UNIVERZITET U BEOGRADU

Mr MARICA PREŠIĆ

JEDAN ITERATIVNI POSTUPAK ZA ODREDJIVANJE k KORENA POLINOMA

(Doktorska disertacija)

BEOGRAD, 1972

S A D R Ž A J

U V O D

1. Medju savremenim matematičkim oblastima izuzetno značajno mesto pripada numeričkoj matematici. Ovome doprinosi sve veće korišćenje matematike u rešavanju raznih problema prakse, kao i problema mnogih drugih disciplina.

Medju rezultatima numeričke matematike od posebnog su značaja oni koji pružaju i algoritam za rešavanje odredjene klase problema, tj. dopuštaju mogućnost primene mašina u njihovom rešavanju.

Čest je slučaj da se algoritam odredjuje iterativno (rekurzivno).

Iteraciju karakteriše postupno obrazovanje matematičkih objekata po nekom pravilu φ , ali tako da se svaki nov objekat obrazuje pomoću objekata koji su prethodno već odredjeni po istom tom pravilu.

Iteracija leži u osnovi prvotnog matematičkog pojma: prirodnog broja, kao i mnogih definicija u vezi sa brojevima i ne samo sa njima.

Iteracija predstavlja prvi korak ka beskonačnosti u matematici - pojam potencijalne beskonačnosti nalazi se u samom korenu pojma iteracije.

Nemogućnost rešavanja značajnih klasa jednačina u konačnom obliku[1)] primorala je matematičare na traženje približnih metoda rešavanja. Kako iteraciji odgovara za mašine veoma pogodan oblik algoritma, to iterativne metode nalaze plodno tle u teoriji jednačina najrazličitijih vrsta, počev od algebarskih, pa preko diferencijalnih i integralnih, do operatorskih jednačina na veoma opštim matematičkim strukturama.

2. U ovom se radu razmatraju razne iterativne metode rešavanja jednačina.

---

1) tj. formulama odredjene vrste, na primer, radikalima u slučaju algebarskih jednačina.

Osnovne ideje u tom pravcu su: aproksimirati datu jednačinu nekom približnom jednačinom jednostavnijom za rešavanje. Otuda su glavni izvor iterativnih metoda interpolacioni polinomi: Taylorov, Newtonov, Lagrangeev. Iz njih izvire dobar deo poznatih iterativnih metoda: Regula falsi, Newton-Raphsonov metod, Cauchyev, Halleyev, Mullerov i drugi.

Druga ideja dobijanja iterativnih metoda jeste aproksimacija date jednačine približnom kanoničnom jednačinom (ukoliko takva postoji). Na taj način dobijen je postupak S.B.Prešića za jednovremeno odredjivanje svih korena polinoma.

Na početku prve glave dat je kraći pregled poznatih iterativnih metoda.

Na kraju prve glave (Teorema 1.) izlaže se jedna iterativna metoda za jednovremeno odredjivanje k rešenja date realne ili kompleksne jednačine, pod uslovom da ta jednačina ima bar k rešenja. Osnovna ideja je poći od poznatog identiteta

$$f(x) = L_{k-1}(x,f) + R_{k-1}(x,f),$$

gde je $L_{k-1}(x,f)$ Newtonov interpolacioni polinom za slučaj različitih interpolacionih tačaka (k ih je na broju), dok je $R_{k-1}(x,f)$ ostatak, i smatrati da je svaka interpolaciona tačka približna vrednost za po jedno rešenje jednačine $f(x) = 0$. Kao što je već napomenuto i ranije su interpolacioni polinomi služili kao inspiracija za dobijanje iterativnih metoda, medjutim, u svim tim metodama su k interpolacionih tačaka bile k približnih vrednosti za jedno rešenje. Na taj način su dobijani iterativni postupci dužine veće od 1. Osnovna karakteristika većine tih postupaka su glomazne formule.

Postupak koji se izlaže u Teoremi 1. svodi se u slučaju $k = 1$ na Newton-Raphsonov postupak, dok se za $k = n$, u slučaju kada je $f(x)$ polinom, dobijaju formule S.B.Prešića [48], [49].

Iterativni postupak o kome je reč predstavlja uopštenje našeg postupka za odredjivanje k korena polinoma objavljenog u C. R. Acad. Sc. Paris, 1971. godine [50]. Teorema 1. je centralni rezultat prve glave.

3. Osim problema dobijanja iterativnih metoda za rešavanje jednačina postoje, i do sada su srazmerno veoma malo razmatrani (zbog teškoća koje su pojavljuju) problemi konvergencije pozna-

tih iterativnih postupaka, ali ne okolinski, već u odredjenom smislu efektivni, što znači da zavise samo od početnih vrednosti. Prvi takav kriterijum konvergencije za Newton-Raphsonov metod dao je Cauchy [16], na koga se sto godina kasnije nadovezuje Ostrowski [45] i drugi autori. Kratak pregled rezultata iz te oblasti dat je na početku druge glave.

Cauchyev dovoljan uslov konvergencije za niz (a_i) definisan Newton-Raphsonovom iterativnom funkcijom glasi:

$$(U_1)\qquad 2|a_1 - a_0|M < \min_{K_0}|f'(x)|\,,\quad K_0 \overset{\text{def}}{=} \{x \,|\, |x - a_1| \leq |a_1 - a_0|\}$$

gde je $M = \max\limits_{K_0}|f''(x)|$, (reč je o realnoj jednačini $f(x) = 0$).

Uslov Ostrowskog izgleda

$$(U_2)\qquad 2|a_1 - a_0|M \leq |f'(a_0)|\,,\quad M = \max_{K_0}|f''(x)|\,.$$

Iako oba uslova (U_1), (U_2) zavise samo od početne vrednosti, u njima učestvuje maksimum drugog izvoda, odnosno minimum prvog izvoda funkcije $f(x)$ u intervalu.

U slučaju kada je $f(x)$ polinom na osnovu svojstva da je izvod $f''(x)$ funkcija od $f''(a_0),\dots,f^{(n)}(a_0)$, $x-a_0$ (polinom je stepena $\underline{n}$), može se formulisati kriterijum konvergencije za Newton Raphsonov postupak, koji zavisi samo od vrednosti polinoma $f(x)$ i njegovih izvoda u početnoj tački a_0 - dakle efektivan kriterijum. Takav jedan kriterijum dat je Teoremom 2.

Za postupak S.B. Prešića poznat je samo "okolinski" kriterijum konvergencije naveden od samog autora [49]. U Teoremi 3. daje se jedan dovoljan uslov konvergencije tog iterativnog postupka koji zavisi jedino od vrednosti funkcije u početnim tačkama i rastojanja medju početnim tačkama.

4. Poslednja klasa problema iz oblasti iterativnih metoda kojima se bavimo u ovom radu, jesu problemi dobijanja ubrzanih formula za date iterativne postupke. Pregled poznatih rezultata iz te oblasti dat je na početku treće glave.

Medju poznatim ubrzanim formulama posebno mesto zauzimaju Euler-Čebišev-Schröderove [56] ubrzane formule za Newton-Raphsonov iterativan postupak. Izvedene najpre za realne funkcije kasnije su proširene na operatore na kompletnim linearnim L-supermetričkim prostorima.

Za postupke kojima se odredjuje jednovremeno više rešenja date jednačine nisu poznate nikakve ubrzane formule.

Glavni rezultat poslednje glave je Lema u kojoj se izlaže jedna metoda dobijanja ubrzanih formula za široku klasu iterativnih funkcija kojima se odredjuje k rešenja jednačine:

$$(J) \qquad f(x) = 0 \qquad (f\colon C \to C)$$

Podrobnije, u Lemi se, polazeći se od iterativne funkcije reda m $(m \geqslant 1)$, daje formula za funkciju (odnosno, za funkcije) reda $m+1$. U tim formulama učestvuju funkcije $\Phi_{m_1,\dots,m_k}(Y)$ $(Y \in C^k,\ m_1 + \dots + m_k = m)$ za koje se zahteva da ispunjavaju odredjene uslove. Pogodnim izborom tih funkcija dobijaju se, kao primene leme, ubrzane formule za Newton-Raphsonov postupak, medju kojima, specijalno i Euler-Čebišev-Schröderove formule. Dalje, dobijaju se ubrzane formule za postupak S.B.Prešića kao i za postupak iz prve glave (Teorema 1.) za odredjivanje k rešenja jednačine (J). Moguće su primene Leme i na razne druge iterativne postupke.

P R V A   G L A V A

Jedan iterativni postupak za odredjivanje k rešenja jednačine na polju kompleksnih brojeva.

1. Mada su pojedini primeri iterativnih funkcija poznati od davnina, ideja iterativne metode, u najopštijem slučaju, kao približne metode rešavanja jednačina potiče od Legendrea i Cauchya [16].

<u>Definicija</u>. Neka je $\mathscr{C}$ preslikavanje skupa S^s $(s \geqslant 1)$ u skup S i $a_0, \dots, a_{s-1}$ elementi iz S. Za niz (a_i) definisan pomoću

$$(I) \qquad a_{i+s} = \mathscr{C}(a_i, a_{i+1}, \dots, a_{i+s-1}) \qquad (i=0,1,\dots)$$

kažemo da je dobijen <u>iteracijom dužine s</u> a funkciju $\mathscr{C}$ zovemo <u>iterativna funkcija dužine s</u>.

U daljem bavimo se poglavito iterativnim funkcijama dužine 1, odnosno nizovima oblika

$$(I_1) \qquad a_{i+1} = \mathscr{C}(a_i) \qquad (\mathscr{C}: S \to S;\ a_0 \in S).$$

U vezi sa nizovima tipa (I_1) postoje razni problemi:

Kada niz (a_n) konvergira?, Ako je $\lim a_n = a$ $(n \to \infty)$, kada je $\mathscr{C}(a) = a$, odnosno, kada niz (a_n) konvergira ka rešenju jednačine

$$(1) \qquad \mathscr{C}(x) = x$$

tzv. fiksnoj tački preslikavanja $\mathscr{C}$?

Za jednu značajnu klasu preslikavanja φ definisanih na kompletnom metričkom prostoru [2], rešenja tih problema daje Banachov stav o nepokretnoj tački.

Zbog svega ovoga, jedan od problema približnih metoda za rešavanje jednačina sastoji se u sledećem: Za datu jednačinu

$$\text{(J)} \qquad f(x) = 0$$

na skupu S, naći jednačinu oblika (1) takvu da važi sledeća ekvivalencija

$$\text{(2)} \qquad f(x) = 0 \iff \varphi(x) = x \qquad (x \in S)$$

(ili da bar takva ekvivalencija važi u okolini rešenja jednačine (J)), ali tako da φ definiše iterativni postupak koji konvergira ka rešenju jednačine (J) (tj. ka fiksnoj tački preslikavanja φ).

Očigledno je da, u slučaju realnih (kompleksnih) jednačina, u okolini koja sadrži tačno jedno rešenje $\underline{a}$ jednačine (J) važi ekvivalencija

$$\text{(3)} \qquad f(x) = 0 \iff x = x - f(x) \cdot g(x),$$

gde je g neprekidna funkcija definisana u toj okolini i takva da je $g(a) \neq 0$.

Na ekvivalencijama tipa (3) (g može, u opštem slučaju, biti i funkcija više promenljivih) zasnivaju se skoro sve do danas poznate iterativne metode.

2. Najstarije poznate iterativne metode za rešavanje jednačina su <u>metoda sečice</u> (regula falsi) i <u>metoda tangente</u> (Newton-Raphsonov metod). U osnovi tih metoda leži aproksimacija date funkcije $f(x)$ linearnom funkcijom (sečicom, tangentom).

Neka jednačina (J) na polju realnih brojeva ima u intervalu $[\alpha, \beta]$ realan koren $\underline{a}$ i neka su izvodi $f'(x)$, $f''(x)$ konstantnog znaka i neprekidni na tom intervalu. Tada su pomenute dve metode definisane formulama

$$\text{(4)} \qquad a_{i+2} = \frac{a_i\, f(a_{i+1}) - a_{i+1}\, f(a_i)}{f(a_{i+1}) - f(a_i)} \qquad \text{(regula falsi)}$$

(5) $$a_{i+1} = a_i - \frac{f(a_i)}{f'(a_i)}$$ (Newton-Raphsonov metod)

$$(f(a_o) \cdot f''(a_o) > 0)$$

Primetimo da su obe formule (4) i (5) u vezi sa ekvivalencijom tipa (3) (za njih je funkcija g redom jednaka:

$$\frac{1}{[x,y]f}, \quad \frac{1}{f'(x)})$$

i da je regula falsi dužine 2, dok je metod tangente dužine 1.

Primedba. Obično se pod metodom sečice podrazumeva iterativni postupak dužine 1:

(4) $$a_{i+1} = \frac{a_o\, f(a_i) - a_i\, f(a_o)}{f(a_i) - f(a_o)} \qquad (i = 1,2,\ldots)$$

$$(f(a_o)f''(a_o) > 0)$$

U novije vreme, medjutim, pod tim imenom se navodi češće opštija formula (4).

Metodu regula falsi poznavali su već indijski matematičari, a usavršili su je Arapi. Preuzeta od Arapa, ta se metoda u Evropi neko vreme nazivala regula alhatayn (pravilo dveju grešaka).

Newton je svoju metodu objasnio na primeru odredjivanja realnih korena algebarske jednačine $y^3 - 2y - 5 = 0$ u traktatu De analysi per aequationes numero terminorum infinitas 1669, ali je taj traktat objavljen tek 1704. godine 43 . Iste ideje Newton je izložio u svom drugom traktatu Methodus fluxionum et serierum infinitarum 1736. godine.

Navodimo 268. stranu Newtonovih dela (Vol.I, Ed. Horsley) [15].

<table>
<tr><td colspan="2">$y^3 - 2y - 5 = 0$</td><td>+2.10000000
-0.00544853
+2.09455147 = y</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$2+p = y$</td><td>$+y^3$
$-2y$
-5</td><td>$+8+12p+6p^2+p^3$
$-4-2p$
-5</td></tr>
<tr><td>Summa</td><td>$-1+10p+6p^2+p^3$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$0,1+q = p$</td><td>$+p^3$
$+6p^2$
$+10p$
-1</td><td>$+0,001+0,03q+0,3q^2+q^3$
$+0,06+1,2+6,0$
$+1+10$
-1</td></tr>
<tr><td>Summa</td><td>$+0,061+11,23q+6,3q^2+q^3$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$-0,0054+r = q$</td><td>$+6,3q^2$
$+11,23q$
$+0,061$</td><td>$+0,000183708-0,06804r+6,3r^2$
$-0,060642+11,23$
$+0,061$</td></tr>
<tr><td>Summa</td><td>$+0,000541708+11,16196r+6,3r^2$</td></tr>
<tr><td>$-0,00004854+s = r$</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Kao što se iz tablice vidi, Newton je pošao od približne vrednosti 2. Pretpostavljajući da je rešenje $y=2+p$, polazna jednačina prelazi u jednačinu $p^3+6p^2+10p-1=0$ iz koje se (zanemarivši kvadratni i kubni član) dobija 0,1. Dakle, $p=0,1+q$ (q je popravka) itd. Kao približno rešenje polazne jednačine Newton je dobio broj 2,09455147.

Označivši približne vrednosti dobijene na način koji opisuje Newton sa a_1, a_2,... nije teško zaključiti da se taj niz može dobiti po formuli (5).

Tu formulu eksplicitno je dobio Joseph Raphson (1648 ?-1715 ?) 1690. (Analysis aequationum universalis, 1690, London). Funkciju $f'(x)$ Raphson nije tražio po pravilima diferencijalnog računa već je za sve polinome do desetog stepena naveo uporedne tablice za f i f'.

Za polinom petog stepena ta tablica izgleda 15 :

Pro potestate Quinta

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
g & g & g & g & g & \qquad & 5 & g & g & g & g & & \\
b & g & g & g & g & & 4 & b & g & g & g & & \\
 & c & g & g & g & & & 3 & c & g & g & & x \\
 & & d & g & g & & & & 2 & d & g & & \\
 & & & f & g & & & & & & f & &
\end{array}
$$

(1, b, c, d su koeficijenti polinoma a g je data aproksimacija).

Raphson nigde ne spominje Newtona smatrajući da su to dva različita metoda.

Newton i Raphson su svoje metoda objasnili samo za algebarske jednačine. Proširenje za iracionalni i transcedentne jednačine potiče od Th. Simpsona. (Zanimljivo je da Simpson ne spominje ni Newtona ni Raphsona, već svoj metod smatra novim.)

Dugo je Newton-Raphsonov metod pripisivan samo Newtonu. Tome je naročito doprineo Fourier [24].

Ove stare ideje o približnom rešavanju jednačina kasnije su razvijene i prenesene na mnoge druge, veoma opšte, matematičke probleme.

Regula falsi prenesena je na sistem jednačina kao i na operatorske jednačine na Banachovim prostorima [34], [11], [55].

Newton-Raphosonov metod prenesen je na sisteme jednačina, na diferencijalne, integralne, funkcionalne i razne druge opšte operatorske jednačine [4], [7], [41], [64].

3. Iterativne metode za rešavanje jednačina mogu se podeliti na dva osnovna tipa: na metode kojima se odredjuje jedno rešenje jednačine (J) i na metode kojima se jednovremeno odredjuje više rešenja te jednačine.

Obe metode (4) i (5) spadaju u prvu vrstu. U drugu vrstu spada metoda S.B.Prešića [48], [49] za odredjivanje svih korena polinoma f(x) (na polju kompleksnih brojeva):

Neka su a,...,s svi koreni polinoma f(x); tada je taj iterativan postupak odredjen pomoću

$$(6)\qquad \begin{aligned} a_{i+1} &= a_i - \frac{f(a_i)}{(a_i-b_i)\cdots(a_i-s_i)} \\ &\vdots \\ s_{i+1} &= s_i - \frac{f(s_i)}{(s_i-a_i)\cdots(s_i-r_i)} \end{aligned}$$

(Pretpostavka je da su koreni polinoma $f(x)$ jednostruki i da je koeficijent uz najviši stepen jednak 1.)

Osnovna ideja, pomoću koje se dolazi do formula (6) sastoji se u aproksimaciji datog polinoma $f(x)$ približnim kanoničnim polinomom $(x - a_i)\ldots(x - s_i)$. Naime, nizovi $(a_i),\ldots,(s_i)$ definišu se preko identiteta (po x):

$$(x-a_{i+1})(x-b_i)\ldots(x-s_i) + (x-a_i)(x-b_{i+1})\ldots(x-s_i) + \ldots +$$

$$(x-a_i)(x-b_i)\ldots(x-s_{i+1}) - (n-1)(x-a_i)(x-b_i)\ldots(x-s_i) = f(x)$$

Stavljajući za x redom $a_i,\ldots,s_i$ i rešavajući svaku od tako dobijenih jednačina po $a_{i+1},\ldots,s_{i+1}$ dolazi se do formula (6).

Primetimo da su formule (6) u vezi sa sledećom ekvivalencijom za jednačinu (J) na polju realnih ili kompleksnih brojeva koja ima bar $\underline{k}$ rešenja $a,\ldots,s$:

$$(7)\qquad \begin{bmatrix} f(y) = 0 \\ \wedge \\ f(z) = 0 \\ \wedge \\ \vdots \\ \wedge \\ f(v) = 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} y = y - f(y)\cdot G_1(Y) \\ \wedge \\ z = z - f(z)\cdot G_2(Y) \\ \wedge \\ \vdots \\ \wedge \\ v = v - f(v)\cdot G_k(Y) \end{bmatrix}$$

gde su $G_i((i = 1,2,\ldots,k)$ neprekidne realne (kompleksne) funkcije od $\underline{k}$ promenljivih definisane u okolini tačke A i takve da važi $G_i(A) \neq 0$ $(i = 1,\ldots,k)$. Koristili smo oznake:

$$Y \overset{\text{def}}{=} (y,z,\ldots,v),\quad A \overset{\text{def}}{=} (a,b,\ldots,s).$$

4. Newton-Raphsonove formule mogu se kao što je poznato, **izvesti** pomoću Taylorovog polinoma prvog stepena za funkciju f. **Ako se** podje od Taylorovog polinoma drugog stepena (Cauchy [16]) ili od nešto uprošćenog Taylorovog polinoma drugog stepena (Halley [26]) dolazi se do iterativnih funkcija:

$$(8) \qquad \mathcal{C}(x) = x - \frac{f'(x)}{f''(x)} \pm \frac{|f'(x)|}{f''(x)}(1 - 4A_2u)^{1/2},$$

$$(9) \qquad \mathcal{C}(x) = x - \frac{u}{1 - A_2u},$$

Oznake: $u = \dfrac{f(x)}{f'(x)}$, $A_2 = \dfrac{f''(x)}{2f'(x)}$.

U tom pravcu radio je i Hitotumatu [28].

Neka je, dalje:

$$(10) \qquad L_{n-1}(f,x) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\frac{F(x)}{(x-x_j)F'(x_j)}, \quad F(x) = \prod_{j=1}^{n}(x-x_j)$$

Lagrangeev interpolacioni polinom stepena n-1 u interpolacionim tačkama $x_1,\dots,x_n$ i neka su a_i, $a_{i-1},\dots,a_{i-n}$ n+1 približna vrednost za rešenje a jednačine (J). Iduću približnu vrednost za rešenje a tj. a_{i+1}, definišemo pomoću jednakosti [63]:

$$(11) \qquad L_n(f, a_{i+1}) = 0.$$

Rešavanjem jednačine (11) po a_{i+1} dolazi se do iterativnog postupka dužine n+1 za odredjivanje jednog rešenja jednačine (J).

