UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET

Gordana V. Đanković

EGZISTENCIJA I JEDINSTVENOST REŠENJA I METODE ZA REŠAVANJE NEKIH KLASA STOHASTIČKIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

master rad

Mentor
dr Julka Knežević–Miljanović

Beograd, 2013.

Sadržaj

Uvod

Probleme iz realnog života, koji imaju osobinu da se menjaju sa protokom vremena, možemo matematički modelirati običnim diferencijalnim jednačinama. Ako bismo stanje sistema, koji opisujemo, označili sa $x(t)$, odgovarajući deterministički model imao bi sledeći oblik

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), t) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Međutim, poznato nam je da problemi, koje istražuje nauka, u realnosti obiluju neizvesnošću i ponašanjem, koje u većini slučajeva ne možemo prirodno opisati determinističkim modelima. Adekvatno rešenje, koje nas može približiti realističnijem prikazu analiziranog fenomena, jeste uvođenje "slučajnosti" u deterministički model. Dakle, opisivanje posmatranog sistema u terminima verovatnoće, tj. u terminima očekivanih vrednosti stohastičkog sistema, daje nam model oblika

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = f(X(t), t) + g(X(t), t)\xi(t) \\ X(t_0) = X_0, \end{cases}$$

za slučajni proces $X(t)$, $t \geq 0$, pri čemu je slučajni proces $\xi(t)$, $t \geq 0$, uveden kao faktor slučajnosti u determinističkoj diferencijalnoj jednačini. Za početni uslov X_0 se takođe pretpostavlja da je slučajna promenljiva. Ovako dobijeni model obezbeđuje precizniju matematičku reprezentaciju opserviranog sistema i predstavljen je stohastičkom diferencijalnom jednačinom, koja će biti glavni objekat našeg daljeg izlaganja.

U ovom radu biće razmatrani osnovni teorijski koncepti stohastičke analize: detaljno ćemo analizirati Braunovo kretanje, koje predstavlja jedan od najvažnijih objekata u teoriji slučajnih procesa, uvešćemo stohastički integral Itoa i Ito-Doblinovu formulu za manipulaciju stohastičkim integralima i, kao glavni cilj, zasnovaćemo ideju stohastičkih diferencijalnih jednačina uvođenjem određenog tipa slučajnosti u obične diferencijalne jednačine.

U prvoj glavi izložićemo fundamentalne koncepte, koji se tiču jednog od najvažnijih slučajnih procesa, Braunovog kretanja, koje figuriše kako u teoriji verovatnoća tako i u primenjenoj matematici za modeliranje raznih fenomena u nauci, tehnici i ekonomiji. Analiziraćemo osnovna svojstva Braunovog kretanja, koja će nam u daljem radu dati motivaciju za uvođenje pojma stohastičkog integrala i zasnivanje teorije stohastičkih diferencijalnih jednačina. Najvažniji rezultati, koji su prikazani u prvoj glavi, jesu svojstvo Braunovog kretanja da je martingal, da akumulira kvadratnu varijaciju brzinom jedan po jedinici vremena, kao i svojstva njegovih trajektorija, da su neprekidne, ali nediferencijabilne funkcije po parametru vremena t.

U drugoj glavi postupno ćemo definisati integral Itoa i obrazložiti njegova najvažnija svojstva. Ideja za uvođenje integrala Itoa prikazana je u dva koraka: u prvom koraku uvodimo integral Itoa za klasu elementarnih podintegralnih slučajnih procesa i dokazujemo svojstva, koja važe za tako definisan stohastički integral; u drugom koraku pokazaćemo da proizvoljni slučajni proces može biti aproksimiran nizom elementarnih slučajnih procesa, te ćemo integral Itoa za proizvoljni integrand definisati kao graničnu vrednost niza integrala Itoa za odgovarajući niz elementarnih integranada. Ovako definisan integral Itoa nasleđuje sve osobine, koje su dokazane za slučaj stohastičkog integrala sa elementarnim podintegralnim procesom. Kao ključni rezultat ove glave biće izložen dokaz Ito-Doblinove formule, koja predstavlja osnovni alat stohastičke analize i tačku razmimoilaženja u izračunavanju običnih i stohastičkih integrala.

U prve dve glave prikazan je matematički aparat potreban za zasnivanje teorije stohastičkih diferencijalnih jednačina, koja predstavlja centralni deo ovog rada. U trećoj glavi uvešćemo osnove stohastičkih diferencijalnih jednačina i izložiti neke od najvažnijih rezultata, koji se odnose na njihova rešenja. Fundamentalni rezultat, dokazan u ovoj glavi, predstavlja teorema egzistencije i jedinstvenosti rešenja stohastičkih diferencijalnih jednačina. Nakon dokaza teoreme egzistencije i jedinstvenosti prikazane su metode za rešavanje linearnih stohastičkih diferencijalnih jednačina, kao i nekih klasa nelinearnih jednačina, tzv. reducibilnih jednačina, koje se određenim transformacijama mogu svesti na linearne.

GLAVA 1

Braunovo kretanje

U ovoj glavi analiziraćemo jedan od najvažnijih slučajnih procesa, Braunovo kretanje ili Vinerov proces, $W(t)$, $t \geq 0$. U cilju dokazivanja egzistencije procesa koji zadovoljava potrebna svojstva izvršićemo konstrukciju Braunovog kretanja, kao granične vrednosti niza skaliranih simetričnih slučajnih hodova, i na bazi tako dobijenog procesa uvešćemo više ekvivalentnih načina za definisanje Braunovog kretanja i izložiti njegove glavne karakteristike.

Najvažnija svojstva Braunovog kretanja, koja će imati fundamentalni značaj za konstrukciju integrala Itoa u drugoj glavi i razvoj teorije stohastičkih diferencijalnih jednačina u trećoj glavi, jesu svojstvo Braunovog kretanja da je martingal i da akumulira kvadratnu varijaciju brzinom jedan po jedinici vremena. Analiziraćemo trajektorije Braunovog kretanja i pokazati da su trajektorije skoro svuda neprekidne, ali nediferencijabilne funkcije po t. Upravo ta nediferencijabilnost trajektorija predstavljaće uzrok nenula kvadratne varijacije Braunovog kretanja i samim tim osnovni izvor razmimoilazenja između klasične i stohastičke analize.

Na kraju ove glave dokazaćemo da Braunovo kretanje predstavlja proces Markova. Osobina Braunovog kretanja da ima svojstvo Markova daće osnovni koncept za povezivanje stohastičke analize sa parcijalnim diferencijalnim jednačinama.[1]

1.1. Braunovo kretanje kao granična vrednost skaliranog simetričnog slučajnog hoda

1.1.1. Simetrični slučajni hod. Prvi korak u formulisanju Braunovog kretanja u terminima slučajnog hoda predstavljaće konstrukcija simetričnog slučajnog hoda. U cilju slikovitog prikaza posmatraćemo sledeći jednostavan eksperiment: ponavljamo

[1]Ovo svojstvo, kao ni njegove posledice, neće biti razmatrano u daljem tekstu i prikazano je samo zbog kompletnosti izlaganja o Braunovom kretanju.

uzastopna bacanja homogenog novčića, pri čemu postoje dva moguća ishoda, $\Gamma =$ pala je glava ili $\Pi =$ palo je pismo, sa jednakim verovatnoćama $P(\Gamma) = P(\Pi) = \frac{1}{2}$. Tada je $\omega = \omega_1\omega_2\omega_3\ldots$ beskonačni niz ishoda sukcesivnih bacanja novčića, gde je ω_j ishod $j-$tog bacanja. Na osnovu posmatranog eksperimenta definišemo slučajnu promenljivu

$$X_j = \begin{cases} 1, & \omega_j = \Gamma, \\ -1, & \omega_j = \Pi, \end{cases}$$

čije je matematičko očekivanje

$$EX_j = 1 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} = 0 \tag{1.1}$$

i varijansa

$$Var(X_j) = EX_j^2 = 1^2 \cdot \frac{1}{2} + (-1)^2 \cdot \frac{1}{2} = 1, \tag{1.2}$$

i konstruišemo slučajni proces

$$S_0 = 0,$$
$$S_k = \sum_{j=1}^{k} X_j, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Ovako definisan proces $S_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots$, koji za svako bacanje novčića pravi korak $+1$ ili korak -1, sa jednakom verovatnoćom, naziva se *simetrični slučajni hod.*

Pre no što započnemo sa analizom osobina simetričnog slučajnog hoda navodimo bez dokaza neke fundamentalne osobine uslovnog matematičkog očekivanja, koje ćemo koristiti u daljem radu.

TEOREMA 1.1. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća i neka je $\mathcal{G}$ σ-podalgebra od $\mathcal{F}$. Neka su X i Y slučajne promenljive, koje imaju (konačno) matematičko očekivanje*[2].

(1) ***(Linearnost uslovnog matematičkog očekivanja)*** *Neka su c_1 i c_2 konstante. Tada je*

$$E(c_1X + c_2Y|\mathcal{G}) = c_1E(X|\mathcal{G}) + c_2E(Y|\mathcal{G}). \tag{1.3}$$

Linearnost važi i u opštijem slučaju kada su X i Y nenegativne slučajne promenljive, koje ne moraju obavezno imati konačno matematičko očekivanje, a c_1 i

[2] Za slučajne promenljive, koje imaju konačno matematičko očekivanje, kažemo još i da su integrabilne.

c_2 su pozitivne, s tim što dopuštamo da obe strane jednakosti (1.3) mogu biti $+\infty$.

(2) ***(Izvlačenje ispred matematičkog očekivanja onog što je poznato)*** *Ako je slučajna promenljiva XY integrabilna i X je $\mathcal{G}$-merljiva, onda je*

$$E(XY|\mathcal{G}) = XE(Y|\mathcal{G}). \tag{1.4}$$

Jednakost (1.4) važi i ako ne pretpostavimo integrabilnost, već samo da je X pozitivna i Y nenegativna slučajna promenljiva, s tim što dopuštamo da obe strane jednakosti mogu biti $+\infty$.

(3) ***(Iterirano uslovljavanje)*** *Ako je $\mathcal{H}$ pod-σ-algebra od $\mathcal{G}$ i X integrabilna slučajna promenljiva, onda je*

$$E(E(X|\mathcal{G})|\mathcal{H}) = E(X|\mathcal{H}). \tag{1.5}$$

Ova osobina važiće i ukoliko za X ne pretpostavimo integrabilnost, već samo nenegativnost, s tim što dopustamo da obe strane jednakosti (1.5) budu $+\infty$.

(4) ***(Nezavisnost)*** *Ako je slučajna promenljiva X nezavisna od $\mathcal{G}$ tada*

$$E(X|\mathcal{G}) = EX. \tag{1.6}$$

Jednakost (1.6) važi i u slučaju da za X ne pretpostavimo da je integrabilna, već samo nenegativna slučajna promenljiva, s tim što dopuštamo da obe strane jednakosti mogu biti $+\infty$.

U daljem tekstu razmotrićemo neka osnovna svojstva simetričnog slučajnog hoda. *Priraštaj* slučajnog hoda je slučajna promenljiva

$$S_{k_{i+1}} - S_{k_i} = \sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} X_j,$$

koja predstavlja pomeraj slučajnog hoda u periodu između trenutaka k_i i k_{i+1}. Za nenegativne cele brojeve k_i, takve da je $0 = k_0 < k_1 < k_2 < \cdots < k_m = k$, priraštaji

$$S_{k_1} = (S_{k_1} - S_{k_0}),\ (S_{k_2} - S_{k_1}), \ldots, (S_{k_m} - S_{k_{m-1}})$$

su nezavisne slučajne promenljive, što je intuitivno jasno na osnovu konstrukcije slučajnog hoda, jer priraštaji na disjunktnim vremenskim intervalima zavise od različitih bacanja novčića (a ta bacanja su nezavisni događaji). Iz rezultata (1.1) i (1.2) i nezavisnosti slučajnih promenljivih X_j dobijamo da je matematičko očekivanje i varijansa priraštaja

$$E(S_{k_{i+1}} - S_{k_i}) = E\sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} X_j = \sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} EX_j = 0,$$

$$Var(S_{k_{i+1}} - S_{k_i}) = Var(\sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} X_j) = \sum_{j=k_i+1}^{k_{i+1}} Var(X_j) = k_{i+1} - k_i. \tag{1.7}$$

Iz (1.7) zaključujemo da simetrični slučajni hod akumulira varijansu brzinom jedan po jedinici vremena.

Stav 1.2. *Simetrični slučajni hod je martingal.*

DOKAZ: Neka su $k < m$ nenegativni celi brojevi i $\mathcal{F}_k$ je σ-algebra, koja sadrži sve informacije zaključno sa trenutkom k (u našem eksperimentu to su informacije dobijene na osnovu prvih k bacanja novčića). Tada je

$$\begin{aligned} E(S_m|\mathcal{F}_k) &= E((S_m - S_k) + S_k|\mathcal{F}_k) \\ &= E(S_m - S_k|\mathcal{F}_k) + E(S_k|\mathcal{F}_k) && (1.8) \\ &= \underbrace{E(S_m - S_k)}_{0} + S_k && (1.9) \\ &= S_k \end{aligned}$$

pri čemu jednakost (1.8) sledi iz linearnosti uslovnog matematičkog očekivanja (teorema 1.1), dok (1.9) sledi iz nezavisnosti budućeg priraštaja $S_m - S_k$ od prethodnih informacija $\mathcal{F}_k$ i potpune determinisanosti S_k informacijama iz $\mathcal{F}_k$. □

Kvadratnu varijaciju simetričnog slučajnog hoda do trenutka k definišemo kao sumu kvadrata priraštaja dužine jedan korak duž određene trajektorije

$$[S,S]_k = \sum_{j=1}^{k} (\underbrace{S_j - S_{j-1}}_{X_j})^2 = \sum_{j=1}^{k} \underbrace{X_j^2}_{1} = k \tag{1.10}$$

Iz (1.10) vidimo da za simetrični slučajni hod važi jednakost kvadratne varijacije i varijanse, tj. $Var(S_k) = Var(S_k - \underbrace{S_0}_{0}) = k = [S,S]_k$.

Napomena 1.3. Kvadratna varijacija se računa za svaku trajektoriju ponaosob, te u opštem slučaju nije jednaka varijansi. Varijansa se dobija kao prosečna vrednost kvadratne varijacije po svim mogućim trajektorijama, uzimajući u obzir verovatnoće njihovih realizacija, dok kvadratna varijacija, koja se računa duž fiksirane trajektorije, ne uzima u obzir verovatnoće pozitivnih i negativnih koraka. Ukoliko slučajni hod ne bi bio simetričan (tj. $P(\Gamma) \neq P(\Pi)$ u našem eksperimentu), to bi uticalo na $Var(S_k)$, ali ne i na $[S,S]_k$.

Napomena 1.4. Određivanje varijanse slučajnog hoda moguće je samo s teorijskog aspekta, jer uzima u obzir sve putanje (realizovane i nerealizovane), dok kvadratna varijacija ima praktičnu primenu, jer se može izračunati eksplicitno duž realizovane trajektorije.

Napomena 1.5. Slučajni hod ima interesantno svojstvo da je kvadratna varijacija do trenutka k duž svake trajektorije ista i iznosi k. Za proizvoljan slučajni proces ovo neće važiti, tj. kvadratna varijacija će zavisi od izbora trajektorije za koju se računa.

1.1.2. Skalirani simetrični slučajni hod. Sledeći korak, koji nas približava aproksimaciji Braunovog kretanja, predstavlja skaliranje simetričnog slučajnog hoda, što postižemo povećanjem broja koraka po jedinici vremena i skraćivanjem dužine koraka. Skalirani simetrični slučajni hod, za fiksirani prirodni broj n, definišemo kao

$$W^{(n)}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} S_{nt}$$

uz uslov celobrojnosti nt. Ovako dobijen slučajni hod pravi n koraka (pozitivnih ili negativnih) dužine $\frac{1}{\sqrt{n}}$ po jedinici vremena.

Kao i simetrični slučajni hod, skalirani simetrični slučajni hod ima *nezavisne priraštaje*, tj. za nenegativne brojeve $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = t$, takve da su nt_j, $j = 0, \ldots, m$ celobrojne vrednosti, slučajne promenljive

$$W^{(n)}(t_1) = (W^{(n)}(t_1) - W^{(n)}(t_0)),\ (W^{(n)}(t_2) - W^{(n)}(t_1)), \ldots, W^{(n)}(t_m) - W^{(n)}(t_{m-1})$$

su nezavisne, pri čemu je matematičko očekivanje

$$E(W^{(n)}(t_{i+1}) - W^{(n)}(t_i)) = \frac{1}{\sqrt{n}} \underbrace{E(S_{nt_{i+1}} - S_{nt_i})}_{0} = 0,$$

i varijansa

$$Var(W^{(n)}(t_{i+1}) - W^{(n)}(t_i)) = \frac{1}{n} \underbrace{Var(S_{nt_{i+1}} - S_{nt_i})}_{nt_{i+1} - nt_i} = t_{i+1} - t_i.$$

Stav 1.6. *Skalirani simetrični slučajni hod je martingal, tj.*

$$E(W^{(n)}(t)|\mathcal{F}(s)) = W^{(n)}(s),$$

za $0 \leq s \leq t$ takve da su ns i nt celobrojne vrednosti.

Dokaz ovog tvrđenja je analogan dokazu tvrđenja 1.2 za običan simetrični slučajan hod.

Kvadratna varijacija skaliranog simetričnog slučajnog hoda definisana je kao

$$\begin{aligned}
[W^{(n)}, W^{(n)}](t) &= \sum_{j=1}^{nt} \left(W^{(n)}\left(\frac{j}{n}\right) - W^{(n)}\left(\frac{j-1}{n}\right)\right)^2 \\
&= \sum_{j=1}^{nt} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} (\underbrace{S_j - S_{j-1}}_{X_j}) \right)^2 \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{nt} \underbrace{X_j^2}_{1} = \frac{1}{n} \cdot nt = t.
\end{aligned}$$

Vidimo da je kvadratna varijacija skaliranog simetričnog slučajnog hoda računata na vremenskom intervalu $[0, t]$, duž jedne trajektorije, jednaka upravo dužini tog vremenskog intervala t. Isto kao i kod slučajnog hoda, skalirani slučajni hod ima kvadratnu varijaciju t na intervalu $[0, t]$, za svaku trajektoriju i varijansa i kvadratna varijacija su jednake, što nije slučaj za proizvoljni slučajni proces.

Teorema 1.7. (Centralna granična teorema za skalirani simetrični slučajni hod) *Za fiksirano $t \geq 0$, kada $n \to \infty$, raspodela skaliranog simetričnog slučajnog hoda $W^{(n)}(t)$ konvergira ka $\mathcal{N}(0, t)$ raspodeli.*

DOKAZ: Fiksirajmo t, tako da je nt celobrojna vrednost. Funkcija generatrisa momenata slučajne promenljive $W^{(n)}(t)$ je

$$
\begin{aligned}
\varphi_n(u) &= Ee^{uW^{(n)}(t)} = Ee^{u\frac{1}{\sqrt{n}}S_{nt}} \\
&= Ee^{u\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{nt}X_j} = E\prod_{j=1}^{nt} e^{\frac{u}{\sqrt{n}}X_j} \\
&= \prod_{j=1}^{nt} Ee^{\frac{u}{\sqrt{n}}X_j} = \prod_{j=1}^{nt}(\frac{1}{2}e^{\frac{u}{\sqrt{n}}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{u}{\sqrt{n}}}) \qquad (1.11) \\
&= (\frac{1}{2}e^{\frac{u}{\sqrt{n}}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{u}{\sqrt{n}}})^{nt},
\end{aligned}
$$

gde prva jednakost u (1.11) sledi iz nezavisnosti slučajnih promenljivih $X_j,\ j = 1, \ldots, nt$.

Da bi dokazali tvrđenje teoreme potrebno je da pokažemo da je $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(u)$ funkcija generatrisa momenata slučajne promenljive sa $\mathcal{N}(0,t)$ raspodelom.

$$
\lim_{n\to\infty} \ln \varphi_n(u) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(\frac{1}{2}e^{\frac{u}{\sqrt{n}}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{u}{\sqrt{n}}})}{\frac{1}{nt}} \qquad (1.12)
$$

Smena promenljivih $x = \frac{1}{\sqrt{n}}$ omogućava nam korišćenje Lopitalovog pravila za određivanje (1.12)

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \ln \varphi_n(u) &= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\frac{1}{2}e^{ux} + \frac{1}{2}e^{-ux})}{\frac{x^2}{t}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\frac{u}{2}e^{ux} - \frac{u}{2}e^{-ux}}{\frac{1}{2}e^{ux} + \frac{1}{2}e^{-ux}}}{\frac{2x}{t}} \\
&= \frac{t}{2}\lim_{x\to 0} \frac{\frac{u}{2}e^{ux} - \frac{u}{2}e^{-ux}}{x} = \frac{t}{2}\lim_{x\to 0} \frac{\frac{u^2}{2}e^{ux} + \frac{u^2}{2}e^{-ux}}{1} \\
&= \frac{1}{2}u^2 t,
\end{aligned}
$$

tj. $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(u) = e^{\frac{1}{2}u^2 t} = \varphi(u)$, gde je $\varphi(u)$ funkcija generatrisa momenata normalno raspodeljene slučajne promenljive sa matematičkim očekivanjem 0 i varijansom t, što je i trebalo dokazati. □

1.2. Definicija i osobine Braunovog kretanja

Braunovo kretanje dobijamo kao graničnu vrednost skaliranih simetričnih hodova $W^{(n)}(t)$ kad $n \to \infty$, pri čemu Braunovo kretanje nasleđuje sve ranije navedene osobine skaliranih slučajnih hodova.

Razlika između Braunovog kretanja i skaliranog slučajnog hoda ogleda se u tome što skalirani slučajni hod $W^{(n)}(t)$ ima prirodan vremenski korak $\frac{1}{n}$ i linearan je između tih koraka, dok Braunovo kretanje nema linearnih delova. Takođe, skalirani slučajni hod je samo aproksimativno normalan za fiksirano t, dok Braunovo kretanje $W(t)$, na osnovu teoreme 1.7, ima tačno normalnu raspodelu $\mathcal{N}(0,t)$.

Definicija 1.8. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća. Standardno jednodimenzionalno *Braunovo kretanje* ili *Vinerov proces* je realan slučajni proces $W(t),\ t \geq 0,\ t \in \mathbf{R}$, koji ima sledeće osobine:

(1) $W(0) = 0$ skoro sigurno.
(2) Proces $W(t),\ t \geq 0$ ima nezavisne[3] priraštaje.
(3) Za $0 \leq s < t$ priraštaj $W(t) - W(s)$ ima $\mathcal{N}(0, t-s)$ raspodelu.

