S. ALJANČIĆ

UVOD U REALNU I FUNKCIONALNU ANALIZU

U N I V E R Z I T E T   U   B E O G R A D U

S. Aljančić

UVOD U REALNU I FUNKCIONALNU ANALIZU

IZDAVAČKO PREDUZEĆE
GRAĐEVINSKA KNJIGA
BEOGRAD, 1968.

Rešenjem rektora Univerziteta u Beogradu broj 1998 od 13. jula 1968. godine, na predlog Univerzitetske komisije za udžbenike, ova knjiga primljena je kao stalan univerzitetski udžbenik.

Za preduzeće odgovara: *Ljubica Jurela,* glavni urednik
Urednik: *Dragomir Lazin* — Tehnički urednik: *Emilija Božinović*
Korektor: *Vuka Ivanović* — Naslovna strana: *Aleksandar Pajvančić*

Štampa: Beogradski grafički zavod

Primedbe koje su mi, pročitavši rukopis u celini ili samo neke njegove delove, učinile kolege dr D. Adamović, mr D. Aranđelović, mr S. Ivanov, dr Đ. Kurepa (u svojstvu recenzenta), dr M. Marjanović i dr S. Prešić doprinele su da su pojedina mesta u izlaganju postala preciznija i jasnija. Prijatna mi je dužnost da im na tome ovde zahvalim.

Zahvalnost dugujem i izdavačkom preduzeću Građevinska knjiga što se prihvatilo izdavanja knjige i omogućilo da njena tehnička izrada bude na zavidnom nivou, kao i kolektivu Beogradskog grafičkog zavoda čiji radnici nisu žalili truda da ovaj relativno komplikovan matematički tekst brzo i na najbolji mogući način dobije svoj oblik.

Beograd, 28. septembra 1968. S. A.

$f: X \xrightarrow{\text{na}} Y \; (\forall y \in Y)(\exists x \in X) \therefore y = f(x)$

S A D R Ž A J

IV. BANACHOV PROSTOR

PREDGOVOR

Materijal koji obuhvata ova knjiga, ili bar njegov pretežni deo, izlagan je tokom niza godina prvo na postdiplomskim studijama a zatim i u okviru predmeta Analiza III na redovnim studijama Matematičke grupe Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Beogradu.

Apstraktne teorije savremene Matematičke analize, tačnije, samo neke od postojećih, krajnji su cilj do koga ova knjiga želi da dovede studenta, ali isto tako i da usput precizira i produbi njegova znanja iz Klasične analize. Jer, nije lako, najmanje početniku, da shvati puni smisao i značaj novih teorija ako u potpunosti nije sagledao kamene-temeljce Klasične analize. Istorijski gledano, osnovni pojmovi vezani za Analizu — skup brojeva, konvergencija, funkcija, neprekidnost, izvod i integral — dobili su prvo kroz Teoriju realnih funkcija na preciznosti i dubini, da bi ih zatim savremena Topologija i Funkcionalna analiza dovele do krajnje opštosti i dale im puni zamah. Ovaj udžbenik uvodnog karaktera mogao je da vodi računa o oba ova razvitka jedino na taj način što se ograničio samo na osnovne stvari. Čitalac koji želi da upotpuni svoja znanja upućuje se u tekstu na udžbenike i monografije svetske literature.

Lebesgueova teorija mere i integrala s jedne i Banachovi i Hilbertovi prostori s druge strane glavni su domet knjige. Prve dve glave, skupovi i metrički prostori, služe kao priprema. Da bi početniku bilo olakšano savlađivanje obilja novih pojmova, izlaganje je pretežno induktivno — od pristupačnijih uopštenja ka onim najopštijeg karaktera. Zato opštim topološkim prostorima prethode metrički prostori. Iz istog razloga, između dve krajnosti da se Teorija mere i integracije izloži na klasičan način ili u apstraktnoj formi, izabrano je jedno srednje rešenje u vidu konstruktivnog izlaganja koje čitaocu ipak daje uvid u apstraktan način prilaženja teoriji.

Ali jedino primene apstraktnih teorija na konkretne probleme mogu čitaocu-početniku da pruže dublje razumevanje pojedinih teorija i da opravdaju njihovo uvođenje. U tom cilju, već u drugoj glavi primena Banachovog stava o nepokretnoj *tački na stavove egzistencije iz Algebre i iz Analize ilustruje obuhvatnost metoda Funkcionalne analize. Istom cilju služe i različite primene principa konvergencije, principa uniformne ograničenosti i principa zatvorenog grafika u teoriji redova i integrala, u teoriji zbirljivosti i u teoriji Fourierovih redova, kao i geometrizacija teorije Fourierovih redova u okviru Hilbertovih prostora. Naravno, izbor primena je bitno bio uslovljen predznanjem koje se pretpostavljalo da ima mladi student.*

Jedino prethodno znanje koje se efektivno zahteva od čitaoca ove knjige jeste poznavanje Diferencijalnog i integralnog računa i delova Linearne algebre, mada bi mu i detaljnije poznavanje klasičnih prilaza nekim osnovnim problemima teorije Fourierovih redova i teorije konvergencije i zbirljivosti redova svakako bilo od koristi da kod pojedinih primena bolje proceni preimućstva metoda Funkcionalne analize (a i njenih mogućnosti) pri tretiranju tih istih problema.

U okviru svake glave pojedini odeljci numerisani su otpočetka arapskim a pododeljci, ukoliko ih uopšte ima, još i malim rimskim ciframa. Međutim, numeracija definicija, stavova, primera i obrazaca teče neprekidno kroz čitav odeljak. Pri pozivanju, na primer, na stav II.3.5, reč je o 5. stavu 3. odeljka II glave; oznaka glave, pa i odeljka otpadaju ukoliko se ima u vidu stav iz iste glave odnosno iz istog odeljka.

Beograd, 10. maja 1967. *S. A.*

I. ELEMENTI TEORIJE SKUPOVA

1. Uvod

Skupovi brojeva odavno su prestali da budu isključivo područje na kojem se izgrađuje Matematematička analiza. I mnogi drugi skupovi služe danas istom cilju. No i ovi moraju imati neke osobine: da poseduju određenu osnovnu strukturu, koja omogućuje izgradnju odgovarajuće teorije. Ukoliko je ta osnovna struktura bogatija, utoliko će raznovrsnija biti i teorija koja se na njoj zasniva. Kakvom osnovnom strukturom treba snabdeti neki apstraktni (amorfni) skup, može da odluči jedino korisnost teorije koja se na njoj može izgraditi. Struktura skupa realnih brojeva je jedna takva, pa nam ona, za početak, može poslužiti kao putokaz. Zato, mada pretpostavljamo da je čitaocu poznata teorija realnih brojeva, ovde navodimo osobine koje karakterišu ovaj skup:

A. U skup realnih brojeva R mogu se uvesti dve operacije — *sabiranje* i *množenje* — tako da svakom uređenom paru realnih brojeva (x, y) odgovora realni broj *zbir* i realni broj *proizvod* koje označavamo sa $x+y$, odnosno sa xy. Za ove operacije važi:

1° *komutativni zakon*: $x+y=y+x$ odnosno $xy=yx$;

2° *asocijativni zakon*: $(x+y)+z=x+(y+z)$ odnosno $(xy)z=x(yz)$;

3° *distributivni zakon*: $x(y+z)=xy+xz$;

4° postoje realni brojevi 0 i 1, *neutralni elementi* sabiranja odnosno množenja, takvi da je $x+0=x$, odnosno $x1=x$;

5° sabiranje i množenje dopuštaju inverzne operacije — *oduzimanje* i *deljenje* — tj.:

svakom paru realnih brojeva (x, y) odgovara realni broj z — njihova *razlika* $x-y$ — takav da je $x=y+z$;

svakom paru realnih brojeva (x, y), od kojih je drugi $\neq 0$, odgovara realni broj z — njihov *količnik* x/y — takav da je $x=yz$.

B. Između realnih brojeva postoji *poredak*, uveden relacijom $\leqslant$, tako da za bilo koja dva realna broja x i y važi $x \leqslant y$ ili $y \leqslant x$. Specijalno, ako je $x \leqslant y$ i $x \neq y$, pišemo $x<y$. S tom oznakom za bilo koja dva realna broja važi $x<y$, $x=y$ ili $y<x$.

Poredak je povezan sa operacijama sabiranja i množenja na ovaj način:

(1) iz $y<z$ sledi $x+y<x+z$,

i

(2) iz $y<z$ i $x>0$ sledi $xy<xz$.

C. Ako realne brojeve podelimo u dve klase, A i B, tako da (1) svaki realni broj leži u jednoj od klasa A i B, (2) svaka od klasa A i B sadrži bar jedan realan broj, (3) svaki broj iz klase A je manji od bilo kog broja iz klase B — tada ili klasa A ima najveći broj ili klasa B ima najmanji broj (*Dedekindov aksiom neprekidnosti*).

Često skupu realnih brojeva R pridodajemo još dva *fiktivna elementa*, $-\infty$ i $+\infty$, koji su na sledeći način povezani sa realnim brojevima:

1° $-\infty < x < +\infty$ za svaki realni broj x;

2° za $x > -\infty$ važi: $x+(+\infty)=x-(-\infty)=+\infty$,

za $x < +\infty$ važi: $x+(-\infty)=x-(+\infty)=-\infty$,

za $x>0$ važi: $x(+\infty)=+\infty$ i $x(-\infty)=-\infty$,

za $x<0$ važi: $x(+\infty)=-\infty$ i $x(-\infty)=+\infty$,

$1/(+\infty)=0$ i $1/(-\infty)=0$.

x/y treba tumačiti kao $x\cdot\frac{1}{y}$, kad god ovaj proizvod ima smisla. Skup realnih brojeva kome su pridodati fiktivni elementi zovemo *prošireni* skup realnih brojeva i označavamo ga sa R^*.

Poredak nam omogućuje da definišemo *otvoren* i *zatvoren razmak*; ove ćemo označavati sa $]a, b[$ odnosno sa $[a, b]$. Ako je u nekom razmatranju irelevantno da li je u pitanju otvoren ili zatvoren razmak, pisaćemo (a, b).

Sa A. i B. su date *algebarska* odnosno *struktura poretka* skupa realnih brojeva. Obrasci (1) i (2) povezuju ove dve strukture. Okolina nekog realnog broja (svaki otvoren razmak koji ga sadrži) — pomoću koje se definiše granični proces u R — karakteriše zajedno sa Dedekindovim aksiomom *topološku strukturu* skupa realnih brojeva.

Poređenja radi, primećujemo da skup racionalnih brojeva ima sličnu algebarsku i sličnu strukturu poretka kao skup realnih brojeva, ali da u njemu ne važi Dedekindov aksiom. To ga čini neadekvatnim područjem za izgradnju teorije graničnih procesa. Čitaocu prepuštamo da strukturu skupa kompleksnih brojeva i strukturu skupa trodimenzionih vektora uporedi sa strukturom realnih brojeva.

U ovoj glavi 2. odeljak posvećen je operacijama sa (apstraktnim) skupovima, a 3. pojmu funkcionalne zavisnosti ili preslikavanja između takvih skupova. U 4. odeljku uvedene su dve binarne relacije — relacija ekvivalencije, koja uopštava pojam identičnosti, i relacija poretka iz koje proizlazi struktura poretka — delimičnog ili totalnog. Kao ilustracija jednog skupa sa totalnim poretkom naveden je u 5. odeljku skup beskonačnih kardinalnih brojeva. Pojam kardinalnog broja omogućuje nam da i skupove sa beskonačno mnogo elemenata upoređujemo međusobno „po broju“ elemenata koje sadrže.

2. Skupovi i operacije sa njima

Nemoguće je dati definiciju apstraktnog skupa, a da se ona ne svede na jedan od sinonima: kolekcija, klasa, familija ili nešto tome slično. Jer, elementi nekog apstraktnog skupa nisu ničim drugim okarakterisani do svojom pripadnošću dotičnom skupu.

Skupove ćemo, kad god je to moguće, obeležavati velikim, a njihove elemente (tačke) malim slovima.

Skup je *konačan* ako ima konačno mnogo elemenata; inače je *beskonačan*.

Uobičajene su sledeće oznake:

$a \in A$, $a \notin A$: elemenat a pripada odnosno ne pripada skupu A.

$\{x : x$ ima osobinu $P\}$: skup čiji elementi x imaju osobinu P.

$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$: skup čiji su elementi $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Specijalno, $\{a\}$ je skup s jednim jedinim elementom a. Treba razlikovati a od $\{a\}$.

$A = B$: skupovi A i B se poklapaju, imaju iste elemente.

$A \subset B$: skup A je sadržan u skupu B, tj. svaki element skupa A je i element skupa B (*inkluzija* između skupova). Pri tome, $A \subset B$ ne isključuje mogućnost da je $A = B$. Ako je $A \subset B$ i $A \neq B$, kažemo da je A *pravi deo* od B ili da je inkluzija $A \subset B$ *striktna*. Istovremeno važenje obeju inkluzija $A \subset B$ i $B \subset A$ ekvivalentno je sa $A = B$. Ako između dva skupa A i B ne važi $A \subset B$ niti $B \subset A$, kažemo da su oni *neuporedivi*.

Sa O označavamo *prazan skup*. Na primer, skup realnih brojeva x koji su rešenja jednačine $x^2 + 1 = 0$. Za svaki skup A je $O \subset A$. Pojam praznog skupa omogućuje da mnogi iskazi u teoriji skupova dobiju simetričan oblik.

Kraćeg pisanja radi, koristićemo sledeće skraćenice:

$I_1 \Rightarrow I_2$: iskaz I_1 povlači iskaz I_2.

$I_1 \Leftrightarrow I_2$: iskazi I_1 i I_2 su ekvivalentni, tj. $I_1 \Rightarrow I_2$ i, obrnuto, $I_2 \Rightarrow I_1$.

$\forall x$: „za svako x“.

$\exists x$: „postoji x“.

$\therefore$: „tako da“.

Polazeći od jednog ili više skupova, mogu se na različite načine formirati novi skupovi.

1° *Unija* $A \cup B$ skupova A i B je skup koji sadrži sve elemente koji leže u bar jednom od skupova A i B.

2° *Presek* $A \cap B$ skupova A i B je skup koji sadrži sve elemente koji leže u oba skupa A i B.

Ako je $A \cap B = O$, kažemo da su skupovi A i B *disjunktni*.

3° *Razlika* $A - B$ skupova A i B je skup svih elemenata iz A koji ne pripadaju B. Pri tome ne mora biti $B \subset A$. Specijalno, ako radimo sa skupovima koji su svi sadržani u nekom osnovnom skupu S, tada $S - A (A \subset S)$ zovemo *komplement* skupa A *u odnosu* na skup S i označavamo ga sa $\mathbf{C}_S A$ ili, kraće, sa $\mathbf{C} A$ ako je jasno o kom osnovnom skupu je reč.

4° *Simetrična razlika* $A \Delta B$ skupova A i B definisana je sa $(A - B) \cup \cup (B - A)$.

5° *Partitivni skup* (skup delova) $\mathbf{P}A$ je kolekcija svih delova skupa A. Po definiciji, $A \in \mathbf{P}A$ i $O \in \mathbf{P}A$.

6° *Proizvod* $A \times B$ skupova A i B je kolekcija svih uređenih parova (a, b), gde $a \in A$ i $b \in B$.

Navodimo neke od osobina uvedenih operacija:

(1) $A \cup B = B \cup A, \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cup A = A;$

(2) $A \cap B = B \cap A, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, \quad A \cap A = A;$

(3) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$

(4) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$

(5) $\mathbf{C}(\mathbf{C}A) = A, \quad A \subset B \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C}A \supset \mathbf{C}B;$

(6) $\mathbf{C}(A \cup B) = \mathbf{C}A \cap \mathbf{C}B, \quad \mathbf{C}(A \cap B) = \mathbf{C}A \cup \mathbf{C}B;$

(7) $A \cap B = A - (A - B);$

(8) $A - B = A \cap \mathbf{C}_S B$ ako A i $B \subset S$; $A - B = \mathbf{C}_A(A \cap B);$

(9) $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B); \quad \mathbf{C}A \Delta \mathbf{C}B = A \Delta B;$

(10) $A \Delta B = B \Delta A, \quad A \Delta A = O;$

(11) $A \Delta B \subset (A \Delta C) \cup (C \Delta B)$ za svaki treći skup C;

(12) $$\left.\begin{array}{l}(A_1 \cup A_2) \Delta (B_1 \cup B_2)\\ (A_1 \cap A_2) \Delta (B_1 \cap B_2)\\ (A_1 - A_2) \Delta (B_1 - B_2)\end{array}\right\} \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2);$$

(13) $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}A \cap \mathbf{P}B, \quad \mathbf{P}(A \cup B) \supset \mathbf{P}A \cup \mathbf{P}B.$

Dokazaćemo samo neke od ovih relacija; čitaocu prepuštamo da to učini za ostale.

Relacija (6_1) će slediti ako pokažemo da je $\mathbf{C}(A \cup B) \subset \mathbf{C}A \cup \mathbf{C}B$ i, obrnuto, $\mathbf{C}(A \cup \mathbf{C}B) \supset \mathbf{C}A \cap \mathbf{C}B$. Prvo sledi iz

$$\begin{array}{rcl} x \in \mathbf{C}(A \cup B) & \Rightarrow & x \notin A \cup B \\ & \Rightarrow & x \notin A \quad \text{i} \quad x \notin B \\ & \Rightarrow & x \in \mathbf{C}A \quad \text{i} \quad x \in \mathbf{C}B \\ & \Rightarrow & x \in \mathbf{C}A \cap \mathbf{C}B, \end{array}$$

a obrnuto tvrđenje, ako u ovom lancu logičkih zaključaka idemo u suprotnom smeru. Analogno se dokazuje (6_2).

Na osnovu relacija (5) i (6), važi tzv. *princip dualnosti*: ako postoji neka relacija između skupova koji svi leže u nekom osnovnom skupu, tada automatski važi i dualna relacija, koja se iz prve dobija zamenjujući date skupove njihovim komplementima (u odnosu na osnovni skup), unije presecima, presekе unijama, inkluziju $\subset$ inkluzijom $\supset$.

Relacija (11). Iz $x \in A \Delta B$ sledi da x pripada samo jednom od skupova A i B. Ako je C proizvoljan treći skup, tačka x, dakle, ne može da bude element oba skupa A i C i da je istovremeno element oba skupa B i C. Znači, x pripada bar jednom od skupova $A \Delta C$ i $B \Delta C$, pa, prema tome, i njihovoj uniji $(A \Delta C) \cup (B \Delta C)$.

Relacija (12). Iz $x \in (A_1 \cup A_2) \Delta (B_1 \cup B_2)$ sledi da x pripada samo jednom od skupova $A_1 \cup A_2$ i $B_1 \cup B_2$. Znači, moguća je samo ova alternativa: 1° x pripada bar jednom od skupova A_1 i A_2, $x \notin B_1$, $x \notin B_2$ ili 2° $x \notin A_1$,

$x \notin A_2$, x pripada bar jednom od skupova B_1 i B_2. U oba slučaja je x element bar jednog od skupova $A_1 \Delta B_1$ i $A_2 \Delta B_2$, pa time i njihove unije. Time je dokazana relacija (12_1).

Na sličan način se može dokazati relacija (12_2). No, ova sledi i iz (12_1), ako vodimo računa o (9_2) i (6_2):

$$\begin{aligned}(A_1 \cap A_2) \Delta (B_1 \cap B_2) &= \mathbf{C}(A_1 \cap A_2) \Delta \mathbf{C}(B_1 \cap B_2)\\ &= (\mathbf{C} A_1 \cup \mathbf{C} A_2) \Delta (\mathbf{C} B_1 \cup \mathbf{C} B_2)\\ &\subset (\mathbf{C} A_1 \Delta \mathbf{C} B_1) \cup (\mathbf{C} A_2 \Delta \mathbf{C} B_2)\\ &= (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2).\end{aligned}$$

Iz (12_2) sledi onda (12_3), ako vodimo računa o (8_1) i (9_2):

$$\begin{aligned}(A_1 - A_2) \Delta (B_1 - B_2) &= (A_1 \cap \mathbf{C} A_2) \Delta (B_1 \cap \mathbf{C} B_2)\\ &\subset (A_1 \Delta B_1) \cup (\mathbf{C} A_2 \Delta \mathbf{C} B_2)\\ &= (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2).\end{aligned}$$

Pojam unije, preseka i proizvoda jednostavno se prenosi na slučaj kada imamo više od dva skupa. Ako su dati skupovi $A_1, A_2, \ldots, A_n$, jasno je šta treba podrazumevati pod

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{\nu=1}^{n} A_\nu,$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{\nu=1}^{n} A_\nu,$$

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \prod_{\nu=1}^{n} A_\nu.$$

Specijalno, ako su u proizvodu svi skupovi A_ν jednaki nekom skupu A, tada umesto $\prod_{\nu=1}^{n} A_\nu$ pišemo A^n.

Vežbanja 2

Dokazati relacije između skupova:

1. $(A \cup B) \cap (C \cup D) = (A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap D)$.
2. $A \cup (A \cap B) = A = A \cap (A \cup B)$.
3. $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$.
4. $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$.
5. $A - (B \cup C) = (A - B) - C$.
6. $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$.
7. $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$
8. $A \cup B = A \Delta B \Delta (A \cap B)$.
9. $A - B = A \Delta (A \cap B)$.

3. Preslikavanje

Ako *svakom* elementu x skupa X odgovara na neki način određeni element y skupa Y, kažemo da je skup X preslikan *u* skup Y; x je *original* a y njegova *slika*. Ako sa f označimo ovo preslikavanje, za sliku y pišemo i $f(x)$. Simbolički:

$$x \to f(x), \quad x \in X, \quad f(x) \in Y$$

ili kraće

$$f : X \to Y.$$

Često, umesto o preslikavanju f skupa X u skup Y govorimo o funkciji f čije je *definiciono područje* skup X a *područje vrednosti* skup Y. Funkcionalnu zavisnost karakterišu, dakle, tri elementa: definiciono područje, područje vrednosti i zakonitost koja uspostavlja vezu.

Uz termin funkcija koristimo i izraz *operator* ili *transformacija* pogotovu ako je $X = Y$. Ako su X i Y skupovi brojeva, govorimo o *numeričkoj funkciji*, a ako je samo Y skup brojeva o *funkcioneli*. Najzad, ako je X skup prirodnih brojeva N, funkciju $f: N \to Y$ zovemo *niz* tačaka (u Y) i označavamo ga sa $f(n)$ ili sa f_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Najčešće ćemo za niz pisati jednostavno (f_n).

Primer 1. Neka je X skup realnih brojeva razmaka $(0,1)$ i neka je $Y = X \times X$. Svaki element x skupa X može se napisati u obliku beskonačnog decimalnog razlomka

$$x = 0, d_1 d_2 d_3 \ldots,$$

gde je d_n jedna od cifara $0, 1, \ldots, 9$ i cifra 9 se ne ponavlja stalno od izvesnog mesta. Funkcija f, definisana sa

$$f(x) = (0, d_1 d_3 \ldots; \quad 0, d_2 d_4 \ldots),$$

preslikava X u Y.

Primer 2. Neka je X skup u razmaku $(0,1)$ integrabilnih funkcija $x(t)$ i Y skup realnih brojeva R. Sa

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\, dt$$

definisano je jedno preslikavanje skupa X u skup Y.

Primer 3. Neka je dat skup S i neka je $X = Y = \mathbf{P}\, S$. Tada

$$f(x) = \mathbf{C}_S\, x, \quad x \in \mathbf{P}\, S,$$

definiše jedno preslikavanje skupa $\mathbf{P}\, S$ u samog sebe.

Primer 4. Neka je $Y = \mathbf{P}\, S$ i $X = \mathbf{P}\, S \times \mathbf{P}\, S$. Ako elemente iz X pišemo u obliku $x = (p, q)$, gde p i $q \in \mathbf{P}\, S$, funkcije

$$f_1(x) = p \cup q, \quad f_2(x) = p \cap q, \quad f_3(x) = p - q,$$

preslikavaju $\mathbf{P}\, S \times \mathbf{P}\, S$ u $\mathbf{P}\, S$.

Neka je dat skup S i stavimo $Y = \mathbf{P}\, S$. Kako su vrednosti funkcije $f: X \to Y$ skupovi — delovi od S, to je preslikavanjem f definisana jedna kolekcija skupova, svakom $x \in X$ odgovara jedan skup $f(x)$, ili kraće, f_x. Ako naročito želimo da istaknemo tu kolekciju skupova, pišemo

$$\{f_x\}_{x \in X}$$

$f: I \to PS$

i tada X zovemo *skup indeksa* kolekcije $\{f_x\}$. Za kolekciju skupova najčešće koristimo oznaku $\{A_i\}_{i \in I}$. Specijalno, ako je skup indeksa niz prirodnih brojeva, pišemo $\{A_i\}_{i=1,2,\ldots}$, a ako je skup indeksa konačan $\{A_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$.

I na proizvoljne kolekcije skupova $\{A_i\}_{i \in I}$ jednostavno se prenose pojmovi unije, preseka i proizvoda skupova. Označavamo ih sa

$$\bigcup_{i \in I} A_i, \quad \bigcap_{i \in I} A_i, \quad \prod_{i \in I} A_i,$$

odnosno sa

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i, \quad \prod_{i=1}^{\infty} A_i,$$

ukoliko je skup indeksa jedan niz.

$f: X \to Y$

$\Rightarrow f(X) \subset Y$

Neka je f jedno preslikavanje skupa X u skup Y. Ako je $A \subset X$, sa $f(A)$ označavamo skup slika svih tačaka iz A; kažemo da je $f(A)$ slika skupa A preslikavanjem f. U opštem slučaju je $f(X) \subset Y$; ako je $f(X) = Y$, govorimo o preslikavanju skupa X *na* skup Y.

Stav 1. *Neka f preslikava X u Y i neka su A_1 i $A_2 \subset X$. Tada važi*

1° $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$,

2° $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$,

3° $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.

Ako f uzima istu vrednost na $A_1 - A_2$ i na $A_2 - A_1$, ali ne i na $A_1 \cap A_2$, tada u 3° važi striktna inkluzija.

$f(X) =$

Dokaz. 1° je jasno.

2° Ako je $y \in f(A_1 \cup A_2)$, tada je $y = f(x)$ za neko x koje pripada bar jednom od skupova A_1 i A_2. Znači, y je element bar jednog od skupova $f(A_1)$ i $f(A_2)$, te, prema tome, i njihove unije $f(A_1) \cup f(A_2)$. Obrnuto, ako y pripada ovoj uniji, pripadaće bar jednom od skupova $f(A_1)$ i $f(A_2)$. Znači, postoji neko x koje leži u bar jednom od skupova A_1 i A_2, tako da je $y = f(x)$. Dakle, $y \in f(A_1 \cup A_2)$.

3° Iz $y \in f(A_1 \cap A_2)$ sledi da je $y = f(x)$ za neko x koje leži u oba skupa A_1 i A_2. Znači y je element oba skupa $f(A_1)$ i $f(A_2)$, te, prema tome, i element njihovog preseka $f(A_1) \cap f(A_2)$.

Neka f preslikava X u Y. *Recipročna (inverzna) slika* elementa $y \in Y$ je skup svih elemenata x iz X za koje je $f(x) = y$. Recipročnu sliku označavamo sa $f^{-1}(y)$. Recipročna slika nekog elementa može biti i prazan skup: uvek onda kada $y \notin f(X)$.

Ako je $B \subset Y$, recipročna slika skupa B preslikavanjem f je skup svih $x \in X$ takvih da $f(x) \in B$; označavamo je sa $f^{-1}(B)$.

Stav 2. *Za inverznu (recipročnu) sliku važi:*

1° $B_1 \subset B_2 \subset Y \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$,

2° $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$,

3° $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$,

4° $f^{-1}(\mathbf{C}_Y B) = \mathbf{C}_X f^{-1}(B)$.

Dokaz. 1° je jasno.

2° Ako je $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$, onda $f(x)$ pripada $B_1 \cup B_2$, odnosno bar jednom od skupova B_1 i B_2. Dakle, x je element bar jednog od skupova $f^{-1}(B_1)$ i $f^{-1}(B_2)$, pa time i njihove unije $f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$. Obrnuto, ako x pripada ovoj uniji, pripadaće bar jednom od skupova $f^{-1}(B_1)$ i $f^{-1}(B_2)$, te će u bar jednom od skupova B_1 i B_2 postojati neko y tako da je $x = f^{-1}(y)$. No, tada $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$.

3° Dokaz je formalno isti kao pod 2°, ako svuda uniju zamenimo presekom, a izraz ,,bar jedan" izrazom ,,i jedan i drugi".

4° Ako $x \in f^{-1}(\mathbf{C}_Y B)$ sledi da je $y = f(x)$ za neko $y \in \mathbf{C}_Y B$. No tada $y \notin B$, pa $f^{-1}(B) \not\ni x$; dakle, $x \in \mathbf{C}_X f^{-1}(B)$. Obrnuto, ako $x \in \mathbf{C}_X f^{-1}(B)$, tada $x \notin f^{-1}(B)$, pa u B nema elementa y za koji bi važilo $y = f(x)$. Kako f preslikava X u Y, to u $\mathbf{C}_Y B$ mora postojati y takvo da je $y = f(x)$, što znači da $x \in f^{-1}(\mathbf{C}_Y B)$.

$f: X \to$

Neka f preslikava X u Y, a g skup Y u Z. Tada preslikavanje skupa X u Z, definisano sa $g[f(x)]$, zovemo *složeno preslikavanje* (*složena funkcija*) i obeležavamo ga sa $g \circ f$. Slika od $A \subset X$ preslikavanjem $g \circ f$ nije, dakle, ništa drugo no slika preslikavanjem g slike preslikavanjem f od A, tj. $(g \circ f)(A) = g[f(A)]$.

$g: Y \to$

$g(f(x))$

Ako je $C \subset Z$, recipročna slika od C preslikavanjem $g \circ f$ je recipročna slika preslikavanjem f recipročne slike preslikavanjem g od C, tj.

$g \circ f =$

$$(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}[g^{-1}(C)].$$

Po konvenciji, svako preslikavanje $f: X \to Y$ je jednoznačno, tj.

$$f(x_1) \neq f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 \neq x_2.$$

$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) =$

Ako važi i obrnuto, tj.

$$x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2),$$

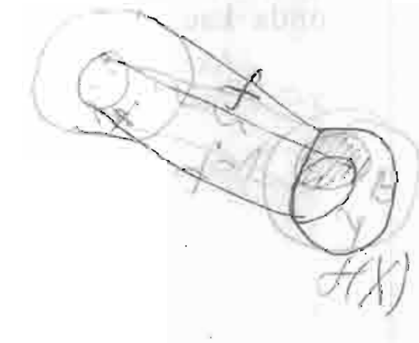
kažemo da je f *biunivoko preslikavanje* (1—1 preslikavanje). Kod biunivokog preslikavanja inverzna slika svakog elementa iz Y sadrži *najviše* jedan element u X, tj. jednačina $f(x) = y$ ima najviše jedno rešenje po x za svako $y \in Y$. Kada ova ima *tačno* jedno rešenje za svako $y \in Y$, tj. kada f preslikava X biunivoko *na* Y, kažemo da je f *biunivoka korespondencija*. U tom slučaju funkcija $f: X \to Y$ ima *inverznu* (*recipročnu*) *funkciju* f^{-1} koja preslikava Y na X.

Čitaocu prepuštamo da se uveri da je u opštem slučaju

$$f[f^{-1}(B)] = B \cap f(X) \quad \forall \quad B \subset Y$$

i

$$f^{-1}[f(A)] \supset A \quad \forall \quad A \subset X.$$



Ako f preslikava X na Y, tada je

(1) $$f[f^{-1}(B)] = B,$$

a ako je f biunivoko preslikavanje, tada je

(2) $$f^{-1}[f(A)] = A.$$

Samo kada je f biunivoka korespondencija između X i Y, važe istovremeno (1) i (2).

Neka je funkcija f_1 definisana na skupu X_1 a funkcija f_2 na X_2. Ako je $X_1 \subset X_2$ i $f_1(x) = f_2(x)$ za svako $x \in X_1$, kažemo da je funkcija f_2 *ekstenzija* (*proširenje*) funkcije f_1 sa X_1 na X_2, odnosno da je funkcija f_1 *restrikcija* (*suženje*) funkcije f_2 sa X_2 na X_1.

Vežbanja 3

1. Ako su $\{A_i\}_{i \in I}$ i $\{B_i\}_{i \in I}$ dve proizvoljne kolekcije skupova, tada je

$$\bigcap_{i \in I} (A_i \cap B_i) = (\bigcap_{i \in I} A_i) \cap (\bigcap_{i \in I} B_i),$$

$$\bigcup_{i \in I} (A_i \cup B_i) = (\bigcup_{i \in I} A_i) \cup (\bigcup_{i \in I} B_i),$$

$$(\bigcap_{i \in I} A_i) \cup (\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{(i,j) \in I^2} (A_i \cup B_j) \subset \bigcap_{i \in I} (A_i \cup B_i),$$

$$\bigcup_{i \in I} (A_i \cap B_i) \subset \bigcup_{(i,j) \in I^2} (A_i \cap B_j) = (\bigcup_{i \in I} A_i) \cap (\bigcup_{i \in I} B_i),$$

$$\bigcap_{i \in I} (A \cup A_i) = A \cup (\bigcap_{i \in I} A_i), \quad \bigcup_{i \in I} (A \cap A_i) = A \cap \bigcup_{i \in I} A_i.$$

Pokazati da se znak inkluzije ne može zameniti znakom jednakosti.

2. Pokazati da je

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 - \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 - A_n).$$

3. Niz skupova (A_n) *monotono opada* ako $A_n \supset A_{n+1}$ za $n = 1, 2, \ldots$ Ako nizovi skupova (A_n) i (B_n) monotono opadaju, tada je

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n \cup B_n) = (\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) \cup (\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n).$$

4. Ako je $A_n \subset A_0$ za $n = 1, 2, \ldots$, tada je

$$A_0 = (A_0 - A_1) \cup (A_1 - A_2) \cup \ldots \cup (\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n).$$

5. Neka f preslikava X u Y i neka su A i B podskupovi od X odnosno od Y. Pokazati:

1° $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ tada i samo tada ako je f biunivoko preslikavanje. 1-1

2° $\mathbf{C} f(A) \subset f(\mathbf{C} A)$ tada i samo tada ako f preslikava X na Y.

3° Ako f preslikava X na Y, važi $\mathbf{C} f(A) = f(\mathbf{C} A)$ tada i samo tada ako je f bunivoko preslikavanje.

6. Ako f preslikava X u Y, $A_1, A_2 \subset X$ i $B_1, B_2 \subset Y$, tada važi

$$f(A_1 - A_2) \supset f(A_1) - f(A_2)$$

i

$$f^{-1}(B_1 - B_2) = f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2).$$

7. Pokazati da je $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.

8. Ako f preslikava X u Y i $\{A_i\}_{i \in I}$ je proizvoljna kolekcija skupova iz X, tada je

$$f(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} f(A_i) \quad \text{i} \quad f(\bigcap_{i \in I} A_i) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i).$$

9. Ako f preslikava X u Y i $\{B_i\}_{i\in I}$ je proizvoljna kolekcija skupova iz Y, tada je

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right)=\bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i) \quad \text{i} \quad f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)=\bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i).$$

10. *Limes superior* niza skupova (A_n) je skup čiji elementi pripadaju beskonačno mnogim članovima tog niza. *Limes inferior* niza skupova (A_n) je skup čiji elementi pripadaju svim članovima tog niza s izuzetkom njih konačno mnogo. Pokazati da je

$$\limsup A_n=\bigcap_{n=0}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n+k}, \qquad \liminf A_n=\bigcup_{n=0}^{\infty}\bigcap_{k=1}^{\infty} A_{n+k}.$$

11. Dokazati:

$$\liminf \mathbf{C} A_n=\mathbf{C}(\limsup A_n),$$

$$\liminf (A_n\cap B_n)=(\liminf A_n)\cap(\liminf B_n),$$

$$\limsup (A_n\cup B_n)=(\limsup A_n)\cup(\limsup B_n),$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\subset \liminf A_n\subset \limsup A_n\subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

$$(\liminf A_n)\cup(\liminf B_n)\subset \liminf (A_n\cup B_n),$$

$$\limsup (A_n\cap B_n)\subset(\limsup A_n)\cap(\limsup B_n),$$

$$A\,\Delta\,(\liminf A_n)\subset \limsup (A\,\Delta\,A_n),$$

$$A\,\Delta\,(\limsup A_n)\subset \limsup (A\,\Delta\,A_n).$$

Pokazati da se u ovim relacijama znak inkluzije ne može zameniti znakom jednakosti.

12. Niz skupova (A_n) *konverigira* ka skupu A ako je

$$\liminf A_n=\limsup A_n=A.$$

Granični skup A označavamo sa $\lim A_n$. Dokazati:

1° Ako niz skupova (A_n) monotono raste, tada postoji $\lim A_n$ i jednak je $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

2° Ako niz skupova (A_n) monotono opada, tada postoji $\lim A_n$ i jednak je $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

4. Binarne relacije

Uočimo skup X i pretpostavimo da uređenim parovima toga skupa možemo pripisati izvesnu osobinu ϱ, tako da je, kada uočimo proizvoljan par (x, y) elemenata iz X, moguća jedino alternativa:

$$\text{par } (x, y) \text{ ima osobinu } \varrho,$$

ili

$$\text{par } (x, y) \text{ nema osobinu } \varrho.$$

U tom slučaju kažemo da je u skupu X definisana *binarna relacija* ϱ. Ako par (x, y) ima osobinu ϱ, kažemo da se elemenati x i y skupa X nalaze u binarnoj relaciji ϱ i to simbolički pišemo $x \varrho y$.

Primer 1. U skupu svih pravih u ravni, paralelnost je jedna binarna relacija, jer proizvoljne dve prave ili su paralelne ili to nisu. Slično važi i za normalnost dveju pravih.

Definicija 1. Binarna relacija je *relacija ekvivalencije* ako je refleksivna, simetrična i tranzitivna, tj. ako je

$$x \varrho x \text{ za svako } x \in X,$$

$$x \varrho y \Rightarrow y \varrho x,$$

$$x \varrho y \text{ i } y \varrho z \Rightarrow x \varrho z.$$

Relaciju ekvivalencije označavamo sa $\sim$. Ako je $x \sim y$, kažemo da su elementi x i y ekvivalentni. Jednakost je prototip relacije ekvivalencije.

Primer 2. X je skup pravih u ravni i $x \sim y$ ako su prave x i y paralelne.

Primer 3. X je skup pozitivnih funkcija koje divergiraju ka $+\infty$ kada njihov argument $t \to +\infty$ i

$$x \sim y \text{ ako } \frac{x(t)}{y(t)} \to 1 \text{ kada } t \to +\infty.$$

Primer 4. X je $\mathbf{P}S$ nekog osnovnog skupa S i

$x \sim y$ ako između skupova x i $y \in \mathbf{P}S$ postoji biunivoka korespondencija.

Neka je u skupu X definisana relacija ekvivalencije $\sim$ i neka je x proizvoljan element iz X. Označimo sa C_x klasu svih onih elemenata iz X koji su ekvivalentni elementu x. Ako su C_x i C_y klase koje odgovaraju elementima x i y, tada je moguća samo sledeća alternativa: ili se C_x i C_y poklapaju ili su disjunktne. Na taj način skup X podeljen je na međusobno disjunktne klase — *klase ekvivalencije* — tako da su svi elementi iste klase međusobno ekvivalentni, a elementni iz različitih klasa to nisu. Kolekciju klasa ekvivalencije skupa X u odnosu na uvedenu relaciju ekvivalencije $\sim$ zovemo *skup-količnik* skupa X u odnosu na $\sim$ i označavamo ga sa $X/\sim$. Jasno je da ako u svakoj klasi ekvivalencije izaberemo jedan element — *reprezentanta* te klase — da između skupa reprezentanata i skupa-količnika postoji biunivoka korespondencija.

Skup-količnik u odnosu na uvedenu relaciju ekvivalencije je u primeru 2 skup svih mogućih pravaca u ravni, a u primeru 3 skup svih brzina rašćenja.

Jedan drugi tip binarne relacije daje

Definicija 2. Binarna relacija ϱ je *relacija poretka* ako je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna, tj. ako je

$$x \varrho x \text{ za svako } x \in X,$$

$$x \varrho y \text{ i } y \varrho x \Rightarrow x = y,$$

$$x \varrho y \text{ i } y \varrho z \Rightarrow x \varrho z.$$

Relaciju poretka označavamo sa $\preccurlyeq$. Ako je $x \preccurlyeq y$ ili $y \preccurlyeq x$, kažemo da su elementi x i y *uporedivi*. Relacija $\leqslant$ u skupu realnih brojeva je jedna relacije poretka.

Primer 5. X je partitivni skup $\mathbf{P}S$ nekog osnovnog skupa S i

$$x \preccurlyeq y \text{ ako je } x \subset y; \quad x, y \in \mathbf{P}S.$$

Primer 6. X je skup celih pozitivnih brojeva i

$$x \preccurlyeq y \text{ ako je broj } y \text{ deljiv sa } x.$$

Ako je skup X snabdeven nekom relacijom $\preccurlyeq$, kažemo da je on *uređen* ili da ima *strukturu poretka*. Uređene skupove označavaćemo sa $(X, \preccurlyeq)$. Ako su ma koja dva elementa uređenog skupa međusobno uporediva, kažemo da je skup $(X, \preccurlyeq)$ *totalno uređen* ili da obrazuje *lanac*. Skup prirodnih brojeva i skup realnih brojeva su totalno uređeni skupovi u odnosu na relaciju $\leqslant$. Skupovi iz primera 5 i 6 su (delimično) uređeni skupovi u odnosu na uvedene relacije poretka.

Neka su X_1 i X_2 uređeni skupovi u odnosu na relacije poretka $\overset{1}{\preccurlyeq}$ odnosno $\overset{2}{\preccurlyeq}$. Ako između X_1 i X_2 postoji biunivoka korespondencija f takva da je

$$x \overset{1}{\preccurlyeq} y \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \overset{2}{\preccurlyeq} f(y),$$

kažemo da su oni *izomorfni* u odnosu na svoje strukture poretka. Takvo preslikavanje f je *izomorfizam* u odnosu na poredak.

Primer 7. Skupovi realnih brojeva $]-\pi/2, +\pi/2[$ i $]-\infty, +\infty[$, oba snabdevena poretkom $\leqslant$, izomorfni su u pogledu poretka. Funkcija $\operatorname{tg} x$ je jedan izomorfizam.

Ako su dva uređena skupa izomorfna u odnosu na poredak, tada ih možemo identifikovati ako je poredak jedino što nas u njima interesuje.

Definicija 3. Neka je A deo uređenog skupa $(X, \preccurlyeq)$. Element $b \in X$ je *majoranta* od A ako je $x \preccurlyeq b$ za svako $x \in A$. Ako uz to $b \in A$, b je *maksimum* skupa A.

Simetrično se definiše *minoranta* i *minimum* skupa $A \subset X$.

Jasno je da A može imati samo jedan maksimum (minimum). Zaista, kada bi ih bilo dva, b_1 i b_2, imali bismo istovremeno $b_1 \preccurlyeq b_2$ i $b_2 \preccurlyeq b_1$, dakle $b_1 = b_2$.

Definicija 4. *Supremum* skupa $A \subset X$ je minimum skupa majoranata od A, ukoliko ovaj postoji.

Supremum može biti samo jedan. Označavamo ga sa $\sup A$.

Simetrično se definiše *infimum* skupa A, kratko $\inf A$.

Ako skup ima max (min), on je i njegov sup (inf), ali obrnuto ne važi.

Primer 8. Skup negativnih realnih brojeva u skupu realnih brojeva snabdevenom uobičajenim poretkom, nema max a sup mu je 0.

Primer 9. Neka je A deo skupa X iz primera 5. Minoranta od A je bilo koji deo od S koji je sadržan u svakom od skupova iz A, a $\inf A$ je presek svih skupova iz A. Slično, majoranta od A je bilo koji deo od S koji sadrži sve skupove iz A, a $\sup A$ je unija svih skupova iz A.

$a \lesssim a$

Definicija 5. Element a je *maksimalni element* uređenog skupa $(X, \leqslant)$, ako sem a ne postoji nijedna druga tačka $x \in X$ takva da je $a \leqslant x$.

Simetrično se definiše *minimalni element* skupa X.

Ako X ima maksimum (minimum), ovaj je jedini maksimalni (minimalni) element od X; no X može imati i više maksimalnih (minimalnih) elemenata.

Primer 10. Uređeni skup iz primera 5 ima samo jedan minimalni i samo jedan maksimalni element, naime, prazan skup O i čitav skup S.

Primer 11. Uređeni skup iz primera 6 nema maksimalnih elemenata; jedini minimalni element mu je 1.

f je *funkcija izbora* skupa X ako svakom nepraznom podskupu A iz X koordinira jedan element iz A, tj. ako $f: \mathbf{P}X - \{O\} \to X$ tako da je $f(A) \in A$ $(O \neq A \subset X)$.

Aksiom izbora. *Svaki skup ima funkciju izbora.*

Mada je intuitivno jasan, neki matematičari ne prihvataju ovaj aksiom, smatrajući da se ne može govoriti o egzistenciji neke funkcije ako nismo u stanju i efektivno da je konstruišemo, tj. da damo niz pravila koja određuju njene vrednosti na definicionom području. Jer, kada je reč o funkciji izbora, mogu se navesti kako primeri gde je takva konstrukcija moguća, tako i primeri u kojima ova do dan danas nije ostvarena. Tako, ako uočimo kolekciju svih nepraznih delova skupa prirodnih brojeva, tada je moguće dati pravilo: u svakom delu izabraćemo najmanji prirodni broj. Međutim, ako je reč o kolekciji svih nepraznih delova skupa realnih brojeva, takvo pravilo do sada nije dato.

U prilog usvajanja aksioma izbora mogle bi se navesti ove činjenice: (1) on ne protivureči našoj intuiciji; (2) u mnogim slučajevima (mi smo naveli samo jedan primer) postupak izbora se efektivno može dati; (3) aksiom izbora nije u kontradikciji sa drugim uvedenim aksiomima i njegove posledice do sada nisu dovele do kontradikcije; (4) pri današnjem stanju nauke aksiom izbora je neophodan pri dokazu velikog broja stavova iz Teorije skupova i iz Analize.

Mi ćemo usvojiti aksiom izbora, a pozivaćemo se i na dva njegova ekvivalentna oblika koji su poznati kao Zornova lema i kao Hausdorffov stav maksimalnosti.

Zornova lema. *Neka je X uređen skup. Ako svaki lanac u X ima majorantu (minorantu), tada X ima maksimalni (minimalni) element.*

Neka je L jedan lanac uređenog skupa X. L je *maksimalni lanac* u X, ako on više nije lanac kada mu se pridoda ma koji element iz X koji već ne leži u L.

Hausdorffov stav maksimalnosti. *Svaki neprazan uređen skup sadrži jedan maksimalni lanac.*

Vežbanja 4

1. Da li je $<$ u skupu realnih brojeva jedna relacija poretka?
2. U skupu celih brojeva

$$x \sim y \text{ ako je } x - y = \text{celom umnošku od } k,$$

gde je k fiksiran ceo broj, je jedna relacija ekvivalencije.

3. Neka je X skup uređenih parova (p, q) prirodnih brojeva i neka je

$$(p, q) \sim (p', q') \quad \text{ako je} \quad pq' = p'q.$$

Pokazati da je to jedna relacija ekvivalencije.

4. U skupu realnih funkcija

$x \sim y$ ako je $x(t) = y(t)$ sem za konačno mnogo vrednosti argumenta t,

je jedna relacija ekvivalencije.

5. U skupu trouglova u ravni

$$x \sim y \text{ ako su uglovi trouglova } x \text{ i } y \text{ jednaki,}$$

je jedna relacija ekvivalencije. Opisati skup-količnik.

6. Neka f preslikava X u Y. Na X je definisana binarna relacija:

$$x_1 \sim x_2 \quad \text{ako je} \quad f(x_1) = f(x_2).$$

Pokazati da je ovo jedna relacija ekvivalencije i opisati odgovarajuće klase ekvivalencije.

7. Neka je u skup realnih brojeva R uvedena binarna relacija

$$x \sim y \quad \text{ako je} \quad x - y = \text{celom broju.}$$

Pokazati da je ovo jedna relacija ekvivalencije i opisati odgovarajuće klase ekvivalencije.

8. Ako je X skup uglova u ravni sa fiksiranim temenom u jednoj tački, tada je sa

$$x \leqslant y \quad \text{ako je ugao } x \text{ sadržan u uglu } y$$

definisana jedna relacija poretka u X.

9. Neka je $\mathfrak{P}$ skup polinoma jedne promenljive s realnim koeficijentima. Ako P i $Q \in \mathfrak{P}$, pisaćemo

$$P \leqslant Q \text{ ako } \exists x_0 \therefore P(x) \leqslant Q(x) \ \forall x \geqslant x_0.$$

Da li je $P \leqslant Q$ relacija poretka; delimičnog ili totalnog?

10. Neka je R skup realnih brojeva i R^+ skup pozitivnih realnih brojeva. Ako oba snabdemo uobičajenom relacijom poretka $\leqslant$, pokazati da su uređeni skupovi $(R, \leqslant)$ i $(R^+, \leqslant)$ izomorfni u pogledu poretka.

11. Pokazati da su skup prirodnih brojeva N i skup tačaka $\{1 - {}^1/_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ na R, oba uređena na uobičajeni način, izomorfni.

12. U skupu realnih brojeva $\neq 0$ skup negativnih brojeva ima majorante ali nema supremuma.

13. Neka je X uređeni skup iz primera 6 i neka je $A = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset X$. Majoranta od A je bilo koji broj iz X koji je deljiv brojevima $a_1, \ldots, a_n$; $\sup A$ je, dakle, najmanji zajednički sadržalac brojeva $a_1, \ldots, a_n$. Minoranta od A je bilo koji broj iz X koji deli sve brojeve $a_1, \ldots, a_n$; $\inf A$ je, dakle, najveći zajednički delilac brojeva $a_1, \ldots, a_n$.

5. Ekvivalentni oblici Dedekindovog aksioma neprekidnosti

Na realnoj pravoj postoji precizan iskaz o egzistenciji supremuma i infimuma nekog podskupa.

Stav 1. *Svaki podskup realnih brojeva $X \subset R$ koji ima konačnu majorantu (minorantu) ima supremum (infimum).*

Dokaz. Skup svih realnih brojeva R podelićemo u dve klase A i B: u klasu B stavićemo sve majorante skupa X, a u A sve ostale brojeve. Broj a pripada, dakle, klasi A ako postoji $x \in X$ tako da je $x > a$. Klase A i B imaju ove osobine: Svi realni brojevi raspoređeni su u jednu od klasa A i B. Klase A i B nisu prazne; klasa A jer ako $x \in X$, tada $x-1 \in A$; klasa B zato što, po pretpostavci, skup X ima konačnu majorantu. Svaki broj iz A manji je od bilo kog broja iz B; naime, kada bi za neko $a \in A$ i neko $b \in B$ bilo $a \geqslant b$, postojao bi, na osnovu definicije klase A, broj $x \in X$ takav da je $x > a$, odakle bi sledilo i $x > b$, suprotno definiciji klase B. Klase A i B ispunjavaju, dakle, sve uslove za primenu Dedekindovog aksioma neprekidnosti. Na osnovu ovog, ili klasa A ima najveći ili klasa B ima najmanji broj. Pokazaćemo da prva mogućnost otpada. Zaista, ako $a \in A$, tada postoji $x \in X$ tako da je $x > a$, pa zbog $\frac{a+x}{2} < x$ sledi da i broj $a' = \frac{a+x}{2} \in A$. No kako je $a' > a$, to znači da svakom broju a iz A odgovara broj a' iz A, koji je veći od a; klasa A nema, dakle, najveći broj. Znači, klasa B obavezno ima najmanji broj, i ovaj je, po definiciji, $\sup X$.

A

$x > a$

$x > \frac{x+a}{2}$

U skupu realnih brojeva R supremum b nekog skupa $X \subset R$ možemo i ovako okarakterisati: b je majoranta od X takva da za svako $\varepsilon > 0$ postoji broj $x \in X$, tako da je $x > b - \varepsilon$. Zaista, ako pretpostavimo suprotno, tj. da za neko $\varepsilon > 0$ važi $x \leqslant b - \varepsilon$ za svako $x \in X$, onda bi i $b - \varepsilon$ bila jedna majoranta od X, suprotno činjenici da je b kao supremum najmanja majoranta skupa X.

Kada radimo u proširenom skupu realnih brojeva R^* i skup $X \subset R^*$ nema konačnu majorantu (minorantu), kažemo da je $\sup X = +\infty$ ($\inf X = -\infty$). Sa ovom konvencijom svaki skup u R^* ima supremum i infimum (konačan ili beskonačan).

Iz dokaza stava 1, vidi se da on bitno počiva na Dedekindovom aksiomu neprekidnosti skupa realnih brojeva. Međutim, kao što ćemo odmah pokazati, iskaz stava 1 je ekvivalentan iskazu Dedekindovog aksioma. Preciznije, ako bi iskaz stava 1 uzeli kao aksiom, onda bi iz njega sledio iskaz Dedekindovog aksioma kao posledica. No mi ćemo prvo dati još jedan ekvivalentan oblik ova dva iskaza, pa zatim pokazati da su sva tri ekvivalentni.

Stav 2. *Neka je $[a_n, b_n]$ ($n = 1, 2, \ldots$) niz umetnutih zatvorenih razmaka u R, tj. takvih da je* (1) $a_n < b_n$, (2) $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ *i* (3) $b_n - a_n \to 0$ ($n \to \infty$). *Tada postoji jedan jedini realan broj koji leži u razmacima* $[a_n; b_n]$.

Dokaz. Kako je za $m > n$, prema (1) i (2),

$$a_n \leqslant a_m < b_m \leqslant b_n,$$

to je

$$a_p < b_q \quad \text{za svako} \quad p \text{ i } q.$$

Skup $\{a_p\}$ levih krajeva niza razmaka je, dakle, ograničen s desne strane, te postoji

$$\sup_p \{a_p\} = a \quad \text{i} \quad a \leqslant b_q \quad \text{za svako } q.$$

$a \leq \inf\{b_q\}$

Iz poslednje nejednačine sledi da je skup $\{b_q\}$ desnih krajeva niz razmaka ograničen s leve strane, te postoji

$$\inf_q \{b_q\} = b \quad \text{i} \quad a \leqslant b.$$

No, na osnovu (3), ne može biti $a < b$, jer

$$b - a \leqslant b_n - a_n \to 0, \quad n \to \infty.$$

Dakle, $a = b$. Realan broj $a (= b)$ je i jedini koji leži u svim razmacima $[a_n, b_n]$. Zaista, pretpostavimo da postoji još jedan takav broj $c \neq a = b$. Neka je, recimo, $c > b$. Tada bi, zbog $b = \inf_n \{b_n\}$ u skupu $\{b_n\}$ postojao broj b_q takav da je $b_q < c$, što bi značilo da c ne leži u razmacima $[a_n, b_n]$ za $n = q, q+1, \ldots$ Kontradikcija. Do slične kontradikcije dolazimo, zbog $a = \sup_n \{a_n\}$, ako pretpostavimo da je $c < a$.

S obzirom da smo pokazali da iz Dedekindovog aksioma sledi iskaz stava 1, a iz ovog iskaz stava 2, da bismo dokazali ekvivalenciju sva ova tri iskaza, dovoljno je da još pokažemo da iz iskaza stava 2 sledi iskaz Dedekindovog aksioma.

U tom cilju pretpostavimo da klase A i B realnih brojeva zadovoljavaju uslove (1—3) Dedekindovog aksioma. Pomoću klasa A i B konstruisaćemo niz umetnutih razmaka na sledeći način: Na osnovu osobine (2) klasa A i B postoje brojevi $a_1 \in A$ i $b_1 \in B$; neka je $[a_1, b_1]$ prvi u nizu razmaka. Kako, na osnovu osobine (1) klasa A i B, $\frac{a_1+b_1}{2}$ pripada jednoj od klasa A i B, za $[a_2, b_2]$ izabraćemo razmak $\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$, odnosno $\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$, prema tome da li $\frac{a_1+b_1}{2} \in B$ ili $\frac{a_1+b_1}{2} \in A$. Uopšte, za $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ $(n = 1, 2, \ldots)$ izabraćemo razmak $\left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right]$, odnosno razmak $\left[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right]$ prema tome da li $\frac{a_n+b_n}{2} \in B$ ili $\frac{a_n+b_n}{2} \in A$. Time je totalnom indukcijom određen niz razmaka $[a_n, b_n]$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Na osnovu osobine (3) klasa A i B i same konstrukcije sledi da je

$$a_n < b_n, [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \quad \text{i} \quad b_n - a_n = (b_1 - a_1)/2^{n-1} \to 0 \ (n \to \infty),$$

tj. $[a_n, b_n]$ je jedan niz umetnutih razmaka. Na osnovu stava 2, ovaj određuje jedan jedini realan broj c koji leži u svim razmacima $[a_n, b_n]$. Na osnovu osobine (1) klasa A i B, ili $c \in A$ ili $c \in B$. Pretpostavimo da $c \in A$. Pokazaćemo da je c tada najveći broj u A. Zaista, kada bi za neko $a \in A$ bilo $a > c$, postojao bi, zbog

$$0 < b_n - c \leqslant b_n - a_n \to 0 \ (n \to \infty),$$

u nizu (b_n) broj $b_N \in B$ takav da je

$$c < b_N < a,$$

što je u suprotnosti sa osobinom (3) klasa A i B. Dakle, mora biti $a \leqslant c$ za svako $a \in A$, tj. c je najveći broj klase A. Na sličan način pokazuje se da ako $c \in B$, da je tada c najmanji broj klase B. Dakle, pod navedenim uslovima, ili klasa A ima najveći ili klasa B najmanji broj, što predstavlja tvrđenje Dedekindovog aksioma.

6. Kardinalni brojevi

Ako su A i B konačni skupovi, možemo ih upoređivati u pogledu broja elemenata koje sadrže. Međutim, ako su A i B beskonačni skupovi, na prvi pogled nije jasno da li je takvo poređenje uopšte moguće. Na primer, da li je skup svih polinoma sa racionalnim koeficijentima „brojniji" od skupa realnih brojeva?

Da bismo kod konačnih skupova utvrdili da imaju isti broj elemenata, najjednostavnije je prebrojati oba skupa. No mogli bismo i ovako postupiti: ako se između ta dva skupa može uspostaviti biunivoka korespondencija, oni imaju isti broj elemenata. Ovaj drugi način očigledno ima prednost, jer se bez daljeg može preneti i na beskonačne skupove. Otud i

Definicija 1. Dva skupa su *ekvivalentna* ako se između njih može uspostaviti biunivoka korespondencija.

Primećujemo da je ekvivalentnost dva skupa jedna relacija ekvivalencije u smislu definicije 4.1. Ekvivalentnost skupova A i B označavaćemo sa $A \sim B$.

Primer 1. Skup prirodnih brojeva je ekvivalentan skupu parnih brojeva. Naime, nizu $1, 2, \ldots$ koordiniraćemo redom parne brojeve $2, 4, \ldots$

Primer 2. Skupu prirodnih brojeva ekvivalentan je skup svih celih brojeva. Da to uvidimo dovoljno je da skup celih brojeva poređamo u niz

$$0, \ -1, \ +1, \ -2, \ +2, \ldots,$$

čime je uspostavljena biunivoka korespondencija sa nizom $1, 2, \ldots$

Primer 3. Skup racionalnih brojeva koji leže u razmaku $]0,1[$ ekvivalentan je skupu prirodnih brojeva, jer se svi njegovi elementi mogu poređati u niz. Naime, u trougaonoj shemi

$$\begin{array}{lll}
\frac{1}{2} & & \\[4pt]
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \\[4pt]
\frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} \\
\ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

javlja se svaki racionalni broj razmaka $]0,1[$. Ako u ovoj shemi, idući s leva udesno i odozgo nadole, prvo odstranimo svaki racionalni broj koji se prethodno već javio, dobićemo niz svih racionalnih brojeva razmaka $]0,1[$. — Lako je uvideti da je i skup racionalnih brojeva koji leže u razmaku proizvoljnog tipa ekvivalentan skupu prirodnih brojeva.

Ako ovi primeri i navode na to, ne treba misliti da su svi beskonačni skupovi ekvivalentni skupu prirodnih brojeva. Kada bi to bio slučaj, problem poređenja beskonačnih skupova ne bi se ni postavljao.

Primer 4. Skup realnih brojeva koji leže u razmaku $]0,1[$ nije ekvivalentan skupu prirodnih brojeva. Drugim rečima, između ova dva skupa ne može se uspostaviti biunivoka korespondencija, ili, što je isto, skup realnih brojeva razmaka $]0,1[$ ne može se poređati u niz.

$\aleph_0 < c$

Dokaz ćemo izvesti svođenjem na apsurd. Pretpostavimo, dakle, da je moguće *sve* brojeve iz $]0,1[$ poređati u niz — označimo taj niz sa (a_n). Kako se svaki realan broj iz $]0,1[$ može napisati u obliku beskonačnog decimalnog razlomka (koji, eventualno, od izvesnog mesta ima same nule), imaćemo

$$\begin{array}{l} a_1 = 0, d_{11}\, d_{12} \ldots d_{1n} \ldots \\ a_2 = 0, d_{21}\, d_{22} \ldots d_{2n} \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n = 0, d_{n1}\, d_{n2} \ldots d_{nn} \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

gde je d_{ik} jedna od cifara $0, 1, \ldots, 9$. Neka je a realan broj

$$a = 0, d_1\, d_2 \ldots d_n \ldots,$$

gde je

$$d_n = \begin{cases} 2 \text{ ako je } d_{nn} = 1 \\ 1 \text{ ako je } d_{nn} \neq 1 \end{cases} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Broj a očigledno pripada razmaku $]0,1[$, a razlikuje se od svakog od brojeva $a_1, a_2, \ldots$ Zaista, od a_1 se razlikuje u prvoj decimali, od a_2 u drugoj, itd. Niz (a_n) ne sadrži, dakle, sve brojeve iz $]0,1[$. Kontradikcija.

Primer 5. Skup realnih brojeva razmaka $]0,1[$ ekvivalentan je skupu svih realnih brojeva, jer između njih postoji biunivoka korespondencija:

$$x \in]-\infty, +\infty[\longleftrightarrow y = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \in]0,1[.$$

Definicija 2. Ako su dva skupa ekvivalentna, kažemo da imaju isti *kardinalni broj*.

Kardinalni broj je, dakle, zajednička karakteristika svih među sobom ekvivalentnih skupova. Kod konačnih skupova, pojam kardinalnog broja se poklapa sa pojmom broja elementa u tom skupu. Primećujemo da kod beskonačnih skupova postoji sledeći paradoks: dva beskonačna skupa mogu imati isti kardinalni broj iako je jedan od njih pravi deo drugog (primer 1).

Kardinalni broj skupa A označavaćemo sa $\overline{\overline{A}}$.

Zbog svog značaja i učestalosti u primeni skupovima koji su ekvivalentni skupu prirodnih brojeva dajemo posebno ime: *prebrojivi* skupovi. Njihov kardinalni broj označavaćemo sa $\aleph_0$ (alef-nula). Za skupove koji su konačni *ili* prebrojivi reći ćemo da su *najviše prebrojivi*. Isto tako za skupove koji su ekvivalentni skupu realnih brojeva kažemo da imaju kardinalni broj *kontinuuma*. Ovaj označavamo sa c.

Sledeći iskazi omogućuju da se utvrdi da li je neki skup prebrojiv.

Stav 1. *Svaki deo prebrojivog skupa je konačan ili prebrojiv.*

Dokaz. Neka je A prebrojiv skup i neka je $B \subset A$. Članovi skupa A mogu se poređati u niz: $a_1, a_2, \ldots$ Ako $n_1, n_2, \ldots$ označavaju one indekse za koje $a_{n_i} \in B$, postoje dve mogućnosti: ili među brojevima n_i postoji najveći ili takvog nema. U prvom slučaju skup B je konačan, u drugom prebrojiv.

Stav 2. *Unija najviše prebrojivo mnogo prebrojivih skupova je prebrojiv skup.*

Dokaz. Neka su $A_1, A_2, \ldots$ prebrojivi skupovi kojih ima konačno ili prebrojivo mnogo. Elemente svakog od njih možemo poređati u niz:

$$\begin{array}{ll} A_1 & a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, \ldots \\ A_2 & a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, \ldots \\ & a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}, \ldots \\ & a_{41}, a_{42}, a_{43}, a_{44}, \ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Ovu eventualno dvostruko beskonačnu shemu možemo na više načina poređati u niz; na primer, ovako:

$$a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{31}, a_{22}, a_{13}, a_{41}, a_{32}, a_{23}, a_{14}, \ldots$$

što pokazuje da je uočena unija prebrojiva.

Primer 6. Skup svih racionalnih brojeva je prebrojiv. Naime, skup racionalnih brojeva koji leže u razmaku $[n, n+1[$ je prebrojiv, a takvih razmaka ima prebrojivo mnogo $(n=0, -1, +1, -2, +2, \ldots)$.

Stav 3. *Ako je A prebrojiv skup, takav je i skup*

$$A^k = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{k} \ (k=1, 2, \ldots).$$

Dokaz. $A^1 = A$ je po pretpostavci prebrojiv. Pretpostavimo da je skup A^{k-1} prebrojiv. Elementi skupa A^k su oblika

$$(b, a), \quad \text{gde} \quad b \in A^{k-1} \quad \text{i} \quad a \in A.$$

Za svako fiksirano b kolekcija parova (b, a) je ekvivalentna skupu A, tj. prebrojiva. Takvih kolekcija ima tačno onoliko koliko elemenata sadrži A^{k-1}, dakle, opet prebrojivo mnogo. U A^k ima, znači, prebrojivo mnogo elemenata (stav 2). Totalnom indukcijom sledi onda tvrđenje stava 3.

Primer 7. Skup tačaka u ravni $(R^2 = R \times R)$ čije su koordinate racionalni brojevi je prebrojiv skup. Isto važi za skup tačaka sa racionalnim koordinatama koje leže u R^k.

Stav 4. *Svaki beskonačan skup sadrži jedan prebrojiv podskup.*

Dokaz. Neka je A beskonačan skup i neka $a_1 \in A$. Kako je A beskonačan, postoji u A element $a_2 \neq a_1$, zatim element $a_3 \neq a_1$ i a_2, itd. Nastavljajući ovaj proces kome nema kraja, jer je A beskonačan skup, dobićemo prebrojiv skup $\{a_1, a_2, \ldots\}$ koji je podskup od A.

Iskaz stava 4 mogao bi navesti na pomisao da je $\aleph_0$ „najmanji" među beskonačnim kardinalnim brojevima. No ovo može imati precizan smisao tek ako pokažemo da se među beskonačne kardinalne brojeve može uvesti poredak.

Ako analiziramo koje su mogućnosti korespondencije između dva skupa A i B, uviđamo da postoje četiri logičke alternative:

1° skup A je ekvivalentan skupu B;

2° skup A je ekvivalentan nekom delu od B, ali nije ekvivalentan čitavom skupu B (i njoj simetrična kada slova A i B izmene mesta);

3° skup A je ekvivalentan nekom delu od B, i skup B je ekvivalentan nekom delu od A;

4° skupovi A i B nisu međusobno ekvivalentni, niti je bilo koji deo jednog od ova dva skupa ekvivalentan drugom od skupova.

Može se pokazati da je alternativa 4° nemoguća, te ostaju samo alternative 1°—3°. Što se tiče ove poslednje važi

Stav 5 (Cantor-Bernstein). *Ako je skup A ekvivalentan jednom delu skupa B, i ako je, obrnuto, skup B ekvivalentan jednom delu skupa A, tada su skupovi A i B ekvivalentni.*

Za dokaz stava 5 potrebna nam je sledeća lema, koja je i sama za sebe od interesa.

Lema. *Neka $A \supset A_1 \supset A_2$. Ako je $A_2 \sim A$, tada su sva ova tri skupa međusobno ekvivalentni.*

Dokaz leme. Neka je f biunivoka korespondencija između A i A_2. Pre likavanje f će uspostavljati biunivoku korespondenciju i između $A_1 (\subset A)$ i jednog potpuno određenog skupa $A_3 (\subset A_2)$. Ako ovo rezonovanje sa skupovima A, A_1 i A_2 primenimo doslovce na skupove A_1, A_2 i A_3, zaključićemo da f uspostavlja biunivoku korespondenciju između skupa $A_2 (\subset A_1)$ i jednog određenog skupa $A_4 (\subset A_3)$. Nastavljajući ovaj postupak, dobićemo niz skupova

$$A \supset A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset A_4 \supset \ldots$$

tako da je

$$A \sim A_2, \quad A_1 \sim A_3, \quad A_2 \sim A_4, \ldots$$

No, iz načina kako smo konstruisali skupove $A_3, A_4, \ldots$, sledi da važi i

$$
\begin{aligned}
&A - A_1 \sim A_2 - A_3,\\
(1)\qquad &A_1 - A_2 \sim A_3 - A_4,\\
&A_2 - A_3 \sim A_4 - A_5,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Stavimo

$$B = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \quad (A_0 = A).$$

Očigledno je

$$A = (\underline{A - A_1}) \cup (A_1 - A_2) \cup (\underline{A_2 - A_3}) \cup (A_3 - A_4) \cup \ldots \cup B$$

i

$$A_1 = (A_1 - A_2) \cup (\underline{A_2 - A_3}) \cup (A_3 - A_4) \cup (\underline{A_4 - A_5}) \cup \ldots \cup B.$$

Zbog $A_n \supset A_{n+1}$ skupovi u zagradama u svakom od ovih izraza su međusobno disjunktni. Kako između na isti način podcrtanih skupova postoji, na osnovu (1), biunivoka korespondencija, a ostali skupovi su par po par identični, to između A i A_1 u celini postoji biunivoka korespondencija. Time je lema dokazana.

Dokaz stava 5. Neka je

$$A \sim B_1, \quad B_1 \subset B,$$

i

$$B \sim A_1, \quad A_1 \subset A.$$

Označimo sa f biunivoku korespondenciju između B i A_1. Neka je A_2 skup onih elemenata iz A_1 koji korespondencijom f odgovaraju elementima iz B_1. Tada

$$A \supset A_1 \supset A_2 \quad \text{i} \quad A \sim A_2,$$

jer je $A \sim B_1$ i $B_1 \sim A_2$. Na osnovu leme, sledi tada $A \sim A_1$, odakle, zbog $B \sim A_1$, dobijamo $A \sim B$.

Za sada, istina, znamo za samo dva beskonačna kardinalna broja, $\aleph_0$ i c, ali već i to opravdava sledeće razmatranje.

U skup beskonačnih kardinalnih brojeva uvedimo binarnu relaciju:

(2) „skup A je ekvivalentan skupu B ili nekom njegovom delu".

Ovo je jedna relacija poretka: refleksivnost i tranzitivnost slede trivijalno; antisimetričnost tvrdi stav 5. Označavamo je sa $\leqslant$. Specijalno, ako je $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$ i $\overline{\overline{A}} \neq \overline{\overline{B}}$, pišemo $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$. Uvedeni poredak je totalan. Zaista, od četiri logičke mogućnosti korespondencije između skupova, četvrta, kao što smo napomenuli, otpada, a treća se na osnovu Cantor-Bernsteinovog stava svodi na prvu. Ostaju, dakle, samo prve dve, a baš njima je definisana uvedena relacija poretka.

Primer 8. $\aleph_0 < c$, jer u primeru 4 smo videli da je $\aleph_0 \neq c$, a očigledno je $\aleph_0 \leqslant c$.

Pokazaćemo da, sem $\aleph_0$ i c, ima neograničeno mnogo drugih beskonačnih kardinalnih brojeva.

Stav 6. *Neka je A proizvoljan skup i neka je* **P**A *njegov partitivni skup. Tada je* $\overline{\overline{\mathbf{P}A}} > \overline{\overline{A}}$.

Ako je A beskonačan skup, tada skupovi A, **P**A, **P**(**P**A), ... imaju, na osnovu stava 6, sve veći i veći (beskonačan) kardinalan broj. Kolekcija (beskonačnih) kardinalnih brojeva je, dakle, beskonačna.

Dokaz stava 6. Pre svega, jasno je da je $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{\mathbf{P}A}}$, jer se može uspostaviti biunivoka korespondencija između A i onog dela od **P**A čiji elementi sadrže samo po jednu tačku iz A.

Pokazaćemo da je $\overline{\overline{A}} \neq \overline{\overline{\mathbf{P}A}}$, tj. da se između A i **P**A ne može uspostaviti biunivoka korespondencija. U tom cilju označimo sa f proizvoljno preslikavanje skupa A u skup **P**A. Pokazaćemo da postoji bar jedan elemenat u **P**A koji nije slika nijednog elementa iz A preslikavanjem f; kako je f proizvoljno preslikavanje, to znači da je nemoguće uspostaviti biunivoku korespondenciju između A i **P**A. Takav jedan element iz **P**A (dakle, deo od A) je skup B *svih* onih elemenata a iz A koji ne leže u svojoj slici, tj. za koje važi $a \notin f(a)$. Zaista, kada bi i B bio slika nekog $b \in A$, tj. $B = f(b)$, imali bismo, ili

$$b \notin f(b) \quad \Rightarrow \quad b \in B, \quad \text{tj.} \quad b \in f(b),$$

ili

$$b \in f(b) \quad \Rightarrow \quad b \notin B, \quad \text{tj.} \quad b \notin f(b),$$

dakle, u oba slučaja kontradikciju.

Interesantnu vezu između kardinalnih brojeva $\aleph_0$ i c daje

Stav 7. *Kardinalni broj partitivnog skupa nekog prebrojivog skupa jednak je kardinalnom broju kontinuuma.*

Pre nego što pređemo na dokaz stava 7, zadržaćemo se na pojmu decimalnog, dijadskog i trijadskog razvitka realnog broja; oni će nam i u drugoj prilici biti od koristi.

Skup beskonačnih decimalnih razlomaka D koji odgovaraju realnim brojevima iz $[0,1[$ je skup beskonačnih redova oblika

$$0+\frac{d_1}{10}+\frac{d_2}{10^2}+\frac{d_3}{10^3}+\cdots,$$

gde je d_n jedna od cifara $0, 1, \ldots, 9$. Za beskonačni decimalni razlomak koristimo obično simbol $0, d_1 d_2 d_3 \ldots$ Nekim realnim brojevima odgovaraju dva beskonačna decimalna razlomka; na primer, broju $^1/_4$ decimalni razlomci $0{,}25000\ldots$ i $0{,}24999\ldots$ Da uklonimo ovaj nedostatak, dajemo konstrukciju koja svakom realnom broju iz $[0, 1[$ koordinira jedan jedini beskonačni decimalni razlomak. Ovim postupkom je, naime, isključena mogućnost da se jave beskonačni decimalni razlomci koji od izvesnog mesta imaju same devetice. Konstrukciju ćemo ilustrovati na broju $^1/_4$. Podelimo razmak $[0,1[$ na deset jednakih i disjunktnih delova:

$$\left[0, \frac{1}{10}\right[, \quad \left[\frac{1}{10}, \frac{2}{10}\right[, \ldots, \quad \left[\frac{9}{10}, \frac{10}{10}\right[.$$

$^1/_4$ nalazi se u razmaku $[2/10, 3/10[$; otud je prva decimala jednaka 2. Podelimo zatim razmak $[2/10, 3/10[$ na:

$$\left[\frac{20}{10^2}, \frac{21}{10^2}\right[, \quad \left[\frac{21}{10^2}, \frac{22}{10^2}\right[, \ldots, \quad \left[\frac{29}{10^2}, \frac{30}{10^2}\right[.$$

$^1/_4$ se nalazi u razmaku $[25/10^2, 26/10^2[$, te je druga decimala jednaka 5. Deleći dalje razmak $[25/10^2, 26/10^2[$ na deset delova, $^1/_4$ će se nalaziti u prvom od tih podrazmaka, tj. treća decimala je nula, i nula će se stalno ponavljati kod svake sledeće podele. Dakle,

$$\frac{1}{4}=0+\frac{2}{10}+\frac{5}{10^2}+\frac{0}{10^3}+\frac{0}{10^4}+\cdots=0{,}25000\ldots$$

Deljenje razmaka $[0,1[$ na deset delova može samo sa praktične tačke gledišta da bude opravdano. Međutim, sa teorijske tačke gledišta mogli smo isto tako vršiti deobu na neki drugi broj delova. Specijalno, ako stalno delimo na dva odnosno tri jednaka dela dolazimo do *dijadskih* odnosno *trijadskih razlomaka* (*razvitaka*). Kod dijadskih razlomaka javljaju se samo cifre 0 i 1, a kod trijadskih razvitaka cifre 0, 1 i 2. Specijalno, u izloženoj konstrukciji kod dijadskih razvitaka neće se posle izvesnog mesta stalno ponavljati cifra 1, a kod trijadskih cifra 2. Između takvih dijadskih odnosno trijadskih razvitaka i realnih brojeva razmaka $[0,1[$ postoji biunivoka korespondencija. U dijadskom odnosno trijadskom sistemu je

$$\frac{1}{4}=0+\frac{0}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{0}{2^3}+\frac{0}{2^4}+\frac{0}{2^5}+\cdots=0{,}01000\ldots$$

odnosno

$$\frac{1}{4}=0+\frac{0}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{0}{3^3}+\frac{2}{3^4}+\frac{0}{3^5}+\frac{2}{3^6}+\cdots=0{,}020202\ldots$$

Boje *Dokaz* stava 7. Neka je N skup prirodnih brojeva i $I=[0,1[$. Treba pokazati da se može uspostaviti biunivoka korespondencija između skupova $\mathbf{P}N$ i I. U tom cilju, prvo ćemo konstruisati biunivoku korespondenciju f između $\mathbf{P}N$ i jednog dela od I, a zatim biunivoku korespondenciju g između I i jednog dela od $\mathbf{P}N$. Na osnovu Cantor-Bernsteinovog stava slediće onda ekvivalencija skupova I i $\mathbf{P}N$.

$N = 1, 2, 3, \ldots$ $\quad PN \leftrightarrow I$

Ako je $A \in \mathbf{P}N$, $f(A)$ ćemo definisati kao onaj broj $x = 0, d_1 d_2 \dots$ iz I, čiji su decimali d_n određeni sa

$$d_n = \begin{cases} 3 \text{ ako } n \in A, \\ 5 \text{ ako } n \notin A. \end{cases}$$

Ako je $x \in I$ i ako je $0, b_1 b_2 \dots$ dijadski razvitak od x, $g(x)$ ćemo definisati kao onaj deo A od N koji sadrži sve one prirodne brojeve n za koje je $b_n = 1$.

Prema primeru 8, $\aleph_0 < c$. Pretpostavka da je c neposredni sledbenik od $\aleph_0$, tj. da između $\aleph_0$ i c nema drugih kardinalnih brojeva, poznata je kao *hipoteza kontinuuma*. Dugo vremena svi pokušaji da se ona dokaže ili obori ostali su bezuspešni. U najnovije vreme, Gödel i Cohen su dokazali da je ona nezavisna od prethodnih razmatranja, tj. da se ona može prihvatiti kao aksiom ili odbaciti. Ako je prihvatimo, za c je umesna i oznaka $\aleph_1$.

Vežbanja 6

√ 1. Skup realnih brojeva koji leže u razmaku (a, b) $(a<b)$ proizvoljnog tipa ima kardinalni broj c. [Kostruisati linearnu funkciju koja preslikava (a, b) na $(0,1)$.]

2. Kardinalni broj beskonačnog skupa A se ne menja ako mu dodamo elemente nekog najviše prebrojivog skupa B. [Na osnovu stava 4 postoji prebrojiv skup $C \subset A$. Ako stavimo $D = A - C$, tvrđenje sledi iz $A = D \cup C$ i $A \cup B = D \cup (C \cup B)$, jer se između C i $C \cup B$ može uspostaviti biunivoka korespondencija.]

3. Kardinalni broj beskonačnog skupa A koji nije prebrojiv ne menja se ako mu oduzmemo najviše prebrojiv podskup B. [Skup $C = A - B$ je sigurno beskonačan, pa je, na osnovu vežbanja 2, $C \cup B \sim C$.]

√ 4. Skup iracionalnih brojeva koji leže u razmaku (a, b) proizvoljnog tipa ima kardinalni broj c. [Na osnovu vežbanja 3.]

√ 5. Skup svih polinoma sa racionalnim koeficijentima je prebrojiv. [Uočiti skup svih polinoma fiksiranog stepena, pa zatim primeniti stav 3 i stav 2.]

6. Unija najviše prebrojivo mnogo disjunktnih skupova A_k kardinalnog broja c i sama ima kardinalni broj c. [Skup A_k ekvivalentan je skupu realnih brojeva iz razmaka $[k, k+1[$, odakle sledi $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \sim \bigcup_{k=1}^{\infty} [k, k+1[$.]

7. Skup A svih tačaka (x, y) koje leže u pravougaoniku $\{(x, y)\colon 0 \leqslant x < 1, 0 \leqslant y < 1\}$ ima kardinalni broj c. [Neka je I razmak $[0,1[$. Očigledno je $\overline{\overline{I}} \leqslant \overline{\overline{A}}$. Da je $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{I}}$, sledi, jer se može uspostaviti biunivoka korespondencija između A i jednog dela od I na sledeći način: svakom elementu (x, y) iz A, koordiniraćemo, pomoću decimalnih razvitaka $x = 0, d_1 d_2 \dots$ i $y = 0, \delta_1 \delta_2 \dots$ realni broj $z = 0, d_1 \delta_1 d_2 \delta_2 \dots$ iz I.]

8. Skup svih tačaka u ravni R^2 ima kardinalni broj c. [Postavimo loptu poluprečnika $^1/_2$, tako da dodiruje pravougaonik A iz vežbanja 7 u njegovom centru. Kroz proizvoljnu tačku z iz R^2 povući pravu do centra polulopte i tačku prodora kroz poluloptu projektovati ortogonalno na A. Time je uspostavljena biunivoka korespondencija između R^2 i jednog dela od A. Primeniti Cantor-Bernsteinov stav.]

√ 9. Skup svih tačaka u R^k ima kardinalni broj c.

10. Unija kontinuum mnogo disjunktnih skupova kardinalnog broja c i sama ima kardinalni broj c. [Uočimo u ravni sve prave upravne na x-osu. Ovih

ima kontinuum mnogo, pa svakoj od njih odgovara obostrano-jednoznačno jedan skup iz unije. Između elemenata takvog jednog skupa i tačaka na odgovarajućoj pravoj može se uspostaviti biunivoka korespondencija. To je onda moguće i između unije i svih tačaka u ravni.]

—11. Neka je n prirodni broj i uočimo jednačinu

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

sa celim koeficijentima i $a_0 \neq 0$. Svaki kompleksan broj koji je koren ove jednačine zove se *algebarski* broj. Kompleksni brojevi koji nisu algebarski zovu se *transcendentni* brojevi. Pokazati: (1) skup algebarskih brojeva je prebrojiv; (2) skup transcendentnih brojeva ima kardinalni broj c; (3) tvrđenje (2) važi i ako se ograničimo samo na realne transcendentne brojeve.

— 12. Realnih brojeva koji imaju dva različita decimalna (dijadska, trijadska) razvitka ima samo prebrojivo mnogo.

13. Skup A svih nizova čiji su članovi isključivo brojevi 0 ili 1 ima kardinalni broj c. [Uspostaviti biunivoku korespondenciju između A i skupa dijadskih razvitaka brojeva razmaka $[0,1[$. Na osnovu vežbanja 12 i 3, kardinalni broj ovog poslednjeg skupa neće se promeniti ako odbacimo sve one dijadske razvitke koji se završavaju samim jedinicama.]

14. Pokazati da je prebrojiv skup nizova sa racionalnim članovima od kojih je samo njih konačno mnogo različito od nule. [Između kardinalnih brojeva mogu se uvesti pojedine operacije: (i) n-ti stepen ($n = 1, 2, \ldots$) kardinalnog broja skupa A, $(\overline{\overline{A}})^n$, definiše se kao kardinalni broj skupa A^n. (ii) Zbir kardinalnih brojeva skupova $A_n (n = 1, 2, \ldots)$, $\sum_n \overline{\overline{A}}_n$, definiše se kao kardinalni broj skupa $\bigcup_n B_n$, gde je $B_n \sim A_n$ za svako n i $B_m \cap B_n = 0$ za svako m i n $(m \neq n)$. Iskazi stavova 2 i 3 mogu se tada napisati u sažetom obliku: $\aleph_0 + \aleph_0 + \aleph_0 + \cdots = \aleph_0$, odnosno $\aleph_0^n = \aleph_0$. — Tvrđenje izneto u ovom vežbanju možemo onda ovako dokazati: Nizova čiji su svi članovi od $(n+1)$-og indeksa jednaki nuli ima $\aleph_0^n$. Iz $\aleph_0 + \aleph_0^2 + \aleph_0^3 + \cdots = \aleph_0 + \aleph_0 + \aleph_0 + \cdots = \aleph_0$ sledi zato tvrđenje.]

15. Neka su X i Y neprazni skupovi i neka f preslikava X *na* Y. Ako je X najviše prebrojiv skup, takav je i Y.

16. Skup svih realnih funkcija definisanih na $[0,1]$ ima kardinalni broj partitivnog skupa kontinuuma. [Ima bar onoliko funkcija koliko ima karakterističnih funkcija, tj. funkcija koje uzimaju samo vrednosti 0 ili 1 na $[0,1]$.]

17. Dokazati da je $c + c^2 + c^3 + \cdots = c$.

18. Realna funkcija realne promenljive $f(x)$ ima u tački c pravi maksimum ako postoji razmak $]a, b[$ koji sadrži tačku c takav da je za svako $x \in]a, b[$ i $x \neq c$, $f(x) < f(c)$. Pokazati: Skup pravih maksimuma funkcije f je najviše prebrojiv. [Krajevima a i b razmaka davati racionalne vrednosti.]

1.5. 10-12
1.6. 12, 16

II. METRIČKI PROSTOR

1. Primeri metričkih prostora

Mnogi pojmovi vezani za realnu pravu — među njima i pojam konvergencije niza tačaka — zasnivaju se isključivo na rastojanju između dveju tačaka, a nezavisni su od drugih osobina skupa realnih brojeva. To omogućuje da se ti pojmovi i razmatranja vezana za njih uvedu i u druge skupove, ukoliko se u ovima na adekvatan način definiše „rastojanje".

Definicija 1. Neka je X amorfan skup čije ćemo elemente označavati slovima $x, y, z, \ldots$. Ako svakom uređenom paru (x, y) iz X koordiniramo realni broj $d(x, y)$ koji ima ove osobine:

1° $0 \leqslant d(x,y) < +\infty$,

2° $d(x,y)=0 \iff x=y$,

3° $d(x,y)=d(y,x)$,

4° $d(x,y) \leqslant d(x,z)+d(z,y)$,

kažemo da smo skup X snabdeli *metrikom* d. Skup X snabdeven metrikom d zovemo *metrički prostor*. Njegove elemente zovemo *tačkama*, a $d(x, y)$ *rastojanjem* između tačaka x i y.

Metrički prostor je, dakle, par (X, d) koji čine skup X i uvedena metrika d. Ipak, radi kratkoće pisanja, mi ćemo metrički prostor (X, d) jednostavno obeležavati sa X kad god je jasno o kojoj metrici je reč.

Najjednostavniji metrički prostor je skup realnih brojeva snabdeven metrikom $d(x,y)=|x-y|$. Pre nego što navedemo druge primere metričkih prostora, dokazaćemo dve nejednačine na kojima se zasniva *relacija trougla* (osobina 4° rastojanja) u nekim konkretnim prostorima.

Stav 1 (Hölder-ova nejednačina). *Neka su* α_ν *i* $\beta_\nu (\nu=1, 2, \ldots, n)$ *proizvoljni realni (ili kompleksni) brojevi i neka je za* $p>1$ *broj* q *definisan sa* $1/p+1/q=1$. *Tada je za svako* $n=1, 2, \ldots$

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\alpha_\nu \beta_\nu| \leqslant \left\{\sum_{\nu=1}^{n} |\alpha_\nu|^p\right\}^{1/p} \left\{\sum_{\nu=1}^{n} |\beta_\nu|^q\right\}^{1/q}.$$

Specijalno, ako je $p=q=2$, Hölderovu nejednačinu zovemo i Cauchy-Schwarzova nejednačina.

Dokaz. Uvedemo li umesto brojeva α_ν i β_ν brojeve

$$\alpha'_\nu = \alpha_\nu \Big/ \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} |\alpha_\nu|^p \right\}^{1/p} \quad \text{i} \quad \beta'_\nu = \beta_\nu \Big/ \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} |\beta_\nu|^q \right\}^{1/q},$$

Hölderova nejednačina se svodi na

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\alpha'_\nu \beta'_\nu| \leqslant 1,$$

uz uslove

(1) $$\sum_{\nu=1}^{n} |\alpha'_\nu|^p = 1, \quad \sum_{\nu=1}^{n} |\beta'_\nu|^q = 1.$$

U ovom obliku ćemo je dokazati. Ako u elementarnoj nejednačini

(2) $$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad (a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ p > 1,\ 1/p + 1/q = 1)$$

redom stavljamo $a = |\alpha'_\nu|$ i $b = |\beta'_\nu|$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ i saberemo sve tako dobivene nejednačine, nalazimo, vodeći računa o (1),

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\alpha'_\nu \beta'_\nu| \leqslant \frac{1}{p} \sum_{\nu=1}^{n} |\alpha'_\nu|^p + \frac{1}{q} \sum_{\nu=1}^{n} |\beta'_\nu|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

što je trebalo pokazati.

Što se tiče nejednačine (2), primećujemo da je ona trivijalno zadovoljena ako je bar jedan od brojeva a i b jednak nuli. Zato ćemo pretpostaviti da su a i $b > 0$. Funkcija $y = x^m$, $0 < m < 1$, je konveksna prema gore za $x \geqslant 0$; ordinate njene tangente u tački $x = 1$ nisu zato manje od odgovarajućih ordinata funkcije, tj.

$$x^m \leqslant 1 + m(x - 1) \quad \text{za} \quad x \geqslant 0 \quad \text{i} \quad 0 < m < 1.$$

Stavljajući ovde $x = a^p/b^q$ i $m = 1/p$, sledi nejednačina (2).

Stav 2. (Minkowskijeva nejednačina). *Neka su* α_ν *i* $\beta_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, n)$ *proizvoljni realni (ili kompleksni) brojevi i neka je* $p \geqslant 1$. *Tada je za svako* $n = 1, 2, \ldots$

$$\left\{ \sum_{\nu=1}^{n} |\alpha_\nu + \beta_\nu|^p \right\}^{1/p} \leqslant \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} |\alpha_\nu|^p \right\}^{1/p} + \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} |\beta_\nu|^p \right\}^{1/p}.$$

Dokaz je netrivijalan kada je $p > 1$. Primenjujući dva puta Hölderovu nejednačinu, nalazimo

$$\sum_{\nu=1}^{n} |\alpha_\nu + \beta_\nu|^p \leqslant \sum_{\nu=1}^{n} |\alpha_\nu|\, |\alpha_\nu + \beta_\nu|^{p-1} + \sum_{\nu=1}^{n} |\beta_\nu|\, |\alpha_\nu + \beta_\nu|^{p-1}$$

$$\leqslant \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} |\alpha_\nu|^p \right\}^{1/p} \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} |\alpha_\nu + \beta_\nu|^{qp-q} \right\}^{1/q} + \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} |\beta_\nu|^p \right\}^{1/p} \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} |\alpha_\nu + \beta_\nu|^{qp-q} \right\}^{1/q}$$

$$= \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} |\alpha_\nu + \beta_\nu|^p \right\}^{1/q} \left(\left\{ \sum_{\nu=1}^{n} |\alpha_\nu|^p \right\}^{1/p} + \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} |\beta_\nu|^p \right\}^{1/p} \right),$$

odakle, zbog $1 - 1/q = 1/p$, sledi tvrđenje.

Neka je R^k skup čiji su elementi uređeni agregati od k realnih (ili kompleksnih) brojeva. U R^k moguće je metriku uvesti na više načina.

Primer 1. Ako sa $x=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$, $y=(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k)$, $z=(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k), \ldots$ označimo elemente iz R^k, sa

$$d(x, y)=\left\{\sum_{\nu=1}^{k} |\xi_\nu-\eta_\nu|^2\right\}^{1/2}$$

je definisana jedna metrika u R^k. Osobine 1°—3° rastojanja su ovde trivijalno zadovoljene, a relacija trougla sledi iz Minkowskijeve nejednačine sa $n=k$, $p=2$, $\alpha_\nu=\xi_\nu-\zeta_\nu$ i $\beta_\nu=\zeta_\nu-\eta_\nu$. R^k snabdeven ovom metrikom je *Euklidov* (realni ili kompleksni) *metrički prostor*. Označavamo ga sa R_2^k ili jednostavno sa R^k. Za $k=1$ pišemo umesto R^1 kratko R.

Primer 2. U skup R^k se metrika može uvesti i sa

$$d(x, y)=\left\{\sum_{\nu=1}^{k} |\xi_\nu-\eta_\nu|^p\right\}^{1/p} \qquad (1 \leqslant p<\infty).$$

Ovaj metrički prostor označavamo sa R_p^k.

Primer 3. I

$$d(x, y)=\max_{1 \leqslant \nu \leqslant k} |\xi_\nu-\eta_\nu|$$

definiše jednu metriku u skupu R^k. Odgovarajući metrički prostor označavamo sa R_∞^k. Ova oznaka potiče otuda što, ako metriku iz primera 2 označimo sa $d_p(x, y)$, važi

$$\max_{1 \leqslant \nu \leqslant k} |\xi_\nu-\eta_\nu|=\lim_{p \to \infty} d_p(x, y).$$

Dokaz ovoga prepuštamo čitaocu.

Neka je s skup svih nizova sa realnim ili kompleksnim članovima. U s kao celinu, a i neke njegove podskupove, moguće je uvesti metriku. Tako dobijamo *metričke prostore nizova*. Elemente iz s označavamo sa $x=(\xi_1, \xi_2, \ldots)$, $y=(\eta_1, \eta_2, \ldots)$, $z=(\zeta_1, \zeta_2, \ldots), \ldots$ Umesto $(\xi_1, \xi_2, \ldots)$ najčešće ćemo pisati jednostavno (ξ_ν).

Primer 4. Prostor $l_p (1 \leqslant p<\infty)$. Tačke x prostora l_p su beskonačni nizovi brojeva (ξ_ν) takvi da red $\sum_{\nu=1}^{\infty} |\xi_\nu|^p$ konvergira. U l_p rastojanje je uvedeno sa

$$d(x, y)=\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty} |\xi_\nu-\eta_\nu|^p\right\}^{1/p}. \tag{3}$$

Umesto l_1 pisaćemo l.

Pokazaćemo, pre svega, da red koji figuriše u (3) uvek konvergira, tj. da $d(x, y)$ ima smisla za svaki par tačaka iz l_p. Zaista, na osnovu Minkowskijeve nejednačine je za svako $n=1, 2, \ldots$

$$\left\{\sum_{\nu=1}^{n} |\xi_\nu-\eta_\nu|^p\right\}^{1/p} \leqslant\left\{\sum_{\nu=1}^{n} |\xi_\nu|^p\right\}^{1/p}+\left\{\sum_{\nu=1}^{n} |\eta_\nu|^p\right\}^{1/p}.$$

Ako ovde pustimo da $n \to \infty$, slediće konvergencija reda u (3), jer redovi $\sum_{\nu=1}^{\infty} |\xi_\nu|^p$ i $\sum_{\nu=1}^{\infty} |\eta_\nu|^p$ po pretpostavci konvergiraju.

Izraz u (3) ima sve osobine rastojanja. Jedino relacija trougla je vredna pažnje. Stavljajući u Minkowskijevu nejednačinu $\alpha_\nu = \xi_\nu - \zeta_\nu$ i $\beta_\nu = \zeta_\nu - \eta_\nu$, važiće za svako $n = 1, 2, \ldots$

$$\left\{\sum_{\nu=1}^{n} |\xi_\nu - \eta_\nu|^p\right\}^{1/p} \leqslant \left\{\sum_{\nu=1}^{n} |\xi_\nu - \zeta_\nu|^p\right\}^{1/p} + \left\{\sum_{\nu=1}^{n} |\zeta_\nu - \eta_\nu|^p\right\}^{1/p}.$$

Relacija trougla sledi ako pustimo da $n \to \infty$.

Primer 5. Prostor m. Tačke x metričkog prostora m su ograničeni nizovi brojeva (ξ_ν); rastojanje u m uvedeno je sa

$$d(x, y) = \sup_{1 \leqslant \nu < \infty} |\xi_\nu - \eta_\nu|.$$

Primer 6. Prostor c. Tačke x metričkog prostora c su konvergentni nizovi (ξ_ν), a rastojanje je uvedeno kao u m.

Primer 7. Prostor c_0. Tačke x metričkog prostora c_0 su nizovi (ξ_ν) koji konvergiraju nuli, a metrika je ista kao u m.

Primer 8. Prostor s. Tačka x prostora s je bilo koji beskonačni niz (ξ_ν), a rastojanje je uvedeno sa

$$d(x, y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} \frac{|\xi_\nu - \eta_\nu|}{1 + |\xi_\nu - \eta_\nu|}.$$

Ovaj izraz ima smisla, jer, zbog

$$\frac{|\xi_\nu - \eta_\nu|}{1 + |\xi_\nu - \eta_\nu|} \leqslant 1,$$

red na desnoj strani konvergira za svaki par tačaka iz s. Relacija trougla sledi iz nejednačine

$$\frac{|\alpha + \beta|}{1 + |\alpha + \beta|} \leqslant \frac{|\alpha|}{1 + |\alpha|} + \frac{|\beta|}{1 + |\beta|} \tag{4}$$

ako u ovu redom stavljamo $\alpha = \xi_\nu - \zeta_\nu$ i $\beta = \zeta_\nu - \eta_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ i saberemo sve dobivene nejednačine. Nejednačina (4) sledi iz činjenice što funkcija $t/(1+t)$ monotono raste za $t \geqslant 0$.

U sledećim primerima navodimo neke *prostore funkcija*.

Primer 9. Prostor $C[a, b]$. Tačke x metričkog prostora $C[a, b]$ su u razmaku $[a, b]$, $b - a < +\infty$, neprekidne funkcije $x(t)$, a rastojanje je uvedeno sa

$$d(x, y) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)|.$$

Lako je videti da ovaj izraz ima sve osobine rastojanja.

Primer 10. Prostor $\tilde{C}[0, 2\pi]$. Tačke x metričkog prostora $\tilde{C}[0, 2\pi]$ su neprekidne i periodične funkcije $x(t)$ periode 2π, a metrika je ista kao u $C[0, 2\pi]$.

Primer 11. Prostor $C_1[a, b]$. Tačke x metričkog prostora $C_1[a, b]$ su neprekidne funkcije $x(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$, a rastojanje je definisano sa

$$d(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|\,dt. \tag{5}$$

Što se tiče osobine 2° rastojanja jasno je da ako se $x(t)$ i $y(t)$ poklapaju u $[a, b]$ da je tada $d(x, y) = 0$. No i obrnuto, ako je $d(x, y) = 0$ biće $x(t)$ indentički jednako $y(t)$ u $[a, b]$. Zaista, kada bi za neko $t = t_0$ imali $x(t_0) \neq y(t_0)$, tj. $|x(t_0) - y(t_0)| = \delta > 0$, neprekidna funkcija $|x(t) - y(t)|$ bila bi $\geqslant \delta/2$ u čitavom jednom razmaku pozitivne dužine. No tada integral u (5) ne bi mogao da bude jednak nuli. Kontradikcija.

Primer 12. Prostor $B[a, b]$. Tačke x metričkog prostora $B[a, b]$ su u razmaku $[a, b]$ ograničene funkcije, a metrika je uvedena sa

$$d(x, y) = \sup_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)|.$$

Definicija 2. Neka su X i Y dva metrička prostora snabdevena metrikom d_X odnosno d_Y. Ako je $Y \subset X$ i $d_Y = d_X$ za svaki par tačaka iz Y, kažemo da je Y *metrički potprostor* od X.

Svaki deo A metričkog prostora X može se shvatiti kao metrički potprostor od X; tada kažemo da je metrika u A *inducirana* metrikom u X.

Primer 13. c_0 je potprostor od c, a ovaj je potprostor od m. $C[a, b]$ je potprostor od $B[a, b]$.

Definicija 3. Dva metrička prostora X i Y su *izometrična* ako između njih postoji biunivoka korespondencija f takva da je za svaki par tačaka x_1 i x_2 iz X

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2).$$

Takvo preslikavanje f je *izometrija* između prostora X i Y.

Dva izometrična prostora mogu se razlikovati samo po prirodi svojih elemenata; metrički odnosi između tačaka jednog prostora ogledaju se u istim takvim odnosima između odgovarajućih tačaka drugog prostora. Kako su metrički odnosi između tačaka jedino što nas u nekom metričkom prostoru interesuje, to ćemo ubuduće izometrične prostore identifikovati. Specijalno, ako je neki metrički prostor Y izometričan nekom potprostoru od X, reći ćemo da je sam prostor Y potprostor od X.

Definicija 4. Neka su A i B delovi metričkog prostora X. *Rastojanje između skupova* A i B definisano je sa

$$d(A, B) = \inf_{x \in A,\, y \in B} d(x, y).$$

Specijalno, ako se skup B svodi na jednu jedinu tačku b, govorimo o *rastojanju tačke do skupa*

$$d(b, A) = d(\{b\}, A) = \inf_{x \in A} d(b, x).$$

Definicija 5. *Dijametar* skupa $A \subset X$ definisan je sa

$$d(A) = \sup_{x \in A,\, y \in A} d(x, y).$$

Definicija 6. Skup $A \subset X$ je *ograničen* ako ima konačan dijametar.

Vežbanja 1

1. Iz relacije trougla za rastojanje sledi i

$$|d(x, z)-d(z, y)| \leqslant d(x, y).$$

2. Neka je Q skup racionalnih brojeva. U $Q^k = Q \times Q \times \ldots \times Q$ moguće je metriku uvesti kao u primerima 2 i 3. Tako dobiveni metrički prostor označavamo sa $Q_p^k (1 \leqslant p \leqslant \infty)$. Za fiksirano k i p, Q_p^k je potprostor od R_p^k.

3. U proizvoljan skup X metrika se može uvesti sa

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{ako je } x = y, \\ 1 & \text{ako je } x \neq y. \end{cases}$$

Ovo je tzv. *diskretna metrika* na skupu X.

4. U skup funkcija koje imaju neprekidan prvi izvod u $[a, b]$ (jednostran na krajevima), metrika se može uvesti sa

$$d(x, y) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)-y(t)| + \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x'(t) - y'(t)|.$$

Ovaj metrički prostor označavamo sa $D^1[a, b]$.

5. U skupu realnih brojeva

$$d(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$$

je jedno rastojanje.

6. Za koje vrednosti realnog parametra p je $|x-y|^p$ rastojanje u skupu realnih brojeva?

7. Ako neki niz pripada prostoru l_r, on tada pripada i prostoru l_p za $1 \leqslant r < p$. [Na osnovu Jensenove nejednačine $\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty} |\xi_\nu|^p\right\}^{1/p} \leqslant \left\{\sum_{\nu=1}^{\infty} |\xi_\nu|^r\right\}^{1/r} (1 \leqslant r < p)$.]

8. Pokazati da je u skupu neprekidnih funkcija na $(-\infty, +\infty)$

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\max\limits_{|t| \leqslant n} |x(t)-y(t)|}{1+\max\limits_{|t| \leqslant n} |x(t)-y(t)|}$$

jedno rastojanje.

9. Neka je C^* skup svih neprekidnih funkcija $x(t)$ na $(-\infty, +\infty)$, koje su identički jednake nuli izvan nekog konačnog razmaka (uopšte različitog od funkcije do funkcije). Pokazati da je $\max\limits_{-\infty < t < +\infty} |x(t)-y(t)|$ jedno rastojanje na C^*.

10. Uočimo skup neprekidnih funkcija $x(t)$ na razmaku $]0, 1[$. Za bilo koje dve takve funkcije x i y definišimo skup

$$E(x, y) = \{t \in]0, 1[: x(t) \neq y(t)\}.$$

Pokazati da je $E(x, y)$ unija disjunktnih otvorenih intervala. Ako sa $d(x, y)$ označimo njihovu totalnu dužinu, pokazati da je $d(x, y)$ rastojanje u posmatranom skupu.

11. Neka je D^k skup realnih funkcija koje u razmaku $[a, b]$ imaju neprekidne izvode do reda k zaključno. Pokazati da je

$$d(x, y) = \sum_{\nu=0}^{k} \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x^{(\nu)}(t) - y^{(\nu)}(t)|$$

metrika u D^k.

12. Neka je X metrički prostor sa metrikom d. Pokazati da je i

$$d_1(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

jedna metrika u skupu X. Uočiti da je čitav skup X ograničen kada se posmatra u metričkom prostoru (X, d_1).

13. Neka je X neprazan skup i neka je na $X \times X$ definisana realna funkcija $f(x, y)$ koja ima ove dve osobine: $f(x, y) = 0 \iff x = y$, (2) $f(x, y) \leqslant$ $f(x,y)$ $\leqslant f(x, z) + f(y, z)$. Pokazati da je $f(x, y)$ jedno rastojanje u X.

14. U skup svih realnih nizova metrika se može uvesti na sledeći način:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{za} \quad x = y, \\ 1/k & \text{za} \quad x \neq y, \end{cases}$$

gde je

$$k = \min_{\nu} \{\nu : \xi_\nu \neq \eta_\nu\}, \quad (x = (\xi_\nu), \ y = (\eta_\nu)).$$

15. Neka su $(X_1, d_1), (X_2, d_2), \ldots, (X_n, d_n)$ metrički prostori. Ako sa $(x_\nu)_{\nu=1,2,\ldots,n}$, $x_\nu \in X_\nu$, označimo tačku iz skupa-proizvoda $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$, pokazati da se u X metrika može uvesti sa

$$d[(x_\nu), (y_\nu)] = \max_{1 \leqslant \nu \leqslant n} d_\nu(x_\nu, y_\nu)$$

ili sa

$$d^*[(x_\nu), (y_\nu)] = \sum_{\nu=1}^{n} d_\nu(x_\nu, y_\nu).$$

16. Koji su potrebni i dovoljni uslovi da u Hölderovoj nejednačini važi znak jednakosti?

17. Numerički red $\sum_{\nu=1}^{\infty} \xi_\nu \eta_\nu$ konvergira apsolutno za svaki niz (ξ_ν) iz $l_p (p > 1)$ ako niz $(\eta_\nu) \in l_q (1/p + 1/q = 1)$. [Na osnovu Hölderove nejednačine.]

18. Numerički red $\sum_{\nu=1}^{\infty} \xi_\nu \eta_\nu$ konvergira apsolutno za svaki niz (ξ_ν) iz l ako niz $(\eta_\nu) \in m$.

19. $l_p (p \geqslant 1)$ je podskup od c_0, ali nije njegov metrički potprostor.

20. Neka je X neprazan skup i neka je d realna funkcija uređenih parova (x, y) iz X koja zadovoljava: 1° $d(x, y) \geqslant 0$, 2° $x = y \Rightarrow d(x, y) = 0$, 3° $d(x, y) = d(y, x)$; 4° $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$. Funkcija d ovih osobina zove se *pseudorastojanje* i ona definiše jednu *pseudometriku* u X. Ako je d pseudorastojanje u X, relacija

$$x \sim y \quad \text{ako je} \quad d(x, y) = 0$$

je jedna relacija ekvivalencije u X. U skup količnih $X/\sim$ moguće je tada na prirodan način uvesti metriku:

$$d_1(C_x, C_y) = d(x, y),$$

$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x \sim y$

gde su C_x i C_y odgovarajuće klase ekvivalencije.

2.i. Deskriptivne osobine skupova

(i) Neka je X metrički prostor sa metrikom d. Ne naglašavajući to uvek posebno, smatraćemo da su svi skupovi o kojima će biti reči delovi od X.

Definicija 1. Neka je ϱ pozitivan realan broj i neka je a fiksirana tačka iz X. Skup tačaka $x \in X$ koje zadovoljavaju

$$d(x, a) < \varrho \qquad \text{odnosno} \qquad d(x, a) \leqslant \varrho$$

je *otvorena* odnosno *zatvorena kugla* s centrom u tački a i poluprečnika ϱ. *Sferu* sa centrom u a poluprečnika ϱ obrazuju one tačke $x \in X$ koje zadovoljavaju $d(x, a) = \varrho$.

Otvorenu kuglu označavamo sa $K]a, \varrho[$, a zatvorenu sa $K[a, \varrho]$. Često, kada je svejedno da li je kugla otvorena ili zatvorena, pišemo $K(a, \varrho)$. Oznaka za sferu je $S(a, \varrho)$. Samo u Euklidovom prostoru R^3 termin kugla i sfera odgovaraju našoj geometrijskoj predstavi. Na primer, u $R_p^2 (1 \leqslant p \leqslant \infty)$ kugla sa centrom u tački $(0, 0)$ i poluprečnika 1 svodi se na:

kvadrat čija su temena u tačkama $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$ ako je $p = 1$;

krug poluprečnika 1 ako je $p = 2$;

kvadrat sa temenima u tačkama $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, $(1, -1)$ ako je $p = \infty$.

Kada p varira od 1 do ∞, „kugla" se neprekidno deformiše od oblika koji uzima za $p = 1$ do oblika koji uzima za $p = \infty$.

Definicija 2. $A \subset X$ je *otvoren* skup ako za svako $x \in A$ postoji neko $\varrho > 0$ tako da $K]x, \varrho[\subset A$.

Otvorene skupove označavamo obično slovom G.

Otvorena kugla je najjednostavniji otvoren skup. Zaista, ako je $x \in K]a, \varrho[$, tada je $d(x, a) < \varrho$, pa $K]x, \varrho - d(x, a)[\subset K]a, \varrho[$.

Stav 1. 1° *Prazan skup i čitav prostor su otvoreni skupovi.*

2° *Unija ma koje kolekcije otvorenih skupova* $\{G_i\}_{i \in I}$ *je otvoren skup.*

3° *Presek konačno mnogo otvorenih skupova je otvoren skup.*

Presek beskonačno mnogo otvorenih skupova ne mora da bude otvoren skup. Na primer, u R presek skupova $]-1/n, +1/n[$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sadrži jednu jedinu tačku (nulu), te nije otvoren skup.

Dokaz stava 1. 1° Prazan skup se bez daljeg može prihvatiti kao otvoren, jer ne sadrži ni jednu tačku kojoj bi se nametnuo određen uslov. (Neki autori zato *per definitionem* smatraju prazan skup otvorenim). Jasno je da je čitav prostor otvoren skup.

2° Ako $x \in \bigcup_{i \in I} G_i$, tada za neko $i_0 \in I$, $x \in G_{i_0}$. No kako je, prema pretpostavci, G_{i_0} otvoren skup, postoji kugla $K]x, \varrho[\subset G_{i_0}$; tim pre je i $K]x, \varrho[\subset \bigcup_{i \in I} G_i$, što je trebalo pokazati.

3° Ako $x \in \bigcap_{i=1}^{n} G_i$, tada

$$x \in G_i \quad \forall \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Kako su svi skupovi G_i otvoreni, to postoje pozitivni bbrojevi $\varrho_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ tako da

$$K]x, \varrho_i[\subset G_i \quad \forall \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ako stavimo

$$\varrho = \min(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n),$$

kugla $K]x, \varrho[$ ležaće u svakom od skupova G_i, pa prema tome i u njihovom preseku $\bigcap_{i=I}^{n} G_i$. Ovaj je, dakle, otvoren skup.

Definicija 3. Skup $A \subset X$ je *zatvoren* ako mu je komplement u odnosu na čitav prostor otvoren skup.

Zatvorene skupove označavamo obično slovom F.

Primer 1. Zatvorena kugla je zatvoren skup. (Dokazati!)

Primer 2. Svaki konačan skup je zatvoren.

Primer 3. Svaka sfera je zatvoren skup.

Najveći broj skupova nije ni otvoren ni zatvoren. Na primer, razmak $]\alpha, \beta]$ u R.

S obzirom na princip dualiteta (I.2), stavu 1 odgovara:

Stav 2. 1° *Čitav prostor i prazan skup su zatvoreni skupovi.*

2° *Presek ma koje kolekcije zatvorenih skupova* $\{F_i\}_{i \in I}$ *je zatvoren skup.*

3° *Unija konačno mnogo zatvorenih skupova je zatvoren skup.*

Definicija 4. *Okolina* skupa $A \subset X$ je svaki skup V koji sadrži jedan otvoren skup u kome leži skup A. Specijalno, ako se skup A svodi na jednu jedinu tačku x, govorimo o okolini tačke x. Ovu označavamo sa V_x.

Kugla $K]x, \varepsilon[$ je za svako $\varepsilon > 0$ jedna okolina tačke x; zovemo je ε-okolina tačke x.

Stav 3. *Skup A je otvoren tada i samo tada ako je okolina svake svoje tačke.*

Dokaz. Ako je A otvoren skup, on je, prema definiciji 4, okolina svake svoje tačke. Obrnuto, neka je A okolina svake svje tačke x, tj. neka svakom x odgovara otvoren skup $G_x \subset A$ tako da $x \in G_x$. No kako je

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \bigcup_{x \in A} G_x \subset A,$$

to je

$$A = \bigcup_{x \in A} G_x,$$

odakle, na osnovu stava 1, sledi da je A otvoren skup.

Definicija 5. Tačka x je *unutrašnja tačka* skupa A ako je A njena okolina.

Kolekcija svih unutrašnjih tačaka skupa A obrazuje *unutrašnjost* od A. Označavamo je sa $\mathring{A}$.

Očigledno je $\mathring{A} \subset A$.

Primer 4. Unutrašnjost razmaka (α, β) je otvoreni razmak $]\alpha, \beta[$.

Primer 5. Unutrašnjost skupa racionalnih brojeva je prazan skup.

Stav 4. *$\mathring{A}$ je najveći otvoreni skup sadržan u A. Otvoreni skupovi su, dakle, okarakterisani sa $\mathring{A} = A$.*

Dokaz. Pokazaćemo prvo da je $\mathring{A}$ otvoren skup. Po definiciji 5, naime, svakom $x \in \mathring{A}$ odgovara otvoren skup $G_x \subset A$ koji sadrži tačku x. No, na osnovu stava 3, G_x je kao otvoren skup okolina svake svoje tačke, pa je, tim pre, i A okolina svake tačke iz G_x, tj. $G_x \subset \mathring{A}$. Znači, $\mathring{A}$ je okolina tačke x, a kako je x proizvoljna tačka iz $\mathring{A}$, to, opet na osnovu stava 3, sledi da je $\mathring{A}$ otvoren skup.

Da je $\mathring{A}$ najveći otvoreni skup sadržan u A sledi direktno iz definicije 5. Naime, ako je G bilo koji otvoren skup $\subset A$, svaka tačka od G je i unutrašnja tačka od A, tj. $G \subset \mathring{A}$.

Stav 5. 1° $\overset{\circ}{(\mathring{A})} = \mathring{A}$,

2° $A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$,

3° $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.

Dokaz. 1° sledi iz činjenice da je $\mathring{A}$ otvoren skup i da je unutrašnjost otvorenog skupa sam taj skup (stav 4).

2° Ako je x unutrašnja tačka od A, tj. A okolina od x, tim pre je, zbog $B \supset A$, i B okolina od x, te je x unutrašnja tačka od B.

3° Ako $x \in \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}$, postoji otvoren skup $G_x \subset A \cap B$ koji sadrži tačku x. No tada je $G_x \subset A$ i $G_x \subset B$, tj. $x \in \mathring{A}$ i $x \in \mathring{B}$, pa prema tome i $x \in \mathring{A} \cap \mathring{B}$. Obrnuto, ako $x \in \mathring{A} \cap \mathring{B}$, tj. $x \in \mathring{A}$ i $x \in \mathring{B}$, postojaće otvoreni skupovi $G_x' \subset A$ i $G_x'' \subset B$ koji sadrže tačku x. No tada je i skup $G_x' \cap G_x''$ otvoren skup (stav 1), sadrži tačku x i $G_x' \cap G_x'' \subset A \cap B$. $A \cap B$ je dakle, okolina tačke x, tj. $x \in \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}$.

Definicija 6. Tačka x je *adherentna tačka* skupa A ako u svakoj njenoj okolini leži bar jedna tačka iz A.

Kolekcija adherentnih tačaka skupa A obrazuje *adherenciju* od A. Označavamo je sa $\bar{A}$.

Očigledno je $A \subset \bar{A}$.

Primer 6. Adherencija razmaka (α, β) u R je zatvoreni razmak $[\alpha, \beta]$.

Primer 7. Adherencija skupa racionalnih brojeva je skup svih realnih brojeva.

Primećujemo da se kod skupova i njihovih komplemenata unutrašnje i adherentne tačke uzajamno isključuju. Naime ako x nije unutrašnja (adherentna) tačka skupa A, ona je adherentna (unutrašnja) tačka skupa $\mathbf{C}A$. Iz ove primedbe, definicije zatvorenih skupova i principa dualiteta, stavovima 4 i 5 odgovaraju:

Stav 6. *$\bar{A}$ je najmanji zatvoreni skup koji sadrži A. Zatvoreni skupovi su okarakterisani sa $\bar{A} = A$.*

Stav 7. 1° $\overline{(\bar{A})} = \bar{A}$,

2° $A \subset B \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$,

3° $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Definicija 7. Tačka x je *tačka međe* (ruba) skupa A ako je istovremeno adherentna tačka oba skupa A i $\mathbf{C}A$.

Kolekcija svih tačaka međe skupa A obrazuje *među* (rub) od A.

Po definiciji, u svakoj okolini tačke međe skupa A leži bar jedna tačka iz $\mathbf{C}A$. Znači, međa od A je istovremeno i međa od $\mathbf{C}A$.

Primer 8. Među razmaka (α, β) u R obrazuju tačke α i β. Među razmaka (α, β) u R^2 obrazuje zatvoreni razmak $[\alpha, \beta]$.

Primer 9. U R je međa skupa racionalnih brojeva skup svih realnih brojeva.

Stav 8. *Međa svakog skupa je zatvoren skup.*

Dokaz. Prema definiciji 7, međa skupa A je skup $\bar{A} \cap \overline{\mathbf{C}A}$. Kako su skupovi $\bar{A}$ i $\overline{\mathbf{C}A}$ zatvoreni (stav 6), takav je i njihov presek (stav 2).

Iz izloženog sledi da se sve tačke prostora mogu podeliti u tri kategorije u odnosu na dati skup: jedne su unutrašnje tačke od A, druge su unutrašnje tačke od $\mathbf{C}A$, a treće su tačke međe od A (a time i od $\mathbf{C}A$).

Definicija 8. Tačka x je *izolovana tačka* skupa A ako postoji okolina tačke x u kojoj, sem x, nema drugih tačaka iz A.

Definicija 9. Tačka x je *tačka nagomilavanja* skupa A ako u svakoj njenoj okolini leži bar jedna tačka iz A *različita* od x.

Kolekcija tačaka nagomilavanja skupa A obrazuje *izvedeni skup* od A. Ovaj označavamo sa A'.

Tačka nagomilavanja može ali ne mora pripadati skupu. Na primer, u R skupu $\{1/n\}$ ne pripada njegova jedina tačka nagomilavanja (nula).

Primer 10. Izvedeni skup skupa racionalnih brojeva je skup svih realnih brojeva.

$(A')'$ u opštem slučaju nije jednako A'. Na primer, ako je $A=\{1/n\}$. tada je $A'=\{0\}$, dok je $A''=\emptyset$.

Stav 9. *Za proizvoljan skup A važi $\bar{A}=A\cup A'$.*

$A \subset \bar{A}$

Dokaz. Ako $x\notin\bar{A}$, tada postoji okolina tačke x u kojoj nema nijedne tačke iz A. Znači, x tada ne može pripadati ni A ni A', pa, dakle, ni njihovoj uniji. Obrnuto, ako $x\notin A\cup A'$, postoji okolina u kojoj nema tačaka iz A, te ne može ležati u $\bar{A}$.

Stav 10. *Skup A je zatvoren tada i samo tada ako mu pripadaju sve tačke nagomilavanja, tj. ako je $A'\subset A$.*

Dokaz. Ako je A zatvoren skup, tj. $\bar{A}=A$, biće na osnovu stava 9 $A=A'\cup A$, odakle sledi $A'\subset A$. Obrnuto, ako je $A'\subset A$ biće $A'\cup A=A$, dakle na osnovu stava 9 sledi $\bar{A}=A$, tj. skup A je zatvoren.

Prema definicijama 8 i 9 neka tačka skupa A je ili izolovana ili tačka nagomilavanja od A; prema tome važi:

Stav 11. *Svaki zatvoreni skup je disjunktna unija svojih izolovanih tačaka i svojih tačaka nagomilavanja.*

Definicija 10. Skup A je *perfektan* ako mu pripadaju sve tačke nagomilavanja i ako je svaka njegova tačka jedna tačka nagomilavanja, tj. ako je $A'=A$.

Primer 11. Zatvoren razmak u R je perfektan skup. Isto važi i za skup svih realnih brojeva.

Definicija 11. Skup A je *svuda gust* u skupu B, ako je bilo koja tačka iz B adherentna tačka od A, tj. ako je $B\subset\bar{A}$.

Ili: skup A je svuda gust u B ako se u svakoj okolini bilo koje tačke iz B nalazi bar jedna tačka iz A.

Primer 12. Skup racionalnih brojeva je svuda gust u R.

Definicija 12. Skup $A\subset X$ je *nigde gust* u X, ako njegova adherencija $\bar{A}$ ne sadrži nijednu kuglu ili, što je isto, ako $\bar{A}$ nema unutrašnjih tačaka.

Primer 13. Skup celih brojeva je nigde gust u R.

R

Lako je videti da je unija konačno mnogo nigde gustih skupova i sama takva. Međutim, to ne mora biti tačno ako je reč o prebrojivoj uniji; na primer, skup racionalnih brojeva je prebrojiva unija nigde gustih skupova koji se sastoje od po jedne tačke, ali sam nije nigde gust.

Definicija 13. Skup $A\subset X$ je *prve kategorije u X*, ako je unija najviše prebrojivo mnogo nigde gustih skupova u X. Svaki skup koji nije prve, po definiciji je *druge kategorije* u X.

Stav 12. *Prostor X je druge kategorije u samom sebi tada i samo tada ako, ma kako ga prikazali kao uniju od najviše prebrojivo mnogo zatvorenih skupova, $X=\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i$, u bar jednom od skupova F_i leži neka kugla.*

Dokaz. Neka je X druge kategorije u samom sebi i neka je $\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ jedna njegova reprezentacija preko zatvorenih skupova. Stav 12 tvrdi da bar u jednom od skupova F_i mora ležati neka kugla. Zaista, kada ni u jednom od skupova F_i ne bi ležala neka kugla, svi skupovi F_i bili bi nigde gusti u X, pa bi X, kao najviše prebrojiva unija nigde gustih skupova, bio skup prve kategorije.

Obrnuto, ako X *nije* druge kategorije u samom sebi, on se može prikazati kao najviše prebrojiva unija nigde gustih skupova, recimo, $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. No tada je i $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i$, tj. X se može prikazati kao najviše prebrojiva unija zatvorenih skupova od kojih nijedan ne sadrži neku kuglu. Time je i druga polovina tvrđenja ~~dokazana~~.

Definicija 14. Prostor X je *koneksan* ako se ne može prikazati kao unija dva neprazna disjunktna otvorena skupa iz X.

Drugim rečima, prostor X nije koneksan ako postoje otvoreni skupovi $G_1 \neq O$ $G_2 \neq O$, $G_1 \cap G_2 = O$, takvi da $X = G_1 \cup G_2$. Kako je $G_2 = \mathbf{C} G_1$ i $G_1 = \mathbf{C} G_2$, to su G_1 i G_2 istovremeno i zatvoreni skupovi. Prema tome, u definiciji 14 moguće je reč „otvoreni" zameniti sa „zatvoreni". Otuda i ekvivalentna

Definicija 14'. Prostor X je koneksan ako u njemu, sem praznog skupa i čitavog prostora, nema drugog skupa koji bi istovremeno bio i otvoren i zatvoren.

Naime, ako bi A bio jedan takav skup, takav bi bio i $\mathbf{C}A$ pa $A \cup \mathbf{C}A = X$ ne bi bio koneksan prostor.

Definicija 15. Skup $A \subset X$ je koneksan ako je takav posmatran sam za sebe kao metrički prostor.

Ovde je potrebna jedna napomena. Sve deskriptivne osobine skupova koje smo uveli su *relativne*, tj. vezane za metrički prostor u kome ti skupovi leže. Tako, na primer, ako je A deo prostora X i posmatramo ga kao poseban metrički prostor (sa metrikom koju inducira metrika iz X), tada je A otvoren (a i zatvoren) skup u odnosu na sebe samog, bez obzira kakav je u odnosu na prostor X. Recimo, razmak (a, b) proizvoljnog tipa, posmatran kao poseban metrički prostor, je otvoren (a i zatvoren) skup u odnosu na samog sebe. (Videti i primer 8.)

Primer 14. Svaki koneksan skup A na realnoj pravoj svodi se na razmak (proizvoljnog tipa, konačan ili beskonačan).

Neka su, naime, a i b dve različite tačke iz $A \subset R$, recimo, $a < b$. Pokazaćemo da A tada sadrži sve tačke realne prave koje leže između a i b. Zaista, kada bi u R postojala tačka c, $a < c < b$, koja ne pripada skupu A, skup tačaka iz A koje leže levo od c bio bi otvoren (u odnosu na A), a i zatvoren kao komplement otvorenog skupa. No on nije ni prazan jer sadrži tačku a, niti čitav skup A jer ne sadrži tačku b. Shodno definiciji 14', skup A nije koneksan. Kontradikcija.

2.ii. Struktura otvorenih skupova u R^k

U ovom odeljku razmotrićemo strukturu otvorenih i zatvorenih skupova u R^k. U tom pogledu postoji bitna razlika, već prema tome da li je $k=1$ ili je $k \geqslant 2$. Zato ćemo posebno posmatrati ova dva slučaja.

Stav 13. *Svaki neprazan otvoren skup u R je unija najviše prebrojivo mnogo disjunktnih otvorenih razmaka.*

Dokaz. Neka je G otvoren skup u R i neka $x \in G$. Tada postoji otvoren razmak I tako da je $x \in I$ i $I \subset G$. Otvoreni razmak I možemo uvek tako izabrati da su mu krajevi racionalni brojevi. Ako svakom $x \in G$ koordiniramo takav jedan razmak, dobićemo prebrojivu kolekciju razmaka $\{I\}$, jer je skup svih razmaka sa racionalnim krajevima prebrojiv. U kolekciju $\{I\}$ uvešćemo relaciju ekvivalencije: $I' \sim I''$ ako postoji konačan niz razmaka $I_1, I_2, \ldots, I_n$ iz kolekcije $\{I\}$, tako da je $I' = I_1$, $I'' = I_n$ i $I_k \cap I_{k+1} \neq O$ za $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Odgovarajući skup klasa ekvivalencije je očigledno prebrojiv. Prema definiciji relacije ekvivalencije unija svih otvorenih razmaka koji pripadaju istoj klasi ekvivalencije opet je razmak (čiji krajevi ne moraju da budu racionalni brojevi!), i to otvoren na osnovu stava 1. Kako su razmaci koji pripadaju različitim klasama ekvivalencije međusobno disjunktni, takve su i unije razmaka koji pripadaju različitim klasama. Time je stav dokazan.

Na osnovu definicije zatvorenog skupa, iz stava 13 neposredno sledi: Svaki neprazan zatvoren skup u R dobija se kada se sa realne prave odstrani najviše prebrojivo mnogo otvorenih razmaka.

Najjednostavniji zatvoreni skupovi u R su zatvoreni razmaci, izolovane tačke i unije konačno mnogo takvih sastavnih delova. Ove su, naime, komplementi otvorenih skupova koji su unija konačno mnogo disjunktnih otvorenih razmaka. Znatno komplikovaniji je tzv. *Cantorov skup* koji, mada je samo jedan izolovan primer, ilustruje mnoge osobine skupova.

Neka je F_0 razmak $[0, 1]$. Odstranimo iz F_0 otvoreni razmak $]1/3, 2/3[$ i označimo sa F_1 uniju razmaka

$$\left[0, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Odstranimo srednje trećine ova dva razmaka i označimo sa F_2 uniju razmaka

$$\left[0, \frac{1}{9}\right], \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right], \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right], \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Nastavljajući ovaj postupak *ad infinitum*, dobićemo niz zatvorenih skupova (F_n) takvih da $F_n \supset F_{n+1}$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Skup F_n je unija 2^n zatvorenih razmaka od kojih je svaki dužine 3^{-n}.

Cantorov skup F definisan je sa

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n.$$

$F_0 = [0, 1]$

$F_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$

Na osnovu stava 2 on je zatvoren.

Tačke

$$(1) \qquad 0, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, \ldots,$$

kao krajevi odstranjenih otvorenih razmaka, očigledno pripadaju skupu F, ali to nisu i jedine tačke tog skupa. Koristeći trijadske razlomke, pokazaćemo koje sve tačke iz $[0, 1]$ pripadaju skupu F.

Sve tačke otvorenog razmaka $]1/3, 2/3[$, koje smo u prvom koraku odstranili, mogu se napisati kao trijadski razlomak

$$0, a_1 a_2 a_3 \ldots .$$

u kome je a_1 obavezno jedinica. Sami krajevi ovog razmaka dopuštaju dva trijadska razvitka:

$$\frac{1}{3} = \begin{cases} 0{,}1000\ldots \\ 0{,}0222\ldots \end{cases}, \quad \frac{2}{3} = \begin{cases} 0{,}1222\ldots \\ 0{,}2000\ldots \end{cases}.$$

Preostale tačke razmaka $[0, 1]$ ne mogu na prvom mestu svog trijadskog razvitka da imaju jedinicu. Možemo, dakle, reći: posle prvog koraka, u razmaku $[0, 1]$ preostale su samo one tačke koje dopuštaju trijadski razvitak na čijem prvom mestu ne stoji jedinica.

Posmatrajući zatim razmake $[0, 1/3]$ i $[2/3, 1]$, na analogan način možemo se uveriti da posle drugog koraka u razmaku $[0, 1]$ preostaju samo one tačke koje dopuštaju trijadski razvitak na čijem prvom i drugom mestu ne stoji jedinica.

