Univerzitet u Beogradu
Prirodno-matematički fakultet

Milan Božić

PRILOG SEMANTICI RELEVANTNIH LOGIKA

\- doktorska disertacija -

Beograd
1983

PREDGOVOR

U ovoj raspravi, predloženoj Naučno-nastavnom veću OOUR-a za matematičke, mehaničke i astronomske nauke Prirodno-matematičkog fakulteta u Beogradu kao doktorska disertacija, izlažemo rezultate naših istraživanja u oblasti semantike relevantnih iskaznih računa.

Relevantne logike, nastale, u savremenom matematiziranom obliku, krajem pedesetih godina, dakle, pre nepunih trideset godina, zamišljene su kao sredstvo za bolju formalizaciju jednog od osnovnih logičkih pojmova - implikacije. Bar na počecima, trebalo je da služe otklanjanju paradoksa materjalne implikacije i ispravnom formalizovanju implikacije $A \rightarrow B$ kao odnosa izmedju dva iskaza A i B takva da je B stvarna posledica A, dakle da je A relevantno da B. Podrobnije razmatranje ovih pitanja je izloženo na početku poglavlja 0.

Prva istraživanja, tokom prve polovine šezdesetih godina, su se uglavnom koncentrisala na sintaktička pitanja - izbor aksioma, nezavisnost, teoreme dedukcije, pitanja gencenizacije i sistema prirodne dedukcije, ekvivalentnost računa, zatvorenost za odredjena pravila i slično. To je i period okupljanja, oko Andersona i Belnapa, grupe mladjih logičara (Dunn, Meyer, Routley, Urquhart) i formiranja tzv. Pitsburške škole. Krajem šezdesetih i početkom sedamdesetih godina, kada su se relevantne logike razvile u bogatu mrežu logičkih računa, počinju intenzivnija istraživanja mogućnosti za semantizaciju. Zanimljivo je, mada ne i neočekivano s obzirom na složenost dobijenih semantika koja se može sagledati uvidom u poglavlje 1, da su se relevantne logike dugo "opirale" semantizaciji. Tek 1972.

skoro istovremeno, Routley i Meyer sa jedne, i Maksimova sa druge strane, dolaze do prvih semantika, i to Kripkeovskog tipa, za neke relevantne sisteme. Maksimova, koja je, zajedno sa Smirnovim, dala značajan doprinos ruske matematičke škole relevantnim logikama, nije kasnije ništa više objavljivala iz oblasti semantike relevantnih računa, dok su Routley i Meyer, a naročito Meyer, na Australijskom nacionalnom univerzitetu, razvili relevantno-logičku školu koja dostojno nastavlja tradicije Pitsburške. Sasvim nedavno, dostavljen nam je Meyerov rezultat o neodlučivosti sistema R, koji, tako, predstavlja prvi "neveštački" iskazni račun koji je neodlučiv.

Na istraživanja Routleya i Meyera i Maksimove nastavlja se ova naša rasprava.

Rasprava je podeljena u pet poglavlja.

Poglavlje 0 je posvećeno konstruisanju nekih relacijsko-operacijskih struktura gradjenih od skupova formula u računima RA^+ i R^+ koje se, u daljem izlaganju, koriste za izgradnju kanonskih okvira Kripkeovskog tipa namenjenih semantizovanju pozitivnih fragmenata relevantnih iskaznih računa.

Poglavlje 1 je prikaz semantike za pomenute pozitivne fragmente. Semantika ovog poglavlja je hibrid semantika Routley & Meyer-a i Maksimove i, iako poznata u literaturi u nešto drukčijem obliku, može predstavljati interes za sebe.

U poglavlju 2 predlažemo nov način semantizovanja negacije u relevantnim logikama koji omogućava da se dobiju teoreme potpunosti za jednu široku klasu ekspanzija računa R_{min}. Posebno, dokazujemo da je Routley & Meyer semantika za R samo poseban slučaj naše.

Poglavlje 3 je posvećeno relevantnim modalnim logikama koje su do sada skoro nepoznate u literaturi. Ovde takodje predlažemo semantiku Kripkeovskog tipa kojom se dokazuje potpunost jedne veoma široke klase modalnih logika kojima su baze razni relevantni računi sa ili bez negacije. U zaključku poglavlja dajemo karakterizaciju široke klase modalnih tzv. Hintikka shema koje obuhvataju skoro sve modalne sheme koje se mogu karakterisati formulama prvog reda. Osim toga, dokazujemo i da je semantika za račun $R_{\Box}$, jedini do sada izučavan u literaturi, poseban slučaj naše.

U poglavlju 4 izlažemo semantizaciji relevantne račune koji nisu distributivni. Koliko je nama poznato, ovakva istraživanja se do sada nisu pojavljivala u literaturi. Pokazuje se da semantizacija nedistributivnih relevantnih računa korenito menja Kripkeovu semantiku i približava je, u nekom smislu, granicama mogućnosti. Istovremeno, verujemo da se tu otvara prostor za nova istraživanja.

Autor duguje svoju najdublju zahvalnost profesorima Aleksandru Kronu, koji ga je i upoznao sa ovom problematikom i vodio kroz nju, i Slaviši Prešiću, čijim bogatim idejama i nesebičnoj podršci odaje puno priznanje.

Naučnom saradniku Matematičkog Instituta u Beogradu, Kosti Došenu, sa kojim poslednjih godina intenzivno saradjuje, autor zahvaljuje kako na inspirativnoj saradji tako i na stvaranju onoga, što se u naše vreme tako lako zanemaruje, a što se zove naučna atmosfera.

Beograd, maja 1983.

SADRŽAJ

0. Relevantne logike. Sintaktički uvod 1

1. Semantika za R^{+}.............................. 14

2. Semantika za relevantne logike sa negacijom 28

Semantika za R. Kritika negacije u R 28

C semantika. Slabljenje negacije 34

R semantika. Dalje slabljenje negacije ... 56

3. Semantika za normalne relevantne modalne logike . 67

4. Semantika za nedistributivne relevantne logike .. 87

Negacija u RA semantici 97

Literatura 104

0. RELEVANTNE LOGIKE. SINTAKTIČKI UVOD

Relevantne logike su nastale kao rezultat ispitivanja pojma logičke implikacije. Kao što je poznato, pri formalizaciji (preciznije - matematizaciji) računa iskaza implikaciji se konotira jedan logički veznik ($\rightarrow$) tj. operacija medju iskazima. Time se, već na prvom koraku, vrši "statusno" izjednačavanje implikacije sa ostalim logičkim veznicima ($\wedge$, $\vee$, $^{-}$, $\Box$ i, drugi, manje česti) i, samim tim, izvesno uprošćavanje realne situacije- realne utoliko ukoliko nas intuicija formirana vekovnim iskustvom u logičkim manipulacijama, ne vara. Naime, svaki logičar je spreman da prihvati koncepciju prema kojoj se primenom veznika $\wedge$, $\vee$, $^{-}$, $\Box$ na iskaze, opet dobijaju iskazi. Sporno je, medjutim, da li je $A \rightarrow B$ iskaz ako su to A i B. Ili, ako već nekako prihvatimo da $A \rightarrow B$ jeste iskaz onda se teško možemo pomiriti sa time da on bude istog nivoa kao A i B. Ovde nas, izgleda, iskustvo pre navodi na pomisao da je $A \rightarrow B$ neki odnos, relacija povlačenja medju iskazima. No, ako ipak, a to je radi omogućavanja pristupa matematici u logiku skoro neophodno, prihvatimo da je $A \rightarrow B$ iskaz bez ikakvih rezervi, onda se pomenuti spor ne otklanja već se prenosi na sledeći nivo analizovanja. Na tom nivou se otvara pitanje istinitosti iskaza. I opet, izgleda da je svaki logičar spreman da prihvati pristup pri kome je istinitost iskaza $A \wedge B$, $A \vee B$ i $\bar{A}$ funkcija istinitosti iskaza A i B. Za iskaz $\Box A$ je ovako nešto već znatno manje prihvatljivo a za iskaz $A \rightarrow B$ deluje čak i netačno. Čini se, naime, da ako smatramo da je iskaz $A \rightarrow B$ istinit ako je B logička posledica iskaza A, onda na to istinitost iskaza A i B nema nikakav uticaj.

Tako, na primer, nema nikakvog razloga da se iskazi $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ ili $A \wedge \bar{A} \rightarrow B$ prihvate kao istiniti. U prvom slučaju, nije jasno kakav (a izgleda nikakav) bi to logički aparat omogućavao da se iz, recimo, matematičke istine A: Aksioma izbora je nezavisna od ZF teorije skupova izvede iskaz $B \to A$ gde je B, recimo, kontingentno istinit iskaz: Pada kiša. U drugom slučaju pak, ne izgleda smisleno da se iz proizvoljne neistine, kakva je $A \wedge \bar{A}$, može izvesti svaki iskaz. Pretpostavljamo da je jasno na šta naše izlaganje cilja. Logičari koji se saglašavaju sa prethodno izloženim idejama, su ubedjeni, a gornji primeri (i mnogi slični)ukazuju na istinitost ovog ubedjenja, da $A \to B$ može biti istinit iskaz samo ako se iz A zaista izvodi B, ako je A relevantno za B. Izvršivši ovakvo opredeljivanje, mi smo samo suzili ali nikako ne i otklonili mogućnosti za spor.

Prvo sledeće pitanje koje se sasvim legitimno nameće je: Šta su kriterijumi relevantnosti? Ili, ako smo se već opredelili za matematizaciju logike, alternativno formulisano pitanje glasi: Koje iskaze treba da ima za teoreme neki logički sistem da bi ga nazvali relevantnim? Prostor je svakako nedovoljan za davanje iole potpunijeg odgovora na ova pitanja, što uostalom, samo po sebi i nije tema ove teze. Ograničimo se samo na neke istorijske napomene.

Raspravljanje pomenutih pitanja vezanih za implikaciju, na nivou matematičke logike, počinje Ackermannovim radom [1]. Svakako da bi dublja analiza pokazala da, što se same logike tiče, nečeg anticipirajućeg ima i kod Aristotela. Podrobna rasprava i sve značajnije reference se mogu naći u kapitalnoj enciklopediji Andersona i Belnapa [2] . Ukratko, možemo reći da je poslednjih dvadeset godina rad na relevantnim logikama proizveo jednu široku i bogatu klasu logičkih sistema posvećenih raznim aspektima implikacije. Semantici nekih od njih je posvećena ova teza.

U ovom poglavlju ćemo definisati neke relevantne iskazne račune, značajne za naša dalja istraživanja i dokazati neka njihova osnovna sintaktička svojstva kao i neke algebarske strukture koje se na njima mogu izgraditi.

Prethodno, neke napomene tehničke prirode.

1^{o} Sve iskazne račune koje istražujemo u ovoj tezi definišemo nad istim skupom (iskaznih) promenljivih

$V \overset{\text{def}}{=} \{p_i \mid i \in \omega\}$

a u jezicima koji su podjezici jezika

$L_{\Box} \overset{\text{def}}{=} \{\to, \wedge, \vee, ^{-}, \Box\}$ i to:

$L^{+} \overset{def}{=} \{\rightarrow, \wedge, \vee\}$ $\quad L \overset{def}{=} \{\rightarrow, \wedge, \vee, -\}$

$L_{\rightarrow} \overset{def}{=} \{\rightarrow\}$ $\quad L_{\rightarrow}^{-} \overset{def}{=} \{\rightarrow, -\}$

$L^{+}_{\Box} \overset{def}{=} \{\rightarrow, \wedge, \vee, \Box\}$ $\quad L^{\Box}_{\rightarrow} \overset{def}{=} \{\rightarrow, \Box\}$

Termi nad skupom promenljivih V u nekom jeziku Λ su (iskazne) formule skup kojih se označava sa For(Λ,V) odnosno, jer je V utvrdjen, sa ForΛ .

$\{A,B,C,D\} \cup \{A_i,B_i,C_i,D_i \mid i \in \omega\}$ su meta-promenljive za formule.

2^{o} Meta-logička teorija koju koristimo je ZFC teorija skupova na jeziku $\{\in\}$ koji bez posebnih napomena proširujemo definicionim aksiomama.

i, ili, ne, akko, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$ su meta-logički veznici pri čemu su akko i $\Leftrightarrow$ ravnopravni i upotrebljavaju se naizmenično po vanmatematičkim kriterijumima.

Sve predikatske formule u meta-jeziku su iskazi, tj. smatraju se zatvorenim formulama i ako se u njima nadju slobodne promenljive one se smatraju univerzalno kvantifikovanim po celoj formuli.

$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \ldots, \mathcal{X}$ sa ili bez indekasa su meta-promenljive za relacijsko-operacijske strukture, pri čemu su ista štampana latinična slova oznake za njihove nosače (dom$\mathcal{A}$ =A).

Kako je ZFC bazna meta-logička teorija to oznake Rx i $x \in R$ smatramo ravnopravnim i koristimo ih naizmenično po vanmatematičkim kriterijumima. U slučaju relacija dužine veće od 1 uvek koristimo oznake tipa $Rx_1 \ldots x_n$

3^{o} Svaki drugi zapis koji se u ovom tekstu pojavi, a koji nije posebno istaknut u ovim napomenama, treba shvatiti u uobičajenom matematičkom smislu, pri čemu autor izražava svoju veru i ubedjenje da je pojam uobičajenog matematičkog smisla dobro definisan.

0.1 Definicija

0.1.1 $S = \langle \Lambda, Ax, R \rangle$ je iskazni račun na jeziku Λ sa aksiomama Ax i pravilima izvodjenja R akko

(i) $Ax \subseteq For\Lambda$ je takav da ako je $A(p_0 \ldots p_n)$ formula čije su sve promenljive medju $p_0, \ldots, p_n$ onda

$A(p_0 \ldots p_n) \in Ax \Rightarrow A(A_0 \ldots A_n) \in Ax$

za ma koje $A_0, \ldots, A_n \in For\Lambda$ pri čemu se sva javljanja slova (promenljive) p_i $(0 \leqslant i \leqslant n)$ zamenjuju formulom A_i $(0 \leqslant i \leqslant n)$

(ii) R je skup relacija na ForΛ dužine bar dva takav da za svako $r \in R$ važi

$r(A_o \ldots A_{n+1}) \Rightarrow r(A'_o \ldots A'_{n+1})$ za sve $A_o, \ldots, A_{n+1} \in$ ForΛ gde su $A'_o, \ldots, A'_{n+1}$ formule dobijene iz formula $A_o, \ldots, A_{n+1}$ zamenom istih promenljivih proizvoljnim ali istim formulama.

$r \dfrac{A_o, \ldots, A_n}{A_{n+1}}$ je zamena za $r(A_o \ldots A_{n+1})$

0.1.2 Ako je S iskazni račun onda je Th(S) <u>skup teorema računa S</u> najmanji skup takav da

(i) $Ax \subseteq Th(S)$, i

(ii) Za svako $r \in R$

$$A_o, \ldots, A_n \in Th(S) \;\; \underline{i} \;\; r \frac{A_o, \ldots, A_n}{A_{n+1}} \Rightarrow A_{n+1} \in Th(S)$$

$$\vdash_S A \overset{def}{\Longleftrightarrow} A \in Th(S)$$

0.1.3 Neka su $S_1 = \langle \Lambda_1, Ax_1, R_1 \rangle$ i $S_2 = \langle \Lambda_2, Ax_2, R_2 \rangle$ iskazni računi

S_2 je <u>ekspanzija računa S_1</u> akko

(i) $\Lambda_1 \subseteq \Lambda_2$

(ii) $Ax_1 \subseteq Ax_2$

(iii) $R_1 \subseteq R_2$

S_2 je <u>ekstenzija računa S_1</u> akko

(i) $\Lambda_1 = \Lambda_2$

(ii) $Ax_1 \subseteq Ax_2$

(iii) $R_1 \subseteq R_2$

S_2 je <u>nadračun računa S_1</u> (S_1 je <u>podračun računa S_2</u>) akko

(i) $\Lambda_1 = \Lambda_2$

(ii) $Ax_1 \subseteq Ax_2$

(iii) $R_1 = R_2$

Računi S_1 i S_2 su <u>ekvivalentni</u> akko

(i) $\Lambda_1 = \Lambda_2$

(ii) $Th(S_1) = Th(S_2)$

Računi S_1 i S_2 su <u>prosto ekvivalentni</u> akko

(i) $\Lambda_1 = \Lambda_2$

(ii) $R_1 = R_2$

(iii) $Th(S_1) = Th(S_2)$

<u>0.1.4 Napomena</u>

Relacija ekvivalencije i relacija proste ekvivalencije medju računima su relacije ekvivalencije.

0.2 Definicija

Iskazni račun S je neprotivrečan akko $Th(S) \neq ForL(S)$

0.3 Definicija

RA^{+} je svaki iskazni račun na jeziku L^{+} koji je prosto ekvivalentan računu čije su aksiome sve formule oblika

R1 $A \rightarrow A$

R2 $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$

R3 $A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B)$

R4 $(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$

R5 $A \wedge B \rightarrow A$

R6 $A \wedge B \rightarrow B$

R7 $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \wedge C)$

R8 $A \rightarrow A \vee B$

R9 $B \rightarrow A \vee B$

R10 $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C)$

i čija su pravila izvodjenja

MP $\dfrac{A,\ A \rightarrow B}{B}$ i AD $\dfrac{A\ ,\ B}{A \wedge B}$

0.3.1 Napomena

Naglašavamo da smo prethodnom definicijom istim imenom nazvali sve račune prosto ekvivalentne jednom datom. Time, u stvari, podvlačimo naše interesovanje za skup teorema tog računa i pravila u odnosu na koja je on zatvoren, zanemarujući razne moguće aksiomatizacije.

