentacije. Naravno, ovde su moguće i višestruke petlje. Ovakvi grafovi se nazivaju *multigrafovi.*

Graf je poseban slučaj multigrafa. Definicija orijentisanih, neorijentisanih, konačnih i beskonačnih grafova se na prirodan način proširuje i na multigrafove.



Sl. 2



Sl. 3

Na sl. 3 je predstavljen jedan multigraf.

Graf može da bude predstavljen i jednom kvadratnom matricom čiji je red jednak broju čvorova grafa. Elemenat a_{ij} na preseku i-te vrste i j-te kolone ove matrice je jednak broju grana koje polaze iz čvora x_i a završavaju se u čvoru x_j. Ova matrica se zove *matrica susedstva* grafa i obeležava se sa **A**.

Matrica susedstva napred navedenog grafa (sl. 1) je:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ako dopustimo da dva čvora mogu biti spojena najviše jednom granom iste orijentacije, elementi matrice **A** mogu biti samo 0 ili 1. Matrice sa ovakvim elementima zovu se *dijadske* ili *sociometrijske* matrice (videti [42], str. 486—489).

Elementi matrice susedstva multigrafa su prirodni brojevi i nula. Multigraf sa sl. 3 ima matricu susedstva.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrica susedstva **A** neorijentisanog grafa je simetrična matrica, tj. $\mathbf{A}=\mathbf{A}^t$. Za matricu susedstva $\mathbf{A}=[a_{ij}]_1^n$ orijentisanog grafa važi

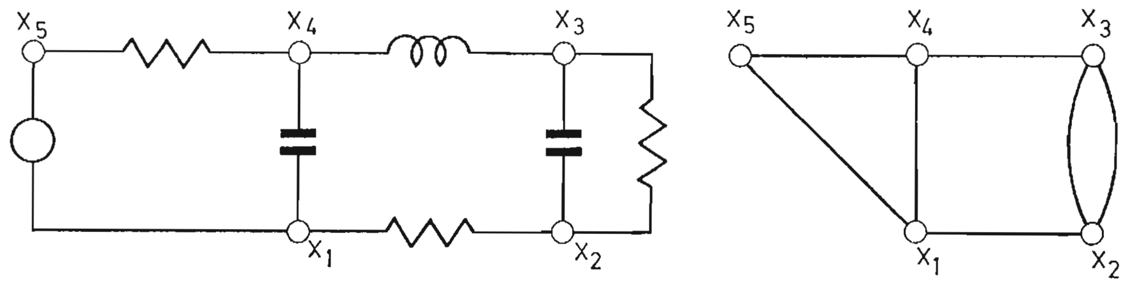
$$(\forall\, i, j \in \{1, \ldots, n\}) \quad a_{ij}=1, \Rightarrow a_{ji}=0 \quad (i \neq j).$$

Trag matrice **A** je, po definiciji, jednak zbiru dijagonalnih elemenata matrice, tj. $\operatorname{tr}\mathbf{A}=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Očigledno je da multigraf nema petlji ako i samo ako je $\operatorname{tr}\mathbf{A}=0$.

Pojam grafa se pojavljuje u mnogim naučnim disciplinama i, uopšte, čovekovim delatnostima. Poseban značaj ima ovaj pojam u elektrotehnici, kompjuterstvu i nauci o organizaciji rada. Grafovima se, na primer, mogu predstaviti mreže telekomunikacija, električne šeme, sistemi jednačina koje opisuju raspodelu struja u električnom kolu, programi za kompjutere, mreže puteva ili železničkih pruga itd. Navešćemo nekoliko primera.

a) Mogućnost kretanja vozila kroz neki grad može se predstaviti grafom. Raskrsnice predstavljaju čvorove grafa, a ulice grane. Grana je orijentisana ako je odgovarajuća ulica jednosmerna za saobraćaj. Neorijentisane grane odgovaraju ulicama kod kojih je saobraćaj mogućan u oba smera.

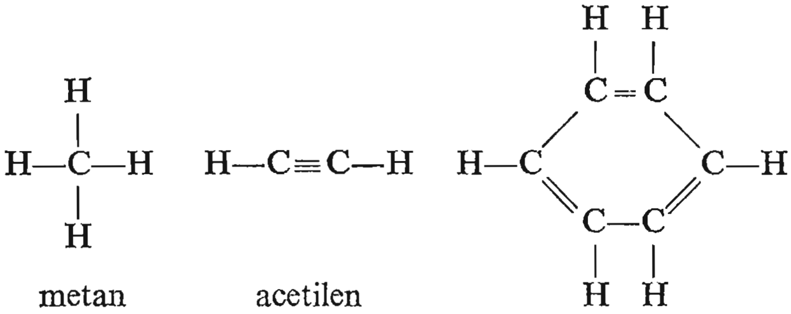
b) *Električne mreže* predstavljaju različite sklopove generatora, otpornika, kalema, kondenzatora i drugih električnih elemenata. Ovi elementi koji imaju dva kraja nalaze se uključeni u pojedinim granama mreže. Čvorovi mreže su tačke u kojima se sustiču bar tri grane mreže. Na sl. 4 dat je primer električne mreže.



Sl. 4

Električnoj mreži se može pridružiti jedan multigraf. Čvorovi multigrafa odgovaraju čvorovima mreže. Svakoj grani koja vezuje dva čvora u električnoj mreži odgovara jedna neorijentisana grana u multigrafu između odgovarajućih čvorova (sl. 4).

c) U *hemiji* se multigrafovima predstavlja struktura međusobnih veza atoma u mulekulu. Na sl. 5 je dato nekoliko primera.



metan acetilen benzol

Sl. 5

d) Različiti odnosi između pojedinaca u nekoj grupi ljudi mogu se takođe predstaviti grafom. Pojedinci se predstavljaju čvorovima grafa, a orijentisane ili neorijentisane grane mogu da označavaju takve odnose pojedinaca kao što su poznanstvo, simpatija, uticaj, dominacija, srodstvo itd. Grafovi se u ovakvim slučajevima obično nazivaju sociogrami. Odavde i potiče naziv sociometrijske matrice, koji je ranije naveden.

Turnir sa n takmičara $x_1, \ldots, x_n$, u kome svaki takmičar igra sa svakim i nijedna borba se ne završava nerešeno, možemo predstaviti orijentisanim grafom čiji su čvorovi obeleženi sa $x_1, \ldots, x_n$. U ovom grafu su čvorovi x_i i x_j povezani orijentisanom granom, koja ide od x_i ka x_j, ako i samo ako je takmičar x_i pobedio takmičara x_j. Ovakvi grafovi se obično nazivaju *turniri*.

Pomenimo zatim tzv. *genealoška stabla* ili *rodoslovlja* koja opisuju odnose roditelj — deca neke grupe ljudi. Slične strukture su i grafovi koji opisuju hijerarhiju komandovanja u vojnim ili drugim organizacijama. U ovim grafovima vodi grana iz čvora x_i u čvor x_j ako i samo ako je lice x_i neposredni starešina licu x_j.

1.2. IZ ISTORIJE TEORIJE GRAFOVA

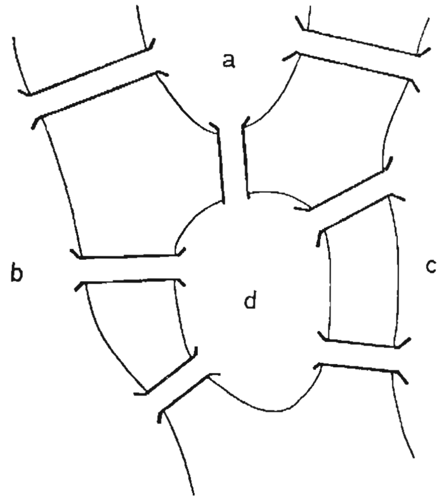
a) Jedan od najstarijih poznatih problema koji je u vezi sa grafovima je tzv. *problem kenigsberških mostova.*

Kenigsberg leži na reci sa ostrvima. Pojedini delovi grada su povezani mostovima, kao što se vidi na sl. 6. Godine 1736. građani Kenigsberga su pokušavali da odgovore na pitanje da li se može preći preko svih sedam mostova tako da se nijedan ne pređe više nego jedanput. Odrečan odgovor na ovo pitanje dao je *Euler*.

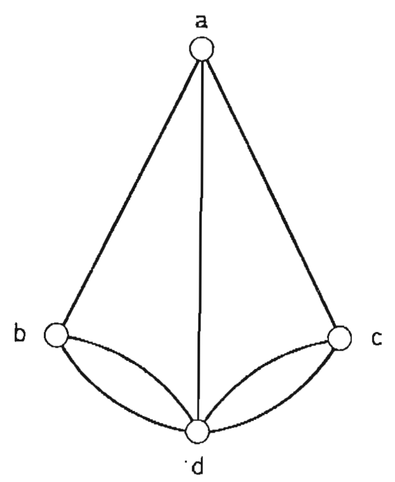
Situacija sa mostovima može se prikazati multigrafom na sl. 7. Problem se može formulisati i ovako: da li se graf sa sl. 7 može nacrtati tako da se olovka ne podiže sa hartije i ne prelazi po već povučenoj liniji? Za grafove koji se mogu nacrtati na ovaj način kaže se da poseduju *Eulerov* lanac. Poznata je teorema koja precizira uslove za postojanje *Eulerovog* lanca:

Multigraf poseduje Eulerov lanac ako i samo ako je povezan i poseduje dva ili nijedan čvor neparnog stepena.

b) *G. Kirchhoff* je 1847. god. objavio članak [36] u kojem su izložene osnove analize električnih mreža. Bitnu ulogu u *Kirchoffovim* razmatranjima igraju pojmovi teorije grafova. Teorija grafova omogućuje da se tzv. prvi i drugi *Kirchhoffov*



Sl. 6



Sl. 7

zakon iz elektrotehnike najracionalnije primeni na obrazovanje sistema jednačina koje opisuju raspodelu struja u električnom kolu.

Deo teorije grafova koji je od interesa za pomenuti problem iz elektrotehnike izložen je u odeljku 2.1.

c) Godine 1848. u časopisu »Berliner Schachzeitung« prvi put je publikovan tzv. *problem osam dama*, koji je bio poznat i ranije. On glasi: Na koliko načina se mogu postaviti na šahovsku tablu osam dama, tako da se međusobno ne napadaju.

Svakoj šahovskoj figuri može se pridružiti jedan graf na sledeći način. Neka polja šahovske table predstavljaju čvorove grafa. Iz čvora x ide grana ka čvoru y ako sa polja x figura može da pređe na polje y. Na taj način je šah u vezi sa teorijom grafova. Druga njihova veza proističe iz veze teorije grafova sa teorijom igara. Prema teoriji igara, šahovska igra se predstavlja grafom čiji su čvorovi pojedine šahovske pozicije.

Skup čvorova datog grafa od kojih nikoja dva nisu susedna zove se *unutrašnje stabilni* ili *nezavisan skup* grafa. *Broj unutrašnje stabilnosti* grafa definiše se kao broj elemenata u najvećem unutrašnje stabilnom skupu.

Broj unutrašnje stabilnosti za graf u problemu osam dama je 8, jer je to najveći broj dama koji se može postaviti na šahovsku tablu pod navedenim uslovima. Sa uvedenom terminologijom problem osam dama glasi:

Koliko ima največih unutrašnje stabilnih skupova u grafu pridruženom šahovskoj figuri dami?

Problem osam dama je rešio *Nauck* 1850. god. On je naveo 92 rešenja, koja se mogu dobiti rotacijom i ogledanjem šahovske table, polazeći od sledećih osnovnih rešenja:

1°	1	5	8	6	3	7	2	4	7°	2	6	8	3	1	4	7	5
2°	1	6	8	3	7	4	2	5	8°	2	7	3	6	8	5	1	4
3°	2	4	6	8	3	1	7	5	9°	2	7	5	8	1	4	6	3
4°	2	5	7	1	3	8	6	4	10°	3	5	2	8	1	7	4	6
5°	2	5	7	4	1	8	6	3	11°	3	5	8	4	1	7	2	6
6°	2	6	1	7	4	8	3	5	12°	3	6	2	5	8	1	7	4

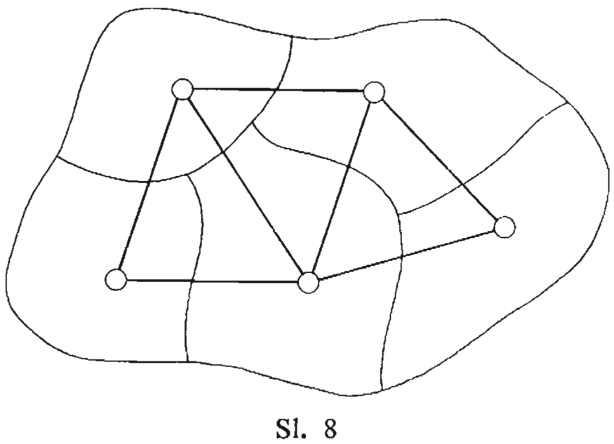
Brojevi označavaju položaje dama na pojedinim redovima šahovske table.

Interesantno je da je *Gauss* pronašao svega 72 rešenja. Ove se može objasniti nepostojanjem u ondašnje vreme metoda za rešavanje ovakvih zadataka. Jedini metod bio je tada prosto probanje i proveravanje. Na ovaj način rešenje problema osam dama zahteva desetak časova rada. Zbog važnosti u primenama danas su razrađeni algoritmi za pronalaženje najvećih unutrašnjih stabilnih skupova grafa pomoću kojih se problem osam dama rešava za nekoliko minuta.

Problem razmeštaja dama nije rešen u opštem slučaju, kada se umesto obične šahovske ploče sa 8×8 polja posmatra generalisana šahovska ploča tipa $n \times n$.

d) Godine 1879. *Cayley* je pred članovima Londonskog geografskog društva postavio čuveni *problem četiri boje*, koji ni do danas nije rešen.

Problem četiri boje sastoji se u tome da se dokaže da se svaka geografska karta može obojiti sa četiri boje tako da susedne države ne budu obojene istom bojom. Pod susednim državama se podrazumevaju države koje imaju zajedničku graničnu liniju, ali ne i one koje imaju jednu ili više izolovanih zajedničkih graničnih tačaka. Samo se po sebi razume da se problem ne odnosi samo na stvarne geografske karte, već na sve karte koje se mogu zamisliti.



Sl. 8

Problem četiri boje može se prevesti na jezik teorije grafova. Na sl. 5 je prikazan način na koji se svakoj geografskoj karti može pridružiti jedan graf. Čvorovi pridruženog grafa su proizvoljno izabrani — po jedan unutar svake države, a čvorove susednih država spajaju grane.

Graf pridružen geografskoj karti je *ravan* (*planaran*) graf, jer se može nacrtati u ravni tako da mu se spojnice međusobno ne presecaju.

Graf je *k-obojiv* ako se njegovi čvorovi mogu obojiti sa k boja tako da susedni čvorovi ne budu obojeni istom bojom. Graf je *k-hromatski* ako je *k-obojiv* a nije (k-1)-*obojiv*.

Problem ekvivalentan problemu četiri boje glasi:

Dokazati da je svaki ravan graf 4-*obojiv.*

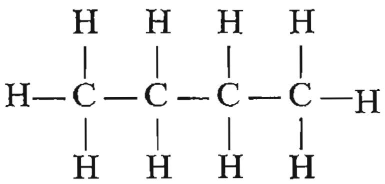
Postoji više formulacija problema četiri boje. Najbliža suštini stvari je, izgleda, formulacija data u [37], II izdanje, str. 202.

Do danas je dokazano samo da je svaki ravan graf 5-obojiv. Međutim, stav o četiri boje nije ni opovrgnut. Interesantno je da je prvi »dokaz« stava o četiri boje dao *Kempe* još 1879. god. Tek je 1890. god. *Heawood* pronašao grešku u *Kempeovim* razmatranjima.

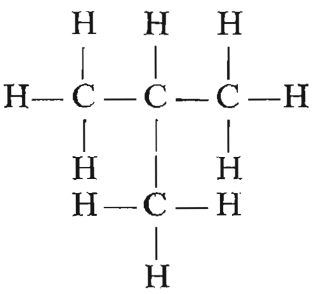
e) Dugo je teorija grafova bila više skup nepovezanih, često atraktivnih problema, a manje celovita matematička teorija. Možda se kao trenutak zasnivanja teorije grafova kao samostalne matematičke discipline može uzeti objavljivanje *Königove* monografije [37] 1936. god. Između ostalog, tada je termin graf ušao u opštu upotrebu.

Zahtevi u primenama a i opšti razvoj matematike podstiču i omogućuju u to vreme, a naročito posle drugog svetskog rata, razvoj teorije grafova. Značajan doprinos teoriji grafova dao je 1937. god. *G. Pólya* [49] (metod za određivanje broja grafova sa datim osobinama).

U *hemiji* je od interesa poznavanje broja izomera nekog jedinjenja. Izomeri su jedinjenja čiji su molekuli sastavljeni od istih atoma, a razlikuju se po strukturi međusobnih veza atoma. Tako, na primer, za jedinjenje C_4H_{10} moguće je zamisliti sledeće dve strukturne formule (sl. 9):



Butan



Izobutan

Sl. 9

Pošto je ugljenik *C* četvorovalentan, a vodonik H jednovalentan, problem se može postaviti ovako: koliko postoji neizomorfnih[2] povezanih grafova koji imaju četiri čvora stepena četiri i deset čvorova stepena jedan? U datom slučaju neposrednim proveravanjem može se videti da su sva rešenja data na sl. 9. U složenijim slučajevima primenjuje se teorema koju je dao *Pólya* [49], [3].

1.3. DEFINICIJE I OSNOVNE TEOREME

1.3.1. Graf i binarna relacija

Navešćemo još jednu definiciju grafa ekvivalentnu ranijim definicijama.

Descartesov proizvod $X \times Y$ skupova X i Y se definiše pomoću $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X,\ y \in Y\}$, tj. $X \times Y$ je skup uređenih parova, pri čemu je prvi član u paru iz X a drugi iz Y.

Binarna relacija ρ u skupu $X \times Y$ je svaki podskup skupa $X \times Y$. Specijalno se za slučaj $X = Y$ naziva ρ binarnom relacijom u skupu X.

[2] Videti str. 22.

Neka je X neprazan skup i ρ binarna relacija u X. Uređen par $G=(X, \rho)$ se naziva *graf*. Elementi skupa X su *čvorovi* grafa, a elementi skupa ρ *grane* grafa.

Crtež grafa dobijamo na sledeći način. Čvorove grafa $x_1, \ldots, x_n$ $(\in X)$ predstavljamo, kao i ranije, tačkama u ravni. Ako je $(x_i, x_j) \in \rho$, čvor x_i povezujemo granom sa čvorom x_j. Orijentacija grane je od x_i ka x_j. Ako $(x_i, x_j) \notin \rho$, čvorovi x_i i x_j nisu povezani granom.

Graf G sa sl. 1 može se predstaviti na sledeći način:

$$G=(X, \rho), \text{ gde je } X=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

i $\rho=\{(x_1, x_1), (x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_1, x_4), (x_3, x_1), (x_3, x_2), (x_4, x_3)\}$.

Umesto $G=(X, \rho)$ često se piše $G=(X, U)$, pri čemu se zaobilazi pojam binarne relacije i U tumači kao skup uređenih parova elemenata skupa X, tj. kao skup grana. Dakle, graf je zadat ako je zadat skup čvorova i skup grana.

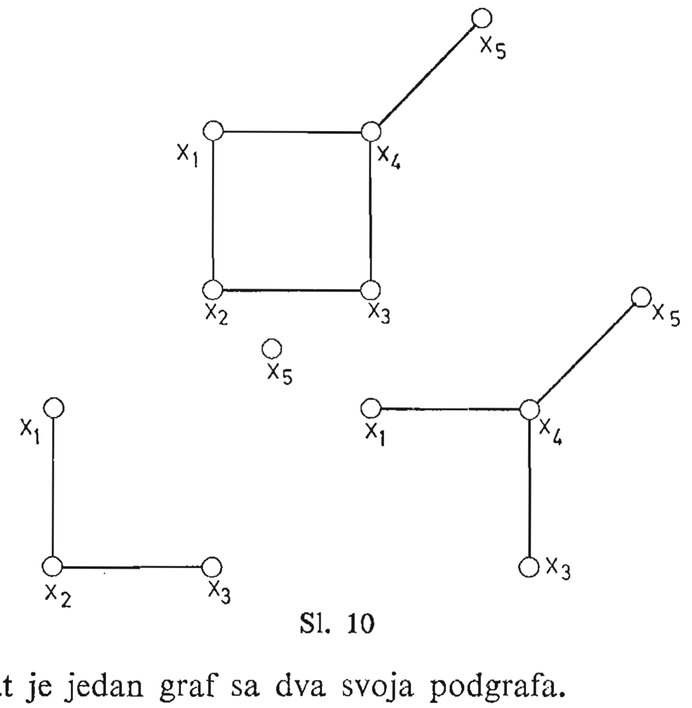
Za neorijentisane grafove piše se $G=(X, V)$, pri čemu se V tretira kao skup neuređenih parova elemenata iz skupa X, tj. kao skup neorijentisanih ili dvostrano orijentisanih grana.

Iste oznake se upotrebljavaju i za multigrafove, ali se tada naglašava da skup U (odnosno V) može sadržati više identičnih parova.

Postoje i drugi načini da se definiše graf. Jedna veoma opšta definicija je data u [69].

1.3.2. Podgraf i delimični graf

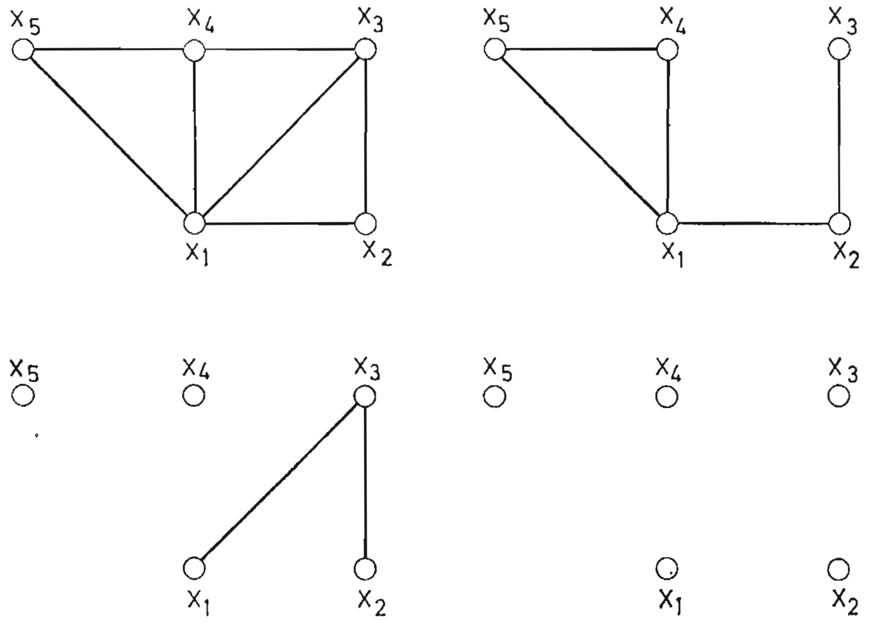
Neka je dat graf $G=(X, U)$. Graf oblika $H=(Y, T)$, pri čemu je $Y \subset X$ i T podskup skupa U koji sadrži sve one parove iz U, koji su obrazovani samo od elemenata skupa Y, naziva se *podgraf* grafa G, obrazovan skupom čvorova Y. Dakle, podgraf iz datog grafa dobija se na taj način što se uoči neki neprazan podskup Y skupa čvorova i udalje iz grafa svi ostali čvorovi zajedno sa granama koje su susedne udaljenim čvorovima. U podgrafu ostaju samo grane koje povezuju čvorove iz Y.



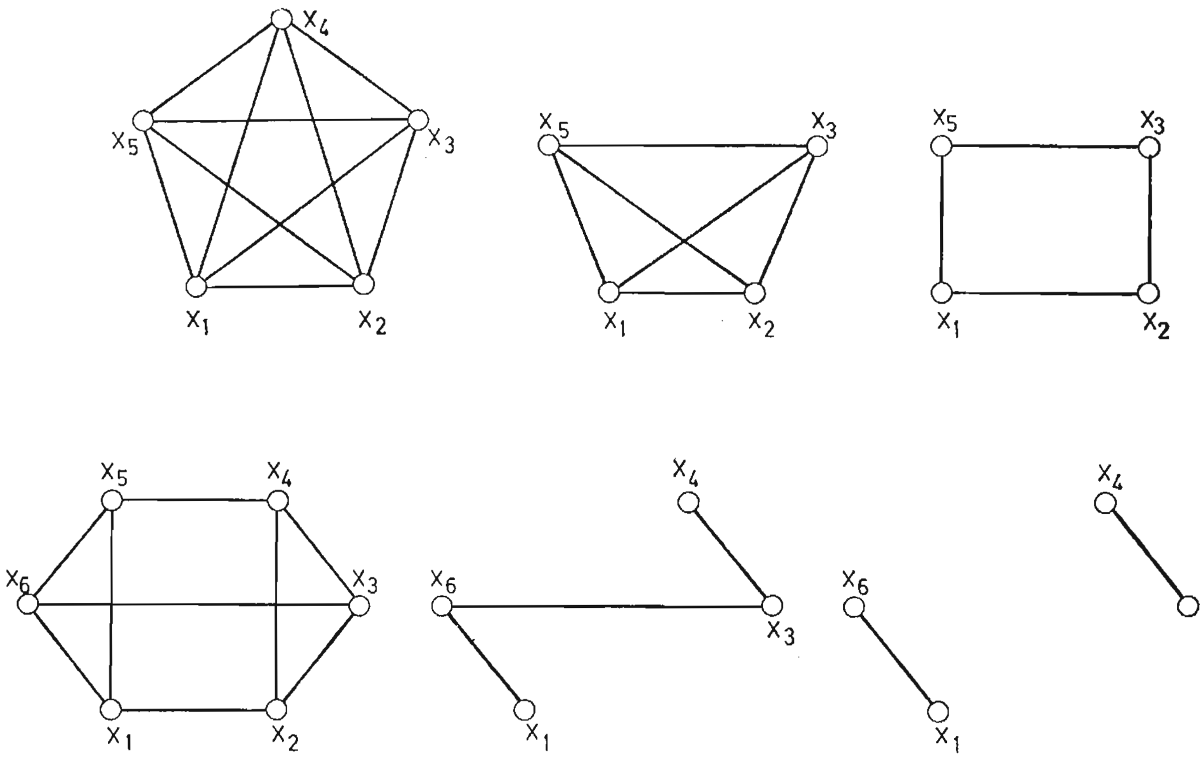
Sl. 10

Na sl. 10 dat je jedan graf sa dva svoja podgrafa.

Delimičnim ili *parcijalnim grafom* grafa $G=(X, U)$ naziva se svaki graf oblika $H=(X, T)$, pri čemu je $T \subset U$. Na sl. 11 je dato nekoliko delimičnih grafova jednog grafa.



Sl. 11



Sl. 12

Delimični graf podgrafa naziva se *delimični podgraf* datog grafa. Na sl. 12 se nalaze dva grafa sa po jednim svojim podgrafom i delimičnim podgrafom.

U literaturi se pojmovi podgraf, delimični graf i delimični podgraf često sreću pod drugim nazivima ili se ovi nazivi upotrebljavaju sa nešto izmenjenim značenjem. Nestandardna terminologija u teoriji grafova primorava autore da na početku svojih radova objasne koje pojmove označavaju sporni termini koji se pojavljuju u radu.

1.3.3. **Povezanost grafova**

Put dužine k u grafu je svaki niz grana $u_1, \ldots, u_k$ koji ima sledeće osobine:

1°. grana u_1 polazi iz proizvoljnog čvora grafa;

2°. Grana u_i $(i=2, \ldots, k)$ počinje u onom čvoru u kojem se završava grana u_{i-1}.

Put može više puta da prolazi istom granom ili kroz isti čvor. *Elementarni put* je put koji kroz svaki čvor grafa prolazi najviše jedanput.

Put, koji se završava u istom čvoru u kojem i počinje, naziva se *kružni* ili *zatvoren* put.

Kao što se vidi, kod pojmova put i kružni put bitna je orijentacija grana. U nekim primenama teorije grafova koriste se pojmovi slični ovim pojmovima, ali bez uzimanja u obzir orijentacije grana.

Dosada smo uvek smatrali da je grana zadata ako su zadata dva čvora i orijentacije grane, jednostrana ili dvostrana.

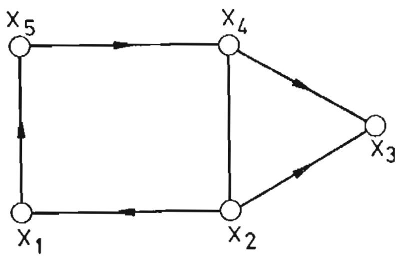
Kada to bude posebno naglašeno, pod granom ćemo podrazumevati jednostavno skup dva čvora koji predstavljaju krajeve grane. Pri ovom orijentacija grane može biti proizvoljna i ona nas ne interesuje. Grane u ovom smislu obeležavaćemo slovima $v_1, v_2, \ldots$ za razliku od grana kod kojih uzimamo u obzir orijentaciju i kod kojih ćemo upotrebljavati oznake $u_1, u_2, \ldots$.

Lanac dužine k je niz grana $v_1, \ldots, v_k$ sa osobinom da grane iz niza, ako se pogodno orijentišu, obrazuju put.

Ciklus dužine k je lanac $v_1, \ldots, v_k$, koji se završava u istom čvoru u kojem počinje.

U neorijentisanom grafu pojmovi put i kružni put, s jedne strane, i lanac i ciklus, s druge, ne razlikuju se. U orijentisanom grafu je, naravno, razlika očigledna.

Primer. U grafu na sl. 13 nizovi grana:



Sl. 13

$(x_1, x_5), (x_5, x_4), (x_4, x_3)$;

$(x_1, x_5), (x_5, x_4), (x_4, x_2), (x_2, x_1)$;

$(x_1, x_2), (x_2, x_4), (x_4, x_3)$;

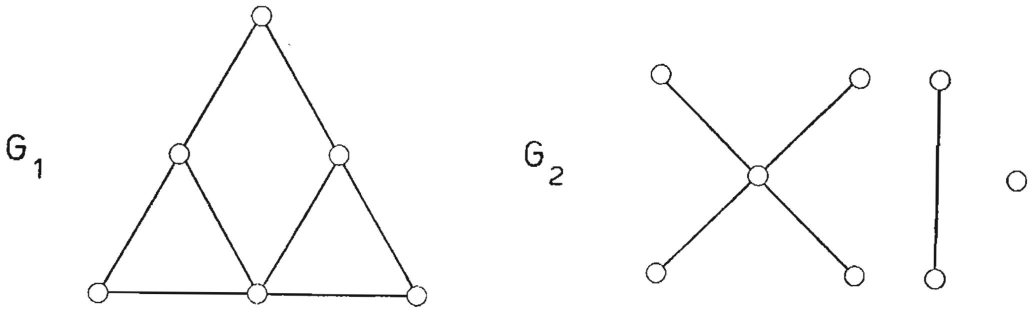
$(x_2, x_4), (x_4, x_3), (x_3, x_2)$

predstavljaju put, kružni put, lanac i ciklus.

Neorijentisani graf je *povezan* ako se njegova dva proizvoljna čvora mogu povezati putem (ili lancem). Ako postoje čvorovi koji se ne mogu povezati putem, graf je *nepovezan*.

Nepovezan graf se sastoji od dva ili više odvojenih delova. Ovi odvojeni delovi nazivaju se *komponente povezanosti* grafa. Tačnije, komponenta povezanosti grafa kojoj pripada neki čvor x_i je podgraf obrazovan skupom svih onih čvorova koji se mogu spojiti putem sa čvorom x_i.

Na sl. 14 graf G_1 je povezan, a G_2 nepovezan. G_2 ima tri komponente povezanosti.



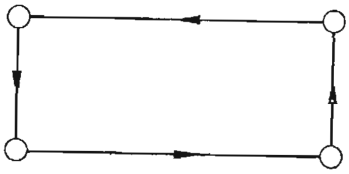
Sl. 14

Za grafove koji nisu neorijentisani definiše se više vrsta povezanosti.

Graf je *jako povezan* ako je svaki uređen par čvorova x_i, x_j spojen putem koji vodi iz x_i u x_j. Iz definicije sleduje da, pored egzistencije puta iz x_i u x_j, mora postojati i put koji vodi iz x_j u x_i.

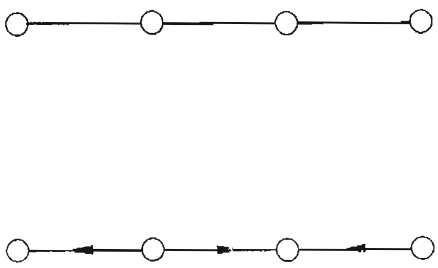
Na sl. 15 dat je primer jako povezanog grafa.

Povezanost je *jednostrana* ako je svaki neuređen par čvorova x_i, x_j povezan putem bar u jednom smeru (sl. 16).



Sl. 15

Sl. 16



Sl. 17

Graf je *slabo povezan* ako je povezan neorijentisan graf, dobijen od datog grafa zamenom orijentisanih grana odgovarajućim neorijentisanim granama (sl. 17).

Jako povezan graf ima i osobine jednostrane i slabe povezanosti. Jednostrano povezan graf je i slabo povezan. Slabo povezan graf ne mora, međutim, biti i jednostrano povezan, a jednostrano povezan ne mora biti i jako povezan graf.

Pitanje komponenata povezanosti se komplikuje kada se posmatraju grafovi koji nisu neorijentisani.

1.3.4. Regularni i potpuni grafovi

Neka su $d_1, \ldots, d_n$ stepeni čvorova $x_1, \ldots, x_n$ u neorijentisanom grafu G_1 bez petlji koji ima m grana. Ako saberemo sve stepene čvorova, dobijamo dvostruki broj grana, jer svaka grana ima kao krajnje tačke dva čvora. Dakle, važi relacija

$$(1) \qquad d_1 + \cdots + d_n = 2\,\mathrm{m}.$$

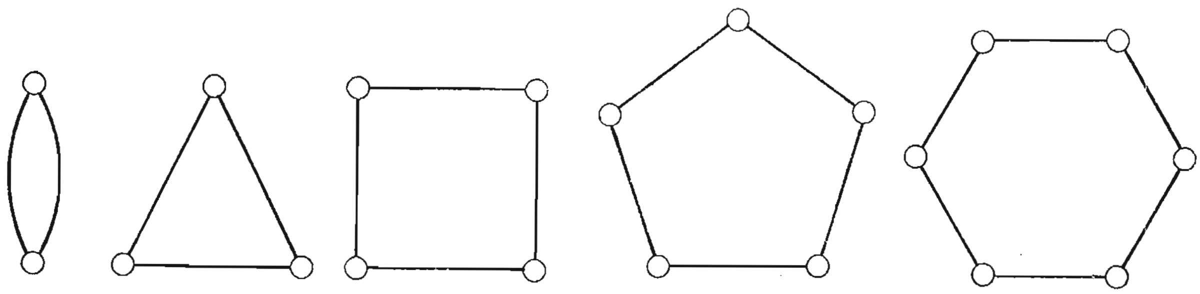
Iz ove relacije neposredno sleduje stav:

Stav. *Broj čvorova neparnog stepena u konačnom neorijentisanom grafu bez petlji je paran.*

Neorijentisan graf se naziva *regularan* (*pravilan*) stepena r, ako je $d_1 = d_2 = \cdots = d_n = r$. Iz (1) sleduje da regularan graf stepena r ima $m = \frac{1}{2} nr$ grana.

Iz ove relacije vidi se da za svako n i r ne postoje regularni grafovi stepena r sa n čvorova. Potrebno je, naime, da bar jedan od brojeva n i r bude paran. Lako se može pokazati da je ovo i dovoljan uslov za egzistenciju pomenute klase grafova.

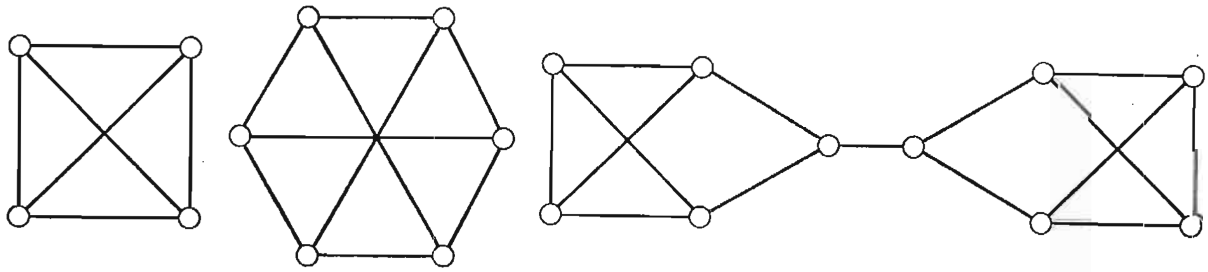
Posebno su interesantni regularni grafovi stepena dva. Konačan, povezan graf stepena dva zove se *kontura*. Ako kontura ima n čvorova, oni se mogu označiti sa $x_1, \ldots, x_n$ tako da je x_1 susedan sa x_2, x_2 sa $x_3, \ldots, x_{n-1}$ sa x_n i x_n susedan sa x_1. Izuzetno ćemo konturom nazivati i jedan multigraf (sl. 18).



Sl. 18

Na sl. 18 su date konture sa 2, 3, 4, 5 i 6 čvorova.

Konačan regularan graf stepena dva očigledno ima za komponente povezanosti konture. Za beskonačne grafove ovo ne važi. Suprotan primer je graf čiji su čvorovi smešteni u celobrojnim tačkama brojne ose, a susedni su samo oni čvorovi čije je međusobno rastojanje (po osi) jednako 1.

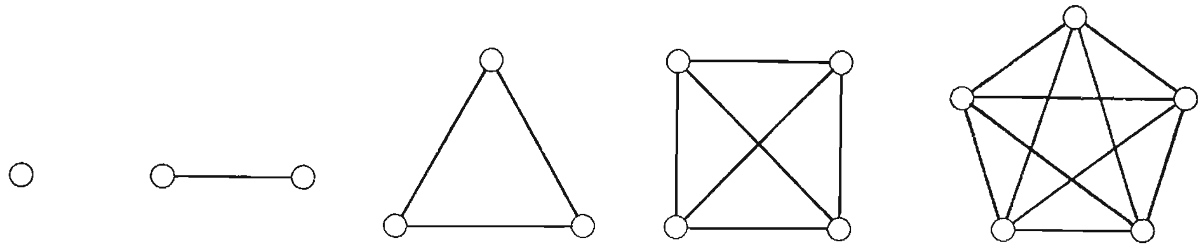


Sl. 19

Regularni grafovi stepena tri imaju paran broj čvorova. Na sl. 19 je dato nekoliko regularnih grafova stepena tri.

Regularni grafovi sa n čvorova stepena $n-1$ nazivaju se *potpuni* grafovi. Oni su prikazani na sl. 20 — za $n=1, 2, 3, 4, 5$.

Potpuni grafovi imaju $m=\frac{1}{2}n(n-1)=\binom{n}{2}$ grana, tj. svaki par čvorova je spojen granom.



Sl. 20

Regularni grafovi stepena r imaju matricu susedstva u kojoj se u svakoj vrsti i svakoj koloni nalazi tačno r jedinica. Matrica susedstva potpunih grafova ima na glavnoj dijagonali elemente jednake nuli; ostali elementi matrice su jednaki 1.

1.3.5. Metrika na grafu

Kaže se da je na skupu $X=\{x_1, x_2, \ldots\}$ definisana *metrika* ako je definisana funkcija $d=d(x_i, x_j)$, $x_i, x_j \in X$, koja ispunjava sledeće uslove (tzv. aksiome rastojanja):

1° $d(x_i, x_j)=0$ ako i samo ako je $x_i=x_j$;

2° $d(x_i, x_j)=d(x_j, x_i)$, (simetričnost);

3° $d(x_i, x_k)+d(x_k, x_j)\geqslant d(x_i, x_j)$, (nejednakost trougla).

Funkcija $d(x_i, x_j)$ definiše *rastojanje* elemenata skupa X. Skup X u kome je definisana metrika naziva se *metrički prostor*.

Ako se u 3° stavi $x_i=x_j$, te koristi 1° i 2°, dobija se $d(x_i, x_k)\geqslant 0$. Dakle, rastojanje je nenegativna funkcija.

Na skupu čvorova $X=\{x_1, \ldots, x_n\}$ povezanog neorijentisanog grafa $G=(X, \Gamma)$ može se definisati metrika na sledeći način. Rastojanje čvorova x_i i x_j $(x_i\neq x_j)$ je jednako dužini najkraćeg puta, koji iz x_i vodi u x_j. Za $x_i=x_j$ rastojanje je po definiciji jednako nuli.

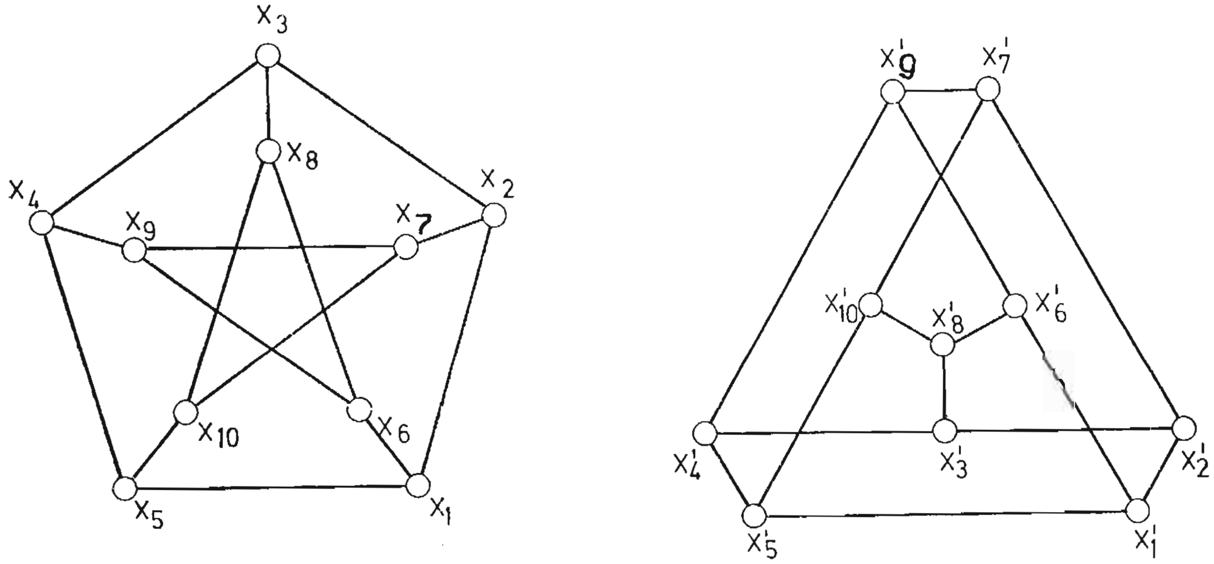
Lako se možemo uveriti da ovako definisano rastojanje zadovoljava aksiome 1°—3°. Aksioma 1° je zadovoljena, jer je za $x_i\neq x_j$ dužina najkraćeg puta između x_i i x_j pozitivna, a za $x_i=x_j$ rastojanje je jednako nula. Aksioma 2° je zadovoljena zato što je G neorijentisan, tj. simetričan graf. U neorijentisanom grafu svakom putu x_i u x_j odgovara jedan put iz x_j u x_i, koji prolazi kroz iste grane kao i put iz x_i u x_j, samo u suprotnom smeru i obrnutim redosledom. Iz ovog sleduje da je dužina najkraćeg puta iz x_i u x_j jednaka dužini najkraćeg puta iz x_j u x_i. (U orijentisanom grafu to, naravno, ne mora biti tačno, sl. 15). Nejednakost trougla sleduje neposredno iz definicije rastojanja.

Definicija rastojanja može se proširiti i na neorijentisane nepovezane grafove. Ako x_i i x_j pripadaju različitim komponentama povezanosti grafa definiše se $d(x_i, x_j)=+\infty$. U stvari, mogućno je, u posmatranom slučaju, za rastojanje uzeti neki veliki ali konačan broj, pri čemu bi bile zadovoljene aksiome rastojanja. Međutim, u primenama je ovo pitanje nebitno, te se rastojanje čvorova iz dveju različitih komponenti formalno obeležava sa $+\infty$.

Napomenimo da je rastojanje između susednih čvorova u grafu jednako 1.

1.3.6. **Izomorfizam grafova**

Dva grafa su *izomorfna* ako postoji uzajamno jednoznačno preslikavanje skupova njihovih čvorova koje održava osobinu susednosti čvorova.



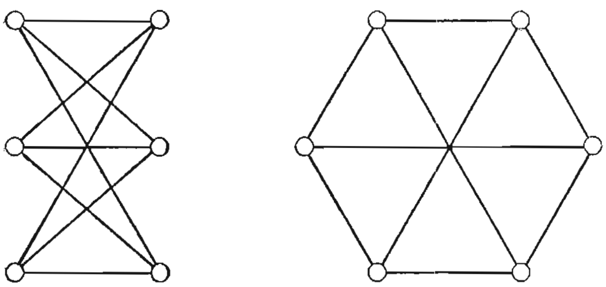
Sl. 21

Grafovi na sl. 21 su izomorfni, jer preslikavanje čvorova $x \leftrightarrow x'$ održava osobinu susednosti. Za svaki par indeksa i, j $(i \neq j)$ neposredno možemo proveriti da su parovi čvorova x_i, x_j i x_i', x_j' ili oba parovi susednih čvorova ili oba parovi nesusednih čvorova.

Lako se može pokazati da su i grafovi na sl. 22 izomorfni.