Nastavljajući ovo razmatranje, zaključujemo da Cantorov skup F obrazuju one tačke razmaka $[0, 1]$ koje dopuštaju trijadski razvitak u kome se ne javlja nijedna jedinica. Ovo bi moglo da posluži i kao definicija Cantorovog skupa.

Pokazaćemo da Cantorov skup ima kardinalni broj kontinuuma. U tom cilju uspostavićemo biunivoku korespondenciju između skupa F i skupa svih dijadskih razvitaka brojeva iz razmaka $[0, 1]$: svakom

$$x = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots, \quad a_n = 0 \text{ ili } 2,$$

iz F neka odgovara dijadski razvitak

$$y = 0, b_1 b_2 b_3, \ldots,$$

gde je

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{ako je } a_n = 0, \\ 1 & \text{ako je } a_n = 2. \end{cases}$$

No, kako dijadskih razvitaka brojeva iz $[0, 1]$ ima „više" no što ima realnih brojeva u $[0, 1]$ (jer nekim brojevima odgovaraju dva dijadska razvitka), iz uspostavljene biunivoke korespondencije možemo jedino zaključiti da je $\overline{\overline{F}} \geqslant c$. Ali, kako $F \subset [0, 1]$, to važi i $\overline{\overline{F}} \leqslant c$, što zajedno daje $\overline{\overline{F}} = c$.

Tačke (1) Cantorovog skupa zovemo tačkama prve vrste; njih ima prebrojivo mnogo. Kako je kardinalni broj od F jednak c, to F sadrži kontinuum mnogo tačaka koje nisu krajevi odstranjenih razmaka (vidi vežbanje I.6.3). Ovo su tačke druge vrste Cantorovog skupa.

Pokazaćemo da je F perfektan skup. Kako je on zatvoren, dovoljno je pokazati da nema izolovanih tačaka (stav 11). Neka $x \in F$ i neka je J proizvoljan otvoren razmak koji sadrži tačku x. Neka je I_n onaj od zatvorenih razmaka iz F_n u kome leži x. Birajući n dovoljno veliko uvek možemo postići da $I_n \subset J$, jer dužina od I_n teži nuli kada $n \to \infty$. Označimo sa x_n onaj kraj razmaka I_n koji je *različit* od x; x_n kao tačka prve vrste pripada

F. Time smo pokazali da se u svakoj okolini J tačke x nalazi bar jedna tačka x_n skupa F, različita od x, tj. x je tačka nagomilavanja od F.

Primećujemo da smo uzgred pokazali i da su tačke druge vrste tačke nagomilavanja tačaka prve vrste. Prema tome, Cantorov skup se sastoji iz tačaka (1) i njihovih tačaka nagomilavanja.

Cantorov skup je nigde gust. Zaista, ni u jednom od razmaka oblika

$$\left]\frac{3k+1}{3^n}, \frac{3k+2}{3^n}\right[, \tag{2}$$

gde su k i n prirodni brojevi, ne leže tačke iz F. Kako svaki razmak $]\alpha, \beta[$ sadrži razmak oblika (2) ako je $3^{-n}<(\beta-\alpha)/6$, odatle sledi tvrđenje (videti vežbanje 13).

Pod zatvorenom kockom u R^k čije su strane paralelne koordinatnim ravnima podrazumevamo skup

$$\{x=(\xi_\nu):\ \alpha_\nu \leqslant \xi_\nu \leqslant \alpha_\nu+\alpha,\ \nu=1, 2, \ldots, k\}.$$

Stav 14. *Svaki neprazan otvoren skup u $R^k (k\geqslant 2)$ može se prikazati kao prebrojiva unija zatvorenih kocki koje dve i dve nemaju zajedničkih unutrašnjih tačaka i čije su strane paralelne koordinatnim ravnima.*

Dokaz ćemo dati za $k=2$, jer za $k>2$ ovaj teče na isti način, jedino što sa formalne strane postaje glomazniji.

Za fiksirano $r(=1, 2, \ldots)$ sistem pravih

$$\xi_1=\frac{n}{2^r}, \quad \xi_2=\frac{m}{2^r} \ (m, n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

određuje u ravni R^2 mrežu M_r zatvorenih kvadrata čije su unutrašnjosti međusobno disjunktne. Od mreže M_r prelazi se na mrežu M_{r+1} kada sve kvadrate iz M_r podelimo paralelama koordinatnim osama na četiri jednaka dela. Kvadrati mreže M_r imaju ivicu dužine 2^{-r}.

Neka je G neprazan otvoren skup i neka je x proizvoljna tačka iz G. Tada je uvek moguće odrediti niz zatvorenih kvadrata $Q_r (\in M_r,\ r=1, 2, \ldots)$ tako da svaki od njih sadrži tačku x i da $Q_r \supset Q_{r+1}$. Primećujemo da ovaj niz kvadrata nije jednoznačno određen tačkom x, jer se može desiti da, kada je kvadrat Q_r već izabran, x leži u samo jednom, u dva ili u sva četiri zatvorena kvadrata na koje mreža M_{r+1} deli Q_r. Kako je x unutrašnja tačka skupa G, to postoji otvoreni disk D koji sadrži x i leži u G. No kako ivice niza kvadrata (Q_r) teže nuli kada $r\to\infty$, to će od izvesnog indeksa pa nadalje kvadrati Q_r ležati u D. Znači, postoje kvadrati iz niza mreža (M_r) koje leže u G.

Neka je: T_1 kolekcija svih kvadrata mreže M_1 koji leže u G; T_2 kolekcija svih kvadrata mreže M_2 koji leže u G ali ne leže u T_1; T_3 kolekcija svih kvadrata mreže M_3 koji leže u G ali ne leže u T_1 i T_2; itd. itd. Svaka od kolekcija T_r je najviše prebrojiva, pa je takva i njihova unija T. Poređajmo sve kvadrate iz T u niz $S_1, S_2, \ldots$

Kako svi kvadrati koji su obuhvaćeni unijom T leže u G, to

$$G \supset \bigcup_{r=1}^{\infty} S_r \tag{3}$$

Da bismo pokazali da važi i obrnuta inkluzija, uočimo proizvoljnu tačku x iz G. Na početku smo videli da se svakoj tački $x \in G$ može koordinirati niz umetnutih kvadrata čija ivica teži nuli i koji sadrže x. Ceo broj m odredimo tako da je Q_m *prvi* kvadrat iz tog niza koji leži u G. Kvadrat Q_m pripada kolekciji T_m, pa je

$$G \subset \bigcup_{r=1}^{\infty} S_r,$$

što, zajedno sa (3), daje

$$G = \bigcup_{r=1}^{\infty} S_r. \tag{4}$$

Ostaje još jedino da utvrdimo da je unija u (4) zaista prebrojiva, a ne konačna. No to je jasno, jer kada bi ona bila konačna, onda bi, na osnovu stava 2, skup G bio zatvoren, suprotno učinjenoj pretpostavci.

2.iii. Skupovi na realnoj pravoj

Zbog specijalne strukture skupa realnih brojeva u njemu važe i sledeća dva iskaza koji nemaju analogone u opštim metričkim prostorima.

$\Longleftrightarrow$ F. $\forall$ ograničen [illegible]

Stav 15 (Bolzano-Weierstrass). *Svaki ograničen beskonačan skup u* R *ima bar jednu tačku nagomilavanja.*

Dokaz. Neka tačke skupa leže u razmaku $[a, b]$, $b-a<+\infty$. Podelimo ovaj na dva dela i označimo sa $[a_1, b_1]$ jedan od njih u kome leži beskonačno mnogo tačaka iz skupa (recimo, levi ako u oba leži beskonačno mnogo tačaka). Nastavljajući ovaj postupak dobićemo niz umetnutih razmaka $[a_n, b_n]$ $(n=1, 2, \ldots)$ od kojih svaki sadrži beskonačno mnogo tačaka skupa. Prema stavu I.5.2, niz $[a_n, b_n]$ određuje jedan realan broj i ovaj je prema izvedenoj konstrukciji tačka nagomilavanja skupa.

Stav 16. *Neka je* F *zatvoren skup u* R, *ograničen s desne (leve) strane. Tada* $\sup F$ $(\inf F)$ *pripada skupu.*

Dokaz. Neka je $b=\sup F$ (videti stav I.5.1) i pretpostavimo da $b \notin F$. Na osnovu definicije supremuma, sa svako $\varepsilon>0$ postoji tačka $x \in F$ takva da je $b-\varepsilon<x\leqslant b$, tj. u svakoj okolini tačke b leži bar jedna tačka x iz F i $x \neq b$, jer b ne pripada F. b je, dakle, tačka nagomilavanja od F i ne pripada skupu F. Kontradikcija, jer je F zatvoren skup (stav 10).

Vežbanja 2

1. Neka je skup $A \subset l_2$ određen sa $\{x=(\xi_\nu): |\xi_\nu| \leqslant 1/\nu, \nu=1, 2, \ldots\}$. Pokazati da je A zatvoren skup l_2.

2. Pokazati da je adherencija skupa A presek svih zatvorenih skupova koji sadrže A.

3. Pokazati da važi: $\mathbf{C}\bar{A} = \overset{\circ}{\widehat{\mathbf{C}A}}$ i $\mathbf{C}\mathring{A} = \overline{\mathbf{C}A}$.

4. U opštem slučaju je $\overline{A \cap B} \neq \bar{A} \cap \bar{B}$ i $\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}} \neq \mathring{A} \cup \mathring{B}$. [Naći odgovarajuće primere.]

5. Dati primer metričkog prostora i kolekcije podskupova $\{A_i\}_{i=1,2,\ldots}$ u njemu za koje je

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} \neq \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i.$$

6. Adherencija otvorene kugle $K\,]x, \varrho[$ ne mora da se poklopi sa zatvorenom kuglom $K[x, \varrho]$. [Uočiti kuglu $K\,]x, 1[$ u prostoru iz vežbanja 1.3.]

7. Metrički prostori (X, d) i (X, d_1) iz vežbanja 1.12 imaju iste otvorene skupove. [Oni imaju iste otvorene kugle, s jednim izuzetkom eventualno. Kojim?]

8. Metrički prostori (X, d) i (X, d^*) iz vežbanja 1.15 imaju iste otvorene skupove, ali ne obavezno i iste otvorene kugle.

9. Ako je A svuda gust u B i B svuda gust u C, tada je i A svuda gust u C

10. Svaki deo nigde gustog skupa je nigde gust.

11. Ako je A nigde gust, $\complement A$ je svuda gust. Ako je A svuda gust, $\complement A$ ne mora da bude nigde gust.

12. Ako su A i B svuda gusti, takav ne mora da bude skup $A \cap B$. On će to biti, ako je bar jedan od skupova A i B otvoren.

13. Nigde gust skup A može se i ovako definisati: A je nigde gust u X, ako svaki otvoreni skup G iz X sadrži otvoren skup G_1 u kome ne leži nijedna tačka iz A.

14. Skup je ograničen tada i samo tada ako leži u nekoj zatvorenoj kugli.

15. U metričkom prostoru X moguće je razdvojiti dve različite tačke, tačku od zatvorenog skupa i dva zatvorena skupa disjunktnim otvorenim skupovima. Preciznije:

1° Ako je $x_1 \neq x_2$, postoje disjunktni otvoreni skupovi $G_1 \ni x_1$ i $G_2 \ni x_2$.

2° Ako tačka x ne leži u zatvorenom skupu F, postoje disjunktni otvoreni skupovi $G_1 \ni x$ i $G_2 \supset F$.

3° Ako zatvoreni skupovi F_1 i F_2 nemaju zajedničkih tačaka, postoje disjunktni otvoreni skupovi $G_1 \supset F_1$ i $G_2 \supset F_2$.

16. Koje strukturne osobine realne prave omogućuju iskaze stavova 15 i 16?

17. Ako je A skup prve (druge) kategorije u X i $B \subset A$ $(B \supset A)$, tada je i B skup prve (druge) kategorije u X.

18. Najviše prebojiva unija skupova prve kategorije je opet skup prve kategorije.

19. U R^2 je nigde gust skup tačaka koje leže na pravoj.

20. U R^2 je skup tačaka sa racionalnim koordinatama skup prve kategorije. [Prebrojiva unija skupova koji se sastoje iz po jedne jedine tačke.]

21. Pokazati da je $d(x, A) = 0$ tada i samo tada ako je $x \in \bar{A}$.

22. Uvek je $d(A) = d(\bar{A})$. дијаметар

23. Dokazati direktno stavove 6 i 7.

24. Pokazati da je iskaz stava 15 ekvivalentan iskazu Dedekindovog aksioma.

3. Separabilni prostori. Baza prostora

Definicija 1. Metrički prostor X *je separabilan* ako u njemu postoji najviše prebrojiv svuda gust skup tačaka.

Primer 1. R^k je separabilan prostor. U svakoj ε-okolini tačke $x=(\xi_\nu)\in R^k$ postoji, naime, tačka r sa racionalnim koordinatama (ϱ_ν). Zaista, ako racionalne brojeve ϱ_ν izaberemo tako da je

$$|\xi_\nu-\varrho_\nu|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{k}} \quad (\nu=1, 2, \ldots, k),$$

biće

$$d(x, r)=\left\{\sum_{\nu=1}^{k}|\xi_\nu-\varrho_\nu|^2\right\}^{1/2}<\varepsilon.$$

Skup tačaka sa racionalnim koordinatama je, dakle, svuda gust u R^k; kako je on i prebrojiv, sledi tvrđenje.

Primer 2. Prostor l_p je separabilan. Pokazaćemo da je u l_p svuda gust skup A nizova sa racionalnim članovima od kojih je njih samo konačno mnogo različito od nule. Kako je A prebrojiv skup (vežbanje I.6.14), sledi separabilnost prostora l_p.

$A \subset l_p$

Neka je $x=(\xi_\nu)$ proizvoljna tačka iz l_p i neka je $\varepsilon>0$. Kako red $\sum_{\nu=1}^{\infty}|\xi_\nu|^p$ konvergira, moguće je prvo odrediti prirodni broj n tako da je

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}|\xi_\nu|^p<\frac{\varepsilon^p}{2}.$$

Zatim ćemo izabrati racionalne brojeve ϱ_ν, $(\nu=1, 2, \ldots, n)$, tako da je

$$|\xi_\nu-\varrho_\nu|<\frac{\varepsilon}{(2n)^{1/p}} \quad (\nu=1, 2, \ldots, n).$$

Označimo sa r tačku $(\varrho_1, \ldots, \varrho_n, 0, 0, \ldots)$ iz A. Tada je

$$[d(x, r)]^p=\sum_{\nu=1}^{n}|\xi_\nu-\varrho_\nu|^p+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}|\xi_\nu|^p<\frac{\varepsilon^p}{2n}\cdot n+\frac{\varepsilon^p}{2}=\varepsilon^p,$$

tj. $d(x, r)<\varepsilon$, što znači da je skup A svuda gust u l_p.

Na sličan način se može videti da su i prostori c_0, c i s separabilni. Međutim, prostor m nije separabilan. Da to uvidimo, uočimo skup B nizova čiji su članovi isključivo brojevi 0 ili 1. Očigledno $B\subset m$. Kardinalni broj skupa B jednak je kontinuumu (vežbanje I.6.13). Oko svake tačke iz B opišimo kuglu poluprečnika $^1/_3$; sve ove kugle su međusobno disjunktne, jer je rastojanje bilo koje dve tačke iz B jednako 1. Svaki svuda gust skup u m morao bi da ima bar po jednu tačku u svakoj od ovih kugli, te ne bi bio prebrojiv.

Primer 3. Prostor $C[a, b]$ je separabilan.

U osnovi to tvrdi Weierstrassov stav koji kazuje da se svaka neprekidna funkcija može uniformno aproksimirati polinomima. Preciznije:

Weierstrassov stav. *Neka je $x(t)$ jedna na razmaku $[a, b]$ neprekidna funkcija i neka je $\varepsilon>0$, inače proizvoljno. Tada postoji polinom $p_\varepsilon(t)$ takav da je*

(1) $$|x(t)-p_\varepsilon(t)|<\varepsilon \quad \textit{za svako} \quad a\leqslant t\leqslant b.$$

$d(x, p_\varepsilon)=\max_t |x(t)-p_\varepsilon(t)|<\varepsilon$

Jezikom metričkih prostora ovaj klasični stav može se ovako iskazati: Skup polinoma je svuda gust u prostoru $C[a, b]$. To sledi iz činjenice što se, koristeći metriku prostora $C[a, b]$, nejednačina (1) može napisati u obliku $d(x, p_\varepsilon) < \varepsilon$.

Iz Weierstrassovog stava još ne sledi separabilnost prostora $C[a, b]$, jer skup polinoma nije prebrojiv. No lako je pokazati da je već skup polinoma sa *racionalnim* koeficijentima — a ovaj je prebrojiv — svuda gust u $C[a, b]$. Da to pokažemo, pretpostavimo da je $a = -1$ i $b = +1$, što ne predstavlja bitno ograničenje opštosti. Neka je

$$p(t) = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_{n-1} t + a_n$$

polinom čiju egzistenciju tvrdi Weierstrassov stav, za koji je, dakle,

$$d(x, p) < \varepsilon/2. \tag{2}$$

Odredimo racionalne brojeve ϱ_ν, tako da je

$$|a_\nu - \varrho_\nu| < \frac{\varepsilon}{2(n+1)} \qquad \text{za} \qquad \nu = 0, 1, \ldots, n$$

i označimo sa $p^*(t)$ polinom čiji su koeficijenti ϱ_ν. Tada je

$$d(p, p^*) = \max_{-1 \le t \le 1} \left| \sum_{\nu=0}^{n} (a_\nu - \varrho_\nu) t^{n-\nu} \right| < \frac{\varepsilon}{2(n+1)} \cdot (n+1) = \frac{\varepsilon}{2},$$

što zajedno sa (2) daje

$$d(x, p^*) \le d(x, p) + d(p, p^*) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dokaz Weierstrassovog stava izvešćemo u nekoliko koraka:

1° $x(t)$ se može na $[-1, +1]$ uniformno aproksimirati poligonalnom linijom čiji početak, temena i kraj leže na krivoj $\tau = x(t)$. Zaista, kako je $x(t)$ uniformno neprekidna na $[-1, +1]$, svakom $\varepsilon > 0$ odgovara broj $\delta_\varepsilon > 0$ takav da je

$$|x(t') - x(t'')| < \varepsilon/2 \quad \text{kad god je} \quad |t' - t''| < \delta_\varepsilon. \tag{3}$$

Podelimo razmak $[-1, +1]$ na konačan broj podrazmaka dužine $< \delta_\varepsilon$ i označimo podeone tačke sa

$$-1 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1.$$

Neka je $L(t)$ poligonalna linija za koju je

$$L(t_\nu) = x(t_\nu) \quad \text{za} \quad \nu = 0, 1, \ldots, n.$$

Tada je za $t \in [t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$,

$$|x(t) - L(t)| = \left| x(t) - \left[x(t_{k-1}) + \frac{x(t_k) - x(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} (t - t_{k-1}) \right] \right|$$

$$= \left| \frac{[x(t) - x(t_{k-1})](t_k - t_{k-1}) - [x(t_k) - x(t_{k-1})](t - t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \right|$$

$$= \left| \frac{[x(t) - x(t_k)](t - t_{k-1}) + [x(t) - x(t_{k-1})](t_k - t)}{t_k - t_{k-1}} \right|,$$

tj., na osnovu (3),

$$|x(t)-L(t)|<\frac{\varepsilon}{2}\,\frac{(t-t_{k-1})+(t_k-t)}{t_k-t_{k-1}}=\frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

2° Poligonalna linija $L(t)$ ima jednačinu

$$\tau=\sum_{\nu=0}^{n}\alpha_\nu\,|t-t_\nu|, \tag{5}$$

gde su koeficijenti α_ν određeni sa

$$\sum_{\nu=0}^{n}\alpha_\nu\,|t_k-t_\nu|=x(t_k),\quad k=0,1,\ldots,n. \tag{6}$$

Zaista, izraz (5) svodi se u razmacima $[t_{k-1}, t_k]$ i $[t_k, t_{k+1}]$ $(k=1,2,\ldots,n-1)$ na

$$\sum_{\nu=0}^{k-1}\alpha_\nu(t-t_\nu)-\alpha_k(t-t_k)-\sum_{\nu=k+1}^{n}\alpha_\nu(t-t_\nu)$$

odnosno

$$\sum_{\nu=0}^{k-1}\alpha_\nu(t-t_\nu)+\alpha_k(t-t_k)-\sum_{\nu=k+1}^{n}\alpha_\nu(t-t_\nu),$$

tj. predstavlja u tim razmacima dve različite linearne funkcije koje za $t=t_k$ uzimaju istu vrednost $x(t_k)$ na osnovu (6).

3° Prema 1° i 2° ostaje, dakle, da pokažemo da se funkcije $|t-t_\nu|$, $\nu=0,1,\ldots,n$ mogu na razmaku $[-1,+1]$ uniformno aproksimirati polinomima, ili, što je isto, da je to moguće učiniti sa funkcijom $|t|$ na svakom od razmaka $[-1-t_\nu, +1-t_\nu]$, $\nu=0,1,\ldots,n$, pa, dakle, i na njihovoj uniji $[-2,+2]$. Ovo sledi neposredno iz binomnog reda

$$|t|=2\left|\frac{t}{2}\right|=2\sqrt{\left(\frac{t}{2}\right)^2}=2\sqrt{1+\left(\frac{t^2}{2^2}-1\right)}=2\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/2}{n}\left(\frac{t^2}{2^2}-1\right)^n,$$

jer ovaj konvergira uniformno za $-2\leqslant t\leqslant +2$, na osnovu Weierstrassovog kriterijuma; naime, za $-2\leqslant t\leqslant +2$ je

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\binom{1/2}{n}\left(\frac{t^2}{2^2}-1\right)^n\right|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\left|\binom{1/2}{n}\right|<+\infty.$$

Označimo sa $p_\nu(t)$ polinome koji uniformno aproksimiraju $\alpha_\nu|t-t_\nu|$, tj.

$$|\alpha_\nu|t-t_\nu|-p_\nu(t)|<\frac{\varepsilon}{2(n+1)},\quad \nu=0,1,\ldots,n,$$

i stavimo $p(t)=\sum_{\nu=0}^{n}p_\nu(t)$. Tada je

$$|L(t)-p(t)|=\left|\sum_{\nu=0}^{n}(\alpha_\nu|t-t_\nu|-p_\nu(t))\right|\leqslant\sum_{\nu=0}^{n}|\alpha_\nu|t-t_\nu|-p_\nu(t)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

što, zajedno sa (4), daje

$$|x(t)-p(t)|\leqslant|x(t)-L(t)|+|L(t)-p(t)|<\varepsilon.$$

Time je Weierstrassov stav dokazan.

Sem navedenog Weierstrassovog stava postoji još jedan, tzv. drugi Weierstrassov stav, koji tvrdi da se svaka periodička neprekidna funkcija periode 2π može uniformno aproksimirati trigonometrijskim polinomima

$$\frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{n} (\alpha_\nu \cos \nu t + \beta_\nu \sin \nu t).$$

Mi ga ovde nećemo dokazivati direktno, već ćemo ga dobiti kao posledicu drugih razmatranja (stav IV.5.12). Sada jedino primećujemo da iz njega sledi da je prostor $\tilde{C}[0,2\pi]$ separabilan.

Definicija 2. Kolekcija otvorenih skupova $\{B_i\}_{i\in I}$ u prostoru X obrazuje *bazu* tog prostora ako se svaki neprazan otvoren skup iz X može prikazati kao unija skupova iz $\{B_i\}_{i\in I}$.

Jasno je da kolekcija *svih* otvorenih skupova iz X obrazuje jednu bazu. No, od interesa su one baze koje imaju što manji broj elemenata. Tako, na primer, kolekcija svih otvorenih kugli u X obrazuje jednu bazu prostora X. To isto važi i za kolekciju svih otvorenih kugli racionalnih poluprečnika. Zaista, neka je G proizvoljan otvoren skup u X. Tada svakom $x \in G$ odgovara kugla $K]x, \varrho[\subset G$ i tvrđenje sledi iz $G = \bigcup_{x\in G} K]x, \varrho[$. Jasno je da ϱ možemo izabrati da bude racionalan broj.

Definicija 3. Za prostor X kažemo da je *najviše prebrojive baze* ili da zadovoljava *drugi aksiom prebrojivosti* ako u njemu postoji baza od najviše prebrojivo mnogo elemenata.

Stav 1. *Prostor X je najviše prebrojive baze tada i samo tada ako je separabilan.*

Dokaz. Neka je $\{B_i\}_{i=1,2,\ldots}$ jedna najviše prebrojiva baza prostora X. Izaberimo u svakom skupu B_i jednu tačku i označimo sa A prebrojivu kolekciju tih tačaka. Kako je, na osnovu definicije baze, svaki otvoren skup u X unija elemenata iz $\{B_i\}$, to će u svakom otvorenom skupu u X ležati bar jedna tačka iz A. Prema tome, u svakoj okolini proizvoljne tačke $x \in X$ leži bar jedna tačka iz A, tj. skup A je svuda gust u X. Prostor X je, dakle, separabilan.

Obrnuto, ako je $\{x_n\}$ najviše prebrojiv i svuda gust skup tačaka u X, pokazaćemo da prebrojiva kolekcija kugli $K]x_n, 1/m[$ $(n, m = 1, 2, \ldots)$ obrazuje bazu prostora X. Zaista, neka je G proizvoljan otvoren skup u X i neka $x \in G$. Izaberimo prirodni broj $m = m(x)$ tako da kugla $K]x, 1/m[\subset G$. Kako je skup $\{x_n\}$, po pretpostavci, svuda gust u X, to u njemu postoji tačka $x_{n(x)}$ (zavisna od x), tako da je $d(x, x_{n(x)}) < 1/3m$. Tada kugla $K]x_{n(x)}, 1/2m[$ sadrži tačku x i leži u G (jer je sadržana u $K]x, 1/m[$). Dakle,

$$G = \bigcup_{x\in G} K]x_{n(x)}, 1/2m(x)[,$$

što znači da je kolekcija $\{K]x_n, 1/m[\}$ baza prostora X.

Definicija 4. Kolekcija skupova $\{P_i\}_{i\in I}$ je jedno *pokrivanje* skupa A, ako svaka tačka $x \in A$ leži u bar jednom skupu kolekcije.

Specijalno, ako je reč o kolekciji otvorenih skupova, govorimo o *otvorenom pokrivanju*.

Na značaj separabilnih odnosno prostora najviše prebrojive baze ukazuje

Stav 2 (Lindelöf). *Neka je $\{G_i\}_{i \in I}$ jedno otvoreno pokrivanje separabilnog prostora X. Tada se iz $\{G_i\}_{i \in I}$ može izdvojiti jedno najviše prebrojivo pokrivanje prostora X.*

Dokaz. Neka je $\{B_n\}_{n=1,2,\ldots}$ jedna najviše prebrojiva baza prostora X. Kako je $\{G_i\}_{i \in I}$ pokrivanje prostora X, to svakom $x \in X$ odgovara u $\{G_i\}_{i \in I}$ bar jedan skup $G_{i(x)}$ takav da $x \in G_{i(x)}$. No, kako je $G_{i(x)}$ otvoren skup u X, to u bazi $\{B_n\}$ postoji skup $B_{n(x)}$ takav da $x \in B_{n(x)} \subset G_{i(x)}$. Najviše prebrojiva unija $\bigcup B_{n(x)}$ očigledno pokriva X. Ako svakom $B_{n(x)}$ koordiniramo samo jedan od skupova G_i koji ga sadrže, tako dobivena kolekcija skupova iz $\{G_i\}_{i \in I}$ predstavljaće jedno najviše prebrojivo pokrivanje prostora X.

Vežbanja 3

1. Prostor $R_p^k \, (1 \leqslant p \leqslant \infty)$ je separabilan.

2. Dokazati da su prostori c_0 i c separabilni.

3. Dokazati da je prostor s separabilan.

4. U prostoru $C_1[a, b]$ (primer 1.11) je svuda gust skup polinoma. Pokazati da je $C_1[a, b]$ separabilan prostor.

• 5. Da li je prostor iz vežbanja 1.10 separabilan?

6. Da li je prostor ograničenih neprekidnih funkcija na $]-\infty, +\infty[$, snabdeven metrikom $d(x, y) = \sup\limits_{-\infty < t < +\infty} |x(t) - y(t)|$ separabilan?

7. U R^k je *otvorena kocka* sa centrom u tački $a = (\alpha_\nu)$ i ivice δ definisana sa $\left\{x = (\xi_\nu) : \alpha_\nu - \frac{\delta}{2} < \xi_\nu < \alpha_\nu + \frac{\delta}{2},\ \nu = 1, 2, \ldots, k\right\}$. Pokazati da je kolekcija svih otvorenih kocki baza prostora R^k. Isto važi i za kolekciju svih kocki čija je ivica racionalan broj.

8. Prostor ograničenih funkcija $B[a, b]$ nije separabilan. [Uočiti kolekciju funkcija koje uzimaju samo vrednosti 0 i 1.]

9. Potprostor separabilnog prostora je i sam separabilan. [Iskoristiti stav 1.]

4.i. Nizovi tačaka

Neka je X metrički prostor i neka je $x_n (n = 1, 2, \ldots)$ jedan niz tačaka u X. Nizove ćemo kratko označavati sa (x_n).

Definicija 1. Niz (x_n) u X konvergira tački $x \in X$, ako niz brojeva

$$d(x_n, x) \to 0, \qquad n \to \infty.$$

x je *granična vrednost* niza (x_n). Pišemo $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ ili $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$. S obzirom na definiciju okoline tačke, definiciji 1 može se dati i ovaj oblik:

Definicija 1'. Niz (x_n) konvergira tački x, ako svakoj okolini V_x odgovara prirodni broj n_0 tako da

$$n \geqslant n_0 \quad \Rightarrow \quad x_n \in V_x.$$

Ako u nekom od prostora nizova uočimo niz tačaka $x_n = (\xi_\nu^n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, ovom odgovara konačno (na primer, u R^k) ili prebrojivo mnogo (na primer u l_p) nizova realnih (ili kompleksnih) brojeva:

$$(\xi_1^n), \ (\xi_2^n), \ (\xi_3^n), \ldots \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Ovo su tzv. *nizovi koordinata* koji odgovaraju nizu tačaka (x_n) u prostoru nizova. Postavlja se pitanje odnosa između konvergencije niza tačaka (x_n) (u smislu metrike dotičnog prostora) i konvergencije njegovih nizova koordinata (konvergencije po koordinatama).

U R^k je konvergencija niza tačaka $x_n = (\xi_\nu^n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ graničnoj vrednosti $x = (\xi_\nu)$ ekvivalentna konvergenciji nizova ν-tih koordinata tačaka x_n ν-toj koordinati tačke x $(\nu = 1, 2, \ldots, k)$, tj. potreban i dovoljan uslov da

(1) $\qquad x_n \to x \ (n \to \infty)$ u smislu metrike u R^k,

jeste da

(2) $\qquad \xi_\nu^n \to \xi_\nu \ (n \to \infty)$ za svako $\nu = 1, 2, \ldots, k.$

Zaista, iz (2) neposredno sledi $d(x, x_n) \to 0$. Obrnuto, da (1) povlači (2), sledi iz nejednačine $|\xi_\nu^n - \xi_\nu| \leqslant d(x_n, x)$ koja važi za svako $\nu = 1, 2, \ldots, k$.

Međutim, u prostoru l_p $(1 \leqslant p < \infty)$ iz konvergencije po metrici sledi konvergencija po koordinatama, ali obrnuto ne važi. Na primer, niz tačaka u l_p:

$$e_1 = (1, 0, 0, 0, \ldots), \quad e_2 = (0, 1, 0, 0, \ldots), \quad e_3 = (0, 0, 1, 0, \ldots), \quad \ldots$$

konvergira po koordinatama, ali ne konvergira po metrici u l_p, jer je $d(e_m, e_n) = 2^{1/p}$ za svako $m \neq n$.

Slično stoji stvar u prostoru $C[a, b]$. Ovde konvergencija po metrici niza (x_n) znači uniformnu konvergenciju niza funkcija $x_n(t)$ u razmaku $[a, b]$. „Konvergencija po koordinatama" svodi se ovde na (običnu) konvergenciju niza funkcija $x_n(t)$ u razmaku $[a, b]$.

Stav 1. *Svaki konvergentan niz (x_n) je ograničen, tj. takav je skup $\{x_n\}$ njegovih vrednosti.*

Dokaz. Iz $d(x, x_n) < \varepsilon$ za $n \geqslant n_0$ sledi da se sve tačke skupa $\{x_n\}$, sem njih konačno mnogo, nalaze u kugli $K\,]x, \varepsilon[$. Za dovoljno veliko ϱ ležaće tada sve tačke skupa $\{x_n\}$ u kugli $K[x, \varrho]$ (vidi vežbanje 2.14).

Definicija 2. Za svaki striktno rastući niz prirodnih brojeva $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ niz (x_{n_k}) je *delimični niz* niza (x_n).

Definicija 3. Tačka x je *adherentna vrednost* niza (x_n) ako postoji delimični niz (x_{n_k}) koji konvergira ka x.

Stav 2. *Potreban i dovoljan uslov da je x adherentna vrednost niza (x_n) jeste da svakoj okolini V_x tačke x i svakom prirodnom broju m odgovara prirodni broj $r > m$ tako da je $x_r \in V_x$.*

Dokaz. Uslov je potreban, jer ako je x adherentna vrednost niza (x_n), postoji delimični niz (x_{n_k}) koji konvergira ka x. U svakoj okolini V_x leže, prema definiciji 1′, svi članovi niza (x_{n_k}) sem njih konačno mnogo. Prema tome, ma kako veliki bio prirodan broj m, postojaće dovoljno veliko n_k tako da je $n_k > m$ i $x_{n_k} \in V_x$.

Uslov je dovoljan. Zaista, ako je on ispunjen, iz niza (x_n) izdvojićemo totalnom indukcijom delimični niz (x_{n_k}) na ovaj način: Uzećemo $n_1 = 1$, i kad smo već izabrali n_{k-1}, odredićemo n_k kao onaj prvi prirodan broj $> n_{k-1}$ za koji je $d(x, x_{n_k}) < 1/k$. Znači, $\lim\limits_{k\to\infty} d(x, x_{n_k}) = 0$, tj. x je adherentna vrednost niza (x_n).

Neka je $\{x_n\}$ skup vrednosti niza (x_n). Pojam *adherentne tačke skupa* $\{x_n\}$ ne treba brkati sa pojmom *adherentne vrednosti niza* (x_n). Na osnovu stava 2 i definicije 2.6 jasno je da je svaka adherentna vrednost niza (x_n) jedna adherentna tačka skupa $\{x_n\}$. Obrnuto nije tačno, kao što to pokazuje niz $(1/n)$ u R, čija je jedina adherentna vrednost nula, dok su nula i svi članovi skupa $\{1/n\}$ njegove adherentne tačke. Slično stoji u pogledu odnosa između adherentnih vrednosti niza (x_n) i tačaka nagomilavanja skupa $\{x_n\}$. $\boxed{\text{Svaka tačka nagomilavanja skupa } \{x_n\} \text{ je adherentna vrednost niza } (x_n),}$ ali obrnutno nije ~~tačno, kao što to pokazuje~~ primer niza $1, 1, 1, \ldots$ u R. Ovaj ima jedinicu kao adherentnu vrednost, a odgovarajući skup vrednosti ima samo jedan jedini element, te ne može imati tačku nagomilavanja. Ukratko, ako sa $\mathfrak{A}(x_n)$ označimo kolekciju adherentnih vrednosti niza (x_n), tada jedino važi

$$\{x_n\}' \subset \mathfrak{A}(x_n) \subset \overline{\{x_n\}}, \tag{3}$$

$= \{x_n\}' \cup \{x_n\}$

s tim da na oba mesta inkluzija može biti striktna.

$\bar{A} = A' \cup A$

$A' \subset \bar{A}$

Stav 3. *Skup adherentnih vrednosti niza je zatvoren skup.*

$\mathfrak{A}(x_n)$

Dokaz. Na osnovu stava 2.10 treba pokazati da skupu $\mathfrak{A}(x_n)$ pripadaju sve njegove tačke nagomilavanja. Pokazaćemo da ako je z tačka nagomilavanja od $\mathfrak{A}(x_n)$ da je ona i tačka nagomilavanja od $\{x_n\}$. Na osnovu prve inkluzije u (3) slediće onda zatvorenost skupa $\mathfrak{A}(x_n)$. Zaista, ako je z tačka nagomilavanja od $\mathfrak{A}(x_n)$, za svako $\varepsilon > 0$ postojaće bar jedna od z različita tačka x u $\mathfrak{A}(x_n)$, tako da je $d(z, x) < \varepsilon$. Kako je x adherentna vrednost niza (x_n), postoji delimični niz $x_{n_k} \to x$. Za dovoljno veliko k je $d(x_{n_k}, x) < \varepsilon$, što zajedno sa $d(z, x) < \varepsilon$ daje

$$d(z, x_{n_k}) \leqslant d(z, x) + d(x, x_{n_k}) < 2\varepsilon,$$

tj. z je tačka nagomilavanja skupa $\{x_n\}$.

Između adherentnih tačaka i tačaka nagomilavanja nekog skupa i pojma granične vrednosti niza postoji uska veza, kao što to kazuje

Stav 4. *Potreban i dovoljan uslov da je x adherentna tačka skupa A jeste da postoji niz tačaka (x_n) iz A koji konvergira ka x.*

Potreban i dovoljan uslov da je x tačka nagomilavanja skupa A jeste da postoji niz međusobno različitih tačaka (x_n) iz A koji konvergira ka x.

Dokaz. Ako je x adherentna tačka skupa A, tada u svakoj kugli $K]x, 1/n[$ $(n = 1, 2, \ldots)$ leži bar jedna tačka x_n iz A. Ove tačke x_n (koje se sve mogu poklopiti sa x) obrazuju niz koji konvergira ka x.

Ako je x tačka nagomilavanja skupa A, tada se svakoj kugli $K]x, 1/n[$ može izabrati tačka x_n, različita od svih prethodno izabranih tačaka.

Jasno je da su navedeni uslovi u oba slučaja dovoljni.

4.ii. Kompletni prostori

Definicija 4. Niz (x_n) je *Cauchyev niz* ako svakom $\varepsilon>0$ odgovara prirodni broj n_0 tako da

$$m>n\geqslant n_0 \quad \Rightarrow \quad d(x_m, x_n)<\varepsilon.$$

Stav 5. *Svaki Cauchyev niz je ograničen.*

Dokaz. Ako je (x_n) Cauchyev niz, tada za $n=n_0$ važi

$$m>n_0 \quad \Rightarrow \quad d(x_m, x_{n_0})<\varepsilon,$$

što znači da se svi članovi niza, sem njih konačno mnogo, nalaze u kugli $K]\,x_{n_0}, \varepsilon[$. No tada postoji i dovoljno veliko ϱ tako da se svi članovi niza nalaze u kugli $K[x_{n_0}, \varrho]$.

Stav 6. *Svaki konvergentan niz je Cauchyev niz.*

Dokaz. Ako $x_n\to x$, tj. za svako $\varepsilon>0$ postoji n_0 tako da

$$n\geqslant n_0 \quad \Rightarrow \quad d(x, x_n)<\varepsilon,$$

biće za $m>n\geqslant n_0$

$$d(x_m, x_n)\leqslant d(x_m, x)+d(x, x_n)<2\,\varepsilon,$$

što znači da je (x_n) Cauchyev niz.

Iskaz obrnut stavu 6 nije tačan. Na primer, u metričkom prostoru Q koji čine racionalni brojevi sa uobičajenom metrikom uočimo niz (r_n), gde je r_n konačan decimalni razlomak koji dobijamo kada se u decimalnom razvitku broja $\sqrt{2}$ zadržimo na n-toj decimali. (r_n) je Cauchyev niz u Q, jer je za $m>n$

$$d(r_m, r_n)<1/10^n\to 0 \ \ (n\to\infty),$$

ali (r_n) ne konvergira nijednom racionalnom broju.

Definicija 5. Metrički prostor je *kompletan* ako u njemu svaki Cauchyev niz konvergira.

kompletnost

Stav 7. *Metrički prostor X je kompletan tada i samo tada ako presek svakog monotono opadajućeg niza zatvorenih kugli (K_n) u X, čiji niz poluprečnika teži nuli kada $n\to\infty$, sadrži jednu jedinu tačku prostora.*

Na osnovu stava I.5.2, odavde specijalno sledi da je prostor R kompletan. Šta više, na osnovu razmatranja iz odeljka I.5, stav 7 tvrdi da je kompletnost realne prave *ekvivalentna* Dedekindovom aksiomu u skupu realnih brojeva.

Dokaz stava 7. Pretpostavimo prvo da je prostor X kompletan i uočimo u njemu niz nepraznih i zatvorenih kugli $K_n=K[x_n, \varrho_n]$ koji zadovoljava: $K_n\supset K_{n+1}$ i $\varrho_n\to 0$. Za $m>n$ je $K_m\subset K_n$, te je $d(x_m, x_n)<\varrho_n$, tj. niz (x_n)

0

središta kugli K_n obrazuje jedan Cauchyev niz u X. Kako je prostor X kompletan, to postoji u X tačka x tako da $x_n \to x$. Pokazaćemo da $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$. Zaista, u K_n leže sve tačke niza (x_n), izuzimajući eventualno tačke $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, tako da je x tačka nagomilavanja skupa K_n. No, K_n je zatvorena kugla pa joj pripada njena tačka nagomilavanja. Znači, $x \in K_n$ za svako n. Jasno je da ne može postojati još jedna tačka $x' \neq x$ koja leži u svim kuglama K_n, jer poluprečnik ovih teži nuli.

Drugu polovinu stava dokazaćemo na taj način što ćemo pokazati da ako prostor X *nije* kompletan, da je tada moguće konstruisati opadajući niz zatvorenih kugli (K_i), čiji niz poluprečnika teži nuli, tako da je $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$ prazan skup. Zaista, ako X nije kompletan prostor, u njemu postoji bar jedan Cauchyev niz (x_n) koji ne konvergira nijednoj tački iz X. Polazeći od tog niza (x_n) odredićemo niz prirodnih brojeva $n_1 < n_2 < \ldots$ tako da je

(4) $$d(x_m, x_{n_i}) < 1/2^i \text{ za svako } m > n_i \ (i = 1, 2, \ldots).$$

Niz kugli

$$K_i = K[x_{n_i}, 1/2^{i-1}]$$

tada zadovoljava sve postavljene zahteve; specijalno, $K_i \supset K_{i+1}$ sledi, prema (4), iz $d(x_{n_{i+1}}, x_{n_i}) < 1/2^i$, vodeći računa o veličini poluprečnika kugli K_i i K_{i+1}. Pokazaćemo da je $\bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$ prazan skup. Zaista, kada bi u X postojala neka tačka x koja pripada svim kuglama K_i, tj. $d(x, x_{n_i}) \leqslant 1/2^{i-1}$, imali bismo na osnovu (4) za $m > n_i \ (i = 1, 2, \ldots)$

$$d(x, x_m) \leqslant d(x, x_{n_i}) + d(x_{n_i}, x_m) < \frac{1}{2^{i-1}} + \frac{1}{2^i} = \frac{3}{2^i},$$

što bi značilo da niz (x_m) konvergira ka $x \notin X$. Kontradikcija.

Stav 8. *Neka je X kompletan metrički prostor i neka je A jedan njegov potprostor. Ako je A zatvoren skup u X, tada je i A, posmatran za sebe kao metrički prostor, jedan kompletan prostor.*

Dokaz. Neka je (x_n) Cauchyev niz u A. Kako je $A \subset X$, to je (x_n) Cauchyev niz i u X. No, X je kompletan prostor, pa u X postoji tačka x tako da $x_n \to x$. Tačka x je, dakle, ili tačka nagomilavanja skupa $\{x_n\}$ ili se beskonačno mnogo puta ponavlja u nizu (x_n). U prvom slučaju ona pripada skupu A jer je ovaj zatvoren, a u drugom mu pripada jer je član niza (x_n). U oba slučaja, dakle, $x \in A$, što znači da je prostor A kompletan.

Stav 9 (Baire). *Svaki kompletan metrički prostor X je druge kategorije u samom sebi.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da kompletni prostor X nije druge kategorije u samom sebi. Na osnovu stava 2.12 postoje tada zatvoreni skupovi (F_i) od kojih nijedan ne sadrži neku kuglu, takvi da je $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$. Kako je $\mathbf{C} F_1$ neprazan otvoren skup, postoji u njemu kugla J_1 poluprečnika $r_1 < 1$. Neka je K_1 njoj koncentrična zatvorena kugla poluprečnika $r_1/2$. Kako F_2 ne sadrži nijednu kuglu, to otvoreni skup $\mathbf{C} F_2 \cap \mathring{K}_1$ nije prazan, pa sadrži otvorenu kuglu J_2 poluprečnika $r_2 < 1/2$. Neka je K_2 njoj koncentrična kugla poluprečnika $r_2/2$. Nastavljajući ovaj postupak dolazimo do niza kugli (J_n) i (K_n), poluprečnika $r_n < 1/n$ odnosno $r_n/2$, koje zadovoljavaju

$$K_n \subset J_n \subset \mathbf{C}\, F_n \quad \text{i} \quad K_{n+1} \subset K_n .$$

Iz prve od ovih inkluzija sledi

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} J_n \subset \mathbf{C} \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \mathbf{C}\, X = O,$$

tj. skup $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$ je prazan. No to je u kontradikciji sa stavom 7, jer je X kompletan prostor a (K_n) monotono opadajući niz zatvorenih kugli čiji niz poluprečnika obrazuje nula-niz.

Većina metričkih prostora koje smo uveli u odeljku 1 su kompletni prostori.

Primer 1. Prostor $l_p\,(1 \leqslant p < +\infty)$ je kompletan. Neka je (x_n) jedan Cauchyev niz u l_p, tj.

$$d(x_m, x_n) = \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} |\xi_\nu^m - \xi_\nu^n|^p \right\}^{1/p} < \varepsilon \quad \text{za} \quad m > n \geqslant n_0 . \tag{5}$$

Zbog $|\xi_\nu^m - \xi_\nu^n| \leqslant d(x_m, x_n)$ biće tada $(\xi_\nu^n)_{n=1,2,\ldots}$ za svako fiksirano $\nu = 1, 2, \ldots$ Cauchyev niz u R. Kako je R kompletan prostor postoji broj ξ_ν tako da

$$\xi_\nu^n \to \xi_\nu \quad \text{kada} \quad n \to \infty \quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

obg

Pokazaćemo, prvo, da red $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} |\xi_\nu|^p$ konvergira, tj. da tačka $x = (\xi_\nu)$ pripada prostoru l_p. Zaista, kako je svaki Cauchyev niz ograničen, to je

$$d(x_n, 0) = \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} |\xi_\nu^n|^p \right\}^{1/p} \leqslant \varrho, \quad 0 = (0, 0, 0, \ldots),$$

odakle sledi da je

$$\sum_{\nu=1}^{k} |\xi_\nu^n|^p \leqslant \varrho^p \quad \text{za svako } n \text{ i svako } k.$$

Pustimo li ovde da $n \to \infty$, dobićemo

$$\sum_{\nu=1}^{k} |\xi_\nu|^p \leqslant \varrho^p \quad \text{za svako } k,$$

$x = (\xi_\nu) \in \ell_p$

$x = (\xi_\nu$

$x \in \ell$

$\Rightarrow$

što znači da su delimične sume reda $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} |\xi_\nu|^p$ sa pozitivnim članovima ograničene; red je, dakle, konvergentan.

Ostaje da pokažemo da $x_n \to x$ u smislu metrike u l_p. Iz (5) sledi

$$\sum_{\nu=1}^{k} |\xi_\nu^m - \xi_\nu^n|^p < \varepsilon^p \quad \text{za} \quad m > n \geqslant n_0 \quad \text{i za svako } k.$$

Pustimo li ovde da $m \to \infty$, dobićemo

$$\sum_{\nu=1}^{k} |\xi_\nu - \xi_\nu^n|^p \leqslant \varepsilon^p \text{ za } n \geqslant n_0 \text{ i za svako } k,$$

odakle sledi

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |\xi_\nu - \xi_\nu^n|^p \leqslant \varepsilon^p \text{ za } n \geqslant n_0.$$

Dakle, $d(x_n, x) \leqslant \varepsilon$ za $n \geqslant n_0$, što znači da $x_n \to x$ u smislu metrike u l_p.

Primer 2. Prostor m je kompletan. Neka je (x_n) Cauchyev niz u m, tj.

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon \text{ za } m > n \geqslant n_0.$$

Tada je

(6) $$|\xi_\nu^m - \xi_\nu^n| < \varepsilon \text{ za } m > n \geqslant n_0 \text{ i svako } \nu = 1, 2, \ldots$$

Dakle, niz ν-tih koordinata $(\xi_\nu^n)_{n=1,2,\ldots}$ je Cauchyev niz u R te postoji broj ξ_ν takav da

$$\xi_\nu^n \to \xi_\nu \text{ kada } n \to \infty \text{ za svako } \nu = 1, 2, \ldots$$

Kako je (x_n) kao Cauchyev niz ograničen, tj. $d(x_n, 0) \leqslant \varrho$, biće tim pre

$$|\xi_\nu^n| \leqslant \varrho \text{ za svako } n \text{ i svako } \nu.$$

Pustimo li ovde da $n \to \infty$, slediće (фиксирано ν.)

$$|\xi_\nu| \leqslant \varrho \text{ za svako } \nu,$$

tj. niz (ξ_ν) je ograničen; tačka $x = (\xi_\nu)$ pripada, dakle, prostoru m.

Najzad, ako u (6) pustimo da $m \to \infty$, dobićemo

$$|\xi_\nu - \xi_\nu^n| \leqslant \varepsilon \quad \text{za} \quad n \geqslant n_0 \quad \text{i svako} \quad \nu = 1, 2, \ldots,$$

što znači da je

$$\sup_{1 \leqslant \nu < \infty} |\xi_\nu - \xi_\nu^n| \leqslant \varepsilon \quad \text{za} \quad n \geqslant n_0.$$

Dakle, $x_n \to x$ u smislu metrike u m.

Primer 3. Prostor $C[a, b]$ je kompletan. Neka je (x_n) jedan Cauchyev niz u $C[a, b]$, tj.

(7) $$|x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon \quad \text{za} \quad m > n \geqslant n_0 \quad \text{i za svako} \quad t \in [a, b].$$

Za fiksirano t iz $[a, b]$ numerički niz $x_n(t)$ je, dakle, jedan Cauchyev niz u R. Znači, postoji broj $x(t)$ takav da

$$x_n(t) \to x(t) \quad \text{kada} \quad n \to \infty.$$

Kada t prolazi razmak $[a, b]$, ovim je definisana funkcija $x(t)$ na $[a, b]$. Ako u (7) pustimo da $m \to \infty$, dobićemo

$$|x(t) - x_n(t)| \leqslant \varepsilon \quad \text{za} \quad n \geqslant n_0 \quad \text{i za svako} \quad t \in [a, b],$$

što po definiciji znači da niz $x_n(t)$ konvergira ka $x(t)$ uniformno na $[a, b]$. $x(t)$ je, dakle, granična vrednost $\boxed{\text{uniformno konvergentnog niza}}$ neprekidnih funkcija — znači i sama je neprekidna. Prema tome, $x(t)$ leži u $C[a, b]$ i $x_n \to x$ u smislu metrike u $C[a, b]$.

Primer 4. Prostor $C_1[a, b]$ nije kompletan. Neka je

$$x_n(t) = \begin{cases} n, & 0 \leqslant t \leqslant 1/n^2, \\ t^{-1/2}, & 1/n^2 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

niz neprekidnih funkcija u razmaku $[0, 1]$. Za $m > n$ je

$$d(x_m, x_n) = \int_0^1 |x_m(t) - x_n(t)|\, dt \leqslant \int_0^{1/n^2} t^{-1/2}\, dt = \frac{2}{n} \to 0,$$

tj. (x_n) je Cauchyev niz u $C_1[a, b]$. Pokazaćemo da (x_n) ne konvergira nijednoj na $[0, 1]$ neprekidnoj funkciji. Zaista, neka je $x(t)$ proizvoljna na $[0, 1]$ neprekidna funkcija. Ona je tada na $[0, 1]$ ograničena, tj. postoji prirodan broj k tako da je $|x(t)| \leqslant k$ za $0 \leqslant t \leqslant 1$. No za $n \geqslant 2k$ i $0 \leqslant t \leqslant 1/(2k)^2$ imamo $x_n(t) \geqslant 2k$, pa je za te vrednosti n

$$d(x_n, x) \geqslant \int_0^{1/(2k)^2} |x_n(t) - x(t)|\, dt \geqslant \int_0^{1/(2k)^2} \big|\, |x_n(t)| - |x(t)| \,\big|\, dt$$

$$\geqslant \int_0^{1/(2k)^2} (2k - k)\, dt = \frac{1}{4k},$$

što isključuje mogućnost da $x_n \to x$ u smislu metrike u $C_1[a, b]$.

4.iii. Kompletiranje prostora

Među metričkim prostorima oni koji su kompletni od naročitog su značaja. Zbog toga je od posebnog interesa mogućnost da se svaki nekompletan prostor „kompletira". Kao model kompletiranja jednog nekompletnog metričkog prostora čitaocu može da posluži kompletiranje skupa racionalnih brojeva u skup realnih brojeva. Šta više, kod metričkih prostora je ovo kompletiranje jednostavnije, jer ne mora da se vodi računa o algebarskoj i strukturi poretka skupa racionalnih brojeva.

Stav 10. *Neka je X nekompletan metrički prostor. Tada postoji kompletan metrički prostor $\mathfrak{X}$, tako da je jedan u njemu svuda gust potprostor $\mathfrak{X}^*$ izometričan sa X.*

S obzirom da X možemo identifikovati sa $\mathfrak{X}^*$ (vidi primedbu posle definicije 1.3) i time X smatrati potprostorom od $\mathfrak{X}$, kažemo da je prostor $\mathfrak{X}$ nastao *kompletiranjem* prostora X.

Dokaz stava 10. Uočimo kolekciju svih Cauchyevih nizova u X i uvedimo u nju relaciju ekvivalencije

$$(8) \qquad (x_n) \sim (x'_n) \quad \text{ako} \quad d(x_n, x'_n) \to 0 \ (n \to \infty).$$

Označimo za $\mathfrak{X}$ odgovarajući skup-količnik: elementi ovoga su, dakle, klase ekvivalentnih Cauchyevih nizova iz X. U $\mathfrak{X}$ ćemo metriku uvesti na sledeći način: Ako su x^* i y^* dve klase ekvivalencije iz X, izabraćemo u svakoj od njih po jednog reprezentanta, recimo Cauchyev niz (x_n) u x^* i Cauchyev niz (y_n) u y^*, i staviti

$$(9)\qquad d(x^*, y^*) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n).\ ^{1)}$$

Da bi ova definicija rastojanja u $\mathfrak{X}$ bila valjana, treba pokazati tri stvari: prvo, da ona ima smisla za svaki par klasa x^* i y^*, što znači da uvek postoji limes na desnoj strani u (9); drugo, da ovaj limes ne zavisi od toga koje smo Cauchyeve nizove uzeli kao reprezentante klasa x^* i y^*; treće, da $d(x^*, y^*)$ ima sve osobine rastojanja.

Koristeći relaciju trougla i rezultat vežbanja 1.1, prvo sledi iz

$$|d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n)| \leqslant$$
$$\leqslant |d(x_m, y_m) - d(x_n, y_m)| + |d(x_n, y_m) - d(x_n, y_n)|$$
$$\leqslant d(x_m, x_n) + d(y_m, y_n) \to 0, \quad m > n \to \infty,$$

jer ovo znači da je niz brojeva $(d(x_n, y_n))$ jedan Cauchyev a time i konvergentan niz u R.

Sada ćemo pokazati da ako su (x'_n) i (y'_n) neka druga dva reprezentanta klasa x^* i y^*, da tada važi

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(x'_n, y'_n),$$

tj. da je funkcija $d(x^*, y^*)$ nezavisna od izabranih reprezentanata. Ovo sledi iz

$$|d(x_n, y_n) - d(x'_n, y'_n)| \leqslant$$
$$\leqslant |d(x_n, y_n) - d(x'_n, y_n)| + |d(x'_n, y_n) - d(x'_n, y'_n)|$$
$$\leqslant d(x_n, x'_n) + d(y_n, y'_n)$$

i (8), jer su $(x_n) \sim (x'_n)$ i $(y_n) \sim (y'_n)$.

Najzad, lako je videti da $d(x^*, y^*)$ ima sve osobine rastojanja. Prve dve neposredno slede iz (8). Treća je trivijalna. Što se tiče relacije trougla, ona sledi ako u nejednačini

$$d(x_n, y_n) \leqslant d(x_n, z_n) + d(z_n, y_n),$$

koja važi između elemenata prostora X, pustimo da $n \to \infty$.

Definisaćemo sada potprostor $\mathfrak{X}^*$ prostora $\mathfrak{X}$. Tačka x^* iz $\mathfrak{X}$ pripada potprostoru $\mathfrak{X}^*$ ako u x^* postoji Cauchyev niz (x_n) *stacionarnog* tipa tj. takav da je $x_n = x$ za svako n. Na osnovu (8) jasno je da u istoj klasi ekvivalencije ne mogu postojati dva različita Cauchyeva niza stacionarnog tipa. Otud sledi da se između X i $\mathfrak{X}^*$ može na jednostavan način uspostaviti biunivoka korespondencija: tački $x \in X$ korespondiraćemo u $\mathfrak{X}^*$ onu klasu ekvivalencije x^* koja u sebi sadrži stacionarni Cauchyev niz $x, x, x, \ldots$. Ako su x^* i y^*

---

1) Mada su rastojanja u X i $\mathfrak{X}$ označena istim slovom d, ne postoji opasnost konfuzije, jer su tačke u $\mathfrak{X}$ snabdevene zvezdicom.

dve tačke iz $\mathfrak{X}^*$ sa stacionarnim Cauchyevim nizovima $x, x, x, \ldots$ odnosno $y, y. y, \ldots$, prema (9) biće

$$d(x^*, y^*) = \lim_{n\to\infty} d(x, y) = d(x, y), \quad x^*, y^* \in \mathfrak{X}^*, \tag{10}$$

tj. prostori X i $\mathfrak{X}^*$ su izometrični.

Pokazaćemo sada da je prostor $\mathfrak{X}^*$ svuda gust u $\mathfrak{X}$. Zaista, neka je $x^* \in \mathfrak{X}$ i neka je (x_n) jedan reprezentant klase x^*. Svakom $\varepsilon > 0$ odgovara tada prirodni broj N takav da je $d(x_n, x_N) < \frac{\varepsilon}{2}$ za $n \geqslant N$. Neka je y^* ona klasa u $\mathfrak{X}^*$ koja sadrži stacionarni Cauchyev niz $x_N, x_N, x_N, \ldots$. Tada je

$$d(x^*, y^*) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_N) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

što znači da u svakoj okolini tačke $x^* \in \mathfrak{X}$ leži bar jedna tačka y^* iz $\mathfrak{X}^*$.

Ostaje još da pokažemo da je $\mathfrak{X}$ kompletan prostor. Neka je (x_n^*) proizvoljan Cauchyev niz u $\mathfrak{X}$. Kako je $\mathfrak{X}^*$ svuda gust u $\mathfrak{X}$, moguće je za svako n izabrati y_n^* u $\mathfrak{X}^*$ tako da je

$$d(x_n^*, y_n^*) < 1/n.$$

Kako je

$$d(y_m^*, y_n^*) \leqslant d(y_m^*, x_m^*) + d(x_m^*, x_n^*) + d(x_n^*, y_n^*)$$
$$< 1/m + d(x_m^*, x_n^*) + 1/n,$$

to je zajedno sa (x_n^*) i (y_n^*) jedan Cauchyev niz u $\mathfrak{X}$. Ako u svakoj klasi y_n^* iz $\mathfrak{X}^*$ izaberemo za reprezentanta odgovarajući stacionarni Cauchyev niz — označimo ga sa $x_n, x_n, x_n, \ldots$ — nizu klasa (y_n^*) u $\mathfrak{X}^*$ odgovaraće niz tačaka (x_n) u X i, prema (10), $d(x_m, x_n) = d(y_m^*, y_n^*)$. Sa (y_n^*) je, znači, i (x_n) jedan Cauchyev niz (ovaj poslednji u X). Cauchyev niz (x_n) u X određuje jednu klasu ekvivalencije, naime onu kojoj pripada; označimo ovu sa x^*. Pokazaćemo da Cauchyev niz (x_n^*) u $\mathfrak{X}$ konvergira u smislu metrike u $\mathfrak{X}$ ka tački $x^* \in \mathfrak{X}$. Zaista, za fiksirano n je

$$d(x_n^*, x^*) \leqslant d(x_n^*, y_n^*) + d(y_n^*, x^*) < 1/n + \lim_{m\to\infty} d(x_n, x_m), \tag{11}$$

jer je, na osnovu (9),

$$d(y_n^*, x^*) = \lim_{m\to\infty} d(x_n, x_m),$$

zato što u klasi y_n^* leži Cauchyev niz $x_n, x_n, x_n, \ldots$, a u klasi x^* Cauchyev niz $x_1, x_2, x_3, \ldots$. Pustimo li u (11) da $n \to \infty$, slediće $d(x_n^*, x^*) \to 0$, tj. da niz x_n^* konvergira ka x^* u smislu metrike u $\mathfrak{X}$.

4.iv. Nizovi na realnoj pravoj

Zbog bogatije strukture realne prave bogatija je i teorija realnih nizova. Tu se uvode pojmovi i važe iskazi koji nemaju svoje analogone u opštim metričkim prostorima.

Definicija 6. Neka je (x_n) niz tačaka u R. Ako svakom (ma kako velikom) realnom broju M odgovara prirodni broj n_0 takav da

$$n \geqslant n_0 \quad \Rightarrow \quad x_n > M$$

kažemo da (x_n) (*određeno*) *divergira* ka $+\infty$ i pišemo $x_n \to +\infty$. Simetrično značenje ima simbol $x_n \to -\infty$.

Bez obzira na istovetnost upotrebljenih simbola, ne postoji bojazan da se ovi, određeno divergentni nizovi, pobrkaju sa konvergentnim nizovima.

Definicija 7. Niz tačaka (x_n) u R *monotono raste* ako je $x_n \leqslant x_{n+1}$. Stoji li ovde umesto $\leqslant$ znak $<$, kažemo da niz *stvarno raste.*

Simetrično se definiše niz koji monotono opada ili stvarno opada.

Za monotone nizove važi

Stav 11 (Princip monotonih nizova). *Monotono rastući niz* (x_n) *ili konvergira ka* $\sup\{x_n\}$ *ili divergira ka* $+\infty$ *već prema tome da li je ograničen s desne strane ili to nije.*

Simetričan iskaz važi za monotono opadajuće nizove.

Dokaz. Pretpostavimo da (x_n) monotono raste i da je $x_n < M$. Kako je skup $\{x_n\}$ ograničen s desne strane postoji $\sup\{x_n\} = x$[1]. Na osnovu definicije supremuma, za svako $\varepsilon > 0$ postoji element x_N iz skupa $\{x_n\}$ takav da je $x - \varepsilon < x_N \leqslant x$. Zbog monotonije niza (x_n), tada je i

$$x \geqslant x_n > x - \varepsilon \quad \text{za svako} \quad n = N, N+1, \ldots,$$

što znači da $x_n \to x$.

Ako niz (x_n) nije ograničen, tj. za svaki (ma kako veliki) broj M postoji element x_N skupa $\{x_n\}$ takav da je $x_N > M$, tim pre će, zbog monotonije niza (x_n), biti $x_n > M$ za svako $n \geqslant N$, što znači da niz (x_n) određeno divergira ka $+\infty$.

Stav 12 (Bolzano-Weierstrass). *Svaki ograničen niz realnih brojeva* (x_n) *ima bar jednu adherentnu vrednost.*

Dokaz. Razlikovaćemo dva slučaja prema tome da li je skup vrednosti $\{x_n\}$ niza (x_n) konačan ili beskonačan. U prvom slučaju u nizu (x_n) bar jedan od članova se beskonačno mnogo puta ponavlja i on je adherentna vrednost. U drugom slučaju, $\{x_n\}$ kao ograničen beskonačan skup ima bar jednu tačku nagomilavanja (stav 2.15) i ova je prema (3) adherentna vrednost niza (x_n).

Za razliku od definicije 3, u proširenom sistemu realnih brojeva R^* zvaćemo adherentna vrednost niza (x_n) svaku onu tačku x (koja može biti i $-\infty$ ili $+\infty$) za koju postoji delimični niz x_{n_k} takav da $x_{n_k} \to x$. Ovim su, dakle, dopušteni kako konvergentni, tako i određeno divergentni nizovi.

Definicija 8. Neka je (x_n) niz realnih brojeva i neka je $\mathfrak{A}(x_n)$ skup adherentnih vrednosti niza (x_n). *Limes inferior* i *limes superior* niza (x_n) definisani su sa

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \inf \mathfrak{A}(x_n), \quad \limsup_{n\to\infty} x_n = \sup \mathfrak{A}(x_n).$$

[1] Često ćemo umesto $\sup\{x_n\}$ pisati jednostavno $\sup x_n$.

Za $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ i $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ koriste se i oznake $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$ i $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$.

Iz same definicije sledi da je $\boxed{\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty \left(\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty\right)}$ tada i samo tada ako niz (x_n) nije ograničen s desne (leve) strane. Kada su $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$ ($\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$) konačni, oni se mogu i ovako okarakterisati.

Stav 13. *Neka je za realni niz* (x_n), $-\infty < \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n < +\infty$.

1° *Za svako* $\varepsilon > 0$ *postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva* n_k $(k = 1, 2, \ldots)$, *tako da je*

$$x_{n_k} > \varlimsup_{n\to\infty} x_n - \varepsilon. \qquad = L - \varepsilon$$

2° *Za svako* $\varepsilon > 0$ *postoji prirodni broj* n_0 *tako da je* $\exists\, n_0$

$$x_n < \varlimsup_{n\to\infty} x_n + \varepsilon \quad \text{za svako} \quad n > n_0.$$

3° $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$ *je jedini realni broj koji ima osobine* 1° *i* 2°.

Simetričan iskaz važi za $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$.

Na osnovu 1° i 2° vidi se da je broj $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$ i sam jedna adherentna vrednost niza (x_n), što znači da je $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$ u stvari $\max \mathfrak{A}(x_n)$. Simetrično je i $\varliminf\limits_{n\to\infty} = \min \mathfrak{A}(x_n)$.

Očigledno je $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$ za svaki niz (x_n). Iz 1° i 2° sledi i da je niz (x_n) konvergentan jedino ako je

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \varlimsup_{n\to\infty} x_n = \omega$$

gde je ω konačan broj. Nije teško uvideti da će (x_n) divergirati ka $+\infty$ $(-\infty)$ tada i samo tada ako je $\omega = +\infty$ $(-\infty)$.

Dokaz stava 13. Stavimo $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = b$. 1° Na osnovu stava 3 skup $\mathfrak{A}(x_n)$ je zatvoren, a prema stavu 2.16 pripada mu njegov supremum. b je, dakle, adherentna vrednost niza (x_n), odakle sledi tvrđenje 1°.

2° Pretpostavimo da važi suprotno, tj. da postoji jedno $\varepsilon > 0$ tako da je za beskonačno mnogo prirodnih brojeva n_k $(k = 1, 2, \ldots)$

$$x_{n_k} \geqslant b + \varepsilon.$$

Kako je, zbog $b < +\infty$, niz (x_n) a time i niz (x_{n_k}) ograničen s desne strane, $x_{n_k} < M$, postojala bi u $[b + \varepsilon, M]$, na osnovu stava 12, bar jedna adherentna vrednost niza (x_{n_k}) a time i niza (x_n), što protivureči činjenici da je b najveća adherentna vrednost niza (x_n).

3° Pretpostavimo da postoje dva različita realna broja, b i b' (recimo $b < b'$) koji zadovoljavaju 1° i 2°. Neka je x proizvoljan broj iz razmaka $]b, b'[$. Ako b zadovoljava 2°, imali bismo

$$x_n < x \quad \text{za} \quad n > n_0. \tag{12}$$

No tada b' ne bi moglo zadovoljavati 1°, jer, zbog (12), u dovoljno maloj okolini tačke b' može ležati samo konačno mnogo članova niza (x_n). Znači, ne mogu b i b' istovremeno zadovoljavati i 1° i 2°.

Ako supremum odnosno infimum skupa $\{x_k, x_{k+1}, \dots\}$ kratko označimo sa

$$\sup_{n\geqslant k} x_n \quad \text{odnosno} \quad \inf_{n\geqslant k} x_n,$$

tada $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ i $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ možemo i ovako okarakterisati:

$\boxed{\textbf{Stav 14.}}$ *Neka je* (x_n) *niz realnih brojeva. Tada je*

$$\boxed{\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \inf_{k\geqslant 1} \sup_{n\geqslant k} x_n}$$

i

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \sup_{k\geqslant 1} \inf_{n\geqslant k} x_n.$$

Dokaz sledi na osnovu stava 13. Stavimo

$$L = \inf_{k\geqslant 1} \sup_{n\geqslant k} x_n \quad \text{i} \quad y_k = \sup_{n\geqslant k} x_n.$$

Na osnovu definicije supremuma je

(13) $$x_n \leqslant y_k \text{ za svako } n \geqslant k$$

i

(14) $$\forall\ \varepsilon>0 \quad \exists\ n_0 \geqslant k \text{ tako da je } x_{n_0} > y_k - \varepsilon,$$

a na osnovu definicije infimuma je

(15) $$y_k \geqslant L \text{ za svako } k \geqslant 1$$

i

(16) $$\forall\ \varepsilon>0 \quad \exists\ k_0 \text{ tako da je } y_{k_0} < L + \varepsilon.$$

Kombinujući (13) i (16) nalazimo:

(17) $$\forall\ \varepsilon>0 \quad \exists\ k_0 \text{ tako da je } x_n \leqslant y_{k_0} < L+\varepsilon \text{ za } n \geqslant k_0.$$

S druge strane, (14) i (15) daju:

(18) $$\forall\ \varepsilon>0 \quad \exists\ n_0 \text{ tako da je } x_{n_0} > y_k - \varepsilon \geqslant L - \varepsilon.$$

Takvih indeksa n_0 da važi (18) ima beskonačno mnogo. Zaista, kada bi ih bilo samo konačno mnogo — označimo sa $\bar{n}_0$ najveći od njih — imali bismo $x_n < L - \varepsilon$ za $n > \bar{n}_0$, pa time i

$$L - \varepsilon \geqslant \sup_{n\geqslant \bar{n}_0+1} x_n = y_{\bar{n}_0+1} \geqslant L.$$

Kontradikcija. (18) važi, dakle, za beskonačno mnogo indeksa n_0, što zajedno sa (17) predstavlja tvrđenje stava.

L+ε

Vežbanja 4

1. Niz tačaka u metričkom prostoru može konvergirati samo jednoj tački.

2. Ako niz $x_n \to x$, tada svaki njegov delimični niz (x_{n_k}) konvergira ka x.

3. Ako $x_n \to x$ i $y_n \to y$ u metričkom prostoru (X, d), tada $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$.

4. Niz (x_n) konvergira ako *tri* njegova delimična niza (x_{2k}), (x_{2k+1}) i (x_{3k}) konvergiraju. Da li je za konvergenciju niza (x_n) dovoljno da dva od navedena tri delimična niza konvergiraju?

5. Dat je niz (x_n). Da li se iz konvergencije beskonačno mnogo njegovih delimičnih nizova $(x_{sk})_{k=1,2,\ldots}$ $(s=2, 3, \ldots)$ može zaključiti da niz (x_n) konvergira? [Da li tada konvergira i delimični niz (x_{p_i}), gde je (p_i) niz prostih brojeva?]

6. Ako niz $x_n = (\xi_\nu^n)$ iz l_r konvergira ka x u smislu metrike u l_r, pokazati da tada $x_n \to x$ i u smislu metrike u l_p, ukoliko je $1 \leqslant r < p$. [Videti i vežbanje 1.7.]

7. Kakav odnos postoji između konvergencije po metrici i konvergencije po koordinatama u prostorima m i c?

8. U prostoru s konvergencija po metrici ekvivalentna je konvergenciji po koordinatama.

9. Skup polinoma na $[0, 1]$, snabdeven metrikom $\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t) - y(t)|$ nije kompletan metrički prostor.

10. R_p^k $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ je kompletan metrički prostor.

11. Prostor ograničenih funkcija $B[a, b]$ je kompletan.

12. Prostor nizova s je kompletan. [Iskoristiti vežbanje 8.]

13. Pokazati da su metrički prostori (X, d) i (X, d^*) iz vežbanja 1.15 kompletni tada i samo tada ako su takvi svi prostori (X_ν, d_ν) $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$.

14. Pokazati da je metrički prostor iz vežbanja 1.14 kompletan.

15. Neka je dat niz (x_n) i označimo sa A_n skup $\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$. Pokazati da je kolekcija adherentnih vrednosti niza (x_n) data sa $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n$.

16. Pokazati da važi

$$\varlimsup_{n\to\infty} (x_n + y_n) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n, \qquad x_n, y_n \in R,$$
$$\varliminf_{n\to\infty} (x_n + y_n) \geqslant \varliminf_{n\to\infty} x_n + \varliminf_{n\to\infty} y_n,$$

ukoliko se desna strana ne svodi na $(+\infty) + (-\infty)$ ili $(+\infty) - (+\infty)$.

17. Ako je za dovoljno veliko n, $x_n \geqslant 0$ i $y_n \geqslant 0$, tada je

$$\varlimsup_{n\to\infty} (x_n y_n) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} y_n,$$

$$\varliminf_{n\to\infty} (x_n y_n) \geqslant \varliminf_{n\to\infty} x_n \cdot \varliminf_{n\to\infty} y_n,$$

ukoliko se desna strana svodi na $0 \cdot (\pm \infty)$.

18. Pokazati da važi

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} (-x_n) = -\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n, \qquad \overline{\lim}_{n\to\infty} (-x_n) = -\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n.$$

19. Ako je $x_n > 0$, tada važi

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n}, \qquad \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n}.$$

20. Ako je (x_n) niz nenegativnih brojeva i $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \leqslant 0$, tada $x_n \to 0$. [Iz $x_n \geqslant 0$ sledi $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \geqslant 0$, pa je, zbog $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n \leqslant \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$.]

5.i. Banachov stav o nepokretnoj tački

Neka f preslikava metrički prostor X u samog sebe. Tačke x iz X za koje je $f(x)=x$ su *nepokretne tačke* preslikavanja f. Preslikavanje f može ali ne mora da ima nepokretnih tačaka, a ako ih ima, ovih može biti jedna ili više. Postavlja se, dakle, pitanje *egzistencije* i *jedinosti* nepokretnih tačaka nekog preslikavanja. Dovoljne uslove pod kojim preslikavanje ima jednu i samo jednu nepokretnu tačku dao je Banach.

Preslikavanje f metričkog prostora X u samog sebe je *kontrakcija* ako postoji pozitivan broj $q<1$ takav da je za svaki par tačaka x_1, x_2 iz X

$$d[f(x_1), f(x_2)] \leqslant q d(x_1, x_2).$$

Banachov stav. *Kontrakcija f kompletnog metričkog prostora X u samog sebe ima jednu i samo jednu nepokretnu tačku.*

Dokaz počiva na tzv. metodi sukcesivnih aproksimacija. Naime, birajući jednu proizvoljnu tačku x_0 u X, konstruisaćemo postupno niz tačaka

(1) $$x_1 = f(x_0), \quad x_2 = f(x_1), \quad x_3 = f(x_2), \ldots$$

i pokazati da je (x_n) jedan Cauchyev niz. Zaista,

$$d(x_{n+1}, x_n) = d[f(x_n), f(x_{n-1})] \leqslant q d(x_n, x_{n-1})$$

i ponavljajući ovo n puta nalazimo

$$d(x_{n+1}, x_n) \leqslant q^n d(x_1, x_0) = a q^n.$$

Prema tome, za $m>n$ je

(2) $$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leqslant d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leqslant a q^n + a q^{n+1} + \cdots + a q^{m-1} \\ &< a q^n + a q^{n+1} + \cdots = \frac{a q^n}{1-q}, \quad \xrightarrow[m\to\infty]{} 0 \end{aligned}$$

tj.

$$d(x_n, x_m) \to 0 \quad \text{kada} \quad m > n \to \infty .$$

Kako je X kompletan prostor, postoji u X tačka x^* kojoj konvergira niz (x_n), tj.

(3) $$\lim_{n\to\infty} x_n = x^* .$$

No, kako je f kontrakcija, to je

$$d[x_{n+1}, f(x^*)] = d[f(x_n), f(x^*)] \leqslant q\, d(x_n, x^*),$$

tj.

$$\lim_{n\to\infty} d[x_{n+1}, f(x^*)] = 0,$$

ili, što je isto,

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = f(x^*).}$$

Na osnovu (3) je, dakle, $x^* = f(x^*)$, tj. x^* je nepokretna tačka preslikavanja f.

Time je dokazana egzistencija bar jedne nepokretne tačke; ostaje da pokažemo da je ona i jedina. Pretpostavimo da f ima, sem x^*, još jednu nepokretnu tačku $x^{**} \neq x^*$. No tada je

$$d(x^*, x^{**}) = d[f(x^*), f(x^{**})] \leqslant q\, d(x^*, x^{**}),$$

odakle, zbog $d(x^*, x^{**}) > 0$, sledi $q \geqslant 1$, što je u kontradikciji sa činjenicom da je f kontrakcija.

Primećujemo da izloženi metod sukcesivne aproksimacije daje i mogućnost da sa proizvoljnom tačnošću odredimo nepokretnu tačku x^*. Naime, ako se zadržimo na n-toj aproksimaciji x_n u nizu (1), iz (2) sledi, ako pustimo da $m \to \infty$,

$$d(x_n, x^*) \leqslant \frac{aq^n}{1-q},$$

tj. tačka x_n se nalazi u kugli $K[x^*, aq^n/(1-q)]$ a poluprečnik ove se može učiniti proizvoljno malim birajući n dovoljno veliko. Iz ove procene se vidi da tačnost približnog rešenja x_n zavisi ne samo od n i od konstante kontrakcije q već i od toga od koje početne aproksimacije smo pošli.

Najzad, primećujemo da Banachov stav važi i ako je f kontrakcija samo na nekom zatvorenom delu F kompletnog metričkog prostora X, ukoliko f preslikava F u samog sebe. Naime, kako je F zatvoren skup, on je i sam za sebe kompletan metrički prostor, pa Banachov stav možemo primeniti direktno na F.

5.ii. Primena Banachovog stava u teoriji algebarskih, diferencijalnih i integralnih jednačina.

Banachov stav obuhvata stavove egzistencije iz različitih grana matematičke analize.

Egzistencija rešenja običnih jednačina. Neka je X razmak $[a, b]$ na realnoj pravoj i $f(x)$ realna funkcija čije vrednosti takođe leže u $[a, b]$. Primenićemo Banachov stav na rešavanje jednačine $f(x) = x$. U tom cilju uočimo preslikavanje

$y=f(x)$. Na osnovu učinjenih pretpostavki, f preslikava kompletan prostor $[a, b]$ u samog sebe. Ostaje da vidimo pod kojim uslovima je f kontrakcija. Za to je, na primer, dovoljno da pretpostavimo da je f diferencijabilna funkcija i da je $|f'(x)| \leqslant q < 1$. Zaista, tada je, na osnovu teoreme o srednjoj vrednosti, za svako x_1 i x_2 iz $[a, b]$

$$|f(x_1)-f(x_2)| = |f'(\xi)| |x_1-x_2| \leqslant q |x_1-x_2|,$$

što, s obzirom na definiciju metrike na realnoj pravoj, znači da je f kontrakcija. Prema tome, ako realna funkcija f preslikava $[a, b]$ u samog sebe i $|f'(x)| \leqslant q < 1$, jednačina $f(x)-x=0$ ima u $[a, b]$ jedno i samo jedno rešenje x^*, i ovo se sukcesivno može odrediti, polazeći od proizvoljnog $x_0 \in [a, b]$, formirajući niz $x_n = f(x_{n-1})$, $n=1, 2, \ldots$ n-to približno rešenje x_n odstupa od tačnog za $q^n |x_1-x_0|/(1-q)$.

Da bismo u praksi obezbedili da $f(x)$ zadovoljava uslove za primenu Banachovog stava postupamo ovako. Neka je data jednačina $F(x)=0$ sa $F(a)<0$, $F(b)>0$ i $0<m \leqslant F'(x) \leqslant M$ u $[a, b]$. Stavićemo $f(x)=x-\lambda F(x)$, a parametar λ ćemo naknadno odrediti. Jednačina $F=0$ ekvivalentna je tada jednačini $f(x)=x$; no kako je $f'(x)=1-\lambda F'(x)$, to je

$$1-\lambda M \leqslant f'(x) \leqslant 1-\lambda m,$$

pa je moguće λ izabrati tako da bude ispunjeno ograničenje za $f'(x)$ koje opravdava primenu Banachovog stava.

Egzistencija rešenja sistema od k linearnih algebarskih jednačina. Neka je

$$\begin{aligned} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \cdots + a_{1k}\xi_k &= b_1, \\ a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \cdots + a_{2k}\xi_k &= b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1}\xi_1 + a_{k2}\xi_2 + \cdots + a_{kk}\xi_k &= b_k. \end{aligned} \tag{4}$$

sistem od k linearnih algebarskih jednačina sa k nepoznatih. Ovaj možemo napisati i u obliku

$$\begin{aligned} \xi_1 &= +(1-a_{11})\xi_1 - a_{12}\xi_2 - \cdots - a_{1k}\xi_k + b_1, \\ \xi_2 &= -a_{21}\xi_1 + (1-a_{22})\xi_2 - \cdots - a_{2k}\xi_k + b_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \xi_k &= -a_{k1}\xi_1 - a_{k2}\xi_2 - \cdots + (1-a_{kk})\xi_k + b_k \end{aligned}$$

ili ako uvedemo veličine

$$c_{ij} = \delta_{ij} - a_{ij}, \quad \text{gde je} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

u obliku

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{k} c_{ij}\xi_j + b_i \quad (i=1, 2, \ldots, k). \tag{5}$$

Definisaćemo preslikavanje $y=f(x)$ prostora R^k u samog sebe na ovaj način: tački $x=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k) \in R^k$ odgovara tačka $y=(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k) \in R^k$, gde su koordinate η_i određene sa

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{k} c_{ij}\xi_j + b_i \quad (i=1, 2, \ldots, k).$$

Nepokretne tačke preslikavanja f prostora R^k u samog sebe su rešenja sistema (5). Ostaje još da vidimo pod kojim uslovima će f biti kontrakcija. S obzirom na definiciju rastojanja u R^k, biće

$$[d(y_1, y_2)]^2 = \sum_{i=1}^{k} \left\{ \sum_{j=1}^{k} c_{ij}\, \xi_j^{(1)} - \sum_{j=1}^{k} c_{ij}\, \xi_j^{(2)} \right\}^2 = \sum_{i=1}^{k} \left\{ \sum_{j=1}^{k} c_{ij} (\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)}) \right\}^2,$$

te je na osnovu Hölderove nejednačine

$$[d(y_1, y_2,)]^2 \leqslant \sum_{i=1}^{k} \left\{ \sum_{j=1}^{k} c_{ij}^2 \cdot \sum_{j=1}^{k} (\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)})^2 \right\} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} c_{ij}^2 \cdot [d(x_1, x_2)]^2,$$

tj.

$$d(y_1, y_2) \leqslant \left\{ \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} c_{ij}^2 \right\}^{1/2} d(x_1, x_2).$$

Prema tome, preslikavanje f je kontrakcija ako je

$$\sum_{i,j=1}^{k} c_{ij}^2 < 1, \tag{6}$$

i tada sistem (5) odnosno (4) ima, na osnovu Banachovog stava, jedno i samo jedno rešenje. Ono se može dobiti sukcesivnim aproksimacijama polazeći od proizvoljne tačke $x^0 = (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \ldots, \xi_k^{(0)})$ prostora R^k.

Uslov koji mora zadovoljavati matrica $\|c_{ij}\|$ da bi f bila kontrakcija zavisi od metrike koju smo uveli u skup čije su tačke agregati od k realnih (ili kompleksnih) brojeva. No problem koji tretiramo ni po čemu ne sugerira da se u ovaj skup uvede baš metrika koja ga čini metričkim (Euklidovim) prostorom R^k. Ako naš problem tretiramo u prostorima R_1^k i R_∞^k, dobićemo druge uslove za matricu $\|c_{ij}\|$.

U prostoru R_∞^k, naime, biće

$$d(y_1, y_2) = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} |\eta_i^{(1)} - \eta_i^{(2)}| = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} \left| \sum_{j=1}^{k} c_{ij} (\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)}) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant k} \sum_{j=1}^{k} |c_{ij}| \cdot \max_{1 \leqslant i \leqslant k} |\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)}| = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} \sum_{j=1}^{k} |c_{ij}| \cdot d(x_1, x_2),$$

te je uslov da f predstavlja kontrakciju

$$\sum_{j=1}^{k} |c_{ij}| < 1 \quad \text{za} \quad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{7}$$

U prostoru R_1^k, pak, imamo

$$d(y_1, y_2) = \sum_{i=1}^{k} |\eta_i^{(1)} - \eta_i^{(2)}| = \sum_{i=1}^{k} \left| \sum_{j=1}^{k} c_{ij} (\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)}) \right|$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} |c_{ij}|\, |\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)}| = \sum_{j=1}^{k} |\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)}| \sum_{i=1}^{k} |c_{ij}| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant k} \left\{ \sum_{i=1}^{k} |c_{ij}| \right\} \cdot \sum_{j=1}^{k} |\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)}| = \max_{1 \leqslant j \leqslant k} \left\{ \sum_{i=1}^{k} |c_{ij}| \right\} \cdot d(x_1, x_2),$$

te se uslov da je f kontrakcija svodi na

$$(8)\qquad \sum_{i=1}^{k} |c_{ij}| < 1 \quad \text{za} \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Naravno, svaki od uslova (6), (7) ili (8) je samo dovoljan da bi f bila kontrakcija. Bilo koji od njih će biti zadovoljen ako je $|c_{ij}| < 1/k$.

Egzistencija rešenja beskonačnog sistema linearnih algebarskih jednačina. Beskonačni sistem linearnih algebarskih jednačina

$$(9)\qquad \begin{aligned} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + a_{13}\xi_3 + \cdots &= b_1, \\ a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + a_{23}\xi_3 + \cdots &= b_2, \\ a_{31}\xi_1 + a_{32}\xi_2 + a_{33}\xi_3 + \cdots &= b_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

može se, slično kao što smo to učinili sa konačnim sistemom, napisati u obliku

$$(10)\qquad \xi_i = \sum_{j=1}^{\infty} c_{ij}\xi_j + b_i \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

gde je

$$c_{ij} = \delta_{ij} - a_{ij}.$$

Pokazaćemo da ovaj sistem ima jedno jedino *ograničeno* rešenje $(\xi_1^*, \xi_2^*, \ldots)$, tj. takvo da je

$$|\xi_j^*| \leqslant M \quad \text{za svako} \quad j = 1, 2, \ldots,$$

ako je

$$(11)\qquad \sum_{j=1}^{\infty} |c_{ij}| \leqslant q < 1 \quad \text{i} \quad |b_i| \leqslant B \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

gde konstante q i B ne zavise od i. Tada se rešenje $(\xi_1^*, \xi_2^*, \ldots)$ može dobiti sukcesivnom aproksimacijom, polazeći od nekog proizvoljnog ograničenog niza brojeva $(\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots)$.

Neka je m metrički prostor ograničenih nizova. U njemu ćemo definisati preslikavanje $y = f(x)$ koje svakom $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in m$ koordinira tačku $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots)$ u skupu s svih nizova, jednačinama

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{\infty} c_{ij}\xi_j + b_i \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Da bismo mogli primeniti Banachov stav na preslikavanje koje je definisano u kompletnom metričkom prostoru m, potrebno je da pokažemo: 1° da f preslikava m u m i 2° da je f kontrakcija. Primećujemo da je u prethodnim primerima uslov 1° automatski bio ispunjen.

1° Kako $x \in m$, tj. $|\xi_j| \leqslant A$, biće na osnovu (11)

$$|\eta_i| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |c_{ij}|\,|\xi_j| + |b_i| \leqslant Aq + B,$$

tj. $y \in m$.

2° S obzirom na definiciju metrike u m, imamo

$$d(y_1, y_2) = \sup_{1 \leqslant i < \infty} |\eta_i^{(1)} - \eta_i^{(2)}| = \sup_{1 \leqslant i < \infty} \left| \sum_{j=1}^{\infty} c_{ij} (\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)}) \right|$$

$$\leqslant \sup_{1 \leqslant i < \infty} \left\{ \sup_{1 \leqslant j < \infty} |\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)}| \sum_{j=1}^{\infty} |c_{ij}| \right\} \leqslant \sup_{1 \leqslant j < \infty} |\xi_j^{(1)} - \xi_j^{(2)}| \cdot q,$$

jer q ne zavisi od i; dakle,

$$d(y_1, y_2) \leqslant q d(x_1, x_2),$$

tj. f je kontrakcija.

Egzistencija lokalnog rešenja diferencijalne jednačine prvog reda. Neka je data diferencijalna jednačina

$$\frac{dx}{dt} = g(t, x) \tag{12}$$

sa početnim uslovom $x(t_0) = x_0$. Pretpostavimo da je u pravougaoniku $P = \{(t, x) : |t - t_0| \leqslant a, |x - x_0| \leqslant b\}$:

1° $g(t, x)$ neprekidna, što znači i $|g| \leqslant M$;

2° $|g(t, x_1) - g(t, x_2)| \leqslant K |x_1 - x_2|$.

Pokazaćemo da tada postoji (dovoljno mali) broj $h > 0$, takav da u razmaku $[t_0 - h, t_0 + h] = \Delta$ postoji jedno i samo jedno rešenje diferencijalne jednačine (12) koje zadovoljava dati početni uslov (Picardov stav).

Pre svega, posmatranom problemu može se dati i ova formulacija: Pod navedenim pretpostavkama, postoji jedno i samo jedno rešenje integralne jednačine

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} g[t, x(t)]\, dt. \tag{13}$$

Neka je broj h takav da je

3° $h < 1/K$ i $h \leqslant \min(a, b/M)$.

Uočimo prostor C_Δ funkcija neprekidnih na razmaku Δ, i u ovome onaj njegov deo A za koji je

$$\max_t |x(t) - x_0| \leqslant b.$$

S obzirom na metriku u C_Δ, skup A je zatvoren, jer se sastoji iz tačaka zatvorene kugle $K[x_0, b]$.

Neka je preslikavanje $y = f(x)$, $x \in A \subset C_\Delta$ definisano sa

$$y(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} g[t, x(t)]\, dt. \tag{14}$$

Pokazaćemo da (i) f preslikava A u samog sebe, i (ii) da je f kontrakcija.

(i) Pre svega, ako $x \in A$ i $t \in \Delta$, tačka $(t, x(t)) \in P$, tj. desna strana u (14) ima smisla i očigledno $y \in C_\Delta$. Da bismo dokazali da $y \in A$, primećujemo da je, prema 1° i na osnovu druge nejednačine u 3°,

$$|y(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^{t} g[t, x(t)]\, dt \right| \leqslant M |t - t_0| \leqslant Mh \leqslant M \frac{b}{M} = b.$$

(ii) Neka x_1 i $x_2 \in A$. Tada je za $t \in \Delta$, na osnovu 2°,

$$\begin{aligned}|y_1(t)-y_2(t)| &= \left|\int_{t_0}^{t}\{g[t, x_1(t)]-g[t, x_2(t)]\}\,dt\right| \\ &\leqslant K\int_{t_0}^{t}|x_1(t)-x_2(t)|\,|dt| \\ &\leqslant Kh \max_{t\in\Delta}|x_1(t)-x_2(t)|.\end{aligned}$$

Prema prvoj nejednačini u 3°, $Kh=q<1$; na osnovu definicije rastojanja u C_Δ je, dakle,

$$d(y_1, y_2) \leqslant q d(x_1, x_2),$$

tj. f je kontrakcija.

Kako je prostor C_Δ kompletan a A zatvoren skup u C_Δ, to su na osnovu primedbe na kraju odeljka 5.i, svi uslovi za primenu Banachovog stava zadovoljeni, tj. preslikavanje (14) ima jednu jedinu nepokretnu tačku, a to je jedino rešenje integralne jednačine (13) odnosno postavljenog diferencijalnog zadatka.

Egzistencija rešenja Fredholmove integralne jednačine. Fredholmova integralna jednačina (nehomogena) oblika je

$$x(s)=\lambda\int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt+g(s),$$

gde je jezgro $K(s, t)$ neprekidno u kvadratu $P=[a, b]\times[a, b]$, funkcija $g(s)$ neprekidna u $[a, b]$ i λ realan parametar. $x(t)$ je nepoznata funkcija koju treba odrediti.

Neprekidno rešenje ove integralne jednačine možemo shvatiti kao nepokretnu tačku preslikavanja $y=f(x)$, $x=x(t)\in C[a, b]$, određenog sa

$$y(s)=\lambda\int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt+g(s).$$

Jasno je da f preslikava $C[a, b]$ u samog sebe, a kako je $C[a, b]$ kompletan prostor, ostaje još jedino da vidimo pod kojim uslovima je f kontrakcija.

Ako je

$$\max_{(s,t)\in P}|K(s, t)|=M,$$

biće za $x_1, x_2 \in C[a, b]$

$$\begin{aligned}|y_1(s)-y_2(s)| &\leqslant |\lambda|\int_a^b |K(s, t)|\,|x_1(t)-x_2(t)|\,dt \\ &\leqslant |\lambda|\, M \max_{a\leqslant t\leqslant b}|x_1(t)-x_2(t)|\,(b-a),\end{aligned}$$

što s obzirom na metriku u $C[a, b]$ daje

$$d(y_1, y_2)\leqslant M|\lambda|(b-a)\, d(x_1, x_2).$$

Prema tome, ako je $|\lambda|<1/M(b-a)$, f je kontrakcija, i na osnovu Banachovog stava niz sukcesivnih aproksimacija konvergira jedinom neprekidnom rešenju nehomogene Fredholmove jednačine. Primećujemo da je ovim stavom obezbeđeno rešenje Fredholmove jednačine samo za male vrednosti parametra $|\lambda|$.

Vežbanja 5

1. Pokazati da Banachov stav ne važi ako preslikavanje f ispunjava uslov

$$d[f(x_1), f(x_2)]<d(x_1, x_2) \quad (x_1\neq x_2).$$

2. Koristeći Banachov stav, pokazati da sistem

$$\xi_1 = \frac{1}{3}\xi_1 - \frac{1}{4}\xi_2 + \frac{1}{4}\xi_3 - 1,$$

$$\xi_2 = -\frac{1}{2}\xi_1 + \frac{1}{3}\xi_2 + \frac{1}{4}\xi_3 + 2,$$

$$\xi_3 = \frac{1}{5}\xi_1 - \frac{1}{3}\xi_2 + \frac{1}{4}\xi_3 - 2.$$

ima jedno jedino rešenje.

3. Neka je $G(s, t)$ realna funkcija dve realne promenljive s i t, koja je na traci $A = \{(s, t) : a \leqslant s \leqslant b, \ - < t < +\infty\}$ neprekidna i tu ima parcijalni izvod G'_t koji zadovoljava

$$0 < m \leqslant G'_t(s, t) \leqslant M.$$

1° Neka $x(s) \in C[a, b]$. Pokazati da je sa

$$y(s) = x(s) - \frac{2}{m+M} G(s, x(s)), \quad s \in [a, b],$$

definisana kontrakcija $y = f(x)$ prostora $C[a, b]$ u samog sebe.

2° Primenjujući Banachov stav, pokazati da postoji jedna jedina neprekidna funkcija $x^*(s)$ na $[a, b]$ tako da je $G(s, x^*(s)) = 0$ (*Stav o egzistenciji implicitne funkcije*).

6.i. Neprekidnost

Neka su X i Y dva metrička prostora sa rastojanjem d_X odnosno d_Y. Kada ne postoji bojazan od konfuzije, najčešće ćemo oba ova rastojanja označavati jednostavno sa d. Neka f preslikava X u Y.

Definicija 1. Funkcija f je *neprekidna u tački a*, ako svakom $\varepsilon > 0$ odgovara broj $\delta > 0$ tako da

$$(1) \qquad d(x, a) < \delta \quad \Rightarrow \quad d[f(x), f(a)] < \varepsilon.$$

Kako iz (1) sledi

$f(U) \subset V \Leftarrow$

$$f(K]a, \delta[) \subset K]f(a), \varepsilon[,$$

$K]a, \delta[\subset f^{-1}(K]f($

a time i

$$f^{-1}(K]f(a), \varepsilon[) \supset f^{-1}(f(K]a, \delta[)) \supset K]a, \delta[,$$

$f^{-1}(V)$

to su definiciji 1 ekvivalentne i sledeće dve:

Definicija 1'. Funkcija f je neprekidna u tački a, ako svakoj okolini V tačke $f(a)$ u Y, odgovara okolina U tačke a u X takva da je $f(U) \subset V$.

Definicija 1''. Funkcija f je neprekidna u tački a, ako je recipročna slika $f^{-1}(V)$ svake okoline V tačke $f(a)$ u Y jedna okolina tačke a u X.

Definicija 2. Funkcija f je *neprekidna na skupu A* ako je neprekidna u svakoj njegovoj tački.

Između neprekidnih funkcija i otvorenih skupova postoji uska veza, kao što to tvrdi

Stav 1. *Neka f preslikava prostor X u Y. Preslikavanje f je neprekidno na X tada i samo tada ako je recipročna slika $f^{-1}(G)$ svakog otvorenog skupa G iz Y jedan otvoren skup u X.*

Dokaz. Neka je, prvo, f neprekidna na X i neka je G proizvoljan otvoren skup u Y. Kako je G okolina svake svoje tačke (stav 2.3), to je, na osnovu definicije 1'', i skup $f^{-1}(G)$ okolina svake svoje tačke, dakle otvoren skup u X.

Obrnuto, pretpostavimo da je $f^{-1}(G)$ otvoren skup u X za svaki otvoren skup G iz Y. Neka je x proizvoljna tačka iz X. Za svaku okolinu V tačke $f(x)$ recipročna slika $f^{-1}(\mathring{V})$ je, na osnovu pretpostavke, otvoren skup u X i sadrži x; tim pre je onda $f^{-1}(V)$ $(\supset f^{-1}(\mathring{V}))$ okolina tačke x. Dakle, recipročna slika svake okoline tačke $f(x)$ je jedna okolina tačke x; znači, f je neprekidno preslikavanje prostora X u prostor Y.

S obzirom na relaciju

$$f^{-1}(\mathbf{C}\,G) = \mathbf{C}\,f^{-1}(G),$$

stav 1 ima i dualni oblik:

Stav 1'. *Preslikavanje f je neprekidno na X tada i samo tada ako je recipročna slika svakog zatvorenog skupa iz Y jedan zatvoren skup u X.*

Stav 2. *Neprekidna slika koneksnog skupa je koneksan skup.*

Odavde i iz primera 2.14 specijalno sledi: Realna neprekidna funkcija koja na koneksnom skupu uzima vrednosti a i b, uzima na ovome i sve vrednosti koje leže između a i b (Bolzano).

Dokaz stava 2. Neka je f neprekidno preslikavanje prostora X u prostor Y. Pokazaćemo da ako $f(X)$ nije koneksan skup to onda nije ni prostor X. Zaista, ako $A=f(X)$ nije koneksan, postoji deo B od A, različit od praznog skupa i od A i takav da je istovremeno otvoren i zatvoren skup u odnosu na A. No tada je $f^{-1}(B)$ deo od X, različit i od praznog skupa i od X, a istovremeno otvoren i zatvoren skup u X. Znači, X nije koneksan prostor (definicija 2.14').

$f: A \to Y,\ a \in \bar{A}$

Definicija 3. Neka f preslikava skup $A \subset X$ u prostor Y i neka je a adherentna tačka skupa A. Tačka $b \in Y$ je *granična vrednost* ili *limes* od $f(x)$ kada x kroz skup A teži ka a, ako

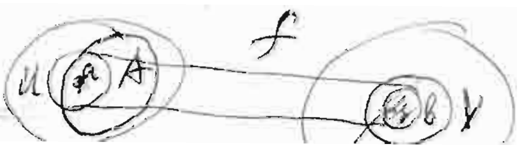
svakom $\varepsilon>0$ odgovara broj $\delta>0$ tako da

$$x \in A,\ d(a,x)<\delta \quad \Rightarrow \quad d[b, f(x)]<\varepsilon,$$

ili, ekvivalentno,

svakoj okolini V tačke b u Y odgovara okolina U tačke a u X, takva da $f(U \cap A) \subset V$.

~~$f(U\cap(A-\{a\}))\subset V$~~



Simbolički pišemo

$$f(x) \to b \text{ kada } A \ni x \to a$$

ili

$$\lim_{A \ni x \to a} f(x) = b.$$

Specijalno, ako postoji okolina tačke a koja, izuzimajući eventualno samu tačku a, čitava leži u A, tada eksplicitno navođenje skupa A postaje bespredmetno, pa jednostavno govorimo o graničnoj vrednosti u tački a i pišemo $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Jasno je da ako f ima graničnu vrednost kada $x \to a$ kroz skup A, da će je ona imati i kada $x \to a$ kroz skup $B \subset A$. To ne mora da bude tačno ako $B \supset A$. Na primer, ako je $X = R^2$ i $Y = R$, funkcija

$$f(x) = \frac{\xi_1 \xi_2}{\xi_1^2 + \xi_2^2}, \qquad x = (\xi_1, \xi_2),$$

ima graničnu vrednost kada $x \to (0, 0)$ duž pozitivnog dela ξ_1-ose, ali ne i kada se kreće kroz poluravan $\xi_1 > 0$.

Primećujemo da egzistencija granične vrednosti u nekoj tački ne zahteva da je funkcija u njoj i definisana. Ako je to ipak slučaj i

$$\lim_{A \ni x \to a} f(x) = f(a),$$

kažemo da je funkcija f *kroz skup A neprekidna* u a; u protivnom ona *kroz skup A ima prekid* u a. (Ekvivalentan način izražavanja bio bi: restrikcija funkcije f na A je neprekidna odnosno ima prekid u tački a). Korišćenje termina „neprekidan" i u ovom slučaju lako je opravdati: Naime, ako postoji okolina tačke a koja čitava leži u A, tada se u tački a „neprekidnost kroz skup A" i neprekidnost u smislu definicije 1 poklapaju.

$R \to Y$ Specijalno, ako f preslikava R u Y i za A uzmemo skup $\{x : a < x < a + \delta\}$, gde je δ proizvoljan pozitivan broj, graničnu vrednost od f kada $x \to a$ prolazeći kroz skup A, nazivamo *desna granična vrednost* od f u tački a i označavamo je sa $f(a+0)$. Simetrično značenje ima *leva granična vrednost* $f(a-0)$. Jasno je da u ovom specijalnom slučaju f ima graničnu vrednost u tački a tačno tada kada je $f(a-0) = f(a+0)$. U slučaju kada je $f(a-0) \neq f(a+0)$, kažemo da f ima *prekid prve vrste* u tački a. Ako bar jedna od graničnih vrednosti $f(a-0)$ i $f(a+0)$ ne postoji, kažemo da f ima *prekid druge vrste* u tački a.

Definicija 4. Neka je f definisana na $A \subset X$ i neka njene vrednosti leže u Y. Funkcija f je *uniformno neprekidna* na A, ako svakom $\varepsilon > 0$ odgovara broj $\delta > 0$ takav da za svaki par tačaka x', x'' iz A važi:

$$d(x', x'') < \delta \quad \Rightarrow \quad d[f(x'), f(x'')] < \varepsilon.$$

Ako je f neprekidna na skupu A, ona na njemu ne mora da bude i uniformno neprekidna. Na primer, $1/x$ je neprekidna na $]0, 1[$, ali tu nije uniformno neprekidna.

Neprekidnost na skupu je osobina *lokalne* prirode, jer je definisana neprekidnošću funkcije u svakoj tački skupa ponaosob. Tome nasuprot, uniformna neprekidnost na skupu je osobina *globalne* prirode, tj. vezana za skup kao celinu. Praktično to znači da kod obične neprekidnosti na skupu, kolekcija pozitivnih brojeva $\{\delta\}$ koji za dato $\varepsilon>0$ odgovaraju raznim tačkama skupa ne mora da ima *pozitivan* infimum, dok to ulazi implicitno u definiciju uniformne neprekidnosti na skupu.

6.ii. Kompaktni i relativno kompaktni skupovi

Na realnoj pravoj svaki ograničen beskonačan skup ima bar jednu tačku nagomilavanja (stav 2.15), odnosno svaki ograničen niz ima bar jednu adherentnu vrednost (stav 4.12). Tu činjenicu iskazujemo i ovako: Na realnoj pravoj ograničeni beskonačni skupovi odnosno nizovi imaju Bolzano-Weierstrassovu osobinu. To više nije tačno u opštim metričkim prostorima. Na primer, u l_p skup $\{e_1, e_2, \ldots\}$ je ograničen — leži na jediničnoj sferi — a nema nijednu tačku nagomilavanja, jer je $d(e_m, e_n)=2^{1/p}$ za $m\neq n$. Zato onim metričkim prostorima koji imaju Bolzano-Weierstrassovu osobinu dajemo posebno ime.

Definicija 5. Metrički prostor X je *kompaktan* ako

1° svaki njegov beskonačni deo ima bar jednu tačku nagomilavanja, ili

2° svaki niz u njemu ima bar jednu adherentnu vrednost, tj. sadrži bar jedan konvergentan delimični niz.

Lako je videti da su ove dve definicije ekvivalentne:

1° ⇒ 2°. Zaista, ako je (x_n) proizvoljan niz u X, odgovarajući skup njegovih vrednosti $\{x_n\}$ je ili beskonačan ili se u nizu (x_n) jedan njegov član — označimo ga sa x — beskonačno mnogo puta ponavlja. U prvom slučaju beskonačni skup $\{x_n\}$ ima, po pretpostavci, bar jednu tačku nagomilavanja u X i ova je adherentna vrednost niza (x_n) (inkluzija 4(3)). U drugom slučaju, tačka x je adherentna vrednost niza.

2° ⇒ 1°. Neka je A jedan beskonačni podskup od X i izaberimo u A jedan niz (x_n) međusobno različitih tačaka. Ovaj ima, prema pretpostavci, bar jednu adherentnu vrednost u X i ova je, jer se članovi niza međusobno razlikuju, tačka nagomilavanja skupa A.

Definicija 6. Skup $A\subset X$ je *kompaktan* ako je, posmatran sam za sebe kao prostor, jedan kompaktan prostor.

Definicija 7. Skup $A\subset X$ je *relativno kompaktan* ako je njegova adherencija kompaktan skup.

Lako je videti da je neki skup relativno kompaktan ako i samo ako ima osobinu 1° ili 2° definicije 5; skup će biti kompaktan ako 1° odnosno 2° dopunimo zahtevom da tačka nagomilavanja odnosno adherentna vrednost *pripadaju* skupu. Kada je reč o čitavom prostoru X, pojam kompaktan i pojam relativno kompaktan se podudaraju.

Iz definicija 5, 6 i 7 neposredno sledi da je svaki deo kompaktnog skupa (ili prostora) jedan relativno kompaktan skup.

S obzirom da su zatvoreni skupovi okarakterisani sa $\bar{A}=A$ (stav 2.6), to je relativno kompaktan skup kompaktan tada i samo tada ako je zatvoren.

Realna prava nije kompaktan prostor, niti je otvoren skup kompaktan skup u R. Stav 2.15 možemo sada i ovako iskazati: Ograničeni skupovi u R su relativno kompaktni. Prema tome, važi i: Ograničeni i zatvoreni skupovi u R su kompaktni.

$\boxed{\textbf{Stav 3}}$ *Svaki kompaktan metrički prostor je kompletan.*

Obrnuto nije tačno, kao što to pokazuje primer prostora R.

Dokaz stava 3. Neka je (x_n) proizvoljan Cauchyev niz u X. Zbog kompaktnosti prostora X postoji delimični niz (x_{n_k}) tako da $x_{n_k} \to x$ kada $k \to \infty$. No tada je za svako $\varepsilon > 0$

$$d(x_n, x) \leqslant d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < 2\varepsilon$$

ako samo n i n_k izaberemo dovoljno veliko, što znači da Cauchyev niz (x_n) konvergira ka x. Prostor X je, dakle, kompletan.

Primer skupa $\{e_n\}$ u l_p pokazuje da ograničenost ne obezbeđuje relativnu kompaktnost skupa u opštem metričkom prostoru. Druga jedna osobina — totalna ograničenost — je merodavna za to.

Definicija 8. Kolekcija tačaka M_ε je *ε-mreža* skupa $A \subset X$ ako kolekcija otvorenih kugli sa centrima u tačkama iz M_ε i poluprečnika ε pokriva skup A, tj. ako je

$$K]M_\varepsilon, \varepsilon[= \bigcup_{y \in M_\varepsilon} K]y, \varepsilon[\supset A.$$

Definicija 9. Skup $A \subset X$ je *totalno ograničen* ako za svako $\varepsilon > 0$ ima *konačnu* ε-mrežu.

Svaki totalno ograničen skup A je i ograničen. Zaista, ako je $d(A)$ prečnik skupa A, tada je

$$d(A) \leqslant d(M_\varepsilon) + 2\varepsilon < +\infty,$$

jer je $d(M_\varepsilon)$ konačan broj s obzirom da M_ε sadrži samo konačan broj tačaka. Obrnuto nije tačno, kao što to pokazuje primer skupa $\{e_n\}$ u prostoru l_p.

U R^k ograničenost i totalna ograničenost su ekvivalentni pojmovi. Zaista, ako je u R^k skup A ograničen, on leži u nekoj kocki B. Deleći ovu na kocke čija je ivica $< \varepsilon/\sqrt{k}$, temena ovih poslednjih obrazovaće jednu konačnu ε-mrežu u odnosu na B, pa time i u odnosu na A.

Primer 1. U l_2 je totalno ograničen skup A čije tačke $x = (\xi_\nu)$ zadovoljavaju $|\xi_\nu| \leqslant 1/2^\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$. Zaista, neka je $\varepsilon > 0$ i izaberimo prirodni broj N tako da je $1/2^N < \varepsilon/2$. Svakoj tački x iz A koordiniraćemo tačku $y = (\xi_1, \ldots, \xi_N, 0, 0, \ldots)$. Tada je

$\{\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_N, \xi_{N+1} \ldots\} = X$

$$d(x, y) = \left\{ \sum_{\nu=N+1}^{\infty} |\xi_\nu|^2 \right\}^{1/2} \leqslant \left\{ \sum_{\nu=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^{2\nu}} \right\}^{1/2} < \frac{\varepsilon}{2},$$

tj. skup $B = \{y\}$ je jedna $\varepsilon/2$-mreža u odnosu na A. No, kako je B ograničen skup u R^N, a tu se totalna ograničenost poklapa sa ograničenošću, postojaće konačna $\varepsilon/2$-mreža u odnosu na B. Ova je onda i konačna ε-mreža u odnosu na skup A, tj. A je totalno ograničen u l_2.

Stav 4. *U kompletnom metričkom prostoru X, skup $A \subset X$ je relativno kompaktan ako i samo ako je totalno ograničen.*

Specijalno: U R^k skup A je relativno kompaktan ako i samo ako je ograničen.

Dokaz stava 4. Pretpostavimo, prvo, da je skup A totalno ograničen. Pokazaćemo da se tada iz svakog niza (x_n) u A može izdvojiti konvergentan delimični niz. U tom cilju konstruisaćemo za svako $k=1, 2, \ldots$ jednu konačnu $1/k$-mrežu u odnosu na A; označimo sa

$$y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \ldots, y_{m_k}^{(k)}$$

tačke k-te mreže.

Kako unija kugli poluprečnika 1 opisanih oko tačaka prve mreže pokriva čitav skup A, to među ovim kuglama postoji bar jedna (jer ih ima samo konačno mnogo) koja sadrži jedan delimični niz niza (x_n) — označimo ga sa $x_n^{(1)}$. Slično, postojaće bar jedna kugla poluprečnika 1/2 opisana oko neke tačke druge mreže koja sadrži jedan delimični niz niza $x_n^{(1)}$—označimo ga sa $x_n^{(2)}$. Nastavljajući ovaj postupak, dobićemo niz delimičnih nizova niza (x_n):

$$\begin{array}{l} x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, \ldots \\ x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, \ldots \\ x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)}, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

od kojih je svaki sledeći delimični niz prethodnog, a članovi k-tog po redu zadovoljavaju

$$d(x_m^{(k)}, x_n^{(k)}) < 2/k \quad \forall \quad m \text{ i } n,$$

jer svi leže u istoj kugli k-te mreže. Tada je i dijagonalni niz ove tablice (dijagonalni postupak)

$$x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, x_3^{(3)}, \ldots$$

jedan delimični niz od (x_n), a sem toga zadovoljava

$$d(x_m^{(m)}, x_n^{(n)}) < 2/n \quad \text{za} \quad m > n,$$

jer je, zbog $m > n$, $x_m^{(m)}$ jedan od članova niza $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots$

$(x_n^{(n)})$ je, dakle, Cauchyev niz u X, a kako je X kompletan prostor, to $(x_n^{(n)})$ konvergira nekoj tački x iz X. Time je dokazana jedna polovina stava.

Obrnuto, da bismo pokazali da iz relativne kompaktnosti skupa A sledi njegova totalna ograničenost, dokazaćemo da ako skup A *nije* totalno ograničen da on tada *nije* relativno kompaktan. Pretpostavimo, dakle, da za neko $\varepsilon > 0$ ne postoji konačna ε-mreža u odnosu na skup A. Ako je x_1 proizvoljna tačka iz A, postoji tada tačka x_2 u A takva da je $d(x_2, x_1) \geqslant \varepsilon$ (jer inače bi tačka x_1 sama za sebe obrazovala jednu ε-mrežu u odnosu na skup A). Slično sledi da zatim postoji tačaka x_3 u A takva da je $d(x_3, x_1) \geqslant \varepsilon$ i $d(x_3, x_2) \geqslant \varepsilon$, jer inače bi x_1 i x_2 zajedno obrazovali jednu ε-mrežu u odnosu na skup A. Nastavljajući ovako konstruisaćemo niz tačaka (x_n) u skupu A, čiji članovi zadovoljavaju uslov $d(x_m, x_n) \geqslant \varepsilon$ za $m \neq n$. Iz ovog niza se, očigledno, ne može izdvojiti konvergentan delimični niz. Dakle, skup A nije relativno kompaktan, čime smo dokazali i drugu polovinu stava.

S obzirom da se, kada je reč o čitavom prostoru, pojam kompaktnosti i relativne kompaktnosti poklapaju, to iz stava 4 sledi da je metrički prostor X kompaktan ako je kompletan i totalno ograničen. Međutim važi i obrnuto. Naime, na osnovu stava 3 svaki kompaktan prostor je kompletan, a da kompaktnost prostora povlači njegovu totalnu ograničenost može se pokazati kao kod dokaza odgovarajućeg dela stava 4. Važi, dakle,

Stav 5. *Potreban i dovoljan uslov da je metrički prostor kompaktan jeste da je istovremeno kompletan i totalno ograničen.*

Stav 6. *Svaki kompaktan prostor je separabilan.*

Dokaz. Kako je prostor X kompaktan, a time i totalno ograničen, postoji u njemu za svako $k=1, 2, \ldots$ konačna $1/k$-mreža. Ako sa

$$y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \ldots y_{n_k}^{(k)} \tag{2}$$

označimo tačke k-te mreže, svakom $x \in X$ odgovaraće tačka $y_{m_k}^{(k)}$ $(1 \leqslant m_k \leqslant n_k)$ tako da je

$$d(x, y_{m_k}^{(k)}) < 1/k. \tag{3}$$

Unija svih mreža (2) je prebrojiva, a na osnovu (3) ona je svuda gusta u X.

U separabilnom prostoru postoji prebrojiv svuda gust skup tačaka kojima se bilo koji element prostora može proizvoljno dobro aproksimirati. Na osnovu stava 6 to važi i u svakom kompaktnom prostoru. Međutim postoji bitna razlika u tome kako je ta aproksimacija ostvarena u kompaktnom prostoru. Naime, u ovom je jedan prebrojiv svuda gust skup unija mreža $M_{1/k}$ $(k=1,2,\ldots)$, pa je moguće ostvariti proizvoljno dobru aproksimaciju *svih* tačaka prostora pomoću *konačno* mnogo tačaka, naime pomoću tačaka jedne jedine mreže $M_{1/k}$ birajući k dovoljno veliko.

Stav 7 (Heine-Borel). *Metrički prostor X je kompaktan tada i samo tada ako ima Heine-Borelovu osobinu, tj. ako se iz svakog otvorenog pokrivanja $\{G_i\}_{i \in I}$ prostora X može izdvojiti jedno konačno pokrivanje.*

Dokaz. Neka prostor X ima Heine-Borelovu osobinu i neka je A jedan njegov beskonačni deo. Pokazaćemo da pretpostavka da A nema nijednu tačku nagomilavanja dovodi do kontradikcije. Zaista, kada skup A ne bi imao nijednu tačku nagomilavanja, mogli bismo oko svake tačke $x \in X$ opisati otvorenu kuglu K_x, koja, izuzev možda x, ne bi sadržala nijednu drugu tačku iz A. Kolekcija $\{K_x\}_{x \in X}$ je tada jedno otvoreno pokrivanje prostora X, te se, na osnovu pretpostavke, iz ovog može izdvojiti jedno konačno pokrivanje. Međutim, to bi značilo da je skup A konačan, jer u svakoj kugli leži najviše jedna tačka iz A. Kontradikcija.

Obrnuto, pretpostavimo da je prostor X kompaktan i da je $\{G_i\}_{i \in I}$ jedno otvoreno pokrivanje prostora X. Na osnovu stava 6 i stava 3.2, postoji prebrojivo pokrivanje $G_{i_1}, G_{i_2}, \ldots$ prostora X. Pretpostavimo da se iz ovog prebrojivog pokrivanja ne može izdvojiti konačno pokrivanje, tj. da je skup

$$\mathrm{C}\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} G_{i_\nu}\right) \neq O \quad \text{za svako } n. \tag{4}$$

Znači, moguće je u njemu izabrati tačku x_n za svako n. Zbog kompaktnosti prostora postojaće u nizu (x_n) delimični niz (x_{n_k}) koji konvergira ka $x \in X$. Kako $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} G_{t_\nu} \supset X$, to $x \in G_{t_s}$ za neko s $(1 \leqslant s < \infty)$. Zbog $x_{n_k} \to x$ i zbog otvorenosti skupa G_{t_s}, članovi niza (x_{n_k}) za dovoljno velike indekse n_k leže u G_{t_s}. Kontradikcija, jer u G_{t_s}, po konstrukciji, ne leže oni članovi niza (x_n) za koje je $n \geqslant i_s$. Znači pretpostavka (4) nije održiva, tj. za neko N $\bigcup_{\nu=1}^{N} G_{t_\nu} \supset X$.

6.iii. Neprekidne funkcije na kompaktnim skupovima

Naredni stavovi ukazuju na povezanost pojma neprekidnosti i kompaktnosti.

Stav 8. *Ako je f neprekidna na kompaktnom skupu $K \subset X$, ona je na njemu uniformno neprekidna.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Kako je f neprekidna na K, to svakoj tački $t \in K$ odgovara otvorena kugla $K_t = K\,]t, \varrho_t[$, tako da je za svako $z \in K \cap K_t$

(5) $$d[f(z), f(t)] < \varepsilon/2.$$

Neka je $K_t^* = K \left] t, \frac{1}{2}\varrho_t \right[$. Familija $\{K_t^*\}_{t \in K}$ je jedno otvoreno pokrivanje skupa K. Na osnovu Heine-Borelovog stava iz njega se može izdvojiti jedno konačno pokrivanje. Označimo sa $t_1, t_2, \ldots, t_n$ centre kugli tog pokrivanja; tada

(6) $$K_{t_1}^* \cup K_{t_2}^* \cup \ldots \cup K_{t_n}^* \supset K.$$

Neka je

(7) $$\delta = \frac{1}{2} \min\{\varrho_{t_1}, \varrho_{t_2}, \ldots, \varrho_{t_n}\}.$$

Pokazaćemo da tada važi $(x, y \in K)$

$$d(x, y) < \delta \quad \Rightarrow \quad d[f(x), f(y)] < \varepsilon.$$

tj. da je f uniformno neprekidna na K. Zaista, na osnovu (6), postoji prirodni broj $m\,(1 \leqslant m \leqslant n)$ takav da $x \in K_{t_m}^* \subset K_{t_m}$. Zbog $d(x, y) < \delta$, $x \in K_{t_m}^*$ i vodeći računa o (7) je

$$d(y, t_m) \leqslant d(y, x) + d(x, t_m) < \delta + \frac{1}{2}\varrho_{t_m} \leqslant \varrho_{t_m},$$

tj. i $y \in K_{t_m}$. Na osnovu (5) je, dakle, za $d(x, y) < \delta$

$$d[f(x), f(y)] \leqslant d[f(x), f(t_m)] + d[f(t_m), f(y)] < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

jer x i $y \in K_{t_m}$. Time je stav dokazan.

Stav 9. *Neka f preslikava prostor X u prostor Y. Ako je f neprekidna funkcija na kompaktnom skupu $K \subset X$, tada je i $f(K)$ kompaktan skup u Y.*

Dokaz. Pokazaćemo da skup $f(K)$ ima Heine-Borelovu osobinu. Neka je $\{G_i\}_{i\in I}$ jedno otvoreno pokrivanje skupa $f(K)$. Na osnovu stava 1, kolekcija $\{f^{-1}(G_i)\}_{i\in I}$ je jedno otvoreno pokrivanje skupa K. No K je kompaktan skup, te postoji konačno pokrivanje $\{f^{-1}(G_{i_1}), f^{-1}(G_{i_2}), \dots, f^{-1}(G_{i_n})\}$, tj.

$$\bigcup_{\nu=1}^{n} f^{-1}(G_{i_\nu}) \supset K.$$

Kako je

$$f[f^{-1}(G_{i_\nu})] \subset G_{i_\nu},$$

to je

$$f(K) \subset f\left[\bigcup_{\nu=1}^{n} f^{-1}(G_{i_\nu})\right] = \bigcup_{\nu=1}^{n} f[f^{-1}(G_{i_\nu})] \subset \bigcup_{\nu=1}^{n} G_{i_\nu},$$

tj. $\{G_{i_\nu}\}_{\nu=1,2,\dots,n}$ je jedno konačno pokrivanje skupa $f(K)$, izdvojeno iz kolekcije $\{G_i\}_{i\in I}$. $f(K)$ je, dakle, kompaktan skup.

Koristeći iskaz stava 5, iz stava 9 neposredno sledi da je neprekidna funkcija na kompaktnom skupu tu i ograničena, tj. da je neprekidna slika kompaktnog skupa ograničen skup.

U specijalnom slučaju kada f preslikava X u skup realnih brojeva R jedna od posledica stava 9 je da neprekidna realna funkcija postiže svoj supremum i svoj infimum na kompaktnom skupu K, tj. da postoje tačke a i b u K tako da je

$$f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b) \quad \text{za svako} \quad x \in K.$$

Od interesa je primedba da bilo koja polovina ove dvostruke nejednačine ostaje na snazi i kada funkcija f nije neprekidna, već samo zadovoljava odgovarajući deo dvostruke nejednačine kojom se definiše neprekidnost. Preciznije:

$f: X \to R$

Definicija 10. Neka je f realna funkcija na X. f je *poluneprekidna s donje strane* u tački $x \in X$, ako svakom $\varepsilon > 0$ odgovara broj $\delta > 0$, tako da

$$d(x, y) < \delta \quad \Rightarrow \quad f(y) > f(x) - \varepsilon.$$

f je poluneprekidna s donje strane na skupu $A \subset X$, ako je takva u svakoj tački iz A.

Simetrično se definiše poluneprekidnost sa gornje strane.

Očigledno je funkcija neprekidna ako je poluneprekidna sa donje i sa gornje strane.

Stav 10. *Neka je f realna funkcija na X. Ako je f poluneprekidna s donje strane na kompaktnom skupu $K \subset X$, tada ona postiže svoj infimum na K, tj. postoji tačka a u K tako da je*

$$f(x) \geqslant f(a) \quad \textit{za svako} \quad x \in K.$$

Simetričan iskaz važi za poluneprekidnu funkciju s gornje strane u odnosu na njen supremum.

Dokaz stava 10. Prvo ćemo pokazati da je skup realnih brojeva $f(K)$ ograničen s donje strane, te da postoji $\inf_{x\in K} f(x)$. Naime, u suprotnom slučaju postojao bi u K niz tačaka (x_n) tako da je $f(x_n) < -n$ za svako $n = 1, 2, \dots$

Zbog kompaktnosti skupa K, postojao bi tada delimični niz (x_{n_k}) koji konvergira ka $x \in K$. No $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = -\infty$, a to je u kontradikciji sa poluneprekidnošću s donje strane funkcije f u tački x, jer bi za fiksirano $\varepsilon > 0$ i za dovoljno veliko k imali $f(x_{n_k}) < f(x) - \varepsilon$.

Neka je $l = \inf_{x \in K} f(x)$. Tada, prema definiciji infimuma, postoji niz tačaka (x_n) u K, tako da je $l \leqslant f(x_n) < l + 1/n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, pa time i $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$. Neka je (x_{n_k}) delimični niz od (x_n) koji konvergira ka $a \in K$ (na osnovu pretpostavljene kompaktnosti skupa K). Tada je i $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = l$, a zbog poluneprekidnosti s donje strane u tački x, $l \geqslant f(a)$. No kako je l infimum od f na K, to je $f(a) \geqslant l$, te zajedno sledi $f(a) = l$.

6.iv. Specijalni kriterijumi za relativnu kompaktnost

Stav 4 daje potrebne i dovoljne uslove za relativnu kompaktnost nekog skupa u kompletnom metričkom prostoru. Međutim, u konkretnim metričkim prostorima mogu se dati i specifični uslovi koji obezbeđuju relativnu kompaktnost nekog skupa.

U prostorima nizova ti uslovi se izražavaju preko kolekcije koordinata koje odgovaraju tačkama uočenog skupa. Ako tačka $x = (\xi_\nu)$ prolazi skup A iz prostora nizova, njena ν-ta koordinata ξ_ν je funkcija od $x \in A$ i zato ćemo je označavati sa $\xi_\nu(x)$.

Stav 11. *Potreban i dovoljan uslov da je skup $K \subset l_p$ relativno kompaktan jeste*

1° *da postoje pozitivni brojevi ϱ_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ takvi da je $|\xi_\nu(x)| \leqslant \varrho_\nu$ za svako $x \in K$;*

2° *da red $\sum_{\nu=1}^{\infty} |\xi_\nu(x)|^p$ konvergira uniformno po $x \in K$.*

Dokaz. Uslovi 1° i 2° su dovoljni. Zbog uniformne konvergencije reda u 2°, svakom $\varepsilon > 0$ odgovara prirodni broj k tako da je

$$\sum_{\nu=k+1}^{\infty} |\xi_\nu(x)|^p < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p \quad \text{za svako} \quad x \in K.$$

Svakoj tački $x = (\xi_\nu)$ iz K koordinirajmo tačku $z = (\xi_1, \ldots, \xi_k, 0, 0, \ldots)$; isto z odgovara, dakle, i različitim tačkama x. Tako dobivena kolekcija $A = \{z\}$ je jedna $\varepsilon/2$-mreža u odnosu na K, jer je

$$d(x, z) = \left\{ \sum_{\nu=k+1}^{\infty} |\xi_\nu(x)|^p \right\}^{1/p} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

No A je ograničen skup u konačno-dimenzionom potprostoru R_p^k od l_p, i tu se, slično kao u R^k, ograničenost poklapa sa totalnom ograničenošću. Postoji, dakle, konačna $\varepsilon/2$-mreža u odnosu na A, a ova je tada i konačna ε-mreža u odnosu na K, tj. K je relativno kompaktan skup u l_p na osnovu stava 4.

Uslov 1° je potreban. Kada bi za neko fiksirano $\nu_0\,(\nu_0=1,2,\dots)$ skup $\{\xi_{\nu_0}(x)\}_{x\in K}$ bio neograničen, postojao bi u K niz tačaka (x_n), tako da $\xi_{\nu_0}(x_n)$ divergira, recimo, ka $+\infty$. Pokazaćemo da se iz takvog niza (x_n) ne može izdvojiti konvergentan delimični niz (x_{n_k}), suprotno pretpostavci da je K relativno kompaktan skup. Naime, kako u l_p konvergencija po metrici povlači konvergenciju po koordinatama, iz konvergencije niza (x_{n_k}) sledila bi i konvergencija niza ν_0-tih koordinata $\xi_{\nu_0}(x_{n_k})$, što je nemoguće jer $\xi_{\nu_0}(x_n)\to+\infty$.

Uslov 2° je potreban. Kada red $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}|\xi_\nu(x)|^p$ ne bi konvergirao uniformno po $x\in K$, postojao bi pozitivan broj ε i niz tačaka (x_n) u K tako da je

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}|\xi_\nu(x_n)|^p\geqslant\varepsilon \quad \text{za svako} \quad n=1,2,\dots \tag{8}$$

Pokazaćemo da niz (x_n) ne sadrži nijedan konvergentan delimični niz (x_{n_k}). Zaista, kada bi $x_{n_k}\to x=(\xi_\nu)$, zbog $x\in l_p$ postojao bi prvo dovoljno veliki prirodan broj N tako da je

$$\sum_{\nu=N+1}^{\infty}|\xi_\nu|^p<\varepsilon/2^p, \tag{9}$$

a zatim i dovoljno veliki broj k_0 tako da je

$$d(x_{n_k},x)<\varepsilon^{1/p}/2 \quad \text{za} \quad k>k_0,$$

pa tim pre i

$$\sum_{\nu=n_k+1}^{\infty}|\xi_\nu(x_{n_k})-\xi_\nu|^p<\varepsilon/2^p \quad \text{za} \quad k>k_0. \tag{10}$$

Izaberimo k_0 još i tako veliko da je $n_{k_0}\geqslant N$. Tada iz (9) i (10) sledi

$$\left\{\sum_{\nu=n_k+1}^{\infty}|\xi_\nu(x_{n_k})|^p\right\}^{1/p}\leqslant\left\{\sum_{\nu=n_k+1}^{\infty}|\xi_\nu(x_{n_k})-\xi_\nu|^p\right\}^{1/p}+\left\{\sum_{\nu=n_k+1}^{\infty}|\xi_\nu|^p\right\}^{1/p}<\varepsilon^{1/p},$$

što je u kontradikciji sa (8).