Sledeće dve teoreme navodimo bez dokaza koji se, inače, mogu naći u[2].

0.4 Teorema

Ako je $\vdash_{RA^{+}} A \rightarrow B$ onda A i B imaju zajedničku promenljivu.

0.5 Teorema

$\vdash_{RA^{+}} (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \wedge B \rightarrow C)$ pri čemu obrat nije teorema u RA^{+}.

Svojstvo "zajedničke promenljive" (variable sharing) koje prema teoremi 0.4 ima RA^{+}, uzima se za osnovni kriterijum relevantnosti. Teorema 0.5 ukazuje na različitu snagu "gomilanja hipoteza" pomoću implikacije i pomoću konjunkcije. Ovo svojstvo, koje imaju i mnogi drugi relevantni nadračuni od RA^{+}, znatno usložnjava rad sa pojmovima kao što je dokaz iz hipoteza.

0.6 Definicija

Neka je S neka ekspanzija računa RA^+ na jeziku Λ i $\Phi, \Gamma \subseteq For\Lambda$

0.6.1 $\Phi \vdash_S A \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\exists n \geq 1)(\exists A_1,\ldots,A_n \in \Phi) \vdash_S A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \to A$

0.6.2 Φ je S deduktivno zatvoren (S d.z.) $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall A(\Phi \vdash_S A \Rightarrow A \in \Phi)$

0.6.3 Φ je S regularan $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $Th(S) \subseteq \Phi$

0.6.4 Φ je S teorija $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ Φ je S d.z. i S regularan

0.6.5 Φ je prost $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall A \forall B(A \vee B \in \Phi \Rightarrow A \in \Phi$ ili $B \in \Phi)$

0.6.6 $H(S) \overset{def}{=} \{\Phi \subseteq For\Lambda \mid \Phi$ je S d.z.$\}$

$H'(S) \overset{def}{=} \{\Phi \subseteq For\Lambda \mid \Phi$ je S d.z. i prost$\}$

$P(S) \overset{def}{=} \{\Phi \subseteq For\Lambda \mid \Phi$ je S teorija$\}$

$P'(S) \overset{def}{=} \{\Phi \subseteq For\Lambda \mid \Phi$ je prosta S teorija$\}$

0.6.7 $[\Phi]_S \overset{def}{=} \{A \mid \Phi \vdash_S A\}$

$[\Phi,\Gamma]_S \overset{def}{=} [\Phi \cup \Gamma]_S$

$[A_1,\ldots,A_n]_S \overset{def}{=} [\{A_1,\ldots,A_n\}]_S$

$[\Phi,A]_S \overset{def}{=} [\Phi \cup \{A\}]_S$

0.6.8 $\Phi \circ_S \Gamma \overset{def}{=} \{C \mid (\exists A \in \Phi)(\exists B \in \Gamma) \vdash_S A \to (B \to C)\}$

0.7 Lema

Neka je S neka ekspanzija računa RA^+ na jeziku Λ i $\Phi \subseteq For\Lambda$

0.7.1 Φ je S d.z. akko (i) $A \in \Phi$ i $B \in \Phi \Rightarrow A \wedge B \in \Phi$, i

(ii) $A \in \Phi$ i $\vdash_S A \to B \Rightarrow B \in \Phi$

0.7.2 Ako je Φ S d.z. onda je $[\Phi,A]_S = \{B \mid (\exists F \in \Phi) \vdash_S F \wedge A \to B\}$

0.7.3 $[A_1,\ldots,A_n]_S = [A_1 \wedge \ldots \wedge A_n]_S$

0.7.4 $[A \vee B]_S = [A]_S \cap [B]_S$

0.7.5 $\emptyset \in H'(S)$ i $For\Lambda \in H'(S)$

0.7.6 $P(S) \subseteq H(S)$ i $P'(S) \subseteq H'(S)$

0.7.7 Ako su Φ i Γ S d.z. onda je $\Phi \circ_S \Gamma \subseteq [\Phi,\Gamma]_S$ ali, u opštem slučaju obratna inkluzija ne važi.

Dokaz:

0.7.1 - 0.7.6 su trivijalne posledice definicije 0.6 i osnovnih sintaktičkih svojstava računa RA^+.

0.7.7 je direktna posledica teoreme 0.5.

Sledećom teoremom na H(S) uvodimo jednu algebarsku strukturu i dokazujemo njena osnovna svojstva. U dokazu se često pozivamo na teoreme u RA^+ bez dokaza koji se mogu naći u [20] .

0.8 Teorema

Ako je S neka ekspanzija računa RA^+ u nekom jeziku Λ onda je $\mathcal{H}(S) = \langle H(S), \circ_S, \subseteq, Th(S)\rangle$ relacijsko-operacijska struktura koja se naziva komutativan kvadratno opadajući uredjen monoid i u kojoj za sve $x,y,z \in H(S)$ važi (umesto $\circ_S$ pišemo samo $\circ$):

0.8.1 $x,y \in H(S) \Rightarrow x\circ y \in H(S)$

0.8.2 $x\circ y = y\circ x$

0.8.3 $x\circ(y\circ z) = (x\circ y)\circ z$

0.8.4 $x\circ Th(S) = x$

0.8.5 $x\subseteq y \Rightarrow x\circ z\subseteq y\circ z$

0.8.6 $x\circ x\subseteq x$

0.8.7 $x \neq \emptyset \Rightarrow x\circ For\Lambda = For\Lambda$

0.8.8 $x,y \neq \emptyset \Rightarrow x\circ y \neq \emptyset$

Dokaz:

0.8.1 Dokaz da $x\circ y\in H(S)$ ako $x,y\in H(S)$ sprovodimo korišćenjem kriterijuma 0.7.1. Neka, dakle, $x,y\in H(S)$ tada

(i) Ako $A,B\in x\circ y$ onda za neke $A_1,B_1\in x$ i $A_2,B_2\in y$ važi, prema definiciji operacije $\circ$, $\vdash_S A_1\to(A_2\to A)$ i $\vdash_S B_1\to(B_2\to B)$ odakle proizlazi da $\vdash_S A_1\wedge B_1\to(A_2\wedge B_2\to A\wedge B)$. No kako su x i y S d.z. to $A_1\wedge B_1\in x$ i $A_2\wedge B_2\in y$ te $A\wedge B\in x\circ y$.

(ii) Ako $A\in x\circ y$ i $\vdash_S A\to B$ tada za neke $A_1\in x$ i $A_2\in y$ važi $\vdash_S A_1\to(A_2\to A)$ iz čega, zbog $\vdash_S A\to B$, proizlazi $\vdash_S A_1\to(A_2\to B)$ odnosno, $B\in x\circ y$.

0.8.2 Neka $A\in x\circ y$, tada za neke $A_1\in x$, $A_2\in y$ važi $\vdash_S A_1\to(A_2\to A)$ odakle proizlazi i $\vdash_S A_2\to(A_1\to A)$ te $A\in y\circ x$. Dakle $x\circ y\subseteq y\circ x$. Zamenom x i y dobijamo i obratnu inkluziju.

0.8.3 Neka $A\in x\circ(y\circ z)$; tada za neke $A_1\in x$, $B\in y\circ z$ važi $\vdash_S A_1\to(B\to A)$, a kako $B\in y\circ z$ to za neke $A_2\in y$ i $A_3\in z$ važi i $\vdash_S A_2\to(A_3\to B)$ što zajedno sa prethodnim daje $\vdash_S A_1\to(A_2\to(A_3\to A))$. Iz poslednjeg tvrdjenja proizlazi da $A_3\to A\in x\circ y$ te, kako $A_3\in z$, i važi $\vdash_S(A_3\to A)\to(A_3\to A)$ to $A\in(x\circ y)\circ z$.

Obratno, neka $A\in(x\circ y)\circ z$; tada za neke $B\in x\circ y$ i $A_3\in z$ imamo da $\vdash_S B\to(A_3\to A)$. $B\in x\circ y$ dalje daje da za neke $A_1\in x$ i $A_2\in y$ važi $\vdash_S A_1\to(A_2\to B)$. Zajedno sa prethodnim ovo daje $\vdash_S A_1\to(A_2\to(A_3\to A))$ i, permutacijom, $\vdash_S A_2\to(A_3\to(A_1\to A))$. Odavde proizlazi da $A_1\to A\in y\circ z$ što sa $\vdash_S A_1\to((A_1\to A)\to A)$ konačno daje $A\in x\circ(y\circ z)$.

0.8.4 Neka $A\in x\circ Th(S)$; tada za neke $A_1\in x$ i $A_2\in Th(S)$ važi

$\vdash_S A_1 \to (A_2 \to A)$, odakle, permutacijom, $\vdash_S A_2 \to (A_1 \to A)$ te kako je $A_2 \in Th(S)$ to $\vdash_S A_1 \to A$; no kako je x S d.z. i $A_1 \in x$ to $A \in x$. Obratno, ako $A \in x$ onda $\vdash_S A \to ((A \to A) \to A)$ i zbog $A \to A \in Th(S)$ imamo $A \in x \circ Th(S)$.

0.8.5 Neka $x \subseteq y$ i neka $A \in x \circ z$. Tada za neke $A_1 \in x$ i $A_2 \in z$ $\vdash_S A_1 \to (A_2 \to A)$; no, zbog $x \subseteq y$, $A_1 \in y$ odakle $A \in y \circ z$.

0.8.6 Neka $A \in x \circ x$. Tada za neke $A_1, A_2 \in x$, $\vdash_S A_1 \to (A_2 \to A)$ što povlači i $\vdash_S A_1 \wedge A_2 \to A$. Zbog S d.z. $A_1 \wedge A_2 \in x$ pa i $A \in x$.

0.8.7 Kako je $x \neq \emptyset$ to za neko A, $A \in x$. Ako je $F \in For\Lambda$ onda je i $A \to F \in For\Lambda$ pa iz $\vdash_S A \to ((A \to F) \to F)$ proizlazi da $F \in x \circ For\Lambda$. Kako ovo važi za sve $F \in For\Lambda$ to je $x \circ For\Lambda = For\Lambda$.

0.8.8 Kako su $x, y \neq \emptyset$ to u njima postoje neki B i C, tim redom, pa, zbog S d.z. i $A \overset{def}{=} B \vee C \in x, y$. Primetimo da je u S teorema formula $((A \to (A \to A)) \to (A \to A)) \to (((A \to A) \to A) \to ((A \to (A \to A)) \to A)$ (aksioma R2). No, teoreme su i formule $A \to ((A \to A) \to A)$ (aks. R3) i $A \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$ (aks. R3) čiji je antecedens A i u x i u y te su zbog S d.z. i njihovi konsekvensi $(A \to A) \to A$ i $(A \to (A \to A)) \to (A \to A)$ i u x i u y. No, to onda, prema prvoj navedenoj teoremi znači da je formula $(A \to (A \to A)) \to A$ u $x \circ y$ (ili $y \circ x$, svejedno). Dakle $x \circ y \neq \emptyset$.

<u>0.8.9. Napomena</u>

I nadalje umesto $\circ_S$ pišemo samo $\circ$ kada god je kontekst jasan.

<u>0.9 Definicija</u>

R^+ je nadračun računa RA^+ koji se dobija dodavanjem u skup aksioma računa RA^+ svih formula oblika

R11 $\quad A \wedge (B \vee C) \to (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

<u>0.10 Lema</u>

Neka je S proizvoljna ekspanzija računa R^+, tada važi

0.10.1 Ako $x \in H(S)$ i $A \notin x$ onda postoji $m \in H'(S)$ takav da $x \subseteq m$ i $A \notin m$.

0.10.2 Ako $x, y \in H(S)$, $z \in H'(S)$ i $x \circ y \subseteq z$ onda postoji $m \in H'(S)$ takav da $x \subseteq m$ i $m \circ y \subseteq z$.

0.10.3 Ako $x, y \in H(S)$ i $A \notin x \circ y$ onda postoje $m, n, z \in H'(S)$ takvi da $x \subseteq m$, $y \subseteq n$, $A \notin z$ i $m \circ n \subseteq z$.

0.10.4 Ako $x \in H'(S)$ onda postoji $m \in P'(S)$ takav da $m \circ x \subseteq x$.

Dokaz:

0.10.1 Neka je $\mathscr{C} \overset{def}{=} \{t \mid x \subseteq t \ \underline{i} \ A \notin t \ \underline{i} \ t \in H(S)\}$. $\mathscr{C}$ je neprazan(jer $x \in \mathscr{C}$)i zatvoren za unije lanaca što se neposredno proverava. Prema Zornovoj lemi $\mathscr{C}$ ima maksimalan element m. Kako $m \in \mathscr{C}$, to $x \subseteq m$, $A \notin m$ i $m \in H(S)$ pa je, da bi m zadovoljavao postavljene uslove, dovoljno dokazati da $m \in H'(S)$, tj. da je prost. Pretpostavimo suprotno. Tada postoje $B, C \notin m$ takvi da $B \vee C \in m$. Medjutim, $[m,B]_S$ i $[m,C]_S$ su tada pravi nadskupovi od m pa nisu u $\mathscr{C}$. Kako oba sadrže x i po konstrukciji pripadaju $H(S)$ to, da ne bi bili u $\mathscr{C}$, moraju sadržati A. Prema lemi 0.7.2 to znači da za neke $M_1, M_2 \in m$ važi $\vdash_S M_1 \wedge B \to A$ i $\vdash_S M_2 \wedge C \to A$, odakle, za $M = M_1 \wedge M_2$ proizlazi da važi $\vdash_S (M \wedge B) \vee (M \wedge C) \to A$, pri čemu se koriste samo aksiome R1-R10 (RA^+). Primenom distributivnosti (R11!) na poslednju formulu dobijamo $\vdash_S M \wedge (B \vee C) \to A$. No, $M, B \vee C \in m$ pa i $A \in m$. Kontradikcija. $m \in H'(S)$.

0.10.2 Neka je $\mathscr{C} \overset{def}{=} \{t \mid x \subseteq t \ \underline{i} \ t \circ y \subseteq z \ \underline{i} \ t \in H(S)\}$. $\mathscr{C}$ je neprazan(jer $x \in \mathscr{C}$)i zatvoren za unije lanaca što se neposredno proverava ($\circ$ je saglasan sa $\subseteq$ (teorema 0.8.5)). Prema Zornovoj lemi $\mathscr{C}$ ima maksimalan element m. Kako $m \in \mathscr{C}$ to $x \subseteq m$, $m \circ y \subseteq z$ i $m \in H(S)$, pa je, da bi m zadovoljavao postavljene uslove, dovoljno dokazati da $m \in H'(S)$, tj. da je prost. Pretpostavimo suprotno. Tada za neke $B, C \notin m$ važi $B \vee C \in m$. Slično kao u prethodnom dokazu $[m,B]_S$ i $[m,C]_S$ su pravi nadskupovi od m i stoga nisu u $\mathscr{C}$. Kako sadrže m pa prema tome i x i kako su po konstrukciji u $H(S)$, to, da ne bi bili u $\mathscr{C}$, moraju falsifikovati uslov $t \circ y \subseteq z$. Znači, $[m,B]_S \circ y \nsubseteq z$ i $[m,C]_S \circ y \nsubseteq z$ odakle proizlazi da postoje $B_1, C_1 \notin z$ takvi da $B_1 \in [m,B]_S \circ y$ i $C_1 \in [m,C]_S \circ y$, što dalje, po definiciji operacije $\circ$, znači da postoje $B_2, C_2 \in y$, $B_3 \in [m,B]_S$ i $C_3 \in [m,C]_S$ takvi da $\vdash_S B_3 \to (B_2 \to B_1)$ i $\vdash_S C_3 \to (C_2 \to C_1)$... (1) Dalje, prema lemi 0.7.2 za B_3 i C_3 postoje $M_1, M_2 \in m$ takvi da $\vdash_S M_1 \wedge B \to B_3$ i $\vdash_S M_2 \wedge C \to C_3$ ... (2). Iz (1) i (2) dobijamo $\vdash_S M_1 \wedge B \to (B_2 \to B_1)$ i $\vdash_S M_2 \wedge C \to (C_2 \to C_1)$ ... (3). Kako $B_2, C_2 \in y$ to i $A_2 = B_2 \wedge C_2 \in y$ (jer je y S d.z.), a kako $M_1, M_2 \in m$ to i $M = M_1 \wedge M_2 \in m$ (jer je i m S d.z.). Odavde i iz (3) dobijamo da $\vdash_S M \wedge B \to (A_2 \to B_1 \vee C_1)$ i $\vdash_S M \wedge C \to (A_2 \to B_1 \vee C_1)$... (4) (konsekvensi su zamenjeni slabijim,a antecedensi jačim pretpostavkama). Iz (4) proizlazi $\vdash_S (M \wedge B) \vee (M \wedge C) \to (A_2 \to B_1 \vee C_1)$ (R10) odakle primenom distributivnosti (R11) dobijamo $\vdash_S M \wedge (B \vee C) \to (A_2 \to B_1 \vee C_1)$. Kako

$M\in m$, $B\vee C\in m$ i $A_2\in y$ to, po definiciji operacije $\circ$, $B_1\vee C_1$ pripada $m\circ y$ pa i z (jer je, po pretpostavci $m\circ y\subseteq z$). Dakle $B_1\vee C_1\in z$ koji je, po pretpostavci leme,prost te mora biti $B_1\in z$ <u>ili</u> $C_1\in z$ što je kontradikcija sa $B_1,C_1\notin z$. Dakle m je prost.