1.2.1. Raspodela Braunovog kretanja. Zajednička raspodela m-dimenzionalnog slučajnog vektora $(W(t_1), W(t_2), \ldots, W(t_m))$ određena je očekivanim vrednostima koordinatnih slučajnih promenljivih $EW(t_i)$ i kovarijacionom matricom

$$C = \begin{pmatrix} Var(W(t_1)) & Cov(W(t_1), W(t_2)) & \cdots & Cov(W(t_1), W(t_m)) \\ Cov(W(t_2), W(t_1)) & Var(W(t_2)) & \cdots & Cov(W(t_2), W(t_m)) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Cov(W(t_m), W(t_1)) & Cov(W(t_m), W(t_2)) & \cdots & Var(W(t_m)) \end{pmatrix}.$$

Svaka od promenljivih $W(t_i) = W(t_i) - W(0)$ ima $\mathcal{N}(0, t_i)$ raspodelu. Odatle vidimo da je

$$\begin{aligned} EW(t_i) &= 0,\ \text{ za svako } i = 1, \ldots, m \\ Var(W(t_i)) &= t_i \text{ za svako } i = 1, \ldots, m \\ Cov(W(t_i), W(t_j)) &= E(W(t_i)W(t_j)) - EW(t_i)EW(t_j) \\ &= E(W(t_i)W(t_j)) \\ &= E(W(t_i)(W(t_j) - W(t_i)) + W^2(t_i)) \end{aligned}$$

[3]Podrazumeva se nezavisnost slučajnih promenljivih $W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \ldots, W(t_m) - W(t_{m-1})$ u ukupnosti, za $0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_m$

$$= EW(t_i)\underbrace{E(W(t_j) - W(t_i))}_{0} + \underbrace{EW^2(t_i)}_{Var(W(t_i))} \tag{1.13}$$

$$= t_i, \text{ za } 0 \leq t_i < t_j,$$

gde jednakost (1.13) sledi iz nezavisnosti $W(t_i)$ i $W(t_j) - W(t_i)$. Odavde dobijamo da je kovarijaciona matrica slučajnog vektora $(W(t_1), W(t_2), \ldots, W(t_m))$, tj. kovarijaciona matrica Braunovog kretanja

$$C = \begin{pmatrix} t_1 & t_1 & \cdots & t_1 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_m \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

Da bismo odredili raspodelu slučajnog vektora $(W(t_1), W(t_2), \ldots, W(t_m))$, računamo njegovu funkciju generatrisu momenata

$$\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_m) = Ee^{u_1 W(t_1) + u_2 W(t_2) + \cdots + u_m W(t_m)}.$$

Da bismo iskoristili činjenicu da su, za $0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_m$, priraštaji

$$W(t_1) = W(t_1) - W(t_0), W(t_2) - W(t_1), \ldots, W(t_m) - W(t_{m-1})$$

nezavisne, normalno raspodeljene slučajne promenljive, izvršićemo sledeću transformaciju

$$u_m W(t_m) + u_{m-1} W(t_{m-1}) + u_{m-2} W(t_{m-2}) + \cdots + u_1 W(t_1)$$

$$= u_m(W(t_m) - W(t_{m-1})) + (u_{m-1} + u_m)(W(t_{m-1}) - W(t_{m-2}))$$

$$+(u_{m-2} + u_{m-1} + u_m)(W(t_{m-2}) - W(t_{m-3})) + \cdots + (u_1 + u_2 + \cdots + u_m)W(t_1).$$

Primenom ovog rezultata i nezavisnosti i normalnosti priraštaja možemo odrediti funkciju generatrisu momenata Braunovog kretanja kao

$$\begin{aligned} \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_m) = E\exp\{&u_m(W(t_m) - W(t_{m-1})) \\ &+ (u_{m-1} + u_m)(W(t_{m-1}) - W(t_{m-2})) \\ &\cdots + (u_1 + u_2 + \cdots + u_m)W(t_1)\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= E\exp\{u_m(W(t_m)-W(t_{m-1}))\}\\
&\quad\cdot E\exp\{(u_{m-1}+u_m)(W(t_{m-1})-W(t_{m-2}))\}\\
&\quad\cdots E\exp\{(u_1+u_2+\cdots+u_m)W(t_1)\}\\
&= \exp\{\frac{1}{2}u_m^2(t_m-t_{m-1})\}\cdot\exp\{\frac{1}{2}(u_{m-1}+u_m)^2(t_{m-1}-t_{m-2})\}\\
&\quad\cdots\exp\{\frac{1}{2}(u_1+u_2+\cdots+u_m)^2t_1\}\\
&= \exp\{\frac{1}{2}(u_1+u_2+\cdots+u_m)^2t_1+\cdots+\frac{1}{2}(u_{m-1}+u_m)^2(t_{m-1}-t_{m-2})\\
&\quad+\frac{1}{2}u_m^2(t_m-t_{m-1})\}. \qquad (1.15)
\end{aligned}
$$

Kako je (1.15) upravo funkcija generatrisa momenata m-dimenzionalne normalne raspodele, može se zaključiti da Braunovo kretanje, tj. slučajni vektor $(W(t_1), W(t_2), \ldots$ $\ldots, W(t_m))$ ima m-dimenzionalnu normalnu raspodelu.

Na osnovu prethodnih razmatranja sledi teorema, koja daje alternativne karakterizacije Braunovog kretanja.

Teorema 1.9. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća i neka neprekidna funkcija $W(t)$ zadovoljava uslov $W(0) = 0$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(1) *Za svaki izbor $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$, priraštaji*

$$W(t_1) = W(t_1) - W(t_0), W(t_2) - W(t_1), \ldots, W(t_m) - W(t_{m-1})$$

su nezavisni i svaki od priraštaja $W(t_i) - W(t_{i-1})$ ima $\mathcal{N}(0, t_i - t_{i-1})$ raspodelu.

(2) *Za svaki izbor $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$, slučajni vektor $(W(t_1), W(t_2), \ldots, W(t_m))$ ima m-dimenzionalnu normalnu raspodelu, pri čemu su očekivane vrednosti koordinatnih slučajnih promenljivih 0 i kovarijaciona matrica C data je sa (1.14).*

(3) *Za svaki izbor $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$, slučajni vektor $(W(t_1), W(t_2), \ldots, W(t_m))$ ima funkciju generatrisu momenata datu sa (1.15).*

Dakle, ukoliko slučajni proces $W(t)$, $t \geq 0$ zadovoljava bilo koji od tri navedena uslova iz teoreme 1.9, onda je taj proces Braunovo kretanje.

1.2.2. Filtracija Braunovog kretanja.

Definicija 1.10. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća, na kome je definisano Braunovo kretanje $W(t),\ t \geq 0$. Filtracija za Braunovo kretanje je kolekcija σ-algebri $\mathcal{F}(t),\ t \geq 0$, sa sledećim osobinama:

Akumulacija informacija: Za svako $0 \leq s < t$ svaki skup iz $\mathcal{F}(s)$ je istovremeno u $\mathcal{F}(t)$, tj. u kasnijem trenutku t ima barem onoliko informacija, koliko ih ima u ranijem trenutku s.

Adaptiranost: Za svako $t \geq 0$, Braunovo kretanje $W(t)$ u trenutku t je $\mathcal{F}(t)$-merljivo, tj. informacije dostupne u trenutku t su dovoljne za ocenu Braunovog kretanja $W(t)$ u trenutku t.

Nezavisnost od budućih priraštaja: Za $0 \leq s < t$, priraštaj $W(t) - W(s)$ je nezavisan od $\mathcal{F}(s)$, tj. svaki priraštaj Braunovog kretanja nakon trenutka s nezavisan je od informacija dostupnih do trenutka s.

Napomena 1.11. Akumulacija informacija i adaptiranost obezbeđuju da informacije $\mathcal{F}(t)$ do trenutka t obezbeđuju bar onoliko koliko bismo dobili opserviranjem Braunovog kretanja $W(t)$ do trenutka t, dok treće svojstvo nezavisnosti od budućih priraštaja obezbeđuje da ni jedna od tih informacija nema nikakvog udela u predviđanju budućih pomeraja Braunovog kretanja.

Definicija 1.12. Neka je $\Delta(t),\ t \geq 0$ slučajni proces. Kažemo da je $\Delta(t)$ adaptiran u odnosu na filtraciju $\mathcal{F}(t)$, ako je slučajna promenljiva $\Delta(t)$, za svako $t \geq 0$, $\mathcal{F}(t)$-merljiva.

Teorema 1.13. *Braunovo kretanje $W(t),\ t \geq 0$ je martingal.*

dokaz: Neka je $0 \leq s \leq t$. Tada je

$$\begin{aligned} E(W(t)|\mathcal{F}(s)) &= E((W(t) - W(s)) + W(s)|\mathcal{F}(s)) \\ &= E(W(t) - W(s)|\mathcal{F}(s)) + E(W(s)|\mathcal{F}(s)) \\ &= \underbrace{E(W(t) - W(s))}_{0} + W(s) = W(s), \end{aligned}$$

čime je verifikovano svojstvo martingala za Braunovo kretanje, pri čemu je u dokazu korišćena linearnost uslovnog matematičkog očekivanja i nezavisnost budućih priraštaja Braunovog kretanja od informacija iz prošlosti (argumenti su isti kao i u teoremi 1.2).

□

1.2.3. Kvadratna varijacija Braunovog kretanja. Za razliku od skaliranog simetričnog slučajnog hoda, gde smo kvadratnu varijaciju, definisali kao sumu kvadrata priraštaja, za vremenski korak veličine $\frac{1}{n}$, Braunovo kretanje nema prirodnu dužinu koraka. Intuitivno se nameće ideja da kvadratnu varijaciju Braunovog kretanja, merenu u periodu $[0,T]$, možemo računati kao graničnu vrednost sume

$$\sum_{j=0}^{n-1}\left[W\left(\frac{(j+1)T}{n}\right)-W\left(\frac{jT}{n}\right)\right]^2 \tag{1.16}$$

za vremenski korak veličine $\frac{T}{n}$, kad $n\to\infty$. Pokazaćemo da je ova granična vrednost jednaka T.

Napomena 1.14. Mnoge funkcije, koje koristimo u klasičnoj analizi, imaju neprekidne izvode, zbog čega je njihova kvadratna varijacija 0. Zaista, ako je $f(t)$ neprekidno-diferencijabilna funkcija na $[0,T]$ i $\Pi=\{t_0,t_1,\dots,t_n\}$ particija segmenta $[0,T]$, takva da je $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=T$, i neka je sa $\|\Pi\|$ označena maksimalna dužina intervala $[t_j,t_{j+1})$, kvadratnu varijaciju funkcije f do trenutka T definišemo kao

$$[f,f](T)=\lim_{\|\Pi\|\to 0}\sum_{j=0}^{n-1}[f(t_{j+1})-f(t_j)]^2. \tag{1.17}$$

Ako funkcija f ima neprekidni prvi izvod, tada je, na osnovu teoreme o srednjoj vrednosti,

$$\sum_{j=0}^{n-1}[f(t_{j+1})-f(t_j)]^2=\sum_{j=0}^{n-1}|f^{'}(\xi_j)|^2(t_{j+1}-t_j)^2\le\|\Pi\|\sum_{j=0}^{n-1}|f^{'}(\xi_j)|^2(t_{j+1}-t_j),$$

gde je $\xi_i\in[t_j,t_{j+1})$.

Sada, na osnovu (1.17), dobijamo da je

$$
\begin{aligned}
[f,f](T) &\leq \lim_{\|\Pi\|\to 0} \|\Pi\| \sum_{j=0}^{n-1} |f^{'}(\xi_j)|^2 (t_{j+1}-t_j) \\
&= \lim_{\|\Pi\|\to 0} \|\Pi\| \lim_{\|\Pi\|\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} |f^{'}(\xi_j)|^2 (t_{j+1}-t_j) \\
&= \underbrace{\lim_{\|\Pi\|\to 0} \|\Pi\|}_{0} \underbrace{\int_0^T |f'(t)|^2 dt}_{<\infty} = 0. \qquad (1.18)
\end{aligned}
$$

Zbog toga nikada ne analiziramo kvadratnu varijaciju u klasičnoj analizi. Problem, koji se javlja kod Braunovog kretanja, je nediferencijabilnost po t trajektorija Braunovog kretanja[4], zbog čega ne možemo primeniti teoremu o srednjoj vrednosti, pa rezultat (1.18) u ovom slučaju ne važi.

TEOREMA 1.15. *Kvadratna varijacija Braunovog kretanja* $W(t)$, $t \geq 0$, *iznosi* $[W,W](T) = T$ *skoro sigurno, za svako* $T \geq 0$.

DOKAZ: Uzoračka kvadratna varijacija

$$
Q_\Pi = \sum_{j=0}^{n-1} (W(t_{j+1}) - W(t_j))^2,
$$

za particiju $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T\}$ intervala $[0,T]$, predstavlja slučajnu promenljivu (jer zavisi od izbora trajektorije duž koje se računa), koja je definisana kao suma nezavisnih slučajnih promenljivih, pa dobijamo da je

$$
EQ_\Pi = \sum_{j=0}^{n-1} E(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2 = \sum_{j=0}^{n-1} Var(W(t_{j+1}) - W(t_j)) = \sum_{j=0}^{n-1} (t_{j+1} - t_j) = T
$$

[4]Što ćemo formalno dokazati u Poglavlju *Nediferencijabilnost trajektorija*.

$$\begin{aligned}
Var(Q_\Pi) &= \sum_{j=0}^{n-1} Var\left[(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2\right] \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \left\{ E(W(t_{j+1}) - W(t_j))^4 - \left[E(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2\right]^2 \right\} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \left\{ 3(t_{j+1} - t_j)^2 - (t_{j+1} - t_j)^2 \right\} = 2\sum_{j=0}^{n-1} (t_{j+1} - t_j)^2 \\
&\leq 2\|\Pi\| \sum_{j=0}^{n-1} (t_{j+1} - t_j) = 2\|\Pi\| T
\end{aligned}$$

odakle dobijamo da je $\lim_{\|\Pi\|\to 0} Var(Q_\Pi) = 0$, te je, $\lim_{\|\Pi\|\to 0} Q_\Pi = EQ_\Pi = T$. $\square$

NAPOMENA 1.16. Rezultat ove teoreme možemo neformalno predstaviti u obliku

$$dW(t)dW(t) = dt. \tag{1.19}$$

1.3. Osobine trajektorija Braunovog kretanja

Osnovni rezultat, koji će biti izložen u ovom odeljku, je skoro sigurna nediferencijabilnost trajektorija Braunovog kretanja $t \to W(t, w)$. U narednom poglavlju pokazaćemo da je upravo ova osobina Braunovog kretanja fundamentalna za konstrukciju integrala Itoa i da predstavlja glavni izvor svih idejnih i tehničkih različitosti, koje se javljaju u odnosu na realne integrale.

1.3.1. Neprekidnost trajektorija.

DEFINICIJA 1.17. Neka je $0 < \gamma \leq 1$.

(1) Funkcija $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ je *uniformno neprekidna po Helderu sa eksponentom* γ ako postoji konstanta K tako da vazi

$$|f(t) - f(s)| \leq K|t - s|^\gamma \quad \text{za sve } s, t \in [0, T].$$

(2) Funkcija $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ je *neprekidna po Helderu sa eksponentom* γ *u tački* s ako postoji konstanta K tako da važi

$$|f(t) - f(s)| \leq K|t - s|^\gamma \quad \text{za svako } t \in [0, T].$$

Sledeća teorema predstavljaće osnovni alat za ispitivanje neprekidnosti po Helderu. U dokazu teoreme koristićemo nejednakost Markova i Borel-Kantelijevu lemu, koje navodimo bez dokaza.

LEMA 1.18 (**Nejednakost Markova**). *Neka je X slučajna promenljiva i $\beta > 0$, tako da postoji $E|X|^\beta$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada važi sledeća nejednakost*

$$P(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{E|X|^\beta}{\varepsilon^\beta}.$$

LEMA 1.19 (**Borel-Kantelijeva lema**).

(1) *Ako je $A_n, n \geq 1$, proizvoljan niz događaja i ako red $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ konvergira, onda se sa verovatnoćom 1 može realizovati samo konačno mnogo događaja datog niza $A_n, n \geq 1$.*

(2) *Ako je $A_n, n \geq 1$, niz nezavisnih događaja i ako red $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ divergira, onda se sa verovatnoćom 1 realizuje beskonačno mnogo događaja niza $A_n, n \geq 1$.*

TEOREMA 1.20 (**Kolmogorov**). *Neka je $X(\cdot)$ slučajni proces sa neprekidnim trajektorijama skoro sigurno, tako da je*

$$E|X(t) - X(s)|^\beta \leq C|t - s|^{1+\alpha}$$

za konstante $\alpha, \beta > 0$, $C \geq 0$ i za sve $s, t \geq 0$.

Tada, za svako $0 < \gamma < \frac{\alpha}{\beta}, T > 0$ i skoro svako ω, postoji konstanta $K = K(\omega, \gamma, T)$, tako da važi

$$|X(t, \omega) - X(s, \omega)| \leq K|t - s|^\gamma, \text{ za sve } 0 \leq s, t \leq T,$$

tj. trajektorija $t \to X(t, \omega)$ je uniformno neprekidna po Helderu sa eksponentom γ na $[0, T]$.

DOKAZ: Radi jednostavnosti zapisa, a bez umanjenja opštosti, neka je $T = 1$. Za proizvoljno izabrano

$$0 < \gamma < \frac{\alpha}{\beta} \tag{1.20}$$

definišemo niz događaja $A_n \subseteq \Omega$, $n \geq 1$, tako da je

$$A_n = \left\{ \omega : \left| X\left(\frac{i+1}{2^n}\right) - X\left(\frac{i}{2^n}\right) \right| > \frac{1}{2^{n\gamma}}, \text{ za neki ceo broj } 0 \leq i < 2^n \right\}.$$

Dakle, za fiksirano n, u skupu A_n se nalaze svi ishodi $\omega \in \Omega$ takvi da za bar jedno $0 \leq i < 2^n$ priraštaj trajektorije $t \to X(t,\omega)$ na intervalu $[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}]$ bude veći od $\frac{1}{2^{n\gamma}}$. Tada je

$$
\begin{aligned}
P(A_n) &\leq \sum_{i=0}^{2^n-1} P\left(\left|X\left(\frac{i+1}{2^n}\right) - X\left(\frac{i}{2^n}\right)\right| > \frac{1}{2^{n\gamma}}\right) \\
&\leq \sum_{i=0}^{2^n-1} E\left(\left|X\left(\frac{i+1}{2^n}\right) - X\left(\frac{i}{2^n}\right)\right|^{\beta}\right)\left(\frac{1}{2^{n\gamma}}\right)^{-\beta} \text{(sledi iz nejednakosti Markova)} \\
&\leq \sum_{i=0}^{2^n-1} C\left(\frac{1}{2^n}\right)^{1+\alpha}\left(\frac{1}{2^{n\gamma}}\right)^{-\beta} \\
&= C2^{n(-\alpha+\gamma\beta)}.
\end{aligned}
$$

Iz (1.20) dobijamo da je $-\alpha+\gamma\beta < 0$, pa zaključujemo da je $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, odakle na osnovu tvrđenja (1) Borel-Kantelijeve leme sledi

$$
P(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m) = P(\{\omega : \omega \text{ se nalazi u beskonačno mnogo skupova } A_n\}) = 0,
$$

tj. za skoro svako $\omega \in \Omega$ postoji $m = m(\omega)$ tako da je

$$
\left|X\left(\frac{i+1}{2^n},\omega\right) - X\left(\frac{i}{2^n},\omega\right)\right| \leq \frac{1}{2^{n\gamma}}, \text{ za } 0 \leq i \leq 2^{n-1}
$$

za svako $n \geq m$. Tada, za dovoljno veliko $K = K(\omega)$, imamo da važi

$$
\left|X\left(\frac{i+1}{2^n},\omega\right) - X\left(\frac{i}{2^n},\omega\right)\right| \leq K\frac{1}{2^{n\gamma}}, \text{ za } 0 \leq i \leq 2^{n-1} \tag{1.21}
$$

za svako $n \geq 0$.