Stav 12 (Arzelà-Ascoli). *Potreban i dovoljan uslov da je skup* $K\subset C[a,b]$ *relativno kompaktan jeste*

1° *da postoji pozitivan broj* ϱ *tako da je* $|x(t)|\leqslant\varrho$ *za svako* $t\in[a,b]$ *i za svako* $x\in K$;

2° *da svakom* $\varepsilon>0$ *odgovara broj* $\delta>0$ *takav da*

$$|t'-t''|<\delta \quad\Rightarrow\quad |x(t')-x(t'')|<\varepsilon \ \text{za svako}\ x\in K.$$

Za funkcije koje zadovoljavaju uslov 1° odnosno 2° kažemo da obrazuju skup *uniformno ograničenih* odnosno *podjednako neprekidnih* funkcija.

Dokaz. Pokazaćemo da pod navedenim uslovima postoji konačna 4ε-mreža u odnosu na K. Bez ograničenja možemo pretpostaviti da je broj ϱ koji figuriše u 1° prirodan broj. Ako je δ broj iz uslova 2°, tada, zbog kompaktnosti razmaka $[a,b]$, sledi da postoji konačna δ-mreža $\{t_1,t_2,\dots,t_n\}$

u odnosu na $[a, b]$. Izaberimo prirodni broj m tako da je $1/m<\varepsilon$ i podelimo razmak $[-\varrho, +\varrho]$ na $2\varrho m$ jednakih delova dužine $1/m$ tačkama

$$-\varrho=y_0<y_1<\ldots<y_{2\varrho m}=+\varrho.$$

Uočimo one agregate $(y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_n})$ brojeva $y_i\,(i=0, 1, \ldots, 2\varrho m)$ za koje postoji neka funkcija x u K takva da je

$$(11) \qquad |x(t_j)-y_{i_j}|<\varepsilon \quad \text{za} \quad j=1, 2, \ldots, n,$$

i svakom takvom agregatu koordinirajmo jednu određenu funkciju x^* iz K koja zadovoljava (11) (jer istom agregatu mogu odgovarati i više funkcija). Tako dobiveni podskup $A=\{x^*\}$ od K je konačan i obrazuje jednu 4ε-mrežu u odnosu na K. Zaista, ako je x proizvoljna tačka iz K, izaberimo agregat $(y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_n})$ tako da je

$$(12) \qquad |x(t_j)-y_{i_j}|<\varepsilon \quad \text{za} \quad j=1, 2, \ldots, n,$$

što je uvek moguće s obzirom na razmak u kome leže vrednosti funkcije $x(t)$ i na definiciju tačaka $y_i\,(i=0, 1, \ldots, 2\varrho m)$. Označimo sa x^* funkciju iz A koja odgovara tom agregatu. Neka je t proizvoljna tačka iz $[a, b]$ i označimo sa $t_j\,(1\leqslant j\leqslant n)$ onu tačku δ-mreže $\{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ za koju je $|t-t_j|<\delta$. Tada je

$$|x(t)-x^*(t)|\leqslant|x(t)-x(t_j)|+|x(t_j)-y_{i_j}|+|y_{i_j}-x^*(t_j)|+|x^*(t_j)-x^*(t)|<4\varepsilon.$$

Od ove četiri procene, prva i četvrta počivaju na pretpostavci 2°, a druga i treća na (12) odnosno (11). Prema tome, $d(x, x^*)<4\varepsilon$, tj. konačan skup A je jedna 4ε-mreža u odnosu na K. Skup K je, dakle, totalno ograničen, pa je na osnovu stava 4 relativno kompaktan.

Obrnuto, pokazaćemo sada da iz relativne kompaktnosti skupa K u $C[a, b]$ sledi uniformna ograničenost i podjednaka neprekidnost funkcija iz K. Naime, na osnovu stava 4, K je totalno ograničen, pa time i ograničen u smislu metrike u $C[a, b]$, što znači uniformnu ograničenost skupa funkcija iz K. Kao totalno ograničen skup, K ima konačnu ε-mrežu. Neka je $y_1, y_2, \ldots, y_n$ jedna $\varepsilon/3$-mreža u K. Za svaku funkciju x iz K postoji tada prirodni broj m $(1\leqslant m\leqslant n)$ takav da je $(t', t''\in[a, b])$

$$|x(t')-x(t'')|\leqslant|x(t')-y_m(t')|+|y_m(t')-y_m(t'')|+|y_m(t'')-x(t'')|$$

$$(13) \qquad <\frac{\varepsilon}{3}+|y_m(t')-y_m(t'')|+\frac{\varepsilon}{3} \quad \text{za svako } x\in K.$$

No kako je $[a, b]$ kompaktan skup u R, sve funkcije $y_1, y_2, \ldots, y_n$ su uniformno neprekidne na $[a, b]$, tj. postoji δ_ν tako da

$$|t'-t''|<\delta_\nu \quad \Rightarrow \quad |y_\nu(t')-y_\nu(t'')|<\varepsilon/3 \quad \forall\ \nu=1, 2, \ldots, n.$$

Stavimo

$$\delta=\min_{1\leqslant\nu\leqslant n}\{\delta_\nu\}.$$

Tada, svakako

$$|t'-t''|<\delta \quad \Rightarrow \quad |y_m(t')-y_m(t'')|<\varepsilon/3,$$

pa iz (13) sledi

$$|t'-t''|<\delta \quad \Rightarrow \quad |x(t')-x(t'')|<\varepsilon \quad \forall\ x\in K,$$

tj. K je skup podjednako neprekidnih funkcija.

6.v. Primena Arzelà-Ascolijevog stava na diferencijalne jednačine

U ovom odeljku tretiraćemo ponovo pitanje egzistencije rešenja diferencijalnog zadatka iz 5.ii, ali pod slabijim pretpostavkama. Razmatranje bitno počiva na Arzelà-Ascolijevom stavu, koji je odigrao veliku ulogu u klasičnoj analizi i u razvitku Topologije i Funkcionalne analize.

Neka je data diferencijalna jednačina

$$\frac{dx}{dt}=g(t,x) \tag{14}$$

sa početnim uslovom $x(t_0)=x_0$ i pretpostavimo da je $g(t,x)$ neprekidna realna funkcija na pravougaoniku $P=\{(t,x):|t-t_0|\leqslant a,\ |x-x_0|\leqslant b\}$, što znači da je na ovome i $|g(t,x)|\leqslant M$. Ako je

$$h=\min(a,b/M), \tag{15}$$

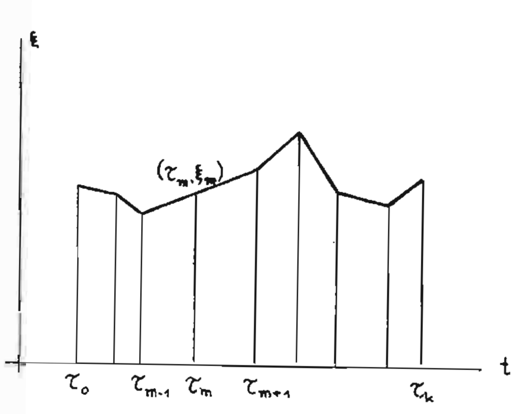
tada u razmaku $[t_0-h,\ t_0+h]=\Delta$ postoji bar jedno neprekidno rešenje diferencijalne jednačine (14) koje zadovoljava dati početni uslov (Peanoov stav).

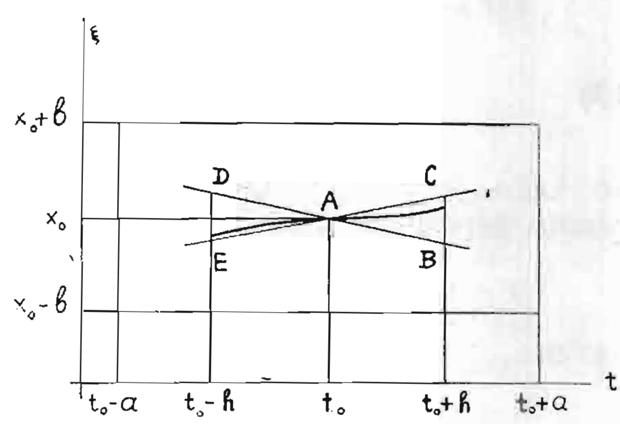
Primećujemo da može biti i više takvih rešenja. Na primer, kroz tačku $(0,0)$ prolaze dva rešenja $x=0$ i $x=t^3$ diferencijalne jednačine $x'=3x^{2/3}$.

Dokaz Peanoovog stava. Uočimo takvu podelu $\mathfrak{P}$ razmaka Δ, ostvarenu tačkama

$$t_0-h=\tau_0<\tau_1<\cdots<\tau_k=t_0+h,$$

kod koje se jedna podeona tačka, recimo $\tau_m\ (0\leqslant m\leqslant k)$, poklapa sa t_0. Kroz tačku (t_0,x_0) povući ćemo u razmaku $[\tau_m,\tau_{m+1}]$ pravu nagiba $g(\tau_m,x_0)$. Neka je $\xi_{m+1}\ (\xi_m=x_0)$ njena ordinata za $t=\tau_{m+1}$; kroz tačku (τ_{m+1},ξ_{m+1}) povući ćemo u razmaku $[\tau_{m+1},\tau_{m+2}]$ pravu nagiba $g(\tau_{m+1},\xi_{m+1})$. Produžujući na ovaj način dok ne dođemo do desnog kraja razmaka Δ, i sprovodeći sime-





tričnu konstrukciju u levoj polovini tog razmaka, dobićemo jednu poligonalnu liniju sa temenima u tačkama čije su apscise tačke podele $\mathfrak{P}$. Ova poligonalna linija je tzv. Eulerova funkcija $\varphi(t)$ asocirana datoj diferencijalnoj jednačini i uočenoj podeli $\mathfrak{P}$ razmaka Δ.

Povučemo li kroz tačku (t_0, x_0) prave sa nagibom $-M$ i M, zbog uslova (15), trougli ABC i ADE ležaće obavezno u pravougaoniku P. Kako je nagib pojedinih delova Eulerove poligonalne linije po apsolutnoj vrednosti $\leqslant M$, to za bilo koju podelu $\mathfrak{P}$ razmaka Δ, odgovarajuća Eulerova funkcija $\varphi(t)$ ne izlazi iz pomenutih trouglova. Uočimo skup svih mogućih podela razmaka Δ i skup $\mathfrak{E}$ odgovarajućih Eulerovih funkcija diferencijalne jednačine (14). Jasno je da su funkcije iz $\mathfrak{E}$ uniformno ograničene. No kako one zadovoljavaju

$$|\varphi(t')-\varphi(t'')| \leqslant M|t'-t''| \text{ za svako } \varphi \in \mathfrak{E},$$

one su i podjednako neprekidne. Na osnovu Arzelà-Ascolijevog stava skup $\mathfrak{E}$ je relativno kompaktan.

Uočimo sada jedan niz sve finijih podela $\mathfrak{P}_n$ razmaka Δ, tj. takvih da ako sa $\tau_0^{(n)}, \tau_1^{(n)}, \ldots, \tau_{k_n}^{(n)}$ označimo podeone tačke podele $\mathfrak{P}_n$,

$$\max_{1\leqslant\nu\leqslant k_n} |\tau_\nu^{(n)}-\tau_{\nu-1}^{(n)}| \to 0 \quad \text{kada } n\to\infty.$$

Kako je $\mathfrak{E}$ relativno komptaktan u $C[a, b]$, iz odgovarajućeg niza Eulerovih funkcija $\varphi_n(t)$ može se izdvojiti delimični niz koji uniformno konvergira (tj. po metrici prostora $C[a, b]$). Označimo ovaj delimični niz, da ne bismo isuviše komplikovali oznake, opet sa $\varphi_n(t)$ i stavimo

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \psi(t).$$

Kako sve funkcije $\varphi_n(t)$ prolaze kroz tačku (t_0, x_0), to je i $\psi(t_0) = x_0$. Pokazaćemo da je ψ rešenje diferencijalne jednačine (14).

Neka je t proizvoljna tačka iz $]t_0, t_0+h]$. Ona tada leži u nekom razmaku $]\tau_p^{(n)}, \tau_{p+1}^{(n)}]$ podele $\mathfrak{P}_n$ i p očigledno zavisi od n. Saberemo li jednačine

$$\varphi_n(\tau_{m+1}^{(n)}) = \varphi_n(\tau_m^{(n)}) + g[\tau_m^{(n)}, \varphi_n(\tau_m^{(n)})]\,(\tau_{m+1}^{(n)}-\tau_m^{(n)}),$$

$$\varphi_n(\tau_{m+2}^{(n)}) = \varphi_n(\tau_{m+1}^{(n)}) + g[\tau_{m+1}^{(n)}, \varphi_n(\tau_{m+1}^{(n)})]\,(\tau_{m+2}^{(n)}-\tau_{m+1}^{(n)}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi_n(\tau_p^{(n)}) = \varphi_n(\tau_{p-1}^{(n)}) + g[\tau_{p-1}^{(n)}, \varphi_n(\tau_{p-1}^{(n)})]\,(\tau_p^{(n)}-\tau_{p-1}^{(n)}),$$

$$\varphi_n(t) = \varphi_n(\tau_p^{(n)}) + g[\tau_p^{(n)}, \varphi_n(\tau_p^{(n)})]\,(t-\tau_p^{(n)}),$$

dobićemo

$$\varphi_n(t) = x_0 + \sum_{\nu=m}^{p-1} g[\tau_\nu^{(n)}, \varphi_n(\tau_\nu^{(n)})]\,(\tau_{\nu+1}^{(n)}-\tau_\nu^{(n)}) + g[\tau_p^{(n)}, \varphi_n(\tau_p^{(n)})]\,(t-\tau_p^{(n)}) = x_0 + s_n.$$

Zamenimo li u s_n funkciju φ_n sa ψ, dobićemo sumu

$$\sigma_n = \sum_{\nu=m}^{p-1} g[\tau_\nu^{(n)}, \psi(\tau_\nu^{(n)})]\,(\tau_{\nu+1}^{(n)}-\tau_\nu^{(n)}) + g[\tau_p^{(n)}, \psi(\tau_p^{(n)})]\,(t-\tau_p^{(n)})$$

koja kada $n\to\infty$ konvergira integralu $\int_{t_0}^{t} g[t, \psi(t)]\,dt$.

Zbog uniformne neprekidnosti funkcije $g(t, x)$ po promenljivoj x, svakom $\varepsilon>0$ odgovara broj $\delta>0$ (koji bez ograničenja možemo pretpostaviti $\leqslant\varepsilon$) takav da je

$$(16) \qquad |g(t, x')-g(t, x'')| < \varepsilon \text{ kad god je } |x'-x''| < \delta.$$

Izaberimo još prirodni broj N tako da je za $n>N$

$$|\varphi_n(t)-\psi(t)|<\delta \quad \forall\ t\in\Delta, \tag{17}$$

što je uvek moguće, jer $\varphi_n(t)\to\psi(t)$ uniformno u Δ. Za $n>N$ je, na osnovu (16) i (17),

$$|s_n-\sigma_n|<\varepsilon(t-t_0),$$

pa je

$$|\psi(t)-x_0-\sigma_n|\leqslant|\psi(t)-\varphi_n(t)|+|s_n-\sigma_n|<\delta+\varepsilon(t-t_0)<\varepsilon(1+t-t_0),$$

jer je $\delta\leqslant\varepsilon$. Pustimo li ovde da $n\to\infty$, dobićemo

$$\left|\psi(t)-x_0-\int_{t_0}^{t} g[t,\psi(t)]\,dt\right|\leqslant\varepsilon(1+t-t_0)\leqslant\varepsilon(1+h),$$

i kako ε možemo birati proizvoljno malo, odavde sledi

$$\psi(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} g[t,\psi(t)]\,dt,$$

tj. $\psi(t)$ je rešenje diferencijalne jednačine (14) i prolazi kroz tačku (t_0, x_0).

Vežbanja 6

1. Neka je X metrički prostor sa metrikom d i neka je x_0 fiksirana tačka u X. Pokazati da je $d(x, x_0)$ neprekidna funkcija na X.

2. Neka su f i g dva neprekidna preslikavanja prostora X u Y. Pokazati da je $\{x\in X: f(x)=g(x)\}$ zatvoren skup u X.

3. Neka f preslikava X u Y. Dokazati da je konstantno preslikavanje neprekidno. Na osnovu toga pokazati da se neprekidnim preslikavanjem svi otvoreni skupovi ne preslikavaju u otvorene skupove.

4. Neka su X i Y metrički prostori i neka je $A\subset X$. Ako su f i g neprekidna preslikavanja prostora X u Y i $f(x)=g(x)$ za $x\in A$, pokazati da je $f(x)=g(x)$ za svako $x\in\bar{A}$.

5. Koje od navedenih funkcija su uniformno neprekidne u razmaku $]0, 1[$: $1/(1-x)$, $1/(2-x)$, $\sin x$, $\sin 1/x$, $\sqrt{x}$, x^3? Koje od njih su uniformno neprekidne u $]0, +\infty[$?

6. Neka je (x_n) Cauchyev niz u X i neka $x_n\in A\subset X$. Ako je preslikavanje $f: X\to Y$ uniformno neprekidno na A, tada je $(f(x_n))$ Cauchyev niz u Y.

7. Neka realna funkcija $f(x)$, $x\in]-\infty, +\infty[$, ima jedino prekide prve vrste. Pokazati da skup $A_\varepsilon(\varepsilon>0)$ onih tačaka x u kojima je skok po apsolutnoj vrednosti $\geqslant\varepsilon$ nema nijednu tačku nagomilavanja. [Kada bi x_0 bila tačka nagomilavanja od A_ε, u svakoj, recimo desnoj, okolini tačke x_0 postojale bi tačke x_1 i x_2 takve da je $|f(x_1)-f(x_2)|>\varepsilon/2$; no tada ne bi mogao postojati $f(x_0+0)$.]

8. Ako skup A_ε označava skup iz vežbanja 7, pokazati da je skup $A=\bigcup_{\varepsilon>0} A_\varepsilon$ najviše prebrojiv. [U razmaku $[n, n+1]$ može biti najviše konačno mnogo tačaka iz A_ε; označimo ih sa $A_\varepsilon[n, n+1]$. Ako $\varepsilon_k\searrow 0$, u svakom od skupova $A_{\varepsilon_k}[n, n+1]$ $(k=1, 2, \ldots)$ ima konačno mnogo tačaka, dakle, njih najviše prebrojivo mnogo u $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{\varepsilon_k}[n, n+1]=A[n, n+1]$. Tvrđenje sledi iz $A=\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} A[n, n+1]$.]

9. Ako je uopšte ima, funkcija može imati samo jednu graničnu vrednost kada promenljiva kroz skup A teži tački a. [Definicija 3.]

10. Neka f preslikava X u Y. Potreban i dovoljan uslov da f ima graničnu vrednost kada x kroz skup $A \subset X$ teži tački a $(a \ni \bar{A})$ jeste da postoji $\lim_{n \to \infty} f(x_n)$ za svaki niz (x_n) takav da $A \ni x_n \to a$ $(n \to \infty)$.

11. U R_p^k je relativno kompaktan svaki ograničen skup.

12. Skup tačaka $A = \{x = (\xi_\nu) : |\xi_\nu| \leqslant 1/\nu, \ \nu = 1, 2, \ldots\}$ je kompaktan u l_2.

13. Zatvorena jedinična kugla u $C[0, 1]$ nije kompaktan skup.

14. Pokazati da u svakom uniformno ograničenom nizu realnih funkcija definisanih na metričkom prostoru X, postoji delimični niz koji konvergira u tačkama nekog unapred datog prebrojivog skupa $A \subset X$. [Dijagonalni postupak; vidi dokaz stava 4.]

15. Neka je X kompaktan metrički prostor i uočimo kolekciju $\{f\}$ neprekidnih realnih funkcija na X.

1° Pokazati da ova kolekcija snabdevena metrikom

$$d(f, g) = \max_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

obrazuje kompletan metrički prostor, koji obeležavamo sa $C(X)$.

2° Kolekcija K funkcija iz $C(X)$ je relativno kompaktan skup ako i samo ako je uniformno ograničena i podjednako neprekidna na X. [Vidi Arzelà-Ascolijev stav.]

16. Potreban i dovoljan uslov da je skup $K \subset s$ (primer 1.8) relativno kompaktan jeste da postoje pozitivni brojevi ϱ_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ takvi da je

$$|\xi_\nu(x)| \leqslant \varrho_\nu \quad \text{sa svako} \quad x \in K \ (\nu = 1, 2, \ldots)$$

[Vidi dokaz stava 11.]

7. Topološki prostor

Bogata struktura metričkog prostora zasnovana je isključivo na pojmu rastojanja. Međutim, detaljnija analiza složenih metričkih pojmova i stavova koji na njima počivaju, pokazuje da mnogi od njih ne koriste eksplicitno rastojanje već formalno počivaju na pojmu otvorenog skupa i osobinama kolekcije otvorenih skupova. To navodi na misao, nije li moguće u lancu izgrađivanja metričkog prostora: rastojanje — otvorena kugla — otvoren skup — složeni pojmovi, jednostavno preskočiti prve dve karike i odmah uvesti „otvorene skupove“. Naravno, to bi imalo smisla samo onda ako bi bilo moguće definisati pojam „otvorenog skupa“ i za prostore koji nisu metrički (i tako efektivno proširiti klasu prostora u kojima radimo), a da pri tome složeni pojmovi izvedeni iz tako definisanih „otvorenih skupova“ zadrže karakteristična svojstva koja su imali u metričkom prostoru.

Kako definisati „otvorene skupove“ u nekom amorfnom skupu ne koristeći metriku, ukazuju osobine 1° — 3° kolekcije otvorenih skupova u metričkom prostoru (stav 2.1).

Definicija 1. Neka je X neprazan skup i neka je $\mathfrak{G}$ jedna kolekcija delova od X (dakle, $\mathfrak{G} \subset \mathbf{P}X$) takva da

1° prazan skup O i X pripadaju $\mathfrak{G}$;

2° unija proizvoljno mnogo skupova iz $\mathfrak{G}$ pripada $\mathfrak{G}$;

3° presek konačno mnogo skupova iz $\mathfrak{G}$ pripada $\mathfrak{G}$.

Tada kažemo da kolekcija $\mathfrak{G}$ definiše u X jednu *topološku strukturu* ili *topologiju* τ. Skup X snabdeven topologijom τ nazivamo *topološki prostor*. Elementi skupa X su *tačke*, a elementi kolekcije $\mathfrak{G}$ *otvoreni skupovi* topološkog prostora (X, τ).

Primer 1. U svakom skupu X postoji tzv. *gruba topologija*, čiji su jedini otvoreni skupovi prazan skup i čitav prostor X, tj. $\mathfrak{G} = \{O, X\}$.

Primer 2. Ako u X za otvorene skupove uzmemo *sve* delove od X, tj. $\mathfrak{G} = \mathbf{P}X$, imamo tzv. *diskretnu topologiju* u X.

Primer 3. U metričkom prostoru X kolekcija otvorenih skupova, uvedena preko metrike, definiše jednu topološku strukturu (na osnovu stava 2.1). Za nju kažemo da je *asocirana* postojećoj metrici ili da je *inducirana* tom metrikom.

Za topološki prostor čiju je topologiju moguće inducirati nekom metrikom, kažemo da se može *metrizirati*. Uvođenje pojma topološkog prostora opravdava činjenica što se svaki topološki prostor ne može metrizirati. Na primer, skup X koji sadrži bar dve tačke i snabdeven je grubom topologijom, predstavlja topološki prostor koji se ne može metrizirati; drugim, rečima, ne može se u X uvesti metrika takva da su O i X jedini otvoreni skupovi u X. Predpostavimo, naime, suprotno i neka su x i y dve različite tačke iz X i neka je za uvedenu metriku $d(x, y) = d > 0$. Tada je, po definiciji otvorenih skupova u metričkom prostoru, kugla $K]x, d/2[$ otvoren skup. No on se razlikuje od O i od X, jer sadrži tačku x a ne sadrži tačku y. Kontradikcija.

Primer 4. U skupu X definisana je topologija na ovaj način: skup $G \subset X$ je otvoren ako je prazan ili ako je $\mathbf{C}G$ konačan skup.

Primer 5. Neka je X metrički prostor i neka je a jedna fiksirana tačka u X. Kolekcija $\mathfrak{G}$ čiji su elementi otvorene kugle sa centrom u tački a, prazan skup i čitav skup X, definiše u X jednu topologiju različitu od one inducirane metrikom.

Definicija 2. Ako kolekcije $\mathfrak{G}_1$ i $\mathfrak{G}_2$ definišu na X dve topološke strukture τ_1 i τ_2, kažemo da je topologija τ_1 *finija* (*grublja*) od topologije τ_2 ako $\mathfrak{G}_1 \supset \mathfrak{G}_2$ $(\mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{G}_2)$.

Topološka struktura inducirana metrikom u nekom metričkom prostoru X je finija od topološke strukture uvedene kao u primeru 5.

U familiji svih topologija koje se mogu definisati na nekom skupu X, relacija „finiji“ je jedna relacija poretka (ne totalnog). Diskretna topologija u X je najfinija, a gruba topologija je najgrublja topologija u toj familiji topologija.

Polazeći od kolekcije otvorenih skupova, u topološki prostor se uvode, doslovce kao u metrički prostor, svi oni složeni pojmovi koji su zasnovani isključivo na pojmu otvorenog skupa. Oni pojmovi, pak, koji eksplicitno počivaju na metrici kao što su to dijametar skupa, ograničenost, Cauchyev niz, kompletan prostor ili uniformna neprekidnost, nemaju neposrednog analogona u topološkom prostoru.

Tako se u topološkom prostoru zatvoreni skupovi definišu kao komplementi otvorenih (definicija 2.3). Neposredno se prenose i pojam okoline skupa i okoline tačke (definicija 2.4), unutrašnje tačke i unutrašnjosti skupa (definicija 2.5), adherentne tačke i adherencije (definicija 2.6), tačke međe (definicija 2.7), izolovane tačke (definicija 2.8), tačke nagomilavanja (definicija 2.9), svuda gustog i nigde gustog skupa (definicije 2.11 i 2.12), perfektnog skupa (definicija 2.10), skupova prve i druge kategorije (definicija 2.13), kao i koneksnog prostora (definicija 2.14). Analizom dokaza stavova 2.2—2.11 lako je uvideti da oni ostaju na snazi u topološkom prostoru, jer se u njima nigde eksplicitno ne koristi metrika, već isključivo osobine otvorenih skupova (stav 2.1 u metričkom prostoru odn. definicija 1 u topološkom prostoru).

Pojam separabilnosti i baze prostora doslovce se definiše u topološkom prostoru kao u metričkom (definicije 3.1 i 3.2). U topološkom prostoru, međutim, važi samo jedna polovina stava 3.1: *Topološki prostor prebrojive baze je separabilan.* Što se tiče Lindelöfovog stava (stav 3.2) on neizmenjen važi u topološkom prostoru.

U metričkim prostorima kolekcija otvorenih kugli obrazuje najjednostavniju bazu tih prostora. Međutim, u topološkom prostoru nema pojma kugle, te je u njemu važno znati kriterijum kada jedna kolekcija otvorenih skupova obrazuje bazu.

Stav 1. *Da bi kolekcija $\mathfrak{B}$ čiji su elementi delovi skupa X obrazovala bazu neke topologije u X, potrebno je i dovoljno da za svako*

$$B_1 \text{ i } B_2 \text{ iz } \mathfrak{B} \text{ i za svaku tačku } x \text{ iz } B_1 \cap B_2$$

postoji u $\mathfrak{B}$ skup B_3, takav da

$$x \in B_3 \quad \text{i} \quad B_3 \subset B_1 \cap B_2,$$

i da je unija svih skupova iz $\mathfrak{B}$ jednaka X.

Dokaz. Uslov je potreban. Zaista, ako je $\mathfrak{B}$ baza neke topologije u X, presek $B_1 \cap B_2$ skupova iz $\mathfrak{B}$ je otvoren skup, pa kao takav unija skupova iz $\mathfrak{B}$. Drugim rečima, za svako x iz $B_1 \cap B_2$, postoji B_3 u $\mathfrak{B}$ takvo da $x \in B_3$ i $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Uslov je dovoljan. Zaista, neka je $\mathfrak{B}$ kolekcija delova skupa X, koja zadovoljava uslove navedene u stavu. Označimo sa $\mathfrak{G}$ kolekciju čiji su elementi delovi od X koje dobijamo uzimajući sve moguće unije skupova iz $\mathfrak{B}$. Pokazaćemo da kolekcija $\mathfrak{G}$ ima osobine 1°—3° iz definicije 1, tj. da ona definiše jednu topologiju u X. Osobina 1° je zadovoljena, jer je, po pretpostavci, unija svih skupova iz $\mathfrak{B}$ jednaka X. Osobina 2° sledi na osnovu toga kako smo uveli kolekciju $\mathfrak{G}$. Najzad, da bismo videli da je zadovoljena i osobina 3°, primećujemo da ako $C_1 \in \mathfrak{G}$ i $C_2 \in \mathfrak{G}$, na osnovu definicije kolekcije $\mathfrak{G}$,

$$C_1 = \bigcup_{i \in I} B_i, \quad B_i \in \mathfrak{B} \quad \text{i} \quad C_2 = \bigcup_{j \in I} B_j^*, \quad B_j^* \in \mathfrak{B},$$

pa je

$$C_1 \cap C_2 = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (B_i \cap B_j^*) \in \mathfrak{G},$$

jer, kao što ćemo odmah pokazati, $B_i \cap B_j^* \in \mathfrak{G}$. Zaista, kako B_i i $B_j^* \in \mathfrak{B}$, to svakom $x \in B_i \cap B_j^*$ odgovara jedno $B_{ij}(x) \in \mathfrak{P}$ takvo da

$$x \in B_{ij}(x) \quad \text{i} \quad B_{ij}(x) \subset B_i \cap B_j^*.$$

Očigledno je, dakle,

$$B_i \cap B_j^* = \bigcup_{x \in B_i \cap B_j^*} B_{ij}(x),$$

tj.

$$B_i \cap B_j^* \in \mathfrak{G}.$$

Neka je A deo topološkog prostora X. Kolekcija skupova koji nastaju presecanjem otvorenih skupova iz X sa skupom A zadovoljava osobine definicije 1 (u 1° umesto X treba tada da stoji A), pa, prema tome, ona definiše u skupu A jednu topologiju — topologiju koju u A *inducira* topologija iz X.

Definicija 3. Ako je A deo topološkog prostora X, snabdeven topologijom koju u A inducira topologija iz X, kažemo da je A *topološki potprostor* prostora X.

Preseci otvorenih skupova iz X sa A su *otvoreni skupovi u odnosu na* A. Njihovi komplementi u odnosu na A su *zatvoreni skupovi u odnosu na* A. Ovi poslednji su očigledno preseci zatvorenih skupova iz X sa A. Jasno je da otvoren skup u odnosu na A ne mora da bude otvoren skup u odnosu na X; on će to biti samo ako je A otvoren skup u odnosu na X.

Primer 6. Neka je X topološki prostor i neka je A topološki potprostor od X. Kolekcija delova od X kojoj pripadaju kako otvoreni skupovi u X tako i oni koji su otvoreni u odnosu na A, predstavlja bazu jedne topologije u X koja nije grublja od one prvobitno date u X. Na primer: X je skup realnih brojeva sa uobičajenom topologijom i A je skup racionalnih brojeva.

Ako su X i Y dva topološka prostora, moguće je na različite načine definisati topologiju na skupu-proizvodu $X \times Y$. Ipak, najprirodnija topologija na $X \times Y$ je tzv. *topologija proizvoda* dva topološka prostora. Da ovu definišemo, primećujemo da kolekcija $\mathfrak{B}$, čiji su elementi oni delovi od $X \times Y$ koji su oblika $A \times B$, gde je A otvoren skup u X a B otvoren skup u Y predstavlja bazu jedne topologije u $X \times Y$. To sledi na osnovu stava 1, jer s jedne strane, zbog

$$(A \times B) \cap (A' \times B') = (A \cap A') \times (B \cap B')$$

presek dva skupa koji pripadaju $\mathfrak{B}$ i sam pripada $\mathfrak{B}$, dok, s druge strane, $X \times Y \in \mathfrak{B}$.

Topološki prostor koji dobijamo kada $X \times Y$ snabdemo topologijom čija je baza ovako definisana kolekcija $\mathfrak{B}$, zove se *topološki proizvod* topoloških prostora X i Y. Elemente kolekcije $\mathfrak{B}$ zovemo *elementarni* otvoreni skupovi topološkog proizvoda $X \times Y$.

Primer 7. Uobičajena topologija u Euklidovom prostoru R^2 poklapa se sa topologijom topološkog proizvoda $R \times R$.

Pojam topološkog proizvoda može se uopštiti na proizvoljnu familiju topoloških prostora.

Od tri definicije neprekidnosti koje smo dali u metričkom prostoru samo se definicije 6.1′ i 6.1″ mogu, bez daljeg preneti u topološki prostor.

Stavovi 6.1, 6.1′ i 6.2, kao i njihovi dokazi, ostaju neizmenjeni u topološkom prostoru.

Definicija 4. Dva topološka prostora X i Y su *topološki izomorfni* ili *homeomorfni*, ako između njih postoji biunivoka korespondencija f takva da je

1° direktna slika svakog otvorenog skupa iz X jedan otvoren skup u Y,

2° recipročna slika svakog otvorenog skupa iz Y jedan otvoren skup u X.

Stav 2. *Da bi biunivoko preslikavanje f topološkog prostora X na topološki prostor Y bilo jedan homeomorfizam, potrebno je i dovoljno da je f bikontinualno preslikavanje, tj. da su f i f^{-1} istovremeno neprekidne funkcije.*

Dokaz. Zaista, reći da su f i f^{-1} neprekidni, isto je što i reći da je recipročna slika svakog otvorenog skupa iz Y otvoren skup u X, i da je direktna slika svakog otvorenog skupa iz X otvoren skup u Y.

Primećujemo da biunivoko i neprekidno preslikavanje prostora X na prostor Y u opštem slučaju ne mora da bude bikontinualno, kao što to pokazuje

Primer 8. Neka je Y skup realnih brojeva sa uobičajenom topologijom, X skup realnih brojeva sa diskretnom topologijom i f identičko preslikavanje. $f: X \to Y$ je, očigledno, biunivoka korespondencija između X i Y. Recipročna slika svakog otvorenog skupa iz Y je taj isti skup u X, a kako je X snabdeven diskretnom topologijom, on je otvoren u X. Međutim, ako u X uočimo otvoren skup koji se svodi na jednu jedinu tačku (u X su svi skupovi otvoreni!), njegova je slika u Y ta ista tačka te nije otvoren skup u odnosu na topologiju u Y.

Pojam homeomorfizma ima značaja i u metričkim prostorima, jer u izvesnom smislu uopštava pojam izometrije (definicija 1.3). Naime, dva izometrična prostora su očigledno i homeomorfna u pogledu svojih metrikom induciranih topologija, ali obrnuto ne mora da bude slučaj.

Stav 3. *Neka je skup X snabdeven dvema različitim metrikama d_1 i d_2, i neka postoje pozitivni brojevi α i β takvi da je*

$$(1) \qquad 0<\alpha<\frac{d_1(x,y)}{d_2(x,y)}<\beta \quad za\ svako \quad x\neq y.$$

Tada je metrički prostor (X, d_1) homeomorfan metričkom prostoru (X, d_2).

Dokaz. Zbog (1), ma kako malo bilo $\varepsilon>0$, kugla $K]x, \varepsilon[$ prostora (X, d_1) sadrži kuglu $K]x, \varepsilon/\beta[$ prostora (X, d_2), i obrnuto, kugla $K]x, \varepsilon[$ prostora (X, d_2) sadrži kuglu $K]x, \alpha\varepsilon[$ prostora (X, d_1). Drugim rečima, svaki skup koji je otvoren u odnosu na prostor (X, d_1) otvoren je i u odnosu na prostor (X, d_2), i obrnuto. Identično preslikavanje prostora (X, d_1) na prostor (X, d_2) je, dakle, jedan homeomorfizam.

Primer 9. Svi metrički prostori R_p^k za različito $p\,(1\leqslant p\leqslant+\infty)$ su međusobno homeomorfni. Zaista, zbog

$$d_\infty(x,y)\leqslant d_p(x,y)\leqslant k^p\, d_\infty(x,y) \quad (1\leqslant p<+\infty),$$

svaki od prostora $R_p^k\,(1\leqslant p<+\infty)$ je homeomorfan prostoru R_∞^k, pa su zato prostori $R_p^k\,(1\leqslant p<+\infty)$ homeomorfni i međusobno.

Kompaktnost metričkog prostora okarakterisali smo na više načina — definicijom 6.5, stavom 6.5 i stavom 6.7. Karakterizacija data stavom 6.5 počiva bitno na metrici jer koristi pojam kompletnog prostora i totalnu ograničenost, te kao takva otpada u topološkom prostoru. Što se tiče karakterizacija datih definicijom 6.5 i stavom 6.7 one u opštem topološkom prostoru više nisu ekvivalentne. Ako želimo da i u topološkom prostoru osobina kompaktnosti zadrži bitne karakteristike koje je imala u metričkim prostorima, prednost treba dati karakterizaciji datoj stavom 7.

Definicija 4. Topološki prostor X je kompaktan ako se iz svakog otvorenog pokrivanja prostora X može izdvojiti jedno konačno pokrivanje.

Definicija 5. Topološki potprostor A topološkog prostora X je kompaktan, ako je, posmatran sam za sebe, jedan kompaktan topološki prostor.

Stav 4. *Svaki zatvoren skup u kompaktnom topološkom prostoru je kompaktan.*

Dokaz. Neka je X kompaktan prostor i neka je F jedan zatvoren skup u X. Pokazaćemo da se iz svakog otvorenog pokrivanja $\{G_i\}$ potprostora F može izdvojiti jedno konačno pokrivanje.

Kako su G_i otvoreni skupovi u odnosu na potprostor F, to je svaki od njih presek sa F jednog otporenog skupa G_i^* iz X, tj. $G_i = G_i^* \cap F$. Dodajući kolekciji $\{G_i^*\}$ još i skup $\mathbf{C}F$ (koji je otvoren u X kao komplement zatvorenog skupa), dobićemo jedno otvoreno pokrivanje prostora X. Iz ovog se, zbog kompaktnosti prostora X, može izdvojiti jedno konačno pokrivanje prostora X. Preseci sa F ovog konačnog pokrivanja obrazuju konačno pokrivanje potprostora F koje je izdvojeno iz pokrivanja $\{G_i\}$.

Stav 6.9 neposredno se prenosi u topološki prostor: *Neprekidna slika kompaktnog topološkog prostora je kompaktan prostor.*

Videli smo da pojedini topološki prostori mogu imati vrlo mali broj otvorenih skupova (na primer oni snabdeveni grubom topologijom), dok kod drugih (snabdevenih diskretnom topologijom) svaki skup je otvoren. Ovakvi topološki prostori nisu od interesa, jer oni, u izvesnom smislu, čine trivijalnom klasu neprekidnih funkcija koja leži u osnovi svih topoloških razmatranja. Tako je na prostoru X snabdevenom diskretnom topologijom svaka funkcija neprekidna, bez obzira kako je definisana topologija u prostoru-slici Y, jer je recipročna slika svakog otvorenog skupa iz Y automatski otvoren skup u X. Isto tako, neprekidna je svaka funkcija f koja preslikava X na Y, bez obzira na topologiju u X, ukoliko je prostor-slika Y snabdeven grubom topologijom.

Sa „količinom" otvorenih skupova u nekom topološkom prostoru usko je povezan i pojam konvergentnog niza tačaka (samo definiciju 4.1′ moguće je preneti u topološki prostor). Naime, u topološkom prostoru niz tačaka može konvergirati različitim graničnim vrednostima. Na primer, u prostoru snabdevenom grubom topologijom svaki niz konvergira bilo kojoj tački prostora.

Ovo nameće da se aksiomi 1°—3° definicije 1, koji karakterišu kolekciju otvorenih skupova u topološkom prostoru, dopune novim aksiomima koji bi „količinu" otvorenih skupova u nekom topološkom prostoru držali u razumnim granicama. Takvih aksioma, tzv. *aksioma razdvojenosti* (koji su u metričkom prostoru automatski ispunjeni — videti vežbanje 2.15), ima više; svakim od njih okarakterisan je jedan specijalan tip topoloških prostora.

Definicija 6. *Hausdorffov* je onaj topološki prostor u kome svake dve različite tačke imaju disjunktne okoline.

Regularan je onaj topološki prostor u kome svaka tačka i svaki zatvoreni skup koji ne sadrži tu tačku imaju disjunktne okoline.

Normalan je onaj topološki prostor u kome svaka dva disjunktna zatvorena skupa imaju disjunktne okoline.

U daljem izlaganju iznećemo samo neke osobine Hausdorffovih prostora.

Stav 5. *U Hausdorffovom prostoru niz tačaka može konvergirati samo jednoj graničnoj vrednosti.*

Dokaz. Neka su x i y granične vrednosti niza (x_n). Tada bi svaka okolina tačke x morala da ima zajedničkih tačaka sa svakom okolinom tačke y, jer u obe moraju da leže svi članovi niza sem njih konačno mnogo. Međutim, ovo je u kontradikciji sa definicijom Hausdorffovog prostora ako je $x \neq y$.

Stav 6. *U Hausdorffovom prostoru svaki skup koji se svodi na jednu jedinu tačku je zatvoren skup.*

Dokaz. Neka je $\{x\}$ jedan takav skup. Da je on zatvoren slediće ako pokažemo da je $A = \mathbf{C}\{x\}$ otvoren, tj. okolina svake svoje tačke. Zaista, ako $y \in A$, zbog $y \neq x$, postojaće, prema definiciji Hausdorffovog prostora, otvoren skup koji sadrži y i nema zajedničkih tačaka sa $\{x\}$, pa prema tome čitav leži u A.

Stav 7. *U Hausdorffovom prostoru svaki kompaktan skup je zatvoren.*

Primećujemo da je pretpostavka da je prostor Hausdorffov bitna. Naime, u prostoru sa grubom topologijom koji sadrži više od jedne tačke svaki skup sveden na jednu tačku je kompaktan ali nije zatvoren.

Dokaz stava 7. Neka je A kompaktan skup u Hausdorffovom prostoru X. Pokazaćemo da je $\mathbf{C}A$ otvoren skup. Neka je x proizvoljna fiksirana tačka iz $\mathbf{C}A$. Kako je X Hausdorffov prostor, svakom $y \in A$ (dakle, $y \neq x$) odgovaraju dva otvorena skupa $U(y)$ i $V(y)$, bez zajedničkih tačaka, takva da $x \in U(y)$ i $y \in V(y)$. Familija skupova $\{V(y)\}_{y \in A}$ je jedno otvoreno pokrivanje skupa A, a kako je A kompaktan skup, može se iz nje izdvojiti jedno konačno pokrivanje, recimo $\{V(y_i)\}_{i=1,2,\ldots,n}$. Tada su skupovi

$$U = \bigcap_{i=1}^{n} U(y_i) \quad \text{i} \quad V = \bigcup_{i=1}^{n} V(y_i)$$

$U \cap V = \emptyset$

otvoreni i disjunktni. (Nijedan od skupova $V(y_i)$ nema zajedničkih tačaka sa U, jer je $V(y_i) \cap U \subset V(y_i) \cap U(y_i) = O$). Skup U sadrži tačku x, a skup V sadrži A. Prema tome, $U \subset \mathbf{C}A$, tj. $\mathbf{C}A$ je okolina tačke x. No, ovo važi za svako $x \in \mathbf{C}A$; $\mathbf{C}A$ je, dakle, okolina svake svoje tačke, tj. otvoren skup.

Ako je X kompaktan Hausdorffov prostor, gornja konstrukcija može se primeniti i na svaki *zatvoreni* skup A u X (jer je on, u tom slučaju, na osnovu stava 4, i kompaktan), pa konstruisani otvoreni skupovi U i V pokazuju da je prostor X regularan (jer $U \supset \{x\}$, $V \supset A$ i $U \cap V = O$). Dakle, važi i

Stav 8. *Kompaktan Hausdorffov prostor je regularan.*

Stav 9. *Kompaktan Hausdorffov prostor je normalan.*

Dokaz. Neka su A i B dva disjunktna zatvorena skupa u kompaktnom Hausdorffovom prostoru X. Kako je ovaj, na osnovu stava 8, regularan prostor, to svakom fiksiranom x iz A možemo koordinirati dva otvorena skupa $U(x)$ i $V(x)$ takva da

$$x \in U(x),\ B \subset V(x) \text{ i } U(x) \cap V(x) = O.$$

Kolekcija skupova $\{U(x)\}_{x \in A}$ je jedno otvoreno pokrivanje skupa A, a kako je A kompaktan skup (na osnovu stava 4), može se iz nje izdvojiti jedno konačno pokrivanje, recimo $\{U(x_i)\}_{i=1,2,\dots,n}$. Skupovi

$$U = \bigcup_{i=1}^{n} U(x_i) \quad \text{i} \quad V = \bigcap_{i=1}^{n} V(x_i)$$

su otvoreni, disjunktni i $U \supset A$, $V \supset B$. Prostor X je, dakle normalan.

Primećujemo da iz stavova 4 i 7 sledi da u kompaktnom Hausdorffovom prostoru nema razlike između zatvorenih i kompaktnih skupova. U opštem Hausdorffovom prostoru analogiju između zatvorenih i kompaktnih skupova ilustruje

Stav 10. *U Hausdorffovom prostoru je unija konačno mnogo i presek proizvoljno mnogo kompaktnih skupova kompaktan skup.*

Dokaz. Za uniju dva kompaktna skupa to je trivijalno, jer je unija otvorenih pokrivanja dva skupa, otvoreno pokrivanje njihove unije. Što se tiče preseka $K = \bigcap K_i$ kompaktnih skupova K_i, ovi su na osnovu stava 7 zatvoreni, pa je i njihov presek zatvoren skup. No, K leži u kompaktnom prostoru K_i, te je, na osnovu stava 4, kompaktan jer je zatvoren.

Primer 8 pokazuje da neprekidno i biunivoko preslikavanje topološkog prostora na topološki prostor ne mora da bude bikontinualno. Međutim, važi

Stav 11. *Ako je f neprekidno i biunivoko preslikavanje kompaktnog Hausdorffovog prostora X na Hausdorffov prostor Y, tada je i f^{-1} neprekidno preslikavanje. Drugim rečima, pod navedenim uslovima je f homeomorfizam.*

Dokaz. Da bi utvrdili neprekidnost preslikavanja f^{-1}, dovoljno je pokazati da je, ako je A zatvoren skup u X, njegova recipročna slika preslikavanjem f^{-1}, tj. $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$, zatvoren skup u Y. Na osnovu stava 4, skup A je kompaktan, te je prema stavu 6.9 i $f(A)$ kompaktan, pa time i zatvoren prema stavu 7.

Već smo napomenuli da, za razliku od metričkih prostora, u opštim topološkim prostorima Heine-Borelova osobina nije ekvivalentna izkazima kojima je kompaktnost definisana u metričkom prostoru (definicija 6,5). Na kraju, primećujemo da se u Hausdorffovom prostoru koji ima najviše prebrojivu bazu, ove dve karakterizacije kompaktnosti opet poklapaju.

Vežbanja 7

1. Diskretan topološki prostor može se metrizirati. [Na primer, ako uvedemo metriku sa $d(x, y) = 0$ ili 1, prema tome da li je $x = y$ ili $x \neq y$.]

2. Kolekcija delova $\mathfrak{G}$ skupa X definiše jednu topologiju u X ako $G \in \mathfrak{G}$ kada je CG najviše prebrojiv skup i ako $O \in \mathfrak{G}$.

3. Neka je $(X, \leqslant)$ uređen skup. Kolekcija $\mathfrak{G}$ delova od X, definisana sa

$$G \in \mathfrak{G} \text{ ako postoji } A \subset X \text{ tako da je } G = \bigcup_{a \in A} \{x : x \geqslant a\},$$

određuje jednu topologiju u X, tzv. *desnu topologiju* u uređenom skupu X.

Levu topologiju u X dobijamo ako otvorene skupove G u X definišemo sa

$$G \in \mathfrak{G} \text{ ako postoji } B \subset X \text{ tako da je } G = \bigcup_{b \in B} \{x : x \leqslant b\}.$$

[Uočiti da je u ovom, kao i u narednom primeru, topologija uvedena preko poretka.]

4. Neka je $(X, \leqslant)$ totalno uređen skup i neka je $<$ striktan poredak koji odgovara relaciji poretka, tj. $x < y$ ako je $x \leqslant y$ i $x \neq y$ $(x, y \in X)$. Kolekcija $\mathfrak{G}$, koja se sastoji iz skupa X i svih mogućih unija skupova oblike $\{x \in X : a < x < b\}$ $(a, b \in X)$, definiše jednu topologiju u X. Specijalno, ako je X realna prava, ovako uvedena topologija poklapa se sa onom koju inducira uobičajena metrika na realnoj pravoj.

5. Neka je X topološki prostor i neka je $\mathfrak{G}$ kolekcija njegovih otvorenih skupova. Ako je $A \subset X$, kolekcija $\mathfrak{G}^*$ koju obrazuju skup X i oni elementi iz $\mathfrak{G}$ čiji je presek sa A prazan, definiše jednu topologiju u X.

6. Neka je X topološki prostor i neka je $\mathfrak{G}$ kolekcija njegovih otvorenih skupova. Ako je $A \subset X$, kolekcija $\mathfrak{G}^*$, koju obrazuju prazan skup i oni elementi iz $\mathfrak{G}$ koji sadrže A, definiše jednu topologiju u X.

7. Neka $\mathfrak{G}_1$ i $\mathfrak{G}_2$ definišu dve topološke strukture u X. Pokazati da tada i $\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2$ definiše jednu topologiju u X.

8. Neka je X topološki prostor i neka su Y i Z potprostori od X, takvi da je $Y \subset Z$. Pokazati da je topologija u Y koju inducira X ista kao i ona koju inducira Z.

9. Pokazati da je homeomorfizam jedna relacija ekvivalencije.

10. Neka f preslikava topološki prostor X u Y. f je neprekidna na X ako i samo ako je $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ za svaki skup $A \subset X$.

11. U topološkom prostoru X svakoj tački $x \in X$ odgovara *kolekcija okolina* $\mathfrak{V}_x$ tačke x. Pokazati da kolekcija $\mathfrak{V}_x$ ima ove osobine:

1° $V \in \mathfrak{V}_x$ i $U \supset V \;\Rightarrow\; U \in \mathfrak{V}_x$.

2° $V \in \mathfrak{V}_x$ i $V' \in \mathfrak{V}_x \;\Rightarrow\; V \cap V' \in \mathfrak{V}_x$.

3° $V \in \mathfrak{V}_x \;\Rightarrow\; x \in V$.

4° Ako $V \in \mathfrak{V}_x$, postoji $W \in \mathfrak{V}_x$ tako da je $V \in \mathfrak{V}_y$ za svako $y \in W$.

Osobine 1°—4° kolekcije okolina $\mathfrak{V}_x$ karakterišu topološku strukturu dotičnog prostora. Preciznije: Ako svakoj tački x skupa X odgovara neka kolekcija $\mathfrak{V}_x$ delova od X koja ima osobine 1°—4°, tada u X postoji jedna jedina topologija za koju je $\mathfrak{V}_x$ kolekcija okolina tačke x.

[12. Preformulisati stav 2.12 tako da ima smisla u topološkom prostoru. Iskoristiti definiciju 2.12.]

$R \to R$

8. Monotone funkcije i funkcije ograničene varijacije

Nasuprot najopštijim razmatranjima iz prethodnog odeljka, u ovom ćemo se baviti isključivo preslikavanjem realne prave odnosno njenih razmaka u realnu pravu. Specijalna struktura skupa realnih brojeva omogućuje uvođenje specifičnih pojmova kod realne funkcije realne promenljive.

Definicija 1. Za funkciju $f(x)$ koja je definisana i konačna na zatvorenom razmaku $[a,b]$ kažemo da *monotono raste* na $[a,b]$ ako za svaki par tačaka x,y iz $[a,b]$

$$x<y \quad\Rightarrow\quad f(x)\leqslant f(y).$$

$f(x)$ *stvarno* monotono raste ako je pod navedenim uslovima $f(x)<f(y)$.

Funkcija $f(x)$ je monotono rastuća na otvorenom razmaku $]a,b[$ ako je takva na svakom zatvorenom razmaku koji leži u $]a,b[$.

Na simetričan način se definiše funkcija koja (stvarno) monotono opada na $[a,b]$.

Klasu monotonih funkcija obrazuju monotono rastuće i monotono opadajuće funkcije. No kako, kada f monotono raste, $-f$ monotono opada, to je dovoljno ograničiti se na monotone rastuće funkcije, što ćemo ubuduće i činiti.

Stav 1. *Neka f monotono raste na $[a,b]$. Tada postoji $f(x+0)$ za svako $x\in[a,b[$ i postoji $f(x-0)$ za svako $x\in]a,b]$ i važi*

$$f(x+0)=\inf_{x<y\leqslant b} f(y),\qquad f(x-0)=\sup_{a\leqslant y<x} f(y),$$

Pri tome je

a y x

$$f(x-0)\leqslant f(x)\leqslant f(x+0)\quad \text{za } a<x<b$$

i

$$f(a)\leqslant f(a+0),\quad f(b-0)\leqslant f(b),$$

a za svaki par tačaka x,y i $a\leqslant x<y\leqslant b$ važi

$$f(x+0)\leqslant f(y-0).$$

Dokaz. Skup brojeva $\{f(y)\}_{a\leqslant y<x}$ je ograničen s desne strane brojem $f(x)$; on, dakle, ima supremum. Ako ovaj označimo sa A, očigledno je $A\leqslant f(x)$. Pokazaćemo da je $A=f(x-0)$. Zaista, na osnovu definicije supremuma, za svako $\varepsilon>0$ postoji jedno $\delta>0$ takvo da je

$$A-\varepsilon<f(x-\delta)\leqslant A.$$

Zbog monotonije funkcije f, tim pre je

$$A-\varepsilon<f(y)\leqslant A\quad \text{za}\quad y\in[x-\delta,x[,$$

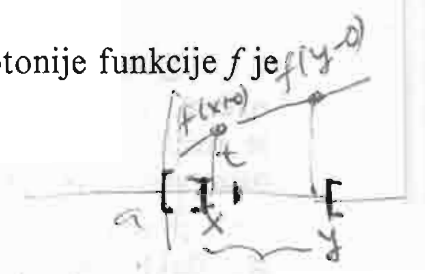
tj.

$$|f(y)-A|<\varepsilon\quad \text{za}\quad y\in[x-\delta,x[.$$

Prema tome, $f(x-0)=A$ i $f(x-0)\leqslant f(x)$.

Na sličan način se dokazuje tvrđenje o $f(x+0)$.

Ako je $a \leqslant x < y \leqslant b$, na osnovu dokazanog i zbog monotonije funkcije f je



$$f(y-0) = \sup_{a \leqslant t < y} f(t) = \sup_{x < t < y} f(t)$$

$$f(x+0) = \inf_{x < t \leqslant b} f(t) = \inf_{x < t < y} f(t),$$

odakle neposredno sledi $f(x+0) \leqslant f(y-0)$. $\inf \leq \sup$

Na osnovu stava 1, monotona funkcija može imati samo prekide prve vrste, ali ni ovih ne može biti proizvoljno mnogo. Naime, važi

Stav 2. *Monotona funkcija može imati samo prekide prve vrste, i to njih najviše prebrojivo mnogo.*

Dokaz. Neka je x tačka prekida od f. Koordinirajmo joj racionalni broj $r(x)$, tako da je

$$(y-0) \leq r(y) < f(y+0) \leq \quad f(x-0) < r(x) < f(x+0).$$

Ako je y neka druga tačka prekida od f, i recimo $y < x$, tada je na osnovu stava 1

$$f(y+0) \leqslant f(x-0),$$

pa se racionalni broj $r(y)$, koji odgovara prekidu y, razlikuje od $r(x)$. Znači, svakom prekidu funkcije f odgovara drugi racionalni broj, tj. postoji biunivoka korespondencija između skupa svih tačaka prekida od f i jednog dela skupa racionalnih brojeva. Tačka prekida, dakle, ne može biti više no što ima racionalnih brojeva. Otud tvrđenje.

Primećujemo da tačke prekida monotone funkcije ne moraju biti izolovane tačke; šta više, prebrojiv skup tačaka prekida može biti i svuda gust u razmaku.

Neka je $\{x_n\}$ najviše prebrojiv skup tačaka u $]a, b[$, a (c_n) niz pozitivnih brojeva takav da red $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergira. Uočimo funkciju

$$(1) \qquad s(x) = \sum_{x_n < x} c_n,$$

gde se sumacija vrši preko onih indeksa n za koje je $x_n < x$; ukoliko levo od x nema nijedne tačke x_n, suma je prazna pa joj konvencijom pripisujemo vrednost nula. Nije teško uvideti da funkcija s ima ove osobine: 1° monotono raste, 2° u tačkama x_n ima prekide sa skokovima dužine c_n, 3° neprekidna je u svim drugim tačkama, 4° u tačkama prekida x_n, neprekidna je s leve strane.

Slične osobine ima i funkcija $\sum_{x_n \leqslant x} c_n$, jedino što je ova u tačkama prekida x_n neprekidna s desne strane.

Definicija 2. Neka f monotono raste na $[a, b]$ i neka je $\{x_n\}$ najviše prebrojiv skup njenih tačaka prekida koje leže u $]a, b[$. Funkcija $s_f(x)$, definisana sa

$$(2) \quad s_f(x) = \begin{cases} 0, & x = a, \\ [f(a+0) - f(a)] + \sum_{x_n < x} \underbrace{[f(x_n+0) - f(x_n-0)]}_{c_n} + [f(x) - f(x-0)], & a < x \leqslant b \end{cases}$$

je *funkcija skoka* od f.

Σ koja figuriše na desnoj strani može biti prazna, konačna ili beskonačna, već prema tome kakav je skup $\{x_n\}$. U ovom poslednjem slučaju ona je uvek jedan konvergentan red, jer su joj članovi pozitivni a delimične sume nisu veće od $f(b)-f(a)$.

Funkcija skoka s_f je funkcija tipa (1) sa $c_n = f(x_n+0)-f(x_n-0)$. Ona je, dakle, neprekidna sem u tačkama x_n, a i b, gde ima skokove dužine $f(x_n+0)-f(x_n-0)$, $f(a+0)-f(a)$, odnosno $f(b)-f(b-0)$ i neprekidna je s leve strane u tačkama prekida (ne računajući tačku a).

Naziv funkcije s_f potiče otuda što ona tačno reprodukuje prekide i veličinu skoka funkcije f, kao što to tvrdi

Stav 3. *Svaka monotona rastuća funkcija f može se napisati u obliku*

$$f(x) = s_f(x) + g(x),$$ neprek. f-a

gde je s_f njena funkcija skoka, a g jedna monotona rastuća i neprekidna funkcija.

Dokaz. Da g monotono raste sledi iz $(x<y)$

$$g(y)-g(x) = [f(y)-f(x)]-[s_f(y)-s_f(x)] = \quad = f(y)-f(x)$$

$$= [f(y-0)-f(x-0)] - \sum_{x\leqslant x_n<y} [f(x_n+0)-f(x_n-0)] \geqslant 0.$$

Neka je $\varepsilon>0$. Da bismo pokazali da je g neprekidna funkcija, podelimo sabirke koji figurišu u funkciji skoka s_f u dve grupe, $s_f = \Sigma' + \Sigma''$, tako da u Σ' leže oni koji su $\geqslant\varepsilon$ a u Σ'' oni koji su $<\varepsilon$. Tada funkcije Σ'' i $f-\Sigma'$ imaju samo skokove $<\varepsilon$, jer se skokovi od f koji su $\geqslant\varepsilon$ potiru sa onima u Σ'. Znači, nijedan od skokova funkcije

$$g(x) = f(x) - s_f(x) = (f-\Sigma')-\Sigma''$$

nije veći od 2ε. No, kako ε možemo birati proizvoljno malo, to sledi da je g neprekidna funkcija.

Neka je funkcija f definisana na $[a,b]$ i neka je P jedna podela razmaka $[a,b]$ tačkama:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Definicija 3. Ako je

$$V(f) = V_a^b(f) = \sup_P \sum_{\nu=1}^{n} |f(x_\nu)-f(x_{\nu-1})|, \quad < \infty$$

gde se supremum uzima preko svih mogućih podela P razmaka $[a,b]$, konačan broj, kažemo da je f funkcija *ograničene varijacije* na $[a,b]$. $V_a^b(f)$ je njena *totalna varijacija.*

Primer 1. Svaka na $[a,b]$ monotona funkcija f je tu ograničene varijacije i $V_a^b(f) = |f(b)-f(a)|$.

Primer 2. Ako f ima na $[a,b]$ ograničen izvod, $|f'(x)|\leqslant M$, ona je na $[a,b]$ ograničene varijacije i $V_a^b(f)\leqslant M(b-a)$. Zaista, na osnovu prve teoreme o srednjoj vrednosti je $(x_{\nu-1}<\xi_\nu<x_\nu,\ \nu=1,2,\ldots,n)$

$$\sum_{\nu=1}^{n} |f(x_\nu)-f(x_{\nu-1})| = \sum_{\nu=1}^{n} |f'(\xi_\nu)(x_\nu-x_{\nu-1})| \leqslant M(b-a).$$

Klasa neprekidnih i klasa funkcija ograničene varijacije su međusobno neuporedive. S jedne strane, monotone funkcije su ograničene varijacije, ali ne moraju da budu neprekidne. S druge strane, funkcija

$$f(x)=x\cos\pi/2x \quad (0<x\leqslant 1),\ f(0)=0,$$

je neprekidna na $[0,1]$, ali tu nije ograničene varijacije. Zaista, ako za podeone tačke razmaka $[0,1]$ uzmemo

$$0,\ \frac{1}{2n},\ \frac{1}{2n-1},\ \ldots,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ 1,$$

biće

$$\sum_{\nu=1}^{2n}|f(x_\nu)-f(x_{\nu-1})|=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\to\infty\ (n\to\infty).$$

Birajući u razmaku $[a,b]$ samo jednu unutrašnju podeonu tačku x, za funkciju ograničene varijacije važiće

$$|f(x)-f(a)|+|f(b)-f(x)|\leqslant V_a^b(f),$$

pa je tim pre

$$|f(x)-f(a)|\leqslant V_a^b(f).$$

$|f(x)| \leq |f(a)| + V_a^b(f)$

Odavde sledi

Stav 4. *Svaka funkcija ograničene varijacije je ograničena.*

Stav 5. *Ako su f i g ograničene varijacije na $[a,b]$, takva je i $f+g$.*

Dokaz. Zbog

$$\sum_{\nu=1}^{n}|f(x_\nu)+g(x_\nu)-f(x_{\nu-1})-g(x_{\nu-1})|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{\nu=1}^{n}|f(x_\nu)-f(x_{\nu-1})|+\sum_{\nu=1}^{n}|g(x_\nu)-g(x_{\nu-1})|\leqslant$$

$$\leqslant V_a^b(f)+V_a^b(g)$$

je, naime,

$$V_a^b(f+g)\leqslant V_a^b(f)+V_a^b(g).$$

Ako su g i h dve monotono rastuće funkcije na $[a,b]$, tada je, na osnovu stava 5, funkcija $g-h$ ograničene varijacije na $[a,b]$. Pokazaćemo da važi i obrnuto, tj. da se svaka funkcija ograničene varijacije na $[a,b]$ može rastaviti na razliku dve monotono rastuće funkcije. U tom cilju uočimo podelu

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=x \quad (x\leqslant b)$$

razmaka $[a,x]$ i rastavimo

$$\sum_{\nu=1}^{n}|f(x_\nu)-f(x_{\nu-1})|$$

na dve sume Σ^+ i Σ^-, tako da se u Σ^+ nalaze pozitivne a u Σ^- negativne diferencije $f(x_\nu)-f(x_{\nu-1})$. Stavimo

$$p(x)=\sup_P \Sigma^+[f(x_\nu)-f(x_{\nu-1})]$$

i

$$n(x) = \sup_{P} \Sigma^{-} \, | f(x_\nu) - f(x_{\nu-1}) | .$$

Označimo li još, radi kratkoće pisanja, $V_a^x(f)$ sa $v(x)$, tada je očigledno $p(a) = n(a) = v(a) = 0$, $0 \leqslant p(x) \leqslant v(x)$, $0 \leqslant n(x) \leqslant v(x)$ i funkcije $p(x)$, $n(x)$ i $v(x)$ monotono rastu u $[a, b]$; $p(x)$, $n(x)$ i $v(x)$ su redom *pozitivna, negativna i totalna varijacija* od f u $[a, x]$.

Stav 6. *Ako je f ograničene varijacije na $[a, b]$, tada je za $x \in [a, b]$*

$$f(x) - f(a) = p(x) - n(x) \tag{3}$$

i

$$v(x) = p(x) + n(x). \tag{4}$$

$f(x) = f(a) + p(x) - n(x)$

$f(x) = f(a) + v(x) - 2n(x)$

Iz (3) neposredno sledi da se funkcija ograničene varijacije f može prikazati kao razlika dve monotono rastuće funkcije, jer takve su funkcije $f(a) + p(x)$ i $n(x)$. Primećujemo da (3) nije jedini mogući način rastavljanja funkcije ograničene varijacije na razliku dve monotone funkcije. Naime, ako je α ma koja monotona rastuća funkcija i stavimo $p_1 = p + \alpha$ i $n_1 = n + \alpha$, biće i $f(x) - f(a) = p_1(x) - n_1(x)$ jedno moguće rastavljanje funkcije f.

Dokaz stava 6. Za bilo koju podelu razmaka $[a, x]$ je

$$f(x) - f(a) = \Sigma^{+} [f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})] - \Sigma^{-} | f(x_\nu) - f(x_{\nu-1}) |, \tag{5}$$

pa je, na osnovu definicije funkcija p i n, prvo

$$f(x) - f(a) + \Sigma^{-} | f(x_\nu) - f(x_{\nu-1}) | = \Sigma^{+} [f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})] \leqslant p(x)$$

i

$$\Sigma^{+} [f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})] - f(x) + f(a) = \Sigma^{-} | f(x_\nu) - f(x_{\nu-1}) | \leqslant n(x),$$

a zatim

$$f(x) - f(a) + n(x) \leqslant p(x)$$

i

$$p(x) - f(x) + f(a) \leqslant n(x).$$

Iz poslednje dve nejednačine sledi (3).

Da bismo dokazali (4), primećujemo da iz

$$\cancel{Sf} = \sum_{\nu=1}^{n} | f(x_\nu) - f(x_{\nu-1}) | = \Sigma^{+} [f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})] + \Sigma^{-} | f(x_\nu) - f(x_{\nu-1}) | \leqslant p(x) + n \tag{6}$$

sledi prvo

$$\sum_{\nu=1}^{n} | f(x_\nu) - f(x_{\nu-1}) | \leqslant p(x) + n(x).$$

a zatim i

$$\boxed{v(x) \leqslant p(x) + n(x).} \tag{7}$$

Sabiranjem (5) i (6) nalazimo

$$2\,\Sigma^{+} [f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})] = f(x) - f(a) + \sum_{\nu=1}^{n} | f(x_\nu) - f(x_{\nu-1}) |$$

$$\leqslant f(x) - f(a) + v(x),$$

tako da je, prema (3),

$$2\,p(x) \leqslant f(x) - f(a) + v(x) = p(x) - n(x) + v(x),$$

tj.

$$p(x) + n(x) \leqslant v(x). \tag{8}$$

Iz (7) i (8) sledi onda (4).

Na osnovu stava 6 mogu se osobine monotonih funkcija, izražene stavovima 1, 2 i 3, preneti i na funkcije ograničene varijacije. Ako pod funkcijom skoka s_f funkcije ograničene varijacije f podrazumevamo $s_p - s_n$, gde su s_p i s_n funkcije skoka od p i n, tada je sa (2) data funkcija skoka funkcije f.

Stav 7. *Neka je f ograničene varijacije na $[a, b]$. Tada: 1° postoji $f(x+0)$ i $f(x-0)$ za svako x iz $[a, b[$, odnosno $]a, b]$, 2° f ima najviše prebrojivo mnogo tačaka prekida (prve vrste) na $[a, b]$ i 3° f se može rastaviti na zbir $f = s_f + g$, gde su njena funkcija skoka s_f i neprekidna funkcija g obe ograničene varijacije na $[a, b]$.*

Vežbanja 8

1. Za koje vrednosti parametra α je funkcija $f(x) = x^\alpha \sin x^{-1/2}$ $(0 < x \leqslant 1)$, $f(0) = 0$, ograničene varijacije na $[0,1]$?

2. Ako su f i g funkcije ograničene varijacije na $[a, b]$, takve su i fg f/g, ukoliko je u ovom poslednjem slučaju $|g(x)| \geqslant \delta > 0$ na $[a, b]$.

3. Ako je f ograničene varijacije na $[a, b]$ i $a < c < b$, tada je

$$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f).$$

4. Funkcija f je ograničene varijacije na $[a, b]$, ako u ovom razmaku zadovoljava Lipschitzov uslov:

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant M\,|x' - x''| \quad \text{za svako } x', x'' \in [a,b].$$

5. Odrediti funkciju pozitivne $p(x)$, negativne $n(x)$ i totalne varijacije $v(x)$ od $f_1(x) = 3x^2 - 2x^3$ $(-2 \leqslant x \leqslant 2)$ i od $f_2(x) = [x] - x$ $(0 \leqslant x \leqslant 2)$.

6. Ako je funkcija ograničene varijacije f neprekidna u nekoj tački x razmaka $[a, b]$, tada su i funkcije $p(x)$, $n(x)$ i $v(x)$ neprekidne u toj tački. Prema tome: Neprekidna funkcija ograničene varijacije može se rastaviti na razliku dve neprekidne monotono rastuće funkcije.

7. Funkcija f je ograničene varijacije na $[a, b]$ tada i samo tada ako postoji u $[a, b]$ monotona rastuća funkcija g takva da je

$$|f(x'') - f(x')| \leqslant g(x'') - g(x') \quad \text{za } a \leqslant x' \leqslant x'' \leqslant b.$$

[Za jednu polovinu tvrđenja iskoristiti $\Sigma\,|f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})| + f(b) - f(a) = 2\,\Sigma^+[f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})]$, gde je $\{x_n\}$ jedna podela razmaka $[a, b]$.]

8. Neka je A skup funkcija ograničene varijacije $f(x)$ na razmaku $[a, b]$. Pokazati da je

$$d(f, g) = V_a^b(f - g)$$

jedno pseudorastojanje u A (vežbanje 1.20). Ako u A uvedemo relaciju ekvivalencije

$$f \sim g \text{ ako je } f(x)-g(x)=\text{const. na } [a, b],$$

u skupu reprezentanata klasa ekvivalencije izraz $V_a^b(f-g)$ je jedno rastojanje. Tako dobiveni metrički prostor označavamo sa $V[a, b]$

9. U skupu funkcija ograničene varijacije A,

$$d(f, g)=|f(a)-g(a)|+V_a^b(f-g)$$

je jedno rastojanje. Potprostor $V_0[a, b]$ ovoga metričkog prostora, koji sačinjavaju one funkcije $f(x)$ koje se anuliraju za $x=a$, izometričan je sa prostorom $V[a, b]$ iz vežbanja 8, pa ga sa njim možemo identifikovati.

10. Neka je $V_0[a, b]$ metrički prostor funkcija ograničene varijacije koje se anuliraju u tački $x=a$. Pokazati da je $V_0[a, b]$. kompletan.

III. INTEGRACIJA

Prvi odeljak ove glave posvećen je Riemann-Stieltjesovom integralu, a svi ostali teoriji Lebesgueove mere i integrala u R^k. Jedino u odeljku 6 izložena je u osnovnim crtama opšta teorija mere i integrala.

1.i. Riemann-Stieltjesov integral

Neka su realne funkcije f i g definisane i ograničene u konačnom razmaku $[a, b]$ i neka je P jedna podela tog razmaka ostvarena tačkama:

$$a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_n = b.$$

Tačke ξ_ν neka leže u podrazmacima $[x_{\nu-1}, x_\nu]$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$. Označimo sa $m(P)$ najveću od dužina podrazmaka podele P, tj.

$$m(P) = \max_{1 \leqslant \nu \leqslant n} |x_\nu - x_{\nu-1}|$$

i stavimo

$$\sigma(P) = \sigma(f, g; P) = \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu)\,[g(x_\nu) - g(x_{\nu-1})].$$

Definicija 1. Ako postoji broj $I(f, g)$ takav da svakom $\varepsilon > 0$ odgovara jedno $\delta > 0$, tako da za svaki izbor tačaka ξ_ν u $[x_{\nu-1}, x_\nu]$ i nezavisno od uočene podele P

$$m(P) < \delta \quad \Rightarrow \quad |\sigma(f, g; P) - I(f, g)| < \varepsilon,$$

kažemo da je $I(f, g)$ *Riemann-Stieltjesov integral* funkcije f u odnosu na funkciju g u razmaku $[a, b]$.

Riemann-Stieltjesov integral označavamo sa

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) \quad \text{ili} \quad \int_a^b f\,dg,$$

a sadržaj definicije 1 iskazujemo simbolički sa

$$\lim_{m(P) \to 0} \sigma(f, g; P) = \int_a^b f(x)\,dg(x).$$

Kada postoji $\int_a^b f\,dg$ kažemo da je f *integrabilna u odnosu na* g ili, kraće, da je f R_g-integrabilna u razmaku $[a, b]$. Specijalno, ako je $g(x)=x$, Riemann-Stieltjesov integral $\int_a^b f\,dg$ svodi se na Riemannov integral $\int_a^b f\,dx$. Tada kažemo da je f R-integrabilna u $[a, b]$.

Iz definicije Riemann-Stieltjesovog integrala neposredno slede njegove osnovne osobine.

Stav 1. 1° *Ako su* f_1 *i* f_2 R_g*-integrabilne u* $[a, b]$, *takva je i* f_1+f_2 *i*

$$\int_a^b (f_1+f_2)\,dg=\int_a^b f_1\,dg+\int_a^b f_2\,dg.$$

2° *Ako je* f R_{g_1}*- i* R_{g_2}*-integrabilna u* $[a, b]$, *tada je ona i* $R_{g_1+g_2}$*-integrabilna u* $[a, b]$ *i*

$$\int_a^b f\,d(g_1+g_2)=\int_a^b f\,dg_1+\int_a^b f\,dg_2.$$

3° *Ako je* f R_g*-integrabilna u* $[a, b]$, *takva je i* cf *za svaku konstantu* c *i*

$$\int_a^b cf\,dg=c\int_a^b f\,dg.$$

4° *Ako je* f R_g*-integrabilna u* $[a, b]$, *tada je ona i* R_{cg}*-integrabilna u* $[a, b]$ *za svaku konstantu* c *i*

$$\int_a^b f\,d(cg)=c\int_a^b f\,dg.$$

5° *Ako je* f R_g*-integrabilna u* $[a, b]$ *i* $a<c<b$, *tada je* f R_g*-integrabilna kako u* $[a, c]$, *tako i u* $[c, b]$ *i*

$$\int_a^b f\,dg=\int_a^c f\,dg+\int_c^b f\,dg.$$

6° *Ako je funkcija* g *konstantna u razmaku* $[a, b]$, *tada je svaka funkcija* f R_g*-integrabilna u* $[a, b]$ *i*

$$\int_a^b f\,dg=0.$$

Što se tiče tvrđenja 5°, primećujemo da, za razliku od Riemannovog integrala, iz egzistencije integrala $\int_a^c f\,dg$ i $\int_c^b f\,dg$ ne sledi egzistencija integrala $\int_a^b f\,dg$. To pokazuje sledeći kontraprimer. Neka je

$$f(x)=\begin{cases} 0, & -1\leqslant x\leqslant 0, \\ 1, & 0<x\leqslant 1, \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} 0, & -1\leqslant x<0, \\ 1, & 0\leqslant x\leqslant 1. \end{cases}$$

Na osnovu definicije 1 lako je videti da $\int_{-1}^0 f\,dg$ i $\int_0^{+1} f\,dg$ postoje i da su oba jednaka nuli. Međutim, $\int_{-1}^{+1} f\,dg$ ne postoji. Zaista, ako je P_1 podela razmaka $[-1, +1]$ koja ne sadrži nulu kao podeonu tačku, odgovarajuća integralna suma $\sigma(P_1)$ biće jednaka 0 ili 1, prema tome da li u podrazmaku koji sadrži nulu biramo $\xi\leqslant 0$ ili $\xi>0$. Za uočeni tip podela integralna suma σ zavisi, dakle, od izbora tačaka ξ_ν, te ne može postojati $\int_{-1}^{+1} f\,dg$.

Stav 2. *Ako postoji jedan od integrala* $\int_a^b f\,dg$ *ili* $\int_a^b g\,df$, *postojaće drugi i*

$$\int_a^b f\,dg+\int_a^b g\,df=f(b)\,g(b)-f(a)\,g(a),$$

(*parcijalna integracija*).

Dokaz. Parcijalnom sumacijom nalazimo ($\xi_0 = a$, $\xi_{n+1} = b$)

$$\sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu)[g(x_\nu) - g(x_{\nu-1})] = \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu)\, g(x_\nu) - \sum_{\nu=0}^{n-1} f(\xi_{\nu+1})\, g(x_\nu)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n} f(\xi_\nu)\, g(x_\nu) - f(\xi_0)\, g(x_0) - \sum_{\nu=0}^{n} f(\xi_{\nu+1})\, g(x_\nu) + f(\xi_{n+1})\, g(x_n),$$

tj.

$$(1)\qquad \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu)[g(x_\nu) - g(x_{\nu-1})] = -\sum_{\nu=0}^{n} g(x_\nu)[f(\xi_{\nu+1}) - f(\xi_\nu)] + f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Izraz na levoj strani po definiciji dovodi do integrala $\int_a^b f\,dg$, a suma na desnoj strani do integrala $\int_a^b g\,df$, ako podrazumevamo da je podela razmaka $[a, b]$ u ovom drugom slučaju ostvarena tačkama

$$(2)\qquad a = \xi_0 \leqslant \xi_1 \leqslant \cdots \leqslant \xi_{n+1} = b$$

i da su x_ν ($\nu = 0, 1, \ldots, n$) međutačke izabrane u podrazmacima $[\xi_\nu, \xi_{\nu+1}]$. Ako podelu (2) razmaka $[a, b]$ označimo sa Q, tvrđenje stava sledi iz (1), jer $m(P) \to 0$ tada i samo tada ako $m(Q) \to 0$.

1.ii. Egzistencija Riemann-Stieltjesovog integrala

Sledeća dva stava daju dovoljne uslove za egzistenciju Riemann-Stieltjesovog integrala.

Stav 3. *Funkcija f je R_g-integrabilna u $[a, b]$ ako je f neprekidna a g ograničene varijacije u $[a, b]$.*

Na osnovu stava 2, postojaće $\int_a^b f\,dg$ i kada je f ograničene varijacije a g neprekidna u $[a, b]$.

Dokaz stava 3. Kako se svaka funkcija ograničene varijacije može rastaviti na razliku dve monotono rastuće funkcije, to se na osnovu osobine 2° Riemann-Stieltjesovog integrala (stav 1) možemo ograničiti na monotono rastuće funkcije g.

Neka je za podelu P razmaka $[a, b]$

$$m_\nu = \inf_{x_{\nu-1} \leqslant x \leqslant x_\nu} f(x) \quad \text{i} \quad M_\nu = \sup_{x_{\nu-1} \leqslant x \leqslant x_\nu} f(x)$$

i neka su

$$s(P) = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu [g(x_\nu) - g(x_{\nu-1})]$$

i

$$S(P) = \sum_{\nu=1}^{n} M_\nu [g(x_\nu) - g(x_{\nu-1})],$$

tzv. *donja* odnosno *gornja Darboux-Stieltjesova suma* u odnosu na podelu P. Tada je, nezavisno od izbora tačaka ξ_ν u $[x_{\nu-1}, x_\nu]$,

$$(3)\qquad s(P) \leqslant \sigma(P) \leqslant S(P).$$

Dodajući podeli P razmaka $[a, b]$ nove podeone tačke, za tako nastalu podelu P', koju zovemo *sukcesivnom* podeli P, važi

$$s(P) \leqslant s(P') \quad \text{i} \quad S(P') \leqslant S(P).$$

Ako su P_1 i P_2 ma koje dve podele razmaka $[a, b]$ i označimo sa P podelu koja sadrži podeone tačke obeju podela P_1 i P_2, važiće

$$s(P_1) \leqslant s(P) \quad \text{i} \quad S(P) \leqslant S(P_2),$$

jer je podela P sukcesivna kako podeli P_1, tako i podeli P_2. No, kako je za svaku podelu P, $s(P) \leqslant S(P)$, to iz poslednje dve nejednačine sledi

$$s(P_1) \leqslant S(P_2), \tag{4}$$

tj. donja suma ne može biti veća od gornje sume i kada je reč o dvema različitim podelama razmaka $[a, b]$.

Stavimo li

$$\underline{I} = \underline{I}(f, g) = \sup_P s(P), \tag{5}$$

gde se supremum uzima preko svih podela P razmaka $[a, b]$, iz (4) sledi

$$\boxed{s(P) \leqslant \underline{I} \leqslant S(P)}$$

s(p) S(p)

što, zajedno sa (3), daje

$$|\sigma(P) - \underline{I}| \leqslant S(P) - s(P). \tag{6}$$

→ 0

Dosada smo jedino iskoristili činjenice da je f ograničena, a g monotono rastuća funkcija. Uzmimo sada u obzir da je f neprekidna, a time i uniformno neprekidna u $[a, b]$, tj. da svakom $\varepsilon > 0$ odgovara broj $\delta > 0$ tako da je

$$M_\nu - m_\nu < \varepsilon \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \text{ kad god je } \boxed{m(P) < \delta.}$$

Vodeći računa i o monotoniji funkcije g, nalazimo

$$S(P) - s(P) = \sum_{\nu=1}^{n} (M_\nu - m_\nu)[g(x_\nu) - g(x_{\nu-1})] < \varepsilon [g(b) - g(a)].$$

Kako je $g(b) - g(a)$ konačan broj, a ε se može izabrati proizvoljno malo, odavde i iz (6) sledi da je f R_g-integrabilna u $[a, b]$ i da je $\underline{I}(f, g)$ Riemann-Stieltjesov integral od f u odnosu na g.

Stav 4. *Funkcija f je R_g-integrabilna u razmaku $[a, b]$ ako su f i g obe ograničene varijacije u $[a, b]$ i ako im se tačke prekida ne poklapaju.*

Dokaz. Bez ograničenja možemo pretpostaviti da je g monotono rastuća funkcija u $[a, b]$.

Pokazaćemo da se pod navedenim uslovima $S(P) - s(P)$ može učiniti proizvoljno malim ako samo $m(P)$ izaberemo dovoljno malo, tako da iz (6) onda sledi tvrđenje.

Neka su ε i η pozitivni brojevi. Kako je f ograničene varijacije na $[a, b]$, ona je tu ograničena, $|f(x)| < M$, i ima najviše prebrojivo mnogo prekida i to njih samo konačno mnogo u kojima je skok $\geqslant \varepsilon$. Označimo sa $[x_{\nu_i - 1}, x_{\nu_i}]$

($i=1, 2, \ldots, k$; $0<\nu_1<\nu_2<\cdots<\nu_k\leqslant n$) one podrazmake podele P u kojima leži jedan takav prekid y_i funkcije f. Neka je Σ' onaj deo sume

$$S(P)-s(P)=\sum_{\nu=1}^{n}(M_\nu-m_\nu)[g(x_\nu)-g(x_{\nu-1})]$$

koji obuhvata podrazmake $[x_{\nu_i-1}, x_{\nu_i}]$, a Σ'' njen preostali deo. Podelu P izaberimo tako finu da je

1° $M_\nu-m_\nu<\varepsilon$ u svakom podrazmaku koji pripada sumi Σ'',

2° $g(x_{\nu_i})-g(x_{\nu_i-1})=[g(x_{\nu_i})-g(y_i)]+[g(y_i)-g(x_{\nu_i-1})]<\dfrac{\eta}{2Mk}$.

Ovo poslednje je uvek moguće postići, jer je g neprekidna u tačkama y_i. (Prekidi od f i g se ne poklapaju.) Tada je s jedne strane

$$\Sigma''<\varepsilon\,\Sigma''[g(x_\nu)-g(x_{\nu-1})]$$
$$<\varepsilon\sum_{\nu=1}^{n}[g(x_\nu)-g(x_{\nu-1})]=\varepsilon[g(b)-g(a)],$$

dok je s druge strane

$$\Sigma'<\Sigma'\,2M[g(x_{\nu_i})-g(x_{\nu_i-1})]<\eta.$$

Prema tome,

$$S(P)-s(P)=\Sigma'+\Sigma''<\eta+\varepsilon[g(b)-g(a)],$$

odakle sledi tvrđenje, jer se η i ε mogu izabrati proizvoljno mali.

Primedba. Polazeći od ograničene funkcije f i monotono rastuće funkcije g, definisali smo pri dokazu stava 3 broj $\underline{I}(f, g)$ obrascem (5). Na sličan način može se uvesti broj

$$\bar{I}=\bar{I}(f,g)=\inf_P S(P)$$

takav da je

$$s(P)\leqslant\bar{I}\leqslant S(P) \quad \text{za svaku podelu } P.$$

Šta više, uzimajući u (4) prvo supremum kada P_1 prolazi (pri fiksiranom P_2) skup svih mogućih podela razmaka $[a, b]$, a zatim infimum kada P_2 prolazi taj isti skup, slediće

$$\underline{I}(f,g)\leqslant\bar{I}(f,g). \tag{7}$$

Specijalno, ako je $g(x)=x$, $\underline{I}$ i $\bar{I}$ su tzv. *donji* i *gornji Riemannov integral* funkcije f. Jedan od osnovnih rezultata teorije Riemannovog integrala jeste da je f R-integrabilna (definicija 1 sa $g(x)=x$) tada i samo tada ako je $\underline{I}=\bar{I}$, i ta zajednička vrednost je Riemannov integral od f. Otuda i mogućnost da se R-integrabilnost i ovako okarakteriše:

„*Potreban i dovoljan uslov da je f R-integrabilna jeste da svakom $\varepsilon>0$ odgovara jedna podela P takva da je $S(P)-s(P)<\varepsilon$*“, kao i mogućnost da se Riemannov integral izrazi kao granična vrednost niza donjih i gornjih suma:

„*Ako je f R-integrabilna u $[a, b]$ i (P_k) jedan niz podela za koji $m(P_k)\to 0$ $(k\to\infty)$, tada*

$$s(P_k)\to\int_a^b f\,dx \quad i \quad S(P_k)\to\int_a^b f\,dx.“$$

Ovo navodi na misao ne važi li analogno i kod Riemann-Stieltjesovog integrala. Preciznije: Ako je f ograničena a g monotono rastuća funkcija u $[a, b]$, da li je za R_g-integrabilnost funkcije f potrebno i dovoljno da važi

$$\underline{I}(f, g) = \overline{I}(f, g). \tag{8}$$

Odgovor je negativan. Uslov (8) je potreban ali ne i dovoljan za R_g-integrabilnost funkcije f. Zaista, neka f i g označavaju funkcije iz kontraprimera uvedenog posle stava 1 i neka je P^* jedna podela razmaka $[-1, +1]$ u kojoj se nula javlja kao podeona tačka. Lako je uvideti da je $s(P^*) = 0$ i $S(P^*) = 0$. Prema tome,

$$\underline{I}(f, g) \geqslant 0 \quad \text{i} \quad \overline{I}(f, g) \leqslant 0,$$

odakle, zbog (7), sledi $\underline{I}(f, g) = \overline{I}(f, g)$. Međutim, kao što smo ranije videli, funkcija f nije integrabilna u odnosu na funkciju g u razmaku $[-1, +1]$.

1.iii. Granični prelaz kod Riemann-Stieltjesovog integrala

Prethodno dajemo jednu procenu Riemann-Stieltjesovog integrala.

Stav 5. *Ako f i g ispunjavaju uslove jednog od stavova 3 ili 4, tada je*

$$\left|\int_a^b f\,dg\right| \leqslant M V_a^b(g) \quad \textit{gde je} \quad M = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|.$$

Dokaz. Procena sledi neposredno iz

$$|\sigma(f, g;\ P)| \leqslant M \sum_{\nu=1}^{n} |g(x_\nu) - g(x_{\nu-1})| \leqslant M V_a^b(g),$$

jer, po pretpostavci, postoji integral $\int_a^b f\,dg$. $f_n \rightrightarrows f$

Stav 6. *Neka je (f_n) niz neprekidnih funkcija koji uniformno konvergira ka f u razmaku $[a, b]$ i neka je g ograničene varijacije u $[a, b]$. Tada je*

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n\,dg = \int_a^b f\,dg.$$

Dokaz. Pre svega, na osnovu stava 3, postoje integrali $\int_a^b f_n\,dg$ i $\int_a^b f\,dg$, jer je f, kao granična vrednost uniformno konvergentnog niza neprekidnih funkcija, i sama neprekidna u $[a, b]$. Na osnovu stava 5 je

$$\left|\int_a^b f_n\,dg - \int_a^b f\,dg\right| \leqslant \underbrace{\max_{a \leqslant x \leqslant b} |f_n(x) - f(x)|}_{\to 0} \cdot \underbrace{V_a^b(g)}_{< \infty}, \to 0$$

odakle sledi tvrđenje, jer zbog uniformne konvergencije niza funkcija f_n, $\max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ kada $n \to \infty$.

Stav 7. *Neka je f neprekidna funkcija u $[a, b]$ i neka je (g_n) niz funkcija koji u $[a, b]$ konvergira ka funkciji g. Ako je (g_n) niz funkcija uniformno ograničene varijacije u $[a, b]$, tj. ako postoji konstanta K nezavisna od n takva da je*

$$V_a^b(g_n) < K, \tag{9}$$

tada važi

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f\,dg_n = \int_a^b f\,dg. \tag{10}$$

$\left|\int_a^b f\,dg_n - \int_a^b f\,dg\right| < \varepsilon$

Dokaz. Pre svega, (9) znači da je

$$\sum_{\nu=1}^{m} |g_n(x_\nu)-g_n(x_{\nu-1})|<K$$

za svaku podelu $\{x_\nu\}$ $(\nu=0,1,\ldots,m)$ razmaka $[a,b]$ i za svako $n=1,2,\ldots$ Pustimo li ovde da $n\to\infty$, slediće da je

$$\sum_{\nu=1}^{m} |g(x_\nu)-g(x_{\nu-1})|\leqslant K$$

za svaku podelu razmaka $[a,b]$, tj. da je g ograničene varijacije u $[a,b]$ i $V_a^b(g)\leqslant K$. Prema tome, postoji integral koji figuriše na desnoj strani u (10). Neka je $\varepsilon>0$. Izaberimo tako podelu $\{x_\nu\}$ $(\nu=0,1,\ldots,m)$ razmaka $[a,b]$, da je

(11) $$|f(x)-f(x_{\nu-1})|<\frac{\varepsilon}{2K} \quad \text{kada} \quad x\in[x_{\nu-1},x_\nu],$$

što je uvek moguće zbog uniformne neprekidnosti od f u $[a,b]$. Tada je

$\int_a^b f dg$

$$\int_a^b f\,dg=\sum_{\nu=1}^{m}\int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} f\,dg$$

$$=\sum_{\nu=1}^{m} f(x_{\nu-1})\int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} dg+\sum_{\nu=1}^{m}\int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu}[f(x)-f(x_{\nu-1})]\,dg$$

$$=\sum_{\nu=1}^{m} f(x_{\nu-1})[g(x_\nu)-g(x_{\nu-1})]+R_m(f,g),$$

gde je, na osnovu (11), stava 5 i vežbanja II.8.3,

$$|R_m(f,g)|<\frac{\varepsilon}{2K}\sum_{\nu=1}^{m} V_{x_{\nu-1}}^{x_\nu}(g)=\frac{\varepsilon}{2K}V_a^b(g)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

Na analogan način sledi

$\int_a^b f dg_n$

$$\int_a^b f\,dg_n=\sum_{\nu=1}^{m} f(x_{\nu-1})[g_n(x_\nu)-g_n(x_{\nu-1})]+R_m(f,g_n),$$

gde je

$$|R_m(f,g_n)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{za svako} \quad n=1,2,\ldots$$

Prema tome,

$$\left|\int_a^b f\,dg_n-\int_a^b f\,dg\right|\leqslant\left|\sum_{\nu=1}^{m} f(x_{\nu-1})[g_n(x_\nu)-g_n(x_{\nu-1})-g(x_\nu)+g(x_{\nu-1})]\right|+\varepsilon,$$

$g_n \xrightarrow[n\to\infty]{} g$

odakle sledi

$$\boxed{\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\int_a^b f\,dg_n-\int_a^b f\,dg\right|\leqslant\varepsilon,}$$

što predstavlja tvrđenje, jer ε možemo birati proizvoljno malo (videti vežbanje II.4.20).

1.iv. Izračunavanje Riemann-Stieltjesovog integrala

Riemann-Stieltjesov integral se može u izvesnim slučajevima izračunati svođenjem na Riemannov integral ili svođenjem na konačne ili beskonačne sume.

Stav 8. *Ako je f neprekidna na $[a,b]$, a g ima na $[a,b]$ R-integrabilan izvod g', tada je*

$$\int_a^b f\,dg = \int_a^b fg'\,dx.$$

Ako izmenimo u pretpostavkama mesta funkcija f i g, na osnovu parcijalne integracije sledi

$$\int_a^b f\,dg = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) - \int_a^b f'\,g\,dx.$$

Dokaz stava 8. Pre svega, na osnovu učinjenih pretpostavki, postoji kako Riemann-Stieltjesov integral $\int_a^b f\,dg$, tako i Riemannov integral $\int_a^b fg'\,dx$. Ovaj prvi je, po definiciji,

$$\int_a^b f\,dg = \lim_{m(P)\to 0} \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu)\,[g(x_\nu) - g(x_{\nu-1})]$$

nezavisno od izbora tačaka ξ_ν u $[x_{\nu-1}, x_\nu]$. Izaberimo tačke ξ_ν baš tako da važi

$$g(x_\nu) - g(x_{\nu-1}) = g'(\xi_\nu)\,(x_\nu - x_{\nu-1}) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Tada je

$$\int_a^b f\,dg = \lim_{m(P)\to 0} \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu)\,g'(\xi_\nu)\,(x_\nu - x_{\nu-1}),$$

a desna strana je po definiciji Riemannov integral funkcije fg', čiju egzistenciju smo već utvrdili.

Stav 9. *Neka je f neprekidna u $[a,b]$ i neka funkcija g ima u $]a,b[$ konačno mnogo prekida u tačkama $x_1, x_2, \ldots, x_n$, a konstantnu vrednost u razmacima $]a, x_1[,]x_1, x_2[, \ldots,]x_n, b[$. Tada je*

$$\int_a^b f\,dg = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,[g(x_k+0) - g(x_k-0)] + f(a)\,[g(a+0) - g(a)] + \\ + f(b)\,[g(b) - g(b-0)].$$

Primećujemo da vrednost integrala ne zavisi od vrednosti koje g uzima u tačkama prekida koje leže u $]a,b[$.

Dokaz stava 9. Funkcija g je očigledno ograničene varijacije na $[a,b]$, te integral $\int_a^b f\,dg$ postoji.

Neka je $x_0 = a$ i $x_{n+1} = b$; tada je

$$\int_a^b f\,dg = \sum_{k=0}^{n} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f\,dg. \tag{12}$$

Izračunajmo $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f\,dg\ (k = 0, 1, \ldots, n)$ po definiciji, uzimajući jednu podelu razmaka $[x_k, x_{k+1}]$ ostvarenu tačkama

$$x_k = x_0^{(k)} \leqslant x_\nu^{(k)} \leqslant \cdots \leqslant x_{m_k}^{(k)} = x_{k+1}$$

i odgovarajuće međutačke $\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \ldots, \xi_{m_k}^{(k)}$. Integralna suma $\sigma^{(k)}$ za razmak $[x_k, x_{k+1}]$ svodi se na

$$\sigma^{(k)} = f(\xi_1^{(k)})[g(x_1^{(k)}) - g(x_0^{(k)})] + f(\xi_{m_k}^{(k)})[g(x_{m_k}^{(k)}) - g(x_{m_k-1}^{(k)})],$$

jer su, zbog konstantnosti funkcije g u $]x_k, x_{k+1}[$, svi ostali sabirci jednaki nuli. Prema tome, kada maksimalni razmak podele teži nuli, slediće

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f\,dg = f(x_k)[g(x_k+0) - g(x_k)] + f(x_{k+1})[g(x_{k+1}) - g(x_{k+1}-0)],$$

jer je f neprekidna, a g kao funkcija ograničene varijacije ima u svakoj tački jednostranu graničnu vrednost. Sabirajući od $k=0$ do $k=n$, iz (12) sledi tvrđenje stava 9.

Stav 10. *Neka je f neprekidna a g ograničene varijacije u $[a,b]$, i neka g ima u $]a,b[$ prekide u tačkama x_k. Ako je $g = \overset{*}{g}_s + \bar{g}$, gde je $\overset{*}{g}_s$ funkcija skoka od g a $\bar{g}$ njen neprekidni deo, tada važi*

$$\int_a^b f\,dg = \int_a^b f\,d\bar{g} + \int_a^b f\,d\overset{*}{g}_s$$
$$= \int_a^b f\,d\bar{g} + \sum_k f(x_k)[g(x_k+0) - g(x_k-0)] +$$
$$+ f(a)[g(a+0) - g(a)] + f(b)[g(b) - g(b-0)].$$

$\sum_k$ na desnoj strani je prazna, konačna ili beskonačna, već prema tome koliko prekida ima g u $]a,b[$.

Dokaz stava 10. Treba jedino pokazati da je

$$\int_a^b f\,d\overset{*}{g}_s = \sum_k f(x_k)[g(x_k+0) - g(x_k-0)] +$$
$$+ f(a)[g(a+0) - g(a)] + f(b)[g(b) - g(b-0)].$$

Neka je niz funkcija (g_n) definisan sa $g_n(a) = 0$ i sa

Clone dyla $\quad g_n(x) = g(a+0) - g(a) + \sum_{\substack{x_k < x \\ k \leqslant n}} \underbrace{[g(x_k+0) - g(x_k-0)]}_{c_k} + [g(x) - g(x-0)] \quad a < x \leq$

kada je $a < x \leqslant b$, pri čemu se u Σ sabira preko onih indeksa k za koje je istovremeno $x_k < x$ i $k \leqslant n$. S jedne strane je $\lim_{n\to\infty} g_n(a) = 0$ i

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(a+0) - g(a) + \sum_{x_k < x} [g(x_k+0) - g(x_k-0)] + [g(x) - g(x-0)]$$

za $a < x \leqslant b$, tako da je $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \overset{*}{g}_s(x)$. S druge strane,

$$V_a^b(g_n) = |g(a+0) - g(a)| + |g(b) - g(b-0)| + \qquad K$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} \{|g(x_k) - g(x_k-0)| + |g(x_k+0) - g(x_k)|\} \leqslant V_a^b(g), \quad = K$$

$n \to \infty$

tako da je

$$V_a^b(g_n) \leqslant K \quad \text{za svako } n.$$

Primenjujući stav 7, sledi

$$\int_a^b f\,dg_s^* = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f\,dg_n.$$

No g_n je funkcija tipa funkcije g iz stava 9 pa je na osnovu ovoga

$$\int_a^b f\,dg_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)[g(x_k+0)-g(x_k-0)]+$$

$$+f(a)[g(a+0)-g(a)]+f(b)[g(b)-g(b-0)].$$

Iz proslednje dve jednačine sledi tvrđenje stava 10.

Vežbanja 1

1. Pokazati da je

$$\int_0^3 x\,d([x]-x) = \frac{3}{2},$$

gde $[x]$ označava najveći ceo broj sadržan u x.

2. Ako je f neprekidna na $[0, a]\,(0<a<+\infty)$, tada je

$$\int_0^a f(x)\,d[x] = \sum_{k=1}^{[a]} f(k).$$

Ako je f neprekidna na $[a, 1]\,(0<a<1)$, tada je

$$\int_a^1 f(x)\,d[1/x] = -\sum_{k=2}^{[1/a]} f(1/k).$$

3. Ako je f ograničene varijacije u $[0,2\pi]$ i $f(0)=f(2\pi)$, tada je

$$\left|\int_0^{2\pi} f(x) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\, nx\,dx\right| \leqslant n^{-1} V_0^{2\pi}(f).$$

[Dati Riemannov integral izraziti pomoću Riemann-Stieltjesovog, pa primeniti stavove 2 i 5.]

4. Neka je f neprekidna a g funkcija ograničene varijacije u $[a, b]$ i stavimo

$$h(x) = \int_a^x f(t)\,dg(t) \quad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Pokazati da je: 1° h ograničene varijacije u $[a, b]$, 2° h neprekidna u tačkama u kojima je g takva; 3° izračunati $h(c+0)-h(c-0)$, gde je $c \in\,]a, b[$ tačka prekida od g.

5. Ako su f i g neprekidne, a α monotono rastuća funkcija u $[a, b]$, tada važi Schwarzova nejednačina

$$\left|\int_a^b fg\,d\alpha\right|^2 \leqslant \int_a^b f^2\,d\alpha \cdot \int_a^b g^2\,d\alpha.$$

6. Neka je f neprekidna i g ograničene varijacije u $[a, b]$. Ako $v(x)$ označava totalnu varijaciju od g u $[a, x]$, pokazati da važi

$$\left|\int_a^b f\,dg\right| \leqslant \int_a^b |f|\,dv.$$

7. Detaljno obrazložiti nejednačinu $V_a^b(g_n) \leqslant V_a^b(g)$ u dokazu stava 10.

2.i. Mera na prstenu

Svakom intervalu $I=(a, b)$ na realnoj pravoj R odgovara određeni merni broj $m(I)$ — njegova dužina $b-a$. Pitanje je može li se i drugim skupovima tačaka u R koordinirati na izvestan način određen merni broj. Idealno bi bilo kada bi svakom skupu $A \subset R$, tj. svakom elementu iz $\mathbf{P}\,R$, odgovarao određen realni broj — mera $m(A)$ skupa A. Po sebi se razume da bi funkcija skupa $m(A)$ trebalo da se svede na dužinu kad god je A interval. Ali ne samo to. Funkcija skupa $m(A)$ trebalo bi da zadrži i neke karakteristične osobine dužine intervala: da je nenegativna i da je mera unije disjunktnih skupova jednaka zbiru mera pojedinih skupova, čak i ako je reč o uniji prebrojivo mnogo skupova. Međutim, može se pokazati da *ne postoji* funkcija skupa *navedenih osobina* koja bi bila definisana na *čitavom* $\mathbf{P}\,R$. Ne ostaje, dakle, ništa drugo neko ili da žrtvujemo neku od gore navedenih osobina funkcije m ili da suzimo njeno definiciono područje sa čitavog $\mathbf{P}\,R$ na samo jedan njegov pravi deo $\mathfrak{P}$. Ovom poslednjem se daje prednost. No, time se javlja jedna nova poteškoća: naime, sa praktične tačke gledišta korisno bi bilo da kad god su skupovi $A, B, \ldots$ merljivi (tj. pripadaju $\mathfrak{P}$), takvi budu i skupovi dobiveni primenom najviše prebrojivo mnogo elementarnih operacija (unija, preseka, razlika, komplemenata) na $A, B, \ldots$. Kolekcijama skupova iz R^k, i uopšte iz nekog apstraktnog skupa X, koje su u tom smislu *zatvorene* u odnosu na izvesne elementarne operacije, dajemo posebno ime.

Neka je X osnovni skup u kome vršimo naša razmatranja i neka su $A, B, \ldots$ njegovi delovi. tj. elementi od $\mathbf{P}\,X$.

Definicija 1. Neprazna kolekcija skupova $\mathfrak{P} \subset \mathbf{P}\,X$ je *prsten* ako iz

$$A \text{ i } B \in \mathfrak{P} \quad \Rightarrow \quad A \cup B \text{ i } A-B \in \mathfrak{P}.$$

Kako je $A \cap B = A-(A-B)$, to sa A i B prstenu pripada i $A \cap B$. Jasno je da će prstenu pripadati unija i presek konačno mnogo skupova iz prstena.

Definicija 2. Prsten $\mathfrak{P}$ je *σ-prsten* ako iz

$$A_n \in \mathfrak{P} \quad (n=1, 2, \ldots) \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{P}.$$

Kako je (vežbanje I.3.2)

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 - \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_1 - A_n),$$

to sa $A_n\,(n=1, 2, \ldots)$ σ-prstenu pripada i $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

$\mathbf{P}X \to R$
$A \to \phi(A)$

Čitav $\mathbf{P}\,X$ je jedan prsten a i σ-prsten.

Definicija 3. Ako svakom skupu A iz prstena $\mathfrak{P}$ odgovara konačan realan broj ili $+\infty$, kažemo da je na $\mathfrak{P}$ definisana *funkcija skupa* $\phi(A)$. Ona je *aditivna* ako, kad god A i $B \in \mathfrak{P}$, iz

$$(1) \qquad A \cap B = O \quad \Rightarrow \quad \phi(A \cup B) = \phi(A) + \phi(B),$$

odnosno, *σ-aditivna* ako, kad god $A_n\,(n=1, 2, \ldots)$ i $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{P}$, iz

$$A_i \cap A_j = O \; (i \neq j) \quad \Rightarrow \quad \phi\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n).$$

Da bismo izbegli trivijalnosti, pretpostavljaćemo da ϕ ne uzima svuda na $\mathfrak{P}$ vrednost $+\infty$.

Kada je reč o σ-aditivnosti, tada treba razlikovati dva slučaja. Ako je $\phi \geqslant 0$, tada red $\sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n)$ uvek ima određenu vrednost u R^*, bilo da konvergira ili određeno divergira ka $+\infty$. Međutim, ako ϕ uzima vrednosti oba znaka, tada je u σ-aditivnosti implicitno sadržan zahtev da je red $\sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n)$ konvergentan. Kako $\phi(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$ ne zavisi od poretka u kome skupovi A_n ulaze u uniju, to ni numerički red $\sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n)$ neće zavisiti od poretka svojih članova; otuda, ako je red $\sum_{n=1}^{\infty} \phi(A_n)$ konvergentan, on je i apsolutno konvergentan.

Stav 1. *Neka je ϕ aditivna funkcija skupa na prstenu $\mathfrak{P}$. Tada je:*

1° $\phi(O)=0$.

2° $\phi(\bigcup_{\nu=1}^{n} A_\nu)=\sum_{\nu=1}^{n} \phi(A_\nu)$ *kad god je* $A_i \cap A_j = O$ $(i \neq j)$.

3° *Za bilo koja dva skupa A i B je*

$$\phi(A \cup B)+\phi(A \cap B)=\phi(A)+\phi(B).$$

4° *Ako je $A \subset B$ i $\phi(A)<+\infty$, tada je*

$$\phi(B-A)=\phi(B)-\phi(A).$$

5° *Ako je $\phi \geqslant 0$, tada je za bilo koja dva skupa A i B*

$$\phi(A \cup B) \leqslant \phi(A)+\phi(B),$$

a iz

$$A \subset B \quad \Rightarrow \quad \phi(A) \leqslant \phi(B).$$

Blagodareći tome što je $-\infty$ isključeno kao vrednost koju može uzimati ϕ, to svi izrazi navedeni u stavu 1 imaju smisla.

Dokaz stava 1. 1° Kako je kolekcija $\mathfrak{P}$ neprazna, postoji skup $A \in \mathfrak{P}$ pa $O=A-A \in \mathfrak{P}$. Ako u (1) stavimo $A=B=O$, imaćemo $\phi(O)=2\phi(O)$, odakle sledi da je $\phi(O)=0$ ili $\phi(O)=+\infty$. Ako bi bilo $\phi(O)=+\infty$, imali bismo

$$\phi(A)=\phi(A \cup O)=\phi(A)+\phi(O)=+\infty$$

za svako $A \in \mathfrak{P}$, tj. trivijalni slučaj koji smo isključili. Zato je $\phi(O)=0$.

2° Sledi totalnom indukcijom iz (1).

3° Kako su tada $A-B$ i $A \cap B$, odnosno $A-B$ i B parovi međusobno disjunktnih skupova, to iz (1) sledi

$$\phi[(A-B) \cup (A \cap B)]=\phi(A-B)+\phi(A \cap B),$$

$$\phi[(A-B) \cup B]=\phi(A-B)+\phi(B),$$

tj.

$$\phi(A-B)+\phi(A \cap B)=\phi(A),$$

$$\phi(A \cup B)=\phi(A-B)+\phi(B).$$

A
A ∪ B
+
$\phi(A)+\phi(B) = +\infty + \phi(B)$

Sabiranjem ove dve jednačine sledi tvrđenje ako je $\phi(A-B) < +\infty$. Ukoliko je $\phi(A-B) = +\infty$, tada je prema prethodnim jednačinama $\phi(A) = +\infty$ i $\phi(A \cup B) = +\infty$, pa su obe strane u 3° jednake $+\infty$.

4° Pre svega, zbog $\phi(A) < +\infty$, desna strana uvek ima smisla. Tvrđenje sledi iz

$A \subset B$

$$\phi(B) = \phi[(B-A) \cup A] = \phi(B-A) + \phi(A).$$

5° Zbog $\phi \geqslant 0$, prva nejednačina sledi iz 3° a druga iz prethodne jednačine.

Stav 2. *Neka je ϕ σ-aditivna funkcija skupa na prstenu $\mathfrak{P}$.*

1° *Ako niz skupova (A_n) iz $\mathfrak{P}$ zadovoljava $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ i ako $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A \in \mathfrak{P}$, tada*

$$\phi(A_n) \to \phi(A) \quad (n \to \infty).$$

2° *Ako niz skupova (A_n) iz $\mathfrak{P}$ zadovoljava $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$, ako $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A \in \mathfrak{P}$ i ako je za neko fiksirano k $\phi(A_k) < +\infty$, tada*

$$\phi(A_n) \to \phi(A) \quad (n \to \infty).$$

Pretpostavka $\phi(A_k) < +\infty$ je bitna u iskazu 2°, kao što to pokazuje sledeći primer. Neka je X skup prirodnih brojeva N i neka je $\mathfrak{P}$ prsten **P**N. Lako je videti da je funkcija skupa ϕ, koja je definisana sa

$$\phi(A) = \begin{cases} \text{broju elemenata u } A \text{ ako je } A \text{ konačan skup,} \\ +\infty \text{ ako je } A \text{ beskonačan skup,} \end{cases}$$

σ-aditivna na **P**N. Ako uzmemo $A_n = \{n, n+1, \ldots\}$, tada $A_n \supset A_{n+1}$ i $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = O \in \mathbf{P}N$. Međutim, kako je $\phi(A_n) = +\infty$ za svako $n = 1, 2, \ldots$, to $\phi(A_n)$ ne konvergira ka $\phi(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \phi(O) = 0$.

Dokaz stava 2. 1° Stavimo

$$B_1 = A_1 \quad \text{i} \quad B_n = A_n - A_{n-1} \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

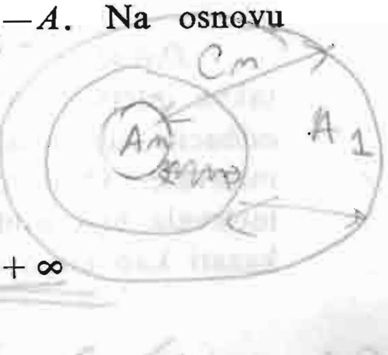
Skupovi B_n su međusobno disjunktni i $A_n = \bigcup\limits_{\nu=1}^{n} B_\nu$, $A = \bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} B_\nu$. σ-aditivnost funkcije ϕ daje

$$\phi(A_n) = \sum_{\nu=1}^{n} \phi(B_\nu) \quad \text{i} \quad \phi(A) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \phi(B_\nu),$$

odakle sledi tvrđenje kada $n \to \infty$.

2° Pretpostavićemo da je $k = 1$; na sličan način se postupa ako je $k > 1$. Stavimo $C_n = A_1 - A_n$. Tada je $C_1 \subset C_2 \subset \ldots$ i $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n = A_1 - A$. Na osnovu prvog dela stava 2, dakle,

$$\phi(A_1 - A_n) = \phi(C_n) \to \phi(A_1 - A).$$



Kako u opštem slučaju

$$D_1 \subset D_2 \quad \text{i} \quad \phi(D_2) < +\infty \quad \Rightarrow \quad \phi(D_1) < +\infty$$

(jer je $\phi(D_2)=\phi(D_2-D_1)+\phi(D_1)$ i $\phi>-\infty$), to ovde iz $\phi(A_1)<+\infty$ sledi kako $\phi(A_n)<+\infty (n=2, 3, \ldots)$, tako i $\phi(A)<+\infty$. Prema stavu 1.4° važi onda

$$\phi(A_1)-\phi(A_n)\to\phi(A_1)-\phi(A),$$

$A\subset B$

$\phi(B-A)=\phi(B)$

odakle, opet zbog $\phi(A_1)<+\infty$, sledi tvrđenje 2°.

Definicija 4. Nenegativna σ-aditivna funkcija skupa definisana na prstenu $\mathfrak{P}$ je *mera* na $\mathfrak{P}$. Skupovi iz $\mathfrak{P}$ su *merljivi skupovi.*

2.ii. Mera na prstenu elementarnih skupova u R^k

Opšta razmatranja iz prethodne tačke konkretizovaćemo sada u Euklidovom prostoru R^k kao osnovnom skupu. Definisaćemo, naime, u R^k prsten elementarnih skupova i konstruisati na njemu jednu meru.

Interval u R^k je skup

$$I=\{x=(\xi_\nu):\quad \xi_\nu\in(\alpha_\nu,\beta_\nu), \nu=1, 2, \ldots, k\},$$

gde su α_ν i β_ν $(\alpha_\nu\leqslant\beta_\nu)$ konačni realni brojevi. Za $k=1$ to je interval u pravom smislu reči na realnoj pravoj, za $k=2$ pravougaonik u ravni, za $k=3$ kvadar u prostoru, itd. U teoriji mere je irelevantno da li rub intervala u celini ili delimično pripada skupu. Intervalu I u R^k pridružujemo kao merni broj

$$m(I)=\prod_{\nu=1}^{k}(\beta_\nu-\alpha_\nu),$$

tj. dužinu za $k=1$, površinu za $k=2$, zapreminu za $k=3$.

Definicija 5. $A\subset R^k$ je *elementaran skup* u R^k ako je unija konačno mnogo intervala.

$A=\bigcup I_\nu$

Kolekciju elementarnih skupova označavaćemo sa $\mathfrak{E}$.

$\mathcal{E}$

Stav 3. *$\mathfrak{E}$ je prsten, ali ne i σ-prsten.*

Dokaz. Prvi deo tvrđenja sledi neposredno iz definicije elementarnih skupova. Da $\mathfrak{E}$ nije σ-prsten pokazuje sledeći kontraprimer: $A_n=(1/(2n+1), 1/2n)\in\mathfrak{E}$ u R, a $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ nije elementaran skup u R.

Stav 4. *Ako $A\in\mathfrak{E}$, tada postoji konačno mnogo* d i s j u n k t n i h *intervala I_ν takvih da je $A=\bigcup_{\nu=1}^{n}I_\nu$.*

$\in\mathcal{E}$ $A=\bigcup^{n} I_\nu$

Dokaz. Po definiciji, A je unija konačno mnogo intervala. Ako se dva takva intervala preklapaju, jedan od njih ćemo u celosti zadržati, a od drugog odbaciti zajednički deo i ostatak, po potrebi, tako podeliti da opet dobijemo intervale. Ovaj postupak svođenja elementarnog skupa na uniju disjunktnih intervala nije jednoznačan; dati elementarni skup može se na više načina prikazati kao unija disjunktnih intervala.

Definicija 6. Neka je $A \in \mathfrak{E}$ i neka je $\bigcup_{\nu=1}^{n} I_\nu$ jedno razlaganje od A na disjunktne intervale I_ν. Sa $m(A)$ označavaćemo funkciju skupa definisanu na $\mathfrak{E}$ sa

$\delta(A)$

$$m(A) = \sum_{\nu=1}^{n} m(I_\nu).$$

Ovde je neophodno učiniti tri primedbe: 1° Merni broj elementarnog skupa označili smo istim slovom kao i merni broj intervala, jer se ova dva broja ionako poklapaju kada se elementarni skup svede na interval. 2° Definicija funkcije $m(A)$ je valjana, jer je *nezavisna* od toga na koji način smo A razložili na uniju disjunktnih intervala. Zaista, neka su $\{I_\nu\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ i $\{J_\mu\}$ $(\mu = 1, 2, \ldots, m)$ dva različita razlaganja skupa A na disjunktne intervale. Kako je presek dva intervala opet interval, to je

$$\sum_{\nu} m(I_\nu) = \sum_{\nu,\mu} m(I_\nu \cap J_\mu) = \sum_{\mu} m(J_\mu).$$

3° Funkcija skupa $\boxed{m}$ je konačna na $\mathfrak{E}$, tj. $\boxed{m(A) < +\infty}$ za svako $A \in \mathfrak{E}$.

Stav 5. *Ako $A \in \mathfrak{E}$, za svako $\varepsilon > 0$ postoji zatvoren elementaran skup F i otvoren elementaran skup G, tako da je*

$$F \subset A \subset G$$

i

$$m(F) \geqslant m(A) - \varepsilon, \quad m(G) \leqslant m(A) + \varepsilon.$$

Dokaz. Ako je A interval, za F treba uzeti dovoljno blizak zatvoreni interval koji leži u A, a za G dovoljno blizak otvoren interval koji sadrži A. U opštem slučaju postupamo na sličan način oslanjajući se na razlaganje o kome govori stav 4.

1° $m \geq 0$
2° m – σ-aditivn

Stav 6. *Funkcija skupa m je $\boxed{\text{mera}}$ na prstenu $\mathfrak{E}$.*

Dokaz. Očigledno je $m \geqslant 0$ na $\mathfrak{E}$. Pokazaćemo da je m σ-aditivna na $\mathfrak{E}$. Pre svega, ona je aditivna na $\mathfrak{E}$. Zaista, ako A i $B \in \mathfrak{E}$, na osnovu stava 4 postoje reprezentacije

$$A = \bigcup_{\nu=1}^{n} I_\nu, \quad I_i \cap I_j = O\,(i \neq j),$$

$$B = \bigcup_{\mu=1}^{m} J_\mu, \quad J_k \cap J_l = O\,(k \neq l).$$

Ako je uz to $A \cap B = O$, biće i

$$\boxed{I_\nu \cap J_\mu = O} \quad \forall \nu \quad \text{i} \quad \forall \mu,$$

pa je unija svih I_ν i J_μ jedno razlaganje skupa $A \cup B$ na disjunktne intervale. Na osnovu definicije 6 je, dakle,

$$m(A \cup B) = \sum_{\nu=1}^{n} m(I_\nu) + \sum_{\mu=1}^{m} m(J_\mu) = m(A) + m(B).$$

Pretpostavimo sada da skupovi $A_n \in \mathfrak{E}\,(n = 1, 2, \ldots)$, $A_i \cap A_j = O\,(i \neq j)$ i da $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{E}$. Tada, na osnovu druge nejednačine u 5° stava 1 i aditiv-

$\bigcup [m, m + \frac{1}{m^2}] \Rightarrow \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}$

nosti funkcije m, iz

$$A \supset \bigcup_{\nu=1}^{n} A_\nu \quad \text{za svako } n$$

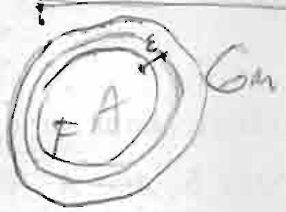
sledi

$$m(A) \geqslant m\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} A_\nu\right) = \sum_{\nu=1}^{n} m(A_\nu) \quad \text{za svako } n,$$

pa prema tome i

$$m(A) \geqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} m(A_\nu). \tag{2}$$

Da bismo dokazali obrnutu nejednačinu, postupićemo ovako. Svakom $\varepsilon > 0$ možemo, na osnovu stava 5, da koordiniramo elementarni zatvoreni skup $F \subset A$, takav da je



$$m(F) \geqslant m(A) - \varepsilon \tag{3}$$

i elementarne otvorene skupove $G_n \supset A_n$, takve da je

$$m(G_n) \leqslant m(A_n) + \varepsilon/2^n \ \forall n. \tag{4}$$

Kako

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A \supset F,$$

to je kolekcija skupova $\{G_n\}$ jedno otvoreno pokrivanje zatvorenog i ograničenog skupa F. Na osnovu Heine-Borelovog stava (stav II.6.7; videti i primedbu posle stava II.6.4) može se iz ovog izdvojiti jedno konačno pokrivanje, tj. za neki prirodni broj N

$$\bigcup_{n=1}^{N} G_n \supset F.$$

Odavde sledi, na osnovu obeju nejednačina u 5° stava 1,

$$m(F) \leqslant m\left(\bigcup_{n=1}^{N} G_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{N} m(G_n), \leq \sum_{1}^{N} m(A_n) + \varepsilon \sum_{1}^{N} 2^{-n}$$

pa je, vodeći računa o (4)

$$m(A) - \varepsilon \leq m(F) \leqslant \sum_{n=1}^{N} m(A_n) + \varepsilon \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} < \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) + \varepsilon.$$

Koristeći (3), tako nalazimo

$$m(A) < \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) + 2\varepsilon$$

odnosno

$$\boxed{m(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n),}$$

jer ε možemo birati proizvoljno malo. Odavde i iz (2) sledi σ-aditivnost funkcije m na $\mathfrak{E}$.

$A \in \mathcal{E} \Rightarrow m^* A = mA$

3.i. Spoljna mera

Polazeći od mere m na $\mathfrak{E}$ definisaćemo sada na čitavom $\mathbf{P}R^k$ jednu novu funkciju skupa m^*; ova oznaka treba da ukaže da je m^* inducirana funkcijom m.

Definicija 1. Neka je A proizvoljan skup iz R^k i neka je $\boxed{\{I_n\}}$ jedno najviše prebrojivo pokrivanje skupa A intervalima, tj. $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \supset A$. *Spoljna mera* $m^*(A)$ skupa A, inducirana merom m na $\mathfrak{E}$, definisana je sa

$\{I_n\}$

$$(1) \qquad m^*(A) = \inf_{\{I_n\}_{n \in N}} \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n),$$

$m^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n)$

gde je infimum uzet preko svih najviše prebrojivih pokrivanja skupa A intervalima.

Primećujemo da, za razliku od m na $\mathfrak{E}$, m^* nije konačna funkcija skupa na $\mathbf{P}R^k$. Na primer, $m^*(R^k) = +\infty$.

Stav 1. *Neka su A, B i A_n skupovi u R^k. Spoljna mera m^* ima ove osobine:*

1° *Ako $A \in \mathfrak{E}$ tada je $m^*(A) = m(A)$.*

2° $m^*(A) \geqslant 0$ *za svako $A \subset R^k$.*

3° *Iz* $A \subset B \Rightarrow m^*(A) \leqslant m^*(B)$.

4° *Iz* $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow m^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$. $\Longrightarrow$ m^* nije mera na $\mathbf{P}R^k$

НАПОМЕНА: *U 4° ne mora stajati znak jednakosti čak i ako su skupovi A_n disjunktni.*

Iz 1° sledi da je m^* jedno proširenje funkcije m sa $\mathfrak{E}$ na $\mathbf{P}R^k$. Iz 4° i tvrđenja koje mu sledi vidimo da m^* nije σ-aditivna, pa time ni mera na $\mathbf{P}R^k$. Zato što ima osobinu 4° kažemo da je spoljna mera m^* *σ-subaditivna* funkcija skupa na $\mathbf{P}R^k$.

Dokaz stava 1. 1° Neka je $A \in \mathfrak{E}$ i $A = \bigcup_{\nu=1}^{n} I_\nu$, $I_i \cap I_j = O\ (i \neq j)$. Tada je i $\{I_\nu\}$ jedno pokrivanje od A intervalima, i za ovo je baš postignut infimum u (1).

2° Sledi neposredno iz definicije spoljne mere.

3° Zbog $A \subset B$, svako pokrivanje od B je pokrivanje i od A, pa infimum preko svih pokrivanja od B ne može da bude manji od onoga preko svih pokrivanja od A.

4° Bez ograničenja možemo pretpostaviti da su svi brojevi $m^*(A_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ konačni; u suprotnom, nejednačina u 4° bila bi trivijalno zadovoljena.

Na osnovu definicije spoljne mere, svakom $\varepsilon > 0$ i svakom fiksiranom $n\,(= 1, 2, \ldots)$ odgovara najviše prebrojivo pokrivanje skupa A_n intervalima $\{I_\nu^n\}$ takvo da je

$$(2) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} m(I_\nu^n) < m^*(A_n) + \varepsilon/2^n.$$

Kolekcija intervala $\{I_\nu^n\}$ $(\nu, n = 1, 2, \ldots)$ je tada jedno pokrivanje od A, te je, shodno definiciji spoljne mere,

$$m^*(A) \leqslant \sum_{n,\nu=1}^{\infty} m(I_\nu^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} m(I_\nu^n),$$

s obzirom da zbog pozitiviteta članova dvostrukog reda, njegova suma ne zavisi od poretka u kome se oni sabiraju. Na osnovu (2) iz ove nejednačine sledi

$$m^*(A) < \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) + \varepsilon,$$

što predstavlja tvrđenje, jer ε možemo birati proizvoljno malo.

Konstruisaćemo sada niz skupova (A_n), disjunktnih među sobom, tako da u 4° efektivno važi znak $<$. U skup realnih brojeva R uvedimo relaciju ekvivalencije

$$x \sim y \quad \text{ako je} \quad x - y = \text{racionalan broj}.$$

U svakoj klasi ekvivalencije skupa-količnika $R/\sim$ izaberimo po jednog reprezentanta ali tako da ovaj leži u $(0, 1)$. Na osnovu aksioma izbora to je uvek moguće učiniti. Označimo sa E skup tih reprezentanata.

Neka je E_r skup dobiven iz E translacijom za veličinu r, tj. $E_r = \{x + r : x \in E\}$. Konstrukcija koju ćemo sprovesti počiva na ovim dvema osobinama:

1° Ako $x \in (0, 1)$, tada $x \in E_r$ za neki racionalni broj $r \in (-1, +1)$.

2° Ako su r i s različiti racionalni brojevi, skupovi E_r i E_s su disjunktni. Zaista, ako $x \in (0, 1)$ postoji u E tačka y, tako da je $x \sim y$. Stavimo li $r = x - y$, tada je $x = y + r$, tj. $x \in E_r$ za neko $r \in (-1, +1)$. Da bismo pokazali da važi osobina 2°, pretpostavimo da E_r i E_s $(r \neq s)$ nisu disjunktni, tj. da postoji tačka $x \in E_r \cap E_s$. Zbog $x \in E_r$ i $x \in E_s$ postojaće tačke $y \in E$ i $z \in E$, tako da je $x = y + r$ i $x = z + s$. No tada je $y - z = s - r \neq 0$, tj. $y \sim z$ i $y \neq z$, što bi značilo da E sadrži dve različite tačke iz iste klase ekvivalencije, suprotno definiciji skupa E.

Racionalne brojeve iz razmaka $(-1, +1)$ uredimo u niz (r_n) i stavimo $A_n = E_{r_n}$. Na osnovu 2°, skupovi A_n su međusobno disjunktni. Neka je $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Zbog 1°, $(0, 1) \subset A$, te je $m^*(A) \geqslant 1$. Kako su skupovi A_n dobiveni translacijom skupa E, to oni svi imaju istu spoljnu meru, recimo $m^*(A_n) = \alpha$. No α ne može biti jednako nuli, jer bi to zbog $m^*(A) \geqslant 1$ protivrečilo nejednačini 4° stava 1. Dakle, $\alpha > 0$, što znači da je desna strana u nejednačini 4° jednaka $+\infty$, dok leva, zbog $A \subset (-1, 2)$, nije veća od 3.

3.ii. Lebesgueov σ-prsten merljivih skupova i Lebesgueova mera

Sada ćemo konstruisati u $\mathbf{P}R^k$ σ-prsten $\mathfrak{M}(m)$, koji sadrži prsten $\mathfrak{E}$, takav da je restrikcija spoljne mere m^* sa $\mathbf{P}R^k$ na $\mathfrak{M}(m)$ jedna σ-aditivna funkcija na $\mathfrak{M}(m)$, a time i mera na $\mathfrak{M}(m)$. Ovo je centralno mesto u izlaganju teorije Lebesgueove mere.

Neka je $A \subset R^k$ i $B \subset R^k$ i stavimo

$$d(A, B) = m^*(A \,\Delta\, B).$$

Vodeći računa o I.2 (11), lako je videti da funkcija skupa d, definisana na $\mathbf{P}R^k \times \mathbf{P}R^k$, ima ove osobine:

$$(3)\qquad d(A, A) = 0, \quad d(A, B) = d(B, A), \quad d(A, B) \leqslant d(A, C) + d(C, B).$$

Međutim, $d(A, B) = 0$ ne povlači $A = B$. Na primer, ako je A jedan prebrojiv skup i $B = O$, biće

$$d(A, B) = m^*(A) = 0.$$

Zaista, ako n-tu tačku iz A pokrijemo intervalom I_n mere $< \varepsilon/2^n$, biće

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \qquad m(I_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

te je na osnovu definicije 1

$$m^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) < \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = \varepsilon.$$

Odavde sledi $m^*(A) = 0$, jer $\varepsilon > 0$ možemo birati proizvoljno malo.

Na osnovu osobina u (3), nenegativna funkcija d definiše jednu pseudometriku u $\mathbf{P}R^k$ (videti vežbanje II.1.20). Uvodeći adekvatnu relaciju ekvivalencije u $\mathbf{P}R^k$, mogli bismo skup-količnik na prirodan način da snabdemo metrikom. Međutim, to ovde nije od značaja. Radi kraćeg izražavanja uvešćemo samo sledeću konvenciju: Ako su $A_n (n = 1, 2, \ldots)$ i A skupovi iz R^k takvi da $d(A_n, A) \to 0$ kada $n \to \infty$, pisaćemo jednostavno $A_n \to A$.