0.10.3 Kako $x,y\in H(S)$ to, prema teoremi 0.8.1, $x\cdot y\in H(S)$ pa ako $A\notin x\circ y$, onda prema 0.10.1 postoji $z\in H'(S)$ takav da $A\notin z$ i $x\circ y\subseteq z$. Primenom 0.10.2 postoji $m\in H'(S)$ takav da $x\subseteq m$ i $m\circ y\subseteq z$. No, kako je $m\cdot y=y\cdot m$ (teorema 0.8.2) to je i $y\cdot m\subseteq z$ pa primenom 0.10.2 na y dobijamo da postoji $n\in H'(S)$ takav da $y\subseteq n$ i $m\circ n\subseteq z$. To je i trebalo dokazati.

0.10.4 Kako je prema teoremi 0.8.4 $Th(S)\circ x = x\subseteq x$ i x je po pretpostavci u $H'(S)$,to prema 0.10.2 postoji $m\in H'(S)$ takav da $Th(S)\subseteq m$ i $m\circ x\subseteq x$. No, $Th(S)\subseteq m\in H'(S)$ znači da $m\in P'(S)$, što je i trebalo dokazati.

<u>0.11 Teorema</u>

Neka je S proizvoljna ekspanzija računa R^+ i neka je
$\mathcal{K}^+(S) \overset{def}{=} \langle H'(S),\ R_k(S),\ P'(S)\rangle$
gde je
$R_k(S)xyz \overset{def}{\iff} x\circ_S y\subseteq z \quad (x,y,z\in H'(S))$.
Tada u $\mathcal{K}^+(S)$, za sve $x,y,z,t\in H'(S)$, važi:

P1 $\exists t(t\in P'(S)$ <u>i</u> $R_k(S)txx)$

P2 $R_k(S)xxx$

P3' $x\subseteq y$ <u>i</u> $R_k(S)yzt \Rightarrow R_k(S)xzt$

P4 $R_k^2(S)xyzt \Rightarrow R_k^2(S)xzyt$

P' $x\subseteq y \iff \exists t(t\in P'(S)$ <u>i</u> $R_k(S)txy)$

gde je $R_k^2(S)xyzt$ oznaka za $\exists u(R_k(S)xyu$ <u>i</u> $R_k(S)uzt)$

<u>Dokaz</u>:

P1 je $\exists t(t\in P'(S)$ <u>i</u> $t\circ x\subseteq x)$ što je lema 0.10.4

P2 je $x\circ x\subseteq x$ što je teorema 0.8.6

P3'je $x\subseteq y$ <u>i</u> $y\circ z\subseteq t \Rightarrow x\circ z\subseteq t$ što je posledica 0.8.5

P4 je prema definiciji $R_k^2(S)$ i $R_k(S)$ ekvivalentno sa

$$x\circ y\subseteq u \text{ \underline{i} } u\circ z\subseteq t \Rightarrow \exists v(x\circ z\subseteq v \text{ \underline{i} } v\circ y\subseteq t).$$

Dokazujemo ovu implikaciju.

Iz $x\circ y\subseteq u$ i $u\circ z\subseteq t$, prema 0.8.5, proizlazi $(x\circ y)\circ z\subseteq t$ iz čega, primenom 0.8.2 i 0.8.3, proizlazi $(x\circ z)\circ y\subseteq t$... (1). Kako su x i z u $H(S)$ to je i $x\circ z$ (teorema 0.8.1) u $H(S)$; y i t su već po pretpostavci u $H'(S)$ pa primenom leme 0.10.3 na (1) zaključujemo da postoji $v \in H'(S)$ takav da $x \circ z \subseteq v$ i $v \circ y \subseteq t$ što i jeste konsekvens dokazivane implikacije.

P′ ($\Leftarrow$) Ako postoji $t \in P'(S)$ takav da $R_k(S)txy$, onda, prema definicijama to znači da postoji t takav da $Th(S) \subseteq t$ i $t \circ x \subseteq y$. Iz prethodnog, zbog monotonije operacije (0.8.5), dobijamo da $Th(S) \circ x \subseteq y$; no, prema 0.8.4, $Th(S) \circ x = x$ što konačno daje $x \subseteq y$.

($\Rightarrow$) Ako je $x \subseteq y$ onda, prema već dokazanom P1, postoji t iz $P'(S)$ takav da $t \circ x \subseteq x$; za taj t važi i $t \circ x \subseteq y$. Kraj dokaza.

Prethodnom teoremom dokazana su neka, za dalja istraživanja vrlo značajna svojstva strukture $\mathcal{K}^+(S)$. Sledećom dokazujemo da ta svojstva ima i restrikcija strukture $\mathcal{K}^+(S)$ na domen $H'(S)$ iz koga isključujemo $\emptyset$ i skup svih formula jezika računa S.

0.12 Teorema

Neka je S proizvoljna ekspanzija računa R^+ i $\mathcal{K}^+(S)'$ restrikcija strukture $\mathcal{K}^+(S)$ na domen $H'(S) \setminus \{\emptyset, ForL(S)\}$, tada $\mathcal{K}^+(S)'$ zadovoljava P1,P2,P3′,P4 i P′.

Dokaz: Kako je $\mathcal{K}^+(S)'$ podstruktura strukture $\mathcal{K}^+(S)$ to P2 i P3′, jer su univerzalne formule, važe, kao i implikacija s desna u levo u P′ koja je ekvivalentna univerzalnoj formuli.

Dokazujemo P1, P4 i implikaciju s leva u desno u P′.

P1 se svodi na $\exists t(t \in P'(S)$ i $t \circ x \subseteq x)$ i važi u $\mathcal{K}^+(S)$. Dovoljno je dokazati da je $t \neq \emptyset$, $ForL(S)$ ako je x takav. t je svakako neprazan jer $t \in P'(S) \Rightarrow Th(S) \subseteq t$. Ako bi bilo $t = ForL(S)$, onda zbog $x \neq \emptyset$, prema teoremi 0.8.7, dobijamo $ForL(S) \circ x = ForL(S)$ odnosno $x = ForL(S)$, što je suprotno pretpostavci.

P4 se svodi na $x \circ y \subseteq u$ i $u \circ z \subseteq t \Rightarrow \exists v(x \circ z \subseteq v$ i $v \circ y \subseteq t)$ i važi u $\mathcal{K}^+(S)$. Dokazujemo da v nije ni prazan ni $ForL(S)$ ako x,y,z i t nisu takvi. Prema teoremi 0.8.8 (zbog $x,z \neq \emptyset$) imamo da je $x \circ z \neq \emptyset$ pa je i $v \neq \emptyset$. Kako je $y \neq \emptyset$, v nije ni $ForL(S)$ jer bi tada $v \circ y$, pa i t koji je njegov nadskup, bio $ForL(S)$ (teorema 0.8.7). Dakle P4 važi u $\mathcal{K}^+(S)'$.

Implikacija s leva u desno u P′ se svodi na $x \subseteq y \Rightarrow \exists t(t \in P'(S)$ i $t \circ x \subseteq y)$ i važi u $\mathcal{K}^+(S)$. $t \neq \emptyset$ jer zbog $t \in P'(S)$ sadrži $Th(S)$. Takodje, $t \neq ForL(S)$ jer bi, u suprotnom, zbog teoreme 0.8.7 i $x \neq \emptyset$ bilo $t \circ x = ForL(S) \circ x = ForL(S)$, te, kako je $t \circ x \subseteq y$, dobili bi da je $y = ForL(S)$. Dakle, t nije ni $\emptyset$ ni $ForL(S)$ pa i P′ važi u $\mathcal{K}^+(S)'$.

<u>0.13 Definicija</u>

R je ekspanzija računa R^+ u jeziku L aksiomama

R12 $(A \to \bar{B}) \to (B \to \bar{A})$

R13 $\bar{\bar{A}} \to A$

<u>0.13.1 Napomena</u>

U svakom računu koji je na jeziku L i sadrži kao teoreme sheme R1,R2 i R3 i zatvoren je za MP (takav je svakako R, ali i mnogi slabiji računi), shema-aksioma R12 je ekvivalentna sa

R12′ $A \to \bar{\bar{A}}$

R12′′ $(A \to B) \to (\bar{B} \to \bar{A})$

Račun R se medju logičarima koji se bave relevantnim logikama smatra (v.[2]), u izvesnom smislu, najvećim relevantnim računom. Naime R je gradjen tako da ima svojstvo "zajedničke promenljive" (videti 0.4), od teorema na jeziku $L_{\to}$ samo one koje su posledice R1-R4 i MP a sve klasične tautologije u kojima učestvuju i ostali veznici, ako čuvaju prethodna dva svojstva, prihvaćene su kao aksiome.

Odmah primećujemo da R ima (R12,R13) skoro klasičnu negaciju. Tako je, na primer, $\vdash_R A \vee \bar{A}$. Može se reći da strogost kriterijuma koji su primenjivani pri izboru implikacijskih aksioma nije primenjivana i na ostale aksiome. Zanimljivo je, stoga, proučavati račune koji imaju negaciju slabiju nego R (npr. intuicionističku i slično). Dobar deo ove rasprave (poglavlje 2) posvećen je semantici takvih računa .

Druga grupa pitanja je povezana sa modalnošću u relevantnim logikama. Modalni iskazni računi sa relevantnim logikama kao osnovnim su skoro neistraživani u literaturi (osim R$\Box$,v.[35]). Njima je posvećeno poglavlje 3.

Treća grupa pitanja je povezana sa distributivnošću. Većina do sada istraživanih računa sa relevantnom implikacijom je bila distributivna. U novije vreme se pak javljaju značajni iskazni računi (kvantna logika npr) u kojima distributivnost ne važi. Postoje istraživanja (v.[24]) koja ukazuju na to da bi neki relevantni računi koji nisu distributivni mogli biti podloga za zasnivanje kvantnih logika. Semantici relevantnih iskaznih računa u kojima ne važi distributivnost posvećujemo poglavlje 4.

Na kraju ovog poglavlja definišemo još jedan sintaktički pojam, koji koristimo u sledećim poglavljima.

0.14 Definicija

Iskazni račun S na jeziku Λ koji sadrži bar $\vee$ ima <u>disjunktivno svojstvo</u> akko

$$\vdash_S A\vee B \Rightarrow \vdash_S A \text{ \underline{ili} } \vdash_S B$$

važi za sve $A,B\in For\Lambda$.

Napominjemo da u smislu definicije 0.6 S ima disjunktivno svojstvo akko je skup Th(S) prost.

U dokazima posedovanja disjunktivnog svojstva, predikat $|_S$, koji uvodimo sledećom definicijom igra važnu ulogu.

0.15 Definicija

Neka je S neki iskazni račun u jeziku $\Lambda\subseteq L_\square$ i $A\in For\Lambda$. Predikat $|_S A$ se definiše rekurzijom po broju veznika u A.

(p_i)	$A = p_i$	$|_S p_i$	akko	$\vdash_S p_i$
$(\wedge)$	$A = B\wedge C$	$|_S B\wedge C$	akko	$|_S B$ <u>i</u> $|_S C$
$(\vee)$	$A = B\vee C$	$|_S B\vee C$	akko	$\Vdash_S B$ <u>ili</u> $\Vdash_S C$
$(\rightarrow)$	$A = B\rightarrow C$	$|_S B\rightarrow C$	akko	$(\Vdash_S B \Rightarrow |_S C)$
$(\bar{\ })$	$A = \bar{B}$	$|_S \bar{B}$	akko	<u>ne</u> $\Vdash_S B$
$(\square)$	$A = \square B$	$|_S \square B$	akko	$\Vdash_S B$

gde je $\Vdash_S A \overset{def}{\Longleftrightarrow} \vdash_S A$ <u>i</u> $|_S A$.

0.16 Teorema

Neka je S iskazni račun u jeziku $\Lambda\subseteq L_\square$.

Ako $\forall A(\vdash_S A \Rightarrow |_S A)$ onda S ima disjunktivno svojstvo.

Dokaz:

$\vdash_S A\vee B \Rightarrow |_S A\vee B \Rightarrow \Vdash_S A$ <u>ili</u> $\Vdash_S B \Rightarrow \vdash_S A$ <u>ili</u> $\vdash_S B$.

Predikat $|_S$ (u literaturi na engleskom jeziku nazvan slash) je razvijen radi dokazivanja disjunktivnog svojstva za intuicionistički račun H i njemu bliskih računa. Može se, medjutim, koristiti i u relevantnim logikama. Lako je proveriti da je, da bi neki iskazni račun S imao disjunktivno svojstvo, dovoljno da njegove aksiome imaju svojstvo $|_S$ i da su pravila izvodjenja računa S saglasna sa predikatom $|_S$. Tada sve teoreme računa S imaju svojstvo $|_S$ pa se može primeniti teorema 0.16.

0.17 Teorema

Formule R1 - R12 imaju svojstvo $|_S$ i pravila AD i MP čuvaju ovo svojstvo za svaki iskazni račun S.

Dokaz: Neposrednom proverom.

1. SEMANTIKA ZA R^+

S.B. Kripke je u radu [23] po prvi put predložio odredjenu vrstu modela za neke klase modalnih logika (kasnije nazvanih normalnim) i dokazao potpunost nekih od njih u odnosu na predloženu semantiku (kasnije nazvanu Kripkeovom). Ovaj Kripkeov rad je doneo korenito nov pristup semantici iskaznih računa i otvorio novu oblast matematičke logike. Novina se, približno, sastojala u sledećem:

Sve do tada poznate semantike su bile algebarskog tipa; odnosno, pri izračunavanju vrednosti formula nad nekim iskaznim jezikom se uspostavljao homomorfizam izmedju slobodne algebre formula i neke algebre istog jezika. Formula važi u toj algebri, pri tom homomorfizmu, ako njena slika (tj. vrednost) pripada nekom odredjenom skupu "istaknutih" elemenata (često je to singlton $\{1\}$ kada je u pitanju mreža). Najpoznatiji, a svakako i najvažniji, rezultati iz oblasti semantika algebarskog tipa se odnose na vezu klasičnog iskaznog računa i Bulovih algebri. Glavni klasični rezultati ove oblasti se mogu naći u [33]; nešto noviji su obradjeni u [32]. Algebarske semantike imaju prilično ograničene mogućnosti i to uglavnom iz sledeća dva razloga. Prvo, veoma slabo su razvijene tehnike dokazivanja potpunosti u slučajevima kada skup istaknutih elemenata nije singlton. Drugo, u slučaju logika sa manje uobičajenim shema-aksiomama (a takve su mnoge modalne i relevantne logike) poznavanje odgovarajućih algebarskih struktura je slabo ili skoro nikakvo srazmerno njihovoj udaljenosti od Bulovih algebri.

Kripke je problemu semantizovanja formula (tj. davanju vrednosti formulama) prišao bitno drukčije. U slučaju modalnih logika, njegova osnovna zamisao je: Neka je X neki skup (skup "mogućih svetova" ili "stanja stvari"); u svetu $x \in X$ važi formula A (oznaka $x \models A$) zavisno od važenja njenih podformula u ostalim svetovima iz X koji su medjusobno povezani nekom binarnom relacijom $R \subseteq X^2$. Preciznije,

$x \models B \wedge C$ akko $x \models B$ i $x \models C$

$x \models B \vee C$ akko $x \models B$ ili $x \models C$

$x \models B \rightarrow C$ akko $(x \models B \Rightarrow x \models C)$

$x \models \Box B$ akko $(\forall y \in X)(xRy \Rightarrow y \models B)$

Baza ove rekurzije se na elementarnim formulama (promenljivim) uvodi stipulacijom, preko jednog preslikavanja koje se naziva valuacija.

Primećujemo da klasični logički veznici pri vrednovanju ne referiraju na ostale svetove, dok formula $\Box B$ (nužno je da B) važi u svetu x akko B važi u svim svetovima iz X koji su iz x dostiživi relacijom R.

Pokazalo se da se uvodjenjem različitih osobina relacije R mogu opisati različite modalne logike. Ubrzo je dokazano da se ovakav tip semantike može koristiti za karakterizaciju nemodalnih i neklasičnih logika ako se vrednovanje klasičnih veznika dovede u vezu sa relacijom R.

Tako, u slučaju intuicionističkog iskaznog računa H (v.[3]) definicije za $\wedge$ i $\vee$ su iste kao i prethodne a za $^{-}$ i $\rightarrow$ glase:

$x \models \overline{B}$ akko $(\forall y \in X)(xRy \Rightarrow$ ne $y \models B)$

$x \models B \rightarrow C$ akko $(\forall y \in X)(xRy$ i $y \models B \Rightarrow y \models C)$

gde se za R uzima refleksivna i tranzitivna relacija.