Fiksirajmo $\omega \in \Omega$ za koje važi (1.21). Neka su $t_1, t_2 \in [0,1]$, $0 < t_2 - t_1 < 1$, dijadički[5] racionalni brojevi. Izaberimo $n \geq 1$ tako da je

$$
\frac{1}{2^n} \leq t_2 - t_1 < \frac{1}{2^{n-1}}. \tag{1.22}
$$

Postoje nenegativni celi brojevi i i j takvi da je

$$
t_1 \leq \frac{i}{2^n} \leq \frac{j}{2^n} \leq t_2
$$

[5]Brojevi oblika $\frac{a}{2^b}$, gde su $a, b \geq 0$ celi brojevi.

pri čemu t_1 i t_2 možemo predstaviti u obliku

$$t_1 = \frac{i}{2^n} - \frac{1}{2^{p_1}} - \frac{1}{2^{p_2}} - \cdots - \frac{1}{2^{p_k}},\ n < p_1 < p_2 < \cdots < p_k$$
$$t_2 = \frac{j}{2^n} + \frac{1}{2^{q_1}} + \frac{1}{2^{q_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{q_l}},\ n < q_1 < q_2 < \cdots < q_l.$$

Tada je

$$\frac{j-i}{2^n} \le t_2 - t_1 < \frac{1}{2^{n-1}},$$

odakle sledi da je $j = i$ ili $j = i + 1$. Sada, na osnovu (1.21), imamo da je

$$\left| X\left(\frac{j}{2^n}, \omega\right) - X\left(\frac{i}{2^n}, \omega\right) \right| \le K \left(\frac{j-i}{2^n}\right)^\gamma \le K|t_2 - t_1|^\gamma. \tag{1.23}$$

Dalje je

$$\left| X\left(\frac{i}{2^n} - \frac{1}{2^{p_1}} - \cdots - \frac{1}{2^{p_r}}, \omega\right) - X\left(\frac{i}{2^n} - \frac{1}{2^{p_1}} - \cdots - \frac{1}{2^{p_{r-1}}}, \omega\right) \right| \le K \left(\frac{1}{2^{p_r}}\right)^\gamma$$

za svako $r = 1, \ldots, k$, odakle sledi

$$\begin{aligned}
\left| X(t_1, \omega) - X\left(\frac{i}{2^n}, \omega\right) \right| &\le K \sum_{r=1}^{k} \left(\frac{1}{2^{p_r}}\right)^\gamma \\
&= \frac{K}{2^{n\gamma}} \sum_{r=1}^{k} \frac{1}{2^{(p_r - n)\gamma}} \qquad \text{(jer je } p_r > n \text{ za svako } r = 1, \ldots, k) \\
&\le \frac{K}{2^{n\gamma}} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{2^{r\gamma}} \\
&= \frac{K}{2^{n\gamma}} \cdot \frac{1}{2^\gamma - 1} \\
&\le C_1 |t_2 - t_1|^\gamma \qquad \text{(sledi iz (1.22) za } C_1 = \frac{K}{2^\gamma - 1}).
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Analogno zaključujemo da je

$$\left| X(t_2, \omega) - X\left(\frac{j}{2^n}, \omega\right) \right| \le C_1 |t_2 - t_1|^\gamma. \tag{1.25}$$

Sada, na osnovu rezultata (1.23), (1.24) i (1.25), dobijamo da je

$$\begin{aligned}|X(t_2,\omega)-X(t_1,\omega)| &\le \left|X(t_2,\omega)-X\left(\frac{j}{2^n},\omega\right)\right| \\ &+\left|X\left(\frac{j}{2^n},\omega\right)-X\left(\frac{i}{2^n},\omega\right)\right|+\left|X(t_1,\omega)-X\left(\frac{i}{2^n},\omega\right)\right| \\ &\le C_1|t_2-t_1|^\gamma+K|t_2-t_1|^\gamma+C_1|t_2-t_1|^\gamma \\ &= C|t_2-t_1|^\gamma, \qquad (1.26)\end{aligned}$$

za sve dijadičke racionalne brojeve $t_1, t_2 \in [0,1]$ i neku konstantu $C = C(\omega)$. Zbog neprekidnosti trajektorije $t \to X(t,\omega)$, za skoro svako ω, dobijeni rezultat (1.26) važi za sve $t_1, t_2 \in [0,1]$. $\square$

POSLEDICA 1.21. *Za skoro svako ω i proizvoljno $T > 0$ trajektorija Braunovog kretanja $t \to W(t,\omega)$ je uniformno neprekidna po Helderu za svaki eksponent $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ na $[0,T]$.*

DOKAZ: Za sve cele brojeve $m = 1, 2, \ldots$ i $0 \le s \le t \le T$ imamo da važi

$$\begin{aligned}E|W(t)-W(s)|^{2m} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^{2m}e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}}dx \\ &= \frac{(t-s)^m}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}|y|^{2m}e^{-\frac{y^2}{2}}dy \qquad \left(y=\frac{x}{\sqrt{t-s}}\right) \\ &= (2m-1)!!|t-s|^m.\end{aligned}$$

Za $\beta = 2m$ i $\alpha = m-1$ važe pretpostavke teoreme Kolmogorova, pa je trajektorija Braunovog kretanja skoro sigurno uniformno neprekidna po Helderu za eksponente

$$0 < \gamma < \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2m}, \quad \text{za svako } m.$$

$\square$

U daljem izlaganju pokazaćemo da trajektorije Braunovog kretanja skoro sigurno nisu neprekidne po Helderu sa eksponentom većim od $\frac{1}{2}$, što implicira sa verovatnoćom 1 nediferencijabilnost trajektorija Braunovog kretanja.

1.3.2. Nediferencijabilnost trajektorija.

TEOREMA 1.22.

(1) *Za svako* $\frac{1}{2} < \gamma \leq 1$ *i skoro svako* $\omega \in \Omega$, *trajektorija* $t \to W(t,\omega)$ *nije neprekidna po Helderu sa eksponentom* γ *u tački* s.

(2) *Za skoro svako* $\omega \in \Omega$, *trajektorija* $t \to W(t,\omega)$ *nije diferencijabilna ni u jednoj tački i ima beskonačnu varijaciju na svakom podintervalu.*

DOKAZ: (Dvorecki, Erdoš, Kakuktani)
(1) Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da $t \in [0,1]$. Fiksirajmo dovoljno veliki ceo broj N, tako da je zadovoljeno

$$N\left(\gamma - \frac{1}{2}\right) > 1$$

Ako pretpostavimo da je trajektorija $t \to W(t,\omega)$ neprekidna po Helderu sa eksponentom γ u tački $0 \leq s < 1$, onda postoji konstanta K tako da važi

$$|W(t,\omega) - W(s,\omega)| \leq K|t-s|^\gamma, \text{ za svako } t \in [0,1].$$

Za dovoljno veliko n neka je $i = [ns]+1$. Tada, za $j = i, i+1, \dots, i+N-1$, važi

$$\begin{aligned}\left|W\left(\frac{j}{n},\omega\right) - W\left(\frac{j+1}{n},\omega\right)\right| &\leq \left|W(s,\omega) - W\left(\frac{j+1}{n},\omega\right)\right| + \left|W(s,\omega) - W\left(\frac{j}{n},\omega\right)\right| \\ &\leq K\left|s - \frac{j+1}{n}\right|^\gamma + K\left|s-\frac{j}{n}\right|^\gamma \\ &\leq \frac{M}{n^\gamma}\end{aligned}$$

za neku konstantu M. Poslednja nejednakost važi jer je

$$\left|s - \frac{j}{n}\right| = \frac{|ns - [ns] - 1 - r|}{n} \leq \frac{|ns - [ns] - 1| + |r|}{n} \leq \frac{1+N-1}{n} = \frac{N}{n}$$

gde $r \in \{0, 1, \dots, N-1\}$.

Označimo sa $A^i_{M,n}, n \gg 1$, niz događaja konstruisanih na sledeći način

$$A^i_{M,n} = \left\{\omega : \left|W\left(\frac{j}{n}\right) - W\left(\frac{j+1}{n}\right)\right| \leq \frac{M}{n^\gamma}, \text{ za } j = i, \dots, i+N-1\right\}$$

za neko $1 \leq i \leq n$ i neku konstantu $M \geq 1$. Tada se svi $\omega \in \Omega$, za koje je trajektorija $t \to W(t,\omega)$ neprekidna po Helderu sa eksponentom γ u tački $0 \leq s < 1$, sadrže u skupu

$$\bigcup_{M=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{n} A_{M,n}^{i}. \tag{1.27}$$

Pokazaćemo da događaj (1.27) ima verovatnoću 0.

Za svako M i k, na osnovu činjenice da su priraštaji $W\left(\frac{j+1}{n}\right) - W\left(\frac{j}{n}\right) \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{n})$ nezavisne slučajne promenljive, dobijamo da je

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{n=k}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{n} A_{M,n}^{i}\right) &\leq \liminf_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_{M,n}^{i}\right) \qquad \left(\text{jer je } \bigcap_{n=k}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{n} A_{M,n}^{i} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_{M,n}^{i}\right) \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(A_{M,n}^{i}) \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} n \left(P\left(\left|W\left(\frac{1}{n}\right)\right| \leq \frac{M}{n^{\gamma}}\right)\right)^{N} \end{aligned}$$

Dalje,

$$\begin{aligned} P\left(\left|W\left(\frac{1}{n}\right)\right| \leq \frac{M}{n^{\gamma}}\right) &= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-M/n^{\gamma}}^{M/n^{\gamma}} e^{-\frac{nx^2}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-M/n^{\gamma-1/2}}^{M/n^{\gamma-1/2}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \qquad (y = \sqrt{n}x) \\ &\leq C_1 n^{1/2-\gamma}, \end{aligned}$$

pa je

$$P\left(\bigcap_{n=k}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{n} A_{M,n}^{i}\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n^{N(\gamma-1/2)-1}} = 0 \tag{1.28}$$

jer je $N(\gamma - \frac{1}{2}) > 1$. Pošto (1.28) važi za svako M i k zaključujemo da važi

$$P\left(\bigcup_{M=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{n} A_{M,n}^{i}\right) = 0$$

čime je tvrđenje (1) teoreme dokazano.

(2) Ako pretpostavimo da je trajektorija $W(t,\omega)$ diferencijabilna u tački s, tada bi $W(t,\omega)$ morala biti neprekidna po Helderu sa eksponentom 1 u tački s. No, u delu (1) pokazali smo da to nije tačno sa verovatnoćom 1, pa $W(t,\omega)$ sa verovatnoćom 1 nije diferencijabilna ni u jednoj tački.

Ako bi $W(t,\omega)$ imala konačnu varijaciju na nekom podintervalu, to bi značilo da je ona skoro svuda diferencijabilna na tom podintervalu. $\square$

1.4. Svojstvo Markova

DEFINICIJA 1.23. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća, T je fiksirani pozitivan broj i $\mathcal{F}(t)$, $0 \leq t \leq T$, je filtracija σ-podalgebri od $\mathcal{F}$. Adaptirani slučajni proces $X(t)$, $0 \leq t \leq T$, je proces Markova ako za svako s, $0 \leq s \leq t \leq T$, i svaku nenegativnu Borel-merljivu funkciju f, postoji Borel-merljiva funkcija g, tako da važi

$$E(f(X(t))|\mathcal{F}(s)) = g(X(s)). \tag{1.29}$$

NAPOMENA 1.24. Ako bismo u definiciji procesa Markova dopustili da funkcija f zavisi i od vremenske koordinate t, tada bi i funkcija g zavisila od vremenske koordinate s. U tom slučaju bismo umesto $f(x)$ pisali $f(x,t)$, a $g(x)$ bismo zamenili sa $f(x,s)$. Ovde nema potrebe za uvođenjem različitih simbola za funkcije f i g, jer nam vremenske promenljive t i s sugerišu da se radi o različitim funkcijama po x u različitim trenucima. U prisustvu koordinate vremena uslov (1.29) možemo zapisati kao

$$E(f(X(t),t)|\mathcal{F}(s)) = f(X(s),s), \quad 0 \leq s \leq t \leq T.$$

Ideja ove definicije sastoji se u sledećem: ako znamo vrednost $X(s)$ slučajnog procesa X u trenutku s, onda možemo predvideti buduću vrednost $X(t)$ u trenutku $0 \leq s \leq t$, jednako dobro kao i da smo znali čitavu istoriju $\mathcal{F}(s)$ procesa do trenutka s. Dakle, proces Markova "ne pamti" kako je stigao do pozicije $X(s)$, već jedino "zna" svoju vrednost u trenutku s.

Sada ćemo pokazati da je Braunovo kretanje proces Markova. U dokazu ovog tvrđenja koristićemo sledeću lemu.

LEMA 1.25 (**Lema o nezavisnosti**). *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća i $\mathcal{G}$ σ-podalgebra od $\mathcal{F}$. Neka su slučajne promenljive $X_1, \ldots, X_k$ $\mathcal{G}$-merljive i slučajne promenljive $Y_1, \ldots, Y_l$ su nezavisne od $\mathcal{G}$ i $f(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l)$ je funkcija po označavajućim promenljivim $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l$. Definišemo*

$$g(x_1, \ldots, x_k) = Ef(x_1, \ldots, x_k, Y_1, \ldots, Y_l).$$

Tada je

$$E[f(X_1,\dots,X_k,Y_1,\dots,Y_l)|\mathcal{G}] = g(X_1,\dots,X_k).$$

NAPOMENA 1.26. Neka je X realna slučajna promenljiva na prostoru verovatnoća $(\Omega,\mathcal{F},P)$. Pod *označavajućom promenljvom* x slučajne promenljive X podrazumevaćemo argument bilo koje realne funkcije φ, koji može biti ili slučajna promenljiva X ili neka njena fiksirana realizacija.

TEOREMA 1.27. *Neka je $W(t)$, $t\geq 0$, Braunovo kretanje sa filtracijom $\mathcal{F}(t)$, $t\geq 0$. Tada je $W(t)$, $t\geq 0$ proces Markova i gustina prelaza za korak dužine τ, $0\leq\tau\leq T$, iz stanja x u stanje y, $x,y\in\mathbb{R}$, data je sa*

$$p(\tau,x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}e^{-\frac{(y-x)^2}{2\tau}}.$$

DOKAZ: Neka je f proizvoljna nenegativna Borel-merljiva funkcija. Tada je

$$E(f(W(t))|\mathcal{F}(s)) = E(f(W(t)-W(s)+W(s))|\mathcal{F}(s)). \tag{1.30}$$

Slučajna promenljiva $W(t)-W(s)$ je nezavisna od $\mathcal{F}(s)$, dok je slučajna promenljiva $W(s)$ $\mathcal{F}(s)$-merljiva, što nam omogućava primenu leme o nezavisnosti. U tom cilju zamenićemo $W(s)$ označavajućom promenljivom x, da bi ga smatrali konstantnim, i odrediti obično matematičko očekivanje slučajne promenljive $Ef(W(t)-W(s)+x)$. Označimo sa

$$g(x) = Ef(W(t)-W(s)+x).$$

Iz činjenice da je priraštaj $W(t)-W(s)$ normalno raspodeljena slučajna promenljiva sa očekivanom vrednošću 0 i varijansom $t-s$ dobijamo da je

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega+x)e^{-\frac{\omega^2}{2(t-s)}}d\omega. \tag{1.31}$$

Sada, na osnovu tvrđenja leme o nezavisnosti, ako u dobijenoj funkciji $g(x)$ zamenimo x slučajnom promenljivom $W(s)$ dobijamo da važi jednakost (1.30), tj. $W(t)$, $t\geq 0$ je proces Markova.

Ostalo je još da odredimo funkciju gustine prelaza. Ako u izrazu (1.31) uvedemo smenu promenljivih $\tau = t - s$ i $y = \omega + x$, dobijamo

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-\frac{(y-x)^2}{2\tau}} dy,$$

pa je gustina prelaza $p(\tau, x, y)$ za Braunovo kretanje data sa

$$p(\tau, x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{(y-x)^2}{2\tau}}. \tag{1.32}$$

□

Sada (1.31) i (1.30) možemo respektivno zapisati u obliku

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) p(\tau, x, y) dy,$$

$$E(f(W(t))|\mathcal{F}(s)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) p(\tau, W(s), y) dy. \tag{1.33}$$

Jednačina (1.33) ima sledeću interpretaciju. Uslovna gustina od $W(t)$ u odnosu na informacije iz $\mathcal{F}(s)$ je $p(\tau, W(s), y)$, gde je p gustina po y. Funkcija gustine $p(\tau, W(s), y)$ odgovara normalnoj raspodeli sa očekivanom vrednošću $W(s)$ i varijansom $\tau = t - s$. Dakle, jedina informacija iz $\mathcal{F}(s)$, koja je relevantna, je vrednost $W(s)$ i baš ta činjenica predstavlja suštinu svojstva Markova Braunovog kretanja.

1.5. Višedimenzionalno Braunovo kretanje

Definicija 1.28. Slučajni proces $\mathbf{W}(t) = (W_1(t), \ldots, W_d(t))$, $d \geq 2$, sa sledećim svojstvima

(1) za svaki $i = 1, \ldots, d$ slučajni proces $W_i(t)$ je jednodimenzionalno Braunovo kretanje,

(2) slučajni procesi $W_1(t), \ldots, W_d(t)$ su nezavisni,

je d-dimenzionalno Braunovo kretanje.

Analogno kao za jednodimenzionalno Braunovo kretanje, za d-dimenzionalno Braunovo kretanje imamo filtraciju $\mathcal{F}(t)$, $t \geq 0$, koja ima svojstva akumulacije informacija, adaptiranosti i nezavisnosti od budućih priraštaja.

Pošto je svaka komponenta d-dimenzionalnog slučajnog procesa $\mathbf{W}(t) = (W_1(t), \dots$ $\dots, W_d(t))$ jednodimenzionalno Braunovo kretanje, imamo da je kvadratna varijacija

$$[W_i, W_i](t) = t, \quad \text{za svaki } i = 1, \dots, d.$$

Za proizvoljnu particiju $\Pi = \{t_0, \dots, t_n\}$ intervala $[0, T]$ ukrštenu uzoračku varijaciju za W_i i W_j, $i \neq j$, na $[0, T]$, definišemo kao

$$C_\Pi = \sum_{k=0}^{n-1} [W_i(t_{k+1}) - W_i(t_k)][W_j(t_{k+1}) - W_j(t_k)]. \tag{1.34}$$

Iz nezavisnosti W_i i W_j sledi nezavisnost priraštaja koji figurišu u sumi jednakosti (1.34), pri čemu je matematičko očekivanje svakog od tih priraštaja jednako 0. Odatle zaključujemo da je

$$EC_\Pi = 0 \qquad \text{i} \qquad Var(C_\Pi) = EC_\Pi^2.$$

Dalje je

$$\begin{aligned} C_\Pi^2 &= \sum_{k=0}^{n-1} [W_i(t_{k+1}) - W_i(t_k)]^2 [W_j(t_{k+1}) - W_j(t_k)]^2 \\ &+ 2 \sum_{l<k}^{n-1} [W_i(t_{l+1}) - W_i(t_l)][W_j(t_{l+1}) - W_j(t_l)][W_i(t_{k+1}) - W_i(t_k)][W_j(t_{k+1}) - W_j(t_k)], \end{aligned}$$

svi sabirci iz prve sume su međusobno nezavisni i imaju matematičko očekivanje jednako $t_{k+1} - t_k$; svi sabirci iz druge sume su međusobno nezavisni i svi imaju očekivanu vrednost 0, pa sledi da je

$$\begin{aligned} Var(C_\Pi) &= E \sum_{k=0}^{n-1} [W_i(t_{k+1}) - W_i(t_k)]^2 [W_j(t_{k+1}) - W_j(t_k)]^2 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} E[W_i(t_{k+1}) - W_i(t_k)]^2 E[W_j(t_{k+1}) - W_j(t_k)]^2 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k)^2 \\ &\le \|\Pi\| \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) \\ &= \|\Pi\| \cdot T \to 0, \end{aligned}$$

kad $\|\Pi\| \to 0$, odakle zaključujemo da C_Π konvergira ka konstanti $EC_\Pi = 0$, tj.

$$[W_i, W_j](t) = 0, \qquad \text{za sve } i \neq j, \quad i, j = 1, \ldots, d.$$

GLAVA 2

Integral Itoa

Fundamentalni izvor razmimoilaženja između klasične i stohastičke analize leži u osobini Braunovog kretanja da poseduje kvadratnu varijaciju različitu od nule. U ovoj glavi definisaćemo stohastički integral Itoa

$$I(T) = \int_0^T G(t)dW(t), \quad \text{za fiksiran } T > 0, \tag{2.1}$$

i dokazati njegova najvažnija svojstva. Osnovni koncepti potrebni za definisanje integrala Itoa su Braunovo kretanje $W(t)$, $t \geq 0$, sa odgovarajućom filtracijom $\mathcal{F}(t)$, $t \geq 0$ i adaptirani slučajni proces $G(t)$, $t \geq 0$, u odnosu na tu filtraciju.

Problem, koji se javlja prilikom definisanja integrala $I(T)$, je nediferencijabilnost po t trajektorija Braunovog kretanja. Drugim rečima, za diferencijabilnu funkciju $\varphi(t)$ važi

$$\int_0^T G(t)d\varphi(t) = \int_0^T G(t)\varphi'(t)dt, \tag{2.2}$$

gde na desnoj strani jednakosti figuriše običan Lebegov integral po t. Za Braunovo kretanje jednakost (2.2) ne važi.

Ideja za konstrukciju integrala Itoa, koju ćemo izložiti u narednom poglavlju, je prirodna: prvo ćemo definisati integral Itoa za klasu elementarnih (prostih) podintegralnih slučajnih procesa (integranada); potom ćemo pokazati da proizvoljni integrand može, na odgovarajući način, biti aproksimiran nizom elementarnih integranada, te ćemo integral Itoa za proizvoljni integrand definisati kao graničnu vrednost niza integrala Itoa za odgovarajući niz elementarnih integranada.

Kao ključni rezultat ove glave biće izložen dokaz Ito-Doblinove formule, koja predstavlja osnovni alat za izračunavanje stohastičkih integrala.

2.1. Integral Itoa za elementarni podintegralni slučajni proces

Neka je $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T\}$ proizvoljna particija intervala $[0,T]$, i neka je slučajni proces $G(t)$ konstantan po t na svakom podintervalu $[t_j, t_{j+1})$. Tako definisan slučajni proces $G(t)$ nazivamo *elementarni proces.* U daljem tekstu, ukoliko nije drugačije naglašeno, podrazumevaćemo da je

$$G(t) = G(t_j), \quad t_j \leq t < t_{j+1}, \quad \text{za svako } j = 0, \ldots, n-1$$

i da važi uslov $\mathbb{L}^2$-integrabilnosti

$$E\int_0^T G^2(t)dt < \infty. \tag{2.3}$$

Za fiksirano $\omega \in \Omega$ dobijamo jednu trajektoriju Braunovog kretanja $W(t)$ i odgovarajuću trajektoriju elementarnog procesa $G(t)$; za neki drugi izbor ω, imaćemo drugu trajektoriju Braunovog kretanja i odgovarajuću drugu trajektoriju elementarnog procesa $G(t)$. Iz $\mathcal{F}(t)$-merljivosti $G(t)$ sledi da vrednost $G(t)$ zavisi samo od informacija dostupnih u trenutku t. Pošto u trenutku $t_0 = 0$ nema nikakvih informacija, vrednost $G(0)$ će biti ista za sve trajektorije, pa će prvi korak od $G(t)$ na podintervalu $0 \leq t < t_1$ biti jednak $G(0)$ za sve trajektorije, tj. neće zavisiti od izbora ω. Vrednost $G(t)$ na svakom sledećem podintervalu može zavisiti od opservacija načinjenih u prethodnim koracima.

Integral Itoa za elementarni integrand $G(t)$ konstruišemo koristeći sledeći iterativni postupak

$$\begin{aligned}
I(t) &= G(t_0)(W(t) - W(t_0)) = G(0)W(t), \quad 0 \leq t < t_1,\\
I(t) &= G(0)W(t_1) + G(t_1)(W(t) - W(t_1)), \quad t_1 \leq t < t_2,\\
I(t) &= G(0)W(t_1) + G(t_1)(W(t_2) - W(t_1)) + G(t_2)(W(t) - W(t_2)), \quad t_2 \leq t < t_3,\\
&\ \vdots\\
I(t) &= \sum_{j=0}^{k-1} G(t_j)(W(t_{j+1}) - W(t_j)) + G(t_k)(W(t) - W(t_k)), \quad t_k \leq t < t_{k+1}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Slučajni proces $I(t)$, $t \geq 0$, definisan jednakošću (2.4) naziva se integral Itoa za elementarni podintegralni slučajni proces $G(t)$, što zapisujemo kao

$$I(t) = \int_0^t G(u)dW(u), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Specijalno, za $t = t_n = T$ dobijamo da je $I(T) = \int_0^T G(t)dW(t)$, čime smo obezbedili definiciju integrala Itoa (2.1) za elementarni integrand.