Za proizvoljne grafove bez višestrukih grana $G_1=(X_1, U_1)$ i $G_2=(X_2, U_2)$ kažemo da su izomorfni ako i samo ako postoji biunivoko preslikavanje φ skupa X_1 na skup X_2 za koje važi

$$(\forall a, b \in X_1) \quad (a, b) \in U_1 \Leftrightarrow (\varphi(a), \varphi(b)) \in U_2.$$


Sl. 22

Deformacija geometrijskog reprezenta grafa u trodimenzionalnom prostoru, pri kojoj se čvorovi, eventualno, pomeraju ali se međusobno ne preklapaju, a grane izdužuju, skraćuju i savijaju ali se ne prekidaju i ne slepljuju sa drugim granama, naziva se neprekidna deformacija. Izomorfni grafovi mogu se pomoću neprekidne deformacije dovesti do geometrijske podudarnosti, ako se još dopusti proces pri kojem se grana otkida od jednog svog čvora ali se na kraju opet vezuje za taj čvor.

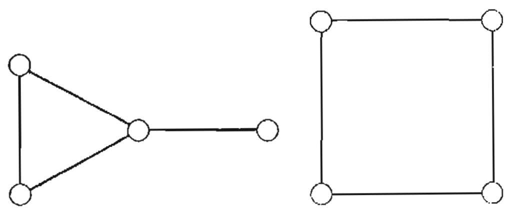
Iz same definicije uviđamo da su izomorfni grafovi, u stvari, isti grafovi ali različito predstavljeni odnosno nacrtani. Stoga je značajno pitanje kako možemo prepoznati graf, tj. utvrditi da li su dva grafa izomorfna. Interesantno je da do danas nije poznat odgovarajući algoritam bitno različit od neposrednog proveravanja.

U vezi sa ovim je i pitanje načina zadavanja odnosno predstavljanja grafa. Nedostatke pokazuju sva tri navedena načina, ali drugi bitno različiti način zadavanja grafa, koji bi bili efikasniji, nisu poznati. Verovatno već iz ove činjenice proističu ogromne teškoće koje se pojavljuju pri rešavanju pojedinih problema.

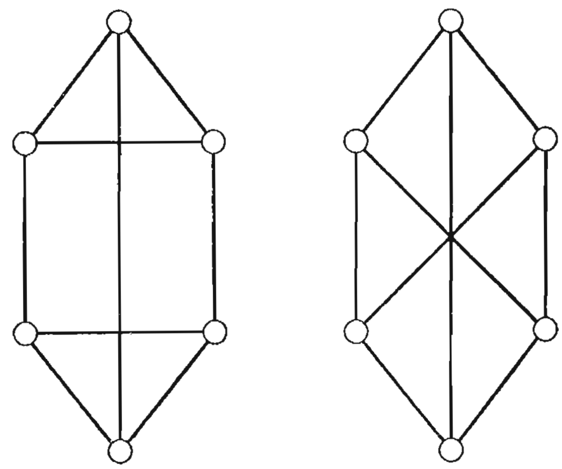
Dok u neprekidnoj matematici izvod i integral, zasnovani na pojmu granične vrednosti, rešavaju bezmalo sve probleme, u diskretnoj matematici, u koju spada i teorija grafova, još ne postoji ni približno tako moćno sredstvo. Ovaj nedostatak se delimično ali samo prividno otklanja upotrebom elektronskih računara, jer se u praksi već sada pojavljuju grafovi sa nekoliko stotina i više čvorova koji su i za brzu elektronsku mašinu krupan zadatak.

Težina problema izomorfizma grafova vidi se, donekle, iz sledećeg razmatranja. Očigledno je da izomorfni grafovi moraju imati isti broj čvorova i isti broj grana. Međutim, ispunjenje ovih uslova ne garantuje da su grafovi izomorfni. Na sl. 23 je dat kontraprimer u kojem dva neizomorfna grafa imaju svaki po četiri čvora i četiri grane.

Grafovi na sl. 23 imaju različite stepene čvorova, pa to navodi na pretpostavku da je, možda, za izomorfizam grafova dovoljno da su skupovi stepena njihovih čvorova jednaki.



Sl. 23



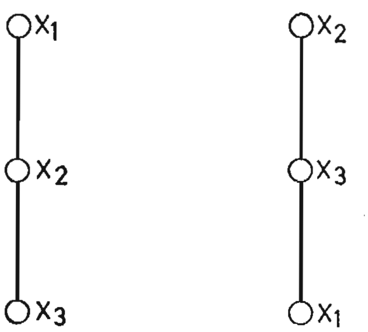
Sl. 24

Međutim, na sl. 24 su data dva neizomorfna grafa kod kojih svi čvorovi imaju stepen 3, pa se i ovaj kriterijum pokazuje kao nedovoljan.

Izomorfni grafovi mogu imati različite matrice susedstva. Na sl. 25 su data dva izomorfna grafa (tj. jedan graf sa dve različite numeracije čvorova). Ovim grafovima odgovaraju matrice susedstva

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dakle, $\mathbf{A}_1 \neq \mathbf{A}_2$. Međutim, iz načina formiranja matrice susedstva vidi se da se različite matrice susedstva istog grafa mogu dobijati jedna iz druge prenumeracijom čvorova grafa, odnosno permutovanjem vrsta i kolona matrica. Pri ovom je bitno da se ista permutacija primenjuje i na vrste i na kolone. Tako, na primer, $\mathbf{A}_1$ se može dobiti iz $\mathbf{A}_2$ ako se najpre u $\mathbf{A}_2$ prva vrsta stavi na mesto treće, treća na mesto druge i druga na mesto prve, a zatim se iste operacije izvrše sa kolonama.



Sl. 25

Formulisaćemo i analitički uslov izomorfnosti grafova čije su matrice susedstva $\mathbf{A}_1$ i $\mathbf{A}_2$. Za to je potrebno objasniti pojam permutacione matrice.

Permutaciona matrica je kvadratna matrica koja u svakoj vrsti i svakoj koloni ima tačno jedan element koji je jednak jedinici; ostali elementi matrice su jednaki nuli. Ako se matrica $\mathbf{A}$ pomnoži permutacionom matricom P sa desna, dobija se matrica koja nastaje iz $\mathbf{A}$ permutovanjem kolona. Permutovanje vrsta matrica $\mathbf{A}$ istom permutacijom može se postići ako se $\mathbf{A}$ pomnoži s leva matricom $\mathbf{P}^t$.

Na osnovu izloženog, matrice susedstva $\mathbf{A}_1$ i $\mathbf{A}_2$ izomorfnih grafova zadovoljavaju relaciju $\mathbf{A}_1 = \mathbf{P}^t \mathbf{A}_2 \mathbf{P}$. gde je $\mathbf{P}$ neka permutaciona matrica.

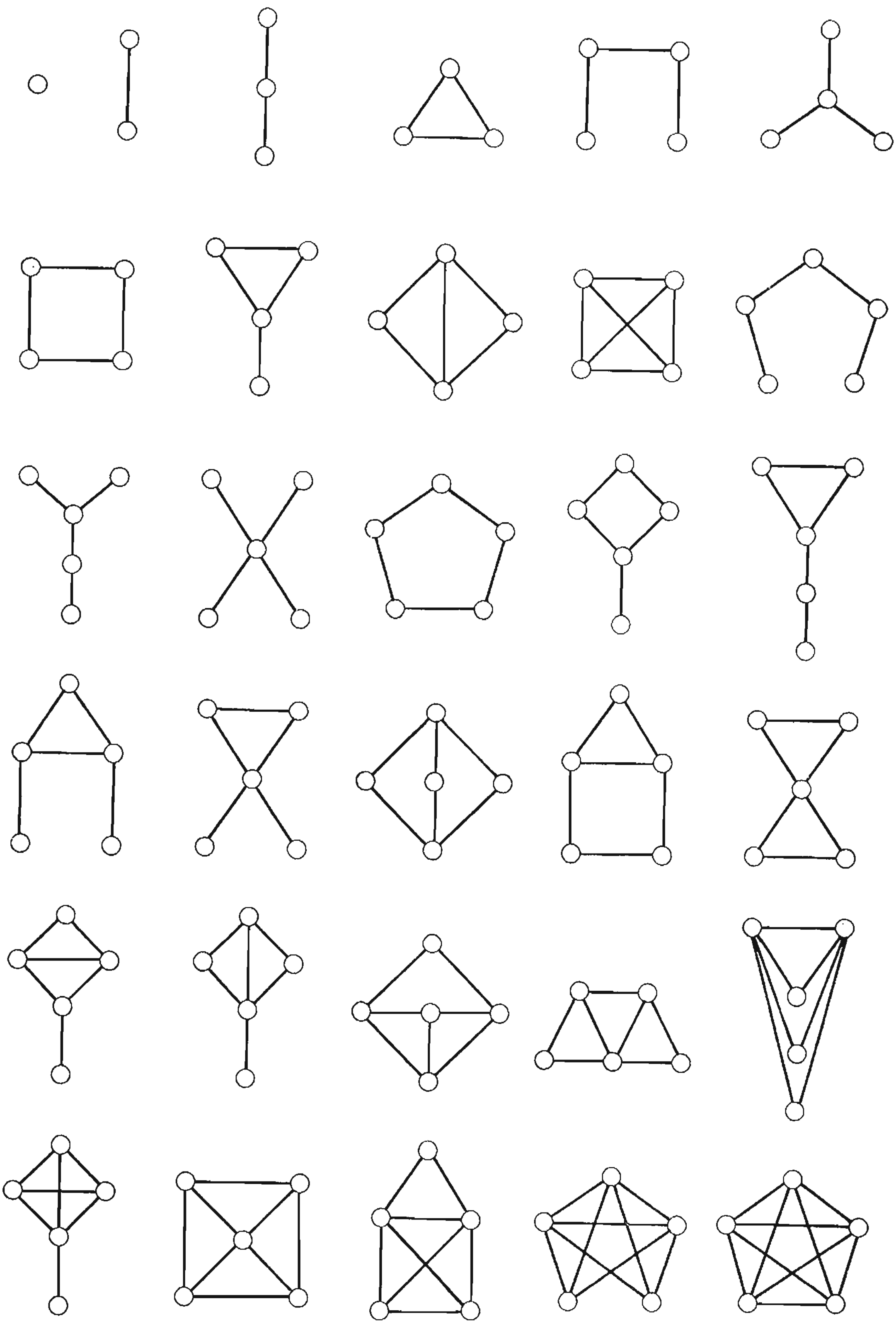
Napominjemo da su permutacione matrice ortogonalne, tj. da je $\mathbf{P}^t = \mathbf{P}^{-1}$, gde je $\mathbf{P}^{-1}$ inverzna matrica matrice $\mathbf{P}$. Stoga se uslov izomorfnosti može formulisati i ovako:

Grafovi, čije su matrice susedstva $\mathbf{A}_1$ i $\mathbf{A}_2$ su izomorfni, ako i samo ako postoji permutaciona matrica $\mathbf{P}$ takva da je $\mathbf{A}_1 = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}_2 \mathbf{P}$.

Za matrice susedstva grafova na sl. 25 važi relacija $\mathbf{A}_1 = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}_2 \mathbf{P}$, gde je

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Na sl. 26 su predstavljeni svi povezani, neorijentisani, neizomorfni grafovi sa najviše pet čvorova.



Sl. 26

1.3.7. Komplement grafa

Neka je G neorijentisan graf bez petlji. *Komplement* $\overline{G}$ grafa G je neorijentisan graf bez petlji koji ima iste čvorove kao G, pri čemu su dva (međusobno različita) čvora susedna u $\overline{G}$ ako i samo ako ti čvorovi nisu susedni u G. Iz definicije sleduje $\overline{(\overline{G})}=G$, tj. komplement komplementa je polazni graf. Na sl. 27 je predstavljen jedan par uzajamno komplementarnih grafova.

Ako je $\mathbf{A}$ matrica susedstva grafa $\mathbf{G}$, sa $\overline{\mathbf{A}}$ obeležićemo matricu susedstva komplementa $\overline{\mathbf{G}}$. Matrica $\mathbf{A}$ se može izraziti pomoću A, jedinične matrice $\mathbf{I}$ i kvadratne matrice $\mathbf{J}$, čiji su svi elementi jednaki 1. Očigledno važi relacija $\overline{\mathbf{A}}=\mathbf{J}-\mathbf{A}-\mathbf{I}$.

Za grafove sa sl. 27 matrice susedstva imaju oblik:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \overline{\mathbf{A}}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dokazaćemo sledeći stav:

Stav 1. *Ako je G nepovezan graf, njegov komplement $\overline{G}$ je povezan, tj. bar jedan od grafova G, $\overline{G}$ je povezan graf.*

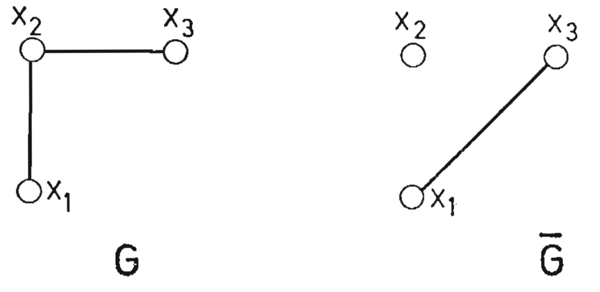
Dokaz. Potrebno je dokazati da su u $\overline{G}$ proizvoljno dva čvora x_i i x_j povezana putem.

Ako x_i i x_j pripadaju različitim komponentama povezanosti u G, tada su oni susedni u $\overline{G}$, tj. povezani putem dužine 1.

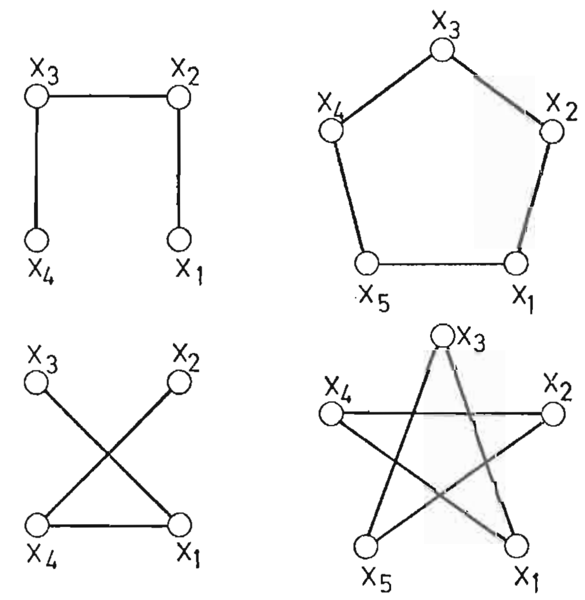
Ako, pak, x_i i x_j pripadaju istoj komponenti povezanosti u G, posmatrajmo čvor x_k koji ne pripada istoj komponenti povezanosti. Na osnovu definicije komplementa, čvor x_k je u $\overline{G}$ susedan čvoru x_i i čvoru x_j. Stoga su x_i i x_j povezani i $\overline{G}$ putem dužine 2.

Ovim je dokaz završen.

Graf G je *samokomplementaran* ako je izomorfan svome komplementu $\overline{G}$. Trivijalan primer samokomplementarnog grafa je graf koji se sastoji samo od jednog čvora. Drugi primeri samokomplementarnih grafova su dati na sl. 28.



Sl. 27



Sl. 28

Za samokomplementarne grafove važi sledeći stav:

Stav 2. *Samokomplementaran graf G ima $4r$ ili $4r+1$ čvorova pri čemu je r prirodan broj.*

Dokaz. Neka G ima n čvorova i m grana. Komplement $\overline{G}$ takođe ima m grana, jer je izomorfan sa G. Objedinjavanjem skupova grana iz G i $\overline{G}$ dobija se potpun graf, pa je $2m=\binom{n}{2}$, tj. $n(n-1)=4m$, odakle je $n=4r$ ili $n=4r+1$.

Samokomplementarne grafove je proučavao *H. Sachs* [55].

1.4. DANAŠNJE STANJE TEORIJE GRAFOVA

Prvi naučni rad iz teorije grafova je *Eulerov* rad [22] iz 1736. godine. Čitavih dve stotine godina teorija grafova je samo fragmentarno obrađivana kroz posebne probleme. *König* u svojoj monografiji [37] iz 1936. godine navodi svega 110 do tada objavljenih radova u kojima se pojam grafa eksplicitno pojavljuje.

U poslednjih 35 godina broj radova iz teorije grafova je u stalnom porastu. Tako se, na primer, u bibliografiji teorije grafova, koja je objavljena u [62], nalazi 1617 jedinica. Ove jedinice opisuju radove koji su objavljeni do 1963. godine i koji se u širem smislu odnose na teoriju grafova. Slična bibliografija objavljena u [5] opisuje 2397 radova koji su objavljeni u periodu od 1963. do 1967. godine.

Burni razvoj teorije grafova poslednjih godina se može zapaziti i u porastu broja referisanih radova u referativnim časopisima za matematiku.

Tako je, na primer, sovjetski Referativni žurnal — »Matematika«, doneo u rubrici »Teorija grafova« u poslednjih deset godina sledeći broj radova:

Godina	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970
Broj radova	41	89	91	59	103	103	142	215	381	365	423

Zapaža se da se broj radova referisanih u jednoj godini udesetorostručio za deset godina.

Uporedo sa brojem radova u kojima su, naravno, rešavani ranije postavljeni problemi, rastao je i broj postavljenih problema. Novi problemi proizilaze kako iz teorijskih istraživanja tako i iz mnogobrojnih primena teorije grafova. Mnogi stariji i noviji problemi nisu rešeni. Stoga se povremeno pojavljuju ekspozitorni članci o nerešenim problemima, na primer: [3], [27], [29], [67]. Knjige [3], [27] predstavljaju skup ekspozitornih članaka iz teorije grafova i nekih srodnih oblasti. [29] je, u stvari, prevod na ruski prve glave iz [27]. Na internacionalnim simpozijumima o teoriji grafova izlažu se otvoreni problemi, pa stoga u [5], [62], [64] postoje problemske rubrike.

U prošlosti su značajne priloge teoriji grafova dali *G. Kirchhoff*, *A. Cayley* *C. Kuratowski*, *D. König* i *G. Pólya*. Danas veliki broj matematičara objavljuje radove iz teorije grafova. Najznačajniji i najplodniji među njima su mađarski matematičar *P. Erdös* i američki matematičar *F. Harary*. Veliki broj radova objavili su, na primer, *J. W. Moon*, *L. Moser*, *D. R. Fulkerson*, *W. T. Tutte*, *A. J. Hoffman*, *C. Berge*, *L. R. Ford*, *G. A. Dirac*, *A. Kotzig*, *T. Gallai* i drugi. Od Jugoslovena priloge su, na primer, dali: *Đ. Kurepa*, *M. Stojaković*, *V. Devidé*, *J. Ulčar*, *V. Niče*, *V. Sedmak*, *D. Cvetković*, kao i neki drugi čija osnovna struka nije matematika. Pomenimo ovde i američkog matematičara jugoslovenskog porekla *B. Grünbauma*.

Teorija grafova se posebno neguje u Mađarskoj, SAD, Kanadi, Sovjetskom Savezu, Čehoslovačkoj i još nekim zemljama. Napomenimo da teorija grafova ima u Mađarskoj veliku tradiciju. Pisac prve monografije iz teorije grafova *D. König* bio je profesor na Velikoj tehničkoj školi u Budimpešti.

Naučni radovi iz teorije grafova se najviše objavljuju u mađarskim i američkim časopisima. Postoji i specijalizovani časopis »Journal of Combinatorial Theory«, koji izlazi od 1966. godine, a u kojem se većina članaka odnosi na teoriju grafova.

Počevši od 1959. godine održavaju se povremeno internacionalni simpozijumi o teoriji grafova. Poznati su sledeći simpozijumi:

Dobogokö, Mađarska, 1959. godine;

Halle, Demokratska Republika Nemačka, 1960. godine;

Smolenice, Čehoslovačka, 1963. godine;

Rim, Italija, 1966. godine;

Tihany, Mađarska, 1966. godine;

Manebach, Demokratska Republika Nemačka, 1967. godine.

Materijali sa nekih od ovih simpozijuma objavljeni su u posebnim publikacijama [5], [62], [63], [64].

Oskudica u monografskoj literaturi iz teorije grafova je ublažena u poslednje vreme. U 1969. godini su objavljene dve nove monografije [28], [69]. Ranije objavljene monografije su [6], [37], [44], tako da sada broj opštih monografija iznosi pet. Postoje i druge monografije nešto specijalnije namene [8], [13], [30], [45], [51], [57].

Problemi, koje danas svrstavamo u teoriju grafova, su pre 1936. godine obrađivane u knjigama »Zanimljive matematike«. Poznate knjige ove vrste su [1], [38], [39], [54], a novijeg datuma su [19], [59].

Na jugoslovenskim jezicima su objavljeni, između ostalih, i tekstovi: [15], [16], [18], [42], [60], [65], [68].

Teorija grafova ne predstavlja osnovnu matematičku teoriju nijedne primenjene discipline. Međutim, u nizu naučnih grana postoje problemi koji se rešavaju ili im se rešenja bitno olakšavaju primenom teorije grafova. Tako se teorija grafova primenjuje, na primer, u hemiji, teoriji električnih kola, automatici, biologiji, ekonomskim istraživanjima, sociologiji, organizaciji rada i lingvistici. Ona se primenjuje i u nekim matematičkim disciplinama kao što su, na primer, teorija skupova, teorija igara i linearno programiranje. Odeljak teorije skupova koji proučava uređene skupove predstavlja, u stvari, i odeljak teorije grafova. Teorija grafova se može smatrati delom topologije, ali je veoma bliska i kombinatornoj analizi, tako da se u referativnim časopisima obrađuje zajedno sa ovom poslednjom. Zajedno sa drugim srodnim disciplinama teorija grafova se smatra i delom kibernetike.

Radi potpunosti navešćemo kratke definicije topologije, kombinatorike i kibernetike.

Prema *Burbakiju* [12] *topologija* se opisuje na sledeći način:

Skup X je snabdeven topološkom strukturom ako je svakom elementu iz X na određeni način pridružena porodica podskupova skupa X. Ovi podskupovi se nazivaju okoline posmatranog elementa i zadovoljavaju određene aksiome (aksiome topoloških struktura). Skup snabdeven topološkom strukturom naziva se topološki prostor.

Grana matematike koja izučava topološke strukture zove se topologija, što znači — nauka o položaju. Raniji naziv za topologiju bio je *Analysis Situs*.

Prema nešto popularnijoj definiciji, topologija je grana matematike koja proučava svojstva geometrijskih figura koje su invarijantna u odnosu na neprekidna preslikavanja (deformacije).

Prema jednoj definiciji, *kombinatorika* je deo matematike koja proučava konstrukciju, prebrojavanje i osobine particija, varijacija, kombinacija i permutacija od konačnog broja elemenata pri različitim uslovima.

J. Riordan u predgovoru svoje monografije o kombinatornoj analizi [53] kaže da u kombinatoriku spada sve ono što se može prebrojati.

C. Berge povezuje (na simpozijumu u Rimu, [63] teoriju grafova sa kombinatorikom i smatra da su osnovni zadaci kombinatorike prebrojavanje zadatog tipa konfiguracija, dokazivanje postojanja ili nepostojanja konfiguracije datog tipa, formiranje konfiguracija, transformacija konfiguracija jednih u druge, proučavanje svojstava podkonfiguracija. Pre toga se definiše konfiguracija kao preslikavanje nekog skupa objekata u konačan apstraktni skup.

Kibernetika je nauka o upravljanju mašinama i živim bićima.

Prema *N. Wieneru* kibernetika je nauka o vezi, upravljanju i kontroli u mašinama i živim organizmima.

A. N. Kolmogorov opisuje kibernetiku kao nauku o načinima primanja, čuvanja i korišćenja informacija u mašinama, živim organizmima i njihovim kompleksima.

Teorija grafova je deo kibernetike u tom smislu što se rezultati teorije grafova koriste prilikom obrade kibernetičkih problema.

Teorija grafova se može svrstati i u jednu veliku grupu matematičkih disciplina za koju je karakteristično da proučava probleme na konačnim skupovima. To je tzv. konačna (finitna) matematika. Tu spadaju, pored teorije konačnih grafova, na primer, sledeće discipline: teorija konačnih matrica, matematička logika, teorija igara itd.

Zadaci na konačnim skupovima su veoma prosti ako je broj elemenata u skupu mali. Tada se zadatak rešava proveravanjem svih mogućih varijanti. Međutim, u poslednjih nekoliko decenija pojavom velikih tehničkih i drugih sistema, pojavom velikih armija i drugih velikih organizacija ljudi naglo raste broj zadataka na konačnim skupovima koji imaju veliki broj članova.

Ovakva situacija je prouzrokovala dve važne stvari. Prvo, pojavili su se elektronski računari kao praktično sredstvo rešavanja finitnih problema i drugih problema koji se mogu svesti na finitne. (Napomenimo da su prvi kompjuteri konstruisani u SAD za potrebe vojske.) Drugo, izgrađene su nove matematičke grane ili su neke stare doživele svoj preporod. Kao novu disciplinu pomenimo teoriju igara koja je zasnovana 1928. godine radovima *J. Neumanna*. Teorija grafova je, kao što smo videli, stara disciplina čiji je današnji razvoj uslovljen navedenim okolnostima.

Povećavanje brzine rada i usavršavanje kompjutera nikako ne predstavlja destimulans za razvijanje teorijskih disciplina finitne matematike. Kompjuteri i pored svojih fantastičnih mogućnosti imaju i ograničenja. Ograničenja se odnose na brzinu rada i kapacitet memorije mašine. U mnogim problemima se, međutim, traži od kompjutera veoma brz odgovor na postavljeno pitanje (na primer, u problemima protivvazdušne odbrane) ili broj promenljivih koje treba da pamti prelazi njene mogućnosti (na primer, problemi sa velikim elektroenergetskim sistemima). А. А. Зыков navodi u uvodu svoje monografije [69] da postoje problemi na grafovima sa dvadesetak čvorova, čije rešavanje prostim ispitivanjem svih mogućnosti zahteva nekoliko desetina godina rada računara. Stoga se optimalni rezultati mogu očekivati jedino udruženim snagama čoveka i mašine, tj. paralelnim radom na razvoju teorijske misli i na usavršavanju računskih mašina.

2. ODABRANA POGLAVLJA

2.1. NEZAVISNI CIKLUSI

Deo teorije grafova obrađen u ovom poglavlju primenjuje se u elektrotehnici u analizi električnih mreža.

2.1.1. Predstavljanje ciklusa vektorima

Posmatrajmo neorijentisan multigraf G bez petlji sa m grana. Svakoj grani pridružimo jednu orijentaciju. Osobine grafova koje se izlažu u ovom poglavlju ne zavise od načina orijentacije grana multigrafa.

Neka su grane iz G obeležene sa $v_1, \ldots, v_m$. Svakom ciklusu c iz G pridružićemo m-dimenzionalni vektor $\mathbf{c}=(c_1, \ldots, c_m)$. Ako ciklus c prolazi r_i puta granom v_i u pravcu strelice i s_i puta istom granom nasuprot strelici, komponenta c_i $(i=1, \ldots, m)$ vektora $\mathbf{c}$ se definiše pomoću $c_i=r_i-s_i$. U nekim slučajevima ciklus se predstavlja vektorom sa više od m komponenata. Tada se prvih m komponenata definišu kao što je opisano, a ostale komponente su po definiciji jednake nuli. Vektor $\mathbf{c}$ se naziva *ciklusni vektor*.

Ciklusni vektor je u potpunosti određen ciklusom. Obrnuto ne važi. Jednom vektoru može da odgovara više ciklusa, a postoje vektori čije su komponente celi brojevi kojima ne odgovara nijedan ciklus nego, na primer, nezatvoren lanac.

Ciklus kome odgovara nula-vektor zvaćemo *trivijalni* ciklus. U daljem tekstu posmatraćemo samo netrivijalne cikluse.

Vektor pridružen nekom ciklusu je invarijantan u odnosu na cikličku permutaciju niza grana koje obrazuju ciklus. U ovom poglavlju je celishodno smatrati identičnim cikluse koji se mogu dobiti jedan iz drugog cikličkom permutacijom njihovih grana.

Promena smera obilaženja ciklusa dovodi do promene znaka svih koordinata pridruženog vektora. Cikluse, koji se jedan od drugoga dobijaju promenom smera obilaženja, takođe ćemo smatrati jednakim.

Ciklus koji svakom svojom granom prolazi samo jedanput zove se *prost*. U suprotnom slučaju ciklus je *složen*. Iz definicije prostog ciklusa sleduje da nijedan njegov deo ne obrazuje trivijalan ciklus. Vektor pridružen prostom ciklusu ima kao komponente samo brojeve $-1,0,1$.

Ciklus koji ne prolazi više od jedanput ni kroz koji čvor grafa zove se *elementaran* ciklus.

Grane prostog elementarnog ciklusa obrazuju, kada se zanemari njihova orijentacija, jedan delimični podgraf datog grafa. Lako se zaključuje da ovaj delimični podgraf predstavlja konturu. Stoga ćemo, na primer, izkaz »graf poseduje jedan prost elementaran ciklus« zamenjivati jezički jednostavnijim »graf sadrži jednu konturu«.

U povezanom grafu linearna kombinacija $\alpha_1 \mathbf{c}_1 + \alpha_2 \mathbf{c}_2$ vektora $\mathbf{c}_1$ i $\mathbf{c}_2$ nekih ciklusa, pri čemu su α_1 i α_2 celi brojevi, takođe predstavlja vektor pridružen nekom ciklusu. Sabiranje ciklusa i množenje ciklusa skalarom (celim brojem) definiše se preko odgovarajućih operacija za pridružene vektore.

Vektori $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_k$ su linearno zavisni nad skupom celih brojeva ako postoje celi brojevi $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, od kojih je bar jedan različit od nule, tako da važi relacija $\alpha_1 \mathbf{c}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{c}_k = \mathbf{o}$. Kaže se da je skup datih ciklusa grafa zavisan ili nezavisan prema tome da li je skup pridruženih vektora linearno zavisan ili nezavisan nad skupom celih brojeva.

Skup nezavisnih ciklusa koji dodavanjem bar jednog novog ciklusa grafa postaje skup zavisnih ciklusa i naziva se *baza nezavisnih ciklusa.* Svaki ciklus grafa može se izraziti kao linearna kombinacija ciklusa iz baze nezavisnih ciklusa. Graf može da poseduje više različitih baza nezavisnih ciklusa.

U primenama je od interesa određivanje bar jedne baze nezavisnih ciklusa.

2.1.2. Ciklomatički broj grafa

Ciklomatički broj $\nu(G)$ neorijentisanog multigrafa G bez petlji sa n čvorova, m grana i p komponenata povezanosti definiše se pomoću

(1) $$\nu(G) = m - n + p.$$

Stav 1. *Ako se između dva čvora multigrafa G uvede nova grana, onda se ciklomatički broj $\nu(G)$ povećava za* 1 *ako ovi čvorovi pripadaju istoj komponenti povezanosti; u suprotnom slučaju $\nu(G)$ ostaje nepromenjeno.*

Dokaz. U prvom slučaju parametri n i p grafa G ostaju nepromenjeni, te se povećavanjem m za 1 na osnovu (1) uvećava i $\nu(G)$ za 1. Ako pak nova grana spaja čvorove različitih komponenti povezanosti iz G, broj komponenti p se smanjuje za 1 pa se $\nu(G)$ ne menja.

Stav 2. *Broj ciklusa u svakoj bazi nezavisnih ciklusa je jednak ciklomatičkom broju grafa.*

Dokaz. Izvešćemo dokaz indukcijom po broju grana m. Za grafove bez grana ($m=0$) stav je tačan, jer je $\nu(G)=0$, a graf ne poseduje nijedan ciklus, što naravno povlači za sobom da je baza nezavisnih ciklusa prazan skup. Pretpostavimo da je stav tačan za sve grafove sa m grana i posmatrajmo proizvoljan graf G_{m+1} sa $m+1$ grana. Udaljimo iz G_{m+1} proizvoljnu granu i dobićemo graf G_m sa m grana. Numerišimo grane iz G_m brojevima od jedan do m. Cikluse iz G_{m+1} i iz G_m predstavićemo vektorima sa $m+1$ koordinata. Naravno, vektori pridruženi ciklusima iz G_m imaju nulu kao poslednju koordinatu.

Svi ciklusi iz G_m su ciklusi i u G_{m+1}. Neka je M skup ciklusa iz G_{m+1} koji nisu ciklusi u G_m. Ako je M prazan skup, granom v_{m+1} ne prolazi nijedan netrivijalan ciklus grafa G_{m+1}, pa ova grana povezuje dve komponente povezanosti grafa G_m, odakle je $\nu(G_m) = \nu(G_{m+1})$. No tada se i baze nezavisnih ciklusa grafova G_m i G_{m+1} poklapaju, te stav važi i za G_{m+1}.

Posmatrajmo stoga slučaj kada M nije prazan skup. Tada v_{m+1} povezuje čvorove iste komponente povezanosti grafa G_m, pa je $\nu(G_{m+1}) = \nu(G_m) + 1$.

Vektori ciklusa iz M imaju 1 kao poslednju komponentu. Neka vektori $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_k$ $(k = \nu(G_m))$ određuju jednu bazu nezavisnih ciklusa u G_m. Nijedan od vektora $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \ldots \in M$ ne može da se predstavi kao linearna kombinacija vektora $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_k$, jer vektori $\mathbf{d}_i$ imaju, a $\mathbf{c}_i$ nemaju $m+1$ komponentu različitu od nule. Dakle, skup vektora $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_k, \mathbf{d}_1$ je linearno nezavisan. Dokažimo da ovaj skup obrazuje bazu, tj. da mu se ne može pridružiti nijedan novi vektor. Pokažimo to, na primer, za $\mathbf{d}_2$. Vektor $\mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_1$ ima poslednju komponentu jednaku nuli, te odgovarajući ciklus pripada grafu G_m. Stoga postoje konstante $\beta_1, \ldots, \beta_k$ takve da je $\mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_1 = \beta_1 \mathbf{c}_1 + \cdots + \beta_k \mathbf{c}_k$, a to znači da su vektori $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_k, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$ linearno zavisni. Dakle, $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_k, \mathbf{d}_1$ obrazuju jednu bazu. Pošto sve baze moraju sadržati isti broj vektora, u ovom slučaju $\nu(G_{m+1})$, stav je dokazan.

Na osnovu izloženog lako se dokazuje

Stav 3. *Multigraf G ne sadrži (kao delimični podgraf) nijednu konturu ako i samo ako je* $\nu(G) = 0$.

Dokaz. Očigledne su ekvivalencije sledećih iskaza: »Multigraf ne sadrži nijednu konturu«. »Svi ciklusi multigrafa su trivijalni«, »Proizvoljan neprazan skup vektora ciklusa iz G je linearno zavisan«. »Ciklomatički broj multigrafa je jednak nuli«.

Ovim je dokaz završen.

2.1.3. **Stablo**

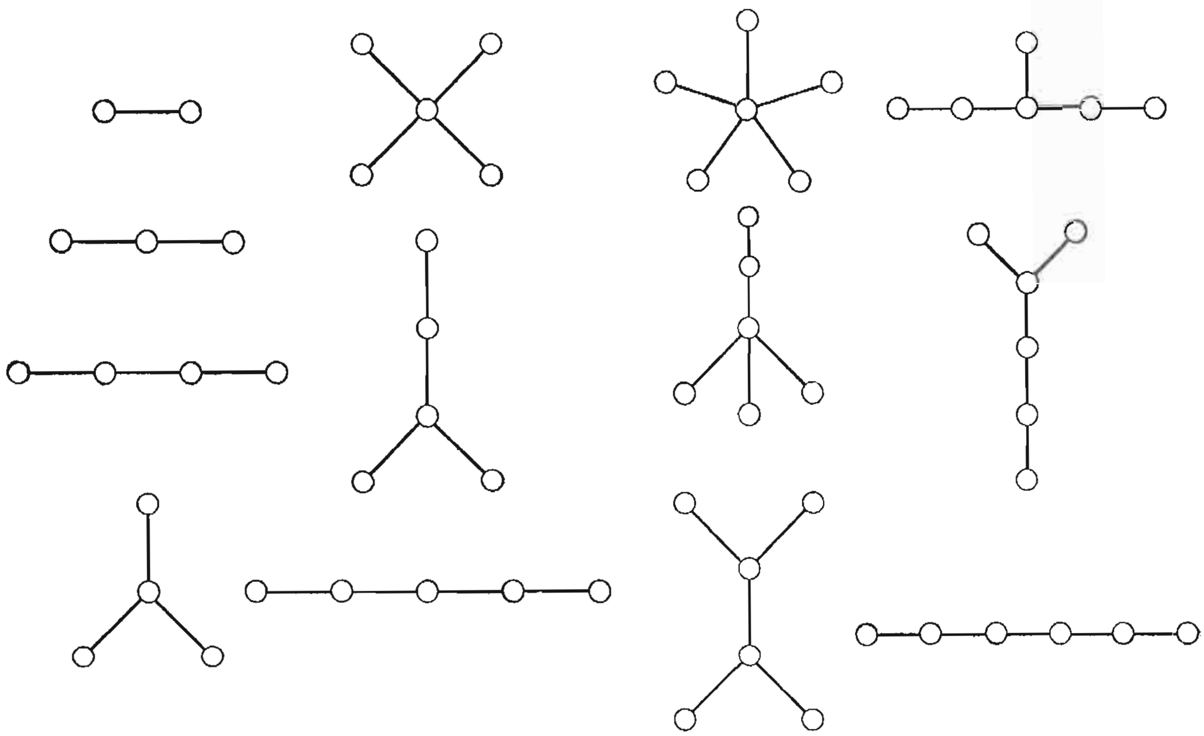
U mnogim problemima veliku ulogu igra pojam stabla (drveta). *Stablo* se može definisati kao povezan graf sa $n(>1)$ čvorova i $m = n-1$ grana. Na sl. 29 prikazana su sva stabla sa najviše 6 čvorova.

Navešćemo neke osobine stabla.

a. Stablo sadrži bar dva čvora stepena 1. Zaista, ako bi pretpostavili suprotno — da su svi čvorovi bar stepena 2, bilo bi $2m \geqslant 2n$ tj. $m \geqslant n$, što protivreči činjenici da je $m = n-1$. Slučaj, u kojem su svi čvorovi stepena dva osim jednog koji je stepena 1, ne dolazi u obzir na osnovu Stava iz 1.3.4.

b. Stablo je graf koji ne sadrži nijedan prost elementaran ciklus, tj. ne sadrži nijednu konturu. Dokaz se jednostavno izvodi indukcijom. Za $n=2$ iskaz je tačan. Pretpostavimo da je iskaz tačan za stablo sa $n-1$ čvorova. Stablo sa n čvorova sadrži prema a. bar jedan čvor stepena 1. Udaljavanjem ovog čvora iz grafa zajedno sa odgovarajućom granom dobija se stablo sa $n-1$ čvorova, koje prema induktivnoj pretpostavci nema kontura. Posle vraćanja udaljenog čvora na svoje mesto, dolazimo do zaključka da i stablo sa n čvorova ne sadrži konture.

c. Udaljavanjem bilo koje grane iz stabla dobija se graf koji nije povezan. Neka je udaljena grana koja povezuje čvorove x_1 i x_2. Ako bi se posle udaljavanja ove grane dobio povezan graf, morao bi u stablu postojati put koji ne sadrži udaljenu granu, a koji povezuje x_1 sa x_2. Ovaj put bi sa granom (x_1, x_2) obrazovao konturu u stablu, što je u kontradikciji sa osobinom b.



Sl. 29

d. Ako se u stablo uključi proizvoljna nova grana, dobija se graf koji ima tačno jednu konturu. Ovo je očigledno s obzirom na činjenicu da su čvorovi između kojih je uključena nova grana povezani u stablu jednim putem. Grane ovog puta sa novom granom obrazuju konturu.

Osobine stabla su pregledno izložene u sledećem stavu.

Stav 1. *Neka je G graf sa n $(n>1)$ čvorova. Sledeće karakteristike stabla su ekvivalentne:*

1) *G je povezan i ne sadrži konture;*

2) *G ne sadrži konture i ima $n-1$ grana;*

3) *G je povezan i ima $n-1$ grana;*

4) *G ne sadrži konture, ali dodavanjem nove grane između proizvoljna dva čvora obrazuje se bar jedna kontura;*

5) *G je povezan ali gubi to svojstvo ako se udalji njegova proizvoljna grana;*

6) *Svaka dva čvora su u G spojena tačno jednim elementarnim putem.*

Dokaz. Ekvivalencija nekih od ovih iskaza je već dokazana. Dokaz se može unekoliko algebraizovati ako se koristi ciklomatički broj grafa.

Iskazi 1), 2) i 3) su ekvivalentni redom iskazima

1') $p=1$, $\nu(G)=0$;

2') $\nu(G)=0$, $m=n-1$;

3') $p=1$, $m=n-1$.

S obzirom na relaciju $\nu(G)=m-n+p$, ekvivalencije iskaza 1'), 2') i 3') se neposredno proveravaju.

Iz 4) dobija se $\nu(G)=0$ i $p=1$ s obzirom na stav 1. iz 2.1.2. tj. dobija se 1') odnosno 1). Važi i obrnuto 1)$\Rightarrow$4).

Iz 5) je $p=1$ i $\nu(G)=0$; dakle, opet imamo 1).

Takođe važi 1)$\Rightarrow$5), s obzirom na stav 1. iz 2.1.2.

Očigledno važi i 1)$\Leftrightarrow$6).

Ovim je dokazana ekvivalencija iskaza 1)—6), tj. stav 1.

Stav 2. *Svaki povezan neorijentisan multigraf bez petlji sadrži delimični graf oblika stabla.*

Dokaz. Udaljimo iz grafa proizvoljnu granu koja pripada nekoj konturi. Ponavljajmo ovaj postupak dokle god u grafu postoji neka kontura. Pošto se na ovaj način ne može narušiti povezanost grafa, na kraju se dobija povezan graf bez kontura, tj. stablo.

Ovim je dokaz završen.

Graf čije sve komponente povezanosti predstavljaju stabla naziva se *šuma*. Neorijentisan multigraf bez petlji poseduje bar jedan delimični graf oblika šume. Šuma se može odrediti na taj način što se u svakoj komponenti povezanosti grafa odredi jedno stablo postupkom iz stava 2. Ako graf ima n čvorova, m grana i p komponenata povezanosti, šuma se sastoji od p stabala odnosno $n-p$ grana. Da bi se dobila šuma, iz grafa je potrebno udaljiti $m-n+p$ grana.

Pojam stabla odnosno šume je bitan u vezi sa jednim algoritmom za konstrukciju baze nezavisnih ciklusa.

Neka je u multigrafu G određena jedna šuma. Proizvoljna grana, koja ne pripada šumi obrazuje sa granama iz šume tačno jedan prost elementaran ciklus grafa G. Svaki od ciklusa grafa G, koji se obrazuje na ovaj način, prolazi kroz jednu granu kroz koju ne prolazi nijedan drugi ciklus. Proizvoljan skup ovakvih ciklusa je stoga linearno nezavisan. Kako ovakvih ciklusa ima tačno $m-n+p$, zaključujemo da oni obrazuju bazu nezavisnih ciklusa.

2.2. PLANARNI GRAFOVI

U ovom poglavlju posmatramo neorijentisane grafove bez petlji.

Kao što je rečeno u uvodu, *planarni* ili *ravni* grafovi su oni grafovi koji se mogu nacrtati u ravni tako da im se grane ne seku. Preciznije, zahteva se da je graf mogućno predstaviti u ravni tako da zajednička tačka dve grane može biti samo čvor grafa koji predstavlja zajedničku krajnju tačku tih grana. Ako je planaran graf predstavljen na opisani način u ravni, on deli ravan na više konačnih zatvorenih oblasti i jednu beskonačnu oblast.

Već u uvodnom delu naveli smo jedan primer planarnog grafa. To je bio graf pridružen geografskoj karti. Graf obrazovan mrežom puteva takođe predstavlja planaran graf (ako se isključi mogućnost postojanja nadvožnjaka odnosno raznih saobraćajnih petlji). Postoje i tehničke primere u kojima se zahteva da graf koji odgovara datom tehničkom sistemu ili uređaju bude ravan.

U klasičnim elektronskim uređajima veze između pojedinih delova (elektronskih cevi, otpornika, kondenzatora itd.) ostvarivane su kablom formiranim na podesan način od više provodnika. Pojavom tranzistora i drugih minijaturnih delova postavilo se i pitanje minijaturizacije veza. Tako je sada u opštoj upotrebi tehnika štampanih kola. Izvodi tranzistora i drugih delova su izvedeni u pojedinim tačkama izolatorske ploče. Potrebne veze se ostvaruju pomoću tankog sloja provodnog materijala koji je nanesen na neprovodnu ploču. Ukrštanje pojedinih veza ovde nije dozvoljeno jer bi dovelo do neželjenog kratkog spoja. Stoga je od interesa raspoznati da li je dati graf električnih veza ravan.

Sličan problem se pojavljuje i u mašinskoj tehnici. Mogućnost realizacije izvesnih mehanizama sa zupčanicima zavisi od planarnosti jednog grafa [61].

Planarni grafovi se pojavljuju i u tehnici integrisanih kola [58].

Osim toga, planarni grafovi su značajni zbog toga što planarnost grafa uprošćava mnoge zadatke sa grafovima. Tako, na primer, nalaženje baze nezavisnih ciklusa može se u planarnim grafovima izvršiti prostije nego u opštem slučaju. Može se, naime, pokazati da su ciklusi, koji su obrazovani granicama svake od konačnih oblasti na koje graf deli ravan, nezavisni i da obrazuju bazu nezavisnih ciklusa.

Drugi primeri u kojima se koristi planarnost grafa izloženi su u 2.3.2. i 2.6.2.

2.2.1. Eulerova teorema

Među najstarije teoreme teorije grafova i topologije spada i sledeća *Eulerova* teorema za planarne grafove.

Teorema. *Povezan, planaran graf sa n čvorova i m grana deli ravan na $f=m-n+2$ oblasti.*

Dokaz. Dokaz ćemo sprovesti indukcijom po broju grana. Minimalan broj grana koje sadrži povezan graf sa n čvorova je $m=n-1$. Graf tada predstavlja stablo. Stablo ne ograničava ni jednu konačnu oblast, pa je $f=1$. Dakle, *Eulerova* formula važi za $m=n-1$.