Ovakvo bogatstvo mogućnosti koje nudi Kripkeova semantika je, prirodno, podstaklo mnoge pokušaje da se semantika za R (ili neke njemu bliske račune) pronadje u tim okvirima. Jasno je da je u tu svrhu potrebna značajna izmena ideje o načinu povezivanja mogućih svetova u modelu jer se, inače, dokazuje da definisanje $\rightarrow$ preko neke binarne relacije uvek propušta i neke nerelevantne formule. Stoga se veći broj istraživača usmerio na pokušaje kombinovanja Kripkeovih modela sa drugim matematičkim strukturama. Najznačajniji (ali, na žalost, neuspeo) pokušaj te vrste je Urqhuartov [39] . Urqhuart je u Kripkeov model uveo strukturu mreže i na njoj definisao binarnu relaciju R te je izmenivši neke definicije uspeo, na veoma elegantan i intuitivno prihvat-

ljiv način, da dobije semantiku za implikacijski fragment računa R ($R_{\rightarrow}$ čije su aksiome R1 - R4 i pravilo izvodjenja MP) ali ne i za ceo R. Nešto kasnije (v. [8]), je pronadjen iskazni račun koji je potpun u odnosu na semantiku koju je predložio Urqhuart. Pokazalo se da je taj račun pravi nadračun od R (a i od R^+ u pozitivnom fragmentu).
Tek Routley & Meyer [34] i Maksimova [26] uspevaju, početkom sedamdesetih godina, da dobiju semantiku za R (odnosno, u slučaju Maksimove, za jedan podračun od R koji se označava sa E, ali je uvidom u rad lako ustanoviti da se radi o istim idejama kao kod Routleyja i Meyera, te se i njena semantika može, po potrebi adaptirati tako da se dobije semantika za ceo R). Izmena koju su ovi autori uneli u Kripkeovu semantiku je suštinska - binarna relacija dostiživosti je zamenjena ternarnom relacijom a vrednovanje formula oblika A B se definiše sa:

$$x \models A \rightarrow B \quad \underline{\text{akko}} \quad \forall y \forall z (Rxyz \ \underline{\text{i}} \ y \models A \Rightarrow z \models B)$$

Metodološki motivi su sasvim jasni - ternarna relacija daje više manipulativnih mogućnosti od binarne. Što se tiče filozofsko logičkog aspekta, u literaturi, koja je dosta oskudna jer se oblast upravo razvija, za sada ne postoji jedinstveno mišljenje o tome kakvo bi intuitivno značenje trebalo pridati ternarnoj relaciji R. Izgleda da se, za sada dok naša znanja o primenama relevantnih logika ne budu bogatija, moramo zadovoljiti objašnjenjem ovakve vrste: Rxyz znači - x i y su saglasni (u stranoj literaturi se upotrebljava reč kompatibilni) u odnosu na z. Naravno, ne pretendujemo da prethodni komentar ima ma kakvu matematičku vrednost ali je ponekad,pri razmišljanjima koja prethode formalizaciji, korisno imati neku intuitivnu predstavu analognu onima koje nam daju Venovi dijagrami u algebri skupova ili grafici funkcija u analizi.

Kako smo već istakli semantika razvijena u [34] pokriva ceo R. Mi se u ovoj raspravi bavimo računima koji su ili podračuni ili ekspanzije računa R ali je svima njima zajedničko jezgro RA^+ ili R^+. U ovom poglavlju zasnivamo semantiku za R^+ koju, u poglavljima 2 i 3 koristimo pri zasnivanju novih semantika. Semantiku za RA^+ razvijamo u poglavlju 4.
Iako su rezultati ovog poglavlja poznati u literaturi naglašavamo da je metodologija koju koristimo hibrid metodologija Maksimove i Routley & Meyera i može biti od interesa sama po sebi.

1.1 Definicija

$\mathfrak{X} = \langle X, R, P\rangle$ je <u>R^+ okvir</u> akko su $X \neq \emptyset$, $R \subseteq X^3$ i $P \subseteq X$ takvi da uz definicije

$$x \leq y \overset{def}{\iff} \exists t(Pt \text{ i } Rtxy)$$
$$R^2xyzt \overset{def}{\iff} \exists u(Rxyu \text{ i } Ruzt)$$

u $\mathfrak{X}$ važi

P0 $x \leq y$ i $y \leq x \Rightarrow x = y$

P1 $\exists t(Pt \text{ i } Rtxx)$

P2 $Rxxx$

P3 $x \leq y$ i $Ryzt \Rightarrow Rxzt$

P4 $R^2xyzt \Rightarrow R^2xzyt$

za sve $x,y,z,t \in X$.

$$\mathrm{dom}\,\mathfrak{X} \overset{def}{=} X$$

1.1.1 Napomena

Uslov P0 obezbedjujeda relacija $\leq$ bude relacija poretka. On, za dalji rad, nije neophodan i može se, po potrebi, eliminisati čime se klasa R^+okvira proširuje.

1.2 Teorema

U svakom R^+okviru važi

1.2.1 $x \leq x$

1.2.2 $Rxyz \Rightarrow Ryxz$

1.2.3 $x \leq y$ i $y \leq z \Rightarrow x \leq z$

1.2.4 $R^2x_1x_2x_3y \Rightarrow R^2x_ix_jx_ky \qquad (i,j,k) \in S_3$

1.2.5 $Rxyz$ i $z \leq t \Rightarrow Rxyt$

Dokaz:

1.2.1 $x \leq x \overset{def}{\iff} \exists t(Pt \text{ i } Rtxx)$ je P1.

1.2.2
$$\begin{aligned}
Rxyz &\Rightarrow \exists t(Pt \text{ i } Rtxx) \text{ i } Rxyz && \text{(P1)}\\
&\Rightarrow \exists t(Pt \text{ i } R^2txyz) && \text{(Definicija } R^2)\\
&\Rightarrow \exists t(Pt \text{ i } R^2tyxz) && \text{(P4)}\\
&\Rightarrow \exists t(Pt \text{ i } \exists u(Rtyu \text{ i } Ruxz)) && \text{(Definicija } R^2)\\
&\Rightarrow \exists u(\exists t(Pt \text{ i } Rtyu) \text{ i } Ruxz) &&\\
&\Rightarrow \exists u(y \leq u \text{ i } Ruxz) && \text{(Definicija } \leq)\\
&\Rightarrow Ryxz && \text{(P3)}
\end{aligned}$$

1.2.3
$$\begin{aligned}
x \leq y \text{ i } y \leq z &\Rightarrow \exists t(Pt \text{ i } Rtxy) \text{ i } \exists s(Ps \text{ i } Rsyz)\\
&\Rightarrow \exists t \exists s(Pt \text{ i } Ps \text{ i } Rtxy \text{ i } Rysz) \qquad \text{(Prema 1.2.2)}\\
&\Rightarrow \exists t \exists s(Pt \text{ i } Ps \text{ i } R^2txsz)\\
&\Rightarrow \exists t \exists s(Pt \text{ i } Ps \text{ i } R^2tsxz)\\
&\Rightarrow \exists t \exists s(Pt \text{ i } Ps \text{ i } \exists u(Rtsu \text{ i } Ruxz))
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \exists s \exists u(Ps\ \underline{i}\ \exists t(Pt\ \underline{i}\ Rtsu)\ \underline{i}\ Ruxz)$
$\Rightarrow \exists s \exists u(Ps\ \underline{i}\ \ s \leq u\ \ \underline{i}\ Ruxz)$
$\Rightarrow \exists s(Ps\ \underline{i}\ \exists u(s \leq u\ \ \underline{i}\ Ruxz))$
$\Rightarrow \exists s(Ps\ \underline{i}\ Rsxz)$
$\Rightarrow x \leq z$

1.2.4 Neposredna primena 1.2.2 i P4

1.2.5 $Rxyz\ \underline{i}\ \ z \leq t \Rightarrow Rxyz\ \underline{i}\ \exists s(Ps\ \underline{i}\ Rszt)$
$\Rightarrow \exists s(Rxyz\ \underline{i}\ Rzst\ \underline{i}\ Ps)$
$\Rightarrow \exists s(R^2xyst\ \underline{i}\ Ps)$
$\Rightarrow \exists s(R^2sxyt\ \underline{i}\ Ps)$ (Prema 1.2.4)
$\Rightarrow \exists s(Ps\ \underline{i}\ \exists u(Rsxu\ \underline{i}\ Ruyt))$
$\Rightarrow \exists u(\exists s(Ps\ \underline{i}\ Rsxu)\ \underline{i}\ Ruyt)$
$\Rightarrow \exists u(x \leq u\ \ \underline{i}\ Ruyt)$
$\Rightarrow Rxyt$

<u>1.3 Definicija</u>

Neka je $\mathfrak{X} = \langle X,R,P\rangle$ R^+okvir.

1.3.1 Preslikavanje $v:X \to P(V)$ je <u>valuacija</u> na R^+okviru akko u $\mathfrak{X}$ važi

(p) ... $\forall x \forall y(x \leq y \Rightarrow v(x) \subseteq v(y))$ (<u>postojanost</u>)

1.3.2 $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{X}, v\rangle$ je <u>R^+model</u> akko je v valuacija na R^+okviru $\mathfrak{X}$.

$Fr(\mathfrak{M}) \overset{def}{=} \mathfrak{X}$, $dom\,\mathfrak{M} \overset{def}{=} dom\,\mathfrak{X}$

1.3.3 $\mathbb{K}(R^+) \overset{def}{=} \{\mathfrak{X} \mid \mathfrak{X}$ je R^+okvir$\}$, $\mathbb{M}(R^+) \overset{def}{=} \{\mathfrak{M} \mid \mathfrak{M}$ je R^+model$\}$.

1.3.4 **Neka je $\mathfrak{M}$ R^+model, $x \in dom\mathfrak{M}$** i $A \in ForL^+$. Predikat <u>Formula A važi u tački x R^+modela $\mathfrak{M}$</u> (u oznaci $\langle \mathfrak{M},x\rangle \models A$ ili, kraće, ako je kontekst jasan, $x \models A$) se definiše rekurzijom po broju veznika formule A. Aksiome ove rekurzije su

(p_i)	$A = p_i$,	$x \models p_i$	akko	$p_i \in v(x)$
$(\wedge)$	$A = B \wedge C$,	$x \models B \wedge C$	akko	$x \models B$ $\underline{i}$ $x \models C$
$(\vee)$	$A = B \vee C$,	$x \models B \vee C$	akko	$x \models B$ <u>ili</u> $x \models C$
$(\to)$	$A = B \to C$,	$x \models B \to C$	akko	$\forall y \forall z(Rxyz\ \underline{i}\ y \models B \Rightarrow z \models C)$

<u>A važi u R^+modelu $\mathfrak{M}$</u> $(\mathfrak{M} \models A)$ akko $(\forall x \in dom\,\mathfrak{M})(Px \Rightarrow x \models A)$

<u>A važi u R^+okviru $\mathfrak{X}$</u> $(\mathfrak{X} \models A)$ akko $\forall \mathfrak{M}(\mathfrak{M} \in \mathbb{M}(R^+) \wedge Fr(\mathfrak{M}) = \mathfrak{X} \Rightarrow \mathfrak{M} \models A)$

<u>A je R^+valjana</u> $(\models_{R^+} A)$ akko $\forall \mathfrak{X}(\mathfrak{X} \in \mathbb{K}(R^+) \Rightarrow \mathfrak{X} \models A)$

<u>1.3.5 Napomena</u>

Svojstvo (p) iz 1.3.1 se u slučaju Kripkeovih modela za H naziva postojanost; isti naziv koristimo u ovoj raspravi.

U ovom poglavlju dokazujemo da je R^+ potpun u odnosu na semantiku uvedenu definicijom 1.3, odnosno da važi $\models_{R^+} A \Leftrightarrow \vdash_{R^+} A$.

Prvo dokazujemo "$\Leftarrow$ deo" stava o potpunosti - tzv. teoremu o saglasnosti. Prethodno dokazujemo neka uporišna tvrdjenja.

1.4 Lema o postojanosti

U svakom R^+modelu $\mathfrak{M}$ za svaku formulu $A \in ForL^+$ i sve $x, y \in dom\,\mathfrak{M}$

$$(p) \ \ldots \quad x \leq y \ \underline{i} \ x \models A \Rightarrow y \models A$$

Dokaz:

Indukcijom po broju $s(A)$ veznika formule A.

Ako je $s(A)=0$ onda je $A=p_i$ za neki $i \in \omega$, pa

(p_i) $\quad A=p_i \quad x \leq y \ \underline{i} \ x \models p_i \Rightarrow x \leq y \ \underline{i} \ p_i \in v(x)$ (Def. 1.3.4)
$\Rightarrow v(x) \subseteq v(y) \ \underline{i} \ p_i \in v(x)$ (Def. 1.3.1)
$\Rightarrow p_i \in v(y)$
$\Rightarrow y \models p_i$ (Def. 1.3.4)

Neka je (p) $\stackrel{def}{=}$ Ind Hyp i neka važi za sve formule $F \in ForL^+$ takve da je $s(F) < s(A)$. Dokazujemo da (p) važi i za A. Nastupaju slučajevi:

$(\wedge)$ $\quad A=B \wedge C,\ x \leq y \ \underline{i} \ x \models B \wedge C \Rightarrow x \leq y \ \underline{i} \ (x \models B \ \underline{i} \ x \models C)$
$\Rightarrow (x \leq y \ \underline{i} \ x \models B) \ \underline{i} \ (x \leq y \ \underline{i} \ x \models C)$
$\Rightarrow y \models B \ \underline{i} \ y \models C$ (Po Ind Hyp)
$\Rightarrow y \models B \wedge C$

$(\vee)$ $\quad A=B \vee C,\ x \leq y \ \underline{i} \ x \models B \vee C \Rightarrow x \leq y \ \underline{i} \ (x \models B \ \underline{ili} \ x \models C)$
$\Rightarrow (x \leq y \ \underline{i} \ x \models B) \ \underline{ili} \ (x \leq y \ \underline{i} \ x \models C)$
$\Rightarrow y \models B \ \underline{ili} \ y \models C$ (Po Ind Hyp)
$\Rightarrow y \models B \vee C$

$(\rightarrow)$ $\quad A=B \rightarrow C,\ x \leq y$ i $x \models B \rightarrow C \Rightarrow x \leq y \ \underline{i} \ \forall z \forall t(Rxzt \ \underline{i} \ z \models B \Rightarrow t \models C)$
$\Rightarrow \forall z \forall t(Ryzt \ \underline{i} \ z \models B \Rightarrow t \models C)$

(Jer $x \leq y \ \underline{i} \ Ryzt \Rightarrow Rxzt$ (P3))

$\Rightarrow y \models B \rightarrow C$

1.5 Lema o važenju implikacije

U svakom R^+modelu za svaku formulu $A \rightarrow B \in ForL^+$ važi

$$\mathfrak{M} \models A \rightarrow B \Leftrightarrow \forall x(x \models A \Rightarrow x \models B)$$

Dokaz:

$(\Rightarrow)$

$\mathfrak{M} \models A \rightarrow B \Rightarrow \forall y(Py \Rightarrow y \models A \rightarrow B)$ (Def 1.3.4)
$\Rightarrow \forall y(Py \Rightarrow \forall x \forall z(Ryxz \ \underline{i} \ x \models A \Rightarrow z \models B))$
$\Rightarrow \forall y \forall x(Py \ \underline{i} \ Ryxx \ \underline{i} \ x \models A \Rightarrow x \models B)$ (Za z=x)
$\Rightarrow \forall x(\exists y(Py \ \underline{i} \ Ryxx) \ \underline{i} \ x \models A \Rightarrow x \models B)$
$\Rightarrow \forall x(x \models A \Rightarrow x \models B)$

(Jer P1 $\exists y(Py \ \underline{i} \ Ryxx)$ važi za sve x)

($\Leftarrow$)

$\forall x(x\models A \Rightarrow x\models B) \Rightarrow \forall y\forall x\forall z(Py \text{ \underline{i} } Ryxz \text{ \underline{i} } x\models A \Rightarrow z\models B)$

(Jer Py i Ryxz, po definiciji $\leqslant$, povlači $x\leqslant z$ što sa $x\models A$, po lemi 1.4 o postojanosti, daje $z\models A$; no, $z\models A \Rightarrow z\models B$ (za sve z) pa važi i $z\models B$ QED)

$$\Rightarrow \forall y(Py \Rightarrow \forall x\forall z(Ryxz \text{ \underline{i} } x\models A \Rightarrow z\models B))$$
$$\Rightarrow \forall y(Py \Rightarrow y\models A\to B)$$
$$\Rightarrow \mathfrak{M}\models A\to B$$

1.5.1 Napomena

Očigledno, važenje leme o važenju implikacije, zavisi samo od svojstava R^+okvira i od leme o postojanosti. To znači da u svakoj ekspanziji R^+okvira i svakoj ekspanziji jezika L^+ (sa $^-$ ili $\Box$)lema o važenju implikacije zavisi samo od leme o postojanosti. Prema tome, ukoliko u jezik uvedemo nove veznike i ma kako da ih u modelima interpretiramo, za važenje leme 1.5 dovoljno je dokazati da važi lema 1.4. Ovo ćemo ubuduće koristiti bez posebnih napomena.

Lema o važenju implikacije bitno pojednostavljuje potvrdjivanje (ili opovrgavanje) formula oblika implikacije u R^+modelima. Njen značaj je još više istaknut činjenicom da su sve shema-aksiome računa R^+ oblika implikacije.

1.6 Teorema o saglasnosti računa R^+ sa semantikom

$$\vdash_{R^+} A \Rightarrow \models_{R^+} A$$

Dokaz:

Dokazujemo da su sve shema-aksiome računa R^+, R^+ valjane (tj. da važe u svim R^+ modelima) kao i da pravila izvodjenja čuvaju valjanost (šta više, dokazujemo da u svakom R^+ modelu važi $\mathfrak{M}\models A$ i $\mathfrak{M}\models B \Rightarrow \mathfrak{M}\models A\wedge B$, $\mathfrak{M}\models A$ i $\mathfrak{M}\models A\to B \Rightarrow \mathfrak{M}\models B$) što je dovoljno da sve teoreme računa R^+ budu valjane. Nadalje, kako su sve shema-aksiome ovog računa oblika $A\to B$ to je, zbog leme o važenju implikacije, dovoljno dokazati da ako $A\to B\in Ax(R^+)$ onda $x\models A \Rightarrow x\models B$ za proizvoljno x iz domena proizvoljnog R^+ modela.

Neka je $\mathfrak{M}$ neki R^+ model i $x,y,z,t,u,v\in \mathrm{dom}\,\mathfrak{M}$. U dokazima koji slede izostavljamo univerzalne kvantifikatore smatrajući da su sve individualne promenljive kvantifikovane univerzalno po celoj formuli; umesto veznika i pišemo , ; u obrazloženjima dokaza navodimo samo nelogička svojstva R^+modela odnosno okvira.

R1 $A \to A$

$x \models A \Rightarrow x \models A$ je valjana formula.

