

Slobodan Vujić i Aleksandar Ivić

MATEMATIČKE METODE U RUDARSTVU I GEOLOGIJI

Teorija i primena

UNIVERSITET U BEOGRADU
RUDARSKO – GEOLOŠKI FAKULTET

MATEMATIČKE METODE
U RUDARSTVU I GEOLOGIJI

14/
Koncizna Topografija
c. Brunschoten.

24. 07. 99.



100
100
100

**CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд**

51-74:550.8(075.8)

ВУЈИЋ, Слободан Б.

Matematičke metode u rudarstvu i geologiji: teorija i primena / Slobodan Vujić i Aleksandar Ivić. – Београд: Универзитет, Рударско-геолошки факултет, 1991 (Београд: Zavod za grafičku tehniku Tehnološko-metalurškog fakulteta). – IX, 328 str.: graf. prikazi; 24cm

Тираж 500. – Библиографија: str. 322–328.
ISBN 86-80887-01-3

1. Ивић, Александар П.

51-74:622(075.8) 519.23/.24(075.8) 519.6(075.8)

**а) Теорија вероватноће б) Математичка статистика ц) Ну-
меричка анализа д) Геолошка истраживања -- Математички
методи е) Рударска истраживања -- Математички методи**

1805836

MATEMATIČKE METODE U RUDARSTVU I GEOLOGIJI

Teorija i primena

Slobodan Vujić i Aleksandar Ivić



UNIVERSITET U BEOGRADU
RUDARSKO – GEOLOŠKI FAKULTET

Prof.dr inž. Slobodan B. Vujić i
Prof.dr Aleksandar P. Ivić, dipl.mat.

MATEMATIČKE METODE U RUDARSTVU I GEOLOGIJI – Teorija i primena

Recenzenti:

dr Robert Kogan, VIEMS, Moskva
Doc. dr Đorđe Vukomanović
Građevinski fakultet Beograd

Izdaje:

Rudarsko-geološki fakultet
Univerzitet u Beogradu
11 000 Beograd, Dušina br.7
tel. 011/334-357, fax. 011/335-539
EARN: ERGF001 @ YUBGSS21

Izdavanje ove knjige pomogli su:

Republički fond za nauku
Univerzitet u Beogradu
Republički fond za geološka istraživanja

Grafička priprema:

mr.inž. Zorka Kujundžić-Bulatović
Ljubomir Damjanović, dipl.inž.
dr inž. Slobodan Dimitrijević

Tiraž: 500 primeraka

Odluka NNV br. 167/1 od 10. 1. 1990.
Beograd, novembar 1990. godine

© Sva prava zadržavaju autori

O Monografiji

Posljednjih godina u svetu je objavljen veći broj monografija, priručnika i zbornika radova koji se studiozno i kompleksno bave problemima primene matematičkih metoda i kompjutera u rešavanju širokog spektra najrazličitijih problema i zadataka u geologiji i rudarstvu. Veći broj ovih radova pati od jedne od dve najkarakterističnije "bolesti": ili je isuviše "matematizovan" i okrenut čistoj teoriji uz korišćenje matematičkog aparata teško razumljivog prosečnom inženjeru, bez ili sa vrlo malo prikazanih konkretnih i očiglednih primera iz prakse, ili je, pak, usmeren isključivo na primenu odgovarajućih metoda i postupaka, bez ili sa vrlo malo prethodnog uvođenja korisnika u matematičku osnovu rešavanja problema i zadataka.

S. Vujić i A. Ivić upravo svojom kompleksnom monografijom objedinjavaju i na optimalan način izbegavaju te dve, uslovno rečeno, "zamke", odnosno ekstremne varijante, i uspešno povezuju relativno složen matematički aparat sa njegovom konkretnom primenom na rešavanju brojnih, ali pre svega tipičnih problema koji se pojavljuju u savremenom rudarstvu i modernim geološkim istraživanjima. Na taj način monografija deluje edukativno i daje potpuno znanje iz karakterističnih oblasti matematike i matematičkih metoda, a sa druge strane sve to oplemenjuje različitim konkretnim situacijama i zadacima koje se pojavljuju i koje treba rešavati u praksi projektovanja i eksploatacije mineralnih sirovina, kao i raznovrsnih geoloških istraživanja i ispitivanja.

Monografija počinje sa prikazom osnovne linearne algebre, pri čemu se pored definisanja i objašnjenja matrica i prikaza operacija sa njima, poseban akcenat daje na praktične primene matičnog računara u geologiji i rudarstvu, naročito kod odabiranja različitih tokova i procesa, razvoja novih inženjersko-kreativnih metoda i pristupa, razvoja specijalizovanih softvera, simulacionih metoda, CAD sistema za projektovanje i dr.

U poglavju koje se odnosi na teoriju grafova (binarne relacije i grafovi, izomorfizam grafova, operacije sa grafovima, matrice i grafovi), naglašava se da ova teorija u računarskoj tehnici ima primenu od samih početaka razvoja te tehnike, i da se uspešno koristi (dokumentovano je i sa više primera) u mnogim oblastima rudarstva (ventilacija, transport i dr.), zatim u mineralogiji, petrografiji i kristalografiji, gde se problemi raznih vrsta simetrije mogu svesti na ekvivalentne probleme iz teorije grafova.

U istom delu monografije, značajna pažnja je poklonjena tehnici mrežnog planiranja, pri čemu je ta tehnika prezentirana na problemu odvijanja projekta otvaranja površinskog kopa, kako bi se adekvatnom sinhronizacijom aktivnosti otvaranja, ostvarile moguće uštede u vremenu i troškovima, osigurala koordinacija i kontrola napredovanja poslova i selektirali (markirali) kritični poslovi.

Osnovi verovatnoće i slučajnih procesa s pravom zauzimaju značajnije mesto u monografiji, jer se bez ove problematike ne može zamisliti rešavanje mnogih problema iz oblasti rudarstva u najširem smislu reči, a takođe i geologije i geoloških istraživanja. U delu primene teorije verovatnoće analiziraju se: model zaliba, model usluživanja i dr. modeli.

U poglavlju koje se odnosi na osnovne statistike, pored prikaza elementarnih statističkih veličina (modus, medijana, geometrijska i harmonijska sredina i dr.), polazeći od primene u geologiji i rudarstvu autori analiziraju binomnu raspodelu, Puasonovu raspodelu, eksponencijalnu raspodelu, log-normalnu raspodelu, a sve to u kontekstu praktične primene i različitih mogućnosti.

Odgovarajuća pažnja je u monografiji posvećena metodi Monte Karlo, i to ne samo sa stanovišta opštih postavki i slučajnih brojeva, već naročito sa aspekta osnovnih principa primene (deterministički i stohastički procesi, generalisanje slučajnih brojeva i dr.).

U delu o osnovama geostatistike, s pravom je veći deo izlaganja poklonjen krigovanju kao jednom od najvažnijih doprinosa geostatistike (diskretno i kontinuirano krigovanje), ali nisu ostala po strani ni pitanja kao što su: prostorna promenljivost, variogram, disperzija i dr.

U okviru dela koji se odnosi na numeričku analizu prikazana je, sa adekvatnim primerima, teorija interpolacije (opšta pitanja, Lagranžev interpolacioni polinom, Njutnov interpolacioni polinom za jednake i nejednake razlike, inverzna interpolacija, interpolacija kod periodičnih funkcija i dr., kao i numeričko diferenciranje i integracija, približno rešavanje jednačina i izračunavanje i aproksimacija funkcija.

U poslednja tri poglavlja, obrađena je problematika metode konačnih razlika, splajnovi (parabolični, kubni, višedimenzionalni i njihova primena kod matematičkog modeliranja geoloških i topografskih površina i dr.). Furijeovi redovi (periodične funkcije, posebni oblici, partikularni, diskretni dvostruki i njihove primene).

Kada se govori o ovoj monografiji, ne može se zaboraviti jedna važna činjenica. Pre šest godina (1985), u predgovoru za monografiju S. Vujića: "Matematičko modeliranje ležišta mineralnih sirovina u cilju određivanja osnovnih tehničko-tehnoloških parametara površinskih kopova", Beograd, Rudarsko-geološki fakultet Univerziteta u Beogradu, izražena je želja da će ta monografija uticati na još veću mobilizaciju kadrova u oblasti geologije i rudarstva na primeni matematičkih metoda u oblasti istraživanja i eksploatacije ležišta mineralnih sirovina, jer je upravo ta monografija ukazala na veliki značaj primene matematike u rešavanju problema i zadataka u geologiji i rudarstvu.

Sa zadovoljstvom se može konstatovati da se to i ostvarilo. U međuvremenu

je stvoren Komitet za primenu matematičkih metoda u rudarstvu, geologiji i metalurgiji Saveza inženjera i tehničara rudarske, geološke i metalurške struke Jugoslavije, održan je I jugoslovenski simpozijum "Primena matematičkih metoda i računara u rudarstvu i geologiji", koji je po broju, kvalitetu radova i broju učesnika, prevazišao i najoptimističnije prognoze, a takođe je održan veći broj savetovanja, prezentacija primene računarskih programa u geologiji i rudarstvu i okruglih stolova i veliki broj kompjutera je ušao u mnoge geološke i rudarske institucije i preduzeća. Osim toga, prešlo se i na organizovaniju međunarodnu saradnju, učlanjivanje u svetske organizacije i kontinuiraniju razmenu stručnjaka.

Razume se, još uvek ima dosta stvari koje je potrebno promeniti: u načinu mišljenja jednog broja stručnjaka, u odnosu na organizaciju informacionog geološkog i rudarskog sistema u zemlji i na nižim nivoima, kao i u nastavnim planovima i programima. Daleko je od toga da smo prevazišli zaostajanje za svetom na ovom polju. Danas ima mnogo više pozitivnih i ohrabrujućih trendova nego što je to bio slučaj pre par godina. Još više optimizma da će se stvari ubrzanije menjati, bez obzira na nepovoljne društveno-ekonomske uslove u kojima živimo, unose ovakvi radovi, koji pokazuju da raspolažemo sa izuzetno kvalitetnim kadrovima, stručnjacima, koji mogu da ostvare i napišu tako vrhunsku monografiju kao što je ova i koji snažno utiču na još veću animaciju naročito mladih stručnjaka, da se studiozno bave primenom matematičkih metoda i kompjutera u geologiji i rudarstvu.

Prof. dr inž. Dejan Milovanović

Predgovor

Primena matematike u rudarstvu i geologiji datira od samih početaka ovih disciplina, da bi tokom vremena postepeno dobijala sve više na značaju. Za ovo je posebno zaslužan razvoj računarske tehnike u poslednjih četvrt veka, čime su stvoreni preduslovi za praktično korišćenje mnogih matematičkih metoda. Na razvoj i unapređenje rudarstva i geologije kroz tzv. "matematizaciju" imali su zasluga mnogi naučnici. Pomenimo samo Vistelijusa, Kriga, De Vajsa, Margolina, Zihela, Agterberga, Farmera, Rodjonova, Medoua, a posebno Materona, koji je 1962. objavio kapitalnu monografiju "Traité de Geostatistique Appliquée", kojom je utemeljio geostatističku teoriju.

Uprkos znatnom porastu razne vrste literature koja se bavi primenom matematike u rudarstvu i geologiji, smatramo da postoji potreba za jednim delom koje bi sistematiski, sa dosta širine, dalo primenu matematičkih metoda u rudarstvu i geologiji. Osnovni cilj nam je bio da izložimo neke od najznačajnijih savremenih matematičkih metoda koje se primenjuju u rudarstvu i geologiji, uz poštovanje principa da za svaku oblast budu date teorijske osnove, kao i neki praktični aspekti primene. Koliko smo u tome uspeeli, oceniće stručna javnost. Bili smo suočeni sa izvesnim teškoćama metodološkog tipa. Sa jedne strane, složenu i razućdenu matematičku materiju trebalo je izložiti sistematski, ne suviše opširno, oplemenjenu primerima iz prakse i na razumljiv i lako prihvatljiv način za širi krug studenata i stručnjaka. Sa druge strane, trebalo je održati ujednačen nivo u svim poglavljima, kao što se i očekuje od monografskog dela.

Knjiga je prvenstveno namenjena inženjerima i studentima rudarstva i geologije, kao i svim onima iz drugih tehničkih struka koji se u svom radu susreću sa primenom matematičkih metoda. Knjiga je tako koncipirana i pisana da se može uspešno koristiti kao pomoćni

udžbenik na redovnim, specijalističkim i posleđiplomskim studijama na fakultetu, kao i za potrebe održavanja specijalizovanih stručnih seminara iz domena predmetne problematike.

Neophodno je istaći da nijedna knjiga ovoga tipa nije u stanju da obuhvati sve probleme primene matematike u rudarstvu i geologiji sa istom specifičnom težinom. Kako obim knjige nije uvek dopuštao ulaznje u sve detalje teorije i primene pojedinih metoda, za dublja proučavanja pojedinih oblasti autori upućuju čitaoce na odgovarajuću specijalizovanu literaturu.

Knjiga je nastala kao rezultat višegodišnje saradnje autora i njihovog istraživačkog rada u predmetnoj oblasti, a jedan deo ovih istraživanja primenjen je u rešavanju konkretnih primena u rudarstvu i geologiji.

Zahvaljujemo dr Robertu Koganu i dr Dorđu Vukomanoviću za njihov trud na recenziji knjige, te dr inž. Slobodanu Dimitrijeviću na velikoj pomoći kod grafičke opreme knjige.

Zahvaljujemo se Prof. dr inž. Dejanu Milovanoviću na korisnim sugestijama, a Pprof. dr inž. Borislavu Zajiću na pažljivom čitanju teksta i ukazanim nedostacima.

Posebnu zahvalnost dugujemo mr inž. Zorki Bulatović i Ljubomiru Damjanović dipl.inž. na brižljivoj grafičkoj obradi knjige.

Dugujemo i zahvalnost Republickom fondu za nauku Srbije, Univerzitetu u Beogradu i Republickom fondu za geološka istraživanja Srbije, koji su materijalnom podrškom omogućili štampanje ove monografije.

Obim knjige i širina obuhvaćene materije učinili su da možda nismo uvek na najpogodniji način obradili i objasnili sve delove u knjizi. Sa zahvalnošću ćemo prihvatiti sve primedbe i sugestije koje bi doprinele poboljšanju teksta.

U Beogradu, novembra 1990.

Autori

Sadržaj

1. LINEARNA ALGEBRA

1.1. Osnovi linearne algebre.....	1
1.1.1. Pojam i definicija matrice.....	1
1.1.2. Operacije sa matricama.....	2
1.1.3. Determinante i inverzne matrice.....	7
1.1.4. Vektorski prostori.....	11
1.1.5. Linearni operatori u vektorskim prostorima.....	15
1.1.6. Sistem linearnih jednačina.....	19
1.1.7. Konveksni skupovi i konveksne funkcije.....	23
1.2. Praktični aspekti primene matičnog računa.....	25

2. TEORIJA GRAFOVA

2.1. Osnovi teorije grafova.....	35
2.1.1. Binarne relacije i grafovi.....	35
2.1.2. Povezanost grafova.....	38
2.1.3. Izomorfizam grafova.....	40
2.1.4. Operacije sa grafovima.....	42
2.1.5. Planarni grafovi.....	43
2.1.6. Matrice i grafovi.....	44
2.2. Primena grafova.....	46
2.3. Prilozi.....	57

3. VEROVATNOĆA I SLUČAJNI PROCESI

3.1. Osnovi verovatnoće i slučajnih procesa	68
3.1.1. Slučajni događaji i osnovni pojmovi verovatnoće	68
3.1.2. Diskretne slučajne promenljive	71
3.1.3. Matematičko očekivanje diskretnih slučajnih promenljivih	74
3.1.4. Neprekidne slučajne promenljive	76
3.1.5. Raspodela dvodimenzionalnih slučajnih promenljivih	80
3.1.6. Karakteristične funkcije i funkcije generatrisa momenta	84
3.1.7. Diskretni lanci Markova	87
3.1.8. Neprekidni procesi Markova sa prebrojivo mnogo stanja	90
3.2. Primena teorije verovatnoće	94
3.2.1. Model zaliha	96
3.2.2. Model usluživanja	98
3.2.3. Lanci Markova i stratigrafski modeli	103

4. STATISTIKA

4.1. Osnovi statistike	107
4.1.1. Osnovne statističke veličine	107
4.1.2. Neke raspodele statistike	111
4.1.3. Intervali poverenja	113
4.1.4. Testiranje statističkih hipoteza	116
4.1.5. Analiza varijanse	121
4.1.6. Korelacija i regresija	123
4.2. Primena statistike	128
4.2.1. Izračunavanje sa malim brojem podataka	130
4.2.2. Izračunavanje sa velikim brojem podataka	134
4.2.3. Grafičko predstavljanje varijacionih nizova	136
4.2.4. Medijana, modus i izračunavanje centra rasturanja	139
4.2.5. Analiza varijanse	147
4.2.6. Korelacija i regresija	149

5. METODA MONTE KARLO	
5.1. Teorijske osnovi metode Monte Karla.....	158
5.1.1. Opšte postavke.....	158
5.1.2. Dobijanje slučajnih brojeva.....	159
5.1.3. Modeliranje slučajnih promenljivih.....	160
5.1.4. Izračunavanje određenog integrala.....	163
5.2. Primena metode Monte Karlo.....	166
5.2.1. Deterministički i stohastički procesi.....	167
5.2.2. Generisanje slučajnih brojeva.....	169
5.2.3. Osnovni principi primene metode Monte Karlo.....	174
5.2.4. O mogućnostima primene metode Monte Karlo.....	178
6. OSNOVI GEOSTATISTIKE.....	188
6.1. Pitanje prostorne promenljivosti.....	189
6.2. Variogram.....	190
6.3. Disperzije.....	192
6.4. Disperzija ocene i disperzija rasprostranjenja.....	196
6.5. Krigovanje.....	200
6.5.1. Diskretno krigovanje.....	202
6.5.2. Kontinuirano krigovanje.....	205
7. NUMERIČKA ANALIZA	
7.1. Osnovi numeričke analize.....	207
7.1.1. Teorija interpolacije.....	207
7.1.1.1. Opšte o problemu interpolacije.....	207
7.1.1.1.2. Lagranževov interpolacioni polinom.....	208
7.1.1.1.3. Njutnov interpolacioni polinom za nejednake razlike.....	209
7.1.1.1.4. Njutnov interpolacioni polinom za jednake razlike.....	211
7.1.1.1.5. Interpolacioni polinom sa središnjim razlikama.....	212
7.1.1.1.6. Inverzna interpolacija.....	214
7.1.1.1.7. Interpolacija kod periodičnih funkcija.....	215
7.1.1.1.8. Interpolacija funkcija od dve nezavisne promenljive.....	216

7.1.2. Numeričko diferenciranje i integracija.....	217
7.1.2.1. Numeričko (približno) diferenciranje.....	217
7.1.2.2. Numerička integracija.....	219
7.1.2.3. Približno izračunavanje višestrukih integrala.....	223
7.1.3. Izračunavanje i aproksimacija funkcija.....	225
7.1.4. Približno rešavanje jednačina.....	232
7.1.4.1. Približno rešavanje običnih jednačina.....	232
7.1.4.2. Približno rešavanje diferencijalnih jednačina.....	239
7.2. Primena numeričke analize.....	242
7.2.1. Interpolacija.....	244
7.1.1.1. Lagranževov interpolacioni polinom.....	245
7.2.1.2. Njutnov interpolacioni polinom.....	247
7.2.1.3. Inverzna interpolacija.....	249
7.2.1.4. Interpolacija sa dve nezavisne promenljive.....	251
7.2.2. Numeričko diferenciranje i integracija.....	253
7.2.2.1. Numeričko diferenciranje.....	253
7.2.2.2. Numerička integracija.....	254
7.2.3. Izračunavanje i aproksimacija funkcije.....	256
7.2.4. Približno rešavanje jednačina.....	257
8. METODE KONAČNIH RAZLIKA	
8.1. Približno rešavanje parcijalnih diferencijalnih jednačina metodom konačnih razlika.....	263
8.1.1. Parcijalne diferencijalne jednačine.....	263
8.1.2. Pojedini primeri parcijalnih diferencijalnih jednačina.....	265
8.1.3. Konačne razlike.....	266
8.1.4. Približno rešavanje parcijalnih diferencijalnih jednačina.....	270
8.2. Primena metode konačnih razlika.....	274
8.2.1. Fizički smisao metode konačnih razlika.....	275

9. SPLAJNOVI

9.1. Teorijske osnove splajnova.....	284
9.1.1. Pojam i definicija splajna.....	284
9.1.2. Parabolični splajnovi.....	286
9.1.3. Kubni splajnovi.....	290
9.1.4. Višedimenzionalni i Ermitovi splajnovi.....	294
9.1.5. Primena splajnova u numeričkoj matematici.....	295
9.2. Primena splajnova.....	297

10. FURIJEVI REDOVI

10.1. Teorijske osnove Furijeovih redova.....	304
10.1.1. Periodične funkcije i Furijeovi redovi.....	304
10.1.2. Određivanje koeficijenta Furijeovi redovi.....	305
10.1.3. Posebni oblici Furijeovog reda.....	307
10.1.4. Partikularni Furijeovi redovi.....	308
10.1.5. Diskretni Furijeovi red.....	310
10.1.6. Dvostruki Furijeovi redovi.....	311
10.2. Primena Furijeovih redova.....	315

LITERATURA.....	322
-----------------	-----

1. Linearna algebra

1.1. Osnovi linearne algebre

1.1.1. Pojam i definicija matrice

Matrica tipa $m \times n$ (ili formata $m \times n$) nad skupom realnih brojeva R ili kompleksnih brojeva C je uređena pravougaona shema brojeva

$$(1.1) \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

pri čemu se za označavanje matrice najčešće koriste početna velika slova latinice, a umesto uglastih zagrada $[\]$, kojim se uokviruju elementi matrice, često se koristi i zagrade $(\)$ ili $\| \ \|$. Horizontalni redovi elemenata matrice A nazivaju se vrste, a vertikalni kolone, tako da matrica A u (1.1) ima m vrsta i n kolona. Zbog preglednosti zapisa elementi matrice se često označavaju indeksima, pa tako a_{ij} označava element matrice koji se nalazi na i -tom mestu u njenoj j -toj koloni, ili na j -tom mestu u i -toj vrsti. Skraćeni zapis matrice A u (1.1) je

$$(1.2) \quad A = [a_{ij}] \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, m, \\ j = 1, \dots, n, \end{array}$$

gde je naznačeno da matrica ima m vrsta i n kolona. Valja odmah napomenuti da se matrica, kao apstraktni pojam koji obuhvata više uređenih elemenata, bitno

razlikuje od pojma determinante (v. odeljak 1.1.3), jer determinanta predstavlja brojni izraz čija se vrednost izračunava po tačno određenim pravilima.

Koristeći zapis (1.2) može se reći da su matrice

$$A = [a_{ij}] \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, m, \\ j = 1, \dots, n \end{array} \quad B = [b_{ij}] \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, r \\ j = 1, \dots, s \end{array}$$

jednake (u oznaci $A = B$) ako je $m = r$, $n = s$ i $a_{ij} = b_{ij}$ za svako i i j . Drugim rečima, dve matrice su jednake ako su istoga tipa i ako su im svi odgovarajući elementi jednaki.

Primer 1.1. Matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \quad i \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

nisu jednake, mada su istog tipa i imaju iste elemente, ali im se već elementi u prvoj vrsti i prvoj koloni razlikuju.

1.1.2. Operacije sa matricama

U skup matrica mogu se uvesti operacije sabiranja, množenja i množenje matrice brojem (iz R ili C). Ako je α broj (iz R ili C), a A matrica data sa (1.1), onda je

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix},$$

drugim rečima matrica se množi brojem tako što se svaki njen element pomnoži tim brojem.

Primer 1.2.

$$3 \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -12 & 0 \\ 3 & 9 & 6 \end{bmatrix}.$$

Za sabiranje su potrebne dve matrice A i B , koje moraju biti istog tipa, recimo

$$A = [a_{ij}] \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, m, \\ j = 1, \dots, n \end{array} \quad B = [b_{ij}] \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, m, \\ j = 1, \dots, n. \end{array}$$

Tada se matrica $C = A + B$ definiše kao

$$C = [c_{i,j}] \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, m, \\ j = 1, \dots, n, \end{array}$$

pri čemu je $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$ za svako i i j . Matrice se znači sabiraju tako što im se odgovarajući elementi saberu, pri čemu obe moraju imati isti broj vrsta i kolona.

Primer 1.3.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 4 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

Množenje matrica (proisteklo iz transformacija vektorskih prostora, v. odeljak 1.1.5) je nešto komplikovanije. Ako su

$$A = [a_{ij}] \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, m, \\ j = 1, \dots, n \end{array} \quad B = [b_{jk}] \quad \begin{array}{l} j = 1, \dots, n, \\ k = 1, \dots, p \end{array}$$

dve matrice tipa $m \times n$ i $n \times p$ (vrste i kolone su kod A označene sa i i j , a kod B sa indeksima j i k), tada je njihov proizvod matrica

$$(1.3) \quad C = AB = [c_{ik}] \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, m, \\ k = 1, \dots, p \end{array} \quad c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk},$$

gde operator \sum označava sabiranje. Proizvod AB je definisan ako i samo ako je broj kolona matrice A jednak broju vrsta matrice B . Broj vrsta AB jednak je broju vrsta A , a broj kolona AB jednak je broju kolona matrice B .

Najjednostavnije je pamtiti da se element c_{ik} matrice $C = AB$ formira tako što se elementi i -te vrste matrice A :

$$a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$$

pomnože sa odgovarajućim elementima k -te kolone matrice B :

$$\begin{array}{c} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{array}$$

i tako dobiveni proizvodi saberu. Pri tome su odgovarajući elementi a_{i1} i b_{1k} , a_{i2} i b_{2k} , \dots , a_{in} i b_{nk} .

Primer 1.4.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 12 & 14 \\ 14 & 5 \end{bmatrix}$$

Ako su α i β brojevi, A , B i C matrice, onda važe sledeći zakoni:

$$(1.4) \quad (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A,$$

$$(1.5) \quad \alpha(A + B) = \alpha A + \beta B,$$

$$(1.6) \quad (\alpha\beta)A = \alpha(\beta A),$$

$$(1.7) \quad A + B = B + A, \quad (\text{komutativnost sabiranja})$$

$$(1.8) \quad A + (B + C) = (A + B) + C, \quad (\text{asocijativnost sabiranja})$$

$$(1.9) \quad A(BC) = (AB)C, \quad (\text{asocijativnost množenja})$$

$$(1.10) \quad C(A + B) = CA + CB, \quad (\text{distributivnost s leva})$$

$$(1.11) \quad (A + B)C = AC + BC, \quad (\text{distributivnost s desna})$$

$$(1.12) \quad \alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$$

Kod ovih zakona mora se naravno voditi računa o tome da su odgovarajući zbrojevi i proizvodi definisani. Primećuje se da navedeni zakoni odgovaraju zakonima za sabiranje i množenje običnih realnih brojeva. Međutim, ovde za množenje matrica nedostaje zakon koji odgovara komutativnosti množenja kod brojeva, a to je

$$(1.13) \quad AB = BA.$$

Za matrice za koje važi (1.13) kaže se da su *komutativne*, a iz definicije množenja sledi da matrice koje su komutativne moraju biti istog kvadratnog tipa, pri čemu je matrica kvadratna ako je tipa $n \times n$. Da zakon komutativnosti ne važi u opštem slučaju pokazuje primer.

Primer 1.5.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix},$$

gde se čak svi odgovarajući elementi u proizvodima AB i BA međusobno razlikuju. Zbog toga, zakoni (1.10) i (1.11) i nose imena "distributivnost s leva" i "distribu-

tivnost s desna", a gde god je reč o množenju matrica treba dobro voditi računa da rezultat množenja bitno zavisi od poretka faktora.

Matrica tipa $m \times n$ čiji su svi elementi 0 označava se sa $0_{m,n}$ ili samo sa 0, ako je jasno o kakvoj se matrici radi. Takva matrica se zove *nula-matrica*, i na osnovu zakona o operacijama sa matricama, doista i preuzima ulogu obične nule u matricnom računu. Kod običnih brojeva $xy = 0$ povlači $x = 0$ ili $y = 0$, međutim, kod matrica može da bude $AB = 0$, a da $A \neq 0$ i $B \neq 0$.

Primer 1.6

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0_{2,2}.$$

Kvadratna matrica A tipa $n \times n$ kod koje su svi elementi $a_{i,j}$ jednaki nuli, osim onih za koje je $i = j$ zove se dijagonalna matrica, i označava

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix} = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}),$$

pri čemu velike nule u matrici upravo označavaju da su svi elementi van glavne dijagonale $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$, jednaki nuli. Pod *jediničnom matricom* I_n (ili E_n) podrazumeva se matrica

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} = \text{diag}(1, 1, \dots, 1),$$

tipa $n \times n$, i često označava samo sa I (ili E), ako je jasno o kom se tipu matrice radi. Jedinična matrica igra ulogu broja 1 u matricnom množenju, jer je

$$I_n A = A I_n = A$$

za svaku kvadratnu matricu tipa $n \times n$.

Dijagonalne matrice su najjednostavnije matrice, a množenje s njima se izvodi na sledeći način. Ako je $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$,

$$A = [a_{ij}] \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, n, \\ j = 1, \dots, n, \end{array}$$

tada je

$$DA = \begin{bmatrix} d_1 a_{11} & d_1 a_{12} & \dots & d_1 a_{1n} \\ d_2 a_{21} & d_2 a_{22} & \dots & d_2 a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_n a_{n1} & d_n a_{n2} & \dots & d_n a_{nn} \end{bmatrix},$$

odnosno DA je matrica koja se dobija iz matrice A tako što se elementi prve vrste pomnože sa d_1 , druge sa d_2, \dots, n -te sa d_n . Takođe je i

$$AD = \begin{bmatrix} d_1 a_{11} & d_2 a_{12} & \dots & d_n a_{1n} \\ d_1 a_{21} & d_2 a_{22} & \dots & d_n a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_1 a_{n1} & d_2 a_{n2} & \dots & d_n a_{nn} \end{bmatrix},$$

odnosno AD je matrica koja se dobija iz matrice A tako što se elementi prve kolone pomnože sa d_1 , druge kolone sa d_2, \dots, n -te sa d_n .

Primer 1.7.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 6 & -2 & 0 \\ -16 & -8 & -4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -8 \\ 9 & -2 & 0 \\ 12 & 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Kvadratne matrice A tipa $n \times n$ mogu se i stepenovati. Po definiciji je

$$(1.14) \quad A^0 = I_n, \quad A^1 = A, \quad A^2 = A \cdot A, \dots, A^{k+1} = A \cdot A^k.$$

Tada za nenegativne cele brojeve p i q važi

$$(1.15) \quad A^p A^q = A^{p+q}, \quad (A^p)^q = A^{pq},$$

što u potpunosti odgovara zakonima stepenovanja kod običnih brojeva.

U matricnom računu se često pojavljuje operacija transponovanja matrica. Transponovana matrica matrice A se označava sa A^T (ili A') i dobija se ako se u A promene mesta vrstama i kolonama.

Primer 1.8.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Za transponovanje matrica važi

$$\begin{aligned}(A + B)^T &= A^T + B^T, \\ (\alpha A)^T &= \alpha A^T, \quad (\alpha \in R) \\ (AB)^T &= B^T A^T,\end{aligned}$$

pod uslovom da $A + B$, AB postoje. Kvadratna matrica A je simetrična ako je $A = A^T$, a kososimetrična ako je $A = -A^T$. Za simetričnu matricu je $a_{ij} = a_{ji}$ za sve vrednosti indeksa i i j .

1.1.3. Determinante i inverzne matrice

Determinanta matrice je broj koji se dodeljuje kvadratnim matricama na sledeći način. Neka je

$$\begin{aligned}A &= [a_{ij}] & i &= 1, \dots, n, \\ & & j &= 1, \dots, n\end{aligned}$$

kvadratna matrica. Tada je determinanta od A broj koji se zapisuje kao

$$(1.16) \quad \det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

pri čemu je ovaj zapis sličan zapisu (1.1) za samu matricu A , ali se tu radi o bitno različitim pojmovima. Izračunavanje determinanti se vrši na sledeći način. Ako je

$$A = [a] \text{ tipa } 1 \times 1, \text{ tada je } \det A = |A| = a, \text{ a ako je } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \text{ onda je}$$

$$(1.17) \quad \det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Izračunavanje determinanti tipa $n \times n$ za $n > 2$ se svodi na izračunavanje determinanti tipa $(n-1) \times (n-1)$, dakle, u krajnjoj liniji na (1.17). U determinanti (1.16) uočimo elemenat a_{ij} i izostavimo iz determinante sve elemente i -te vrste i j -te kolone. Tako se dobija determinanta tipa $(n-1) \times (n-1)$ koja se označava sa A_{ij} i zove kofaktor elementa a_{ij} . Tada važi

$$\begin{aligned}
 (1.18) \quad & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
 & = a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} - \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}A_{1n}.
 \end{aligned}$$

Determinante A_{11}, \dots, A_{1n} razvijaju se po istom postupku dok se ne dođe do determinanti tipa 2×2 , koje se računaju po (1.17). Razvitak determinante po formuli (1.18) naziva se razvitak po prvoj vrsti, dok se pogodnosti radi determinanta može razvijati po bilo kojoj vrsti i koloni po obrascu

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} A_{ik} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} A_{kj},$$

pri čemu je u prvom zbiru i utvrđena, proizvoljna vrsta (razvitak po i -toj vrsti), a u drugom zbiru je j utvrđena, proizvoljna kolona (razvitak po j -toj koloni).

Primer 1.9. Primer razvitka determinante po prvoj vrsti:

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$4(0 \cdot 4 - 1 \cdot 1) + (3 \cdot 4 + 5 \cdot 1) + 2(3 \cdot 1 + 0 \cdot 5) = 19.$$

Ovde valja navesti i nekoliko osobina determinanti, koje znatno uprošćavaju njihovo izračunavanje:

1. Ako u determinanti dve vrste (ili dve kolone) promene mesto, determinanta menja znak.

Primer 1.10.

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -5 & 7 \\ 0 & 2 & 9 & 11 \\ 4 & 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \\ 2 & 0 & 9 & 11 \\ 0 & 4 & 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

2. Determinanta se množi brojem tako što se jedna vrsta (ili jedna kolona) pomnoži tim brojem. Ovo treba dobro razlikovati od pravila za množenje matrice brojem, jer se **svi** elementi matrice množe brojem.

Primer 1.11.

$$\begin{vmatrix} 6 & 8 & 4 \\ 9 & 1 & -2 \\ 12 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 9 & 1 & -2 \\ 12 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

3. Determinanta ne menja vrednost ako se elementi jedne vrste (ili jedne kolone) pomnože nekim brojem i dodaju odgovarajućim elementima neke druge vrste (ili kolone).

Primer 1.12. (prva vrsta množena sa 3 i dodata drugoj):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 6 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 12 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

4. Ako su u determinanti elementi dve vrste (ili dve kolone) proporcionalni; determinanta je jednaka nuli.

Primer 1.13.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 7 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & -12 & 8 \end{vmatrix} = 0,$$

jer su elementi treće kolone -3 puta elementi druge kolone.

Determinante igraju važnu ulogu kod rešavanja sistema linearnih jednačina (odeljak 1.1.6) i kod pojma inverzne matrice. Inverzna matrica kvadratne matrice A tipa $n \times n$ (nekvadratne matrice ne mogu da imaju inverznu matricu!) se označava sa A^{-1} i zadovoljava

$$(1.19) \quad A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n.$$

Drugim rečima, inverzna matrica u matricnom računu odgovara pojmu deljenja (recipročna vrednost) kod običnih brojeva. Za dve kvadratne matrice A i B tipa $n \times n$ uvek važi $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$, pa iz (1.19) sledi

$$(1.20) \quad \det(A^{-1}) = (\det A)^{-1} = \frac{1}{\det A},$$

tj. samo one kvadratne matrice A za koje je $\det A \neq 0$ mogu da imaju inverznu matricu. Za kvadratnu matricu A se kaže da je regularna ako je $\det A \neq 0$, a da je singularna ako je $\det A = 0$.

Regularne matrice imaju inverznu matricu koja se piše u obliku

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$$

gde je A^* (ili A^+ ili $\text{adj}A$) tzv. adjungovana matrica matrice A , koja se definiše kao

$$A^* = [b_{ij}] \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, n, \\ j = 1, \dots, n. \end{array} \quad b_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ji}$$

Drugim rečima, element u i -toj vrsti i j -toj koloni kod A^* je $(-1)^{i+j}$ puta kofaktor u j -toj vrsti i i -toj koloni (vrsta i kolona menjaju mesto!) matrice A , pri čemu je $(-1)^{i+j} = 1$ ako je $i + j$ parni broj, a $(-1)^{i+j} = -1$ ako je $i + j$ neparan broj. Za matricu

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

tipa 2×2 može se neposredno napisati

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \quad (ad - bc \neq 0)$$

dok se za matricu višeg reda A^{-1} računa po izloženom postupku.

Primer 1.14.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det A = -7 \neq 0,$$

$$\begin{array}{l} A_{11} = 2, \quad A_{12} = -1, \quad A_{13} = -3, \quad A_{22} = -2, \\ A_{23} = 1, \quad A_{31} = -6, \quad A_{32} = 3, \quad A_{33} = 2, \end{array}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & -1 \\ -6 & -3 & 2 \end{bmatrix},$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{7} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & -1 \\ -6 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Za inverznu matricu važi

$$(A^{-1})^{-1} = A, \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Takođe se pravilo (1.15) proširuje na sve cele brojeve p i q .

Uz pomoć inverznih matrica pojedine matricne jednačine se mogu rešavati, vodeći računa da zakon komutativnosti u opštem slučaju ne važi. Npr. jednačina

$$(1.21) \quad AX = B,$$

gde je X nepoznata matrica tipa $n \times n$, a A i B date matrice tipa $n \times n$ može se rešiti ako je A regularna matrica. Množeći tada jednačinu sa A^{-1} sa leve strane sledi

$$(1.22) \quad \begin{aligned} A^{-1}B &= A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = I_n X = X, \quad \text{tj.} \\ X &= A^{-1}B, \end{aligned}$$

a slično se rešenje matricne jednačine $XA = B$ nalazi u obliku

$$X = BA^{-1}.$$

1.1.4. Vektorski prostori

Vektorski prostor V nad skupom R ili C je skup sa osobinom da za svaka dva elementa $a, b \in V$ postoji element $c \in V$ sa osobinom $c = a + b$ i za svako $a \in V$ i α iz R (ili C); takvi brojevi se u terminologiji vektorskih prostora nazivaju skalari) postoji proizvod $\alpha a \in V$. Na taj način se u V uvodi operacija sabiranja i operacija množenja elemenata iz V (vektora) brojevima (skalarima), pri čemu je rezultat tog sabiranja i množenja opet vektor. Da bi V bio vektorski prostor, navedene operacije moraju da zadovoljavaju sledeće zakone (α, β su proizvoljni skalari, a a, b, c proizvoljni vektori):

$$(1.23) \quad a + b = b + a, \quad (\textit{komutativnost})$$

$$(1.24) \quad a + (b + c) = (a + b) + c, \quad (\textit{asocijativnost})$$

$$(1.25) \quad \text{Postoji element } 0 \in V \text{ tako da je } a + 0 = a,$$

$$(1.26) \quad \text{Za svako } a \in V \text{ postoji } -a \in V \text{ tako da je } a + (-a) = 0,$$

$$(1.27) \quad \alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b, \quad (\textit{distributivnost})$$

$$(1.28) \quad (\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a, \quad (\textit{distributivnost})$$

$$(1.29) \quad (\alpha\beta)a = \alpha(\beta a), \quad 1 \cdot a = a.$$

Ovi zakoni su aksiome, koje se pretpostavljaju i ne dokazuju. Treba primetiti da se između 0 kao broja (skalara) i 0 kao vektora ne pravi razlika, jer je uvek jasno da je krajnji rezultat neke operacije nula-vektor ili nula-broj. Iz navedenih aksioma sledi da je u V jednoznačno izvodiva operacija oduzimanja elemenata a i b (u oznaci $c = a - b$) i da uvek važi

$$(1.30) \quad \alpha \cdot 0 = 0, \quad 0 \cdot a = 0,$$

$$(1.31) \quad \alpha a = 0 \text{ povlači } \alpha = 0 \text{ ili } a = 0,$$

$$(1.32) \quad \alpha(-a) = -\alpha a, \quad (-\alpha)a = -\alpha a,$$

$$(1.33) \quad \alpha(a - b) = \alpha a - \alpha b, \quad (\alpha - \beta)a = \alpha a - \beta a.$$

Važni pojmovi vektorskih prostora su linearna zavisnost (odnosno nezavisnost) i baza. Konačan skup a_1, a_2, \dots, a_n elemenata iz V je linearno zavislan ako postoje skalari $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ od kojih je bar jedan različit od nule, takav da bude

$$(1.34) \quad \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = 0.$$

Drugim rečima, skup a_1, a_2, \dots, a_n je linearno nezavislan ako je (1.34) moguće samo sa $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

Za skup e_1, e_2, \dots, e_n vektora iz V kaže se da je baza V ako su ti vektori linearno nezavisni i ako za svako $a \in V$ postoje skalari $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tako da bude

$$(1.35) \quad a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n.$$

Ako su vektori baze poznati, onda je prikazivanje vektora u obliku (1.35) jednoznačno, što znači da iz

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n, \quad a = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n$$

sledi $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_n = \beta_n$. Broj n se tada naziva dimenzija vektorskog prostora V , i kaže se da je V n -dimenzionalni vektorski prostor. Ovaj naziv opravdan je, jer ako u V postoji baza sa n elemenata, onda i svaka druga baza u V mora da ima n elemenata, premda se vektori baza mogu međusobno razlikovati. S druge strane, svaki skup linearno nezavisnih vektora n -dimenzionalnog prostora je ili sam baza, ili mu se mogu pridodati još neki vektori tako da on postane baza.

Podprostor L vektorskog prostora V je svaki neprazan podskup u V sa osobinama:

1. Ako $a, b \in L$, onda i zbir $a + b \in L$.
2. Ako $a \in L$, onda i $\alpha a \in L$ za svaki skalar α .

Iz ove definicije sledi da $0 \in L$ za svaki podprostor L , i ako $a \in L$ onda i $-a \in L$. Ako je V n -dimenzionalni vektorski prostor, a L njegov podprostor, onda je m -dimenzionalni vektorski prostor gde je $0 \leq m \leq n$, pri čemu je $m = 0$ ako se L sastoji samo iz elemenata 0 a $m = n$ ako je $L = V$. Ako se odabere m proizvoljnih linearno nezavisnih vektora $e_1, e_2, \dots, e_m \in V$ i posmatra skup

$$L = \{a|a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_m e_m\},$$

pri čemu su $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ proizvoljni skalari a simbol $|$ označava izraz "tako da", "sa osobinom da", tada je L jedan m -dimenzionalni podprostor vektorskog prostora V .

U vektorske prostore se može uvesti metrika (tj. merenje vektora) pomoću važnog pojma skalarnog (ili unutrašnjeg) proizvoda. Neka je V n -dimenzionalni vektorski prostor nad R ili C , i neka su e_1, e_2, \dots, e_n vektori jedne baze u V . Ako su $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$, $b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_n e_n$ (α_1, \dots, β_n skalari) dva proizvoljna vektora iz V , tada se skalarni proizvod $a \cdot b$ definiše kao sledeći broj (skalar):

$$(1.36) \quad a \cdot b = \alpha_1 \bar{\beta}_1 + \alpha_2 \bar{\beta}_2 + \dots + \alpha_n \bar{\beta}_n,$$

gde ako je $\beta_j = x_j + iy_j$ ($x_j, y_j \in R$, $i = \sqrt{-1}$) kompleksni broj, onda je $\bar{\beta}_j = x_j - iy_j$ konjugovana vrednost β_j , te ako $\beta_j \in R$, onda je samo $\bar{\beta}_j = \beta_j$. Ova definicija skalarnog proizvoda obuhvata i vektorske proizvode nad skupom realnih brojeva R , a za operaciju skalarnog proizvoda važe sledeća pravila:

$$(1.37) \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad (\text{za svako } a, b, c \in V)$$

$$(1.38) \quad \alpha(a \cdot b) = (\alpha a) \cdot b \quad (\text{za svako } a, b \in V \text{ i svaki skalar } \alpha)$$

$$(1.39) \quad a \cdot b = \overline{b \cdot a} \quad (\text{za svako } a, b \in V)$$

$$(1.40) \quad a \cdot a \geq 0, \text{ i } a \cdot a = 0 \quad \text{povlači } a = 0 \text{ za svako } a \in V.$$

Pomoću skalarnog proizvoda se definiše norma ili dužina $\|a\|$ vektora a kao

$$(1.41) \quad \|a\| = \sqrt{a \cdot a}.$$

Za normu važe sledeće osobine ($x, y \in V$ su proizvoljni):

$$(1.42) \quad \|x\| \geq 0, \quad \|x\| = 0 \quad \text{samo za } x = 0,$$

$$(1.43) \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\text{nejednakost trougla}),$$

$$(1.44) \quad |(x \cdot y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad (\text{nejednakost Koši-Švarca}),$$

gde je u (1.44) | | oznaka za apsolutnu vrednost broja, tj. $|z| = \sqrt{u^2 + v^2}$, ako je $z = u + iv$; $u, v \in \mathbb{R}$.

Za prostore gde je norma data pomoću (1.41) kaže se da su unitarni. Za dva vektora x, y iz unitarnog prostora kaže se da su uzajamno upravni (ortogonalni ili normalni) ako je $x \cdot y = 0$, za vektor x se kaže da je normiran ako je $\|x\| = 1$. Ako su e_1, e_2, \dots, e_n vektori baze unitarnog prostora pri čemu su ti vektori normirani, a svaki dva od njih su međusobno ortogonalna, onda se takva baza zove ortonormirana baza. Tada se svako a iz tog prostora može prikazati u obliku

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n,$$

gde je $\alpha_1 = a \cdot e_1$, $\alpha_2 = a \cdot e_2, \dots, \alpha_n = a \cdot e_n$. Zbog ove jednostavnosti prikazivanje vektora preko ortonormirane baze poželjno je nekuput formirati ortonormiranu bazu od neke druge, date baze. Važi stav: svaka baza n -dimenzionalnog unitarnog prostora može se zameniti nekom ortonormiranom bazom. Ako je a_1, a_2, \dots, a_n bilo koja baza, iz nje se može induktivno dobiti ortonormirana baza tzv. Gram – Šmitovim postupkom. Za b_1 se uzima $a_1/\|a_1\|$. Pretpostavimo da smo već uzeli vektore b_1, b_2, \dots, b_r ($r \leq n - 1$) tako da su ti vektori međusobno ortogonalni i da je b_j (za $j = 1, 2, \dots, r$) linearna kombinacija vektora a_1, a_2, \dots, a_n tj. postoje skalari $\alpha_{1,j}, \alpha_{2,j}, \dots, \alpha_{n,j}$ tako da je

$$b_j = \alpha_{1,j} a_1 + \alpha_{2,j} a_2 + \dots + \alpha_{n,j} a_n.$$

Uzmimo $b_{r+1} = c_r/\|b_r\|$, gde je

$$c_r = a_{r+1} - (\alpha_{1,r} b_1 + \dots + \alpha_{r,r} b_r),$$

$\alpha_1 = a_{r+1} \cdot b_j$ ($j = 1, 2, \dots, r$). Vektori b_1, b_2, \dots, b_n koji se dobijaju na ovaj način su jedna ortonormirana baza.

Kao standardni primer vektorskog prostora (koji je ujedno i ortonormiran) navodimo vektore u \mathbb{R}^3 , u tzv. običnom trodimenzionalnom prostoru. Svakoj tački A sa koordinatama (x, y, z) u trodimenzionalnom koordinatnom sistemu pridružuju se vektor \vec{a} koji geometrijski odgovara vektoru sa početkom u tački $(0, 0, 0)$ i vrhom u A . Tako se dobija trodimenzionalni vektorski prostor sa sabiranjem

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

i množenjem

$$\alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z).$$

Jednu ortonormiranu bazu čine vektori $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ i $\vec{k} = (0, 0, 1)$, pa sledi

$$\vec{a} = (x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k},$$

što je tzv. kanonični (standardni) oblik prikazivanja vektora. Skalarni proizvod dva vektora $\vec{a}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{a}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ u R^3 je

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,$$

a dužina vektora \vec{a} je norma od \vec{a} , tj.

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Ugao dva vektora \vec{a}_1, \vec{a}_2 dat je preko obrasca

$$\cos \sphericalangle (\vec{a}_1, \vec{a}_2) = \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{\|\vec{a}_1\| \cdot \|\vec{a}_2\|}.$$

U R^3 se osim skalarnog definiše i vektorski proizvod. Ova veličina je vektor, a označava se sa \times i računa preko obrasca

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \\ &= (y_1z_2 - y_2z_1)\vec{i} - (x_1z_2 - x_2z_1)\vec{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{k}. \end{aligned}$$

Vektor $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2$ normalan je i na \vec{a}_1 i na \vec{a}_2 , a $\|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\|$ je površina paralelograma konstruisanog nad vektorima \vec{a}_1 i \vec{a}_2 . Na sličan način se mogu posmatrati i uređene n -torke realnih brojeva oblika (x_1, x_2, \dots, x_n) i dobiti n -dimenzionalni vektorski prostor koji se označava sa R^n i naziva n -dimenzionalni Euklidov prostor.

1.1.5. Linearni operatori u vektorskim prostorima

Linearni operator (ili linearna transformacija) A nad vektorskim prostorom V je funkcija koja svakom vektoru $v \in V$ pridružuje vektor $Av \in V$, pri čemu je za svako $a, b \in V$ i za svaki skalar α

$$(1.45) \quad A(a + b) = Aa + Ab,$$

$$(1.46) \quad A(\alpha a) = \alpha(Aa).$$

Dva operatora A i B nad V su jednaka ako je $Ax = Bx$ za svako $x \in V$. U skupu linearnih operatora nad V može se definisati sabiranje, množenje i množenje

operatora skalarom. Ako su A i B linearni operatori nad V , $C = A + B$ je zbir A i B ako je

$$(1.47) \quad Cx = Ax + Bx,$$

dok je $D = AB$ proizvod A i B ako je

$$(1.48) \quad Dx = A(Bx)$$

za svako $x \in V$. Dalje, ako je α skalar, αA je novi linearni operator za koji je

$$(1.49) \quad \alpha Ax = \alpha(Ax).$$

Na ovaj način skup linearnih operatora nad V u odnosu sabiranja (1.47), množenje (1.48) i množenje skalarom (1.49) postaje nov vektorski prostor. Sa I (ili E) se označava operator za koji je uvek $Ix = x$, a sa A^{-1} operator za koji je $A^{-1}A = AA^{-1} = I$, ukoliko takav operator postoji, što nije uvek slučaj. Ako je e_1, e_2, \dots, e_n baza vektorskog prostora, tada iz

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$$

sledi

$$Aa = \alpha_1 Ae_1 + \alpha_2 Ae_2 + \dots + \alpha_n Ae_n,$$

tj. linearni operator je potpuno određen ako se zna njegovo dejstvo na vektore baze. Ako je

$$Ae_1 = \alpha_{11}e_1 + \alpha_{21}e_2 + \dots + \alpha_{n1}e_n,$$

$$Ae_2 = \alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \dots + \alpha_{n2}e_n,$$

\vdots

$$Ae_n = \alpha_{1n}e_1 + \alpha_{2n}e_2 + \dots + \alpha_{nn}e_n,$$

onda se linearnom operatoru A pridružuje matrica koja se isto označava sa A , i za koju je

$$(1.50) \quad A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix},$$

koja u j -toj koloni sadrži koordinate Ae_j u odnosu na bazu e_1, e_2, \dots, e_n , tako da je A kvadratna matrica tipa $n \times n$. Ovakvo pridruživanje nikako nije slučajno,

jer ako se na isti način i linearnom operatoru B pridruži odgovarajuća matrica B , onda se ustanovljava da se linearnim operatorima $A + B$, AB i αA pridružuju upravo matrice $A + B$, AB i αA (u odnosu na odgovarajuće matricne operacije). Tako se ustvari linearni operatori i matrice tipa (1.50) izjednačavaju, pri čemu se mora voditi računa da oblik matrice A uvek zavisi od izbora vektora baze. Ako se još vektoru $a = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$ (x_1, x_2, \dots, x_n skalari) pridruži vektor kolona (tj. matrica $n \times 1$)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

onda se dejstvo linearnog operatora sa matricom (1.50) može prikazati kao

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n \\ \vdots \\ \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \dots + \alpha_{nn}x_n \end{bmatrix},$$

što u potpunosti odgovara definiciji množenja matrica preko (1.3).

Za linearne operatore (odnosno matrice) je važan pojam ranga. Rang se može definisati kao:

- Rang matrice A (ne obavezno kvadratne) je najveći broj linearno nezavisnih vektora – vrsta matrice A , ili
- Rang matrice A je najveći broj linearno nezavisnih vektora – kolona matrice A , ili
- Rang matrice A je maksimalan broj n za koji postoji regularna podmatrica matrice A tipa $n \times n$, ili
- Rang matrice A , ukoliko je ona kvadratna, je dimenzija prostora koji čine vektori oblika Ax .

Ove definicije su sve jedna drugoj ekvivalentne. Za praktično određivanje ranga matrice koristi se osobina da se rang matrice ne menja ako

- dve vrste (ili kolone) matrice promene mesto,
- jedna vrsta (ili jedna kolona) matrice se pomnoži sa skalarom različitim od nule,
- jedna vrsta (ili jedna kolona) matrice se pomnoži nekim skalarom i doda nekoj drugoj vrsti (ili koloni) tako što se odgovarajući elementi saberu.

Ako se za jednakost ranga matrice upotrebi oznaka \sim , onda se primenom pravila 1–3 dobija

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -8 \\ -1 & -1 & 2 & 8 \end{bmatrix} \sim \\ & \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & -1 & 2 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Rang poslednje matrice je očigledno 2, jer su samo prve dve vektor–kolone linearno nezavisne, pa je i rang polazne matrice takođe 2.

Invarijantni vektori linearnog operatora A (ili odgovarajuće matrice A) su vektori koji posle dejstva A ne menjaju pravac, tj. vektori x za koje je

$$(1.51) \quad Ax = \lambda x$$

za neki skalar λ . Skalari λ (kojih može biti više raznih za isto A) se zovu karakteristične vrednosti (ili sopstvene vrednosti, ili svojstvene vrednosti) operatora A , a njihova sveukupnost naziva se spektar A . Ako je operator zadan matricom A tipa $n \times n$, onda se karakteristične vrednosti određuju iz jednačine

$$(1.52) \quad \det(\lambda I_n - A) = 0.$$

Leva strana ove jednačine postaje, posle razvijanja determinante, polinom po λ oblika

$$(1.53) \quad a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n,$$

koji se naziva karakteristični polinom A . Mada je rečeno da matrica (1.50) linearnog operatora zavisi od vektora baze, valja napomenuti da karakteristični polinom nekog operatora u svakoj bazi ima isti oblik (tj. karakteristični oblik, otuda naziv karakteristični polinom). Iz (1.51) sledi $A^k x = \lambda^k x$ za svaki celi broj k , pa ako je (1.53) karakteristični polinom A , onda je

$$(1.54) \quad a_0 A^n + a_1 A^{n-1} + a_2 A^{n-2} + \dots + a_{n-1} A + a_n I_n = 0.$$

Ovo je tzv. Kejli – Hamiltonova teorema, koja kazuje da svaka kvadratna matrica poništava svoj karakteristični polinom. Ako postoji n različitih korena $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ karakterističnog polinoma (1.53) kojima odgovaraju vektori $x_1, x_2,$

\dots, x_n koji zadovoljavaju (1.51), tada možemo formirati matricu P čije su kolone komponente vektora x_1, x_2, \dots, x_n u odgovarajućoj bazi. Onda važi

$$(1.55) \quad P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

tj. pomoću P smo sveli A na dijagonalni oblik. Za dve matrice A i B za koje postoji P tako da je

$$(1.56) \quad B = P^{-1}AP$$

kaže se da su slične. Dve matrice slične trećoj su i slične međusobno, a slične matrice imaju isti rang, iste karakteristične polinome, te samo slične matrice mogu da budu matrice istog linearnog operatora nad nekim vektorskim prostorom.

Primer 1.15.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det(\lambda I_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda.$$

Koreni karakterističnog polinoma su ovde $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = 2$, koji odgovaraju linearno nezavisnim vektorima

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

stoga za

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

važi

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

1.1.6. Sistem linearnih jednačina

Opšti sistem linearnih jednačina ima oblik

$$(1.57) \quad \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\dots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\dots & +a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array}$$

Brojevi $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ su zadati brojevi i zovu se koeficijenti sistema, brojevi b_1, b_2, \dots, b_m su zadati brojevi i zovu se slobodni članovi, a veličine x_1, x_2, \dots, x_n su nepoznate. a_{ij} označava koeficijent uz x_j i i -toj jednačini. Ako je $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$, onda je sistem homogen. Ako je $m < n$ onda ima više nepoznatih nego jednačina, a ako je $m > n$ onda ima više jednačina nego nepoznatih. Ako je $m = n$, tj.

$$(1.58) \quad \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 & + \dots & + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + a_{22}x_2 & + \dots & + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + a_{n2}x_2 & + \dots & + a_{nn}x_n & = & b_n, \end{array}$$

sistem ima onoliko jednačina koliko i nepoznatih. Matrica sistema (1.57) je

$$A = [a_{ij}] \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, n, \\ j = 1, \dots, n, \end{array}$$

a ako je

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{tzv. nepoznati vektor, a} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

onda se sistem (1.58) može zapisati u matricnom obliku kao

$$Ax = b,$$

a rešenje sistema je jednoznačno ako je A regularna matrica, i u matricnom obliku glasi

$$x = A^{-1}b.$$

U slučaju da je A regularna matrica (tj. $\det A \neq 0$), rešenje sistema (1.58) se može jednoznačno dobiti i kao

$$x_1 = \frac{D_{x_1}}{D}, \quad x_2 = \frac{D_{x_2}}{D}, \dots, \quad x_n = \frac{D_{x_n}}{D}.$$

Ovo je tzv. Kramerovo pravilo, pri čemu je $D = \det A$, a D_{x_j} je matrica koja se dobija ako se u j -toj koloni D elementi zamene slobodnim članovima b_1, b_2, \dots, b_n . U slučaju da je $D = 0$ a $D_{x_j} \neq 0$ za neko j , sistem (1.58) nema rešenja (kaže se još da je nemoguć ili kontradiktoran), a ako je $D = D_1 = D_2 \dots = D_n = 0$, sistem (1.58) ima beskonačno mnogo rešenja (kaže se da je sistem neodređen), ili nema uopšte rešenja. Opšti sistem (1.57) ima rešenja onda i samo onda ako matrica

$$A = [a_{ij}] \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, m, \\ j = 1, \dots, n, \end{array}$$

i B imaju isti rang, pri čemu je B matrica ista kao A , samo ima jednu kolonu više koju čine slobodni članovi b_1, b_2, \dots, b_m . Ovo tvrđenje se zove Kroneker – Kapelijeva teorema.

Opšti sistem (1.57) najčešće se rešava tzv. Gausovim postupkom eliminacije, koji je najjednostavnije objasniti na nekom primeru. Recimo da se želi rešiti sistem

$$\begin{array}{r} x_1 + 9x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1, \\ x_1 + 7x_2 + 6x_3 - x_4 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5. \end{array}$$

Prvu jednačinu množimo sa -1 i dodajemo drugoj jednačini, a zatim je množimo sa -2 i dodajemo trećoj pa četvrtoj jednačini. Time će se eliminisati x_1 iz svih jednačina osim prve i dobiti sistem linearnih jednačina

$$\begin{array}{r} x_1 + 9x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1, \\ -2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 6, \\ -15x_2 - 6x_3 + 12x_4 = 0, \\ -16x_2 - 5x_3 + 14x_4 = 3, \end{array}$$

ili posle skraćivanja

$$\begin{array}{r} x_1 + 9x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1, \\ x_2 - x_3 - 2x_4 = -3, \\ -5x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ -16x_2 - 5x_3 + 14x_4 = 3. \end{array}$$

Ovaj sistem ima ista rešenja kao i polazni, ili uopšte nema rešenja, ako ih nema ni polazni. Međutim, poslednji sistem je jednostavniji od polaznog, jer samo prva jednačina sadrži x_1 . Sada se postupak nastavlja na poslednje tri jednačine, a prva jednačina poslednjeg sistema se više ne transformiše. Iz poslednje dve jednačine se eliminiše x_2 tako što se druga jednačina sistema pomnoži sa 5 (odnosno 16) i doda trećoj (odnosno četvrtoj) jednačini. Tako se dobija sistem

$$\begin{array}{r} x_1 + 9x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1, \\ x_2 - x_3 - 2x_4 = -3, \\ -7x_3 - 6x_4 = -15, \\ -21x_3 - 18x_4 = -45, \end{array}$$

ili

$$\begin{aligned}x_1 + 9x_2 + 4x_3 - 5x_4 &= 1, \\x_2 - x_3 - 2x_4 &= -3, \\7x_3 + 6x_4 &= 15, \\7x_3 + 6x_4 &= 15.\end{aligned}$$

Kako se posljednje dve jednačine ovog sistema podudaraju, jednu od njih odbacujemo i onda dobijamo

$$\begin{aligned}x_1 + 9x_2 + 4x_3 - 5x_4 &= 1, \\x_2 - x_3 - 2x_4 &= -3, \\x_3 &= \frac{15 - 6x_4}{7}.\end{aligned}$$

Sistem je neodređen jer se x_3 izražava pomoću x_4 , a x_4 može proizvoljno da se bira. Smenom x_3 u drugu jednačinu ovog sistema sledi

$$x_2 = x_3 + 2x_4 - 3 = \frac{8x_4 - 6}{7},$$

a onda konačno iz prve jednačine sistema dobijamo

$$x_1 = 1 - 9x_2 - 4x_3 + 5x_4 = \frac{1 - 13x_4}{7}.$$

Sistem je, dakle, neodređen (kaže se sa jednim stepenom slobode, jer se x_4 proizvoljno bira), a rešenja su

$$x_1 = \frac{1 - 13x_4}{7}, \quad x_2 = \frac{8x_4 - 6}{7}, \quad x_3 = \frac{15 - 6x_4}{7},$$

x_4 proizvoljno.

Gausovim postupkom se može rešavati svaki sistem linearnih jednačina (1.57), dok se matricno ili Kramеровim pravilom može rešavati samo sistem tipa (1.58), i to ne svaki. Gausov postupak ukazuje i na slučaj kad sistem nema rešenje, kada se dobijaju nemoguće jednakosti oblika $0 = 1$ i slično.

Za opšti sistem linearnih jednačina (1.57) vezan je i pojam bazisnog rešenja, koji je značajno u simpleks metodi linearnog programiranja. Pretpostavimo da je dat sistem (1.57) sa $m < n$, i da je rang matrice sistema upravo m . Ako onda od n nepoznatih sistema uzmemo da su proizvoljne $n - m$ jednake nuli, ostaje sistem od m jednačina sa m nepoznatih, koja ima jedinstveno rešenje koje se i zove bazisno rešenje, pri čemu ima ukupno $\frac{n!}{m!(n-m)!}$ raznih bazisnih rešenja.

Primer 1.16.

Uzimamo sistem

$$5x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1,$$

$$3x_1 + 2x_2 + 7x_3 = -2,$$

gde je, u oznaci sistema (1.57), $m = 2$, $n = 3$. Jedno bazisno rešenje sistema se dobija za $x_3 = 0$, kada ostaju jednačine $5x_1 + 3x_2 = 1$, $3x_1 + 2x_2 = -2$, čije rešenje $x_1 = 8$, $x_2 = -13$ predstavlja jedno bazisno rešenje sistema, a druga dva se dobijaju za $x_1 = 0$ i $x_2 = 0$.

1.1.7. Konveksni skupovi i konveksne funkcije

Konveksni skupovi se definišu nad R^n , n -dimenzionalnim Euklidovim prostorom (v. odeljak 1.1.4.). Podsetimo se da R^n predstavlja skup svih n -torki (x_1, x_2, \dots, x_n) gde su x_j realni brojevi, pri čemu se sabiranje n -torki i množenje skalarom definiše kao

$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n),$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n).$$

Rastojanje dva vektora $a = (x_1, \dots, x_n)$ i $b = (y_1, \dots, y_n)$ se označava $d(a, b)$ i definiše kao

$$d(a, b) = \|a - b\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}.$$

Duž u R^n koja spaja tačke (vektore) u i v je skup tačaka oblika $\omega = \lambda u + (1 - \lambda)v$, gde je $0 \leq \lambda \leq 1$ proizvoljan skalar. Skup A u R^n je konveksan, ako za proizvoljne dve tačke $u, v \in A$ i duž koja spaja u i v takođe pripada A . Primer: krug, trougao i kvadrat u R^2 , lopta u R^3 su konveksni skupovi.

Tačka x je ekstremna tačka konveksnog skupa ako ne postoje dve tačke x_1 i x_2 ($x_1 \neq x_2$) u skupu takve da je $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ za proizvoljno $0 < \lambda < 1$. Intuitivno, ekstremna tačka ne može biti na duži koja spaja dve druge tačke skupa.

Napomenimo da je presek dva konveksna skupa uvek konveksan skup, dok unija dva konveksna skupa ne mora biti konveksan skup. Primer: unija krugova $x^2 + y^2 = 4$ i $(x - 1)^2 + y^2 = 4$ u R^2 nije konveksan skup, jer duž koja spaja tačke $(0, 2)$ i $(1, 2)$ unije skupa ne leži u toj uniji. Takođe je svaki vektorski podprostor R^n konveksan skup.

Konveksni polijedar u R^n konstruisan nad tačkama x_1, x_2, \dots, x_n je skup svih tačaka x oblika

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n,$$

gde su $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0$ proizvoljni skalari za koje je $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$. Konveksni polijedar je konveksan skup u R^n .

Neka je $f(x)$ neka funkcija koja preslikava R^n u R (tj. svakoj n -torci $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ pridružuje se realan broj $f(x)$). Funkcija $f(x)$ je konveksna na konveksnom skupu X u R^n ako je, za svako $x_1, x_2 \in X$ i $0 \leq \lambda \leq 1$,

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Ako su sve ostale pretpostavke za f ispunjene, samo umesto \leq važi \geq u gornjoj nejednakosti, kaže se da je $f(x)$ konkavna na konveksnom skupu X u R^n . Ako je $f(x)$ konveksna (ili konkavna) funkcija na zatvorenom skupu X u R^n (skup X je zatvoren ako svaka granična tačka X pripada X), tada je lokalni minimum (ili maksimum) funkcije $f(x)$ u X takođe i apsolutni minimum (ili maksimum).

Ako se posmatra $f(x)$ nad $R^1 (= R)$, onda se njen grafik predstavlja na uobičajan način u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu. Obično je $f(x)$ definisano tada nad nekim zatvorenim intervalom $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$, koji je u R^1 konveksan skup. Ako je $f(x)$ konveksna funkcija nad $[a, b]$, tada ona mora biti neprekidna nad otvorenim intervalom $(a, b) = \{x | a < x < b\}$. Štaviše definicija konveksne funkcije nad $[a, b]$ u R^1 može se zameniti sa sledeće dve definicije, koje su joj ekvivalentne:

1. Realna neprekidna funkcija $f(x)$ je konveksna na $[a, b]$ ako i samo ako je

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \text{ za svako } x_1, x_2 \in [a, b].$$

2. Ako postoji $f''(x)$ u $[a, b]$, tada je $f''(x) \geq 0$ za $x \in [a, b]$ potreban i dovoljan uslov da bi $f(x)$ bila konveksna funkcija na $[a, b]$.

1.2. Praktični aspekti primene matricnog računa

Značajna primena matricnog računa u geologiji i rudarstvu počinje šezdesetih godina, zajedno sa počecima intenzivnijeg uvođenja i primene matematičkih metoda i računarske tehnike kod rešavanja raznorodnih naučnih i praktičnih problema u ovim oblastima.

Kako je proces "matematizacije" u proteklih trideset godina zahvatao široke prostore geologije i rudarstva tako su matrice i matricni račun dobijali sve veći značaj kod modeliranja stanja i procesa, kod razvoja novih inženjersko-kreativnih metoda i pristupa, razvoja specijalizovanog softvera, razvoja simulacionih metoda, razvoja CAD sistema za projektovanje u rudarstvu i geologiji i sl. Opsežna primena matrica i matricnog računa u rudarstvu i geologiji nastaje i zbog toga što su matricne forme veoma pogodne za prikazivanje i čuvanje mnogih rudarsko-geoloških obeležja, podataka i informacija.

Tako na pr. matematičko modeliranje ležišta mineralnih sirovina bazira na principu diskretizacije prostora, odnosno na predstavljanju ležišta kao prostornog fenomena sistemom prizmi (blokova). Ovakvo fizički predstavljan model, matematički se iskazuje matricom simbola ili brojki, gde uslovno svaki simbol ili brojka predstavljaju blok.

Prostorna matematička slika modeliranog ležišta iskazuje se trodimenzionalnom matricom ili preko dvodimenzionalnih matrica paralelno poređanih po horizontalnim ili vertikalnim preseccima.

Matricni modeli ležišta daju diskretne slike prostornog razmeštaja analiziranih obeležja, kao što su moćnost geoloških formacija, sadržaj kk (kk – korisna kompo-

nenta u rudi) u rudnom telu, promene geometrijskih karakteristika radne sredine i sl., ali za svaki element (blok u prostoru) matrice mogu se vezivati : obeležja vrednosne, troškovne ili neke druge tehničko-tehnološke i ekonomske kategorije.

Na sledećem primeru pokazaćemo računsko manipulativno korišćenje matematičkog računara u rešavanju jednog praktičnog problema.

Primer 1.17.

Dva površinska kopa snabdevaju ugljem termoelektranu. Ugljevi su različitog kvaliteta. Prosečan sadržaj sumpora u uglju je 2 % na prvom površinskom kopu, a na drugom 6 %. Zahtev termoelektrane je da sumpora u uglju bude najviše 4 %.

Maksimalna potrošnja uglja termoelektrane u smeni je 750 [t]. Sa stanovišta pogonske sigurnosti sistema, ukupna proizvodnja uglja oba površinska kopa treba da je 800 [t/smeni], dok su maksimalne proizvodne mogućnosti kopova 400 i 600 [t/smeni]. Cena uglja sa prvog površinskog kopa je 2000 [din/t], a sa drugog 1600 [din/t].

Potrebno je odrediti optimalan plan proizvodnje uglja na površinskim kopovima, sa ciljem da se ostvari maksimalan dohodak uz uvažavanje prirodnih i tehničko-tehnoloških ograničenja.

Postavljeni problem rešićemo linearnim programiranjem. Pre nego što pređemo na konkretne računске operacije, nekoliko reči o linearnom programiranju.

Primena linearnog programiranja je veoma široka, koristi se za analizu različitih problema, različitih po prirodi i po obimu. Rešavanjem problema linearnim programiranjem stvara se objektivna podloga za donošenje najpovoljnije odluke, odnosno, od većeg broja alternativno mogućih rešenja ovom kvantitativnom metodom moguće je izabrati optimalno rešenje, poštujući pri tome tehnološka, prirodna (npr. kvalitet i rezerve rude, geometrijske karakteristike radne sredine i sl.), ekonomska i druga ograničenja koja se mogu javiti.

Kod primene linearnog programiranja u praksi, neophodno je razviti linearni matematički model indiciranog problema, kroz vrlo precizno utvrđivanje interaktivnih veza uticajnih činilaca. Na tako definisanom modelu matematičko-manipulativnim postupcima ispituju se tehnološke i ekonomske implikacije postavljenih restriktivnih uslova na bazično optimalno rešenje.

Matematička osnova linearnog programiranja sadržana je u teoriji linearnih jednačina i nejednačina i teoriji konveksnih skupova, a matematička tehnika koja se pri rešavanju problema koristi zavisi od prirode problema.

Opšta matematička formulacija zadatka linearnog programiranja glasi:

Naći vrednosti nepoznatih

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

koje možemo smatrati komponentama n -dimenzionalnog vektora:

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

koje će obezbediti da funkcija kriterijuma (cilja):

$$Z = f(x) = \sum_{j=1}^{j=n} C_j x_j \rightarrow |MAX| \quad ili \quad |MIN|,$$

ima ekstremnu vrednost i koje će istovremeno zadovoljiti restrikcije (ograničenja) izražene sistemom linearnih jednačina ili nejednačina:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{j=n} a_{ij} x_j &\geq b_i & (i = 1, 2, \dots, m) \\ x_j &\geq 0 & (j = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Pri tome su i i j proizvoljni prirodni brojevi, koeficijenti a_{ij} i c_j su proizvoljni realni brojevi a b_i su proizvoljni nenegativni brojevi. Restriktivne jednačine ili nejednačine čine sistem nezavisnih i neprotivrečnih jednačina ili nejednačina.

Geometrijsko tumačenje linearnog programiranja možemo dati u n -dimenzionalnom vektorskom prostoru, koji je skup svih vektora (x_1, x_2, \dots, x_n) .

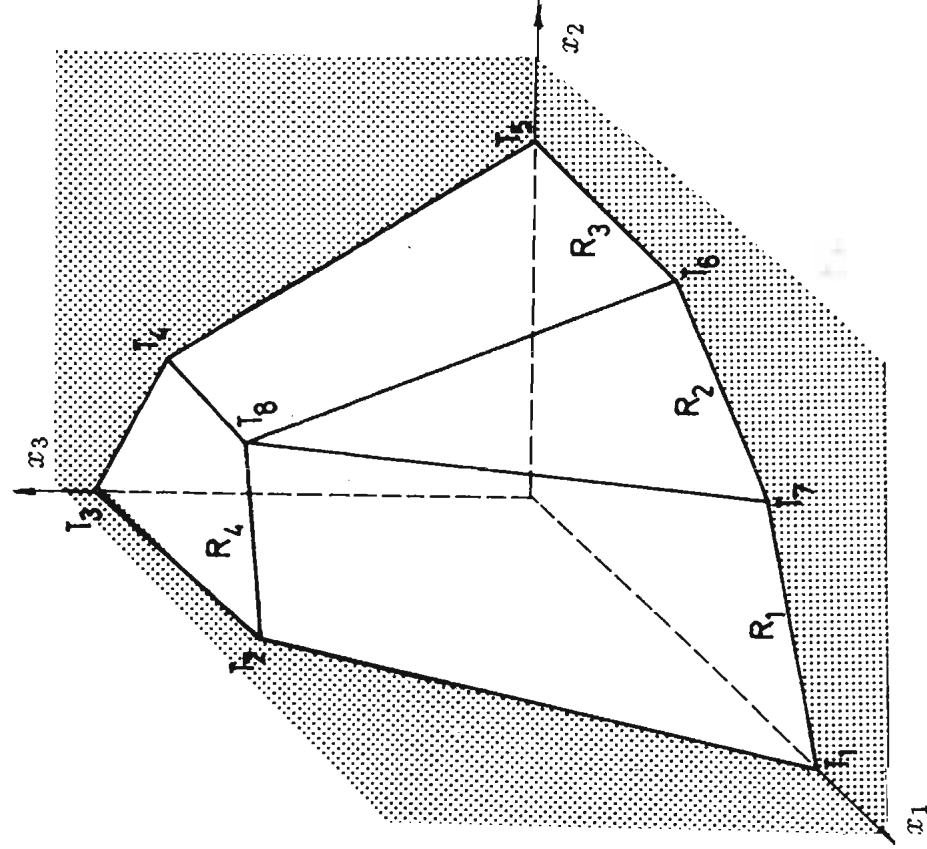
Svakom uslovu nenegativnosti u ovom vektorskom prostoru odgovara poluprostor u kojem je odgovarajuća promenljiva nenegativna.

Svakoј restriktivnoj jednačini odgovara jedna hiper-ravan. Svakoј restriktivnoj nejednačini odgovara u ovom vektorskom prostoru poluprostor koji je omeđen hiper-ravni definisanom odgovarajućom jednačinom. Na slici 1.1. prikazan je jedan vektorski prostor u formi heptaedra, koga sačinjavaju ravni R_1, R_2, R_3 i R_4 i koji ima devet temena sa tri promenljive x_1, x_2 i x_3 .

Problem linearnog programiranja svodi se, geometrijski tumačeći, na iznalaženje optimalne vrednosti funkcije cilja $Z = f(x)$ unutar vektorskog prostora definisanog sistemom ograničenja.

Linearno programiranje nudi tri računsko-manipulativne bazične metode: Simpleks metodu, transportnu metodu i metodu raspoređivanja. Vodeći računa o koncepciji knjige, detaljnije o metodama linearnog programiranja u knjizi neće biti govora. Čitaocе autori upućuju na izvornu literaturu iz Operacionih istraživanja.

Radi demonstriranja praktične primene matičnog računa u rešavanju postavljenog problema, korišćemo matičnu tehniku računanja simpleks metodom linearnog programiranja. Matična tehnika računanja bazira na Dantzing-ovom algoritmu utvrđivanja koordinata svih linearno zavisnih vektora pomoću inverzne matrice.



Sl. 1.1.1. - Heptaedarski vektorski prostor

Matematički model problema

Funkcija cilja,

$$Z_0 = 2000 x_1 + 1600 x_2 \rightarrow [MAX]$$

gde je: x_1 - proizvodnja uglja prvog površinskog kopa (t/smeni),
 x_2 - proizvodnja uglja drugog površinskog kopa (t/smeni).

Ograničenja,

Ograničenje ukupnog obima proizvodnje:

$$x_1 + x_2 \leq 800.$$

Ograničenje proizvodnih mogućnosti prvog površinskog kopa

$$x_1 \leq 400.$$

Ograničenje proizvodnih mogućnosti drugog površinskog kopa

$$x_2 \leq 600.$$

Ograničenje kvaliteta uglja

$$2x_1 + 5x_2 \leq 3200.$$

Posle uvođenja izravnavajućih promenljivih i redukcije sa 100, sistema ograničavajućih nejednakosti, model postavljenog problema ima formu:

$$z_0 = 2000x_1 + 1600x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8$$

$$x_1 + x_4 = 4$$

$$x_2 + x_5 = 6$$

$$2x_1 + 5x_2 + x_6 = 32.$$

U matricnoj formi model ima oblik:

Funkcija cilja,

$$Z = CX = [2000 \ 1600 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}$$

Ograničenja,

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 \\ 8 \\ 4 \\ 6 \\ 32 \end{bmatrix}$$

U modelu egzistiraju vektori (jednokolonske matrice):

$$A_0 = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 6 \\ 32 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

od kojih su A_3, A_4, A_5 i A_6 linearno nezavisni u prvoj iteraciji, što znači da ovi vektori formiraju bazu vektorskog prostora, pa za ($q = 1$) imamo matricu:

$$B_1 = [A_3 \ A_4 \ A_5 \ A_6]$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_4.$$

Pošto je B_1 jedinična matrica formata 4×4 , to je

$$B_1^{-1} = B_1,$$

Bazično moguće rešenje u prvoj iteraciji dobijamo preko relacije

$$X_0 = B_1^{-1} A_0,$$

kako je međutim $B_1^{-1} = I_4$, tada je:

$$X_0 = A_0,$$

tj.

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 6 \\ 32 \end{bmatrix},$$

Vrednosti funkcije kriterijuma u prvoj iteraciji iznosi:

$$Z_0 = C_0 X_0 = [C_3 \ C_4 \ C_5 \ C_6] \cdot \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = [0 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 6 \\ 32 \end{bmatrix} = 0.$$

Kako je matrica $B_1 = I_4$, tada je $X_j = A_j$, pa je ($Z_j = C_j$):

$$(j = 1) \quad Z_1 - C_1 = C_0 X_1 - C_1 = [0 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - 2000 = -2000,$$

$$(j = 2) \quad Z_2 - C_2 = C_0 X_2 - C_2 = [0 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} - 1600 = -1600.$$

Pošto su obadve vrednosti za $(Z_j - C_j)$ negativne, optimalno rešenje nije pronađeno. U bazu vektorskog prostora ulazi vektor A_1 na mesto vektora A_4 , pa bazu vektorskog prostora u drugoj iteraciji čine vektori A_3, A_1, A_5 i A_6 .

$$B_2 = [A_3 \ A_1 \ A_5 \ A_6] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det B_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$B_2^* = \text{adj} B_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Inverzna matrica B_2^{-1} je:

$$B_2^{-1} = \frac{1}{\det B_2} \text{adj} B_2 = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bazično moguće rešenje u drugoj iteraciji X_0 čije su koordinate

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix},$$

je

$$X_0 = B_2^{-1} A_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 6 \\ 32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \\ 24 \end{bmatrix}.$$

Funkcija kriterijuma u drugoj iteraciji ima vrednost:

$$Z_0 = C_0 X_0 = [C_3 \ C_1 \ C_5 \ C_6] \cdot \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = [0 \ 2000 \ 0 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \\ 24 \end{bmatrix} = 8000.$$

Linearno zavisni vektori u drugoj iteraciji su A_2 i A_4 . Njihove koordinate u bazi B_2 su:

$$X_2 = B_2^{-1} A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix},$$

$$X_4 = B_2^{-1} A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Razlike ($Z_j - C_j$) treba utvrditi za $j = 2$ i 4 , i one iznose

$$(j = 2) \quad Z_2 - C_2 = C_0 X_2 - C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2000 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} - 1600 = -1600$$

$$(j = 4) \quad Z_4 - C_4 = C_0 X_4 - C_4 = \begin{bmatrix} 0 & 2000 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - 0 = +2000.$$

Optimalno rešenje nije pronađeno pošto sve razlike ($Z_j - C_j$) nisu veće ili jednake 0.

U narednu (treću) bazu vektorskog prostora ulazi vektor A_2 . Iz prethodne baze vektorskog prostora izlazi vektor A_3 pošto je:

$$\frac{x_3}{x_{32}} = \frac{4}{1} = 4 \leftarrow [\text{MIN}]$$

$$\frac{x_1}{x_{12}} = \frac{4}{0} = \infty$$

$$\frac{x_5}{x_{52}} = \frac{6}{0} = \infty$$

$$\frac{x_6}{x_{62}} = \frac{24}{5} = 4,8.$$

Ponavlja se ceo postupak u trećoj iteraciji: Bazu vektorskog prostora čine vektori A_2, A_1, A_5 i A_6 pa je:

$$B_3 = [A_2 \ A_1 \ A_5 \ A_6] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_3^* = \text{adj} B_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_3^{-1} = \frac{1}{\det B_3} \text{adj} B_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bazično moguće rešenje u trećoj iteraciji X_0 ima koordinate:

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix},$$

te je

$$X_0 = B_3^{-1} A_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 6 \\ 32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Funkcija kriterijuma u trećoj iteraciji ima vrednost:

$$Z_0 = C_0 X_0 = [C_2 \ C_1 \ C_5 \ C_6] \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = [1600 \ 2000 \ 0 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 14\,400.$$

Koordinate linearno zavisnih vektora A_3 i A_4 u bazi vektorskog prostora su:

$$X_3 = B_3^{-1} A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix},$$

$$X_4 = B_4^{-1} A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Razlike $(Z_j - C_j)$ za $j = 3$ i 4 iznose

$$(j = 3) \quad Z_3 - C_3 = C_0 X_3 - C_3 = [1600 \quad 2000 \quad 0 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} - 0 = +1600,$$

$$(j = 4) \quad Z_4 - C_4 = C_0 X_4 - C_4 = [1600 \quad 2000 \quad 0 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - 0 = +400.$$

Optimalno rešenje je pronađeno, s obzirom da su sada razlike $(Z_j - C_j) \geq 0$.
Optimalni plan proizvodnje je:

$x_1 = 4$, proizvodnja uglja na prvom površinskom kopu treba da je
 $x_1 = 400$ [t/smeni].

$x_2 = 4$, što znači da drugi površinski kop treba da da proizvodnju od
 $x_2 = 400$ [t/smeni].

Sadržaj sumpora pri ovakvoj proizvodnji iznosi: $(2 \cdot 400 + 6 \cdot 400)/800 = 4$ [%],
Maksimalna dobit je:

$$Z = 1\,440\,000 \quad [\text{din/smeni}] \quad \text{tj.}$$

$$Z' = 1\,800 \quad [\text{din/t - uglja}].$$

Na ovom instruktivnom primeru, u kome su korišćene osnovne računске operacije sa matricama, pokazana je samo jedna od mogućnosti korišćenja matricnog računa u domenu rudarske i geološke nauke i prakse.

2. Teorija grafova

2.1. Osnovi teorije grafova

2.1.1. Binarne relacije i grafovi

Grubo govoreći, grafovi su figure sastavljene od tačaka od kojih su neke (dve po dve) spojene krivim linijama. Da bi se dala preciznija definicija koja odgovara intuitivnom poimanju grafa podesno je koristiti terminologiju skupova i teorije relacija. Dekartov (R. Descartes) proizvod skupa X i Y je skup $X \times Y$ oblika

$$(2.1) \quad X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\},$$

gde (x, y) predstavlja uređen par elemenata x i y , pri čemu je $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ ekvivalentno sa $x_1 = x_2$ i $y_1 = y_2$. Binarna relacija ρ nad skupom X je svaki neprazan podskup $X \times X$. Ako je $(a, b) \in \rho$ za $a, b \in X$, tada se kaže da su a i b u relaciji ρ i piše se $a \rho b$. U matematici i njenim primenama se često koriste posebne vrste relacija, od kojih ćemo pomenuti nekoliko. Ako je ρ binarna relacija nad X , tada je

- a) relacija ρ refleksivna ako važi $a \rho a$ za svako $a \in X$;
- b) relacija ρ simetrična ako $a \rho b$ povlači $b \rho a$ za svako $a, b \in X$;
- c) relacija ρ antisimetrična ako iz $a \rho b$ i $b \rho a$ sledi $a = b$ za svako $a, b \in X$;
- d) relacija ρ tranzitivna ako iz $a \rho b$ i $b \rho c$ sledi $a \rho c$ za svako $a, b, c \in X$.

Refleksivna, antisimetrična i tranzitivna relacija naziva se relacija parcijalnog uređenja.

Refleksivna, simetrična i tranzitivna relacija naziva se relacija ekvivalencije. Ako je u skupu X definisana relacija ekvivalencije ρ , tada se svakom elementu $a \in X$ pridružuje tzv. klasa ekvivalencije \bar{a} , koja se sastoji od elemenata iz X koji su u relaciji ρ sa a , dakle

$$(2.2) \quad \bar{a} = \{b \in X \mid a \rho b\}.$$

Na ovaj način definisane klase ekvivalencije dele skup X na međusobno disjunktne podskupove, a skup svih klasa ekvivalencije naziva se količinski skup skupa X u odnosu na relaciju ekvivalencije ρ i označava se sa X/ρ .

Pomoću pojma binarne relacije graf se može definisati na sledeći način:

Neka je X neprazan skup i ρ binarna relacija nad X . Uređen par $G = (X, \rho)$ se naziva graf, pri čemu su elementi skupa X čvorovi grafa, a elementi skupa ρ grane grafa.

Graf se može crtežom predstaviti na sledeći način.

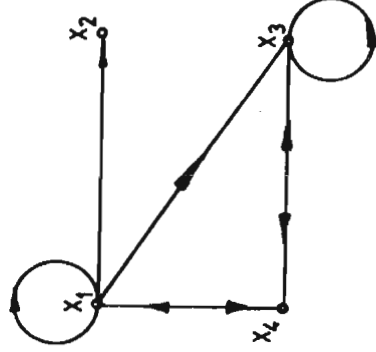
Čvorove grafa $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ predstavljamo proizvoljnim, međusobno različitim tačkama u ravni (ili prostoru). Ako je $(x_i, x_j) \in \rho$, tačku koja predstavlja čvor x_i spajamo neprekidnom glatkom linijom sa tačkom koja predstavlja čvor x_j , i ta linija se orijentisane strelicom u smeru od x_i ka x_j . Ako $(x_i, x_j) \notin \rho$, tada čvorovi x_i i x_j nisu na crtežu direktno povezani. Ako paru čvorova x_i i x_j odgovaraju grane (x_i, x_j) i (x_j, x_i) , tada se na crtežu ne povlače dve linije između x_i i x_j , nego se jedinstvena linija dvostruko orijentisane, ili se uopšte ne orijentise. Grana koja spaja čvor sa samim sobom naziva se petlja.

Primer 2.1.

Neka je $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ i

$$\rho = \{(x_1, x_1), (x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_1, x_4), (x_2, x_1), (x_3, x_1), (x_3, x_4), (x_4, x_3), (x_3, x_3)\}.$$

Tada se graf $G = (X, \rho)$ može prikazati kao



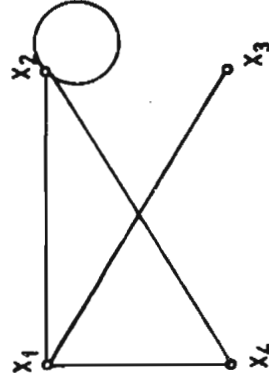
Sl. 2.1.

Graf $G(x, \rho)$ je simetričan ili neorijentisan ako i samo ako je ρ simetrična relacija. Ovo ustvari znači da su kod neorijentisanih grafova sve grane dvostruko

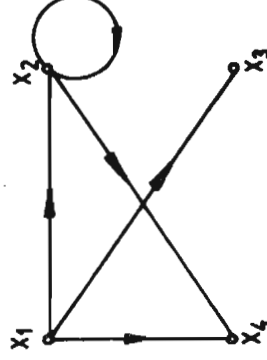
orijentisane (u stvari, neorijentisane), pa se strelice na crtežu izostavljaju. Neorijentisani grafovi mogu ali ne moraju imati petlje.

Graf $G(x, \rho)$ je antisimetričan ili orijentisan ako i samo ako je ρ antisimetrična relacija.

Na slici 2.2. prikazan je neorijentisani graf a na slici 2.3. orijentisani graf, pri čemu orijentacija petlje nije od posebnog značaja: ma kako postavili strelicu petlja na slici 2.3. vodi iz čvora x_2 opet u čvor x_2 .



Sl. 2.2.



Sl. 2.3.

Neorijentisani i orijentisani grafovi predstavljaju dva ekstremna tipa grafova. Graf može biti ni orijentisan ni neorijentisan, kao recimo graf na slici 2.1.

Grafovi se dele na konačne ili beskonačne u zavisnosti od toga da li je skup čvorova X konačan ili beskonačan.

Digraf je graf kod kojeg se ne koristi konvencija da se parovi grana suprotnih orijentacija zamenjuju neorijentisanim granama.

Grafovi se često prikazuju pomoću tzv. matrice susedstva. To su kvadratne matrice čiji je element a_{ij} u preseku i -te vrste i j -te kolone jednak broju grana koje polaze iz čvora x_i a završavaju se u čvoru x_j . Ako se dopušta da dva čvora mogu biti spojena najviše jednom granom iste orijentacije, onda su elementi matrice susedstva 0 ili 1.

Primer 2.2.

Za graf iz primera 2.1. matrica susedstva je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

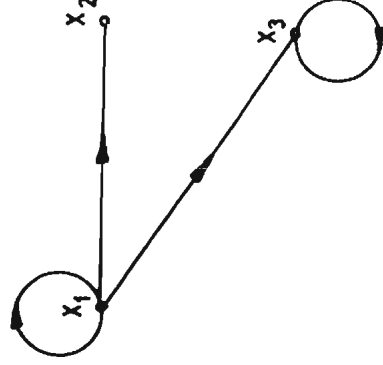
Za dva čvora neorijentisanog grafa bez petlje kažemo da su susedna ako su spojena granom. Ako je čvor jedna od krajnjih tačaka neke grane, kaže se da se ta grana stiče u tom čvoru ili da su čvor i grana incidentni (susedni).

Broj susednih čvorova za čvor x zove se stepen čvora x . Stepen čvora se može definisati i kao broj grana koje se stiču u tom čvoru.

Podgraf nekog grafa se dobija na taj način što se uoči neki podskup Y skupa čvorova X grafa, i zatim iz grafa udalje svi ostali čvorovi zajedno sa granama koje su susedne udaljenim čvorovima. U podgrafu ostaju onda samo grane koje povezuju čvorove iz Y .

Primer 2.3.

Neka je dat graf iz primera 2.1. Ako je $Y = \{x_1, x_2, x_3\}$, onda je odgovarajući podgraf dat na slici 2.4.



Sl. 2.4.

2.1.2. Povezanost grafova

Put dužine k u digrafu je svaki niz grana u_1, u_2, \dots, u_k koji ima sledeće osobine:

- grana u_1 polazi iz proizvoljnog čvora u digrafu,
- grana u_i ($i = 2, \dots, k$) počinje u onom čvoru u kojem se završava grana u_{i-1} .

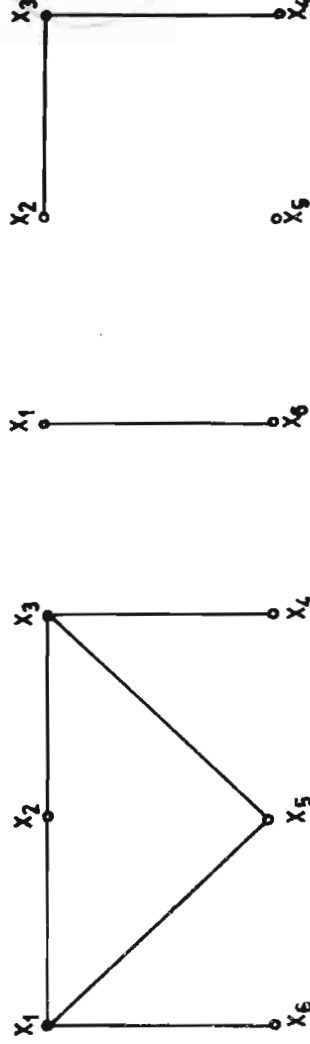
Elementarni put je put koji kroz svaki čvor prolazi najviše jedanput, a kružni (ili zátvoreni) put je put koji se završava u istom čvoru u kojem i počinje, pri čemu se u putu kao grana može pojaviti i petlja. Orijehtacija grane je bitan pojam kod definicije puta.

U proizvoljnom grafu bez petlji niz grana koje se nadovezuju jedna na drugu bez obzira na njihovu orijentaciju naziva se lanac. Ciklus dužina k je lanac u_1, \dots, u_k koji se završava u istom čvoru u kojem počinje. U neorijentisanom grafu pojmovi put i kružni put, s jedne strane, i lanac i ciklus, s druge, ne razlikuju se.

Neorijentisani graf je povezan ako se njegova dva proizvoljna čvora mogu

povezati putem (ili lancem). Ako postoje čvorovi koji se ne mogu povezati putem, graf je nepovezan.

To znači da se nepovezan graf sastoji od dva ili više odvojenih delova, koji se nazivaju komponente povezanosti grafa.



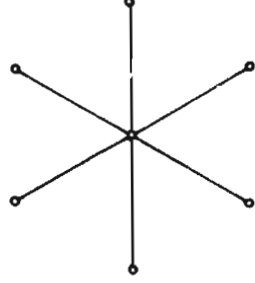
Sl. 2.5.

Graf na slici 2.5 je povezan, dok je graf na slici 2.6. nepovezan i ima tri komponente povezanosti.

Artikulacioni čvor grafa je čvor čijem se udaljavanjem povećava broj komponentata povezanosti grafa.

Most grafa je grana čijim se udaljavanjem povećava broj komponenti povezanosti grafa. Grana koja je incidentna sa čvorom stepena 1 naziva se viseća grana, i svaka viseća grana predstavlja most grafa.

Na grafu sa slike 2.7. svaka grana je most.



Sl. 2.7.

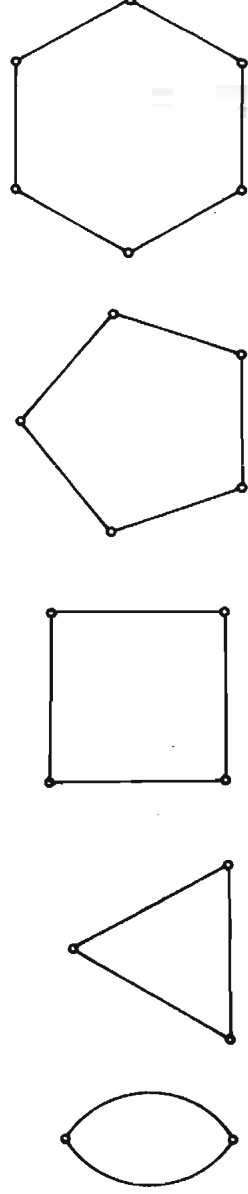
Graf je jako povezan ako je svaki uređeni par članova x_i, x_j spojen putem koji vodi iz x_i u x_j .

Neka su d_1, \dots, d_n stepeni čvorova u neorijentisanom grafu bez petlje koji ima m grana. Ako saberemo sve stepene čvorova dobijamo dvostruki broj grana, jer svaka grana ima kao krajnje tačke dva čvora. Dakle važi

$$d_1 + d_2 + \dots + d_n = 2m,$$

tj. odatle sledi da je broj čvorova neparnog stepena u konačnom neorijentisanom grafu bez petlji prazan.

Neorijentisani graf se naziva regularan (pravilan) stepena r ako je $d_1 = d_2 = \dots = d_n = r$. Konačan, povezan regularan graf stepena dva zove se kontura. Na slici 2.8. dati su neki primeri kontura.

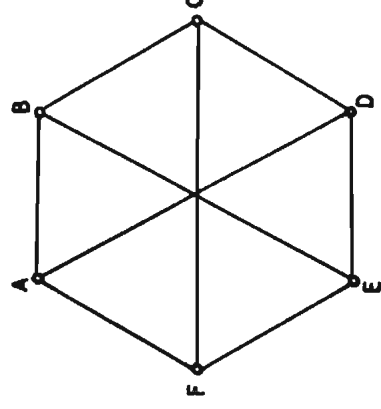
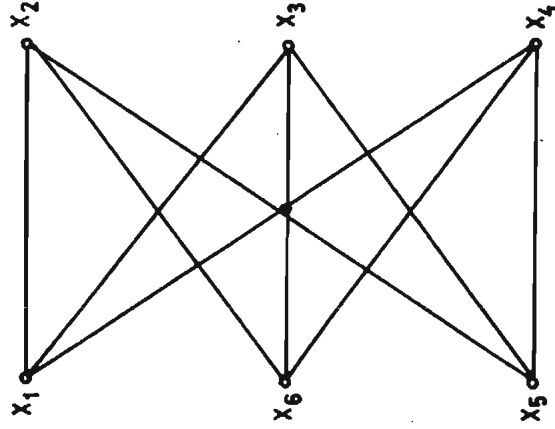


Sl. 2.8.

Za neke od ovih kontura upotrebljavaju se i uobičajeni nazivi iz geometrije: trougao, četvorougao itd. Regularni grafovi sa n čvorova stepena $n - 1$ nazivaju se potpuni grafovi.

2.1.3. Izomorfizam grafova

Dva grafa su izomorfna ako postoji uzajamno jednoznačno preslikavanje skupa čvorova tih grafova tako da se osobina susednosti čvorova održava.



Sl. 2.9.

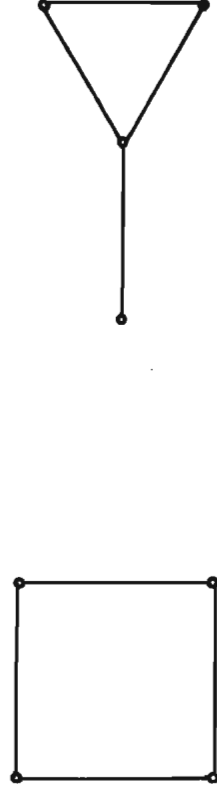
Grafovi sa slike 2.9. su izomorfni: izomorfizam se uspostavlja funkcijom f pri čemu je $f(x_1) = A$, $f(x_2) = B$, $f(x_3) = D$, $f(x_4) = F$, $f(x_5) = E$, $f(x_6) = C$.

Relacija izomorfnosti dva grafa je refleksivna, simetrična i tranzitivna. Stoga

je relacija izomorfnosti relacija ekvivalencije u skupu svih grafova, pa se može smatrati i kao relacija jednakosti grafova. Prema tome, grafovi su jednaki ako i samo ako su izomorfni.

Značajno je pitanje u teoriji grafova da se ustanovi postupak pomoću kojega se određuje da li su dva grafa jednaka (tj. izomorfna) ili ne.

Očigledno je da izomorfni grafovi moraju imati isti broj čvorova i isti broj grana. Međutim, ispunjenje ovih uslova ne garantuje da su grafovi izomorfni. Na slici 2.10. data su dva neizomorfna grafa od kojih svaki ima po četiri čvora i četiri grane.



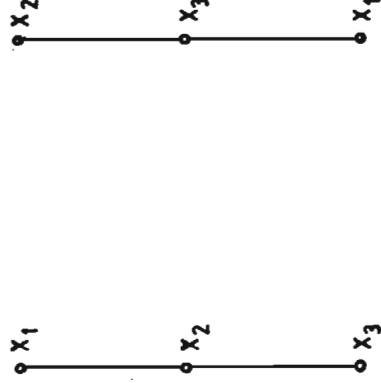
Sl. 2.10.

Takođe izomorfni grafovi mogu imati i različite matrice susedstva. Na slici 2.11. data su dva izomorfna grafa, sa matricama susedstva

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

pri čemu $A_1 \neq A_2$.



Sl. 2.11.