Neka je $m>n-1$. Tada graf sadrži bar jednu konturu. Predpostavimo da *Eulerova* formula važi za grafove sa $m-1$ grana. Posmatrajmo jednu granu koja pripada nekoj konturi. Ova grana je granična za dve oblasti. Ako je udaljimo iz grafa, broj oblasti i broj grana se smanjuju za 1. Po induktivnoj pretpostavci je onda $f-1=m-1-n+2$. Odavde sleduje za graf sa m grana $f=m-n+2$, što je i trebalo dokazati.

Eulerova teorema ima mnogobrojne primene i posledice. Navodimo najpre jednu primenu u geometriji.

Stav 1. *Polijedar sa n temena i m ivica ima $f=m-n+2$ strana.*

Dokaz. Ovaj stav je neposredna posledica *Eulerove* teoreme ako se uoči da je graf, obrazovan temenima i ivicama polijedra, planaran graf. Naime, svaki polijedar može se deformisati tako da mu se ne menja broj temena, ivica i strana, a da se oko njega može opisati sfera. Ovaj postupak se može tako izvesti da se, posle projektovanja temena i ivica polijedra zracima iz centra sfere, na sferi dobija graf (koji odgovara polijedru) čije se grane ne seku. Sa sfere se graf može stereografskom projekcijom preslikati u ravan. Pri ovome je potrebno da se centar projekcije ne nalazi na nekoj grani ili u nekom čvoru grafa sa sfere. Projektovani graf u ravni ima osobinu da mu se grane ne presecaju, te je stoga planaran graf.

Iz *Eulerove* teoreme može se dobiti i sledeći stav.

Stav 2. *U planarnom grafu postoji bar jedan čvor stepena manjeg od 6.*

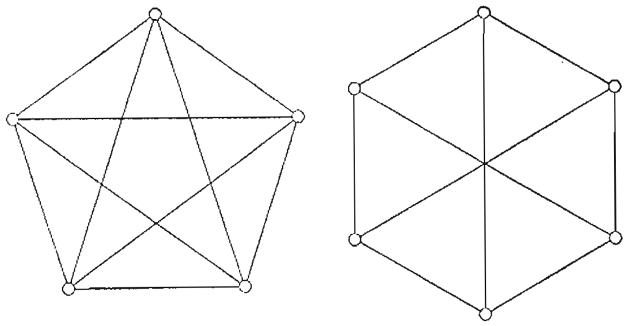
Dokaz. Pretpostavimo suprotno — da takav čvor ne postoji. Tada svi čvorovi imaju stepen veći od 5. Stoga je $2m \geqslant 6n$, tj. $n \leqslant \frac{1}{3} m$. Svaka oblast koju određuje graf u ravni ograničena je sa najmanje tri grane, pa je $2m \geqslant 3f$, tj. $f \leqslant \frac{2}{3} m$. Ali tada je, prema *Eulerovoj* formuli, $2 = f - m + n \leqslant \frac{2}{3} m - m + \frac{1}{3} m = 0$. Dobijena kontradikcija potvrđuje tačnost stava 2.

Najprostiji grafovi, koji nisu planarni, su potpuni pentagraf i potpuni bitrigraf, koji su prikazani na sl. 30.

Bitrigraf je povezan sa jednim poznatim zadatkom koji ima više verzija. Jedna od najpoznatijih je sledeća:

Da li je mogućno spojiti tri kuće i tri bunara stazama koje se ne ukrštaju, a da od svake kuće vodi po jedna staza do svakog od tri bunara?

Ispitivanjem se možemo uveriti da je odgovor odrečan. Međutim, *Eulerova* teorema omogućava da se jednostavno dokaže sledeći stav.



Sl. 30

Stav 3. *Potpuni pentagraf i potpuni bitrigraf nisu planarni grafovi.*

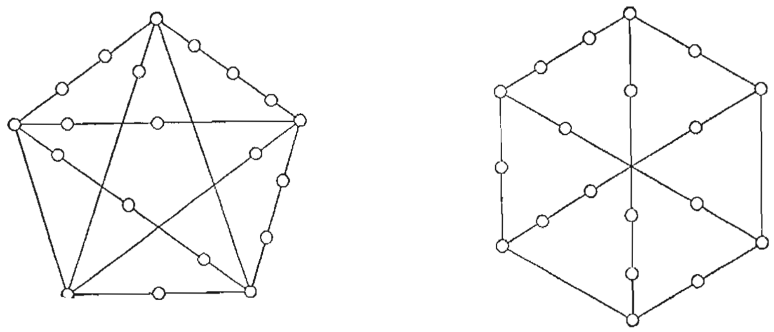
Dokaz. Ako bi potpuni pentagraf bio planaran, bilo bi prema *Eulerovoj* teoremi, $f = 7$, jer je $n = 5$ i $m = 10$. Međutim, kako mora biti $2m \geqslant 3f$, bilo bi $20 \geqslant 21$, što je nemogućno.

Slično bi za potpuni bitrigraf bilo $n = 6$, $m = 9$, i $f = 5$. No, kod bitrigrafa bi svaka oblast bila ograničena bar sa 4 grane. Naime, nikoja tri čvora ne obrazuju sa odgovarajućim granama trougao, jer od tri čvora dva odgovaraju kućama i jedan bunaru (ili dva bunarima a jedan kući), a kuće međusobno i bunari međusobno nisu spojeni stazama. Dakle, $2m \geqslant 4f$, tj. $18 \geqslant 20$, te opet imamo kontradikciju.

2.2.2. Teorema Pontrjagina — Kuratowskog

Ako se grafu koji nije planaran dodaju nove grane ili čvorovi, on ne može postati planaran. Jasno je da nijedan potpuni graf sa više od četiri čvora nije planaran. Naročito su interesantne dve familije grafova koji nisu ravni, a koji se dobijaju od potpunog pentagrafa odnosno potpunog bitrigrafa oformljavanjem novih čvorova na njihovim granama. Ove familije grafova su prikazane na sl. 31.

Opisana operacija oformljavanja novih čvorova na granama nekog grafa dovodi do grafa koji se naziva *potpodela* datog grafa. Grafovi na sl. 31 su potpodele potpunog pentagrafa, odnosno potpunog bitrigrafa.



Sl. 31

U praksi je od interesa raspoznati da li je zadati graf ravan. Postoji sledeća teorema *Pontrjagina—Kuratowskog* koja precizira potrebne i dovoljne uslove koje treba da ispunjava graf da bi bio ravan.

Teorema. *Graf je planaran ako i samo ako ne sadrži, kao delimični podgraf, ni potpuni pentagraf ni potpuni bitrigraf ni njihovu potpodelu.*

Teoremu je dokazao 1930. god. *C. Kuratowski.* Nepublikovan dokaz *L. S. Pontrjagina* potiče iz 1927. god. Zbog opširnosti dokaz neće biti ovde naveden. On se može naći, na primer, u [6].

Na osnovu teoreme *Pontrjagina—Kuratowskog*, *Pétersenov* graf na sl. 21. nije planaran. Nije teško ustanoviti da on sadrži kao delimični podgraf podpodelu potpunog bitrigrafa.

Za raspoznavanje planarnog grafa razrađeni su mnogi praktični algoritmi [48]. Ako je broj čvorova veliki, algoritam se realizuje na elektronskom računaru.

U primenama se dalje javljaju, na primer, sledeći problemi: Ako graf nije planaran, na koji način ga treba predstaviti u ravni tako da broj preseka grana bude minimalan? Kako dekomponovati graf koji nije ravan u minimalan broj delimičnih grafova koji su planarni?

Prvi od ovih problema je razmatran, na primer, u [7].

U vezi sa drugim problemom definiše se *debljina* grafa. Za planarne grafove debljina je jednaka 1. Za grafove koji nisu planarni debljina je jednaka minimalnom broju planarnih delimičnih grafova na koje se graf može razložiti, s tim da svaka grana grafa pripadne tačno jednom delimičnom grafu.

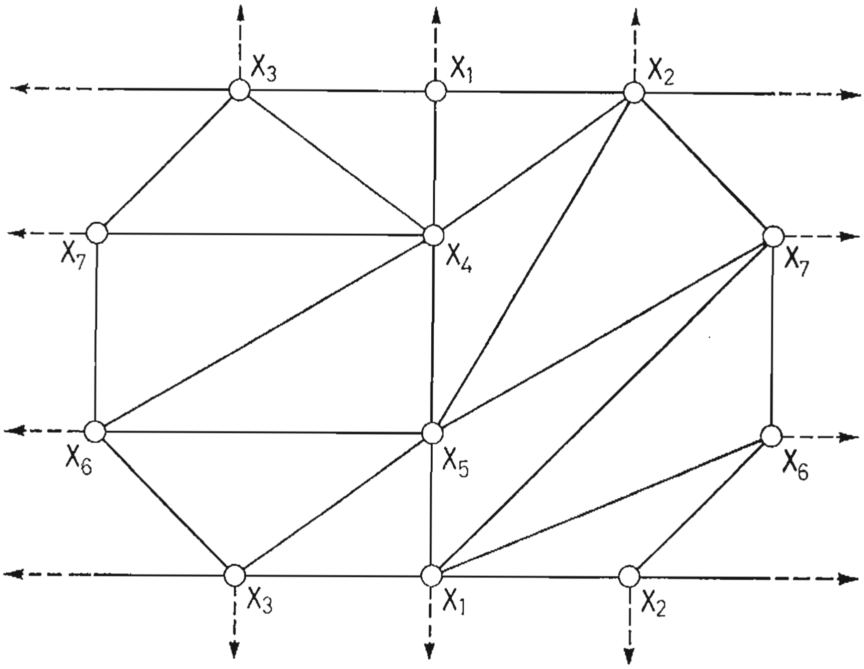
Ispitivana je posebno debljina potpunih grafova. Debljina potpunog pentagrafa je očigledno jednaka 2. Za potpuni graf sa 9 čvorova debljina iznosi 3. U opštem slučaju problem nije rešen. Specijalno se, na primer, ne zna debljina potpunog grafa sa 16 čvorova.

Ekspozicija problema u vezi sa debljinom grafa nalazi se u [4].

Svi opisani problemi imaju svoje generalizacije u sledećem smislu. Umesto u ravni, graf može da se predstavi na nekoj drugoj površini, s tim da se zahteva da mu se tada grane ne seku.

Jasno je da se tada okolnosti mogu da promene. Tako je, na primer, u ravni nemoguće predstaviti potpuni pentagraf bez presecanja grana. Na torusu je ovo mogućno ne samo za pentagraf, već i za potpuni graf sa 7 čvorova (sl. 32).

Za zatvorenu orijentisanu površinu definiše se *rod s* površine. On je jednak maksimalnom broju zatvorenih, međusobno disjunktnih krivih koje se mogu postaviti na površinu tako da njima površina nije podeljena na dva ili više delova. Za ravan i sferu je $s=0$, za torus $s=1$, a za površinu vaze sa dve drške $s=2$.



Sl. 32

Jedan od problema koji se u vezi sa ovim postavlja glasi:

Koliki mora biti rod površine da bi se na njoj mogao predstaviti potpun graf sa n čvorova?

Rod grafa se definiše kao minimalni rod površine na kojoj se graf može predstaviti a da mu se grane ne seku.

O ovim problemima biće govora i u sledećem poglavlju.

2.3. BOJENJE GRAFOVA

U ovom poglavlju se posmatraju neorijentisani grafovi bez petlji i višestrukih grana.

2.3.1. O bojenju uopšte

Graf se boji na taj način što se svakom čvoru pridružuje neka boja, tj. svaki čvor se boji nekom bojom. Graf je pravilno obojen ako su svaka dva susedna čvora obojena različitim bojama. Ako se graf može pravilno obojiti a da se pri tome upotrebi k boja, graf je *k-obojiv*. *Hromatski broj* $\gamma(G)$ grafa G je jednak k, ako je graf k-obojiv a nije $(k$-$1)$-obojiv.

U literaturi su opisani i drugi načini bojenja grafova. Tako se, prema jednom načinu bojenja, boje grane grafa a ne čvorovi. Grane, koje se stiču u istom čvoru, moraju biti različito obojene. Treći način bojenja obuhvata bojenje čvorova i grana istovremeno. Ovde, pored uslova da susedni čvorovi i susedne grane ne budu obojeni istom bojom, postoji i uslov da čvor i grana, koja polazi iz tog čvora, ne smeju biti isto obojeni.

Drugi i treći način bojenja grafa mogu biti svedeni na prvi na sledeći način. Za dati graf G definisaćemo *pridruženi graf* $L(G)$ i *totalni graf* $T(G)$.

Pridruženi graf (ili *graf grana*) grafa G je graf čiji se čvorovi nalaze u biunivokoj korespondenciji sa skupom grana grafa G. Dva čvora iz $L(G)$ su spojena granom ako i samo ako se odgovarajuće grane u grafu G stiču u istom čvoru.

Čvorovi *totalnog grafa* $T(G)$ su u biunivokoj korespondenciji sa unijom skupa čvorova i skupa grana grafa G. Dva čvora u $T(G)$ su susedna ako i samo ako njima u G odgovaraju: 1° dva susedna čvora ili, 2° dve grane koje se stiču u istom čvoru ili 3° čvor i grana koja se stiče u tom čvoru.

Bojenje grana grafa G se svodi na bojenje čvorova grafa $L(G)$. Istovremeno bojenje čvorova i grana u G svodi se na bojenje čvorova grafa $T(G)$. Iako se opisanim postupkom sva tri načina mogu svesti na prvi način, ipak se to ne čini uvek, jer su, na primer, algoritmi za bojenje grana bolje razrađeni od algoritama za bojenje čvorova.

S druge strane, svođenje svih vrsta bojenja na bojenje grana nije uvek mogućno jer postoje grafovi koji ne predstavljaju grafove grana nijednog grafa.

Analogno hromatskom broju $\gamma(G)$ grafa, koji predstavlja karakteristiku prvog načina bojenja, uvode se *hromatska klasa* $\chi(G)$ grafa i *hromatski indeks* $\iota(G)$ grafa kao karakteristike drugog i trećeg načina bojenja pomoću relacija $\chi(G)=\gamma(L(G))$ i $\iota(G)=\gamma(T(G))$.

Bojenje grafova i hromatski broj su od velikog značaja u mnogim teorijskim i praktičnim pitanjima. Između ostalog, pomenimo da se problem nalaženja optimalnog načina korišćenja memorije elektronskog računara može svesti na problem bojenja čvorova grafa [21].

2.3.2. Hromatski broj grafa

Zadovoljavajući algoritmi za bojenje čvorova grafa nisu poznati. Opis postojećih algoritama se može naći u [69].

Nije poznato kako se može odrediti hromatski broj grafa bez efektivnog bojenja grafa, osim u izuzetnim slučajevima. Međutim, u mnogim problemima je interesantno baš ovakvo određivanje hromatskog broja, pa je zato od značaja veza hromatskog broja sa drugim brojnim karakteristikama grafa.

Stoga ćemo navesti nekoliko elementarnih osobina i nejednakosti za hromatski broj $\gamma(G)$.

Razmotrimo najpre dva ekstremna slučaja. Ako graf G ne sadrži nijednu granu, tj. ako se sastoji samo od izolovanih čvorova, sve čvorove možemo obojiti istom bojom. Stoga je $\gamma(G)=1$. Nasuprot tome, za potpuni graf G sa n čvorova imamo $\gamma(G)=n$.

Očigledno je da graf ne može imati manji hromatski broj od bilo kojeg svog podgrafa. Ako graf G ima, kao podgraf, potpuni graf sa k čvorova, dobija se $\gamma(G)\geqslant k$. U skupu potpunih podgrafova grafa G postoje, svakako, oni koji imaju najviše čvorova. Takvi potpuni podgrafovi nazivaju se *klike* grafa. Za graf G se definiše i veličina $K(G)$ koja je jednaka broju čvorova proizvoljne klike grafa. Očigledno je $\gamma(G) \geqslant K(G)$.

Druge ocene veličine hromatskog broja grafa možemo dobiti posmatranjem stepena čvorova grafa $d_1, \ldots, d_n$. Neka je $d = max\,(d_1, \ldots, d_n)$. Tada važi sledeća teorema *Brooksa* [11].

Teorema 1. *Za hromatski broj $\gamma(G)$ povezanog grafa G važi $\gamma(G) \leqslant d+1$. Jednakost važi ako i samo ako je G ili potpun graf ili regularan graf stepena dva sa neparnim brojem čvorova.*

Prvi deo teoreme se jednostavno dokazuje indukcijom po broju čvorova. Jedan nov skraćeni dokaz teoreme dat je u [41].

Nedavno je u poznatoj problemskoj rubrici časopisa »American Mathematical Monthly« postavljen sledeći problem [25]:

Pokazati da za svaki graf G sa n čvorova, m grana i hromatskog broja $\gamma(G)$ važi nejednakost $\gamma(G) \geqslant \dfrac{n^2}{n^2-2\,m}$.

Navodimo dva rešenja ovog problema.

Rešenje 1. Svaki graf sa n čvorova, hromatskim brojem γ i maksimalnim brojem grana može se predstaviti na sledeći način. Skup čvorova je podeljen u γ disjunktnih, nepraznih podskupova sa $n_1, \ldots, n_\gamma$ $(n_1 + \ldots + n_\gamma = n)$ čvorova u svakom od podskupova respektivno. Svaka dva čvora iz različitih podskupova su spojena granom, a nijedan par čvorova iz istog podskupa nema tu osobinu. Broj grana u ovom grafu je $m = \dfrac{1}{2} \sum\limits_{i=1}^{\gamma} n_i\,(n - n_i)$. Određujući maksimum ove funkcije uz uslov $n_1 + \cdots + n_\gamma = n$, dobijamo $m \leqslant \dfrac{n^2\,(\gamma-1)}{2\,\gamma}$, odakle sleduje $\gamma \geqslant \dfrac{n^2}{n^2-2\,m}$.

Rešenje 2.[3] Izvešćemo induktivni dokaz po broju čvorova n. Za $n=2$ stav je tačan. Pretpostavimo da stav važi za sve grafove sa manje od n čvorova i posmatrajmo graf G sa n čvorova, m grana i sa $\gamma(G) = \gamma$. Neka je izvedeno jedno bojenje čvorova grafa G sa γ boja $b_1, \ldots, b_\gamma$. Neka je X_i $(i = 1, \ldots, \gamma)$ skup čvorova koji su obojeni bojom b_i. Za svako i postoji čvor $x_i \in X_i$ koji je istovremeno susedan sa bar po jednim čvorom iz svakog od skupova $X_j\,(j \neq i)$. Ako ovo ne bi bilo tačno za neko i, svi čvorovi iz X_i bi se mogli obojiti sa po nekom od boja $b_j\,(j \neq i)$ i graf ne bi bio γ-hromatski. Posmatrajmo parove čvorova $x_1, \ldots, x_\gamma$. Ako x_i i x_j nisu susedni, oformimo granu između njih i udaljimo iz grafa granu kojom je x_i spojen sa nekim od čvorova boje b_j. Ponavljanjem ovog postupka možemo postići da čvorovi $x_1, \ldots, x_\gamma$ obrazuju potpun podgraf u ovako dobijenom grafu G'. Grafovi G i G' imaju iste hromatske brojeve, te stoga svaki od $n-\gamma$ čvorova različitih od $x_1, \ldots, x_\gamma$ nije susedan sa bar jednim od čvorova $x_1, \ldots, x_\gamma$. Udaljimo iz G' čvorove $x_1, \ldots, x_\gamma$ sa svim njihovim granama. Neka preostali graf ima n_1 čvorova, m_1 grana i hromatski broj γ_1. Po induktivnoj pretpostavci je $\gamma_1 \geqslant \dfrac{n_1^{\,2}}{n_1^{\,2}-2\,m_1}$.

Na osnovu ovoga, te relacija $\gamma \geqslant \gamma_1$, $n_1 = n-\gamma$ i $m_1 \geqslant m - \binom{\gamma}{2} - \gamma\,(n-\gamma) + n - \gamma$

[3] Rešenje 2. predstavlja redigovano rešenje studenta Elektrotehničkog fakulteta Slobodana Simića.

dobija se $\gamma \geqslant \dfrac{(n-\gamma)^2}{(n-\gamma)^2-2m+\gamma(\gamma-1)+2\gamma(n-\gamma)-2(n-\gamma)}$, odakle sleduje $\gamma \geqslant \dfrac{n^2}{n^2-2m}$.

Veza između hromatskog broja i strukture grafa je veoma komplikovana. Ona je jedino za *bihromatske* grafove, tj. za one koji se mogu obojiti sa dve boje, poznata i izražena je sledećom teoremom koju je dao *D. König.*

Teorema 2. *Graf je bihromatski ako i samo ako ne sadrži kao delimični podgraf nijednu konturu sa neparnim brojem čvorova.*

Dokaz. Kontura sa neparnim brojem čvorova je očigledno trihromatski graf. Stoga je jasno da bihromatski graf ne može da sadrži kao delimični podgraf konturu sa neparnim brojem čvorova.

Pretpostavimo sada da graf ne sadrži nijednu konturu sa neparnim brojem čvorova i dokažimo da je graf bihromatski. Izvršićemo efektivno bojenje grafa sa dve boje. Proizvoljan čvor obojimo, na primer, belom bojom; sve njemu susedne čvorove obojimo plavom, a susedne čvorove od ovih opet belom itd. Kada završimo sa jednom komponentom povezanosti pređimo na drugu. Ako na ovaj način obojimo sve čvorove grafa, graf je bihromatski. U suprotnom slučaju naići ćemo u procesu bojenja na čvor koji treba obojiti, na primer, plavom, a on je već obojen belom. Međutim, tada od početnog čvora vode u ovaj čvor dva različita puta, od kojih jedan ima paran, a drugi neparan broj grana. Ako objedinimo ova dva puta, dobijamo kružni put neparne dužine. Ovaj kružni put može da postoji samo ako u grafu postoji kontura sa neparnim brojem čvorova, a to je u suprotnosti sa polaznom pretpostavkom.

Ovim je dokaz teoreme završen.

Tipični predstavnici bihromatskih grafova su stabla i konture sa parnim brojem čvorova.

U uvodu je navedeno da važi sledeća teorema:

Teorema 3. *Svaki planaran graf je 5-obojiv.*

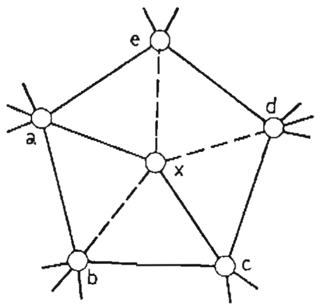
Dokaz. Koristićemo indukciju po broju čvorova grafa.

Za grafove sa malim brojem čvorova teorema se neposredno proverava. Pretpostavimo da teorema važi za planarne grafove sa manje od n čvorova i posmatrajmo planaran graf G sa n čvorova.

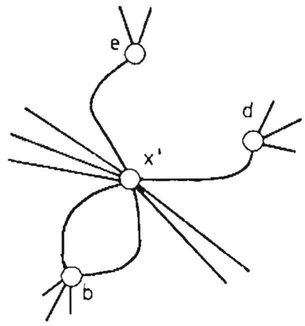
Na osnovu stava 2. iz 2.2.1, graf G poseduje bar jedan čvor stepena ne većeg od 5. Neka je to čvor x. Ako je x stepena manjeg od 5, postupa se na sledeći način. Čvor x se udalji iz G sa svojim granama. Dobijeni graf je na osnovu induktivne pretpostavke 5-obojiv. Vratimo čvor x nazad u graf. Za bojenje čvorova susednih čvoru x upotrebljene su najviše 4 boje, te se x može obojiti jednom od preostalih boja.

Posmatrajmo stoga slučaj kada je x stepena 5. Neka su a, b, c, d, e čvorovi susedni čvoru x. Na osnovu teoreme *Pontrjagina — Kuratowskog* čvorovi a, b, c, d, e ne obrazuju potpuni pentagraf u G. Stoga bar jedan par ovih čvorova nije povezan granom. Neka su to, na primer, čvorovi a i c. Udaljimo iz G grane (x, b), (x, d)

i (x, e). Na sl. 33a je predstavljen posmatrani deo grafa G. Udaljimo sada i grane (x, a) i (x, c), a sve grane koje dolaze do čvorova a i c produžimo do čvora x, koga ćemo sada označiti sa x' (sl. 33 b). Tako dobijeni graf može se po induktivnoj pretpostavci obojiti sa 5 boja. Bojenje grafa sa sl. 33b određuje bojenje i grafa G. Naime,



a)



b)

Sl. 33

čvorovi a i b pošto nisu susedni dobijaju boju čvora x'. Za bojenje čvorova b, d, e, potrebne su još najviše tri boje (to su boje određene bojenjem grafa sa sl. 33 b). Za bojenje čvora x preostaje još jedna boja.

Ovim je teorema dokazana.

2.3.3. Bojenje grafova na površinama višeg roda

Heawood, koji je 1890. god. pronašao grešku u *Kempeovom* rešenju problema četiri boje, postavio je i problem bojenja mapa na površinama višeg roda.

Neka je S_s površina roda s. *Hromatski broj* $\gamma(S_s)$ *površine* S_s definiše se kao maksimalan broj boja potreban da se na S_s oboji svaka mapa, odnosno svaki graf koji se na toj površini može nacrtati, a da mu se grane ne presecaju. *Heawood* je dokazao nejednakost

$$\gamma(S_s) \leqslant \left[\frac{7}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 48\,s}\right], \quad s = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

i pretpostavio da jednakost važi za svako s. To je poznata *Heawoodova* hipoteza.

Pošto se na torusu može nacrtati potpun graf sa sedam čvorova a da mu se grane ne presecaju (sl. 32), dobija se na osnovu (1) $\gamma(S_1) = 7$. I za druge vrednosti s su se vremenom pojavljivali dokazi da u (1) važi jednakost. Jedno vreme se smatralo da je jednakost u (1) dokazana za svako s, iako to nije bilo tačno. Čak je ovakva pogrešna informacija unošena i u udžbenike. Velike doprinose ispitivaju *Heawoodove* hipoteze dali su *G. Ringel* i *J. W. T. Youngs*. Oni su uspeli 1968. god., 78 godina od njenog postavljanja, da kompletiraju dokaz *Heawoodove* hipoteze [52]. Tako sada imamo sledeću *Ringel—Youngsovu* teoremu.

Teorema 1. *Hromatski broj* $\gamma(S_s)$ *zatvorene orijentisane površine* S_s *roda* $s > 0$ *je* $\gamma(S_s) = \left[\frac{7}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + 48\,s}\right]$.

Ringel—Youngsovoj teoremi je ekvivalentna sledeća teorema.

Teorema 2. *Rod* $s(K_n)$ *potpunog grafa* K_n *sa* $n(\geqslant 3)$ *čvorova je*

$$s(K_n) = \left\{ \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\},$$

gde $\{x\}$ *označava najmanji ceo broj koji nije manji od* x.

Ringel i *Youngs* su, u stvari, dokazali ovu drugu verziju teoreme.

2.4. BROJ UNUTRAŠNJE I SPOLJAŠNJE STABILNOSTI GRAFA

2.4.1. Broj unutrašnje stabilnosti grafa

Neka je dat proizvoljan graf $G=(X, U)$ bez petlji. Podskup S skupa čvorova $X(S \subset X)$ zove se *unutrašnje stabilan* ili *nezavisan skup*[4] grafa G, ako za svaki par čvorova $x_i, x_j \in S$ važi $(x_i, x_j) \notin U$ i $(x_j, x_i) \notin U$. Podgraf grafa G, indukovan unutrašnje stabilnim skupom S ne sadrži nijednu granu, tj. sastoji se od izolovanih čvorova.

Neka je $\mathcal{S}$ skup svih unutrašnje stabilnih skupova grafa G. *Broj unutrašnje stabilnosti* $\alpha(G)$ grafa G definiše se relacijom

$$\alpha(G) = \max_{S \in \mathcal{S}} |S|.$$

Skupovi $S \in \mathcal{S}$ za koje je $|S| = \alpha(G)$ zovu se *maksimalni unutrašnje stabilni* ili *maksimalni nezavisni skupovi* grafa.

U daljem tekstu posmatraćemo samo neorijentisane grafove bez petlji i višestrukih grana.

Maksimalan nezavisan skup grafa može se dovesti u vezu sa pojmom klike grafa. Neka je dat graf G i jedan maksimalan nezavisan skup S grafa G. Posmatrajmo komplement $\overline{G}$ grafa G. Čvorovi iz S nisu u G susedni, pa su stoga u $\overline{G}$ spojeni granama. Oni u $\overline{G}$ obrazuju kliku. Odavde imamo relaciju

$$\alpha(G) = K(\overline{G}).$$

Broj unutrašnje stabilnosti $\alpha(G)$ grafa može se dovesti u vezu i sa hromatskim brojem $\gamma(G)$ grafa. Neka je graf obojen sa $\gamma(G)$ boja. Skup čvorova iste boje obrazuje unutrašnje stabilan skup grafa, jer čvorovi obojeni istom bojom ne smeju biti susedni. Dakle, broj čvorova iste boje nije veći od $\alpha(G)$. Ako graf ima n čvorova, dolazimo do relacije

$$\alpha(G)\,\gamma(G) \geqslant n.$$

Kombinujući ovaj rezultat sa *Brooksovom* procenom hromatskog broja, dolazimo do sledećeg stava:

---

[4] Za označavanje istog pojma upotrebljava se i termin *antilanac*, koji je uveo Đ. Kurepa.

Stav. *Ako je* $d = max(d_1, \ldots, d_n)$, *gde su* $d_1, \ldots d_n$ *stepeni čvorova grafa* G, *važi nejednakost*

$$\alpha(G) \geqslant \frac{n}{d+1}.$$

U 1.2. je objašnjeno kako se svakoj šahovskoj figuri može pridružiti jedan graf. Svakom položaju više istorodnih figura na šahovskoj tabli, u kojem se te figure međusobno ne napadaju, odgovara u grafu pridruženom figuri jedan unutrašnje stabilan skup. Maksimalan broj figura koje se mogu postaviti na tablu a da se međusobno ne napadaju jednak je broju unutrašnje stabilnosti pridruženog grafa.

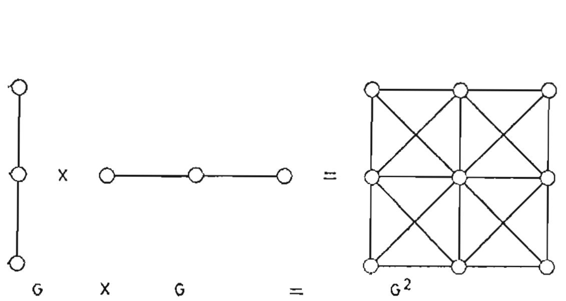
Za damu na tabli 8×8 broj unutrašnje stabilnosti pridruženog grafa je 8. Za tablu tipa $n \times n$ je ovaj broj jednak n za $n \geqslant 4$, a za $n = 1, 2, 3$ jednak je 1, 1, 2 respektivno. Za topa, odnosno lovca, na $n \times n$ tabli je $\alpha = n$, odnosno $\alpha = 2n - 2$. Za kralja je $\alpha = \frac{1}{4} n^2$ za n parno i $\alpha = \frac{1}{4}(n+1)^2$ za n neparno, a za skakača $\frac{1}{2} n^2$ za n parno i $\frac{1}{2}(n^2 + 1)$ u suprotnom slučaju [56].

2.4.2. Shannonov problem u teoriji informacija i veza sa jednim šahovskim problemom

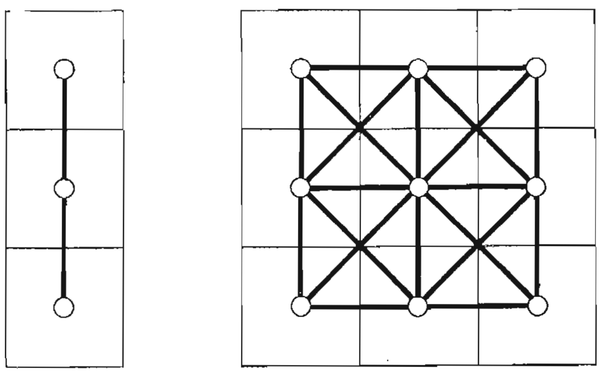
Definisaćemo najpre jednu binarnu operaciju nad grafovima — *jaki proizvod grafova.*

Neka je $G_1 = (X, U)$ i $G_2 = (Y, V)$. Jaki proizvod $G_1 \times G_2$ grafova G_1 i G_2 se definiše pomoću $G_1 \times G_2 = (X \times Y, W)$. Čvorovi (x_1, y_1) i (x_2, y_2) $(x_1, x_2 \in X;$ $y_1, y_2 \in Y)$ su susedni u $G_1 \times G_2$ ako i samo ako je ili $(x_1, x_2) \in U$ i $y_1 = y_2$ ili $(y_1, y_2) \in V$ i $x_1 = x_2$ ili $(x_1, x_2) \in U$ i $(y_1, y_2) \in V$.

Primer. Na sl. 34 dat je primer jakog proizvoda jednog grafa sa samim sobom.



Sl. 34



Sl. 35

Svaki od grafova faktora sa sl. 34 može interpretisati kao graf kretanja kralja na jednodimenzionalnoj šahovskoj tabli sa tri polja (sl. 35). Proizvod odgovara kretanju kralja na kvadratnoj tabli tipa 3×3.

Primetimo da je u ovom primeru $\alpha(G^2) = [\alpha(G)]^2$.

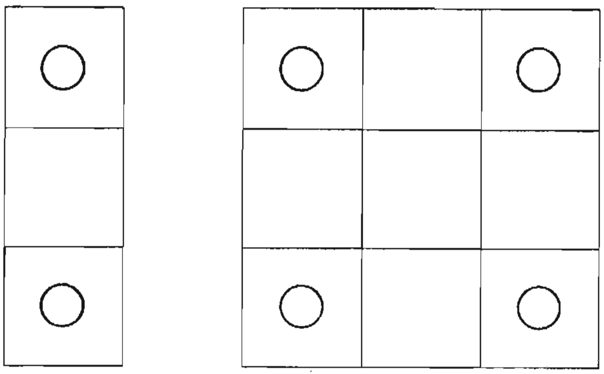
Opisana situacija ima i drugu interpretaciju.

Kroz sistem veze mogu se prenositi signali x_1, x_2 i x_3. Usled smetnji na vezama na izlazu sistema, signal x_1 može se protumačiti kao x_1 ili x_2, x_2 kao x_2 ili x_3 i x_3 samo kao x_3. Moguća izobličenja signala mogu se predstaviti jednim grafom, čiji čvorovi odgovaraju mogućnim signalima. Dva čvora su spojena granom ako i samo ako odgovarajući signali mogu da izazovu isti izlazni signal. Tako dobijamo graf G sa sl. 34.

Da ne bi došlo do grešaka u prenosu informacija, za kodovanje saopštenja moraju se koristiti samo signali koji se na izlazu ne mogu pomešati. Čvorovi koji odgovaraju ovakvim signalima obrazuju u grafu unutrašnje stabilni skup.

Dakle, u posmatranom slučaju treba koristiti samo signale x_1 i x_3 za kodovanje pojedinih saopštenja.

Umesto da saopštenje šifrujemo posebnim signalima, možemo to učiniti, na primer, nizom od dva signala. Broj uređenih parova signala koji nam tada stoje na raspoloženju jednak je broju unutrašnje stabilnosti jakog proizvoda grafa sa samim sobom. Ti parovi su (x_1, x_1) (x_1, x_3), (x_3, x_1), (x_3, x_3).



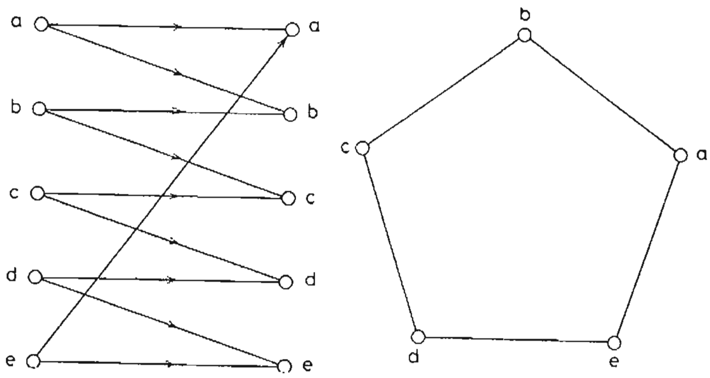
Sl. 36

Izbor pojedinačnih signala i parova signala je ekvivalentan sa postavljanjem što većeg broja kraljeva na odgovarajuće šahovske table, sl. 36.

Prilikom kodovanja saopštenja sa nizovima više od dva signala, morao bi se posmatrati trodimenzionalni odnosno višedimenzionalni šah.

C. E. Shannon je proučavao broj unutrašnje stabilnosti u višestrukim jakim proizvodima grafa sa samim sobom. Pokazalo se da je u nekim slučajevima mogućno prenošenje većeg broja saopštenja nego što izgleda u prvi mah.

Takav slučaj nastaje, na primer, u sistemu veze sa pet signala a, b, c, d, e, pri čemu na izlazu signal a može da izazove pojavljivanje signala a ili b, signal b

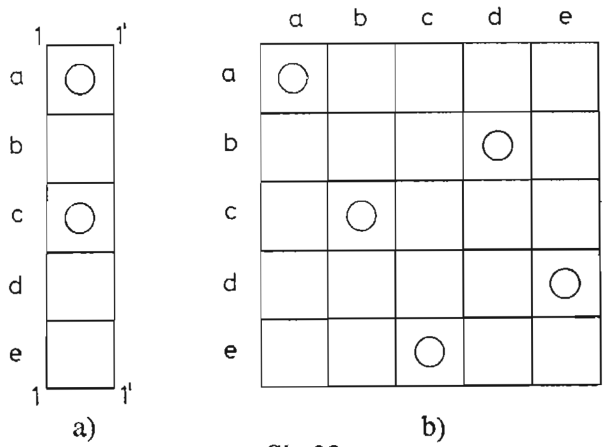


Sl. 37

može da izazove b ili c itd., prema sl. 37. Na istoj slici je dat i odgovarajući graf čija je konstrukcija opisana ranije.

Ovde je $\alpha(G)=2$, ali $\alpha(G^2)$ nije 4 već 5. Ovo se može videti pomoću sl. 38a, na kojoj grafu G odgovara kretanje kralja na cilindričnoj šahovskoj tabli (ivice $1-1'$ treba slepiti). Grafu $G\times G$ odgovara šahovska tabla, koju dobijamo sa sl. 38b ako najpre slepimo gornju i donju ivicu table, pa zatim dobijenu cilindričnu tablu smotamo u oblik torusa i suprotne ivice cilindrične površine slepimo. Parovi signala koji se mogu rekonstruisati na izlazu su (a, a), (b, d), (c, b), (d, e), (e, c).

Vidi se da je u opštem slučaju $\sqrt{\alpha(G^2)}\geqslant\alpha(G)$. Stoga se definiše veličina $\theta(G)=\sup\limits_{n}\sqrt[n]{\alpha(G^n)}$ koja se naziva *informacioni kapacitet* grafa. Određivanje kapaciteta datog grafa je očigledno povezano sa maksimalnim iskorišćenjem datog sistema veze.



Sl. 38

Za graf G sa sl. 37 nije poznat kapacitet. Zna se da je $\sqrt{5}\leqslant\theta(G)<\frac{5}{2}$.

U [40] je dokazano da je $\theta(G)=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\alpha(G^n)}$.

2.4.3. Jedan problem teorije kodova koji ispravljaju greške

Posmatra se skup uređenih n-torki $X=(x_1, \ldots, x_n)$, gde je $x_r=1, \ldots, b$ $(r=1, \ldots, n)$. Broj n-torki je b^n. Jednakost $X=Y$ n-torki $X=(x_1, \ldots, x_n)$ i $Y=(y_1, \ldots, y_n)$ važi ako i samo ako je $x_1=y_1, \ldots, x_n=y_n$.

Kaže se da su n-torke X i Y na rastojanju d, ako ne važi tačno d od n jednakosti $x_1=y_1, \ldots, x_n=y_n$.

Skup n-torki $\{X_1, \ldots, X_k\}$ zove se *kod* kodovskog rastojanja d, ako je minimum međusobnih rastojanja n-torki iz koda jednak d.

Kod kodovskog rastojanja $d=2l+1$ ima sledeću osobinu. Ako se prilikom prenošenja proizvoljne n-torke koda kroz sistem veze pogrešno prenese ne više od l koordinata n-torke, u prijemnom uređaju se n-torka može rekonstruisati.

Prema [10] jedan od osnovnih problema teorije kodova koji ispravljaju greške je sledeći:

Koliko postoji n-torki u datom skupu n-torki, čija međusobna rastojanja nisu manja od d, tj. koliko n-torki sadrži najveći kod kodovskog rastojanja d?

Problem je rešen samo za specijalne vrednosti n, b, l [2].

Za $b=2, 3$ i $n=3, 4, \ldots, 12$ problem je ekvivalentan problemu sportske prognoze (videti primer).

Problem se može interpretirati na jednom grafu. Neka je G_{nbl} neorijentisan graf, bez petlji i višestrukih grana, čiji su čvorovi sve n-torke datog prostora n-torki. Dve n-torke su spojene granom ako i samo ako je njihovo rastojanje manje od $2l+1=d$.

Postavljeni problem je ekvivalentan sledećem:

Odrediti broj unutrašnje stabilnosti grafa G_{nbl}.

Navešćemo neke karakteristike grafa G_{nbl}.

Na rastojanju i $(i=0,1,\ldots,n)$ od svake n-torke nalazi se tačno $\binom{n}{i}(b-1)^i$ n-torki. Stoga je svaki čvor grafa G_{nbl} povezan sa $\sum_{i=1}^{2l}\binom{n}{i}(b-1)^i$ drugih čvorova. G_{nbl} je, dakle, regularan graf sa b^n čvorova stepena $\sum_{i=1}^{2l}\binom{n}{i}(b-1)^i$.

Izučavanje osobina grafa G_{nbl} je od interesa za navedeni i druge probleme teorije kodova koji ispravljaju greške.

Primer. Za $n=4$, $b=3$, $l=1$ $(d=3)$ maksimalni kod sadrži 9 četvorki (simboli koji se prenose su 0, 1 i 2, a četvorke su ispisane vertikalno):

0	0	0	1	1	1	2	2	2
0	1	2	0	1	2	0	1	2
0	2	1	2	1	0	1	0	2
0	1	2	2	0	1	1	2	0

Dakle, šifrator u sistemu veze ima tri osnovna simbola 0, 1 i 2. U elektronskom uređaju to može da znači, na primer, odsustvo impulsa, pozitivan pravougaoni impuls i negativan pravougaoni impuls. Ako hoćemo da korisne informacije označavamo četvorkama i ako znamo da se kroz sistem veze najviše jedna komponenta četvorke može pogrešno preneti, upotrebljavamo gornji kod. Ovim kodom možemo prenositi najviše devet različitih informacija, na primer, devet slova.

Ako sistem ne pravi više od jedne greške u svakoj četvorci, četvorka se uvek može rekonstruisati na ulazu. Na primer, ako se na izlazu dobije četvorka 0 0 1 1, očigledno je da nju treba protumačiti kao četvorku 2 0 1 1.

Interesantno je da se navedeni kod može primeniti kao »sistem« pri igranju na sportskoj prognozi. Ako je potrebno predvideti ishod četiri fudbalske utakmice (označimo sa 1 pobedu domaćeg kluba, sa 0 nerešen rezultat, i sa 2 pobedu gostujućeg kluba) tako da se prognoza za najmanje tri utakmice pokaže kao tačna, onda je, očigledno, potrebno postaviti više prognoza. Ako svakoj četvorci navedenog koda odgovara jedna prognoza ishoda četiri utakmice, onda je na osnovu ranije rečenog jasno da ćemo, bez obzira na stvarne ishode utakmica u jednoj od devet prognoza, imati bar tri tačna rezultata.

Problem sportske prognoze je obrađivan u matematičkoj literaturi. Tako je, na primer, u [34] dokazano da je za prognoziranje ishoda pet utakmica, uz uslov da se bar u jednoj prognozi moraju postići najmanje četiri tačna rezultata, potrebno postaviti 27 prognoza.

2.4.4. **Broj spoljašnje stabilnosti grafa**

Posmatrajmo opet proizvoljan graf $G=(X, U)$ bez petlji. Podskup T skupa čvorova naziva se *spoljašnje stabilni skup* grafa, ako iz svakog čvora grafa koji ne pripada T vodi bar jedna grana u neki od čvorova iz T.

Posmatrajmo skup $\mathcal{T}$ svih stabilnih skupova grafa G. *Broj spoljašnje stabilnosti* $\beta(G)$ grafa G definiše se pomoću

$$\beta(G)=\min_{T\in\mathcal{T}}|T|.$$

Skupovi $T\in\mathcal{T}$ za koje je $|T|=\beta(G)$ zovu se *minimalni spoljašnje stabilni skupovi* grafa.

Pojmu spoljašnje stabilnog skupa srodan je pojam dominirajućeg skupa grafa. *Dominirajući skup* grafa je takav skup čvorova grafa D da u svaki čvor grafa koji ne pripada D vodi bar jedna grana koja polazi iz D. Minimalan dominirajući skup i broj dominiranja se definišu analogno minimalnom unutrašnje stabilnom skupu, odnosno broju unutrašnje stabilnosti.

U neorijentisanom grafu unutrašnje stabilni skup i dominirajući skup predstavljaju jedan isti pojam.