R2 $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$

$x \models A \to B \Rightarrow x \models (B \to C) \to (A \to C)$

akko $x \models A \to B \Rightarrow (Rxyz, y \models B \to C \Rightarrow z \models A \to C)$

akko $x \models A \to B, Rxyz, y \models B \to C \Rightarrow (Rzuv, u \models A \Rightarrow v \models C)$

akko $x \models A \to B, y \models B \to C, u \models A, Rxyz, Rzuv \Rightarrow v \models C$

akko $x \models A \to B, y \models B \to C, u \models A, R^2xyuv \Rightarrow v \models C$

akko $x \models A \to B, y \models B \to C, u \models A, R^2xuyv \Rightarrow v \models C$ (P4)

akko $x \models A \to B, y \models B \to C, u \models A, Rxut, Rtyv \Rightarrow v \models C$

akko $x \models A \to B, y \models B \to C, u \models A, Rxut, Rytv \Rightarrow v \models C$ (1.2.2)

Poslednja formula je tačna jer, prema definiciji $\models$ za $\to$ (1.3.4), $Rxut, x \models A \to B, u \models A$ povlači $t \models B$ što sa $Rytv$ i $y \models B \to C$ daje $v \models C$.

R3 $A \to ((A \to B) \to B)$

$x \models A \Rightarrow x \models (A \to B) \to B$

akko $x \models A \Rightarrow (Rxyz, y \models A \to B \Rightarrow z \models B)$

akko $x \models A, Rxyz, y \models A \to B \Rightarrow z \models B$

akko $x \models A, Ryxz, y \models A \to B \Rightarrow z \models B$ (1.2.2)

Poslednja formula je tačna kao neposredna posledica definicije $\models$.

R4 $(A \to (A \to B)) \to (A \to B)$

$x \models A \to (A \to B) \Rightarrow x \models A \to B$

akko $x \models A \to (A \to B) \Rightarrow (Rxyz, y \models A \Rightarrow z \models B)$

akko $x \models A \to (A \to B), Ryyy, Rxyz, y \models A \Rightarrow z \models B$ (P2)

akko $x \models A \to (A \to B), Ryyy, Ryxz, y \models A \Rightarrow z \models B$ (1.2.2)

$\Leftarrow$ $x \models A \to (A \to B), R^2yyxz, y \models A \Rightarrow z \models B$

akko $x \models A \to (A \to B), R^2yxyz, y \models A \Rightarrow z \models B$ (P4)

akko $x \models A \to (A \to B), Ryxt, Rtyz, y \models A \Rightarrow z \models B$

akko $x \models A \to (A \to B), Rxyt, Rtyz, y \models A \Rightarrow z \models B$ (1.2.2)

Poslednja formula je tačna jer $Rxyt, y \models A, x \models A \to (A \to B)$ povlači $t \models A \to B$ što sa $Rtyz$ i $y \models A$ daje $z \models B$.

R5 $A \wedge B \to A$

$x \models A \wedge B \Rightarrow x \models A$

akko $x \models A, x \models B \Rightarrow x \models A$; poslednja formula je valjana.

R6 $A \wedge B \to B$

$x \models A \wedge B \Rightarrow x \models B$

akko $x \models A, x \models B \Rightarrow x \models B$; poslednja formula je valjana.

R7 $(A \to B) \wedge (A \to C) \to (A \to B \wedge C)$

$x \models (A \to B) \wedge (A \to C) \Rightarrow x \models A \to B \wedge C$

akko $x \models A \to B, x \models A \to C \Rightarrow (Rxyz, y \models A \Rightarrow z \models B \wedge C)$

akko $x \models A \to B, x \models A \to C, Rxyz, y \models A \Rightarrow z \models B, z \models C$

Poslednja formula je tačna jer $Rxyz, y \models A$ i $x \models A \to B$ (odnosno $x \models A \to C$) povlači $z \models B$ (odnosno $z \models C$)

R8 $A \to A \vee B$

$x \models A \Rightarrow x \models A \vee B$

akko $x \models A \Rightarrow x \models A$ ili $x \models B$; poslednja formula je valjana.

R9 $B \to A \vee B$

$x \models B \Rightarrow x \models A \vee B$

akko $x \models B \Rightarrow x \models A$ ili $x \models B$; poslednja formula je valjana.

R10 $(A \to C) \wedge (B \to C) \to (A \vee B \to C)$

$x \models (A \to C) \wedge (B \to C) \Rightarrow x \models A \vee B \to C$

akko $x \models A \to C, x \models B \to C \Rightarrow (Rxyz, y \models A \vee B \Rightarrow z \models C)$

akko $x \models A \to C, x \models B \to C, Rxyz, (y \models A$ ili $y \models B) \Rightarrow z \models C$

Poslednja formula je tačna jer $Rxyz, x \models A \to C, x \models B \to C$ daje, zbog $y \models A$ ili $y \models B$, $z \models C$.

R11 $A \wedge (B \vee C) \to (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

$x \models A \wedge (B \vee C) \Rightarrow x \models (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

akko $x \models A, (x \models B$ ili $x \models C) \Rightarrow (x \models A, x \models B)$ ili $(x \models A, x \models C)$

Poslednja formula je valjana.

MP $\dfrac{A,\ A \to B}{B}$

$$\mathfrak{m} \models A, \mathfrak{m} \models A \to B \Rightarrow \forall x(Px \Rightarrow x \models A),\ \forall x(x \models A \Rightarrow x \models B) \qquad \text{(Lema 1.5)}$$
$$\Rightarrow \forall x(Px \Rightarrow x \models B)$$
$$\Rightarrow \mathfrak{m} \models B$$

AD $\dfrac{A\ ,\ B}{A \wedge B}$

$$\mathfrak{m} \models A, \mathfrak{m} \models B \Rightarrow \forall x(Px \Rightarrow x \models A),\ \forall x(Px \Rightarrow x \models B)$$
$$\Rightarrow \forall x(Px \Rightarrow x \models A, x \models B)$$
$$\Rightarrow \forall x(Px \Rightarrow x \models A \wedge B)$$
$$\Rightarrow \mathfrak{m} \models A \wedge B$$

1.6.1 Napomena

Primetimo da je P2 korišćeno samo pri potvrdjivanju shema-aksiome R4 (a u dokazu teoreme 1.2.2 koju smo često upotrebljavali se ne koristi) tako da se isti pristup (ako se to želi) može koristiti i za račune bez sheme R4.

Složeniji je, mada ne ovako zamoran i mehanički, dokaz obrata teoreme 1.6, odnosno dokaz teoreme o potpunosti računa R^+ u odnosu na R^+semantiku. Ovaj dokaz sprovodimo za kontrapoziciju iskaza teoreme (tj. $\not\vdash_{R^+} A \Rightarrow \not\models_{R^+} A$). U tu svrhu definišemo modele posebne vrste - kanonske modele. Zamisao koja leži u osnovi ove konstrukcije može se opisati na sledeći način.

Kanonski modeli su, u stvari, podvrsta modela za koje je S. Prešić predložio naziv deduktivni modeli. Slobodnije rečeno, ovi modeli su rezultat pokušaja da se $\models$ i $\vdash$ "ujednače". Naime, dokaz teoreme o potpunosti ma kog iskaznog računa koji ima Kripkeovske modele, je bitno olakšan ako posedujemo modele u kome važi $\Gamma \models A \Leftrightarrow \Gamma \vdash A$. Jasno je da ovakvi modeli moraju biti gradjeni od skupova formula. Ovim se važenje ($\models$) svodi na dedukovanje ($\vdash$) (otuda i naziv deduktivni modeli). Kako se u krajnjoj liniji uvek može raditi sa deduktivno zatvorenim skupovima formula to se $\Gamma \vdash A$ svodi na $A \in \Gamma$ te pomenuto svojstvo postaje

$$(k) \quad \ldots \quad \Gamma \models A \Leftrightarrow A \in \Gamma$$

i naziva se kanoničnost.

U slučaju računa R^+, preciziranje izložene zamisli bi, na heurističkom nivou, izgledalo otprilike ovako.
Ako je $\mathfrak{M}$ proizvoljan R^+model i $x \in \mathrm{dom}\,\mathfrak{M}$ definišimo

$$\|x\|_{\mathfrak{M}} \overset{def}{=} \{ A \in \mathrm{For}L^+ \mid \langle \mathfrak{M}, x\rangle \models A \}$$

Lako se proverava da je $\|x\|_{\mathfrak{M}}$ prost R^+deduktivno zatvoren skup formula. Prema tome, ako konstruišemo model sa svojstvom (k), onda njegov domen moraju činiti takvi (ili neki od takvih) skupovi formula. U tom smislu treba shvatiti sledeću definiciju koju formulišemo za sve ekspanzije računa R^+ (a ne samo za R^+) jer ćemo je kasnije ugradjivati u nove konstrukcije.

1.7 Definicija

Neka je S neka ekspanzija računa R^+ na jeziku $L(S) \supseteq L^+$

1.7.1 $\mathcal{K}^+(S) = \langle H'(S), R_k(S), P'(S)\rangle$ je S $^+$kanonski okvir
akko (i) $H'(S) = \{x \subseteq \mathrm{For}L(S) \mid x$ je prost S d.z. skup formula$\}$
(ii) $R_k(S)xyz \overset{def}{\Longleftrightarrow} x \circ_S y \subseteq z$, za sve $x,y,z \in H'(S)$
(iii) $P'(S) = \{x \subseteq \mathrm{For}L(S) \mid x$ je prosta S teorija$\}$

1.7.2 $\mathfrak{M}_k^+(S) = \langle \mathcal{K}^+(S), v_k\rangle$ je S $^+$kanonski model
akko (i) $\mathcal{K}^+(S)$ je S $^+$kanonski okvir, i
(ii) $v_k : H'(S) \to P(V)$ je kanonska valuacija okvira $\mathcal{K}^+(S)$ definisana sa $v_k(x) = x \cap V$, za sve $x \in H'(S)$.

1.7.3 $\mathcal{K}^+(S)'$ je striktan S $^+$kanonski okvir akko je restrikcija strukture $\mathcal{K}^+(S)$ na domen $H'(S) \setminus \{\emptyset, \mathrm{For}L(S)\}$.

1.7.4 $\mathfrak{M}_k^+(S)'$ je striktan S $^+$kanonski model akko je restrikcija strukture $\mathfrak{M}_k^+(S)$ na domen $H'(S) \setminus \{\emptyset, \mathrm{For}L(S)\}$.

1.7.5 Napomena

Elementi prethodne definicije ($H'(S)$, $P'(S)$ i $R_k(S)$) su već izloženi u definiciji 0.6 i teoremama 0.11 i 0.12 ali ih ponavljamo radi celovitosti. Nadalje, kao i u poglavlju 0, pišemo $\circ$ umesto $\circ_S$ kada god je kontekst jasan. Slično, umesto $H'(S)$, $P'(S)$ i $R_k(S)$ pišemo H', P' i R_k.

1.8 Teorema

Neka je S neka ekspanzija računa R^+ u jeziku $L(S) \supseteq L^+$.

1.8.1 S $^+$kanonski okvir i striktan S $^+$kanonski okvir su R^+ okviri.

1.8.2 S $^+$kanonski model i striktan S $^+$kanonski model su R^+ modeli.

Dokaz:

1.8.1 Na osnovu teorema 0.11 i 0.12 i S $^+$kanonski i striktan S $^+$kanonski okvir zadovoljavaju

P1 $\exists t(P't \ \underline{i}\ R_k txx)$

P2 $R_k xxx$

P3′ $x \subseteq y \ \underline{i}\ R_k yzt \Rightarrow R_k xzt$

P4 $R_k^2 xyzt \Rightarrow R_k^2 xzyt$

P′ $x \subseteq y \Leftrightarrow \exists t(P't \ \underline{i}\ R_k txy)$

P1, P2 i P4 su upravo te aksiome R^+okvira. Dovoljno je, stoga, dokazati da važe P0 i P3. P′, prevedeno na jezik relacije $\leqslant$ koja se definiše u svim R^+ okvirima sa $x \leqslant y \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists t(Pt \ \underline{i}\ Rtxy)$, znači $x \leqslant y \Leftrightarrow x \subseteq y$ te onda P3′postaje P3. No, kako se zbog P′ relacije $\subseteq$ i $\leqslant$ podudaraju to je relacija $\leqslant$ u kanonskim okvirima antisimetrična pa važi i P0.

1.8.2 Dovoljno je dokazati da je kanonska valuacija v_k takodje i valuacija. $x \leqslant y$ povlači, zbog P′, $x \subseteq y$ odakle proizlazi da je $x \cap V \subseteq y \cap V$, odnosno $v_k(x) \subseteq v_k(y)$. QED

1.9 Definicija

R^+ model $\mathfrak{M}$ je $^+$kanoničan akko za sve $x \in dom\mathfrak{M}$ i sve $A \in ForL^+$ u $\mathfrak{M}$ važi

$$(k) \ldots \quad x \models A \Leftrightarrow A \in x$$

1.10 Lema o $^+$kanoničnosti S $^+$kanonskih modela

Neka je S neka ekspanzija računa R^+ u jeziku $L(S) \supseteq L^+$.

1.10.1 S $^+$kanonski model $\mathfrak{M}_k^+(S)$ je $^+$kanoničan.

1.10.2 Striktan S $^+$kanonski model $\mathfrak{M}_k^+(S)'$ je $^+$kanoničan.

Dokaz:

1.10.1 Tvrdjenje dokazujemo indukcijom po broju veznika s(A) formule $A\in ForL^{+}$.

Ako je s(A)=0 onda je $A=p_i$ za neko $i\in\omega$pa

(p_i) $A=p_i$ $x\models p_i \Leftrightarrow p_i\in v_k(x)$

$\Leftrightarrow p_i\in x\cap V$

$\Leftrightarrow p_i\in x$

Neka je s(A)>0 i neka (k) (Ind Hyp) važi za sve formule F iz $ForL^{+}$ takve da je s(F)< s(A). Nastupaju slučajevi $A=B\wedge C$, $A=B\vee C$, $A=B\rightarrow C$.

$(\wedge)$ $A=B\wedge C$, $x\models B\wedge C \Leftrightarrow x\models B$ i $x\models C$

$\Leftrightarrow B\in x$ i $C\in x$ (Ind Hyp)

$\Leftrightarrow B\wedge C\in x$

Poslednja ekvivalencija važi jer $B,C\in x \Rightarrow B\wedge C\in x$ zbog zatvorenosti x za AD, dok $B\wedge C\in x \Rightarrow B,C\in x$ važi zbog $\vdash_S B\wedge C\rightarrow B,C$ i zbog zatvorenosti x za MP.

$(\vee)$ $A=B\vee C$, $x\models B\vee C \Leftrightarrow x\models B$ ili $x\models C$

$\Leftrightarrow B\in x$ ili $C\in x$ (Ind Hyp)

$\Leftrightarrow B\vee C\in x$

Poslednja ekvivalencija je tačna jer $B\in x$ ili $C\in x \Rightarrow B\vee C\in x$ zbog $\vdash_S B,C\rightarrow B\vee C$ i zbog zatvorenosti x za MP; $B\vee C\in x \Rightarrow B\in x$ ili $C\in x$ jer je x prost. Napominjemo da je ovo jedino mesto u dokazu u kome se javlja potreba da x bude prost. Stoga se S^{+}kanonski modeli i grade na prostim S d.z. zatvorenim skupovima. Ova okolnost je od velikog značaja jer, u daljem, implicira korišćenje Zornove leme.

$(\rightarrow)$ $A=B\rightarrow C$, $x\models B\rightarrow C \Leftrightarrow \forall y\forall z(R_kxyz$ i $y\models B \Rightarrow z\models C)$

$\Leftrightarrow \forall y\forall z(x\circ y\subseteq z$ i $B\in y \Rightarrow C\in z)$ (Ind Hyp)

$\Leftrightarrow B\rightarrow C\in x$

Dokazujemo poslednju ekvivalenciju.

$(\Leftarrow)$ Neka $B\rightarrow C\in x$, $B\in x$ i $x\circ y\subseteq z$. Zbog $\vdash_S (B\rightarrow C)\rightarrow(B\rightarrow C)$, zbog prethodne pretpostavke i definicije $\circ$ dobijamo $C\in x\circ y$ te zbog $x\circ y\subseteq z$ važi i $C\in z$ QED

$(\Rightarrow)$ Dokazujemo kontrapoziciju. Neka $B\rightarrow C\notin x$. Tada $C\notin x\circ[B]_S$. U suprotnom, ako $C\in x\circ[B]_S$ onda za neko $D\in x$ i $B_1\in[B]_S$ važi $\vdash_S D\rightarrow(B_1\rightarrow C)$ a kako $\vdash_S B\rightarrow B_1$ to važi i $\vdash_S D\rightarrow(B\rightarrow C)$; kako je x S d.z. i $D\in x$ to bi dobili da $B\rightarrow C\in x$; kontradikcija. Dakle $C\notin x\circ[B]_S$ pa, prema lemi 0.10.1, postoji $z\in H'$ takav da $C\notin z$ i

$x\circ[B]_S \subseteq z$,no tada,prema lemi 0.10.2,postoji $y\in H'$ takav da $B\in[B]_S\subseteq y$ i $x\circ y\subseteq z$. Dakle $B\to C\notin x \Rightarrow \exists y\exists z(x\circ y\subseteq z$ i $B\in y$ i $C\notin z)$
QED

1.10.2 Dokaz je isti kao i 1.10.1 s tim što, posebno, treba proveriti sve korake u kojima se javljaju egzistencijalne formule jer je striktan S $^+$kanonski model podmodel S $^+$kanonskog modela.