Slučaj n=1 dovodi do metoda sečice, slučaj n=2 dovodi do iterativnog postupka Mullera [42]:

$$(12) \qquad a_{i+1} = a_i - \frac{2f(a_i)}{\omega + (\omega^2 - 4f(a_i)[a_i, a_{i-1}, a_{i-2}]f)^{1/2}},$$

gde je upotrebljena oznaka

$$\omega = [x_i, x_{i-1}]f + (x_i - x_{i-1})[x_i, x_{i-1}, x_{i-2}]f.$$

5. Prethodno uvodimo neke definicije. Neka je f realna ili kompleksna funkcija jedne promenljive definisane u oblasti D koja sadrži tačke x, y, ..., v (<u>k+1</u> ih je na broju i sve su medjusobno različite). <u>Operator podeljenih razlika</u> definiše se sledećom rekurzivnom definicijom [47]:

$$[x]f \overset{\text{def}}{=} f(x), \qquad [x,y]f \overset{\text{def}}{=} \frac{f(x)-f(y)}{x-y},$$

(13)

$$[x, y, \ldots, v]f \overset{\text{def}}{=} [x,y]\,[y,\ldots,v]f_y$$

($[y,\ldots,v]f_y$ označava da funkciju $[y,\ldots,v]f$, koja zavisi od $y,\ldots,v$ smatramo kao funkciju od promenljive y.)

Za operator $[x,\ldots,v]$ se dokazuje da je linearan po $f(x),\ldots,f(v)$ a takodje da je simetričan po tim argumentima.

Pretpostavimo, sada, da x teži y i da postoji granična vrednost:

(13′) $$\lim_{x\to y}[x,y,\ldots,v]f,$$

Na osnovu definicije (13) imamo:

$$\lim_{x\to y}[x,y,\ldots,v]f = \lim_{x\to y}\frac{[x,z,\ldots,v]f - [y,z,\ldots,v]f}{x-y}$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}[y,z,\ldots,v]f.$$

Granična vrednost (13) uzima se, po definiciji, za vrednost funkcije $[x,y,\ldots,v]f$ u slučaju kada se dve vrednosti ujednačuju. Naime

(13") $$[y,y,z,\ldots,v]f \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial y}[y,z,\ldots,v]f$$

Na osnovu definicije operatora podeljenih razlika i svojstva simetrije neposredno se zaključuje da je operator $[x,y,\ldots,v]$ definicijom (13") dodefinisan i u slučaju kada se ujednačuju bilo koje druge dve vrednosti iz skupa $\{x,y,\ldots,v\}$, pod uslovom da odgovarajući parcijalni izvod postoji.

6. Vraćamo se ponovo na jednačinu (J). Pretpostavimo da je ona moguća i da ima bar <u>k</u> jednostrukih rešenja a,b,...,s. Vektor

$$A \stackrel{\text{def}}{=} (a,\ldots,s) \tag{14}$$

zovemo <u>vektor rešenja</u>. Pretpostavljamo, kao i napred, da je $f(x)$ definisana u oblasti D kojoj pripadaju rešenja $a,\ldots,s$ i u kojoj postoje izvodi:

$$\frac{\partial}{\partial y}[Y]f\ ,\ldots,\ \frac{\partial}{\partial v}[Y]f.$$

Korišćena je oznaka:

$$[Y]f \stackrel{\text{def}}{=} [y,\ldots,v]\, f\ ,$$

gde su $y,\ldots,v$ medjusobno različite tačke oblasti D ($\underline{k}$ ih je na broju
U daljem koristimo i sledeću oznaku

$$[x,\ Y]f \stackrel{\text{def}}{=} [x,y,\ldots,v]f.$$

Na osnovu definicije (13) operatora podeljenih razlika neposredno se dobija sledeći identitet

$$f(x) = f(y)\,\frac{(x-z)\ldots(x-v)}{(y-z)\ldots(y-v)} + \ldots + f(v)\,\frac{(x-y)\ldots(x-u)}{(v-y)\ldots(v-u)} + (x-y)\ldots(x-v)\ [x,Y]f\ . \tag{15}$$

Prvih $\underline{k}$ sabiraka na desnoj strani obrazuju Newtonov interpolacioni polinom za funkciju $f(x)$ u slučaju različitih interpolacionih tačaka $x,y,\ldots,v$ (odnosno, Lagrangeev interpolacioni polinom), dok je poslednji član ostatak. Primetimo da je prvi sabirak jednak nuli, kada je $y\in\{a,\ldots,s\}$. Inspirišući se tom činjenicom, nizove $(a_i),\ldots,(s_i)$ odredjujemo sledećim identitetima po x:

$$f(x) = (x-a_{i+1})(x-b_i)\ldots(x-s_i)[x,A_i]f + f(b_i)Lb_i + \ldots + f(s_i)Ls_i\ ,$$

$$f(x) = (x-a_i)(x-b_{i+1})\ldots(x-s_i)[x,A_i]f + f(a_i)La_i + f(c_i)Lc_i + \ldots + f(s_i)Ls_i\ ,$$

$$\vdots$$

$$f(x) = (x-a_i)\ldots(x-r_i)(x-s_{i+1})[x,A_i]f + f(a_i)La_i + \ldots + f(r_i)Lr_i\ .$$

Ovde su uvedene sledeće oznake:

$$La_i \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{(x-b_i)\ldots(x-s_i)}{(a_i-b_i)\ldots(a_i-s_i)}, \ \ldots \ , Ls_i \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{(x-a_i)\ldots(x-r_i)}{(s_i-a_i)\ldots(s_i-r_i)},$$

$$A_i \overset{\text{def}}{=\!=} (a_i,\ldots,s_i).$$

Zamenjujući u prethodnim jednakosti x redom sa $a_i,\ldots,s_i$ i rešavajući tako dobijene jednakosti po $a_{i+1},\ldots,s_{i+1}$ dolazi se do formula

$$\begin{aligned} a_{i+1} &= \mathscr{C}(a_i,b_i,\ldots,s_i),\\ b_{i+1} &= \mathscr{C}(b_i,c_i,\ldots,a_i),\\ &\vdots \\ s_{i+1} &= \mathscr{C}(s_i,a_i,\ldots,r_i), \end{aligned} \tag{16}$$

gde je funkcija $\mathscr{C}(Y)$ $\left[Y \overset{\text{def}}{=\!=} (y,\ldots,v)\right]$ definisana pomoću:

$$\mathscr{C}(Y) = y - \frac{f(y)}{(y-z)\ldots(y-v)\frac{\partial}{\partial y}[Y]\,f} \tag{17}$$

Iterativan postupak koji izlažemo odredjen je formulana (16) i (17). Radi lakšeg izražavanja uvodimo sledeću vektorsku funkciju

$$\Phi(Y) \overset{\text{def}}{=\!=} (\mathscr{C}(Y),\ \mathscr{C}(\alpha Y),\ \ldots\ ,\ \mathscr{C}(\alpha^{k-1}Y)),$$

gde je permutacija $\alpha = (12\ldots k)$. Koristiće te oznake formule (16) i (17) zapisuju se kratko u vektorskom obliku

$$A_{i+1} = \Phi(A_i). \tag{16}$$

7. Pretpostavimo da nizovi $(a_i),\ldots,(s_i)$ definisani jednakostima (16) i (17) postoje. To, u stvari, znači (pošto je $\mathscr{C}(Y)$ racionalna funkcija) da su za svaki i svi i-ti članovi $a_i,\ldots,s_i$ medjusobno različiti i da su svi izvodi $\frac{\partial}{\partial y}[Y]f,\ldots,\frac{\partial}{\partial v}[Y]f$ različiti od nule za $Y = A_i$. Tada, ukoliko postoje granične vrednosti

$$\lim_{i\to\infty} a_i,\ \ldots,\ \lim_{i\to\infty} s_i,$$

one su rešenja jednačine (J). Do tog zaključka se dolazi prelaskom u jednakostima (16) na graničnu vrednost.

8. U sledećoj teoremi dokazuje se, da, pod odredjenim uslovima za funkciju f, nizovi $(a_i),\ldots,(s_i)$ uvedeni formulama (16) i (17) postoje i da konvergiraju redom ka rešenjima a,...,s, ukoliko su početne vrednosti $a_0,\ldots,s_0$ dovoljno blizu redom ka a,...,s.

Teorema 1. Neka je (J) moguća jednačina na polju realnih brojeva koja ima bar k $(k \geqslant 1)$ realnih rešenja: a,...,s. Pretpostavimo, dalje, da postoje konačni izvodi trećeg reda:

$$f'''(a), \ \ldots \ , f'''(s)$$

i da su izvodi prvog reda

$$f'(a), \ \ldots \ , f'(s)$$

svi različiti od nule. Tada, postoji izvesna okolina V vektora rešenja A = (a,...,s) takva da, ukoliko je $A_0 \in V$, onda:
(i) Postoji tačno jedan niz (A_i) koji zadovoljava uslove (16), (17) i (16').
(ii) Taj niz (A_i) konvergira ka vektoru rešenja A jednačine (J).
(iii) Konvergencija niza (A_i) je kvadratna.

Dokaz. Dokaz izvodimo u nekoliko koraka:
Prvi korak. U slučaju kada je Y = A, identitet (15) prelazi u

$$(18) \qquad f(x) = (x-a)\ldots(x-s)[x, A]f.$$

Diferenciranjem po x (x je iz okoline neke od tačaka a,...,s pa postoji prvi izvod leve i desne strane na osnovu pretpostavki u iskazu teoreme) dobijamo

$$(19) \quad f'(x) = (x-b)\ldots(x-s)[x,A]f + (x-a)(x-c)\ldots(x-s)[x,A]f + \ldots + (x-a)\ldots(x-r)[x,A]f + (x-a)\ldots(x-s)\frac{\partial}{\partial x}[x,A]f.$$

Izvod $\frac{\partial}{\partial x}[x,A]f$ postoji jer je na osnovu definicije operatora podeljenih razlika, $[x,A]f$ racionalna funkcija kod koje u imenitelju učestvuje proizvod razlika: (x-a),...,(x-s), (a-b),...,(a-s),...,(r-s) dok je brojitelj polinom prvog stepena po argumentima f(x),f(a),..., f(s) (kojeficijenti tog polinoma su proizvodi nekih od napred navedenih razlika). Po pretpostavci funkcija f(x) ima izvod prvog reda u okolinama tačaka a,...,s, pa prema tome, postoji u okolinama tih tačaka i izvod $\frac{\partial}{\partial x}[x,A]f$.

Stavljajući u jednakosti (19) umesto x redom a,...,s i koristeći definiciju (13″) dolazi se do jednakosti:

$$f'(a) = (a-b) \cdots (a-s) \frac{\partial}{\partial a}[A]f,$$

(20)
$$\vdots$$

$$f'(s) = (s-a) \cdots (s-r) \frac{\partial}{\partial s}[A]f.$$

Koristeći pretpostavku teoreme da je izvod f′(x) različit od nule za $x \in \{a,\dots s\}$ i upravo izvedene jednakosti (20) zaključujemo da je funkcija $\mathscr{C}(Y)$ uvedena pomoću jednakosti (17), definisana u okolini tačke A.

Drugi korak. Dokazujemo da su svi parcijalni izvodi prvog reda po koordinatama funkcije $\Phi(Y)$ jednaki nuli u tački Y = A. Za to je, na osnovu definicije te funkcije, dovoljno dokazati da su svi parcijalni izvodi prvog reda funkcije $\mathscr{C}(Y)$ jednaki nuli u toj tački. Koristeći obrazloženje iz prethodnog koraka dokaza, u vezi sa oblikom funkcije [Y] f, zaključujemo da je funkcija $\mathscr{C}(Y)$ sledećeg oblika

$$y - \frac{f(y)\,\Pi}{P(f'(y),f(y)\cdots f(v))},$$

gde je Π proizvod od nekih razlika x-y,...,u-v, dok je

$$P(f'(y),f(y)\cdots f(v))$$

polinom prvog stepena po naznačenim argumentima. Koeficijenti tog polinoma su proizvodi nekih od prethodnih razlika. Prema tome, funkcija $\mathscr{C}(Y)$ je analitička po argumentima: f′(y),f(y),...,f(v), y, y-z,...,y-v,...,u-v. Na osnovu pretpostavke teoreme o postojanju konačnog trećeg izvoda f‴(x) u tačkama a,...,s sledi da u tački A postoje i konačni su svi parcijalni izvodi drugog reda funkcije $\mathscr{C}(Y)$. A to ujedno znači da u okolini tačke A postoje svi parcijalni izvodi prvog reda te funkcije. Odredjujemo vrednost prvih parcijalnih izvoda funkcije $\mathscr{C}(Y)$ u tački A. Prema (17) dobijamo:

$$\frac{\partial \mathscr{C}}{\partial y} = 1 - \frac{f'(y)}{(y-z)\cdots(y-v)\frac{\partial}{\partial y}[Y]f} + f(y)\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{(y-z)\cdots(y-v)\frac{\partial}{\partial y}[Y]f},$$

$$\frac{\partial \mathscr{C}}{\partial z} = f(y)\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{(y-z)\cdots(y-v)\frac{\partial}{\partial y}[Y]f},$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial \mathscr{C}}{\partial v} = f(y)\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{(y-z)\cdots(y-v)\frac{\partial}{\partial y}[Y]f}.$$

U slučaju kada je Y = A prethodne jednakosti postaju:

$$\frac{\partial \mathscr{C}}{\partial y} = 1 - \frac{f'(a)}{(a-b)\cdots(a-s)\frac{\partial}{\partial a}[A]f}, \quad \frac{\partial \mathscr{C}}{\partial z} = 0, \ \ldots, \ \frac{\partial \mathscr{C}}{\partial v} = 0.$$

Koristeći prvu od jednakosti (20) dobijamo $\frac{\partial \mathscr{C}}{\partial y} = 0$, za Y = A.

Treći korak. Na osnovu dokazanog imamo sledeći Taylorov razvitak funkcije $\mathscr{C}(Y)$ u okolini tačke A

$$\mathscr{C}(Y) = \mathscr{C}(A) + O(\|Y - A\|^2).$$

Na osnovu te jednakosti dobijamo

$$\|\Phi(Y) - \Phi(A)\| = O(\|Y - A\|^2),$$

odnosno, pošto je A fiksna tačka za funkciju Φ, to u okolini tačke A, važi sledeća jednakost

$$\|\Phi(Y) - A\| = O(\|Y - A\|^2). \tag{21}$$

Prethodna relacija znači da postoji nenegativna konstanta M takva da u okolini tačke A važi:

$$\|\Phi(Y) - A\| \leq M\|Y - A\|^2. \tag{21 }$$

Ako se A_0 izabere tako da važe relacije

$$\|A_0 - A\| < 1, \quad M\|A_0 - A\| \leq q < 1, \tag{22}$$

tada se iz jednakosti (21),indukcijom po i, dokazuje:

$$\|A_i - A\| \leq M^{2^i-1}\cdot\|A_o - A\|^{2^i} = \left(M\cdot\|A_o - A\|\right)^{2^i-1}\cdot\|A_o - A\|. \tag{23}$$

Odatle koristeći uslove (22) dobijamo

$$\|A_i - A\| \leq q^{2^i-1}. \tag{24}$$

Na osnovu pretpostavki u iskazu teoreme i relacije (24) zaključujemo da postoji okolina V vektora A takva da niz (A_i) odredjen uslovima (16), (17) i (16') postoji i da svi članovi tog niza pripadaju V, ukoliko je $A_o \in V$. Osim toga, niz (A_i) konvergira ka A kao q^{2^i-1}, odnosno brzinom 2^i-1, otkuda je i došao naziv kvadratna konvergencija.[1] Ovim je dokaz teoreme završen.

9. Konvergencija niza (A_i) može se dokazati i primenom Banachovog stava o nepokretnoj tački, ali u tom slučaju se ne dobija zaključak o kvadratnoj konvergenciji. Navodimo takav jedan dokaz.
U prostoru R^k uočavamo vektorsku normu

$$(x_1,\ldots,x_k) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_i x_i . \tag{25}$$

U odnosu na odgovarajuću metriku prostor R^k je kompletan metrički prostor. Dalje, za realnu matricu $A = (a_{ij})_{m\times n}$ tipa $m\times n$ matričnu normu uvodimo definicijom

$$\|A\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|. \tag{26}$$

Za matričnu normu kaže se da je saglasna sa vektorskom normom, ukoliko je ispunjen uslov

$$\|A\cdot x\| \leq \|A\|\cdot\|x\| \qquad \text{(x je vektor)}. \tag{27}$$

[1] U poslednjoj glavi biće više reči o redu konvergencije nekog iterativnog postupka.

Lako se može dokazati [38] da je matrična norma (26) saglasna sa vektorskom normom (25) odnosno da je tačna nejednakost

$$\sup_i \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \leq \sup_{\nu} |x_\nu| \cdot \sup_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| .$$

Prema uslovima teoreme funkcija $\mathscr{C}(\alpha^i Y)$ $(i=0,\ldots,k-1)$ ima neprekidne sve parcijalne izvode prvog reda u okolini tačke A. Prema teoremi o srednjoj vrednosti imamo (u konveksnoj okolini tačke A):

$$\mathscr{C}(\alpha^i Y) - \mathscr{C}(\alpha^i Y_1) = \frac{\partial \mathscr{C}}{\partial y}(C_i)(y-y_1)+\ldots+ \frac{\partial \mathscr{C}}{\partial v}(C_i)(v-v_1)$$

$$(C_i = Y+\theta_i(Y_1-Y);\ 0<\theta_i<1;\ i = 0,\ldots,k-1)$$

a odavde

$$(28) \qquad \Phi(Y) - \Phi(Y_1) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathscr{C}}{\partial y}(C_0)\ldots \frac{\partial \mathscr{C}}{\partial v}(C_0) \\ \ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial \mathscr{C}}{\partial y}(C_{k-1})\ldots \frac{\partial \mathscr{C}}{\partial v}(C_{k-1}) \end{bmatrix} \cdot (Y - Y_1) .$$

Na osnovu dokaza teoreme svi parcijalni izvodi prvog reda funkcija $\mathscr{C}(Y)$, $\mathscr{C}(\alpha Y),\ldots,$ $\mathscr{C}(\alpha^{k-1} Y)$ jednaki su nuli u tački A i neprekidni u okolini te tačke. Odatle sledi da postoji q tako da u izvesnoj okolini tačke A važe nejednakosti:

$$(29) \qquad \left|\frac{\partial \mathscr{C}}{\partial y}(\alpha^i Y)\right| \leq \frac{q}{k},\ldots, \left|\frac{\partial \mathscr{C}}{\partial v}(\alpha^i Y)\right| \leq \frac{q}{k}$$

$$(0\leq q<1;\ i=0,\ldots,k-1).$$

Koristeći nejednakosti (27), iz (28) dobijamo

$$\|\Phi(Y) - \Phi(Y_1)\|\leq \left\|\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathscr{C}}{\partial y}(C_0)\ldots \frac{\partial \mathscr{C}}{\partial v}(C_0) \\ \ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial \mathscr{C}}{\partial y}(C_{k-1})\ldots \frac{\partial \mathscr{C}}{\partial v}(C_{k-1}) \end{bmatrix}\right\| \cdot \|Y - Y_1\| ,$$

a odatle na osnovu definicije vektorske i matrične norme i nejednakosti (29):

$$(30) \qquad \|\Phi(Y) - \Phi(Y_1)\|\leq \left\|\begin{bmatrix} \frac{q}{k} & \ldots & \frac{q}{k} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{q}{k} & \ldots & \frac{q}{k} \end{bmatrix}\right\| \cdot \|Y - Y_1\| .$$

Označimo matricu koja učestvuje na desnoj strani sa Q. Neposredno se zaključuje, koristeći (26) da važi:

(31) $$\|Q\| = q.$$

Prema tome, relacija (30) ekvivalentna je sa

(32) $$\|\Phi(Y) - \Phi(Y_1)\| \leq q\|Y - Y_1\|, \quad 0 \leq q < 1.$$

Iz poslednje formule, stavljajući umesto Y, Y_1 redom A_i, A, dobijamo

(33) $$\|A_{i+1} - A\| \leq q\,\|A_i - A\|, \quad 0 \leq q < 1.$$

Prema formulama (32) i (33) zaključujemo sledeće: Postoji izvesna okolina $V = \{Y \mid \|Y - A\| < r\}$ tačke A takva da:

(i) Svi članovi niza (A_i), definisanog pomoću (16), pripadaju V ukoliko $A_o \in V$.

(ii) Preslikavanje $\Phi(Y)$ je kontrakcija oblasti V.

Kako je $(R^k, \| \;\|)$ kompletan metrički prostor, to prema Banachovom stavu, niz (A_i), definisan pomoću (16), konvergira, ukoliko je $A_o \in V$.

10. Dokaz konvergencije niza (A_i), primenom Banachovog stava, izveden je korišćenjem tzv. prve vektorske i matrične norme. Primetimo da dokaz "prolazi" i u odnosu na drugu i treću normu [10], jer je

$$\|Q\|_2 = q, \quad \|Q\|_3 = \sqrt{q}.$$

Druga jednakost sledi iz činjenice što su sve sopstvene vrednosti matrice Q jednake q i 0, pri čemu je q jednostruka. Uopšte, dovoljno je dokazati [10] da su sve sopstvene vrednosti neke matrice Q čiji su elementi ograničenja odgovarajućih parcijalnih izvoda po modulu manji od jedinice a za to je dovoljno da za bilo koju matričnu normu važi: $\|Q\| \leq q < 1$.

11. Teorema 1. formulisana je i dokazana za slučaj realnih korena realne jednačine. Slučaj kompleksnih korena, sledi neposredno pod istim uslovima. Ako je $f(x)$ kompleksna funkcija kompleksne promenljive, dobio bi se analogon Teoreme 1, s tim što se uslov egzistencije trećeg izvoda funkcije $f(x)$ zamenjuje uslovom: $f(x)$ je analitička funkcija.

12. Formule (16) svode se u slučaju $k = 1$ na Newton-Raphsonovu formulu, a u slučaju $k = n$, kada je $f(x)$ polinom na formule (6) S.B.Prešića.