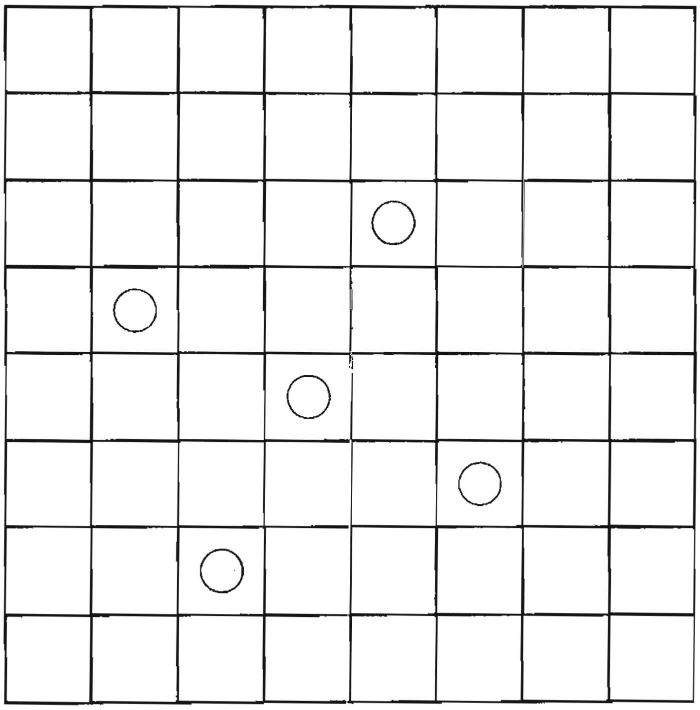
Primer 1. U šahovskoj problemskoj literaturi poznat je *problem pet dama*. On je u vezi sa brojem spoljašnje stabilnosti grafa.

Problem pet dama glasi:

Koliko je najmanje dama potrebno postaviti na šahovsku tablu da bi sva polja table bila napadnuta? (Pri ovom se podrazumeva da dama napada polje na kojem se nalazi.)

Odgovor glasi: Potrebno je najmanje pet dama.

Jedno rešenje je dato na sl. 39. Ukupno postoje 4860 rešenja koja je mukotrpnim proveravanjem prebrojao *K. Szily* 1902. god.



Sl. 39

Rešenja problema pet dama predstavljaju minimalne dominiraujće skupove u grafu pridruženom šahovskoj figuri dami.

Podskup skupa čvorova grafa G, koji je istovremeno i unutrašnje stabilan skup i spoljašnje stabilan skup grafa G, naziva se *jezgro* grafa. Pojam jezgra ima primenu u teoriji igara kod analize tzv. igara na grafovima.

Igru igraju dva igrača tako što naizmenično biraju čvorove zadatog grafa. Najpre se žrebom ili na drugi način određuje jedan čvor grafa. Prvi igrač može da izabere čvor do koga se može stići granom iz početnog čvora; drugi igrač bira između čvorova u koje vode grane iz čvora koji je izabrao prvi igrač itd. Igru gubi onaj koji ne može više da izabere nijedan čvor.

Sledeći stav može da pomogne prilikom igranja ovakvih igara.

Stav. *Igrač, koji izabere čvor iz jezgra grafa, ne može prilikom pravilne igre da izgubi.*

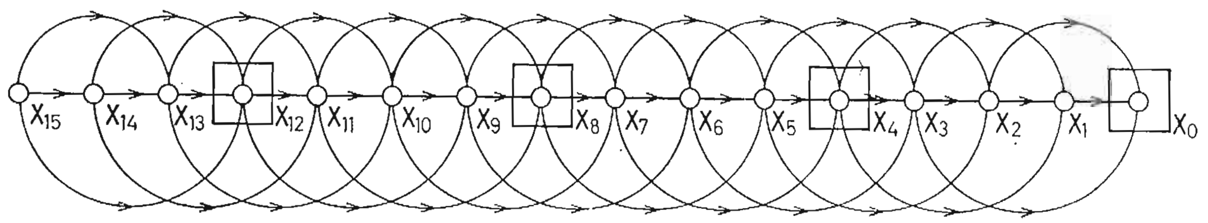
Dokaz. Neka je igrač A izabrao čvor iz jezgra. Pošto je jezgro unutrašnje stabilni skup, igrač B mora da izabere čvor van jezgra. Igrač A pri ovom ne može da izgubi, jer je jezgro i spoljašnje stabilni skup, pa iz svakog čvora van jezgra vodi bar jedna grana u neki čvor iz jezgra. Pošto A ponovo izabere čvor u jezgru situacija se ponavlja, te A ne može da izgubi igru.

Ovim je stav dokazan.

Primer. Na stolu je poređano 15 šibica. Igrači A i B uzimaju naizmenično po jednu, dve ili tri šibice. Gubi onaj ko ne može da uzme više nijednu šibicu kada dođe na red. Kako treba igrati ovu igru?

Igra se može interpretirati kao igra na grafu sa sl. 40.

Čvor x_i $(i = 0, 1, \ldots, 15)$ označava stanje igre: »na stolu se nalazi i šibica«. Čvorovi jezgra su označeni na crtežu kvadratićima. U ovom slučaju igrač koji izabere čvor iz jezgra dobija igru.



Sl. 40

Napomenimo da ne mora svaki graf da poseduje jezgro i da jezgro ne mora biti jedinstveno.

2.5. EULEROVI I HAMILTONOVI PUTEVI

2.5.1. Eulerovi putevi

Posmatramo neorijentisane multigrafove bez petlji. *Eulerov* put je onaj koji tačno jedanput prolazi kroz *svaku granu* multigrafa. *Eulerov* put može biti i zatvoren.

Svi iskazi iz ovog odeljka ostaju u važnosti ako se posmatraju orijentisani multigrafovi, a termini put i zatvoren put zamene terminima lanac i ciklus. Poslednja dva termina, naravno, mogu da se upotrebe i u slučaju neorijentisanih multigrafova.

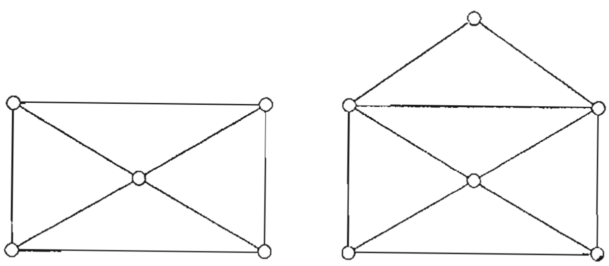
Zadaci tipa problema kenigsberških mostova, koji je naveden u 1.2., nameću sledeći problem: Koji multigrafovi poseduju *Eulerov* put, odnosno *Eulerov* zatvoren put? Odgovor daje sledeća *Eulerova* teorema, koja je već navedena u 1.2.

Teorema. *Multigraf G poseduje Eulerov put ako i samo ako je povezan i sadrži* 0 *ili* 2 *čvora neparnog stepena.*

Dokaz. Ako se krećemo po *Eulerovom* putu, onda uvek kada nekom granom dođemo u neki čvor, moramo koristiti drugu granu za napuštanje tog čvora. Pošto sve grane moraju tačno jedanput biti pređene, zaključujemo da stepeni svih čvorova moraju biti parni. Izuzetak nastaje kod nezatvorenog *Eulerovog* puta. U tom slučaju prvi i poslednji čvor moraju biti neparnog stepena. Povezanost multigrafa je takođe potreban uslov za egzistenciju *Eulerovog* puta.

Dokažimo sada da su uslovi teoreme dovoljni za egzistenciju *Eulerovog* puta. Ograničimo se na slučaj kada su stepeni svih čvorova parni. Poslužićemo se metodom indukcije po broju grana. Za multigraf sa dve grane stav je tačan. Pretpostavimo da je tačno da svi multigrafovi sa manje od m grana, koji ispunjavaju uslov teoreme, poseduju *Eulerov* zatvoren put i posmatrajmo multigraf G sa m grana. Počnimo kretanje po granama multigrafa iz proizvoljnog čvora. Kada dođemo u neki čvor, kretanje nastavljamo proizvoljnom granom kojom se nismo do tada kretali. Pošto su stepeni svih čvorova parni, kad-tad ćemo se morati vratiti u početni čvor. Na ovaj način dobijen zatvoren put e nije obavezno *Eulerov* put.

Isključimo iz grafa grane ovog zatvorenog puta. Dobijeni delimični graf ne mora biti povezan, ali svi njegovi čvorovi imaju paran stepen. Po induktivnoj pretpostavci svaka komponenta povezanosti delimičnog grafa (koja poseduje bar jednu granu) poseduje *Eulerov* zatvoren put. Na taj način obrazovani su putevi $e_1, e_2, \ldots$ Pošto je G povezan graf, svaki od ovih *Eulerovih* puteva ima bar jedan zajednički čvor sa kružnim putem e. *Eulerov* kružni put u G dobija se onda tako što se počne kretanje po putu e i kad god se naiđe na neki od puteva $e_1, e_2, \ldots$ obiđe se taj put, a zatim nastavi kretanje po putu e.



Sl. 41

Ovim je dokaz teoreme završen.

Iz dokaza je jasno da povezan multigraf poseduje *Eulerov* zatvoren put kada nijedan njegov čvor nije neparnog stepena. U grafu koji poseduje dva čvora neparnog stepena postoji *Eulerov* put koji povezuje ta dva čvora. Zatvoren *Eulerov* put ne postoji u ovom slučaju.

Primer. Na sl. 41 data su dva grafa koji podsećaju na zatvoreno i otvoreno pismo. Na osnovu *Eulerove* teoreme zaključuje se da prvi od njih ne poseduje, a drugi da poseduje *Eulerov* put.

Eulerovi putevi su od interesa za organizacije koje u velikim gradovima raznose poštu, naplaćuju račune ili vrše razne usluge po domaćinstvima. Poštar će, na primer, najracionalnije razneti poštu u svom rejonu ako kroz svaku ulicu prođe tačno jedanput. Organizatori velikih izložbi moraju, da bi posetioce proveli pored svih eksponata po jedanput, da odrede jedan *Eulerov* put u grafu određenom izložbenim prostorom i razmeštajem eksponata.

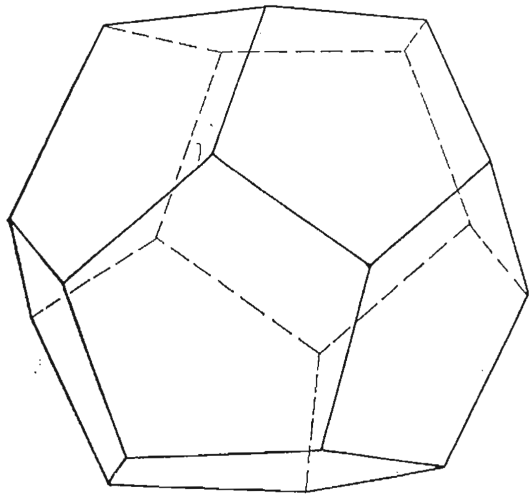
2.5.2. **Hamiltonovi putevi**

Hamiltonov put je put koji kroz *sve čvorove* grafa prolazi tačno jedanput. *Hamiltonov* zatvoren put je put koji se završava u čvoru u kojem i počinje.

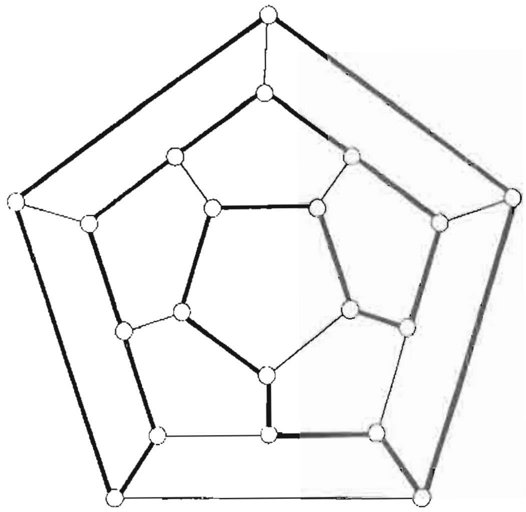
Hamilton je 1856. godine postavio sledeći zanimljiv problem. Trgovački putnik treba da obiđe izvestan broj gradova i da se vrati na mesto polaska, tako da u toku putovanja kroz svaki grad prođe tačno jedanput. Razmatran je konkretan primer u kojem su gradovi i saobraćajnice između njih predstavljali temena i ivice pravilnog dodekaedra (20 temena, 30 ivica, sl. 42).

Na sl. 43 predstavljen je u ravni odgovarajući graf, koji je regularan, trećeg stepena. Na slici je dato i rešenje *Hamiltonovog* problema.

I pre *Hamiltona* su rešavani slični problemi. Tu je, pre svega, čuveni problem konjičkog skoka (konj ili skakač; misli se na šahovsku figuru), kojim su se, između ostalih, bavili: *L. Euler, Moivre, Vandermonde* i *Kürschak*. Ovaj problem glasi:



Sl. 42



Sl. 43

»Da li je mogućno skakačem obići sva polja šahovske table tako da se svako polje obiđe tačno jedanput?«, ili sa drugom terminologijom: »Da li u grafu pridruženom skakaču postoji *Hamiltonov* put?«

O problemu konjičkog skoka postoji obimna literatura. Ispitivana je ne samo egzistencija rešenja na šahovskim tablama različitih dimenzija, već i način konstrukcije i broj rešenja. Pored knjiga o zanimljivoj matematici, pomenutih u 1.4. navodimo ovde i knjigu [31]. Od novijih radova pomenimo [46], u kojem je dokazano da problem konjičkog skoka ima rešenje na svim pravougaonim šahovskim tablama dimenzije $m \times n$ $(m, n \geqslant 3)$, izuzev slučajeva 3×3, 3×5, 3×6 i 4×4.

Pitanje egzistencije i nalaženja *Hamiltonovog* puta je daleko teži problem od analognog problema za *Eulerove* puteve. Dok egzistencija *Eulerovog* puta zavisi samo od stepena čvorova, kod *Hamiltonovih* puteva to ne mora biti slučaj.

Na sl. 44 data su dva grafa sa po 16 čvorova, od kojih oba imaju iste stepene čvorova (svi čvorovi imaju stepen 3). Međutim, prvi od njih poseduje *Hamiltonov* put, a drugi ne. Iz ovog primera se vidi da egzistencija *Hamiltonovog* puta zavisi od finijih pojedinosti strukture grafa nego što su to stepeni čvorova. Mada su pomenute neke klase grafova kod kojih se pitanje egzistencije *Hamiltonovog* puta jednostavno rešava, problem nije rešen u opštem slučaju.

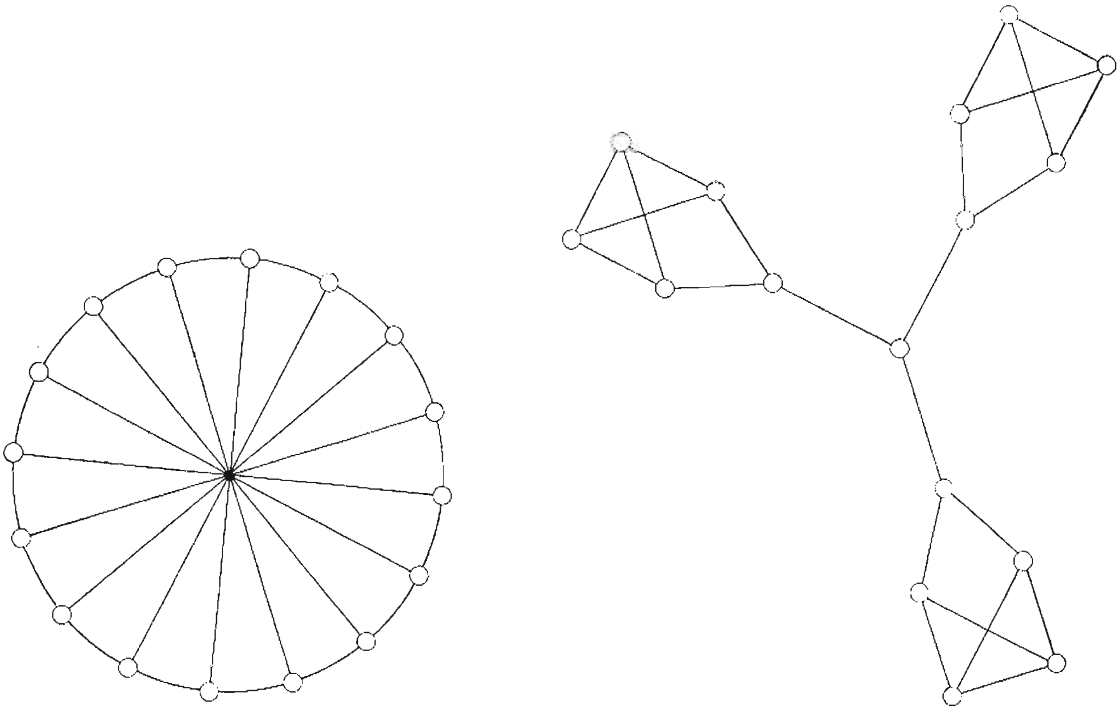
Napomenimo da se nalaženje *Eulerovog* puta svodi na nalaženje *Hamiltonovog* puta, odnosno konture u grafu grana datog grafa. Međutim, ovim se, slično kao kod svođenja bojenja grana grafa na bojenje čvorova pridruženog grafa, lakši problem zamenjuje težim, te postupak nema većeg interesa.

Pre nego što navedemo neke slučajeve kada je mogućno utvrditi egzistenciju *Hamiltonovog* puta ili konture, navešćemo neke primene ovih pojmova.

Problem trgovačkog putnika ima u sledećoj verziji praktičan značaj:

Od svih Hamiltonovih puteva odabrati onaj koji je prema zadatom kriterijumu optimalan.

Kriterijum optimalnosti se može u realnim zadacima svesti, na primer, na to da se zahteva najkraći put, put koji se najbrže prelazi, put koji najmanje košta



Sl. 44

itd. U SAD su, na primer, utvrđeni optimalni putevi između raznih gradova za neke probleme ovog tipa.

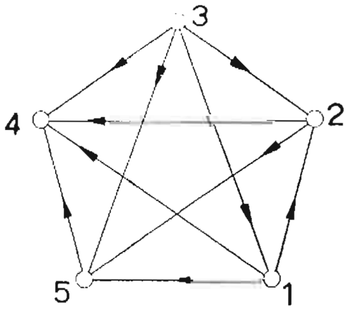
Posmatrajmo sada sledeći problem iz organizacije poslovanja.

Zanatsko preduzeće koje treba da izvede vodoinstalaterske i molerske radove u pet stanova raspolaže jednom ekipom vodoinstalatera i jednom ekipom molera. Moleri ne mogu početi sa radom u stanu u kojem vodoinstalateri nisu završili svoj posao. U i - tom stanu ($i = 1, \ldots, 5$) vodoinstalateri treba da rade a_i časova, a moleri b_i časova. Kojim redosledom treba da rade vodoinstalateri da bi celokupan posao bio završen što je moguće pre.

Razmotrimo sledeći brojni primer: $a_1 = 8$, $a_2 = 20$, $a_3 = 7$, $a_4 = 18$, $a_5 = 9$; $b_1 = 12$, $b_2 = 12$, $b_3 = 15$, $b_4 = 10$, $b_5 = 15$.

Može se pokazati [32] da vodoinstalateri treba da rade u stanu i pre nego u stanu j samo ako je $\min(a_i, b_j) \leqslant \min(a_j, b_i)$. U protivnom, ekipa molera bi dangubila više nego što je potrebno.

Formirajmo orijentisan graf u kome od čvora i ide grana ka čvoru j ako je $\min(a_i, b_j) \leqslant \min(a_j, b_i)$, (sl. 45). Određivanje redosleda stanova svodi se na nalaženje *Hamiltonovog* puta u grafu. Jedini *Hamiltonov* put je: 3, 1, 5, 2, 4. Čitalac može proveravanjem da se uveri da ne postoji optimalniji redosled stanova.



Sl. 45

Egzistencija rešenja u zadacima ovog tipa obezbeđena je na osnovu sledeće teoreme *Rêdeia.*

Teorema 1. *U grafu, u kojem su proizvoljna dva čvora spojena granom, orijentisanom bar u jednom pravcu, postoji Hamiltonov put.*

Dokaz. Dokaz ćemo izvesti indukcijom po broju čvorova n. Za $n=2$ teorema je očigledno tačna. Pretpostavimo da je teorema tačna za grafove sa n čvorova i posmatrajmo jedan graf G sa $n+1$ čvorova, koji ispunjava uslove teoreme. Uzmimo, radi jednostavnosti, da su sve grane grafa orijentisane u jednom pravcu, što ne umanjuje opštost rezultata.

Uočima u G proizvoljan čvor x. Po induktivnoj pretpostavci podgraf grafa G, indukovan ostalim čvorovima iz G, poseduje *Hamiltonov* put. Neka se duž Hamiltonovog puta nalaze redom čvorovi $x_1, \ldots x_n$. Tada u grafu G mogu nastupiti sledeći slučajevi:

1° Grana između čvorova x, x_n je orijentisana ka čvoru x. Tada u G postoji *Hamiltonov* put obrazovan čvorovima $x_1, \ldots, x_n, x$.

2° Grana između čvorova x, x_1 je orijentisana od x ka čvoru x_1. *Hamiltonov* put u G je sada oblika $x, x_1, \ldots, x_n$.

3° Ako ne nastupi ni 1° ni 2°, grana (x, x_1) je orijentisana od x_1 ka x, a grana (x, x_n) od x ka x_n. Međutim, tada mora postojati bar jedno i $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ za koje je grana (x, x_i) orijentisana od x_i ka x i grana (x, x_{i+1}) orijentisana od x ka x_{i+1}. Stoga u G postoji *Hamiltonov* put oblika $x_1, \ldots, x_i, x, x_{i+1}, \ldots x_n$.

Ovim je dokaz završen.

Teorema *Rédeia* ima sledeću interesantnu posledicu na turnire. Naime, ako se na nekom turniru takmičari bore svaki sa svakim i nijedna borba se ne završava nerešeno, takmičari se mogu, na osnovu teoreme *Rédeia,* numerisati tako da je svaki takmičar, osim prvoga, pobeđen od onog sa neposredno manjim rednim brojem.

Slično *Rédeijevoj* teoremi može se dokazati i sledeća *Diracova* teorema.

Teorema 2. *Ako u povezanom neorijentisanom grafu sa n čvorova za stepen d svakog čvora važi nejednakost* $d \geqslant \frac{1}{2} n$, *graf poseduje Hamiltonov kružni put.*

2.6. FUNKCIJE DEFINISANE NA SKUPU GRANA GRAFA

Niz teorijskih i praktičnih problema svodi se na posmatranje grafova kod kojih je svakoj grani pridružen neki broj. Pri ovome je moguće da grafovi budu orijentisani ili neorijentisani, sa ili bez višestrukih grana, sa ili bez petlji itd. Takođe, brojevi koji se pridružuju granama mogu pripadati različitim skupovima: skupu prirodnih brojeva, celih brojeva, nenegativnih brojeva, realnih brojeva itd. U svim ovim slučajevima se kaže da je na skupu grana (uključujući eventualno i petlje) definisana jedna funkcija.

Razmotrićemo nekoliko vrsta problema koji se svode na razmatranje jedne funkcije definisane na skupu grana grafa.

2.6.1. **Metrički problemi**

U mnogim problemima se broj pridružen grani grafa interpretira kao dužina grane. Dužina grane se definiše kao pozitivan broj.

U neorijentisanom grafu bez petlji i višestrukih grana, a sa definisanim dužinama grana može se uvesti metrika na sledeći način: dužina puta između dva čvora definiše se kao zbir dužina grana koje obrazuju taj put. Rastojanje između dva čvora se definiše kao dužina najkraćeg puta između ta dva čvora, a jednog čvora od samog sebe je jednako nula. Rastojanje između čvorova koji pripadaju različitim komponentama povezanosti je jednako $+\infty$[5]. Ako se, u specijalnom slučaju, uzme da je dužina svake grane jednaka 1, dobija se metrika opisana u 1.3.5.

Jedan od osnovnih problema glasi:

Odrediti najkraći put između dva zadata čvora grafa.

Napomenimo odmah da se može formulisati i opštiji problem:

U datom grafu odrediti delimični podgraf zadatog tipa sa minimalnim zbirom dužina grana.

Tako je, na primer, u 2.5.2. govoreno o *Hamiltonovom* putu minimalne dužine. Poznat je problem određivanja delimičnog grafa oblika stabla sa minimalnim zbirom dužina grana.

U 2.6.1.1. je obrađen problem određivanja puta minimalne dužine, a u 2.6.1.2. sinteza stabla minimalne dužine.

2.6.1.1. *Određivanje najkraćeg puta*

Zadatak određivanja najkraćeg puta sreće se kada stvarno treba odrediti najkraći put, na primer, između dva grada po mreži puteva ili između dva punkta u velikom gradu. Međutim, minimizacija se ne mora sprovoditi u odnosu na geometrijsko rastojanje. Može se, na primer, tražiti put kojim se najbrže može stići ili najjeftiniji put ili put čije prelaženje zahteva najmanji utrošak goriva itd. I drugi zadaci, koji u prvi mah ni po čemu ne podsećaju na zadatak nalaženja najkraćeg puta, svode se upravo na to.

Napomenimo još da postoje problemi kod kojih se umesto najkraćeg traži najduži put između dva čvora. U tehnici mrežnog planiranja, koje se primenjuje u organizaciji rada pri planiranju realizacije velikih tehničkih projekata, pri planiranju borbenih dejstava itd., nailazimo na ovakve zadatke. Detalji izvršenja projekta se predstavljaju orijentisanim grafom. Grane grafa predstavljaju pojedine operacije. Graf ima ulazni i izlazni čvor (početak i kraj projekta). Ako se svakoj grani kao »dužina« pridruži vreme trajanja odgovarajuće operacije, dužina najdužeg puta u grafu između ulaza i izlaza predstavlja vreme trajanja realizacije celog projekta. Najduži put se naziva kritični put, a odgovarajuća metoda, metoda kritičnog puta.

Navodimo *Fordov* algoritam za nalaženje najkraćeg puta. Algoritam se može modifikovati tako da može da posluži i za nalaženje najdužeg puta.

Neka se traži najkraći put iz čvora x_1 u čvor x_n.

---

[5] Videti 1.3.5.

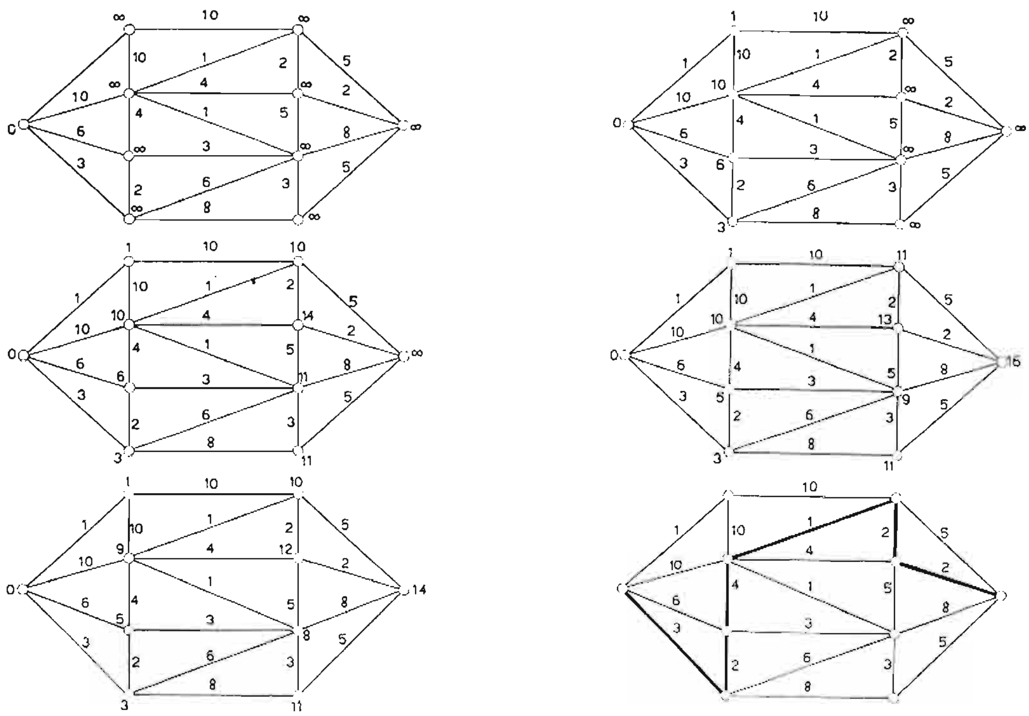
Svakom čvoru x_i se pridružuje broj λ_i. Najpre se stavlja $\lambda_1=0$, i $\lambda_i=+\infty$ $(i=2, \ldots, n)$. Za svaku granu (x_i, x_j) se ispituje da li je $\lambda_j-\lambda_i>l(x_i, x_j)$. Ako je ovo ispunjeno, čvoru x_j se pridružuje umesto λ_j broj $\lambda'_j=\lambda_i+l(x_i, x_j)$. Ako gornja nejednakost nije ispunjena ne menja se broj λ_j. Ovaj postupak se primenjuje sve dok je mogućno menjanje brojeva λ_j. Pri tome je mogućno da se neka grana (x_i, x_j) više puta tretira. Po završetku postupka najkraći put pronalazimo polazeći od x_n. Neka je $x_n=x_{p_1}$, za neki čvor x_{p_2} će biti $\lambda_{p_1}-\lambda_{p_2}=l(x_{p_2}, x_{p_1})$. (To je čvor koji je učestvovao u određivanju poslednje vrednosti za λ_{p_1}.) Mogućno je dalje formirati niz čvorova $x_{p_1}, \ldots, x_{p_k}$ za koje važi $x_{p_i}-x_{p_{i+1}}=l(x_{p_i}, x_{p_{i+1}})$. Veličine $\lambda_{p_1}, \ldots, \lambda_{p_k}$ obrazuju opadajući niz. Jasno je da se može izabrati k tako da za niz $x_{p_1}, \ldots, x_{p_k}$ važi $\lambda_{p_k}=0$ tj. $x_{p_k}=x_1$. Najkraći put iz x_1 u x_n određen je pomoću niza čvorova $x_1=x_{p_k}, x_{p_{k-1}}, \ldots, x_{p_1}=x_n$.

Za proizvoljan put $x_1=x_{q_1}, x_{q_2}, \ldots, x_{q_s}=x_n$ važi:

$$\begin{aligned}
&\lambda_{q_2}-\lambda_{q_1}\leqslant l(x_{q_1}, x_{q_2})\\
&\lambda_{q_3}-\lambda_{q_2}\leqslant l(x_{q_2}, x_{q_3})\\
&\cdot\\
&\cdot\\
&\cdot\\
&\lambda_{q_s}-\lambda_{q_{s-1}}\leqslant l(x_{q_{s-1}}, x_{q_s}),
\end{aligned}$$

jer bi u protivnom nekom od čvorova x_{q_i} morali pridruženi broj λ_{q_i} da zamenimo sa λ'_{q_i}.

Sabirajući ove nejednakosti i imajući u vidu da je $\lambda_{q_1}=0$, dobijamo da dužina bilo kog puta nije manja od $\lambda_{q_s}=\lambda_n$. Kako je dužina malopre formiranog puta jednaka tačno λ_n, zaključuje se da je to zaista najkraći put iz x_1 u x_n.



Sl. 46

Primer 1. Na sl. 46 je prikazan jedan primer primene opisanog algoritma za nalaženje najkraćeg puta.

Algoritam za nalaženje najkraćeg puta je prostiji kada sve grane imaju dužniu 1. Tada se čvoru x_1 pridružuje broj 0, a svim njemu susednim čvorovima broj 1. Postepeno se svim čvorovima pridružuje jedan prirodan broj koji predstavlja rastojanje čvorova od čvora x_1. Pošto je završeno obeležavanje čvorova koji su na rastojanju i od x_1, svi susedni čvorovi ovih čvorova dobijaju broj $i+1$, ukoliko do tada nisu već dobili neki broj. Pošto je završeno obeležavanje svih čvorova grafa, najkraći put iz x_1 u x_n se konstruiše od nazad, tj. od čvora x_n na isti način kao u ranije opisanom opštijem slučaju.

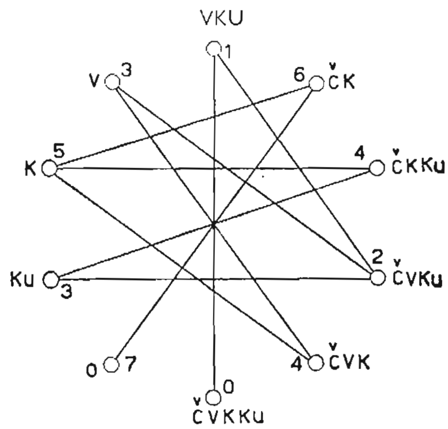
Primer 2. Opisanim algoritmom se može rešiti, na primer, na poznati zadatak o čoveku, vuku, kozi i kupusu. Čovek treba preko reke da preveze vuka, kozu i kupus, ali raspolaže čamcem kojim može da poveze samo jednu od te tri stvari. Očigledno, on ne sme da ostavi na obali same vuka i kozu ili kozu i kupus.

Uvedimo oznake: Č čovek, V vuk, K koza i Ku kupus. Sledeće grupe simbola označavaju dozvoljena stanja na polaznoj obali reke (pri čemu je sa 0 obeleženo stanje kada su svi prešli reku): ČVKKu, ČVK, ČVKu, ČKKu, ČK, VKu, V, K, Ku, 0. Podrazumeva se da se čamac uvek nalazi sa čovekom.

Na sl. 47 je predstavljen graf mogućnih prelaza između ovih stanja. Zadatak se svodi na nalaženje najkraćeg puta između čvora ČVKKu i 0.

Postoje dva rešenja:

1. ČVKKu, VKu, ČVKu, V, ČVK, K, ČK, 0;
2. ČVKKu, VKu, ČVKu, Ku, ČVKu, K, ČK, 0.



Sl. 47

Primer 3. Na sličan način može se rešiti i sledeći zadatak:

Date su tri posude: prva, čija je zapremina 8 litara, napunjena je tečnošću; druga i treća, koje imaju 5 odnosno 3 litra, su prazne. Presipajući tečnost iz jedne u drugu od ovih posuda, postići na najbrži način da se u prvoj posudi nalazi 4 litra i u drugoj takođe 4 litra tečnosti.

Rešenje ovog problema je navedeno u [37].

Iz navedenih primera se vidi da se veoma raznorodni problemi svode na isti matematički model: nalaženje najkraćeg puta između dva čvora grafa.

Ovaj problem je veoma srodan sa problemom izlaženja iz lavirinta (videti na primer [6]).

Interesantno je da opisana tehnika nalaženja rešenja različitih problema leži u osnovi jednog programa za kompjutere nazvanog »opšti rešavač problema« ili skraćeno »Džips« (*GPS*, tj. »*general problem solver*«). Autori ovog kompjuterskog algoritma su smatrali da algoritam oponaša čovekov način mišljenja prilikom rešavanja problema. Da to nije uvek tako pokazano je u [35], str. 198.

2.6.1.2. *Sinteza stabla minimalne dužine*

Posmatrajmo sledeći problem:

Kako treba realizovati telefonsku mrežu između n datih gradova tako da dužina utrošenog kabla bude minimalna?

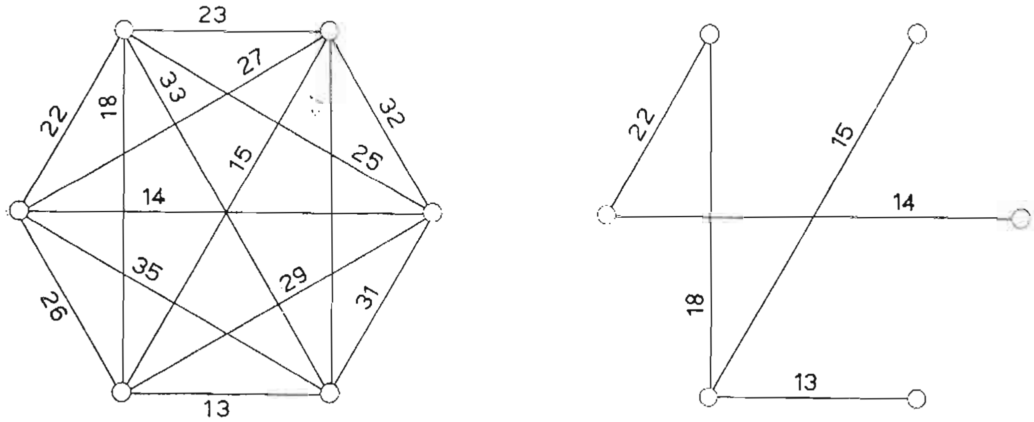
Navešćemo bez dokaza algoritam za rešenje ovog problema. Dokaz se može naći, na primer, u [6].

Posmatrajmo graf čiji su čvorovi gradovi, a grane telefonske linije. Ovaj graf mora, očigledno, da bude povezan i da ne sadrži nijednu konturu. Graf sa navedenim osobinama predstavlja stablo. Zadatak se svodi na sintezu stabla minimalnog zbira dužine grana sa zadatim čvorovima. Sinteza se vrši pomoću sledećeg algoritma.

Sa datim čvorovima obrazuje se graf koji sadrži sve mogućne grane (potpun graf) i označi dužina svake grane. (Dužina grane ne mora biti jednaka geometrijski najkraćem rastojanju između dva grada zbog brdovitosti terena ili drugih prepreka.) U potpunom grafu se označi najkraća grana. Dalje se uvek označava najkraća od onih neoznačenih grana koje sa već označenim granama ne obrazuju konturu.

Pošto stablo sa n čvorova ima $n-1$ grana, sinteza stabla je završena posle $n-1$ koraka. $n-1$ označenih grana predstavljaju stablo minimalne dužine. Ako ne postoje ni dve grane istih dužina, rešenje je jedinstveno.

Primer. Na sl. 48 je prikazan jedan primer.



Sl. 48

U rešenje nije uključena grana dužine 17.

Algoritam sinteze stabla minimalne dužine je našao neočekivanu primenu u jednoj sasvim drugoj oblasti — teoriji automatskog upravljanja.

Osnovni problem teorije automatskog upravljanja sastoji se u transformaciji nekog sistema iz početnog u krajnje stanje na najbolji mogući način.

Na primer, raketu sa startne rampe (početno stanje) treba na najbolji način prevesti u orbitu oko Zemlje (krajnje stanje). Ili, avion sa automatskim pilotom koji je odstupio sa kursa (početno stanje) treba dovesti na pravi kurs (krajnje stanje). Mogućno je navesti i niz drugih primera.

Kriterijum optimalnosti je različit za različite probleme. Tako najbolji način može u različitim slučajevima da ima, na primer, sledeća tumačenja: sa najmanjim utroškom energije, za najkraće vreme, uz minimalnu cenu itd.

Proces prelaska iz početnog u krajnje stanje uvek podleže i nekim ograničenjima. Tako, na primer, prilikom lansiranja rakete može se zahtevati da temperatura na njenoj površini ne pređe određenu granicu ili, ako raketa nosi vasionski brod sa posadom, ubrzanje rakete ne sme da pređe izvesnu vrednost itd.

Stanje sistema automatskog upravljanja se opisuje vektorom stanja $\mathbf{x}(t)$ koji zavisi od vremena t. Skup veličina preko kojih se može uticati na kretanje sistema dat je vektorom upravljanja $\mathbf{y}(t)$. Kretanje sistema se opisuje vektorskom diferencijalnom jednačinom $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Početno i krajnje stanje je zadato vektorima $\mathbf{x}(0) = \mathbf{c}_1$ i $\mathbf{c}_2$. Ograničenja za vektore $\mathbf{x}(t)$ i $\mathbf{y}(t)$ mogu biti data pomoću različitih nejednakosti. Optimalan vektor upravljanja bira se tako da duž odgovarajuće trajektorije zadati funkcional $g(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))$ dobije minimalnu vrednost.

Funkcional $g(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t))$ se u nekim slučajevima svodi na određivanje maksimuma neke veličine. Tako u primeru sa raketom može da se traži putanja duž koje je maksimalna vrednost ubrzanja minimalna. Ovakve trajektorije duž kojih se traži minimalna vrednost maksimuma neke veličine zovu se *minimaksne* trajektorije.

Opisani problemi optimizacije obično se rešavaju klasičnim varijacionim računom ili nekim savremenim modifikacijama varijacionog računa. Međutim, analogni problemi se mogu definisati i za diskretne sisteme, pri čemu se ne mogu primeniti sredstva kontinualne matematike. Osim toga, i kontinualni problemi se prilikom obrade na digitalnim računskim mašinama moraju aproksimirati diskretnim modelima. Na ovaj način se, prirodno, dolazi do grafova.

Opisaćemo problem minimaksnih trajektorija za diskretni slučaj. Neka su stanja sistema određena čvorovima $x_1, \ldots, x_n$ grafa G. Čvorovi x_i i x_j su spojeni granom ako sistem može neposredno da pređe iz stanja x_i u stanje x_j. Neka je grani (x_i, x_j) pridružena kao »dužina« maksimalna vrednost S_{ij}, koja se postiže duž puta iz x_i u x_j, veličine S čiji maksimum treba minimizirati duž optimalne trajektorije. Pretpostavimo još da je $S_{ij} = S_{ji}$.

Može se pokazati da minimaksna trajektorija za ovaj problem leži na stablu minimalne dužine [33].

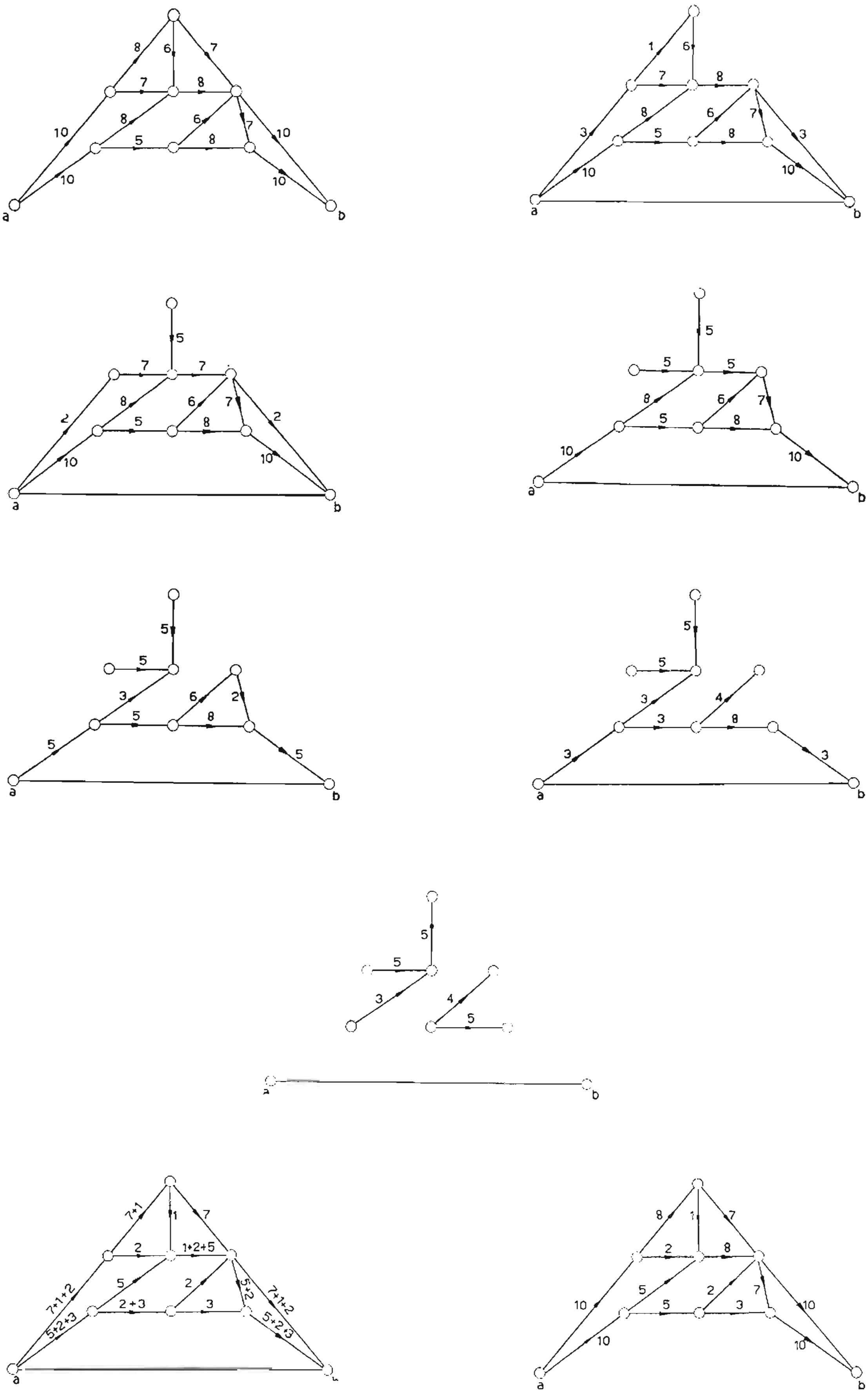
2.6.2. Transportni problemi

Transportna (*prevozna*) *mreža* je konačan graf bez petlji čije su grane orijentisane i svakoj grani u_i je pridružen nenegativan broj $C_i = f(u_i)$. Veličine C_i se nazivaju *propusne sposobnosti* grana. Kod transportne mreže postoji čvor a (*ulaz mreže*) u koji ne ulazi nijedna grana grafa i čvor b (*izlaz mreže*) iz koga ne izlazi nijedna grana. Funkcija $\varphi(u_i)$ definisana na granama grafa naziva se *protok* (*fluks*) ako važi $0 \leqslant \varphi(u_i) \leqslant C_i$ i ako je za svaki čvor, osim čvorova a i b, zbir vrednosti $\varphi(v_i)$ za grane u_i koje ulaze u čvor jednak vrednosti $\varphi(u_i)$ za grane koje izlaze iz čvora. *Celokupan protok* kroz transportnu mrežu je jednak zbiru protoka grana koje izlaze iz čvora a, odnosno zbiru protoka grana koje ulaze u čvor b.

Tipičan zadatak sa transportnim mrežama je sledeći: Za datu transportnu mrežu odrediti maksimalan protok.

Ovakvi zadaci se često sreću u realnim transportnim problemima. Na primer, ako je iz grada a potrebno prebaciti u grad b za određeno vreme mrežom železničkih pruga što je moguće više tereta, dolazimo do gornjeg zadatka. Podrazumeva se da svaka pruga ima svoju propusnu sposobnost, tj. gornju granicu tereta koji se može po njoj prevesti za određeno vreme. Teret koji prispe u neku međustanicu mora odmah da se prevozi dalje, jer ne dolazi u obzir skladištenje na međustanicama. Isto tako, u međustanicama se ne sme ukrcavati novi teret za prevoz.