U prethodnom dokazu je to samo korak $(\to)$ odnosno formula

$$(0) \ldots \quad B\to C\notin x \Rightarrow \exists y\exists z(x\circ y\subseteq z \text{ i } B\in y \text{ i } C\notin z)$$

Već je utvrdjeno da (0) važi u modelu $\mathfrak{M}_k^+(S)$ tj. za sve $x\in H'$ dovoljno je dokazati da $x\neq\emptyset,\mathrm{ForL}(S) \Rightarrow y,z\neq\emptyset,\mathrm{ForL}(S)$ (misli se na one y i z čije postojanje utvrdjuje (0)). Neka je $x\neq\emptyset,\mathrm{ForL}(S)$, tada je: a) $y\neq\emptyset$ (jer $B\in y$) i $y\neq \mathrm{ForL}(S)$ (jer, inače, prema 0.8.7 $x\neq\emptyset \Rightarrow x\circ y = x\circ\mathrm{ForL}(S) = \mathrm{ForL}(S)$ odakle, zbog $x\circ y\subseteq z$, proizlazi da $z=\mathrm{ForL}(S)$ što je nemoguće zbog $C\notin z$) b) $z\neq\mathrm{ForL}(S)$ (jer $C\notin z$) i $z\neq\emptyset$(jer $x\circ y\subseteq z$ a prema lemi 0.8.8 $x,y\neq\emptyset \Rightarrow x\circ y\neq\emptyset$) QED

Kraj dokaza.

Neposrednom primenom leme o $^+$kanoničnosti S $^+$kanonskih modela dobijamo:

<u>1.11 Teorema</u>

Neka je S neka ekspanzija računa R^+ u jeziku $L(S)\supseteq L^+$ i $A\in\mathrm{ForL}^+$

1.11.1 $\quad \vdash_S A \Leftrightarrow \mathfrak{M}_k^+(S)\models A$

1.11.2 $\quad \vdash_S A \Leftrightarrow \mathfrak{M}_k^+(S)'\models A$

<u>Dokaz:</u>

1.11.1 $(\Rightarrow)$

$\vdash_S A \Rightarrow \forall t(P't \Rightarrow A\in t)$ (Jer $P't \overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} t\supseteq \mathrm{Th}(S)\ni A$)

$\Rightarrow \forall t(P't \Rightarrow t\models A)$ (Jer $A\in\mathrm{ForL}^+$ i $\mathfrak{M}_k^+(S)$ je $^+$kanoničan)

$\Rightarrow \mathfrak{M}_k^+(S)\models A$

$(\Leftarrow)$

$\nvdash_S A \Rightarrow A\notin\mathrm{Th}(S)$

$\Rightarrow \exists t(P't$ i $A\notin t)$ (Takav t postoji prema lemi 0.10.1)

$\Rightarrow \exists t(P't$ i $t\not\models A)$ (Jer $A\in\mathrm{ForL}^+$ i $\mathfrak{M}_k^+(S)$ je $^+$kanoničan)

$\Rightarrow \mathfrak{M}_k^+(S)\not\models A$

1.11.2 Dokaz je isti kao i dokaz za 1.11.1 jer je i $\mathfrak{M}_k^+(S)'$ $^+$kanoničan a t iz prethodnog dokaza je a) neprazan (jer $\mathrm{Th}(S)\subseteq t$), b) (u $(\Leftarrow)$ smeru) različit od $\mathrm{ForL}(S)$ jer $A\notin t$.

Kraj dokaza.

Prethodna teorema je već neki oblik teoreme o potpunosti jer utvrdjuje da je svaka ekstenzija računa R^+ potpuna u odnosu na klasu $\{\mathfrak{M}_k^+(S), \mathfrak{M}_k^+(S)'\}$ R^+ modela, kao i u odnosu na, da budemo formalni do kraja, svaku njenu nepraznu podklasu.
Sam za sebe ovaj rezultat nema neku praktičnu vrednost jer je naše poznavanje $^+$kanonskih modela taman onoliko koliko je i poznavanje računa na kome su gradjeni. Medjutim, za one račune S za koje $\mathfrak{M}_k^+(S)$ ili $\mathfrak{M}_k^+(S)'$ možemo uključiti u neku klasu R^+ modela za koju imamo prihvatljiv ili, u unapred dogovorenom smislu, dobar opis, odmah dobijamo teoremu o potpunosti računa S u odnosu na pomenutu klasu R^+ modela (koja je neka podklasa od klase $\mathbb{M}(R^+)$ svih R^+ modela). Ovo razmatranje, naravno, važi i za R^+ okvire ako ih shvatimo kao nosače jednog "oblaka" R^+ modela. Opis klase koji, po pravilu, smatramo zadovoljavajućim je najčešće u predikatskim formulama prvog reda. Takva je, na primer klasa svih R^+ okvira. Time dolazimo do teoreme o potpunosti računa R^+ u odnosu na klasu svih R^+ okvira kojom zaključujemo ovo poglavlje.

1.12 Teorema o potpunosti računa R^+

$$\vdash_{R^+} A \Leftrightarrow \models_{R^+} A$$

Dokaz:

($\Rightarrow$) je teorema 1.6.

($\Leftarrow$) $\not\vdash_{R^+} A \Rightarrow \mathfrak{M}_k^+(R^+) \not\models A$ (Prema teoremi 1.11 jer $A \in ForL^+$)

$\Rightarrow \mathfrak{K}_k^+(R^+) \not\models A$ (Po definiciji $\mathfrak{K} \models A$ na okviru $\mathfrak{K}$)

$\Rightarrow \not\models_{R^+} A$ (Jer $\mathfrak{K}^+(S) \in \mathbb{K}(R^+)$ prema 1.8.1 te to važi i za $S = R^+$)

1.12.1 Napomena

Ovaj dokaz se mogao sprovesti i primenom striktnih R^+ $^+$kanonskih modela i okvira. Napomenimo, osim toga, da je za račun R^+ korak $A \notin Th(R^+) \Rightarrow \exists t(P't$ i $A \notin t)$ u dokazu teoreme 1.11 suvišan (tj. primena leme 0.10.1 je "u prazno") stoga što je $Th(R^+)$ već prost (videti teoremu 0.17). No, naravno, teorema 1.11 je dokazivana za svaku ekspanziju računa R^+ pa i za onu čiji skup teorema nije prost.

2. SEMANTIKA ZA RELEVANTNE LOGIKE SA NEGACIJOM

U prethodnom poglavlju smo prikazali semantiku za relevantan iskazni račun R^+ i, kao kao matematički aparat od dalekosežnijeg značaja, uveli pojmove $^+$kanonskih modela i okvira. U ovom poglavlju proširujemo jezik L^+ veznikom $^-$ i pristupamo istraživanju relevantnih iskaznih računa sa negacijom koji su ekspanzije računa R^+.

Do sada je u literaturi izučavana semantika za samo jedan takav račun - već pomenuti R (Definicija 0.13). To je, ponovimo još jednom, iskazni račun na jeziku $L=\{\rightarrow, \wedge, \vee, ^-\}$ sa istim pravilima (MP i AD) i aksiomama (R1-R11) kao i R^+ kao i novim aksiomama koje se tiču negacije

$$\text{R12} \quad (A\rightarrow\bar{B})\rightarrow(B\rightarrow\bar{A})$$

$$\text{R13} \quad \bar{\bar{A}}\rightarrow A$$

Routley i Meyer su u radu [34] dali semantiku za ovaj račun. Semantika se dobija proširivanjem R^+okvira (u njihovoj verziji koja je, kako smo već napomenuli u poglavlju 1, u izvesnim aspektima različita od naše) jednom unarnom operacijom koja, tako možemo zamisliti, svakom svetu korespondira svet u kome se opovrgavaju formule čije negacije važe u prvom svetu. U početku sledećeg odeljka prikazujemo ovu semantiku uzimajući R^+okvire u verziji koju smo izložili u prethodnom poglavlju.

Semantika za R. Kritika negacije u R

2.1 Definicija

2.1.1 $\mathfrak{X}=\langle X,R,P,^*\rangle$ je R okvir akko

(i) $\mathfrak{X}^+=\langle X,R,P\rangle$ je R^+okvir, i

(ii) $^*: X\rightarrow X$ tako da za sve $x,y,z\in X$ važi

P5 $Rxyz \Rightarrow Rxz^*y^*$

P6 $x^{**}=x$

$\mathrm{dom}\,\mathcal{X} \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{dom}\,\mathcal{X}^+$

2.1.2 $\mathfrak{M}=\langle\mathcal{X},v\rangle$ je <u>R model</u> akko je $\mathfrak{M}^+=\langle\mathcal{X}^+,v\rangle$ R^+model.

$\mathrm{Fr}\,\mathfrak{M} \overset{\mathrm{def}}{=} \mathcal{X}$, $\mathrm{dom}\,\mathfrak{M} \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{dom}\mathrm{Fr}\,\mathfrak{M}$

<u>2.1.3 Napomena</u>

Kako je R okvir ekspanzija R^+okvira (jednom operacijom) to u svakom R okviru važe svojstva R^+okvira utvrdjena teoremom 1.2.

<u>2.2 Teorema</u>

U svakom R okviru $\mathcal{X}$, za sve $x,y,z \in \mathrm{dom}\,\mathcal{X}$ važi

2.2.1 $x \leqslant y \Rightarrow y^* \leqslant x^*$

2.2.2 $Px \Rightarrow x^* \leqslant x$

<u>Dokaz:</u>

2.2.1 $x \leqslant y \Rightarrow \exists t(Pt \text{ \underline{i} } Rtxy)$

$\Rightarrow \exists t(Pt \text{ \underline{i} } Rty^*x^*)$ (P5)

$\Rightarrow y^* \leqslant x^*$

2.2.2 $Px \Rightarrow Px \text{ \underline{i} } Rx^*x^*x^*$ (P2)

$\Rightarrow Px \text{ \underline{i} } Rx^*x^{**}x^{**}$ (P5)

$\Rightarrow Px \text{ \underline{i} } Rx^*xx$ (P6)

$\Rightarrow Px \text{ \underline{i} } Rxx^*x$ (Teorema 1.2.2)

$\Rightarrow x^* \leqslant x$

<u>2.3 Definicija</u>

Neka je $\mathfrak{M}$ neki R model , $A \in \mathrm{ForL}$ i $x \in \mathrm{dom}\,\mathfrak{M}$.

Predikat <u>Formula A važi u svetu x R modela $\mathfrak{M}$</u> ($\langle\mathfrak{M},x\rangle \models A$, odnosno $x \models A$) se definiše rekurzijom po broju veznika formule A i to za veznike p_i, $\wedge$, $\vee$ i $\rightarrow$ kao u definiciji 1.3 a za veznik $^-$:

$(^-)$ $A=\overline{B}$, $x \models \overline{B}$ akko $x^* \not\models B$

Predikati $\mathfrak{M} \models A$, $\mathcal{X} \models A$ i $\models_R A$ kao i klase $\mathbb{K}(R)$ i $\mathbb{M}(R)$ se definišu kao i u 1.3 tako što se R^+ smeni sa R.

<u>2.4 Lema o postojanosti</u>

U svakom R modelu $\mathfrak{M}$ za svaku formulu $A \in \mathrm{ForL}$ i sve $x,y \in \mathrm{dom}\,\mathfrak{M}$

(p) ... $x \leqslant y \text{ \underline{i} } x \models A \Rightarrow y \models A$

<u>Dokaz:</u>

Indukcijom po broju veznika formule A. Dokaz je za veznike p_i, $\wedge$, $\vee$ i $\rightarrow$ isti kao i dokaz leme 1.4 a za veznik $^-$ glasi

$(^-)$ $A=\overline{B}$, $x \leqslant y \text{ \underline{i} } x \models \overline{B} \Rightarrow x \leqslant y \text{ \underline{i} } x^* \not\models B$

$\Rightarrow y^* \Rightarrow x^* \text{ \underline{i} } x^* \not\models B$ (Teorema 2.2.1)

$\Rightarrow y^* \not\models B$ (Jer $y^* \models B \Rightarrow x^* \models B$

$\Rightarrow y \models B$ zbog $y^* \leqslant x^*$ i Ind Hyp)

2.5 Lema o važenju implikacije

U svakom R modelu $\mathfrak{M}$ za svaku formulu $A \to B \in ForL$ važi:

$$\mathfrak{M} \models A \to B \iff \forall x (x \models A \Rightarrow x \models B)$$

Dokaz:

Isti kao i dokaz leme 1.5 jer je neposredna posledica leme 2.4 o važenju implikacije. Videti i napomenu 1.5.1.

2.6 Teorema o saglasnosti računa R sa semantikom

$$\vdash_{\overline{R}} A \Rightarrow \models_{\overline{R}} A$$

Dokaz:

Kako je svaki R model ekspanzija R^+modela to u njemu važe sve R^+aksiome i pravila izvodjenja. Ostaje da se potvrde sheme R12 i R13. Koristimo lemu o važenju implikacije uz iste konvencije kao i u dokazu teoreme 1.6.

R12 $(A \to \overline{B}) \to (B \to \overline{A})$

$x \models A \to \overline{B} \Rightarrow x \models B \to \overline{A}$

akko $x \models A \to \overline{B} \Rightarrow (Rxyz, y \models B \Rightarrow z \models \overline{A})$

akko $x \models A \to \overline{B}, Rxyz, y \models B \Rightarrow z^* \not\models A$

Poslednja formula je tačna jer, ako $z^* \models A$ onda zbog Rxyz dobijamo Rxz^*y^* (prema P5) što sa $x \models A \to \overline{B}$ (i pretpostavkom $z^* \models A$) daje $y^* \models \overline{B}$ odakle $y^{**} \not\models B$; no $y^{**} = y$ (prema P6) te $y \not\models B$ a pretpostavka je $y \models B$; kontradikcija; dakle $z^* \not\models A$.

R13 $\overline{\overline{A}} \to A$

$x \models \overline{\overline{A}} \Rightarrow x \models A$

akko $x^* \not\models \overline{A} \Rightarrow x \models A$

akko $x^{**} \models A \Rightarrow x \models A$

Poslednja formula je tačna jer $x^{**} = x$ (P6).

Kako je račun R ekspanzija računa R^+ to su pojmovi R^+kanonskog okvira i modela (Definicija 1.7) korektni.

2.7 Definicija

2.7.1 $\mathcal{K}(R) = \langle H'(R), R_k(R), P'(R), ^* \rangle$ je R kanonski okvir akko

(i) $\mathcal{K}^+(R) = \langle H'(R), R_k(R), P'(R) \rangle$ je R $^+$kanonski okvir, i

(ii) $x^* \overset{def}{=} \{A \in ForL \mid \overline{A} \notin x\}$ za sve $x \in H'(R)$.

2.7.2 $\mathfrak{M}_k(R) = \langle \mathcal{K}(R), v_k \rangle$ je R kanonski model akko je $\mathcal{K}(R)$ R kanonski okvir i v_k kanonska valuacija okvira $\mathcal{K}(R)$.

2.7.3 Napomena

Definicije striktnog R kanonskog okvira i modela su analogne definicijama u 1.7 i od sada ih nećemo navoditi posebno.

2.8 Teorema

2.8.1 $\mathcal{K}(R)$ je R okvir

2.8.2 $\mathfrak{M}_k(R)$ je R model

Dokaz:

2.8.1 Kako je R ekspanzija računa R^+ to je, prema teoremi 1.8.1, $\mathcal{K}^+(R)$ R^+ okvir. Dovoljno je, prema tome, dokazati da je * preslikavanje iz $H'(R)$ u $H'(R)$ i da važe P5 i P6.

Dokazujemo da $^*: H'(R) \to H'(R)$

Neka $x \in H'(R)$, tada važi:

$$\begin{array}{lll}
\text{(i)} & A,B \in x^* \Rightarrow \bar{A},\bar{B} \notin x & \text{(Prema definiciji } ^*\text{)} \\
& \Rightarrow \bar{A} \vee \bar{B} \notin x & \text{(Jer je } x \text{ prost)} \\
& \Rightarrow \overline{A \wedge B} \notin x & \text{(Jer } \vdash_R \overline{A \wedge B} \to \bar{A} \vee \bar{B}\text{)} \\
& \Rightarrow A \wedge B \in x^* &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\text{(ii)} & A \in x^*, \vdash_R A \to B \Rightarrow \bar{A} \notin x, \vdash_R \bar{B} \to \bar{A} & \text{(Jer } \vdash_R (A \to B) \to (\bar{B} \to \bar{A})\text{)} \\
& \Rightarrow \bar{B} \notin x & \text{(Jer je } x \text{ zatvoren za MP)} \\
& \Rightarrow B \in x^* &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\text{(iii)} & A \vee B \in x^* \Rightarrow \overline{A \vee B} \notin x & \\
& \Rightarrow \bar{A} \wedge \bar{B} \notin x & \text{(Jer } \vdash_R \bar{A} \wedge \bar{B} \to \overline{A \vee B}\text{)} \\
& \Rightarrow \bar{A} \notin x \ \underline{\text{ili}}\ \bar{B} \notin x & \text{(Jer, inače, } \bar{A},\bar{B} \in x \Rightarrow \bar{A} \wedge \bar{B} \in x\text{)} \\
& \Rightarrow A \in x^* \ \underline{\text{ili}}\ B \in x^* &
\end{array}$$

Prema (i) i (ii) x je R d.z. a prema (iii) je i prost pa x pripada $H'(R)$.