U tekstu koji sledi izložićemo osnovna svojstva integrala Itoa za elementarni podintegralni slučajni proces. Iz definicije integrala Itoa i činjenice da je Braunovo kretanje martingal proizilazi tvrđenje sledeće teoreme.

Teorema 2.1. *Integral Itoa $I(t)$, $t \geq 0$ je martingal.*

dokaz: Neka je $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T\}$ particija intervala $[0, T]$, i neka su $0 \leq s \leq t \leq T$ tačke koje pripadaju različitim podintervalima[1] particije Π, tj. postoje tačke $t_l < t_k$ particije Π tako da $s \in [t_l, t_{l+1})$ i $t \in [t_k, t_{k+1})$. Tada je

$$\begin{aligned} E(I(t)|\mathcal{F}(s)) = E(&\underbrace{\sum_{j=0}^{l-1} G(t_j)(W(t_{j+1}) - W(t_j))}_{(1)} + \underbrace{G(t_l)(W(t_{l+1}) - W(t_l))}_{(2)} \\ &+ \underbrace{\sum_{j=l+1}^{k-1} G(t_j)(W(t_{j+1}) - W(t_j))}_{(3)} + \underbrace{G(t_k)(W(t) - W(t_k))}_{(4)}|\mathcal{F}(s)). \end{aligned} \quad (2.5)$$

(1) Sve slučajne promenljive u sumi (1) su $\mathcal{F}(s)$-merljive, jer je $t_l \leq s$, pa je

$$E\left[\sum_{j=0}^{l-1} G(t_j)(W(t_{j+1}) - W(t_j))|\mathcal{F}(s)\right] = \sum_{j=0}^{l-1} G(t_j)(W(t_{j+1}) - W(t_j)).$$

[1] U slučaju da s i t pripadaju istom podintervalu $t_k \leq s \leq t \leq t_{k+1}$, jednakost (2.5) poprima oblik $E(I(t)|\mathcal{F}(s)) = E(\sum_{j=0}^{k-1} G(t_j)(W(t_{j+1}) - W(t_j)) + G(t_k)(W(s) - W(t_k)) + G(s)(W(t) - W(s))|\mathcal{F}(s))$.

(2) Za sabirak (2) u jednakosti (2.5) računamo uslovno matematičko očekivanje kao

$$\begin{aligned}E[G(t_l)(W(t_{l+1})-W(t_l))|\mathcal{F}(s)] &= E[G(t_l)W(t_{l+1})|\mathcal{F}(s)] - E[G(t_l)W(t_l)|\mathcal{F}(s)] \\ &= G(t_l)(E(W(t_{l+1})|\mathcal{F}(s)) - W(t_l)) \quad \text{(Teorema 1.1 (2))} \\ &= G(t_l)(W(s)-W(t_l)) \qquad\qquad \text{(jer je } W(t) \text{ martingal)}\end{aligned}$$

(3) Na osnovu tvrđenja (3) i (2) teoreme 1.1 i svojstva martingala Braunovog kretanja dobijamo da je

$$\begin{aligned}E[G(t_j)(W(t_{j+1})-W(t_j))|\mathcal{F}(s)] &= E[E[G(t_j)(W(t_{j+1})-W(t_j))|\mathcal{F}(t_j)]|\mathcal{F}(s)] \\ &= E[G(t_j)(E[W(t_{j+1})|\mathcal{F}(t_j)] - W(t_j))|\mathcal{F}(s)] \\ &= E[G(t_j)(W(t_j)-W(t_j))|\mathcal{F}(s)] = 0,\end{aligned}$$

pa je

$$E\left[\sum_{j=l+1}^{k-1} G(t_j)(W(t_{j+1})-W(t_j))|\mathcal{F}(s)\right] = 0.$$

(4) Ostalo je još da odredimo četvrti član u (2.5). Koristeći iste argumente kao i u prethodna dva slučaja dobijamo da je

$$\begin{aligned}E[G(t_k)(W(t)-W(t_k))|\mathcal{F}(s)] &= E[E[G(t_k)(W(t)-W(t_k))|\mathcal{F}(t_k)]|\mathcal{F}(s)] \\ &= E[G(t_k)(E[W(t)|\mathcal{F}(t_k)] - W(t_k))|\mathcal{F}(s)] \\ &= E[G(t_k)(W(t_k)-W(t_k))|\mathcal{F}(s)] = 0.\end{aligned}$$

Sumiranjem rezultata iz (1), (2), (3) i (4) dobijamo da je

$$E(I(t)|\mathcal{F}(s)) = \sum_{j=0}^{l-1} G(t_j)(W(t_{j+1})-W(t_j)) + G(t_l)(W(s)-W(t_l)) = I(s),$$

čime smo dokazali da integral Itoa ima martingalno svojstvo. □

Napomena 2.2. Na osnovu (2.4) jednostavno zaključujemo da je $EI(t) = 0$, za svako $t \geq 0$.

Sledeća teorema daje formulu za određivanje varijanse procesa Itoa $Var(I(t)) = EI^2(t)$.

TEOREMA 2.3 (**Itova izometrija**). *Za integral Itoa, definisan sa (2.4), važi sledeća jednakost*

$$EI^2(t) = E\int_0^t G^2(u)du. \tag{2.6}$$

DOKAZ: Zbog pojednostavljenja zapisa uvodimo sledeće oznake

$$D_j = W(t_{j+1}) - W(t_j), \quad j = 0, \dots, k-1$$

$$D_k = W(t) - W(t_k),$$

pa jednakost (2.4) poprima sledeći oblik

$$I(t) = \sum_{j=1}^{k} G(t_j)D_j,$$

odakle je

$$I^2(t) = \underbrace{\sum_{j=0}^{k} G^2(t_j)D_j^2}_{(1)} + 2\underbrace{\sum_{0\le i<j\le k} G(t_i)G(t_j)D_iD_j}_{(2)}.$$

(1) Iz nezavisnosti slučajnih promenljivih $G^2(t_j)$, koja je $\mathcal{F}(t_j)$-merljiva, i D_j^2, koja je nezavisna od $\mathcal{F}(t_j)$, sledi da je matematičko očekivanje prve sume

$$\begin{aligned}
E\sum_{j=0}^{k} G^2(t_j)D_j^2 &= \sum_{j=0}^{k} EG^2(t_j)ED_j^2 = \sum_{j=0}^{k} EG^2(t_j)Var(D_j)\\
&= \sum_{j=0}^{k-1} EG^2(t_j)(t_{j+1}-t_j) + EG^2(t_k)(t-t_k)\\
&= \sum_{j=0}^{k-1} E(G^2(t_j)(t_{j+1}-t_j)) + E(G^2(t_k)(t-t_k)) && (2.7)\\
&= \sum_{j=0}^{k-1} E\int_{t_j}^{t_{j+1}} G^2(u)du + E\int_{t_k}^{t} G^2(u)du && (2.8)\\
&= E\int_0^{t_k} G^2(u)du + E\int_{t_k}^{t} G^2(u)du\\
&= E\int_0^t G^2(u)du, && (2.9)
\end{aligned}$$

pri čemu jednakost (2.7) sledi iz činjenice da su $t_{j+1} - t_j$, $j = 0, \dots, k-1$, i $t-t_k$ neslučajne promenljive, dok jednakost (2.8) sledi iz elementarnosti procesa

$G(t)$, tj. $G(u) = G(t_j)$ za $u \in [t_j, t_{j+1})$, $j = 0, \dots, k-1$, i $G(u) = G(t_k)$ za $u \in [t_k, t)$.

(2) Na osnovu nezavisnosti slučajnih promenljivih $G(t_i)G(t_j)D_i$, koja je $\mathcal{F}(t_j)$-merljiva, i D_j, koja je nezavisna od $\mathcal{F}(t_j)$, $0 \le i < j \le k$, dobijamo da je matematičko očekivanje druge sume

$$E \sum_{0 \le i < j \le k} G(t_i)G(t_j)D_iD_j = \sum_{0 \le i < j \le k} E(G(t_i)G(t_j)D_i) \underbrace{ED_j}_{0} = 0. \tag{2.10}$$

Iz rezultata (2.9) i (2.10) dobijamo da važi jednakost (2.6). □

Ranije smo pokazali da Braunovo kretanje akumulira kvadratnu varijaciju u iznosu t u periodu $[0, t]$. Pošto je u integralu Itoa Braunovo kretanje $W(t)$ skalirano elementarnim slučajnim procesom $G(t)$, kvadriranjem priraštaja integrala Itoa dobijamo da je njegova kvadratna varijacija skalirana sa $G^2(t)$. Sledeća teorema nam daje odgovor na pitanje koliku kvadratnu varijaciju akumulira integral Itoa, posmatran kao slučajni proces po gornjoj granici integracije t, u periodu $[0, t]$.

Teorema 2.4. *Kvadratna varijacija integrala Itoa, akumulirana do trenutka t, iznosi*

$$[I, I](t) = \int_0^t G^2(u)du. \tag{2.11}$$

dokaz: Za particiju $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T\}$ intervala $[0, T]$, i fiksirano $t \in [t_k, t_{k+1})$, prvo ćemo odrediti koliku kvadratnu varijaciju akumulira $I(t)$ na podintervalu $[t_j, t_{j+1})$, $j = 0, \dots, k-1$, na kome je $G(t) = G(t_j)$. Na posmatranom podintervalu izabraćemo particiju $t_j = s_0 < s_1 < \cdots < s_m = t_{j+1}$, za koju je

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{m-1} (I(s_{i+1}) - I(s_i))^2 &= \sum_{i=0}^{m-1} (\int_{s_i}^{s_{i+1}} G(u)dW(u))^2 \\ &= G^2(t_j) \sum_{i=0}^{m-1} (W(s_{i+1}) - W(s_i))^2. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Granična vrednost leve strane jednakosti (2.12), kada $m \to \infty$ i $\max_{i=0,\dots,m-1}(s_{i+1} - s_i) \to 0$, predstavlja kvadratnu varijaciju integrala Itoa na $[t_j, t_{j+1})$, dok limes desne strane, predstavlja kvadratnu varijaciju Braunovog kretanja, akumuliranu u periodu $[t_j, t_{j+1})$, skaliranu sa $G^2(t_j)$, tj.

$$[I,I](t_{j+1}) - [I,I](t_j) = G^2(t_j)(t_{j+1} - t_j) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} G^2(u)du. \tag{2.13}$$

Analognim postupkom dobijamo da je

$$[I,I](t) - [I,I](t_k) = \int_{t_k}^{t} G^2(u)du. \tag{2.14}$$

Sumiranjem rezultata (2.13) i (2.14) dobijamo da je kvadratna varijacija integrala Itoa akumulirana na $[0,t]$

$$[I,I](t) = \sum_{j=0}^{k-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} G^2(u)du + \int_{t_k}^{t} G^2(u)du = \int_0^t G^2(u)du. \tag{2.15}$$

□

Na osnovu rezultata dobijenih u poslednje dve teoreme vidimo da se varijansa i kvadratna varijacija integrala Itoa, posmatranog kao slučajni proces po gornjoj granici integracije, razlikuju. Za različite izbore trajektorija, pod integralom u formuli za kvadratnu varijaciju, mogu figurisati različite vrednosti $G(t)$. U opštem slučaju za proizvoljni slučajni proces, to je sasvim očekivano ponašanje, s obzirom da kvadratna varijacija zavisi od izbora trajektorije po kojoj se računa, dok se varijansa računa kao srednja vrednost kvadratne varijacije po svim mogućim trajektorijama. Iz tog razloga kvadratnu varijaciju $[I,I](t)$, $t \geq 0$, možemo videti kao slučajni proces, dok je varijansa, kao očekivana vrednost kvadratne varijacije, neslučajna promenljiva. Zbog svega navedenog varijansa, za razliku od kvadratne varijacije, ima više teorijski nego praktični značaj.

Formulu

$$I(t) = \int_0^t G(t)dW(t) \tag{2.16}$$

za integral Itoa možemo zapisati u diferencijalnoj formi kao

$$dI(t) = G(t)dW(t). \tag{2.17}$$

Ova dva načina predstavljanja integrala Itoa imaju skoro isto značenje. Diferencijalna interpretacija je intuitivno jasnija, ali donekle nepreciznija. Integracijom (2.17) dobijamo preciznu interpretaciju,

$$I(t) = I(0) + \int_0^t G(t)dW(t) \tag{2.18}$$

koju nazivamo integralna forma od (2.17). Integralna forma se od (2.16) razlikuje do na početno stanje, za koje je u formuli (2.16) definisano da je $I(0) = 0$, dok u integralnoj formi (2.18) dopuštamo da $I(0)$ bude proizvoljno.

Kvadriranjem jednakosti (2.17) i korišćenjem rezultata (1.19) dobijamo

$$dI(t)dI(t) = G^2(t)dW(t)dW(t) = G^2(t)dt \tag{2.19}$$

Jednakost (2.19) predstavlja drugi način reprezentacije tvrđenja teoreme 2.4 da integral Itoa akumulira kvadratnu varijaciju brzinom $G^2(t)$ po jedinici vremena i ta brzina zavisi od izbora $\omega \in \Omega$ i $t \in [0, T]$.

2.2. Integral Itoa za proizvoljni podintegralni slučajni proces

U ovom odeljku definisaćemo integral Itoa za proizvoljan podintegralni slučajni proces, koristeći definiciju i rezultate prikazane u odeljku 2.1 za elementarni podintegralni proces. Pod pojmom proizvoljni slučajni proces podrazumevamo proces $G(t)$, $t \geq 0$ koji može neprekidno da se menja u toku vremena i da ima skokove. Takođe, u daljem tekstu uvek ćemo podrazumevati da je proces $G(t)$, $t \geq 0$ adaptiran u odnosu na filtraciju $\mathcal{F}(t)$, $t \geq 0$ i da važi uslov $\mathbb{L}^2$-integrabilnosti (2.3).

Ideja za uvođenje generalnije definicije na široj klasi integranada zasnovana je na aproksimaciji proizvoljnog procesa $G(t)$, nizom elementarnih procesa $G_n(t)$ koji, kada $n \to \infty$, konvergira ka $G(t)$ u sledećem smislu

$$\lim_{n\to\infty} E \int_0^T |G_n(t) - G(t)|^2 dt = 0. \tag{2.20}$$

Elementarni integrand, kojim vršimo aproksimaciju proizvoljnog procesa $G(t)$, konstruišemo na sledeći način: za izabranu particiju $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ intervala

$[0, T]$ definišemo elementarni proces $G_n(t)$ na sledeći način

$$G_n(t) = G(t_j), \quad t_j \leq t < t_{j+1}, \quad \text{za svako } j = 0, \ldots, n.$$

Kada $n \to \infty$ i $\max_{i=0,\ldots,n-1}(t_{i+1} - t_i) \to 0$ elementarni proces $G_n(t)$ će biti sve precizniji aproksimacija procesa $G(t)$, tj. možemo konstruisati niz elementarnih slučajnih procesa $G_n(t)$, $n \geq 0$, koji, kada $n \to \infty$, konvergira ka proizvoljnom procesu $G(t)$, u smislu konvergencije definisane jednakošću (2.20).

Sada možemo definisati integral Itoa $I(t)$ za proizvoljni podintegralni slučajni proces $G(t)$ kao

$$I(t) = \int_0^t G(u)dW(u) = \lim_{n \to \infty} \int_0^t G_n(u)dW(u), \quad 0 \leq t \leq T, \tag{2.21}$$

gde je konvergencija u srednje kvadratnom smislu. Sledeća teorema je direktna posledica definicije integrala Itoa (2.21) i osobina integrala Itoa za elementarni integrand, koje smo dokazali u odeljku 2.1.

Teorema 2.5. *Neka je $G(t)$, $0 \leq t \leq T$ $\mathbb{L}^2$-integrabilan slučajan proces, adaptiran u odnosu na filtraciju $\mathcal{F}(t)$, $t \geq 0$. Tada integral Itoa $I(t)$, definisan jednakošću (2.21), ima sledeća svojstva*

Neprekidnost: *Trajektorije od $I(t)$, gde $I(t)$ posmatramo kao slučajni proces po gornjoj granici integracije t, su neprekidne.*

Adaptiranost: *Slučajna promenljiva $I(t)$ je $\mathcal{F}(t)$-merljiva, za svako $t \geq 0$.*

Linearnost: *Za svaka dva integrala Itoa $I(t) = \int_0^t G(u)dW(u)$ i $J(t) = \int_0^t D(u)dW(u)$ i svake dve realne konstante α i β važi*

$$\alpha I(t) + \beta J(t) = \int_0^t (\alpha G(u) + \beta D(u))dW(u).$$

Martingal: *$I(t)$ je martingal.*

Itova izometrija: *$EI^2(t) = E\int_0^t G^2(t)dt$.*

Kvadratna varijacija: *$[I, I](t) = \int_0^t G^2(t)dt$.*

2.3. Ito-Doblinova formula

U ovom odeljku razmotrićemo kako uvesti pravila diferenciranja u stohastičkoj analizi. Poznato nam je da u klasičnoj analizi za kompoziciju funkcija $f(g(t))$, gde su f i

g diferencijabilne funkcije, važi sledeće pravilo diferenciranja

$$\frac{d}{dt}f(g(t)) = f'(g(t))g'(t), \tag{2.22}$$

što možemo predstaviti u diferencijalnom zapisu kao

$$d(f(g(t)) = f'(g(t))g'(t)dt = f'(g(t))d(g(t)).$$

Međutim, ukoliko u diferenciranom izrazu umesto diferencijabilne funkcije $g(t)$ figuriše Braunovo kretanje $W(t)$, za koje smo pokazali da su njegove trajektorije nediferencijabilne funkcije po t, navedeno pravilo (2.22) ne važi. Sledeća teorema uvodi pravilo za diferenciranje izraza $f(W(t))$ u još opštijoj formi, kada dopuštamo da f bude funkcija dve promenljive $f(x,t)$.

Teorema 2.6 (**Ito-Doblinova formula za Braunovo kretanje**). *Neka je funkcija $f(x,t)$ dva puta neprekidno-diferencijabilna po x i jednom neprekidno-diferencijabilna po t i neka je $W(t)$, $t \geq 0$, Braunovo kretanje. Tada za svako $T \geq 0$ važi sledeća formula*

$$\begin{aligned} f(W(T),T) = f(W(0),0) &+ \int_0^T f_t(W(t),t)dt \\ &+ \int_0^T f_x(W(t),t)dW(t) + \frac{1}{2}\int_0^T f_{xx}(W(t),t)dt. \end{aligned} \tag{2.23}$$

dokaz: Neka je $T > 0$ fiksirano i $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T\}$ proizvoljna particija intervala $[0,T]$. Tejlorova formula za funkciju dve promenljive $f(x,t)$ u okolini tačke (x_j,t_j), izračunata u tački (x_{j+1},t_{j+1}), implicira

$$\begin{aligned} f(x_{j+1},t_{j+1}) - f(x_j,t_j) = f_x(x_j,t_j)(x_{j+1}-x_j) &+ f_t(x_j,t_j)(t_{j+1}-t_j) \\ &+ \frac{1}{2}f_{xx}(x_j,t_j)(x_{j+1}-x_j)^2 + f_{xt}(x_j,t_j)(x_{j+1}-x_j)(t_{j+1}-t_j) \\ &+ \frac{1}{2}f_{tt}(x_j,t_j)(t_{j+1}-t_j)^2 + \text{članovi višeg reda}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

U prvom koraku dokazaćemo da formula (2.23) važi u specijalnom slučaju kada je $f(x) = \frac{x^2}{2}$. Tada se Tejlorova formula (2.24) pojednostavljuje

$$f(x_{j+1}) - f(x_j) = f'(x_j)(x_{j+1} - x_j) + \frac{1}{2} f''(x_j)(x_{j+1} - x_j)^2. \tag{2.25}$$

Smenom $x_j = W(t_j)$ i $x_{j+1} = W(t_{j+1})$ u jednakosti (2.25) i sumiranjem istih za $j = 0, \ldots, n-1$ dobijamo

$$\begin{aligned} f(W(T)) - f(W(0)) &= \sum_{j=0}^{n-1} [f(W(t_{j+1})) - f(W(t_j))] \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} f'(W(t_j))(W(t_{j+1}) - W(t_j)) + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} f''(W(t_j))(W(t_{j+1}) - W(t_j))^2, \end{aligned} \tag{2.26}$$

pa za $f(x) = \frac{x^2}{2}$, $f'(x) = x$, $f''(x) = 1$, imamo da je

$$f(W(T)) - f(W(0)) = \sum_{j=0}^{n-1} W(t_j)(W(t_{j+1}) - W(t_j)) + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} (W(t_{j+1}) - W(t_j))^2. \tag{2.27}$$

Ako u jednakosti (2.27) pustimo da $\|\Pi\| \to 0$ dobijamo

$$\begin{aligned} f(W(T)) - f(W(0)) &= \int_0^T W(t) dW(t) + \frac{1}{2}[W, W](T) \\ &= \int_0^T W(t) dW(t) + \frac{1}{2} T \\ &= \int_0^T f'(W(t)) dW(t) + \frac{1}{2} \int_0^T f''(W(t)) dt, \end{aligned}$$

čime smo dokazali Ito-Doblinovu formulu za specijalan slučaj $f(x) = \frac{x^2}{2}$.

Ukoliko umesto kvadratne funkcije razmatramo proizvoljnu funkciju $f(x)$, u Tejlorovoj formuli (2.26) figurisaće i članovi reda većeg ili jednakog od tri. Iz činjenice da su priraštaji $W(t_{j+1}) - W(t_j)$ Braunovog kretanja normalno raspodeljene slučajne promenljive sa matematičkim očekivanjem 0 i varijansom $t_{j+1} - t_j$ sledi da je

$$E(W(t_{j+1}) - W(t_j))^k = \begin{cases} (k-1)!!(t_{j+1} - t_j)^{\frac{k}{2}}, & k \quad \text{parno;} \\ 0, & k \quad \text{neparno,} \end{cases}$$

te za $k \geq 3$ imamo da je

$$
\begin{aligned}
E\sum_{j=0}^{n-1}(W(t_{j+1})-W(t_j))^k &= \sum_{j=0}^{n-1}E(W(t_{j+1})-W(t_j))^k \\
&= \begin{cases} (k-1)!!\sum_{j=0}^{n-1}(t_{j+1}-t_j)^{\frac{k}{2}}, & k \quad \text{parno;} \\ 0, & k \quad \text{neparno,} \end{cases} \\
&\leq \begin{cases} (k-1)!!\|\Pi\|^{\frac{k}{2}-1}T, & k \quad \text{parno;} \\ 0, & k \quad \text{neparno,} \end{cases}
\end{aligned}
$$

pa kada $\|\Pi\| \to 0$ zaključujemo da $E\sum_{j=0}^{n-1}(W(t_{j+1})-W(t_j))^k \to 0$, za svako $k \geq 3$. Analogno, koristeći nezavisnost priraštaja, sledi da je

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\|\Pi\|\to 0} Var\sum_{j=0}^{n-1}[(W(t_{j+1})-W(t_j))^k] \\
&= \lim_{\|\Pi\|\to 0}\sum_{j=0}^{n-1}Var[(W(t_{j+1})-W(t_j))^k] \\
&= \lim_{\|\Pi\|\to 0}(\sum_{j=0}^{n-1}E(W(t_{j+1})-W(t_j))^{2k}-(E(W(t_{j+1})-W(t_j))^k)^2) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Prethodnim razmatranjem smo pokazali da članovi reda većeg ili jednakog tri teže 0 kada $\|\Pi\| \to 0$.