Navešćemo bez dokaza algoritam za rešavanje postavljenog problema u jednom posebnom slučaju.


8 6 7
7 8
10 8 6 7 10
5 8
10 10
a b
1 6
7 8
3 8 6 7 3
5 8
10 10
a b
5
7 7
2 8 6 7 2
5 8
10 10
a b
5
5 5
8 6 7
5 8
10 10
a b
5
5
3 6 2
5 8
5 5
a b
5
5
3 4
3 8
3 3
a b
5
5
3 4
5
a b
7+1 1 7
2 1+2+5
7+1+2 5 2 5+2 7+1+2
2+3 3
5+2+3 5+2+3
a
8 1 7
2 8
10 5 2 7 10
5 3
10 10
a b

Sl. 49

Algoritam potiče od *Forda* i *Fulkersona*. Dokaz se može naći u njihovoj knjizi [23].

Spojimo ulaz a i izlaz b transportne mreže novom granom. Ako je dobijen graf planaran, postupamo na sledeći način:

Transportnu mrežu predstavljamo crtežom tako da joj se grane ne presecaju i da se naknadno dodata grana na crtežu nalazi najniže.

Uočavamo elementaran put mreže iz čvora a u čvor b, koji je na crtežu najviši. Iz mreže izbacujemo granu tog puta koja ima najmanju propusnu sposobnost. Istovremeno propusne sposobnosti preostalih grana posmatranog puta umanjujemo za vrednost propusne sposobnosti izbačene grane. Na taj način dobijamo novu transportnu mrežu na koju ponovo primenjujemo opisani postupak.

Postupak se ponavlja sve dok se ne prekinu svi putevi koji vode iz a u b. Tada se u polaznoj mreži uočavaju putevi koji su u bilo kom trenutku bili najviši. Granama svakog takvog puta se pripisuje, kao delimični protok, propusna sposobnost grane sa minimalnom propusnom sposobnosti iz tog puta. Ukupan protok za svaku granu dobija se kao zbir delimičnih protoka, jer jedna grana može da se nalazi u nekoliko »najviših« puteva.

Na sl. 49 su predstavljene sve etape rešenja jednog problema određivanja maksimalnog protoka.

2.6.3. **Grafovi protoka signala**

Veliki broj problema u elektrotehnici svodi se na rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina. Poznati su različiti postupci za rešavanje ovakvih sistema. Pomenimo najpoznatije: *Cramerov* postupak pomoću determinanata, *Gaussov* algoritam, matrični metod. U svim postupcima potreban broj kalkulacija brzo se povećava sa povećavanjem broja nepoznatih. Pošto se, s jedne strane, u savremenim problemima elektrotehnike pojavljuju sistemi jednačina sa veoma velikim brojem nepoznatih (više stotina pa i hiljada), a, s druge, često se zahteva da se rešenje brzo dobije, postoji stalan interes da se klasične metode modifikuju i usavršavaju, odnosno formiraju nove metode.

Jedna savremena metoda koristi tzv. *grafove protoka signala* (*signal flow graphs*). Po toj metodi sistemu linearnih jednačina pridružuje se jedan orijentisan graf, kod koga je svakoj grani i petlji pridružen neki realan broj različit od nule. Pridruženi broj označava signal (pojačanje ili prenos) grane. Rešenje sistema se dobija na određeni način na osnovu strukture pridruženog grafa.

Sistem jednačina sa nepoznatim $x_1, \ldots, x_n$ mora biti doveden na oblik:

$$(1)\qquad \begin{aligned} x_1 &= a_{10}\,x_0 + a_{11}\,x_1 + \cdots + a_{1n}\,x_n \\ &\;\vdots \\ x_n &= a_{n0}\,x_0 + a_{n1}\,x_1 + \cdots + a_{nn}\,x_n . \end{aligned}$$

Ovde je x_0 parametar i nepoznate veličine treba izraziti pomoću x_0.

Pridruženi graf ima $n+1$ čvorova koji su označeni sa $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Za svako i, j, za koje je $a_{ij} \neq 0$ iz čvora x_j u čvor x_i, vodi orijentisana grana kojoj je pridružen broj a_{ij}.

Primer. Sistemu jednačina

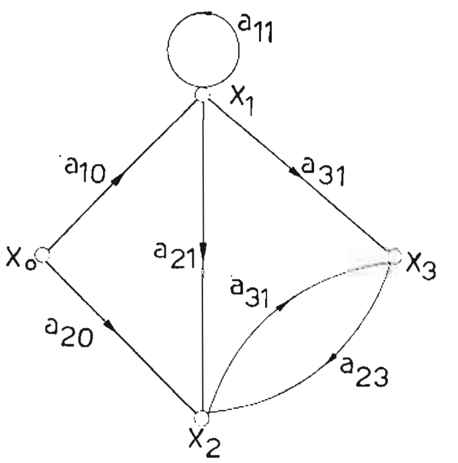
$$x_1 = a_{10}\, x_0 + a_{11}\, x_1$$

$$x_2 = a_{20}\, x_0 + a_{21}\, x_1 + a_{23}\, x_3$$

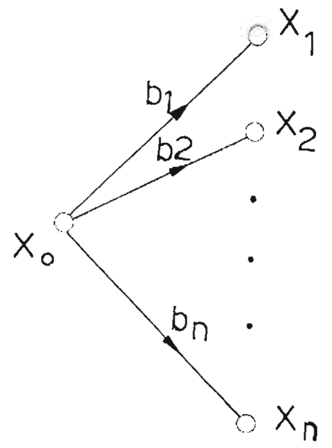
$$x_3 = a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2$$

se pridružuje graf sa sl. 50.

Očigledno je da se sistem jednačina može na više načina predstaviti u obliku (1). Iz toga sledi da istom sistemu jednačina mogu biti pridruženi različiti grafovi. Grafovi koji odgovaraju istom sistemu jednačina su ekvivalentni grafovi.



Sl. 50



Sl. 51

Najprostiji graf koji odgovara jednom sistemu jednačina je zvezdoliki graf. On se dobija ako se sistem jednačina postupnom eliminacijom nepoznatih svede na oblik $x_1 = b_1\, x_0, \ldots, x_n = b_n x_0$.

Odgovarajući graf je predstavljen na sl. 51.

Ako se na neki način dobije zvezdoliki graf, bez teškoća se pomoću njega mogu odrediti rešenja sistema.

Vidi se da je potrebno definisati neke transformacije nad grafovima koje bi, kada se izvrše nad datim grafom, dovodile do njemu ekvivalentnog grafa. Te transformacije bi odgovarale algebarskim transformacijama sistema jednačina. Cilj bi bio da se navedenim transformacijama graf dovede na zvezdoliki oblik.

Ovde ćemo navesti jednu metodu pomoću koje se prenosi grana zvezdolikog grafa $b_1, \ldots, b_n$ određuju direktno iz grafa pridruženog sistemu linearnih jednačina.

Najpre ćemo definisati neke neophodne pojmove.

U ovom odeljku ćemo pod konturom podrazumevati (jako) povezan graf kod koga u svaki čvor ulazi i izlazi po jedna grana.

Neka su $K_1, \ldots, K_j, \ldots$ *elementarne konture* grafa, tj. konture koje kroz svaki čvor, kroz koji prolaze, prolaze samo jedanput. Konturu obrazuje takođe jedna petlja. Konture koje se razlikuju samo po redosledu obilaženja grana smatraćemo istim konturama. *Prenos konture* se definiše kao proizvod prenosa grana koje obrazuju konturu. Prenose kontura $K_1, \ldots, K_j, \ldots$ obeležavaćemo sa $T_1, \ldots T_j, \ldots$

Prenos elementarnog puta između neka dva čvora definiše se kao proizvod prenosa grana koje obrazuju put.

Determinanta grafa definiše se pomoću

$$\Delta = 1 - \sum_i T_i + \sum_{i,j} T_i T_j - \sum_{i,j,k} T_i T_j T_k + \cdots \tag{2}$$

U ovom izrazu $\sum_i T_j$ označava zbir prenosa svih kontura grafa, $\sum_{i,j} T_i T_j$ označava zbir proizvoda prenosa po dve konture koje se međusobno ne dodiruju, tj. nemaju nijedan zajednički čvor, u $\sum_{i,j,k} T_i T_j T_k$ se sumiranje vrši po svim trojkama međusobno nedodirujućih kontura itd.

Prenosi grana zvezdolikog grafa izračunavaju se po *Masonovoj* formuli

$$b_i = \frac{x_i}{x_0} = \frac{\sum_m p_m^{(i)} \Delta_m^{(i)}}{\Delta} \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{3}$$

gde $p_m^{(i)}$ predstavlja prenos m-tog elementarnog puta od čvora x_0 do čvora x_i, $\Delta_m^{(i)}$ predstavlja determinantu podgrafa nastalog udaljavanjem svih čvorova pomenutog puta, a sumiranje se vrši po svim elementarnim putevima koji vode od x_0 do x_i.

Primer. Graf pridružen sistemu jednačina

$$x_1 = Bx_0 + Dx_1 + Fx_3$$

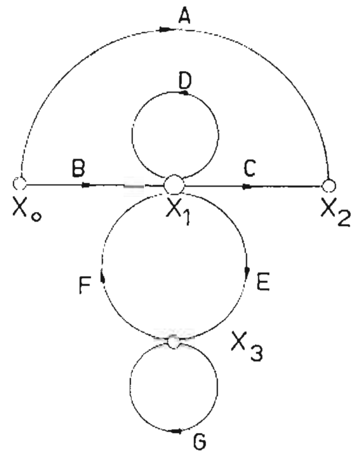
$$x_2 = Ax_0 + Cx_1$$

$$x_3 = Ex_1 + Gx_3$$

predstavljen je na slici 52.

Primenom formule (3) dobija se:

$$\frac{x_2}{x_0} = \frac{A(1-(D+EF+G)+GD)+BC(1-G)}{1-(D+EF+G)+GD}.$$



Sl. 52

2.7. GRAFOVI I MATRICE

Matrični račun predstavlja pogodan aparat za obrađivanje različitih problema sa grafovima. Mnoge teoreme matričnog računa imaju interpretaciju i u teoriji grafova. Međutim, u poslednje vreme metodi teorije grafova se primenjuju u istraživanjima na području teorije matrica (videti, na primer, [20]).

2.7.1. Matrice incidencije

Neka su dati skupovi $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ i $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ i jedna binarna relacija ρ u skupu $A \times B$.

Primer. Ako je A skup lica muškog pola, a B skup lica ženskog pola, relacija »biti u braku« je jedna od mogućih relacija ρ u skupu $A \times B$. Pri ovome $(a_i, b_j) \in \rho$ ako i samo ako je lice a_i, u braku sa licem b_j.

Binarna relacija se može predstaviti pomoću tzv. matrica incidencije. Za svaku binarnu relaciju ρ u skupu $A \times B$ definiše se *matrica incidencije* $\mathbf{S}_{A,B}$ skupa

A i skupa B. $\mathbf{S}_{A,B}=[s_{ij}]$ je pravougaona matrica tipa $m \times n$, pri čemu je $s_{ij}=1$ ako $(a_i, b_j) \in \rho$ i $s_{ij}=0$ ako $(a_i, b_j) \notin \rho$.

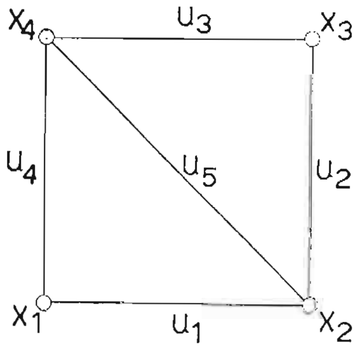
Za graf se mogu definisati različite matrice incidencije. Ulogu skupova A i B mogu da igraju, na primer, skup čvorova, skup grana, skup nezavisnih ciklusa itd., a relacija ρ može biti definisana, na primer, sa: »čvor je susedan grani«, »ciklus prolazi granom« itd. Različite matrice incidencije ističu različite informacije o grafu. Prednost ove ili one matrice incidencije zavisi od problema koji se razmatra.

Često se upotrebljava *matrica incidencije čvorova i grana* $\mathbf{R}=[r_{ij}]_{nm}$. Neka je skup čvorova $X=\{x_1, \ldots, x_n\}$ i skup grana $U=\{u_1, \ldots, u_m\}$. Ako je čvor x_i susedan sa granom u_j, važi $r_{ij}=1$; u suprotnom slučaju je $r_{ij}=0$. Pri formiranju ove matrice incidencije ne vodi se računa o orijentaciji grana.

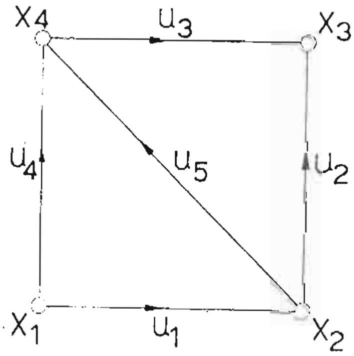
Primer. Za graf sa sl. 53 matrica incidencije čvorova i grana ima oblik.

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jednu vrstu matrica incidencije smo i ranije naveli. To je matrica susedstva grafa. Ova matrica se dobija iz opšte matrice incidencije $\mathbf{S}_{A,B}$, ako se uzme $A=B=X$ (X skup čvorova), a za ρ se uzme relacija susednosti čvorova. Matrica susedstva uzima u obzir i orijentaciju grana.



Sl. 53



Sl. 54

Opštije matrice incidencije imaju osim 0 i 1 i druge brojeve kao svoje elemente. Često su u upotrebi matrice incidencije sa elementima -1, 0, 1. I u ovoj grupi se pojavljuje matrica incidencije čvorova i grana $\mathbf{S}=[s_{ij}]$. Ona je istih dimenzija kao i $\mathbf{R}$, ali je

$$s_{ij}=\begin{cases} 1, & \text{ako grana } u_j \text{ izlazi iz čvora } x_i; \\ 0, & \text{ako } x_i \text{ i } u_j \text{ nisu susedni elementi;} \\ -1, & \text{ako } u_j \text{ ulazi u } x_i. \end{cases}$$

Primer. Za graf sa sl. 54 matrica $\mathbf{S}$ ima oblik

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

U primenama su važne i *ciklomatičke matrice* grafa. Za svaku bazu nezavisnih ciklusa grafa G, koja je zadata vektorima $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_k$ ($\mathbf{c}_i = (c_{1i}, \ldots, c_{mi})$, $i = 1, \ldots, k$; $k = \nu(G)$) obrazuje se ciklomatička matrica $\mathbf{C} = [c_{ij}]_{mn}$. Vektori ciklusa predstavljaju kolone ciklomatičke matrice. Ako bazu sačinjavaju prosti ciklusi, elementi ciklomatičke matrice su -1, 0, 1. Elementi matrice $\mathbf{C}$ imaju tada sledeće značenje:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako ciklus } c_j \text{, prolazi granom } u_i \text{ u pravcu strelice;} \\ 0, & \text{ako ciklus } c_j \text{ ne prolazi granom } u_i; \\ -1, & \text{ako } c_j \text{ prolazi granom } u_i \text{ nasuprot strelici.} \end{cases}$$

2.7.2. Neke osobine matrica incidencije

Dokazaćemo tri stava koji se odnose na matrice incidencije uvedene u prethodnom odeljku.

Neka $\mathbf{A}(G)$ označava matricu susedstva grafa G, a $\mathbf{A}(L(G))$ matricu susedstva odgovarajućeg grafa grana $L(G)$. Matrica $\mathbf{D} = [d_i\, \delta_{ij}]$, u kojoj veličine d_i ($i = 1, 2, \ldots$) predstavljaju stepene čvorova, a δ_{ij} ($\delta_{ij} = 0$ za $i \neq j$, $\delta_{ii} = 1$) *Kroneckerov* simbol, naziva se matrica stepena čvorova grafa G.

Stav 1. *Za matricu incidencije čvorova i grana* $\mathbf{R}$ *grafa* $\mathbf{G}$ *važe relacije*

$$\mathbf{R}\mathbf{R}' = \mathbf{A}(G) + \mathbf{D},$$

$$\mathbf{R}'\mathbf{R} = \mathbf{A}(L(G)) + 2\,\mathbf{I}.$$

Dokaz: Element iz i-te vrste i k-te kolone matrice $\mathbf{R}\mathbf{R}^t$ je jednak $\sum_{j=1}^{m} r_{ij}\, r_{kj}$. Neka je $i \neq k$. Izraz $r_{ij}\, r_{kj}$ će biti jednak 1, ako su i čvor x_i i čvor x_k susedni grani u_j. Dakle, $\sum_{j=1}^{m} r_{ij}\, r_{kj}$ je jednak broju grana koje povezuju čvorove x_i i x_k. Za $i = k$ dobijamo izraz $\sum_{j=1}^{m} r_{ij}^2$. Vidi se da r_{ij}^2 ima vrednost 1, ako je grana u_j susedna čvoru x_i. Stoga je $\sum_{j=1}^{m} r_{ij}^2 = d_i$.

Ovim je dokazana prva relacija.

Slično ovome, za opšti element matrice $\mathbf{R}'\mathbf{R}$ imamo izraz $\sum_{k=1}^{n} r_{ki}\, r_{kj}$. Sabirak $r_{ki}\, r_{kj}$ ($i \neq j$) je različit od nule, tj. jednak 1, ako su grane u_i i u_j susedne istom čvoru x_k, tj. ako su i same susedne. Za $i = j$ imamo $\sum_{k=1}^{n} r_{ki}^2$. Svaka grana je susedna sa tačno dva čvora, te će r_{ki}^2 tačno za dve vrednosti k biti jednako 1, tj. $\sum_{k=1}^{n} r_{ki}^2 = 2$.

Ovim je dokazana i druga relacija.

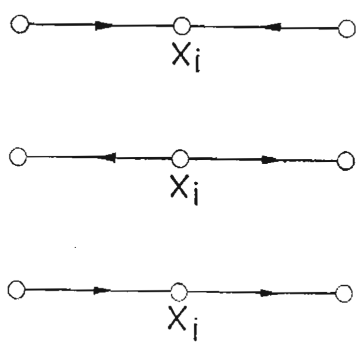
Korisno je da čitalac proveri tačnost stava 1 na primeru grafa sa sl. 53.

Stav 2. *Za matricu incidencije čvorova i grana* **S** *i ciklomatičku matricu* **C** *važi relacija* **SC**$=$**0**.

Dokaz. Prema definiciji matričnog množenja, element iz i-te vrste i j-te kolone matrice **SC** je jednak

$$s_{i1}\,c_{1j}+s_{i2}\,c_{2j}+\cdots+s_{im}\,c_{mj}. \tag{1}$$

Vektor $(c_{1j}, \ldots, c_{mj})$ predstavlja ciklus c_j. Pretpostavimo da je to prost i elementaran ciklus. Onda on prolazi kroz tačno dve grane koje su susedne čvoru x_i. Neka su to grane u_{l_1} i u_{l_2}. Zbir (1) se onda svodi na $s_{il_1}\,c_{l_1 j}+s_{il_2}\,c_{l_2 j}$.



Sl. 55

Na sl. 55 je prikazan čvor x_i sa granama u_{l_1} i u_{l_2}, pri čemu su navedene sve moguće orijentacije grana. Ciklus u svakom od navedenih slučajeva može da bude orijentisan u dva smera. Neposredno se u svakom od ovih šest slučajeva uveravamo da je $s_{il_1}\,c_{l_1 j}+s_{il_2}\,c_{l_2 j}=0$.

Ovim je dokazana tačnost relacije **SC**$=$**0** za slučaj kada su ciklusi koje predstavlja matrica **C** prosti i elementarni. Ako su pak ciklusi složeni i neelementarni, oni se uvek mogu predstaviti u vidu zbira prostih i elementarnih ciklusa, te se zbog distributivnosti matričnog množenja prema sabiranju slučaj svodi na prethodni.

Ovim je stav 2 dokazan.

Primedba. Relacija **SC** $=$ **0** važi i u slučaju kada **C** predstavlja matricu incidencije grana i svih ciklusa grafa. Ovo sleduje iz stava 2 i činjenice da se svi ciklusi mogu izraziti kao linearne kombinacije ciklusa iz jedne baze nezavisnih ciklusa.

Stav 3. *Neka je* **A** *matrica susedstva proizvoljnog multigrafa čiji su čvorovi* $x_1, \ldots, x_n$. *Element* $a_{ij}^{(k)}$ *iz i-te vrste i j-te kolone matrice* $\mathbf{A}^k$ *je jednak broju puteva dužine k koji iz čvora* x_i *vode u čvor* x_j.

Dokaz. Dokaz ćemo izvesti indukcijom po k. Za $k=1$ stav je tačan na osnovu definicije matrice **A**. Pretpostavimo da stav važi za $k=s\geqslant 1$. Po definiciji matričnog množenja, element iz matrice $\mathbf{A}^{s+1}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^s$ je jednak

$$a_{ij}^{(s+1)}=a_{i1}\,a_{1j}^{(s)}+a_{i2}\,a_{2j}^{(s)}+\cdots+a_{in}\,a_{nj}^{(s)}.$$

Neka su $x_{l_1}, \ldots, x_{l_k}$ čvorovi do kojih se može doći iz x_i putem dužine 1. Tada je

$$a_{ij}^{(s+1)}=a_{il_1}\,a_{l_1 j}^{(s)}+a_{il_2}\,a_{l_2 j}^{(s)}+\cdots+a_{il_k}\,a_{l_k j}^{(s)}. \tag{2}$$

Za svaki od čvorova $x_{l_1}, \ldots, x_{l_k}$ (recimo x_{l_p}), a_{il_p} predstavlja broj puteva dužine 1 od čvora x_i do čvora x_{l_p}. Po induktivnoj pretpostavci $a_{l_p j}^{(s)}$ predstavlja broj puteva dužine s koji iz x_{l_p} vode u x_j. Broj puteva dužine $s+1$ koji iz x_i vode u x_j preko x_{l_p} je onda $a_{il_p}\,a_{l_p j}^{(s)}$. Sumiranjem ovakvih izraza za svako l_p dobija se za broj svih puteva dužine $s+1$ koji iz x_i vode u x_j izraz (2).

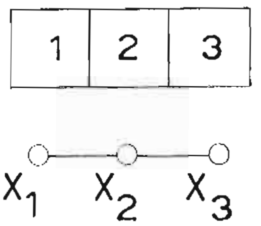
Ovim je dokaz stava završen.

Primer. Odrediti broj načina N_k, da kralj (šahovska figura) izvede niz od k poteza na šahovskoj tabli sa sl. 56.

Graf kretanja kralja na ovoj tabli je dat na istoj slici. Zadatak se svodi na određivanje broja svih puteva dužine k u ovom grafu.

Matrica susedstva grafa je:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$



Sl. 56

Nalaženjem $\mathbf{A}^3$ uveravamo se da važi relacija $\mathbf{A}^3=2\mathbf{A}$. Posle množenja sa $\mathbf{A}^{k-3}$ dobija se $\mathbf{A}^k=2\mathbf{A}^{k-2}$. Sabirajući sve elemente matrice $\mathbf{A}^k$ dobijamo, na osnovu stava 3 $N_k=2N_{k-2}$. Pošto je $N_1=4$ i $N_2=6$ dobija se $N_{2k-1}=2^{k+1}$ i $N_{2k}=3\cdot 2^k$ $(k=1, 2, \ldots)$.

U [17] je rešen isti problem za kretanje kralja po kvadratnoj šahovskoj tabli tipa $n\times n$.

2.7.3. Spektralne osobine grafova

U 1.3.6. je navedeno da istom grafu odgovaraju različite matrice susedstva. Različite numeracije čvorova grafa dovode do različitih matrica. Nasuprot ovome, postoje karakteristike grafa koje su invarijantne u odnosu na prenumeraciju čvorova. To su, pre svega, različite brojne karakteristike: broj čvorova, broj grana, hromatski broj itd.

U ovom odeljku opisaćemo dve važne invarijante grafa: karakteristični polinom i spektar grafa. *Karakteristični polinom* $P_G(\lambda)$ grafa G predstavlja karakteristični polinom jedne od matrica susedstva $\mathbf{A}$ grafa G, tj. $P_G(\lambda)=det\,(\mathbf{A}-\lambda I)$.

Dve matrice susedstva $\mathbf{A}_1$ i $\mathbf{A}_2$ nekog grafa su povezane relacijom $\mathbf{A}_2=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}_1\mathbf{P}$, gde je $\mathbf{P}$ neka permutaciona matrica. Pošto je permutaciona matrica nesingularna matrica, $\mathbf{A}_1$ i $\mathbf{A}_2$ su slične matrice. Iz teorije matrica je, međutim, poznato da slične matrice imaju iste karakteristične polinome. Stoga je karakteristični polinom grafa $P_G(\lambda)$ jedinstven, tj. invarijantan u odnosu na prenumeraciju čvorova.

Nule karakterističnog polinoma matrice zovu se karakteristične ili sopstvene vrednosti matrice. Ako je λ karakteristična vrednost matrice A, vektor predstavljen matricom-kolonom $\mathbf{x}$, zove se karakteristični ili sopstveni vektor matrice $\mathbf{A}$ pridružen karakterističnoj vrednosti λ, ako važi relacija $\mathbf{Ax}=\lambda\mathbf{x}$.

Opšte osobine karakterističnog polinoma, karakterističnih vrednosti i karakterističnih vektora matrica su opisane, na primer, u [43].

Skup nula karakterističnog polinoma grafa naziva se *spektar* grafa. Očigledno je i spektar jedna invarijanta grafa.

Navešćemo neke osobine karakterističnog polinoma i spektra grafa.

Neka je $P_G(\lambda)=a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n$ karakteristični polinom grafa i $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ spektar grafa. Stepen karakterističnog polinoma je jednak broju čvorova grafa. Poznato je da je $a_0=(-1)^n$, pa se karakterističnom polinomu može dati oblik $P_G(\lambda)=(-1)^n(\lambda^n-p_1\lambda^{n-1}-\cdots-p_n)$. Koeficijent p_1 je jednak tragu matrice susedstva, tj. broju petlji grafa. Koeficijent p_2 je sa obrnutim znakom jednak zbiru glavnih minora drugoga reda matrice susedstva, tj. zbiru determinanti matrica susedstva svih podgrafova sa dva čvora. Ako se ograničimo na grafove bez petlji i višestrukih grana, determinanta matrice susedstva grafa sa dva čvora je jednaka —1 ako su čvorovi spojeni granom i jednaka 0 u obrnutom slučaju. Stoga je koeficijent p_2 jednak broju grana grafa. Uopšte, koeficijenti karakterističnog polinoma imaju vrednosti koje se mogu odrediti iz strukture grafa [14], [26], [50].

Spektralne osobine grafova su u vezi sa spektralnim osobinama nenegativnih nerazloživih matrica.

Matrica je *nenegativna* ako su svi njeni elementi nenegativni.

Matrica A je *razloživa* ako postoji permutaciona matrica $\mathbf{P}$ takva da je matrica $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ oblika

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{O} \\ \mathbf{Y} & \mathbf{Z} \end{bmatrix}, \tag{1}$$

gde su $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Z}$ kvadratne matrice a $\mathbf{O}$ nula-matrica. Ako nije razloživa, matrica se zove *nerazloživa*.

Matrica susedstva proizvoljnog grafa je očigledno nenegativna matrica. Osobina nerazloživosti matrica odgovara osobini povezanosti neorijentisanih grafova odnosno osobini jake povezanosti za orijentisane grafove. Za graf, koji ima matricu susedstva oblika (1), očigledno je da iz čvorova koji odgovaraju submatrici $\mathbf{X}$ ne vodi nijedna grana u čvorove koji odgovaraju submatrici $\mathbf{Z}$. Stoga grafovi sa matricom susedstva oblika (1) nisu povezani odnosno nisu jako povezani.

Poznata je sledeća teorema *Frobeniusa* za nenegativne nerazložive matrice.

Teorema 1. *Svaka nerazloživa, nenegativna matrica* $\mathbf{A}$ *ima pozitivnu karakterističnu vrednost* r, *koja je jednostruka nula karakterističnog polinoma. Moduli svih ostalih karakterističnih vrednosti nisu veći od* r. *»Maksimalnoj« karakterističnoj vrednosti* r *odgovara sopstveni vektor sa pozitivnim koordinatama. Ako pri tome* A *ima* h *karakterističnih vrednosti, po modulu jednakih* r, *ti brojevi su međusobno različiti i zadovoljavaju jednačinu* $\lambda^h - r^h = 0$. *Uopšte, skup karakterističnih vrednosti* $\lambda_1 = r, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *matrice* $\mathbf{A}$, *posmatran kao skup tačaka u kompleksnoj* λ *ravni, prelazi sam u sebe pri rotaciji ravni za ugao* $\frac{2\pi}{h}$. *Za* $h > 1$ *je mogućno, permutacijom vrsta i istom permutacijom kolona, dovesti matricu* $\mathbf{A}$ *na sledeći »ciklički« oblik*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{A}_{23} & & \mathbf{O} \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & & \mathbf{A}_{h-1,h} \\ \mathbf{A}_{h1} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & & \mathbf{O} \end{bmatrix},$$

gde se duž glavne dijagonale nalaze kvadratne nula-matrice.

Dokaz ove teoreme je veoma opširan i neće biti ovde naveden (videti, na primer, [24], str. 355).

Povezani odnosno jako povezani grafovi imaju spektralne osobine koje proističu iz ove teoreme. »Maksimalna« karakteristična vrednost iz spektra grafa naziva se *indeks* grafa.

Posmatrajmo nadalje neorijentisane grafove. Matrica susedstva ovakvih grafova je simetrična (a to znači hermitska), te se spektar sastoji od realnih brojeva. Ako sa r obeležimo indeks grafa, spektar leži na segmentu $[-r, r]$.

Neka je G nepovezan graf sa komponentama povezanosti $G_1, \ldots, G_s$ koje se mogu posmatrati i kao samostalni grafovi. Ako su $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_s$ matrice susedstva grafova $G_1, \ldots, G_s$, matrica susedstva $\mathbf{A}$ grafa G ima oblik

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & \mathbf{A}_s \end{bmatrix}.$$

Primenom *Laplaceovog* razvoja determinanti može se dokazati da za karakteristične polinome važi

$$P_G(\lambda) = P_{G_1}(\lambda) \cdots P_{G_s}(\lambda),$$

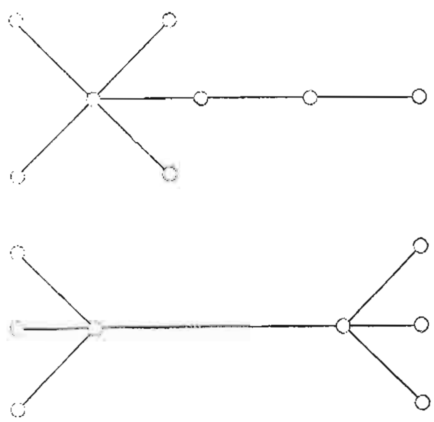
a odavde sleduje da se spektar grafa G dobija objedinjavanjem spektara njegovih komponenti povezanosti $G_1, \ldots, G_s$.

Iz ranije navedenog sleduje da izomorfni grafovi imaju iste karakteristične polinome odnosno spektre. Ovde se samo po sebi nameće pitanje — da li neizomorfni grafovi imaju različite karakteristične polinome. Ova interesantna hipoteza je opovrgnuta već u radu [14], koji predstavlja jedan od prvih radova koji tretiraju spektre grafova. Tamo je naveden primer dva neizomorfna stabla (sl. 57) koji imaju iste karakteristične polinome

$$P_G(\lambda) = \lambda^8 - 7\lambda^6 + 9\lambda^4.$$

U literaturi su navedeni i drugi primeri neizomorfnih izospektralnih grafova.

U [66] je pokazano da ne samo karakteristični polinom matrice susedstva nego i opštije matrične funkcije ne određuju graf sa tačnošću do izomorfizma.



Sl. 57

I pored ovoga spektri grafova mogu da posluže kao korisno sredstvo u analizi različitih problema sa grafovima. Videli smo da su koeficijenti karakterističnog polinoma određeni strukturom grafa. Stvar se može posmatrati i obrnuto, tj. na osnovu poznatog karakterističnog polinoma ili spektra grafa određivati detalje strukture grafa. Jasno je da se svi detalji strukture ne mogu odrediti jer, kao što je navedeno, postoje grafovi različite strukture sa istim spektrom. Stoga su interesantna, na primer, sledeća dva pitanja:

1°. Kako se različite osobine grafa odražavaju u spektru grafa?

2°. Koje se osobine grafa i na koji način mogu odrediti pomoću spektra grafa?

U vezi sa ovim problemima navodimo neke primere.

U [15] je dokazan sledeći stav.

Stav 1. *Konačan, povezan, neorijentisan graf bez petlji i sa najmanje dva čvora je bihromatski ako i samo ako je njegov spektar, posmatran kao skup tačaka na brojnoj osi, simetričan u odnosu na tačku nula.*

Sličnim postupkom se može dokazati i sledeći stav.

Stav 2. *Konačan, povezan, neorijentisan graf bez petlji i sa najmanje dva čvora, čiji je indeks jednak r, bihromatski je ako i samo ako njegov spektar sadrži broj minus r.*

Dokaz. Ako je graf bihromatski iz prethodnog stava, sleduje da njegov spektar sadrži broj minus r.

Pretpostavimo sada obrnuto — da spektar grafa sadrži broj minus r i dokažimo da je graf bihromatski.

Matrica susedstva grafa **A** je nenegativna, nerazloživa i simetrična. Spektar grafa se sastoji od realnih brojeva. Sopstvena vrednost r je na osnovu teoreme *Frobeniusa* jednostruka. Takođe, sopstvena vrednost minus r mora biti jednostruka, jer bi suprotna pretpostavka vodila do kolizije sa *Frobeniusovom* teoremom. Dakle, matrica **A** ima tačno dve sopstvene vrednosti sa maksimalnim modulom r. Na osnovu *Frobeniusove* matrica **A** se može permutacijom vrsta i istom permutacijom kolona dovesti na oblik

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{O} \end{bmatrix},$$

gde se na glavnoj dijagonali nalaze kvadratne nula-matrice. Stoga je graf bihromatski.

Ovim je dokaz stava završen.

LITERATURA

1. W. Ahrens, *Mathematische Unterhaltungen und Spiele*, Leipzig, 1901.
2. E. F. Assmus, H. F. Mattson, *On tactical configurations and error-correcting codes*, J. Combin. Theory, **2** (1967), 243—257.
3. E. Beckenbach (editor), *Applied Combinatorial Mathematic*, London—New York—Syndey, 1964; prevod na ruski: Moskva, 1968.
4. L. W. Beineke, *The decomposition of complete graphs into planar subgraphs*, Graph Theory and theoretical physics London—New York, 1967, 139—153.
5. *Beitrage zur Graphentheorie*, Internat. Colloq. in Manebach, Leipzig, 1968.
6. C. Berge, *Théorie des graphes et ses applications*, Paris, 1958; prevod na ruski: Moskva, 1962.
7. J. Blažek, M. Koman, *A minimal problem concerning complete plane graphs*, Theory of graphs and its applications, Proc. of the Symp. in Smolenice, Prague, 1964, 113—117.
8. G. A. Bodino, *Applicazioni economiche della teoria dei graffici*, Pavia, 1960; englesko izdanje: New York, 1962.
9. E. Bonsdorff, K. Fabel, O. Riihimaa, *Schach und Zahl*, Düsseldorf, 1966.
10. Л. Ф. Бородин, *Введение в теорию помехоустойчивого кодирования*, Москва, 1968.
11. R. L. Brooks, *On colouring the nodes of a network*, Proc. Cambridge Philos. Soc., 37 (1941), 194—197.

12. Бурбаки, *Общая топология*, Москва, 1968.

13. R. G. Busacher, T. L. Saaty, *Finite graphs and networks*, New York, 1965.

14. L. Collatz U. Sinogowitz *Spektren endlicher Grafen*, Abh. Math. Seminar Univ. Hamburg, **21** (1957), 63—77.

15. D. Cvetković, *Bihromatičnost i spektar grafa*, Matematička biblioteka, № 41, Beograd, 1969, 193—194.

16. D. Cvetković, *Teorija grafova — disciplina koja je postavila više problema nego što ih je rešila*, Matematička biblioteka, № 42, Beograd, 1970.

17. D. Cvetković, *Die Zahl der Wege eines Graphen*, Glasnik Mat. Ser. III., **5 (25)** (1970), 205—210.

18. G. A. Dirac, M. D. Stojaković, *Problem četiri boje*, Matematička biblioteka, № 16, Beograd, 1960.

19. A. P. Domoryad, *Mathematical games and pastimed*, Oxford—London—Edinburgh 1964; rusko izdanje: Moskva, 1961.

20. A. L. Dulmage, N. S. Mendelsohn, *Graphs and matrices*, Graph theory and theoretical physics, London—New York, 1967, 167—227.

21. А. П. Ершов, *Сведéние задачи распределения памяти при составлении програм к задаче раскраски вершин графов*, ДАН **142** (1962), 785—787.

22. L. Euler, *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, Comment. Academiae Sci. I. Petropolitanae **8** (1736), 128—140.

23. L. R. Ford, D. R. Fulkerson, *Flows in networks*, Princeton, 1962; prevod na ruski: Moskva, 1966.

24. Р. Ф. Гантмахер, *Теория матриц*, Москва, 1966.

25. D. P. Geller, *Problem* 5713., Amer. Math. Monthly, 77 (1970), 85.

26. F. Harary, *The determinant of the adjacency matrix of a graph*, SIAM Rev. **3** (1962), 202—210.

27. F. Harary, *Graph Theory and Theoretical Physics*, London—New York, 1967.

28. F. Harary, *Graph theory*, Addison-Wesley Publishing Company, 1969.

29. Ф. Харари, *Задачи перечисления графов*, Успехи мат. наук **24** (1969), № 5, 179—214.

30. F. Harary, R. Z. Norman, D. Cartwright, *Structural models*, New York—London—Sydney, 1965.

31. K. F. Janis, *Applications de l'analyse mathematique au jeu des échecs*, Petrograd, 1862—1863.

32. S. Johnson, *Optimal* 2 *and* 3-*stage production schedules with set up times included*, Naval Res. Logist. Quart. **1** (1954), 61—68.

33. R. Kalaba, *Graph theory and automatic control*, Applied combinatorial mathematics, New York—London—Sydney, 1964.

34. H. J. L. Kamps, J. H. van Lint, The foot ball pool problem for 5 matches, J. Combinatorial Theory, **3** (1967), 315—325.

35. *Кибернетика ожидаемая — кибернетика неожиданная*, Москва, 1968.

36. G. Kirchhoff, *Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird*, Ann. Phys. Chem. **72** (1847), 497—508.

37. D. König, *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, Leipzig 1936, II izdanje: New York, 1950.

38. M. Kraitchik, *La mathématique des jeux ou récréations mathématiques*, Bruxelles, 1930.

39. E. Lucas, *Récréations mathématiques*, Paris, 1891—1884.

40. Ю. И. Любич, *Замечание об одной задаче К. Бержа*, Сибирск. матем. журн. 5 (1964) 961—962.

41. L. S. Melnikov, V. G. Vizing, *New proof of Brooks theorem*, J. Combinatorial Theory 7 (1969), 289—290.

42. D. S. Mitrinović, *Zbornik matematičkih problema I*, Beograd, 1962.

43. D. S. Mitrinović, D. Ž. Đoković, *Polinomi i matrice*, Beograd, 1966.

44. O. Ore, *Theory of graphs*, Providence 1962; prevod na ruski: Moskva, 1968.

45. O. Ore, *The four color problem*, New York, 1967.

46. N. Ozeki, *On the paths of the knight*, J. College Arts Sci. Chiba Univ. **2** (1957), 93—96.

47. N. Petrović, *Šahovski problem*, Zagreb, 1949.

48. Г. С. Плесневич, *Расположение графа на плоскости*, Вычислительние системы, 6 (1963), 45—53.

49. G. Pólya, *Kombinatorishe Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen*, Acta Math. **68** (1937), 145—253.

50. J. Ponstein, *Self-avoiding paths and the adjacency matrix of a graph*, SIAM, J. Appl. Math., **14** (1966), 600—609.

51. G. Ringel, *Färbungsprobleme auf Flächen und Graphen*, Berlin, 1959.

52. G. Ringel, J. W. T. Youngs, *Solution of the Heawood map-coloring problem*, Proc. Math. Acad. Sci. USA, **60** (1968), 438—445.

53. J. Riordan, *An introduction to combinatorial analysis*, New York 1958; prevod na ruski: Moskva, 1963.

54. W. Rouse-Ball, *Mathematical recreations and problems*, London, 1892.

55. H. Sachs, *Über selbstkomplementäre Graphen*, Publ. Math. Debrecen, **9** (1962), 270—288.

56. F. Scheid, *Some packing problem*, Amer. Math. Monthly, **67** (1960), 231—235.

57. J. Sedláček, *Einführung in die Graphentheorie*, Leipzig, 1968; čehoslovačko izdanje: Prag, 1964.

58. F. W. Sinden, *Topology of thin film RC- circuits*. Theory of graphs, Intern. symp. in Rome, Paris—New York, 1967, 389—393.

59. H. Steinhaus, *Kaleidoskop der Mathematik*, Berlin, 1959 (prevod sa poljskog).

60. M. D. Stojaković, *Neki nerešeni problemi teorije grafova*, Matematička biblioteka, №. 25, Beograd, 1963, 51—63.

61. Ю. А. Сушков, *Об одном применении плоских графов*, Кибернетика 1969, № 2, 68—72.

62. *Theory of graphs and its applications*, Proc. of the Symp. in Smolenice, Prague, 1964.

63. *Theory of graphs*, Intern. symp. in Rome, Paris—New York, 1967.

64. *Theory of graphs*, Proc. of the colloq. at Tihany, Budapest—New York, 1968.

65. R. Todić, *Osnovi teorije grafova — primena u praksi*, Beograd, 1969.

66. J. Turner, *Generalized matrix functions and the graph isomorphisme problem*, SIAM J. Appl. Math. **16** (1968), 520—526.

67. В. Г. Визинг, *Некоторые нерешенные задачи в теории графов*, Успехи, мат. наук, **23** (1968), № 6, 117—134.

68. J. Vrabec, *Prikaz teorije grafov*, Obzornik Mat. Fiz., 1967, 58—71, 1968, 107—120.

69. А. А. Зыков, *Теория конечных графов I*, Новосибирск, 1969.

II DEO

TEORIJA GRAFOVA I ANALIZA ELEKTRIČNIH MREŽA

Dr Mirko Milić

1. UVOD

Jednu od najvažnijih primena teorija grafova nalazi u analizi složenih fizičkih sistema, koji se mogu predstaviti modelom električne mreže.

Pre više od jednog veka *G. Kirchhoff* je prvi koristio neke kombinatorno-topološke pojmove za rešavanje jednačina električnih mreža [15]. U ono vreme teorija grafova nije postojala kao posebna matematička disciplina, pa su *Kirchhoffove* ideje ostale dugi niz godina nedovoljno iskorišćene i razvijene. Znatno kasniji fundamentalni radovi na polju moderne teorije grafova *H. Poincaréa, O. Veblena, C. Kuratowskog, H. Whitneya*) i drugih vršili su snažan uticaj i na fizičko-tehničke naučne discipline, naročito na teoriju električnih mreža [12], [33], [28], [2], [9].

Međutim, može se reći da intenzivno i sistematsko proučavanje električnih mreža u okvirima teorije grafova počinje pre petnaest godina. To je vreme kada dotle »poznate« metode analize mreža dobijaju strogo opravdanje, što omogućava bolje upoznavanje osobina mreža odnosno razvijanje savršenijih metoda analize i sinteze [30], [7], [8], [36], [5], [29], [14], [31], [32], [10], [16], [34], [37].

Kao posebna motivacija za primenu metoda zasnovanih na teoriji grafova, javlja se primena digitalnih računara u analizi električnih mreža za koje su ove metode naročito pogodne [3], [17], [13].

Najzad, u poslednje vreme metode analize mreža na bazi teorije grafova su proširene na proizvoljne fizičke sisteme [35], [18], [19], [20], što je stvorilo osnovu za njihovo proučavanje u okviru moderne teorije sistema [38].

U ovom delu pokušaćemo da pokažemo kako se neke osnovne činjenice iz teorije grafova mogu korisno upotrebiti u formulisanju i rešavanju jednačina električnih mreža, u nadi da će čitalac naći dovoljno interesa za potpunije proučavanje ovih i sličnih problema. Izbor električne mreže za fizički sistem je dat više iz estetsko-didaktičkih razloga; iste metode se primenjuju i u analizi hidrauličnih, mehaničkih, toplovodnih i drugih mreža.

2. ELEKTRIČNA MREŽA

2.1. Elementi mreže

Električna mreža predstavlja matematički model za jednu široku klasu fizičkih sistema koji zadovoljavaju opšte zakone o nestišljivosti protoka i o održanju energije. Mrežu sačinjavaju *elementi* koji su na pogodan način međusobno povezani. Elementi su matematički model pojedinih delova na koji se posmatrani fizički sistem može rastaviti. Svakom elementu su pridružene dve promenljive: *napon u* i *struja i* između kojih postoji operatorska relacija oblika

(1a) $$u + u_g(t) = Z[i + i_g(t)]$$

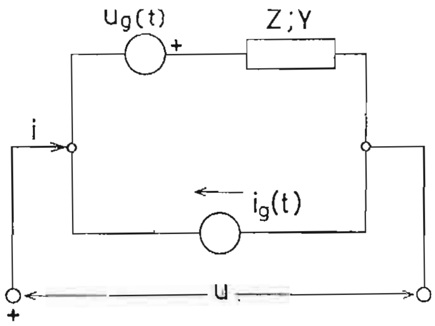
ili

(1b) $$i + i_g(t) = Y[u + u_g(t)],$$

gde su Z i Y operatori, a $u_g(t)$ i $i_g(t)$ poznate funkcije vremena.

Relacija (1) se naziva *karakteristikom* elementa. Ona se može predstaviti shematski kao na sl. 58. Napon $u_g(t)$ može se shvatiti kao napon naponskog izvora, a struja $i_g(t)$ kao struja strujnog izvora.

