UNIVERZITET U BEOGRADU

MATEMATIČKI FAKULTET

Duško Jojić

O NEKIM KOMBINATORNIM I ALGEBARSKIM METODAMA U ENUMERACIJI POLITOPA I POSETA

-DOKTORSKA DISERTACIJA-

Beograd, 2005.

Sadržaj

Predgovor

Konveksni politopi su jedan od najstarijih matematičkih pojmova. Euklid je u svojim *Elementima*, otprilike 300 godina prije nove ere, opisao tačke, duži, poligone, tetraedar, kocku, oktaedar, dodekaedar i ikozaedar. Osobine pet pravilnih poliedara su toliko impresionirale antičke mislioce, da su pomoću njih pokušavali da objasne cijelu prirodu.

U savremenoj matematici konveksni politopi imaju izuzetno važnu ulogu u kombinatornoj geometriji, teoriji igara, teoriji konveksnih skupova, teoriji orijentisanih matroida, linearnom programiranju, itd ....

Takođe, sami za sebe, konveksni politopi nude širok spektar zanimljivih tema za proučavanje. Navedimo samo neke od njih:

- Politopi i simetrija
- Cjelobrojne tačke u politopu
- Grafovi politopa
- 0/1 politopi
- Kombinatorni aspekti konveksnih politopa

Za početak moderne kombinatorne teorije konveksnih politopa može se smatrati Euler-Poincaré-ova formula, jedna od deset najvažnijih teorema u matematici (kako se kaže u [2]). Euler je u pismu Goldbach-u spomenuo formulu koja povezuje broj tjemena, ivica i strana nekog trodimenzionalnog politopa. Uopštenje te formule za n-dimenzionalne politope je dao Poincaré, i to se smatra osnovnim rezultatom kombinatorne topologije.

Materijal sadržan u ovoj disertaciji se bavi problemima karakterizacije numeričkih parametara konveksnih politopa i Euler-ovih poseta (koji su prirodno uopštenje politopa). Neke kombinatorne i algebarske metode su se pokazale izuzetno efikasne u rješavanju problema tog tipa.

Dvije ključne riječi u ovoj disertaciji se posebno izdvajaju: šeling (eng. shellability=ljuštivost) i **cd**-indeks.

Šeling politopa je jedno od najpopularnijih kombinatorno-geometrijskih svojstava konveksnih politopa. Kako se navodi u knjizi G. Ziegler-a, koncept sastavljanja d-politopa od maksimalnih strana, tako da se dodaje jedna po jedna i da presjek nove strane sa prethodno "sastavljenim" uvijek bude $(d-2)$-disk (osim kod poslednje strane, kada je taj presjek $(d-2)$-sfera) pojavio se 1852. godine u radu L. Schläfly-ija. Ideju označavanja poseta (ivica u Hasse-ovom dijagramu) je uveo R. Stanley, a veze između šelinga i označavanja poseta je opisao A. Björner.

Algebarska kombinatorika, grubo govoreći, bavi se objektima koji se mogu interpretirati i kombinatorno (kao broj elemenata u nekom skupu) i algebarski (kao dimenzija nekog vektorskog prostora). Već izvjesno vrijeme nekomutativni polinomi imaju praktičnu primjenu u kombinatorici i teoriji grafova. Nekomutativan polinom u promjenjivim **c** (stepena jedan) i **d** (stepena dva) koji na najefikasniji način opisuje veoma komplikovanu numeričku karakteristiku politopa (prošireni f-vektor) naziva se **cd**-indeks. Kako je **cd**-indeks moguće interpretirati kao homomorfizam koalgebri, to je promjene **cd**-indeksa pri nekim operacijama na politopima (posetima) moguće opisati odgovarajućim linearnim preslikavanjima.

Materijal u disertaciji je podjeljen u četiri dijela. U uvodnom dijelu dajemo definicije osnovnih pojmova, kao i tvrđenja teorema koje će se koristiti u radu. Takođe, daje se i pregled najvažnijih rezultata iz ove oblasti, te nekoliko zanimljivih otvorenih problema.

U drugom dijelu disertacije posmatramo kombinatorno-algebarska svojstva nekih specijalnih politopa i poseta. U poglavlju 2.1 se posmatra šeling politopa T_k^n (stelarna podjela simpleksa Δ_n nad k-stranom) i pokazuje se da politopi T_k^n imaju svojstvo nastavljivog šelinga. Koristeći šeling politopa T_k^n, u poglavlju 2.2 dobijamo kombinatornu interpretaciju za torusni h-vektor politopa $\Delta_n^*(k)$. Tema poglavlja 2.3 su planarni poseti i njihovi flag vektori. Daje se karakterizacija nekih kombinatorno-algebarskih svojstava planarnih poseta i pokazuje se da "zasićeni" planarni poseti dopuštaju R-označavanje. Kao posljedicu, dobijaju se sve esencijalne nejednakosti za flag h-vektore zasićenih planarnih poseta.

Treći dio disertacije govori o promjeni **ab** i **cd**-indeksa pri nekim operacijama nad politopima i posetima. Na početku ovog poglavlja se upoznajemo sa koalgebarskim metodama u enumeraciji politopa i poseta. U poglavlju 3.2 se daju uslovi pod kojima će za neku operaciju na posetima $P \mapsto X(P)$ postojati linearno preslikavanje $\mathcal{X}$ koje opisuje **ab**-indeks poseta

$X(P)$. Pokazujemo da se formula za $\mathcal{X}$ može "pročitati" iz R-označavanja. Ovaj dio disertacije od originalnih rezultata sadrži i rekurzivne formule za linearna preslikavanja koja opisuju **cd**-indekse poseta intervala (poglavlje 3.3) te E_t-konstrukcije (poglavlje 3.4).

Tema četvrtog dijela rada su težinske derivacije W_k koje su se pojavile u formulama za **cd**-indeks nekih aranžmana. Uvešćemo operaciju koja posetu P dodijeli poset $\Sigma_k(P)$ i pokazaćemo da se težinske derivacije W_k pojave u formulama koje povezuju **cd**-indekse poseta $Sd(P)$ i $Sd(\Sigma_k(P))$. Tako ćemo dobiti i kombinatornu interpretaciju za koeficijente koje se pojave u težinskim derivacijama W_k. U poglavlju 4.4 posmatramo **cd**-indeks aranžmana $\mathcal{D}_n$.

Na kraju, želio bih da se zahvalim prof. dr Siniši Vrećici i prof. dr Radu Živaljeviću. Njihova pomoć i uloga u mom matematičkom napredovanju su nemjerljive. Velika mi je čast i zadovoljstvo što sam imao priliku da od učim njih. Takođe, zahvalan sam GTA seminaru Matematičkog fakulteta u Beogradu (gdje sam imao priliku da se matematički usavršavam) i neka mi bude dozvoljeno da izrazim zadovoljstvo što je seminar promijenio ime u GTA-C.

BANJA LUKA, 11. DECEMBAR 2005.

Glava 1

Uvod

1.1 Poseti, politopi, kompleksi

Parcijalno uređen skup (u daljem tekstu poset) je skup P na kojem je zadana refleksivna, antisimetrična i tranzitivna relacija $\leq$ (relacija poretka). Osnovni primjeri poseta u ovoj disertaciji su poseti strana nekog politopa. Stoga ćemo, bez posebnog naglašavanja, smatrati da je skup P konačan.

Interval $[x, y]$ u posetu P je

$$[x, y]_P = \{z \in P : x \leq z \leq y\}.$$

Ako je $[x, y]_P = \{x, y\}$ reći ćemo da y natkriva x i to označiti sa $x \prec y$.

Svaki $C \subseteq P$ u kojem za sve $x, y \in C$ vrijedi $x \leq y$ ili $y \leq x$ naziva se lanac u posetu P. Skup svih lanaca u P označavamo sa $\mathcal{C}(P)$. Dužina lanca C je $\ell(C) = |C| - 1$. Lanac C je maksimalan u posetu P ako ne postoji veći lanac koji ga sadrži. Skup svih maksimalnih lanaca u P je $\mathcal{M}(P)$.

Uobičajen način vizuelizacije poseta je Hasse-ov dijagram. Svaki $x \in P$ se pretstavi kao tačka $x = (x_1, x_2)$ u $\mathbb{R}^2$ tako da vrijedi

$$x <_P y \Leftrightarrow x_2 < y_2$$

(ordinata dodijeljena x je manja od ordinate dodijeljene y). Dalje, tačke $x = (x_1, x_2)$ i $y = (y_1, y_2)$ su spojene ako i samo ako $x \prec y$. Ivice u Hasse-ovom dijagramu su dakle sva natkrivanja u P:

$$\mathcal{E}(P) = \{(x, y) : x, y \in P, x \prec y\}.$$

Za poset P kažemo da je ograničen ako postoje jedinstveni elementi $\hat{0} \in P$ i $\hat{1} \in P$ takvi da za sve $x \in P$ vrijedi $\hat{0} \leq x \leq \hat{1}$. Atomi u ograničenom posetu su elementi koji natkrivaju $\hat{0}$ dok su koatomi elementi natkriveni sa $\hat{1}$.

Graduisan poset P ranga $n+1$ je simplicijalan ako je za svaki koatom x interval $[\hat{0}, x] \cong B_n$.

Za ograničen poset P kažemo da je graduisan ako su svi maksimalni lanci u P iste dužine. Ako je poset P graduisan može se definisati funkcija ranga $r : P \mapsto \mathbb{N}$ sa

- $r(\hat{0}) = 0$
- $r(y) = r(x) + 1$ za sve $x \prec y$.

Rang poseta graduisanog poseta P je $r(\hat{1})$. Za sve $0 < k < r(P)$ definiše se k-ti nivo poseta P sa

$$P_k = \{x \in P : r(x) = k\}.$$

Ako je P graduisan poset ranga $n+1$ definiše se f-vektor poseta P sa

$$f(P) = (f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}) \text{ gdje je } f_i = |P_{i+1}|.$$

Kako je $P_0 = \{\hat{0}\}$ i $P_{n+1} = \{\hat{1}\}$, smatramo da za sve graduisane posete ranga $n+1$ vrijedi $f_{-1} = f_n = 1$. U Hasse-ovom dijagramu graduisanog poseta P uobičajeno je da se elementima iz istog nivoa dodijele iste ordinate.

Graduisan poset P ranga $n+1$ je Euler-ov ako u svakom intervalu tog poseta ima isti broj elemenata parnog i neparnog ranga.

Za poset $P = (P, \leq)$ definiše se dualan poset $P^* = (P, \leq^*)$ gdje je $x \leq^* y$ u P^* ako i samo ako je $y \leq x$ u P. Poseti P i Q su izomorfni ako postoji bijekcija $f : P \mapsto Q$ takva da je

$$x \leq_P y \Leftrightarrow f(x) \leq_Q f(y).$$

Navedimo definicije nekoliko osnovnih operacija na posetima koje će se koristiti u daljem tekstu. Neka su P i Q dva poseta

- Proizvod poseta je skup $P \times Q = \{(x, y) : x \in P, y \in Q\}$ sa relacijom poretka $(x, y) \leq (x', y')$ ako je $x \leq x'$ i $y \leq y'$.

- "Diamond" proizvod graduisanih poseta P i Q je

$$P \diamond Q = (P \setminus \{\hat{0}_P\}) \times (Q \setminus \{\hat{0}_Q\}) \cup \{\hat{0}\}.$$

- Ordinalna suma $P \oplus Q$ poseta P i Q je skup $P \cup Q$ sa relacijom poretka

$$x \leq_{P \oplus Q} y \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq_P y, & \text{za } x, y \in P; \\ x \leq_Q y, & \text{za } x, y \in Q; \\ x \in P, y \in Q & \end{cases}$$

- "Zvijezda" proizvod $P * Q$ graduisanih poseta P i Q je

$$P * Q = P \setminus \{\hat{1}_P\} \oplus Q \setminus \{\hat{0}_Q\}.$$

Ako su poseti P i Q Euler-ovi tada su i poseti $P \times Q$, $P \diamond Q$ i $P * Q$ takođe Euler-ovi. Neka je $P = (P, \leq)$ poset i neka su $x, y \in P$. Ako skup

$$\{z \in P : x \leq z, y \leq z\}$$

ima najmanji element nazivamo ga supremum ("join") elemenata x i y. Slično, ako

$$\{w \in P : w \leq x, w \leq y\}$$

ima najveći element nazivamo ga infimum ("meet") elemenata x i y. Poset u kojem svaka dva elementa x i y imaju supremum i infimum naziva se mreža. Standardne reference za osnovne pojmove o posetima su [25] i [82].

Konveksan politop (u daljem tekstu samo politop) se može definisati kao

(V-politop) konveksan omotač konačnog skupa tačaka u $\mathbb{R}^d$

(H-politop) ograničen presjek konačnog skupa zatvorenih poluprostora u $\mathbb{R}^d$

Ove dvije definicije politopa su ekvivalentne (prva glava u [90]).

Dimenzija politopa P je dimenzija najmanjeg afinog podprostora $\mathbb{R}^d$ koji sadrži P.

Primjer 1.1.1. Evo nekoliko primjera politopa:

(a) Standardni d-simpleks Δ_d je konveksan omotač vektora $e_1, e_2, \ldots, e_{d+1}$ (standardne baze) u $\mathbb{R}^{d+1}$.

(b) Standardna d-kocka $C_n = \{x \in \mathbb{R}^d : -1 \leq x_i \leq 1 \text{ za } i = 1, 2, \ldots, d\} = [-1, 1]^d$.

(c) Ciklički politop $C_d(n)$ je konveksan omotač n različitih tačaka na moment krivoj $t \mapsto (t, t^2, \ldots . t^d)$.

Strane politopa se definišu kao presjek politopa sa definišućim hiperravnima (iz definicije H-politopa). Iz definicije H-politopa lako slijedi da su i strane politopa takođe politopi. Strane dimenzije 0 i 1 se nazivaju tjemena i ivice politopa. Skup svih strana politopa P čini mrežu $L(P)$ (teorema 2.7 u [90]). Najveći element u $L(P)$ je sam politop P a najmanji je prazan skup (strana svakog politopa). Ostale strane politopa (osim P i $\emptyset$) se nazivaju prave strane. Atomi u $L(P)$ su tjemena, dok su koatomi maksimalne strane (facets) politopa P. Rang strane F politopa P u mreži strana $L(P)$ je $r(F) = \dim F + 1$.

Za d-dimenzionalan politop P definiše se f-vektor sa $f(P) = (f_0, f_1, \ldots, f_{d-1})$, gdje je $f_i(P)$ broj i-dimenzionalnih strana politopa P.

Primjer 1.1.2. Mreže strana nekih politopa iz primjera 1.1.1

(a) Mreža strana simleksa Δ_d je Boole-ova mreža B_{d+1}.
Stoga je $f_i(\Delta_d) = \binom{d+1}{i+1}$

(b) Mreža strana d-kocke je izomorfna sa $\{(A, B) : A, B \in B_d, A \cap B = \emptyset\}$ gdje je relacija poretka $(A, B) \leq (C, D) \Leftrightarrow A \supseteq C, B \supseteq D$.
Tako dobijamo da je $f_i(C_d) = 2^{d-i}\binom{d}{i}$.

Dva politopa P i Q su kombinatorno ekvivalentna (izomorfna) ako su izomorfne njihove mreže strana, tj. ako je $L(P) \cong Ł(Q)$.

Kažemo da je politop P^* dualan za politop P ako je $L(P^*) \cong L(P)^*$. Na primjer, d-hiperoktaedar ("crosspolitop") se definiše kao konveksan omotač $\{\pm e_1, \pm e_2, \ldots, \pm e_d\}$. Nije teško primjetiti da je d-hiperoktaedar dualan d-kocki, te se označava sa C_d^*.

Politop P je simplicijalan ako su sve njegove prave strane simpleksi.

Primjer 1.1.3. Neka je σ proizvoljna k-strana n-simpleksa Δ_n i neka je v tačka izvan Δ_n koja je "dovoljno blizu" strane σ. Preciznije, v i Δ_n su sa različitih strana hiperravni oslonca onih maksimalnih strana Δ_n koje sadrže σ, dok su v i Δ_n sa iste strane hiperravni oslonca onih maksimalnih strana Δ_n koje ne sadrže σ.

Politop $T_k^n = \mathrm{conv}(\{v\} \cup \Delta_n)$ se naziva stelarna podjela simpleksa Δ_n nad stranom σ. Politopi T_k^n su i odgovor na pitanje šta je konveksan omotač $n + 2$ tačke u $\mathbb{R}^n$.

Politopi dualni simplicijalnim se nazivaju prosti. Ako je d-politop prost, tada je svako tjeme incidentno sa tačno d-ivica.

Primjer 1.1.4. Politop sa dosta zanimljivih osobina (vidjeti [24] i [23]) je permutoedar

$$\Pi_{n-1} = \mathrm{conv}\{(\pi_1, \pi_1, \ldots, \pi_n) : \pi \in \mathbb{S}_n\}(n-1\text{-politop u } \mathbb{R}^n.$$

Kako je svako tjeme (permutacija) incidentno sa tačno $(n-1)$ drugih tjemena (transpozicija susjednih članova u π), permutoedar je prost. Slično se definiše i "signed" permutoedar

$$\Pi_n^{\pm} = \mathrm{conv}\{(\pm\pi_1, \pm\pi_1, \ldots, \pm\pi_n) : \pi \in \mathbb{S}_n\}.$$

Geometrijski simplicijalni kompleks $\mathcal{C}$ je skup simpleksa u $\mathbb{R}^n$ tako da vrijedi

(i) Ako je $\sigma \in \mathcal{C}$ i ako je τ strana simpleksa σ, tada je $\tau \in \mathcal{C}$

(ii) Ako $\sigma, \tau \in \mathcal{C}$ tada i $\sigma \cap \tau \in \mathcal{C}$

Elementi skupa $\mathcal{C}$ su strane kompleksa, 0-dimenzionalne strane su tjemena a 1-dimenzionalne strane su ivice. Primjeri simplicijalnih kompleksa su:

- granice simplicijalnih politopa

- simplicijalni $(n-1)$-disk Λ_i^n, dobijen kao unija $i+1$ maksimalnih strana n-simpleksa Δ_n.

Drugi način da se definiše simplicijalni kompleks je kombinatorni: simplicijalni kompleks (apstraktan) $\mathcal{C}$ je familija podskupova nekog konačnog skupa (tjemena kompleksa) koji je zatvoren obzirom na inkluziju. Dimenzija simpleksa $F \in C$ je $|F| - 1$.

Ekvivalentnost ove dvije definicije slijedi iz činjenice da se svaki apstraktan d-dimenzionalan simplicijalan kompleks može realizovati u $\mathbb{R}^{2d+1}$.

Za simplicijalni (apstraktan) kompleks $\mathcal{C}$ i $\sigma \in C$ definiše se link strane σ sa:

$$\mathrm{lk}_{\mathcal{C}} = \{\tau \in \mathcal{C} : \tau \cap \sigma = \emptyset, \tau \cup \sigma \in \mathcal{C}\}.$$

Skup svih strana simplicijalnog kompleksa $\mathcal{C}$ čini poset strana $P(\mathcal{C})$ u kojem je relacija poretka inkluzija. Sva kombinatorne informacije o kompleksu C su sadržane u $P(\mathcal{C})$.

Most u drugom pravcu, od kombinatorike do topologije, je omogućen sledećom konstrukcijom P. S. Aleksandrova. Za proizvoljan poset P uoči se kompleks poretka $\Delta(P)$ čija su tjemena elementi poseta P, a strane $\Delta(P)$ su lanci u P.

Više činjenica o simplicijalnim kompleksima, kao i osnovni pojmovi homologiji simplicijalnih kompleksa se mogu naći u [55] i [71].

Politopski kompleks $\mathcal{P}$ je familija politopa tako da vrijedi:

(i) Ako $P \in \mathcal{P}$ i ako je Q strana politopa P tada i $Q \in \mathcal{P}$

(ii) Ako su P i Q politopi iz P tada je $P \cap Q$ strana i P i Q

Simplicijalni kompleks je primjer politopskog kompleksa u kojem su svi politopi simpleksi. Primjer politopskog kompleksa je k-skelet politopa P:

$$P^{(k)} = \{F \in L(P) : \ \dim F \leq k\}.$$

Konačan CW kompleks $\mathcal{H}$ je Hausdorff-ov topološki prostor $X_{\mathcal{H}}$ sa ćelijskom dekompozicijom

$$X = \bigcup_{i=0}^{d} X^i \text{ tako da vrijedi:}$$

(i) X^0 je diskretan skup tačaka (0 -ćelije)

(ii) X^n se dobije lijepljenjem konačno mnogo n-diskova D_n (n-ćelija) na X^{n-1} tako da svaka n-ćelija ima karakteristično preslikavanje $\phi : D_n \to K^n$ čija je restrikcija na ∂D_n neprekidno preslikavanje na K_{n-1}, a restrikcija ϕ na $intD_n$ je homeomorfizam

Ćelijski kompleks je regularan ako su sva karakteristična preslikavanja homeomorfizmi. Skup svih ćelija sa relacijom inkluzije je poset strana $P(X)$ ćelijskog komleksa X. Poseti strana regularnih CW-sfera su Euler-ovi.

Ako je X neki CW-kompleks, $P(X)$ njegov poset strana, baricentrička podjela kompleksa X se definiše kao $Sd(X) = \Delta(P(X) \setminus \{\hat{0}\})$.

Suspenzija $s(X)$ nad ćelijskim kompleksom X se definiše kao kompleks dobijen od $X \times I$ kolapsiranjem podkompleksa $X \times \{0\}$ i $X \times \{1\}$ u različita tjemena. Ako je X neka n-dimenzionalna CW sfera tada je $s(X)$ sfera dimenzije $n + 1$.

Neka je X neki CW-kompleks i neka je x_0 neko tjeme iz X. Semisuspenzija X' je kompleks koji se dobije od $X \times I$ kolapsiranjem podkompleksa

$$(X \times \{0\}) \cup (\{x_0\} \times I) \cup (X \times \{1\})$$

u jednu tačku. Kada je X neki n disk, semisuspenzija X' je n-sfera. Kao referencu o CW-kompleksima navedimo [66].

1.2 Karakterizacija f-vektora politopa

Neka je $f(\mathcal{P}_n) = \{f(P) : P \in \mathcal{P}_n\}$ skup f-vektora svih n-politopa. Jedan od najvažnijih problema u kombinatornoj teoriji konveksnih politopa je opisati $f(\mathcal{P}_n) \subseteq \mathbb{R}^n$, odnosno naći nužne i dovoljne uslove da neka n-torka cijelih brojeva bude f-vektor nekog n-politopa. Ovo pitanje se može prirodno uopštiti na posete:

Ako je $\mathcal{G}_n$ neka familija graduisanih poseta ranga $n+1$, opisati skup $f(\mathcal{G}_n) = \{f(P) : P \in \mathcal{G}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$.

Kako je problem potpune karakterizacije skupa $f(\mathcal{G}_n)$ riješen samo za neke klase poseta, može se reći da je riječ o zaista teškom problemu. Sledeća teorema daje potpunu karakterizaciju za f-vektore 3-politopa.

TEOREMA 1.2.1 (E.Steinitz). *Uređena trojka prirodnih brojeva* (f_0, f_1, f_2) *je* f*-vektor nekog* 3*-politopa ako i samo ako su ispunjeni sledeći uslovi:*

(i) $f_0 - f_1 + f_2 = 2$

(ii) $f_0 + 4 \leq 2f_2$

(iii) $f_2 + 4 \leq 2f_0$

Relacija (i) u prethodnoj teoremi je dobro poznata Euler-ova formula za 3-politope. Lako se pokazuje da f-vektor proizvoljnog 3-politopa zadovoljava nejednakosti (ii) i (iii) (trivijalna posledica Euler-ove formule). Dovoljnost uslova u teoremi 1.2.1 se dokaže tako što se za svaki par prirodnih brojeva (v, f) (za koji vrijedi $v + 4 \leq 2f$ i $f + 4 \leq 2v$), konstruiše 3-politop kojem je f-vektor $(v, v + f - 2, f)$. Tako su f-vektori 3-politopa sve cjelobrojne tačke u zatvorenom dvodimenzionalnom konusu u $\mathbb{R}^3$.

Iako se prethodna teorema jednostavno dokazuje (vidjeti u [53]), ovo je dobar primjer da se uoče glavni koraci u rješavanju problema u opštem slučaju.

Ako se želi naći karakterizacija za f-vektore neke familije poseta $\mathcal{G}_n$ potrebno je:

1. opisati sve linearne (afine) relacije koje zadovoljavaju vektori iz $f(\mathcal{G}_n)$. To je ekvivalento sa nalaženjem linearnog (afinog) podprostora $\mathbb{R}^n$ koji je generisan sa $f(\mathcal{G}_n)$.

2. naći sve esencijalne linearne nejednakosti koje vrijede za vektore iz $f(\mathcal{G}_n)$. To je ekvivalentno sa nalaženjem konusa nad zatvorenjem konveksnog omotača tačaka u $f(\mathcal{G}_n)$.

3. potpuna karakterizacija skupa $\mathcal{G}_n$, i to je obično veoma težak problem.

O f-vektorima n-politopa uopšte zna se vrlo malo. Poznato je (vidjeti teoremu u [8]) da je Euler-Poincaré relacija

$$f_0 - f_1 + f_2 - \cdots + (-1)^{n-1} f_{n-1} = 1 - (-1)^n \tag{1.1}$$

jedina linearna relacija za f-vektor n-politopa. Dakle, tačke iz $f(\mathcal{P}_n)$ se nalaze u $\mathbb{R}^n$ na jednoj hiperravni. To je i jedino što se zna za f-vektor politopa uopšte. Za dovoljno veliko n nije dokazana ni hipoteza koju je postavio I. Bárány (vidjeti u [95])

Za proizvoljan n-politop i za sve $k = 1, \ldots, n-2$ vrijedi $f_k \geq \dfrac{\min\{f_0, f_{n-1}\}}{10000}$.

Čak je i za 4-politope problem karakterizacije f-vektora daleko od rješenja. Lako se vidi da $f(\mathcal{P}_4)$ nije skup svih cjelobrojnih tačaka u nekom poliedarskom konusu; štaviše $f(\mathcal{P}_4)$ nije ni skup cjelobrojnih tačaka u nekom konveksnom skupu. Na primjer, ne postoji 4-politop čiji je f- vektor $(7, 23, 32, 16)$ (središte duži $f(C_4(5))$ i $f(C_4(9))$).

Pregled poznatih činjenica o f-vektorima 4-politopa se može naći u radovima [3], [58] i [94]. Poznato je da za f-vektor 4-politopa vrijede sledeće nejednakosti (vidjeti u [95]):

(i) $f_0 \geq 5$ (politopi sa malo tjemena)

(ii) $f_4 \geq 5$ (politopi sa malo maksimalnih strana)

(iii) $f_1 \geq 2f_0$ (prosti politopi)

(iv) $f_2 \geq 2f_3$ (simplicijalni politopi)

(v) $2f_1 + 2f_2 \geq 5f_0 + 5f_3 - 10$ (L. B. T. "Lower bound theorem")

Sve nejednakosti, osim poslednje su trivijalne. Nejednakost (v) je prvi dokazao R. Stanley u terminima torusnog g-vektora (vidjeti u [85], takođe i u radu [62]).

U pokušaju da opiše sve esencijalne nejednakosti za $f(\mathcal{P}_4)$, G. Ziegler je uveo pojam "debljine" 4-politopa (vidjeti u [95]):

$$F(P) = \frac{f_1 + f_2 - 20}{f_0 + f_3 - 10}.$$

Ako postoje politopi za koje je $F(P)$ proizvoljno veliko, tada nejednakosti (i)-(v) opisuju zatvorenje konveksnog konusa razapetog sa $f(\mathcal{P}_4)$, odnosno (i)-(v) su sve esencijalne linearne nejednakosti za f-vektore 4-politopa. Trenutni rekord u "debljini" drži deformisani proizvod poligona $P_m \times_d P_n$ za koji je $F(P_m \times_d P_n) = 9$, vidjeti u [96] .

Za one klase poseta u kojima je problem karakterizacije potpuno riješen, konus generisan f-vektorima je često pozitivan ortant u nekoj podesno odabranoj bazi (nekoj linearnoj transformaciji f-vektora). To je slučaj i kod karakterizacije f-vektora simplicijalnih politopa.

Peter McMullen je u radu [68] za simplicijalne politope definisao dva nova vektora:

DEFINICIJA 1.2.2. Neka je P simplicijalan n politop i neka je $f(P) = (f_0, \dots, f_{n-1})$ njegov f -vektor. Tada se definišu h-vektor $h(P) = (h_0, h_1, \dots, h_n)$ i g-vektor $g(P) = (g_0, g_1, \dots, g_{[\frac{n}{2}]})$ politopa P sa

$$h_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{n-i}{k-i} f_{i-1}, \text{ i } g_0 = 1, g_k = h_k - h_{k-1} \tag{1.2}$$

Primjetimo da je pomoću formula (1.2) moguće definisati h-vektor i g-vektor za proizvoljan n-politop (ili graduisan poset ranga $n+1$). Činjenica da za sve n-politope vrijedi Euler-Poincaré-ova formula (1.1) je ekvivalentna sa tim da je $h_n(P) = 1$.

Ako su $f(P, x)$ i $h(P, x)$ polinomi (funkcije generatrisa) asocirani f-vektoru i h-vektoru n-politopa P (poseta ranga $n+1$)

$$f(P, x) = \sum_{i=0}^{n} f_{i-1} x^{n-i}, h(P, x) = \sum_{i=0}^{n} h_i x^{n-i}$$

tada se (1.2) može zapisati (vidjeti u [13] ili [90]) kao:

$$h(P, x) = f(P, x-1).$$

Jedine linearne relacije za f-vektor simplicijalnih politopa su Dehn -Sommerville jednakosti, koje u originalnom obliku (vidjeti u [8], [90]) izgledaju :

$$f_k = \sum_{j=k}^{n-1} (-1)^{n-1-j} \binom{j+1}{k+1} f_j$$

Pomoću h-vektora, te relacije se mogu jednostavnije zapisati kao

$$h_i = h_{n-i}. \tag{1.3}$$

Stoga je dimenzija afinog podprostora koji generišu f-vektori simplicijalnih politopa jednaka $[\frac{n}{2}]$.

McMullen (vidjeti u radu [69]) je 1966 postavio hipotezu da je cjelobrojni vektor $(a_0, a_1, \ldots, a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor})$ g-vektor nekog simplicijalnog n-politopa P ako i samo ako zadovoljava neke dosta komplikovane nelinearne relacije. Te relacije su ekvivalentne sa tim da postoji neka graduisana algebra $A = \bigoplus_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} A_i$ takva da je $\dim A_i = a_i$, tj. da je a_i Hilbert-ova funkcija neke graduisane algebre.

Dovoljnost tih uslova su pokazali L.Billera i C. Lee u radu [20], tako što su za zadanu graduisanu algebru konstruisali simplicijalan politop kojem je g-vektor Hilbert-ova funkcija te algebre.

Nužnost je pokazao R. Stanley u radu [79], koristeći tehnike iz algebarske geometrije. Hilbertova funkcija za kohomologiju torusnog varijeteta T_P asociranog simplicijalnom politopu P je tačno h-vektor politopa P. Teška Lefschetz-ova teorema kaže da postoji klasa ζ^1 u kohomologiji T_P takva da je množenje sa tom klasom injekcija. Stoga, faktor algebra $H^*(T_P)/\zeta^1 H^*(T_P)$ za Hilbertovu funkciju ima tačno g-vektor politopa P.

Tako je skup f-vektora simplicijalnih politopa je opisan sa sledećom teoremom:

TEOREMA 1.2.3 (g-teorema, L. Billera-C. Lee [20], R. P. Stanley [79]). *Vektor $\mathbf{h} = (h_0, h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{Z}^n$ je h-vektor nekog simplicijalnog n-politopa ako i samo ako vrijedi:*

a) $h_0 = 1$

b) $h_i = h_{n-i}$

c) $(h_0, h_1 - h_0, h_2 - h_1 \ldots, h_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} - h_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1})$ *je Hilbertova funkcija neke graduisane algebre*

Interesantno pitanje postavljeno je u [53]:
Da li postoji neka klasa n-politopa za koju je dimenzija podprostora generisanog f-vektorima između $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ i n?

Prirodan kandidat za to su kvazisimplicijalni politopi, tj. politopi kojima su sve maksimalne strane simplicijalni politopi. Međutim, (vidi u [53]) nije teško pokazati da f-vektori kvazisimplicijalnih politopa generišu isti podprostor kao i f-vektori svih politopa. Kao zanimljive otvorene probleme, Günter Ziegler u [93] navodi:

- Karakterizacija f-vektora 4-politopa.
- Karakterizacija f-vektora kubičnih n-politopa (sve strane su $(n-1)$-kocke).
- Karakterizacija f-vektora centralno-simetričnih simplicijalnih n-politopa.

1.3 Flag f-vektor politopa i poseta

Jedno od objašnjenja za poteškoće u karakterizaciji f-vektora konveksnih politopa je to da u f-vektoru nije sadržano dovoljno informacija o kombinatornoj strukturi politopa. Zato se posmatra dosta komplikovanija numerička karakteristika poseta, flag f-vektor.

Za graduisan poset P ranga $n+1$ i $S \subseteq [n]$ sa f_S se označava broj lanaca $x_1 < x_2 < \cdots < x_{|S|}$ u P za koje je $\{r(x_1), r(x_2), \cdots, r(x_{|S|})\} = S$. Niz $(f_S(P))_{S\subseteq[n]} \in \mathbb{R}^{2^n}$ se naziva flag f-vektor poseta P.

Flag h-vektor je niz $(h_S)_{S\subseteq[n]}$, dobijen kao linearna transformacija flag f-vektora:

$$h_S(P) = \sum_{T\subseteq S} (-1)^{|S\setminus T|} f_T(P). \tag{1.4}$$

Očigledno je gornja transformacija regularna jer je $f_S(P) = \sum_{T\subseteq S} h_S$.

Sada se može postaviti pitanje karakterizacije flag f-vektora za neke klase graduisanih poseta:
Ako je $\mathcal{G}$ neka klasa graduisanih poseta ranga $n+1$ naći nužne i dovoljne uslove da je $(x_1, x_2, \ldots, x_{2^n}) \in \mathbb{Z}^{2^n}$ flag f-vektor nekog poseta iz $\mathcal{G}$.

Iako je naći karakterizaciju flag f-vektora znatno teže nego u slučaju f-vektora (ni za jednu klasu nije opisana potpuna karakterizacija), osnovni koraci u rješavanju tih problema su isti. Jedan od najvažnijih rezultata u karakterizaciji flag f-vektora poseta je lista svih linearnih relacije koje vrijede za flag f-vektore Euler-ovih poseta.

TEOREMA 1.3.1 (M. Bayer-L. Billera, [7]). *Neka je P graduisan Euler-ov poset ranga $n+1$ i $S \subset [n]$. Neka je $\{i,k\} \subseteq S \cup \{0, n+1\}, i < k-1$ takvi da nema elemenata $j \in S$ takvih da je $i < j < k$. Tada vrijedi*

$$\sum_{j=i+1}^{k-1} (-1)^{j-i-1} f_{S\cup\{j\}}(P) = (1 + (-1)^{k-i}) f_S(P) \tag{1.5}$$

Kako su relacije (1.5) analogne sa Dehn-Sommerville relacijama za f-vektor simplicijalnih politopa, uobičajen naziv za jednakosti u (1.5) je uopštene Dehn-Sommerville relacije (i dokaz teoreme u radu [7] slijedi originalni Sommerville-ov dokaz relacija, vidjeti u [8].)

Za prirodan broj n, definiše se $\mathcal{S}^n = \{S \subseteq [n-1] :$ S ne sadrži uzastopne brojeve$\}$. Sada, kao posledica prethodne teoreme dobija se

TEOREMA 1.3.2 (M. Bayer-L. Billera, [7]). *Za svaki $T \subseteq [n]$ postoje netrivijalne linearne relacije kojima je $f_T(P)$ moguće izraziti preko $f_S(P)$,* *gdje je $S \in \mathcal{S}^n$. Te linearne relacije vrijede za sve Euler-ove posete ranga $n+1$.*

Kako je kardinalni broj skupa $\mathcal{S}^n$ tačno n-ti Fibonacci-jev broj c_n ($c_1 = 1, c_2 = 2, c_{n+2} = c_{n+1} + c_n$), to je dimenzija podprostora $\mathbb{R}^{2^n}$ generisanog sa flag f-vektorima Euler-ovih poseta ranga $n+1$ najviše c_n.

Dalje, u radu [7] su uočili Ω^n (familiju n-politopa koji su dobijeni kao $n-1$ uzastopnih piramida ili bipiramida nad segmentom, pri čemu se bipiramida ne pojavljuje dva puta uzastopno koristi). Pokazano je da c_n politopa iz Ω^n ima afino nezavisne flag f-vektore, pa vrijedi

TEOREMA 1.3.3 (M. Bayer-L. Billera, [7]). *Za svaki prirodan broj n, dimenzija podprostora $\mathbb{R}^{2^n}$ koji generišu flag f-vektori Euler-ovih poseta ranga $n+1$ (kao i podprostora generisanog sa flag f-vektorima n-politopa) je tačno n-ti Fibonacci-jev broj c_n.*

Gil Kalai je u radu [63] opisao još jednu familiju n-politopa čiji su flag f-vektori generišu podprostor flag f-vektora svih politopa. Takođe, opisani su i podprostori generisani sa flag f-vektorima nekih klasa n-politopa. Na primjer: Kažemo da je politop k-simplicijalan ako su sve njegove k-strane simpleksi. Za $1 \leq k \leq n$, definiše se SIMP(n,k) kao podprostor generisan sa flag f-vektorima k-simplicijalnih n-politopa. Tada je:

$$\dim \mathrm{SIMP}(n,k) = [\frac{n}{2}] + \sum_{i=k+1}^{n-1} [\frac{i}{2}] c_{n-i-1} + 1$$

Specijalno, za $k = n-2$ dobija se:

POSLJEDICA 1.3.4. *Dimenzija podprostora $\mathbb{R}^{2^n}$ koji generišu flag f-vektori kvazisimplicijalnih n-politopa je tačno n.*

Do kraja poglavlja ćemo opisati još neke rezultate u karakterizaciji flag f-vektora nekih klasa poseta.