Dokazujemo da važe P5 i P6

P5 $Rxyz \Rightarrow Rxz^*y^*$ se svodi na

$$x \circ y \subseteq z \Rightarrow x \circ z^* \subseteq y^*$$

Neka $x \circ y \subseteq z$ i neka $A \in x \circ z^*$, tada za neke $B \in x$, $C \in z^*$ važi $\vdash_R B \to (C \to A)$ odakle $\vdash_R B \to (\bar{A} \to \bar{C})$. Kako $B \in x$ to, ako bi važilo $\bar{A} \in y$, $\bar{C} \in x \circ y \subseteq z$ tj. $C \notin z^*$. Dakle, $\bar{A} \notin y$ odnosno $A \in y^*$ QED

P6 $x^{**} = x$

$$\begin{aligned}
x^{**} &= \{A \in ForL \mid \bar{A} \notin x^*\} \\
&= \{A \in ForL \mid \bar{\bar{A}} \in x\} \\
&= \{A \in ForL \mid A \in x\} \qquad \text{(Jer } \vdash_R \bar{\bar{A}} \rightleftarrows A\text{)} \\
&= x
\end{aligned}$$

2.8.2 je trivijalna posledica 1.8.1 jer je v_k valuacija.

2.9 Lema o kanoničnosti R kanonskog modela

U $\mathfrak{M}_k(R)$ za sve $x \in dom\,\mathfrak{M}_k(R)$ i sve formule $A \in ForL$ važi

$$\text{(k)} \ \ldots \quad x \models A \Leftrightarrow A \in x$$

Dokaz:

Indukcijom po broju veznika formule A. Indukcijski korak je za veznike $p_i, \wedge, \vee$ i $\rightarrow$ isti kao u dokazu leme 1.10 a za veznik $^-$

$$(^-) \qquad A = \overline{B}, \qquad x \models \overline{B} \Leftrightarrow x^* \not\models B$$
$$\Leftrightarrow B \notin x^* \qquad \text{(Ind Hyp)}$$
$$\Leftrightarrow \overline{B} \in x$$

2.10 Teorema o potpunosti računa R

2.10.1 $\quad \vdash_{R^+} A \Leftrightarrow \mathfrak{M}_k(R) \models A$

2.10.2 $\quad \vdash_{R^+} A \Leftrightarrow \models_{R^+} A$

Dokaz:

2.10.1 Isti kao i dokaz teoreme 1.11 jer je prethodnom lemom utvrdjeno da je $\mathfrak{M}_k(R)$ kanoničan, a kako je R ekspanzija računa R^+ to i za R važi lema 0.10.1. To su jedina dva tvrdjenja koja se u dokazu koriste.

2.10.2 Isti kao i dokaz teoreme 1.12 jer važi 2.10.1 i, prema teoremi 2.8.2 $\mathcal{K}_k(R)$ je R okvir.

Primećujemo, svakako, da se dokaz potpunosti računa R nije morao izvoditi posebno u ovom poglavlju, već da se mogao izvesti zajedno sa dokazom potpunosti računa R^+ sa kojim je, kako vidimo, potpuno sličan. Ovo razdvajanje smo učinili iz dva razloga. Prvo, stoga što ćemo R^+ koristiti kao podlogu za razne klase računa koje u ovoj raspravi izučavamo. Drugo, zato što smo time posebno izdvojili negaciju - onakvu kakva je u R.

Negacija u R je postavljana "klasično". Znaci navoda stoje zato što, jasno, u R ne važe sva klasična svojstva negacije (na primer $\not\vdash_R A \wedge \overline{A} \rightarrow B$) ali zato $\vdash_R \overline{\overline{A}} \rightarrow A$ i $\vdash_R A \vee \overline{A}$. Odmah se nameće pitanje: Kojim idejama se rukovodila Anderson&Belnap škola pri uvodjenju ovako jake negacije u R? Neke od motiva smo već naveli u komentarima definicije 0.13. Naime, primećuje se da je pri izboru implikacijskih aksioma vršena veoma skrupulozna selekcija što sa negacijom izgleda nije bio slučaj. Zašto? Implicitan odgovor se može naći u radovima učesnika u "radjanju" R-a. Osnovna zamisao je bila da je samo implikacija (povlačenje , entailment) pravi "relacijski" veznik tj. veznik koji ukazuje na neke logičke odnose medju formulama, dok su svi ostali veznici ($\wedge, \vee, ^-$) funkcionalni, ili, slobodnije rečeno, za njih se implicitno prihvata da istinitost iskaza $A \wedge B$, $A \vee B$ i $\overline{A}$ zavisi samo od istinitosti iskaza A i B. Tako, na primer u jeziku $\{\wedge, \vee, {}^{-}\}$ u R važe sve klasične tautologije. Na neki način, R se može shvatiti kao klasičan iskazni račun koji je zadat u jeziku $\{\wedge, \vee, {}^{-}\}$ a zatim proširen veznikom $\rightarrow$ i novim odnosnim aksiomama i pravilima izvodjenja. Time je napravljan relevantan iskazni račun koji u najvećoj mogućoj meri čuva klasično-logičke istine. Svakako da se ovakva pozicija, koju su zauzeli osnivači relevantnih logika, može podvrći kritici sa, na primer, intuicionističke tačke gledišta. Tačnije, bez namere da se račun R "opovrgne" - što je, na kraju krajeva, besmisleno, ima smisla izučavati moguće alternativne iskazne račune koji bi bili relevantni (imali za implikacijski fragment samo $R_{\rightarrow}$ i svojstvo zajedničke promenljive) ali, što se tiče ostalih veznika, bili slabiji od R, te tako povezivali ideje relevantnosti sa ovim ili onim logičkim pravcem.

Ova podvojenost implikacije i ostalih logičkih veznika je posebno jasno istaknuta izloženom semantikom. Veznici $\wedge$ i $\vee$ deluju nesporno (mada se i njihov status može problematizovati što ćemo videti u poglavlju 4) ali zato $^{-}$ deluje veoma neobično. Pojava, naime, operacije * i njenih pratećih aksioma deluje nekako ad hoc i veštački, kada se posmatra u odnosu na ternarnu relaciju R. Operacija * i njena nezgrapnost jedna su od glavnih mana semantike za R, na koju su obratili pažnju neki kritičari. Tako, na primer Coppeland [10] odbacuje celu semantiku za R gradeći svoju kritiku i na pomenutom motivu.

Mislimo da se kritike koje se usmeravaju na pokušaj odbacivanja semantike za R, ovakve kakva je, ne mogu održati. Pre svega, ma kako sledeće tvrdjenje zvučalo tautologično, ne smemo zaboraviti da je R ipak potpun u odnosu na tu semantiku. Neprirodnost, ili, bolje rečeno, nezavisnost, operacije * koja služi kao semantička podloga za negaciju, pre ukazuje na nezavisnost negacije od ostalih veznika u R nego na neprirodnost semantike. Čini se da implikacijski fragment $R_{\rightarrow}$ nije i ne može biti takav da a priori odredi svojstva negacije u računu kome je osnova. Prema tome, ovakva situacija samo ukazuje na legitimnost našeg prethodnog stava o potrebi izučavanja različitih negacija u relevantnim logikama.

U ovom poglavlju predlažemo dva (medjusobno povezana) tipa semantičke podloge za negaciju koje su rezultat naših istraživanja.

C semantika. Slabljenje negacije

Epistemološki motivi za uvodjenje nove semantike za negaciju u ekspanzijama računa R^+, nalaze se u prethodnoj kritici negacije u R. Ako R shvatimo kao iskazni račun usmeren ka formalizaciji implikacije, onda prethodna rasprava ukazuje na to da negacija, onakva kakva je u R, može biti samo jedna od mogućih.

Stoga predlažemo nov metod potvrdjivanja formula oblika negacije u R^+okvirima proširenim unarnom relacijom C. Ovaj metod, koji i čini osnovni sadržaj nove semantike, omogućava obuhvatanje jedne široke klase iskaznih računa, medju kojima je, kao poseban slučaj, i račun R.

Heuristički, relaciju C tumačimo na sledeći način: Ct akko je svet t lokalno neprotivrečan. Tada, smatramo da formula A važi u svetu x akko ne postoji ni jedan svet y u kome važi formula A koji je saglasan sa x u odnosu na neki lokalno neprotivrečan svet z.

Pristupamo formalizaciji ove ideje.

2.11 Definicija

2.11.1 $\mathfrak{X} = \langle X,R,P,C\rangle$ je RW okvir akko

(i) $\mathfrak{X}^+ = \langle X,R,P\rangle$ je R^+okvir, i

(ii) $C \subseteq X$

$\mathrm{dom}\,\mathfrak{X} \overset{def}{=} X$

2.11.2 $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{X}, v\rangle$ je RW model akko

(i) $\mathfrak{X}$ je RW okvir, i

(ii) $\mathfrak{M}^+ = \langle \mathfrak{X}^+, v\rangle$ je R^+model.

2.12 Definicija

Neka je $\mathfrak{M}$ neki RW model, $x \in \mathrm{dom}\,\mathfrak{M}$ i $A \in \mathrm{For}L$.

Predikat Formula A važi u svetu x RW modela $\mathfrak{M}$ ($\langle \mathfrak{M}, x\rangle \models A$, odnosno $x \models A$) se definiše rekurzijom po broju veznika formule A i to: za veznike p_i, $\wedge$, $\vee$ i $\rightarrow$ kao u definiciji 1.3 a za $^-$:

($^-$) $A = \bar{B}$, $x \models \bar{B}$ akko $\neg \exists y \exists z (Rxyz$ i $y \models A$ i $Cz)$

Predikati $\mathfrak{M} \models A$, $\mathfrak{X} \models A$ i $\models_{RW} A$ se definišu kao i u 1.3 tako što se R^+ smeni sa RW.

2.12.1 Lema

U svakom RW modelu, za svaku formulu $A \in \mathrm{For}L$ i sve $x \in \mathrm{dom}\,\mathfrak{M}$

$$x \models \bar{A} \text{ akko } \forall y (x\bar{R}y \Rightarrow y \not\models A)$$

gde je

$$x\bar{R}y \overset{def}{\iff} \exists z (Rxyz \text{ i } Cz)$$

Dokaz:

$$x\models \neg A \Leftrightarrow \neg\exists y\exists z(Rxyz \text{ i } y\models A \text{ i } Cz) \qquad \text{(Definicija 2.12)}$$
$$\Leftrightarrow \forall y\forall z(Rxyz \text{ i } Cz \Rightarrow y\not\models A)$$
$$\Leftrightarrow \forall y(\exists z(Rxyz \text{ i } Cz)\Rightarrow y\not\models A)$$
$$\Leftrightarrow y(x\bar{R}y \Rightarrow y\not\models A) \qquad \text{(Definicija relacije } \bar{R})$$

2.12.2 Napomena

Primećujemo da je prethodnom lemom formula za verifikaciju negacije u RW modelima znatno pojednostavljena. Binarna relacija $\bar{R}$ koja je u iskazu ove leme definisana će nadalje biti korišćena umesto relacije C bez posebnih napomena. $x\bar{R}y$ možemo tumačiti kao: x i y su uzajamno neprotivrečni. Argumenti za ovakvo tumačenje će biti dati kasnije.

Sledećom teoremom utvrdjujemo neka osnovna svojstva relacije $\bar{R}$ definisane preko relacije C (i R, naravno).

2.13 Teorema

Neka je $\mathfrak{X}^+=\langle X,R,P\rangle$ R^+okvir, tada važi:

2.13.1 Ako je C unarna relacija na X, $\bar{R}$ binarna relacija definisana na X sa

$$x\bar{R}y \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists z(Rxyz \text{ i } Cz)$$

i $R\bar{R}$ ternarna relacija definisana na X sa

$$R\bar{R}xyz \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists u(Rxyu \text{ i } u\bar{R}z)$$

onda u $\langle\mathfrak{X}^+,C\rangle$ važi

2.13.1.1 $\quad x\leqslant y \text{ i } y\bar{R}z \Rightarrow x\bar{R}z$

2.13.1.2 $\quad R\bar{R}xyz \Rightarrow R\bar{R}xzy$

2.13.1.3 $\quad x\bar{R}y \Rightarrow y\bar{R}x$

2.13.1.4 $\quad R\bar{R}xyz \Leftrightarrow \exists t(R^2xyzt \text{ i } Ct)$

2.13.1.5 $\quad R\bar{R}x_1x_2x_3 \Leftrightarrow R\bar{R}x_ix_jx_k \qquad (i,j,k)\in S_3$

2.13.1.6 $\quad Cx \Rightarrow \exists t(Pt \text{ i } x\bar{R}t)$

2.13.2 Ako je $\bar{R}$ binarna relacija na X takva da u $\langle\mathfrak{X}^+,\bar{R}\rangle$ važi 2.13.1.1 i 2.13.1.2 i $\hat{C}$ unarna relacija definisana na X sa

$$\hat{C}x \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall u\forall v(Ruvx \Rightarrow u\bar{R}v)$$

onda u $\langle\mathfrak{X}^+,\bar{R}\rangle$ važi

$$x\bar{R}y \Leftrightarrow \exists z(Rxyz \text{ i } \hat{C}z), \text{ i}$$
$$\hat{C}x \Leftrightarrow \exists t(Pt \text{ i } x\bar{R}t)$$

Dokaz:

2.13.1 Redosled kojim dokazujemo tvrdjenja nije isti kao redosled kojim su iskazana, zbog posebnog statusa koji imaju tvrdjenja 2.13.1.1 i 2.13.1.2 u obratu teoreme (2.13.2).

2.13.1.1

$$\begin{aligned} x\leqslant y \ \underline{i}\ y\bar{R}z &\Rightarrow x\leqslant y \ \underline{i}\ \exists t(Ryzt \ \underline{i}\ Ct) && (\text{Def. } \bar{R})\\ &\Rightarrow \exists t(x\leqslant y \ \underline{i}\ Ryzt \ \underline{i}\ Ct)\\ &\Rightarrow \exists t(Rxzt \ \underline{i}\ Ct) && (P3)\\ &\Rightarrow x\bar{R}z \end{aligned}$$

2.13.1.4

$$\begin{aligned} R\bar{R}xyz &\Leftrightarrow \exists u(Rxyu \ \underline{i}\ u\bar{R}z)\\ &\Leftrightarrow \exists u(Rxyu \ \underline{i}\ \exists t(Ruzt \ \underline{i}\ Ct))\\ &\Leftrightarrow \exists t(\exists u(Rxyu \ \underline{i}\ Ruzt) \ \underline{i}\ Ct)\\ &\Leftrightarrow t(R^2xyzt \ \underline{i}\ Ct) \end{aligned}$$

2.13.1.5 (i 2.13.1.2 kao njegova neposredna posledica) proizlaze iz 2.13.1.4 jer (teorema 1.2.4) $R^2x_1x_2x_3 \Rightarrow R^2x_ix_jx_k$ za sve $(i,j,k)\in S_3$.

2.13.1.3

$$\begin{aligned} x\bar{R}y &\Rightarrow \exists t(Pt \ \underline{i}\ Rtxx) \ \underline{i}\ x\bar{R}y && (P1)\\ &\Rightarrow \exists t(Pt \ \underline{i}\ Rtxx \ \underline{i}\ x\bar{R}y)\\ &\Rightarrow \exists t(Pt \ \underline{i}\ R\bar{R}txy)\\ &\Rightarrow \exists t(Pt \ \underline{i}\ R\bar{R}tyx) && (2.13.1.2)\\ &\Rightarrow \exists t(Pt \ \underline{i}\ \exists u(Rtyu \ \underline{i}\ u\bar{R}x))\\ &\Rightarrow \exists u(\exists t(Pt \ \underline{i}\ Rtyu) \ \underline{i}\ u\bar{R}x)\\ &\Rightarrow \exists u(y\leqslant u \ \underline{i}\ u\bar{R}x)\\ &\Rightarrow yRx && (2.13.1.1) \end{aligned}$$

2.13.1.6

$$\begin{aligned} Cx &\Rightarrow \exists t(Pt \ \underline{i}\ Rtxx) \ \underline{i}\ Cx && (P1)\\ &\Rightarrow \exists t(Pt \ \underline{i}\ Rtxx \ \underline{i}\ Cx)\\ &\Rightarrow \exists t(Pt \ \underline{i}\ t\bar{R}x)\\ &\Rightarrow \exists t(Pt \ \underline{i}\ x\bar{R}t) && (2.13.1.3) \end{aligned}$$

2.13.2

Pretpostavimo da važe 2.13.1.1 i 2.13.1.2. Prvo dokazujemo

$$\hat{C}x \Leftrightarrow \exists t(Pt \text{ i } x\bar{R}t)$$

$$\begin{aligned} (\Rightarrow)\quad \hat{C}x &\Rightarrow \exists t(Pt \ \underline{i}\ Rtxx) \ \underline{i}\ \hat{C}x && (P1)\\ &\Rightarrow \exists t(Pt \ \underline{i}\ Rxtx) \ \underline{i}\ \forall u\forall v(Ruvx \Rightarrow u\bar{R}v) && (1.2.2)\\ &\Rightarrow \exists t(Pt \ \underline{i}\ Rxtx) \ \underline{i}(Rxtx \Rightarrow x\bar{R}t) && (u=x,\ v=t)\\ &\Rightarrow \exists t(Pt \ \underline{i}\ x\bar{R}t) \end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$ Kako je, po definiciji $\hat{C}x \Leftrightarrow \forall u\forall v(Ruvx \Rightarrow u\bar{R}v)$, to je dovoljno dokazati da važi $Pt \ \underline{i}\ x\bar{R}t \ \underline{i}\ Ruvx \Rightarrow u\bar{R}v$.

$$
\begin{aligned}
Pt \ \underline{i}\ x\bar{R}t \ \underline{i}\ Ruvx &\Rightarrow Pt \ \underline{i}\ R\bar{R}uvt \\
&\Rightarrow Pt \ \underline{i}\ R\bar{R}utv && (2.13.1.2)\\
&\Rightarrow Pt \ \underline{i}\ \exists s(Ruts \ \underline{i}\ s\bar{R}v) \\
&\Rightarrow Pt \ \underline{i}\ \exists s(Rtus \ \underline{i}\ s\bar{R}v) && (1.2.2)\\
&\Rightarrow \exists s(Pt \ \underline{i}\ Rtus \ \underline{i}\ s\bar{R}v) \\
&\Rightarrow \exists s(u\leqslant s \ \underline{i}\ s\bar{R}v) \\
&\Rightarrow u\bar{R}v && (2.13.1.1)
\end{aligned}
$$

Dokazujemo $x\bar{R}y \Leftrightarrow \exists z(Rxyz \ \underline{i}\ \hat{C}z)$

$$
\begin{aligned}
(\Leftarrow)\quad Rxyz \ \underline{i}\ \hat{C}z &\Rightarrow Rxyz \ \underline{i}\ \forall u\forall v(Ruvz \Rightarrow u\bar{R}v) \\
&\Rightarrow x\bar{R}y && (u=x,\ v=y)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\Rightarrow)\quad x\bar{R}y &\Rightarrow \exists t(Pt \ \underline{i}\ Rtxx) \ \underline{i}\ x\bar{R}y && (P1)\\
&\Rightarrow \exists t(Pt \ \underline{i}\ Rxtx) \ \underline{i}\ x\bar{R}y && (1.2.2)\\
&\Rightarrow \exists t(Pt \ \underline{i}\ R\bar{R}xty) \\
&\Rightarrow \exists t(Pt \ \underline{i}\ R\bar{R}xyt) && (2.13.1.2)\\
&\Rightarrow \exists t(Pt \ \underline{i}\ \exists z(Rxyz \ \underline{i}\ z\bar{R}t)) \\
&\Rightarrow \exists z(Rxyz \ \underline{i}\ \exists t(Pt \ \underline{i}\ z\bar{R}t)) \\
&\Rightarrow \exists z(Rxyz \ \underline{i}\ \hat{C}z)
\end{aligned}
$$

2.13.3 Napomena

Iz prethodne teoreme proizlazi da je, u semantici uvedenoj definicijama 2.11 i 2.12, relacija C zamenjiva binarnom relacijom $\bar{R}$ koja zadovoljava 2.13.1.1 i 2.13.1.2. Ovu okolnost ćemo koristiti u daljem radu. Kasnije, pri uvodjenju još opštije semantike, videćemo da ovo nije slučajno.