Međutim uslov izomorfizma grafova može se dati preko matrice susedstva kao $A_1 = P^T A_2 P$, gde su A_1 i A_2 odgovarajuće matrice susedstva, a P tzv. permutaciona matrica, tj. kvadratna matrica koja u svakoj vrsti ima jedan element 1, a ostale 0. Kako je za permutacione matrice $P^T = P^{-1}$, onda se može reći da su grafovi čije su matrice susedstva A_1 i A_2 izomorfni ako i samo ako postoji permutaciona matrica P tako da je

$$A_1 = P^{-1} A_2 P.$$

Drugim rečima, izomorfni grafovi imaju matrice susedstva koje su slične.

2.1.4. Operacije s grafovima

Nad jednim ili više grafova moguće je vršiti razne operacije, pri čemu je rezultat tih operacija opet jedan graf ili više grafova.

Jedna od osnovnih operacija u teoriji grafova je tzv. operacija komplementiranja. Ako je G neorijentisan graf bez petlji, tada je komplement \bar{G} graf G neorijentisan graf bez petlji koji ima iste čvorove kao graf G , pri čemu su dva čvora susedna u \bar{G} ako i samo ako ti čvorovi nisu susedni u G . Iz definicije sleduje ($\bar{\bar{G}} = G$, tj. komplement komplementa je polazni graf.

Ako su A i \bar{A} matrice susedstva grafova G i \bar{G} , onda je $\bar{A} = J - A - I$, gde je J matrica čiji su svi elementi 1 a I jedinična matrica (J i I moraju biti istog formata kao A i \bar{A}). Dalje, ako je G nepovezan graf, tada je njegov komplement \bar{G} povezan graf.

Graf G je samokomplementaran ako je izomorfan svome komplementu \bar{G} . Samokomplementaran graf ima $4k$ ili $4k + 1$ čvorova, pri čemu je k prirodan broj.

Neka je $G_1 = (X_1, U_1)$ i $G_2 = (X_2, U_2)$ pri čemu je $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, tj. grafovi G_1 i G_2 nemaju zajedničkih čvorova. Unija $G_1 \cup G_2$ grafova G_1 i G_2 je graf $G = (X, U)$, gde je $X = X_1 \cup X_2$ i $U = U_1 \cup U_2$. U smislu ove definicije svaki graf je unija svojih komponenti povezanosti.

Potpuni proizvod $G_1 \nabla G_2$ grafova G_1 i G_2 je graf koji se dobija od grafa $G_1 \cup G_2$ kada se svaki čvor iz G_1 poveže sa po jednom granom sa svakim od čvorova iz G_2 . Za uniju i potpuni proizvod grafova važe relacije

$$G_1 \bar{\cup} G_2 = \bar{G}_1 \nabla \bar{G}_2, \quad G_1 \bar{\nabla} G_2 = \bar{G}_1 \cup \bar{G}_2.$$

Neka su G_1 i G_2 grafovi a $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ i $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ odgovarajući skupovi čvorova. Dekartov proizvod G_1 i G_2 grafova G_1 i G_2 je graf čiji je skup čvorova jednak $X \times Y$ (tj. čvorovi $G_2 \times G_2$ su svi uređeni parovi oblika

(x_i, y_j)). Dva čvora $(x_{i1}, y_{j1}), (x_{i2}, y_{j2})$ su susedni u $G_1 \times G_2$ ako i samo ako su x_{i1} i x_{i2} susedni čvorovi u G_1 i ako su y_{j1} i y_{j2} susedni u G_2 .

Suma $G_1 + G_2$ grafova G_1 i G_2 je graf sa istim skupom članova kao i $G_1 \times G_2$. Čvorovi (x_{i1}, y_{j1}) i (x_{i2}, y_{j2}) su susedni u $G_1 + G_2$ ako i samo ako je $x_{i1} = x_{i2}$ i y_{j1} susedno sa y_{j2} ili ako je $y_{j1} = y_{j2}$ a x_{i1} je susedno sa x_{i2} .

Graf grana $L(G)$ grafa G je graf čiji se čvorovi nalaze u obostrano jednoznačnoj korespondenciji sa skupom grana grafa G . Dva čvora iz $L(G)$ su spojena granom ako i samo ako se odgovarajuće grane u grafu G stiču u istom čvoru. Drugim rečima $L(G)$ nastaje iz G ako čvorovi i grane zamene mesto.

Od navedenih operacija \bar{G} i $L(G)$ su tzv. unarne operacije, jer se pomoću njih iz jednog grafa G dobija neki nov graf. Operacije $\cup, \nabla, \times, i +$ su binarne, jer je za njihovo izvođenje potrebno imati dva grafa G_1 i G_2 , a rezultat operacije je neki nov graf.

Sem ovih osnovnih, postoje i razne druge operacije u teoriji grafova, koje se uvode u pojedine klase grafova.

2.1.5. Planarni grafovi

Planarni grafovi su oni grafovi bez petlji koji se mogu nacrtati u ravni tako da im se grane ne seku.

Planarni graf deli ravan na više konačnih zatvorenih oblasti i jednu beskonačnu oblast, pri čemu se svaka konačna oblast naziva okce ili ćelija. Velika primena planarnih grafova u elektrotehnici, mašinskoj tehnici itd. iziskuje njihovo detaljno izučavanje i klasifikaciju.

Među prve rezultate teorije grafova i topologije uopšte spada sledeći stav, koji se zove Ojlerova teorema:

Povezan, planarni graf sa n čvorova i m grana deli ravan na $m - n + 2$ oblasti. Dokaz Ojlerove teoreme sprovodi se matematičkom indukcijom po broju grana m .

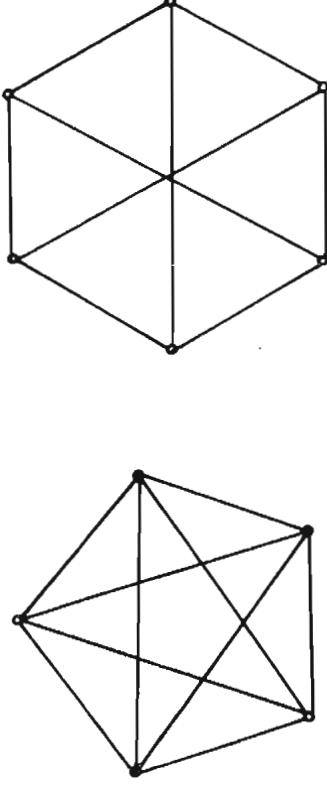
Kao posledica Ojlerove teoreme važi da u planarnom grafu postoji bar jedan čvor stepena manjeg od 6, što može poslužiti kao kriterijum da se utvrdi da neki graf nije planaran. Druga posledica Ojlerove teoreme se dobija ako se polijedar posmatra kao graf sastavljen od temena polijedra kao čvorova i ivica polijedra kao grana. Centralnim projektovanjem polijedar se onda prevodi u planaran graf, a Ojlerova teorema daje onda kao posledicu sledeći stav: polijedar sa n temena i m ivica ima $m - n + 2$ strana.

Na slici 2.12. data su dva grafa koji se zovu potpuni pentagraf i potpuni bitrigraf. Primenom Ojlerove teoreme nije teško ustanoviti da ta dva grafa nisu planarni grafovi. Međutim značaj ova dva grafa se ogleda i u sledećem poznatom stavu, koji se naziva teorema Pontrjagina-Kuratovskog:

Graf je planaran ako i samo ako ne sadrži, kao delimični podgraf, ni potpuni

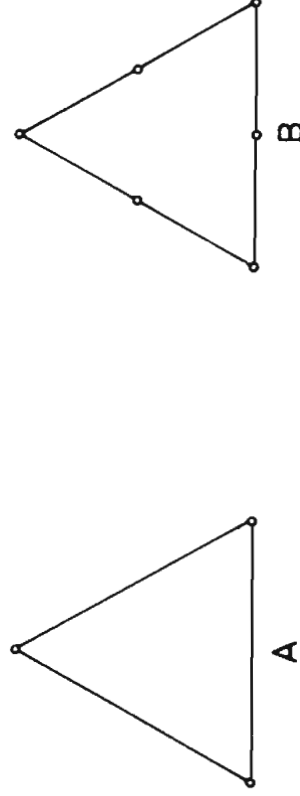
pentagraf ni potpuni bitrigraf ni njihovu potpodelu.

U ovom stavu se javlja pojam potpodele nekog grafa. Pod tim pojmom se podrazumeva oformljavanje novih članova na granama nekog poznatog grafa.



Sl. 2.12.

Graf B je potpodela grafa A na slici 2.13, Teorema Pontrjagina–Kuratovskog predstavlja jedan od najznačajnijih rezultata teorije grafova uopšte, i svi praktični algoritmi za raspoznavanje planarnih grafova zasnivaju se upravo na ovoj teoremi.



Sl. 2.13.

2.1.6. Matrice i grafovi

U odeljku 2.1.1. pokazano je kako se formira matrica susedstva za dati graf. Opštije se definiše matrica incidencije čvorova i grana

$$R = [r_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n, \\ j=1,\dots,m}}$$

Neka je $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ i $U = \{u_1, \dots, u_m\}$ skup čvorova, odnosno grana nekog neorijentisanog grafa. Ako je čvor x_i susedan sa granom u_j važi $r_{ij} = 1$, dok je u suprotnom $r_{ij} = 0$.

Ako je $A(G)$ matrica susedstva grafa G , a $A(L(G))$ matrica susedstva odgovarajućeg grafa grane $L(G)$ i R matrica incidencije čvorova i grana R grafa G , onda je

$$RR^T = A(G) + \text{diag}(d_1, d_2, \dots),$$

$$R^T R = A(L(G)) + 2I.$$

Ovde R^T označava transponovanu matricu matrice R , I je odgovarajuća jedinična matrica, a $\text{diag}(d_1, d_2, \dots)$ je dijagonalna matrica u kojoj d_j označava stepen j -tog čvora grafa.

Kao što je rečeno u odeljku 2.1.3. o izomorfizmu grafova, izomorfni grafovi imaju matrice susedstva koje su slične. To znači da su tzv. invarijante sličnosti matrice susedstva (one osobine koje ostaju nepromenjene prilikom transformacije sličnosti matrica) ustvari karakteristike klase izomorfizama kod grafova. U poglavlju o linearnoj algebri definisan je karakteristični polinom kvadratne matrice A formata $n \times n$ kao

$$\det(\lambda I_n - A) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n,$$

gde je I_n jedinična matrica formata $n \times n$. Kod grafova se definiše karakteristični polinom $P_G(\lambda)$ grafa G kao karakteristični polinom jedne od matrica susedstva A grafa G , tj. $P_G(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$. Skup nula karakterističnog polinoma grafa zove se spektar grafa i predstavlja jednu od invarijanti grafa u odnosu na izomorfizam.

2.2. Primene grafova

L. Ojler (Euler) je prvi matematičar koji je razmatrao neke probleme vezane za grafove još u prvoj polovini XVIII-og veka.

Međutim, kao godina zasnivanja opšte teorije grafova i uvođenja pojma graf uzima se 1936. godina kada je objavljena monografija D. Keniga: "Teorija konačnih i beskonačnih grafova" (D. König, "Theorie der endlichen und unendlichen Graphen", Leipzig, 1936). Do pojave ove monografije grafovi nisu bili objedinjeni i obrađeni opštom teorijom i ako su se pojavljivali pod različitim nazivima i koristili u raznim oblastima nauke i tehnike.

Posle objavljivanja Kenigove monografije šire se istraživanja u teoriji grafova i njenoj primeni i pojavljuju se nove opšte metode.

Sovjetski matematičar A.A. Zukov u uvodu svoje knjige "Teorija konačnih grafova", iznosi mišljenje, sa kojim se i autori ove knjige u osnovi slažu, da teorija grafova ne predstavlja prevrat u nauci. Njena pojava na matematičkoj areni ne označava posezanje na fundamente matematike niti donosi neke ideje nedostupne većini savremenika, a koje bi tek potomci prihvatili. Zadaci sa grafovima su, po pravilu, prosti i očigledni po svojoj formulaciji.

Za rešavanje većine tih zadataka nisu neophodna veća matematička znanja i sposobnosti, nego što zahteva davno poznati zadatak o vuku, koji i kupusu (vidi prilog A na kraju ovog poglavlja). I složeniji zadaci od pomenutog mogu se rešavati posebno, ne bazirajući se na opštoj teoriji. Naravno, takav pristup zahteva talenat, intuiciju i strpljenje.

Drugim rečima čisto praktični problemi koji se mogu definisati pomoću grafova u principu se mogu rešavati bez teorijske podrške, prostim prebrojavanjem svih mogućih slučajeva. Ali i ovde postoje granice, bez obzira na postojanje moćnih

alata za prebrojavanje kao što su računari.

Za prebrojavanja kod rešavanja složenijih problema potrebno je veoma mnogo računarskog vremena, tako da ovakav postupak postaje vrlo skup i neracionalan, a opšta teorija grafova i metode koje baziraju na njoj u ovim slučajevima dolaze do punog izražaja.

Teorija grafova ne može se u potpunosti svrstati ni u jednu oformljenu oblast matematike kao što je algebra, matematička logika, kombinatorika, analiza, topologija teorija konačnih matrica, teorija igara, linearno programiranje itd. Teško je definisati međe između teorije grafova i navedenih matematičkih disciplina, pošto su česta jednostrana i obostrana prožimanja i oslanjanja. Teorija grafova koristi metode iz navedenih oblasti, ali je u isto vreme i u ovim oblastima korišćena. Tako npr. odeljak teorije skupova koji proučava uređene skupove predstavlja i odeljak teorije grafova. Teorija grafova se smatra i delom topologije, kibernetike, a veoma je bliska kombinatornoj analizi.

Algebarski aparat se često koristi u teoriji grafova, ne samo kao računsko-matipulativno sredstvo već i kao sredstvo istraživanja. Ipak dominantnu ulogu u istraživanju grafova ima kombinatorna analiza, gde se u teoriji grafova zahteva poseban pristup zasnovan na kombinaciji algebarskih i kombinovanih metoda.

Postavlja se dakle osnovno pitanje: **Šta je predmet teorije grafova?** Opšte prihvaćen odgovor na ovo pitanje kaže da se teorija grafova bavi kombinatornim problemima. Pri ovome se ne radi toliko o definisanju broja različitih objekata kao u elementarnoj kombinatorici (broj kombinacija, broj varijacija ...), nego je sama kombinatorna struktura dominantan predmet istraživanja. U skladu sa ovakvim shvatanjem može se kazati: **Teorija grafova je teorija kombinatornih struktura.**

Neki autori izbegavaju reč struktura, smatrajući da izaziva neželjene asocijacije i uvode pojam **diskretnih objekata** ili kako to čini francuski matematičar C. Berge (C. Berge) teoriju grafova naziva **teorijom konfiguracija**. Naravno, pri tome je potrebno definisati pojam konfiguracije.

Što se praktične primene tiče za grafove možemo kazati da su vrlo elastičan matematički aparat koji ima primenu u raznim oblastima nauke i čovekove delatnosti i čija osnovna matematička teorija nije vezana ni za jednu primenjenu disciplinu.

U velikom broju naučnih oblasti postoje problemi koji se rešavaju, ili je njihovo rešavanje znatno olakšano, primenom teorije grafova. tako se teorija grafova primenjuje na primer u elektrotehnici, saobraćajnoj tehnici, operacionim istraživanjima, mašinstvu, automatici, hemiji, biologiji, računarstvu, ekonomici, sociologiji, psihologiji, medicini, organizaciji rada, lingvistici, armiji, rudarstvu, geologiji itd. Razlog ovako široke lepeze primena leži pre svega u jasnoj i čovekovoju intuiciji bliskoj geometrijskoju predstavi koju graf sadrži opisujući osobine i ponašanje objekta koji je predmet pažnje.

Navešćemo nekoliko tipičnih primera:

a. Analiza saobraćajnih mreža, npr. modeliraje kretanja vozila u gradskim uslovima može se predstaviti grafom tako što raskrsnice predstavljaju čvorove grafa, a ulice grane.

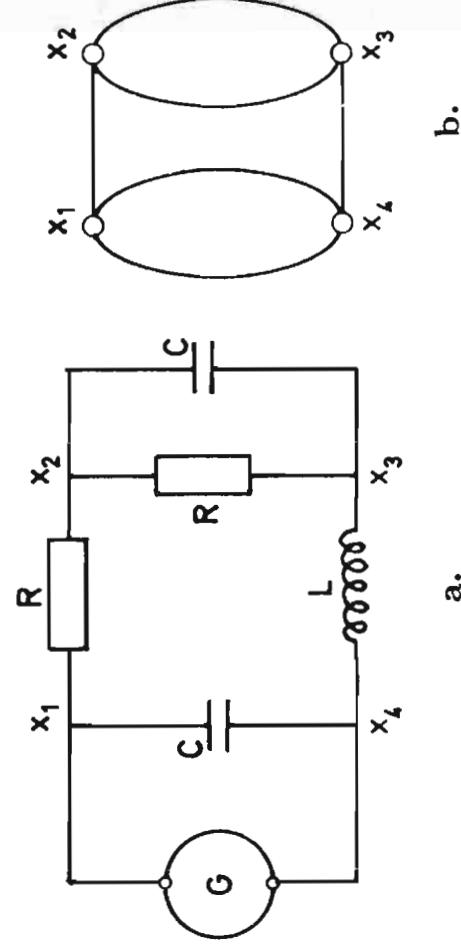
Ukoliko je ulica jednosmerna za saobraćaj, grana je orijentisana. Neorijentisana grana odgovara dvosmernim ulicama.

Po ovoj analogiji uz pomoć grafova modeliraju se vrlo složene saobraćajne mreže na mikro i makro-prostorima.

b. Analiza mreža sa protocima, kao što su električne, toplovodne, hidraulične, ventilacione i druge mreže, predstavljaju široku klasu fizičkih sistema gde je teorija grafova našla sigurno jednu od najvažnijih primena.

U principu svaku ovakvu mrežu sačinjavaju elementi koji su na odgovarajući način međusobno povezani.

Primera radi, električna mreža predstavlja skup povezanih elemenata kao što su izvori napajanja (generator, akumulator ...) omski otpornici, induktivni kalemovi (solenoidi), kondenzatori i drugi elementi ili sklopovi elemenata. Na slici 2.14 (a.) dat je primer električne mreže. U njoj su elementi postavljeni u pojedinim granama a čvorovi mreže su tačke u kojima se susiće bar tri grane mreže.



Sl. 2.14.

Datoj električnoj mreži može se pridružiti multigraf kao na slici 2.14 (b). Čvorovi multigrafa odgovaraju čvorovima mreže, a granama električne mreže odgovaraju neorijentisane grane multigrafa.

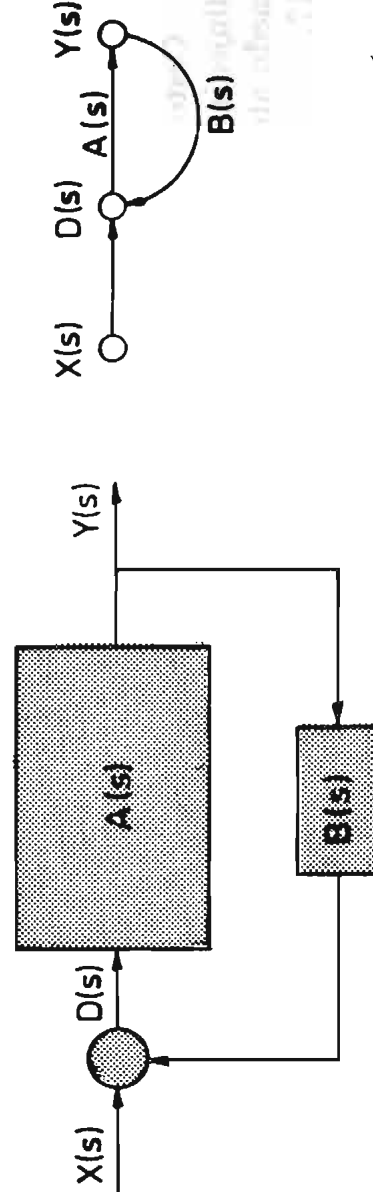
Isti pristup koristi se i kod analize drugih protočnih mreža gde važi opšti zakon fizike o održanju energije. Kao ključni problem kod analiza mreža javlja se potreba za postavljanjem sistema jednačina čijim se rešavanjem određuju stanja i protoci u elementima odnosno granama mreže. Dakle problem se svodi na dva pitanja:

1. Formiranje sistema jednačina;
2. Rešavanje sistema jednačina (Kramerov, Gausov, Matrični metod, ...).

c. Sistemi automatskog upravljanja. Kod istraživanja i analize ovih sistema često se koriste grafovi protoka signala kao vrlo celishodan aparat.

Model sistema sa povratnom spregom je jedan od osnovnih matematičkih modela u automatiki. Na njemu ćemo ilustrovati grafovsku interpretaciju preko protoka signala uzročno-posledičnih relacija, koja je inače toliko bliska intuitivnom shvatanju rada sistema sa povratnom spregom, da se vrlo često sistem sa povratnom spregom i njegov graf protoka signala poistovećuju.

Na slici 2.15 (a) dat je osnovni model sistema sa povratnom spregom, gde je $A(s)$ -prenosna funkcija direktne grane, $B(s)$ -prenosna funkcija povratne grane, $X(s)$ -ulazni signal i $Y(s)$ -izlazni signal.



a.

Sl. 2.15.

b.

Na slici 2.15 (b) prikazan je graf protoka signala pridružen osnovnom modelu sistema sa povratnom spregom. Očigledno je da je njegova struktura identična sa strukturom samog sistema.

Mason (S.J. Mason) je prvi pokazao da su grafovi protoka signala vrlo pogodan aparat za analizu i istraživanja ovakvih i sličnih sistema u automatiki. Po metodi Masona sistemu linearnih jednačina pridružuje se jedan graf, kod koga je svakoj petlji i grani pridružen realan broj različit od nule. Pridružen broj označava prenos grane. Rešenje sistema se dobija na određen način na osnovu strukture pridruženog grafa. Sistem jednačina mora biti doveden u oblik:

$$x_1 = a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n$$

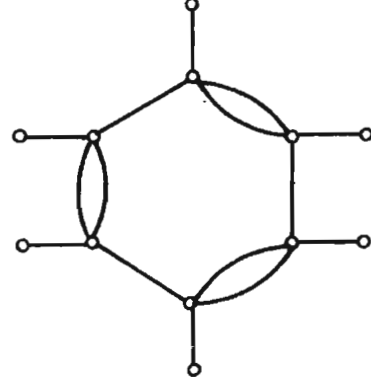
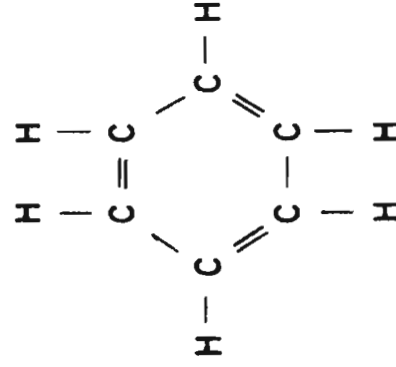
⋮

$$x_n = a_{n0}x_0 + a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n.$$

Ovde su nepoznate x_1, x_2, \dots, x_n , a x_0 parametar preko koga se izračunavaju nepoznate veličine.

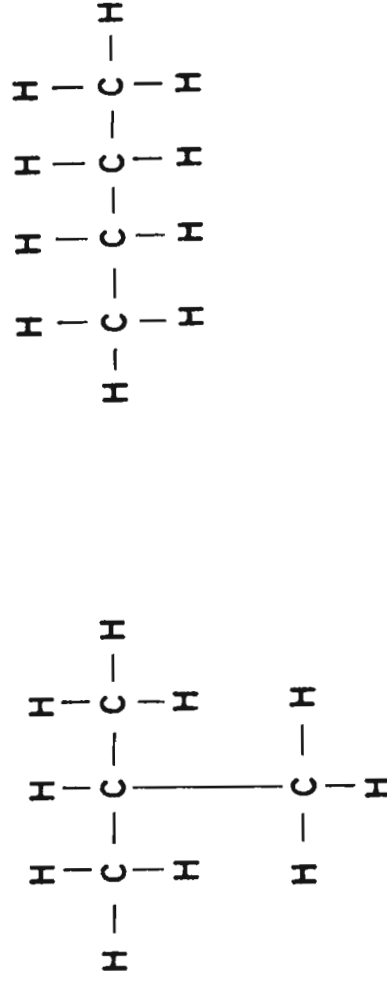
Pridruženi graf ima $(n+1)$ čvorova koji su označeni sa $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$. Za svako (i, j) za koje je $a_{i,j} \neq 0$, iz čvorova x_j u čvor x_i vodi orijentisana grana kojoj je pridružen broj $a_{i,j}$.

d. Hemija. U ovoj oblasti se multigrafovima predstavljaju strukture međusobnih veza atoma i molekula. Na slici 2.16. dat je primer za benzol C_6H_6 .



Sl. 2.16.

Često se postavlja problem poznavanja izomera nekog jedinjenja (izomeri su jedinjenja čiji se molekuli sastoje od istih atoma a razlikuju se po strukturi veza između atoma). Primera radi jedinjenje C_4H_{10} može imati strukture kao na slici 2.17.



Sl. 2.17.

Kako je ugljenik četvorovalentan, a vodonik jednovalentan postavlja se pitanje koliko ovo jedinjenje može imati izomera ili pitanje prevedeno na teoriju grafova: koliko postoji neizomorfnih povezanih grafova koji imaju četiri čvora stepena četiri i deset čvorova stepena jedan.

Na ovo pitanje uspešan odgovor daje teorema o prebrojavanju grafova koju je dao Polia (G. Polya, Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen, Acta Mathematica, 68, 1937).

Radi potpunije ilustracije primene grafova u hemiji navešćemo još neke primere: nivo energije elektrona u molekulu svodi se na određivanje spektra odgovarajućeg grafa, hemijske i fizičke osobine molekula moguće je obrazložiti ili predvideti čisto matematički preko relacije između strukture i spektra grafa itd.

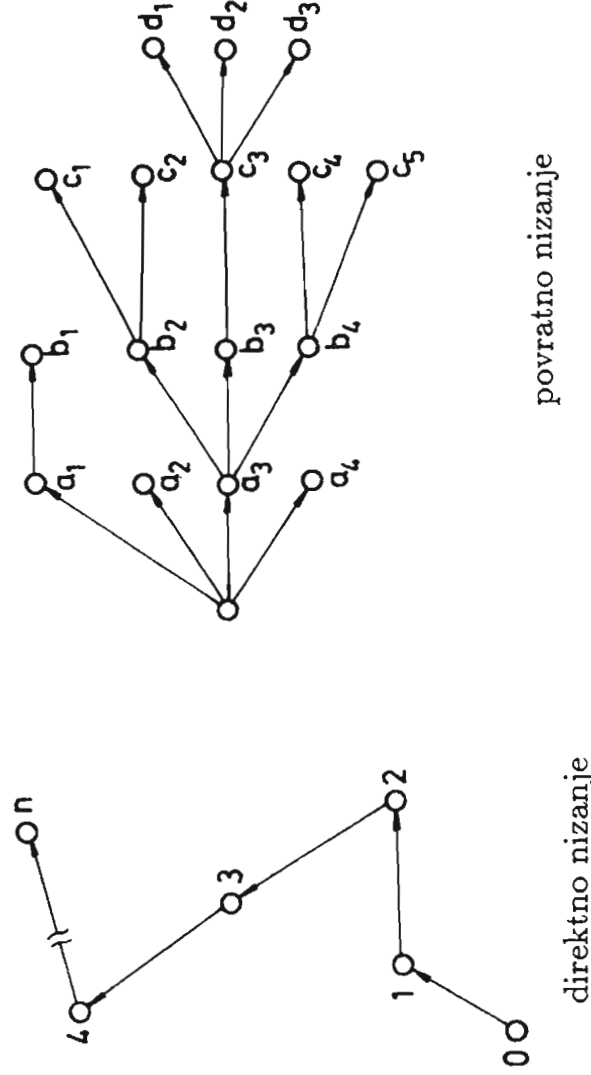
e. **Računarska tehnika.** U ovoj oblasti teorija grafova ima primenu od samih početaka i sa njenim vrlo intenzivnim razvojem stalno se otvaraju novi problemi i pristupi primene grafova.

Ako pod pojmom računarska tehnika ograničimo prostor koji se odnosi na hardver (hardware) i softver (software), grafovi gotovo podjednak značaj imaju u istraživanjima i razvoju kako softvera tako i hardvera.

Projektovanje i razvoj složenih programskih struktura i programskih sistema na operativnim ili aplikativnim nivoima, zahteva precizno definisanje strukture, logičkih tokova i sprega pojedinih programskih delova. Teorija grafova pruža moćan aparat za uspešno i znatno olakšano rešavanje ovakvih problema.

Kod razvoja veštačke inteligencije odnosno ekspertnih sistema, grafovi se pokazuju kao vrlo celishodni kod razvoja algoritamskih tokova zaključivanja.

Na slici 2.18. dati su grafovi zaključivanja kod ekspertnih sistema, po principu direktnog i povratnog nizanja.



Sl. 2.18.

Projektovanje i razvoj hardvera otvara široke prostore primeni grafova, počev od primene grafova u analizi signala, konstrukciji kodova pa do sprezanja i povezivanja komponentata u sisteme i složene mreže.

U razvoju informacionih i informaciono-upravljačkih sistema, osim prethodno navedenih primena, grafovima se analiziraju informacioni i informaciono-upravljački tokovi, vrši sinteza stabla, utvrđuje propusna moć sistema itd.

f. **Sociologija.** Grafovima se mogu predstaviti odnosi među ljudima u pojedinim grupama, tako što se čvorovima predstavljaju pojedinci, a orijentisanim ili neorijentisanim granama označavaju se odnosi između pojedinaca: kao što su: prijateljstvo, poznanstvo, srodstvo, simpatija, netrpeljivost, uticaj i slično. Uobičajen naziv za ovakve grafove je **sociogram**.

Osnovni cilj ove monografije je primena matematičkih metoda u rudarstvu i geologiji. Stoga ćemo u narednom delu pokušati da ukažemo i pokažemo kako se osnovne činjenice iz teorije grafova mogu koristiti u formulisanju i rešavanju problema iz rudarstva i geologije.

Između primenljivosti grafova i razuđenosti rudarske i geološke nauke i prakse postoji sličnost u pogledu širine. Ovo samo po sebi ne kazuje mnogo, ali upućuje na razmišljanje da teorija grafova, može imati u ovim naučnim oblastima plodno tlo za primenu.

Primene u rudarstvu i geologiji:

Analizirajući literaturu, dolazi se do suprotnog zaključka, da grafovi kao vrlo celishodan matematički aparat nisu afirmisani u geologiji i rudarstvu.

Nije objavljena ni jedna monografija, ili knjiga u kojoj se govori o primeni grafova u geologiji i rudarstvu, bar autorima ove monografije to nije poznato. Sa publikovanim naučnim i stručnim radovima situacija je nešto povoljnija, ako se u taj skup uvrste radovi u kojima se na neki način koriste grafovi bez pune identifikacije. Ovakva situacija je logična kada se ima u vidu da je afirmacija matematičkih pristupa u geologiji i rudarstvu novijeg doba i da se na visokim školama koje školuju stručnjake za geologiju i rudarstvo u nastavnim programima iz matematike teorija grafova ne izučava.

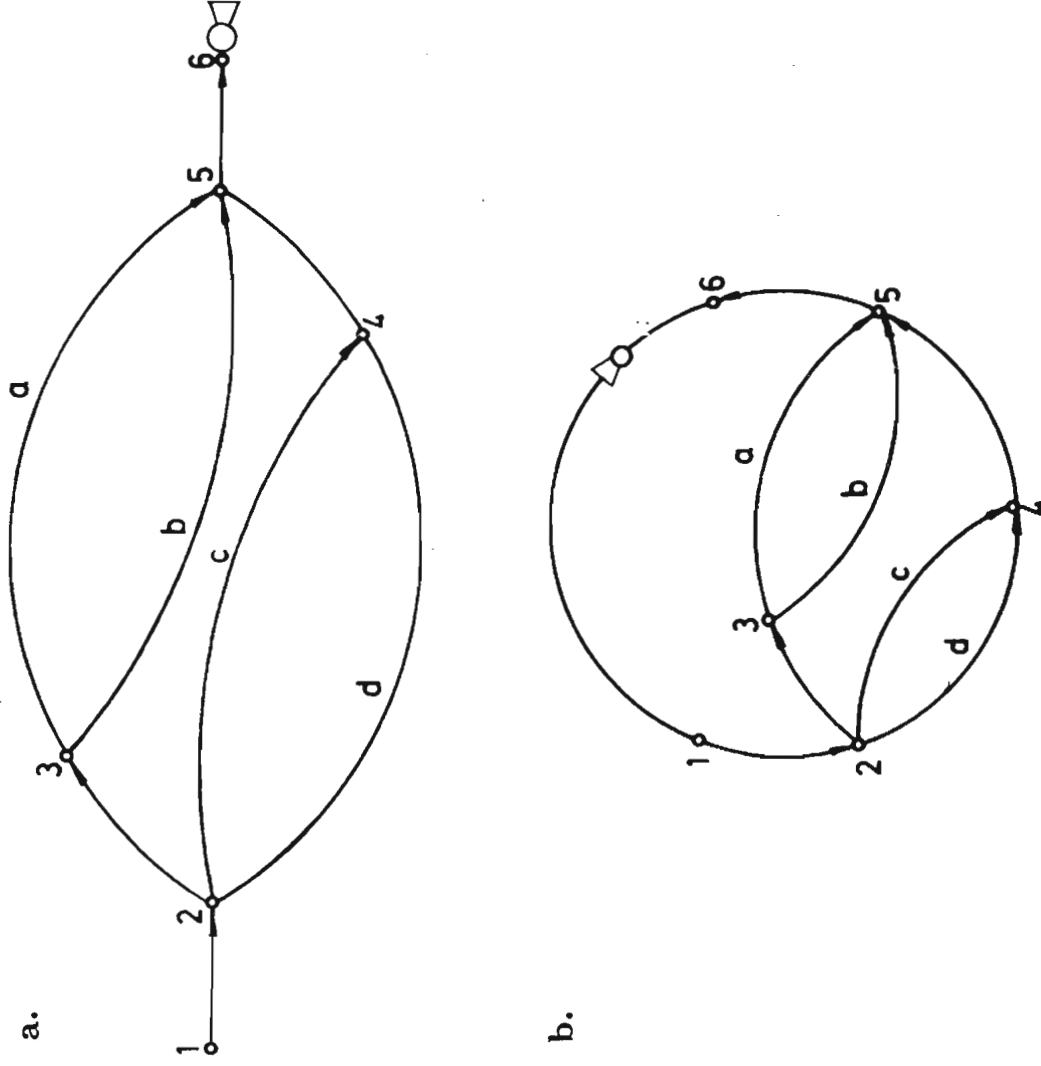
Potvrda opšte poznate konstatacije da su se grafovi koristili i koriste u mnogim slučajevima bez eksplicitnog pojavljivanja naziva graf, nalazi se i u rudarstvu.

Ventilacija rudnika. Vrlo značajna rudarska disciplina koja se bavi problemima ventilacije rudnika, od samih svojih naučno zasnovanih početaka, istražujući složene dinamičke i termodinamičke procese ventilacije rudnika praktično koristi u analizi grafove i elemente teorije grafova. Grafovi i teorija grafova imenom ne egzistiraju u ovim analitičkim pristupima, ali proračuni ventilacionih mreža počivaju na opštim principima analize proticajnih mreža – odnosno teorije grafova, o čemu su u prethodnom delu teksta data osnovna objašnjenja. Detaljnije informacije zainteresovani čitaoci mogu naći u izvornoj literaturi.

Na sledećem primeru, ne ulazeći u detalje, ilustrovaćemo primenu grafova kod analize i proračuna ventilacionih sistema u rudnicima sa podzemnom eksploatacijom. Na slici 2.19. date su kanonske ventilacione šeme za jednu istu ventilacionu mrežu. Ove vrste šema konstruišu se na osnovu prostornih ili linearnih modela ventilacione mreže rudnika.

Pri konstrukciji kanonske ventilacione mreže nije bitna razmera, nego međusobni odnosi pojedinih ogranaka kao i čvorne tačke koje su mesta spajanja ili razdvajanja vazдушnih struja

U kanonske ventilacione šeme unose se podaci o otporima ogranaka, položaji ventilatora, prigušivača i slično. Prikazane na slici 2.19. otvorena i zatvorena kanonska šema u osnovi su grafovi, date ventilacione mreže.



Sl. 2.19.

Problem transporta i organizacije rada transportnih sistema na rudnicima je od posebnog značaja, ovo tim pre ako se ima na umu da na transportnu fazu otpada čak i do 60% od ukupnih tehnoloških troškova u eksploataciji mineralnih sirovina.

Niz teoretskih i praktičnih transportnih problema u rudarstvu svode se na tzv. metričke probleme koji se uspešno rešavaju primenom grafova. Kod ovakvih problema grafovi mogu biti orijentisani ili neorijentisani, sa ili bez višestrukih grana, sa ili bez petlji, a brojevi koji se pridružuju granama mogu pripadati različitim skupovima podataka: vremena, dužine, specifični troškovi, normativi itd.

Jedan od fundamentalnih problema u transportu odnosi se na optimizaciju transportne mreže:

Kriterijumi optimalnosti u realnim zadacima mogu se svesti na: najkraći put, maksimalna propusna moć, kapacitet, minimalni transportni troškovi i slično.

U literaturi je opisano veoma mnogo algoritama za nalaženje najkraćeg puta u

grafu. Svi su oni u osnovi slični, razlikuju se uglavnom po proceduri sprovođenja. Navodimo Fordov (Ford) algoritam za iznalaženje najkraćeg puta u grafu. Posmatrajmo neorijentisan graf sa n čvorova $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$. Dužine grana koje povezuju čvorove obeležimo sa $\ell(i, j)$, $(i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n)$. Neka tražimo najkraći put koji vodi od čvora x_1 do čvora x_n . Svakom čvoru se pridružuje broj b_i . Uzima se da je $b_1 = 0$ i $b_i = +\infty$ ($i = 2, 3, \dots, n$).

Za svaku granu (i, j) se ispituje da li je $b_j - b_i > \ell(i, j)$. Ako je ovaj uslov ispunjen čvoru x_j se pridružuje umesto b_j broj $b'_j = b_i + \ell(i, j)$, u protivnom ne menja se broj b_j . Ovaj postupak se ponavlja sve dok je moguće menjati brojeve b_j . U iterativnom postupku može se desiti da se neka grana (i, j) više puta izetira. Kada se postupak završi prilazi se iznalaženju najkraćeg puta polazeći od x_n .

Uzmimo da je $x_n = x_{p1}$, tada je za čvor x_{p2} $b_{p2} - b_{p1} = \ell(p_2, p_1)$, dakle može se formirati niz čvorova $x_{p1}, x_{p2}, \dots, x_{pk}$ za koje važi $b_{pi} - b_{p(i+1)} = \ell(p_i, p_{i+1})$. Veličine $b_{p1}, b_{p2}, \dots, b_{pk}$ obrazuju opadajući niz, a k se može izabrati tako da za ovaj niz važi $b_{pk} = 0$ odnosno $x_{pk} = x_1$. Najkraći put iz x_1 u x_n definisan je nizom čvorova $x_1 = x_{pk}, x_{pk-1}, x_{pk-2}, \dots, x_{p1} = x_n$.

Problem najkraćeg puta može se generalizovati i na druge probleme koji ni po čemu ne podsećaju na njega.

Na primer, umesto neorijentisanih grafova moguće je posmatrati digrafove bez petlji ili recimo umesto najkraćeg puta može se tražiti najduži.

Napomenimo da i takvih problema kao što je problem iznalaženja najdužeg puta ima u rudarstvu i geologiji. Tipičan primer je mrežno planiranje tokova realizacije određenih poslova npr. projekata istraživanja ili realizacije radova. Mrežno planiranje pripada grupi primenjenih matematičkih metoda, pod zajedničkim nazivom Operaciona istraživanja.

Mrežno planiranje se koristi kod planiranja vremenske dinamike, realizacije tehničkih i drugih projekata, odnosno poslova koji se sastoje od većeg broja aktivnosti. U realizaciji projekta postoji veća ili manja tehnološka zavisnost između pojedinih aktivnosti, neke aktivnosti ne mogu otpočeti pre nego što se neke završe. Ovakva zavisnost može prouzrokovati kašnjenja u realizaciji zadataka na projektu, ukoliko se određene aktivnosti ne završe na vreme.

Mrežno planiranje vrlo pregledno pruža mogućnost utvrđivanja zavisnosti između aktivnosti na projektu, utvrđivanje kritičnih aktivnosti, utvrđivanje vremena završetka projekta, kao i utvrđivanje vremenske rezerve za izvršenje pojedinih aktivnosti. Osim toga moguće je odrediti minimalnu cenu izvođenja projekta.

Na osnovu podataka dobijenih iz mrežnih dijagrama mogu se utvrditi optimalni načini izvođenja zadataka u rokovima, optimizirati angažovanje ljudi, mašina i materijalnih sredstava.

Danas je ova tehnika u širokoj upotrebi u svetu. razvijene su mnoge tehnike u okviru mrežnog planiranja koje pripadaju determinističkoj ili stohastičkoj klasi. U prvom slučaju, vreme trajanja pojedinih aktivnosti je fiksno, dok se u drugom slučaju uzima u obzir uticaj slučajnih faktora na vreme trajanja aktivnosti.

Dve najstarije i u praksi najviše korišćene tehnike mrežnog planiranja su: deterministička metoda CPM (critical path method – metoda kritičnog puta) i stohastička metoda PERT (programme evaluation and review technique – ocena programa i tehnika revizije).

Nećemo ulaziti u detalje i razlike ovih metoda, do takvih spoznaja može se doći u vrlo bogatoj izvornoj literaturi, opisaćemo samo osnovne njihove karakteristike koje su u vezi sa teorijom grafova.

Skup aktivnosti, događaja i međusobne uslovljenosti na realizaciji projekta u mrežnom planiranju predstavlja se mrežnim dijagramom, koji nije ništa drugo nego orijentisan graf.

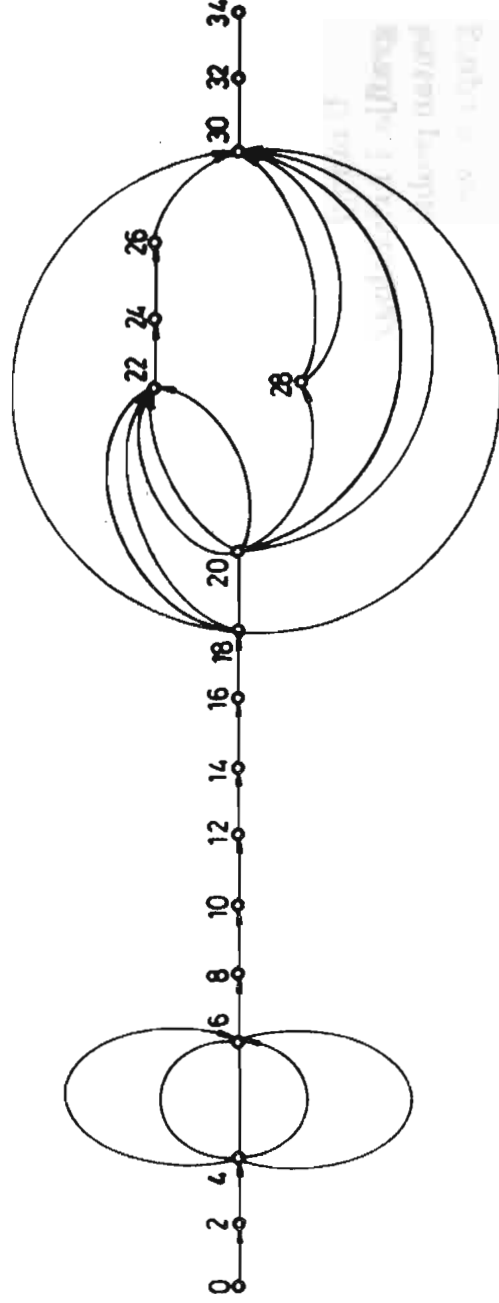
Čvorovi grafa predstavljaju događaje, a grane grafa aktivnosti. Događaj predstavljen čvorom nastupa kada se završe sve aktivnosti koje su predstavljene granama koje ulaze u taj čvor. Nijedna aktivnost koja je predstavljena granom koja izlazi iz čvora ne može započeti pre nego što se završe sve aktivnosti čije se grane, završavaju u čvoru.

Čvor koji predstavlja početak projekta nema ulazne grane, a čvor koji predstavlja događaj završetka projekta nema izlaznih grana.

Mrežni dijagrami nemaju orijentisanih kontura, pošto bi postojanje kontura dovelo do apsurdna da neki događaj treba da se završi pre nego što je započeo.

Svakoj grani grafa, odnosno mrežnog dijagrama pridružuje se nenegativan broj koji predstavlja dužinu trajanja određene aktivnosti.

U prilogu *B* na kraju ovog poglavlja dat je kraći primer edukativnog tipa koji se odnosi na izradu mrežnog dijagrama po CPM metodi.



Sl. 2.20.

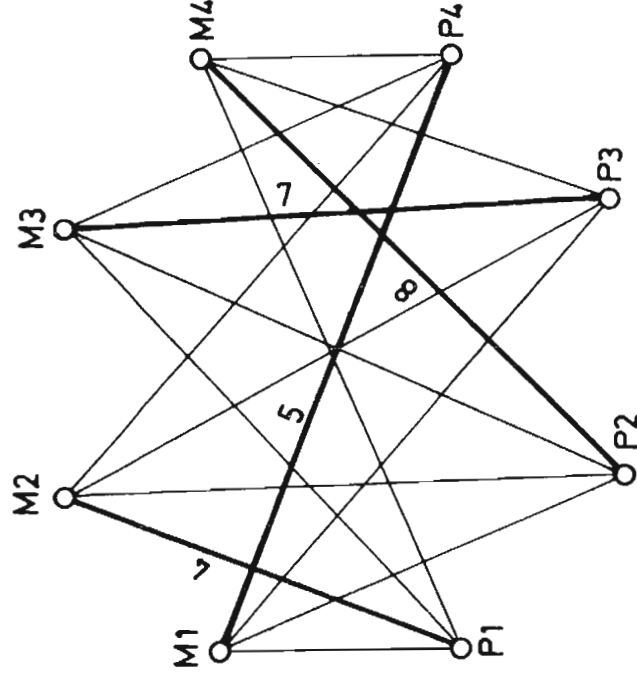
Na slici 2.20. dat je orijentisan graf mrežnog plana otvaranja površinskog kopa iz odeljka 2.3. u prilogu *B*.

U rudarstvu i geologiji mrežno planiranje ima značajnu primenu na različitim nivoima i u različitim fazama: istraživanja, analiza i elaboriranja rezultata is-

traživanja, projektovanja, realizacije projekata, vođenja istražnih radova, nabavke mehanizacije i opreme, montaže opreme, planiranja održavanja opreme, izgradnje objekata, kapitalne i prateće aktivnosti kod otvaranja i razvoja rudnika, sinhronizacije tehnološki aktivnosti na rudnicima itd.

Teorija grafova se pokazala pogodnom za razvoj tzv. metoda alternativnih lanaca. Rad na ovom polju prvi je započeo mađarski matematičar Edervari, razviviši "mađarski algoritam" koji se uspešno primenjuje u nekim oblastima teorijske i primenjene matematike, a pre svega u okviru metoda Operacionih istraživanja pod nazivom **Mađarska ili Metoda raspoređivanja**.

Mađarska metoda nalazi primenu i u rudarstvu kod operativnog planiranja radnih zadataka. U prilogu C odeljka 2.3. dat je algoritam mađarske metode kroz obradu manjeg praktičnog problema. Na slici 2.21. dat je graf obrađenog problema. Sa deblje izvučenim granama označeno je optimalno rešenje.



Sl. 2.21.

U mnogim problemima iz primenjenih nauka kao što su **mineralogija, petrografija i kristalografija** pitanja raznih vrsta simetrije mogu se svesti na ekvivalentan problem, na graf. U izračunavanju mogućih simetrija grafa teorija konačnih grupa se veoma mnogo primenjuje.

Obzirom na karakter knjige, kao i to da date teorijske osnove i navedeni primeri dovoljno ilustruju lepezu i mogućnosti primene grafova kod rešavanja i analize geoloških, rudarskih i drugih naučnih i stručnih praktičnih problema, autori se nadaju da izloženo pruža dovoljno informacija, koje zainteresovanom čitaocu mogu poslužiti kao polazna osnova za uvođenje u inače obimnu literaturu o grafovima.

2.3. Prilozi

PRILOG A

Problem: Preko reke čovek treba da preveze kozu, vuka i kupus, u čamcu u koji može pored čoveka da stane jedna od te tri stvari. Na obali, to je očito, ne sme da ostavi zajedno kozu i kupus, ili kozu i vuka.

Dakle problem je jasan, pred čovekom je pitanje: Kako organizovati prevoz koze, vuka i kupusa u datim uslovima?

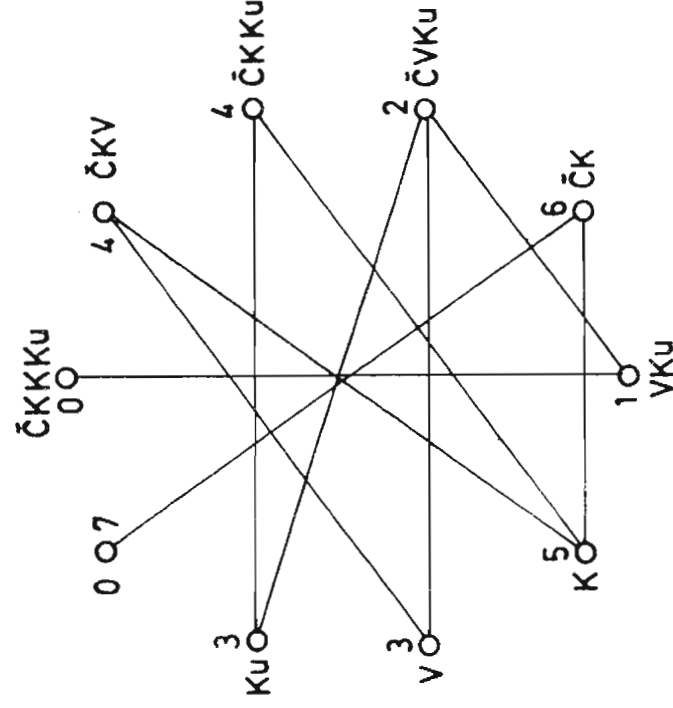
Rešenje problema: Uvedimo oznake: Č–čovek, K–koza, V–vuk i Ku–kupus. Dozvoljena stanja na obali reke mogu biti: ČKVKu, ČKV, ČKKu, ČK, VKu, K, V, Ku, O (sa O je obeleženo stanje kada su svi prešli preko reke). Pri ovome podrazumeva se da se pri prevozu čovek uvek nalazi u čamcu.

Na slici 2.22. predstavljen je graf mogućih stanja pri prelascima reke. Zadatak se u matematičkom smislu svodi na iznalaženje najkraćeg puta između čvorova ČKVKu i O.

Postoje dva rešenja:

- (1) ČKVKu, VKu, ČVKu, Ku, ČVKu, K, ČK, O.
- (2) ČKVKu, VKu, ČVKu, V, ČKV, K ČK, O

Iz navedenog primera vidi se da se čak i zabavni problemi svode na; matematički problem iznalaženja najkraćeg puta između čvorova grafa.



Sl. 2.22.

PRILOG B

Problem: Da bi smo tehniku mrežnog planiranja, odnosno CPM metodu, prezentirali poslužićemo se zaokruženim primerom, koji osim ilustrativnog ima i metodološki cilj.

Ovakve mogućnosti pruža problem sinhronizacije i vođenja aktivnosti i radova na pripremi i otvaranju površinskog kopa. Za izbor ovog problema meritorna je njegova razumljivost i u prvom redu obuhvatnost geoloških i rudarskih aktivnosti.

Mrežnim planom treba definisati ukupan tok realizacije projekta otvaranja površinskog kopa, kako bi se boljom sinhronizacijom aktivnosti ostvarile eventualne uštede u vremenu i troškovima, osigurala koordinacija i kontrola napredovanja poslova i selektovali kritični poslovi.

U tabeli 2.1. dat je popis svih aktivnosti predviđenih za realizaciju u fazi otvaranja površinskog kopa.

Rešenje problema: Sama izrada mrežnog dijagrama zahteva određenu postupnost i sastoji se iz tri stupnja:

- definisanje spiska aktivnosti,
- konstrukcija mrežnog dijagrama,
- kontrola u odnosu na osnovna pravila.

Spisak aktivnosti je niz svih poslova i postupaka koji se moraju izvesti u toku realizacije projekta.

Tabela 2.1.

i	j	Područje zadataka	Aktivnosti	Odgovorni izvršilac	Vreme trajanja
0	2	A	Geodetska snimanja		10
2	4	A	Izrada topografske osnove		20
4	14	A	Istražno bušenje		180
4	8	A	Laboratorijska ispitivanja		60
8	14	A	Poluindustrijska ispitivanja		60
6	14	A	Geomehanička ispitivanja		10
10	14	A	Hidrogeološka istraživanja		30
12	14	A	Seizmička ispitivanja		5
14	16	A	Obrada podataka i izrada geološke dokumentacije		55
16	18	A	Ocena i overa eleborata o rudnim rezervama		30
18	20	CBA	Izrada idejnog projekta eksploatacije		90
20	22	CBA	Izrada investicionog programa		60
22	24	CBA	Izrada glavnog rudarskog projekta		120
24	26	C	Donošenje odluke o otpočinjanju izgradnje		10
26	28	B	Izgradnja puteva		60
54	38	B	Izgradnja glavnog električnog napojnog voda		15
32	38	B	Izgradnja trafostanice		120
28	38	B	Izgradnja razvodne el. mreže		30
34	38	B	Izgradnja radionice		120
28	48	B	Izgradnja pratećih rudničkih objekata		150
36	50	B	Izgradnja benzinske stanice		60
26	38	CB	Nabavka i isporuka rudarske opreme		75
38	40	B	Montaža rudarske opreme		45
40	50	C	Testiranje opreme		30
26	42	C	Čišćenje i priprema terena		25
30	50	C	Izgradnja sistema za odvodnjavanje		80
42	50	C	Izgradnja useka otvaranja		180
44	50	B	Montaža radio i telefonskih veza		15
46	50	B	Izgradnja drobiličnog postrojenja		180
48	50	B	Montaža kontrolno-upravljačkog sistema		50
50	52	C	Uhodavanje sistema		60
54	56	CB	Prijem objekta		7

Tehnika mrežnog planiranja pretpostavlja da su sve aktivnosti identifikovane, odnosno popisane i da je zapravo najvažniji posao sama konstrukcija mrežnog dijagrama. U praksi, međutim, nije uvek lako sagledati i predvideti sve aktivnosti i sastaviti postupni spisak aktivnosti. Ovom problemu se u specijalizovanoj literaturi o mrežnom planiranju pridaje poseban značaj.

Primer je instruktivan sa aspekta identifikacije aktivnosti, no biće čitalaca koji će primetiti da nedostaje ova ili ona aktivnost u fazi istraživanja ležišta ili neposrednog otvaranja površinskog kopa. Ovakva zapažanja u potpunosti opravdavaju edukativan karakter zadatka.

U našem slučaju integralni zadatak možemo podeliti na tri područja, shodno tome projekat se deli u sledeće faze:

- geološki radovi (faza A),
- izgradnja pratećih objekata (faza B),
- rudarski radovi (faza C).

Spisak aktivnosti standardno sadrži šest kolona. Na tabeli 2.1. dat je popis za naš primer. Peta kolona u koju se za svaku aktivnost unosi podatak o odgovornom izvršiocu nije popunjena pošto taj podatak za prezentaciju CPM nije bitan, ali kod izrade mrežnih planova konkretnih projekata mora se precizirati odgovorni izvršilac.

Pri konstruisanju mrežnog dijagrama uključivanje aktivnosti vrši se sistematski pomoću odgovarajuće tehnike pitanja. Da bi se postigao pravilan redosled aktivnosti, mora se kod svake aktivnosti odgovoriti na sledeća četiri pitanja:

1. Koje aktivnosti moraju biti završene neposredno pre?
2. Koje aktivnosti mogu otpočeti neposredno posle?
3. Koje se aktivnosti mogu nezavisno paralelno odvijati?
4. Da li se posmatrana aktivnost može podeliti?

Umesto crtanja mrežnog dijagrama na osnovu tehnike pitanja, mogu se redosled i zavisnost aktivnosti prikazati u međukoraku. U matricu međuzavisnosti unosimo kružić u stupcu "posmatrana aktivnost" za one aktivnosti koje moraju biti završene neposredno pre.

Na slici 2.23. data je matrica međuzavisnosti, brojevi od 1 do 32 označavaju aktivnosti po redosledu kako su navedene u popisu u tablici 2.1.

Pošto je ustanovljena logična zavisnost aktivnosti može se pristupiti izradi mrežnog dijagrama.

Na slici 2.24. razvijen je mrežni dijagram projekta otvaranja površinskog kopa. Numeracija mrežnog dijagrama izvršena je rastućim nizom parnih brojeva. Na taj način raspolaže se sa rezervom za slučaj promena u strukturi.

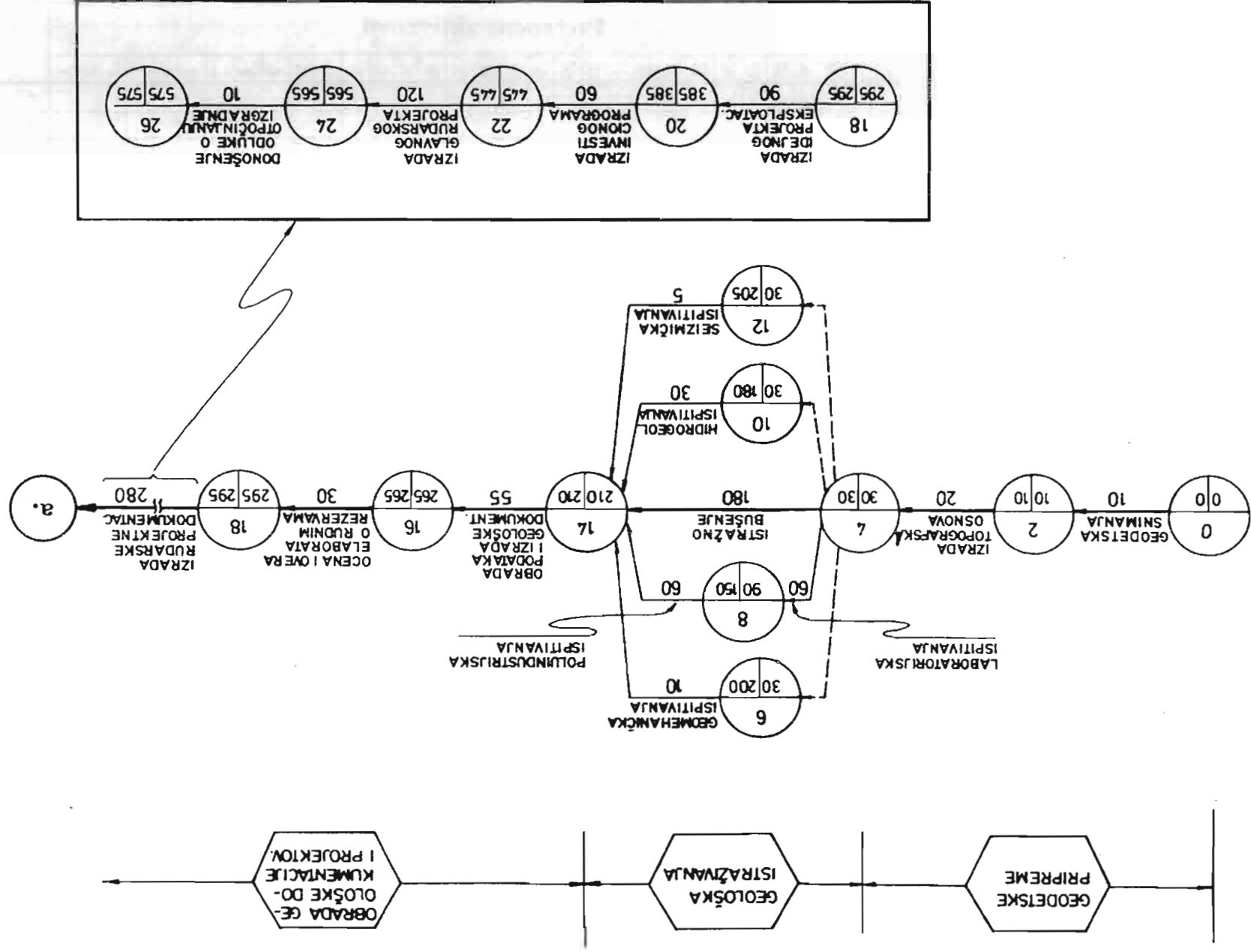
		Posmatrana aktivnost																																							
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32								
Prethodne aktivnosti	1	o																																							
	2		o	o	o																																				
	3							o																																	
	4				o																																				
	5							o																																	
	6								o																																
	7									o																															
	8										o																														
	9											o																													
	10												o																												
	11													o																											
	12														o																										
	13															o																									
	14																o	o	o																						
	15																	o	o	o	o	o																			
	16																		o																						
	17																			o	o																				
	18																				o																				
	19																					o																			
	20																						o																		
	21																							o																	
	22																								o																
	23																									o															
	24																										o														
	25																											o													
	26																													o											
	27																															o									
	28																																o								
	29																																	o							
	30																																		o						
	31																																								
	32																																								

Sl. 2.23 - Matrica međuzavisnosti

Kao što se na slici 2.24. vidi aktivnosti se obeležavaju strelicama, a događaji kružićima koji su podeljeni na tri polja. U gornje polje upisuju se brojevi događaja (u našem slučaju rastući niz parnih brojeva), a u donje levo i desno polje upisuju se najranije i najkasnije vreme za događaj.

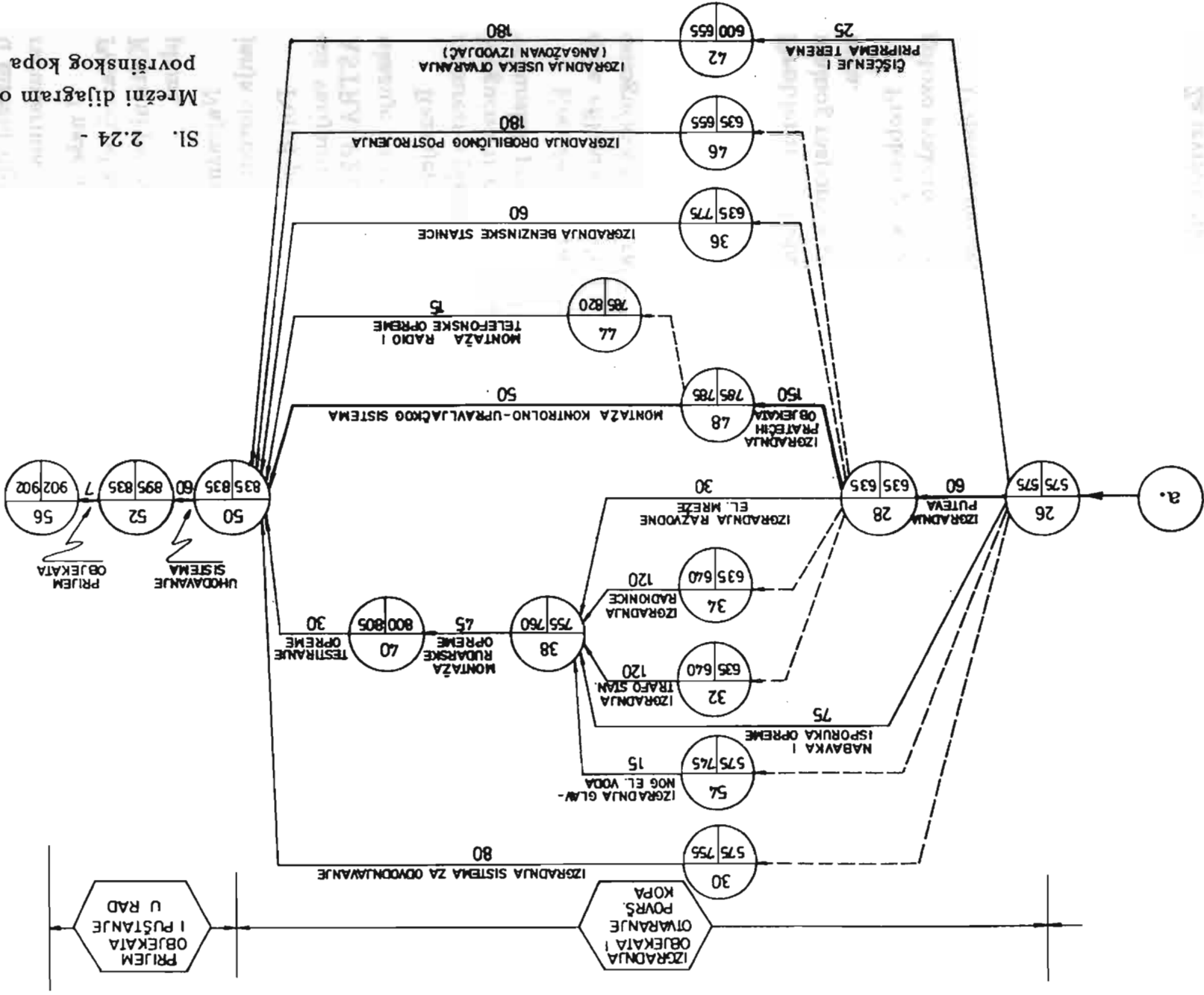
Aktivnosti kod kojih nema vremenskih rezervi, odnosno kod kojih najraniji početci i najkasniji završetci padaju zajedno nazivaju se **kritičnim**. Niz ovakvih aktivnosti nazivamo **kritičnim putem**.

Određivanje kritičnog puta u mrežnom dijagramu proizilazi iz progresivnog odnosa prema retrogradnim proračunima.



Mrežni dijagram otaranja površinskog kopa

Sl. 2.24 -



Postoji mogućnost da se u proračunskom formularu označe aktivnosti koje imaju iste najranije i najkasnije početke odnosno završetke ili kod kojih je ukupno vremenska rezerva jednaka nuli. Na taj način kritične aktivnosti i kritični put postaju poznati i mogu se uneti u mrežni dijagram. Ovaj postupak se koristi kod izrade mrežnih dijagrama na računarima.

U našem primeru korišćena je druga mogućnost za iznalaženje kritičnog puta. Polazeći od završnog događaja spajani su događaji koji nemaju vremensku rezervu. Kritični put se markira debljom ili duplom linijom, tako da je uočljiv na mrežnom planu.

Najvažnija osobina kritičnih aktivnosti je da svako prekoračenje njihovog trajanja dovodi do prekoračenja realizacije projekta.

Pored prezentirane CPM metode, pomenute PERT metode, razvijen je čitav niz varijantnih metoda mrežnog planiranja: LEES, CPS, CPPS, RAMPS, NMT, ASTRA, PECOS, PACT, OPEP, MECPROJECT, Ovakvo veliki broj varijanti ukazuje na značaj i opseg primene mrežnog planiranja u praksi.

Razvijeni su i na tržištu se nudi veliki izbor računarskih programskih paketa za mrežno planiranje. Mogućnosti ovih programskih paketa su različite, nude se od elementarnih do vrhunskih profesionalnih nivoa.

Korišćenjem računara za projektovanje mrežnih planova višestruko se povećava efikasnost, odnosno smanjuje se vreme obrade, povećava stepen tačnosti i omogućava bez ograničenja ponavljanje analize onoliko puta koliko je potrebno.

PRILOG C

Problem: Mađarsku metodu prezentiraćemo na problemu utvrđivanja optimalnog rasporeda pomoćne mehanizacije kod izvršavanja radnih zadataka na rudniku.

Problem je kao i u prilogu "B" zaokružen na praktično moguću situaciju u gotovo svakom rudniku ali i šire.

U datom momentu u rudniku treba obaviti četiri posla istovremeno:

- P_1 – ravnanje etažne ravni,
- P_2 – skidanje humusnog sloja,
- P_3 – ravnanje i nasipanje puta,
- P_4 – izrada prelazne rampe.

Za izvršavanje ovih radnih zadataka na raspolaganju su četiri pomoćne mašine (M_1 , M_2 , M_3 i M_4), dva buldozera i dva skrepera. Svaka od mašina može obaviti svaki od ovih poslova, ali istovremeno samo jedan.

Potrebno je rasporediti mašine na izvršavanje postavljenih radnih zadataka tako, da se svi radovi obave jednovremeno za najkraće vreme rada svih mašina zajedno.

Na osnovu normativnih karakteristika utvrđena su potrebna vremena (u časovima) za izvođenje svakog od poslova za svaku mašinu posebno, što je sistematizovano u tabeli 2.2.

Potrebno vreme Tabela 2.2.

Poslovi mašine	P_1	P_2	P_3	P_4
M_1	1	9	4	5
M_2	4	15	9	10
M_3	3	12	7	9
M_4	2	8	6	7

Rešenje problema: Postavljeni problem ćemo rešavati tako da paralelno izložimo i algoritam Mađarske metode.

Početna matrica glasi:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 4 & 5 \\ 4 & 15 & 9 & 10 \\ 3 & 12 & 7 & 9 \\ 2 & 8 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

(a) U svakoj koloni oduzmimo od svakog člana početne matrice vrednost najmanjeg člana iz date kolone.

Dobija se nova matrica:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(b) Ispitajmo da li u svakoj vrsti matrice A_1 postoji bar jedna nula. Uočavamo da u drugom i trećem redu nema nule.

(c) U drugoj i trećoj vrsti matrice A_1 oduzmimo vrednost najmanjeg člana od svih članova ove dve vrste. Tako je formirana nova A_2 matrica.

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

(d) Potrebno je odrediti nezavisne nule u prethodnoj matrici A_2 .

U drugoj vrsti postoji samo jedna nula koju ćemo nazvati nezavisnom i jače je markirati. Sve preostale nule u prvoj koloni moraju biti zavisne i precrtajmo ih. U četvrtoj vrsti postoji takođe samo jedna nula i nju deklarišemo kao nezavisnu. Kako nema više vrsta sa samo jednom nulom, ostoje da jednu nulu iz prve vrste proglasimo nezavisnom – to činimo sa nulom u trećoj koloni ove vrste, a preostalu nulu u četvrtoj koloni, zbog toga je deklarišemo zavisnom. Matrica A_2 sada izgleda:

$$A_2 = \begin{bmatrix} \emptyset & 1 & 0 & \emptyset \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ \emptyset & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

- (e) Izvršimo kontrolu da li je dobijeno rešenje optimalno. Pošto nema četiri nezavisne nule, optimalno rešenje nije pronađeno!
- (f) Nastavljamo sa postupkom za iznalaženje optimalnog rešenja.
- (f₁) Označimo sa strelicom vrstu u kojoj nema nezavisne nule (treća vrsta).

$$A_2 = \begin{bmatrix} \overline{\emptyset} & 1 & 0 & \emptyset \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ \emptyset & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

- (f₂) Precrtajmo sve kolone koje imaju zavisne nule u označenoj vrsti (prva kolona).
- (f₃) Označimo sa strelicom vrstu koja ima nezavisnu nulu u svakoj koloni precrtanoj pod (f₂). To je druga vrsta.
- (f₄) Precrtati sve kolone koje imaju nulu u označenom, u ovom slučaju u drugoj vrsti. Takve kolone nema.
- (f₅) Precrtati sve neoznačene vrste. To su prva i četvrta.
- Mora biti onoliko precrtanih vrsta i kolona koliko ima nezavisnih nula. Opisani postupak obezbeđuje da se pronađe najmanji broj linija kojima će se precrtati sve nule u matrici.
- (f₆) Pronađi najmanji neprecrtani član matrice. To je 1 u trećoj vrsti treće kolone.
- (f₇) Za vrednost ovako utvrđenog najmanjeg člana uvećati vrednosti onih članova matrice koji se nalaze u preseku precrtanih vrsta i kolona.
- (f₈) Smanjiti sve neprecrtane članove za vrednost najmanjeg utvrđenog pod (f₆).
- (f₉) Prepisati sve ostale precrtane članove matrice A_2 i dobija se nova matrica A_3 .
- (f₁₀) Izvršiti kategorizaciju nula, te je matrica A_3 :

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Pošto postoje četiri nezavisne nule, znači da je pronađeno optimalno rešenje, koje glasi:

$$x_{14} = 1 \qquad x_{33} = 1$$

$$x_{21} = 1 \qquad x_{42} = 1$$

Minimalna vrednost funkcije kriterijuma iznosi:

$$Z_{min} = C_{14}X_{14} + C_{21}X_{21} + C_{33}X_{33} + C_{42}X_{42} = 5 + 4 + 8 + 7 = 24$$

Znači ako mašina M1 radi na izradi prelazne rampe, mašina M2 na ravnanju etažne ravni, mašina M3 na ravnanju i nasipanju puta i mašina M4 na skidanju humusnog sloja, poslovi će biti obavljeni za 24 časa rada svih mašina zajedno. To je najkraće moguće vreme angažovanja mašina za izvršavanje postavljenih zadataka.

3. Verovatnoća i slučajni procesi

3.1. Osnovi verovatnoće i slučajnih procesa

3.1.1. Slučajni događaji i osnovni pojmovi verovatnoće

Teorija verovatnoće se bavi izučavanjem zakonitosti raznih slučajnih procesa i događaja. Osnovni pojam u teoriji verovatnoće (koji se kao takav ne definiše) je elementaran događaj, a skup svih mogućih ishoda (realizacija) nekog opita ili pobjave nazivamo skup elementarnih događaja i označavamo sa Q . Slučajan događaj A je neki podskup Q i sadrži sve elementarne događaje koji imaju svojstvo kojim se A definiše. Događaj Q je siguran (ili izvestan) događaj, a prazan podskup (u oznaci \emptyset , tj. skup bez elemenata) je nemoguć događaj.

Ako su A_1 i A_2 događaji, onda je $A_1 \cup A_2$ (unija događaja) takođe događaj koji se razlikuje kada se realizuje barem jedan od događaja A_1, A_2 . Takođe

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots$$

je događaj ako su A_1, A_2, \dots događaji.

Ako su A_1 i A_2 događaji, onda je $A_1 \cap A_2$ (presek događaja) takođe događaj koji se realizuje ako se realizuje istovremeno i događaj A_1 i događaj A_2 . Događaji A_1 i A_2 su disjunktni ako je $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, tj. ako A_1 i A_2 nemaju zajedničkih elemenata.

Razlika dva događaja A_1 i A_2 (u oznaci $A_1 \setminus A_2$) je događaj koji se realizuje ako se realizuje događaj A_1 , a ne realizuje događaj A_2 .

Svakom događaju A može se dodeliti suprotan događaj \bar{A} koji se realizuje ako se A ne realizuje.

Primer 3.1:

Kocka čije su strane označene 1 do 6 baca se jedanput. Eksperiment se sastoji u bacanju kocke. Elementarni događaji ovog eksperimenta su

$$\omega_1 = \text{"pad jedinice"}, \quad \omega_2 = \text{"pad dvojke"}, \dots, \quad \omega_6 = \text{"pad šestice"}$$

Skup elementarnih događaja Q je $Q = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$.

Neka je $A = \text{"pad parnog broja"}$, $B = \text{"pad neparnog broja"}$, $C = \text{"pad broja većeg od 4"}$, tada je

$$A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}, \quad B = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}, \quad C = \{\omega_5, \omega_6\},$$

a na osnovu gornjih definicija je

$$\bar{A} = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\} = B,$$

$$B \cap C = \{\omega_5\},$$

$$B \cup C = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5, \omega_6\},$$

$$A \cup B = Q.$$

Svakom elementu A iz Q dodeljuje se jedan realan broj koji se označava sa $P(A)$ i zove verovatnoća slučajnog događaja A . Za verovatnoću $P(A)$ uvek važi $0 \leq P(A) \leq 1$, pri čemu je $P(\emptyset) = 0$ i $P(Q) = 1$, tj. nemoguć i siguran događaj imaju verovatnoće 0 odnosno 1, što je uostalom u skladu sa našim intuitivnim predstavama o verovatnoći. Dalja osobina kojom se definiše verovatnoća je

$$(3.1) \quad P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) \cup P(A_2), \quad (\text{za } A_1 \cap A_2 = \emptyset),$$

odakle je

$$(3.2) \quad P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n),$$

Takođe sledi

$$(\text{za } A_i \cap A_j = \emptyset, \quad 1 \leq i \neq j \leq n).$$

$$(3.3) \quad P(A) \leq P(B) \quad \text{ako je} \quad A \subset B,$$

tj. ako je A podskup (sadržano u) B ,

$$(3.4) \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A),$$

$$(3.5) \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Pored ove (tzv. aksiomske) definicije verovatnoće, postoji i klasična (tzv. Laplasova) definicija verovatnoće, koja se sastoji u sledećem. Neka je prostor elementarnih događaja, vezanih za dati eksperiment, sastavljen od elemenata $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ koji imaju "istu šansu" da se realizuju, i ako se događaj A realizuje ako se realizuje m (bilo kojih) događaja ω_k , onda je $P(A) = m/n$, tj. verovatnoća je uprošćeno "broj povoljnih ishoda podeljen brojem svih mogućih ishoda".

Primer 3.2:

Neka je Q skup iz Primera 3.1. Kako se obično pretpostavlja da se pri bacanju kocke svaki broj pojavljuje sa jednakom šansom to je $P(\omega_i) = 1/6$ ($i = 1, 2, \dots, 6$). Ako se kocka uzastopno baca tri puta onda je verovatnoća da se sva tri puta dobije 6 jednaka $1/216$. Naime broj mogućih (jednako verovatnih) događaja predstavljaju trocifreni brojevi čije su cifre brojevi od 1 do 6 (što odgovara brojevima koji se dobijaju prilikom tri bacanja kocke) kojih ima ukupno $6^3 = 216$, a jedini povoljan događaj je broj 666.

Događaj A i B su zavisni ako realizacija događaja utiče na verovatnoću realizacije događaja B . Sa $P(B|A)$ se označava verovatnoća događaja B pod uslovom da se realizovao događaj A i ta verovatnoća se definiše kao

$$(3.6) \quad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)},$$

odakle je

$$(3.7) \quad P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B).$$

Događaji A i B su nezavisni ako je $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Ako je za događaje A_1, A_2, \dots, A_n zadovoljena relacija

$$(3.8) \quad P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \dots \cap A_{k_m}) = P(A_{k_1})P(A_{k_2}) \dots P(A_{k_m})$$

za svaki skup indeksa $\{k_1, k_2, \dots, k_m\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$ ($2 \leq m \leq n$), onda se za događaje A_1, A_2, \dots, A_n kaže da su nezavisni u ukupnosti.

Ako je $Q = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$ a događaji B_1, \dots, B_n se međusobno isključuju (tj. $B_i \cap B_j = \emptyset$ za $1 \leq i \neq j \leq n$) onda je

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_n),$$

pa ako se iskoristi (3.6) sledi

$$(3.9) \quad P(A) = P(B_1)P(A|B) + P(B_2)P(A|B) + \dots + P(B_n)P(A|B_n),$$

što se naziva formula totalne verovatnoće. Ako se iskoristi (3.7) i (3.9) onda se dobija za $i = 1, \dots, n$

$$(3.10) \quad P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \dots + P(B_n)P(A|B_n)},$$

što je poznato u literaturi kao Bajesova formula.

Primer 3.3:

Posmatrajmo tri ormana od kojih svaki ima dve foke. Prvi orman sadrži po zlatan novčić u svakoj fijoci, drugi orman u jednoj fijoci sadrži srebrni novčić a u drugoj zlatan, a treći orman u svakoj fijoci sadrži po srebrni novčić. Nasumice je odabran orman i otvorena jedna fijoka. Ako ta fijoka sadrži zlatan novčić, kolika je verovatnoća da i druga fijoka istog ormara sadrži takođe zlatan novčić?

Neka su A_1, A_2, A_3 događaji koji označavaju izbor prvog, drugog odnosno trećeg ormara, a B događaj da je iz fijoke izvučen zlatan novčić. Nas ustvari interesuje $P(A_1|B)$, jer samo prvi orman sadrži i u drugoj fijoci zlatan novčić. Iz postavke zadatka je $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/3$, $P(B|A_1) = 1$, $P(B|A_2) = 1/2$, $P(B|A_3) = 0$, pa (3.10) daje

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3)} = \frac{2}{3}.$$

3.1.2. Diskretne slučajne promenljive

Diskretna slučajna promenljiva X nad skupom elementarnih događaja Q (prostorom verovatnoće) je funkcija koja svakom slučajnom događaju A iz Q dodeljuje jedan od brojeva x_1, x_2, x_3, \dots , pri čemu su x_i realni brojevi kojih ima prebrojivo mnogo. Tada je funkcija f definisana nad skupom realnih brojeva pomoću $f(x) = P(X = x)$ za $(\forall x \in Re)$ funkcija gustine diskretne slučajne promenljive X . Očividno je $f(x) = 0$ ako x nije jedan od brojeva x_1, x_2, x_3, \dots , a skup $\{\omega : X(\omega) = x\}$ je slučajan događaj za $\forall x \in Re$.

Primer 3.4:

Neka novčić pada pismo (P) sa verovatnoćom p a glava (G) sa verovatnoćom $1-p$. Recimo da za svaki pad P dobijamo dinar a za svaki pad G plaćamo (gubimo) dinar.

Ako je novčić pao tri puta, naš ukupni dobitak je 3, 1, -1 ili -3 dinara, koji možemo označiti sa X . Tabelarno to izgleda ovako:

ω	$X(\omega)$	$P(\omega)$
PPP	3	p^3
PPG	1	$p^2(1-p)$
PGP	1	$p^2(1-p)$
GPP	1	$p^2(1-p)$
PGG	-1	$p(1-p)^2$
GPG	-1	$p(1-p)^2$
GGP	-1	$p(1-p)^2$
GGG	-3	$(1-p)^3$

Jasno je da je X diskretna slučajna promenljiva sa funkcijom gustine $f(x)$ za koju je

$$f(x) = \begin{cases} p^3, & x = 3 \\ 3p^2(1-p), & x = 1 \\ 3p(1-p)^2, & x = 1 \\ (1-p)^3, & x = -3 \\ 0, & \text{za ostale } x. \end{cases}$$

Najčešće korišćene funkcije gustine diskretnih slučajnih promenljivih su sledeće:

1. Binomna raspodela. Funkcija gustine (koja poopštava funkciju iz Primera 3.4) je

$$(3.11) \quad f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, & x = 0, 1, 2, \dots, n, \\ 0, & \text{za ostale } x, \end{cases}$$

gde je $n \geq 1$ prirodan broj, $0 \leq p \leq 1$.

2. Hipergeometrijska raspodela. Funkcija gustine je

$$(3.12) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\binom{r_1}{x} \binom{n-r_1}{n-x}}{\binom{n}{n}}, & x = 0, 1, 2, \dots, n, \\ 0, & \text{za ostale } x, \end{cases}$$

gde su $n \leq r$, $r_1 \leq r$ dati prirodni brojevi.

3. Geometrijska raspodela. Funkcija gustine je

$$(3.13) \quad f(x) = \begin{cases} p(1-p)^x, & x = 0, 1, 2, 3, \dots, \\ 0, & \text{za ostale } x, \end{cases}$$

gde je $0 < p < 1$ dato.

4. Uniformna raspodela. Funkcija gustine je

$$(3.14) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & x = 0, 1, 2, 3, \dots, n, \\ 0, & \text{za ostale } x, \end{cases}$$

gde je n dati prirodni broj.

5. Puasonova raspodela. Funkcija gustine je

$$(3.15) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, & x = 0, 1, 2, 3, \dots, \\ 0, & \text{za ostale } x, \end{cases}$$

gde je $\lambda > 0$ dat broj.

Osobine koje karakterišu gustinu $f(x)$ neke diskretne slučajne promenljive su

a) $f(x) \geq 0$ za svako $x \in \mathbb{R}$,

b) Skup $\{x | f(x) \neq 0\}$ je konačan ili prebrojiv podskup \mathbb{R} . Ako je taj podskup x_1, x_2, x_3, \dots , tada je

c) $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \dots = 1$.

U slučaju da je dato n diskretnih slučajnih promenljivih $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ nad istim prostorom verovatnoće Q može se govoriti o diskretnom slučajnom vektoru X gde je $\bar{X}(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega))$ ili kraće $\bar{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, tj. X dodeljuje svakom ω jednu n -torku brojeva po navedenom pravilu.

n - dimenzionalna gustina $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ diskretnog slučajnog vektora X definiše se kao

$$(3.16) \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n).$$

Ako su X_1, X_2, \dots, X_n diskretne slučajne promenljive sa gustinama f_1, f_2, \dots, f_n onda se kaže da su te promenljive međusobno nezavisne ako je

$$(3.17) \quad f(X_1, X_2, \dots, X_n) = f_1(x_1) f_2(x_2) \dots f_n(x_n),$$

a u protivnom su zavisne.

Zajedno sa diskretnim slučajnim promenljivama X i Y može se posmatrati i diskretna slučajna promenljiva $Z = X + Y$, koja je zbir X i Y . Ako je f_x, f_y, f_z gustina X, Y odnosno Z , tada je

$$f_Z(z) = f_{X+Y}(z) = \sum_x f(x, z - x),$$

no ako su X i Y nezavisne onda (17) daje

$$(3.18) \quad f_{X+Y}(z) = \sum_x f_X(x) f_Y(z - x).$$

3.1.3. Matematičko očekivanje diskretnih slučajnih promenljivih

Neka je X diskretna slučajna promenljiva gustine f koja uzima vrednosti x_1, x_2, x_3, \dots . Ako je suma $|x_1|f(x_1) + |x_2|f(x_2) + |x_3|f(x_3) + \dots$ ograničena, kaže se da X ima konačno matematičko očekivanje (srednju vrednost) EX koje se definiše kao

$$(3.19) \quad EX = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + x_3 f(x_3) + \dots = \sum_i x_i f(x_i).$$

Ukoliko suma $\sum_i |x_i|f(x_i)$ nije ograničena kaže se da X ne poseduje konačno matematičko očekivanje i EX je nedefinisano.

Ako su X i Y dve diskretne slučajne promenljive sa konačnim očekivanjem onda važi:

1. Ako je c konstanta i $P(X = c) = 1$, tada je $EX = c$.
2. Ako je c konstanta onda je $E(cX) = cEX$.

3. $X + Y$ ima konačno očekivanje i $E(X + Y) = EX + EY$.
4. Ako su X i Y nezavisne promenljive, onda XY ima konačno očekivanje i $E(XY) = EX \cdot EY$.
5. Ako je $P(X \geq Y) = 1$ onda je $EX \geq EY$, a ako je $EX = EY$ onda je $P(X = Y) = 1$.
6. $|EX| \leq E|X|$.

Važan pojam verovatnoće su tzv. momenti slučajnih promenljivih. Ako je $r \geq 0$ ceo broj a X diskretna slučajna promenljiva kaže se da X poseduje momenat reda r ako X^r ima konačno matematičko očekivanje. Centralni momenat reda r je momenat reda r za $X - \mu$, gde je $\mu = EX$ česta oznaka u teoriji verovatnoće. Za te momente važe formule

$$(3.20) \quad EX^r = \sum_x x^r f(x),$$

odnosno,

$$(3.21) \quad E(X - \mu)^r = E(X - EX)^r = \sum_x (x - \mu)^r f(x).$$

Posebno značajan je drugi centralni momenat X , koji se naziva varijansa X i označava sa $VarX = \sigma^2$. Važi

$$(3.22) \quad \sigma^2 = VarX = E(X - EX)^2 = E(X^2) - (EX)^2.$$

Varijansa predstavlja meru odstupanja promenljive X od svoje očekivane vrednosti EX , i kao takva ima veliki značaj.

Ako imamo dve slučajne promenljive X i Y sa konačnim drugim momentima, onda je

$$(23) \quad Var(X + Y) = VarX + VarY + 2 Cov(X, Y),$$

gde se $Cov(X, Y)$ zove kovarijansa X i Y i računa po formuli

$$(3.24) \quad Cov(X, Y) = E(XY) - EX \times EY,$$

tako da je $Cov(X, Y) = 0$ ako su X i Y nezavisne slučajne promenljive, kada je $Var(X + Y) = VarX + VarY$. Opštije, ako su X_1, X_2, \dots, X_n nezavisne slučajne promenljive, tada je

$$(3.25) \quad Var(X_1, X_2 + \dots + X_n) = VarX_1 + VarX_2 + \dots + VarX_n.$$

nljive iz odeljka 3.1.2. u sledećoj tabeli.

Raspodela	Gustina	Matematičko očekivanje (EX)	Varijansa (Var X)
Binomna	(3.11)	np	npq
Geometrijska	(3.13)	$(1-p)/p$	$(1-p)/p^2$
Uniformna	(3.14)	$(n+1)/2$	$(n+1)(n+3)/12$
Puasonova	(3.15)	λ	λ

3.1.4. Neprekidne slučajne promenljive

U mnogim slučajevima primene dešava se da slučajna promenljiva nije diskretna već "neprekidna" u smislu da kao vrednosti ima sve tačke nekog (konačnog ili beskonačnog) intervala. Tada mora biti

$$(3.26) \quad P(\{\omega | X(\omega) = x\}) = 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

ili drugim rečima verovatnoća da slučajna promenljiva X ima za vrednost neko dato x je uvek nula. Stoga ima više smisla posmatrati verovatnoću

$$(3.27) \quad F(x) = P(X \leq x), \quad -\infty < x < \infty,$$

kada je funkcija od x i naziva se funkcija raspodele. Naravno, ta funkcija je definisana i ima smisla i za diskretne slučajne promenljive, ali je od posebnog značaja za neprekidne slučajne promenljive, koje zadovoljavaju (3.26). Osnovne osobine svake funkcije raspodele su:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$,
2. $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$,
3. $F(x_1) \leq F(x_2)$ za $x_1 \leq x_2$,
4. $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$,
5. $\lim_{x \rightarrow x_0+} F(x) = F(x_0)$.

Primer 3.5:

Posmatrajmo eksperiment slučajnog biranja tačke iz kruga poluprečnika R sa centrom u koordinatnom početku. Neka je X slučajna promenljiva koja označava rastojanje izabrane tačke od koordinatnog početka. Ako je $0 \leq x \leq R$, događaj $\{\omega | X(\omega) = x\}$ je krug poluprečnika x sa centrom u koordinatnom početku, čija je površina πx^2 . Po klasičnoj definiciji verovatnoća je

$$P(X(\omega) \leq x) = \frac{\pi x^2}{\pi R^2} = \frac{x^2}{R^2}, \quad 0 \leq x \leq R. \quad (32.8)$$

X je očividno neprekidna slučajna promenljiva sa funkcijom raspodele

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x^2}{R^2}, & 0 \leq x \leq R, \\ 1, & x > R. \end{cases} \quad (32.9)$$

Gustina raspodele neprekidne slučajne promenljive je nenegativna funkcija $f(x)$ za koju je $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ i

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y)dy. \quad (3.28)$$

Stoga je

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx, \quad (3.29)$$

a u tačkama u kojima je f neprekidno važi

$$\frac{dF(x)}{dx} = F'(x) = f(x), \quad (3.30)$$

tj. F je primitivna funkcija za f .

Kao i u slučaju diskretnih slučajnih promenljivih, i kod neprekidnih slučajnih promenljivih se definišu matematičko očekivanje $\mu = EX$, varijansa $Var X = \sigma^2$ i centralni momenti. Neka je X neprekidna slučajna promenljiva sa gustinom $f(x)$. Ako je $\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x)dx$ konačno, onda se kaže da X ima konačno matematičko očekivanje EX koje se definiše kao

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx. \quad (3.31)$$

Takođe se definiše r -ti momenat EX^r kao

$$(3.32) \quad EX^r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx,$$

odnosno centralni r -ti momenat kao

$$(3.33) \quad E(X - EX)^r = E(X - \mu)^r = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^r f(x) dx.$$

Isto kao kod diskretnih promenljivih varijansa se definiše kao drugi centralni momenat, tj.

$$(3.34) \quad \sigma^2 = VarX = \int_{-\infty}^{\infty} (x - EX)^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx.$$

Na kraju odeljka dajemo nekoliko najčešćih gustina neprekidnih slučajnih promenljivih.

1. Uniformna raspodela. Funkcija gustine je

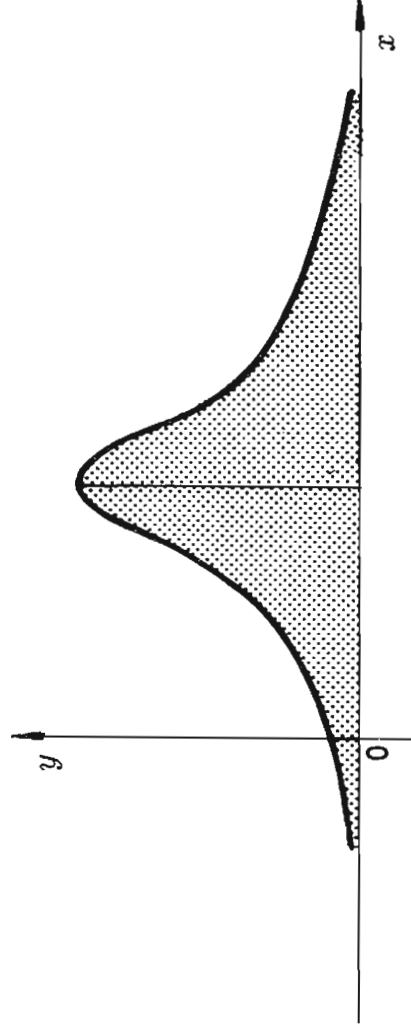
$$(3.35) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & x < a \quad \text{ili} \quad x > b. \end{cases} \quad (a < b),$$

Slučajna promenljiva X sa gustinom $f(x)$ ima uniformnu raspodelu nad intervalom $[a, b]$, gde je $\mu = EX = (a + b)/2$, a $\sigma^2 = VarX = (b - a)^2/12$.

2. Normalna raspodela. Funkcija gustine je

$$(3.36) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty,$$

gde su μ i σ dati parametri normalne raspodele, gde je upravo $EX = \mu$, $VarX = \sigma^2$ za dato μ i σ^2 , te se stoga često i koriste oznake μ i σ^2 za očekivanje, odnosno varijansu, jer su te vrednosti koje se i dobijaju kod normalne raspodele. Grafik funkcije $y = f(x)$ u slučaju normalne raspodele izgleda kao na slici 3.1.



Sl. - 3.1.

Grafik je zvonastog oblika, simetričan u odnosu na pravu $x = \mu$ i sa maksimumom $1/\sqrt{2\pi}\sigma$ za $x = \mu$. Levo, odnosno desno od $x = \mu$ funkcija veoma brzo opada i teži nuli. Značaj normalne raspodele ogleda se i u sledećem tvrđenju, koje se naziva **centralna granična teorema**:

Neka su X_1, X_2, X_3, \dots slučajne promenljive (diskretne ili neprekidne) koje su nezavisne i imaju istu raspodelu sa konačnim matematičkim očekivanjem μ i varijansom σ^2 . Ako je $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, tada je

$$(3.37) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{S_n - n}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Jednačina (3.37) kazuje ustvari da raspodela slučajne veličine $(S_n - n)/(\sigma\sqrt{n})$ teži ustvari normalnoj raspodeli sa parametrima $\mu = 0$ i $\sigma = 1$. Funkcija

$$(3.38) \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy,$$

koja se pojavljuje u (3.37) je izračunata za razne vrednosti x , i njene vrednosti se nalaze u posebnim tablicama. Valja napomenuti da (3.37) obuhvata i diskretne i neprekidne slučajne promenljive.

3. Gama raspodele. Funkcija gustine je

$$(3.39) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{a^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-ax}, & 0 \leq x \leq \infty, \\ 0, & x > 0, \end{cases}$$

gde su $a, n > 0$ parametri raspodeli, a gama-funkcija $\Gamma(n)$ je za $n > 0$ definisana kao

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx.$$

U slučaju da je n prirodan broj, $\Gamma(n) = (n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)$.

4. Eksponencijalna raspodela. Funkcija gustine je

$$(3.40) \quad f(x) = \begin{cases} a e^{-ax}, & 0 \leq x < \infty, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

gde je $a > 0$ parametar raspodele.

5. Beta raspodela. Funkcija gustine je

$$(3.41) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(n+m)}{\Gamma(n)\Gamma(m)} x^{n-1} (1-x)^{m-1}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \quad \text{ili} \quad x < 0, \end{cases}$$

gde su $m, n > 0$ parametri raspodele.

Ukoliko se zna da slučajna promenljiva X ima konačno očekivanje $EX = \mu$ i varijansu $VarX = \sigma^2$, onda važi

$$(3.42) \quad P(|X - \mu| > t) \leq \frac{\sigma^2}{t^2}$$

za svako $t > 0$. Ovo je tzv. nejednakost Čebiševa, koja kazuje koliko X odstupa od svog matematičkog očekivanja μ . Mada je dosta gruba, nejednakost (3.42) ima tu prednost da se lako primenjuje.

3.1.5. Raspodela dvodimenzionalnih slučajnih promenljivih

Neka su X i Y slučajne promenljive nad istim prostorom verovatnoće. Tada se njihova zajednička funkcija raspodele F definiše kao

$$(3.43) \quad F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y), \quad -\infty < x, y < \infty$$

tj. kao verovatnoća da istovremeno X nije veće od x i Y nije veće od y . Iz ove definicije neposredno sledi

$$P(a < X \leq b, c < Y \leq d) = F(b, d) + F(a, c) - F(a, d) - F(b, c)$$

za $a < b, c < d$. Jednodimenzionalne raspodele F_X i F_Y promenljivih X odnosno Y definišu se kao

$$(3.44) \quad F_X(x) = P(X \leq x) \quad \text{odnosno} \quad F_Y(y) = P(Y \leq y)$$

i nazivaju marginalne funkcija raspodele za X i Y . Važi

$$(3.45) \quad F_X(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y), \quad F_Y(y) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x, y).$$

Ako postoji nenegativna funkcija $f(u, v)$ od dve promenljive u i v tako da je

$$(3.46) \quad F(x, y) = \int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^y f(u, v) dv \right) du, \quad -\infty < x, y < \infty$$

tada je funkcija gustine za par neprekidnih slučajnih promenljivih X i Y . Ako F poseduje gustinu f , onda je

$$(3.47) \quad P(a < X \leq b, c < Y \leq d) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx,$$

$$(3.48) \quad f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx,$$

gde su $f_X(x)$ odnosno $f_Y(y)$ (obične) gustine slučajnih promenljivih X i Y . U tačkama u kojima je dvodimenzionalna gustina $f(x, y)$ neprekidna važi

$$(3.49) \quad f(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x, y),$$

tj. gustina je drugi mešoviti parcijalni izvod funkcije raspodele.

Ako su X i Y neprekidne slučajne promenljive sa zajedničkom gustinom $f(x, y)$, onda se uslovna gustina $f_{Y|X}$ definiše kao

$$(3.50) \quad f_{Y|X}(x|y) = \begin{cases} \frac{f(x, y)}{f_X(x)}, & 0 < f_X(x) < \infty, \\ 0, & f_X(x) = 0. \end{cases}$$

a uslovna verovatnoća $P(a \leq Y \leq b | X = x)$ kao

$$P(a \leq Y \leq b | X = x) = \int_a^b f_{Y|X}(y|x) dy, \quad (a < b)$$

što predstavlja verovatnoću da je Y između a i b , ako se zna da je $X = x$. Važi

$$(3.51) \quad f_{X|Y}(x, y) = \frac{f_X(x) f_{Y|X}(y|x)}{\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_{Y|X}(y|x) dx},$$

što je ustvari formula analogna Bajesovom pravilu (3.10) za uslovljenu verovatnoću kod diskretnih promenljivih.

Kao kod slučaja jednodimenzionalne slučajne promenljive možemo definisati matematičko očekivanje $E[g(X, Y)]$ funkcije $g(X, Y)$ od slučajnih promenljivih X i Y kao

$$(3.52) \quad E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy.$$

Promenljive X i Y su nezavisne ako je

$$(3.53) \quad F(x, y) = F_X(x) \times F_Y(y),$$

odnosno ako je

$$f(x, y) = f_X(x) \times f_Y(y),$$

te se u slučaju nezavisnih promenljivih integral u (3.52) obično znatno uprošćava. U statistici je od značaja kovarijansa X i Y koja se definiše kao

$$(3.54) \quad Cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))(y - E(Y)) f(x, y) dx dy.$$

Izraz

$$(3.55) \quad \rho = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var X} \times \sqrt{Var Y}}$$

se naziva koeficijent korelacije i koristi se u slučaju i diskretnih i neprekidnih slučajnih promenljivih. Važi $-1 \leq \rho \leq 1$, $\rho = 0$ ako su X i Y nezavisne promenljive, $\rho = \pm 1$ ako je $Y = aX + b$ za neke konstante a, b .

Gustina

$$(3.56) \quad f(x, y) = \left(2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2} \right)^{-1} e^{-\frac{Q}{2}}, \quad -\infty < x, y < \infty,$$

$$(3.57) \quad Q = \frac{1}{1-\rho^2} \left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \right)^2 + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y} \right)^2 - 2\rho \left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \right) \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y} \right) \right]$$

se zove gustina normalne raspodele dvodimenzionalne slučajne promenljive. Ovde su $\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y, \rho$ dati parametri, pri čemu je upravo $EX = \mu_x, EY = \mu_y, VarX = \sigma_x^2, VarY = \sigma_y^2$, a koeficijent korelacije X i Y je ρ .