Za $\mathcal{G}_n$, klasu svih graduisanih poseta ranga $n+1$, u radu [18] L. Billera i G. Hetyei posmatraju konus K_n nad zatvorenjem konveksnog omotača tačaka iz $\{(f_S(P))_{S\subseteq[n]} : P \in \mathcal{G}_n)\}$. Opisane su sve esencijalne linearne nejednakosti koje vrijede za dualni konus K_n^*, tj. zrake konusa K_n.

Skup T je bloker za $\mathcal{S}$ (neka familija podskupova konačnog skupa X) ako $T \cap S \neq \emptyset$ za sve skupove sadržane u $\mathcal{S}$. Sa $\mathbf{B}_X(\mathcal{S})$ se označava skup svih blokera familije $\mathcal{S}$. Sistem intervala $\mathcal{I}$ je familija intervala u $[n]$ (može biti i prazan skup).

TEOREMA 1.3.5. *Izraz $\sum_{S\subseteq[n]} a_S f_S(P)$ je nenegativan za sve posete P ako i samo ako je*

$$\sum_{S\in\mathbf{B}_{[n]}(\mathcal{I})} a_S \geq 0 \text{ za svaki sistem intervala } \mathcal{I} \text{ na } [n]. \tag{1.6}$$

Nužnost prethodnih uslova se lako pokaže tako što se za svaki sistem intervala $\mathcal{I}$ konstruiše niz poseta $\{P_{(n,\mathcal{I},k)} : k \in \mathbb{N}\}$ kod kojih su za sve $S \in \mathbf{B}_{[n]}(\mathcal{I})$ svi f_S jednaki i proizvoljno veći od ostalih f_T, za $T \notin \mathbf{B}_{[n]}(\mathcal{I})$. Dovoljnost se pokaže metodom FA-označavanja (first atom) ivica u Hasseovom dijagramu proizvoljnog graduisanog poseta.

Jedna od posljedica teoreme 1.3.5 je

POSLJEDICA 1.3.6. *Za svaki sistem intervala I na $[n]$, nejednakosti u* (1.6) *definišu maksimalne strane za K_n^*. Stoga, konus K_n ima Catalan-ov broj zraka $\frac{1}{n+2}\binom{2n+2}{n+1}$.*

U radu [18] se dalje posmatraju zrake konusa K_n^*, tj. esencijalne linearne nejednakosti za flag f-vektore graduisanih poseta ranga n. Pokazano je da je neke zrake K_{n+1}^* moguće dobiti od zraka konusa K_n^* (operacijom "lifting") ili od zraka konusa K_p^* i K_{n+1-p}^* (konvolucijom, uz određene uslove). Takođe opisane su zrake konusa K_n^* za $n \leq 5$. Za $n = 6$, postoji 796 zraka konusa K_6^*, a samo 131 od njih su dobijene operacijama liftinga i konvolucije. Interesantan otvoren problem je naći neku karakterizaciju zraka konusa K_n^*, tj. opisati sve esencijalne nejednakosti koje vrijede za flag f-vektore graduisanih poseta ranga $n+1$.

Ako su svi intervali $[a, b]$ u nekom sistemu intervala parni ($b-a$ je paran), kaže se da je $\mathcal{I}$ paran sistem intervala. Poset P ranga $n+1$ je polu-Euler-ov ako za sve $x, y \in P, x < y$ vrijedi

$$\sum_{i=1}^{r(y)-r(x)-1} (-1)^{i-1} f_i([x,y]) = \frac{1}{2}(1 + (-1)^{r(y)-r(x)})$$

Prethodne relacije su ekvivalentne sa činjenicom da je dupli poset $D(P)$ (svaka ivica u Hasse dijagramu poseta P se zamijeni sa $\bowtie$) Euler-ov. Poseti $P_{(n,\mathcal{I},k)}$, koji su poslužili za dokaz nužnosti relacija (1.6) (tj. zrake u konusu nad flag f-vektorima svih graduisanih poseta) su polu-Euler-ovi ako i samo ako je $\mathcal{I}$ paran sistem intervala. To je bio motiv da M. Bayer i G. Hetyei u radu [10] posmatraju konuse generisne flag f-vektorima Euler-ovih i polu-Euler-ovih poseta. Pokazali su da za paran sistem intervala poseti $P_{(n,\mathcal{I},k)}$ (odnosno njima asocirani dupli poseti) generišu zrake u konusu flag f-vektora polu-Euler-ovih (Euler-ovih) poseta. Postavili su sledeću

HIPOTEZA 1.3.7. *Konus nad flag f-vektorima svih Euler-ovih poseta je isti kao i konus nad flag f-vektorima duplih polu-Euler-ovih poseta.*

Takođe, u radu [10] su dokazane neke nove linearne nejednakosti koje vrijede za sve Euler-ove posete ranga $n+1$.

TEOREMA 1.3.8 (M. Bayer, G. Hetyei, [10]). *Neka je $1 \leq i < j < k \leq n$. Tada za svaki Euler-ov poset ranga $n+1$ vrijedi:*

$$f_{ik} - 2f_i - 2f_k + 2f_j \geq 0.$$

Poset P je r-debeo ako svaki neprazan otvoren interval sadrži bar r elemenata. Primjetimo da su Euler-ovi poseti 2-debeli. U radu [11] je pokazano da je zatvoreni konus generisan flag f-vektorima r-debelim posetima linearno ekvivalentan sa zatvorenim konusom koji generišu flag f-vektori svih graduisanih poseta.

1.4 Neka kombinatorna svojstva politopa i poseta

Prvi "dokaz" da f-vektori konveksnih politopa zadovoljavaju Euler-ovu relaciju dao je (kako se kaže u [38] i [90]) Ludwig Schläfly, pretpostavljajući da se svaki n-politop može sastaviti "lijepeći" jednu po jednu $(n-1)-$stranu tako da svaku stranu (osim posljednje) na prethodno sastavljen dio lijepimo po $(n-2)$-disku. Ta ideja o "pravilnom" sastavljanju nekog kompleksa od maksimalnih strana je iskorištena za definiciju šelinga. Iako se šeling može definisati i za CW-komplekse (vidjeti u radu [30]), ovdje ćemo posmatrati samo politopske komplekse.

DEFINICIJA 1.4.1 ([90]). Neka je $\mathcal{P}$ homogen, d-dimenzionalan politopski kompleks. Šeling kompleksa $\mathcal{P}$ je linearan poredak $F_1, F_2, \ldots, F_t$ svih maksimalnih strana $\mathcal{P}$ tako da je ili $d = 0$ (tj. maksimalne strane kompleksa $\mathcal{P}$ su tačke) ili za svako $1 < j \leq t$ vrijedi:

$$F_j \cap (\bigcup_{i=1}^{j-1} F_i) = G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_r \tag{1.7}$$

gdje je $G_1, G_2, \ldots, G_r$ početni dio nekog šelinga za ∂F_j.

Ako za politopski kompleks postoji bar jedan šeling, kaže se da je složiv. Schläfly-jeva slutnja je dokazana tek sledećim teoremom:

TEOREMA 1.4.2 (M. Bruggesser-P. Mani [38], 1970). *Granica n-politopa je složiv politopski kompleks.*

Nije teško pokazati da je svaki poredak maksimalnih strana simpleksa Δ_n šeling za $\partial\Delta_n$. Tako definicija šeling za simplicijalne komplekse postaje znatno jednostavnija (primjedba 8.3 u [90]):

TEOREMA 1.4.3. *Neka je $\mathcal{C}$ proizvoljan homogen simplicijalni kompleks. Linearan poredak $F_1, F_2, \ldots, F_t$ maksimalnih strana kompleksa $\mathcal{C}$ je šeling ako i samo ako vrijedi:*
za sve $1 \leq i < j \leq t$ postoji $k < j$ i tjeme $x \in F_j$ tako da je

$$F_i \cap F_j \subseteq F_k \cap F_j = F_j \setminus \{x\} \tag{1.8}$$

A. Björner u radu [30] uopštava definiciju šelinga za nehomogene simplicijalne komplekse.

Za složive simplicijalne komplekse h vektor ima sledeću kombinatornu interpretaciju (više detalja se može naći u [35] i [90]):

Neka je $F_1, F_2, \ldots, F_t$ fiksiran šeling za neki simplicijalni kompleks $\mathcal{C}$. Sa

$$R_j = \{x \in F_j : F_j \setminus \{x\} \subseteq F_i \text{ za neki } i < j\}$$

se definiše restrikcija strane F_j u tom poretku. Slijedeći Schläfly-jevu ideju, R_j je minimalna nova strana koju donese simpleks F_j u sastavljanju kompleksa $\mathcal{C}$. Tip strane F_j u datom šelingu definiše se kao $\mathrm{type}(F_j) = |R_j|$. Broj maksimalnih strana tipa i u kompleksu $\mathcal{C}$ ne zavisi od izbora šeling. To pokazuje sledeća teorema (vidjeti u [90]):

TEOREMA 1.4.4. *Neka je $\mathcal{C}$ složiv, n-dimenzionalnan simplicijalni kompleks i neka je $h(\mathcal{C}) = (h_0, h_1, \ldots, h_n)$. Tada je h_i jednak broju maksimalnih strana tipa i u proizvoljnom šelingu kompleksa $\mathcal{C}$.*

Jedna od posledica prethodne teoreme je nenegativnost h-vektora za složive simplicijalne komplekse.

Koncept šelinga se pokazao veoma koristan za bolje razumjevanje f-vektora simplicijalnih politopa. Na primjer, koristeći reverzibilni šeling, lako je pokazati Dehn-Sommerville relacije. Pomoću šelinga, P. McMullen je u radu [68] dokazao da od svih d-politopa sa tačno n-tjemena najveći broj strana u svakoj dimenziji ima ciklički politop $C_d(n)$.

Sledeća teorema se može naći u [14], te kao zadatak u [85].

TEOREMA 1.4.5. *Neka je Γ n-dimenzionalan, složiv, simplicijalan disk i neka je $h(\Gamma) = (h_0, h_1, \ldots, h_n, 0)$. Tada je $\partial\Gamma$ simplicijalna $(n-1)-$sfera i njen $g-$vektor je:*

$$g(\partial\Gamma) = (h_0, h_1 - h_n, \ldots, h_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} - h_{n+1-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor})$$

Opišimo još neke kombinatorno-algebarske osobine simplicijalnih kompleksa.

Pojam po tjemenima dekompozabilnih kompleksa (vertex-decomposability) su uveli L. Billera i S. Provan u radu [22]. Pokazali su da za prost politop P, za koji je ∂P^* po tjemenima dekompozabilan simplicijalni kompleks, vrijedi Hirsch-ova hipoteza (diametar u grafu n-politopa P je najviše $f_{n-1} - n$). Kaže se da je homogen d-dimenzionalan simplicijalni kompleks $\mathcal{C}$ vertex-dekompozabilan ako je ispunjen jedan od sledeća dva uslova:

- $\mathcal{C}$ je n-simpleks
- postoji tjeme x takvo da su kompleksi $\mathcal{C}\backslash\{x\}$ i $\mathbf{lk}_{\mathcal{C}}(x)$ vertex-dekompozabilni.

Svojstvo vertex-dekompozabilnosti je "jače" od složivosti, tj. svaki složiv kompleks je i vertex-dekompozabilan. Ovo je u radu [91] iskoristio G. Ziegler da pokaže složivost šahovskih kompleksa. Za definiciju šahovskih kompleksa vidjeti u [32].

Za simplicijalni kompleks $\mathcal{C}$ kažemo da je Cohen-Macaulay-ev ako je određeni prsten polinoma (Stanley-Reisner-ov prsten, vidjeti u [85]) asociran tom kompleksu Cohen-Macaulay-ev. Reisner je dao topološki kriterij za ovu osobinu (vidjeti detalje u [31]):

TEOREMA 1.4.6 (Reisner). *Simplicijalni kompleks $\mathcal{C}$ je Cohen-Macaulay-ev ako i samo ako je za svaki $\sigma \in C$, redukovana simplicijalna homologija trivijalna, tj.$\widetilde{H}_i(lk_C(\sigma)) = 0$ za sve $i <$ dim $lk_{\mathcal{C}}(\sigma)$.*

Najšira poznata klasa simplicijalnih kompleksa za koju je h-vektor nenegativan su Cohen-Macaulay-jevi kompleksi. To je pokazao R. Stanley u radu [80], dajući algebarsku interpretaciju h-vektora Cohen-Macaulay-jevih kompleksa.

Više o kombinatornim osobinama simplicijalnih kompleksa se može naći u [31]. Između ostalog, u [31] je opisan "odnos" između ovih osobina. Za svaki simplicijalni kompleks $\mathcal{C}$ vrijedi:

$$\mathcal{C} \text{ je vertex-dekompozabilan} \Rightarrow \mathcal{C} \text{ je složiv} \Rightarrow \mathcal{C} \text{ je Cohen-Macaulay}$$

Definicije kombinatornih osobina simplicijalnih kompleksa se pomoću kompleksa poretka prenose na posete. Za proizvoljan poset P kažemo da je složiv, Cohen-Macaulay-jev odnosno vertex-dekompozabilan ako je takav njemu asociran kompleks $\Delta(P)$. Za graduisane posete svojstvo složivosti se može opisati sledećom definicijom:

DEFINICIJA 1.4.7 ([27]). Konačan graduisan poset P je složiv ako se svi maksimalni lanci tog poseta mogu linearno urediti $C_1, C_2, \dots, C_t$ tako da za sve $1 \le i < j \le t$ postoji $1 \le k < j$ i x u lancu C_j za koje je $C_i \cap C_j \subseteq C_k \cap C_j = C_j \setminus \{x\}$. Takav poredak maksimalnih lanaca nazivamo šeling poredak.

Metodu označavanja ivica u Hasse-ovom diagramu poseta je uveo R. Stanley u radu [78]. Označavanje ivica za neki poset P je preslikavanje ivica Hasse-ovog dijagrama poseta P u neki poset Λ, tj. $\lambda : \mathcal{E}(P) \to \Lambda$. Najčešće je Λ poset prirodnih brojeva.
Primjetimo da proizvoljno označavanje $\lambda : \mathcal{E}(P) \to \Lambda$ poseta P svakom lancu $C{:}x = x_0 \prec x_1 \prec \cdots \prec x_{k-1} \prec x_k = y$ dužine k dodijeli uređenu k-torku $\lambda(C) = (\lambda(x_0 \prec x_1), \lambda(x_1 \prec x_2), \dots, \lambda(x_{k-1} \prec x_k))$. Za lanac $C{:}x = x_0 \prec x_1 \prec \cdots \prec x_{k-1} \prec x_k = y$ kažemo da je rastući u intervalu $[x, y]$ ako je $\lambda(x_0 \prec x_1) \le \lambda(x_1 \prec x_2) \le \ldots \le \lambda(x_{k-1} \prec x_k)$ u posetu Λ.

Za $\lambda : \mathcal{E}(P) \to \Lambda$ kažemo da je R-označavanje ako za sve $x < y$ u posetu P postoji jedinstven rastući maksimalan lanac u $[x, y]_P$.

Koncept R-označavanja poseta, izmedju ostalog daje kombinatornu interpretaciju flag h-vektora.

Neka je λ neko R označavanje graduisanog poseta P. Za maksimalni lanac $C{:}\widehat{0} = x_0 \prec x_1 \prec \cdots \prec x_n \prec x_{n+1} = \widehat{1}$ poseta P definišemo skup padova $D(C) = \{i \in [n] : \lambda(x_{i-1} \prec x_i) > \lambda(x_i \prec x_{i+1})\}$. Može se pokazati da vrijedi:

TEOREMA 1.4.8 (R. Stanley, [82]). *Neka je P poset ranga $n+1$ koji ima $R-$označavanje λ. Tada, za sve $S \subseteq [n]$, broj maksimalnih lanaca u P kojima skup padova jednak S je jednak $h_S(P)$.*

Tako se dobije kombinatorna interpretacija za flag h-vektor poseta. Stoga, ako poset dopušta R-označavanje, njegov flag h-vektor je nenegativan.

Primjedba 1.4.9. Konačna mreža je superrješiva ako u toj mreži postoji maksimalni lanac C, takav da je podmreža generisana sa C i bilo kojim drugim lancem te mreže distributivna. Primjeri superrješivih mreža su mreže particija i mreže podgrupa superrješivih grupa. Ako je P superrješiva mreža sa lancem $C{:}\widehat{0} = x_0 \prec x_1 \prec \cdots \prec x_n \prec x_{n+1} = \widehat{1}$, tada je $\lambda : \mathcal{E}(P) \to \mathbb{Z}$

definisano sa $\lambda(x \prec y) = min\{i : x \vee x_i = x \vee x_i\}$ jedno R-označavanje mreže P.

Najviše primjena svakako imaju L-označavanja poseta, koja je definisao A. Björner u radu [27]:

DEFINICIJA 1.4.10. Za $\lambda : \mathcal{E}(P) \to \Lambda$ kažemo da je L-označavanje poseta P ako su ispunjeni sledeći uslovi:

(i) λ je R-označavanje

(ii) Ako je $[x, y]$ proizvoljan interval poseta P i $x = x_0 \prec x_1 \prec \cdots \prec x_{k-1} \prec x_k = y$ jedinstven rastući lanac u $[x, y]$ tada za svaki $x \prec z, z \neq x_1$ vrijedi $\lambda(x, x_1) <_\Lambda \lambda(x, z)$.

Za posete koji imaju L-označavanje kaže se da su leksikografski složivi. Glavni rezultat u radu [34] je sledeća teorema:

TEOREMA 1.4.11. *Svaki leksikografski složiv poset je složiv.*

Takođe, prethodna teorema vrijedi i uz nešto slabije pretpostavke za preslikavanje $\lambda : \mathcal{E}(P) \to \Lambda$ (CL-složivi poseti su složivi, vidjeti u [35], [36]).

Primjedba 1.4.12. Neka je P konačna mreža i $I(P)$ skup "join"-ireducibilnih elemenata u P. Svako preslikavanje $\omega : I(P) \to \mathbb{N}$ sa $\lambda(x \prec y) = min\{\omega(z) : x < x \vee z = y\}$ definiše indukovano označavanje $\lambda : \mathcal{E}(P) \to \mathbb{N}$. Za mrežu P kaže se da je dopustiva ako je graduisana i ako postoji preslikavanje ω takvo da je indukovano označavanje λ neko R-označavanje. Sve superrješive mreže su dopustive. A. Björner je u radu [27] pokazao da je za dopustive mreže indukovano preslikavanje λ i L-označavanje. Tako su na osnovu teoreme 1.4.11 dopustive mreže složive (pa tako i Cohen-Macaulay-jeve, što je bila hipoteza R. Stanleya).

L-označavanje $\lambda : L \to [n]$ nekog poseta ranga n, kod kojeg je niz oznaka u svakom maksimalnom lancu C predstavlja jednu permutaciju, (tj. $\lambda(C) \in \mathbb{S}_n$). P. McNamara u svojoj disertaciji naziva S_nL-označavanje. R. Stanley je pokazao da sve superrješive mreže ranga n imaju S_nL-označavanje. U [70] je dokazano da vrijedi i obrnuto tvrđenje:

TEOREMA 1.4.13. *Konačna graduisana mreža ranga n ima S_nL-označavanje ako i samo ako je superrješiva.*

1.5 cd-indeks

Flag f-vektor proizvoljnog graduisanog poseta P ranga $n+1$ se može zapisati kao funkcija generatrisa u nekomutativnim promjenjivim $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$:

$$\Psi_P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{S \in [S]} f_S \; w_S \tag{1.9}$$

gdje je $w_S = w_1 w_2 \cdots w_n$ i $w_i = \mathbf{b}$ za $i \in S$, odnosno $w_i = (\mathbf{a} - \mathbf{b})$, za $i \notin S$. Homogen polinom Ψ_P se naziva **ab**-indeks poseta P.

Ekvivalentno, **ab**-indeks poseta se dobije kao zbir težina svih lanaca u P. Svakom lancu c:$\hat{0} < x_1 < x_2 < \cdots < x_k < \hat{1}$ u posetu P ranga $n+1$ se dodijeli težina $wt(c) = w_1 w_2 \cdots w_n$ gdje je

$$w_i = \begin{cases} \mathbf{b}, & \text{ako je } \; i \in \{r(x_1), r(x_2), \ldots, r(x_k)\}; \\ \mathbf{a} - \mathbf{b}, & \text{inače.} \end{cases}$$

Sada, **ab**-indeks poseta P se definiše sa

$$\Psi_P = \sum_{c\text{-lanac u } P} wt(c) \tag{1.10}$$

Na osnovu relacija (1.4), koeficijenti polinoma Ψ_P se mogu prepoznati kao flag h-vektor, tj. pomoću flag h-vektora **ab**-indeks se može zapisati kao:

$$\Psi_P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{S \in [S]} h_S \; w_S$$

gdje je $w_S = w_1 w_2 \cdots w_n$ i $w_i = \mathbf{b}$ za $i \in S$, odnosno $w_i = \mathbf{a}$, za $i \notin S$.

Direktna posledica teoreme 1.4.8 je da poseti koji dopuštaju R-označavanje imaju nenegativan **ab**-indeks.

Činjenica da flag f-vektor nekog graduisanog poseta zadovoljava uopštene Dehn-Sommerville relacije je ekvivalentna sa tim da je **ab**-indeks tog poseta moguće zapisati (sa cjelobrojnim koeficijentima) u promjenjivim $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ i $\mathbf{d} = \mathbf{ab} + \mathbf{ba}$, tj. $\Psi_P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{Z}\langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle$. Taj nekomutativan, homogen polinom u promjenjivim $\mathbf{c}$ i $\mathbf{d}$ naziva se **cd**-indeks poseta P i označava se sa $\Phi(P)$ ili sa $\Phi_P(\mathbf{c}, \mathbf{d})$. Na primjer, **cd**-indeks n-tougla P_n je

$$\Psi_{P_n}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{aa} + (n-1) \cdot \mathbf{ab} + (n-1) \cdot \mathbf{ba} + \mathbf{bb} =$$

$$= (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 + (n-2) \cdot (\mathbf{ab} + \mathbf{ba}) = \mathbf{c}^2 + (n-2) \cdot \mathbf{d} = \Phi_{P_n}(\mathbf{c}, \mathbf{d})$$

Slično, za proizvoljan 3-politop P vrijedi (vidjeti u [17])

$$\Phi_P = \mathbf{c}^3 + (f_0 - 2) \cdot \mathbf{dc} + (f_2 - 2) \cdot \mathbf{cd} \tag{1.11}$$

Egzistenciju **cd**-indeksa je prvi uočio Johnatan Fine (nije publikovano, vidjeti u [12]). Prvi publikovan dokaz egzistencije **cd**-indeksa je sledeća teorema:

TEOREMA 1.5.1 (M. Bayer, A. Klapper, [12]). *Neka je P graduisan poset. Tada $\Psi_P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{Z}\langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle$ ako i samo ako flag h-vektor poseta P zadovoljava uopštene Dehn-Sommerville relacije.*

U dokazu se posmatra podprostor polinomijalne algebre $\mathbb{Q}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ generisan sa **ab**-indeksima poseta za čije flag f-vektore vrijede uopštene Dehn-Sommerville relacije, i zatim se pokaže da je taj podprostor tačno $\mathbb{Q}\langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle$.

U slučaju Euler-ovih poseta, egzistencija **cd**-indeksa se može pokazati mnogo jednostavnije, vidjeti u [15] i [84]. U radu [1] je dat dokaz egzistencije **cd**-indeksa za politope, pomoću infitenzimalnih Hopf-ovih algebri.

Primjetimo da je flag f-vektor poseta moguće rekonstruisati iz **cd**-indeksa poseta i da **cd**-indeks poseta ranga $n+1$ ima tačno Fibonacci-jev broj c_n monoma u promjenjivim **c** i **d**. Stoga se može reći da **cd**-indeks kodira flag f-vektor poseta na najefikasniji način (koeficijenti **cd**-indeks su baza za podprostor razapet sa flag f-vektorima politopa, vidjeti u [21]).

Nažalost, veza između flag f-vektora poseta i koeficijenata **cd**-indeksa je veoma komplikovana. Richard Stanley koeficijente **cd**-indeksa naziva "tamna strana mjeseca". U radu [17] se daje veza tih koeficijenata i flag f-vektora:

Za $S \subseteq [n]$, takav da $i \in S \Rightarrow \{i-1, i+1\} \cap S = \emptyset$, i za Euler-ov poset P ranga $n+1$ definiše se k-vektor:

$$k_S = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S \setminus T|} h_T = \sum_{T \subseteq S} (-2)^{|S \setminus T|} f_T$$

Ako je $w = \mathbf{c}^{n_1} \mathbf{d} \mathbf{c}^{n_2} \cdots \mathbf{d} \mathbf{c}^{n_{p+1}}$ neki **cd**-monom stepena n, $[w]\Phi(P)$ koeficijent uz w u $\Phi(P)$, tada (propozicija 7.1 u [17]) vrijedi:

$$[w]\Phi(P) = \sum_{(i_1, i_2, \ldots, i_p)} (-1)^{(m_1 - i_1) + (m_2 - i_2) + \cdots + (m_p - i_p)} k_{\{i_1, i_2, \ldots, i_p\}}$$

gdje je $m_0 = 1$, $m_i = m_{i-1} + n_i + 2$, a sumira se po svim uređenim p-torkama $(i_1, i_2, \ldots, i_p)$ za koje je $m_{j-1} \leq i_j \leq m_j - 2$.

Druge formule za koeficijente **cd**-indeksa pomoću flag h-vektora, kao i formule za torusni h-vektor u terminu **cd**-indeksa se mogu naći u radu [9].

Za podprostor generisan sa flag f-vektorima politopa (Euler-ovih poseta) postoji mnogo baza, vidjeti u [75].

Zašto je onda interesantan baš **cd**-indeks? Evo samo nekoliko mogućih odgovora:

1. **cd** indeks se "dobro" ponaša u odnosu na neke operacije sa posetima (politopima).

2. **cd**-indeks politopa (svih S-složivih CW-sfera) je nenegativan, pa postoji nada da će se naći kombinatorna ili algebarska interpretacija za koeficijente polinoma Φ_P.

3. neke nejednakosti za flag f-vektor poseta (politopa) se mogu opisati pomoću **cd**-indeksa.

U glavama 3 i 4 će biti više riječi o promjeni **cd**-indeksa pri nekim operacijama. Stoga, sada ćemo posmatrati samo neke osnovne operacije:
Ako su P i Q graduisani poseti tada je **cd**-indeks njihovog zvijezda proizvoda

$$\Psi_{P*Q} = \Psi_P \cdot \Psi_Q; \text{ ako su} P \text{ i } Q \text{ Euler-ovi tada je } \Phi_{P*Q} = \Phi_P \cdot \Phi_Q. \quad (1.12)$$

Tako, za suspenziju nad CW-sferom X vrijedi:

$$\Phi_{s(X)} = \Phi_X \cdot \mathbf{c}. \quad (1.13)$$

"Zvijezda" involucija $*$ na **ab**-monomima se definiše sa

$$(u_1 u_2 \cdots u_n)^* = u_n \cdots u_2 u_1$$

i proširi se linearno na algebru **ab**-polinoma. Primjetimo da je $*$ dobro definisana i na **cd**-polinomima.

Sada, za **ab**-indeks dualnog poseta P^* vrijedi

$$\Psi_{P^*} = \Psi_P^* \text{ odnosno } \Phi_{P^*} = \Phi_P^* \text{ (za Euler-ov poset } P) \quad (1.14)$$

Na **ab**-polinomima se može definisati i involucija $\hat{\omega}$ koja vrši "zamjenu" promjenjivih:

$$\hat{\omega}(\mathbf{a}) = \mathbf{b} \ , \ \hat{\omega}(\mathbf{b}) = \mathbf{a} \ , \ \hat{\omega}(u_1 u_2 \cdots u_n) = \hat{\omega}(u_1)\hat{\omega}(u_2) \cdots \hat{\omega}(u_n).$$

Do kraja poglavlja ćemo opisati ostale razloge za proučavanje **cd**-indeksa.

U radu [87] je istaknut značaj problema pozitivnosti u algebarskoj kombinatorici. Ako su za neki poset P svi koeficijenti polinoma $\Phi_P(\mathbf{c}, \mathbf{d})$ nenegativni (to ćemo zapisati sa $\Phi_P \geq 0$), kažemo da taj poset ima nenegativan **cd**-indeks. Jedan od glavnih problema vezanih za **cd**-indeks je opisati najširu klasu poseta čiji su **cd**-indeksi nenegativni. Za **ab**-indeks poseti koji dopuštaju R-označavanje imaju nenegativne koeficijente. Ako je $\lambda(c) = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ oznaka za neki maksimalan lanac c, tada se definiše **ab**-monom (monom "pada") tog lanca sa

$$u(c) = u_1 \cdot u_2 \cdots u_{n-1} \text{ gdje je } u_i = \begin{cases} \mathbf{a}, & \text{ako je } \lambda_i < \lambda_{i+1}; \\ \mathbf{b}, & \text{ako je } \lambda_i < \lambda_{i+1}. \end{cases}$$

Tada je **ab**-indeks poseta P

$$\Psi_P = \sum_{c\text{-maks. lanac u } P} u(c). \tag{1.15}$$

Primjetimo da je nenegativnost **cd**-indeksa jača od nenegativnosti **ab**-indeksa. Očigledno je da $\Phi_P \geq 0 \Rightarrow \Psi_P \geq 0$, dok obrnuto ne mora da vrijedi:

$$\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2 - \mathbf{d}$$

U radu [12] je postavljena sledeća hipoteza

HIPOTEZA 1.5.2. *Koeficijenti* **cd***-indeksa regularnih CW-sfera su nenegativni.*

Richard Stanley je u radu [84] pokazao da sve S-složive, regularne CW-sfere imaju nenegativan **cd**-indeks. Kako su svi politopi S-složivi, to politopi imaju nenegativan **cd**-indeks, (što je potvrdilo hipotezu J. Fine-a).

Najveći otvoren problem vezan za **cd**-indeks poseta je sledeća

HIPOTEZA 1.5.3. *Za proizvoljan Gorenstein*-ov poset P vrijedi $\Phi_P \geq 0$.*

Primjetimo da se svaka linearna nejednakost koja vrijedi za flag f-vektore svih Gorenstein*-ovih poseta može zapisati i u bazi koeficijenata **cd**-indeksa:

$$\sum_w \alpha_w \cdot [w]\Phi_P \geq 0 \tag{1.16}$$

Neka je $w = w_1 w_2 \cdots w_r$ proizvoljan **cd** monom stepena n, različit od $\mathbf{c}^n$. Za $m \in \mathbf{N}$ posmatrajmo niz poseta P_m definisanih sa

$$P_m = T_1 * T_2 * \cdots * T_r, \text{ gdje je } T_i = \begin{cases} B_2, & \text{ako je } w_i = \mathbf{c}; \\ Q_m, & \text{ako je } w_i = \mathbf{d} \end{cases} \tag{1.17}$$

pri čemu je Q_m poset strana $(m+2)$-tougla. Na osnovu relacija (1.12), **cd**-indeks poseta P_m dobijemo tako što svaki $\mathbf{d}$ u w zamjenimo sa $\mathbf{c}^2 + m\mathbf{d}$. Ako w ima s koeficijenata jednakih $\mathbf{d}$, tada je koeficijent uz w u Φ_{P_m} jednak m^s, dok su svi ostali koeficijenti manji. Drugim riječima, za svaki **cd** monom $w \neq c^n$ možemo konstruisati Gorenstein*-ov poset P kod kojeg je koeficijent uz w proizvoljno veći od ostalih koeficijenata. Stoga, svi koeficijenti α_w u (1.16) moraju biti nenegativni, pa vrijedi:

TEOREMA 1.5.4 (R. P. Stanley, [86]). *Ako je hipoteza 1.5.3 tačna, onda su sve linearne nejednakosti za flag f-vektor Gorenstein*-ovih poseta posledica nenegativnosti koeficijenata* **cd**-*indeksa. Drugim riječima,* $[w]\Phi_P \geq 0$ *su sve esencijalne linearne nejednakosti za konus generisan sa flag f-vektorima Gorenstein*-ovih poseta.*

Kako poseti P_m nisu mreže strana politopa (nažalost!), i pored toga što znamo za nenegativnost za **cd**-indeksa politopa, o konusu generisanom sa flag f-vektorima politopa i dalje ne znamo ništa više. U radu [74] je pokazano da je Stanley-jeva hipoteza tačna za sve Gorenstein*-ove posete ranga manjeg od sedam. Za posete ranga sedam ne zna se da li su koeficijenti uz $\mathbf{ccdd}, \mathbf{dccd}, \mathbf{ddcc}$ i $\mathbf{ddd}$ nenegativni.
Margaret Bayer je u radu [4] posmatrala znak koeficijenata u **cd**-indeksu proizvoljnog Euler-ovog poseta P. Koeficijenti uz **cd** monome

- $\mathbf{c}^i\mathbf{d}\mathbf{c}^j$ za koje je $\min\{i,j\} \leq 1$
- $\mathbf{c}^i\mathbf{d}\mathbf{c}\cdots\mathbf{c}\mathbf{d}\mathbf{c}^j$ (bez ograničenja za i i j, sa bar dva $\mathbf{d}$)

proizvoljnog Euler-ovog poseta su uvijek nenegativni, i mogu biti proizvoljno veliki. Uz ostale **cd**-monome (osim $\mathbf{c}^n$) koeficijenti u **cd**-indeksu proizvoljnog Euler-ovog poseta nisu ograničeni, tj. za svaki takav monom w može se naći poset P za koji je $[w]\Phi_P$ po volji velik, odnosno mali.

Za simplicijalni kompleks $\mathcal{C}$ kaže se da je flag kompleks ako vrijedi

$$\text{za sve } S \subseteq V(\mathcal{C}), S \notin \mathcal{C} \text{ postoji } T \subseteq S, |T| = 2, T \notin \mathcal{C}$$

Primjetimo da je prethodni uslov ispunjen za za komplekse poretka (u svakom antilancu postoji antilanac od dva elementa).

Nenegativnost koeficijenata **cd**-indeksa ima veze i sa sledećom hipotezom o flag kompleksima:

HIPOTEZA 1.5.5 (Charney-Davis). *Neka je Δ flag simplicijalni kompleks koji je homološka $(d-1)$-sfera za neki paran d. Tada je*

$$\mathbf{CD}(\Delta) = (-1)^{\frac{d}{2}}(h_0(\Delta) - h_1(\Delta) + h_2(\Delta) - \cdots + (-1)^i h_i(\Delta) + \cdots - h_{d-1}(\Delta) + h_d(\Delta)) \geq 0$$

Za neki poset P ranga $n+1$, na osnovu relacija (1.4) vrijedi:

$$\mathbf{CD}(\Delta(P)) = \sum_{S\subseteq[n]} (-1)^{|S|} h_S(P) = \Psi_P(-1,1)$$

Ako je P Euler-ov poset i n paran, dobijamo da je

$$\mathbf{CD}(\Delta(P)) = (-2)^{\frac{n}{2}}[d^{\frac{n}{2}}]\Phi_P$$

Sada možemo zaključiti da je nenegativnost koeficijenta uz $\mathbf{d}^{\frac{n}{2}}$ u Φ_P ekvivalentna sa Charney - Davis hipotezom za kompleks $\Delta(P)$. Na vezu **cd**-indeksa i Charney - Davis hipoteze, prvi je ukazao E. Babson (vidjeti u [86]).

R. Stanley je postavio hipotezu da od svih Gorenstein*-ovih poseta ranga n, najmanje koeficijente ima **cd**-indeks Boole-ove mreže B_{n+1}. L. Billera i R. Ehrenborg su u radu [15] pokazali

TEOREMA 1.5.6. *Za neki politop P i za svaku njegovu netrivijalnu stranu F vrijedi*

- $\Phi_P \geq \Phi_F \cdot Pyr(\Phi_{P/F})$
- $\Phi_P \geq Pyr(\Phi_F) \cdot \Phi_{P/F}$

Kao posledica prethodne teoreme dobija se

POSLJEDICA 1.5.7. *Za svaki n-politop P vrijedi $\Phi_P \geq \Phi_{\Delta_n}$.*

Dakle, od svih n-politopa, najmanji **cd**-indeks ima n-simpleks (Stanley-jeva hipoteze je tačna za politope). Takođe pokazali su da od svih n-politopa sa m tjemena najveći **cd**-indeks ima ciklički politop $C_n(d)$.

Nenegativnost koeficijenata **cd**-indeksa daje neke linearne nejednakosti koje vrijede za flag f-vektore politopa. C. Stenson je u radu [88] pokazala da postoje nejednakosti za flag f-vektor konveksnih politopa koje su posledica nenegativnosti **cd**-indeksa, a koje se ne mogu dobiti konvolucijom torusnog g-vektora, čime je potvrđena hipoteza Meisingera.

U radovima [67],[88] i [75] je pokazano kako se Kalai-jeva konvolucija funkcionala na politopima (definisana u radu [63]) može zapisati u terminima **cd**-indeksa.