U opštem slučaju operatori Z i Y su nelinearni i zavise i od vremena t. Elementi koji su karakterisani takvim operatorima nazivaju se *nelinearnim* i *nestacionarnim*, a ako Z i Y ne zavise od t, oni su *nelinearni* i *stacionarni*. *Linearni elementi* su karakterisani linearnim operatorima Z ili Y. Ovi operatori se tada nazivaju *operatorskom impedansom* Z i *operatorskom admitansom* Y. Oni su funkcije vremena u slučaju nestacionarnih elemenata, dok su nezavisni od vremena kod linearnih i stacionarnih elemenata. Mogućno je da neki element ima samo jedan od dva oblika karakteristike (1). Ako ima karakteristiku oblika (1a), kazaćemo da je to *u-element*, a ako ima karakteristiku oblika (1b), onda je to *i-element*. Ako ima obe karakteristike, to je *1 : 1-element*.



Sl. 58

Najčešći elementi koji ulaze u sastav električnih mreža su *otpornik*, *kalem* i *kondenzator*. U slučaju da su oni linearni i nestacionarni, definisani su na sledeći način:

Naziv elementa	Shematsko označavanje	Z	Y
Otpornik		$R(t)$	$G(t)$
Kalem		$L(t)\frac{d}{dt}+\frac{dL(t)}{dt}$	$\Gamma(t)\int\limits_{-\infty}^{t}(\ )\,dt$
Kondenzator		$S(t)\int\limits_{-\infty}^{t}(\ )\,dt$	$C(t)\frac{d}{dt}+\frac{dC(t)}{dt}$

Funkcije $R(t)$, $L(t)$ i $S(t)$ imaju posebne nazive: *otpornost*, *induktivnost* i *elastansa*, a $G(t)$, $\Gamma(t)$ i $C(t)$ — *provodnost*, *recipročna induktivnost* i *kapacitivnost*. Za linearne i stacionarne elemente to su konstante za koje važi $RG=1$, $L\Gamma=1$ i $SC=1$.

Ako u mreži ima ukupno b elemenata, tada se njihove karakteristike mogu pisati u matričnom obliku

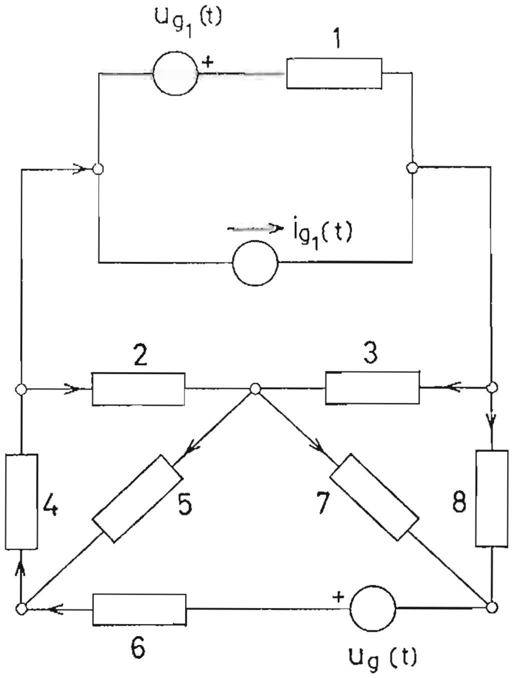
$$\mathbf{u}+\mathbf{u}_g(t)=\mathbf{Z}\,[\mathbf{i}+\mathbf{i}_g(t)] \tag{2 a}$$

$$\mathbf{i}+\mathbf{i}_g(t)=\mathbf{Y}\,[\mathbf{u}+\mathbf{u}_g(t)] \tag{2 b}$$

gde su $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}_g(t)$, $\mathbf{i}$ i $\mathbf{i}_g(t)$ $b\times 1$ — matrice napona i struja, a $\mathbf{Z}$ i $\mathbf{Y}$ dijagonalne $b\times b$ — matrice operatorskih impedansi i admitansi elemenata.

2.2. Problem analize električnih mreža

Međusobnim vezivanjem krajeva pojedinih elemenata mogu se dobiti različite konfiguracije mreža. Na sl. 59 je prikazana jedna mreža koja se sastoji od ukupno osam elemenata, od kojih element 1 ima obe vrste izvora, element 6 ima samo naponski izvor, dok ostali elementi ne sadrže izvore. Strelice na elementima označavaju orijentacije elemenata, shodno konvenciji na sl. 58. Ako su svi elementi linearni, mreža se naziva linearnom, a ako je bar jedan element nelinearan — nelinearnom.



Sl. 59

Struje i naponi elemenata moraju da zadovoljavaju, pored karakteristika elemenata (2) još i *Kirchhoffove zakone* koji izražavaju ravnotežu struja (1 *Kirchhoffov* zakon) i ravnotežu napona (2. *Kirchhoffov* zakon).

Ako sa c označimo ukupni broj čvorova u mreži i sa m_a ukupni broj kontura koje se mogu obrazovati od elemenata mreže (ove konture se orijentišu proizvoljno), *Kirchhoffovi* zakoni se mogu pisati u obliku:

(3 a) $$\sum_{\nu=1}^{b} a_{\mu\nu} i_\nu = 0 \quad (\mu = 1, 2, .., c)$$

(3 b) $$\sum_{\nu=1}^{b} b_{\mu\nu} u_\nu = 0 \quad (\mu = 1, 2, .., m_a),$$

gde su $a_{\mu\nu}$ i $b_{\mu\nu}$ definisani na sledeći način:

$$a_{\mu\nu} = \begin{cases} 1, & \text{ako je element } \nu \text{ vezan za čvor } \mu \text{ i orijentisan od čvora;} \\ -1, & \text{ako je element } \nu \text{ vezan za čvor } \mu \text{ i orijentisan ka čvoru;} \\ 0, & \text{ako element } \nu \text{ nije vezan za čvor } \mu. \end{cases}$$

$$b_{\mu\nu} = \begin{cases} 1, & \text{ako je element } \nu \text{ sadržan u konturi } \mu \text{ i njihove orijentacije se slažu;} \\ -1, & \text{ako je element } \nu \text{ sadržan u konturi } \mu \text{ i njihove orijentacije su suprotne;} \\ 0, & \text{ako element } \nu \text{ nije sadržan u konturi } \mu. \end{cases}$$

Ako sa $\mathbf{A}_a$ označimo $c \times b$—matricu koeficijenata $a_{\mu\nu}$ i sa $\mathbf{B}_a$ označimo $m_a \times b$ — matricu koeficijenata $b_{\mu\nu}$, jednačine (3) se pišu u obliku:

(4 a) $$\mathbf{A}_a \mathbf{i} = \mathbf{o}$$

(4 b) $$\mathbf{B}_a \mathbf{u} = \mathbf{o}.$$

Karakteristike elemenata (2) zajedno sa *Kirchhoffovim* zakonima (4) obrazuju jedan sistem diferencijalno-integralnih jednačina, čijim se rešavanjem uz date početne uslove određuju naponi **u** i struje **i** svih elemenata. Nije teško videti da ovako postavljen problem nije potpuno određen. Pre svega nije a priori jasno da li je sistem jednačina (3a) po 1. *Kirchhoffovom* zakonu nezavisan. Drugo, budući da 2. *Kirchhoffov* zakon treba da važi za *svaku* konturu, postavlja se pitanje koliki je minimalni broj kontura za koje treba pisati jednačine po 2. *Kirchhoffovom* zakonu i kako izabrati konture koje obezbeđuju nezavisnost ovih jednačina. Najzad, kao središnji problem analize mreža, potrebno je postaviti jedan sistem od minimalnog broja potrebnih i dovoljnih jednačina čije rešenje određuje sve napone i sve struje elemenata mreže, i ovaj sistem potom rešiti.

Prema tome, analiza električnih mreža se, u krajnjoj liniji, svodi na dva osnovna pitanja:

(a) formulisanje sistema jednačina čije rešenje određuje sve napone i sve struje elemenata, i

(b) rešavanje ovog sistema jednačina.

3. GRAF MREŽE

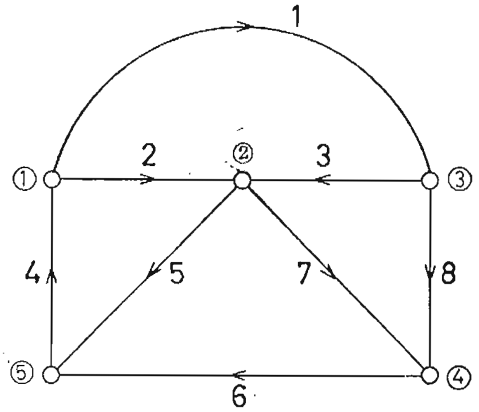
3.1. Osnovni pojmovi

Za rešavanje oba pomenuta pitanja presudnu ulogu igra način na koji su elementi međusobno povezani. Ovo se neposredno vidi iz jednačina (4) u kojima matrice $\mathbf{A}_a$ i $\mathbf{B}_a$ ne zavise od karakteristika elemenata, već samo od »geometrijske« strukture mreže. Ove jednačine izražavaju veze kojima su struje i naponi elemenata podvrgnuti posle vezivanja u mrežu. Stoga u svim pitanjima koja su vezana za jednačine (4) priroda elemenata je irelevantna i ona se može potpuno apstrahovati. Tako dolazimo do pojma *grafa mreže* koji ćemo jednostavno dobiti zamenom svakog elementa mreže jednim orijentisanim linijskim segmentom koji zovemo *granom*. Orijentacija grane je ista kao orijentacija elementa koji ona zamenjuje. Graf mreže je, prema tome, *orijentisani graf*. Na primer, graf mreže sa sl. 58 je prikazan na sl. 60.

Krajevi neke grane su *čvorovi*, na sl. 60 označeni zaokruženim brojevima. Ako se graf sastoji samo od jednog dela, kao što je onaj na sl. 60, tada je on *povezan*. Nepovezan je graf onaj kod kojeg postoje bar dva čvora između kojih ne postoji ni jedan lanac. Takvi grafovi imaju više odvojenih delova ili komponenata. Odvojenim delovima se smatraju i pojedini izolovani čvorovi, tj. čvorovi za koje nije vezana nijedna grana. Bez ikakvih ograničenja možemo uvek smatrati da je graf povezan. U električnom pogledu to znači da se po jedan čvor iz svakog odvojenog dela mreže veže u jedan zajednički čvor, čime se ne menjaju naponi i struje u mreži.

Neki podskup grana obrazuje *subgraf.*[1] Pojam povezanog grafa se po definiciji prenosi i na subgrafove. Ukupni broj pravih subgrafova koji se mogu obrazovati od b grana nekog grafa je 2^b-2.

Od svih mogućih subgrafova koji se mogu obrazovati od jednog povezanog grafa, naročito su važni kontura, stablo i snop.



Sl. 60

Kontura je povezan subgraf obrazovan od grana tako da se u svakom čvoru stiču tačno dve grane. Na primer (1, 2, 3), (1, 4, 5, 3), (2, 3, 8, 6, 4) su konture grafa na sl. 3. Za svaku konturu se usvaja jedan pozitivni smer obilaska — orijentacija konture.

Stablo je povezan subgraf obrazovan od grana koje povezuju sve čvorove grafa ali ne obrazuju konture. Za jedan graf sa ukupno c čvorova svako stablo sadrži tačno $n=c-1$ grana. Na primer, subgrafovi (1, 2, 4, 6), (2, 3, 5, 7), (4, 5, 6, 8) su stabla grafa na sl. 60. Ako graf G ima ukupno b grana, tada svako stablo T deli grane grafa u dva skupa: $n=c-1$ grana koje se nalaze u stablu i $m=b-n=b-c+1$ grana koje se ne nalaze u njemu. Ovih m grana su *spojnice* datog stabla T. Za njih se još kaže da obrazuju *komplement stabla*, T', ili kraće *ko-stablo*. Na primer (3, 5, 7, 8) je skup spojnica ili ko-stablo u odnosu na stablo (1, 2, 4, 6)·

Snop je subgraf koji sadrži minimalni broj grana koje je potrebno ukloniti iz grafa G da bi se ovaj rastavio tačno na dva dela. Pri tome jedan ili oba rastavljena dela mogu biti i čvorovi; tada govorimo o *snopovima oko čvorova*. Na primer, subgrafovi (1, 2, 5, 6), (4, 5, 7, 8), (1, 2, 4), (2, 3, 5, 7) su snopovi grafa na sl. 60, pri čemu je (1, 2, 4) snop oko čvora 1, a (2, 3, 5, 7) snop oko čvora 2.

Iznalaženje nekog snopa u grafu G vrši se jednostavno ako se skup svih čvorova V podeli na dva disjunktna podskupa V_1 i V_2 ($V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = 0$). Tada grane čiji se jedan kraj nalazi u V_1 a drugi kraj u V_2 sačinjavaju snop. Drugi je način da se graf preseče nekom zatvorenom površinom tako da jedna grupa čvorova bude unutar površine, a druga van nje. Ova površina koja se naziva *presekom*, seče grane koje obrazuju jedan snop[2]. Snop se orijentiše prema orijentaciji

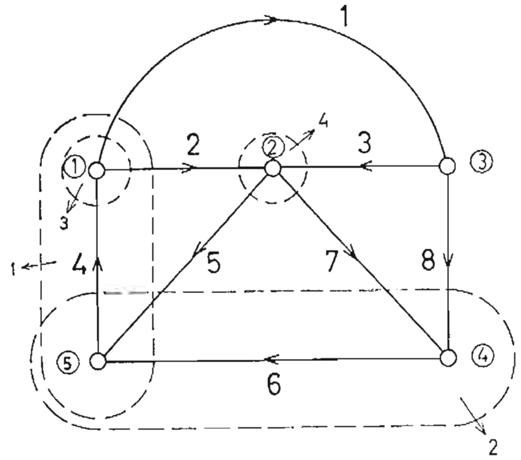
---

[1] Na str. 17 za ovaj pojam je upotrebljen termin »delimični podgraf«.

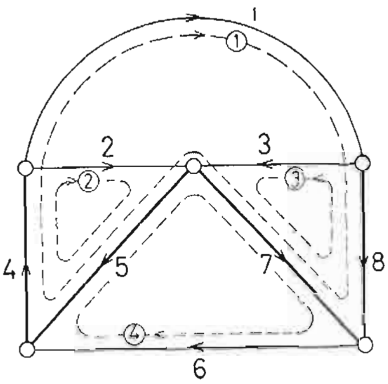
[2] Drukčija definicija snopa navedena je na str. 112. Neki autori upotrebljavaju termin »presek« da označe kako presečnu površinu tako i same presečene grane (=snop).

preseka koji ga definiše. Na sl. 61 isprekidanim linijama su označeni preseci koji definišu ranije pomenute snopove. Strelice na slici prikazuju orijentacije preseka odnosno snopova.

Ako se u nekom grafu G izabere jedno stablo T, odnosno njemu odgovarajuće ko-stablo T', tada je iz samih gornjih definicija očigledno da proizvoljna kontura mora da sadrži bar jednu spojnicu ko-stabla T', a proizvoljni snop bar jednu

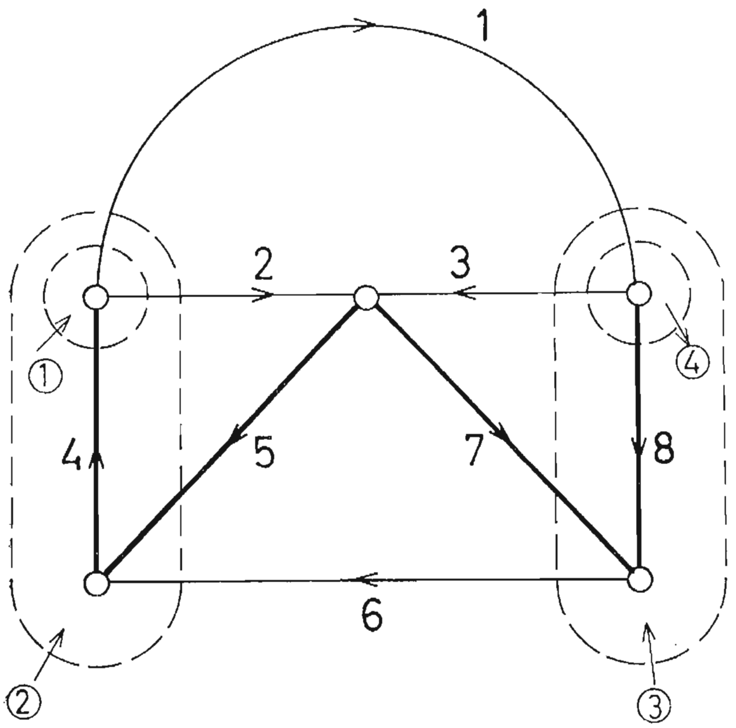


Sl. 61



Sl. 62

granu stabla T. Od svih mogućih kontura i snopova od naročitog su interesa konture koje sadrže samo jednu granu iz T', odnosno snopovi koji sadrže samo jednu granu stabla T.



Sl. 63

U odnosu na stablo T, *osnovna kontura* definisana spojnicom s predstavlja jedinstvenu konturu koju ova spojnica zatvara sa nekim granama stabla T. Osnovna kontura se orijentiše u istom smeru kao i spojnica koja je definiše. Ako je b broj grana grafa G, a broj grana stabla n ($n = c - 1$), tada je broj osnovnih kontura $m = b - n$. Broj n se naziva i *rangom grafa*, a broj m *nultošću grafa*.

Na sl. 62 su prikazane sve četiri osnovne konture u odnosu na stablo $T = (4, 5, 7, 8)$.

U odnosu na stablo T, *osnovni snop* definisan granom stabla t predstavlja jedinstveni snop koji sadrži samo ovu granu stabla i neke spojnice. Osnovni snop se orijentiše prema pozitivnoj orijentaciji grane stabla koja ga definiše

Na sl. 63 su prikazana sva četiri osnovna snopa u odnosu na stablo $T = (4, 5, 7, 8)$.

Neka osnovna kontura definisana spojnicom s sadrži one i samo one grane stabla koje definišu osnovne snopove što sadrže spojnicu s. Isto tako, neki osnovni snop, definisan granom stabla t, sadrži one i samo one spojnice koje definišu osnovne konture što sadrže granu stabla t.

3.2. Matrica čvorova

Relacija incidencije između grana i čvorova jednog grafa se može izraziti algebarski pomoću matrice incidencije čvorovi-grane, ili kraće *matrice čvorova* $\mathbf{A}_a$. Ova matrica je ista kao ona iz odeljka 2.2, s tim što u njenoj definiciji reč »element« treba zameniti sa »granom«. Pored toga, pretpostavićemo da svaka grana ima dva različita kraja, odnosno da graf nema petlji.

Za graf na sl. 60 matrica čvorova je

$$\mathbf{A}_a = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Vidi se da u svakoj koloni matrice $\mathbf{A}_a$ postoje samo dva elementa koji nisu nula: jedan je $+1$ a drugi -1. Osim toga, pošto je graf povezan, ne mogu postojati redovi čiji su elementi samo nule (nula-redovi), a pošto graf nema petlji, ne mogu postojati ni nula-kolone.

Niže ćemo izložiti najvažnije osobine matrice čvorova koje se neposredno primenjuju u analizi mreža.

Lema 1. *Zbir ma kojih $q\,(q<c)$ redova matrice $\mathbf{A}_a$ jednog povezanog grafa sadrži bar jedan element $+1$ ili -1.*

Dokaz: Pretpostavimo da zbir $q\,(q<c)$ redova matrice $\mathbf{A}_a$ daje jedan nula-red. Preuredimo redove matrice $\mathbf{A}_a$ tako da ovih q redova budu prvi redovi. Kako je njihov zbir jedan nula-red, svaka kolona ovih q redova mora da sadrži ili samo nule, ili jedan element $+1$ i jedan element -1, a sve ostale elemente nula. Permutacijom kolona matrice $\mathbf{A}_a$, dovedimo kolone koje sadrže u prvih q redova nula-elemente u zadnji položaj. Tada matrica $\mathbf{A}_a$ dobija oblik:

$$\mathbf{A}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix},$$

gde $\mathbf{A}_{11}$ sadrži q redova, a $\mathbf{A}_{22}$ sadrži $c-q$ redova.

Iz ovog oblika se vidi da ne postoji nijedna grana koja je vezana između nekog čvora iz prvih q čvorova i nekog čvora iz poslednjih $c-q$ čvorova, a to znači da je graf nepovezan, što se protivi pretpostavci.

Teorema 1. *Rang matrice $\mathbf{A}_a$ jednog povezanog grafa je $c-1$, tj.*

$$r(\mathbf{A}_a) = n = c-1.$$

Dokaz: Dodajmo prvih $c-1$ redova matrice $\mathbf{A}_a$ poslednjem redu, čime je ovaj sveden na jedan nula-red.

Uočimo jedan element različit od nule u prvom redu (takav element mora da postoji u svakom redu matrice $\mathbf{A}_a$, budući da je graf povezan tako da nema izolovanih čvorova), i dovedimo ga u položaj (1, 1) putem permutacije kolona. Ako sada kolona 1 sadrži još jedan element različit od nule, recimo u s-tom redu ($s > 1$), dodajmo prvi red s-tom redu da bi ovaj element sveli na nulu. Posle ove operacije, na osnovu leme 1, s-ti red sadrži još najmanje jedan element različit od nule. Dalje, drugi red sadrži jedan element različit od nule koji nije u prvoj koloni. Preuređivanjem kolona, dovedimo ovaj element u položaj (2,2). Ako sada druga kolona sadrži neki element različit od nule ispod drugog reda, tada se pomoću drugog reda ovaj element svodi na nulu. Pošto smo sabrali manje od c redova, ovim svođenjem na nulu elementa u drugoj koloni nije se mogao stvoriti jedan nula-red. Uzastopnim ponavljanjem ovog postupka, matrica $\mathbf{A}_a$ se svodi na oblik:

$$\begin{array}{cc} & c-1 \qquad\qquad\qquad \text{kolona} \\ c-1 \ \text{redova} & \begin{bmatrix} \pm 1 & x & x & x & \cdots & x & x & x & \cdots & x \\ 0 & \pm 1 & x & x & \cdots & x & x & x & \cdots & x \\ 0 & 0 & \pm 1 & x & \cdots & x & x & x & \cdots & x \\ 0 & 0 & 0 & \pm 1 & \cdots & x & x & x & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \pm 1 & x & \cdots & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

gde x označava $+1$, -1 ili 0.

Iz gornjeg oblika se jasno vidi da je vodeća trougaona submatrica nesingularna, odnosno da je $r(\mathbf{A}_a) = c-1$.

Na sličan način se dokazuje da za nepovezan graf sa ukupno c čvorova i p komponenata $r(\mathbf{A}_a) = c-p$.

Ako se u matrici $\mathbf{A}_a$ izostavi jedan red, dobija se nova matrica $\mathbf{A}$ tipa $n \times b$, čiji je rang prema teoremi 1 takođe $n = c-1$. Ova matrica, koja u potpunosti karakteriše graf kao i matrica $\mathbf{A}_a$, naziva se *matricom nezavisnih čvorova*, a izostavljeni čvor *referentnim ili stožernim čvorom.*

Teorema 2. *Kvadratna submatrica* $\mathbf{A}_T$ *reda* $n = c-1$ *matrica* $\mathbf{A}$ *jednog povezanog grafa G koji ima c čvorova je nesingularna ako i samo ako n kolona submatrice* $\mathbf{A}_T$ *odgovaraju granama nekog stabla.*

Dokaz: Neka je T jedno stablo grafa G. Tada je $\mathbf{A}_T$ matrica čvorova jednog povezanog grafa koji ima c čvorova i $n = c-1$ grana. Na osnovu prethodne teoreme, $r(\mathbf{A}_T) = n = c-1$, tj. $\mathbf{A}_T$ je nesingularna.

Obrnuto, pretpostavimo da je $\mathbf{A}_T$ nesingularna submatrica $n = (c-1)$-*og* reda matrice $\mathbf{A}$. Tada je $\mathbf{A}_T$ matrica čvorova jednog subgrafa G_s kojima ima sledeće osobine: a) ima c čvorova, b) ima $c-1$ grana, i c) povezan je (jer je $\mathbf{A}_T$ po pretpostavci nesingularna), tj. ranga $c-1$ pa je broj komponenata $p = 1$. Ove tri osobine su upravo potrebne i dovoljne da subgraf G_s bude stablo T, što dokazuje teoremu.

Teorema 2 je od osnovnog značaja u teoriji grafova i u njenim primenama. Ona uspostavlja biunivoku korespondenciju između nesingularnih submatrica matrice $\mathbf{A}$ i odgovarajućih subgrafova, ističući osnovnu ulogu stabla kao jedinog subgrafa čija je matrica čvorova nesingularna.

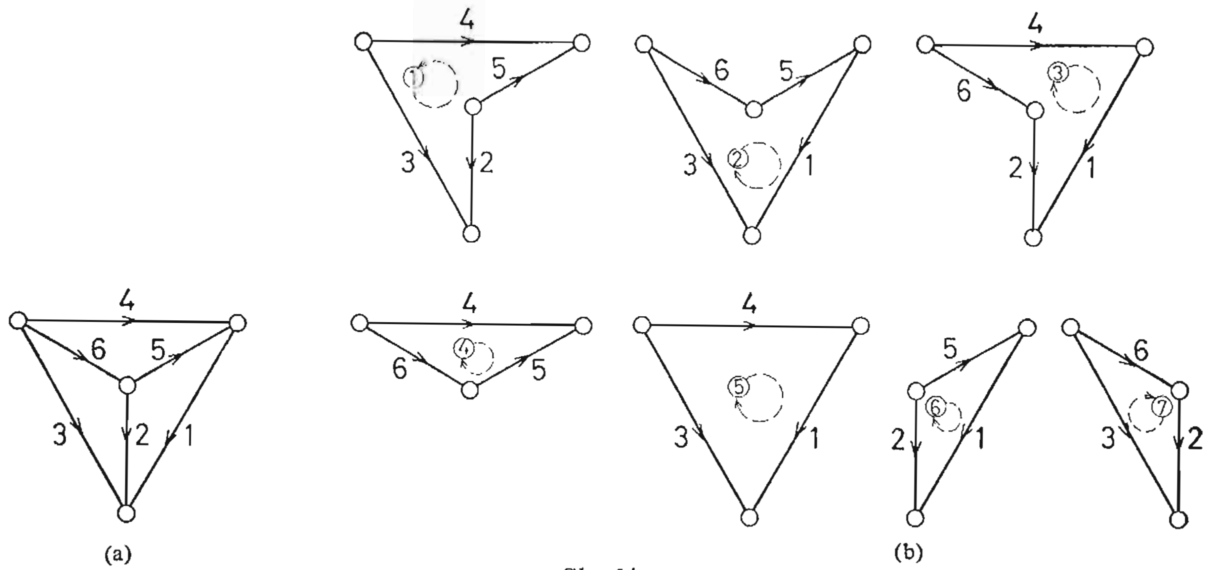
Posledica. *Determinanta neke nesingularne submatrice matrice* $\mathbf{A}$ *ima vrednost* 1 *ili* -1.

Dokaz: neposredan je i izvodi se razvijanjem determinante submatrice $\mathbf{A}_T$ po koloni koja sadrži samo jedan element ± 1. Ova determinanta je jednaka, sa tačnošću do znaka, kofaktoru ovog elementa. Međutim, ovaj kofaktor mora takođe da ima bar jednu kolonu koja sadrži samo jedan element ± 1, a sve ostale elemente nula (zašto?). Ponavljajući uzastopno ovaj postupak, dolazimo do vrednosti ± 1 za determinantu.

3.3. Matrica kontura

Matrica koja karakteriše odnos između grana i kontura grafa je *matrica kontura* $\mathbf{B}_a$. U ovoj matrici, koja je definisana u odeljku 2.2 (reč »element« treba zameniti sa »granom«), svakom redu odgovara jedna kontura i svakoj koloni odgovara jedna grana grafa G. Pretpostavićemo da je svaka grana grafa sadržana u nekoj konturi, odnosno da u grafu nema grana koje su vezane za ostatak grafa samo jednim krajem (viseće grane).

Prema samoj definiciji konture, broj mogućih kontura za jedan konačni graf je konačan, pa je i broj redova (a isto tako i broj kolona) matrice $\mathbf{B}_a$ konačan. Na primer, graf na sl. 64a ima sedam različitih kontura koje su prikazane na sl. 64b.



Sl. 64

Matrica $\mathbf{B}_a$ za ovaj graf je:

$$\mathbf{B}_a = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ako se za jedan isti graf kolone matrice čvorova $\mathbf{A}_a$ i kolone matrice kontura $\mathbf{B}_a$ pišu u istom redosledu, tada između ove dve matrice postoji važna relacija[3].

(5)
$$\mathbf{A}_a \mathbf{B}_a^t = \mathbf{0}.$$

Matrica osnovnih kontura $\mathbf{B}_f$ ima m ($m = b - c + 1$) redova i b kolona. Svaki red odgovara jednoj osnovnoj konturi u odnosu na jedno izabrano stablo T. Pogodnim numerisanjem grana, ova matrica se može uvek pisati u tzv. kanoničnom obliku:

(6)
$$\mathbf{B}_f = [\mathbf{B}_{11}\ \mathbf{I}_m],$$

gde je $\mathbf{I}_m$ jedinična matrica m-tog reda koja odgovara granama ko-stabla T' (spojnicama), a $\mathbf{B}_{11}$ je submatrica $m \times (c-1)$-og reda čije kolone odgovaraju granama stabla T.

Na primer, za graf na sl. 64a, matrica $\mathbf{B}_f$ u odnosu na stablo $T = (1, 2, 3)$ je:

(7)
$$\mathbf{B}_f = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Iz kanoničnog oblika jasno se vidi da je rang matrice $\mathbf{B}_f$ jednak m, tj.

(8)
$$r(\mathbf{B}_f) = m = b - c + 1 = b - n,$$

odnosno da je njen rang jednak nultosti grafa.

Kako je $\mathbf{B}_f$ submatrica matrice $\mathbf{B}_a$, izlazi da je

(9)
$$r(\mathbf{B}_a) \geqslant m = b - c + 1.$$

Na osnovu ovog rezultata i relacije (5) može se odrediti rang matrice $\mathbf{B}_a$. Ako se na relaciju (5) primeni *Silvesterova* teorema[4], dobiće se

$$r(\mathbf{A}_a) + r(\mathbf{B}_a) - b \leqslant 0,$$

odnosno

$$r(\mathbf{B}_a) \leqslant b - r(\mathbf{A}_a) = b - c + 1 = m,$$

što zajedno sa (9) dokazuje sledeću teoremu.

Teorema 3. $r(\mathbf{B}_a) = r(\mathbf{B}_f) = m = b - c + 1.$

Ako se nad redovima matrice $\mathbf{B}_f$ grafa G, koji su svi nezavisni, vrši algebarsko sabiranje i ako se kao rezultat dobiju redovi koji kao elemente sadrže samo 1, —1 i 0, tada svaki jedan takav red predstavlja ili jednu novu konturu ili disjunktnu uniju kontura. Na primer, konture 1, 2 i 3 na sl. 64 se mogu izvesti iz osnovnih kontura 4, 5 i 6 pomoću sledećih operacija: red 6 — red 5, red 6 + red 7, i red 5 — red 7, respektivno. Na taj način, svaka kontura grafa G (svaki red matrice $\mathbf{B}_a$) se može generisati linearnim kombinacijama sistema osnovnih kontura (redova matrice $\mathbf{B}_f$).

---

[3] Ova relacija je dokazana na str. 66 gde je matrica $\mathbf{A}_a$ označena sa $\mathbf{S}$ a matrica $\mathbf{B}_a$ sa $\mathbf{C}^t$.

[4] *Silvesterova* teorema utvrđuje da rang proizvoda $p \times q$ — matrice $\mathbf{K}$ i $q \times r$ — matrice $\mathbf{L}$, $\mathbf{KL}$, nije manji od $r(\mathbf{K}) + r(\mathbf{L}) - q$, a nije veći od $\mathrm{Min}\,[r(\mathbf{K}), r(\mathbf{L})]$.

Uzimanjem *m nezavisnih* redova matrice $\mathbf{B}_a$ dobiće se nova matrica $\mathbf{B}$ čiji je rang takođe m. Ova matrica se naziva *matricom nezavisnih kontura*, a njeni redovi predstavljaju *sistem nezavisnih kontura grafa G*.

Iz ovog izlaganja zaključujemo da se matrica $\mathbf{B}$ može dobiti pomoću jedne nesingularne transformacije matrice $\mathbf{B}_f$, tj.

(10) $$\mathbf{B}=\mathbf{K}\,\mathbf{B}_f,$$

gde je $-\mathbf{K}$ nesingularna matrica m-tog reda čiji su elementi 1, -1 i 0.

Na primer, ako se matrica (7) pomnoži nesingularnom matricom

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

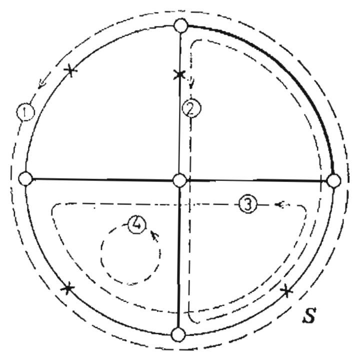
dobiće se matrica $\mathbf{B}$ koja je submatrica matrice $\mathbf{B}_a$ grafa na sl. 64, obrazovana od prva tri reda. Odavde zaključujemo da konture koje odgovaraju ovim trima redovima (to su konture 1, 2 i 3 na sl. 64b) obrazuju jedan sistem nezavisnih kontura grafa.

Iz (10) se takođe vidi da je

(11) $$r(\mathbf{B})=r(\mathbf{B}_a)=r(\mathbf{B}_f)=m.$$

Formiranje jednog sistema nezavisnih kontura neposrednim pregledom grafa nije uvek očigledno i, osim sistema osnovnih kontura, može se pokazati da i sledeći postupak dovodi do jednog sistema nezavisnih kontura, tj. takvih kontura čija matrica $\mathbf{B}$ ima maksimalni rang jednak $m=b-c+1$ [27].

U grafu G treba proizvoljno izabrati jednu konturu, koja se potom razara prekidanjem jedne grane u njoj. U preostalom grafu se ponovo izabere jedna kontura koja se potom razara prekidanjem jedne grane. Postupak se tako nastavlja sve dok se ne iscrpu sve konture.



S. 65

Ovim postupkom su odabrane nezavisne konture za graf na sl. 65, gde su prekinute grane označene krstačom.

Lako je videti da su prekinute grane spojnice za neko stablo grafa. Međutim, dobijene konture u opštem slučaju neće biti osnovne za ovo stablo, jer, za razliku od osnovnih kontura, ovde jedna spojnica može biti sadržana u više od jedne konture. Tako, na primer, spojnica s se nalazi u konturama 1, 2 i 3 grafa na sl. 8.

Izražavanje matrica $\mathbf{B}_f$ i $\mathbf{B}$ *preko matrice* $\mathbf{A}$

Relacija (5) utvrđuje da je proizvod bilo kog reda matrice $\mathbf{A}_a$ i bilo kog reda matrice $\mathbf{B}_a$ jednak nuli. Kako je $\mathbf{A}$ submatrica matrice $\mathbf{A}_a$, a $\mathbf{B}$ i $\mathbf{B}_f$ su submatrice matrice $\mathbf{B}_a$, jasno je da isto tako važi

(12 a) $$\mathbf{A}\mathbf{B}_f^t=\mathbf{O},$$

(12 b) $$\mathbf{A}\mathbf{B}^t=\mathbf{O}.$$

Zamenjujući $\mathbf{B}_f$ iz (6) u (12a) dobijamo

$$[\mathbf{A}_T \ \ \mathbf{A}_L][\mathbf{B}_{11} \ \ \mathbf{I}_m]^t = \mathbf{O},$$

gde su $\mathbf{A}_T$ i $\mathbf{A}_L$ submatrice koje se odnose na stablo, odnosno na ko-stablo.

Kako je prema teoremi 2 $\mathbf{A}_T$ nesingularna, iz gornje jednačine sledi:

$$\mathbf{B}_{11} = -(\mathbf{A}_T^{-1} \mathbf{A}_L)^t,$$

tako da je

$$\text{(13 a)} \qquad \mathbf{B}_f = [-(\mathbf{A}_T^{-1} \mathbf{A}_L)^t \ \ \mathbf{I}_m].$$

Ova relacija pokazuje da matrica nezavisnih čvorova $\mathbf{A}$ jedinstveno određuje matricu $\mathbf{B}_f$ u odnosu na jedno izabrano stablo čije grane odgovaraju kolonama matrice $\mathbf{A}_T$.

Na isti način iz (12b) sledi:

$$[\mathbf{A}_T \ \ \mathbf{A}_L][\mathbf{B}_T \ \ \mathbf{B}_L]^t = \mathbf{O},$$

odnosno

$$\mathbf{A}_T \mathbf{B}_T^t + \mathbf{A}_L \mathbf{B}_L^t = \mathbf{O},$$

gde su $\mathbf{B}_T$ i $\mathbf{B}_L$ submatrice matrice $\mathbf{B}$ koje se odnose na stablo, odnosno na ko-stablo.

Iz gornje jednačine dobijamo

$$\mathbf{B}_T = -\mathbf{B}_L \mathbf{A}_L^t \mathbf{A}_T^{-1\,t},$$

tako da se matrica $\mathbf{B}$ piše u obliku

$$\mathbf{B} = [-\mathbf{B}_L \mathbf{A}_L^t \mathbf{A}_T^{-1\,t} \ \ \mathbf{B}_L] = \mathbf{B}_L [-(\mathbf{A}_T^{-1} \mathbf{A}_L)^t \ \ \mathbf{I}_m],$$

ili

$$\text{(13 b)} \qquad \mathbf{B} = \mathbf{B}_L \mathbf{B}_f$$

na osnovu (13a).

Iz kanoničnog oblika (6) se vidi da matrica $\mathbf{B}_f$ sadrži jediničnu submatricu m-tog reda koja odgovara ko-stablu. Ovo je samo jedan specijalan slučaj nesingularne submatrice matrice nezavisnih kontura $\mathbf{B}$, za koju važi sledeća teorema.

Teorema 4. *Kvadratna submatrica m-tog reda* ($m = b - c + 1$) *matrice* $\mathbf{B}$ *povezanog grafa od b grana i c čvorova je nesingularna, ako i samo ako kolone ove submatrice odgovaraju nekom ko-stablu.*

Dokaz: Na osnovu teoreme 3 i definicije matrice $\mathbf{B}$, matrice $\mathbf{B}_f$ i $\mathbf{B}$ imaju isti rang m. Stoga se na (13b) primeni *Silvesterova* teorema dobija se

$$r(\mathbf{B}_L) \leqslant m.$$

S druge strane, ima se

$$m = r(\mathbf{B}_L \mathbf{B}_f) \leqslant \mathrm{Min}\,[r(\mathbf{B}_L),\ r(\mathbf{B}_f)] = \mathrm{Min}\,[r(\mathbf{B}_L),\ m],$$
$$= r(\mathbf{B}_L)$$

što zajedno sa prvom nejednakošću pokazuje da

$$r(\mathbf{B}_L) = m,$$

odnosno da je $\mathbf{B}_L$ nesingularna matrica.

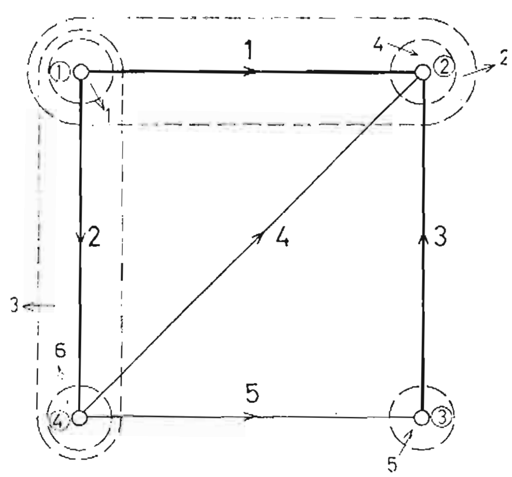
3.4. Matrica snopova

Treća matrica od interesa, koja opisuje odnos između snopova i grana je *matrica snopova* $\mathbf{Q}_a$. Matrica $\mathbf{Q}_a=[q_{\mu\nu}]$ ima b kolona i onoliko redova koliko ima mogućih snopova u grafu. Njena je definicija sledeća:

$$q_{\mu\nu}=\begin{cases} 1, & \text{ako grana } \nu \text{ pripada snopu } \mu \text{ i njena orijentacija se poklapa sa orijentacijom snopa;} \\ -1, & \text{ako grana } \nu \text{ pripada snopu } \mu \text{ i njena orijentacija je suprotna od orijentacije snopa;} \\ 0, & \text{ako grana } \nu \text{ ne pripada snopu } \mu. \end{cases}$$

Na primer, matrica $\mathbf{Q}_a$ za graf na sl. 66 je:

$$\mathbf{Q}_a=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$



Sl. 66

Za isti graf matrica čvorova je:

$$\mathbf{A}_a=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Neposredno se uočava da se $\mathbf{A}_a$ može shvatiti kao submatrica matrica $\mathbf{Q}_a$ ako se svi snopovi oko čvorova orijentišu od čvorova i ako se oni pogodno prenumerišu.

Matrica osnovnih snopova $\mathbf{Q}_f$ ima $n=c-1$ redova i b kolona. Svaki red odgovara jednom osnovnom snopu u odnosu na neko izabrano stablo T. Pogodnim numerisanjem grana i snopova, ova matrica se može pisati u kanoničnom obliku

(14) $$\mathbf{Q}_f=[\mathbf{I}_n \ \mathbf{Q}_{12}],$$

gde je $\mathbf{I}_n$ jedinična matrica n-tog reda koja odgovara granama stabla T, a $\mathbf{Q}_{12}$ je submatrica tipa $n\times m$ čije kolone odgovaraju granama ko-stabla T'.

Za graf na sl. 66 matrica $\mathbf{Q}_f$ u odnosu na stablo $T=(1, 2, 3)$ je:

$$\mathbf{Q}_f=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Iz (14) se neposredno vidi da je:

(15) $$r(\mathbf{Q}_f)=n=c-1,$$

tj. rang matrice $\mathbf{Q}_f$ jednak je rangu matrice $\mathbf{A}_a$, odnosno jednak je rangu grafa G.

Kako matrica $\mathbf{Q}_a$ sadrži $\mathbf{Q}_f$ i $\mathbf{A}$ kao submatrice, izlazi da njen rang ne može biti manji od $c-1$.

Gornju granicu ranga dobićemo istim postupkom kao za matricu $\mathbf{B}_a$. Naime, istim načinom kojim se dokazuje relacija (5), može se pokazati da važi i relacija:

(16) $$\mathbf{Q}_a\,\mathbf{B}_a^t=\mathbf{0}.$$

Ako se sada na (16) primeni Silvesterova teorema, dobiće se

$$r(\mathbf{Q}_a)+r(\mathbf{B}_a)-b\leqslant 0,$$

odnosno

$$r(\mathbf{Q}_a)\leqslant b-m=c-1$$

na osnovu teoreme 3. Na taj način imamo sledeći stav:

Teorema 5. $r(\mathbf{Q}_a)=r(\mathbf{Q}_f)=r(\mathbf{A}_a)=r(\mathbf{A})=n=c-1.$

Ako se nad redovima matrice $\mathbf{Q}_f$ grafa G vrši algebarsko sabiranje i ako se kao rezultat dobiju redovi čiji su elementi samo 1, -1 i 0, tada svaki takav red predstavlja ili jedan novi snop ili disjunktnu uniju snopova. Na primer, red 2 — red 3 matrice $\mathbf{Q}_f$ grafa na sl. 66 predstavlja snop 2, red 1 + red 3 predstavlja snop 4, a red 1 + red 2 predstavlja snop 1.

Na taj način svaki snop grafa G (svaki red matrice $\mathbf{Q}_a$) može se generisati linearnim kombinacijama sistema osnovnih snopova (redova matrice $\mathbf{Q}_f$). Uzimanjem n *nezavisnih* redova matrice $\mathbf{Q}_a$ dobiće se nova matrica $\mathbf{Q}$ čiji je rang takođe n. Ova matrica se naziva *matricom nezavisnih snopova*, a njeni redovi predstavljaju *sistem nezavisnih snopova grafa G*. Iz ovoga izlazi da se matrica $\mathbf{Q}$ može dobiti nesingularnom transformacijom matrice $\mathbf{Q}_f$, tj.

(17) $$\mathbf{Q}=\mathbf{T}_1\,\mathbf{Q}_f,$$

gde je $\mathbf{T}_1$ nesingularna matrica n-tog reda čiji su elementi 1, -1 i 0.

Relacija (17) takođe pokazuje da je:

(18) $$r(\mathbf{Q})=r(\mathbf{Q}_a)=r(\mathbf{Q}_f)=n.$$

Iz relacije (16) neposredno sleduju dve posebne relacije:

(19) $$\mathbf{Q}\mathbf{B}^t=\mathbf{O}\ \text{ i }\ \mathbf{Q}_f\mathbf{B}_f^t=\mathbf{O}.$$

Unošenjem (13) i (14) u poslednju, dobija se $\mathbf{Q}_{12}=\mathbf{A}_T^{-1}\,\mathbf{A}_L$, što pokazuje da se matrica $\mathbf{Q}_f$ može izraziti preko matrice $\mathbf{A}$:

(20) $$\mathbf{Q}_f=[\mathbf{I}_n\ \ \mathbf{Q}_{12}]=\mathbf{A}_T^{-1}[\mathbf{A}_T\ \ \mathbf{A}_L]=\mathbf{A}_T^{-1}\,\mathbf{A},$$

odnosno s obzirom na (17),

(21) $$\mathbf{Q}=\mathbf{T}_1\,\mathbf{A}_T^{-1}\,\mathbf{A}=\mathbf{T}_2\,\mathbf{A},$$

da se i matrica $\mathbf{Q}$ može izraziti preko matrice $\mathbf{A}$, pri čemu je $\mathbf{T}_2$ nesingularna matrica.