Ako je $Z = X + Y$, tada je gustina $f_Z(z)$ promenljive Z data pomoću

$$(3.58) \quad f_Z(z) = f_{X,Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x) dx, \quad -\infty < z < \infty,$$

gde je $f(x, y)$ gustina raspodele od X i Y .

Najzad, ako su X_1, X_2, \dots, X_n slučajne promenljive nad istim prostorom verovatnoće, onda je zajednička funkcija raspodele F definisana kao

$$(3.59) \quad F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n), \\ -\infty < x_1, \dots, x_n < \infty,$$

a marginalne funkcije distribucije F_{X_m} ($m = 1, 2, \dots, n$) kao

$$(3.60) \quad F_{X_m}(x_m) = P(X_m \leq x_m), \quad -\infty < x_m < \infty.$$

Nenegativna funkcija f je gustina raspodele F ako je

$$(3.61) \quad F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(u_1, u_2, \dots, u_n) du_1 du_2 \dots du_n,$$

gde je jasno poopštavanje već izučavanog slučaja kada je $n=2$.

3.1.6. Karakteristične funkcije i funkcije generatrisa momenta

Metod karakterističnih funkcija tj. metode Furijeove transformacije funkcije raspodele je jedan od osnovnih metoda u teoriji verovatnoće. Ako je X slučajna promenljiva tada je

$$(3.62) \quad \varphi_X(t) = E e^{itX} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x)$$

njena karakteristična funkcija, gde je F funkcija raspodele t realan broj i $i = \sqrt{-1}$. Ova definicija važi i za diskretne i za neprekidne promenljive, te ako X ima gustinu f onda je u tačkama neprekidnosti

$$(3.63) \quad \varphi_X(t) = \sum_{x_i} e^{itx_i} f(x_i),$$

ako je X diskretna promenljiva koja uzima vrednosti x_i , odnosno

$$(3.64) \quad \varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx,$$

u slučaju neprekidne promenljive X . Ako postoji n -ti momenat slučajne promenljive X , onda je

$$(3.65) \quad \varphi_X^{(n)}(0) = i^n EX^n,$$

tj. momenti se jednostavno izračunavaju preko izvoda karakteristične funkcije. Za svaku karakterističnu funkciju $\varphi_X(t)$ važi

$$\varphi_X(0) = 1, \quad |\varphi_X(t)| \leq 1, \quad \varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)},$$

gde je $\bar{z} = x - it$ konjugovana vrednost kompleksnog broja $z = x + iy$.

Primer 3.6:

Neka X ima uniformnu raspodelu (3.35). Tada je za $t \neq 0$

$$(3.66) \quad \varphi_X(y) = \int_a^b e^{itx} \frac{dx}{b-a} = \frac{e^{ibt} - e^{iat}}{it(b-a)}.$$

Primer 3.7:

Neka X ima eksponencijalnu raspodelu sa gustinom (3.40). Tada je

$$(3.67) \quad \varphi_X(t) = \int_0^{\infty} e^{itx} a e^{-ax} dx = \frac{a}{a - it},$$

$$\varphi'_X(t) = \frac{d\varphi_X(t)}{dt} = \frac{ia}{(a - it)^2}, \quad \varphi'_X(0) = \frac{i}{a},$$

pa je po formuli (3.65) $EX = 1/a$, a slično se nalazi i $Var X = 1/a^2$.

Primer 3.8:

Neka je X slučajna promenljiva normalne raspodele sa gustinom (3.36). Tada je

$$(3.68) \quad \varphi_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + i\mu t}.$$

Ako su a i b brojevi, a X slučajna promenljiva tada je

$$\varphi_{a+bX}(t) = E e^{it(a+bX)} = E e^{ita} e^{ibtX} = e^{ita} \varphi_X(bt),$$

te je za određivanje karakteristične funkcije $a + bX$ dovoljno znati samo karakterističnu funkciju X .

Ako su X i Y nezavisne slučajne promenljive, tada su e^{itX} i e^{itY} takođe nezavisne promenljive, pa važi

$$\varphi_{X+Y}(t) = E e^{it(X+Y)} = E e^{itX} E e^{itY},$$

tj.

$$(3.69) \quad \varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t), \quad -\infty < t < \infty,$$

dakle karakteristična funkcija zbira je proizvod karakterističnih funkcija. Ovo jednostavno pravilo se lako prenosi i na slučaj zbira n nezavisnih slučajnih promenljivih.

Karakteristična funkcija je po definiciji (3.62) određena funkcijom raspodele, ali je i obrnuto funkcija raspodele određena karakterističnom funkcijom. Ako su

a i b ($a < b$) tačke neprekidnosti funkcije raspodele $F(X)$ slučajne promenljive X sa karakterističnom funkcijom $\varphi_X(t)$, onda je

$$(3.70) \quad F(b) - F(a) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-itb} - e^{-ita}}{-it} \varphi_X(t) dt,$$

što je poznato kao teorema inverzije Leviya. Takođe važi

$$(3.71) \quad P(X = x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{-itx} \varphi_X(t) dt,$$

što je interesantno u slučaju diskretnih promenljivih. Takođe važi: ako dve slučajne promenljive imaju istu karakterističnu funkciju, onda one imaju i istu funkciju raspodele.

Druga funkcija od značaja u teoriji verovatnoće je funkcija generatrisa momenta $M_X(t)$. Ova funkcija za realno t i slučajnu promenljivu X definiše kao

$$(3.72) \quad M_X(t) = E e^{tX} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} dF(x),$$

pa važi

$$(3.73) \quad M_X(it) = \varphi_X(t),$$

gde je $\varphi_X(t)$ karakteristična funkcija X . Teškoća sa $M_X(t)$ je što integral u (3.72) vrlo često ne postoji. Iz (3.72) sledi

$$M_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E X^n}{n!} t^n,$$

pa je otuda

$$(3.74) \quad E X^n = \frac{d^n}{dt^n} M_X(t) \Big|_{t=0},$$

a (3.74) jasno kazuje zašto se $M_X(t)$ zove funkcija generatrisa momenta.

Primer 3.9:

Neka X ima gama-raspedelu sa funkcijom gustine (3.39). Onda je

$$M_X(t) = \int_0^{\infty} e^{tx} \frac{a^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-nx} dx = \left(\frac{a}{a-t} \right)^n,$$

za $-\infty < y < a$. Stoga je $M'_X(t) = na^n(a-t)^{-n-1}$, pa je po formuli (3.74)

$$E_X = M'_X(0) = \frac{n}{a},$$

a slično se nalazi $Var X = E(X - EX)^2 = n/a^2$.

3.1.7. Diskretni lanci Markova

U mnogim istraživanjima se često javljaju familije slučajnih promenljivih $\{X_t, t \in T\}$ koje predstavljaju stohastički ili slučajni proces, gde se T kao skup svih mogućih vrednosti parametara t naziva prostor parametra. U praksi se najčešće uzima da je parametar t vreme, a mi ćemo se ovde ograničiti na slučaj kada je $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ ili $T = (0, \infty)$. U prvom slučaju se radi o tzv. diskretnom procesu Markova, a u drugom o neprekidnom slučajnom procesu Markova. Stanje sistema diskretnog procesa Markova u trenutku n ($n = 0, 1, 2, \dots$) opisano je nekom diskretnom slučajnom promenljivom X_n sa skupom mogućih vrednosti x_1, x_2, x_3, \dots , koja se zove stanje sistema. Evolucija sistema tokom vremena opisana je nizom slučajnih promenljivih X_0, X_1, X_2, \dots , koje obrazuju diskretni lanac Markova ako važi

$$P(\{X_m = x_j\} | \{X_{n_1} = x_{i_1}\} \cap \{X_{n_2} = x_{i_2}\} \cap \dots \cap \{X_{n_r} = x_{i_r}\}) = P(\{X_m = x_j\} | \{X_{n_1} = x_{i_1}\}), \quad (3.75)$$

za svaku kolekciju trenutaka $0 \leq n_r < n_{r-1} < \dots < n_2 < n_1, m$ i stanja $x_{i_r}, x_{i_{r-1}}, \dots, x_{i_2}, x_{i_1}, x_j$. Ako trenutak n_1 nazovemo sadašnjost, onda zavisnost (3.75) kazuje da verovatnoća da sistem u nekom budućem trenutku $m > n_1$ bude u stanju x_j , pod uslovom da je u sadašnjem trenutku n_1 u stanju x_{i_1} i da je u prošlim trenucima $n_2 > n_3 > \dots > n_r$ bio u nekim stanjima $x_{i_2}, x_{i_3}, \dots, x_{i_r}$, ne zavisi od stanja sistema u prošlosti. Uprošćeno govoreći, ako se budućnost i prošlost uslovno posmatraju u odnosu na sadašnjost, onda su one nezavisne kod diskretnih lanaca Markova.

Kod diskretnih lanaca Markova verovatnoća

$$(3.76) \quad p_{ij}(n, m) = P(\{X_m = x_j\} | \{X_n = x_i\}), \quad 0 \leq n < m$$

je verovatnoća prelaza iz stanja x_i u trenutku n u stanje x_j u trenutku m . Ako $p_{i,j}(n, m)$, kao funkcija od n i m , zavisi samo od razlike $m - n$ kaže se da je lanac Markova homogen, i mi ćemo se ovde ograničiti na homogene lance. Tada se može napisati

$$(3.77) \quad p_{ij}(n) = P(\{X_{k+n} = x_j\} | \{X_k = x_i\}), \quad n = 1, 2, \dots, p_{ij} = p_{ij}(1),$$

te je znači $p_{ij}(n)$ verovatnoća prelaska sistema iz stanja x_i u stanje x_j posle n vremenskih trenutaka ili koraka.

Važe jednačine

$$(3.78) \quad p_{ij}(n) = \sum_k p_{ik}(m) p_{kj}(n - m) \quad (1 \leq m < n; \quad i, j = 1, 2, \dots)$$

koje se nazivaju jednačine Čepmen–Kolmogorova. Te se jednačine mogu sažetije prikazati u matricnom obliku. Naime, ako se definiše matrica prelaska za n koraka

$$(3.79) \quad \begin{aligned} P_n &= [p_{ij}(n)]_{i,j=1,2,\dots}, & n = 1, 2, \dots, \\ P_1 &= P = [p_{ij}]_{i,j=1,2,\dots}, \end{aligned}$$

onda se takve matrice (čiji broj vrsta i kolona ne mora biti konačan) zove stohastička matrica. Svi njeni elementi su brojevi intervala $[0, 1]$ a $\sum_j p_{ij}(n) = 1$ za svako i i n . Preko stohastičkih matrica jednačine Čepmen–Kolmogorova poprimaju oblik

$$(3.80) \quad P_n = P_m \times P_{n-m}, \quad (1 \leq m < n)$$

i

$$(3.81) \quad P_n = P^n, \quad (n = 2, 3, \dots)$$

čime je zadatak o određivanju $p_{ij}(n)$ preko p_{ij} potpuno rešen. Ako je

$$(3.82) \quad p_i(n) = P(\{X_n\} = x_i), \quad (i = 1, 2, \dots, \quad n = 0, 1, 2, \dots),$$

onda je $p_i(n)$ verovatnoća da je sistem u stanju x_i u trenutku n . Tada je

$$(3.83) \quad p_i(n) = \sum_k p_k(n-1) p_{ki}, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

pri čemu je kao i kod (3.78) sumiranje po svim vrednostima indeksa stanja k . Ako je za svako $n = 0, 1, 2, \dots, k$ $i = 1, 2, \dots, p_i(n) = p_i$, tj. ako $p_i(n)$ ne zavisi od trenutka n , kažemo da je lanac Markova stacionaran, a verovatnoće p_i nazivamo početne verovatnoće. Ako verovatnoće početnih stanja p_i ($i = 1, 2, \dots$) zadovoljavaju homogene linearne jednačine

$$p_i = \sum_k p_k p_{ki}, \quad (i = 1, 2, \dots)$$

onda je $p_i(n) = p_i$, tj. lanac Markova je stacionaran.

Označimo sa $q_{ij}(n)$ verovatnoću da lanac Markova iz stanja x_i pređe prvi put u stanje x_j tačno u n koraka. Tada $Q_i = \sum_{n=1}^{\infty} q_{ii}(n)$ predstavlja verovatnoću da se lanac Markova bar jednom vrati ponovo u stanje x_i ; ako je već jednom bio u stanju x_i . Ako je $Q_i = 1$ kaže se da je stanje povratno, a ako je $Q_i < 1$ kaže se da je stanje x_i nepovratno. Kriterijum kojim se određuje povratnost stanja je sledeći: stanje x_i je povratno ili nepovratno prema tome da li je $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) = \infty$ ili je $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n)$ konačan broj.

Ako se lanac Markova nađe na nekom koraku u povratnom stanju, onda se on za beskonačan broj koraka sa verovatnoćom 1 beskonačno mnogo puta vraća u to stanje. Ako se nađe u nepovratnom stanju, onda za beskonačno mnogo koraka, najviše konačno mnogo puta može sa verovatnoćom 1 da se ponovo nađe u tom stanju, ali, posle konačno mnogo koraka više se nijednom, sa verovatnoćom 1, ne vraća u to stanje.

Za lance Markova sa konačno mnogo stanja s može se govoriti o graničnoj vrednosti verovatnoće $p_{ij}(n)$ kod $n \rightarrow \infty$.

Važi sledeće tvrđenje, poznato kao ergodična teorema za lance Markova sa konačno mnogo stanja:

Ako je za neko n_0 svaki element matrice prelaza P_{n_0} strogo pozitivan, tada je za svako $j = 1, 2, \dots, s$

$$(3.84) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}(n) = p_j^*,$$

gde brojevi p_j^* , koji se zovu finalne verovatnoće, ne zavise od i .

Finalne verovatnoće se određuju iz uslova

$$p_1^* + p_2^* + \dots + p_s^* = 1$$

i sistema homogenih jednačina

$$p_j^* = \sum_{k=1}^s p_k^* p_{kj} \quad (j = 1, 2, \dots, s).$$

Primer 3.10:

Kretanje čestice obrazuje lanac Markova sa tri stanja, pri čemu je matrica prelaza

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Po jednačini (3.81) važi

$$P_2 = P^2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix},$$

te su svi elementi P_2 strogo pozitivni. Po ergodičnoj teoremi sa $n_0 = 2$ postoje finalne verovatnoće koje zadovoljavaju jednačine

$$p_1^* + p_2^* + p_3^* = 1, \quad p_1^* = \frac{1}{2}p_1^* + \frac{1}{2}p_2^*,$$

$$p_2^* = \frac{1}{2}p_1^* + \frac{1}{2}p_3^*, \quad p_3^* = \frac{1}{2}p_2^* + \frac{1}{2}p_3^*,$$

odakle je $p_1^* = p_2^* = p_3^* = 1/3$. Ovo znači da je verovatnoća da će se sistem posle velikog broja koraka naći u nekom stanju jednaka $1/3$ za svako od tri moguća stanja.

3.1.8. Nепrekidni procesi Markova sa prebrojivo mnogo stanja

Posmatrajmo evoluciju nekog sistema tokom vremena $t \geq 0$. U svakom vremenskom trenutku $t \in [0, \infty]$ sistem je opisan promenljivom $X(t)$ diskretnog tipa sa mogućim vrednostima iz skupa $\{x_1, x_2, \dots\}$. Imamo, dakle, familiju slučajnih promenljivih $X(t)$, $t \geq 0$ koje zavise od parametra t . Takva familija je neprekidan proces Markova sa prebrojivo mnogo stanja x_1, x_2, \dots , ako za svaki konačan niz $t > t_1 > \dots > t_n$ i n proizvoljnih stanja $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}$ važi

$$(3.85) \quad \begin{aligned} P(\{X(t) = x_j\} | \{X(t_1) = x_{i_1}\} \cap \{X(t_2) = x_{i_2}\} \cap \dots \\ \cap \{X(t_n) = x_{i_n}\}) = \\ P(\{X(t) = x_j\} | \{X(t_1) = x_{i_1}\}), \end{aligned}$$

te taj uslov odgovara uslovu (3.75) za diskretne lance Markova.

Isto kao i kod lanaca Markova, i ovde ćemo se ograničiti na homogene procese, tj. na one procese Markova za koje je

$$(3.86) \quad p_{ij}(t) = P(\{X(t+s) = x_j\} | \{X(s) = x_i\})$$

za svako $s \geq 0$. Verovatnoća $p_{ij}(t)$ ($t \geq 0$) zove se verovatnoća prelaza iz stanja x_i u stanje x_j za vreme t . Pretpostavlja se da uvek važi

$$(3.87) \quad p_{ij}(0) = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

Jednačine Čepmen–Kolomogorova (3.78) važe ovde u obliku

$$(3.88) \quad p_{ij}(s+t) = \sum_k p_{ik}(s) p_{kj}(t), \quad (s, t \geq 0; \quad i, j = 1, 2, \dots)$$

gde se sumiranje provodi po svim mogućim indeksima k . Ako se uvede matrica verovatnoće prelaza

$$(3.89) \quad P(t) = [p_{ij}(t)]_{i,j=1,2,\dots}, \quad (t > 0)$$

$$(3.90) \quad P(0) = I,$$

gde je I jedinična matrica (koja može imati, isto kao i $P(t)$, neograničeno vrsta i kolona), tada se (3.88) može u kondenzovanom obliku napisati kao

$$(3.91) \quad P(s+t) = P(s) \times P(t). \quad (s, t \geq 0).$$

Kod procesa Markova se može govoriti o vremenu boravka sistema u stanju x_i . To vreme je slučajna promenljiva τ_i i predstavlja dužinu vremenskog intervala od trenutka kad sistem registrujemo u stanju x_i pa do prvog trenutka kada sistem napusti stanje x_i . Gustina $f_i(t)$ raspodele promenljive τ_i je eksponencijalna gustina (3.40) sa $a = \lambda_i$, tj.

$$(3.92) \quad f_i(t) = \begin{cases} \lambda_i e^{-\lambda_i t}, & 0 \leq t < \infty \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Ako je $0 < \lambda_i < \infty$ kaže se da stanje x_i sistema zadržavajuće i $E(\tau_i) = 1/\lambda_i$.

Pretpostavimo sada da imamo proces Markova sa konačno mnogo stanja x_1, x_2, \dots, x_s i da verovatnoće prelaza $p_{ij}(t)$ zadovoljavaju uslove

$$(3.93) \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t} = \lambda_{ij} \quad (i \neq j)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1 - p_{ii}(\Delta t)}{\Delta t} = \lambda_i,$$

gde je λ_i dato pomoću (3.92) i zove se gustina stanja x_i , dok su λ_{ij} gustine verovatnoća prelaza iz stanja x_i u stanje x_j . Tada važe jednačine

$$(3.94) \quad \frac{dp_{ij}(t)}{dt} = \sum_{k=1}^s p_{ik}(t) \lambda_{kj}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, s)$$

$$(3.95) \quad \frac{dp_{ij}(t)}{dt} = \sum_{k=1}^s \lambda_{ik} p_{kj}(t), \quad (i, j = 1, 2, \dots, s)$$

gde je stavljeno $\lambda_{ii} = -\lambda_i$. (3.94) se zove direktni sistem diferencijalnih jednačina Kolmogorova, a (3.95) je obrnuti sistem diferencijalnih jednačina Kolmogorova, pri čemu važi tzv. početan uslov (3.87). Sistemima (3.94) i (3.95) se određuju verovatnoće prelaza $p_{ij}(t)$ ako su poznate gustine λ_{ij} .

Jednačina slična (3.84) važi i za procese Markova. Naime, ako su za neko t_0 sve verovatnoće $p_{ij}(t_0) > 0$ ($i, j = 1, 2, \dots, s$), tada postoji

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) = p_j^* \quad (j = 1, 2, \dots, s)$$

koji ne zavise od i . Finalne verovatnoće p_j^* se mogu odrediti iz uslova $p_1^* + p_2^* + \dots + p_s^* = 1$ i sistema homogenih jednačina

$$\sum_{k=1}^s p_k^* \lambda_{kj} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s).$$

Primer 3.11:

Proces Puasona je proces Markova sa skupom stanja $\{0, 1, 2, \dots\}$ i gustinama prelaza

$$\lambda_{ij} = \begin{cases} \lambda, & j = i + 1, \\ 0, & \text{u ostalim slučajevima.} \end{cases} \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

Ako stavimo $p_j(t) = p_{0j}(t) = P(\{X(t) = j\})$, onda direktni sistem diferencijalnih jednačina Kolmogorova postaje

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t),$$

$$\frac{dp_j(t)}{dt} = \lambda p_{j-1}(t) - \lambda p_j(t), \quad (j = 1, 2, 3, \dots)$$

sa početnim uslovima $p_0(0) = 1$, $p_j(0) = 0$ za $j \geq 1$.

Rešavanje ovog sistema daje

$$p_j(t) = \frac{(\lambda t)^j e^{-\lambda t}}{j!}, \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

što znači da slučajna promenljiva $X(t)$ ima Puasonovu raspodelu (3.15) (sa λt umesto λ) za svako $t > 0$. Otuda se takav proces Markova, koji je čest u praksi, naziva proces Puasona.

3.2. Primena teorije verovatnoće

O nastanku teorije verovatnoće dominiraju uglavnom dva mišljenja. Prema jednom teorija verovatnoće je nastala u XVII veku kada su Paskal, Ferma i Hagens počeli da izučavaju hazardne igre. Protivnici ovoga mišljenja ističu da su hazardne igre postojale i mnogo ranije, pa je čudno da nisu podstakle razvoj teorije verovatnoće pre XVII veka. Oni potpuno ne poriču uticaj hazardnih igara na razvoj teorije verovatnoće, ali tvrde da je odlučujući uticaj na njenu pojavu i razvoj imala obrada statističkih podataka i rezultata u raznim sferama čovekove delatnosti. Ističu posebne probleme osiguravajućih društava (pojavljuju se u Evropi već u XIV veku), u smislu izračunavanja razlika radi procene premija.

Sa razvojem prirodnih nauka i utvrđivanjem eksperimenta u praksi, problem obrade opita i ocene grešaka, postaje sve prisutniji. Galilej zaključuje da su ređe veće a češće manje greške merenja, ukazujući na to da je zakon raspodele grešaka simetričan. On je tako uočio niz osnovnih osobina normalne raspodele verovatnoća.

Ako se ipak prihvati da je rađanje teorije verovatnoće vezano za imena Paskala, Ferma i Hajgensa, tada se period oformljenja teorije verovatnoće vezuje za ime Jakoba Bernulija i pojavu njegove knjige *Traktat o nauci predviđanja* u kojoj on dokazuje prvu graničnu teoremu, nazvanu kasnije teorema Bernulija.

Oslanjajući se na delo J. Bernulija Abraham de Muavr 1718. godine objavljuje rad *Učenje o slučajevima*, gde između ostalog razmatra niz pitanja vezanih za teoriju Bernulija.

Teoremu Muavra za $p = 0, 5$, Laplas proširuje za proizvoljne vrednosti p koje nisu jednake 0 i 1, postavljajući Muavr-Laplasovu teoremu, koja postavlja drugu osnovnu graničnu teoremu verovatnoće. Laplas je dao veliki doprinos razvoju teorije verovatnoće a svoje osnovne rezultate iz teorije verovatnoće izložio je 1812. godine u knjizi *Analiitička teorija verovatnoće*.

Još jedan velikan matematike Gaus dao je značajan doprinos razvoju teorije verovatnoće. Gaus je 1809 godine izveo normalni zakon raspodele slučajnih grešaka na kome je ponikao princip ocene parametara normalne raspodele. On je tvorac i metode najmanjih kvadrata.

Bilo bi nepravedno ne pomenuti Monmora, Simensona, Bajesa, Ojlera, D.Bernulija i Puasona čiji je doprinos razvoju teorije verovatnoće značajan.

Kada je u Zapadnoj Evropi u drugoj polovini XIX veka došlo do zastoja u razvoju teorije verovatnoće, njen razvoj preuzima ruska matematička škola na čelu sa Bunjakovskim, Ostrogradskim i kasnije Čebiševim. Čebišev je objavio četiri rada iz teorije verovatnoće koji su imali veliku ulogu u njenom daljem razvoju. Osnovnu pažnju Čebišev je posvetio graničnim teoremama. Najznačajniji sledbenici Čebiševa su Markov i Ljapunov. Markovljev rad se vezuje za nazive slučajnih promenljivih – *lance Markova* i zakon velikih brojeva zavisnih slučajnih promenljivih. Za ime Ljapunova vezuju se dva velika rada, to su rezultati koje je dobio zahvaljujući primeni nove metode karakterističnih funkcija i *centralne granične teoreme*.

Zahvaljujući rezultatima ruske matematičke škole i zahteva prakse, ponovo se oživljava i širi interesovanje u Zapadnoj Evropi i Americi za teoriju verovatnoće.

U novom talasu razvoja dominiraju istraživanja i radovi vezani za preciziranje logičkih osnova teorije verovatnoće. Radovi Hilberta, Bernštajna i Kolmogorova su posebno značajni za razvoj u ovoj etapi. Kolmogorov je zasnovao novu oblast teorije verovatnoće – teoriju slučajnih procesa.

Razvoj teorije verovatnoće u poslednjih četrdeset godina odvija se u tri pravca:

- dalji razvoj fundamentalnih principa teorije verovatnoće,
- istraživanje mogućnosti primene u različitim oblastima i
- razvoj novih naučnih metoda i pristupa koji počivaju na teoriji verovatnoće.

Na osnovama teorije verovatnoće nastale su neke primenjene matematičke discipline koje pripadaju Operacionim istraživanjima. To su:

- teorija zaliha,
- teorija masovnog opsluživanja i
- teorija pouzdanosti.

Teorija informacija takođe bazira na teoriji verovatnoće.

Uočljiva je stalna tesna veza u dugoj istoriji razvoja, između teorije verovatnoće i njene praktične primene. Prožimanja su u obostranom smeru, a pobude su češće usmerene od problema ka teoriji. Ovo neposredno ukazuje na veliki značaj i primenu teorije verovatnoće u rešavanju raznolikih praktičnih problema. Zato teoriju verovatnoće možemo svrstati u grupu visokoprimenjenih matematičkih disciplina.

Koristi se sa podjednakim uspehom u analizama i procenama u oblasti društveno-ekonomskih nauka, bio-medicinskih nauka, primenjenih matematičkih, fizičkih, hemijskih, inženjersko-tehničkih nauka kao i u analitici i ocenama privrednih kretanja i trendova. Kada bi pokušali da precizno odredimo sve probleme i oblasti u kojima teorija verovatnoće nalazi primenu spisak bi bio predugačak, sa gotovo sigurnim rizikom da nije sve pobrojano.

Rudarstvo i geologija iz ovog velikog skupa ne izdvajaju se u pogledu primenljivost teorije verovatnoće.

Naredni primeri, posebno, preko problema iz teorije zaliha, teorije masovnog opsluživanja, teorije pouzdanosti i lanaca ilustriraju primenu teorije verovatnoće u rešavanju problema iz rudarstva i geologije.

3.2.1. Model zaliha

Teorija zaliha, kao disciplina Operacionih istraživanja, bavi se utvrđivanjem optimalnih zaliha sirovina ili nekih drugih materijalnih resursa u preduzećima. Kriterijum optimalnosti su minimalni troškovi, koji obuhvataju troškove redovne i hitne nabavke i troškove skladištenja. Količine sirovina ili nekih drugih materijalnih resursa koji će se nalaziti na zalihama, zavise od potrebnih količina za neometano odvijanje proizvodnog procesa i od uslova snabdevanja. Potrebne količine materijalnih resursa neposredno zavise od programa i dinamike proizvodnje. Uslovima snabdevanja definišu se mogućnosti redovne i hitne ili naknadne nabavke potrebnog resursa.

U teoriji zaliha egzistiraju dva osnovna modela: model sa konstantnom potrošnjom i model sa stohastičkom potrošnjom, gde je teorija verovatnoće implementarna.

Ovde nećemo detaljnije ulaziti u stohastički model zaliha, pošto bi za to bilo potrebno znatno prostora, već ćemo kroz primer potrošnje eksploziva na rudniku prezentirati ovaj modelski pristup.

Pretpostavimo da je potrebno na površinskom kopu utvrditi optimalne količine eksploziva koje treba svakog meseca nabaviti radi podmirjenja potreba. Praćena je duže vreme mesečna potrošnja eksploziva.

Utvrđeno je da potrebe za eksplozivom imaju stohastički karakter sa sledećim zakonom verovatnoće.

x [t]	0	5	10	15	20	25	> 25
p [x]	0,05	0,10	0,25	0,40	0,15	0,05	0,00

Troškovi skladištenja iznose $C_1 = 2.000$ [din/t] u toku jednog meseca, a troškovi hitnih nabavki $C_2 = 11.000$ [din/t].

U cilju pronalazjenja optimalnog rešenja sastavićemo tabelu kao što je tabela 3.1.

Tabela 3.1.

u	x	$p(x)$	$\frac{p(x)}{x}$	$\sum_{z=u+1}^{\infty} \frac{p(x)}{x}$	$\frac{p(x)}{x}$	$(u + \frac{1}{2}) \sum_{x=u+1}^{\infty} \frac{p(x)}{x}$	$\sum p(x)$	$F(x)$
0	0	0,05	0,000	0,081		0,405	0,05	0,455
5	5	0,10	0,020	0,061		0,335	0,15	0,485
10	10	0,25	0,025	0,036		0,378	0,40	0,778
15	15	0,40	0,027	0,009		0,139	0,80	0,939
20	20	0,15	0,007	0,002		0,041	0,95	0,991
25	25	0,05	0,002	0,000		0,000	1,00	1,000
>25	>25	0,00	0,000	0,000		0,000	1,00	1,000

gde je: u – raspoloživa količina eksploziva na početku meseca,

x – potrebna količina eksploziva u toku meseca.

Koeficijent ocene K :

$$K = \frac{C_2}{C_1 + C_2} = \frac{11\,000}{13\,000} = 0,846$$

nalazi se u granicama

$$F(10) < k < f(15).$$

pošto je: 0,778 i 0,846 i 0,939.

Znači da su optimalne količine eksploziva koje treba mesečno nabavljati za potrebe površinskog kopa 15 [t]. Verovatnoća da neće biti potrebno više eksploziva od 15 [t] je 80 %. Sa istom količinom tvrdimo da će očekivani troškovi skladištenja i hitnih nabavki biti:

$$T(u) = C_1 \sum_{x=0}^u \left(u - \frac{x}{2}\right) p(x) + C_1 \sum_{x=u+1}^{\infty} \frac{u^2}{2x} p(x) + C_2 \sum_{x=u+1}^{\infty} \frac{(x-y)^2}{2x} p(x)$$

$$T(u) = 2\,000 \sum_{x=0}^{15} \left(15 - \frac{x}{2}\right) p(x) + 2\,000 \sum_{x=15+1}^{\infty} \frac{15^2}{2x} p(x) + 11\,000 \sum_{x=15+1}^{\infty} \frac{(x-15)^2}{2x} p(x)$$

$$15\,000 + 2\,137 + 2\,131 = 19\,268 \quad [\text{din}].$$

Uz uslov da su troškovi skladištenja $C_1 = \text{const}$, granice promene troškova hitnih nabavki C_2 , a da se pri tome optimalno rešenje ne promeni iznosi:

$$\frac{F(u_{opt} - 1)}{1 - F(u_{opt} - 1)} C_1 < C_2 < \frac{F(u_{opt})}{1 - F(u_{opt})} C_1$$

$$\frac{0,778}{1-0,778} 2000 < C_2 < \frac{0,939}{1-0,939} 2000$$

odnosno:

$$7009,01 < C_2 < 30786,88.$$

Ako se troškovi C_2 ne menjaju, onda se C_1 može menjati u granicama, a da se optimalno rešenje ne promeni:

$$\frac{1 - F(u_{opt})}{F(u_{opt})} C_2 < C_1 < \frac{1 - F(u_{opt} - 1)}{F(u_{opt} - 1)} C_2,$$

$$\frac{1 - 0,939}{0,039} 11000 < C_1 < \frac{1 - 0,778}{0,778} 11000,$$

$$714,59 < C_1 < 3138,82.$$

Isti matematičko-modulski pristup može se upotrebiti kod optimiranja nabavki i drugih materijalnih resursa na rudnicima ili u geodetskim službama koje se bave izvođenjem istražnih, na pr. dizel goriva, maziva, potrošnog materijala, rezervnih delova i slično.

3.2.2. Model usluživanja

Teorija masovnog usluživanja pripada grupi metoda Operacionih istraživanja. Načelno, svi problemi masovnog usluživanja imaju zajednički strukturu, tako da ih je moguće obuhvatiti jedinstvenim matematičko-modelskim pristupom. Teorije masovnog usluživanja poseduje takve matematičke instrumente koji kvantitativno oslikavaju probleme usluživanja i omogućavaju sagledavanje funkcionisanja sistema.

Karakteristično je za sve primere i probleme za čije se rešavanje može koristiti teorija masovnog usluživanja, postojanje davaoca i primaoca usluga kao i postojanje interakcije između jednih i drugih.

Teorija masovnog usluživanja ima mnogostruku primenu u različitim oblastima nauke i privrede, pa tako i u rudarstvu i geologiji. Pored problema klasičnog tipa kao što su: problemi servisnih usluga na rudnicima, usluge u domenu ishrane radnika, usluge administrativnih i drugih službi i slično, teorija masovnog usluživanja u poslednjih petnaest godina ima sve značajniju primenu u modeliranju i simulaciji diskontinualnih tehnoloških procesa. Matematičko-modelsku osnovu ovakvih simulacionih pristupa pored teorije masovnog usluživanja, u principu čine metode *Monte Karlo* i lanci Markova, sa implementacijom statističkih i determinisanih zakonitosti procesnih i okružujućih faktora i tokova.

Pretpostavimo da u servisnoj radionici rudnika za održavanje dampera radi 4 mehaničara. Mehaničari održavaju deset dampera i svaki od mehaničara je

osposobljen za sve vrste servisnih intervencija. Na osnovu iskustva zna se da jedan mehaničar može za najduže 6 dana da otkloni svaki kvar za čije je otklanjanje radionica osposobljena. Statističkim praćenjem utvrđeno je da se događa u proseku 5 kvarova mesečno.

Rukovodilac službe održavanja predlaže poslovnim organima rudnika da se na održavanju dampera angažuje još jedan mehaničar. Njegovo obrazloženje ovog predloga je da će se angažovanjem pet mehaničara sniziti troškovi.

Dakle postavlja se pitanje, da li angažovati još jednog mehaničara ili ne?

Da bi se utvrdilo da li je predlog rukovodioca prihvatljiv, potrebno je utvrditi ukupne troškove kada radi 4 i 5 mehaničara.

Polazni podaci za ovu analizu:

- broj zaposlenih mehaničara, $M1 = 4$
- predlog novog broja mehaničara, $M2 = 5$
- broj dampera, $n = 10$
- broj mesečnih kvarova, $k = 5$
- max. trajanje jedne intervencije, $i = 5$
- mesečni troškovi nerada jednog mehaničara, $T_1 = 20$
- mesečni troškovi stajanja jednog dampera, $T_2 = 80$.

Napomena: troškovi T_1 i T_2 dati su u relativnom, međusobnom komparativnom iznosu.

Zavisnost verovatnoće p_m (verovatnoća da je u servisu na popravci m dampera) i verovatnoće p_0 (verovatnoći da u servisu na popravci nema dampera), računana se na sledeći način:

$$\frac{p_m}{p_0} = \frac{n - m - 1}{m} f \frac{p_{m-1}}{p_0} \quad \text{za } 0 < m < M1$$

ili

$$\frac{p_m}{p_0} = \frac{n - m - 1}{M} f \frac{p_{m-1}}{p_0} \quad \text{za } M1 < m < n$$

Parametar f ima vrednost

$$f = \frac{k}{\mu} = \frac{5}{6} = 0,83$$

gde je:

$$\mu = \frac{30}{i} = \frac{30}{5} = 6.$$

sada je:

$$\frac{p_1}{p_0} = \frac{10}{1} \cdot 0,83 = 8,30$$

$$\frac{p_2}{p_0} = \frac{9}{2} \cdot 0,83 \cdot 8,30 = 31,00$$

$$\frac{p_3}{p_0} = \frac{8}{3} \cdot 0,83 \cdot 31,00 = 68,60$$

$$\frac{p_4}{p_0} = \frac{7}{4} \cdot 0,83 \cdot 68,60 = 99,64$$

$$\frac{p_5}{p_0} = \frac{6}{4} \cdot 0,83 \cdot 99,64 = 124,00$$

$$\frac{p_6}{p_0} = \frac{5}{4} \cdot 0,83 \cdot 124,00 = 128,60$$

$$\frac{p_7}{p_0} = \frac{4}{4} \cdot 0,83 \cdot 128,60 = 106,74$$

$$\frac{p_8}{p_0} = \frac{3}{4} \cdot 0,83 \cdot 106,74 = 66,44$$

$$\frac{p_9}{p_0} = \frac{2}{4} \cdot 0,83 \cdot 66,40 = 27,57$$

$$\frac{p_{10}}{p_0} = \frac{1}{4} \cdot 0,83 \cdot 27,57 = 5,72$$

Verovatnoća p_0 računa se preko relacije:

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{m=1}^{M_1} \frac{p_m}{p_0} + \sum_{m=M_1+1}^n \frac{p_m}{p_0}}$$

$$p_0 = \frac{1}{1 + 207,54 + 459,07} = 0,0015$$

Zanemarujući vrednosti za p_0 u prethodnim količnicima p_m/p_0 , izračunavamo verovatnoće:

$$p_1 = 8,30 \cdot 0,0015 = 0,012$$

$$p_2 = 31,00 \cdot 0,0015 = 0,046$$

$$p_3 = 68,60 \cdot 0,0015 = 0,103$$

$$p_4 = 99,64 \cdot 0,0015 = 0,149$$

$$p_5 = 124,00 \cdot 0,0015 = 0,186$$

$$p_6 = 128,60 \cdot 0,0015 = 0,193$$

$$p_7 = 106,74 \cdot 0,0015 = 0,160$$

$$p_8 = 66,44 \cdot 0,0015 = 0,100$$

$$p_9 = 27,57 \cdot 0,0015 = 0,041$$

$$p_{10} = 5,72 \cdot 0,0015 = 0,009$$

Ispitijemo da li je ispunjen uslov:

$$p_0 = \sum_{m=1}^{m=M1} p_m + \sum_{m=M1+1}^{m=n} p_m = 1$$

Kako je prethodni uslov ispunjen pošto je zbir verovatnoća $0,999 \approx 1$, možemo preći na izračunavanje prosečnog slobodnog broja inženjera:

$$\bar{M} = \sum_{m=0}^{m=M1-1} (M1 - m)p_m,$$

$$\bar{M} = \sum_{m=0}^{m=3} (4 - m)p_m = 4 \cdot 0,0015 + 3 \cdot 0,012 + 2 \cdot 0,046 + 1 \cdot 0,103 = 0,134.$$

Prosečan broj dampera koji čekaju na intervenciju mehaničara:

$$\bar{n}_1 = \sum_{m=M1+1}^{m=n} (m - M1)p_m,$$

$$\bar{n}_1 = \sum_{m=5}^{m=10} (m-4)p_m = 0,186 + 2 \cdot 0,193 + 3 \cdot 0,16 + 4 \cdot 0,10 + 5 \cdot 0,041 + 6 \cdot 0,009 = 1,711.$$

Prosečan broj dampera izvan upotrebe je:

$$\bar{n} = \bar{n}_1 + M1 - \bar{M} = 1,711 + 4 - 0,134 = 5,577 \simeq 5,6$$

Prosečan broj dampera ispravnih za rad je:

$$n - \bar{n} = 10 - 5,6 = 4,4$$

Prosečan broj mehaničara angažovanih na popravkama dampera:

$$M1 - \bar{M} = 4 - 0,134 = 3,866$$

Troškovi ovakvog režima rada servisne grupe sa četiri mehaničara iznose:

$$T(4) = 20 \cdot 0,134 + 80 \cdot 1,711 = 139,56 \quad (\text{relativnih novčanih jedinica}).$$

Koeficijent zauzetosti mehaničara u servisnoj grupi od 4 mehaničara

$$\frac{M1 - \bar{M}}{M1} = \frac{4 - 0,134}{4} = 0,9665$$

pokazuje da su mehaničari stalno zauzeti opravkama dampera.

Koeficijent ispravnosti dampera

$$\frac{n - \bar{n}}{n} = \frac{10 - 5,6}{10} = 0,44$$

je vrlo nizak. Više od polovine dampera je izvan upotrebe, što znači da su kapacitivne mogućnosti transportnog sistema znatno smanjene.

$$t = \frac{\bar{n}_1 \cdot 30}{(n - \bar{n})k} = \frac{1,711 \cdot 30}{4,4 \cdot 5} = 2,333 \quad [\text{dana}]$$

Verovatnoća da će neispravni damper čekati na intervenciju mehaničara

$$\sum_{m=4}^{m=10} p_m = 0,838 \text{ ili } 83,8 \text{ [\%]}$$

je vrlo visoka. Zapošljavanjem još jednog mehaničara, postižu se sledeći efekti (nećemo ponavljati postupak računanja pošto je isti):

Verovatnoće:

$$\begin{array}{llll} p_0 = 0,00021 & p_4 = 0,209 & p_8 = 0,057 \\ p_1 = 0,017 & p_5 = 0,208 & p_9 = 0,019 \\ p_2 = 0,065 & p_6 = 0,173 & p_{10} = 0,003 \\ p_3 = 0,144 & p_7 = 0,115 & \end{array}$$

Ostali podaci:

$$\begin{array}{ll} \bar{M} = 0,333 & M2 - \bar{M} = 4,667 \\ \bar{n}_1 = 0,665 & n' - \bar{n} = 4,670 \\ \bar{n} = 5,330 & t = 0,854 \text{ [dana]} \\ T(5) = 59,860 & (\text{relativnih novčanih jedinica}) \end{array}$$

Zapošljavanjem petog mehaničara stepen zauzetosti mehaničara se neznatno smanjuje (0,933) ali se znatno smanjuje čekanje dampera na opravke (0,854 dana).

Verovatnoća da će neispravan damper čekati na intervenciju je smanjena i iznosi 57,5 %, a koeficijent ispravnosti vozila je povećan 0,467.

Troškovi ovakvog režima rada su manji od troškova kada rade četiri mehaničara, pa se predlog rukovodioca službe održavanja opreme na rudniku može prihvatiti.

3.2.3. Lanci Markova i stratigrafski modeli

Mnoge prirodne procese koje smatramo slučajnim, karakteriše to da postoji uticaj prethodnog na naredni događaj. Ove procese nazivamo markovskim. Jedan od oblika markovskih procesa su lanci Markova, koje posmatramo kao niz ili lanac diskretnih stanja u vremenu ili prostoru, čija verovatnoća prelaza, iz jednog stanja u naredno stanje, zavisi od prethodnog stanja. Osim toga lance Markova karakteriše konačan broj stanja, a verovanoće, odgovarajućih prelaza iz jednog stanja u drugo su *stacionarne* tj. nepromenljive u vremenu ili prostoru.

Iz ovog proizilazi da lanci Markova u svom opštem obliku imaju kratkotrajno *pamćenje* koje traje onoliko dugo koliko traje korak prelaza, sa okončanjem koraka. Sadržaj u memoriji se briše i unosi se novi. Ovakvi lanci nazivaju se lanci Markova *prvog reda*. Lanci Markova koji imaju ugrađen mehanizam da verovatnoća svakog prelaza zavisi od više događaja nazivaju se lanci *višeg reda*.

Pošto smo se podsetili na osnovne osobine lanaca Markova, koje su detaljno objašnjene u teoretskom delu ovog poglavlja, možemo konstatovati da mnogi geološki i rudarsko-geološki procesi imaju svojstva ili ista lancima Markova.

U principu markovski lanci se koriste za modeliranje dinamičkih procesa u geologiji i rudarstvu, pod uslovom da imaju svojstva koja odgovaraju svojstvima lanaca Markova.

Radi ilustracije razmotrimo pretpostavljen slučaj stratigrafskog niza. Posmatrajmo prelaze u prostoru od sloja do sloja, postepenim pomicanjem od najnižeg ka najvišem u stratigrafskoj strukturi. Pretpostavimo da u strukturi imamo tri litološka člana (sloja): pesak, glinu i lapor. Promene u nizu od najnižeg ka najvišem članu ili obrnuto, možemo opisati matricom prelaznih verovatnoća. Ako sa A - obeležimo pesak, sa B - glinu i sa C - lapor, tada će prvi red u matrici prelaznih verovatnoća činiti članovi koji označavaju verovatnoću prelaza od peska ka pesku, od peska ka glini i od peska ka laporu. Matrica prelaznih verovatnoća P , za naš primer sa tri litološka člana možemo u opštoj formi napisati:

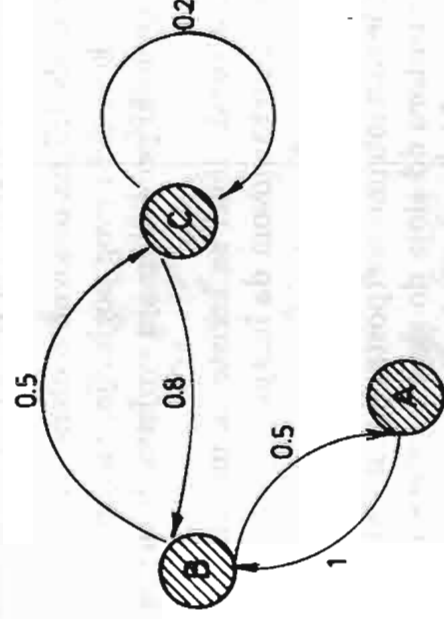
$$P = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{ccc} A & B & C \\ \left[\begin{array}{ccc} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} \text{pesak} \\ \text{glina} \\ \text{lapor} \end{array}$$

gde su: $p_{i,j}$ – verovatnoće prelaza od litoloških članova A, B, C registrovanih po redovima, ka litološkim članovima A, B, C registrovanih po kolonama. Tako na pr. verovatnoća prelaza sa peska na glinu registrovana je u matrici kao p_{12} .

Ovo je opšti model matrice prelaznih verovatnoća, a sada razmatramo sledeću pretpostavljenu matricu prelaznih verovatnoća:

$$P = \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{ccc} A & B & C \\ \left[\begin{array}{ccc} 0,0 & 1,0 & 0,0 \\ 0,5 & 0,0 & 0,5 \\ 0,0 & 0,8 & 0,2 \end{array} \right] \end{array}$$

Iz matrice se vidi da je sa peska moguć prelaz samo na glinu ($p_{12} = 1$), dok prelaz i sa peska na pesak ili sa peska na lapor apsolutno nisu mogući ($p_{11} = 0$ i $p_{13} = 0$). Ukoliko se pozicija analize nalazi u glinenom sloju, tada su verovatnoće prelaza bilo na pesak bilo na lapor jednake ($p_{21} = p_{23} = 0,5$), dok se prelaz iz gline u glinu isključuje ($p_{22} = 0$). Kod lapora najveća verovatnoća prelaza je na glini ($p_{32} = 0,8$), dok je verovatnoća prelaza iz lapora u lapor četiri puta manja ($p_{33} = 0,2$). Uočljivo je da su zbirovi verovatnoća po redovima jednaki jedinici, što govori o tome da su svi konstatovani prelazi od jednog litološkog člana ka drugom obuhvaćeni. Na slici 3.2. dat je naš primer graf verovatnoća prelaza, ili kako se još naziva dijagram prelaza.



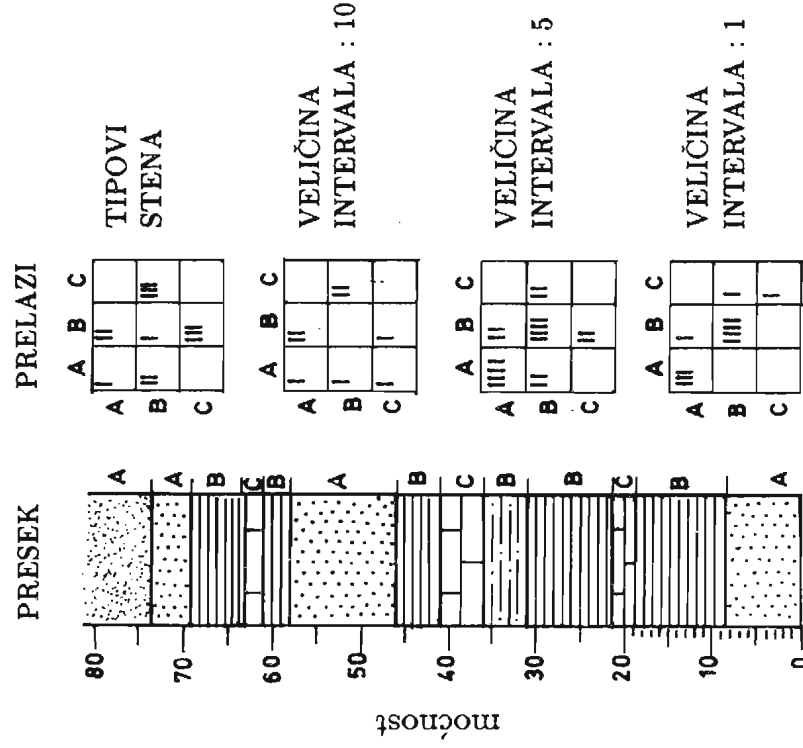
Sl. 3.2. - Graf verovatnoća prelaza

Kako u knjizi [28] Harbuh i Karter ističu, matrice prelaznih verovatnoća su veoma korisne kao analitičko sredstvo. One daju mogućnost opisa verovatnog sleda događaja u vremenu ili prostoru.

U praksi, računanje prelaza zasniva se na raspodeli učestalosti prelaza.

U knjizi navedenih autora nude se dva praktična rešenja za ocene prelaznih verovatnoća u stratigrafskim analizama. Jedan pristup bazira na prebrojavanju prelaza između intervala zadate moćnosti.

Na slici 3.3. dat je primer realnog stratigrafskog preseka po Krambejnu [36].



Sl. 3.3. - Ilustrativni primer stratigrafskog niza po Krambejnu

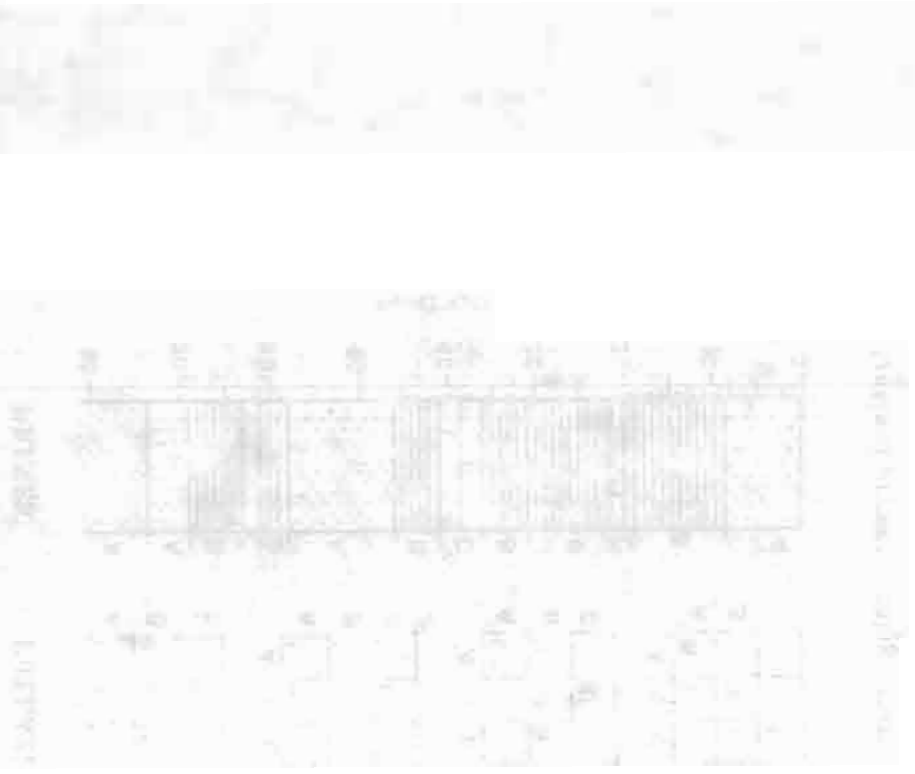
Ovaj primer je vrlo interesantan pošto ilustruje obe metode registrovanja prelaznih verovatnoća.

Rezultati registrovanih prelaza na čisto litološkoj osnovi dati su u prvoj matrici odozgo na slici 3.3.

Drugi način računanja verovatnoća prelaza, zasniva se na podeli stratigrafskog preseka na jednake intervale i registrovanja prelaza na njihovim granicama. U Krambejnovom primeru, po ovom principu izvršene su tri analize za intervale od 0,5 i 10 stopa (foot). Nije teško uočiti da u datom slučaju dužine intervala veoma utiču na rezultate analize. Mali intervali (na pr. 1 stopa) pokazuju tendenciju povećanja prelaza, a veliki intervali kriju opasnost neregistrovanja prelaza. Iz ovih razloga, kod stratigrafske analize verovatnoće prelaza intervalskom metodom, mora se biti oprezan. Najsigurniji pristup je poređenje rezultata dobijenih istražnim radovima i matematičko-modelskom analizom. Tek na osnovu rezultata poređenja može se objektivno proceniti potrebna dužina intervala.

Danas računarska tehnika znatno olakšava i veoma ubrzava ovakvu analizu, a izlazne liste obrade, pored numeričkih i alfanumeričkih poruka sadrže i odgovarajuće grafičke interpretacije.

U primeni lanca Markova u stratigrafskoj analizi moglo bi još mnogo da se govori. Pošto se radi samo o ilustraciji primene mi ćemo se na izloženom zadržati a zainteresovanog čitaoca upućujemo na radove Vistelijusa, Harbuha i Bonem-Kartera, Krambejna, Kara i drugih.



4. Statistika

8.1. Osnovi statistike

4.1.1. Osnovne statističke veličine

Osnovni zadatak matematičke statistike se sastoji u tome da se iz jednog dela neke *generalne kolekcije* (skupa) predmeta zaključujući o nekom kvantitativnom ili kvalitativnom svojstvu cele kolekcije. Deo koji se ispituje zove se *uzorak*, a naš cilj ovde je da se upoznamo sa nekim osnovnim uzoračkim statistikama.

Neka je izvršeno n posmatranja uzoraka pri čemu je n_1 puta registrovana vrednost x_1 , n_2 puta vrednost x_2, \dots, n_k puta vrednost x_k , pri čemu je $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Označimo sa n_x broj posmatranja slučajne veličine X u kojima je zabeležena vrednost manja od x . Funkcija $F_n(x) = n_x/n$ je *empirijska funkcija raspodele* X a povezana je sa teorijskom funkcijom raspodele $F(x)$ preko relacije

$$(4.1) \quad P \left\{ \sup_{x \in (-\infty, \infty)} |F_n(x) - F(x)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \right\} = 1,$$

koja predstavlja jedan od oblika *centralne granične teoreme*. Iz (4.1) sledi da se za "veliko" n funkcija raspodele $F(x)$ može "dobro" aproksimirati sa empirijskom funkcijom $F_n(x)$, u čemu se i ogleda jedan od osnovnih principa statistike, a utvrđivanje oblika funkcije raspodele ispitivane slučajne promenljive X je jedan od osnovnih problema statistike.

Primer 4.1.

Naći empirijsku funkciju raspodele za sledeći uzorak:

x_i	-1	3	8
n_i	10	15	25

Ovde je obim uzoraka $n = n_1 + n_2 + n_3 = 50$, a kako je $x_i \geq -1$ to je $F_n(x) = n_x/n = 0$ za $x \leq -1$. Između $x = -1$ i $x < 3$ je samo vrednost $x = -1$, te je $F_n(x)/n = 10/50 = 0,2$ za $-1 < x \leq 3$.

Nastavljajući tako dobija se

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1, \\ 0,2 & -1 < x \leq 3, \\ 0,5 & 3 < x \leq 8, \\ 0,1 & x > 8. \end{cases}$$

Ukoliko je moguće saznati da se radi o nekoj raspodeli kao što je binomna, normalna, Puasonova itd., onda se kao važan problem javlja ocena pojedinih parametara kao npr. parametra λ u Puasonovoj raspodeli ili parametara μ i σ u normalnoj raspodeli.

Ako se uočene vrednosti x_1, x_2, \dots, x_n interpretiraju kao slučajne promenljive X_1, X_2, \dots, X_n , tada ćemo smatrati da su te slučajne promenljive nezavisne i da sve imaju istu raspodelu, tj. da se radi o prostom slučajnom uzorku. Da bi smo ocenili parametar θ koji se pojavljuje u funkciji raspodele posmatraćemo funkciju $\theta_n = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$, koja služi kao *tačkasta statistička ocena* nepoznatog parametra. Ovde funkcija f treba da bude podesno izabrana tako da zadovoljava neka svojstva, kao što su:

a) *centriranost*: $E(\theta_n^*) = \theta$,

b) *efektivnost*: $\sigma^2(\theta_n^*) = \min \sigma^2(\theta'_n)$,

gde je θ'_n bilo koja druga ocena parametra θ ,

c) *stabilnost*: $P(\sup |\theta_n^* - \theta| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty) = 1$,

pri čemu je θ_n^* vrednost slučajne promenljive θ_n koja je registrovana u uzorku, a σ^2 je varijansa, kao što je uvedeno u glavi o verovatnoći, dok je E matematičko očekivanje.

Ovde ćemo pomenuti neke osnovne uzoračke sredine i statistike. Opet pretstavljamo da ima k veličina x_1, x_2, \dots, x_k koje se javljaju n_1, n_2, \dots , odnosno n_k puta, pri čemu je $x_1 < x_2 < \dots < x_k$.

Aritmetička sredina x_1, x_2, \dots, x_k je

$$(4.2) \quad A = \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{k},$$

dok je aritmetička sredina sa težinama (tzv. ponderisana težina)

$$(4.3) \quad A = \bar{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k}.$$

Geometrijska težina x_1, x_2, \dots, x_k ($x_1, x_2, \dots, x_k \geq 0$) je

$$(4.4) \quad G = \sqrt[k]{x_1 x_2 \dots x_k},$$

dok je geometrijska sredina sa težinama (ponderisana geometrijska težina)

$$(4.5) \quad G = (x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k})^{\frac{1}{n_1 + n_2 + \dots + n_k}}.$$

Najzad harmonijska sredina x_1, x_2, \dots, x_k je

$$(4.6) \quad H = \frac{k}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_k}},$$

dok je harmonijska sredina sa težinama (ponderisana harmonijska sredina)

$$(4.7) \quad H = \frac{n_1 + n_2 + \dots + n_k}{\frac{n_1}{x_1} + \frac{n_2}{x_2} + \dots + \frac{n_k}{x_k}}.$$

Za odgovarajuće sredine (sa ili bez težine) važi uvek

$$(4.8) \quad x_1 < H < G < A < x_k,$$

što znači da je svaka sredina veća od najmanjeg, a manja od najvećeg među brojevima x_1, x_2, \dots, x_k .

Pored navedenih sredina koriste se i druge srednje vrednosti. **Medijana** (centralna vrednost) je ona srednja vrednost promenljive X koja deli celokupnu masu raspodela na dva jednaka dela, tj. zadovoljava jednačinu $F(x) = 1/2$, gde je $F(x)$

funkcija raspodele X . Medijana se obeležava sa μ_e i uvek postoji. Ako $F(x)$ ima gustinu $f(x)$, onda je

$$(4.9) \quad \int_{-\infty}^{\mu_e} f(x) dx = \int_{\mu_e}^{\infty} f(x) dx.$$

Srednje apsolutno odstupanje slučajne promenljive X od očekivane vrednosti $\mu = EX$ je $e_m = E(|X - \mu|)$. Ukoliko je X neprekidna slučajna promenljiva sa gustinom $f(x)$, onda je

$$(4.10) \quad e_m = \int_{-\infty}^{\infty} |x - \mu| f(x) dx,$$

a u slučaju diskretne slučajne promenljive **obično srednje apsolutno odstupanje** je

$$(4.11) \quad e_m = \frac{1}{k} (|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \dots + |x_k - \bar{x}|),$$

dok je **srednje apsolutno odstupanje sa težinama**

$$(4.12) \quad e_m = \frac{n_1|x_1 - \bar{x}| + n_2|x_2 - \bar{x}| + \dots + n_k|x_k - \bar{x}|}{n_1 + n_2 + \dots + n_k},$$

pri čemu je \bar{x} odgovarajuća aritmetička sredina.

Ako su X_1, X_2, \dots, X_n nezavisne slučajne promenljive sa istom raspodelom, onda su osnovne statistike sledeće:

a) Uzoračka sredina \bar{X}_n :

$$(4.13) \quad \bar{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n},$$

b) Uzoračka disperzija \bar{S}_n^2 :

$$(4.14) \quad \bar{S}_n^2 = \frac{(X_1 - \bar{X}_n)^2 + (X_2 - \bar{X}_n)^2 + \dots + (X_n - \bar{X}_n)^2}{n},$$

c) Korigovana disperzija $\bar{S}_n'^2$:

$$(4.15) \quad \bar{S}_n'^2 = \frac{n}{n-1} \bar{S}_n^2.$$

4.1.2. Neke raspodele statistike

U poglavlju o verovatnoći i slučajnim procesima upoznali smo se sa nekim od osnovnih raspodela slučajnih promenljivih. Sem tih, postoji još i određen broj raspodela koje su od izuzetnog značaja u statistici, te ćemo ovde dati pregled nekih od njih.

1. Log-normalna raspodela. Funkcija gustine je

$$(4.16) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{ax\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - b)^2}{2a^2}} & x > 0 \quad (a > 0), \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

Ovde je k -ti moment $EX^k = e^{bk + \frac{1}{2}a^2k^2}$, pa je

$$\mu = EX = e^{b + \frac{1}{2}a^2}, \quad \sigma^2 = \mu^2(e^{\frac{1}{2}a^2} - 1).$$

2. Vejbulova raspodela (Weibull). Za $x > x_0$ funkcija gustine je

$$(4.17) \quad f(x) = \frac{b}{x - x_0} \left(\frac{x - x_0}{\theta - x_0} \right)^{b-1} e^{-\left(\frac{x - x_0}{\theta - x_0} \right)^b},$$

gde su x_0 , θ , b parametri raspodele.

3. χ_n^2 raspodela (hi-kvadrat). Neka su X_1, X_2, \dots, X_n nezavisne slučajne promenljive sa normalnim raspodelama koje imaju parametre μ_i i σ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) i neka je

$$Z = \left(\frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 + \left(\frac{X_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{X_n - \mu_n}{\sigma_n} \right)^2$$

nova slučajna promenljiva. Tada Z ima raspodelu sa gustinom

$$(4.18) \quad f(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{z}{2}} & z \geq 0, \\ 0 & z < 0, \end{cases}$$

koja se zove χ_n^2 raspodela. Broj n se naziva broj stepena slobode i ukoliko između slučajnih promenljivih X_1, X_2, \dots, X_n postoji neka veza on se smanjuje za onoliko

koliko postoji veza. Za dato n i α nalazi se vrednost $\chi_{n\alpha}^2$ tako da je $P\{\chi_n^2 \geq \chi_{n\alpha}^2\} = \alpha$ iz posebnih tablica. Takve tablice se najčešće prave do $n = 30$, jer za $n > 30$ χ_n^2 ima približno normalnu raspodelu.

4. Studentova raspodela. Dobila ime po W.S.Gosset-u koji je koristio pseudonim "student". Ako Y ima normalnu raspodelu sa $\mu = 0$ i $\sigma^2 = 1$, a Z χ_n^2 raspodelu i Y i Z su nezavisne promenljive, tada promenljiva $t_n = Y/\sqrt{Z/n}$ ima Studentovu raspodelu sa gustinom

$$(4.19) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{(n+1)}{2}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Ovde je $\mu = EX = 0$, $\sigma^2 = \frac{n}{n-2}$ za $n > 2$, a n se zove stepen slobode. Kao i za χ_n^2 raspodelu i za Studentovu raspodelu se koriste posebne tablice.

5. Fišerova raspodela (Fisher). Gustina raspodele je

$$(4.20) \quad f_{m,n}(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{(1+x)^{\frac{m+n}{2}}}, & x > 0 \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

Ovde je

$$\mu = \frac{m}{n-2} \quad (\text{za } n > 2),$$

$$\sigma^2 = \frac{2m(m+n-2)}{(n-2)^2(n-4)} \quad (\text{za } n > 4).$$

Promenljiva $F_{m,n}$ koja ima gustinu (4.20) ima F -raspodelu sa (m, n) stepena slobode. Smenom $X = (m/n)F_{m,n}$ dobija se promenljiva koja ima tzv. *Snedecor-ovu* F -raspodelu sa ν_1 i ν_2 stepena slobode i gustinom

$$(4.21) \quad f(x) = \nu_1^{\frac{\nu_1}{2}} \nu_2^{\frac{\nu_2}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)} x^{\frac{\nu_1}{2}-1} (\nu_2 + \nu_1 x)^{-\frac{(\nu_1 + \nu_2)}{2}} \quad (x > 0).$$

4.1.3. Intervali poveranja

U primeni statistike značajne su tzv. intervalne ocene koje ćemo prikazati u ovom odeljku. Ako je θ nepoznati parametar raspodele a θ njegova tačkasta ocena, onda je verovatnoća

$$(4.22) \quad P\{|\theta^* - \theta| < \delta\} = P\{\theta^* - \delta < \theta < \theta^* + \delta\} = \alpha$$

pouzdanost ocene parametra θ pomoću θ^* , a interval

$$(4.23) \quad I = (\theta^* - \delta, \theta^* + \delta)$$

je *interval poverenja* za parametar θ . Verovatnoća α u (4.22) se često naziva *koeficijent sigurnosti*, a suprotna verovatnoća *koeficijent rizika*. U praksi se javlja više intervala poverenja, od kojih ćemo spomenuti neke značajnije.

1. Interval poverenja za matematičko očekivanje μ kada je poznata varijansa σ^2

Koristi se činjenica sa kod velikog uzorka statistika \bar{X}_n (v. 4.13) ima asimptotski normalnu raspodelu sa parametrima μ i $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, a kod malog broja uzoraka pretpostavlja se da promjenljiva x ima normalnu raspodelu sa parametrima μ i σ . Tada važi

$$P\left\{\bar{X}_n - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X}_n + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\} = 2\Phi(z_\alpha),$$

gde se vrednosti funkcija

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

očitavaju iz posebnih tablica. Ovde je znači interval poverenja oblika

$$(4.24) \quad I = \left(\bar{X}_n - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

Primer 4.2.

Pri analizi materijala utvrđeno je da je standardno odstupanje gvožđa u njemu 18 %. Naći 95 %-tni interval poverenja za tačnu vrednost sadržine gvožđa u materijalu ako se na osnovu 8 analiza dobila srednja sadržanost gvožđa od 43,18 %.

U ovom primeru je $\alpha = 0,95$, $n = 8$, $\sigma = 0,18$, $\bar{X}_8 = 43,18$, a potrebno je odrediti $z_{0,95}$. Iz relacije $2\Phi(z_{0,95}) = 0,95$ i tablice nalazi se $z_{0,95} = 1,96$, pa je na osnovu (4.24) traženi interval poverenja

$$\left[43,18 - 1,96 \frac{0,18}{\sqrt{8}}; \quad 43,18 + 1,96 \frac{0,18}{\sqrt{8}} \right] = [43,055; \quad 43,305].$$

2. Interval poverenja za matematičko očekivanje μ kada je varijansa σ^2 nepoznata.

Pretpostavlja se da promenljiva X ima normalnu raspodelu sa parametrima μ i σ uvodi statistika

$$(4.25) \quad t_{n-1} = \sqrt{n-1} \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n},$$

koja ima Studentovu raspodelu sa gustinom (4.19) i $n-1$ stepena slobode. Tada je

$$\alpha = P \left\{ \left| \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} \sqrt{n-1} \right| \leq t'_{n-1, \alpha} \right\},$$

gde je $t'_{n-1, \alpha} = t_{n-1, 1-\alpha}$ veličina koja se određuje iz tablica za Studentovu raspodelu. Interval poverenja glasi ovde

$$I = \left[\bar{X}_n - \frac{t'_{n-1, \alpha}}{\sqrt{n-1}} S_n, \quad \bar{X}_n + \frac{t'_{n-1, \alpha}}{\sqrt{n-1}} S_n \right].$$

3. Interval poverenja za nepoznatu varijansu σ^2

Ako su X_1, \dots, X_n promenljive sa normalnom raspodelom koja ima parametre μ i σ , onda statistika

$$\frac{n\bar{S}_n^2}{\sigma^2}$$

ima χ_{n-1}^2 raspodelu, te se iz tablica ove raspodele za dato n i α nalazi veličina $\chi_{n-1, \alpha}^2$ za koju je

$$\alpha = P \left\{ \frac{n\bar{S}_n^2}{\sigma^2} \geq \chi_{n-1, \alpha}^2 \right\} = P \left\{ \frac{n\bar{S}_n^2}{\chi_{n-1, \alpha}^2} \geq \sigma^2 \right\}.$$

Tada je tzv. *jednostrani interval poverenja* za σ^2 oblika

$$(4.26) \quad \left[0, \frac{n\bar{S}_n^2}{\chi_{n-1, \alpha}^2} \right].$$

Ako je dalje

$$\chi_{n-1, \alpha}'^2 = \chi_{n-1, \frac{\alpha-1}{2}}, \quad \chi_{n-1, \alpha}''^2 = \chi_{n-1, \frac{1+\alpha}{2}},$$

onda je

$$\frac{1-\alpha}{2} = P \left\{ \frac{n\bar{S}_n^2}{\sigma^2} \geq \chi_{n-1, \alpha}'^2 \right\}, \quad \frac{1-\alpha}{2} = P \left\{ \frac{n\bar{S}_n^2}{\sigma^2} \leq \chi_{n-1, \alpha}''^2 \right\},$$

pa je tzv. *dvostrani interval poverenja* za σ^2 oblika

$$(4.27) \quad \left[\frac{n\bar{S}_n^2}{\chi_{n-1, \alpha}'^2}, \frac{n\bar{S}_n^2}{\chi_{n-1, \alpha}''^2} \right].$$

4. Interval poverenja za nepoznatu verovatnoću p

Neka je m broj realizacija događaja A u n nezavisnih opita, a p nepoznata verovatnoća realizacije događaja A u samo jednom opitu. Tada važi

$$\alpha = P \left\{ \left| \frac{m - np}{\sqrt{np(1-p)}} \right| \leq z_\alpha \right\},$$

gde se kao u intervalu poverenja (4.24) vrednost z_α čita iz tablica za normalnu raspodelu, tj. $2\Phi(Z_\alpha) = \alpha$,

$$(4.28) \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Interval poverenja za p glasi onda

$$I = \left[\frac{n}{n + z_\alpha} \left(\frac{m}{n} + \frac{z_\alpha^2}{n} - z_\alpha \sqrt{\frac{m(n-m)}{n} + \left(\frac{z_\alpha}{2n}\right)^2} \right), \right. \\ \left. \left[\frac{n}{n + z_\alpha} \left(\frac{m}{n} + \frac{z_\alpha^2}{n} + z_\alpha \sqrt{\frac{m(n-m)}{n} + \left(\frac{z_\alpha}{2n}\right)^2} \right) \right] \right].$$

4.1.4. Testiranje statističkih hipoteza

Na osnovu teorijskih ili intuitivnih razloga često se u toku raznih ispitivanja vrši testiranje hipoteze H da vrednost parametara θ funkcije raspodele $F(X, \theta)$ promenljive X ima vrednost θ_0 , što se označava kao $H(\theta = \theta_0)$. Drugi značajan problem je testiranje hipoteze $\theta_1 = \theta_2$, gde su θ_1 i θ_2 parametri u funkcijama raspodele $F_1(X, \theta_1)$ i $F_2(Y, \theta_2)$ promenljive X , odnosno Y . Postupak testiranja se sastoji u formiranju statistike $U = U(X_1, X_2, \dots, X_n)$ gde je (X_1, X_2, \dots, X_n) prost uzorak obeležja X i registrovanju vrednosti statistike U iz dobijenog uzorka. Zatim se izračunava verovatnoća odstupanja registrovane vrednosti statistike U od očekivane vrednosti (pod uslovom da je hipoteza $H(\theta = \theta_0)$ tačna), pa ako je ta verovatnoća manja od izabrane verovatnoće (koja se naziva *prag značajnosti*), onda se hipoteza $H(\theta = \theta_0)$ odbacuje, a ako je veća ili jednaka α , može se konstatovati da uzorak ne protivreči hipotezi $H(\theta = \theta_0)$. Prag značajnosti α se bira u zavisnosti od prirode problema, a najčešće se uzima $\alpha = 0,01$ ili $\alpha = 0,05$. Ovde će biti opisan postupak za testiranje nekoliko najčešće statističkih hipoteza. Valja napomenuti da prilikom testiranja hipoteza dolazi do tzv. grešaka prve i druge vrste. Greške prve vrste nastaju kada se odbacuje hipoteza iako je ona ustvari tačna, a greške druge vrste nastaju kada se prihvata hipoteza iako je ona pogrešna.

1. Testiranje hipoteze $H(\mu = \mu_0)$ ako je varijansa σ^2 poznata

Pretpostavimo da promenljiva X ima normalnu raspodelu sa parametrima μ i σ (ako je $n \geq 30$, tj. uzorak dovoljno veliki, onda ta pretpostavka nije potrebna) i formirajmo statistiku

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i,$$

gde je (X_1, X_2, \dots, X_n) prost uzorak obeležja X a \bar{x}_n vrednost statistike \bar{X}_n koja je registrovana u uzorku. Iz teorije verovatnoće je poznato da tada važi

$$(4.29) \quad P \{ |\bar{X}_n - \mu_0| \geq |\bar{x}_n - \mu_0| \} = 1 - 2\Phi \left(\frac{|\bar{x}_n - \mu_0|}{\sigma \sqrt{n}} \right),$$

gde je Φ dato preko (4.28). Ako desnu stranu (4.29) označimo sa α^* , onda je zaključak sledeći: ako je $\alpha^* \leq \alpha$ gde je α dati prag značajnosti, onda se hipoteza $H(\mu = \mu_0)$ odbacuje, a ako je $\alpha^* > \alpha$ onda uzorak ne protivreči hipotezi. Ovdje je verovatnoća nastanka greške prve vrste jednaka izabranom pragu značajnosti α .

Što se tiče greške druge vrste, ona se ovde određuje na sledeći način. Ako Z ima normalnu raspodelu sa parametrima 0 i 1, tada se za dato x iz tablica određuje broj z_α tako da važi

$$P\{|Z| < z_\alpha\} = \alpha.$$

Neka je sada tačna hipoteza $H(\mu = \mu_1)$, a mi smo prihvatili hipotezu $H(\mu = \mu_0)$, pri čemu $\mu \neq \mu_1$. Verovatnoća da se ovo dogodi (tj. verovatnoća greške druge vrste) iznosi

$$P\{-z_\alpha - d\sqrt{n} \leq Z_1 \leq z_\alpha - d\sqrt{n}\},$$

gde je $d = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma}$, a Z_1 je slučajna promenljiva koja ima normalnu raspodelu sa parametrima 0 i 1.

Primer 4.3.

Poznato je da se procenat metala u rudi p dobija sa odstupanjem $\sigma = 0,03$. Ako su izmerene vrednosti procenta jednake 7,14; 7,17; 7,15; 7,12; 7,14; 7,16; testirati, sa pragom značajnosti $\alpha = 0,05$, hipotezu $p = 7,15$.

Ovde je $n = 6$, $\mu_0 = 7,15$, $\sigma = 0,03$, $\bar{x}_n = 7,1467$. Stoga je

$$1 - 2\Phi\left(\frac{|\bar{x}_n - \mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 1 - 2\Phi(0,2694) = 1 - 2 \cdot 0,106 = 0,788,$$

te stoga uzorak ne protivreči hipotezi.

2. Testiranje hipoteze $H(\mu = \mu_0)$ kad je varijansa σ^2 nepoznata

Neka obeležije X ima normalnu raspodelu sa parametrima μ i σ i neka je

$$t_{n-1} = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\frac{S_n}{n-1}},$$

pri čemu je \bar{S}_n dato preko (4.14), a sa t_{n-1} će se označavati registrovana vrednost statistike t_{n-1} . Promenljiva t_{n-1} ima Studentovu raspodelu, i za dato n i α iz tablica sa određuje veličina $t_{n-1,\alpha}$ za koju važi

$$P\{|t_{n-1}| \geq t_{n-1,\alpha}\} = \alpha.$$

Ako je $|\overline{t_{n-1}}| \geq t_{n-1,\alpha}$ tada se hipoteza $H(\mu = \mu_0)$ odbacuje, a ako je $|\overline{t_{n-1}}| < t_{n-1,\alpha}$ onda uzorak ne protivreči hipotezi $H(\mu = \mu_0)$.

3. Testiranje hipoteze $H(\mu_1 = \mu_2)$ ako je $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Pretpostavimo da obeležje X ima normalnu raspodelu sa parametrima μ_1 i σ_1 , a obeležje Y normalnu raspodelu sa parametrima μ_2 i σ_2 . Ako je $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, tada statistika

$$\frac{\overline{X_{n_1}} - \overline{Y_{n_2}}}{\sqrt{n_1 \overline{S_{n_1}^2}(X) + n_2 \overline{S_{n_2}^2}(Y)}} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} (n_1 + n_2 - 2)}$$

ima raspodelu Studenta sa $n_1 + n_2 - 2$ stepena slobode, tj. $t_{n_1+n_2-2}$. Ako se kao i malopre sa $t_{n_1+n_2-2}$ označi registrovana vrednost statistike $t_{n_1+n_2-2}$, onda važi sledeći zaključak: Ako je $|\overline{t_{n_1+n_2-2}}| \geq t_{n_1+n_2-2,\alpha}$ tada se hipoteza $H(\mu_1 = \mu_2)$ odbacuje, a ako je $|\overline{t_{n_1+n_2-2}}| < t_{n_1+n_2-2,\alpha}$ onda uzorak ne protivreči hipotezi $H(\mu_1 = \mu_2)$.

4. Testiranje hipoteze $H(\sigma^2 = \sigma_0^2)$

Neka je $\overline{s_n^2}$ registrovana vrednost statistike $\overline{S_n^2}$, a

$$\alpha^* = P\{\overline{S_n^2} \geq \overline{s_n^2}\} = P\left\{\chi_{n-1}^2 \geq \frac{n \overline{s_n^2}}{\sigma_0^2}\right\}.$$

Ako je $\alpha^* \leq \alpha$, gde je α dati prag značajnosti, hipoteza $H(\sigma^2 = \sigma_0^2)$ se odbacuje, a ako je $\alpha^* > \alpha$ onda uzorak ne protivreči hipotezi $H(\sigma^2 = \sigma_0^2)$.

5. Testiranje hipoteze $H(\sigma_1^2 = \sigma_2^2)$

Pretpostavimo da X i Y imaju normalnu raspodelu sa parametrima μ_1 i σ_1 , odnosno μ_2 i σ_2 . Tada statistika

$$\frac{n_1 \overline{S_{n_1}^2}(X)}{n_1 - 1} \bigg/ \frac{n_2 \overline{S_{n_2}^2}(Y)}{n_2 - 1} = F_{n_1-1, n_2-1}$$

ima Snedekorovu F -raspodelu sa parametrima $\nu_1 = n_1 - 1$, $\nu_2 = n_2 - 1$. U tablicama F -funkcije se za dato n_1 , n_2 i α nalazi vrednost $F_{n_1-1, n_2-1, \alpha}$ tako da je

$$P\{F_{n_1-1, n_2-1} \geq F_{n_1-1, n_2-1, \alpha}\} = \alpha.$$

Ukoliko je $\overline{F_{n_1-1, n_2-1}} \geq F_{n_1-1, n_2-1, \alpha}$ onda se hipoteza $H(\sigma_1^2 = \sigma_2^2)$ odbacuje, a u protivnom uzorak joj ne protivreći.

6. Testiranje hipoteze $H(\mu_1 = \mu_2)$ ako $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Formira se statistika

$$t' = \frac{\overline{X_{n_1}} - \overline{Y_{n_2}}}{\sqrt{\frac{S_{n_1}'^2(X)}{n_1} + \frac{S_{n_2}'^2(Y)}{n_2}}}.$$

Neka je $n_1 = n_2 = n$ i \bar{t}' registrovana vrednost statistike t' . Ako je $\bar{t}' \geq t_{n-1, \alpha}$ (jer t' ima Studentovu raspodelu) hipoteza $H(\mu_1 = \mu_2)$ se odbacuje, a u suprotnom uzorak joj ne protivreći. Ako je $n_1 \neq n_2$, vrednost \bar{t}' statistike t' se upoređuje sa

$$t_{n_1-1, \alpha}^* = \frac{\frac{S_{n_1}'^2(X)}{n_1} + t_{n_2-1, \alpha} \frac{S_{n_2}'^2(Y)}{n_2}}{\frac{S_{n_1}'^2(X)}{n_1} + \frac{S_{n_2}'^2(Y)}{n_2}},$$

i ako je $\bar{t}' \geq t_{n_1-1, \alpha}^*$ hipoteza $H(\mu_1 = \mu_2)$ se odbacuje, a u suprotnom joj uzorak ne protivreći.

7. Testiranje hipoteze $H(p = p_0)$

Ovo je tzv. testiranje pomoću proporcije uzoraka. Iz osnovnog skupa se uzima uzorak od n elemenata $n \geq 30$ i posmatra m od njih sa uočenim svojstvom. Ako se stavi $p = m/n$, tada slučajna promenljiva

$$t = \frac{\bar{p} - p_0}{\sqrt{\frac{\bar{p}(1 - \bar{p})}{n}}}$$

ima normalnu raspodelu sa parametrima 0 i 1. Ako je \bar{t} registrovana vrednost statistike t i $\bar{t} > z_{\alpha}$, gde je kao i ranije $2\Phi(z_{\alpha}) = \alpha$, onda se hipoteza $H(p = p_0)$ odbacuje, dok u suprotnom uzorak ne protivreći hipotezi $H(p = p_0)$.

8. Testiranje hipoteze $H(p_1 = p_2)$

Postupak je sličan kao u prethodnom slučaju. Neka su iz dva osnovna skupa sa nepoznatim proporcijama p_1 i p_2 nekog svojstva uzeta dva velika uzorka sa

statističkim vjerojatnoćama \bar{p}_1 i \bar{p}_2 . Ako je $\bar{p} = \frac{m_1 + m_2}{n_1 + n_2}$, tada slučajna promjenjiva

$$t = \frac{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}{\sqrt{\bar{p}(1 - \bar{p}) \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}$$

ima normalnu raspodelu sa parametrima 0 i 1. Ako je $\bar{t} > z_\alpha$ hipoteza $H(p_1 = p_2)$ se odbacuje, a u protivnom uzorak ne protivreći hipotezi $H(p_1 = p_2)$.

9. Pearson-ov χ^2 test

Ovaj test se koristi za testiranje hipoteze o tome da li je $F(x)$ funkcija raspodele obeležija X . Neka je (X_1, X_2, \dots, X_n) uzorak obeležija X, S_1, \dots, S_r disjunktne podskupovi skupa realnih brojeva Re tako da je

$$\bigcup_{i=1}^r S_i = Re, \quad p_i = P\{X \in S_i\} \quad (i = 1, \dots, r)$$

pod pretpostavkom da je $F(x)$ funkcija raspodele obeležija X . Dalje neka je $m_1(i = 1, \dots, r)$ broj slučajnih promjenljivih iz uzorka (x_1, \dots, x_n) čije su vrednosti S_i , $\sum_{i=1}^r m_i = n$. Tada je $E(m_i) = np_i$, a

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$$

Pearson-ova χ^2 statistika. Njen značaj je u tome što je, za veliko n ,

$$\chi^2 \approx \chi_{r-1}^2,$$

tj. χ^2 raspodela sa $r - 1$ stepena slobode. Dalje se sa χ^2 statistikom postupa kao sa običnom χ_{r-1}^2 promjenljivom. Postoji jedan jednostavan test (tzv. test Romanovskog) i hipoteza o raspodeli $F(x)$ se prihvata ako je

$$|\chi^2 - (r - 1 - k)| \leq 3\sqrt{2(r - 1 - k)},$$

a u protivnom se odbacuje. Ovde se parametri $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ koji figurišu u funkciji raspodele $F(x)$ zamenjuju odgovarajućim uzoračkim ocenama.

4.1.5. Analiza varijanse

Ovde se javlja tzv. jednofaktorski, odnosno dvofaktorski (ili čak višefaktorski) problem. Matematički model jednofaktorskog problema je sledeći: jedan faktor ima $k \geq 2$ nivoa koji se mogu opisati kvantitativno ili kvalitativno. Neka je X obeležje koje ispitujemo, i u j -tom nivou biramo prost uzorak veličine n_j :

$$(X_{j1}, X_{j2}, \dots, X_{jn_j}) \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Ako se sa m_j označi matematičko očekivanje obeležja X u populaciji koja je pos dejstvom j -tog nivoa uočenog faktora, onda se $\mu_j = m_j - m = m_j - EX$ naziva efekat j -tog nivoa. Pretpostavlja se da je

$$X_{ji} = m + \mu + \varepsilon_{ij}, \quad (i = 1, \dots, n_j = 1, \dots, k)$$

gde su ε_{ij} nezavisne slučajne veličine koje imaju normalnu raspodelu sa parametrima 0 i σ . Ovde se pretpostavlja da je dejstvo faktora aditivno (dodavanje μ_j pojedinim nivoima), a da su slučajne veličine ε_{ij} normalno raspoređene sa istom varijansom.

Ovo poslednje često nije ispunjeno u praksi te su razrađeni razni postupci kojima se taj nedostatak otklanja. U praksi se često postupa na sledeći način: uvode se oznake

$$\begin{aligned} \bar{X}_j &= \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} X_{ji}, \quad (j = 1, 2, \dots, k) \\ \bar{X} &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} X_{ji}, \quad n = \sum_{j=1}^k n_j \\ B &= \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ji} - \bar{X})^2, \quad C = \sum_{j=1}^k n_j \bar{X}_j^2 - n \bar{X}^2. \end{aligned}$$

Dalje se formira statistika

$$F_{k-l, n-k} = \frac{(n-k)C}{(k-1)B}$$

i vrši upoređivanje registrovane vrednosti $\bar{F}_{k-l, n-k}$ statistike $F_{k-l, n-k}$ sa vrednošću $F_{k-l, n-k, \alpha}$ iz tablica. Ako je

$$\bar{F}_{k-l, n-k} \geq F_{k-l, n-k, \alpha},$$

onda hipotezu $H(\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k = 0)$ odbacujemo, a u suprotnom uzorak ne protivreći hipotezi.

Kod dvofaktorskog problema imamo dva uzorka, recimo

$$x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n_1} \text{ i}$$

$$x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n_2},$$

na koje deluju faktori A_1 , odnosno A_2 . Aritmetičke sredine i varijanse posmatranih uzoraka su

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} x_{1i}, \quad \bar{x}_2 = \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} x_{2j},$$

odnosno

$$s_1^2 = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} (x_{1i} - \bar{x}_1)^2, \quad s_2^2 = \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} (x_{2j} - \bar{x}_2)^2.$$

Ukupna aritmetička sredina uzorka će biti

$$\bar{x} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n_1 + n_2},$$

a totalna disperzija S_t^2 će biti

$$S_t^2 = \sum_{i=1}^{n_1} (x_{1i} - \bar{x})^2 + \sum_{j=1}^{n_2} (x_{2j} - \bar{x})^2,$$

što se može pisati kao

$$S_t^2 = S_r^2 + S_A^2,$$

gde smo stavili

$$S_r^2 = \sum_{i=1}^{n_1} (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 + \sum_{j=1}^{n_2} (x_{2j} - \bar{x}_2)^2 = n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2,$$

$$S_A^2 = n_1 (\bar{x}_1 - \bar{x})^2 + n_2 (\bar{x}_2 - \bar{x})^2.$$

Ako se još uvedu veličine

$$W_t = \frac{S_r^2}{n_1 + n_2 - 1}, \quad W_A = \frac{S_A^2}{1}, \quad W_r = \frac{S_r^2}{n_1 + n_2 - 2},$$

onda je W_t ocena varijanse osnovnog skupa, W_A je varijansa sredine dve grupe uzoraka i zove se *faktorska varijansa*, a W_r je ocena varijanse osnovnog skupa iz koga je eliminisan uticaj faktora A_1 i A_2 , i zove se rezidualna varijansa.

Ako faktori A_1 i A_2 nemaju različitá dejstva, tada varijanse W_A i W_r treba da predstavljaju istu varijansu tj. da se malo razlikuju, te njihov količnik treba da je blizak jedinici. U praksi se formira statistika

$$F_{1, n_1 + n_2 - 2} = \frac{W_A}{W_r} = (n_1 + n_2 - 2) \frac{S_A^2}{S_r^2}$$

koja ima F - raspodelu sa parametrima 1 i $n_1 + n_2 - 2$. Dalji postupak je onda isti kao kod jednofaktorskog problema.

4.1.6. Korelacija i regresija

Koeficijent korelacije dve slučajne promenljive X i Y definisan je u poglavlju o verovatnoći kao

$$\rho = \frac{E(X - EX)(Y - EY)}{\sqrt{E(X - EX)^2} \sqrt{E(Y - EY)^2}} = \frac{E(X - EX)(Y - EY)}{\sigma_x \sigma_y},$$

gde je σ_x^2 varijansa X , a σ_y^2 varijansa Y .

Za koeficijent korelacije važi uvek $-1 \leq \rho \leq 1$. Dalje $\rho = 1$ ako između X i Y postoji linearna zavisnost, tj. $Y = AX + B$, dok je $\rho = 0$ ako su X i Y dve nezavisne slučajne promenljive. Ako je $0 < |\rho| < 1$, kažemo da između X i Y postoji delimična ili stohastička linearna zavisnost. Ako je $|\rho|$ blisko jedinici, onda se kaže da postoji visoka korelaciona ili jaka stohastička veza između X i Y . Takođe valja reći da se koeficijent korelacije ρ ne menja ako se X i Y zamene proizvoljnim linearnim funkcijama, odnosno ako se umesto X i Y posmatraju nove promenljive $\xi = aX + b$, $\eta = cY + d$.

U praksi se često koristi Spearman-ov koeficijent korelacije ranga. Pretpostavimo da smo za isti uzorak na dva načina odredili dva rang mesta, tj. uzorak a_i ($i = 1, 2, \dots, N$) ima u rang listi X rang (redni broj) x_i ($i = 1, 2, \dots, N$), a u rang listi Y rang y_i ($i = 1, 2, \dots, N$). Ako se stavi $d_i = x_i - y_i$, onda je Spearman-ov koeficijent korelacije ranga dat preko formule

$$(4.30) \quad \rho = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N^3 - N}.$$

Ako su rang liste identične $x_i = y_i$, pa je $d_i = 0$, tj. (4.30) daje $\rho = 1$, dok je $\rho = -1$ ako su rang liste identične, ali inverzne jedna drugoj.

Primer 4.4.

Neka X označava rang gradova po dohotku u privredi, a Y po dohotku u vanprivrednim delatnostima i neka je rang dat sledećom tablicom (4.1).

Ovde je $N = 8$, $\sum_{i=1}^N d_i^2 = 10$, pa je

$$\rho = 1 - \frac{6 \cdot 10}{512 - 8} = 0,8809 \dots$$

Spearman-ov koeficijent korelacije ranga u ovom slučaju. Vidi se da postoji dosta visoka korelacija ranga između obe rang liste, ali ipak ne tolika da bismo jednu mogli zameniti drugom.

Tabela 4.1.

	Rang po X	Rang po Y	d^i	d_i^2
Ljubljana	1	1	0	0
Rijeka	2	3	-1	1
Zagreb	3	4	-1	1
Beograd	4	2	2	4
Novi Sad	5	6	-1	1
Sarajevo	6	5	1	1
Titograd	7	8	-1	1
Skoplje	8	7	1	1

Kod jednoznačne funkcionalne zavisnosti između obeležja X i Y svakoj vrednosti $X = x$ odgovara jedna potpuno određena vrednost $Y = y$. Ukoliko je zavisnost između slučajnih promenljivih X i Y samo delimična, određenoj vrednosti $X = x$ odgovaraće obeležje Y sa uslovnim raspodelom za $X = x$. U slučaju neprekidne raspodele Y će za $X = x$ imati uslovnu gustinu $f(y|x)$. Kako između X i Y ne postoji sada određena funkcionalna veza, to možemo uspostaviti između njih jedino očekivanu vezu, uzimajući da vrednosti $X = x$ odgovara uslovna očekivana vrednost, tj.

$$y = E(Y|X = x) = \bar{y}(x).$$

Obrnuto se kaže da vrednosti $Y = y$ odgovara očekivana vrednost obeležja X za $Y = y$, tj.

$$x = E(X|Y = y) = \bar{x}(y),$$

a grafici krivih $y = \bar{y}(x)$ i $x = \bar{x}(y)$ se nazivaju *regresione krive*, i one se u opštem slučaju ne poklapaju.

U praksi se često javlja slučaj da je

$$(4.31) \quad \bar{y}(x) = ax + b,$$

pa se traži da se odrede parametri a i b . Ovo je tzv. model **linearne regresije**. Neka su y_1, \dots, y_n izmerene veličine skupa n nezavisnih promenljivih Y_1, \dots, Y_n , od kojih svaka ima normalnu raspodelu sa istom varijansom σ^2 i parametrima $\mu_i = E(Y_i|X_i) = ax_i + b$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Tada se a i b mogu odrediti iz sistema linearnih jednačina

$$(4.32) \quad bn + a \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i,$$

$$(4.33) \quad b \sum_{i=1}^n x_i + a \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Rešavanjem sistema (4.32) i (4.33) dobija se

$$(4.34) \quad a = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2},$$

$$(4.35) \quad b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}.$$

Ovaj izbor parametra a i b ima osobinu da je suma kvadrata

$$\sum_{i=1}^n (y_i - b - ax_i)^2$$

minimalna, pa se kaže da su a i b određeni metodom najmanjih kvadrata.

Primer 4.5.

Neka su iz 13 merenja dobivene vrednosti u zavisnosti od x putem sledeće tabele 4.2 :

Tabela 4.2.

x	70	75	80	85	90	95	100	105	110	115	120	125	130
y	30	26	51	48	40	46	61	76	61	50	64	53	71

Određiti linearnu zavisnost između y i x .

Ovde se koriste jednačine (4.34) i (4.35) te se dobija $a \approx 0,56$, $b \approx -3,9$ tj. $y = 0,56x - 3,9$.

Ilustraciju **nelinearnog modela regresije** imamo na sledećem primeru. Pretpostavimo da imamo regresionu funkciju

$$\bar{y}(x) = E(Y|x) = a + be^{-cx}$$

čije su vrednosti izmerene na skupu tačaka (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$. Metod najmanjih kvadrata kaže da se za a, b, c uzimaju one vrednosti za koje funkcija

$$G(a, b, c) = \sum_{i=1}^n (y_i - a - be^{-cx_i})^2$$

dostiže minimum. Traženjem parcijalnih izvoda G po a, b i c i izjednačavanjem sa nulom sledi da a, b, c treba da zadovoljavaju sistem jednačina

$$\begin{aligned} an + b \sum_{i=1}^n e^{-cx_i} &= \sum_{i=1}^n y_i, \\ a \sum_{i=1}^n e^{-cx_i} + b \sum_{i=1}^n e^{-2cx_i} &= \sum_{i=1}^n e^{-cx_i} y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i e^{-cx_i} + b \sum_{i=1}^n x_i e^{-2cx_i} &= \sum_{i=1}^n x_i y_i e^{-cx_i}. \end{aligned}$$

Za razliku od sistema (4.32) i (4.33) ovaj sistem nije linearan u odnosu na parametre a, b, c i njegovo rešavanje je dosta složeno; dobri približni rezultati se mogu dobiti iterativnim metodama numeričke analize (v. poglavlje o numeričkoj analizi).

S druge strane, model linearne regresije se može bez većih teškoća upotrebiti za **višestruku linearnu regresiju**, tj. recimo kada je regresiona funkcija

$$E(Y|x_1, x_2, x_3) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + x_4$$

linearna u odnosu na promenljive x_1, x_2, x_3 . Ako se znaju vrednosti y_i koje odgovaraju trojkama (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}) ($i = 1, 2, \dots, n$), onda se a_1, a_2, a_3, a_4 nalaze kao vrednosti za koje funkcija

$$G(a_1, a_2, a_3, a_4) = \sum_{i=1}^n (y_i - a_1 x_{i1} - a_2 x_{i2} - a_3 x_{i3} - a_4)^2$$

dostigne minimum, što se svodi na rešavanje sistema linearnih jednačina

$$\sum_{i=1}^n (y_i - a_1 x_{i1} - a_2 x_{i2} - a_3 x_{i3} - a_4) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n (y_i - a_1 x_{i1} - a_2 x_{i2} - a_3 x_{i3} - a_4) x_{i1} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n (y_i - a_1 x_{i1} - a_2 x_{i2} - a_3 x_{i3} - a_4) x_{i2} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^n (y_i - a_1 x_{i1} - a_2 x_{i2} - a_3 x_{i3} - a_4) x_{i3} = 0.$$

U opštem modelu linearne regresije traži se da je

$$E(Y_i) = \beta_1 x_{i1} + \dots + \beta_k x_{ik}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

što predstavlja linearnu regresionu funkciju od k fiksnih promenljivih. U matricnom zapisu to postaje

$$E(Y) = X\beta,$$

gde je

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nk} \end{bmatrix},$$

te se problem svodi na određivanje elemenata vektora kolone β , ako je poznata matrica X formata $n \times k$. Ako su y_i ($i = 1, \dots, n$) izmerene vrednosti promenljivih Y_i , onda treba da se odredi minimum funkcije

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \beta_1 x_{i1} - \dots - \beta_k x_{ik})^2$$

da bi se dobilo β metodom najmanjih kvadrata. Ako je y vektor sa komponentama y_i ($i = 1, \dots, n$), onda je traženo rešenje u matricnom obliku

$$\beta = (X'X)^{-1} X'y,$$

pri čemu X' označava transponovanu matricu X , tj. matricu koja se dobija iz X zamenom vrsta sa kolonama.

Gornje rešenje u matricnom obliku ima relativno jednostavan zapis, no praktična izračunavanja za veliko n i k mogu biti prilično komplikovana.

4.2. Primena statistike

U dvadesetim godinama ovoga veka pojavile su se prve precizne formulacije osnova matematičke statistike. Smatra se da su tvorci savremene statističke metodologije Nejman i Vold, koji u svojim radovima identifikuju i razvijaju osnovne tri oblasti statistike: teoriju ocene, teoriju provere statističkih hipoteza i teoriju planiranja eksperimenata.

Na kritici Fišerove teorije, Nejman je postavio osnovne savremene teorije ocene, zasnivajući je na intervalima poverenja (pouzdanosti). Značajan doprinos dali su Kolmogorov i Smirnov u istraživanjima na ovom polju, naročito u oblasti neparametarske teorije ocene i izučavanja intervala poverenja koji sa datom verovatnoćom sadrže nepoznatu funkciju raspodele.

Veliki doprinos razvoju teorije provere statističkih parametarskih hipoteza pored Nejmana dao je i Pirson. U oblasti neparametarskih hipoteza svojim radovima uticali su na razvoj teorije pored Kolmogorova i Smirnova, Šefe, Stejn, Lemon i drugi.

Teorija planiranja eksperimenata je najmlađa oblast statistike. Istraživanja u ovoj oblasti započeli su Fišer i Nejman, a Vold je svojim radovima značajno doprineo daljem razvoju.

Značajne doprinose razvoju matematičke statistike dali su osim navedenih i mnogi drugi matematičari.

Matematička statistika je jedna od oblasti sa izuzetno velikim brojem primena. Broj primena teško je i pobrojati. Pored toga postoji ozbiljna opasnost od grešaka kod ocene njene primenljivosti u raznim sferama društvenih, biomedicinskih, prirodnomatematičkih, tehničkih, školskih, privrednih, vojnih i drugih delatnosti.

Savremeni nivo rudarstva i geologije u naučnom i privrednom smislu, karakteriše neophodnost postupne analize velike mase podataka i informacija i zahtev za pouzdanim, odnosno, naučno zasnovanim ulazima (*input – ima*).

Ispunjenje ovih zahteva široko otvara vrata uvođenju matematičke statistike u praksu geologije i rudarstva, a savremena računarska tehnika sa izvanrednim mogućnostima ovaj proces značajno podupire i pospešuje.

Primena statistike u geologiji i rudarstvu ima slojevitost koja je posledica pre svega razuđenosti i različitosti unutar ovih oblasti.

Statistika se koristi od preliminarne ocena i sagledavanja pa preko inženjerskih analiza i viših nivoa projektovanja do operativne primene u proizvodnim i tehnološkim procesima.