Koristeći tu notaciju i činjenicu da je **cd**-indeks politopa minimalan za simpleks (posledica 1.5.7) R. Ehrenborg je u radu [41] pokazao kako se od poznatih nejednakosti za flag f-vektor politopa mogu konstruisati nove, tzv. "lifting". Ovom tehnikom su dobijene i neke nove nejednakost za flag f-vektor 6-politopa. Takođe, u terminima **cd**-indeks i torusnog g-vektora su opisane sve poznate linearne nejednakosti koje zadovoljavaju flag f-vektori politopa dimenzije manje od devet (teoreme 5.2-5.8 u radu [41]).

Glava 2

O nekim klasama politopa i poseta

2.1 Stelarne podjele simpleksa

Politopski (ili simplicijalni) kompleks je nastavljivo složiv (extendable shellable) ako se svaki početni šeling može proširiti do šelinga cijelog kompleksa. Za komplekse koji imaju to svojstvo lako je konstruisati šeling.

Na primjer, granica n-simpleksa je nastavljivo složiva. Osnovni primjeri politopa koji nemaju to svojstvo se mogu naći u [90].

Nažalost, o nastavljivom šelingu se zna vrlo malo. Još se ne zna ni da li k-skeleton n-simpleksa ima to svojstvo. G. Ziegler je u radu [92] pokazao da granice "skoro svih" 4-politopa nisu nastavljivo složivi kompleksi. Takođe, u [92] su opisani primeri simplicijalnih 4-politopa koji nisu nastavljivo složivi.

U ovoj glavi ćemo pokazati da su politopi T_k^n (dobijeni stelarnom podjelom n-simpleksa, vidjeti primjer 1.1.3) nastavljivo složivi.

Da bi smo opisali mrežu strana politopa T_k^n, označimo njegova tjemena sa

$$V(T_k^n) = \{r_1, r_2, \ldots, r_{k+1}, c_1, c_2, \ldots, c_{n-k+1}\},$$

gdje su sa $r_1, r_2, \ldots, r_{k+1}$ označena tjemena k-strane S (nad kojom se posmatra stelarna podjela), sa $c_1, c_2, \ldots, c_{n-k}$ ostala tjemena n-simpleksa dok je c_{n-k+1} oznaka za novo tjeme v.

Granica politopa T_k^n je u radu [8] opisana sa:

$$\partial T_k^n = (\Delta_n \setminus S) \cup (\partial S * \partial lk_{\Delta_n} S * \{v\}) \tag{2.1}$$

Na osnovu prethodne relacije, dobijamo da su sve maksimalne strane T_k^n

tačno simpleksi oblika

$$G_{r_i,c_j} = \mathrm{conv}(V(T_k^n) \setminus \{r_i, c_j\}) \text{ za sve } i \in [k+1], j \in [n-k+1].$$

Prethodno razmatranje nam omogućuje sledeću interpretaciju za mrežu strana T_k^n.

Primjedba 2.1.1. Vrste i kolone $(k+1) \times (n-k+1)$ rešetke $P_{k+1,n-k+1}$ označimo sa $\{r_1, r_2, \ldots, r_{k+1}\}$ i $\{c_1, c_2, \ldots, c_{n-k}\}$ (tjemena politopa T_k^n).

Sada, kvadratu (r_i, c_j) te rešetke odgovara maksimalna strana G_{r_i,c_j} politopa T_k^n (kao konveksan omotač svih "vrsta" i "kolona", osim onih u kojima se nalazi). Primjetimo, da $(n-1)$-simpleksi G_{r_i,c_j} i G_{r_k,c_l} imaju zajedničku $(n-2)$-stranu ako i samo ako je $i = k$ ili $j = l$ (kvadrati rešetke $P_{k+1,n-k+1}$ koji odgovaraju tim stranama se nalaze u istoj vrsti ili koloni).

Kao posljedicu primjedbe 2.1.1, odgovarajućim označavanjem tjemena, mogu se dobiti i sledeća tvđenja (vidjeti u [53]):

PROPOZICIJA 2.1.2. *Za sve $n \geq k \geq 0$ vrijedi:*

(*i*) $T_k^n \cong T_{n-k}^n$

(*ii*) $\partial T_k^n \cong .\partial(\Delta_k \times \Delta_{n-k})^* \cong \partial \Lambda_k^{n+1}$

Dokaz. Relacija (*i*) je direktna posledica primjedbe 2.1.1.

Da pokažemo $\partial T_k^n \cong \partial(\Delta_k \times \Delta_{n-k})^*$, tjemena u $\partial(\Delta_k \times \Delta_{n-k})^*$ (maksimalne strane u proizvodu simpleksa) označimo sa

$$R_i = (\Delta_k \setminus \{i\}) \times \Delta_{n-k} \text{ za } i \in [k+1], C_j = \Delta_k \times (\Delta_{n-k} \setminus \{j\}) \text{ za } j \in [n-k+1].$$

Maksimalne strane u $\partial(\Delta_k \times \Delta_{n-k})^*$ (tjemena u proizvodu simpleksa) su

$$G_{i,j} = \{i\} \times \{j\} \text{ za } i \in [k+1] \text{ i } j \in [n-k+1].$$

Kako je $G_{i,j}$ incidentna sa svim tjemenima $\partial(\Delta_k \times \Delta_{n-k})^*$ (osim sa R_i i C_j), na osnovu primjedbe 2.1.1 korespondencija

$$r_i \leftrightarrow R_i, c_i \leftrightarrow C_i, G_{r_i,c_j} \leftrightarrow G_{i,j}$$

definiše izomorfizam mreža strana politopa ∂T_k^n i $\partial(\Delta_k \times \Delta_{n-k})^*$.

Presjek proizvoljnih $k+1$ maksimalnih strana simpleksa Δ_{n+1} je $(n-k)$-dimenzionalna strana S. Tjemena te strane označimo sa $c_1, c_2, \ldots, c_{n-k+1}$, a ostala tjemena Δ_{n+1} sa $r_1, r_2, \ldots, r_{k+1}$. Ako je neki $(n-1)$-simpleks σ na granici diska Λ_k^{n+1} tada $S \nsubseteq \sigma$ i σ je sadržan u tačno jednom od maksimalnih simpleksa diska Λ_k^{n+1}. Stoga je

$$\sigma = conv\{\{r_1, r_2, \ldots, r_{k+1}, c_1, \ldots, c_{n-k+1}\} \setminus \{r_i, c_j\}\} \text{ za } i \in [k+1], j \in [n-k+1]$$

pa postoji bijekcija između maksimalnih strana simplicijalnih kompleksa ∂T_k^n i $\partial \Lambda_k^{n+1}$. $\square$

Na osnovu primjedbe 2.1.1, lako zaključujemo da je sa

$$G_{r_i,c_j} < G_{r_k,c_l} \Leftrightarrow i < k \text{ ili } i = k, j < l \tag{2.2}$$

definisan jedan šeling politopa T_k^n.

U tom poretku, minimalna nova strana za G_{r_i,c_j} je

$$R(G_{r_i,c_j}) = \text{conv } \{\{r_k : k < i\} \cup \{c_l : l < j\}\},$$

pa je u tom poretku $\text{type}(G_{r_i,c_j}) = i + j - 2$.

Tako se dobiju rezultati iz [8]:

POSLJEDICA 2.1.3. *Neka su n, k proizvoljni cijeli brojevi, takvi da je $n \geq k \geq 0$. Tada vrijedi*

$$h(T_k^n) = (1, 2, \ldots, k, k+1, k+1, \ldots, k+1, k, \ldots, 2, 1)$$

POSLJEDICA 2.1.4. *Kako su (za fiksno n i za sve $k = 0, 1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$) vektori $h(T_k^n)$ afino nezavisni, to su Dehn-Sommerville relacije jedine linearne relacije za f-vektor simplicijalnih politopa.*

Sledeća propozicija daje kriterij kada je neka familija maksimalnih strana politopa T_k^n početni dio nekog šelinga tog politopa.

PROPOZICIJA 2.1.5. *Neka je $\mathcal{F}$ neki podskup skupa maksimalnih strana T_k^n (kvadrata u rešetki $P_{k+1,n-k+1}$). Za $i \in [k+1]$ neka je $F_i = \{j \in [n-k+1] : (r_i, c_j) \in \mathcal{F}\}$. Strane $\{G_{r_i,c_j} : (r_i, c_j) \in \mathcal{F}\}$ čine početni dio nekog šelinga za T_k^n ako i samo ako za sve $i, i' \in [k+1]$ vrijedi $F_i \subseteq F_{i'}$ ili $F_i \supseteq F_{i'}$.*

Dokaz. Pretpostavimo da strane $\{G_{r_i,c_j} : (r_i, c_j) \in \mathcal{F}\}$ čine početak nekog šelinga T_k^n. Neka su $i, i' \in [k]$ takvi da je $i \neq i'$.

Pretpostavimo da postoji $j \in F_i \setminus F_{i'}$. Za svako $j' \in F_{i'}$, u pretpostavljenom šelingu T_k^n (na osnovu teoreme 1.4.3), $(n-3)$-simpleks $G_{r_i,c_j} \cap G_{r_{i'},c_{j'}}$ je sadržan u nekom $(n-2)$-simpleksu koji je presjek G_{r_i,c_j} ili $G_{r_{i'},c_{j'}}$ sa nekom stranom iz $\mathcal{F}$. Kako $j \notin F_{i'}$, jedina strana za koju je to moguće je $G_{r_i,c_{j'}}$, pa $j' \in F_i$, dakle $F_{i'} \subseteq F_i$.

Sada pretpostavimo da strane iz $\mathcal{F}$ zadovoljavaju uslov iz propozicije. Bez smanjenja opštosti (eventualnim "preoznačavanjem" vrsta i kolona, tj. tjemena), možemo pretpostaviti da je $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots \supseteq F_k$. Definišimo poredak maksimalnih strana T_k^n:

$$F_{r_i,c_j} < F_{r_{i'},c_{j'}} \Leftrightarrow \begin{cases} j \in F_i, j' \notin F_{i'} \\ i < i' \text{ ili } i = i', j < j' \text{ inače} \end{cases}$$

Direktnom provjerom (koristeći primjedbu 2.1.1) lako se pokaže da je ovo šeling za T_k^n. □

POSLJEDICA 2.1.6. *Politop T^n_k je nastavljivo složiv.*

U [56] je pokazano da hiperoktaedar C^*_n (politop dualan n-kocki) nije nastavljivo složiv za dovoljno veliko n. Kako se C^*_n može dobiti od n-simpleksa, nizom od $n-1$ odgovarajućih stelarnih podjela, to znači da stelarna podjela ne čuva svojstvo nastavljive složivost.

Možda je zanimljivo sledeće pitanje:

Koliko najmanje stelarnih podjela treba izvršiti na Δ_n da se dobije politop koji nije nastavljivo složiv?

2.2 Obični i torusni h-vektor za $\Delta^*_{n-1}(k)$

Hipersimpleks $\Delta_{n-1}(k)$ je $(n-1)$-dimenzionalan politop koji se dobije kao presjek n-kocke $C_n = [0,1]^n$ sa hiperravni $H_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = k\}$. Očigledno je $\Delta_{n-1}(1)$ standardni $(n-1)$-simpleks. Centralnom simetrijom u odnosu na tačku $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2})$ politop $\Delta_{n-1}(k)$ se slika u $\Delta_{n-1}(n-k)$, pa su ti politopi izometrični i kombinatorno izomorfni. Stoga, u daljem tekstu posmatramo politope $\Delta_{n-1}(k)$ za $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \geq k \geq 1$.

Politopi $\Delta_n(k)$ se spominju u [53] (str.65 kao K^n_k), u [51] (strana 205), a ime hipersimpleks se prvi put pojavilo u radu [52]. U svojim lekcijama, R. MacPherson je istakao da dvoparametarska familija politopa $\{\Delta_n(k) : 0 < k < n, n \in \mathbb{N}\}$ ima veoma zanimljiva svojstva koja zaslužuju detaljnija istraživanja. Mreža strana politopa $\Delta_{n-1}(k)$ je opisana u sledećoj lemi.

LEMA 2.2.1. *Neka je $L_{n-1}(k) = \{(A,B) : A \subset B \subseteq [n]; |A| \leq k-1; |B| \geq k+1;\} \cup \{(A,A) : A \subseteq [n]; |A| = k\} \cup \{\hat{0}\}$.*
Ako definišemo poredak na $L_{n-1}(k)$ sa: $(A,B) \leq (C,D) \Leftrightarrow A \supseteq C, B \subseteq D$ tada je $L(\Delta_{n-1}(k)) \cong L_{n-1}(k)$.

Dokaz. Tjeme v kocke C_n je i tjeme politopa $\Delta_{n-1}(k)$ ako i samo ako $v \in H_k$ (tj. v ima tačno k koordinata jednakih 1). Kako hiperravan H_k ne siječe ivice kocke C_n, politop $\Delta_{n-1}(k)$ nema drugih tjemena. Zato su tjemena $\Delta_{n-1}(k)$ sa k-članim podskupovima skupa $[n]$. Stoga je

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subseteq [n] \mapsto T_A = (t_1, t_2, \dots, t_n), t_i = \begin{cases} 1, & i \in A; \\ 0, & i \notin A \end{cases}$$

bijekcija između tjemena $\Delta_{n-1}(k)$ i atoma mreže $L_{n-1}(k)$.

Za svaki uređeni par (A,B) podskupova $[n]$, za koji vrijedi

$$A \subset B \subseteq [n]; |A| \leq k-1; |B| \geq k+1, \tag{2.3}$$

linearni funkcional $x \mapsto \sum_{i\in A} x_i - \sum_{j\notin B} x_j$ na n-kocki dostiže maksimum na $(|B|-|A|)$-dimenzionalnoj strani $\{x \in C_n : \forall i \in A, x_i = 1; \forall j \notin B, x_j = 0\}$. Presjek hiperravni H_k sa tom stranom je $(|B|-|A|-1)$-dimenzionalna strana

$$S_{(A,B)} = \{x \in C_n : \sum_{i=1}^{n} x_i = k, \forall i \in A, x_i = 1; \forall j \notin B, x_j = 0\ \}$$

hipersimpleksa $\Delta_{n-1}(k)$.

Tako je uspostavljena bijekcija između svih uređenih parova (A,B) za koje vrijedi (2.3) i $(|B|-|A|-1)$-strana politopa $\Delta_{n-1}(k)$.

Ako su (A,B) i (C,D) elementi $L_{n-1}(k)$ takvi da je $(A,B) \le (C,D)$, iz prethodno opisanog je očigledno da vrijedi $S_{(A,B)} \subseteq S_{(C,D)}$. Stoga je bijekcija $(A,B) \mapsto S_{(A,B)}$ izomorfizam mreža $L_{n-1}(k)$ i $L(\Delta_{n-1}(k))$. □

Primjetimo, da za $k \neq 1$ ($\Delta_{n-1}(k)$ nije simpleks), politop $\Delta_{n-1}(k)$ ima $2n$ maksimalnih strana. Označimo ih sa $R_i = \{x \in \Delta_{n-1}(k) : x_i = 1\} = S_{(\{i\},[n])}$ i $C_j = \{x \in \Delta_{n-1}(k) : x_j = 0\} = S_{(\emptyset,[n]\{j\})}$.

POSLJEDICA 2.2.2. *Iz prethodne leme lako se dobijaju sledeća tvrđenja:*

(*i*) *Za* $r > 0$

$$f_r(\Delta_{n-1}(k)) = \binom{n}{r+1} \sum_{i=max\{0,k-r\}}^{min\{k-1,n-r-1\}} \binom{n-r-1}{i}$$

(*ii*) *Uređenom paru* (A,B) (*koji ispunjava uslove iz relacije* (*2.3*)) *odgovara strana politopa* $\Delta_{n-1}(k)$ *koja je kombinatorno ekvivalentna sa hipersimpleksom* $\Delta_{|B|-|A|-1}(k-|A|)$.

(*iii*) *Za proizvoljnu* r*-stranu* S $(r > 0)$ *politopa* $\Delta_{n-1}(k)$ *vrijedi* $[S, \hat{1}]_{L(\Delta_{n-1}(k))} \cong B_{n-r-1}$.

POSLJEDICA 2.2.3. *Politop* $\Delta^*_{n-1}(k)$ *je kvazisimplicijalan. Sve maksimalne strane* $\Delta^*_{n-1}(k)$ *su kombinatorno ekvivalentne sa* T^{n-2}_{k-1}.

Dokaz. Svaka r-dimenzionalna strana S^* politopa $\Delta^*_{n-1}(k)$ odgovara nekoj $(n-r-2)$-dimenzionalnoj strani S politopa $\Delta_{n-1}(k)$. Na osnovu tvrđenja (iii) (iz posledice 2.2.2), za $r > 0$ vrijedi $[\hat{0}, S^*]_{\Delta^*_{n-1}(k)} \cong [S, \hat{1}]_{\Delta_{n-1}(k)} \cong B_{r+1}$, pa je politop $\Delta^*_{n-1}(k)$ kvazisimplicijalan.

Na osnovu teoreme leme 2.2.1, maksimalne strane politopa $\Delta^*_{n-1}(k)$ možemo označiti sa $F_A, A \subseteq [n], |A| = k$, a tjemena tog politopa sa r_i, c_i za $i \in [n]$.

Kako je tjeme T_A politopa $\Delta_{n-1}(k)$ sadržano u $2n$ maksimalnih strana (R_i za $i \in A$ i C_j za $j \in A^c$) tog politopa, to su tjemena maksimalne strane F_A politopa $\Delta^*_{n-1}(k)$:

$$V(F_A) = \{r_i : i \in A\} \cup \{c_j : j \notin A\}$$

Maksimalne strane simplicijalnog politopa F_A su u korespondenciji sa ivicama politopa $\Delta_{n-1}(k)$ koje sadrže odgovarajuće tjeme T_A. U bijekciji definisanoj u lemi 2.2.1, nekoj ivici koja sadrži T_A odgovara uređen par $(A \setminus \{i_0\}, A \cup \{j_0\})$, za neko $i_0 \in A$, $j_0 \in A^c$.

Ivica $S_{(A\setminus\{i_0\}, A\cup\{j_0\})}$ politopa $\Delta_{n-1}(k)$ je sadržana u $n-2$ maksimalne strane R_i, za $i \in A \setminus \{i_0\}$ i C_j, za $j \in A^c \setminus \{j_0\}$ politopa $\Delta_{n-1}(k)$. Stoga, njoj dualna $(n-3)$-strana u $\Delta^*_{n-1}(k)$ (maksimalna strana F_A) sadrži sva tjemena F_A osim r_{i_0} i c_{j_0}. Tu maksimalnu stranu F_A možemo označiti sa $G_{r_{i_0}, c_{j_0}}(A)$. Na osnovu primjedbe 2.1.1, F_A je kombinatorno ekvivalentna sa T^{n-2}_{k-1}. $\square$

Sada ćemo opisati konkretan šeling za $\Delta^*_{n-1}(k)$. Na skupu maksimalnih strana tog politopa definišemo leksikografski poredak sa

$$F_A <_L F_B \Leftrightarrow A <_L B \Leftrightarrow \min(A \vartriangle B) \in A. \tag{2.4}$$

Prisjetimo se da je mreža strana F_A opisana u primjedbi 2.1.1. Za sve $i \in A$, $j \notin A$ i $j < i$ neka je $B := (A \setminus \{i\}) \cup \{j\}$.

Primjetimo da je $B <_L A$ i $F_B \cap F_A = G_{r_i, c_j}(A)$. Stoga je

$$F_A \cap \Big(\bigcup_{F_{A'} <_L F_A} F_{A'} \Big) \supseteq \bigcup_{a \in A, b \notin A, b < a} G_{r_a, c_b}(A). \tag{2.5}$$

Za proizvoljan $B <_L A$, neka je $i_0 = \min(A \vartriangle B) \in B$ i $j_0 = \max(A \setminus B)$. Tada, za $A' := (A \setminus \{i_0\}) \cup \{j_0\} <_L A$ vrijedi $F_B \cap F_A \subseteq F'_A \cap F_A = G_{r_{i_0}, j_0}(A)$ pa u (2.5) vrijedi jednakost.

Primjedba 2.2.4. Dobro je poznata bijekcija između svih k-članih podskupova $[n]$ i najkraćih puteva u $k \times (n-k)$ rešetki $P_{k,n-k}$ od gornjeg lijevog do donjeg desnog ugla, vidjeti u [81]. Presjek F_A sa stranama koje joj prethode u poretku $<_L$:

$$\Gamma_A = F_A \cap \Big(\bigcup_{F_{A'} <_L F_A} F_{A'} \Big)$$

je tačno unija onih maksimalnih strana F_A koje odgovaraju kvadratima rešetke $P_{k,n-k}$, koji su ispod puta P_A određenog sa A. Na osnovu propozicije 2.1.5, zaključujemo da je $<_L$ šeling poredak za $\Delta^*_{n-1}(k)$.

Da bi izračunali h-vektor politopa $\Delta^*_{n-1}(k)$ potrebna nam je sledeća lema.

LEMA 2.2.5. *Neka je P proizvoljan n-dimenzionalan kvazisimplicijalan politop i neka je $F_1, F_2, \ldots, F_r$ šeling poredak za P. Neka je $C_{i,1}, C_{i,2}, \ldots, C_{i,p_i}, \ldots, C_{i,t_i}$ šeling poredak strane F_i i neka je:*

$$\Gamma_i = F_i \cap (\bigcup_{i<j} F_j) = \bigcup_{j=p_i}^{t_i} C_{i,j}$$

(*Primjetimo da je $p_1 = 1$ i $p_r = t_r + 1$.*) *Tada vrijedi:*

$$C_{1,1}, C_{1,2}, \ldots, C_{1,t_1}, C_{2,p_2}, \ldots, C_{2,t_2}, \ldots, C_{r-1,p_{r-1}}, \ldots, C_{r-1,t_{r-1}} \tag{2.6}$$

šeling poredak za $P^{(n-2)}$, $(n-2)$-skelet politopa P.
Dalje, ako je $h(\Gamma_i) = (h_{i,0}, h_{i,1}, \ldots, h_{i,n-1})$ tada je

$$h_k(P^{(n-2)}) = \sum_{i=1}^{r-1} h_{i,n-1-k}. \tag{2.7}$$

Dokaz. Uočimo proizvoljan $(n-2)$-simpleks $C_{i,j}$ ($1 \leq i \leq r-1$, $p_i \leq j \leq t_i$). Iz šelinga politopa P, za proizvoljne $k < i$ i $l \geq p_k$ vrijedi $C_{k,l} \cap C_{i,j} \subseteq F_k \cap F_i \subseteq C_{i,s}$ (za neki $s < p_i$). Svaki od simpleksa $C_{i,s}$ (za $s < p_i$) se pojavi u listi (2.6) kao maksimalna strana nekog F_m za $m < i$. Stoga je

$$C_{i,j} \cap (\bigcup_{p<i \text{ ili } p=i, q<j} C_{p,q}) = C_{i,j} \cap (\bigcup_{s=1}^{j-1} C_{i,s})$$

što je početni dio nekog šelinga za C_i (zbog pretpostavke o šelingu strane F_i). Time je pokazano da je (2.6) šeling za $P^{(n-2)}$.

Na osnovu leme 8.10. u [90], svaki šeling politopa je reverzibilan, pa je $C_{i,t_i}, C_{i,t_i-1}, \ldots, C_{i,p_i}$ šeling za disk Γ_i. Ako je u tom poretku type$(C_{i,j}) = k$, tada je u šeling poretku definisanom u (2.6) (kao i u pretpostavljenom šeling poretku za F_i) type$(C_{i,j}) = n-1-k$, pa vrijedi formula (2.7).

□

TEOREMA 2.2.6. *Za $n \geq k \geq 0$* (*ako h-vektor zapišemo kao kolonu*) *vrijedi:*

$$h(\Delta^*_{n-1}(k)) = \begin{pmatrix} \binom{n}{0} \\ \binom{n}{0}+\binom{n}{1} \\ \vdots \\ \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{k-1} \\ \vdots \\ \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{k-1} \\ \vdots \\ \binom{n}{0} \end{pmatrix} - \binom{n}{k} \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}\right\} n-k \text{ nula} \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

Dokaz. Za k-člani podskup A od $[n]$ uočimo disk

$$\Gamma_A = F_A \cap \Big(\bigcup_{F_B <_L F_A} F_B \Big) \tag{2.9}$$

(presjek F_A sa stranama koje su poslije nje u šeling poretku$<_L$). Strana koja odgovara kvadratu (i,j) se pojavi u Γ_A ako i samo ako je taj kvadrat iznad puta P_A određenog sa A. Lako se vidi da je obrnuti poredak od onog definisanog u propoziciji 2.1.5 takođe šeling za Γ_A. Tip strane koja odgovara kvadratu (i,j) u tom poretku je $i-j+n-k-1$, pa na osnovu (2.7) kvadrat (i,j) doprinese 1 članu $j-i+k-1$ h-vektora $\Delta^*_{n-1}(k)^{(n-2)}$.

Prethodno razmatranje možemo zapisati i ovako:

Neka je $A_{k,n-k} = \big(a_{i,j}\big) \in \mathbb{M}_{k\times n-k}(\mathbb{Z})$, gdje je

$$a_{i,j} = |\{A \subseteq [n] : |A| = k,\ \text{kvadrat}(i,j) \text{ je iznad} P_A\}|.$$

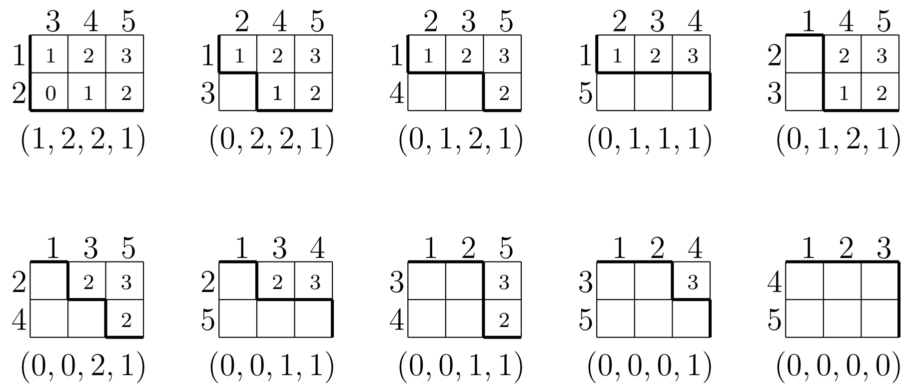
Sada je h-vektor $\Delta^*_{n-1}(k)^{(n-2)}$ zbir elemenata matrice $A_{k,n-k}$ po dijagonali:

$$h_r(\Delta^*_{n-1}(k)^{(n-2)}) = \sum_{j-i+k-1=r} a_{i,j}$$

Posmatrajući šta je prvi korak u nekom najkraćem putu, lako je pokazati matrice $A_{k,n-k}$ zadovoljavaju sledeću rekurzivnu relaciju:

$$A_{k,n-k} = \begin{pmatrix} \binom{n-1}{k-1} & \cdots & \binom{n-1}{k-1} \\ & A_{k-1,n-k} & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \\ \vdots & A_{k,n-k-1} \\ 0 & \end{pmatrix}.$$

Kao ilustraciju prethodnog razmatranja, kao i primjedbe 2.2.4 posmatrajmo leksikografski šeling za $\Delta^*_4(2)$. Njegove maksimalne strane su politopi T^3_1 (bipiramide nad trouglom).



U polju (i, j) rešetke je upisan tip simpleksa u šelingu $\Delta^*_{n-1}(k)^{(n-2)}$. Ispod je doprinos diska Γ_A za $h(\Delta^*_{n-1}(k)^{(n-2)})$.

Kako za sve $(n-1)$-dimenzionalne politope vrijedi (Stanley-jev trik, vidjeti [90])

$$h_i(P) = h_i(P^{(n-2)}) - h_{i-1}(P^{(n-2)}) \text{ za sve } i = 0, 1, \ldots, n-2$$

primjenom leme 2.2.5, za $k > 1$ dobijamo:

$$h(\Delta^*_{n-1}(k)) = \big(h(\Delta^*_{n-2}(k-1)), 0\big) + \big(0, h(\Delta^*_{n-2}(k))\big) +$$

$$+\big(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k-1}, \binom{n-1}{k-1}, 0, \ldots, 0, -\binom{n-1}{k-1}, 0\big).$$

Tvrđenje (2.8) se sada lako pokaže indukcijom (politopi $\Delta^*_2(1)$ i $\Delta^*_2(2)$ su 2-simpleksi). $\square$

POSLJEDICA 2.2.7. *Za h-vektore politopa $\Delta^*_{n-1}(k)$ vrijede sledeće rekurzivne* *relacije:*

$$h(\Delta^*_{n-1}(k)) = h(\Delta^*_{n-1}(k-1)) + \binom{n}{k-1}\begin{pmatrix} \overbrace{}^{k-1\ nula} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \binom{n}{k}\begin{pmatrix} \overbrace{}^{n-k\ nula} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Prvi problem u pokušajima da se ideje iz dokaza g-teoreme primjene u karakterizaciji f-vektora proizvoljnih politopa je taj što h-vektori ne moraju biti nenegativni (na primjer, $h(C_3) = (1, 5, -1, 1)$). Jedna od interpretacija h-vektora simplicijalnog politopa je bila i da su h_i dimenzije kohomologije torusnog varijeteta asociranog politopu P. To je bio motiv da se posmatra torusni h-vektor.

Torusni h-vektor za n-politop P sa racionalnim tjemenima se definiše kao niz $h^T(P) = (h_0^T, h_1^T, \ldots, h_n^T)$ koji je Hilbert-ova funkcija ("middle perversity intersection") homologije asociranog torusnog varijeteta.
Na sreću, R. Stanley je u radu [82] (vidjeti i [9]) dao kombinatornu definiciju za $h^T(P)$ koja ima smisla za sve Euler-ove posete.

DEFINICIJA 2.2.8. Za Euler-ove posete definišu se polinomi h^T i g^T induktivno na sledeći način:

- za poset P ranga 1 (sa dva elementa) definiše se $h^T(P,t) = g^T(P,t) = 1$.
- ako je P Euler-ov poset ranga $n+1 > 0$ tada je polinom $h^T(P,t)$ stepena n. Ako je $h^T(P,t) = h_0^T + h_1^T t + \cdots + h_n^T t^n$ tada se definiše

$$g^T(P,t) = h_0^T + (h_1^T - h_0^T)t + \cdots + (h_m^T - h_{m-1}^T)t^m.$$

- ako je P Euler-ov poset ranga $n+1 > 0$ tada se definiše

$$h^T(P,t) = \sum_{x \in P \setminus \{\hat{1}\}} g^T(P,t)(x-1)^{n-r(x)}.$$

Može se pokazati da vrijedi

TEOREMA 2.2.9 (R. P. Stanley,[82]). *Neka je P Euler-ov poset ranga $n+1$ i neka je $h^T(P,t)=\sum_{i=0}^{n} h_i^T t^i$. Tada je $h_i^T = h_{n-i}^T$.*

Kako je za Boole-ovu mrežu $g^T(B_n,t)=1$, to se iz definicije 2.2.8 lako dobija da su torusni h-vektor simplicijalnih Euler-ovih poseta isto što i obični h-vektor.

Tako u slučaju simplicijalnih poseta postoji i kombinatorna interpretacija za torusni h-vektor. Interesantno je pitanje kombinatorne interpretacije torusnog h-vektora za politope. Posebno je zanimljivo vidjeti da li postoji veza između šelinga politopa i njegovog torusnog h-vektora.

Kod šelinga simplicijalnog politopa, dodavanjem strane tipa i njegov "obični" h vektor se poveća za jedan na "mjestu" h_i. Šta se može reći za torusni h-vektor u opštem slučaju (za proizvoljan n-politop)? Nije čak poznato da li je ta promjena uvijek pozitivna (u radu [6] se kaže da je T. Braden najavio pozitivan odgovor). Ako jeste, da li se može naći neka kombinatorna interpretacija te promjene?

Jedan od problema sa proučavanjem f-vektora nesimplicijalnih politopa je nedostatak netrivijalnih primjera. U radu [26] T. Bisztriczky je definisao "ordinarne" politope (beskonačnu familiju nesimplicijalnih politopa, za koju se može "kontrolisati" f-vektor). M. Bayer je u radu [5] izračunala torusni h-vektor multiplicijalnih politopa. U radu [6] je pokazala kako se torusni h-vektor multiplicijalnih politopa mijenja sa šelingom.

Do kraja ovog poglavlja, koristeći h-vektor politopa $\Delta^*_{n-1}(k)$, računamo njegov torusni h-vektor $h^T(\Delta^*_{n-1}(k))$. Takođe, dajemo kombinatornu interpretaciju promjene $h^T(\Delta^*_{n-1}(k))$ pri šelingu $<_L$ definisanom u relaciji (2.4), i na osnovu toga kombinatornu interpretaciju koeficijenata $h^T(\Delta^*_{n-1}(k),x)$.

LEMA 2.2.10. *Neka je P kvazisimplicijalan n-dimenzionalan politop i neka je $h(P)=(h_0,h_1,\ldots,h_n)$ njegov h-vektor. Tada je njegov torusni h-vektor*

$$h_i^T(P)=\begin{cases} h_i & \text{za } i\le [\frac{n}{2}],\\ h_{n-i} & \text{za } i>[\frac{n}{2}]. \end{cases} \tag{2.10}$$

Dokaz. Iz definicije torusnog h-vektora, dobijamo da za kvazisimplicijalne politope vrijedi sledeća relacija:

$$h^T(P,x)=\sum_{F\text{-strana}P,F\neq P} g(F,x)(x-1)^{n-\dim F-1}=$$

$$=\sum_{i=0}^{n} f_{i-1}(P)(x-1)^{n-i}+\sum_{\text{G max strana}}\Big(g(G,x)-1\Big)=h(P,x)+\sum_{\text{G max strana}}\Big(g(G,x)-1\Big).$$

Kako je st $g(G,x) \leq [\frac{n-1}{2}]$, to za sve $i \leq [\frac{n}{2}]$ vrijedi $h_i^T(P) = h_i(P)$. Na osnovu teoreme 2.2.9 vrijedi $h_i^T(P) = h_{n-i}^T(P)$, čime je lema pokazana. □

Iz prethodne propozicije i (2.8), dobijamo

$$h^T(\Delta^*_{n-1}(k)) = \begin{pmatrix} \binom{n}{0} \\ \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \\ \vdots \\ \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{k-1} \\ \vdots \\ \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{k-1} \\ \vdots \\ \binom{n}{0} \end{pmatrix}$$

TEOREMA 2.2.11. *Neka je $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leq n$ i neka je $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \subseteq [n]$. Promjena torusnog h-vektora poslije dodavanje strane F_A u šelingu $<_L$ je*

$$h_A^T = h^T((\bigcup_{F_B \leq_L F_A} F_B), x) - h^T((\bigcup_{F_B <_L F_A} F_B)', x) = x^{n-k-1} \sum_{i=1}^{k} x^{2i-a_i}. \quad (2.11)$$

Dokaz. Ako je Γ_A disk definisan u relaciji (2.9) tada vrijedi:

$$h_A^T = \sum_{F \in \Gamma_A} g(F,x)(x-1)^{n-1-\dim F} - \sum_{F \in \partial\Gamma_A} g(F,x)(x-1)^{n-1-\dim F} + g(F_A, x).$$

Kako je Γ_A kvazisimplicijalan, na osnovu prethodne leme i posledice 2.1.3 dobijamo

$$h_A^T = (x-1)h(\Gamma_A, x) - (x-1)^2 h(\partial\Gamma_A, x) + x^{k-1} + x^{k-2} + \cdots + x + 1. \quad (2.12)$$

Sada ćemo izračunati doprinos elementa $a_i \in A$ polinomu h_A^T. Koristimo interpretaciju za h-vektor Γ_A opisanu u teoremi 2.2.6. Primjetimo da je doprinos i-te vrste $h(\Gamma_A)$ tačno

$$h_{a_i} = (\overbrace{0,0,\ldots,0}^{i-1}, \overbrace{1,1,\ldots,1}^{n-k-a_i+i}, \overbrace{0,\ldots,0}^{k-2i+a_i}).$$

Na osnovu teoreme 1.4.5, zaključujemo da je doprinos h_{a_i} vektoru $g(\partial\Gamma_A)$ je:

$$g_{a_i} = \operatorname{sign}(k + a_i + 1 - 3i) \cdot (\overbrace{0,0,\ldots,0}^{m}, \overbrace{1,1,\ldots,1}^{r}, \overbrace{0,\ldots,0}^{[\frac{n-2}{2}]+1-m-r})$$

gdje je $m = \min\{i-1, k+a_i-2i\}$ i $r = |k+a_i+1-3i|$. Dalje, dobijamo da je doprinos h_{a_i} vektoru $h(\partial\Gamma_A)$

$$h_{\partial a_i} = \mathrm{sign}(k+a_i+1-3i)\ (\overbrace{0,0,\dots,0}^{m},1,2,\dots,r,r,\dots,2,1,\overbrace{0,0,\dots,0}^{m})$$

Posmatrajmo slučaj kada je $i-1 \leq k+a_i-2i$. Tada je $m = i-1$, $r = k+a_i+1-3i$, i doprinos a_i u (2.12) je:

$$(x-1)(x^{n-i-1}+x^{n-i-2}+\cdots+x^{k+a_i-2i}+x^{k+a_i-2i})$$

$$-(x-1)^2(x^{n-i-2}+2x^{n-i-3}\dots+rx^{n+2i-k-a_i-2}+\dots+rx^{n+2i-k-a_i-2}+\dots+2x^i+x^{i-1}) =$$
$$= x^{n-i}-x^{k+a_i-2i}-x^{n-i}+x^{n+2i-k-a_i-1}+x^{k+a_i-2i}-x^{i-1} = x^{n+2i-k-a_i-1}-x^{i-1}$$

Kako se $-x^{i-1}$ poništi sa osgovarajućim članom iz $g(F_A,x) = g(T^{n-2}_{k-1})$, to je zaista doprinos a_i u (2.12) tačno $x^{n+2i-k-a_i-1}$.