Relacija (21) zajedno sa teoremom 2. predstavljaju dokaz sledeće teoreme:

Teorema 6. *Kvadratna submatrica n-tog reda* ($n = c - 1$) *matrice* **Q** *jednog povezanog grafa od c čvorova je nesingularna ako i samo ako n njenih kolona odgovara granama nekog stabla.*

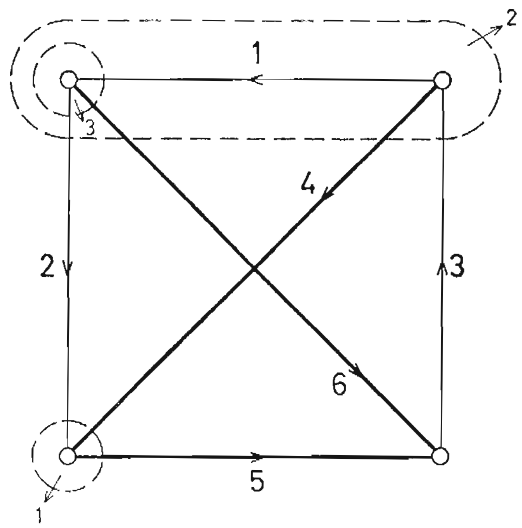
Pretpostavimo da su matrice $\mathbf{Q}_f$ i $\mathbf{B}_f$ pisane u odnosu na *isto* stablo. Tada iz (6), (14) i (19) sledi $\mathbf{B}_{11} = -\mathbf{Q}'_{12}$ *i* $\mathbf{Q}_{12} = -\mathbf{B}'_{11}$, što pokazuje da se $\mathbf{B}_f$ može izraziti preko $\mathbf{Q}_f$ i obratno:

$$\mathbf{B}_f = [-\mathbf{Q}'_{12} \ \ \mathbf{I}_m]; \ \mathbf{Q}_f = [\mathbf{I}_n \ \ -\mathbf{B}'_{11}]. \tag{22}$$

I ovde se postavlja pitanje da li se mogu odrediti i drugi sistemi nezavisnih snopova neposrednim pregledom grafa. Ovde ćemo samo navesti jedan od mogućih načina izbora sistema nezavisnih snopova [27].

U grafu G proizvoljno se izabere jedan snop i u njemu se sažima jedna grana. U preostalom grafu se ponovo bira jedan snop i u njemu se sažima jedna grana. Postupak se tako nastavlja sve dok se graf ne svede na jedan čvor.

Ovim postupkom je određen sistem nezavisnih snopova za graf na sl. 67. Sažimane grane 4, 5 i 6 sačinjavaju stablo, ali se vidi da snopovi 1, 2, i 3 nisu osnovni za ovo stablo zato što snopovi 1 i 2 sadrže po dve grane stabla.



Sl. 67

Čitalac će se uveriti da matrica **Q** za ovaj graf ima rang 3 i da jednu od njenih nesingularnih submatrica obrazuju kolone 4, 5 i 6, što je u skladu sa teoremom 6.

4. FORMULISANJE JEDNAČINA ELEKTRIČNIH MREŽA

4.1. Kirchhoffovi zakoni

Osobine matrica grafa iz prethodne glave omogućiće nam da pišemo *Kirchhofove* zakone (4) u obliku minimalnog broja nezavisnih jednačina. Jednačine (4) mogu se pisati direktno iz grafa mreže, ako se svakoj grani k pridruže dve promenljive: napon u_k i struja i_k koje su promenljive odgovarajućeg elementa mreže.

Teorema 7. *Broj nezavisnih jednačina* (4*a*) *je* $n = c - 1$, *a broj nezavisnih jednačina* (4*b*) *je* $m = b - c + 1$.

Dokaz: neposredna je posledica teoreme 1 i teoreme 3, budući da rang matrice $\mathbf{A}_a$ određuje broj nezavisnih jednačina (4a), a rang matrice $\mathbf{B}_a$ — broj nezavisnih jednačina (4b).

Teorema 7 daje nam prava da jednačine (4) zamenjujemo jednačinama

(23a) $$\mathbf{A\,i} = \mathbf{o}$$

(23b) $$\mathbf{B u} = \mathbf{o}$$

koje kazuju da je dovoljno da 1. *Kirchhoffov* zakon bude zadovoljen samo za n čvorova, a 2. *Kirchhoffov* zakon samo za *m nezavisnih kontura* da bi ovi zakoni bili zadovoljeni za sve čvorove, odnosno za sve konture grafa.

Iz (21) i (23a) zaključujemo da se 1. *Kirchhoffov* zakon može formulisati i u obliku:

(23c) $$\mathbf{Q\,i} = \mathbf{o}$$

koji je ekvivalentan sa (23a).

Jednačine (23c) kazuju da je algebarski zbir struja za svaki od n nezavisnih snopova jednak nuli. Na taj način svaki presek koji definiše jedan ovakav snop može se interpretirati kao jedan uopšteni čvor.

4.2. Nezavisne struje i nezavisni naponi

Kirchhoffovi zakoni (23) zajedno sa karakteristikama elemenata (2a) ili (2b) obrazuju jedan sistem od $n+m+b=2b$ jednačina sa $2b$ nepoznatih: b napona elemenata $\mathbf{u}$ i b struja elemenata $\mathbf{i}$. To je *sistem jednačina grana mreže.* Budući da b struja $\mathbf{i}(t)$ — rešenje ovog sistema — zadovoljava n nezavisnih jednačina (23a) ili (23c), to se $\mathbf{i}(t)$ može izraziti u funkciji samo $b-n=m$ struja. Ovih m struja koje određuju sve struje u mreži, a preko (2a) i sve napone, nazivaju se *nezavisnim strujama.* Isto tako, budući da b napona $\mathbf{u}(t)$ — rešenje sistema jednačina grana mreže — zadovoljava m nezavisnih jednačina (23b), to se $\mathbf{u}(t)$ može izraziti u funkciji samo $b-m=n$ napona. Ovih n napona koji određuju sve napone u mreži, a preko (2b) i sve struje, nazivaju se *nezavisnim naponima.*

Prema tome, određivanje svih struja i svih napona elemenata mreže svodi se, u krajnjoj liniji, na određivanje samo nezavisnih struja ili na određivanje samo nezavisnih napona. Ovde ćemo pokazati koje struje su nezavisne i koji naponi su nezavisni.

Teorema 8. *Struje spojnica i naponi grana stabla su nezavisne veličine.*

Dokaz: Jednačine (23) ćemo pisati u razdeljenom obliku:

$$\mathbf{A\,i} = [\mathbf{A}_T \ \mathbf{A}_L]\begin{bmatrix}\mathbf{i}_T\\ \mathbf{i}_L\end{bmatrix} = \mathbf{o}$$

$$\mathbf{B\,u} = [\mathbf{B}_T \ \mathbf{B}_L]\begin{bmatrix}\mathbf{u}_T\\ \mathbf{u}_L\end{bmatrix} = \mathbf{o},$$

gde se submatrice sa indeksom T odnose na stablo, a one sa indeksom L na ko-stablo.

Kako je prema teoremi 2 $\mathbf{A}_T$ nesingularna, a prema teoremi 4 $\mathbf{B}_L$ je nesingularna, dobijamo

$$\mathbf{i}_T = -\mathbf{A}_T^{-1}\,\mathbf{A}_L\,\mathbf{i}_L$$

$$\mathbf{u}_L = -\mathbf{B}_L^{-1}\,\mathbf{B}_T\,\mathbf{u}_T,$$

što dokazuje teoremu.

Struje spojnica i naponi grana stabla su samo jedan od mogućih skupova nezavisnih struja i nezavisnih napona mreže. Naredna dva stava obrazlažu uvođenje drugih skupova nezavisnih veličina mreže.

Teorema 9. *Prvi Kirchhoffov zakon je ekvivalentan relaciji*

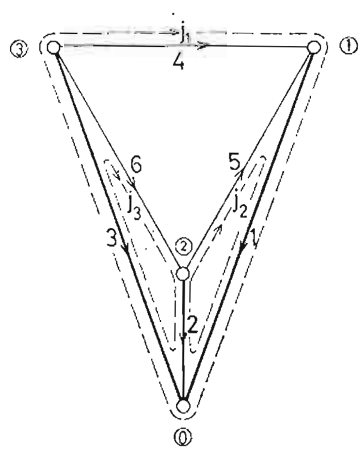
$$\mathbf{i} = \mathbf{B}^t\,\mathbf{j}, \tag{24}$$

gde je $\mathbf{j} = [j_1 j_2 \ldots j_m]^t$, *a* $\mathbf{B}$ *proizvoljna matrica nezavisnih kontura.*

Dokaz: Budući da je $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{Q}) = n$, postoji tačno $b - n = m$ linearno nezavisnih rešenja sistema jednačina (23a) odnosno (23c). S druge strane, iz $\mathbf{AB}^t = \mathbf{O}$ odnosno $\mathbf{QB}^t = \mathbf{O}$ sledi da je svaka kolona matrice $\mathbf{B}^t$ (svaki red matrice $\mathbf{B}$) jedno rešenje sistema (23a), odnosno sistema (23c). Pošto je $r(\mathbf{B}) = m$, izlazi da ovih m kolona matrice $\mathbf{B}^t$ obrazuju jednu *osnovu* za sva rešenja sistema (23a) odnosno (23c). To znači da se sva rešenja sistema (23a), odnosno (23c) mogu izraziti kao linearne kombinacije kolona matrice $\mathbf{B}^t$, tj. u obliku (24), pri čemu su $j_1, j_2, \ldots, j_m$ koeficijenti ovih linearnih kombinacija.

Obrnuto, zamenom (24) u (23a) odnosno u (23c) i uzimanjem u obzir (12) odnosno (19), dobija se da je desna strana identično jednaka nuli, što dokazuje teoremu.

Vektor $\mathbf{j}$ je kolona-matrica nezavisnih struja mreže. On se može identifikovati sa vektorom struja nezavisnih kontura, koje nazivamo *konturnim strujama.* Tada struja svake grane jednaka je algebarskom zbiru struja onih kontura koje sadrže tu granu, uzetih sa znakom plus ako se njihov pozitivni smer slaže sa orijentacijom grane i sa znakom minus ako je pozitivni smer suprotan od orijentacije grane. Za graf na sl. 68 imaćemo $\mathbf{i} = \mathbf{B}_f^t\,\mathbf{j}$ gde je $\mathbf{B}_f$ matrica osnovnih kontura za stablo (1, 2, 3).



Sl. 68

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \end{bmatrix}. \tag{25}$$

Na istovetan način, polazeći od (23b) i uzimajući u obzir (19), dokazuje se i sledeća teorema.

Teorema 10. *Drugi Kirchhoffov zakon je ekvivalentan relaciji*

$$\mathbf{u} = \mathbf{Q}^t\mathbf{v}, \tag{26}$$

gde je $\mathbf{v} = [v_1\ v_2\ \ldots\ v_n]^t$, *a* $\mathbf{Q}$ *proizvoljna matrica nezavisnih snopova.*

Vektor $\mathbf{v}$ je kolona-matrica nezavisnih napona mreže. Relacija (26) se može pisati direktno iz grafa, ako se nezavisnim naponima daje interpretacija *napona snopova*. Ako se svakom nezavisnom snopu k pridruži napon v_k, čiji se pozitivni smer poklapa sa orijentacijom snopa, tada je napon u_j proizvoljne grane grafa j po definiciji jednak algebarskom zbiru napona snopova kojima grana j pripada. Pri tome se naponi snopova, čija se orijentacija poklapa (ne poklapa) sa orijentacijom grane j, uzimaju sa znakom plus (minus).

Na primer, za graf na sl. 67, ako sa v_1, v_2, v_3 označimo napone odgovarajućih snopova, imaćemo

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}.$$

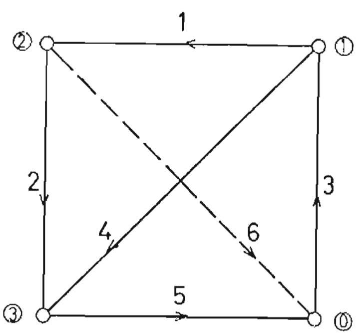
Kako je matrica nezavisnih čvorova $\mathbf{A}$ specijalan slučaj matrice $\mathbf{Q}$, jasno je da relacija

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^t \mathbf{v} \tag{27}$$

takođe je ekvivalentna drugom *Kirchhoffovom* zakonu kao i relacija (26).

Naponi snopova dobijaju prostu fizičku interpretaciju ako se u (26) uzme matrica $\mathbf{Q}_f$. U tom slučaju nezavisni naponi su naponi grana stabla u odnosu na koje je pisana matrica $\mathbf{Q}_f$ (ovi naponi su nezavisni na osnovu teoreme 8).

Međutim, za nezavisne napone možemo uzeti ne samo napone nezavisnih snopova odnosno napone grana stabla koje obrazuju *samo grane grafa*, već i napone bilo kog stabla koje je delimično obrazovano od grana grafa, a delimično od dodatih *fiktivnih grana*. Ovakvo stablo nazivamo *strukturalnim* i u njemu dodate fiktivne grane samo označavaju napone između čvorova između kojih su one vezane. Najprostiji primer strukturalnog stabla je tzv. *zvezdoliko stablo* koje je obrazovano od grana (stvarnih i fiktivnih) koje povezuju jedan čvor nazvan *referentnim* sa ostalih $c-1$ čvorova grafa. Ako se referentni čvor ovog zvezdolikog stabla uzme kao referentni čvor pri pisanju matrice $\mathbf{A}$, tada relacija (27) izražava napone grana preko napona između pojedinih čvorova i referentnog čvora. Ovi naponi su sa tačnošću do znaka jednaki naponima zvezdolikog stabla i kao takvi su nezavisni (teorema 8).



Sl. 69

Na primer, graf na sl. 69 nema zvezdoliko stablo u odnosu na referentni čvor 0. Ako se doda fiktivna grana 6, dobija se zvezdoliko stablo (3, 5, 6). Relacija (27) u odnosu na označeni referentni čvor je:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix},$$

gde su v_1, v_2, v_3 naponi između čvorova 1, 2, 3 respektivno, i referentnog čvora 0.

4.3. Jednačine nezavisnih struja i jednačine nezavisnih napona

Koristeći ekvivalentne formulacije *Kirchhoffovih* zakona koje su date teoremom 9 i teoremom 10 i koristeći karakteristike elemenata (2), u mogućnosti smo da postavimo jednačine koje određuju nezavisne struje $\mathbf{j}$ i nezavisne napone $\mathbf{v}$. Za formulisanje jednačina nezavisnih struja potrebno je da svi elementi budu u-tipa, tj. da karakteristike budu oblika (2a), a za formulisanje jednačina nezavisnih napona potrebno je da svi elementi budu i-tipa, tj. da karakteristike budu oblika (2b).

Jednačine nezavisnih struja se dobijaju prosto eliminisanjem $\mathbf{u}$ i $\mathbf{i}$ iz sistema (2a), (23b) i (24):

$$(28) \qquad (\mathbf{BZB}^t)\,\mathbf{j} = \mathbf{B}\,[\mathbf{u}_g(t) - \mathbf{Zi}_g(t)].$$

Ako sistem (28) ima jedinstveno rešenje, tada se struje grana $\mathbf{i}$ određuju iz (24), a naponi grana $\mathbf{u}$ iz (2a).

Na isti način, *jednačine nezavisnih napona* dobijaju se eliminisanjem $\mathbf{u}$ i $\mathbf{i}$ iz sistema (2b), (23c) i (26):

$$(29) \qquad (\mathbf{QYQ}^t)\,\mathbf{v} = \mathbf{Q}\,[\mathbf{i}_g(t) - \mathbf{Yu}_g(t)].$$

Ako se kao nezavisni naponi koriste naponi između $c-1$ čvorova i referentnog čvora, tada se iz (2b), (23a) i (27) izvodi:

$$(30) \qquad (\mathbf{AYA}^t)\,\mathbf{v} = \mathbf{A}\,[\mathbf{i}_g(t) - \mathbf{Yu}_g(t)].$$

Ako sistem (29), odnosno (30) ima jedinstveno rešenje[5], tada se naponi grana $\mathbf{u}$ određuju iz (26) odnosno (27), a struje grana $\mathbf{i}$ iz (2b).

U slučaju linearnih i stacionarnih mreža $\mathbf{Z}$ i $\mathbf{Y}$ respektivno predstavljaju matricu operatorskih impedansi i operatorskih admitansi elemenata mreže.

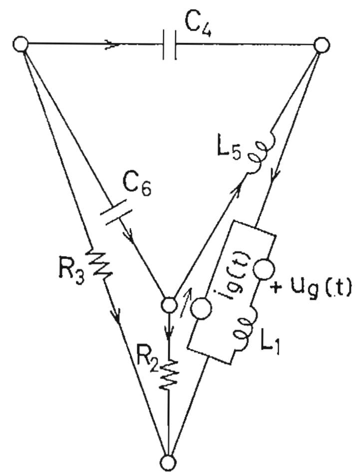
Primer:

Za mrežu na sl. 70. napisaćemo jednačine nezavisnih struja. Za nezavisne struje uzećemo struje osnovnih kontura u odnosu na stablo L_1, R_2, R_3. Ove struje su označene na grafu mreže, sl. 68.

Matrica operatorskih impedansi elemenata je:

$$(31) \qquad \mathbf{Z} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} L_1 D & & & & & \\ & R_2 & & & \mathbf{O} & \\ & & R_3 & & & \\ & \mathbf{O} & & S_4 D^{-1} & & \\ & & & & L_5 D & \\ & & & & & S_6 D^{-1} \end{bmatrix} \end{array},$$

gde je $D = \dfrac{d}{dt}$ operator diferenciranja, a $D^{-1} = \int\limits_{-\infty}^{t} (\ )dt$ operator integriranja, $S_4 = C_4^{-1}$, $S_6 = C_6^{-1}$.



Sl. 70

---

[5] Ako jedan od dva sistema ima jedinstveno rešenje, tada i onaj drugi mora imati jedinstveno rešenje. Ovo sledi neposredno iz (21), (26) i (27); rešenje $\mathbf{v}'$ sistema (29) vezano je za rešenje $\mathbf{v}''$ sistema (30) nesingularnom relacijom $\mathbf{v}'' = \mathbf{T}^t_2\mathbf{v}'$.

Matrica **B** je ovde matrica $\mathbf{B}_f$ iz (7), a matrica napona naponskih izvora $\mathbf{u}_g(t)$ i matrica struja strujnih izvora $\mathbf{i}_g(t)$ su:

$$(32) \qquad \mathbf{u}_g(t) = [u_g(t)\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^t \ \text{ i } \ \mathbf{i}_g(t) = [i_g(t)\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^t.$$

Zamenom (7), (31) i (32) u (28) i vršenjem potrebnih operacija dobijamo:

$$(33) \qquad \begin{bmatrix} L_1 D + R_3 + S_4 D^{-1} & L_1 D & R_3 \\ L_1 D & L_1 D + R_2 + L_5 D & -R_2 \\ R_3 & -R_2 & R_2 + R_3 + S_6 D^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_g(t) - L_1 D i_g(t) \\ u_g(t) - L_1 D i_g(t) \\ O \end{bmatrix}$$

čijim rešavanjem određujemo sve struje grana preko (25).

Naponi grana dobijaju se iz (2a):

$$(34) \qquad \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 D i_1 - u_g(t) + L_1 D i_g(t) \\ R_2 i_2 \\ R_3 i_3 \\ S_4 D^{-1} \quad {}_4 \\ L_5 D i_5 \\ S_6 D^{-1} i_6 \end{bmatrix}.$$

Jednačine nezavisnih napona izvešćemo uzimajući za nezavisne napone napone grana zvezdolikog stabla L_1, R_2, R_3. Prema sl. 68, matrica nezavisnih čvorova za referentni čvor O je:

$$(35) \qquad A = \begin{array}{c} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array},$$

a matrica operatorskih admitansi elemenata:

$$(36) \qquad Y = \begin{array}{c} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{5} \\ \mathbf{6} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \Gamma_1 D^{-1} & & & & & \\ & G_2 & & & \mathbf{O} & \\ & & G_3 & & & \\ & \mathbf{O} & & C_4 D & & \\ & & & & \Gamma_5 D^{-1} & \\ & & & & & C_6 D \end{bmatrix} \end{array},$$

gde je $\Gamma_1 = L_1^{-1}$, $\Gamma_5 = L_5^{-1}$, $G_2 = R_2^{-1}$, $G_3 = R_3^{-1}$.

Iz (35), (36), (32) i (30) dobija se:

$$(37) \qquad \begin{bmatrix} \Gamma_1 D^{-1} + C_4 D + \Gamma_5 D^{-1} & -\Gamma_5 D^{-1} & -C_4 D \\ -\Gamma_5 D^{-1} & G_2 + \Gamma_5 D^{-1} + C_6 D & -C_6 D \\ -C_4 D & -C_6 D & G_3 + C_4 D + C_6 D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_g(t) - D^{-1} u_g(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Naponi grana se dobijaju iz nezavisnih napona na osnovu (27):

$$
\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \tag{38}
$$

a struje grana iz (2b):

$$
\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_1 D^{-1} u_1 - i_g(t) + \Gamma_1 D^{-1} u_g(t) \\ G_2 u_2 \\ G_3 u_3 \\ C_4 D u_4 \\ \Gamma_5 D^{-1} u_5 \\ C_6 D u_6 \end{bmatrix} . \tag{39}
$$

5. ANALIZA ELEKTRIČNIH MREŽA POMOĆU TOPOLOŠKIH FORMULA

5.1. Funkcije mreže

Ako je mreža linearna i stacionarna, tada su diferencijalno-integralne jednačine (28), (29) i (30) linearne sa konstantnim koeficijentima i one se mogu rešiti primenom *Laplaceove* transformacije.

Posmatraćemo jednačine (30) pod uslovima da u mreži postoji samo jedan strujni izvor $i_{g,i}(t)$ vezan između čvora i i referentnog čvora o i da su svi početni uslovi jednaki nuli[6]. Tada su transformisane jednačine nezavisnih napona oblika:

$$
\begin{aligned}
&Y_{11}(s) V_1(s) + \cdots + Y_{1i}(s) V_i(s) + \cdots + Y_{1n}(s) V_n(s) = 0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = 0 \\
&Y_{i1}(s) V_1(s) + \cdots + Y_{ii}(s) V_i(s) + \cdots + Y_{in}(s) V_n(s) = J_{g,i}(s) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = 0 \\
&Y_{n1}(s) V_1(s) + \cdots + Y_{ni}(s) V_i(s) + \cdots + Y_{nn}(s) V_n(s) = 0,
\end{aligned} \tag{40}
$$

gde su $V_k(s) = \mathscr{L}[v_k(t)]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, $J_{g,i}(s) = \mathscr{L}[i_{g,i}(t)]$, a $Y_{kl}(s)$ $(k, l = 1, 2, \ldots, n)$ admitansni koeficijenti. Matrica ovih koeficijenata je matrica $\mathbf{AYA}^t$ u (30), u kojoj je operator D zamenjen kompleksnim brojem s.

Radi jednostavnosti pisanja izostavićemo zavisnost od s, tj. pisaćemo V_k umesto $V_k(s)$, itd.

Odnos napona na krajevima izvora V_i i struje izvora $J_{g,i}$ naziva se *ulaznom impedansom* između čvorova i i o, Z_{io}, a odnos napona između dva proizvoljna čvora p i q $(p \neq q)$, $V_{pq} = V_p - V_q$, i struje izvora $J_{g,i}$ naziva se *prenosnom impedansom* između čvorova pq i io, $Z_{pq,io}$.

[6] Na osnovu principa superpozicije, slučaj kada u mreži deluje proizvoljan broj izvora i kada početni uslovi nisu jednaki nuli uvek se može svesti na ovaj.

Ako sa N označimo determinantu sistema (40), tj. stavimo

$$N = \det(\mathbf{AYA}') , \tag{41}$$

a sa N_{pq} označimo kofaktor p-te vrste i q-te kolone, tada se iz (40) izvodi:

$$Z_{io} = \frac{V_i}{J_{g,i}} = \frac{N_{ii}}{N} \tag{42}$$

$$Z_{pq,io} = \frac{V_{pq}}{J_{g,i}} = \frac{N_{ip} - N_{iq}}{N} . \tag{43}$$

Z_{io} i $Z_{pq,io}$ zavise samo od parametara elemenata mreže i od s; nazivaju se *funkcijama mreže*, jer njihovo poznavanje zajedno sa strujom izvora potpuno određuje $V_i(s)$ i $V_{pq}(s)$, odnosno $v_i(t)$ i $v_{pq}(t)$.

5.2. Topološke formule

Određivanje funkcija mreže zahteva izračunavanje determinante N i njenih kofaktora. U slučaju složenijih mreža to je glomazan posao koji, uz to, ima i nezgodnu stranu što se mnogi članovi razvoja determinante i kofaktora međusobno potiru. Kao što ćemo odmah videti, postoji jedan elegantan način dobijanja razvijene determinante i njenih kofaktora direktnim posmatranjem grafa mreže, tako da se funkcije mreže 42) i (43) određuju bez pisanja jednačina (40) i njihovog rešavanja.

Topološkim formulama se nazivaju formule kojima se omogućava direktno pisanje izraza (42) i (43) iz grafa mreže. Ove formule se mogu programirati i na digitalnim računarima.

Osnova za razvijanje topoloških formula je *Binet-Cauchyeva teorema* [1]. Ova teorema dokazuje da je determinanta proizvoda $n \times b$ — matrice $\mathbf{K}$ i $b \times n$ — matrice $\mathbf{L}$, gde je $b \geqslant n$ jednaka sumi svih $\binom{b}{n}$ proizvoda koji se mogu obrazovati uzimanjem nekog minora n-tog reda od n kolona matrice $\mathbf{K}$ i minora n-tog reda obrazovanog od redova sa istim indeksima matrice $\mathbf{L}$.

Na primer, ako je $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, tada je prema *Binet-Cauchyevoj* teoremi

$$\det(\mathbf{KL}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot 6 + 2 \cdot (-3) = -20.$$

Teorema 11.

$$N = \sum_{k}^{n_t} T^{(k)}(Y), \tag{44}$$

gde je $T^{(k)}(Y)$ proizvod admitansi grana koje obrazuju k-to stablo, a n_t — broj svih stabala grafa.

Dokaz: Determinantu N možemo razviti po *Binet-Cauchyevoj* teoremi, uzimajući $\mathbf{K}=\mathbf{AY}$ i $\mathbf{L}=\mathbf{A}'$. Pošto je $\mathbf{Y}$ dijagonalna matrica, matrica $\mathbf{AY}$ se razlikuje od matrice $\mathbf{A}$ samo po tome što su njene kolone pomnožene odgovarajućim admitansama grana mreže. Kako, prema teoremi 2 i njenoj posledici, minori obrazovani od n kolona matrice $\mathbf{A}$ su različiti od nule i jednaki ± 1, ako i samo ako grane kojima one odgovaraju obrazuju stablo, to je na osnovu *Binet-Cauchyeve* teoreme neki član razvoja determinante N oblika $(\pm 1)\, Y_{k_1} Y_{k_2} \cdots Y_{k_n} (\pm 1) = Y_{k_1} Y_{k_2} \cdots Y_{k_n} = T^{(k)}(Y)$, gde su $k_1, k_2, \ldots, k_n$ indeksi grana koje obrazuju k-to stablo.

Posledica. *Broj stabala jednog grafa je:*

$$n_t = \det(\mathbf{AA}'). \tag{45}$$

Dokaz: Dovoljno je uzeti da admitanse svih elemenata imaju vrednost 1, tj. pretpostaviti da je $\mathbf{Y}$ jedinična matrica.

Primer. Sva stabla grafa mreže na sl. 70 su: 123, 124, 126, 135, 136, 145, 146, 156, 234, 235, 245, 246, 256, 345, 346, 356. Na osnovu prethodne teoreme, determinanta sistema transformisanih jednačina (37) je:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{16} T^{(k)}(Y) = {} & \Gamma_1 s^{-1} G_2 G_3 + \Gamma_1 s^{-1} G_2 C_4 s + \Gamma_1 s^{-1} G_2 C_6 s + \Gamma_1 s^{-1} G_3 \Gamma_5 s^{-1} + \\ & \Gamma_1 s^{-1} G_3 C_6 s + \Gamma_1 s^{-1} C_4 s \Gamma_5 s^{-1} + \Gamma_1 s^{-1} C_4 s C_6 s + \\ & \Gamma_1 s^{-1} \Gamma_5 s^{-1} C_6 s + G_2 G_3 C_4 s + G_2 G_3 \Gamma_5 s^{-1} + G_2 C_4 s \Gamma_5 s^{-1} + \\ & G_2 C_4 s C_6 s + G_2 \Gamma_5 s^{-1} C_6 s + G_3 C_4 s \Gamma_5 s^{-1} + G_3 C_4 s C_6 s + \\ & G_3 \Gamma_5 s^{-1} C_6 s.\end{aligned}$$

Ova vrednost determinante dobija se i po *Cramerovom* pravilu, pri čemu se od ukupno 36 članova razvoja determinante njih 20 potiru. Jedna od prednosti topološkog načina određivanja determinante, upravo se i ogleda u činjenici što formula (44) sadrži samo članove razvoja koji se ne potiru, tako da su uklonjene greške koje bi se mogle pojaviti usled potiranja članova razvoja determinante.

Za razvijanje kofaktora N_{ip} najprikladnije je koristiti pojam dvodelnog stabla. *Dvodelno stablo* je subgraf koji se dobija iz stabla T kada se jedna od njegovih grana ukloni. Dvodelno stablo je, prema tome, subgraf koji se sastoji iz dva povezana dela, sadrži sve čvorove grafa, ali ne sadrži konture. Ako graf ima ukupno c čvorova, ma koje dvodelno stablo sadrži tačno $c-2$ grana. Ovakvo stablo obeležićemo sa $T_{k_1 k_2 \ldots k_p,\, j_1 j_2 \ldots j_q}$ da bismo istakli da se podskup čvorova $k_1\, k_2 \ldots k_p$ nalazi u jednom od povezanih delova, a podskup čvorova $j_1\, j_2 \ldots j_q$ u drugom povezanom delu. Proizvod admitansi grana koje obrazuju dvodelno stablo $T_{k_1 k_2 \ldots k_p,\, j_1 j_2 \ldots j_q}$ obeležićemo sa $T_{k_1 k_2 \ldots k_p,\, j_1 j_2 \ldots j_q}(Y)$. Ako se zahteva da neki čvor, na pr. k_1, bude u oba povezana dela, tada je po definiciji $T_{k_1 k_2 \ldots k_p,\, k_1 j_2 \ldots j_q}(Y)=0$.

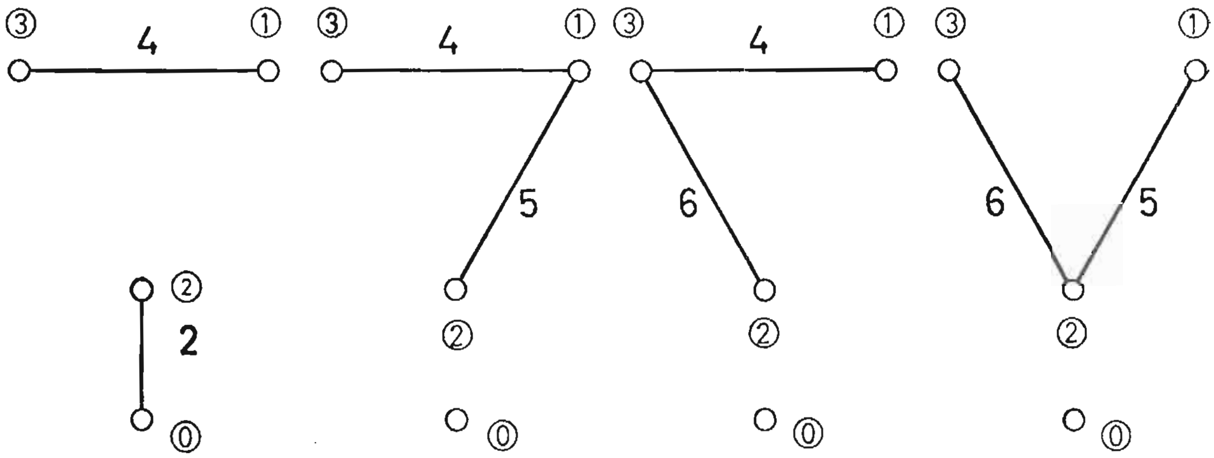
Na primer, u grafu na sl. 68 postoje ukupno četiri dvodelna stabla tipa $T_{13,o}$, tj. dvodelna stabla koja izdvajaju grupu čvorova 1 i 3 od čvora o. Ova dvodelna stabla su prikazana na sl. 71.

Teorema 12.

$$N_{ip}=\sum_k T^{(k)}_{ip,o}(Y), \tag{46}$$

gde se sumiranje vrši po svim mogućim dvodelnim stablima $T_{ip,o}$.

Dokaz ove teoreme je prilično veliki i ovde će biti izostavljen; može se naći u [21], [32].



Sl. 71

Ako se u (46) stavi $p=i$, $T_{ip,o}$ postaje $T_{i,o}$, odnosno dvodelno stablo koje razdvaja čvor i od čvora o, i topološka formula za izračunavanje ulazne impedanse (42) dobija se u obliku:

$$Z_{io}=\frac{\sum_k T^{(k)}_{i,o}(Y)}{\sum_k T^{(k)}(Y)}. \tag{47}$$

Za dobijanje topološke formule za prenosnu impedansu (43), primetimo da se N_{ip} i N_{iq} mogu pisati u obliku

$$N_{ip}=\sum_k T^{(k)}_{ipq,o}(Y)+\sum_k T^{(k)}_{ip,qo}(Y)$$

$$N_{iq}=\sum_k T^{(k)}_{ipq,o}(Y)+\sum_k T^{(k)}_{iq,po}(Y),$$

tako da (43) postaje

$$Z_{pq,io}=\frac{\sum_k T^{(k)}_{ip,qo}(Y)-\sum_k T^{(k)}_{iq,po}(Y)}{\sum_k T^{(k)}(Y)}. \tag{48}$$

Formula (48) je minimalna u tome što se nijedan par članova u njoj ne potire. U specijalnim slučajevima, kada je jedan od čvorova p ili q referentni čvor o, ona se uprošćava: ako je $p=o$ drugi član otpada, a ako je $q=o$ prvi član otpada.

Za mrežu na sl. 70. u kojoj je stavljeno $u_g(t)=0$, prenosna impedansa $Z_{30,10}$ biće oblika:

$$Z_{30,10}=\frac{\sum\limits_k T_{13,o}^{(k)}(Y)}{\sum\limits_k T^{(k)}(Y)}, \tag{49}$$

gde su prema sl. 71 dvodelna stabla $T_{13,o}$: 24, 45, 46 i 56, tako da je brojitelj izraza (49)

$$\sum_k T_{13,o}^{(k)}=G_2\,C_4\,s+C_4\,s\,\Gamma_5\,s^{-1}+C_4\,s\,C_6\,s+\Gamma_5\,s^{-1}\,C_6\,s.$$

Topološke formule ovde izvedene važe samo za mreže sa dvokrajnim elementima koji imaju admitansu. Ako mreža sadrži i višekrajne elemente, one su znatno složenije [22], [32], [34], [26]. Pored ovih formula, na admitansnoj osnovi postoje i topološke formule na impedansnoj osnovi, koje se koriste za rešavanje sistema jednačina nezavisnih struja mreža sa dvokrajnim elementima [36], [32] i mreža sa višekrajnim elementima [23], [25].

LITERATURA

1. A. C. Aitken, *Determinants and Matrices*, Edinburgh, 1962.
2. M. G. Arsove, *Note on Network Postulates*, J. Math. and Phys. **32** (1953), 203—206.
3. F. R. Branin Jr., *Computer Methods of Network Analysis*, Proc. IEEE **55** (1967), 1787—1801.
4. P. R. Bryant, *A Topological Investigation of Network Determinant*, Proc. IEE **106** pt. **C** (1959), 16—22.
5. P. R. Bryant, *The Order of Complexity of Electrical Networks*, Proc. IEE **106** pt. **C** (1959), 174—188.
6. P. R. Bryant, *The Algebra and Topology of Electrical Networks*, Proc. IEE pt. **C**, Mono. **414E** (1960), 1—15.
7. I. Cederbaum, *Conditions for the Impedance and Admittance Matrices of n-Ports without Ideal Transformers*, Proc. IEE pt. C, Mono. 276 R (1958).
8. C. L. Coates, *General Topological Formulas for Linear Network Functions*, IRE Trans. **CT-5** (1958), 30—42.
9. T. C. Doyle, *Topological and Dynamical Invariant Theory of an Electrical Network*, J. Math. and Phys. **34** (1955), 81—94.
10. E. A. Guillemin, *Theory of Linear Physical Systems*, New York, 1963.
11. R. Horvat, M. Milić, M. Bogdanov i S. Paunović, *Primena topoloških metoda na analizu i sintezu električnih mreža*, elaborat br. 4, Inst. »N. Tesla«, Beograd, 1962.
12. W. H. Ingram, C. M. Cramlet, *On the Foundations of Electrical Network Theory*, J. Math. and Phys. **23** (1944), 134—155.
13. R. W. Jensen, M. D. Lieberman, *IBM Electronic Circuit Analysis Program*, Englewood Cliffs, N. J., 1968.
14. W. H. Kim, R. T. Chien, *Topological Analysis and Synthesis of Communication Networks*, New York, 1962.
15. G. Kirchhoff, *Ueber die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchungen der linearen Verteilung Galvanischer Ströme geführt wird*, Ann. Phys. Chem. 72 (1847) 497—508.

16. E. S. KUH, R. A. ROHRER, *The State-variable Approach to Network Analysis*, Proc. IEEE **53** (1965), 672—686.

17. F. F. KUO, *Network Analysis by Digital Computer*, Proc. IEEE **54** (1966), 820—829.

18. H. E. KOENIG, W. A. BLACKWELL, *Linear Graph Theory — A Fundamental Engineering Discipline*, IRE Trans. **E-3** (1960), 42—49.

19. H. E. KOENIG, W. A. BLACKWELL, *Electromechanical System Theory*, New York, 1961.

20. H. E. KOENIG, Y. TOKAD, H. K. KESAVAN, *Analysis of Discrete Physical Systems*, New York, 1967.

21. W. MAYEDA, S. SESHU, *Topological Formulas for Network Functions*, Bull. no. 446, U. of Illinois Eng. Experimental Station, 1957.

22. W. MAYEDA, *Topological Formulas for Active Network*, Int. Tech. Rept., no. 8, US Army Contract no. DA-11-022-ORD-1983, U. of Ill., 1958.

23. M. M. MILIĆ, *Jedan topološki razvoj determinante električne mreže*, Publikacije Elektrotehničkog fakulteta, serija: Matematika i fizika, **110**, 1963.

24. M. M. MILIĆ, *Topological Formulae for Sensitivity Coefficients of Network Functions*, u »Sensitivity Methods in Control Theory«, Oxford, 1966.

25. M. M. MILIĆ, *A Graph-Theory Approach to the Analysis of Multiterminal-Element-Networks*, Proc. 4th Allerton Conference on Circuit and System Theory, (1966), 218—226.

26. M. M. MILIĆ, *Topological Solution of 2-Terminal-Element Networks with One Embedded Constraint*, Electronics Lett. **3** (1967), 511—512.

27. M. M. MILIĆ, *On the Selection of Independent Cutsets and Loops of Finite Graphs* (objaviće se).

28. C. SALTZER, *The Second Fundamental Theorem of Electrical Networks*, Quart. Appl. Math. **XI** (1953), 119—123.

29. F. M. REZA, S. SEELY, *Modern Network Analysis*, New York, 1959.

30. S. SESHU, M. B. REED, *Singular Transformations in Network Theory*, Proc. Natl. Electronics Conf. **11** (1955), 531—543.

31. S. SESHU, N. BALABANIAN, *Linear Network Analysis*, New York, 1959.

32. S. SESHU, M. B. REED, *Linear Graphs and Electrical Networks*, Reading, Mass., 1961.

33. J. L. SYNGE, *The Fundamental Theorem of Electrical Networks*, Quart. Appl. Math. **IX** (1951), 113—127.

34. A. TALBOT, *Topological Analysis of General Linear Networks*, IEEE Trans. **CT-12** (1965), 170—180.

35. H. M. TRENT, *Isomorphism between Oriented Linear Graphs and Lumped Physical Systems*, J. Accoust. Soc. Am. **27** (1955), 500—527.

36. L. WEINBERG, *Kirchhoff's Third and Fourth Laws*, IRE Trans. **CT-5** (1958), 8—30.

37. L. WEINBERG, *Network Analysis and Synthesis*, New York, 1962.

38. L. A. ZADEH, C. A. DESOER, *Linear System Theory*, New York, 1963.

III DEO

P R I L O Z I

JEDNO MIŠLJENJE O TEORIJI GRAFOVA

(Iz uvoda knjige: А. А. Зыков, Теория конечных графов, Новосибирск, 1969.)

Teorija grafova ne predstavlja prevrat u nauci; njena pojava na matematičkoj areni ne označava posezanje na osnove matematike niti donosi neke ideje nedostupne većini savremenika, a koje bi tek potomci prihvatili. Zadaci sa grafovima su, po pravilu, prosti i očigledni po svojoj formulaciji. Za rešavanje velikog broja tih zadataka nisu potrebni veće matematičko znanje i sposobnost, nego što zahteva davno poznati zadatak o vuku, kozi i kupusu[1]. I zadaci teži od pomenutih mogu se rešavati svaki posebno, ne stvarajući opšte teorije, ali to zahteva ako ne talenta onda strpljenja i slobodnog vremena. Dugo vremena se smatralo da je čuveni problem četiri boje, koji nezapaženo slavi već stogodišnji jubilej, pomodan, da nije povezan sa glavnim pravcima razvitka matematike i da nema praktičnog značaja.

Obično se smatra da je teorija grafova, kao posebna matematička disciplina, zasnovana 1936. godine, kada je objavljena monografija *D. Königa*: »Theorie der endlichen und unendlichen Graphen« (»Teorija konačnih i beskonačnih grafova«, Leipzig, 1936, II izdanje: New York, 1950). Do tada grafovi nisu bili objedinjeni opštom teorijom, već su se pojavljivali u raznim oblastima nauke i prakse i u mnogobrojnim problemima zanimljive sadržine pod najrazličitijim nazivima. Knjiga *D. Königa* predstavlja veoma opštu i, za svoje vreme, potpunu sistematizaciju činjenica i sadrži niz novih rezultata i ideja, koje su u svojim radovima dalje razvijali drugi matematičari (*D. König* je tragično poginuo za vreme II svetskog rata).

Posle objavljivanja pomenute knjige proširuju se istraživanja u teoriji grafova i pojavljuju se neke opšte metode. Tako, na primer, 1937. godine *G. Pólya* je dao čuvenu kombinatornu teoremu i metod funkcija generatrisa, što je omogućilo da se reše mnogi zadaci vezani za izračunavanje broja različitih grafova datog oblika, a koji se sreću u hemiji, fizici, sociologiji i drugim oblastima. Jezik teorije grafova se pokazao pogodan za razvijanje tzv. metoda alternativnih lanaca, koji je zasnovao *Egêrvary* još 1931. godine i koji se sada pod imenom »mađarski algoritam« uspešno primenjuje u nekim oblastima teorijske i primenjene matematike, u prvom redu u matematičkoj ekonomici. Postepeno se otkrivalo da se neki zadaci iz algebre, teorije brojeva, geometrije, teorije skupova, topologije, algebre, pa čak i klasične analize mogu formulisati na jeziku čiste teorije grafova, pri čemu u nekim slučajevima to olakšava rešavanje ili omogućuje svođenje jednog problema na drugi. Ipak, i pored značajnih uspeha teorije grafova, većina matematičara nije smatrala da je to samostalna disciplina i nije naročito forsirala njen dalji razvoj.

---

[1] Vidi str. 57

Situacija se iz osnova promenila zahvaljujući burnom razvoju matematičke logike, kompjuterstva, automatike, kibernetike, teorije informacija, matematičke ekonomike, teorije igara, operacionog istraživanja, matematičke lingvistike i drugih oblasti, u kojima, za razliku od klasične analize neprekidnih veličina, u prvi plan izbijaju rasuđivanja i konstrukcije diskretnog kombinatornog karaktera. Danas broj važnih praktičnih i teorijskih zadataka najraznovrsnijeg konkretnog sadržaja i najrazličitijeg stepena složenosti, koji se svode na zadatke i probleme čiste teorije grafova, raste tako brzo da njihovo rešavanje »na malo« metodom probanja ili oštroumnim individualnim pristupima ne zadovoljava i ne može zadovoljiti stručnjake. Jedini je izlaz rešavati ove zadatke »na veliko«, koristeći, s jedne strane, najnovija dostignuća i ideje teorijske matematike, a s druge, savremenu računsku tehniku.

Pokušaj da se teorija grafova u potpunosti svede na bilo koju od već oformljenih oblasti matematike (algebra, kombinatorna topologija, matematička logika) pokazao se neosnovanim. Doduše, aparat algebre se u teoriji grafova često može koristiti ne samo kao računsko sredstvo nego i kao oružje istraživanja; ipak, u izučavanju grafova glavnu ulogu igra veština kombinovanja, koja se relativno malo tretira u algebri. Teorija grafova zahteva poseban aparat zasnovan na kombinaciji algebarskih i kombinatornih metoda.

Čisto praktični zadaci koji se mogu formulisati pomoću grafova u principu se mogu rešiti, bez bilo kakve teorije, prebrojavanjem svih slučajeva. Postavlja se pitanje — neće li ovde odlučujuću ulogu imati brze računske mašine. Međutim, ne može se računati samo na mašine, jer, na primer, rešavanje nekog konkretnog problema u vezi sa strukturom grafa sa ne više od 20 čvorova metodom potpunog prebrojavanja može zahtevati desetine godina mašinskog računanja. Tako, čak i kada bi se uloga grafova ograničila na čisto praktične zadatke iz finitne matematike, ne bi se moglo proći bez stvaranja opšte teorije i opštih metoda.