Navešćemo samo značajnije geološke i rudarske probleme i zadatke u čijem rešavanju statistika pruža adekvatne alate. To su:

- o Obrada podataka dobijenih geološkim istraživanjima sa konačnim produktima: matematičko–statistički opis geoloških objekata, poređenje i klasifikacija geoloških objekata, opis zavisnosti između obeležja geoloških objekata i slično.
- o Intervalske ocene nestabilnosti promena geološko–istražnih pokazatelja, obuhvataju: intervalsku ocenu srednje vrednosti slučajnih veličina, intervalsku ocenu srednje vrednosti funkcija slučajnih veličina – kompleksni modeli obeležja geoloških objekata itd.
- o Obrada podataka geohemijskih istraživanja ležišta mineralnih sirovina. Za definisanje geohemijskih polja primenjuju se sledeći matematičko–modelski pristupi: aditivni, multiplikativni i aditivno–multiplikativni. Kod formiranja ovih modela, na matematičkoj statistici počivaju postupci izdvajanja determinisanih komponentata geohemijskih polja, zatim definisanje geohemijskih specifičnosti anomalnih geohemijskih polja, normiranje multiplikativnih geohemijskih pokazatelja itd.
- o Razgraničavanje geoloških objekata na osnovu kompleksa geoloških obeležja. Jedna od osnovnih geoloških radnji je kartiranje, odnosno modeliranje izučavanog dela zemljine kore u zadatoj razmeri. Ovaj zadatak rešava se u svim stadijumima geoloških istraživanja. Danas naglo narasli zahtevi za pouzdanim kartiranjem, u praksu kartiranja sve više uvode statističke metode.
- o U inženjerskoj analizi i projektovanju u rudarstvu i geologiji koriste se egzaktni podaci iz proizvodnje ili procenjene iskustvene vrednosti. I u jednom i u drugom slučaju statistički aparat pruža mogućnost pouzdane procene srednje vrednosti, mogućih odstupanja, raspona odstupanja, grešaka i slično.
- o Operativno vođenje tehnoloških procesa u eksploataciji čvrstih mineralnih sirovina, nafte i gasa podrazumeva i stalno praćenje, registrovanje, obradu

i analizu velikog broja podataka i informacija vezanih za radnu sredinu, tehnološki proces, tržišno – ekonomske i ekološke uslove. Zahtevi u pogledu ažurnosti praćenja i registrovanja ovih podataka kao i u pogledu brzine i pouzdanosti analitičkih procena, nameću potrebu za uvođenjem statističkih metoda i računarske tehnike u nadzor i upravljanje tehnološkim procesima u mineralnoj industriji.

- o Za laboratorijske opite u rudarstvu i geologiji (mekanika tla, mehanika stena, priprema mineralnih sirovina, ventilacija, ...) karakteristično je da se eksperimenti i merenja izvode sa mnogostrukim ponavljanjima ili merenjima na velikom broju uzoraka. Statistika se koristi u obradi eksperimentalnih rezultata radi utvrđivanja zakonitosti i veza, ali i kod planiranja eksperimenata.

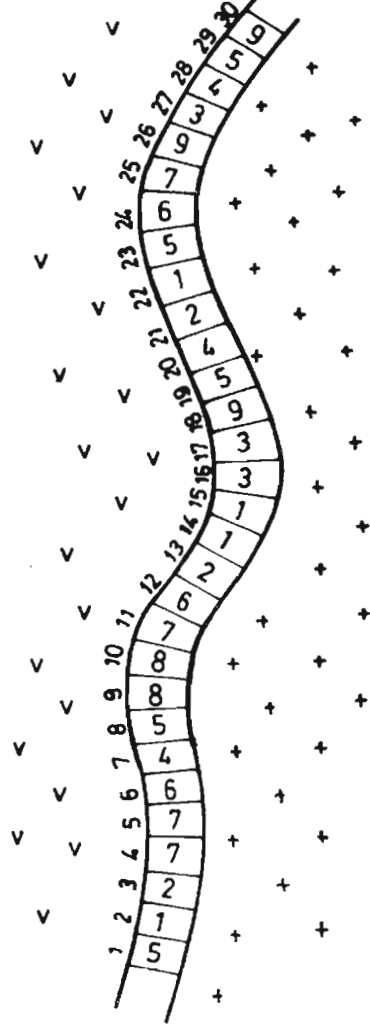
Pobrojane primene matematičke statistike ne omeđuju prostore, već ilustruju širinu, mogućnosti i značaj njene primene u rudarstvu i geologiji. Mnogo je konkretnih problema i zadataka različitih značaja i lokacija u geologiji i rudarstvu, za čije delimično ili potpuno rešavanje statistika nudi alate. No primenljivost je jedno, a primena drugo. Za adekvatnu primenu statističkih metoda potrebno je dobro poznavanje problema koji je predmet pažnje, zatim brojnost i kvalitet ulaznih podataka kao i poznavanje matematičke filozofije statističkih pristupa koji se koriste. Ukoliko se ne vodi računa o navedenim činionicama greške su neminovne. Savremena računarska poslovia: "U računar unesi smeće iz računara ćeš dobiti smeće", lepo ilustruje zavisnosti i upućuje na zaključak da je matematička statistika moćno i korisno oruđe u rukama onoga ko zna da je koristi, ali je i vrlo opasna njena primena ukoliko se neadekvatno koristi.

Naredni niz konkretnih primera čitaocu treba da pruži osnovna računarsko-manipulativna znanja o praktičnoj primeni statistike ali i da inspiriše i pobudi razmišljanja o drugim primenama u geologiji i rudarstvu. S obzirom na prirodu, ciljeve i obim knjige, autori su ubeđeni da je ovakav način prezentacije matematičke statistike primeren. Ukoliko zainteresovan čitalac želi više informacija o nekom konkretnom problemu iz statistike, odgovore može potražiti u vrlo bogatoj domaćoj i stranoj literaturi iz statistike.

4.2.1. Izračunavanje sa malim brojem podataka

Ležište polimetalne sirovine istražuje se podzemnim istražnim radovima. U delu istražnog hodnika uzeto je 30 proba. Na slici 4.1 prikazani su položaji uzimanja proba sa kumulativnim sadržajima metala po probama.

Učestalosti pojedinih kumulativnih sadržaja metala dati su u tabeli 4.3.



Sl. 4.1 - Plan opробavanja sa sadržajima metala

Tabela 4.3.

Sadržaj metala [%]	Broj proba	Učestalost
1	4	0,13
2	3	0,10
3	3	0,10
4	3	0,10
5	5	0,17
6	3	0,10
7	4	0,13
8	2	0,07
9	3	0,10
Σ	30	1,00

Srednji aritmetički sadržaj metala u rudi iznosi:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

$$\bar{x} = 1 \cdot 0,13 + 2 \cdot 0,10 + 3 \cdot 0,10 + 4 \cdot 0,10 + 5 \cdot 0,17 + 6 \cdot 0,10 + 7 \cdot 0,13 + 8 \cdot 0,07 + 9 \cdot 0,10 = 4,85 \text{ [%]}$$

Disperzija sadržaja metala određuje se:

$$S_n^2 = \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2 \right) \frac{n}{n-1},$$

$$S_n^2 = [0,13(1-4,85)^2 + 0,1(2-4,85)^2 + 0,1(3-4,85)^2 + 0,1(4-4,85)^2 + 0,17(5-4,85)^2 + 0,1(6-4,85)^2 + 0,13(7-4,85)^2 + 0,07(8-4,85)^2 + 0,1(9-4,85)^2] \cdot \frac{30}{29} = 6,525$$

Standardno ili srednje kvadratno odstupanje:

$$e_n = \sqrt{S_n^2} = \sqrt{6,525} = 2,554.$$

Koeficijent varijacije

$$V = \frac{e_n}{\bar{x}} 100 = \frac{2,554}{4,85} 100 = 52,66 \text{ [\%]}.$$

Za definisanje osnovnih svojstava raspodela slučajnih veličina koriste se **momenti**. Momenat k -tog stepena je srednja vrednost k -tog stepena odstupanja veličine x od neke stalne vrednosti C .

$$\alpha_k = \overline{(x_i - C)^k}.$$

Ukoliko se pri izračunavanju momenta koristi učestalost ili frekvenca, momenat se naziva empirijskim, a ukoliko se koristi verovatnoća – naziva se teorijskim.

Empirijski momenat k -tog stepena računa se

$$\alpha_k = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - C)^k p_i}{\sum_{i=1}^n p_i}.$$

Radi jednostavnijeg računanja uzećemo $C = 5$ (blisko vrednosti \bar{x}), tada uslovni¹ momenti prvog, drugog, trećeg i četvrtog stepena iznose:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (1-5)0,13 + (2-5)0,1 + (3-5)0,1 + (4-5)0,1 + (5-5)0,17 \\ &\quad + (6-5)0,1 + (7-5)0,13 + (8-5)0,07 + (9-5)0,1 = -0,15 \\ \alpha_2 &= (1-5)^2 0,13 + (2-5)^2 0,1 + (3-5)^2 0,1 + (4-5)^2 0,1 + (5-5)^2 0,17 \\ &\quad + (6-5)^2 0,1 + (7-5)^2 0,13 + (8-5)^2 0,07 + (9-5)^2 0,1 = 6,33 \\ \alpha_3 &= (1-5)^3 0,13 + (2-5)^3 0,1 + (3-5)^3 0,1 + (4-5)^3 0,1 + (5-5)^3 0,17 \\ &\quad + (6-5)^3 0,1 + (7-5)^3 0,13 + (8-5)^3 0,07 + (9-5)^3 0,1 = -2,49 \\ \alpha_4 &= (1-5)^4 0,13 + (2-5)^4 0,1 + (3-5)^4 0,1 + (4-5)^4 0,1 + (5-5)^4 0,17 \\ &\quad + (6-5)^4 0,1 + (7-5)^4 0,13 + (8-5)^4 0,07 + (9-5)^4 0,1 = 76,43 \end{aligned}$$

¹ Momenat nazivamo uslovnim kada je vrednost za C proizvoljna, a kada je $C = \bar{x}$ momenat nazivamo centralnim

Između centralnih i uslovnih momenata postoje sledeće veze:

$$\alpha_2^0 = \alpha_2 - \alpha_1^2,$$

$$\alpha_3^0 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3,$$

$$\alpha_4^0 = \alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 + 6\alpha_2\alpha_1^2 - 3\alpha_1^4.$$

Za naš primer centralni momenti su:

$$\alpha_2^0 = 6,33 - (-0,15)^2 = 6,3075,$$

$$\alpha_3^0 = -2,49 - 3(-0,15)6,33 + 2(-0,15)^3 = 0,3517,$$

$$\alpha_4^0 = 76,43 - 4(-0,15) \cdot (-2,49) + 6 \cdot 6,33(-0,15)^2 - 3(0,15)^4 = 75,789.$$

Znajući centralne momente, možemo izračunati karakter odstupanja raspodele sadržaja metala od simetrične normalne raspodele u 30 proba.

Koeficijent asimetrije iznosi:

$$K_A = \frac{\alpha_3^0}{e^3} = \frac{0,3517}{16,659} = 0,0211.$$

Ekces ili koeficijent spljoštenosti:

$$K_E = \frac{\alpha_4^0}{e^4} = \frac{75,789}{42,548} = 1,7812.$$

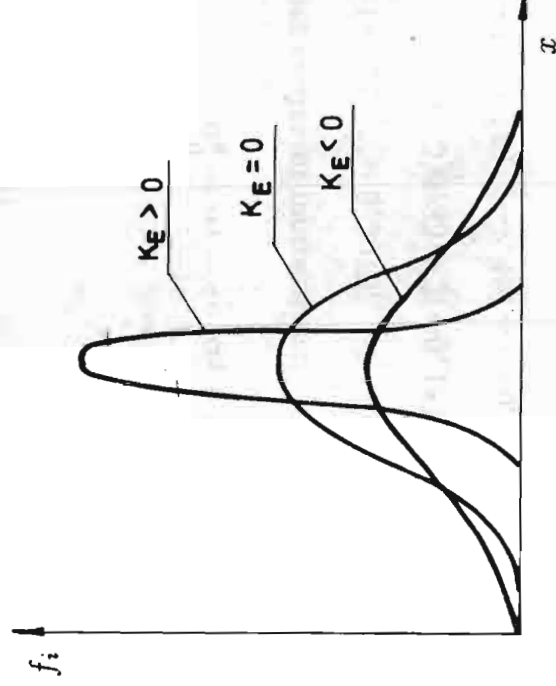
Na osnovu vrednosti za asimilaciju i ekces, može se zaključiti da raspodela učestalosti sadržaja metala u probama nema asimetrije i spljoštenost krive raspodele manju od normalne, odnosno izražen vrh. Napomenimo ako je koeficijent asimetrije $K_A = 0$, tada je raspodela frekvencije simetrična u odnosu na pravu $x = \bar{x}$. Ako je $K_A < 0$ asimetrija je negativna – pomerena ulevo, a kada je $K_A > 0$ asimetrija je pozitivna – pomerena udesno. Što je koeficijent asimetrije veći po apsolutnoj vrednosti, raspodela je više asimetrična.

Ako je $|K_A| < 0,1$ smatra se da asimetrije nema, ako je $0,1 < |K_A| < 0,25$ asimetrija je mala.

Kada je $0,25 < |K_A| < 0,5$ asimetrija je srednja, a ukoliko je $|K_A| > 0,5$ asimetrija je velika.

Ekces ili koeficijent spljoštenosti K_E jednak je nuli za normalnu raspodelu. Ako je $K_E > 0$ tada je spljoštenost krive raspodele manja od normalne, a kada je $K_E < 0$ spljoštenost je veća od normalne (sl. 4.2).

Ako koeficijenti asimetrije i ekcesa bitno ne odstupaju od nule, smatra se da postoji osnov za pretpostavku da je uzorak deo celokupnosti u kojoj obeležje x kao slučajna promenljiva ima normalnu raspodelu učestanosti.



Sl. 4.2 - Spljoštenost ili ekces

4.2.2. Izračunavanje sa velikim brojem podataka

U toku istraživanja navedenog polimetalnog ležišta uzeto je 500 proba. Podaci dobijeni hemijskim analizama o sadržajima pojedinih metala su središni. Iz njih se vidi da je maksimalan kumulativan sadržaj metala u jednoj probi 10, a minimalan 0.

Optimalna veličina intervala je:

$$\Delta x = \frac{x_{max} - x_{min}}{1 + 3,2 \log n} = \frac{10 - 0}{1 + 3,2 \log 500} = 1,037.$$

$$\Delta x \simeq 1,0.$$

Na osnovu podataka o hemijskim analizama proba i veličine intervala (klase) formirana je tabela 4.4.

Na osnovu elemenata iz tabele 4.4 sada se mogu izračunati uslovni momenti:

$$\alpha_1 = \frac{87}{500} = 0,174$$

$$\alpha_1^2 = 0,174^2 = 0,03$$

$$\alpha_1^3 = 0,0052$$

$$\alpha_1^4 = 0,0009$$

Tabela 4.4.

Granica intervala	Sredina intervala	Broj uzoraka [f_i]	$t_i = \frac{x_i - 2,5}{\Delta x}$	$t_i + 1$	$t_i \cdot f_i$	$(t_i + 1) \cdot f_i$	$t_i^2 \cdot f_i$	$(t_i + 1)^2 \cdot f_i$	$t_i^3 \cdot f_i$	$(t_i + 1)^3 \cdot f_i$	$t_i^4 \cdot f_i$	$(t_i + 1)^4 \cdot f_i$
01	0,5	83	-2,0	-1,0	-166	-83	332	83	-664	-83	1328	83
12	1,5	148	-1,0	0,0	-148	0	148	0	-148	0	148	0
23	2,5	100	0,0	1,0	0	100	0	100	0	100	0	100
34	3,5	70	1,0	2,0	70	140	70	280	70	560	70	1120
45	4,5	36	2,0	3,0	72	108	144	324	288	972	576	2916
56	5,5	25	3,0	4,0	75	100	225	400	675	1600	2025	6400
67	6,5	17	4,0	5,0	68	85	272	425	1088	2125	4352	10625
78	7,5	13	5,0	6,0	65	78	325	468	1625	2808	8125	16848
89	8,5	5	6,0	7,0	30	35	180	245	1080	1715	6480	12005
910	9,5	3	7,0	8,0	21	24	147	192	1029	1536	7203	12288
		500			87	587	1843	2517	5043	11333	30307	62385

$$\alpha_2 = \frac{1843}{500} = 3,686,$$

$$\alpha_3 = \frac{5043}{500} = 10,086,$$

$$\alpha_4 = \frac{30307}{500} = 60,614.$$

Srednji sadržaj metala u rudi je:

$$\bar{x} = \Delta x \cdot \alpha_1 + C = 1 \cdot 0,174 + 2,5 = 2,674 \quad [\%].$$

Odredimo disperziju

$$S_n^2 = \Delta x^2 (\alpha_2 - (\alpha_1)^2) = 1^2 (3,686 - (0,174)^2) = 3,656$$

i standardno odstupanje

$$e_n = \sqrt{S_n^2} = \sqrt{3,656} = 1,912 \quad [\%].$$

Koeficijent varijacije iznosi:

$$V = \frac{e_n}{\bar{x}} = \frac{1,912}{2,674} = 0,715.$$

Centralni momenti na osnovu uslovnih momenata računaju se:

$$\begin{aligned}\alpha_2^0 &= S_n^2 = 3,656 \\ \alpha_3^0 &= \Delta x^3(\alpha_3 - 3\alpha_2(\alpha_1)^2 + 2(\alpha_1)^3) \\ &= 1^3(10,086 - 3 \cdot 3,686(0,174)^2 + 2(0,174)^3) = 9,762 \\ \alpha_4^0 &= \Delta x^4(\alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 + 6(\alpha_1)^2\alpha_2 - 3(\alpha_1)^4) \\ &= 1^4(60,614 - 4 \cdot 0,174 \cdot 10,086 + 6(0,174)^2 \cdot 3,686 - 3(0,174)^4) = 54,261.\end{aligned}$$

Sada, pošto su definisani centralni momenti, mogu se izračunati asimetrija i ekces:

$$K_A = \frac{\alpha_3^0}{e_n^3} = \frac{9,762}{6,99} = 1,396,$$

$$K_E = \frac{\alpha_4^0}{e_n^4} = \frac{54,261}{13,364} = 4,060.$$

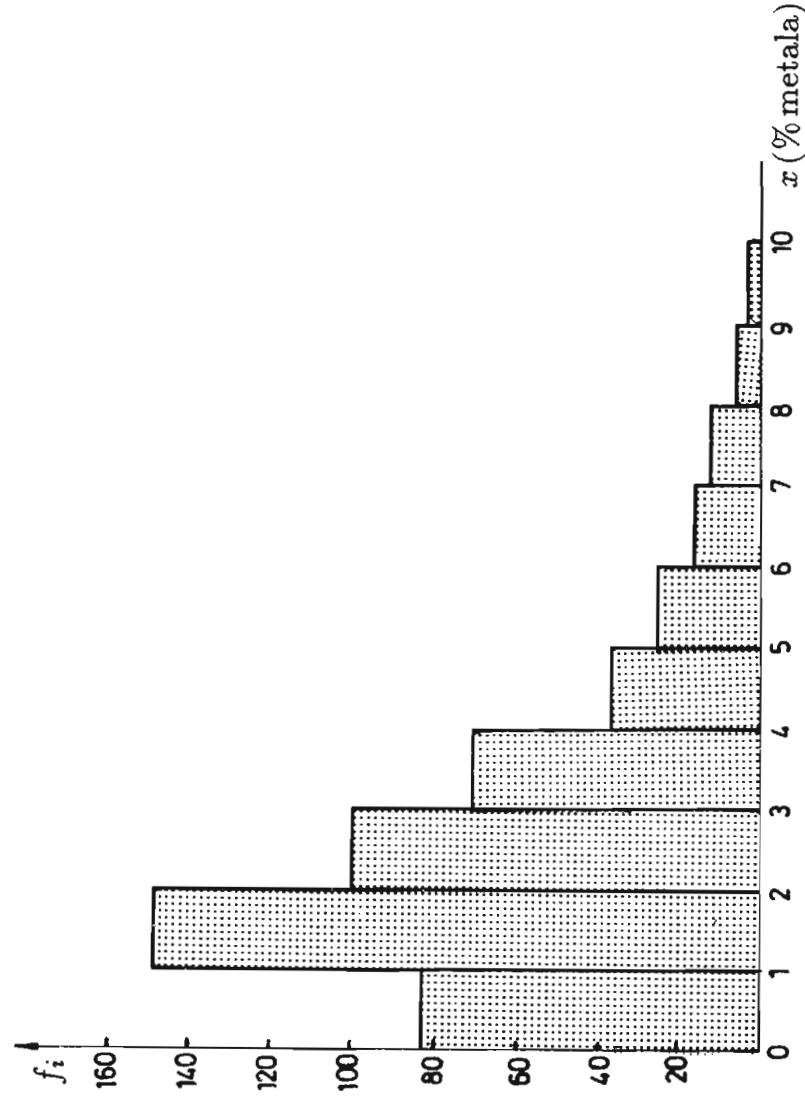
Vrednost izračunatog koeficijenta asimetrije ukazuje na izraženu desnu asimetriju, a vrednost ekcesa ukazuje na to da kriva raspodele sadržaja metala u 500 uzetih proba u ležištu, ima znatno viši i oštriji vrh u poređenju sa krivom normalne raspodele istog položaja centra i iste disperzije.

4.2.3. Grafičko predstavljanje varijacionih nizova

Varijacioni nizovi (nizovi podataka dobijeni odgovarajućim praćenjima i merenjima) u statistici se grafički predstavljaju u vidu histograma, poligona i kumulante.

Histogram je grafički prikaz gustina raspodele veličina obeležja koje je predmet "ispitivanja". Formira se u pravougloj koordinatnom sistemu, tako što se apscisna osa podeli na segmente proporcionalno intervalima varijacionog niza. Iznad svakog od segmenata u prikladnoj razmeri konstruiše se pravougaonik čija visina odgovara broju ili učestalosti (frekvenci) date klase podataka.

Na slici 4.3 predstavljen je histogram konstruisan na osnovu podataka iz tabele 4.4.

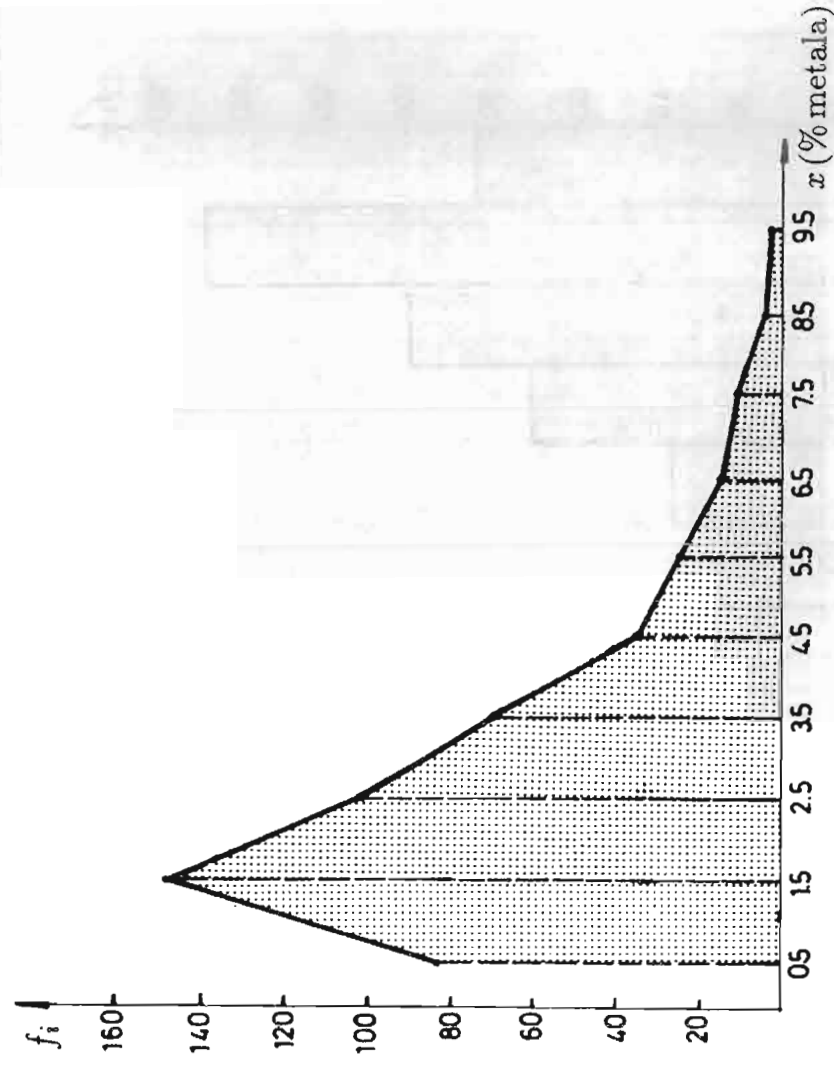


Sl. 4.3 - Histogram raspodele sadržaja metala u probama prema tabeli 4.4.

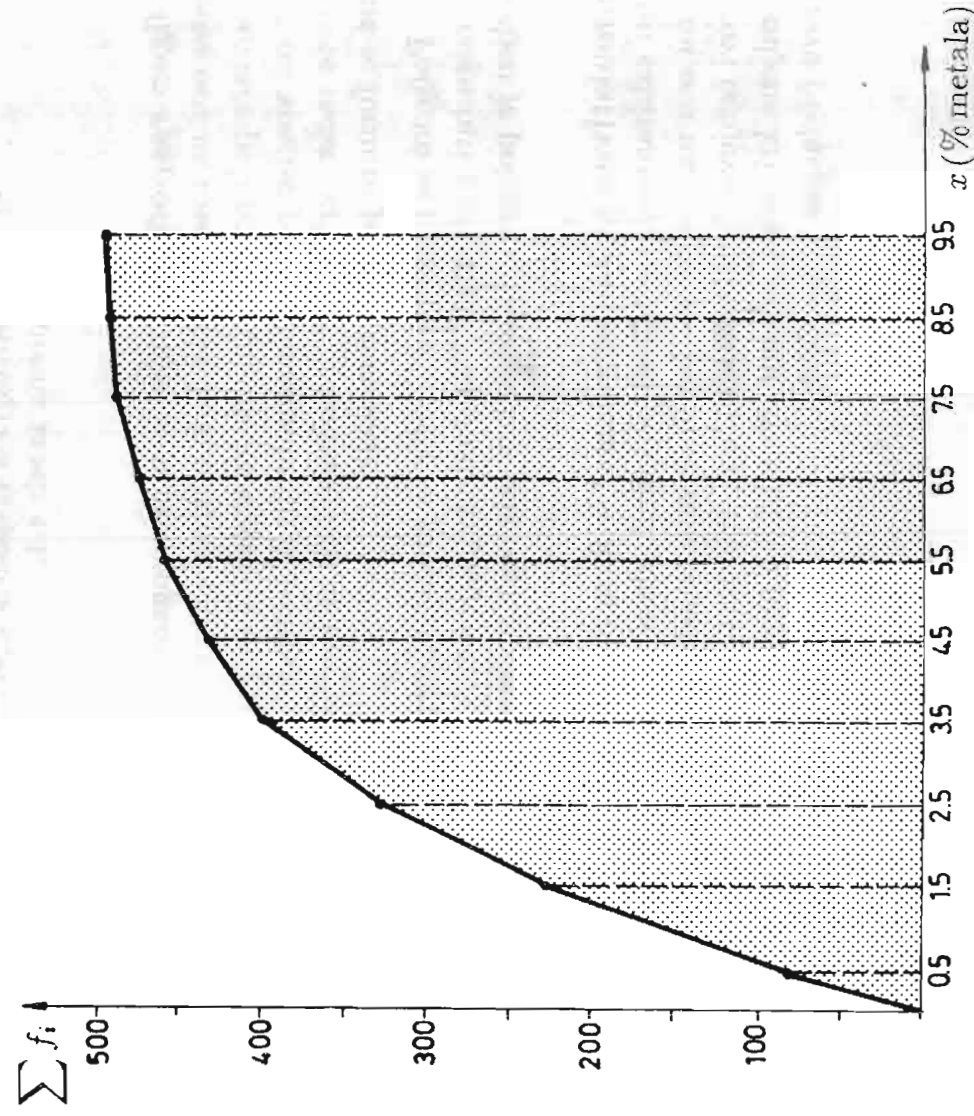
Poligon raspodele formira se u pravougaonom koordinatnom sistemu. Na apscisu osu nanose se tačke koje odgovaraju vrednosti sredine intervala. Iz tačke se povlače poluprave normalne na apscisu i na njih se nanose tačke čija je udaljenost od apscise proporcionalna broju ili učestalosti odgovarajuće klase podataka. Nanete tačke (vrhovi po ordinatnoj osi) se međusobno spajaju pravim linijama i time se formira poligon raspodele.

Poligoni se uglavnom koriste za predstavljanje diskretnih varijacionih nizova, ali mogu biti primenjeni i za predstavljanje intervalskih nizova. Na slici 4.4 predstavljen je poligon raspodele koji odgovara podacima iz tabele 4.4.

Kumulativna kriva (kumulanta) se formira u pravougaonom koordinatnom sistemu sabiranjem učestalosti pojedinih klasa podataka varijacionog niza. Na apscisu osu nanose se sredine intervala pojedinih klasa, a po ordinatnom pravcu zbirovi brojeva ili učestalosti klasa. Ako se tačke povežu pravim linijama dobija se izlomljena kriva-kumulanta. Na slici 4.5 prikazana je kumulanta konstruisana na osnovu podataka iz tabele 4.4.



Sl. 4.4. - Poligon raspodele sadržaja metala u probama, prema podacima iz tabele 4.4.



Sl. 4.5 - Kumulanta konstruisana prema podacima iz tabele 4.4

4.2.4. Medijana, modus i izračunavanje centara rasturanja

Kao što je u teorijskom delu ovog poglavlja konstatovano, jedna od karakteristika varijacionih nizova je medijana μ_e , tj. vrednost slučajne promenljive koja pada u sredinu uređenog varijacionog niza

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \dots \leq x_n.$$

U slučaju parnog broja podataka ($n = 2m$), medijana je jednaka:

$$\mu_e = \frac{x_m + x_{m+1}}{2},$$

a u slučaju neparnog broja podataka ($n = 2m + 1$):

$$\mu_e = x_{m+1}.$$

Geometrijski, medijana je predstavljena tačkom na apscisnoj osi kroz koju prolazi prava $x = \mu_e$ koja deli histogram na dva dela jednake površine.

Na sledećem primeru prikazaćemo načine izračunavanja medijane:

Petnaest uzoraka krečnjaka uzetih na površinskom kopu, ispitano je u geometričkoj laboratoriji. Rezultati ispitivanja čvrstoće na pritisak dati su u tabeli 4.5.

Tabela 4.5.

Prečnik cilindra d [mm]	Dužina cilindra l [mm]	Sila loma P [N]	Čvrstoća na pritisak σ [N/cm ²]
40	100	6656,8	530
40	100	7234,6	576
40	80	7297,4	581
40	85	7309,9	582
30	90	2877,8	611
30	90	2920,2	620
30	95	2943,7	625
30	80	2953,2	627
30	79	2972,0	631
20	81	2056,7	655
20	82	2059,8	656
20	75	2094,4	667
20	76	2106,9	671
20	80	2119,5	675
20	80	2125,8	677

Kako je broj uzoraka na kojima su izvršena merenja čvrstoće na pritisak neparan broj tj. $2m + 1 = 15$, $2m = 14$, $m = 7$, tada je

$$\mu_e = x_{m+1} = x_{7+1} = x_8 = 627.$$

Moda μ_0 je ona vrednost obeležja x kojoj odgovara najveća učestalost. U praksi se dešava da moda ne postoji ili da postoji više modalnih vrednosti. Inače moda se koristi za iznalaženje vrednosti obeležja x koje se najčešće pojavljuje.

Ako su podaci varijacionog niza raspoređeni u klase, onda se moda izračunava preko obrasca

$$\mu_0 = L + \Delta x \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2},$$

gde L - označava levu granicu modalne klase (klasa kojoj odgovara najveća učestanost),

Δx - širinu klase,

Δ_1 - razliku učestanosti modalne i prethodne klase i

Δ_2 - razliku učestanosti modalne i naredne klase.

Za primer o uzimanju 500 proba radi ispitivanja kumulativnog sadržaja metala u rudi (tabela 4.4), modalna klasa je [1-2], pa je moda:

$$\mu_0 = 1 + 1 \cdot \frac{148 - 83}{(148 - 83) + (148 - 100)} = 1,575.$$

Dakle najčešći kumulativni sadržaj metala u uzetih 500 proba u ležištu je $x = 1,575$ [%].

Geometrijska sredina se koristi kada se vrednosti slučajnih promenljivih menjaju približno po zakonu geometrijske progresije. Geometrijska sredina nema smisla ako su neke od vrednosti varijacionog niza negativne. Geometrijska sredina u suštini predstavlja srednju brzinu promene posmatrane pojave.

Na primer rudnik se nalazi u fazi otvaranja. U prvoj godini je dao proizvodnju od 40 000 [t] rude, u drugoj godini 180 000 [t], a u trećoj 360 000 [t]. Vidimo da je proizvodnja povećana u drugoj godini za 4.5 puta u odnosu na prvu godinu, a u trećoj godini za 2 puta u odnosu na drugu godinu. Prosečan porast proizvodnje računat preko geometrijske sredine iznosi:

$$G = \sqrt{x_1 x_2} = \sqrt{\frac{y_2}{y_1} \cdot \frac{y_3}{y_2}} = \sqrt{\frac{y_3}{y_1}},$$

$$G = \sqrt{\frac{360000}{40000}} = \sqrt{9} = 3.$$

Rezultat je logičan, pošto je proizvodnja rude za tri godine povećana za 9 puta ($40000 \cdot 3 \cdot 3 = 360000$ [t]).

Harmonijska sredina je definisana u teorijskom delu ovog poglavlja. Razmotrimo sledeći primer. Na površinskom kopu sa diskontinualnim tehnološkim sistemom eksploatacije, transport jalovine se obavlja sa pet dampera. U toku jedne radne smene konstatovano je da je radnik *A* na svome vozilu preveo 800 [t] materijala, radnik *B* 720 [t], radnik *C* 640 [t], radnik *D* 880 [t] i radnik *E* 560 [t]. Ukupno je prevezeno 3 600 t jalovine za 8 časova rada.

Prosek proizvodnosti jednog radnika računata preko aritmetičke sredine iznosi:

$$Q = \frac{800 + 720 + 640 + 880 + 560}{5} = 720 \text{ [t/smenu].}$$

Proizvodnost, međutim možemo iskazati i na drugi način, npr. kroz prosečno vreme prevoza 1 [t] jalovine. Na osnovu registrovanih učinaka radniku *A* bilo je potrebno 36 [s] za prevoz 1 [t] jalovine, radniku *B* 40 [s], radniku *C* 45 [s], radniku *D* 33 [s] i radniku *E* 51 [s].

Za izračunavanje prosečnog vremena za prevoz 1 [t] jalovine iskoristićemo harmonijsku sredinu:

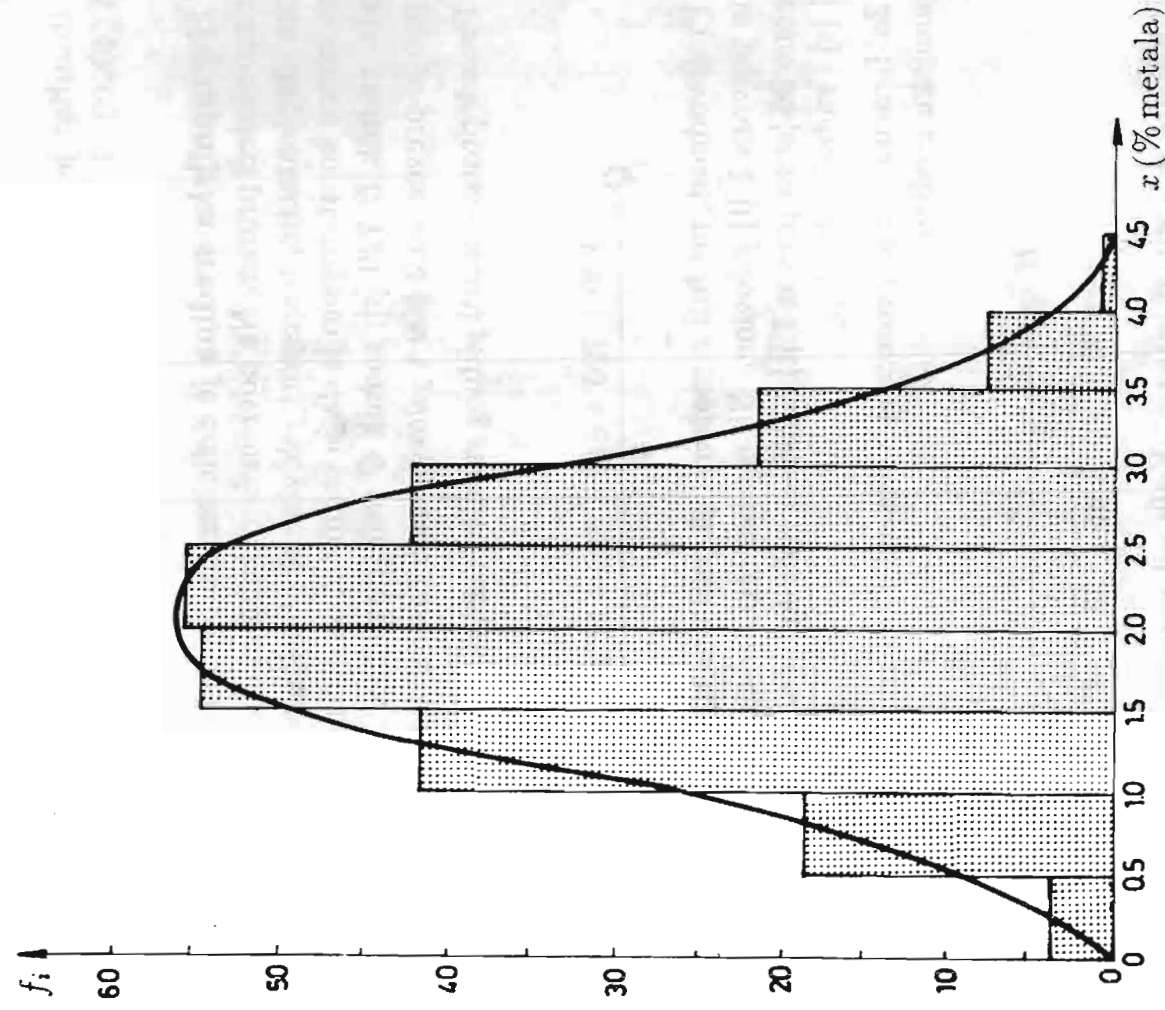
$$H = \frac{5}{\frac{1}{36} + \frac{1}{40} + \frac{1}{45} + \frac{1}{33} + \frac{1}{51}} = 40 \text{ [s].}$$

Postavlja se logično pitanje: Koju od navedenih sredina i kada primeniti u rešavanju geoloških i rudarskih problema?

Precizan odgovor na ovo pitanje se ne može dati pošto sve zavisi od problema koji se rešava. Evidentno je da na vrednost aritmetičke, geometrijske i harmonijske sredine utiču svi članovi varijacionog niza, dok na vrednost medijane i mode uticaj nemaju ekstremne vrednosti.

Zato ćemo kod onih analiza u kojima želimo da isključimo uticaje ekstremnih vrednosti koristiti medijanu ili modu. U analizama gde je neophodno dobiti sliku o brzinama promena pojava ili obeležja u prostoru i vremenu, upotrebićemo kao prikladnije oblike za računanje prosečnih brzina promena-geometrijsku i harmonijsku sredinu.

Normalni zakon raspodele (v. odeljak o verovatnoći): Po principu slučajnog uzora a pomoću tablice slučajnih brojeva (v. poglavlje 5, metoda "Monte Karlo", tab. 5.1) izvršimo izbor 250 uzoraka za klase od 0,0 % do 4,5 % sadržaja metala - od 500 uzetih proba iz polimetaličnog ležišta (tabl. 4.4). Rezultati dobijeni na ovaj način sredi su u tabeli 4.5, a na slici 4.6 dat je histogram raspodele učestalosti sadržaja metala slučajno izabranih uzoraka.



Sl. 4.6 - Histogram raspodele sadržaja metala u slučajno uzetim uzorcima

Tabela 4.6.

Sadržaj metala [%]	Broj uzoraka [fi]	Učestalost
0.0 - 0.5	4	0.016
0.5 - 1.0	19	0.076
1.0 - 1.5	42	0.168
1.5 - 2.0	55	0.220
2.0 - 2.5	56	0.224
2.5 - 3.0	43	0.172
3.0 - 3.5	22	0.088
3.5 - 4.0	8	0.032
4.0 - 4.5	1	0.004
	250	1,000

Kriva histograma ima zvonastu formu pri čemu najvišoj tački (ekstremu) odgovara sadržaj metala oko 2 [%]. Kriva je simetrična u odnosu na vertikalnu pravu koja prolazi kroz tačku na apscisnoj osi za sadržinu metala 2 [%].

Kao što je uočljivo sa slike 4.6 raspodela sadržaja metala u slučajnih 250 uzoraka, ima karakter normalne raspodele, dok raspodela učestalosti sadržaja metala u 500 uzetih proba u ležištu (slika 4.4) ima vrlo izraženu asimetriju. Na osnovu podataka iz tabele 4.6 izračunati su parametri normalne krive raspodele učestalosti sadržaja metala u slučajno uzetim uzorcima, a rezultati su prezentirani u tabeli 4.7.

Tabela 4.7.

Sadržaj metala [%]	Sredina intervala x_i	Broj uzoraka f_i	$t_i = \frac{x_i - 2,25}{\Delta x}$	$t f_i$	$t^2 f_i$	u	$\Phi(u)$	A	B	C
0.0 - 0.5	0.25	4	-4.0	-16	64	-1,950	0,025	0,025	0,016	0,009
0.5 - 1.0	0.75	19	-3.0	-57	171	-1,325	0,093	0,068	0,076	-0,008
1.0 - 1.5	1.25	42	-2.0	-84	168	-0,700	0,242	0,149	0,168	-0,019
1.5 - 2.0	1.75	55	-1.0	-55	55	-0,075	0,472	0,230	0,220	0,010
2.0 - 2.5	2.25	56	0	0	0	0,550	0,708	0,236	0,224	0,012
2.5 - 3.0	2.75	43	1.0	43	43	0,862	0,805	0,197	0,172	0,025
3.0 - 3.5	3.25	22	2.0	44	88	1,487	0,931	0,126	0,088	0,038
3.5 - 4.0	3.75	8	3.0	24	72	2,112	0,982	0,050	0,032	0,018
4.0 - 4.5	4.25	1	4.0	4	16	2,737	0,997	0,015	0,004	0,009
		250		-97	677					

Napomena: A – verovatnoće po klasama, B – eksperimentalna učestalost
C – razlike.

Izračunavanje elemenata u tabeli 4.7, vršeno je na sledeći način:

$$\alpha_1 = \frac{-97}{250} = -0,388.$$

Srednji sadržaj metala:

$$\bar{x} = \Delta x \alpha_1 + C = 0,5(-0,388) + 2,25 \simeq 2,06 \text{ [%]}.$$

Standardno odstupanje:

$$e_n = \Delta x \sqrt{\alpha_2 - \alpha_1^2} = 0,5 \sqrt{\frac{677}{250} - \left(-\frac{97}{250}\right)^2} \simeq 0,8.$$

Pomoćni parametar u (primer izračunavanja za prvu klasu):

$$u = \frac{x - \bar{x}}{e_n} = \frac{0,5 - 2,06}{0,8} = -1,95.$$

Vrednosti za

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

(v, odeljak o verovatnoći) određene su iz tabele 4.7.

Tako na primer za $u = -1,95$, $\Phi(u) = 0,025$.

Tabela 4.8.

u	.00	.02	.04	.06	.08	u	.00	.02	.04	.06	.08
-3,0	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0,0	0.500	0.508	0.516	0.524	0.532
-2,9	0.002	0.002	0.002	0.002	0.001	0,1	0.540	0.548	0.556	0.564	0.571
-2,8	0.002	0.002	0.002	0.002	0.002	0,2	0.579	0.587	0.595	0.603	0.610
-2,7	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0,3	0.618	0.626	0.633	0.641	0.648
-2,6	0.005	0.004	0.004	0.004	0.004	0,4	0.655	0.663	0.670	0.677	0.684
-2,5	0.006	0.006	0.006	0.005	0.005	0,5	0.691	0.698	0.705	0.712	0.719
-2,4	0.008	0.008	0.007	0.007	0.007	0,6	0.726	0.732	0.739	0.745	0.752
-2,3	0.011	0.010	0.010	0.009	0.009	0,7	0.758	0.764	0.770	0.776	0.782
-2,2	0.014	0.013	0.012	0.012	0.011	0,8	0.788	0.794	0.800	0.805	0.811
-2,1	0.018	0.017	0.016	0.015	0.015	0,9	0.816	0.821	0.826	0.831	0.836
-2,0	0.023	0.022	0.021	0.020	0.019	1,0	0.841	0.846	0.851	0.855	0.860
-1,9	0.029	0.027	0.026	0.025	0.024	1,1	0.864	0.869	0.873	0.877	0.881
-1,8	0.036	0.034	0.033	0.031	0.030	1,2	0.885	0.889	0.892	0.896	0.900
-1,7	0.045	0.043	0.041	0.039	0.038	1,3	0.903	0.907	0.910	0.913	0.916
-1,6	0.055	0.053	0.050	0.048	0.046	1,4	0.919	0.922	0.925	0.928	0.931
-1,5	0.067	0.064	0.062	0.059	0.057	1,5	0.933	0.936	0.938	0.941	0.943
-1,4	0.081	0.078	0.075	0.072	0.069	1,6	0.945	0.947	0.950	0.951	0.954
-1,3	0.097	0.093	0.090	0.087	0.084	1,7	0.955	0.957	0.959	0.961	0.962
-1,2	0.115	0.111	0.107	0.104	0.100	1,8	0.964	0.966	0.967	0.969	0.970
-1,1	0.136	0.131	0.127	0.123	0.119	1,9	0.971	0.973	0.974	0.975	0.976
-1,0	0.159	0.154	0.149	0.145	0.140	2,0	0.977	0.978	0.979	0.980	0.981
-0,9	0.184	0.179	0.174	0.169	0.164	2,1	0.982	0.983	0.984	0.985	0.985
-0,8	0.212	0.206	0.200	0.195	0.189	2,2	0.986	0.987	0.987	0.988	0.989
-0,7	0.242	0.236	0.230	0.224	0.218	2,3	0.989	0.990	0.990	0.991	0.991
-0,6	0.274	0.268	0.261	0.255	0.248	2,4	0.992	0.992	0.993	0.993	0.993
-0,5	0.308	0.302	0.295	0.288	0.281	2,5	0.994	0.994	0.994	0.995	0.995
-0,4	0.345	0.337	0.330	0.323	0.316	2,6	0.995	0.996	0.996	0.996	0.996
-0,3	0.382	0.374	0.367	0.359	0.352	2,7	0.996	0.997	0.997	0.997	0.997
-0,2	0.421	0.413	0.405	0.397	0.390	2,8	0.997	0.998	0.998	0.998	0.998
-0,1	0.460	0.452	0.444	0.436	0.429	2,9	0.998	0.998	0.998	0.998	0.999
-0,0	0.500	0.492	0.484	0.476	0.468	3,0	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999

* Iz knjige

P.A. Ryzhov i V.M. Gudakov: "Primenenie matematicheskoi statistiki pri razvedke nedr"

Računanje verovatnoće za klase, npr. za klasu (0,50 - 1,00) :

$$P(0,50 < x \leq 0,90) = \Phi(-1,325) - \Phi(-1,950) = 0,093 - 0,025 = 0,068.$$

Kao što se iz tabele 4.7 vidi eksperimentalne učestalosti su bliske verovatnoćama za normalnu raspodelu.

Za ocenu stepena bliskosti teorijske i empirijske raspodele u statistici je poznato nekoliko kriterijuma kao što je ranije rečeno. U obradi konkretnog problema poslužićemo se kriterijumom Kolmogorova.

Kolmogorov je dokazao da apsolutna vrednost maksimalne razlike empirijske funkcije raspodele $\bar{F}(x)$ i pretpostavljene teorijske

$$D_{max} = \max_{-\infty < x < \infty} |\bar{F}(x) - F(x)|$$

podleže definisanoj zakonitosti $K(\lambda)$.

Vrednost λ računa se po formuli:

$$\lambda = D_{max} \sqrt{n}$$

gde je: n - broj empirijskih podataka.

Iz tabele 4.7 vidi se da je $D_{max} = 0,038$, kako je $n = 250$ to je:

$$\lambda = 0,038 \sqrt{250} = 0,6.$$

Ako se pokaže da λ prevazilazi vrednost λ_g koja je definisana raspodelom $K(\lambda)$, tada se smatra da se empirijska raspodela ne slaže sa teorijskom. Vrednost za λ_g nalazi se u odgovarajućim tabelama gotovo svake standardne knjige iz statistike. Pretpostavimo da je prag poverenja $g = 0,05$ (ili 5 %) tada je $\lambda_g = 1,358$.

Kako je:

$$\lambda = 0,6 < \lambda_{0,05} = 1,358,$$

nema osnova da se odbaci hipoteza o slaganju empirijske raspodele i pretpostavljene normalne.

Iako ništa manje značajne od normalne raspodele, drugim tipovima raspodela slučajnih veličina kao i proverama statističkih hipoteza, kroz primere iz geologije i rudarstva, nećemo posvetiti veću pažnju od posvećene u teorijskom delu, pošto to iziskuje veći prostor od namenjenog poglavlju za statistiku.

Treba primetiti da normalna raspodela ima sa praktičnog stanovišta najveći značaj i to iz sledećih razloga:

- Veliki broj slučajnih promenljivih ima normalnu raspodelu aproksimativno.

- Ako slučajna promenljiva nema normalnu raspodelu, čak ako je nema ni aproksimativno, ona se može transformisati u normalnu slučajnu promenljivu relativno jednostavnom transformacijom.

- Neke komplikovanije raspodele mogu da se aproksimiraju normalnom raspodelom.

Za matematičko-statističke obrade podataka i analize u geologiji i rudarstvu pored normalne raspodele, posebno su interesantne: binomna, Puasonova, ekspancijalna, gama i log-normalna.

O raspedelama videti više u odeljku 3.0. o verovatnoći.

Binomna raspodela pripada grupi raspodela učestalosti diskretnih slučajnih promenljivih. Ova se raspodela često naziva i "nula-jedan" ili Bernulijeva. Aplikativna je u analizama pojava i procesa gde je verovatnoća pojave ili realizacije događaja uvek ista i jednaka. Za pojave i procese se pretpostavlja da su međusobno nezavisni.

Puasonova raspodela je granični slučaj Binomne raspodele, za uslov da je npr. broj eksperimenata veliki, a verovatnoća pojave nekog događaja u svakom pojedinom eksperimentu mala.

Puasonov zakon raspodele verovatnoće ima primenu u rudarstvu kod analize i simulacije diskontinualnih tehnoloških i transportnih sistema na rudnicima. Eksperimentalnim putem je uočeno slaganje empirijske raspodele trajanja transportnih ciklusa ili pojedinih faza u transportnom ciklusu i teorijske krive tih intervala po Puasonovom zakonu.

Ekspancijalna raspodela pripada klasi raspodela neprekidnih slučajnih promenljivih. Karakteristično je za ovu raspodelu da je određena jednim parametrom. Najznačajnija primena ekspancijalnog zakona raspodele je u analizi i matematičkom modelovanju pogonske spremnosti mašina i tehničko-tehnoloških procesa na rudnicima.

Gama raspodela takođe pripada grupi raspodela neprekidnih slučajnih promenljivih i naziva se još Ojlerova funkcija. Zapaženo je da empirijske raspodele obeležja nekih polimetalčnih ležišta, ležišta retkih i obojenih metala i zlata, dosta dobro opisuju gama raspodela.

Log-normalu raspodelu imaju promenljive varijacionih nizova sa oštrom asimetrijom normalnog zakona raspodele učestalosti. Pri ovome ne manipuliše se sa numeričkim već logaritamskim vrednostima promenljivih.

Zamena promenljivih njihovim logaritmima dozvoljava zasnovaniju primenu disperzione analize razvijene za normalnu raspodelu. Log-normalni zakon se koristi za opise raspodele sadržaja u rudi retkih metala i zlata, sa niskim sadržajima.

4.2.5. Analiza varijanse

Podaci dobijeni u toku istraživanja nekih pojava ili procesa u geologiji i rudarstvu, često zavise od niza nezavisnih i u toku odvijanja istraživanja prome-nljivih parametara. Kvantifikovanu ocenu uticaja zasebnih faktora na istraživanu pojavu ili proces moguće je dati disperzionom analizom, odnosno analizom varijanse, kao što je objašnjeno u teorijskom delu ovog poglavlja. Razmotrićemo jed-nostavniji slučaj analize varijanse – jednofaktorski problem, kroz sledeći primer:

Radi analize i vođenja procesa bušenja bušotina za miniranje, na rudniku žele da utvrde zavisnost između brzine i dubine bušenja. U tom cilju izvršeno je deset eksperimentalnih bušenja i merenja. Opitna bušenja su izvršena u andezitskoj radnoj sredini pri postojanom pritisku komprimovanog vazduha za pokretanje.

U tabeli 4.9 dati su rezultati eksperimentalnih merenja.

Za rešenje postavljenog problema, kao što smo konstatovali koristićemo jed-nofaktorsku analizu varijanse.

Tabela 4.9.

Dubina bušenja [m]	Izmerene brzine bušenja [mm/min]									
	EMB1	EMB2	EMB3	EMB4	EMB5	EMB6	EMB7	EMB8	EMB9	EMB10
0 - 1	90	91	87	95	89	90	92	92	94	91
1 - 2	93	67	85	89	76	90	93	71	92	65
2 - 3	85	87	89	83	90	83	77	67	73	72
3 - 4	60	64	89	75	87	74	88	83	80	79
4 - 5	74	69	90	71	80	63	83	89	66	90

Napomena: EMB – eksperimentalna minska bušotina.

U tabelia 4.10 date su sume i kvadrati suma brzina – dobijenih merenjima u intervalima od 1 m na svakoj od 10 bušotina, a u tabeli 4.11 rezultati numeričke obrade.

Tabela 4.10.

Dubina bušenja [m]	Izmerene brzine bušenja										$\sum_{i=1}^{i=10} x_i$	$\sum_{i=1}^{i=10} (x_i)^2$
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}		
0-1	90	91	87	95	89	90	92	92	94	91	911	83041
1-2	93	67	85	89	76	90	93	71	92	65	821	68539
2-3	85	87	89	83	90	83	77	67	73	72	806	65524
3-4	60	64	89	75	87	74	88	83	80	79	779	61561
4-5	74	69	90	71	80	63	83	89	66	90	775	61013
Σ	402	378	440	413	422	400	433	402	405	397	4092	339678

Tabela 4.11.

Dubina bušotina [m]	n_i	$\sum_{i=1}^{i=10} x_i$	$\sum_{i=1}^{i=10} (x_i)^2$	$\left[\sum_{i=1}^{i=10} x_i \right]^2$	$\left[\sum_{i=1}^{i=10} x_i \right]^2 / n_i$	$\sum_{i=1}^{i=10} (x_i - \bar{x})^2$
0-1	10	911	83 041	829 921	82 992,1	48,9
1-2	10	821	68 539	674 041	67 404,1	1134,9
2-3	10	806	65 524	649 636	64 963,6	560,4
3-4	10	779	61 561	606 841	60 684,1	876,9
4-5	10	775	61 013	600 625	60 062,5	950,5
Σ	50	4 092	339 678	3 361 064	336 106,4	3 571,6

Ocenu disperzije, uslovljenu promenljivošću brzine bušenja unutar pojedinih opita, računamo:

$$S_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{i=5} \sum_{i=1}^{i=10} (x_i - \bar{x})^2}{N - n} = \frac{3571,6}{50 - 5} = 79,37.$$

Disperziju S_2^2 koja izražava promenljivost prosečnih brzina po opitima u odnosu na opšti prosek, izračunavamo:

$$\begin{aligned} S_2^2 &= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\left(\sum_{i=1}^{i=n_i} x_i \right)^2}{n_i} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{i=n} \sum_{i=1}^{i=n_i} (x_i) \right)^2}{N} \right) = \\ &= \frac{1}{5-1} \left(336106,4 - \frac{4092^2}{50} \right) = 304,27. \end{aligned}$$

Kriterijum F_1 iznosi:

$$F_1 = \frac{S_2^2}{S_1^2} = \frac{304,27}{79,37} = 3,83.$$

Granice oblasti mogućih vrednosti kriterijuma F nalazimo iz odgovarajućih tablica u knjigama iz statistike. Pri stepenima slobode $k_1 = 10 - 1 = 9$ i $k_2 = 50 - 10 = 40$, granica oblasti je $F_2 = 2,14$ za prag poverenja $g = 5$ [%].

Izračunata vrednost kriterijuma F_1 nalazi se izvan oblasti dopuštenih vrednosti ($F_1 = 3,83 > F_2 = 2,14$).

Time se ne potvrđuje hipoteza da dubina bušenja ne utiče na brzinu bušenja, drugim rečima, to znači da u konkretnom slučaju postoji zavisnost između brzine i dubine bušenja.

Analiza varijansi je vrlo prikladan matematičko-statistički metod za rešavanje raznorodnih problema u geologiji i rudarstvu. Rudarstvo i geologija obiluju pojavama i procesima koje po svojoj prirodi i fizici pripadaju klasi problema, gde se često ispituju uticaji jednog, dva ili više faktora na neko obeležje. U takvim slučajevima, uz pretpostavku da su polazne informacije pouzdane i dovoljno obilne, analiza varijanse pruža mogućnost za objektivnu ocenu interakcije.

4.2.6. Korelacija i regresija

Izučavanje odnosa i veza među obeležjima, pojavama ili procesima, je jedan od osnovnih zadataka svake nauke, samim tim i rudarske i geološke. U matematičkoj statistici, pojave uzajamnih veza i njihovih karakteristika izučavaju se metodom korelacije. Naziv korelacija potiče od engleske reči *correlation* što znači međusobni odnos.

Pri obradi i korišćenju statističkih podataka u cilju formiranja naučnih ili praktičnih zaključaka, često je važno utvrditi kako se menja jedno obeležje pri promeni drugog, tj. potrebno je naći jednačinu veze i koeficijente korelacije i determinacije kojima je definisan stepen međusobne povezanosti.

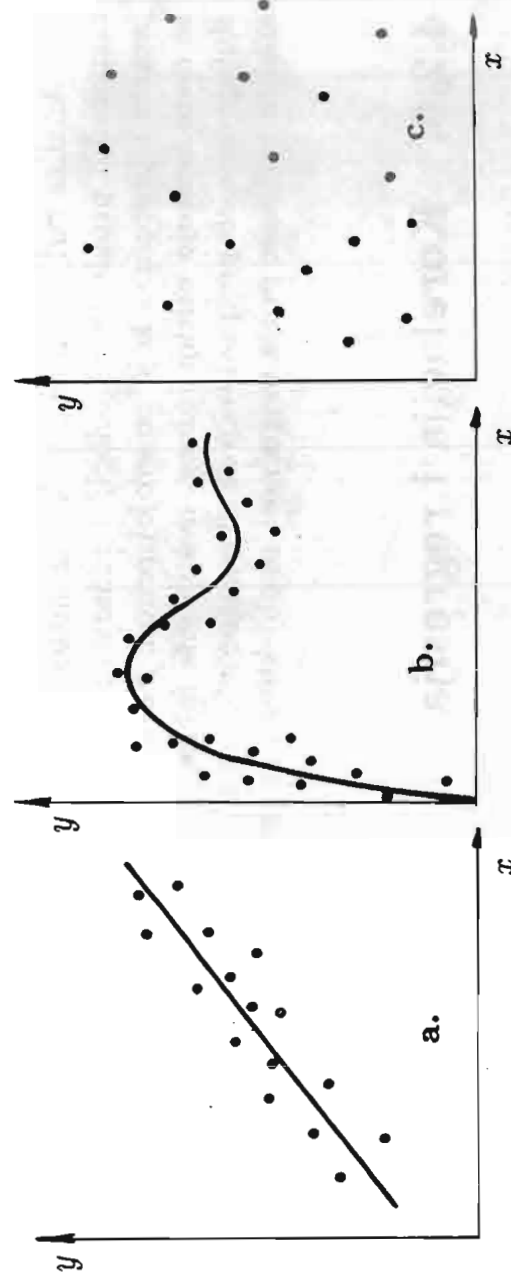
Povezanost između obeležja, pojava i procesa postoji ako porast npr. jednog obeležja prati porast drugog i obrnuto, ali povezanost postoji i ako pri porastu jednog obeležja drugo opada i obrnuto.

Povezanost između obeležja, pojava ili procesa razlikuje se po smeru i po intenzitetu. Za slučaj kada porast jednog obeležja prati porast drugog i obrnuto, kaže se da je smer povezanosti pozitivan. Za slučaj kada porast jednog obeležja prati pad drugog obeležja i obrnuto, kaže se da je smer povezanosti negativan.

Prema intenzitetu najjača ili najuža veza između obeležja je **funkcionalna** veza. To je takva veza gde svakoj vrednosti jednog obeležja odgovara tačno određena vrednost drugog. Slabija veza između obeležja, gde su moguća manja ili veća odstupanja, naziva se **korelativna** ili **stohastička** veza.

Osim po smeru i intenzitetu, povezanost se razlikuje i po obliku povezivanja. Najjednostavniji oblik veze je **linearna** veza a složeniji oblik je **krivolinijska** veza. Na slici 4.7 date su ilustracije, linearne i krivolinijske veze, kao i slučaj nekorrelativnosti.

Dakle pored definisanja jednačine veze, ili kako se još naziva jednačine regresije, koja predstavlja matematički model povezivanja statističkih obeležja, izučavanih pojava ili procesa, potrebno je utvrditi i jačinu veze. Mera jačine veze, kao što je napomenuto, je koeficijent determinacije ili koeficijent korelacije (Pearsonov koeficijent).



Sl. 4.7. - Oblici korelacija. a.-linearna korelacija, b.-nelinearna korelacija, c.-nekorelativnost

Kao empirijsko pravilo za ocenu jačine veze, prihvata se sledeće.

Tabela 4.12.

Koeficijent korelacije:	Ocena veze:
do 0.5	Neznatna veza između obeležja, nesigurnost je značajna
0.5 - 0.7	Pokazuje značajnu vezu nesigurnost je manja
0.7 - 0.8	Pokazuje jaču vezu, može imati praktičnu važnost
0.8 - 0.9	Pokazuje tesnu vezu, ima praktičnu važnost
0.9 - 1.0	Pokazuje vrlo tesnu vezu, ima visoku praktičnu važnost

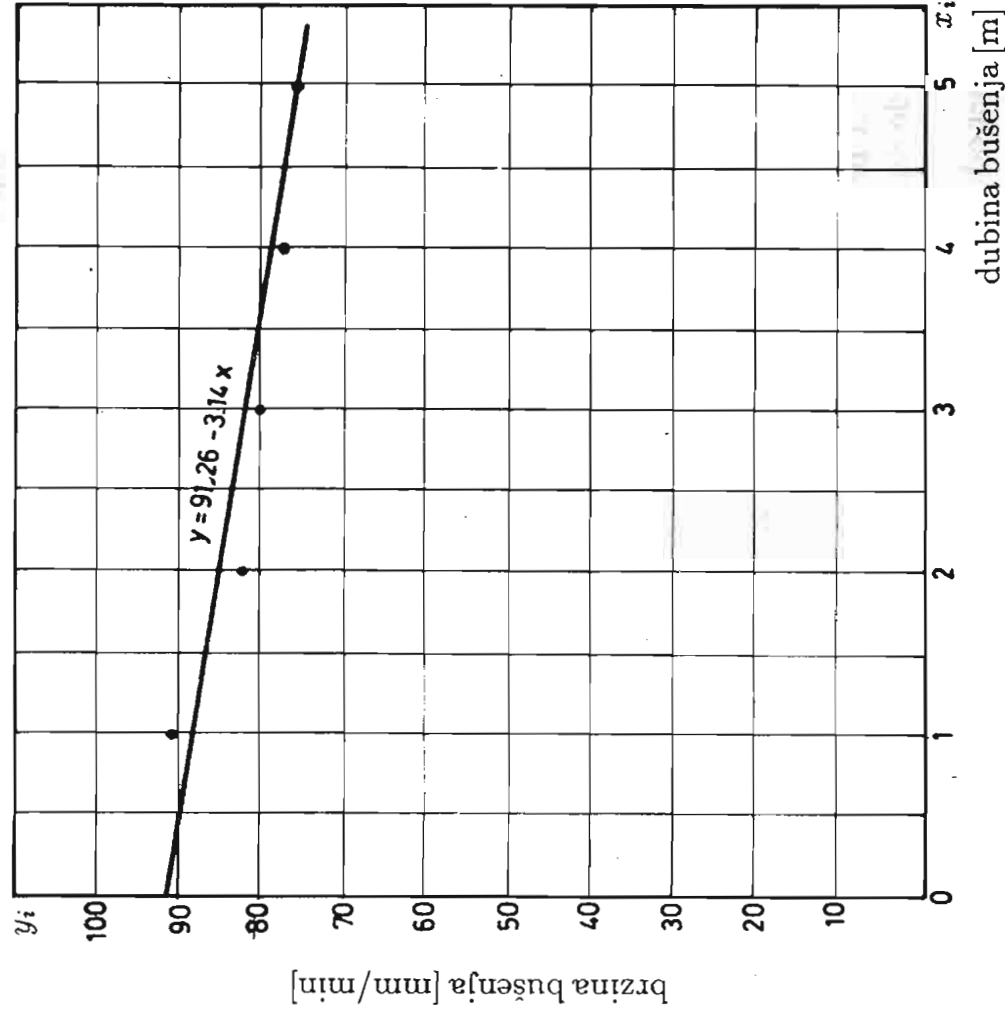
U praksi se preporučuje iz racionalnih razloga prvo utvrđivanje postojanja veza preko koeficijenata korelacije, a zatim preko jednačine regresije.

Na sledećim primerima pokazaćemo primenu korelativne analize u rešavanju konkretnih problema.

Analizom varijanse utvrđena je zavisnost između dubine i brzine bušenja u andezitskom masivu minskih bušotina dubine 5 m. Prosečne brzine bušenja, izračunate za pojedine intervale dubine na osnovu deset opitnih merenja, iznose:

Tabela 4.13.

Dubina bušenja [m]:	0 - 1	1 - 2	2 - 3	3 - 4	4 - 5
Brzina bušenja [mm/min]:	91,1	82,1	80,6	77,9	77,5



Sl. 4.8 - Grafički prikaz zavisnosti brzine od dubine bušenja

Uočljivo je da postojanje veze između brzine i dubine bušenja sa negativnim smerom povezanosti. Na osnovu pet parova, tačka postavljena u koordinatni sistem **slika 4.8**, uočava se da je njihov raspored približno linearan:

$$y = a_0 + a_1 x.$$

Ako x smatramo nezavisno promenljivom – dubina bušenja [m] a y zavisno promenljivom – brzina bušenja [mm/min], potražimo koeficijente a_0 i a_1 metodom najmanjih kvadrata. Sistem jednačina (4.32) i (4.33) iz teorijskog dela ovog poglavlja a prema podacima iz tabele 4.13 postaje:

$$5a_0 + 15a_1 = 409,2$$

$$15a_0 + 55a_1 = 1196,2$$

Iz prethodnog sistema jednačina dobija se:

$$a_0 = 91,26$$

$$a_1 = -3,14$$

Regresiona jednačina (v. sliku 4.8) ima formu;

$$y = 91,26 - 3,14x$$

Tabela 4.14.

Red.br.	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	y_i^2
1	1	91,1	1	91,1	8 299,21
2	2	82,1	4	164,2	6 740,41
3	3	80,6	9	241,8	6 496,36
4	4	77,9	16	311,6	6 068,41
5	5	77,5	25	387,5	6 006,25
Σ	15	409,2	55	1 196,2	33 610,64

Koeficijent korelacije računamo:

$$\rho = \frac{\sum x_i y_i}{\sqrt{(\sum x_i^2)(\sum y_i^2)}} = \frac{1\,196,2}{\sqrt{55 \cdot 33\,610,64}} \simeq 0,9.$$

Ovaj rezultat pokazuje da postoji tesna linearna korelacija između dubine i brzine bušenja do dubine od 5 [m] u andezitskoj radnoj sredini iz našeg primera.

Drugi primer odnosi se na primenu korelacione analize kod istraživanja oscilovanja nivoa podzemne vode u pijezometru.

Trogodišnjim praćenjem nivoa podzemne vode na jednom pijezometru u Kolubarskom ugljenom basenu i naknadnom statističkom obradom rezultata merenja, došlo se do zaključka o prosečnim nivoima podzemne vode po mesecima za period opažanja:

Tabela 4.15.

Mesec:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
NPV:	87,45	87,50	87,55	87,61	87,59	87,50	87,50	87,31	87,10	87,00	86,97	86,86

Napomena: NPV dato u [m].

U kompleksnoj regresionoj analizi na računaru izvršeno je testiranje veza: linearnom, geometrijskom, eksponencijalnom i polinomskom regresijom.

Dobijeni su sledeći rezultati.

• Linearna regresija:

$$y = 87,75 - 0,0648x,$$

$$\rho = 0,86.$$

- Geometrijska regresija:

$$y = 87,728 x^{-0.002742},$$

$$\rho = 0,67.$$

- Eksponencijalna regresija:

$$y = 87,75 e^{-0.0007414 x},$$

$$\rho = 0,86.$$

- Polinom drugog stepena:

$$y = 87,42 + 0,0776 x - 0,01094 x^2,$$

$$\rho = 0,968.$$

- Polinom trećeg stepena:

$$y = 87,209 + 0,23798 x - 0,0406 x^2 + 0,00152 x^3,$$

$$\rho = 0,985.$$

- Polinom četvrtog stepena:

$$y = 87,413 + 0,00647 x + 0,0324 x^2 - 0,00696 x^3 + 0,000326 x^4,$$

$$\rho = 0,992.$$

- Polinom petog stepena:

$$y = 87,547 - 0,1924 x + 0,1234 x^2 - 0,0244 x^3 + 0,001803 x^4 - 0,00004544 x^5,$$

$$\rho = 0,993.$$

- Polinom šestog stepena:

$$y = 87,176 + 0,475 x - 0,279 x^2 + 0,0858 x^3 - 0,0132 x^4 + 0,000953 x^5 - 0,0000256 x^6,$$

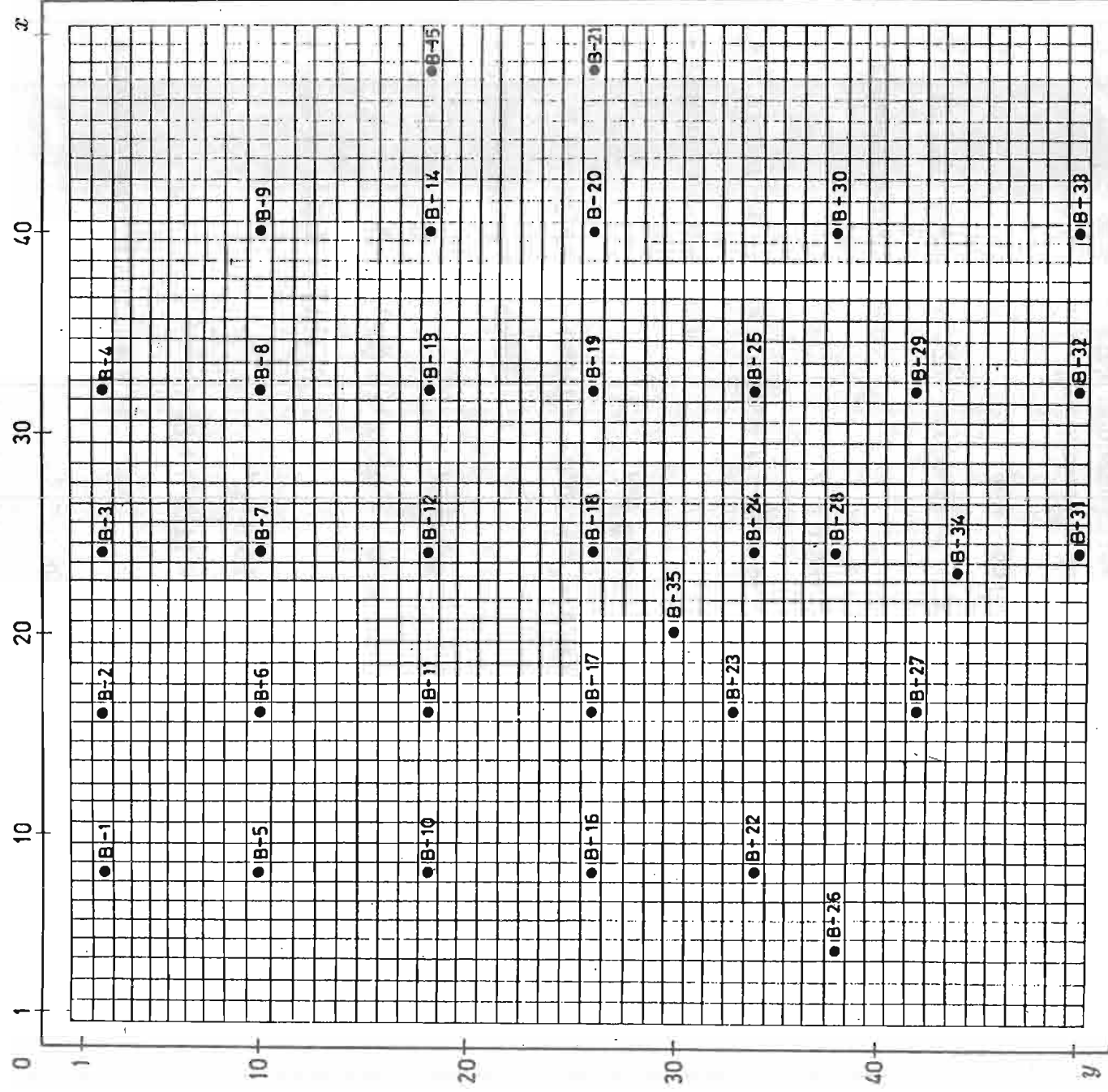
$$\rho = 0,995.$$

Očigledno je da najbolje odgovara polinom šestog stepena, ali je uočljivo da tesnu vezu pokazuju i ostale polinomske regresije. Jaku vezu pokazuju linearna i eksponencijalna regresija. Ovo nas upućuje na zaključak o potrebnoj obazrivosti i analitičnosti kod primene korelacione analize u praksi.

U prethodnim primerima pokazana je korelacija između dve promenljive ($y = f(x)$). Sledeći primer odnosi se na problem utvrđivanja korelacije između tri promenljive ($u = f(x, y)$).

Za prezentaciju poslužiće problem utvrđivanja korelacije prostorne distribucije SiO_2 u ležištu kvarcnog peska Oblaci kod Rgotine (S. Vujić, Matematičko modeliranje ležišta mineralnih sirovina [80]).

Ležište je istraženo istražnim bušenjem. Raspored bušotina dat je na slici 4.9.



Sl. 4.9. - Raspored bušotina

Korišćenjem programa za dvodimenzionalnu trend analizu, obrada problema je obavljena na računaru. Analize korelativnosti izvršene su sa polinomima drugog, trećeg, četvrtog, petog i šestog stepena.

Rezultati dobijeni polinomom drugog stepena bliski su rezultatima ostvarenim polinomom trećeg stepena, pa ih nećemo prezentirati.

Sa zadatim stepenom $n = 3$, dibijen je polinom

$$\begin{aligned} U(\text{SiO}_2 \%) &= 94,239 + 0,0314x + 0,0156y + 0,00643x^2 \\ &+ 0,0051y^2 - 0,0048xy - 0,000282x^3 \\ &+ 0,000288y^3 - 0,000299x^2y + 0,000111xy^2, \end{aligned}$$

kojim je utvrđena zakonitost prostorne distribucije SiO_2 u ležištu sa koeficijentom korelacije $\rho = 0,833$ i srednjim sadržajem 94,51 %.

Polinomi četvrtog, petog i šestog stepena dali su još bolje rezultate:

$n = 4$

$$\begin{aligned} U(\text{SiO}_2 \%) &= 108,63 - 0,012x - 2,311y - 0,067x^2 + 0,138y^2 \\ &+ 0,078xy + 0,0027x^3 - 0,00234y^3 - 0,0034x^2y \\ &- 0,000981xy^2 - 0,0000344x^4 + 0,0000282y^4 \\ &+ 0,0000938x^2y^2 + 0,0000333x^3y + 0,0000237xy^3, \end{aligned}$$

koeficijent korelacije $\rho = 0,913$, srednji sadržaj 94,60 %.

$n = 5$

$$\begin{aligned} U(\text{SiO}_2 \%) &= 157,221 - 3,97x - 10,345y + 0,0102x^2 + 0,742y^2 \\ &+ 0,5211xy + 0,00374x^3 - 0,0187y^3 - 0,0263x^2y \\ &- 0,01265xy^2 - 0,0000697x^4 + 0,000186y^4 \\ &+ 0,000417x^2y^2 + 0,00041x^3y + 0,000145xy^3 \\ &+ 0,000000089x^5 + 0,0000000313y^5 - 0,000000376x^4y \\ &- 0,0000016xy^4 - 0,0000029x^3y^2 - 0,000000x^2y^3, \end{aligned}$$

koeficijent korelacije $\rho = 0,961$, srednji sadržaj 94,86 %.

$n = 6$

$$\begin{aligned} U(\text{SiO}_2 \%) &= 191,754 - 12,284x - 15,649y + 0,883x^2 + 1,466y^2 \\ &+ 0,913xy - 0,04785x^3 - 0,04687y^3 - 0,0758x^2y \\ &- 0,0237xy^2 + 0,00167x^4 + 0,00032y^4 + 0,0025x^2y^2 \\ &+ 0,0024x^2y + 0,000311xy^3 - 0,000031x^5 + 0,0000114y^5 \\ &- 0,000041x^4y - 0,0000272xy^4 - 0,0000133x^3y^2 \\ &- 0,00000x^2y^3 + 0,000000217x^6 - 0,000000146y^6 \\ &+ 0,000000021x^5y + 0,000000xy^5 + 0,000000008x^4y^2 \\ &+ 0,000000059x^2y^4 + 0,00000000042x^3y^3, \end{aligned}$$

Na slici 4.10 grafički su interpretirani rezultati obrade. Uočljive su postupne transformacije površi SiO_2 od modela za $n = 3$ do modela za $n = 6$, što ukazuje na prisustvo lokalnih promena (šumova) u prostornoj distribuciji istraživanog obeležja.

Prema statističkom kriterijumu iskazanom preko koeficijenta korelacije, sva četiri rezultata imaju visoku ocenu.

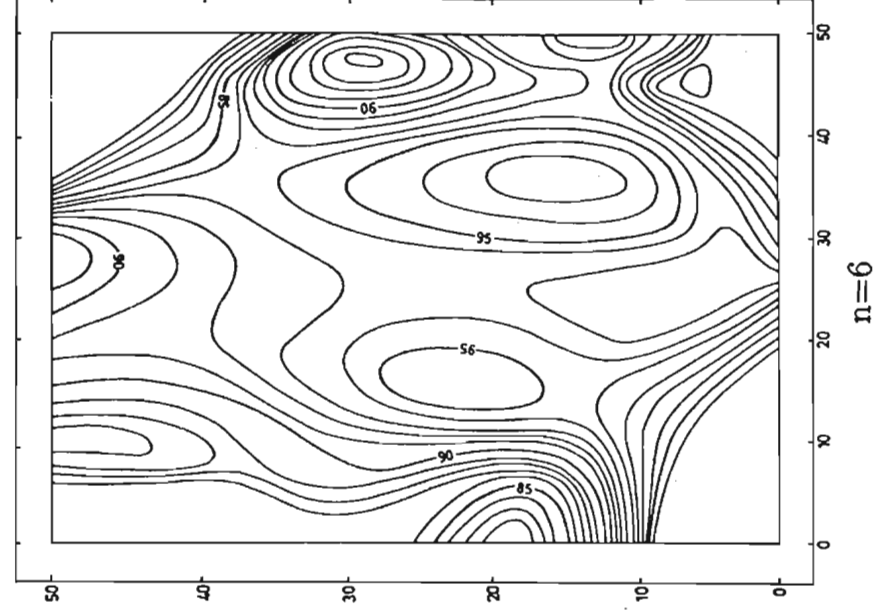
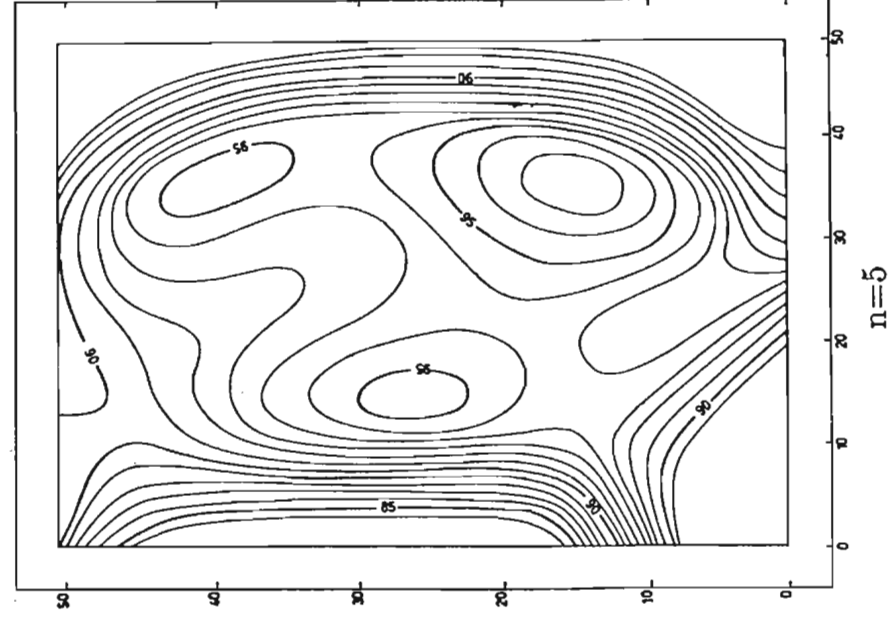
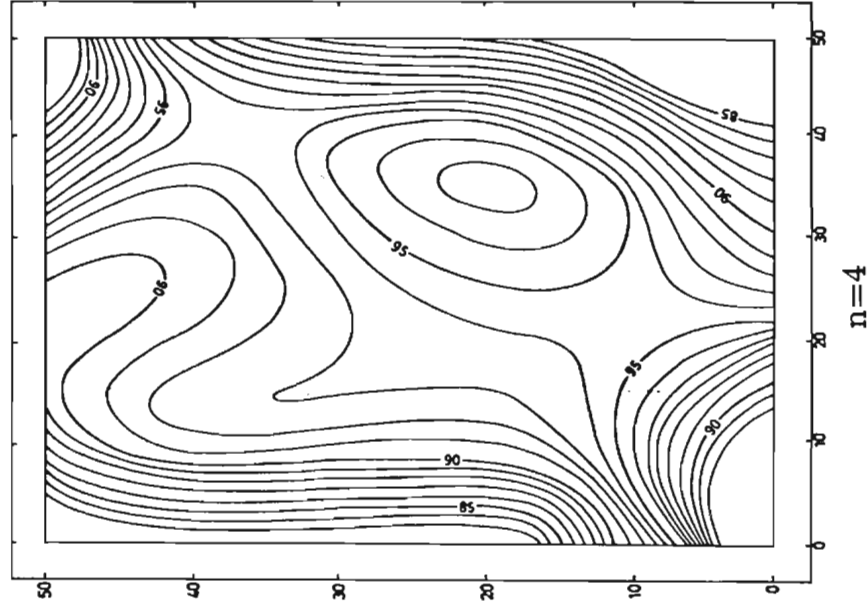
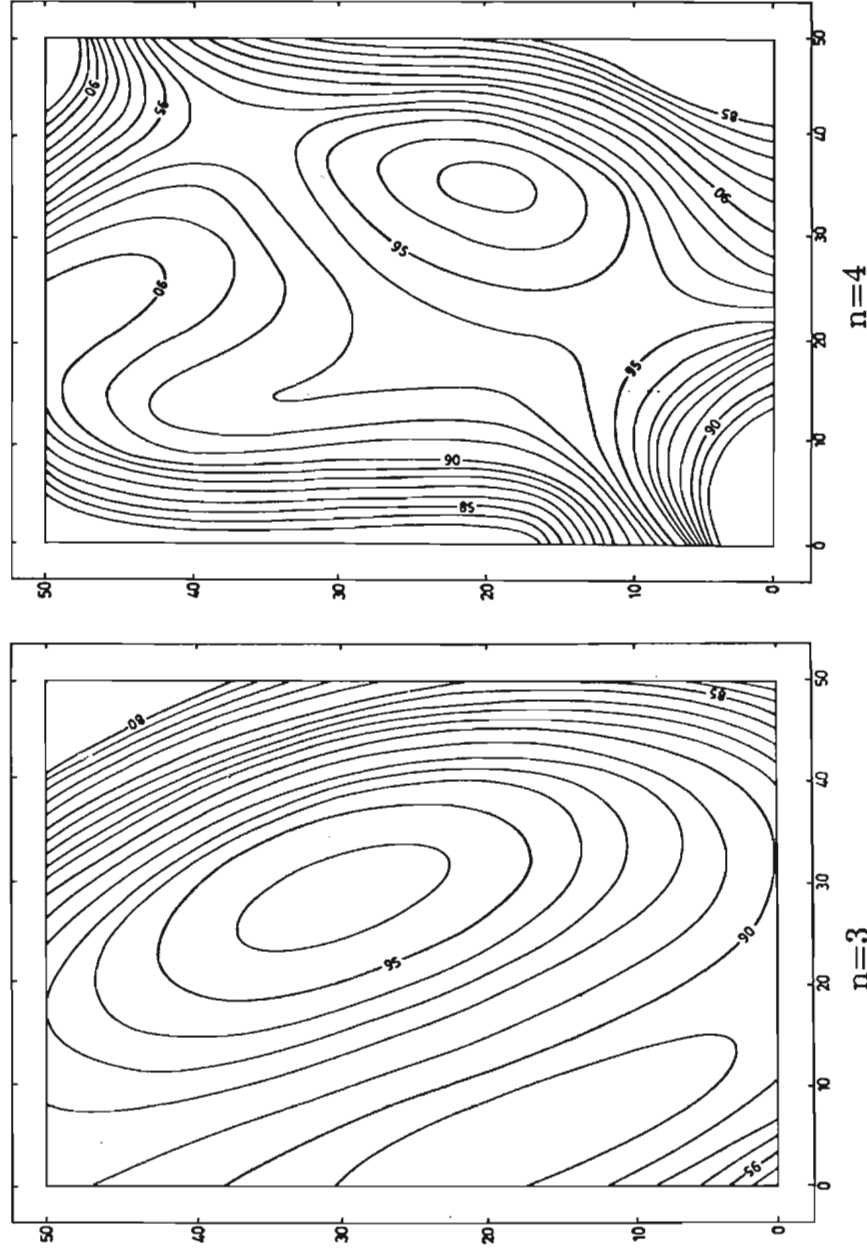
U praktičnom smislu, gledajući kroz kriterijume geološke nauke, postoje značajne razlike u vrednovanju dobijenih korelativnih modela. Za model sa $n = 3$, može se kazati da generalno dobro oslikava regionalnu komponentu, tj. glavni pravac promena SiO_2 u ležištu, dok su lokalne promene potpuno prigušene. Iz tih razloga ovaj model ima vrlo ograničenu praktičnu upotrebnu vrednost.

Modeli sa $n = 4, 5$ i 6 oslikavaju lokalne promene prostorne distribucije SiO_2 u ležištu, što znači da je matematička slika bliža stvarnoj.

Posmatrajući ova tri modela, lako se uočava da najveću plastičnost ima model sa $n = 6$.

Sva tri modela imaju praktičnu upotrebnu vrednost, sa prednošću modela za $n = 6$, što se iskazuje i najvećom vrednošću njegovog koeficijenta korelacije koji ovaj model svrstava u grupu modela sa funkcionalnim vezama. Dakle povećanjem stepena polinoma dolaze do izražaja lokalne promene, pa samim tim jačaju i veze između analiziranih obeležja ili parametara.

Primećeno je u sklopu ovih eksperimenata da se sa povećanjem stepena korelativnog polinoma povećava sračunati srednji sadržaj SiO_2 u ležištu. Analiza je pokazala da je ovo posledica uslova kontinualnosti korelativne površi. Kod polinoma viših stepena izraženije su lokalne fluktuacije, pa dolazi do češćih iskakanja "pikova" i povlaćanja navise ukupne prosečne vrednosti analiziranog obeležja.



Sl. 4.10. - Modeli prostorne distribucije SiO_2 dobijeni korelativnom analizom

5. Metoda Monte Karlo

5.1. Teorijske osnovi metode Monte Karlo

5.1.1. Opšte postavke

Pod metodama "Monte-Karlo" podrazumevaju se numerički metodi za rešavanje matematičkih problema uz pomoć modeliranja slučajnih promenljivih i statističkih ocena njihovih karakteristika. U principu se veliki broj matematičkih problema može rešavati ovim metodama, i to ne samo onih koji su vezani za verovatnoću i slučajne promenljive. Osnovna ideja se sastoji u sledećem: da bismo izračunali neku skalarnu veličinu a potrebno je naći takvu slučajnu promenljivu X za koju je $EX = a$. Tada se odredi N međusobno nezavisnih vrednosti X_1, X_2, \dots, X_N promenljive X pa se uzima da je približno

$$(5.1) \quad a \approx \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_N}{N},$$

a na osnovu centralne granične teoreme iz verovatnoće ovakva aproksimacija daje rezultate za veliko N . Razume se da promenljiva X nije jednoznačno određena, pa se ovde prirodno nameću sledeća pitanja:

- 1) Kako odabrati podesnu slučajnu promenljivu X za izračunavanje željene veličine a ?
- 2) Kako odrediti vrednosti X_1, X_2, \dots, X_N slučajne promenljive X ?

Osnovni cilj metode "Monte-Karlo" je, da u svakom konkretnom problemu, dobijemo što bolje odgovore na ova pitanja te onda efektivno izračunamo željenu veličinu a .

5.1.2. Dobijanje slučajnih brojeva

U algoritmima "Monte-Karlo" važnu ulogu igraju tzv. slučajni brojevi, i strogo govoreći oni postoje jedino kao rezultati slučajnih procesa. Mogu se dobiti pomoću raznih generatora slučajnih brojeva ili iz tablica slučajnih brojeva. Po pravilu se uzima standardna neprekidna promjenjiva γ sa uniformnom raspodelom na $(0, 1)$. Tada je njena gustina na $(0, 1)$ $f_\gamma(x) = 1$, funkcija raspodele $F_\gamma(x) = x$, $E\gamma = 1/2$, $Var\gamma = 1/12$. Decimalni zapis γ glasi

$$(5.2) \quad \gamma = 0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k, \dots,$$

tj.

$$(5.3) \quad \gamma = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \times 10^{-k},$$

gde su $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$, tzv. slučajne cifre, tj. nezavisne slučajne promenljive koje sa jednakom verovatnoćom 0, 1 uzimaju vrednosti iz skupa $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Pretpostavimo da smo ostvarili N nezavisnih opita u kojima se dobilo N slučajnih cifara $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N$. Ako se te cifre zapišu (u početku pojavljivanja) u tablicu, onda se dobija tzv. tablica slučajnih cifara. Način upotrebe takve tablice je veoma prost: ako nam je potrebna slučajna cifra ε , mi možemo uzeti proizvoljnu cifru ε_s iz tablice, a ako nam je potreban slučajan broj γ , onda uzimamo iz tablice n uzastopnih cifara i stavljamo $\gamma = 0, \varepsilon_s, \varepsilon_{s+1}, \dots, \varepsilon_{s+n-1}$. Izbor cifara iz tablice na ovaj način može biti slučajan, a može se vršiti i po nekom utvrđenom redosledu. Na ovaj način nastaju tzv. pseudoslučajni brojevi putem algoritama

$$(5.4) \quad \gamma_{n+1} = \Phi(\gamma_n), \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

gde je γ dati slučajan broj, a brojevi $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ se izračunavaju po nekom zakonu Φ iz gornje formule.

Jedan od čestih algoritama tipa (5.4) je tzv. Nojmanov metod sredine kvadrata. U tom algoritmu se broj γ_n uzima u decimalnom zapisu sa 2 k cifara:

$$(5.5) \quad \gamma_n = 0, a_1, a_2, \dots, a_{2k} \quad (a_1, a_2, \dots \text{ cifre}).$$

Da bi se dobio broj γ_{n+1} treba formirati kvadrat

$$(5.6) \quad \gamma_n^2 = 0, b_1, b_2, \dots, b_{4k}$$

i zatim odabrati srednje cifre tog kvadrata, tj. uzeti

$$(5.7) \quad \gamma_{n+1} = 0, b_{k+1}, b_{k+2} \dots b_{3k}.$$

Svaki realan broj X može se predstaviti u obliku

$$(5.8) \quad X = [X] + \{X\},$$

gde je $[X]$ ceo broj od X , a $\{X\}$ razlomak deo od X .

Na primer $[5,623] = 5$, a $\{5,623\} = 0,623$. Uz pomoć funkcija $[X]$ i $\{X\}$ Nojmanovom algoritmu odgovara funkcija

$$(5.9) \quad \Phi(X) = \{10^{-2k} [10^{3k} X^2]\}$$

u jednačini (5.4).

Drugi poznati algoritam tipa (5.4) je Lehmerov rezidualni metod.

Tu je $\Phi(x) = \{gx\}$, tj.

$$(5.10) \quad \gamma_{n+1} = \{g \gamma_n\},$$

gde je g neki veliki ceo broj.

Umesto (5.4) za generisanje pseudoslučajnih brojeva se mogu koristiti i komplikovaniji algoritmi, kao recimo

$$(5.11) \quad \gamma_{n+1} = \{10^{2k} [10^{3k} \gamma_n \gamma_{n-1}]\} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

pri čemu je γ_n oblika (5.5), a γ_0 i γ_1 su dati slučajni brojevi.

5.1.3. Modeliranje slučajnih promenljivih

Ovde se radi o izračunavanju vrednosti slučajne promenljive X pomoću slučajnih brojeva γ , pri čemu je poznata funkcija raspodele $F(x)$ od X . Ukoliko se radi o diskretnoj slučajnoj promenljivoj, onda je najčešće poznata verovatnoća $p_i = P(X = x_i) \quad (i = 1, 2, \dots)$.

Tada se interval $[0, 1]$ razdeli na podintervale dužine $\Delta_i = p_i$:



Ukoliko se slučajna promenljiva X definiše kao $X = x_i$ ako $\gamma \in \Delta_i$, onda je upravo $p_i = P(X = x_i)$, tj. zadatak je rešen.

Ako se radi o neprekidnoj slučajnoj promenljivoj X , pretpostavimo da je ona definisana za $a < x < b$ (slučajevi $a = -\infty$ i $b = \infty$ se ne isključuju) i da ima gustinu $f(x)$ i funkciju raspodele

$$(5.12) \quad F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Tada slučajna promenljiva X , koja zadovoljava jednačinu

$$(5.13) \quad F(X) = \gamma$$

ima upravo gustinu raspodele $f(x)$, te je i u ovom slučaju zadatak rešen.

Primer 5.1.

Neka eksponencijalna slučajna veličina X definisana za $x_0 < x < \infty$ ima gustinu raspodele $f(x) = ae^{-(x-x_0)}$.

Tada je

$$(5.14) \quad F(x) = \int_{x_0}^x ae^{-a(t-x_0)} dt = 1 - e^{-a(x-x_0)},$$

pa (5.13) poprima oblik

$$(5.15) \quad 1 - e^{-a(X-x_0)} = \gamma.$$

Odatle sledi da se izračunavanje slučajne promenljive X sprovodi po obrascu

$$(5.16) \quad X = x_0 - \frac{\ln(1-\gamma)}{a}.$$

Izloženi postupak računanja X preko (5.13) je poseban slučaj opšte metode, tzv. metode inverznih funkcija. Pretpostavimo da slučajna promenljiva X ima funkciju raspodele $F(x) = P(X < x)$. Funkcija $G(y)$ inverzna $F(x)$ može se konstruisati na sledeći način. Prvo se grafik funkcije $y = F(x)$ dopuni vertikalnim odsečcima do neprekidnosti u tačkama prekida do grafika funkcije $y = F_0(x)$, odakle je $x = G_0(y)$ pri čemu intervalima gde je $F_0(x)$ konstantna odgovaraju vertikalni odsecci $G_0(y)$ i obrnuto. Funkcija $G(y)$ se onda definiše kao $G(y) = G_0(y)$ u tačkama neprekidnosti i $G(y) = G_0(y+0)$ u tačkama prekida. Značaj ove funkcije je u tome što slučajna promenljiva

$$(5.17) \quad X = G(\gamma)$$

ima upravo funkciju raspodele $F(x)$, tj. izvršeno je modeliranje date slučajne promenljive preko slučajnih brojeva γ .

Često se jednačina (5.13) teško rešava po X , odnosno dobijanje X u obliku (5.17) je komplikovano. U takvim slučajevima se često koriste razni drugi postupci za modeliranje slučajne promenljive X , od kojih je jedan od najjednostavnijih postupak Nojmana. Neka je slučajna promenljiva X definisana za $a \leq x \leq b$ pri čemu joj je gustina $f(x)$ ograničena, tj. $f(x) \leq M$ za neku konstantu $M > 0$. Nojmanov postupak modelisanja slučajne promenljive X se sastoji u sledećem:

1. Biraju se dve vrednosti γ' i γ'' slučajne promenljive γ (tj. dva slučajna broja) i konstruiše se tačka $T(\eta', \eta'')$ gde je $\eta' = a + \gamma'(b - a)$, $\eta'' = \gamma''M$.
2. Ako tačka T leži ispod grafika krive $y = f(x)$ stavljamo $X = \eta'$, a u suprotnom par vrednosti (γ', γ'') odbacujemo i biramo novi par vrednosti γ .

Primer 5.2.

Slučajna veličina X za $-R \leq x \leq R$ ima gustinu $f(x) = 2(\pi^2 R)^{-1} \sqrt{R^2 - x^2}$, gde je $R > 0$ parametar. Shodno Nojmanovom postupku odabiraju se dva slučajna broja γ' i γ'' i formiraju veličine

$$(5.18) \quad \eta' = R(2\gamma' - 1), \quad \eta'' = 2(\pi R)^{-1} \gamma''.$$

Uslov da $T(\eta', \eta'')$ leži ispod grafika $y = f(x)$ će biti ovde $\gamma'' < \sqrt{1 - (2\gamma' - 1)^2}$. Dakle

$$(5.19) \quad X = R(2\gamma' - 1) \quad \text{za} \quad \gamma'' < \sqrt{1 - (2\gamma' - 1)^2}.$$

Efektivnost ε ovakvog postupka je verovatnoća da tačka $T(\eta', \eta'')$ padne ispod grafika $y = f(x)$, i ako je $M = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$, onda se dobija

$$(5.20) \quad \varepsilon = \frac{1}{M(b - a)}.$$

Za slučajnu promenljivu iz primera 5.2. lako se nalazi $\varepsilon = \pi/4 = 0,78564\dots$, i to je verovatnoća da ćemo za odabrani par (γ', γ'') promenljivu X računati po formuli (5.19).

5.1.4. Izračunavanje određenog integrala

Jedan od načina izračunavanja vrednosti određenog integrala

$$(5.21) \quad I = \int_a^b g(x) dx$$

metodom "Monte-Karlo" se sastoji u sledećem. Bira se slučajna promenljiva X definisana na intervalu $[a, b]$ i odeđena datom gustinom raspodele $f(x)$, pa se uočava slučajna promenljiva

$$(5.22) \quad Y = \frac{g(x)}{f(x)},$$

i tada važi, ako je $f(x) \neq 0$ u $[a, b]$,

$$(5.23) \quad E(Y) = \int_a^b \frac{g(x)}{f(x)} f(x) dx = \int_a^b g(x) dx = I.$$

Ako se odabere N nezavisnih vrednosti Y_1, Y_2, \dots, Y_N promenljive Y , onda se za dovoljno veliko N (najčešće $N \geq 25$) uzima za I približna vrednost

$$(5.24) \quad I \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{g(X_k)}{f(X_k)} = \frac{1}{N} (Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N).$$

Ovakav postupak zasniva se na centralnoj graničnoj teoremi verovatnoće koja za dovoljno veliko N daje

$$(5.25) \quad P \left\{ \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N Y_k - I \right| < 3 \sqrt{\frac{\text{Var} Y}{N}} \right\} = 0,997.$$

U ovom postupku $f(x)$ je proizvoljno, ali se iz gornje jednakosti vidi da je $f(x)$ potrebno izabrati tako da je greška, tj. $\text{Var} Y$ što manja, a to će biti kada je $f(x)$ proporcionalno $|g(x)|$, tj. $f(x) = A|g(x)|$ za neku konstantu $A > 0$.

Primer 5.3.

Približno izračunati integral

$$(5.26) \quad I = \int_0^1 x^2(1-x)dx.$$

Tačna vrednost se ovde takođe lako nalazi, jer je

$$(5.27) \quad I = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Shodno izloženom postupku biramo slučajno promenljivu X sa gustinom

$$(5.28) \quad f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{za } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{za ostale } x. \end{cases}$$

Tada je funkcija raspodele $F(x)$ data preko relacije

$$(5.29) \quad F(x) = \int_0^x 2x dx = x^2 = \gamma,$$

odakle je po postupku za modelisanje slučajnih promenljivih iz odeljka 5.1.2.

$$(5.30) \quad X_k = \sqrt{\gamma_k},$$

tj.

$$(5.31) \quad Y_k = \frac{X_k(1 - X_k)}{2} = \frac{\sqrt{\gamma_k}(1 - \sqrt{\gamma_k})}{2},$$

te je za slučajne brojeve $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N$ približna vrednost integrala metodom "Monte - Karlo"

$$(5.32) \quad I \approx \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^N \sqrt{\gamma_k}(1 - \sqrt{\gamma_k}).$$

Sem određenih integrala i mnoge druge veičine mogu da se računaju "Monte-Karlo" metodama, pri čemu se u svakom pojedinom slučaju mora voditi računa o specifičnostima problema i odabrati takav postupak koji će u praksi dati dobre rezultate.