Slično rasuđujemo i u slučaju kada je $i-1 > k+a_i-2i$. Tada je $m = k+a_i-2i$, $r = 3i-k-a_i-1$, i doprinos a_i u (2.12) je:

$$(x-1)(x^{n-i-1}+x^{n-i-2}+\cdots+x^{k+a_i-2i}+x^{k+a_i-2i})+$$

$$+(x-1)^2(x^{n+2i-k-a_i-3}+2x^{n+2i-k-a_i-4}\dots+rx^{n-i}+\dots+rx^{i-2}+\dots+x^{k+a_i-2i}) =$$
$$= x^{n-i}-x^{k+a_i-2i}+x^{n+2i-k-a_i-1}-x^{n-i}-x^{i-1}+x^{k+a_i-2i} = x^{n+2i-k-a_i-1}-x^{i-1}$$

Kao i u prethodnom slučaju, x^{i-1} se poništi, pa je doprinos a_i u (2.12) tačno $x^{n+2i-k-a_i-1}$. Sada se tvrđenje teoreme dobija sabiranjem svih h_{a_i}. $\square$

Kao posledicu prethodne teoreme dobijamo kombinatornu interpretaciju za torusni h-vektor politopa $\Delta^*_{n-1}(k)$:

$$h^T_r(\Delta^*_{n-1}(k)) = |\{(A,i) : A \subseteq [n], |A| = k, i \in [n], n+2i-k-r-1 \in A \text{ je } i\text{-ti po veličini}\}|$$

odnosno

$$h^T_r(\Delta^*_{n-1}(k)) = \sum_{i=1}^{k} \binom{n+2i-k-r-2}{i-1}\binom{k+r+1-2i}{k-i}.$$

Stoga, torusni h-polinom za $\Delta^*_{n-1}(k)$ je

$$h^T(\Delta^*_{n-1}(k),x) = x^{n-k-1} \sum_{A=\{a_1,a_2,\dots,a_k\}\subseteq[n]} \sum_{i=1}^{k} x^{2i-a_i}.$$

2.3 Planarni poseti

U ovom poglavlju ispitujemo različite osobine planarnih poseta. Koristeći R-označavanje, opisaćemo sve esencijalne linearne nejednakosti za flag f-vektor složivih planarnih poseta. Rezultati dobijeni u ovom poglavlju su objavljeni u [60].

Za graduisan poset P kažemo da je planaran ako se njegov Hasse-ov dijagram može nacrtati u ravni tako da su ivice predstavljene dužima koje se sijeku (eventualno) samo u čvorovima. Planaran poset P je zasićen ako njegov Hasse-ov dijagram ima maksimalan broj ivica. To formalno možemo definisati na sledeći način:
Svako smještanje Hasse-ovog dijagrama poseta P u ravan, na svakom nivou $P_i = \{x \in P : r(x) = i\}$ definiše prirodno linearno uređenje $\leqslant_{P_i}$ (s lijeva udesno).

Za $x, y \in P_i$ je $x \leq_{P_i} y$ ako je tjeme x lijevo od y. Za $x \in P$ definišemo $U(x) = \{y \in P : x \prec y\}$ kao skup svih elemenata koji natkrivaju x. Ako je poset P planaran, tada za sve $x <_{P_i} x'$ vrijedi $\max_{P_{i+1}} U(x) \leq_{P_{i+1}} \min_{P_{i+1}} U(x')$. Planaran poset P ranga $n+1$ je zasićen ako:

$$\forall i \in [n], \text{ i za sve } x \prec_{P_i} x', \text{ vrijedi } \max{}_{P_{i+1}} U(x) = \min{}_{P_{i+1}} U(x') \tag{2.13}$$

Prebrojavanjem ivica u Hasse-ovom dijagramu poseta P između susjednih nivoa (posmatrano kao graf, to je stablo) može se pokazati da vrijedi:

Primjedba 2.3.1. Ako je P planaran, zasićen poset ranga $n+1$ tada njegov Hasse-ov dijagram ima $2|P| - n - 3$ ivica.

Sledeća lema će biti korisna za karakterizaciju složivih planarnih poseta:

LEMA 2.3.2. *Neka je P planaran zasićen poset i neka je $[x, y]$ interval dužine veće od jedan. Neka je $x = x_i \prec x_{i+1} \prec \cdots \prec x_{j-1} \prec x_j = y$ maksimalan lanac u $[x, y]$ takav da za svaki k, $i < k < j$ postoji $y_k \in [x, y]$, $y_k \prec_{P_{r(x_k)}} x_k$ (tj. lijevo od x_k postoji neko tjeme y_k). Ako je $x \prec y_{i+1}$ i $y_{j-1} \prec y$ tada postoji k_0, $i < k_0 < j$ takav da je $x_{k_0-1} \prec y_{k_0} \prec x_{k_0+1}$.*

Dokaz. Indukcijom po $r(y) - r(x)$.
Ako je $r(y) - r(x) = 2$, tada je $y_{i+1} = y_{j-1}$ i $k_0 = i+1 = j-1$. Za $r(y) - r(x)$ veće od dva posmatajmo y_{i+1}. Ako je $y_{i+1} \prec x_{i+2}$ tada je $k_0 = i+1$. Ako $y_{i+1} \not\prec x_{i+2}$ tada zbog zasićenosti poseta P (vidjeti u relaciji (2.13)) vrijedi $x_{i+1} \prec y_{i+2}$. Sada, po pretpostavci indukcije, u intervalu $[x_{i+1}, y]$ postoji k_0 za $i+1 < k_0 < j$ sa traženim svojstvom. $\square$

TEOREMA 2.3.3. *Za planaran poset P sledeće tvrdnje su ekvivalentne:*

1. *P je zasićen*
2. *P je složiv*
3. *P je Cohen-Macaulay-jev*

Dokaz. Pokažimo da $1 \Rightarrow 2$.
Neka je P zasićen planaran poset ranga $n+1$. Definišimo linearan poredak na skupu svih maksimalnih lanaca poseta P na sledeći način: Za C i C' maksimalne lance u P

$$C:\widehat{0} = x_0 \prec x_1 \prec \cdots \prec x_n \prec x_{n+1} = \widehat{1}$$

$$C':\widehat{0} = x'_0 \prec x'_1 \prec \cdots \prec x'_n \prec x'_{n+1} = \widehat{1}$$

neka je $j_0 = \max\{i : x_i \neq x'_i\}$, tj. j_0 je najviši nivo na kojem su C i C' različiti. Reći ćemo da je

$$C <_E C' \Leftrightarrow x_{j_0} <_{Pj_0} x'_{j_0} \tag{2.14}$$

tj., lanac C prethodi lancu C' u poretku $<_E$ ako je na najvišem nivou gdje se razlikuju lanac C lijevo od C'.

Pokazaćemo da je $<_E$ šeling poredak u smislu definicije 1.4.7.

Neka je $C <_E C'$ i neka je $j_0 = \max\{i : x_i \neq x'_i\}$. Dalje, neka je

$$i_0 = \max\{i < j_0 : x_i = x'_i\},$$

tj. i_0 je najviši nivo ispod nivoa j_0 na kojem su lanci C i C' isti. Tada je maksimalan lanac $x_{i_0} = x'_{i_0} \prec x'_{i1} \prec \cdots, \prec x'_{j_0} \prec x'_{j_0+1} = x'_{j_0+1}$ u intervalu $[x_{i_0}, x_{j_0+1}]$ takav da ispunjava uslove leme 2.3.2. Odatle postoji $z \in [x_{i_0}, x_{j_0+1}]$ i $i_0 < k < j_0+1$ takvo da je $x'_{k-1} \prec z \prec x'_{k+1}$. Sada maksimalni lanac

$$C'':\widehat{0} = x'_0 \prec x'_1 \prec \cdots \prec x'_{k-1} \prec z \prec x'_{k+1} \prec \cdots \prec x'_n \prec x'_{n+1} = \widehat{1}$$

ima osobinu da je

$$C \cap C' \subseteq C'' \cap C' = C' \setminus \{x'_k\}$$

pa je sa (2.14) definisan šeling poredak za maksimalne lance u P.

Kako je svaki složiv poset Cohen-Macaulay-jev (vidjeti u radu [31]), to $2 \Rightarrow 3$.

Sada ćemo pokazati da $3 \Rightarrow 1$.
Neka je planaran poset P ranga $n+1$ Cohen-Macaulay-jev. Na osnovu teoreme 1.4.6, u simplicijalnom kompleksu $\Delta(P)$ za svaki simpleks σ vrijedi:

$$\widetilde{H}_i(lk_{\Delta(P)}(\sigma)) = 0, \text{ za sve } i < \dim lk_{\Delta(P)}(\sigma).$$

Pretpostavimo da takav poset P nije zasićen. Tada postoje x i x' na nekom nivou P_i takvi da je $x \prec_{P_i} x'$ i $\max_{P_{i+1}} U(x) < \min_{P_{i+1}} U(x)$. Neka je $y = x \vee x'$ a $z = x \wedge x'$ (planarni poseti su mreže, vidjeti u radu [19]). Ako su C_1 i C_2 proizvoljni maksimalni lanci u $[\widehat{0}, y]$, odnosno u $[z, \widehat{1}]$, tada je za simpleks $\sigma = C_1 \cup C_2$ u $\Delta(P)$ njegov $lk(\sigma)$ nepovezan. Stoga je $\widetilde{H}_0(lk_{\Delta(P)}(\sigma)) \neq 0$, što je kontradikcija sa pretpostavkom da je P Cohen-Macaulay-jev.

$\square$

Primjedba 2.3.4. Neka je P zasićen, planaran poset ranga $n+1$. Neka je $x \in P$ takav da nije sadržan u krajnjem lijevom maksimalnom lancu, (tj. koji nije minimalan u poretku $<_{P_{r(x)}}$). Definišimo lanac $C_x = \widehat{0} = x_0 \prec x_1 \prec \cdots \prec x \prec \cdots \prec x_n \prec x_{n+1} = \widehat{1}$, gdje su $\widehat{0} = x_0 \prec x_1 \prec \cdots \prec x$ i $x \prec \cdots \prec x_n \prec x_{n+1} = \widehat{1}$ krajnji lijevi lanci u $[\widehat{0}, x]$, odnosno $[x, \widehat{1}]$. C_x je jedinstven maksimalni lanac čija je restrikcija $R(C_x)$ u šeling poretku $<_E$ tačno $\{x\}$. Na taj način šeling poredak iz (2.14) definiše i sledeći linearan poredak elemenata iz P:

Tjemena na krajnjem lijevom lancu (označimo ih sa $v_1, v_2, \cdots, v_{n+2}$) u tom poretku su na prvih $n+2$ mjesta. Neka je $C_{i_1}, C_{i_2}, \cdots, C_{i_{|P|-n-2}}$ poredak maksimalnih lanaca sa jednoelementnom restrikcijom indukovan sa $<_E$. Ako je $\{x\}$ restrikcija lanca C_{i_r}, tada se tjeme x (označimo ga sa v_{r+n+2}) nalazi na $r+n+2$ mjestu.

Primjetimo da prilikom crtanja lanca C_{i_j} Hasse-ov dijagram poseta P dobije tačno dvije nove ivice. Stoga, ako nacrtamo krajnji lijevi lanac (prvi u šeling poretku $<_E$), i sve lance $C_{i_1}, C_{i_2}, \cdots, C_{i_{|P|-n-2}}$ sa jednoelementnom restrikcijom, na osnovu opažanja 2.3.1 dobijamo Hasse-ov dijagram poseta P.

Stoga, za poslednje tjeme u tom poretku $v_{|P|}$, postoje jedinstveni $x, y \in P$ takvi da $x \prec v_{|P|}$ i $v_{|P|} \prec y$. Ako je P lanac, tada je $\Delta(P)$ simpleks, pa je poset P dekompozabilan po tjemenima. Ako P nije lanac, tada je $lk_{\Delta(P)}(v_{|P|}) = \Delta([\widehat{0}, x] \oplus [y, \widehat{1}])$ (ordinalna suma poseta, vidjeti u [82]). Pri tome je $[\widehat{0}, x] \oplus [y, \widehat{1}]$ takođe planaran zasićen poset i $r([\widehat{0}, x] \oplus [y, \widehat{1}]) = n$.

Kako je i poset $P\backslash\{v_{|P|}\}$ planaran i zasićen, ranga $n+1$ to vrijedi (indukcijom po $r(P)$ i $|P|$):

POSLJEDICA 2.3.5. *Planaran poset P je dekompozabilan po tjemenima ako i samo ako je zasićen.*

Takođe, kada crtamo lanac C_i kojem je restrikcija tjeme $\{v_{i+n+2}\}$, tada iznad (i ispod) v_{i+n+2} postoji samo jedno tjeme. Zato je poredak tjemena, obrnut onom definisanom u primjedbi 2.3.4 "shedding" poredak tjemena (vidjeti u radu [91]).

Koristeći osobinu planarnih zasićenih poseta iz primjedbe 2.3.4, pokazaćemo

TEOREMA 2.3.6. *Ako je planaran poset P zasićen tada dopušta R-označavanje skupom $\{1,2\}$.*

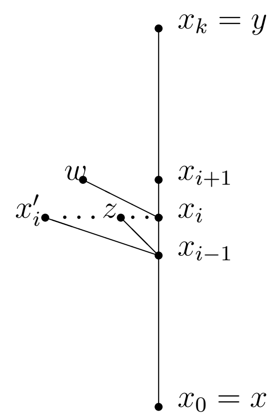
Dokaz. Sve ivice krajnjeg lijevog lanca $\widehat{0} = v_1 \prec v_2 \prec \cdots \prec v_{n+1} = \widehat{1}$ u P označimo sa 1.

Kada u procesu crtanja poseta P opisanog u primjedbi 2.3.4 dodajemo tjeme v_i za $i > n+1$, tada ivicu $x \prec v_i$ označimo sa 2, a ivicu $v_i \prec y$ sa 1. Tako smo na osnovu primjedbe 2.3.4 označili sve ivice poseta P.

Za neko tjeme v_i i za $x = \min\ _{P_{r(v_i)+1}} U(v_i)$ ivica $v_i \prec x$ je označena sa 1, dok su za sve ostale $x' \in U(v_i)$ ivice $v_i \prec x'$ označene sa 2. Takođe, sve ivice $y' \prec v$ su označene sa 1, osim ivice $y \prec v$ za $y = \min_{\prec_{P_{r(v_i)-1}}} \{y : y \prec v\}$ koja je ozna čena sa 2. Sada je u proizvoljnom intervalu $[x, y]$ jedinstven neopadajući maksmalan lanac (u smislu definicije 1.4.7) krajnji lijevi lanac

$$C{:}x = x_0 \prec x_1 \prec \cdots \prec x_{k-1} \prec x_k = y$$

Naime, lanac C je neopadajući, jer ako je $\lambda(x_{i-1} \prec x_i) = 2$, tada x_i nije minimalan u $U(x_{i-1})$, pa postoji x_i' takav da $x_{i-1} \prec x_i'$ i $x_i' <_{Pr(x_i)} x_i$ (ivica $x_{i-1} \prec x_i'$ je označena sa 1). Kako je C krajnji lijevi lanac u $[x, y]$ to $z \not\prec x_{i+1}$ za sve z takve da $x_i' \leq_{Pr(x_i)} z <_{Pr(x_i)} x_i$. Sada zbog zasićenosti postoji w takav da je $w <_{Pr(x_{i+1})} x_{i+1}$ i $x_i \prec w$, pa je i ivica $x_i \prec x_{i+1}$ označena sa 2. Dakle u lancu C ne postoji x_i takvo da je $\lambda(x_{i-1} \prec x_i) > \lambda(x_i \prec x_{i+1})$, pa je C neopadajući lanac.
Sledeća slika ilustruje prethodno razmatranje:



Pokažimo još da je to jedinstven rastući lanac. Ako je C' lanac u $[x, y]$ koji nije krajnji lijevi

$$C' \colon x = x'_0 \prec x'_1 \prec \cdots \prec x'_{k-1} \prec x'_k = y$$

uočimo $i_0 = \min\{i : x_i \neq x'_i\}$ i $j_0 = \min\{j > i_0 : x_j = x'_j\}$. Tada je ivica $x_{i_0-1} \prec x_{i_0}$ označena sa 2 dok je ivica $x_{j_0} \prec x_{j_0} + 1$ označena sa 1, pa lanac C' ima pad. Dakle, krajnji lijevi lanac C je jedinstven neopadajući u $[x, y]$, pa poset P dopušta R-označavanje sa $\{1, 2\}$. □

Kako za niz $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $a_i \in \{1, 2\}$ nije moguće $a_{i-1} > a_i > a_{i+1}$, to na osnovu prethodne teoreme i formule (1.15) dobijamo rezultat L. Billere i G. Hetyeia iz [19]:

POSLJEDICA 2.3.7. *Za flag h-vektor zasićenih planarnih poseta vrijedi $h_S \geq 0$. Ako $S \subseteq [n]$ sadrži uzastopne brojeve tada je $h_S = 0$.*

POSLJEDICA 2.3.8. *Dimenzija vektorskog podprostora $\mathbb{R}^n$ razapetog sa flag f-vektorima planarnih složivih poseta je ranga $n+1$ je n-ti Fibonacci-jev broj c_n ($c_0 = c_1$, $c_{n+1} = c_n + c_{n-1}$). Konus generisan njima je simplicijalan.*

Dokaz. Lako se pokaže da podskupova od $[n]$ koji ne sadrže uzastopne brojeve ima Fibonacci-jev broj c_n. Stoga je dimenzija podprostora generisanog sa flag f-vektorima složivih planarnih poseta najviše c_n.

Da je ta dimenzija jednaka c_n, slijediće iz činjenice da možemo konstruisati c_n složivih planarnih poseta sa afino nezavisnim flag h-vektorima. Sada ćemo "prepisati" dokaz teoreme iz [7] za flag f- vektore konveksnih politopa, (samo mnogo lakši).

Ako su $P_1, P_2, \ldots, P_{c_n}$ (odnosno $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{c_{n-1}}$) baze za podprostore generisane flag f-vektorima složivih planarnih poseta ranga $n+1$ (odnosno

n), tada su poseti $P_1 \oplus \{v\}, P_2 \oplus \{v\}, \ldots, P_{c_n} \oplus \{v\}, Q_1 \oplus (B_2 \setminus \{\widehat{0}\}), Q_2 \oplus (B_2 \setminus \{\widehat{0}\}), \ldots, Q_{c_{n-1}} \oplus (B_2 \setminus \{\widehat{0}\})$ baza za složive planarne posete ranga $n+2$.

Dalje, za svaki $S \subset [n]$ koji ne sadrži uzastopne brojeve, moguće je kao u (1.17) konstruisati planaran složiv poset P kod kojeg je $h_S(P)$po volji veći od ostalih h_T. Stoga je konus koji generišu flag f-vektori zasićenih planarnih poseta simplicijalan. $\square$

Kako za graduisan poset ranga $n+1$, koji dopušta R-označavanje sa skupom $\{1,2\}$

$$h_{\{i,i+1\}} = 0 = f_{i,i+1} - f_i - f_{i+1} + 1$$

to je broj ivica u Hasse-ovom dijagramu tog poseta jednak

$$f_{\{1\}} + \sum_{i=1}^{n-1} f_{\{i,i+1\}} + f_{\{n\}} = 2|P| - n - 3.$$

Dakle, vrijedi:

POSLJEDICA 2.3.9. *Ako je P graduisan poset ranga $n+1$ koji dopušta R-označavanje sa skupom $\{0,1\}$, tada Hasse-ov dijagram poseta P ima tačno $2|P| - n - 3$ ivica.*

Glava 3

cd-indeks i operacije na posetima

3.1 cd-indeks i koalgebra

Jedna od prednosti **cd**-indeksa u odnosu na ostale baze za prostor generisan flag f-vektorima Euler-ovih poseta je "lijepo ponašanje" obzirom na neke operacije na politopima. Razlog za to treba tražiti u činjenici da se **cd**-indeks može interpretirati kao homomorfizam Newton-ovih koalgebri koji čuva strukturu koproizvoda. Pojam koalgebre se definiše prvi put u radu [61]. Koalgebarske metode u izučavanje **cd**-indeksa su uveli R. Ehrenborg i M. Readdy u radu [48]. Slične ideje su korištene i u radovima [42], [16] i [45]. O vezi poseta i algebri govori se i u radu [40].

U ovom poglavlju dajemo pregled osnovnih koalgebarskih pojmova. Neka je $\mathbb{F}$ polje karakteristike 0 i neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$. Proizvod na prostoru V je linearno preslikavanje $\mu : V \otimes V \to V$. Proizvod je asocijativan ako je $\mu \circ (\mu \otimes 1) = \mu \circ (1 \otimes \mu)$.

Koproizvod na V je linearno preslikavanje $\Delta : V \to V \otimes V$. Kaže se da je koproizvod koasocijativan ako je $(\Delta \otimes 1) \circ \Delta = (1 \otimes \Delta) \circ \Delta$.

DEFINICIJA 3.1.1. Neka je V vektorski prostor, μ asocijativan proizvod a Δ koasocijativan koproizvod na V. Uređena trojka (V, μ, Δ) se naziva Newton-ova koalgebra ako vrijedi:

$$\Delta \circ \mu = (1 \otimes \mu) \circ (\Delta \otimes 1) + (\mu \otimes 1) \circ (1 \otimes \Delta).$$

Pomoću Sweedler-ove notacije (vidjeti u [89]) koproizvod se može zapisati kao $\Delta(x) = \sum_x x_{(1)} \otimes x_{(2)}$.

Za proučavanje **ab**-indeksa su važne Newton-ove koalgebre $\mathcal{A}$ i $\mathcal{P}$ definisane u radu [48]. Koalgebra $\mathcal{A} = \mathbb{F}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ je polinomijalna algebra u nekomutativnim promjenjivim **a** i **b**. Proizvod na $\mathcal{A}$ je uobičajeno monoženje polinoma, dok se koproizvod Δ definiše na generatorima sa:

$$\Delta(u_1 u_2 \cdots u_n) = \sum_{i=1}^{n} u_1 \cdots u_{i-1} \otimes u_{i+1} \cdots u_n = \sum_u u_{(1)} \otimes u_{(2)},$$

a zatim se linearno proširi na $\mathcal{A}$.

Za dva graduisana poseta kaže se da su istog tipa ako su izomorfni. Za proizvoljan graduisan poset P sa $\overline{P}$ se označava tip izomorfnosti (klasa svih poseta koji su izomorfni sa P).

Koalgebra $\mathcal{P}$ se definiše kao vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ generisan sa svim tipovima (klasama) poseta čiji je rang bar jedan. Množenje u $\mathcal{P}$ se definiše na generatorima pomoću "zvijezda" proizvoda, tj. $\overline{P} \cdot \overline{Q} = \overline{P * Q}$.

Koproizvod se definiše na generatorima sa

$$\Delta(\overline{P}) = \sum_{x \in P, \hat{0} < x < \hat{1}} \overline{[\hat{0}, x]} \otimes \overline{[x, \hat{1}]},$$

a zatim se proširi linearno na cijelu koalgebru $\mathcal{P}$.

Za koasocijativan koproizvod Δ na Newton-ovoj koalgebri V mogu se definisati preslikavanja $\Delta^k : V \to V^{\otimes(k+1)}$:

$$\Delta^0 = Id \ , \ \Delta^{k+1} = (\Delta^k \otimes 1) \circ \Delta.$$

U Sweedler-ovoj notaciji preslikavanja $\Delta^k(x)$ možemo zapisati sa:

$$\Delta^k(x) = \sum_x x_{(1)} \otimes x_{(2)} \otimes \cdots \otimes x_{(k+1)}. \tag{3.1}$$

Sada se **ab**-indeks može interpretirati kao preslikavanje koalgebri $\Psi : \mathcal{P} \mapsto \mathcal{A}$.

PROPOZICIJA 3.1.2 (R. Ehrenborg, M. Readdy, [48]). *Preslikavanje $\Psi : \mathcal{P} \to \mathcal{A}$ je homomorfizam Newton-ovih koalgebri. To znači da je $\Psi \circ \mu = \mu \circ (\Psi \otimes \Psi)$ i $\Delta \circ \Psi = (\Psi \otimes \Psi) \circ \Delta$.*

Značaj prethodne propozicije (vidjeti u radovima [16] i [42]) je u tome što za proizvoljna linearna preslikavanja $f_1, f_2, \ldots, f_k$ na algebri $\mathbb{Q}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ vrijedi

$$\sum_{\hat{0}=x_0<\cdots<x_k=\hat{1}} f_1(\Psi_{[x_0,x_1]}) \cdots f_k(\Psi_{[x_{k-1},x_k]}) = \sum_{\Psi_P} f_1(\Psi_{P_{(1)}}) \cdots f_k(\Psi_{P_{(k)}}). \tag{3.2}$$

Drugim riječima, ako želimo da izračunamo izraz na lijevoj strani nije nužno da računamo **ab**-indekse intervala u posetu P. Dovoljno je znati **ab**-indeks cijelog poseta P.

U radu [42] je pokazano da vrijedi sledeća lema.

LEMA 3.1.3. *Preslikavanje* $\Psi : \mathcal{P} \to \mathcal{A}$ (**ab**-*indeks*) *je surjekcija.*

Neka $\mathcal{F} = \mathbb{F}\langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle$ označava podalgebru od $\mathcal{A}$ generisanu sa promjenjivim $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ i $\mathbf{d} = \mathbf{ab} + \mathbf{ba}$. Kako je $\Delta(\mathbf{c}) = 2 \cdot 1 \otimes 1$ i $\Delta(\mathbf{d}) = \mathbf{c} \otimes 1 + 1 \otimes \mathbf{c}$, to je i $\mathcal{F}$ Newton-ova koalgebra.

Dalje, neka je sa $\mathcal{E}$ označena podalgebra od $\mathcal{P}$ generisana sa klasama izomorfnosti Euler-ovih poseta. Kako je koalgebra $\mathcal{E}$ zatvorena na proizvod i koproizvod (intervali u Euler-ovom posetu su Euler-ovi), to je $\mathcal{E}$ Newton-ova podalgebra od $\mathcal{P}$.

Primjetimo da je **cd**-indeks $\Phi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ restrikcija preslikavanja $\Psi : \mathcal{P} \to \mathcal{A}$. Stoga je i **cd**-indeks homomorfizam Newton-ovih koalgebri, te za **cd**-indeks vrijedi formula analogna sa (3.2).

U radu [64] su opisane mreže strana piramide i prizme nad nekim politopom.

PROPOZICIJA 3.1.4. *Neka je* V *konveksan politop. Mreže strana politopa* $Pyr(V)$ *i* $Prism(V)$ *(piramida i prizma nad* V*) su:*

$$L(Pyr(V)) = L(V) \times B_1, \mathcal{L}(Prism(V)) = \mathcal{L}(V) \diamond B_2.$$

Prethodna propozicija daje prirodan način da se definišu piramida i prizma na proizvoljnom graduisanom posetu P sa:

$$Pyr(P) = P \times B_1, Prism(P) = P \diamond B_2.$$

R. Ehrenborg i M. Readdy su u radu [48] pokazali da je moguće definisati linearna preslikavanja $Pyr, Prism : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ tako da za proizvoljan graduisan poset P vrijedi

$$Pyr(\Psi_P) = \Psi_{Pyr(P)} \text{ i } Prism(\Psi_P) = \Psi_{Prism(P)}.$$

PROPOZICIJA 3.1.5. *Za proizvoljan graduisan poset* P *vrijedi:*

$$\Psi_{Pyr(P)} = \frac{1}{2}\Big[\mathbf{b} \cdot \Psi_P + \mathbf{a} \cdot \Psi_P + \sum_{\hat{0}<x<\hat{1}} \Psi_{[\hat{0},x]} \cdot \mathbf{ab} \cdot \Psi_{[x,\hat{1}]}\Big]$$

$$\Psi_{Prism(P)} = \Psi_P \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \sum_{\hat{0}<x<\hat{1}} \Psi_{[\hat{0},x]} \cdot (\mathbf{ab} + \mathbf{ba}) \cdot \Psi_{[x,\hat{1}]}.$$

Eksplicitna formula za preslikavanje $Pyr : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}$ se može naći u radu [42]):

$$Pyr(u) = u \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot u + \sum_{u} u_{(1)} \cdot \mathbf{ab} \cdot u_{(2)} = u \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot u + \sum_{u} u_{(1)} \cdot \mathbf{ba} \cdot u_{(2)} \quad (3.3)$$

Kada je P Euler-ov poset, formule za **cd**-indekse poseta $Pyr(P)$ i $Prism(P)$ se lako izvedu iz propozicije 3.1.5.

Dalje, u radu [48] je pokazano da se formule za operatore Pyr i $Prism$ mogu jednostavno zapisati pomoću derivacija na algebrama $\mathbb{Q}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ i $\mathbb{Q}\langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle$.

Na algebri $\mathbb{Q}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ se definišu derivacije G i G' na generatorima sa

$$G(\mathbf{a}) = \mathbf{ba}, G(\mathbf{b}) = \mathbf{ab} \text{ i } G'(\mathbf{a}) = \mathbf{ab}, G'(\mathbf{b}) = \mathbf{ba}$$

i zatim se linearno prošire na cijelu algebru. Dalje, neka je derivacija D definisana sa

$$D(u) = G(u) + G'(u). \quad (3.4)$$

Kako je $G(\mathbf{c}) = G'(\mathbf{c}) = \mathbf{d}$, $G(\mathbf{d}) = \mathbf{cd}$ i $G'(\mathbf{d}) = \mathbf{dc}$ to su derivacije G, G' i D derivacije i na algebri $\mathcal{F}$.

TEOREMA 3.1.6 (R. Ehrenborg, M.Readdy, [42]). *Neka je P proizvoljan poset. Tada vrijedi*

$$\Psi_{Pyr(P)} = \Psi_P \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + G(\Psi_P)$$

$$\Psi_{Prism(P)} = \Psi_P \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + D(\Psi_P).$$

Specijalno, ako je P Euler-ov poset tada vrijedi

$$\Psi_{Pyr(P)} = \Psi_P \cdot \mathbf{c} + G(\Psi_P), \Psi_{Prism(P)} = \Psi_P \cdot \mathbf{c} + D(\Psi_P). \quad (3.5)$$

Primjetimo da na osnovu prethodne teoreme mogu rekurzivno računati **cd**-indeksi n-kocki i n-simpleksa.

Kako za proizvoljan politop V vrijedi $Bipyr(V) = Prism(V^*)^*$, to iz formula (3.5) i (1.14) slijedi:

$$\Phi_{Bipyr(P)} = \mathbf{c} \cdot \Phi_P + D(\Phi_P). \quad (3.6)$$

Evo još nekoliko operacija na politopima, kod kojih se promjena **cd**-indeksa može izraziti pomoću derivacija na koalgebri $\mathcal{F}$.

TEOREMA 3.1.7 (R. Ehrenborg, M. Readdy, [48]). *Neka je W politop, v tjeme politopa W a V "vertex"-figura u tjemenu v. Ako je $\widehat{W}$ politop dobijen od W odsjecanjem tjemena v tada je*

$$\Phi_{\widehat{W}} = \Phi_W + G'(\Phi_V).$$

TEOREMA 3.1.8. *Neka je V konveksan n-politop, a x vektor u opštem položaju u odnosu na V. Neka je H hiperravan normalna na x i neka je $Proj(V)$ ortogonalna projekcija V na H. Tada vrijedi:*

$$\Phi_{V+[0,x]} = \Phi_V + D(\Phi_{Proj(V)}).$$

Interesantno je i sledeće pitanje:
Ako su P i Q Euler-ovi poseti i ako znamo njihove **cd**-indekse Φ_P i Φ_Q, kako možemo izračunati **cd**-indeks njihovog proizvoda $\Phi_{P\times Q}$? Da bi odgovorili na ovo pitanje, u radu [48], uvodi se "mixing"-operator. Problem u tom računu je što se odvija u $\mathbb{Q}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle$ ("izlazi" se iz koalgebre $\mathbb{Q}\langle \mathbf{c}, \mathbf{d}\rangle$). To je poboljšano u radu [42], gdje se daje formula za $\Phi_{P\times Q}$ u terminima Φ_P i Φ_Q.

3.2 Operacije na posetima i R-označavanje

U ovom poglavlju dajemo uslove pod kojima se promjena **ab**-indeksa pri dejstvu neke operacije može izraziti pomoću linearnog preslikavanja, odnosno kada će za operaciju $X : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ postojati linearno preslikavanje $\mathcal{X} : \mathbb{Q}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle \to \mathbb{Q}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle$ takvo da za proizvoljan poset P vrijedi $\Psi_{X(P)} = \mathcal{X}(\Psi_P)$. Koristeći R-označavanje poseta, dobićemo kombinatornu interpretaciju za derivacije G i D, te dokaz teoreme 3.1.6.

Lako se može konstruisati baza u $\mathbb{Q}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle$ koju čine **ab**-indeksi poseta koji dopuštaju R-označavanje. Za proizvoljan $n \in \mathbb{N}$ uočimo 2^{n-1} poseta ranga n:

Za $S \subseteq [n-1]$ definišimo posete

$$P_S^n = B_1 * Q_1 * \cdots * Q_{n-1} \text{ gdje je } Q_i = \begin{cases} B_1, & \text{ako } i \notin S; \\ B_2, & \text{ako } i \in S. \end{cases}$$

Iz relacije 1.12 dobijamo da je

$$\Psi_{P_S^n} = u_1 \cdot u_2 \cdots u_{n-1} \text{ gdje je } \begin{cases} u_i = \mathbf{a}, & \text{ako } i \notin S; \\ u_i = \mathbf{a} + \mathbf{b}, & \text{ako } i \in S. \end{cases}$$

Za **ab**-monom $u = \mathbf{a}^{i_1} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}^{i_2} \cdot \mathbf{b} \cdots \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}^{i_k} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}^{i_{k+1}}$ stepena n uočimo skup $S = \{i_1 + 1, i_1 + i_2 + 2, \ldots, i_1 + i_2 + \cdots + i_k + k\}$. Indukcijom po broju **b**-ova u monomu u može se pokazati da vrijedi:

$$u = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S \setminus T|} \Psi_{P^n_T}.$$

Kako je dimenzija podprostora generisanog sa **ab**-polinomima stepena $n-1$ jednaka 2^{n-1} i kako operacija $*$ čuva R-označavanje, to vrijedi:

PROPOZICIJA 3.2.1. *Poseti P^n_S dopuštaju R-označavanje i njihovi* **ab**-*indeksi $\{\Psi_{P^n_S} : n \in \mathbb{N}, S \subseteq [n-1]\}$ čine bazu za $\mathbb{Q}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$.*

DEFINICIJA 3.2.2. Neka je X neka operacija koja posetu P dodijeli poset $X(P)$. Reći ćemo da je X simetrična ako su ispunjeni sledeći uslovi:

(i) za svaki poset P postoji particija skupa svih lanaca u $X(P)$ indeksirana sa lancima iz P, tj.

$$\mathcal{C}(X(P)) = \mathop{\dot{\bigcup}}_{c \in \mathcal{C}(P)} S(c).$$

(ii) za proizvoljna dva poseta P i P' istog ranga i za sve lance $c \in \mathcal{C}(P)$ i $c' \in \mathcal{C}(P')$ za koje je $wt(c) = wt(c')$ vrijedi i

$$\sum_{C \in S(c)} wt(C) = \sum_{C' \in S(c')} wt(C').$$

PROPOZICIJA 3.2.3. *Ako je X simetrična operacija tada postoji linearno preslikavanje $\mathcal{X} : \mathbb{Q}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \to \mathbb{Q}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ takvo da za svaki poset P vrijedi $\Psi_{X(P)} = \mathcal{X}(\Psi_P)$.*

Dokaz. Primjetimo da za sve $n \in \mathbb{N}$ i $S \subseteq [n]$ polinomi

$$u_S = u_1 \cdot u_2 \cdots u_n, u_i = \begin{cases} \mathbf{a} - \mathbf{b}, & \text{za } i \notin S; \\ \mathbf{b}, & \text{za } i \in S. \end{cases}$$

(zajedno sa 1) čine bazu za $\mathbb{Q}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$. Za proizvoljan **ab**-polinom u_S (monom u promjenjivim **b** i **a** − **b**) uočimo poset P i lanac $c \in \mathcal{C}(P)$ za koji je $wt(c) = u_S$. Definišemo $\mathcal{X}(u_S) = \mathcal{X}(wt(c)) = \sum_{C \in S(c)} wt(C)$ i linearno proširimo na $\mathbb{Q}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$. Na osnovu uslova (ii) iz prethodne definicije $\mathcal{X}$ je dobro definisan. Sada, iz relacije (1.10) i uslova (i) iz definicije 3.2.2 dobijamo:

$$\mathcal{X}(\Psi_P) = \mathcal{X}(\sum_{c \in \mathcal{C}(P)} wt(c)) = \sum_{c \in \mathcal{C}(P)} \sum_{C \in S(c)} wt(C) = \sum_{C \in \mathcal{C}(X(P))} wt(C) = \Psi_{X(P)}.$$

□

Ako simetrična operacija $P \mapsto X(P)$ čuva R-označavanje, uz još neke dodatne uslove možemo opisati formulu za preslikavanje $\mathcal{X}$ u terminima R-označavanja.

DEFINICIJA 3.2.4. Reći ćemo da je X jako simetrična ako su ispunjeni sledeći uslovi:

(i) X je simetrična operacija .

(ii) Za svaki poset P i svako R-označavanje λ poseta P postoji R-označavanje $\bar{\lambda}$ poseta $X(P)$.