U narednom koraku dokazaćemo Ito-Doblinovu formulu za proizvoljnu funkciju dve promenljive $f(x,t)$. Polazeći od Tejlorovog razvoja (2.24), za $x_j = W(t_j)$ i $x_{j+1} = W(t_{j+1})$ i sumiranjem dobijamo

$$
\begin{aligned}
f(W(T),T)-f(W(0),0) &= \sum_{j=0}^{n-1}f(W(t_{j+1}),t_{j+1})-f(W(t_j),t_j) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1}f_x(W(t_j),t_j)(W(t_{j+1})-W(t_j)) \qquad (2.28) \\
&+ \sum_{j=0}^{n-1}f_t(W(t_j),t_j)(t_{j+1}-t_j) \qquad (2.29)
\end{aligned}
$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} f_{xx}(W(t_j),t_j)(W(t_{j+1})-W(t_j))^2 \tag{2.30}$$

$$+\sum_{j=0}^{n-1} f_{xt}(W(t_j),t_j)(W(t_{j+1})-W(t_j))(t_{j+1}-t_j) \tag{2.31}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} f_{tt}(W(t_j),t_j)(t_{j+1}-t_j)^2 + \text{članovi višeg reda.} \tag{2.32}$$

Razmotrićemo ponaosob kako se ponaša svaki član iz prethodne sume kada $\|\Pi\| \to 0$. Član (2.28) teži integralu Itoa

$$\lim_{\|\Pi\|\to 0}\sum_{j=0}^{n-1} f_x(W(t_j),t_j)(W(t_{j+1})-W(t_j)) = \int_0^T f_x(W(t),t)dW(t).$$

Član (2.29) teži običnom integralu

$$\lim_{\|\Pi\|\to 0}\sum_{j=0}^{n-1} f_t(W(t_j),t_j)(t_{j+1}-t_j) = \int_0^T f_t(W(t),t)dt.$$

Na osnovu rezultata teoreme 1.15 datog jednakošću (1.19) dobijamo da član (2.30) takođe teži običnom integralu

$$\lim_{\|\Pi\|\to 0}\sum_{j=0}^{n-1} f_{xx}(W(t_j),t_j)(W(t_{j+1})-W(t_j))^2 = \int_0^T f_{xx}(W(t),t)dt.$$

Za član (2.31) dobijamo da je

$$\begin{aligned}
&\lim_{\|\Pi\|\to 0}\Big|\sum_{j=0}^{n-1} f_{xt}(W(t_j),t_j)(W(t_{j+1})-W(t_j))(t_{j+1}-t_j)\Big| \\
&\leq \lim_{\|\Pi\|\to 0}\sum_{j=0}^{n-1} |f_{xt}(W(t_j),t_j)||W(t_{j+1})-W(t_j)|(t_{j+1}-t_j) \\
&\leq \lim_{\|\Pi\|\to 0}\max_{0\leq k\leq n-1}|W(t_{k+1})-W(t_k)| \lim_{\|\Pi\|\to 0}\sum_{j=0}^{n-1} |f_{xt}(W(t_j),t_j)|(t_{j+1}-t_j) \\
&= 0\cdot \underbrace{\int_0^T |f_{xt}(W(t),t)|dt}_{<\infty} = 0.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Analognim razmatranjem pokazaćemo da i član (2.32) teži 0:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\|\Pi\|\to 0} \Big|\sum_{j=0}^{n-1} f_{tt}(W(t_j), t_j)(t_{j+1}-t_j)^2\Big| \\
&\le \lim_{\|\Pi\|\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} |f_{tt}(W(t_j), t_j)|(t_{j+1}-t_j)^2 \\
&\le \lim_{\|\Pi\|\to 0} \max_{0\le k\le n-1}(t_{k+1}-t_k) \lim_{\|\Pi\|\to 0} \sum_{j=0}^{n-1} |f_{tt}(W(t_j), t_j)|(t_{j+1}-t_j) \\
&= 0\cdot \underbrace{\int_0^T |f_{tt}(W(t), t)|dt}_{<\infty} = 0. \qquad (2.34)
\end{aligned}
$$

U ranijem delu dokaza pokazali smo da članovi višeg reda konvergiraju ka 0 kada $\|\Pi\| \to 0$. Ovim je dokaz formule (2.23) za proizvoljnu funkciju $f(x,t)$ završen. □

Jednakost (2.23) predstavlja Ito-Doblinovu formulu za Braunovo kretanje u integralnoj formi. U diferencijalnoj formi imamo da je

$$
\begin{aligned}
df(W(t), t) &= f_t(W(t), t)dt + f_x(W(t), t)dW(t) + \frac{1}{2} f_{xx}(W(t), t)dW(t)dW(t) \\
&\quad + f_{xt}(W(t), t)dW(t)dt + \frac{1}{2} f_{tt}(W(t), t)dtdt.
\end{aligned}
$$

Neformalno, rezultate (2.33) i (2.34) možemo zapisati kao $dW(t)dt = dtdW(t) = 0$ i $dtdt = 0$, jer u odgovarajućim sumama figurišu razlike oblika $(W(t_{j+1})-W(t_j))(t_{j+1}-t_j)$ i $(t_{j+1}-t_j)^2$, pa u diferencijalnom obliku Ito-Doblinovu formulu predstavljamo kao

$$
\begin{aligned}
df(W(t), t) &= f_t(W(t), t)dt + f_x(W(t), t)dW(t) + \frac{1}{2} f_{xx}(W(t), t)dW(t)dW(t) \\
&= f_t(W(t), t)dt + f_x(W(t), t)dW(t) + \frac{1}{2} f_{xx}(W(t), t)dt. \qquad (2.35)
\end{aligned}
$$

Treći sabirak u diferencijalnoj formi (2.35), koji se javlja usled nenula kvadratne varijacije, upravo sugeriše razliku između klasične i stohastičke analize.

Napomena 2.7. Ito-Doblinova formula predstavlja jedan od fundamentalnih rezultata stohastičke analize i osnovni alat za izračunavanje integrala Itoa i rešavanje stohastičkih diferencijalnih jednačina.

Rezultat teoreme 2.6 možemo uopštiti tako što ćemo pokazati da Ito-Doblinovu formulu možemo primeniti na čitavu klasu slučajnih procesa, koje nazivamo procesi Itoa. Skoro svi slučajni procesi, izuzev onih koji imaju skokove, pripadaju klasi procesa Itoa.

Definicija 2.8. Neka je $W(t)$, $t \geq 0$, Braunovo kretanje i $\mathcal{F}(t)$, $t \geq 0$, odgovarajuća filtracija. Slučajni proces $X(t)$, $t \geq 0$, koji se može predstaviti u obliku

$$X(t) = X(0) + \int_0^t F(u)du + \int_0^t G(u)dW(u), \tag{2.36}$$

za neke adaptirane slučajne procese $G \in \mathbb{L}^2(0,T)$ i $F \in \mathbb{L}^1(0,T)$, naziva se *proces Itoa*.

Napomena 2.9. Neka je $W(t)$, $t \geq 0$, Braunovo kretanje i $\mathcal{F}(t)$, $t \geq 0$, odgovarajuća filtracija. Tada za realan slučajni proces $G(t)$, $t \geq 0$, adaptiran u odnosu na filtraciju $\mathcal{F}(t)$, $t \geq 0$, kažemo da

(1) pripada prostoru $\mathbb{L}^2(0,T)$, ako važi

$$P\left(\int_0^t G^2(u)du < \infty \text{ za svako } 0 \leq t \leq T\right) = 1.$$

(2) pripada prostoru $\mathbb{L}^1(0,T)$, ako važi

$$P\left(\int_0^t |G(u)|du < \infty \text{ za svako } 0 \leq t \leq T\right) = 1.$$

Proces Itoa $X(t)$ možemo predstaviti i u diferencijalnom obliku kao

$$dX(t) = F(t)dt + G(t)dW(t). \tag{2.37}$$

Teorema 2.10. *Kvadratna varijacija procesa Itoa (2.36), akumulirana do trenutka t, iznosi*

$$[X,X](t) = \int_0^t G^2(u)du. \tag{2.38}$$

dokaz: Neka je $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t\}$ proizvoljna particija intervala $[0,t]$. Zbog jednostavnosti zapisa uvodimo sledeće oznake

$$I(t) := \int_0^t G(u)dW(u),$$

$$R(t) := \int_0^t F(u)du,$$

pri čemu su procesi $I(t)$ i $R(t)$ neprekidni po svojoj gornjoj granici integracije t.

Uzoračka kvadratna varijacija procesa Itoa $X(t)$ iznosi

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n-1}[X(t_{j+1}) - X(t_j)]^2 &= \sum_{j=0}^{n-1}[I(t_{j+1}) - I(t_j)]^2 + \sum_{j=0}^{n-1}[R(t_{j+1}) - R(t_j)]^2 \\ &\quad + 2\sum_{j=0}^{n-1}[I(t_{j+1}) - I(t_j)][R(t_{j+1}) - R(t_j)].\end{aligned}$$

Kada $\|\Pi\| \to 0$ prvi sabirak u poslednjoj jednakosti teži ka kvadratnoj varijaciji integrala Itoa $[I, I](t) = \int_0^t G^2(u)du$. Drugi sabirak po apsolutnoj vrednosti možemo ograničiti odozgo sa

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=0}^{n-1}[R(t_{j+1}) - R(t_j)]^2\right| &\leq \max_{0\leq k\leq n-1} |R(t_{k+1}) - R(t_k)| \sum_{j=0}^{n-1} |R(t_{j+1}) - R(t_j)| \\ &= \max_{0\leq k\leq n-1} |R(t_{k+1}) - R(t_k)| \sum_{j=0}^{n-1} \left|\int_{t_j}^{t_{j+1}} F(u)du\right| \\ &\leq \max_{0\leq k\leq n-1} |R(t_{k+1}) - R(t_k)| \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} |F(u)|du \\ &= \max_{0\leq k\leq n-1} |R(t_{k+1}) - R(t_k)| \int_0^t |F(u)|du,\end{aligned}$$

odakle, uz pretpostavku o neprekidnosti $R(t)$, dobijamo da kada $\|\Pi\| \to 0$ drugi sabirak konvergira ka $0 \cdot \int_0^t |F(u)|du = 0$. Apsolutna vrednost trećeg sabirka je ograničenina odozgo sa

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=0}^{n-1}[I(t_{j+1}) - I(t_j)][R(t_{j+1}) - R(t_j)]\right| &\leq \max_{0\leq k\leq n-1} |I(t_{k+1}) - I(t_k)| \sum_{j=0}^{n-1} |R(t_{j+1}) - R(t_j)| \\ &\leq \max_{0\leq k\leq n-1} |I(t_{k+1}) - I(t_k)| \int_0^t |F(u)|du,\end{aligned}$$

pa, uz pretpostavku o neprekidnosti $I(t)$, kada $\|\Pi\| \to 0$ poslednji sabirak teži ka $0 \cdot \int_0^t |F(u)|du = 0$. Zaključujemo da je $[X, X](t) = [I, I](t) = \int_0^t G^2(u)du$. $\square$

Rezultat teoreme 2.10 možemo, koristeći reprezentaciju (2.37), predstaviti u diferencijalnoj formi kao

$$
\begin{aligned}
dX(t)dX(t) &= (F(t)dt + G(t)dW(t))^2 \\
&= F^2(t)dtdt + 2F(t)G(t)dtdW(t) + G^2(t)dW(t)dW(t) \\
&= G^2(t)dt.
\end{aligned}
$$

Definicija 2.11. Neka je $X(t)$, $t \geq 0$, proces Itoa definisan jednakošću (2.36), i neka je $H \in \mathbb{L}^2(0,T)$ adaptirani slučajni proces. *Integral Itoa u odnosu na proces Itoa* definišemo kao

$$
\int_0^t H(u)dX(u) = \int_0^t H(u)F(u)du + \int_0^t H(u)G(u)dW(u). \tag{2.39}
$$

Teorema 2.12 (**Ito-Doblinova formula za proces Itoa**). *Neka je $X(t)$, $t \geq 0$, proces Itoa definisan jednakošću (2.36), i neka je neslučajna funkcija $f(x,t)$ dva puta neprekidno-diferencijabilna po x i jednom neprekidno-diferencijabilna po t . Tada je $f(X(t),t)$ takođe proces Itoa i za svako $T \geq 0$ važi sledeća formula*

$$
\begin{aligned}
f(X(T),T) &= f(X(0),0) + \int_0^T f_t(X(t),t)dt + \int_0^T f_x(X(t),t)dX(t) \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^T f_{xx}(X(t),t)d[X,X](t) \\
&= f(X(0),0) + \int_0^T f_t(X(t),t)dt + \int_0^T f_x(X(t),t)F(t)dt \\
&\quad + \int_0^T f_x(X(t),t)G(t)dW(t) + \frac{1}{2}\int_0^T f_{xx}(X(t),t)G^2(t)dt.
\end{aligned} \tag{2.40}
$$

Dokaz ove teoreme izvodi se analogno kao i dokaz teoreme 2.6 za Braunovo kretanje, uz primenu definicije (2.36) procesa Itoa i rezultata teoreme 2.10 za kvadratnu varijaciju procesa Itoa. U diferencijalnom obliku Ito-Doblinovu formulu za proces Itoa zapisujemo kao

$$
\begin{aligned}
df(X(t),t) &= f_t(X(t),t)dt + f_x(X(t),t)F(t)dt \\
&\quad + f_x(X(t),t)G(t)dW(t) + \frac{1}{2}f_{xx}(X(t),t)G^2(t)dt, \qquad t \geq 0.
\end{aligned}
$$

Rezultat teoreme 2.12 možemo generalizovati za proizvoljan broj procesa Itoa. Neka je $\mathbf{W}(t) = (W_1(t), \dots, W_m(t))$ m-dimenzionalno Braunovo kretanje, $m \geq 1$, i neka su $G_{ij} \in \mathbb{L}^2(0,T)$ i $F_i \in \mathbb{L}^1(0,T)$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, adaptirani slučajni procesi. Tada n-dimenzionalni proces Itoa (u diferencijalnoj formi) možemo predstaviti na sledeći način

$$\begin{cases} dX_1 & = & G_{11}dW_1 & + & \cdots & + & G_{1m}dW_m & + & F_1dt \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ dX_n & = & G_{n1}dW_1 & + & \cdots & + & G_{nm}dW_m & + & F_ndt \end{cases}$$

ili u matričnom zapisu

$$d\mathbf{X}(t) = \mathbf{F}dt + \mathbf{G}d\mathbf{W}(t), \tag{2.41}$$

gde je

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ \vdots \\ X_n(t) \end{pmatrix}, \mathbf{G} = \begin{pmatrix} G_{11} & \cdots & G_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ G_{n1} & \cdots & G_{nm} \end{pmatrix}, \mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}, d\mathbf{W}(t) = \begin{pmatrix} dW_1(t) \\ \vdots \\ dW_m(t) \end{pmatrix}.$$

Sledeća teorema nam daje Ito-Doblinovu formulu za n-dimenzionalan proces Itoa, gde je $n \geq 2$.

TEOREMA 2.13 (**n-dimenzionalna Ito-Doblinova formula**). *Neka je $\boldsymbol{X}(t)$ n-dimenzionalni proces Itoa definisan sa (2.41) i neka je $\mathbf{f}(x,t) = (f_1(x,t), \cdots, f_p(x,t))$, gde je $f_k(x,t)$ dva puta neprekidno-diferencijabilna po x i jednom neprekidno-diferencijabilna po t za svako $k = 1, \dots, p$. Tada je $\mathbf{f}(\mathbf{X}(t), t)$ proces Itoa, čija je komponenta na k-tom mestu data sa*

$$df_k(\mathbf{X}(t),t) = \frac{\partial f_k}{\partial t}dt + \sum_i \frac{\partial f_k}{\partial x_i}dX_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}dX_i dX_j,$$

pri čemu je $dW_idW_i = dt$, $dW_idW_j = 0$, za $i \neq j$, $dW_idt = dtdW_i = 0$.

Dokaz ove teoreme je sličan dokazu teoreme za 1-dimenzionalnu Ito-Doblinovu formulu, te ga ovde ne navodimo.

POSLEDICA 2.14 (**Pravilo proizvoda Itoa**). *Ako su $X(t)$ i $Y(t)$ procesi Itoa, onda važi*

$$d(X(t)Y(t)) = X(t)dY(t) + Y(t)dX(t) + dX(t)dY(t). \tag{2.42}$$

DOKAZ: Primenom 2-dimenzionalne Ito-Doblinove formule za $f(x, y, t) = xy$ dobijamo da je

$$\begin{aligned} df(X, Y, t) &= f_t dt + f_x dX + f_y dY + \frac{1}{2} f_{xx} dX dX + f_{xy} dX dY + \frac{1}{2} f_{yy} dY dY \\ &= 0 \cdot dt + Y dX + X dY + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot dX dX + 1 \cdot dX dY + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot dY dY \\ &= Y dX + X dY + dX dY. \end{aligned}$$

$\square$

GLAVA 3

Stohastičke diferencijalne jednačine

U ovoj glavi uvešćemo osnove teorije stohastičkih diferencijalnih jednačina i izložiti fundamentalne rezultate, koji se odnose na njihova rešenja. Glavni akcenat je na dokazu teoreme o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja stohastičkih diferencijalnih jednačina. U daljem tekstu slediće prikaz metoda za rešavanje linearnih stohastičkih diferencijalnih jednačina, kao i nekih klasa nelinearnih jednačina, koje se određenim transformacijama mogu redukovati na linearne.

Uvođenje slučajnih efekata u diferencijalne jednačine indukuje dve različite klase jednačina. Prva jednostavnija klasa dobija se kada u običnoj diferencijalnoj jednačini figurišu koeficijenti koji su zadati slučajnim promenljivim, ili je početna vrednost slučajna promenljiva, ili je slučajnost uslovljena regularnim[1] slučajnim procesom, ili imamo kombinaciju nekih od prethodno navedenih slučajnih efekata. Ove jednačine se nazivaju *slučajne diferencijalne jednačine* i rešavaju se za svaku trajektoriju pojedinačno kao obične diferencijalne jednačine. Trajektorije rešenja slučajnih diferencijalnih jednačina su diferencijabilne funkcije po t.

Druga klasa jednačina, koja će na dalje biti predmet interesovanja ovog rada, nastaje kao posledica slučajnosti, koja je uslovljena neregularnim[2] slučajnim procesom, kao što je npr. Gausov beli šum. Formalan način da uvedemo ovakav slučajni efekat u običnu diferencijalnu jednačinu daje nam zapis u obliku

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{b}(\mathbf{X}(t), t) + \mathbf{B}(\mathbf{X}(t), t)\xi(t) \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0, \end{cases} \tag{3.1}$$

[1] Regularni slučajni proces je slučajni proces čije su trajektorije neprekidne, diferencijabilne funkcije po t.

[2] Neregularni slučajni proces je slučajni proces čije su trajektorije neprekidne, ali nisu diferencijabilne funkcije po t.

za $0 \leq t \leq T$, gde su neslučajne funkcije $\mathbf{b} : \mathbb{R}^n \times [0,T] \to \mathbb{R}^n$ i $\mathbf{B} : \mathbb{R}^n \times [0,T] \to \mathbb{R}^{n\times m}$ Borel-merljive na svojim domenima, $\xi(t)$ je m-dimenzionalni beli šum i $\mathbf{X}(t)$, $t \geq 0$, je n-dimenzionalni slučajni proces. U slučaju da je $m = n$, $\mathbf{X}_0 \equiv 0$, $\mathbf{b} \equiv 0$ i $\mathbf{B} \equiv \mathbf{I}$ rešenje jednačine (3.1) je n-dimenzionalno Braunovo kretanje, što simbolično možemo zapisati kao

$$\dot{\mathbf{W}}(t) = \frac{d\mathbf{W}(t)}{dt} = \xi(t),$$

što nam sugeriše na beli šum kao "izvod po t" Braunovog kretanja. Ukoliko opšti oblik jednačine (3.1) zapišemo kao

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{b}(\mathbf{X}(t),t)\frac{dt}{dt} + \mathbf{B}(\mathbf{X}(t),t)\frac{d\mathbf{W}(t)}{dt}$$

i pomnožimo sa dt dobijamo jednačinu

$$d\mathbf{X}(t) = \mathbf{b}(\mathbf{X}(t),t)dt + \mathbf{B}(\mathbf{X}(t),t)d\mathbf{W}(t).$$

Ove jednačine se nazivaju *stohastičke diferencijalne jednačine* i zapisuju se u formi stohastičkih diferencijala, ali imaju formalnu interpretaciju u integralnom obliku. Slučajne procese, koji predstavljaju rešenja stohastičkih diferencijalnih jednačina, karakteriše nediferencijabilnost trajektorija, indukovana Braunovim kretanjem iz stohastičkih integrala.