13. Neka je sada $f(x)$ polinom (realan ili kompleksan) stepena $\underline{n}$:

$$f(x) = x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \cdots + p_1 x + p_0 \tag{34}$$

Potražimo funkciju $[x,y,\ldots,v]f$ u tom slučaju.
Primenom operatora podeljenih razlika na funkciju x^m $(m = 0,1,\ldots)$ dobija se

$$[x,y,\ \ldots,\ v]x^m = \begin{cases} \sum\limits_{i+i_1+\cdots+i_k=m-k} x^i y^{i_1}\cdots v^{i_k}, & \text{za } m \geqslant k \\ 0, & \text{za } m < k \end{cases}$$

Otuda neposredno sledi

$$[x,y,\ldots,v]f = \sum_{i+i_1+\cdots+i_k=n-k} x^i y^{i_1}\cdots v^{i_k} + p_{n-1}\sum_{i+i_1+\cdots+i_k=n-k-1} x^i y^{i_1}\cdots v^{i_k} + \cdots + p_{k+1}(x+\cdots+v) + p_k \tag{35}$$

Na taj način se formule (16) i (17) svode na formule [50] za jednovremeno odredjivanje $\underline{k}$ korena polinoma.

14. Praksa je pokazala da pretpostavka o jednostrukosti rešenja nije bitna (primer 2.). Dalje, mogućnost anuliranja imenitelja kod funkcije (Y) je retka. Osim toga, u slučaju kada se odredjuju sva rešenja jednačine (J) postupak skoro uvek konvergira - i za veoma udaljene početne vrednosti (Primer 2, Primer 3).

Računski primeri

Primer 1. Neka je f(x) sledeći polinom sedmog stepena
$f(x) = 6x^7-107x^6+553x^5-88x^4-5764x^3+10929x^2+2709x-13230$.

Njegovi koreni su -3, -1, 2, 7/3, 3, 7, 15/2.

Odredjujemo korene 2, 7/3, 3, koristeći formule (16) i (23). U ovom slučaju je k = 3.

U "tablicama" koje navodimo u prvoj koloni nalazi se oznaka za red iteracije. U prvoj vrsti su početne vrednosti a_0, b_0, c_0, u drugoj vrsti su prve izračunate vrednosti a_1, b_1, c_1 itd. Simbol e+n ($n \in N$) znači da je broj koji neposredno stoji ispred njega pomnožen sa 10^n.

1^o Početne vrednosti: $a_0 = 1$; $b_0 = 2,5$; $c_0 = 2,9$.

Vrednosti iteracija:

(0)	0.10000000e+01	0.25000000e+01	0.29000000e+01
(1)	0.23534808e+01	0.24161684e+01	0.29776401e+01
(2)	0.16376929e+01	0.26699287e+01	0.30371492e+01
(3)	0.18819405e+01	0.24683282e+01	0.29829280e+01
(4)	0.19746533e+01	0.23564455e+01	0.30022519e+01
(5)	0.19984392e+01	0.23349207e+01	0.29999734e+01
(6)	0.19999926e+01	0.23333412e+01	0.29999989e+01
(7)	0.20000000e+01	0.23333341e+01	0.29999991e+01

2^o Početne vrednosti: $a_0 = 1,5$; $b_0 = 2,3$; $c_0 = 3,71$.

Vrednosti iteracija:

(0)	0.15000000e+01	0.23000000e+01	0.37100000e+01
(1)	0.18855122e+01	0.23068071e+01	0.31007324e+01
(2)	0.19991346e+01	0.23239351e+01	0.30114682e+01
(3)	0.20000157e+01	0.23331593e+01	0.30001565e+01
(4)	0.19999999e+01	0.23333339e+01	0.29999989e+01
(5)	0.20000000e+01	0.23333338e+01	0.29999988e+01

3^o Početne vrednosti: $a_o = 1,23$; $b_o = 1,91$; $c_o = 4$.

Vrednosti iteracija:

(0)	0.12300000e+01	0.19100000e+01	0.40000000e+01
(1)	0.23042366e+01	0.18730140e+01	0.32969047e+01
(2)	0.23189042e+01	0.19817669e+01	0.30253276e+01
(3)	0.23321036e+01	0.20003810e+01	0.30008901e+01
(4)	0.23333333e+01	0.19999987e+01	0.30000001e+01
(5)	0.23333341e+01	0.20000000e+01	0.29999989e+01

<u>Primer 2.</u> f(x) je sledeći polinom

$$f(x) = x^6 + 2x^5 + \frac{17}{4}x^4 + \frac{21}{4}x^3 + \frac{19}{4}x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}.$$

Njegov jedini realan koren je $-\frac{1}{2}$ i on je dvostruk. Primenjujemo formulu (16) za slučaj $k = 2$.

1^o Početne vrednosti: $a_o = -1$; $b_o = 0$.

Vrednosti iteracija:

(0)	0.10000000e+01	0.00000000e+00
(1)	0.81250000e+00	0.18181818e+00
(2)	0.67780114e+00	0.31952808e+00
(3)	0.59394077e+00	0.40563064e+00
(4)	0.54777879e+00	0.45219403e+00
(5)	0.52399168e+00	0.47600707e+00

(6)	0.51200839e+00	0.48799154e+00
(7)	0.50600577e+00	0.49399424e+00
(8)	0.50300312e+00	0.49699702e+00
(9)	0.50150177e+00	0.49849870e+00
(10)	0.50075082e+00	0.49924919e+00
(11)	0.50037349e+00	0.49962383e+00
(12)	0.50018874e+00	0.49981306e+00
(13)	0.50009326e+00	0.49990561e+00

2^o Početne vrednosti: $a_o = 0$; $b_o = 10$.

Vrednosti iteracija:

(0)	0.00000000e+00	0.10000000e+02
(1)	0.40056881e-05	0.78980285e+01
(2)	0.16209000e-04	0.62103889e+01
(3)	0.53349507e-04	0.48523439e+01
(4)	0.16621939e-03	0.37553974e+01
(5)	0.50855919e-03	0.28636883e+01
(6)	0.15450246e-02	0.21308405e+01
(7)	0.46875438e-02	0.15168655e+01
(8)	0.14371131e-01	0.98409902e+00
(9)	0.46496614e-01	0.48743230e+00
(10)	0.19812175e+00	-0.95341521e-01
(11)	-0.42188259e+00	0.11300744e+00
(12)	-0.41425580e+00	-0.26918951e+00
(13)	-0.36546672e+00	-0.59960748e+00
(14)	-0.44142784e+00	-0.55741170e+00
(15)	-0.47084257e+00	-0.52914289e+00
(16)	-0.48540298e+00	-0.51459685e+00
(17)	-0.49269870e+00	-0.50730128e+00
(18)	-0.49634911e+00	-0.50365098e+00
(19)	-0.49817421e+00	-0.50182545e+00
(20)	-0.49906745e+00	-0.50091338e+00
(21)	-0.49954373e+00	-0.50045567e+00
(22)	-0.49977193e+00	-0.50027756e+00
(23)	-0.49988702e+00	-0.50011734e+00
(24)	-0.49993734e+00	-0.50005744e+00

3^o Početne vrednosti: $a_o = -13$; $b_o = 7$.

Vrednosti iteracija:

(0)	-0.13000000e+02	0.70000000e+01
(1)	-0.10637227e+02	0.65090854e+01
(2)	-0.87316079e+01	0.58234919e+01
(3)	-0.71903747e+01	0.50594989e+01
(4)	-0.59392110e+01	0.43057384e+01
(5)	-0.49192002e+01	0.36062323e+01
(6)	-0.40837854e+01	0.29772655e+01
(7)	-0.33961634e+01	0.24207740e+01
(8)	-0.28271918e+01	0.19317197e+01
(9)	-0.23537480e+01	0.15019420e+01
(10)	-0.19574735e+01	0.11222517e+01
(11)	-0.16238686e+01	0.78381364e+00
(12)	-0.13417988e+01	0.47955582e+00
(13)	-0.11036161e+01	0.20621244e+00
(14)	-0.90608401e+00	-0.32695649e-01
(15)	-0.75101165e+00	-0.22430539e+00
(16)	-0.64152123e+00	-0.35347525e+00
(17)	-0.57416049e+00	-0.42545067e+00
(18)	-0.53752424e+00	-0.46246288e+00
(19)	-0.51881179e+00	-0.48118773e+00
(20)	-0.50941191e+00	-0.49058809e+00
(21)	-0.50470671e+00	-0.49529325e+00
(22)	-0.50235326e+00	-0.49764646e+00
(23)	-0.50117646e+00	-0.46882991e+00
(24)	-0.50058889e+00	-0.49941157e+00
(25)	-0.50029411e+00	-0.49970744e+00
(26)	-0.50014644e+00	-0.49985159e+00
(27)	-0.50007349e+00	-0.49992808e+00

Primer 3. Neka je $f(x)$ sledeća funkcija:

$$f(x) = e^x + x^2 - 2.$$

Ona ima dve realne nule. Njihove približne vrednosti su: $a \approx -1,3159$; $b \approx 0,5372$. Odredjujemo te nule pomoću formula (16) i (17); dakle, u ovom sluačju je $k=2$. Izvod je odredjivan po formuli:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}, \quad \Delta x = 0,001. \tag{36}$$

1^o Početne vrednosti: $a_o = -1,5$; $b_o = 0,5$.

Vrednosti iteracija:

(0)	-0.1500000e+01	0.5000000e+00
(1)	-0.1310064e+01	0.5344544e+00
(2)	-0.1315979e+01	0.5372795e+00
(3)	-0.1315981e+01	0.5372810e+00

2^o Početne vrednosti: $a_o = -1$; $b_o = 0$.

Vrednosti iteracija:

(0)	-0.1000000e+01	0.0000000e+00
(1)	-0.1499970e+01	0.7309931e+00
(2)	-0.1333347e+01	0.5551524e+00
(3)	-0.1316151e+01	0.5374563e+00
(4)	-0.1315974e+01	0.5372475e+00

3^o Početne vrednosti: $a_o = -0,2$; $b_o = 1$.

Vrednosti iteracija:

(0)	-0.2000000e+00	0.1000000e+01
(1)	-0.7809612e+00	0.2643520e+01
(2)	-0.1448932e+00	0.6718178e+01
(3)	-0.1325077e+00	0.5465687e+01
(4)	-0.1316023e+00	0.5373248e+01

4^o Početne vrednosti: $a_o = -10$; $b_o = 12$.

Vrednosti iteracije:

(0)	-0.1000000e+02	0.1200000e+02
(1)	-0.9986792e+01	0.1095207e+02
(2)	-0.9951209e+01	0.9900541e+01
(3)	-0.9856492e+01	0.8844026e+01
(4)	-0.9612180e+01	0.7779442e+01
(5)	-0.9028601e+01	0.6701260e+01
(6)	-0.7849633e+01	0.5600254e+01
(7)	-0.6073271e+01	0.4464255e+01
(8)	-0.4215428e+01	0.3289340e+01
(9)	-0.2788590e+01	0.2130802e+01
(10)	-0.1898367e+01	0.1189426e+01
(11)	-0.1454221e+01	0.6835636e+01
(12)	-0.1326418e+01	0.5480287e+01
(13)	-0.1316039e+01	0.5373412e+01

5° Početne vrednosti: $a_0 = 10$; $b_0 = 15$.

Vrednosti iteracija:

(0)	0.1000000e+02	0.1500000e+02
(1)	0.1003526e+02	0.1375243e+02
(2)	0.1013771e+02	0.1239669e+02
(3)	0.1049679e+02	0.1073936e+02
(4)	0.1810933e+02	0.1801708e+01
(5)	0.1704476e+02	0.1801710e+01
(6)	0.1597489e+02	0.1801714e+01
(7)	0.1489950e+02	0.1801726e+01
(8)	0.1381727e+02	0.1801758e+01
(9)	0.1272660e+02	0.1801846e+01
(10)	0.1162599e+02	0.1802083e+01
(11)	0.1051186e+02	0.1802724e+01
(12)	0.9379663e+01	0.1804457e+01
(13)	0.8220382e+01	0.1809143e+01
(14)	0.7018341e+01	0.1821884e+01
(15)	0.5737311e+01	0.1857142e+01
(16)	0.4291198e+01	0.1960776e+01
(17)	0.2391464e+01	0.2341109e+01
(18)	-0.4324633e+02	0.4614632e+02
(19)	-0.4324633e+02	0.4513531e+02
(20)	-0.4324633e+02	0.4412449e+02
(21)	-0.4324633e+02	0.4311347e+02
(22)	-0.4324633e+02	0.4210218e+02
(23)	-0.4324633e+02	0.4109072e+02
(24)	-0.4324633e+02	0.4007969e+02
(25)	-0.4324633e+02	0.3906780e+02
(26)	-0.4324633e+02	0.3803618e+02
(27)	-0.4324633e+02	0.3704428e+02
(28)	-0.4324633e+02	0.3603245e+02
(29)	-0.4324633e+02	0.3501958e+02
(30)	-0.4324633e+02	0.3400717e+02
(31)	-0.4324633e+02	0.3299494e+02
(32)	-0.4324633e+02	0.3198167e+02
(33)	-0.4324633e+02	0.3096837e+02
(34)	-0.4324633e+02	0.2995562e+02
(35)	-0.4324633e+02	0.2894250e+02
(36)	-0.4324633e+02	0.2792909e+02
(37)	-0.4324633e+02	0.2691558e+02
(38)	-0.4324633e+02	0.2590182e+02
(39)	-0.4324633e+02	0.2488749e+02
(40)	-0.4324633e+02	0.2387320e+02
(41)	-0.4324633e+02	0.2285836e+02
(42)	-0.4324631e+02	0.2184353e+02
(43)	-0.4324627e+02	0.2082846e+02
(44)	-0.4324616e+02	0.1981318e+02
(45)	-0.4324587e+02	0.1879775e+02
(46)	-0.4324508e+02	0.1778183e+02
(47)	-0.4324292e+02	0.1676571e+02
(48)	-0.4323705e+02	0.1574926e+02
(49)	-0.4322113e+02	0.1473246e+02
(50)	-0.4317794e+02	0.1371533e+02
(51)	-0.4306125e+02	0.1269788e+02
(52)	-0.4274837e+02	0.1167972e+02

(53)	-0.4192793e+02	0.1066081e+02
(54)	-0.3989470e+02	0.9640482e+01
(55)	-0.3547768e+02	0.8617731e+01
(56)	-0.2806158e+02	0.7590076e+01
(57)	-0.1944408e+02	0.6552096e+01
(58)	-0.1234218e+02	0.5492756e+01
(59)	-0.7563307e+01	0.4396239e+01
(60)	-0.4618155e+01	0.3255848e+01
(61)	-0.2885084e+01	0.2124521e+01
(62)	-0.1920461e+01	0.1196155e+01
(63)	-0.1459998e+01	0.6900934e+00
(64)	-0.1327085e+01	0.5487041e+00
(65)	-0.1316047e+01	0.5373497e+00

<u>Primer 4</u>. f(x) je funkcija:

$$f(x) = \ln x - \frac{1}{4}x.$$

Ona ima dve realne nule: $a \approx 1{,}4296$, $b \approx 8{,}6131$. Primenjujemo forumle (16) i (17) za slučaj $k = 2$. Izvod $f'(x)$ odredjuje se pomoću formule (36).

1° Početne vrednosti: $a_0 = 1$; $b_0 = 2$.

Vrednosti iteracija:

(0)	0.1000000e+01	0.2000000e+01
(1)	0.1815227e+01	0.3000334e+01
(2)	0.6923690e+00	0.6843649e+01
(3)	0.1197244e+01	0.7782288e+01
(4)	0.1413845e+01	0.4864659e+01
(5)	0.1429615e+01	0.8610139e+01
(6)	0.1429612e+01	0.8613169e+01

2° Početne vrednosti: $a_0 = 0{,}25$; $b_0 = 4$.

Vrednosti iteracija:

(0)	0.2500000e+00	0.4000000e+01
(1)	0.6952987e+00	0.4789550e+01
(2)	0.1251405e+01	0.6195332e+01
(3)	0.1437763e+01	0.7891734e+01
(4)	0.1429310e+01	0.8569229e+01
(5)	0.1429612e+01	0.8612997e+01
(6)	0.1429612e+01	0.8613169e+01

3^{o} Početne vrednosti: $a_o = 4$; $b_o = 10$.

Vrednosti iteracija:

(0)	0.4000000e+01	0.1000000e+02
(1)	0.2860523e+01	0.6254569e+01
(2)	0.1349084e+00	0.6636896e+01
(3)	0.4350256e+00	0.7157410e+01
(4)	0.9356785e+00	0.7803235e+01
(5)	0.1331239e+01	0.8377384e+01
(6)	0.1426561e+01	0.8597537e+01
(7)	0.1429611e+01	0.8613127e+01

D R U G A   G L A V A

Stavovi konvergencije za neke poznate iterativne postupke

1. Istraživanja u ovoj glavi usmerena su ka ispitivanju konvergencije iterativnog postupka navedenog u prethodnoj glavi, ali u graničnim slučajevima kada se odredjuje jedan, odnosno svi koreni polinoma. Preciznije, izložićemo dva stava o konvergenciji: prvi (Teorema 2.) je za Newtonov postupak za polinome, a drugi (Teorema 3.) za postupak S.B.Prešića.

Medju do sada poznatim kriterijumima konvergencije za iterativne postupke ističemo sledeća dva za Newton-Raphsonov postupak.

<u>Kriterijum 1.</u> (A.L.Cauchy, 1829, [16]) Neka je $f(x)$ realna funkcija definisana u intervalu $K_o=\{x \mid |x-x_1|\leqslant |x_1-x_o|\}$ i neka u tom intervalu ima prvi i drugi izvod. Ako početna vrednost x_o zadovoljava uslov

$$(U_1) \qquad 2|x_1-x_o|\,M<\min_{K_o}|f'(x)| \qquad \Big(M\overset{\text{def}}{=}\max_{K_o}|f''(x)|\Big)$$

tada niz

$$(1) \qquad x_{i+1}=x_i-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \qquad (f'(x_o)\neq 0;\quad i=0,1,\ldots)$$

konvergira ka jedinstvenom realnom rešenju ζ jednačine $f(x)=0$ u intervalu K_o. Osim toga važi sledeća relacija

$$|x_i-\zeta|\leqslant\frac{4A}{M}\left[\frac{M\,|x_1-x_o|}{2A}\right]^{2^i} \qquad \Big(A\overset{\text{def}}{=}\min_{K_o}|f'(x)|\ ;\ i=0,1,\ldots\Big).$$

Napominjemo da je Cauchyeva originalna formulacija navedenog stava neprecizna a dokaz nepotpun. Logičkom analizom rada Sur la détermination approximative des racines d'une équation algébrique ou transcendante [16], može se, oslanjajući se na Cauchyeve ideje doći do formulacije i dokaza kriterijuma 1.

Kriterijum 2. (A.Ostrowski, 1939, [45]). Neka je f(x) kompleksna funkcija kompleksne promenljive analitička u krugu $K_0=\{x \mid |x-x_1| \leq |x_1-x_0|\}$ i neka je $f(x_0)f'(x_0)\neq 0$. Ako početna vrednost x_0 zadovoljava uslov

$$(U_2) \qquad 2|x_1-x_0|M \leq |f'(x_0)| \qquad (M=\max_{K_0}|f''(x)|)$$

tada svi članovi niza (x_i), obrazovanog polazeći od tačke x_0 na osnovu formule (1), leže u krugu K_0 i niz (x_i) konvergira. Granična vrednost niza, označimo je sa ζ, je jedinstveno rešenje jednačine $f(x)=0$ u krugu K_0. Rešenje ζ je jednostruko sem možda u slučaju kada ζ leži na rubu kruga K_0. Osim toga, važe sledeće relacije

$$|x_{i+2}-x_{i+1}| \leq \frac{M|x_{i+1}-x_i|^2}{2|f'(x_{i+1})|}, \quad |x_{i+2}-\zeta| \leq \frac{M|x_{i+1}-x_i|^2}{2|f'(x_{i+1})|} \qquad (i=0,1,\ldots)$$

Isti autor formuliše i dokazuje analogan kriterijum za realne funkcije [45].

Izlažemo kraći pregled još nekih rezultata u vezi sa konvergencijom iterativnih postupaka. Osvrćemo se prvenstveno na one radove koji su u vezi sa navedenim kriterijumima.

Ideje navedenih kriterijuma prirodno se produžuju u istraživanja konvergencije Newton-Raphsonovog postupka za sisteme. U tom pravcu radili su F.A.Willers [65] i A.Ostrowski [44], obojica slučaj sistema dve jednačine. Stav konvergencije za opšti slučaj Newtonovog postupka za sisteme (na polju kompleksnih brojeva) dao je K. Bussmann [14], inspirišući se radovima prethodna dva autora za dve jednačine.

Nadovezujući se na nabrojane rezultate L.V.Kantorović [33] dobija kriterijum konvergencije Newtonovog postupka za sistem operatorskih jednačina na vrlo opštim klasama metričkih prostora.

2. Poznatu činjenicu u vezi sa konvergencijom nizova, na koju se oslanjaju dokazi navedenih rezultata i na koju ćemo se i mi pozivati, formulišemo u obliku sledeće leme.

Lema. Neka je $\mathcal{C}(x)$ neprekidna funkcija koja preslikava kompletan metrički prostor X u samog sebe i

$$\text{(I)} \qquad x_{i+1} = \mathcal{C}(x_i)$$

iterativan postupak definisan funkcijom $\mathcal{C}$. Ako je početna vrednost x_o takva da niz (x_i) ima svojstvo

$$\text{(H)} \qquad (\forall i)\left[d(x_{i+2}, x_i) \leq \tfrac{1}{2} d(x_{i+1}, x_i)\right],$$

onda taj niz konvergira ka rešenju jednačine $\mathcal{C}(x)=x$. Osim toga, svi članovi tog niza kao i njegova granična vrednost pripadaju kugli $K_o \overset{def}{=} \{x \mid |x-x_1| \leq |x_1-x_o|\}$.

Dokaz leme proizlazi iz stava o umetnutim kuglama čiji poluprečnici teže nuli. Dovoljno je uočiti kugle: $K_i \overset{def}{=} \{x \mid d(x, x_{i+1}) \leq d(x_{i+1}, x_i)\}$ $(i=0,1,\dots)$.