$1m \in \mathcal{E}$ **Definicija 2.** Skup A iz R^k pripada *kolekciji* $\mathfrak{M}_K(m)$ ako postoji niz elementarnih skupova (A_n) tako da $A_n \to A$.

Skup A iz R^k pripada *kolekciji* $\mathfrak{M}(m)$ ako je najviše prebrojiva unija skupova iz $\mathfrak{M}_K(m)$.

Očigledno je $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{M}_K(m) \subset \mathfrak{M}(m) \subset \mathbf{P}R^k$ i $R^k \in \mathfrak{M}(m)$.

Stav 2. *$\mathfrak{M}(m)$ je σ-prsten i m^* je σ-aditivna funkcija skupa na $\mathfrak{M}(m)$.*

Na osnovu stava 2 je restrikcija spoljne mere m^* na σ-prsten $\mathfrak{M}(m)$ jedna mera na $\mathfrak{M}(m)$. No, kako na osnovu stava 1 tu restrikciju možemo shvatiti i kao proširenje mere m sa $\mathfrak{E}$ na $\mathfrak{M}(m)$, to ćemo je, pošto je ona i sama mera na $\mathfrak{M}(m)$, ubuduće označavati sa m.

Definicija 3. Skup $A \subset R^k$ je *merljiv u Lebesgueovom smislu* ako $A \in \mathfrak{M}(m)$ i *Lebesgueova mera* mu je $m(A) = m^*(A)$.

Kako Lebesgueov σ-prsten i Lebesgueova mera počivaju (preko pojma spoljne mere) na meri m elementarnih skupova u R^k, to ćemo (a i zbog kraćeg izražavanja) uz termine „merljiv u Lebesgueovom smislu" i „Lebesgueova mera" koristiti ravnopravno i nazive „m-merljiv" skup i „m-mera". S obzirom na uopštenja koja imamo u vidu, preciznije bi bilo govoriti o „$\mathfrak{M}(m)$-merljivom" skupu, ističući time njegovu pripadnost σ-prstenu $\mathfrak{M}(m)$, no to bi znatno opteretilo pisanje.

Za dokaz stava 2 koji je centralan u teoriji Lebesgueove mere potrebno nam je nekoliko pomoćnih stavova.

Lema 1. *$\mathfrak{M}_K(m)$ je prsten i na njemu je restrikcija od m^* konačna i aditivna funkcija skupa.*

$A \in \mathfrak{M}_K(m) \Rightarrow m^*A < +\infty$

Dokaz. Pre svega,

$$\left.\begin{array}{ll}(4) & d(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2)\\ (5) & d(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2)\\ (6) & d(A_1 - A_2, B_1 - B_2)\end{array}\right\} \leqslant d(A_1, B_1) + d(A_2, B_2).$$

Vodeći računa o definiciji funkcije $d(A, B)$ i osobini 3° spoljne mere (stav 1), ove relacije slede neposredno iz inkluzija I.2(12). Sem toga važi i

$$(7) \qquad |m^*(A) - m^*(B)| \leqslant d(A, B),$$

ukoliko je bar jedan od brojeva $m^*(A)$ i $m^*(B)$ konačan. Zaista, ako je, recimo, $m^*(B) < +\infty$ i $0 \leqslant m^*(B) \leqslant m^*(A)$, tada iz nejednačine u (3) sledi

$$d(A, O) \leqslant d(A, B) + d(B, O),$$

tj.

$$m^*(A) \leqslant d(A, B) + m^*(B).$$

Odavde, zbog $m^*(B) < +\infty$, sledi (7).

Neka A i $B \in \mathfrak{M}_K(m)$. Izaberimo nizove (A_n) i (B_n) u $\mathfrak{E}$ tako da $A_n \to A$ i $B_n \to B$. Tada iz (4—6) sledi

$$A_n \cup B_n \to A \cup B, \quad A_n \cap B_n \to A \cap B, \quad A_n - B_n \to A - B.$$

Prva i treća od ovih relacija kazuju da je $\mathfrak{M}_K(m)$ prsten, jer su sa (A_n) i (B_n), i $(A_n \cup B_n)$ i $(A_n - B_n)$ nizovi elementarnih skupova, pa $A \cup B$ i $A - B \in \mathfrak{M}_K(m)$.

Ako $A \in \mathfrak{M}_K(m)$, izaberimo $A_n \in \mathfrak{E}$ tako da $A_n \to A$. Tada je na osnovu (7)

$$(8) \qquad |m^*(A_n) - m^*(A)| \leqslant d(A_n, A) \to 0,$$

(A_n) niz elem. $\in \mathfrak{E}$

što znači da

$$(9) \qquad A_n \to A \quad \Rightarrow \quad m^*(A_n) \to m^*(A)$$

i da je $m^*(A) < +\infty$, jer su u (8) brojevi $m^*(A_n) = m(A_n)$ konačni za svako n, pošto su A_n elementarni skupovi. Restrikcija od m^* na $\mathfrak{M}_K(m)$ je, dakle, konačna funkcija.

Najzad, neka A i $B \in \mathfrak{M}_K(m)$ i neka je $A \cap B = O$. Ako su (A_n) i (B_n) nizovi elementarnih skupova takvi da $A_n \to A$ odnosno $B_n \to B$, iz aditivnosti funkcije m na prstenu $\mathfrak{E}$ sledi (osobina 3°, stav 2.1)

$$m(A_n) + m(B_n) = m(A_n \cup B_n) + m(A_n \cap B_n).$$

Vodimo li računa da je kod elementarnih skupova $m^* = m$, odavde dobijamo na osnovu (9), puštajući da $n \to \infty$,

$$m^*(A) + m^*(B) = m^*(A \cup B) + m^*(A \cap B),$$

što znači da je m^* aditivna na $\mathfrak{M}_K(m)$, jer $A \cap B = O$ povlači $m^*(A \cap B) = 0$.

Lema 2. *Ako $A \in \mathfrak{M}(m)$, skup A se može prikazati kao najviše prebrojiva unija* d i s j u n k t n i h *skupova A_n iz $\mathfrak{M}_K(m)$. Kad god je skup A najviše prebrojiva unija disjunktnih skupova A_n iz $\mathfrak{M}_K(m)$, onda važi*

$$(10) \qquad \boxed{m^*(A) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n).}$$

$A = \bigcup_1^{\infty} A_n$

$A_i \cap A_j = O$

Dokaz. Shodno definiciji kolekcije $\mathfrak{M}(m)$, postoje u $\mathfrak{M}_K(m)$ skupovi A_n' takvi da je $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n'$. Stavimo li

$$A_1=A_1' \quad \text{i} \quad A_n=\bigcup_{\nu=1}^{n} A_\nu' - \bigcup_{\nu=1}^{n-1} A_\nu' \quad (n=2,3,\ldots),$$

skupovi A_n pripadaće prstenu $\mathfrak{M}_K(m)$, $A_i \cap A_j = O\ (i \neq j)$ i $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

Da bismo dokazali drugo tvrđenje, primećujemo da je s jedne strane, na osnovu stava 1,

$$m^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n). \tag{11}$$

S druge strane, $A \supset \bigcup\limits_{\nu=1}^{n} A_\nu$ za svako n; no kako je m^* aditivna funkcija na $\mathfrak{M}_K(m)$ (lema 1), a skupovi A_n su disjunktni, imamo

$$m^*(A) \geqslant m^*\left(\bigcup_{\nu=1}^{n} A_\nu\right) = \sum_{\nu=1}^{n} m^*(A_\nu) \quad \text{za svako } n,$$

tj.

$$m^*(A) \geqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} m^*(A_\nu),$$

što zajedno sa (11) daje (10).

Jedan od rezultata leme 1 jeste da je restrikcija od m^* na $\mathfrak{M}_K(m)$ konačna funkcija, tj. da $A \in \mathfrak{M}_K(m) \Rightarrow m^*(A) < +\infty$. Sledeća lema tvrdi da važi i obrnuto. Prema tome, prsten $\mathfrak{M}_K(m)$ se može okarakterisati kao onaj deo kolekcije $\mathfrak{M}(m)$ čiji elementi imaju konačnu spoljnu meru; otud i indeks K (konačan) u oznaci $\mathfrak{M}_K(m)$.

Lema 3. *Ako $A \in \mathfrak{M}(m)$ i $m^*(A) < +\infty$, tada $A \in \mathfrak{M}_K(m)$.*

Dokaz. Na osnovu leme 2, postoje u $\mathfrak{M}_K(m)$ disjunktni skupovi A_n $(n=1,2,\ldots)$, takvi da je $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)=m^*(A)$. Zbog $m^*(A) < +\infty$, ovaj poslednji red je konvergentan. Označimo li $\bigcup\limits_{\nu=1}^{n} A_\nu$ sa B_n, slediće da

$$d(A,B_n)=m^*\left(\bigcup_{\nu=n+1}^{\infty} A_\nu\right) \overset{\text{L.2}}{=} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} m^*(A_\nu) \to 0, \quad n \to \infty,$$

tj. da $B_n \to A$. Na osnovu toga pokazaćemo da $A \in \mathfrak{M}_K(m)$. Zaista, kako B_n pripada prstenu $\mathfrak{M}_K(m)$ za svako n, to postoje nizovi (B_k^n) elementarnih skupova tako da $B_k^n \to B_n\ (k \to \infty)$ za svako fiksirano n. Za svako n $(=1,2,\ldots)$ izaberimo prirodni broj k_n tako da je $d(B_{k_n}^n, B_n) < 1/n$. Na osnovu nejednačine u (3) je tada

$$0 \leqslant d(B_{k_n}^n, A) \leqslant d(B_{k_n}^n, B_n) + d(B_n, A) < \frac{1}{n} + d(B_n, A),$$

odakle sledi da niz elementarnih skupova $B_{k_n}^n \to A$, što znači da $A \in \mathfrak{M}_K(m)$.

Dokaz stava 2. Prvo ćemo pokazati da je m^* σ-aditivna funkcija na $\mathfrak{M}(m)$. Neka je (A_n) niz disjunktnih skupova iz $\mathfrak{M}(m)$ i neka $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}(m)$. Razlikovaćemo dva slučaja, prema tome da li je $m^*(A_{n_0})=+\infty$ za neko n_0 $(1 \leqslant n_0 < +\infty)$ ili je $m^*(A_n) < +\infty$ za svako n.

U prvom slučaju

$$\boxed{m^*(A)=\sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)} \tag{12}$$

važi trivijalno, jer je desna strana tada $+\infty$, a zbog $A \supset A_{n_0}$ biće to i leva, jer je $m^*(A) \geqslant m^*(A_{n_0})$.

U drugom slučaju, na osnovu leme 3 sledi da svi $A_n \in \mathfrak{M}_K(m)$, te (12) važi na osnovu leme 2.

Ostaje da pokažemo da je $\mathfrak{M}(m)$ σ-prsten. Neka $A_n \in \mathfrak{M}(m)$ za $n=1, 2, \ldots$ Prema definiciji 1,

$$A_n=\bigcup_{\nu=1}^{\infty} A_\nu^n \quad \text{gde } A_\nu^n \in \mathfrak{M}_K(m) \text{ za svako } n \text{ i } \nu,$$

te skup

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=\bigcup_{\nu, n=1}^{\infty} A_\nu^n,$$

kao unija najviše prebrojivo mnogo skupova iz $\mathfrak{M}_K(m)$, pripada kolekciji $\mathfrak{M}(m)$. Dakle, sa A_n i $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ pripada $\mathfrak{M}(m)$.

Pokazaćemo, najzad, da iz A i $B \in \mathfrak{M}(m)$ sledi $A-B \in \mathfrak{M}(m)$. Neka je

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{i} \quad B=\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \qquad (A_n, B_n \in \mathfrak{M}_K(m)).$$

Kako za svako n i svako ν, $A_n \cap B_\nu$ pripada prstenu $\mathfrak{M}_K(m)$, to

$$\bigcup_{\nu=1}^{\infty} (A_n \cap B_\nu)=A_n \cap B \in \mathfrak{M}(m).$$

No, kako je

$$m^*(A_n \cap B) \leqslant m^*(A_n) < +\infty,$$

jer $A_n \in \mathfrak{M}_K(m)$, to na osnovu leme 3 $A_n \cap B \in \mathfrak{M}_K(m)$. Znači, i $A_n-B= =A_n-(A_n \cap B) \in \mathfrak{M}_K(m)$, a zbog $A-B=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n-B)$, skup $A-B$ kao unija najviše prebrojivo mnogo skupova iz $\mathfrak{M}_K(m)$ pripada $\mathfrak{M}(m)$. Time je stav 2 u potpunosti dokazan.

3.iii. Klase m-merljivih skupova

U ovoj tački ispitaćemo koje su poznate klase skupova iz R^k m-merljive, tj. leže u σ-prstenu $\mathfrak{M}(m)$.

Stav 3. *Otvoreni i zatvoreni skupovi u R^k su m-merljivi.*

Dokaz. Otvoreni skupovi u R^k su m-merljivi jer se, na osnovu stavova II.2.13 $(k=1)$ i II.2.14 $(k \geqslant 2)$, mogu prikazati kao najviše prebrojive unije elementarnih skupova — dakle, skupova iz $\mathfrak{M}_K(m)$. Kako $R^k \in \mathfrak{M}(m)$, to su zatvoreni skupovi m-merljivi kao komplementi otvorenih $(\mathbf{C}_{R^k} A=R^k-A)$.

Stav 4. *Ako* $A \in \mathfrak{M}(m)$, *svakom* $\varepsilon > 0$ *odgovara zatvoren skup* F *i otvoren skup* G, *tako da je*

$$\boxed{F \subset A \subset G}$$

i

$$m(A-F) < \varepsilon, \quad m(G-A) < \varepsilon.$$

Dokaz da postoji otvoren skup G navedenih osobina počiva na činjenici da se vrednost spoljne mere neće promeniti ako se u definiciji 1 ograničimo na pokrivanje otvorenim intervalima (jer rub ne utiče na meru intervala). Za G onda možemo uzeti jedno takvo dovoljno blisko pokrivanje. Analogni iskaz za zatvorene skupove sledi uzimanjem komplemenata.

Definicija 4. *Borelov skup* je svaki skup koji se može dobiti iz otvorenih skupova primenjujući na ove (jedno za drugim ~~i svejedno u kom poretku~~) najviše prebrojivo mnogo unija, preseka i komplementa.

Borelovi skupovi su, na primer, zatvoreni skupovi, prebojivi preseci otvorenih skupova i prebrojive unije zatvorenih skupova.

Stav 5. *Kolekcija Borelovih skupova* $\mathfrak{B}$ *obrazuje* σ*-prsten i* $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{M}(m)$.

Dokaz. Prvo tvrđenje sledi neposredno iz definicije kolekcije $\mathfrak{B}$, vodeći računa o $A-B = A \cap \complement B$. Drugo sledi iz stava 3, definicije Borelovih skupova i činjenice da je $\mathfrak{M}(m)$ σ-prsten.

Iz stava 5 sledi neposredno da je restrikcija od m sa $\mathfrak{M}(m)$ na $\mathfrak{B}$ jedna mera na $\mathfrak{B}$. Nazivamo je *Borelova mera*, a skupove iz $\mathfrak{B}$ *merljivim u Borelovom smislu*.

Kako je Borelov σ-prsten definisan isključivo preko skupovnih operacija i pojma otvorenog skupa, to je on nezavisan od Borelove mere. Tome nasuprot, između Lebesgueovog σ-prstena i Lebesgueove mere postoji uzajamna zavisnost, jer oba pojma počivaju u krajnjoj liniji na meri elementarnih skupova.

Suslin je dao primer skupa koji leži u $\mathfrak{M}(m)$ ali ne i u $\mathfrak{B}$, i time pokazao da je $\mathfrak{B}$ pravi deo od $\mathfrak{M}(m)$. Zato je od interesa

Stav 6. *Ako* $A \in \mathfrak{M}(m)$, *tada postoje Borelovi skupovi* B *i* C, *takvi da je*

$$B \subset A \subset C \tag{13}$$

i

$$m(A-B) = 0, \quad m(C-A) = 0. \tag{14}$$

Svaki m-merljiv skup A može se, dakle, prikazati kao unija jednog Borelovog skupa B i jednog skupa m-mere jednake nuli: $A = B \cup (A-B)$. $m(A-B)=0$

Dokaz stava 6. Na osnovu stava 4, za svako fiksirano n $(=1, 2, \ldots)$ postoji otvoreni skup G_n i zatvoreni skup F_n tako da je

$$F_n \subset A \subset G_n$$

i

$$m(A-F_n) < 1/n, \quad m(G_n-A) < 1/n.$$

Stavimo

$$B_n = \bigcup_{\nu=1}^{n} F_\nu \quad \text{i} \quad C_n = \bigcap_{\nu=1}^{n} G_\nu.$$

Tada je za svako n,

$$B_n \subset A \subset C_n$$

i

$$m(A-B_n) \leqslant m(A-F_n) < 1/n, \quad m(C_n-A) \leqslant m(G_n-A) < 1/n,$$

te Borelovi skupovi $B=\bigcup_{\nu=1}^{\infty} F_\nu$ i $C=\bigcap_{\nu=1}^{\infty} G_\nu$ zadovoljavaju uslove (13) i (14) stava 6. (Primeniti 2° stava 2.2 na monotono opadajući niz skupova $(A-B_n)$ odnosno (C_n-A)).

Na početku odeljka 3.ii, pokazali smo već da prebrojivi skupovi imaju spoljnu pa time i m-meru jednaku nuli (jer prebrojivi skupovi očigledno pripadaju $\mathfrak{M}(m)$). No ima i neprebrojivih (čak i perfektnih) skupova čija je m-mera jednaka nuli. Takav je, na primer, Cantorov skup F (II.2.ii). Sa tamošnjim oznakama je $F=\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, pa je F m-merljiv kao presek m-merljivih elementarnih skupova F_n. No kako je $F\subset F_n$ za svako n, to je $m(F)\leqslant m(F_n)=(2/3)^n$, odakle sledi tvrđenje kada pustimo da $n\to\infty$.

$=0$

Definicija 5. Ako neka osobina P važi na skupu A izuzimajući tačke čiji totalitet obrazuje skup m-mere jednake nuli, kažemo da osobina P važi *skoro svuda* (*s. s.*) na A.

Na primer, $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ s. s. na A znači da samo na jednom podskupu m-mere nula u A niz (f_n) ne konvergira ka f. O tome, koje su ili kako su raspoređene te izuzetne tačke u skupu A ne znamo ništa; drugim rečima, ni za jednu određenu tačku iz A ne možemo tvrditi da u njoj niz (f_n) konvergira ka f.

Vežbanja 3

1. Kolekcija skupova m-mere nula obrazuje σ-prsten.

2. Razmak $[a, b[$ je Borelov skup. [Prikazati ga, na primer, kao presek prebrojivo mnogo otvorenih razmaka ili kao uniju prebrojivo mnogo zatvorenih razmaka.]

3. Za dato $\varepsilon>0$ konstruisati otvoren skup $G\subset[0, 1]$ koji je svuda gust u $[0, 1]$ i čija je m-mera $m(G)=\varepsilon$. [Uzeti uniju dovoljno malih otvorenih intervala oko racionalnih tačaka u $]0,1[$.]

4. Neka m-merljivi skupovi $E_1, E_2, \ldots, E_n$ leže u razmaku $(0, 1)$. Ako svaka tačka iz $(0, 1)$ leži u bar r od ovih skupova (r fiksirano i $=1, 2, \ldots, n$), tada bar jedan od njih ima m-meru $\geqslant r/n$. [Kako $\bigcup_{k=1}^{n} E_k$ bar r puta pokriva razmak $(0, 1)$, to je $\sum_{k=1}^{n} m(E_k)\geqslant r$. Pretpostavka da je $m(E_k)<\frac{r}{n}$ za svako $k=1, 2, \ldots, n$ dovela bi onda do kontradikcije.]

4.i. m-merljive funkcije

$f: R^k \to R^*$

Ukoliko izričito ne naglasimo suprotno, u odeljcima 4 i 5 ćemo se isključivo baviti funkcijama koje preslikavaju R^k $(k\geqslant 1)$ u prošireni skup realnih brojeva R^*.

Definicija 1. Funkcija $f: R^k\to R^*$ je *m-merljiva* ako je bilo koji od skupova

(1) $x \in R^k$ $\{x: f(x)>c\}$, $= f^{-1}[c, +\infty]$

(2) $\{x: f(x)\geqslant c\}$,

(3) $\{x: f(x)<c\}$,

(4) $\{x: f(x)\leqslant c\}$,

m-merljiv tj. pripada $\mathfrak{M}(m)$ za svako realno c.

Prezicnije bi bilo reći da je funkcija f $\mathfrak{M}(m)$-merljiva, naročito ako se imaju u vidu uopštenja pojma merljivosti. No kako bi to znatno opteretilo pisanje, to ćemo samo izuzetno stavljati ovaj prefiks.

Da je definicija 1 valjana tvrdi

Stav 1. *Ako je jedan od skupova* (1—4) *m-merljiv za svako c, takvi su i ostala tri.*

Dokaz sledi na osnovu logičke inkluzije (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1).

Pretpostavimo da je skup (1) m-merljiv za svako c; m-merljivost skupa (2) sledi tada iz

$$\{x: f(x)\geqslant c\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x: f(x)>c-1/n\}.$$

Skup (3) je onda m-merljiv kao komplement skupa (2) a m-merljivost skupa (4) sledi iz m-merljivosti skupa (3) na osnovu reprezentacije

$$\{x: f(x)\leqslant c\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x: f(x)<c+1/n\}.$$

Najzad, skup (1) je m-merljiv kao komplement skupa (4).

U nekoliko narednih stavova sadržane su najvažnije osobine m-merljivih funkcija.

Stav 2. *Ako je f m-merljiva funkcija, takva je i $|f|$.*

Dokaz sledi na osnovu

$$\{x:|f(x)|<c\}=\{x: f(x)<c\}\cap\{x: f(x)>-c\}.$$

Stav 3. *Neka su f i g konačne m-merljive funkcije na R^k i neka je F neprekidna funkcija na R^2. Stavimo*

$$h(x)=F[f(x), g(x)],\quad x\in R^k.$$ f, g : R^k

Tad je h m-merljiva funkcija.

Odavde specijalno sledi da su $f+g$ i fg konačne m-merljive funkcije kad god su takve f i g.

Ograničenje na konačne funkcije je ovde neophodno da se u $f+g$ ili fg ne bi pojavili nedefinisani izrazi kao što su to, na primer, $(+\infty)-(+\infty)$ ili $0\cdot(+\infty)$. Međutim, ako je *m-merljivost* funkcije ono što nas u prvom redu interesuje, ova restrikcija se može oslabiti. Naime, svaka funkcija je m-merljiva na skupu m-mere nula. Zbog toga je opravdano govoriti o m-merljivoj funkciji na R^k i kada ova nije ni definisana na nekom skupu m-mere nula u R^k, jer ma kako je definisali na tom skupu to neće uticati na njenu m-merljivost na R^k. U tom svetlu treba tumačiti iskaz „da je zbir dve s. s. konačne m-merljive funkcije opet m-merljiva funkcija" (iako možda nije ni definisana na nekom skupu m-mere nula).

Dokaz stava 3. Stavimo

$$S_c=\{(u, v)\in R^2: F(u, v)>c\}.$$

$h(x)>c$

S_c je otvoren skup u R^2, pa se može prikazati kao prebrojiva unija zatvorenih intervala koji nemaju zajedničkih unutrašnjih tačaka (stav II.2.14):

$$S_c = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n,$$

gde je

$$I_n = \{(u, v) \in R^2 : \alpha_n \leqslant u \leqslant \beta_n, \quad \gamma_n \leqslant v \leqslant \delta_n\}.$$

Kako je skup

$$\{x : (f(x), g(x)) \in I_n\}$$

m-merljiv, jer se može napisati u obliku

$$\{x : f(x) \geqslant \alpha_n\} \cap \{x : f(x) \leqslant \beta_n\} \cap \{x : g(x) \geqslant \gamma_n\} \cap \{x : g(x) \leqslant \delta_n\},$$

to je m-merljiv i skup

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : (f(x), g(x)) \in I_n\} = \{x : (f(x), g(x)) \in S_c\} = \{x : h(x) > c\},$$

a to je tvrđenje stava 3.

Stav 4. *Neka je* (f_n) *niz* m*-merljivih funkcija. Tada su*

$$g(x) = \sup_n f_n(x) \quad i \quad h(x) = \inf_n f_n(x)$$

m*-merljive funkcije.*

Odavde specijalno sledi da su funkcije

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} = \begin{cases} f(x), & f(x) \geqslant 0, \\ 0, & f(x) \leqslant 0, \end{cases}$$

i

$$f^-(x) = \max\{-f(x), 0\} = \begin{cases} 0, & f(x) \geqslant 0, \\ -f(x), & f(x) \leqslant 0, \end{cases}$$

m-merljive, kad god je takva f. Na funkcije f^+ i f^- često ćemo se pozivati, jer se pomoću njih f i $|f|$ mogu razložiti na razliku i zbir dve nenegativne funkcije:

$$f = f^+ - f^-, \quad |f| = f^+ + f^-.$$

Dokaz stava 4. m-merljivost funkcije g sledi na osnovu

sup n

$$\{x : g(x) > c\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : f_n(x) > c\}.$$

Na sličan način se može pokazati da je h m-merljiva funkcija.

Stav 5. *Neka je* (f_n) *niz* m*-merljivih funkcija. Tada su*

$$g(x) = \overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x) \quad i \quad h(x) = \underline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)$$

m*-merljive funkcije.*

Specijalno, granična vrednost niza m-merljivih funkcija je m-merljiva funkcija. Šta više, ako niz m-merljivih funkcija (f_n) konvergira samo s. s. na A nekoj funkciji f, tada je f m-merljiva funkcija na A (u smislu primedbe posle stava 3).

Dokaz stava 5 sledi neposredno na osnovu stava 4, s obzirom da je prema stavu II.4.14

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x) = \inf_{k\geq 1} \sup_{n\geq k} f_n(x) \quad \text{i} \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} f_n(x) = \sup_{k\geq 1} \inf_{n\geq k} f_n(x).$$

$j: R^k \to [0, +\infty[$

4.ii. Jednostavne funkcije

Među m-merljivim funkcijama od posebnog interesa su jednostavne m-merljive funkcije.

Definicija 2. Funkcija $j(x)$, definisana na R^k, je *jednostavna funkcija* ako uzima samo konačno mnogo različitih vrednosti u $[0, +\infty]$.

Neka su c_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ sve vrednosti, međusobno različite, koje jednostavna funkcija j uzima na R^k i neka je

$$\boxed{E_\nu = \{x : j(x) = c_\nu\}.}$$

Lako je videti da je j m-merljiva funkcija tada i samo tada ako su m-merljivi svi skupovi E_ν. Skupovi E_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ su disjunktni i $\boxed{\bigcup_{\nu=1}^{n} E_\nu = R^k.}$

Definicija 3. *Karakteristična funkcija* $K_E(x)$ skupa $E \subset R^k$ određena je sa

$$K_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \notin E. \end{cases}$$

Svaka jednostavna funkcija j koja uzima vrednosti c_ν na E_ν $(\nu = 1, 2, \ldots n)$ može se izraziti kao linearna kombinacija karakterističnih funkcija skupova E_ν:

$$j(x) = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu K_{E_\nu}(x). \qquad x \in E_\nu \Rightarrow j(x) = c_\nu$$

Stav 6. *Neka je f nenegativna m-merljiva funkcija na R^k. Tada postoji niz m-merljivih jednostavnih funkcija (j_n) takav da*

$$0 \leq j_1(x) \leq j_2(x) \leq \cdots \leq f(x) \qquad f \geq 0$$

i

$$j_n(x) \to f(x) \quad \textit{za svako} \quad x \in R^k.$$

Šta više, ako je f ograničena funkcija, tada niz (j_n) konvergira uniformno ka f.

Dokaz. Stavimo

$$E_{n,k} = \left\{ x : \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n} \right\}, \quad F_n = \{x : f(x) \geq n\}$$

za $k = 1, 2, \ldots, n2^n$ i $n = 1, 2, \ldots$. Skupovi $E_{n,k}$ i F_n su disjunktni za fiksirano n i svako $k = 1, 2, \ldots, n2^n$. Pokazaćemo da je

$$j_n(x) = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} K_{E_{n,k}}(x) + n K_{F_k}(x)$$

niz m-merljivih (jer takvi su skupovi $E_{n,k}$ i F_n) jednostavnih funkcija koji monotono konvergira ka $f(x)$ za svako $x \in R^k$. Zaista, neka je x proizvoljna fiksirana tačka u R^k. Pretpostavimo, prvo, da je $f(x)$ konačno. Neka je N prirodni broj takav da je

$$N \leqslant f(x) < N+1.$$

Razlikovaćemo dva slučaja, prema tome da li je 1) $n \leqslant N$ ili je 2) $n > N$.

U prvom slučaju, zbog $f(x) \geqslant N$, tačka $x \in F_n$ te je

$$K_{F_n}(x) = 1 \quad \text{i} \quad K_{E_{n,k}}(x) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n2^n,\ n = 1, 2, \dots, N).$$

U drugom slučaju, zbog $f(x) < N+1$, tačka $x \notin F_n$ te je

$$K_{F_n}(x) = 0 \quad (n = N+1,\ N+2, \dots)$$

Svakom fiksiranom $n \geqslant N+1$ odredimo zatim prirodni broj k_n $(1 \leqslant k_n \leqslant n2^n)$ takav da je

$$\frac{k_n - 1}{2^n} \leqslant f(x) < \frac{k_n}{2^n}. \tag{5}$$

Tada je

$$K_{E_{n,k}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{za} \quad k = k_n, \\ 0 & \text{za} \quad k \neq k_n. \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots, n2^n,\ n = N+1, N+2, \dots).$$

Prema tome, niz (j_n) svodi se na

$$j_n(x) = \begin{cases} n & \text{za} \quad n \leqslant N, \\ (k_n - 1)/2^n & \text{za} \quad n \geqslant N+1. \end{cases}$$

Odavde sledi da $j_n(x) \to f(x)$, jer je, na osnovu (5),

$$0 \leqslant f(x) - \frac{k_n - 1}{2^n} < \frac{1}{2^n} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Ako je, pak, $f(x) = +\infty$ za uočeno x, tvrđenje lako sledi, jer je, zbog

$$K_{F_n}(x) = 1 \quad \text{i} \quad K_{E_{n,k}}(x) = 0 \quad \text{za svako } n,$$

$j_n(x) = n$.

4.iii. Konvergencija po m-meri

U ovom pododeljku ograničavamo se na funkije koje su s.s. konačne, tj. za koje je $|f(x)| < +\infty$ s.s. na definicionom području.

Ako niz funkcija (f_n) konvergira za svako $x \in A$, tada on u opštem slučaju ne konvergira uniformno na A. Međutim, uvek je moguće postići, menjajući na adekvatan način vrednost funkcija f_n na pogodno izabranom skupu proizvoljno male (ali pozitivne) m-mere, da izmenjeni niz uniformno konvergira na A. To u suštini tvrdi

Stav 7 (Egorov). *Neka niz m-merljivih funkcija (f_n) konvergira konačnoj vrednosti s.s. na $A \subset R^k$ i neka je $m(A) < +\infty$. Tada za svako $\varepsilon > 0$ postoji m-merljiv skup $B \subset A$ takav da je $m(A - B) < \varepsilon$ i da na B niz (f_n) uniformno konvergira.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$ fiksirano i neka je $A' \subset A$ skup na kome (f_n) konvergira konačnoj funkciji f. Stavimo za fiksirano $n\,(=1, 2, \dots)$

$$A_n = A_n(\varepsilon) = \{x \in A' : |f(x) - f_k(x)| < \varepsilon \ \ \forall\ k \geqslant n\}.$$

Kako je

$$A_n=\{x\in A':|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon\}\cap\{x\in A':|f(x)-f_{n+1}(x)|<\varepsilon\}\cap\ldots,$$

to je skup A_n, kao presek prebrojivo mnogo m-merljivih skupova, i sam m-merljiv. Sem toga,

$$A_1\subset A_2\subset A_3\subset\ldots$$

i

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=A',$$

jer, zbog $f_n\to f$ za svako $x\in A'$, tačka x leži u A_n za dovoljno veliko n. Prema tome, skupovi A_1, A_2-A_1, $A_3-A_2,\ldots$ su međusobno disjunktni i

$$A_1+\bigcup_{n=2}^{\infty}(A_n-A_{n-1})=A',$$

pa je na osnovu σ-aditivnosti m-mere

$$m(A')=m(A_1)+m(A_2-A_1)+m(A_3-A_2)+\ldots$$

Zbog $m(A')<+\infty$, red na desnoj strani konvergira, pa je uvek moguće odrediti prirodni broj $N=N(\varepsilon)$ tako da je

$$m(A')-m(A_1)-m(A_2-A_1)-\cdots-m(A_N-A_{N-1})<\varepsilon,$$

tj.

$$m[A'-A_{N(\varepsilon)}(\varepsilon)]<\varepsilon. \tag{6}$$

Uzmimo sada za ε niz $(\varepsilon_i)=(\varepsilon/2^i)$ $(i=1,2,\ldots)$. Na osnovu (6) postoji onda niz prirodnih brojeva $M_i=N(\varepsilon_i)$ i niz m-merljivih skupova $B_i=A_{N(\varepsilon_i)}(\varepsilon_i)$ tako da je

$$m(A'-B_i)<\varepsilon/2^i \quad (i=1,2,\ldots). \tag{7}$$

S obzirom na definiciju skupova B_i za svako $x\in B_i$ važi

$$|f(x)-f_k(x)|<\varepsilon/2^i \quad \text{kad god je} \quad k\geqslant M_i \ (i=1,2,\ldots).$$

Stavimo $B=\bigcap_{i=1}^{\infty}B_i$. Za svako $x\in B$ i svako (fiksirano) $i=1,2,\ldots$ je onda

$$|f(x)-f_k(x)|<\varepsilon/2^i \quad \text{kad god je} \quad k\geqslant M_i,$$

tj. niz (f_n) konvergira uniformno na B funkciji f (jer se $\varepsilon/2^i$ za dovoljno veliko i može učiniti proizvoljno malim; $\varepsilon>0$ je fiksirano). Međutim, zbog $m(A-A')=0$ i

$$A'-B\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}(A'-B_i),$$

na osnovu (7) sledi

$$m(A-B)=m(A'-B)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}m(A'-B_i)<\varepsilon\sum_{i=1}^{\infty}2^{-i}=\varepsilon.$$

Time je stav 7 dokazan.

Koristeći pojam m-mere može se definisati jedan specijalan vid konvergencije niza funkcija.

Definicija 4. Neka je na $A \subset R^k$ dat niz (f_n) s. s. konačnih m-merljivih funkcija i neka je takva i funkcija f. Ako svakom $\varepsilon > 0$ odgovara prirodni broj N tako da je za $n > N$

$$m\{x \in A : |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon\} < \varepsilon. \tag{8}$$

kažemo da niz (f_n) *po m-meri konvergira* na A funkciji f.

Primećujemo da bez ograničenja na s. s. konačne funkcije, definicija 4 ne bi imala smisla.

Samo po sebi nameće se pitanje poređenja između konvergencije i konvergencije po m-meri jednog niza funkcija. Sledeći iskazi kazuju da je konvergencija po m-meri slabija i od konvergencije skoro svuda.

Stav 8. *Neka je $A \subset R^k$ i $m(A) < +\infty$. Ako niz m-merljivih funkcija $f_n \to f$ s. s. na A, tada (f_n) i po m-meri konvergira ka f na A.*

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Na osnovu stava 7, postoji skup $B \subset A$ takav da je $m(A - B) < \varepsilon$ i da $f_n \to f$ uniformno na B. Znači, postoji prirodni broj N tako da za svako $n > N$ i za svako $x \in B$ važi $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$. Drugim rečima, za svako $n > N$ može biti $|f(x) - f_n(x)| > \varepsilon$ samo na skupu $C_A B$ čija je m-mera manja od ε, a to znači da f_n po m-meri konvergira ka f na A.

Iskaz obrnut stavu 8 nije tačan, kao što to pokazuje sledeći kontraprimer. Za svaki prirodni broj k definišimo na $[0, 1[$ k funkcija:

$$f_i^{(k)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{za} \quad x \in \left[\dfrac{i-1}{k}, \dfrac{i}{k}\right[\\ 0 & \text{za} \quad x \notin \left[\dfrac{i-1}{k}, \dfrac{i}{k}\right[\end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Sve ove funkcije $(k = 1, 2, \ldots)$ poređajmo u niz

$$g_1 = f_1^{(1)}, \quad g_2 = f_1^{(2)}, \quad g_3 = f_2^{(2)}, \quad g_4 = f_1^{(3)}, \quad g_5 = f_2^{(3)}, \ldots$$

Pokazaćemo, prvo, da niz (g_n) po m-meri konvergira nuli. Zaista, ako je $g_n = f_i^{(k)}$, skup tačaka $\{x : |g_n| > \varepsilon\}$ $(0 < \varepsilon < 1)$ svodi se na razmak $\left[\dfrac{i-1}{k}, \dfrac{i}{k}\right[$. Dužina ovoga je $1/k$, pa se za dovoljno veliko n (a time i k) može učiniti manjom od ε. Dakle, za dovoljno veliko n je

$$m\{x : |g_n| > \varepsilon\} < \varepsilon,$$

što predstavlja tvrđenje.

Međutim, niz (g_n) ne konvergira nuli s. s. na $[0, 1[$. Zaista, za svako $x_0 \in [0, 1[$ u nizu $(g_n(x_0))$ ima beskonačno mnogo članova jednakih 1 i beskonačno mnogo članova jednakih 0, te niz (g_n) oscilira u tački x_0.

Zato je od značaja

Stav 9. *Neka je $A \subset R^k$ i $m(A) < +\infty$. Ako niz m-merljivih funkcija (f_n) po m-meri konvergira ka f na A, tada postoji delimični niz (f_{n_i}) koji s. s. na A konvergira ka f.*

Dokaz. Neka je (ε_i) jedan nula-niz pozitivnih brojeva takav da red $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i$ konvergira. Na osnovu definicije konvergencije po m-meri, postoji prirodni broj n_1 takav da skup $A_1 \subset A$ na kome je

$$|f(x) - f_{n_1}(x)| > \varepsilon_1 \quad \text{ima meru} \quad m(A_1) < \varepsilon_1.$$

Zatim, postoji prirodni broj $n_2 > n_1$ takav da skup $A_2 \subset A$ na kome je

$$|f(x) - f_{n_2}(x)| > \varepsilon_2 \quad \text{ima meru} \quad m(A_2) < \varepsilon_2.$$

Itd. Postoji, dakle, monotono rastući niz prirodnih brojeva (n_i) $(i = 1, 2, \dots)$ takav da skupovi $A_i \subset A$ na kojima je

$$(9) \qquad |f(x) - f_{n_i}(x)| > \varepsilon_i \quad \text{imaju meru} \quad m(A_i) < \varepsilon_i.$$

Pokazaćemo da delimični niz (f_{n_i}) konvergira ka f s.s. na A.

Neka je $\varepsilon > 0$. Odredimo prirodni broj N tako da je

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} \varepsilon_i < \varepsilon$$

i stavimo

$$B_j = A - \bigcup_{i=j+1}^{\infty} A_i \quad (j = 0, 1, 2, \dots).$$

Neka $x \in B_j$ (j fiksirano). Tada x ne pripada nijednom od skupova A_{j+k} $(k = 1, 2, \dots)$, te je na osnovu (9)

$$|f(x) - f_{n_{j+k}}(x)| \leqslant \varepsilon_{j+k} \quad \text{za} \quad k = 1, 2, \dots$$

Puštajući ovde da $k \to \infty$, slediće da (f_{n_i}) konvergira ka f (uniformno) na B_j (za svako $j = 1, 2, \dots$). No tada $f_{n_i} \to f$ i na $C = \bigcup_{j=0}^{\infty} B_j$, odakle sledi da $f_{n_i} \to f$ s.s. na A, jer je $C \subset A$ i $m(A - C) = 0$. Zaista,

$$C = \bigcup_{j=0}^{\infty} \left(A - \bigcup_{i=j+1}^{\infty} A_i\right) = A - \bigcap_{j=0}^{\infty} \left(\bigcup_{i=j+1}^{\infty} A_i\right),$$

a zbog

$$\bigcap_{j=0}^{\infty} \left(\bigcup_{i=j+1}^{\infty} A_i\right) \subset \bigcup_{i=l}^{\infty} A_i \quad \text{za svako } l,$$

sledi

$$m\left(\bigcap_{j=0}^{\infty} \bigcup_{i=j+1}^{\infty} A_i\right) \leqslant m\left(\bigcup_{i=N+1}^{\infty} A_i\right) \leqslant \sum_{i=N+1}^{\infty} \varepsilon_i < \varepsilon.$$

Time je stav 9 u potpunosti dokazan.

Vežbanja 4

1. Funkcija $f\colon R^k \to R^*$ je m-merljiva ako je m-merljiv skup $\{x : f(x) \geqslant r\}$ za svako racionalno r.

2. Funkcija $f : R \to R^*$ ograničene varijacije na $[a, b]$ je m-merljiva.

3. Neprekidna funkcija $f : R^k \to R^*$ je m-merljiva. [Skup $\{x : f(x) > c\}$ je otvoren, dakle, m-merljiv.]

4. Funkcija $f(x) = \lim\limits_{m \to \infty} \lim\limits_{n \to \infty} (\cos m!\, \pi x)^{2n}$ je m-merljiva. [$f(x) = 1$ za x racionalno, inače je $= 0$. Naime, $\lim\limits_{n \to \infty} (\cos m!\, \pi x)^{2n} = 1$ za $m!\, x =$ celom broju, inače je $= 0$. Kada je x racionalan broj, $m!\, x$ je ceo broj ako je m dovoljno veliko.]

5. Ako (f_n) i (g_n) konvergiraju po m-meri ka f odnosno g na A $(m(A) < +\infty)$, tada $(f_n + g_n)$ i $(f_n g_n)$ konvergiraju po m-meri ka $f + g$ odnosno fg.

6. Neka je (f_n) niz m-merljivih funkcija. Pokazati da je skup tačaka u kojima niz funkcija (f_n) konvergira m-merljiv. [Skupovi $\{x: \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n(x) \geqslant c\}$ i $\{x: \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n(x) \leqslant c\}$ su m-merljivi za svako c, pa je takav i njihov presek.]

7. Neka je (E_n) niz m-merljivih skupova u R^k takav da je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m(E_n) < +\infty$. Tada skoro sve tačke $x \in R^k$ leže u najviše konačno mnogo od skupova E_n. [Neka je A skup svih tačaka $x \in R^k$ koje leže u beskonačno mnogim od skupova E_n. Tvrđenje sledi na osnovu $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{\nu=n}^{\infty} E_\nu$.]

5.i. Lebesgueov integral pozitivne funkcije

Pre svega, uvešćemo jednu konvenciju. Kako, po definiciji, m-mera uzima vrednosti u $[0, +\infty]$, to se u teoriji integracije neumitno javlja proizvod $0 \cdot (+\infty)$; mi ćemo ovom proizvodu pripisati vrednost 0, koliko god to izgledalo čudno na prvi pogled. Opravdanje možemo naći u tome što i sa tom konvencijom bez ograničenja važe komutativni, asocijativni i distributivni zakon u $[0, +\infty]$. Jedino treba obratiti pažnju da iz $a+b=a+c$ sledi $b=c$ samo ako je $a < +\infty$, kao i da iz $ab=ac$ sledi $b=c$ samo ako je $0 < a < +\infty$.

Lebesgueov integral m-merljive funkcije $f: E \to R^*$ $(E \subset R^k)$ definisaćemo u tri koraka: prvo za jednostavne, zatim za nenegativne, i najzad za realne funkcije.

Definicija 1. Neka je

$$j(x) = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu K_{E_\nu}(x)$$

jednostavna m-merljiva funkcija na R^k, gde su c_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ (međusobno različite) vrednosti koje ona uzima na E_ν. *Lebesgueov integral* od j na m-merljivom skupu $E \subset R^k$ definisan je sa

$$\int_E j(x)\, dm = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu\, m(E_\nu \cap E).$$

Primećujemo da već ovde koristimo konvenciju $0 \cdot (+\infty) = 0$; recimo, ako je za neko ν, $c_\nu = 0$ a $m(E_\nu \cap E) = +\infty$.

Specijalno, ako je $j(x) = K_B(x)$ $(B \subset R^k)$ imamo

$$\int_E K_B(x)\, dm = m(B \cap E).$$

B E

Definicija 2. Neka je $E \subset R^k$ m-merljiv skup i neka je f nenegativna m-merljiva funkcija na R^k. Lebesgueov integral funkcije f na skupu E definisan je sa

$$\boxed{\int_E f(x)\, dm = \sup \int_E j(x)\, dm,} = \sup_{j(x)} \sum_{\nu=1} c_\nu\, m(E_\nu \cap$$

gde se supremum uzima preko svih jednostavnih m-merljivih funkcija j koje zadovoljavaju $0 \leqslant j(x) \leqslant f(x)$ na R^k.

$$\int_E f(x)\, dm \geqslant \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu\, m(E_\nu \cap E)$$

Svaka nenegativna m-merljiva funkcija f ima, dakle, Lebesgueov integral na svakom m-merljivom skupu E, ali ovaj može imati i vrednost $+\infty$; no jedino kada je vrednost Lebesgueovog integrala *konačan* broj kažemo da je funkcija f *integrabilna u Lebesgueovom smislu na* E.

Radi kraćeg izražavanja, najčešće ćemo govoriti o m-integralu odnosno o m-integrabilnosti, ističući na taj način meru m na kojoj počiva Lebesgueov integral.

Očigledno je da se m-integral u smislu definicije 2 svodi na onaj u smislu definicije 1 kad god je f jednostavna funkcija; tada je, naime, baš f najveća od jednostavnih funkcija j koje se pojavljuju u definiciji 2. Time je opravdano što smo u oba slučaja upotrebili istu simboliku i isti naziv. Najčešće umesto $\int_E f(x)\,dm$ pišemo $\int_E f\,dm$. Ako je E interval $I=(a,b)$ u R, tada je uobičajena oznaka $\int_a^b f\,dm$ umesto $\int_I f\,dm$.

Ubuduće ćemo smatrati da su sve funkcije i svi skupovi o kojima je reč m-merljivi i kada to posebno ne istaknemo.

Sledeće osobine m-integrala neposredno slede iz definicije 2:

Stav 1. 1° *Iz* $0 \leqslant f \leqslant g$ *na* E *sledi* $\int_E f\,dm \leqslant \int_E g\,dm$.

2° *Iz* $A \subset B$ *i* $f \geqslant 0$ *sledi* $\int_A f\,dm \leqslant \int_B f\,dm$.

3° *Ako je* $f \geqslant 0$ *i* c *konstanta* $(0 \leqslant c < +\infty)$, *tada je*

$$\int_E cf\,dm = c\int_E f\,dm.$$

4° *Ako je* $f(x)=0$ *za svako* $x \in E$, *tada je* $\int_E f\,dm=0$, *čak i kada je* $m(E)=+\infty$.

5° *Ako je* $m(E)=0$, *tada je* $\int_E f\,dm=0$, *čak i kada je* $f(x)=+\infty$ *za svako* $x \in E$.

6° *Ako je* $f \geqslant 0$, *tada je*

$$\int_E f\,dm = \int_{R^k} K_E \cdot f\,dm.$$

Ako je $0 \leqslant f \leqslant g$, tada iz 1° sledi da je funkcija f m-integrabilna ako je takva funkcija g. Specijalno, ako je $0 \leqslant f \leqslant M$ (M konstanta) i $m(E) < +\infty$, tada je f m-integrabilna, jer je $\int_E M\,dm = Mm(E) < +\infty$.

Osobina 6° kazuje da ne bi predstavljalo nikakvo ograničenje da smo *a priori* m-integral funkcije $f: R^k \to [0, +\infty]$ definisali isključivo na čitavom prostoru R^k. Tada bi 6° poslužilo kao definicija m-integrala nad podskupom E iz R^k. Ovu primedbu ćemo ubuduće često koristiti i formulisati pojedine iskaze o integralima nad čitavim prostorom R^k kao integracionim područjem; na osnovu 6° slediće otud odgovarajući iskazi gde je integraciono područje neki m-merljivi podskup u R^k.

Primećujemo da ako je nenegativna funkcija $f: R^k \to R^*$ m-integrabilna na R^k da je ona tada konačna s.s. na R^k. Zaista, kada bismo imali

$$f(x) = +\infty \quad \text{za svako} \quad x \in E \subset R^k \quad \text{i} \quad m(E) > 0,$$

iz 1° i 6° stava 1 sledilo bi

$$\int_{R^k} f\,dm \geqslant \int_{R^k} K_E \cdot f\,dm = \int_E f\,dm = (+\infty)\cdot m(E) = +\infty,$$

suprotno pretpostavci da je f m-integrabilna.

Pre nego što pređemo na izlaganje bitnih osobina m-integrala nenegativne funkcije dokazaćemo dve osobine m-integrala jednostavnih funkcija.

Lema 1. *Neka je j jednostavna m-merljiva funkcija. Kada skup E prolazi kolekciju m-merljivih skupova $\mathfrak{M}(m)$, tada*

$$\phi(E) = \int_E j\,dm$$

definiše jednu meru na $\mathfrak{M}(m)$.

Dokaz. Očigledno je $\phi \geqslant 0$, jer vrednosti jednostavne funkcije j leže u $[0, +\infty[$. Neka su E_n m-merljivi skupovi $(n = 1, 2, \ldots)$, $E_i \cap E_j = O$ $(i \neq j)$ i neka je $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E$. Ako su c_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, m)$ vrednosti koje j uzima na A_ν, tada je

$$\phi(E) = \sum_{\nu=1}^{m} c_\nu m(A_\nu \cap E) = \sum_{\nu=1}^{m} c_\nu m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_\nu \cap E_n)\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{m} c_\nu m(A_\nu \cap E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi(E_n),$$

tj. ϕ je σ-aditivna funkcija skupa na $\mathfrak{M}(m)$.

Lema 2. *Ako su j_1 i j_2 jednostavne m-merljive funkcije, tada je*

$$\int_{R^k} (j_1 + j_2)\,dm = \int_{R^k} j_1\,dm + \int_{R^k} j_2\,dm.$$

Dokaz. Označimo sa c_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ i sa d_μ $(\mu = 1, 2, \ldots, m)$ vrednosti koje jednostavne funkcije j_1 i j_2 uzimaju na A_ν odnosno na B_μ. Ako stavimo $C_{\nu\mu} = A_\nu \cap B_\mu$, tada je s jedne strane

$$\int_{C_{\nu\mu}} (j_1 + j_2)\,dm = (c_\nu + d_\mu)\,m(C_{\nu\mu}),$$

dok je s druge strane

$$\int_{C_{\nu\mu}} j_1\,dm = c_\nu\,m(C_{\nu\mu}), \quad \int_{C_{\nu\mu}} j_2\,dm = d_\mu\,m(C_{\nu\mu}).$$

Tvrđenje leme 2 važi, dakle, za integraciono područje $C_{\nu\mu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n;$ $\mu = 1, 2, \ldots, m)$. Na osnovu leme 1 ono tada važi i na R^k, jer je R^k unija disjunktnih skupova $C_{\nu\mu}$.

Jedna od karakterističnih osobina m-integrala jeste što se on relativno jednostavno može primeniti na konvergentne nizove funkcija. Mi ćemo ovde izložiti više takvih iskaza; prvi od njih je

Stav 2 (Beppo-Levi). *Neka je (f_n) monotono rastući niz nenegativnih m-merljivih funkcija na R^k, tj. neka je*

$$0 \leqslant f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \cdots \leqslant +\infty \quad \text{za svako } x \in R^k.$$

Ako stavimo

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x),$$

tada je

$$\lim_{n \to \infty} \int_{R^k} f_n\,dm = \int_{R^k} f\,dm. \tag{1}$$

Primećujemo da, s jedne strane, u stavu nije pretpostavljena m-integrabilnost funkcija f_n. S druge strane, kako $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ postoji (kao konačan broj ili $+\infty$) za svako $x \in R^k$, funkcija f je jednoznačno definisana i m-merljiva (stav 4.5), ali ne mora da bude m-integrabilna čak i kada su takve funkcije f_n (može, naime, da bude $\int_{R^k} f\,dm = +\infty$). Ono, što ovde želimo da istaknemo jeste da (1) važi i kada f nije m-integrabilna ili kada monotono rastući niz brojeva $\int_{R^k} f_n\,dm$ divergira ka $+\infty$, i to u smislu da je $+\infty = +\infty$. Iz dokaza stava 1 sledi, naime:

1° *Ako je* $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{R^k} f_n\,dm$ konačan, tada je f m-integrabilna na R^k i važi (1).

2° Ako je f m-integrabilna na R^k, tada niz $\int_{R^k} f_n\,dm$ konvergira (konačnom broju) i važi (1).

3° Ako niz $\int_{R^k} f_n\,dm$ divergira ka $+\infty$, tada f nije m-integrabilna na R^k, tj. $\int_{R^k} f\,dm = +\infty$, pa (1) važi u proširenom smislu.

4° Ako f nije m-integrabilna na R^k, tj. $\int_{R^k} f\,dm = +\infty$, tada niz integrala $\int_{R^k} f_n\,dm$ divergira ka $+\infty$, pa (1) važi u proširenom smislu.

Dokaz stava 2. Kako je $\int_{R^k} f_n\,dm$ monotono rastući niz brojeva, to on ili konvergira ili određeno divergira, tj.

$$\int_{R^k} f_n\,dm \to \omega \quad (n\to\infty) \tag{2}$$

gde je ω konačan broj ili $+\infty$ (stav II.4.11).

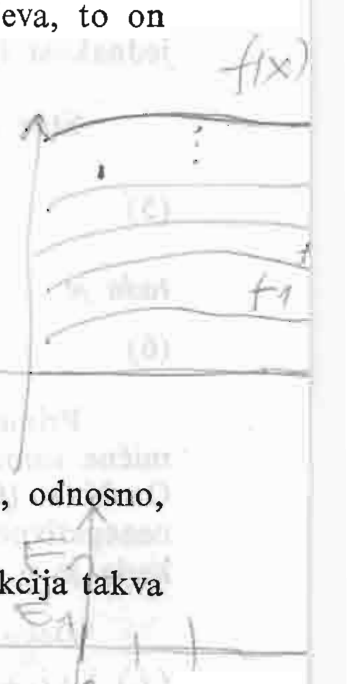
Zbog $f_n(x) \leqslant f(x)$ za svako $x \in R^k$, imamo

$$\int_{R^k} f_n\,dm \leqslant \int_{R^k} f\,dm,$$

odakle, kada $n\to\infty$, sledi

$$\omega \leqslant \int_{R^k} f\,dm. \tag{3}$$

Odavde zaključujemo: ako je $\omega = +\infty$ tada f nije m-integrabilna, odnosno, ako je f m-integrabilna tada niz $\int_{R^k} f_n\,dm$ konvergira.

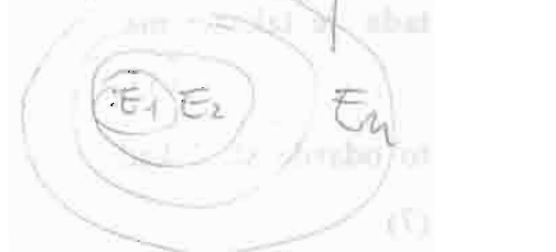


Neka je c realan broj, $0 < c < 1$, i neka je j jednostavna funkcija takva da je $0 \leqslant j(x) \leqslant f(x)$ na R^k. Stavimo

$$E_n = \{x : f_n(x) \geqslant cj(x)\} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Zbog monotonije niza (f_n),

$$E_1 \subset E_2 \subset \ldots,$$



a zbog $f_n \to f$ za svako $x \in R^k$, važi

pokazano

$$\boxed{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = R^k.}$$

Zaista, ako je za neko $x \in R^k$ $f(x) = 0$, tada je i $f_1(x) = 0$, pa $x \in E_1 \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Ako je, pak, za neko $x \in R^k$ $f(x) > 0$, tada je $cj(x) < f(x)$ zbog $c < 1$, pa $x \in E_n$ za dovoljno veliko n. Znači, $R^k \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$.

Na osnovu definicije skupova E_n, za svako $n = 1, 2, \ldots$ je

$$\int_{R^k} f_n\,dm \geqslant \int_{R^k} K_{E_n} \cdot f_n\,dm = \int_{E_n} f_n\,dm \geqslant c \int_{E_n} j\,dm.$$

(1)

Ako ovde pustimo da $n \to \infty$, slediće prema (2)

$$\omega \geqslant c \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} j\, dm.$$

No kako je integral jednostavne funkcije σ-aditivna funkcija skupa na $\mathfrak{M}(m)$ (lema 1), to je na osnovu 1° stava 2.2 sa $\Phi(E) = \int_E j\, dm$ i $\mathfrak{P} = \mathfrak{M}(m)$

$$\omega \geqslant c \int_{R^k} j\, dm \text{ za svako } c,\ 0 < c < 1.$$

Ako ovde pustimo da $c \to 1-0$, dobićemo

$$\omega \geqslant \int_{R^k} j\, dm$$

$\forall j(x) :\ 0 \leqslant j(x) \leqslant f(x)$

za svaku jednostavnu funkciju j koja zadovoljava $0 \leqslant j(x) \leqslant f(x)$ na R^k. Prema tome, važi i

$$\omega \geqslant \int_{R^k} f\, dm. \tag{4}$$

Odavde, pre svega, zaključujemo: Ako je $\omega < +\infty$ tada je f m-integrabilna, odnosno, ako f nije m-integrabilna tada je $\omega = +\infty$. Iz (2), (3) i (4) sledi jednakost (1).

Stav 3. *Neka je (f_n) niz nenegativnih m-merljivih funkcija na R^k. Ako stavimo*

$f_n(x) \geqslant 0$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \tag{5}$$

tada je

$$\int_{R^k} f\, dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{R^k} f_n\, dm. \tag{6}$$

Primećujemo da je funkcija f u (5) definisana za svako $x \in R^k$, jer delimične sume reda na desnoj strani obrazuju monotono rastući niz funkcija. Osobina (6) m-integrala može se i ovako interpretirati: red čiji su članovi nenegativne m-merljive funkcije može se bez daljeg integrisati član po član kada je u pitanju m-integral.

Dokaz stava 3. Na osnovu stava 4.6 postoje monotono rastući nizovi (j_n') i (j_n'') jednostavnih m-merljivih funkcija, tako da $j_n' \to f_1$ i $j_n'' \to f_2$. No tada je takav i niz $(j_n' + j_n'')$ i $j_n' + j_n'' \to f_1 + f_2$. Kako je, prema lemi 2,

$$\int_{R^k} (j_n' + j_n'')\, dm = \int_{R^k} j_n'\, dm + \int_{R^k} j_n''\, dm \text{ za svako } n,$$

to odavde sledi kada $n \to \infty$ na osnovu stava 2:

$$\int_{R^k} (f_1 + f_2)\, dm = \int_{R^k} f_1\, dm + \int_{R^k} f_2\, dm. \tag{7}$$

Stavimo $S_N = f_1 + f_2 + \cdots + f_N$ $(N = 1, 2, \ldots)$. Iz (7) indukcijom sledi

$$\int_{R^k} S_N\, dm = \sum_{n=1}^{N} \int_{R^k} f_n\, dm. \tag{8}$$

$\int_{R^k} f\, dm$

Pustimo li ovde da $N \to \infty$, leva strana u (8) težiće, na osnovu stava 2, ka $\int_{R^k} f\, dm$, jer niz S_N monotono rastući konvergira ka f za svako $x \in R^k$. Otud tvrđenje (6).

$f_n \geqslant 0 \in \mathcal{M}(m)$

Stav 4 (Fatouova lema). *Neka je (f_n) niz nenegativnih m-merljivih funkcija na R^k. Ako stavimo*

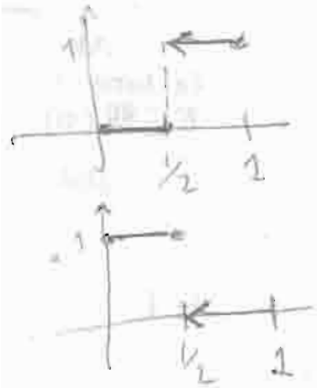
$$f(x) = \varliminf_{n \to \infty} f_n(x) \quad \textit{za svako} \quad x \in R^k,$$

tada je

$$\varliminf_{n \to \infty} \int_{R^k} f_n \, dm \geqslant \int_{R^k} f \, dm.$$

Da ovde zaista može stajati znak $>$, pokazuje sledeći primer. Za niz (f_n) koji je definisan sa

$$f_{2k}(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x \leqslant 1/2, \\ 1, & 1/2 < x \leqslant 1; \end{cases} \qquad f_{2k+1}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1/2, \\ 0, & 1/2 < x \leqslant 1; \end{cases}$$



je

$$f(x) = \varliminf_{n=1} f_n(x) = 0 \quad \text{za} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

dok je

$$\int_0^1 f_n \, dm = 1/2 \quad \text{za svako } n.$$

Dokaz stava 4. Neka je za $n = 1, 2, \ldots$

$$g_n(x) = \inf_{\nu \geqslant n} f_\nu(x).$$

Na osnovu stava 4.4 funkcije g_n su m-merljive, a prema njihovoj definiciji je

(9) $$0 \leqslant g_1(x) \leqslant g_2(x) \leqslant \ldots$$

i

(10) $$g_n(x) \leqslant f_n(x).$$

Zbog (9) postoji $\lim_{n \to \infty} g_n(x)$ za svako $x \in R^k$ (kao konačan broj ili $+\infty$). Pokazaćemo da je

(11) $$\lim_{n \to \infty} g_n(x) = f(x).$$

Zaista na osnovu stava II.4.11 je

$$\lim_{n \to \infty} g_n(x) = \sup_n g_n(x) = \sup_n \inf_{\nu \geqslant n} f_\nu(x),$$

tako da prema stavu II.4.14 sledi

$$\lim_{n \to \infty} g_n(x) = \varliminf_{\nu \to \infty} f_\nu(x).$$

Na osnovu (9) i (11), iz stava 2 sledi

(12) $$\lim_{n \to \infty} \int_{R^k} g_n \, dm = \int_{R^k} f \, dm.$$

$g_n \leqslant f_n(x)$

No, kako je, zbog (10),

$$\int_{R^k} f_n \, dm \geqslant \int_{R^k} g_n \, dm,$$

to je

$$\varliminf_{n \to \infty} \int_{R^k} f_n \, dm \geqslant \varliminf_{n \to \infty} \int_{R^k} g_n \, dm, \quad = \lim_{n \to \infty} \int_{R^k} g_n \, dm = \int_{R^k}$$

što, zajedno sa (12), predstavlja tvrđenje stava 4.

jer $\exists \lim \Rightarrow \varliminf = \lim$

Da tvrđenje leme 1 važi ne samo za jednostavne funkcije kazuje

Stav 5. *Neka je f nenegativna m-merljiva funkcija na R^k. Funkcija skupa*

$$\Phi(E) = \int_E f\,dm \quad (E \in \mathfrak{M}(m))$$

je jedna mera na $\mathfrak{M}(m)$, tj. $\Phi \geqslant 0$ i

$$\int_E f\,dm = \int_{E_1} f\,dm + \int_{E_2} f\,dm + \cdots \tag{13}$$

kad god su m-merljivi skupovi $E_1, E_2, \ldots$ međusobno disjunktni i $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E$.

Ako je nenegativna funkcija f m-integrabilna na R^k, tada je Φ konačna (a time i ograničena) mera na $\mathfrak{M}(m)$, jer je $\Phi(E) \leqslant \Phi(R^k) < +\infty$ za svako $E \in \mathfrak{M}(m)$.

Dokaz stava 5. Zbog

$$\boxed{K_E(x) = \sum_{n=1}^{\infty} K_{E_n}(x)} \quad / \cdot f(x)$$

je i

$$K_E(x)\,f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} K_{E_n}(x)\,f(x).$$

Integrišući levu i desnu stranu preko čitavog prostora R^k, slediće na osnovu stava 3

$$\int_E f\,dm = \int_{R^k} K_E \cdot f\,dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{R^k} K_{E_n} \cdot f\,dm, = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f\,dm$$

što se, zbog osobine 6° iz stava 1, svodi na (13).

5.ii. Lebesgueov integral realne funkcije

Blagodareći razlaganju $f = f^+ - f^-$, kojim se svaka m-merljiva funkcija može prikazati kao razlika dve nenegativne m-merljive funkcije (primedba posle stava 4.4), Lebesgueov integral m-merljive funkcije koja uzima vrednost oba znaka svodi se na Lebesgueov integral nenegativne funkcije.

Definicija 3. Neka je f realna m-merljiva funkcija na m-merljivom skupu $E \subset R^k$. Ako *bar jedan* od integrala

$$\int_E f^+\,dm, \quad \int_E f^-\,dm$$

ima *konačnu* vrednost, tada Lebesgueov integral od f na E definišemo sa

$$\boxed{\int_E f\,dm = \int_E f^+\,dm - \int_E f^-\,dm.} \qquad f = f^+ - f^- \tag{14}$$

Na osnovu (14), m-integral realne funkcije može da ima i vrednost $-\infty$ odnosno $+\infty$; no samo ako je on *konačan* kažemo da je funkcija f *integrabilna u Lebesgueovom smislu* ili *m-integrabilna* na E.

Klasu m-integrabilnih funkcija (realnih) na E označavaćemo sa $\mathfrak{L}(E, m)$ ili kraće sa $\mathfrak{L}(E)$, odnosno $\mathfrak{L}$. Shodno uvedenoj definiciji, $f \in \mathfrak{L}$ ako i samo ako f^+ i $f^- \in \mathfrak{L}$. Otuda je i svaka m-integrabilna (realna) funkcija konačna s. s. (primedba posle stava 1).

Primećujemo da dok je za nenegativnu m-merljivu funkciju m-integral uvek definisan, m-integral realne funkcije postoji samo pod gore navedenim ograničenjem koje isključuje mogućnost da se u (14) javi izraz oblika $(+\infty)-(+\infty)$. Definicijom 3 je, naravno, obuhvaćen i m-integral nenegativne funkcije.

Stav 6. *m-merljiva funkcija $f \in \mathfrak{L}(E, m)$ tada i samo tada ako $|f| \in \mathfrak{L}(E, m)$.*

Ovo je osobina *apsolutne integrabilnosti* Lebesgueovog integrala.

Dokaz stava 6. Ako $f \in \mathfrak{L}(E, m)$, tada su oba broja

$$\int_E f^+ dm \quad \text{i} \quad \int_E f^- dm \tag{15}$$

konačna, pa je, na osnovu stava 3, takav i broj

$$\int_E |f|\, dm = \int_E (f^+ + f^-)\, dm = \int_E f^+ dm + \int_E f^- dm. \tag{16}$$

$<+\infty$

Kako, uz to iz m-merljivosti funkcije f sledi m-merljivost od $|f|$ (na osnovu stavova 4.3 i 4.4), to $|f| \in \mathfrak{L}(E, m)$. Obrnuto, ako $|f| \in \mathfrak{L}(E, m)$, tj. $\int_E |f|\, dm < +\infty$, na osnovu (16) obe vrednosti (15) su konačne pa $f \in \mathfrak{L}(E, m)$, jer je f po pretpostavci m-merljiva.

Iz stava 6 specijalno sledi: *Ako je funkcija f m-merljiva, $|f| \leqslant g$ i $g \in \mathfrak{L}(E, m)$, tada i $f \in \mathfrak{L}(E, m)$,* jer je $\int_E |f|\, dm \leqslant \int_E g\, dm < +\infty$.

Stav 7. *Neka f i $g \in \mathfrak{L}(R^k, m)$ i neka je c konstanta ($|c| < +\infty$). Tada:*

1° $f+g \in \mathfrak{L}(R^k, m)$ *i* $\int_{R^k} (f+g)\, dm = \int_{R^k} f\, dm + \int_{R^k} g\, dm$;

2° $cf \in \mathfrak{L}(R^k, m)$ *i* $\int_{R^k} cf\, dm = c \int_{R^k} f\, dm$.

Ovde je neophodna jedna primedba. f i g su kao m-integrabilne funkcije konačne s. s. na R^k, pa je time i zbir $f+g$ definisan s. s. na R^k. Ranije smo napomenuli (primedba posle stava 4.3) da na m-merljivost funkcije ne utiču skupovi m-mere nula. U odeljku 5.iii videćemo da je to slučaj i kada je u pitanju m-integrabilnost funkcije. Drugim rečima, moguće je govoriti o integralu zbira $f+g$ i kada je ovaj definisan samo s. s. na R^k.

Dokaz stava 7. 1° Na osnovu 1° stava 1 i na osnovu stava 3 je

$$\int_{R^k} |f+g|\, dm \leqslant \int_{R^k} (|f| + |g|)\, dm = \int_{R^k} |f|\, dm + \int_{R^k} |g|\, dm < +\infty,$$

te $|f+g| \in \mathfrak{L}(R^k, m)$. Na osnovu stava 6, onda i $f+g \in \mathfrak{L}(R^k, m)$.

Stavimo $h = f+g$, tj.

$$h^+ - h^- = f^+ - f^- + g^+ - g^- \quad (\text{s. s. na } R^k)$$

ili

$$h^+ + f^- + g^- = f^+ + g^+ + h^- \quad (\text{s. s. na } R^k).$$

Na osnovu stava 3 je

$$\int h^+ dm + \int f^- dm + \int g^- dm = \int f^+ dm + \int g^+ dm + \int h^- dm.$$

Kako su zbog m-integrabilnosti funkcija f, g i h svi ovi integrali konačni, dozvoljeno je preći na oblik

$$\int h^+ dm - \int h^- dm = \left(\int f^+ dm - \int f^- dm\right) + \left(\int g^+ dm - \int g^- dm\right),$$

koji predstavlja tvrđenje 1° stava 7.

2° Kako je na osnovu 3° stava 1

$$\int_{R^k} |cf|\, dm = \int_{R^k} |c|\, |f|\, dm = |c| \int_{R^k} |f|\, dm < +\infty,$$

to $|cf| \in \mathfrak{L}(R^k, m)$, a time i $cf \in \mathfrak{L}(R^k, m)$.

Ako je $c > 0$, 2° važi na osnovu 3° stava 1:

$$\int cf\, dm = \int (cf)^+ dm - \int (cf)^- dm = \int cf^+ dm - \int cf^- dm$$

$$= c \int f^+ dm - c \int f^- dm = c \int f\, dm.$$

Ako je $c < 0$ imaćemo, dakle,

$$\int cf\, dm = (-c) \int (-f)\, dm,$$

$-\int_{R^k} c f\, dm$

te zbog $(-f)^+ = f^-$ i $(-f)^- = f^+$, sledi

$$\int cf\, dm = (-c) \left[\int (-f)^+ dm - \int (-f)^- dm \right]$$

$$= (-c) \left[\int f^- dm - \int f^+ dm \right] = c \int f\, dm.$$

Stav 8. *Ako* $f \in \mathfrak{L}(R^k, m)$, *tada je*

$$\left| \int_{R^k} f\, dm \right| \leqslant \int_{R^k} |f|\, dm.$$

Dokaz. Ako je $\int_{R^k} f\, dm = 0$ nema šta da se dokazuje. Neka je c jednako $+1$ ili -1 prema tome da li je $\int_{R^k} f\, dm > 0$ ili < 0. Tada je

$$\left| \int_{R^k} f\, dm \right| = c \int_{R^k} f\, dm = \int_{R^k} cf\, dm.$$

Poslednji integral jednak je

$\int_{R^k} f^+ dm - \int_{R^k} f^- dm \leqslant \int_{R^k} f^+ dm$ odnosno $\int_{R^k} f^- dm - \int_{R^k} f^+ dm \leqslant \int_{R^k} f^- dm$,

prema tome da li je $c = +1$ ili je $c = -1$. Zbog $f^+, f^- \leqslant |f|$, tvrđenje onda sledi na osnovu 1° stava 1.

Stav 9 (Lebesgue). *Neka je* (f_n) *niz* m*-merljivih funkcija koji konvergira ka* f *za svako* $x \in R^k$. *Ako postoji funkcija* $g \in \mathfrak{L}(R^k, m)$ *takva da je*

$$|f_n(x)| \leqslant g(x) \text{ za } x \in R^k \text{ i } n = 1, 2, \ldots, \tag{17}$$

$f_n(x) \to f(x)$

tada $f \in \mathfrak{L}(R^k, m)$ *i*

$$\lim_{n \to \infty} \int_{R^k} f_n\, dm = \int_{R^k} f\, dm.$$

Dokaz. Funkcija f, kao granična vrednost niza m-merljivih funkcija, i sama je m-merljiva, a zbog (17) je $|f| \leqslant g$, pa $|f|$ a time i $f \in \mathfrak{L}(R^k, m)$.

Kako je $f_n + g \geqslant 0$, to je na osnovu stava 4

$$\lim_{n \to \infty} \int_{R^k} (f_n + g)\, dm \geqslant \int_{R^k} (f + g)\, dm$$

$g(x) \geqslant f_n(x)$, $g(x) \geqslant -f_n(x)$

tj.

$$\lim_{n \to \infty} \int_{R^k} f_n\, dm \geqslant \int_{R^k} f\, dm, \tag{18}$$

jer je $\int_{R^k} g\, dm < +\infty$.

Slično, zbog $g-f_n \geqslant 0$, je

$$\varliminf_{n\to\infty} \int_{R^k} (g-f_n)\, dm \geqslant \int_{R^k} (g-f)\, dm,$$

tj.

$$\varliminf_{n\to\infty} \left(-\int_{R^k} f_n\, dm\right) \geqslant -\int_{R^k} f\, dm,$$

$\varliminf(-x_n) = -\varlimsup x_n$

ili, što je isto (vežbanje II.4.18),

$$\text{(19)} \qquad \boxed{\varlimsup_{n\to\infty} \int_{R^k} f_n\, dm \leqslant \int_{R^k} f\, dm.}$$

(18) i (19) zajedno predstavljaju tvrđenje stava 9.

Stav 9 važi i ako u njemu čitav prostor R^k zamenimo nekim m-merljivim podskupom $E \subset R^k$ (primedba posle stava 1). Kako je svaka konstanta M m-integrabilna na skupu konačne m-mere, to iz stava 9 sledi kao specijalan slučaj

Stav 10 (Lebesgue). *Neka je $E \subset R^k$ m-merljiv skup konačne m-mere i neka je (f_n) niz uniformno ograničenih funkcija na E, tj.*

$m(E) < +\infty$

$$|f_n(x)| \leqslant M \quad \text{za} \quad x \in E \quad \text{i} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Ako

$$f_n \to f \quad \text{za svako} \quad x \in E,$$

tada je

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n\, dm = \int_E f\, dm.$$

Primer 1. Niz

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$$

konvergira na razmaku $(0,1)$ ka $f(x)=0$. Kako je (f_n) uniformno ograničen na $(0,1)$, to na osnovu stava 10 niz integrala $\int_0^1 f_n(x)\, dm \to 0$.

Primer 2. Niz

$$f_n(x) = \frac{n^{3/2}x}{1+n^2x^2}$$

konvergira na razmaku $(0,1)$ ka $f(x)=0$. No niz (f_n) nije uniformno ograničen na $(0,1)$, jer $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} f_n(x) = \sqrt{n}/2 \to +\infty$, pa se ne može primeniti stav 10.

Međutim, kako je za $0 < x \leqslant 1/n$

$$f_n(x) \leqslant \frac{x^{-3/2}x}{1+n^2x^2} = \frac{x^{-1/2}}{1+n^2x^2} < \frac{1}{\sqrt{x}},$$

a za $1/n \leqslant x \leqslant 1$

$$f_n(x) \leqslant \frac{n^{3/2}x}{n^2x^2} = \frac{1}{x\sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{x^{-1/2}x} = \frac{1}{\sqrt{x}},$$

to je

$$f_n(x) \leqslant 1/\sqrt{x} \quad \text{za svako } x \in (0,1).$$

Kako $1/\sqrt{x} \in \mathfrak{L}(0,1)$, to na osnovu stava 9 niz integrala $\int_0^1 f_n(x)\, dm \to 0$.

Primer 3. Neka nenegativna funkcija $f \in \mathfrak{L}(R^k, m)$. Označimo sa

$$[f]_n = \begin{cases} f, & f \leqslant n, \\ n, & f > n, \end{cases} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

niz tzv. *sasečenih funkcija* od f. Kako niz

$$[f]_n \to f \quad \text{i} \quad [f]_n \leqslant f$$

za svako $x \subset R^k$, to je na osnovu stava 9

$$\int_{R^k} f\, dm = \lim_{n \to \infty} \int_{R^k} [f]_n\, dm. \tag{20}$$

Ovaj iskaz je, naravno, od interesa samo kada je f neograničena funkcija, jer inače je $[f]_n = f$ za dovoljno veliko n. Obrascem (20) je, naime, integral *neograničene* m-integrabilne funkcije prikazan kao granična vrednost niza integrala *ograničenih* m-integrabilnih funkcija.

Stavovi 2, 9 i 10 pokazuju da Lebesgueov integral ima prednost nad Riemannovim, jer se, kada je on u pitanju, pod mnogo slabijim a i za primenu pogodnijim uslovima može zaključiti da niz integrala konvergira integralu granične funkcije, no što je to slučaj kada je Riemannov integral u pitanju (stav 1.6 sa $g(x) = x$, na primer). Međutim, postoje i jednostavni primeri konvergentnih nizova funkcija, kod kojih niz m-integrala ili ne konvergira m-integralu granične funkcije ili granična funkcija uopšte nema m-integral.

Primer 4. Neka je na $]0, 1[$ definisan niz m-integrabilnih funkcija

$$f_n(x) = \begin{cases} n(n+1), & x \in \left(\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right), \\ 0 & \text{u ostalim tačkama.} \end{cases}$$

$\int_0^1 n(n+1)\, dm = n(n+1)($
$= 1$

Granična funkcija f ovog niza je identički jednaka nuli na $]0, 1[$. Kako je $\int_0^1 f_n\, dm = 1$, to niz integrala ne konvergira integralu granične funkcije, jer je $\int_0^1 f\, dm = 0$.

Primer 5. Neka je na $]0, 1[$ definisan niz m-merljivih funkcija $(n = 1, 2, \ldots)$

$$f_n(x) = \begin{cases} 2k(k+1) & \text{za} \quad x \in \left(\dfrac{1}{k+1}, \dfrac{2k+1}{2k(k+1)}\right), \\ -2k(k+1) & \text{za} \quad x \in \left(\dfrac{2k+1}{2k(k+1)}, \dfrac{1}{k}\right), \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \\ 0 & \text{u ostalim tačkama,} \end{cases}$$

Funkcije f_n su m-integrabilne na $]0, 1[$ za svako n i $\int_0^1 f_n\, dm = 0$. Niz (f_n) konvergira na $]0, 1[$ graničnoj funkciji

$$f(x) = \begin{cases} 2k(k+1) & \text{za} \quad x \in \left(\dfrac{1}{k+1}, \dfrac{2k+1}{2k(k+1)}\right), \\ -2k(k+1) & \text{za} \quad x \in \left(\dfrac{2k+1}{2k(k+1)}, \dfrac{1}{k}\right), \quad (k = 1, 2, \ldots). \\ 0 & \text{u ostalim tačkama,} \end{cases}$$

$(k \to \infty)$

Kako je $\int_0^1 f^+\, dm = +\infty$ i $\int_0^1 f^-\, dm = +\infty$, to f nije m-integrabilna na $]0, 1[$.

Stav 11. *Neka je $f \in \mathfrak{L}(R^k, m)$. Tada svakom $\varepsilon > 0$ odgovara broj $\delta > 0$, tako da za svaki m-merljiv skup E iz R^k koji zadovoljava*

$$m(E) < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\int_E f\,dm\right| < \varepsilon.$$

Zbog ove svoje osobine kažemo da je m-integral *apsolutno neprekidan.*

Dokaz stava 11. Bez ograničenja možemo pretpostaviti da je $f \geqslant 0$ (inače treba f razložiti na f^+ i f^-).

Neka je $\varepsilon > 0$. Izaberimo prvo prirodni broj N tako da je

$$\int_{R^k} (f - [f]_N)\,dm < \varepsilon/2, \tag{21}$$

što je uvek moguće na osnovu primera 3. Neka je $\delta = \varepsilon/2N$ i neka je E proizvoljan m-merljiv skup iz R^k m-mere $m(E) < \delta$. Tada je, zbog $[f]_N \leqslant N$ i (21),

$$\int_E f\,dm = \int_E [f]_N\,dm + \int_E (f - [f]_N)\,dm$$
$$\leqslant N\,m(E) + \int_{R^k} (f - [f]_N)\,dm < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

što je trebalo dokazati.

Na kraju primećujemo da iskaz stava 5 važi delimično i za funkcije koje uzimaju vrednost oba znaka.

Stav 12. *Neka je $f \in \mathfrak{L}(R^k, m)$. Tada je*

$$\phi(E) = \int_E f\,dm \quad (E \in \mathfrak{M}(m))$$

σ-aditivna funkcija skupa na $\mathfrak{M}(m)$, tj. važi (13).

Ovde se, za razliku od stava 5, pretpostavlja m-integrabilnost funkcije f na R^k. Otuda je sada ϕ konačna (štaviše, i ograničena) funkcija skupa na $\mathfrak{M}(m)$, jer je

$$|\phi(E)| \leqslant \int_E |f|\,dm \leqslant \int_{R^k} |f|\,dm < +\infty \quad \text{za svako } E \in \mathfrak{M}(m).$$

No ona nije mera na $\mathfrak{M}(m)$, jer uzima vrednosti oba znaka.

Dokaz stava 12. Treba f rastaviti na f^+ i f^-, pa primeniti stav 5 na svaki sabirak ponaosob.

5.iii. Lebesgueov integral i skupovi m-mere nula

U teoriji Lebesgueovog integrala skupovi m-mere nula igraju značajnu ulogu. Tako, *ako je $f = g$ s.s. na m-merljivom skupu $E \subset R^k$, tada je*

$$\int_E f\,dm = \int_E g\,dm,$$

što znači da Lebesgueov integral ne zavisi od vrednosti koje funkcija uzima na nekom skupu m-mere nula. Zaista, ako je A izuzetan skup m-mere nula u E na kome je $f \neq g$, tada je na osnovu stava 12

$$\int_E (f-g)\,dm = \int_{E-A} (f-g)\,dm + \int_A (f-g)\,dm.$$

Prvi integral na desnoj strani je jednak nuli jer je $f - g = 0$ na $E - A$, a drugi je jednak nuli zbog $m(A) = 0$ (osobine 4° i 5° stava 1). Ovu osobinu m-integrala možemo i ovako formulisati: *Ako je $f = 0$ s.s. na E, tada je $\int_E f\,dm = 0$.*

Kako skupovi m-mere nula ne utiču na Lebesgueov integral, to možemo govoriti o Lebesgueovom integralu funkcije f nad skupom E i kada je f definisana samo s.s. na E. Naime, ako je f definisana i m-merljiva na $E-A$ i $m(A)=0$, ona je, ma kako je definisali na A, m-merljiva i na E (primedba posle stava 4.3). No kako njen Lebesgueov integral na E (ako postoji) ne zavisi od toga koje vrednosti f uzima na nekom skupu m-mere nula, to *de facto* nije ni potrebno da se preciziraju vrednosti od f na A. Ipak, ponekad je zgodnije da se funkciji f na izuzetnom skupu A daju određene vrednosti; recimo, $f=0$ na $A \subset E$.

Pre nego što navedemo nekoliko stavova kod kojih dolaze do izražaja skupovi m-mere nula, primećujemo da se, recimo u stavu 9, mogu oslabiti pretpostavke stava: ako $\boxed{f_n \to f}$ samo s.s. na R^k, tada opet važi tvrđenje stava 9.

Stav 13. *Neka je* (f_n) *niz m-merljivih funkcija koje su definisane s.s. na* R^k *i neka je*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{R^k} |f_n|\, dm < +\infty. \tag{22}$$

Tada red :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{23}$$

konvergira (*apsolutno*) *s.s. na* R^k, $f \in \mathfrak{L}(R^k, m)$ *i važi*

$$\int_{R^k} f\, dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{R^k} f_n\, dm.$$

Primećujemo da i kad bi niz (f_n) bio definisan *svuda* na R^k, da bismo i tada mogli da zaključimo jedino o konvergenciji s.s. reda u (23). Stav 13, između ostalog, daje dovoljne uslove za integraciju član po član reda čiji su članovi funkcije koje uzimaju vrednosti oba znaka.

Dokaz stava 13. Neka je E_n skup na kome je definisana funkcija f_n; po pretpostavci je $m(R^k - E_n) = 0$ za svako $n = 1, 2, \ldots$ Stavimo

$$|f(x)| = \left|\sum^{\infty} f_n(x)\right| \leq g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \quad \text{za} \quad x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E.$$

Tada je i $m(R^k - E) = 0$. Zbog (22) je, na osnovu stava 3,

$$\int_E g\, dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n|\, dm < +\infty.$$

Označimo sa E' skup $\{x \in E:\ g(x) < +\infty\}$. Zbog $g \in \mathfrak{L}(E, m)$ je $m(E - E') = 0$, a time i $m(R^k - E') = 0$. Na skupu E' (tj. s.s. na R^k) funkcija f je, dakle, definisana apsolutno konvergentnim redom i na E' važi $|f(x)| \leq g(x)$, tj. $f \in \mathfrak{L}(E', m)$. Stavimo

$$g_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n.$$

Tada je $|g_n| \leq |f_1| + |f_2| + \cdots + |f_n| \leq g$ i $g_n \to f$ za svako $x \in E'$. Ako na niz (g_n) primenimo stav 9, sledeće

$$= \lim \int \sum^{\infty} = \lim \sum \int$$

$$\int_{E'} f\, dm = \lim_{n\to\infty} \int_{E'} (f_1 + f_2 + \cdots + f_n)\, dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E'} f_n\, dm,$$

što predstavlja drugo tvrđenje stava, jer je $m(R^k - E') = 0$.

$f \geqslant 0$

Stav 14. *Neka je f nenegativna m-merljiva funkcija i neka je E m-merljiv skup. Tada*

$$\int_E f\,dm = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0 \ \text{ s.s. na } E.$$

на E

Dokaz. Neka je $E_n = \{x \in E\colon f(x) > {}^1\!/_n\}$, $n = 1, 2, \dots$ Tada se skup tačaka $A \subset E$, na kojem je $f(x) > 0$ može napisati u obliku $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Iz

$$0 = \int_E f\,dm \geqslant \int_{E_n} f\,dm \geqslant \frac{1}{n}\, m(E_n).$$

sledi da je $m(E_n) = 0$ za svako n, pa tvrđenje sledi iz

$$m(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{m(E_n)}_{=0}. \Rightarrow mA = 0$$

Stav 15. *Neka je $f \in \mathfrak{L}(R^k, m)$ i neka je $\int_E f\,dm = 0$ za svaki m-merljiv skup E u R^k. Tada je $f = 0$ s.s. na R^k.*

на R^k

Dokaz. Neka je $A = \{x : f(x) > 0\}$. Na A je $f = f^+$, a na osnovu pretpostavke je $\int_A f^+\,dm = 0$. Na osnovu stava 14 onda sledi da je f^+ a time i $f = 0$ s.s. na A. Na sličan način sledi da je $f = f^- = 0$ s.s. na skupu $B = \{x : f(x) \leqslant 0\}$.

Za $k = 1$ stavu 15 se može dati specifičan oblik:

Stav 16. *Neka je $f \in \mathfrak{L}(R, m)$ i neka je*

(24) $$\int_{-\infty}^{x} f\,dm = 0 \quad \text{za svako } x \in R.$$

Tada je $f = 0$ s.s. na R.

Dokaz. Na osnovu stava 15 treba jedino pokazati da uslov (24) povlači za sobom

(25) $$\int_E f\,dm = 0 \quad \text{za svaki } m\text{-merljiv skup } E \subset R.$$

Pre svega, zbog $(y > x)$

$$\int_x^y = \int_{-\infty}^{y} - \int_{-\infty}^{x},$$

iz (24) sledi da (25) važi za svaki otvoreni razmak u R. Na osnovu stava 12 važiće (25) i za svaki otvoreni skup E u R, jer su otvoreni skupovi u R unije najviše prebrojivo mnogo disjunktnih otvorenih razmaka (stav II.2.13). No tada (25) važi i za svaki Borelov skup E, a time, na osnovu stava 3.6, i za svaki m-merljiv skup E u R.

5.iv. Fubinijev stav

Iz elementarne analize poznato je da se višestruki Riemannov integral može svesti na ponovljene jednostruke integrale ako je integrand neprekidna funkcija nad integracionim područjem. Analogni iskaz za Lebesgueov integral ne zahteva nikakve naknadne uslove za integrand; dovoljna je m-integrabilnost integranda.

Neka su R^r, R^s i $R^{r+s} = R^r \times R^s$ Euklidovi prostori $(r, s = 1, 2, \ldots)$ Označimo sa m_r, m_s i m_{r+s} Lebesgueove mere a sa $\mathfrak{M}_r, \mathfrak{M}_s$ i $\mathfrak{M}_{r+s}$ odgovarajuće Lebesgueove σ-prstene merljivih skupova u tim prostorima. Funkciju f koja je definisana na R^{r+s} i uzima vrednosti u R^*, označavaćemo ovde, izuzetno, sa $f(x,y)$ gde $x \in R^r$ i $y \in R^s$. Tada f možemo posmatrati bilo kao funkciju od $x \in R^r$ (za fiksirano y), bilo kao funkciju od $y \in R^s$ (za fiksirano x) ili kao funkciju od $(x,y) \in R^{r+s}$. Kao funkcija od x ona može biti merljiva na R^r; tada ćemo reći da je ona $\mathfrak{M}_r$-merljiva da ne bi bilo zabune. Analogno značenje imaju onda $\mathfrak{M}_s$- odnosno $\mathfrak{M}_{r+s}$-merljivost funkcije na R^s odnosno na R^{r+s}. Sledeći stavovi, koje dajemo bez dokaza, vezani su za ime Fubinija.[1)]

Stav 17. *Neka je $f(x,y)$ nenegativna $\mathfrak{M}_{r+s}$-merljiva funkcija na R^{r+s}. Tada je*

$$g(y) = \int_{x \in R^r} f(x,y)\, dm_r \quad i \quad h(x) = \int_{y \in R^s} f(x,y)\, dm_s \tag{26}$$

$\mathfrak{M}_s$- odnosno $\mathfrak{M}_r$-merljiva funkcija na R^s odnosno na R^r i

$$\int_{y \in R^s} dm_s \int_{x \in R^r} f(x,y\, dm_r = \int_{(x,y) \in R^{r+s}} f(x,y)\, dm_{r+s} = \int_{x \in R^r} dm_r \int_{y \in R^s} f(x,y)\, dm_s. \tag{27}$$

Stav 18. *Neka $\mathfrak{M}_{r+s}$-merljiva fukcija $f(x,y) \in \mathfrak{L}(R^{r+s}, m_{r+s})$. Tada*

1° *$f(x,y)$, posmatrana kao funkcija od x, pripada $\mathfrak{L}(R^r, m_r)$ za skoro svako $y \in R^s$, i*

$f(x,y)$, posmatrana kao funkcija od y, pripada $\mathfrak{L}(R^s, m_s)$ za skoro svako $x \in R^r$.

2° *Funkcije $g(y)$ i $h(x)$ iz (26) definisane su s.s. na R^s odnosno na R^r i $g(y) \in \mathfrak{L}(R^s, m_s)$ a $h(x) \in \mathfrak{L}(R^r, m_r)$.*

3° *Važi jednakost (27).*

Značaj ova dva stava leži i u tome što oni daju dovoljne uslove kada se sme izmeniti poredak dva ponovljena integrala. Za nenegativne funkcije za to je dovoljna $\mathfrak{M}_{r+s}$-merljivost funkcije, a za funkcije koje uzimaju vrednosti oba znaka zahteva se (sem toga) da pripadaju $\mathfrak{L}(R^{r+s}, m_{r+s})$. Proveravanje ovog poslednjeg uslova u izvesnim slučajevima olakšava

Stav 19. *Ako $\mathfrak{M}_{r+s}$-merljiva funkcija $f(x,y)$ uzima vrednosti oba znaka na R^{r+s}, a bar jedan od integrala*

$$\int_{x \in R^r} dm_r \int_{y \in R^s} |f(x,y)|\, dm_s, \qquad \int_{y \in R^s} dm_s \int_{x \in R^r} |f(x,y)|\, dm_r$$

je konačan, tada $f(x,y) \in \mathfrak{L}(R^{r+s}, m_{r+s})$.

Primećujemo da tada, na osnovu stava 18, opet važi (27), tj. dozvoljena je izmena poretka integrala.

Ako je jedan od integrala iz stava 19 konačan, takav je, prema stavu 17, i drugi.

Ako uslovi stava 19 nisu ispunjeni, tada se u opštem slučaju ne sme izmeniti poredak ponovljenih integrala, kao što to pokazuje

---

[1)] Za dokaz videti, na primer, [8], [10], [13] ili [16] iz spiska literature na strani 327.

Primer 6. Niz funkcija (g_n) definisan je na $]0, 1[$ sa

$$g_n(t) = \begin{cases} n(n+1) & \text{za} \quad t \in I_n = \left[1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1}\right], \\ 0 \quad \text{za} \quad t \notin I_n. \end{cases}$$

Stavimo

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [g_n(x) - g_{n+1}(x)]\, g_n(y), \quad x \in [0, 1[, \ y \in [0, 1[.$$

Neka je k fiksiran prirodni broj. Ako integraciju po x označimo simbolom dm_x, iz

$$f(x, y) = [g_k(x) - g_{k+1}(x)]\, g_k(y) \quad \text{za} \quad y \in I_k,$$

sledi

$$\int_0^1 f(x, y)\, dm_x = g_k(y) \int_0^1 [g_k(x) - g_{k+1}(x)]\, dm_x = 0 \quad \text{za} \quad y \in I_k.$$

Kako je $\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k = [0, 1[$, slediće

$$\int_0^1 f(x, y)\, dm_x = 0 \quad \text{za svako} \ y \in [0, 1[,$$

pa je s jedne strane

$$\int_0^1 dm_y \int_0^1 f(x, y)\, dm_x = 0.$$

S druge strane,

$$f(x, y) = g_1(x)\, g_1(y) + \sum_{n=2}^{\infty} [g_n(y) - g_{n-1}(y)]\, g_n(x) =$$

$$= \begin{cases} g_1(y)\, g_1(x) & \text{za} \quad x \in I_1, \\ [g_k(y) - g_{k-1}(y)]\, g_k(x) & \text{za} \quad x \in I_k \ (k = 2, 3, \ldots) \end{cases}$$

povlači

$$\int_0^1 f(x, y)\, dm_y = \begin{cases} g_1(x) \quad \text{za} \quad x \in I_1, \\ g_k(x) \int_0^1 [g_k(y) - g_{k-1}(y)]\, dm_y = 0 \quad \text{za} \quad x \in I_k \ (k = 2, 3, \ldots), \end{cases}$$

tako da je

$$\int_0^1 dm_x \int_0^1 f(x, y)\, dm_y = \int_0^{1/2} g_1(x)\, dm_x = 1.$$

U posmatranom slučaju nije, dakle, dozvoljeno izmeniti poredak ponovljenih integrala. Ovo ne protivureči stavu 19, jer je ovde

$$\int_0^1 dm_x \int_0^1 |f(x, y)|\, dm_y = +\infty.$$

5.v. Odnos između Lebesgueovog i Riemannovog integrala

U ovom odeljku uporedićemo Lebesgueov sa Riemannovim integralom. Jednostavnosti radi, zadržaćemo se na jednodimenzionalnom slučaju $(k = 1)$. Kako je Riemannov integral definisan jedino za *ograničene* funkcije na *konačnom* razmaku (definicija 1.1 sa $g(x) = x$), to je samo za tu klasu funkcija moguće ovo poređenje. Da je Lebesgueov integral opštiji od Riemannovog tvrdi

Stav 20. *Ako je f R-integrabilna na $[a,b]$, tada je ona i m-integrabilna na $[a,b]$ i važi*

$$\int_a^b f\,dm = \int_a^b f\,dx.$$

Obrnuto ne važi, kao što to pokazuje

Primer 7. Neka je na $[0,1]$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{kada je } x \text{ racionalan broj,} \\ 0 & \text{kada je } x \text{ iracionalan broj.} \end{cases}$$

Kako u svakom podrazmaku bilo koje podele razmaka $[0,1]$ leže kako racionalne tako i iracionalne tačke, to su donji i gornji Riemannov integral jednaki $\underline{I}(f)=0$ odnosno $\overline{I}(f)=1$, pa f nije R-integrabilna na $[0,1]$ (primedba posle stava 1.4). Međutim, funkcija f je očigledno m-merljiva a kako je i ograničena, ona je m-integrabilna (primedba posle stava 1). Šta više, kako na m-integral ne utiču skupovi mere nula, to je

$$\int_0^1 f\,dm = \int_0^1 g\,dm,$$

gde je $g=0$ za svako $x \in [0,1]$; znači, $\int_0^1 f\,dm = 0$.

Dokaz stava 20. Označimo sa $\mathfrak{R}$ klasu R-integrabilnih funkcija. Kako je i Riemannov integral apsolutno integrabilan, to je dovoljno da u nizu logičkih implikacija $f \in \mathfrak{R} \Rightarrow |f| \in \mathfrak{R} \Rightarrow |f| \in \mathfrak{L} \Rightarrow f \in \mathfrak{L}$ dokažemo drugi prelaz. Drugim rečima, možemo se *a priori* ograničiti na nenegativne funkcije.

S obzirom da $f \in \mathfrak{R}$ implicira da je f ograničena, to će f biti m-integrabilna ako pokažemo da je m-merljiva (primedba posle stava 1).

Neka je $f \geqslant 0$ R-integrabilna na $[a,b]$ i neka je (P_k) jedan niz sukcesivnih podela razmaka $[a,b]$ ostvaren tačkama

$$a = x_0^{(k)} < x_1^{(k)} < \cdots < x_{n_k}^{(k)} = b \quad (k=1,2,\ldots),$$

takav da $m(P_k) \to 0$ kada $k \to \infty$. (Ovde, izuzetno, $m(P_k)$ ima značenje iz odeljka 1.i). Na osnovu primedbe posle stava 1.4,

$$s(P_k) \to \int_a^b f\,dx \quad \text{i} \quad S(P_k) \to \int_a^b f\,dx. \tag{28}$$

Ako za fiksirano $k=1,2,\ldots$ uvedemo jednostavne funkcije

$$s_k(x) = m_\nu^{(k)} \quad \text{i} \quad S_k(x) = M_\nu^{(k)} \quad \text{za} \quad x \in]\,x_{\nu-1}^{(k)}, x_\nu^{(k)}] \quad (\nu = 1,2,\ldots,n_k),$$

prema definiciji 1 je

$$s(P_k) = \int_a^b s_k(x)\,dm, \quad S(P_k) = \int_a^b S_k(x)\,dm. \tag{29}$$

Kako je (P_k) niz sukcesivnih podela, to je

$$s_1(x) \leqslant s_2(x) \leqslant \cdots \leqslant f(x) \leqslant \cdots \leqslant S_2(x) \leqslant S_1(x).$$

Ako stavimo

$$s(x) = \lim_{k\to\infty} s_k(x) \quad \text{i} \quad S(x) = \lim_{k\to\infty} S_k(x),$$

biće na osnovu stava 2 (videti i vežbanje 2 na kraju ovog odeljka)

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b s_k(x)\,dm = \int_a^b s(x)\,dm,$$

(30)

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b S_k(x)\,dm = \int_a^b S(x)\,dm,$$

odakle, na osnovu (28) i (29), sledi

(31) $$\int_a^b s(x)\,dm = \int_a^b S(x)\,dm = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Iz $S(x)-s(x)\geqslant 0$ i prve jednakosti u (31) sledi, na osnovu stava 14, da je

$$s(x)=S(x) \quad \text{s. s. na} \quad [a, b].$$

Kako je $s(x)\leqslant f(x)\leqslant S(x)$, to je i

(32) $$s(x)=S(x)=f(x) \quad \text{s. s. na} \quad [a, b].$$

No $s(x)$ i $S(x)$ su kao granične funkcije niza m-merljivih funkcija i same m-merljive, pa je takva, prema (32), i funkcija $f(x)$ (primedba posle stava 4.3.). Time je stav 20 dokazan.

Koristeći pojam Lebesgueove mere može se R-integrabilnost neke funkcije okarakterisati skupom njenih tačaka prekida.

Stav 21. *Ograničena funkcija f je R-integrabilna na konačnom razmaku $[a, b]$ tada i samo tada ako je neprekidna s. s. na $[a, b]$.*

Dokaz. Oznake su iste kao kod dokaza stava 20. Neka je A skup tačaka iz $[a, b]$ koje se ne poklapaju ni sa jednom podeonom tačkom niza sukcesivnih podela (P_k) za koji $m(P_k)\to 0$.

Neka je $x_0\in A$. Pokazaćemo, pre svega, da je $s(x_0)=S(x_0)$ potreban i dovoljan uslov da bi f bila neprekidna u tački x_0.

Uslov je dovoljan. Označimo sa I_k onaj razmak podele P_k u čijoj *unutrašnjosti* leži tačka x_0. Uslov

$$S(x_0)-s(x_0)=\lim_{k\to\infty}(S_k(x_0)-s_k(x_0))=0$$

kazuje da svakom $\varepsilon>0$ odgovara prirodni broj K tako da je

$$S_K(x_0)-s_K(x_0)<\varepsilon.$$

No kako su funkcije $S_K(x)$ i $s_K(x)$ konstantne na I_K, to je i

(33) $$S_K(x)-s_K(x)<\varepsilon \quad \text{za} \quad x\in I_K.$$

Vodeći računa da je na I_K, po definiciji,

(34) $$S_K(x)=\sup_{x\in I_K} f(x) \quad \text{i} \quad s_K(x)=\inf_{x\in I_K} f(x)$$

i da x_0 pripada unutrašnjosti razmaka I_K, iz (33) sledi:

$$x\in I_K \quad \Rightarrow \quad |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

što znači da je f neprekidna u tački x_0.

Uslov je potreban. Neka je f neprekidna u tački $x_0 \in A$, tj. neka svakom $\varepsilon > 0$ odgovara $\delta > 0$ tako da

$$(35) \qquad x \in]x_0 - \delta,\ x_0 + \delta[\quad \Rightarrow \quad f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Neka I_k ima isto značenje kao malopre. S obzirom da je (P_k) niz sukcesivnih podela i $m(P_k) \to 0$, to će $I_1 \supset I_2 \supset \cdots$ i $m(I_k) \to 0$ kada $k \to \infty$. Postoji zato dovoljno veliki prirodni broj K tako da $I_K \subset]x_0 - \delta,\ x_0 + \delta[$. Na osnovu (35) i (34), tada važi

$$x \in I_K \quad \Rightarrow \quad s_K(x) > f(x_0) - \varepsilon \quad \text{i} \quad S_K(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

No kako $x_0 \in I_K$, to je i

$$s_K(x_0) > f(x_0) - \varepsilon \quad \text{i} \quad S_K(x_0) < f(x_0) + \varepsilon,$$

tj.

$$S_K(x_0) - s_K(x_0) < 2\varepsilon.$$

Zbog monotonije nizova (s_k) i (S_k) je onda i

$$S_k(x_0) - s_k(x_0) < 2\varepsilon \quad \text{za} \quad k \geqslant K,$$

što znači da je $S(x_0) - s(x_0) = 0$.

Pretpostavimo sada da je f R-integrabilna na $[a, b]$. Pri dokazu stava 20, videli smo da je tada $s(x) = S(x)$ s. s. na $[a, b]$ (obrazac (32)), pa tim pre i s. s. na $A \subset [a, b]$. Znači, f je neprekidna s. s. na A, a time i s. s. na $[a, b]$, jer je skup tačaka $[a, b] - A$ prebrojiv, dakle mere nula.

Obrnuto, ako je f neprekidna s. s. na $[a, b]$, tada je $s(x) = S(x)$ s. s. na $[a, b]$, što znači da je

$$\int_a^b s(x)\, dm = \int_a^b S(x)\, dm.$$

Iz (30) onda sledi da svakom $\varepsilon > 0$ odgovara prirodni broj K takav da je

$$\int_a^b S_K(x)\, dm - \int_a^b s_K(x)\, dm < \varepsilon.$$

Međutim, na osnovu (29), ovo se može napisati u obliku

$$(36) \qquad S(P_K) - s(P_K) < \varepsilon.$$

Prema tome, ako je f neprekidna s. s. na $[a, b]$, tada svakom $\varepsilon > 0$ odgovara jedna podela P_K razmaka $[a, b]$ takva da važi (36). Prema primedbi posle stava 1.4, to znači da je f R-integrabilna na $[a, b]$.

Ako je funkcija f bilo neograničena ili je razmak integracije beskonačan, u elementarnoj Analizi se uvodi pojam *nesvojstvenog Riemannovog integrala* kao granične vrednosti Riemannovih integrala. Na primer, ako je f R-integrabilna na razmaku $[a, b]$ za svako $b > a$, nesvojstveni Riemannov integral $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ definiše se graničnom vrednošću

Tako $\exists$

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\, dx$$

ukoliko ova postoji. Naziv nesvojstven potiče otuda što takav integral nema sva svojstva Riemannovog integrala: nije apsolutno integrabilan.

Klasa funkcija koje imaju nesvojstven Riemannov integral i klasa m-integrabilnih funkcija su međusobno neuporedive, kao što to pokazuju sledeća dva primera.

Primer 8. Kao što je poznato, funkcija $x^{-1}\sin x$ ima na $(0,+\infty)$ nesv stven Riemannov integral. Međutim, ona na $(0,+\infty)$ nije m-integrabil Zaista, na osnovu stavova 5 i 20 je

$$\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dm = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dm = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^\pi \left|\frac{\sin(x+k\pi)}{x+k\pi}\right| dm$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^\pi \frac{\sin x}{x+k\pi}\, dm \geqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\pi(k+1)} \int_0^\pi \sin x\, dm$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\pi(k+1)} \int_0^\pi \sin x\, dx = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} = +\infty,$$

tj. $\left|\frac{\sin x}{x}\right|$ pa time i $\frac{\sin x}{x}$ nije m-integrabilna na $(0,+\infty)$. Primećujemo da se kod drugog prelaza ne radi o smeni promenljive, već jednostavno o $\boxed{\text{translaciji}}$

$$\int_a^b f(x+c)\, dm = \int_{a+c}^{b+c} f(x)\, dm.$$

Primer 9. Funkcija f defisana na $(1,+\infty)$ sa

$$f(x) = \begin{cases} x^{-2} & \text{za } x \text{ iracionalno,} \\ 0 & \text{za } x \text{ racianalno,} \end{cases}$$

je m-integrabilna na $(1,+\infty)$, ali nema nesvojstveni Riemannov integral na $(1,+\infty)$, jer nije R-integrabilna na $(1, b)$, $b>1$. (Pokazuje se kao u pr. 7).

Nije teško uvideti da su m-integrabilne one funkcije koje imaju apsolutno integrabilan nesvojstven Riemannov integral.

Vežbanja 5

1. Navesti primer m-integrabilnih funkcija f i g takvih da fg nije m-integrabilna.

2. Neka je (f_n) monotono opadajući niz nenegativnih m-merljivih funkcija na R^k, tj. neka je $f_1(x) \geqslant f_2(x) \geqslant \cdots \geqslant 0$ za svako $x \in R^k$, i stavimo $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Ako je f_1 m-integrabilna na R^k, tada je

$$\lim_{n\to\infty} \int_{R^k} f_n\, dm = \int_{R^k} f\, dm.$$

Bez pretpostavke o m-integrabilnost funkcije f_1 na R^k iskaz ne važi. [Analogon stava 2.]

3. Niz funkcija $f_n(x) = n^3 x^{3/4}(1+n^4x^2)^{-1} \to 0$ kada $n\to\infty$ za svako $x \in [0, 1]$. Pokazati da je $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n\, dm = 0$. [Primeniti stav 9.]

4. Izračunati $\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\, dm$.

5. Za $0<x<1$ i $n=1, 2, \ldots$ je $n+\infty$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-xt} \frac{t^n}{1-e^{-t}}\, dm = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{n!}{(x+k)^{n+1}}.$$

[Integral $\int_{-\infty}^{+\infty}$ rastaviti na $\int_0^{+\infty}$ i $\int_{-\infty}^0$. U prvom razviti $(1-e^{-t})^{-1}$ u red i primeniti stav 3.]

6. Neka je f m-integrabilna na skupu E i neka je $E_n=\{x\in E: |f(x)|\geqslant n\}$ $(n=1,2,\ldots)$. Pokazati da $nm(E_n)\to 0$ kada $n\to\infty$. [Bez ograničenja možemo pretpostaviti $f\geqslant 0$. Pre svega, $m(E_n)\to 0$, jer da je $m(E_{n_k})\geqslant c>0$ za neki delimični niz (n_k), imali bismo

$$\int_E f\,dm\geqslant\int_{E_{n_k}} f\,dm\geqslant n_k\, m(E_{n_k})\geqslant cn_k\to+\infty\quad(k\to\infty),$$

što protivureči m-integrabilnosti funkcije f na E. Ako vodimo računa o primeru3, iz

$$nm(E_n)=\{\int_E [f]_n\,dm-\int_E f\,dm\}+\int_{E_n} f\,dm$$

sledi onda tvrđenje.]

7. Neka je $f\geqslant 0$ m-merljiva funkcija na E i stavimo $E_n=\{x\in E\colon f(x)\geqslant n\}$. Pokazati da

$$(*)\qquad \int_E [f]_{2n}\,dm-\int_E [f]_n\,dm\to 0$$

tada i samo tada ako $nm(E_n)\to 0$. [Ako sa (α_n) označimo niz u (*), tada je

$$\alpha_n=\int_{E_n}[f]_{2n}\,dm-\int_{E_n}[f]_n\,dm\leqslant 2\,nm(E_n)-nm(E_n)=nm(E_n),$$

odnosno

$$\alpha_n\geqslant\int_{E_n}([f]_{2n}-[f]_n)\,dm\geqslant nm(E_{2n}).]$$

8. Neka je $m(E)<+\infty$ i neka niz m-integrabilnih funkcija (f_n) konvergira ka f uniformno na E. Tada je i f m-integrabilna na E i

$$\int_E f_n\,dm\to\int_E f\,dm\quad(n\to\infty).$$

Kontraprimerom pokazati da je pretpostavka $m(E)<+\infty$ bitna. [Kontraprimer: $f_n(x)=1/x$ za $1\leqslant x\leqslant n$ i $f_n(x)=0$ za $x>n$.]

9. Neka je f nenegativna m-merljiva funkcija na skupu E konačne m-mere. (Ovde je od interesa ako f nije ograničena na E). Stavimo

$$E_n=\{x\in E\colon n\leqslant f(x)<n+1\},\quad F_n=\{x\in E\colon f(x)\geqslant n\}\quad(n=0,1,\ldots).$$

Pokazati da je

$$(*)\qquad \sum_{\nu=1}^{n} m(F_\nu)=\sum_{\nu=1}^{n}\nu\, m(E_\nu)+nm(F_{n+1}),$$

pa na osnovu toga zaključiti da je konvergencija reda $\sum_{\nu=1}^{\infty} m(F_\nu)$ potreban i dovoljan uslov da je f m-integrabilna na E. [Uslov je potreban: Na osnovu (*) je, naime,

$$\sum_{\nu=1}^{n} m(F_\nu)\leqslant\sum_{\nu=1}^{n}\int_{E_\nu} f\,dm+\int_{F_{n+1}} f\,dm<\int_E f\,dm<+\infty.$$

Uslov je dovoljan: Iz $\sum_{\nu=1}^{\infty} m(F_\nu)<+\infty$ i činjenice da niz $m(F_n)$ monotono teži nuli, prvo sledi da $nm(F_n)\to 0$. (Ovo je rezultat iz teorije redova). Ako, dakle u (*) pustimo da $n\to\infty$, slediće $\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu\, m(E_\nu)<+\infty$, a time i

$$+\infty>\sum_{\nu=0}^{\infty}(\nu+1)\,m(E_\nu)\geqslant\sum_{\nu=0}^{\infty}\int_{E_\nu} f\,dm=\int_E f\,dm.]$$

10. Neka je $f(x)=0$ na Cantorovom skupu (II.2.ii) i $f(x)=k$ na svakom od komplementarnih intervala dužine 3^{-k}. Pokazati da je $\int_0^1 f\,dm=3$.

11. Za koje vrednosti parametra α i β postoji $\int_1^\infty x^{-\alpha}\sin x^\beta\,dx$ kao Lebesgueov odnosno kao nesvojstven Riemannov integral?

12. Neka niz R-integrabilnih funkcija (f_n) konvergira R-integrabilnoj funkciji f i neka je $|f_n(x)|\leqslant K$ za svako $x\in(a,b)$. Tada je

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx.$$

(Arzelàov stav). [f_n i f su tada m-integrabilne, pa tvrđenje važi na osnovu stava 10 i stava 20.]

13. Neka je na razmaku $[a,b]$ funkcija g ograničene varijacije i neka tu niz neprekidnih funkcija (f_n) konvergira neprekidnoj funkciji f. Ako je niz (f_n) uniformno ograničen na $[a,b]$, tj. $|f_n(x)|\leqslant M$, gde M ne zavisi od x i n, tada za niz Riemann-Stieltjesovih integrala važi

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n\,dg=\int_a^b f\,dg.$$

14. Pokazati da u skupu S m-merljivih funkcija $f(x)$ $(x\in(a,b),\ b-a<+\infty)$, izraz

$$d(f,g)=\int_a^b\frac{|f(x)-g(x)|}{1+|f(x)-g(x)|}\,dm,\qquad (f,g\in S)$$

ima smisla i da se njime može uvesti metrika u S. Niz (f_n) u S konvergira ka f_0 u smislu uvedene metrike ako i samo ako niz funkcija (f_n) po m-meri konvergira ka f_0. [Neka je $E_n=\{x:|f_n(x)-f_0(x)|>\varepsilon\}$. Ako $f_n\to f_0$ po m-meri, tada iz

$$d(f_n,f_0)\leqslant\int_{E_n}\frac{|f_n-f_0|}{1+|f_n-f_0|}\,dm+\int_{CE_n}|f_n-f_0|\,dm\leqslant\int_{E_n}\frac{|f_n-f_0|}{1+|f_n-f_0|}\,dm+\varepsilon(b-a),$$

na osnovu stava 11, sledi $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,d(f_n,f_0)\leqslant\varepsilon(b-a)$. Kako $\varepsilon>0$ može biti proizvoljno malo, odavde sledi $d(f_n,f_0)\to 0$ (videti vežbanje II.4.20). Obrnuto, ako f_n ne konvergira po m-meri ka f_0, tada postoji fiksiran broj $\varepsilon>0$ i niz indeksa (n_k) tako da je $m(E_{n_k})\geqslant\varepsilon$. Kako funkcija $\frac{u}{1+u}$ monotono raste, imamo

$$d(f_{n_k},f_0)\geqslant\int_{E_{n_k}}\frac{|f_{n_k}-f_0|}{1+|f_{n_k}-f_0|}\,dm\geqslant\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon}>0,$$

te f_n ne može da konvergira ka f_0 u smislu uvedene metrike.]

6.i. Apstraktna mera i integral

U ovom odeljku iznećemo u osnovnim crtama elemente opšte teorije mere i integrala.

U 2.i definisali smo pojam apstraktne mere ϕ na prstenu $\mathfrak{P}$ u nekom amorfnom skupu X, a u 2.ii dali smo jednu njenu konkretnu realizaciju: meru m na prstenu elementarnih skupova $\mathfrak{E}$ u R^k. Pomoću ove poslednje konstruisali smo zatim u odeljku 3, koristeći pojam spoljne mere, Lebesgueov σ-prsten $\mathfrak{M}(m)$

i Lebesgueovu meru m na $\mathfrak{M}(m)$ u R^k. No dalje izlaganje Lebesgueove teorije mere i integrala u odeljcima 4 i 5 bilo je nezavisno od toga kako smo uveli kolekciju $\mathfrak{M}(m)$ i funkciju skupa m i počivalo je jedino na činjenicama da je

1° $\mathfrak{M}(m)$ σ-prsten u R^k kome pripada R^k.

2° m nenegativna i σ-aditivna funkcija skupa na $\mathfrak{M}(m)$.

Da podsetimo: skup $A \subset R^k$ je m-merljiv ako pripada $\mathfrak{M}(m)$ (definicija 3.3); funkcija $f : R^k \to R^*$ je m-merljiva ako za svako c bilo koji od skupova 4. (1—4) pripada $\mathfrak{M}(m)$ (definicija 4.1). I docnije, pri definiciji m-integrala i pri izlaganju njegovih osobina, pozivali smo se isključivo na 1° i 2°, ne vraćajući se više na pojam spoljne mere. No kako smo jedino za definiciju spoljne mere koristili specifične osobine Euklidovog prostora R^k (interval i njegovu dužinu), to ako u R^k *a priori* postuliramo postojanje nekog σ-prstena i jedne mere na njemu (a takvih ima, $\mathfrak{M}(m)$ i m, na primer), postaje bespredmetno da kao osnovni skup u kome radimo uzimamo baš R^k; svaki drugi apstraktan skup mogao bi da posluži istom cilju. Napominjemo da pri definiciji m-merljivosti funkcije i kod stavova o konvergenciji nizova m-integrala, istina, dolazi do izražaja poredak i metrika, ali ne definicionog područja R^k već prostora-slike R^*, pa ćemo se zato i ubuduće ograničiti na funkcije koje uzimaju vrednosti u R^*; no njihovo definiciono područje može da bude proizvoljan apstraktan skup X.

Sve ovo kazuje da se Lebesgueova teorija mere i integrala može sprovesti i na apstraktnim skupovima, a da time ne postane ništa komplikovanija. Šta više, ona postaje i nešto kraća, jer zametnu konstrukciju Lebesgueovog σ-prstena $\mathfrak{M}(m)$ i Lebesgueove mere m, u opštoj teoriji mere zamenjuje izvestan broj postulata.

Definicija 1. Neka je X proizvoljan skup i neka je $\mathfrak{M}$ jedan σ-prsten podskupova od X, kome pripada i X. Par $(X, \mathfrak{M})$ nazivamo *merljiv prostor*, a elemente iz $\mathfrak{M}$ *merljivim skupovima* u X.

Često σ-prsten u X kome pripada X nazivamo *σ-algebra* u X. Lebesgueov σ-prsten $\mathfrak{M}(m)$ je jedna σ-algebra u R^k. (Videti i vežbanje 1 na kraju ovog odeljka).

Definicija 2. Neka je $(X, \mathfrak{M})$ merljiv prostor i neka f preslikava X u R^*. Ako je bilo koji od skupova definicije 4.1 merljiv (tj. pripada $\mathfrak{M}$) za svako c, kažemo da je f *merljiva funkcija* na X.

Definicija 3. Nenegativna funkcija skupa μ koja je definisana na σ-algebri $\mathfrak{M}$ u X i uzima vrednosti u $[0, +\infty]$ je *mera na* $\mathfrak{M}$ ako je σ-aditivna na $\mathfrak{M}$.

Primećujemo da se ova definicija mere razlikuje od one date definicijom 2.4 jedino u tome što je ovde njeno definiciono područje σ-algebra. Odsada ćemo se držati isključivo definicije 3.

Definicija 4. Svaki merljiv prostor $(X, \mathfrak{M})$ koji je snabdeven merom μ na $\mathfrak{M}$ naziva se *prostor sa merom.*

Prostor sa merom označavamo sa $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ ili, ako je jasno o kojoj σ-algebri i o kojoj meri je reč, jednostavno sa X. Ipak, najčešće se govori da je μ mera na X, podrazumevajući pod time da je μ mera na σ-algebri $\mathfrak{M}$ u X.

Na primer, $(R^k, \mathfrak{M}(m), m)$ je jedan prostor sa merom (Lebesgueov). Njegova specifičnost je u tome što mu je σ-algebra $\mathfrak{M}(m)$ zavisna od uvedene mere m. Otud i oznaka $\mathfrak{M}(m)$. U opštem prostoru sa merom takva zavisnost *a priori* ne postoji.

Navešćemo još nekoliko primera prostora sa merom.

Primer 1. Neka je f nenegativna funkcija koja preslikava R^k u R^*. Na osnovu stava 5.5, $\phi(E)=\int_E f\,dm$ je mera na $\mathfrak{M}(m)$. Znači, $(R^k, \mathfrak{M}(m), \phi)$ je jedan prostor sa merom.

Primer 2. Neka je X proizvoljan skup i $\mathfrak{M}=\mathbf{P}\,X$. Na σ-algebri $\mathbf{P}\,X$ definisana je mera na ovaj način:

$$\mu(A)=\begin{cases} +\infty & \text{ako je skup } A\subset X \text{ beskonačan,} \\ \text{broju elemenata u } A & \text{ako je } A \text{ konačan skup.}\end{cases}$$

Primer 3. Na R se može definisati tzv. *Lebesgue-Stieltjesova mera*, čija konstrukcija teče paralelno konstrukciji Lebesgueove mere na R. Jedina razlika je u tome što se intervalu kao merni broj ne pripisuje njegova dužina već neki drugi broj. Neka je $\alpha(x)$ neopadajuća funkcija definisana na R i neprekidna s desne strane. Intervalu $(a, b)\subset R$, u zavisnosti od njegovog tipa, koordinirajmo kao merni broj:

$$m_\alpha([a, b])=\alpha(b)-\alpha(a-0),$$
$$m_\alpha([a, b[)=\alpha(b-0)-\alpha(a-0),$$
$$m_\alpha(]a, b])=\alpha(b)-\alpha(a),$$
$$m_\alpha(]a, b[)=\alpha(b-0)-\alpha(a).$$

Specijalno, ako se razmak svodi na jednu jedinu tačku, biće

$$m_\alpha(\{x : x=a\})=m_\alpha([a, a])=\alpha(a)-\alpha(a-0).$$

Za $\alpha(x)=x$ m_α-merni broj razmaka svodi se na njegovu dužinu. Za $\alpha(x)=[x]$ je

$$m_\alpha([1, 2])=2, \quad m_\alpha([1, 2[)=1, \quad m_\alpha(]1, 2])=1, \quad m_\alpha(]1, 2[)=0, \quad m_\alpha([1, 1])=1.$$

Polazeći od m_α-mernog broja razmaka, može se kao u odeljku 2.ii definisati funkcija skupa m_α na prstenu elementarnih skupova $\mathfrak{E}$ i pokazati da je m_α nenegativna i σ-aditivna na $\mathfrak{E}$ (stav 2.6). Uvodeći zatim funkciju skupa m_α^* na $\mathbf{P}\,R$ — analogon spoljne mere m^* na $\mathbf{P}\,R$ — doslovce kao u odeljku 3 može se konstruisati σ-prsten $\mathfrak{M}(m_\alpha)$ i pokazati da je restrikcija od m_α^* na $\mathfrak{M}(m_\alpha)$ mera na $\mathfrak{M}(m_\alpha)$ (stav 3.2). Pri tome i dokazi ostaju nepromenjeni; jedino treba svuda slovo m zameniti slovom m_α. Tako dolazimo do Lebesgue-Stieltjesovog prostora sa merom $(R^k, \mathfrak{M}(m_\alpha), m_\alpha)$, koji odgovara neopadajućoj funkciji α.

Definicija 5. Ako je $\mu(X)<+\infty$ kažemo da je μ *konačna* mera na X. Ako postoji niz skupova A_n $(n=1, 2, \ldots)$ u $\mathfrak{M}$ tako da je $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=X$ i $\mu(A_n)<+\infty$ za svako n, kažemo da je μ *σ-konačna* mera na X.

Konačna mera na X je ograničena na X.

Lebesgueova mera je σ-konačna na R^k. Ako je nenegativna funkcija $f\in\mathfrak{L}(R^k, m)$, tada je $\phi(E)=\int_E f\,dm$ $(E\in\mathfrak{M}(m))$ konačna mera na R^k (posledica stava 5.5). Ako je $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha(x)>-\infty$ i $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha(x)<+\infty$, tada je Lebesgue-Stieltjesova mera m_α (primer 3) konačna na R.

Značaj prostora sa merom $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ ogleda se u tome što se na njemu može izgraditi teorija integracije analogna onoj na Lebesgueovom prostoru $(R^k$ $\mathfrak{M}(m), m)$. Naime, definicije i većina stavova iz odeljaka 4 i 5 ostaju na snaz, ako se u njima R^k, $\mathfrak{M}(m)$ i m formalno zamene sa X, $\mathfrak{M}$ odnosno μ, a merljivi skupovi i merljive funkcije na adekvatan način tumače. Čitaocu neće biti teško da proveri da i dokazi stavova tada ostaju nepromenjeni. Ipak treba voditi računa o sledećim napomenama:

Na početku odeljka 3.ii videli smo da svaki prebrojiv skup ima m-meru jednaku nuli. To, naravno, nije slučaj za svaku meru μ. Na primer, ako je u pitanju Lebesgue-Stieltjesova mera m_α (primer 3), s jedne strane skup koji se sastoji iz jedne jedine tačke može imati pozitivnu m_α-meru, dok, s druge strane, čitav razmak pozitivne dužine može imati m_α-meru jednaku nuli. Zato izraz „skoro svuda“ ima različito značenje u zavisnosti od uvedene mere μ, pa je korisno pisati s. s. (μ).

U stavu 4.3 pretpostavke koje obezbeđuju merljivost složene funkcije $F[g(x), h(x)]$ na X ne impliciraju nikakvu topološku strukturu u X, jer se neprekidnost odnosi isključivo na F kao funkciju od (u, v) na R^2.

U opštim prostorima sa *konačnom* merom, skup A iz stavova 4.7, 4.8 i 4.9 može da se poklopi i sa čitavim prostorom X.

Na analogan način kao u odeljku 5 uvodi se μ-integral prvo za jednostavne, zatim za nenegativne i najzad za realne merljive funkcije $f: X \to R^*$. Označavamo ga sa

$$\int_E f\,d\mu \qquad (E \in \mathfrak{M}),$$

a klasu μ-integrabilnih funkcija na merljivom skupu E obeležavamo sa $\mathfrak{L}(E, \mu)$. Od stavova iz odeljka 5 jedino stav 5.16 koji je specifičan realnoj pravoj i stavovi 5.20 i 5.21 koji se odnose na Riemannov integral nemaju analogone u opštoj teoriji integracije. Što se tiče stavova 5.17, 5.18, i 5.19 i njih je moguće preneti u apstraktne prostore, ali je prethodno potrebno uvesti izvesne nove pojmove. Naime, kako je $(R^k, \mathfrak{M}(m), m)$ prostor sa merom za svako $k = 1, 2, \ldots$, to je kako u R^r i R^s tako i u R^{r+s} a priori definisana odgovarajuća Lebesgueova σ-algebra i mera. Međutim, ako pođemo od apstraktnih prostora sa merom $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ i $(Y, \mathfrak{N}, \nu)$, potrebno je prvo na prostoru $X \times Y$ definisati σ-algebru i meru koja je na adekvatan način indukirana σ-algebrama $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ odnosno merama μ i ν, da bi se uopšte moglo govoriti o Fubinijevom stavu. To, međutim, izlazi iz okvire ove knjige.[1)]

Opštom teorijom mere i integracije obuhvaćeni su i iskazi koji ne pripadaju klasičnoj teoriji integrala. Ilustrovaćemo to na jednom primeru.

Primer 4. Neka je X skup prirodnih brojeva N i uočimo u ovome σ-algebru $\mathfrak{M} = \mathbf{P}\,N$. Kao meru μ na $\mathbf{P}\,N$ uzećemo onu koju smo definisali u primeru 2. Ispitaćemo na šta se u ovom prostoru s merom svodi tvrđenje stava 5.3. Pre svega, nenegativna funkcija f na N je niz nenegativnih brojeva $f(k)$, $k = 1, 2, \ldots$ Kako za svako c, $\{k \in N : f(k) < c\} \in \mathbf{P}\,N$, to je f merljiva na N. Na osnovu stava 5.5 je

$$\int_N f\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\{k\}} f\,d\mu,$$

jer je unija disjunktnih skupova $\{k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ čitav prostor N. Kako je $K_{\{k\}} \cdot f$ jednostavna funkcija koja na $\{k\}$ uzima vrednost $f(k)$ a inače je jednaka nuli, to je na osnovu 6° stava 5.1 i definicije 5.1

$$\int_{\{k\}} f\,d\mu = \int_N K_{\{k\}} \cdot f\,d\mu = f(k)\,\mu(\{k\}) = f(k).$$

Dakle,

$$\int_N f\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} f(k).$$

[1)] Videti, na primer, [8] ili [16].

Neka je (f_n) niz nenegativnih funkcija na N i stavimo $f=\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Na osnovu stava 5.3 je

$$\int_N f\,d\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\int_N f_n\,d\mu,$$

tj.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} f_{n,k}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} f_{n,k},$$

gde smo $f_n(k)$ označili sa $f_{n,k}$. U posmatranom slučaju, stav 5.3 tvrdi, dakle da je kod dvostrukih redova sa nenegativnim članovima dozvoljeno izmeniti poredak sumacije.

6.ii. Realna mera

Neka je μ mera na $(X, \mathfrak{M})$ i neka $f\in \mathfrak{L}(X, \mu)$. Tada funkcija skupa

$$\phi(E)=\int_E f\,d\mu \quad (E\in\mathfrak{M}) \tag{1}$$

ima ove osobine:

1° ϕ uzima vrednosti u $]-\infty, +\infty[$ (primedba posle definicije 5.3).

2° ϕ je σ-aditivna na $\mathfrak{M}$ (stav 5.12).

3° $\phi(E)=\int_E f^+\,d\mu-\int_E f^-\,d\mu=\phi^+(E)-\phi^-(E)$,

tj. ϕ se može razložiti na razliku dve konačne mere ϕ^+ i ϕ^- na $\mathfrak{M}$ (definicija 5.3 i primedba posle stava 5.5). Šta više, postoje disjunktni skupovi $A=\{x\in X\colon f(x)\geqslant 0\}$ i $B=\{x\in X\colon f(x)<0\}$, čija je unija X, tako da je $\phi(E)\geqslant 0$ sa svako $E\subset A$ i $\phi(E)\leqslant 0$ za svako $E\subset B$.