(iii) za svaki poset P koji dopušta R-označavanje postoji particija skupa svih maksimalnih lanaca u $X(P)$ indeksirana sa maksimalnim lancima iz P, tj.

$$\mathcal{M}(X(P)) = \mathop{\dot{\bigcup}}_{C \in \mathcal{M}(P)} A(c).$$

(iv) za svaka dva poseta P i P' istog ranga i dva maksimalna lanca $c \in \mathcal{M}(P)$ i $c' \in \mathcal{M}(P')$ za koje je $u(c) = u(c')$ (u označavanju λ) vrijedi i

$$\sum_{C \in A(c)} u(C) = \sum_{C' \in A(c')} u(C').$$

u označavanju $\bar{\lambda}$.

Primjedba 3.2.5. Ako je X jako simetrična operacija, tada je preslikavanje $\mathcal{X} : \mathbb{Q}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \to \mathbb{Q}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ određeno sa označavanjem $\bar{\lambda}$.
Zaista, preslikavanje $\mathcal{X}' : \mathbb{Q}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \mapsto \mathbb{Q}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ definisano sa $\mathcal{X}'(u(c)) = \sum_{C \in S(c)} u(C)$ i linearno prošireno na $\mathbb{Q}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ je dobro definisano na osnovu uslova (iv). Tako, za svaki poset P koji dopušta R-označavanje, vrijedi

$$\mathcal{X}'(\Psi_P) = \mathcal{X}'(\sum_{c \in M(P)} u(c)) = \sum_{c \in M(P)} \sum_{C \in S(c)} u(C) = \Psi_{X(P)} = \mathcal{X}(\Psi_P)$$

Kako se preslikavanja $\mathcal{X}$ i $\mathcal{X}'$ podudaraju na bazi prostora $\mathbb{Q}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ to je $\mathcal{X} = \mathcal{X}'$.

Primjer 3.2.6. Operacije Pyr i $Prism$ su primjeri jako simetričnih operacija na posetima.

Neka je P proizvoljan poset ranga n, i neka je c:$\hat{0} = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = \hat{1}$ lanac u P. Uočimo sledeće lance iz $\mathcal{C}(Pyr(P))$:
za $i = 0, 1, \ldots, k$ neka je

$$C_i = (\hat{0}, 0) < (x_1, 0) < \cdots < (x_i, 0) < (x_i, 1) < \cdots < (\hat{1}, 1),$$

odnosno, za $j = 0, 1, \ldots, k-1$

$$C'_j = (\hat{0}, 0) < (x_1, 0) < \cdots < (x_i, 0) < (x_{i+1}, 1) < \cdots < (\hat{1}, 1).$$

Sada definišemo da je

$$S(c) = \{C_0, C_1, \ldots, C_k, C'_0, C'_1, \ldots, C_{k-1}\} \subset \mathcal{C}(Pyr(P)).$$

Lako se provjerava da je $\{S(c) : c \in \mathcal{C}(P)\}$ particija skupa $\mathcal{C}(Pyr(P))$ koja ispunjava i uslov (ii) iz definicije 3.2.2. Ako je $\lambda : \mathcal{E}(P) \mapsto \Lambda$ neko R-označavanje poseta P uočimo da je $\bar{\lambda} : \mathcal{E}(Pyr(P)) \mapsto \Lambda \cup \{+\infty\}$ definisano sa

$$\bar{\lambda}((x,i) \prec (y,j)) = \begin{cases} \lambda(x \prec y), & \text{za } x \prec y,\ i = j; \\ +\infty, & \text{za } x = y,\ i = 0,\ j = 1. \end{cases}$$

jedno R-označavanje poseta $Pyr(P)$. Ako je P poset ranga $n+1$ i ako je c maksimalan lanac u P, tada skupovi $A(c) = S(c) \cap \mathcal{M}(Pyr(P)) = \{C_0, C_1, \ldots, C_{n+1}\}$ čine particiju za $\mathcal{M}(Pyr(P))$. Ako je $u = u(c)$ monom asociran lancu c tada su u R-označavanju $\bar{\lambda}$ lancima C_i asocirani monomi:

$$u(C_0) = \mathbf{b} \cdot u(c),\ u(C_{n+1}) = u(c) \cdot \mathbf{a},\ u(C_i) = u_1 u_2 \cdots u_{i-1} \cdot \mathbf{ab} \cdot u_{i+1} \cdots u_n.$$

odnosno

$$\sum_{C \in A(c)} u(C) = u(c) \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot u(c) + \sum_{i=1}^{n-1} u_1 \cdot u_2 \cdots u_{i-1} \cdot \mathbf{ab} \cdot u_{i+1} \cdots u_n.$$

Sada se lako provjerava da je operacija Pyr jako simetrična. Dalje, ako poset P dopušta R-označavanje, tada je

$$\Psi_{Pyr(P)} = \Psi_P \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \Psi_P + \sum_{\Psi_P} \Psi_{P_{(1)}} \cdot \mathbf{ab} \cdot \Psi_{P_{(2)}}.$$

Može se pokazati (lema 5.1 u radu [48]) da za proizvoljan **ab**-monom $u = u_1 \cdot u_2 \cdots u_n$ vrijedi

$$u \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot u + \sum_{i=1}^{n-1} u_1 \cdot u_2 \cdots u_{i-1} \cdot \mathbf{ab} \cdot u_{i+1} \cdots u_n = u \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + G(u).$$

Stoga, za posete koji dopuštaju R-označavanje vrijedi

$$Pyr(\Psi_P) = \Psi_{Pyr(P)} = \Psi_P \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + G(\Psi_P).$$

Sada, na osnovu primjedbe 3.2.5 možemo zaključiti da prethodna formula vrijedi za sve posete.

Na sličan način možemo pokazati da je i $P \mapsto Prism(P)$ jako simetrična operacija. Neka je P proizvoljan poset ranga n, i neka je $C \colon \hat{0} = (x_0, y_0) < (x_1, y_1) < \cdots < (x_{k-1}, y_{k-1}) < (x_k, y_k) = \hat{1}$ lanac u $Prism(P) = P \diamond B_2$. Za lanac $c \colon \hat{0} = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_{k-1} \leq x_k = \hat{1}$ (jednakost se može pojaviti najviše jednom) u P reći ćemo da je asociran sa C. Sada, skupovi

$$S(c) = \{C \in \mathcal{C}(Prism(P)) : c \text{ je asociran sa } C\}$$

čine jednu particiju za $\mathcal{C}(Prism(P))$ koja ispunjava uslove iz definicije 3.2.2. Ako je $\lambda : \mathcal{E}(P) \mapsto \Lambda$ neko R-označavanje poseta P, tada je $\bar{\lambda} : \mathcal{E}(P) \mapsto \Lambda \cup \{-\infty, +\infty\}$ definisano sa

$$\bar{\lambda}((x,i) \prec (y,j)) = \begin{cases} \lambda(x \prec y), & \text{ako je } i = j; \\ +\infty, & \text{ako je } i = 1, j = \hat{1}; \\ -\infty, & \text{ako je } i = 2, j = \hat{1}. \end{cases}$$

R-označavanje poseta $Prism(P)$ za koje su ispunjeni uslovi iz definicije 3.2.4. Za proizvoljan maksimalan lanac $c \in \mathcal{M}(P)$ za koji je $u(c) = u_1 \cdot u_2 \cdots u_n$ vrijedi:

$$\sum_{C \in A(c)} u(C) = u(c) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \sum_{i=1}^{n} u_1 u_2 \cdots u_{i-1} \cdot (\mathbf{ab} + \mathbf{ba}) u_{i+1} \cdots u_n = u(c) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + D(u(c)).$$

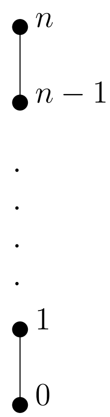
Tako je pokazana i druga formula iz teoreme 3.1.6.

3.3 Poset intervala

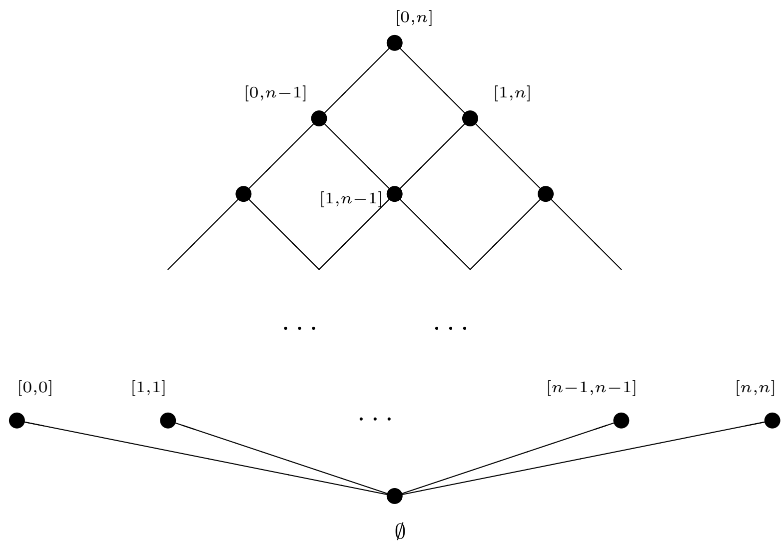
Za proizvoljan graduisan poset P definiše se poset intervala $I(P)$ kao skup svih zatvorenih intervala u P. Relacija poretka u skupu $I(P)$ je inkluzija:

$$[x, y] \leq [x', y'] \text{ u } I(P) \text{ ako i samo ako je } x' \leq x \leq y \leq y' \text{ u } P.$$

Uobičajeno je da se prazan interval $\emptyset$ posmatra kao najmanji element u posetu $I(P)$. Sledeća slika pokazuje poset intervala u lancu dužine n.



n-lanac c



poset $I(c)$

Primjer 3.3.1. B. Lindström je u [65] primjetio da je poset intervala Booleove mreže B_n (mreže strana $(n-1)$-simpleksa) izomorfan sa mrežom strana n-kocke, tj. $I(L(\Delta_{n-1})) \cong L(C_n)$.

Vjerovatno je to bila motivacija za sledeći:
Problem:[B. Lindström, [65]]
Da li za svaki politop V postoji politop W takav da je $I(L(V)) \cong L(W)$?

Za dvodimenzionalne politope odgovor je potvrdan. Ako je V proizvoljan n-tougao, a W dual "kose" prizme nad n-touglom, tada je $I(L(V)) \cong L(W)$. Takođe, A. Björner je u [29] pokazao da je poset intervala 3-politopa mreža strana nekog 4-politopa. Za više dimenzije to je još uvijek otvoren problem.

Sledeća propozicija opisuje osnovna svojstva operacije $P \mapsto I(P)$.

PROPOZICIJA 3.3.2.

(*i*) *Za proizvoljan poset P vrijedi $I(P) \cong I(P^*)$.*

(*ii*) *Intervali u posetu $I(P)$ su oblika*

$$[[x,y],[x',y']]_{I(P)} \cong [x',x]^* \times [y,y'] \text{ odnosno } [\hat{0},[x,y]]_{I(P)} \cong I([x,y]).$$

(*iii*) *Neka je P proizvoljan graduisan poset ranga n. Tada je $I(P)$ graduisan poset ranga $n+1$ i $r([x,y]_{I(P)}) = r(y) - r(x) + 1$. Dalje, f-vektor za poset $I(P)$ je*

$$f_i(I(P)) = \sum_{j=0}^{n-i+1} f_{j,j+i}(P).$$

(iv) Za proizvoljan poset P vrijedi:

$$I(P \times B_1) \cong I(P) \diamond B_2.$$

Dokaz. Tvrđenja (i)-(iii) su direktna posledica definicije poseta $I(P)$. Da dokažemo tvrđenje (iv) definišemo preslikavanje $F : I(P \times B_1) \to I(P) \diamond B_2$ sa $F([(x,p),(y,q)]) = ([x,y],r)$, gdje je

$$r = \begin{cases} \{1\} & \text{za } p = q = \emptyset, \\ \{2\} & \text{za } p = q = \{1\}, \\ \{12\} & \text{inače.} \end{cases}$$

Lako se provjerava da je F izomorfizam poseta. □

Na osnovu tvrđenja (iv) iz prethodne propozicije i propozicije 3.1.4 zaključujemo da vrijedi:

POSLJEDICA 3.3.3. *Neka su V i W politopi takvi da je $I(L(V)) \cong L(W)$. Tada je $I(L(Pyr(V))) \cong L(Prism(W))$.*

Tako se dobija beskonačna familija politopa kod kojih je poset intervala mreža strana nekog drugog politopa. Primjetimo da se primjer 3.3.1 može interpretirarti kao specijalan slučaj prethodnog tvrđenja.

LEMA 3.3.4. *Neka je P graduisan poset koji dopušta R-označavanje. Tada i poset intervala $I(P)$ dopušta R-označavanje.*

Dokaz. Neka je $\lambda : \mathcal{E}(P) \to \Lambda$ neko R-označavanje za poset P. Sa $-\Lambda$ označimo poset koji je izomorfan sa Λ^* i disjunktan sa Λ.

Ako je 0 proizvoljan element takav da $0 \notin \Lambda \cup -\Lambda$, možemo definisati preslikavanje $\overline{\lambda} : \mathcal{E}(I(P)) \to -\Lambda \oplus \{0\} \oplus \Lambda$ (ovde $\oplus$ označava ordinalnu sumu poseta) na sledeći način:

$$\overline{\lambda}(\emptyset \prec [x,x]) = 0 \text{ za } x \in P,$$

odnosno

$$\overline{\lambda}([x,y] \prec [x',y']) = \begin{cases} \lambda(y \prec y'), & \text{ako } x = x', y \prec y'; \\ -\lambda(x' \prec x), & \text{ako } x' \prec x, y = y'. \end{cases}$$

Pokažimo da je $\overline{\lambda}$ jedno R-označavanje poseta $I(P)$. Neka je $[x,y] < [x',y']$ u posetu $I(P)$ i neka su $x' = x_0 \prec x_1 \prec \cdots \prec x_r = x$ i $y = y_0 \prec$

$y_1 \prec \cdots \prec y_s = y'$ jedinstveni rastući lanci u $[x', x]$ i $[y, y']$. Ako uočimo maksimalan lanac

$$C\colon [x,y] = [x_r, y_0] \prec [x_{r-1}, y_0] \prec \cdots \prec [x_0, y_0] \prec [x_0, y_1] \prec \cdots \prec [x_0, y_s] = [x', y']$$

u intervalu $[[x,y],[x',y']]$ tada je

$$\overline{\lambda}(C) = (-\lambda(x_r, x_{r-1}), \ldots, -\lambda(x_1, x_0), \lambda(y_0, y_1), \ldots (y_{s-1}, y_s)).$$

Stoga je C rastući lanac u $[[x,y],[x',y']]$. Pretpostavimo da je C' neki drugi rastući lanac u $[[x,y],[x',y']]$. Tada se u $\lambda(C')$ oznake iz $-\Lambda$ pojave prije onih iz Λ, odnosno

$$C'\colon [x,y] = [x'_r, y'_0] \prec [x'_{r-1}, y'_0] \prec \cdots \prec [x'_0, y'_0] \prec [x'_0, y'_1] \prec \cdots \prec [x'_0, y'_s] = [x', y'].$$

Dalje, kako je C' rastući lanac, to su i $x' = x_0 \prec x'_1 \prec \cdots \prec x'_r = x$ i $y = y'_0 \prec y'_1 \prec \cdots \prec y'_s = y'$ rastući u $[x', x]$ i $[y, y']$. Stoga je $C = C'$, tj. C je jedinstven rastući lanac u $[[x,y],[x',y']]$.

Ako je $x = x_0 \prec x_1 \prec \cdots \prec x_k = y$ jedinstven rastući lanac u $[x,y]$, sličnim rasuđivanjem dobijamo da je

$$0 \prec [x,x] = [x_0, x_0] \prec [x_0, x_1] \prec \cdots \prec [x_0, x_k] = [x,y]$$

jedinstven rastući lanac u $[\emptyset, [x,y]]$. $\square$

U radu [59] je opisano linearno preslikavanje $\mathcal{I} : \mathbb{Q}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle \to \mathbb{Q}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle$ za koje vrijedi $\Psi_{I(P)} = \mathcal{I}(\Psi_P)$.

DEFINICIJA 3.3.5. Za svaki $k \in \mathbb{N}_0$ definišemo linearno preslikavanje $I_k : \mathbb{Q}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle \to \mathbb{Q}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle$ na sledeći način:
za **ab**-monom u i $k \in \mathbb{N}_0$ neka je $\Delta^k(u) = u_{(1)} \otimes \cdots \otimes u_{(k+1)}$ (Sweedler-ov zapis iz relacije (3.1)).

Za paran $k = 2m$ definišemo

$$I_k(u) = \sum_u \mathbf{a} \cdot u_{(m+1)} \cdot \mathbf{b} \cdot u^*_{(m)} \cdot \mathbf{a} \cdots \mathbf{a} \cdot u_{(2m+1)} + \mathbf{b} \cdot u^*_{(m+1)} \cdot \mathbf{a} \cdot u_{(m+2)} \cdot \mathbf{b} \cdots \mathbf{b} \cdot u^*_{(1)}.$$

Slično, za $k = 2m-1$ definišemo:

$$I_k(u) = \sum_u \mathbf{a} \cdot u_{(m+1)} \cdot \mathbf{b} \cdot u^*_{(m)} \cdot \mathbf{a} \cdots \mathbf{b} \cdot u^*_{(1)} + \mathbf{b} \cdot u^*_{(m)} \cdot \mathbf{a} \cdot u_{(m+1)} \cdot \mathbf{b} \cdots \cdot \mathbf{a} \cdot u_{(2m)}.$$

Sada definišemo preslikavanje $\mathcal{I}$ na **ab**-monomima sa

$$\mathcal{I}(u) = \sum_{k \geq 0} I_k(u)$$

i proširimo ga linearno na $\mathbb{Q}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle$.

Na primjer, $\sum_k \Delta^k(\mathbf{a}^2) = \mathbf{a}^2 + 1 \otimes \mathbf{a} + \mathbf{a} \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes 1$ i stoga je $\mathcal{I}(\mathbf{a}^2) = \mathbf{a}^3 + \mathbf{ba}^2 + \mathbf{a}^2\mathbf{b} + \mathbf{ba}^2 + \mathbf{aba} + \mathbf{ba}^2 + \mathbf{aba} + \mathbf{bab}$.

Primjedba 3.3.6. Za proizvoljan **ab**-monom $u = u_1 \cdot u_2 \cdot \cdots \cdot u_{n-1}$, monomi koji su sumandi $\Delta^k(u)$ su indeksirani sa k-članim podskupovima od $[n-1]$.

Za $S = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq [n-1]$, neka je

$$u_{(S)} = u_1 \cdots u_{i_1-1} \otimes u_{i_1+1} \cdots u_{i_2-1} \otimes \cdots \otimes u_{i_k+1} \cdots u_{n-1} = u_{S(1)} \otimes u_{S(2)} \cdots \otimes u_{S(k+1)}$$

Ako je $i_j = i_{j-1} + 1$ tada smatramo da je $u_{i_{j-1}+1} \cdots u_{i_j-1} = u_{S(j)} = 1$.

Na osnovu definicije preslikavanja $\mathcal{I}$, od jednog takvog **ab**-monoma $u_{(S)}$ dobićemo dva sumanda u $\mathcal{I}(u)$. Označimo ih sa $\mathcal{I}(u)_{S^+}$ i $\mathcal{I}(u)_{S^-}$.
Ako je $k = 2m$ tada je

$$\mathcal{I}(u)_{S^+} = \mathbf{a} \cdot u_{S(m+1)} \cdot \mathbf{b} \cdot u^*_{S(m)} \cdot \mathbf{a} \cdots \mathbf{b} \cdot u^*_{S(1)} \cdot \mathbf{a} \cdot u_{S(2m+1)}$$

$$\mathcal{I}(u)_{S^-} = \mathbf{b} \cdot u^*_{S(m+1)} \cdot \mathbf{a} \cdot u_{S(m+2)} \cdot \mathbf{b} \cdots \mathbf{a} \cdot u_{S(2m)} \cdot \mathbf{b} \cdot u_{S(1)}.$$

Slično, za $k = 2m+1$ monomi (sumandi) u $\mathcal{I}(u)$ koji odgovaraju $u_{(S)}$ su:

$$\mathcal{I}(u)_{S^+} = \mathbf{a} \cdot u_{S(m+1)} \cdot \mathbf{b} \cdot u^*_{S(m)} \cdot \mathbf{a} \cdots \mathbf{a} \cdot u_{S(2m+1)} \cdot \mathbf{b} \cdot u^*_{S(1)}$$

$$\mathcal{I}(u)_{S^-} = \mathbf{b} \cdot u^*_{S(m)} \cdot \mathbf{a} \cdot u_{S(m+1)} \cdot \mathbf{b} \cdots \mathbf{b} \cdot u^*_{S(1)} \cdot \mathbf{a} \cdot u_{S(2m)}.$$

TEOREMA 3.3.7. *Za proizvoljan graduisan poset P vrijedi $\Psi_{I(P)} = \mathcal{I}(\Psi_P)$.*

Dokaz. Pokazaćemo da je operacija $P \mapsto I(P)$ jako simetrična. Neka je P proizvoljan poset ranga n i neka je $c{:}\hat{0}_P < t_1 < \cdots < t_l < \widehat{1}_P$ proizvoljan lanac u P. Reći ćemo da je lanac

$$C{:}\hat{0} = \emptyset < [x_0, y_0] < [x_1, y_1] < \cdots < [x_{r-1}, y_{r-1}] < [\hat{0}_P, \hat{1}_P] = \hat{1}$$

u posetu $I(P)$ asociran sa c ako se u multilancu

$$\hat{0}_P \le x_{r-1} \le x_{r-2} \le \cdots \le x_0 \le y_0 \le y_1 \le y_2 \le \cdots \le y_{r-1} \le \hat{1}_P. \tag{3.7}$$

pojavljuju svi elementi iz c (i samo oni).
Ako je $S(c) = \{C \text{ lanac u } I(P) : c \text{ je asociran sa } C\}$, tada je $\{S(c) : c \in \mathcal{C}(P)\}$ particija skupa svih lanaca u $I(P)$ koja zadovoljava uslove iz definicije 3.2.2.

Na osnovu leme 3.3.4 znamo da operacija $P \mapsto I(P)$ čuva R-označavanje.

Da bi pokazali da je $P \mapsto I(P)$ jako simetrična operacija, za proizvoljan maksimalan lanac c u posetu P definišemo

$$A(c) = \{C\text{-maksimalan lanac u } I(P) : C \text{ je asociran sa } c\} = S(c) \cap \mathcal{M}(I(P)).$$

Primjetimo da je $\{A(c) : c$- maksimalan lanac u $P\}$ particija maksimalnih lanaca poseta $I(P)$.

Za proizvoljan maksimalan lanac c:$\hat{0}_P = t_0 \prec t_1 \prec \cdots \prec t_{n-1} \prec t_n = \widehat{1}_P$ u posetu P, neka je $\lambda(c) = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ oznaka za c i $u(c) = u_1u_2 \cdots u_{n-1}$ monom asociran lancu c. Dalje, za svaki maksimalan lanac c u P postoji tačno 2^n lanaca u $I(P)$ kojima je c asociran.

Neka je $k = 2m$ i neka je $S = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ proizvoljan podskup od $[n-1]$. Uočimo maksimalne lance C_S^+ i C_S^- u $A(c)$:

$$C_S^+ \vdots [t_{i_m}, t_{i_m}] < [t_{i_m}, t_{i_m+1}] \ldots < [t_{i_m}, t_{i_{m+1}}] < [t_{i_m-1}, t_{i_{m+1}}] \ldots < [t_{i_{m-1}}, t_{i_{m+1}}]$$

$$< [t_{i_{m-1}}, t_{i_{m+1}+1}] \ldots < [t_{i_{m-1}}, t_{i_{m+2}}] < [t_{i_{m-1}-1}, t_{i_{m+2}}] \ldots < [\hat{0}_P, t_{i_k}] \ldots < [\hat{0}_P, \hat{1}_P]$$

$$C_S^- \vdots [t_{i_{m+1}}, t_{i_{m+1}}] < [t_{i_{m+1}-1}, t_{i_{m+1}}] \ldots < [t_{i_m}, t_{i_{m+1}}] < [t_{i_m}, t_{i_{m+1}+1}] \ldots < [t_{i_m}, t_{i_{m+2}}]$$

$$< [t_{i_m-1}, t_{i_{m+2}}] \ldots < [t_{i_{m-1}}, t_{i_{m+2}}] < [t_{i_{m-1}}, t_{i_{m+2}+1}] \ldots < [t_{i_1}, \hat{1}_P] < \ldots < [\hat{0}_P, \hat{1}_P].$$

Dalje, na osnovu definicije R-označavanja $\overline{\lambda}$ iz leme 3.3.4), oznake koje su dodjeljene tim lancima su:

$$\overline{\lambda}(C_S^+) = (0, \lambda_{i_m+1}, \ldots, \lambda_{i_{m+1}}, -\lambda_{i_m}, \ldots, -\lambda_{i_{m-1}+1}, \lambda_{i_{m+1}+1}, \ldots, \lambda_{i_k+1}, \ldots, \lambda_n)$$

odnosno

$$\overline{\lambda}(C_S^-) = (0, -\lambda_{i_{m+1}}, \ldots, -\lambda_{i_m+1}, \lambda_{i_{m+1}+1}, \ldots, \lambda_{i_{m+2}}, -\lambda_{i_m}, \ldots, -\lambda_{i_1}, \ldots, -\lambda_1).$$

Sada se može primjetiti, na osnovu formule (1.15) zaključujemo da su **ab**-monomi koji odgovaraju lancima C_S^+ i C_S^- tačno $\mathcal{I}(u(c))_{S^+}$ i $\mathcal{I}(u(c))_{S^-}$.

Ako je $|S| = 2m + 1$, na sličan način možemo konstruisati maksimalne lance C_S^+ i C_S^- u posetu $I(P)$ tako da je $u(C_S^+) = \mathcal{I}(u(c))_{S^+}$ i $u(C_S^-) = \mathcal{I}(u(c))_{S^-}$.

Na osnovu konstrukcije, lako se zaključuje da su lanci koji odgovaraju različitim podskupovima $[n-1]$ međusobno različiti. Kako se na prethodno opisan način dobije tačno 2^n lanaca u $I(P)$ (kojima je c asociran), to je

$$A(c) = \bigcup_{S \subseteq [n-1]} \{C_S^+, C_S^-\}.$$

Stoga je doprinos svih lanaca C iz $A(c)$ polinomu $\Psi_{I(P)}$ jednak

$$\sum_{C \in A(c)} u(C) = \sum_{S \subseteq [n-1]} (u(C_S^+) + u(C_S^-)) = \sum_{S \subseteq [n-1]} (\mathcal{I}(u(c))_{S^+} + \mathcal{I}(u(c))_{S^-}) = \mathcal{I}((u(c)))$$

pa je operacija $P \mapsto I(P)$ jako simetrična. Na osnovu formule (1.15), linearnosti preslikavanja $\mathcal{I}$ i primjedbe 3.2.5 sada zaključujemo da je $\Psi_{I(P)} = \mathcal{I}(\Psi_P)$ za sve posete P.

□

Iz posljedice 3.3.3, tvrđenja (i) i leme 3.1.3 dobijamo da za preslikavanje $\mathcal{I}$ vrijedi:

$$\mathcal{I}(u) = \mathcal{I}(u^*)\ ,\ \mathcal{I} \circ Pyr = Prism \circ \mathcal{I}.$$

Do kraja ovog poglavlja, opisaćemo rekurzivne relacije za operator $\mathcal{I}$. Kako je $I(B_1) \cong B_2$ dobijamo da je $\mathcal{I}(1) = \mathbf{a} + \mathbf{b}$.

TEOREMA 3.3.8. *Za proizvoljan* **ab**-*monom u vrijedi:*

$$\mathcal{I}(u \cdot \mathbf{a}) = \mathcal{I}(u) \cdot \mathbf{a} + (\mathbf{ab} + \mathbf{ba}) \cdot u^* + \sum_u \mathcal{I}(u_{(2)}) \cdot \mathbf{ab} \cdot u^*_{(1)} \tag{3.8}$$

$$\mathcal{I}(u \cdot \mathbf{b}) = \mathcal{I}(u) \cdot \mathbf{b} + (\mathbf{ab} + \mathbf{ba}) \cdot u^* + \sum_u \mathcal{I}(u_{(2)}) \cdot \mathbf{ba} \cdot u^*_{(1)} \tag{3.9}$$

Dokaz. Neka je P proizvoljan graduisan poset. Sa $\overline{P}$ označimo poset dobijen od P dodavanjem novog elementa $\bar{1}$ tako da je $x < \bar{1}$ za sve $x \in P$. Drugim riječima, $\overline{P} = P * L_2$ gdje L_2 označava lanac dužine dva (maksimalan element $\hat{1}$ poseta P identifikujemo sa jedinim atomom u L_2).

Očigledno je $\Psi_{\overline{P}} = \Psi_P \cdot \mathbf{a}$.

Sve lance u posetu $I(\overline{P})$ podijelimo u četiri grupe i izračunajmo njihov doprinos $\Psi_{I(P)}$:

1. Lanci u kojima se ne pojavljuje $\bar{1}$. To su tačno "stari" lanci u posetu $I(P)$ koji mogu (ali ne moraju) da sadrže $[\hat{0}, \hat{1}]$ na kraju. Iz relacije (1.10) slijedi da je doprinos svih takvih lanaca $\Psi_{I(\overline{P})}$ jednak

$$\sum_{c\text{-lanac u } I(P)} wt(c) \cdot \mathbf{b} + \sum_{c\text{-lanac u } I(P)} wt(c) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \Psi_{I(P)} \cdot \mathbf{a}.$$

2. Lanci koji počinju sa $[\bar{1}, \bar{1}]$. Svi takvi lanci mogu (ali ne moraju) da sadrže element $[\hat{1}, \bar{1}]$. Kako je (na osnovu tvrđenja (ii) iz propozicije 3.3.2) $[[\hat{1}, \bar{1}], [\hat{0}, \bar{1}]]_{I(\overline{P})} \cong P^*$ dobijamo da je doprinos svih takvih lanaca polinomu $\Psi_{I(\overline{P})}$ jednak

$$\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \sum_{c\text{-lanac u } P} wt(c)^* + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \cdot \sum_{c-\text{lanac u } P} wt(c)^* = \mathbf{ba} \cdot \Psi^*_P.$$

3. Lanci koji sadrže $[\hat{1},\bar{1}]$ ali ne sadrže $[\bar{1},\bar{1}]$. Svi takvi lanci mogu (ali ne moraju) početi sa $[\hat{1},\hat{1}]$ i njihov doprinos $\Psi_{I(\overline{P})}$ je

$$\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}\cdot\sum_{c-\text{lanac u } P} wt(c)^* + (\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot\mathbf{b}\cdot\sum_{c-\text{lanac u } P} wt(c)^* = \mathbf{ab}\cdot\Psi_P^*.$$

4. Lanci u kojima se $\bar{1}$ prvi put pojavi u $[x,\bar{1}]$ (za neki $x\in P\setminus\{\widehat{0},\widehat{1}\}$). Svi takvi lanci mogu (ali ne moraju) da sadrže i element $[x,\hat{1}]$ neposredno prije $[x,\bar{1}]$. Kako je $[\emptyset,[x,\hat{1}]]_{I(\overline{P})}\cong I([x,\hat{1}]_P)$ i $[[x,\bar{1}],[\hat{0},\bar{1}]]_{I(\overline{P})}\cong[\hat{0},x]_P^*$, dobijamo da je doprinos lanaca iz ove grupe polinomu $\Psi_{I(\overline{P})}$ jednak

$$\sum_{x\in P\setminus\{\hat{0},\hat{1}\}}\ \sum_{c\text{-lanac u } I([x,\hat{1}])}\ \sum_{c'\text{-lanac u}[0,x]} wt(c)\cdot\mathbf{ab}\cdot wt(c')^* =$$

$$=\sum_{x\in P\setminus\{\hat{0},\hat{1}\}}\mathcal{I}(\Psi_{[x,\hat{1}]})\cdot\mathbf{ab}\cdot\Psi_{[x,\hat{0}]^*}=\sum_{\Psi_P}\mathcal{I}(\Psi_{P_{(2)}})\cdot\mathbf{ab}\cdot\Psi^*_{P_{(1)}}$$

Druga jednakost slijedi na osnovu propozicije 3.1.2 (vidjeti i relaciju (3.2)).

Sada, sabiranjem doprinosa svih lanaca poseta $I(\overline{P})$, dobijamo da formula (3.8) vrijedi kada je $u=\Psi_P$ (za neki graduisan poset P). Na osnovu leme 3.1.3 i linearnosti preslikavanja $\mathcal{I}$ slijedi da formula (3.8) vrijedi za proizvoljan **ab**-monom u.

Da bi dokazali tačnost formule (3.9), za proizvoljan graduisan poset P uočićemo novi poset $P'=P*B_2$. Dva koatoma poseta P' označimo sa $1'$ i $1''$, a maksimalan element sa $\mathbf{1}$. Očigledno je

$$\mathcal{I}(\Psi_{P'})=\mathcal{I}(\Psi_P\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}))=\mathcal{I}(\Psi_P\cdot\mathbf{a})+\mathcal{I}(\Psi_P\cdot\mathbf{b}).$$

Primjetimo da su lanci u $I(P')$ u kojima se ne pojavljuje $1''$ u bijekciji sa lancima u posetu $I(\overline{P})$. Stoga je doprinos tih lanaca polinomu $\Psi_{I(P')}$ tačno $\mathcal{I}(\Psi_P\cdot\mathbf{a})$. Zato možemo zaključiti

$$\mathcal{I}(\Psi_P\cdot\mathbf{b})=\sum_{C\text{-lanac u } I(P),[x,1'']\in C} wt(C),$$

tj. $\mathcal{I}(\Psi_P\cdot\mathbf{b})$ jednak sumi težina lanaca u $I(P')$ u kojima se pojavi $1''$. Skup svih takvih lanaca poseta $I(P')$ podjelimo u četiri grupe:

1. Lanci u kojima se $1''$ pojavi samo na kraju (u intervalu $[\hat{0}, 1'']$). Te lance možemo prepoznati kao stare lance poseta $I(P)$ koji na kraju završavaju sa $[\hat{0}, 1'']$. Njihov doprinos $\Psi_{I(P')}$ je tačno

$$\sum_{c\text{-lanac u } I(P)} wt(c) \cdot \mathbf{b} = \mathcal{I}(\Psi_P) \cdot \mathbf{b}.$$

2. Lanci u $I(P')$ koji počinju sa $[1'', 1'']$. Svi takvi lanci mogu (ali ne moraju) da sadrže element $[1'', \mathbf{1}]$. Kako je $[[1'', \mathbf{1}], [\hat{0}, \mathbf{1}]]_{I(P'')} \cong P^*$ to je suma težina svih lanaca iz ove grupe

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \cdot \sum_{\text{c-lanac u} P^*} wt(c) + \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot \sum_{\text{c-lanac u} P^*} wt(c) = \mathbf{ba} \cdot \Psi_P^*.$$

3. Lanci koji sadrže $[1'', \mathbf{1}]$ a ne sadrže $[1'', 1'']$. Svi takvi lanci mogu (ali ne moraju) početi sa $[\mathbf{1}, \mathbf{1}]$. Slično kao i u prethodnom slučaju, dobijamo da je njihov doprinos polinomu $\Psi_{I(P')}$ jednak $\mathbf{ab} \cdot \Psi_P^*$.

4. Lanci u kojima se $1''$ pojavi prvi put u elementu $[x, 1'']$ (za neki $x \in P \setminus \{\widehat{0}, \widehat{1}\}$). Svaki takav lanac može (ali i ne mora) da sadrži $[x, \mathbf{1}]$. Kako je $[\emptyset, [x, 1'']]_{I(P'')} \cong I([\hat{0}, x]_P)$ i $[[x, \mathbf{1}], [\hat{0}, \mathbf{1}]]_{I(P'')} \cong [\hat{0}, x]_P^*$ to je suma težina svih takvih lanaca

$$\sum_{x \in P \setminus \{\widehat{0}, \widehat{1}\}} \sum_{c\text{-lanac u } I([x, \widehat{1}])} \sum_{c'\text{-lanac} [\widehat{0}, x]} wt(c) \cdot \mathbf{ba} \cdot wt(c')^* =$$

$$= \sum_{x \in P \setminus \{\widehat{0}, \widehat{1}\}} \mathcal{I}(\Psi_{[x, \widehat{1}]}) \cdot \mathbf{ba} \cdot \Psi_{[x, \widehat{0}]^*} = \sum_{\Psi_P} \mathcal{I}(\Psi_{P_{(2)}}) \cdot \mathbf{ba} \cdot \Psi_{P_{(1)}}^*$$

Ako saberemo težine svih lanaca iz sve četiri grupe, dobijamo da formula (3.9) vrijedi kada je $u = \Psi_P$, za proizvoljan poset P. Koristeći lemu 3.1.3 i linearnost preslikavanja $\mathcal{I}$ možemo zaključiti da formula (3.9) vrijedi za svaki $\mathbf{ab}$-monom u.

□

Primjenom tvrđenja (*iii*) iz propozicije 3.3.2 i uopštenih Dehn-Sommerville relacija (1.5) može se pokazati sledeće tvrđenje:

PROPOZICIJA 3.3.9. *Ako je P Euler-ov poset tada je i $I(P)$ takođe Euler-ov.*

Stoga, možemo posmatrati restrikciju preslikavanja $\mathcal{I}$ na $\mathbb{Q}\langle \mathbf{c}, \mathbf{d}\rangle$, i (kao u radu [42] za proizvod poseta), pitati se kako se računaju vrijednosti operatora $\mathcal{I}$ u promjenjivim $\mathbf{c}$ i $\mathbf{d}$.

Sledeća teorema opisuje rekurzivne relacije za operator $\mathcal{I}$ u algebri $\mathbb{Q}\langle \mathbf{c}, \mathbf{d}\rangle$.