Uslovi leme su ispunjeni, na primer, u slučaju kada je $\mathcal{C}(x)$ realna funkcija koja u okolini K rešenja $\mathfrak{Z}$ jednačine $x=\mathcal{C}(x)$ (pretpostavljamo da je ta jednačina moguća) ima konačan prvi izvod i još je ispunjen uslov $|\mathcal{C}'(x)| \leq \frac{1}{2}$ u okolini K.

Analizom dokaza navedenih rezultata dolazi se do zaključka da se jedna ideja formulacije nekog kriterijuma konvergencije za postupak (I) sastoji u sledećem:

Naći uslov (formulu) U(x) koji ima svojstvo:

$$\text{(C)} \qquad (\forall i)\left[U(x_i) \Rightarrow U(x_{i+1}) \wedge \left(d(x_{i+2}, x_{i+1}) \leq \tfrac{1}{2} d(x_{i+1}, x_i)\right)\right].$$

U tom slučaju jedan dovoljan uslov konvergencije za iterativan postupak (I) jeste: $U(x_o)$.

Obrazloženje: Uvedimo oznake U(i), H(i) za formule $U(i_i)$,

$d(x_{i+2},x_{i+1}) \leq \frac{1}{2} d(x_{i+1},x_i)$. Tada uslov (C) zajedno sa pretpostavkom U(o) glasi:

$$U(o) \wedge (\forall i)\ (U(i) \Rightarrow U(i+1) \wedge H(i))$$

Polazeći od te formule kao hipoteze imamo sledeće izvodjenje. Konvencija je da je svaka formula u nizu posledica formule koja joj neposredno prethodi.

$U(o) \wedge (\forall i)(U(i) \Rightarrow U(i+1) \wedge H(i))$

(Hipoteza.)

$U(o) \wedge (\forall i)(U(i) \Rightarrow U(i+1) \wedge U(i) \Rightarrow H(i))$

(Prema tautologiji $(p \Rightarrow q \wedge r) \Rightarrow (p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$).)

$U(o) \wedge (\forall i)(U(i) \Rightarrow U(i+1)) \wedge (\forall i)(U(i) \Rightarrow H(i))$

(Prema valjanoj formuli $(\forall x)(\alpha(x) \wedge \beta(x)) \Rightarrow (\forall x)\alpha(x) \wedge (\forall x)\beta(x)$

$(\forall i)U(i) \wedge (\forall i)(U(i) \Rightarrow H(i))$

(Na osnovu principa matematičke indukcije.)

$(\forall i)U(i) \wedge ((\forall i)U(i) \Rightarrow (\forall i)H(i))$

(Prema valjanoj formuli $(\forall x)(\alpha(x) \Rightarrow \beta(x)) \Rightarrow ((\forall x)\alpha(x) \Rightarrow (\forall x)\beta(x))$.)

$(\forall i)H(i)$

(Primenjen je modus ponens.)

Dakle, izvedena je formula (H). Odatle na osnovu leme sledi da postupak (I) konvergira.

Uslovi tipa (C) su značajni jer tada dovoljan uslov konvergencije $U(x_0)$ zavisi samo od <u>početne vrednosti</u> x_0 (i, naravno, od funkcije φ).

3. Ograničimo se sada na Newton — Raphsonov postupak za jednačinu $f(x)=0$ — $f(x)$ je realna funkcija koja ima drugi izvod. Da bi taj postupak konvergirao dovoljno je da u okolini K korena ξ jednačine $f(x)=0$ bude ispunjen jedan od uslova:

$$U_1(x) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \left|\frac{f(x)}{f'(x)}\right| \cdot \frac{\max\limits_K |f''(x)|}{\min\limits_K |f'(x)|} \leq \frac{1}{2}$$

$$U_2(x) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \left|\frac{f(x)}{f'(x)}\right| \cdot \frac{\max\limits_K |f''(x)|}{|f'(x)|} \leq \frac{1}{2}$$

(Pretpostavljamo da je $f(x)=0$ moguća jednačina i da su formule $U_1(x)$ $U_2(x)$ definisane u K). Razlog: Svaki od uslova $U_1(x)$, $U_2(x)$ povlači uslov $|\varphi'(x)| \leq \frac{1}{2}$.[1] Medjutim, formule $U_1(x)$, $U_2(x)$ su upravo takve da imaju svojstvo (C). Prema tome, $U_1(x_0)$, $U_2(x_0)$ su dva <u>dovoljna uslova konvergencije</u> Newtonovog postupka. To su upravo uslovi Cauchya i Ostrowskog navedeni u kriterijumima 1. i 2., s tim što je i okolina K precizirana: $K = K_0$.

Poseban slučaj Cauchyevog i kriterijuma Ostrowskog jeste slučaj kada je $f(x)$ polinom. Zbog raznih "dobrih svojstava" polinoma, a specijalno zbog svojstva da je drugi izvod $f''(x)$ funkcija of $f''(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$, $x-x_0$ (recimo reč je o polinomu stepena n) nameće se problem: <u>Naći kriterijum konvergencije Newtonovog postupka za polinome, ali takav da on zavisi od vrednosti funkcije i njenih izvoda samo u početnoj tački x_0.</u> Razlog za rešavanje takvog problema je što odredjivanje maksimuma drugog izvoda (ili minimuma prvog izvoda), u opštem slučaju, nije ništa manji problem od odredjivanja korena polinoma $f(x)$.

Deo istraživanja u ovoj glavi usmeren je ka rešavanju tog problema. Jedan rezultat u tom smislu jeste teorema 2.

Za postupak S.B.Prešića [49] nije do sada poznat ni jedan kriterijum konvergencije (sem opšteg okolinskog kriterijuma navedenog od autora).

---

1) U ovom slučaju je $\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$, jer je reč o Newton-Raphsonovom postupku.

Drugi deo istraživanja u ovoj glavi usmeren je ka dobijanju jednog kriterijuma konvergencije tog postupka koji zavisi samo od početnih vrednosti. Takav jedan kriterijum daje Teorema 3.

4. Navodimo sada jedan dovoljan kriterijum konvergencije Newton-Raphsonovog postupka za polinome.

Teorema 2. Neka je

$$(2)\qquad f(x) = x^n + p_{n-1}x^{n-1}+\dots+p_1x+p_0$$

polinom stepena $n(n\geqslant 9)$ na polju kompleksnih brojeva. Newton-Raphsonov postupak, tj. niz (x_i) odredjen formulom

$$(I_1)\qquad x_{i+1}=x_i-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}\qquad (f'(x_0)\neq 0)$$

konvergira, ukoliko početna vrednost x_0 zadovoljava uslov

$$U(0)\ \dots\quad \left|-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right|\leq\frac{|f'(x_0)|}{nM(x_0)}$$

gde je $M(x)\overset{\text{def}}{=}\max\left\{\frac{|f'(x)|}{1!},\ \frac{|f''(x)|}{2!},\dots,\ \frac{|f^{(n)}(x)|}{n!}=1\right\}$.

U tom slučaju granična vrednost niza (x_i) je jednostruki koren polinoma $f(x)$ koji, kao i svi članovi niza (x_i), leži u krugu $K_0 = \{x \mid |x-x_1|\leq|x_1-x_0|\}$.

Dokaz. uvodimo najpre sledeće oznake

$$(3)\qquad \begin{aligned} &h(i)\ \text{je zamena za izraz}\ -\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}\quad (=x_{i+1}-x_i)\qquad (i=0,1,\dots)\\ &U(i)\ \text{je zamena za formulu}\ |h(i)|\leq\frac{|f'(x_i)|}{nM(x_i)}\qquad (i=0,1,\dots)\end{aligned}$$

Dokazujemo da je niz (x_i) pod navedenim uslovima definisan i da formula U(i) ima svojstvo (C). Na osnovu tautologije $(p\Rightarrow q\wedge r)\Rightarrow(p\Rightarrow q)\wedge(p\Rightarrow r)$ dovoljno je dokazati sledeća tvrdjenja (za proizvoljan i):

(α) $U(i) \Rightarrow (f'(x_{i+1}) \neq 0)$,

(β) $U(i) \Rightarrow (|h(i+1)| \leq \frac{1}{2}|h(i)|)$,

(γ) $U(i) \Rightarrow U(i+1)$.

Tvrdjenje (α) obezbedjuje definisanost niza (x_i) a tvrdjenja (β) i (γ) svojstvo (C).

5. <u>Dokaz formule (α)</u>. Neka je $U(i)$ hipoteza. Tada je $h(i)$ definisano, tj. $f'(x_i) \neq 0$. Dokazujemo da je tada i $f'(x_{i+1}) \neq 0$. Kako je $f(x)$ kompleksan polinom to važi identitet

$$(4) \quad f(x_{i+1}) = f(x_i) + \frac{f'(x_i)}{1!}(x_{i+1}-x_i) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}(x_{i+1}-x_i)^n.$$

Diferenciranjem po x_{i+1} iz (4) dobijamo identitet

$$(4') \quad f'(x_{i+1}) = f'(x_i) + \frac{f''(x_i)}{1!}(x_{i+1}-x_1) + \frac{f'''(x_i)}{2!}(x_{i+1}-x_i)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_i)}{(n-1)!}(x_{i+1}-x_i)^{n-1}.$$

Polazeći od (4') izvodimo sledeće nejednakosti:

$$|f'(x_{i+1}) - f'(x_i)| \leq \frac{|f''(x_i)|}{1!}|h(i)| + \frac{|f'''(x_i)|}{2!}|h(i)|^2 + \ldots + \frac{|f^{(n)}(x_i)|}{(n-1)!}|h(i)|^{n-1}$$

(Koristili smo: $|A+B| \leq |A| + |B|$ i definiciju za $h(i)$.)

$$\leq M(x_i)(2|h(i)| + 3|h(i)|^2 + \ldots + n|h(i)|^{n-1})$$

(Na osnovu definicije za $M(x)$.)

$$\leq M(x_i)\left[\frac{2}{n} \cdot \frac{|f'(x_i)|}{M(x_i)} + \frac{3}{n^2} \cdot \frac{|f'(x_i)|^2}{M(x_i)^2} + \ldots + \frac{n}{n^{n-1}} \cdot \frac{|f'(x_i)|^{n-1}}{M(x_i)^{n-1}}\right]$$

(Koristili smo hipotezu $U(i)$.)

$$\leq |f'(x_i)|\left[\frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}\frac{|f'(x_i)|}{M(x_i)} + \ldots + \frac{n}{n^{n-1}} \cdot \frac{|f'(x_i)|^{n-2}}{M(x_i)^{n-2}}\right]$$

$$\leq |f'(x_i)| \left(\frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^{n-1}}\right)$$

(jer je $|f'(x)| \leq M(x)$)

$$= \frac{2n-1}{(n-1)^2} \, |f'(x_i)|$$

(Obavljeno je sumiranje reda: $\frac{2}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{4}{n^3} + \ldots$)

Izvedena je nejednakost

$$(5) \quad |f'(x_{i+1}) - f'(x_i)| \leq \frac{2n-1}{(n-1)^2} |f'(x_i)|$$

Kako je za $n \geq 4$ tačna nejednakost $\frac{2n-1}{(n-1)^2} < 1$, to se iz (5) dobija:

$|f'(x_{i+1}) - f'(x_i)| < |f'(x_i)|$, odakle neposredno sledi $f'(x_{i+1}) \neq 0$, što je i trebalo dokazati.

6. <u>Dokaz formule (β)</u>. Polazeći od identiteta $f'(x_{i+1}) =$ $= f'(x_i) + f'(x_{i+1}) - f'(x_i)$ minoriramo broj $|f'(x_{i+1})|$:

$$|f'(x_{i+1})| \geq \big|\, |f'(x_i)| - |f'(x_{i+1}) - f'(x_i)| \,\big|$$

(Na osnovu nejednakosti $|A+B| \geq \big||A| - |B|\big|$, za kompleksne brojeve.)

$$\geq |f'(x_i)| - |f'(x_{i+1}) - f'(x_i)|$$

(Na osnovu nejednakosti $|A| \geq A$, za realne brojeve.)

$$\geq |f'(x_i)| - \frac{2n-1}{(n-1)^2} |f'(x_i)|$$

(Koristili smo nejednakost (5))

$$= \frac{n^2-4n+2}{(n-1)^2} \, f'(x_i)$$

Izvedena je nejednakost

$$(6) \quad |f'(x_{i+1})| \geq \frac{n^2-4n+2}{(n-1)^2} \, |f'(x_i)|,$$

kod koje je izraz $\frac{n^2-4n+2}{(n-1)^2}$ pozitivan, kao što je ranije dokazano.

Polazeći od identiteta (4) izvodimo sledeće nejednakosti:

$$|f(x_{i+1})| = \left| \frac{f''(x_i)}{2} h(i)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!} h(i)^n \right|$$

(Na osnovu definicije (I_1) niza (x_i) i definicije za $h(i)$.

$$\leq M(x_i)|h(i)|^2(1+|h(i)|+\ldots+|h(i)|^{n-2})$$

(Koristili smo: $|A+B| \leq ||A|+|B||$ i definiciju za $M(x)$.)

$$\leq M(x_i)|h(i)|^2(1+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n^{n-2}})$$

(jer iz hipoteze $U(i)$ i definicije za $M(x)$ sledi:
$|h(i)| \leq \frac{1}{n}$)

$$\leq M(x_i)|h(i)|^2(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\ldots)$$

$$= M(x_i)|h(i)|^2 \cdot \frac{n}{n-1} .$$

Prema tome, izveli smo nejednakost:

(7) $$|f(x_{i+1})| \leq M(x_i)|h(i)|^2 \cdot \frac{n}{n-1} .$$

Koristeći nejednakosti (6) i (7) dobijamo nejednakost

(8) $$|h(i+1)| \leq \frac{M(x_i)|h(i)|^2}{|f'(x_i)|} \cdot \frac{n(n-1)}{n^2-4n+2} ,$$

odnosno

(8′) $$\left|\frac{h(i+1)}{h(i)}\right| \leq \frac{n\, M(x_i)|h(i)|}{|f'(x_i)|} \cdot \frac{n-1}{n^2-4n+2} .$$

Prema hipotezi $U(i)$ prvi umnožak na desnoj strani nejednakosti (8′) je manji ili jednak 1. Dakle:

$$\left|\frac{h(i+1)}{h(i)}\right| \leq \frac{n-1}{n^2-4n+2} .$$

Dokazujemo da je $\frac{n-1}{n^2-4n+2} \leq \frac{1}{2}$:

$$\frac{n-1}{n^2-4n+2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow n^2-6n+4 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow n \leq 3-\sqrt{5} \vee n \geq 3+\sqrt{5}.$$

Dakle razmatrana nejednakost je sigurno tačna za $n \geq 9$. Odavde sledi

$$|h(i+1)| \leq \frac{1}{2}|h(i)| \tag{9}$$

čime je završen dokaz tvrdjenja (β).

7. Dokaz formule (γ). Vratimo se ponovo na identitet (4). Uzastopnim diferenciranjem po x_{i+1} dobijamo

$$f^{(m)}(x_{i+1}) = f^{(m)}(x_i) + \frac{f^{(m+1)}(x_i)}{1!}(x_{i+1}-x_i) + \frac{f^{(m+2)}(x_i)}{2!}(x_{i+1}-x_i)^2$$
$$+\ldots+ \frac{f^{(n)}(x_i)}{(n-m)!}(x_{i+1}-x_i)^{n-m} \qquad (m=1,2,\ldots,n).$$

Polazeći od te jednakosti majoriramo $\frac{|f^{(m)}(x_i)|}{m!}$ $(m=1,2,\ldots,n)$:

$$\frac{|f^{(m)}(x_{i+1})|}{m!} \leq M(x_i)\left[\binom{m}{m}+\binom{m+1}{m}|h(i)| + \binom{m+2}{m}|h(i)|^2+\ldots+\binom{n}{m}|h(i)|^{n-m}\right]$$

(Koristili smo nejednakost $|A+B| \leq ||A|+|B||$ i definiciju za $M(x)$ i $h(i)$.)

$$\leq M(x_i)\left[\binom{m}{0}+\binom{m+1}{1}\cdot\frac{1}{n}+\ldots+\binom{m+s}{s}\cdot\frac{1}{n^s}+\ldots+\binom{n}{n-m}\cdot\frac{1}{n^{n-m}}\right]$$

(jer: $U(i) \Rightarrow |h(i)| \leq \frac{1}{n}$ i $\binom{\ell}{k}=\binom{\ell}{\ell-k}$.)

$$\leq M(x_i)\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{(n-m)!}\right)$$

(Razlog: $\binom{m+s}{s}\cdot\frac{1}{n^s} = \frac{1!}{s!}\cdot\frac{m+s}{n}\,\frac{m+s-1}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{m+1}{n}$

$(s=0,\ldots,n-m)$ i $\frac{m+s}{n} \leq 1 \wedge \frac{m+s-1}{n} \leq 1 \wedge \ldots \wedge \frac{m+1}{n} \leq 1$)

$$\leq M(x_i)\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots\right)$$

$$\leq e\cdot M(x_i)$$

(Koristili smo: $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} = e$)

Znači izvedena je nejednakost

$$\frac{|f^{(m)}(x_i)|}{m!} \leq eM(x_i) \qquad (m=1,2,\ldots,n)$$

na osnovu koje neposredno sledi

$$\text{(10)} \qquad M(x_{i+1}) \leq eM(x_i)$$

Uslov U(i+1) ekvivalentan je sa formulom $\frac{n\cdot|h(i+1)|M(x_{i+1})}{|f'(x_{i+1})|} \leq 1.$

Dokazujemo da je ta formula tačna.
Koristeći nejednakost (lo) i nejednakost $e<3$ imamo

$$\frac{n|h(i+1)|M(x_{i+1})}{|f'(x_{i+1})|} \leq \frac{3n|h(i+1)|M(x_i)}{|f'(x_{i+1})|}$$

$$\leq \left[\frac{n|h(i)|M(x_i)}{f'(x_i)}\right]^2 \cdot 3 \cdot \frac{(n-1)^3}{(n^2-4n+2)^2}$$

(Koristili smo nejednakosti (6) i (8).

$$\leq \frac{3(n-1)^3}{(n^2-4n+2)^2}$$

(Na osnovu hipoteze U(i).)

Ostaje još da se dokaže da je $\frac{3(n-1)^3}{(n^2-4n+2)^2} \leq 1$. Ta nejednakost ekvivalentna je sa nejednakošću

$$n^4-11n^3 + 29n^2-25n+7 \geqslant 0$$

koja je tačna za $n \geqslant 9$ (jer su, na primer, svi izvodi funkcije $H(x)= =x^4-11x^3+29x^2-25x+7$ pozitivni u tački $x=9$). Na taj način dokazana je i formula $U(i) \Longrightarrow U(i+1)$.
Iz svega do sada dokazanog sledi da niz (x_i) konvergira ka korenu polinoma f(x). Označimo taj koren sa ξ.

8. Dokaz da je ζ jednostruki koren polinoma $f(x)$. Majoriramo razliku $|f'(\zeta)-f(x_i)|$ polazeći od identiteta $f'(\zeta)-f'(x_i) = f'(\zeta)-f'(x_{i+1})+f'(x_{i+1})-f'(x_i)$:

$$|f'(\zeta)-f'(x_i)| \leq |f'(\zeta)-f'(x_{i+1})| + |f'(x_{i+1})-f'(x_i)| .$$

Dalje koristimo ranije izvedenu nejednakost (5) i nejednakost

(11) $$|f'(\zeta) - f'(x_{i+1})| \leq \frac{e(2n-1)}{(n-1)^2}$$

čije je izvodjenje sledeće:

$$|(f'(\zeta)-f'(x_{i+1})| = |f''(x_{i+1})(\zeta - x_{i+1})+\ldots+ \frac{f^{(n)}(x_{i+1})}{(n-1)!}(\zeta - x_{i+1})^{n-1}$$

(Na osnovu Taylorove formule.)

$$\leq M(x_{i+1})(2|\zeta - x_{i+1}| +\ldots+ n|\zeta - x_{i+1}|^{n-1})$$

(Korišćena je nejednakost trougla i definicija za $M(x)$)

$$\leq M(x_{i+1})(2|h(i)| +\ldots+n|h(i)|^{n-1}) .$$

(jer: $(\forall i)(\zeta \in K_i)$, odnosno $|\zeta - x_{i+1}| \leq |h(i)|$)

$$\leq eM(x_i)(2|h(i)| +\ldots+ n|h(i)|^{n-1})$$

(Prema nejednakosti (10).

$$\leq e\,\frac{2n-1}{(n-1)^2}\;f'(x_i)$$

(Izvodjenje do poslednje nejednakosti je isto kao odgovarajući deo izvodjenja nejednakosti (5)).

Na osnovu (5) i (11) važi nejednakost

$$|f'(\zeta)-f(x_i)| \leq (e+1)\,\frac{2n-1}{(n-1)^2}\,|f'(x_i)|,$$

odnosno nejednakost

(12) $$|f'(\zeta)-f'(x_i)| < |f'(x_i)|$$

za koju je dovoljno dokazati

$$(e+1)\ \frac{2n-1}{(n-1)^2} < 1$$

Rešavanjemte kvadratne nejednačine zaključuje se da je ona ispunjena za $n > e+2+\sqrt{e^2+3e+3}$, odnosno sigurno za $n \geqslant 9$.

Iz (12) sledi $f'(\xi) \neq 0$, odnosno ξ je jednostruki koren polinoma $f(x)$.

9. Kao što je poznato, Newton-Raphsonov iterativni postupak u tesnoj je vezi sa Teylorovim polinomom. Baš ta činjenica leži u osnovi dokaza Teoreme 2.

U daljem navodimo jedan kriterijum konvergencije (koji zavisi od početnih vrednosti i od rastojanja medju njima) za postupak S.B.Prešića koji je, kao što je ranije rečeno, graničan slučaj (k=n) postupka [50] navedenog u prvoj glavi. Kako se do ideje za te formule dolazi polazeći od Newtonovog, odnosno Lagrangeevog interpolacionog polinoma (to je jedan način dobijanja formula (6),I gl.) to će se i dokaz sledeće teoreme zasnivati na toj činjenici.