Definicija 3.1. Neka je $T > 0$ fiksirano i $\mathbf{W}(t)$ je m-dimenzionalno Braunovo kretanje i neka je $\mathbf{X}_0$ n-dimenzionalna slučajna promenljiva nezavisna od $\mathbf{W}(t)$. Tada je

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{U}(\mathbf{X}_0, \mathbf{W}(s), 0 \leq s \leq t), \quad t \geq 0$$

σ-algebra generisana sa $\mathbf{X}_0$ i istorijom Vinerovog procesa do trenutka t. Dalje, neka su date (neslučajne) funkcije

$$\mathbf{b} : \mathbb{R}^n \times [0,T] \to \mathbb{R}^n,$$

$$\mathbf{B} : \mathbb{R}^n \times [0,T] \to \mathbb{R}^{n\times m},$$

gde je

$$\mathbf{b} = (b^1, b^2, \dots, b^n), \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b^{11} & \cdots & b^{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b^{n1} & \cdots & b^{nm} \end{pmatrix}.$$

Slučajni proces $\mathbf{X}(t)$, sa vrednostima u $\mathbb{R}^n$, predstavlja *rešenje Itove stohastičke diferencijalne jednačine*

$$\begin{cases} d\mathbf{X}(t) = \mathbf{b}(\mathbf{X}(t), t)dt + \mathbf{B}(\mathbf{X}(t), t)d\mathbf{W}(t) \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0, \end{cases}$$

za $0 \leq t \leq T$, ukoliko su zadovoljeni sledeći uslovi

(1) $\mathbf{X}(t)$ je adaptiran u odnosu na $\mathcal{F}(t)$,

(2) $\mathbf{b}(\mathbf{X}(t), t) \in \mathbb{L}^1_n(0, T)$,

(3) $\mathbf{B}(\mathbf{X}(t), t) \in \mathbb{L}^2_{n\times m}(0, T)$,

(4) Za skoro svako $\omega \in \Omega$

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0 + \int_0^t \mathbf{b}(\mathbf{X}(s), s)ds + \int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{X}(s), s)d\mathbf{W}(s), \quad \text{za svako } 0 \leq t \leq T.$$

3.1. Egzistencija i jedinstvenost rešenja

U ovom poglavlju dokazaćemo jedan od najznačajnijih rezultata iz oblasti stohastičkih diferencijalnih jednačina, teoremu o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja. Pre dokaza ove teoreme navodimo četiri leme, koje ćemo koristiti u dokazu glavne teoreme.

Lema 3.2 (**Martingalna nejednakost**). *Neka je slučajni proces $\mathbf{X}(t)$, $t \geq 0$, sa vrednostima u $\mathbb{R}^n$, koji je adaptiran u odnosu na filtraciju $\mathcal{F}(t)$, $t \geq 0$, martingal i neka je $E|X(t)|^p < \infty$ za svako $t \in [0, \infty)$ i $1 < p < \infty$. Tada važi sledeća nejednakost*

$$E\left(\max_{0\leq t\leq T} |\mathbf{X}(t)|^p\right) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E|\mathbf{X}(T)|^p.$$

Definicija 3.3. (a) Slučajni proces $\mathbf{G} = (G_{ij})$ sa vrednostima u $\mathbb{R}^{n\times m}$ je u $\mathbb{L}^2_{n\times m}(0, T)$ ako je zadovoljeno

$$G_{ij} \in \mathbb{L}^2(0, T) \qquad i = 1, \dots n;\ j = 1, \dots m.$$

(b) Ako $\mathbf{G} \in \mathbb{L}^2_{n\times m}(0,T)$ tada je

$$\int_0^T \mathbf{G}(t) d\mathbf{W}(t)$$

slučajna promenljiva sa vrednostima u $\mathbb{R}^n$, čija je i-ta komponenta

$$\sum_{j=1}^m \int_0^T G_{ij}(t) dW_j(t), \qquad i = 1, \dots, n.$$

Druga lema koju navodimo nam daje formulu za Itovu izometriju za višedimenzionalni slučaj:

Lema 3.4. *Ako je $\mathbf{G} \in \mathbb{L}^2_{n\times m}(0,T)$, tada je*

$$E \int_0^T \mathbf{G}(t) d\mathbf{W}(t) = 0$$

i

$$E \left| \int_0^T \mathbf{G}(t) d\mathbf{W}(t) \right|^2 = E \int_0^T |\mathbf{G}(t)|^2 dt,$$

gde je $|\mathbf{G}(t)|^2 := \sum_{1\le i\le n, 1\le j\le m} |G_{ij}(t)|^2$.

Sledeće dve leme predstavljaju veoma značajne rezultate klasične analize.

Lema 3.5 (**Gronvalova lema**). *Neka su ϕ i f nenegativne, neprekidne funkcije, definisane na intervalu $[0,T]$, i neka je $C_0 \ge 0$ konstanta. Ako je*

$$\phi(t) \le C_0 + \int_0^t f(s)\phi(s)\, ds, \quad \text{za svako } 0 \le t \le T,$$

tada je

$$\phi(t) \le C_0 e^{\int_0^t f(s) ds}, \quad \text{za svako } 0 \le t \le T.$$

dokaz: Označimo sa $\Phi(t) := C_0 + \int_0^t f(s)\phi(s)\, ds$. Tada je $\Phi' = f\phi \le f\Phi$, odakle dobijamo da je

$$\left(e^{-\int_0^t f(s)ds}\Phi(t)\right)' = -e^{-\int_0^t f(s)ds} f(t)\Phi(t) + e^{-\int_0^t f(s)ds}\Phi'(t) = (\Phi'(t) - f(t)\Phi(t))e^{-\int_0^t f(s)ds}$$
$$\le (f(t)\Phi(t) - f(t)\Phi(t))e^{-\int_0^t f(s)ds} = 0.$$

Dakle, $e^{-\int_0^t f(s)ds}\Phi(t)$ je opadajuća funkcija po t, pa je

$$e^{-\int_0^t f(s)ds}\Phi(t) \le e^{-\int_0^0 f(s)ds}\Phi(0) = C_0, \quad \text{za svaki } 0 \le t \le T,$$

tj.

$$\phi(t) \leq \Phi(t) \leq C_0 e^{\int_0^t f(s)ds} \quad \text{za svaki } 0 \leq t \leq T.$$

□

LEMA 3.6 (**Fatuova lema**). *Ako je Y_n, $n \geq 1$, niz nenegativnih slučajnih promenljivih onda važi*

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} Y_n(\omega)dP \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega Y_n(\omega)dP.$$

TEOREMA 3.7 (**Teorema o egzistenciji i jedinstvenosti**). *Neka su $\mathbf{b} : \mathbb{R}^n \times [0,T] \to \mathbb{R}^n$ i $\mathbf{B} : \mathbb{R}^n \times [0,T] \to \mathbb{R}^{n\times m}$ Borel-merljive funkcije, koje zadovoljavaju sledeće uslove:*

(1) Lipšicov uslov:

$$\begin{aligned} |\mathbf{b}(x,t) - \mathbf{b}(\widehat{x},t)| &\leq L|x-\widehat{x}| \\ |\mathbf{B}(x,t) - \mathbf{B}(\widehat{x},t)| &\leq L|x-\widehat{x}| \end{aligned} \quad \textit{za svako } 0 \leq t \leq T,\ x, \widehat{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{3.2}$$

za neku konstantu L.

(2) Uslov linearnog rasta:

$$\begin{aligned} |\mathbf{b}(x,t)| &\leq L(1+|x|) \\ |\mathbf{B}(x,t)| &\leq L(1+|x|) \end{aligned} \quad \textit{za svako } 0 \leq t \leq T,\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.3}$$

(3) Neka je $\mathbf{W}(t)$ m-dimenzionalno Braunovo kretanje i neka je $\mathbf{X}_0$ slučajna promenljiva sa vrednostima u $\mathbb{R}^n$, za koju važi

$$E|\mathbf{X}_0|^2 < \infty \tag{3.4}$$

i

$$\mathbf{X}_0 \textit{ je nezavisna od } \mathbf{W}(t) \textit{ za } t \geq 0. \tag{3.5}$$

Tada postoji jedinstveno skoro sigurno neprekidno rešenje $\mathbf{X} \in \mathbb{L}_n^2(0,T)$ stohastičke diferencijalne jednačine

$$\begin{cases} d\mathbf{X}(t) = \mathbf{b}(\mathbf{X}(t),t)dt + \mathbf{B}(\mathbf{X}(t),t)d\mathbf{W}(t) \quad (0 \leq t \leq T) \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0. \end{cases} \tag{3.6}$$

DOKAZ: **Jedinstvenost.** Neka su $\mathbf{X}, \widehat{\mathbf{X}} \in \mathbb{L}_n^2(0,T)$ dva procesa, sa skoro sigurno neprekidnim trajektorijama, koji su rešenja jednačine (3.6) sa istim početnim uslovom. Tada, da bismo dokazali da je rešenje stohastičke diferencijalne jednačine (3.6) jedinstveno, treba da pokažemo da je

$$P\Big(\mathbf{X}(t) = \widehat{\mathbf{X}}(t) \ \text{ za svako } 0 \le t \le T\Big) = 1. \tag{3.7}$$

Pošto su $\mathbf{X}$ i $\widehat{\mathbf{X}}$ rešenja, imamo da za svako $0 \le t \le T$ važi

$$\mathbf{X}(t) - \widehat{\mathbf{X}}(t) = \int_0^t [\mathbf{b}(\mathbf{X}(s), s) - \mathbf{b}(\widehat{\mathbf{X}}(s), s)]ds + \int_0^t [\mathbf{B}(\mathbf{X}(s), s) - \mathbf{B}(\widehat{\mathbf{X}}(s), s)]d\mathbf{W}(s),$$

pa na osnovu nejednakosti

$$(a+b)^2 \le 2a^2 + 2b^2 \tag{3.8}$$

dobijamo da je

$$\begin{aligned} E|\mathbf{X}(t) - \widehat{\mathbf{X}}(t)|^2 \le & 2E\left|\int_0^t [\mathbf{b}(\mathbf{X}(s), s) - \mathbf{b}(\widehat{\mathbf{X}}(s), s)]ds\right|^2 \\ & + 2E\left|\int_0^t [\mathbf{B}(\mathbf{X}(s), s) - \mathbf{B}(\widehat{\mathbf{X}}(s), s)]d\mathbf{W}(s)\right|^2. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Koristeći Koši-Švarcovu nejednakost, koja implicira da za svako $t \ge 0$ i funkciju $f : [0,t] \to \mathbb{R}^n$ važi

$$\left|\int_0^t f ds\right|^2 \le t \int_0^t |f|^2 ds, \tag{3.10}$$

možemo oceniti prvi sabirak koji figuriše na desnoj strani nejednakosti (3.9), tako da je

$$\begin{aligned} E\left|\int_0^t [\mathbf{b}(\mathbf{X}(s), s) - \mathbf{b}(\widehat{\mathbf{X}}(s), s)]ds\right|^2 & \le TE\int_0^t |\mathbf{b}(\mathbf{X}(s), s) - \mathbf{b}(\widehat{\mathbf{X}}(s), s)|^2 ds \\ & \le L^2 T \int_0^t E|\mathbf{X}(s) - \widehat{\mathbf{X}}(s)|^2 ds. \end{aligned}$$

Drugi sabirak ocenjujemo koristeći lemu 3.4

$$\begin{aligned} E\left|\int_0^t [\mathbf{B}(\mathbf{X}(s), s) - \mathbf{B}(\widehat{\mathbf{X}}(s), s)]d\mathbf{W}(s)\right|^2 & = E\int_0^t |\mathbf{B}(\mathbf{X}(s), s) - \mathbf{B}(\widehat{\mathbf{X}}(s), s)|^2 ds \\ & \le L^2 \int_0^t E|\mathbf{X}(s) - \widehat{\mathbf{X}}(s)|^2 ds. \end{aligned}$$

Zaključujemo da za odgovarajuću konstantu $C > 0$ važi da je

$$E|\mathbf{X}(t) - \widehat{\mathbf{X}}(t)|^2 \leq C \int_0^t E|\mathbf{X}(s) - \widehat{\mathbf{X}}(s)|^2 ds, \quad \text{za svako } 0 \leq t \leq T.$$

Ako označimo sa $\phi(t) = E|\mathbf{X}(t) - \widehat{\mathbf{X}}(t)|^2$, prethodnu nejednakost možemo zapisati kao

$$\phi(t) \leq C \int_0^t \phi(s) ds, \quad \text{za svako } 0 \leq t \leq T.$$

Pošto je ϕ nenegativna funkcija, za $C_0 = 0$ i $f \equiv C$, na osnovu Gronvalove leme dobijamo da je $\phi \equiv 0$, tj. $\mathbf{X}(t) = \widehat{\mathbf{X}}(t)$ sa verovatnoćom 1, za svako $0 \leq t \leq T$. Tim pre je skoro sigurno $\mathbf{X}(r) = \widehat{\mathbf{X}}(r)$ za svako $r \in [0,T] \bigcap \mathbb{Q}$, te kako procesi rešenja imaju skoro sigurno neprekidne trajektorije, sledi da je

$$P(|\mathbf{X}(t) - \widehat{\mathbf{X}}(t)| > 0 \text{ za svako } 0 \leq t \leq T) = 0,$$

čime smo dokazali jedinstvenost rešenja stohastičke diferencijalne jednačine (3.6).

Egzistencija. Dokaz egzistencije je sličan odgovarajućem dokazu egzistencije za rešenja obične diferencijalne jednačine. Definišemo

$$\begin{cases} \mathbf{X}^0(t) := \mathbf{X}_0, \\ \mathbf{X}^{n+1}(t) := \mathbf{X}_0 + \int_0^t \mathbf{b}(\mathbf{X}^n(s), s) ds + \int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{X}^n(s), s) d\mathbf{W}(s), \quad n \geq 0, \; 0 \leq t \leq T, \end{cases} \tag{3.11}$$

i

$$d_n(t) := E|\mathbf{X}^{n+1}(t) - \mathbf{X}^n(t)|^2.$$

Indukcijom ćemo pokazati da za neku konstantu M, koja zavisi od T, L i $\mathbf{X}_0$, važi

$$d_n(t) \leq \frac{(Mt)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \text{za svako } n \geq 0, \; 0 \leq t \leq T. \tag{3.12}$$

Za $n = 0$ dobijamo da je

$$\begin{aligned} d_0(t) &= E|\mathbf{X}^1(t) - \mathbf{X}^0(t)|^2 \\ &= E\left| \int_0^t \mathbf{b}(\mathbf{X}_0, s) ds + \int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{X}_0, s) d\mathbf{W}(s) \right|^2 \\ &\leq 2E\left| \int_0^t L(1 + |\mathbf{X}_0|) ds \right|^2 + 2E\left| \int_0^t L^2(1 + |\mathbf{X}_0|^2) ds \right| \\ &\leq tM, \end{aligned}$$

gde poslednja nejednakost sledi iz uslova (3.4), za neku dovoljno veliku konstantu M. Pretpostavimo da (3.12) važi za $n-1$ i dokažimo da tada važi i za n.

$$\begin{aligned}
d_n(t) &= E|\mathbf{X}^{n+1}(t) - \mathbf{X}^n(t)|^2 \\
&= E\left|\int_0^t [\mathbf{b}(\mathbf{X}^n(s), s) - \mathbf{b}(\mathbf{X}^{n-1}(s), s)]ds + \int_0^t [\mathbf{B}(\mathbf{X}^n(s), s) - \mathbf{B}(\mathbf{X}^{n-1}(s), s)]d\mathbf{W}(s)\right|^2 \\
&\leq 2TL^2 E\int_0^t |\mathbf{X}^n(s) - \mathbf{X}^{n-1}(s)|^2 ds + 2L^2 E\int_0^t |\mathbf{X}^n(s) - \mathbf{X}^{n-1}(s)|^2 ds \\
&\leq 2L^2(1+T)\int_0^t \frac{M^n s^n}{n!} ds \quad \text{(na osnovu indukcijske hipoteze)} \\
&= 2L^2(1+T)\frac{M^n t^{n+1}}{(n+1)!} \\
&\leq \frac{M^{n+1} t^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \text{za } M \geq 2L^2(1+T),
\end{aligned}$$

čime je indukcijski dokaz nejednakosti (3.12) završen.

Dalje, imamo da je

$$\begin{aligned}
\sup_{0\leq t\leq T} |\mathbf{X}^{n+1}(t) - \mathbf{X}^n(t)|^2 &\leq 2TL^2 \int_0^T |\mathbf{X}^n(s) - \mathbf{X}^{n-1}(s)|^2 ds \\
&\quad + 2\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t [\mathbf{B}(\mathbf{X}^n(s), s) - \mathbf{B}(\mathbf{X}^{n-1}(s), s)]d\mathbf{W}(s)\right|^2,
\end{aligned}$$

odakle primenom leme 3.2 i rezultata (3.12) dobijamo da je

$$\begin{aligned}
E\left(\sup_{0\leq t\leq T} |\mathbf{X}^{n+1}(t) - \mathbf{X}^n(t)|^2\right) &\leq 2TL^2 \int_0^T E|\mathbf{X}^n(s) - \mathbf{X}^{n-1}(s)|^2 ds \\
&\quad + 2E\left(\sup_{0\leq t\leq T}\left|\int_0^t [\mathbf{B}(\mathbf{X}^n(s), s) - \mathbf{B}(\mathbf{X}^{n-1}(s), s)]d\mathbf{W}(s)\right|^2\right) \\
&\leq 2TL^2 \int_0^T E|\mathbf{X}^n(s) - \mathbf{X}^{n-1}(s)|^2 ds \\
&\quad + 8L^2 \int_0^T E|\mathbf{X}^n(s) - \mathbf{X}^{n-1}(s)|^2 ds \\
&\leq C\frac{(MT)^n}{n!}, \qquad \text{za } C = 2TL^2 + 8L^2.
\end{aligned}$$

Nejednakost Markova implicira da je

$$P\left(\sup_{0\le t\le T}|\mathbf{X}^{n+1}(t)-\mathbf{X}^n(t)|>\frac{1}{2^n}\right)\le 2^{2n}E\left(\sup_{0\le t\le T}|\mathbf{X}^{n+1}(t)-\mathbf{X}^n(t)|^2\right)$$
$$\le 2^{2n}C\frac{(MT)^n}{n!}.$$

Pošto red $\sum_{n=1}^{\infty}2^{2n}\frac{(MT)^n}{n!}$ konvergira, možemo primeniti tvrđenje (1) Borel-Kantelijeve leme na osnovu koga je

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}\{\omega\in\Omega:\sup_{0\le t\le T}|\mathbf{X}^{m+1}(t)-\mathbf{X}^m(t)|>\frac{1}{2^n}\}\right)=0,$$

tj. za skoro svako $\omega\in\Omega$

$$\mathbf{X}^n(t)=\mathbf{X}_0+\sum_{j=0}^{n-1}(\mathbf{X}^{j+1}(t)-\mathbf{X}^j(t))$$

konvergira uniformno na $[0,T]$ ka nekom slučajnom procesu $\mathbf{X}$, tj.

$$\mathbf{X}(t)=\lim_{m\to\infty}\mathbf{X}^m(t). \tag{3.13}$$

Neka je $n\ge 1$ fiksiran. Tada je

$$\begin{aligned}
E\int_0^t|\mathbf{X}(s)-\mathbf{X}^n(s)|^2ds&=E\int_0^t|\lim_{m\to\infty}\mathbf{X}^m(s)-\mathbf{X}^n(s)|^2ds \qquad \text{(na osnovu (3.13))}\\
&=E\lim_{m\to\infty}\int_0^t|\mathbf{X}^m(s)-\mathbf{X}^n(s)|^2ds=E\liminf_{m\to\infty}\underbrace{\int_0^t|\mathbf{X}^m(s)-\mathbf{X}^n(s)|^2ds}_{\ge 0}\\
&\le\liminf_{m\to\infty}E\int_0^t|\mathbf{X}^m(s)-\mathbf{X}^n(s)|^2ds \qquad \text{(na osnovu Fatuove leme 3.6)}\\
&\le\limsup_{m\to\infty}E\int_0^t|\mathbf{X}^m(s)-\mathbf{X}^n(s)|^2ds\\
&=\limsup_{m\to\infty}\int_0^t E|\mathbf{X}^m(s)-\mathbf{X}^n(s)|^2ds \qquad \text{(na osnovu Fubinijeve teoreme)}\\
&\le\limsup_{m\to\infty}\int_0^t\left(\sum_{k=n}^{m-1}(E|\mathbf{X}^{k+1}(s)-\mathbf{X}^k(s)|^2)^{\frac{1}{2}}\right)^2ds \text{ (na osnovu nejednakosti Minkovskog)}
\end{aligned}$$

$$\leq \limsup_{m\to\infty} \int_0^t \left(\sum_{k=n}^{m-1} \left(\frac{(Ms)^{k+1}}{(k+1)!} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 ds \qquad \text{(na osnovu nejednakosti (3.12))}$$

$$\leq \int_0^t \left(\sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{(Ms)^{k+1}}{(k+1)!} \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 ds. \tag{3.14}$$

Kada pustimo da $n \to \infty$ dobijamo da izraz (3.14) teži 0, zato što red $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(Ms)^{k+1}}{(k+1)!} \right)^{\frac{1}{2}}$ konvergira.

Dalje imamo da je

$$E\left|\int_0^t (\mathbf{B}(\mathbf{X}(s),s) - \mathbf{B}(\mathbf{X}^n(s),s)) d\mathbf{W}(s)\right|^2$$

$$= E\int_0^t |\mathbf{B}(\mathbf{X}(s),s) - \mathbf{B}(\mathbf{X}^n(s),s)|^2 ds \qquad \text{(na osnovu leme 3.4)}$$

$$\leq L^2 E\int_0^t |\mathbf{X}(s) - \mathbf{X}^n(s)|^2 ds, \qquad \text{(na osnovu Lipšicovog uslova (3.2))} \tag{3.15}$$

pa kada $n \to \infty$, na osnovu rezultata o konvergenciji izraza (3.14), zaključujemo da izraz (3.15) teži ka 0, tj. $\int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{X}^n(s),s)d\mathbf{W}(s)$ konvergira u srednje kvadratnom ka $\int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{X}(s),s)d\mathbf{W}(s)$, kada $n \to \infty$. Iz srednje kvadratne konvergencije sledi konvergencija u verovatnoci, koja povlači postojanje podniza $\int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{X}^{n_k}(s),s)d\mathbf{W}(s)$, koji konvergira skoro sigurno ka $\int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{X}(s),s)d\mathbf{W}(s)$, kada $k \to \infty$.

Na isti način (uz još jednostavnije razmatranje) izvodimo analogan rezultat za funkciju $\mathbf{b}(\mathbf{X}(t),t)$.