4° Funkcija skupa $|\phi|$ (ovo je simbol sam za sebe, a ne apsolutna vrednost od ϕ, tako da treba praviti razliku između $|\phi|(E)$ i $|\phi(E)|$!) definisana sa

$$|\phi|(E)=\phi^+(E)+\phi^-(E)=\int_E |f|\,d\mu \quad (E\in\mathfrak{M})$$

je konačna mera na $\mathfrak{M}$ (stav 5.5). Pokazaćemo da se ona može uvesti i sa

$$|\phi|(E)=\sup_{(E_i)}\sum_{i=1}^{\infty}|\phi(E_i)|, \tag{2}$$

gde je supremum uzet preko svih mogućih *razlaganja* skupa E na skupove $E_i\in\mathfrak{M}$ $(i=1,2,\ldots)$ (tj. $E=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$ i $E_i\cap E_j=O$ $(i\neq j)$). Zaista, na osnovu stava 5.8 i stava 5.5 je za svako razlaganje (E_i) skupa E

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\phi(E_i)|\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|\phi|(E_i)=|\phi|(E), \tag{3}$$

tj.

$$\sup_{(E_i)}\sum_{i=1}^{\infty}|\phi(E_i)|\leqslant|\phi|(E).$$

Da ovde važi znak jednakosti pokazuje sledeće razlaganje skupa E:

$$E_1 = \{x \in E: f(x) \geqslant 0\} \quad \text{i} \quad E_2 = E - E_1.$$

Za ovo je, naime,

$$|\phi(E_1)| + |\phi(E_2)| = \int_{E_1} f^+ \, d\mu + \int_{E_2} f^- \, d\mu$$

$$= \int_E f^+ \, d\mu + \int_E f^- \, d\mu = \int_E |f| \, d\mu = |\phi|(E).$$

5° Svakom $\varepsilon > 0$ odgovara broj $\delta > 0$ tako da za svako $E \in \mathfrak{M}$

(4) $$\mu(E) < \delta \quad \Rightarrow \quad |\phi(E)| < \varepsilon$$

(apsolutna neprekidnost integrala, stav 5.11).

Ova osobina može se i ovako iskazati: Za svako $E \in \mathfrak{M}$

(5) $$\mu(E) = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi(E) = 0.$$

Zaista, (4) $\Rightarrow$ (5). Ako je, naime, $\mu(E) = 0$, tada je $\mu(E) < \delta$ sa svako $\delta > 0$, pa je na osnovu (4) $|\phi(E)| < \varepsilon$ za svako $\varepsilon > 0$, što znači da je $\phi(E) = 0$.

Obrnuto, (5) $\Rightarrow$ (4). Pokazaćemo da *non* (4) $\Rightarrow$ *non* (5). Zaista, ako (4) ne važi, tada postoji $\varepsilon > 0$ i skupovi $E_n \in \mathfrak{M}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ tako da je

$$\mu(E_n) < 2^{-n} \quad \text{i} \quad |\phi(E_n)| \geqslant \varepsilon.$$

Stavimo

$$A_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} E_i \quad \text{i} \quad A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Tada je

$$\mu(A_n) \leqslant \sum_{i=n}^{\infty} \mu(E_i) \leqslant \sum_{i=n}^{\infty} 2^{-i} = 2^{-n+1},$$

te zbog $A_n \supset A_{n+1}$ iz 2° stava 2.2 sledi

$$\mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = 0.$$

S druge strane, na osnovu istog stava i vodeći računa o

$$|\phi|(A_n) \geqslant |\phi|(E_n) \geqslant |\phi(E_n)|,$$

nalazimo

$$|\phi|(A) = \lim_{n \to \infty} |\phi|(A_n) \geqslant \varepsilon.$$

Prema tome, ako ne važi (4), tada

(6) $$\mu(A) = 0 \text{ ne povlači } |\phi|(A) = 0,$$

a time i

(7) $$\mu(A) = 0 \text{ ne povlači } \phi(A) = 0,$$

tj. ne važi (5), što je trebalo dokazati.

Da iz (6) zaista sledi (7) ili, što je isto, da *non* (7) $\Rightarrow$ *non* (6), možemo ovako uvideti. Pretpostavimo da

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \phi(A) = 0.$$

Ako je (B_i) jedno razlaganje skupa A, tada $\mu(A)=0 \Rightarrow \mu(B_i)=0$ $(i=1,2,\ldots)$. Na osnovu pretpostavke je onda $\phi(B_i)=0$ $(i=1,2,\ldots)$, pa time i

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\phi(B_i)| = 0.$$

No kako (B_i) može biti proizvoljno razlaganje skupa A, odavde sledi $|\phi|(A)=0$, što je trebalo pokazati.

Činjenica da uočena funkcija skupa ϕ, mada nije nenegativna, poseduje osobinu σ-aditivnosti na $\mathfrak{M}$, navodi nas da uvedemo pojam realne mere.

Definicija 6. Neka $(X,\mathfrak{M})$ merljiv prostor. Ako σ-aditivna funkcija skupa ν uzima na $\mathfrak{M}$ vrednosti u $]-\infty,+\infty[$, kažemo da je ν *realna mera* na $\mathfrak{M}$.

Ako naročito želimo da istaknemo meru u dosadašnjem smislu prema novouvedenoj realnoj meri, govorićemo o *pozitivnoj* meri (mada je ona stvarno nenegativna). U čitavom prethodnom izlaganju bilo je isključivo reči o pozitivnoj meri. Specijalno, u gore navedenim osobinama 1°—5° pod rečju mera treba podrazumevati pozitivnu meru. Treba imati u vidu da kolekcija pozitivnih mera na nekoj σ-algebri ne obrazuje podklasu klase realnih mera na toj istoj σ-algebri, jer pozitivna mera može da uzima i vrednost $+\infty$, dok je realna mera, po definiciji, konačna. Realna mera obuhvata, dakle, kao specijalan slučaj samo konačnu pozitivnu meru. Naglašavamo da je u σ-aditivnosti realne mere implicitno sadržan zahtev da je za svako razlaganje (E_i) skupa $E\in\mathfrak{M}$ $(E_i\in\mathfrak{M})$, red $\sum_{i=1}^{\infty}\nu(E_i)$ apsolutno konvergentan (primedba posle definicije 2.3).

Na osnovu 1° i 2°, funkcija skupa ϕ data sa (1) je jedna realna mera na $\mathfrak{M}$. Mada je ona definisana na specifičan način, posredstvom μ-integrala, njene osobine 1°—5° svojstvene su *svakoj* realnoj meri. Da to pokažemo predmet je narednih razmatranja.

Neka je ν proizvoljna realna mera na $(X,\mathfrak{M})$. Poći ćemo od toga što ćemo realnoj meri ν koordinirati nenegativnu funkciju skupa $|\nu|$, slično kao što smo u 3° funkciji ϕ koordinirali $|\phi|$. No kako sada ne raspolažemo analogonima funkcija ϕ^+ i ϕ^-, poslužićemo se osobinom (2) funkcije $|\phi|$.

Definicija 7. Neka je ν realna mera na $(X,\mathfrak{M})$. Funkciju skupa $|\nu|$, definisanu na $\mathfrak{M}$ sa

$$|\nu|(E)=\sup_{(E_i)}\sum_{i=1}^{\infty}|\nu(E_i)| \quad (E\in\mathfrak{M}),$$

gde se supremum uzima preko svih razlaganja (E_i) skupa E $(E_i\in\mathfrak{M})$ nazivamo *totalna varijacija* mere ν.

Specijalno ako je ν konačna pozitivna mera μ, njena totalna varijacija $|\mu|=\mu$, jer je tada

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\mu(E_i)|=\mu(E)$$

za svako razlaganje E_i skupa E.

Stav 1. *Totalna varijacija* $|\nu|$ *realne mere* ν *na* $(X,\mathfrak{M})$ *je pozitivna mera na* $(X,\mathfrak{M})$.

Dokaz. Neka je (E_i) $(i=1,2,\ldots)$ jedno razlaganje skupa $E\in\mathfrak{M}$. Za fiksirano i neka je t_i proizvoljan realan broj koji zadovoljava

$$t_i<|\nu|(E_i). \tag{8}$$

Na osnovu definicije totalne varijacije $|\nu|$, postoji razlaganje (A_{ij}) $(j=1,2,\ldots)$ skupa E_i tako da je

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\nu(A_{ij})|>t_i. \tag{9}$$

No kako je i (A_{ij}) $(i,j=1,2,\ldots)$ jedno razlaganje skupa E, to je

$$\sum_{i,j=1}^{\infty}|\nu(A_{ij})|\leqslant|\nu|(E).$$

Vodeći računa da je na osnovu (9)

$$\sum_{i,j=1}^{\infty}|\nu(A_{ij})|=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|\nu(A_{ij})|>\sum_{i=1}^{\infty}t_i,$$

sledi

$$\sum_{i=1}^{\infty}t_i<|\nu|(E)$$

za sve realne brojeve t_i koji zadovoljavaju (8). Uzimajući ovde supremum leve strane preko svih dozvoljenih brojeva t_i, nalazimo

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\nu|(E_i)\leqslant|\nu|(E). \tag{10}$$

Da bismo dokazali obrnutu nejednačinu, uočimo pored (E_i) još i razlaganje (A_j) skupa E. Tada je za fiksirano i $(E_i\cap A_j)$ razlaganje skupa E_i a za fiksirano j $(E_i\cap A_j)$ je razlaganje od A_j. Zbog σ-aditivnosti mere ν je, dakle,

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\nu(A_j)|=\sum_{j=1}^{\infty}\left|\sum_{i=1}^{\infty}\nu(A_j\cap E_i)\right|\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}|\nu(A_j\cap E)|.$$

S obzirom da se u dvostrukom redu sa nenegativnim članovima sme izmeniti poredak suma, to je prema definiciji totalne varijacije $|\nu|$

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\nu(A_j)|\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|\nu(A_j\cap E_i)|\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|\nu|(E_i).$$

Ova poslednja nejednačina važi za svako razlaganje (A_j) skupa E, pa je zato

$$|\nu|(E)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|\nu|(E_i). \tag{11}$$

Iz (10) i (11) sledi σ-aditivnost funkcije $|\nu|$. Kako je ona prema definiciji 7, nenegativna, to je $|\nu|$ pozitivna mera na $\mathfrak{M}$.

Stav 2. *Totalna varijacija $|\nu|$ realne mere ν na $\mathfrak{M}$ je* k o n a č n a *pozitivna mera na $\mathfrak{M}$.*

Trivijalno je da je svaka konačna pozitivna mera μ na $(X,\mathfrak{M})$, ograničena na $\mathfrak{M}$, tj. da postoji pozitivan broj M takav da je $\mu(E)\leqslant M$ za svako $E\in\mathfrak{M}$. To jednostavno sledi iz $\mu(E)\leqslant\mu(X)=M<+\infty$. Važna posledica stava 2 je da je i svaka realna mera, koja je po definiciji konačna, ograničena na $\mathfrak{M}$. Zaista, kako je skup E i sam sebi jedno razlaganje, to je na osnovu definicije 7 i činjenice da je $|\nu|$ konačna pozitivna mera

$$|\nu(E)| \leqslant |\nu|(E) \leqslant K \quad \text{za svako } E \in \mathfrak{M},$$

gde za K možemo uzeti $|\nu|(X)$.

Dokaz stava 2. Pre svega, pokazaćemo da ako je za neko $E \in \mathfrak{M}$

$$|\nu|(E) = +\infty,$$

da tada postoje disjuktni skupovi A i B, takvi da je $E = A \cup B$ $(A, B \in \mathfrak{M})$ i

(12) $$|\nu(A)| > 1, \quad |\nu|(B) = +\infty.$$

Na osnovu definicije totalne varijacije $|\nu|$ postoji, naime, razlaganje (E_i) skupa E takvo da je za svako $t < +\infty$

(13) $$\sum_{i=1}^{\infty} |\nu(E_i)| > t.$$

Kako je ν konačna funkcija skupa, možemo uzeti

(14) $$t = 2(1 + |\nu(E)|).$$

Zbog (13) je za dovolno veliko n

(13') $$\sum_{i=1}^{n} |\nu(E_i)| > t.$$

Rastavimo sumu na levoj strani na dve sume Σ^+ i Σ^-, tako da se u Σ^+ nalaze pozitivni a u Σ^- negativni brojevi $\nu(E_i)$. Zbog

$$\sum_{i=1}^{n} |\nu(E_i)| = \sum{}^{+} \nu(E_i) - \sum{}^{-} \nu(E_i),$$

važi tada bar jedna od nejednačina

(15) $$\sum_{i=1}^{n} |\nu(E_i)| \leqslant 2 \sum{}^{+} \nu(E_i) \quad \text{ili} \quad \sum_{i=1}^{n} |\nu(E_i)| \leqslant 2 \left|\sum{}^{-} \nu(E_i)\right|.$$

Pretpostavimo da važi prva; u suprotnom slučaju postupili bismo na analogan način. Označimo sa A uniju onih E_i za koje je $\nu(E_i) > 0$. Tada je $A \subset E$, a zbog (15_1), (13') i (14) je

(16) $$|\nu(A)| = \sum{}^{+} \nu(E_i) \geqslant \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} |\nu(E_i)| > \frac{t}{2} \geqslant 1.$$

Stavimo li $B = E - A$, tada je, prema 4° stava 2.1, (16) i (14), takođe

(16') $$|\nu(B)| = |\nu(E) - \nu(A)| \geqslant |\nu(A)| - |\nu(E)| > \frac{t}{2} - |\nu(E)| = 1.$$

Kako je prema učinjenoj pretpostavci, $|\nu|(E) = +\infty$ a na osnovu stava 1

$$|\nu|(E) = |\nu|(A) + |\nu|(B),$$

to važi bar jedna od jednakosti

$$|\nu|(A) = +\infty, \quad |\nu|(B) = +\infty.$$

S obzirom da je prema (16) i (16') u svakom slučaju $|\nu(A)| > 1$ i $|\nu(B)| > 1$, to izmenjujući eventualno mesta skupovima A i B, sledi tvrđenje (12).

Dokazaćemo sada stav 2 svođenjem na apsurd. Pretpostavimo zato da je

$$|\nu|(X) = +\infty.$$

Na osnovu tvrđenja (11) sa $E = X$, postoje tada disjunktni skupovi A_1 i B_1 takvi da je $X = A_1 \cup B_1$ $(A_1, B_1 \in \mathfrak{M})$ i

$$|\nu(A_1)| > 1, \quad |\nu|(B_1) = +\infty.$$

Primenjujući zatim tvrđenje (12) sa $E = B_1$, doći ćemo do disjunktnih skupova A_2 i B_2, takvih da je $B_1 = A_2 \cup B_2$ $(A_2, B_2 \in \mathfrak{M})$ i

$$|\nu(A_2)| > 1, \quad |\nu|(B_2) = +\infty.$$

Totalnom indukcijom dolazimo onda do dva niza skupova iz $\mathfrak{M}$, (A_n) i (B_n), takvih da je za svako $n: A_n \cap B_n = O$, $B_{n-1} = A_n \cup B_n$ i

$$|\nu(A_n)| > 1, \quad |\nu|(B_n) = +\infty.$$

No kako su skupovi A_n i B_n disjunktni i $A_n \cup B_n = B_{n-1}$ $(B_0 = X)$, to su i skupovi A_n među sobom disjunktni. Dakle,

$$\nu(A) = \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) \quad (A \in \mathfrak{M}),$$

što protivureči činjenici da je ν realna mera na $\mathfrak{M}$, jer, zbog $|\nu(A_n)| > 1$, red na desnoj strani ne konvergira (primedba posle definicije 6).

Neka su ν i λ dve mere (realne ili pozitivne), definisane na istoj σ-algebri $\mathfrak{M}$. Ako funkcije skupa $\nu + \lambda$ i $c\nu$ (c konstanta, realna ili pozitivna) definišemo sa

$$(\nu + \lambda)(E) = \nu(E) + \lambda(E) \quad (E \in \mathfrak{M})$$

odnosno

$$(c\nu)(E) = c\,\nu(E),$$

lako je uvideti da su $\nu + \lambda$ i $c\nu$ mere (realne ili pozitivne) na $\mathfrak{M}$.

Ako je ν realna mera na $\mathfrak{M}$, prema definiciji 7 je $|\nu| \geqslant \nu$ a na osnovu stavova 1 i 2 je $|\nu|$ konačna pozitivna mera. Zato su i funkcije skupa

$$\nu^+ = \frac{1}{2}\,(|\nu| + \nu) \quad \text{i} \quad \nu^- = \frac{1}{2}\,(|\nu| - \nu)$$

konačne pozitivne mere na $\mathfrak{M}$. Nazivamo ih *pozitivna* odnosno *negativna varijacija* mere ν.

Stav 3. *Neka je ν realna mera na $(X, \mathfrak{M})$ i $|\nu|$ njena totalna varijacija. Tada postoje konačne pozitivne mere ν^+ i ν^-, tako da je*

$$\nu = \nu^+ - \nu^- \quad \text{i} \quad |\nu| = \nu^+ + \nu^-.$$

Šta više, prostor X može se razložiti na uniju disjunktnih skupova A i $B \in \mathfrak{M}$ tako da pozitivna i negativna varijacija ν^+ i ν^- zadovoljavaju

$$\nu^+(E) = \nu(A \cap E) \quad i \quad \nu^-(E) = -\nu(B \cap E) \quad (E \in \mathfrak{M}).$$

Ovu poslednju osobinu možemo i ovako iskazati: $\nu(E) \geqslant 0$ za svako $E \subset A$ i $\nu(E) \leqslant 0$ za svako $E \subset B$, tj. na A je skoncentrisana sva pozitivna a na B sva negativna masa realne mere ν.

Prvi od iskaza stava 3 je *Jordanovo razlaganje realne mere* ν, a drugi *Hahnovo razlaganje prostora* X inducirano merom ν.

Među svim mogućim razlaganjima realne mere ν na razliku dve konačne pozitivne mere μ_1 i μ_2, Jordanovo razlaganje ima izvesnu minimalnu osobinu. Naime, ako je $\nu = \mu_1 - \mu_2$ proizvoljno razlaganje realne mere ν, tada je $\mu_1 \geqslant \nu^+$ i $\mu_2 \geqslant \nu^-$. Zaista, zbog $\nu \leqslant \mu_1$, iz stava 3 sledi

$$\nu^+(E) = \nu(A \cap E) \leqslant \mu_1(A \cap E) \leqslant \mu_1(E),$$

i slično za ν^-.

Dokaz stava 3. Treba jedino dokazati Hahnovo razlaganje prostora X. Kako je ν ograničena na $\mathfrak{M}$, to je

$$\sup_{E \in \mathfrak{M}} \nu(E) = \alpha \ (= \text{konačan broj}).$$

Može se pokazati da postoji skup A u $\mathfrak{M}$ takav da je $\nu(A) = \alpha$. Skupovi A i $B = X - A$ daju Hahnovo razlaganje prostora X. Zaista, kada bi u A postojao podskup $A_1 \in \mathfrak{M}$ takav da je $\nu(A_1) < 0$, imali bismo $\nu(A - A_1) = \nu(A) - \nu(A_1) > \alpha$, što je nemoguće s obzirom na definiciju broja α. Slično ako bi u B postojao podskup B_1 takav da je $\nu(B_1) > 0$, imali bismo $\nu(A \cup B_1) = \alpha + \nu(B_1) > \alpha$, što je nemoguće.

6.iii. Radon-Nikodymov stav i Lebesgueovo razlaganje mere

U prethodnom odeljku videli smo da su osobine 1°—4° specijalne realne mere ϕ, definisane sa (1), karakteristične i za proizvoljnu realnu meru ν. Što se tiče osobine 5°, njoj ćemo, pre svega, dati posebno ime.

Definicija 8. Neka je μ pozitivna mera na σ-algebri $\mathfrak{M}$ i neka je ν proizvoljna (realna ili pozitivna) mera na $\mathfrak{M}$. Mera ν je *apsolutno neprekidna* u odnosu na meru μ ako za svako $E \in \mathfrak{M}$

$$\mu(E) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nu(E) = 0.$$

Primećujemo da se apsolutna neprekidnost mere ν u odnosu na μ može uvesti i zahtevom tipa (4).

Sada osobinu 5° realne mere ϕ iz (1) možemo i ovako iskazati: Neka je μ pozitivna mera na $(X, \mathfrak{M})$ i $f \in \mathfrak{L}(X, \mu)$. Tada $\int_E f \, d\mu$, posmatran kao funkcija od $E \in \mathfrak{M}$, definiše u odnosu na μ, jednu apsolutno neprekidnu realnu meru na $\mathfrak{M}$. Da pod izvesnim uslovima važi i obrnut iskaz tvrdi

Stav 4 (Radon-Nikodym). *Neka je μ pozitivna σ-konačna mera na merljivom prostoru $(X, \mathfrak{M})$. Ako je realna mera ν na $(X, \mathfrak{M})$ apsolutno neprekidna u odnosu na μ, tada postoji funkcija $f \in \mathfrak{L}(X, \mu)$ takva da je*

$$\nu(E) = \int_E f \, d\mu \quad \textit{za svako} \quad E \in \mathfrak{M}.$$

Funkcija f je *Radon-Nikodymov izvod* realne mere ν u odnosu na pozitivnu meru μ; koristi se i oznaka $d\nu/d\mu = f$.

Dokaz stava 4. Pretpostavimo prvo da su μ i ν konačne pozitivne mere; ovih suplementarnih pretpostavki ćemo se naknadno osloboditi.

Neka je $\mathfrak{F}$ skup nenegativnih μ-integrabilnih funkcija f na X za koje je

$$\int_E f\,d\mu \leqslant \nu(E) \text{ za svako } E \in \mathfrak{M}. \tag{17}$$

Skup $\mathfrak{F}$ nije prazan, jer mu pripada funkcija identički jednaka nuli na X. Ako f i $g \in \mathfrak{F}$, tada i $\max\{f, g\} \in \mathfrak{F}$. Zaista, ako je $E \in \mathfrak{M}$ i stavimo

$$E_1 = \{x \in E: f(x) \geqslant g(x)\},$$

tada je prema definiciji kolekcije $\mathfrak{F}$

$$\int_E \max\{f, g\}\,d\mu = \int_{E_1} f\,d\mu + \int_{E-E_1} g\,d\mu$$
$$\leqslant \nu(E_1) + \nu(E-E_1) = \nu(E).$$

Kako je ν konačna pozitivna mera, to je na osnovu (17)

$$\int_X f\,d\mu \leqslant \nu(X) = M < +\infty \quad \text{za svako } f \in \mathfrak{F},$$

tj. skup brojeva

$$\left\{\int_X f\,d\mu\right\}_{f\in\mathfrak{F}} \tag{18}$$

je ograničen s gornje strane te ima konačan supremum m. Zato postoji niz (f_n) u $\mathfrak{F}$ tako da je

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu = m. \tag{18'}$$

Stavimo

$$g_n = \max\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}.$$

Tada je $f_n \leqslant g_n$ i $g_n \in \mathfrak{F}$, te je

$$\int_X f_n\,d\mu \leqslant \int_X g_n\,d\mu \leqslant m,$$

što zajedno sa (18') daje

$$\lim_{n\to\infty} \int_X g_n\,d\mu = m.$$

Za svako x niz (g_n) ne opada. Neka je $g = \lim_{n\to\infty} g_n$. Na osnovu stava 5.2 je

$$\int_E g\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E g_n\,d\mu \quad \text{za svako } E \in \mathfrak{M},$$

odakle specijalno sledi

$$\int_X g\,d\mu = m. \tag{19}$$

Kako je, zbog $g_n \in \mathfrak{F}$,

$$\int_E g_n\,d\mu \leqslant \nu(E) \text{ za svako } n \text{ i za svako } E \in \mathfrak{M},$$

biće

$$\int_E g\,d\mu \leqslant \nu(E) \quad \text{za svako } E \in \mathfrak{M},$$

tj. $g \in \mathfrak{F}$.

Prema tome,

$$\omega(E) = \nu(E) - \int_E g\,d\mu$$

je pozitivna mera na $\mathfrak{M}$. Svođenjem na apsurd pokazaćemo da je ona identički jednaka nuli na $\mathfrak{M}$. Pretpostavimo zato da

$$\text{postoji skup } E \in \mathfrak{M} \text{ tako da je } \omega(E) > 0. \tag{20}$$

Kako je pozitivna mera μ konačna, postojaće tada broj $k>0$ takav da je $\omega(E)>k\mu(E)$, tj.

$$(\omega-k\mu)(E)>0.$$

No tada postoji i podskup $A\subset E\,(A\in\mathfrak{M})$ takav da uz

$$(\omega-k\mu)(A)>0 \tag{21}$$

važi i

$$(\omega-k\mu)(B)\geqslant 0 \text{ za svako } B\subset A\ (B\in\mathfrak{M}). \tag{22}$$

Mera $\omega-k\mu$ je apsolutno neprekidna u odnosu na μ kao zbir triju takvih mera. Na osnovu definicije 8, iz (21) zato sledi da je $\mu(A)>0$.

Označimo sa K_A karakterističnu funkciju skupa A. Pokazaćemo da $g+kK_A\in\mathfrak{F}$. Zaista, zbog $g\in\mathfrak{F}$ i na osnovu (22) sa $B=E\cap A$ je za svako $E\in\mathfrak{M}$

$$\begin{aligned}\int_E(g+kK_A)\,d\mu&=\int_{E-A}g\,d\mu+\int_{E\cap A}(g+kK_A)\,d\mu\\&\leqslant\nu(E-A)+\nu(E\cap A)=\nu(E).\end{aligned}$$

Međutim, zbog (19), $k>0$ i $\mu(A)>0$ je

$$\int_X(g+kK_A)\,d\mu=m+k\mu(A)>m,$$

što protivureči činjenici da je m supremum kolekcije (18) i da $g+kK_A\in\mathfrak{F}$. Znači, pretpostavka (20) je neodrživa, tj.

$$\omega(E)=0 \quad\text{za svako } E\in\mathfrak{M},$$

ili eksplicitno

$$\nu(E)=\int_E g\,d\mu \quad\text{za svako } E\in\mathfrak{M}.$$

Time je dokazano tvrđenje stava uz suplementarne uslove da su ν i μ konačne pozitivne mere.

Prvo ćemo se osloboditi pretpostavke o konačnosti pozitivne mere μ. Ako je μ σ-konačna na $\mathfrak{M}$, tada, prema definiciji 5, postoje skupovi X_n $(n=1,2,\ldots)$ u $\mathfrak{M}$ takvi da je $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}X_n$ i $\mu(X_n)<+\infty$. Bez ograničenja možemo pretpostaviti da su X_n disjunktni skupovi, jer ako oni to nisu, zamenićemo ih skupovima Y_n, gde je

$$Y_1=X_1 \quad\text{i}\quad Y_n=X_n-\bigcup_{\nu=1}^{n-1}Y_\nu \quad (n\geqslant 2).$$

Kako je μ konačna pozitivna mera na X_n, to na osnovu prethodnih razmatranja postoji μ-integrabilna funkcija $\bar g_n$ na X_n takva da je

$$\nu(E)=\int_E\bar g_n\,d\mu$$

za svaki merljiv skup E u X_n. Ako onda funkciju $\bar g$ definišemo sa $\bar g(x)=\bar g_n(x)$ kada $x\in X_n$ (skupovi X_n su disjunktni!), slediće tvrđenje stava 4 i za σ-konačnu pozitivnu meru μ, jer je, zbog $\int_{X_n}\bar g_n\,d\mu=\nu(X_n)$,

$$\int_X\bar g\,d\mu=\int_{X_1}\bar g_1\,d\mu+\int_{X_2}\bar g_2\,d\mu+\cdots=\nu(X_1)+\nu(X_2)+\cdots=\nu(X)<+\infty,$$

tj. $\bar g\in\mathfrak{L}(X,\mu)$.

Ostalo je još jedino da se oslobodimo suplementarne pretpostavke da je ν konačna pozitivna mera. Neka je ν realna mera. Tada je na osnovu stava 3, $\nu=\nu^+-\nu^-$, gde su ν^+ i ν^- konačne pozitivne mere, pa naše razmatranje treba primeniti na ν^+ i ν^- posebice.

Definicija 9. Neka su ν i λ mere na $(X, \mathfrak{M})$. Mera ν je *singularna* u odnosu na λ, ako postoje skupovi $A, B \in \mathfrak{M}$ takvi da je

$$A \cup B = X, A \cap B = O \quad \text{i} \quad \nu(A)=0, \quad \lambda(B)=0.$$

Jasno je da je tada i mera λ singularna u odnosu na ν.

Radon-Nikodymov stav zajedno sa sledećim Lebesgueovim stavom o razlaganju realne mere spadaju u najznačajnije rezultate teorije mere.

Stav 5. *Neka je μ σ-konačna pozitivna mera na $(X, \mathfrak{M})$. Proizvoljna realna mera ν na $(X, \mathfrak{M})$ može se razložiti na zbir dveju mera, α i β, tako da su:*

1° *α i β uzajamno singularne,*

2° *α je apsolutno neprekidna u odnosu na μ,*

3° *β je singularna u odnosu na μ.*

Dokaz. Kao kod dokaza stava 4 pretpostavimo prvo da su μ i ν konačne pozitivne mere.

Neka je

$$\mathfrak{A} = \{E \in \mathfrak{M} : \mu(E) = 0\}$$

i stavimo

$$m = \sup_{E \in \mathfrak{A}} \nu(E).$$

Tada postoji niz skupova (E_n) u $\mathfrak{A}$ takav da je

(23) $$\nu(E_n) > m - 1/n \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Neka je

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Tada je, zbog $E_n \in \mathfrak{A}$,

$$\mu(B) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = 0,$$

a kako je $\mu \geqslant 0$, odavde sledi

(24) $$\mu(B) = 0 \quad \text{tj.} \quad B \in \mathfrak{A}.$$

Iz $B \supset E_n$ i (23) dobijamo

$$\nu(B) \geqslant \nu(E_n) > m - 1/n \quad \text{za svako } n,$$

a time i $\nu(B) \geqslant m$. No zbog $B \in \mathfrak{A}$ i na osnovu definicije broja m sledi i $\nu(B) \leqslant m$, tako da je

(25) $$\nu(B) = m.$$

Stavimo $A = X - B$. Tada su

$$\alpha(E) = \nu(E \cap A) \quad \text{i} \quad \beta(E) = \nu(E \cap B) \quad (E \in \mathfrak{M})$$

konačne pozitivne mere i $\alpha+\beta=\nu$. Kako su A i B disjunktni skupovi i $A\cup B=X$, iz

$$\alpha(B)=\nu(B\cap A)=\nu(O)=0$$

i

$$\beta(A)=\nu(A\cap B)=\nu(O)=0.$$

sledi da su mere α i β uzajamno singularne. Zbog druge od ovih jednačina i (24), sledi da su i β i μ uzajamno singularne.

Ostaje još da pokažemo da je konačna pozitivna mera α apsolutno neprekidna u odnosu na μ. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji skup $E\in\mathfrak{M}$ tako da je

$$\mu(E)=0 \quad \text{i} \quad \alpha(E)>0. \tag{26}$$

Shodno definiciji funkcije α, takav skup E mora imati neprazan presek sa A, jer inače bi bilo $\alpha(E)=0$. Bez ograničenja možemo, dakle, smatrati da $E\subset A$, tj. da su skupovi E i B disjunktni. Tada se, zbog

$$\nu(E)=\alpha(E)+\beta(E)=\alpha(E)+\nu(E\cap B)=\alpha(E),$$

pretpostavka (26) svodi na: postoji $E\subset A$, $E\in\mathfrak{M}$, tako da je

$$\mu(E)=0 \quad \text{i} \quad \nu(E)>0. \tag{26'}$$

Međutim, na osnovu (24) i (25), iz (26′) sledi

$$\mu(E\cup B)=\mu(E)+\mu(B)=0$$

i

$$\nu(E\cup B)=\nu(E)+\nu(B)=\nu(E)+m>m.$$

No, ovo je u suprotnosti sa definicijom broja m. Znači, pretpostavka (26) je neodrživa, tj. za svako $E\in\mathfrak{M}$ iz $\mu(E)=0$ sledi $\alpha(E)=0$, što kazuje da je α apsolutno neprekidna u odnosu na μ.

Privremenih pretpostavki da su μ i ν konačne pozitivne mere možemo se osloboditi na sličan način kao što smo to učinili pri dokazu stava 4.

Vežbanja 6

1. Neka je $\mathfrak{M}$ kolekcija delova od X. Pokazati da je $\mathfrak{M}$ σ-algebra u X ako je 1° $X\in\mathfrak{M}$, 2° $A\in\mathfrak{M}\Rightarrow \mathbf{C}A\in\mathfrak{M}$, 3° $A_n\in\mathfrak{M}$ $(n=1,2,\ldots)\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\in\mathfrak{M}$.

2. Neka je X neprebrojiv skup i neka je $\mathfrak{M}$ kolekcija svih skupova $E\subset X$ takvih da je ili E ili $\mathbf{C}E$ najviše prebrojiv. Pokazati da je $\mathfrak{M}$ σ-algebra na X.

3. Neka je $(X,\mathfrak{M})$ merljiv prostor iz vežbanja 2. Ako je $E\subset\mathfrak{M}$, stavimo $\mu(E)=0$ odnosno $\mu(E)=1$ prema tome da li je E ili $\mathbf{C}E$ najviše prebrojiv skup. Pokazati da je μ mera na $\mathfrak{M}$.

4. U skupu X je $\mathbf{P}X$ jedna σ-algebra. Neka je x_0 fiksirana tačka u X i stavimo $\mu(E)=1$ ako $x_0\in E$ i $\mu(E)=0$ ako $x_0\notin E$. Pokazati da je μ mera na $(X,\mathbf{P}X)$.

7.i. Neprekidnost i diferencijabilnost

Nasuprot prethodnom odeljku u kome smo pojam mere i integrala tretirali u najopštijem vidu, u narednim odeljcima bavićemo se isključivo Lebesgueovom merom i Lebesgueovim integralom u R, i to, uglavnom, na razmaku (a, b). Zato ćemo i način pisanja izmeniti i odsada Lebesgueov integral funkcije f na razmaku (a, b) označavati sa

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

Lebesg $\int$

jer Riemannov integral ionako nećemo nigde koristiti. Isto tako, umesto o m-integralu i m-integrabilnosti govorićemo jednostavno o integralu odnosno integrabilnosti, a i u terminima m-mera i m-merljivost izostavljaćemo prefiks m.

Definicija 1. Neka f preslikava R u R^* i stavimo $f: R \to R^*$

$$\boxed{D(x, h) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

Kada $h \to \pm 0$ svakom $\boxed{\text{fiksiranom}}$ x odgovaraju četiri vrednosti (konačne ili beskonačne) u R^*

$$\overline{\lim_{h\to+0}}\, D(x,h), \quad \underline{\lim_{h\to+0}}\, D(x,h), \quad \overline{\lim_{h\to-0}}\, D(x,h), \quad \underline{\lim_{h\to-0}}\, D(x,h).$$

Nazivamo ih izvodima — gornji desni, donji desni, gornji levi i donji levi — funkcije f u tački x. Označavamo ih kratko sa D^+f, D_+f, D^-f, D_-f. Pod Df podrazumevaćemo bilo koji od njih.

Ako su sva četiri izvoda Df među sobom jednaka, funkcija f ima izvod f' u tački x. Od posebnog interesa je kada je izvod konačan.

Naivno shvatanje da neprekidnost funkcije u razmaku u izvesnom smislu osigurava postojanje izvoda, poticalo je svojevremeno otuda što elementarne funkcije (sa kojima se tada isključivo radilo) nemaju izvod samo u izolovanim tačkama. Tek Weierstrassov primer neprekidne funkcije koja nigde nema izvod razbio je ovo predubeđenje. Međutim, ako se i dugo čekalo na takav primer, to nikako ne znači da ima srazmerno malo takvih „patoloških" funkcija. Naprotiv. Pokazalo se da izuzetak pre čine one neprekidne funkcije koje imaju izvod. To, u suštini, tvrdi

Stav 1 (Banach). *Neka je $C[a, b]$ metrički prostor funkcija f neprekidnih na $[a, b]$. Kolekcija onih funkcija iz $C[a, b]$ koje bar u nekoj tački u $[a, b]$ imaju konačan izvod je skup prve kategorije u $C[a, b]$.*

Kako je $C[a, b]$, kao kompletan metrički prostor, druge kategorije u samom sebi (stav II.4.9), to iz stava 1 sledi da „većina" neprekidnih funkcija nema konačan izvod ni u jednoj tački.

Dokaz stava 1. Bez ograničenja posmatraćemo neprekidne funkcije f na $[0, 1]$ koje zadovoljavaju $f(0)=f(1)$, tako da ih možemo periodički produžiti ne narušavajući njihovu neprekidnost. Označimo sa $\tilde{C}[0, 1]$ metrički prostor periodičnih neprekidnih funkcija, periode 1, sa uobičajenom uniformnom metrikom.

Da bi $f \in \tilde{C}[0, 1]$ u nekoj tački ξ imala konačan izvod potrebno je da je količnik

(1) $$\left|\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}\right| \quad \text{ograničen za } h>0.$$

Označimo sa M kolekciju onih funkcija f iz $\tilde{C}[0,1]$ koje bar u jednoj tački $\xi \in [0,1]$ zadovoljavaju uslov (1). Neka, sem toga, M_k označava kolekciju onih funkcija iz $\tilde{C}[0,1]$ koje bar u jednoj tački $\xi \in [0,1]$ zadovoljavaju

$$\left|\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}\right| \leqslant k \quad \text{za svako } h>0.$$

Očigledno je

$$M=\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k. \tag{2}$$

Tvrđenje stava 1 slediće ako pokažemo da je M skup prve kategorije u $\tilde{C}[0,1]$. S obzirom na (2) treba, dakle, dokazati da su skupovi M_k nigde gusti u $\tilde{C}[0,1]$, a za to je, prema definiciji II.2.12, dovoljno pokazati da je M_k zatvoren a $\mathbf{C}M_k$ svuda gust skup u $\tilde{C}[0,1]$.

Neka je f tačka nagomilavanja skupa M_k i neka je (f_n) niz tačaka u M_k koji konvergira ka f. Kako $f_n \in M_k$, to za svako $n=1,2,\ldots$ postoji tačka $\xi_n \in [0,1]$ takva da je

$$\left|\frac{f_n(\xi_n+h)-f_n(\xi_n)}{h}\right| \leqslant k \quad \text{za svako } h>0. \tag{3}$$

Neka je ξ tačka nagomilavanja skupa $\{\xi_n\}$ i neka niz $\xi_{n_i} \to \xi$. Tada je

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}\right| \leqslant &\left|\frac{f(\xi+h)-f(\xi_{n_i}+h)}{h}\right| + \left|\frac{f(\xi_{n_i}+h)-f_{n_i}(\xi_{n_i}+h)}{h}\right| \\ &+\left|\frac{f_{n_i}(\xi_{n_i}+h)-f_{n_i}(\xi_{n_i})}{h}\right| + \left|\frac{f_{n_i}(\xi_{n_i})-f(\xi_{n_i})}{h}\right| + \left|\frac{f(\xi_{n_i})-f(\xi)}{h}\right|.\end{aligned} \tag{4}$$

Neka je $\varepsilon>0$. Kako $\xi_{n_i} \to \xi$, zbog neprekidnosti funkcije f prvi i peti sabirak na desnoj strani mogu se učiniti manjim od $\varepsilon h/4$ za dovoljno veliko n_i. Kako $f_{n_i} \to f$, a konvergencija po metrici prostora $\tilde{C}[0,1]$ znači uniformnu konvergenciju niza (f_{n_i}), to se za dovoljno veliko n_i drugi i četvrti član na desnoj strani mogu učiniti manjim od $\varepsilon h/4$. Za dovoljno veliko n_i sledi, dakle, iz (4) i prema (3)

$$\left|\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}\right| \leqslant \left|\frac{f_{n_i}(\xi_{n_i}+h)-f_{n_i}(\xi_{n_i})}{h}\right| + \varepsilon \leqslant k+\varepsilon.$$

Kako $\varepsilon>0$ možemo birati proizvoljno malo, to je

$$\left|\frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h}\right| \leqslant k,$$

tj. $f \in M_k$. Svaka tačka nagomilavanja f skupa M_k pripada, znači, skupu M_k, te je on zatvoren.

Ostaje da pokažemo da je skup $\mathbf{C}M_k$ svuda gust u $\tilde{C}[0,1]$. Neka je f proizvoljna tačka iz $\tilde{C}[0,1]$ i neka je $\varepsilon>0$. Na osnovu uniformne neprekidnosti funkcije f možemo interval $[0,1]$ podeliti u dovoljno male podrazmake tačkama

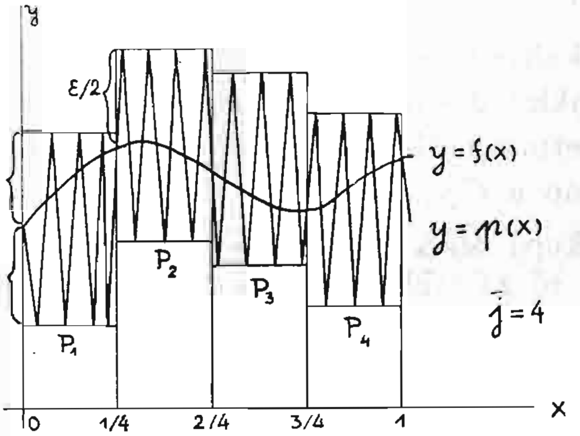
$$0, \frac{1}{j}, \frac{2}{j}, \ldots, \frac{j-1}{j}, 1,$$

tako da je

(5) $$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon/2$$

kad god x' i x'' leže u istom podrazmaku. Zbog (5), delovi krive $y=f(x)$ leže u pravougaonicima

$$P_i=\left\{(x,y): \frac{i-1}{j}\leqslant x\leqslant\frac{i}{j},\quad f\left(\frac{i-1}{j}\right)-\varepsilon/2\leqslant y\leqslant f\left(\frac{i-1}{j}\right)+\varepsilon/2\right\}\quad (i=1,2,\ldots,j).$$



Neka je p neprekidna poligonalna linija koja čitava leži u pravougaonicima P_i, prolazi kroz tačke $\left(\frac{i-1}{j}, f\left(\frac{i-1}{j}\right)\right)$ i nagib njenih sastavnih delova je po apsolutnoj vrednosti veći od k. Tada $p\in \complement M_k$ i kako $\bigcup\limits_i P_i$ leži u ε-okolini od f, to je $d(f,p)<\varepsilon$, što znači da je skup $\complement M_k$ svuda gust u $\tilde{C}[0,1]$.

7.ii. Izvod monotone funkcije i integral njenog izvoda

Prema stavu 1, u klasi neprekidnih funkcija veoma su retke funkcije koje imaju konačan izvod. Tome nasuprot svaka funkcija ograničene varijacije ima konačan izvod skoro svuda (u smislu Lebesgueove mere). Kako se svaka funkcija ograničene varijacije može rastaviti na razliku dve monotono rastuće funkcije (stav II.8.6), to je dovoljno dokazati:

Stav 2. *Monotona funkcija f na $[a,b]$ ima konačan izvod skoro svuda na $[a,b]$.*

Za dokaz stava 2 koristićemo jedan Vitalijev stav o pokrivanju u kome dolazi do izražaja i mera skupa.

Definicija 2. Neka je $E\subset R$ i neka je $\{I\}$ kolekcija zatvorenih razmaka koji se ne svode na jednu jedinu tačku. Kolekcija $\{I\}$ *pokriva u Vitalijevom smislu* skup E ako svakom $x\in E$ odgovara niz razmaka iz $\{I\}$ čija dužina teži nuli i koji svi sadrže tačku x.

X → (Iᵥ)

Stav 3 (Vitali). *Neka je skup $E\subset R$ eventualno i nemerljiv ali takav da je njegova spoljna mera $m^*(E)<+\infty$. Tada se iz svakog Vitalijevog pokrivanja $\{I\}$ skupa E može izdvojiti najviše prebrojiva kolekcija $\{I_k\}$ međusobno disjunktnih razmaka, tako da kolekcija tačaka iz E koje ne leže u $\bigcup\limits_k I_k$ ima meru nula, tj.*

(6) $$m(E-\bigcup_k I_k)=0,\quad I_i\cap I_j=O\quad (i\neq j).$$

Dokaz. Kako je $m^*(E)<+\infty$, to postoji otvoren skup $G\supset E$ tako da je $m(G)<+\infty$. Iz kolekcije $\{I\}$ izdvojićemo samo one razmake koji leže u G;

njihov skup označićemo sa A. Jasno je da i kolekcija A pokriva E u Vitalijevom smislu, jer je ona u odnosu na kolekciju $\{I\}$ osiromašena za najviše konačno mnogo razmaka koji odgovaraju određenoj tački x iz E.

Niz razmaka (I_k) definisaćemo potpunom indukcijom. Za I_1 uzećemo bilo koji razmak iz A. Pretpostavimo da smo već odredili $I_1, I_2, \ldots, I_p$. Neka je A_p skup onih razmaka iz A koji leže u $G - \bigcup_{k=1}^{p} I_k$. Ako je A_p prazan, $\bigcup_{k=1}^{p} I_k$ pokriva E i stav je dokazan. Ako A_p nije prazan, za I_{p+1} izabraćemo jedan od razmaka iz A_p koji zadovoljava

$$m(I_{p+1}) \geqslant \frac{1}{2} d_p, \tag{7}$$

gde je

$$d_p = \sup_{I \in A_p} m(I).$$

Primećujemo da smo ovim izborom postigli da je svaki razmak iz A_p najviše dvaput veći od I_{p+1}, tako da on, ako ima zajedničkih tačaka sa I_{p+1}, čitav leži u nekom razmaku J_{p+1}, koji je koncentričan razmaku I_{p+1} i pet puta veći od ovog.

Iz same konstrukcije je jasno da su razmaci (I_k) $(k = 1, 2, \ldots)$ međusobno disjunktni. Ostaje da pokažemo da važi (6). Zbog

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) \leqslant m(G) < +\infty, \tag{8}$$

svakom $\varepsilon > 0$ odgovara prirodni broj N tada da je

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} m(I_k) < \varepsilon. \tag{9}$$

Neka je $E_1 = E - \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$. Ako je E_1 prazan skup, stav je dokazan. U protivnom, pokazaćemo da je

$$E_1 \subset \bigcap_{k=N+1}^{\infty} J_k, \tag{10}$$

odakle će, prema definiciji razmaka J_k i (9), slediti

$$m^*(E_1) \leqslant \sum_{k=N+1}^{\infty} m(J_k) \leqslant 5 \sum_{k=N+1}^{\infty} m(I_k) < 5\,\varepsilon,$$

što predstavlja tvrđenje stava, jer $\varepsilon > 0$ možemo birati proizvoljno malo.

Ostaje da dokažemo inkluziju (10). Neka je $x \in E_1$. Zbog

$$E_1 \subset E - \bigcup_{k=1}^{N} I_k \subset G - \bigcup_{k=1}^{N} I_k,$$

sledi

$$x \in G - \bigcup_{k=1}^{N} I_k.$$

No, $G - \bigcup_{k=1}^{N} I_k$ je otvoren skup, te postoji razmak I' u kolekciji A koji sadrži tačku x i leži u $G - \bigcup_{k=1}^{N} I_k$; razmak I' pripada, znači, onom delu kolekcije A koji smo označili sa A_N.

Na osnovu (8) i (7), $d_p \to 0$ kada $p \to \infty$; razmak I' ne može, dakle, da pripada svim A_p, jer je $m(I')$ određen pozitivan broj. Prema tome, postoji *prvi* prirodni broj $r > N$ takav da $I' \notin A_r$, što znači da je

$$(11) \qquad I' \cap \bigcup_{k=1}^{r} I_k \neq O.$$

No, kako istovremeno $I' \in A_{r-1}$, to je

$$(12) \qquad I' \cap \bigcup_{k=1}^{r-1} I_k = O.$$

Iz (11) i (12) sledi da I' ima zajedničkih tačaka sa I_r, te prema definiciji razmaka J_r, $I' \subset J_r$. Kako je $r > N$, to

$$I' \subset \bigcup_{k=N+1}^{\infty} J_k,$$

pa $x \in I'$ povlači

$$x \in \bigcup_{k=N+1}^{\infty} J_k.$$

Time je stav 3 u potpunosti dokazan.

U primeni često koristimo sledeću varijantu Vitalijevog stava:

Stav 3'. *Neka je δ (ma kako mali) pozitivan broj. Pod uslovima stava* 3 *moguće je iz svakog Vitalijevog pokrivanja $\{I\}$ skupa E izdvojiti k o n a č n o mnogo disjunktnih razmaka $I_1, I_2, \ldots, I_n$, tako da skup tačaka iz E koje ne leže u $\bigcup_{k=1}^{n} I_k$ ima spoljnu meru $<\delta$, tj.*

$$m^*\left(E - \bigcup_{k=1}^{n} I_k\right) < \delta, \quad I_i \cap I_j = O \ (i \neq j).$$

Dokaz. Tvrđenje sledi neposredno iz stava 3, ako iz tamošnje najviše prebrojive kolekcije $\{I_k\}$, za koju važi

$$m(E - \bigcup_{k} I_k) = 0,$$

odstranimo razmake $I_{n+1}, I_{n+2}, \ldots$, pri čemu je n određeno uslovom da je

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} m(I_k) < \delta.$$

Ovo je uvek moguće postići, jer, prema (8), red $\sum_{k=1}^{\infty} m(I_k)$ konvergira.

Dokaz stava 2 počiva na sledeća dva iskaza i na njima analognim koje nije teško formulisati a dokazuju se na sličan način.

Neka f monotono raste na $[a, b]$. Tada

1° *skup S tačaka x u kojima je $D^+ f(x) = +\infty$ ima meru jednaku nuli,*

2° *skup T tačaka x u kojima je $D^+ f(x) > D_- f(x)$ ima meru jednaku nuli.*

Ovakvih skupova na kojima je jedan od izvoda Df beskonačan ili, ako su svi konačni, bar dva se međusobno razlikuju, ima konačno mnogo. Kako su svi mere nula, to je i njihova unija mere nula. Otud tvrđenje stava 2.

1° Pretpostavimo da je $m^*(S)=k>0$. Tada je moguće svakoj tački $x \in S$ koordinirati niz zatvorenih razmaka čiji se levi krajevi poklapaju sa x i čija dužina teži nuli, tako da je diferencija funkcije u krajnjim tačkama

$$\Delta f > K \Delta x,$$

gde K može biti proizvoljno veliki broj. Nizovi ovih razmaka kada x prolazi skup S, obrazuju jedno Vitalijevo pokrivanje $\{I\}$ tog skupa. Na osnovu stava 3', moguće je iz $\{I\}$ odabrati konačno mnogo međusobno disjunktnih razmaka čija je totalna dužina $> \frac{1}{2}\, k$. Sumirajući diferencije funkcije preko ovih disjunktnih razmaka, nalazimo

$$\Sigma \Delta f > K \Sigma \Delta x > \frac{1}{2}\, k K.$$

Kako f monotono raste, tim pre je

$$f(b) - f(a) > \frac{1}{2}\, k K,$$

što je nemoguće ako je $k>0$ i K proizvoljno veliki broj. Dakle, $k=0$.

2° Pretpostavimo da je skup T pozitivne mere. Neka su u i v racionalni brojevi takvi da je $u>v$ i stavimo

$$T(u, v) = \{x \in [a, b]:\ D^+ f(x) > u > v > D_- f(x)\}.$$

Skup T je unija skupova $T(u, v)$ kada u i v $(u>v)$ prolaze sve racionalne brojeve. Kako je ova unija prebrojiva a $m(T)>0$, postoji bar jedan par racionalnih brojeva p i q sa $p>q$ takav da je skup $T(p, q)=A$ pozitivne mere k. Neka je $\varepsilon>0$ i neka je G otvoren skup koji sadrži A i takav da je $m(G) < k+\varepsilon$ (stav 3.4). Kako je za $x \in A \subset T$

$$D_- f(x) < q,$$

to se svakoj tački x iz A može koordinirati niz zatvorenih razmaka čiji se desni krajevi poklapaju sa x i čija dužina teži nuli, tako da je diferencija funkcije f u krajnjim tačkama

$$\Delta f < q \Delta x.$$

Na osnovu stava 3', moguće je iz ovog Vitalijevog pokrivanja skupa A odabrati konačno mnogo disjunktnih razmaka $I_1, I_2, \ldots, I_n$ koji leže u G i pokrivaju deo A_1 od A tako da je $m(A_1) \geqslant k - \varepsilon$. Sumirajući diferencije funkcije preko ovih razmaka, nalazimo

$$\Sigma \Delta f < q \Sigma m(I_k) < q(k+\varepsilon),$$

jer $\bigcup_{k=1}^{n} I_k \subset G$.

Kako je za $x \in A_1 \subset T$

$$D^+ f(x) > p,$$

to se svakoj tački x iz A_1 može koordinirati niz zatvorenih razmaka čiji se levi krajevi poklapaju sa x i čija dužina teži nuli, tako da je diferencija funkcije f u krajnjim tačkama

$$\Delta f > p \Delta x.$$

Na osnovu stava 3′, moguće je iz ovog Vitalijevog pokrivanja skupa A_1 odabrati konačno mnogo disjunktnih razmaka $J_1, J_2, \ldots, J_m$ sadržanih u $\bigcup_{k=1}^{n} I_k$, čija je totalna dužina veća od $k-2\varepsilon$. Sumirajući preko tih razmaka, nalazimo

$$\Sigma \Delta f > p(k-2\varepsilon).$$

Kako je f monotono rastuća funkcija, suma njenih priraštaja preko razmaka $I_1, I_2, \ldots, I_n$ ne može biti manja od one preko razmaka $J_1, J_2, \ldots, J_m$. Dakle,

$$q(k+\varepsilon) \geqslant p(k-2\varepsilon),$$

što je u suprotnosti sa $p>q$, jer $\varepsilon>0$ možemo birati proizvoljno malo. Pretpostavka da je $m(T)>0$ je, dakle, neodrživa.

S obzirom da je izvod monotono rastuće funkcije definisan skoro svuda na $[a, b]$, merljiv i nenegativan, moguće je govoriti o njegovom integralu na $[a, b]$.

Stav 4. *Ako f monotono raste na $[a, b]$, tada je f' integrabilna funkcija na $[a, b]$ i*

(13) $$\int_a^b f'(x)\,dx \leqslant f(b)-f(a).$$

U (13) može efektivno stajati znak $<$.

Dokaz. Neka niz brojeva $h_n \to +0$ kada $n \to \infty$. Za $x>b$ smatraćemo da je f definisana sa $f(b)$. Na osnovu stava 2 niz

$$g_n(x) = \frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n} \to f'(x). \quad \text{s. s. na } [a, b].$$

(g_n) je niz nenegativnih i merljivih funkcija ($f(x)$ i $f(x+h_n)$ su merljive kao monotone funkcije), te je na osnovu Fatouove leme

(14) $$\int_a^b f'(x)\,dx \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)\,dx.$$

Međutim,

$$\int_a^b g_n\,dx = \frac{1}{h_n}\left\{\int_{a+h_n}^{b+h_n} f\,dx - \int_a^b f\,dx\right\}$$

$$= \frac{1}{h_n}\left\{\int_b^{b+h_n} f\,dx - \int_a^{a+h_n} f\,dx\right\}$$

$$= f(b) - \frac{1}{h_n}\int_a^{a+h_n} f\,dx \leqslant f(b)-f(a),$$

$b+h_n$

$\int_b^{b+h_n} f\,dx = \int_b^{f(b)}$

$f(b) = const$

jer je, zbog monotonije funkcije f,

$$\frac{1}{h_n}\int_a^{a+h_n} f\,dx \geqslant f(a).$$

Iz (14) sledi onda tvrđenje.

Da u (13) može stajati znak $<$, pokazuje

Primer 1. Funkciju f definisaćemo u prvom koraku na komplementu Cantorovog skupa, i to sa:

$$f(x)=\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}<x<\frac{2}{3};$$

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{4}, & \frac{1}{9}<x<\frac{2}{9}, \\ \frac{3}{4}, & \frac{7}{9}<x<\frac{8}{9}; \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{8}, & \frac{1}{27}<x<\frac{2}{27}, \\ \frac{3}{8}, & \frac{7}{27}<x<\frac{8}{27}, \\ \frac{5}{8}, & \frac{19}{27}<x<\frac{20}{27}, \\ \frac{7}{8}, & \frac{25}{27}<x<\frac{26}{27}, \end{cases}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

U tačkama $x=0$ i $x=1$ uzećemo

$$f(0)=0 \text{ i } f(1)=1.$$

Najzad, u nekoj tački x_0 iz $]0,1[$ u kojoj f još nije definisana, stavićemo

$$f(x_0)=\sup f(x),$$

gde se supremum proteže preko onih tačaka x koje su $<x_0$ i u kojima je f već definisana u prvom koraku.

Iz same konstrukcije se može videti da je f monotono rastuća funkcija koja je konstantne vrednosti u svim razmacima koji obrazuju komplement Cantorovog skupa. Kako je unija ovih mere 1, to je $f'(x)=0$ s. s. na $[0,1]$. Za funkciju f se leva strana u (13) svodi na 0 a desna na 1.

Primećujemo da je ova funkcija f čak i neprekidna na $[0,1]$. Naime, monotona funkcija može imati prekid u nekoj tački x_0 samo onda ako u bar jednom od razmaka $(f(x_0-0), f(x_0))$ i $(f(x_0), f(x_0+0))$ ne leži nijedna vrednost funkcije f; to je ovde isključeno, jer je skup vrednosti funkcije f svuda gust u $[0,1]$.

Stav 5. *Neka je $E\subset[a,b]$ proizvoljan skup mere nula. Tada postoji neprekidna monotono rastuća funkcija f tako da je $f'(x)=+\infty$ za svako $x\in E$.*

Dokaz. Na osnovu stava 3.4 za svako $n=1,2,\dots$ postoji otvoren skup G_n tako da

$$G_n\supset E \quad \text{i} \quad m(G_n)<1/2^n.$$

Stavimo

$$f_n(x)=m(G_n\cap[a,x]). \quad < \frac{1}{2^n}$$

Za fiksirano n nenegativna funkcija f_n je neprekidna i monotono raste. Kako je $f_n(x)<1/2^n$, to red

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)=f(x)$$

konvergira uniformno pa je i f nenegativna, monotono rastuća i neprekidna funkcija.

Pokazaćemo da je $f'(x)=+\infty$ za $x\in E$. Neka je n fiksirano. Kako, za dovoljno malo h (recimo, pozitivno) razmak $[x, x+h]$ čitav leži u G_n, to je

$$f_n(x+h)=m\{(G_n\cap[a,x])\cup(G_n\cap[x,x+h])\}=f_n(x)+h,$$

tj.

$$\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h}=1.$$

Za svaki prirodni broj N i dovoljno malo h je, znači

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h}\geqslant\sum_{n=1}^{N}\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h}=N,$$

odakle sledi tvrđenje.

Stav 6. *Neka je f neprekidna funkcija na $[a, b]$. Ako je $D^+f\geqslant 0$ skoro svuda na $[a, b]$ i $D^+f>-\infty$ svuda na $[a, b]$, tada f ne opada.*

Analogan iskaz važi i za bilo koji od izvoda Df.

Dokaz. Dovoljno je pokazati da je $f(a)\leqslant f(b)$, jer f zadovoljava iste uslove u svakom razmaku $[x, y]$ $(a\leqslant x<y\leqslant b)$.

Pokazaćemo, prvo, da f ne opada ako je $D^+f\geqslant 0$ *svuda* na $[a, b]$. U tom cilju pretpostavimo da tvrđenje ne važi, tj. da postoji $\varepsilon>0$ tako da je

$$f(b)-f(a)<-\varepsilon(b-a). \tag{15}$$

Stavimo

$$g(x)=f(x)-f(a)+\varepsilon(x-a).$$

Uslov (15) svodi se na $g(b)<0$, a zbog $D^+f(a)\geqslant 0$ je $g(x)>0$ za x dovoljno blisko tački a. Na osnovu stava II.6.2 postoji onda bar jedna tačka ξ između a i b u kojoj je $g(\xi)=0$. Označimo sa $\bar{\xi}$ najveću od njih. Tada je, zbog $g(b)<0$, $D^+g(\bar{\xi})\leqslant 0$, a time i $D^+f(\bar{\xi})+\varepsilon\leqslant 0$, što protivureči pretpostavci da je $D^+f(x)\geqslant 0$ za svako $x\in[a, b]$. Hipoteza (15) je, dakle, neodrživa, tj.

$$f(b)-f(a)\geqslant-\varepsilon(b-a) \text{ za svako } \varepsilon>0,$$

što se svodi na $f(b)-f(a)\geqslant 0$, jer $\varepsilon>0$ možemo birati proizvoljno malo.

Pretpostavimo sada da su ispunjene pretpostavke stava 6 i stavimo

$$E=\{x\in[a,b]: D^+f(x)<0\}.$$

Kako je $m(E)=0$, na osnovu stava 5 postoji na $[a, b]$ neprekidna monotono rastuća funkcija g takva da je $g'(x)=+\infty$ za svako $x\in E$. Neka je

$$\phi(x)=f(x)+\varepsilon g(x),$$

gde je $\varepsilon>0$, inače proizvoljno.

Pokazaćemo da je $D^+\phi\geqslant 0$ za svako $x\in[a, b]$, tako da je prema onome što smo baš izveli ϕ neopadajuća funkcija, tj.

$$f(x)+\varepsilon g(x)\leqslant f(y)+\varepsilon g(y) \quad (x<y).$$

Odavde sledi onda tvrđenje stava 6, jer $\varepsilon>0$ možemo birati proizvoljno malo.

Zaista, zbog monotonije funkcije g je

$$\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h} \geqslant \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad (h>0),$$

pa je s jedne strane

$$D^+\phi(x) \geqslant D^+ f(x) \geqslant 0 \quad \text{za} \quad x \in [a,b]-E.$$

S druge strane, na E je $g'(x)=D^+ g(x)=D_+ g(x)=+\infty$ i $D^+ f(x) > -\infty$, te je, zbog

$$D^+\phi(x) \geqslant \varepsilon D_+ g(x) + D^+ f(x),$$

i na E $D^+\phi(x) \geqslant 0$. Time je stav 6 u potpunosti dokazan.

7.iii. Diferenciranje i integracija

Osnovno pravilo Diferencijalnog i integralnog računa, koje kazuje da su operacije diferenciranja i integracije inverzne jedna drugoj, može se ovako formulisati:

(A) Ako je f integrabilna na $[a,b]$, njen *neodređeni integral* ili, jednostavno, *integral*

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

ima izvod i

$$F'(x)=f(x) \quad \text{na} \quad [a,b].$$

(B) Ako G ima izvod

$$G'(x)=g(x) \quad \text{na} \quad [a,b],$$

tada je

$$\int_a^x g(t)\,dt = G(x)-G(a) \quad (a \leqslant x \leqslant b).$$

G je *primitivna funkcija* od g.

Ako je reč o Riemannovom integralu, iskazi (A) i (B) važe uz znatna ograničenja: na primer, ako su f i g neprekidne funkcije.

Kada je u pitanju Lebesgueov integral, ta ograničenja se, kao što ćemo videti, mogu znatno oslabiti. Kod iskaza (A), šta više, nije potrebno nikakvo ograničenje da bi $F'=f$ važilo skoro svuda na $[a,b]$.

Ako je f integrabilna na $[a,b]$, na prvi pogled se vidi da je njen integral

$$\boxed{F(x)=\int_a^x f(t)\,dt}$$ neпрек. ф-ја и $\in V[a,b]$

kako neprekidna, tako i funkcija ograničene varijacije na $[a,b]$. Neprekidnost od F sledi na osnovu apsolutne neprekidnosti integrala (stav 5.11), jer se, birajući h dovoljno malo po apsolutnoj vrednosti,

$$|h|<\delta \Rightarrow \quad |F(x+h)-F(x)| = \left|\int_x^{x+h} f(t)\,dt\right| < \varepsilon$$

$I=[x, x+h]$ $mI<\delta$

može učiniti proizvoljno malim. Da je F ograničene varijacije na $[a, b]$ sledi neposredno iz

$$F(x)=\int_a^x f^+(t)\,dt-\int_a^x f^-(t)\,dt,$$

jer, zbog $f^+ \geqslant 0$ i $f^- \geqslant 0$, integrali na desnoj strani predstavljaju neopadajuće funkcije od x.

Stav 7. *Neka je f integrabilna na razmaku $[a, b]$ i neka je F njen integral. Tada F ima konačan izvod s.s. na $[a, b]$ i $F'=f$ s.s. na $[a, b]$.*

Dokaz. Da F ima s.s. na $[a, b]$ konačan izvod sledi iz činjenice što je F ograničene varijacije na $[a, b]$.

Da bismo pokazali da je $F'=f$ s.s. na $[a, b]$, pretpostavimo prvo da je $|f| \leqslant M$ na $[a, b]$. Niz funkcija

$$g_n(x)=\frac{F(x+h_n)-F(x)}{h_n} \quad (n=1, 2, \ldots),$$

$$F(x+h) = \int_a^{x+h} f\,dt$$

gde $h_n \to +0$ kada $n \to \infty$, zadovoljava

$$g_n \to F' \quad \text{s.s. na } [a, b]$$

i

$$|g_n(x)| \leqslant \frac{1}{h_n} \int_x^{x+h_n} |f(t)|\,dt \leqslant M.$$

Na osnovu stava 5.10 je za svako $c \in [a, b]$

$$\int_a^c F'(x)\,dx=\lim_{n\to\infty} \frac{1}{h_n} \int_a^c \{F(x+h_n)-F(x)\}\,dx$$

$$=\lim_{n\to\infty} \frac{1}{h_n} \left\{\int_c^{c+h_n} F(x)\,dx-\int_a^{a+h_n} F(x)\,dx\right\}$$

Zbog

$$\min_{c \leqslant x \leqslant c+h_n} F(x) \leqslant \frac{1}{h_n} \int_c^{c+h_n} F(x)\,dx \leqslant \max_{c \leqslant x \leqslant c+h_n} F(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{h_n\to 0} \frac{1}{h_n}\int_c^{c+h_n} F(x)\,dx$$

i analogne nejednačine u kojoj umesto c stoji a, i neprekidnosti funkcije F, nalazimo

$$\int_a^c F'(x)\,dx=F(c)-F(a)=\int_a^c f(x)\,dx.$$

Znači

$$\int_a^c \{F'(x)-f(x)\}\,dx=0 \quad \text{za svako } c \in [a, b],$$

što se, na osnovu stava 5.16, svodi na $F'=f$ s.s. na $[a, b]$.

Sada ćemo se osloboditi suplementarne pretpostavke da je f ograničena na $[a, b]$. S obzirom na definiciju Lebesgueovog integrala, dovoljno je ograničiti se na nenegativne funkcije f. Ako $([f]_n)$ označava niz sasečenih funkcija od f (primer 5.3), funkcija

$$G(x) = \int_a^x (f-[f]_n)\,dt,$$

kao integral nenegativne funkcije, ne opada sa x. Ona, znači, ima s.s. na $[a, b]$ konačan izvod i ovaj je nenegativan, tj.

$$F'(x) \geqslant \frac{d}{dx} \int_a^x [f]_n\,dt \quad \text{s.s. na } [a, b].$$

$$\frac{d}{dx}\left\{\int_a^x (f-[f]_n)\,dt\right\} \geqslant 0 \Rightarrow F'(x) \geqslant \frac{d}{dx}\int_a^x [f]_n\,dt$$

No, kako je za fiksirano n funkcija $[f]_n$ ograničena, to je na osnovu onog što smo već dokazali

$$F'(x) \geqslant [f(x)]_n \text{ s. s. na } [a, b].$$

Pustimo li ovde da $n \to \infty$, dobićemo

$$F'(x) \geqslant f(x) \quad \text{s. s. na } [a, b]. \tag{16}$$

Dakle,

$$\int_a^b F'\,dx \geqslant \int_a^b f\,dx = F(b) - F(a),$$

što, zajedno sa iskazom stava 4 (F monotono raste zbog $f \geqslant 0$), daje

$$\int_a^b (F' - f)\,dx = 0.$$

Zbog (16) odavde sledi, na osnovu stava 5.14, da je $F' = f$ s. s. na $[a, b]$.

Kada je reč o iskazu (B), u principu je moguće činiti pretpostavke kako o funkciji G, tako i o njenom izvodu g. Pozabavićemo se prvo uslovima koje treba da zadovolji funkcija G da bi važio iskaz (B). U tom cilju uvešćemo prethodno pojam apsolutno neprekidne funkcije.

Definicija 3. Neka je f definisana na razmaku $[a, b]$ i neka su $[x_\nu, x_\nu + h_\nu]$ $(h_\nu > 0, \nu = 1, 2, \ldots, n)$ međusobno disjunktni razmaci koji leže u $[a, b]$. Ako svakom $\varepsilon > 0$ odgovara broj $\delta > 0$ tako da je

$$\sum_{\nu=1}^{n} |f(x_\nu + h_\nu) - f(x_\nu)| < \varepsilon$$

za svaki izbor podrazmaka $[x_\nu, x_\nu + h_\nu]$, čija je totalna dužina $\sum_{\nu=1}^{n} h_\nu < \delta$, kažemo da je f *apsolutno neprekidna* funkcija na $[a, b]$.

Specijalno, ako uzmemo samo jedan podrazmak $[x, x + h]$, vidimo da je svaka apsolutno neprekidna funkcija na $[a, b]$ tu i (uniformno) neprekidna.

Lako je uvideti da su zbir i proizvod dve apsolutno neprekidne funkcije opet takve funkcije.

Stav 8. *Apsolutno neprekidna funkcija na $[a, b]$ je tu i ograničene varijacije.*

Dokaz. Ako je data podela P razmaka $[a, b]$, možemo uvek, umećući eventualno još nove podeone tačke, da sve podrazmake tako dobivene sukcesivne podele P' razvrstamo, idući s leva u desno, u grupe podrazmaka, tako da je totalna dužina podrazmaka iz iste grupe tačno jednaka polovini broja δ iz definicije 3. Takvih grupa podrazmaka ima najviše $N = \left[\frac{2(b-a)}{\delta}\right] + 1$. Kako je, zbog apsolutne neprekidnosti funkcije f,

$$\Sigma |\Delta f| < \varepsilon \text{ nad svakom grupom podrazmaka,}$$

to je

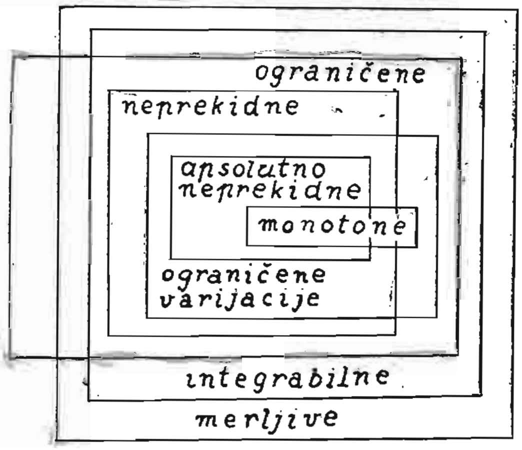
$$\sum_{P'} |\Delta f| < N\varepsilon.$$

No tada je, tim pre,

$$\sum_P |\Delta f| < N\varepsilon,$$

što znači da je f ograničene varijacije na $[a, b]$, jer P može biti proizvoljna podela razmaka $[a, b]$.

Sledeći shematski prikaz ilustruje uzajamni odnos najvažnijih klasa funkcija.



Stav 9. *Ako je f apsolutno neprekidna na $[a, b]$, i tu $f' = 0$ s. s., tada je $f = const.$ na $[a, b]$.*

Da iz $f' = 0$ s. s. na $[a, b]$, u opštem slučaju ne sledi $f = \text{const.}$ na $[a, b]$, pokazuje funkcija iz primera 1; ova, mada neprekidna, nije, dakle, apsolutno neprekidna na $[0, 1]$.

Dokaz. Dovoljno je pokazati da je $f(b) = f(a)$, jer f ispunjava iste uslove u svakom od razmaka $[x, y]$ $(a \leqslant x < y \leqslant b)$.

Neka je $\varepsilon > 0$. Zbog apsolutne neprekidnosti funkcije f postoji broj $\delta > 0$ takav da je

$$\Sigma\, |\Delta f| < \varepsilon \tag{17}$$

kad god je totalna dužina razmaka preko kojih se uzimaju diferencije od f manja od δ.

Neka je $\eta > 0$ i neka je E skup mere $b - a$ na kome je $f' = 0$. Svakoj tački $x \in E$ moguće je tada koordinirati niz razmaka $[x, x + h_n]$, $h_n \to 0$, tako da je

$$|f(x + h_n) - f(x)| < \eta h_n \tag{18}$$

$\frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n} \to 0 =$

ma kako malo bilo η. Kolekcija ovih razmaka, kada x prolazi E, pokriva u Vitalijevom smislu skup E.

Na osnovu stava 3′ postoji za uočeno $\delta > 0$ konačno mnogo razmaka $\{I\}$, međusobno disjunktnih, koji pokrivaju E tako da je spoljna mera svih njima komplementarnih razmaka $\{J\}$ manja od δ. Na osnovu (17) i (18) je, dakle,

$$f(b) - f(a) \leqslant \sum_{\{I\}} |\Delta f| + \sum_{\{J\}} |\Delta f| < \eta\,(b - a) + \varepsilon, \quad \to 0$$

odakle sledi $f(b) = f(a)$, jer η i ε možemo birati proizvoljno male.

Stav 10. *Ako je f integrabilna na $[a, b]$, tada je njen integral F apsolutno neprekidna funkcija na $[a, b]$.*

Apsolutna neprekidnost funkcije F je neposredna posledica apsolutne neprekidnosti Lebesgueovog integrala (stav 5.11) ili, još opštije, apsolutne neprekidnosti realne mere definisane apstraktnim integralom (osobina 5° realne mere Φ definisane sa (1) u odeljku 6). Otud i zajednički naziv. Istorijski posmatrano pojam apsolutno neprekidne funkcije prethodio je pojmu apsolutno neprekidne mere.

$E \subset [a, b]$

Dokaz stava 10. Ako sa E označimo uniju disjunktnih podrazmaka $[x_\nu, x_\nu + h_\nu]$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ iz $[a, b]$, izraz

$E = \bigcup [x_\nu, x_\nu + h_\nu]$

$$\sum_{\nu=1}^{n} |F(x_\nu + h_\nu) - F(x_\nu)| = \sum_{\nu=1}^{n} \left| \int_{x_\nu}^{x_\nu+h_\nu} f(t)\,dt \right| \leqslant \sum_{\nu=1}^{n} \int_{x_\nu}^{x_\nu+h_\nu} |f(t)|\,dt = \int_E |f(t)|\,dt$$

moguće je učiniti proizvoljno malim birajući $m(E) = \sum_{\nu=1}^{n} h_\nu$ dovoljno malo, jer sa f je i $|f|$ integrabilna funkcija na $[a, b]$.

Stav 11. *Apsolutno neprekidna funkcija f na $[a, b]$, ima s.s. na $[a, b]$ konačan izvod f', ovaj je integrabilan na $[a, b]$ i važi*

$$(19) \qquad \int_a^x f'(t)\,dt = f(x) - f(a) \quad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Drugim rečima, apsolutno neprekidna funkcija je integral svog izvoda. U apstraktnoj teoriji mere i integrala, pandan ovom stavu je Radon-Nikodymov stav (stav 6.4). Otud, analogijom, i naziv Radon-Nikodymov izvod.

Dokaz stava 11. Prema stavu 8, f je ograničene varijacije, dakle razlika dve monotono rastuće funkcije. Kako monotona funkcija ima s.s. konačan i integrabilan izvod (stav 4), to je onda slučaj i sa f.

Zbog $f' \in \mathfrak{L}(a, b)$ sledi tada, na osnovu stava 10, da je funkcija

$$g(x) = f(x) - \int_a^x f'(t)\,dt$$

apsolutno neprekidna funkcija na $[a, b]$, jer je zbir dve takve funkcije. Prema stavu 7 je još i $g' = 0$ s.s. na $[a, b]$. Iz stava 9 onda sledi da je $g = \text{const.}$ na $[a, b]$, tj.

$$C = f(x) - \int_a^x f'(t)\,dt.$$

Stavljajući ovde $x = a$, sledi da je $C = f(a)$, te dobijamo tvrđenje stava 11.

Primećujemo da iz stavova 10 i 11 zajedno sledi: *Potreban i dovoljan uslov da je neka funkcija f integral, tj. da važi*

$$(20) \qquad \boxed{f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt,}$$

f абс. непр.

jeste da je ona apsolutno neprekidna.

Može se postaviti pitanje ne sledi li iz same egzistencije izvoda f' da je f apsolutno neprekidna, tj. da važi (20). Ovako postavljeno pitanje nije čak ni umesno, jer f može imati konačan izvod f' svuda u razmaku a da ovaj uopšte nije integrabilan, kao što to pokazuje

Primer 2. Neka je f definisana sa

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin x^{-2} & \text{za} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ 0 & \text{za} \quad x = 0. \end{cases}$$

Tada postoji

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin x^{-2} - 2x^{-1} \cos x^{-2} & \text{za} \quad 0 < x \leqslant 1, \\ 0 & \text{za} \quad x = 0, \end{cases}$$

Međutim,

$$\int_0^1 |f'(x)|\,dx = +\infty,$$

tj. f' nije integrabilna na $(0, 1)$. Zaista, kako je

$$|\cos x^{-2}| \geqslant \frac{1}{2} \quad \text{za} \quad x \in [\alpha_n, \beta_n] = \left[\frac{1}{\sqrt{(2n+1/3)\pi}}, \frac{1}{\sqrt{(2n-1/3)\pi}}\right],$$

to je za $x \in [\alpha_n, \beta_n]$

$$|f'(x)| \geqslant \left|\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}\right| - \left|2x\sin\frac{1}{x^2}\right| \geqslant \frac{2}{x}\left|\cos\frac{1}{x^2}\right| - 2x \geqslant \frac{1}{x} - 2x.$$

Prema tome,

$$\int_0^1 |f'(x)|\,dx \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha_n}^{\beta_n} \left(\frac{1}{x} - 2x\right) dx \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\beta_n} - 2\alpha_n\right)(\beta_n - \alpha_n) = +\infty,$$

jer se opšti član poslednjeg reda asimptotski ponaša kao A/n.

No ako čak i pretpostavimo da f ima *skoro svuda* izvod f' i ovaj je integrabilan, ni tada ne važi (20) kao što to pokazuje funkcija iz primera 1.

Stav 12. *Ako f ima konačan izvod za svako $x \in [a, b]$ i ovaj je integrabilan na $[a, b]$, tada važi* (20).

Uslovi stava 12 biće specijalno ispunjeni:

1° Ako f ima konačan izvod za svako $x \in [a, b]$ i ovaj je ograničen (a time integrabilan).

2° Ako je f ograničene varijacije na $[a, b]$ i f' postoji za svako $x \in [a, b]$. Tada je, naime, f' integrabilan na osnovu stava 4.

Dokaz stava 12. Dovoljno je dokazati (20) sa $x = b$, jer f zadovoljava iste uslove i na $[a, x]$ $(a < x < b)$. Uvedimo niz funkcija

$$g_n(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{ako je } f'(x) \leqslant n, \\ n & \text{ako je } f'(x) > n. \end{cases}$$

S obzirom na

(21) $$|g_n(x)| \leqslant |f'(x)|,$$

to su sa f' i sve funkcije g_n integrabilne na $[a, b]$. Stavimo

$$G_n(x) = f(x) - \int_a^x g_n(t)\,dt.$$

Tada je na osnovu stava 7

$$D^+ G_n(x) = G_n'(x) = f'(x) - g_n(x) \geqslant 0 \quad \text{s.s. na } [a, b].$$

Zbog $g_n(x) \leqslant n$ je (za $h > 0$)

$$\frac{G_n(x+h) - G_n(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{1}{h}\int_x^{x+h} g_n(t)\,dt \geqslant \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - n,$$

te je $D^+ G_n(x) > -\infty$ svuda na $[a, b]$. Funkcija G_n ispunjava, dakle, sve uslove stava 6, te ne opada na $[a, b]$. Specijalno, $G_n(a) \leqslant G_n(b)$, tj.

(22) $$\int_a^b g_n(x)\,dx \leqslant f(b) - f(a).$$

Međutim, zbog (21) je na osnovu stava 5.9

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} g_n(x)\,dx = \int_a^b f'(x)\,dx,$$

te iz (22) sledi kada $n \to \infty$

$$\int_a^b f'(x)\,dx \leqslant f(b)-f(a).$$

Obrnutu nejednačinu ćemo dobiti, ako umesto od (g_n) pođemo od niza

$$\bar{g}_n(x)=\begin{cases} f'(x), & f'(x)\geqslant -n,\\ -n, & f'(x)<-n.\end{cases}$$

Tada opet važi $|\bar{g}_n(x)|\leqslant|f'(x)|$, a zbog $f'(x)\leqslant\bar{g}_n(x)$ i $\bar{g}_n(x)\geqslant -n$ sledi $D^+ G_n(x)\leqslant 0$ s.s. na $[a, b]$, odnosno $D^+ G_n(x)<+\infty$ svuda na $[a, b]$. Na osnovu iskaza simetričnog stavu 6, G_n tada ne raste na $[a, b]$, te je

$$\int_a^b \bar{g}_n(x)\,dx \geqslant f(b)-f(a),$$

a time kao malopre, i

$$\int_a^b f'(x)\,dx \geqslant f(b)-f(a).$$

Za neprekidne funkcije ograničene varijacije ne važi jednakost (20), kao što to pokazuje funkcija iz primera 1. No kako ove imaju integrabilan izvod (stav 4), uvek možemo pisati

$$f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)\,dt+h(x). \tag{23}$$

Jasno je da je funkcija h neprekidna i ograničene varijacije. No može li se o njoj reći i nešto više?

Definicija 4. Neprekidna funkcija ograničene varijacije koja se ne svodi na konstantu i čiji je izvod skoro svuda jednak nuli je *singularna funkcija.*

Funkcija iz primera 1 je singularna.

Stav 13. *Funkcija f koja je neprekidna i ograničene varijacije na $[a, b]$ može se na jednoznačan način razložiti na*

$$f=g+h, \tag{24}$$

gde je g apsolutno neprekidna funkcija sa $g(a)=f(a)$, a h singularna funkcija ili identički jednaka nuli.

Na osnovu stavova 10 i 11, h je identički jednaka nuli tada i samo tada ako je f apsolutno neprekidna.

Primećujemo da je analogijom sa stavom 13 izvršena dekompozicija realne mere na njen apsolutno neprekidni i singularni deo (stav 6.5).

Dokaz stava 13. Ako stavimo

$$g(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)\,dt,$$

razlaganje (24) neposredno sledi iz (23), jer su f i g neprekidne funkcije ograničene varijacije čiji se izvodi poklapaju s.s. na $[a, b]$ (stav 7). Da je ovo razlaganje i jedino, može se ovako uvideti. Kada bi postojala dva takva razlaganja,

$$f=g_1+h_1 \quad \text{i} \quad f=g_2+h_2,$$

imali bismo

$$g_1-g_2=h_2-h_1, \tag{25}$$

tj. $(g_1-g_2)'=0$ s. s. na $[a, b]$. No kako je g_1-g_2 apsolutno neprekidna funkcija, to je na osnovu stava 9 $g_1-g_2=C$. Međutim, $g_1(a)=f(a)$ i $g_2(a)=f(a)$, te je $C=0$. Dakle, g_1 je identički jednako g_2, a time na osnovu (25), i h_1 identički jednako h_2.

Ranije smo videli da se svaka funkcija ograničene varijacije može razložiti na dve funkcije ograničene varijacije: na funkciju skoka i na njen neprekidni deo (stav II. 8.7). Na osnovu stava 13, ovo razlaganje se može upotpuniti: Svaka funkcija ograničene varijacije može se razložiti na tri funkcije ograničene varijacije: na funkciju skoka, njen apsolutno neprekidni i na njen singularni deo.

7.iv. Neke osobine Lebesgueovog integrala na R

Prvo ćemo se pozabaviti izračunavanjem Riemann-Stieltjesovog pomoću Lebesgueovog integrala.

Stav 14. *Ako je na* $[a, b]$ *funkcija* f *neprekidna a* g *apsolutno neprekidna, tada je*

$$\int_a^b f\,dg=\int_a^b f g'\,dx. \tag{26}$$

Dokaz. Iz apsolutne neprekidnosti funkcije g sledi da je g ograničene varijacije i g' integrabilna na $[a, b]$. Znači, oba integrala u (26) postoje.

Da bismo dokazali jednakost (26), uočimo podelu

$$P:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

razmaka $[a, b]$ i neka je σ odgovarajuća integralna suma koja dovodi do Riemann-Stieltjesovog integrala (definicija 1.1). Zbog apsolutne neprekidnosti funkcije g je

$$g(x_\nu)-g(x_{\nu-1})=\int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} g'(x)\,dx \quad (\nu=1, 2, \ldots, n). \tag{27}$$

Kako je f neprekidna, dakle i uniformno neprekidna na $[a, b]$, to svakom $\varepsilon>0$ odgovara broj $\delta>0$ tako da je

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon \quad \text{kad god je} \quad |x'-x''|<\delta. \tag{28}$$

Ako je podela P takva da je $m(P)<\delta$, iz (27) i (28) sledi

$$\begin{aligned}\left|\sigma-\int_a^b f g'\,dx\right| &= \left|\sum_{\nu=1}^{n} \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} [f(\xi_\nu)-f(x)]\,g'(x)\,dx\right| \qquad (x_{\nu-1}\leqslant \xi_\nu\leqslant x_\nu)\\ &\leqslant \sum_{\nu=1}^{n} \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} |f(\xi_\nu)-f(x)|\,|g'(x)|\,dx\\ &<\varepsilon \sum_{\nu=1}^{n} \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} |g'(x)|\,dx=\varepsilon\int_a^b |g'(x)|\,dx.\end{aligned}$$

Kako je $\int_a^b |g'|\,dx<+\infty$ a $\varepsilon>0$ možemo birati proizvoljno malo, odavde sledi tvrđenje stava.

Stav 15. *Ako je na* $[a, b]$ *funkcija* f *ograničene varijacije a* g *apsolutno neprekidna, tada opet važi* (26).

Dokaz. Pod navedenim uslovima postoje oba integrala u (26).

Zbog apsolutne neprekidnosti Lebesgueovog integrala (stav 5.11) svakom $\varepsilon > 0$ odgovara $\delta > 0$ tako da je, nezavisno od x,

$$\int_x^{x+h} |g'(t)|\, dt < \varepsilon \quad \text{kad god je} \quad 0 < h < \delta. \tag{29}$$

Ako je podela P razmaka $[a, b]$ takva da je $m(P) < \delta$, biće

$$\left|\sigma - \int_a^b f g'\, dx\right| \leqslant \sum_{\nu=1}^{n} \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} |f(\xi_\nu) - f(x)|\,|g'(x)|\, dx$$

$$\leqslant \sum_{\nu=1}^{n} V_{x_{\nu-1}}^{x_\nu}(f) \int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} |g'(x)|\, dx$$

$$< \varepsilon \sum_{\nu=1}^{n} V_{x_{\nu-1}}^{x_\nu}(f) = \varepsilon\, V_a^b(f),$$

odakle sledi tvrđenje, jer je $V_a^b(f) < +\infty$ a $\varepsilon > 0$ možemo birati proizvoljno malo.

Na osnovu parcijalne integracije kod Riemann-Stieltjesovog integrala (stav 1.2) možemo sada lako izvesti parcijalnu integraciju za Lebesgueov integral.

Stav 16. *Ako su* f *i* g *apsolutno neprekidne funkcije na* $[a, b]$, *tada je*

$$\int_a^b f g'\, dx = f(b)\, g(b) - f(a)\, g(a) - \int_a^b f' g\, dx.$$

Dokaz. Na osnovu stava 14 je

$$\int_a^b f g'\, dx + \int_a^b f' g\, dx = \int_a^b f\, dg + \int_a^b g\, df,$$

te tvrđenje sledi na osnovu stava 1.2.

Stav 17. *Neka je* f *integrabilna funkcija na* $[a, b]$.

1° *Ako nenegativna funkcija* g *ne raste na* $[a, b]$, *tada je za neko* ξ $(a \leqslant \xi \leqslant b)$

$$\int_a^b f g\, dx = g(a+0) \int_a^\xi f\, dx.$$

2° *Ako nenegativna funkcija* g *ne opada na* $[a, b]$, *tada je za neko* ξ $(a \leqslant \xi \leqslant b)$

$$\int_a^b f g\, dx = g(b-0) \int_\xi^b f\, dx.$$

3° *Ako je* g *monotona funkcija na* $[a, b]$, *tada postoji* ξ $(a \leqslant \xi \leqslant b)$ *tako da je*

$$\int_a^b f g\, dx = g(a+0) \int_a^\xi f\, dx + g(b-0) \int_\xi^b f\, dx.$$

Ovo je tzv. *druga teorema o srednjoj vrednosti.*

Dokaz stava 17. Dokazaćemo samo prvi od iskaza. Simetrično se dokazuje i drugi. Treći sledi ako prvi ili drugi iskaz primenimo na funkciju $g(x) - g(b-0)$, odnosno $g(x) - g(a+0)$, već prema tome da li g ne raste ili ne opada.

Neka je $0<\varepsilon<g(a+0)-g(b-0)$. Tada postoji tačka $x_1>a$ takva da je

$$g(a+0)-g(x)\begin{cases}<\varepsilon, & a<x<x_1,\\ \geqslant\varepsilon, & x>x_1,\end{cases}$$

pa zatim tačke $x_2, x_3, \ldots$ takve da je redom

$$g(x_1+0)-g(x)\begin{cases}<\varepsilon, & x_1<x<x_2,\\ \geqslant\varepsilon, & x>x_2,\end{cases}$$

$$g(x_2+0)-g(x)\begin{cases}<\varepsilon, & x_2<x<x_3,\\ \geqslant\varepsilon, & x>x_3,\end{cases}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Ako je tačka $x_\nu<b$ već određena, postupak možemo produžiti ako je $g(x_\nu+0)-g(b-0)>\varepsilon$; u suprotnom, za $x_{\nu+1}$ uzećemo tačku b. Kako je

$$g(a+0)-g(x_1+0)\geqslant\varepsilon,\quad g(x_1+0)-g(x_2+0)\geqslant\varepsilon,\ldots$$

a $g(a+0)-g(b)<+\infty$, to ćemo do tačke b dospeti posle konačno mnogo koraka, recimo n.

Stavimo

$$h(x)=g(x_\nu+0)\quad\text{za}\quad x_\nu\leqslant x<x_{\nu+1}\ (\nu=0,1,\ldots,n-1;\quad x_0=a,\ x_n=b).$$

Tada je, prema konstrukciji,

$$0\leqslant h(x)-g(x)<\varepsilon, \tag{30}$$

sem, možda, u tačkama $x_0, x_1, \ldots, x_n$ (ukoliko su ove tačke prekida od g). Ako je $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, imamo

$$\int_a^b f h\,dx=\sum_{\nu=0}^{n-1} g(x_\nu+0)\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} f\,dx$$
$$=\sum_{\nu=0}^{n-1} g(x_\nu+0)\,F(x_{\nu+1})-\sum_{\nu=0}^{n-1} g(x_\nu+0)\,F(x_\nu)$$
$$=\sum_{\nu=1}^{n}\{g(x_{\nu-1}+0)-g(x_\nu+0)\}\,F(x_\nu)+g(x_n+0)\,F(x_n).$$

Označimo sa m i M minimum, odnosno maksimum neprekidne funkcije F na $[a,b]$. Tada je

$$\int_a^b f h\,dx\leqslant M\left\{\sum_{\nu=1}^{n}[g(x_{\nu-1}+0)-g(x_\nu+0)]+g(x_n+0)\right\}=M\,g(x_0+0).$$

Zajedno sa simetričnom nejednačinom koju dobijamo minoriranjem, važi, dakle,

$$m\,g(a+0)\leqslant\int_a^b f h\,dx\leqslant M\,g(a+0). \tag{31}$$

Međutim, na osnovu (30) je

$$\left|\int_a^b f h\,dx-\int_a^b f g\,dx\right|\leqslant\varepsilon\int_a^b|f|\,dx,$$

tj.

$$\int_a^b f h\,dx-\varepsilon\int_a^b|f|\,dx\leqslant\int_a^b f g\,dx\leqslant\int_a^b f h\,dx+\varepsilon\int_a^b|f|\,dx.$$

Odavde sledi, na osnovu (31),

$$m\,g(a+0)-\varepsilon \int_a^b |f|\,dx \leqslant \int_a^b f g\,dx \leqslant M\,g(a+0)+\varepsilon \int_a^b |f|\,dx,$$

odnosno

$$m \leqslant \frac{1}{g(a+0)} \int_a^b f g\,dx \leqslant M,$$

jer $\varepsilon > 0$ možemo birati proizvoljno malo. Kako F, kao neprekidna funkcija na $[a, b]$, uzima sve vrednosti koje leže između m i M (stav II.6.2), to ona za neko ξ iz $[a, b]$ uzima i vrednost

$$\frac{1}{g(a+0)} \int_a^b f g\,dx.$$

Otud tvrđenje stava.

Vežbanja 7.

1. Za $f(x) = +\sqrt{x^2}$ je u tački $x=0: D^+ f = D_+ f = +1$ i $D^- f = D_- f = -1$.

2. Neka je

$$f(x) = \begin{cases} x \sin 1/x, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

U tački $x=0$ je

$$D_+ f = -1, \quad D^+ f = +1, \quad D_- f = -1, \quad D^- f = +1.$$

3. Ako je f neprekidna funkcija na $[a, b]$, tada njen izvod Df i količnik diferencija leže u istim granicama, tj.

$$\alpha \leqslant Df \leqslant \beta \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \beta.$$

[Stavimo $g(x) = f(x) - \alpha x$. Tada je $D^+ g = D^+ f - \alpha \geqslant 0$ svuda na $[a, b]$, pa je kao u dokazu stava 6, $g(x_2) \geqslant g(x_1)\,(x_2 > x_1)$, tj. $[f(x_2)-f(x_1)]/(x_2-x_1) \geqslant \alpha$. Slično sledi druga polovina dvostruke nejednačine.]

4. Ako su f i g apsolutno neprekidne funkcije na $[a, b]$, takve su i $f+g$, fg i f/g, ukoliko je u poslednjem slučaju $g(x) \geqslant c > 0$ na $[a, b$.]

5. Ako je f apsolutno neprekidna funkcija na $[a, b]$, takva je i $|f|^p$ za $p \geqslant 1$.

6. Neka je f integrabilna na $[a, b]$. Označimo sa f_1 integral od f preko razmaka (a, x) $(a \leqslant x \leqslant b)$, i uopšte sa f_n integral od f_{n-1} preko (a, x) $(n = 1, 2, \ldots;$ $f_0 = f)$. Pokazati da je

$$f_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\,dt.$$

7. Neka je f integrabilna na (a, b) i neka je $\alpha > 0$. Tada

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt,$$

gde je Γ gama-funkcija, definiše na (a, b) jednu integrabilnu funkciju f_α — *integral razlomljenog reda* α od f. $[\Gamma(\alpha) \int_a^b |f_\alpha|\,dx \leqslant \int_a^b dx \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} |f(t)|\,dt =$ $= \int_a^b |f(t)|\,dt \int_t^b (x-t)^{\alpha-1}\,dx = \dfrac{1}{\alpha} \displaystyle\int_a^b |f(t)|\,(b-t)^\alpha\,dt < +\infty.]$

8. Neka je f integrabilna na (a, b) i neka je $\delta>0$ dovoljno malo tako da $(x-\delta, x+\delta)\subset(a, b)$. Stavimo

$$f_\delta(x)=\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{+\delta} f(x+t)\,dt.$$

Ako je f apsolutno neprekidna na $[a, b]$, tada važi $(f_\delta)'=(f')_\delta$.

9. Funkcija f, definisana na $[a, b]$, zadovoljava *Lipschitzov uslov* ako postoji konstanta K takva da je

$$(*)\qquad |f(x+h)-f(x)|\leqslant K|h| \;\forall x, x+h\in[a, b].$$

Pokazati: 1° Ako f zadovoljava (*), tada ona ima izvod s.s. na $[a, b]$ i $|f'(x)|\leqslant K$ s.s. na $[a, b]$. 2° Ako je g s.s. ograničena funkcija na $[a, b]$, tada $f(x)=\int_a^x g\,dt$ zadovoljava uslov (*). Funkcija f pripada, dakle, Lipschitzovoj klasi tada i samo tada ako je f integral s.s. ograničene funkcije. [Pokazati prvo da je f apsolutno neprekidna funkcija.]

10. Neka je f integrabilna na (a, b) i neka je g apsolutno neprekidna funkcija koja stvarno raste na (α, β) i pri tome je $g(\alpha)=a$ i $g(\beta)=b$. Tada važi

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[g(t)]\,g'(t)\,dt.$$

(Smena promenljivih). [Za dokaz videti, na primer, [13].]

11. Neka je $s(x)$ suma reda $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, gde su $f_n(x)$ monotono rastuće funkcije na $[a, b]$. Tada je s.s. na $[a, b]$: $s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ (Fubini). [Za dokaz videti, na primer, [19], Ch. XI, Misc. ex. 14.]

12. Dati detalje dokaza da su funkcije f_n iz dokaza stava 5 neprekidne. [Primeniti iskaz 2° stava 2.2.]

8. Prostor $L_p(a, b)$

$\int_{-\infty}^{\infty}|x|^p dx < \infty$

Neka je $\mathfrak{L}_p(a, b)$ $(p\geqslant 1;\ -\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty)$ skup $\boxed{\text{merljivih funkcija } x}$ na razmaku (a, b) tako da je $|x|^p$ integrabilna funkcija. U skup $\mathfrak{L}_p(a, b)$ uvešćemo relaciju ekvivalencije:

$$(1)\qquad x\sim y \quad \text{ako je } x(t)=y(t) \text{ s.s. na } (a, b).$$

Označimo sa $L_p(a, b)$ skup-količnik $\mathfrak{L}_p(a, b)/\sim$. Mada je $L_p(a, b)$, u stvari, kolekcija klasa ekvivalencije, mi ćemo ipak, kao što je uobičajeno, govoriti o $L_p(a, b)$ kao o skupu funkcija (reprezentanata odgovarajućih klasa ekvivalencije). Praktično to znači da nećemo praviti razliku između dve skoro svuda jednake funkcije, ili što je isto, smatraćemo da su dve funkcije iz $L_p(a, b)$ različite samo tada ako se njihove vrednosti ne poklapaju na skupu pozitivne mere.

Kada je jasno o kome razmaku (a, b) je reč, skup $L_p(a, b)$ označavaćemo jednostavno sa L_p. Za $p=1$ pisaćemo L umesto L_1. Ako pođemo od funkcija definisanih na nekom merljivom skupu E, analogno značenje imaće oznaka $L_p(E)$.

$\int_a^c x\, dx < +\infty$

Ako je razmak (a, b) konačan, svaka na njemu ograničena i merljiva funkcija pripada $L_p(a, b)$. Ako $x \in L_p(a, b)$ $(p > 1)$ i $b - a < +\infty$, tada $x \in L(a, b)$. Zaista, ako stavimo $A = \{t \in (a, b) : |x(t)| < 1\}$, tada očigledno $x \in L(A)$. No kako, zbog $|x| \leqslant |x|^p$ na $\complement A$, $x \in L(\complement A)$, to sledi tvrđenje.

Skup $L_p(a, b)$ se može učiniti metričkim prostorom ako u njega kao rastojanje uvedemo

$$d(x, y) = \left\{\int_a^b |x(t) - y(t)|^p\, dt\right\}^{1/p}.$$

Da važi relacija trougla sledi iz Minkowskijeve nejednačine za integrale. Ova se izvodi iz Hölderove nejednačine za integrale na način analogan onome kako smo iz Hölderove nejednačine za sume izveli odgovarajuću Minkowskijevu nejednačinu (stav II.1.2).

Stav 1 (Minkowskijeva nejednačina). *Ako x i $y \in L_p(a, b)$ $(p \geqslant 1)$, tada je*

$$\left\{\int_a^b |x(t) + y(t)|^p\, dt\right\}^{1/p} \leqslant \left\{\int_a^b |x(t)|^p\, dt\right\}^{1/p} + \left\{\int_a^b |y(t)|^p\, dt\right\}^{1/p}.$$

Stav 2 (Hölderova nejednačina). *Ako $x \in L_p$ i $y \in L_q$, gde je $p > 1$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tada je*

$$\int_a^b |x(t)\, y(t)|\, dt \leqslant \left\{\int_a^b |x(t)|^p\, dt\right\}^{1/p} \left\{\int_a^b |y(t)|^q\, dt\right\}^{1/q}.$$

Dokaz stava 2. Da bismo pokazali da važi Hölderova nejednačima za integrale, postupićemo kao pri dokazu analogne nejednačine za sume (stav II.1.1). Stavimo li u II.1 (2)

$$a = \frac{|x(t)|}{\left\{\int_a^b |x|^p\, dt\right\}^{1/p}} \quad \text{i} \quad b = \frac{|y(t)|}{\left\{\int_a^b |y|^q\, dt\right\}^{1/q}},$$

i integrišemo li od a do b, slediće

$$\frac{\int_a^b |x(t)\, y(t)|\, dt}{\left\{\int_a^b |x|^p\, dt\right\}^{1/p} \left\{\int_a^b |y|^q\, dt\right\}^{1/q}} \leqslant \int_a^b \left(\frac{1}{p} \frac{|x(t)|^p}{\int_a^b |x|^p\, dt} + \frac{1}{q} \frac{|y(t)|^q}{\int_a^b |y|^q\, dt}\right) dt = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Ako je x periodična funkcija periode 2π, takva da je $|x|^p$ integrabilna funkcija, na analogan način uvodi se metrički prostor $\tilde{L}_p(0, 2\pi)$.

Navešćemo neke osobine prostora $L_p(a, b)$.

Stav 3. *Prostor $L_p(a, b)$ je separabilan.*

Dokaz. Uočimo prvo slučaj kada je razmak (a, b) konačan i, recimo, $a = 0$, $b = 1$. Neka su za fiksirano $n (= 1, 2, \ldots)$ funkcije $u_\nu^n(t)$ $(\nu = 0, 1, \ldots, n-1)$ definisane sa

$$\chi = u_\nu^n(t) = \begin{cases} 1, & \nu/n \leqslant t < (\nu + 1)/n, \\ 0, & \text{drugde na } [0, 1]. \end{cases}$$

Označimo sa A skup funkcija oblika

$$f = \sum_{\nu=0}^{n-1} \lambda_\nu^n u_\nu^n(t) \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{2}$$

gde su λ_ν^n *racionalni* brojevi. A je prebrojiv skup. Pokazaćemo da je on svuda gust u $L_p(0, 1)$. U tom cilju dovoljno je pokazati da je skup B funkcija oblika (2), gde su λ_ν^n *realni* brojevi, svuda gust u $L_p(0, 1)$, jer se svaka funkcija iz B može proizvoljno dobro (u smislu metrike u L_p) aproksimirati nekom funkcijom iz A. Zaista, ako je $\varepsilon>0$, inače proizvoljno malo, i

$$s_n(t)=\sum_{\nu=0}^{n-1}\lambda_\nu^n u_\nu^n(t)$$

neka funkcija iz B, racionalne brojeve $\overline{\lambda}_\nu^n$ odredićemo tako da je

$$|\lambda_\nu^n-\overline{\lambda}_\nu^n|<\varepsilon \quad \text{za} \quad \nu=0,1,\ldots,n-1.$$

Tada funkcija

$$\overline{s}_n(t)=\sum_{\nu=0}^{n-1}\overline{\lambda}_\nu^n u_\nu^n(t)$$

pripada skupu A i

$$d(s_n,\overline{s}_n)=\left\{\int_0^1|s_n(t)-\overline{s}_n(t)|^p dt\right\}^{1/p}<\varepsilon\left\{\int_0^1\left(\sum_{\nu=0}^{n-1}u_\nu^n(t)\right)^p dt\right\}^{1/p}=\varepsilon,$$

jer je

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}u_\nu^n(t)=1 \quad \text{za} \quad 0\leqslant t<1.$$

Ostaje, dakle, da pokažemo da je skup B svuda gust u $L_p(0,1)$. Neka je x proizvoljna funkcija iz $L_p(0,1)$. Stavimo

$$s_n(t)=n\sum_{\nu=0}^{n-1}u_\nu^n(t)\int_{\nu/n}^{(\nu+1)/n}x(\tau)\,d\tau.$$

Ovaj izraz ima smisla jer iz $x\in L_p(0,1)$ sledi da $x\in L(0,1)$. Neka je t neka tačka iz $(0,1)$. Tada svakom n odgovara jedno m $(0\leqslant m\leqslant n-1)$ tako da je $m/n\leqslant t<(m+1)/n$, tj. $m=[nt]$. Na osnovu definicije funkcije $u_\nu^n(t)$, tada je jedino $u_m^n(t)\neq 0$, pa je

$$s_n(t)=n\int_{m/n}^{(m+1)/n}x(\tau)\,d\tau. \tag{3}$$

Ako stavimo

$$y(t)=\int_0^t x(\tau)\,d\tau,$$

imaćemo

$$s_n(t)=n\left\{y\left(\frac{[nt]+1}{n}\right)-y\left(\frac{[nt]}{n}\right)\right\}. \tag{4}$$

Kako na osnovu stava 7.7, y ima konačan izvod $y'=x$ s.s. na (a,b), postojaće granična vrednost količnika diferencija (4) kada $n\to+\infty$ i

$$\lim_{n\to\infty}s_n(t)=y'(t)=x(t) \quad \text{s.s. na } (a,b). \tag{5}$$

Pretpostavimo, prvo, da je x ograničena funkcija, tj. $|x|\leqslant M$ na (a,b). Tada iz (3) sledi $|s_n|\leqslant M$, te je $|x-s_n|\leqslant 2M$. Na osnovu Lebesgueovog stava o integraciji uniformno ograničenih nizova je, dakle,

$$\lim_{n\to\infty}[d(x,s_n)]^p=\lim_{n\to\infty}\int_0^1|x-s_n|^p dt=0, \tag{6}$$

tj. za svako $\varepsilon>0$ i dovoljno veliko n je

$$d(x,s_n)<\varepsilon. \tag{7}$$

Time smo dokazali tvrđenje stava u specijalnom slučaju kada je x ograničena funkcija.

Sada ćemo se osloboditi ove suplementarne pretpostavke. Označimo sa $E_k \subset (0, 1)$ skup tačaka na kome je $|x| > k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Zbog

$$+\infty > \int_0^1 |x|\,dt \geqslant \int_{E_k} |x|\,dt \geqslant k\,m(E_k),$$

$m(E_k) \to 0$ kada $k \to +\infty$. Ako, dakle, stavimo

$$x_k(t) = \begin{cases} 0, & t \in E_k, \\ x(t), & \text{drugde na } (0, 1), \end{cases}$$

slediće, zbog apsolutne neprekidnosti integrala, da

$$[d(x, x_k)]^p = \int_0^1 |x - x_k|^p\,dt = \int_{E_k} |x|^p\,dt \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Time smo slučaj neograničene funkcije x sveli na slučaj ograničene funkcije x_k. Naime, ako je $\varepsilon > 0$, izabraćemo prvo k tako veliko da je

$$d(x, x_k) < \varepsilon.$$

Neka je $(s_{n,k})$ niz funkcija koji odgovara funkciji x_k kao što je niz (s_n) odgovarao funkciji x. Kako je x_k ograničena, to je na osnovu (7) za dovoljno veliko $n = n(k)$

$$d(x_k, s_{n,k}) < \varepsilon.$$

Iz poslednje dve nejednačine sledi da je (za izabrano k i dovoljno veliko n)

$$d(x, s_{n,k}) \leqslant d(x, x_k) + d(x_k, s_{n,k}) < 2\varepsilon,$$

što predstavlja tvrđenje stava i za neograničene funkcije.

Ostaje još da pokažemo da je prostor $L_p(a, b)$ separabilan za svako (i beskonačno) a i b. Ako $x \in L_p(a, b)$, funkcija koja se poklapa sa x na (a, b) i identički je jednaka nuli izvan (a, b) pripadaće $L_p(-\infty, +\infty)$. U tom smislu $L_p(-\infty, +\infty)$ sadrži $L_p(a, b)$ kao potprostor ma šta bilo a i b, pa je zato dovoljno pokazati da je $L_p(-\infty, +\infty)$ separabilan prostor. Neka je

$$t = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} u, \quad -\infty < u < +\infty$$

i

$$y(u) = \frac{1}{\pi^{1/p}} \frac{x(2^{-1} + \pi^{-1}\operatorname{arctg} u)}{(1 + u^2)^{1/p}}.$$

Kako je

$$x \in L_p(0, 1) \quad \Leftrightarrow \quad y \in L_p(-\infty, +\infty)$$

i

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |y|^p\,du = \int_0^1 |x|^p\,dt, \tag{8}$$

to ako je niz funkcija x_n svuda gust u $L_p(0, 1)$, biće, na osnovu (8), takav i niz y_n u $L_p(-\infty, +\infty)$.

Separabilnost prostora L_p sledila je iz činjenice da je prebrojiv skup jednostavnih funkcija (2) svuda gust u L_p. Navešćemo još neke skupove koji su svuda gusti u $L_p(a, b)$, ali samo ako je razmak (a, b) konačan.

Stav 4. *Skup neprekidnih funkcija je svuda gust u* $L_p(a, b)$, $b - a < +\infty$.

Dokaz. Za to je dovoljno pokazati da je skup neprekidnih funkcija razmaka $[0, 1]$ svuda gust u skupu jednostavnih funkcija (2), odnosno da se svaki element

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{za } \alpha \leqslant t < \beta \ (0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1), \\ 0 & \text{drugde na } [0, 1], \end{cases}$$

jednostavne funkcije može proizvoljno dobro aproksimirati neprekidnom funkcijom u smislu metrike u L_p. Drugim rečima, da za svako $\varepsilon>0$ postoji neprekidna funkcija y takva da je

$$d(u,y)<\varepsilon. \tag{9}$$

Zaista, ako y definišemo sa

$$y(t)=\begin{cases} 1, & \alpha\leqslant t\leqslant\beta, \\ 0, & 0<t\leqslant\alpha-(\varepsilon/2)^p \ \text{ i } \ \beta+(\varepsilon/2)^p\leqslant t\leqslant 1, \\ \text{linearno drugde na } [0,1], \end{cases}$$

biće

$$\int_0^1 |u-y|^p\,dt\leqslant 2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\leqslant\varepsilon^p,$$

tj. važi (9).

Stav 5. *Skup polinoma je svuda gust u* $L_p(a,b)$, $b-a<+\infty$.

Dokaz. Neka $x\in L_p$. Na osnovu stava 4 postoji neprekidna funkcija y takva da je

$$d(x,y)<\varepsilon/2 \tag{10}$$

za svako $\varepsilon>0$. Na osnovu Weierstrassovog stava neprekidnoj funkciji y odgovara polinom p takav da je

$$|y(t)-p(t)|<\varepsilon/2 \text{ za svako } t\in[0,1].$$

Tim pre je onda

$$d(y,p)<\varepsilon/2,$$

odakle, zajedno sa (10), sledi

$$d(x,p)\leqslant d(x,y)+d(y,p)<\varepsilon.$$

Na sličan način može se pokazati, koristeći drugi Weierstrassov stav, *da je skup trigonometrijskih polinoma svuda gust u* $\tilde{L}_p(0,2\pi)$.

Stav 6. *Prostor* $L_p(a,b)$ *je kompletan.*

Dokaz. Neka je (x_n) Cauchyev niz u L_p. Tada svakom $\nu=1,2,\ldots$ odgovara prvi prirodni broj n_ν $(n_\nu>n_{\nu-1}$ za $\nu>1)$, takav da je

$$d(x_m,x_n)<2^{-\nu} \quad \text{za} \quad m>n\geqslant n_\nu.$$

Za delimični niz (x_{n_ν}) važi, dakle,

$$d(x_{n_{\nu+1}},x_{n_\nu})<2^{-\nu} \quad (\nu=1,2,\ldots). \tag{11}$$

Stavimo

$$y_k(t)=\sum_{\nu=1}^{k}|x_{n_{\nu+1}}(t)-x_{n_\nu}(t)| \quad \text{i} \quad y(t)=\sum_{\nu=1}^{\infty}|x_{n_{\nu+1}}(t)-x_{n_\nu}(t)|.$$

Tada je na osnovu Minkowskijeve nejednačine i (11)

$$\left\{\int_a^b y_k^p\,dt\right\}^{1/p}\leqslant\sum_{\nu=1}^{k}\left\{\int_a^b|x_{n_{\nu+1}}-x_{n_\nu}|^p\,dt\right\}^{1/p}=\sum_{\nu=1}^{k}d(x_{n_{\nu+1}},x_{n_\nu})<\sum_{\nu=1}^{k}2^{-\nu}<1.$$

Na osnovu Fatouove leme, primenjene na niz (y_k^p), sledi, dakle,

$$1 \geqslant \underline{\lim}_{k\to\infty} \int_a^b y_k^p\,dt \geqslant \int_a^b y^p\,dt.$$

Funkcija y^p je, znači, integrabilna pa je svakako $y(t) < +\infty$ s.s. na (a, b). S obzirom na definiciju funkcije y, to znači da je red

$$x_{n_1}(t) + \sum_{\nu=1}^{\infty} [x_{n_{\nu+1}}(t) - x_{n_\nu}(t)] \tag{12}$$

apsolutno konvergentan s.s. na (a, b). Označimo sa $x(t)$ sumu reda (12) za ona t za koja red konvergira; u preostalim tačkama stavimo $x(t) = 0$. Dakle,

$$\lim_{\nu\to\infty} x_{n_\nu}(t) = x(t) \quad \text{s.s. na } (a, b). \tag{13}$$

Pokazaćemo da $x \in L_p$ i da $x_n \to x$ u smislu metrike u L_p. Kako je (x_n) Cauchyev niz, za svako $\varepsilon > 0$ postoji prirodni broj N tako da

$$m > N, n > N \quad \Rightarrow \quad d(x_m, x_n) < \varepsilon. \tag{14}$$

U delimičnom nizu (n_ν) koji smo na početku konstruisali, izaberimo ν_0 tako veliko da je $n_\nu > N$ za $\nu > \nu_0$. Ako $|x_m - x_{n_\nu}|^p$ shvatimo kao niz po ν i vodimo računa o (13), Fatouova lema daje

$$\underline{\lim}_{\nu\to\infty} \int_a^b |x_m - x_{n_\nu}|^p\,dt \geqslant \int_a^b |x_m - x|^p\,dt.$$

No kako je, na osnovu (14),

$$\int_a^b |x_m - x_{n_\nu}|^p\,dt = [d(x_m, x_{n_\nu})]^p < \varepsilon^p \quad \text{za } m > N \text{ i } \nu > \nu_0,$$

iz ove poslednje dve nejednačine sledi

$$\left\{\int_a^b |x_m - x|^p\,dt\right\}^{1/p} < \varepsilon \quad \text{za } m > N. \tag{15}$$

Iz (15) zaključujemo, prvo, da $x \in L_p$, jer je na osnovu Minkowskijeve nejednačine

$$\left\{\int_a^b |x|^p\,dt\right\}^{1/p} \leqslant \left\{\int_a^b |x - x_m|^p\,dt\right\}^{1/p} + \left\{\int_a^b |x_m|^p\,dt\right\}^{1/p} < +\infty,$$

a zatim da $x_m \to x$ u smislu metrike u L_p, jer $\varepsilon > 0$ možemo birati proizvoljno malo.

Primećujemo da smo uzgred dokazali i

Stav 7. *Ako niz (x_n) konvergira ka x u smislu metrike u $L_p(a, b)$, tada postoji delimični niz (x_{n_ν}) koji s.s. na (a, b) konvergira ka x.*

Za niz funkcija (x_n) koji konvergira ka x u smislu metrike u L_p kažemo da *konvergira u srednjem indeksa p* ka x. Dok je konvergencija po metrici prostora C (uniformna konvergencija niza funkcija) uporediva sa (običnom) konvergencijom tog niza funkcija (konvergencija tačka po tačka ili konvergencija po koordinatama), to nije slučaj sa konvergencijom u srednjem. Niz funkcija može konvergirati u srednjem a da ne konvergira tačka po tačka i, obrnuto, niz funkcija može konvergirati po koordinatama a da ne konvergira u srednjem. To pokazuju sledeća dva primera.

Primer 1. Neka je

$$x_n(t)=\begin{cases} n, & 0<t<1/\sqrt{n}, \\ 0, & \text{za } t=0 \text{ i } 1/\sqrt{n}\leqslant t\leqslant 1. \end{cases}$$

Tada

$$x_n(t)\to 0 \text{ za svako } t\in[0,1],$$

ali

$$\int_0^1 |x_n(t)|^p\,dt=\int_0^{1/\sqrt{n}} n^p\,dt=n^{p-1/2}\to +\infty \quad (n\to+\infty).$$

Primer 2. Neka su $u_\nu^n(t)$ funkcije koje smo uveli prilikom dokaza stava 3. Uočimo niz funkcija

$$x_1=u_1^1,\quad x_2=u_1^2,\quad x_3=u_2^2,\quad x_4=u_1^3,\quad x_5=u_2^3,\quad u_6=u_3^3,\ldots$$

Niz (x_k) konvergira u srednjem indeksa p ka 0, kao što je lako uvideti. Međutim, ni za jedno $t_0\in[0,1[$ ne važi $x_k(t_0)\to 0$. Zaista, za svako n postojaće jedno $m\,(0\leqslant m\leqslant n-1)$ takvo da $t_0\in\left[\frac{m}{n},\frac{m+1}{n}\right[$; tada je $u_m^n(t_0)=1$. Prema tome, u nizu $x_k(t_0)$ postoji beskonačno mnogo jedinica, te ovaj niz ne može konvergirati nuli.

Primer 2 pokazuje da iz konvergencije u srednjem ne sledi čak ni konvergencija skoro svuda.

Na kraju, navešćemo bez dokaza[1] potrebne i dovoljne uslove da bi neki skup bio relativno kompaktan u $L_p(a,b)$. U tom cilju uvešćemo tzv. pokretnu sredinu $x_h\,(h>0)$ funkcije x. Ako je x integrabilna na $[a,b]$ i stavimo $x(t)=0$ za $t\in[a-h,a[$ i $t\in]b,b+h]$, x_h je definisano sa

$$x_h(t)=\frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h} x(\tau)\,d\tau.$$

Stav 8 (Kolmogorov-Tulaikov). *Skup $K\subset L_p(a,b)\,(p\geqslant 1)$ je relativno kompaktan ako i samo ako je:*

1° *K ograničen u $L_p(a,b)$,*

2° *$d(x_h,x)\to 0$ kada $h\to 0$ uniformno po $x\in K$.*

U mnogim iskazima se uz prostor $L_p(a,b)$ na prirodan način javlja i metrički prostor *bitno ograničenih* funkcija $M(a,b)$.

Merljiva funkcija x definisana na (a,b) je bitno ograničena s gornje strane ako postoji konstanta A takva da je $x(t)\leqslant A$ s.s. na (a,b). Najmanja konstanta A navedene osobine je njen *bitni* ili *esencijalni supremum* (*pravi maksimum*) koji označavamo sa

$$\sup_{t\in(a,b)}\operatorname{ess} x(t) \quad \text{ili} \quad \operatorname*{vrai\,max}_{t\in(a,b)} x(t).$$

Na simetričan način se definiše bitna ograničenost s donje strane odnosno *bitni* ili *esencijalni infimum* (*pravi minimum*) funkcije x:

$$\inf_{t\in(a,b)}\operatorname{ess} x(t) \quad \text{ili} \quad \operatorname*{vrai\,min}_{t\in(a,b)} x(t).$$

[1] Videti, na primer, [13].

Merljiva funkcija x pripada skupu bitno ograničenih funkcija $\mathfrak{M}(a, b)$ ako njena apsolutna vrednost ima konačan esencijalan supremum. Neka je $M(a, b)$ skup-količnik $\mathfrak{M}/\sim$, gde je $\sim$ relacija ekvivalencije (1), ili, tačnije, neka je $M(a, b)$ skup reprezentanata klasa ekvivalencije iz $\mathfrak{M}/\sim$. Lako je proveriti da

$$d(x, y) = \sup_{t \in (a, b)} \text{ess} |x(t) - y(t)|$$

definiše metriku u skupu $M(a, b)$. $M(a, b)$ je metrički prostor bitno ograničenih funkcija na (a, b).

Shodno uvedenoj metrici, niz tačaka (x_n) iz M konvergira tački x u M, ako niz funkcija (x_n) konvergira uniformno u razmaku (a, b), kada se iz ovog ukloni skup mere nula. Prostor M nije separabilan ali je kompletan (vežbanja 24 i 25).

Veza koja postoji između prostora M i prostora L_p može se ovako iskazati: *Ako x i $y \in M(a, b)$ $(b - a < +\infty)$, tada*

$$d_{L_p}(x, y) \to d_M(x, y) \quad \textit{kada } p \to +\infty. \tag{16}$$

Zbog toga, za M često koristimo i oznaku L_∞.

Ako stavimo $z = x - y$, tvrđenje (16) svodi se na

$$\left\{\int_a^b |z|^p \, dt\right\}^{1/p} \to \sup_{a \leqslant t \leqslant b} \text{ess} |z(t)| \quad (p \to +\infty).$$

Označimo sa A esencijalni supremum od z. Ako je $A = 0$, tvrđenje je trivijalno, jer je tada

$$\left\{\int_a^b |z|^p \, dt\right\}^{1/p} = 0 \quad \text{za svako } p.$$

Pretpostavimo zato $A > 0$. Neka je $\varepsilon > 0$ (ali tako da je $A - \varepsilon > 0$) i neka je

$$E_{\varepsilon, A} = \{t \in (a, b) : A - \varepsilon < |z(t)| \leqslant A\}.$$

Skup $E_{\varepsilon, A}$ ima konačnu meru $(E_{\varepsilon, A} \subset (a, b))$ i $m(E_{\varepsilon, A}) > 0$, jer inače A ne bi bio esencijalni supremum od z. Ako nejednačinu

$$(A - \varepsilon)^p \, m(E_{\varepsilon, A}) \leqslant \int_a^b |z|^p \, dt \leqslant A^p (b - a)$$

stepenujemo sa $1/p$ i pustimo da $p \to +\infty$, dobićemo

$$\underline{\lim}_{p \to +\infty} \left\{\int_a^b |z|^p \, dt\right\}^{1/p} \geqslant A - \varepsilon \quad \text{i} \quad \overline{\lim}_{p \to +\infty} \left\{\int_a^b |z|^p \, dt\right\}^{1/p} \leqslant A,$$

odakle sledi tvrđenje, jer $\varepsilon > 0$ možemo birati proizvoljno malo.

Vežbanja 8

1. Zašto u $\mathfrak{L}_p(a, b)$ funkcija $d(x, y) = \left\{\int_a^b |x - y|^p \, dt\right\}^{1/p}$ nije rastojanje? [Videti vežbanje II.1.20.]

2. Iz Hölderove nejednačine za integrale izvesti odgovarajuću Minkowskijevu nejednačinu. [Uzeti kao model dokaz stava II.1.2.]

3. U Hölderovoj nejednačini važi znak jednakosti samo ako je $|x|^p / |y|^q = \text{const.}$ skoro svuda.

4. Hölderova nejednačina važi i za $p=1$ ako se L_∞ interpretira kao prostor bitno ograničenih funkcija.

5. Ne koristeći Hölderovu nejednačinu (stav 2), pokazati da iz $x \in L_p(a,b)$ i $y \in L_q(a,b)$ $(p>1, 1/p+1/q=1)$ sledi $xy \in L(a,b)$. [Neka je $E=\{t \in (a,b): |y(t)| \leqslant |x(t)|^{p-1}\}$. Pokazati da je $|xy| \leqslant |x|^p$ na E i $|xy| \leqslant |y|^q$ na $\complement E$.]

6. Funkcija

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}\,(1+|\log x|)}$$

pripada $L_2(0,+\infty)$, ali ne pripada $L_p(0,+\infty)$ ni za jedno drugo $p>1$.

7. Ako $f \in L_p(0,1)$ za neko $p>1$, tada $f(x)\log^\alpha x/2 \in L(0,1)$ za sve vrednosti realnog parametra α. To više nije tačno kada je $p=1$. [Primeniti Hölderovu nejednačinu.]

8. Neka je f merljiva funkcija na razmaku (a,b) konačne dužine. Ako $f \in L_p(a,b)$, tada $f \in L_r(a,b)$ ukoliko je $1 \leqslant r < p$. Kontraprimerom pokazati da je pretpostavka o konačnoj dužini razmaka (a,b) bitna. $\Big[$Koristeći Hölderovu nejednačinu pokazati prvo: $\left\{\frac{1}{b-a}\int_a^b |f|^r\,dt\right\}^{1/r} \leqslant \left\{\frac{1}{b-a}\int_a^b |f|^p\,dt\right\}^{1/p}.\Big]$

9. Ako $f \in L_p(0,+\infty)$ i $f \in L_q(0,+\infty)$, gde je $p<q$, tada $f \in L_r(0,+\infty)$ za svako $r \in \,]p,q[$. [Posmatrati odvojeno skupove u kojima je $|f| \leqslant 1$ i $|f|>1$.]

10. Ako f i $g \in L_p$ sa $p>2$, tada $fg \in L_{p/2}$.

11. Ako x i $y \in L_2(a,b)$, pokazati da je

$$\int_a^b x^2\,dt \int_a^b y^2\,dt - \left\{\int_a^b xy\,dt\right\}^2 = \frac{1}{2}\int_a^b d\tau \int_a^b [x(t)\,y(\tau)-x(\tau)\,y(t)]^2\,dt,$$

pa odatle izvesti *Schwarzovu nejednačinu* (Hölderova nejednačina sa $p=q=2$).

12. Ako $f \in L_p(0,+\infty)$ i $1<p<2$, tada postoji integral

$$g(y)=\int_0^\infty f(x)\frac{\sin xy}{\sqrt{x}}\,dx$$

i

$$|g(y)| \leqslant K\,y^{1/p-1/2}.$$

13. Ako je f ograničene varijacije na $[a,b]$, tada postoji konstanta K takva da je

$$\int_a^b |f(x+h)-f(x)|\,dx \leqslant K|h|.$$

[Izvan $[a,b]$ možemo smatrati da je $f=0$. Rastaviti f na dve monotono rastuće funkcije.]

14. Neka je $f \in L_p(0,+\infty)\,(p>1)$. Pokazati da integral

$$g(y)=\int_0^\infty f(x)\frac{\sin xy}{x}\,dx$$

postoji i da je

$$|g(y+t)-g(y)| \leqslant K|t|^{1/p},$$

gde K ne zavisi od y i od t.

15. Neka je $f \geqslant 0$ i $f \in L_2(0,+\infty)$. Stavimo $F(x)=\int_0^x f\,dt$. Pokazati da $F(x)/\sqrt{x} \to 0$ kada $x \to +0$ i kada $x \to +\infty$, a zatim da $x^{-1}F(x) \in L_2(0,+\infty)$ i da važi

$$\int_0^\infty (x^{-1}F(x))^2\,dx \leqslant 4\int_0^\infty f^2\,dx.$$

[Prethodno parcijalno integrisati integral na levoj strani u poslednjoj nejednačini.]

16. Neka $x_n \in L_p(a, b)\,(p>1, b-a<+\infty)$ za svako $n=1, 2, \ldots$ i neka $x_n \to x$ u smislu metrike u L_p. Pokazati da tada $x_n \in L_r(a, b)$ za svako $1 \leqslant r \leqslant p$ i da $x_n \to x$ u smislu metrike u L_r.

17. Ako je f integral neke funkcije iz $L_p(a, b)$ $(p>1)$, tada

$$h^{1/p-1}[f(x+h)-f(x)] \to 0 \text{ kada } h \to 0.$$

[Neka je $f=\int_a^x g\,dt$, $g \in L_p(a, b)$. Primeniti Hölderovu nejednačinu na $|f(x+h)-$ $-f(x)| \leqslant \int_x^{x+h} |g| \cdot 1\,dt$.]

18. Neka je $f \in L(a, b)$ i $f=0$ izvan (a, b). Ako stavimo

$$f_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f\,dt,$$

tada je

$$\int_a^b |f_h|\,dx \leqslant \int_a^b |f|\,dx.$$

19. Neka niz (f_n) konvergira u srednjem indeksa $p\,(p>1)$ ka f i neka niz (g_n) konvergira u srednjem indeksa q ka g $(1/p+1/q=1)$. Tada

$$\int_a f_n g_n\,dx \to \int_a^b fg\,dx.$$

Odavde specijalno sledi: Ako $f_n \to f$ u $L_p(a, b)$ $(p>1)$ i ako niz brojeva $c_n \to c$ $(a \leqslant c_n \leqslant b)$, tada

$$\int_a^{c_n} f_n\,dx \to \int_a^c f\,dx.$$

[Pre svega,

$$\left|\int_a^b (f_n g_n - fg)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f_n-f|\,|g|\,dx + \int_a^b |f|\,|g_n-g|\,dx + \int_a^b |f_n-f|\,|g_n-g|\,dx.$$

Primeniti Hölderovu nejednačinu. Za drugo tvrđenje uzeti specijalno $g_n(x)=1$ za $a \leqslant x \leqslant c_n$ i $g_n(x)=0$ za $c_n < x \leqslant b$.]

20. Za svako fiksirano $k=1, 2, \ldots$ niz funkcija $(f_{n,k})$ konvergira u srednjem indeksa p u razmaku (a, b). Tada se za svako k može izabrati delimični niz od $(f_{n,k})$ tako da svi ovi delimični nizovi konvergiraju tačka po tačka na istom skupu mere $b-a$.

21. Potreban i dovoljan uslov da integral $\int_E fg\,dx$ postoji za svaku integrabilnu funkciju f jeste da je g bitno ograničena funkcija na E. [Uslov je potreban. Zaista, kada bi za svako (ma kako veliko) K postojao skup $e \subset E$ takav da je

$$m(e)=k>0 \quad \text{i} \quad g(x)>K \text{ na } e,$$

onda bismo za $f(x)=1/k$ na e i $f(x)=0$ na $E-e$, imali

$$\int_E fg\,dx = \int_e fg\,dx \geqslant K \int_e f\,dx = K,$$

te fg ne bi bila integrabilna na E.]