Teorema 3. Neka je

$$(13) \qquad f(x) = x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \dots + p_1 x + p_0$$

polinom stepena n ($n \geqslant 2$) na polju kompleksnih brojeva. Označimo korene polinoma (13) sa

$$(14) \qquad a, b, \dots, s$$

i pretpostavimo da su oni svi medju sobom različiti. Iterativni postupak odredjen formulama

$$(I_n) \qquad \begin{aligned} a_{i+1} &= a_i - \frac{f(a_i)}{(a_i-b_i)\dots(a_i-s_i)} \\ &\vdots \\ s_{i+1} &= s_i - \frac{f(s_i)}{(s_i-a_i)\dots(s_i-r_i)} \end{aligned}$$

$(a_0, \dots, s_0$ medjusobno različiti)

konvergira, ukoliko početne vrednosti $a_0, \dots, s_0$ zadovoljavaju uslove

$$A(o) \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{|-f(a_o)|}{|a_o-b_o| \ldots |a_o-s_o|} \leq \frac{|a_o-b_o| \ldots |a_o-s_o|}{7(n-1)\ M(o)^{n-2}},$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$S(o) \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{|-f(s_o)|}{|s_o-a_o| \ldots |s_o-r_o|} \leq \frac{|s_o-a_o| \ldots |s_o-r_o|}{7(n-1)\ M(o)^{n-2}},$$

gde je $M(i) \stackrel{def}{=} \max \{|a_i-b_i|, \ldots, |a_i-s_i|, \ldots\ldots, |r_i-s_i|\}$.

U tom slučaju granična vrednost niza (x_i) je koren polinoma $f(x)$ koji, kao i svi članovi niza (x_i), leži u krugu $K_o \stackrel{def}{=} \{x \mid |x-x_1| \leq |x_1-x_o|\}$, gde je $(x_i) \in \{(a_i), \ldots, (s_i)\}$.

1o. Dokaz. Kako su nizovi $(a_i), \ldots, (s_i)$ definisani pomoću simetričnih formula (I_n), dovoljno je za dokaz njihove konvergencije ograničiti se na jedan od njih.

Uvodimo sledeće oznake

$A(i)$ je zamena za formulu $\dfrac{|-f(a_i)|}{|a_i-b_i| \ldots |a_i-s_i|} \leq \dfrac{|a_i-b_i| \ldots |a_i-s_i|}{7(n-1)\ M(i)^{n-2}}$,

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$S(i)$ je zamena za formulu $\dfrac{|-f(s_i)|}{|s_i-a_i| \ldots |s_i-r_i|} \quad \dfrac{|s_i-a_i| \ldots |s_i-r_i|}{7(n-1)\ M(i)^{n-2}}$.

Neka je, dalje (x_i) bilo koji od nizova $(a_i), \ldots, (s_i)$ i $X(i)$ njemu odgovarajuća formula iz niza formula $A(i), \ldots, S(i)$.

Na osnovu rečenog, dokazujemo da je pod navedenim uslovima niz (x_i) definisan i da konvergira ka korenu polinoma $f(x)$ koji leži u krugu K_o. Slično kao kod dokaza Teoreme 2. za to je dovoljno dokazati sledeća tvrdjenja (za proizvoljan i):

(α') $\quad A(i) \wedge \ldots \wedge S(i) \Longrightarrow (a_{i+1}, \ldots, s_{i+1}$ su medjusobno različiti),

(β') $\quad A(i) \wedge \ldots \wedge S(i) \Longrightarrow (|x_{i+2}-x_{i+1}| \leq \frac{1}{2} |x_{i+1}-x_i|)$,

(γ') $\quad A(i) \wedge \ldots \wedge S(i) \Longrightarrow X(i+1)$

Obrazloženje: Neka su tvrdjenja (α'), (β'), (γ') dokazana i neka su $A(i)$, ..., $S(i)$ hipoteze. Formule $A(i), \ldots, S(i)$ su tada definisane, što znači da su $a_i, \ldots, s_i$ medjusobno različiti. Iz (α') sledi da su $a_{i+1}, \ldots, s_{i+1}$ medjusobno različiti pa su prema tome i formule

$A(i+1),\ldots,S(i+1)$ definisane. Koristeći princip matematičke indukcije i osnovne hipoteze Teoreme 3.: $A(o),\ldots,S(o)$, zaključujemo da (zbog tvrdjenja (γ')) važi $(\forall i)X(i)$. To za sobom povlači definisanost niza (x_i). Kako je (x_i) proizvoljan od nizova $(a_i),\ldots,(s_i)$, to znači da su svi ti nizovi definisani i da su sve formule: $(\forall i)A(i),\ldots,(\forall i)S(i)$ tačne. Na osnovu toga i (β') izvodi se tvrdjenje

$$(\forall i)(|x_{i+2}-x_{i+1}|\leq\frac{1}{2}|x_{i+1}-x_i|).$$

Dalje se primenjuje Lema i dokazuje se da niz (x_i) konvergira ka korenu polinoma $f(x)$ koji leži u krugu K_o.

Zaključak o konvergenciji nizova $(a_i),\ldots,(s_i)$ ka <u>korenima</u> polinoma $f(x)$ sledi iz sledeće ekvivalencije

$$\left[\begin{array}{l} x = x - \dfrac{f(x)}{(x-y)\ldots(x-v)} \\ \wedge \\ \vdots \\ \wedge \\ v = v - \dfrac{f(v)}{(v-x)\ldots(v-u)} \end{array}\right] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{c} f(x) = 0 \\ \wedge \\ \vdots \\ \wedge \\ f(v) = 0 \end{array}\right],$$

gde su $x,\ldots,v$ medjusobno različiti kompleksni brojevi ($\underline{n}$ ih je na broju).

11. U daljem su nam stalno hipoteze formula $A(i),\ldots,S(i)$. Neka je $(x_i),(y_i),\ldots,(v_i)$ ona ciklična permutacija niza $(a_i),\ldots,(s_i)$ koja dovodi (x_i) na prvo mesto. Često ćemo se pozivati na sledeće tri nejednakosti

(i) $\quad |x_{i+1}-x_i|\leq\dfrac{|x_i-y_i|}{7(n-1)}$

(ii) $\quad |x_{i+1}-y_{i+1}|\leq\dfrac{7n-5}{7(n-1)}\,|x_i-y_i|$

(iii) $\quad |x_{i+1}-y_{i+1}|\geq\dfrac{7n-9}{7(n-1)}\,|x_i-y_i|$

<u>Njihova izvodjenja su sledeća</u>:

Za nejednakost (i):

$$|x_{i+1}-x_i| = \frac{|-f(x_i)|}{|x_i-y_i|\cdots|x_i-v_i|}$$

(Na osnovu definicije niza (x_i).)

$$\leq \frac{|x_i-y_i|\cdots|x_i-v_i|}{7(n-1)\ M(i)^{n-2}}$$

(Prema hipotezi $X(i)$.)

$$\leq \frac{|x_i-y_i|\,M(i)^{n-2}}{7(n-1)\ M(i)^{n-2}}$$

(Koristili smo definiciju za $M(i)$.)

Za nejednakost (ii):

$$|x_{i+1}-y_{i+1}| = |x_{i+1}-x_i+x_i-y_i+y_i-y_{i+1}|$$

$$\leq |x_{i+1}-x_i| + |x_i-y_i| + |y_{i+1}-y_i|$$

(prema nejednakosti $|A+B| \leq |A| + |B|$, za kompleksne brojeve.)

$$\leq \frac{|x_i-y_i|}{7(n-1)} + |x_i-y_i| + \frac{|y_i-x_i|}{7(n-1)}$$

(na osnovu nejednakosti (i)-primenjena je dva puta.)

$$= \frac{7n-5}{7(n-1)}\,|x_i-y_i|.$$

Za nejednakost (iii):

$$|x_{i+1}-y_{i+1}| = |x_{i+1}-x_i + x_i-y_i + y_i-y_{i+1}|$$

$$\geq \big||x_i-y_i| - |x_{i+1}-x_i+y_i-y_{i+1}|\big|$$

(prema nejednakosti $|A+B| \geq ||A|-|B||$, za kompleksne brojeve.)

$$\geq |x_i-y_i| - |x_{i+1}-x_i+y_i-y_{i+1}|$$

(prema nejednakosti $|A| \geq A$, za realne brojeve.)

$$\geq |x_i-y_i| - |x_{i+1}-x_i| - |y_{i+1}-y_i|$$

(Koristili smo nejednakost trougla za kompleksne brojeve.)

$$\geqslant |x_i-y_i| - \frac{|x_i-y_i|}{7(n-1)} - \frac{|y_i-x_i|}{7(n-1)}$$

(na osnovu nejednakosti (i).)

$$= \frac{7n-9}{7(n-1)} |x_i-y_i|.$$

12. Dokaz formule (α'). Polazimo od hipoteze $A(i),\ldots,S(i)$. Prema njima su $a_i,\ldots,s_i$ medjusobno različiti. Dokazujemo da su i $a_{i+1},\ldots, s_{i+1}$ medjusobno različiti. Neka su x_{i+1}, y_{i+1} proizvoljna dva člana poslednjeg niza. Na osnovu nejednakosti (iii) je $|x_{i+1}-y_{i+1}| \geqslant \frac{7n-9}{7(n-1)} |x_i-y_i|$. Oba broja $\frac{7n-9}{7(n-1)}$, $|x_i-y_i|$ su pozitivna pa je i $|x_{i+1}-y_{i+1}|$ pozitivan broj. Odatle sledi: $x_{i+1} \neq y_{i+1}$.

13. Dokaz formule (β'). Deobom polinoma $f(x)$ polinomom $(x-x_i)\ldots(x-v_i)$ u tački $x = x_{i+1}$ dobija se sledeći identitet

$$f(x_{i+1})=(x_{i+1}-x_i)\ldots(x_{i+1}-v_i)+ \frac{f(x_i)}{(x_i-y_i)\ldots(x_i-v_i)}(x_{i+1}-y_i)\ldots(x_{i+1}-v_i)$$

$$(15) \qquad + \frac{f(y_i)}{(y_i-x_i)\ldots(y_i-v_i)} (x_{i+1}-x_i)\ldots(x_{i+1}-v_i)+\ldots+$$

$$+ \frac{f(v_i)}{(v_i-x_i)\ldots(v_i-u_i)} (x_{i+1}-x_i)\ldots(x_{i+1}-u_i).$$

Na desnoj strani je, u stvari, zbir i Lagrangeevog interpolacionog polinoma u ostatka.

Na osnovu definicije niza (x_i) važi jednakost

$$\frac{f(x_i)}{(x_i-y_i)\ldots(x_i-v_i)} = - (x_{i+1}-x_i).$$

Odatle sledi da je zbir prva dva sabirka na desnoj strani identiteta (15) jednak nuli.

Polazeći od identiteta (15) izvodimo nejednakost:

$$(16) \qquad |f(x_{i+1})| \leq |x_{i+1}-x_i| \frac{1}{7} \cdot \left[\frac{7n-6}{7(n-1)}\right]^{n-2} |x_i-y_i| \ldots |x_i-v_i| .$$

Izvodjenje je sledeći niz nejednakosti:

$$|f(x_{i+1})| \leq \frac{|-f(y_i)|}{|y_i-x_i| \dots |y_i-v_i|} |x_{i+1}-x_i| \dots |x_{i+1}-v_i| + \dots +$$

$$\frac{|-f(v_i)|}{|v_i-x_i| \dots |v_i-u_i|} |x_{i+1}-x_i| \dots |x_{i+1}-u_i|$$

(Koristili smo nejednakost trougla za kompleksne brojeve).

$$\leq |x_{i+1}-x_i| \left[\frac{|x_i-y_i|}{7(n-1)} |x_{i+1}-z_i| \dots |x_{i+1}-v_i| + \dots + \right.$$

$$\left. \frac{|x_i-v_i|}{7(n-1)} |x_{i+1}-y_i| \dots |x_{i+1}-u_i| \right]$$

(na osnovu definicije nizova $(a_i), \dots, (s_i)$ i nejednakosti (i))

$$\leq |x_{i+1}-x_i| \left[\frac{1}{7(n-1)} \left(\frac{7n-6}{7(n-1)}\right)^{n-2} |x_i-y_i| \dots |x_i-v_i| + \dots + \right.$$

$$\left. \frac{1}{7(n-1)} \left(\frac{7n-6}{7(n-1)}\right)^{n-2} |x_i-y_i| \dots |x_i-v_i| \right]$$

(Primenjena je više puta nejednakost (ii).)

$$= |x_{i+1}-x_i| \cdot \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{7n-6}{7(n-1)}\right)^{n-2} |x_i-y_i| \dots |x_i-v_i|.$$

Iz nejednakosti (iii) neposredno se izvodi nejednakost

(17) $$|x_{i+1}-y_{i+1}| \dots |x_{i+1}-v_{i+1}| \geq \left(\frac{7n-9}{7(n-1)}\right)^{n-1} |x_i-y_i| \dots |x_i-v_i| .$$

Dalje, na osnovu nejednakosti (16) i (17) dobijamo

(18) $$|x_{i+2}-x_{i+1}| \leq \frac{n-1}{7n-6} \left(\frac{7n-6}{7n-9}\right)^{n-1} |x_{i+1}-x_i| .$$

Ostaje još da se dokaže nejednakost:

(19) $$\frac{n-1}{7n-6} \left(\frac{7n-6}{7n-9}\right)^{n-1} \leq \frac{1}{2} .$$

Prema Bernulijevoj nejednakosti je: $\left(1-\frac{3}{7n-6}\right)^{n-1} \geq 1 - \frac{3(n-1)}{7n-6}$.

Odakle dobijamo da je nejednakost (19) tačna, ukoliko je tačno:

$1 - \frac{3(n-1)}{7n-6} \geqslant \frac{2(n-1)}{7n-6}$. Ova formula je ekvivalentna sa tačnom formulom $2n \geqslant 1$, čime je i ovaj deo dokaza završen.

14. Dokaz formule (γ'). Formula $X(i+1)$, koju treba dokazati, ekvivalentna je sa formulom

$$\frac{7(n-1)|x_{i+2}-x_{i+1}|\,M(i+1)^{n-2}}{|x_{i+1}-y_{i+1}|\cdots|x_{i+1}-v_{i+1}|} \leqq 1 . \tag{2o}$$

U dokazu te nejednakosti koristimo, izmedju ostalog, i nejednakost

$$M(i+1) \leqslant \frac{7n-5}{7(n-1)} M(i) \tag{21}$$

koja je direktna posledica formule (ii).

Izvodjenje formule (2o) je sledeće:

$$\frac{7(n-1)|x_{i+2}-x_{i+1}|\,M(i+1)^{n-2}}{|x_{i+1}-y_{i+1}|\cdots|x_{i+1}-v_{i+1}|} \leqslant \frac{7(n-1)^2}{(7n-6)(7n-5)}\left(\frac{7n-6}{7n-9}\right)^{n-1}\left(\frac{7n-5}{7n-9}\right)^{n-1} \cdot$$

$$\cdot \frac{7(n-1)|x_{i+1}-x_i|\,M(i)^{n-2}}{|x_i-y_i|\cdots|x_i-v_i|}$$

(Korišćene su nejednakosti (17),(18), (21).)

$$\leqq \frac{7(n-1)^2}{(7n-6)(7n-5)} \cdot \left(\frac{7n-6}{7n-9}\right)^{n-1}\left(\frac{7n-5}{7n-9}\right)^{n-1}$$

(Na osnovu hipoteze $X(i)$)

$$\leqq 1 .$$

Poslednja nejednakost u prethodnom nizu ekvivalentna je sa

$$\left(1-\frac{3(n-1)}{7n-6}\right)^{n-1} \cdot \left(1-\frac{4}{7n-5}\right)^{n-1} \geqslant \frac{7(n-1)^2}{(7n-6)(7n-5)} , \tag{22}$$

a ova je, na osnovu Bernulijeve nejednakosti, tačna, ukoliko je

$$\left(1-\frac{3(n-1)}{7n-6}\right) \cdot \left(1-\frac{4(n-1)}{7n-5}\right) \geqslant \frac{7(n-1)^2}{(7n-6)(7n-5)} \tag{23}$$

tačna jednakost. Dalje, kako je

$$1 - \frac{3(n-1)}{7n-6} \geqslant \frac{3(n-1)}{7n-6}, \quad 1 - \frac{4(n-1)}{7n-5} \geqslant \frac{3(n-1)}{7n-5},$$

to je nejednakost (23) tačno, ukoliko je

$$\frac{3(n-1)}{7n-6} \cdot \frac{3(n-1)}{7n-5} \geqslant 7 \cdot \frac{n-1}{7n-6} \cdot \frac{n-1}{7n-5} \tag{24}$$

tačno. Nejednakost (24) ekvivalentna je sa $9>7$. Dakle, (22) je tačna formula, pa je samim tim i izvodjenje formule (2o) završeno.
Na taj način dokazano je tvrdjenje (γ').
Na osnovu obrazloženja datog na početku dokaza Teoreme 3. zaključujemo da svi nizovi $(a_i),\ldots,(s_i)$ imaju svojstvo (H) iz iskaza Leme, pa prema tome svi oni konvergiraju. Osim toga granične vrednosti tih nizova pripadaju redom kuglama

$$\{x \mid |x-a_{i+1}| \leq |a_{i+1}-a_i|\}, \ldots, \{x \mid |x-s_{i+1}| \leq |s_{i+1}-s_i|\}.$$

Ovim je dokaz teoreme završen.

T R E Ć A   G L A V A

Jedan metod dobijanja ubrzanih formula za jednu klasu iterativnih postupaka

1. U ovoj glavi izlažemo jednu metodu za dobijanje ubrzanih formula za jednu klasu iterativnih postupaka.

Najpre dajemo neke definicije i pregled poznatih rezultata u toj oblasti.

2. Neka je

$$(I_1) \qquad a_{i+1} = \varphi(a_i)$$

iterativni postupak definisan funkcijom $\varphi(x)$ za odredjivanje jednog korena moguće jednačine

$$(J) \qquad f(x) = 0$$

U daljem pretpostavljamo da su jednačina (J) i iterativna funkcija $\varphi(x)$ zadane na polju realnih brojeva R ili na polju kompleksnih brojeva C.

<u>Definicija 1</u>. Pretpostavimo da niz (a_i) definisan pomoću (I_1) konvergira ka rešenju <u>a</u> jednačine (J). Najveći prirodan broj <u>m</u> za koji u okolini V rešenja <u>a</u> jednačine (J) važi relacija

$$(1) \qquad |\varphi(x) - a| = O(|x - a|^m)$$

zovemo <u>red konvergencije</u> iterativnog postupka (I_1). Kaže se i <u>iterativan postupak</u> (I_1), odnosno, <u>iterativna funkcija</u> φ, je reda m.

Iterativni postupci iz prve glave (Newton-Raphsonov, postupak S.B.Prešića, postupak za odredjivanje k rešenja date jednačine)su uglavnom reda 2 (kaže se i kvadratne konvergencije). Tako, za Newton-Raphsonov postupak, dokazuje se (Fourier [24]) sledeća relacija

$$\frac{|a_{i+1} - a|}{|a_i - a|^2} \to \left|\frac{f''(a)}{2f'(a)}\right|, \qquad i \to \infty$$

iz koje se zaključuje da je taj postupak reda 2.

Za regula falsi je poznato da je rada 1 (da joj je konvergencija linearna), u smislu prethodne definicije. Medjutim, 1954 K.N. Bachmann [5] je dokazao da za uopštenu metodu regula falsi (formula (4), I glava) važi:

$$\frac{|a_{i+1} - a|}{|a_i - a|^p} \to \left|\frac{f''(a)}{2f'(a)}\right|, \qquad i \to \infty ,$$

gde je $p = 1/2\ (1+\sqrt{5})$. Taj rezultat dovodi do proširenja prethodne definicije tako da red konvergencije $\underline{m}$ može biti i <u>realan broj</u>. Takva definicija neophodna je za postupke čija je dužina veća od 1, dok je za postupke dužine 1 (a takve mi u ovom radu razmatramo) dovoljna prethodna definicija.

Potreban i dovoljan uslov da konvergencija postupka (I_1) bude reda $\underline{m}$ daje sledeći stav [63]:

<u>Stav 1</u>. Neka postupak (I_1) konvergira ka rešenju $\underline{a}$ jednačine (J) i neka u toj tački postoji izvod $\varphi^{(m)}(x)$. Tada je ta konvergencija reda $\underline{m}$ ako i samo ako je ispunjen uslov

$$\varphi'(x) = 0 \wedge \dots \wedge \varphi^{(m-1)}(x)=0 \wedge \varphi^{(m)}(x) \neq 0, \qquad \text{za } x=a.$$

Dokaz stava sledi iz Taylorove formule za funkciju $\varphi(x)$ u tački $\underline{a}$.

Inače,red konvergencije iterativnog postupka definiše se za mnogo opštije prostore od polja R,odnosno C, za tzv.kompletne linearne L-supermetričke prostore.[1)] U tom slučaju zahteva se da važi

$$d(\varphi(x),a) = O(d(x,a)^m)$$

1) Linearni metrički prostor $\mathcal{X}$ je <u>supermetrički</u> [17] ,ako važi jednakost: $d(x,y+z)=d(x-z,y)$ za svaka tri elementa prostora $\mathcal{X}$.
Linearan metrički prostor $\mathcal{X}$ je <u>L-metrički</u> [17] ,ako za svako $x \in \mathcal{X}$ postoji linearna ograničena funkcionela L takva da važi:

Pojam konvergencije reda $\underline{m}$ prirodno se prenosi na iterativne postupke kojima se jednovremeno odredjuje više rešenja jednačine (J).