Od veličina koje se izračunavaju metodama "Monte-Karlo" mogu se spomenuti određeni tipovi integralnih jednačina oblika

$$(5.33) \quad z(P) = \int_G K(P, P') z(P') dP' + f(P),$$

gde su $P(x, y) \in G$, $P' = (x', y') \in G$ tačke iz neke dvodimenzionalne oblasti, G , K i f su poznate funkcije a z tražena funkcija, zatim rešavanje raznih linearnih algebarskih sistema, inverzija posebnih klasa matrica, rešavanje parcijalnih diferencijalnih jednačina Laplasa i Puasona itd.

5.2. Primene metode Monte Karlo

Jedan od najvećih problema 40-tih godina u nuklearnoj fizici bio je problem zaštite od zračenja kod nuklearnih reaktora. Problem je bilo nemoguće rešavati eksperimentalnim putem zbog izuzetno visokih troškova i opasnosti od zračenja kojima se izlagalo. Konvencionalne matematičke metode takođe nisu dolazile u obzir kod obrade ovih problema – zbog komplikovanosti primene i nesigurnosti ishoda.

Rešenju problema značajan doprinos daje Džon fon Nojman (John von Neumann) koristeći metodu "Monte Karlo", koja je pružala mogućnosti matematičkog oponašanja slučajnih procesa sa poznatom verovatnoćom raspodele. Pionirski radovi Džon fon Nojmanna uzimaju se danas kao počeci ozbiljne naučne primene u praksi metode "Monte Karlo".

Oficijelni datum rođenja metode "Monte Karlo" uzima se da je 1949. godina, kada je publikovana studija pod nazivom "Metoda Monte Karlo". Pored imena Džon fon Nojmanna za nastanak metode "Monte Karlo" vezuju se imena S. Ulama, N. Metropolis, G. Kana i E. Fermija. Svi su oni 40-tih godina radili u Los Alamosu (SAD), laboratoriji u kojoj je rođena atomska bomba.

Treba međutim istaći da su teorijske osnove metode "Monte Karlo" bile poznate znatno ranije u matematičkoj statistici. Do pojave brzih računarskih mašina metoda "Monte Karlo" nije imala veću praktičnu upotrebu, pre svega zbog toga što je manuelni proces modeliranja slučajnih veličina vrlo težak posao.

Razvoj i primena metode "Monte Karlo" tesno je vezan za razvoj računarske tehnike. Algoritmi metode "Monte Karlo" po pravilu se lako programiraju i omogućavaju rešavanje mnogih zadataka inače nedostupnih za rešavanje klasičnim metodama.

Opšte poznate definicije metode "Monte Karlo" nema. Ispravnije bi bilo govoriti o metodama umesto o metodi "Monte Karlo", pošto se pod tim imenom podrazumevaju numeričke metode za rešavanje matematičkih zadataka ili problema iz fizike i drugih naučnih i tehničkih oblasti, modeliranjem slučajnih veličina uz statističku ocenu njihovog karaktera.

Iz ovakvog opredeljenja proizilazi da metoda "Monte Karlo" obuhvata i neke druge metode kao npr. stohastičku aproksimaciju ili slučajna uzorkovanja, koja se po pravilu zasebno razmatraju.

Naziv "Monte Karlo" proizilazi od imena grada Monte Karlo, poznatog po svojim kazinama opremljenim prostim kockarskim napravama za generisanje slučajnih brojeva – ruletom. Pripisivanje ovog imena matematičkoj metodi neupućene neodoljivo podseća na kockanje, a upućene na punu ozbiljnost matematičkih pristupa koji se kriju pod imenom Monte Karlo.

U praksi postoje mnogi slučajevi kada je preterano skupo i praktično neizvodljivo uzimanje stvarnih-fizičkih uzoraka ili dobijanje podataka. U takvim okolnostima metoda "Monte Karlo" se može koristiti za simulirano uzorkovanje i dobijanje podataka iz neke pretpostavljene populacije-raspodele elemenata. Ovaj pristup uzorkovanja bazira na ideji zamene stvarne populacije elemenata sa teorijskim modelom koji je definisan pretpostavljenom-verovatnom raspodelom. Pretpostavljena raspodela može biti objektivna ili subjektivna, a uzorkovanje se iz pretpostavljene populacije vrši pomoću slučajnih brojeva.

Pre nego što nešto više kažemo o dobijanju slučajnih brojeva, zadržaćemo se malo na determinističkim i slučajnim ili stohastičkim procesima.

5.2.1. Deterministički i stohastički procesi

Vrlo često kod formiranja dinamičkih modela moraju se ugraditi izvori poremećajnih dejstava u procesima realnih sistema. Pri ovome poremećajna dejstva mogu imati deterministički, stohastički ili mešoviti karakter.

Deterministička promenljiva, kako to već njen naziv kazuje, može se predstaviti funkcijom koja je precizno predskazuje. Jednostavan primer determinističke promenljive je oscilogram koji se može opisati pomoću obične sinusoidne. Dakle kod determinističkih procesa mogućnost slučajnosti se apsolutno isključuje.

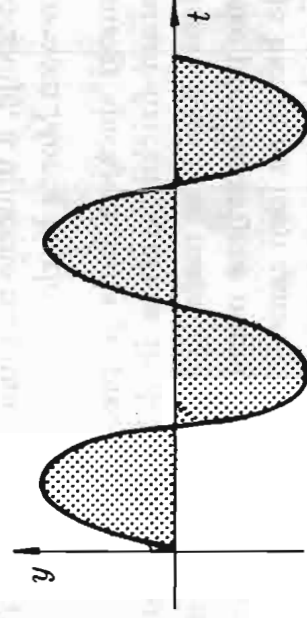
Ove osnovne napomene o determinističkim procesima bile su potrebne radi uočavanja razlika i razumevanja stohastičkih parametara i procesa, koji su i predmet pažnje u ovom poglavlju.

Neophodno je primetiti da su mnogi prirodni procesi u osnovi stohastički. Grčka reč "stohastika" znači "događanje" ili "slučajno predstavljanje". Pored reči "stohastički" koriste se u istom smislu i termini kao "probabilistički", "verovatni" i "slučajni".

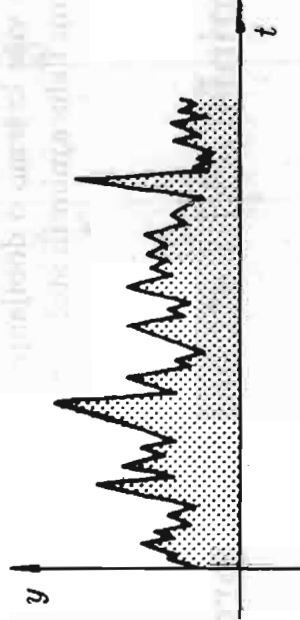
Shodno značenju reči stohastički, stohastička promenljiva je takva veličina koja raspóđela slučajne veličine po Gausovoj raspódeli, tada njeno statističko ponašanje karakteriše srednja vrednost i standardno odstupanje.

Osim Gausove normalne raspodele, postoji čitav niz drugih tipova teorijskih raspódeli. Svako od njih svojstvena je određena gustina analiziranih parametara.

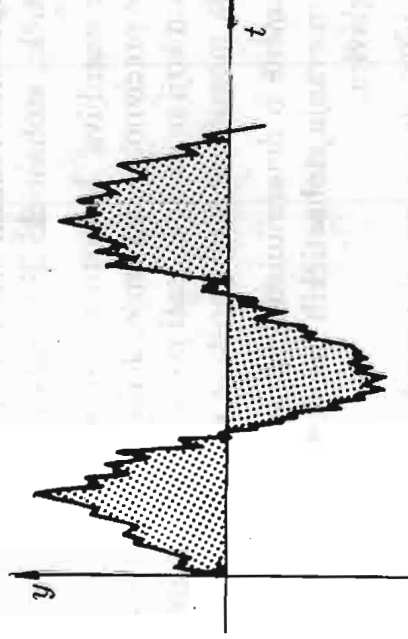
U praksi modeliranja većina geoloških i rudarskih problema zahteva kombinaciju determinističkih i stohastičkih pristupa. Primerima na slici 5.1. ilustrovana su sva tri slučaja: deterministički, stohastički i mešoviti (hibridni).



Deterministički model



Stohastički model



Mešoviti model

Sl. 5.1 – Osnovni tipovi modela

Teškoće pri modeliranju se povećavaju sa uključivanjem većeg broja stohastičkih elemenata u model. Stohastički modeli daju različite izlaze za date ulaze, pa je i interpretacija rezultata teža i obično zahteva neki vid statističkog rezimea.

Dobijanje adekvatne naizmeničnosti brojeva, zadovoljavanje uslova slučajnosti i posedovanje određenih statističkih svojstava predstavlja vrlo složen problem kod stohastičkog modeliranja.

Uopšte govoreći, dobijanje slučajnih brojeva je značajan problem, neposredno vezan za rešavanje mnogih praktičnih problema. Kako je metoda "Monte Karlo" zasnovana na korišćenju slučajnih brojeva, naredni deo odnosi se na njihovo dobijanje.

5.2.2. Generisanje slučajnih brojeva

Postoji više načina za dobijanje (generisanje) slučajnih brojeva. Tako na pr. brojevi se mogu izvlačiti iz vrećice sa numerisanim kuglicama kao u tomboli, pomoću ruleta, mešanjem špila karata i slično.

Naravno ovo su samo ilustracije popularnijih mogućih načina. U ozbiljnim pristupima za dobijanje slučajnih brojeva koriste se tri načina:

- tabele slučajnih brojeva,
- generatori slučajnih brojeva i
- metode pseudoslučajnih brojeva.

Tabele slučajnih brojeva: Tabele slučajnih brojeva ili preciznije slučajnih cifara formiraju se tako što se npr. na deset jednakih papirića ispišu cifre: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Potom se pristupa izvlačenju papirića tako što se jedan po jedan izvučeni papirić vraća i pre svakog novog izvlačenja papirići se promešaju. Dobjijene cifre se zapisuju u tabelarnoj formi, kao što je npr. tabela 5.1 sa 1000 slučajnih brojeva (iz knjige I.M. Sobolova, Numeričke metode Monte Karlo).

Tabele slučajnih brojeva mogu se koristiti za dobijanje jedno, dvo, tro i višecifrenih slučajnih brojeva.

Primeri radi prvih 10 trocifrenih brojeva iz tabele 5.1. su:

865, 159, 079, 566, 155, 664, 345, 655, 812, 332.

Često su potrebni brojevi sa vrednostima između 0 i 1. Tada se npr. trocifreni brojevi množe sa 0.001, te se dobije niz decimalnih brojeva za naš primer:

0.865, 0.159, 0.079, 0.566, 0.155, 0.664, 0.345, ...

Tabela 5.1.

1000 SLUČAJNIH BROJEVA						
86515	90795	66155	66434	56558	12332	
69186	03393	42502	99224	88955	53758	
41686	42163	85181	38967	33181	72664	
86522	47171	88059	89342	67248	09082	
72587	93000	89688	78416	27589	99528	
94377	57802	52452	42499	33346	83935	
91641	18867	76773	97526	27256	66447	
53807	00607	04825	82134	80317	75120	
12311	90316	87113	84778	45863	24520	
14480	50961	84754	57616	38132	64294	
79130	90410	45420	77757	75593	51435	
25731	37524	16287	66181	73244	61870	
45904	75608	70492	10274	23974	14783	
19976	04925	07824	76044	32373	05312	
15218	49286	89571	42903	59598	56774	
73189	64448	31276	70795	33071	96929	
28709	38528	76208	76575	53163	58481	
17932	66686	64254	57598	26623	91730	
94590	22561	70177	03569	21302	17381	
08749	43448	28484	16325	62766	31466	
91682	12904	29142	65877	64517	31466	
87653	98088	75162	97496	59297	79636	
79429	66186	59157	95114	16021	30890	
85444	39453	67981	49687	36801	38666	
85739	44326	91641	40837	93030	03675	
02555	52905	84637	76154	14150	07876	
74364	16796	59575	32764	91090	66515	
21656	93682	81305	58846	69558	41675	
50055	11244	29835	35801	23472	22700	
18788	91332	32795	54313	39072	16809	
41899	69207	66785	87225			
05498	51512	16107	52141			
88898	23775	30649	86545			
39976	21279	36694	85970			
22148	60102	18465	87650			

U principu, izbor cifara može se vršiti polazeći od bilo kog mesta u tabeli i čitajući cifre u bilo kom smeru.

Do danas najveća publikovana tabela slučajnih brojeva sadrži milion cifara. Tabelu je uz pomoć posebno konstruisanog ruleta izradila Rand korporacija (Rand Corporation, 1955.).

Generatori slučajnih brojeva: su elektronski uređaji koji proizvode slučajne cifre. To su najčešće analogni elektronski računari sa dodatim generatorom šuma. Oni proizvode slučajne cifre na principu pretvaranja elektronskih šumova u cifarsko značenje, tako što se registruje broj šumova koji nadvisuju zadati nivo u fiksnom vremenskom intervalu.

Ovakva proizvodnja slučajnih brojeva ima prednosti u odnosu na tabelu slučajnih brojeva pre svega u pogledu brzine i elegancije.

Međutim, kako većina digitalnih računara koji su u masovnoj upotrebi nema mogućnost neposrednog prijema podataka (signala) sa analognog računara, ovaj metod dobijanja slučajnih brojeva se retko u praksi koristi.

Metode pseudoslučajnih brojeva: Pomoću nekih numeričkih postupaka moguće je dobiti takve "slučajne" brojeve koje nazivamo pseudoslučajnim ili kvazislučajnim. Pseudoslučajnost ili sumnja u slučajnost brojeva proizvedenih na ovakav način potiče od činjenice da je moguće ponoviti njihovu produkciju. Kvalitet slučajnih brojeva zavisi od toga da li zadovoljavaju testove slučajnosti, prema tome način njihove proizvodnje nije bitan.

Metode pseudoslučajnih brojeva pogodne su za proizvodnju slučajnih brojeva na digitalnim računarima, pošto generisanje teče istom brzinom kao što je brzina rada računara.

Značajne pogodnosti su i to što programi za generisanje zauzimaju mali memorijski prostor, što je moguće ma koji slučajni broj ponovo generisati i što je potrebno samo jedno testiranje kvaliteta takvog niza slučajnih brojeva.

Jedini nedostatak metode pseudoslučajnih brojeva je ograničenost rezervi slučajnih brojeva. Postoje, međutim, načini za proizvodnju velikog broja takvih brojeva.

Sa praktičnog stanovišta metode pseudoslučajnih brojeva su najpogodnije za primenu i danas se uz pomoć računara najviše i koriste.

Prvi numerički postupak za dobijanje pseudoslučajnih brojeva na računaru predložio je Džon fon Nojman 1946.godine, nazvavši ga **metoda sredine kvadrata**. Po ovoj metodi svaki broj u nizu dobija se izdvajanjem srednjih cifara iz kvadrata prethodnog broja. Naprimera, pretpostavimo da je x_0 početni broj niza i x_0^2 njegov kvadrat. Tada će x_1 biti definisan srednjim ciframa broja x_0^2 .

Primera radi uzmimo da je $x_0 = 11$, $x_0^2 = 121$ tada je $x_1 = 12$, tj. imaćemo sledeći niz pseudoslučajnih dvocifrenih brojeva:

Niz brojeva	Kvadrati
$x_0 = 11$	$x_0^2 = 121$
$x_1 = 12$	$x_1^2 = 144$
$x_2 = 14$	$x_2^2 = 196$
$x_3 = 19$	$x_3^2 = 361$
$x_4 = 36$	$x_4^2 = 1296$
$x_5 = 29$	$x_5^2 = 841$
$x_6 = 84$	$x_6^2 = 7056$
$x_7 = 5$	$x_7^2 = 25$
$x_8 = 25$	$x_8^2 = 625$
$x_9 = 62$	$x_9^2 = 3844$

Metod je jednostavan i na prvi pogled veoma pogodan za primenu. Kako bilo koji niz slučajnih brojeva proizvedenih na ovaj način počinje pre ili kasnije da se ponavlja, prvi praktični problem je utvrđivanje aperioidičnog ciklusa. Ovo je glavni razlog što se metoda sredine kvadrata u praksi ne koristi šire. Dužina periode zavisi isključivo od početnog broja (x_0) i ona se može utvrditi jedino strpljivim računanjem. No bez obzira na izbor početnog broja x_0 , ova metoda ne daje dovoljno duge aperioidične cikluse slučajnih brojeva i to je još jedan negativan argument za Nojmanov algoritam.

Da bi se nedostaci Nojmanovog algoritma otklonili razvijeni su drugi postupci. Jedan od tih je **kongruentna metoda**. Na osnovu primećenih nedostataka metode sredine kvadrata formulisani su uslovi i zahtevi koji kod generisanja pseudoslučajnih brojeva moraju biti ispunjeni.

Ti se zahtevi svode na sledeće:

- ravnomernost raspodele vrednosti pseudoslučajnih brojeva u zadanom intervalu;
- statistička nezavisnost, tj. svaki član niza nezavistan je od svih prethodnih vrednosti;
- neponovljivost unutar zadanog ograničenog intervala;
- reproduktivnost svih nizova unutar definisanih intervala;
- metoda mora biti stabilna, pošto često za rešavanje zadataka modeliranja postoje potrebe i za milionima slučajnih brojeva;
- idealno je ukoliko metoda zahteva minimalni prostor operativne memorije.

Kongruentna metoda generisanja pseudoslučajnih brojeva zadovoljava sve prethodne uslove. Ova metoda je u potpunosti determinisana, pošto je svaki član niza jednoznačno određen u odnosu na korišćene aritmetičke operacije.

U osnovi kongruentne metode leži sledeći odnos:

$$x_i = ax_{i-1} + b \pmod{m}$$

gde je: x_i – pseudoslučajan broj,

i – redni broj pseudoslučajnog broja u nizu,

a i b – konstante za upravljanje zavisnošću u odnosu na vrednost m .

m – dovoljno veliki broj.

Kao rezultat računanja po prethodnom izrazu dobija se niz brojeva čije se vrednosti kreću u opsegu između 0 i $(m - 1)$. Tako npr. za $x_0 = 2$, $a = 3$, $b = 1$ i $m = 16$ dobija se niz pseudoslučajnih brojeva: 2, 7, 6, 3, 10, 15, 14, 11, 2, 7, 6, ... Dakle uočljivo je da se u primeru brojevi ponavljaju posle osmog člana. Usklađivanjem odnosa parametara može se ostvariti maksimalna dužina periode koja je jednaka m .

Navešćemo i treći način dobijanja pseudoslučajnih brojeva **metodom stepenog ostatka**.

Ovo je u praksi vrlo korišćena metoda, odlikuje je velika brzina proizvodnje brojeva, izbor proizvoljne dužine periode i neosetljivost na izbor početnog broja x_0 . Ne ulazeći u matematičku pozadinu metode koja počiva na teoriji brojeva, prezentiraćemo na manjem primeru tehniku izračunavanja slučajnih brojeva:

- a) Izabere se početna vrednost x_0 , koja mora biti ceo broj sa n cifara i koji nije deljiv sa 2 i sa 5.
- 2) računa se konstanta $C = 200y + C_0$, gde je y bilo koji ceo broj a C_0 može uzeti vrednosti: $\pm\{3, 11, 13, 19, 21, 27, 29, 37, 53, 59, 61, 67, 69, 77, 83, 91\}$.
- 3) Izračunava se yx_0 . Poslednjih n cifara uzetih kao broj čine prvi slučajni x_1 .
- 4) Svaki naredni slučajni broj x_i dobija se od poslednjih n cifara broja yx_{i-1} .

Neka je $x_0 = 5111$ početna vrednost koju smo proizvoljno izabrali. Uzmimo da je $n = 4$, $y = 1$ i $C_0 = -77$, tada je $C = 200 \cdot 1 - 77 = 123$ i sledi:

i	$C \cdot x_{i-1}$	X_i
1	$123 \cdot 5111 = 628\,653$	8653
2	$123 \cdot 8653 = 1064\,319$	4319
3	$123 \cdot 4319 = 531\,237$	1237
4	$123 \cdot 1237 = 152\,151$	2151
5	$123 \cdot 2151 = 264\,573$	4573
		\vdots
		\vdots

U praksi danas, zahvaljujući dostupnosti računarske tehnike najširem krugu korisnika i stalnom podizanju nivo hardvera i softvera, korisnik vrlo jednostavno uz pomoć RANDOM potprograma sadržanog u sistemskom softveru može ostvariti željenu produkciju slučajnih brojeva.

5.2.3. Osnovni principi primene metode Monte Karlo

Primena metode "Monte Karlo" zasnovana je na vrednostima slučajnih promenljivih, gde se kao osnovni problem javlja određivanje vrednosti slučajnih promenljivih sa poznatom verovatnoćom raspodele.

Postupak uzorkovanja kao što smo napomenuli pretpostavlja zamenu stvarne populacije elemenata sa teorijskom kopijom koja je opisana nekom pretpostavljenom verovatnoćom raspodele.

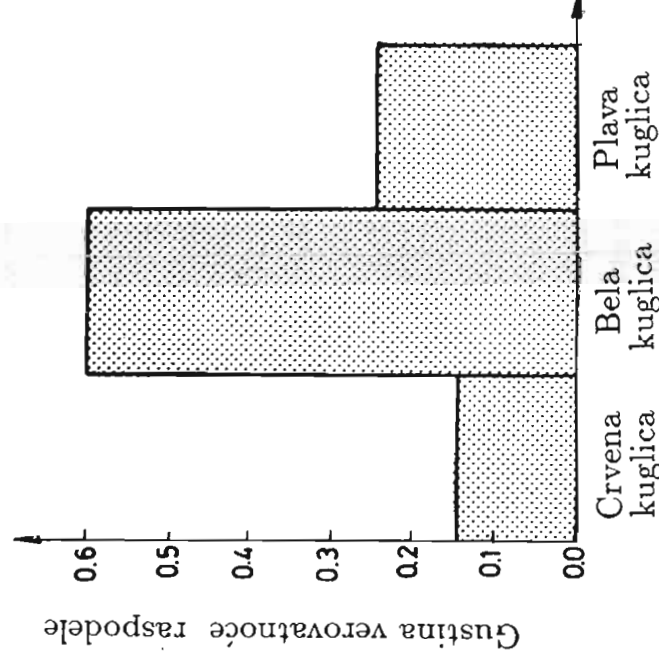
Ovakav pristup osigurava da svaki elemenat u populaciji ima jednaku šansu uz ispunjenje uslova da je učestanost mogućih ishoda-proporcionalna njihovoj verovatnoj gustini.

Radi lakšeg razumevanja navedenog, poslužićemo se sledećim primerom.

U vrećici se nalazi nedefinisan broj belih, plavih i crvenih kuglica. Iako se ne zna ukupan broj kuglica, pretpostavlja se da je poznata proporcija kuglica: 0.6 belih, 0.25 plavih i 0.15 crvenih – i da je izvlačenje svake kuglice jednako verovatno. Na osnovu ovih pretpostavki možemo izvesti sledeći zaključak:

- Ako proizvoljno izvučemo jednu kuglicu iz vrećice, verovatnoća da će biti bela je 0.6, da će biti plava je 0.25 i 0.15 da će biti crvena.

Na osnovu verovatnoće svakog ishoda (izvlačenje bele, plave ili crvene kuglice) moguće je definisati funkciju gustine odnosno gustinu verovatnoće raspodele (sl. 5.2.) i kumulativnu funkciju raspodele (sl. 5.3.).

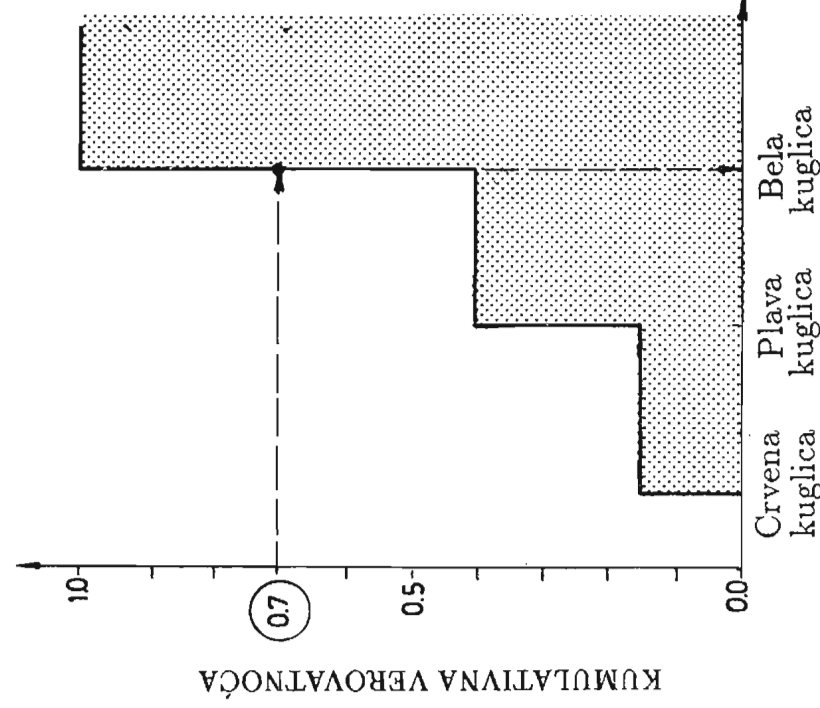


Sl. 5.2 - Gustina verovatnoće raspodele

Preko kumulativne funkcije raspodele, uzorkovanje se vrši uz pomoć slučajnog broja koji se generiše na neki od navedenih načina. Kako svaki slučajni broj u uniformnom nizu slučajnih brojeva ima istu verovatnoću pojavljivanja (biranja), biranje slučajnih brojeva je jednako biranju kuglica iz vrećice.

Prema tome metoda "Monte Karlo" ispunjava princip slučajnog uzorkovanja, što znači da svaki element ili događaj u odgovarajućoj populaciji ima jednaku šansu da bude registrovan.

Pretpostavimo da smo izvukli slučajan broj 0.7. Na grafiku na slici 5.3. ovom broju odgovara tačka na y-osi. Njenim projektovanjem na kumulativnu krivu i zatim projektovanjem presečne tačke na x-osu, dobija se kao ishod pozicija na x-osi koja označava belu kuglicu. Drugim rečima, generisanje slučajnog broja vrednosti između 0.0 i 0.15 ekvivalentno je izvlačenju crvene kuglice iz vrećice.



Sl. 5.3 - Kumulativna funkcija raspodele

Ukoliko je slučajan broj u opsegu između 0.15 i 0.40 to odgovara izvlačenju plave kuglice, a ukoliko je između 0.40 i 1 ekvivalentno je izvlačenju bele kuglice.

Kako vrednosti na y-osi kumulativne funkcije predstavljaju verovatnoće ishoda, ovaj postupak zadovoljava i drugi potreban uslov – da je učestanost završavanja izvesnim ishodom proporcionalna njegovoj verovatnoći.

Ovaj primer sa kuglicama oslikava osnovne principe i suštinu metode "Monte Karlo", kao i tok uzorkovanja koji obuhvata sledeće faze:

- (1) Formiranje kumulativne funkcije raspodele;
- (2) Generisanje slučajnog broja (vrednosti između 0 i 1);
- (3) Iznalaženje uz pomoć izabranog slučajnog broja presečne tačke na kumulanti i ishoda na x-osi;

Radi ilustracije primene metode "Monte Karlo" kod stohastičkog modeliranja procesa, odnosno stohastičke simulacije, poslužićemo se sledećim uprošćenim primerom:

Manji rudnik svakodnevno isporučuje kvarcni pesak fabrici stakla. Na osnovu višegodišnjih praćenja utvrđeno je da se dnevna potrošnja kvarcnog peska odvija prema verovatnoćama datim u tabeli 5.2.

Tabela 5.2.

Dnevne potrebe [t]	50	70	90	110	130	150	170
Verovatnoća P(x)	0,10	0,15	0,20	0,25	0,15	0,10	0,05

Dnevna proizvodnja peska je 110 [t]. Rudnik ne lageruje pesak, što znači da nišu moguće intervencije iz zaliha – u slučaju povećane dnevne potražnje.

Potrebno je utvrditi broj dana u toku jednog meseca (21 radni dan) kada će potražnja staklare biti veća od mogućnosti isporuka peska sa rudnika.

Na osnovu informacija o verovatnoćama kretanja potrošnje peska (tabela 5.2.) konstruisana je kumulativna funkcija verovatnoće raspodele (sl. 5.4.).

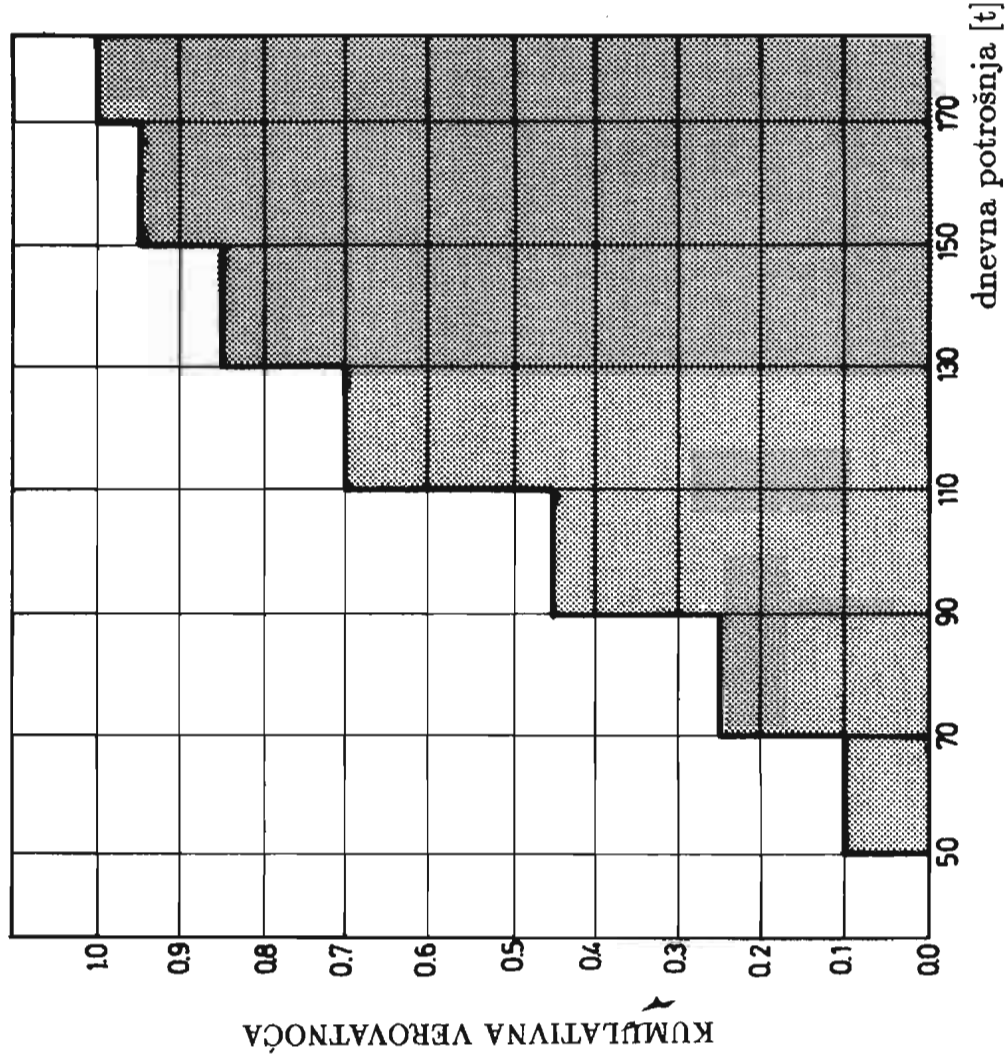
Iz tabele 5.1. odaberemo 21 slučajan broj. Svaki odabrani broj predstavlja verovatnoću jednodnevne potrebe staklare peskom u toku 21-og radnog dana.

Praktično ovim slučajnim brojevima po metodi "Monte Karlo" simuliramo dnevne potrebe za peskom. U tabeli 5.3. dati su odabrani slučajni brojevi i odgovarajuće potrebe za peskom dobijene iz kumulativne funkcije na slici 5.4.

Na bazi obavljene simulacije može se zaključiti da će staklari nedostajati peska 9 dana u toku meseca.

Međutim, ovo je samo jedan od mogućih ishoda u spregnutom sistemu proizvodnje i potrošnje kvarcnog peska. Da bi se utvrdio najverovatniji ishod, simulacioni postupak treba ponoviti više puta i zatim izračunati prosek. Ne postoji kriterijum kojim se definiše potreban broj ponavljanja, ali se preporučuje da taj broj bude što veći. U praksi primene metode "Monte Karlo" broj simulacionih ponavljanja kreće se na više stotina pa i hiljada.

Iz želje da edukativno bude što prihvatljiviji i jasniji za shvatanje suštine metode "Monte Karlo", prethodni primer je vrlo pojednostavljen. Tako npr. nisu uzete u obzir oscilacije proizvodnje peska na rudniku, koje su u realnim okolnostima prisutne, kao ni drugi činioci koji imaju uticaja na funkcionisanje ovako spregnutih sistema. Implementacija tih činilaca u simulacionom modelu počiva na prezentiranim principima.



Sl. 5.4. – Kumulativna funkcija verovatnoće raspodele potrošnje peska

Simulacija potrošnje peska:

Tabela 5.3.

Dan	Odabrani slučajni brojevi	Verovatnoća potrošnje peska	Potrošnja peska [t]	Manjak peska
1	55	0,55	110	Ne
2	02	0,02	50	Ne
3	81	0,81	130	Da
4	59	0,59	110	Ne
5	88	0,88	150	Da
6	52	0,52	110	Ne
7	73	0,73	130	Da
8	25	0,25	70	Ne
9	13	0,13	70	Ne
10	54	0,54	110	Ne
11	20	0,20	70	Ne
12	87	0,87	150	Da
13	92	0,92	150	Da
14	24	0,24	70	Ne

nastavak Tabele 5.3.

15	71	0,71	130	Da
16	76	0,76	130	Da
17	08	0,08	50	Ne
18	54	0,54	110	Ne
19	77	0,77	130	Da
20	84	0,84	130	Da
21	42	0,42	90	Ne

5.2.4. O mogućnostima primene metode Monte Karlo

Metoda "Monte Karlo" pripada klasi široko primenljivih matematičkih metoda, sa primenama u raznim naučnim oblastima.

Navešćemo samo neke oblasti: teorijska fizika, numeričke metode, matematička statistika, operaciona istraživanja, teorije pouzdanosti, matematičko modeliranje i simulacija dinamičkih procesa, biologija, genetika, medicina, hemija i fizička hemija, tehnologija, mašinstvo, elektrotehnika, vojna istraživanja, ekonomika, saobraćajna tehnika, geologija, rudarstvo itd.

Ovako široka primena metode "Monte Karlo" proizilazi iz filozofije metode, njene adaptivnosti, relativno jednostavne manipulativnosti i lakog programiranja.

U geologiji i rudarstvu metoda "Monte Karlo" ima primene kod rešavanja raznorodnih problema, počev od modeliranja u stratigrafiji, zatim u geofizici, geohemiji, geologiji ležišta, geotehnici, ekonomici mineralnih sirovina, pa preko simulacije rudarskih tehnoloških procesa ili delova procesa, simulacije ventilacionih procesa u jamama, simulacije tehnoloških procesa u flotacijama i separacijama, sve do simulacionih modelskih istraživanja spregnutih – složenih sistema mineralne industrije.

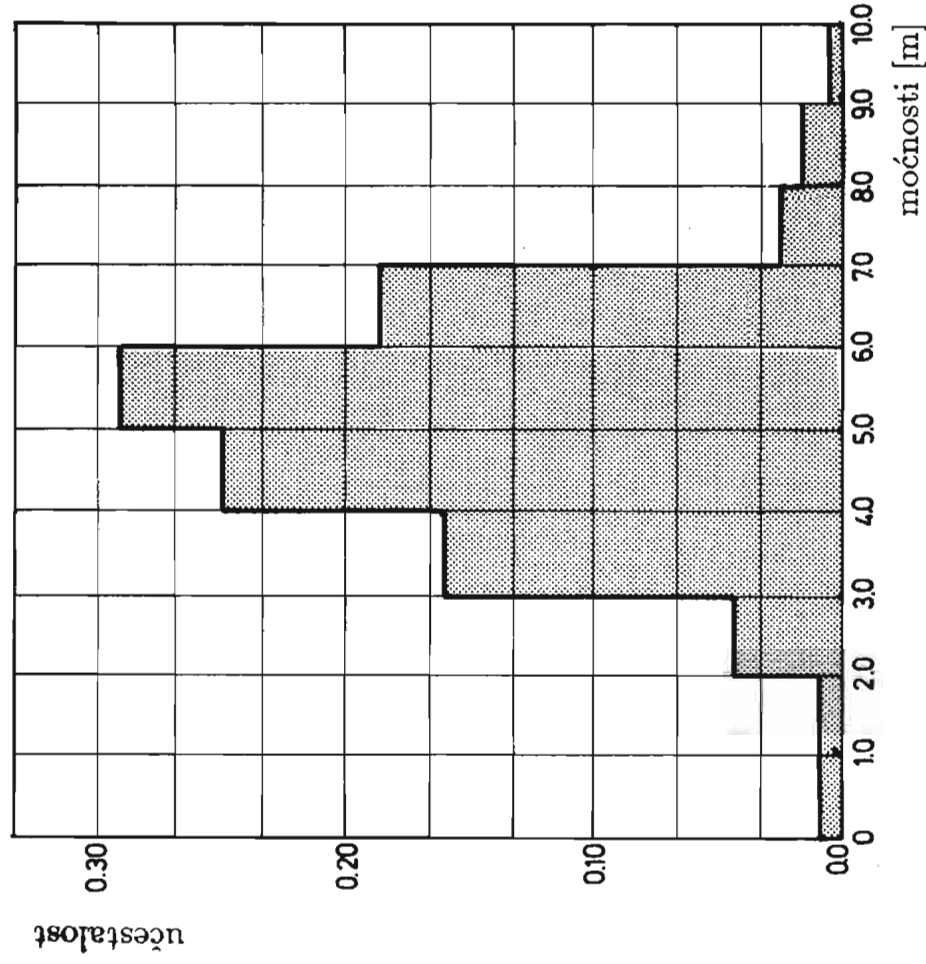
Matematičko modelski pristupi modeliranja stratigrafskih stubova u osnovi baziraju na primeni slučajnih brojeva, odnosno primeni metode "Monte Karlo" i Markovljevih lanaca. Radi ilustracije primene metode "Monte Karlo" kod modeliranja stratigrafskih struktura, prepostavićemo sledeću situaciju.

Na stratigrafskom preseku izdvojeni su slojevi peska i gline. Stratigrafske jedinice čini jedan ili više slojeva, one su međusobno jasno izdvojne i njihove moćnosti su izmerene. Stratigrafsku strukturu, karakteriše dakle, jasni prelazi između jedinica peska i gline i njihova promenljiva moćnost.

Na osnovu rezultata merenja moćnosti stratigrafskih jedinica peska i gline formirani su histogrami. Histogram, odnosno gustina verovatnoće raspodele moćnosti za pesak, dat je na slici 5.5, a podaci na osnovu kojih je konstruisan dati su u tabeli 5.4. Histogram za glinu dat je na slici 5.6. a podaci i rezultati obrade u tabeli 5.5.

Registrovane učestanosti moćnosti peska Tabela 5.4.

Broj inter- rvala	Granice intervala [m]	Sredina intervala [m]	Registrovane učestalosti	Gustina verovatnoće	Funkcija raspodele
1	0.00 – 1.00	0.5	2	0,007	0,007
2	1.01 – 2.00	1.5	2	0,007	0,014
3	2.01 – 3.00	2.5	12	0,042	0,056
4	3.01 – 4.00	3.5	46	0,163	0,219
5	4.01 – 5.00	4.5	71	0,251	0,470
6	5.01 – 6.00	5.5	83	0,293	0,763
7	6.01 – 7.00	6.5	53	0,187	0,950
8	7.01 – 8.00	7.5	8	0,028	0,978
9	8.01 – 9.00	8.5	5	0,018	0,996
10	9.01 – 10.00	9.5	1	0,004	1,000
			283	1,000	

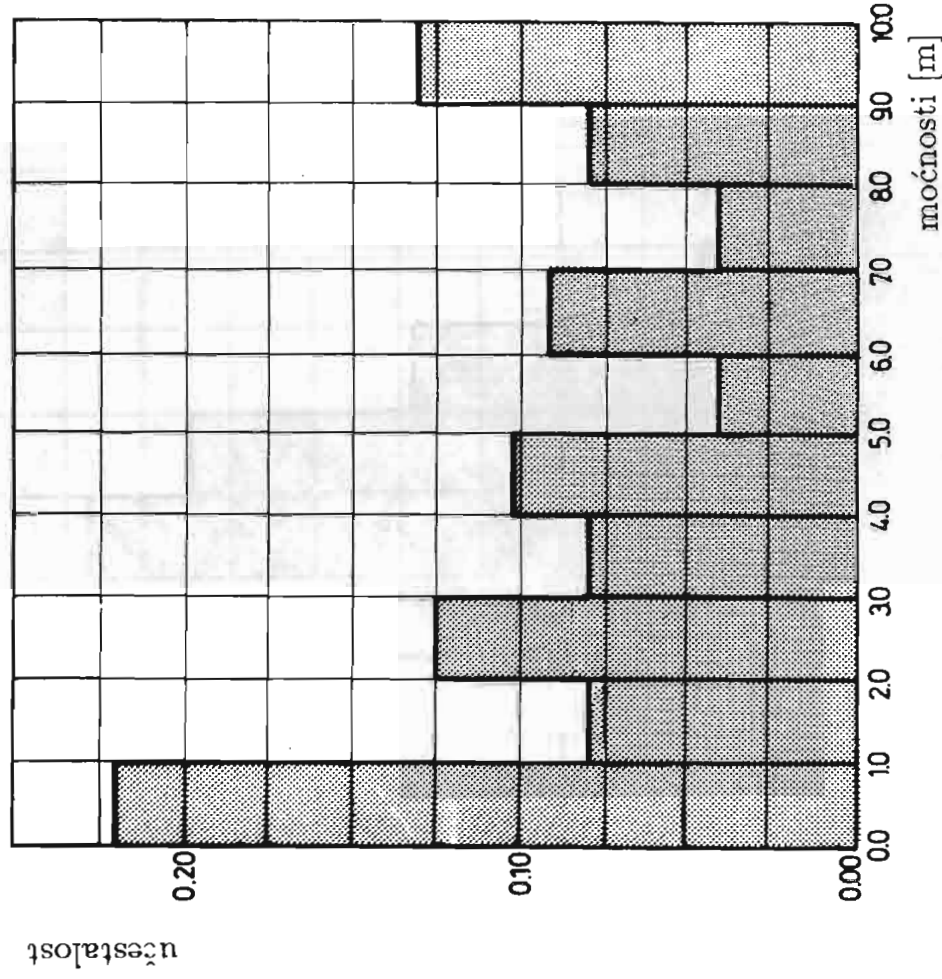


Sl. 5.5. - Histogram raspodele moćnosti za stratigrafsku jedinicu peska

Registrovane učestanosti moćnosti gline

Tabela 5.5.

Broj intervala	Granice intervala [m]	Sredina intervala [m]	Registrovane učestalosti	Gustina verovatnoće	Funkcija raspodele
1	0.00 - 1.00	0.5	85	0,221	0,221
2	1.01 - 2.00	1.5	31	0,081	0,302
3	2.01 - 3.00	2.5	48	0,125	0,427
4	3.01 - 4.00	3.5	31	0,081	0,508
5	4.01 - 5.00	4.5	40	0,104	0,612
6	5.01 - 6.00	5.5	17	0,044	0,656
7	6.01 - 7.00	6.5	35	0,091	0,747
8	7.01 - 8.00	7.5	17	0,044	0,791
9	8.01 - 9.00	8.5	31	0,081	0,872
10	9.01 - 10.00	9.5	49	0,128	1,000
			384	1,000	



Sl. 5.6 - Histogram raspodele moćnosti za stratigrafsku jedinicu gline

Forma histograma za pesak dozvoljava nam slobodu za tvrdnju da je raspodela bliska normalnoj (što nije teško proveriti kriterijumom χ^2).

Srednja vrednost i standardno odstupanje dužina intervala za pesak iznose:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} x_i = 5,04 [m],$$

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=n} (\bar{x} - x_i)^2}{n - 1}} = 1,37.$$

Za glinu prethodne ocene imaju vrednosti:

$$\bar{x} = 4,36, \quad S_x = 3,18.$$

Možemo primetiti da se ove ocene za pesak mogu koristiti kao karakteristike odgovarajućih neizvesnih parametara ukupnosti. Upotrebom pseudoslučajnih brojeva normalne raspodele možemo modelirati zakonitosti (povezanosti) promena stratigrafskih jedinica peska unutar zadatih intervala, za slučaj srednje moćnosti 5,04 [m] i standardnim odstupanjem 1,37.

Uočljivo je sa slike 5.6. da raspodela moćnosti za glinu nije saglasna sa poznatim teorijskim raspodelama.

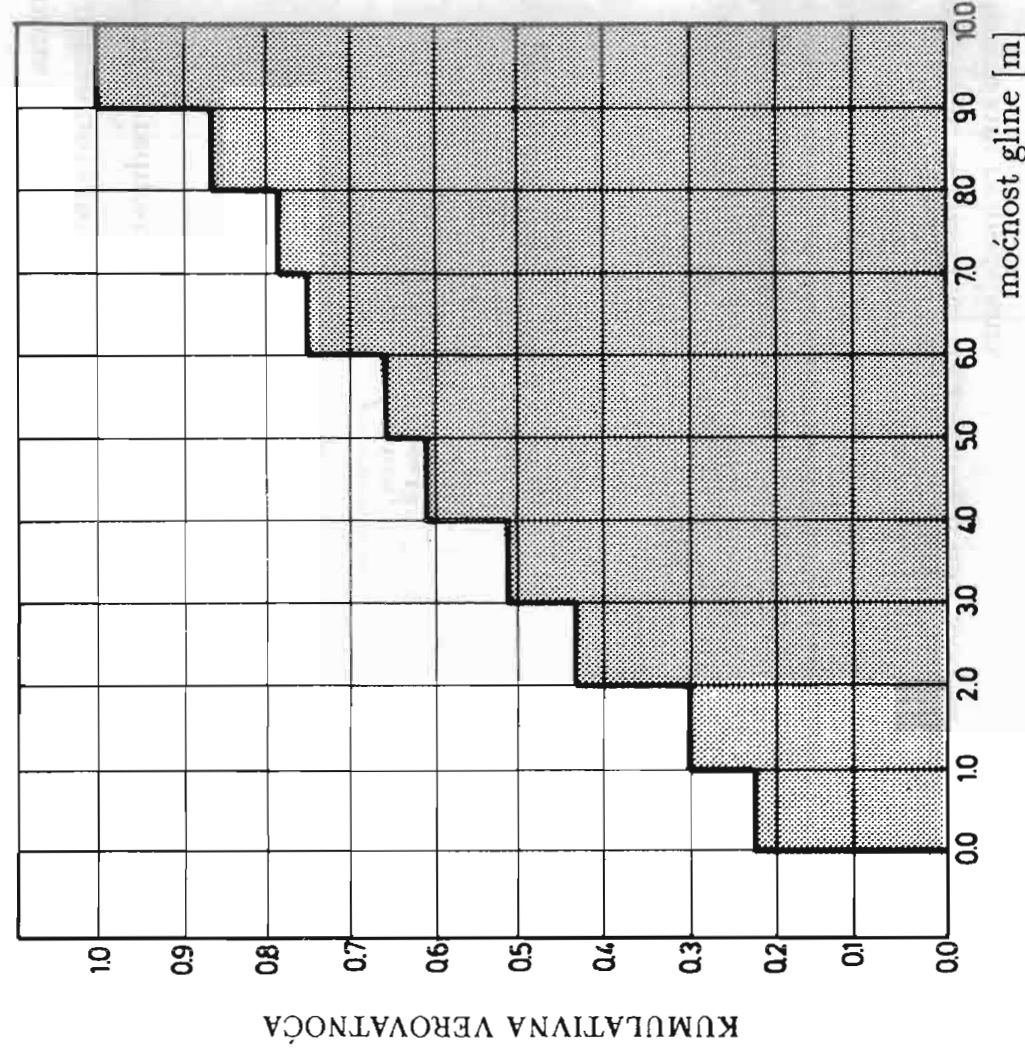
Saglasno prethodnoj konstataciji, kada bismo imali generator slučajnih brojeva sa sličnim karakteristikama, obavezni smo prvo da ispitamo empirijsku raspodelu a zatim i da je predstavimo u kumulativnoj formi kao na slici 5.7. Dalji postupak simulacije je identičan opisanom postupku u prethodnim problemima.

Primer je sa geološkog stanovišta trivijalan, međutim sa aspekta primene metode "Monte Karlo" predstavlja zanimljiv primer modeliranja stohastičkih promenljivih različitih statističkih svojstava. Pun efekat matematičkog modeliranja stratigrafskih struktura i procesa, postiže se kombinovanjem metode "Monte Karlo" i Markovljevih lanaca.

Kod analize i projektovanja tehnoloških sistema na rudnicima manipuliše se sa velikim brojem informacija koje definišu: prirodne uslove radne sredine, prostor i vreme, tehničko-tehnološke karakteristike mašina, ekološke i tržišno-ekonomske uslove.

U klasičnim načinima analize i projektovanja, brojnost i heterogenost ovih elemenata često uslovljava primenu aproksimativnog pristupa, gde se koriste determinisane srednje ili procenjene-iskustveno pretpostavljene ulazne informacije.

Pri ovakvoj kvantifikaciji ulaznih informacija čine se greške aproksimacije, koje imaju manje ili veće refleksno dejstvo na konačno rešenje. Prema našim sagledavanjima u strukturi ukupne greške aproksimativne greške učestvuju čak do 65 %.



Sl. 5.7. - Kumulativna funkcija verovatnoće raspodele moćnosti gline

Drugi problem je priroda podataka. Nije uvek moguće klasičnom analizom obuhvatiti sve uticajne činioce i dati im odgovarajući tretman sa aspekta njihove prirode i stepena uticajnog dejstva.

Uspešno otklanjanje ovih nedostataka moguće je ostvariti kroz drugačiju filozofiju matematičkog modelovanja rudarskih tehnoloških procesa.

Suština ovog pristupa leži u sintezi deterministike i stohastike.

Prema ovoj koncepciji u prvom koraku, na bazi eksploatacionih tehničko-tehnoloških i ekonomskih uslova egzaktno se definišu obeležja tehnološkog sistema, odnosno formira deterministički model sistema.

Stvarna slika rada sistema u principu odstupa od determinističke, usled veće ili manje izraženosti stohastičkih poremećajnih dejstava u tehnološkom procesu. U praksi, stohastičnost se manifestuje kroz vremensku i prostornu promenljivost eksploatacionih uslova u radnoj sredini, promenljivost tržišno-ekonomskih uslova, promenljivost uslova u okruženju i promenljivost tehničko-tehnoloških faktora. Karakter monografije ne dopušta ulaženje u analizu stohastičke prirode pojedinih grupa faktora. Međutim, sve faze tehnološkog procesa a time i celokupni tehnološki proces u matematičko-stohastičkom smislu, imaju sopstvene populacione karakteristike, čiji opsezi, karakteri i verovatnoće mogu biti vrlo različiti.

Samim tim deterministički korak u matematičko-modelskom procesu nije dovoljan za verno oslikavanje rudarskih tehnoloških procesa.

Dodavanjem stohastičke simulacije nadgrađuje se model u cilju dobijanja što realnije slike.

Kao što je već rečeno u ovom poglavlju, jedna od fundamentalnih ciglica na kojoj počiva zgrada pod nazivom stohastičko modeliranje je metoda "Monte Karlo".

Nećemo ulaziti u detaljnija objašnjenja principa determinističko-stohastičkih i stohastičkih modeliranja rudarsko-tehnoloških procesa, pošto bi za to bilo potrebno znatno više prostora nego što ova knjiga dopušta. Zainteresovane čitaoce upućujemo na publikovane naučne i stručne radove i knjige koje se ovom problematikom bave.

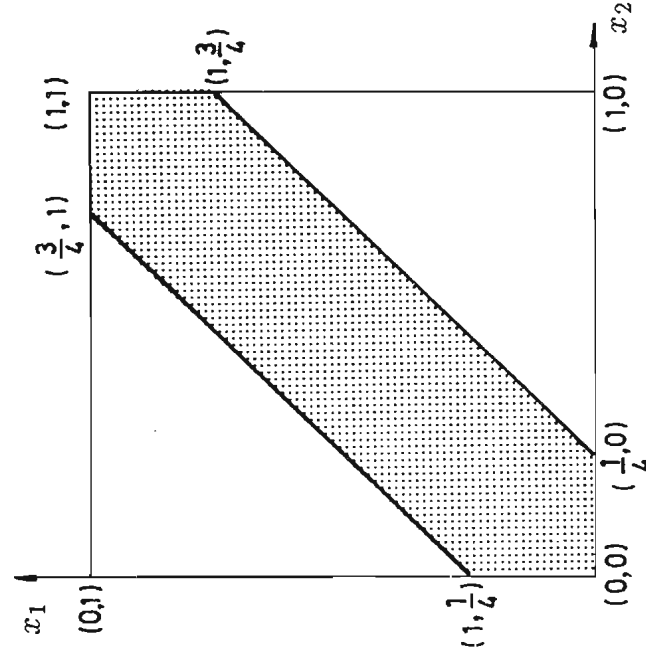
Međutim radi ilustracije mogućnosti i naučne primene metode "Monte Karlo" kod simulacije tehnoloških procesa u rudarstvu, poslužićemo se sledećim primerom koji se odnosi samo na jednu fazu tehnološkog procesa – utovar.

Pretpostavimo da na jednom radilištu bager opslužuje dva dampera. Dolazak obadva dampera na utovar jednako je verovatno u toku 20 minuta. Vreme utovara jednog dampera je 5 minuta. Postavlja se pitanje kolika je verovatnoća da damperi po dolasku na radilište budu opsluženi bez čekanja.

Po definiciji geometrijske verovatnoće imamo (v. sl. 5.8.):

$$P(|x_1 - x_2| \geq \frac{1}{4}) = \frac{9}{16} = 0,56$$

gde su : x_1 i x_2 momenti nailaska dampera 1 i 2.



Sl. 5.8. Grafički prikaz geometrijske verovatnoće

A sada pogledajmo do koje ćemo verovatnoće doći ako metodom "Monte Karlo" simuliramo dolazke dampera na radišite.

Iz tabele 5.1 birajmo slučajne brojeve koji će predstavljati momente nailaska dampera.

Ukoliko je $|x_1 - x_2| \geq 1/4$ ishod deklariramo sa 1 a ukoliko je $|x_1 - x_2| < 1/4$ ishod je 0.

Ishodi simulacije 50 dolazaka dampera na radišite dati su u tabeli 5.6.

Simulacija dolazaka dampera

Tabela 5.6

x_1	x_2	Ishod	x_1	x_2	Ishod
0,865	0,907	0	0,661	0,664	0
0,691	0,033	1	0,425	0,992	0
0,416	0,421	0	0,851	0,339	1
0,865	0,471	1	0,880	0,893	0
0,725	0,930	0	0,896	0,784	1
0,943	0,578	1	0,524	0,424	1
0,916	0,188	1	0,767	0,767	0
0,538	0,006	1	0,482	0,821	0
0,123	0,903	0	0,871	0,847	1
0,791	0,904	0	0,847	0,576	1
0,257	0,375	0	0,454	0,777	0
0,459	0,756	0	0,162	0,661	0
0,199	0,049	1	0,704	0,102	1
0,152	0,492	0	0,078	0,760	0
0,731	0,644	1	0,895	0,429	1
0,287	0,382	0	0,312	0,707	0
0,179	0,666	1	0,762	0,765	0
0,945	0,225	1	0,642	0,575	1
0,087	0,434	0	0,701	0,035	1
0,916	0,129	1	0,284	0,163	1
0,876	0,980	0	0,291	0,658	0
0,794	0,661	1	0,751	0,974	0
0,854	0,394	1	0,591	0,951	0
0,857	0,443	1	0,679	0,496	1
0,645	0,314	1	0,916	0,408	1

Za 50 simuliranih dolazaka dampera na radišite, broj slučajeva kada damperi ne čekaju na utovar (ispunjen uslov $|x_1 - x_2| \geq 1/4$) je 26. Prema tome, simulacija metodom "Monte Karlo" daje verovatnoću da će damperi bez čekanja biti utovareni:

$$P = \frac{26}{50} = 0,52.$$

Poređeci ovaj rezultat sa rezultatom dobijenim geometrijskom verovatnoćom uočljiva je razlika od 0.04.

Pouzdanost rada mašina, mašinskih kompleksa, ili kompletnih tehnoloških sistema je posebno značajna za mineralnu industriju.

Značaj proizilazi iz činjenice da se u rudarstvu radi o moćnim proizvodnim kompleksima gde pre svega iz ekonomskih a zatim i tehničko-tehnoloških razloga u većini slučajeva nije opravdano držanje mašina sa značajnim vrućim, a pogotovo ne sa hladnim rezervama.

S druge strane, kako se radi o proizvodnim sistemima velikih kapaciteta, sa napregnutim proizvodnim zadacima, svaki zastoj neposredno ima krupne negativne ekonomske efekte, sa najčešćim trendom njihove dalje transmisije na ostale proizvodne činioce u tehnološkom lancu. Primera radi, zastoji u proizvodnji uglja na rudniku mogu se reflektovati na proizvodnju električne energije u termoelektrani, a ovo dalje na potrošače električne energije.

Problem pouzdanosti rada mašina i tehnoloških sistema u mineralnoj industriji, je predmet stalne inženjerske pažnje počevši od faze osmišljanja idejnih rešenja, pa preko viših nivoa projektovanja i donošenja odluka o izboru mašina i opreme, sve do operativnog vođenja i praćenja rada mašina u eksploataciji.

Kroz naredni primer pokazaćemo mogućnost primene metode "Monte Karlo" kod donošenja odluke o izboru mašina na osnovu njihove pouzdanosti rada.

Upoređuju se dva tipa buldozera. Cilj je da se na osnovu pokazatelja rada izabere bolja mašina. Za vreme testiranja mašina, generalno je praćena pouzdanost rada pogonskog (S_1) i hidraulično-transmisionog sistema (S_2) na obe mašine.

U toku testiranja utvrđeno je za mašinu (M_1) da ima intenzitet otkaza $\lambda_1 = 3 \cdot 10^{-3} h^{-1}$ i intenzitet opravke $\mu_1 = 3.5 \cdot 10^{-2} h^{-1}$, a za mašinu (M_2) da ima intenzitet otkaza $\lambda_2 = 2 \cdot 10^{-3} h^{-1}$ i intenzitet opravke $\mu_2 = 4 \cdot 10^{-2} h^{-1}$.

Ako sa $T_i(d)$ označimo simulirano vreme događaja (d) koje je izračunato na osnovu slučajnog broja γ_i , tada se u zavisnosti od događaja koristi jedan od postupaka za izračunavanje $T_i(d)$:

$$T_i = -\frac{1}{\lambda_1 \text{ ili } 2} \ln(1 - \gamma_i),$$

$$T_i = -\frac{1}{\mu_1 \text{ ili } 2} \ln(1 - \gamma_i).$$

Ako se kao pokazatelji izaberu srednje vrednosti bezotkaznog rada, kao i koeficijent gotovosti tokom perioda od 1000 časova, metodom "Monte Karlo" može se doći do uporednih vrednosti pokazatelja. U narednim tabelama 5.7 i 5.8 simuliran je proces otkaza i opravki na buldozerima M_1 i M_2 . U zaglavljima tabela 5.7 i 5.8. upotrebljene su sledeće oznake:

- i – indeks rednog broja simulacije,
 γ_i – slučajan broj (iz tabele 5.1),
 t_1 – momenat otpočinjanja događaja d ,
 t_2 – momenat završetka događaja d ,
 d – događaj (mašina radi ili je otkazala),
 $T_i(d)$ – simulirano vreme realizacije događaja,
 \bar{S}_1 i \bar{S}_2 – su događaji suprotni događajima S_1 i S_2 , tj. sklopovi S_1 i S_2 su otkazali i popravljaju se.

Iz tabela 5.7. i 5.8. pažljiv čitalac lako može da uoči da je u simuliranom periodu dužina otkaza pogonskog sistema na buldozeru (M_1) bila 60 časova dok je na buldozeru (M_2) bila 29 časova. Otkazi na hidrauličnom transmissionom sistemu buldozera (M_1) su 75 časova, a na buldozeru (M_2) 43 časa.

Očigledno potrebno je izvršiti mnogo više od izvedenog broja simulacija rada svake mašine da bi se odlučili koja je bolja, a to se praktično može ostvariti samo uz pomoć računara.

Simulacija otkaza i opravki na M_1

Tabela 5.7.

i	γ_i	t_i	d	$T_i(d)$	t_2
1	0,168	0	S_1	61	61
2	0,227	0	S_2	86	86
3	0,416	61	\bar{S}_1	15	76
4	0,665	76	S_1	365	441
5	0,078	441	\bar{S}_1	2	443
6	0,367	443	S_1	152	695
7	0,386	693	\bar{S}_1	18	711
8	0,308	711	S_1	122	833
9	0,796	86	\bar{S}_2	45	131
10	0,314	131	S_2	125	256
11	0,173	256	\bar{S}_2	5	261
12	0,917	261	S_2	830	1091*
13	0,584	833	\bar{S}_1	25	858
14	0,969	858	S_1	1158	2016*

Simulacija otkaza i opravki na M_2 Tabela 5.8.

i	γ_i	t_i	d	$T_i(d)$	t_2
1	0,168	0	S_1	92	92
2	0,227	0	S_2	129	129
3	0,416	92	\bar{S}_1	13	105
4	0,665	105	S_1	547	652
5	0,078	652	\bar{S}_1	4	656
6	0,367	656	S_1	229	885
7	0,386	885	\bar{S}_1	12	897
8	0,308	897	S_1	184	1081*
9	0,796	129	\bar{S}_2	38	167
10	0,314	167	S_2	188	355
11	0,173	355	\bar{S}_2	5	360
12	0,917	360	S_2	1244	1604*

Napomena: * - oznaka u koloni t_2 označava da je kumulirano vreme prevazišlo 1000 časova.

6. Osnovi geostatistike

Po nazivu i po terminologiji koju je nasledila od variacione statistike, geostatistika je vrlo bliska klasičnoj statistici. Međutim u biti postoje velike razlike između statističkog i geostatističkog pristupa, a terminološka sličnost ne bi trebala da dovodi do zabuna.

Geološka obeležja statistika tretira kao slučajne veličine, dok ih geostatistička teorija smatra realnim-prirodnim promenljivim veličinama koje imaju određen prostorni karakter. Dakle, statistika geološke karaktere kao što su npr. sadržaj korisne komponente u rudi, moćnost ležišta, geomehaničke parametre radne sredine i dr., uzima kao slučajne veličine koje nemaju karakter prostorne promene, te je primenljiva, recimo kod izračunavanja i ocene srednjih vrednosti ali ne i u slučajevima kada je potrebno utvrditi karakter prostorne raspodele posmatranih geoloških obeležja.

Geostatistička teorija smatra da su geološka obeležja prostorno promenljive veličine, pa i njene metode najviše podsećaju na metode matematičke fizike, a naročito na metode harmonijske analize.

Istorijski posmatrano geostatistički principi su stari koliko i samo rudarstvo. Oni počinju da se rađaju već kada se u rudarstvu počeo uočavati problem prognoze daljih eksploatacionih uslova u ležištu, a naročito kada se počelo sa izborom, uzimanjem i analizom proba i računanjem srednjeg sadržaja u funkciji moćnosti i mesta uzimanja proba.

Na razvoj i unapređenje geostatističke teorije imali su najznačajniji uticaj radovi pre svega Ž. Materona, Kriga, De Vajsa, Zihela, Formera i Medoua. Utemeljivačem geostatističke teorije smatra se francuski naučnik Ž. Materon, autor velikog broja teorijskih radova među kojima i kapitalne monografije "Traité de Geostatistique Appliquée", 1962. godine.

6.1. Pitanje prostorne promenljivosti

Geološka obeležja kao prostorne promenljive imaju čitav niz osobina, od kojih ćemo pobrajati samo one koje su bitne za dalja razmatranja:

Oblast defnisanosti: Prostorna promenljiva je uvek određena u određenom prostoru, koji nazivamo geometrijskim poljem (geološka formacija, ležište, ...). Prostorne promenljive moguće je predstaviti kao funkciju tačke, međutim, češće se javlja potreba za predstavljanjem ne vrednosti tačke već nje kao nosioca srednje vrednosti male oblasti koju predstavlja, nazvane geometrijskom bazom. Tako npr. za sadržaj korisne komponente u rudi geometrijsku bazu čini zapremina proba. Baza mora biti precizno određena, što podrazumeva poznavanje njene zapremine, oblika i prostorne orijentacije. Izmena geometrijske baze uzrokuje dobijanje nove prostorne promenljive koja je slična predhodnoj, ali se s njom ne poklapa. Geostatistička teorija dozvoljava prognozu promene karakteristike baze u polju, na osnovu poznatih karakteristika tačkasto razmeštenih informacija u polju.

Anizotropija: Prostorna promena geoloških obeležja može biti anizotropna. Tako npr. u rudnom telu može postojati pravac po kome je promena nekog njegovog obeležja izraženija od promena po drugom pravcu. Ova pojava se naziva zonalnost i ona odražava geološku strukturu npr. rudnog tela.

Kontinualnost: Veoma važna karakteristika geoloških obeležja kao prostorno promenljivih je stepen kontinualnosti njihove prostorne promene.

U nekim slučajevima kao što je npr. prostorna promena moćnosti ugljenog sloja, kontinualnost može biti toliko visoka da može biti zadovoljen matematički uslov kontinualnosti po definiciji Koši. Češće se opaža kontinualnost srednjih vrednosti geoloških obeležja.

Postoje slučajevi u kojima uslov kontinualnosti nije zadovoljen ni za srednje vrednosti, tada kažemo da se radi o krajnje neregularnoj promeni, odnosno o efektu samorodnosti. Kao klasičan primer efekta samorodnosti uzimaju se rasipna ležišta zlata.

Pojave prelaza: Ove su pojave vezane za postojanje mreže prekida u geometrijskom polju promenljive. Kao ilustrativan primer može nam poslužiti npr. sedimentno ležište sa izraženom tektonikom (nabiranja, rasedi,...). Mreža prekida deli ležište na odvojene delove koji imaju relativnu nezavisnost.

Ako geološka obeležja imaju karakter prostornih promenljivih a ne slučajnih, logično je da se njihove promene mogu predstaviti funkcijom koja ima određenu vrednost u svakoj tački posmatranog prostora.

U opštem slučaju takva funkcija objedinjava navedena svojstva (oblast definisanosti, kontinualnosti, anizotropiju, pojave prelaza) koja ne mogu biti opisana standardnim metodama matematičke analize. Osim ovih opštih karakteristika, funkcija mora objediniti i specifične osobine posmatranog geometrijskog polja. Tako npr. u praksi se te specifičnosti mogu iskazivati kroz stratigrafski efekat, efekat štokverka i slično.

6.2. Variogram

Variogram je funkcija koja predstavlja stepen kontinualnosti mineralizacije, u ležištu ili uopšte stepen kontinualnosti promene posmatranog geološkog obeležja.

Variogram se grafički konstruiše na osnovu podataka dobijenih istražnim radovima tako što se na apscisnu osu nanose rastojanja d a na ordinatu vrednosti kvadrata razlika kvantifikovanog geološkog obeležja (npr. sadržaj k. k.) svih uzoraka (proba) uzetih na odstojanju d jednog od drugog.

Neka je $f(M)$ -vrednost prostorne promenljive za datu geometriju uzoraka (probe) u tački M geometrijskog polja V . Obično je zapremina uzorka (probe) vrlo mala u odnosu na istraživani prostor, te se može reći da se radi o tačkastoj geometriji proba. U tom slučaju variogram $\gamma(h)$ ili zakonu rasejanja za vektorski argument h , određen je izrazom:

$$(6.1) \quad \gamma(h) = \frac{1}{2V} \iiint_V (f(M+h) - f(M))^2 dV.$$

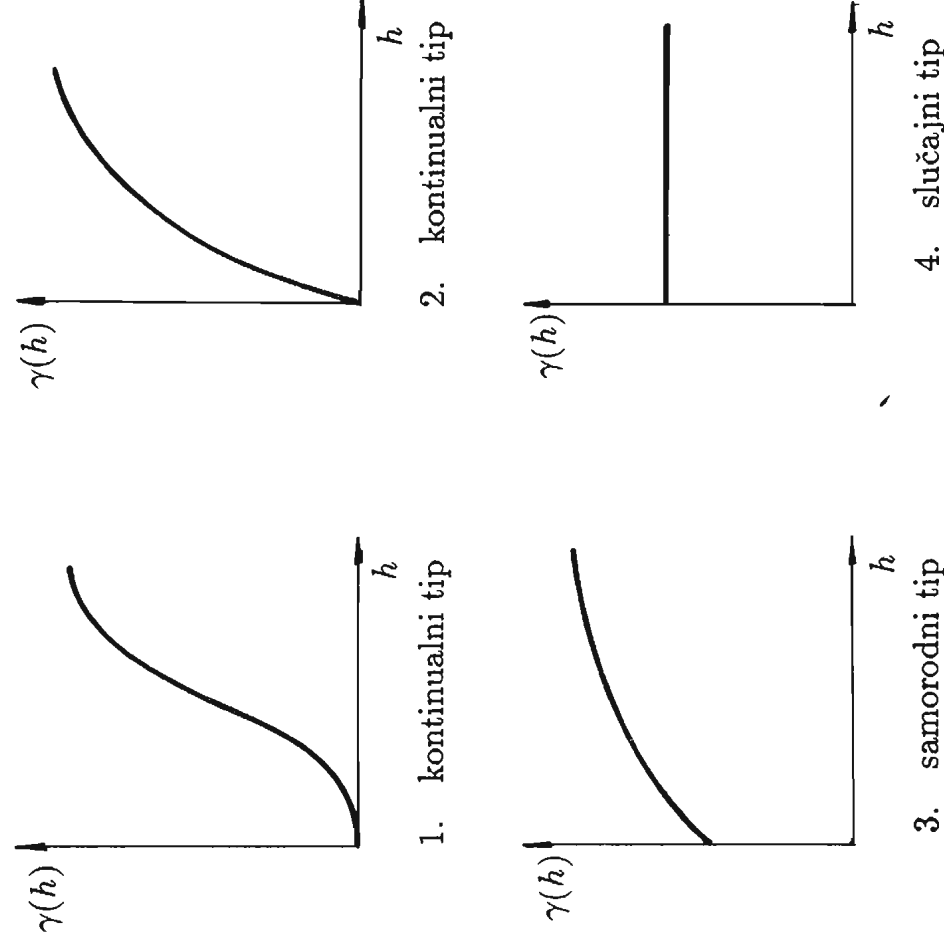
Obično variogram predstavlja rastuću funkciju u zavisnosti od h . Što su mesta uzorkovanja (uzimanja proba) udaljenija, intenzivnije raste razlika vrednosti obeležja. Ovo nam uvodi i definiše pojam "zone uticaja uzorka (probe)". Konkretno, ukoliko variogram brže raste zona uticaja je manja i obrnuto.

Dakle, variogram veoma dobro oslikava osobine prostorne promenljivosti posmatranog geološkog obeležja.

Moguće je izdvojiti četiri osnovna tipa variograma. Na slici 6.1. date su grafičke ilustracije osnovnih tipova variograma.

Variogram prvog tipa slika 6.1.1. ima paraboličan trend blizu nule i oslikava slučaj kada je prostorna promena izučavanog obeležja kontinualna, primer moćnost sloja.

Drugi variogram slika 6.1.2. ima kosu tangentu u nuli i ilustruje kontinualnu prostornu promenu srednje vrednosti. Ovaj tip variograma najčešće karakteriše promenu sadržaja neke od komponenata u ležištu.



Sl. 6.1. - Osnovni tipovi variograma

Variogram trećeg tipa ima skok u nuli i ilustruje efekat samorodnosti.

Četvrti variogram odgovara klasičnoj slučajnoj promeni obeležja.

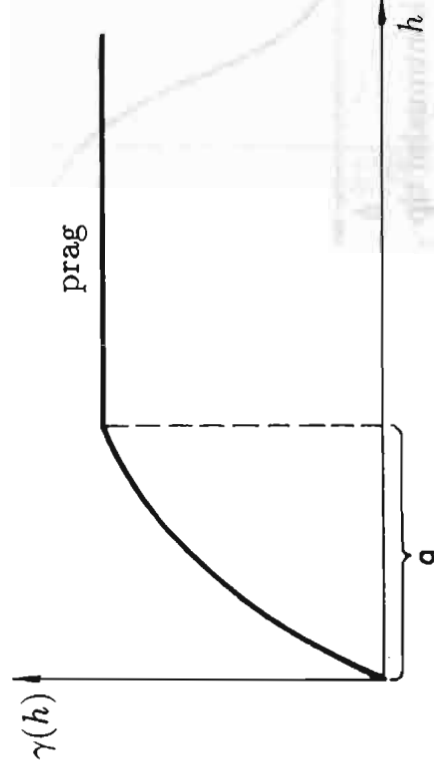
Između variograma prvog i četvrtog tipa postoji čitav spektar variograma čije je izučavanje predmet geostatistike.

Variogram se menja pri promeni pravca u prostoru, pošto funkcija $\gamma(h)$ zavisi od veličine i od pravca vektora h . Izučavanje promena oblika variograma pri promenama pravaca u prostoru, omogućava nalaženja najverovatnijih pravaca orudnjenja, prostiranja rudnih tela i tome slično.

Oblik variograma odražava takođe i strukturne osobine. Tako npr. na slici 6.2. prikazan je variogram (tranzitivni tip) za sedimentni basen u kome je bio izražen proces sedimentacije. Kriva variograma dostiže prag u tački $h = a$.

Veličina a određuje prosečan prečnik mikrobasena u basenu taloženja i u analizi, ukoliko se urade variogrami za različite pravce u prostoru omogućava iznalaženje veličine i oblika mikrobasena.

Naravno, variogram odražava osnovne osobine, učestalosti, lokalnosti ali ne i sve ostale karakteristike pojava mineralizacije. Analogno, kod harmonijske analize oscilatornih procesa svakom harmoniku odgovara određena faza i amplituda. Lokalno ponašanje procesa određuje se u osnovnoj fazi tako što energija zavisi



Sl. 6.2.

od kvadrata amplitude. Spektralna kriva ne opisuje pojavu u celini, ona oslikava osnovne tj. energetske promene.

Variogram (ili tačnije kriva dobijena iz njega Furijeovom transformacijom) u potpunosti odgovara spektralnoj krivoj.

Variogram određen izrazom (6.1) definisan je u geometrijskom polju V . Ukoliko je predmet razmatranja samo deo V' , geometrijskog polja V , može se desiti da se funkcija $\gamma'(h)$ razlikuje od $\gamma(h)$. Međutim u geološkom jednorodnom geometrijskom polju sa karakterističnom prostornom promenom obeležja može postojati nešto što je svojstveno svim delovima polja.

Ova pretpostavka dovodi do hipoteze zakona o apsolutnom rasejanju (ili sopstvenom rasejanju), izraženom u obliku:

(6.2)

$$\gamma'(h) = \gamma(h),$$

sto znači da variogram ne zavisi od toga koji je deo V' ležišta V korišćen u obradi. Neophodno je napomenuti da ova hipoteza nije neophodna niti ona utiče na pojednostavljivanje geostatističke teorije. Ona se prihvata takva kakva je. Međutim, ukoliko je promena variograma spora i odnosi se na relativno usku zonu, zakon apsolutnog rasejanja daje dobru aproksimaciju realnih uslova.

6.3. Disperzija

Radi jednostavnijeg praćenja, umesto opštih termina geološko obeležije ili prostorna promenljiva, govorićemo samo o sadržaju. Neka je $f(M)$ – sadržaj u tački M koja pripada geometrijskom polju V u kome su probe uzimane tačkasto, sa zakonom apsolutnog rasejanja $\gamma(h)$.

Obično govorimo o sadržaju $y(M)$ u probi v , čije je težište tačka M .

Promenljivu $y(M)$ računamo:

$$(6.3) \quad y(M) = \frac{1}{v} \int_v f(M+h)dv.$$

Ovo promenljivoj može biti pripisan parametar koji karakteriše njeno rasipanje unutar V , a naziva se disperzija kao u klasičnoj teoriji verovatnoće.

Srednja vrednost promenljive za tačkastu geometriju proba unutar V , računa se:

$$(6.4) \quad m = \frac{1}{V} \int_V f(M)dV,$$

a disperzija

$$(6.5) \quad \sigma^2 = \frac{1}{V} \int_V (y(M) - m)^2 dV.$$

Uočljivo je da prethodni izrazi imaju više geometrijski karakter nego karakter verovatnoće.

Iz izraza (6.1), (6.3) i (6.5) menjajući redosled integraljenja dobija se:

$$(6.6) \quad \sigma^2 = \frac{1}{V^2} \int_V dV \int_V \gamma(h)dV' - \frac{1}{v^2} \int_v dv \int_v \gamma(h)dv'.$$

Svaki od ovih integrala predstavlja srednju vrednost $\gamma(h)$ unutar V ili v pri čemu se obadva kraja vektora h slobodno pomeraju unutar prostora V ili v .

Ako je srednja vrednost $\gamma(h)$ unutar polja V definisana:

$$(6.7) \quad F(V) = \frac{1}{V^2} \int_V dV \int_V \gamma(h)dV'$$

odnosno unutar v :

$$(6.8) \quad F(v) = \frac{1}{v} \int_v dv \int_v \gamma(h)dv',$$

tada je

$$(6.9) \quad \sigma^2 = F(V) - F(v).$$

Dakle, variogram tačkastog sadržaja dozvoljava računanje sadržaja u probama (zapremine v) unutar istraživanog ležišta ili dela ležišta V .

Treba primetiti da disperzija ne zavisi samo od razmera v i V , nego i od oblika orijentacije.

Relacija (6.6) objašnjava fizički smisao disperzije. Disperzija sadržaja makro probe v , razmatrana kao skup mikro proba dv , ne zavisi ni od broja mikro proba ni od njihove disperzije već samo od srednje vrednosti sopstvene funkcije $\gamma(h)$ u oblasti v .

Variaciona statistika razmatra mikro probe kao nezavisne i definiše vrednosti disperzije $1/v$.

Međutim u stvarnosti ne postoje ležišta u kome bi disperzija bila hiljadu puta veća za slučaj da se uzimaju probe iz jezgra u masi od 10 [kg], u odnosu na masovno uzimanja proba u masi od 10 [t].

Iz izraza (6.6) vidi se zašto je to tako. Sadržaji u mikro-probama nikako nisu nezavisni. Oni se nalaze u korelacionoj zavisnosti (stepen koji određuje veću ili manju neprekidnost mineralizacije) koju definiše zakon apsolutnog rasejanja $\gamma(h)$. Sadržaji u mikro - probama razlikuju se međusobno kudikamo manje od onog što predpostavlja variaciona statistika.

Izraz za disperziju (6.9) izražava svojstvo aditivnosti disperzije. Posmatrajmo otkopani deo ležišta V' , sa probama v u ležištu V i obeležimo sa:

$\sigma^2(V', V)$ - disperzija sadržaja u otkopanom delu ležišta,

$\sigma^2(v, V)$ - disperzija sadržaja proba u ležištu,

$\sigma^2(v, V')$ - disperzija sadržaja proba u otkopanom delu ležišta.

Tada se dobija jednačina krigovanja:

$$(6.10) \quad \sigma^2(v, V) = \sigma^2(v, V') + \sigma^2(V', V).$$

Ovu formulu je uveo Krig za slučaj kada se raspodela sadržaja opisuje statističkim lognormalnim zakonom. U suštini ova jednačina nije vezana za ovaj ili onaj oblik raspodele, već za zakon apsolutnog rasejanja.

Osim disperzije geostatistika uvodi i pojam *kovarijacije*. Ako su $y(M)$ i $y_1(M+h)$ sadržaj proba uzetih u tačkama (M) i $(M+h)$, tada je kovarijacija (u granicama geometrijskog polja V):

$$(6.11) \quad \sigma_{yy_1} = \frac{1}{V^2} \int_V (y(M) - m)(y_1(M+h) - m)dv.$$

Kovarijacija može biti izražena i preko variograma:

$$(6.12) \quad \sigma_{yy_1} = F(V) - \frac{1}{vv'} \int_v^V dv \int \gamma(h) dv'.$$

Razmatramo izotropnu šemu De Vajsa:

$$(6.13) \quad \gamma(r) = 3d \ln r$$

gde je: $r = |h|$ – Sopstveni modul vektorskog argumenta h , ili rastojanje između tačaka (M) i $(M + h)$,

α – Koficijent apsolutnog rasejanja koji karakteriše stepen rasejanja sadržaja nezavisno od oblika i zapremine proba.

U pojedinim slučajevima, kada je, oblik proba sličan obliku ležišta, izrazi (6.12) i (6.13) daju:

$$(6.14) \quad \sigma^2 = \alpha \ln \frac{V}{v}.$$

Ovo je de Vajsova formula koja izražava princip sličnosti, kju nije moguće primeniti kada ne postoji sličnost oblika proba sa oblikom ležišta. Međutim, željenom geometrijskom obliku v može se pripisati linearni ekvivalent d određen izrazom:

$$(6.15) \quad \ln d - \frac{3}{2} = \frac{1}{v^2} \int_v^V dv \int_v^V \ln r dv'.$$

Prethodni izraz (6.15) znači da sadržaj u probi v unutar ležišta ima istu disperziju kao i sadržaj linijske probe dužine d . Ako su D i d linearni ekvivalenti ležišta i proba, tada se disperzija može definisati:

$$(6.16) \quad \sigma^2 = 3 \alpha \ln \frac{D}{d}.$$

Sračunati linearni ekvivalentni za različite geometrijske forme se obično u specijalizovanoj literaturi iz geostatistike daju u tabelarnim pregledima. Ovdje ćemo izložiti nekoliko približnih ekvivalenata:

– Za pravougaonik dimenzija $a \times b$:

$$(6.17) \quad d = a + b,$$

– Za paralelogram sa stranama a i b i površine ω :

$$(6.18) \quad d = \sqrt{a^2 + b^2 + 2\omega},$$

– Za trougao sa stranama a , b i c i površine ω :

$$(6.19) \quad d = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} + 2\omega},$$

– Za trapez dimenzija $a = \frac{(L+1)}{2}$; $b = \frac{(L-1)}{2}$, sa medianom m i površinom ω :

$$(6.20) \quad d = \sqrt{L^2 + l^2 + m^2 - \frac{l^2 m^2}{3L^2} + 2\omega},$$

– Za pravougaoni paralelepiped sa stranama $a > b > c$:

$$(6.21) \quad d = a + b + \frac{c}{2},$$

– Za kosi paralelepiped sa preseccima r_1 , r_2 , r_3 i stranama S_1 , S_2 , S_3 i zapreminom V :

$$R^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2,$$

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2,$$

$$(6.22) \quad d = \sqrt{R^2 + 2S + \frac{V^2 R^2}{S^3}}.$$

6.4. Disperzija ocene i disperzija rasprostranjenja

Jedan od najvažnijih praktičnih zadataka geostatistike je određivanje moguće greške kod ocene ležišta mineralnih sirovina. Opšte karakteristike relevantnih obeležja ležišta kao prostornih promenljivih pokazuju, da greška kod ocene ležišta ne zavisi samo od količine proba nego i od njihovog oblika, razmere i međusobne prostorne dispozicije, odnosno uprošćeno rečeno od "geometrije istražnih radova". Ove okolnosti održavaju se u geostatistici kroz pitanje disperzije ocene.

Pretpostavimo da smo u postupku ocene stvarnog (nepoznatog) sadržaja – recimo korisne komponente x u ležištu (ili bloku) V , odredili srednji sadržaj \bar{x} u probama uzetim u predmetnom ležištu. Greška ocene ($x - \bar{x}$) može biti potpuno definisana ali i nedefinisana za istraživano ležište i datu mrežu oprobavanja.

Da bi izračunali ovu grešku prostorne promenljive (u našem slučaju sadržaj k.), geostatističari posmatraju ocenjivano ležište (ili blok) kao deo veoma velikog zamišljenog ležišta ZL . Pri tome se predpostavlja da to ležište karakteriše zakon apsolutnog rasejanja $\gamma(h)$ određen variogramom koji je konstruisan na osnovu podataka oprobavanja.

Uočava se da razmera i oblik ležišta ZL nije od suštinskog značaja.

Zamislimo da se ocenjivani deo ležišta zajedno sa mrežom oprobavanja pomera unutar zamišljenog ležišta ZL .

Tada greška $(x - \bar{x})$ postaje prostorna promenljiva s nultom srednjom vrednošću i disperzijom:

$$(6.23) \quad \sigma^2 = \sigma_x^2 + \sigma_{\bar{x}}^2 - 2\sigma_{x\bar{x}}.$$

Ova se disperzija naziva "disperzija ocene" i računa se na osnovu podataka za disperzije σ_x^2 , $\sigma_{\bar{x}}^2$ i kovarijacije promenljivih x i \bar{x} u granicama ležišta ZL a na osnovu izraza (6.6) i (6.12).

U svakom izrazu javlja se član $F(V)$ odnosno $F(ZL)$ vezan za ležište ZL , koji je eliminisan u izrazu (6.23), tj. disperzija ocene σ^2 ne zavisi, kao što smo konstatovali, od razmere i forme ležišta ZL . Na taj način disperzija ocene ima oblik:

$$(6.24) \quad \sigma^2 = \frac{2}{VV'} \int_V dV \int_{V'} \gamma(h) dV' - \frac{1}{V^2} \int_V dV \int_V \gamma(h) dV' - \frac{1}{V'^2} \int_{V'} dV' \int_{V'} \gamma(h) dV'$$

gde je: V - zapremina istraživanog ležišta

V' - zapremina proba.

Disperzija ocene dobija se integraljenjem sopstvene funkcije $\gamma(h)$ unutar geometrijskog prostora ležišta i proba. Kao što variogram može dati tačno objašnjenje pitanja "zone uticaja probe", tako disperzija ocene (6.24) objašnjava smisao uticaja svih proba na ocenu ležišta.

Izraz (6.24) vrlo je teško koristiti u praktične svrhe. Istražni radovi se obično izvode po diskretnoj mreži, a i uzimanje proba može biti takođe diskretno u datoj mreži. Zapremina V' u izrazu (6.24) predstavlja ukupnu zapreminu uzetih i izanaliziranih proba. Smatra se uobičajno da svaka proba predstavlja sadržaj u nekoj zoni uticaja odnosno sadržaj u centru zone gde je uzeta.

Greška koja se čini pri pripisivanju sadržaja probe čitavoj zoni može biti definisana disperzijom (6.24), tada je V - zapremina zone uticaja a V' - zapremina proba.

Ova se disperzija naziva "elementarnom disperzijom rasprostranjenja".

U praksi treba razdvojiti dva slučaja. Za izotropnu funkciju $\gamma(h)$ mreža oprobavanja može biti izotropna ili ne. Kao primer izotropne mreže može nam poslužiti

kvadratna mreža. Greške koje se čine u slučaju izotropne mreže sa rasprostranjenjem sadržaja proba na njihove zone uticaja, mogu se smatrati nezavisnim, tj. geostatistička kovarijacija se smatra ravnom nuli. U ovom slučaju disperzija ocene određuje se deljenjem disperzije rasprostranjenja svake probe σ_E^2 na broj zona uticaja N :

$$(6.25) \quad \sigma = \frac{\sigma_E^2}{N}.$$

Ako mreža nije izotropna, tada se mora izvršiti grupisanje proba po pravcima (linijama) ili po ravnima njihovog najgušćeg razmeštanja, pa se zatim razmatraju različite disperzije rasprostranjenja.

Pretpostavimo da je ležište žičnog tipa istraženo rudarskim podzemnim radovima i da su probe uzimane brazdastom metodom. Sa $\sigma_{E_1}^2$ obeležimo disperziju rasprostranjenja sadržaja u brazdastoj probi na delu hodnika koji odgovara zoni njenog uticaja. Ako je N ukupan broj brazdastih proba, disperzija ocene ($\sigma_{E_1}^2/N$) karakteriše grešku određivanja sadržaja istražnim radovima po metodi brazdastih proba. Sa $\sigma_{E_2}^2$ obeležimo disperziju rasprostranjenja sadržaja hodnika na zonu njegovog uticaja. Zona uticaja hodnika je blok koji je omeđen horizontom iznad i horizontom ispod hodnika. Ako je n - broj istražnih hodnika, tada disperzija ocene $\sigma_{E_2}^2/n$ karakteriše grešku proizašlu iz postupaka ekstrapolacije srednjeg sadržaja na celo ležište. Rezultanta disperzija ocene je:

$$(6.26) \quad \sigma^2 = \frac{\sigma_{E_1}^2}{N} + \frac{\sigma_{E_2}^2}{n}.$$

U ovaj izraz potrebno je uneti i dopunsku disperziju koja karakteriše slučajne greške kao posledice grešaka kod uzimanja i analize proba. Drugi član u izrazu (6.26) je znatno veći od prvog. Greška eksploatacije sadržaja na svim ležištima čini osnovni deo opšte greške ocene.

U osnovi nema smisla beskonačno povećavati broj proba N , niti obim istražnih radova, pošto disperzija ocene σ^2 uvek teži vrednosti $\sigma_{E_2}^2/n$.

Radi lakšeg manipulisanja, izrađeni su tabelarni i grafički prikazi, pomoću kojih je moguće brzo odrediti numeričke vrednosti elementarnih disperzija rasprostranjenja za različite sopstvene funkcije rasejanja $\gamma(h)$. S obzirom na ciljeve ove knjige i činjenicu da bi za prikaz tabela i grafika trebalo dosta prostora, mi smo dali samo ilustrativne primere (sl. 6.2.), za detaljnije informacije čitaoca upućujemo na specijalizovanu geostatičku literaturu.

Pretpostavimo slučaj da je ležište žičnog tipa istraženo podzemnim radovima, da zadovoljava šemu de Vajsa i da su hodnici tako izvedeni da je prvi član izraza (6.26) jednak nuli.

Neka je h rastojanje između horizontata mereno u ravni rudne žice. Disperzija rasprostranjenja sadržaja u hodnik dužine l na njegovu zonu uticaja l biće:

$$(6.27) \quad \sigma_E^2 = \frac{\alpha\pi h}{2l}.$$

Ovaj izraz odgovara za uslov: da je $h \leq l$. Ako je $h > l$, koristi se drugi izraz.

Pretpostavimo da su dužine istražnih hodnika l_1, l_2, \dots, l_n veće od h .

Disperzija ocene dobija se kao

$$(6.28) \quad \sigma^2 = \frac{\sum l_i^2 \sigma_{E_i}^2}{(\sum l_i)^2},$$

odnosno

$$(6.29) \quad \sigma^2 = \frac{l_1^2 \sigma_{E_1}^2 + l_2^2 \sigma_{E_2}^2 + l_3^2 \sigma_{E_3}^2 + \dots + l_n^2 \sigma_{E_n}^2}{(l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_n)^2}$$

ili

$$(6.30) \quad \sigma^2 = (\alpha\pi h/2) \frac{l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_n}{(l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_n)^2}.$$

Kada je disperzija ocene proračunata, ostaje da se odredi veličina moguće greške. Ovaj cilj se može postići pripisivanjem disperziji smisla verovatnoće. Po analogiji sa normalnom raspodelom može se računati, ako je m – srednja ocena sadržaja, da je stvarni sadržaj u ležištu s verovatnoćom od 95 % definisan intervalom $m \pm 2\sigma$.

U drugim slučajevima, naročito kada vrednost 2σ nije mala u poređenju sa m , uzima se interval

$$m \exp\left(\pm \frac{1}{m} 2\sigma\right),$$

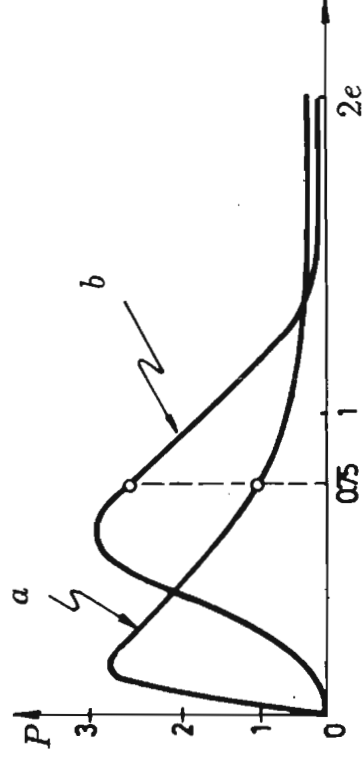
po analogiji sa lognormalnom raspodelom. Ovo pozivanje na verovatnosni model je vrlo proizvoljno. Razumljivo, samo pitanje statističke raspodele ocene greške lišeno je smisla. Fizički smisao ima samo disperzija. Zato i govorimo o uslovnoj veličini greške, a njen praktični smisao sastoji se u tome što nam daje bolji uvid i predstavu o mogućoj greški, svakako bolje nego što to čini disperzija.

6.5. Krigovanje

Jedan od najvažnijih doprinosa geostatistike je krigovanje. Procedura krigovanja svodi se na određivanje sadržaja (ili vrednosti nekog drugog geološkog obeležja) u bloku na osnovu sadržaja u probama razmeštenim unutar i van ocenjivanog bloka. Smisao krigovanja sastoji se u tome da se sadržajima svake probe pripisuju takve težine (uticaji) koji će obezbediti minimalnu disperziju ocene srednjeg sadržaja. Na definisanje težina proba utiče geometrijska forma, dimenzije i uzajamni položaj ocenjivanog bloka i proba. U opštem slučaju, što je proba više udaljena od centra bloka manji je njen uticaj, odnosno, pripisuje joj se manja težina.

Ideja minimizacije disperzije srednjeg sadržaja pripada D. Krigu (po kome je Ž. Matern predložio naziv postupka "krigage", kod nas je odmaćen naziv krigovanje). Kod ocene ležišta zlata u Južnoj Africi primеćeno je da pri proračunu sadržaja zlata u bloku na osnovu proba koje su unutar njega, srednji sadržaj zlata je sistematski bio povećan u bogatijim i sistemski umanjen u siromašnijim blokovima. Krig je ovo objasnio levo simetričnom raspodelom sadržaja zlata i time što je disperzija sadržaja proba uvek veća od disperzije sadržaja po blokovima.

Na slici 6.3 uočljivo je da su asimptotski delovi krive raspodele siromašnih i bogatih proba više od asimptotskih delova njima odgovarajućih siromašnih ili bogatih blokova.



Sl. 6.3. - Krigove raspodele sadržaja korisne komponente u probama (a) i srednjeg sadržaja u bloku (b)

Zato kada su jednom konturom obuhvaćene probe sa visokim sadržajem, u opštem slučaju dolazi do procene srednjeg sadržaja u zoni uticaja proba i procene sadržaja u slučaju da su probe sa niskim sadržajem.

Prema Krigu statistička veza između sadržaja lognormalne raspodele korisne komponente u probi i u prostoru njenog uticaja, izražava se popravkom:

$$(6.31) \quad z = m \left(\frac{u}{m} \right) \frac{\sigma_y^2 \sigma_i^2 \sigma_y^2}{\sigma^2 2\sigma^2}$$

gde je: u – sadržaj komponente u probi;

m – srednji sadržaj komponente u ležištu;

σ^2 – disperzija logaritma sadržaja, računata za sve probe u zoni ležišta;

σ_i^2 – disperzija logaritma sadržaja, po probama u zoni posmatranog bloka;

σ_y^2 – disperzija logaritma srednjih sadržaja po blokovima u zoni ležišta,

pri čemu su u odgovarajućoj superpoziciji disperzije:

$$(6.32) \quad \sigma^2 = \sigma_i^2 + \sigma_y^2.$$

Praktični značaj Krigove popravke, koja je često statističkog karaktera, pri ocenama ležišta je dosta ograničen pre svega zato što je izostavljen uticaj osobnosti prostornih rasporeda proba i ocenjivanih blokova.

Kod krigovanja, koje predstavlja dalji razvoj Krigove ideje, uneti su prostorni elementi izučavanog ležišta kao i geometrijske osobnosti proba i ocenjivanog prostora.

U opštem obliku zadatak krigovanja za geostatističko jednorodno polje svodi se na iznalaženje najbolje linearne ocene:

$$(6.33) \quad U^* = \sum_{i=1}^{i=n} a_i x_i$$

stvarnog srednjeg sadržaja U u bloku na osnovu niza proba sa sadržajima $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ raspoređenim unutar i van ocenjivanog bloka. Ovaj se zadatak može rešiti utvrđivanjem težine koeficijenata a_i , koji su definisani sa dva uslova:

- (1) Stvarna vrednost sadržaja U i procenjena vrednost sadržaja U^* , moraju imati jednake srednje vrednosti u celom geometrijskom polju, tj. srednja vrednost greške $U - U^*$ mora biti jednaka nuli. Ovaj se uslov može iskazati:

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i = 1.$$

- (2) Koeficijenti krigovanja a_i moraju imati takve vrednosti da disperzija ocene stvarnog sadržaja $D(U - U^*)$ ima minimalnu vrednost. Ovaj se uslov formuliše sistemom linearnih jednačina sa koeficijentima a_i . Koeficijenti ovog sistema jednačina izražavaju se pomoću disperzije i kovarijacije sadržaja u probama i blokovima. Rešavanjem sistema jednačina i znajući sopstvenu funkciju promene sadržaja, mogu se tabelarno prikazati koeficijenti krigovanja i odgovarajuće disperzije u funkciji geometrijskih karakteristika proba i blokova. Za izotropnu šemu de Vajsa ovaj posao obavio je Matheron primenjujući diskretno i kontinualno krigovanje.

6.5.1. Diskretno krigovanje

Razmatramo ocenu srednjeg sadržaja korisne komponente u kvadratnoj zoni, gravitirajućoj ka bušotini A , a na osnovu sadržaja korisne komponente u centralnoj bušotini i sadržaja u bušotinama prvog i drugog oreola.

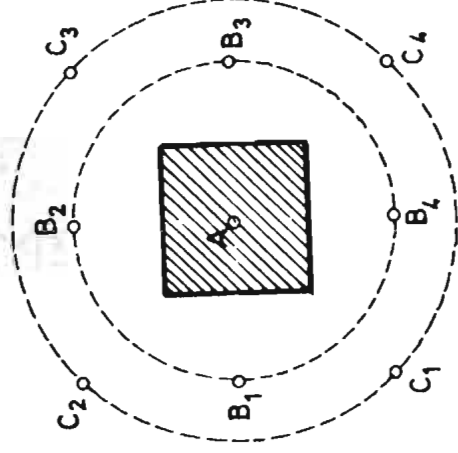
Na slici 6.4. data je šema sa dispozicijom bušotina, gde je A – centralna bušotina, B_1, B_2, B_3 , i B_4 bušotine prvog oreola a C_1, C_2, C_3 i C_4 bušotine drugog oreola. U praksi je dovoljno ograničiti se na prva dva najbliža oreola drugog oreola, pošto bušotine udaljenih oreola nemaju značajnijeg uticaja na ocenu srednjeg sadržaja. Srednji sadržaj U u ocenjivanom prostoru, koji gravitira ka bušotini A sa sadržajem korisne komponente u , računa se kao

$$(6.34) \quad U^* = (1 - \lambda - \mu)u + \lambda v + \mu \omega$$

gde je: v – srednji sadržaj u bušotinama prvog oreola (B_1, B_2, B_3 i B_4);

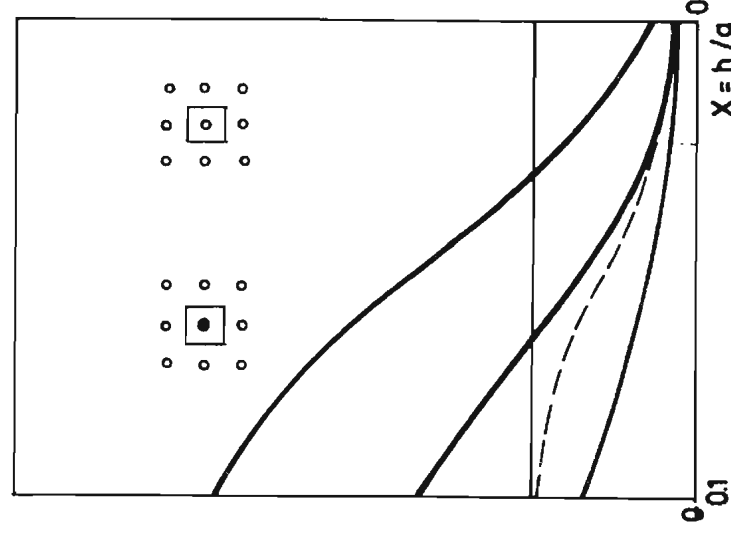
ω – srednji sadržaj u bušotinama drugog oreola (C_1, C_2, C_3 i C_4);

λ i μ – težinski koeficijenti krigovanja za bušotine prvog i drugog oreola.