TEOREMA 3.3.10. *Neka je u proizvoljan* **cd**-*monom. Tada je*

$$\mathcal{I}(u \cdot \mathbf{c}) = \mathcal{I}(u) \cdot \mathbf{c} + 2\mathbf{d} \cdot u^* + \sum_u \mathcal{I}(u_{(2)}) \cdot \mathbf{d} \cdot u^*_{(1)}$$

$$\mathcal{I}(u{\cdot}\mathbf{d}) = \mathcal{I}(u){\cdot}\mathbf{d}+(\mathbf{dc}+\mathbf{cd}){\cdot}u^*+\mathbf{d}{\cdot}u^*{\cdot}\mathbf{c}+\sum_u \big(\mathcal{I}(u_{(2)}){\cdot}\mathbf{d}{\cdot}Pyr(u^*_{(1)})+\mathbf{d}{\cdot}u^*_{(2)}{\cdot}\mathbf{d}{\cdot}u^*_{(1)}\big)$$

Dokaz. Prvu formulu lako dobijemo sabiranjem relacija (3.8) i (3.9).

Iz relacije (3.9) slijedi da je

$$\mathcal{I}(u \cdot \mathbf{ab}) = \mathcal{I}(u\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} + (\mathbf{ab} + \mathbf{ba}) \cdot \mathbf{a} \cdot u^* + \sum_{ua} \mathcal{I}((u\mathbf{a})_{(2)}) \cdot \mathbf{ba} \cdot (u\mathbf{a})^*_{(1)}$$

Kako za svaki **cd**-monom v vrijedi $\Delta(v \cdot \mathbf{a}) = v \otimes 1 + \sum_v v_{(1)} \otimes v_{(2)} \cdot \mathbf{a}$ to je

$$\sum_{ua} \mathcal{I}((u\mathbf{a})_{(2)}) \cdot \mathbf{ba} \cdot (u\mathbf{a})^*_{(1)} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{ba} \cdot u^* + \sum_u \mathcal{I}(u_{(2)}\mathbf{a}) \cdot \mathbf{ba} \cdot u^*_{(1)}.$$

Primjenom relacije (3.8) i koristeći koasocijativnost koproizvoda dobijamo:

$$\sum_{ua} \mathcal{I}((u\mathbf{a})_{(2)}) \cdot \mathbf{ba} \cdot (u\mathbf{a})^*_{(1)} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{ba} \cdot u^* + \sum_u \mathcal{I}(u_{(2)}) \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{ba} \cdot u^*_{(1)} +$$

$$+ \sum_u (\mathbf{ab} + \mathbf{ba}) \cdot u^*_{(2)} \cdot \mathbf{ba} \cdot u^*_{(1)} + \sum_u \mathcal{I}(u_{(3)}) \cdot \mathbf{ab} \cdot u^*_{(2)} \cdot \mathbf{ba} \cdot u^*_{(1)}.$$

Iz prethodne relacije i iz (3.8) zaključujemo da je

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(u\mathbf{ab}) = \mathcal{I}(u) \cdot \mathbf{ab} + (\mathbf{ab} + \mathbf{ba}) \cdot u^* \cdot \mathbf{b} + \sum_u \mathcal{I}(u_{(2)}) \cdot \mathbf{ab} \cdot u^*_{(1)} \cdot \mathbf{b} +\\ + (\mathbf{ab} + \mathbf{ba}) \cdot \mathbf{a} \cdot u^* + (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{ba} \cdot u^* + \sum_u \mathcal{I}(u_{(2)}) \cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{ba} \cdot u^*_{(1)} \qquad (3.10)\\ + \sum_u (\mathbf{ab} + \mathbf{ba}) \cdot u^*_{(2)} \cdot \mathbf{ba} \cdot u^*_{(1)} + \sum_u \mathcal{I}(u_{(3)}) \cdot \mathbf{ab} \cdot u^*_{(2)} \cdot \mathbf{ba} \cdot u^*_{(1)}.\end{aligned}$$

Na sličan način, može se pokazati da je

$$\mathcal{I}(u \cdot \mathbf{ba}) = \mathcal{I}(u) \cdot \mathbf{ba} + (\mathbf{ab} + \mathbf{ba}) \cdot u^* \cdot \mathbf{a} + \sum_u \mathcal{I}(u_{(2)}) \cdot \mathbf{ba} \cdot u^*_{(1)} \cdot \mathbf{a} +$$

$$+(\mathbf{ab}+\mathbf{ba})\cdot\mathbf{b}\cdot u^* + (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{ab}\cdot u^* + \sum_u \mathcal{I}(u_{(2)})\cdot\mathbf{b}\cdot\mathbf{ab}\cdot u^*_{(1)} \tag{3.11}$$

$$+\sum_u(\mathbf{ab}+\mathbf{ba})\cdot u^*_{(2)}\cdot\mathbf{ab}\cdot u^*_{(1)} + \sum_u \mathcal{I}(u_{(3)})\cdot\mathbf{ba}\cdot u^*_{(2)}\cdot\mathbf{ab}\cdot u^*_{(1)}.$$

Kada saberemo relacije (3.10) i (3.11), i iskoristimo formulu (3.3) za preslikavanje Pyr dobićemo drugu formulu iz ovog teorema. □

Sledeća tabela pokazuje vrijednosti operatora $\mathcal{I}$ u **cd**-monomima stepena manjeg od pet:

u	$\mathcal{I}(u)$
1	$\mathbf{c}$
$\mathbf{c}$	$\mathbf{c}^2+2\mathbf{d}$
$\mathbf{c}^2$	$\mathbf{c}^3+4\mathbf{dc}+2\mathbf{cd}$
$\mathbf{d}$	$2\mathbf{cd}+2\mathbf{dc}$
$\mathbf{c}^3$	$\mathbf{c}^4+6\mathbf{dc}^2+4\mathbf{cdc}+2\mathbf{c}^2\mathbf{d}+4\mathbf{d}^2$
$\mathbf{cd}$	$\mathbf{c}^2\mathbf{d}+3\mathbf{cdc}+2\mathbf{dc}^2+4\mathbf{d}^2$
$\mathbf{dc}$	$\mathbf{c}^2\mathbf{d}+3\mathbf{cdc}+2\mathbf{dc}^2+4\mathbf{d}^2$
$\mathbf{c}^4$	$\mathbf{c}^5+8\mathbf{dc}^3+6\mathbf{cdc}^2+4\mathbf{c}^2\mathbf{dc}+2\mathbf{c}^3\mathbf{d}+8\mathbf{d}^2\mathbf{c}+8\mathbf{dcd}+4\mathbf{cd}^2$
$\mathbf{dc}^2$	$\mathbf{c}^3\mathbf{d}+3\mathbf{cdc}^2+2\mathbf{c}^2\mathbf{dc}+2\mathbf{dc}^3+6\mathbf{d}^2\mathbf{c}+6\mathbf{dcd}+4\mathbf{cd}^2$
$\mathbf{cdc}$	$2\mathbf{c}^2\mathbf{dc}+4\mathbf{cdc}^2+2\mathbf{dc}^3+8\mathbf{d}^2\mathbf{c}+4\mathbf{dcd}+4\mathbf{cd}^2$
$\mathbf{c}^2\mathbf{d}$	$\mathbf{c}^3\mathbf{d}+3\mathbf{cdc}^2+2\mathbf{c}^2\mathbf{dc}+2\mathbf{dc}^3+6\mathbf{d}^2\mathbf{c}+6\mathbf{dcd}+4\mathbf{cd}^2$
$\mathbf{d}^2$	$\mathbf{c}^2\mathbf{dc}+\mathbf{cdc}^2+4\mathbf{cd}^2+4\mathbf{dcd}+4\mathbf{d}^2\mathbf{c}$

3.4 E_t konstrukcija za posete

U radu [50] D. Eppstein, G. Kuperberg i G. Ziegler su definisali E-konstrukciju za sfere i politope. Pomoću te nove operacije, dobili su beskonačnu familiju 2-prostih 2-simplicijalnih 4-dimenzionalnih politopa. A. Paffenholz i G. Ziegler u radu [73] daju uopštenje ove operacije na posete i mreže:

DEFINICIJA 3.4.1 (Kombinatorna definicija E_t konstrukcije [72]). Neka je P graduisan poset ranga $d+1$ sa funkcijom ranga r i neka je $0 \leq t \leq d-1$. Definiše se novi poset $E_t(P)$ na sledeći način:
Elementi skupa $E_t(P)$ su

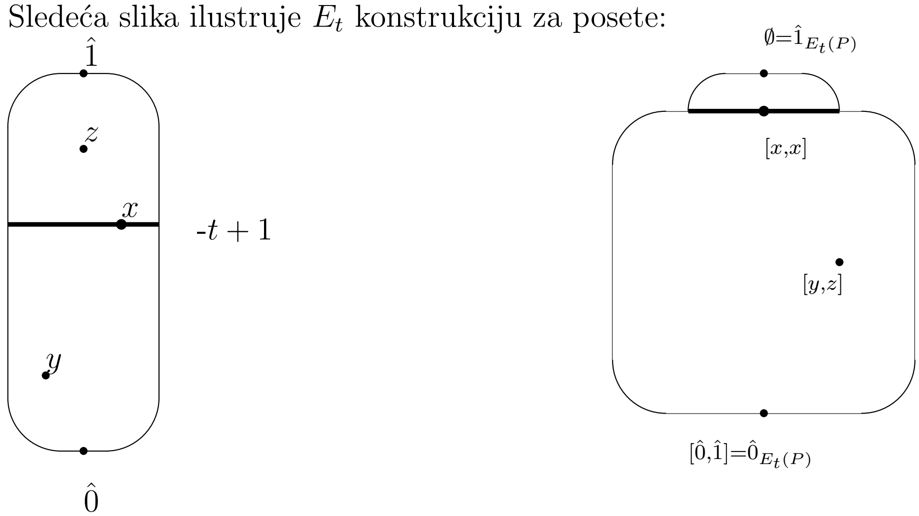
- prazan skup $\emptyset$

- intervali $[y,y]$ za $y \in P, r(y) = t+1$

- intervali $[x,z]$ ako je $r(x) < t+1 < r(z)$.

Relacija poretka na $E_t(P)$ je obrnuta inkluzija: $\emptyset$ je maksimalan element, a interval $[\hat{0}, \hat{1}]$ je minimalan u posetu $E_t(P)$. Koatomi u posetu $E_t(P)$ su intervali oblika $[y, y]$, gdje je $y \in P, r(y) = t + 1$.

Sledeća slika ilustruje E_t konstrukciju za posete:



poset P poset $E_t(P)$

Primjer 3.4.2. Ako operaciju E_t primjenimo na Boole-ovu mrežu B_{d+1} (mrežu strana d-simpleksa) dobija se mreža strana politopa koji je dualan hipersimpleksu $\Delta_d(t)$, tj. $E_t(B_d + 1) \cong L(\Delta_d^*(t))$.

Formalno, E_t konstrukcija za posete je vrlo slična konstrukciji Bier-ovih poseta i sfera, vidjeti u radu [37].

Osnovne osobine E_t konstrukcije su opisane u sladećoj propoziciji:

PROPOZICIJA 3.4.3 (A. Paffenholz, G. M. Ziegler, [73]). *Neka je P graduisan poset ranga $d+1$ sa funkcijom ranga r. Tada vrijedi:*

(i) E_t je takođe graduisan ranga $d+1$ i vrijedi

$$rang(b) = \begin{cases} r(x)+d+1-r(z), & za\ b = [x, z], r(x) < t+1 < r(z); \\ d, & za\ b = [y, y], r(y) = t+1; \\ d+1, & za\ b = \emptyset. \end{cases}$$

(ii) Intervali u posetu $E_t(P)$ su oblika

- $[[x, y], [p, q]]_{E_t(P)} \cong [x, p]_P \times [q, y]^*_P$

- $[[x,z],[y,y]]_{E_t(P)} \cong \left([x,y]_P^* \diamond [y,z]_P\right)^*$
- $[[x,y],\emptyset]_{E_t(P)} \cong E_{t-r(x)}([x,y]_P)$

(iii) Za operaciju E_t vrijede sledeće relacije:

$$E_{d-1}(P) \cong P \ , \ E_0(P) \cong P^* \ i \ E_t(P) \cong E_{d-t-1}(P^*)$$

(iv) f-vektor poseta $E_t(P)$ je

$$f_d(E_t(P)) = f_t(P) \ , \ f_k(E_t(P)) = \sum_{j-i=d-k} f_{i,j}(P)$$

(u gornjoj sumi je $i < t < j$).

Kada je P poset strana neke PL-sfere, operacije E_t imaju i geometrijsku interpretaciju (vidjeti u [72]):

Neka je S proizvoljna PL-sfera dimenzije $d-1$, $P(S)$ poset strana te sfere i t parametar između 0 i $d+1$. Definiše se nova PL-sfera $E_t(S)$ na sledeći način:

1. Neka je $Sd(S)$ baricentrička podjela sfere S.
2. Neka je v tjeme sfere $Sd(S)$, koje odgovara nekoj t-dimenzionalnoj ćeliji. Sve maksimalne ćelije sfere $Sd(S)$ koje sadrže v se slijepe u novu $(d-1)$-ćeliju.
3. Sve k-dimenzionalne ćelije koje su postale suvišne poslije prethodnog koraka se slijepe u jednu.

U [72] je pokazano da je poset strana te nove sfere izomorfan sa $E_t(P(S))$, tj. ova konstrukcija je ekvivalentna sa definicijom 3.4.1.

E_t konstrukcija je u bliskoj vezi sa DVT-operacijom ("deep vertex truncation") za konveksne politope. Za d-dimenzionalan politop V definiše se

$$DVT(V) = V \cap \bigcap_{v\text{- tjeme } V} H_v^-,$$

tj. $DVT(V)$ se dobije istovremenim odsjecanjem svih tjemena v (sa hiperravnima H_v^-) tako da od svake ivice e ostane samo jedna tačka (u relativnom interioru ivice e).

Ekvivalentno, može se reći da je $DVT(V)$ konveksan omotač tačaka p_e (jedna tačka za svaku ivicu e) postavljenih tako da za svako tjeme v, tačke p_e koje pripadaju ivicama incidentnim sa v, leže u jednoj hiperravni, odnosno

$$DVT(V) = conv\{p_e : e \text{ je ivica u } V\}.$$

Ako politop V dopušta DVT konstrukciju i ako je P njegov poset strana, tada je $E_1(P)$ poset strana za $DVT(V)^*$ (propozicija 2.5.2 iz [72]).

Varijante DVT operacije su u literaturi koristile za konstrukciju pravilnih i polupravilnih politopa ([54], [39], str. 145-164).

Nije jasno da li za proizvoljan politop V uopšte postoji $DVT(V)$, tj. da li se mogu izvesti odsjecanja tjemena tako da svi uslovi iz definicije budu ispunjeni? Za sve proste politope i sve 3-dimenzionalne politope odgovor je potvrdan (lema 3.7 u [95]). Posebno je zanimljivo da li postoji $DVT(V)$ za simplicijalne politope. Ako je V simplicijalan 4-dimenzionalan politop tada je $DVT(V)$ 2-prost 2-simplicijalan politop (propozicija 3.8 u [95]).

U radu [73] je pokazano da politopi $Stack(n,4)$ dopuštaju DVT konstrukciju, i tako je dobijena beskonačna familija 2-prostih 2-simplicijalnih politopa.

Još uvijek nije poznat primjer politopa za koji DVT konstrukcija nije moguća.

Kao i kod prethodno posmatranih operacija na posetima, prirodno se postavlja pitanje:

Da li postoji niz linearnih preslikavanja $\mathcal{E}_t : \mathbb{Q}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle \to \mathbb{Q}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle$ takvo da za svaki graduisan poset P vrijedi $\Psi_{E_t(P)} = \mathcal{E}_t(\Psi_P)$?

Sledeća propozicija daje potvrdan odgovor na to pitanje:

PROPOZICIJA 3.4.4. *Za proizvoljan prirodan broj d i cjelobrojan parametar t između 0 i $d-1$ postoji linearno preslikavanje $\mathcal{E}_t : \mathbb{Q}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle \to \mathbb{Q}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle$ takvo da za svaki graduisan poset P ranga $d+1$ vrijedi $\Psi_{E_t(P)} = \mathcal{E}_t(\Psi_P)$.*

Dokaz. Neka je $C{:}\hat{0} = [\hat{0}, \hat{1}] < [x_0, y_0] < [x_1, y_1] < \cdots < [x_r, y_r] < \emptyset = \hat{1}$ proizvoljan lanac u $E_t(P)$. Kao i u teoremi 3.3.7, reći ćemo da je C asociran sa lancem c iz poseta P ako se u multilancu

$$\hat{0}_P \leq x_r \leq x_{r-1} \leq \cdots \leq x_0 \leq y_0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_r \leq \hat{1}_P$$

pojave tačno oni elemeti iz P koji su sadržani u c. Ako za lanac c u posetu P definišemo $S(c) = \{C\text{-lanac u } E_t(P) : c \text{ je asociran sa } C\}$, kao i u dobijamo da je $\{S(c) : c\text{-lanac u } P\}$ particija skupa svih lanaca poseta $E_t(P)$.

Ako lanci c i c' iz P imaju isti doprinos polinomu Ψ_P (tj. $wt(c) = wt(c')$), tada vrijedi

$$\sum_{C \in S(c)} wt(C) = \sum_{C' \in S(c')} wt(C').$$

Na osnovu propozicije 3.2.3 traženo preslikavanje postoji i definisano je sa

$$\mathcal{E}_t(wt(c)) = \sum_{C \in S(c)} wt(C).$$

$\square$

Primjedba 3.4.5. Zbog jednostavnosti zapisa operatora $\mathcal{E}_t$ izostavljamo parametar d (jednak je stepenu monoma u kojem se računa vrijednost operatora).

Očigledno, na osnovu tvrđenja (iii) iz propozicije 3.4.3 i iz leme 3.1.3 slijedi da za operatore $\mathcal{E}_t$ vrijedi:

$$\mathcal{E}_{|u|-1}(u) = u, \mathcal{E}_0(u) = u^* \text{ i } \mathcal{E}_t(u) = \mathcal{E}_{|u|-t-1}(u^*) \tag{3.12}$$

za svaki **ab**-monom u.

Sada ćemo opisati rekurzivne relacije za operatore $\mathcal{E}_t$.

TEOREMA 3.4.6. *Neka je u proizvoljan* **ab**-*monom. Tada, za sve vrijednosti $t = 1, 2, \ldots, |u| - 2$ vrijedi:*

$$\mathcal{E}_t(u \cdot \mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \mathcal{E}_t(u) + \sum_{u, |u_1| < t} u_{(1)} \cdot \mathbf{ba} \cdot \mathcal{E}_{t-1-|u_{(1)}|}(u_{(2)}) \tag{3.13}$$

$$\mathcal{E}_t(u \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \mathcal{E}_t(u) + \sum_{u, |u_1| < t} u_{(1)} \cdot \mathbf{ab} \cdot \mathcal{E}_{t-1-|u_{(1)}|}(u_{(2)}) \tag{3.14}$$

U sumama koje se pojave u gornjim formulama učestvuju samo oni kofaktori koproizvoda $\Delta(u)$ kod kojih je stepen $u_{(1)}$ manji od t.

Dokaz. Za proizvoljan graduisan poset P uočimo poset $\overline{P} = P * L_2$ (koristićemo iste oznake kao u teoremi 3.3.8, $\bar{1}$ je maksimalan element, a $\hat{1}$ je jedini koatom u $\overline{P}$). Sve lance poseta $E_t(\overline{P})$ podjelimo u dvije grupe:

1. Lanci poseta $E_t(\overline{P})$ u kojima se ne pojavljuje $\bar{1}$. To su tačno stari lanci iz $E_t(P)$, koji mogu (ali ne moraju) početi sa atomom $[\hat{0}, \hat{1}]$ iz $E_t(\overline{P})$. Doprinos svih takvih lanaca polinomu $\Psi_{E_t(\overline{P})}$ je tačno

$$\mathbf{b} \cdot \sum_{c\text{-lanac u } E_t(P)} wt(c) + (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot \sum_{c\text{-lanac u } E_t(P)} wt(c) = \mathbf{a} \cdot \Psi_{E_t(P)}.$$

2. Lanci u kojima se pojavi $\bar{1}$. Ako je c takav lanac i ako je $[x, \bar{1}]$ najveći element (za neki $x \in P, r(x) < t + 1$) u c u kojem se $\bar{1}$ pojavi, tada c može (ali ne mora) da sadrži i interval $[x, \hat{1}]$. Na osnovu tvrđenja (ii) iz propozicije 3.4.3 vrijedi:

$$[[\hat{0}, \bar{1}], [x, \bar{1}]]_{E_t(P)} \cong [\hat{0}, x]_P \ , \ [[x, \hat{1}], \emptyset]_{E_t(P)} \cong E_{t-r(x)}([x, \hat{1}]_P).$$

Iz relacija (1.10) i (3.3) dobijamo da je zbir težina svih lanaca iz ove grupe jednak:

$$\sum_{x\in P}\ \sum_{c\text{-lanac u }[\hat{0},x]}\ \sum_{c'\text{-lanac u }E_{t-r(x)}[x,1]} wt(c)\cdot\mathbf{ba}\cdot wt(c') = \sum_{x\in P}\Psi_{[\hat{0},x]}\cdot\mathbf{ba}\cdot\Psi_{E_{t-r(x)}([x,\hat{1}])} =$$

$$= \sum_{\Psi_P,|\Psi_{P_{(1)}}|<t} \Psi_{P_{(1)}}\cdot\mathbf{ba}\cdot\mathcal{E}_{t-|\Psi_{P_{(1)}}|-1}(\Psi_{P_{(2)}})$$

Sabirajući težine svih lanaca u $E_t(\overline{P})$, dobijamo da (3.13) vrijedi kada je $u=\Psi_P$ (za neki graduisan poset P). Koristeći činjenicu da je **ab**-indeks surjektivno preslikavanje, dobijamo da formula (3.13) vrijedi za sve **ab**-monome.

Da dokžemo formulu (3.14), za proizvoljan graduisan poset P uočimo poset $P' = P * B_2$. Koatome poseta P' označimo sa $1'$ i $1''$ (kao u teoremi 3.3.8). Na osnovu relacije (1.12) vrijedi:

$$\Psi_{E_t(P')} = \mathcal{E}_t(\Psi_P\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})) = \mathcal{E}_t(\Psi_P\cdot\mathbf{a}) + \mathcal{E}_t(\Psi_P\cdot\mathbf{b}).$$

Lanci u $E_t(P')$ u kojima se ne pojavljuje $1''$ su u bijekciji sa lancima poseta $E_t(\overline{P})$. Stoga, $\mathcal{E}_t(\Psi_P\cdot\mathbf{b})$ je jednak zbiru težina lanaca poseta $E_t(P')$ u kojima se pojavljuje $1''$.

Ponovo, sve takve lance možemo podijeliti u dvije grupe:

1. Lanci u posetu $E_t(P')$ koji počinju sa $[\hat{0},1'']$. Primjetimo da su to tačno lanci poseta $E_t(P)$ (u kojima je maksimalan element $\hat{1}_P$ zamjenjen sa $1''$). Stoga je njihov doprinos polinomu $\Psi_{E_t(P')}$ jednak $\mathbf{b}\cdot\Psi_{E_t(P)}$.

2. Lanci u kojima se ne pojavljuje $[\hat{0},1'']$. Neka je c takav lanac i neka je $[x,1'']$ (za $x\in P\setminus\{\hat{0}\}, r(x)<t+1$) najveći element u c u kojem se pojavljuje $1''$. Primjetimo da c može (ali ne mora) sadržavati $[x,\hat{1}]$. Zbir težina svih ovakvih lanaca je:

$$\sum_{x\in P}\ \sum_{c\text{-lanac u }[\hat{0},x]_P}\ \sum_{c'\text{-lanac u }E_{t-r(x)}([x,\hat{1}])} wt(c)\cdot\mathbf{ab}\cdot wt(c') =$$

$$= \sum_{\Psi_P,|\Psi_{P_{(1)}}|<t} \Psi_{P_{(1)}}\cdot\mathbf{ba}\cdot\mathcal{E}_{t-|\Psi_{P_{(1)}}|-1}(\Psi_{P_{(2)}})$$

Sabiranjem težina svih ovih lanaca, dobijamo da formula (3.14) vrijedi kada je $u=\Psi_P$ (za neki graduisan poset P). Da je (3.14) tačno za sve **ab**-monome slijedi iz leme 3.1.3. $\square$

Ako je P Euler-ov poset, tada je (za sve parametre t) i poset $E_t(P)$ takođe Euler-ov (teorema 1.4. u radu [73]). U tom slučaju, rekurzivne relacije za operatore $\mathcal{E}_t$ u algebri $\mathbb{Q}\langle \mathbf{c}, \mathbf{d}\rangle$ su opisane u sledećoj teoremi.

TEOREMA 3.4.7. *Neka je u proizvoljan* $\mathbf{cd}$*-monom. Tada, za sve* $t = 1, 2, \ldots, |u| - 2$ *vrijedi*

$$\mathcal{E}_t(u \cdot \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot \mathcal{E}_t(u) + \sum_{u, |u_1| < t} u_{(1)} \cdot \mathbf{d} \cdot \mathcal{E}_{t-1-|u_{(1)}|}(u_{(2)}). \tag{3.15}$$

Takođe, za sve $t = 1, 2, \ldots, |u| - 3$ *vrijedi*

$$\mathcal{E}_t(u \cdot \mathbf{d}) = \mathbf{d} \cdot \mathcal{E}_t(u) + \sum_{u, |u_1| < t} Pyr(u_{(1)}) \cdot \mathbf{d} \cdot \mathcal{E}_{t-1-|u_{(1)}|}(u_{(2)}). \tag{3.16}$$

Dokaz. Formulu (3.15) dobijamo sabiranjem relacija (3.13) i (3.14).

Dalje, iz (3.13) i (3.14) dobijamo:

$$\mathcal{E}_t(u \cdot \mathbf{ab}) = \mathbf{b} \ \cdot \mathcal{E}_t(u \cdot \mathbf{a}) + \sum_{u, |u_1| < t} u_{(1)} \cdot \mathbf{ab} \cdot \mathcal{E}_{t-|u_{(1)}|-1}(u_{(2)} \cdot \mathbf{a}) =$$

$$= \mathbf{ba} \cdot \mathcal{E}_t(u) + \sum_{u\, |u_1| < t} \mathbf{b} \ \cdot u_{(1)} \cdot \ \mathbf{ba} \cdot \mathcal{E}_{t-|u_{(1)}|-1}(u_{(2)}) +$$

$$+ \sum_{u, |u_1| < t} u_{(1)} \cdot \mathbf{ab} \cdot \mathbf{a} \cdot \mathcal{E}_{t-|u_{(1)}|-1}(u_{(2)}) + \sum_{u, |u_1| < t} u_{(1)} \cdot \mathbf{ab} \cdot u_{(2)} \cdot \mathbf{ba} \cdot \mathcal{E}_{t-|u_{(1)}|-1}(u_{(3)}).$$

Sada, iz koasocijativnosti koproizvoda, relacije (3.3) i propozicije 3.1.2 slijedi da je

$$\mathcal{E}_t(u \cdot \mathbf{ab}) = \mathbf{ba} \cdot \mathcal{E}_t(u) + \sum_{u, |u_{(1)}| < t} Pyr(u_{(1)}) \cdot \mathbf{ba} \cdot \mathcal{E}_{t-|u_{(1)}|-1}(u_{(2)}) \tag{3.17}$$

Na sličan način, može se pokazati da je

$$\mathcal{E}_t(u \cdot \mathbf{ba}) = \mathbf{ab} \cdot \mathcal{E}_t(u) + \sum_{u, |u_{(1)}| < t} Pyr(u_{(1)}) \cdot \mathbf{ab} \cdot \mathcal{E}_{t-|u_{(1)}|-1}(u_{(2)}) \tag{3.18}$$

Formula (3.16) se dobije sabiranjem relacija (3.17) i (3.18). □

Primjetimo da formula (3.16) ne vrijedi za $t = |u| - 2$. Na osnovu relacija (3.12), dobijamo da je $\mathcal{E}_{|u|-2}(u \cdot \mathbf{d}) = \mathcal{E}_1(\mathbf{d} \cdot u^*)$, što kompletira rekurzivne relacije za operatore $\mathcal{E}_t$ unutar algebre $\mathbb{Q}\langle \mathbf{c}, \mathbf{d}\rangle$.

Na kraju dajemo tabelu vrijedosti operatora $\mathcal{E}_t$ na **cd**-monomima stepena manjeg od šest.

u	$E_0(u)$	$E_1(u)$	$E_2(u)$
$\mathbf{c}^3$	$\mathbf{c}^3$	$\mathbf{c}^3 + 2\mathbf{dc}$	$\mathbf{c}^3$
$\mathbf{cd}$	$\mathbf{dc}$	$\mathbf{cd} + \mathbf{dc}$	$\mathbf{cd}$
$\mathbf{dc}$	$\mathbf{cd}$	$\mathbf{cd} + \mathbf{dc}$	$\mathbf{dc}$

u	$E_0(u)$	$E_1(u)$	$E_2(u)$	$E_3(u)$
$\mathbf{c}^4$	$\mathbf{c}^4$	$\mathbf{c}^4 + 2\mathbf{cdc} + 2\mathbf{dc}^2$	$\mathbf{c}^4 + 2\mathbf{cdc} + 2\mathbf{dc}^2$	$\mathbf{c}^4$
$\mathbf{c}^2\mathbf{d}$	$\mathbf{dc}^2$	$2\mathbf{cdc} + \mathbf{dc}^2$	$\mathbf{cdc} + \mathbf{dc}^2 + \mathbf{c}^2\mathbf{d}$	$\mathbf{c}^2\mathbf{d}$
$\mathbf{cdc}$	$\mathbf{cdc}$	$\mathbf{c}^2\mathbf{d} + \mathbf{cdc} + 2\mathbf{d}^2$	$\mathbf{c}^2\mathbf{d} + \mathbf{cdc} + 2\mathbf{d}^2$	$\mathbf{cdc}$
$\mathbf{dc}^2$	$\mathbf{c}^2\mathbf{d}$	$\mathbf{cdc} + \mathbf{dc}^2 + \mathbf{c}^2\mathbf{d}$	$2\mathbf{cdc} + \mathbf{dc}^2$	$\mathbf{dc}^2$
$\mathbf{d}^2$	$\mathbf{d}^2$	$\mathbf{cdc} + \mathbf{d}^2$	$\mathbf{cdc} + \mathbf{d}^2$	$\mathbf{d}^2$

u	$E_1(u)$	$E_2(u)$
$\mathbf{c}^5$	$\mathbf{c}^5 + 2\mathbf{c}^2\mathbf{dc} + 2\mathbf{cdc}^2 + 2\mathbf{dc}^3$	$\mathbf{c}^5 + 2\mathbf{c}^2\mathbf{dc} + 4\mathbf{cdc}^2 + 2\mathbf{dc}^3 + 4\mathbf{d}^2\mathbf{c}$
$\mathbf{c}^3\mathbf{d}$	$2\mathbf{cdc}^2 + \mathbf{dc}^3 + 2\mathbf{d}^2\mathbf{c}$	$2\mathbf{c}^2\mathbf{dc} + 2\mathbf{cdc}^2 + \mathbf{dc}^3 + 2\mathbf{d}^2\mathbf{c}$
$\mathbf{c}^2\mathbf{dc}$	$2\mathbf{c}^2\mathbf{dc} + \mathbf{cdc}^2 + 2\mathbf{d}^2\mathbf{c}$	$\mathbf{c}^3\mathbf{d} + \mathbf{c}^2\mathbf{dc} + \mathbf{cdc}^2 + 2\mathbf{d}^2\mathbf{c} + 2\mathbf{dcd} + 2\mathbf{cd}^2$
$\mathbf{cdc}^2$	$\mathbf{c}^3\mathbf{d} + \mathbf{c}^2\mathbf{dc} + 2\mathbf{dcd} + 2\mathbf{cd}^2$	$\mathbf{c}^3\mathbf{d} + \mathbf{c}^2\mathbf{dc} + \mathbf{cdc}^2 + 2\mathbf{d}^2\mathbf{c} + 2\mathbf{dcd} + 2\mathbf{cd}^2$
$\mathbf{dc}^3$	$\mathbf{c}^3\mathbf{d} + \mathbf{c}^2\mathbf{dc} + \mathbf{cdc}^2 + \mathbf{dc}^3$	$2\mathbf{c}^2\mathbf{dc} + 2\mathbf{cdc}^2 + \mathbf{dc}^3 + 2\mathbf{d}^2\mathbf{c}$
$\mathbf{cd}^2$	$\mathbf{d}^2\mathbf{c} + \mathbf{dcd} + 2\mathbf{cd}^2$	$\mathbf{c}^2\mathbf{dc} + \mathbf{d}^2\mathbf{c} + \mathbf{dcd} + 2\mathbf{c}^2\mathbf{d}$
$\mathbf{dcd}$	$\mathbf{cdc}^2 + \mathbf{d}^2\mathbf{c} + \mathbf{dcd}$	$\mathbf{c}^2\mathbf{dc} + \mathbf{cdc}^2 + 2\mathbf{d}^2\mathbf{c}$
$\mathbf{d}^2\mathbf{c}$	$\mathbf{c}^2\mathbf{dc} + \mathbf{d}^2\mathbf{c} + \mathbf{cd}^2$	$\mathbf{c}^2\mathbf{dc} + \mathbf{d}^2\mathbf{c} + \mathbf{dcd} + 2\mathbf{c}^2\mathbf{d}$

Glava 4

cd-indeks nekih klasa politopa i poseta

4.1 Simplicijalni politopi i poseti

Flag f-vektor nekog simplicijalnog poseta P se lako određuje iz f-vektora tog poseta. Za simplicijalan poset P ranga $n+1$ i $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\} \subseteq [n]$ vrijedi:

$$f_{\{s_1,s_2,\ldots,s_k\}}(P) = \binom{s_k}{s_1, s_2 - s_1, \ldots, s_k - s_{k-1}} f_{s_k - 1}(P). \tag{4.1}$$

Stoga, najprostiji flag f-vektor među politopima imaju simplicijalni politopi. Kako za h-vektore simplicijalnih Euler-ovih poseta vrijede Dehn-Sommerville relacije $h_i = h_{n-i}$, to je dimenzija podprostora $\mathbb{R}^{2^n}$ generisanog sa flag f-vektorima simplicijalnih Eulerovih poseta ranga $n+1$ tačno $[\frac{n}{2}]$.

Međutim, i za najprostiji simplicijalan Euler-ov poset (Boole-ovu mrežu B_n), računanje **cd**-indeksa je dosta komplikovano. M. Purtill je u radu [77], koristeći leksikografsko označavanje poseta, dokazao nenegativnost koeficijenata u polinomima Φ_{Δ_n} i Φ_{C_n}. To je učinio pokazavši da je **cd**-indeks Φ_{Δ_n} (odnosno Φ_{C_n}) isto što i ranije poznat nekomutativni André polinom (za C_n "signed" André polinom), asociran određenoj klasi permutacija. Više detalja o tome se može naći u radu [57]. Tako su koeficijenti **cd**-polinoma Φ_{Δ_n} dobili kombinatornu interpretaciju kao broj André permutacija koje imaju "padove" na zadanim pozicijama i to je prvi rezultat koji daje kombinatornu interpretaciju za koeficijente **cd**-indeksa nekog politopa uopšte.

Rezultati sličnog tipa dobijeni su i u radovima [43] i [48]. Opisani su **cd**-indeksi simpleksa, kocke, te simplicijalnih i kubičnih poseta. Takođe, **cd**-

indeks Boole-ove mreže se posmatra i u radu [67], gdje se (između ostalog) upoređuju koeficijenti polinoma Φ_{B_n} po veličini.

R. Stanley je u radu [84] pokazao kako se **cd**-indeks simplicijalnog poseta može izraziti kao linearna kombinacija određenih **cd**-polinoma.

Za sve $n \in \mathbb{N}$ i sve $i = 0, 1, \cdots, n-1$ neka je Λ_i^n simplicijalan $(n-1)$-disk, dobijen kao unija $i+1$ proizvoljnih maksimalnih strana simpleksa Δ_n. Semisuspenzijom tog diska donije se CW-sfera $(\Lambda_i^n)'$.

Sada se definišu homogeni **cd**-polinomi Ψ_i^n stepena n sa

$$\Psi_0^n = \Phi_{(\Lambda_0^n)'} = \Phi_{\Delta_{n-1}} \cdot \mathbf{c},\ \Psi_i^n = \Phi_{(\Lambda_i^n)'} - \Phi_{(\Lambda_{i-1}^n)'} \ \text{ za } i = 1, 2, ..., n-1. \quad (4.2)$$

U radu [48] je pokazano da se rekurzivne relacije za **cd**-polinome Ψ_i^n mogu opisati pomoću derivacije G:

$$\text{za sve } 0 \leq i < n \text{ vrijedi } G(\Psi_i^n) = \Psi_{i+1}^{n+1} \quad (4.3)$$

Time je pokazano da su svi koeficijenti polinoma Ψ_i^n nenegativni, čime je pozitivno odgovoreno na hipotezu R. Stanley-a (hipoteza u [84]).
Takođe, u radu [48] se daje i kombinatorna interpretacija koeficijenata u **cd**-polinomima Ψ_i^n.