Pretpostavimo da jednačina (J) ima bar $\underline{k}$ rešenja. Označimo sa

$$A = (a,b,\ldots,s) \tag{2}$$

jednu k-torku rešenja te jednačine, koju ćemo ubuduće zvati <u>vektor rešenja</u>, a sa

$$Y = (y,z,\ldots,v)$$

proizvoljan element iz R^k (odnosno C^k).
Neka je, dalje, formulama

$$(I_k) \qquad \begin{aligned} a_{i+1} &= \varphi^1(A_i) \\ &\vdots \\ s_{i+1} &= \varphi^k(A_i) \end{aligned} \qquad A_i \overset{def}{=\!=} (a_i,\ldots,s_i)$$

definisan jedan iterativan postupak za jednovremeno odredjivanje $\underline{k}$ rešenja jednačine (J).

<u>Definicija 2</u>. Pretpostavimo da niz (A_i) konvergira ka vektoru rešenja A. Najveći prirodan broj $\underline{m}$ $(m \geqslant 1)$ za koji je ispunjen uslov (u okolini U vektora A):

$$\|\Phi(Y)-A\| = O(\|Y-A\|^m) \quad , \; Y \in U \tag{3}$$

naziva se <u>red konvergencije iterativnog postupka</u> (I_k), gde je uvedena oznaka

$$\Phi(Y) \overset{def}{=\!=} (\varphi^1(Y),\ldots,\varphi^k(Y)),$$

a $\|\ \|$ je bilo koja norma prostora R^k, odnosno C^k.

Na osnovu Taylorove formule za funkcije više promenljivih izvodi se sledeći potreban i dovoljan uslov za konvergenciju reda $\underline{m}$ iterativnog postupka (I_k):

<u>Stav 2</u>. Neka postupak (I_k) konvergira ka vektoru rešenja A jednačine (J) i neka su izvodi reda m-1 po koordinatama funkcije $\Phi(Y)$ deferencijabilni u okolini tačke A, a m-ti izvodi ograničeni u okolini te tačke. Tada je konvergencija postupka (I_k) reda $\underline{m}$ ako i samo ako su svi parcijalni izvodi po koordinatama do reda m-1 funkcije $\Phi(Y)$ jednaki nuli u tački A, ali nisu svi parcijalni izvodi reda $\underline{m}$ jednaki nuli u toj tački.

3. Kod iterativnih postupaka višeg reda je, u principu, broj koraka pri izračunavanju rešenja manji nego kod postupaka nižeg reda. Jedan od problema u ovoj oblasti je sledeći:

Polazeći od datog iterativnog postupka obrazovati nov postupak čija je konvergencija višeg reda, odnosno obrazovati tzv. ubrzani postupak.

Izlažemo neke od poznatih metoda za dobijanje ubrzanih formula. Sve se one odnose na postupak (I_1) za odredjivanje jednog korena jednačine (J)(ili na dva postupka tog tipa). Jednačina (J) i sve razmatrane iterativne funkcije su, i dalje, zadane na polju kompleksnih brojeva C, odnosno na polju realnih brojeva R.

(i) Metod Aitkena [1]. Neka je postupak (I_1) reda m ($m \geqslant 1$) tada je formulama

$$(4) \qquad a_{i+1} = \Psi(a_i), \quad \Psi(x) \stackrel{def}{=} \frac{x\varphi^2(x) - \varphi(x)^2}{\varphi^2(x) - 2\varphi(x) + x},$$

gde je $\varphi^2 \stackrel{def}{=} \varphi \circ \varphi$, a $\underline{o}$ je operacija množenje preslikavanja, odredjen iterativan postupak čiji je red konvergencije bar 2. Bliže, ako je m=1, onda je postupak (4) reda 2, a u slučaju $m > 1$, konvergencija je reda 2m-1. Osim toga, potreban uslov da iterativni postupak (4) konvergira je: $\varphi'(a) \neq 1$.

(ii) Metod Steffensen-Householder-Ostrowskog ([59], [29], [46]) je uopštenje metoda Aitkena.

Neka su data dva iterativna postupka reda m definisana funkcijama $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$. Tada funkcija $\Psi(x)$

$$(4') \qquad \Psi(x) = \frac{x(\varphi_1 \circ \varphi_2)(x) - \varphi_1(x)\varphi_2(x)}{x - \varphi_1(x) - \varphi_2(x) + (\varphi_1 \circ \varphi_2)(x)}$$

definiše iterativan postupak reda višeg od m. U slučaju $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ postupak (4') svodi se na (4).

Ostrowski [46] je izveo uslov pod kojim je fiksna tačka za $\varphi_1(x)$ i $\varphi_2(x)$ istovremeno i fiksna tačka za $\Psi(x)$.

Householder [29] je dokazao da, ako $\varphi_1(x)$ i $\varphi_2(x)$ definišu iterativne postupke prvog reda i ako je

$$(\varphi_1'(a)-1) \cdot (\varphi_2'(a)-1) \neq 0,$$

tada je $\Psi(x)$ reda 2. Ako su ti postupci reda $m > 1$, onda $\Psi(x)$ definiše postupak reda 2m-1.

(iii) Ubrzane formule za Newton-Raphsonov postupak (A.P.Domorjad [19]). Pretpostavimo da funkcija f(x) ima neprekidne izvode do reda m - 1 ($m \geqslant 3$) u okolini tačke a. Označimo sa $f_o, f_1, f_2, \ldots$ članove niza $f(x), \frac{f'(x)}{1!}, \frac{f''(x)}{2!}, \ldots$. Iterativna funkcija

$$(6) \qquad \varphi_m(x) = x - \frac{f_o F_{m-2}}{F_{m-1}} ,$$

gde je uvedena oznaka

$$F_1 \overset{def}{=} f_1 , \qquad F_s \overset{def}{=} \begin{vmatrix} f_1 & f_o & \cdots & 0 \\ f_2 & f_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_s & f_{s-1} & \cdots & f_1 \end{vmatrix} , \quad (s=2,3,\ldots),$$

je reda m.

Za m = 3, odnosno m = 4 prethodne formule postaju

$$\varphi_3(x) = x - \frac{f_o f_1}{\begin{vmatrix} f_1 & f_o \\ f_2 & f_1 \end{vmatrix}} = x - \frac{f_o f_1}{f_1^2 - f_o f_2} ,$$

$$\varphi_4(x) = x - \frac{f_o \begin{vmatrix} f_1 & f_o \\ f_2 & f_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_1 & f_o & 0 \\ f_2 & f_1 & f_o \\ f_3 & f_2 & f_1 \end{vmatrix}} = x - \frac{f_o f_1^2 - f_o^2 f_2}{f_1^3 - 2f_o f_1 f_2 + f_o^2 f_3}$$

(iv) Za sledeći metod dobijanja ubrzanih formula za Newton-Raphsonov iterativni postupak, vezuju se imena nekolicine matematičara. Bodewig [12] pripisuje te formule Euleru, dok ih većina zapadnih autora pripisuje E.Schröderu [56]. U ruskoj literaturi formule (8) zovu se Čebiševljeve. Kaže se [63] da je do tih formula Čebišev došao 1837. (ili 1838.) u radu Calcul des racines d'une équation za koji je na jednom studentskom takmičenju dobio srebrnu medalju.

Izlažemo sada ideju pomoću koje se dolazi do formula (8).

Neka je realna funkcija $f(x)$ definisana i neprekidna na intervalu $[\alpha,\beta]$ koji sadrži njenu jedinstvenu realnu nulu $\underline{a}$, neka na tom intervalu $f(x)$ ima neprekidne sve izvode do reda $m+1$ i neka je $f'(x) \neq 0$ za $x\in[\alpha,\beta]$. Tada $f(x)$ ima jedinstvenu inverzu funkciju $F(x)$ definisanu na intervalu $[\gamma,\delta]$ (oblast vrednosti funkcije f) koja ima neprekidne izvode do reda $m+1$ na tom intervalu. Na osnovu identiteta

$$(7) \qquad x = F(f(x)) \quad , \quad x\in[\alpha,\beta]$$

imamo sledeći Taylorov razvitak

$$a=F(0) = F(f(x)) + \sum_{j=1}^{m} (-1)^j \frac{F^{(j)}(f(x))}{j!} f(x)^j + R_{m+1}$$

(Ostatak R_{m+1} je u Lagrangeevom obliku).

Uvedimo oznake:

$$\varphi_m(x) \stackrel{def}{=} x + \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^j \frac{a_j(x)}{j!} f(x)^j, \quad a_j(x) \stackrel{def}{=} F^{(j)}(f(x)) \qquad (m=2,3,\ldots).$$

Tada važi ekvivalencija

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \varphi_m(x) , \qquad za \quad x\in[\alpha,\beta] .$$

Neposredno se dokazuje da je $\varphi_m(x)$ iterativna funkcija reda m, jer je

$$\varphi_m^{(s)}(x) = 0 \qquad ako\ x = a \qquad (s = 1,\ldots,m-1).$$

Koristeći jednakost (7) izvode se postupno formule za $\varphi_m(x)$. Prve tri izgledaju

$$\varphi_2(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\varphi_3(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f(x)^2 f''(x)}{2f'(x)^3}$$

$$\varphi_4(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \frac{f^2(x)f''(x)}{2f'(x)^3} - \frac{f(x)^3}{3!f'(x)^4}\left(\frac{3f''(x)^2}{f'(x)} - f'''(x)\right).$$

Primetimo da je $\varphi_2(x)$ Newton-Raphsonova iterativna funkcija.

Uz oslanjanje na ideje Čebiševa i Schrödera izvedene su kasnije iterativne funkcije reda m za rešavanje operatorske jednačine $Fx=0$, gde je F (m-1)-puta Fréchet-diferencijabilan operator u konveksnoj oblasti D(nekog kompletnog linearnog L-supermetričkog prostora [17]). Pretpostavka je još da u svakoj tački oblasti D prvi izvod operatora F ima inverzan operator. U tom slučaju može se definisati iterativna funkcija reda bar m (m=2,3,...) za odredjivanje jednostrukih nula jednačine $Fx=0$. Za slučaj $Fx=f(x)$, gde je f(x) analitička funkcija, te formule (H.Ehrmann, [22]) izgledaju

$$\varphi_m(x) = x - \sum_{j=1}^{m-1} (-1)^j \frac{f(x)^j}{j!} \left(\frac{1}{f'(x)} \frac{d}{dx}\right)^{j-1} \frac{1}{f'(x)}, \tag{8}$$

gde su uvedene oznake

$$\left(\frac{1}{f'(x)} \frac{d}{dx} h\right)^0 \overset{\text{def}}{=} h, \quad \left(\frac{1}{f'(x)} \frac{d}{dx}\right)^j h \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{f'(x)} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{f'(x)} \frac{d}{dx} h\right)^{j-1} .$$

h je proizvodljna analitička funkcija. Obrazujući sve izvode do reda m funkcije $\varphi_m(x)$, neposredno se dokazuje da je ta funkcija iterativna funkcija reda bar m za odredjivanje jednog jednostrukog rešenja jednačine (J).

4. Izložene metode dobijanja ubrzanih formula odnose se na iterativne postupke tipa (I_1), odnosno na postupke za odredjivanje jednog rešenja jednačine (J). U daljem izlažemo jednu metodu za dobijanje ubrzanih formula jedne klase iterativnih postupaka tipa (I_k) (k=1,2,...), kojima se jednovremeno odredjuje k rešenja jednačine (J). Specijalan slučaj tog metoda biće formula (8). Dalje dobiće se još neke ubrzane formule za Newton-Raphsonov postupak, ubrzane formule za iterativni postupak izložen u prvoj glavi, kao i za postupak S.B.Prešića.

5. Uvodimo neke oznake i definicije.

Definicija. Za funkciju $g(x,y,\ldots,v)$ ($g: C^{k+1} \to C$, ili $g: R^{k+1} \to R$) koju označavamo sa $g_Y(x)$ kažemo da je približna funkcija za funkciju f(x), ukoliko je ispunjen uslov:

$$g_Y'(x) = f'(x), \quad \text{ako } x \in \{a,\ldots,s\} \text{ i } Y = A. \tag{P}$$

Ovde je, kao i u daljem, $g_Y^{(j)}(x)$ oznaka za parcijalni izvod $\frac{\partial^j}{\partial x^j} g_Y(x)$ $(j=1,2,\ldots)$.

Ako je, na primer, $f(x)$ polinom stepena n, sledeće dve funkcije

$$(x-y)[x,y]\,f, \quad (x-y)(x-z)[x,y,z]\,f$$

jesu približne za $f(x)$. Za njih $\underline{k}$ ima vrednost 1 odnosno 2.

Kompleksnu (realnu) funkciju $h(y,z,\ldots,v)$ označavamo sa $h(Y)$. Osim toga, za parcijalne izvode funkcije $h(Y)$ uvodimo oznake:

$$h(Y)^{(m_1,\ldots,m_k)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^m h(Y)}{\partial y^{m_1}\ldots\partial v^{m_k}} \qquad (m_1+\ldots+m_k=m)$$

6. Lema. Neka je sledećim formulama

$$(9) \qquad \begin{aligned} a_{i+1} &= \varphi_m^1(A_i) \\ &\vdots \\ s_{i+1} &= \varphi_m^k(A_i) \end{aligned}$$

definisan jedan iterativan postupak reda $\underline{m}$ za jednovremeno odredjivanje $\underline{k}$ rešenja (2) jednačine (J) i neka je $g_Y(x)$ jedna približna funkcija za $f(x)$. Za funkcije $f(x)$, $g_Y'(x)$, $\varphi_m^j(Y)$ pretpostavljamo sledeće:

(i) $f(x)$ ima izvod reda $\underline{m+1}$ u tačkama $a,\ldots,s$.

(ii) $g_Y'(y),\ldots,g_Y'(v),\varphi_m^j(Y)$ $(j=1,\ldots,k)$ imaju diferencijabilne parcijalne izvode reda $\underline{m}$ u okolini tačke A i ograničene izvode reda $\underline{m+1}$ u okolini te tačke.

(iii) $f'(a) \neq 0,\ldots,f'(s) \neq 0$.

Ako je, dalje, $\Phi^j_{m_1,\ldots,m_k}(Y)$ $(j=1,\ldots,k,\ m_1+\ldots+m_k=m)$ niz funkcija koje imaju diferencijabilne parcijalne izvode reda $\underline{m}$ u okolini tačke A, i ograničene izvode reda $\underline{m+1}$ u okolini te tačke i zadovoljavaju uslove

$$(D) \qquad \Phi^j_{m_1,\ldots,m_k}(Y) = \varphi_m^j(Y)^{(m_1,\ldots,m_k)}, \text{ za } Y = A$$
$$(m_1+\ldots+m_k = m, \quad j = 1,\ldots,k)$$

tada definišemo niz funkcija $\varphi^j_{m+1}(Y)$ $(j=1,\ldots,k)$ na sledeći način

$$\varphi^{j}_{m+1}(Y) \overset{\text{def}}{=} \varphi^{j}_{m}(Y) - \sum_{m_1+\dots+m_k=m} \frac{1}{m_1!\dots m_k!} \frac{f(y)^{m_1}\dots f(v)^{m_k}\Phi^{j}_{m_1,\dots}(Y)}{g'_Y(y)^{m_1}\dots g'_Y(v)^{m_k}} \tag{10}$$

Ako nizovi $(a_i),\dots,(s_i)$ uvedeni pomoću

$$\begin{aligned} a_{i+1} &= \varphi^{1}_{m+1}(A_i) \\ &\vdots \\ s_{i+1} &= \varphi^{k}_{m+1}(A_i) \end{aligned} \tag{11}$$

postoje, onda je formulama (lo) i (11) definisan jedan iterativni postupak bar reda <u>m+1</u> za jednovremeno odredjivanje <u>k</u> rešenja jednačine (J).

7. <u>Dokaz.</u> Dovoljno je na osnovu stava 2., dokazati da su svi parcijalni izvodi do reda <u>m</u> funkcija $\varphi^{j}_{m+1}(Y)$ jednaki nuli u tački $Y=A$. Dokaz izvodimo u nekoliko koraka.

<u>Prvi korak</u>. Neka su $h_1,\dots,h_e$ $(e \geq 1)$ kompleksne funkcije jedne promenljive. Tada za izvod proizvoda važi poznata formula

$$(h_1\dots h_e)^{(t)} = \sum_{t_1+\dots+t_e=t} \frac{t!}{t_1!\dots t_e!} h_1^{(t_1)}\dots h_e^{(t_e)}, \qquad (t=0,1,\dots) \tag{12}$$

uz uslov da svi navedeni izvodi postoje. Uzimajući u toj formuli $h_1=\dots=h_e=f(x)$ dobijamo

$$\left(f(x)^e\right)^{(t)} = \sum_{t_1+\dots+t_e=t} \frac{t!}{t_1!\dots t_e!} f(x)^{(t_1)}\dots f(x)^{(t_e)} \tag{13}$$

$(t=0,1,\dots,m+1)$
$(e=1,2,\dots)$

Svi izvodi na desnoj strani, na osnovu pretpostavki u lemi, postoje, ako je $x \in \{a,\dots,s\}$.
Iz formule (13) zaključujemo sledeće:

(i) Ako je $t < e$, onda je u svakom rastavljanju broja t na e sabiraka $t_1,\dots,t_e$ bar jedan od t_i jednak nuli. Znači, u tom slučaju, u svakom od proizvoda $f(x)^{(t_1)}\ldots f(x)^{(t_e)}$ javlja se nulti izvod, odnosno sama funkcija $f(x)$. Odatle sledi

$$f(x)^{(t_1)}\ldots f(x)^{(t_e)} = 0,\ \text{za } x\in\{a,\ldots,s\}\ (t_s+\ldots+t_e=t;\ t<e)$$

(ii) Ako je $t=e$, onda je $(1,\ldots,1)$ jedina medju e-torkama $(t_1,\ldots t_e)$ kod koje su svi t_i različiti od nule. Odatle sledi da za $x\in\{a,\ldots,s\}$ važe jednakosti

$$\underset{(t_1+\ldots+t_e=e)}{f(x)^{(t_1)}\ldots f(x)^{(t_e)}} = \begin{cases} f'(x)^e, & \text{za } (t_1,\ldots,t_e)=(1,\ldots,1) \\ 0, & \text{za } (t_1,\ldots,t_e)\neq(1,\ldots,1) \end{cases}$$

Na osnovu (i) i (ii) formula (13) prelazi u formulu

$$(13')\quad \left(f(x)^e\right)^{(t)} = \begin{cases} e!f(x)^e, & \text{za } t=e \\ 0, & \text{za } t<e \end{cases},$$

ako je x rešenje jednačine (J), odnosno $x\in\{a,\ldots,s\}$.

<u>Drugi korak</u>. Dokazujemo da su svi parcijalni izvodi do reda <u>m-1</u> funkcije

$$(14)\qquad f(y)^{m_1}\ldots f(v)^{m_k}\qquad (m_1+\ldots+m_k=m)$$

jednaki nuli u tački $Y=A$, kao i svi izvodi reda <u>m</u> izuzev izvoda $(m_1,\ldots,m_k)$. Preciznije, dokazujemo da u tački $Y=A$ važi jednakost

$$(15)\quad \underset{(\nu_1+\ldots+\nu_k=\nu;\ \nu\leq m)}{\left(f(y)^{m_1}\ldots f(v)^{m_k}\right)^{(\nu_1,\ldots,\nu_k)}} = \begin{cases} m_1!\ldots m_k!f'(y)^{m_1}\ldots f'(v)^{m_k}, \\ \quad\text{za } (\nu_1,\ldots,\nu_k)=(m_1\ldots,m_k) \\ 0,\ \text{inače.} \end{cases}$$

Na osnovu dobro poznatih svojstava izvoda važi jednakost

$$(16)\quad \left(f(y)^{m_1}\ldots f(v)^{m_k}\right)^{(\nu_1,\ldots,\nu_k)} = \left(f(y)^{m_1}\right)^{(\nu_1)}\ldots\left(f(v)^{m_k}\right)^{(\nu_k)}$$

$$(m_1+\ldots+m_k=m,\ \nu_1+\ldots+\nu_k=\nu)$$

Ako je $\nu < m$ ili $\nu = m$ i $(\nu_1, \ldots, \nu_k) \neq (m_1, \ldots, m_k)$, tada postoji bar jedno i tako da je $\nu_i < m_i$.

Prema rečenom i prema jednakosti (13′) zaključujemo da svi izvodi na desnoj strani jednakosti (15) postoje i da je u tački Y=A bar jedan od izvoda

$$\left(f(y)^{m_1}\right)^{(\nu_1)}, \ldots, \left(f(v)^{m_k}\right)^{(\nu_k)}$$

jednak nuli ako je, $(\nu_1, \ldots, \nu_k) \neq (m_1, \ldots, m_k)$.

U slučaju $(\nu_1, \ldots, \nu_k) = (m_1, \ldots, m_k)$ neposredno se dobija, koristeći formulu (13′), da za izvod u tački Y=A važi jednakost

$$\left(f(y)^{m_1} \ldots f(v)^{m_k}\right)^{(m_1, \ldots, m_k)} = m_1! \ldots m_k! \, f'(y)^{m_1} \ldots f'(v)^{m_k}$$

Na taj način je formula (15) dokazana.

<u>Treći korak</u>. Dokazujemo da u tački Y=A važi jednakost

$$(17) \quad \left(\frac{f(y)^{m_1} \ldots f(v)^{m_k}}{g_Y'(y)^{m_1} \ldots g_Y'(v)^{m_l}} \Phi^j_{m_1, \ldots, m_k}(Y)\right)^{(\nu_1, \ldots, \nu_k)} = \begin{cases} m_1! \ldots m_k! \Phi^j_{m_1, \ldots, m_k}(Y), \\ \text{za } (\nu_1, \ldots, \nu_k) = (m_1, \ldots, m_k) \\ 0, \text{ inače} \end{cases}$$

$$(m_1 + \ldots + m_k = m, \nu_1 + \ldots + \nu_k = \nu;\ \nu \leq m).$$

U dokazu koristimo sledeću poznatu formulu za izvod proizvoda

$$(18) \quad \left(h_1 h_2\right)^{(\nu_1, \ldots, \nu_k)} = \nu_1! \ldots \nu_k! \sum_{\alpha_j + \beta_j = \nu_j} \frac{h_1^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)}}{\alpha_1! \ldots \alpha_k!} \cdot \frac{h_2^{(\beta_1, \ldots, \beta_k)}}{\beta_1! \ldots \beta_k!}$$

Primenjujemo tu formulu na odredjivanje izvoda (17) u tački Y=A. Pri tom uvodimo oznake

$$(18') \quad h_1 \overset{\text{def}}{=\!=} f(y)^{m_1} \ldots f(v)^{m_k}, \quad h_2 \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{\Phi^j_{m_1, \ldots, m_k}(Y)}{g_Y'(y)^{m_1} \ldots g_Y'(v)^{m_k}}$$

Na osnovu jednakosti (15) izvod $h_1^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)}$ je različit od nule u tački A jedino u slučaju kada važi jednakost

$$(19) \qquad (\alpha_1,\dots,\alpha_k) = (m_1,\dots,m_k)$$

(Pretpostavka je da $\nu \leqslant m$, što, na osnovu jednakosti (18), povlači $\alpha_1+\dots+\alpha_k \leqslant m$. Znači postoje uslovi za primenu jednakosti (15)).