Sl. 6.4. - Šema razmeštaja bušotine

Za proračun težinskih koeficijenata λ i μ koriste se specijalni nomogrami. U specijalizovanim knjigama iz geostatistike dati su ovi nomogrami. Na slici 6.5. pokazan je jedan takav nomogram sastavljen za slučaj kao što je naš primer. Na apscisnu osu u logaritamskoj razmeri nanete su vrednosti za $x = h/a$, koje izražavaju odnos srednje moćnosti ležišta (h) i veličine osnovnog rastojanja (a) između bušotina u kvadratnoj mreži. Na levu ordinatnu osu nanese su težinski koeficijenti λ i μ a na desnu ordinatnu vrednosti $\sigma_n^2/3\alpha$ koje, kada se pomnože sa koeficijentima apsolutnog rasejanja 3α , daju disperziju krigovanja tj. minimalnu vrednost disperzije ocene U .



Sl. 6.5 - Nomogram za određivanje disperzije krigovanja

Popravka ocena srednjeg sadržaja, dobijena kao rezultat korišćenja krigovanja, zavisi od prostornih osobnosti orudnjenja i geometrije istražnih radova iskazanih kroz odnos h/a , a može se koristiti samo za slučaj izotropne šeme promene sadržaja korisne komponente.

U slučaju anizotropije, krigovanjem se mogu dobiti samo orijentacione vrednosti, koje ako nema drugih mogu imati praktičan značaj.

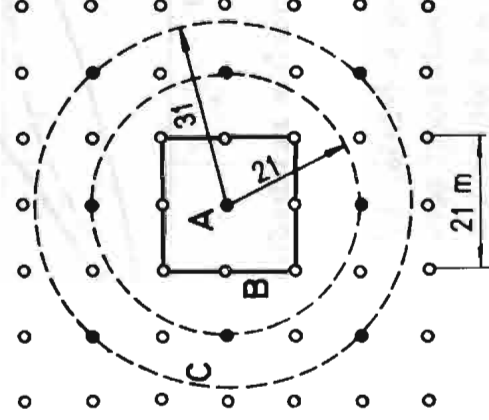
Uticaj anizotropije moćnosti ležišta može biti isključen afinom transformacijom koordinata, tj. putem odgovarajućeg umanjivanja veličine h .

Celishodnost korišćenja krigovanja pokazuje se po pravilu u uslovima eksploatacionih istraživanja, npr. kada se na osnovu proba iz minskih bušotina rešava pitanje selektivne eksploatacije. Pri ovome može se desiti slučaj da iz prvog ili drugog oreola nedostaje jedna ili više bušotina ili da nedostaje centralna bušotina A .

Za proračune koeficijenata i disperzije krigovanja za sve praktično moguće varijante razmeštanja bušotina, Ž. Materon je sastavio odgovarajuće nomograme. Njihova primena je adekvatna samo tada kada su rastojanja između bušotina u mreži uslovljena tehničkim razlozima, a ne rasednim zonama u polju ležišta. Ako je nepotpunost mreže bušotina uslovljena time što se deo izvedenih bušotina nalazi van konture eksploatacione zone ležišta, tada su disperzije rasprostranja i krigovanja lišene smisla. U ovakvom slučaju pred istraživačem se postavlja zadatak ocene stvarne zone uticaja svake bušotine, što može biti rešeno samo geološkim metodama.

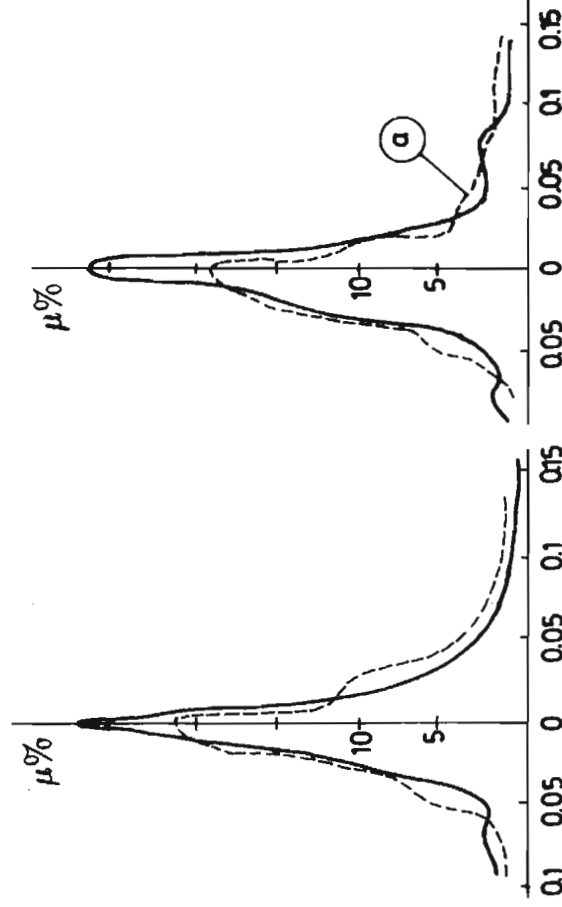
Za dobijanje orijentacionih podataka Ž. Materon u takvim slučajevima preporučuje pripisivanje koeficijenta krigovanja stvarnim zonama uticaja, definisanim na osnovu geoloških sagledavanja, ili pripisivanje nulte težine svim nerudnim negativnim bušotinama.

Radi potvrde efikasnosti diskretnog krigovanja, na osnovu podataka dobijenih eksploatacionim oprobavanjima na jednom horizontu štokverknog ležišta molibdena, bio je realizovan sledeći eksperiment. U blokovima dimenzija $21 \times 21 \times 20$ [m] ocenjivan je srednji sadržaj molibdena. Blokovi su ograničeni bušotinama za miniranje dubine 20 [m], koje su istovremeno poslužile kao istražne bušotine. U prvom slučaju ocene, sadržaj molibdena u centralnoj bušotini *A* pripisivan je celom bloku (Sl. 6.6).



Sl. 6.6. - Šema rasporeda bušotine u eksploatacionoj fazi na jednom horizontu (crne tačke - bušotine koje učestvuju u ocenjivanju)

U drugom slučaju ocena dobijena diskretnim krigovanjem, sa uzimanjem u obzir podataka oprobavanja iz bušotina koje se nalaze van konture bloka, oreoli *B* i *C* na slici 6.6. Efikasnost obe ocene određivana je putem poređenja sa stvarnim srednjim sadržajima u blokovima. Srednji sadržaj u blokovima računat je kao aritmetička sredina sadržaja molibdena u uzorcima iz pet bušotina izbušenih u zoni ocenjivanog bloka. Na slici 6.7. prikazani su histogrami sračunatih grešaka ocene. Upadljivo veća amplitudnost histograma greške ocene sračunatih diskretnim krigovanjem u poređenju sa histogramima greške ocene sračunatih centralne bušotine, potvrđuje efikasnost diskretnog krigovanja.



Sl. 6.7. - Histogrami greške ocene srednjeg sadržaja molibdena u bloku a) preko centralne bušotine; b) preko oreola "B"; c) preko oreola "C"

6.5.2. Kontinuirano krigovanje

Kao jednostavniji primer za ilustraciju kontinuiranog krigovanja uzećemo ocenjivanje srednjeg sadržaja korisne komponente u kvadratnom bloku omeđenom hodnicima, kao na slici 6.8. Pri izotropnom karakteru promena orudnjenja u ležištu, sva četiri istražna hodnika imaju isti značaj.

Radi realizacije kontinuiranog krigovanja, površina bloka se deli na elementarne površine-kvadrata.

	32	60	66	60	32
32					32
60					60
66					66
60					60
32					32
	32	60	66	60	32

Sl. 6.8.

Koristeći analogiju krigovanja sa teorijom potencijala, uz pomoć matematičkog aparata teorije funkcija kompleksne promenljive, za kvadrata se računaju funkcije kompaktnosti merenja $f(\alpha)$, koje se tretiraju kao "težine" odrezaka okončenih rudarskim radovima. Pri ovome, kontura bloka predstavlja idealan ekran

sa svim probama. Na osnovu opšte teorije superpozicije, sabiranjem "težina" kvadrata dobija se ukupna "težina", koja se dodeljuje svakom radnom delu (segmentu) pri krigovanju bloka date konfiguracije.

Na primer, ako je površina bloka izdijeljena na 25 kvadrata tako da je duž svakog kontinuiranog hodnika uklopljeno pet segmenata (Sl. 6.8.), tada se težina segmenata računata pomenutim načinom, za centralne segmente bilo koje strane 66, a za ugaone segmente 32 (zbir "težine" svih segmenata jednaka je 1000).

Metodu kontinuiranog krigovanja Matheron preporučuje za rudne blokove različitim konfiguracija. On je razvio mreže "težina" kontinuiranog krigovanja, za dva, tri i četiri konturna rudarska rada (hodnika), za praktično svaku konfiguraciju.

Može se zaključiti da se procedurom krigovanja minimizira disperzija ocene, da se omogućava korišćenje dopunskih informacija sadržanim u podacima oprobavanja i dobijanje tačnijih ocena srednjeg sadržaja u blokovima u odnosu na obične metode.

Osnovni praktični značaj krigovanja nije toliko u tačnoj oceni srednjeg sadržaja, koliko u mogućnosti eliminisanja sistematske greške.

Sa ovih pozicija krigovanje se može oceniti kao jedan od najobjektivnijih načina ocene i proračuna uticaja proba sa jako visokim sadržajem korisne komponente.

Iz izloženog mogu se sagledati osnovna obeležja i principi geostatistike. Pošto su sva objašnjenja i komentari vezivani za ležišta mineralnih sirovina, može se doći do pogrešnog zaključka o prostoru njene primene u praksi. Bez dileme najveću primenu geostatistika ima kod obrade ležišta, ali je njena primena sve veća u hidrogeologiji, geomehanici, geofizici i drugim oblastima geologije.

7. Numerička analiza

7.1. Osnovi numeričke analize

7.1.1. Teorija interpolacije

7.1.1.1. Opšte o problemu interpolacije

Neka je dato $n + 1$ tačaka x_0, x_1, \dots, x_n ($x_0 < x_1 < \dots < x_n$), i neka su poznate vrednosti $f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \dots, f(x_n) = y_n$ neke funkcije u tim tačkama. Opšti problem interpolacije se sastoji u nalaženju neke funkcije $F(x)$ (za koju se pretpostavlja da ima jednostavan oblik i koja se naziva funkcija interpolacije), za koju važi $F(x_0) = y_0, F(x_1) = y_1, \dots, F(x_n) = y_n$. Vrednosti funkcije $f(x)$ (obično u intervalu $[x_0, x_n]$, ali često i van njega) tada se približno izračunavaju preko funkcije interpolacije $F(x)$, tj. uzima se približno $f(x) \approx F(x)$, ili $f(x) = F(x) + R(x)$, gde je $R(x)$ izvesna greška koja se čini prilikom interpolacije. Prilikom interpolacije takođe se teži i proceni greške $R(x)$, tj. gleda se da se nađe i eksplicitni izraz, odnosno nejednakost za $R(x)$.

U opštem slučaju za $F(x)$ nema nekih ograničenja, no u praksi se najčešće uzima da je $F(x)$ polinom stepena ne većeg od n , tj.

$$F(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n.$$

Uslov $F(x_0) = y_0, F(x_1) = y_1, \dots, F(x_n) = y_n$ svodi se tada na sistem linearnih jednačina:

$$(7.1) \quad \begin{array}{r} a_0 + a_1x_0 + \dots + a_nx_0^n = y_0, \\ a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_1^n = y_1, \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_n + \dots + a_nx_n^n = y_n. \end{array}$$

Ovde ima $n+1$ jednačina sa $n+1$ -om nepoznatom a_0, a_1, \dots, a_n . Determinanta sistema (7.1) je

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix},$$

i poznata je u literaturi pod imenom Vandermondeova determinanta. Njena vrednost je

$$D = (x_n - x_0)(x_{n-1} - x_0) \dots (x_1 - x_0)(x_n - x_1) \dots \\ (x_2 - x_1) \dots (x_n - x_{n-1}) = \prod_{i>j} (x_i - x_j) \neq 0,$$

jer su po pretpostavci svi brojevi x_0, x_1, \dots, x_n međusobno različiti. Prema tome, ako je barem jedno $y_j \neq 0$, sistem (7.1) ima jedinstveno rešenje, te je polinom $F(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ jednoznačno određen. Međutim i pored jednoznačne rešivosti, određivanje koeficijenata a_0, a_1, \dots, a_n polinoma $F(x)$ putem determinanti je zametno. Zato su razvijeni razni posebni postupci za određivanje forme polinoma $F(x)$, koji nose imena pojedinih matematičara zaslužnih za tu problematiku.

7.1.1.2. Lagranžev interpolacioni polinom

Ovaj interpolacioni polinom je opšteg karaktera. Neka je dato $n+1$ tačaka $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. Treba formirati polinom $P_n(x)$ stepena ne većeg od n tako da bude

$$P_n(x_i) = y_i \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

Direktnom proverom se ustanovljava da je takav polinom dat preko formule:

$$P_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \dots + y_n L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x),$$

gde je:

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}.$$

Naime važi:

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j, \end{cases} \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

pa je neposredno $P_n(x_i) = y_i$. U razvijenom obliku, na primer, za $n = 3$ dobija se

$$P_3(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + \\ + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}.$$

Ako se stavi $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$, onda je $|R_n(x)|$ greška koja se dobija ako se vrednost funkcije zameni vrednošću interpolacionog polinoma u odgovarajućoj tački. Važi procena

$$(7.2) \quad |R_n(x)| \leq \frac{|(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|}{(n+1)!} \max_{x_0 \leq x \leq x_n} |f^{(n+1)}(x)|,$$

pod pretpostavkom da f ima neprekidan $n+1$ -i izvod u intervalu $[x_0, x_n]$.

7.1.1.3. Njutnov interpolacioni polinom za nejednake razlike

Opet se pretpostavlja da je dat sistem tačaka $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ koje leže u intervalu $[a, b]$ i vrednosti $f(x_i) = y_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$). Za izvođenje Njutnovog interpolacionog polinoma za nejednake razlike potreban je pojam podeljenih razlika, koje se definišu rekursivno na sledeći način. Naime, podeljene razlike prvoga reda za funkciju $f(x)$ se definišu kao

$$f(x_0; x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \\ f(x_1; x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \dots, \\ f(x_{n-1}; x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

Slično tome se definišu podeljene razlike drugoga reda kao

$$\begin{aligned} f(x_0; x_1; x_2) &= \frac{f(x_1; x_2) - f(x_0; x_1)}{x_2 - x_0}, \\ f(x_1; x_2; x_3) &= \frac{f(x_2; x_3) - f(x_1; x_2)}{x_3 - x_1}, \dots, \\ f(x_{n-2}; x_{n-1}; x_n) &= \frac{f(x_{n-1}; x_n) - f(x_{n-2}; x_{n-1})}{x_n - x_{n-2}}. \end{aligned}$$

U opštem slučaju, ako su već poznate podeljene razlike k -tog reda $f(x_i; x_{i+1}; \dots; x_{i+k})$, tada se podeljene razlike $k+1$ -og reda definišu kao

$$f(x_{i-1}; x_i; \dots, x_{i+k}) = \frac{f(x_i; x_{i+1}; \dots; x_{i+k}) - f(x_{i-1}; x_i; \dots; x_{i+k-1})}{x_{i+k} - x_{i-1}}.$$

Indukcijom se lako pokazuje da za podeljenu razliku k -tog reda $f(x_i; x_{i+1}, \dots, x_{i+k})$ (ona se često označava kao $[x_i; x_{i+1}; \dots; x_{i+k}]$) važi formula

$$\begin{aligned} f(x_i; x_{i+1}; \dots; x_{i+k}) &= \frac{f(x_i)}{(x_i - x_{i+1})(x_i - x_{i+2}) \dots (x_i - x_{i+k})} + \\ &+ \frac{f(x_{i+1})}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i+2}) \dots (x_{i+1} - x_{i+k})} + \dots \\ &+ \frac{f(x_{i+k})}{(x_{i+k} - x_i)(x_{i+k} - x_{i+1}) \dots (x_{i+k} - x_{i+k-1})}. \end{aligned}$$

Tada polinom

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(x_0) + (x - x_0)f(x_0; x_1) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0; x_1; x_2) + \dots + \\ &(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})f(x_0; x_1; \dots; x_n) \end{aligned}$$

ima osobinu $P_n(x_i) = f(x_i) = y_i$ za $i = 0, 1, \dots, n$, i on predstavlja Njutnov interpolacioni polinom za nejednake razlike, tj. za opšti sistem tačaka $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. Ako se slično kao kod Lagranževog interpolacionog polinoma formira izraz

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)f(x; x_0; x_1; \dots; x_n),$$

tada se, u slučaju da f ima $n+1$ neprekidan izvod u $[a, b]$, dobija primenom teoreme o srednjoj vrednosti da je

$$f(x; x_0; x_1; \dots; x_n) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

gde je ξ neka tačka iz intervala koji sadrži sve tačke x, x_0, \dots, x_n . Stoga se za ostatak u Njutnovoj interpolacionoj formuli dobija ista procena kao u prethodnom slučaju, tj. nejednakost (7.2). Interesantan je slučaj kada se tačke x_0, x_1, \dots, x_n poklapaju. Tada Njutnov interpolacioni polinom prelazi u Tejlorovu formulu

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n f^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{(x-x_0)^{n+1} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

gde je ξ neka tačka iz intervala $[x, x_0]$.

7.1.1.4. Njutnov interpolacioni polinom za jednake razlike

Za ovaj oblik interpolacionog polinoma definiše se uopšteni n -ti stepen broja x kao

$$x^{[n]} = x(x-h)(x-2h)\dots(x-(n-1)h),$$

a po definiciji je $x^{[0]} = 1$, gde je h neki fiksni realni broj. Ovde se posmatra funkcija $y = f(x)$ zadata vrednostima $y_i = f(x_i)$ na skupu međusobno jednako udaljenih tačaka x_i ($i = 0, 1, \dots, n$), gde je

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h = \text{konstanta}.$$

Konačne razlike za zavisno promenljivu y (videti poglavlje o rešavanju parcijalnih diferencijalnih jednačina) zapisuju se kao

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i,$$

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i, \dots,$$

$$\begin{aligned} \Delta^n y_i &= \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i = y_{i+n} - \binom{n}{1} y_{i+n-1} + \\ &+ \binom{n}{2} y_{i+n-2} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} y_i, \end{aligned}$$

što se lako pokazuje matematičkom indukcijom. Interpolacioni polinom se zapisuje u obliku

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0)^{[1]} + a_2(x-x_0)^{[2]} + \dots + a_n(x-x_0)^{[n]},$$

gde je $x_i = x_0 + ih$ ($i = 1, 2, \dots$), a koeficijenti polinoma a_i dati su izrazima

$$a_i = \frac{\Delta^i y_0}{i! h^i} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Tako se dobija tzv. prvi Njutnov interpolacioni polinom u obliku

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1! h}(x - x_0)^{[1]} + \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2}(x - x_0)^{[2]} + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n}(x - x_0)^{[n]}.$$

Ako se uvede oznaka $q = \frac{x - x_0}{h}$, onda gornja formula postaje

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0.$$

Isti polinom se može napisati i u drugom obliku, koji se zove druga Njutnova interpolaciona formula. Ona glasi:

$$P_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \dots + \frac{q(q+1)\dots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0,$$

i ona je obično pogodnija ako je x bliže x_n , dok je prva Njutnova formula obično pogodnija za vrednosti x bliže x_0 .

7.1.1.5. Interpolacioni polinom sa središnjim razlikama

I ovde se radi o interpolacionim polinomima za sistem tačaka koje su jednako udaljene, samo se radi o nešto drukčijem formiranju razlika. Ako je dat $2n + 1$ interpolacioni čvor $x_{-n}, x_{-(n-1)}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$, gde je $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h$, $i = -n, \dots, n-1$, onda se traži polinom stepena ne većeg od $2n$ za koji je $P(x_i) = y_i$ ($i = 0, \pm 1, \dots, \pm n$). Takav polinom glasi:

$$\begin{aligned} P(x) = & y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \dots + \\ & + \frac{(q+n-1)\dots(q-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-(n-1)} + \\ & + \frac{(q+n-1)\dots(q-n+1)(q-n)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}, \end{aligned}$$

gde je $q = \frac{x - x_0}{h}$, i zove se prvi Gausov interpolacioni polinom. Tu se javljaju tzv. "središne" razlike

$$\Delta y_0, \Delta^2 y_{-1}, \Delta^3 y_{-1}, \Delta^4 y_{-2}, \Delta^5 y_{-2}, \Delta^6 y_{-3}, \dots$$

dok se kod tzv. drugog Gausovog interpolacionog polinoma javljaju razlike

$$\Delta y_{-1}, \Delta^2 y_{-1}, \Delta^3 y_{-2}, \Delta^4 y_{-2}, \Delta^5 y_{-3}, \Delta^6 y_{-3}, \dots$$

Taj polinom glasi, u razvijenom obliku:

$$\begin{aligned} \bar{P}(x) = & y_0 + q\Delta y_{-1} + \frac{(q+1)q}{2!}\Delta^2 y_{-1} + \frac{(q+1)q(q-1)}{3!}\Delta^3 y_{-2} + \\ & + \frac{(q+2)(q+1)q(q-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2} + \dots + \\ & + \frac{(q+n-1)\dots(q-n+1)}{(2n-1)!}\Delta^{2n-1} y_{-n} + \\ & + \frac{(q+n)(q+n-1)\dots(q-n+1)}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}, \end{aligned}$$

gde je $\bar{P}(x_i) = y_i$ za $i = 0, \pm 1, \dots \pm n$. Postoji i tzv. Stirlingov interpolacioni polinom koji se formira kao aritmetička sredina Gausovih polinoma, tj. kao $\frac{1}{2}(P(x) + \bar{P}(x))$.

Ako se polazi od parnog broja čvorova, tj. od tačaka

$$x_{-n}, x_{-(n-1)}, \dots, x_0, \dots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}$$

sa rastojanjem $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = h$ i uslovom $y_i = f(x_i)$, onda se često formira i Beselov interpolacioni polinom, koji je stepena ne većeg od $2n+1$. Dakle $Q(x_i) = y_i$ ($i = -n, -(n-1), \dots, n, n+1$), pri čemu Beselov interpolacioni polinom ima oblik

$$\begin{aligned}
Q(x) = & \frac{y_0 + y_1}{2} + (q - \frac{1}{2})\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2} \times \frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} + \\
& + \frac{(q - \frac{1}{2})q(q-1)}{3!} \Delta^3 y_{-1} + \frac{q(q-1)(q+1)(q-2)}{4!} \times \frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}}{2} + \\
& + \frac{(q - \frac{1}{2})q(q-1)(q+1)(q-2)}{5!} \Delta^5 y_{-2} + \\
& + \frac{q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)(q-3)}{6!} \times \frac{\Delta^6 y_{-3} + \Delta^6 y_{-2}}{2} + \dots + \\
& + \frac{q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)\dots(q-n)(q+n-1)}{(2n)!} \times \\
& \times \frac{\Delta^{2n} y_{-n} + \Delta^{2n} y_{-(n+1)}}{2} + \\
& + \frac{(q - \frac{1}{2})q(q-1)(q+1)(q-2)(q+2)\dots(q-n)(q+n-1)}{(2n+1)!} \Delta^{2n+1} y_{-n}.
\end{aligned}$$

7.1.1.6. Inverzna interpolacija

Neka je $y = f(x)$ funkcija zadana tablično. Zadatak inverzne interpolacije je da se po zadanoj vrednosti y nađe odgovarajuća vrednost x . Ako su date tačke (x_i, y_i) ($i = 0, 1, \dots, n$), $y = f(x_i)$, onda se može konstruisati (Njutnov i Lagranžev) interpolacioni polinom po y sa čvorovima u tačkama y_i , recimo

$$P_n(y) = \sum_{i=0}^n x_i L_i(y),$$

$$L_i(y) = \frac{(y - y_0) \dots (y - y_{i-1})(y - y_{i+1}) \dots (y - y_n)}{(y_i - y_0) \dots (y_i - y_{i-1})(y_i - y_{i+1}) \dots (y_i - y_n)}.$$

Za dato y sada se može naći $x \approx P_n(y)$ kao približna vrednost interpolacionog polinoma $P_n(y)$.

7.1.1.7. Interpolacija kod periodičnih funkcija

U slučajevima kada funkcija $f(x)$ koju interpoliramo nad $[a, b]$ ima osobinu da je $f(a) = f(b)$, prirodno je ograničiti se na aproksimaciju $f(x)$ funkcijama $\varphi_0(x), \dots, \varphi_n(x)$ koje su periodične (sa osnovnim periodom $T = b - a$) i zadovoljavaju $\varphi_j(a) = \varphi_j(b)$ ($j = 0, 1, \dots, \bar{n}$). Najprostiji sistem periodičnih funkcija čine funkcije

$$1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$$

čiji je osnovni period 2π . Od ovih funkcija se formira tzv. trigonometrijski polinom

$$(7.3) \quad T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \sin kx + b_k \cos kx),$$

gde su a_k, b_k realni (ili kompleksni) koeficijenti koje treba odrediti. Osnovna osobina trigonometrijskih polinoma tipa (7.3), važna za interpolaciju, je sledeća: ako se dva polinoma poklapaju u $2n + 1$ različitih tačaka x_0, x_1, \dots, x_{2n} , tada su ti polinomi identični. Ako je $f(x_i) = y_i$ ($i = 0, 1, \dots, 2n$), tada se za $T_n(x)$ može napisati eksplicitna formula:

$$(7.4) \quad T_n(x) = \sum_{i=0}^{2n} y_i \frac{\sin \frac{x-x_0}{2} \sin \frac{x-x_1}{2} \dots \sin \frac{x-x_{i-1}}{2} \sin \frac{x-x_{i+1}}{2} \dots \sin \frac{x-x_{2n}}{2}}{\sin \frac{x_i-x_0}{2} \sin \frac{x_i-x_1}{2} \dots \sin \frac{x_i-x_{i-1}}{2} \sin \frac{x_i-x_{i+1}}{2} \dots \sin \frac{x_i-x_{2n}}{2}}.$$

Naime iz same konstrukcije $T_n(x)$ neposredno sledi da važi $T_n(x_i) = y_i = f(x_i)$ za $i = 0, 1, \dots, 2n$, a uz pomoć trigonometrijskih formula.

$$\sin kx \sin lx = \frac{1}{2} [\cos(k-l)x - \cos(k+l)x],$$

$$\sin kx \cos lx = \frac{1}{2} [\sin(k+l)x + \sin(k-l)x],$$

$$\cos kx \cos lx = \frac{1}{2} [\cos(k-l)x + \cos(k+l)x],$$

ustanovljava se da se $T_n(x)$, dato preko (7.4), svodi na trigonometrijski polinom oblika (7.3).

7.1.1.8. Interpolacija funkcija od dve nezavisne promenljive

Interpolacija funkcije $z = f(x, y)$ koja je zadata na sistemu tačaka (x_i, y_i) oblika $x_i = x_0 + ih$, $y_i = y_0 + jk$ ($i = 0, 1, 2, \dots, j = 0, 1, 2, \dots$) može se vršiti na sledeći način. Uvode se oznake $z_{i,j} = f(x_i, y_j)$ i formiraju konačne razlike na sledeći način:

$$\Delta_x z_{i,j} = z_{i+1,j} - z_{i,j},$$

$$\Delta_y z_{i,j} = z_{i,j+1} - z_{i,j},$$

$$\Delta^{m+n} z_{i,j} = \Delta_{x^m y^n}^{m+n} z_{i,j} = \Delta_x^m (\Delta_y^n z_{i,j}) = \Delta_y^n (\Delta_x^m z_{i,j}),$$

$$\Delta^{0+0} z_{i,j} = z_{i,j}.$$

Za funkciju dve promenljive (i slično za funkciju od više promenljivih) postoji Njutnova interpolaciona formula, koja je sasvim slična Njutnovom (običnom) interpolacionom polinomu iz odeljka 7.1.1.4.

Sa oznakama

$$p = \frac{x - x_0}{h}, \quad q = \frac{y - y_0}{k},$$

prvih nekoliko članova te interpolacione formule glasi

$$\begin{aligned} P(x, y) = & z_{0,0} + \frac{1}{1!} [p\Delta^{1+0} z_{0,0} + q\Delta^{0+1} z_{0,0}] + \\ & \frac{1}{2!} [p(p-1)\Delta^{2+0} z_{0,0} + 2pq\Delta^{1+1} z_{0,0} + q(q-1)\Delta^{0+2} z_{0,0}] + \\ & \frac{1}{3!} [p(p-1)(p-2)\Delta^{3+0} z_{0,0} + 3p(p-1)q\Delta^{2+1} z_{0,0} + \\ & \quad 3pq(q-1)\Delta^{1+2} z_{0,0} + q(q-1)(q-2)\Delta^{0+3} z_{0,0}] + \\ & \frac{1}{4!} [p(p-1)(p-2)(p-3)\Delta^{4+0} z_{0,0} + \\ & \quad 4p(p-1)(p-2)q\Delta^{3+1} z_{0,0} + \\ & \quad 6p(p-1)q(q-1)\Delta^{2+2} z_{0,0} + \\ & \quad 4pq(q-1)(q-2)\Delta^{1+3} z_{0,0} + \\ & \quad q(q-1)(q-2)(q-3)\Delta^{0+4} z_{0,0}] + \dots \end{aligned}$$

7.1.2. Numeričko diferenciranje i integracija

7.1.2.1. Numeričko (približno) diferenciranje

Ovaj problem se sastoji u nalaženju izvoda nekog reda funkcije $y = f(x)$, koja je zadana tablično, ili su izvodi previše složeni analitički da bi računanje izvoda preko eksplicitnih formula imalo praktičnu vrednost.

Ako je funkcija zadana na sistemu tačaka sa jednakim razlikama, onda je jedan od načina da se sprovede približno diferenciranje korišćenjem prvog Njutnovog interpolacionog polinoma (v. odeljak 7.1.1.5). Uz oznaku $q = \frac{x - x_0}{h}$ množenjem sledi:

$$y(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q^2 - q}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{q^3 - 3q^2 + 2q}{6}\Delta^3 y_0 + \frac{q^4 - 6q^3 + 11q^2 - 6q}{24}\Delta^4 y_0 + \dots,$$

gde je $y = y(x) = f(x)$ identifikovano sa Njutnovim interpolacionim polinomom. Zbog

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dq} \frac{dq}{dx} = \frac{1}{h} \frac{dy}{dq}$$

sledi

$$y'(x) = \frac{1}{h} \left[\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3q^2-6q+2}{6}\Delta^3 y_0 + \frac{4q^3-18q^2+22q-6}{24}\Delta^4 y_0 + \dots \right],$$

a slično se nalazi i

$$y''(x) = \frac{1}{h^2} \left[\Delta^2 y_0 + \frac{6q-6}{6}\Delta^3 y_0 + \frac{12q^2-36q+22}{24}\Delta^4 y_0 + \dots \right].$$

Analognim postupkom mogu se dobiti i formule za izvode višeg reda. U opštem slučaju, kada tačke x_i nisu na jednakom rastojanju, može da se koristi Lagranžev interpolacioni polinom (v. odeljak 7.1.1.2). Naime, uzima se

$$y = y(x) = f(x) \approx P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x),$$

te je onda

$$y^{(k)}(x) \approx P_n^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i^{(k)}(x).$$

Nedostatak ovog postupka je što i za malo k , greška koja se čini aproksimacijom $y^{(k)}(x)$ sa $P_n^{(k)}(x)$ može da bude jako velika.

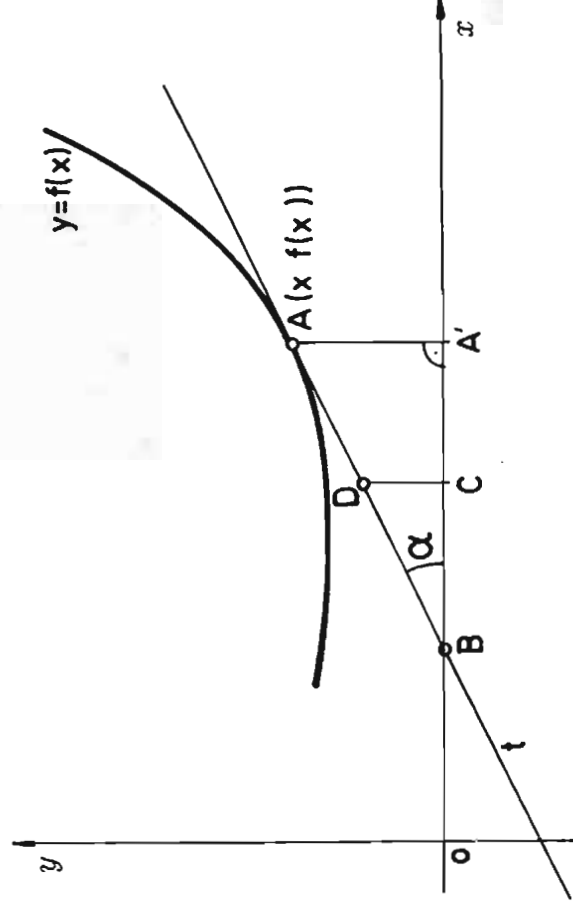
Postoji i grafička metoda približne diferencijacije. Ona se bazira na osobini da je $y'(x_0) = f'(x_0)$ tangens ugla koji tangenta zaklapa sa x -osom u tački krive sa apscisom x_0 . Ako se konstruiše ta tangenta t (v. sl. 7.1.) i označi sa B presečna tačka sa x -osom, onda je

$$f'(x_0) = \tan \alpha = \frac{AA'}{BA'}.$$

Dalje, ako je C odabrano tako da je $BC = 1$, onda je, zbog sličnosti,

$$DC = \tan \alpha = \frac{AA'}{BA'} = f'(x_0).$$

Stoga je duž DC jednaka vrednosti izvoda u tački x_0 . Konstruisanjem za svaku tačku x_0 odgovarajuće duži dobija se približan grafik funkcije $y' = f'(x)$.



Sl. 7.1.

7.1.2.2. Numerička integracija

Numerička integracija predstavlja približno izračunavanje integrala $I = \int_a^b f(x) dx$. Takav postupak je često neizbežan u praksi, kada primitivna funkcija od $f(x)$ ima suviše složen oblik ili ju je nemoguće odrediti preko elementarnih funkcija, kao recimo u slučaju $f(x) = e^{-x^2}$. Najjednostavniji način numeričke integracije je da se $f(x)$ zameni Lagranževim ili Njutnovim interpolacionim polinomom $P_n(x)$ stepena n , te da se za približnu vrednost I uzme $I \approx \int_a^b P_n(x) dx$, pri čemu je bitno i kakva se greška čini prilikom takvog postupka. Uz oznake $y = f(x)$, $h = (b-a)/n$, $x_0 = a$, $x_i = x_0 + ih$, $y_i = f(x_i)$ ($i = 0, 1, \dots, n$), onda se dobija

$$\int_{x_0}^{x_n} y dx \approx \sum_{i=0}^n A_i y_i,$$

gde je

$$A_i = \int_{x_0}^{x_n} \frac{(-1)^{n-1} q^{[n+1]}}{i!(n-1)!(q-i)} dx; \quad q = \frac{x-x_0}{h},$$

$$x^{[n]} = x(x-h)(x-2h) \dots (x-(n-1)h).$$

Uprošćavanjem sledi:

$$(7.5) \quad \int_a^b y dx \approx (b-a) \sum_{i=0}^n H_i y_i,$$

$$H_i = \frac{(-1)^{n-1}}{i!(n-1)!n} \int_0^n \frac{q^{[n+1]}}{q-i} dq.$$

Formule za približnu integraciju (7.5) zovu se u literaturi Njutn–Kotesove formule. Specijalizacijom za $n = 1$ i $n = 2$, te primenom tih formula za svaki integral $\int_{x_i}^{x_{i+1}}$ ponaosob, dobijaju se klasične formule numeričke integracije. To su tzv. trapezna i Simpsonova formula.

Trapezna formula za približnu integraciju glasi:

$$\int_a^b y dx = \frac{h}{2} [y_0 + y_n + 2(y_1 + \dots + y_{n-1})] + R,$$

pri čemu za grešku R važi procena

$$|R| \leq \frac{b-a}{12} h^2 \max_{\xi \in [a,b]} |y''(\xi)|,$$

gde se pretpostavlja da $y(x)$ ima neprekidan drugi izvod u $[a, b]$.

Ako je $n = 2m$, $h = (b - a)/2m$ (paran broj interpolacionih tačaka) onda Simpsonova formula za približnu integraciju glasi:

$$\int_a^b y \, dx = \frac{h}{3} [(y_0 + y_{2m}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2})] + R,$$

pri čemu za grešku R ovde važi procena

$$|R| \leq \frac{b-a}{180} h^4 \max_{\xi \in [a,b]} |y^{(4)}(\xi)|.$$

Ovde se pretpostavlja da $y(x)$ ima neprekidan četvrti izvod u $[a, b]$.

Drugi tip formule za numeričku integraciju predstavljaju tzv. Gausove formule. Pretpostavimo da smo odredili polinom $\omega_n(x)$, stepena n , za koji je

$$\int_a^b p(x) \omega_n(x) q(x) dx = 0$$

za sve polinome $q(x)$ stepena ne većeg od $n - 1$, pri čemu je $p(x)$ data neprekidna funkcija (tzv. "funkcija težine") nad $[a, b]$. Ako je $f(x)$ proizvoljni polinom, onda je:

$$(7.6) \quad \int_a^b p(x) f(x) dx = \sum_{i=1}^n C_i^{(n)} f(x_i),$$

gde su x_1, x_2, \dots, x_n koreni polinoma $\omega_n(x)$, a $C_i^{(n)}$ konstante (koeficijenti) koje ne zavise od f i koje treba odrediti. U posebno interesantnom slučaju $p(x) \equiv 1$ može se uzeti

$$(7.7) \quad \omega_n(x) = \frac{n!}{(2n)!} \frac{d^n}{dx^n} [(x-a)^n (x-b)^n],$$

pri čemu se uzastopnom primenom Roleove teoreme o srednjoj vrednosti pokazuje da svi koreni polinoma u (7.7) leže u (a, b) .

Ako je sada $f(x)$ data neprekidna funkcija nad $[a, b]$, onda se Gausova interpolacija vrši u obliku

$$(7.8) \quad \int_a^b p(x) f(x) dx = \sum_{i=1}^n C_i^{(n)} f(x_i) + R(f),$$

gde je $R(f)$ greška koja zavisi samo od funkcije $f(x)$. U slučaju $p(x) \equiv 1$ ostatak u (7.8) postaje

$$R(f) = \frac{(b-a)^{2n+1}(n!)^4}{[(2n)!]^3(2n+1)} f^{(2n)}(\xi)$$

za neko ξ koje zadovoljava $a \leq \xi \leq b$. Ovde valja napomenuti da interval integracije $[a,b]$ u (7.8) postaje $[-1,1]$ pomoću smene promenljive $x = \frac{1}{2}(b+a) + \frac{1}{2}(b-a)t$. Ovo je podeseo uvek učiniti da bi se koeficijenti $C_i^{(n)}$ računali jednoobrazno, a ne u zavisnosti od intervala $[a,b]$. Tako se za interpolacionu formulu

$$(7.9) \quad \int_{-1}^1 f(x)dx = \sum_{i=1}^n C_i^{(n)} f(x_i) + \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{[(2n)!]^3(2n+1)} f^{(2n)}(\xi),$$

$a < \xi < b$ nalaze sledeće vrednosti za $C_i^{(n)}$:

$n=1$,

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, \\ \frac{1}{2}C_1^{(1)} &= 1, \\ R_1 &= \frac{1}{3}f''(\xi), \end{aligned}$$

$n=2$,

$$\begin{aligned} -x_1 = x_2 &= 0, 577350269\dots, \\ \frac{1}{2}C_1^{(2)} &= \frac{1}{2}, \\ R_2 &= \frac{1}{135}f^{(4)}(\xi), \end{aligned}$$

$n=3$,

$$\begin{aligned} -x_1 = x_3 &= 0, 774596669\dots, \\ x_2 &= 0, \\ \frac{1}{2}C_1^{(3)} &= \frac{1}{2}C_3^{(3)} = \frac{5}{18}, \\ \frac{1}{2}C_2^{(3)} &= \frac{4}{9}, \\ R_3 &= \frac{1}{15750}f^{(6)}(\xi), \end{aligned}$$

$n=4$,

$$-x_1 = x_4 = 0,861136311\dots,$$

$$-x_2 = x_3 = 0,339981043\dots,$$

$$\frac{1}{2}C_1^{(4)} = \frac{1}{2}C_4^{(4)} = 0,173927422\dots,$$

$$\frac{1}{2}C_2^{(4)} = \frac{1}{2}C_3^{(4)} = 0,326072577\dots,$$

$$R_4 = \frac{1}{3472875}f^{(8)}(\xi),$$

$n=5$,

$$-x = x_5 = 0,906179845\dots,$$

$$-x_2 = x_4 = 0,538469310\dots,$$

$$\frac{1}{2}C_1^{(5)} = \frac{1}{2}C_5^{(5)} = 0,118463442\dots,$$

$$\frac{1}{2}C_2^{(5)} = \frac{1}{2}C_4^{(5)} = 0,239314335\dots,$$

$$R_5 = \frac{1}{1237732650}f^{(10)}(\xi).$$

U slučaju kada se za $p(x)$ uzme funkcija $p(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$, a za interval integracije $(-1, 1)$, dobija se sledeća formula za približnu numeričku integraciju:

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{i=1}^n C_i^{(n)} f(x_i) + R(f),$$

gde su x_i koreni polinoma $\omega_n(x)$ stepena n , a koji je ortogonalan u odnosu na $1/\sqrt{1-x^2}$ na sve polinome stepena ne većeg od $n-1$. Ovakva formula se naziva Hermite-ova formula za numeričku integraciju, a za $\omega_n(x)$ se može uzeti

$$\omega_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x),$$

pri čemu nije teško proveriti da je $\omega_n(x)$ polinom po x stepena n . Tada se može uzeti $x_i = \cos \frac{(2i-1)\pi}{2n}$ za $(i = 1, 2, \dots, n)$, te sledi

$$(7.10) \quad \int_{-1}^1 \frac{f(x)dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) + \frac{\pi}{(2n)!2^{n-1}} f^{(2n)}(\xi_i),$$

$$x_i = \cos \frac{(2i-1)\pi}{2n}.$$

Sličnog tipa su i formule Markova i Čebiševa za numeričku integraciju. Zadržimo se na formuli Čebiševa, koja je tipa

$$(7.11) \quad \int_{-1}^1 p(x)f(x)dx = K \sum_{i=1}^n f(x_i) + R(f).$$

Problem je da se odrede apscise x_1, x_2, \dots, x_n i koeficijent K tako da je $R(f) = 0$ u (7.11) kad je $f(x)$ polinom najvišeg mogućeg stepena. Zatim se za proizvoljnu funkciju $f(x)$ nad $[a, b]$ integral u (7.11) aproksimira sumom $K \sum_{i=1}^n f(x_i)$, što predstavlja numeričku integraciju Čebiševa.

Za $f(x) \equiv 1$ koeficijent K u (7.11) se lako nalazi preko formule

$$K = \frac{1}{n} \int_{-1}^1 p(x)dx,$$

pri čemu se pretpostavlja da je funkcija težine $p(x)$ takva da se poslednji integral lako računa. U važnom slučaju $p(x) \equiv 1$ sledi $K = 2/n$, a tada se apcise x_i za razne vrednosti n računaju po sledećoj tabeli:

$n = 2,$	$-x_1 = x_2 = 0, 577350\dots,$
$n = 3,$	$-x_1 = x_3 = 0, 707107\dots,$
$n = 4,$	$-x_1 = x_4 = 0, 794654\dots,$
$n = 5,$	$-x_1 = x_5 = 0, 832498\dots,$
$n = 6,$	$-x_1 = x_6 = 0, 866247\dots,$
$n = 7,$	$-x_1 = x_7 = 0, 883862\dots,$
	$-x_2 = x_3 = 0, 187592\dots,$
	$-x_2 = x_4 = 0, 374541\dots,$
	$x_3 = 0\dots,$
	$-x_2 = x_5 = 0, 422519\dots,$
	$-x_3 = x_4 = 0, 266635\dots,$
	$-x_2 = x_6 = 0, 529657\dots,$
	$-x_3 = x_5 = 0, 323912\dots,$
	$x_4 = 0.$

7.1.2.3. Približno izračunavanje višestrukih integrala

Najjednostavniji način za približno izračunavanje višestrukih integrala je preko ponovljenog izračunavanja jednostrukog (običnog) integrala. Naime, ako je recimo G pravougaonik $\{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, onda je:

$$(7.12) \quad I = \iint_G f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \left\{ \int_c^d f(x, y) dy \right\}.$$

Stoga se može prvo izračunati integral po y po nekoj od približnih formula numeričke integracije, a zatim ponavljanjem postupka i integral po x . Ako se upotrebi Simpsonova formula za numeričku integraciju, onda se za I u (7.12) dobija

$$I = \frac{(b-a)(d-c)}{36} \left\{ f(a, c) + f(a, d) + f(b, c) + f(b, d) + \right. \\ \left. + 4 \left[f\left(a, \frac{c+d}{2}\right) + f\left(b, \frac{c+d}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}, c\right) + f\left(\frac{a+b}{2}, d\right) \right] + \right. \\ \left. + 16f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right) \right\} + R.$$

U ovoj formuli R je ostatak, koji je identički jednak nuli ukoliko je $f(x, y)$ polinôm po x i y stepena ne većeg od 3. Ukoliko $f(x, y)$ poseduje neprekidne parcijalne izvode osmoga reda u G , onda se može i naći eksplicitni izraz za ostatak R .

On glasi:

$$R = -\frac{(b-a)^5(d-c)}{2^6 \cdot 45} \frac{\partial^4 f(\xi_1, \eta_1)}{\partial x^4} - \frac{(d-c)^5(b-a)}{2^6 \cdot 45} \frac{\partial^4 f(\xi_2, \eta_2)}{\partial y^4} - \\ - \frac{(d-c)^5(b-a)^5}{2^{12} \cdot 45^2} \frac{\partial^8 f(\xi_3, \eta_3)}{\partial x^4 \partial y^4},$$

gde su ξ_1, η_1 , (ξ_2, η_2) , (ξ_3, η_3) neke tačke iz G .

Ukoliko je zadat integral

$$I = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy,$$

gde su $\varphi_1(x)$ i $\varphi_2(x)$ zadate krive, onda se može postupati i na sledeći način. Za izračunavanje

$$I = \int_a^b F(x) dx, \quad F(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$$

upotrebljava se neka od formula za približnu integraciju. Tako je

$$I \approx \sum_{k=1}^n C_k F(x_k) = \sum_{k=1}^n C_k \int_{\varphi_1(x_k)}^{\varphi_2(x_k)} f(x_k, y) dy.$$

Ako se za izračunavanje svakog integrala

$$I_n = \int_{\varphi_1(x_n)}^{\varphi_2(x_n)} f(x_n, y) dy$$

iskoristi podesna formula za numeričku integraciju

$$I_k \approx \sum_{i=1}^{n_k} C_i^{(k)} f(x_k, y_i),$$

onda se dobija rajnja formula u obliku

$$I \approx \sum_{k=1}^n C_k \sum_{i=1}^{n_k} C_i^{(k)} f(x_k, y_i).$$

Navedeni postupci mogu se preneti i na n -tostruke integrale.

7.1.3. Izračunavanje i aproksimacija funkcija

Najjednostavnija funkcija je polinom, koji u opštem slučaju ima oblik

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n,$$

pri čemu pretpostavljamo da su koeficijenti a_0, \dots, a_n realni brojevi i $a_0 \neq 0$. Problem izračunavanja $P(t)$ za dato t rešava se na sledeći način. Postupno se izračunavaju brojevi

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0, \\ b_1 &= a_1 + b_0 t, \\ b_2 &= a_2 + b_1 t, \\ b_3 &= a_3 + b_2 t, \dots, \\ b_n &= a_n + b_{n-1} t. \end{aligned}$$

Neposrednom proverom sledi da je $b_n = P(t)$, štaviše važi

$$P(x) = Q(x)(x - t) + b_n,$$

gde je

$$Q(x) = b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \dots + b_{n-1}.$$

U slučaju $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + 7x - 2$, $t = 2$, ovo se može šematski prikazati na sledeći način:

$$\begin{array}{r} 3 \quad -5 \quad 7 \quad -2 \\ 3 \quad 1 \quad 9 \quad 16 \\ \hline \end{array}$$

Ovde je u donjem redu $b_0 = 3$, $b_1 = 1$, $b_2 = 9$, $b_3 = P(2) = 16$. Ovaj postupak se naziva Hornerova šema i posebno je pogodan za rad sa računarima.

Za izračunavanje vrednosti složenijih funkcija najpovoljnije je koristiti Tejlorovu formulu. Ako je $f(x)$ analitička funkcija za $|x - x_0| < R$, onda Tejlorova formula glasi:

$$(7.13) \quad f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!} + R_n(x),$$

gde je za neko $-1 < \theta < 1$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Vrlo često Tejlorova formula se koristi sa $x_0 = 0$, kada se obično naziva Maklarenova formula i glasi

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad |\theta| < 1.$$

Za pojedine elementarne funkcije Tejlorova, odnosno Maklarenova formula poprimaju jednostavan oblik. Tako, na primer, za eksponencijalnu funkciju $f(x) = e^x$ važi Tejlorova formula

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{e^{\theta x} x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad |\theta| < 1.$$

U praksi se izračunavanje e^x vrši najčešće na sledeći način. Uvek se može napisati $x = [x] + \tau$, gde je $[x]$ ceo deo od x (npr. $[3, 19] = 3$, $[-0, 325] = -1$) a τ zadovoljava $0 \leq \tau < 1$ i predstavlja razlomljeni deo od x . Tada je

$$e^x = e^{[x]} e^r,$$

pri čemu se $e^{[x]}$ izračunava direktno, koristeći vrednosti

$$e = 2,718281828459045\dots, \quad \frac{1}{e} = 0,367879441171442\dots$$

u zavisnosti od toga da li je $[x] > 0$ ili $[x] < 0$. Za izračunavanje e^r koristi se Maklarenova formula u obliku

$$e^r = \sum_{j=0}^n \frac{r^j}{j!} + R_n(r),$$

pri čemu se $R_n(r)$ može eksplicitno proceniti kao

$$0 \leq R_n(r) < \frac{3}{(n+1)!} r^{n+1}.$$

Odakle se može lako odrediti za koje n će važiti $|R_n(r)| < \varepsilon$ za neko zadato $\varepsilon > 0$. Za izračunavanje vrednosti logaritamske funkcije koriste se redovi

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \\ \ln(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots, \end{aligned}$$

koji važe za $|x| < 1$. Kako je njihova konvergencija dosta spora, oduzimanjem se dobija

$$\ln \frac{1-x}{1+x} = -2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right).$$

Ako se stavi $\frac{1-x}{1+x} = z$, onda je $x = \frac{1-z}{1+z}$, pa se dobija

$$\ln z = -2 \left[\frac{1-z}{1+z} + \frac{1}{3} \left(\frac{1-z}{1+z} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1-z}{1+z} \right)^5 + \dots \right],$$

pri čemu ova poslednja formula važi za $0 < z < \infty$.

Trigonometrijske funkcije kao i hiperbolične funkcije se računaju, slično kao i eksponencijalne funkcije, preko Maklarenove formule, odnosno Maklarenovog reda. Ti redovi glase

$$\sin x = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}, \quad \cos x = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!},$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}, \quad \operatorname{ch} x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{2j}}{(2j)!},$$

gde je

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

U opštem slučaju prilikom aproksimacije funkcije $f(x)$ dolazi se do sledećih problema.

1. Data je klasa funkcije R , definisanih na $[a, b]$ i neki podskup \bar{R} funkcija te klase. Za datu funkciju $f(x) \in R$ i dato $\varepsilon > 0$ treba odrediti takvu funkciju $\varphi(x) \in \bar{R}$ da važi

$$|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

za svako $x \in [a, b]$.

2. Za datu funkciju $f(x) \in R$ odrediti funkciju $\varphi_0(x) \in \bar{R}$ takvu da vredi nejednakost

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - \varphi_0(x)| = \inf_{\varphi \in \bar{R}} \max_{x \in [a, b]} |f(x) - \varphi(x)|.$$

Za R se obično uzima skup funkcija $C[a, b]$ neprekidnih nad $[a, b]$, a za \bar{R} neki skup algebarskih ili uopštenih polinoma. Za funkciju $\varphi_0(x)$ iz zadatka 2, ukoliko postoji, kaže se da je funkcija najbolje ravnomerne aproksimacije za funkciju $f(x)$ u klasi \bar{R} . Posebno su od interesa aproksimacije u tzv. linearnim normiranim prostorima. Skup R se zove linearni normirani prostor ako je linearni vektorski prostor nad skupom realnih brojeva Re i ako svakom $f \in R$ odgovara realan broj $\|f\|$. Taj broj $\|f\|$ se zove norma od f i zadovoljava sledeće uslove:

- $\|f\| \geq 0$ i $\|f\| = 0$ ako i samo ako je $f \equiv 0$,
- $\|cf\| = |c|\|f\|$ za proizvoljno $c \in Re$.
- $\|f_1 + f_2\| \leq \|f_1\| + \|f_2\|$.

Svaki linearni normirani prostor je ujedno i metrički prostor (prostor sa rastojanjem). Za rastojanje $d(f_1, f_2)$ dva elementa $f_1, f_2 \in R$ može se jednostavno uzeti

$$d(f_1, f_2) = \|f_1 - f_2\|.$$

U slučaju da je $R = C[a, b]$, skup svih neprekidnih funkcija na $[a, b]$, onda se često uzima

$$(7.14) \quad \|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

Može se pokazati da u svakom linearnom normiranom prostoru R za proizvoljan element $f \in R$ postoji element najbolje aproksimacije u \bar{R} , tj. element $\Phi_0 \in \bar{R}$ za koji se dostiže

$$\inf_{\Phi \in \bar{R}} \|f - \Phi\|.$$

Da bi se ovo pojasnilo na primeru, uzmimo da je dat polinom

$$Q(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0.$$

Želimo da vršimo interpolaciju polinoma Q u intervalu $[-1, 1]$ polinomom $P(x)$ stepena $n-1$, tako da se maksimalna greška $|Q(x) - P(x)|$ minimizira, što je saglasno sa definicijom datom preko (7.14). Problem je kako odrediti čvorove interpolacije x_0, x_1, \dots, x_{n-1} i koliko je velika najmanja moguća maksimalna greška? Ako se napiše

$$Q(x) - P(x) = L(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}),$$

onda se problem svodi na izbor tačaka x_0, x_1, \dots, x_{n-1} tako da je veličina

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})|$$

minimalna. Ovaj problem je sredinom prošlog veka rešio znameniti ruski matematičar P.L. Čebišev.

Za $L(x)$ se uzima (v. takođe (7.10))

$$L(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x),$$

gde je $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ tzv. polinom Čebiševa. Interpolacioni čvorovi x_0, x_1, \dots, x_{n-1} dati su onda preko formule

$$x_k = \cos \left(\frac{2k+1}{2n} \pi \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Za vrednosti $L(x)$ u intervalu $[-1, 1]$ očito važi

$$|L(x)| \leq 2^{1-n},$$

te je 2^{1-n} maksimalna greška koja se čini prilikom interpolacije.

Recimo da je postavljeno konkretno pitanje koliko se dobro može aproksimirati funkcija $f(x) = x^2 + ax + b$ u $[-1, 1]$ pomoću prave linije? To je slučaj $n = 2$ prethodne diskusije. Čvorovi interpolacije su tačke

$$x_0 = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x_1 = \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Interpolacioni polinom $P(x)$ dat je u ovom slučaju kao

$$P(x) = \frac{f(x_0)(x_1 - x) + f(x_1)(x_0 - x)}{x_1 - x_0} = ax + b + \frac{1}{2}.$$

Maksimalna greška je

$$\leq \max_{-1 \leq x \leq 1} |x^2 + ax + b - P(x)| = \max_{-1 \leq x \leq 1} |x^2 - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2},$$

kao što je i predviđeno teorijom.

U opštem slučaju aproksimacija funkcija može se postaviti pitanje aproksimacije funkcije $f(x)$ funkcijom

$$(7.15) \quad T(x) = a_0 + \sum_{j=1}^n (a_j \cos jx + b_j \sin jx),$$

gde su a_j i b_j realni koeficijenti koje treba odrediti. Funkcija u (7.15) se naziva trigonometrijski polinom stepena n . Za aproksimaciju funkcija trigonometrijskim polinomima važi tzv. druga Vajerštrasova teorema:

Ako je $f(x)$ neprekidna periodična funkcija sa periodom 2π , tada za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji takav trigonometrijski polinom $T(x)$ oblika (7.15) da za svako realno x važi

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon.$$

Ova teorema omogućava ravnomernu aproksimaciju funkcije $f(x)$ trigonometrijskim polinomom. Ovde valja i pomenuti tzv. prvu teoremu Vajerštrasa o aproksimaciji neprekidnih funkcija, koja glasi:

Ako je $f(x)$ neprekidna funkcija na $[a, b]$, tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj m i polinom $Q_m(x)$ stepena m tako da je

$$|f(x) - Q_m(x)| < \varepsilon \quad x \in [a, b].$$

Druga vrsta aproksimacija su tzv. srednje-kvadratne aproksimacije. Pod srednjekvadratnim odstupanjem funkcija $f(x)$ i $Q(x)$ na skupu tačaka $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ podrazumeva se veličina

$$(7.16) \quad \tilde{\Delta}_n = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [f(x_i) - Q(x_i)]^2}.$$

Ako se vrši aproksimacija funkcija pomoću integrala, onda je srednjekvadratno odstupanje dato kao

$$(7.17) \quad \tilde{\Delta} = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x) - Q(x)]^2 dx}.$$

Formula (7.17) se može shvatiti kao granični slučaj formule (7.16) kad $n \rightarrow \infty$, ako je $a = x_1$, $b = x_n$,

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1).$$

Onda važi

$$\tilde{\Delta}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [f(x_i) - Q(x_i)]^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x) - Q(x)]^2 dx.$$

Srednjekvadratno odstupanje (7.17) ima preimućstvo da je neosetljivo na lokalna kolebanja $|f(x) - Q(x)|$ za pojedine veličine x , te daje preciznu sliku o globalnom ponašanju pomenute razlike.

Ako se za prostor R uzme skup svih funkcija čiji je kvadrat integrabilan nad $[a, b]$ onda se za $f, g \in R$ može uvesti skalarni proizvod $(f, g) \in Re$ kao

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) dx,$$

te norma $\|f\|$ preko relacije

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}.$$

7.1.4. Približno rešavanje jednačina

7.1.4.1. Približno rešavanje običnih jednačina

Ovde se radi o rešavanju jednačine

(7.18)

$$f(x) = 0,$$

gde je $f(x)$ neprekidna nad $[a, b]$. Pretpostavlja se da su svi koreni gornje jednačine u $[a, b]$ izolovani, tj. ako je $f(x_0) = 0$ za $x_0 \in [a, b]$, onda postoji okolina od x_0 u kojoj nema drugih korena.

Najjednostavnija metoda rešavanja jednačine (7.18) je tzv. metoda polovljenja. Pretpostavlja se da je $f(a)f(b) < 0$, tj. da su vrednosti funkcije na krajevima intervala različitog znaka. Tada zbog neprekidnosti jednačine (7.18) mora imati koren u $[a, b]$. Ako je $f(\frac{a+b}{2}) = 0$ onda je $\xi = \frac{a+b}{2}$ traženi koren. Ako je $f(\frac{a+b}{2}) \neq 0$, bira se onaj od intervala $[a, \frac{a+b}{2}]$, $[\frac{a+b}{2}, b]$ na čijim krajevima $f(x)$ ima suprotne znake. Tako se dobija niz intervala $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$, pri čemu je $f(a_n)f(b_n) < 0$ i

$$b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n}.$$

Tada postoji

$$\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

i $f(\xi) = 0$. Ovaj postupak se može praktično uvek primeniti, i lako se programira na računarima. Nedostatak mu je što se često mora uzeti mnogo članova niza a_n , (ili b_n) da bi se dobila dobra aproksimacija korena ξ .

Drugi opšti postupak rešavanja jednačina je postupak iteracije (ponavljanja). On se sastoji u tome da se proizvoljno odabere tačka x_0 i zatim konstruiše niz.

$$(7.19) \quad x_n = f(x_{n-1}) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Ukoliko niz x_n konvergira ka ξ , onda je ξ rešenje jednačine

$$(7.20) \quad x = f(x).$$

Jednačina (7.18) i (7.20) su ekvivalentne; iz (7.18) sledi

$$x = F(x), \quad F(x) = x + f(x),$$

i obrnuto iz (7.20) sledi

$$F(x) = 0, \quad F(x) = x - f(x).$$

Može se pokazati da niz (7.19) konvergira ka rešenju ξ jednačine (7.20) ako je

- a) $f(x) \in [a, b]$ za $x \in [a, b]$,
 b) $|f(x') - f(x'')| \leq L|(x' - x'')|$ za neko $0 \leq L < 1$ i $x', x'' \in [a, b]$.

Uslov b) se naziva Lipsicov uslov i on je sigurno ispunjen ako je $|f'(x)| < 1$ za $x \in [a, b]$. Ako su ispunjeni uslovi a) i b), onda je štaviše rešenje ξ jednačine (7.20) jedinstveno. Naime ako postoje dva rešenja s_1 i s_2 jednačine (7.20) i $s_1 \neq s_2$, onda je

$$|s_1 - s_2| = |f(s_1) - f(s_2)| \leq L|s_1 - s_2|,$$

te deljenjem sa $|s_1 - s_2| > 0$ sledi $1 \leq L$, što je kontradikcija. U praksi se formira niz (7.19) i ako uslovi a) i b) nisu ispunjeni, jer su oni samo dovoljni (ali ne potrebni) da bi niz (7.19) konvergirao ka rešenju jednačine (7.20). Ukoliko niz x_n ipak konvergira, postupak iteracije daje rešenje jednačine (7.20). Postavlja se pitanje kolika se greška čini ako je pri postupku iteracije rešenje jednačine (7.20) ξ zameni sa x_n . Matematičkom indukcijom sledi

$$|x_{n+1} - x_n| \leq L^n |x_1 - x_0|. \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Neka je sad n fiksirano i $m > n$. Tada je

$$x_m - x_n = (x_m - x_{m-1}) + (x_{m-1} - x_{m-2}) + \dots + (x_{n+1} - x_n),$$

te sledi

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \dots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\leq (L^{m-1} + \dots + L^n) |x_1 - x_0| \\ &\leq L^n (1 + L + L^2 + \dots) |x_1 - x_0| = \frac{L^n |x_1 - x_0|}{1 - L}, \end{aligned}$$

jer je $0 \leq L < 1$. Ako $m \rightarrow \infty$, onda $x_m \rightarrow \xi$, gde je ξ koren jednačine (7.20). Otuda sledi da je

$$|x_n - \xi| \leq \frac{L^n}{1 - L} |x_1 - x_0|,$$

ukoliko se pretpostavi da važe uslovi a) i b).

Prilikom iteracije treba voditi računa da oblik (7.20) u kojem se rešava jednačina nikako nije jedinstven. Ponekad je dobar izbor oblika (7.20) presudan, u smislu da od dobrog izbora zavisi da li će proces konvergirati ili ne. Recimo da treba rešiti jednačinu $x^3 - x - 2 = 0$, za koju se grafički lako ustanovljava da ima koren u intervalu $[1, 2]$. Međutim, ako se ta jednačina napiše u obliku

$$x = f(x) = x^3 - 2$$

onda je $f'(x) = 3x^2$ i uslov b) očigledno nije ispunjen na intervalu $[1, 2]$. Stoga je podesno jednačinu napisati u obliku

$$x = f(x) = \sqrt[3]{x+2}.$$

Sada je

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x+2)^{-\frac{2}{3}} \quad \text{i} \quad \left| \frac{1}{3}(x+2)^{-\frac{2}{3}} \right| < \frac{1}{3},$$

te iteracioni niz (7.19) glasi u ovom slučaju

$$x_0 = 1,$$

$$x_1 = 1,44224\dots,$$

$$x_2 = 1,50989\dots,$$

$$x_3 = 1,51972\dots,$$

$$x_4 = 1,52114\dots,$$

$$x_5 = 1,52134\dots,$$

$$x_6 = 1,52137\dots$$

Približno rešenje (na tri tačne decimale) je $x = 1,521$.

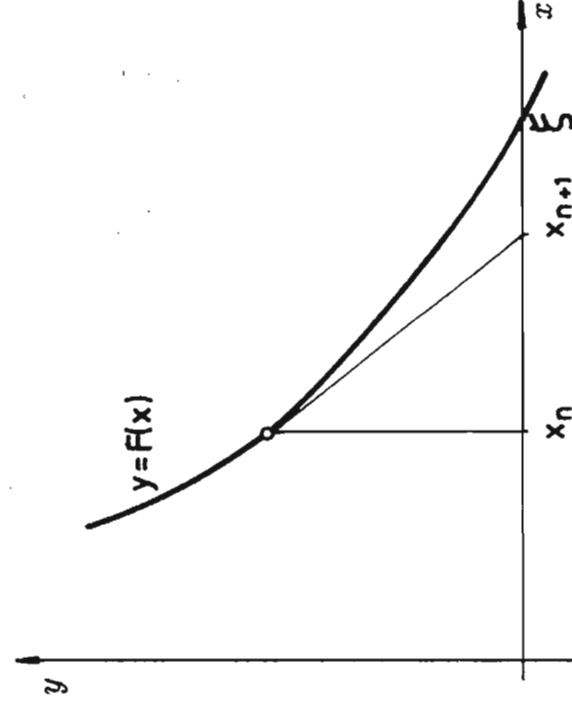
Postoji čitav niz postupaka za iterativno rešenje jednačine (7.18), poznat kao Njutnova metoda. U svom najjednostavnijem obliku ta metoda se sastoji u biranju x_0 proizvoljno i konstruisanju niza x_n pomoću relacije

$$(7.21) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Ukoliko niz x_n , definisan preko (7.21), konvergira, onda sledi $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = 0$, tj. x_n konvergira ka rešenju jednačine $F(x) = 0$. Geometrijski ovaj metod predstavlja aproksimaciju funkcije F u tački x_n sa tangentom u toj tački, čija je jednačina

$$y = F(x_n) + (x - x_n)F'(x_n),$$

a presek tangente sa x -osom je upravo x_{n+1} .



Sl. 7.2.

Stoga se ovaj metod, čiji je grafički prikaz dat na gornjoj slici, naziva i metod tangente. Mada je gornja konstrukcija intuitivno veoma privlačna, ništa nam ne govori pod kojim uslovima niz x_n iz (7.21) konvergira, niti kako se metod može poopštiti na sisteme jednačina. Može se pokazati da niz (7.21) konvergira ka (jednom) rešenju jednačine $F(x) = 0$ u intervalu $[a, b]$ ako su ispunjeni sledeći uslovi:

- $F(x)$ poseduje neprekidan drugi izvod u $[a, b]$;
- $F(x) \neq 0$ u $[a, b]$;
- $F''(x)$ je ili pozitivno ili negativno za $x \in [a, b]$;
- $F(a)F(b) < 0$;
- Ako je c krajnja tačka $[a, b]$ u kojoj je $|F'(x)|$ manje, tada je $|\frac{F(c)}{F'(c)}| \leq b - a$.

Jedna od modifikacija Njutnovog metoda je tzv. metoda sečice ili regula falsi. Tu se za rešavanje jednačine $F(x) = 0$ umesto (7.21) koristi niz

$$(7.22) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})F(x_n)}{F(x_n) - F(x_{n-1})}.$$

Geometrijska interpretacija je da se sada mesto tangente funkcija F aproksimira odgovarajućom sečicom. Tada je brzina konvergencije ka traženom rešenju ista kao i kod prve varijante Njutnove metode.

Kao primer može se koristiti jednostavan postupak za određivanje kvadratnog korena iz datog broja $c > 0$. Tu je $F(x) = x^2 - c$, i cilj je da se reši $F(x) = 0$, tj. da se odredi \sqrt{c} . Njutnova metoda poprima oblik

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{c}{x_n} \right).$$

Ovaj niz prilično brzo konvergira ka \sqrt{c} i vrlo je jednostavan za praktična izračunavanja. Za $c = 10$, $x_0 = 3$ dobija se

$$\begin{array}{ll} x_0 = 3 & c/x_0 = 3,3333333 \\ x_1 = 3,1667 & c/x_1 = 3,1746 \\ x_2 = 3,1622 & c/x_2 = 3,16225532 \\ x_3 = 3,16227766 & c/x_3 = 3,16227766. \end{array}$$

Otuda je $x_4 = x_3$ na sedam decimalnih mesta, pa se može uzeti da je približno

$$\sqrt{10} = 3,1622776.$$

Iterativni postupci za rešavanje jednačina mogu se primeniti i na rešavanje sistema jednačina. Uzmimo, jednostavnosti radi, sistem jednačina

$$(7.23) \quad \begin{array}{l} x = f(x, y), \\ y = g(x, y), \end{array}$$

gde su f i g funkcije od dve promenljive u nekoj podesnoj oblasti u xOy ravni. Iteracioni postupak se sastoji u tome da se uzme proizvoljna tačka (x_0, y_0) (u praksi je poželjno da je ona što bliže tački koja je stvarno rešenje sistema (7.23), a zatim se konstruiše niz tačaka (x_n, y_n) gde je

$$(7.24) \quad \begin{array}{l} x_n = f(x_{n-1}, y_{n-1}), \\ y_n = g(x_{n-1}, y_{n-1}) \end{array} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Za konvergenciju ovako konstruisanog niza tačaka (x_n, y_n) ka rešenju sistema (7.23) postoje uslovi slični onima koji su dati za slučaj iteracije na jednačini (7.20). U praksi niz (7.24) najčešće konvergira ako je ispunjen uslov

$$\max_{(x,y) \in R} \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} < 1,$$

gde je R podesna oblast u kojoj se nalazi rešenje sistema (7.23).

Postoji i Njutnova metoda za dve promenljive. Ona se sastoji u nalaženju rešenja sistema

$$(7.25) \quad \begin{array}{l} F(x, y) = 0, \\ G(x, y) = 0, \end{array}$$

gde F i G imaju neprekidne druge parcijalne izvode u nekom pravougaoniku R u xOy ravni koji i sadrži rešenje sistema (7.25). Njegov iterativni postupak se sastoji u konstruisanju niza tačaka

$$(7.26) \quad x_{n+1} = f(x_n, y_n), \quad y_{n+1} = g(x_n, y_n), \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

gde je (x_0, y_0) proizvoljna tačka, a

$$f(x, y) = x + \delta(x, y), \quad g(x, y) = y + \varepsilon(x, y),$$

$$\delta(x, y) = \frac{G \frac{\partial F}{\partial y} - F \frac{\partial G}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial x}}, \quad \varepsilon(x, y) = \frac{F \frac{\partial G}{\partial x} - G \frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial G}{\partial x}}.$$

U praksi se obično konstruiše niz (7.26), i ukoliko on konvergira (tj. u praksi ukoliko se određeni broj decimala brojeva x_n i y_n stalno ponavlja), onda (x_n, y_n) teži ka rešenju sistema (7.25). Kao primer, recimo da imamo sistem

$$F(x, y) = x - 0,7 \sin x - 0,2 \cos y = 0 \\ G(x, y) = y - 0,7 \cos x + 0,2 \sin y = 0.$$

Polazeći od $(x_0, y_0) = (0, 0)$ i konstruišući niz (7.26) nalazi se:

n	x_n	y_n
1	0,66667	0,58333
2	0,53624	0,50884
3	0,52656	0,50793
4	0,52652	0,50791
5	0,52652	0,50791.

Kako se decimalni zapisi (x_4, y_4) i (x_5, y_5) poklapaju, može se smatrati da je približno rešenje pomenutog sistema $x = 0,52652, y = 0,50791$.

Iterativne metode se mogu koristiti i za rešavanje sistema linearnih jednačina. Sistem od n jednačina sa n nepoznatih može se svesti na oblik

$$(7.27) \quad \begin{array}{l} x_1 = \beta_1 + \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n, \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n, \\ \vdots \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \dots + \alpha_{nn}x_n, \end{array}$$

gde su x_1, \dots, x_n nepoznate, a $\beta_1, \dots, \alpha_{nn}$ koeficijenti. U matičnom obliku ovaj sistem se može zapisati kao

$$x = \beta + \alpha x,$$

gde je

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Za prvu aproksimaciju (u matičnom obliku) se uzima $x^{(0)} = \beta$, a dalje

$$x^{(k)} = \beta + \alpha x^{(k-1)} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Ako postoji $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}$, onda će to biti (jedinствeno) rešenje sistema (7.27). Ako su ispunjeni uslovi

$$(7.28) \quad \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| < 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ili

$$(7.29) \quad \sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}| < 1 \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

onda će niz $x^{(k)}$, konstruisan na gore opisan način, konvergirati ka rešenju sistema (7.27) i to nezavisno od početne aproksimacije $x^{(0)} = \beta$. Ako je determinanta sistema (7.27) različita od nule, onda se pomoću linearnog kombinovanja početnog sistema (7.27) može zameniti ekvivalentnim sistemom istog tipa tako da (7.28) ili (7.29) bude ispunjeno te se iteracija može uvek uspešno primeniti.

Postoji i varijacija ove metode koja se naziva Zajdelova (Seidel) metoda. Ako je dat sistem (7.27), onda se po toj metodi niz $x^{(k)}$ konstruiše na sledeći način. Početna veličina $x^{(0)}$ se bira proizvoljno, ako je $x^{(k)}$ poznato onda se $x^{(k+1)}$ određuje preko relacije.

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \beta_1 + \sum_{j=1}^n \alpha_{1j} x_j^{(k)}, \\ x_2^{(k+1)} &= \beta_2 + \sum_{j=2}^n \alpha_{2j} x_j^{(k)} + \alpha_{21} x_1^{(k+1)}, \\ &\vdots \\ x_i^{(k+1)} &= \beta_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^n \alpha_{ij} x_j^{(k)}, \\ &\vdots \\ x_n^{(k+1)} &= \beta_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{nj} x_j^{(k+1)} + \alpha_{nn} x_n^{(k)}. \end{aligned}$$

Ukoliko konvergira ka rešenju sistema (7.27), ovaj niz obično konvergira brže nego malopredajući niz, dat preko formule $x^{(k)} = \beta + \alpha x^{(k-1)}$.

7.1.4.2. Približno rešavanje diferencijalnih jednačina

Opšta diferencijalna jednačina prvog reda glasi

$$(7.30) \quad y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

pri čemu je $f(x, y)$ data neprekidna funkcija od dve promenljive u nekoj zatvorenoj oblasti $x_0 - a \leq x \leq x_0 + a$, $y_0 - b \leq y \leq y_0 + b$. Uslov $y(x_0) = y_0$ se naziva početni uslov i u praksi obično proizilazi iz prirode problema koji se opisuje jednačinom (7.30). U slučaju kada je $|f(x, y)| \leq M$ u pomenutoj oblasti kao i

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

za neko $L > 0$ (tzv. Lipsicov uslov), tada jednačina (7.30) ima jedinstveno rešenje $y = \varphi(x)$, definisano i neprekidno za $x_0 - h \leq x \leq x_0 + h$, $h = \min(a, \frac{b}{M})$. Ovo je sadržina poznate Koši-Pikarove teoreme (Cauchy-Picard), koja rešenje daje u konstruktivnom obliku

$$(7.31) \quad y_n = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}) dt \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Niz $y_n = y_n(x)$ je niz funkcija koji uniformno konvergira ka rešenju diferencijalne jednačine (7.30), te se može iskoristiti za efektivno nalaženje tačnog ili približnog rešenja, ako se vrši aproksimacija $y \approx y_n$ za neko podesno n . Ovde se, međutim, javljaju dva problema.

Niz (7.31) se izračunava pomoću uzastopnih integracija koje mogu biti veoma komplikovane, a osim toga konvergencija ka rešenju jednačine (7.30) može biti veoma spora. Stoga su se osim ove metode razvile još mnoge druge za približno rešavanje diferencijalne jednačine (7.30), kao i drugih složenijih jednačina. Ovde će biti dat samo pregled nekoliko postupaka za približno rešavanje diferencijalne jednačine (7.30).

Jedan od načina približnog rešavanja jednačine (7.30) je da se rešenje traži u obliku stepenog reda

$$(7.32) \quad y = y_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

i da se formalno odrede koeficijenti a_n iz uslova jednačine. Potom se ispituje konvergencija dobivenog reda i za približno rešenje uzima suma njegovih prvih n članova. Recimo da se posmatra jednačina (7.30) sa $f(x, y) = xy + 1$, koja ima tačno rešenje

$$(7.33) \quad y = y_0 e^{\frac{x^2}{2}} + e^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

koje nije praktično jer integral u (7.33) nije elementarna funkcija. Diferenciranjem reda (7.32) iz uslova jednačine dobija se da je

$$a_0 = y_0,$$

$$a_1 = 1,$$

$$a_2 = \frac{y_0}{1 \cdot 2},$$

$$a_3 = \frac{1}{1 \cdot 3},$$

$$a_4 = \frac{y_0}{2 \cdot 4},$$

$$a_5 = \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5},$$

$$a_6 = \frac{y_0}{2 \cdot 4 \cdot 6}, \dots,$$

$$a_7 = \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}, \dots,$$

te je

$$y = y_0 \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 4} + \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots \right) + \left(x + \frac{x^3}{1 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{x^7}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots \right).$$

Ovaj red konvergira za svako x , a suma njegovih prvih n članova predstavlja jedno približno rešenje diferencijalne jednačine $y' = xy + 1$.

Druga približna metoda, koja nosi naziv Ojler–Košijeva metoda (Euler–Cauchy), daje približna rešenja jednačine (7.30) u intervalu $[x_0, a]$, koji je podeljen na n jednakih delova dužine h tako da je $x_0 + nh = a$, i $x_n = x_0 + (n - 1)h$. Ako je y_n vrednost tačnog rešenja jednačine (7.30) u tački x_n , onda se Ojler–Košijevom metodom dobija približno

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n) + \frac{h}{2} y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n).$$

Pri istoj podeli intervala $[x_0, a]$ kao i malopre približna rešenja jednačine (7.30) mogu se dobiti i metodom Runge–Kuta. Tada je približno

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6} [k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4],$$

gde je

$$k_1 = hf(x_n, y_n),$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right),$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right),$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3).$$

Ova metoda, u opštem slučaju, daje veću tačnost rešenja od Ojler–Košijeve metode.

U praksi se često koristi i tzv. Adamsova metoda za približno rešavanje jednačine (7.30). Ta metoda daje y_{n+1} preko formule

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}[55f(x_n, y_n) - 59f(x_{n-1}, y_{n-1}) +$$

$$37f(x_{n-2}, y_{n-2}) - 9f(x_{n-3}, y_{n-3})].$$

Na osnovu ove formule vidi se da je za izračunavanje y_{n+2} potrebno znati četiri prethodne vrednosti y . U praksi se to onda svodi na to da je potrebno znati y_1, y_2, y_3 jer je $y_0 = y(x_0)$ po pretpostavci poznato. Za određivanje y_1, y_2, y_3 može se koristiti Ojler–Košijeva ili Runge–Kuta metoda.

7.2. Primena numeričke analize

U mnogim oblastima savremene nauke i tehnike nailazimo na probleme koji pred matematiku postavljaju takve zadatke da njihovo rešavanje nije moguće klasičnim matematičkim metodama, ili su rešenja dobijena ovim putem toliko komplikovana da nisu za praktičnu upotrebu. Sa razvojem računarske tehnike, broj takvih zadataka je u stalnom porastu.

Iz ovih razloga, počela se razvijati oblast matematike koja istražuje i razrađuje metode koje dovode do brojčanog rešenja postavljenog problema, što je za praksu od izvanrednog značaja. Ova oblast matematike nazvana je **numeričkom analizom**.

Broj zadataka na koji nailazimo u numeričkoj analizi veoma je velik. Gotovo da nema oblasti nauke i tehnike u kojoj neka od metoda numeričke analize nije našla primenu. Mnogobrojne su i raznolike metode numeričke analize. One imaju zajedničku opštu ideju sa sledećim osnovnim zadacima:

- (a) Aproksimacija skupova u funkcionalnom prostoru;
- (b) Aproksimacija funkcija, zadatah u funkcionalnom prostoru;
- (c) Razvoj algoritama i metoda rešavanja zadataka na računarima.

Numerička analiza (ili numerička matematika, ili praktična matematika) kao samostalna disciplina datira od početka ovoga veka, iako je opšte uzevši, prisutna od samih istorijskih početaka matematike.

Veliki je broj knjiga, monografija, časopisa i drugih publikacija u kojima se izlažu metode i primena numeričke analize. Knjiga A.N. Krilova "Predavanja o približnim računanjima" izdata 1911. godine, predstavlja prvu knjigu o nu-

meričkim metodama. Knjiga J. Bezikovića "Približna računanja" iz 1924. godine, je elementarni kurs o numeričkim metodama namenjen inženjerima. Značajno je monografsko delo Kantoroviča i Krilova "Približne metode više analize" u kome su izložene približne metode rešavanja zadataka matematičke fizike.

Od drugih davno izdatih knjiga treba pomenuti Natansonovu "Konstruktivna teorija funkcija" i monografiju Gončarova "Teorija interpolacije i aproksimacije funkcija". U posleratnom periodu, naročito sa razvojem računarske tehnike, štampa se veliki broj knjiga među kojima su zapažena dela sledećih autora: Milne, Fadejeva, Hausholdera, Buta, Heminga, Berezina, Žitkova, Demidoviča, Marona, Rihtmajera i drugih.

Od posebnog značaja za razvoj numeričke matematike je Hilbertovo otkriće funkcionalnog prostora. Za nelinearne probleme treba preći u Banahove prostore. Pseudometrični prostori Đure Kurepe, kako navodi nemački matematičar L. Kolac, su najznačajnije za numeričku matematiku uopštenje do tada (1934) tretiranih prostora.

U jednom poglavlju ovako koncipirane knjige nije moguće izložiti pa čak ni ukratko dodirnuti sva pitanja i sve mogućnosti primene numeričke matematike u geologiji i rudarstvu. Autori su se zato opredelili za pristup koji daje osnovnu sliku o značajnijim za rudarstvo i geologiju numeričkim metodama.

Afirmacija primene numeričkih metoda u geologiji i rudarstvu počinje početkom šezdesetih godina, a sa razvojem i primenom računarske tehnike ona dobija puni značaj. Numeričke metode koriste se za neposredno rešavanje različitih problema rudarstva i geologije, kao i za razvoj novih matematičko-modelskih pristupa i inženjersko-kreativnih alata kompjuterski podržanih. Širok je spektar primene i uočljiva je tesna interaktivna sprega teorije i prakse. U tom smislu, numerička matematika mogla bi se nazvati inženjerskom matematikom, a da se pri tome ne izgubi ništa u indikativnosti.

Numeričke metode se danas koriste kod obrade geoloških podataka i formiranja matematičkih modela prostornih promena geoloških obeležja, proračuna rudnih rezervi, simulacije dinamike geoloških procesa, modeliranja dinamike kretanja podzemnih voda i procesa odvodnjavanja na rudnicima, simulacije eksploatacionih procesa u ležištima nafte i gasa, modeliranje i simulacije rada ventilacionih, eksploataciono-tehnoloških, transportnih i sistema za PMS, kod geometrizacije i analize graničnih dubina rudnika, kod tehnoeкономskih ocena, u rudarskim merenjima, u rešavanju geofizičkih problema i sl.

Rešavanje raznorodnih problema u rudarstvu i geologiji numeričkim metodama, najčešće pretpostavljaju računarsku podršku. Pod ovom podrškom podrazumeva se adekvatan hardver, ali pre svega odgovarajuća programska podrška. Na tržištu je danas solidna ponuda opšte numeričkih ili specijalizovanih softverskih paketa ove namene.

Napred smo konstatovali da je veoma bogata literatura za ovu oblast matematike. Na žalost konstatacija nije adekvatna kada je reč o specijalizovanoj literaturi

za geologiju i rudarstvo. Autori zato očekuju da i ako po obimu skromno, ovo poglavlje čitaocu pruži inicijalna znanja i upute ga na put na kome može tražiti odgovore za svoj problem uz pomoć numeričke analize.

Primeri koji slede čitaocu treba da pruže osnovni uvid u matematičko-manipulativni postupak praktične primene nekih od metoda numeričke analize.

7.2.1. Interpolacija

U praksi često operišemo sa funkcijom $f(x)$ čije su vrednosti, za neki konačni skup vrednosti argumenata x , date tablično.

U postupku rešavanja zadataka potrebne su nam vrednosti $f(x)$ i za vrednosti argumenata između datih vrednosti.

Tada se formira funkcija $\varphi(x)$ dovoljno jednostavna za izračunavanje, koja u datim tačkama x_0, x_1, \dots, x_n ima vrednosti $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$, a u ostalim tačkama odsečka $[a, b]$ koji pripada oblasti definisanosti funkcije $f(x)$, približno predstavlja funkciju $f(x)$ sa izvesnim stepenom tačnosti. Tada se u rešavanju zadataka operiše sa funkcijom $\varphi(x)$.

Zadatak interpolacije je upravo definisanje funkcije $\varphi(x)$. Najčešće se ova funkcija obrazuje u obliku algebarskog polinoma.

Interpolacija se ponekad koristi i u slučajevima kada je poznat analitički izraz funkcije $f(x)$ koji dopušta izračunavanja njenih vrednosti za proizvoljno x na odsečku $[a, b]$ na kome je ona definisana, ali su izračunavanja veoma komplikovana.

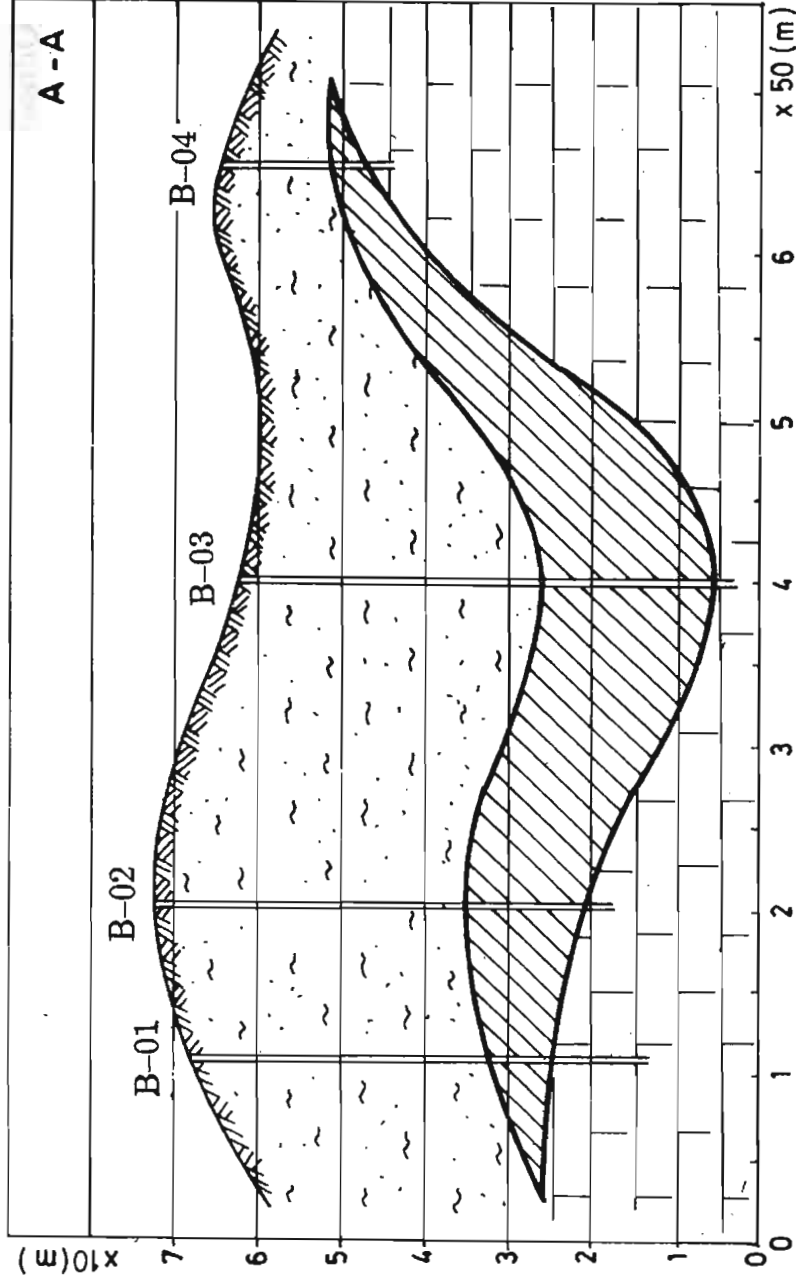
Na sledećem primeru pokazaćemo mogućnost primene interpolacionih polinoma opšteg tipa Lagranža i Njutna kod obrade ležišta mineralnih sirovina.

Prepostavimo jednu realno moguću situaciju, da je ležište istraženo istraženim bušenjem sa bušotinama na međusobno različitim rastojanjima. Za presek dat na slici 7.3 Lagranžovom i Njutnovom interpolacionom formulom definisaćemo polinom koji matematički oslikava krovinsku liniju.

Koordinate tačaka po bušotinama koje definišu krovinsku liniju date su u tabeli 7.1.

Tabela 7.1.

Bušotina	K o o r d i n a t e	
	$x(\times 50 \text{ m})$	$(x)(\times 10 \text{ m})$
B-01	1	3,2
B-02	2	3,5
B-03	4	2,6
B-04	6,5	5,1



Sl. 7.3. - Presek ležišta

7.2.1.1. Lagranževov interpolacioni polinom

$$P(x) = \sum_{i=0}^{i=n} \frac{\prod_{n+1}(x)y_i}{(x-x_i)\prod_{n+1}(x_i)}$$

Za naš slučaj ($n = 4 - 1 = 3$) Lagranževov interpolacioni polinom izgleda u razvijenom obliku:

$$\begin{aligned}
 P_3(x) = & \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)} \cdot y_0 + \\
 & + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} \cdot y_1 + \\
 & + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} \cdot y_2 + \\
 & + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} \cdot y_3
 \end{aligned}$$

Odnosno

$$P_3(x) = \frac{(x-2)(x-4)(x-6,5)}{(1-2)(1-4)(1-6,5)} \cdot 3,2 + \frac{(x-1)(x-4)(x-6,5)}{(2-1)(2-4)(2-6,5)} \cdot 3,5 + \\ + \frac{(x-1)(x-2)(x-6,5)}{(4-1)(4-2)(4-6,5)} \cdot 2,6 + \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(6,5-1)(6,5-2)(6,5-4)} \cdot 5,1.$$

Odakle se posle sređivanja dobija

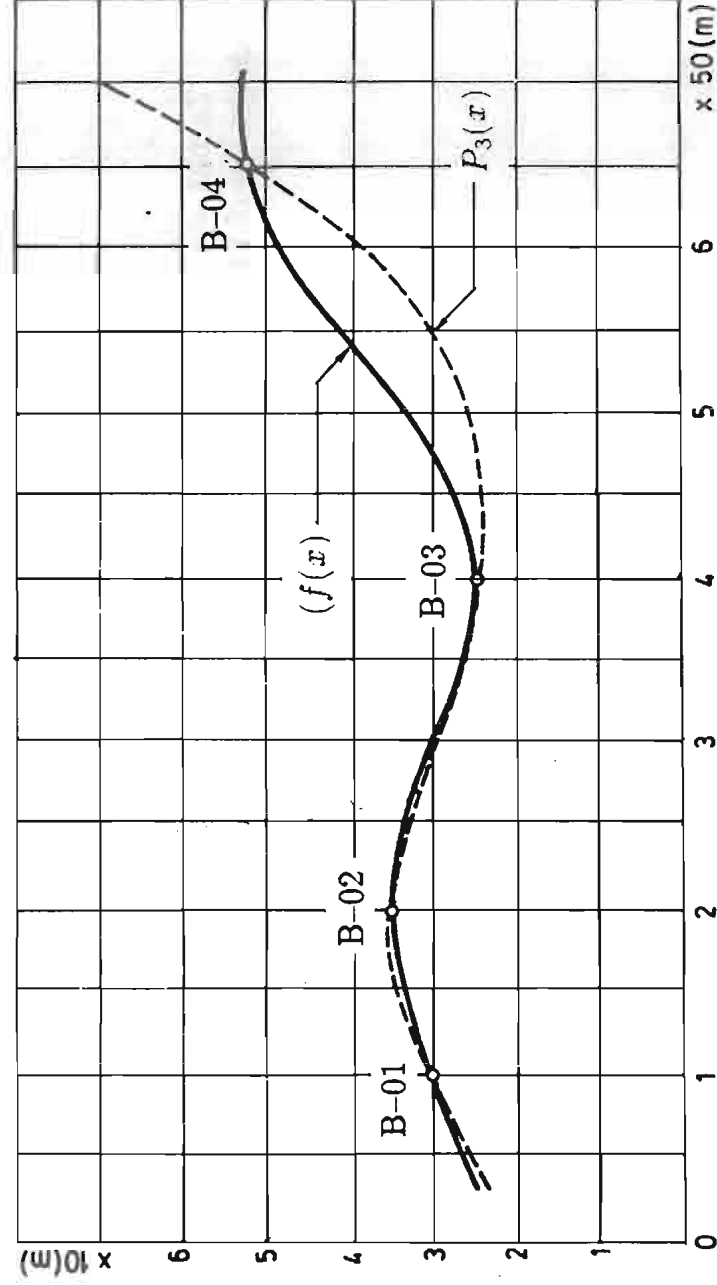
$$P_3(x) = 1,5677 + 2,5066x - 0,9783x^2 + 0,104x^3$$

polinomom trećeg stepena, koji matematički oslikava krovinsku liniju ležišta.

Kod praktičnog korišćenja Lagranževog interpolacionog polinoma, pod uslovom da su izračunavanja tačna, mora se znati da se vrednosti izračunate preko polinoma $P(x)$ poklapaju sa zadatim vrednostima u interpolacionim čvorovima. U ostalim tačkama po pravilu dolazi do izvesnih odstupanja, osim u slučaju kada je $f(x)$ polinom stepena ne višeg od n .

Pojavljaju se tri tipa greške: greška metode, greška usled neadekvatnog stepena polinoma i greška zaokruživanja ili greška računanja.

Na slici 7.4 dat je uporedni grafički prikaz krovinske linije $y = f(x)$ i modelovane krovinske linije $P_3(x)$.



Sl. 7.4. - Uporedni grafički prikaz krovinske linije $f(x)$ i $P_3(x)$

Uočava se da se krive $f(x)$ i $P_3(x)$ gotovo poklapaju levo od interpolacionog čvora $B - 03$, dok su sa njegove desne strane međusobna odstupanja vrlo izražena.

Ovaj primer lepo ilustruje zamku u koju se može upasti ukoliko se interpolacija izvodi Lagranžeovim interpolacionim polinomom mehanistički i neanalitički. Otklanjanje ovakvih odstupanja je moguće prevođenjem polinoma $P(x)$ u harmonik višeg reda, uvođenjem dopunskih interpolacionih čvorova.

7.2.1.2. Njutnov interpolacioni polinom

Njutnov interpolacioni polinom za nejednake razmake interpolacionih čvorova pogodniji je za izračunavanja od Lagranžeove formule. Dodavanje jednog ili više interpolacionih čvorova ne zahteva ponavljanje već obavljenih izračunavanja, kao što je to slučaj kod primene Lagranžeove formule.

Za prethodni primer (sl. 7.3.) izvršimo izračunavanja po Njutnovoj formuli za nejednake razlike (v. 7.1.1.3).

Tabela 7.2.

i	Koordinate		Podeljene razlike		
	x	y	1	2	3
0	1	3,2	+0,30		
1	2	3,5	-0,45	-0,25	+0,104
2	4	2,6	+1,00	+0,32	
3	6,5	5,1			

Kako je

$$P(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0; x_1) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0; x_1; x_2) + \\ + \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})f(x_0; x_1; \dots; x_n)$$

za naš slučaj Njutnov interpolacioni polinom glasi:

$$P_3(x) = 3,2 + (x - 1) \cdot 0,30 + (x - 1)(x - 2) \cdot (-0,25) + (x - 1)(x - 2)(x - 4) \cdot 0,104.$$

Posle sređivanja dobija se izraz

$$P_3(x) = 1,568 + 2,506x - 0,978x^2 + 0,104x^3,$$

identičan izrazu dobijenom uz pomoć Lagranžeove formule.

Prednosti Njutnovog pristupa u manipulativnom smislu očigledne su. Suštinskih razlika nema između Lagranžeovog i Njutnovog interpolacionog polinoma za nejednake razmake.

Koristeći ovu prednost Njutnovog pristupa, formiramo polinom višeg stepena koji će bolje oslikavati krovinsku liniju na preseku datog primera (sl. 7.3.). Da bismo izvršili "navlačenje" krive $P(x)$ (sl. 7.4.) desno od interpolacionog čvora $B-03$, unosimo fiktivnu bušotinu na poziciju $x = 5,5$, koja definiše novi interpolacioni čvor sa koordinatama $x = 5,5$ i $y = 4,1$.

Tabela 7.3.

i	Koordinate		Podeljene razlike			
	x	y	1	2	3	4
0	1	3,2	+0,30			
1	2	3,5	-0,45	-0,25	+0,15	
2	4	2,6	+1,00	+0,41	-0,09	-0,044
3	5,5	4,1	+1,00	+0,00		
4	5,5	5,1				

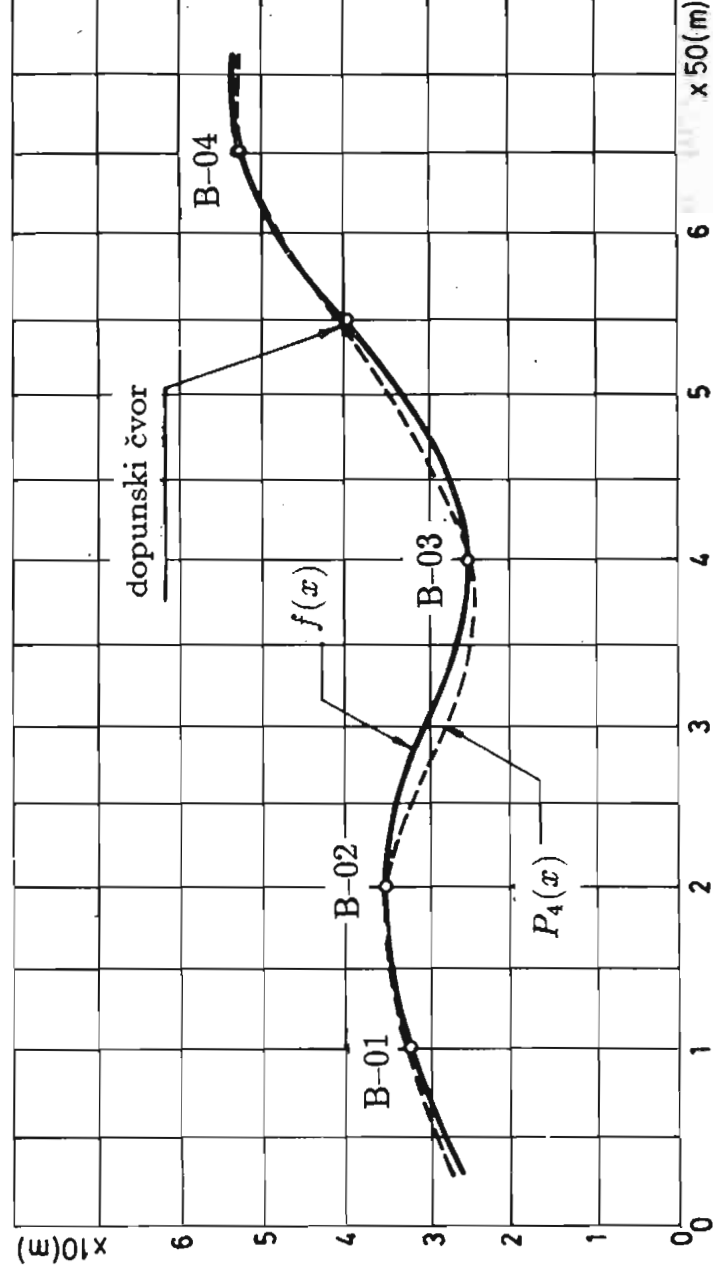
Oдавde je:

$$P_4(x) = 3,2 + (x-1) \cdot 0,30 + (x-1)(x-2)(-0,25) + \\ + (x-1)(x-2)(x-4) \cdot 0,15 + (x-1)(x-2)(x-4)(x-5,5) \cdot (-0,044).$$

Posle sređivanja prethodni izraz ima formulu:

$$P_4(x) = -0,736x^4 + 6,89x^3 - 3,61x^2 + 0,70x - 0,044x^4$$

Na slici 7.5 grafički je predstavljen prethodni polinom. Uočljivo je da interpolacioni polinom četvrtog stepena mnogo bolje oslikava krivu krovine od polinoma trećeg stepena. Kako broj interpolacionih čvorova neposredno određuje stepen polinoma dolazi se do zaključka, do koga se inače može doći i prostom logikom, da se sa povećanjem gustine interpolacionih čvorova povećava tačnost interpolacionog polinoma. Međutim na tačnost interpolacionog polinoma utiče isto tako i raspored interpolacionih čvorova. Povoljnije je ukoliko su interpolacioni čvorovi ravnomerno raspoređeni i naročito je bitno da se njima dobro pokrивaju pikovi, prevoji, prelazi i uopšte karakteristična "ekcesna" mesta. Ukoliko su promene parametara ili obeležja koja su predmet interpolacije složenije, njih matematički možemo korektno oslikavati harmonicima višeg reda, odnosno polinomima višeg stepena. Kod složenijih promena gde su izraženi lokalni šumovi ili promene sa naglim prelazima (presecima), polinomski je najčešće nemoguće verno modelovati posmatrane zavisne promenljive, osim ukoliko se parcijalno modeluju pojedini delovi.