$\|x_n\|^p - \|x\|^p \leqslant$

22. Ako $x_n \to x$ u $L_p(a, b)$, tada je

$\|x_n\|$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |x_n|^p\,dt = \int_a^b |x|^p\,dt.$$

[Na osnovu Minkowskijeve nejednačine je, naime

$$\left\{\int_a^b |x_n|^p\,dt\right\}^{1/p} \leqslant \left\{\int_a^b |x|^p\,dt\right\}^{1/p} + \left\{\int_a^b |x-x_n|^p\,dt\right\}^{1/p}$$

i

$$\left\{\int_a^b |x|^p\,dt\right\}^{1/p} \leqslant \left\{\int_a^b |x_n|^p\,dt\right\}^{1/p} + \left\{\int_a^b |x-x_n|^p\,dt\right\}^{1/p},$$

odakle sledi tvrđenje.]

 $\|x_n\|_p \leqslant \|x\|_p^p +$

23. Ako $x_n \to x$ u $L_p(a,b)$ $(b-a<+\infty)$ i $x_n \to y$ s.s. na (a, b), tada je $x=y$ s.s. na (a,b). [Na osnovu stava 7.]

24. Dokazati da je prostor M bitno ograničenih funkcija kompletan.

25. Dokazati da prostor M nije separabilan. [Uočiti kolekciju karakterističnih funkcija skupova $E \subset (a,b)$ i postupiti kao kod dokaza neseparabilnosti prostora m (II.3).]

26. Skup $M(a,b)$ je svuda gust u $L_p(a,b)$. [Skup A iz dokaza stava 3 je deo od $M(a,b)$.]

27. Ako $x_n \in L_p(a,b)$ $(n=1,2,\ldots)$, tada je

$$\left\{\int_a^b \left|\sum_{n=1}^{\infty} x_n(t)\right|^p dt\right\}^{1/p} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\int_a^b |x_n(t)|^p dt\right\}^{1/p}$$

(Minkowskijeva integralna nejednačina za beskonačne sume).

28. Ako $f \in L_p(a,b)$ $(p \geqslant 1;\ b-a<+\infty)$, tada

$$\lim_{h\to 0} \int_\alpha^\beta |f(x+h)-f(x)|^p\, dx = 0$$

za $a<\alpha<\beta<b$. [Iskoristiti činjenicu da je skup neprekidnih funkcija na $[a,b]$ svuda gust u $L_p(a,b)$.]

29. Pokazati da tvrđenje iz vežbanja 28 važi i kada je razmak integracije beskonačan. [Integral rastaviti na $\int_{-\infty}^{-\Delta} + \int_{-\Delta}^{\Delta} + \int_{\Delta}^{+\infty}$.]

30. Ako $f \in L_p(-\infty,+\infty)$ $(p>1)$ i $g \in L_q(-\infty,+\infty)$ $(1/p+1/q=1)$, tada je funkcija

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)\, g(t)\, dt$$

neprekidna. [Iskoristiti rezultat vežbanja 29.]

IV. BANACHOV PROSTOR

Kombinovanjem određene algebarske strukture sa nekom topološkom strukturom dolazi se do pojma složene matematičke strukture, koja omogućuje da se u mnogim problemima Klasične analize, na izgled disparatnim, nađu zajedničke crte i ovi podvedu pod iste opšte principe. Ima više takvih složenih struktura koje su opravdale svoje postojanje. Međutim, ovde ćemo se baviti isključivo jednom od njih — tzv. Banachovim prostorom, koji u algebarskom pogledu ima strukturu linearnog vektorskog prostora a u topološkom jednu na specijalan način uvedenu metričku strukturu. Kako je izučavanje linearnog vektorskog prostora predmet Linearne algebre, to su ovde navedene samo njegove najelementarnije osobine na koje ćemo se u daljem izlaganju pozivati.

1. Linearni vektorski prostor

Definicija 1. Neka je X neprazan skup čije ćemo elemente $x, y, z, \ldots$ nazivati *vektorima* ili *tačkama* i neka je T skup svih realnih ili skup svih kompleksnih brojeva čije ćemo elemente $\alpha, \beta, \lambda, \mu, \ldots$ nazivati *skalarima*. Par (X, T) obrazuje *linearni vektorski prostor* ili, kraće, *vektorski prostor* (realan ili kompleksan, već prema tome koji skup skalara T je u pitanju), ako je snabdeven sledećom algebarskom strukturom:

(A) Svakom uređenom paru (x, y) vektora iz X odgovara jedan treći vektor u X — njihov *zbir*, koji označavamo sa $x+y$[1]). Operaciju koja uređenom paru vektora (x, y) pridružuje vektor $x+y$ nazivamo *sabiranje* (vektora).

(B) Svakom vektoru x iz X i svakom skalaru λ iz T odgovara jedan drugi vektor u X — *proizvod* vektora x i skalara λ, koji označavamo sa λx [1]). Operaciju koja vektoru x i skalaru λ pridružuje vektor λx nazivamo *množenje skalarom* (vektora).

Za sabiranje i množenje skalarom važe ovi aksiomi:

1° Sabiranje je komutativno $x+y=y+x$.

2° Sabiranje je asocijativno $(x+y)+z=x+(y+z)$.

3° U X postoji *nula-vektor* 0 takav da je $x+0=x$ za svako $x \in X$.

---

[1]) Činjenica da zbir dva vektora i proizvod skalara i vektora označavamo na isti način kao zbir i proizvod brojeva ne može da dovede do zabune, jer vektore označavamo latinskim a skalare grčkim slovima.

4° Svakom vektoru $x \in X$ odgovara u X *simetričan vektor*, koji označavamo sa $-x$, takav da je $x+(-x)=0$.

Množenje skalarom je dvostruko distributivno u odnosu na sabiranje (vektora odnosno skalara):

5° $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$,

6° $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$.

7° Množenje skalarom je asocijativno: $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$.

8° $1x=x$, gde je 1 jedinica iz T.

Za sabiranje i množenje skalarom koristimo još i termine *unutrašnja* odnosno *spoljašnja kompozicija* u vektorskom prostoru.

Nula-vektor u X i broj nula u T označavamo istim simbolom 0, jer se i sa najmanjom pažnjom mogu razlikovati jedan od drugog.

Mada je vektorski prostor par (X, T), ipak ćemo ga, kraćeg pisanja radi, označavati jednostavno sa X. U ovom odeljku X će uvek označavati vektorski prostor i kada to naročito ne naglasimo.

Na osnovu uvedenih aksioma, u vektorskom prostoru važe ova pravila za rad:

Stav 1.

(1) $x+y=x+z \Rightarrow y=z$,

(2) $x=y \Leftrightarrow x-y=0$, *gde, po konvenciji,* $x-y$ *označava* $x+(-y)$.

(3) $0x=0$,

(4) $\lambda 0=0$,

(5) $(-1)x=-x$,

(6) $\lambda x=0$ *i* $\lambda\neq 0 \Rightarrow x=0$,

(7) $\lambda x=\lambda y$ *i* $\lambda\neq 0 \Rightarrow x=y$,

(8) $\lambda x=0$ *i* $x\neq 0 \Rightarrow \lambda=0$,

(9) $\lambda x=\mu x$ *i* $x\neq 0 \Rightarrow \lambda=\mu$.

Dokaz. (1) Na osnovu 1°—4° definicije 1 je

$$\begin{aligned} x+y=x+z &\Rightarrow y+x=z+x \\ &\Rightarrow (y+x)+(-x)=(z+x)+(-x) \\ &\Rightarrow y+[x+(-x)]=z+[x+(-x)] \\ &\Rightarrow y+0=z+0 \Rightarrow y=z. \end{aligned}$$

(2) Iz $x=y$ sledi, na osnovu 4°,

$$x+(-y)=y+(-y)=0.$$

Na sličan način dokazuje se i obrnuto tvrđenje.

(3) Na osnovu 3° i 7° je

$$\lambda x+0=\lambda x=(\lambda+0)x=\lambda x+0x$$

i tvrđenje sledi na osnovu (1).

(4) Na osnovu 3° i 5° je

$$\lambda x + 0 = \lambda x = \lambda(x+0) = \lambda x + \lambda 0$$

i tvrđenje sledi na osnovu (1).

(5) Na osnovu 8°, 6° i (3) je

$$x + (-1)x = [1 + (-1)]x = 0x = 0,$$

te je, prema 4°, $(-1)x$ simetrični element od x.

(6) Na osnovu 8°, 7° i (4) je

$$x = 1x = \frac{1}{\lambda}(\lambda x) = \frac{1}{\lambda} 0 = 0.$$

(7) Iz $\lambda x = \lambda y$ sledi na osnovu (1), 5° i (6)

$$\lambda x - \lambda y = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda(x-y) = 0 \quad \Rightarrow \quad x - y = 0,$$

pa se treba pozvati na (2).

(8) Kada bi λ bilo različito od nule, tada bi iz $\lambda x = 0$, na osnovu (6), sledilo $x = 0$, suprotno pretpostavci da je $x \neq 0$. Kontradikcija. Znači $\lambda = 0$.

(9) Na osnovu (1), 6° i (7) je

$$\lambda x = \mu x \quad \Rightarrow \quad \lambda x - \mu x = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda - \mu)x = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda - \mu = 0.$$

Primer 1. Skup realnih brojeva R (kao vektora) obrazuje linearni vektorski prostor nad skupom realnih brojeva (kao skalara), ako pod unutrašnjom kompozicijom podrazumevamo sabiranje a pod spoljašnjom množenje realnih brojeva.

Primer 2. Skup R^k čiji su elementi x konačni nizovi od k realnih (kompleksnih) brojeva $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ obrazuje vektorski prostor nad skupom realnih (kompleksnih) skalara, ako unutrašnju i spoljašnju kompoziciju definišemo sa

$$x + y = (\xi_\nu + \eta_\nu), \quad \text{odnosno} \quad \lambda x = (\lambda \xi_\nu).$$

U R^k je nula-vektor 0 tačka $(0, 0, \ldots, 0)$.

Primer 3. Skup $l_p (p \geqslant 1)$ realnih (kompleksnih) nizova $x = (\xi_\nu)$ sa $\sum_{\nu=1}^{\infty} |\xi_\nu|^p < +\infty$ obrazuje vektorski prostor ako unutrašnju i spoljašnju kompoziciju uvedemo na analogan način kao u primeru 2. Zaista, ako x i $y \in l_p$, tada, na osnovu Minkowskijeve nejednačine za sume, i $x + y \in l_p$. U l_p je nula-vektor niz čije su sve koordinate jednake nuli.

Primer 4. Skup svih nizova (s), kao i skupovi ograničenih (m), konvergentnih (c) i nula-nizova (c_0) obrazuju vektorski prostor ako u njih unutrašnju i spoljašnju kompoziciju uvedemo kao u primeru 3.

Primer 5. Ako u skup neprekidnih funkcija $C[a, b]$ uvedemo unutrašnju i spoljašnju kompoziciju sa

$$(x+y)(t) = x(t) + y(t), \quad \text{odnosno} \quad (\lambda x)(t) = \lambda x(t),$$

ovaj postaje vektorski prostor. Nula-vektor mu je funkcija identički jednaka nuli.

Isto važi i za skup funkcija ograničene varijacije.

$(x+y)(t) = x(t) + y(t)$

Primer 6. Skup $L_p(a, b)\,(p \geqslant 1)$ funkcija x sa $\int_a^b |x|^p\,dt < +\infty$ obrazuje vektorski prostor ako unutrašnju i spoljašnju kompoziciju uvedemo kao u primeru 5 (na osnovu Minkowskijeve nejednačine za integrale). Nula-vektor mu je funkcija koja je skoro svuda jednaka nuli.

Isto važi i za skup bitno ograničenih funkcija.

Definicija 2. Dva vektorska prostora X i Y nad istim skupom skalara T su *algebarski izomorfni* ako postoji biunivoka korespondencija $f: X \to Y$, takva da je

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \quad \forall\, x_1, x_2 \in X \quad \text{i} \quad \forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in T.$$

Algebarski izoformne vektorske prostore ćemo identifikovati ako je algebarska struktura jedino što nas u njima interesuje.

Definicija 3. Neka je X vektorski prostor. Skup $Y \subset X$ je *vektorski potprostor* od X ako je on sam za sebe vektorski prostor u odnosu na kompozicije iz X.

Pravi vektorski potprostor od X je onaj koji se razlikuje od X i od $\{0\}$.

Dva vektorska potprostora Y i Z od X su disjunktni ako je $Y \cap Z = \{0\}$.

Stav 2. *Skup $Y \subset X$ je vektorski potprostor od X tada i samo tada ako iz*

$$x, y \in Y \quad \Rightarrow \quad \lambda x + \mu y \in Y \quad \forall\, \lambda, \mu \in T. \tag{10}$$

Dokaz. Ako je Y vektorski potprostor, tada očigledno važi (10). Obrnuto, ako važi (10), tada za $\lambda = 1$ i $\mu = 1$ odnosno $\mu = 0$ specijalno sledi da $x + y \in Y$ i $\lambda x \in Y$, što znači da je Y sam za sebe vektorski prostor. (Aksiomi $1° - 8°$ definicije 1 su automatski ispunjeni u Y jer važe u X).

Neka je $(Y_i)_{i \in I}$ proizvoljna kolekcija vektorskih potprostora od X i stavimo $Y = \bigcap_{i \in I} Y_i$. Primenjujući dva puta stav 2, iz

$$\begin{aligned} x, y \in Y \quad &\Rightarrow \quad x, y \in Y_i \quad \forall\, i \in I \\ &\Rightarrow \quad \lambda x + \mu y \in Y_i \quad \forall\, i \in I \quad i \quad \forall\, \lambda, \mu \in T \\ &\Rightarrow \quad \lambda x + \mu y \in Y \quad \forall\, \lambda, \mu \in T, \end{aligned}$$

zaključujemo da je i Y jedan vektorski potprostor od X. Prema tome, ako je A proizvoljan skup u X, tada postoji najmanji vektorski potprostor od X koji sadrži skup A; to je presek svih onih vektorskih potprostora od X u kojima leži A. Otud

Definicija 4. Neka je A deo vektorskog prostora X. *Lineal nad A* je najmanji vektorski potprostor od X koji sadrži A. Označavamo ga sa $\mathfrak{L}(A)$.

Lineal nad A se može i ovako okarakterisati:

Stav 3. *Neka je $A \subset X$. Lineal nad A je skup svih linearnih kombinacija (konačnih) oblika*

$$A = \{\ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n,\ \} \tag{11}$$

gde je $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ bilo koji konačan agregat vektora iz A i $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ proizvoljni skalari iz T.

Dokaz. Skup svih linearnih kombinacija (11) očigledno sadrži A, a na osnovu stava 2 on je i vektorski potprostor od X. Da je on i najmanji vektorski potprostor od X u kome leži A, sledi iz toga što svaki vektorski potprostor od X koji sadrži A mora sadržati i sve linearne kombinacije (11).

Definicija 5. Dva disjunktna vektorska potprostora Y i Z od X su *komplementarna* ako je $\mathfrak{L}(Y \cup Z) = X$.

Komplementarni vektorski potprostor Z datom vektorskom potprostoru Y nije jednoznačno određen. Na primer, u R^2 bilo koje dve prave koje prolaze kroz koordinatni početak (i ne poklapaju se) predstavljaju dva uzajamno komplementarna vektorska potprostora.

Stav 4. *Ako su Y i Z komlementarni vektorski potprostori od X, tada svakom $x \in X$ odgovara $y \in Y$ i $z \in Z$ tako da je $x = y + z$. Ova reprezentacija je jednoznačna.*

Dokaz. Zbog $X = \mathfrak{L}(Y \cup Z)$ svaki vektor x iz X ima reprezentaciju pomenutog oblika. Kada bi postojala još jedna takva reprezentacija, recimo $x = u + v$ $(u \in Y, v \in Z)$, iz $y + z = u + v$ sledilo bi da vektor $w = y - u = v - z$ leži kako u Y tako i u Z, tj. $w \in Y \cap Z$. Kako su prostori Y i Z disjunktni, to je $y - u = 0$ i $v - z = 0$.

$X \neq$

Definicija 6. Vektori $x_1, x_2, \ldots, x_n$ iz X su *linearno zavisni* ako postoje skalari $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, od kojih je bar jedan različit od nule, takvi da važi

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n = 0. \tag{12}$$

$\lambda_i \neq 0$ x_i

U protivnom, tj. ako iz (12) sledi

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0,$$

vektori $x_1, x_2, \ldots, x_n$ su *linearno nezavisni*. $x_i \neq 0$

Za *beskonačno* mnogo vektora kažemo da su linearno nezavisni, ako su vektori koji pripadaju bilo kojoj konačnoj kolekciji tih vektora linearno nezavisni.

Među linearno nezavisnim vektorima očigledno ne može figurisati nula-vektor. Ako su vektori $\{x_i\}_{i \in I}$ linearno nezavisni, tada iz

$$\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu x_{i_\nu} = \sum_{\nu=1}^{n} \mu_\nu x_{i_\nu}$$

sledi

$$\lambda_\nu = \mu_\nu \text{ za svako } \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Primer 7. U vektorskom prostoru l_p $(p \geqslant 1)$ vektori

$$e_1 = (1, 0, 0, 0, \ldots),\ e_2 = (0, 1, 0, 0, \ldots),\ e_3 = (0, 0, 1, 0, \ldots), \ldots$$

su linearno nezavisni. Zaista, ako je $\{e_{k_\nu}\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ proizvoljna konačna kolekcija tih vektora, uslov

$$\lambda_1 e_{k_1} + \lambda_2 e_{k_2} + \cdots + \lambda_n e_{k_n} = 0$$

se svodi na to da je vektor čija je k_ν-ta koordinata $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ jednaka λ_ν nula-vektor prostora l_p.

Primer 8. U vektorskom prostoru $C[a, b]$ vektori

$$x_0 = 1, \quad x_1 = t, \quad x_2 = t^2, \ldots$$

su linearno nezavisni. Zaista, svaka linearna kombinacija tih vektora je polinom po t, a ovaj je identički jednak nuli jedino ako su mu svi koeficijenti jednaki nuli.

Definicija 7. Vektorski prostor je *k-dimenzionalan* ako u njemu postoji k linearno nezavisnih vektora, a svaki sistem od $k+1$ vektora je linearno zavisan. Ukoliko u vektorskom prostoru postoji beskonačno mnogo linearno nezavisnih vektora, kažemo da je on *beskonačno-dimenzionalan.*

Prostor R^k je k-dimenzionalan, a prostori l_p i $C[a, b]$ su beskonačno-dimenzionalni.

Definicija 8. Skup B linearno nezavisnih vektora prostora X obrazuje *Hamelovu* (ili *algebarsku*) *bazu* tog prostora, ako je $\mathfrak{L}(B) = X$.

Vektorski prostor ima neograničeno mnogo različitih Hamelovih baza. Može se pokazati da sve one imaju isti (kardinalni) broj elemenata. Specijalno, ako je prostor k-dimenzionalan, njegova baza sadrži tačno k vektora.

Značaj Hamelove baze je u tome što se, zbog linearne nezavisnosti vektora iz baze, svaki vektor prostora može na jednoznačan način prikazati kao linearna kombinacija konačno mnogo vektora iz baze. Situacija je naročito jednostavna ako je prostor k-dimenzionalan: Ako vektori $x_1, x_2, \ldots, x_k$ obrazuju Hamelovu bazu u X, tada svaki vektor x iz X ima jednoznačnu reprezentaciju $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k$. U R^k vektori $e_1, e_2, \ldots, e_k$ obrazuju jednu Hamelovu bazu.

Ako su X i Y dva k-dimenzionalna vektorska prostora nad istim skupom skalara, oni su *algebarski izomorfni.* Kako je algebarski izomorfizam jedna relacija ekvivalencije, to je dovoljno pokazati da je X algebarski izomorfan vektorskom prostoru R^k (nad odgovarajućim skupom skalara). Neka je $x_1, x_2, \ldots, x_k$ jedna baza prostora X i neka je $x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_k x_k$. Čitaocu prepuštamo da pokaže da je preslikavanje $f: X \to R^k$, definisano sa

$$y = f(x) = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k) \in R^k$$

jedan algebarski izomorfizam.

Vežbanja 1

1. Skup funkcija integrabilnih u nekom smislu (Riemannovom, Riemann-Stieltiesovom, Lebesgueovom ili uopšte u odnosu na neku pozitivnu meru) obrazuje vektorski prostor ako u ovaj unutrašnju i spoljašnju kompoziciju uvedemo kao u primeru 5.

2. Neka je $\mathcal{M}$ kolekcija realnih mera na merljivom prostoru $(X, \mathfrak{M})$. $\mathcal{M}$ je vektorski prostor ako u njega uvedemo kao unutrašnju i spoljašnju kompoziciju:

$$(\nu + \lambda)(E) = \nu(E) + \lambda(E), \quad (c\nu)(E) = c\,\nu(E) \; (E \in \mathfrak{M}; \; \nu, \lambda \in \mathcal{M}; \; c = \text{const.}).$$

3. Neka je X vektorski prostor i neka su $Y_i \, (i \in I)$ vektorski potprostori od X. Pokazati da $\bigcup_{i \in I} Y_i$ ne mora da bude vektorski potprostor od X. [Uočiti dva disjunktna potprostora Y_1 i Y_2 od X, i neka je $y_1 \in Y_1$ i $y_2 \in Y_2$ ($y_1 \neq 0$,

$y_2 \neq 0$). Pretpostavka da $y_1 + y_2 \in Y_1 \cup Y_2$ dovodi do kontradikcije, jer ako $z = y_1 + y_2 \in Y_1$, tada i $y_2 = z - y_1 \in Y_1$, a to je nemoguće jer su Y_1 i Y_2 disjunktni.]

4. Realni niz $(\xi_\nu) \in M_{\alpha,p}$ $(0 < \alpha \leqslant 1,\ p \geqslant 1)$ ako postoji konstanta M $(0 < M < +\infty)$ takva da je

$$\left\{ \sum_{\nu=1}^{n} |\xi_\nu|^p \right\}^{1/p} < M n^\alpha \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Ako u $M_{\alpha,p}$ na uobičajeni način uvedemo spoljašnju i unutrašnju kompoziciju, $M_{\alpha,p}$ obrazuje vektorski prostor.

5. Realni niz $(\xi_\nu) \in R_{\alpha,p}$ $(0 < \alpha \leqslant 1,\ p \geqslant 1)$ ako postoji konstanta M $(0 < M < +\infty)$ takva da je

$$\left\{ \sum_{\nu=n}^{\infty} |\xi_\nu|^p \right\}^{1/p} < M n^{-\alpha} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Pokazati da je $R_{\alpha,p}$ vektorski prostor.

6. Funkcija $x \in \mathrm{Lip}(\alpha, p)$ $(\subset \tilde{L}_p(-\pi, \pi)$, $p \geqslant 1$, $0 < \alpha \leqslant 1)$ ako postoji konstanta M $(0 < M < +\infty)$ takva da je

$$\left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |x(t+h) - x(t)|^p \, dt \right\}^{1/p} < M |h|^\alpha.$$

Ako u ovaj skup funkcija na uobičajeni način uvedemo spoljašnju i unutrašnju kompoziciju, $\mathrm{Lip}(\alpha, p)$ obrazuje vektorski prostor.

7. Skup funkcija $x(t)$ definisanih na $[0, 1]$ za koje je

$$\int_0^1 (e^{|x(t)|} - 1)\, dt < +\infty$$

ne obrazuje vektorski prostor.

2. Banachov prostor

Konkretni prostori nizova (l_p, m, c, c_0, s) i funkcija (C, L_p, M, V_0) mogu se snabdeti kako metričkom tako i strukturom vektorskog prostora (odeljak II.1 i odeljak 1 ove glave). Pokazaćemo sada kako se u proizvoljan vektorski prostor uvodi metrika koja je saglasna sa njegovom algebarskom strukturom. Tako dolazimo do pojma *normiranog prostora*.

Definicija 1. Vektorski prostor (X, T) je *normiran* ako postoji nenegativna funkcija definisana sa svako $x \in X$ — nazivamo je *norma* od x i označavamo sa $\|x\|$ — takva da je

1° $\|0\| = 0$ i $\|x\| > 0$ za $x \neq 0$,

2° $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ za svako $\lambda \in T$,

3° $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

$x \xrightarrow{f} \|x\|$

f непрекидно

U normirani prostor metrika se uvodi sa

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Lako je proveriti, na osnovu osobina 1°—3° norme, da je d jedno rastojanje u X.

Primer 1. Vektorski prostori iz primera 1.1—6 se mogu normirati ako se u njih norma uvede sa:

$R_p^k (1 \leqslant p < +\infty)$: $\quad \|x\| = \left\{ \sum_{\nu=1}^{k} |\xi_\nu|^p \right\}^{1/p}$,

R_∞^k: $\quad \|x\| = \max_{1 \leqslant \nu \leqslant k} |\xi_\nu|$,

$l_p (1 \leqslant p < \infty)$: $\quad \|x\| = \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} |\xi_\nu|^p \right\}^{1/p}$,

m, c, c_0: $\quad \|x\| = \sup_{1 \leqslant \nu < \infty} |\xi_\nu|$,

$C[a, b]$: $\quad \|x\| = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)|$,

$L_p(a, b) (1 \leqslant p < +\infty)$: $\quad \|x\| = \left\{ \int_a^b |x(t)|^p dt \right\}^{1/p}$,

$M(a, b)$: $\quad \|x\| = \sup_{a \leqslant t \leqslant b} \operatorname{ess} |x(t)|$,

$V_0[a, b]$: $\quad \|x\| = V_a^b(x)$.

Lako je uvideti da se metrika inducirana navedenim normama poklapa sa metrikom koju smo u ove skupove uveli u odeljku II.1 i vežbanju II.8.9. To opravdava upotrebu istih oznaka za ove prostore i sada kada ih tretiramo kao normirane vektorske prostore. Primećujemo da se u skup svih nizova s ne može uvesti norma iz koje bi izvirala metrika kojom smo ovaj skup snabdeli u primeru II.1.8. Naime, izraz

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} \frac{|\xi_\nu|}{1+|\xi_\nu|}, \qquad x = (\xi_\nu) \in s,$$

ne zadovoljava osobinu 2° norme.

Uz relaciju trougla (definicija 1.3°), norma zadovoljava i

$$(1) \qquad \big| \|x\| - \|y\| \big| \leqslant \|x-y\|.$$

Zaista, iz

$$\|x\| = \|x-y+y\| \overset{3°}{\leqslant} \|x-y\| + \|y\|,$$

sledi

$$\|x\| - \|y\| \leqslant \|x-y\|$$

i simetrično

$$\|y\| - \|x\| \leqslant \|y-x\| = \|x-y\|,$$

što zajedno daje (1).

$\|x\|$ *je neprekidna funkcija od* x. Zaista, ako $x_n \to x$, tj. $\|x_n - x\| \to 0$, na osnovu (1) sledi

$$\big| \|x_n\| - \|x\| \big| \leqslant \|x_n - x\| \to 0,$$

tj. $\|x_n\| \to \|x\|$ (videti vežbanje II.6.10).

Lako je uvideti da su *sabiranje* i *množenje skalarom neprekidne funkcije* svojih argumenata. U tome treba videti saglasnost algebarske i topološke strukture u normiranom vektorskom prostoru koja je pomenuta na početku ovog odeljka.

Definicija 2. Normiran prostor (X, T), koji je kompletan u odnosu na metriku koju u njemu inducira norma, nazivamo *Banachov prostor.* Banachov prostor je realan ili kompleksan prema tome da li je T skup realnih ili kompleksnih brojeva.

Primer 2. Normirani prostori R_p^k, l_p, m, c, c_0, C, L_p, M i V_0 su Banachovi prostori.

Kako je svaki normirani prostor X i metrički prostor, on se kao takav može kompletirati (stav II.4.10) i dobiti kompletan metrički prostor $\tilde{X}$ u kome je X svuda gust. Tada je moguće, neprekidnim produženjem, uvesti normu i unutrašnju i spoljašnju kompoziciju u čitav $\tilde{X}$, tako da je X vektorski potprostor od $\tilde{X}$. Jednom rečju, svaki normirani prostor može se dopuniti tako da postane Banachov prostor.

U ovoj glavi govorićemo uvek o Banachovim prostorima, mada mnoge definicije odnosno iskazi koje ćemo formulisati imaju smisla odnosno važe i u normiranim prostorima, jer ne koriste kompletnost Banachovog prostora. Ponekad ćemo na to eksplicitno ukazivati, ali po pravilu prepuštaćemo čitaocu da sam to konstatuje. Ubuduće X će označavati Banachov prostor, i kada to naročito ne naglasimo.

Definicija 3. Banachovi prostori X i Y (nad istim skupom skalara T) su *kongruentni* ako su algebarski izomorfni i izometrični, tj. ako postoji biunivoka korespondencija $f : X \to Y$ takva da je

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \qquad \forall\, x_1, x_2 \in X \quad \text{i} \quad \forall\, \lambda_1, \lambda_2 \in T$$

i

$$\|f(x)\|_Y = \|x\|_X \qquad \forall\, x \in X.$$

Preslikavanje f nazivamo tada *kongruencija.*

Kongruentne Banachove prostore ćemo uvek identifikovati.

Definicija 4. Neka je X Banachov prostor i neka je $X_1 \subset X$. Ako je X_1, sam za sebe, Banachov prostor u odnosu na algebarsku i metričku strukturu koju u njemu inducira odgovarajuća struktura iz X, kažemo da je X_1 *Banachov potprostor* od X.

Ako je X_1 vektorski potprostor Banachovog prostora X, X_1 ne mora da bude i Banachov potprostor od X. To se moglo i očekivati, jer je pojam „vektorski potprostor" čisto algebarski, dok je pojam „Banachov potprostor" algebarsko-metrički. Uostalom, to pokazuje i

Primer 3. U l_p skup L vektora koji imaju konačno (ali i proizvoljno) mnogo koordinata različitih od nule obrazuje, kao što je lako videti, jedan vektorski potprostor od l_p. Međutim, L nije Banachov potprostor od l_p, jer nije kompletan prostor. Zaista, niz tačaka iz L

$$x_n = (\xi_\nu^n), \qquad \xi_\nu^n = \begin{cases} 2^{-\nu}, & \nu = 1, 2, \ldots, n-1, \\ 0, & \nu = n, n+1, \ldots, \end{cases}$$

konvergira tački $x = (2^{-\nu})\ (\nu = 1, 2, \ldots)$, jer je

$$\|x_n - x\| = \left\{ \sum_{\nu=n}^{\infty} 2^{-\nu p} \right\}^{1/p}$$

Znači, Cauchyev niz (x_n) u L ne konvergira u L, jer $x \notin L$.

Stav 1. *Neka je L vektorski potprostor Banachovog prostora X. Njegova adherencija $\overline{L}$ je Banachov potprostor od X.*

Dakle: Svaki zatvoren vektorski potprostor je Banachov potprostor od X.

Dokaz stava 1. Pokazaćemo prvo da je sa L i $\overline{L}$ vektorski potprostor od X. Neka su (x_n) i (y_n) nizovi tačaka iz L koji konvergiraju ka $x \in \overline{L}$, odnosno $y \in \overline{L}$ (stav II.4.4). Kako je L vektorski prostor to

$$\lambda x_n + \mu y_n \in L \quad \forall n \quad i \quad \forall \lambda, \mu \in T.$$

Ako ovde pustimo da $n \to \infty$, slediće, na osnovu stava II.4.4 (videti i vežbanje 1), da

$$\lambda x + \mu y \in \overline{L} \quad \forall \lambda, \mu \in T,$$

što je trebalo pokazati.

Kako je $\overline{L}$, kao adherencija, zatvoren skup, kompletnost vektorskog prostora $\overline{L}$ sledi na osnovu stava II.4.8.

$\mathcal{L}(*)$

Definicija 5. Skup vektora $A \subset X$ je *fundamentalan* (*zatvoren*) u X ako je lineal nad A svuda gust u X. Ako je skup A prebrojiv, govorimo o fundamentalnom nizu vektora u X.

Primer 4. Niz vektora (e_n) je fundamentalan u $l_p\,(p \geqslant 1)$. Naime, ako je $x = (\xi_\nu)$ proizvoljna tačka u l_p, za svako $\varepsilon > 0$ tačka

$$x_n = \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu e_\nu \quad \text{iz lineala nad } (e_n)$$

ležaće u ε-okolini tačke x, ako n izaberemo tako veliko da je

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} |\xi_\nu|^p < \varepsilon^p,$$

što se zbog konvergencije reda $\sum_{\nu=1}^{\infty} |\xi_\nu|^p$ uvek može postići. Zaista, tada je

$$\| x - x_n \| = \left\{ \sum_{\nu=n+1}^{\infty} |\xi_\nu|^p \right\}^{1/p} < \varepsilon,$$

tj. lineal nad (e_n) je svuda gust u l_p.

Primer 5. Vektor $e = (1, 1, 1, \ldots)$ i vektori e_n obrazuju fundamentalan niz vektora u prostoru konvergentnih nizova c. Zaista, ako $x = (\xi_\nu) \in c$ i $\xi_\nu \to \xi\ (\nu \to \infty)$,

$$\| x - [\xi e + \sum_{\nu=1}^{n} (\xi_\nu - \xi) e_\nu] \| = \sup_{\nu > n} |\xi_\nu - \xi| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

(jer vektor koji stoji pod znakom norme ima koordinate $(0, \ldots, 0, \xi_{n+1} - \xi, \xi_{n+2} - \xi, \ldots)$. U svakoj okolini tačke $x \in c$ leži, dakle, za dovoljno veliko n, tačka

$$\xi e + \sum_{\nu=1}^{n} (\xi_\nu - \xi) e_\nu,$$

tj. lineal konstruisan nad e i (e_n) je svuda gust u c. — Jasno je da je u prostoru nula-nizova c_0 već (e_n) jedan fundamentalan niz vektora.

Primer 6. Na osnovu prvog Weierstrassovog stava (odeljak II.3) niz vektora $1, t, t^2, \ldots$ je fundamentalan u prostoru neprekidnih funkcija $C[a, b]$. Ovaj niz je fundamentalan i u prostoru $L_p(a, b)$, $b-a<+\infty$ (stav III.8.5).

Primer 7. Na osnovu drugog Weierstrassovog stava niz vektora $1, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \ldots$ je fundamentalan u prostoru neprekidnih periodičnih funkcija $\tilde{C}[0, 2\pi]$. Ovaj niz vektora je fundamentalan i u prostoru $\tilde{L}_p(0, 2\pi)$.

Ako je (x_n) fundamentalan niz u Banachovom prostoru X, tada je, po definiciji, skup tačaka oblika

$$\{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n\} \tag{2}$$

svuda gust u X. No lako je videti da je tada i skup tačaka oblika (2), gde su λ_ν *racionalni* brojevi, svuda gust u X, a ovaj skup je, očigledno prebrojiv. Dakle, ako u prostoru X postoji fundamentalan niz, prostor je separabilan. No važi i obrnuto: u svakom separabilnom Banachovom prostoru postoji fundamentalan niz vektora. Naime, kao fundamentalan niz možemo uzeti ma koji prebrojiv skup koji je svuda gust u X. Prema tome, *Banachov prostor je separabilan tada i samo tada ako u njemu postoji fundamentalan niz vektora.*

Vežbanja 2

1. Neka je X normiran vektorski prostor. Ako nizovi vektora (x_n) i (y_n) konvergiraju ka x_0, odnosno y_0, i niz skalara (λ_n) konvergira ka λ_0, tada

$$x_n + y_n \to x_0 + y_0 \quad \text{i} \quad \lambda_n x_n \to \lambda_0 x_0.$$

2. U vektorski prostor iz vežbanja 1.2 norma se može uvesti sa $\|\nu\| = |\nu|(X)$, gde je $|\nu|$ totalna varijacija mere ν.

3. Vektorski prostor polinoma $p(t)$ definisanih na $[0, 1]$ je normiran ali ne i Banachov prostor u odnosu na normu

$$\|p\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |p(t)|.$$

4. U R^k je svaki vektorski potprostor i Banachov potprostor od R^k.

5. U vektorski prostor funkcija ograničene varijacije $V[a, b]$ norma se može uvesti sa

$$\|x\| = |x(a)| + V_a^b(x).$$

Prostor $V[a, b]$ je tada kompletan.

6. U skup svih realnih nizova $x = (\xi_\nu)$ za koje red $\sum \xi_\nu$ konvergira uvedena je norma sa $\|x\| = \sup |\xi_\nu|$. Da li je ovaj normiran prostor kompletan?

7. Neka je X normiran vektorski prostor. X je Banachov prostor tada i samo tada ako je potprostor $K = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ kompletan. [Ako je (x_n) Cauchyev niz u X, takav je i $(x_n / \|x_n\|)$ u K.]

8. Neka je A klasa analitičnih funkcija $f(z)$ regularnih na jediničnom krugu $|z|<1$ kompleksne ravni. Za $f \in A$ i $0 \leqslant r < 1$ stavimo

$$M(f, r) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \, d\theta \right\}^{1/2}.$$

Pokazati da one funkcije iz A za koje je $\sup\limits_{0 \leqslant r < 1} M(f, r)$ konačan broj obrazuju vektorski prostor i da se ovaj može normirati sa

$$\|f\| = \sup_{0 \leqslant r < 1} M(f, r).$$

9. Neka je $V_0[a, b]$ Banachov prostor funkcija $x(t)$ ograničene varijacije koje se anuliraju u tački $t=a$. Ako je A skup apsolutno neprekidnih funkcija $x(t)$ na $[a, b]$ koje se anuliraju u $t=a$, pokazati da je A Banachov potprostor od V_0. [A je vektorski potprostor od V_0 kome pripadaju sve njegove tačke nagomilavanja.]

10. Neka je $C[a, b]$ Banachov prostor neprekidnih funkcija. Pokazati: 1° podskup $A \subset C[a, b]$ koji obrazuju funkcije konstantne na $[a, b]$ je Banachov potprostor od $C[a, b]$. 2° Podskup od A koji sačinjavaju one funkcije čija norma nije veća od broja $M>0$ je kompaktan. 3° Podskup od $C[a, b]$ koji obrazuju funkcije čija norma nije veća od broja $M>0$ je zatvoren ali ne i kompaktan.

11. U vektorski prostor $M_{a,p}$ iz vežbanja 1.4 norma se može uvesti sa

$$\|x\| = \sup_n n^{-a} \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} |\xi_\nu|^p \right\}^{1/p}$$

i u odnosu na nju je $M_{a,p}$ kompletan prostor.

12. Ako u vektorski prostor iz vežbanja 1.5 normu uvedemo sa

$$\|x\| = \sup_n n^a \left\{ \sum_{\nu=n}^{\infty} |\xi_\nu|^p \right\}^{1/p},$$

ovaj postaje Banachov prostor.

13. Vektorski prostor $\mathrm{Lip}(\alpha, p)$ iz vežbanja 1.6 je Banachov prostor ako u njega kao normu uvedemo

$$\|x\| = \sup_h |h|^{-\alpha} \|x(t+h) - x(t)\|_{\tilde{L}p}$$

i identifikujemo funkcije koje se razlikuju za konstantu.

14. Skup polinoma

$$p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$$

obrazuje normiran ali ne i Banachov prostor ako normu uvedemo sa

$$\|p\| = |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|.$$

15. Skup nizova $x = (\xi_\nu)$ koji zadovoljavaju $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} |\xi_{\nu+1} - \xi_\nu| < +\infty$ obrazuje Banachov prostor sa normom

$$\|x\| = |\xi_1| + \sum_{\nu=1}^{\infty} |\xi_{\nu+1} - \xi_\nu|.$$

16. Vektorski red $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ čiji elementi x_n pripadaju normiranom prostoru X, po definiciji, konvergira u X ako je to slučaj sa nizom njegovih delimičnih suma. Red $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ apsolutno konvergira u X ako je $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$. Prostor X je kompletan tada i samo tada ako u njemu svaki apsolutno konvergentan red konvergira.

17. Neka su X i Y Banachovi prostori. Ako na uobičajen način uvedemo unutrašnju i spoljašnju kompoziciju u $X \times Y$ a normu tačke $(x, y) \in X \times Y$ $(x \in X,\ y \in Y)$ sa $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$, tada je i $X \times Y$ Banachov prostor.

3.i. Linearni operator

Neka su X i Y dva Banachova prostora čije ćemo tačke označavati sa x odnosno y. Radi jednostavnijeg pisanja, označavaćemo nula-vektor, obe kompozicije i normu na isti način $(0, +, \|\cdot\|)$ u oba prostora. Isto tako smatraćemo da su X i Y vektorski prostori nad istim skupom skalara T.

Preslikavanje A prostora X u prostor Y označavaćemo sa $y = A(x)$ ili jednostavno sa $y = Ax$ kad god je to moguće. Umesto termina preslikavanje ili funkcija odsada ćemo najčešće koristiti naziv operator.

Definicija 1. Operator $A: X \to Y$ je *aditivan* ako je

$$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$$

za svaki par vektora x_1 i x_2 iz X.

Iz

$$Ax = A(x + 0) = A(x) + A(0)$$

sledi da je $A(0)$ nula-vektor u Y, koji ćemo, shodno gore uvedenoj konvenciji, opet označiti sa 0, tj. $A(0) = 0$. Isto tako, iz

$$0 = A(0) = A(x - x) = A(x) + A(-x)$$

sledi

$$A(-x) = -A(x), \tag{1}$$

tj. slika simetričnog elementa od x poklapa sa simetričnim elementom slike od x.

Stav 1. *Ako je aditivni operator neprekidan u jednoj tački prostora, on je neprekidan na čitavom prostoru.*

Dokaz. Neka je $x_0 \in X$ tačka u kojoj je aditivni operator A neprekidan. Neka je x proizvoljna tačka u X i neka je (x_n) niz tačaka u X koji konvergira ka x. Zbog pretpostavljene neprekidnosti u tački x_0 biće

$$\lim_{n \to \infty} A(x_n - x + x_0) = Ax_0,$$

a zbog aditivnosti operatora i (1)

$$\lim_{n \to \infty} \{Ax_n - Ax + Ax_0\} = Ax_0.$$

$\lim_{n \to \infty} Ax_n - Ax + \cancel{Ax_0} = A$

Prema tome,

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = Ax,$$

tj. operator A je neprekidan u tački x.

Definicija 2. Operator $A: X \to Y$ je *homogen* ako je

$$A(\lambda x) = \lambda Ax$$

za svako $x \in X$ i za svako $\lambda \in T$.

Definicija 3. Operator $A: X \to Y$ je *linearan* ako je istovremeno aditivan i homogen, tj. ako zadovoljava

$$A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 Ax_1 + \lambda_2 Ax_2$$

za svako $x_1, x_2 \in X$ i za svako $\lambda_1, \lambda_2 \in T$.

Definicija 4. *Linearni* operator $A: X \to Y$ je *ograničen* ako postoji nenegativan broj M takav da je

(2) $$\|Ax\| \leqslant M \|x\| \quad \text{za svako } x \in X.$$

Infimum brojeva M za koje važi (2) je *norma operatora A.* Označavamo je sa $\|A\|$.

Operator A je, dakle, ograničen ako ima konačnu normu $\|A\|$. Tada važi

(3) $$\|Ax\| \leqslant \|A\| \, \|x\| \quad \text{za svako } x \in X.$$

Primećujemo da se u poslednjoj nejednačini simbol $\|\cdot\|$ javlja na tri mesta i da na svakom od njih ima različito značenje. Na levoj strani to je norma vektora u Y, na drugom mestu na desnoj strani on označava normu vektora u X, a na prvom mestu predstavlja normu operatora A. Samo ako naročito želimo da istaknemo, pisaćemo detaljnije

$$\|Ax\|_Y \leqslant \|A\| \, \|x\|_X.$$

Stav 2. *Ako je operator A homogen, za njegovu normu važi*

(4) $$\|A\| = \sup_{x \in X - \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Dokaz. Ako (2) napišemo u obliku

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leqslant M \quad (x \neq 0),$$

infimum brojeva M nije ništa drugo nego supremum brojeva na levoj strani, te je zbog homogenosti

$$\|A\| = \sup_{x \in X - \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x \in X - \{0\}} \left\| \frac{1}{\|x\|} Ax \right\| = \sup_{x \in X - \{0\}} \left\| A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\|.$$

No kako je za svako $x \in X - \{0\}$ norma vektora $x/\|x\|$ jednaka 1, to je

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|,$$

$\sup_{\|y\|=1} \|Ay\|$

čime je dokazan treći izraz za normu u (4). Da bismo dokazali drugi, primećujemo da ako uzmemo u obzir samo one tačke $x \in X$ za koje je $\|x\| \leqslant 1$, iz (3) sledi

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| \leqslant \|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

$\sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \geqslant \|A\|$

No, očigledno važi i obrnuta nejednačina.

Stav 3. *Linearni operator $A: X \to Y$ je neprekidan tada i samo tada ako je ograničen.*

Dokaz. Zaista, ako je operator A ograničen, imaćemo

$$\|Ax_n - Ax_0\| = \|A(x_n - x_0)\| \leqslant \|A\| \, \|x_n - x_0\|,$$

odakle sledi, kada $x_n \to x_0$, njegova neprekidnost u proizvoljnoj tački x_0.

Obrnuto, ako operator A nije ograničen na čitavom prostoru X, na osnovu (4) on nije ograničen ni na jediničnoj sferi $\|x\| = 1$. Postoji, dakle, niz tačaka (x_n) sa $\|x_n\| = 1$ tako da $\|Ax_n\| \geqslant \delta_n \to +\infty$. No tada niz

$$y_n = \frac{x_n}{\delta_n} \to 0,$$

dok je

$$\|Ay_n\| \geqslant 1 \quad \text{za svako} \quad n.$$

Operator A nije, dakle, neprekidan u tački $x = 0$. Na osnovu stava 1 on tada ne može biti neprekidan ni u jednoj drugoj tački.

Stav 4. *Neka je $A: X \to Y$ linearan operator. Potreban i dovoljan uslov da je operator A ograničen jeste da svaki ograničen skup u X preslikava u ograničen skup u Y.*

Dokaz. Uslov je potreban. Ako je operator ograničen i S neki ograničen skup, tj.

$$\|A\| < +\infty \quad \text{i} \quad \|x\| \leqslant M \quad \text{za svako} \quad x \in S,$$

tada je

$$\|Ax\| \leqslant \|A\| \, \|x\| \leqslant M \|A\|_{<+\infty} \quad \text{za svako} \quad x \in S.$$

Uslov je dovoljan. Ako je K jedinična zatvorena kugla u X, tada je i njena slika AK ograničen skup u Y, tj. postoji broj $M > 0$ tako da je

$$\|Ax\| \leqslant M \quad \text{za svako} \quad x \in K.$$

Neka je $x \neq 0$ proizvoljna tačka u X. Tada $x/\|x\| \in K$, te je

$$\left\| A \frac{x}{\|x\|} \right\| \leqslant M,$$

tj.

$$\|Ax\| \leqslant M \|x\|. \quad \Rightarrow \quad \|A\| \leq M_1$$

Kako ova nejednačina očigledno važi i za $\boxed{x = 0}$, iz nje sledi ograničenost operatora A.

Primer 1. Neka je $[\alpha_{\nu\mu}]$ beskonačna matrica brojeva, takva da je za neko $q > 1$

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_{\nu\mu}|^q < +\infty.$$

Tada je sa

$$\eta_\mu = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\nu\mu}\, \xi_\nu \quad (\mu = 1, 2, \ldots)$$

definisan ograničen linearni operator

$$y = Ax, \ x = (\xi_\nu), \ y = (\eta_\mu),$$

koji preslikava prostor l_p u prostor l_q $(1/p + 1/q = 1)$.

Kako je

$$|\eta_\mu| \leqslant \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_{\nu\mu}|^q \right\}^{1/q} \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} |\xi_\nu|^p \right\}^{1/p} \quad (\mu = 1, 2, \ldots),$$

stepenujući ovu nejednačinu sa q i sabirajući od $\mu = 1$ do $\mu = \infty$, nalazimo

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} |\eta_\mu|^q \leqslant \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_{\nu\mu}|^q \cdot \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} |\xi_\nu|^p \right\}^{q/p},$$

tj.

$$\|y\|_{l_q} \leqslant \left\{ \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_{\nu\mu}|^q \right\}^{1/q} \|x\|_{l_p},$$

Odavde sledi da $y \in l_q$, tj. da operator A preslikava l_p u l_q i da je

$$\|A\| \leqslant \left\{ \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} |\alpha_{\nu\mu}|^q \right\}^{1/q},$$

tj. da je A ograničen operator. Lako je proveriti da je A linearan operator.

Primer 2. Neka je $K(s, t)$ merljiva funkcija na kvadratu $Q = \{(s, t) : 0 \leqslant s \leqslant 1, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ i neka je

$$\int_0^1 |K(s, t)|\, dt \leqslant D \quad \text{za svako} \quad s \in [0, 1].$$

Tada je sa

$$y(s) = \int_0^1 K(s, t)\, x(t)\, dt \tag{5}$$

definisan ograničen linearni operator

$$y = Ax, \ x = x(t), \ y = y(s),$$

koji preslikava prostor bitno ograničenih funkcija M u samog sebe. A je tzv. *Fredholmov operator*; K je njegovo *jezgro*.

Iz

$$|y(s)| \leqslant \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \operatorname{ess} |x(t)| \cdot \int_0^1 |K(s, t)|\, dt \leqslant D \|x\|_M \quad \forall\, s \in [0, 1],$$

sledi

$$\sup_{0 \leqslant s \leqslant 1} \operatorname{ess} |y(s)| \leqslant D \|x\|_M$$

tj.

$$\|Ax\|_M \leqslant D \|x\|_M.$$

Prema tome, $Ax \in M$, A je ograničen operator i $\|A\| \leqslant D$. Lako je proveriti linearnost operatora A.

Primer 3. Ako je funkcija $K(s, t)$ neprekidna na kvadratu Q, jednačinom (5) definisan je ograničen linearni operator koji preslikava prostor C

u C. Ako prethodno konstatujemo da je pod navedenim uslovima $y(s)$ neprekidna funkcija na $[0, 1]$, dokaz je istovetan kao u primeru 2: trebalo bi jedino sup ess zameniti sa max, tj. $\|\cdot\|_M$ sa $\|\cdot\|_C$.

Primer 4. Neka je $K(s,t)$ merljiva funkcija na kvadratu Q i neka je

$$\int_0^1 \sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\operatorname{ess} |K(s,t)|\, ds < +\infty.$$

Tada je jednačinom (5) definisan ograničen linearni operator A koji preslikava prostor L u L.

Zaista, iz

$$|y(s)| \leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\operatorname{ess} |K(s,t)| \cdot \int_0^1 |x(t)|\, dt$$

sledi integracijom po s od 0 do 1,

$$\int_0^1 |y(s)|\, ds \leqslant \int_0^1 \sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\operatorname{ess} |K(s,t)|\, ds \cdot \int_0^1 |x(t)|\, dt,$$

tj.

$$\|Ax\|_L \leqslant \int_0^1 \sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\operatorname{ess} |K(s,t)|\, ds \cdot \|x\|_L.$$

Znači, $Ax \in L$, A je ograničen operator i

$$\|A\| \leqslant \int_0^1 \sup_{0\leqslant t\leqslant 1}\operatorname{ess} |K(s,t)|\, ds.$$

Primer 5. Neka je $K(s,t)$ merljiva funkcija na kvadratu Q i neka je za neko $q>1$

$$\int_0^1\int_0^1 |K(s,t)|^q\, ds\, dt < +\infty.$$

Tada je jednačinom (5) definisan ograničen linearni operator A koji preslikava prostor L_p u prostor L_q $(1/p+1/q=1)$.

Iz

$$|y(s)| \leqslant \{\int_0^1 |K(s,t)|^q\, dt\}^{1/q} \{\int_0^1 |x(t)|^p\, dt\}^{1/p}$$

sledi stepenovanjem sa q i integracijom po s od 0 do 1,

$$\int_0^1 |y(s)|^q\, ds \leqslant \int_0^1 ds \int_0^1 |K(s,t)|^q\, dt \cdot \{\int_0^1 |x(t)|^p\, dt\}^{q/p},$$

tj.

$$\|Ax\|_{L_q} \leqslant \{\int_0^1\int_0^1 |K(s,t)|^q\, ds\, dt\}^{1/q} \cdot \|x\|_{L_p}.$$

Znači, $Ax \in L_q$, A je ograničen operator i

$$\|A\| \leqslant \{\int_0^1\int_0^1 |K(s,t)|^q\, ds\, dt\}^{1/q}.$$

Primer 6. Neka je $K(s,t)$ merljiva funkcija na kvadratu Q i neka je

$$\int_0^1\int_0^1 |K(s,t)|^2\, ds\, dt < +\infty.$$

Tada je sa

$$y(s) = x(s) - \int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt$$

definisan ograničen linearni operator B koji preslikava L_2 u samog sebe.

Definicija 5. Neka je $A: X \to Y$ linearan operator. Kažemo da A *ima inverzan operator* A^{-1} ako postoji preslikavanje A^{-1} takvo da je

$$A^{-1}(Ax) = x \quad \text{za svako} \quad x \in X.$$

Drugim rečima, inverzan operator postoji, ako A uspostavlja biunivoko preslikavanje prostora X u Y, tj. ako

$$x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad Ax_1 \neq Ax_2$$

(odeljak I.3), što se kod linearnih operatora može napisati i u obliku

$$(6) \qquad Ax = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$$

функционално пресликав.

Po definiciji, inverzni operator A^{-1} preslikava $A(X)$ *na* X.

Primećujemo da smo ovde, kod linearnih operatora, pojam inverznog operatora definisali šire nego kod proizvoljnih operatora (odeljak I.3), gde smo za egzistenciju inverznog operatora (funkcije) zahtevali da između X i Y postoji biunivoka korespondencija.

Stav 5. *Ako linearni operator* $A: X \to Y$ *ima inverzan operator* A^{-1}, *tada je* A^{-1} *linearan operator na* $A(X)$.

Dokaz. Ako A ima inverzan operator A^{-1}, tada je ne samo $A^{-1}(Ax) = A^{-1}Ax = x$ za svako $x \in X$, već i $A(A^{-1}y) = AA^{-1}y = y$ za svako $y \in A(X)$. Za proizvoljna dva vektora y_1, y_2 iz $A(X)$ i proizvoljne skalare λ_1, λ_2 je tada, zbog linearnosti operatora A,

$$\begin{aligned} A^{-1}(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) &= A^{-1}(\lambda_1 AA^{-1} y_1 + \lambda_2 AA^{-1} y_2) \\ &= A^{-1} A (\lambda_1 A^{-1} y_1 + \lambda_2 A^{-1} y_2) \\ &= \lambda_1 A^{-1} y_1 + \lambda_2 A^{-1} y_2. \end{aligned}$$

Kako je sa A i A^{-1} (kad postoji) linearan operator, moguće je govoriti i o inverznom operatoru od A^{-1}; ovaj nije ništa drugo no sam operator A, tj. $(A^{-1})^{-1} = A$.

Stav 6. *Neka linearni operator* A *preslikava* X *u* Y. *Potreban i dovoljan uslov da* A *ima ograničen inverzan operator* A^{-1} *na* $A(X)$ *jeste da postoji broj* $m > 0$ *tako da je*

$$(7) \qquad \|Ax\| \geqslant m\|x\| \quad \textit{za svako} \quad x \in X.$$

Tada je $\|A^{-1}\| \leqslant 1/m$.

Dokaz. Uslov (7) je dovoljan. Zaista, ako je $Ax = 0$, tada iz (7) sledi

$$m\|x\| \leqslant 0 \quad \Rightarrow \quad \|x\| = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0,$$

te prema (6) postoji inverzan operator A^{-1}. Uslov (7) možemo tada napisati u obliku

$$\|y\| \geqslant m\|A^{-1}y\| \quad \text{za svako} \quad y \in A(X),$$

što znači da je operator A^{-1} ograničen na $A(X)$ i da je $\|A^{-1}\| \leqslant 1/m$.

Uslov (7) je potreban. Pretpostavimo da A ima ograničen inverzan operator A^{-1}. Postoji, dakle, konstanta $M < +\infty$ takva da je za svako $x \in X$

$$\|A^{-1}(Ax)\| \leqslant M\|Ax\|$$

tj.

$$\|Ax\| \geqslant \frac{1}{M}\|x\|,$$

što se svodi na (7) sa $m = 1/M$.

Stav 7. *Prostori X i Y su algebarski i topološki izomorfni tada i samo tada ako postoji linearan operator A koji preslikava X $\boxed{na}$ Y i ako postoje pozitivne konstante m i M tako da je*

$$m\|x\| \leqslant \|Ax\| \leqslant M\|x\| \quad za\ svako \quad x \in X.$$

Dokaz. Prema definiciji 2.3 oni su algebarski izomorfni, jer na osnovu stava 6 A ima inverzan operator *na* Y, te A uspostavlja biunivoku korespondenciju između X i Y. Zbog linearnosti, A je algebarski izomorfizam. Kako su, na osnovu stavova 3 i 6, A i A^{-1} neprekidni operatori, to je, prema stavu II.7.2, A jedan homeomorfizam.

Stav 8. *Neka su $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ dve norme na vektorskom prostoru X. Normirani vektorski prostori $X_1 = (X, \|\cdot\|_1)$ i $X_2 = (X, \|\cdot\|_2)$ su algebarski i topološki izomorfni tada i samo tada ako postoje pozitivne konstante m i M tako da je*

$$m\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant M\|x\|_1 \quad za\ svako \quad x \in X.$$

Kad god je ispunjena ova nejednačina kažemo zato da su norme $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ *ekvivalentne* (Uporediti sa stavom II.7.3).

Dokaz stava 8 sledi na osnovu stava 7, ako u ovome stavimo $X = X_1$ i $Y = X_2$, a za A izaberemo identički operator I ($Ix = x$ za svako $x \in X$).

Na kraju odeljka 1 pomenuli smo da su svi vektorski prostori dimenzije k algebarski izomorfni, te se svi mogu u algebarskom pogledu identifikovati sa vektorskim prostorom R^k. Sada ćemo videti da su normirani prostori dimenzije k i topološki izomorfni jedan drugome.

Stav 9. *Dva normirana prostora X i Y dimenzije k nad istim skupom skalara su algebarski i topološki izomorfni.* (хомеоморфни)

Dokaz. Kako je homeomorfizam relacija ekvivalencije, dovoljno je pokazati da je prostor X topološki izomorfan normiranom prostoru R^k (primer 2.1). Neka je $y = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$ tačka iz R^k i neka je $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ baza prostora X. Tada linearni operator $A: R^k \to X$, definisan sa

$$y = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k) \to x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_k x_k$$

uspostavlja biunivoku korespondenciju između R^k i X. Pokazaćemo da postoje pozitivni brojevi m i M tako da je

$$m\|y\|_{R^k} \leqslant \|Ay\| \leqslant M\|y\|_{R^k} \quad \text{za svako} \quad y \in R^k, \tag{8}$$

odakle, na osnovu stava 7, sledi tvrđenje.

Kako je na osnovu Hölderove nejednačine

$$\|Ay\| = \left\|\sum_{\nu=1}^{k} \xi_\nu x_\nu\right\| \leqslant \sum_{\nu=1}^{k} |\xi_\nu| \, \|x_\nu\| \leqslant \left\{\sum_{\nu=1}^{k} \|x_\nu\|^2\right\}^{1/2} \|y\|_{R^k},$$

to u (8) za M možemo uzeti broj $\left\{\sum_{\nu=1}^{k} \|x_\nu\|^2\right\}^{1/2}$.

Da pokažemo da postoji $m>0$ tako da važi leva polovina nejednačine (8), primećujemo da je dovoljno ograničiti se na one tačke iz R^k koje leže na jediničnoj sferi. Zaista, (8) očigledno važi za $y=0$; ako je, pak, $c=\|y\|_{R^k}>0$, leva strana u (8) svodi se deobom sa c na

$$m \leqslant \|Ay\| \quad \text{sa} \quad \|y\|_{R^k}=1,$$

pa ćemo je u tom obliku i dokazati.

Na osnovu desne polovine nejednačine (8), funkcija $f(y)=\|Ay\|$ je neprekidna na R^k, jer je

$$|f(y_1)-f(y_2)|=\|A(y_1-y_2)\| \leqslant M\|y_1-y_2\|_{R^k}.$$

Realna funkcija f je, dakle, neprekidna na kompaktnom skupu $\|y\|_{R^k}=1$ (primedba posle stava II.6.4), te, prema stavu II.6.10, postiže na njemu svoj minimum m. Kako je $f \geqslant 0$, to je i $m \geqslant 0$. No $m \neq 0$, jer bi u protivnom za neko y sa sfere imali

$$Ay=\xi_1 x_1+\xi_2 x_2+\cdots+\xi_k x_k=0 \quad \text{uz} \quad \sum_{\nu=1}^{k}|\xi_\nu|^2=1, \qquad \|y\|_{R^k}=1$$

što bi protivurečilo linearnoj nezavisnosti vektora baze $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

Kako je, prema stavu 9, svaki normiran prostor dimenzije k topološki izomorfan prostoru R^k, to se mnoge karakteristike prostora R^k mogu preneti i u konačno-dimenzionalne normirane prostore (čak i neke koje su metričke prirode, jer normiran prostor ima svoju metriku; videti i vežbanje 1).

Stav 10. *Svaki konačno-dimenzionalan normiran prostor X je kompletan (dakle, Banachov).*

Dokaz. Neka je X topološki izomorfan prostoru R^k. Pokazaćemo, opštije, da ako je jedan od dva topološki izomorfna prostora X i Y kompletan, da je tada takav i drugi. Neka je, sa oznakama stava 7, X kompletan prostor i neka je (y_n) jedan Cauchyev niz u Y. Tada je i $x_n=A^{-1}y_n$ jedan Cauchyev niz u X, jer je

$$\|x_p-x_q\| \leqslant \frac{1}{m}\|A(x_p-x_q)\|=\frac{1}{m}\|AA^{-1}(y_p-y_q)\|=\frac{1}{m}\|y_p-y_q\| \quad (m>0).$$

Zbog kompletnosti prostora X postoji $x \in X$ tako da $x_n \to x$. Stavimo $Ax=y$. Tada je

$$\|y_n-y\|=\|A(x_n-x)\| \leqslant M\|x_n-x\|,$$

te $y_n \to y$, tj. prostor Y je kompletan.

Stav 11. *Svaki konačno-dimenzionalan potprostor X_1 normiranog prostora X je zatvoren.*

Dokaz. Neka je x tačka nagomilavanja od X_1. Tada postoji niz $x_n \in X_1$ koji konvergira ka x. No kako je (x_n) Cauchyev niz u X_1 a ovaj je kompletan (stav 10), to postoji $x' \in X_1$ tako da $x_n \to x'$. Kako niz (x_n) može konvergirati samo jednoj vrednosti, to je $x=x' \in X_1$, tj. tačka nagomilavanja x od X_1 pripada X_1. X_1 je, dakle, zatvoren skup.

Stav 12. *Neka linearni operator A preslikava X u Y. Ako je X konačno-dimenzionalan prostor, tada je operator A ograničen.*

Dokaz. Neka je X dimenzije k i neka je $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ jedna baza u X. Svaki vektor x iz X može se tada napisati u obliku

$$x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_k x_k.$$

Ako u X uvedemo i normu $\|x\|_{R^k} = \left\{\sum_{\nu=1}^{k} |\xi_\nu|^2\right\}^{1/2}$ (lako je proveriti da je ovaj izraz zaista norma u X), tada je na osnovu Hölderove nejednačine

$$\|Ax\| = \left\| \sum_{\nu=1}^{k} \xi_\nu A x_\nu \right\| \leqslant \left\{ \sum_{\nu=1}^{k} \|Ax_\nu\|^2 \right\}^{1/2} \|x\|_{R^k},$$

tj. operator A je ograničen u odnosu na normu $\|\cdot\|_{R^k}$ u X. Međutim, prema stavu 9, X i R^k su topološki izomorfni, pa su im norme ekvivalentne (stav 8). Otuda je operator ograničen i u odnosu na normu $\|\cdot\|$ u X.

Na kraju navodimo tzv. Rieszovu lemu na koju ćemo se često pozivati.

Stav 13. *Neka je X_1 zatvoren i pravi potprostor prostora X. Tada za svako δ $(0<\delta<1)$ postoji vektor $x_\delta \in X$ tako da je $\|x_\delta\| = 1$ i $d(x_\delta, X_1) \geqslant \delta$, gde je $d(x_\delta, X_1)$ rastojanje vektora x_δ do potprostora X_1.*

Dokaz. Kako je X_1 pravi deo od X, to postoji vektor x_0 u $X - X_1$. Neka je

$$d = d(x_0, X_1) = \inf_{x \in X_1} \|x - x_0\|.$$

Pokazaćemo, prvo, da je $d > 0$. Zaista, kada bi bilo $d = 0$, postojala bi za svako $\varepsilon > 0$ tačka x u X_1 tako da je $\|x - x_0\| < \varepsilon$, tj. x_0 bi bila adherentna tačka od X_1, pa bi kao takva pripadala zatvorenom skupu X_1. Kontradikcija, jer smo x_0 izabrali u $X - X_1$.

Kako je $d/\delta > d$, to postoji vektor $x_1 \in X_1$ tako da je

$$\|x_1 - x_0\| \leqslant d/\delta.$$

Pokazaćemo da vektor

$$x_\delta = \frac{x_1 - x_0}{\|x_1 - x_0\|}$$

$\|x - x_\delta\| = \left\| x - \left(\frac{x_1 - x_0}{\|x_1 - x_0\|} \right) \right\|$

ispunjava sve uslove stava 13. Zaista, $\|x_\delta\| = 1$ i

$$\|x - x_\delta\| = \frac{1}{\|x_1 - x_0\|} \left\| \left(\|x_1 - x_0\| x + x_1 \right) - x_0 \right\| \geqslant \frac{d}{\|x_1 - x_0\|} \geqslant \delta \quad \forall\, x \in X_1,$$

jer je, zbog $\|x_1 - x_0\| x + x_1 \in X_1$ i $x_0 \in X - X_1$ rastojanje ovih dveju tačaka $\geqslant d$.

3.ii. Banachov prostor ograničenih linearnih operatora

Sva razmatranja iz odeljka 3.i važe i ako su X i Y proizvoljni normirani a ne Banachovi prostori. Tome nasuprot, u stavu 14 je bitna pretpostavka o kompletnosti prostora-slike Y.

 $A : X \to Y$, Y kompletan

Stav 14. *Neka je $L(X, Y)$ skup ograničenih linearnih operatora koji preslikavaju X u Banachov prostor Y. Skup $L(X, Y)$ se može snabdeti strukturom Banachovog prostora ako u njega uvedemo unutrašnju i spoljašnju kompoziciju sa*

$$(A+B)x = Ax + Bx, \quad (\lambda A)x = \lambda(Ax) \quad (A, B \in L(X, Y), \lambda \in T),$$

a pod normom elementa $A \in L(X, Y)$ podrazumevamo normu ograničenog linearnog operatora A u smislu definicije 4.

$x+y \in L(\ )$

Dokaz. 1° Iz A i $B \in L(X, Y) \Rightarrow \boxed{A+B} \in L(X, Y)$. Zaista, ako x_1, $x_2 \in X$, λ_1, $\lambda_2 \in T$ i stavimo

$$Cx = Ax + Bx, \quad = (A+B)x$$

$\lambda x \in L(\ )$

biće, zbog linearnosti operatora A i B,

$$\begin{aligned} C(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &= A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + B(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \\ &= \lambda_1 Ax_1 + \lambda_2 Ax_2 + \lambda_1 Bx_1 + \lambda_2 Bx_2 \\ &= \lambda_1 [Ax_1 + Bx_1] + \lambda_2 [Ax_2 + Bx_2] \\ &= \lambda_1 Cx_1 + \lambda_2 Cx_2, \end{aligned}$$

tj. $C = A + B$ je linearan operator na X. Da je on ograničen, sledi iz

$$\|Cx\| \leqslant \|Ax + Bx\| \leqslant \|Ax\| + \|Bx\| \leqslant \|A\| \, \|x\| + \|B\| \, \|x\| = (\|A\| + \|B\|) \|x\|,$$

jer su, po pretpostavci, A i B ograničeni operatori.

2° Na sličan način može se pokazati da iz

$$A \in L(X, Y) \quad \Rightarrow \quad \lambda A \in L(X, Y) \quad \text{za svako} \quad \lambda \in T.$$

3° Čitaocu prepuštamo da proveri da sabiranje i množenje skalarom u $L(X, Y)$ zadovoljavaju aksiome 1°—8° definicije 1.1, tj. da $L(X, Y)$ obrazuje linearni vektorski prostor čiji je nula-vektor operator O (*nula-operator*) koji čitav prostor X preslikava u nula-vektor prostora Y, kao i da uvedena norma u $L(X, Y)$ zadovoljava aksiome 1°—3° definicije 2.1, tj. da $L(X, Y)$ obrazuje normiran prostor.

4° Ostaje da pokažemo da je normirani prostor $L(X, Y)$ kompletan u odnosu na metriku koja izvire iz uvedene norme.

Neka je (A_n) jedan Cauchyev niz u $L(X, Y)$. Tada svakom $\varepsilon > 0$ odgovara prirodni broj N takav da je

$$\|A_m - A_n\| < \varepsilon \quad \text{za} \quad n > m \geqslant N.$$

Kako je sa A_m i A_n, i $A_m - A_n$ ograničen linearni operator (jer, kao što smo pokazali, pripada $L(X, Y)$), to iz

$$\|A_m x - A_n x\| = \|(A_m - A_n)x\| \leqslant \|A_m - A_n\| \, \|x\|$$

sledi da je

$$\|A_m x - A_n x\| \leqslant \varepsilon \|x\| \quad \text{za} \quad n > m \geqslant N \quad \text{i} \quad \forall\, x \in X. \tag{9}$$

Za $\boxed{\text{fiksirano}}$ $x \in X$ je, dakle, $(A_n x)$ jedan Cauchyev niz u Y. Kako je Y kompletan prostor, to postoji vektor $y \in Y$ takav da

$$A_n x \to y \quad (n \to \infty). \tag{10}$$

$A_n x \to Ax$

Time je na X definisan operator A sa $Ax = y$.

Pokazaćemo da je A ograničen linearan operator na X, tj. da $A \in L(X, Y)$, kao i da $A_n \to A$ u smislu metrike u $L(X, Y)$, tj. da je $L(X, Y)$ kompletan prostor.

Prvo, iz linearnosti svakog operatora A_n, tj. iz

$$A_n(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 A_n x_1 + \lambda_2 A_n x_2$$

sledi, kada pustimo da $n \to \infty$ i vodimo računa o (10), linearnost operatora A.

Zatim, kako je (A_n) Cauchyev niz u $L(X, Y)$, on je tu ograničen, tj. $\|A_n\| \leqslant M$. Dakle,

$$\|A_n x\| \leqslant \|A_n\| \, \|x\| \leqslant M \|x\| \quad \forall n \quad \text{i} \quad \forall x \in X,$$

odakle, kada $n \to \infty$, sledi ograničenost operatora A.

Najzad, ako u (9) pustimo da $n \to \infty$ i vodimo računa o (10), dobićemo

$$\|A_m x - Ax\| = \|(A_m - A)x\| \leqslant \varepsilon \|x\| \quad \text{za} \quad m > N \quad \text{i} \quad \forall x \in X,$$

što znači da je

$$\|A_m - A\| \leqslant \varepsilon \quad \text{za} \quad m > N,$$

odnosno da $A_m \to A \; (m \to \infty)$ u smislu metrike u $L(X, Y)$.

Specijalno, ako je $Y = X$, u $L(X, X)$ se može definisati još jedna unutrašnja kompozicija — *proizvod* AB ograničenih linearnih operatora A i B:

$$(AB)x = A(Bx) \qquad (x \in X).$$

Lako je videti da je AB ograničen linearan operator. Primećujemo da proizvod AB u opštem slučaju nije komutativan.

Vežbanja 3.

1. U konačno-dimenzionalnom normiranom prostoru X svaki zatvoren i ograničen skup je kompaktan. [Neka je X dimenzije k. X je topološki izomorfan prostoru R^k. Svaki zatvoren i ograničen skup A iz X se topološkim izomorfizmom (stav 7) preslikava u zatvoren i ograničen skup B u R^k. No B je kompaktan u R^k, pa na osnovu topološkog izomorfizma sledi da je skup A kompaktan u X.]

2. Pokazati da je sa

$$\eta_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^1 t^n x(t)\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

definisan ograničen linearan operator koji preslikava prostor $L_2(0, 1)$ u prostor l_2.

3. Za koje vrednosti parametra α je sa

$$\eta_n = n^{-\alpha} \int_0^1 t^n x(t)\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

definisan ograničen linearan operator koji preslikava prostor L_p $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$ u prostor l?

$1 < p < +\infty$, $\alpha >$

$p = 1$, $\alpha > 1$

4. Pokazati da je sa

$$\eta_\mu = \frac{1}{2^\mu} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} \xi_\nu \qquad (\mu = 0, 1, \ldots)$$

definisan ograničen linearan operator koji preslikava l_2 u samog sebe.

5. Koje uslove treba da zadovolji matrica $[\gamma_{\nu\mu}]$ i niz (β_ν) da bi sa

$$\eta_\nu = \sum_{\mu=1}^{\infty} \gamma_{\nu\mu} \xi_\mu + \beta_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

bio definisan ograničen linearan operator koji preslikava l_2 u l_2. Kada će ovaj operator imati jednu jedinu nepokretnu tačku?

6. Neka je m Banachov prostor ograničenih nizova i neka je $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ apsolutno konvergentan numerički red. Pokazati da je sa

$$\eta_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi_{n+k} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

$\|A\| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$

definisan ograničen linearan operator $y = Ax$ $(x = (\xi_k),\ y = (\eta_n))$ koji preslikava m u m. Izračunati $\|A\|$.

7. Sa

$$\eta_\mu = \frac{1}{\mu} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\xi_\nu}{\nu} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots)$$

je definisan ograničen linearan operator koji preslikava l_p u l_q $(p > 1,\ 1/p + 1/q = 1)$.

4.i. Linearna funkcionela

Ako je kod linearnog operatora $A: X \to Y$, prostor-slika Y skup realnih ili kompleksnih brojeva (prema tome da li je X realan ili kompleksan Banachov prostor), tada umesto termina linearan operator koristimo termin *linearna funkcionela* (realna ili kompleksna). Sva razmatranja iz odeljka 3 o linearnom operatoru važe, dakle, i za linearnu funkcionelu. Formalno treba jedino znak norme $\|\cdot\|$ u prostoru-slici zameniti apsolutnom vrednošću $|\cdot|$.

Ograničenu linearnu funkcionelu označavaćemo sa $x^*(x)$ ili jednostavno sa x^*. Ova je, znači, okarakterisana sa

$$x^*(\lambda x + \mu y) = \lambda x^*(x) + \mu x^*(y)$$

za svako $x, y \in X$ i za svako $\lambda, \mu \in T$ i sa

$$|x^*(x)| \leqslant \|x^*\| \|x\| \quad \text{za svako} \quad x \in X.$$

Norma $\|x^*\|$ funkcionele x^* data je sa

$$(1) \qquad \|x^*\| = \sup_{x \in X - \{0\}} \frac{|x^*(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |x^*(x)| = \sup_{\|x\|=1} |x^*(x)|.$$

Primer 1. Neka je t_0 fiksirana tačka u razmaku $[a, b]$. Kada x prolazi prostor neprekidnih funkcija $C[a, b]$, $x^*(x) = x(t_0)$ je ograničena linearna funkcionela na $C[a, b]$ i $\|x^*\| = 1$.

Linearnost sledi iz

$$x^*(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)(t_0) = \lambda_1 x_1(t_0) + \lambda_2 x_2(t_0)$$
$$= \lambda_1 x^*(x_1) + \lambda_2 x^*(x_2),$$

a ograničenost iz

$$|x^*(x)| \leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)| = \|x\|. \quad 1 \cdot \|x\|$$

Prema tome,

$$(2) \qquad |x^*(x)| \leqslant \|x^*\| \, \|x\| \quad \text{za svako} \quad x \in C[a, b]$$

i $\|x^*\| \leqslant 1$. Specijalno, za neprekidnu funkciju koja je identički jednaka 1 na $[a, b]$, $x^*(x) = 1$ i $\|x\| = 1$, te iz (2) sledi $\|x^*\| \geqslant 1$, što zajedno sa prethodnom nejednačinom daje $\|x^*\| = 1$.

Primer 2. $x^*(x) = \int_a^b x(t)\,dt$ je ograničena linearna funkcionela na $C[a, b]$ njena norma je $\|x^*\| = b - a$.

Da je uočena funkcionela linearna je očigledno. Iz

$$|x^*(x)| \leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)| \cdot (b - a) = (b - a)\|x\| \quad \forall\, x \in C[a,b]$$

sledi da je ona ograničena — ima konačnu normu $\|x^*\|$ — tj. da važi

$$(3) \qquad |x^*(x)| \leqslant \|x^*\| \, \|x\| \quad \forall\, x \in C[a, b],$$

kao i da je

$$\|x^*\| \leqslant b - a.$$

Za funkciju koja je identički jednaka 1 je $x^*(x) = b - a$ i $\|x\| = 1$, pa se (3) svodi na

$$b - a \leqslant \|x^*\|,$$

što zajedno sa prethodnom nejednačinom daje $\|x^*\| = b - a$.

Primer 3. Neka je $\alpha(t)$ jedna fiksirana neprekidna funkcija na $[a, b]$. Tada

$$x^*(x) = \int_a^b \alpha(t)\, x(t)\, dt, \qquad x \in C[a, b],$$

predstavlja ograničenu linearnu funkcionelu na prostoru $C[a, b]$, čija je norma $\|x^*\| \leqslant \int_a^b |\alpha(t)|\, dt$.

Primer 4. Neka je $y(t)$ proizvoljna fiksirana funkcija iz $L_q(a, b)\,(q > 1)$. Tada

$$x^*(x) = \int_a^b y(t)\, x(t)\, dt, \qquad x \in L_p(a, b)\,(1/p + 1/q = 1)$$

predstavlja ograničenu linearnu funkcionelu na $L_p(a, b)$, i $\|x^*\| \leqslant \|y\|_{L_q}$. Naime, na osnovu Hölderove nejednačine je

$$|x^*(x)| \leqslant \{\int_a^b |y|^q dt\}^{1/q} \{\int_a^b |x|^p dt\}^{1/p} = \|y\|_{L_q} \|x\|_{L_p},$$

odakle, pre svega, sledi da je $x^*(x)$ definisana na čitavom prostoru L_p, a zatim da je tu i ograničena i $\|x^*\| \leqslant \|y\|_{L_q}$.

Primer 5. Neka je $y=(\eta_\nu)$ proizvoljna fiksirana tačka u prostoru ograničenih nizova m. Tada je sa

фиксирана тачка

$$x^*(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\eta_\nu\,\xi_\nu,\qquad x=(\xi_\nu)\in l,$$

definisana ograničena linearna funkcionela na prostoru l i $\|x^*\|\leqslant\|y\|_m$. Njena definisanost, ograničenost i procena norme slede iz

$$|x^*(x)|\leqslant\sup_{1\leqslant\nu\leqslant\infty}|\eta_\nu|\cdot\sum_{\nu=1}^{\infty}|\xi_\nu|=\|y\|_m\,\|x\|_l.$$

U svakom Banachovom prostoru preslikavanje identički jednako nuli je jedna ograničena linearna funkcionela. Postavlja se pitanje ima li na *svakom* ~~Banachovom prostoru i drugih~~, netrivijalnih, ograničenih linearnih funkcionela. I, ako ih ima, mogu li im se unapred pripisati, i u kojoj meri, izvesne vrednosti? Specijalno postoji li linearna i ograničena funkcionela jednaka nuli na nekom pravom vektorskom potprostoru Banachovog prostora, a da pri tome ne iščezava na čitavom prostoru?

Na sva ova pitanja egzistencije može se odgovoriti koristeći Hahn--Banachov stav o produženju ograničene linearne funkcionele. Mi ćemo ga ovde formulisati i dokazati za slučaj realne funkcionele. Za kompleksne funkcionele odgovarajući stav formalno isto tako glasi, jedino treba reč „realan" zameniti sa „kompleksan".

Stav 1 (Hahn-Banach). *Neka je X realan Banachov prostor i neka je na vektorskom potprostoru $L\subset X$ definisana realna ograničena linearna funkcionela f sa normom $M=\|f\|_L$, tj.*

$$|f(x)|\leqslant M\|x\|\quad \textit{za svako}\quad x\in L.$$

Tada postoji na X realna ograničena linearna funkcionela x^* takva da je

$$x^*(x)=f(x)\quad\textit{kada}\quad x\in L$$

i

$$\|x^*\|_X=\|f\|_L.$$

Primećujemo da se ne zahteva da je vektorski potprostor L zatvoren.

1° *Dokaz* stava 1. 1° Neka su x' i x'' tačke iz L i neka je z_1 fiksirana tačka u $X-L$. Tada iz

$$\begin{aligned}|f(x')-f(x'')|&=|f(x'-x'')|\leqslant M\|x'-x''\|\\&=M\|x'+z_1-(x''+z_1)\|\\ |f(x')-f(x'')| &\leqslant M\|x'+z_1\|+M\|x''+z_1\|,\end{aligned}$$

odnosno

$$-M\|x''+z_1\|-f(x'')\leqslant M\|x'+z_1\|-f(x'),$$

sledi da su brojevi

коначни $$k=\sup_{x\in L}\{-M\|x+z_1\|-f(x)\}$$

i

$$K=\inf_{x\in L}\{M\|x+z_1\|-f(x)\}$$

$k\leq K \Rightarrow k\leq c\leq K$

konačni i da je $k \leqslant K$. Prema tome, ako je r broj takav da je

$$k \leqslant r \leqslant K, \tag{4}$$

biće za svako $x \in L$

$$-M\|x+z_1\|-f(x) \leqslant r \leqslant M\|x+z_1\|-f(x). \tag{5}$$

Uočimo skup tačaka L_1:

$$y = x + tz_1, \tag{6}$$

gde je t realan broj i x ma koja tačka iz L. Skup L_1 je vektorski potprostor od X. Zaista, iz

$$y_1 = x_1 + t_1 z_1 \quad \text{i} \quad y_2 = x_2 + t_2 z_1$$

sledi

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + (\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2) z_1 \in L_1,$$

jer je, po pretpostavci, L vektorski potprostor od X.

Kako $x \in L$ i $z_1 \in X - L$, to se svaka tačka y iz L_1 može samo na jedan način predstaviti u obliku (6) (stav 1.4). Prema tome, funkcionela

$$f_1(y) = f_1(x + tz_1) = f(x) + tr, \tag{7}$$

gde r zadovoljava (4), jednoznačno je definisana na L_1. Ona se za $y = x \in L$ (dakle, $t = 0$) svodi na $f(x)$ i linearna je, jer ako $y_1, y_2 \in L_1$, prema (7) je

$$\begin{aligned} f_1(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) &= f_1[\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + (\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2) z_1] \\ &= f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + (\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2) r \\ &= \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \lambda_1 t_1 r + \lambda_2 t_2 r \\ &= \lambda_1 [f(x_1) + t_1 r] + \lambda_2 [f(x_2) + t_2 r] \\ &= \lambda_1 f_1(x_1 + t_1 z_1) + \lambda_2 f_1(x_2 + t_2 z_1) \\ &= \lambda_1 f_1(y_1) + \lambda_2 f_1(y_2). \end{aligned}$$

Najzad, pokazaćemo da je f_1 ograničena na L_1. Kako je ona na L ograničena, jer se tu svodi na f, možemo pretpostaviti da je $t \neq 0$. Ako, dakle, u (5) umesto x pišemo x/t:

$$-\frac{M}{|t|}\|x+tz_1\| - \frac{1}{t} f(x) \leqslant r \leqslant \frac{M}{|t|}\|x+tz_1\| - \frac{1}{t} f(x)$$

i pomnožimo ovu nejednačinu sa t, razlikujući slučajeve $t>0$ i $t<0$, dobićemo za $t \neq 0$,

$$-M\|x+tz_1\| \leqslant f(x) + rt \leqslant M\|x+tz_1\|,$$

tj.

$$-M\|y\| \leqslant f_1(y) \leqslant M\|y\|.$$

Prema tome, f_1 je ograničena linearna funkcionela na $L_1 \supset L$, koja se na L svodi na f i čija je norma $\|f_1\|_{L_1} = M = \|f\|_L$.

2°

2° U 1° smo pokazali da postoji produženje f_1 funkcionele f sa L na L_1 koje ne povećava normu. Uočimo sada kolekciju $\mathscr{L}$ svih mogućih takvih produženja f' funkcionele f sa L na L'. Elementi kolekcije $\mathscr{L}$ su, dakle, uređeni parovi (L', f'), gde je L' vektorski potprostor od X koji sadrži L, a

K - maks. lanac

$\mathcal{M} = \{L' : (L', f') \in K\} \Rightarrow \bigcup L'$

f' je proširenje funkcionele f sa L na L', takvo da je $\|f'\|_{L'} = \|f\|_L = M$. U $\mathcal{L}$ ćemo uvesti relaciju poretka sa

$$(8) \qquad (L', f') \leqslant (L'', f'') \quad \text{ako} \quad L' \subset L'' \quad \text{i} \quad f''(x) = f'(x) \quad \text{za} \quad x \in L'.$$

Kako uređeni skup $\mathcal{L}$ nije prazan, na osnovu Hausdorffovog stava maksimalnosti (odeljak I.4) postoji u $\mathcal{L}$ maksimalni lanac K. Neka je $\mathcal{M}$ kolekcija svih vektorskih potprostora L' od X za koje $(L', f') \in K$. Prema (8), kolekcija $\mathcal{M}$ je totalno uređena u odnosu na inkluziju skupova, te je zato i unija U svih L' iz $\mathcal{M}$ jedan vektorski potprostor od X (videti i vežbanje 1.3). Na U ćemo definisati ograničenu linearnu funkcionelu $x^*(x)$ na ovaj način. Ako je $x \in U$, tada x pripada nekom L' iz $\mathcal{M}$, pa ćemo staviti $x^*(x) = f'(x)$, gde je f' funkcionela iz para $(L', f') \in K$. Da je funkcionela x^* linearna na U i da je $\|x^*\|_U = M$, možemo ovako uvideti: Ako su x' i x'' dve tačke iz U, takve da $x' \in L'$ i $x'' \in L''$, tada one, s obzirom na poredak (8) u $\mathcal{L}$ i činjenicu da je K lanac, leže *obe* u L' ili *obe* u L''. Ako leže, recimo, obe u L', tada je

$$x^*(\lambda' x' + \lambda'' x'') = f'(\lambda' x' + \lambda'' x'') = \lambda' f'(x') + \lambda'' f'(x'') = \lambda' x^*(x') + \lambda'' x^*(x''),$$

jer je f' linearna funkcionela na L'. Da pokažemo da je $\|x^*\|_U = M$, uočimo određenu tačku x iz U. Tada, x pripada nekom L', pa je

$$|x^*(x)| = |f'(x)| \leqslant \|f'\|_{L'} \|x\| = M \|x\|.$$

Znači,

$$|x^*(x)| \leqslant M \|x\| \quad \text{za svako} \quad x \in U,$$

sup

te je $\|x^*\|_U \leqslant M$. Da važi obrnuta nejednačina sledi iz činjenice da $U \supset L$.

Dakle, x^* je ograničena linearna funkcionela na $U \subset X$ koja proširuje f sa L na U i čija norma je $\|x^*\|_U = M = \|f\|_L$. Kada bi U bio pravi vektorski potprostor od X, na osnovu onog što smo utvrdili pod 1°, postojalo bi jedno dalje proširenje funkcionele x^* izvan U, a to bi bilo u kontradikciji s činjenicom da je K maksimalni lanac u $\mathcal{L}$. Time je stav 1 u potpunosti dokazan.

Neposredne posledice Hahn-Banachovog stava su sledeći iskazi o egzistenciji ograničene linearne funkcionele koja zadovoljava izvesne specifične uslove.

Stav 2. *Neka je $x_0 \neq 0$ fiksirana tačka u Banachovom prostoru X. Na X postoji ograničena linearna funkcionela x^* takva da je*

$$1^\circ \quad x^*(x_0) = \|x_0\|,$$

$$2^\circ \quad \|x^*\| = 1.$$

Dokaz. Tačke $x \in X$ oblika αx_0, gde je α skalar, obrazuju vektorski potprostor L od X, jer sa $\alpha_1 x_0$ i $\alpha_2 x_0$ i tačka $\lambda_1(\alpha_1 x_0) + \lambda_2(\alpha_2 x_0)$ pripada L. Na L ćemo definisati funkcionelu $f(x) = \alpha \|x_0\|$; ova je očigledno linearna i ograničena i

$$\|f\|_L = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| = \sup_{\|\alpha x_0\|=1} |\alpha \|x_0\|| = 1.$$

Primenjujući Hahn-Banachov stav na ovu funkcionelu, produžićemo je na čitav prostor X a da pri tome ne povećamo njenu normu. Tako dobivena ograničena linearna funkcionela x^* zadovoljavaće uslove stava 2.

$x^*(L)=\{0\},\ x^*(x_0)=1,\ \|x^*\|=\frac{1}{d}$

Stav 3. *Neka je L vektorski potprostor od X i neka je x_0 fiksirana tačka u $X-L$ na odstojanju $d>0$ od L. Tada postoji na X ograničena linearna funkcionela x^* takva da je*

$1°\ x^*(x)=0 \quad za \quad x\in L,$

$2°\ x^*(x_0)=1,$

$3°\ \|x^*\|=1/d.$

Dokaz. Kada x prolazi L, tačke oblika

$$y=x+tx_0 \quad (t \text{ skalar}) \tag{9}$$

obrazuju vektorski potprostor L_0 u X. Ako $y\in L_0$, tada su u (9), zbog $x_0\in X-L$, tačka $x\in L$ i skalar t jednoznačno određeni. Neka je na L_0 definisana funkcionela

$$f(y)=f(x+tx_0)=t. \tag{10}$$

Lako je pokazati da je ona linearna. Isto tako neposredno sledi da je $f(y)=0$ za $y\in L$ i da je $f(x_0)=1$.

Da bismo dokazali da je

$$\|f\|_{L_0}\leqslant 1/d, \tag{11}$$

primećujemo da za svako $y\in L_0$ važi

$$\|y\|\geqslant |t|\,d.$$

Zaista, ako $y\in L_0-L$, tada je

$$\|y\|=\|x+tx_0\|=|t|\left\|\frac{1}{t}x+x_0\right\|\geqslant |t|\,d,$$

jer $x/t\in L$, pa $\|x/t+x_0\|$ ne može biti manje od rastojanja tačke x_0 do L; ako je, pak, $y\in L$, navedena nejednačina je automatski ispunjena, jer je u tom slučaju $t=0$. Prema (10) je, dakle,

$$|f(y)|\leqslant\frac{1}{d}\|y\| \quad \text{za svako} \quad y\in L_0,$$

što predstavlja tvrđenje (11).

S druge strane, neka je (x_n) niz tačaka iz L takav da je $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x_0\|=d.$ Tada je

$$|f(x_n-x_0)|\leqslant\|f\|_{L_0}\|x_n-x_0\|,$$

dok je, prema (10) za $t=-1$,

$$|f(x_n-x_0)|=1,$$

tako da je

$$\|f\|_{L_0}\geqslant\frac{1}{\|x_n-x_0\|}.$$

Ako ovde pustimo da $n\to\infty$, sledi će $\|f\|_{L_0}\geqslant 1/d$, što zajedno sa (11) daje $\|f\|_{L_0}=1/d$.

Prema tome, f je linearna funkcionela na L_0 koja tu zadovoljava uslove $1°$—$3°$ stava 3. Na osnovu Hahn-Banachovog stava postoji onda na X funkcionela x^* za koju je $\|x^*\|_X=1/d$ i koja se na L_0 svodi na f, pa time zadovoljava i uslove $1°$ i $2°$ stava 3.

Definicija 1. Skup vektora A je *totalan* (*potpun*) u X, ako se svaka ograničena linearna funkcionela x^* koja iščezava na A identički svodi na nulu na X, tj. ako iz $x^*(A)=\{0\} \Rightarrow x^*(X)=\{0\}$

$$x^*(x)=0 \quad \forall\, x \in A \qquad \Rightarrow \qquad x^*(x)=0 \quad \forall\, x \in X.$$

Ako je skup A prebrojiv, govorimo o totalnom nizu vektora u X.

Stav 4. *U Banachovom prostoru pojam fundamentalnog i pojam totalnog skupa vektora su ekvivalentni.* $\mathcal{L}(A)$ [illegible] X

Dokaz. Neka je A fundamentalan skup vektora u X i neka na njemu ograničena linearna funkcionela iščezava. Zbog linearnosti ona je jednaka nuli i na linealu nad A. No ovaj je svuda gust u X, te funkcionela, jer je neprekidna, iščezava svuda na X.

Obrnuto, ako skup vektora A *nije* fundamentalan u X, postojaće tačka x_0 u X na pozitivnom rastojanju od lineala nad A. Kako je $\mathfrak{L}(A)$ vektorski potprostor od X, na osnovu stava 3 postoji ograničena linearna funkcionela koja iščezava na $\mathfrak{L}(A)$ (a time i na A) a da nije identički jednaka nuli na X. Znači, A *nije* totalan skup vektora u X.

Na osnovu stava 4, nizovi vektora iz primera 2.4—7 su i totalni nizovi vektora u odgovarajućim prostorima.

Definicija 2. Skup A ograničenih linearnih funkcionela x^* na X je *totalan* (*potpun*) na X ako iz $x^* \in X^*$ $A \subset X^*$

$$x^*(x)=0 \quad \boxed{\forall\, x^* \in A} \qquad \Rightarrow \qquad x=0.$$

Ako je skup A prebrojiv, govorimo o totalnom nizu ograničenih linearnih funkcionela na X.

Primer 6. Na osnovu primera 3

$$\int_0^{2\pi} x(t) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\, nt\, dt, \quad x \in \tilde{C}[0, 2\pi] \qquad (n=0, 1, 2, \ldots), \tag{12}$$

predstavlja niz ograničenih linearnih funkcionela na $\tilde{C}[0, 2\pi]$. Pokazaćemo da je ovaj niz funkcionela totalan na $\tilde{C}[0, 2\pi]$, tj. da iz

$$\int_0^{2\pi} x(t) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\, nt\, dt = 0 \qquad (n=0, 1, \ldots) \tag{13}$$

sledi

$$x(t)=0 \quad \text{za svako } t \in [0, 2\pi].$$

Pretpostavimo suprotno, tj. da je za neko $t_0 \in [0, 2\pi]$ $x(t_0) \neq 0$, recimo $x(t_0)=\alpha>0$. Tada postoji razmak $\Delta=[t_0-\delta, t_0+\delta]$ u kome je $x(t) \geqslant \alpha/2$. Funkcija

$$p(t) = 1+\cos(t-t_0)-\cos\delta$$

zadovoljava nejednačine

$$p(t) \geqslant 1 \quad \text{za} \quad t \in \Delta \quad \text{i} \quad |p(t)|<1 \quad \text{za} \quad t \in \mathbf{C}\Delta,$$

a $T_n(t)=[p(t)]^n$ je neki trigonometrijski polinom. No kako iz (13) sledi

$$\int_0^{2\pi} x(t)\, T(t)\, dt = 0 \quad \text{za svaki trigonometrijski polinom } T(t),$$

to je

$$0=\int_\Delta x\, T_n\, dt+\int_{C\Delta} x\, T_n\, dt. \tag{14}$$

S obzirom da je za $t\in C\Delta$, $|x(t)\, T_n(t)|\leqslant |x(t)|\leqslant M$ i $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(t)=0$, to na osnovu stava III.5.10 drugi integral teži nuli kada $n\to\infty$. Međutim,

$$\int_\Delta x\, T_n\, dt\geqslant \frac{\alpha}{2}\cdot 2\,\delta=\alpha\delta>0,$$

što je, zajedno sa $\int_{C\Delta}\to 0$ $(n\to\infty)$, u kontradikciji sa (14). Dakle, ne može biti $x(t_0)\neq 0$ ni za jedno t_0 iz $[0, 2\pi]$.

Primer 7. Na osnovu primera 4, (12) predstavlja i u prostoru $\tilde{L}_p(0, 2\pi)$ $(p\geqslant 1)$ niz ograničenih linearnih funkcionela. Pokazaćemo da je on totalan na $\tilde{L}_p(0, 2\pi)$.

Stavimo

$$y(t)=\int_0^t x(\tau)\, d\tau.$$

Iz (13) (za $n=0$) sledi $y(2\pi)=0$, pa je za $n=1, 2, \ldots$

$$\int_0^{2\pi} y(t)\cos nt\, dt=-\frac{1}{n}\int_0^{2\pi} x(t)\sin nt\, dt=0,$$

$$\int_0^{2\pi} y(t)\sin nt\, dt=\frac{1}{n}\int_0^{2\pi} x(t)\cos nt\, dt=0.$$

Ako uvedemo

$$\alpha=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} y(t)\, dt,$$

iz prethodne dve jednačine sledi

$$\int_0^{2\pi}[y(t)-\alpha]\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} nt=0 \qquad (n=0, 1, \ldots).$$

Kako je $y(t)-\alpha$ neprekidna funkcija, to kao u primeru 6 sledi da je $y(t)-\alpha=0$ za svako $t\in[0, 2\pi]$. No, zbog $y(0)=0$ je $y(t)=0$ za svako $t\in[0, 2\pi]$. Prema stavu III.5.16 je, dakle, $x(t)=0$ skoro svuda na $[0, 2\pi]$, što znači da je x nula-vektor u $L_p(0, 2\pi)$.

4.ii. Reprezentacija ograničene linearne funkcionele u nekim Banachovim prostorima

U primeru 5 smo videli da je za svaku fiksiranu tačku $y=(\eta_\nu)\in m$ izraz

$$x^*(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\eta_\nu\,\xi_\nu, \tag{15}$$

dvja ogX $\quad y\to x^*$

posmatran kao funkcija od $x=(\xi_\nu)\in l$, ograničena linearna funkcionela na l i da je $\|x^*\|\leqslant\|y\|_m$. Sada ćemo pokazati da važi i obrnuto, tj. da svakoj

$x^*\to y$

ograničenoj linearnoj funkcioneli x^* na l odgovara tačka $y \in m$ takva da se x^* može predstaviti u obliku (15). Oba ova iskaza zajedno daju stav o reprezentaciji ograničene linearne funkcionele na prostoru l.

U ovom odeljku navešćemo reprezentacije ograničenih linearnih funkcionela u pojedinim prostorima nizova i funkcija.

Stav 5. *Ograničena linearna funkcionela x^* na prostoru l ima reprezentaciju*

$$x^*(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \eta_\nu \xi_\nu \quad gde\ je \quad y = (\eta_\nu) \in m \tag{16}$$

i

$$\|x^*\| = \|y\|_m.$$

Funkcioneli x^* na l odgovara jednoznačno tačka y u m.

Dokaz. Da za svako $y = (\eta_\nu) \in m$ izraz (16) definiše ograničenu linearnu funkcionelu na l i da je

$$\|x^*\| \leqslant \|y\|_m \tag{17}$$

videli smo u primeru 5.

Da bismo dokazali netrivijalni deo tvrđenja stava 5, tj. da svakoj ograničenoj linearnoj funkcioneli x^* na l odgovara u prostoru m jedna jedina tačka $y = (\eta_\nu)$ takva da važi (16), primećujemo da za svaku tačku $x = (\xi_\nu)$ iz l važi

$$\left\| x - \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu e_\nu \right\|_{l} = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} |\xi_\nu| \to 0 \quad (n \to \infty), \tag{18}$$

što ćemo simbolički pisati u obliku

$$x = \sum_{\nu=1}^{\infty} \xi_\nu e_\nu. \qquad \forall x = (\xi_\nu) \in l$$

Na osnovu linearnosti i neprekidnosti funkcionele x^* odavde sledi prvo

$$x^*\left(\sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu e_\nu\right) = \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu x^*(e_\nu),$$

a zatim, puštajući da $n \to \infty$,

$$x^*(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \xi_\nu x^*(e_\nu).$$

Ako stavimo

$$\eta_\nu = x^*(e_\nu), \qquad 1 (\nu = n)$$

vidimo da funkcionela x^* zaista ima oblik (16).

$y \in m \Rightarrow$ Ostaje da pokažemo da tačka $y = (\eta_\nu)$ pripada prostoru m. U tom cilju uočimo niz tačaka

$$x_n = (\xi_\nu^n) \in l \quad (n = 1, 2, \ldots) \quad \text{gde je} \quad \xi_\nu^n = \begin{cases} \operatorname{sign} \eta_n, & \nu = n, \\ 0, & \nu \neq n. \end{cases} \qquad \delta_{\nu n} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

Za ovaj niz tačaka je $\|x_n\| = 1$ i $x^*(x_n) = |\eta_n|$. Kako je, po pretpostavci, funkcionela x^* ograničena — ima konačnu normu $\|x^*\|$ — to je za svako $n = 1, 2, \ldots$

$$|x^*(x_n)| \leqslant \|x^*\| \, \|x_n\|, \qquad \forall n = 1, 2, \ldots$$

tj.

$$|\eta_n| \leqslant \|x^*\|,$$

pa time i

$$\sup_{1\leq n<\infty} |\eta_n| \leq \|x^*\|.$$

Odavde, pre svega, sledi da tačka $y=(\eta_\nu)\in m$, a zatim, zajedno sa (17), da je $\|x^*\|=\|y\|_m$.

Ostaje još da vidimo da funkcioneli x^* odgovara u m jedna jedina tačka y tako da važi (16). Zaista, kada bi u m postojale dve različite tačke $y_1=(\eta_\nu^{(1)})$ i $y_2=(\eta_\nu^{(2)})$ tako da je

$$x^*(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\eta_\nu^{(1)}\xi_\nu=\sum_{\nu=1}^{\infty}\eta_\nu^{(2)}\xi_\nu,$$

imali bismo za $\boxed{x=e_n}$

$$x^*(e_n)=\eta_n^{(1)}=\eta_n^{(2)} \quad \text{za svako} \quad n=1,2,\ldots,$$

suprotno pretpostavci da je $y_1\neq y_2$.

Stav 6. *Ograničena linearna funkcionela x^* na prostoru l_p $(1<p<+\infty)$ ima reprezentaciju*

$$x^*(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\eta_\nu\xi_\nu \quad \textit{gde je} \quad y=(\eta_\nu)\in l_q \quad (1/p+1/q=1) \tag{19}$$

i

$$\|x^*\|=\|y\|_{l_q}.$$

Funkcionelom x^* na l_p tačka $y\in l_q$ je jednoznačno određena.

Dokaz. Neka je $x=(\xi_\nu)\in l_p$ i $y=(\eta_\nu)\in l_q$, gde je $1/p+1/q=1$ i $1<p<+\infty$. Tada izraz $\sum_{\nu=1}^{\infty}\eta_\nu\xi_\nu$ ima uvek smisla, jer je na osnovu Hölderove nejednačine

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|\eta_\nu\xi_\nu|\leq\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty}|\eta_\nu|^q\right\}^{1/q}\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty}|\xi_\nu|^p\right\}^{1/p}=\|y\|_{l_q}\|x\|_{l_p}<+\infty.$$

Posmatran kao funkcija od $x\in l_p$ on definiše jednu funkcionelu x^* na prostoru l_p. Linearnost ove je očigledna, a ograničenost sledi iz nejednačine

$$|x^*(x)|\leq\|y\|_{l_q}\|x\|_{l_p},$$

koja kazuje i da je

$$\|x^*\|\leq\|y\|_{l_q}. \tag{20}$$

Obrnuto, neka je x^* ograničena linearna funkcionela na $l_p(1<p<+\infty)$. Tada oblik (19) sledi doslovce kao pri dokazu stava 5, jedino što u (18) $\|\cdot\|$ označava sada normu u l_p, tj. (18) treba zameniti sa

$$\left\|x-\sum_{\nu=1}^{n}\xi_\nu e_\nu\right\|=\left\{\sum_{\nu=n+1}^{\infty}|\xi_\nu|^p\right\}^{1/p}\to 0 \qquad (n\to\infty).$$

Da tada tačka $y=(\eta_\nu)=(x^*(e_\nu))$ pripada l_q, gde je $1/p+1/q=1$, sledi ako uočimo niz tačaka

$$x_n=(\xi_\nu^n)\in l_p \quad (n=1,2,\ldots) \text{ gde je } \xi_\nu^n=\begin{cases}|\eta_\nu|^{q-1}\operatorname{sign}\eta_\nu, & \nu\leq n,\\ 0, & \nu>n.\end{cases}$$

Primećujemo da je

$$\|x_n\| = \left\{\sum_{\nu=1}^{n} |\eta_\nu|^{pq-p}\right\}^{1/p} = \left\{\sum_{\nu=1}^{n} |\eta_\nu|^q\right\}^{1/p}$$

i

$$x^*(x_n) = \sum_{\nu=1}^{n} |\eta_\nu|^q.$$

Kako je x^* ograničena funkcionela na l_p, to je za svako $n = 1, 2, \ldots$

$$|x^*(x_n)| \leqslant \|x^*\| \|x_n\|,$$

što se svodi na

$$\left\{\sum_{\nu=1}^{n} |\eta_\nu|^q\right\}^{1/q} \leqslant \|x^*\|.$$

Prema tome važi i

$$\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty} |\eta_\nu|^q\right\}^{1/q} \leqslant \|x^*\|.$$

Odavde zaključujemo da $y \in l_q$, a zajedno sa (20), da je $\|x^*\| = \|y\|_{l_q}$.

Jednoznačnost reprezentacije (19) dokazuje se na isti način kao kod stava 5.

Stav 7. *Ograničena linearna funkcionela x^* na prostoru c_0 ima reprezentaciju*

(21) $$x^*(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \eta_\nu \xi_\nu, \quad \textit{gde je} \quad y = (\eta_\nu) \in l$$

i

$$\|x^*\| = \|y\|_l.$$

$x^*(x) = \sum x^*(e_\nu)$

$x(x) = \sum \xi_\nu e_\nu$

Funkcionelom x^* na c_0 tačka y u l jednoznačno je određena.

Dokaz. Neka $x = (\xi_\nu) \in c_0$ i $y = (\eta_\nu) \in l$. Tada izraz $\sum_{\nu=1}^{\infty} \eta_\nu \xi_\nu$ uvek ima smisla, jer je

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |\eta_\nu \xi_\nu| \leqslant \sup_{1 \leqslant \nu < \infty} |\xi_\nu| \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} |\eta_\nu| = \|y\|_l \|x\|_{c_0} < +\infty.$$

Posmatran kao funkcija od $x \in c_0$ on definiše jednu funkcionelu x^* na c_0. Njenu linearnost je lako pokazati, a ograničenost sledi iz

$$|x^*(x)| \leqslant \|y\|_l \|x\|_{c_0}$$

što povlači i

(22) $$\|x^*\| \leqslant \|y\|_l.$$

Obrnuto, pretpostavimo da je x^* proizvoljna ograničena linearna funkcionela na c_0. Tada za svako $x \in c_0$

$$\left\|x - \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu e_\nu\right\| = \sup_{\nu > n} |\xi_\nu| \to 0 \quad (n \to \infty),$$

pa

$$x^*(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \eta_\nu \xi_\nu, \quad \boxed{\eta_\nu = x^*(e_\nu)},$$

sledi kao kod dokaza stava 5.

$x^* \xrightarrow{1-1} (x^* e_\nu)_\nu$

X^*

функционели једнозначно одређују

Da bismo dokazali da $y=(\eta_\nu)\in l$, uočimo u l niz tačaka

$$x_n=(\xi_\nu^n)\ (n=1,2,\ldots)\ \text{gde je}\ \xi_\nu^n=\begin{cases}\operatorname{sign}\eta_\nu, & \nu\leqslant n,\\ 0, & \nu>n.\end{cases}$$

Za ovaj niz tačaka je

$$\|x_n\|=1 \quad \text{i} \quad x^*(x_n)=\sum_{\nu=1}^{n}|\eta_\nu|,$$

a kako je funkcionela x^* ograničena, to je za svako $n=1,2,\ldots$

$$|x^*(x_n)|\leqslant\|x^*\|\,\|x_n\|,$$

tj.

$$\sum_{\nu=1}^{n}|\eta_\nu|\leqslant\|x^*\|,$$

pa prema tome i

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|\eta_\nu|\leqslant\|x^*\|.$$

Dakle, $y=(\eta_\nu)\in l$, a s obzirom na (22) sledi $\|x^*\|=\|y\|_l$.

Jednoznačnost reprezentacije se dokazuje kao kod stava 5.

Stav. 8. *Ograničena linearna funkcionela x^* na prostoru $C[a,b]$ ima reprezentaciju*

$$x^*(x)=\int_a^b x(t)\,dg(t), \tag{23}$$

gde je $g(t)$ funkcija ograničene varijacije na $[a,b]$ koja se anulira u tački $t=a$ i

$$\|x^*\|=V_a^b(g).$$

Primećujemo da funkcionelom x^* na $C[a,b]$ funkcija ograničene varijacije g nije jednoznačno određena. Na ovo pitanje vratićemo se u odeljku 4.iii.

Dokaz stava 8. Bez ograničenja možemo pretpostaviti da je $a=0$ i $b=1$. Ako je g funkcija ograničene varijacije na $[0,1]$ (koja se eventualno i anulira za $t=0$), tada Riemann-Stieltjesov integral $\int_0^1 x\,dg$ postoji za svaku neprekidnu funkciju x i linearna je funkcionela na $C[0,1]$ (na osnovu stavova III.1.3 i III.1.1). Da je x^* ograničena funkcionela na $C[0,1]$ sledi iz nejednačine

$$|x^*(x)|\leqslant V_a^b(g)\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|=V_a^b(g)\,\|x\|,$$

koja kazuje i da je

$$\|x^*\|\leqslant V_a^b(g). \tag{24}$$

Obrnuto, pretpostavimo da je x^* proizvoljna ograničena linearna funkcionela na $C[0,1]$. Pokazaćemo da tada postoji funkcija ograničene varijacije g na $[0,1]$ sa $g(0)=0$, tako da važi (23).

Kako svaka neprekidna funkcija pripada prostoru bitno ograničenih funkcija M i kako je za neprekidne funkcije x $\|x\|_M=\|x\|_C$, to možemo $C[0,1]$ shvatiti kao potprostor prostora $M[0,1]$. Na osnovu Hahn-Banachovog stava postoji tada na M ograničena linearna funkcionela f takva da je

$$f(x)=x^*(x) \quad \text{kada} \quad x\in C[0,1]$$

i

$$\|f\|_M=\|x^*\|_C.$$

Neka je $0 < t \leqslant 1$ i stavimo

$$y_t = y_t(u) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant u \leqslant t, \\ 0, & t < u \leqslant 1. \end{cases}$$

Kolekcija funkcija $\{y_t\}_{t \in]0,1]}$ leži u prostoru M. Pomoću ove kolekcije i funkcionele f definišimo funkciju

$$g(t) = \begin{cases} f(y_t), & 0 < t \leqslant 1, \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

Pokazaćemo, prvo, da je funkcija g ograničene varijacije na $[0,1]$. Neka je P_n jedna podela razmaka $[0,1]$ ostvarena tačkama

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$$

i stavimo

$$\varepsilon_\nu = \operatorname{sign}\,[g(t_\nu) - g(t_{\nu-1})] \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Tada je

$$\sum_{\nu=1}^{n} |g(t_\nu) - g(t_{\nu-1})| = \sum_{\nu=1}^{n} [g(t_\nu) - g(t_{\nu-1})]\,\varepsilon_\nu = f(y_{t_1})\,\varepsilon_1 + \sum_{\nu=2}^{n} [f(y_{t_\nu}) - f(y_{t_{\nu-1}})]\,\varepsilon_\nu$$

$$= f\Big\{y_{t_1}\varepsilon_1 + \sum_{\nu=2}^{n} (y_{t_\nu} - y_{t_{\nu-1}})\,\varepsilon_\nu\Big\} \leqslant \|f\|_M \Big\| y_{t_1}\varepsilon_1 + \sum_{\nu=2}^{n} (y_{t_\nu} - y_{t_{\nu-1}})\,\varepsilon_\nu \Big\|_M \tag{25}$$

($\|\cdot\|_M$ na prvom mestu je norma *funkcionele* na M, a na drugom mestu norma *vektora* iz M). Da bismo izračunali

$$\Big\| y_{t_1}\varepsilon_1 + \sum_{\nu=2}^{n} (y_{t_\nu} - y_{t_{\nu-1}})\,\varepsilon_\nu \Big\|_M = \operatorname*{sup\,ess}_{0 \leqslant u \leqslant 1} \Big| \varepsilon_1 y_{t_1}(u) + \sum_{\nu=2}^{n} [y_{t_\nu}(u) - y_{t_{\nu-1}}(u)]\,\varepsilon_\nu \Big|,$$

rastavimo razmak $[0,1]$ u kome varira u na podrazmake $[t_0, t_1]$, $]t_1, t_2]$, ..., $]t_{n-1}, t_n]$. Kako je

$$y_{t_1}(u) = \begin{cases} 1, & u \in [t_0, t_1], \\ 0, & u \notin [t_0, t_1], \end{cases} \tag{26}$$

i

$$y_{t_\nu}(u) - y_{t_{\nu-1}}(u) = \begin{cases} 1, & u \in\,]t_{\nu-1}, t_\nu], \\ 0, & u \notin\,]t_{\nu-1}, t_\nu], \end{cases} \quad (\nu = 2, 3, \ldots, n) \tag{27}$$

to je bez obzira u kome od podrazmaka $[t_0, t_1]$, $]t_1, t_2]$, ..., $]t_{n-1}, t_n]$ leži u

$$\Big| \varepsilon_1 y_{t_1}(u) + \sum_{\nu=2}^{n} [y_{t_\nu}(u) - y_{t_{\nu-1}}(u)]\,\varepsilon_\nu \Big| \leqslant 1,$$

jer je $|\varepsilon_\nu| \leqslant 1$. Znači,

$$\Big\| y_{t_1}\varepsilon_1 + \sum_{\nu=2}^{n} (y_{t_\nu} - y_{t_{\nu-1}})\,\varepsilon_\nu \Big\|_M \leqslant 1,$$

pa iz (25) sledi

$$V_a^b(g) \leqslant \|f\|_M = \|x^*\|_C$$

Dakle, g je ograničene varijacije na $[0,1]$, a sem toga, vodeći računa i o (24), sledi $\|x^*\| = V_a^b(g)$.

Neka je sada $x \in C[0,1]$ i stavimo

$$z_n(u) = x(t_1)\, y_{t_1}(u) + \sum_{\nu=2}^{n} x(t_\nu)\,[y_{t_\nu}(u) - y_{t_{\nu-1}}(u)].$$

Na osnovu (26) i (27), imamo

$$z_n(u) - x(u) = \begin{cases} x(t_1) - x(u), & u \in [t_0, t_1], \\ x(t_\nu) - x(u), & u \in]t_{\nu-1}, t_\nu] \ (\nu = 2,3, \ldots, n). \end{cases}$$

Kako je x neprekidna, dakle i uniformno neprekidna na $[0,1]$, to svakom $\varepsilon > 0$ odgovara broj $\delta > 0$ tako da je

$$|z_n(u) - x(u)| < \varepsilon \text{ kad god je } m(P_n) < \delta,$$

gde je P_n podela razmaka $\{u : 0 \leqslant u \leqslant 1\}$ ostvarena tačkama $t_0, t_1, \ldots, t_n$ a $m(P_n)$ dužina maksimalnog podrazmaka te podele. Drugim rečima, ako za niz podela (P_n), $m(P_n) \to 0$ kada $n \to \infty$, tada $z_n \to x$ u smislu metrike u M.

Zbog neprekidnosti funkcionele f na M i $x \in C$ je, dakle,

$$\lim_{n \to \infty} f(z_n) = f(x) = x^*(x). \tag{28}$$

No na osnovu definicije funkcije g i linearnosti funkcionele f je

$$\begin{aligned} f(z_n) &= f\left\{x(t_1)\, y_{t_1} + \sum_{\nu=2}^{n} x(t_\nu)\,[y_{t_\nu} - y_{t_{\nu-1}}]\right\} \\ &= x(t_1)\, f(y_{t_1}) + \sum_{\nu=2}^{n} x(t_\nu)\,[f(y_{t_\nu}) - f(y_{t_{\nu-1}})] \\ &= x(t_1)\, g(t_1) + \sum_{\nu=2}^{n} x(t_\nu)\,[g(t_\nu) - g(t_{\nu-1})] \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} x(t_\nu)\,[g(t_\nu) - g(t_{\nu-1})]. \end{aligned}$$

Prema (28) je, znači,

$$x^*(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{\nu=1}^{n} x(t_\nu)\,[g(t_\nu) - g(t_{\nu-1})] = \int_a^b x\, dg,$$

jer je zbog neprekidnosti funkcije x i ograničene varijacije funkcije g na $[a, b]$ egzistencija Riemann-Stijeltjesovog integrala unapred obezbeđena (stav III.1.3).

Stav 9. *Ograničena linearna funkcionela x^* na prostoru $L_p(a, b)$ $(1 < p < +\infty)$ ima reprezentaciju*

$$x^*(x) = \int_a^b y(t)\, x(t)\, dt \quad \textit{gde je } y \in L_q(a, b) \ (1/p + 1/q = 1) \tag{29}$$

i

$$\|x^*\| = \|y\|_{L_q}.$$

Funkcionelom x^* na L_p funkcija y u L_q jednoznačno je određena.

Dokaz. Trivijalni deo tvrđenja stava 9, naime da za svaku fiksiranu (ali proizvoljnu) funkciju y iz $L_q(a, b)\,(q>1)$, izraz $\int_a^b y\,x\,dt$ predstavlja ograničenu linearnu funkcionelu na $L_p(a, b)\,(1/p+1/q=1)$, kao i da je

$$\|x^*\| \leqslant \|y\|_{L_q} \tag{30}$$

dokazali smo već u primeru 4.

Neka je x^* proizvoljna ograničena linearna funkcionela na $L_p(a, b)$. Pokazaćemo prvo da tada može postojati samo jedna funkcija y u $L_q(a, b)$, takva da važi (29). Naime, kada bi postojale dve različite funkcije y_1 i y_2 u $L_q(a, b)$ ($y_1(t) \neq y_2(t)$ na skupu pozitivne mere), tako da je na $L_p(a, b)$

$$x^*(x)=\int_a^b y_1\,x\,dt \quad \text{i} \quad x^*(x)=\int_a^b y_2\,x\,dt,$$

imali bismo

$$\int_a^u (y_1-y_2)\,x\,dt=0 \quad \text{za svako} \quad x \in L_p(a, b),$$

što se svodi na

$$\int_a^u (y_1-y_2)\,dt=0 \quad \text{za svako} \quad u \in (a, b),$$

ako x ograničimo samo na karakteristične funkcije razmaka (a, u) $(a \leqslant u \leqslant b)$. No tada, na osnovu stava III.5.16, sledi $y_1-y_2=0$ s.s. na (a, b), suprotno učinjenoj pretpostavci da je $y_1 \neq y_2$.

Da stvarno postoji funkcija $y \in L_q(a, b)$ takva da važi (29), dokazaćemo u dva koraka. Prvo ćemo se ograničiti na slučaj kada je razmak (a, b) konačan, a zatim ćemo se osloboditi ove suplementarne pretpostavke.

Za svaki merljiv skup (u Lebesgueovom smislu) $E \subset (a, b)$ definišimo funkciju skupa

$$\lambda(E)=x^*(K_E),$$

gde je K_E karakteristična funkcija skupa E. $\lambda(E)$ je dobro definisana jer zbog $b-a<+\infty$, $K_E \in L_p(a, b)$. Pokazaćemo da je λ realna mera. Zaista, kako

$$E_1 \cap E_2=O \quad \Rightarrow \quad K_{E_1 \cup E_2}=K_{E_1}+K_{E_2},$$

to iz linearnosti funkcionele x^* sledi aditivnost:

$$\lambda(E_1 \cup E_2)=\lambda(E_1)+\lambda(E_2).$$

Neka je, dalje, (E_ν) $(\nu=1, 2, \ldots)$ jedno razlaganje skupa E na disjunktne skupove i stavimo $A_n=\bigcup_{\nu=1}^{n} E_\nu$. Zbog ograničenosti linearne funkcionele x^* na $L_p(a, b)$ je

$$|\lambda(E)-\lambda(A_n)|=|x^*(K_E)-x^*(K_{A_n})|$$

$$\leqslant \|x^*\|\,\|K_E-K_{A_n}\|_p=\|x^*\|\,[m(E-A_n)]^{1/p} \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

tj.

$$\lambda(A_n)=\lambda(E_1)+\cdots+\lambda(E_n) \to \lambda(E) \qquad (n \to \infty),$$

što znači da je λ σ-aditivna.

Štaviše, λ je apsolutno neprekidna realna mera u odnosu na Lebesgueovu meru m, jer iz

$$|\lambda(E)| \leqslant \|x^*\|\,\|K_E\|_p=\|x^*\|\,[m(E)]^{1/p}$$

$\left(\int K_E^p\,dm\right)^{1/p}=(m\,E)^{1/p}$

sledi

$$m(E)=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda(E)=0.$$

Na osnovu Radon-Nikodymovog stava (stav III.6.4) postoji, dakle, funkcija y u $L(a,b)$ takva da je za svaki merljiv skup $E\subset(a,b)$

$$\lambda(E)=\int_E y\,dt=\int_a^b K_E\cdot y\,dt. \tag{31}$$

Prema tome, postoji $y\in L(a,b)$ tako da

$$x^*(x)=\int_a^b xy\,dt \tag{31'}$$

važi kad god je x karakteristična funkcija nekog merljivog skupa iz (a,b).

Neka je j jednostavna funkcija koja uzima vrednosti c_ν na skupovima $E_\nu\subset(a,b)\,(\nu=1,2,\ldots,n)$. Zbog linearnosti funkcionele x^* je tada

$$x^*(j)=x^*\left(\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu K_{E_\nu}\right)=\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu\, x^*(K_{E_\nu})=\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \int_a^b K_{E_\nu}\, y\,dt$$

$$=\int_a^b\left(\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu K_{E_\nu}\right) y\,dt=\int_a^b j\,y\,dt,$$

tj. (31′) važi i za sve jednostavne funkcije na (a,b).

Svaka ograničena merljiva funkcija može se prikazati kao granična vrednost uniformno konvergentnog niza jednostavnih funkcija (stav III.4.6; ako funkcija uzima vrednosti oba znaka treba je rastaviti na pozitivni i negativni deo). Za svaku bitno ograničenu funkciju x na (a,b) postoji, dakle, niz jednostavnih funkcija (j_n) tako da $j_n\to x$ uniformno na $E\subset(a,b)$, gde je $m(E)=b-a$. Uniformna konvergencija niza (j_n) povlači s jedne strane

$$\int_a^b j_n\, y\,dt\to\int_a^b x\,y\,dt, \tag{32}$$

a s druge strane

$$\|j_n-x\|_{L_p}\to 0,$$

tako da, zbog $|x^*(j_n)-x^*(x)|\leqslant\|x^*\|\,\|j_n-x\|_{L_p}$,

$$x^*(j_n)\to x^*(x). \tag{33}$$

Ako, dakle, u

$$x^*(j_n)=\int_a^b j_n\, y\,dt$$

pustimo da $n\to\infty$, iz (32) i (33) slediće da (31′) važi i za svaku bitno ograničenu funciju na (a,b).

Na osnovu Radon-Nikodymovog stava sledilo je jedino da $y\in L(a,b)$. Pokazaćemo sada da $y\in L_q(a,b)$ i da je $\|x^*\|=\|y\|_{L_q}$. U tom cilju uvedimo

$$\alpha(t)=\operatorname{sign} y(t)$$

i

$$E_n=\{t\in(a,b):|y(t)|\leqslant n\},$$

i stavimo

$$x(t)=K_{E_n}(t)\,\alpha(t)\,|y(t)|^{q-1}.$$

Tada je

$$\int_{E_n}|y|^q\,dt=\int_a^b x\,y\,dt.$$

Kako x pripada prostoru bitno ograničenih funkcija $M(a, b)$, to je na osnovu (31')

$$\int_{E_n} |y|^q \, dt = x^*(x) \leqslant \|x^*\| \, \|x\|_{L_p}. \tag{34}$$

S obzirom na

$$(\|x\|_{L_p})^p = \int_{E_n} |y|^{p(q-1)} \, dt = \int_{E_n} |y|^q \, dt,$$

(34) se svodi na

$$\int_{E_n} |y|^q \, dt \leqslant \|x^*\| \left\{ \int_{E_n} |y|^q \, dt \right\}^{1/p}$$

odnosno na

$$\int_{E_n} |y|^q \, dt \leqslant \|x^*\|^q,$$

što možemo napisati i u obliku

$$\int_a^b K_{E_n} |y|^q \, dt \leqslant \|x^*\|^q.$$

Primenjući stav III.5.2 na (monotono rastući) niz funkcija $(K_{E_n} |y|^q)$, koji konvergira ka $|y|^q$ $(n \to \infty)$, nalazimo

$$\int_a^b |y|^q \, dt \leqslant \|x^*\|^q.$$

Dakle, $y \in L_q(a, b)$, a sem toga, vodeći računa i o (30), sledi $\|x^*\| = \|y\|_{L_q}$.

Sve u svemu, do sada smo pokazali da svakoj na $L_p(a, b)$ $(1 < p < +\infty)$ ograničenoj linearnoj funkcioneli x^* odgovara funkcija $y \in L_q(a, b)$ $(1/p + 1/q = 1)$ takva da je

$$x^*(x) = \int_a^b x y \, dt \quad \text{za svako} \quad x \in M(a, b), \tag{35}$$

i da je

$$\|x^*\| = \|y\|_{L_q}. \tag{36}$$

Leva i desna strana u (35) su neprekidne funkcije na $L_p(a, b)$: prva na osnovu pretpostavke, a za drugu smo to već pokazali u primeru 4. Kako se one poklapaju na podskupu $M(a, b)$ koji je svuda gust u $L_p(a, b)$ (vežbanje III.8.26), to (35) važi na čitavom prostoru $L_p(a, b)$. Time je stav 9 dokazan kada je u pitanju konačan razmak (a, b).

Sada ćemo se osloboditi ove suplementarne pretpostavke. Pretpostavimo, dakle, da je x^* ograničena linearna funkcionela na $L_p(a, +\infty)$. (Na sličan način se postupa ako je u pitanju $L_p(-\infty, b)$ ili $L_p(-\infty, +\infty)$). Ako je I proizvoljan konačan razmak u $(a, +\infty)$, tada je

$$f(x) = x^*(K_I x)$$

ograničena linearna funkcionela na $L_p(a, +\infty)$ i

$$\|f\| \leqslant \|x^*\|. \tag{37}$$

Zaista,

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = x^*[K_I(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)] = x^*(\lambda_1 K_I x_1 + \lambda_2 K_I x_2)$$
$$= \lambda_1 x^*(K_I x_1) + \lambda_2 x^*(K_I x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

i

$$|f(x)| = |x^*(K_I x)| \leqslant \|x^*\| \, \|K_I x\|_{L_p} \leqslant \|x^*\| \, \|x\|_{L_p}.$$

No $x^*(K_I x)$ možemo shvatiti i kao ograničenu linearnu funkcionelu na $L_p(I)$, tako da na osnovu onog što smo već dokazali postoji funkcija $y \in L_q(I)$ $(1/p+1/q=1)$ takva da je

$$x^*(K_I x) = \int_I x\, y\, dt \quad \text{na} \quad L_p(I). \tag{38}$$

Neka je $I_n = [a+n-1,\ a+n[$ $(n=1, 2, \ldots)$ i stavimo $J_k = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_k$. Na osnovu (38) postojaće funkcije $y_n \in L_q(I_n)$ takve da je

$$x(K_{I_n} x) = \int_{I_n} x\, y_n\, dt \quad \text{na} \quad L_p(I_n). \tag{39}$$

Izvan I_n definišimo y_n sa $y_n(t)=0$ i stavimo

$$y = y_1 + y_2 + \cdots$$

(Ovde se uopšte ne postavlja pitanje konvergencije reda, jer su razmaci I_n disjunktni). Zbog

$$K_{J_k} = K_{I_1} + K_{I_2} + \cdots + K_{I_k}$$

je, na osnovu (39),

$$\begin{aligned} x^*(K_{J_k} x) &= x^*(K_{I_1} x) + x^*(K_{I_2} x) + \cdots + x^*(K_{I_k} x) \\ &= \int_{I_1} x\, y_1\, dt + \int_{I_2} x\, y_2\, dt + \cdots + \int_{I_k} x\, y_k\, dt \\ &= \int_{J_k} x\,(y_1 + y_2 + \cdots + y_k)\, dt. \end{aligned}$$

Kako je J_k konačan razmak, to i za funkcionelu $f_k(x) = x^*(K_{J_k} x)$ važi (36), tj.

$$\| f_k \| = \| y_1 + y_2 + \cdots + y_k \|.$$

Na osnovu (37) i vodeći računa o definiciji funkcija $y_1, y_2, \ldots$ je, znači,

$$\begin{aligned} \| x^* \| &\geqslant \| y_1 + y_2 + \cdots + y_k \| \\ &= \left\{ \int_{J_k} |y_1 + y_2 + \cdots + y_k|^q\, dt \right\}^{1/q} \\ &= \left\{ \int_a^\infty |y_1 + y_2 + \cdots + y_k|^q\, dt \right\}^{1/q}, \end{aligned}$$

odakle, primenjujući Fatouovu lemu na niz nenegativnih funkcija $(|y_1 + y_2 + \cdots + y_k|^q)$ sledi

$$\| x^* \| \geqslant \left\{ \int_a^\infty |y_1 + y_2 + \cdots|^q\, dt \right\}^{1/q} = \| y \|_{L_q},$$

tj. $y \in L_q$. Time je stav u potpunosti dokazan.

Stav 10. *Ograničena linearna funkcionela x^* na prostoru $L(a, b)$ ima reprezentaciju*

$$x^*(x) = \int_a^b y(t)\, x(t)\, dt \quad \textit{gde je} \quad y \in M(a, b) \tag{40}$$

i

$$\| x^* \| = \| y \|_M.$$

Funkcionelom x^* na L funkcija y u M jednoznačno je određena.

Dokaz stava 10 se podudara sa dokazom stava 9 sem u jednoj tački: kada se dokazuje da $y \in L_q(a, b)$. Da pokažemo da sada $y \in M(a, b)$ primećujemo, prvo, da iz (31) sledi

$$\left| \int_E y\, dt \right| \leqslant \| x^* \|\, \| K_E \|_L = \| x^* \|\, m(E) \tag{41}$$

za svaki merljiv skup $E \subset (a, b)$.