Razlikujemo sledeće slučajeve:

(i) $\nu < m$. U ovom slučaju je i $\alpha_1+\dots+\alpha_k < m$ pa prema tome uslov (19) nije ispunjen ni za jednu k-torku $(\alpha_1,\dots,\alpha_k)$. U ovom slučaju su znači svi izvodi $h_1^{(\alpha_1,\dots,\alpha_k)}$ jednaki nuli u tački Y=A, pa imamo

$$(20) \qquad (h_1h_2)^{(\alpha_1,\dots,\alpha_k)} = 0, \text{ ako } \nu < m \quad (\nu_1+\dots+\nu_k=\nu)$$

(ii) $\nu = m \wedge (\nu_1,\dots,\nu_k) \neq (m_1,\dots,m_k)$. Ni u ovom slučaju nijedna k-torka $(\alpha_1,\dots,\alpha_k)$ ne zadovoljava uslov (19). Obrazloženje: kada bi to bio slučaj, onda bi iz formule (18) sledila jednakost $\sum_{i=1}^{k} m_i + \sum_{i=1}^{k} \beta_1 = \sum_{i=1}^{k} \nu_1$ iz koje se neposredno dobija $\beta_1=\dots=\beta_k=0$. Koristeći pretpostavku i formulu (18) sledi kontradikcija: $(\nu_1,\dots,\nu_k)=(m_1,\dots,m_k)$. Dakle, u tački Y=A važi jednakost

$$(21) \qquad (h_1h_2)^{(\nu_1,\dots,\nu_k)} = 0, \text{ ako } \nu=m \text{ i } (\nu_1,\dots,\nu_k) \neq (m_k,\dots,m_k)$$

(iii) $(\nu_1,\dots,\nu_k)=(m_1,\dots,m_k)$. U ovom slučaju je, na osnovu (16) izvod $h_1^{(m_1,\dots,m_k)}$ različit od nule u tački Y=A. Svi ostali izvodi $h_1^{(\alpha_1,\dots,\alpha_k)}$ su jednaki nuli. Prema tome važi jednakost

$$(22) \qquad (h_1h_2)^{(m_1,\dots,m_k)} = h_1^{(m_1,\dots,m_k)} \cdot h_2, \quad \text{za } Y=A$$

Koristeći (16) i (22) neposredno izvodimo da u tački Y=A važi jednakost

$$(23) \qquad (h_1h_2)^{(m_1,\dots m_k)} = m_1!\dots m_k!\, \frac{f'(y)^{m_1}\dots f'(v)^{m_k}}{g_Y'(y)^{m_1}\dots g_Y'(v)^{m_k}} \cdot \Phi^{j}_{m_1,\dots,m_k}(Y)$$

Na osnovu svojstva (P) funkcije $g_Y(x)$, sledi da je $g_Y'(x)=f'(x)$ ako je $x\in\{a,\dots s\}$ i $Y=A$, pa jednakost (23) postaje

$$(23') \quad (h_1h_2)^{(m_1,\dots,m_k)} = m_1!\dots m_k!\,\Phi^{j}_{m_1,\dots,m_k}(Y), \quad \text{za } Y=A.$$

Tako je formula (17) u potpunosti dokazana.

Četvrti korak. Dokazujemo da su svi parcijalni izvodi funkcija $\varphi^j_{m+1}(Y)$ $(j=1,\dots,k)$ do reda m jednaki nuli u tački $Y=A$.

Neka je $\nu_1+\dots+\nu_k=\nu$ i $\nu\leq m$; tada

$$\varphi^j_{m+1}(Y)^{(\nu_1,\dots,\nu_k)} = \varphi^j_m(Y)^{(\nu_1,\dots,\nu_k)} - \sum_{m_1+\dots+m_k=m} \frac{1}{m_1!\dots m_k!}(h_1h_2)^{(\nu_1,\dots}$$

(na osnovu definicija (1o) i (18′).

Odatle i iz jednakosti (17) zaključujemo

(i) Ako je $\nu<m$, onda

$$\varphi^j_{m+1}(Y)^{(\nu_1,\dots,\nu_k)} = \varphi^j_m(Y)^{(\nu_1,\dots,\nu_k)}, \qquad \text{za } Y=A$$

(ii) Ako je $\nu=m$, onda

$$\varphi^j_{m+1}(Y)^{(\nu_1,\dots,\nu_k)} = \varphi^j_m(Y)^{(\nu_1,\dots,\nu_k)} - \Phi^j_{\nu_1,\dots,\nu_k}(Y), \quad \text{za } Y=A$$

Iz (i) sledi, na osnovu pretpostavke u iskazu leme i stava 2., da su svi parcijalni izvodi funkcija $\varphi^j_{m+1}(Y)$ $(j=1,\dots,k)$ do reda m-1 jednaki nuli u tački $Y=A$.

Iz (ii) i uslova (D) za funkcije $\Phi^j_{m_1,\dots,m_k}(Y)$ $(j=1,\dots,k;\ m_1+\dots+m$ sledi da su svi parcijalni izvodi reda m jednaki nuli u tački $Y=A$.

Na taj način je lema u potpunosti dokazana.

8. Neke primene leme. (i) Jedna mogućnost dobijanja ubrzanih formula za Newton-Raphsonov iterativni postupak je sledeća: Funkcije $g_Y(x)$, $\Phi_m(y)$ uvode se definicijama (u ovom slučaju je $k=1$)

$$(24) \qquad g_Y(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x), \qquad \Phi_m(y) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_m(y)^{(m)} \qquad (m=2,3,\dots)$$

Za funkciju f(x) pretpostavljamo da ima izvod reda 2m+2 u tački a (a je jednostruko rešenje jednačine (J)). Odatle sledi da su funkcije $\Phi_m(y)$ definisane u okolini a. Osim toga, funkcija $g_Y(x)$ zadovoljava uslov (P), a funkcija $\Phi_m(y)$ ima izvod reda m+1 u tački a i zadovoljava uslov (D). Polazeći od Newton-Raphsonove formule, tj. uzimajući

$$\varphi_2(y) = y - \frac{f(y)}{f'(y)} \tag{25}$$

neposredno se dobija sledeći iterativni postupak reda 3:

$$\varphi_3(y) = y - \frac{f(y)}{f'(y)} - \frac{f(y)^2}{2!f'(y)^2}\left(\frac{f''(y)}{f'(y)} + \frac{f(y)f'''(y)}{f'(y)^2} - \frac{2f(y)f''(y)^2}{f'(y)^3}\right).$$

Polazeći od prethodne formule može se dobiti postupak reda 4 itd. Medjutim, tako dobijena formula bila bi veoma komplikovana i za račun nepodesna.

(ii) Ako se približna funkcija $g_y(x)$ i funkcija $\Phi_m(y)$ nešto drugačije izaberu dolazi se do Euler-Čebišev-Schröderovih ubrzanih formula za postupak Newton-Raphsona.

Uvodimo prethodno sledeću definiciju

Definicija. Neka je F(Y) složena funkcija definisana u okolini tačke A koja, izmedju ostalog, zavisi eventualno i od nekog od sledećih argumenata: $f(y)^{(s_1)}, \ldots, f(v)^{(s_k)}$ $(s_1, \ldots, s_k = 0, 1, \ldots)$.

Za funkciju F(Y) pretpostavljamo da ima izvod $F(Y)^{(j_1, \ldots, j_k)}$ u okolini tačke A. Neka je, dalje, $g_y(x)$ jedna približna funkcija za f(x).

Definišemo "izvod" $F(Y)^{[j_1, \ldots, j_k]}$ (zvaćemo ga g-izvod) na sledeći način: $F(Y)^{[j_1, \ldots, j_k]}$ jednak je izvodu $F(Y)^{(j_1, \ldots, j_k)}$ u kome je svako pojavljivanje svakog od izvoda $f(y)^{(s_1)}, \ldots, f(v)^{(s_k)}$ zamenjeno redom izvodima $g_Y^{(s_1)}(y), \ldots, g_Y^{(s_k)}(v)$, uz uslov da je tako dobijena funkcija definisana u okolini tačke A.

Korišćene su oznake

$$g_Y^{(s)}(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial^s}{\partial x^s} g_Y(x), \quad g_Y^{(s)}(y) \overset{\text{def}}{=} g_Y^{(s)}(x)\Big|_{x=y}.$$

Neposredno se proverava, na osnovu definicije približne funkcije $g_Y(x)$, sledeća jednakost

(26) $$F(Y)^{[j_1,\dots,j_k]} = F(Y)^{(j_1,\dots j_k)}, \quad \text{za} \quad Y=A$$

Neka su približna funkcija $g_Y(x)$ kao i funkcija $\Phi_m(x)$ definisane pomoću

$$g_Y(x)=(x-y)[x,y]f \quad , \quad \Phi_m(y)=\varphi_m^{[m]}(y) \qquad (m=2,3,\dots)$$

nije teško dokazati da za funkciju $g_Y(x)$ važi:

(27) $$g_Y(y)=0, \qquad f^{(j)}(y)=g_Y^{(j)}(y)=\frac{\partial^{j-1}}{\partial y^{j-1}}\, g_Y'(y)$$

$$(j=1,2,\dots)$$

Na osnovu tih jednakosti, obrazovanje g-izvoda reda j svodi se na zamenu, u odgovarajućem običnom izvodu, funkcije f(y) (svakog njenog pojavljivanja) <u>nulom</u>.

Dokazujemo da se na taj način, polazeći od formule (25) dobijaju Euler-Cebišev-Schröderove ubrzane formule. Dokaz izvodimo indukcijom po $m(m\geqslant 3)$.

Za m=3 treba dokazati da je iterativna funkcija φ_3 definisana jednakošću

(28) $$\varphi_3(y) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_2(y) - \frac{f(y)^2}{2!f'(y)^2}\,\varphi_2^{[2]}(y)$$

jednaka odgovarajućoj Euler-Čebišev-Schröderovoj funkciji, odnosno da je tačna sledeća formula

(29) $$\varphi_3(y)=y-\frac{f(y)}{f'(y)}-\frac{f(y)^2 f''(y)}{2!f'(y)^3}$$

Na osnovu jednakosti

$$\varphi_2^{(2)}(y)=\frac{f''(y)}{f'(y)}+\frac{f(y)f'''(y)}{f'(y)^2}-\frac{2f(y)f''(y)^2}{f'(y)^3}$$

dobija se, neposredno, sledeća formula za izvod $\varphi_2^{[2]}(y)$

$$\varphi_2^{[2]}(y) = \frac{f''(y)}{f'(y)},$$

čime je dokaz formule (29) završen.

Pretpostavimo da je iterativna funkcija $\varphi_m(x)$ jednaka m-toj iterativnoj funkciji Euler-Čebišev-Schrödera, odnosno da važi

$$(3o)\qquad \varphi_m(y) = y + \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^i \frac{f(y)^i}{i!}\left(\frac{1}{f'(y)}\frac{d}{dy}\right)^{i-1}\frac{1}{f'(y)},$$

i dokažimo da odgovarajuća jednakost važi i za m+1. Znači, treba dokazati da je sledeća formula tačna

$$(31)\qquad \varphi_m(y) - \frac{f(y)^m}{m!f'(y)^m}\varphi_m^{[m]}(y) = y + \sum_{i=1}^{m} (-1)^i \frac{f(y)^i}{i!}\left(\frac{1}{f'(y)}\frac{d}{dy}\right)^{i-1}\frac{1}{f'(y}$$

Obrazujemo prvi izvod funkcije $\varphi_m(y)$:

$$\varphi_m'(y) = 1 + \sum_{i=1}^{m-1}\left[(-1)^i \frac{f(y)^{i-1}}{(i-1)!} f'(y)\left(\frac{1}{f'(y)}\frac{d}{dy}\right)^{i-1}\frac{1}{f'(y)} + \right.$$

$$\left.(-1)^i \frac{f(y)^i}{i!}\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{f'(y)}\frac{d}{dy}\right)^{i-1}\frac{1}{f'(y)}\right]$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^{m-1}\left[(-1)^i \frac{f(y)^{i-1}}{(i-1)!} f'(y)\left(\frac{1}{f'(y)}\frac{d}{dy}\right)^{i-1}\frac{1}{f'(y)} + \right.$$

$$\left.(-1)^i \frac{f(y)^i}{i!} f'(y)\left(\frac{1}{f'(y)}\frac{d}{dy}\right)^{i}\frac{1}{f'(y)}\right]$$

(Drugi sabirak pod $\sum$-om pomnožen je sa $\frac{f'(y)}{f'(y)}$)

$$= 1 - 1 + (-1)^{m-1}\frac{f(y)^{m-1}}{(m-1)!} f'(y)\left(\frac{1}{f'(y)}\frac{d}{dy}\right)^{m-1}\frac{1}{f'(y)}.$$

Koristeći tu formulu zaključuje se da za m-ti izvod važi formula oblika

$$\varphi_m^{(m)}(y) = (-1)^{m-1} f'(y)^m\left(\frac{1}{f'(y)}\frac{d}{dy}\right)\frac{1}{f'(y)} + f(y).\Pi$$

Sa Π je označen dobijen izraz uz f(y); njegova vrednost ne utiče na g-izvod, pod uslovom da je definisan. Za to je dovoljno da f'(y) bude različito od nule u okolini rešenja $\underline{a}$ jednačine (J).

Na osnovu definicije g-izvoda iz jednakosti (32) dobija se:

$$(32') \quad \varphi_m^{[m]}(y) = (-1)^{m-1} f'(y)^m \left(\frac{1}{f'(y)} \frac{d}{dy}\right) \frac{1}{f'(y)}$$

na osnovu te jednakosti i indukcijske hipoteze neposredno se izvodi jednakost (31).

Dakle, Euler-Čebišev-Schröderove formule dobijaju se kao jedna primena leme.

(iii) Neka je

$$(33) \quad \varphi_2(Y) = y - \frac{f(y)}{(y-z)\ldots(y-v)[y,{}^2z,\ldots,v]f}$$

iterativna funkcija iz prve glave za jednovremeno odredjivanje <u>k</u> rešenja jednačine (J). Kao što je u toj glavi dokazano, ta funkcija je reda 2. Polazeći od formule (33) obrazujemo iterativnu funkciju reda 3 na sledeći način:

Približnu funkciju $g_Y(x)$ i funkciju $\Phi_{m_1,\ldots,m_k}(Y)$ uvodimo definicijama

$$g_{(Y)}(x) \overset{\text{def}}{=} (x-y)\ldots(x-v)[x,y,\ldots,v]f, \quad \Phi_{m_1,\ldots,m_k}(Y) \overset{\text{def}}{=} \varphi_2^{[m_1,\ldots,m_k]}(Y)$$

$$(m_1+\ldots+m_k = m, \quad m=2,3,\ldots)$$

Lako se proverava da su svi g-izvodi drugog reda jednaki nuli u tački A sem sledećih:

$$\varphi_2(Y)^{[1,1,0,\ldots,0]}, \quad \varphi_2(Y)^{[1,0,1,\ldots,0]}, \ldots, \varphi_2(Y)^{[1,0,0,\ldots,1]}$$

Prema tome, iterativna funkcija trećeg reda obrazovana polazeći od funkcije (33) i od funkcija $g_Y(x), \Phi_{m_1,\ldots,m_k}(Y)$ izabranih na napred opisan način izgleda

$$(34) \quad \varphi_3(Y) = \varphi_2(Y) + f(y)\left[\frac{f(z)}{g_Y'(z)} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{g_Y'(y)} + \ldots + \frac{f(v)}{g_Y'(v)} \frac{\partial}{\partial v} \frac{1}{g_Y'(y)}\right]$$

(iv) Polazimo od iterativne funkcije

$$\varphi_2(Y) = y - \frac{f(y)}{(y-z)\ldots(y-v)}$$

za odredjivanje svih korena polinoma $f(x)$ (S. Prešić). Približna funkcija $g_Y(x)$ i funkcija $\Phi_{m_1,\ldots,m_k}(Y)$ uvedene su definicijama:

$$g_Y(x) \overset{\text{def}}{=\!=} (x-y)\ldots(x-v), \quad \Phi_{m_1,\ldots,m_n}(Y) \overset{\text{def}}{=\!=} \varphi_m(Y)^{[m_1,\ldots,m_n]}$$

$$(m_1+\ldots+m_n = m; \quad m = 2,3,\ldots).$$

Važe sledeće jednakosti

$$g_Y^{(m)}(y) = m\frac{\partial^{m-1}}{\partial y^{m-1}}\, g_Y'(y) = \frac{m}{m-1}\frac{\partial}{\partial y}\, g_Y^{(m-1)}(y),$$

čiji dokazi se mogu izvesti indukcijom po m.

Polazeći od formule (34) izvode se sledeće ubrzane formule reda tri i reda četiri

$$(36) \quad \varphi_3(Y) = y - \frac{f(y)}{g_Y'(y)} + \frac{f(y)}{g_Y'(y)}\left[\frac{f(z)}{(y-z)g_Y'(z)} + \ldots \frac{f(v)}{(y-v)g_Y'(v)}\right]$$

$$(37) \quad \varphi_4(Y) = \varphi_3(Y) + \frac{f(y)^2}{g_Y'(y)^2}\left[\frac{f(z)}{(y-z)^2 g_Y'(z)} + \ldots + \frac{f(v)}{(y-v)^2 g_Y'(v)}\right]$$

$$- \frac{f(y)}{g_Y'(y)}\left[\frac{f(z)^2}{(y-z)^2 g_Y'(z)^2} + \ldots + \frac{f(v)^2}{(y-v)^2 g_Y'(v)^2}\right]$$

$$- \frac{2f(y)}{g_Y'(y)}\left[\frac{f(z)\,f(u)}{(y-z)(y-u)g_Y'(z)g_Y'(u)} + \ldots + \frac{f(u)\,f(v)}{(y-u)(y-v)g_Y'(u)g_Y'(v)}\right]$$

Računski primeri.

Primer 1. Neka je $f(x)$ sledeći polinom

$$f(x) = x^4 - 18x^3 + 104x^2 - 222x + 135.$$

Njegovi koreni su 1, 3, 5, 9.

U tablicama koje navodimo u prvoj koloni naveden je broj iteracije. U prvoj vrsti nalaze se prve izračunate vrednosti a_1, b_1, c_1, d_1, u drugoj vrsti druge izračunate vrednosti a_2, b_2, c_2, d_2 itd. Odredjujemo sve korene uočenog polinoma koristeći formule (35), (36), (37).

1^o Početne vrednosti korena:

0.0000	1.800	7.000	11.00

(α) Vrednosti iteracija prema formuli (35):

(1)	0.9740e+00	0.2057e+01	0.6341e+01	0.8628e+01
(2)	0.1012e+01	0.2725e+01	0.5131e+01	0.9131e+01
(3)	0.9987e+00	0.2981e+01	0.5018e+01	0.9001e+01
(4)	0.1000e+01	0.3000e+01	0.5000e+01	0.9000e+01
(5)	0.1000e+01	0.3000e+01	0.5000e+01	0.9000e+01

Izračunate vrednosti korena:

0.1000e+01	0.3000e+01	0.5000e+01	0.9000e+01

(β) Vrednosti iteracija prema formuli (36):

(1)	0.1137e+01	0.2295e+01	0.5825e+01	0.8743e+01
(2)	0.1029e+01	0.2924e+01	0.5059e+01	0.8988e+01
(3)	0.1000e+01	0.3000e+01	0.5000e+01	0.9000e+01
(4)	0.1000e+01	0.3000e+01	0.5000e+01	0.9000e+01

Izračunate vrednosti korena:

0.1000e+01	0.3000e+01	0.5000e+01	0.9000e+01

(γ) Vrednosti iteracija prema formuli (37):

(1)	0.1120e+01	0.2498e+01	0.5474e+01	0.8907e+01
(2)	0.9955e+00	0.2998e+01	0.5006e+01	0.9000e+01
(3)	0.1000e+01	0.3000e+01	0.5000e+01	0.9000e+01
(4)	0.1000e+01	0.3000e+01	0.5000e+01	0.9000e+01

Izračunate vrednosti korena:

0.1000e+01	0.3000e+01	0.5000e+01	0.9000e+01

2^o Početne vrednosti korena:

0.2000	2.600	4.200	8.100

(α) Vrednosti iteracija prema formuli (35):

(1)	0.1448e+01	0.3065e+01	0.4791e+01	0.8696e+01
(2)	0.9721e+00	0.2967e+01	0.5056e+01	0.9005e+01
(3)	0.1000e+ol	0.2999e+01	0.5001e+01	0.9000e+01
(4)	0.1000e+01	0.3000e+01	0.5000e+01	0.9000e+01
(5)	0.1000e+01	0.3000e+01	0.5000e+01	0.9000e+01

Izračunate vrednosti korena:

0.1000e+01	0.3000e+01	0.5000e+01	0.9000e+01

(β) Vrednosti iteracija prema formuli (36)

(1)	0.9272e+00	0.3085e+01	0.5057e+01	0.8931e+01
(2)	0.9998e+00	0.3000e+01	0.5000e+01	0.9000e+01
(3)	0.1000e+01	0.3000e+01	0.5000e+01	0.9000e+01
(4)	0.1000e+01	0.3000e+01	0.5000e+01	0.9000e+01

Izračunate vrednosti korena:

0.1000e+01 0.3000e+01 0.5000e+01 0.9000e+01

(γ) Vrednosti iteracija prema formuli (37):

(1)	0.9462e+00	0.2985e+01	0.5072e+01	0.8997e+01
(2)	0.1000e+01	0.3000e+01	0.5000e+01	0.9000e+01
(3)	0.1000e+01	0.3000e+01	0.5000e+01	0.9000e+01

Izračunate vrednosti korena:

0.1000e+01 0.3000e+01 0.5000e+01 0.9000e+01

<u>Primer 2</u>. Neka je

$$f(x) = x^6-17x^5+65x^4+125x^3-786x^2+252x + 1080.$$

Njegovi koreni su: -3, -1, 2, 3, 6, 10.