Sl. 7.5. - Uporedni grafički prikaz krovinske linije $f(x)$ i $P_4(x)$

7.2.1.3. Inverzna interpolacija

U praksi se često javlja problem određivanja vrednosti argumenta na osnovu vrednosti funkcije. Ovakvi problemi se rešavaju metodom inverzne interpolacije.

Moguća su dva načina rešavanja inverznom interpolacijom. Prvi slučaj je kada je zadata funkcija monotona, tada se inverzna interpolacija jednostavno realizuje zamenom funkcije argumentom i obratno, pa se primeni interpolacija.

Drugi slučaj odnosi se na situaciju kada zadata funkcija nije monotona. Tada se ne zamenjuje funkcija argumentom. Uzima se neka od interpolacionih formula, koriste poznate vrednosti argumentata i smatrajući funkciju poznatom, rešava se dobijena jednačina po argumentu.

Razmotrimo inverznu interpolaciju na jedan i drugi način na sledećim primerima.

Prvi primer: Praćenjem troškova bušenja sa postojećom opremom i kadrovima u datoj radnoj sredini, na rudniku su utvrđene sledeće zavisnosti između troškova i dubine bušenja:

Sudeći po podacima u tabeli 7.4 funkcija je monotona, te se za rešavanje primenjuje prvi način. Pretpostavimo da nas interesuju troškovi bušenja za dubinu bušenja od 25 [m].

Tabela 7.4.

(x)	Troškovi bušenja $\times 10^4$ [din]	0,7	1,35	2,0	2,5
(y)	Dubina bušenja $\times 10$ [m]	0,5	1,00	1,5	2,0

$$P_3(x) = \frac{(y-1)(y-1,5)(y-2)}{(0,5-1)(0,5-1,5)(0,5-2)} \cdot 0,7 + \frac{(y-0,5)(y-1,5)(y-2)}{(1-0,5)(1-1,5)(1-2)} \cdot 1,35 + \\ + \frac{(y-0,5)(y-1)(y-2)}{(1,5-0,5)(1,5-1)(1,5-2)} \cdot 2 + \frac{(y-0,5)(y-1)(y-1,5)}{(2-0,5)(2-1)(2-1,5)} \cdot 2,5.$$

Za $y = 2,5$ ($2,5 \times 10 = 25$ m) $x = 2,7$, dakle troškovi bušenja bušotine duboke 25 [m] iznoseće $2,7 \times 10^4 = 27000$ [din].

Drugi način: na rudniku je analizirana uzajamna veza između proizvodnih učinaka i potrošnje energije. Registrovane su sledeće zavisnosti:

Tabela 7.5.

(x)	Potrošnja energije [KWh/t]	11	5	9
(y)	Proizvodni učinci [t/rad/h]	3	10	15

U ovom slučaju funkcija nije monotona. Zato ćemo primeniti drugi način:

$$P_2(x) = \frac{(x-5)(x-9)}{(1-5)(1-9)} \cdot 3 + \frac{(x-1)(x-9)}{(5-1)(5-9)} \cdot 10 + \frac{(x-1)(x-5)}{(9-1)(9-5)} \cdot 15 = \\ = 0,469 + 2,271x - 0,073x^2.$$

Pretpostavimo da nas interesuje kolika će potrošnja energije biti pri proizvodnim učincima od 5 [t/rad/h]. U tom slučaju $P_2(x) = 5$ pa jednačina koja treba da pruži odgovor na postavljeno pitanje glasi:

$$-0,073x^2 + 2,271x - 4,531 = 0.$$

Oдавde je:

$$x_{1,2} = \frac{-2,271 \pm \sqrt{2,271^2 - 4 \cdot 0,073 \cdot 4,531}}{2 \cdot 0,073}.$$

Specifična potrošnja energije iznosiće $x = 2,14$ [KWh/t], pošto su koreni $x_1 = 2,14$ i $x_2 = 28,97$.

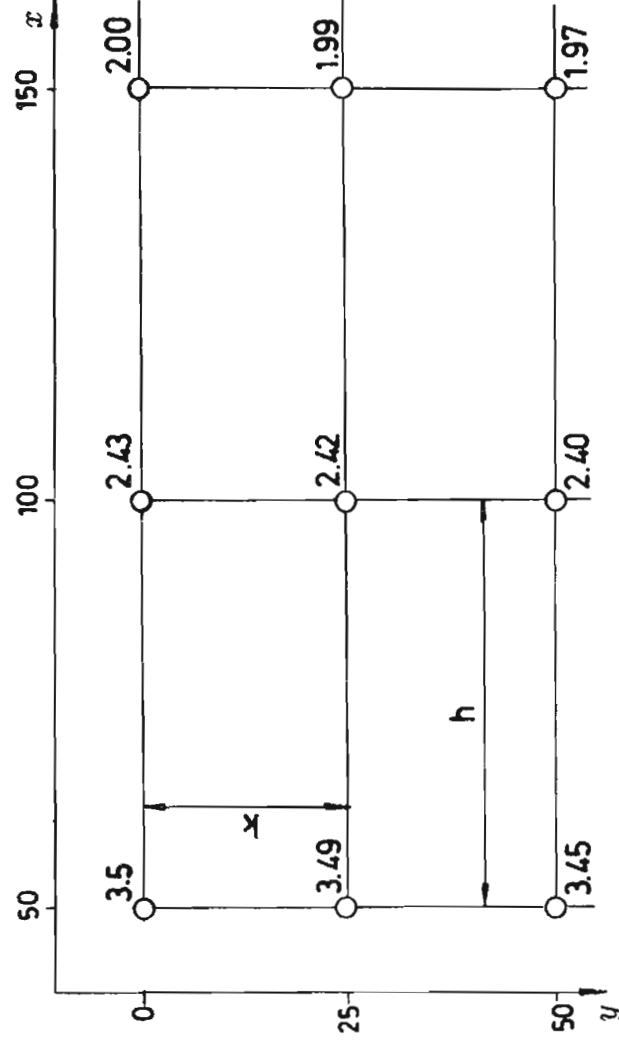
Ukoliko je broj podataka (interpolacionih čvorova) veliki, tada primena ovoga načina dovodi do rešavanja algebarske jednačine visokog stepena.

7.2.1.4. Interpolacija sa dve nezavisne promenljive

Interpolacija sa više nezavisnih promenljivih je znatno složenija nego interpolacija sa jednom promenljivom. Razlog nije samo u tome što veći broj promenljivih iziskuje obimnije analize već i u tome što postoji niz principijelnih teškoća, kao što su: čvorovi interpolacije se ne mogu rasporediti proizvoljno, problem ocene osatka, ne može u konkretnom zadatku egzistirati proizvoljan broj interpolacionih čvorova i sl.

Na sledećem primeru pokazaćemo praktično korišćenje interpolacije sa dve nezavisne promenljive.

Deo ležišta istražen je sa devet istražnih bušotina raspoređenih po pravougaonoj mreži kao na slici 7.6. U tabeli 7.6 data je funkcija $f(x, y)$ u diskretnoj formi.



Sl. 7.6 - Raspored istražnih bušotina sa srednjim sadržajima korisne supstance

Tabela 7.6.

$x \backslash y$	50	100	150
0	3,50	2,43	2,00
25	3,49	2,42	1,99
50	3,45	2,40	1,97

Koristeći interpolacionu formulu datu u teorijskom delu ovog poglavlja, izračunajmo $f(75, 20)$, tj. sadržaj korisne komponente u tački sa koordinatama $x = 75$ i $y = 20$.

Sledi:

$$\Delta^{1+0} z_{00} = z_{10} - z_{00} = 2,43 - 3,50 = -1,07$$

$$\Delta^{0+1} z_{00} = z_{01} - z_{00} = 3,49 - 3,50 = -0,01$$

$$\begin{aligned} \Delta^{2+0} z_{00} &= \Delta_x(\Delta^{1+0} z_{00}) = (z_{20} - z_{10}) - (z_{10} - z_{00}) = \\ &= 2,00 - 2 \cdot 2,43 + 3,50 = 0,64 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta^{1+1} z_{00} &= \Delta_x(\Delta^{0+1} z_{00}) = (z_{11} - z_{10}) - (z_{01} - z_{00}) = \\ &= 2,42 - 2,43 - 3,49 + 3,50 = 0,00 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta^{0+2} z_{00} &= \Delta_y(\Delta^{0+1} z_{00}) = (z_{02} - z_{01}) - (z_{01} - z_{00}) = \\ &= 3,45 - 2 \cdot 3,49 + 3,50 = -0,03, \end{aligned}$$

$$p = \frac{x - x_0}{h} = \frac{1}{2}, \quad q = \frac{y - y_0}{k} = \frac{4}{5}.$$

Imamo

$$\begin{aligned} z \simeq 3,50 + \frac{1}{2}(-1,07) + \frac{4}{5}(-0,01) + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot 0,64 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot 0,00 + \right. \\ \left. + \frac{4}{5} \left(-\frac{1}{5} \right) (-0,03) \right] = 2,8794 \approx 2,88. \end{aligned}$$

Dakle sadržaj k.k u tački sa koordinatama (70, 20) u istraženom polju iznosi 2,88 [%].

Obrađeni primeri su jednostavni. Njihov izbor nije slučajan i učinjen je iz dva razloga. Manja složenost problema, čini ih lakše shvatljivim za uspostavljanje mosta između fizičkog i matematičkog modela i drugi, ništa manje značajan razlog je pregledniji matematičko-manipulativni postupak sa manjim obimom računanja. Ovim se ništa ne gubi na suštini i na nivou, ali se u edukativnom pogledu znatno dobija.

Pored identifikovanih područja primene, kao što je geometrizacija ležišta, modeliranje prostornih promena geoloških obeležja, numeričke interpolacione metode mogu biti primenjene kod obrade rezultati insitu i laboratorijskih merenja, kod korelisanja parametara istraživanih pojava i procesa, utvrđivanja zakonitosti pojava i procesa i sl.

Na istraživaču je sloboda izbora metode interpolacije. Nema definisanih pravila za izbor najprikladnije metode kod rešavanja konkretnog problema. U ovoj činjenici leži zahtev za dobrim poznavanjem matematičko-filosofskih osnova interpolacionih metoda i suštine fizičkog procesa ili pojave koja je predmet pažnje. Od

istraživača koji koristi numeričke interpolacione alate, pored bezuslovnog ispunjavanja prethodnih zahteva očekuje se i velika obazrivost.

Korektna primena u matematičko-tehničkom pogledu neke od metoda interpolacije, ne znači i da su rezultati obrade korektni. U ovo smo se uverili kroz primer sa slike 7.3., gde smo videli da postoje velike razlike u tačnosti kod oslikavanja krovinske linije sa interpolacionim polinomom trećeg i četvrtog stepena.

Kada je broj interpolacionih čvorova mali, kao što je slučaj sa našim primerima, problemi se mogu lako ručno rešavati, u protivnom neophodna je pomoć računara.

7.2.2. Numeričko diferenciranje i integracija

7.2.2.1. Numeričko diferenciranje

U ovom delu razmatraju se primeri primene u geologiji i rudarstvu numeričkih metoda diferenciranja i integracije funkcija.

Diferenciranje i integracija su specijalni slučajevi funkcija definisanih u funkcionalnim prostorima. Pri čemu, svakoj funkciji nekog funkcionalnog prostora odgovara ili ponovo funkcija ili neki broj.

Numeričko diferenciranje koristi se u slučaju kada je funkcija čiji izvod treba naći, zadata tabelarno ili kada funkcionalna zavisnost između argumenata i funkcije ima složen analitički izraz.

U tim slučajevima se umesto funkcije $f(x)$ posmatra interpolaciona funkcija $\varphi(x)$ i izvod funkcije $\varphi(x)$ smatra se kao približna vrednost funkcije $f(x)$. Normalno je da se tada izvod funkcije $f(x)$ nalazi sa nekom greškom.

U inženjerskoj praksi koristi se grafičko diferenciranje. Ovim načinom se postiže nešto veća tačnost a uloženi trud nije manji od onoga koji je potreban za primenu neke od numeričkih formula. Za ovu svrhu koriste se različiti analogni aparati. Među njima najtačniji su integrari.

Metodom numeričkog diferenciranja izračunaćemo prva dva izvoda polinoma

$$y = 87,42 + 0,0776x - 0,01094x^2$$

za $x = 1$. Polinom predstavlja model oscilovanja nivoa podzemnih voda u toku godine na jednom piježometru, (v. 4.2.6). Saglasno zadatoj vrednosti $x = 1$, interesuje nas brzina promene i intenzitet promene NPV u januaru mesecu.

Obrazujemo tabelu razlika:

Tabela 7.7.

x	$f(x)$	f^1	f^2	f^3
1	87,49	+0,04		
2	87,53	+0,02	-0,02	+0,01
3	87,55	+0,01	-0,01	+0,03
4	87,56	-0,03	-0,04	
5	87,53			

Sledi:

$$h \frac{df}{dx} = \Delta f - \frac{-\Delta^2 f}{2} + \frac{\Delta^3 f}{3},$$

$$f'(1) = 0,04 + \frac{(-0,02)}{2} + \frac{0,01}{3} = 0,0333,$$

$$h^2 \frac{d^2 f}{dx^2} = (\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3})^2 f = \Delta^2 f - \Delta^3 f,$$

$$f''(1) = -0,02 - 0,01 = -0,03.$$

Dakle prosečna brzina promene NPV u januaru mesecu na posmatranom pi-jezometru je 0,0333 [m/mes], sa negativnim trendom, tj. sa intenzitetom opadanja NPV od -0,03 [m/mes²].

7.2.2.2. Numerička integracija

Postoji čitav niz formula numeričke integracije. Sam čitalac može, bez teškoća, izvesti formulu potrebnu za rešavanje konkretnog problema numeričkom integracijom.

Za obrazovanje formula približnog izračunavanja, integrala koristimo zamenu funkcije $f(x)$ interpolacionom funkcijom $\varphi(x)$. Zamenom integranda najčešće je algebarski interpolacioni polinom. Pri zameni integranda algebarskim interpolacionim polinomom, obrazovanim pomoću n -interpolacionih čvorova, dobijamo takvu formulu za numeričku integraciju čiji je ostatak jednak nuli ako je integrand polinom stepena ne većeg od $n - 1$.

Postavlja se pitanje koje su formule primenljivije u konkretnom slučaju? Ovo pitanje nema jednoznačan odgovor. Odgovor zavisi od načina zadavanja integranda, kojim sredstvima za računanje raspolažemo, kolika se tačnost zahteva i sl. U svakom slučaju najbolja je ona formula koja za date uslove daje rezultat zadovoljavajuće tačnosti uz najmanji utrošak rada i vremena. Ako se obrada izvodi ručno ili uz pomoć kalkulatora tada su primenljivije formule koje koriste razlike. U ovom slučaju od manjeg su značaja Gausove i Čebiševljeve formule

jer je računanje veoma zamorno. Za računanja na računarima najznačajnije su formule koje ne sadrže razlike.

Preporučljivo je da se prilikom izbora formule za numeričku integraciju prouči ponašanje integranda i uporedi sa ponašanjem interpolacionog polinoma. Ponekad je potrebno deliti odsečak, na kome se vrši integracija, na manje delove da bi se funkcija bolje aproksimirala interpolacionim polinomom.

Za približnu integraciju koriste se i različiti aparati: planimetri i integratori. Numerička integracija, ima veliki praktični značaj u geologiji i rudarstvu, pri planimetrisanju površina, proračunima zapremine rudnih tela i drugih objekata, utvrđivanju kvantitativnih odnosa u ležištima i sl.

Nećemo se upuštati u praktične prezentacije mnogobrojnih formula za numeričku integraciju, jer bi to zahtevalo mnogo prostora, a sam edukativni efekat ne bi bio naročit.

Zato ćemo na primeru sa slike 7.3. prezentirati pristup numeričke integracije radi izračunavanja površine preseka ležišta.

Krovinsku liniju, preseka ležišta datog na slici 7.3. definiše interpolativni polinom:

$$P_6^K(x) = 2,3295 + 0,7140x + 0,5072x^2 - 0,4133x^3 + 0,0602x^4 + 0,0032x^5 - 0,0007x^6,$$

a polinomski model podinske linije ima formulu:

$$P_6^P(x) = 2,3106 + 0,0721x + 0,4502x^2 - 0,3888x^3 + 0,0499x^4 + 0,0070x^5 - 0,0011x^6$$

Površina preseka računa se integralom:

$$S = \int_a^b (P_6^K(x) - P_6^P(x)) dx$$

Oblast na kojoj se vrši integracija, je nepravilnog oblika. Podelimo je na delove, tako da je svaki deo mali pravougaonik, čija je kraća strana $h = \text{const}$, a duža strana $(P_6^K(x) - P_6^P(x))$.

Zbir površina ovih malih pravougaonika aproksimira površinu preseka. Sa-
glasno ovoj koncepciji, formula za numeričku integraciju glasi:

$$S = \sum_{i=1}^{i=n} [P_6^K(x_i) - P_6^P(x_i)] \cdot h$$

U narednoj tabeli 7.8. dati su rezultati izračunavanja za korak numeričke integracije $h = 0,5$ i oblast defnisanosti $a = 0,5$ a $b = 6,5$.

Površina preseka iznosi:

$$S = \sum_{i=1}^{i=13} \Delta_i h = 8,443$$

ili saglasno razmeri slike 7.3.

$$S = 8,443 \cdot 25 \cdot 10 = 2110,75 \quad [m^2]$$

Za izračunavanje površine preseka ležišta mogli su biti korišćeni i drugačiji pristupi numeričke integracije. Oni se u principu ne bi značajnije razlikovali od primenjenog načina.

Tabela 7.8.

i	x_i	$P_6^K(x_i)$	$P_6^P(x_i)$	$\Delta_i = [P_6^K(x_i) + P_6^P(x_i)]$	$\Delta_i h$
1	0,5	2,76	2,41	0,35	0,175
2	1,0	3,20	2,50	0,70	0,350
3	1,5	3,47	2,41	1,06	0,530
4	2,0	3,50	2,10	1,40	0,700
5	2,5	3,32	1,60	1,72	0,860
6	3,0	3,01	1,05	1,96	0,980
7	3,5	2,72	0,62	2,10	1,050
8	4,0	2,60	0,50	2,10	1,050
9	4,5	2,78	0,85	1,93	0,965
10	5,0	3,30	1,73	1,57	0,785
11	5,5	4,10	3,00	1,10	0,550
12	6,0	4,88	4,28	0,60	0,300
13	6,5	5,10	4,80	0,30	0,150

7.2.3. Izračunavanje i aproksimacija funkcija

Sa razvojem računarske tehnike, ističu se zadaci mnogostrukog izračunavanja vrednosti funkcija. Nepodesno je na pr. unositi u računar tablice elementarnih funkcija kao što su $\sin x$, $\cos x$, $\ln x$, e^x itd., pošto bi veliki broj cifarskih informacija bespotrebno opteretio memoriju računara. Pretraživanja, odnosno iznalaženja potrebnih podataka zahteva izvesno vreme tako da ovakav pristup i sa tog stanovišta nije pogodan.

Ideja da se pomoću nekog adekvatnog algoritma izračuna svaki put potrebna vrednost funkcije sa zadatom tačnošću, vrlo je pogodna za primenu na računaru. U

realizaciji ove ideje, zamenjuje se posmatrana funkcija $f(x)$ nekom drugom funkcijom $\varphi(x)$ koja se lako izračunava, a čije se vrednosti na posmatranom odsečku $[a, b]$, razlikuju od vrednosti funkcije $f(x)$ ne više od zadate greške. Najčešći u praksi oblik aproksimirajuće funkcije je polinom.

Oblast numeričke analize koja se bavi problemima izračunavanja i aproksimacije funkcija literaturno je veoma bogata, što rečito govori o njenom mestu i značaju u teoriji i praksi.

U praksi je čest slučaj da funkcija $f(x)$, koja se aproksimira, bude zadata tablično, tj. zadate su neke njene vrednosti koje su dobijene eksperimentalnim putem te imaju slučajne greške. Ako u toku rešavanja zadatka treba odrediti vrednosti $f(x)$ u tačkama između zadatih vrednosti, ili je potreban analitički izraz za funkciju $f(x)$. Tada je interpolovanje necelishodno jer nije logično zahtevati potpunu podudarnost funkcije $f(x)$ i njene aproksimacije $\varphi(x)$ u pojedinim tačkama pošto su u njima vrednosti $f(x)$ netačne.

Praksa pokazuje da aproksimovane funkcije obrazovane metodom sređnje kvadratne aproksimacije znatno bolje predstavljaju realnu funkciju $f(x)$ od interpolovanih polinoma.

Za razliku od prethodnih delova ovog poglavlja, u kojima su dati praktični primeri na kojima je prezentirana matematičko-manipulativna tehnika i indicirana su područja primene u geologiji i rudarstvu, ovde ćemo se zadržati na iznetom. Ovo činimo zato što izračunavanja i aproksimacije funkcija nemaju aplikativne posebnosti za geologiju i rudarstvo. U tom smislu nema primera iz prakse sa karakterističnim prezentacionim obeležjima. Čitaocce zainteresovane za detaljnije informacije o izračunavanjima i aproksimacijama funkcija, upućujemo na opštu i specijalizovanu literaturu iz numeričke matematike.

7.2.4. Približno rešavanje jednačina

Mnogi problemi u nauci i tehnici opisani su matematički pomoću algebarskih ili diferencijalnih jednačina. Stoga je za praksu veoma važno njihovo rešavanje.

U teoriji diferencijalnih jednačina proučavaju se samo jednačine koje se mogu rešiti analitičkim putem.

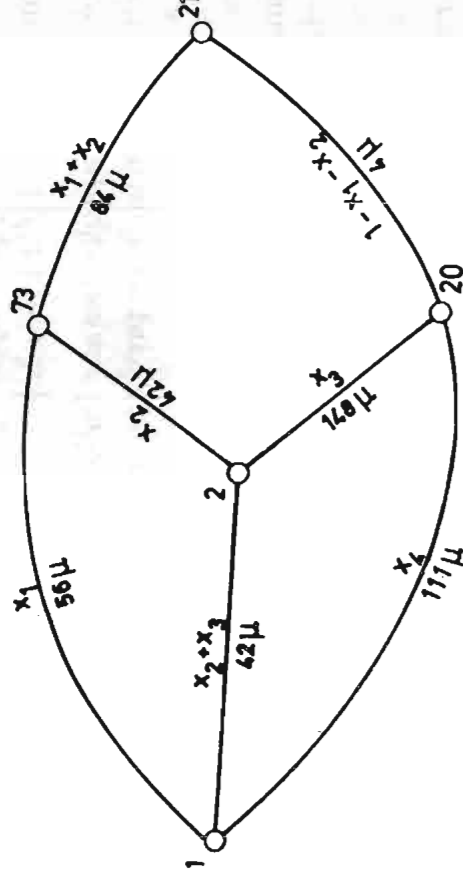
Veliki je broj diferencijalnih jednačina u praksi, za koje se traže korektna numerička rešenja, pošto nemaju analitička rešenja. Naravno numeričke metode se mogu primeniti i na analitički rešive jednačine, ali se to u praksi izbegava pošto je u većini slučajeva za takve jednačine jednostavnije analitičko rešenje.

Numeričke metode približnog rešavanja algebarskih i diferencijalnih jednačina imaju značaj i primenu u pojedinim oblastima rudarstva i geologije. To su pre svega primene kod rešavanja problema iz domena ventilacije rudnika, hidrogeologije odnosno, dinamike kretanja podzemnih voda, kod rešavanja problema za-

štite rudnika od vode, kod analize zagađivanja i distribucije zagađivača podzemnih voda, kod modeliranja prostornih promena obeležja ležišta mineralnih sirovina, kod modeliranja geoloških procesa, u geofizici, kod modeliranja ekoloških procesa na pr. distribucija aerozagađivača i sl.

Na sledećem primeru iz ventilacije rudnika, prenetom uz saglasnost autorke, iz knjige Jovićić V. (1973.), Ventilacija rudnika, ICS, Beograd , prikazaćemo rešavanje sistema nelinearnih algebarskih jednačina.

Za složeni dijagonalni ventilacioni sistem čija je kanonska šema data na slici 7.7. potrebno je odrediti raspodelu vazduha, ukupne otpore i depresiju. Brojni podaci ovog primera odnose se na konkretan slučaj iz prakse, pa su i oznake čvornih tačaka zadržane onako kako je to za dotični rudnik i usvojeno.



Sl. 7.7. - Kanonska šema ventilacionog sistema

Otpori pojedinih grana su sledeći:

$$m_{1-73} = 56\mu$$

$$m_{1-2} = 42\mu$$

$$m_{1-20} = 111\mu$$

$$m_{2-20} = 148\mu$$

$$m_{2-73} = 42\mu$$

$$m_{20-21} = 4\mu$$

$$m_{73-21} = 84\mu$$

Količina vazduha koja cirkuliše sistemom iznosi $V = 30 \text{ [m}^3/\text{s]}$. kod rešavanja problema, neophodno je prvo postaviti jednačine depresije za tri zatvorena poligona:

poligon: 1-2-73-1

$$56x_1^2 - 42(x_2 + x_3)^2 - 42x_2^2 = 0$$

poligon: 1-2-20-1

$$111(1 - x_1 - x_2 - x_3)^2 - 42(x_2 + x_3)^2 - 148x_3^2 = 0$$

poligon: 2-73-21-20-2

$$42x_2^2 + 84(x_1 + x_2)^2 - 148x_3^2 - 4(1 - x_1 - x_2)^2 = 0$$

Radi dobijanja polaznih vrednosti usvajamo da je:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0,25$$

i na osnovu toga računamo raspodelu vazduha u prvom približavanju.

I Približavanje:

Ako pretpostavimo podjednaku raspodelu vazduha u svim ograncima složenog dijagonalnog sistema, desna strana prethodnih jednačina neće biti jednaka nula nego greškama f_1, f_2 i f_3 , tj.:

$$f_1 = 56 \cdot 0,25^2 - 42 \cdot 0,25^2 = -9,68$$

$$f_2 = 111 \cdot 0,25^2 - 42 \cdot 0,5^2 - 148 \cdot 0,25^2 = -12,82$$

$$f_3 = 42 \cdot 0,25^2 + 84 \cdot 0,5^2 - 148 \cdot 0,25^2 - 4 \cdot 0,5^2 = +13,27.$$

Pošto su određene vrednosti greške za pojedine poligone formiraju se jednačine tipa:

$$-f = 2 \sum Mx dx$$

$$2 [56 \cdot 0,25 dx_1 - 42 \cdot 0,5 dx_2 - 42 \cdot 0,5 dx_3 - 42 \cdot 0,25 dx_2] = 9,68$$

odnosno

$$28dx_1 - 62dx_2 - 42dx_3 = 9,68$$

Isto tako formiraju se i preostale dve jednačine:

$$-55,5dx_1 - 97,5dx_2 - 171,5dx_3 = 12,82$$

$$88dx_1 + 109dx_2 - 74dx_3 = -13,37$$

Prethodne jednačine čine sistem sa tri nepoznate. Rešavanjem ovoga sistema dobijaju se popravke:

$$dx_1 = +0,025$$

$$dx_2 = -0,134$$

$$dx_3 = -0,001$$

Raspodela vazduha u prvom približavanju može se odrediti preko pretpostavljenih vrednosti ($x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0,25$) i izračunatih popravki:

$$x_1 = 0,25 + dx_1 = 0,25 + 0,025 = 0,275$$

$$x_2 = 0,25 + dx_2 = 0,25 - 0,143 = 0,107$$

$$x_3 = 0,25 + dx_3 = 0,25 - 0,001 = 0,249$$

$$x_4 = 1,00 - (0,275 + 0,107 + 0,249) = 0,369$$

II Približavanje:

Novе vrednosti f_1, f_2 i f_3 računaju se pomoću raspodela određenih u prvom približavanju:

$$f_1 = 56 \cdot 0,275^2 - 42(0,107 + 0,249)^2 - 42 \cdot 0,107^2 = -1,520$$

$$f_2 = 111(1,00 - 0,275 - 0,107 - 0,249)^2 - 42(0,107 + 0,249)^2 - 148 \cdot 0,249^2 = 0,628$$

$$f_3 = 42 \cdot 0,107^2 + 84(0,275 + 0,107)^2 - 148 \cdot 0,249 - 4(1,00 - 0,275 - 0,107)^2 = 1,942$$

Formiramo nove jednačine tipa $-f = 2 \sum Mxdx$ koje posle sređivanja glase:

$$30,80dx_1 - 38,88dx_2 - 29,90dx_3 = 1,520$$

$$-81,92dx_1 - 111,82dx_2 - 185,52dx_3 = -0,628$$

$$69,12dx_1 + 78,10dx_2 - 73,70dx_3 = -1,942$$

Rešavanjem ovoga sistema jednačina dobija se:

$$dx_1 = +0,013$$

$$dx_2 = -0,031$$

$$dx_3 = +0,013$$

Novе vrednosti raspodele vazduha iznose:

$$x_1'' = 0,275 + 0,013 = 0,288$$

$$x_2'' = 0,107 - 0,031 = 0,076$$

$$x_3'' = 0,249 + 0,013 = 0,262$$

$$x_4'' = 1,00 - (0,288 + 0,076 + 0,262) = 0,374$$

III Približavanje:

$$f_1 = 56 \cdot 0,288^2 - 42(0,076 + 0,262)^2 - 42 \cdot 0,076^2 = -0,385$$

$$f_2 = 111 \cdot 0,374^2 - 42(0,076 + 0,262)^2 - 148 \cdot 0,262^2 = +0,577$$

$$f_3 = 42 \cdot 0,076^2 + 84(0,288 + 0,076)^2 - 148 \cdot 0,262^2 - 4 \cdot 0,636^2 = +1,263$$

Slede jednačine tipa $-f = 2 \sum Mx dx$:

$$32,256dx_1 - 34,782dx_2 - 28,392dx_3 = 0,385$$

$$-83,028dx_1 - 111,42dx_2 - 188,972dx_3 = -0,577$$

$$66,24dx_1 + 62,448dx_2 - 77,552dx_3 = -1,263$$

Rešavanjem ovog sistema jednačina, u trećem približavanju se dobijaju:

$$dx_1 = +0,004$$

$$dx_2 = -0,014$$

$$dx_3 = +0,009$$

Raspodele vazduha posle trećeg približavanja iznose:

$$x_1''' = 0,288 + 0,004 = 0,292$$

$$x_2''' = 0,076 - 0,014 = 0,062$$

$$x_3''' = 0,262 + 0,009 = 0,271$$

$$x_4''' = 1 - (0,292 + 0,062 + 0,271) = 0,375$$

U narednoj tabeli 7.9. date su stvarne i vrednosti dobijene za x_1 , x_2 , x_3 i x_4 u približavanjima:

Tabela 7.9.

	x_1	x_2	x_3	x_4
Pretpostavljena vrednost	0,250	0,250	0,250	0,250
Vrednost I približavanja	0,275	0,107	0,249	0,369
Vrednost II približavanja	0,288	0,076	0,262	0,374
Vrednost III približavanja	0,292	0,062	0,271	0,375
Stvarna vrednost	0,300	0,060	0,270	0,370

Kolicine vazduha u pojedinim ograncima iznose:

$$V_1 = 0,30 \cdot 30 = 9,0 \quad [m^3/s]$$

$$V_2 = 0,06 \cdot 30 = 1,8 \quad [m^3/s]$$

$$V_3 = 0,27 \cdot 30 = 8,1 \quad [m^3/s]$$

$$V_4 = 0,37 \cdot 30 = 11,1 \quad [m^3/s]$$

Ukupni otpori složenog dijagonalnog sistema ventilacije računaju se iz jednačine depresije:

$$MV^2 = m_{1-20}V_4^2 + m_{20-21}(V_3 + V_4)^2$$

Odavde je:

$$M = \frac{m_{1-20}V_4^2 - m_{20-21}(V_3 + V_4)^2}{V^2}.$$

Za dati slučaj M iznosi:

$$M = \frac{111 \cdot 11,1^2 + 4 \cdot 19,9^2}{30^2} \simeq 17 \mu.$$

Napomena: U jugoslovenskoj, ruskoj i francuskoj praksi koristi se kao jedinica otpora **mijurg** (μ), koja je uvedena da bi se izbegao rad sa velikim brojem decimala, inače $1\mu = 9,81 \cdot 10^{-3} \text{ [Ns/m}^2\text{]}$.

Ovaj primer ima za cilj samo da ilustruje primenu iterativne metode za rešavanje sistema algebarskih jednačina. Ukoliko čitaoca interesuju drugi detalji u vezi proračuna ventilacionih sistema upućujemo ga na specijalizovanu literaturu za ovo područje rudarske tehnike.

Treba napomenuti da kod rešavanja ventilacionih problema rudnika, matematički modeli ventilacionih sistema obuhvataju često više desetina pa i više stotina diferencijalnih jednačina ili algebarskih jednačina. Rešavanje ovako kompleksnih sistema jednačina nezamislivo je bez numeričkih alata i odgovarajuće računarske podrške.

Od posebnog je značaja numeričko rešavanje diferencijalnih jednačina, naročito parcijalnih, koje imaju primenu u modeliranju geoloških, hidrogeoloških, inženjersko-geoloških, geofizičkih i drugih dinamičkih procesa, ali i pojedinih stanja i pojava.

Saglasno ovakvom značaju, u narednom poglavlju (8.0) posebno je obrađena metoda konačnih razlika – metoda numeričkog rešavanja linearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina.

8. Metoda konačnih razlika

8.1. Približno rešavanje parcijalnih diferencijalnih jednačina metodom konačnih razlika

8.1.1. Parcijalne diferencijalne jednačine

Parcijalne diferencijalne jednačine drugog reda sa dve promenljive su jednačine gde se javljaju parcijalni izvodi drugog reda od nepoznate funkcije $u = u(x, y)$. Opšti slučaj takve jednačine drugog reda glasi

$$(8.1) \quad F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0,$$

gde su

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$(8.2) \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

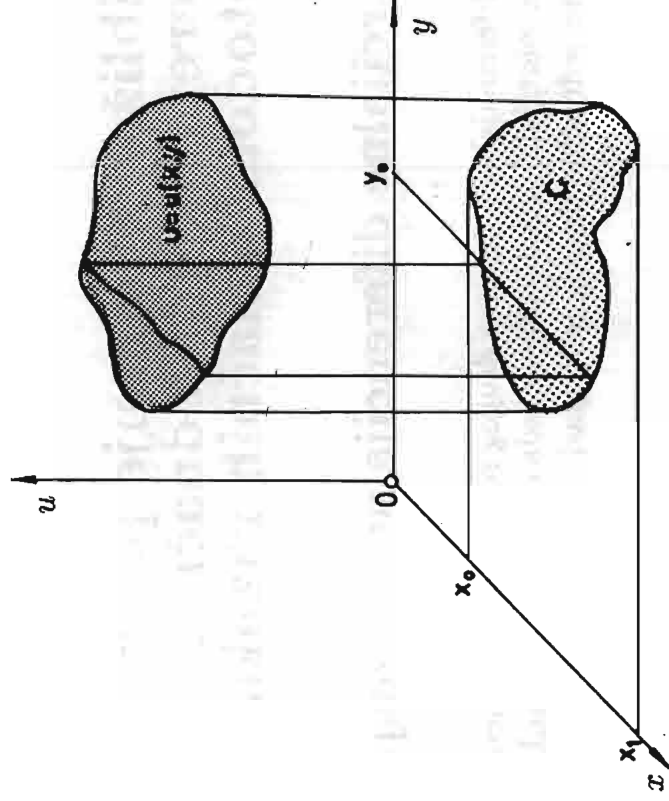
parcijalni izvodi prvog, odnosno drugog reda od $u = u(x, y)$. Svaka funkcija $u = u(x, y)$ koja zadovoljava (8.1) zove se rešenje parcijalne diferencijalne jednačine. Važan slučaj jednačine (8.1) je tzv. linearna parcijalna jednačina drugoga reda, koja glasi

$$(8.3) \quad A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = F(x, y),$$

gde su $A = A(x, y)$, $B = B(x, y)$, $C = C(x, y)$, $a = a(x, y)$, $b = b(x, y)$, $c = c(x, y)$ i $F = F(x, y)$ poznate funkcije. Kaže se da je jednačina (8.3) u nekoj oblasti G u xOy ravni

- a) eliptična, ako je $D = AC - B^2 > 0$ za $(x, y) \in G$,
 b) parabolična, ako je $D = AC - B^2 = 0$ za $(x, y) \in G$,
 c) hiperbolična, ako je $D = AC - B^2 < 0$ za $(x, y) \in G$,
 d) mešovitog tipa, ako je $D = AC - B^2$ promenljivog znaka za $(x, y) \in G$.

Grafički rešenje jednačine (8.1) ili (8.3) predstavlja površ (v. sliku 8.1) u prostoru, koja je definisana u nekoj dvodimenzionalnoj oblasti G u xOy ravni.



Sl. 8.1.

Obično se u problemima osim same parcijalne diferencijalne jednačine kao poznati javljaju još neki uslovi vezani za $u = u(x, y)$ u oblasti G . To su najčešće:

- a) početni uslovi **Košijevog tipa**, ako se zna da je

$$u(x, y_0) = f_1(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y_0) = f_2(x)$$

za date funkcije $f_1(x)$, $f_2(x)$ i

b) granični uslovi

$$u(x_0, y) = F_1(y), \quad u(x_1, y) = F_2(y)$$

gde su $f_1(y)$, $F_2(y)$ zadate funkcije, a x_0 i x_1 granične tačke promenljive x u odnosu na G (v. sl. 8.1).

8.1.2. Pojedini primeri parcijalnih diferencijalnih jednačina

Jednačina (8.3) za $A = C = 1$, $B = a = b = c = F = 0$ glasi

$$(8.4) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

i zove se Laplasova diferencijalna jednačina, koja je eliptična, jer je $D = AC - B^2 = 1$. Od uslova datih za funkciju $u = u(x, y)$ u oblasti G razlikuje se:

a) Dirihleov granični problem, ako se osim (8.4) zahteva i

$$u(0, y) = g_1(y), \quad u(L, y) = g_2(y), \\ u(x, 0) = f_1(x), \quad u(x, L) = f_2(x),$$

gde su f_1, f_2, g_1 i g_2 date funkcije jedne promenljive. Drugim rečima, poznate su vrednosti funkcije i na stranicama pravougaonika u xOy ravni sa temenima (O, O) , (O, L) , (L, O) i (L, L) .

b) Nojmanov granični problem, ako se osim (8.4) zahteva i

$$\frac{\partial u(0, y)}{\partial x} = \alpha_1(y), \quad \frac{\partial u(L, y)}{\partial x} = \alpha_2(y), \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = \beta_1(x), \quad \frac{\partial u(x, L)}{\partial y} = \beta_2(x),$$

gde su $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ date funkcije jedne promenljive. Drugim rečima, poznate su vrednosti prvih parcijalnih izvoda funkcije i na stranicama pravougaonika u xOy ravni sa temenima (O, O) , (O, L) , (L, O) i (L, L) .

c) Problem mešovitog tipa, ako se osim (8.4) zahteva i

$$a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + a_2 u = a_3, \quad b_1 \frac{\partial u}{\partial y} + b_2 u = b_3$$

za date brojeve a_1, a_2, \dots, b_3 na rubu oblasti G (u posebnom slučaju na stranicama pravougaonika kao u Dirihleovom ili Nojmanovom problemu).

Jednačina

$$(8.5) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (a - \text{poznat broj})$$

je parabolična jednačina tipa (8.3) i naziva se jednačina provođenja toplote.

Jednačina

$$(8.6) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (a - \text{poznat broj})$$

je hiperbolična jednačina tipa (8.3) i naziva se jednačina treperenja žice.

Egzaktno (tačno) rešavanje parcijalnih diferencijalnih jednačina je u određenim slučajevima moguće, no u praksi se vrlo često uspešno koriste razne približne metode. Ovde će biti izložena jedna od tih čestih metoda, koja se zove metoda konačnih razlika.

8.1.3. Konačne razlike

U praksi se koristi nekoliko tipova konačnih razlika (za razliku od izvoda, gde se javljaju beskonačno male razlike tj. granični procesi, ove razlike ne teže nuli i otuda i naziv konačne razlike). To su Δ (delta), ∇ (nabla) i p koje se definišu kao

$$(8.7) \quad \Delta f(x) = f(x+h) - f(x), \quad (\text{operator za razliku unapred})$$

$$(8.8) \quad \Delta f(x) = f(x) - f(x-h), \quad (\text{operator za razliku unazad})$$

$$(8.9) \quad p f(x) = f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right), \quad (\text{operator centralne razlike}).$$

Takođe je korisno simbolički uvesti operator D kao operator izvoda

$$(8.10) \quad D f(x) = f'(x) = \frac{df(x)}{dx}.$$

Čest slučaj u praksi je kada je x dato preko niza brojeva $x_n = x_0 + nh$ ($h > 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$). Ako se označi

$$(8.11) \quad f_n = f(x_n) = f(x_0 + nh),$$

onda važi

$$(8.12) \quad \Delta f_n = f_{n+1} - f_n, \quad \nabla f_n = f_n - f_{n-1}.$$

Operatori razlike i izvoda se mogu uzastopce više puta primenjivati, te se tako druge razlike definišu kao

$$\begin{aligned} \Delta^2 f(x) &= \Delta(\Delta f(x)) = \Delta(f(x+h) - f(x)) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x), \\ \nabla^2 f(x) &= \nabla(\nabla f(x)) = \nabla(f(x) - f(x-h)) = f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h), \\ p^2 f(x) &= p(pf(x)) = p\left(f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right)\right) = f(x+h) - 2f(x) + f(x-h). \end{aligned}$$

U opštem slučaju za $k \geq 2$ prirodan broj definišu se k -te razlike kao

$$(8.13) \quad \begin{aligned} \Delta^k f(x) &= \Delta(\Delta^{k-1} f(x)), \\ \nabla^k f(x) &= \nabla(\nabla^{k-1} f(x)), \\ p^k f(x) &= p(p^{k-1} f(x)), \end{aligned}$$

što je slično kao kod izvoda višeg reda, gde je

$$D^k f(x) = D(D^{k-1} f(x)) = \frac{d^k f(x)}{dx^k} = f^{(k)}(x).$$

Valja napomenuti da je kod operatora Δ , ∇ i p uvek potrebno znati parametar h (tzv. korak razlike), tj. operatori razlike ustvari zavise od h . Iz (8.13) indukcijom sledi:

$$(8.14) \quad \begin{aligned} \Delta^k f(x) &= \sum_{m=0}^k (-1)^m \binom{k}{m} f(k + (k-m)h) = \\ &= f(x+kh) - \binom{k}{1} f(x + (k-1)h) + \\ &+ \binom{k}{2} f(x + (k-2)h) + \dots + (-1)^k f(x), \end{aligned}$$

$$(8.15) \quad \begin{aligned} \nabla^k f(x) &= \sum_{m=0}^k (-1)^k \binom{k}{m} f(x - mh) = \\ &= f(x) - \binom{k}{1} f(x-h) + \\ &+ \binom{k}{2} f(x-2h) + \dots + (-1)^k f(x - kh), \end{aligned}$$

gde je

$$\binom{k}{m} = \frac{k(k-1)(k-2)\dots(k-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m}$$

binomni koeficijent.

Primer za razlike.

$$x_n = x_{n-1} + h, \quad n = 1, \dots, 6, \quad x_0 = 1, \quad h = 0,1 \quad i \quad f_n = f(x_n).$$

Razlike se mogu zgodno tablički prikazati:

Tabela 8.1

x_n	f_n	Δf_n	$\Delta^2 f_n$	$\Delta^3 f_n$	$\Delta^4 f_n$	$\Delta^5 f_n$	$\Delta^6 f_n$
1,0	3,2	0,5	-0,3	0,3	-0,1	-0,2	
1,1	3,7	0,2	0,0	0,2	-0,3	0,9	
1,2	3,9	0,2	0,2	0,1	0,6		
1,3	4,1	0,4	0,1	0,5			
1,4	4,4	0,5	0,6				
1,5	5,0	0,1					1,1
1,6	6,1						

Treba napomenuti da kod kolone Δf_n vrednost Δf_6 nije definisana, jer se ništa ne zna o f_7 a $\Delta f_6 = f_7 - f_6$, itd., te poslednja kolona ustvari sadrži samo $\Delta^6 f_0 = 1,1$.

Ako se $f(x)$ može razložiti u Tejlorov red u tački x , onda je

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!}f'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \dots,$$

$$f(x-h) = f(x) - \frac{h}{1!}f'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \dots,$$

odakle je

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) = \frac{h}{1!}Df(x) + \frac{h^2}{2!}D^2f(x) + \frac{h^3}{3!}D^3f(x) + \dots,$$

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h) = \frac{h}{1!}Df(x) - \frac{h^2}{2!}D^2f(x) + \frac{h^3}{3!}D^3f(x) - \dots,$$

što se može simbolički napisati kao

$$(8.16) \quad \Delta = e^{hD} - 1, \quad \nabla = 1 - e^{-hD},$$

gde eksponencijalna funkcija označava njen Tejlorov red.

Logaritmovanjem (8.16) sledi

$$(8.17) \quad hD = \ln(1 + \Delta), \quad hD = \ln \frac{1}{1 - \nabla}.$$

Korišćenjem redova

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots,$$

$$\ln \frac{1}{1 - x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots,$$

za $-1 < x < 1$ dobijaju se sledeći simbolički izrazi za operator izvoda D i D^2 :

$$(8.18) \quad D = \frac{1}{h} \left(\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \dots \right),$$

$$(8.19) \quad D^2 = \frac{1}{h^2} \left(\Delta^2 - \Delta^3 + \frac{11}{12} \Delta^4 - \frac{5}{6} \Delta^5 + \frac{137}{180} \Delta^6 + \dots \right),$$

$$(8.20) \quad D = \frac{1}{h} \left(\nabla + \frac{\nabla^2}{2} + \frac{\nabla^3}{3} + \frac{\nabla^4}{4} + \dots \right),$$

$$(8.21) \quad D^2 = \frac{1}{h^2} \left(\nabla^2 + \nabla^3 + \frac{11}{12} \nabla^4 + \frac{5}{6} \nabla^5 + \frac{137}{180} \nabla^6 + \dots \right).$$

Slično ovoj diskusiji nalazi se i

$$(8.22) \quad D = \frac{1}{h} \left(p - \frac{1}{24} p^3 + \frac{3}{640} p^5 + \dots \right),$$

$$(8.23) \quad D^2 = \frac{1}{h^2} \left(p^2 - \frac{1}{12} p^4 + \frac{1}{90} p^6 + \dots \right).$$

Smisao ovih formula je u tome što se uzimajući nekoliko prvih članova dobijaju dobre približne vrednosti za operator D preko operatora razlike Δ , ∇ i p . Ako je $f_n = f(x_n) = f(x_0 + nh)$, onda se npr. dobija

$$(8.24) \quad \frac{df_n}{dx} = \frac{f_{n+1} - f_n}{h} + O(h),$$

$$(8.25) \quad \frac{d^2 f_n}{dx^2} = \frac{f_{n+1} - 2f_n + f_{n-1}}{h^2} + O(h^2),$$

gde $O(h)$ označava veličinu koja po apsolutnoj vrednosti nije veća od Ch za neku konstantu $C > 0$. Zanemarujući članove $O(h)$ i $O(h^2)$ u (8.24) i (8.25) dobijaju se približni izrazi

$$(8.26) \quad \frac{df_n}{dx} \approx \frac{f_{n+1} - f_n}{h}, \quad \frac{d^2 f_n}{dx^2} \approx \frac{f_{n-1} - 2f_n + f_{n-1}}{h^2},$$

dok se slično preko formula za centralnu razliku dobija

$$(8.27) \quad \frac{df_n}{dx} \approx \frac{f_{n+1} - f_{n-1}}{2h}, \quad \frac{d^2 f_n}{dx^2} \approx \frac{-f_{n+2} + 8f_{n+1} - 8f_{n-1} + f_{n-2}}{12h},$$

$$(8.28) \quad \frac{d^2 f_n}{dx^2} \approx \frac{-f_{n+2} + 16f_{n+1} - 30f_n + 16f_{n-1} - f_{n-2}}{12h}.$$

8.1.4. Približno rešavanje parcijalnih diferencijalnih jednačina

Približne formule (8.26) - (8.28) omogućavaju dobijanje sličnih približnih formula za parcijalne izvode. Najčešće se posmatra sistem tačaka (x_i, y_j) u xOy ravni, gde je $x_i = x_0 + ih$, $y_j = y_0 + jk$ (u praksi se najčešće uzima $h = k$) a i i j su prirodni brojevi. Tada se za približne vrednosti parcijalnih izvoda funkcije $u = u(x, y)$ u tačkama (x_i, y_j) najčešće koriste sledeći izrazi: ako je $u_{i,j} = u(x_i, y_j)$, onda je

$$(8.29) \quad \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h}, \quad \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h},$$

$$(8.30) \quad \frac{\partial u_{i,j}}{\partial x} \approx \frac{-u_{i+2,j} + 8u_{i+1,j} - 8u_{i-1,j} + u_{i-2,j}}{12h},$$

$$(8.31) \quad \frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k}, \quad \frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k},$$

$$(8.32) \quad \frac{\partial u_{i,j}}{\partial y} \approx \frac{-u_{i,j+2} + 8u_{i,j+1} - 8u_{i,j-1} + u_{i,j-2}}{12k},$$

$$(8.33) \quad \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2},$$

$$\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2} \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2},$$

$$(8.34) \quad \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x \partial y} \approx \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}}{4hk}.$$

U slučaju $h = k$ Laplasova diferencijalna jednačina recimo postaje

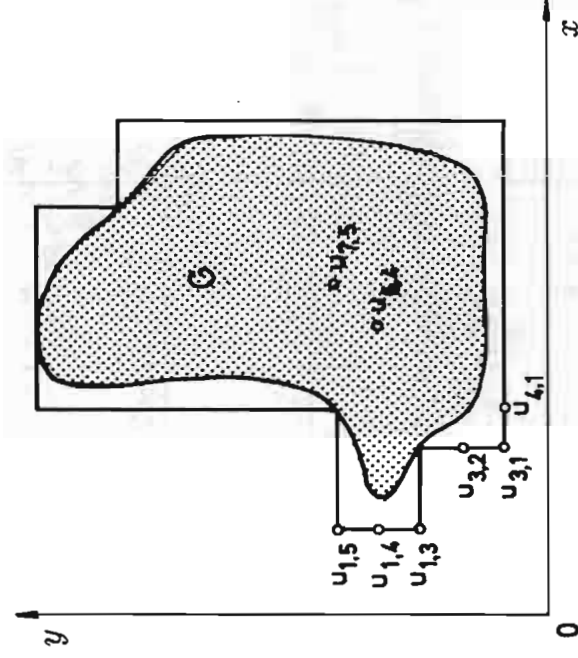
$$0 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{h^2}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j}) + O(h^2),$$

a uz zanemarivanje ostatka $O(h^2)$ dobija se da se Laplasova jednačina može zamisliti približnom jednačinom

$$(8.35) \quad u_{i,j} = \frac{1}{4}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}),$$

a rešenja jednačine (8.35) su onda približna rešenja Laplasove jednačine. Sličan postupak se primenjuje i na druge parcijalne diferencijalne jednačine: parcijalni izvodi se zamenjuju konačnim razlikama uz pomoć formula (8.29) - (8.34), te se rešenja tako nastale jednačine u konačnim razlikama uzimaju kao približna rešenja polazne parcijalne diferencijalne jednačine. U praksi se ovakav postupak najčešće izvodi na sledeći način:

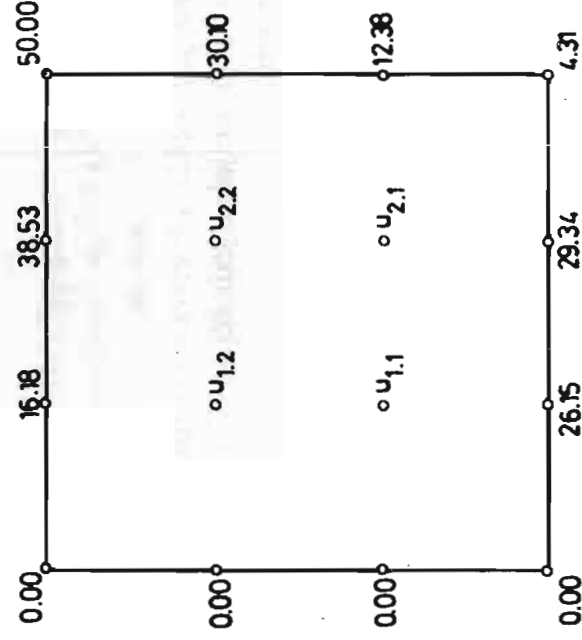
1. Oblast G u xOy ravni u kojoj se traži rešenje se pokriva odgovarajućom mrežom tačaka (x_i, y_j) , $x_i = x_0 + ih$, $y_j = y_0 + jh$, koja je kvadratna (sl. 8.2), sa $u_{i,j}$ je označena vrednost funkcije $u(x, y)$ za $x = x_i$, $y = y_j$ i naneta u čvoru koji odgovara baš tački (x_i, y_j) .
2. Zadana parcijalna diferencijalna jednačina zamenjuje se u čvorovima mreže tj. u tačkama (x_i, y_j) odgovarajućim jednačinama u konačnim razlikama preko formula (8.29) - (8.34).
3. Na osnovu graničnih uslova utvrđuju se vrednosti rešenja u graničnim čvorovima i zatim se rešava dobijeni sistem približnih jednačina, što se svodi na algebarski sistem sa velikim brojem nepoznatih.
4. Rešenja sistema približnih jednačina se uzimaju za približna rešenja parcijalne diferencijalne jednačine.



Sl. 8.2.

Primer:

Naći rešenje Laplasove diferencijalne jednačine za kvadrat, sa graničnim uslovima kao na slici 8.3.



Sl. 8.3.

Vrednosti funkcije u čvorovima kvadrata su ispisane pored samih čvorova, te ostaje da se izračunaju vrednosti $u_{i,j}$ pomoću približne formule (35), koja ustvari pokazuje da se $u_{i,j}$ dobija kao aritmetička sredina vrednosti u tačkama neposredno oko (x_i, y_j) . U našem primeru se za 4 nepoznate vrednosti dobijaju četiri linearne jednačine:

$$u_{1,1} = \frac{1}{4}(u_{1,2} + u_{2,1} + 0,00 + 26,15),$$

$$u_{1,2} = \frac{1}{4}(u_{1,1} + u_{2,2} + 0,00 + 16,18),$$

$$u_{2,1} = \frac{1}{4}(u_{1,1} + u_{2,2} + 29,34 + 12,38),$$

$$u_{2,2} = \frac{1}{4}(u_{1,2} + u_{2,1} + 38,53 + 30,10).$$

Rešavanjem ovoga sistema bilo kojim postupkom za rešavanje linearnih jednačina (v. 8.1) i zaokruživanjem dobijenih vrednosti na dva decimalna mesta dobija se

$$u_{1,1} = 15,20; \quad u_{1,2} = 14,12; \quad u_{2,1} = 20,53; \quad u_{2,2} = 29,09,$$

što predstavlja približne vrednosti rešenja u odgovarajućim tačkama.

8.2. Primena metode konačnih razlika

Razvoj metode konačnih razlika počinje u vreme Ojlera u XVIII-om veku. Za očekivati je da je i njeno korišćenje u rešavanju konkretnih praktičnih problema isto tako dugo. Međutim, praktična primena vremenski znatno zaostaje za teorijom.

Sve do pojave brzih elektronskih računarskih mašina, gotovo da i nije bilo moguće praktično koristiti ovu metodu, zbog glomaznog sistema algebarskih jednačina za čije je rešavanje potrebno mnogo računsko-manipulativnog rada.

Danas je realizacija metode konačnih razlika na računaru dosta jednostavna i praktično se svodi na veliki broj istorodnih iterativnih postupaka (Gaus-Sajdelov algoritam).

Metoda konačnih razlika se široko i sa uspehom primenjuje u raznim oblastima nauke i tehnike i jedna je od najefikasnijih metoda za rešavanje linearnih, a donedavno i izvesnih nelinearnih zadataka matematičke fizike.

Što se tiče primene u rudarskoj i geološkoj nauci i praksi, metoda konačnih razlika se uspešno koristi kod modeliranja prostornih promena obeležja ležišta mineralnih sirovina. Kao obeležje ležišta može se uzeti sadržaj korisne komponente u rudi, sadržaj štetne komponente, promena moćnosti sloja, površina krovine ili podine sloja, kontaktna površina dva sloja, moćnost međusloja, odnos jalovine i rude itd.

Značajna primena metode konačnih razlika je u hidrogeologiji, gde se može koristiti za modeliranje geometrije izdani, modeliranje hidrogeoloških obeležja izdani, modeliranje nivoa podzemne vode, modeliranje dinamike kretanja podzemnih voda, modeliranje procesa zagađivanja podzemnih voda, modeliranja procesa odvodnjavanja na rudnicima i tome slično.

Treća značajna oblast primene metode konačnih razlika u sferi rudarstva i geologije je geotehnika. Metoda se ovde može koristiti za formiranje slike prostornih promena geomehaničkih obeležja radne sredine, npr. ugla unutrašnjeg trenja, kohezije, modula stišljivosti i elastičnosti, zapreminske težine, vlažnosti, otpora na rezanje itd. Kod geostatičkih proračuna, metodom konačnih razlika moguće je

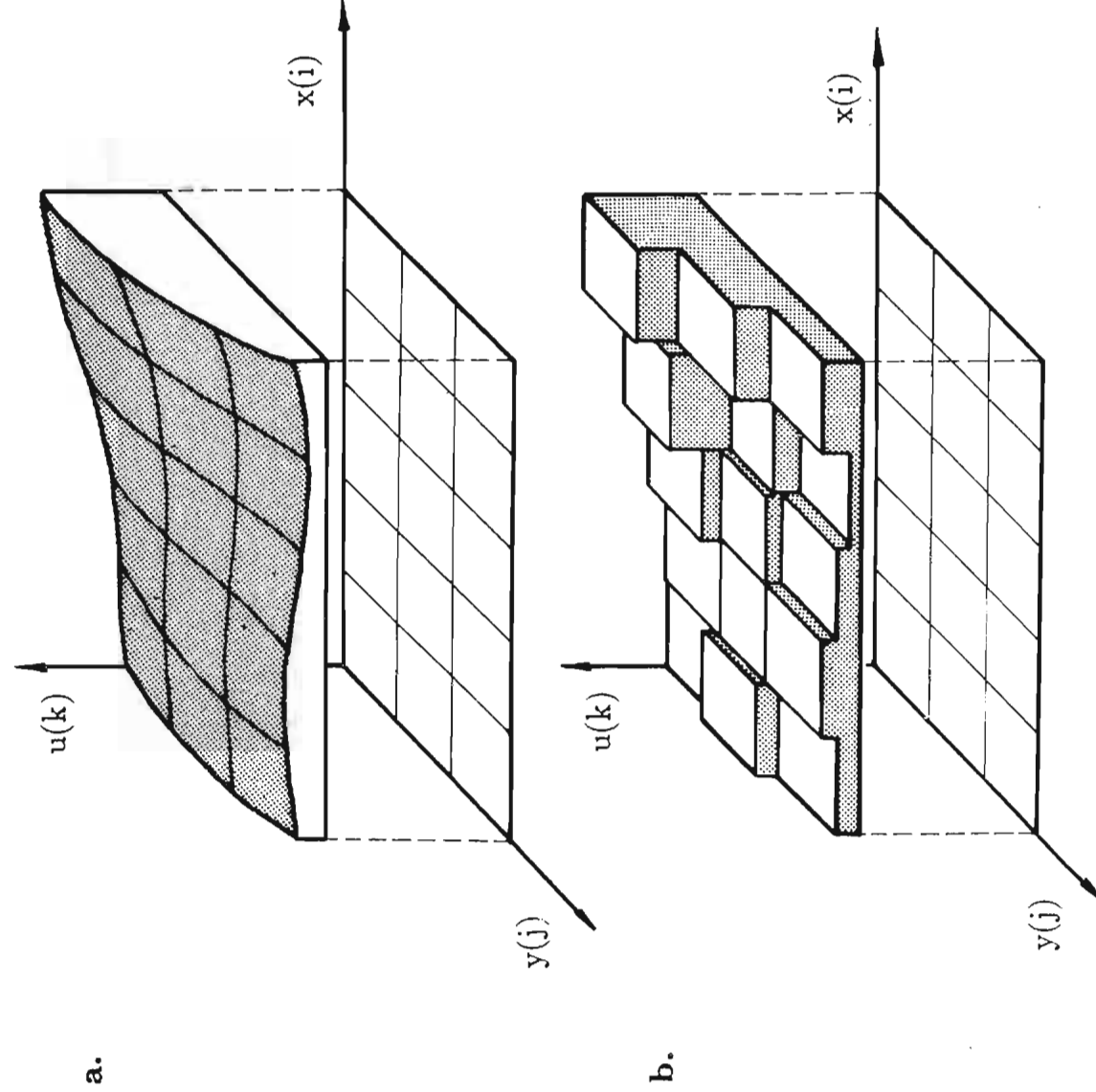
formirati cifarski model prenošenja pritiska od objekta natlo, ili prostorni model naponskih naprezanja u tlu, deformacija i tome slično.

Ovde su pobrojane samo najbitnije aplikacije metode konačnih razlika u rudarstvu i geologiji, dok je lista problema koje je moguće rešavati ovom metodom znatno šira.

8.2.1. Fizički smisao metode konačnih razlika

U fizičkom smislu metodu konačnih razlika možemo objasniti principom diskretizacije kontinualne površine $U = U(x, y)$, odnosno njenom približnom predstavljanju preko aproksimativnog sistema tačaka raspoređenih po pravilnoj mreži.

Na slici 8.4-a je grafički predstavljena kontinualna-stvarna površina i njena slika 8.4-b u diskretizovanoj aproksimativnoj formuli, dobijena metodom konačnih razlika.



Sl. 8.4. - Grafička ilustracija diskretizovanog predstavljanja kontinualne površine

Pojam površine $U = U(x, y)$ kođ interpretacije rudarsko-geoloških problema može se u fizičkom smislu vezivati za različita obeležja kvantitativne ili kvalitativne prirode, tako npr. ona može predstavljati površinu krovine ili podine ugljenog sloja, ali isto tako i moćnost ugljenog sloja ili promenu kalorične moći uglja u ležištu.

Kođ približnog predstavljanja površine $U = U(x, y)$ metodom konačnih razlika, polazi se od poznatih konturnih uslova. Analogno ovome, pri korišćenju ove metode za formiranje modela promene nekog rudarsko-geološkog obeležja radne sredine, konturni uslovi se definišu na osnovu informacija dobijenih istražnim radovima.

Ako su te informacije dobijene istražnim bušenjem, konturni uslovi se najčešće definišu preko graničnih čvorova, ili preko graničnih linija kada su informacije dobijene podzemnim istražnim radovima. Ovo se ne može uzeti kao kruto pravilo, jer konkretna prostorna dispozicija istražnih informacija nalaže i način zadavanja konturnih uslova.

Uzećemo jednostavan praktičan primer [79] za ilustraciju računsko-manipulativnog postupka i primene metode konačnih razlika. Pretpostavimo da je jedan deo ležišta kvarcnog peska istražen sa pet bušotina kao na (sl. 8.5) i da želimo da utvrdimo promenu SiO_2 u ovom delu ležišta radi daljeg usmeravanja istražnih radova.

Srednji sadržaj SiO_2 po bušotinama se kreće:

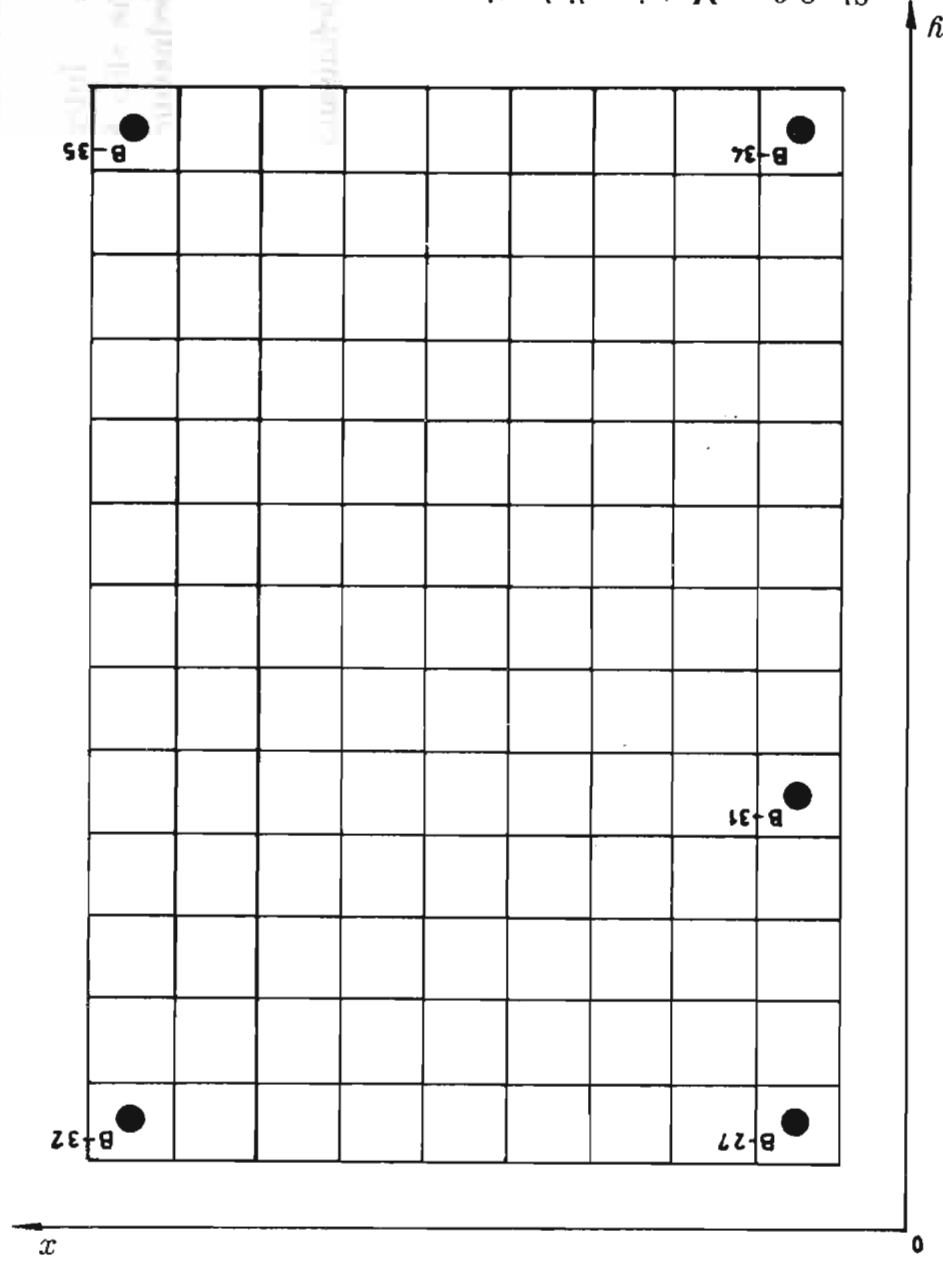
Tabela 8.2

Bušotina	SiO_2 [%]
<i>B</i> - 27	96,40
<i>B</i> - 31	97,00
<i>B</i> - 32	97,50
<i>B</i> - 34	94,00
<i>B</i> - 35	86,00

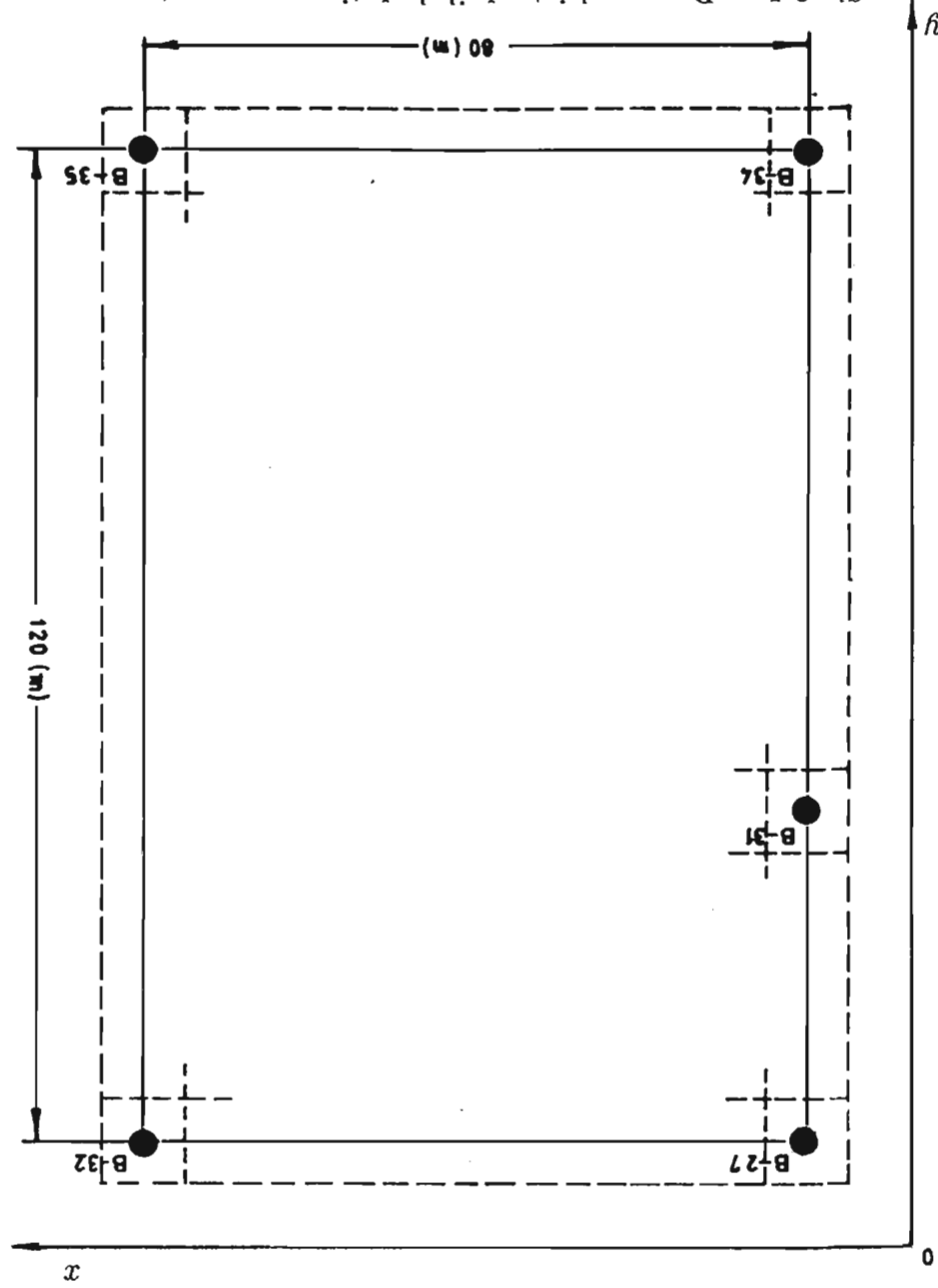
Raspored istražnih bušotina je pravilan pravougaon (80×120 m), te je najjednostavnije, saglasno ovakvoj dispoziciji istražnih bušotina i postavljenom koordinatnom sistemu, istraživani prostor podeliti kvadratnom aproksimativnom mrežom (10×10 m) kao na slici 8.6. Koordinate bušotina u aproksimativnoj mreži su:

Tabela 8.3.

Bušotina	$x(j)$	$y(i)$
<i>B</i> - 27	1	1
<i>B</i> - 31	1	5
<i>B</i> - 32	9	1
<i>B</i> - 34	1	13
<i>B</i> - 35	9	13



Sl. 8.6. - Matrica diskretizovanog prostora sa ucrtanim dispozicijama bušotina



Sl. 8.5. - Raspored istražnih bušotina u posmatranom delu ležišta

Interpolacijom se definišu konturni uslovi i formira početna matrica data na slici 8.7. Sada se podsetimo da numeričko rešenje Laplasove diferencijalne jednačine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

definisano konačnim razlikama, ima formu:

$$\frac{1}{(\Delta x)^2}(u_{j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}) + \frac{1}{(\Delta y)^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) = 0$$

98.40	96.60	96.60	96.90	97.00	97.30	97.50	97.50	97.50
96.70	0	0	0	0	0	0	0	96.60
97.00	0	0	0	0	0	0	0	95.70
97.20	0	0	0	0	0	0	0	94.40
97.00	0	0	0	0	0	0	0	93.50
96.70	0	0	0	0	0	0	0	92.60
96.50	0	0	0	0	0	0	0	91.50
96.70	0	0	0	0	0	0	0	90.50
95.90	0	0	0	0	0	0	0	89.50
95.60	0	0	0	0	0	0	0	88.50
95.30	0	0	0	0	0	0	0	87.50
95.00	0	0	0	0	0	0	0	86.50
94.00	95.50	92.50	91.00	89.70	88.60	87.50	85.50	86.00

Sl. 8.7. - Početna matrica sa definisanim konturnim uslovima

Ako je $\Delta x = \Delta y$, kao što je to slučaj u našem primeru, onda prethodno numeričko rešenje Laplasove diferencijalne jednačine dobija oblik:

$$u_{i,j+1} + u_{i,j-1} + u_{i-1,j} + u_{i+1,j} - 4u_{i,j} = 0$$

Postavimo sada sistem jednačina za izračunavanje vrednosti sedam nepoznatih (članova matrice) koji pripadaju drugom redu ($i=2$):

$$u_{2,3} + u_{2,1} + u_{1,2} + u_{3,2} - 4u_{2,2} = 0 \quad (i = 2, j = 2)$$

$$u_{2,4} + u_{2,2} + u_{1,3} + u_{3,3} - 4u_{2,3} = 0 \quad (i = 2, j = 3)$$

$$u_{2,5} + u_{2,3} + u_{1,4} + u_{3,4} - 4u_{2,4} = 0 \quad (i = 2, j = 4)$$

$$u_{2,6} + u_{2,4} + u_{1,5} + u_{3,5} - 4u_{2,5} = 0 \quad (i = 2, j = 5)$$

$$u_{2,7} + u_{2,5} + u_{1,6} + u_{3,6} - 4u_{2,6} = 0 \quad (i = 2, j = 6)$$

$$u_{2,8} + u_{2,6} + u_{1,7} + u_{3,7} - 4u_{2,7} = 0 \quad (i = 2, j = 7)$$

$$u_{2,9} + u_{2,7} + u_{1,8} + u_{3,8} - 4u_{2,8} = 0 \quad (i = 2, j = 8).$$

Oдавде je:

$$u_{2,2} = \frac{(u_{2,3} + u_{2,1} + u_{1,2} + u_{3,2})}{4} = \frac{(0 + 96,700 + 96,6 + 0)}{4} = 48,325 \approx 48,3$$

$$u_{2,3} = \frac{(u_{2,4} + u_{2,2} + u_{1,3} + u_{3,3})}{4} = \frac{(0 + 48,325 + 96,8 + 0)}{4} = 36,281 \approx 36,3$$

$$u_{2,4} = \frac{(u_{2,5} + u_{2,3} + u_{1,4} + u_{3,4})}{4} = \frac{(0 + 36,281 + 96,9 + 0)}{4} = 33,295 \approx 33,3$$

$$u_{2,5} = \frac{(u_{2,6} + u_{2,4} + u_{1,5} + u_{3,5})}{4} = \frac{(0 + 33,295 + 97,0 + 0)}{4} = 32,573 \approx 32,6$$

$$u_{2,6} = \frac{(u_{2,7} + u_{2,5} + u_{1,6} + u_{3,6})}{4} = \frac{(0 + 32,573 + 97,3 + 0)}{4} = 32,468 \approx 32,5$$

$$u_{2,7} = \frac{(u_{2,8} + u_{2,6} + u_{1,7} + u_{3,7})}{4} = \frac{(0 + 32,468 + 97,5 + 0)}{4} = 32,492 \approx 32,5$$

$$u_{2,8} = \frac{(u_{2,9} + u_{2,7} + u_{1,8} + u_{3,8})}{4} = \frac{(96,8 + 32,492 + 97,5 + 0)}{4} = 56,698 \approx 56,7$$

Sada se ove vrednosti upisuju u drugi red (osenčeni kvadratić) matrice na slici 8.8 i nastavlja istim postupkom sa izračunavanjem vrednosti narednih nepoznatih (članova matrice) koji pripadaju trećem ($i = 3$), četvrtom ($i = 4$),... dvanaestom ($i = 12$) redu. Na ovaj način je završeno *prvo* izračunavanje članova matrice.

	j = 1	j = 2	j = 3	j = 4	j = 5	j = 6	j = 7	j = 8	j = 9
i = 1	96.40	96.60	96.80	96.90	97.00	97.30	97.50	97.50	97.50
i = 2	96.70	48.30	36.30	33.30	32.60	32.50	32.50	56.20	96.80
i = 3	97.00								95.70
i = 4	97.20								94.40
i = 5	97.00								93.50
i = 6	96.70								92.80
i = 7	96.60								91.60
i = 8	96.20								90.50
i = 9	95.90								89.50
i = 10	95.60								88.50
i = 11	95.30								87.50
i = 12	95.00								86.50
i = 13	94.00	93.50	92.50	91.00	89.70	88.60	87.50	86.50	86.00

Sl. 8.8. - Matrica sa izračunatim vrednostima članova drugog reda

Na slici 8.9. je prikazana matrica prvog izračunavanja, odnosno prve iteracije. Celokupan računsko-manipulativni postupak se ponavlja (iterira) sve dotle dok razlika novo izračunatih vrednosti i vrednosti članova matrice izračunatih u prethodnom koraku ne postane jednaka nuli ili manja od unapred zadate greške.

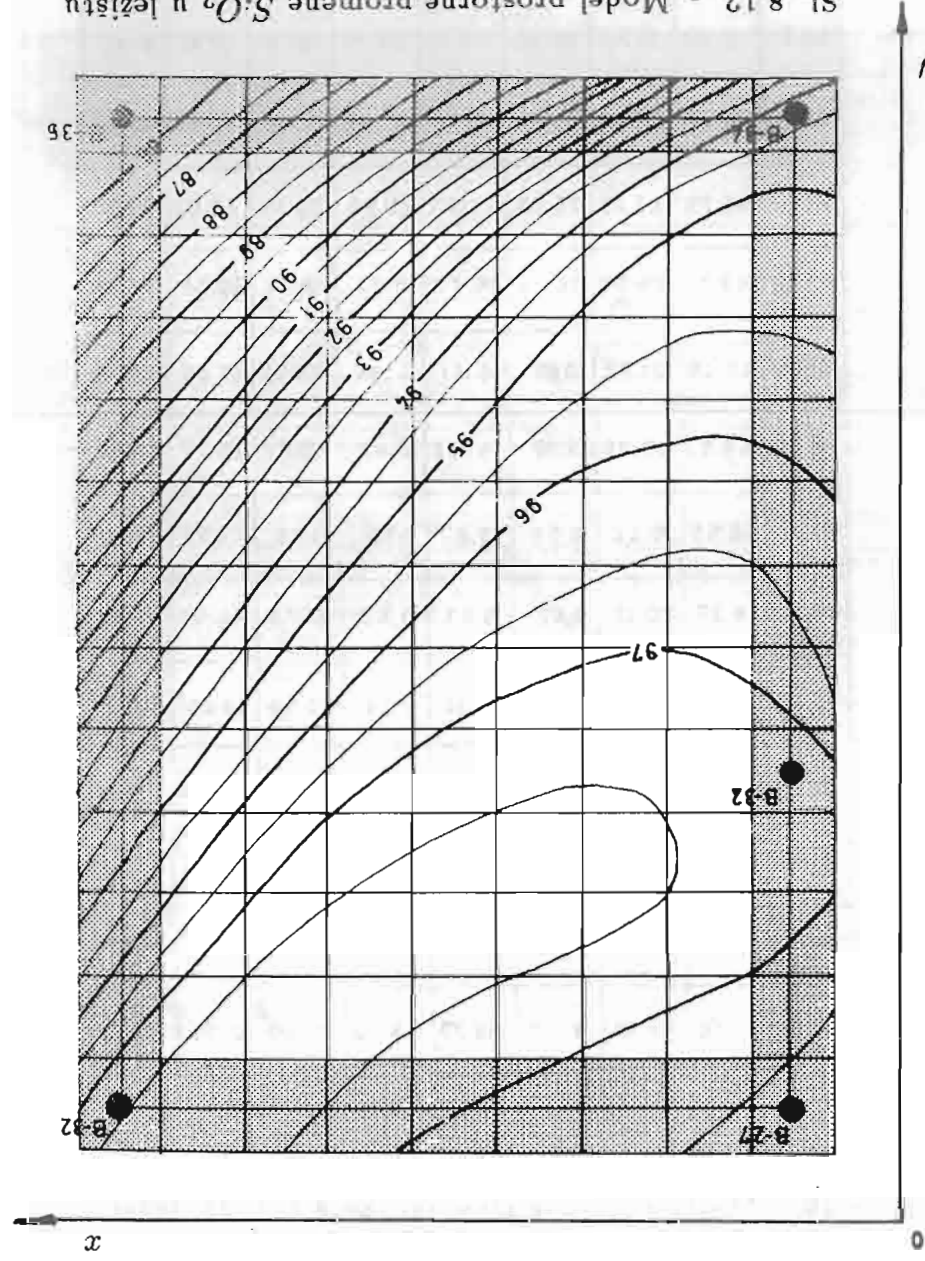
U našem primeru posle 97. iteracije dobijena je konačna matrica slika 8.10, koja predstavlja cifarski model prostorne promene $S_i O_2$ u delu ležišta koji posmatramo i prikazana je na slici 8.11. Upoređivanjem dobijenih rešenja metodom konačnih razlika i grafičkom linearnom interpolacijom uočava se velika podudarnost prostorne promene sadržaja $S_i O_2$.

98.40	98.60	98.80	98.90	97.00	97.00	97.30	97.50	97.50	97.50
96.70	66.48	53.68	49.00	47.46	47.05	53.03	72.03	98.80	
97.00	53.75	33.29	25.02	21.97	20.93	29.61	58.02	95.70	
97.20	49.11	25.05	14.74	10.70	9.21	18.71	50.88	94.90	
97.00	47.45	21.97	10.69	6.11	4.34	13.99	47.45	93.50	
98.70	46.82	20.85	9.18	4.33	2.43	12.02	45.77	92.80	
98.50	46.55	20.44	8.63	3.67	1.70	11.18	44.73	91.60	
96.20	46.37	20.27	8.42	3.43	1.43	10.78	44.00	90.50	
95.90	46.21	20.17	8.34	3.34	1.33	10.56	43.43	89.50	
95.60	46.06	20.10	8.29	3.30	1.29	10.41	42.92	88.50	
95.30	51.76	28.74	17.93	13.18	11.16	20.08	52.04	87.50	
95.00	69.95	56.18	49.05	49.45	43.66	52.23	69.07	86.50	
94.00	93.50	92.50	91.00	89.70	88.60	87.50	86.50	86.00	

Sl. 8.10. - Matrica drugog izračunavanja (druga iteracija)

96.40	96.60	96.80	96.90	97.00	97.00	97.30	97.50	97.50	97.50
96.70	48.32	36.28	33.29	32.57	32.47	32.49	56.70	96.80	
97.00	36.33	18.15	12.86	11.36	10.96	10.86	40.81	95.70	
97.20	33.38	12.88	6.44	4.45	3.85	3.68	34.72	94.60	
97.00	32.59	11.37	4.45	2.22	1.52	1.30	32.38	93.50	
98.70	32.32	10.92	3.84	1.52	0.76	0.51	31.42	92.80	
98.50	32.21	10.78	3.65	1.29	0.51	0.26	30.82	91.60	
96.20	32.10	10.72	3.59	1.22	0.43	0.17	30.37	90.50	
95.90	32.00	10.68	3.57	1.20	0.41	0.14	30.00	89.50	
95.60	31.90	10.64	3.55	1.19	0.40	0.14	29.66	88.50	
95.30	31.80	10.61	3.54	1.18	0.39	0.13	29.33	87.50	
95.00	55.07	39.55	33.52	31.10	30.02	29.41	57.68	86.50	
94.00	93.50	92.50	91.00	89.70	88.60	87.50	86.50	86.00	

Sl. 8.9. - Matrica prvog izračunavanja (prva iteracija)



SI. 8.11. - Cifarski model prostorne promene S^1O_2
u ležištu - konačna matrica

94.00	93.50	92.50	91.00	89.70	88.60	87.50	86.50	85.00	84.00
95.00	93.90	92.83	91.54	90.50	89.45	88.43	87.46	86.50	85.50
95.30	95.05	94.21	93.37	92.56	91.77	91.00	90.24	89.50	88.50
95.60	94.47	93.74	92.82	91.91	91.02	90.16	89.33	88.50	87.50
95.90	95.05	94.21	93.37	92.56	91.77	91.00	90.24	89.50	88.50
96.20	95.42	94.66	93.92	93.20	92.49	91.81	91.15	90.50	89.50
96.50	95.78	95.09	94.44	93.81	93.20	92.61	92.04	91.60	91.00
96.70	96.09	95.50	94.94	94.41	93.89	93.38	92.81	92.00	91.00
97.00	96.39	95.87	95.41	94.99	94.59	94.20	93.81	93.51	93.00
97.20	96.61	96.19	95.84	95.54	95.27	95.01	94.74	94.40	94.00
97.00	96.67	96.43	96.23	96.07	95.95	95.84	95.74	95.70	95.50
96.70	96.65	96.61	96.58	96.57	96.62	96.66	96.67	96.60	96.50
96.40	96.60	96.60	96.50	97.00	97.30	97.50	97.50	97.50	97.50

Na ovom primeru pokazan je računsko-manipulativni postupak praktičnog korišćenja metode konačnih razlika za formiranje cifarskog modela prostorne promene korisne komponente u ležištu. Iako se radi o malom cifarskom modelu, čitalac može da uoči da je za njegovo formiranje potreban veliki računsko-manipulativni rad. U ovom primeru bilo je potrebno izvesti 37248 računskih operacija sabiranja i deljenja da bi se dobio željeni model.

Očigledno je da praktično korišćenje metode konačnih razlika, bez pomoći računara, nije moguće. Međutim, uz pomoć računara, metoda predstavlja snažno matematičko oruđe za rešavanje indiciranih problema u oblasti geologije i rudarstva.

9. Splajnovi

9.1. Teorijske osnove splajnova

9.1.1. Pojam i definicija splajna

U matematici i njenim primenama često se susreće problem približnog predstavljanja funkcije, kada se želi da se vrednosti funkcije $f(x)$ u tačkama $x = x_1, x_2, \dots, x_n$ zamene sa vrednostima funkcije $g(x)$ u istim tačkama, pri čemu je $g(x)$ u nekom smislu "jednostavna" funkcija, a greška koja se pri tome čini je mala. Klasičan način takvih predstavljanja su predstavljanja funkcija pomoću polinoma i racionalnih funkcija. Ispostavilo se, međutim, da takva predstavljanja imaju u većini slučajeva niz nedostataka, te se u novije vreme razvio broj drugih metoda za približno predstavljanje funkcija. Takva je i metoda splajnova (od engleske reči "spline"). Grubo rečeno, splajnovi predstavljaju funkcije koje se sastoje iz delova raznih polinomnih funkcija (tj. funkcija tipa $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$) uzetih po određenom zakonu.

Da bi se dala precizna definicija splajna, pretpostavimo da je na intervalu $[a, b]$ ($a < b$) dat sistem tačaka

$$(9.1) \quad \Delta_n : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = b,$$

i da su poznate vrednosti $f(x_i)$ ($i = 0, 1, \dots, n + 1$) neke funkcije $f(x)$ definisane na $[a, b]$. Polinom $P(x)$ stepena $n + 1$ koji ima osobinu da je $P(x_i) = f(x_i)$ ($i = 0, 1, \dots, n + 1$) naziva se interpolacioni polinom $n + 1$ -og stepena i on je jednoznačno određen, a jedan od oblika u kojem se može napisati je

$$(9.2) \quad P(x) = \sum_{k=0}^{n+1} f(x_k) \frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)},$$

$$\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)(x-x_{n+1}).$$

Taj oblik interpolacionog polinoma ($\omega'(x_k)$ znači izvod funkcije $\omega(x)$ u $x = x_k$) se naziva Lagranžev interpolacioni polinom. Primer: neka je

$$[a, b] = [0, 2], \quad n = 1, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad f(x_0) = 1, \quad f(x_1) = -2, \quad f(x_2) = -3.$$

Tada je

$$\omega(x) = (x-0)(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x, \quad \omega'(x) = 3x^2 - 6x + 2,$$

a po formuli (9.2)

$$P(x) = f(x_0) \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{2(x-0)} + f(x_1) \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{-1(x-1)} +$$

$$f(x_2) \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{2(x-2)} = x^2 - 4x + 1,$$

$$P(0) = 1 = f(0), \quad P(1) = -2 = f(1), \quad P(2) = -3 = f(2).$$

Premda se i interpolacioni polinomi tipa (9.2) mogu smatrati splajnovima, oni su za mnoge svrhe nepodesni (jer su to polinomi stepena $n+1$, dakle visokog stepena). Opšta definicija splajna (ili polinomnog splajna) bi bila sledeća. Neka je P_m skup polinoma stepena ne većeg od m (tj. P_m je skup svih funkcija oblika $c_0x^m + c_1x^{m-1} + \dots + c_{m-1}x + c_m$, gde su c_0, c_1, \dots, c_m proizvoljni realni brojevi). Neka je dalje $C^{(k)}[a, b]$ skup svih funkcija koje imaju neprekidan k -ti izvod nad $[a, b]$. Tada je funkcija

$$(9.3) \quad S_m(x) = S_{m,k}(k, \Delta_n)$$

polinomni splajn stepena m i defekta k (pri čemu je $1 \leq k \leq m$) nad sistemom tačaka (9.1) ako je

$$(9.4) \quad \begin{array}{ll} 1) & S_m(x) \in P_m \quad \text{nad } [x_i, x_{i+1}], \\ 2) & S_m(x) \in C^{(m-k)}[a, b]. \end{array} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

Tačke x_i ($i = 0, 1, \dots, n+1$) se nazivaju čvorovi splajna, a u njima $(m-k+1)$ -vi izvod $S_m(x)$ ne mora postojati, dok $(m-k)$ -ti izvod postoji u celom intervalu $[a, b]$. Od svih splajnova najčešće su u upotrebi splajnovi defekta 1, pa će se ubuduće i ovde pod splajnom podrazumevati samo splajnovi defekta 1, tj. tipa $S_{m,1}(x, \Delta_n)$.

U praksi se najčešće osim sistema tačaka (9.1) nad $[a, b]$ posmatra još neki drugi sistem tačaka $a = \bar{x}_0 < \bar{x}_1 < \dots < \bar{x}_n = b$ i zahteva da se vrednosti funkcije $f(x)$ i splajna $S_m(x)$ poklapaju nad tim novim sistemom tačaka, tj. zahteva se da bude $f(\bar{x}_i) = S_m(\bar{x}_i)$ za $i = 0, 1, \dots, n$. Tada ustvari splajn $S_m(x)$ ima interpolacionu ulogu sličnu Lagranževom polinomu (9.2), ali se $S_m(x)$ sastoji od delova polinoma stepena ne većeg od m (u praksi se m ne uzima veliko), što je u određenim situacijama značajno preimućstvo u odnosu na polinom (9.2), koji je stepena $n + 1$. Kako je $f(\bar{x}_i) = S_m(\bar{x}_i)$, to se prirodno nameće pitanje koliko je dobra aproksimacija funkcije $f(x)$ splajnom $S_m(x)$ u tačkama $[a, b]$ koje se razlikuju od tačaka \bar{x}_i ($i = 0, 1, \dots, n$). U sledećim odeljcima biće reči o nekim konkretnim splajnovima i ovo pitanje će takođe biti dotaknuto. Da bi se moglo govoriti o stepenu aproksimacije, potrebno je ustanoviti način da se odredi rastojanje (ili norma) za dve funkcije $x(t)$, $y(t)$ iz $C[a, b]$ (skupa neprekidnih funkcija nad $[a, b]$). U upotrebi su najčešće sledeća rastojanja, koja se označavaju sa $\| \cdot \|$:

$$1) \quad \|x(t) - y(t)\|_{C[a,b]} = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|,$$

$$2) \quad \|x(t) - y(t)\|_{L_2[a,b]} = \sqrt{\int_a^b [x(t) - y(t)]^2 dt},$$

$$3) \quad \|x(t) - y(t)\|_{L_1[a,b]} = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt.$$

Prvo rastojanje se najlakše računa i najviše je u upotrebi, a prednost druga dva je u tome što daju neku vrstu "srednje vrednosti" razlike $|x(t) - y(t)|$ nad $[a, b]$.

9.1.2. Parabolični splajnovi

U praksi se najčešće upotrebljavaju splajnovi (9.3) sa stepenom $m = 2$ ili $m = 3$, koji se nazivaju parabolični (ili kvadratni) odnosno kubni splajnovi. Proces konstruisanja takvih splajnova je znatno jednostavnije nego proces konstruisanja splajnova visokih stepena m .

Parabolični splajnovi se definišu na sledeći način:

Neka je $f(x) \in C[a, b]$, $a < b$, i neka su zadata dva sistema tačaka:

$$(9.5) \quad \Delta'_n : a = \bar{x}_0 < \bar{x}_1 < \bar{x}_2 < \dots < \bar{x}_n < b = \bar{x}_{n+1},$$

$$(9.6) \quad \Delta_n : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b, \quad (n \geq 2)$$

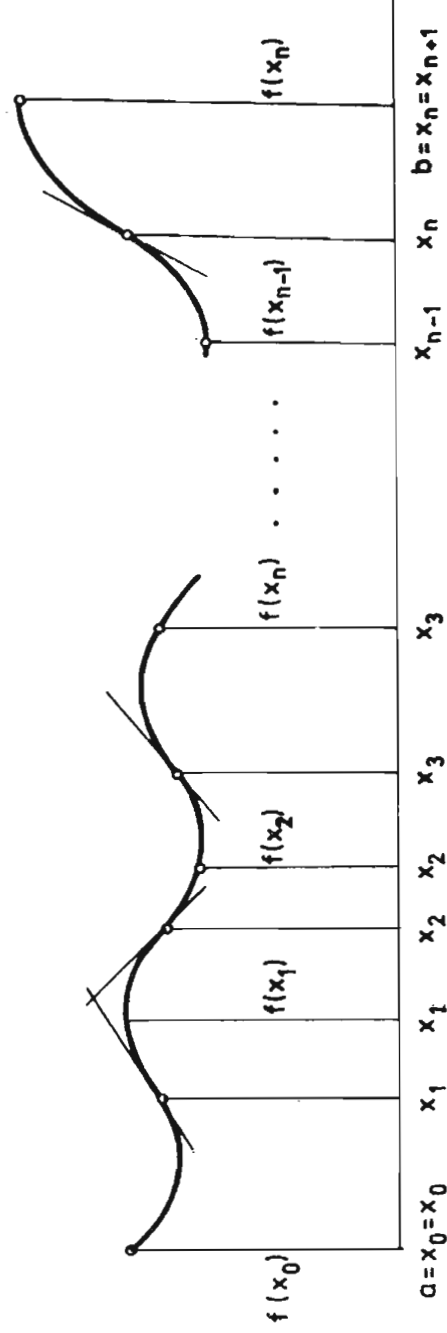
pri čemu se za $i = 1, 2, \dots, n$ pretpostavlja da je

$$(9.7) \quad x_{i-1} < \bar{x}_i < x_i.$$

Funkcija $S_2(x) = S_2(x, f, \Delta'_n)$ je interpolacioni parabolični splajn funkcije $f(x)$ ako je

- i) $S_2(x) \in P_2$ za $x \in [\bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}]$, $(i = 0, 1, 2, \dots, n)$
- ii) $S_2(x) \in C^{(1)}[a, b]$,
- iii) $S_2(x_i) = f(x_i)$ $(i = 0, 1, 2, \dots, n)$.

Tačke \bar{x}_i zovu se čvorovi splajna, a tačke x_i čvorovi interpolacije. Grafički prikaz paraboličkog splajna:



Sl. 9.1. -

Grafik funkcije $S_2(x)$ u $[\bar{x}_0, \bar{x}_1]$ je parabola (ili eventualno duž), u $[\bar{x}_1, \bar{x}_2]$ druga parabola itd., pri čemu te parabole u tačkama x_i imaju iste izvode (geometrijski: iste tangente), što je sadržano u uslovu *ii*) iz definicije splajna.

Sem navedenih uslova *i*), *ii*), *iii*) iz definicije paraboličkog splajna, obično se zadaju i neki granični uslovi u tačkama a i b koje splajn $S_2(x)$ mora da zadovoljava. To su najčešće sledeći uslovi:

$$(9.8) \quad S_2^{(i)}(a) = S_2^{(i)}(b), \quad (i = 1, 2)$$

$$(9.9) \quad S_2'(a) = a_n, \quad S_2(b) = b_n,$$

$$(9.10) \quad S_2''(a) = A_n, \quad S_2''(b) = B_n,$$

gde su a_n, b_n, A_n, B_n dati realni brojevi,

$$(9.11) \quad S_2''(x_1 - 0) = S_2(x_1 - 0), \quad S_2''(x_n + 0) = S_2(x_n + 0),$$

gde je

$$f(x+0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} f(x+\epsilon), \quad f(x-0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0-} f(x-\epsilon).$$

Da bi se splajn lakše konstruisao definiše se još

$$(9.12) \quad \begin{aligned} m_i &= S_2'(x_i), & M_i &= S_2''(x_i) & (i=0, 1, \dots, n-1) \\ h_i &= x_{i+1} - x_i, & \bar{h}_i &= x_{i+1} - \bar{x}_{i+1} & (i=0, 1, \dots, n-1). \end{aligned}$$

Tada se može pokazati da važe sledeće tvrdnje:

Ako je $0 < \bar{h}_i < h_i$ za $i = 0, 1, \dots, n-1$ ($n \geq 2$), tada postoji jedinstveni parabolični splajn koji zadovoljava neki od graničnih uslova (9.8) - (9.11).

Da bi se pomenuti splajn mogao lakše konstruisati zgodno je za $k > 0$ uvesti funkciju

$$(x-y)_+^k = \begin{cases} (x-y)^k, & \text{ako je } x \geq y, \\ 0, & \text{ako je } x \leq y. \end{cases}$$

Za $x \in [x_i, x_{i+1}]$ i $i = 0, 1, \dots, n-1$ splajn se onda može napisati u obliku

$$(9.13) \quad S(x) = S_2(x) = f(x_i) + m_i(x-x_i) + c_i(x-x_i)^2 + d_i(x-\bar{x}_{i+1})_+^2,$$

gde se koristila oznaka (9.12). Koristeći uslove $S(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$ i $S'(x_{i+1}) = m_{i+1}$ ($i = 0, 1, \dots, n-2$) nalaze se konstante c_i i d_i :

$$(9.14) \quad d_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\bar{h}_i(h_i - h_i)} - \frac{m_i + m_{i+1}}{2} \times \frac{h_i}{\bar{h}_i(h_i - h_i)},$$

$$(9.15) \quad c_i = \frac{m_{i+1} - m_i}{2h_i} - \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_i(\bar{h}_i - h_i)} + \frac{m_{i+1} + m_i}{2(\bar{h}_i - h_i)}.$$

Uzimajući u obzir uslov $S''(x_{i+1}-0) = S''(x_{i+1}+0)$ u tački x_{i+1} nalazi se $c_i + d_i = c_{i+1}$ ili

$$\frac{h_i - \bar{h}_i}{\bar{h}_i h_i} m_i + \left(\frac{h_i + \bar{h}_i}{h_i \bar{h}_i} + \frac{2h_{i+1} - \bar{h}_{i+1}}{h_{i+1}(h_{i+1} - \bar{h}_{i+1})} \right) m_{i+1} + \frac{\bar{h}_{i+1} m_{i+2}}{h_{i+1}(h_{i+1} - \bar{h}_{i+1})} =$$

$$(9.16) \quad 2 \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_i \bar{h}_i} + 2 \frac{f(x_{i+2}) - f(x_{i+1})}{h_{i+1}(h_{i+1} - \bar{h}_{i+1})} \quad (i = 0, 1, \dots, n-2).$$

U graničnom uslovu (9.8) sadrži se $m_0 = m_n$, $m_{n+1} = m_1$, $h_n = h_0$, $\bar{h}_n = \bar{h}_0$, tj. (9.16) postaje sistem n linearnih jednačina sa nepoznatima m_1, m_2, \dots, m_n . U slučaju graničnih uslova (9.9) m_0 i m_n su poznati i (9.16) se svodi na $n-1$

jednačinu sa $n - 1$ nepoznatom. U slučaju graničnih uslova (9.10) imamo $2c_0 = A_n, 2c_{n-1} + 2d_{n-1} = B_n$ ili

$$m_0 \frac{2h_0 - \bar{h}_0}{h_0(h_0 - \bar{h}_0)} + m_1 \frac{\bar{h}_0}{h_0(h_0 - \bar{h}_0)} = 2 \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h_0(h_0 - \bar{h}_0)} - A_n,$$

$$m_{n-1} \frac{h_{n-1} - \bar{h}_{n-1}}{h_{n-1} \bar{h}_{n-1}} + m_n \frac{h_{n-1} + \bar{h}_{n-1}}{h_{n-1} \bar{h}_{n-1}} = 2 \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{h_{n-1} \bar{h}_{n-1}} + B_n.$$

U slučaju graničnih uslova (9.11) iz (9.13) sledi $d_0 = d_{n-1} = 0$, te se dobija

$$m_0 + m_1 = 2[f(x_1) - f(x_0)]h_0^{-1},$$

$$m_{n-1} + m_n = 2[f(x_n) - f(x_{n-1})]h_{n-1}^{-1}.$$

Prethodni obrasci postaju jednostavniji ako su čvorovi splajna \bar{x}_i raspoređeni na sredini između čvorova interpolacije x_i , tj. kada je

$$\bar{x}_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Stupanj aproksimacije (približavanja) funkcije paraboličnim splajnom se može ustanoviti na sledeći način. Neka je

$$(9.17) \quad \|\Delta_n\| = \max_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i),$$

$f(x) \in C^{(2)}[a, b]$, a parabolični splajn je dat preko (9.13). Ako taj splajn zadovoljava uslove (9.8) - (9.11) tada je

$$(9.18) \quad |f^{(s)}(x) - S^{(s)}(x)| \leq K_s \|\Delta_n\|^{2-s} \alpha_n,$$

gde je pri uslovu (9.8) i (9.11)

$$\alpha_n = \omega(f'', \|\Delta_n\|),$$

pri uslovu (9.9)

$$\begin{aligned} \alpha_n = & \frac{3}{7} \omega(f'', \|\Delta_n\|) + \max \left\{ \frac{4}{7} \omega(f'', \|\Delta_n\|), \right. \\ & \frac{8}{7} \left| \left[\left(\frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} - a_n \right) h_0^{-1} - \frac{1}{2} f''(x_0) \right] \right|, \\ & \left. \frac{8}{7} \left| \left[\left(\frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} - b_n \right) h_{n-1}^{-1} + \frac{1}{2} f''(x_n) \right] \right| \right\}, \end{aligned}$$

a pri uslovu (9.10)

$$\alpha_n = \omega(f'', \|\Delta_n\|) + \frac{2}{7} \max(|f''(x_0) - A_n|, |f''(x_n) - B_n|),$$

gde je $K_0 = 7/8$, $K_1 = K_2 = 7/2$, a funkcija ω se definiše kao

$$\omega(x, \delta) = \omega(x(t), \delta) = \max_{\substack{t, t+h \in [a, b] \\ |h| \leq \delta}} |x(t+h) - x(t)|, \quad (0 \leq \delta \leq b-a)$$

na intervalu $[a, b]$ za $x(t) \in C[a, b]$. Valja napomenuti da je procena (9.18) vrlo oštra, da daje procenu takođe za prvi i drugi izvod, ali da se desna strana nejednakosti (9.18) ne računa uvek lako, što je nedostatak.