Savremene tendencije su delimično našle svoj odraz u monografijama: *C. Bergea*: »Théorie des graphes et ses applications« (»Teorija grafova i njene primene«, Paris, 1958, prevod na ruski: Moskva, 1962); *O. Orea*: »Theory of graphs« (»Teorija grafova«, Providence 1962, prevod na ruski: Moskva, 1968) i u nekim drugim (specijalne namene), ali mnoge osnovne ideje i rezultati nalaze se još samo u originalnim člancima i nisu obuhvaćeni jedinstvenom monografijom. Uz to, danas ne postoji ni precizna sistematizacija teorije grafova, a u definicijama i oznakama vlada takvo šarenilo, da su autori većine radova primorani da počinju sa objašnjenjima o tome pod kojim se nazivima u radu kriju davno poznati pojmovi.

Naša monografija ima za cilj da bar delimično ispuni tu prazninu.

(Preveo D. Cvetković)

PRIMERI PRIMENE GRAFOVA PROTOKA SIGNALA U ELEKTROTEHNICI[1]

Navodimo tri primera primene *Masonovog* obrasca[2] za rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina. Prvi primer je uzet iz teorije električnih kola, druga dva se odnose na teoriju linearnih sistema automatskog upravljanja.

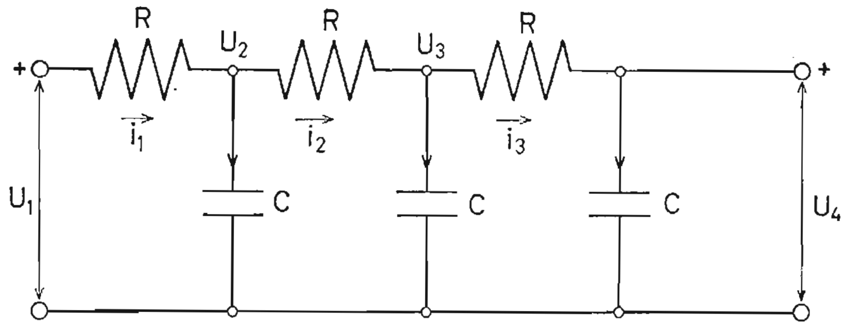
Dokaz *Masonovog* obrasca moguće je naći, na primer, u [1].

[1] Redigovano prema beleškama dr M. Stojića.

[2] Videti str. 63.

1. **Lestvičasta RC mreže sa dva pristupa** Za lestvičastu mrežu sa dva pristupa na sl. 72 odrediti funkciju prenosa, koja je definisana kao odnos *Laplaceovih* likova ulaznog i izlaznog napona:

$$G(s) \overset{\text{def}}{=} \frac{U_4(s)}{U_1(s)}.$$



Sl. 72

Za ovu mrežu se mogu pisati jednačine:

$$I_1(s) = \frac{1}{R}[U_1(s) - U_2(s)],$$

$$U_2(s) = \frac{1}{Cs}[I_1(s) - I_2(s)],$$

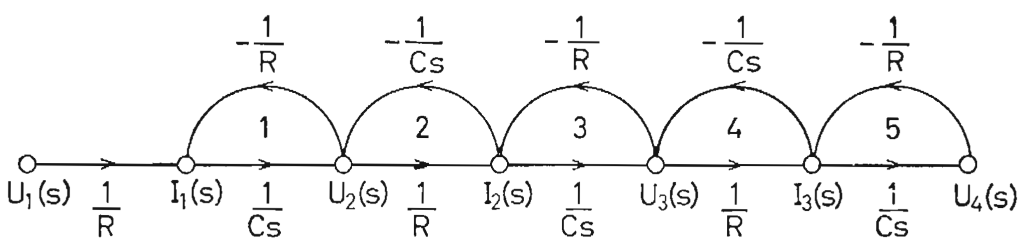
$$I_2(s) = \frac{1}{R}[U_2(s) - U_3(s)],$$

$$U_3(s) = \frac{1}{Cs}[I_2(s) - I_3(s)],$$

$$I_3(s) = \frac{1}{R}[U_3(s) - U_4(s)],$$

$$U_4(s) = \frac{1}{Cs} I_3(s).$$

Na osnovu ovih jednačina obrazuje se graf protoka signala sa sl. 73.



Sl. 73

Postoji samo jedan elementaran put između čvorova $U_1(s)$ i $U_4(s)$; njegov prenos je $p_1 = \dfrac{1}{R^3 C^3 s^3}$. Ne postoji nijedna kontura koja ne dodiruje ovaj put, te je $\Delta_1 = 1$.

Graf sadrži 5 kontura, od kojih svaka ima prenos $-\dfrac{1}{RCs}$. Ove konture su na sl. 73 označene brojevima 1, . . . , 5.

Konture 1 i 3, 1 i 4, 1 i 5, 2 i 4, 2 i 5, i 3 i 5 se međusobno ne dodiruju. Takvih parova ima, dakle, 6.

Postoji samo jedna trojka (1, 3 i 5) međusobno nedodirujućih kontura.

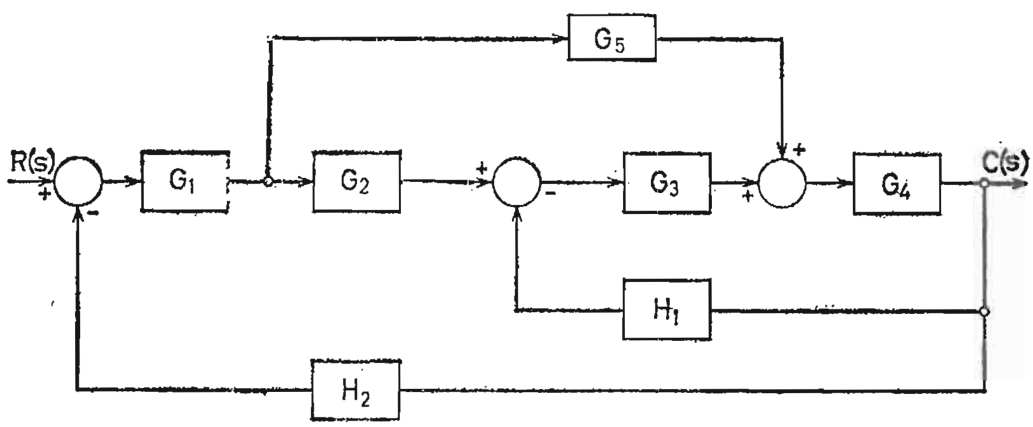
Ne postoji četiri ili više međusobno nedodirujućih kontura.

Na osnovu izloženog, *Masonova* formula daje:

$$G(s) = \frac{\dfrac{1}{R^3 C^3 s^3}}{1 - \left(-5 \dfrac{1}{RCs}\right) + 6 \dfrac{1}{R^2 C^2 s^2} - \left(- \dfrac{1}{R^3 C^3 s^3}\right)} = \frac{1}{\tau^3 s^3 + 5 \tau^2 s^2 + 6 \tau s + 1},$$

gde je $\tau \stackrel{\mathrm{def}}{=} RC$ vremenska konstanta jedne ćelije.

2. **Sistem automatskog upravljanja sa jednim ulazom i jednim izlazom.** Za sistem sa sl. 74 odrediti funkciju spregnutog prenosa.



Sl. 74

Direktno se obrazuje graf protoka signala predstavljen na sl. 75.

Postoje dva elementarna puta. Odgovarajući prenosi i determinante podgrafova su:

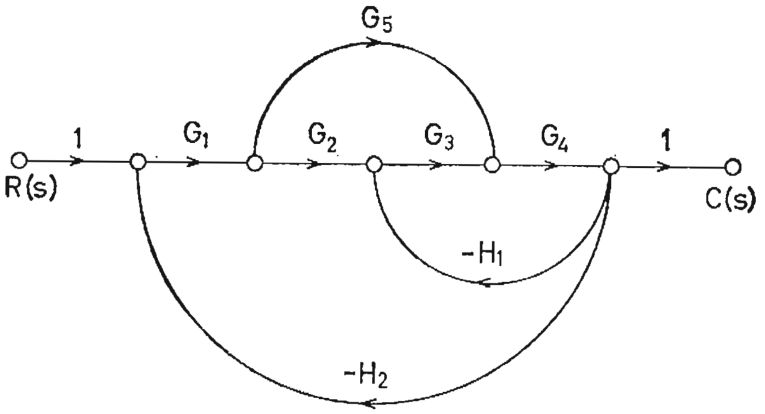
$$p_1 = G_1 G_2 G_3 G_4, \quad \Delta_1 = 1;$$

$$p_2 = G_1 G_5 G_4, \quad \Delta_2 = 1.$$

U grafu se nalaze ukupno tri zatvorena puta (konture) koji se međusobno dodiruju. Redom se dobija:

$$T_1 = -G_3 G_4 H_1, \quad T_2 = -G_1 G_2 G_3 G_4 H_2, \quad T_3 = -G_1 G_5 G_4 H_2;$$

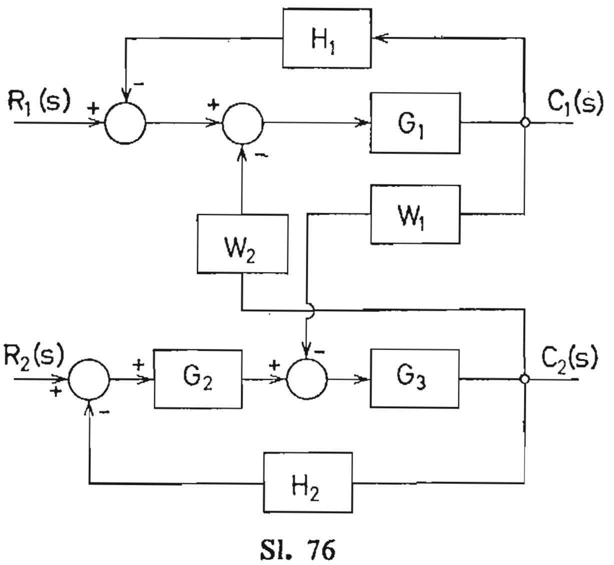
$$\frac{C}{R}(s) \overset{\text{def}}{=} \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_4 + G_1 G_4 G_5}{1 + G_3 G_4 H_1 + G_1 G_2 G_3 G_4 H_2 + G_1 G_4 G_5 H_2}.$$



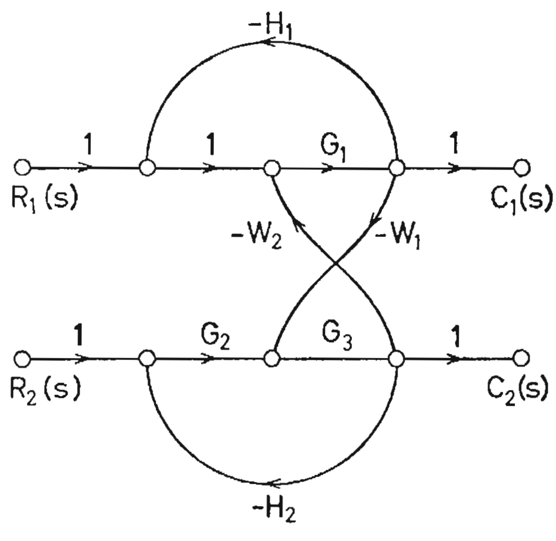
Sl. 75

3. **Multivarijabilni sistem automatskog upravljanja.** Na linearan sistem sa sl. 76 deluju dva ulazna signala $R_1(s)$ i $R_2(s)$. Odrediti funkcionalnu zavisnost izlaznih signala $C_1(s)$ i $C_2(s)$ od ulaznih signala.

Možemo koristiti princip superpozicije, jer je sistem, po pretpostavci, linearan.



Sl. 76



Sl. 77

Graf protoka signala za ovaj sistem je predstavljen na sl. 77.

Od $R_1(s)$ do $C_1(s)$ vodi samo jedan elementaran put (čiji je prenos $p_1' = G_1$) koji ne dodiruje konturu prenosa $-G_2 G_3 H_2$, te je, dakle, $\Delta_1' = 1 + G_2 G_3 H_2$.

Između $R_2(s)$ i $C_1(s)$ postoji takođe samo jedan elementarni put (njegov prenos je $p_1'' = -G_2 G_3 W_2 G_1$). Ovaj put dodiruje sve konture grafa, te je $\Delta_1'' = 1$.

U grafu postoje tri konture sa prenosima $T_1=-G_1H_1$, $T_2=-G_2G_3H_2$ i $T_3=G_1W_1G_3W_2$. Prva i druga od ovih kontura se međusobno ne dodiruju.

Na osnovu izloženog dobija se:

$$C_1(s)=\frac{G_1(1+G_2G_3H_2)R_1(s)-G_1G_2G_3W_2R_2(s)}{1+G_1H_1+G_2G_3H_2-G_1G_3W_1W_2+G_1G_2G_3H_1H_2}.$$

Sličnim razmatranjem dobija se:

$$C_2(s)=\frac{-G_1G_3W_1R_1(s)+G_2G_3(1+G_1H_1)R_2(s)}{1+G_1H_1+G_2G_3H_2-G_1G_3W_1W_2+G_1G_2G_3H_1H_2}.$$

LITERATURA

1. D. Younger, *A simple derivation of Mason's gain formula*, Proc. IEEE **51** (1963), 1043—1044.

KORIŠĆENJE GRAFOVA U KONSTRUKCIJI KODOVA KOJI ISPRAVLJAJU GREŠKE

Borivoj Ž. Lazić

Da bi se razumeo postupak konstrukcije kodova koji ispravljaju greške, potrebno je upoznati se sa osnovnim pojmovima iz teorije kodiranja, a takođe i nekim teoremama i pojmovima iz teorije grafova o kojima se, zbog ograničenog obima, nije moglo govoriti u ovoj knjizi ranije. Zbog toga je izlaganje podeljeno na tri odeljka:

1. Osnovni pojmovi iz teorije kodiranja;
2. Neophodni pojmovi i teoreme iz teorije grafova;
3. Konstrukcija kodova.

Teoreme date u prva dva odeljka ne dokazuju se u ovom izlaganju. Detaljnija objašnjenja pojmova i dokaze teorema odnosno lema iz odeljka 1. čitalac može naći u [1], [6], a iz odeljka 2. u [7].

1. **Osnovni pojmovi iz teorije kodiranja**

Neka je $A=\{S_0, S_1, \ldots, S_{N-1}\}$ diskretan skup saopštenja, a V_l vektorski prostor dimenzije l nad poljem D. Polje D predstavlja skup $\{0,1\}$ sa operacijom sabiranja po modulu 2 i običnog množenja. Elemente prostora V_l obeležimo sa $\mathbf{P}_0, P_1, \ldots, \mathbf{P}_{2^l-1}$. Pri tome vektor $\mathbf{P}_i$ ima oblik:

$$\mathbf{P}_i=(p_{i0}, p_{i1}, \ldots, p_{i,l-1}), \tag{1.1}$$

gde $p_{ij}\in D$.

U prostoru V_l definisane su na uobičajeni način operacije sabiranja vektora i množenja vektora elementom polja D. Te operacije obeležavaćemo znacima za obično sabiranje i množenje, respektivno.

Ako je $2^l \geqslant N$ može se uspostaviti neka jednoznačna korespondencija između svakog elementa skupa A i jednog vektora iz V_l, tj. pisati

(1.2) $$S \to \mathbf{P},$$

gde $S \in A$ a $\mathbf{P} \in V_l$.

Ne umanjujući opštost pretpostavićemo da je $N = 2^l$, tj. da je svakom vektoru **P** pridruženo jedno saopštenje S.

Proces uspostavljanja korespondencije (1.2.) naziva se *kodiranje*, a vektorski prostor V_l *polazni binarni kod* skupa saopštenja A.

Prenos saopštenja po nekom kanalu veze svodi se, prema tome, na prenos vektora iz prostora V_l. Šum (razne smetnje) u prenosnom kanalu utiče na različite načine na prenos vektora. To poglavito zavisi od metoda prenosa i prijema. Nas interesuju samo slučajevi kada se dejstvo šuma svodi na sledeće: Umesto vektora $\mathbf{P}_i$ koji je doveden na ulaz prenosnog kanala, na izlazu se pojavljuje vektor $\mathbf{P}_j$ $(\mathbf{P}_i \neq \mathbf{P}_j)$. Lako je pokazati [1] da se vektor $\mathbf{P}_j$ dobija sabiranjem vektora $\mathbf{P}_i$ i nekog vektora **E**, tj.

(1.3.) $$\mathbf{P}_j = \mathbf{P}_i + \mathbf{E},$$

gde $\mathbf{E} \in V_l$.

Vektor **E** se naziva *vektor greške*. Položaj i broj nenultih komponenti vektora **E** određuje položaj i broj pogrešnih komponenti vektora $\mathbf{P}_i$. Pošto $\mathbf{P}_j$ takođe pripada polaznom kodu, greška na izlazu prenosnog kanala ne može se otkriti. Problem otkrivanja i ispravljanja grešaka pomenutog tipa rešava se preopširnim kodiranjem.

Označimo sa V_m vektorski prostor nad poljem D dimenzije m $(m > l)$. Elemente ovog prostora obeležavaćemo sa $\mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_1, \ldots, \mathbf{Q}_{2^m-1}$. Vektor $\mathbf{Q}_i$ ima oblik:

(1.4) $$\mathbf{Q}_i = (q_{i0}, q_{i1}, \ldots, q_{i,m-1}),$$

gde $q_{ij} \in D$.

Uspostavimo jednoznačnu korespondenciju između svih vektora **P** iz V_l (ima ih 2^l) i odgovarajućeg broja vektora **Q** iz V_m. Dobija se:

(1.5) $$\mathbf{P} \to \mathbf{Q}.$$

Podskup M od 2^l vektora iz V_m, koji su dovedeni u korespondenciju sa vektorima **P** iz V_l (a preko njih sa elementima skupa A), naziva se *preopširni kod* skupa saopštenja A. Proces uspostavljanja korespondencije (1.5) naziva se *preopširno kodiranje*. Često se pod pojmovima kod i kodiranje podrazumevaju baš preopširni kod i preopširno kodiranje. To ćemo i mi koristiti u daljem izlaganju, jer o kodiranju u smislu uspostavljanja korespondencije (1.2) više neće biti govora. Elemente podskupa M nazivaćemo *kodni vektori*.

Neka je $\mathbf{Q}_i$ vektor na ulazu prenosnog kanala. Na izlazu se umesto $\mathbf{Q}_i$ dobija vektor $\mathbf{Q}_j$. Analogno (1.3) pišemo:

(1.6) $$\mathbf{Q}_j = \mathbf{Q}_i + \mathbf{E},$$

gde $\mathbf{E} \in V_m$ [1]. Pošto $\mathbf{Q}_j$ ne mora pripadati podskupu M, to nije teško zaključiti da je pod određenim uslovima na izlazu moguće otkriti grešku pa čak odrediti i vektor $\mathbf{Q}_i$ na osnovu vektora $\mathbf{Q}_j$. Za formulisanje tih uslova potrebne su sledeće dve definicije:

Definicija 1.1. *Težina* $\omega(X)$ *vektora* X *jednaka je broju njegovih komponenti različitih od nule.*

Definicija 1.2. *Rastojanje (Hemingovo)* $d(X, Y)$ *vektora* X *i* $\mathbf{Y}$ *iz istog prostora jednako je broju komponenti u kojima se ti vektori razlikuju.*

Lema 1.1. *U slučaju vektorskog prostora nad poljem* D, *rastojanje* $d(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ *zadovoljava uslov:*

$$d(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \omega(\mathbf{X}+\mathbf{Y}). \tag{1.7}$$

Potrebne i dovoljne uslove za određivanje vektora $\mathbf{Q}_i$ na osnovu vektora $\mathbf{Q}_j$ (1.6) daje sledeća teorema:

Teorema 1.1. *Ako težina vektora greške* $\mathbf{E}$ *u* (1.6) *ne prelazi vrednost* t *i ako vektori podskupa* M *zadovoljavaju uslov:*

$$d(\mathbf{Q}_{i_1}, \mathbf{Q}_{i_2}) \geqslant 2t+1; \quad \mathbf{Q}_{i_1}, \mathbf{Q}_{i_2} \in M, \tag{1.8}$$

onda se vektor $\mathbf{Q}_i$ *može odrediti na osnovu vektora* $\mathbf{Q}_j$ [1].

Broj $2t+1$ naziva se *minimalno kodno rastojanje* i obeležava sa d.

Očevidno je da se mogu formirati više podskupova M (samo ako se usvoji dovoljno veliko m), čiji elementi zadovoljavaju (1.8). Pridružujući uslovu (1.8) dodatna ograničenja, dobijamo kodove sa različitim osobinama. Posebno značajnu grupu predstavljaju linearni kodovi.

Definicija 1.3. *Kod (podskup* M*) se naziva linearnim ako vektori koji mu pripadaju obrazuju vektorski podprostor prostora* V_m.

Obeležimo l nezavisnih vektora iz prostora V_m sa $\mathbf{G}_0, \mathbf{G}_1, \ldots, \mathbf{G}_{l-1}$ (numeracija je proizvoljna). Pri tome je

$$\mathbf{G}_i = (g_{i0}, g_{i1}, \ldots, g_{i,m-1}). \tag{1.9}$$

Vektorski podprostor u V_m obrazuju vektori dobijeni iz relacije:

$$\mathbf{Q}_i = p_{i0}\mathbf{G}_0 + p_{i1}\mathbf{G}_1 + \cdots + p_{i,l-1}\mathbf{G}_{l-1}, \tag{1.10}$$

gde je p_{ij} komponenta vektora $\mathbf{P}$ iz V_l. Podprostor ima dimenziju l i stoga ćemo ga obeležavati sa V_m^l. Relacija (1.10) uspostavlja jednoznačnu korespondenciju između svakog vektora $\mathbf{P}$ iz V_l i vektora $\mathbf{Q}$ iz V_m, odnosno iz podprostora V_m^l. Prema tome, podprostor V_m^l može predstavljati linearni kod.

Umesto (1.10) pogodnije je pisati:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{PG}, \tag{1.11}$$

gde $\mathbf{P} \in V_l$ a $\mathbf{G}$ predstavlja matricu nad poljem D, čije su vrste vektori $\mathbf{G}_i (i=0, 1, \ldots, l-1)$, tj. $\mathbf{G} = [g_{ij}]$.

Matrica **G** se naziva *generišuća matrica* koda.

Pokazano je [6] da se kod može formirati polazeći od relacije:

$$\mathbf{Q}\mathbf{H}^{t} = \mathbf{O}, \tag{1.12}$$

gde je **H** matrica nad poljem D, tj. $\mathbf{H} = [h_{ij}]$, $i = 0, 1, \ldots k-1$; $j = 0, 1 \ldots m-1$. Vrste matrice **H** moraju biti nezavisne a $k = m - l$. Stvarno, matrična jednačina (1.12) daje k skalarnih jednačina za određivanje $k+l$ komponenti vektora **Q**. Prema tome, l komponenti vektora **Q** su proizvoljne. Ne umanjujući opštost, pretpostavimo da proizvoljne vrednosti dobijaju l poslednjih komponenti. Izjednačimo tih l komponenti sa komponentama vektora **P** iz V_l i izračunajmo k prvih komponenti vektora **Q** koristeći pomenute jednačine. Dobijene relacije omogućavaju uspostavljanje jednoznačne korespondencije između svih vektora P iz V_l i određenog broja vektora **Q** iz V_m, tj. daju traženi linearni kod.

Kod dobijen na osnovu (1.12) biće identičan kodu dobijenom na osnovu (1.11), ako je zadovoljen uslov:

$$\mathbf{G}\mathbf{H}^{t} = \mathbf{O}, \tag{1.13}$$

koji se dobija uvrštavanjem (1.11) u (1.12).

Matrica **H** se naziva *kontrolna matrica* koda.

Samo l komponenti kodnog vektora koda sa generišućom matricom G, odnosno kontrolnom matricom H pružaju korisnu informaciju. Stoga se nazivaju *informacione komponente*. Preostalih k komponenti zavise od informacionih, služe za kontrolu i nazivaju se *kontrolne komponente*.

Linearni kod, definisan na opisani način, obično se obeležava sa (m, l).

Odnosom broja informacionih komponenti l i ukupnog broja komponenti kodnog vektora m pri zadatom d meri se efektivnost koda [1].

Nije teško pokazati da matrica **H** može predstavljati generišuću matricu nekog (m, k) koda. Ako se pri tome generišuća matrica **G** koda (m, l) koristi kao kontrolna matrica koda (m, k), onda se kaže da su ova dva koda *dvojstveni* jedan drugom.

Sve osobine podprostora V_m^l (koda) određene su osobinama generišuće odnosno kontrolne matrice.

Postavlja se pitanje — kako formirati generišuću odnosno kontrolnu matricu pa da kodni vektori zadovoljavaju uslov (1.8). Rešenje nije jednoznačno. Otuda potiče veliki broj klasa linearnih kodova. U ovom izlaganju interesovaće nas samo kodovi za koje se generišuća i kontrolna matrica dobijaju korišćenjem grafova.

2. Neophodni pojmovi i teoreme iz teorije grafova

Posmatrajmo neorijentisani graf bez petlji $G = (X, U)$. Neka je $n = n(G)$ broj čvorova, $m = m(G)$ broj grana, $p = p(G)$ broj komponenti povezanosti i $\nu = \nu(G)$ ciklomatički broj grafa G.

Obeležimo grane posmatranog grafa sa: $u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}$ (numeracija je proizvoljna). Ukupan broj delimičnih grafova koji se mogu dobiti iz G jednak je 2^m. Svakom delimičnom grafu pridružimo jedan vektor **Q** iz prostora V_m definisanog u prethodnom poglavlju tako da komponente vektora zadovoljavaju uslov

$$q_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ ako } u_j \text{ pripada delimičnom grafu,} \\ 0 \text{ u suprotnom slučaju.} \end{cases}$$

Skup svih delimičnih grafova predstavlja vektorski prostor, jer se nad tim skupom mogu definisati dve operacije ekvivalentne operacijama sabiranja i množenja u prostoru V_m. Ovde nećemo definisati te operacije pošto će se sve transformacije obavljati u prostoru V_m, a rezultati po potrebi interpretirati u prostoru delimičnih grafova.

Definicija 2.1. *Grane grafa G koje ne pripadaju datoj šumi T nazivaju se spojnice šume T u G.*

Definicija 2.2. *Broj grana bilo koje šume T grafa G naziva se rang grafa i označava sa* $\rho = \rho(G)$.

Očevidno važi

(2.1) $$\rho = m(G) - \nu(G) = n(G) - p(G).$$

Definicija 2.3. *Elemenat prostora* V_m *naziva se kvaziciklus ako u odgovarajućem delimičnom grafu svi čvorovi imaju parne stepene.*

Neposredno se proverava tačnost sledećih lema:

Lema 2.1. *Sabiranje dva kvaziciklusa i množenje kvaziciklusa elementom polja D daje kvaziciklus.*

Lema 2.2. *Svakoj konturi grafa G odgovara jedan kvaziciklus u* V_m.

Može se pokazati da skup kvaziciklusa predstavlja podprostor dimenzije ν u prostoru V_m, [7].

Teorema 2.1 *Svakoj spojnici u šume T grafa G odgovara jedna jedina kontura kojoj pripada u a ne pripada nijedna druga spojnica šume T.*[1]

Pošto je broj spojnica svake šume T grafa G jednak $\nu = \nu(G)$, bazis podprostora kvaziciklusa mogu predstavljati kvaziciklusi koji odgovaraju konturama formiranim prema teoremi 2.1. Obeležavaćemo podprostor kvaziciklusa sa V_m^{ν}, a vektore bazisa sa $\mathbf{C}_0, \mathbf{C}_1, \ldots \mathbf{C}_{\nu-1}$, gde je

(2.2) $$\mathbf{C}_i = (c_{io}, c_{i1}, \ldots, c_{i,m-1}).$$

Matrica $\mathbf{C} = [c_{ij}]$ čije su vrste vektori $\mathbf{C}_i$ ($i = 0, 1, \ldots, \nu - 1$) naziva se *ciklomatička matrica*[2] grafa G [7].

Definicija 2.4. *Ako se udaljavanjem podskupa grana* $U' \subseteq U$ *iz grafa G dobije delimični graf sa većim brojem komponenata povezanosti nego što ih ima graf G, onda se U' naziva snop*[3] *grafa G.*

Definicija 2.5. *Snop U' je prost ako nijedan njegov pravi podskup* $U'' \subset U'$ *ne predstavlja snop.*

Ponekad se snopom naziva ne sam podskup U', već delimični graf $G' = (X, U')$.

Teorema 2.2. *Svakoj grani u proizvoljne šume T grafa G odgovara jedan jedini prosti snop U' grafa G kojem pripada u a ne pripada nijedna druga grana šume T.*[4]

---

[1] Videti takođe str. 35.
[2] Ova definicija ciklomatičke matrice razlikuje se nešto od definicije date na str. 65.
[3] Uporediti sa definicijom na str. 79.
[4] Videti takođe str. 80.

Teorema 2.3. *Proizvoljno izabrani prosti ciklus i proizvoljno izabran prost snop grafa G imaju paran broj (moguće i nulu) zajedničkih grana.*

Definicija 2.6. *Elemenat prostora V_m, naziva se kvazisnop, ako odgovarajući delimični graf ima sa nekim prostim ciklusom grafa G paran broj (moguće i nulu) zajedničkih grana.*

Lema 2.3. *Svakom prostom snopu U' odgovara kvazisnop u V_m. Uniji prostih snopova koji se međusobno ne seku takođe odgovara kvazisnop.*

Teorema 2.4. *Podskup $U' \subset U$ grana grafa G odgovara kvazisnopu u V_m, ako i samo ako predstavlja uniju prostih snopova koji se ne seku.*

Lema 2.4. *Sabiranjem dva kvazisnopa i množenje kvazisnopa elementom polja D daje kvazisnop.*

Iz leme 2.4. proizilazi da kvazisnopovi formiraju podprostor u prostoru V_m. U [7] je dokazano da je dimenzija tog podprostora jednaka rangu grafa $\rho = \rho(G)$. Zato ćemo ga obeležiti V_m^ρ. Bazis podprostora V_m^ρ može se formirati koristeći teoremu 2.2. Obeležimo vektore bazisa sa $\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1, \ldots, \mathbf{R}_{\rho-1}$, gde je

$$\mathbf{R}_i = (r_{i0}, r_{i1}, \ldots, r_{i,m-1}). \tag{2.3}$$

Matrica $\mathbf{R} = [r_{ij}]$, čije su vrste vektori $\mathbf{R}_i (i = 0, 1, \ldots, \rho-1)$, naziva se matrica snopova grafa G.

Polazeći od definicija kvaziciklusa i kvazisnopa zaključujemo da je svaki kvaziciklus ortogonalan svakom kvazisnopu. To znači da su ortogonalni podprostori V_m^ν i V_m^ρ, odnosno da matrice $\mathbf{C}$ i $\mathbf{R}$ zadovoljavaju uslov $\mathbf{C}\mathbf{R}^t = \mathbf{O}$ ili $\mathbf{R}\mathbf{C}^t = \mathbf{O}$.

3. Konstrukcija kodova

Na osnovu izlaganja u prethodna dva odeljka zaključujemo da se linearni kod može dobiti polazeći od grafova $G = (X, U)$ koji zadovoljava određene uslove. Postupak konstrukcije koda je jednostavan. Za generišuću matricu usvojimo bilo koju ciklomatičku matricu $\mathbf{C}$ grafa G. Dobijamo kod (m, l) sa $m = m(G)$ i $l = \nu(G)$. Kao kontrolna matrica može služiti bilo koja matrica snopova $\mathbf{R}$. Pri tome je $k = \rho(G)$. Uslove koje treba da zadovolji graf G da bi se ovako konstruisani kod mogao koristiti za ispravljanje t grešaka daje sledeća teorema:

Teorema 3.1. *Svi kodni vektori koda čija je generišuća matrica jedna od ciklomatičkih matrica* **C** *grafa G zadovoljavaće uslov* (1.8), *ako broj grana u svakoj konturi nije manji od* $d = 2t + 1$.

Dokaz. Svaki prosti ciklus sadrži konturu, a svakom kvaziciklusu odgovara delimični graf sa najmanje jednim prostim ciklusom. Prema tome, u delimičnom grafu koji odgovara kvaziciklusu nalazi se najmanje jedna kontura.

Prema tome, delimični graf koji odgovara proizvoljnom ciklusu sadrži najmanje jednu konturu. Odavde neposredno sledi da težina proizvoljnog kvaziciklusa (kodnog vektora) nije manja od broja grana najkraće konture. Pošto vredi (1.7), teorema 3.1. je dokazana.

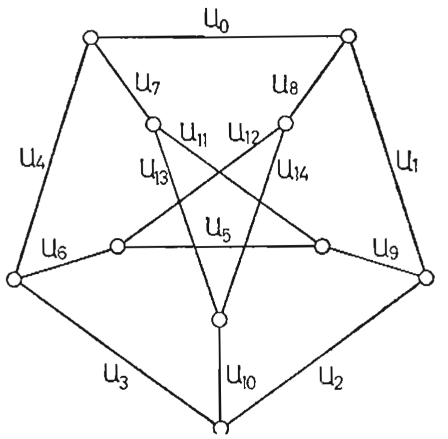
Očevidno je da i bilo koja matrica snopova **R** može biti generišuća matrica linearnog (m, l) koda sa $l = \rho(G)$. Svaka ciklomatička matrica **C** predstavlja kontrolnu matricu ovog koda.

Teorema 3.2. *Svi kodni vektori koda čija je generišuća matrica neka od matrica snopova* **R** *grafa G zadovoljavaće uslov* (1.8), *ako broj grana najmanje prostog snopa grafa nije manji od* $d = 2t + 1$.

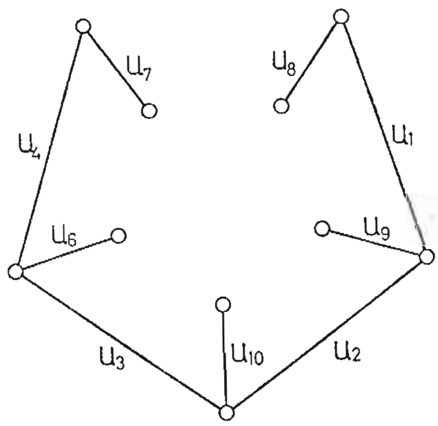
Dokaz. Na osnovu definicije kvazisnopa i teoreme 2.4. zaključujemo da delimični graf, koji odgovara kvazisnopu, sadrži prost snop. To znači da težina proizvoljnog kvazisnopa (kodnog vektora) nije manja od broja grana najmanjeg snopa. Teorema 3.2. je time dokazana.

Opisani postupak konstrukcije kodova pokazaćemo na primeru *Pétersenovog* grafa (sl. 78).

Za ovaj graf je $m(G) = 15$, $n(G) = 10$, $p(G) = 1$ (tj. graf je povezan), $\nu(G) = m(G) - n(G) + p(G) = 6$ i $\rho(G) = n(G) - p(G) = 9$. Broj grana u najkraćoj konturi *Pétersenovog* grafa je 5, a broj grana u najmanjem snopu 3. Prema tome *Pétersenov* graf daje kod (15,6) koji ispravlja sve dvostruke i jednostruke greške, tj. ima minimalno kodno rastojanje $d = 5$ i kod (15,9) koji ispravlja samo jednostruke greške, tj. ima minimalno kodno rastojanje $d = 3$.



Sl. 78



Sl. 79

Da bismo odredili generišuće i kontrolne matrice pomenutih kodova, izdvojmo jednu šumu (bilo koju) *Pétersenovog* grafa. Pošto je graf povezan, šuma se svodi na stablo (sl. 79).

Odredimo sada sve konture *Pétersenovog* grafa koje zadovoljavaju uslove teoreme 2.1 (ima ih 6) i sve proste snopove koji zadovoljavaju uslove teoreme 2.2 (ima ih 9).

Pridružujući konturama odgovarajuće kvazicikluse (lema 2.2) iz prostora V_{15} dobijamo:

$$
\begin{array}{ll}
u_0,\ u_4,\ u_3,\ u_2,\ u_1 & \rightarrow 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\
u_5,\ u_6,\ u_3,\ u_2,\ u_9 & \rightarrow 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0 \\
u_{11},\ u_7,\ u_4,\ u_3,\ u_2,\ u_9 & \rightarrow 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0 \\
u_{12},\ u_6,\ u_3,\ u_2,\ u_1,\ u_8 & \rightarrow 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0 \\
u_{13},\ u_7,\ u_4,\ u_3,\ u_{10} & \rightarrow 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0 \\
u_{14},\ u_{10},\ u_2,\ u_1,\ u_8 & \rightarrow 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1.
\end{array}
$$

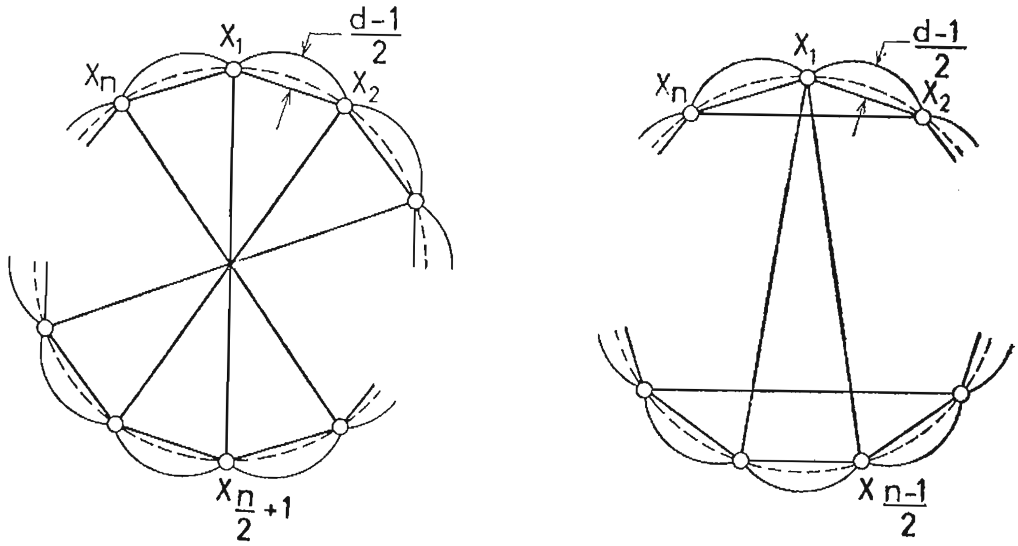
Pridružujući prostim snopovima odgovarajuće kvazisnopove (lema 2.3) iz prostora V_{15} dobijamo:

$$
\begin{array}{ll}
u_7,\ u_{11},\ u_{13} & \to 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1\,0\,1\,0 \\
u_4,\ u_0,\ u_{11},\ u_{13} & \to 1\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,1\,0 \\
u_6,\ u_5,\ u_{12} & \to 0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0 \\
u_3,\ u_0,\ u_5,\ u_{11},\ u_{12},\ u_{13} & \to 1\,0\,0\,1\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,0 \\
u_{10},\ u_{13},\ u_{14} & \to 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,1\,1 \\
u_2,\ u_0,\ u_5,\ u_{11},\ u_{12},\ u_{14} & \to 1\,0\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,0\,1 \\
u_9,\ u_5,\ u_{11} & \to 0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1\,0\,1\,0\,0\,0 \\
u_1,\ u_0,\ u_{12},\ u_{14} & \to 1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,1 \\
u_8,\ u_{12},\ u_{14} & \to 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1\,0\,1.
\end{array}
$$

Neka generišuća matrica koda (15,6) bude ciklomatička matrica **C** čije su vrste dobijeni kvaziciklusi, a generišuća matrica koda (15,9) matrica snopova **R** čije su vrste dobijeni kvazisnopovi. Sa ovim su kodovi (15,6) i (15,9) potpuno određeni. Sve njihove kontrolne matrice mogu se izračunati korišćenjem (1.13). Međutim, jedno rešenje je već poznato. Generišuća matrica koda (15,9) je jedna od kontrolnih matrica koda (15,6), a generišuća matrica koda (15,6) je jedna od kontrolnih matrica koda (15,9). Ako usvojimo ova rešenja, onda su kodovi (15,6) i (15,9) dvojstveni jedan drugom. Razumljivo je da se može poći od kontrolnih matrica pomenutih kodova, pa na osnovu (1.13) odrediti sve njihove generišuće matrice.

Postavlja se pitanje kako konstruisati graf sa zadatim ciklomatičkim brojem ν u kojem broj grana najkraće konture nije manji od d, odnosno graf sa zadatim rangom ρ, u kojem broj grana najmanjeg snopa nije manji od d. Prvi problem je razmatran u [4], a drugi u [3] i [5]. Pošto bi detaljna interpretacija ovih radova zahtevala mnogo prostora, izložićemo ukratko samo rezultate dobijene u [3] i [5].

Pokazano je da jedno rešenje predstavljaju grafovi na sl. 80. Susedni čvorovi (na slici) kod oba grafa spojeni su sa $\frac{d-1}{2}$ grana (d neparan broj). Nesusedni čvo-



Sl. 80

rovi spojeni su tako da broj grana proizvoljnog prostog snopa nije manji od d, što se vidi i sa sl. 80. Pri tome je rang grafa na sl. 80a neparan, a rang grafa na sl. 80b paran broj. Kako je rang povezanog grafa $\rho=n-1$, to je zadavanjem ranga određen broj čvorova. Minimalan broj grana grafa na sl. 80a je $m=\frac{nd}{2}$ a grafa na sl. 80b $m=\frac{nd+1}{2}$. Prema tome, polazeći od zadatog d i l uvek se može naći graf ranga $\rho=l$ čija matrica snopova **R** predstavlja generišući matricu koda (m, l) koji ispravlja d greški. Rešenje, istina, nije jedinstveno, ali je pokazano da ne postoji povoljnije u pogledu efektivnosti koda, tj. ne može se naći graf sa zadatim d i ρ a sa manjim brojem grana nego što imaju grafovi na sl. 80.

Ciklomatičke matrice i matrice snopova grafova na sl. 80 dobijaju se postupkom koji je već opisan u slučaju *Pétersenovog* grafa.

Na kraju, napomenimo da kodovi konstruisani pomoću grafova u pogledu efektivnosti, tj. u pogledu odnosa broja informacionih komponenti prema ukupnom broju komponenti kodnog vektora zaostaju za nekim drugim klasama. Međutim, u praktičnim primenama pored efektivnosti važnu ulogu imaju principi realizacije uređaja za kodiranje i dekodiranje. U tom pogledu kodovi konstruisani pomoću grafova su često povoljniji od drugih [2], pa otuda i potiče interesovanje za njihovo proučavanje.

LITERATURA

1. Л. Ф. Бородин, *Введение в теорию помехоустойчивого кодирования*, Москва, 1968.
2. J. G. Bredson and S. L. Hakimi, *Decoding of graph theoretic codes*, IEEE Trans. **IT-13** (1967), 348—349.
3. I. T. Frisch, *Optimization of communication nets with switching*, J. Franklin Inst., **275** (1963), 405—430.
4. S. L. Hakimi, *Recent progres and new problems in applied graph theory*, Proc. IEEE Regional 6th Ann. Conf., 1966.
5. S. L. Hakimi and H. Frank, *Cut-set matrices and linear codes*, IEEE Trans. **IT-11** (1965), 457—458.
6. W. W. Peterson, *Error Correcting Codes*, Cambridge, Mass. 1961.
7. A. A. Зыков, *Теория конечных графов*, Новосибирск, 1969.

BELEŠKA O LITERATURI

Nedavno su objavljene sledeće knjige koje se odnose na teoriju grafova:

1. *Recent progress in combinatorics*, Proceeding of the third Waterloo conference on combinatorics. May 1968, ed. W. T. Tutte, New York — London, 1969.
2. *The many facets of graph theory*, Proc. conf. Western Mich. Univ. Kalamazco, Mich. 1968 Berlin — New York, 1969.
3. *Proof techniques in graph theory*, Proceedings of the second Ann Arbor graph theory conference, February 1968, ed. F. Harary, New York — London, 1969.
4. *Combinatorial mathematics and its applications*, Proceedings of the conference held at the University of North Carolina at Chapel Hill, April 1967, ed. R. C. Bose and T. A. Dowling, Chapel Hill, N. C., 1969.
5. B. Roy, *Algèbre moderne et théorie des graphes*, Paris, 1969—1970.
6. K. Wagner, *Graphentheorie*, Mannheim, 1970.
7. *Recent trends in graph theory*, Berlin — Heidelberg — New York, 1971.
8. *Graph theory and its applications*, Proceedings of an advanced seminar conducted by the, Matematics Research Center, United States Army, at the University of Wisconsin, Madison, October, 1969, New York — London 1970.
9. *Combinatorial theory and its applications*, I — III, Budapest 1970.
10. *Combinatorial structures and their applications*, Proceedings of the Calgary International Conference on combinatorial structures and their applications, June, 1969, New York — — London — Paris 1970.
11. *International conference on combinatorial mathematics*, Ann. New York Acad. Sci. 175 (1970), 1 — 412.

Osim ovoga, publikovani su, ili će biti publikovani, materijali sa konferencija, posvećenih teoriji grafova, koje su održane na Louisiana State University marta 1970. i marta 1971. godine i na Colorado State University septembra 1971. godine.

SPISAK POJEDINIH TERMINA IZ TEORIJE GRAFOVA NA SRPSKOHRVATSKOM, ENGLESKOM, NEMAČKOM, FRANCUSKOM I RUSKOM JEZIKU

Srpskohrvatski	Engleski	Nemački	Francuski	Ruski
čvor	vertex, node	der Knotten	le sommet	вершина
grana	edge, branch	die Kante	l'arc	дуга
put	path	der Weg	le chemin	пут
matrica susedstva	adjacency matrix	die Adjazenz-matrix	la matrice associée	матрица смежности
potpun graf	complete graph	der vollständige Graf	le graph complet	полный граф
povezan	connected	zusammenhangend	connexe	связный
stablo	tree	der Baum	l'arbre	дерево
skup	set	die Menge	l'ensemble	множество

INDEKS IMENA

PREDMETNI INDEKS

S A D R Ž A J

Dr Dragoš Cvetković i dr Mirko Milić: TEORIJA GRAFOVA I NJENE PRIMENE. Izdanje: Beogradski izdavačko-grafički zavod. Za izdavača: Dušan Popović. generalni direktor; urednik: Nikola Damjanović; tehnički urednik: Dragan Paunović.

Štampa: Beogradski izdavačko-grafički zavod, Beograd, Bulevar vojvode Mišića 17, 1971.