Neka je $I=[-\|x^*\|, \|x^*\|]$ i neka je $\Delta=]a-\delta, a+\delta[$ proizvoljan otvoren razmak u $\mathbf{C}I$. Ako je $E=y^{-1}(\Delta)$, pokazaćemo da je $m(E)=0$, tj. da funkcija y uzima vrednosti u Δ samo s.s. na (a, b). Zaista, kada bi bilo $m(E)>0$, imali bismo

$$\left|\frac{1}{m(E)}\int_E y\,dt-a\right|=\left|\frac{1}{m(E)}\int_E (y-a)\,dt\right|\leqslant\frac{1}{m(E)}\int_E |y-a|\,dt\leqslant\delta,$$

što je nemoguće jer, prema (41), broj

$$\frac{1}{m(E)}\int_E y\,dt \quad \text{leži u razmaku} \quad I.$$

Kako je $\mathbf{C}I$, kao otvoren skup na realnoj pravoj, unija prebrojivo mnogo disjunktnih razmaka Δ, to funkcija y uzima vrednosti u $\mathbf{C}I$ samo s.s. na (a, b). Drugim rečima,

$$|y(t)|\leqslant\|x^*\| \quad \text{s.s. na } (a, b),$$

tj. $y\in M(a, b)$.

4.iii. Konjugovani prostor

Neka su X i Y Banachovi prostori. U 3.ii videli smo da se skup $L(X, Y)$ ograničenih linearnih operatora koji preslikavaju X u Y može snabdeti na prirodan način strukturom Banachovog prostora (stav 3.14). U specijalnom slučaju kada je prostor-slika Y skup realnih ili kompleksnih brojeva, tj. kada je reč o skupu ograničenih linearnih funkcionela na X, Banachov prostor $L(X, Y)$ nazivamo *konjugovani* (*dualni, adjungovani*) *prostor* prostora X i označavamo ga sa X^*.

U ovom odeljku daćemo realizaciju konjugovanih prostora nekih konkretnih Banachovih prostora. Za to će nam poslužiti rezultati iz odeljka 4.ii, gde smo ustanovili reprezentacije ograničenih linearnih funkcionela na pojedinim Banachovim prostorima.

Na osnovu stava 5, između skupa l^* ograničenih linearnih funkcionela x^* na l i skupa ograničenih nizova m postoji biunivoka korespondencija, ostvarena preko

F

$$x^*(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\eta_\nu\,\xi_\nu \quad (x=(\xi_\nu)\in l).$$

Označimo ovu sa F. Pokazaćemo da je F jedna kongruencija (definicija 2.3), tj. da su Banachovi prostori l^* i m algebarski izomorfni i izometrični.

Zaista, kako korespondencijom F tačkama

$$y_1=(\eta_\nu^1) \quad \text{i} \quad y_2=(\eta_\nu^2) \quad \text{iz} \quad m$$

odgovaraju u l^* tačke x_1^* i x_2^* određene sa

$$x_1^*(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\eta_\nu^1\,\xi_\nu \quad \text{i} \quad x_2^*(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\eta_\nu^2\,\xi_\nu,$$

to će, zbog (videti i stav 3.14)

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(\lambda_1\eta_\nu^1+\lambda_2\eta_\nu^2)\,\xi_\nu=\lambda_1\sum_{\nu=1}^{\infty}\eta_\nu^1\,\xi_\nu+\lambda_2\sum_{\nu=1}^{\infty}\eta_\nu^2\,\xi_\nu$$
$$=\lambda_1 x_1^*(x)+\lambda_2 x_2^*(x)=(\lambda_1 x_1^*+\lambda_2 x_2^*)(x),$$

tački $\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2$ iz m odgovarati tačka $\lambda_1 x_1^*+\lambda_2 x_2^*$ u l^*, što znači da su prostori m i l^* algebarski izomorfni.

Neka korespondencijom F tački y iz m odgovara tačka x^* u l^*. Kako je norma vektora x^* u l^* definisana baš normom ograničene linearne funkcionele $x^*(x)$ na l (stav 3.14), a ova je prema stavu 5 jednaka $\|y\|_m$, to je

$$\|x^*\|_{l^*}=\|y\|_m,$$

tj. prostori l^* i m su izometrični.

Prema tome, prostor l^* je kongruentan prostoru m, te shodno učinjenoj konvenciji prostor l^* možemo identifikovati sa prostorom m. U tom smislu važi iskaz:

$m\,(=l_\infty)$ je konjugovani prostor prostora l, tj. $l^*=m$.

Na sličan način može se ustanoviti da u navedenom smislu važe iskazi:

l je konjugovani prostor prostora c_0, tj. $c_0^*=l$ (stav 7).

l_q je konjugovani prostor prostora l_p $(p>1,\ 1/p+1/q=1)$, tj. $l_p^*=l_q$ (stav 6).

L_q je konjugovani prostor prostora L_p, $(p>1,\ 1/p+1/q=1)$, tj. $L_p^*=L_q$ (stav 9).

$M\,(=L_\infty)$ je konjugovani prostor prostora L, tj. $L^*=M$ (stav 10).

Kada je reč o konjugovanom prostoru prostora C, stav 8 sam za sebe ne omogućuje da se realizira C^*, jer uopšte nije tačno da ograničenoj linearnoj funkcioneli na C *jednoznačno* odgovara funkcija ograničene varijacije $g(t)$ koja se anulira za $t=a$ (dakle, element iz V_0), takva da je

$$x^*(x)=\int_a^b x(t)\,dg(t).$$

Zaista, kako na Riemann-Stieltjesov integral ne utiče koju vrednost funkcija g uzima u nekoj tački prekida koja leži u unutrašnjosti razmaka $[a,b]$ (primedba posle stava III.1.9), to je

$$\int_a^b x(t)\,dg_1(t)=\int_a^b x(t)\,dg_2(t)$$

i kada funkcije g_1 i g_2 nisu identički jednake na $[a,b]$. Biunivoka korespondencija može, dakle, postojati samo između C^* i nekog pravog dela od V_0. Može se pokazati da biunivoka korespondencija postoji između C^* i skupa onih funkcija iz V_0 koje su neprekidne (recimo) sa desne strane. To su tzv. *normalizovane* funkcije ograničene varijacije i njihovu kolekciju ćemo označavati sa NV_0. Lako je uvideti da je $NV_0[a,b]$ Banachov potprostor od $V_0[a,b]$. Prema tome, važi:

NV_0 je konjugovani prostor prostora C, tj. $C^*=NV_0$.

Neka je X^* prostor konjugovan prostoru X. Kako je X^* i sam jedan Banachov prostor, to se može definisati i prostor $(X^*)^*=X^{**}$ konjugovan prostoru X^*. X^{**} je *drugi konjugovani prostor* od X. Jasno je da ovaj postupak možemo produžiti *ad infinitum*.

$X \subset X$ $\quad X = X$

Na primer, $c_0^* = l$, $c_0^{**} = l^* = m$. Ili, za $p > 1$ i $1/p + 1/q = 1$ je $l_p^* = l_q$, $l_p^{**} = l_q^* = l_p$. U prvom slučaju $X\,(=c_0)$ je pravi deo od $X^{**}\,(=m)$, a u drugom je $X = X^{**}$. Treća mogućnost otpada u opštem slučaju, kao što to tvrdi

Stav 11. *Banachov prostor X je kongruentan nekom potprostoru od X^{**}.*

Ako, dakle, X identifikujemo sa tim potprostorom od X^{**}, iskaz stava 11 možemo i ovako formulisati: $X \subset X^{**}$.

Dokaz stava 11. Kako je X^{**} skup svih ograničenih linearnih funkcionela na X^*, pokazaćemo da ovih nema manje no što ima elemenata u X. To sledi iz činjenice što svaki element iz X generiše jednu ograničenu linearnu funkcionelu na X^*. Zaista, ako stavimo

(42) $$f_x(x^*) = x^*(x),$$ $X \to X^{**}$

gde je x neki fiksirani vektor u X, svakom $x^* \in X^*$ odgovaraće određeni broj $f_x(x^*)$, tj. f_x je funkcionela na X^*. Da je ona linearna i ograničena, sledi iz

$$f_x(\lambda_1 x_1^* + \lambda_2 x_2^*) = (\lambda_1 x_1^* + \lambda_2 x_2^*)(x) = \lambda_1 x_1^*(x) + \lambda_2 x_2^*(x) = \lambda_1 f_x(x_1^*) + \lambda_2 f_x(x_2^*)$$

i

(43) $$|f_x(x^*)| \leqslant \|x^*\|\,\|x\|.$$

Pokazaćemo još da elementom $x \in X$ generisana funkcionela $f_x \in X^*$ ima normu

(44) $$\boxed{\|f_x\| = \|x\|.}$$

Zaista, prema (43) je s jedne strane $\boxed{\|f_x\| \leqslant \|x\|}$. S druge strane, po definiciji norme linearne funkcionele (obrazac (1)) je

(45) $$\|f_x\| = \sup_{\|x^*\|=1} |f_x(x^*)| = \sup_{\|x^*\|=1} |x^*(x)|. \Rightarrow \sup_{\|x_0^*\|=1} \|x\| \geqslant \|x\|$$

Kako, na osnovu stava 2, za fiksirano $x \neq 0$ iz X postoji ograničena linearna funkcionela x^* na X takva da je $\boxed{x^*(x) = \|x\|}$ i $\|x^*\| = 1$, to je prema (45) svakako $\|f_x\| \geqslant \|x\|$.

Označimo sa F preslikavanje definisano sa (42), koje X preslikava u X^{**} (u opštem slučaju ne i na X^{**}). Kako je

$$\begin{aligned} F(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &= f_{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}(x^*) = x^*(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \\ &= \lambda_1 x^*(x_1) + \lambda_2 x^*(x_2) = \lambda_1 f_{x_1}(x^*) + \lambda_2 f_{x_2}(x^*) \\ &= \lambda_1 F(x_1) + \lambda_2 F(x_2) \end{aligned}$$

i

$$\boxed{F(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0,}$$ "1–1"

to je F linearno i biunivoko preslikavanje prostora X u X^{**}. Znači, F je jedan algebarski izomorfizam između X i $F(X) \subset X^{**}$ (videti 3 (6)). No F je, na osnovu (44), i izometrija, te je prostor X kongruentan potprostoru $F(X) \subset X^{**}$.

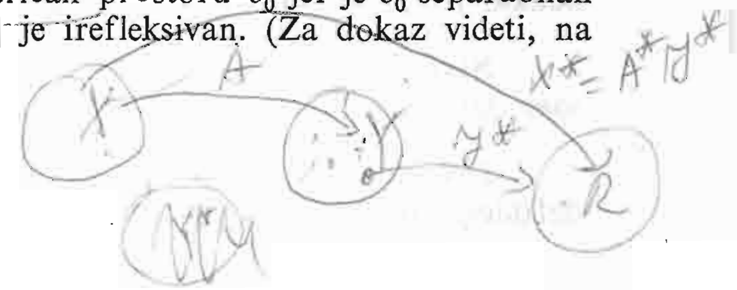
Na osnovu izloženoga se vidi da je moguće normu vektora x iz X uvesti na dva načina: prvo, smatrajući x elementom normiranog prostora X, i, drugo, preko norme ograničene linearne funkcionele na X^* koja je asocirana (preslikavanjem F) vektoru x. Ako ovu poslednju označimo sa $\|x\|_{X^{**}}$, jednakost (44) kazuje da je

$$\|x\|_X = \|x\|_{X^{**}} = \sup_{\|x^*\|=1} |x^*(x)|. \tag{46}$$

Isto tako, uz oznaku $x^*(x)$ za ograničenu linearnu funkcionelu zgodno je uvesti i simetričnu oznaku (x^*, x). Naime, za fiksirano $x^* \in X^*$ ovaj izraz predstavlja ograničenu linearnu funkcionelu na X, a za fiksirano $x \in X$ jednu ograničenu linearnu funkcionelu na X^*.

Definicija 3. Prostor X je *refleksivan* ako je $X^{**} = X$. On je *irefleksivan* ako je $X^{**} \neq X$.

Prostori l_p i $L_p (1 < p < +\infty)$ su refleksivni. Prostor c_0 je irefleksivan; naime, $c_0^{**} = m$, a m ne može biti izometričan prostoru c_0 jer je c_0 separabilan prostor a m to nije. I prostor $C[a, b]$ je irefleksivan. (Za dokaz videti, na primer, [14]).



4.iv. Konjugovani operator

Neka je A ograničen linearan operator koji preslikava X u Y. Neka je $y^*(y)$ proizvoljna ograničena linearna funkcionela na Y, tj. $y^* \in Y^*$. Izraz

$$f(x) = y^*(Ax)$$

$L(Y, R)$

ima smisla za svako $x \in X$ (jer $Ax \in Y$), te definiše jednu funkcionelu na X. Pokazaćemo da je f ograničena linearna funkcionela na X. Zaista, zbog linearnosti funkcionele y^* i operatora A sledi

$$\begin{aligned} f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &= y^*[A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)] = y^*[\lambda_1 Ax_1 + \lambda_2 Ax_2] \\ &= \lambda_1 y^*(Ax_1) + \lambda_2 y^*(Ax_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2), \end{aligned}$$

tj. f je linearna funkcionela. Da je ona ograničena sledi iz

$$|f(x)| \leqslant \|y^*\| \, \|A\| \, \|x\|.$$

Prema tome, svakoj ograničenoj linearnoj funkcioneli $y^*(y)$ na Y koordinirali smo pomoću operatora A jednu ograničenu linearnu funkcionelu $x^*(x) = y^*(Ax)$ na X. Drugim rečima, definisali smo jedan operator koji preslikava prostor Y^* u prostor X^*. Ovo je tzv. *konjugovani* (*dualni*, *adjungovani*) *operator* operatora A. Označavamo ga sa A^*, tj. $x^* = A^* y^* \; (y^* \in Y^*, x^* \in X^*)$.

Definicija 4. Konjugovani operator A^* operatora A definisan je relacijom

$$y^*(Ax) = (A^* y^*)(x), \tag{47}$$

ili ako koristimo simetričnu oznaku za funkcionele sa

$$(y^*, Ax) = (A^* y^*, x). \tag{47'}$$

Lako je videti da je

$$(kA)^* = kA^* \qquad (k = \text{const.}).$$

Pokazaćemo da je

$$(A+B)^* = A^* + B^*.$$

Zaista, za prozvoljno $x \in X$ i $y^* \in Y^*$ je

$$\begin{aligned}((A+B)^* y^*, x) &= (y^*, (A+B)x) \\ &= (y^*, Ax) + (y^*, Bx) \\ &= (A^* y^*, x) + (B^* y^*, x) \\ &= ((A^* + B^*) y^*, x),\end{aligned}$$

odakle je, prvo, $(A+B)^* y^* = (A^* + B^*) y^*$, a zatim $(A+B)^* = A^* + B^*$.

Stav 12. *Konjugovani operator* A^* *ograničenog linearnog operatora* A *je i sam ograničen linearan operator i* $\|A^*\| = \|A\|$.

Dokaz. A^* je linearan operator, jer funkcioneli $y^* = \lambda_1 y_1^* + \lambda_2 y_2^* \in Y^*$, po definiciji, odgovara u X^* funkcionela

$$x^* = y^*(Ax) = \lambda_1 y_1^*(Ax) + \lambda_2 y_2^*(Ax),$$

tj.

$$A^*(\lambda_1 y_1^* + \lambda_2 y_2^*) = \lambda_1 A^* y_1^* + \lambda_2 A^* y_2^*.$$

Da bismo dokazali jednakost normi, primećujemo da je s jedne strane

$$|x^*(x)| = |y^*(Ax)| \leqslant \|y^*\| \, \|Ax\| \leqslant \|y^*\| \, \|A\| \, \|x\|,$$

odakle sledi

$$\|x^*\| \leqslant \|A\| \, \|y^*\| \quad \text{ili} \quad \|A^* y^*\| \leqslant \|A\| \, \|y^*\|,$$

tj.

$$\|A^*\| \leqslant \|A\|. \tag{48}$$

S druge strane, za $x \in X - \{0\}$ element $y_0 = Ax/\|Ax\|$ leži u Y i $\|y_0\| = 1$. Na osnovu stava 2, postoji na Y ograničena linearna funkcionela $y^*(y)$ takva da je $\|y^*\| = 1$ i $y^*(y_0) = 1$. Za ovu je

$$y^*(Ax) = y^*(\|Ax\| \, y_0) = \|Ax\| \, y^*(y_0) = \|Ax\|.$$

Prema (47) je, dakle,

$$\|Ax\| = |y^*(Ax)| = |(A^* y^*)(x)| \leqslant \|A^* y^*\| \, \|x\| \leqslant \|A^*\| \, \|y^*\| \, \|x\| = \|A^*\| \, \|x\|,$$

što daje $\|A\| \leqslant \|A^*\|$. Zajedno sa (48), odavde sledi jednakost normi.

Primer 8. U primeru 3.5 videli smo da je sa

$$y(s) = \int_0^1 K(s, t)\, x(t)\, dt, \tag{49}$$

gde je $x \in L_p$, $y \in L_q$ $(p > 1,\ 1/p + 1/q = 1)$ definisan ograničen linearan operator A, ukoliko je

$$\int_0^1 \int_0^1 |K(s, t)|^q \, ds\, dt < +\infty.$$

Odredićemo sada njemu konjugovani operator A^*. Na prostoru L_q ograničena linearna funkcionela $y^*(y)$ ima reprezentaciju

$$y^*(y)=\int_0^1 y^*(s)\, y(s)\, ds,$$

gde je $y^*(s)\in L_p$. (S obzirom da smo identifikovali prostore L_q^* i L_p, to za funkcionelu iz L_q^* i za funkciju iz L_p koja joj odgovara koristimo istu oznaku y^*; po argumentu se vidi da li se radi o funkcioneli ili o funkciji.) Tada je, kao što smo to videli u opštem slučaju,

$$y^*(Ax)=\int_0^1 y^*(s)\, ds \int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt=\int_0^1 x(t)\, dt \int_0^1 K(s,t)\, y^*(s)\, ds \tag{50}$$

$x^*(t)$

ograničena linearna funkcionela $x^*(x)$ na L_p i, s obzirom na reprezentaciju ovih na prostoru L_p, funkcija

$$x^*(t)=\int_0^1 K(s,t)\, y^*(s)\, ds\in L_q. \tag{51}$$

Ovom jednačinom definisan je konjugovani operator A^*,

$$x^*=A^*y^*,\quad y^*=y^*(s),\quad x^*=x^*(t),$$

koji preslikava prostor $L_q^*=L_p$ u prostor $L_p^*=L_q$. Relacija (47) svodi se u ovom primeru na (50).

Primer 9. Operatoru B definisanom na L_2 sa

$$y(s)=x(s)-\int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt$$

(videti primer 3.6), konjugovan je operator B^* određen sa

$$y(s)=x(s)-\int_0^1 K(t,s)\, x(t)\, dt.$$

Zaista,

$$\begin{aligned} y^*(Bx) &= \int_0^1 y^*(s)\, ds \left\{x(s)-\int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt\right\} \\ &= \int_0^1 y^*(s)\, x(s)\, ds-\int_0^1 y^*(s)\, ds \int_0^1 K(s,t)\, x(t)\, dt \\ &= \int_0^1 y^*(t)\, x(t)\, dt-\int_0^1 x(t)\, dt \int_0^1 K(s,t)\, y^*(s)\, ds \\ &= \int_0^1 x(t)\left\{y^*(t)-\int_0^1 K(s,t)\, y^*(s)\, ds\right\} dt, \end{aligned}$$

pa zaključak sledi kao u prethodnom primeru.

Vežbanja 4

1. Na prostoru konvergentnih nizova $x=(\xi_\nu)\in c$, $\xi_\nu\to\xi$, ograničena linearna funkcionela x^* ima reprezentaciju

$$x^*(x)=\eta\xi+\sum_{\nu=1}^{\infty}\xi_\nu\eta_\nu,$$

gde $y=(\eta_\nu)\in l$, η je konstanta i

$$\|x^*\|=|\eta|+\|y\|_l.$$

Funkcionelom x^* na c jednoznačno je određena konstanta η i vektor y u l.

2. Opravdati granični prelaz (32) u dokazu stava 9.

3. Konjugovani operator operatora iz primera 3.1 definisan je sa

$$\xi_\nu^* = \sum_{\mu=1}^{\infty} a_{\nu\mu} \eta_\mu^*.$$

4. Odrediti operator konjugovan operatoru iz vežbanja 3.2.

5. Neka su t_k fiksirane tačke razmaka $]a, b[$ i c_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ proizvoljni realni brojevi. Pokazati da je

$$x^*(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k x(t_k)$$

ograničena linearna funkcionela na $C[a, b]$ i izračunati $\|x^*\|$. Odrediti funkciju ograničene varijacije g tako da je

$$x^*(x) = \int_a^b x(t)\, dg(t).$$

[Da bismo pokazali da je $\|x^*\| \geqslant \sum_{k=1}^{n} |c_k|$, uočimo neprekidnu poligonalnu liniju $\bar{x}$ na $[a, b]$ koja je određena sa $\bar{x}(t_k) = \operatorname{sign} c_k$, linearna na $[t_k, t_{k+1}]$ i konstantna na $[a, t_1]$ i $[t_n, b]$. g je stepenasta funkcija koja u tačkama t_k ima prekide dužine c_k.]

5.i. Princip konvergencije i princip uniformne ograničenosti

Sledeća dva principa, princip konvergencije i princip uniformne ograničenosti (ili princip rezonancije) bitno koriste kompletnost Banachovog prostora, i to prvi kompletnost prostora-slike, a drugi prostora-originala.

Stav 1. *Neka je A_n niz ograničenih linearnih operatora koji preslikavaju prostor X u Banachov prostor Y i neka je*

1° $\|A_n\| \leqslant M$ *za svako* $n = 1, 2, \ldots;$

$\overline{D} = K \subset X$

2° $\lim\limits_{n\to\infty} A_n x$ *postoji za svako x skupa D koji je svuda gust u nekoj kugli $K \subset X$.*

Tada postoji $\lim\limits_{n\to\infty} A_n x = Ax$ *za svako $x \in X$ i A je ograničen linearni operator čija je norma $\|A\| \leqslant M$.*

Primećujemo da je dovoljno pretpostaviti da je skup D fundamentalan u K, jer tada, zbog linearnosti operatora A, postoji $\lim\limits_{n\to\infty} A_n x$ i nad linealom nad D, a ovaj je svuda gust u K.

Dokaz stava 1. Prvo ćemo pokazati da $(A_n x)$ konvergira u K. Neka je x_0 proizvoljna tačka u K i izaberimo niz tačaka $x_k \in D$ tako da $x_k \to x_0$

$x_0 \in K \Rightarrow \exists\, x_k \in D$ č, $x_k \to x_0$

$(k \to \infty)$; ovo je uvek moguće, jer je skup D svuda gust u K. Tada je na osnovu 1°

$$\|A_m x_0 - A_n x_0\|$$
$$\leqslant \|A_m x_0 - A_m x_k\| + \|A_m x_k - A_n x_k\| + \|A_n x_k - A_n x_0\|$$
$$\leqslant 2M\|x_k - x_0\| + \|A_m x_k - A_n x_k\|,$$

$\downarrow 0 \quad m, n \to \infty$

te iz 2° sledi

$$\limsup_{m, n \to \infty} \|A_m x_0 - A_n x_0\| \leqslant 2M\|x_k - x_0\|.$$

Kako $x_k \to x_0$, $\|x_k - x_0\|$ možemo učiniti proizvoljno malim birajući k dovoljno veliko. Dakle,

$$\|A_m x_0 - A_n x_0\| \to 0 \quad \text{kada} \quad m, n \to \infty,$$

tj. $(A_n x_0)$ je Cauchyev niz u Y. Zbog kompletnosti prostora Y, niz $(A_n x_0)$ konvergira.

Neka je sada y_0 središte kugle K i r njen poluprečnik, a x proizvoljna tačka u X. Tada, za $0 < |\alpha| \leqslant r/\|x\|$, tačka

$$y_0 + \alpha x \in K,$$

te niz $A_n(y_0 + \alpha x)$ konvergira. Međutim, zbog linearnosti je

$$A_n(y_0 + \alpha x) = A_n y_0 + \alpha A_n x, \qquad x \in X$$

i kako leva strana i prvi član na desnoj strani konvergiraju kada $n \to \infty$, konvergiraće i niz $(A_n x)$. Dakle, postoji

$$\lim_{n \to \infty} A_n x \quad \text{za svako } x \in X.$$

Pokazaćemo, najzad da je $Ax = \lim_{n \to \infty} A_n x$ ograničen linearan operator. To sledi ako u

$$A_n(\lambda x + \mu y) = \lambda A_n x + \mu A_n y \quad \text{i} \quad \|A_n x\| \leqslant M\|x\|$$

pustimo da $n \to \infty$. Uzgred dobijamo i da je $\|A\| \leqslant M$.

Princip uniformne ograničenosti izražava

Stav 2. *Neka je (A_n) niz ograničenih linearnih operatora koji preslikavaju Banachov prostor X u prostor Y. Ako je*

$$\limsup_{n \to \infty} \|A_n x\| \; {<+\infty} \; \textit{konačan za svako } x \in X,$$

$< M < +\infty$

tada je niz normi $\|A_n\|$ ograničen.

Stav 2 može se i ovako formulisati: *Ako niz normi nije ograničen, tada postoji bar jedna tačka $x \in X$ tako da je* $\limsup_{n \to \infty} \|A_n x\| = +\infty$. U ovom obliku iskaz stava 2 poznat je kao princip rezonancije.

Dokaz stava 2 izvešćemo polazeći od njegove druge formulacije. U tom cilju pokazaćemo prvo da iz neograničenosti niza normi $\|A_n\|$ sledi da je za svaku zatvorenu kuglu $K \subset X$ unija njenih slika $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n K$ jedan neograničen skup.

Pretpostavimo, naime, suprotno, tj. da je za neku kuglu $K=K[x_0,r]$ ova unija ograničen skup. Tada postoji konstanta $C>0$ takva da je

(1) $\qquad \|A_n x\| \leqslant C \quad$ za svako $x \in K$ i za svako $n=1,2,\ldots$

Kako $z=x_0+ry \in K$ kad god y zadovoljava $\|y\| \leqslant 1$, to (1) povlači

$$\|A_n y\| = \left\| A_n\left(\frac{z-x_0}{r}\right)\right\| = \frac{1}{r}\|A_n z - A_n x_0\|$$
$$\leqslant \frac{1}{r}(\|A_n z\| + \|A_n x_0\|) \leqslant \frac{2C}{r},$$

$\Rightarrow \|A_n\| <$ $\quad \|y\| \leq 1$

za $\|y\| \leqslant 1$, što znači da je $\|A_n\| \leqslant 2C/r$ suprotno pretpostavci da niz normi $\|A_n\|$ nije ograničen.

Neka je sada $K_0 \subset X$ proizvoljna zatvorena kugla poluprečnika r_0. Kako, kao što smo baš pokazali, unija njenih slika $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n K_0$ nije ograničen skup, to postoji unutrašnja tačka x_1 u K_0 i indeks n_1 tako da je $\|A_{n_1} x_1\| > 1$. S obzirom da je A_{n_1} neprekidan operator, to postoji zatvorena kugla $K_1 = K[x_1, r_1]$ koja čitava leži u K_0 takva da je

$$\|A_{n_1} x\| \geqslant 1 \quad \text{za svako } x \in K_1.$$

Smanjujući eventualno njen poluprečnik r_1, možemo smatrati da je $r_1 \leqslant r_0/2$.

Zbog neograničenosti niza normi, biće tada i skup $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n K_1$ neograničen, te, kao malopre, postoji unutrašnja tačka x_2 u K_1 i indeks $n_2 > n_1$ tako da je $\|A_{n_2} x_2\| > 2$, pa zatim i zatvorena kugla $K_2 = K[x_2, r_2] \subset K_1$ takva da je

$$\|A_{n_2} x\| \geqslant 2 \quad \text{za svako } x \in K_2$$

i čiji je poluprečnik $r_2 \leqslant r_1/2 \leqslant r_0/2^2$.

$K_m \subset K_{m-1} \subset K \subset \ldots \subset K_1$

Produžujući ovaj postupak, dobićemo monotono opadajući niz zatvorenih kugli K_m poluprečnika $r_m \leqslant r_0/2^m$ i niz indeksa $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ tako da je

$$\|A_{n_m} x\| \geqslant m \quad \text{za svako } x \in K_m \ (m=1,2,\ldots).$$

Kako je prostor X kompletan, to postoji tačka $\bar{x}$ koja leži u svim kuglama K_m. Za ovu je, dakle,

$$\|A_{n_m} \bar{x}\| \geqslant m \quad \text{za svako} \quad m=1,2,\ldots,$$

što znači da je

$$\limsup_{n\to\infty} \|A_n \bar{x}\| = +\infty.$$

Time je stav 2 dokazan.

Stavovi 1 i 2 zajedno daju

Banach-Steinhausov stav. *Neka su X i Y Banachovi prostori i neka je (A_n) niz ograničenih linearnih operatora koji preslikavaju X u Y. Da bi niz $(A_n x)$ konvergirao ka Ax, gde je $A: X \to Y$ ograničen linearan operator, za svako $x \in X$, potrebno je i dovoljno da je*

$\boxed{1^\circ}$ *niz $\|A_n\|$ ograničen,*

$\boxed{2^\circ}$ *da postoji $\lim_{n\to\infty} A_n x$ na nekom u X svuda gustom skupu tačaka.* F

$F \subset X, \ X = \bar{F}$

U nekoliko narednih odeljaka pokazaćemo kako se primenom principa konvergencije i principa uniformne ograničenosti mogu dobiti neki rezultati klasične analize.

5.ii. Primena na redove i integrale

Stav 3. *Potreban i dovoljan uslov da red* $\sum_{\nu=1}^{\infty} \xi_\nu \eta_\nu$ *(apsolutno) konvergira za svaki konvergentan niz* (ξ_ν) *jeste da red* $\sum_{\nu=1}^{\infty} |\eta_\nu|$ *konvergira.*

Uvodeći prostore c i l, ovaj iskaz možemo i ovako formulisati: Red $\sum_{\nu=1}^{\infty} \xi_\nu \eta_\nu$ konvergira za svaki niz $(\xi_\nu)=x\in c$ tada i samo tada ako niz $(\eta_\nu)=y\in l$.

Dokaz stava 3. Uslov je dovoljan, jer iz

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |\xi_\nu \eta_\nu| \leqslant \sup_{1\leqslant\nu<\infty} |\xi_\nu| \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} |\eta_\nu| = \|x\|_c \|y\|_l < +\infty$$

sledi da red $\sum_{\nu=1}^{\infty} \xi_\nu \eta_\nu$ apsolutno konvergira.

Uslov je potreban. Kako tačka $y_n=(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, 0, 0, \ldots)\in l$ za svako n, to je

$y_n \in l$

$$f_n(x)=\sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu \eta_\nu, \quad x=(\xi_\nu) \quad (n=1, 2, \ldots)$$

niz ograničenih linearnih funkcionela na prostoru c i

$$\|f_n\| = \|y_n\|_l. \tag{2}$$

Po pretpostavci postoji

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \xi_\nu \eta_\nu \quad \text{za svako } x\in c,$$

te je na osnovu stava 2 niz normi $\|f_n\|$ ograničen, tj. $\|f_n\|\leqslant M$. Prema (2) je, dakle,

$$\|y_n\|_l = \sum_{\nu=1}^{n} |\eta_\nu| \leqslant M \quad \text{za svako } n=1, 2, \ldots,$$

što znači da red $\sum_{\nu=1}^{\infty} |\eta_\nu|$ konvergira, tj. da $y=(\eta_\nu)\in l$.

Na analogan način mogu se dokazati:

Stav 4. *Potreban i dovoljan uslov da red* $\sum_{\nu=1}^{\infty} \xi_\nu \eta_\nu$ *konvergira za svaki niz* $(\xi_\nu)=x\in l_p$ $(p>1)$ *jeste da niz* $(\eta_\nu)=y\in l_q$ $(1/p+1/q=1)$.

Stav 5. *Potreban i dovoljan uslov da red* $\sum_{\nu=1}^{\infty} \xi_\nu \eta_\nu$ *konvergira za svaki niz* $(\xi_\nu) = x \in l$ *jeste da niz* $(\eta_\nu) = y \in m$.

Slični iskazi važe i za integrale.

Stav 6. *Potreban i dovoljan uslov da integral* $\int_a^b x(t)\,y(t)\,dt$ *postoji za svaku funkciju* $x \in L_p\ (p>1)$ *jeste da funkcija* $y \in L_q\ (1/p + 1/q = 1)$.

Stav 7. *Potreban i dovoljan uslov da integral* $\int_a^b x(t)\,y(t)\,dt$ *postoji za svaku funkciju* $x \in L$ *jeste da funkcija* $y \in M$.

Dokazaćemo samo prvi od ova dva stava.

Dokaz stava 6. 1° Da je uslov dovoljan sledi primenom Hölderove nejednačine. Da bismo pokazali da je uslov i potreban, uočimo niz funkcija

2° ograničen je

$$y_n(t) = \begin{cases} y(t), & |y(t)| \leqslant n, \\ n, & |y(t)| > n \end{cases}$$

Kako je za svako fiksirano n, $y_n(t)$ ograničena funkcija, to $y_n \in L_q$ (za svako $q>1$, ukoliko je razmak (a, b) konačan pa time i za ono p koje zadovoljava $1/p + 1/q = 1$). Na osnovu stava 4.9,

$$f_n(x) = \int_a^b x(t)\,y_n(t)\,dt$$

predstavlja, dakle, niz ograničenih linearnih funkcionela na Lp i

$$(3) \qquad \|f_n\| = \|y_n\|_{L_q}.$$

Kako, po pretpostavci, postoji

$$\limsup_n f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \int_a^b x(t)\,y(t)\,dt \quad \text{za svako } x \in L_p \quad \Rightarrow \|f_n\| <$$

ograničeno po tačkama

(primer III.5.3), to je, na osnovu stava 2, niz normi $\|f_n\|$ ograničen. Znači, prema (3) je

$$\Rightarrow \quad \|y_n\|_{L_q} \leqslant M \quad \text{za svako } n = 1, 2, \ldots$$

Puštajući da $n \to \infty$ na osnovu Fatouove leme odavde sledi $\|y\|_{L_q} \leqslant M$, tj. $y \in L_q$.

$\left\{\int_a^b |y_n(t)|^2 dt\right\}^{1/2} < M^2$

$\limsup_n \left\{\int_a^b |y_n(t)|^2\right\} \geq \int_a^b \limsup_n |y_n(t)| = \|y\|_{L_2}$

5.iii. Toeplitzov stav

Poznato je da ako niz brojeva (ξ_n) konvergira ka ξ, da tada i niz aritmetičkih sredina

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n}{n}$$

konvergira istom broju ξ. Međutim, ima nizova koji su divergentni a niz njihovih aritmetičkih sredina konvergira. Nizom aritmetičkih sredina moguće je, dakle, i nekom divergentnom nizu (ξ_n) na jednoznačan način koordinirati izvestan broj — njegovu graničnu vrednost u smislu aritmetičke sredine. Ovu zovemo Cesàroova *granica* ili *C-limes* niza (ξ_n), a sam niz *C-konvergentnim*. Po definiciji je, dakle,

$$C\text{-}\lim_{n\to\infty} \xi_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n}{n}.$$

Za divergentni niz $(-1)^n$, na primer, je $C\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n=0$.

Kako se beskonačni red, po definiciji, svodi na niz njegovih delimičnih suma, moguća su i kod redova analogna razmatranja. Tako je *Cesàroov zbir* $C\text{-}\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ reda $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu$ definisan kao C-limes niza njegovih delimičnih suma $\sigma_n=\sum\limits_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu$, tj.

$$C\text{-}\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu = C\text{-}\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \lim_{n\to\infty}\tau_n,$$

gde je

$$\tau_n = \frac{\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_n}{n}.$$

Na primer, divergentni red $1-1+1-1+\cdots$ je *C-zbirljiv* i *C-zbir* mu je $1/2$, jer je

$$\tau_n = \begin{cases} \dfrac{k+1}{2k+1} & \text{za} \quad n=2k+1,\\[2mm] \dfrac{1}{2} & \text{za} \quad n=2k. \end{cases}$$

Ova razmatranja mogu se uopštiti i mi ćemo ih tretirati samo za nizove s obzirom da ih je zatim lako preneti i na redove.

Neka je data beskonačna matrica brojeva

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}.$$

Reći ćemo da je niz (ξ_n) *A-konvergentan* ka broju ξ ako su svi redovi

$$\eta_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\,\xi_k \tag{4}$$

konvergentni i ako niz (η_i) konvergira broju ξ kada $i\to\infty$. Broj ξ je *A-limes* niza (ξ_n), a matricom A je definisan *postupak A-konvergencije* niza (ξ_n).

Od interesa su samo takvi postupci konvergencije koji uopštavaju običnu konvergenciju. Pod time podrazumevamo: 1° svaki konvergentan niz je i A-konvergentan istom broju; 2° postoje divergentni nizovi koji su A-konvergentni. Ako postupak konvergencije zadovoljava uslov 1°, kažemo da je *permanentan* (*regularan*), a ako zadovoljava i uslov 2° da je *efikasniji* od konvergencije.

Sledeći stav rešava pitanje permanentnih postupaka konvergencije.

Stav 8 (Toeplitz). *Potreban i dovoljan uslov da je postupak A-konvergencije permanentan, tj. da za svaki konvergentan niz* (ξ_n) *konvergiraju redovi* (4) *i da važi*

$$A\text{-}\lim_{n\to\infty} \xi_n = \lim_{n\to\infty} \eta_n = \lim_{n\to\infty} \xi_n \tag{5}$$

jeste da je

1° $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}| \leqslant M$ *za svako* $i = 1, 2, \ldots;$

2° $\lim_{i\to\infty} a_{ik} = 0$ *za svako* $k = 1, 2, \ldots;$

3° $\lim_{i\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} = 1.$

Primećujemo da matrica kojom je definisan Cesàroov postupak konvergencije zadovoljava uslove stava 8, tj. da je on permanentan.

Dokaz stava 8. Uslovi 1°—3° su potrebni. Naime, iz konvergencije reda $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\xi_k$ za svako $x = (\xi_k) \in c$ sledi prema stavu 3 da je red $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|$ konvergentan (za svako $i = 1, 2, \ldots$). Znači, jednačinama (4) definisan je na prostoru c niz ograničenih linearnih funkcionela

$$x_i^*(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\xi_k, \quad x = (\xi_k) \in c \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

čije su norme

$$\|x_i^*\| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|.$$

Kako prema (5) postoji

$$\lim_{i\to\infty} x_i^*(x) \quad \text{za svako} \quad x \in c,$$

to je na osnovu stava 2 niz normi $\|x_i^*\|$ ograničen, tj.

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}| \leqslant M,$$

što znači da je ispunjen uslov 1°.

Kako vektor $e = (1, 1, 1, \ldots)$ i jedinični vektori e_n pripadaju prostoru c, to i za njih mora važiti (5), tj.

$$\lim_{i\to\infty} x_i^*(e) = 1 \tag{6}$$

i

$$\lim_{i\to\infty} x_i^*(e_n) = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{7}$$

što se, s obzirom da je $x_i^*(e) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}$ i $x_i^*(e_n) = a_{in}$, svodi na uslov 3°, odnosno 2°.

Uslovi 1°—3° su dovoljni. Na osnovu 1° niz normi $\|x_i^*\|$ funkcionela x_i^* je ograničen. Zatim, prema 2° i 3° postoje granične vrednosti (6) i (7). No, kako vektori e i e_n $(n=1, 2, \ldots)$ obrazuju fundamentalan niz u c (primer 2.5), to na osnovu stava 1 sledi da postoji

$$\lim_{i\to\infty} x_i^*(x) = x^*(x) \quad \text{za svako} \quad x \in c,$$

i da je $x^*(x)$ ograničena linearna funkcionela na c. Ostaje još da pokažemo da je za svako $x = (\xi_n) \in c$

$$x^*(x) = \lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi,$$

tj. da važi (5). Zbog (6) i (7) je

$$x^*(e) = 1 \quad \text{i} \quad x^*(e_n) = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

te se, zbog linearnosti funkcionele x^* i $\|x^*\| \leqslant M$,

$$\begin{aligned} |x^*(x) - \xi| &= \left| x^*(x) - \xi x^*(e) - \sum_{\nu=1}^{n} (\xi_\nu - \xi)\, x^*(e_\nu) \right| \\ &= \left| x^* \left[x - \xi e - \sum_{\nu=1}^{n} (\xi_\nu - \xi)\, e_\nu \right] \right| \\ &\leqslant \|x^*\| \left\| x - \xi e - \sum_{\nu=1}^{n} (\xi_\nu - \xi)\, e_\nu \right\| \end{aligned}$$

može učiniti proizvoljno malim birajući n dovoljno veliko (primer 2.5). Time je stav 8 dokazan.

5.iv. Primene u teoriji Fourierovih redova

Neka je $x(t)$ integrabilna periodična funkcija periode 2π. *Fourierovi koeficijenti* od x definisani su sa

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos nt\, dt \quad \text{i} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin nt\, dt \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

a

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \tag{8}$$

je *Fourierov red* od x.

Stav 9 (Riemann-Lebesgue). *Fourierovi koeficijenti obrazuju nula-niz.*

Dokaz. Niz Fourierovih koeficijenata (a_n) integrabilne funkcije x možemo shvatiti kao niz ograničenih linearnih funkcionela

$$a_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos nt\, dt \quad \text{na} \quad \tilde{L}(-\pi, \pi).$$

Kako je

$$|a_n(x)| \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x(t)|\, dt = \frac{1}{\pi} \|x\|_{\tilde{L}},$$

to je niz njihovih normi $\|a_n\|$ ograničen ($\leqslant 1/\pi$). S obzirom da je

(9) $$\lim_{n \to \infty} a_n(x) = 0$$

kod god je x jedan od vektora iz fundamentalnog niza u $\tilde{L}(-\pi, \pi)$:

(10) $$1,\ \cos t,\ \sin t,\ \cos 2t,\ \sin 2t, \ldots$$

(primer 2.7), to na osnovu stava 1 postoji

$$\lim_{n \to \infty} a_n(x) = a(x) \quad \text{za svako} \quad x \in \tilde{L}(-\pi, \pi)$$

i a je ograničena linearna funkcionela na $\tilde{L}(-\pi, \pi)$. No ova je prema (9) jednaka nuli na fundamentalnom nizu tačaka (10). Zbog linearnosti, $a(x) = 0$ i na linealu nad nizom (10), a zbog neprekidnosti i na njegovoj adherenciji koja se poklapa sa $\tilde{L}(-\pi, \pi)$. Dakle, $a(x) = 0$ za svako $x \in \tilde{L}(-\pi, \pi)$, tj. (a_n) je nula-niz za svaku integrabilnu funkciju. Na istovetan način dokazuje se da je i (b_n) nula-niz.

Jedno od osnovnih pitanja u teoriji Fourierovih redova je u kom smislu red (8) prikazuje ishodnu funkciju x, tj. da li niz njegovih delimičnih suma

$$s_n(x; t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos \nu t + b_\nu \sin \nu t)$$

konvergira ka x u nekom smislu (obično, u srednjem ili uniformno, već prema tome šta pretpostavljamo o funkciji x sem njene integrabilnosti). Navešćemo prvo dva negativna rezultata.

Stav 10. *Postoji neprekidna funkcija x kojoj njen Fourierov red ne konvergira uniformno.*

Dokaz. Ako iskoristimo izraze za Fourierove koeficijente, niz delimičnih suma Fourierovog reda (8) može se napisati u obliku *Dirichletovog integrala*

(11) $$s_n(x; t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(\tau)\, D_n(\tau - t)\, d\tau,$$

gde je

(12) $$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} \cos \nu t = \frac{\sin (n + 1/2)\, t}{2 \sin t/2}.$$

Zbog neprekidnosti *Dirichletovog jezgra* D_n, jednačinom (11) definisan je niz ograničenih linearnih operatora (s_n) koji preslikavaju prostor $\tilde{C}[-\pi, \pi]$ u samog sebe. Zaista, ako uvedemo tzv. *Lebesgueove konstante*

$$L_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(\tau)|\, d\tau,$$

zbog periodiciteta od x i D_n, za svako $x \in \tilde{C}[-\pi, \pi]$ i za svako $t \in [-\pi, \pi]$ je

(13) $$|s_n(x; t)| = \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(\tau + t)\, D_n(\tau)\, d\tau \right| \leqslant L_n \|x\|_{\tilde{C}},$$

pa time i

$$\|s_n(x)\|_{\tilde{C}} \leqslant L_n \|x\|_{\tilde{C}}.$$

Znači,

$$\|s_n\| \leqslant L_n, \tag{14}$$

tj. (s_n) je niz ograničenih linearnih operatora.

Pokazaćemo da je

$$\|s_n\| = L_n \tag{15}$$

i da

$$L_n \to +\infty \quad (n \to \infty). \tag{15'}$$

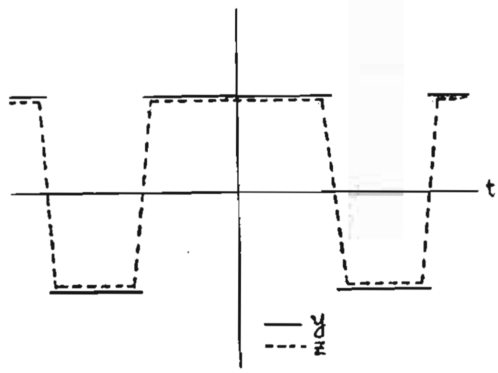
Na osnovu principa rezonancije postoji onda funkcija $\bar{x}$ u $\tilde{C}[-\pi, \pi]$ tako da $s_n(\bar{x})$ divergira u smislu metrike u $\tilde{C}[-\pi, \pi]$.

Da dokažemo (15), konstruisaćemo periodičku neprekidnu funkciju $z(t)$ tako da u (13) važi znak jednakosti. Kako funkcija $D_n(t)$ ima u razmaku $[-\pi, \pi]$ konačno mnogo oscilacija, funkcija

$$y(t) = \operatorname{sign} D_n(t)$$

uzimaće vrednost $+1$ ili -1 u konačno mnogo podrazmaka u $[-\pi, \pi]$ i vrednost 0 u konačno mnogo tačaka. Za ovu funkciju je

$$s_n(y; 0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(\tau)| \, d\tau = L_n.$$



No kako y ima samo konačno mnogo prekida u $[-\pi, \pi]$, moguće je, ma kako malo bilo $\varepsilon > 0$, konstruisati neprekidnu funkciju z sa $\|z\|_{\tilde{C}} = 1$ (vidi sliku) takvu da je

$$s_n(z; 0) > L_n - \varepsilon.$$

Međutim,

$$s_n(z; 0) \leqslant \|s_n\| \, \|z\|_{\tilde{C}} = \|s_n\|,$$

te je

$$\|s_n\| > L_n - \varepsilon,$$

što zajedno sa (14) daje $\|s_n\| = L_n$.

Ostaje još da pokažemo da $L_n \to +\infty$ $(n \to \infty)$. To sledi iz

$$L_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin (n+1/2) t}{2 \sin t/2} \right| dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin (n+1/2) t|}{\sin t/2} \, dt$$

$$\geqslant \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|\sin (n+1/2) t|}{t} \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{(n+1/2)\pi} \frac{|\sin u|}{u} \, du$$

$$> \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu\pi} \int_{(\nu-1)\pi}^{\nu\pi} |\sin t| \, dt = \frac{4}{\pi^2} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu},$$

gde smo prilikom trećeg prelaza iskoristili nejednačinu $\sin t/2 \leqslant t/2$ za $0 \leqslant t \leqslant \pi$.

Prema stavu 10 Fourierov red neprekidne funkcije ne mora uniformno da konvergira toj funkciji. Šta više, on ne mora ni u običnom smislu da konvergira funkciji, kao što to tvrdi

Stav 11. *Neka je t_0 proizvoljna tačka iz razmaka $[-\pi, \pi]$. Tada postoji neprekidna funkcija x takva da njen Fourierov red divergira u tački t_0.*

Dokaz. Bez ograničenja možemo pretpostaviti da je $t_0=0$. Tada se niz delimičnih suma Fourierovog reda svodi na

$$s_n(x; 0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(\tau) D_n(\tau)\, d\tau$$

i predstavlja niz ograničenih linearnih funkcionela na $\tilde{C}[-\pi, \pi]$. Slično kao kod dokaza stava 10 sledi da niz normi ovih funkcionela

$$\|s_n\|=L_n \rightarrow +\infty,$$

tako da na osnovu principa rezonancije postoji neprekidna periodična funkcija $\bar{x}$ takva da niz $s_n(\bar{x}; 0)$ divergira.

Činjenica da Fourierov red *svake* neprekidne periodične funkcije ne konvergira (obično ili uniformno), navodi na misao da se na Fourierov red primeni neki postupak zbirljivosti (odeljak 5.iii).

Stav 12 (Fejér). *Fourierov red neprekidne periodične funkcije $x(t)$ je C-zbirljiv ka $x(t)$ za svako $t \in[-\pi, \pi]$. Šta više, niz aritmetičkih sredina konvergira ka $x(t)$ uniformno na $[-\pi, \pi]$.*

Kako je niz aritmetičkih sredina Fourierovog reda jedan niz trigonometrijskih polinoma, to iz Fejérovog stava neposredno sledi da se svaka neprekidna periodična funkcija može uniformno aproksimirati trigonometrijskim polinomima (drugi Weierstrassov stav).

Dokaz stava 12. Niz aritmetičkih sredina Fourierovog reda od x je, prema (11) i (12), prikazan *Fejérovim integralom*

$$\tau_n(x; t)=\frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu(x; t)=\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(u) F_n(u-t)\, du, \tag{16}$$

gde je F_n *Fejérovo jezgro:*

$$F_n(t)=\frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} D_\nu(t)=\frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\sin(\nu+1/2)\, t}{2 \sin t/2}. \tag{17}$$

Množeći imenitelj i brojitelj poslednjeg izraza sa $2 \sin t/2$ i zamenjujući u brojitelju proizvode sinusa razlikama kosinusa, nalazimo

$$F_n(t)=\frac{1}{n+1} \frac{1-\cos(n+1)\, t}{(2 \sin t/2)^2}=\frac{2}{n+1}\left\{\frac{\sin(n+1)\, t/2}{2 \sin t/2}\right\}^2.$$

Sa (16) je definisan niz ograničenih linearnih operatora (τ_n) koji preslikavaju prostor $\tilde{C}[-\pi, \pi]$ u samog sebe. Blagodareći pozitivitetu Fejérovog jezgra je za svako $x \in \tilde{C}[-\pi, \pi]$

$$\|\tau_n(x)\|_{\tilde{C}}=\left\|\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(u+t) F_n(u)\, du\right\|_{\tilde{C}} \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(u)\, du \cdot\|x\|_{\tilde{C}},$$

tj.

$$\|\tau_n\| \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(u)\, du.$$

Kako je

$$\int_{-\pi}^{\pi} F_n(u)\,du = \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} D_\nu(u)\,du = \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}\pi = \pi,$$

iz poslednje nejednačine sledi da je niz normi $\|\tau_n\|$ ograničen ($\leqslant 1$).

S druge strane, za niz vektora (10) je

$$(18)\qquad \lim_{n\to\infty}\tau_n(\cos kt) = \cos kt \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty}\tau_n(\sin kt) = \sin kt \ (k=0, 1, \ldots).$$

Naime, svi Fourierovi koeficijenti funkcije $\cos kt$ su jednaki nuli sem k-tog koji je jednak jedinici, te iz

$$s_n(\cos kt) = \begin{cases} 0, & n<k \\ \cos kt, & n\geqslant k, \end{cases}$$

sledi za $n\geqslant k$

$$\tau_n(\cos kt) = \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n} s_\nu(\cos kt) = \frac{1}{n+1}\sum_{\nu=k}^{n}\cos kt$$

$$= \frac{n-k+1}{n+1}\cos kt \to \cos kt \ (n\to\infty).$$

Slično se dokazuje i druga relacija u (18).

Kako je niz vektora (10) fundamentalan u $\tilde{C}[-\pi, \pi]$ (primer 2.7), to na osnovu stava 1 postoji

$$\lim_{n\to\infty}\tau_n(x) = \tau(x) \quad \text{za svako} \quad x\in\tilde{C}[-\pi, \pi]$$

i $\tau(x)$ je ograničen linearan operator na $\tilde{C}[-\pi, \pi]$.

Ostaje da još pokažemo da je $\tau(x) = x$. Zato što je niz vektora (10) fundamentalan u $\tilde{C}[-\pi, \pi]$, postoji vektor

$$x_n = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kt + \beta_k\sin kt)$$

takav da je

$$\|x - x_n\| < \varepsilon$$

ma kako malo bilo $\varepsilon > 0$. Koristeći linearnost i ograničenost operatora τ, nalazimo

$$\|\tau(x) - x\| \leqslant \|\tau(x) - x_n\| + \|x_n - x\| = \|\tau(x - x_n)\| + \|x_n - x\|$$

$$\leqslant \|\tau\|\,\|x - x_n\| + \|x_n - x\| < (\|\tau\| + 1)\,\varepsilon,$$

te se desna strana može učiniti proizvoljno malom.

Vežbanja 5

1. Dokazati stav 4.
2. Dokazati stav 5.
3. Stav 6 dokazan je za konačan razmak (a, b). Pokazati da on važi i za beskonačan razmak.
4. Dokazati stav 7.

5. Niz (τ_n) aritmetičkih sredina reda $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ izraziti direktno pomoću članova reda. [Parcijalnom sumacijom nalazimo:

$$\tau_n = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{\nu} a_\mu = \frac{1}{n} \sum_{\mu=1}^{n} (n-\mu+1)\, a_\mu = \sum_{\mu=1}^{n} \left(1 - \frac{\mu-1}{n}\right) a_\mu .\Big]$$

6. Neka je P jedna podela razmaka $[a, b]$ ostvarena tačkama

$$a \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leqslant b.$$

Ako je $x(t)$ neprekidna funkcija na $[a, b]$, postoje različiti obrasci za *mehaničku kvadraturu* (trapezno pravilo, Simpsonov obrazac i drugi) koji omogućuju približno izračunavanje integrala $\int_a^b x(t)\,dt$ koristeći vrednosti funkcije u pojedinim tačkama razmaka $[a, b]$. Svi su oni oblika $\sum_{k=1}^{n} A_k\, x(t_k)$, gde su koeficijenti A_k na pogodan način izabrani. No kako jedan određen takav obrazac ne može davati proizvoljno dobru tačnost za *sve* neprekidne funkcije, razumljivo je da se umesto jednog posmatra čitav niz takvih obrazaca

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)}\, x(t_k^{(n)}) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

koji odgovaraju nizu podela P_n ostvarenih tačkama $t_k^{(n)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots)$. Pokazati: Potreban i dovoljan uslov da niz obrazaca (*) mehaničke kvadrature konvergira ka $\int_a^b x(t)\,dt$ za svaku neprekidnu funkciju jeste da on konvergira za svaki polinom i da postoji konstanta $M>0$ takva da je $\sum_{k=1}^{n} |A_k^{(n)}| < M$ (Szegö). [Niz (*) možemo shvatiti kao niz ograničenih linearnih funkcionela $x_n^*(x)$ na $C[a, b]$ čiji je niz normi $\|x_n^*\| = \sum_{k=1}^{n} |A_k^{(n)}|$. Primeniti Banach-Steinhausov stav.]

7. Ako su u (*) koeficijenti $A_k^{(n)}$ *pozitivni* za svako k i n, drugi od uslova Szegöovog stava sledi iz prvog. [Napisati da niz (*) konvergira ka $\int_a^b x(t)\,dt$ za funkciju $x(t) \equiv 1$.]

8. Pokazati da niz funkcionela

$$x_n^*(x) = n \int_a^b t^n\, x(t)\,dt \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

konvergira na prostoru $C[0, 1]$. Odrediti graničnu funkcionelu.

9. Pokazati direktno ili koristeći Toeplitzov stav da je sa

$$\eta_n = \frac{\xi_n + \xi_{n+1} + \cdots + \xi_{2n-1}}{n} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

definisan jedan permanentan postupak konvergencije za nizove.

10. Neka je c_0 prostor nula-nizova. Potreban i dovoljan uslov da je sa

$$\eta_m = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{mn}\, \xi_n$$

definisan ograničen linearan operator $y = Ax$ $(x = (\xi_\nu),\ y = (\eta_m))$ koji preslikava c_0 u c_0 jeste da matrica $[\alpha_{mn}]$ ispunjava uslove:

1° $\lim_{m\to\infty} a_{mn}=0$ $(n=0,1,\ldots)$,

2° $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{mn}|$ konvergira za svako $m=0,1,\ldots$,

3° $\sup_m \sum_{n=0}^{\infty} |a_{mn}|$ je konačan.

[Kao model može poslužiti dokaz Toeplitzovog stava.]

11. Pokazati da je sa

$$\eta_n=\frac{\lambda+1}{n^{\lambda+1}}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{\lambda}\xi_\nu \quad (n=1,2,\ldots;\ \lambda>-1)$$

definisan permanentan postupak konvergencije za nizove.

12. Abelove sredine reda $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ definisane su sa

$$A(r)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu r^\nu \quad (0\leqslant r<1)$$

i red $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ je Abel-zbirljiv ka s ako postoji $\lim_{r\to 1-0} A(r)$ i jednak je s. Pokazati da je niz (s_n) konvergentan Abelovim postupkom ka s ako postoji

$$\lim_{r\to 1-0}(1-r)\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu r^\nu \quad \text{i jednak je } s,$$

kao i da je Abelov postupak jedan permanentan postupak konvergencije.

13. Neka je

$$(*) \qquad \frac{1}{2}a_\nu+\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu\cos\nu t+b_\nu\sin\nu t)$$

Fourierov red funkcije $x(t)$. Pokazati da su Abelove sredine reda (*) date sa

$$(**) \qquad A(r;x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} P(r,u-t)\,x(u)\,du,$$

gde je

$$P(r,t)=\frac{1}{2}\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2},$$

i da za Abelovo jezgro $P(r,t)$ važi $\int_0^{2\pi}|P(r,u)|\,du=\pi$.

14. Za svaki brojni niz (r_n) $(0\leqslant r_n\to 1-0)$, sa (**) je definisan jedan niz ograničenih linearnih operatora $A_n(x)=A(r_n,x)$ na prostoru neprekidnih i periodičnih funkcija $\tilde{C}[0,2\pi]$ sa vrednostima u $\tilde{C}[0,2\pi]$. Primenjujući na ovaj niz princip konvergencije pokazati da Abelove sredine Fourierovog reda svake neprekidne funkcije $x(t)$ konvergiraju toj funkciji, i to uniformno po t u razmaku $[0,2\pi]$.

6. i. Slaba konvergencija

U Banachovom prostoru konvergencija niza tačaka definisana je metrikom koja izvire iz norme uvedene u prostoru. Ovu često zovemo *jaka konvergencija* (ili *konvergencija po normi*) da bismo je razlikovali od jedne druge vrste konvergencije koju uvodi

Definicija 1. Niz tačaka (x_n) u Banachovom prostoru X *slabo konvergira* ka x_0 ako je

$$\lim_{n\to\infty} x^*(x_n) = x^*(x_0)$$

za svaku ograničenu linearnu funkcionelu x^* definisanu na prostoru X, tj. za svako x^* iz X^*.

Ako niz vektora (x_n) slabo konvergira vektoru x_0 u X, pisaćemo

$$x_n \rightharpoonup x_0.$$

Odmah se postavlja pitanje odnosa između slabe i jake konvergencije u X. Da jaka konvergencija povlači slabu neposredno sledi iz

$$|x^*(x_n) - x^*(x_0)| \leqslant \|x^*\| \, \|x_n - x_0\|.$$

Obrnuto, u opštem slučaju, nije tačno. Na primer, u R^k slaba konvergencija povlači jaku, ali to nije slučaj u l_2.

Zaista, da u R^k iz

$$x_n = (\xi_\nu^n) \rightharpoonup x_0 = (\xi_\nu^0) \quad (n \to \infty)$$

sledi

$$\xi_\nu^n \to \xi_\nu^0 \quad (n \to \infty) \quad \text{za svako } \nu = 1, 2, \ldots, k,$$

što je ekvivalentno sa jakom konvergencijom u R^k (odeljak II.4), može se pokazati ako uočimo k specijalnih ograničenih linearnih funkcionela na R^k:

$$f_\nu(x) = \xi_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, k).$$

Naime, po definiciji slabe konvergencije, i za ove funkcionele mora da važi

$$f_\nu(x_n) \to f_\nu(x_0) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, k),$$

što se svodi na

$$\xi_\nu^n \to \xi_\nu^0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, k).$$

U R^k nema dakle razlike između jake i slabe konvergencije.

Da bismo pokazali da u l_2 iz slabe ne sledi jaka konvergencija, uočimo niz jediničnih vektora (e_n) u l_2. Ovaj niz ne konvergira (jako) u l_2, jer je $\|e_m - e_n\| = \sqrt{2}$ za svako $m \neq n$. Međutim, $e_n \rightharpoonup 0$. Naime, kako na l_2 ograničena linearna funkcionela x^* ima reprezentaciju

$$x^*(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \xi_\nu, \quad x = (\xi_\nu),$$

gde je $a = (\alpha_\nu)$ neka fiksirana tačka u $l_2^* = l_2$, to je

$$x^*(e_n) = \alpha_n \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

S obzirom da je $\|a\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < +\infty$, to $\underbrace{a_n \to 0}$ kada $n \to \infty$, te

$$x^*(e_n) \to 0 = x^*(0)$$

za svaku ograničenu linearnu funkcionelu na l_2.

Pimećujemo da iz slabe konvergencije u l_2 jedino sledi konvergencija svih nizova koordinata: ovo se može pokazati slično kao u R^k, koristeći prebrojivo mnogo ograničenih linearnih funkcionela $f_\nu(x) = \xi_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$.

Stav 1. *Svaki slabo konvergentan niz (x_n) je ograničen, tj. postoji konstanta M takva da je $\|x_n\| \leqslant M$.*

Dokaz. Po definiciji, iz slabe konvergencije niza (x_n) sledi da je

(1) $$\lim_{n\to\infty} |x^*(x_n)| \text{ konačan za svako } x^* \in X^*.$$

Na osnovu razmatranja u odeljku 4.iii $x^*(x_n) = (x^*, x_n)$ $(x^* \in X^*, x_n \in X, n = 1, 2, \ldots)$ možemo shvatiti i kao niz ograničenih linearnih funkcionela na X^* i tada (1) kazuje da za taj niz funkcionela

$$\text{postoji konačan } \lim_{n\to\infty} |(x^*, x_n)| \text{ na čitavom prostoru } X^*.$$

Na osnovu stava 5.2 niz normi ovih funkcionela je ograničen, tj.

$$\sup_{x^* \in X^*} \frac{|(x^*, x_n)|}{\|x^*\|_{X^*}} \leqslant M \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Po definiciji, izraz na levoj strani je $\|x_n\|_{X^{**}}$ (odeljak 4. iii). No pri dokazu stava 4.11 smo videli da je $\|x\|_{X^{**}} = \|x\|_X$ za svako $x \in X$, te iz poslednje nejednačine sledi $\|x_n\|_X \leqslant M$, što je trebalo pokazati.

Stav 2. *Potrebni i dovoljni uslovi da $x_n \rightharpoonup x_0$ u X jesu da je istovremeno:*

1° $\|x_n\| \leqslant M$,

2° $f(x_n) \to f(x_0)$ *za svako $f \in \Delta$, gde je Δ jedan svuda gust skup tačaka u X^*.*

Dovoljno je pretpostaviti da je skup Δ fundamentalan u X^*.

Dokaz stava 2. Da je uslov 1° potreban sledi na osnovu stava 1. Za 2° je to jasno.

Da bismo dokazali da su uslovi 1° i 2° dovoljni, uočimo proizvoljnu funkcionelu x^* iz X^*. Zbog 2° postoji za svako $\varepsilon > 0$ funkcionela $f \in \Delta$ takva da je

$$\|x^* - f\|_{X^*} < \varepsilon/2M.$$

Prema tome,

$$\begin{aligned} |x^*(x_n) - x^*(x_0)| &= |x^*(x_n - x_0)| \\ &\leqslant |f(x_n - x_0)| + |(x^* - f)(x_n - x_0)| \\ &\leqslant |f(x_n) - f(x_0)| + \|x^* - f\|_{X^*} \|x_n - x_0\|_X \\ &< |f(x_n) - f(x_0)| + \frac{\varepsilon}{2M} 2M, \end{aligned}$$

te je na osnovu 2°

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, |x^*(x_n)-x^*(x_0)| \leqslant \varepsilon.$$

Kako $\varepsilon > 0$ možemo birati proizvoljno malo, odavde sledi

$$x^*(x_n) \to x^*(x_0)$$

za proizvoljno x^* iz X^*, šta znači da niz x_n slabo konvergira ka x_0.

Ispitaćemo sada šta slaba konvergencija znači u pojedinim konkretnim prostorima. U tom pogledu primećujemo da iz reprezentacije ograničene linearne funkcionele u nekom određenom prostoru neposredno slede potrebni i dovoljni uslovi za slabu konvergenciju u tom prostoru. Takav iskaz eksplicitno ćemo formulisati samo u prostoru c_0. Čitaocu prepuštamo da to učini i u drugim prostorima u kojima mu je poznata reprezentacija ograničene linearne funkcionele.

Potreban i dovoljan uslov da niz $x_n = (\xi_\nu^n) \to x_0 = (\xi_\nu^0)$ *u prostoru* c_0 *jeste da važi*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \eta_\nu \xi_\nu^n = \sum_{\nu=1}^{\infty} \eta_\nu \xi_\nu^0 \quad \textit{za svako } (\eta_\nu) \in l.$$

Međutim, s gledišta da slabu konvergenciju u c_0 svedemo na što elementarnije pojmove, od većeg interesa je

Stav 3. *Potrebni i dovoljni uslovi da niz* $x_n = (\xi_\nu^n) \in c_0$ *slabo konvergira ka* $x_0 = (\xi_\nu^0) \in c_0$ *jesu da je*

1° $\|x_n\|_{c_0} \leqslant M$,

2° $\xi_\nu^n \to \xi_\nu^0$ $(n \to \infty)$ *za svako* $\nu = 1, 2, \ldots$

Dokaz. Uslovi 1° i 2° su potrebni: prvi na osnovu stava 1, a drugi, jer se

$$\lim_{n\to\infty} x^*(x_n) = x^*(x_0)$$

svodi na 2° ako za x^* izaberemo niz funkcionela

$$f_\nu(x) = \xi_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Da su uslovi 1° i 2° dovoljni sledi na osnovu stava 2, ako u ovome za Δ izaberemo lineal nad funkcionelama (2). Naime, ovaj je svuda gust u $c_0^* = l$, jer funkcionelama f_ν u l odgovaraju vektori e_ν koji obrazuju fundamentalan niz u l.

Stav 4. *Potrebni i dovoljni uslovi da niz* $x_n = (\xi_\nu^n) \in l_p\, (p > 1)$ *slabo konvergira ka* $x_0 = (\xi_\nu^0) \in l_p$ *jesu da je*

1° $\|x_n\|_{l_p} \leqslant M$,

2° $\xi_\nu^n \to \xi_\nu^0$ $(n \to \infty)$ *za svako* $\nu = 1, 2, \ldots$

Dokaz je analogan dokazu stava 3.

Na ovom mestu je od interesa primetiti da je u prostoru l slaba konvergencija ekvivalentna jakoj. Dokaz ove činjenice se može naći u [3].

Stav 5. *Potrebni i dovoljni uslovi da niz neprekidnih funkcija* (x_n) *slabo konvergira neprekidnoj funkciji* x_0 *jesu da je*

1° $\|x_n\|_C \leqslant M$,

2° $x_n(t) \to x_0(t)$ $(n \to \infty)$ *za svako* $t \in [a, b]$.

Dokaz. Da je uslov 1° potreban, sledi na osnovu stava 1. Kako $x_n \rightharpoonup x_0$ u C, znači da $x^*(x_n) \to x^*(x_0)$ za svako $x^* \in C^*$, to ovo mora važiti i za specijalnu ograničenu linearnu funkcionelu $f(x) = x(t_0)$, gde je t_0 proizvoljna (ali fiksirana) tačka iz $[a, b]$. Dakle,

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0),$$

što se svodi na

$$\lim_{n \to \infty} x_n(t_0) = x_0(t_0) \quad \text{za} \quad t_0 \in [a, b].$$

No kako t_0 može biti ma koja tačka iz $[a, b]$, odavde sledi da je uslov 2° potreban.

Da, obrnuto, uslovi 1° i 2° zajedno povlače slabu konvergenciju niza x_n ka x_0 u prostoru C, sledi iz činjenice što su ti uslovi jedan dovoljan kriterijum kada se u Riemann-Stieltjesovom integralu sme izvršiti granični prelaz pod znakom integrala

$$\lim_{n \to \infty} x^*(x_n) = \lim_{n \to \infty} \int_a^b x_n(t)\, dg(t) = \int_a^b x_0(t)\, dg(t) = x^*(x_0),$$

i to za svaku funkciju ograničene varijacije g (vežbanje III.5.13).

Stav 6. *Potrebni i dovoljni uslovi da niz* $x_n \in L_p (p > 1)$ *slabo konvergira ka* $x_0 \in L_p$ *jesu da je*

1° $\|x_n\|_{L_p} \leqslant M$,

2° $\int_a^u x_n(t)\, dt \to \int_a^u x_0(t)\, dt$ $(n \to \infty)$ *za svako* $u \in [a, b]$.

Dokaz. Uslov 1° je potreban na osnovu stava 1. Da je i uslov 2° potreban, možemo ovako uvideti. U L_p niz $x_n \rightharpoonup x_0$ ako

$$\int_a^b x_n(t)\, y(t)\, dt \to \int_a^b x_0(t)\, y(t)\, dt \tag{3}$$

za svako $y \in L_q (1/p + 1/q = 1)$. Dakle, (3) važi i kada y pripada skupu $D \subset L_q$ karakterističnih funkcija razmaka (a, u) $(a \leqslant u \leqslant b)$, što se svodi na uslov 2°.

Da su uslovi 1° i 2° dovoljni, sledi na osnovu stava 2, ako u ovome za Δ izaberemo lineal nad D. Naime, ovaj je svuda gust u $L_p^* = L_q$ (videti dokaz stava III.8.3).

Vrlo jednostavan odnos postoji između jake i slabe konvergencije u prostorima l_p i $L_p (p > 1)$.

Stav 7. *U prostorima* l_p *i* L_p $(p > 1)$ *niz* (x_n) *jako konvergira ka* x_0 *tada i samo tada ako*

1° x_n *slabo konvergira ka* x_0,

2° $\|x_n\| \to \|x_0\|$.

Dokaz ćemo, jednostavnosti radi, dati samo za $p=2$, i to u prostoru L_p. (Za $p\neq 2$ videti, na primer, [9]). Neka $x_n\to x_0$. Da tada važi 1° smo već pokazali, a 2° sledi iz

$$\big|\,\|x_n\|-\|x_0\|\,\big|\leqslant\|x_n-x_0\|.$$

Obrnuto, neka važi 1° i 2°. Da tada $x_n\to x_0$ sledi iz

$$\|x_n-x_0\|_{L_2}^2=\int_a^b[x_n-x_0]^2\,dt$$

$$(4)\qquad =\int_a^b x_n^2\,dt-2\int_a^b x_n x_0\,dt+\int_a^b x_0^2\,dt.$$

Naime, kako $x_0\in L_2$, to je

$$\int_a^b x\,x_0\,dt=x_0^*(x)\qquad(x\in L_2)$$

jedna ograničena linearna funkcionela na L_2. Na osnovu 1° mora dakle i

$$x_0^*(x_n)\to x_0^*(x_0)$$

tj.

$$(5)\qquad \int_a^b x_n x_0\,dt\to\int_a^b x_0 x_0\,dt.$$

Prema (5) i 2°, sledi onda iz (4) da $\|x_n-x_0\|_{L_2}\to 0$ kada $n\to\infty$.

Kao što smo pomoću jake konvergencije uveli pojam (relativno) kompaktnog skupa, moguće je koristeći slabu konvergenciju govoriti o (relativno) slabo kompaktnim skupovima.

Definicija 2. Skup $K\subset X$ je *(relativno) slabo kompaktan* u X ako se iz svakog niza tačaka u K može izdvojiti delimični niz koji slabo konvergira nekoj tački u K (X).

Definicija 3. Niz tačaka (x_n) je *slab Cauchyev niz* u X ako je $x^*(x_n)$ Cauchyev niz za svako $x^*\in X^*$.

Kako je $x^*(x_n)$ kao Cauchyev niz realnih ili kompleksnih brojeva uvek konvergentan, to je (x_n) slab Cauchyev niz u X tada i samo tada ako

$$(6)\qquad \text{postoji}\ \lim_{n\to\infty}x^*(x_n)\quad\text{za svako}\quad x^*\in X^*.$$

Primećujemo da se ovde, za razliku od slabe konvergencije, ne zahteva postojanje tačke $x_0\in X$ tako da $x^*(x_n)\to x^*(x_0)$.

Iz (6) sledi da je svaki slabo konvergentan niz jedan slab Cauchyev niz. Obrnuto nije tačno. Na primer, u prostoru $C[0,1]$ niz neprekidnih funkcija $x_n(t)=t^n$ konvergira (u običnom smislu) funkciji $x^0(t)$ koja ima prekid u tački $t=1$. Na osnovu stava 5 sledi zato da niz (x_n) nije slabo konvergentan. Međutim, on je jedan slab Cauchyev niz. Zaista,

$$x^*(x_m)-x^*(x_n)=\int_0^1[x_m(t)-x_n(t)]\,dg(t)\to 0\qquad(m,n\to\infty)$$

za svaku funkciju ograničene varijacije g.

Pri dokazu stava 1 iskoristili smo jedino činjenicu da postoji $\lim\limits_{n\to\infty}x^*(x_n)$ za svako $x^*\in X$. Prema tome, i *svaki slab Cauchyev niz je ograničen.*

Definicija 4. Banachov prostor je *slabo kompletan* ako je svaki slab Cauchyev niz u njemu slabo konvergentan.

Videli smo da prostor $C[a, b]$ nije slabo kompletan. Međutim, prostori l_p i L_p $(p \geqslant 1)$ su slabo kompletni. Za $p > 1$ to sledi iz stava 8, a za $p = 1$ direktan dokaz se može naći u [9].

Stav 8. *Svaki refleksivan Banachov prostor je slabo kompletan.*

Dokaz. Neka je (x_n) jedan slab Cauchyev niz u X, što znači da je

(7) (x^*, x_n) Cauchyev niz za svako $x^* \in X^*$.

No (x^*, x_n) možemo shvatiti (odeljak 4.iii) i kao niz ograničenih linearnih funkcionela $f_n(x^*)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ na X^*, čije su norme $\|f_n\| = \|x_n\|_{X^{**}} = \|x_n\|_X$. Prema (7), niz $f_n(x^*)$ konvergira za svako $x^* \in X^*$, te definiše na X^* funkcionelu

(8) $$f(x^*) = \lim_{n \to \infty} (x^*, x_n).$$

Da je ova linearna, lako je uvideti. Njena ograničenost sledi graničnim prelazom iz $\|f_n\| = \|x_n\|_X \leqslant M$ ((x_n) je kao slab Cauchyev niz ograničen). Dakle, f je ograničena linearna funkcionela na X^*, tj. $f \in X^{**}$. No kako se kod refleksivnih prostora X^{**} može identifikovati sa X, to u X postoji tačka x_0 takva da je $f(x^*) = (x^*, x_0)$. Prema (8) je, znači,

$$\lim_{n \to \infty} (x^*, x_n) = (x^*, x_0) \quad \text{za svako } x^* \in X^*,$$

tj. $x_n \rightharpoonup x_0$.

Na osnovu stava 3.3 ograničen linearan operator je (jako) neprekidan, tj. iz

$$x_n \to x_0 \quad \Rightarrow \quad Ax_n \to Ax_0.$$

Stav 9 tvrdi da je ograničen linearan operator neprekidan i u smislu slabe konvergencije.

Stav 9. *Ograničen linearan operator* $A: X \to Y$ *je slabo neprekidan, tj. iz*

$$x_n \rightharpoonup x_0 \quad \Rightarrow \quad Ax_n \rightharpoonup Ax_0.$$

Dokaz. Neka je $y^*(y)$ proizvoljna ograničena linearna funkcionela na Y, tj. $y^* \in Y^*$. Tada je

$$f(x) = y^*(Ax)$$

ograničena linearna funkcionela na X (odeljak 4.iv), te pretpostavka da $x_n \rightharpoonup x_0$ obuhvata i

$$f(x_n) \to f(x_0),$$

tj.

$$y^*(Ax_n) \to y^*(Ax_0) \quad \text{za svako } y^* \in Y^*,$$

što znači da $Ax_n \rightharpoonup Ax_0$.

6.ii. Vrste konvergencije niza operatora i niza funkcionela

Neka je $L(X, Y)$ Banachov prostor ograničenih linearnih operatora A koji preslikavaju X u Y (odeljak 3.ii). Posmatrajući niz operatora (A_n) kao niz *vektora* u $L(X, Y)$, može se u $L(X, Y)$ govoriti, kao i u svakom Banachovom prostoru, o slaboj i jakoj konvergenciji niza (A_n). Međutim, u tom smislu uopšte nećemo govoriti o slaboj konvergenciji, a jaku ćemo, isključivo ovde u prostoru $L(X, Y)$, nazivati uniformna konvergencija. Sem uniformne konvergencije, u prostoru $L(X, Y)$ se na *poseban* način uvodi slaba i jaka konvergencija niza operatora (A_n) preko slabe i jake konvergencije niza vektora $(A_n x)$ u prostoru-slici Y. Preciznije:

Definicija 5. Neka je $A_n \in L(X, Y)$ $(n=1, 2, \ldots)$.

Niz operatora (A_n) *uniformno konvergira* operatoru A ako

$$\|A_n - A\| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Niz operatora (A_n) *jako konvergira* operatoru A ako

$$A_n x \to Ax \ (n \to \infty) \quad \text{za svako } x \in X.$$

Niz operatora (A_n) *slabo konvergira* operatoru A ako

$$A_n x \rightharpoonup Ax \ (n \to \infty) \quad \text{za svako } x \in X.$$

Za uniformnu, jaku i slabu konvergenciju koristićemo redom oznake: $A_n \rightrightarrows A$, $A_n \to A$ odnosno $A_n \rightharpoonup A$.

Iz definicije neposredno sledi da jaka konvergencija niza operatora povlači slabu konvergenciju. Da iz uniformne konvergencije niza operatora sledi jaka konvergencija vidi se iz

$$\|A_n x - Ax\| \leqslant \|A_n - A\| \, \|x\|.$$

Naziv uniformna konvergencija niza operatora nalazi opravdanje u sledećem stavu.

Stav 10. *Niz operatora* $A_n \in L(X, Y)$ *konvergira uniformno operatoru* A *tada i samo tada ako* $A_n x \to Ax$ *uniformno na* $\{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$.

Dokaz. Ako $A_n \rightrightarrows A$, tada svakom $\varepsilon > 0$ odgovara prirodni broj N tako da je

$$\|A_n - A\| < \varepsilon \quad \text{za } n > N.$$

No tada je za svako x koje zadovoljava $\|x\| \leqslant 1$,

$$\|A_n x - Ax\| \leqslant \|A_n - A\| \, \|x\| < \varepsilon \quad \text{za} \quad n > N,$$

što znači da $A_n x \to Ax$ uniformno na jediničnoj kugli, jer N ne zavisi od položaja tačke x.

Obrnuto, pretpostavimo na $A_n x \to Ax$ uniformno na $\{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$. Tada svakom $\varepsilon > 0$ odgovara prirodni broj N, nezavisan od izbora tačke x u jediničnoj kugli, tako da je

$$\|A_n x - Ax\| < \varepsilon \quad \text{za } n > N.$$

Ako je $z \neq 0$ proizvoljan vektor u X, tada $x = z/\|z\|$ leži u jediničnoj kugli, te je

$$\left\| A_n \frac{z}{\|z\|} - A \frac{z}{\|z\|} \right\| < \varepsilon \quad n > N,$$

tj.

$$\|A_n z - Az\| < \varepsilon \|z\| \quad \text{za } n > N \quad \text{i za svako } z \in X, \tag{9}$$

jer (9) očigledno važi i kada je $z=0$. Iz (9) sledi

$$\|A_n - A\| < \varepsilon \quad \text{za} \quad n > N,$$

što znači da $A_n \rightrightarrows A$.

Primećujemo da Banach-Steinhausov stav (odeljak 5.i) daje potrebne i dovoljne uslove za jaku konvergenciju niza operatora.

Jedan važan specijalan slučaj prethodnih razmatranja imamo kada je u $L(X, Y)$ prostor-slika Y skup realnih ili kompleksnih brojeva, tj. kada je $L(X, Y) = X^*$. Tada imamo posla za nizom funkcionela, umesto sa nizom operatora. Od tri uvedene vrste konvergencije — uniformne, jake i slabe — poslednje dve se poklapaju, jer je prostor-slika skup brojeva u kome nema razlike između jake i slabe konvergencije. Uobičajeno je da se jaka odnosno slaba konvergencija niza *funkcionela* naziva slaba konvergencija, dok se uniformnoj konvergenciji niza *funkcionela* daje ime jaka konvergencija. Detaljnije:

Definicija 6. Neka je (x_n^*) niz ograničenih linearnih funkcionela na X. Niz funkcionela (x_n^*) *jako konvergira* funkcioneli x_0^* ako

$$\|x_n^* - x_0^*\|_{X^*} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Niz funkcionela (x_n^*) *slabo konvergira* funkcioneli x_0^* ako

$$x_n^*(x) \to x_0^*(x) \ (n \to \infty) \quad \text{za svako } x \in X.$$

Za jaku odnosno slabu konvergenciju niza funkcionela koristimo oznaku $x_n^* \to x_0^*$, odnosno $x_n^* \rightharpoonup x_0^*$.

Iz jake konvergencije niza funkcionela očigledno sledi slaba konvergencija.

Primećujemo da Banach-Steinhausov stav daje potrebne i dovoljne uslove za slabu konvergenciju niza funkcionela (vežbanje 6). U konkretnim prostorima otuda slede specijalni kriterijumi za slabu konvergenciju niza funkcionela (vežbanja 7—10).

Nije bez interesa ukazati na simetriju koja postoji između definicije slabe konvergencije niza vektora i slabe konvergencije niza funkcionela; s formalne tačke gledišta tada je pogodnije pisati (x^*, x) umesto $x^*(x)$.

Sem slabe konvergencije niza funkcionela date definicijom 6 može se uvesti i slaba konvergencija niza funkcionela shvaćenog kao niz vektora u X^*, tj. u smislu definicije 1.

Definicija 7. Niz funkcionela (x_n^*) na X *-slabo konvergira funkcioneli x_0^* ako

$$f(x_n^*) \to f(x_0^*) \ (n \to \infty) \quad \text{za svako } f \in X^{**}.$$

Kako je $X \subset X^{**}$, to iz *-slabe konvergencije niza funkcionela sledi slaba konvergencija tog niza. Jedino kada je prostor X refleksivan, tj. $X = X^{**}$, ova dva tipa konvergencije se poklapaju.

Vežbanja 6

1. Niz vektora može slabo da konvergira samo jednoj granici.
2. Ako $x_n \rightharpoonup x_0$ i $y_n \rightharpoonup y_0$, tada $\lambda x_n + \mu y_n \rightharpoonup \lambda x_0 + \mu y_0$.
3. Niz (e_n) slabo konvergira u c_0 i l_p $(p > 1)$ nula-vektoru, ali ne i u l.

4. Za koje vrednosti parametra α niz neprekidnih funkcija

$$x_n(t)=\frac{n^\alpha \sqrt{t}}{1+nt^2}$$

slabo konvergira u $C[0, 1]$. [Iskoristiti stav 5.]

5. Dokazati stav 4.

6. Potreban i dovoljan uslov da niz funkcionela (x_n^*) na X slabo konvergira funkcioneli x_0^* jeste:

1° $\|x_n^*\|<K$,

2° $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^*(x)=x_0^*(x)$ u svakoj tački jednog u X svuda gustog skupa.

7. Potreban i dovoljan uslov da niz funkcionela na $L_p(a, b)$ $(p>1)$

$$x_n^*(x)=\int_a^b y_n(t)\, x(t)\, dt \quad (y_n\in L_q(a, b),\ 1/p+1/q=1)$$

slabo konvergira funkcioneli

$$x_0^*(x)=\int_a^b y_0(t)\, x(t)\, dt \quad (y_0\in L_q(a, b),\ 1/p+1/q=1)$$

(pozivamo se na reprezentaciju ograničenih linearnih funkcionela na prostoru $L_p(a, b)$), jeste:

1° $\|y_n\|_{L_q}<K$,

2° $\int_a^u y_n(t)\, dt \to \int_a^u y_0(t)\, dt$ za svako $u\in(a, b)$.

[Kao model može poslužiti dokaz stava 6.]

8. Ukoliko je $p=1$ u iskazu vežbanja 7, uslov 1° treba zameniti sa $\|y_n\|_M<K$.

9. Potreban i dovoljan uslov da niz funkcionela na l_p $(p>1)$

$$x_n^*(x)=\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k^{(n)} \xi_k \quad (x=(\xi_k),\ y_n=(\eta_k^{(n)})\in l_q,\ 1/p+1/q=1)$$

slabo konvergira funkcioneli

$$x_0^*(x)=\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k^{(0)} \xi_k \quad (y_0=(\eta_k^{(0)})\in l_q, 1/p+1/q=1),$$

jeste:

1° $\|y_n\|_{l_q}<K$,

2° $\eta_k^{(n)}\to\eta_k^{(0)}$ $(n\to\infty)$ za svako $k=1, 2, \ldots$

10. Ukoliko je $p=1$ u iskazu vežbanja 9, uslov 1° treba zameniti sa $\|y_n\|_m<K$.

7.i. Princip otvorenog preslikavanja

Uz Hahn-Banachov i Banach-Steinhausov stav, *princip otvorenog preslikavanja* je treći fundamentalan iskaz u teoriji Banachovog prostora.

Stav 1. *Neka su X i Y Banachovi prostori i neka je A ograničen linearan operator koji preslikava X na Y. Tada je A otvoreno preslikavanje, tj. slika svakog otvorenog skupa iz X je otvoren skup u Y.*

Primećujemo da je pretpostavka da A preslikava X na Y ovde bitna.

Dokaz stava 1. U X ćemo kuglu sa centrom u tački x_0 i poluprečnika ϱ označavati sa $x_0+\varrho U$, gde je U jedinična kugla u X. Slično značenje imaju V i $y_0+\varrho V$ u Y.

Pokazaćemo da svakom operatoru A koji zadovoljava uslove stava 1 odgovara broj $\alpha>0$ takav da slika kugle U operatorom A sadrži kuglu αV, tj.

$$A(U)\supset\alpha V. \tag{1}$$

Iz (1) neposredno sledi tvrđenje stava. Zaista, neka je G otvoren skup u X i neka je $y_0=Ax_0$ $(x_0\in G)$ proizvoljna tačka u $A(G)$. Zbog otvorenosti skupa G, postoji kugla $x_0+\varrho U$ koja čitava leži u G. S obzirom na linearnost operatora i na osnovu (1)

$$A(G)\supset A(x_0+\varrho U)=A x_0+\varrho A(U)\supset y_0+\varrho\alpha V,$$

tj. kugla $y_0+\varrho\alpha V$ leži u $A(G)$. Znači, $A(G)$ je otvoren skup.

Pređimo na dokaz tvrđenja (1). Kako A preslikava X na Y, svakom $y\in Y$ odgovara $x\in X$ tako da je $y=Ax$. Ako ta tačka x leži u kU za neko $k\,(=1,2,\dots)$, tačka y pripadaće skupu $A(kU)$; znači, Y se može prikazati kao unija skupova $A(kU)$ $(k=1,2,\dots)$. S obzirom da je Y kao kompletan prostor druge kategorije u samom sebi (stav II.4.9), to na osnovu stava II.2.12 u bar jednom od skupova $\overline{A(kU)}$ postoji neprazan otvoren skup G.

Neka je $y_0\in G$ i izaberimo $\beta>0$ tako malo da kugla $y_0+\beta V\subset G$. Kako $G\subset\overline{A(kU)}$, to se svaka tačka iz G može prikazati kao granična vrednost niza (Ax_n), gde $x_n\in kU$. Postoje, dakle, nizovi (x_n') i (x_n'') u kU takvi da

$$Ax_n'\to y_0 \quad \text{i} \quad Ax_n''\to y_0+y \quad \text{za svako } y\in\beta V.$$

No tada za svako $y\in\beta V$ postoji i niz $x_n\,(=x_n''-x_n')$ takav da je

$$\|x_n\|<2k \quad \text{i} \quad Ax_n\to y. \tag{2}$$

Neka je sada y proizvoljna tačka iz Y. Kako tada tačka $\beta y/\|y\|$ pripada βV, to na osnovu (2) i linearnosti operatora A sledi da postoji niz $z_n\,(=\|y\|x_n/\beta)$ takav da je

$$\|z_n\|<\frac{2k}{\beta}\|y\| \quad \text{i} \quad Az_n\to y.$$

Stavimo li $2k/\beta=1/\alpha$, možemo dakle tvrditi: Svakom $y\in Y$ i svakom $\varepsilon'>0$ odgovara tačka $x\in X$, tako da je

$$\|x\|<\frac{1}{\alpha}\|y\| \quad \text{i} \quad \|y-Ax\|<\varepsilon'. \tag{3}$$

Kada bi ovo važilo i za $\varepsilon'=0$, imali bismo, u stvari, tvrđenje (1), jer bi svakom $y\in\alpha V$ odgovarala tačka x u U takva da je $Ax=y$, te bi $A(U)\supset\alpha V$.

Neka je y fiksirana tačka u αV i neka je $\varepsilon>0$. Na osnovu (3) sa $\varepsilon'=\alpha\varepsilon/2$ postoji tada tačka x_1 tako da je

$$\|x_1\|<1 \quad \text{i} \quad \|y-Ax_1\|<\alpha\varepsilon/2. \tag{4}$$

Ako sada na vektor $y_1 = y - Ax_1$ primenimo (3) sa $\varepsilon' = \alpha\varepsilon/2^2$ i vodimo računa o drugoj nejednačini u (4), slediće da postoji tačka x_2 tako da je

$$\|x_2\| < \frac{1}{\alpha}\|y_1\| < \varepsilon/2 \quad \text{i} \quad \|y_1 - Ax_2\| = \|y - Ax_1 - Ax_2\| < \alpha\varepsilon/2^2.$$

Produžujuću ovaj postupak, odredićemo postupno niz tačaka (x_n) tako da je

$$\|x_n\| < \varepsilon/2^{n-1} \quad \text{i} \quad \|y - Ax_1 - \cdots - Ax_n\| < \alpha\varepsilon/2^n. \tag{5}$$

Stavimo $s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. Na osnovu prve od nejednačina (5) je $(m > n)$

$$\|s_m - s_n\| \leqslant \|x_{n+1}\| + \|x_{n+2}\| + \cdots + \|x_m\| < \varepsilon\, 2^{-n}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\right) = \varepsilon/2^{n-1} \to 0,$$

tj. (s_n) je Cauchyev niz, te $s_n \to x \in X$. Sem toga,

$$\|s_n\| \leqslant \|x_1\| + \|x_2\| + \cdots + \|x_n\| < 1 + \varepsilon\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\right) < 1 + \varepsilon,$$

tj.

$$\|x\| < 1 + \varepsilon.$$

Zbog neprekidnosti operatora A,

$$As_n \to Ax,$$

a na osnovu druge od nejednačina u (5),

$$As_n \to y.$$

Prema tome,

$$Ax = y.$$

Pokazali smo, dakle, da svakom $y \in \alpha V$ i svakom $\varepsilon > 0$ odgovara tačka $x \in X$, tako da je

$$\|x\| < 1 + \varepsilon \quad \text{i} \quad Ax = y.$$

Drugim rečima,

$$A((1+\varepsilon)\,U) \supset \alpha V,$$

ili, što je isto,

$$A(U) \supset \frac{1}{1+\varepsilon}\,\alpha V \text{ za svako } \varepsilon > 0. \tag{6}$$

Kako je unija kugli $\frac{\alpha}{1+\varepsilon} V$ preko svih $\varepsilon > 0$ jednaka αV, iz (6) sledi tvrđenje (1). Time je stav 1 dokazan.

Na osnovu principa otvorenog preslikavanja neposredno sledi stav o *ograničenom inverznom operatoru:*

Stav 2. *Neka su X i Y Banachovi prostori i neka je A ograničen linearan operator koji preslikava X na Y. Ako A ima inverzan operator A^{-1} na Y, tada je ovaj ograničen.*

Pretpostavka da A preslikava X na Y je ovde bitna.

Dokaz stava 2. Prema pretpostavci A uspostavlja biunivoku korespondenciju između X i Y. Znači,

$$(A^{-1})^{-1}(G) = A(G) \tag{7}$$

za svaki skup $G \subset X$. Specijalno, ako je G otvoren skup u X, tada je, na osnovu stava 1 i na osnovu (7), i $(A^{-1})^{-1}(G)$ otvoren skup, a to znači da je operator A^{-1} neprekidan (stav II.6.1).

Značaj iskaza stava 2 ilustrovaćemo na nekim pitanjima teorije diferencijalnih jednačina i teorije Fourierovih redova.

Neka je X skup neprekidnih funkcija x koje imaju neprekidan prvi i drugi izvod na $[a, b]$ i koje zadovoljavaju određene početne ili granične uslove (na primer, tipa $x(a) = x'(a) = 0$ ili $x(a) = x(b) = 0$). Lako je uvideti da je X Banachov prostor ako u ovome uvedemo kao normu

$$\|x\| = \max\{\|x\|_C, \|x'\|_C, \|x''\|_C\}.$$

Ako su a_1, a_2 i a_3 fiksirane funkcije iz $C[a, b]$, tada je jednačinom

$$y(t) = a_1(t)\,x''(t) + a_2(t)\,x'(t) + a_3(t)\,x(t) \tag{8}$$

definisan linearni (diferencijalni) operator A koji preslikava X u $Y = C$. Operator A je i ograničen na X, jer je

$$\|y\|_Y \leqslant (\|a_1\|_C + \|a_2\|_C + \|a_3\|_C)\,\|x\|_X.$$

Pretpostavimo da je funkcija y data i da se traži x (uz navedene početne ili granične uslove) i da diferencijalna jednačina (8) ima jedno jedino rešenje $x \in X$ za svako $y \in Y$, tj. da operator A ima inverzan operator A^{-1} (na Y). Na osnovu stava 2, operator A^{-1} je neprekidan, a to kvalitativno znači da će mala promena slobodnog člana y u diferencijalnoj jednačini izazvati male promene njenog rešenja x, tj. da postoji stabilnost rešenja u odnosu na slobodni član i to nezavisno od osobina koeficijenata diferencijalne jednačine.

Na osnovu Riemann-Lebesgueovog stava (stav 5.9), Fourierovi koeficijenti funkcije $x \in \tilde{L}(-\pi, \pi)$,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\cos nt\,dt \quad \text{i} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\sin nt\,dt \quad (n = 0, 1, \ldots) \tag{9}$$

obrazuju nula-niz. Zato ima smisla postaviti pitanje: Ako su (a_n) i (b_n) dva proizvoljna nula-niza, jesu li oni Fourierovi koeficijenti, tj. da li postoji funkcija $x \in \tilde{L}(-\pi, \pi)$ takva da važi (9)? Odgovor na ovo pitanje je negativan.

Ne smanjujući opštost možemo se ograničiti na parne (ili neparne) funkcije x, jer se proizvoljna funkcija iz $\tilde{L}(-\pi, \pi)$ može prikazati kao zbir jedne parne i jedne neparne funkcije:

$$x(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)] + \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)].$$

Za parne funkcije x svi koeficijenti b_n su jednaki nuli, te Riemann-Lebesgueov stav možemo i ovako iskazati: Prvom jednačinom u (9) definisan je operator a koji prostor $\tilde{L}(-\pi, \pi; P)$ parnih integrabilnih funkcija x preslikava u prostor c_0. Da je a linearan operator je jasno; njegova ograničenost sledi iz

$$\|ax\|_{c_0} = \sup_{1 \leqslant n < \infty}\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\cos nt\,dt\right|$$
$$\leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x(t)|\,dt = \frac{1}{\pi}\|x\|_{\tilde{L}}\,.$$

Naše tvrđenje svodi se na

Stav 3. *Operator a definisan prvom od jednačina* (9) *preslikava* $\tilde{L}(-\pi, \pi; P)$ *biunivoko u* c_0, *ali ne i na* c_0.

Dokaz. Prema primeru 4.7,

$$ax = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0,$$

tj. operator a preslikava $\tilde{L}(-\pi, \pi; P)$ biunivoko u c_0. Kada bi operator a preslikavao $\tilde{L}(-\pi, \pi; P)$ biunivoko na c_0, tj. kada bi a ima inverzan operator a^{-1} (na c_0), ovaj bi na osnovu stava 2 morao da bude neprekidan na c_0. No tada bi, na osnovu stava 3.6, postojao broj $k > 0$ takav da je

$$\|ax\|_{c_0} \geqslant k\|x\|_{\tilde{L}} \quad \text{za svako } x \in \tilde{L}(-\pi, \pi; P). \tag{10}$$

Uočimo niz funkcija (D_m), gde je $D_m \in \tilde{L}(-\pi, \pi; P)$ definisano sa 5 (12). Tada je

$$aD_m = e_m,$$

tj.

$$\|aD_m\|_{c_0} = \|e_m\|_{c_0} = 1,$$

dok je prema 5 (15')

$$\|D_m\|_{\tilde{L}} = L_m \to +\infty \quad (m \to \infty).$$

Prema tome, za niz funkcija (D_m) je nejednačina (10) neodrživa, što protivureči pretpostavci da postoji a^{-1} na c_0; znači, operator a ne preslikava $\tilde{L}(-\pi, \pi; P)$ biunivoko na čitav prostor c_0.

7. ii. Zatvoreni operatori i stav o zatvorenom grafiku

Do sada smo se bavili isključivo ograničenim (neprekidnim) linearnim operatorima. Međutim, i najednostavniji diferencijalni operatori su najčešće neograničeni.

Primer 1. Neka je $C^1[a, b]$ *vektorski* potprostor prostora $C[a, b]$, koji obrazuju neprekidne funkcije x koje imaju neprekidan izvod x' na $[a, b]$. Tada operator A definisan sa

$$Ax = x'$$

preslikava $C^1[a, b]$ u $C[a, b]$. On je linearan ali nije ograničen. Zaista, za niz funkcija $x_n(t) = t^n$ iz $C^1[0, 1]$ je $Ax_n = nt^{n-1}$, tako da je

$$\|Ax_n\| = n = n\|x_n\|.$$

Prema tome,

$$\|A\| = \sup_{x \in C^1} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geqslant \sup_n \frac{\|Ax_n\|}{\|x_n\|} = \sup n = +\infty.$$

Neograničeni operator iz primera 1 ima jednu drugu osobinu koju karakteriše

Definicija 1. Neka su X i Y Banachovi prostori i neka je A linearan operator koji je definisan na v e k t o r s k o m potprostoru $D \subset X$ i uzima vrednosti u Y. Operator A je *zatvoren* ako za svaki niz (x_n) u D za koji postoji

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \quad \text{i} \quad \lim_{n \to \infty} Ax_n = y$$

važi

$$x \in D \quad \text{i} \quad Ax = y.$$

Uočiti da se ne traži zatvorenost potprostora D, jer bi inače zahtev da $x \in D$ bio bespredmetan.

Primer 2. Operator A iz primera 1 je zatvoren. Zaista, neka je (x_n) niz tačaka u $C^1[a, b]$ tako da

$$x_n \to x \quad \text{i} \quad Ax_n \to y.$$

Druga od ovih pretpostavki znači da niz izvoda (x_n') uniformno konvergira (tj. po metrici prostora C) ka y. Na osnovo jednog poznatog stava iz klasične analize, tada je granična funkcija x niza (x_n) diferencijabilna i njen izvod jednak je graničnoj vrednosti niza izvoda, tj.

$$x \in C^1[a, b] \quad \text{i} \quad Ax = y.$$

Postavlja se pitanje odnosa između ograničenog i zatvorenog linearnog operatora. U jednom pravcu takav iskaz daje

Stav 4. *Neka je A ograničen linearan operator koji preslikava vektorski potprostor $D \subset X$ u Y. Ako je potprostor D zatvoren u X, tada je operator A zatvoren.*

Kako je čitav prostor X zatvoren, odavde sledi da je svaki ograničen linearan operator $A: X \to Y$ zatvoren.

Dokaz stava 4. Neka je (x_n) niz tačaka u D tako da

$$x_n \to x \quad \text{i} \quad Ax_n \to y.$$

Zbog zatvorenosti potprostora D,

$$x \in D,$$

a zbog neprekidnosti operatora A,

$$Ax_n \to Ax,$$

te je $Ax = y$.

Iskaz u kome se iz zatvorenosti operatora zaključuje o njegovoj ograničenosti je mnogo dublji i počiva na stavu o ograničenosti inverznog operatora (stav 2). No pre nego što ga uopšte formulišemo, daćemo jednu novu, geometrijsku, karakterizaciju zatvorenog operatora.

Neka su X i Y Banachovi prostori. Tada je i $X \times Y$ Banachov prostor ako u ovome kao normu tačke (x, y) $(x \in X, y \in Y)$ uvedemo

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$$

(vežbanje 2.17).

Neka je A linearan operator koji preslikava vektorski potprostor $D \subset X$ u Y. *Grafik operatora* A je skup tačaka

$$G_A = \{(x, y) : x \in D, y = Ax\} \subset X \times Y.$$

Lako je uvideti da je za svaki linearan operator A njegov grafik G_A vektorski potprostor od $X \times Y$.

Stav 5. *Operator* $A: X \supset D \to Y$ *je zatvoren tada i samo tada ako je njegov grafik* G_A *zatvoren potprostor u* $X \times Y$.

Primećujemo da je stavom 5 opravdan termin „zatvoren" operator.

Dokaz stava 5. Pretpostavimo da je A zatvoren operator i neka je (x, y) tačka nagomilavanja njegovog grafika G_A. Tada postoji niz tačaka $(x_n, Ax_n) \in G_A$ $(x_n \in D)$ tako da

$$(x_n, Ax_n) \to (x, y),$$

što se, shodno metrici u $X \times Y$, svodi na

$$\|x_n - x\| + \|Ax_n - y\| \to 0.$$

Dakle,

$$x_n \to x \quad \text{i} \quad Ax_n \to y,$$

te zbog zatvorenosti operatora A

$$x \in D \quad \text{i} \quad y = Ax.$$

Prema tome, tačka $(x, y) = (x, Ax)$ pripada grafiku G_A, te je ovaj zatvoren u $X \times Y$.

Obrnuto, pretpostavimo da je grafik G_A operatora A zatvoren u $X \times Y$. Neka je (x_n) proizvoljan niz tačaka u D tako da

$$x_n \to x \quad \text{i} \quad Ax_n \to y.$$

Tada

$$\|(x_n - x, Ax_n - y)\|_{X \times Y} = \|x_n - x\| + \|Ax_n - y\| \to 0,$$

tj. niz tačaka

$$(x_n, Ax_n) \to (x, y)$$

u smislu metrike u $X \times Y$. Kako niz (x_n, Ax_n) leži u G_A, to $(x, y) \in \overline{G_A} = G_A$, jer je G_A zatvoren skup. Prema definiciji grafika G_A je, dakle,

$$x \in D \quad \text{i} \quad y = Ax,$$

što znači da je A zatvoren operator.

Sada smo u mogućnosti da dokažemo tzv. *princip zatvorenog grafika*, koji daje uslove kada je neki zatvoren operator ograničen.

Stav 6. *Neka je* A *zatvoren linearan operator koji preslikava vektorski potprostor* $D \subset X$ *u* Y. *Ako je potprostor* D *zatvoren u* X, *tada je* A *ograničen operator na* D.

Kako je čitav prostor X zatvoren, odavde sledi da je svaki zatvoren linearan operator koji preslikava X u Y ograničen.

Na osnovu stava 6 možemo zaključiti da vektorski potprostor $C^1[a, b]$ iz primera 1 nije zatvoren, jer je operator A koji ga preslikava u $C[a, b]$ zatvoren a nije ograničen (videti i primer 2).

Dokaz stava 6. Zato što je zatvoren, vektorski potprostor D od X je i sam jedan Banachov prostor. Isto tako grafik G_A operatora A je kao zatvoreni vektorski potprostor od $X \times Y$ i sam jedan Banachov prostor. Operator B definisan sa

$$(x, Ax) \to x$$

preslikava G_A na D. On je očigledno linearan, a ograničen je zbog

$$\|x\| \leqslant \|x\| + \|Ax\| = \|(x, Ax)\|.$$

Šta više, operator B ima inverzan operator B^{-1} na D, jer je nula-vektor (0,0) jedini vektor u G_A koji operator B preslikava u nula-vektor 0 prostora] D (odeljak 3.i, obrazac (6)). Zaista, ako je

$$B(x, Ax) = x = 0,$$

iz $x = 0$ sledi $Ax = 0$, tako da je

$$(x, Ax) = (0,0).$$

Operator B zadovoljava, dakle, sve uslove stava 2, te je njegov inverzan operator B^{-1},

$$x \to (x, Ax),$$

ograničen. Postoji, dakle, konstanta $M > 0$ tako da je

$$\|(x, Ax)\| \leqslant M\|x\|.$$

No tada je i

$$\|Ax\| \leqslant \|Ax\| + \|x\| = \|(x, Ax)\| \leqslant M\|x\| \quad \text{za svako } x \in D,$$

tj. $\|A\| \leqslant M$, što znači da je A ograničen operator.

Na kraju dajemo dve primene stava o zatvorenom grafiku. Prvo ćemo dokazati težu polovinu stava 5.4:

Stav 7. *Ako red* $\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu \xi_\nu$ *konvergira za svako* $x = (\xi_\nu)$ *iz* l_p $(p > 1)$, *tada niz* $(\alpha_\nu) \in l_q \, (1/p + 1/q = 1)$.

Dokaz. Za svako $x \in l_p$ i za svako $k = 1, 2, \ldots$ neka je

$$\eta_k = \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu \xi_\nu. \tag{11}$$

Kako je po pretpostavci niz $(\eta_k) = y$ konvergentan, on je i ograničen, te je sa (11) definisan linearni operator A, $y = Ax$, koji preslikava l_p u m. Pokazaćemo da je operator A zatvoren, tj. da za svaki niz $x_n = (\xi_\nu^n)$ iz l_p za koji

$$x_n \to x = (\xi_\nu) \quad \text{i} \quad Ax_n \to z = (\zeta_\nu)$$

važi

$$Ax = z. \tag{12}$$

(Ovde automatski sledi da $x \in l_p$).

Pre svega, $Ax_n \to z$ znači da

$$\|Ax_n - z\|_m = \sup_{1 \leqslant k < \infty} \left| \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu \xi_\nu^n - \zeta_k \right| \to 0 \quad (n \to \infty),$$

tj.

$$\sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu \xi_\nu^n \to \zeta_k \quad (n \to \infty) \text{ uniformno po } k. \tag{13}$$

S druge strane, na osnovu Hölderove nejednačine je

$$\left|\sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu \xi_\nu^n - \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu \xi_\nu\right| \leqslant \left\{\sum_{\nu=1}^{k} |\alpha_\nu|^q\right\}^{1/q} \|x_n - x\|_{l_p},$$

te $x_n \to x$ povlači

$$(14) \qquad \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu \xi_\nu^n \to \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu \xi_\nu \, (n \to \infty) \text{ za svako } k = 1, 2, \ldots$$

Poredeći (13) i (14) nalazimo

$$(15) \qquad \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu \xi_\nu = \zeta_k \text{ za svako } k = 1, 2, \ldots$$

Na osnovu (11) važi, dakle, (12), tj. A je zatvoren operator. Prema stavu 6 on je tada i ograničen, tj.

$$\left|\sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu \xi_\nu\right| \leqslant \|Ax\|_m \leqslant \|A\| \left\{\sum_{\nu=1}^{\infty} |\xi_\nu|^p\right\}^{1/p} \quad \forall x \in l_p \text{ i } \forall k = 1, 2, \ldots$$

Izaberemo li za x tačku čije su koordinate

$$\xi_\nu = \begin{cases} \overline{\alpha}_\nu |\alpha_\nu|^{q-2} & \text{za } 1 \leqslant \nu \leqslant k, \\ 0, & \nu > k, \end{cases}$$

(15) se svodi na

$$\sum_{\nu=1}^{k} |\alpha_\nu|^q \leqslant \|A\| \left\{\sum_{\nu=1}^{k} |\alpha_\nu|^q\right\}^{1/p},$$

odakle sledi

$$\left\{\sum_{\nu=1}^{k} |\alpha_\nu|^q\right\}^{1/q} \leqslant \|A\| \text{ za svako } k = 1, 2, \ldots,$$

pa time i da niz $(\alpha_\nu) \in l_q$.

Stav 8. *Neka je* $[\alpha_{\nu\mu}]$ *beskonačna matrica brojeva takva da za svako* $x = (\xi_\nu)$ *iz* l_p $(p > 1)$ *red*

$$(16) \qquad \eta_\mu = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\nu\mu} \xi_\nu$$

konvergira za svako $\mu = 1, 2, \ldots$ *i da niz* $y = (\eta_\mu) \in l_q (1/p + 1/q = 1)$. *Tada je sa* (16) *definisan ograničen linearan operator* $A: l_p \to l_q$. (Videti i primer 3.1).

Dokaz. Pre svega, za fiksirano μ,

$$\eta_\mu = \eta_\mu(x)$$

je ograničena linearna funkcionela na l_p. To sledi na osnovu reprezentacije ograničene linearne funkcionele na l_p, jer je prema stavu 7 niz $(\alpha_{\nu\mu})_{\nu=1,2,\ldots}$ u l_q.

Pokazaćemo da je A zatvoren operator, tj. da za svaki niz (x_n) u l_p za koji

$$x_n \to x \quad \text{i} \quad Ax_n \to z = (\zeta_\mu)$$

važi

$$Ax = z.$$

Zbog neprekidnosti funkcionele $\eta_\mu(x)$, s jedne strane

$$(17) \qquad x_n \to x \quad \Rightarrow \quad \eta_\mu(x_n) \to \zeta_\mu(x) \ (n \to \infty) \text{ za svako } \mu = 1, 2, \ldots$$

Kako, s druge strane, konvergencija po normi u l_q povlači konvergenciju po koordinatama, to iz

$$(18) \qquad A x_n \to z \quad \Rightarrow \quad \eta_\mu(x_n) \to \zeta_\mu \ (n \to \infty) \text{ za svako } \mu = 1, 2, \ldots$$

Poredeći (17) i (18), nalazimo $\zeta_\mu = \eta_\mu$, tj. $A x = z$. Operator A je, dakle, zatvoren, pa prema stavu 6 i ograničen.

8.i. Potpuno neprekidni operatori

Definicija 1. Linearan operator $A: X \to Y$ je *potpuno neprekidan* ako svaki ograničen skup iz X preslikava u relativno kompaktan skup u Y.

Kako svaki ograničen skup u X leži u nekoj kugli konačnog poluprečnika s centrom u početku (u nula-vektoru) i kako je svaki deo relativno kompaktnog skupa opet relativno kompaktan skup, to će A biti potpuno neprekidan operator ako svaku kuglu sa centrom u početku preslikava u relativno kompaktan skup; šta više, dovoljno je ograničiti se na jediničnu kuglu sa centrom u početku.

Svaki potpuno neprekidan operator je i neprekidan. Naime, kako je svaki relativno kompaktan skup ograničen (stav II.6.4), to iz definicije 1 sledi da potpuno neprekidan operator preslikava ograničene skupove u ograničene skupove, što znači da je on neprekidan (stav 3.4).

Obrnuto u opštem slučaju nije tačno. Preciznije, na konačno-dimenzionalnom prostoru nema razlike između neprekidnih i potpuno neprekidnih operatora. Zaista, ako je operator $A: X \to Y$ neprekidan i X konačno-dimenzionalan prostor, tada je, zbog linearnosti operatora A, i $A(X)$ konačno-dimenzionalan prostor. Kako su na konačno-dimenzionalnom prostoru svi linearni operatori neprekidni (stav 3.17), to A preslikava ograničen skup iz X u ograničen skup u $A(X)$ (stav 3.4). Tvrđenje onda sledi iz činjenice da su u konačno-dimenzionalnom prostoru $A(X)$ ograničeni skupovi relativno kompaktni (stav 3.1).

U beskonačno-dimenzionalnom prostoru ograničen operator ne mora da bude potpuno neprekidan. Na primer, ako je X beskonačno-dimenzionalan prostor, tada identički operator $I: X \to X$ (koji je očigledno neprekidan) nije potpuno neprekidan. Zaista, po pretpostavci u X postoji beskonačno mnogo linearno nezavisnih vektora; neka su takvi, recimo, $x_1, x_2, \ldots$ Označimo sa X_n $(n = 1, 2, \ldots)$ potprostor koji generišu vektori $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Tada je X_n pravi potprostor od X_{n+1} i X_n je zatvoren (stav 3.11). Na osnovu stava 3.13 (Rieszova lema), postoji tada niz vektora (y_n) tako da je

$$\|y_n\| = 1, \quad y_n \in X_n \quad \text{i} \quad d(y_n, X_{n-1}) > 1/2.$$

Skup $\{y_n\}$ je ograničen u X. Kada bi identički operator bio potpuno neprekidan, on bi i skup $\{y_n\}$ morao da preslika u relativno kompaktan skup. Međutim, $I(\{y_n\}) = \{y_n\}$, a iz niza (y_n) se ne može izdvojiti konvergentan delimični niz, jer je $\|y_m - y_n\| > 1/2$ za svako m i n $(m \neq n)$.

Stav 1. *Ako je $A: X \to X$ potpuno neprekidan operator i $B: X \to X$ ograničen operator, tada su AB i BA potpuno neprekidni operatori.*

Dokaz. Ako je M ograničen skup, takav je i BM, pa je $A(BM)$ relativno kompaktan skup zbog potpune neprekidnosti operatora A. Znači, i operator AB je potpuno neprekidan. Što se tiče drugog iskaza, ako je M ograničen skup, AM će biti relativno kompaktan, pa će zbog neprekidnosti operatora B i $B(AM)$ biti takav (stav II.6.9). Znači, BA je potpuno neprekidan operator.

Iz stava 1 neposredno sledi da potpuno neprekidan operator $A: X \to X$ ne može imati ograničen inverzan operator. Zaista, kada bi postojao ograničen inverzan operator A^{-1}, imali bismo $AA^{-1} = I$, te bi na osnovu stava 1 sledilo da je I potpuno neprekidan operator, što nije tačno.

Stav 2. *Neka je $A_n: X \to Y$ $(n = 1, 2, \ldots)$ niz potpuno neprekidnih operatora. Ako za linearni operator A važi*

$$\|A_n - A\| \to 0, \tag{1}$$

tj. ako niz operatora (A_n) uniformno konvergira operatoru A, tada je i A potpuno neprekidan operator.

Dokaz. Pokazaćemo da je slika jedinične kugle operatorom A relativno kompaktan skup. Kako je operator A_1 potpuno neprekidan, to se iz svakog beskonačnog niza (x_k) koji leži u jediničnoj kugli, tj. $\|x_k\| \leqslant 1$, može izdvojiti delimični niz (x_k^1) tako da postoji $\lim\limits_{k\to\infty} A_1 x_k^1$. Iz delimičnog niza (x_k^1) izdvojićemo delimični niz (x_k^2) tako da postoji $\lim\limits_{k\to\infty} A_2 x_k^2$. Itd. itd. Za dijagonalni niz (x_k^k), koji ćemo označiti sa $(\overline{x}_k)$, postoji, dakle,

$$\lim_{k\to\infty} A_n \overline{x}_k \quad \text{za svako } n = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Tada je za svako $n = 1, 2, \ldots$

$$\|A\overline{x}_p - A\overline{x}_q\| \leqslant$$

$$\leqslant \|A\overline{x}_p - A_n\overline{x}_p\| + \|A_n\overline{x}_p - A_n\overline{x}_q\| + \|A_n\overline{x}_q - A\overline{x}_q\|$$

$$\leqslant \|A - A_n\|\,\|\overline{x}_p\| + \|A_n\overline{x}_p - A_n\overline{x}_q\| + \|A_n - A\|\,\|\overline{x}_q\|.$$

Zbog (2) i $\|\overline{x}_k\| \leqslant 1$, odavde sledi

$$\overline{\lim_{p,q\to\infty}} \|A\overline{x}_p - A\overline{x}_q\| \leqslant 2\|A - A_n\|.$$

Kako se, prema (1), desna strana može učiniti proizvoljno malom birajući n dovoljno veliko, to znači da

$$\|A\overline{x}_p - A\overline{x}_q\| \to 0 \quad \text{kada } p, q \to \infty.$$

$(A\overline{x}_k)$ je, dakle, Cauchyev niz u Y, pa time i konvergentan. Prema tome, iz svakog niza (x_k) koji leži u jediničnoj kugli može se izdvojiti delimični niz $(\overline{x}_k)$ tako da $(A\overline{x}_k)$ konvergira; slika jedinične kugle je, dakle, relativno kompaktan skup.

Primer 1. U primeru 3.3 videli smo da je sa

$$y(s)=\int_0^1 K(s,t)\,x(t)\,dt, \tag{3}$$

gde je $K(s,t)$ neprekidna funkcija na kvadratu $Q=\{(s,t): 0\leqslant s\leqslant 1, 0\leqslant t\leqslant 1\}$, definisan ograničen linearni operator A koji preslikava $C[0,1]$ u $C[0,1]$. Pokazaćemo da je $A: C\to C$ potpuno neprekidan operator.

Kako je $K(s,t)$ neprekidna funkcija na Q, ona je tu ograničena i uniformno neprekidna, te je

1° $|K(s,t)|\leqslant K$ i

2° svakom $\varepsilon>0$ odgovara broj $\delta>0$ tako da je

$$|K(s',t)-K(s'',t)|<\varepsilon \tag{4}$$

kad god tačke (s',t) i (s'',t) tako leže u Q da je $|s'-s''|<\delta$.

Na osnovu 1° i 2° imamo

$$\begin{aligned}|y(s')-y(s'')|&\leqslant\int_0^1|K(s',t)-K(s'',t)|\,|x(t)|\,dt\\ &<\varepsilon\int_0^1|x(t)|\,dt \quad \text{za } |s'-s''|<\delta,\end{aligned} \tag{5}$$

odnosno

$$y(s)\leqslant\int_0^1|K(s,t)|\,|x(t)|\,dt\leqslant K\int_0^1|x(t)|\,dt. \tag{6}$$

Pokazaćemo da je slika jedinične kugle $\|x\|_C\leqslant 1$ operatorom A relativno kompaktan skup u C. Naime, na osnovu (5) je

$$|y(s')-y(s'')|<\varepsilon\|x\|_C\leqslant\varepsilon \quad \text{za } |s'-s''|<\delta, \tag{5'}$$

tj. skup slika $\{y(s)\}$ je skup podjednako neprekidnih funkcija, a na osnovu (6) je

$$|y(s)|\leqslant K\|x\|_C\leqslant K, \tag{6'}$$

tj. skup slika $\{y(s)\}$ je skup uniformno ograničenih funkcija. Na osnovu Arzelà-Ascolijevog stava (stav II.6.12) on je relativno kompaktan u C.

Zadržavajući pretpostavku o neprekidnosti jezgra $K(s,t)$, pokazaćemo da je Fredholmov operator (3) potpuno neprekidan operator i kada x varira u bilo kojem od prostora L, $L_p(p>1)$ ili M, a smatramo da mu skup vrednosti leži u ma kome od ovih prostora. Drugim rečima, ako mu je jezgro neprekidno, Fredholmov operator $A: X\to Y$ je potpuno neprekidan i ako za X i Y uzmemo bilo koji od prostora L, $L_p(p>1)$ ili M.

Zaista, u prethodnom dokazu, prostor C (tj. metrika u njemu) došla je do izražaja tek pri prelazu od relacija (5) i (6) na relacije (5') i (6'), kada smo iskoristili nejednačinu

$$\int_0^1|x(t)|\,dt\leqslant\|x\|_C.$$

Međutim, lako je videti da ova nejednačina ostaje na snazi ako u njoj normu u C zamenimo normom bilo koga od prostora L, L_p, M. (Kada je u pitanju prostor $L_p(p>1)$ treba primeniti Hölderovu nejednačinu na $\int_0^1|x(t)|\cdot 1\,dt$). Dakle, i slika jedinične kugle $\|x\|_X\leqslant 1$ za $X=L, L_p$ ili M je relativno kompaktan skup u prostoru C. No, on je tada relativno kompaktan skup i u svakom od prostora L, L_p ili M. Zaista, iz njegove relativne kompaktnosti u C

sledi da se iz svakog niza (y_n) koji mu pripada može izdvojiti delimični niz (y_{n_k}) koji konvergira u smislu metrike u C nekom $y_0 \in C$, tj. da svakom $\varepsilon > 0$ odgovara broj N takav da je

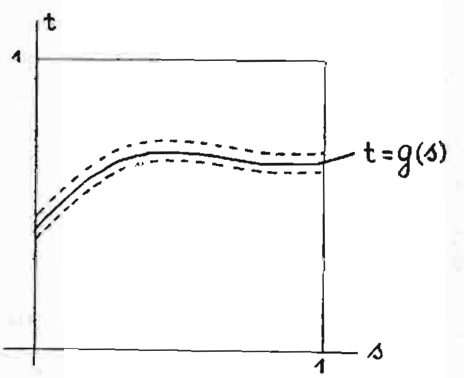
$$|y_{n_k}(s) - y_0(s)| < \varepsilon \quad \text{za } n_k > N \quad \text{i} \quad s \in [0, 1].$$

Tim pre je onda

$$\|y_{n_k} - y_0\|_Y < \varepsilon \quad \text{za } n_k > N \quad (Y = L, L_p \text{ ili } M),$$

te (y_{n_k}) konvergira i u smislu metrike u L, L_p ili M ka tački y_0, koja očigledno pripada svakom od prostora L, L_p, M.

Primer 2. Fredholmov operator (3), kao operator koji preslikava C u C, je potpuno neprekidan i ako njegovo jezgro $K(s,t)$ ima prekide koji su na određen način raspoređeni u kvadratu Q. Preciznije: pretpostavimo da je jezgro $K(s,t)$ ograničeno na Q i da svi njegovi prekidi leže na neprekidnoj krivoj liniji $t = g(s)$. Neka je



$$K = \sup_Q |K(s,t)|$$

i neka je $\varepsilon > 0$. Označimo sa G skup tačaka (s,t) za koje je

$$|t - g(s)| < \varepsilon/8K.$$

$K(s,t)$ je tada neprekidna funkcija na zatvorenom skupu $F = \complement_Q G$, te postoji $\delta > 0$ takvo da važi (4) kad god je $|s' - s''| < \delta$ i tačke (s', t) i (s'', t) leže u F.

Integral u (5) rastavićemo na dva dela: prvi preko unije razmaka

$$|t - g(s')| < \varepsilon/8K \quad \text{i} \quad |t - g(s'')| < \varepsilon/8K,$$

čija totalna dužina ne prevazilazi $\varepsilon/2K$, i drugi preko ostatka razmaka $[0, 1]$. Za prvi je

$$\int_I |K(s',t) - K(s'',t)|\,|x(t)|\,dt \leqslant 2K \int_I |x(t)|\,dt$$

$$\leqslant 2K \|x\|_C \frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon \|x\|_C,$$

a za drugi

$$\int_{II} |K(s',t) - K(s'',t)|\,|x(t)|\,dt \leqslant \varepsilon \int_0^1 |x(t)|\,dt \leqslant \varepsilon \|x\|_C,$$

tako da za $\|x\|_C \leqslant 1$ opet važi (5') i (6'), jedino što u (5') umesto ε stoji 2ε. Time je naše tvrđenje dokazano.

Specijalno, ako je $g(s) = s$ i $K(s,t) = 0$ za $t > s$, iz izloženog sledi da je *Volterraov operator*, definisan jednačinom

$$y(s) = \int_0^s K(s,t)\,x(t)\,dt,$$

jedan potpuno neprekidan operator (prostora C u C), ako je njegovo jezgro neprekidna funkcija za $t \leqslant s$.

Primer 3. Neka je $K(s,t)$ merljiva funkcija na kvadratu Q i neka je za neko $q > 1$

$$\int_0^1 \int_0^1 |K(s,t)|^q\,ds\,dt < +\infty. \tag{7}$$

Tada je Fredholmov operator (3), posmatran kao operator iz L_p u $L_q (p>1, 1/p+1/q=1)$, potpuno neprekidan.

Neka je $K_n(s,t)$ niz neprekidnih funkcija na Q, tako da je[1)]

(8)
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \int_0^1 |K_n(s,t)-K(s,t)|^q \, ds\, dt = 0.$$

Prema onome što smo pokazali u primeru 1, operator A_n, definisan sa

$$y_n(s)=\int_0^1 K_n(s,t)\, x(t)\, dt \quad (x\in L_p,\ y_n\in L_q)$$

je potpuno neprekidan za svako $n=1,2,\ldots$ Iz

$$|y_n(s)-y(s)|\leqslant \int_0^1 |K_n(s,t)-K(s,t)|\,|x(t)|\, dt$$
$$\leqslant \left\{\int_0^1 |K_n(s,t)-K(s,t)|^q\, dt\right\}^{1/q} \|x\|_{L_p}$$

sledi stepenovanjem sa q i integracijom po s od 0 do 1,

$$\int_0^1 |y_n(s)-y(s)|^q\, ds\leqslant \int_0^1 ds \int_0^1 |K_n(s,t)-K(s,t)|^q\, dt\cdot \|x\|_{L_p}^q,$$

tj.

$$\|A_n x-Ax\|_{L_q}\leqslant \left\{\int_0^1\int_0^1 |K_n(s,t)-K(s,t)|^q\, ds\, dt\right\}^{1/q} \|x\|_{L_p}.$$

Znači,

$$\|A_n-A\|\leqslant \left\{\int_0^1\int_0^1 |K_n(s,t)-K(s,t)|^q\, ds\, dt\right\}^{1/q},$$

te na osnovu (8)

$$\|A_n-A\|\to 0 \quad (n\to\infty).$$

Primenom stava **2** sledi onda da je A potpuno neprekidan operator.

Jednu od značajnih osobina potpuno neprekidnog operatora daje (uporediti sa stavom 6.9)

Stav 3. *Neka je $A: X\to Y$ potpuno neprekidan operator. Tada iz*

$$x_n \rightharpoonup x_0 \ \textit{sledi}\ A x_n\to A x_0.$$

Dokaz. Pretpostavimo da tvrđenje stava nije tačno, tj. da za neki niz (x_n) koji slabo konvergira ka x_0 u X, niz slika $(A x_n)$ ne konvergira jako ka $A x_0$ u Y. Tada za dovoljno malo $\varepsilon>0$ postoji delimični niz x_{n_k} takav da je

(9)
$$\|A x_{n_k}-A x_0\|\geqslant \varepsilon \quad \text{za svako } k=1,2,\ldots$$

No kako je zbog potpune neprekidnosti operatora A, skup $\{A x_n\}$ relativno kompaktan, to se iz niza $(A x_{n_k})$ može izdvojiti delimični niz, koji ćemo, jednostavnosti radi, opet označiti sa $(A x_{n_k})$, takav da

(10)
$$A x_{n_k}\to y_0\in Y \quad (k\to\infty)$$

i za koji, naravno, važi (9). Kako, na osnovu stava 6.9,

$$x_{n_k}\rightharpoonup x_0 \quad \Rightarrow \quad A x_{n_k}\rightharpoonup A x_0,$$

a iz (10) sledi

$$A x_{n_k}\rightharpoonup y_0,$$

to je $y_0=A x_0$. No to dovodi u kontradikciju (10) sa (9).

[1)] Stav III.8.4 tvrdi da je skup neprekidnih funkcija svuda gust u prostoru $L_q(a,b)$. Ovde se pozivamo na analogan stav za funkcije dve promenljive, jer na osnovu (7) $K\in L_q(Q)$.

Stav 4. *Skup vrednosti potpuno neprekidnog operatora je separabilan.*

Dokaz. Po definiciji, potpuno neprekidan operator A preslikava svaku kuglu $\|x\| \leqslant n$ $(n=1, 2, \ldots)$ na relativno kompaktan skup F_n. Na osnovu stava II.6.6 F_n je separabilan. Prema tome, takav je i skup vrednosti operatora A, $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, jer je prebrojiva unija separabilnih skupova.