1^o Početne vrednosti korena:

-5.000 -1.100 0.0000 4.000 5.800 11.00

(α) Vrednosti iteracija prema formuli (35):

(1)	-0.2563e+01	-0.9958e+00	0.7694e+00	0.3637e+01	0.5932e+01	0.1022e+0
(2)	-0.3094e+01	-0.1004e+01	0.1844e+01	0.3249e+01	0.5998e+01	0.1001e+0
(3)	-0.3001e+01	-0.1000e+01	0.1970e+01	0.3031e+01	0.6000e+01	0.1000e+0
(4)	-0.3000e+01	-0.1000e+01	0.1999e+01	0.3001e+01	0.6000e+01	0.1000e+0
(5)	-0.3000e+01	-0.1000e+01	0.2000e+01	0.3000e+01	0.6000e+01	0.1000e+0
(6)	-0.3000e+01	-0.1000e+01	0.2000e+01	0.3000e+01	0.6000e+01	0.1000e+0

(β) Vrednosti iteracija prema formuli (36):

(1)	-0.2815e+01	-0.9914e+00	0.1324e+01	0.3447e+01	0.5975e+01	0.1006e+0
(2)	-0.2998e+01	-0.9993e+00	0.1937e+01	0.3061e+01	0.6000e+01	0.1000e+0
(3)	-0.3000e+01	-0.1000e+01	0.2000e+01	0.3000e+01	0.6000e+01	0.1000e+0
(4)	-0.3000e+01	-0.1000e+01	0.2000e+01	0.3000e+01	0.6000e+01	0.1000e+0

(γ) Vrednost iteracija prema formuli (37):

(1)	-0.2975e+01	-0.9997e+00	0.1631e+01	0.3335e+01	0.5990e+01	0.1002e+02
(2)	-0.3000e+01	-0.1000e+01	0.1988e+01	0.3012e+01	0.6000e+01	0.1000e+02
(3)	-0.3000e+01	-0.1000e+01	0.2000e+01	0.3000e+01	0.6000e+01	0.1000e+02
(4)	-0.3000e+01	-0.1000e+01	0.2000e+01	0.3000e+01	0.6000e+01	0.1000e+02

2^o Početne vrednosti korena:

-10.70 0.7000 3.800 13.00 6.000 2.300

(α) Vrednosti iteracija prema formuli (35):

(1)	-0.5418e+01	0.4485e+00	0.3330e+01	0.1042e+02	0.6000e+01	0.2215e+01
(2)	-0.3761e+01	-0.1854e+00	0.2927e+01	0.9982e+01	0.6000e+01	0.2037e+01
(3)	-0.3170e+01	-0.8319e+00	0.3012e+01	0.1000e+02	0.6000e+01	0.1989e+01
(4)	-0.3012e+01	-0.9879e+00	0.3000e+01	0.1000e+02	0.6000e+01	0.2000e+01
(5)	-0.3000e+01	-0.9999e+00	0.3000e+01	0.1000e+02	0.6000e+01	0.2000e+01
(6)	-0.3000e+01	-0.1000e+01	0.3000e+01	0.1000e+02	0.6000e+01	0.2000e+01

(β) Vrednosti iteracija prema formuli (36):

(1)	-0.4522e+01	0.2279e+00	0.3092e+01	0.1005e+02	0.6000e+01	0.2147e+01
(2)	-0.3218e+01	-0.7832e+00	0.3006e+01	0.1000e+02	0.6000e+01	0.1995e+01
(3)	-0.3003e+01	-0.9967e+00	0.3000e+01	0.1000e+02	0.6000e+01	0.2000e+01
(4)	-0.3000e+01	-0.1000e+01	0.3000e+01	0.1000e+02	0.6000e+01	0.2000e+01
(5)	-0.3000e+01	-0.1000e+01	0.3000e+01	0.1000e+02	0.6000e+01	0.2000e+01

(γ) Vrednosti iteracija prema formuli (37):

(1)	-0.4112e+01	0.3806e+01	0.2987e+01	0.9992e+01	0.6000e+01	0.2095e+01
(2)	-0.3070e+01	-0.9296e+00	0.3000e+01	0.1000e+02	0.6000e+01	0.1999e+01
(3)	-0.3000e+01	-0.1000e+00	0.3000e+01	0.1000e+02	0.6000e+01	0.2000e+01
(4)	-0.3000e+01	-0.1000e+01	0.3000e+01	0.1000e+02	0.6000e+01	0.2000e+01

3^o Početne vrednosti korena:

-2.900 -5.100 1.700 6.100 7.600 10.00

(α) Vrednosti iteracija prema formuli (35):

(1)	-0.2849e+01	-0.2517e+01	0.1726e+01	0.6223e+01	0.4416e+01	0.1000e+02
(2)	-0.3550e+01	-0.6946e+00	0.1808e+01	0.5009e+01	0.3527e+01	0.1000e+02
(3)	-0.3075e+01	-0.9302e+00	0.1945e+01	0.6013e+01	0.3046e+01	0.1000e+02
(4)	-0.3002e+01	-0.9979e+00	0.1998e+01	0.6000e+01	0.3002e+01	0.1000e+02
(5)	-0.3000e+01	-0.1000e+01	0.2000e+01	0.6000e+01	0.3000e+01	0.1000e+02
(6)	-0.3000e+01	-0.1000e+01	0.2000e+01	0.6000e+01	0.3000e+01	0.1000e+02

(β) Vrednosti iteracija prema formuli (36):

(1)	-0.2774e+01	-0.1968e+01	0.1759e+01	0.6515e+01	0.3477e+01	0.1000e+02
(2)	-0.2623e+01	-0.1387e+01	0.1935e+01	0.5995e+01	0.3880e+01	0.1000e+02
(3)	-0.2915e+01	-0.1085e+01	0.1999e+01	0.6000e+01	0.3001e+01	0.1000e+02
(4)	-0.3000e+01	-0.1000e+01	0.2000e+01	0.6000e+01	0.3000e+01	0.1000e+01
(5)	-0.3000e+01	-0.1000e+01	0.2000e+01	0.6000e+01	0.3000e+01	0.1000e+02

(γ) Vrednost iteracija prema formuli (37):

(1)	-0.2667e+01	-0.1800e+01	0.1771e+01	0.7227e+01	0.2469e+01	0.1000e+02
(2)	-0.4250e+01	0.2503e+00	0.2005e+01	0.6039e+01	0.2955e+01	0.1000e+02
(3)	-0.3093e+01	-0.9073e+00	0.2000e+01	0.6000e+01	0.3001e+01	0.1000e+02
(4)	-0.3000e+01	-0.1000e+01	0.2000e+01	0.6000e+01	0.3000e+01	0.1000e+02
(5)	-0.3000e+01	-0.1000e+01	0.2000e+01	0.6000e+01	0.3000e+01	0.1000e+02

4^{o} Početne vrednosti korena:

-2.000 -1.500 1.800 4.000 8.600 13.00

(α) Vrednosti iteracija prema formuli (35):

(1)	-0.3059e+01	-0.7334e+00	0.1853e+01	0.3721e+01	0.7583e+01	0.7636e+01
(2)	-0.3009e+01	-0.9724e+00	0.1953e+01	0.3061e+01	-0.7845e+02	0.9442e+02
(3)	-0.3009e+01	-0.9721e+00	0.1953e+01	0.3061e+01	-0.3526e+02	0.5122e+02
(4)	-0.3010e+01	-0.9709e+00	0.1952e+01	0.3061e+01	-0.1368e+02	0.2965e+02
(5)	-0.3013e+01	-0.9652e+00	0.1949e+01	0.3064e+01	-0.2948e+01	0.1891e+02
(6)	-0.1958e+01	-0.8982e+00	0.1930e+01	0.3077e+01	0.1213e+01	0.1364e+02
(7)	-0.3775e+01	-0.1395e+01	0.1593e+01	0.3169e+01	0.6175e+01	0.1123e+02
(8)	-0.2920e+01	-0.1138e+01	0.1819e+01	0.3088e+01	0.6064e+01	0.1009e+02
(9)	-0.3007e+01	-0.9906e+00	0.1978e+01	0.3017e+01	0.6003e+01	0.1000e+02
(10)	-0.3000e+01	-0.1000e+01	0.2000e+01	0.3000e+01	0.6000e+01	0.1000e+02
(11)	-0.3000e+01	-0.1000e+01	0.2000e+01	0.3000e+01	0.6000e+01	0.1000e+02
(12)	-0.3000e+01	-0.1000e+01	0.2000e+01	0.3000e+01	0.6000e+01	0.1000e+02

(β) Vrednosti iteracija prema formuli (36):

(1)	-0.1950e+01	-0.1970e+01	0.1890e+01	0.3496e+01	0.6422e+01	0.9112e+01
(2)	-0.1182e+06	0.1181e+06	0.1987e+01	0.3009e+01	0.6131e+01	0.9874e+01
(3)	-0.4431e+05	0.4430e+05	0.1987e+01	0.3009e+01	0.6131e+01	0.9874e+01
(4)	-0.1662e+05	0.1661e+05	0.1987e+01	0.3009e+01	0.6131e+01	0.9874e+01
(5)	-0.6233e+04	0.6229e+04	0.1987e+01	0.3009e+01	0.6131e+01	0.9874e+01
(6)	-0.2338e+04	0.2334e+04	0.1987e+01	0.3009e+01	0.6131e+01	0.9874e+01
(7)	-0.8782e+03	0.8742e+03	0.1987e+01	0.3009e+01	0.6131e+01	0.9874e+01
(8)	-0.3306e+03	0.3266e+03	0.1987e+01	0.3009e+01	0.6131e+01	0.9874e+01
(9)	-0.1252e+03	0.1212e+03	0.1987e+01	0.3009e+01	0.6131e+01	0.9874e+01
(10)	-0.4821e+02	0.4422e+02	0.1987e+01	0.3009e+01	0.6132e+01	0.9872e+01
(11)	-0.1935e+02	0.1536e+02	0.1987e+01	0.3009e+01	0.6141e+01	0.9852e+01
(12)	-0.8556e+01	0.4853e+01	0.1985e+01	0.3011e+01	0.6234e+01	0.9473e+01
(13)	-0.4598e+01	-0.5204e+00	0.1967e+01	0.3048e+01	0.7440e+01	0.9663e+01

(14)	-0.3136e+01	-0.8787e+00	0.1996e+01	0.3007e+01	0.6155e+01	0.9857e+01
(15)	-0.3001e+01	-0.9991e+00	0.2000e+01	0.3000e+01	0.6001e+01	0.9999e+01
(16)	-0.3000e+01	-0.1000e+01	0.2000e+01	0.3000e+01	0.6000e+01	0.1000e+02
(17)	-0.3000e+01	-0.1000e+01	0.2000e+01	0.3000e+01	0.6000e+01	0.1000e+02

(γ) Vrednosti iteracija prema formuli (37):

(1)	-0.6510e+01	0.2538e+01	0.1917e+01	0.3324e+01	0.5397e+01	0.1033e+02
(2)	-0.3611e+01	0.1538e+01	-0.5059e+00	0.2795e+01	0.6784e+01	0.1000e+02
(3)	-0.3009e+01	0.2014e+01	-0.9983e+00	0.2984e+01	0.6009e+01	0.1000e+02
(4)	-0.3000e+01	0.2000e+01	-0.1000e+01	0.3000e+01	0.6000e+01	0.1000e+02
(5)	-0.3000e+01	0.2000e+01	-0.1000e+01	0.3000e+01	0.6000e+01	0.1000e+02

L I T E R A T U R A

[1] AITKEN, A.C., On interpolation by iteration of proportional parts, without the use of diferences, Proc. Edinburgh Math. Soc. 3(1932),56-76.

[2] ALJANČIĆ, S., Uvod u realnu i funkcionalnu analizu, Gradjevinska knjiga, Beograd, 1968.

[3] ALTMAN, M., Iterative methods of higher order, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astr. Phys. 9 (1961), 63-68.

[4] ALTMAN, M., Extension and stability of certain iterative methods for solving nonlinear functional equations in Banach spaces, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci Math. Astr. Phys. 9(1961), 267-271.

[5] BACHMANN, K. H., Der Konvergenzgrad bei iterativer Lösung von Gleichungen durch inverse Interpolation, Z. Angew. Math. Mech. 34(1954), 282-283.

[6] BARNA, B., Über die Divergenzpunkte des Newtonschen Verfahrens zur Bestimmung von Wurzlen algebraischer Gleichungen. III, Publ. Math. Debrecen, 8(1961), 193-2o7.

[7] BARTLE, R. G., Newton's method in Banach spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 6(1955), 827-831.

[8] BATEMAN, E. H., Halley's methods of solving equations, Amer. Math. Monthly, 45(1938), 11-17.

[9] BAUER, F. L., Beiträge zur Entwicklung numerischer Verfahren für programmgeseuerte Rechnenanlage, II. Direkte Faktorisierung eines Polynoms, Bayer. Akad. Wiss., Math. - Nat. Kl., Sitzber. (1965), 163-2o3.

[1o] БЕРЕЗИН, И. С. и ЖИДКОВ, Н. П., Методы вычислений, ФИЗМАТГИЗ, Москва, 1959.

[11] BITTNER, L., Mehrpunktverfahren zur Auflösung von Gleichungssystemen, Z.angew. Math. Mech., 1963, 111-126.

[12] BODEWIG, E., Über das Eulersche Verfahren zur Auflösung numerischer Gleichungen, Comm. Math. Helv. 8(1935),1-4.

[13] BODEWIG, E., On types of convergence and on the behavior of approximations in the neighborhood of a multiple root of an equation, Quart. Appl. Math. 7(1949),325-333.

[14] BUSSMANN, K., Fundamental existence theorem for n-dimensional generalization of the Newton-Raphson method, Z. angew. Math. Mech. 22(1942),361-362.(Zusammenfassung der These).

[15] CAJORI, F., Historical note on the Mewton-Raphson method of approximation, Amer. Math. Monthly, 18(1911),29-33.

[16] CAUCHY, A., Sur la détermination approximative des racines d´une équation algébrique ou transcendante, Oeuvres completes (II) 4, Gauthier-Villars, Paris, 1899,573-6o9.

[17] COLLATZ, L., Funktionalanalysis und numerische Mathematik, Springer Verlag, Berlin / Göttinger / Heidelberg, 1964.

[18] ДЕМИДОВИЧ, Б.П. и МАРОН, И.А., Основы вычислительной математики, НАУКА, Москва, 1970.

[19] ДОМОРЯД, А.П., Численные и графические методы решения уравнений, Энциклопедия элементарной математики, т.II,стр. 363 -367, ГИТТЛ, М.-Л.,1951.

[20] ДОМОРЯД, А.П., К вопросу о вычислении комплексных корней алгебраических уравневий, Трудий Среднеазиатского университета, 37/1954/,71-74.

[21] DURAND, E., Équations du type F(x) = O, racines d´un polynome, Solutions numériques des équations algébriques, Vol. I. Masson et C^{ie}, Paris, 196o.

[22] EHRMANN, H., Konstruktion und Durchfürung von Iterationsverfahren höherer Ordnung, Arch. Rational. Mech. Anal. 4 (1959),65-88.

[23] FABER, G., Über die Newtonsche Näherungsformel, J. Reine Angew. Math. 138(191o),1-21.

[24] FOURIER, J.B., Oeuvres de Fourier, Vol. II, Gauthier-Villars, Paris, 189o, 249-25o.

[25] FRANK, W.L., Finding zeros of arbitrary functions, J. Assoc. Comput. Mach. 5(1958),154-16o.

[26] HALLEY, E., A new and general method of finding the roots of equations, Philos. Trans. Roy. Soc. London, 18(1694).136.

[27] HILDERBRAND, F.B., Methods of Applied Mathematics, Prentice -Hall, Inc., Engelewood Cliffs, N.J, 1952.

[28] HITOTUMATU, S., A method of successive approximation based on expansion of second order, Math. Japon, 7(1962),31-5o.

[29] HOUSEHOLDER, A.S., Principles of Numerical Analysis, New York/ Toronto/ London, 1953.

[30] HOUSEHOLDER, A.S., Polynomial iterations to roots of algebraic equations, Proc. Amer. Math. Soc. 2(1951),718-719.

[31] JEEVES, T.A., Secant modification of Newton's method, Comm. ACM 1(8),1958,9-1o.

[32] KANTOROVITCH, L.V., The method of Successive Approximations for Funcional Equations, Acta Math. 71(1939),63-97.

[33] КАНТОРОВИЧ, Л.В., Функциональный анализ и прикладная математика, УМН 3, вып.6,1948,89.

[34] KINCAID, W.M., A two-point method for the numerical solution of systems of simultaneous equations, Quart. Appl. Math. 196o/61, 313-324.

[35] KISS, I., Über die Verallgemeinerung des Newtonschen Näherungsverfahrens, Z. Angew. Math. Mech. 34(1954),68-69.

[36] KÖNIG, J., Über eine Eigenschaft der Potenzreihen, Math. Ann. 23(1884),447-449.

[37] KORGANOFF, A., Algébre non linéaire, Méthodes de calcul numérique, Vol. 1. Dunod, Paris, 1961.

[38] KUREPA, DJ., Viša algebra I, II, Zagreb, 1965.

[39] LAMBERT, J.H., Beyträge zum Gebrauche der Matematik und deren Anwendungen, Zweyter Theil, Erster Abschnitt, 177o, p.152.

[40] LANCE, G.N., Numerical Methods for High Speed Computers, Iliffe and Sons, London, 196o.

[41] LONGMAN, I.M., On the utility of Newton's method for computing complex roots of equations, MTAC, 14(196o),187-189.

[42] MULLER, D.E., A method for solving algebraic equations using an automatic computer, MTAC, 1o(1956),2o8-215.

[43] NEWTON, I., The Mathematical papers of Isaac Newton, Vol. I, 1664-1666, Ed. by D.T.Whiteside, Cambridge, 1967.

[44] OSTROWSKI, A., Konvergenzdiskussion und Fehlerabschätzung für die Newtonsche Methode bei Gleichungssystemen, Comment. Math. Helv. 9(1936),79-1o3.

[45] OSTROWSKI, A., Sur la convergence et l'estimation des erreus dans quelques procédés de résolution des équations numérique, Collection of Papers in Memory of D.A.Grave, 213 -234. Moskva, 194o.

[46] OSTROWSKI, A., Über verfahren von Steffensen und Householder zur konvergenzverbesserung von Iterationen, Z. Angew. Math. Phys. 7(1956),218-229.

[47] OSTROWSKI, A., Solution of Equations and Systems of Equations, Academic Press, New York, 1966.

[48] PREŠIĆ, S.B., Un procédé itératif pour la factorisation des polynomes, C. R. Acad. Sc. Paris, 262(1966),862-863.

[49] PREŠIĆ, S.B., Jedan iterativni postupak za faktorizaciju polinoma, Mat. vesnik, 5(20) Sv.2,1968, 2o5-216.

[50] PREŠIĆ, M., Un procédé itératif pour déterminer k zéros d'un polynome, C. R. Acad. Sc. Paris, 273(1971),446-449.

[51] RALL, L.B., Newton's method for the characteristic value problem $Ax=\lambda Bx$, J. Soc. Indust. Appl. Math. 9(1961), 288-293.

[52] RICE, J.R., The characterization of best nonlinear Tschebyscheff approximations, Trans. Amer. Math. Soc. 96(196o), 322-34o.

[53] RICE, J.R., Tschebyscheff Approximations by Functions unisolvent of variable degree, Trans. Amer. Math. Soc. 99(1961), 298-3o2.

[54] SAMELSON, K., Fakorizierung von Polynomen durch funktionale Iteration, Bayer. Akad. Wiss. Math. Nat. Kl., Abhandlungen, 95(1959).

[55] SCHMIDT, J.W., Eine Übertragung der Regula Falsi auf Gleichungen in Banach-Räumen, Z. Angew. Math. Mech. 1-8(1963), 97-11o.

[56] SCHRÖDER, E., Über unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen, Math. Ann. 2(187o),317-365.

[57] SCHRÖDER, J., Über das Newtonsche Verfahren, Arch. Rational Mech. Anal. 1(1957),154-18o.

[58] STEFFENSEN, J.F., Interpolation, Chelsea publishing company, New York, 1950.

[59] STEFFENSEN, J.F., Remarks on iteration, Skand. Aktuarietidskr. 16(1933),64-72.

[60] STEWART, G.W., Some iterations for factoring a polynomial, Numer. Math. 13(1969),458-471.

[61] STROJK, D.J., Kratak pregled istorije matematike, (prevod sa engleskog), Beograd, 1969.

[62] TRAUB, J.F., The theory of multipoint iteration funktion, Digest of Technical Papers, ACM 62 National Conference, 1962, 80-81.

[63] TRAUB, J.F., Iterative Methods for Solution of Equations, Prentice-Hall, 1964.

[64] ВЫХАНДУ, Л., Обобщение метода Ньютона для решения нелинейных систем уравнений, Уч. зап. Тартуского университета, 37/1955/,114-117.

[65] WILLERS, F.A., Methoden der praktischen Analysis, Walter de Gruyter u. Co., Berlin, 1957.

[66] ЗАГУСКИН, В.Л., Справочник по численным методам решения уравнений, ФИЗМАТГИЗ, Москва, 1960.