Neka je Ω neka ssloživa simplicijalna n-sfera, i neka je $F_1, F_2, \ldots, F_t$ neki šeling za Ω. U radu [84] je pokazano da tada vrijedi:

$$\Phi_{(F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_{i+1})'} = \Phi_{(F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_i)'} + \Psi^n_{\text{type}(F_{i+1})}.$$

Drugim riječima, ako Ω "sastavljamo" stranu po stranu, promjena **cd**-indeksa pri dodavanju nove strane je ista kao kada u šelingu n-simpleksa dodamo stranu odgovarajućeg tipa. Stoga, **cd**-indeks sfere Ω zavisi samo od njenog h-vektora. Kako flag f-vektori simplicijalnih n-politopa (koji jesu složivi) generišu isti podprostor u $\mathbb{R}^{2^n}$ kao i flag f-vektori svih simplicijalnih Euler-ovih poseta ranga n, to vrijedi sledeća teorema:

TEOREMA 4.1.1 (R. Stanley,[84]). *Neka je P simplicijalan Euler-ov poset ranga $n+1$, i neka je $h(P) = (h_0, h_1, \ldots, h_n)$ njegov h-vektor. Tada je*

$$\Phi_P(\mathbf{c}, \mathbf{d}) = \sum_{i=0}^{n-1} h_i \Psi_i^n. \quad (4.4)$$

Sa $\mathcal{F}^s$ označimo podprostor od $\mathbb{Q}\langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle$ generisan **cd**-indeksima simplicijalnih Euler-ovih poseta. Sada ćemo uočiti neke baze u $\mathcal{F}^s$.

Za sve $i = 0, 1, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ definišemo **cd**-polinome Φ_i^n sa

$$\Phi_i^n = \sum_{j=i}^{n-i} \Psi_j^n. \tag{4.5}$$

Formalno, možemo smatrati da je $\Psi_n^n = 0$. Tada vrijedi

POSLJEDICA 4.1.2. *Neka je P simplicijalan Euler-ov poset ranga $n+1$, i neka je $g(P) = (g_0, g_1, \ldots, g_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor})$ njegov g-vektor. Tada je*

$$\Phi_P(\mathbf{c}, \mathbf{d}) = \sum_{i=0}^{n-1} h_i \Psi_i^n = \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} g_i \Phi_i^n \tag{4.6}$$

Ekvivalentno je reći da polinomi Φ_i^n čine bazu za $\mathcal{F}^s$.

Za polinome Φ_i^n možemo naći interpretaciju sličnu onoj za **cd**-polinome Ψ_i^n u relaciji (4.2). Na osnovu posledice 2.1.3 i relacije (4.6), dobijamo da vrijedi:

$$\Phi_0^n = \Phi_{\Delta_n}\ ,\ \Phi_i^n = \Phi_{T_i^n} - \Phi_{T_{i-1}^n} \quad \text{za } i = 1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor.$$

Primjetimo da su i **cd**-polinomi $\Psi_0^n, \Psi_1^n + \Psi_{n-1}^n, \ldots, \Psi_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^n + \Psi_{n-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^n$ takođe jedna baza u $\mathcal{F}^s$. Evo nekoliko vrijednosti za polinome Ψ_i^n i Φ_i^n:

$n = 1:$ $\Psi_0^1 = \mathbf{c}$ $\quad$ $\Phi_0^1 = \mathbf{c}$

$n = 2:$ $\Psi_0^2 = \mathbf{c}^2$ $\quad$ $\Phi_0^2 = \mathbf{c}^2 + \mathbf{d}$
$\Psi_1^2 = \mathbf{d}$ $\quad$ $\Phi_1^2 = \mathbf{d}$

$n = 3:$ $\Psi_0^3 = \mathbf{c}^3 + \mathbf{dc}$ $\quad$ $\Phi_0^3 = \mathbf{c}^3 + 2\mathbf{cd} + 2\mathbf{dc}$
$\Psi_1^3 = \mathbf{cd} + \mathbf{dc}$ $\quad$ $\Phi_1^3 = 2\mathbf{cd} + \mathbf{dc}$
$\Psi_2^3 = \mathbf{cd}$

$n = 4:$ $\Psi_0^4 = \mathbf{c}^4 + 2\mathbf{cdc} + 2\mathbf{dc}^2$ $\quad$ $\Phi_0^4 = \mathbf{c}^4 + 3\mathbf{c}^2\mathbf{d} + 5\mathbf{cdc} + 3\mathbf{dc}^2 + 4\mathbf{d}^2$
$\Psi_1^4 = \mathbf{c}^2\mathbf{d} + 2\mathbf{cdc} + \mathbf{dc}^2 + \mathbf{d}^2$ $\quad$ $\Phi_1^4 = 3\mathbf{c}^2\mathbf{d} + 3\mathbf{cdc} + \mathbf{dc}^2 + 4\mathbf{d}^2$
$\Psi_2^4 = \mathbf{c}^2\mathbf{d} + \mathbf{cdc} + 2\mathbf{d}^2$ $\quad$ $\Phi_2^4 = \mathbf{c}^2\mathbf{d} + \mathbf{cdc} + 2\mathbf{d}^2$
$\Psi_3^4 = \mathbf{c}^2\mathbf{d} + \mathbf{d}^2$

$$
\begin{aligned}
n=5:\quad & \Psi_0^5 = \mathbf{c}^5 + 3\mathbf{c}^2\mathbf{dc} + 5\mathbf{cdc}^2 + 3\mathbf{dc}^3 + 4\mathbf{d}^2\mathbf{c}\\
& \Psi_1^5 = \mathbf{c}^3\mathbf{d} + 3\mathbf{c}^2\mathbf{dc} + 3\mathbf{cdc}^2 + \mathbf{dc}^3 + 4\mathbf{d}^2\mathbf{c} + 2\mathbf{dcd} + 2\mathbf{cd}^2\\
& \Psi_2^5 = \mathbf{c}^3\mathbf{d} + 2\mathbf{c}^2\mathbf{dc} + \mathbf{cdc}^2 + 4\mathbf{cd}^2 + 3\mathbf{dcd} + 3\mathbf{d}^2\mathbf{c}\\
& \Psi_3^5 = \mathbf{c}^3\mathbf{d} + \mathbf{c}^2\mathbf{dc} + 4\mathbf{cd}^2 + 3\mathbf{dcd} + \mathbf{d}^2\mathbf{c}\\
& \Psi_4^5 = \mathbf{c}^3\mathbf{d} + 2\mathbf{dcd} + 2\mathbf{cd}^2\\
\\
& \Phi_0^5 = \mathbf{c}^5 + 4\mathbf{c}^3\mathbf{d} + 9\mathbf{c}^2\mathbf{dc} + 9\mathbf{cdc}^2 + 4\mathbf{dc}^3 + 12\mathbf{cd}^2 + 10\mathbf{dcd} + 12\mathbf{d}^2\mathbf{c}\\
& \Phi_1^5 = 4\mathbf{c}^3\mathbf{d} + 6\mathbf{c}^2\mathbf{dc} + 4\mathbf{cdc}^2 + \mathbf{dc}^3 + 12\mathbf{cd}^2 + 10\mathbf{dcd} + 8\mathbf{d}^2\mathbf{c}\\
& \Phi_2^5 = 2\mathbf{c}^3\mathbf{d} + 3\mathbf{c}^2\mathbf{dc} + \mathbf{cdc}^2 + 8\mathbf{cd}^2 + 6\mathbf{dcd} + 4\mathbf{d}^2\mathbf{c}
\end{aligned}
$$

Sada uočimo podprostor algebre $\mathbb{Q}\langle \mathbf{c}, \mathbf{d}\rangle$ generisan sa **cd**-indeksima kvazisimplicijalnih Euler-ovih poseta i označimo ga sa $\mathcal{F}^{qs}$. Na osnovu posledice 1.3.4, znamo da je dimenzija $\mathcal{F}^{qs}$ jednaka n. Pokazaćemo da **cd**-polinomi Ψ_i^n čine jednu bazu za $\mathcal{F}^{qs}$.

PROPOZICIJA 4.1.3. *Neka je P kvazi-simplicijalan Euler-ov poset ranga $n+1$, i neka je $h(P) = (h_0, h_1, \ldots, h_n)$ njegov h-vektor. Tada je*

$$
\Phi_P(\mathbf{c}, \mathbf{d}) = \sum_{i=0}^{n-1} h_i \Psi_i^n. \tag{4.7}
$$

Dokaz. Primjetimo da su poseti strana CW-sfera $(\Lambda_i^n)'$ kvazisimplicijalni. Lako se vidi da je

$$
h((\Lambda_i^n)') = (\overbrace{1, 1, \ldots, 1}^{i+1}, 0, \ldots, 0, 1)
$$

za sve $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Zato su f-vektori (a stoga i flag f-vektori) tih sfera linearno nezavisni, te **cd**-indeksi tih sfera čine bazu za $\mathcal{F}^{qs}$.

Tvrđenje teorme je tačno za sfere $(\Lambda_i^n)'$, jer osnovu definicije polinoma Ψ_i^n (relacija (4.2)) vrijedi:

$$
\Phi_{(\Lambda_i^n)'} = \Psi_0^n + \Psi_1^n + \cdots + \Psi_i^n.
$$

Kako **cd**-polinomi $\Phi_{(\Lambda_i^n)'}$ čine bazu za $\mathcal{F}^{qs}$, to je tvrđenje teoreme tačno za proizvoljan kvazisimplicijalan poset. $\square$

Primjer 4.1.4. Iz relacija (4.7), (4.3) i (2.8) dobijamo rekurzivne relacije za **cd**-indeks politopa $\Delta_n^*(k)$:

$$
\Phi_{\Delta_{n-1}^*(k)} = \Phi_{\Delta_{n-1}^*(k-1)} + \binom{n}{k-1} G^{k-1}(\Phi_{\Delta_{n-k}}) + G^{n-k}(\Phi_{\Delta_{k-1}}).
$$

Neka je $\mathcal{A}^s$ podprostor algebre $\mathbb{Q}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle$ generisan sa **ab**-indeksima proizvoljnih simplicijalnih poseta. Iz relacije (4.1) slijedi da je dimenzija linearnog podprostora $\mathcal{A}^s$ koji je generisan sa **ab**-indeksima simplicijalnih poseta ranga $n+1$ jednaka n. Sada ćemo opisati bazu za $\mathcal{A}^s$. Za sve $n \in \mathbb{N}$ i sve $i = 0, 1, \ldots, n$ neka je P_i^n poset strana simplicijalnog kompleksa Λ_i^n kojem je dodan maksimalan element, tj.

$$P_i^n = F(\Lambda_i^n) \cup \{\hat{1}_{P_i^n}\}. \tag{4.8}$$

Kako se Λ_i^{n+1} dobije kao piramida nad Λ_i^n to za posete P_i^n vrijedi:

$$P_i^{n+1} \cong Pyr(P_i^n) \setminus \{(\hat{1}_P, 0)\}. \tag{4.9}$$

DEFINICIJA 4.1.5. Za sve $n \in \mathbb{N}$ i $0 \leq i \leq n$ definišemo **ab**-polinome X_i^n sa

$$X_0^n = \Psi_{B_{n-1}} \cdot \mathbf{a}, \text{ a za } i = 1, 2, \ldots, n \text{ neka je } X_i^n = \Psi_{P_i^n} - \Psi_{P_{i-1}^n}.$$

U sledećoj tabeli se nalazi nekoliko početnih vrijednosti za polinome X_i^n:

$X_0^0 = 1$	$X_0^1 = \mathbf{a}$	$X_0^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{ba}$	$X_0^3 = \mathbf{a}^3 + 2\mathbf{aba} + 2\mathbf{ba}^2 + \mathbf{b}^2\mathbf{a}$
	$X_1^1 = \mathbf{b}$	$X_1^2 = \mathbf{ab} + \mathbf{ba}$	$X_1^3 = \mathbf{bab} + \mathbf{ba}^2 + 2\mathbf{aba} + \mathbf{b}^2\mathbf{a} + \mathbf{a}^2\mathbf{b}$
		$X_2^2 = \mathbf{ab} + \mathbf{b}^2$	$X_2^3 = 2\mathbf{bab} + \mathbf{ab}^2 + \mathbf{aba} + \mathbf{b}^2\mathbf{a} + \mathbf{a}^2\mathbf{b}$
			$X_3^3 = 2\mathbf{bab} + \mathbf{b}^3 + 2\mathbf{ab}^2 + \mathbf{a}^2\mathbf{b}$

Iz definicije poseta P_i^n i formule (1.12) slijedi da je za sve $n \in \mathbb{N}_0$

$$X_0^n = \Psi_{B_n} \cdot \mathbf{a} \, , \, X_n^n = \Psi_{B_n} \cdot \mathbf{b}. \tag{4.10}$$

Koristeći iste argumente kao i u teoremi 4.1.1 i propoziciji 4.1.3 možemo pokazati da vrijedi

PROPOZICIJA 4.1.6. *Neka je P proizvoljan simplicijalan graduisan poset ranga $n+1$, čiji je h-vektor $h(P) = (h_0, h_1, ..., h_n)$. Tada je*

$$\Phi_P = \sum_{i=0}^{n-1} h_i X_i^n. \tag{4.11}$$

Iz relacije (4.10) i prethodne propozicije slijedi

$$X_0^n = \sum_{i=0}^{n-1} X_i^{n-1} \cdot \mathbf{a} \, , \, X_n^n = \sum_{i=0}^{n-1} X_i^{n-1} \cdot \mathbf{b}. \tag{4.12}$$

PROPOZICIJA 4.1.7. *Za sve $n \geq i \geq 0$, polinomi X_i^n zadovoljavaju sledeće relacije*

(i) $X_i^{n+1} = G(X_i^n) + X_i^n \cdot \mathbf{a}$

(ii) $X_{i+1}^{n+1} - X_i^{n+1} = X_i^n \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$

(iii) $X_{i+1}^{n+1} = G(X_i^n) + X_i^n \cdot \mathbf{b}$

(iv) $X_i^n = \hat{\omega}(X_{n-i}^n)$

(v) $X_i^n + X_{n-i}^n = \Psi_i^n + \Psi_{n-i}^n$

Dokaz. (i) Iz relacije (4.9), teoreme 3.1.6 i formule (1.10) slijedi

$$\Psi_{P_i^{n+1}} = G(\Psi_{P_i^n}) + \Psi_{P_i^n} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) - \Psi_{P_i^n} \cdot \mathbf{b} = G(\Psi_{P_i^n}) + \Psi_{P_i^n} \cdot \mathbf{a}.$$

Stoga, za sve $i > 0$ dobijamo da je

$$X_i^{n+1} = \Psi_{P_i^{n+1}} - \Psi_{P_{i-1}^{n+1}} = G(\Psi_{P_i^n}) + \Psi_{P_i^n} \cdot \mathbf{a} - G(\Psi_{P_{i-1}^n}) - \Psi_{P_{i-1}^n} \cdot \mathbf{a} = G(X_i^n) + X_i^n \cdot \mathbf{a}.$$

Takođe, iz relacije (4.10) i teoreme 3.1.6 slijedi da je

$$G(X_0^n) + X_0^n \cdot \mathbf{a} = G(\Psi_{B_{n-1}} \cdot \mathbf{a}) + \Psi_{B_{n-1}} \cdot \mathbf{a}^2 = G(\Psi_{B_{n-1}}) \cdot \mathbf{a} + \Psi_{B_{n-1}} \cdot \mathbf{ba} + \Psi_{B_{n-1}} \cdot \mathbf{a}^2 =$$

$$= \big(G(\Psi_{B_{n-1}}) + \Psi_{B_{n-1}} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})\big) \cdot \mathbf{a} = Pyr(\Psi_{B_{n-1}}) \cdot \mathbf{a} = X_0^{n+1}.$$

(ii) Tvrđenje ćemo dokazati indukcijom po n. Pretpostavimo da formula (ii) vrijedi za sve polinome stepena manjeg od $n+1$. Ako je $i < n$, iz relacije (i) slijedi

$$X_{i+1}^{n+1} - X_i^{n+1} = G(X_{i+1}^n - X_i^n) + (X_{i+1}^n - X_i^n) \cdot \mathbf{a}$$

a na osnovu induktivne pretpostavke dobijamo

$$X_{i+1}^{n+1} - X_i^{n+1} = G(X_i^{n-1} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})) + X_i^{n-1} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{a}. \tag{4.13}$$

Dalje, dobijamo da je

$$G(X_i^{n-1} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})) = G(X_i^{n-1}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) + X_i^{n-1} \cdot (\mathbf{ab} - \mathbf{ba}),$$

odnosno, na osnovu formule (i) vrijedi

$$G(X_i^{n-1} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})) = X_i^n \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) - X_i^{n-1} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + X_i^{n-1} \cdot (\mathbf{ab} - \mathbf{ba}).$$

Kada prethodni izraz uvrstimo u (4.13) dobijamo

$$X_{i+1}^{n+1} - X_i^{n+1} = X_i^n \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) + X_i^{n-1} \cdot \big((\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{a} + (\mathbf{ab} - \mathbf{ba}) - \mathbf{a}(\mathbf{b} - \mathbf{a})\big) = X_i^n \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

Slučaj kada je $i = n$ posmatramo odvojeno. Na osnovu relacije (4.10) i tvrđenja (i) iz teoreme dobijamo

$$X_n^n - X_{n-1}^n = \Psi_{B_n} \cdot \mathbf{b} - G(\Psi_{B_{n-1}} \cdot \mathbf{b}) - \Psi_{B_n-1} \cdot \mathbf{ba} = \Psi_{B_n} \cdot \mathbf{b} - G(\Psi_{B_{n-1}}) \cdot \mathbf{b} - \Psi_{B_n-1} \cdot (\mathbf{ab} + \mathbf{ba}).$$

Na osnovu teoreme 3.1.6 i relacije (4.10) dobijamo

$$X_n^n - X_{n-1}^n = \Psi_{B_n} \cdot \mathbf{b} - Pyr(\Psi_{B_n-1}) \cdot \mathbf{b} + \Psi_{B_n-1}(\mathbf{b}^2 - \mathbf{ba}) = X_{n-1}^{n-1}(\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

te formula (ii) vrijedi i za $i = n$.

(iii) Na osnovu formula (i) i (ii), za sve $i < n$ vrijedi

$$X_{i+1}^{n+1} = G(X_{i+1}^n) + X_{i+1}^n \cdot \mathbf{a} = G(X_i^n + X_i^{n-1} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})) + X_{i+1}^n \cdot \mathbf{a}.$$

Ako ponovo primjenimo relaciju (i) dobijamo da je

$$X_{i+1}^{n+1} = G(X_i^n) + X_i^n \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) - X_i^{n-1} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + X_i^{n-1} \cdot (\mathbf{ab} - \mathbf{ba}) + X_{i+1}^n \cdot \mathbf{a} =$$

$$= G(X_i^n) + X_i^n \cdot \mathbf{b} + (X_{i+1}^n - X_i^n) \cdot \mathbf{a} + X_i^{n-1} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b})\mathbf{a}.$$

pa tvrđenje (iii) slijedi na osnovu (ii). Za $i = n$ tvrđenje (iii) slijedi iz relacije (4.10).

(iv) Ponovo koristimo indukciju po n. Pretpostavimo da (v) vrijedi za sve prirodne brojeve manje od n. Na osnovu tvrđenja (i) i induktive pretpostavke dobijamo

$$\hat{\omega}(X_i^n) = \hat{\omega}(G(X_i^{n-1}) + X_i^{n-1} \cdot \mathbf{a}) = \hat{\omega}(G(X_i^{n-1})) + X_{n-i-1}^{n-1} \cdot \mathbf{b}.$$

Iz induktivne pretpostavke, formule (ii) i činjenice da je $\hat{\omega} \circ G = G \circ \hat{\omega}$ dobijamo da je

$$\hat{\omega}(X_i^n) = G(X_{n-1-i}^{n-1}) + X_{n-i-1}^{n-1} \cdot \mathbf{b} = X_{n-i}^n$$

(v) Iz tvrđenja (ii) propozicije 2.1.2 i formule (1.10) slijedi da je $\Psi_{(\Lambda_i^n)'} = \Psi_{P_i^n} + \Psi_{T_i^{n-1}} \cdot \mathbf{b}$. Sada, iz definicije polinoma Ψ_i^n dobijamo da je

$$\Psi_i^n = X_i^n + (\Psi_{T_i^{n-1}} - \Psi_{T_{i-1}^{n-1}}) \cdot \mathbf{b}.$$

Formula (iv) se lako dobije iz propozicije 4.1.3 i posljedice 2.1.3.

$\square$

4.2 Zonotopi i orijentisani matroidi

Zonotopi su politopi koji se mogu dobiti kao projekcije kocke. Neka je X neka $d \times n$ matrica čije su kolone vektori $x_1, x_2, \ldots, x_n$ u $\mathbb{R}^d$. Ako je $C_n = [-1,1]^n$ standardna n kocka, zonotop $Z(X)$ asociran matrici X je

$$Z(X) = X(C^n) = \{X \cdot v : v \in C^n\} = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : -1 \leq \lambda_i \leq 1\}.$$

Ekvivalentno, zonotop $Z(X)$ je suma intervala

$$Z(X) = [-x_1, x_1] + [-x_2, x_2] + \ldots + [-x_n, x_n].$$

Zonotopi su u bliskoj vezi sa aranžmanima hiperravni. Naime, ako je $\mathcal{A}(X) = \{H_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$ aranžman hiperravni (gdje je $H_i = \{v \in \mathbb{R}^d : x_i \cdot v = 0\}$), i ako je $R(\mathcal{A}(X))$ mreža regiona (ćelija na koje $\mathcal{A}$ podijeli ambijentni prostor), tada je $R(\mathcal{A}(X)) \cong L(Z(X))^*$. Stoga su zonotopi $Z_1 = X(C_n)$ i $Z_2 = Y(C_n)$ su kombinatorno ekvivalentni ako i samo ako matrice X i Y definišu isti orijentisani matroid (posljedica 2.2.3 u [33]).
Standardna referenca za aranžmane hiperravni je [76] (vidjeti i [28]).

Primjer 4.2.1. Zonotop koji odgovara koordinatnom aranžmanu

$$\mathcal{K}_n \vdots x_i = 0 \text{ za } i = 1, 2, \ldots, n$$

je n-kocka. Zonotopi asocirani "braid" aranžmanima

$$\mathcal{A}_{n-1} \vdots x_i = x_j \text{ za } 1 \leq i < j \leq n \text{ i } \mathcal{B}_n \vdots x_i = \pm x_j \;;\; x_i = 0 \text{ za } 1 \leq i < j \leq n$$

su permutoedar i "signed" permutoedar, tj.

$$R_{\mathcal{A}_{n-1}} \cong L(\Pi^*_{n-1}) \text{ odnosno } R_{\mathcal{B}_n} \cong L(\Pi^{\pm *}_n).$$

U radu [16] je dokazano da flag f-vektori zonotopa generišu isti podprostor kao i flag f-vektori svih politopa. Kao zanimljiv otvoren problem u radu [17] je postavljeno sledeće
Pitanje: Naći prirodnu bazu politopa sastavljenu od zonotopa, tj. naći c_n (Fibonacci-jev broj) zonotopa dimenzije n čiji su flag f-vektori afino nezavisni.

Orijentisani matroidi su prirodno uopštenje zonotopa (vidjeti u [33]). U radu [16] je pokazano kako se **cd**-indeks mreže kovektora orijentisanog matroida računa iz poseta ravni ("flats") odgovarajućeg običnog matroida.

Definiše se linearno preslikavanje $\omega : \mathbb{Z}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle \longrightarrow \mathbb{Z}\langle \mathbf{c}, \mathbf{d}\rangle$ na sledeći način:

u svakoj **ab**-riječi par **ab** se zamijeni sa $2\mathbf{d}$, a sve ostale promjenjive **a** ili **b** sa **c**.

Sada se može pokazati da vrijedi:

TEOREMA 4.2.2 (L. Billera, R. Ehrenborg, M. Readdy, [16]). *Neka je $\mathcal{M}$ orijentisan matroid, T mreža kovektora u $\mathcal{M}$, a L mreža ravni. Tada je*

$$\Phi_T(\mathbf{c}, \mathbf{d}) = \omega(\mathbf{a} \cdot \Psi_L)^*$$

Ako je $\mathcal{M}$ realizabilan orijentisan matroid, asociran nekom aranžmanu $\mathcal{A}$, tada je T mreža regiona $R_{\mathcal{A}}$ tog aranžmana, a L je poset presjeka hiperravni aranžmana $\mathcal{A}$.

Primjer 4.2.3. Neka je $\mathcal{A}$ aranžman hiperravni u $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{A}: x_i = \pm x_j, \text{ za } 1 \leq i < j \leq 3$$

Poset $L_{\mathcal{A}}$ je ranga tri, ima šest atoma (ravni) i sedam koatoma (prostorne dijagonale i prave kroz centre naspramnih strana 3-kocke). Kako je **ab**-indeks poseta presjeka ovog aranžmana $\Psi(L_{\mathcal{A}}) = \mathbf{a}^2 + 5\mathbf{ba} + 6\mathbf{ab} + 6\mathbf{b}^2$, to je na osnovu tvrđenja teoreme 4.2.2 **cd**-indeks mreže regiona

$$\Phi_{R_{\mathcal{A}}} = \omega(\mathbf{a} \cdot \Psi_{L_{\mathcal{A}}})^* = \omega(\mathbf{aaa} + 5\mathbf{aba} + 6\mathbf{aab} + 6\mathbf{abb})^* =$$
$$= (\mathbf{c}^3 + 10\mathbf{dc} + 12\mathbf{cd} + 12\mathbf{dc})^* = \mathbf{c}^3 + 12\mathbf{dc} + 22\mathbf{cd}.$$

Direktna posledica teorema 4.2.2 je

POSLJEDICA 4.2.4 (L. Billera, R. Ehrenborg, M. Readdy, [17]). *Za proizvoljan zonotop Z vrijedi $\Phi_Z \in \mathbb{Z}\langle \mathbf{c}, 2\mathbf{d}\rangle$, tj. **cd**-indeks zonotopa je moguće zapisati u promjenjivim **c** i $2\mathbf{d}$.*

Koristeći teoremu 4.2.2 i pogodno odabrano EL-označavanje poseta presjeka za Dowling-ove aranžmane, R. Ehrenborg i M. Readdy su u radu [47] pokazali da **cd**-indeksi permutoeadra Π_n (odnosno "signed" permutoedara $\Pi_n^{\pm}$) zadovoljavaju izvjesne rekurzivne relacije u kojima se pojave težinske derivacije.

DEFINICIJA 4.2.5. Neka je V proizvoljna graduisana algebra. Lijeva težinska derivacija D na algebri V je funkcija $D : V \times \mathbb{N} \to V$ za koju vrijedi:

$$D(\alpha \cdot u + \beta \cdot v, n) = \alpha \cdot D(u, n) + \beta \cdot D(v, n)$$
$$D(1, n) = 0$$
$$D(u \cdot v, n) = D(u, n) \cdot v + u \cdot D(v, |u| + n)$$

Ovdje su α i β proizvoljni skalari, $u, v \in V$ a $|u|$ je stepen u.

U radu [47] su posmatrane lijeve težinske derivacije W_k na algebri $\mathbb{Q}\langle \mathbf{c}, \mathbf{d}\rangle$. Derivacije W_k se definišu na generatorima te algebre sa:

$$W_k(\mathbf{c}, n) = (1+kn)\cdot 2\mathbf{d}\ ;\ W_k(\mathbf{d}, n) = (1+kn)\cdot \mathbf{dc} + (1+k(n+1))\cdot \mathbf{cd}. \quad (4.14)$$

Još se zahtijeva da derivacije W_k imaju svojstva iz definicije 4.2.5. Primjetimo da je W_0 obična derivacija D, definisana u relaciji (3.4). Pokazano je da vrijedi sledeća teorema:

TEOREMA 4.2.6 (R. Ehrenborg, M. Readdy, [47]). *Neka je $R_{n,k}$ mreža regiona Dowling-ove mreže $\mathcal{H}_{n,k}$. Tada, za $k = 1, 2$ vrijedi*

$$\Phi_{R_{n+1,k}} = \mathbf{c} \cdot \Phi_{R_{n,k}} + W_k(\Phi_{R_{n,k}}, 1). \quad (4.15)$$

Za $k = 1, 2$ mreže $R_{n,k}$ su tačno mreže regiona $\mathcal{A}_n$ i $\mathcal{B}_n$. Stoga su (vidjeti primjer 4.2.1) sa formulom (4.15) opisane i rekurzivne relacije za Φ_{Π_n} i $\Phi_{\Pi_n^{\pm}}$. Mreža $R_{n,0}$ je izomorfna sa mrežom strana koordinatnog aranžmana, a odgovarajući zonotop je n-kocka. Formula (4.15) je u tom slučaju ekvivalentna sa (3.6).
Sada ćemo proširiti definiciju težinskih derivacija W_k na algebru $\mathbb{Q}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle$. Na generatorima, za sve $k \in \mathbb{N}_0$ definišemo da je:

$$W_k(\mathbf{a}, n) = W_k(\mathbf{b}, n) = (1 + kn)(\mathbf{ab} + \mathbf{ba}),\ W_k(1, n) = 0.$$

Koristimo istu notaciju, jer se lako provjerava da se restrikcija maloprije definisanih derivacija na algebri $\mathbb{Q}\langle \mathbf{c}, \mathbf{d}\rangle$ podudara sa onom u formuli (4.14). Neka je $\mathcal{W}_k : \mathbb{Q}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle \to \mathbb{Q}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle$ linearno preslikavanje definisano sa

$$\mathcal{W}_k(u) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot u + W_k(u).$$

Primjetimo da se formula (4.15) može zapisati kao

$$\Phi_{R_{n+1,k}} = \mathcal{W}_k(\Phi_{R_{n,k}}) \text{ za } k = 1, 2.$$

Sledeća teorema opisuje restrikciju preslikavanja $\mathcal{W}_k$ na podprostor $\mathcal{A}^s$.

TEOREMA 4.2.7. *Za sve $n \geq i \geq 0$ vrijedi:*

$$\mathcal{W}_k(X_i^n) = (1 + ki) \cdot X_i^{n+1} + (1 + k(n - i))X_{i+1}^{n+1}. \quad (4.16)$$

Dokaz. Tačnost formule (4.16), a time i tvrđenje iz teoreme, pokazaćemo (za sve $k \in \mathbb{N}_0$) indukcijom po n i i. Primjetimo da je

$$\mathcal{W}_k(X_0^0) = \mathcal{W}_k(1) = \mathbf{a} + \mathbf{b} = X_0^1 + X_1^1.$$

Takođe, lako se dobija

$$\mathcal{W}_k(X_0^1) = \mathcal{W}_k(\mathbf{a}) = \mathbf{a}^2 + \mathbf{ba} + (1+k)(\mathbf{ab}+\mathbf{ba}) = X_0^2 + (1+k)X_1^2$$
$$\mathcal{W}_k(X_1^1) = \mathcal{W}_k(\mathbf{b}) = \mathbf{ab} + \mathbf{b}^2 + (1+k)(\mathbf{ab}+\mathbf{ba}) = (1+k)X_1^2 + X_2^2.$$

Pretpostavimo da formula (4.16) za sve **ab**-polinome stepena manjeg od n. Iz definicije polinoma X_i^n i induktivne pretpostavke slijedi:

$$\mathcal{W}_k(X_0^n) = \mathcal{W}_k((X_0^{n-1} + X_1^{n-1} + \cdots + X_{n-1}^{n-1}) \cdot \mathbf{a}) =$$
$$= \left(X_0^n + (2+kn)\sum_{i=1}^{n-1} X_i^n + X_n^n\right) \cdot \mathbf{a} + (1+kn)\sum_{i=0}^{n-1} X_i^{n-1} \cdot (\mathbf{ab}+\mathbf{ba}).$$

Kako je $X_0^{n+1} = (X_0^n + X_1^n + \cdots + X_n^n) \cdot \mathbf{a}$, da bi pokazali da formula (4.16) vrijedi za X_0^n treba da se uvjeriti da je

$$\sum_{i=1}^{n-1} X_i^n \cdot \mathbf{a} + \sum_{i=0}^{n-1} X_i^{n-1} \cdot (\mathbf{ab}+\mathbf{ba}) = X_1^{n+1}.$$

Na osnovu tvrđenja (i) iz propozicije 4.1.7 znamo da je

$$\sum_{i=1}^{n-1} X_i^n \cdot \mathbf{a} = X_0^{n+1} - X_0^n \cdot \mathbf{a} - X_n^n \cdot \mathbf{a} \text{ i } \sum_{i=0}^{n-1} X_i^{n-1} \cdot (\mathbf{ab}+\mathbf{ba}) = X_0^n \cdot \mathbf{b} + X_n^n \cdot \mathbf{a},$$

pa dokaz formule za X_0^n slijedi iz tvrđenja (ii) iz propozicije 4.1.7.

Pretpostavimo da (4.16) vrijedi za sve polinome X_j^m stepena stepena manjeg od n i za sve X_j^n kada je $0 < j < i$.

Pokazaćemo da tada vrijedi i za X_i^n. Iz tvrđenja (ii) propozicije 4.1.7, induktivne pretpostavke i činjenice da je $W_k(\mathbf{a}, n) = W_k(\mathbf{b}, n)$ dobijamo

$$\mathcal{W}_k(X_i^n) = \mathcal{W}_k(X_{i-1}^n + X_{i-1}^{n-1} \cdot (\mathbf{b}-\mathbf{a})) = \mathcal{W}_k(X_{i-1}^n) + \mathcal{W}_k(X_{i-1}^n) \cdot (\mathbf{b}-\mathbf{a}) =$$
$$= (1+k(i-1))X_{i-1}^{n+1} + (1+k(n-i+1))X_i^{n+1} +$$
$$+ \Big((1+k(i-1))X_{i-1}^n + (1+k(n-i))X_i^n\Big) \cdot (\mathbf{b}-\mathbf{a}).$$

Sada se formula (4.16) dobije primjenom tvrđenja (ii) iz propozicije 4.1.7. $\square$

Na osnovu tvrđenja (v) iz propozicije 4.1.7 dobijamo i formule za restrikciju preslikavanja $\mathcal{W}_k$ na prostoru $\mathcal{F}^s$.

POSLJEDICA 4.2.8. *Za sve $n \geq i \geq 0$ vrijedi*

$$\mathcal{W}_k(\Psi_i^n + \Psi_{n-i}^n) = (1+ki) \cdot (\Psi_i^{n+1} + \Psi_{n-i+1}^{n+1}) + (1+k(n-i)) \cdot (\Psi_{i+1}^{n+1} + \Psi_{n-i}^{n+1}).$$

odnosno

$$\mathcal{W}_k(\Phi_i^n) = (1+ki) \cdot \Phi_i^{n+1} + (1+k(n-i+1)) \cdot \Phi_{i+1}^{n+1} \tag{4.17}$$

4.3 Težinske derivacije i baricentrička podjela

Razmatranja u ovom poglavlju su motivisana činjenicom da su politopi Π_n^* i $\Pi_n^{\pm *}$ kombinatorno ekvivalentni sa baricentričkom podjelom n-simpleksa Δ_n i n-kocke C_n (vidjeti u radu [23]).

DEFINICIJA 4.3.1. Neka je P proizvoljan graduisan poset. Baricentrička podjela $Sd(P)$ poseta P se može definisati kao poset strana kompleksa $\Delta(P \setminus \{\hat{0}, \hat{1}\})$, kojem se doda maksimalan element $\overline{1}$. Formalno

$$Sd(P) = \mathcal{C}(P \setminus \{\hat{0}, \hat{1}\})) \cup \{\overline{1}\},$$

tj. $Sd(P)$ je skup svih lanaca u $P \setminus \{\hat{0}, \hat{1}\}$ (sa novim maksimalnim elementom), a relacija poretka je inkluzija.

Ako je $P \setminus \{\hat{1}\}$ poset strana neke CW-sfere X tada je $Sd(P)$ poset strana baricentričke podjele $Sd(X)$. Može se pokazati da vrijedi (vidjeti u radu [86], bez dokaza):

TEOREMA 4.3.2. *Neka je P Euler-ov poset ranga $n+1$. Tada je i $Sd(P)$ takođe Euler-ov ranga $n+1$.*

Flag f-vektor (odnosno flag h-vektor) poseta P se može interpretirati kao "profinjenje" f-vektora (h-vektora) poseta $Sd(P)$. Naime, u radu [8] je pokazano da vrijedi:

$$f_i(SdP) = \sum_{|S|=i+1} f_S(P), \;\; h_i(SdP) = \sum_{|S|=i} h_S(P) \tag{4.18}$$

Koristeći **ab**-indeks (odnosno, u slučaju Euler-ovih poseta, **cd**-indeks) poseta P, prethodne relacije možemo zapisati kao

$$h(Sd(P), x) = \Psi_P(1, x) = \Phi_P(1 + x, 2x). \tag{4.19}$$

DEFINICIJA 4.3.3. Za sve $k \in \mathbb{N}_0$ i proizvoljan graduisan poset P definišemo novi poset $\Sigma_k(P)$ sa:

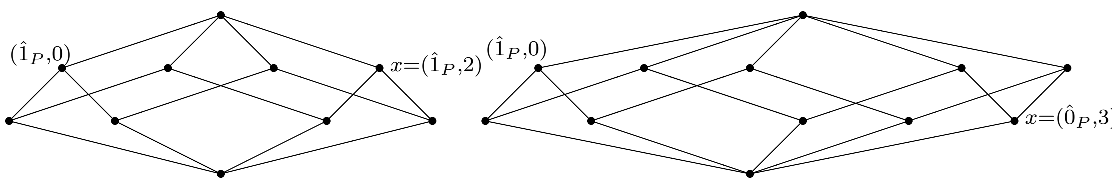
$$\Sigma_k(P) = \{(x, i) : x \in P \setminus \{\hat{0}_P, \hat{1}_P\}, 0 \leq i \leq k\} \cup \{\hat{0}_\Sigma, \hat{1}_\Sigma\} \cup \{(\hat{1}_P, 0)\} \cup \{x\}$$

$$\text{gdje je } x = \begin{cases} (\hat{0}_P, k), & \text{za paran } k; \\ (\hat{1}_P, k), & \text{za neparan } k. \end{cases}$$

Relacija poretka na skupu $\Sigma_k(P)$ se definiše sa:

$$(x, i) \leq (y, j) \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq y, i = j, & \text{odnosno ;} \\ x \leq y, i = j \pm 1, & j \text{ je neparan.} \end{cases}$$

Na sledećoj slici su Hasse-ovi dijagrami poseta $\Sigma_2(B_2)$ i $\Sigma_3(B_2)$:



Primjer 4.3.4. Za proizvoljan poset P vrijedi:

$$\Sigma_0(P) \cong P * B_2, \Sigma_1(P) \cong Pyr(P), \Sigma_2(P) \cong Prism(P).$$

Poseti Σ_k imaju sledeću geometrijsku interpretaciju:

Primjedba 4.3.5. Neka je X neka CW-sfera i neka je P poset strana te sfere. Za $k \in \mathbb{N}$ definišemo niz sfera $S_k(X)$ induktivno na sledeći način:

$$S_1(X) = Pyr(X), S_2(X) = Prism(X),$$

dok sferu S_{k+2} dobijemo tako što na sferu S_k zalijepimo $Prism(X)$ po zajedničkoj strani X. Lako se može provjeriti da je $\Sigma_k(P)$ poset strana sfere $S_k(X)$.