Na osnovu prethodnog razmatranja zaključujemo da $\mathbf{X}^{n+1}(t)$ iz (3.11) konvergira ka

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0 + \int_0^t \mathbf{b}(\mathbf{X}(s),s)ds + \int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{X}(s),s)d\mathbf{W}(s), \quad \text{za } 0 \leq t \leq T$$

kada $n \to \infty$, tj. $\mathbf{X}$ zadovoljava jednačinu (3.6)

$$\begin{cases} d\mathbf{X}(t) = \mathbf{b}(\mathbf{X}(t),t)dt + \mathbf{B}(\mathbf{X}(t),t)d\mathbf{W}(t) \quad (0 \leq t \leq T) \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0. \end{cases}$$

Ostalo je još da pokažemo da je $\mathbf{X} \in \mathbb{L}_n^2(0,T)$. Na osnovu nejednakosti (3.8), Koši-Švarc-ove nejednakosti (3.10), leme 3.4 i uslova linearnog rasta (3.3) dobijamo da je

$$\begin{aligned}
E|\mathbf{X}^{n+1}(t)|^2 &\leq CE|\mathbf{X}_0|^2 + CE\left|\int_0^t \mathbf{b}(\mathbf{X}^n(s),s)ds\right|^2 + CE\left|\int_0^t \mathbf{B}(\mathbf{X}^n(s),s)d\mathbf{W}(s)\right|^2 \\
&\leq CE|\mathbf{X}_0|^2 + CE\int_0^t |L(1+|\mathbf{X}^n(s)|)|^2 ds + CE\int_0^t |L(1+|\mathbf{X}^n(s)|)|^2 ds \\
&\leq C(1+E|\mathbf{X}_0|^2) + C\int_0^t E|\mathbf{X}^n(s)|^2 ds, \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

gde je, zbog jednostavnosti zapisa, C univerzalna oznaka za različite konstante. Iz dobijene nejednakosti (3.16), indukcijom izvodimo sledeći niz nejednakosti

$$\begin{aligned}
E|\mathbf{X}^1(t)|^2 &\leq C(1+E|\mathbf{X}_0|^2) + C\underbrace{\int_0^t E|\mathbf{X}_0|^2 ds}_{tE|\mathbf{X}_0|^2} \\
&\leq C(1+Ct)(1+E|\mathbf{X}_0|^2) \\
E|\mathbf{X}^2(t)|^2 &\leq C(1+E|\mathbf{X}_0|^2) + C\int_0^t E|\mathbf{X}^1(s)|^2 ds \\
&\leq C(1+E|\mathbf{X}_0|^2) + C^2\int_0^t (1+Ct)(1+E|\mathbf{X}_0|^2) ds \\
&= C\left(1+Ct+\frac{(Ct)^2}{2}\right)(1+E|\mathbf{X}_0|^2) \\
&\vdots \\
E|\mathbf{X}^{n+1}(t)|^2 &\leq C\left(1+Ct+\cdots+\frac{(Ct)^{n+1}}{(n+1)!}\right)(1+E|\mathbf{X}_0|^2).
\end{aligned}$$

na osnovu čega je

$$E|\mathbf{X}^{n+1}(t)|^2 \leq Ce^{Ct}(1+E|\mathbf{X}_0|^2).$$

Kada u poslednjoj jednakosti pustimo da $n \to \infty$ zaključujemo da je

$$E|\mathbf{X}(t)|^2 \leq Ce^{Ct}(1+E|\mathbf{X}_0|^2) < \infty, \quad \text{za svako } 0 \leq t \leq T,$$

tj. $\mathbf{X} \in \mathbb{L}_n^2(0,T)$. $\square$

3.2. Linearne stohastičke diferencijalne jednačine

DEFINICIJA 3.8. Stohastička diferencijalna jednačina

$$d\mathbf{X}(t) = \mathbf{b}(\mathbf{X}(t), t)dt + \mathbf{B}(\mathbf{X}(t), t)d\mathbf{W}(t),$$

čiji su koeficijenti $\mathbf{b}$ i $\mathbf{B}$ oblika

$$\mathbf{b}(x, t) := \mathbf{c}(t) + \mathbf{D}(t)x$$

$$\mathbf{B}(x, t) := \mathbf{E}(t) + \mathbf{F}(t)x$$

za funkcije $\mathbf{c} : [0, T] \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{D} : [0, T] \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{E} : [0, T] \to \mathbb{R}^{n\times m}$ i $\mathbf{F} : [0, T] \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times m})$[3], naziva se *linearna stohastička diferencijalna jednačina.*

Dakle, linearna stohastička diferencijalna jednačina je stohastička diferencijalna jednačina oblika

$$\begin{cases} d\mathbf{X}(t) = (\mathbf{c}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{X}(t))dt + (\mathbf{E}(t) + \mathbf{F}(t)\mathbf{X}(t))d\mathbf{W}(t) \quad (0 \le t \le T) \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0, \end{cases} \tag{3.17}$$

čiji su koeficijenti linearne funkcije po promenljivoj x.

Ukoliko stavimo da je u (3.17) funkcija $\mathbf{F} \equiv 0$, jednačina poprima oblik

$$d\mathbf{X}(t) = (\mathbf{c}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{X}(t))dt + \mathbf{E}(t)d\mathbf{W}(t)$$

i za nju kažemo da je *linearna u užem smislu.* Primetimo da se slučajni deo, tj. beli šum, pojavljuje u aditivnom obliku.

Ukoliko su svi koeficijenti u (3.17) konstante linearna stohastička diferencijalna jednačina

$$d\mathbf{X}(t) = (\mathbf{c} + \mathbf{D}\mathbf{X}(t))dt + (\mathbf{E} + \mathbf{F}\mathbf{X}(t))d\mathbf{W}(t)$$

se naziva *autonomna.*

Ako su funkcije $\mathbf{c}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ i $\mathbf{F}$ merljive u Lebegovom smislu i ograničene na intervalu $[0, T]$, onda funkcije $\mathbf{b}$ i $\mathbf{B}$ zadovoljavaju pretpostavke teoreme 3.7 o egzistenciji i jedinstvenosti, pa linearna stohastička diferencijalna jednačina (3.17) ima jedinstveno rešenje, uz pretpostavku da je $E|\mathbf{X}_0|^2 < \infty$ i $\mathbf{X}_0$ je nezavisna od $\mathbf{W}(t)$ za $t \ge 0$.

[3] $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times m})$ je prostor ograničenih linearnih preslikavanja iz $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^{n\times m}$.

Napomenimo da autonomna linearna stohastička diferencijalna jednačina uvek ima rešenja i ta rešenja predstavljaju homogene procese Markova.

Kao i u slučaju linearnih običnih diferencijalnih jednačina, opšte rešenje linearne stohastičke diferencijalne jednačine se može eksplicitno odrediti. Metod rešavanja i u ovom slučaju podrazumeva određivanje fundamentalnog rešenja pridružene homogene diferencijalne jednačine.

Definicija 3.9. *Homogena linearna stohastička diferencijalna jednačina* je linearna stohastička diferencijalna jednačina oblika (3.17) u kojoj važi $\mathbf{c} \equiv \mathbf{E} \equiv 0$, za $0 \leq t \leq T$, tj. jednačina oblika

$$d\mathbf{X}(t) = \mathbf{D}(t)\mathbf{X}(t)dt + \mathbf{F}(t)\mathbf{X}(t)d\mathbf{W}(t). \tag{3.18}$$

Očigledno je da je $\mathbf{X} \equiv 0$ jedno rešenje jednačine (3.18). Glavni zadatak predstavljaće određivanje fundamentalnog rešenja navedene jednačine.

3.2.1. Linearne stohastičke diferencijalne jednačine u užem smislu. Prvi slučaj koji razmatramo biće linearne stohastičke diferencijalne jednačine u užem smislu. Kao što smo već napomenuli, u jednačinama ovog oblika slučajni deo figuriše kao aditivni, tj. nehomogeni član, pa pridružena homogena jednačina

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{D}(t)\mathbf{X}(t)$$

predstavlja sistem od n običnih homogenih linearnih difrencijalnih jednačina. To u mnogome pojednostavljuje problem određivanja fundamentalnog rešenja, koji se svodi na određivanje fundamentalne matrice neautonomnog sistema običnih diferencijalnih jednačina.

Teorema 3.10. *Ukoliko su funkcije* $\mathbf{c}$, $\mathbf{D}$ *i* $\mathbf{E}$ *iz definicije 3.8 merljive u Lebegovom smislu i ograničene na intervalu* $[0,T]$ *i važi da je* $E|\mathbf{X}_0|^2 < \infty$ *i* $\mathbf{X}_0$ *je nezavisna od* $\mathbf{W}(t)$ *za* $t \geq 0$, *linearna stohastička diferencijalna jednačina u užem smislu*

$$\begin{cases} d\mathbf{X}(t) = (\mathbf{c}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{X}(t))dt + \mathbf{E}(t)d\mathbf{W}(t) \quad (0 \leq t \leq T) \\ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0, \end{cases} \tag{3.19}$$

ima rešenje

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\left(\mathbf{X}_0 + \int_0^t \mathbf{\Phi}^{-1}(s)\mathbf{c}(s)ds + \int_0^t \mathbf{\Phi}^{-1}(s)\mathbf{E}(s)d\mathbf{W}(s)\right), \tag{3.20}$$

gde je $\mathbf{\Phi}$ *fundamentalna matrica neautonomnog homogenog sistema linearnih običnih diferencijalnih jednačina*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{\Phi}}(t) = \mathbf{D}(t)\mathbf{\Phi}(t) \\ \mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I}, \end{cases} \tag{3.21}$$

gde je I *jedinična matrica dimenzije* $n \times n$.

DOKAZ: Kada u formuli za rešenje zamenimo $t = 0$ dobijamo da je

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{\Phi}(0)\mathbf{X}_0 = \mathbf{I}\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_0,$$

čime smo pokazali da $\mathbf{X}$, definisan jednakošću (3.20), zadovoljava početni uslov.

Dalje, označimo sa

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{X}_0 + \int_0^t \mathbf{\Phi}^{-1}(s)\mathbf{c}(s)ds + \int_0^t \mathbf{\Phi}^{-1}(s)\mathbf{E}(s)d\mathbf{W}(s), \quad 0 \le t \le T$$

proces Itoa, koji figuriše u formuli za rešenje (3.20). Proces $\mathbf{Y}$ možemo predstaviti u diferencijalnoj formi kao

$$d\mathbf{Y}(t) = \mathbf{\Phi}^{-1}(t)\mathbf{c}(t)dt + \mathbf{\Phi}^{-1}(t)\mathbf{E}(t)d\mathbf{W}(t),$$

pa primenom Ito-Doblinove formule (2.40) za $\mathbf{X}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{Y}(t) = f(\mathbf{Y}(t), t)$ dobijamo da je

$$\begin{aligned} d\mathbf{X}(t) &= \dot{\mathbf{\Phi}}(t)\mathbf{Y}(t)dt + \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(t)\mathbf{c}(t)dt + \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(t)\mathbf{E}(t)d\mathbf{W}(t) \\ &= \mathbf{D}(t)\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{Y}(t)dt + \mathbf{c}(t)dt + \mathbf{E}(t)d\mathbf{W}(t) \\ &= (\mathbf{D}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{c}(t))dt + \mathbf{E}(t)d\mathbf{W}(t), \end{aligned}$$

tj. proces $\mathbf{X}$ definisan jednakošću (3.20) zadovoljava jednačinu (3.19). □

POSLEDICA 3.11. *Ukoliko je* $n = 1$, *tj. ako posmatramo skalarnu linearnu stohastičku diferencijalnu jednačinu u užem smislu, fundamentalna matrica ima oblik*

$$\Phi(t) = e^{\int_0^t \mathbf{D}(s)ds}, \quad 0 \le t \le T,$$

odakle sledi da rešenje (3.20) ima sledeći oblik

$$\mathbf{X}(t) = e^{\int_0^t \mathbf{D}(s)ds} \left(\mathbf{X}_0 + \int_0^t e^{-\int_0^s \mathbf{D}(u)du} \mathbf{c}(s)ds + \int_0^t e^{-\int_0^s \mathbf{D}(u)du} \mathbf{E}(s)d\mathbf{W}(s) \right).$$

POSLEDICA 3.12. *Ako je funkcija $\mathbf{D}(t) \equiv D$ konstantna na $[0,T]$, $\mathbf{\Phi}$ će biti fundamentalna matrica autonomnog homogenog sistema linearnih običnih diferencijalnih jednačina, tj.*

$$\mathbf{\Phi}(t) = e^{Dt}, \quad 0 \le t \le T,$$

pa rešenje (3.20) ima oblik

$$\mathbf{X}(t) = e^{Dt}\mathbf{X}_0 + \int_0^t e^{D(t-s)}\mathbf{c}(s)ds + \int_0^t e^{D(t-s)}\mathbf{E}(s)d\mathbf{W}(s).$$

TEOREMA 3.13. *Neka su zadovoljeni svi uslovi teoreme 3.10. Tada rešenje (3.20) jednačine (3.19) ima matematičko očekivanje*

$$m(t) = E\mathbf{X}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\left(E\mathbf{X}_0 + \int_0^t \mathbf{\Phi}^{-1}(s)\mathbf{c}(s)ds \right), \tag{3.22}$$

koje predstavlja rešenje obične linearne diferencijalne jednačine

$$\begin{cases} \dot{m}(t) = \mathbf{D}(t)m(t) + \mathbf{c}(t) \\ m(0) = E\mathbf{X}_0. \end{cases} \tag{3.23}$$

DOKAZ: Primenom prve jednakosti iz tvrđenja leme 3.4 prilikom računanja očekivane vrednosti desne strane jednakosti (3.20) dobijamo (3.22). Za $t = 0$ dobijamo da je

$$m(0) = \mathbf{\Phi}(0)E\mathbf{X}_0 = \mathbf{I}E\mathbf{X}_0 = E\mathbf{X}_0.$$

Dalje, diferenciranjem izraza za očekivanu vrednost (3.22) dobijamo da je

$$\begin{aligned} \dot{m}(t) &= \dot{\mathbf{\Phi}}(t)E\mathbf{X}_0 + \dot{\mathbf{\Phi}}(t)\int_0^t \mathbf{\Phi}^{-1}(s)\mathbf{c}(s)ds + \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(t)\mathbf{c}(t) \\ &= \mathbf{D}(t)\mathbf{\Phi}(t)E\mathbf{X}_0 + \mathbf{D}(t)\mathbf{\Phi}(t)\int_0^t \mathbf{\Phi}^{-1}(s)\mathbf{c}(s)ds + \mathbf{c}(t) \\ &= \mathbf{D}(t)m(t) + \mathbf{c}(t), \end{aligned}$$

tj. $m(t)$ zadovoljava jednačinu (3.23) i zadati početni uslov. □

Ukoliko je početni uslov $\mathbf{X}_0$ u jednačini (3.19) normalno raspodeljena slučajna promenljiva ili konstanta iz formule (3.20) zaključujemo da je rešenje linearne stohastičke diferencijalne jednačine u užem smislu Gausov proces.

Za razliku od prethodno razmatrane linearne stohastičke diferencijalne jednačine u užem smislu, rešavanje opšte linearne stohastičke diferencijalne jednačine predstavlja znatno složeniji problem, jer je njoj pridružena homogena jednačina prava stohastička diferencijalna jednačina.

3.2.2. Skalarne linearne stohastičke diferencijalne jednačine. Neka je X jednodimenzionalni slučajni proces sa vrednostima u $\mathbb{R}$ i neka su zadovoljene pretpostavke da su funkcije c, D, E_i i F_i, $i = 1, \ldots, m$, za $n = 1$ i proizvoljno $m \geq 1$, merljive u Lebegovom smislu i ograničene na intervalu $[0, T]$ i važi da je $E|X_0|^2 < \infty$ i X_0 je nezavisna od $\mathbf{W}(t)$ za $t \geq 0$.

Teorema 3.14. *Skalarna linearna stohastička diferencijalna jednačina*

$$\begin{cases} dX(t) = (c(t) + D(t)X(t))dt + \sum_{i=1}^{m}(E_i(t) + F_i(t)X(t))dW_i(t) \\ X(0) = X_0, \end{cases} \tag{3.24}$$

ima rešenje

$$X(t) = \Phi(t)\left(X_0 + \int_0^t \Phi^{-1}(s)\left(c(s) - \sum_{i=1}^{m} E_i(s)F_i(s)\right)ds + \int_0^t \Phi^{-1}(s)\sum_{i=1}^{m} E_i(s)dW_i(s)\right), \tag{3.25}$$

gde je

$$\Phi(t) = \exp\left(\int_0^t \left(D(s) - \sum_{i=1}^{m}\frac{F_i^2(s)}{2}\right)ds + \int_0^t \sum_{i=1}^{m} F_i(s)dW_i(s)\right)$$

rešenje pridružene homogene stohastičke diferencijalne jednačine sa početnim uslovom $\Phi(0) = 1$.

dokaz: Za $t = 0$ iz (3.25) dobijamo da je $X(0) = \Phi(0)\cdot X_0 = 1 \cdot X_0 = X_0$, tj. X, definisan formulom (3.25), zadovoljava početni uslov za jednačinu (3.24).

Neka su procesi Y i Z definisani na sledeći način

$$Y(t) := \int_0^t \left(D(s) - \sum_{i=1}^m \frac{F_i^2(s)}{2} \right) ds + \int_0^t \sum_{i=1}^m F_i(s) dW_i(s),$$

$$Z(t) := X_0 + \int_0^t \Phi^{-1}(s) \left(c(s) - \sum_{i=1}^m E_i(s) F_i(s) \right) ds + \int_0^t \Phi^{-1}(s) \sum_{i=1}^m E_i(s) dW_i(s),$$

tako da formulu (3.25) za rešenje X možemo zapisati kao

$$X(t) = \exp(Y(t)) Z(t).$$

Procese Y i Z možemo predstaviti u diferencijalnoj formi kao

$$\begin{aligned}
dY(t) &= \left(D(t) - \sum_{i=1}^m \frac{F_i^2(t)}{2} \right) dt + \sum_{i=1}^m F_i(t) dW_i(t) \\
dZ(t) &= \Phi^{-1}(t) \left(c(t) - \sum_{i=1}^m E_i(t) F_i(t) \right) dt + \Phi^{-1}(t) \sum_{i=1}^m E_i(t) dW_i(t) \\
&= \exp(-Y(t)) \left(\left(c(t) - \sum_{i=1}^m E_i(t) F_i(t) \right) dt + \sum_{i=1}^m E_i(t) dW_i(t) \right)
\end{aligned}$$

pa primenom dvodimenzionalne Ito-Doblinove formule iz teoreme 2.13 za

$$X(t) = \exp(Y(t)) Z(t) = f(Y(t), Z(t), t)$$

dobijamo da je

$$\begin{aligned}
dX(t) = {} & f_t dt + f_y dY(t) + f_z dZ(t) + \frac{1}{2} f_{yy} dY(t) dY(t) + f_{yz} dY(t) dZ(t) + \frac{1}{2} f_{zz} dZ(t) dZ(t) \\
= {} & 0 \cdot dt + \exp(Y(t)) Z(t) dY(t) + \exp(Y(t)) dZ(t) \\
& + \frac{1}{2} \exp(Y(t)) Z(t) dY(t) dY(t) + \exp(Y(t)) dY(t) dZ(t) + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot dZ(t) dZ(t) \\
= {} & X(t) \left(\left(D(t) - \sum_{i=1}^m \frac{F_i^2(t)}{2} \right) dt + \sum_{i=1}^m F_i(t) dW_i(t) \right) \\
& + \left(c(t) - \sum_{i=1}^m E_i(t) F_i(t) \right) dt + \sum_{i=1}^m E_i(t) dW_i(t) \\
& + \frac{1}{2} X(t) \left(\left(D(t) - \sum_{i=1}^m \frac{F_i^2(t)}{2} \right) dt + \sum_{i=1}^m F_i(t) dW_i(t) \right)^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(\left(D(t)-\sum_{i=1}^{m}\frac{F_i^2(t)}{2}\right)dt+\sum_{i=1}^{m}F_i(t)dW_i(t)\right)\\
&\quad\times\left(\left(c(t)-\sum_{i=1}^{m}E_i(t)F_i(t)\right)dt+\sum_{i=1}^{m}E_i(t)dW_i(t)\right)\\
&=\left(X(t)\left(D(t)-\sum_{i=1}^{m}\frac{F_i^2(t)}{2}\right)+c(t)-\sum_{i=1}^{m}E_i(t)F_i(t)\right.\\
&\quad\left.+\frac{1}{2}X(t)\sum_{i=1}^{m}F_i^2(t)+\sum_{i=1}^{m}E_i(t)F_i(t)\right)dt+\sum_{i=1}^{m}(X(t)F_i(t)+E_i(t))dW_i(t)\\
&=(c(t)+D(t)X(t))dt+\sum_{i=1}^{m}(E_i(t)+F_i(t)X(t))dW_i(t),
\end{aligned}
$$

čime je dokaz teoreme završen. □

TEOREMA 3.15. *Neka su zadovoljeni svi uslovi teoreme 3.14. Tada rešenje (3.25) jednačine (3.24) ima matematičko očekivanje*

$$
m(t)=EX(t)=\exp\left(\int_0^t D(s)ds\right)\left(EX_0+\int_0^t\exp\left(-\int_0^s D(u)du\right)c(s)ds\right), \tag{3.26}
$$

tj. $m(t)$ je rešenje obične linearne diferencijalne jednačine

$$
\begin{cases}
\dot{m}(t)=D(t)m(t)+c(t)\\
m(0)=EX_0.
\end{cases} \tag{3.27}
$$

DOKAZ: Ako jednačinu (3.24) napišemo u integralnom obliku i odredimo matematičko očekivanje leve i desne strane dobijamo da važi

$$
\begin{cases}
EX(t)=EX_0+E\int_0^t(c(s)+D(s)X(s))ds+\sum_{i=1}^m E\int_0^t(E_i(s)+F_i(s)X(s))dW_i(s)\\
EX(0)=EX_0,
\end{cases}
$$

pa koristeći svojstvo da je matematičko očekivanje integrala Itoa 0 zaključujemo da je

$$
\begin{cases}
m(t)=m(0)+\int_0^t(c(s)+D(s)m(s))ds\\
m(0)=EX_0,
\end{cases}
$$

Diferenciranjem jednačine za $m(t)$ dobijamo da matematičko očekivanje od $X(t)$ zadovoljava sledeću običnu diferencijalnu jednačinu

$$\begin{cases} \dot{m}(t) = D(t)m(t) + c(t) \\ m(0) = EX_0, \end{cases}$$

što je i trebalo pokazati. Opšte rešenje dobijene linearne diferencijalne jednačine je oblika

$$m(t) = \exp\left(\int_0^t D(s)ds\right)\left(EX_0 + \int_0^t \exp\left(-\int_0^s D(u)du\right)c(s)ds\right).$$

□

3.2.3. Vektorske linearne stohastičke diferencijalne jednačine. U prethodna dva poglavlja razmatrali smo specijalne oblike jednačine (3.17) i pokazali koji oblik imaju rešenja pod uslovom da važe dodatne pretpostavke. U ovom delu navešćemo bez dokaza teoremu koja daje formulu za rešenje opšte vektorske linearne stohastičke difrencijalne jednačine. Dokaz se zasniva na primeni Ito-Doblinove formule kao i u dokazima analognih teorema za prethodna dva specijalna slučaja.

Neka je X n-dimenzionalni slučajni proces sa vrednostima u $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Razmatramo stohastičku diferencijalnu jednačinu opisanu definicijom 3.8, pod uslovom da su funkcije $\mathbf{c}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$ i $\mathbf{F}$, merljive u Lebegovom smislu i ograničene na intervalu $[0, T]$ i važi da je $E|X_0|^2 < \infty$ i X_0 je nezavisna od $\mathbf{W}(t)$ za $t \geq 0$.