9.1.3. Kubni splajnovi

Kubni splajnovi su slični paraboličnim, ali je njihovo konstruisanje nešto složenije, jer su kubni polinomi komplikovaniji od kvadratnih. Ovo se nadoknađuje još većim stepenom aproksimacije nego što je bio slučaj kod paraboličnih (kvadratnih) splajnova, i ovde će ukratko biti opisan način konstruisanja kubnih splajnova.

Funkcija $S_3(f) = S_3(x; f)$ se zove interpolacioni kubni splajn u odnosu na sistem tačaka (9.6) i $f(x)$ ako je

- i) $S_3(x_i; f) \in P_3 \quad x \in (x_i, x_{i+1}), \quad (i = 0, 1, \dots, n-1)$
- ii) $S_3(x_i; f) \in C^{(2)} [a, b]$,
- iii) $S_3(x_i; f) = f(x_i) \quad (i = 0, 1, \dots, n) \quad n \geq 2$.

Slično kao i kod paraboličnih splajnova i kubni splajnovi imaju dva slobodna parametra koji se određuju iz tzv. graničnih uslova. To su

$$(9.19) \quad S_3^{(i)}(a) = S_3^{(i)}(b), \quad (i = 1, 2)$$

$$(9.20) \quad S_3'(a) = a_n, \quad S_3'(b) = b_n,$$

$$(9.21) \quad S_3''(a) = A_n, \quad S_3''(b) = B_n,$$

$$(9.22) \quad S_3(z-0) = S_3(z+0), \quad z = x_1, x_{n-1},$$

što odgovara graničnim uslovima (9.8) - (9.11) kod paraboličog splajna. Ako se stavi $h_i = x_{i+1} - x_i$,

$$M_i = S_3''(x_i), \quad m_i = S_3'(x_i) \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

onda je

$$(9.23) \quad S_3(x) = M_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6 h_{i-1}} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6 h_{i-1}} + \left(y_{i-1} - \frac{M_{i-1} h_{i-1}^2}{6} \right) \frac{x_i - x}{h_{i-1}} + \left(y_i - \frac{M_i h_{i-1}^2}{6} \right) \frac{x - x_{i-1}}{h_{i-1}},$$

ili

$$(9.24) \quad S_3(x) = m_{i-1} \frac{(x_i - x)^2(x - x_{i-1})}{h_{i-1}^2} - m_i \frac{(x - x_{i-1})^2(x_i - x)}{h_{i-1}^2} + \frac{(x_i - x)^2[2(x - x_{i-1}) + h_{i-1}]}{h_{i-1}^3} + y_i \frac{(x - x_{i-1})^2[2(x_i - x) + h_{i-1}]}{h_{i-1}^3},$$

gde je

$$y_i = f(x_i), \quad (i = 0, 1, \dots, n), \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Da bi se za splajn u obliku (9.23) ili (9.24) odredile veličine m_i i M_i uvode se oznake

$$d_i = 6 \left[\frac{f(x_{i-1})}{(x_{i-1} - x_i)(x_{i-1} - x_{i+1})} + \frac{f(x_i)}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})} + \frac{f(x_{i+1})}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)} \right],$$

$$c_i = 3 \lambda_i \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i} + 3 \beta_i \frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}} \quad \text{za } i = 1, 2, \dots, n-1,$$

gde je

$$\lambda_i = \frac{h_i}{h_{i-1} + h_i}, \quad \beta_i = \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i}.$$

Onda se veličine m_i i M_i opredeljuju:

1) U slučaju graničnog uslova (9.19) iz sistema jednačina

$$\beta_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$M_0 = M_n, \quad M_{n+1} = M_1, \quad h_n = h_0,$$

odnosno

$$\begin{aligned} \lambda_i m_{i-1} + 2m_i + \beta_i m_{i+1} &= c_i & (i = 1, 2, \dots, n), \\ m_0 = m_n, \quad m_{n+1} &= m_1, & h_n = h_0. \end{aligned}$$

2) U slučaju graničnog uslova (9.20) iz sistema jednačina

$$\begin{aligned} 2M_0 + M_1 &= \frac{6}{h_0} \left(\frac{y_1 - y_0}{h_0} - a_n \right), \\ \beta_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} &= d_i & (i = 1, 2, \dots, n-1), \end{aligned}$$

$$M_{n-1} + 2M_n = \frac{6}{h_{n-1}} \left(b_n - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} \right),$$

odnosno

$$\begin{aligned} 2m_1 + \beta_1 m_2 &= d_1 - \lambda_1 a_n, \\ \lambda_i m_{i-1} + 2m_i + \beta_i m_{i+1} &= d_i & (i = 2, 3, \dots, n-2), \\ \lambda_{n-1} m_{n-2} + 2m_{n-1} &= d_{n-1} - \beta_{n-1} b_n, \\ m_0 &= a_n, & m_n = b_n. \end{aligned}$$

3) U slučaju graničnog uslova (9.21) iz sistema jednačina

$$\begin{aligned} 2M_1 + \lambda_1 M_2 &= d_1 - \beta_1 A_n, \\ \beta_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} &= d_i & (i = 2, \dots, n-2), \\ \beta_{n-1} M_{n-2} + 2M_{n-1} &= d_{n-1} - \lambda_{n-1} B_n, \\ M_0 &= A_n, & M_n = B_n, \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} 2m_0 + m_1 &= \frac{3}{h_0} (y_1 - y_0) - \frac{h_0}{2} A_n, \\ \lambda_i m_{i-1} + 2m_i + \beta_i m_{i+1} &= d_i & (i = 1, 2, \dots, n-1), \\ m_{n-1} + 2m_n &= \frac{3}{h_{n-1}} (y_n - y_{n-1}) + \frac{h_{n-1}}{2} B_n. \end{aligned}$$

4) U slučaju graničnog uslova (9.22) iz sistema jednačina

$$\left(2 + \frac{h_0}{h_1} \right) M_1 + \frac{h_1 - h_0}{h_1} M_2 = d_1,$$

$$\beta_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i \quad (i = 2, 3, \dots, n-2),$$

$$\frac{h_{n-2} - h_{n-1}}{h_{n-2}} M_{n-2} + \left(2 + \frac{h_{n-1}}{h_{n-2}}\right) M_{n-1} = d_{n-1},$$

$$M_0 = \left(1 + \frac{h_0}{h_1}\right) M_1 - \frac{h_0}{h_1} M_2,$$

$$M_n = \left(1 + \frac{h_{n-1}}{h_{n-2}}\right) M_{n-1} - \frac{h_{n-1}}{h_{n-2}} M_{n-2},$$

odnosno

$$\left(1 + \frac{h_0}{h_1}\right) m_1 + \frac{h_0}{h_1} m_2 = \lambda_1 \frac{y_1 - y_0}{h_0} + \left(3 + \frac{2h_0}{h_1}\right) \beta_1 \frac{y_2 - y_1}{h_1},$$

$$\lambda_i m_{i-1} + 2m_i + \beta_i m_{i+1} = c_i \quad (i = 2, 3, \dots, n-2),$$

$$\begin{aligned} \frac{h_{n-1}}{h_{n-2}} m_{n-2} + \left(1 + \frac{h_{n-1}}{h_{n-2}}\right) m_{n-1} &= \\ &= \left(3 + 2 \frac{h_{n-1}}{h_{n-2}}\right) \lambda_{n-1} \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}} + \beta_{n-1} \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}}, \end{aligned}$$

$$m_0 = \frac{h_0^2}{h_1^2} m_2 + \left(\frac{h_0^2}{h_1^2} - 1\right) m_1 + 2 \left[\frac{y_1 - y_0}{h_0} - \frac{y_2 - y_1}{h_1} \frac{h_0^2}{h_1^2} \right],$$

$$m_n = \frac{h_{n-1}^2}{h_{n-2}^2} m_{n-2} + \left(\frac{h_{n-1}^2}{h_{n-2}^2} - 1\right) m_{n-1} + 2 \left[\frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} + \frac{y_{n-2} - y_{n-1}}{h_{n-2}} \frac{h_{n-1}^2}{h_{n-2}^2} \right].$$

Slično kao i kod paraboličnog splajna i kod kubnog splajna se može dati slična ocena aproksimacije.

Za $x \in [a, b]$ i $s = 0, 1, 2$ važi

$$|f^{(s)}(x) - S_3^{(s)}(x; f)| \leq K_s \alpha_n \|\Delta_n\|^{2-s}, \quad K_2 = K_1 = 4K_0 = 5,$$

gde je α_n ograničeno sa $\omega(f, \|\Delta_n\|)$ ili $\omega(f'', \|\Delta_n\|)$.

9.1.4. Višedimenzionalni i Ermitovi splajnovi

Ovde će u najkraćem biti dat prikaz dvodimenzionalnog paraboličnog splajna, s napomenom da se poopšteni višedimenzionalni splajnovi po potrebi takođe mogu konstruisati na analogan način. Neka je dat pravougaonik $\mathfrak{R} = [a, b] \times [c, d]$, neka je $C^{m,n}(\mathfrak{R})$ skup funkcija $f(x, y)$ koje imaju neprekidan parcijalan izvod po x reda m , a po y reda n nad \mathfrak{R} . Ako se \mathfrak{R} podeli na manje pravougaonike

$$\mathfrak{R}_{i,j} = [u_i, u_{i+1}] \times [v_j, v_{j+1}] \quad (i = 0, 1, \dots, m; \quad j = 0, 1, \dots, n)$$

gde je

$$\Delta_n^{(1)} : a = u_0 < u_1 < u_2 < \dots < u_n < u_{n+1} = b$$

$$\Delta_m^{(2)} : c = v_0 < v_1 < v_2 < \dots < v_m < v_{m+2} = d,$$

onda je funkcija $S_2(x, y)$ nad \mathfrak{R} dvodimenzionalni parabolični splajn u odnosu na sistem tačaka $\Delta_n^{(1)}$ i $\Delta_m^{(2)}$ ako je

- 1) $S_2(x, y) \in P_{2,2}$, za $(x, y) \in \mathfrak{R}_{i,j}$ ($i = 0, 1, \dots, n; \quad j = 0, 1, \dots, m$),
- 2) $S_2(x, y) \in C^{(1,1)}(\mathfrak{R})$,

gde je $P_{2,2}$ skup polinoma od x i y stepena ne većeg od 2 po x i po y . To znači da se $S_2(x, y)$ može predstaviti kao

$$(9.25) \quad S_2(x, y) = P_{0,0}(x, y) + \sum_{i=1}^n P_i(y)(x - u_i)_+^2 + \\ + \sum_{j=1}^m Q_j(x)(y - v_j)_+^2 + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n a_{i,j}(x - u_i)_+^2 (y - v_j)_+^2,$$

i štaviše takvo predstavljanje je jedinstveno. Ovde je $P_{0,0}(x, y)$ neki polinom po x i y stepena ne većeg od 2 po svakoj promenljivoj, P_i i Q_j su polinomi takođe stepena ne većeg od 2, a $a_{i,j}$ su konstante. Ako se sistem tačaka $\Delta_n^{(1)}$ i $\Delta_m^{(2)}$ proširi do sistema tačaka

$$\Delta_{n,m} : \begin{cases} a = x_0 < u_1 < x_1 < u_2 < x_2 < \dots < u_n < x_n = b, \\ c = y_0 < v_1 < y_1 < v_2 < y_2 < \dots < v_m < y_m = d, \end{cases}$$

onda se može govoriti o interpolacionom paraboličnom splajnu $S_2(x, y)$, ako on još zadovoljava (sem 1) i 2))

$$S_2(x_i, y_j) = f(x_i, y_j) \quad (i = 0, 1, \dots, n; \quad j = 0, 1, \dots, m),$$

pri čemu je $f(x, y)$ neka funkcija definisana na pravougaoniku \mathfrak{R} .

Ukoliko su poznati odgovarajući granični uslovi (slično kao kod običnog paraboličnog splajna iz tač. 9.1.2), onda se splajn iz (9.25) može jednoznačno odrediti.

Drugi tip splajna predstavlja tzv. Ermitov splajn (Charles Hermite, francuski matematičar iz XIX veka). Neka je zadat sistem tačaka na $[a, b]$

$$\Delta_n : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b \quad (n \geq 1).$$

Tada se funkcija $S_{2m+1}(x) = S_{2m+1}(x; f)$ naziva Ermitov interpolacioni splajn za funkciju $f(x)$ iz $C^{(m)}[a, b]$ ako je

$$\begin{aligned} i) \quad & S_{2m+1}(x) \in P_{2m+1}, & x \in [x_i, x_{i+1}], & \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1) \\ ii) \quad & S_{2m+1}(x) \in C^{(m)}[a, b], \\ iii) \quad & S_{2m+1}^{(k)}(x_i) = f^{(k)}(x_i) & \quad (k = 0, 1, 2, \dots, m; \quad i = 0, 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Drugim rečima, kod Ermitovog splajna se zahteva ne samo da se vrednosti funkcije $f(x)$ i splajna poklapaju u tačkama x_i ; već i vrednosti njihovih prvih m izvoda. Navedeni uslovi određuju $S_{2m+1}(x)$ jednoznačno na $[a, b]$.

9.1.5. Primena splajnova u numeričkoj matematici

Isto kao i interpolacioni polinomi (v. 9.1.2.) i interpolacioni splajnovi imaju veliki broj primena. Jedan od najčešćih problema u numeričkoj matematici je, približno računanje određenih integrala, tzv. numerička integracija. Numerička integracija pomoću splajnova se uspešno sprovodi ako se

$$\int_a^b f(x) dx$$

zameni sa približnom vrednošću

$$(9.26) \quad \int_a^b S_m(x; f, \Delta_n) dx,$$

gde je $S_m(x; f, \Delta_n)$ splajn stepena m koji vrši interpolaciju funkcije $f(x)$ na

$$\Delta_n : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \quad \text{tj.}$$

$$S_m(x_i) = f(x_i), \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

(u slučaju $m = 2$ – v.tač.2). Ovakav postupak je vrlo pogodan, jer se integral (9.26) lako računa, pošto je nad svakim intervalom $[x_i, x_{i+1}]$ splajn polinomna funkcija, a

$$\int x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C.$$

Ako $f(x) \in C^{(m+1)}[a, b]$, onda je za neko $D > 0$

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b S_m(x; f, \Delta_n) dx \right| < D \left(\frac{b-a}{n} \right)^{m+1},$$

što znači vrlo dobru aproksimaciju za dovoljno veliko n , jer je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D \left(\frac{b-a}{n} \right)^{m+1} = 0.$$

Drugi važan problem numeričke matematike je numeričko diferenciranje, tj. određivanje približne vrednosti $f'(x)$ za datu funkciju $f(x) \in C^{(1)}[a, b]$. Valja napomenuti da se $f'(x)$ uspešno može zameniti sa

$$(9.27) \quad S_h f = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h},$$

jer je

$$\lim_{h \rightarrow 0} S_h f = f'(x),$$

te se za $h = (b-a)/n$ dovoljno malo (tj. n dovoljno veliko) dobija jako dobra aproksimacija $f'(x)$. S druge strane $f(x+h)$ i $f(x-h)$ se aproksimiraju sa vrednostima splajna $S_m(x+h; f, \Delta)$ odnosno $S_m(x; f, \Delta_n)$ te se tako dobija dobra aproksimacija $f'(x)$, koja je često bolja od one koja se dobija ako se $f'(x)$ aproksimira sa $S'_m(x; f, \Delta)$ (i ovo se takođe koristi; v. tač.2 i 3 za procenu greške kad je $m = 2$ odnosno $m = 3$).

Druge standardne primene splajnova u numeričkoj matematici uključuju rešavanje Fredholmove integralne jednačine

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt$$

po $y(x)$ (f, K, λ poznati) i diferencijalne jednačine drugog reda

$$y'' - q(x)y = r(x)$$

sa граниčnim uslovima $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$, gde su q, r poznate funkcije.

9.2. Primena splajnova

Splajn funkcije u geologiji i rudarstvu prevashodno imaju primenu kod matematičkog modeliranja geoloških i topografskih površi, kod opisivanja promena dva međusobno zavisna obeležja ili promenljive, kod grafičke 2D i 3D interpretacije površinskih kopova, podzemnih rudnika i sl. Pod geološkom površi podrazumava se površ koja predstavlja promenu nekog geološkog obeležja u prostoru, na pr. sadržaj korisne komponente u rudi na određenom horizontu u ležištu, promenu debljine rudnog tela, promenu uglja unutrašnjeg trenja ili nekog drugog geometričkog parametra radne sredine, gravitaciono polje ili bilo koje drugo geofizičko ili geološko polje, promenu otpora kopanja i sl. Geološka površ može biti predstavljena u vidu karte sa izolinijama – 2D model, ili u blok formi – kao 3D model.

Aproksimacija geoloških površi splajn funkcijama omogućava otklanjanje niza nedostataka prisutnih kod polinomske aproksimacije. Istovremeno manje su teškoće računanja, što naročito dolazi do izražaja kod modeliranja složenih površi polinomima visokog stepena. Izbegavaju se i deformacije tipa "obodnog efekta", u perifernim zonama, tj. u zonama koje su udaljene od centralne zone na karti i koje su u principu slabije pokrivenne informacijama o geološkim obeležjima koja su predmet istraživanja.

Modeliranje splajnovima je u suštini diskretno-polinomska aproksimacija koju karakteriše mogućnost približnog opisivanja geoloških površi polinomima niskog stepena.

Mogućnost opisivanja složenih površina polinomima niskih stepena objašnjava se tako, što se kod splajn metode kompletna kartirana teritorija deli na odgovarajuće nevelike i međusobno nepreklapajuće delove – pravougaonog oblika, u čijim temenima su interpolacione tačke kao nosioci informacija o istraživanom obeležju. Polinomska aproksimacija ostvaruje se odvojeno za svaki takav deo.

Najčešće se koristi polinom trećeg stepena – kubni splajn.

Pošto se za svaki deo formira njegov polinom, mora se ispuniti uslov koji obezbeđuje neprekidnosti funkcije u tačkama sučeljavanja da bi se konstruisala neprekidna i glatka aproksimativna površ.

Dakle u biti, zadatak splajn aproksimacije svodi se na pronalaženje koeficijentata polinoma uz uvažavanje uslova kontinuiteta. Algoritam izračunavanja koeficijenata polinoma, za slučaj da su interpolacione tačke raspoređene po pravilnoj pravougaonoj mreži (klasična situacija), jednostavnija je od algoritma kada su tačke raspoređene haotično.

U ovom drugom slučaju zadatak nema jednoznačno rešenje – moguće je konstruisati beskonačno mnogo splajnova saglasno sa zadatim vrednostima u interpolacionim tačkama.

U takvim situacijama, radi svođenja zadatka na klasičnu šemu, pribegava se prethodnom izračunavanju vrednosti modeliranog obeležja u čvorovima pravougaone mreže, nekom od interpolacionih metoda, ili usmeravanjem ka drugim informacijama koje dozvoljavaju sagledavanje opšteg ponašanja aproksimirajuće površine u zadatoj oblasti.

Obrada splajnovima naročito je prikladna pri modeliranju površina sa naglim promenama. U takvim slučajevima preporučuje se triangulacija modelovane oblasti.

Kubni splajn: Kao što je izloženo u teorijskom odeljku ovog poglavlja, splajnova ima više vrsta. Mi ćemo se zadržati na kubnom splajnu koji je najčešće u praksi u upotrebi i objasniti matematičko – manipulativni postupak.

Kubni splajn S , koji se interpolira u mreži sa apscisnim vrednostima

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n$$

je prema definiciji iz teorijskog odeljka, funkcija za koju važi $S(x_k) = y_k$ i sastoji se iz $(n - 1)$ kubnih polinoma f_k definisanih u (x_k, x_{k+1}) , a koji su dva puta uzastopno diferencijabilni za $x_k(k + 2, \dots, n - 1)$. Vrednost prvog, odnosno drugog izvoda od S označimo sa y'_k i y''_k za $x_k(k = 1, \dots, n)$. Ako kubni polinom napišemo u obliku:

$$f_k(x) = A_k(x - x_k)^3 + B_k(x - x_k)^2 + C_k(x - x_k) + D_k$$

onda $4(n - 1)$ koeficijente A_k, B_k, C_k i D_k treba tako odrediti da budu zadovoljeni uslovi za splajn.

Posmatrajmo zatvoreni interval $[x_k, x_{k+1}]$, tada za vrednosti funkcije, prvog i drugog izvoda splajna u krajnjim tačkama x_k i x_{k+1} važe zavisnosti:

$$y_k = f_k(x_k) = D_k$$

$$y_{k+1} = f_k(x_{k+1}) = A_k \Delta x_k^3 + B_k \Delta x_k^2 + C_k \Delta x_k + D_k$$

$$y'_k = f'_k(x_k) = C_k,$$

$$y'_{k+1} = f'_k(x_{k+1}) = 3A_k \Delta x_k^2 + 2B_k \Delta x_k + C_k,$$

$$y''_k = f''_k(x_k) = 2B_k,$$

$$y''_{k+1} = f''_k(x_{k+1}) = 6A_k \Delta x_k + 2B_k.$$

Koeficijenti kubnog polinoma sada se mogu bez teškoća dobiti:

$$A_k = \frac{1}{6\Delta x_k}(y''_{k+1} - y''_k),$$

$$B_k = \frac{1}{2}y''_k,$$

$$C_k = \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} - \frac{1}{6}\Delta x_k(y''_{k+1} + 2y''_k),$$

$$D_k = y_k,$$

gde je:

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k \quad \text{i} \quad \Delta y_k = y_{k+1} - y_k.$$

Kao dodatno rešenje imamo:

$$y'_k = \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} - \frac{1}{6}\Delta x_k(y''_{k+1} + 2y''_k), \quad (k = 1, \dots, n-1)$$

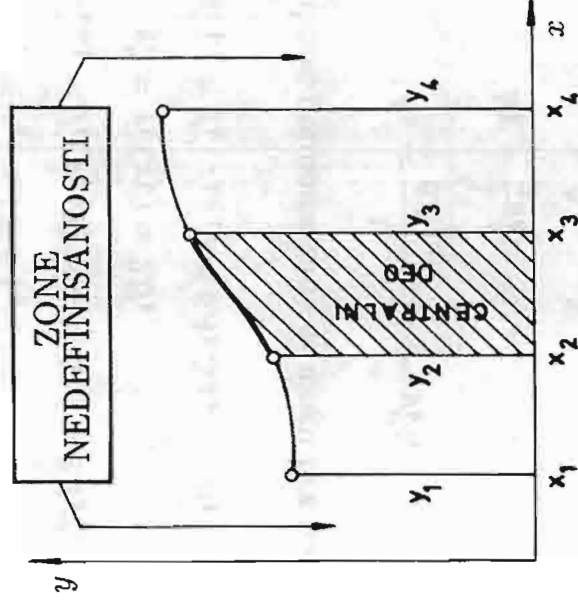
$$y'_n = \frac{\Delta y_{n-1}}{\delta x_{n-1}} + \frac{1}{6}\Delta x_{n-1}(2y''_n + y''_{n-1}).$$

Na ovaj način definisan je postupak računanja koeficijenata polinoma, a time i samog izraza polinoma.

Poznato je da je za formiranje polinoma trećeg stepena sa jednom nezavisno promenljivom potrebno znati najmanje četiri interpolacione tačke.

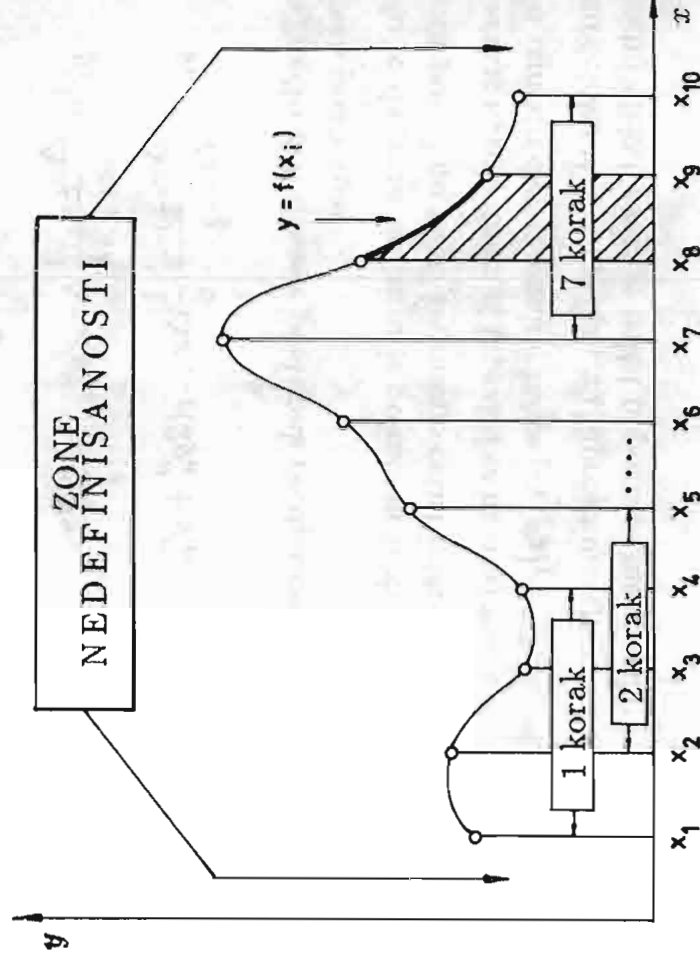
Radi tačnije aproksimacije, u praksi se na ovaj način sračunata funkcija koristi samo u delu između dve centralne tačke $[x_2, x_3]$, pojačani deo krive na slici 9.2. U perifernim delovima $[x_1, x_2]$ i $[x_3, x_4]$ aproksimacija je manje tačna zbog obodnog efekta. Obodni efekat nastaje usled nepoznavanja vrednosti funkcije levo od x_1 i desno od x_4 .

U praksi najčešće ima više od četiri zadate interpolacione tačke, odnosno, više od četiri poznate vrednosti funkcije $[f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)]$. U takvim slučajevima primenjuje se postupak pomeranja celog sistema od četiri tačke, sukcesivno sa dela na deo koji se računa od x_1 ka x_n .



Sl. 9.2. - Slučaj sa četiri interpolacione tačke

Na slici 9.3. prikazan je slučaj sa više od četiri interpolacione tačke. Vidi se da je za računanje vrednosti $f(x)$ u intervalu od x_8 do x_9 neophodno uzeti četiri vrednosti $f(x)$ za x_7, x_8, x_9 i x_{10} .



Sl. 9.3. - Slučaj sa više od četiri tačke

To je sedmi korak u nizu računanja splajn funkcije. Preko tako definisane funkcije $f(x)$, moguće je za taj deo (osenačen) zadate oblasti izračunati vrednost $f(x_i)$ u bilo kojoj tački sa apscisom x_i koja je između x_8 i x_9 . Prednosti ovakvog postupka

su u tome što se pomeranjem sistema korak po korak od x_1 ka x_n , dobija za svaki interval glatka neprekidna kriva koja veoma dobro aproksimira realnu funkciju. Pri ovome važno je napomenuti da interpolacione (zadate) tačke ne moraju biti ekvidistantne.

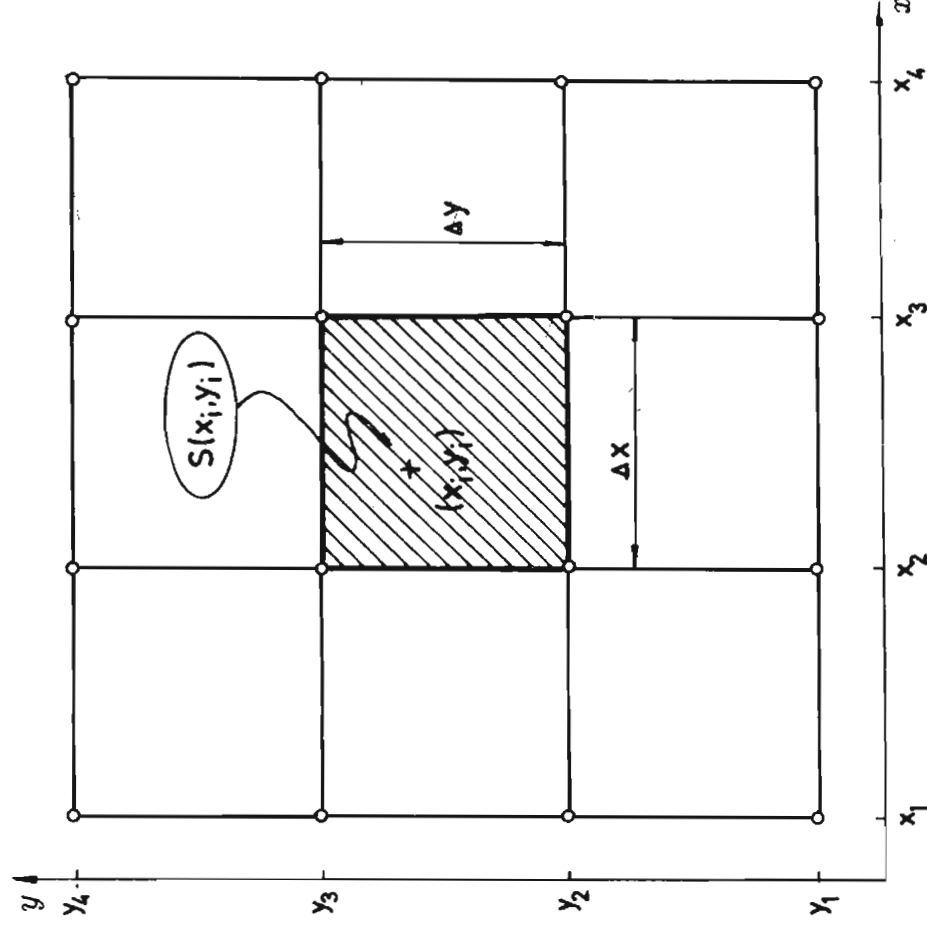
Za aproksimaciju, odnosno interpolaciju površi (geološko polje, topografska situacija ...) koriste se splajn polinomi sa dve nezavisne promenljive x i y :

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{k=3} \sum_{m=0}^{m=3} A_{km}^{i,j} (x - x_{i-1})^k (y - y_{j-1})^m$$

gde su: A_{km} - koeficijenti polinoma.

$\Delta x = x - x_{i-1}$ - rastojanja od tačke računanja

$\Delta y = y - y_{j-1}$ do prethodne zadate tačke.



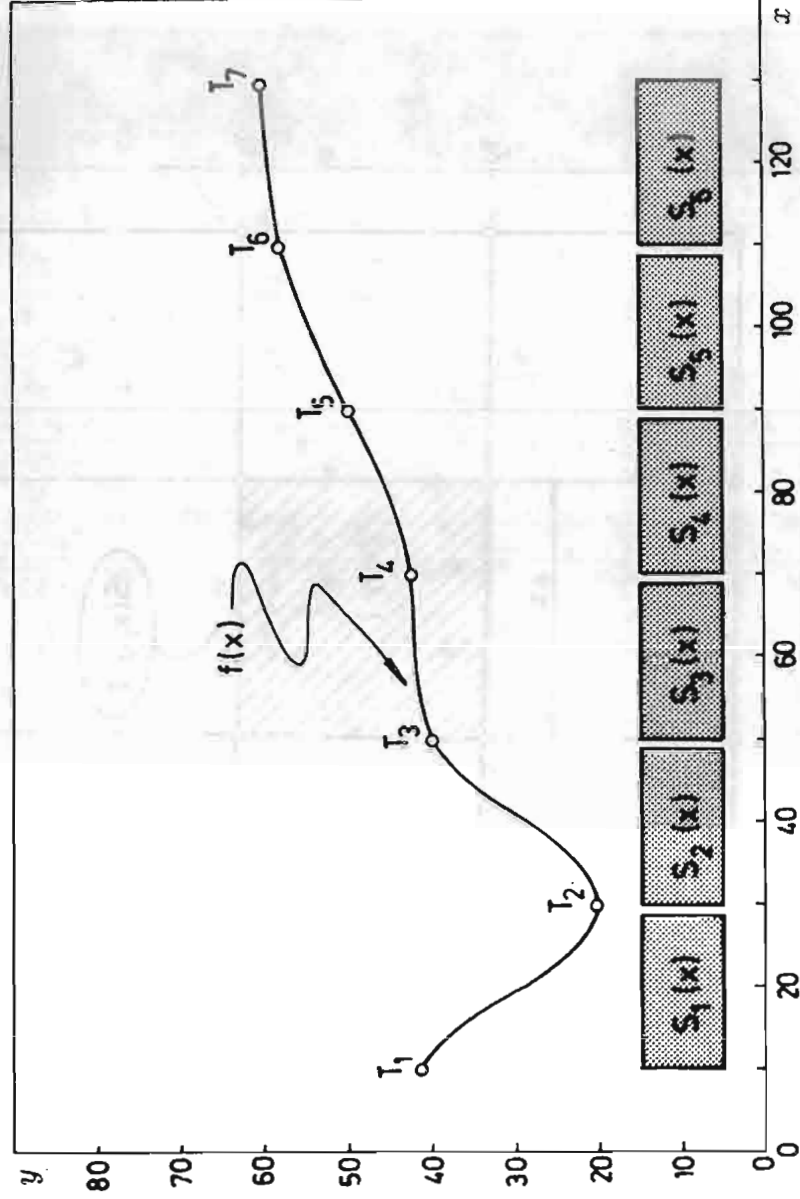
Sl. 9.4. - Slučaj aproksimacije površi za $n=16$.

Princip računanja kod splajna sa dve nezavisne promenljive isti je kao i u slučaju sa jednom promenljivom. Razlike su jedino u obimu računanja. Umesto četiri interpolacione tačke u račun sada ulazi $4 \times 4 = 16$ tačaka (v. sl. 9.4.), što znači da treba rešavati u svakom koraku sistem od 16 jednačina sa 16 nepoznatih.

Kod splajna sa dve nezavisne promenljive funkcija $S = f(x, y)$ služi za izračunavanje samo u polju koje ima u oreolu osam okružujućih polja. Na slici 9.4. to je osenčeno polje, unutar koga se na osnovu izraza funkcije $f(x, y)$ mogu izračunati vrednosti funkcije u bilo kojoj tački sa koordinatama između x_2 i x_3 i y_2 i y_3 . Kada je oblast istraživanja definisana sa više od 16 interpolacionih tačaka, princip pomeranja sistema (osenčenog polja) isti je kao i kod splajna sa jednom nezavisnom promenljivom.

Na tačnost aproksimacije površi ili nekih drugih zavisnosti splajnom, utiče gustina i raspored interpolacionih tačaka. Ukoliko su promene modeliranog oblika izražene i kroz prisustvo lokalnih šumova, gustina i raspored tačaka kao osnovnih nosilaca informacija o obeležju, mora biti takva da pokriva šumove, odnosno promene obeležja.

Na slici 9.5. dat je topografski presek terena. Presek definiše sedam interpolacionih tačaka (T_1, T_2, \dots, T_7), čije su koordinate date u tabeli 9.1.



Sl. 9.5. - Topografski presek terena

Sedam interpolacionih tačaka dati presek deli na šest segmenata: $10 \leq x \leq 30$, $30 \leq x \leq 50$, $50 \leq x \leq 70$, $70 \leq x \leq 90$, $90 \leq x \leq 110$, $110 \leq x \leq 130$.

Tabela 9.1.

Tačka	K o o r d i n a t e	
	x	y
T_1	10	41
T_2	30	20
T_3	50	40
T_4	70	42
T_5	90	50
T_6	110	58
T_7	130	60

Saglasno izloženom algoritamskom toku konstrukcije kubnog splajna, izvršena je obrada i dobijeni su sledeći rezultati:

Tabela 9.2.

Granice segmenta		Koefficienti splajn funkcije			
x_{min}	x_{max}	A	B	C	D
10	30	+0,0015	-0,0800	-0,2541	+45,0001
30	50	-0,0012	+0,1619	-5,9267	+85,3097
50	70	+0,0005	-0,0976	+6,3570	-96,3735
70	90	-0,0001	+0,0337	-2,5822	100,4965
90	110	-0,0001	+0,0333	-2,5396	+99,1164
110	130	+0,00001	-0,0066	+1,6880	-48,9788

Primeru radi, kubni splajn za segment $90 \leq x \leq 110$ glasi:

$$S_5(x) = 99,1164 - 2,5396x + 0,0333x^2 - 0,0001x^3$$

Analiza:

$x = 90$	$y = 50,00$
$x = 92$	$y = 50,91$
$x = 94$	$y = 51,80$
$x = 96$	$y = 52,68$
$x = 98$	$y = 53,54$
$x = 100$	$y = 54,37$
$x = 102$	$y = 55,18$
$x = 104$	$y = 55,95$
$x = 106$	$y = 56,68$
$x = 108$	$y = 57,36$
$x = 110$	$y = 58,00$

pokazuje potpunu podudarnost $f(x)$ i $S(x)$.

10. Furijeovi redovi

10.1. Teorijske osnove Furijeovih redova

10.1.1. Periodične funkcije i Furijeovi redovi

Neka je $f(x)$ funkcija definisana za svako realno x . Broj T je period te funkcije, ako za svako x važi

$$f(x + T) = f(x).$$

Ako je T period funkcije, onda je i nT period za svako celobrojno n , drugim rečima umnoški perioda takođe su period. Svaka periodična funkcija različita od konstante, koja ima bar jednu tačku u kojoj je neprekidna, ima među svojim pozitivnim periodima jedan koji je najmanji. Obično se pod pojmom period (ili osnovni period) funkcije i podrazumeva njen najmanji pozitivni period.

Ako funkcija $f(x)$ ima period T , onda $F(x) = f(ax)$ ($a \neq 0$) ima period T/a , jer je

$$F\left(x + \frac{T}{a}\right) = f\left(a\left(x + \frac{T}{a}\right)\right) = f(ax + T) = f(ax) = F(x).$$

Ako $f(x)$ ima period T i integrabilno je, onda za svako c važi

$$\int_c^{c+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

Stoga se možemo ograničiti na funkciju $f(x)$, sa osnovnim periodom 2π , i potražiti njen Furijeov red u obliku

$$\begin{aligned}
 & \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \dots \\
 (10.1) \quad & = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),
 \end{aligned}$$

a u slučaju da $f(x)$ ima period $2l$, onda će njen Furijeov red biti

$$(10.2) \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right).$$

10.1.2. Određivanje koeficijenata Furijeovog reda

U redovima (10.1) i (10.2) a_0 , a_n i b_n su tzv. koeficijenti koje treba odrediti. Ako znamo da $f(x)$ poseduje razlaganje

$$(10.3) \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

pri čemu red uniformno konvergira, onda se on može počlano integrirati. Koristićemo formulu (m, n celi brojevi)

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx &= \begin{cases} 0, & n \neq 0, \\ 2\pi, & n = 0, \end{cases} & \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx &= 0, & \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx &= 0, \\
 \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx &= \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n, \end{cases} & \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx &= \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \pi, & m = n, \end{cases}
 \end{aligned}$$

lako se nalazi

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \, dx) = \pi a_0, \\
 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx \, dx + \\
 & \quad + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx \, dx) = \pi a_n
 \end{aligned}$$

za $n \geq 1$, i slično

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \pi b_n.$$

Stoga su koeficijenti Furijeovog reda (10.3) funkcije $f(x)$ sa periodom 2π dati preko obrasca

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \quad (k \geq 1), \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \quad (k \geq 1). \end{aligned} \quad (10.4)$$

Iz gornjeg obrasca za a_0 vidi se zašto je podesno pisati $a_0/2$, a ne a_0 u (10.3). Ako funkcija $f(x)$ ima period $2l$ i data je redom (10.2), onda važi

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \\ a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n \geq 1), \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n \geq 1). \end{aligned} \quad (10.5)$$

Red (10.2), (a takođe i (10.3)) čiji su koeficijenti dati pomoću (10.4) u opštem slučaju ne mora da konvergira ka $f(x)$, no tada se koristi oznaka

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

da se naglasi da su a_0 , a_k , b_k dati pomoću (10.4).

Postoji više kriterijuma po kojima se određuje da razlaganje (10.3) stvarno vredi. Ovde ćemo navesti, bez dokaza, dva takva klasična kriterijuma.

TEOREMA 1. Neka funkcija $f(x)$ sa periodom 2π ima u $[-\pi, \pi]$ najviše konačno mnogo tačaka prekida i $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx$ ima konačnu vrednost. Tada $f(x)$

poseduje razlaganje u Furijeov red (10.3) (sa koeficijentima datim pomoću (10.4)) u svakoj tački u kojoj je diferencijabilna.

Kaže se da neka funkcija zadovoljava Dirihleov uslov na nekom intervalu, ako se taj interval može razbiti na konačan broj podintervala, tako da je u svakom od tih podintervala funkcija monotona (rastuća ili opadajuća). Važi i

TEOREMA 2. Neka je $f(x)$ periodična funkcija sa periodom 2π koja u $[-\pi, \pi]$ zadovoljava Dirihleov uslov. Tada u tačkama neprekidnosti $f(x)$ važi razlaganje u Furijeov red (10.3) (sa koeficijentima datim pomoću (10.4)), a u tačkama prekida Furijeov red konvergira ka $\frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)]$.

10.1.3. Posebni oblici Furijeovog reda

Ako se iskoriste poznate Ojlerove formule

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \quad (i = \sqrt{-1}),$$

onda se Furijeov red (10.3) može napisati u obliku

$$(10.6) \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx},$$

gde uz pomoć (10.4) (ili direkno) sledi

$$(10.7) \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Ove tzv. kompleksna forma Furijeovog reda.

Posebno za parne funkcije ($f(x) = f(-x)$) i neparne ($f(x) = -f(-x)$) Furijeov red (10.3) poprima jednostavan oblik. Naime, za svako c važi

$$\int_{-c}^c f(x) dx = \begin{cases} 2 \int_0^c f(x) dx, & \text{ako je } f(x) \text{ parna,} \\ 0, & \text{ako je } f(x) \text{ neparna.} \end{cases}$$

Ova jednostavna relacija omogućava da se uz pomoć (10.4) dobije Furijeov red za parnu funkciju $f(x)$ sa periodom 2π u obliku

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

$$(10.8) \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

a za neparnu funkciju $f(x)$ sa periodom 2π u obliku

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad (10.9) \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Stoga znači Furijeov red za parnu funkciju sadrži samo kosinuse (koji su parne funkcije), a za neparnu funkciju samo sinuse (koji su neparne funkcije).

Premda su parne i neparne funkcije posebni tipovi funkcija, napomenimo da se svaka funkcija $f(x)$ može predstaviti kao zbir parne i neparne funkcije. Naime, važi

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = F_1(x) + F_2(x),$$

pri čemu je $F_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ parna, a $F_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ neparna funkcija.

10.1.4. Partikularni Furijeovi redovi

U ovom odeljku biće dati neki Furijeovi razvici za partikularne funkcije. Neka je $f_1(x) = x/2$ u $(0, 2\pi)$ i neka je $f_1(x)$ periodična sa osnovnim periodama 2π . Ova funkcija je definisana u svim tačkama, osim u onim oblika $2k\pi$ (k je ceo broj), a u tim tačkama definišimo

$$f_1(2k\pi) = \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}[f_1(2k\pi - 0) + f_1(2k\pi + 0)].$$

Po formulama (10.4) je

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x}{2} dx = \pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x}{2} \cos nx \, dx = 0 \quad (n \geq 1),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x}{2} \sin nx \, dx = -\frac{1}{n} \quad (n \geq 1).$$

Stoga važi

$$(10.10) \quad f_1(x) \sim \frac{\pi}{2} - \sin x - \frac{\sin 2x}{2} - \dots = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n},$$

a po Teoremi 2 u (10.10) važi i znak jednakosti, tj. red u (10.10) konvergira ka $f_1(x)$ za svako realno x .

Neka je dalje

$$f_2(x) = \begin{cases} -\pi/4, & -\pi < x < 0, \\ \pi/4, & 0 < x < \pi, \end{cases}$$

pri čemu je $f_2(x)$ periodična sa periodom 2π , a $f_2(n\pi) = 0$ po definiciji, te je $f_2(n\pi) = \frac{1}{2}[f_2(n\pi - 0) + f_2(n\pi + 0)]$ (n je ceo broj).

Funkcija $f_2(x)$ je očividno neparna, pa stoga po (10.9) važi

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{4} dx = -\frac{\cos nx}{2n} \Big|_0^{\pi} = \frac{\cos 0 - \cos n\pi}{2n} = \begin{cases} 1/n, & n \text{ je neparno,} \\ 0, & n \text{ je parno.} \end{cases}$$

Teorema 2 daje za svako realno x

$$f_2(x) = \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1},$$

a za $x = \pi/2$ dobija se poznati red

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Neka je konačno $f_3(x)$ periodična funkcija sa osnovnim periodom 2π , pri čemu je $f_3(x) = |x|$ u $[-\pi, \pi]$. Tada je $f_3(x)$ parna funkcija, te je po (10.8)

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{x^2}{\pi} \Big|_0^{\pi} = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{x \sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} \right) \Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2 \cos n\pi - \cos 0}{\pi n^2} = \frac{2(-1)^n - 1}{\pi n^2} = \begin{cases} -4/(\pi n^2), & n \text{ je neparno,} \\ 0, & n \text{ je parno.} \end{cases}$$

Stoga po Teoremi 2 za svako realno x važi

$$f_3(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \dots \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$$

Za $x = 0$ dobija se

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}, \quad \frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2},$$

a odatle je

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}S,$$

pa je

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6},$$

što pokazuje da Furijeovi redovi imaju veliku primenu u sumiranju redova.

10.1.5. Diskretni Furijeovi red

Pod ovim se podrazumeva izraz oblika

$$(10.11) \quad Y_i = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha_n \cos \frac{2\pi n X_i}{\lambda} + \beta_n \sin \frac{2\pi n X_i}{\lambda} \right),$$

gde je $Y = Y(X)$ funkcija sa periodom $\lambda (> 0)$, čije su vrednosti poznate u tačkama (X_i, Y_i) . Red (10.11) se kraće zapisuje u obliku

$$Y_i = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n C_n + \beta_n S_n), \quad C_n = \cos \frac{2n\pi X_i}{\lambda}, \quad S_n = \sin \frac{2n\pi X_i}{\lambda}.$$

Sa statističkog gledišta koje je u praksi najčešće, obično se uzimaju prva dva člana gornjeg razvitka (tj. za $n = 0$ i $n = 1$), te se prepostavlja da je

$$(10.12) \quad Y_i = \alpha_0 C_0 + \beta_0 S_0 + \alpha_1 C_1 + \beta_1 S_1.$$

Ovde se nepoznati koeficijenti $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1$ mogu odrediti kao rešenje skupa simultanih normalnih jednačina sličnim onima koje se upotrebljavaju u regresionoj analizi. Odgovarajuća matrica može da se formira ako se njene vrste i kolone označe članovima linearne jednačine. Tada se množenjem odgovarajućih članova dobija

$$\begin{matrix} C_0 & S_0 & C_1 & S_1 \\ \left[\begin{array}{cccc} \sum C_0^2 & \sum C_0 S_0 & \sum C_0 C_1 & \sum C_0 S_1 \\ \sum S_0 C_0 & \sum S_0^2 & \sum S_0 C_1 & \sum S_0 S_1 \\ \sum C_1 C_0 & \sum C_1 S_0 & \sum C_1^2 & \sum C_1 S_1 \\ \sum S_1 C_0 & \sum S_1 S_0 & \sum S_1 C_1 & \sum S_1^2 \end{array} \right] \end{matrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{matrix} Y \\ \left[\begin{array}{cccc} \sum Y C_0 \\ \sum Y S_0 \\ \sum Y C_1 \\ \sum Y S_1 \end{array} \right] \end{matrix}$$

Ovo je matricni sistem jednačina (ako ima k tačaka (X_i, Y_i) , onda je na primer $\sum Y C_1 = \sum_{i=1}^k Y_i \cos \frac{2\pi X_i}{\lambda}$ itd.), koji se može napisati u obliku

$$[A] \cdot [\beta] = [C],$$

gde je $[\beta]$ vektor čije su komponente tražene veličine $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1$. To rešenje se dobija u obliku

$$[\beta] = [A]^{-1} \cdot [C],$$

gde je $[A]^{-1}$ inverzna matrica od $[A]$. No imajući u vidu da važi

$$C_0 = \cos \frac{0}{\lambda} = 1, \quad S_0 = \sin \frac{0}{\lambda} = 0,$$

malopredašnja diskusija se može uprostiti. Uvek je $\beta_0 = 0$, a ostale veličine $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1$ dobijaju se onda rešavanjem matricnog sistema

$$(10.13) \quad \begin{bmatrix} \sum C_1 & \sum C_1 & \sum S_1 \\ \sum S_1 & \sum C_1^2 & \sum C_1 S_1 \\ \sum S_1 & \sum S_1 C_1 & \sum S_1^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum Y \\ \sum Y C_1 \\ \sum Y S_1 \end{bmatrix},$$

pri čemu je n broj tačaka (X_i, Y_i) . Ova rešenja $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1$ dobijena iz (10.13) biće rešenja u smislu teorije najmanjih kvadrata (v. 4.2.6.).

10.1.6. Dvostruki Furijeovi redovi

Pod dvostrukim (diskretnim) Furijeovim redom podrazumeva se red oblika

$$Y_{i,j} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{n,m} \cos \frac{2n\pi X_{1i}}{\lambda_1} \cos \frac{2m\pi X_{2j}}{\lambda_2} + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{n,m} \cos \frac{2n\pi X_{1i}}{\lambda_1} \sin \frac{2m\pi X_{2j}}{\lambda_2} + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{n,m} \sin \frac{2n\pi X_{1i}}{\lambda_1} \cos \frac{2m\pi X_{2j}}{\lambda_2} + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{n,m} \sin \frac{2n\pi X_{1j}}{\lambda_1} \sin \frac{2m\pi X_{2j}}{\lambda_2},$$

gde se λ_1 i λ_2 odnose na talasne dužine (periode) po dvema uzajamno normalnim koordinatama, a n i m se odnose na harmonike u pravcima X_1 i X_2 . Gornji redovi se mogu uprostiti uvođenjem oznaka

$$C_n = \cos \frac{2n\pi X_{11}}{\lambda_1}, \quad C_m^* = \cos \frac{2m\pi X_{21}}{\lambda_2},$$

$$S_n = \sin \frac{2n\pi X_{11}}{\lambda_1}, \quad S_m^* = \sin \frac{2m\pi X_{21}}{\lambda_2}.$$

Tada se Y_{ij} kraće zapisuje kao

$$Y_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_{n,m} C_n C_m^* + \beta_{n,m} C_n S_m^* + \gamma_{n,m} S_n C_m^* + \delta_{n,m} S_n S_m^*).$$

Ako se traže vrednosti $\alpha_{n,m}$, $\beta_{n,m}$, $\gamma_{n,m}$ i $\delta_{n,m}$ (u smislu metode najmanjih kvadrata), onda se može postupiti kao u prethodnom odeljku, kada je razmatran jednodimenzionalni (diskretni) Furijeov red. Međutim, pošto će jednačine sadržavati koeficijente sa dvostrukim indeksima (jedne u pravcu X_1 , a druge u pravcu X_2), jednačine će imati složen oblik čak i ako se uproste. Matricna jednačina će biti

$$[A] \cdot [\beta] = [C],$$

gde $[A]$ predstavlja matricu suma i proizvoda, $[\beta]$ je vektor-matrica sa nepoznatim koeficijentima, a $[C]$ matrica koja sadrži skalarne proizvode između Y i raznih harmonika. Onda je

$$[\beta] = [A]^{-1} \cdot [C],$$

gde je $[A] =$

$$\begin{bmatrix} C_0 C_0^* & C_1 C_0^* & \dots & \dots & S_n S_m^* \\ \sum (C_0 C_0^*)^2 & \sum C_0 C_0^* C_1 C_0^* & \dots & C_3 S_1^* & \dots & \sum C_0 C_0^* S_n S_m^* \\ \sum C_1 C_0^* C_0 C_0^* & \sum (C_1 C_0^*)^2 & \dots & \sum C_1 C_0^* C_3 S_1^* & \dots & \sum C_1 C_0^* S_n S_m^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_3 S_1^* & \sum C_3 S_1^* C_0 C_0^* & \dots & \sum C_3 S_1^* C_1 C_0^* & \dots & \sum C_3 S_1^* S_n S_m^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_n S_m^* & \sum S_n S_m^* C_0 C_0^* & \dots & \sum S_n S_m^* C_1 C_0^* & \dots & \sum (S_n S_m^*)^2 \end{bmatrix}$$

pri čemu su vrednosti C_0 , C_0^* , \dots , S_n , S_m^* ispisani sa strane da bi se lakše shvatilo formiranje elemenata matrice $[A]$.

Ovde je još

$$[\beta] = \begin{bmatrix} \alpha_{00} \\ \alpha_{10} \\ \vdots \\ \beta_{31} \\ \vdots \\ \delta_{nm} \end{bmatrix}, \quad [C] = \begin{bmatrix} \sum Y C_0 C_0^* \\ \sum Y C_1 C_0^* \\ \vdots \\ \sum Y C_3 S_1^* \\ \vdots \\ \sum Y S_n S_m^* \end{bmatrix},$$

pri čemu se u svim sumama \sum sumiranje vrši po svim uzorcima, slično jednodimenzionalnom slučaju. Ako treba da se izračuna mnogo harmonika, onda gornje matrice jednačine postaju izuzetno glomazne. Izvesno uprošćavanje se dobija uzimajući u obzir da je

$$\sin \frac{2n\pi X_{1i}}{\lambda_1} = 0 \quad za \quad n = 0, \quad \sin \frac{2m\pi X_{2j}}{\lambda_2} = 0, \quad za \quad m = 0.$$

Stoga su svi članovi koji sadrže sinuse nultog harmonika identički jednaki nuli, pa jedna vrsta i kolona u matrici $[A]$ otpada, a takođe se može iskoristiti da je $C_0 = C_0^* = 1$, što još donekle uprošćava sistem matricnih jednačina.

Dvostruki Furijeovi redovi se obično koriste u problemima sličnim onim gde se koriste površine polinomnog pravca. Nepravilno raspoređeni podaci sa neke mape se aproksimiraju pomoću funkcije koja zavisi od (geografskih) koordinata izmerenih tačaka.

Furijeovi redovi mogu biti podesnije funkcije za aproksimaciju nego polinomi stepenih redova ako podaci sadrže prostorno repetitivne elemente, tj. tamo gde je prisutna periodičnost. Pošto se ne može očekivati da će aproksimacija biti savršena, ograničeni broj harmonika je obično dovoljan. Podaci u problemima površinskog trenda su obično nepravilno raspoređeni, te je stoga potrebno izračunati Furijeove koeficijente rešavanjem opšteg sistema normalnih jednačina. Zbog velikih matrica koje se tu javljaju, samo mali broj harmonika može da se uspešno izračuna pomoću računara manjeg kapaciteta.

Ako su podaci merenja prikupljeni na tzv. regularnoj mreži, onda možemo proizvoljno definisati osnovnu talasnu dužinu u pravcu X_1 kao broj podataka u tom pravcu, odnosno $\lambda_1 = N$. Na sličan način se osnovna talasna dužina u pravcu X_2 može definisati kao $\lambda_2 = M$. Tada možemo približno izračunati koeficijente bilo kog harmonika pomoću jednačina

$$\alpha_{nm} = \frac{\kappa}{NM} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M Y_{ij} \cos \frac{2n\pi X_{1j}}{N} \cos \frac{2m\pi X_{2j}}{M},$$

$$\beta_{nm} = \frac{\kappa}{NM} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M Y_{ij} \cos \frac{2n\pi X_{1j}}{N} \sin \frac{2m\pi X_{2j}}{M},$$

$$\gamma_{nm} = \frac{\kappa}{NM} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M Y_{ij} \sin \frac{2n\pi X_{1j}}{N} \cos \frac{2m\pi X_{2j}}{M},$$

$$\delta_{nm} = \frac{\kappa}{NM} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M Y_{ij} \sin \frac{2n\pi X_{1j}}{N} \sin \frac{2m\pi X_{2j}}{M},$$

gde je

$$\kappa = \begin{cases} 1 & n = 0 \text{ i } m = 0, \\ 2 & n = 0 \text{ ili } m = 0, \text{ ali } n^2 + m^2 \neq 0, \\ 4 & n > 0 \text{ i } m > 0, \end{cases}$$

n – harmonijski broj u pravcu X_1 ,

m – harmonijski broj u pravcu X_2 ,

N – broj tačaka u mreži u pravcu X_1 ,

M – broj tačaka u mreži u pravcu X_2 .

Ove formule nalažu da je početak harmonijskog reda u početku koordinatnog sistema, tj. tamo gde su X_1 i X_2 jednaki nuli. Na ovaj način harmonici se mogu dosta precizno izračunati sve do vrednosti $n = N/2$ i $m = M/2$, dok se za ostale vrednosti n i m dobijaju manje precizni rezultati.

10.2. Primena Furijeovih redova

Pre nego što pređemo na problematiku primene Furijeovih redova u geologiji i rudarstvu, neophodno je napomenuti da su redovi Furijea najveću primenu našli u elektrotehnici i analizi vremenskih redova, pa je i terminologija koja se koristi prilagođena ovim oblastima.

Najopštije rečeno Furijeova analiza predstavlja metod razlaganja signala na zasebne harmonijske komponente. Za naše potrebe, možemo smatrati da signal čine tri dela: linearni trend ili odstupanja od srednje vrednosti signala, različite periodične ili ciklične, i slučajne komponente.

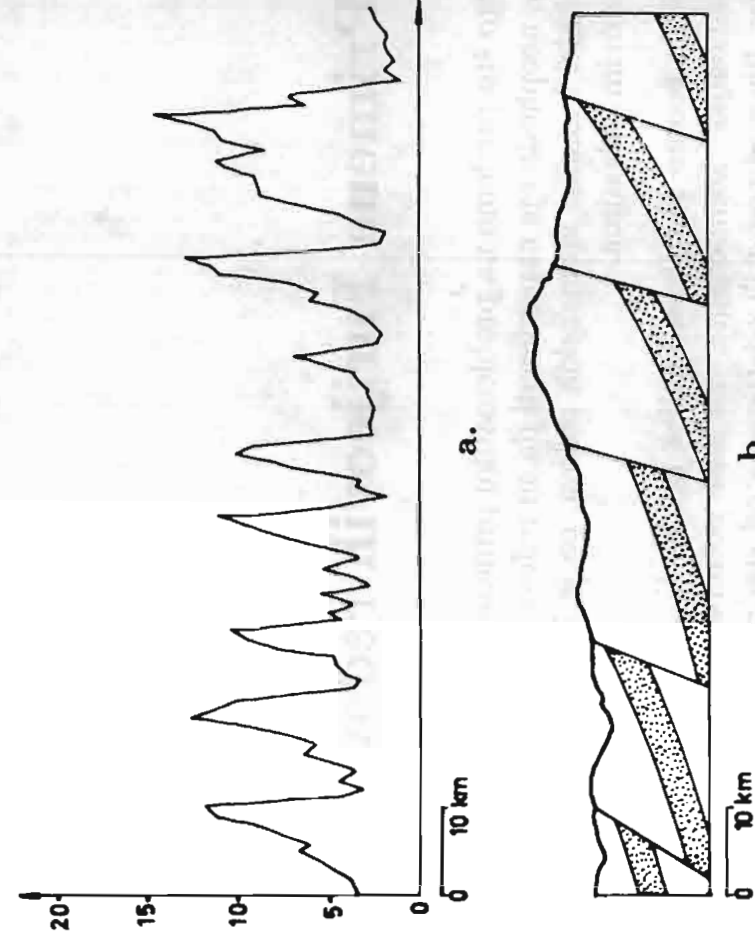
Pod signalom u geologiji i rudarstvu možemo podrazumevati: promenu sadržaja neke mineralne komponente, promenu debljine ležišta, elektrokaroataž istražne bušotine, mikrotremor, promene nekog fizičko-mehaničkog obeležja radne sredine, oscilacije nivoa podzemne vode u pijezometru, intermitirani režim rada mašina na rudniku, promene proizvodnih uslova, potrošnja materijalnih resursa na pr. eksploziva na rudniku, seizmički efekti miniranja i sl.

Korišćenje Furijeovih redova bazira na postavci da se složene promene (oscilacije) nekog obeležja mogu predstaviti u vidu sume dovoljnog broja prostih sinusoidalnih talasa. Amplitude i fazne uglove ovih prostih talasnih formi moguće je odrediti iz uslova bliskosti niza harmonika sa ulaznim (merenim) podacima.

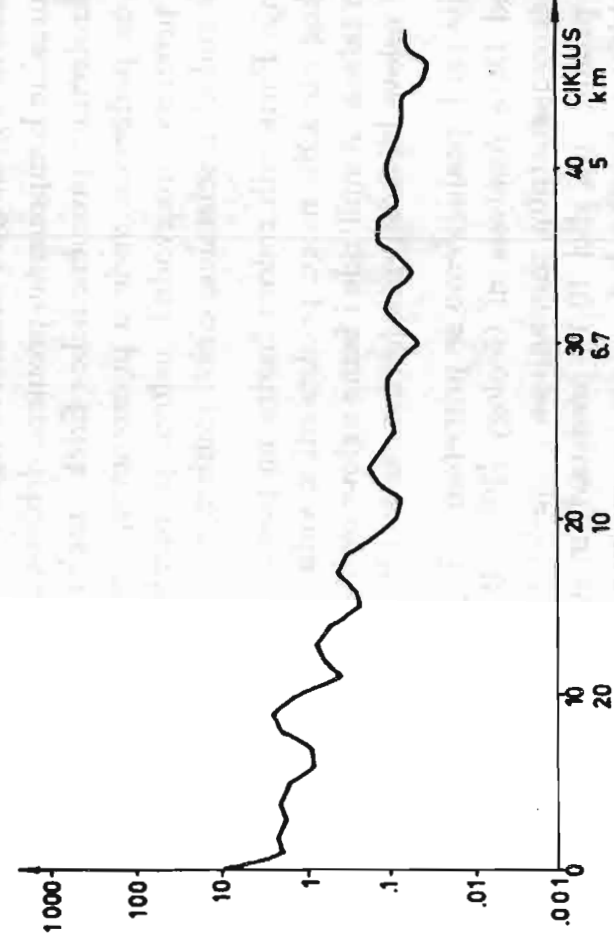
Ilustracije radi, poslužićemo se primerom iz knjige J.C. Dejvisa (J.C. Davis, *Statistics and Data Analysis in Geology* [19]). U istočnim rejonima centralne Kanada pri aeromagnetnim snimanjima primеćene su promene magnetne jačine po zadatom profilu. Na slici 10.1. predstavljeni su rezultati merenja. Kako je istraživana oblast pokrivena ledom, aero posmatranja dopuštala su pretpostavku da su registrovane magnetne promene posledica tektonskih uslova. Oblast je ispresecana rasedima, koji je praktično dele na niz blokova, u kojima se bazaltni

slojevi približavaju površini u zonama raseda. Činjenica da je magnetni profil imao periodičan karakter, navela je na misao, da su rasedi koji omeđuju blokove, regularno raspoređeni u prostoru.

Pošto su podaci dobijeni magnetnim merenjima bili dovoljno kompaktni, primenjena je Furijeova analiza, i energetski spektar, ukoliko postoji, može pokazati periodičnost.



Sl. 10.1. - Magnetni profil



Sl. 10.2. - Spektar dobijen Furijeovom analizom snimljenih aeromagnetnih podataka

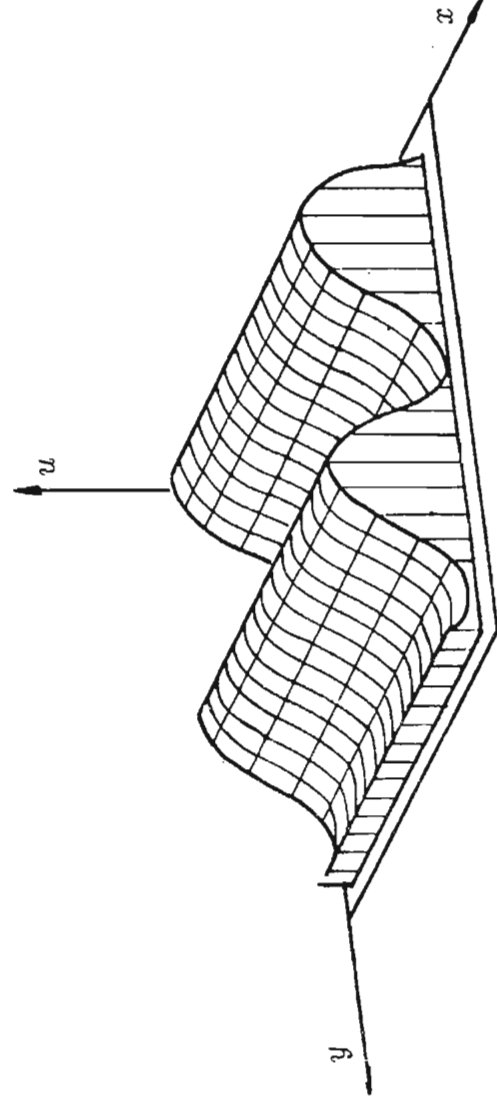
Na slici 10.2. Prikazan je energetski spaktar dobijen obradom signala prikazanog na slici 10.1. Najveći pik spektra odgovara dužini talasa približno 22 [km]. Drugi pik podudara se sa dužinom talasa 18 [km].

Ostali pikovi mogu biti dobijeni kao kombinacija harmonika koji odgovaraju ovim delovima. Aeromagnetni profil sadrži periodične komponente sa približnom talasnom dužinom od 20 km. Ovo je potvrdilo pretpostavku o tektonici istraživane zone.

Predhodni ilustrativni primer odnosi se na problem u ravni (preseku), za čija rešenja se koriste Furijeovi redovi tipa $f(x)$ sa jednom nezavisnom promenljivom.

Obrade problema sa dve nezavisne promenljive, mogu se obavljati dvostrukim Furijeovim redovima, naravno, uz uslov da je fizika problema takva da ima smisao primeniti Furijeovu analizu. U principu problem se svodi na aproksimaciju složene površi, koju možemo interpretirati kao sumu dva uzajamno-dejstvujuća skupa dvomernih sinusoidalnih talasa. Svaki od ovih skupova sadrži zbir harmonika sa različitim amplitudama i faznim uslovima. Radi ilustracije uzimamo sledeća četiri elementarna primera.

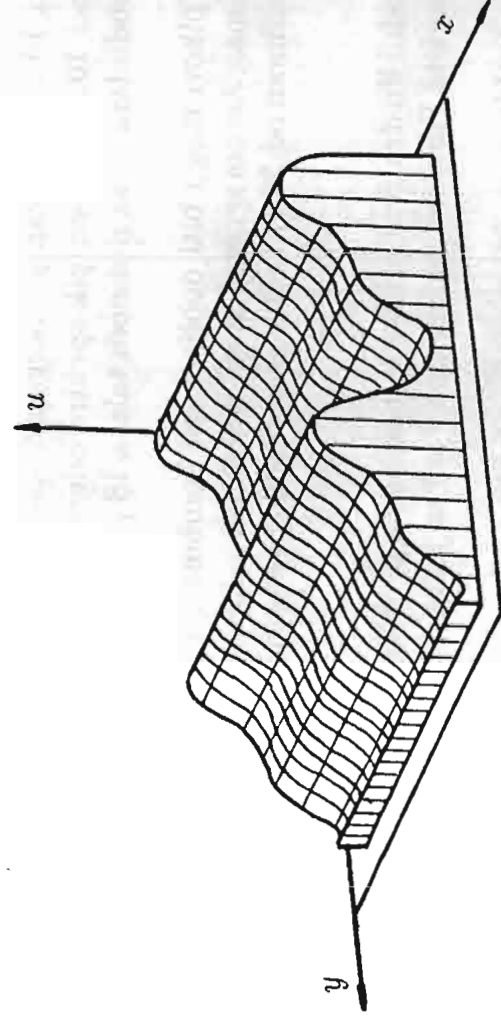
Na slici 10.3. prikazan je najprostiji primer formiranja složene površi pomoću dvostrukih Furijeovih redova. U ovom primeru harmonici u pravcu x -ose imaju nultu amplitudu, a harmonici u pravcu y -ose imaju amplitudu veću od nule i svi su međusobno jednaki.



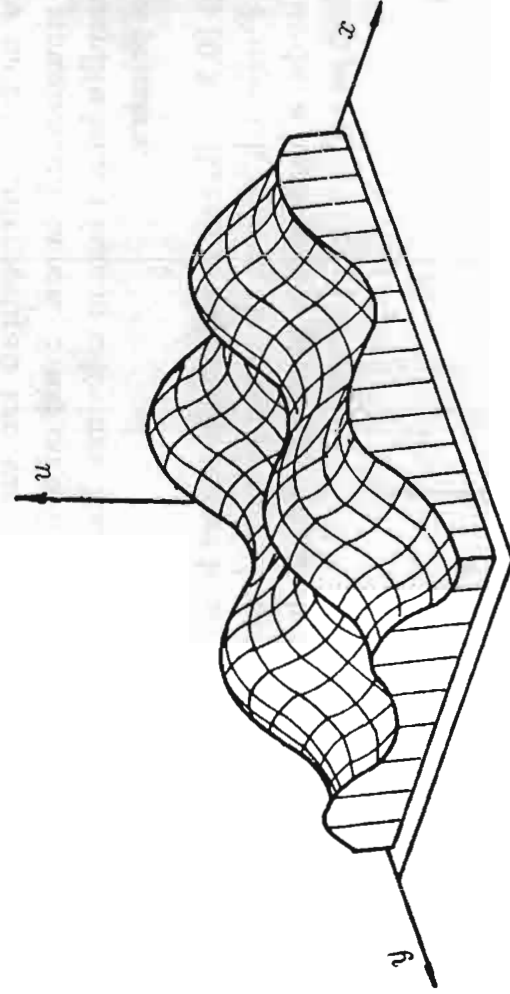
Sl. 10.3. -

U drugom primeru na slici 10.4. prikazana je nešto složenija površ koju oblikuju samo talasi u pravcu y -ose. Talas kao viši rezultatni harmonik formiraju dva prosta harmonika.

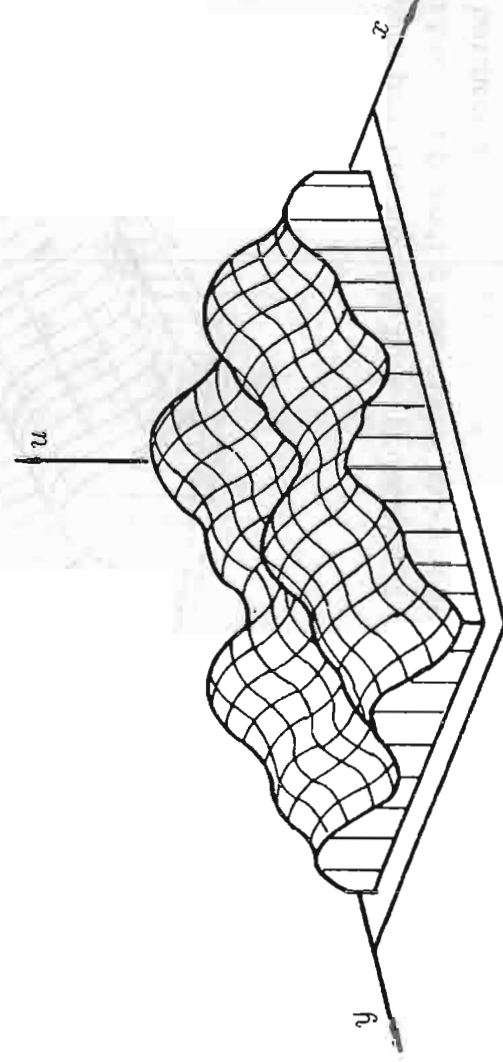
Složenija površ dobijena slaganjem prostih i jednakih harmonika po oba pravca prikazana je na slici 10.5. Još složenija površ prikazana je na slici 10.6. Ova površ je dobijena slaganjem viših harmonika po x i y -pravcu.



Sl. 10.4. -



Sl. 10.5. -



Sl. 10.6. -

Ova mala geneza, pokazuje da se dvostruki Furijeovi redovi mogu koristiti za formiranje vrlo složenih površi. O značenju površi u geološkom i rudarskom smislu, bilo je reči u odeljku o primeni splajnova, tako da se ovde na tome nećemo zadržavati.

Kod korišćenja dvostrukih Furijeovih redova za modeliranje površi, preporučljivo je da se dužine osnovnih talasa po oba perpendikularna pravca biraju tako da su jednake ili nešto duže od dimenzija zadate oblasti po pravcima. Ako su dužine talasa manje od veličina zadate oblasti tada će se Furijeova (aproksimativna) površina nekoliko puta ponoviti na prostoru zadate oblasti.

Generalno dvostruki Furijeovi redovi primenjuju se na klasama zadataka u geologiji i rudarstvu sa analognim temama za njihovo rešavanje polinomskom trend-analizom.

Čest je slučaj u geologiji da su promene modeliranih obeležja neregularne, pa je za izračunavanje koeficijenata dvostrukog Furijeovog reda potrebno rešiti sistem jednačina dat u odeljku 10.1.6. Pri ovome javlja se problem veličine matrice koja može biti toliko velika da je nemoguće rešavanje problema ovim postupkom na malim i srednjim računarima. Tako na pr. za dobijanje dvostrukog Furijeovog reda sa tri harmonika potrebno je izračunati 49 koeficijenata, a iterativna matrica za izračunavanje ovih koeficijenata sadrži 2450 elemenata.

Sledeći primer (S. Vujić, Matematičko modeliranje ležišta mineralnih sirovinna [79]) ilustruje primenu dvostrukih Furijeovih redova kod modeliranja površi. U konkretnom slučaju radi se o modeliranju prostorne promene sadržaja SiO_2 u kvarcnom pesku ležišta Oblaci kod Rgotine (v. odeljak 4.2.6.), zapravo reljef površi predstavlja promenu sadržaja SiO_2 u ležištu.

Informacije o sadržaju SiO_2 u ležištu dobijene istražnim bušenjem, zadate su u matricnoj formi:

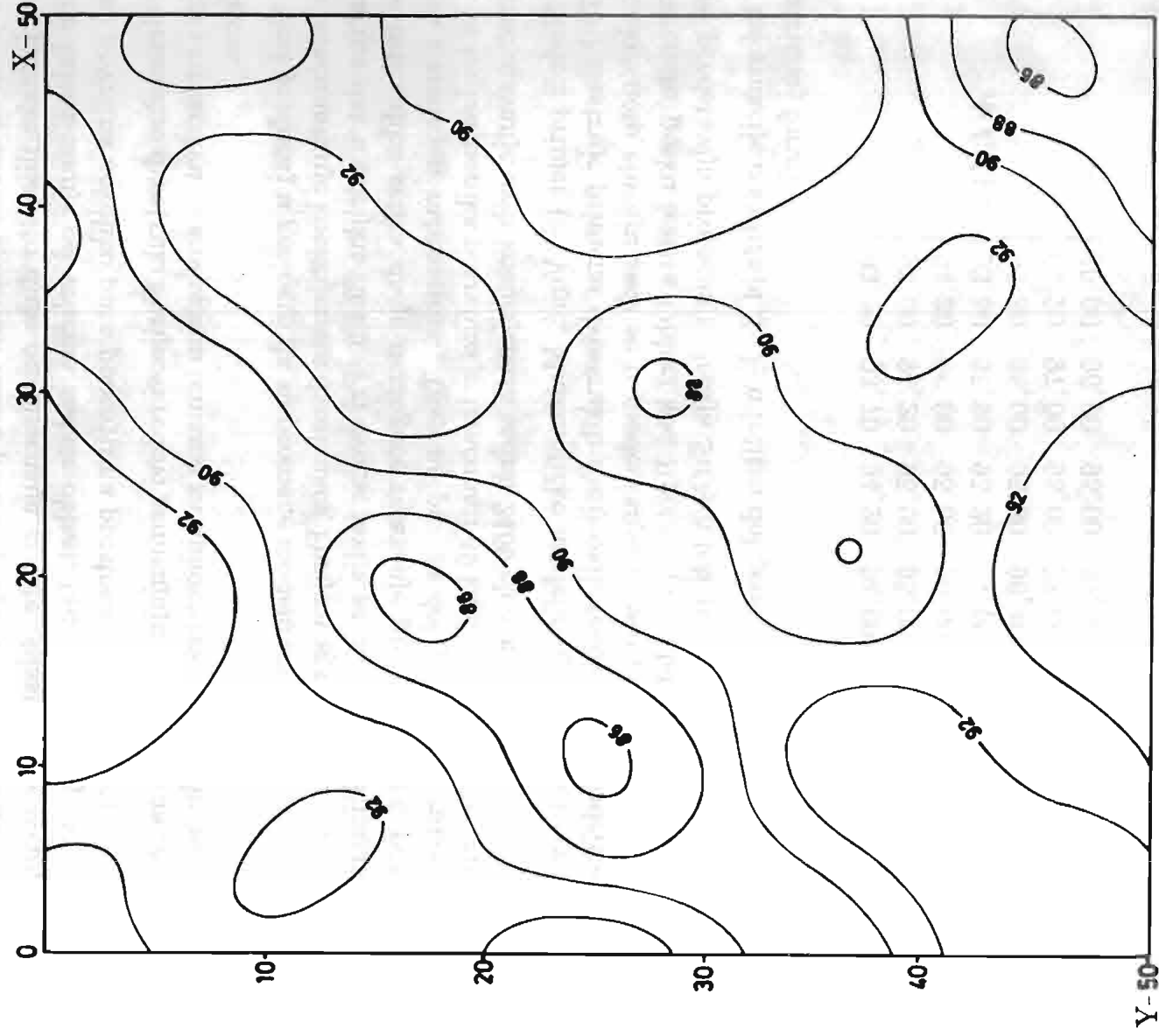
$$A(I, J) = \begin{bmatrix} 93,20 & 93,70 & 94,20 & 94,00 & 80,00 & 80,00 & 80,00 \\ 93,00 & 94,20 & 95,00 & 95,00 & 97,00 & 80,00 & 80,00 \\ 94,30 & 96,00 & 95,00 & 96,00 & 95,20 & 92,00 & 92,00 \\ 93,50 & 95,90 & 95,20 & 97,00 & 96,20 & 92,00 & 92,00 \\ 93,80 & 98,00 & 95,30 & 96,40 & 96,60 & 92,00 & 92,00 \\ 94,20 & 97,00 & 95,00 & 97,00 & 97,00 & 97,00 & 88,00 \\ 80,00 & 96,00 & 95,00 & 94,00 & 86,00 & 86,00 & 86,00 \end{bmatrix}$$

Napomena: vrednosti su u (%).

Dužine osnovnih talasa po x i y pravcu jednake su i iznose $\lambda_x = \lambda_y = 500$ [m]. Obrada na računaru je izvršena sa šest harmonika i dobijen je model prikazan na slici 10.7.

Analiza modela, pokazala je da on generalno pravilno oslikava prostornu promenu modeliranog obeležja, da je lokalno neprecizan sa velikom srednjom relativnom greškom i niskim koeficijentom korelacije.

Možemo zaključiti da je praktična primena Furijeovih redova prikladna kod rešavanja zadatka u kojima su dominantno izražene regionalne periodične promene modeliranog obeležja.



Sl. 10.7. - Model sadržaja SiO_2 u ležištu

13. BREWER, H. G.

PLASTIC

14. BRADY, S. O.

PLASTIC

15. BRADY, S. O.

PLASTIC

16. BRADY, S. O.

PLASTIC

17. BRADY, S. O.

PLASTIC

18. BRADY, S. O.

PLASTIC

19. BRADY, S. O.

PLASTIC

20. BRADY, S. O.

PLASTIC

21. BRADY, S. O.

PLASTIC

22. BRADY, S. O.

PLASTIC

23. BRADY, S. O.

PLASTIC

24. BRADY, S. O.

PLASTIC

25. BRADY, S. O.

PLASTIC

PLASTIC

Literatura

1. *Agterberg, F.P.* (1974), *GEOMATHEMATICS*, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam.
2. ALGORITMY I PROGRAMMY, Otrasl'evoi fond algoritmov i programm "Geologiya", VIEMS, Moskva. (bilteni iz 1988 i 1990. godine).
3. APPLICATION OF COMPUTERS AND OPERATIONS RESEARCH IN THE MINERAL INDUSTRY, International Symposium APCOM XIX, XX, XXI and XXII.
4. *Avdonin, V.V. i N.N. Shatagin* (1989.), *RESHENIE GEOLOGORAZVEDOCHNYH ZADACH NA EVM, MGU, Moskva.*
5. *Aziz, X. i É. Settari* (1982.), *MATEMATICHESKOE MODELIROVANIE PLASTOVYKH SISTEM, Nedra, Moskva.*
6. *Barnsley, M.* (1988.), *FRACTALS EVERYWHERE*, Academic Press, Inc., Boston, etc.
7. *Bathe, K.J. and E.L. Wilson* (1976.), *NUMERICAL METHODS IN FINITE ELEMENT ANALYSIS*, Prentice - Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
8. *Berezin, I.S. i N.P. Žitkov* (1963.), *NUMERIČKA ANALIZA*, Naučna Knjiga, Beograd.
9. *Bertolino, M.* (1970.), *METODE PRIMENJENE ANALIZE*, Zavod za izdavanje udžbenika, Beograd.
10. *Bondarenko, V.N.* (1989.), *SISTEMNYI PODKHOD K MODELIROVANIIYU RUDNYKH MESTOROZHDENII*, Akademiya nauk SSSR, Moskva.
11. *Brandenberger, J. und R. Konrad* (1965.), *NETZPLANTECHNIK*, Verlag industrielle Organisation, Zürich.
12. *Brigham, E.O.* (1982.), *FFT SCHNELLE FOURIERTRANSFORMATION*, R. Oldenbourg Verlag, München - Wien.
13. *Busacker, R.G. and T.L. Saaty* (1973.), *FINITE GRAPHS AND NETWORKS*, Mc Graw - Hill Book Company, New York, etc.

14. *Carlier, A.* (1964.), CONTRIBUTION AUX METHODES D'ESTIMATION DES GISEMENTS D'URANIUM, CEA, Paris.
15. *Chenevert, M.E., F. Williams and H. Hekimian* (1983.), APPLIED DRILLING ENGINEERING MANUAL, Gulf Publishing Company, Houston etc.
16. COMPUTERS AND GEOSCIENCES, An International Journal, Pergamon Press, Oxford etc. (brojevi od 1983 do 1989.).
17. *Cvetković, D. i M. Milić* (1977.), TEORIJA GRAFOVA I NJENE PRIMENE, Naučna knjiga, Beograd.
18. *David, M.* (1977.), GEOSTATISTICAL ORE RESERVE ESTIMATION, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam etc.
19. *Davis, J.C.* (1973.), STATISTICS AND DATA ANALYSIS IN GEOLOGY, Wiley International Edition, New York, etc.
20. *Dobrynin, V.N. i E.N. Cheremisina* (1988.), MATEMATICHESKIE METODY I SREDSTAVA VYCHISLITEL'NOI TEHNIKI V GEOLOGOPROGNOZNYH ISSLEDOVANIYAH, Nedra, Moskva.
21. *Filchakov, P.F. i V.I. Panchishin* – redaktori (1972.), MATEMATICHESKOE MODELIROVANIE POTENCIAL'NYH POLEI, Akademiya nauk Ukrainskoi SSR, Kiev.
22. *Gel'fand, I.M.* (1971.), LEKCHII PO LINEINOI ALGEBRE, Nauka, Moskva.
23. *Golinski, J.* (1974.), METODY OPTYMALIZACYJNE W PROJEKTOWANIU TECHNICZNYM, Wydawnictwa naukowo-techniczne, Warszawa.
24. *Grebnikov, A.I.* (1983.), METOD SPLAINOV I RESHENIE NEKORREKTYNYH ZADACH TEORII Priblizhenii, Izdatel'stvo Moskovskogo universiteta, Moskva.
25. *Gzovskii, M.V.* (1971.), MATEMATIKA V GEOTEKTONIKE, Nedra, Moskva.
26. *Hamming, R.W.* (1973.), NUMERICAL METHODS FOR SCIENTISTS AND ENGINEERS, Mc Graw-Hill Kogakusha, Ltd., Tokyo, etc.
27. *Harary, F.* (1969.), GRAPH THEORY, Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, etc.
28. *Harbaugh, J.W. and G. Bonham-Carter* (1970.), COMPUTER SIMULATION IN GEOLOGY, Wiley-Interscience, New York, etc.
29. *Ivanović, B.* (1973.), TEORIJSKA STATISTIKA, Naučna knjiga, Beograd.
30. *Ivković, Z.* (1980.), MATEMATIČKA STATISTIKA, Naučna knjiga, Beograd.

31. *Jovičić, V.* (1989.), *VENTILACIJA RUDNIKA*, Rudarsko-geološki fakultet, Beograd.
32. *Kim, Y.S.* (1980.), *KRATKI KURS SIMULACIJE RUDARSKIH SISTEMA PRIMENOM DIGITALNIH RAČUNARA*, Rudarski institut, Zemun.
33. *Kogan, R.I., Yu.P. Belov i D.A. Rodionov* (1983.), *STATISTICHESKIE RANGOVYE KRITERII V GEOLOGII*, Nedra, Moskva.
34. *Kosniowski, C.* (1980.), *A FIRST COURSE IN ALGEBRAIC TOPOLOGY*, Cambridge University Press, Cambridge etc.
35. *Krasnoshchekov, P.S. i A.A. Petrov* (1983.), *PRINCIPY POSTROENIYA MODELEI*, Izdatel'stvo Moskovskogo Universiteta, Moskva.
36. *Krumbein, W.C. and F.A. Graybill* (1965.), *AN INTRODUCTION TO STATISTICAL MODELS IN GEOLOGY*, McGraw-Hill Book Co., New York.
37. *Kurnosov, A.M. i I.B. Kudin* (1984.), *SOVERSHENSTVOVANIE METODOV MATEMATICHESKOGO PROGRAMIROVANIYA V GORNOM DELE*, Nauka, Moskva.
38. *Mal'cev, A.I.* (1970.), *OSNOVY LINEINOI ALGEBRY*, Nauka, Moskva.
39. *Margolin, A.M.* (1974.), *OCENKA ZAPASOV MINERAL'NOGO SYR'YA MATEMATICHESKIE METODY*, Nedra, Moskva.
40. (1984.), *MATEMATICHESKAYA GEOLOGIYA I GEOLOGICHESKAYA INFORMACIYA*, XXVII-i Mezhdunarodnyi geologicheskii kongress, Sekciya S.20, Nauka, Moskva.
41. *Matheron, G.* (1963.), *PRINCIPLES OF GEOSTATISTICS*, Ec. Geology V.58, N° 8.
42. *Matheron, G.* (1967.), *TRAITÉ DE GEOSTATISTIQUE APPLIQUÉ*, Mir, Moskva. (na ruskom).
43. *Matheron, G.* (1975.), *RANDOM SETS AND INTEGRAL GEOMETRY*, John Wiley and Sons, New York etc.
44. *Mesarović, M.D., D. Macko i Y. Takahara* (1972.), *TEORIJA HIJERARHIJSKIH SISTEMA SA VIŠE NIVOVA*, Informator, Zagreb.
45. *Milanović, V.G.* (1981.), *NUMERIČKA ANALIZA*, Institut za dokumentaciju zaštite na radu, Niš.
46. *Milivojčević, M. i Š. Vujić* (1989.), METODE ZA REŠAVANJE STRUJANJA PODZEMNIH VODA KOD OD-

VODNJAVANJA RUDNIKA, Univerzitet u Beogradu, Rudarsko-geološki fakultet, Beograd.

47. *Norrle, D.H. and G. de Vries*, (1978.), AN INTRODUCTION TO FINITE ELEMENT ANALYSIS, Academic Press, New York, etc.
48. *Otnes, R.K. and L. Enochson* (1978.), APPLIED TIME SERIES ANALYSIS, Volume I, Basic Techniques, John Wiley and Sons, New York, etc.
49. *Pejović, P. i N. Đuranović-Miličić* (1977.), ELEMENTI NUMERIČKE ANALIZE, Privredno finansijski vodič, Beograd.
50. *Pejović, P.* (1988.), NUMERIČKA ANALIZA, I i II deo, Naučna knjiga, Beograd.
51. *Petrić, J.* – redaktor (1970.), MREŽNO PLANIRANJE I UPRAVLJANJE, OEP – Informator, Zagreb.
52. *Petrić, J.* (1979.), NELINEARNO PROGRAMIRANJE, IŠRO Privredno finansijski vodič, Beograd.
53. *Radević, V. i S. Vujić* (1977.), METODE OPTIMIZACIJE – PRIMENA LINEARNOG PROGRAMIRANJA U POVRŠINSKOJ EKSPLOATACIJI, Univerzitet u Beogradu Rudarsko-geološki fakultet, Beograd.
54. *Reznichenko, S.S.* (1981.), MATEMATIČESKOE MODELIROVANIE V GORNOI PROMYSHLENNOSTI, Nedra, Moskva.
55. *Rodionov, D.A.* (1981.), STATISTIČESKIE RESHENIYA V GEOLOGII, Nedra, Moskva.
56. *Radionov, D.A.* i grupa autora (1987.), PRIMENENIE MATEMATIČESKIH METODOV PRI POISKAH I RAZVEDKE MESTOROZHDENII TVERDYH POLEZNIH ISKOPAEMYH, Intergeoekonomika, Moskva.
57. *Ryzhov, P.A. i V.M. Gudakov* (1966.), PRIMENENIE MATEMATIČESKOEI STATISTIKI PRI RAZVEDKE NEDR, Nedra, Moskva.
58. *Ryzhov, P.A.* (1973.), MATEMATIČESKAYA STATISTIKA V GORNOM DELE, Vysshaya Shkola, Moskva.
59. *Rzhevskii, V.V.* (1966.), PROEKTIROVANIE PLANIROOVANIE I UPRAVLENIE PROIZVODSTVOM NA KARERAH POSREDSTVOM EVM, Nedra, Moskva.
60. *Shatagin, N.N. i V.I. Shegalov* (1989.), MODELIROVANIE MESTOROZHDENII I RUDNYH POLEI NA EVM, Vysshee obrazovanie, Moskva.
61. *Shestakov, Yu.G.* (1988.), MATEMATIČESKIE METODY V GEOLOGII, Izdatel'stvo Krasnoyarskogo Universiteta, Krasnoyarsk.

62. *Shor, Ya.B.* (1962.), STATISTICHESKIE METODY ANALIZA I KONTROL'YA KACHESTVA I NADEZHNOСТИ, Sovetskoe radio, Moskva.
63. *Shurygin, A.M.* (1978.), STATISTIKA PRI PODSCHETE ZAPASOV MESTOROZHDENII, MGU, Moskva.
64. *Simkin, B.A. i Yu.K. Shkuta* (1976.), ANALITICHESKOE MODELIROVANIE MESTOROZHDENII I IH OTKRYTOIRAZRABOTKI, Nauka, Moskva.
65. *Sobol', I.M.* (1973.), CHISLENNYE METODY MONTE KARLO, Nauka, Moskva.
66. *Späth, H.* (1983.), SPLINE-ALGORITHMEN ZUR KONSTRUKTION GLÄTTER KURVEN UND FLÄCHEN, Reihe Datenverarbeitung R. Oldenbourg, Verlag, München - Wien.
67. *Stanoyević, R.* (1970.), UVOD U OPERACIONA ISTRAŽIVANJA, Institut za ekonomiku industrije, Beograd.
68. *Stechkin, S.B. i Yu.N. Subbotin* (1976.), SPLAINY V VYCHISLITEL'NOI MATEMATIKE, Nauka, Moskva.
69. *Stojanović, S.* (1980.), MATEMATIČKA STATISTIKA, Naučna knjiga, Beograd.
70. *Stojaković, Z. i D. Herceg* (1983.), NUMERIČKE METODE LINEARNE ALGEBRE, Zbirka zadataka, IRO Građevinska knjiga, Beograd.
71. SYM-OP-IS, Jugoslovenski simpozijum o operacionim istraživanjima, zbornici radova sa XIV, XV, XVI i XVII-tog.
72. *Trembecki, A.S.* (1969.), MATEMATYCZNE METODY W GORNICTWIE, Slask, Katowice.
73. *Trembecki, A.S.* (1974.), SZACOWANIE ZASOBOW ZLOZ SUROWSOW MINERALNYCH, Warszawa.
74. *Vorob'ev, N.N.* (1974.), TEORIYA IGR LEKcii DLYA ÉKONOMISTOV-KIBERNETIKOV, Izdatel'stvo Leningradskogo Universiteta, Leningrad.
75. *Vujić, S.* (1975.), OPTIMIZACIJA TEHNOLOŠKIH PROCESA U POV. EK-SPLOATACIJI PRIMENOM LINEARNOG PROGRAMIRANJA, (mag.rad), Univerzitet u Beogradu, Rudarsko-geološki fakultet, Beograd.
76. *Vujić, S.* (1980.), MODIFIKACIJA METODE KONAČNIH RAZLIKA RADI PRIMENE KOD MODELIRANJA LEŽIŠTA MINERALNIH SIROVINA, Zbornik radova sa Savetovanja o naučnim i tehničko-tehnološkim istraživanjima u geologiji, rudarstvu i metalurgiji Jugoslavije, Naum.
77. *Vujić, S.* (1982.), COMPARATIVE ANALYSIS AND EVALUTION OF THE

- DISCRETE INTERPOLATION. THE METHOD OF FINITE DIFFERENCES AND THE SURFACE DIRECTED ANALYSIS FOR THE MATHEMATICAL MODELING OF MINERAL RESOURCES, IAGOD, VI Symposium. Tbilisi.
78. *Vujić, Stevan* (1983.), UTVRĐIVANJE OPTIMALNOG EKSPLOATACIONOG VEKA MAŠINA NA POVRŠINSKIM KOPOVIMA PRIMENOM TEORIJE ZAMENE, Univerzitet u Beogradu, Rudarsko-geološki fakultet, Beograd, (magistarski rad).
79. *Vujić, S.* (1983.), THE INFLUENCE OF POLYNOMIAL DEGREES ON THE EXACTNESS OF MATHEMATICAL MODELS OF ORE DEPOSITS BASED ON THE TREND ANALYSIS, The Symposium The Mining Program in Science and Technique – International Section Mathematical methods in geology, Pribram.
80. *Vujić, S.* (1985.), MATEMATIČKO MODELIRANJE LEŽIŠTA MINERALNIH SIROVINA, Univerzitet u Beogradu, Rudarsko-geološki fakultet, Beograd, rad.
81. *Vujić, S., M. Ratković-Vujić i T. Todorović* (1986.), MODELAGE MATHEMATIQUE DISCRETE DES VARIATIONS EN ESPACE DES CARACTERISTIQUES GEOMECANIQUES AGISSANTES DU SOL DANS LE BUT D'ANALYSER LA STABILITE DES TALUS PAR LA VOIE D'ORDINA-TEUR ELECTRONIQUE, V International Congress on Engineering Geology, Buenos Aires.
82. *Vujić, S. i M. Ljubinović* (1989.), IZBOR OPTIMALNOG SISTEMA BAGER – DAMPERI NA POV. KOPOVIMA MULTIVARIJANTNOM ANALIZOM, Sym-Op-is XVI, str.365-368., Kupari.
83. *Vujić, S.* (1990.), PLANIRANJE PROIZVODNJE NA RUDNICIMA POMOĆU CELOBROJNOG PROGRAMIRANJA, Sym-Op-is XVII, str.387-391., Kupari.
84. *Vujić, S.* (1990.), UTICAJ PRIMENE RAČUNARSKE TEHNIKE NA RAZVOJ RUDARSKE I GEOLOŠKE NAUKE I PRAKSE, Univerzitet na pragu XXI veka, Univerzitet u Beogradu, Beograd. (srt.259-264.).
85. *Vukadinović, S.* (1973.), ELEMENTI TEORIJE VEROVATNOĆE I MATEMATIČKE STATISTIKE, NIP Privredni pregled, Beograd.
86. *Vukadinović, S. i D.B. Teodorović* (1979.), ELEMENTI TEORIJE POUZDANOSTI I TEORIJE OBNAVLJANJA TEHNIČKIH SISTEMA, Privredni pregled, Beograd.
87. *Vukadinović, S.* (1988.), MASOVNO OPŠLUŽIVANJE, Naučna knjiga, Beograd.
88. *Vukadinović, S. i J. Popović* (1989.), METODA MONTE KARLO, Sao-

braćajni fakultet, Beograd.

89. *Vuleta, J.* (1985.), *METODE EKSTREMIZACIJE NA GRAFOVIMA*, Naučna knjiga, Beograd.
90. *Walpole, R.E.* (1968.), *INTRODUCTION TO STATISTICS*, The Macmillan Company, New York/Collier - Macmillan Limited, London.
91. (1988.) *ZBORNIK RADOVA I JUGOSLOVENSKOG SIMPOZIJUMA O PRIMENI MATEMATIČKIH METODA I RAČUANRA U RUDARSTVU I GEOLOGIJI*, knjiga 1 i 2, br.ref.138, str.1251, urednik: S. Vujić, SITRGMJ, Beograd.
92. *Zielinsky, R.* (1970.), *METODY MONTE CARLO*, Warszawa.
93. *Zionts, S.* (1974.), *LINEAR AND INTEGER PROGRAMMING*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
94. *Zvikov, A.A.* (1969.), *TEORIJA KONEČNIKH GRAFOV*, Novosibirsk.
95. *Yamane, T.* (1973.), *STATISTICS, AN INTRODUCTORY ANALYSIS*, Harper International Edition, New York.

Prof.dr inž. Slobodan B. Vujić

rođen je 1947. godine. Diplomirao je na Smeru za elektrotehniku i mašinstvo i Smeru za površinsku eksploataciju Rudarsko-geološkog fakulteta u Beogradu. Na istom fakultetu magistrirao je na problematici iz Operacionih istraživanja, a doktorirao na problematici iz oblasti matematičkog modeliranja.

Autor je ili koautor preko 90 naučnih i stručnih radova, tri monografije, dve skripte, trinaest naučnih projekata, preko 45 privrednih projekata, investicionih programa i studija i većeg broja softverskih paketa.

Profesor je na Rudarsko-geološkom fakultetu Univerziteta u Beogradu i predsednik Komiteta za primenu matematičkih metoda i računara u geologiji, rudarstvu i metalurgiji Saveza inženjera i tehničara rudarske, geološke i metalurške struke Jugoslavije.

Prof.dr Aleksandar P. Ivić, dipl. mat, rođen je 1949. godine. Diplomirao je Matematiku na Prirodnomatematičkom fakultetu u Novom Sadu, a magistrirao i doktorirao na Prirodnomatematičkom fakultetu u Beogradu iz oblasti Teorije brojeva.

Autor je preko 70 naučnih radova iz multiplikativne Teorije brojeva i Rimanove zeta - funkcije, kao i tri monografije štampane u Amsterdamu, Parizu i Njujorku.

Od 1976. godine radi na Rudarsko - geološkom fakultetu u Beogradu, gde je 1988. godine postao redovni profesor.

Dopisni je član Srpske akademije nauka i umetnosti.