TEOREMA 4.3.6. *Neka je P Euler-ov poset ranga n i neka je $k \in N_0$. Tada je poset $\Sigma_k(P)$ Euler-ov ranga $n+1$.*

Dokaz. Neka je r funkcija ranga na posetu P. Očigledno, za sve $x \in P \backslash \{\hat{0}, \hat{1}\}$ vrijedi $r(x,i) = r(x)$ (za parno i), odnosno $r(x,i) = r(x+1)$ (za neparno i). Stoga je poset $\Sigma_k(P)$ ranga $n+1$.

Na osnovu definicije poseta $\Sigma_k(P)$, svi intervali u tom posetu (osim cijelog poseta $\Sigma_k(P)$) su izomorfni sa intervalima u P ili sa piramidama (prizmama) nad intervalima u P. Kako je P Euler-ov (pa i intervali u P), u takvim intervalima $\Sigma_k(P)$ vrijedi Euler-Poincaré-ova formula. Iz definicije 4.3.3 lako računamo f-vektor poseta $\Sigma_k(P)$. Za neparan $k = 2m-1$ vrijedi:

$$f_i(\Sigma_k(P)) = \begin{cases} m \cdot (f_i(P) + f_{i-1}(P)), & \text{za } 0 < i < n; \\ 1 + m \cdot f_0(P), & \text{za } i = 0; \\ 1 + m \cdot f_{n-1}(P), & \text{za } i = n. \end{cases}$$

Sada je

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i f_i(\Sigma_k(P)) = 1 + (-1)^n$$

pa možemo zaključiti da u intervalu $[\hat{0}_\Sigma, \hat{1}_\Sigma]$ vrijedi Euler-ova formula. Na isti način se pokaže da je $\Sigma_k(P)$ Euler-ov i za paran k. $\square$

DEFINICIJA 4.3.7. Za sve $k \in \mathbb{N}$ definišimo derivacije F_k na $\mathbb{Q}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle$. Za paran $k = 2m$ vrijednosti F_k na generatorima su:

$$F_k(\mathbf{a}) = m \cdot (\mathbf{ba} + \mathbf{ab}), F_k(\mathbf{b}) = m \cdot (\mathbf{ab} + \mathbf{ba}).$$

Za neparno $k = 2m + 1$ neka je

$$F_k(\mathbf{a}) = (m+1) \cdot \mathbf{ba} + m \cdot \mathbf{ab}, F_k(\mathbf{b}) = (m+1) \cdot \mathbf{ab} + m \cdot \mathbf{ba}.$$

Formalno, smatramo da je $F_0 \equiv 0$.

Lako je primjetiti da je $F_k = G + G' + G + \cdots + G_k$, gdje je $G_k = G$ (za neparan k) ili $G_k = G'$ (za paran k). Stoga su derivacije F_k zatvorene u podalgebri $\mathbb{Q}\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle$ generisanoj sa promjenjivim $\mathbf{c}$ i $\mathbf{d}$.

PROPOZICIJA 4.3.8. *Za proizvoljan graduisan poset P i $k \in \mathbb{N}_0$ vrijedi:*

$$\Psi_{\Sigma_k(P)} = \Psi_P \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + F_k(\Psi_P).$$

Dokaz. Primjetimo da se za $k = 0, 1, 2$ dobijaju tačno formule (1.13) i tvrđenja iz teoreme (3.1.6).

Pokažimo da je operacija $P \mapsto \Sigma_k(P)$ jako simetrična. Neka je P proizvoljan poset ranga n i neka je

$$C\vdots\hat{0}_\Sigma =< [x_0, i_0] < [x_1, i_1] < \cdots < [x_{r-1}, i_{r-1}] < \hat{1}_\Sigma$$

lanac u posetu $\Sigma_k(P)$. Reći ćemo da je C asociran sa nekim $c \in \mathcal{C}(P)$ ako se u multilancu

$$\hat{0}_P \leq x_0 \leq x_0 \leq \cdots \leq x_r \ \leq \hat{1}_P. \tag{4.20}$$

pojavljuju svi elementi iz c (i samo oni).

Ako je $S(c) = \{C \text{ lanac u } \Sigma_k(P) : c \text{ je asociran sa} C\}$, tada je $\{S(c) : c\text{- lanac u } P\}$ particija skupa svih lanaca u $\Sigma_k(P)$ koja zadovoljava uslove iz definicije 3.2.2.

Dalje, ako je $\lambda : \mathcal{E}(P) \mapsto \Lambda$ neko R-označavanje poseta P možemo definisati $\bar{\lambda} : \mathcal{E}(\Sigma_k(P)) \mapsto \Lambda \cup \{-\infty, +\infty\}$ sa

$$\bar{\lambda}((x,i) \prec (y,j)) = \begin{cases} \lambda(x \prec y), & \text{za } i = j; \\ +\infty, & \text{za } i = j+1 \ j\text{-neparan;} \\ -\infty, & \text{za } i = j-1 \ j\text{-paran,} \end{cases}$$

$\bar{\lambda}(\hat{0}_\Sigma \prec (x,i)) = \lambda(\hat{0}_P \prec x)$ za parne i , $\bar{\lambda}((x,i) \prec \hat{1}_\Sigma) = \lambda(x \prec \hat{1}_P)$ za neparne i

$$\lambda(\hat{0}_\Sigma \prec (\hat{0}_P, k)) = +\infty \text{ za neparan } k,$$

$$\lambda((\hat{1}_P, 0) \prec \hat{1}_\Sigma) = +\infty, \lambda((\hat{1}_P, k) \prec \hat{1}) = -\infty \text{ za paran } k.$$

Nije teško provjeriti da je $\bar{\lambda}$ jedno R-označavanje poseta $\Sigma_k(P)$, pa operacija $P \mapsto \Sigma_k(P)$ "čuva" R-označavanje.

Za maksimalan lanac $c\colon\hat{0} \prec x_1 \prec \cdots \prec x_{n-1} \prec \hat{1}$ u posetu P neka je $\lambda(c) = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ oznaka za c u R-označavanju λ i neka je $u(c) = u_1 \cdot u_2 \cdots u_{n-1}$ polinom "pada" za c. Ako definišemo $A(c) = S(c) \cap \mathcal{M}(\Sigma_k(P))$, tada je $\{A(c) : c \in \mathcal{M}(P)\}$ particija za $\mathcal{M}(\Sigma_k(P))$. Sada ćemo pokazati da je

$$\sum_{C \in A(c)} u(C) = u(c) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + F_k(u(c)) \tag{4.21}$$

Uočimo lance

$$C\colon\hat{0} \prec (x_1, 0) \prec (x_2, 0) \prec \cdots \prec (x_{n-1}, 0) \prec (\hat{1_P}, 0) \prec \hat{1}$$

$$C'\colon\hat{0} \prec (x_1, k) \prec (x_2, k) \prec \cdots \prec (x_{n-1}, k) \prec (\hat{1_P}, k) \prec \hat{1} \text{ (za paran } k)$$

odnosno

$$C'\colon\hat{0} \prec (\hat{0_P}, k) \prec (x_1, k) \prec (x_2, k) \prec \cdots \prec (x_{n-1}, k) \prec \hat{1} \text{ (za neparan } k).$$

Iz definicije označavanja $\bar{\lambda}$ slijedi da je

$$u(C) + u(C') = u(c) \cdot \mathbf{a} + u(c) \cdot \mathbf{b} \text{ ili } u(C) + u(C') = u(c) \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot u(c) \tag{4.22}$$

(u zavisnosti od toga da li je k paran ili neparan.)

Za paran $i < k - 1$ i $r = 1, 2, \cdots, n - 1$ uočimo lance

$C\colon\hat{0} \prec (x_1, i) \prec (x_2, i) \prec \cdots \prec (x_r, i) \prec (x_r, i + 1) \prec \cdots \prec (x_{n-1}, i + 1) \prec \hat{1}$

$C'\colon\hat{0} \prec (x_1, i + 2) \prec (x_2, i + 2) \prec \cdots \prec (x_r, i + 2) \prec (x_r, i + 1) \prec \cdots \prec (x_{n-1}, i + 1) \prec \hat{1}$. Za monome pada tih lanaca (u R-označavanju $\bar{\lambda}$) vrijedi $u(C) + u(C') = u_1 \cdots u_{r-1} \cdot (\mathbf{ab} + \mathbf{ba}) \cdot u_{r+1} \cdots u_{n-1}$. Tako je zbir doprinosa svih takvih lanaca jednak

$$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \big(G(u(c)) + G'(u(c))\big). \tag{4.23}$$

Ako je k paran formula (4.21) se dobije sabiranjem (4.22) i (4.23).

Za neparan k, još treba izračunati doprinos lanaca oblika
$\hat{0} \prec (x_1, k-1) \prec (x_2, k-1) \prec \cdots \prec (x_r, k-1) \prec (x_r, k) \prec \cdots \prec (x_{n-1}, k) \prec \hat{1}$.
Monom pada takvog lanca je

$$u_1 \cdots u_{r-1} \cdot \mathbf{ab} \cdot u_{r+1} \cdots u_{n-1},$$

pa se formula (4.21) dobije sabiranjem (4.22), (4.23)i primjenom propozicije 3.1.5.

Stoga, propozicija vrijedi za posete koji dopuštaju R-označavanje. Na osnovu primjedbe 3.2.5 slijedi da tvrđenje vrijedi i za proizvoljan graduisan poset P.

□

Na osnovu teoreme 4.3.6 i činjenice da su derivacije F_k zatvorene na $\mathbb{Q}\langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle$, za proizvoljan Euler-ov poset P ranga $n+1$ vrijedi:

$$\Phi_{\Sigma_k(P)} = \Phi_P \cdot \mathbf{c} + F_k(\Phi_P). \tag{4.24}$$

Sledeća teorema pokazuje da se pomoću težinskih derivacija W_k može opisati veza između **cd**-indeksa poseta $Sd(P)$ i $Sd(\Sigma_k(P))$.

TEOREMA 4.3.9. *Neka je P proizvoljan graduisan poset i neka je $k \in \mathbb{N}$. Tada je*

$$\Psi_{Sd(\Sigma_k(P))} = \mathcal{W}_k(\Psi_{Sd(P)}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \Psi_P + W_k(\Psi_{Sd(P)}).$$

Dokaz. Kako su poseti $Sd(P)$ i $Sd(\Sigma_k(P))$ simplicijalni, **cd**-indeksi tih poseta su (na osnovu propozicije 4.1.6) određeni sa h-vektorima tih poseta. Neka je $h(Sd(P)) = (h_0, h_1, \ldots, h_n)$ h-vektor poseta $Sd(P)$.

Primjetimo da je $h_i(Sd(P))$ (na osnovu relacije (4.18)) jednak broju **ab**-monoma u Ψ_P u kojima se tačno i puta pojavi promjenjiva **b**. Jedan takav monom u se pri preslikavanju $u \mapsto u \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + F_k(u)$ se slika u $kn + 2$ monoma. U tačno $ki + 1$ tih monoma se promjenjiva **b** pojavi i puta, dok se u $k(n-i) + 1$ tih monoma promjenjiva **b** pojavi $i + 1$ put.

Kako je

$$h_{Sd(\Sigma_k(P))} = \Psi_{Sd(P)}(1, x) = \Psi_P(1, x) \cdot (1 + x) + F_k(\Psi_P)(1, x), \tag{4.25}$$

na osnovu prethodnog dobijamo

$$h_i(Sd(\Sigma_k(P))) = (ki + 1)h_i + (k(n - i + 1) + 1)h_{i-1}.$$

Neka je $h(Sd(\Sigma_k(P))) = (\bar{h}_0, \bar{h}_1, \ldots, \bar{h}_n, \bar{h}_{n+1})$.

Sada, iz propozicije 4.1.6 i teoreme 4.2.7 dobijamo da je

$$\mathcal{W}_k(\Psi_{Sd(P)}) = \mathcal{W}_k(\sum_{i=0}^{n} h_i X_i^n) = \sum_{i=0}^{n} h_i \Big((1+ki)X_i^{n+1} + (1+k(n-i)X_{i+1}^{n+1})\Big) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1} \Big((1+ki)h_i + (1+k(n-i+1))h_{i-1}\Big) X_i^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \bar{h}_i X_i^{n+1} = \Psi_{Sd(\Sigma_k(P))}$$

čime je teorema dokazana. □

Ako je P Euler-ov poset, tada na osnovu posljedice 4.2.8 i prethodne teoreme dobijamo da je

$$\Phi_{Sd(\Sigma_k(P))} = \mathcal{W}_k(\Psi_{Sd(P)}) = \mathbf{c} \cdot \Phi_P + W_k(\Phi_{Sd(P)}).$$

Primjetimo da je teorema 4.2.6 specijalan slučaj prethodne formule (za $k = 1$ i $P = B_n$, odnosno za $k = 2$ i $P = C_n$).

4.4 cd-indeks aranžmana D_n

U radu [47] je primjećeno da su koeficijenti koje se pojave u težinskim derivacijama W_k (za $k = 0, 1, 2$) tačno eksponenti odgovarajućih aranžmana. Na osnovu teorema 4.3.9 i posljedice 4.2.8, možemo objasniti da su se ti koeficijenti pojavili kao težine u rekurzivnim relacijama za h-vektore mreža regiona odgovarajućih aranžmana.

Ako n puta primjenimo operaciju Σ_k na duži Δ_1 za $k = 0, 1, 2$ dobijamo

$$\Sigma_0^n(\Delta_1) \cong s^n(S^0) = X_{n+1}(n\text{-tostruka suspenzija nad sferom } S^0),$$

$$\Sigma_1^n(\Delta_1) \cong \Delta_{n+1}, \Sigma_0^n(\Delta_1) \cong C_{n+1}.$$

Baricentričke podjele ovih sfera su (redom) kombinatorno ekvivalentne sa mrežama regiona za koordinatni aranžman, te za aranžmane $\mathcal{A}_{n+1}$, $\mathcal{B}_n$.

Kako je $Sd(X_n)$ izomorfan sa n-oktaedrom C_n^*, to je

$$h_i(Sd(X_n)) = h_i(Sd(X_{n-1})) + h_{i-1}(Sd(X_{n-1})).$$

Dakle, h-vektori za $Sd(X_n)$ čine Paskalov trougao, i koeficijenti u derivaciji $W_0 = D$ su jednaki 1.

Iz dokaza teoreme 4.3.9 slijedi da h-vektori mreža $R_{\mathcal{A}_n}$ i $R_{\mathcal{B}_n}$ formiraju težinske Pascal-ove trouglove:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 11 & & 11 & & 1 & \\
1 & & 26 & & 66 & & 26 & & 1 \\
 & & & & \cdots\cdots & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 6 & & 1 & & \\
 & 1 & & 23 & & 23 & & 1 & \\
1 & & 76 & & 230 & & 76 & & 1 \\
 & & & & \cdots\cdots & & & &
\end{array}
$$

Težine u ovim trouglovima su tačno koeficijenti u težinskim derivacijama W_1 i W_2 (odnosno koeficijenti u relacijama (4.17)).

U radu [47] je postavljeno pitanje da li postoje rekurzivne relacije za **cd**-indeks mreže regiona aranžmana

$$\mathcal{D}_n\vdots x_i \pm x_j = 0 \text{ za } 0 \leq i < j \leq n?$$

Do kraja ovog poglavlja opisaćemo kako se **cd**-indeks aranžmana $\mathcal{D}_n$ može dobiti iz $\Phi_{\mathcal{B}_n}$ i $\Phi_{\mathcal{A}_n}$.

Primjedba 4.4.1. Maksimalne ćelije u dekompoziciji $\mathbb{R}^n$ sa hiperravnima aranžmana $\mathcal{B}_n$ su u bijekciji sa "signed" permutacijama skupa $[n]$. Jedna takva ćelija $\sigma = \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n$ je oslonjena na hiperravni $x_{\sigma_1} = 0$ i $x_{\sigma_i} = \mathrm{sgn}(\sigma_i \cdot \sigma_{i+1})x_{\sigma_{i+1}}$ za $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Kako u aranžmanu $\mathcal{D}_n$ nema hiperravni $x_i = 0$, maksimalne ćelije u mreži $R_{\mathcal{D}_n}$ nastanu "spajanjem" ćelija koje odgovaraju permutacijama $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n$ i $-\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n$. Stoga je mreža $R_{\mathcal{D}_n}$ kombinatorno izomorfna sa simplicijalnim posetom koji je dobijen od od $Sd(C_n)$ tako što

(i) lanci koji ne sadrže ivicu ostanu isti

(ii) lanci koji sadrže ivicu a ne sadrže tjeme iščeznu

(iii) za ivicu e, dva lanca $v_1 < e < \cdots$ i $v_2 < e < \cdots$ se slijepe u jedan.

Sledeća teorema opisuje h-vektor za mrežu regiona aranžmana $\mathcal{D}_n$.

TEOREMA 4.4.2. *Za svaki $n \in \mathbb{N}$, vrijedi:*

$$h(R_{\mathcal{D}_n}, x) = h(R_{\mathcal{B}_n}, x) - 2^{n-1}nx \cdot h(R_{\mathcal{A}_{n-2}}, x) \tag{4.26}$$

Dokaz. Neka je e ivica kocke C_n sa tjemenima v i w. Primjetimo da je interval $[e,1]_{C_n}$ izomorfan sa Boole-ovom mrežom B_{n-1}. Stoga je broj lanaca dužine i u posetu $Sd(C_n)$ koji prolaze kroz e, a ne sadrže neko tjeme (vidjeti (ii) u prethodnoj primjedbi) jednak $f_{i-1}(Sd(B_{n-1}))$. Lanaca dužine i koji prolaze kroz e i sadrže tjeme (vidjeti (iii) u primjedbi 4.4.1) ima tačno $2f_{i-2}(Sd(B_{n-1}))$.

Kako je $Sd(B_{n-1}) \cong R_{A_{n-2}}$, iz primjedbe 4.4.1 slijedi:

$$f_i(R_{\mathcal{D}_n}) = f_i(R_{B_n}) - 2^{n-1}n(f_{i-1}(R_{\mathcal{A}_{n-2}}) + f_{i-2}(R_{\mathcal{A}_{n-2}})).$$

Sada računamo h-vektor za $R_{\mathcal{D}_n}$:

$$h_i(R_{\mathcal{D}_n}) = \sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}\binom{n-j}{n-i}\big(f_{j-1}(R_{\mathcal{B}_n}) - 2^{n-1}n(f_{j-2}(R_{\mathcal{A}_{n-2}}) + f_{j-3}(R_{\mathcal{A}_{n-2}}))\big) =$$

$$= h_i(R_{\mathcal{B}_n}) - 2^{n-1}n\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{i-j+1}\binom{n-1-j}{n-i-1}(f_{j-1}(R_{\mathcal{A}_{n-2}}) + f_{j-2}(R_{\mathcal{A}_{n-2}})).$$

Koristeći dobro poznatu formulu $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, dobijamo da je u prethodnoj sumi koeficijent uz $f_{j-1}(R_{A_{n-2}})$ jednak

$$(-1)^{i-j-1}\binom{n-j-2}{n-i-1}.$$

Kako je

$$h_{i-1}(R_{\mathcal{A}_{n-2}}) = \sum_{j=0}^{n-2}(-1)^{i-j-1}\binom{n-j-2}{n-i-1}f_{j-1}(R_{A_{n-2}})$$

dobijamo tvrđenje teorema. □

Na osnovu prethodne teoreme, n-ta vrsta trougla koji čine h-vektori mreža $R_{\mathcal{D}_n}, n \in \mathbb{N}$ se dobije tako što od n-te vrste za $R_{\mathcal{B}_n}$ oduzmemo $(n-2)$-vrstu za $R_{\mathcal{A}_n}$, pomnoženu sa $2^{n-1} \cdot n$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 11 & & 11 & & 1 & \\
1 & & 44 & & 192 & & 44 & & 1 \\
 & & & & \cdots\cdots & & & &
\end{array}$$

Za proizvoljan politop (poset) P vrijedi (vidjeti teoremu u radu [8]) $h(Pyr(P)) = (h(P), 1)$. Kako $R_{\mathcal{A}_{n-2}}$ simplicijalan, poset $Pyr(R_{\mathcal{A}_{n-2}})$ je kvazisimplicijalan. Ako je $h(R_{\mathcal{A}_{n-2}}) = (h_0, h_1, \ldots, h_{n-2})$, tada je na osnovu propozicije 4.7

$$Pyr(\Phi_{R_{\mathcal{A}_{n-2}}}) = \Phi_{Pyr(R_{\mathcal{A}_{n-2}})} = \sum_{i=0}^{n-2} h_i \Psi_i^{n-1}.$$

Ako u formuli iz teoreme 4.4.2 primjenimo rekurzivne relacije za polinome Ψ_i^n iz relacije (4.3), dobija se formula koja povezuje cd-indekse aranžmana $\mathcal{A}_{n-2}, \mathcal{B}_n, \mathcal{D}_n$:

POSLJEDICA 4.4.3. *Za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:*

$$\Phi_{R_{D_n}} = \Phi_{R_{B_n}} - 2^{n-1} n G(Pyr(\Phi_{R_{A_{n-2}}})).$$

Bibliografija

[1] Aguiar M.: *Infinitesimal Hopf algebras and the* **cd***-index of polytopes*, Discrete Comput. Geom. 27, No.1, 3-28, (2001).

[2] Aigner M., Ziegler G. M.: *Proofs from THE BOOK*, Springer-Verlag, Heidelberg Berlin, 1998.

[3] Bayer M.: *The extended f-vectors of 4-polytopes*, J. Combin. Theory Ser. A 44, 141-151, (1987).

[4] Bayer M.: *Signs in the* **cd***-index of Eulerian partially ordered sets*, Proc. Am. Math. Soc. 129, No.8, 2219-2225 (2001).

[5] Bayer M.: *Flag vectors of multiplicial polytopes*, Electron. J. Comb. 11, No.1, Research paper R65, electronic only, (2004).

[6] Bayer M.: *Shelling and triangulating the (extra)ordinary polytopes*, preprint

[7] Bayer M., Billera L.: *Generalized Dehn-Sommerville relations for polytopes, spheres and Eulerian partially ordered sets*, Invent. Math. 79, 143-157, (1985).

[8] Bayer M., Billera L.: *Counting faces and chains in polytopes and posets*, In: Greene, C., ed.: Combinatorics and Algebra (Contemporary Mathematics, Vol. 34, 207-252) Providence: American Mathematical Society (1984).

[9] Bayer M., Ehrenborg R.: *The toric h-vectors of partially ordered sets*, Trans. Am. Math. Soc. 352, No.10, 4515-4531, (2000).

[10] Bayer M., Hetyei G.: *Flag vectors of Eulerian partially ordered sets*, European J. Combin. 22, 5-26, (2001).

[11] Bayer M., Hetyei G.: *Generalizations of Eulerian partially ordered sets, flag numbers, and the Möbius function*, Discrete Math. 256, No.3, 577-593, (2002).

[12] Bayer M., Klapper A.: *A new index for polytopes*, Discrete Comput. Geom. 6 , 33-47, (1991).

[13] Bayer M., Lee C. W.: *Combinatorial Aspects of Convex Polytopes*, In: Gruber, P.M., Wills, J.M., eds.: Handbook of Convex Geometry, VolumeA(Chapter 2.3, pp. 485-534) Amsterdam: Elsevier Science Publishers B. V. (1993).

[14] Billera L., Björner A.: *Face numbers of polytopes and complexes*, in: Goodman, Jacob E. (ed.) et al., Handbook of discrete and computational geometry. Boca Raton, FL: CRC Press. CRC Press Series on Discrete Mathematics and its Applications. 291-310, (1997).

[15] Billera L., Ehrenborg R.: *Monotonicity of the* **cd***-index for polytopes*, Math. Z. 233, No.3, 421-441 (2000).

[16] Billera L., Ehrenborg R., Readdy M.: *The* **c**-2**d***-index of oriented matroids* , J. Combin. Theory Ser. A 80, 79-105 (1997).

[17] Billera L., Ehrenborg R., Readdy M.: *The* **cd***-index of zonotopes and arrangements*, In: Sagan, B.E., Stanley, R.P., eds.: Mathematical essays in honor of Gian-Carlo Rota (23-40) Boston: Birkhäuser (1998).

[18] Billera L., Hetyei G.: *Linear inequalities for flags in graded partially ordered sets*, J. Combinatorial Theory, Ser. A 89, 77-104, (2000).

[19] L. J. Billera and G. Hetyei: *Decompositions of partially ordered sets*, Order 17, 141-166, (2000).

[20] Billera L., Lee C. W.: *A proof of the sufficiency of McMullens conditions for f- vectors of simplicial polytopes* , J. Combin. Theory Ser. A 31, 237-255, (1981).

[21] Billera L., Liu N.: *Noncommutative enumeration in graded posets*, J. Algebr. Comb. 12, No.1, 7-24, (2000).

[22] Provan J.S., Billera L.: *Decompositions of simplicial complexes related to diameters of convex polyhedra*, Math. Oper. Res. 5, 576-594, (1980).

[23] Billera L., Sarangarajan A.: *The combinatorics of permutation polytopes*, in Algebraic Combinatorics, DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science (L. Billera, C. Greene, R. Simion, and R. Stanley, Eds.), Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1996).

[24] Billera L., Strumfels B.: *Fiber polytopes*, Ann. Math. (2) 135, No.3, 527-549, (1992).

[25] Birkhoff G. *Lattice Theory* , Colloquium Publications, Vol. 25, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1967.

[26] Bisztriczky T. : *Ordinary* $(2m+1)$*-polytopes*, Israel J. Math. 102, 101 - 123, (1997).

[27] Björner A.: *Shellable and Cohen-Macaulay partially ordered sets*, Trans. Amer. Math. Soc. 260, 159-183, (1980).

[28] Björner A.: *Subspace arrangements*, Joseph, A. (ed.) et al., First European congress of mathematics (ECM), Paris, France, July 6-10, 1992. Volume I: Invited lectures (Part 1). Basel: Birkhuser. Prog. Math. 119, 321-370 (1994).

[29] Björner A.: *The antiprism fan of a convex polytope*, Abstracts Amer. Math. Soc. 18, no. 1, p. 19, (1997).

[30] Björner A.: *Nonpure shellability,* f*-vectors, subspace arrangements and complexity*, Billera, Louis J. (ed.) et al., Formal power series and algebraic combinatorics. Invited lectures presented at the 6th international DIMACS workshop, May 23-27, (1994).

[31] Björner A.: *Topological Methods*, in: Handbook of Combinatorics, R. Graham, M. Grötschel and L. Lovász, (Eds), North-Holland, Amsterdam, 1819-1872, 1995.

[32] Björner A., Lovász L., Vrećica S.T., R.T. Živaljević: *Chessboard complexes and matching complexes*, J. London Math. Soc. 49, 25-39, (1994).

[33] Björner A., Las Vergnas M., Sturmfels B., White N., Ziegler G. M.: *Oriented matroids* , Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[34] Björner A., Wachs M.: *On lexicographically shellable posets*, Trans. AMS 277, vol 1, 323-341, (1983)

[35] Björner A., Wachs M.: *Shellable nonpure complexes and posets I*, Trans. AMS 348, 1299-1327, (1996).

[36] Björner A., Wachs M.: *Shellable nonpure complexes and posets II*, Trans. AMS 349, 3945-3975, (1997).

[37] Björner A., Paffenholz A., Sjöstrand J., Ziegler G. M.: *Bier spheres and posets*, Discrete Comput. Geom. 34, No.1, 71-86, (2005)

[38] Bruggeser M., Mani P.: *Shellable decompositions of cells and spheres*, Math. Scand. 29, 197-205, (1971).

[39] Coxeter, H.S.M. *Regular polytopes* New York: The Macmillan Company; London: Collier-Macmillan Ltd. XIX, (1963).

[40] Ehrenborg R.: *On posets and Hopf algebras*, Adv. Math. 119 , 1-25, (1996).

[41] Ehrenborg R.: *Lifting inequalities for polytopes*, Adv. Math. 193, No.1, 205-222, (2005).

[42] Ehrenborg R., H. Fox: *Products of polytopes and inequalities*, Combinatorica 23, No.3, 427-452, (2003).

[43] Ehrenborg R., Hetyei G.: *Flags and shellings of Eulerian cubical posets*, Ann. Comb. 4, No.2, 199-226, (2000).

[44] Ehrenborg R., Hetyei G.: *Newtonian coalgebras*, preprint.

[45] Ehrenborg R., Johnston D., Rajagopalan R., Readdy M.: *Cutting polytopes and flag f-vectors*, Discrete Comput. Geom. 23, No.2, 261-271, (2000).

[46] Ehrenborg R., Readdy M.: *The r-cubical lattice and a generalization of the cd-index*, European J. Combin. 17 , 709-725, (1996).

[47] Ehrenborg R., Readdy M.:*On flag vectors, the dowling lattice, and braid arrangements*, Discrete Comput. Geom. 21, 389 - 403 (1999).

[48] Ehrenborg R., Readdy M.:*Coproducts and the cd-index*, J. Algebraic Combin. 8, 273-299, (1998).

[49] Grünbaum B.: *Convex Polytopes* New York: Wiley Interscience 1967.

[50] Eppstein D., Kuperberg G., Ziegler G.M., *Fat 4-polytopes and fatter 3-spheres*, in Bezdek, Andrs (ed.), Discrete geometry. In honor of W. Kuperberg's 60th birthday. New York, NY: Marcel Dekker. Pure Appl. Math., Marcel Dekker 253, 239-265, (2003).

[51] Gelfand I.M., Kapranov M.M., Zelevinsky A.V.: *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants* Mathematics: Theory & Applications. Boston, MA: Birkhuser. 1994.

[52] Gabrielov A.M.; Gel'fand I.M.; Losik M.V.: *Combinatorial computation of characteristic classes*. Funct. Anal. Appl. 9, 103-115, (1975); prevod iz Funkts. Anal. Prilozh. 9, No.2, 12-28, 1975

[53] Grünbaum B.: *Convex Polytopes* New York: Wiley Interscience 1967.

[54] Gosset T.: *On the regular and semi-regular figures in space of n dimensions*, Messenger (2) 29, 43-48. (1899).

[55] Hatcher A.: *Algebraic Topology*, Cambridge: Cambridge University Press.(2002).

[56] Hall T. H.: *Counterexamples in Discrete Geometry*, Ph.D. thesis (2004).

[57] G. Hetyei: *On the cd-variation polynomials of André and simsun permutations*, Discrete Comput. Geom. 16 , 259-275,(1996).

[58] Höppner A., Ziegler G. M.: *Census of flag-vectors of 4-polytopes*, in: Kalai, Gil (ed.) et al., Polytopes - combinatorics and computation. DMV-seminar Oberwolfach, Germany, November 1997. Basel: Birkhuser. DMV Semin. 29, 105-110 (2000).

[59] Jojić D.: *The ab-index of the poset of intervals,* Bull. Soc. Math, Banja Luka 11, 9-15, (2004).

[60] Jojić D.: *A note about shellable planar posets*, eds. I. Dolinka and A. Tepavcevic, Proceedings of the Novi Sad Algebraic Conference 2003, Novi Sad Journal of Mathematics 34 (2), 119-127, (2004).

[61] Joni S. A., Rota G.-C.: *Coalgebras and Bialgebras in Combinatorics*, Stud. Appl. Math. 61, 93-139, (1979).

[62] Kalai G.: *Rigidity and the lower bound theorem, I*, Inventiones Math. 88, 125-151, (1987).

[63] Kalai G.: *A new basis of polytopes*, J. Combin. Theory Ser. A 49 , 191-209, (1988).

[64] Kalai G., Kleinschmidt P., Meisinger G. : *Flag numbers and FLAG-TOOL*, Kalai, Gil (ed.) et al., Polytopes - combinatorics and computation. DMV-seminar Oberwolfach, Germany, November 1997. Basel: Birkhuser. DMV Semin. 29, 75-103, (2000).

[65] Lindström B. : *Problem P 73*, Aequationes Math. 6, 113, (1971).

[66] Lundell A. Weingram S. : *The topology of CW-complexes*, The University Series in Higher Mathematics, New York etc.: Van Nostrand Reinhold Company. 1969.

[67] Mahajan S.: *The cd-index of the Boolean lattice*, preprint (2002),

[68] McMullen P.: *The maximum numbers of faces of a convex polytope* , Mathematika 17, 179-184, (1970).

[69] McMullen P.: *The number of faces of simplicial polytopes* , Israel J. Math. 9, 559- 570, (1971).

[70] McNamara P. : *Edge labellings of partially orderd sets*, Ph. D. thesis, (2003).

[71] Munkres J. R., *Elements of algebraic topology*, Advanced Book Program. Redwood City, California etc.: Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1984.

[72] Paffenholz A., *Constructions for posets, lattices, and polytopes*, Ph.D. thesis

[73] Paffenholz A., Ziegler G.M., *The E_t-construction for lattices, spheres and polytopes*, Discrete Comput. Geom. 32, (Billera Festschrift), No.4, 601-621, (2004).

[74] Reading N.: *Non-negative cd-coefficients of Gorenstein posets*, Discrete Math. 274, No.1-3, 323-329, (2004).

[75] Reading N.: *Bases for the Flag f-Vectors of Eulerian Posets*, unpublished manuscript.

[76] Orlik P., Terao H.: *Arrangements of Hyperplanes*, Grundlehren der matematischen Wissenschaften, Vol. 300, Springer-Verlag, New York, 1992.

[77] Purtill M.: *André permutations, lexicographic shellability and the cd-index of a convex polytope*, Trans. Amer. Math. Soc. 338, 77-104, (1993).

[78] Stanley R. P.: *Ordered structures and partitions*, AMS, Providence, R.I., Memoirs of the AMS 119, 1972.

[79] Stanley R. P.: *The number of faces of a simplicial convex polytopes*, Adv. Math. 35, 236-238, (1980).

[80] Stanley R. P.: *The number of faces of simplicial polytopes and spheres*, Discrete geometry and convexity. Proc. Conf., New York 1982, Ann. N. Y. Acad. Sci. 440, 212-223 (1985).

[81] Stanley R. P.: *Algebraic Combinatorics*, Lecture Notes

[82] Stanley R. P.: *Enumerative Combinatorics*, Vol. I, Paperback ed. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. 49. Cambridge: Cambridge University Press. 1999.

[83] Stanley R. P.: *Enumerative Combinatorics*, Vol. II, Cambridge Studies in Advanced Mathematics. 62. Cambridge: Cambridge University Press. 2001

[84] Stanley R. P.: *Flag f-vectors and the cd-index*, Math. Z. 216, 483-499, (1994).

[85] Stanley R. P.: *Combinatorics and Commutative Algebra*, Birkhäuser, Boston, MA, 1996.

[86] Stanley R. P.: *A survey of Eulerian posets*, in: Polytopes: Abstract, Convex, and Computational, "T. Bisztriczky, P. McMullen, R. Schneider, A. I. Weiss, eds., NATO ASI Series C, vol. 440, Kluwer Academic Publishers, 1994.

[87] Stanley R. P.: *Positivity problems and conjectures*, En Mathematics: Frontiers and Perspectives (V. Arnold, M. Atiyah, P. Lax and B. Mazur, eds.). American Mathematical Society, Providence, RI, 295-319, 2000

[88] Stenson C.: *Relationships among flag f-vector inequalities for polytopes*, Discrete Comput. Geom. 19, No.2, 159-174, (1998).

[89] Sweedler M.: *Hopf Algebras*, Benjamin, New York, 1969.

[90] Ziegler G.M.: *Lectures on Polytopes*, Graduate Texts in Mathematics 152, Springer-Verlag, New York, 1995.

[91] Ziegler G.M.: *Shellability of chessboard complexes*, Israel J. Math. 87 , 97-110, (1994).

[92] Ziegler G.M.: *Shelling polyhedral* 3*-balls and* 4*-polytopes*, Discrete Comput. Geom. 19, No.2, 159-174, (1998).

[93] Ziegler G.M.: *Questions about polytopes* In B. Enquist and W. Schmid, editors, Mathematics Unlimited 2001 and Beyond, 1195-1211. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2001.

[94] Ziegler G.M.: *Face Numbers of* 4*-polytopes and* 3*-spheres*, in Proceedings of the International Congress of Mathematicians, (ICM 2002, Beijing), L. Tatsien, ed., vol. III, Beijing, China, Higher Education Press, 625-634, (2002).

[95] Ziegler G.M.: *Convex Polytopes: Extremal Constructions and f-vector shapes*, IAS/Park City Mathematics Series Volume 14, 2004.

[96] Ziegler G.M.: *Projected product of polygons*, preprint