Teorema 3.16. *Vektorska linearna stohastička diferencijalna jednačina (3.17) ima rešenje*

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\left(\mathbf{X}_0 + \int_0^t \mathbf{\Phi}^{-1}(s)\left(\mathbf{c}(s) - \mathbf{E}(s)\mathbf{F}(s)\right)ds + \int_0^t \mathbf{\Phi}^{-1}(s)\mathbf{E}(s)d\mathbf{W}(s)\right) \quad (3.28)$$

gde je $\mathbf{\Phi}$ fundamentalna matrica homogenog sistema linearnih stohastičkih diferencijalnih jednačina

$$\begin{cases} d\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{D}(t)\mathbf{\Phi}(t)dt + \mathbf{F}(t)\mathbf{\Phi}(t)d\mathbf{W}(t) \\ \mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I}. \end{cases}$$

TEOREMA 3.17. *Matematičko očekivanje rešenja (3.28) vektorske linearne stohastičke diferencijalne jednačine predstavlja rešenje obične linearne diferencijalne jednačine*

$$\begin{cases} \dot{m}(t) = \mathbf{D}(t)m(t) + \mathbf{c}(t) \\ m(0) = E\mathbf{X}_0. \end{cases}$$

3.3. Reducibilne stohastičke diferencijalne jednačine

Reducibilne stohastičke diferencijalne jednačine predstavljaju klasu nelinearnih stohastičkih diferencijalnih jednačina, koje se određenim transformacijama mogu svesti na linearne. U cilju pojednostavljenja zapisa svojstvo reducibilnosti analiziraćemo na klasi skalarnih stohastičkih diferencijalnih jednačina, pri čemu uvodimo sledeće oznake

$$E(t) := \sum_{i=1}^{m} E_i(t), \quad F(t) := \sum_{i=1}^{m} F_i(t), \quad b(y,t) := \sum_{i=1}^{m} b_i(y,t).$$

Neka je

$$\begin{cases} dY(t) = a(Y(t),t)dt + b(Y(t),t)dW(t) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases} \tag{3.29}$$

nelinearna stohastička diferencijalna jednačina, tj. determinističke funkcije $a(y,t)$ i $b(y,t)$ na $\mathbb{R}\times[0,T]$ su nelinearne funkcije po y i pri tom zadovoljavaju sve uslove teoreme o egzistenciji i jedinstvenosti. Kažemo da je jednačina (3.29) reducibilna ukoliko postoji smena $X = \Psi(Y,t)$, pomoću koje se razmatrana nelinearna jednačina po Y transformiše, tj. redukuje, u linearnu jednačinu po X oblika

$$\begin{cases} dX(t) = (c(t) + D(t)X(t))dt + (E(t) + F(t)X(t))dW(t) \\ X(0) = X_0. \end{cases} \tag{3.30}$$

Neka je $\frac{d\Psi}{dt}(y,t) \neq 0$. Tada nam teorema o inverznoj funkciji garantuje da postoji lokalni inverz $y = \psi(x,t)$ funkcije $x = \Psi(y,t)$, tj. rešenje Y jednačine (3.29) ima oblik $Y = \psi(X,t)$, gde je X zadat jednačinom (3.30). Primenom Ito-Doblinove formule na $\Psi(Y,t)$ dobijamo da je

$$\begin{aligned} dX(t) = d\Psi(Y(t),t) &= \Psi_t(Y(t),t)dt + \Psi_y(Y(t),t)a(Y(t),t)dt \\ &\quad + \frac{1}{2}\Psi_{yy}(Y(t),t)b^2(Y(t),t)dt + \Psi_y(Y(t),t)b(Y(t),t)dW(t) \end{aligned} \tag{3.31}$$

pa izjednačavanjem odgovarajućih koeficijenata u jednačinama (3.31) i (3.30) uz dt i dW zaključujemo da važi

$$\Psi_t(Y(t),t) + \Psi_y(Y(t),t)a(Y(t),t) + \frac{1}{2}\Psi_{yy}(Y(t),t)b^2(Y(t),t) = c(t) + D(t)\Psi(Y(t),t) \tag{3.32}$$

i

$$\Psi_y(Y(t),t)b(Y(t),t) = E(t) + F(t)\Psi(Y(t),t). \tag{3.33}$$

Na ovom nivou opštosti ne možemo izvesti eksplicitnu formulu za rešenje, pa u cilju nastavka razmatranja uvodimo dodatna ograničenja $D(t) \equiv 0$ i $F(t) \equiv 0$. Dakle, razmatraćemo reducibilnost za specijalan slučaj linearne jednačine (3.30)

$$dX(t) = c(t)dt + E(t)dW(t). \tag{3.34}$$

U tom slučaju (3.32) i (3.33) se pojednostavljuju:

$$\Psi_t(Y(t),t) + \Psi_y(Y(t),t)a(Y(t),t) + \frac{1}{2}\Psi_{yy}(Y(t),t)b^2(Y(t),t) = c(t) \tag{3.35}$$

i

$$\Psi_y(Y(t),t)b(Y(t),t) = E(t). \tag{3.36}$$

Diferenciranjem jednakosti (3.35) po y dobijamo

$$\Psi_{ty}(Y(t),t) = -\frac{\partial}{\partial y}[\Psi_y(Y(t),t)a(Y(t),t) + \frac{1}{2}\Psi_{yy}(Y(t),t)b^2(Y(t),t)]. \tag{3.37}$$

Diferenciranjem jednakosti (3.36) po y i t dobijamo

$$\frac{\partial}{\partial y}(\Psi_y(Y(t),t)b(Y(t),t)) = \Psi_{yy}(Y(t),t)b(Y(t),t) + \Psi_y(Y(t),t)b_y(Y(t),t) = 0 \tag{3.38}$$

i

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Psi_y(Y(t),t)b(Y(t),t)) = \Psi_{yt}(Y(t),t)b(Y(t),t) + \Psi_y(Y(t),t)b_t(Y(t),t) = E'(t). \tag{3.39}$$

Ukoliko pretpostavimo da je $b(y,t) \neq 0$, korišćenjem jednakosti (3.37), (3.38) i (3.39), dobijamo novu jednakost u kojoj ne figuriše ni funkcija Ψ, ni njeni parcijalni izvodi, na sledeći način:

$$
\begin{aligned}
E'(t) &= \Psi_y(Y(t),t)b_t(Y(t),t) + \Psi_{yt}(Y(t),t)b(Y(t),t) && \text{(jednakost (3.39))}\\
&= \Psi_y(Y(t),t)b_t(Y(t),t)\\
&\quad - b(Y(t),t)\frac{\partial}{\partial y}\left(\Psi_y(Y(t),t)a(Y(t),t) + \frac{1}{2}\Psi_{yy}(Y(t),t)b^2(Y(t),t)\right) && \text{(jednakost (3.37))}\\
&= \Psi_y(Y(t),t)b_t(Y(t),t) - b(Y(t),t)\frac{\partial}{\partial y}[\Psi_y(Y(t),t)a(Y(t),t)\\
&\quad - \frac{1}{2}\frac{1}{b(Y(t),t)}\Psi_y(Y(t),t)b_y(Y(t),t)b^2(Y(t),t)] && \text{(jednakost (3.38))}\\
&= \Psi_y(Y(t),t)b_t(Y(t),t)\\
&\quad - b(Y(t),t)\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(a(Y(t),t) - \frac{1}{2}b(Y(t),t)b_y(Y(t),t)\right)\Psi_y(Y(t),t)\right]\\
&= \frac{1}{b(Y(t),t)}\Psi_y(Y(t),t)b(Y(t),t)b_t(Y(t),t)\\
&\quad - b(Y(t),t)\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{a(Y(t),t)}{b(Y(t),t)} - \frac{1}{2}b_y(Y(t),t)\right)\Psi_y(Y(t),t)b(Y(t),t)\right]\\
&= \frac{1}{b(Y(t),t)}E(t)b_t(Y(t),t)\\
&\quad - b(Y(t),t)\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{a(Y(t),t)}{b(Y(t),t)} - \frac{1}{2}b_y(Y(t),t)\right)E(t)\right] && \text{(jednakost (3.36))}\\
&= E(t)b(Y(t),t)\left[\frac{1}{b^2(Y(t),t)}b_t(Y(t),t) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a(Y(t),t)}{b(Y(t),t)} - \frac{1}{2}b_y(Y(t),t)\right)\right].
\end{aligned}
$$

Uvodimo sledeću notaciju

$$
h(Y(t),t) := b(Y(t),t)\left[\frac{1}{b^2(Y(t),t)}b_t(Y(t),t) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a(Y(t),t)}{b(Y(t),t)} - \frac{1}{2}b_y(Y(t),t)\right)\right],
$$

pa poslednju jednakost možemo zapisati u obliku

$$
E'(t) = E(t)h(Y(t),t). \tag{3.40}
$$

Pošto leva strana ove jednakosti ne zavisi od y-koordinate zaključujemo da je

$$
\frac{\partial}{\partial y}h(Y(t),t) = 0. \tag{3.41}
$$

Dakle, ukoliko je zadovoljen uslov (3.41), polazna nelinearna stohastička diferencijalna jednačina (3.29) se, primenom transformacije $X = \Psi(Y,t)$, može svesti na linearnu stohastičku diferencijalnu jednačinu oblika (3.34), tj. (3.41) predstavlja dovoljan uslov za reducibilnost. Transformaciju $X = \Psi(Y,t)$ određujemo iz jednakosti (3.35) i (3.36):

$$\begin{aligned} \Psi(y,t) &= E(t)\int_0^y \frac{1}{b(z,t)}dz && \text{(jednakost (3.36))} \\ &= C\exp\left(\int_0^t h(y,s)ds\right)\int_0^y \frac{1}{b(z,t)}dz && \text{(jednakost (3.40))} \end{aligned} \tag{3.42}$$

gde je C proizvoljna konstanta.

Napomena 3.18. Prethodno izloženi metod za redukciju može se iskoristiti za svođenje određenih linearnih stohastičkih diferencijalnih jednačina na jednostavnije linearne jednačine, koje imaju oblik stohastičkog diferencijala (3.34).

Modifikacija prikazanog postupka redukcije može se iskoristiti za rešavanje autonomnih nelinearnih stohastičkih diferencijalnih jednačina oblika

$$dY(t) = a(Y(t))dt + b(Y(t))dW(t) \tag{3.43}$$

svođenjem na autonomnu linearnu stohastičku diferencijalnu jednačinu

$$dX(t) = (c + DX(t))dt + (E + FX(t))dW(t) \tag{3.44}$$

primenom transformacije $X = \Psi(Y)$, koja ne zavisi od t-koordinate. U ovom slučaju jednakosti (3.32) i (3.33) imaju sledeći oblik

$$\Psi_y(Y(t))a(Y(t)) + \frac{1}{2}\Psi_{yy}(Y(t))b^2(Y(t)) = c + D\Psi(Y(t)) \tag{3.45}$$

i

$$\Psi_y(Y(t))b(Y(t)) = E + F\Psi(Y(t)). \tag{3.46}$$

Iz jednakosti (3.46), uz pretpostavke da je $b(y) \neq 0$ i $F \neq 0$, dobijamo da je

$$\Psi(y) = C\exp\left(F\int_0^y \frac{1}{b(z)}dz\right) - \frac{E}{F}, \tag{3.47}$$

gde je C proizvoljna konstanta. Smena (3.47) u (3.45) nam daje da važi jednakost

$$C\exp\left(F\int_0^y \frac{1}{b(z)}dz\right)\left[F\left(\frac{a(y)}{b(y)} - \frac{1}{2}b'(y)\right) + \frac{1}{2}F^2 - D\right] = c - D\frac{E}{F}$$

čijim diferenciranjem dobijamo

$$C \exp\left(F\int_0^y \frac{1}{b(z)}dz\right) F\frac{1}{b(y)}\left[F\left(\frac{a(y)}{b(y)}-\frac{1}{2}b'(y)\right)+\frac{1}{2}F^2-D\right] \\ +C\exp\left(F\int_0^y \frac{1}{b(z)}dz\right)F\frac{d}{dy}\left(\frac{a(y)}{b(y)}-\frac{1}{2}b'(y)\right)=0,$$

tj.

$$\left[F\left(\frac{a(y)}{b(y)}-\frac{1}{2}b'(y)\right)+\frac{1}{2}F^2-D\right]+b(y)\frac{d}{dy}\left(\frac{a(y)}{b(y)}-\frac{1}{2}b'(y)\right)=0.$$

Diferenciranje poslednjeg izraza rezultuje jednakošću

$$F\frac{d}{dy}\left(\frac{a(y)}{b(y)}-\frac{1}{2}b'(y)\right)+\frac{d}{dy}\left(b(y)\frac{d}{dy}\left(\frac{a(y)}{b(y)}-\frac{1}{2}b'(y)\right)\right)=0 \tag{3.48}$$

koja je zadovoljena ukoliko je ili

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{a(y)}{b(y)}-\frac{1}{2}b'(y)\right)=0 \tag{3.49}$$

pri čemu je F proizvoljno, ili

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{\frac{d}{dy}\left(b(y)\frac{d}{dy}\left(\frac{a(y)}{b(y)}-\frac{1}{2}b'(y)\right)\right)}{\frac{d}{dy}\left(\frac{a(y)}{b(y)}-\frac{1}{2}b'(y)\right)}\right)=0,$$

pri čemu je

$$F=-\frac{\frac{d}{dy}\left(b(y)\frac{d}{dy}\left(\frac{a(y)}{b(y)}-\frac{1}{2}b'(y)\right)\right)}{\frac{d}{dy}\left(\frac{a(y)}{b(y)}-\frac{1}{2}b'(y)\right)}. \tag{3.50}$$

Dakle, ukoliko je $F \neq 0$, transformacija $\Psi(y)$ ima oblik

$$\Psi(y)=C\exp\left(F\int_0^y\frac{1}{b(z)}dz\right) \tag{3.51}$$

Ako je $F=0$ iz (3.46) sledi da je transformacija $\Psi(y)$ oblika

$$\Psi(y)=E\int_0^y\frac{1}{b(z)}dz+C. \tag{3.52}$$

Primer 3.19. Razmatramo autonomnu nelinearnu stohastičku diferencijalnu jednačinu

$$\begin{cases} dY(t) = -\frac{1}{2}\exp(-2Y(t))dt+\exp(-Y(t))dW(t) \\ Y(0)=Y_0. \end{cases} \tag{3.53}$$

sa koeficijentima $a(y)=-\frac{1}{2}e^{-2y}$ i $b(y)=e^{-y}$. Odatle izračunavamo da je

$$\frac{a(y)}{b(y)}-\frac{1}{2}b'(y)=-\frac{1}{2}e^{-y}+\frac{1}{2}e^{-y}=0$$

pa je zadovoljeno (3.49) za uslov (3.48), tj. F može biti proizvoljno. Ukoliko pretpostavimo da je $F = 0$, $E = 1$ i $C = 1$ na osnovu (3.52) sledi da je transformacija oblika

$$\Psi(y) = \int_0^y e^z dz + 1 = e^y,$$

tj. $X = \exp(Y)$. Koeficijente c i D izračunavamo kada u jednakost (3.45) uvrstimo dobijenu formu za $\Psi(y)$ odakle je

$$e^y(-\frac{1}{2}e^{-2y}) + \frac{1}{2}e^y e^{-2y} = c + De^y,$$

tj. $c + De^y = 0$, što je zadovoljeno za $c = D = 0$. Zaključujemo da se polazna jednačina (3.53) može redukovati na autonomnu linearnu jednačinu

$$\begin{cases} dX(t) = dW(t) \\ X(0) = X_0, \end{cases} \tag{3.54}$$

gde je $X_0 = \exp(Y_0)$. Rešenje jednačine (3.54) dato je sa $X(t) = W(t) + \exp(Y_0)$, odakle je rešenje polazne jednačine (3.53)

$$Y(t) = \ln(W(t) + \exp(Y_0))$$

pri čemu će svaka trajektorija procesa rešenja biti definisana na intervalu $[0, T(Y_0(\omega)))$, gde je

$$T(Y_0(\omega)) = \min\{t \geq 0 : W(t,\omega) + \exp(Y_0(\omega)) = 0\}$$

tzv. trenutak eksplozije.

Primer 3.20. Rešavamo autonomnu nelinearnu stohastičku diferencijalnu jednačinu

$$\begin{cases} dY(t) = \frac{1}{2}g(Y(t))g'(Y(t))dt + g(Y(t))dW(t) \\ Y(0) = Y_0. \end{cases} \tag{3.55}$$

gde je g data diferencijabilna funkcija, sa koeficijentima $a(y) = \frac{1}{2}g(y)g'(y)$ i $b(y) = g(y)$. Analognim postupkom kao u prethodnom primeru zaključujemo da je

$$\frac{a(y)}{b(y)} - \frac{1}{2}b'(y) = \frac{1}{2}g'(y) - \frac{1}{2}g'(y) = 0$$

te je zadovoljeno (3.49) za ispunjenje uslova (3.48). Dakle F može biti proizvoljno, pa ako pretpostavimo da je $F = 0$, $E = 1$ i $C = 0$ iz (3.52) dobijamo da transformacija ima oblik

$$\Psi(y) = \int_0^y \frac{1}{g(z)} dz.$$

Koeficijente c i D izračunavamo kada u jednakost (3.45) uvrstimo dobijenu formulu za $\Psi(y)$ odakle je

$$\frac{1}{g(y)} \cdot \frac{1}{2} g(y) g'(y) - \frac{1}{2} \frac{1}{g^2(y)} g'(y) g^2(y) = c + D \int_0^y \frac{1}{g(z)} dz,$$

tj. $c + D \int_0^y \frac{1}{g(z)} dz = 0$, što je zadovoljeno za $c = D = 0$, pa se jednačina (3.55) može redukovati na autonomnu linearnu jednačinu

$$\begin{cases} dX(t) = dW(t) \\ X(0) = X_0, \end{cases} \tag{3.56}$$

za $X_0 = \Psi(Y_0)$, čije je rešenje $X(t) = W(t) + \Psi(Y_0)$. Rešenje polazne jednačine (3.55) ima oblik

$$Y(t) = \Psi^{-1}(W(t) + \Psi(Y_0)).$$

PRIMER 3.21. Neka je data autonomna nelinearna stohastička diferencijalna jednačina

$$\begin{cases} dY(t) = (\alpha g(Y(t)) + \frac{1}{2} g(Y(t)) g'(Y(t))) dt + g(Y(t)) dW(t) \\ Y(0) = Y_0. \end{cases} \tag{3.57}$$

gde je g data diferencijabilna funkcija, sa koeficijentima $a(y) = \alpha g(y) + \frac{1}{2} g(y) g'(y)$ i $b(y) = g(y)$. Dalje je

$$\frac{a(y)}{b(y)} - \frac{1}{2} b'(y) = \alpha,$$

tj. $\frac{d}{dy} \left(\frac{a(y)}{b(y)} - \frac{1}{2} b'(y) \right) = 0$, pa je funkcija transformacije data sa

$$\Psi(y) = \int_0^y \frac{1}{g(z)} dz.$$

Kada u jednakost (3.45) uvrstimo formulu za $\Psi(y)$ dobijamo da je $c + D \int_0^y \frac{1}{g(z)} dz = \alpha$, što je zadovoljeno za $c = \alpha$ i $D = 0$. Linearna jednačina, koju dobijamo redukcijom polazne jednačine pomoću transformacije $\Psi(y)$, ima oblik

$$\begin{cases} dX(t) = \alpha dt + dW(t) \\ X(0) = X_0, \end{cases} \tag{3.58}$$

za $X_0 = \Psi(Y_0)$, čije je rešenje $X(t) = \alpha t + W(t) + \Psi(Y_0)$, odakle sledi da je opšte rešenje jednačine (3.57)

$$Y(t) = \Psi^{-1}(\alpha t + W(t) + \Psi(Y_0)).$$

Zaključak

U ovom radu prikazana je postavka osnova teorije stohastičkih diferencijalnih jednačina. Uveli smo i detaljno obrazložili objekte kao što su Braunovo kretanje i integral Itoa, koji predstavljaju osnovni stohastičko-analitički aparat za zasnivanje stohastičkih jednačina.

Braunovo kretanje je, kao što smo ranije napomenuli, jedan od fundamentalnih primera slučajnih procesa, koji se često koristi u teorijskoj i primenjenoj matematici, fizici i ekonomiji. U izloženom radu svojstva Braunovog kretanja da ima nediferencijabilne trajektorije i nenula kvadratnu varijaciju apostrofirana su kao glavna motivacija za razvoj teorije stohastičkih integrala. U daljem tekstu opisana je konstrukcija integrala Itoa i dokazana je Ito-Doblinova formula, na kojoj se bazira najveći deo stohastičkih izračunavanja.

Kao glavni cilj rada predstavljeni su neki od osnovnih rezultata koji se odnose na teoriju stohastičkih diferencijalnih jednačina. Iako se ovaj rad ne bavi primenama, već samo teorijskim aspektom izloženih koncepata, važno je da na kraju ukažemo na široku primenu, koju su stohastičke jednačine našle u fizici, biologiji, finansijskoj matematici i raznim drugim granama primenjene nauke. Jedan od najšire korišćenih primera primene stohastičkih jednačina jeste geometrijsko Braunovo kretanje, koje u finansijskoj matematici modelira fluktuaciju cena akcija u Blek-Šols-Mertonovom modelu cena opcija.

Literatura

1. L.C. Evans, *An Introduction to Stochastic Differential Equations*, Version 1.2, Department of Mathematics, UC Berkeley, http://math.berkeley.edu/ evans/SDE.course.pdf.

2. V. Jevremović, J. Mališić, *Slučajni procesi i vremenske serije*, Matematički fakultet, Beograd, 2008.

3. I. Karatzas, S.E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Second Edition, Springer-Verlag, New York, 1991.

4. P.E. Kloeden, E. Platen, *Numerical solution of Stochastic Differential Equations*, Second Corrected Printing, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1995.

5. L.B. Koralov, Y.G. Sinai, *Theory of Probability and Random Processes*, Second edition, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2007.

6. P. Mladenović, *Verovatnoća i statistika*, Matematički fakukltet, 1995.

7. B. Øksendal, *Stochastic Differential Equations*, An Introduction with Applications, Fifth Edition, Corrected Printing, Springer-Verlag Heidelberg New York, 2000.

8. Lj. Petrović, *Teorija verovatnoća*, Ekonomski fakultet, Beograd, 2003.

9. S.E. Shreve, *Stochastic Calculus for Finance II*, Continuous-Time Models, Springer Science+Business Media, New York, 2004.