Stav 5. *Neka je $A: X \to Y$ potpuno neprekidan operator. Tada je i njemu konjugovani operator A^* potpuno neprekidan.*

Dokaz. Pokazaćemo da A^* preslikava jediničnu kuglu iz Y^* na relativno kompaktan skup u X^*, tj. da se iz svakog niza (y_k^*) iz Y^*, $\|y_k^*\| \leqslant 1$, može izdvojiti delimični niz $(y_{k_i}^*)$ tako da

$$A^* y_{k_i}^* \to x^* \in X^* \quad (i \to \infty).$$

Primenićemo dijagonalni postupak. Na osnovu stava 4 skup vrednosti $F \subset Y$ operatora A je separabilan te u njemu postoji svuda gust niz tačaka (y_n). Iz niza (y_k^*) izdvojimo delimični niz (y_{1k}^*) tako da niz brojeva $(y_{1k}^*(y_1))$ konvergira. To je uvek moguće na osnovu Bolzano-Weierstrassovog stava, jer je, zbog $\|y_k^*\| \leqslant 1$.

$$|y_k^*(y)| \leqslant \|y_k^*\| \|y\| \leqslant \|y\|,$$

tj. niz brojeva $(y_k^*(y_1))$ je ograničen. Na sličan način ćemo iz delimičnog niza (y_{1k}^*) izdvojih delimični niz (y_{2k}^*) tako da niz brojeva $(y_{2k}^*(y_2))$ konvergira. Itd. itd. Dijagonalni niz (y_{kk}^*), koji ćemo označiti sa $(\overline{y}_k^*)$, ima tada osobinu da

$$\text{postoji } \lim_{k \to \infty} \overline{y}_k^*(y) \quad \text{za svako } y = y_n \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Kako je skup tačaka $\{y_n\}$ svuda gust u F, postojaće

$$\lim_{k \to \infty} \overline{y}_k^*(y)$$

za svako $y \in F$, pa time i za svako $y \in \overline{F}$. Uvedemo li

$$x_k^* = A^* \overline{y}_k^* \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

niz

(11) $$x_k^*(x) = (A^* \overline{y}_k^*)(x) = \overline{y}_k^*(Ax)$$

konvergiraće, dakle, za svako $x \in X$ (jer A preslikava X na F). Ako stavimo

(12) $$x^*(x) = \lim_{k \to \infty} x_k^*(x),$$

ostaje još da pokažemo da

$$\|x^* - A^* \overline{y}_k^*\| = \|x^* - x_k^*\| \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Pretpostavimo da ovo nije tačno, tj. da postoji broj $\eta > 0$ tako da je

$$\|x^* - x_k^*\| \geqslant \eta \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

(Ako poslednja nejednakost ne važi za svako k, uzećemo pogodan delimični niz od $(\overset{*}{x_k})$). Tada postoje u X tačke x_k tako da je

$$\|x_k\| = 1 \quad \text{i} \quad |x^*(x_k) - \overset{*}{x}_k(x_k)| \geqslant \frac{1}{2}\|x^* - \overset{*}{x}_k\| > \eta/2,$$

što prema (11) i (12) znači da je

$$|\overline{y}^*_k(A x_k) - \lim_{p\to\infty} \overline{y}^*_p(A x_k)| > \eta/2 \quad \text{za svako } k = 1, 2, \ldots \tag{13}$$

Kako je A potpuno neprekidan operator, slika ograničenog skupa $\{x_k\}$ je relativno kompaktan skup, tj. iz niza (x_k) se može izdvojiti delimični niz, koji ćemo opet označiti sa (x_k), tako da postoji $\lim\limits_{k\to\infty} A x_k = y_0$. No, $y_0 \in \overline{F}$, te niz $\overline{y}^*_k(y_0)$ konvergira. Zato, svakom $\varepsilon > 0$ odgovara prirodni broj N tako da je za $k > N$

$$\|A x_k - y_0\| < \varepsilon \quad \text{i} \quad |\overline{y}^*_k(y_0) - \lim_{p\to\infty} \overline{y}^*_p(y_0)| < \varepsilon.$$

Na osnovu ovih nejednačina (i vodeći računa da je $\|\overline{y}^*_k\| \leqslant 1$) sledi da je za $k > N$

$$|\overline{y}^*_k(A x_k) - \lim_{p\to\infty} \overline{y}^*_p(A x_k)| \leqslant$$

$$\leqslant |\overline{y}^*_k(A x_k - y_0)| + |\overline{y}^*_k(y_0) - \lim_{p\to\infty} \overline{y}^*_p(y_0)| + |\lim_{p\to\infty} \overline{y}^*_p(y_0 - A x_k)|$$

$$\leqslant \|\overline{y}^*_k\| \, \|A x_k - y_0\| + \varepsilon + \lim_{p\to\infty} \|\overline{y}^*_p\| \, \|y_0 - A x_k\| < 3\,\varepsilon,$$

što je, birajući ε dovoljno malo, u kontradikciji sa (13). Time je stav 5 dokazan.

8.ii. Fredholmova alternativa

Sistem linearnih algebarskih jednačina

$$\begin{aligned}
(1-\alpha_{11})\,\xi_1 - \alpha_{12}\,\xi_2 - \cdots - \alpha_{1k}\,\xi_k &= \eta_1, \\
-\alpha_{21}\,\xi_1 + (1-\alpha_{22})\,\xi_2 - \cdots - \alpha_{2k}\,\xi_k &= \eta_2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
-\alpha_{k1}\,\xi_1 - \alpha_{k2}\,\xi_2 - \cdots + (1-\alpha_{kk})\,\xi_k &= \eta_k
\end{aligned} \tag{14}$$

ima jedno i samo jedno rešenje $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$ za svaki konačan niz brojeva $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k)$ ako je determinanta sistema različita od nule, a sistem

$$\begin{aligned}
(1-\alpha_{11})\,\xi_1 - \alpha_{12}\,\xi_2 - \cdots - \alpha_{1k}\,\xi_k &= 0, \\
-\alpha_{21}\,\xi_1 + (1-\alpha_{22})\,\xi_2 - \cdots - \alpha_{2k}\,\xi_k &= 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
-\alpha_{k1}\,\xi_1 - \alpha_{k2}\,\xi_2 - \cdots + (1-\alpha_{kk})\,\xi_k &= 0
\end{aligned} \tag{15}$$

ima netrivijalno rešenje $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$ (bar jedna od veličina $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ je različita od nule, tj. $|\xi_1|^2+|\xi_2|^2+\cdots+|\xi_k|^2>0$) ako je determinanta sistema jednaka nuli. Ne pozivajući se na pojam determinante sistema, ovi rezultati mogu se iskazati u obliku alternative: *ili* sistem (14) ima jedno jedino rešenje $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$ za svaki konačan niz brojeva $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k)$, *ili* sistem (15) ima netrivijalno rešenje.

Ako agregate $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$ i $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k)$ interpretiramo kao tačke x odnosno y prostora R^k, jednačinama

$$\eta_\mu = \sum_{\nu=1}^{k} a_{\mu\nu}\, \xi_\nu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, k)$$

je definisan ograničen linearan operator $A: R^k \to R^k$. Označimo li sa I identički operator ($Ix = x$), tada sisteme (14) i (15) možemo napisati u obliku operatorskih jednačina

$$(I-A)\,x = x - Ax = y, \tag{14'}$$

odnosno

$$(I-A)\,x = x - Ax = 0, \tag{15'}$$

i gornja alternativa kazuje da u R^k mogu nastupiti samo dva slučaja: ili jednačina (14') ima jedno jedino rešenje x za svako $y \in R^k$ ili jednačina (15') ima netrivijalno rešenje $x \neq 0$.

Samo po sebi nameće se pitanje da li analogan iskaz važi u Banachovom prostoru X ukoliko je A neki ograničen linearan operator koji preslikava X u samog sebe. U ovom odeljku pokazaćemo da je to slučaj ako je A potpuno neprekidan operator. Pri tome ćemo uz operatorske jednačine (14') i (15') posmatrati i njima konjugovane operatorske jednačine

$$x^* - A^* x^* = y^* \quad \text{i} \quad x^* - A^* x^* = 0, \tag{16}$$

gde je A^* operator konjugovan operatoru A koji preslikava X^* u X^*.

Stav 6. *Neka je $A: X \to X$ potpuno neprekidan linearan operator. Ako jednačina*

$$x - Ax = y$$

ima rešenje za svako $y \in X$, tada jednačina

$$x - Ax = 0$$

ima jedino trivijalno rešenje.

Primedba 1. Ako jednačina $x - Ax = y$ ima rešenje za svako $y \in X$, ona tada ima samo jedno rešenje. Zaista, ako bi nekom y odgovarala dva rešenja x_1 i x_2 ($x_1 \neq x_2$), iz

$$x_1 - Ax_1 = y \quad \text{i} \quad x_2 - Ax_2 = y$$

sledilo bi

$$(x_1 - x_2) - A(x_1 - x_2) = 0;$$

što je u suprotnosti sa tvrđenjem stava 6, jer je $x_1 - x_2 \neq 0$.

Primedba 2. Kako je konjugovani prostor Banachovog prostora i sam jedan Banachov prostor a konjugovani operator potpuno neprekidnog operatora i sam potpuno neprekidan (stav 5), to iskaz analogan iskazu stava 6 važi i za konjugovane operatorske jednačine. Preciznije: Ako jednačina

$$x^* - A^* x^* = y^*$$

ima rešenje za svako $y^* \in X^*$, tada jednačina

$$x^* - A^* x^* = 0$$

ima jedino trivijalno rešenje.

Dokaz stava 6. Stavimo $(n = 1, 2, \ldots)$

$$T^1 x = Tx = x - Ax \qquad \text{i} \qquad T^n x = T(T^{n-1} x)$$

i pretpostavimo, suprotno tvrđenju stava 6, da postoji vektor $x_1 \neq 0$ takav da je $Tx_1 = 0$. Označimo sa X_n skup svih vektora x iz X za koje je $T^n x = 0$. Zbog $T0 = 0$, iz $T^n x = 0$ sledi

$$T^{n+1} x = T(T^n x) = 0,$$

tj. $X_n \subset X_{n+1}$.

Pokazaćemo da je X_n *pravi deo* od X_{n+1}. Kako jednačina $Tx = y$, po pretpostavci, ima rešenje za svako $y \in X$, to postupno možemo odrediti vektore $x_n \, (n = 2, 3, \ldots)$ tako da je $Tx_n = x_{n-1}$. Za vektor x_{n+1} je

$$T^n x_{n+1} = x_1 \neq 0 \quad \text{i} \quad T^{n+1} x_{n+1} = Tx_1 = 0,$$

tj.

$$x_{n+1} \notin X_n \quad \text{i} \quad x_{n+1} \in X_{n+1},$$

što znači da je X_n pravi deo od X_{n+1}.

Lako je uvideti da je X_n vektorski potprostor od X. Neka je x tačka nagomilavanja od X_n i neka $X_n \ni z_k \to x$. Zbog neprekidnosti operatora T^n je

$$T^n x = T^n \lim_{k \to \infty} z_k = \lim_{k \to \infty} T^n z_k = 0,$$

tj. $x \in X_n$. X_n je, dakle, zatvoren skup, pa time Banachov potprostor od X.

Kako je za svako $n \, (= 1, 2, \ldots)$ X_n pravi i zatvoren potprostor od X_{n+1}, to na osnovu Rieszove leme (stav 3.13) postoji niz vektora (y_n) tako da je

$$\|y_{n+1}\| = 1, \qquad y_{n+1} \in X_{n+1} \quad \text{i} \quad d(y_{n+1}, X_n) > 1/2. \tag{17}$$

S obzirom na definiciju operatora T imamo za $p, q = 1, 2, \ldots$

$$Ay_p - Ay_q = y_p - [y_q + Ty_p - Ty_q] = y_p - \tilde{x}. \tag{18}$$

Ako je, recimo, $p > q$, ležaće vektor $\tilde{x}$ u X_{p-1}, jer je zbog $y_q \in X_q$ i $y_p \in X_p$

$$T^{p-1} \tilde{x} = T^{p-1} y_q + T^p y_p - T^p y_q = 0.$$

Na osnovu (17) je, dakle,

$$\|y_p - \tilde{x}\| > 1/2,$$

te iz (18) sledi za svako $p \neq q$

$$\|Ay_p - Ay_q\| > 1/2.$$

Znači, iz niza (Ay_n) se ne može izdvojiti konvergentan delimični niz, suprotno pretpostavci da je operator A potpuno neprekidan i time skup $\{Ay_n\}$ relativno kompaktan. Dakle, pretpostavka da postoji vektor $x_1 \neq 0$ takav da je $Tx_1 = 0$ je neodrživa. Time je stav 6 dokazan.

Stav 7. *Neka je $A : X \to X$ potpuno neprekidan linearan operator. Ako jednačina*

$$x - Ax = 0$$

ima jedino trivijalno rešenje, tada jednačina

$$x - Ax = y$$

ima rešenje za svako $y \in X$.

Iz stavova 6 i 7 zajedno sledi

Fredholmova alternativa. *Neka je* $A: X \to X$ *potpuno neprekidan linearan operator. Tada, ili*

jednačina $x - Ax = y$ *ima (jedno jedino) rešenje za svako* $y \in X$, *ili*

jednačina $x - Ax = 0$ *ima netrivijalno rešenje.*

Jasno je da Fredholmova alternativa važi i za jednačine $\lambda x - Ax = y$ i $\lambda x - Ax = 0$, gde je λ proizvoljan broj $\neq 0$.

Ako jezgro $K(s, t)$ Fredholmovog operatora A definisanog sa

$$Ax = \int_0^1 K(s, t)\, x(t)\, dt$$

zadovoljava uslov

$$\int_0^1 \int_0^1 |K(s, t)|^2\, ds\, dt < +\infty,$$

tada je $A: L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ potpuno neprekidan operator (primer 3). Fredholm je prvobitno svoju alternativu formulisao za integralne jednačine

$$x(s) - \lambda \int_0^1 K(s, t)\, x(t)\, dt = y(s)$$

i

$$x(s) - \lambda \int_0^1 K(s, t)\, x(t)\, dt = 0,$$

koje nose njegovo ime.

Dokaz stava 7 počiva na primedbi 2 uz stav 6 i dvema lemama koje povezuju rešenja datih i njima konjugovanih operatorskih jednačina.

Lema 1. *Ako se funkcionela* $y^* \in X^*$ *anulira u svakoj tački* $x \in X$ *koja zadovoljava*

$$x - Ax = 0, \tag{19}$$

tada jednačina

$$x^* - A^* x^* = y^* \tag{20}$$

ima rešenje.

Specijalno: Ako jednačina (19) *ima jedino trivijalno rešenje, tada jednačina* (20) *ima rešenje za svako* $y^* \in X^*$

Dokaz leme 1. Pretpostavimo da funkcionela y^* zadovoljava uslov leme 1. Da tada jednačina (20) ima rešenje pokazaćemo na taj način što ćemo ovo rešenje x^* efektivno konstruisati. Neka je na vektorskom potprostoru L koji sačinjavaju vektori oblika $z = x - Ax$ funkcionela x^* definisana sa

$$x^*(x - Ax) = y^*(x). \tag{21}$$

(Mada je vektorom $z \in L$ vektor $x \in X$, takav da je $z = x - Ax$, određen samo do na vektor $\bar{x}$ koji zadovoljava jednačinu $\bar{x} - A\bar{x} = 0$, ipak je sa (21) funkcionela x^* dobro definisana na L blagodareći osobini funkcionele y^* formulisanoj u lemi). Na osnovu Hahn-Banachovog stava proširićemo zatim x^* na čitav prostor X. Ako T opet označava operator $I - A$, tada je

$$x^*(x - Ax) = x^*((I - A)\, x) = x^*(Tx) = (T^* x^*)\, x = (I^* x^* - A^* x^*)\, x,$$

te, na osnovu (21), funkcionela x^* zadovoljava jednačinu (20).

Lema 2. *Ako se u tački $y \in X$ anulira svaka funkcionela $x^* \in X^*$ koja zadovoljava*

$$x^* - A^* x^* = 0, \tag{22}$$

tada jednačina

$$x - Ax = y \tag{23}$$

ima rešenje.

Specijalno: Ako jednačina (22) *ima jedino trivijalno rešenje, tada jednačina* (23) *ima rešenje za svako $y \in X$.*

Dokaz leme 2. Neka je M^* skup funkcionela x^* na X koje zadovoljavaju jednačinu (22). Svakom $x^* \in M^*$ koordiniraćemo skup L_{x^*} tačaka x iz X na kome je $x^*(x) = 0$. Ako vektor $y \in X$ zadovoljava

$$x^*(y) = 0 \quad \text{za svako} \quad x^* \in M^*,$$

tada $y \in \bigcap_{x^* \in M^*} L_{x^*}$, pa se tvrđenje leme svodi na to da se svaki vektor iz $\bigcap_{x^* \in M^*} L_{x^*}$ može napisati u obliku $x - Ax$ ili, što je isto, da svaki vektor y_1 koji nema oblik $x - Ax$ ne može ležati u $\bigcap_{x^* \in M^*} L_{x^*}$. Ovo poslednje pokazaćemo na taj način što ćemo vektoru $y_1 \notin (I - A)X$ efektivno konstruisati funkcionelu x_1^* takvu da je

$$x_1^* - A^* x_1^* = 0 \quad \text{i} \quad x_1^*(y_1) \neq 0. \tag{24}$$

Zbog

$$(x_1^* - A^* x_1^*)(x) = x_1^*(x) - (A^* x_1^*)(x) = x_1^*(x) - x_1^*(Ax) = x_1^*(x - Ax),$$

uslovi (24) svode se na

$$x_1^*(y_1) \neq 0 \quad \text{i} \quad x_1^*(x - Ax) = 0 \quad \text{za svako} \quad x \in X, \tag{25}$$

te ostaje da konstruišemo ograničenu linearnu funkcionelu x_1^* na X koja zadovoljava uslove (25).

U tom cilju uočimo vektorski potprostor L_0 koji obrazuju vektori oblika $x - Ax$. Neka je $\{L_0, y_1\}$ vektorski potprostor oblika $z + \alpha y_1$ gde $z \in L_0$. Na $\{L_0, y_1\}$ definisaćemo ograničenu linearnu funkcionelu x_1^* sa

$$x_1^*(z + \alpha y_1) = \alpha,$$

a zatim je, na osnovu Hahn-Banachovog stava produžiti na čitav prostor X. Kako je

$$x_1^*(y_1) = x_1^*(0 + 1 \cdot y_1) = 1$$

i

$$x_1^*(x - Ax) = x_1^*((x - Ax) + 0 \cdot y_1) = 0,$$

funkcionela x_1^* zadovoljava uslove (25). Time je lema 2 dokazana.

Dokaz stava 7 sledi sukcesivnom primenom specijalnog slučaja leme 1, primedbe 2 uz stav 6 i specijalnog slučaja leme 2:

$x - Ax = 0$ ima jedino trivijalno rešenje

$\Rightarrow$ $x^* - A^* x^* = y^*$ ima rešenje za svako $y^* \in X^*$

$\Rightarrow$ $x^* - A^* x^* = 0$ ima jedino trivijalno rešenje

$\Rightarrow$ $x - Ax = y$ ima rešenje za svako $y \in X$.

8.iii. Rezolventni skup i spektar operatora

Rešenje mnogih problema svodi se na određivanje inverznog operatora nekog datog operatora specijalnog tipa. Neka je X normiran prostor (na skupu kompleksnih skalara T) i neka je A linearan operator koji preslikava X u X. Ovde ćemo ispitivati da li operator $\lambda I-A$, gde je I identički operator, ima inverzni operator $(\lambda I-A)^{-1}$ (definicija 3.5), u zavisnosti od vrednosti koje uzima kompleksni skalar λ. Sve kompleksne brojeve λ podelićemo u klase prema tome da li za uočeno λ postoji $(\lambda I-A)^{-1}$ (kao ograničen ili neograničen operator) ili uopšte ne postoji, kao i prema tome da li je skup vrednosti $(\lambda I-A)(X)$ operatora $\lambda I-A$ svuda gust u X ili to nije.

Definicija 2. 1° Broj λ pripada *rezolventnom skupu* $\varrho(A)$ operatora A, ako je skup $(\lambda I-A)(X)$ svuda gust u X i ako $\lambda I-A$ ima ograničen inverzan operator.

2° Broj λ pripada *kontinualnom spektru* $\sigma_C(A)$ operatora A, ako je skup $(\lambda I-A)(X)$ svuda gust u X i ako $\lambda I-A$ ima inverzan operator, ali je ovaj neograničen.

3° Broj λ pripada *rezidualnom spektru* $\sigma_R(A)$ operatora A ako skup $(\lambda I-A)(X)$ nije svuda gust u X i ako $\lambda I-A$ ima inverzan operator (ograničen ili neograničen).

4° Broj λ pripada *diskretnom spektru* $\sigma_D(A)$ operatora A ako operator $\lambda I-A$ nema inverzan operator (bez obzira kakav je skup $(\lambda I-A)(X)$).

Kako se uslovi navedeni pod 1°—4° međusobno isključuju, to su skupovi kompleksnih brojeva $\varrho(A)$, $\sigma_C(A)$, $\sigma_R(A)$ i $\sigma_D(A)$ međusobno disjunktni. Specijalno, skup

$$\sigma(A)=\sigma_C(A)\cup\sigma_R(A)\cup\sigma_D(A)$$

je *spektar* operatora A.

Definicija 3. Kompleksan broj λ je *sopstvena* (*karakteristična*) *vrednost* operatora A ako postoji vektor $x\neq 0$ takav da je

$$Ax=\lambda x.$$

Vektor x je *sopstveni* (*karakteristični*) *vektor* operatora A koji odgovara sopstvenoj vrednosti λ.

Kako je za postojanje inverznog operatora od $\lambda I-A$ potrebno i dovoljno da

$$(\lambda I-A)\,x=0 \quad\Rightarrow\quad x=0$$

(definicija 3.5), to diskretni spektar operatora A obrazuju baš njegove sopstvene vrednosti.

Situacija je naročito jednostavna ako je X konačno-dimenzionalan prostor. Naime, ako tada postoji $(\lambda I-A)^{-1}$, tj. ako $\lambda I-A$ preslikava X biunivoko u X, onda, zbog linearnosti, $\lambda I-A$ preslikava X na X. (Ovo sledi i kao specijalan slučaj stava 7 (videti i vežbanje 7), jer je linearan operator na konačno-dimenzionalnom prostoru neprekidan (stav 3.12), a time i potpuno neprekidan). Znači, $(\lambda I-A)(X)$ je svuda gust u X (jer se poklapa sa X), a $(\lambda I-A)^{-1}$ kao linearan operator (stav 3.5) je uvek ograničen na konačno-dimenzionalnom prostoru X. Prema tome, *ako je X konačno-dimenzionalan prostor, linearni ope-*

rator $(\lambda I - A)$ *ili ima (ograničen) inverzan operator ili ga uopšte nema.* Drugim rečima, proizvoljan kompleksan broj λ ili pripada rezolventnom skupu ili diskretnom spektru operatora A (kontinualni i rezidualni spektar od A su prazni).

Kod beskonačno-dimenzionalnih prostora situacija je mnogo komplikovanija: nijedna od komponenata spektra (kontinualni, rezidualni i diskretni deo) ne mora da bude prazna. Izučavanje osobina tih skupova je predmet *spektralne teorije operatora* (videti, na primer, [2], [14]). Mi ćemo se ovde baviti samo jednim jednostavnim slučajem — spektrom potpuno neprekidnog operatora, koji je najbliži konačno-dimenzionalnom slučaju.

Stav 8. *Neka je* $A: X \to X$ *potpuno neprekidan operator. Proizvoljan kompleksan broj* $\lambda \neq 0$ *pripada ili rezolventnom skupu ili diskretnom spektru operatora A. (Jedino nula može pripadati kontinualnom ili rezidualnom spektru).*

Stav 8 je posledica Fredholmove alternative, ako uočimo da njena

prva alinea kazuje da $\lambda I - A$ ima inverzan operator svuda na $(\lambda I - A)(X) = X$ i da je ovaj tada, prema stavu 7.2, ograničen;

druga alinea kazuje da je λ sopstvena vrednost operatora, a time element njegovog diskretnog spektra.

Podatke o diskretnom spektru potpuno neprekidnog operatora daje

Stav 9. *Neka je* $\varrho > 0$ *i neka je* $A: X \to X$ *potpuno neprekidan operator. A ima samo konačno mnogo linearno nezavisnih sopstvenih vketora koji odgovaraju onim sopstvenim vrednostima* λ *koje su po apsolutnoj vrednosti veće od* ϱ.

Iz stava 9 sledi, prvo, da svakoj sopstvenoj vrednosti potpuno neprekidnog operatora, različitoj od nule, može odgovarati samo konačno mnogo linearno nezavisnih sopstvenih vektora (tj. ona ima konačan *multiplicitet*). Drugo, u svakom zatvorenom razmaku koji ne sadrži nulu leži apsolutna vrednost samo konačno mnogo sopstvenih vrednosti potpuno neprekidnog operatora. Prema tome, potpuno neprekidan operator može imati najviše prebrojivo mnogo sopstvenih vrednosti i nula je njihova jedina moguća tačka nagomilavanja.

S obzirom na primedbu posle definicije 3, ovo možemo i ovako izreći: *diskretan spektar potpuno neprekidnog operatora je najviše prebrojiv i nula mu je jedina moguća tačka nagomilavanja.*

Dokaz stava 9. Pretpostavimo, suprotno tvrđenju stava 9, da operator A ima beskonačno mnogo linearno nezavisnih sopstvenih vektora x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ takvih da je

$$Ax_n = \lambda_n x_n \quad \text{i} \quad |\lambda_n| > \varrho > 0. \tag{26}$$

Uočimo u X potprostor X_1 koji obrazuju vektori x_n. Pokazaćemo da na X_1 operator A ima ograničen inverzan operator. Zaista, vektori oblika

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k \tag{27}$$

obrazuju svuda gust skup u X_1. Za ove vektore je, prema (26),

$$Ax = \alpha_1 \lambda_1 x_1 + \alpha_2 \lambda_2 x_2 + \cdots + \alpha_k \lambda_k x_k,$$

pa je za njih, zbog $A^{-1}(Ax) = x$,

$$A^{-1} x = \frac{\alpha_1}{\lambda_1} x_1 + \frac{\alpha_2}{\lambda_2} x_2 + \cdots + \frac{\alpha_k}{\lambda_k} x_k,$$

odakle sledi

$$\|A^{-1}x\| \leqslant \frac{1}{\varrho}\|x\|.$$

Time smo A^{-1} definisali za vektore oblika (27). A^{-1} možemo neprekidno proširiti na X_1, jer je skup (27) svuda gust u X_1, a da time ne povećamo njegovu normu.

Kako je A potpuno neprekidan operator na X, on je takav i na X_1. Međutim, na osnovu posledice stava 1, potpuno neprekidan operator ne može imati ograničen inverzan operator u beskonačno-dimenzionalnom prostoru. Postoji, dakle, kontradikcija, i time je stav 9 dokazan.

Vežbanja 8

1. Pokazati da je operator iz vežbanja 3.2 potpuno neprekidan. [Iskoristiti primer II.6.1.]

2. Operator iz vežbanja 3.3 je potpuno neprekidan.

3. Sa

$$y(s)=\int_a^b x(t)\sin st\,dt$$

definisan je potpuno neprekidan operator koji preslikava prostor $C[a, b]$ u samog sebe.

4. Operator iz vežbanja 3.4 je potpuno neprekidan.

5. Ako su A i B potpuno neprekidni operatori, takvi su i $A+B$ i αA, gde je α skalar.

6. Stav 6 se može i ovako formulisati: Neka je $A: X \to X$ potpuno neprekidan operator. Ako operator $I-A$ preslikava X na X, tada on preslikava X biunivoko na X.

7. Stav 7 se može i ovako formulisati: Neka je $A: X \to X$ potpuno neprekidan operator. Ako operator $I-A$ preslikava X biunivoko u X, tada on preslikava X na X.

9.i. Hilbertov prostor

Hilbertov prostor je Banachov prostor u kome je na specijalan način — preko skalarnog proizvoda — uvedena norma, pa prema tome i metrika.

Definicija 1. Neka je X linearni vektorski prostor na skupu kompleksnih brojeva i neka svakom uređenom paru vektora $x, y \in X$ odgovara kompleksan broj — njihov *skalarni proizvod* koji ćemo označavati sa (x, y) — ovih osobina:

1° $(\lambda x, y)=\lambda(x, y)$,

2° $(x_1+x_2, y)=(x_1, y)+(x_2, y)$,

3° $(x, y)=\overline{(y, x)}$,

4° $(x, x)\geqslant 0$,

5° $(x, x)=0$ tada i samo tada ako je $x=0$.

Stav 1. *Za skalarni proizvod važi:*

$$(x, \lambda y) = \bar{\lambda}(x, y), \tag{1}$$

$$(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2), \tag{2}$$

$$(\lambda x, \lambda x) = |\lambda|^2 (x, x), \tag{3}$$

$$|(x, y)|^2 \leqslant (x, x)(y, y), \tag{4}$$

$$\sqrt{(x+y, x+y)} \leqslant \sqrt{(x, x)} + \sqrt{(y, y)}. \tag{5}$$

Dokaz. Osobine (1)—(3) slede neposredno iz 1° i 2° definicije 1. Da bismo dokazali osobinu (4), primećujemo da je za realno λ kvadratni polinom po λ sa realnim koeficijentima,

$$(x, x) + 2\,|(x, y)|^2 \lambda + |(x, y)|^2 (y, y)\lambda^2 = (x + \lambda (x, y)\, y, x + \lambda (x, y)\, y),$$

nenegativan, te je

$$|(x, y)|^4 - |(x, y)|^2 (x, x)(y, y) \leqslant 0.$$

(Za $(x, y) = 0$, nejednačina (4) je trivijalno ispunjena).

Osobina (5) sledi iz

$$(x+y, x+y) = (x, x) + (y, y) + (x, y) + (y, x)$$
$$\leqslant (x, x) + (y, y) + 2\sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)}.$$

Prilikom drugog prelaza koristili smo (4).

U X uvodimo kao normu vektora x izraz

$$\boxed{\|x\| = \sqrt{(x, x)}.}$$

Za ovom oznakom, relacije (3), (4) i (5) uzimaju oblik

$$\|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\|, \tag{3'}$$

$$|(x, y)| \leqslant \|x\|\, \|y\| \quad \text{(Schwarzova nejednačina)}, \tag{4'}$$

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \quad \text{(Minkowskijeva nejednačina)}, \tag{5'}$$

što, zajedno sa 4° i 5° definicije 1, potvrđuje da $\sqrt{(x, x)}$ ima sve osobine norme.

Definicija 2. Linearni vektorski prostor snabdeven skalarnim proizvodom iz koga izvire norma je *pred-Hilbertov prostor.* Nazivamo ga *Hilbertov prostor* ako je kompletan.

U daljem izlaganju bavićemo se isključivo Hilbertovim prostorom, ne naglašavajući to uvek eksplicitno. Ipak, primećujemo da neki od rezultata koje ćemo navesti važe i u pred-Hilbertovom prostoru. Čitaocu neće biti teško da u konkretnom slučaju ustanovi da li je kompletnost prostora neophodna ili ne.

Primer 1. Linearni vektorski prostori R^k, l_2 i L_2 su Hilbertovi prostori ako u njima kao skalarni proizvod između vektora x i y uvedemo

$$(x, y) = \sum_{\nu=1}^{k} \xi_\nu \bar{\eta}_\nu, \tag{R^k}$$

$$(x, y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \xi_\nu \bar{\eta}_\nu, \tag{l_2}$$

$$(x, y) = \int_a^b x(t)\, \overline{y(t)}\, dt \tag{L_2}$$

Za razliku od razmatranja koja su prethodila, u daljem izlaganju ćemo u opštem slučaju pretpostavljati da su koordinate vektora u R^k i u l_2 kompleksni brojevi, odnosno da su elementi iz L_2 kompleksne funkcije realne promenljive. Čitaocu prepuštamo da proveri da izrazi kojim je uveden skalarni proizvod u l_2 i L_2 imaju smisla za svaki par vektora, kao i da zadovoljavaju osobine 1°—5° skalarnog proizvoda.

Primer 2. Vektorski prostor $C_2[-1, +1]$ neprekidnih funkcija na $[-1, +1]$ u kome je skalarni proizvod uveden sa

$$(x, y) = \int_{-1}^{+1} x(t)\overline{y(t)}\,dt$$

je pred-Hilbertov ali ne i Hilbertov prostor. Ovde je norma, koja izvire iz skalarnog proizvoda,

$$\|x\| = \left\{\int_{-1}^{+1} |x(t)|^2\,dt\right\}^{1/2},$$

i u odnosu na nju prostor $C_2[-1, +1]$ nije kompletan. Naime, lako je proveriti da je

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & -1 \leqslant t \leqslant 0, \\ nt, & 0 < t \leqslant 1/n, \\ 1, & 1/n < t \leqslant 1, \end{cases}$$

Cauchyev niz ali da ne konvergira u $C_2[-1, +1]$.

Stav 2. *Za fiksirano y, skalarni proizvod (x, y) je neprekidna funkcija od x u smislu metrike u X.*

Simetričan iskaz važi kada fiksiramo x.

Dokaz. Ako $x_n \to x$, tada i

$$|(x_n, y) - (x, y)| = |(x_n - x, y)| \leqslant \|x_n - x\|\,\|y\| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Stav 3. *Za proizvoljna dva vektora x i y u Hilbertovom prostoru važi*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

(relacija paralelograma).

Dokaz neposredno sledi ako normu izrazimo preko skalarnog proizvoda.

Relacija paralelograma je, dakle, potreban uslov da bi neki Banachov prostor bio i Hilbertov. Detaljnije: Ako u nekom Banachovom prostoru ne važi relacija paralelograma, tada se u njemu ne može uvesti skalarni proizvod iz koga bi izvirala norma tog prostora. U tom smislu Banachovi prostori C, L_p i l_p $(p \neq 2)$ nisu Hilbertovi prostori. Na primer, ako u $C[0, 1]$ uočimo vektore

$$x = x(t) = \begin{cases} 1 - 2t, & 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ 0, & 1/2 < t \leqslant 1, \end{cases}$$

i

$$y = y(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ 2t - 1, & 1/2 < t \leqslant 1, \end{cases}$$

lako je proveriti da ovi ne zadovoljavaju relaciju paralelograma.

Relacija paralelograma je ne samo potreban već u izvesnom smislu i dovoljan uslov da bi neki Banachov prostor bio i Hilbertov. Naime, kad god je ona zadovoljena u nekom Banachovom prostoru X, moguće je na $X \times X$ definisati funkcionelu $f(x, y)$ koja ima sve osobine skalarnog proizvoda i takvu da se $\sqrt{f(x,x)}$ svodi na normu uočenog Banachovog prostora. Ako je u pitanju realan Banachov prostor, može se uzeti

$$f(x,y)=\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2-\left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2, \tag{6}$$

a u kompleksnom

$$f(x,y)=\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2-\left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2+i\left\|\frac{x+iy}{2}\right\|^2-i\left\|\frac{x-iy}{2}\right\|^2.$$

Zadržaćemo se samo na realnom Banachovom prostoru i pokazati da je (6) skalarni proizvod u njemu. Pre svega $f(x,x)\geqslant 0$ i $f(x,x)=0$ tada i samo tada ako je $x=0$. Očigledno je i $f(x,y)=f(y,x)$. Da bismo pokazali da je

$$f(x_1+x_2,y)=f(x_1,y)+f(x_2,y), \tag{7}$$

primećujemo da je na osnovu relacije paralelograma

$$\|a+b+c\|^2+\|a+b-c\|^2=2\|a+b\|^2+2\|c\|^2$$

i

$$\|a-b+c\|^2+\|a-b-c\|^2=2\|a-b\|^2+2\|c\|^2.$$

Prema tome,

$$\|a+b+c\|^2-\|a-b+c\|^2+\|a+b-c\|^2-\|a-b-c\|^2=2\|a+b\|^2-2\|a-b\|^2,$$

tj.

$$f(a+c,b)+f(a-c,b)=2f(a,b).$$

Odavde prvo sledi, za $c=a$,

$$f(2a,b)=2f(a,b),$$

a zatim, za $a+c=x_1$, $a-c=x_2$ i $b=y$, i tvrđenje (7), jer je $2a=x_1+x_2$.

Da važi

$$f(\alpha x,y)=\alpha f(x,y) \tag{8}$$

dokazaćemo u nekoliko koraka. Prvo, (8) važi za $\alpha=n$ $(=1,2,\ldots)$ na osnovu (7). Da važi i za $\alpha=1/m$ $(m=1,2,\ldots)$ sledi na osnovu

$$f\left(\frac{x}{m},y\right)=\frac{1}{m^2}f(x,my)=\frac{1}{m^2}f(my,x)=\frac{1}{m}f(y,x)=\frac{1}{m}f(x,y).$$

(Ovde smo pri prvom prelazu iskoristili (6)). Prema tome, (8) važi za svaki pozitivan racionalan broj $\alpha=n/m$. Zbog

$$f(-x,y)=-f(x,y),$$

važiće (8) i za negativne racionalne brojeve. Najzad, ako je α proizvoljan realan broj, neka je (α_n) niz racionalnih brojeva koji konvergira ka α. Kako je $f(x,y)$ neprekidna funkcija svojih argumenata (jer je takva norma u Banachovom prostoru), to ako u

$$f(\alpha_n x,y)=\alpha_n f(x,y)$$

pustimo da $n\to\infty$, slediće (8) u opštem slučaju.

Definicija 3. Neka je X Hilbertov prostor i neka je $Y\subset X$. Ako je Y, sam za sebe, Hilbertov prostor u odnosu na algebarsku i metričku strukturu koju u njemu inducira odgovarajuća struktura iz X, kažemo da je Y *Hilbertov potprostor* od X.

Vektorski potprostor od X je Hilbertov potprostor od X ako je zatvoren (stav 2.1).

Kako je Hilbertov prostor jedan specijalan Banachov prostor, to sve što smo u prethodnim odeljcima rekli o Banachovom prostoru važi i za Hilbertove prostore. Sve definicije i stavovi ostaju nepromenjeni i mi ćemo se na njih pozivati. Međutim, struktura Hilbertovog prostora je bogatija (zbog postojanja skalarnog proizvoda) od strukture Banachovog prostora, te je s jedne strane u Hilbertovom prostoru moguće uvesti i pojmove koji nemaju analogona u Banachovom prostoru. S druge strane, do mnogih pojmova, koji postoje i u Banachovom prostoru, može se u Hilbertovom prostoru doći na ovome specifičan i često jednostavniji način. Specijalno, geometrija Hilbertovog prostora je naročito bogata, jer se pomoću skalarnog proizvoda može definisati ortogonalnost dva vektora, pa time mnoga geometrijska svojstva konačno-dimenzionalnih vektorskih prostora preneti i na beskonačno-dimenzionalne Hilbertove prostore.

9.ii. Ortogonalna projekcija na potprostor

Definicija 4. Vektori x i y iz X su *ortogonalni* ako je $(x, y) = 0$.

Ortogonalnost vektora x i y označavamo sa $x \perp y$. Vodeći računa o definiciji norme, lako je pokazati da iz $x \perp y$ sledi

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

(Pitagorino pravilo).

Ako je $x \in X$, sa $x^\perp$ označavamo skup vektora iz X koji su ortogonalni na x.

Neka je Y vektorski potprostor od X. Tada $Y^\perp$ označava skup onih vektora iz X koji su ortogonalni na svaki vektor iz Y. Očigledno je $Y \cap Y^\perp = \{0\}$, jer jedino je nula-vektor ortogonalan sam na sebe.

Stav 4. *Neka je $x \in X$ i neka je Y vektorski potprostor od X. Tada su $x^\perp$ i $Y^\perp$ Hilbertovi potprostori od X.*

Dokaz. Pre svega, $x^\perp$ je vektorski potprostor od X, jer iz $y_1 \perp x$ i $y_2 \perp x$ sledi $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \perp x$. Neka je y tačka nagomilavanja skupa $x^\perp$ i neka $x^\perp \ni y_n \to y$. Kako je $(x, y_n) = 0$ za svako n, zbog neprekidnosti skalarnog proizvoda, sledi $(x, y) = 0$, te je $x^\perp$ kao zatvoren skup Hilbertov potprostor od X.

Kako $Y^\perp$ možemo napisati u obliku

$$Y^\perp = \bigcap_{x \in Y} x^\perp,$$

to je i $Y^\perp$, kao presek zatvorenih skupova, zatvoren, pa time Hilbertov potprostor od X.

Stav 5. *Neka je Y Hilbertov potprostor od X, x tačka iz X i*

$$\delta = d(x, Y) = \inf_{y \in Y} \|x - y\|.$$

Tada u Y postoji jedna jedina tačka y tako da je $\delta = \|x - y\|$.

Drugim rečima, u Hilbertovom potprostoru Y postoji jedna jedina tačka y koja je najbliža tački x; δ je *rastojanje* tačke x do Hilbertovog potprostora Y.

Dokaz stava 5. Izaberimo u Y niz tačaka (y_n) tako da je

$$\lim_{n\to\infty} \|x-y_n\| = \delta. \tag{9}$$

Na osnovu relacije paralelograma je

$$\|y_m-y_n\|^2 = 2\|y_m-x\|^2 + 2\|y_n-x\|^2 - \|(y_m-x)+(y_n-x)\|^2$$

$$= 2\|y_m-x\|^2 + 2\|y_n-x\|^2 - 4\left\|\frac{y_m+y_n}{2} - x\right\|^2.$$

Kako $(y_m+y_n)/2 \in Y$, to je prema definiciji broja δ

$$\left\|\frac{y_m+y_n}{2} - x\right\| \geqslant \delta,$$

te je

$$\|y_m-y_n\|^2 \leqslant 2\|y_m-x\|^2 + 2\|y_n-x\|^2 - 4\delta^2.$$

Odavde, na osnovu (9), (y_n) je Cauchyev niz te postoji $y \in X$ tako da $y_n \to y$. No kako je Y, kao Hilbertov potprostor, zatvoren skup, to $y \in Y$. Iz (9) onda sledi $\|x-y\| = \delta$.

Pokazaćemo da je y jedina tačka u Y koja zadovoljava $\|x-y\| = \delta$. Zaista, ako je z ma koja tačka iz Y koja zadovoljava $\|x-z\| = \delta$, tada je na osnovu relacije paralelograma

$$\|y-z\|^2 = 2\|y-x\|^2 + 2\|x-z\|^2 - \|y+z-2x\|^2$$

$$= 4\delta^2 - 4\left\|\frac{y+z}{2} - x\right\|^2 \leqslant 0,$$

jer $(y+z)/2 \in Y$, pa je

$$\left\|\frac{y+z}{2} - x\right\|^2 \geqslant \delta^2.$$

Znači, $\|y-z\|^2 = 0$, tj. $z = y$.

Stav 6. *Neka je Y Hilbertov potprostor od X i y tački $x \in X$ najbliža tačka u Y. Tada je vektor $x-y$ ortogonalan na Y.*

Drugim rečima, svaki vektor $x \in X$ dopušta jedinstvenu dekompoziciju

$$x = y + z,$$

gde je $y \in Y$ i $z \in Y^{\perp}$.

Zbog ove svoje osobine, vektor y nazivamo *ortogonalna projekcija* vektora x na Hilbertov potprostor X.

Iz stava 6 neposredno sledi: *Ako je Y pravi Hilbertov potprostor od X, postoji vektor različit od nula-vektora ortogonalan na Y.* Zaista, ako $x \notin Y$, takav je vektor $z = x - y$.

Dokaz stava 6. Kada vektor $x-y$ ne bi bio ortogonalan na Y, postojao bi u Y vektor y' takav da je

$$(x-y, y') = \sigma \neq 0.$$

Uočimo li vektor

$$y'' = y + \frac{\sigma}{(y', y')} y' \in Y,$$

imali bismo

$$\begin{aligned}\|x-y''\|^2&=\left(x-y-\frac{\sigma}{(y',y')}\,y',\,x-y-\frac{\sigma}{(y',y')}\,y'\right)\\&=(x-y,x-y)-\frac{\sigma}{(y',y')}\,(y',x-y)\\&\quad-\frac{\bar\sigma}{(y',y')}\,(x-y,y')+\frac{|\sigma|^2}{(y',y')^2}\,(y',y')\\&=\|x-y\|^2-\frac{|\sigma|^2}{(y',y')},\end{aligned}$$

tj.

$$\|x-y''\|^2<\|x-y\|^2,$$

što je u kontradikciji sa činjenicom da je y tački x najbliža tačka u Y.

9.iii. Ortonormirani sistemi

U linearnom vektorskom prostoru skup vektora $\{x_i\}_{i\in I}$ obrazuje algebarsku bazu (definicija 1.8) ako se svaki vektor prostora može prikazati kao linearna kombinacija (ne uvek iste) *konačne* kolekcije vektora iz baze. (Jedino u konačno-dimenzionalnom prostoru kolekcija je ista za sve vektore prostora). Koristeći pojam ortogonalnosti, u Hilbertovom prostoru moguće je uvesti tzv. ortonormiranu bazu prostora (u opštem slučaju beskonačnu), tako da se svaki vektor prostora može izraziti kao linearna kombinacija *svih* (dakle, u opštem slučaju beskonačno mnogih) vektora ortonormirane baze.

Definicija 5. Skup vektora $\{x_i\}_{i\in I}$ u Hilbertovom prostoru obrazuje *ortonormiran sistem* ako je

$$(x_i,x_j)=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}\quad (i,j\in I).$$

Primećujemo da skup indeksa I može biti konačan, prebrojiv ili neprebrojiv.

Primer 3. U l_2 ma koja (konačna ili beskonačna) kolekcija vektora $e_1, e_2, \ldots$ obrazuje ortonormiran sistem.

Primer 4. U $\tilde{L}_2(-\pi,\pi)$ ma koja (konačna ili beskonačna) kolekcija vektora

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}},\quad \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}},\quad \frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}},\quad \frac{\sin 2t}{\sqrt{2\pi}},\ldots,$$

obrazuje ortonormiran sistem.

Vektori koji pripadaju nekom ortonormiranom sistemu su međusobno linearno nezavisni. Zaista, kada bi vektori $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ nekog ortonormiranog sistema bili linearno zavisni, tj. kada bi postojala jednakost

$$\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\cdots+\lambda_n x_n=0$$

i, recimo, bilo $\lambda_1 \neq 0$, tada bi skalarnim množenjem sa x_1 sledilo

$$\lambda_1 (x_1, x_1) + \lambda_2 (x_2, x_1) + \cdots + \lambda_n (x_n, x_1) = 0,$$

tj.

$$\lambda_1 = 0,$$

suprotno učinjenoj pretpostavci.

Definicija 6. Neka je $\{x_i\}_{i \in I}$ ortonormiran sistem u X i $x \in X$. *Fourierovi koeficijenti* od x *u odnosu na* $\{x_i\}_{i \in I}$ definisani su sa

$$\hat{x}_i = (x, x_i) \quad (i \in I).$$

Kada je jasno o kom ortonormiranom sistemu je reč, govorićemo jednostavno o Fourierovim koeficijentima vektora.

Stav 7. *Neka je* $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ *ortonormiran sistem u* X *i neka je*

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i$$

Tada je

$$\alpha_i = \hat{x}_i$$

i

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{k} |\hat{x}_i|^2$$

Dokaz. Zaista, za fiksirano n $(= 1, 2, \ldots, k)$ je

$$(x, x_n) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (x_i, x_n) = \alpha_n$$

i

$$\|x\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j \right) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} (\alpha_i x_i, \alpha_j x_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \alpha_i \bar{\alpha}_j (x_i, x_j) = \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|^2.$$

U stavu 7 vektor x pripada linealu nad ortonormiranim sistemom $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Ako to nije slučaj, važi samo

Stav 8. *Neka je* $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ *ortonormiran sistem u* X *i neka su* $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_k$ *Fourierovi koeficijenti od* $x \in X$. *Tada je*

$$\sum_{i=1}^{k} |\hat{x}_i|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

Dokaz. Pre svega,

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{k} \hat{x}_i x_i \right\|^2 = \left(x - \sum_{i=1}^{k} \hat{x}_i x_i,\; x - \sum_{j=1}^{k} \hat{x}_j x_j \right)$$

(10)
$$= \|x\|^2 - \left(x, \sum_{j=1}^{k} \hat{x}_j x_j \right) - \left(\sum_{i=1}^{k} \hat{x}_i x_i,\; x \right) + \left(\sum_{i=1}^{k} \hat{x}_i x_i, \sum_{j=1}^{k} \hat{x}_j x_j \right).$$

No kako je

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \hat{x}_i x_i,\ \sum_{j=1}^{k} \hat{x}_j x_j\right) = \sum_{i=1}^{k} |\hat{x}_i|^2,$$

$$\left(x, \sum_{j=1}^{k} \hat{x}_j x_j\right) = \sum_{j=1}^{k} (x, \hat{x}_j x_j) = \sum_{j=1}^{k} \overline{\hat{x}_j}\,(x, x_j) = \sum_{j=1}^{k} |\hat{x}_j|^2$$

i slično

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \hat{x}_i x_i,\ x\right) = \sum_{i=1}^{k} |\hat{x}_i|^2,$$

to iz (10) sledi

$$0 \leqslant \left\| x - \sum_{i=1}^{k} \hat{x}_i x_i \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{k} |\hat{x}_i|^2,$$

što predstavlja tvrđenje stava.

Naš prvi cilj je da tvrđenje stava 8, koje je poznato kao *Besselova jednačina*, proširimo na slučaj kada u X postoji beskonačan ortonormiran sistem $\{x_i\}_{i\in I}$. No to zahteva da prethodno definišemo šta ćemo podrazumevati pod sumom brojeva

$$\sum_{i\in I} |\hat{x}_i|^2, \tag{11}$$

jer skup indeksa I može biti i neprebrojiv. Isto pitanje se postavlja i za sumu vektora

$$\sum_{i\in I} \hat{x}_i x_i, \tag{12}$$

koju nazivamo i *Fourierov razvitak* vektora x u odnosu na ortonormirani sistem $\{x_i\}_{i\in I}$. Za to nam je potreban

Stav 9. *Neka je $\{x_i\}_{i\in I}$ ortonormiran sistem u X. Među Fourierovim koeficijentima $\{\hat{x}_i\}_{i\in I}$ vektora $x \in X$ ima ih samo najviše prebrojivo mnogo različitih od nule, bez obzira kog kardinalnog broja je skup indeksa I.*

Dokaz. Uočimo skup

$$E_n = \{\hat{x}_i : |\hat{x}_i| \geqslant 1/n,\ n = 1, 2, \ldots\}.$$

Pretpostavimo da $\hat{x}_{i_1}, \hat{x}_{i_2}, \ldots, \hat{x}_{i_k} \in E_n$. Na osnovu stava 8 je

$$k \cdot \frac{1}{n^2} \leqslant \sum_{j=1}^{k} |\hat{x}_{i_j}|^2 \leqslant \|x\|^2,$$

tj.

$$k \leqslant n^2 \|x\|^2.$$

Za fiksirano n postoji, dakle, samo konačno mnogo elemenata u E_n, pa time i njih najviše prebrojivo mnogo u $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Na osnovu stava 9, sume (11) i (12) su najviše prebrojive, te ako na proizvoljan način uredimo Fourierove koeficijente $\{\hat{x}_i\}_{i\in I}$ koji su različiti od nule u niz—označimo ovaj sa $\hat{x}'_1, \hat{x}'_2, \ldots$ ili, da ne bi komplikovali pisanje, opet sa $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots$— sume (11) i (12) formalno će se svesti na

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\hat{x}_i|^2, \quad \text{odnosno} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \hat{x}_i x_i. \tag{13}$$

Dva pitanja se ovde postavljaju: prvo, da li su ovi redovi konvergentni i, drugo, da li njihova suma zavisi od poretka članova, tj. od načina kako smo Fourierove koeficijente koji su različiti od nule poređali u niz.

Za prvi od redova (13) odgovor je lako dobiti. Kako tvrđenje stava 8 važi za svaki konačan ortonormiran sistem, to su delimične sume reda $\sum_{i=1}^{\infty} |\hat{x}_i|^2$ ograničene, te on kao red sa pozitivnim članovima (bezuslovno) konvergira.

Pokazaćemo da i vektorski red u (13) bezuslovno konvergira. Zaista, ako označimo sa σ_n i s_n delimične sume redova u (13), tada je

$$\|s_m - s_n\|^2 = \left\| \sum_{i=n+1}^{m} \hat{x}_i x_i \right\|^2 = \left(\sum_{i=n+1}^{m} \hat{x}_i x_i, \quad \sum_{j=n+1}^{m} \hat{x}_j x_j \right)$$

$$= \sum_{i=n+1}^{m} |\hat{x}_i|^2 = |\sigma_m - \sigma_n|^2,$$

tj. (s_n) je Cauchyev niz u X tada i samo tada ako je (σ_n) Cauchyev niz u R. Kako niz (σ_n), kao što smo videli, uvek konvergira, to je slučaj i sa (s_n), jer je X kompletan prostor. Ponavljajući ovaj postupak i za neki drugi poredak članova u $\sum_{i=1}^{\infty} \hat{x}_i x_i$, iz bezuslovne konvergencije reda $\sum_{i=1}^{\infty} |\hat{x}_i|^2$ slediće bezuslovna konvergencija reda $\sum_{i=1}^{\infty} \hat{x}_i x_i$.

(Primećujemo da prilikom dokaza ekvikonvergencije redova u (13) nigde nismo koristili činjenicu da su skalari $\hat{x}_i$ Fourierovi koeficijenti nekog vektora x u odnosu na ortonormirani sistem $x_1, x_2, \ldots$. Prema tome, ako je (α_i) proizvoljan niz skalara, tada su i redovi

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 \quad \text{i} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \tag{13'}$$

ekvikonvergentni. Na ovo ćemo se u daljem izlaganju često pozivati.)

Sada pošto smo dobro definisali sume (11) i (12) i pokazali da one ne zavise od poretka sabiraka, na osnovu stava 8 neposredno sledi

Stav 10. *Neka su $\hat{x}_i$ Fourierovi koeficijenti vektora $x \in X$ u odnosu na ortonormiran sistem $\{x_i\}_{i \in I}$ u X. Tada važi*

$$\sum_{i \in I} |\hat{x}_i|^2 \leqslant \|x\|^2 \quad \textit{(Besselova nejednačina)} \tag{14}$$

i Fourierov razvitak vektora x,

$$\sum_{i \in I} \hat{x}_i x_i, \tag{15}$$

bezuslovno konvergira.

Jedno od osnovnih pitanja je da li u svakom Hilbertovom prostoru postoji i, ako postoji, kako okarakterisati ortonormirani sistem za koji bi u (14) važio znak jednakosti a Fourierov razvitak (15) svakog vektora $x \in X$ predstavljao baš taj vektor.

Definicija 7. Ortonormirani sistem $\{x_i\}_{i \in I}$ je *potpun* (*maksimalan*) u X ako nije pravi deo nekog drugog ortonormiranog sistema.

Ako je M potpun ortonormiran sistem u X, *per definitionem* ne postoji u X vektor $x \neq 0$ ortogonalan na M. Drugim rečima, ako je vektor x ortogonalan na potpun ortonormiran sistem M, on se obavezno svodi na nula-vektor.

Stav 11. *U svakom Hilbertovom prostoru* $X\,(\neq \{0\})$ *postoji potpun ortonormiran sistem.*

Dokaz. Pre svega, u X postoji uvek ortonormiran sistem. Takav je sistem koji se sastoji od jednog jedinog jediničnog vektora. Naše tvrđenje slediće, dakle, ako pokažemo da je svaki ortonormiran sistem M u X sadržan u nekom potpunom ortonormiranom sistemu u X.

Neka je $\mathcal{M}$ kolekcija onih ortonormiranih sistema u X koji sadrže ortonormirani sistem M. U $\mathcal{M}$ je inkluzijom uveden (delimični) poredak. Zbog $M \in \mathcal{M}$ kolekcija $\mathcal{M}$ nije prazna, te u njoj postoji na osnovu Hausdorffovog stava (odeljak I.4) jedan maksimalni lanac $\mathfrak{L}$. Neka je N unija svih elemenata lanca $\mathfrak{L}$. Jasno je da je $M \subset N$. Pokazaćemo da je N potpun ortonormiran sistem.

Zaista, ako x_1 i $x_2 \in N$, tada $x_1 \in A_1$ i $x_2 \in A_2$, gde su A_1 i A_2 ortonormirani sistemi iz lanca $\mathfrak{L}$. Kako je $\mathfrak{L}$ lanac, bez ograničenja možemo pretpostaviti da je $A_1 \subset A_2$. Znači, oba vektora x_1 i x_2 pripadaju A_2, te je

$$(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 \text{ ako je } x_1 = x_2, \\ 0 \text{ ako je } x_1 \neq x_2. \end{cases}$$

Kako ovo važi za bilo koja dva vektora iz N, to je N ortonormiran sistem u X. Pretpostavimo da N nije potpun, tj. da je pravi deo nekog ortonomiranog sistema N^* u X. Tada N^* ne pripada lancu $\mathfrak{L}$ (jer je N unija svih elemenata iz $\mathfrak{L}$) a $N^* \supset N$. Prema tome, ako lancu $\mathfrak{L}$ dodamo N^* dobili bismo opet jedan lanac, suprotno pretpostavci da je $\mathfrak{L}$ maksimalni lanac. Time je stav dokazan.

Centralno mesto u našem izlaganju zauzima

Stav 12. *Neka su* $\hat{x}_i$ *Fourierovi koeficijenti vektora* $x \in X$ *u odnosu na ortonormirani sistem* $\{x_i\}_{i \in I}$. *Tada su među sobom ekvivalentni iskazi:*

1° $\{x_i\}_{i \in I}$ *je potpun sistem u* X.

2° $x = \sum_{i \in I} \hat{x}_i x_i$ *za svaki vektor* $x \in X$.

3° *Skup vektora* $\{x_i\}_{i \in I}$ *je fundamentalan u* X.

4° $\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\hat{x}_i|^2$ *za svaki vektor* $x \in X$.

5° $(x, y) = \sum_{i \in I} \hat{x}_i \overline{\hat{y}_i}$ *za svaki par vektora* x *i* $y \in X$ (*Parsevalova jednakost*).

Zbog iskaza 1° $\Leftrightarrow$ 2° stava 12, potpuni ortonormirani sistem nazivamo i *ortonormirana baza* prostora.

Dokaz stava 12. Pokazaćemo da $1° \Rightarrow 2° \Rightarrow 3° \Rightarrow 1°$ i da $2° \Rightarrow 4°$, $4° \Rightarrow 1°$ i $4° \Leftrightarrow 5°$.

$1° \Rightarrow 2°$. Prema stavu 10, Fourierov razvitak $\sum_{i \in I} \hat{x}_i x_i$ vektora x konvergira, recimo, ka $y \in X$. Stavimo $z = x - y$. Kako je zbog neprekidnosti skalarnog proizvoda za svako $j \in I$

$$(z, x_j) = (x, x_j) - (y, x_j) = (x, x_j) - \Big(\sum_{i \in I} \hat{x}_i x_i, x_j\Big)$$

$$= (x, x_j) - \sum_{i \in I} \hat{x}_i (x_i, x_j) = (x, x_j) - \hat{x}_j = 0,$$

to je vektor z ortogonalan na svaki od vektora x_i. Kako je, prema pretpostavci, $\{x_i\}_{i \in I}$ potpun ortonormiran sistem to je $z = 0$, tj. $y = x$.

$2° \Rightarrow 3°$. Neka je x proizvoljan vektor iz X. Na osnovu 2° i prema definiciji sume $\sum_{i \in I} \hat{x}_i x_i$, svakom $\varepsilon > 0$ odgovara vektor $z = \sum_{k=1}^{n} \hat{x}_{i_k} x_{i_k}$ tako da je $\| x - z \| < \varepsilon$, što znači da je lineal nad $\{x_i\}_{i \in I}$ svuda gust u X.

$3° \Rightarrow 1°$. Pretpostavimo da ovo nije tačno, tj. da u X postoji vektor $z \neq 0$ ortogonalan na sve vektore $\{x_i\}_{i \in I}$. Vektor z je tada ortogonalan i na zatvoreni lineal nad $\{x_i\}_{i \in I}$ koji se poklapa sa X, pa time i na samog sebe. Dakle, $(z, z) = 0$, što znači $\| z \| = 0$. Kontradikcija.

$2° \Rightarrow 4°$. Zbog neprekidnosti skalarnog proizvoda, iz 2° sledi

$$\| x \|^2 = (x, x) = \Big(\sum_{i \in I} \hat{x}_i x_i, \sum_{j \in I} \hat{x}_j x_j\Big) = \sum_{i \in I} | \hat{x}_i |^2.$$

$4° \Rightarrow 1°$. Pretpostavka da postoji vektor $z \neq 0$ ortogonalan na sve vektore $\{x_i\}_{i \in I}$ dovodi do kontradikcije, jer je na osnovu 4°

$$\| z \|^2 = \sum_{i \in I} | \hat{z}_i |^2 = \sum_{i \in I} |(z, x_i)|^2 = 0.$$

$4° \Leftrightarrow 5°$. Za $x = y$ iz $5° \Rightarrow 4°$. Da, obrnuto, iz $4° \Rightarrow 5°$ možemo ovako uvideti. Kako 4° važi za svaki vektor iz X, važiće i za vektor $x + \lambda y$ $(x, y \in X)$, gde je λ proizvoljan kompleksan broj. Dakle,

$$\| x + \lambda y \|^2 = \sum_{i \in I} |(x + \lambda y, x_i)|^2,$$

što se svodi na

$$(x, x) + \lambda (y, x) + \bar{\lambda} (x, y) + | \lambda |^2 (y, y) = \tag{16}$$

$$= \sum_{i \in I} \{ |(x, x_i)|^2 + \lambda (y, x_i) \overline{(x, x_i)} + \bar{\lambda} (x, x_i) \overline{(y, x_i)} + | \lambda |^2 |(y, x_i)|^2 \}.$$

No kako 4° važi i za svaki od vektora x i y ponaosob, to iz (16) dobijamo

$$\lambda (y, x) + \bar{\lambda} (x, y) = \lambda \sum_{i \in I} (y, x_i) \overline{(x, x_i)} + \bar{\lambda} \sum_{i \in I} (x, x_i) \overline{(y, x_i)}.$$

Odavde sledi 5°, jer ova jednakost važi za svako kompleksno λ.

Primer 5. Na osnovu 3° stava 12 skup $\{e_1, e_2, \dots\}$ je jedan potpun ortonormiran sistem u l_2 (primer 2.4).

Primer 6. Skup vektora

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\cos 2t}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin 2t}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

obrazuje potpun ortonormiran sistem u $\tilde{L}_2(-\pi, \pi)$ (Primer 2.7).

Ako u nekom Hilbertovom potprostoru $Y \subset X$ poznajemo jedan potpun ortonormiran sistem, moguće je na jednostavan način izraziti ortogonalnu projekciju i rastojanje vektora $x \in X$ od potprostora Y.

Stav 13. *Neka je $\{x_i\}_{i \in I}$ ortonormiran sistem u X i neka je y ortogonalna projekcija vektora x na Hilbertov potprostor Y koji obrazuje zatvoreni lineal nad vektorima $\{x_i\}_{i \in I}$. Tada je*

$$y = \sum_{i \in I} \hat{x}_i x_i,$$

i rastojanje δ vektora x do potprostora Y dato je sa

$$\delta^2 = \| x \|^2 - \sum_{i \in I} | \hat{x}_i |^2.$$

Dokaz. Ako je y ortogonalna projekcija vektora x na Hilbertov potprostor Y, tada je na osnovu stava 6

$$x = y + z \text{ gde je } y \in Y \text{ i } z = Y^{\perp}.$$

Kako je $\{x_i\}_{i \in I}$ potpun ortonormiran sistem u Y (stav 12, 3°), to je zbog $z \in Y^{\perp}$,

$$y = \sum_{i \in I} (y, x_i)\, x_i = \sum_{i \in I} (x, x_i)\, x_i - \sum_{i \in I} (z, x_i)\, x_i = \sum_{i \in I} \hat{x}_i x_i.$$

Izraz za rastojanje sledi iz $\sigma^2 = \| z \|^2 = \| x \|^2 - \| y \|^2$, na osnovu 4° stava 12.

Izloženi rezultati ukazuju na prednosti koje ortonormirana baza ima nad algebarskom bazom u Hilbertovom prostoru. Zato je od interesa *Schmidtov postupak ortogonalizacije* kojim se najviše prebrojivom skupu linearno nezavisnih vektora $\{x_1, x_2, \ldots\}$ može korespondirati ortonormiran sistem vektora $\{y_1, y_2, \ldots\}$ tako da se lineali nad oba skupa poklapaju.

Za y_1 uzećemo vektor

$$y_1 = \frac{x_1}{\| x_1 \|}.$$

Vektor y_2 konstruisaćemo u dva koraka. Prvo ćemo od x_2 oduzeti njegovu projekciju na lineal X_1 nad x_1. Prema stavu 6, vektor

$$z_2 = x_2 - (x_2, y_1)\, y_1$$

je ortogonalan na X_1 (pa time i na y_1) i različit od nula-vektora, jer inače bi $x_2 \in X_1$ što protivureči linearnoj nezavisnosti vektora $\{x_1, x_2, \ldots\}$. Za y_2 uzećemo onda vektor

$$y_2 = \frac{z_2}{\| z_2 \|}.$$

Lako je proveriti da se lineal nad y_1 i y_2 poklapa sa linealom X_2 nad x_1 i x_2.

Kada smo već konstruisali vektore $y_1, y_2, \ldots, y_n$, prvo određujemo vektor

$$z_{n+1} = x_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} (x_{n+1}, y_k)\, y_k$$

koji je ortogonalan na lineal X_n nad $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (pa time i na vektore $y_1, y_2, \ldots, y_n$) i različit od nula-vektora. Za y_{n+1} uzećemo onda vektor

$$y_{n+1} = \frac{z_{n+1}}{\| z_{n+1} \|} .$$

Tako dolazimo do ortonormiranog sistema $\{y_1, y_2, \ldots\}$ koji je u navedenom smislu ekvivalentan skupu linearno nezavisnih vektora $\{x_1, x_2, \ldots\}$.

9.iv. Ortogonalna dimenzija Hilbertovog prostora

Koristeći pojam ortonormirane baze (potpunog ortonormiranog sistema) u Hilbertovom prostoru, moguće je u ovome uvesti pojam ortogonalne dimenzije prostora. Da bi ovu mogli valjano da definišemo, dokazaćemo prethodno

Stav 14. *Dve ortonormirane baze $\{x_i\}_{i \in I}$ i $\{y_j\}_{j \in J}$ u Hilbertovom prostoru imaju isti kardinalni broj.*

Dokaz. Od interesa je jedino slučaj kada su baze beskonačne. (U Linearnoj algebri se pokazuje da analogan stav važi za konačne baze). Kako je $\{x_i\}_{i \in I}$ ortonormirana baza, to za svako $j \in J$ važi

$$y_j = \sum_{i \in I} \hat{y}_{ji} x_i, \quad \hat{y}_{ji} = (y_j, x_i)$$

(stav 12, 2°). Za fiksirano j je prema stavu 9 $\hat{y}_{ji} \neq 0$ za najviše prebrojivo mnogo vrednosti i iz I; označimo sa $I_j \subset I$ taj podskup indeksa. Pokazaćemo da je

$$\bigcup_{j \in J} I_j = I. \tag{17}$$

Zaista, kada neko $i_0 \in I$ ne bi pripadalo nijednom od I_j, tj. kada bismo imali

$$\hat{y}_{ji_0} = (y_j, x_{i_0}) = 0 \quad \text{za svako } j \in J,$$

to bi značilo da je vektor $x_{i_0} \neq 0$ ortogonalan na svakom od vektora y_j, suprotno pretpostavci da je $\{y_j\}_{j \in J}$ potpun ortonormiran sistem. Kako je svaki od skupova I_j $(j \in J)$ najviše prebrojiv, a J beskonačan skup, to iz (17) sledi

$$\overline{\overline{I}} \leqslant \overline{\overline{J}} + \overline{\overline{J}} + \overline{\overline{J}} + \cdots = \overline{\overline{J}}.$$

Na simetričan način zaključili bismo da je

$$\overline{\overline{J}} \leqslant \overline{\overline{I}},$$

tako da na osnovu Cantor-Bernsteinovog stava sledi $\overline{\overline{I}} = \overline{\overline{J}}$.

Definicija 8. *Ortogonalna dimenzija* Hilbertovog prostora jednaka je kardinalnom broju neke njegove ortonormirane baze.

Primer 7. Prostori l_2 i L_2 su ortogonalne dimenzije $\aleph_0$.

Stav 15. *Hilbertov prostor X je separabilan tada i samo tada ako mu je ortogonalna dimenzija $\leqslant \aleph_0$.*

Dokaz. Neka je $\{x_1, x_2, \ldots\}$ najviše prebrojiv svuda gust skup tačaka u X. Ako iz ovog niza eliminišemo sve vektore koji su linearno zavisni od onih koji im prethode, dobićemo najviše prebrojiv skup linearno nezavisnih vektora koji je fundamentalan u X. Schmidtovim postupkom ortogonalizacije zamenićemo ovaj ekvivalentnim najviše prebrojivim ortonormiranim sistemom. No kako je i ovaj fundamentalan u X, on je na osnovu stava 12 potpun u X. Ortogonalna dimenzija prostora X je dakle $\leqslant \aleph_0$.

Obrnuto, pretpostavimo da u X postoji najviše prebrojiv potpun ortonormiran sistem $\{x_1, x_2, \ldots\}$. Označimo sa L skup linearnih kombinacija

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n \quad (\lambda_\nu = \alpha_\nu + i\beta_\nu),$$

gde su α_ν i β_ν racionalni brojevi. Na osnovu 2° stava 12, svakom $\varepsilon > 0$ i svakom $x \in X$ odgovara prirodni broj n tako da je

$$\left\| x - \sum_{\nu=1}^{n} \hat{x}_\nu x_\nu \right\| < \varepsilon/2.$$

Brojeve λ_ν odredimo tako da je

$$\left\| \sum_{\nu=1}^{n} (\hat{x}_\nu - \lambda_\nu) x_\nu \right\| < \varepsilon/2.$$

Tada vektor

$$z = \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu x_\nu \in L \quad \text{i} \quad \| x - z \| < \varepsilon,$$

što znači da je skup L svuda gust u X. No kako je L najviše prebrojiv skup, prostor X je separabilan.

Da ima i neseparabilnih Hilbertovih prostora pokazuje

Primer 8. Neka je S proizvoljan neprebrojiv skup i uočimo kolekciju $L_2(S)$ realnih ili kompleksnih funkcija $x(s)$ definisanih na S i takvih da se anuliraju na S sem na jednom najviše prebrojivom podskupu od S i zadovoljavaju

$$\sum_{s \in S} |x(s)|^2 < +\infty.$$

Čitaocu prepuštamo da proveri da je $L_2(S)$ vektorski prostor ako u $L_2(S)$ unutrašnju i spoljašnju kompoziciju uvedemo na prirodan način, kao i da je

$$(x, y) = \sum_{s \in S} x(s) \overline{y(s)}$$

skalarni proizvod u $L_2(S)$. Pokazaćemo da prostor $L_2(S)$ nije separabilan, tj. da mu je ortogonalna dimenzija $> \aleph_0$. U tom cilju uočimo podskup M od $L_2(S)$ koji obrazuju sve karakteristične funkcije $K_{\{s\}}$ podskupova od S koji se svode na jednu jedinu tačku s. Rastojanje između dva vektora $K_{\{s_1\}}$ i $K_{\{s_2\}}$ iz $L_2(S)$ $(s_1 \in S, s_2 \in S$ i $s_1 \neq s_2)$ je

$$\| K_{\{s_1\}} - K_{\{s_2\}} \|^2 = \sum_{s \in S} | K_{\{s_1\}}(s) - K_{\{s_2\}}(s) |^2 = 2. \tag{18}$$

Okružimo svaku tačku $K_{\{s\}}$ iz $L_2(S)$ otvorenom kuglom poluprečnika $\sqrt{2}/2$. Prema (18), ove kugle su međusobno disjunktne. Kada bi u prostoru $L_2(S)$ postojao svuda gust skup, ovaj bi morao da ima bar po jednog predstavnika u svakoj od navedenih kugli, a to znači neprebrojivo mnogo elemenata jer kugli ima neprebrojivo mnogo s obzirom da je sa S i M neprebrojiv skup.

Definicija 9. Hilbertovi prostori X i Y (nad istim skupom skalara T) su *kongruentni* ako postoji biunivoka korespondencija $f: X \to Y$ tako da

(19) $$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X \text{ i } \forall \lambda_1, \lambda_2 \in T.$$

i

(20) $$(x_1, x_2)_X = (f(x_1), f(x_2))_Y \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

Preslikavanje f nazivamo tada *kongruencija.*

Da je termin (ortogonalna) dimenzija Hilbertovog prostora adekvatan, tvrdi

Stav 16. *Hilbertovi prostori X i Y su kongruentni tada i samo tada ako su iste ortogonalne dimenzije.*

Prema primeru 7 Hilbertovi prostori l_2 i L_2 su kongruentni.

Dokaz. Po pretpostavci postoje u X i Y potpuni ortonormirani sistemi M odnosno N istog kardinalnog broja. Između njihovih elemenata može se, dakle, uspostaviti biunivoka korespondencija f. Ovu ćemo proširiti nad lineale nad M odnosno N zahtevajući da važi (19), a zatim, graničnim prelazom, i na zatvorene lineale nad M odnosno N. Time smo uspostavili biunivoku korespodenciju između prostora X i Y tako da je zadovoljeno (19). Lako je uvideti da je tada automatski zadovoljeno (20); proveru treba izvršiti prvo za vektore iz M i N, zatim za one koje pripadaju linealima nad M i N, i najzad za X i Y.

9.v. Potpuni ortonormirani sistemi u L_2. Primene

Ako je $x(t)$ integrabilna periodična funkcija, periode 2π, tada je jednostavno (odeljak 5.iv) formirati njen Fourierov red:

(21) $$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n+1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

Obrnuto, ako je dat ovakav jedan formalan trigonometrijski red (ne pretpostavlja se ni da je konvergentan), postavljaju se dva osnovna pitanja:

1° Da li je (21) Fourierov red neke funkcije, tj. da li postoji integrabilna i periodična funkcija $x(t)$, periode 2π, takva da se koeficijenti reda (21) mogu izraziti sa

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos nt \, dt \quad \text{odnosno} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin nt \, dt.$$

2° Ako *pretpostavimo* da je (21) Fourierov red neke funkcije $x(t)$, kako, polazeći od reda (21) (divergentnog u opštem slučaju), odrediti funkciju $x(t)$.

Kada je reč o pitanju 2°, moramo pre svega precizirati u kom smislu treba red (21) da određuje funkciju (da je konvergentan, obično, uniformno ili skoro svuda, ili da konvergira u srednjem, ili da je zbirljiv nekim postupkom). To će zavisiti od suplementarnih pretpostavki o funkciji ili o nizovima (a_n) i

(b_n). Tako, na primer, ako pretpostavimo da je (21) Fourierov red neprekidne funkcije, ova je prema stavu 5.12 granična vrednost jednog uniformno konvergentnog postupka zbirljivosti primenjenog na red (21). Drugim rečima, u prostoru $\tilde{C}[-\pi, \pi]$ svaka funkcija se može rekonstruisati iz njenog Fourieovog reda u smislu metrike toga prostora. Analogni iskazi postoje i u drugim prostorima (videti, na primer, [21]). No najjednostavnija je teorija Fourierovih redova u prostoru $\tilde{L}_2(-\pi, \pi)$, u kome je ona samo specijalan slučaj opštih rezultata koji važe u Hilbertovim prostorima. Naime, niz vektora

$$x_\nu = \begin{cases} (2\pi)^{-1/2}, & i=0, \\ \pi^{-1/2}\cos kt, & i=2k \ (k=1,2,\ldots), \\ \pi^{-1/2}\sin kt, & i=2k-1, \end{cases} \tag{22}$$

je jedan potpun ortonormiran sistem u Hilbertovom prostoru $\tilde{L}_2(-\pi, \pi)$ (primer 6) i niz Fourierovih koeficijenata $(\hat{x}_i)$ u odnosu na (x_i) (u smislu definicije 6) poklapa se do na konstantan faktor sa trigonometrijskim Fourierovim koeficijentima a_k i b_k funkcije $x \in \tilde{L}_2(-\pi, \pi)$. Zaista,

$$\hat{x}_i = \begin{cases} (2\pi)^{-1/2} \int_{-\pi}^{\pi} x(t)\,dt = (\pi/2)^{1/2} a_0, & i=0, \\ \pi^{-1/2} \int_{-\pi}^{\pi} x(t)\cos kt\,dt = \pi^{1/2} a_k, & i=2k, \\ \pi^{-1/2} \int_{-\pi}^{\pi} x(t)\sin kt\,dt = \pi^{1/2} b_k, & i=2k-1. \end{cases} \tag{23}$$

Samim time Fourierov razvitak vektora x u odnosu na ortonormiran sistem $\{x_i\}$ svodi se na trigonometrijski Fourierov red funkcije x:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \hat{x}_i x_i = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt).$$

Iz opštih rezultata odeljka 9.iv sledi onda specijalno za trigonometrijske Fourierove redove:

Ako $x \in \tilde{L}_2(-\pi, \pi)$, na osnovu Besselove nejednačine (stav 10), trigonometrijski Fourierovi koeficijenti a_k i b_k od x obrazuju nula-nizove (opštiji rezultat sadržan je u stavu 5.9).

Na osnovu 2° stava 12, niz delimičnih suma $s_n(x,t)$ Fourierovog reda (23) funkcije $x \in \tilde{L}_2(-\pi, \pi)$ konvergira u srednjem indeksa 2 ka x, tj.

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |x(t) - s_n(x;t)|^2\,dt = 0.$$

(Uporediti sa negativnim rezultatom u prostoru $\tilde{C}[-\pi, \pi]$; stav 5.10).

Ako su a_k i b_k trigonometrijski Fourierovi koeficijenti od $x \in \tilde{L}_2(-\pi, \pi)$, tada je na osnovu stava 12.4°

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x(t)|^2\,dt = \frac{1}{2} |a_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2)$$

(Parsevalov stav).

Što se tiče pitanja 1°, u odeljku 7.i smo videli (stav 7.3) da ako su (a_k) i (b_k) proizvoljni nula-nizovi, da tada ne mora postojati funkcija $x \in \tilde{L}(-\pi, \pi)$

takva da su a_k i b_k njeni Fourierovi koeficijenti. U prostoru $\tilde{L}_2(-\pi, \pi)$, međutim, važi

Stav 17 (Riesz-Fischer). *Ako nula-nizovi* (a_k) i (b_k) *zadovoljavaju uslov*

(24) $$\frac{1}{2}|a_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2) < +\infty,$$

tada postoji funkcija $x \in \tilde{L}_2(-\pi, \pi)$ *takva da su* a_k *i* b_k *njeni Fourierovi koeficijenti.*

Dokaz. Označimo sa (s_n) i (σ_n) nizove delimičnih suma redova (21), odnosno (24). Tada je, kao kod razmatranja koje prethodi stavu 10,

$$\|s_m - s_n\|_{\tilde{L}_2}^2 = |\sigma_m - \sigma_n|^2.$$

Nizovi (s_n) i (σ_n) su, dakle, istovremeno Cauchyevi nizovi u $\tilde{L}_2(-\pi, \pi)$, odnosno u R. Kako, prema pretpostavci, niz (σ_n) konvergira, konvergiraće i niz (s_n), jer je $\tilde{L}_2(-\pi, \pi)$ kompletan prostor. Dakle, postoji funkcija $x \in \tilde{L}_2(-\pi, \pi)$ tako da $s_n \to x$, tj.

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

u smislu metrike u $\tilde{L}_2(-\pi, \pi)$.

Ostaje da pokažemo da su a_k i b_k trigonometrijski Fourierovi koeficijenti od x, tj. da je (21) Fourierov red od x. U tom cilju primećujemo da se sa oznakama (22) delimična suma s_n može napisati u obliku

$$s_n = \sum_{i=0}^{2n} \alpha_i x_i,$$

gde je

(25) $$\alpha_i = \begin{cases} (\pi/2)^{1/2} a_0, & i = 0, \\ \pi^{1/2} a_k, & i = 2k, \\ \pi^{1/2} b_k, & i = 2k-1. \end{cases}$$

Kako je $\{x_0, x_1, \ldots, x_{2n}\}$ ortonormiran sistem u $\tilde{L}_2(-\pi, \pi)$ za svako $n\ (= 1, 2, \ldots)$, to je na osnovu stava 7

$$\alpha_i = (s_n, x_i) \text{ za svako } i \leqslant 2n.$$

Pustimo li ovde da $n \to \infty$, zbog neprekidnosti skalarnog proizvoda slediće

$$\alpha_i = (x, x_i) = \bar{x}_i \text{ za svako } i,$$

što, na osnovu (23) i (25) znači da su a_k i b_k trigonometrijski Fourierovi koeficijenti od x.

Primećujemo da je u dokazu Risz-Fischerovog stava bitna kompletnost prostora $\tilde{L}_2(-\pi, \pi)$. Zato se često baš toj činjenici daje naziv Riesz-Fischerovog stava.

Od interesa je primetiti da Parsevalov i Riesz-Fischerov stav zajedno kazuju da su Hilbertovi prostori $\tilde{L}_2(-\pi, \pi)$ i l_2 kongruentni.

U klasičnoj Analizi, naročito u primenama, veliku ulogu igraju različiti ortogonalni razvici. Značaj teorije Hilbertovog prostora ogleda se i u tome što su njome obuhvaćeni i takvi uopšteni a ne samo trigonometrijski Fourierovi redovi. Naime, u $L_2(a, b)$ (prema tome da li je razmak (a, b) konačan ili beskonačan na jednu ili obe strane) mogu se uvesti različiti potpuni ortonormirani sistemi i u odnosu na njih važe rezultati analogni onima u $\tilde{L}_2(-\pi, \pi)$ za trigonometrijske Fourierove redove periodičnih funkcija. Mi ćemo se ovde ograničiti da samo navedemo neke potpune ortonormirane sisteme u L_2, a čitaocu prepuštamo da formuliše odgovarajuće iskaze.

Primer 6. Niz *Legendreovih polinoma*

$$P_n(t) = \frac{\sqrt{n+1/2}}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n \quad (n=0, 1, 2, \dots) \tag{26}$$

obrazuje ortonormiran sistem u $(-1, +1)$.

Lineal nad vektorima (26) je skup svih polinoma, a ovaj je svuda gust u $L_2(-1, +1)$ (stav III. 8.5). Niz vektora (26) je dakle fundamentalan u $L_2(-1, +1)$, pa time i potpun ortonormiran sistem u $L_2(-1, +1)$ (stav 12,3°).

Primećujemo da se do niza Legendreovih polinoma može doći i ortogonalizacijom niza vektora $1, t, t^2, \dots$

Primer 7. U prostoru $L_2(-\infty, +\infty)$ možemo doći do potpunog ortonormiranog sistema primenjujući Schmidtov postupak ortogonalizacije na niz vektora

$$e^{-t^2/2}, \; te^{-t^2/2}, \; t^2 e^{-t^2/2}, \dots$$

Tako dobijamo niz Hermiteovih funkcija

$$\varphi_n(t) = (-1)^n e^{t^2/2} \frac{d^n}{dt^n}\{e^{-t^2}\} = e^{-t^2/2} H_n(t) \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

gde su $H_n(t)$ tzv. *Hermiteovi polinomi*. Niz

$$\frac{\varphi_n(t)}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

obrazuje ortonormiran sistem u $L_2(-\infty, +\infty)$. Može se pokazati da je on potpun u $L_2(-\infty, +\infty)$.

Primer 8. Niz *Laguerreovih funkcija*

$$\psi_n(t) = \frac{1}{n!} e^{-t/2} L_n(t) \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

gde su

$$L_n(t) = e^t \frac{d^n}{dt^n}\{t^n e^{-t}\}$$

Laguerreovi polinomi, obrazuje u $L_2(0, +\infty)$ potpun ortonormiran sistem.

9.vi. Bilinearna funkcionela i adjungovan operator

U ovom odeljku pozabavićemo se pojmovima koje smo već uveli u Banachovom prostoru, a koji se zbog bogatije strukture Hilbertovog prostora u ovome mogu uvesti na specifičan način. Sem skalarnog proizvoda tu bitnu ulogu igra jedno njegovo uopštenje — bilinearna funkcionela.

Ograničena linearna funkcionela na Hilbertovom prostoru jednostavno se izražava pomoću skalarnog proizvoda.

Stav 18 (Frechet-Riesz). *Ograničena linearna funkcionela $x^*(x)$ na Hilbertovom prostoru X ima reprezentaciju*

$$x^*(x)=(x, y),$$

gde je vektor y iz X jednoznačno određen funkcionelom x^* i pri tome je

$$\|x^*\|=\|y\|.$$

Dokaz. Da skalarni proizvod (x, y), posmatran kao funkcija od x za fiksirano $y \in X$, predstavlja linearnu funkcionelu na X sledi na osnovu osobina 1° i 2° skalarnog proizvoda (definicija 1). Njena ograničenost sledi iz (videti (4'))

$$|x^*(x)|=|(x, y)| \leqslant \|y\|\,\|x\| \quad (\|y\|<+\infty),$$

što daje i

$$\|x^*\| \leqslant \|y\|. \tag{27}$$

Obrnuto, pretpostavimo da je $x^*(x)$ neka ograničena linearna funkcionela na X. Pokazaćemo da tada postoji vektor y u X tako da je $x^*(x)=(x, y)$.

Neka je Z skup onih vektora $z \in X$ za koje je $x^*(z)=0$. Zbog linearnosti funkcionele x^* ovaj skup vektora obrazuje vektorski potprostor od X. No Z je i zatvoren vektorski potprostor (dakle Hilbertov potprostor) od X, jer iz $z_n \in Z$ i $z_n \to z$ sledi, zbog neprekidnosti funkcionele x^*,

$$x^*(z)=\lim_{n \to \infty} x^*(z_n)=0,$$

što znači da svaka tačka nagomilavanja z od Z pripada tom skupu.

Ako je $Z=X$, tj. $x^*(x)=0$ na X, treba uzeti $y=0$ i stav je dokazan. Pretpostavimo zato da je $Z \neq X$. Tada postoji u X vektor $y_0 \neq 0$ i ortogonalan na Z (posledica stava 6). Uočimo vektor

$$x^*(x)\, y_0 - x^*(y_0)\, x, \quad x \in X.$$

Zbog

$$x^*(x^*(x)\, y_0 - x^*(y_0)\, x)=x^*(x)\, x^*(y_0) - x^*(y_0)\, x^*(x)=0,$$

ovaj vektor leži u Z, pa je

$$(x^*(x)\, y_0 - x^*(y_0)\, x, y_0)=0,$$

tj.

$$x^*(x)=\left(x, \frac{\overline{x^*(y_0)}}{(y_0, y_0)}\, y_0\right).$$

Uzmemo li

$$y=\frac{\overline{x^*(y_0)}}{(y_0, y_0)}\, y_0,$$

slediće Frechet-Rieszova reprezentacija.

Pokazaćemo da je funkcionelom $x^*(x)$ vektor y jednoznačno određen. Zaista, kada bi imali

$$x^*(x)=(x, y') \quad \text{i} \quad x^*(x)=(x, y'') \quad (y' \neq y''),$$

sledilo bi

$$(x, y'-y'')=0,$$

što za $x=y'-y''$ daje $\|y'-y''\|^2=0$, tj. $y'=y''$. Kontradikcija.

Kako je, po pretpostavci, funkcionela $x^*(x)$ ograničena, to je

$$|x^*(x)| \leqslant \|x^*\| \, \|x\| \quad \text{za svako} \quad x \in X.$$

Odavde za $x^*(x)=(x, y)$ i $x=y$ specijalno sledi

$$(y, y) \leqslant \|x^*\| \, \|y\|,$$

tj.

$$\|y\| \leqslant \|x^*\|,$$

što zajedno sa (27) daje $\|x^*\|=\|y\|$.

Primećujemo da na osnovu reprezentacije ograničene linearne funkcionele na Hilbertovom prostoru neposredno sledi *da je svaki Hilbertov prostor sam sebi konjugovan* (odeljak 4.iii).

Definicija 10. Ω je *bilinearna funkcionela* na Hilbertovom prostoru X ako svakom paru vektora x i y iz X odgovara kompleksan broj $\Omega(x, y)$ takav da je

1° $\Omega(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2, y)=\alpha_1 \Omega(x_1, y)+\alpha_2 \Omega(x_2, y)$,

2° $\Omega(x, \beta_1 y_1+\beta_2 y_2)=\overline{\beta_1} \Omega(x, y_1)+\overline{\beta_2} \Omega(x, y_2)$.

Skalarni proizvod (x, y) je jedna bilinearna funkcionela na X.

Bilinearna funkcionela Ω je *ograničena* ako postoji broj M takav da je

$$|\Omega(x, y)| \leqslant M \|x\| \, \|y\| \quad \text{za svako} \quad x, y \in X.$$

Infimum brojeva M za koje važi ova nejednačina je *norma* $\|\Omega\|$ bilinearne funkcionele Ω. Dakle,

$$\|\Omega\|=\sup_{x, y \in X-\{0\}} \frac{|\Omega(x, y)|}{\|x\| \, \|y\|}.$$

Kao kod ograničene linearne funkcionele može se pokazati da je

$$\|\Omega\|=\sup_{\substack{\|x\| \leqslant 1 \\ \|y\| \leqslant 1}} |\Omega(x, y)|=\sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y\|=1}} |\Omega(x, y)|.$$

Ograničena bilinearna funkcionela je neprekidna funkcija svojih argumenata. Zaista,

$$\begin{aligned} &|\Omega(x, y)-\Omega(x_0, y_0)|= \\ &=|\Omega(x-x_0, y-y_0)+\Omega(x-x_0, y_0)+\Omega(x_0, y-y_0)| \\ &\leqslant \|\Omega\| \{\|x-x_0\| \, \|y-y_0\|+\|x-x_0\| \, \|y_0\|+\|x_0\| \, \|y-y_0\|\}. \end{aligned}$$

Stav 19. *Ako je ograničena bilinearna funkcionela simetrična, tj. ako je*

$$|\Omega(x, y)| = |\Omega(y, x)|,$$

tada je

$$\|\Omega\| = \sup_{x \in X - \{0\}} \frac{|\Omega(x, x)|}{(x, x)} = \sup_{\|x\|=1} |\Omega(x, x)|.$$

Dokaz. Stavimo

$$C = \sup_{x \in X - \{0\}} \frac{|\Omega(x, x)|}{(x, x)},$$

tj. neka je

$$|\Omega(x, x)| \leqslant C \|x\|^2 \quad \text{za svako} \quad x \in X.$$

Tada je za svaki jedinični kompleksni broj λ ($|\lambda| = 1$) i $\|x\| \leqslant 1$, $\|y\| \leqslant 1$

$$|\bar{\lambda}\,\Omega(x, y) + \lambda \Omega(y, x)| = |\Omega(x, \lambda y) + \Omega(\lambda y, x)|$$

$$= \frac{1}{2} |\Omega(x + \lambda y, x + \lambda y) - \Omega(x - \lambda y, x - \lambda y)|$$

$$\leqslant \frac{1}{2} C \{\|x + \lambda y\|^2 + \|x - \lambda y\|^2\} \leqslant C \{\|x\|^2 + \|y\|^2\} \leqslant 2C. \tag{28}$$

Kako je zbog simetrije bilinearne funkcionele

$$\Omega(x, y) = |\Omega(x, y)|\, e^{i\alpha} \quad \text{i} \quad \Omega(y, x) = |\Omega(x, y)|\, e^{i\beta},$$

to ako izaberemo

$$\lambda = e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}},$$

biće

$$|\bar{\lambda}\,\Omega(x, y) + \lambda \Omega(y, x)| = |\Omega(x, y)| \left| e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}} e^{i\alpha} + e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}} e^{i\beta} \right|$$

$$= |\Omega(x, y)| \left| e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} + e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}} \right| = 2\,|\Omega(x, y)|. \tag{29}$$

Iz (28) i (29) sledi

$$|\Omega(x, y)| \leqslant C \quad \text{za svako} \quad \|x\| \leqslant 1, \|y\| \leqslant 1,$$

tj.

$$\|\Omega\| = \sup_{\substack{\|x\| \leqslant 1 \\ \|y\| \leqslant 1}} |\Omega(x, y)| \leqslant C.$$

No očigledno je

$$C \leqslant \sup_{x, y \in X - \{0\}} \frac{|\Omega(x, y)|}{\|x\|\,\|y\|} = \|\Omega\|,$$

što zajedno sa prethodnom nejednačinom predstavlja prvo tvrđenje stava. Drugo se može dobiti uobičajenim postupkom.

Stav 20. *Ograničena bilinearna funkcionela Ω na X ima reprezentaciju*

$$\Omega(x, y) = (Ax, y),$$

gde je ograničen linearni operator $A: X \to X$ jednoznačno određen bilinearnom funkcionelom Ω. Pri tome je

$$\|\Omega\| = \|A\|.$$

Dokaz. Na osnovu osobina skalarnog proizvoda i linearnosti operatora A lako je proveriti da je izraz (Ax, y) bilinearna funkcionela na X. Da je ona ograničena sledi iz

$$|(Ax, y)| \leqslant \|Ax\| \, \|y\| \leqslant \|A\| \, \|x\| \, \|y\| \quad \text{za svako} \quad x, y \in X,$$

jer je operator A ograničen. Uzgred nalazimo

$$\|\Omega\| \leqslant \|A\|. \tag{30}$$

Obrnuto, pretpostavimo da je Ω proizvoljna ograničena bilinearna funkcionela na X. Pokazaćemo da tada postoji ograničen linearni operator $A: X \to X$ takav da je $\Omega(x, y) = (Ax, y)$.

Zaista, za svako fiksirano x, $f_x(y) = \overline{\Omega(x, y)}$ je ograničena linearna funkcionela od y definisana svuda na X. Na osnovu stava 18 postoji vektor z u X (jednoznačno određen funkcionelom $f_x(y)$ a time i vektorom x) tako da je

$$f_x(y) = (y, z),$$

tj.

$$\Omega(x, y) = (z, y) \quad \text{za svako} \quad y \in X.$$

Kako svakom $x \in X$, preko funkcionele $f_x(y)$, jednoznačno odgovara vektor z u X, to je ovim postupkom definisan operator $A: X \to X$ tako da je $\Omega(x, y) = (Ax, y)$ za svako $y \in X$. Pokazaćemo da je operator A linearan i ograničen.

Zaista, zbog

$$\Omega(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 \Omega(x_1, y) + \alpha_2 \Omega(x_2, y)$$

je za svako $y \in X$

$$(A\{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\} - \alpha_1 A x_1 - \alpha_2 A x_2, y) = 0,$$

tj. vektor na prvom mestu u ovom skalarnom proizvodu je ortogonalan na sve vektore $y \in X$. Znači,

$$A\{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\} - \alpha_1 A x_1 - \alpha_2 A x_2 = 0,$$

što je trebalo pokazati.

Zbog ograničenosti bilinearne funkcionele Ω važi

$$|\Omega(x, y)| \leqslant \|\Omega\| \, \|x\| \, \|y\| \quad \text{za svako} \quad x, y \in X.$$

Uvedemo li ovde $\Omega(x, y) = (Ax, y)$, biće specijalno za $y = Ax$

$$\|Ax\|^2 \leqslant \|\Omega\| \, \|x\| \, \|Ax\|,$$

što daje

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leqslant \|\Omega\| \quad \text{za svako} \quad x \in X - \{0\}.$$

Prema tome,

$$\|A\| = \sup_{x \in X - \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leqslant \|\Omega\|, \tag{31}$$

tj. operator A je ograničen.

Pokazaćemo da je ograničeni linearni operator $A: X \to X$ jednoznačno određen bilinearnom funkcionelom Ω. Zaista, kada bi bilinearnoj funkcioneli Ω odgovarala dva takva operatora A' i A'' $(A' \neq A'')$, tj. kada bismo imali

$$\Omega(x, y) = (A'x, y) \quad \text{i} \quad \Omega(x, y) = (A''x, y),$$

sledilo bi

$$(A'x - A''x, y) = 0 \quad \text{za svako} \quad y \in X,$$

što se svodi na $A'x = A''x$ za svako $x \in X$. Dakle, $A' = A''$ suprotno učinjenoj pretpostavci.

Najzad, iz (30) i (31) zajedno sledi da je $\|\Omega\| = \|A\|$.

Neka je $A: X \to X$ ograničen linearan operator. Tada je, slično kao kod dokaza stava 20, lako proveriti da je

$$\Omega(x, y) = (x, Ay)$$

bilinearna funkcionela na X i $\|\Omega\| = \|A\|$. Na osnovu stava 20 bilinearnom funkcionelom Ω jednoznačno je određen ograničeni linearni operator $A^*: X \to X$ takav da je

$$\Omega(x, y) = (A^*x, y) \quad \text{i} \quad \|A^*\| = \|\Omega\|.$$

Prema tome, svakom ograničenom linearnom operatoru $A: X \to X$ odgovara jednoznačno operator $A^*: X \to X$, istih osobina takav da je

$$(x, Ay) = (A^*x, y) \quad \text{i} \quad \|A^*\| = \|A\|. \tag{32}$$

Za operator A^* kažemo da je *adjungovan* operatoru A. Od posebnog interesa je slučaj kada je operator A sam sebi adjungovan, tj. kada je $A^* = A$.

Definicija 11. Neka je $A: X \to X$ ograničen linearan operator. Operator A je *sebi adjungovan* ako je

$$(Ax, y) = (x, Ay) \quad \forall\ x, y \in X.$$

Primećujemo da nam stav 20 omogućuje da u Hilbertovom prostoru normu ograničenog linearnog operatora $A: X \to X$ izračunamo na poseban način. Naime, ako je Ω bilinearna funkcionela koja odgovara operatoru A, tada je

$$\|A\| = \|\Omega\| = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y\|=1}} |\Omega(x, y)| = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y\|=1}} |(Ax, y)|.$$

Specijalno, ako je operator A još i sebi adjungovan, tada je

$$|\Omega(x, y)| = |(Ax, y)| = |(x, Ay)| = |\overline{(Ay, x)}| = |(Ay, x)| = |\Omega(y, x)|,$$

tj. odgovarajuća bilinearna funkcionela Ω je simetrična; na osnovu stavova 19 i 20 onda sledi

Stav 21. *Ako je $A: X \to X$ sebi adjungovan ograničen linearan operator, tada je*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|.$$

S obzirom na reprezentaciju ograničene linearne funkcionele, u Hilbertovom prostoru X definicije 6.1 i 6.3 svode se na:

Niz (x_n) slabo konvergira ka x_0 u X ako je

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, x) = (x_0, x) \quad \text{za svako} \quad x \in X.$$

Niz tačaka (x_n) je slab Cauchyev niz u X ako je (x_n, x) Cauchyev niz za svako $x \in X$ ili, ekvivalentno, ako postoji

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, x) \quad \text{za svako} \quad x \in X.$$

Na osnovu stava 6.8 Hilbertov prostor je slabo-kompletan.

Lako je uvideti da ograničen deo Hilbertovog prostora ne mora da bude relativno kompaktan skup. Dovoljno je uočiti neki beskonačni ortonormirani niz u tom delu; ovaj je ograničen ali nijedan njegov delimični niz ne konvergira (jako). Međutim, važi

Stav 22. *Svaki ograničeni skup u Hilbertovom prostoru je slabo relativno kompaktan.*

Dokaz. Neka je (x_k) proizvoljan niz koji pripada ograničenom skupu u X, tj. $\|x_k\| \leq C$ za $k = 1, 2, \dots$ Neka su L i M lineal odnosno zatvoreni lineal nad vektorima x_k.

Uočimo niz brojeva

$$(x_1, x_k) \quad (k = 1, 2, \dots). \tag{33}$$

Ovaj niz je ograničen, jer je

$$|(x_1, x_k)| \leq \|x_1\| \, \|x_k\| \leq C^2,$$

te postoji konvergentan delimični niz niza (33) — označimo ga sa (x_1, x_{1k}). Time smo iz niza vektora (x_k) izdvojili delimični niz (x_{1k}) tako da postoji $\lim_{k\to\infty} (x_1, x_{1k})$.

Polazeći zatim od ograničenog niza brojeva

$$(x_2, x_{1k}) \quad (k = 1, 2, \dots), \tag{34}$$

izdvojićemo na analogan način iz niza vektora (x_{1k}) delimični niz (x_{2k}) tako da postoji $\lim_{k\to\infty} (x_2, x_{2k})$.

Produžujući ovaj postupak, dobićemo niz nizova

$$(x_{1k}), \ (x_{2k}), \ (x_{3k}), \dots \tag{35}$$

tako da za $r = 1, 2, \dots$ postoji $\lim_{k\to\infty} (x_r, x_{rk})$. No kako je u (35) svaki niz delimični niz svih prethodnih, to za niz (x_{rk}) postoji $\lim_{k\to\infty} (x, x_{rk})$ za $x = x_1, x_2, \dots, x_r$.

Za dijagonalni niz (x_{kk}) postojaće zato

$$\lim_{k\to\infty} (x, x_{kk}) \tag{36}$$

za svako $x = x_r$ $(r = 1, 2, \dots)$. Zbog linearnosti skalarnog proizvoda postoji onda limes u (36) i za svako $x \in L$, a zbog njegove neprekidnosti i za svako $x \in M$. Zbog

$$(x, x_{kk}) = 0 \quad \text{za svako} \quad x \in M^{\perp} \quad \text{i za svako} \quad k = 1, 2, \dots$$

postoji tada limes u (36) i za svako $x \in M^{\perp}$. Na osnovu dekompozicije koju daje stav 6, ovaj limes postoji znači za svako $x \in X$, tj. (x_{kk}) je jedan slab Cauchyev niz u X. No kako je X slabo kompletan prostor, to niz (x_{kk}) — delimični niz od (x_k) — slabo konvergira nekom vektoru iz X. Time je dokazan stav 22.

9.vii. Sopstvene vrednosti i sopstveni vektori potpuno neprekidnog sebi adjungovanog operatora

Neka je R^n kompleksan Euklidov prostor i neka je $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ jedna ortonormirana baza u njemu.

Svakom linearnom operatoru $A: R^n \to R^n$ odgovara u odnosu na uočenu bazu jednoznačno matrica

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11}\, \alpha_{12} \cdots \alpha_{1n} \\ \alpha_{21}\, \alpha_{22} \cdots \alpha_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{n1}\, \alpha_{n2} \cdots \alpha_{nn} \end{bmatrix} \tag{37}$$

gde je

$$\alpha_{ik} = (Ax_k, x_i). \tag{38}$$

Obrnuto, matricom (37) određen je, u odnosu na uočenu bazu, jednoznačno linearni operator $A: R^n \to R^n$. Naime, njegove vrednosti u tačkama $x_1, x_2, \ldots, x_n$ određene su sa

$$Ax_k = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} x_i \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

a u proizvoljnoj tački

$$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k x_k \quad (\xi_k = (x, x_k))$$

sa

$$Ax = \sum_{k=1}^{n} \xi_k Ax_k = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ik} x_i = \sum_{i=1}^{n} \eta_i x_i, \tag{39}$$

gde je

$$\eta_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \xi_k.$$

Pri izabranoj bazi u R^n, postoji, dakle, biunivoka korespondencija između skupa linearnih operatora $A: R^n \to R^n$ i skupa matrica oblika (37).

Linearnom operatoru $A: R^n \to R^n$ odgovara u odnosu na datu bazu *kvadratna forma*

$$(Ax, x) = \left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k Ax_k, \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i \right) = \sum_{i,k=1}^{n} \xi_k \overline{\xi_i} (Ax_k, x_i) = \sum_{i,k=1}^{n} \alpha_{ik} \xi_k \overline{\xi_i} \tag{40}$$

koju možemo shvatiti i kao vrednost bilinearne funkcionele $\Omega(x, y) = (Ax, y)$ za $y = x$.

Ova razmatranja važe za svaku ortonormiranu bazu u R^n. No ona se formalno znatno uprošćuju ako u R^n uvedemo ortonormiranu bazu koja je adekvatna operatoru A. U tom cilju uočimo operatorsku jednačinu

$$Ax = \mu x.$$

Ova je ekvivalentna sistemu homogenih linearnih jednačina

$$\begin{aligned} &(\alpha_{11}-\mu)\,\xi_1 + \alpha_{12}\,\xi_2 + \cdots + \alpha_{1n}\,\xi_n = 0,\\ &\alpha_{21}\,\xi_1 + (\alpha_{22}-\mu)\,\xi_2 + \cdots + \alpha_{2n}\,\xi_n = 0,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\alpha_{n1}\,\xi_1 + \alpha_{n2}\,\xi_2 + \cdots + (\alpha_{nn}-\mu)\,\xi_n = 0, \end{aligned}$$

te ima netrivijalno rešenje samo ako je determinanta sistema jednaka nuli. Ova je polinom po μ stepena n, te operator A ima bar jednu sopstvenu vrednost različitu od nule. Više od jedne sopstvene vrednosti operator ne mora imati, kao što to pokazuje primer operatora određenog sa

$$\eta_i = \begin{cases} \xi_i + \xi_{i+1} & (i = 1, 2, \ldots, n-1),\\ \xi_n. \end{cases}$$

Ovaj operator ima jednu jedinu sopstvenu vrednost $\mu\,(=1)$ i njen multiplicitet je jednostruk (tj. svi sopstveni vektori koji joj odgovaraju proporcionalni su među sobom te obrazuju potprostor dimenzije 1). Međutim, iz Linearne algebre je poznato da sebi adjungovan operator (tada odgovarajuća matrica zadovoljava $\alpha_{ik} = \overline{\alpha_{ki}}$) ima tačno n sopstvenih linearno nezavisnih vektora x_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ i da ovi obrazuju ortonormiranu bazu u R^n. U odnosu na tu bazu sebi adjungovanom operatoru A odgovara, zbog $Ax_k = \mu_k x_k$, matrica $[\alpha_{ik}]$ čiji su elementi,

$$\alpha_{ik} = (Ax_k, x_i) = \mu_k\,(x_k, x_i) = \begin{cases} \mu_k, & i = k;\\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

Matrica sebi adjungovanog operatora u odnosu na ortonormiranu bazu koju čine njegovi sopstveni vektori ima, dakle, dijagonalni oblik i elementi na dijagonali su baš sopstvene vrednosti operatora:

$$\begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \mu_2 & \cdots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ 0 & 0 & \cdots & \mu_n \end{bmatrix}$$

Tada obrasci (39) i (40) uzimaju jednostavniji oblik

(39′) $$Ax = \sum_{i=1}^{n} \eta_i\,x_i \quad \text{sa} \quad \eta_i = \mu_i\,\xi_i$$

odnosno

(40′) $$(Ax, x) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i\,|\xi_i|^2.$$

Prvi daje unutrašnju strukturu preslikavanja koje vrši operator A, a drugi svodi kvadratnu formu na tzv. čist kvadratni oblik (stav o glavnim osama).

Cilj ovog odeljka je da ova razmatranja koja važe u konačno-dimenzionalnom prostoru prenesemo na separabilne Hilbertove prostore. Pokazaće se da je to u celini moguće ako je sebi adjungovan operator A potpuno neprekidan. Delimično i uvođenjem novih pojmova moguće je to i za druge tipove operatora, ali to izlazi izvan okvira ove knjige (videti, na primer, [14], [1].)

Pre svega, pokazaćemo da se u separabilnom (beskonačno-dimenzionalnom) Hilbertovom prostoru X ograničen linearan operator $A: X \to X$ može prikazati beskonačnom matricom. Neka je (x_i) ortonormirana baza u X i neka su α_{ik} Fourierovi koeficijenti vektora Ax_k u odnosu na bazu (x_i), tj.

$$(Ax_k, x_i) = \alpha_{ik} \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Na osnovu **2°** stava 12 je za svako $k = 1, 2, \ldots$

$$Ax_k = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{ik}\, x_i, \tag{41}$$

a na osnovu primedbe koja prethodi stavu 10, konvergencija reda (41) povlači

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_{ik}|^2 < +\infty \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{42}$$

U odnosu na ortonormiranu bazu (x_i) ograničenom linearnom operatoru A koordinirali smo, dakle, beskonačnu matricu

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{bmatrix} \tag{43}$$

čiji elementi α_{ik} zadovoljavaju (42).

Primećujemo da polazeći od matrice (43), koja odgovara *ograničenom* linearnom operatoru A, možemo na jednoznačan način rekonstruisati operator A. Zaista, njegove vrednosti u tačkama $x_1, x_2, \ldots$ određene su sa (41) (jer iz (42) sledi konvergencija redova u (41)). Na osnovu linearnosti definisane su njegove vrednosti na linealu L nad $x_1, x_2, \ldots$ No kako je L svuda gust u X (stav 12, 3°), neprekidnošću su definisane vrednosti operatora na čitavom prostoru X.

Jasno je da istom operatoru odgovaraju različite matrice u odnosu na razne ortonormirane baze i da, obrnuto, jednoj istoj matrici odgovaraju različiti operatori u odnosu na razne ortonormirane baze.

Na osnovu izloženog nije teško napisati eksplicitno obrazac kojim matrica (43) određuje operator A. Ako je

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k\, x_k \quad (\xi_k = (x, x_k)) \tag{44}$$

bilo koji vektor u X, biće

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k\, x_k, \tag{45}$$

gde je

$$\eta_k = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{ki}\, \xi_i. \tag{46}$$

Zaista, ako stavimo

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k x_k,$$

biće

$$As_n = \sum_{k=1}^{n} \eta_k^{(n)} x_k \quad \text{gde je} \quad \eta_k^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki} \xi_i,$$

a zbog neprekidnosti operatora

$$\eta_k = (Ax, x_k) = \lim_{n\to\infty} (As_n, x_k) = \lim_{n\to\infty} \eta_k^{(n)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ki} \xi_i = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{ki} \xi_i.$$

Kvadratna forma koja odgovara operatoru A ima tada oblik

$$(Ax, x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k Ax_k, \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i x_i \right)$$

$$= \sum_{i,k=1}^{\infty} (\xi_k Ax_k, \xi_i x_i) = \sum_{i,k=1}^{\infty} \alpha_{ik} \xi_k \overline{\xi_i}.$$

Pre nego što nastavimo sa izlaganjem analogija koje postoje između konačno i beskonačno-dimenzionalnog slučaja, zadržaćemo se na nekim jednostavnim osobinama sebi adjungovanih operatora.

Stav 23. *Neka je X kompleksan Hilbertov prostor i neka je $A: X \to X$ ograničen linearan operator. Potreban i dovoljan uslov da je operator A sebi adjungovan, jeste da odgovarajuća kvadratna forma (Ax, x) uzima realne vrednosti na X.*

Primećujemo da ovaj stav važi samo u kompleksnom Hilbertovom prostoru a ne i u realnom, jer u ovom poslednjem ne važe identiteti (47) i (48).

Dokaz stava 23. Uslov je potreban. Ako je A sebi adjungovan operator, tada je

$$(Ax, x) = (x, Ax) = \overline{(Ax, x)},$$

što znači da je (Ax, x) realan broj.

Uslov je dovoljan. Za svaki linearan operator A važi, kao što je to lako proveriti,

$$(A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y) + i(A(x+iy), x+iy) - i(A(x-iy), x-iy) = 4(Ax, y) \tag{47}$$

i

$$(x+y, A(x+y)) - (x-y, A(x-y)) + (x+iy, A(x+iy)) - i(x-iy, A(x-iy)) = 4(x, Ay). \tag{48}$$

Ako (Ax, x) uzima realne vrednosti na X, tada je

$$(x, Ax) = \overline{(Ax, x)} = (Ax, x),$$

pa su leve strane u (47) i (48) jednake; takve su onda i desne, tj. $(Ax, y) = (x, Ay)$, što znači da je A sebi adjungovan operator.

Iz stava 23 neposredno sledi da su *sopstvene vrednosti sebi adjungovanog operatora realni brojevi.* Zaista, ako je μ sopstvena vrednost operatora A, tada je

$$\mu = \frac{(Ax, x)}{(x, x)}$$

realan broj, jer su takvi (Ax, x) i (x, x).

Stav 24. *Sopstveni vektori x i y sebi adjungovanog operatora A koji odgovaraju različitim sopstvenim vrednostima μ i ν uzajamno su ortogonalni.*

Dokaz. Zaista,

$$(Ax, y) = (\mu x, y) = \mu (x, y)$$

i

$$(x, Ay) = (x, \nu y) = \nu (x, y).$$

Zbog $(Ax, y) = (x, Ay)$ je, dakle,

$$\mu (x, y) = \nu (x, y),$$

te $\mu \neq \nu$ povlači $(x, y) = 0$.

Ako je A sebi adjungovan operator, funkcije $\|Ax\|$ i $|(Ax, x)|$ imaju isti supremum, jednak $\|A\|$, na sferi $\|x\| = 1$ (stavovi 2 i 21). Pokazaćemo da je taj supremum na jediničnoj sferi efektivno postignut ako je operator A još i potpuno neprekidan.

Stav 25. *Neka je $A: X \to X$ potpuno neprekidan sebi adjungovan operator. Tada postoji vektor x_0 na $\|x\| = 1$ takav da je*

$$|(Ax_0, x_0)| = \|A\| = \|Ax_0\|.$$

Vektor x_0 je sopstveni vektor operatora A i njemu odgovarajuća sopstvena vrednost μ_0 zadovoljava $|\mu_0| = \|A\|$.

Značaj stava 25 leži u tome što on ne samo tvrdi da potpuno neprekidan simetričan operator *ima* sopstvene vektore, već daje i način kako da ih odredimo — kao rešenja jednog problema ekstrema. Primećujemo da može postojati više vektora x_0 u kojima funkcije $|(Ax, x)|$, odnosno $\|Ax\|$ postižu ekstrem na $\|x\| = 1$, ali njih ima samo konačno mnogo, jer su oni sopstveni vektori koji odgovaraju istoj sopstvenoj vrednosti ($= -\|A\|$ ili $+\|A\|$) potpuno neprekidnog operatora A. (Na osnovu stava 8.9 i primedbe koja mu sledi, sopstvene vrednosti potpuno neprekidnog operatora imaju konačan multiplicitet).

Dokaz stava 25. Na osnovu stava 21 je

$$\sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)| = \|A\|,$$

te postoji niz vektora y_n tako da je

$$\|y_n\| = 1 \quad \text{i} \quad |(Ay_n, y_n)| \to \|A\|.$$

Iz niza (y_n) moguće je izdvojiti delimični niz (koji ćemo opet označiti sa (y_n)) tako da niz (Ay_n, y_n) konvergira, recimo,

$$(Ay_n, y_n) \to \mu_0.$$

μ_0 je očigledno jednako $\|A\|$ ili $-\|A\|$.

Iz

$$0 \leqslant \| Ay_n - \mu_0 y_n \|^2 = (Ay_n - \mu_0 y_n, Ay_n - \mu_0 y_n)$$
$$= \| Ay_n \|^2 - 2\mu_0 (Ay_n, y_n) + \mu_0^2 \| y_n \|^2$$
$$\leqslant \| A \|^2 - 2\mu_0 (Ay_n, y_n) + \mu_0^2$$

sledi da

$$Ay_n - \mu_0 y_n \to 0 \quad \text{kada } n \to \infty, \tag{49}$$

jer je

$$\| A \|^2 = \mu_0^2 \quad \text{i} \quad (Ay_n, y_n) \to \mu_0 \ (n \to \infty).$$

Do sada smo samo iskoristili da je operator A sebi adjungovan. No, kako je on i potpuno neprekidan, to iz niza (Ay_n) možemo izdvojiti konvergentan delimični niz (Ay_{n_k}). Na osnovu (49), konvergiraće zato i niz (y_{n_k}). Označimo li sa x_0 graničnu vrednost ovog poslednjeg, biće, na osnovu neprekidnosti operatora A,

$$Ax_0 = A \lim_{n\to\infty} y_{n_k} = \lim_{k\to\infty} Ay_{n_k}$$

i

$$\| x_0 \| = \lim_{k\to\infty} \| y_{n_k} \| = 1.$$

Na osnovu (49), je dakle

$$Ax_0 = \mu_0 x_0, \tag{50}$$

tj. x_0 je sopstveni vektor, a μ_0 sopstvena vrednost operatora A. Koristeći (50) lako je videti da funkcije $\| Ax \|$ i $|(Ax, x)|$ postižu svoj ekstrem u tački x_0; zaista,

$$|(Ax_0, x_0)| = |(\mu_0 x_0, x_0)| = |\mu_0| = \| A \|$$

i

$$\| Ax_0 \| = \| \mu_0 x_0 \| = |\mu_0| = \| A \|.$$

Na osnovu stava 25 odredili smo sopstveni vektor x_0 operatora $A : X \to X$; rešavajući analogan problem ekstrema dobićemo i sve ostale sopstvene vektore operatora A.

U tom cilju uočimo Hilbertov potprostor $X_1 = x_0^{\perp}$ od X (stav 4). Restrikcija operatora A na X_1 preslikava X_1 u X_1. Zaista, ako $x \in X_1$, tada je

$$(Ax, x_0) = (x, Ax_0) = (x, \mu_0 x_0) = \mu_0 (x, x_0) = 0,$$

tj. $Ax \in X_1$. Kako je i restrikcija $A : X_1 \to X_1$ potpuno neprekidan sebi adjungovan operator, to ako na njega primenimo stav 25 slediće da postoji vektor $x_1 \in X_1$ tako da je

$$|(Ax_1, x_1)| = \| A \|_{X_1} = \| Ax_1 \|$$

($\| A \|_{X_1}$ označava normu restrikcije od A na X_1), kao i da je x_1 sopstveni vektor od A kome odgovara sopstvena vrednost μ_1 sa $|\mu_1| = \| A \|_{X_1}$.

Kada smo već odredili sopstvene vektore $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ operatora A, označimo sa X_n Hilbertov potprostor $\{x_{01}\, x_2, \ldots, x_{n-1}\}^{\perp}$ od X. Lako je videti da restrikcija od A na X_n preslikava X_n u X_n, tako da ponovnom primenom stava 25 zaključujemo da postoji vektor $x_n \in X_n$ tako da je

$$|(Ax_n, x_n)| = \| A \|_{X_n} = \| Ax_n \|,$$

kao i da je x_n sopstveni vektor operatora A kome odgovara sopstvena vrednost μ_n sa $|\mu_n| = \|A\|_{X_n}$.

Ukoliko prostor X nije konačno-dimenzionalan, ovim postupkom dobijamo beskonačan niz sopstvenih vektora (x_n) operatora A i ovi obrazuju ortonormiran sistem u X. Odgovarajući niz sopstvenih vrednosti (μ_n) očigledno zadovoljava

$$|\mu_0| \geqslant |\mu_1| \geqslant |\mu_2| \geqslant \ldots, \tag{51}$$

jer $(|\mu_n|)$ predstavlja niz normi restrikcija operatora A na potprostore X_n $(X_0 = X)$. Kao što smo već primetili odmah posle formulacije stava 25, grupe od konačno mnogo članova u nizu (μ_n) mogu se poklopiti.

Lako je uvideti da $\mu_n \to 0$ kada $n \to \infty$. (Na osnovu stava 8.9 samo nula može biti adherentna vrednost niza (μ_n)). Zaista, kada to nebi bio slučaj, niz (x_n/μ_n) bio bi ograničen, pa bi zbog potpune neprekidnosti operatora A niz (Ax_n/μ_n) sadržao konvergentan delimični niz (Ax_{n_k}/μ_{n_k}). No tada bi, zbog $Ax_{n_k} = \mu_{n_k} x_{n_k}$, i niz (x_{n_k}) bio konvergentan, što je nemoguće jer je $\|x_i - x_j\| = \sqrt{2}$ za $i \neq j$.

Neka je x proizvoljan vektor iz X i stavimo

$$z_n = x - \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k x_k \quad (\xi_k = (x, x_k)).$$

Kako je vektor z_n ortogonalan na sve vektore x_k $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, to $z_n \in X_n$, pa je

$$\|Az_n\| \leqslant \|A\|_{X_n} \|z_n\| = |\mu_n| \, \|z_n\|.$$

S obzirom da je

$$\|z_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=0}^{n-1} |\xi_k|^2 \leqslant \|x\|^2$$

i da

$$\mu_n \to 0,$$

to

$$Az_n = Ax - \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k Ax_k \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Ovo možemo napisati i u jednom od oblika:

$$Ax = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k (x, x_k) x_k = \sum_{k=0}^{\infty} (x, Ax_k) x_k = \sum_{k=0}^{\infty} (Ax, x_k) x_k. \tag{52}$$

Nije teško uvideti da niz sopstvenih vrednosti (μ_n) operatora koje smo dobili izloženom metodom ekstrema sadrži *sve* sopstvene vrednosti od A različite od nule. Zaista, kada bi postojala i neka sopstvena vrednost $\bar{\mu} \neq 0$ različita od svih dobivenih μ_n, ovoj bi odgovarao sopstveni vektor $\bar{x}$ ortogonalan na sve vektore x_n; no tada bi iz (52) za taj vektor sledilo $A\bar{x} = 0$, što je u suprotnosti sa učinjenom pretpostavkom $A\bar{x} = \bar{\mu}\bar{x}$ $(\bar{\mu} \neq 0,\ \bar{x} \neq 0)$.

Dobivene rezultate formulisaćemo u obliku stava.

Stav 26. *Neka je $A: X \to X$ potpuno neprekidan sebi adjungovan operator. Metodom ekstrema mogu se dobiti sve njegove sopstvene vrednosti μ_n koje su* *različite od nule i to svaka od njih onoliko puta koliki joj je multiplicitet. Multiplicitet svake sopstvene vrednosti je konačan. Sopstvenih vrednosti ima konačno ili beskonačno mnogo; u poslednjem slučaju one obrazuju nula-niz. Za svako $x \in X$ vektor Ax se može razviti po ortonormiranom sistemu sopstvenih vektora (x_n) operatora A koji odgovaraju sopstvenim vrednostima μ_n:*

$$Ax = \sum_{k=0}^{\infty} (Ax, x_k)\, x_k = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k (x, x_k)\, x_k. \tag{53}$$

Iz prve od reprezentacija vektora Ax u (53) sledi da je ortonormirani sistem (x_n) sopstvenih vektora operatora A potpun u $A(X)$. U X on u opštem slučaju nije potpun.

Stav 27. *Neka je $A: X \to X$ potpuno neprekidan sebi adjungovan operator i neka je (x_n) niz njegovih sopstvenih vektora koji odgovaraju od nule različitim sopstvenim vrednostima (μ_n) od A. Tada se svaki vektor $x \in X$ može napisati u obliku*

$$x = z + \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k x_k,$$

gde je vektor z ortogonalan na sve vektore (x_n) i zadovoljava jednačinu $Az = 0$.

Dokaz. Neka Fourierov razvitak $\sum_{k=0}^{\infty} \xi_k x_k$ vektora x u odnosu na ortonormirani sistem (x_n) konvergira (stav 10), recimo, vektoru y. Primenjujući operator A član po član na ovaj red, nalazimo

$$Ay = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k Ax_k = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k (x, x_k)\, x_k.$$

Međutim, na osnovu (53) je

$$Ax = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k (x, x_k)\, x_k,$$

što zajedno daje

$$Ax = Ay.$$

Ako, dakle, stavimo

$$z = x - y,$$

biće

$$x = z + y = z + \sum_{k=0}^{\infty} (x, x_k)\, x_k,$$

gde z zadovoljava $Az = 0$. Ortogonalnost vektora z na vektore (x_n) nije teško proveriti.

Stav 28. *Neka je $A: X \to X$ potpuno neprekidan sebi adjungovan operator. Da bi niz sopstvenih vektora operatora A koji odgovaraju njegovim od nule različitim sopstvenim vrednostima obrazovao potpun ortonormiran sistem u X, potrebno je i dovoljno da 0 nije sopstvena vrednost od A, tj. da je $Ax = 0$ jedino kada je $x = 0$.*

Dokaz. Zaista, ako 0 nije sopstvena vrednost operatora A, tada iz $Az=0$ sledi $z=0$, te se (54) svodi na

$$x=\sum_{k=0}^{\infty}(x, x_k)\,x_k \quad \text{za svako } x\in X.$$

Na osnovu 2° stava 12 tada je (x_n) potpun ortonormiran sistem u X.

Stav 29. *Ako je (x_n) ortonormiran sistem sopstvenih vektora potpuno neprekidnog sebi adjungovanog operatora A koji odgovaraju njegovim od nule različitim sopstvenim vrednostima (μ_n), tada kvadratna forma (Ax, x) uzima oblik*

$$(Ax, x)=\sum_{k=0}^{\infty}\mu_k\,|(x, x_k)|^2.$$

Dokaz sledi neposredno iz prve od reprezentacija (53).

Na kraju pokazaćemo kako se može rešiti operatorska jednačina

$$x-\lambda Ax=y \quad (A: X\to X) \tag{55}$$

kada su poznate od nule različite sopstvene vrednosti (μ_n) i odgovarajući sopstveni vektori (x_n) potpuno neprekidnog sebi adjungovanog operatora A.

Ako za dato $y\in X$ jednačina (55) ima rešenje x, tada je na osnovu stava 26

$$x=y+\lambda Ax=y+\lambda\sum_{i=0}^{\infty}\mu_i\,(x, x_i)\,x_i. \tag{56}$$

Znači,

$$(x, x_k)=(y, x_k)+\lambda\mu_k\,(x, x_k),$$

tj.

$$(1-\lambda\mu_k)\,(x, x_k)=(y, x_k). \tag{57}$$

Pretpostavimo, prvo, da je $\lambda\neq 1/\mu_k$ $(k=0, 1, \ldots)$. Tada se iz (57) Fourierovi koeficijenti (x, x_k) vektora x mogu izraziti pomoću Fourierovih koeficijenata (y, x_k) vektora y,

$$(x, x_k)=\frac{1}{1-\lambda\mu_k}(y, x_k) \quad (k=0, 1, \ldots)$$

i iz (56) sledi

$$x=y+\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mu_k}{1-\lambda\mu_k}(y, x_k)\,x_k. \tag{58}$$

Obrnuto, ako ovaj red konvergira, može se lako proveriti da je njegova suma rešenje jednačine (55). Zaista, ako (58) uvrstimo u (55):

$$y+\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mu_k}{1-\lambda\mu_k}(y, x_k)\,x_k-\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\mu_k\,(y, x_k)\,x_k-\lambda^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mu_k^2}{1-\lambda\mu_k}(y, x_k)\,x_k=y,$$

leva strana se svodi na desnu.

Da je red (58) konvergentan možemo ovako uvideti. Njegove delimične sume s_n zadovoljavaju

$$
\begin{aligned}
\|s_m - s_n\|^2 &= \sum_{k=n+1}^{m} \left\| \frac{\lambda\mu_k}{1-\lambda\mu_k}(y, x_k)\, x_k \right\|^2 \\
&= \sum_{k=n+1}^{m} \left| \frac{\lambda\mu_k}{1-\lambda\mu_k}(y, x_k) \right|^2 \qquad (59) \\
&\leqslant \alpha^2 \sum_{k=n+1}^{m} |(y, x_k)|^2,
\end{aligned}
$$

gde je

$$\alpha = \sup_{0 \leqslant k < \infty} \left| \frac{\lambda\mu_k}{1-\lambda\mu_k} \right| .$$

Zbog $\lambda\mu_k \neq 1$ i $\mu_k \to 0$, α je konačan broj, te iz (59) sledi da je (s_n) Cauchyev niz jer $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |(y, x_k)|^2 < +\infty$ (stav 10).

Pretpostavimo sada da je parametar λ jednak recipročnoj vrednosti sopstvene vrednosti μ_s, multipliciteta r, tj. da je

$$\lambda = \frac{1}{\mu_k} \quad \text{za} \quad k = s, s+1, \ldots, s+r-1.$$

Da bi i u ovom slučaju imali rešenje, mora zbog (57) vektor y da bude ortogonalan na sopstvenim vektorima $x_s, x_{s+1}, \ldots, x_{s+r-1}$, tj. na svim onima koji odgovaraju sopstvenoj vrednosti μ_s. Tada su koeficijenti $c_k = \mu_k (x, x_k)$ u (56) neodređeni kada je $k = s, s+1, \ldots, s+r-1$, a za $k < s$ i $k > s+r-1$ imamo opet

$$c_k = \frac{\mu_k}{1-\lambda\mu_k}(y, x_k).$$

U tom slučaju rešenje jednačine (55) dato je sa

$$x = y + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} c_k x_k .$$

Vežbanja 9

1. Ako je jedan od vektora u skalarnom proizvodu nula-vektor, tada je skalarni proizvod jednak nuli.

2. Svaki ortogonalan sistem vektora koji ne sadrži nula-vektor je linearno nezavisan.

3. U Schwarzovoj nejednačini važi znak jednakosti samo ako su vektori proporcionalni.

4. Napisati eksplicitno Schwarzovu nejednačinu u prostorima R^k, $C_2[-1, +1]$, l_2.

5. Neka je matrica realnih brojeva $\|\alpha_{ij}\|_{i,j=1,2,\ldots,k}$: 1° simetrična, tj. $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, 2° pozitivno definitna, tj. $\sum\limits_{i,j=1}^{k} \alpha_{i,j}\, \xi_i\, \xi_j \geqslant 0$ za svako realno $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$. Tada je

$$(x, y) = \sum_{i,j=1}^{k} \alpha_{ij}\, \xi_i\, \eta_j, \quad x = (\xi_i), \quad y = (\eta_i),$$

skalarni proizvod u realnom vektorskom prostoru R^k.

6. Pred-Hilbertov prostor konačne dimenzije je Hilbertov prostor.

7. Banachov prostor l_p $(p \geqslant 1, p \neq 2)$ nije i Hilbertov prostor. [Ne važi relacija paralelograma.]

8. Neka su vektori $x_1, x_2, \ldots, x_n$ svi različiti od nula-vektora i međusobno ortogonalni. Pokazati da tada važi

$$\|x_1 + x_2 + \cdots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2.$$

9. U Hilbertovom prostoru niz (x_n) konvergira po normi ka x_0, tada i samo tada ako $x_n \rightharpoonup x_0$ i $\|x_n\| \to \|x_0\|$.

10. Neka je $A \subset X$ proizvoljan skup u Hilbertovom prostoru X. Dokazati relacije

$$A \subset A^{\perp\perp} \, (=(A^{\perp})^{\perp}) \quad \text{i} \quad A^{\perp} = A^{\perp\perp\perp}.$$

Prva relacija postaje jednakost ako je A Hilbertov potprostor.

11. Neka je X realan pred-Hilbertov prostor. Pokazati da iz $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ sledi $x \perp y$. Ovo ne mora biti tačno u kompleksnom pred-Hilbertovom prostoru.

12. U svakom normiranom prostoru dva linearno zavisna vektora zadovoljavaju relaciju paralelograma.

13. Ako je svaki dvodimenzionalni potprostor normiranog prostora X pred-Hilbertov, takav je i sam prostor X.

14. Svaki jednodimenzionalni normirani prostor je Hilbertov. [Na osnovu vežbanja 6 i 12.]

15. Neka je u Hilbertovom prostoru X dat neki ortonormiran niz i neka su $(\hat{x}_\nu)$ i $(\hat{y}_\nu)$ Fourierovi koeficijenti tačaka x i y u odnosu na taj ortonormirani niz. Pokazati da $\sum_{\nu=1}^{\infty} \hat{x}_\nu \overline{\hat{y}_\nu}$ apsolutno konvergira. Da li je $(x, y)_1 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \hat{x}_\nu \overline{\hat{y}_\nu}$ skalarni proizvod u X?

16. U vektorskom prostoru $l_p \, (1 \leqslant p \leqslant 2)$ je $(x, y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \xi_\nu \overline{\eta_\nu}$, $x = (\xi_\nu)$, $y = (\eta_\nu)$, jedan skalarni proizvod. Uporediti normu koja izvire iz ovog skalarnog proizvoda sa uobičajenom normom normiranog prostora l_p.

17. U vektorskom prostoru $L_p(a, b)$ $(1 \leqslant p \leqslant 2)$ je

$$(x, y) = \int_a^b x(t) \overline{y(t)} \, dt$$

jedan skalarni proizvod.

18. U detaljima dokazati da je norma bilinearne funkcionele $\Omega(x, y)$ data sa

$$\|\Omega\| = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y\|=1}} |\Omega(x, y)|.$$

INDEX