2.14 Lema o postojanosti

U svakom RW modelu $\mathfrak{M}$, za svaku formulu $A\in ForL$ i sve $x,y\in dom\,\mathfrak{M}$

$$(p)\ \dots\quad x\leqslant y \ \underline{i}\ x\models A \Rightarrow y\models A$$

Dokaz:

Indukcijom po broju veznika formule A. Dokaz je, za veznike $\wedge, \vee$ i $\rightarrow$ je isti kao i dokaz leme 1.4 (jer je svaki RW model ekspanzija R^+modela) a za veznik $^-$ glasi:

$$
\begin{aligned}
(^-)\quad A=\bar{B},\quad x\leqslant y \ \underline{i}\ x\models \bar{B} &\Rightarrow x\leqslant y \ \underline{i}\ \forall t(x\bar{R}t \Rightarrow t\not\models B) \\
&\Rightarrow \forall t(y\bar{R}t \Rightarrow t\not\models B)
\end{aligned}
$$

(Jer $x\leqslant y \ \underline{i}\ y\bar{R}t \Rightarrow x\bar{R}t$ prema 2.13.1.1)

$$\Rightarrow y\models \bar{B}.$$

2.15 Lema o važenju implikacije

U svakom RW modelu $\mathfrak{M}$ za svaku formulu $A\rightarrow B\in ForL$ važi:

$$\mathfrak{M}\models A\rightarrow B \Leftrightarrow \forall x(x\models A \Rightarrow x\models B)$$

Dokaz:

Isti kao i dokaz leme 1.5 jer je RW okvir ekspanzija R^+okvira, definicija važenja u modelu je ista i važi lema 2.14 o postojanosti.

2.16 Definicija

RW je ekspanzija računa R^+ u jeziku L shema-aksiomom

$$R12 \quad (A\to\bar{B})\to(B\to\bar{A})$$

2.16.1 Teorema o saglasnosti računa RW sa semantikom

$$\vdash_{RW} A \Longrightarrow \models_{RW} A$$

Dokaz:

Kako je svaki RW model ekspanzija R^+modela i važi lema o važenju implikacije, to se potvrdjivanje shema-aksioma R1-R11 i pravila MP i AD obavlja na isti način kao i u dokazu teoreme 1.6 o saglasnosti računa R^+ sa semantikom.

Dovoljno je, stoga, potvrditi shema-aksiomu R12

R12 $(A\to\bar{B})\to(B\to\bar{A})$

$x\models A\to\bar{B} \Rightarrow x\models B\to\bar{A}$

akko $x\models A\to\bar{B} \Rightarrow (Rxyz, y\models B \Rightarrow z\models\bar{A})$

akko $x\models A\to\bar{B}, Rxyz, y\models B \Rightarrow (z\bar{R}t \Rightarrow t\not\models A)$

akko $x\models A\to\bar{B}, Rxyz, z\bar{R}t, y\models B \Rightarrow t\not\models A$

akko $x\models A\to\bar{B}, R\bar{R}xyt, y\models B \Rightarrow t\not\models A$

akko $x\models A\to\bar{B}, R\bar{R}xty, y\models B \Rightarrow t\not\models A$ (Prema 2.13.1.2)

akko $x\models A\to\bar{B}, Rxtz, z\bar{R}y, y\models B \Rightarrow t\not\models A$

Poslednja formula je tačna jer bi, u suprotnom, ako $t\models A$, onda, zbog Rxtz i $x\models A\to\bar{B}$ važi $z\models\bar{B}$ što sa $z\bar{R}y$ daje $y\not\models B$; poslednje je kontradiktorno sa $y\models B$.

Račun RW ne samo da je saglasan sa RW semantikom, već je u odnosu na nju i potpun. Pristupamo dokazivanju teoreme o potpunosti. U tu svrhu gradimo kanonske modele. Kanonske modele gradimo za proizvoljne ekstenzije računa RW čime pripremamo aparat za dokazivanje potpunosti raznih nadračuna od RW.

2.17 Definicija

Neka je S ekstenzija računa RW i $x,y,z\in H(S)$

2.17.1 $C_k(S)x \overset{def}{\Longleftrightarrow} (\forall A\in ForL)(\vdash_S A \Rightarrow \bar{A}\notin x)$

2.17.2 $xR_k(S)y \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists z(R_k(S)xyz$ i $C_k(S)z)$

2.17.3 $C'_k(S)$ je restrikcija relacije $C_k(S)$ na $H'(S)$.

2.17.4 $xR'_k(S)y$ je restrikcija definicione formule na $H'(S)$.

2.17.5 Napomena

Slično prethodnim konvencijama, umesto $C_k(S)$ i $R_k(S)$ pišemo samo C_k i R_k kada god je kontekst jasan. Takodje, C'_k je restrikcija relacije C_k sa domena $H(S)$ na domen $H'(S)$ pa ni ove oznake nećemo razlikovati.

2.18 Lema

Neka je S ekstenzija računa RW i $x \in H(S)$ takav da $C_k x$. Tada postoji $m \in H'(S)$ takav da je $x \subseteq m$ i $C_k m$.

Dokaz:

Neka je $\mathscr{C} = \{t \mid t \in H(S) \ \underline{i}\ x \subseteq t \ \underline{i}\ C_k t\}$. $\mathscr{C} \neq \emptyset$ (jer $x \in \mathscr{C}$) i (što se jednostavno proverava) zatvoren za unije lanaca. Prema Zornovoj lemi $\mathscr{C}$ sadrži maksimalan element m. m je u $H(S)$, sadrži x i zadovoljava $C_k m$ te je, da $m \in H'(S)$, dovoljno dokazati da je m prost.

Pretpostavimo suprotno. Tada postoje $A, B \notin m$ takvi da $A \vee B \in m$. $[m,A]_S$ i $[m,B]_S$ su pravi nadskupovi od m, pa ne pripadaju $\mathscr{C}$. Kako su u $H(S)$ i sadrže x (jer sadrže m) to ne zadovoljavaju svojstvo C_k. Znači, oba sadrže po bar jednu negaciju teoreme iz S. Dakle, $\vdash_S M_1 \wedge A \rightarrow \overline{T}_1$ i $\vdash_S M_2 \wedge B \rightarrow \overline{T}_2$ za neke $M_1, M_2 \in m$ i neke $T_1, T_2 \in Th(S)$. Iz prethodnog dobijamo $\vdash_S M_1 \wedge M_2 \wedge (A \vee B) \rightarrow \overline{T}_1 \vee \overline{T}_2$ te kako $M_1, M_2, A \vee B \in m$ to $\overline{T}_1 \vee \overline{T}_2 \in m$. No, formula $\overline{T}_1 \vee \overline{T}_2 \rightarrow \overline{T_1 \wedge T_2}$ je teorema u RW pa i u S, što sa prethodnim daje $\overline{T_1 \wedge T_2} \in m$. Medjutim, $T_1 \wedge T_2$ je teorema u S pa je poslednji zaključak kontradiktoran sa $C_k m$. Dakle, m je prost QED

2.18.1 Posledica

Neka je S ekstenzija računa RW i $x, y \in H(S)$ takvi da $x\overline{R}_k y$. Tada postoje $m, n \in H'(S)$ takvi da $x \subseteq m$, $y \subseteq n$ i $m\overline{R}'_k n$.

Dokaz:

$xR_k y$, po definiciji, znači $(\exists z \in H(S))(x \circ y \subseteq z \ \underline{i}\ C_k z)$. Prema prethodnoj lemi, postoji $z' \in H'(S)$ takav da $z' \supseteq z (\supseteq x \circ y)$ i važi $(\exists z' \in H'(S))(x \circ y \subseteq z' \ \underline{i}\ C_k z')$. Primenom leme 0.10.3 zaključujemo da postoje $m, n \in H'(S)$ takvi da $x \subseteq m$, $y \subseteq n$ i $m \circ n \subseteq z'$. Odavde, $(\exists z' \in H'(S))(m \circ n \subseteq z' \ \underline{i}\ C_k z')$ tj. $m\overline{R}'_k n$ QED

2.18.2 Posledica

Neka je S ekstenzija računa RW i $x, y \in H'(S)$, tada je

$$x\overline{R}_k y \Longleftrightarrow x\overline{R}'_k y$$

Dokaz:

($\Leftarrow$) Jer je definiciona formula za $x\bar{R}'_k y$ egzistencijalna, te ako važi u $H'(S)$ važi i u njegovom nadskupu $H(S)$.

($\Rightarrow$) Ako $x\bar{R}_k y$ onda, po definiciji $\bar{R}_k$, postoji $z \in H(S)$ takav da $x \circ y \subseteq z$ i $C_k z$. Prema lemi 2.18 postoji $z' \in H'(S)$ takav da $z \subseteq z'$ i $C_k z'$, no tada je i $x \circ y \subseteq z'$; kako je po pretpostavci $x,y \in H'(S)$ to $x\bar{R}'_k y$ QED

2.18.2.1 Napomena

Prethodnim stavom je dokazano da je relacija $\bar{R}'_k$ restrikcija relacije $\bar{R}_k$ sa domena $H(S)$ na domen $H'(S)$. Nadalje umesto $\bar{R}_k'$ pišemo $\bar{R}_k$.

2.18.3 Posledica

Neka je S ekstenzija računa RW i $x,y \in H(S)$. Sledeći iskazi su ekvivalentni.

2.18.3.1 $\quad x\bar{R}_k y$

2.18.3.2 $\quad C_k(x \circ y)$

2.18.3.3 $\quad \forall A(\bar{A} \notin x$ ili $A \notin y)$

2.18.3.4 $\quad \forall A(A \notin x$ ili $\bar{A} \notin y)$

Dokaz:

Kako je (2.13.1.3) relacija R_k simetrična, to su 2.18.3.3 i 2.18.3.4 ekvivalentni.

Dokazujemo da $\neg 2.18.3.2 \Leftrightarrow \neg 2.18.3.3$

($\Rightarrow$) Neka $\neg C_k(x \circ y)$. To znači da $x \circ y$ sadrži negaciju neke teoreme računa S, pa $\vdash_S B \to (A \to \bar{T})$ za neke $B \in x, A \in y$ i $T \in Th(S)$, odakle $\vdash_S T \to (B \to \bar{A})$ i $\vdash_S B \to \bar{A}$. No, $B \in x$ pa je $\bar{A} \in x$ što sa $A \in y$ daje $\neg 2.18.3.3$

($\Leftarrow$) Neka za neko $A \in y$ važi $\bar{A} \in x$. Formula $\bar{A} \to (A \to \overline{\bar{A} \to A})$ je teorema u RW pa i u S, pa $\overline{A \to A} \in x \circ y$, odnosno (jer $A \to A \in Th(S)$) važi $\neg C_k(x \circ y)$

Dokazujemo da $x\bar{R}_k y \Leftrightarrow C_k(x \circ y)$

($\Rightarrow$) Neka je $x\bar{R}_k y$. To znači da za neki z, $x \circ y \subseteq z$ i $C_k z$; tj. z ($\supseteq x \circ y$) ne sadrži ni jednu negaciju teoreme iz S pa to ne može ni $x \circ y$. Dakle, $C_k(x \circ y)$

($\Leftarrow$) $C_k(x \circ y) \Rightarrow x \circ y \subseteq x \circ y$ i $C_k(x \circ y)$, te je za $z = x \circ y$ zadovoljena definiciona aksioma za $x\bar{R}_k y$.

2.18.4 Napomena

Primećujemo da iz prethodnih stavova proizlazi da je relacija $\bar{R}_k$ "apsolutna"- u smislu da ne zavisi od S.

2.19 Definicija

Neka je S ekstenzija računa RW

2.19.1 $\mathcal{K}(S) = \langle H'(S), R_k(S), P'(S), C_k(S) \rangle$ je S kanonski RW okvir.

2.19.2 $\mathcal{M}_k(S) = \langle \mathcal{K}(S), v_k \rangle$ je S kanonski RW model.

2.20 Teorema

2.20.1 S kanonski RW okvir je RW okvir.

2.20.2 S kanonski RW model je RW model.

Dokaz:

Trivijalan, jer je $\mathcal{K}^+(S) = \langle H'(S), R_k(S), P'(S) \rangle$ R^+okvir stoga što je S kao ekstenzija računa RW istovremeno ekspanzija računa R^+ pa važi teorema 1.8. $C_k(S)$ je, naravno, unarna relacija.

2.20.1 Napomena

I striktan S kanonski RW okvir i model su R^+okvir i model.

2.21 Lema o kanoničnosti S kanonskog RW modela

Neka je S ekstenzija računa RW.

Tada za sve $A \in \mathrm{ForL}$ i sve $x \in \mathrm{dom}\,\mathcal{M}_k(S)$ važi:

$$(k) \ldots \quad x \models A \Longleftrightarrow A \in x$$

Dokaz:

Indukcijom po broju veznika formule A. Dokaz je za veznike p_i, $\wedge, \vee$ i $\rightarrow$ isti kao dokaz leme 1.10 (jer je $\mathcal{M}_k(S)$ ekspanzija R^+modela $\mathcal{M}_k^+(S)$) a za $^-$ glasi:

$$(^-) \quad A = \bar{B}, \quad x \models \bar{B} \Longleftrightarrow \forall y (x \bar{R}_k y \Rightarrow y \not\models B)$$
$$\Longleftrightarrow \forall y (x \bar{R}_k y \Rightarrow B \notin y) \qquad \text{(Ind Hyp)}$$
$$\Longleftrightarrow \bar{B} \in x$$

Dokazujemo poslednju ekvivalenciju.

($\Leftarrow$) Ako $\bar{B} \in x$ onda $x\bar{R}_k y$ povlači $B \notin y$ (lema 2.18.3.3)

($\Rightarrow$) Dokazujemo kontrapoziciju. Neka $\bar{B} \notin x$. Tada je $C_k(x \circ [B]_S)$. U suprotnom, za neke $X \in x$ i $T \in \mathrm{Th}(S)$ važi $\vdash_S X \rightarrow (B \rightarrow \bar{T})$ odakle $\vdash_S T \rightarrow (X \rightarrow \bar{B})$ odnosno $\vdash_S X \rightarrow \bar{B}$ pa $\bar{B} \in x$, što je suprotno pretpostavci. Dakle, $C_k(x \circ [B]_S)$. Poslednje je, prema lemi 2.18.3 ekvivalentno sa $x\bar{R}_k [B]_S$ odakle, primenom leme 2.18.1 dobijamo da postoji $y \in H'(S)$ takav da $y \geq [B]_S \ni B$ što znači da $\bar{B} \notin x$ povlači da $\exists y (x\bar{R}_k y$ i $B \in y)$ QED

2.22 Teorema o potpunosti računa S u odnosu na S kanonski model

Neka je S ekstenzija računa RW. Tada za sve $A \in \mathrm{ForL}$ važi:

$$\vdash_S A \Longleftrightarrow \mathcal{M}_k(S) \models A$$

Dokaz:
Isti kao i dokaz teoreme 1.11 jer za $\mathcal{M}_k(S)$ važi lema o kanoničnosti a definicija važenja u modelu je ista kao u R^+modelima.

Iz prethodnog stava neposredno proizlazi

2.23 Teorema o potpunosti računa RW

$$\vdash_{RW} A \Leftrightarrow \models_{RW} A$$

Dokaz:
($\Rightarrow$) je teorema 2.16.1
($\Leftarrow$) Dokazujemo kontrapoziciju.

$\not\vdash_{RW} A \Rightarrow \mathcal{M}_k(RW) \not\models A$ (Prema prethodnoj teoremi)

$\Rightarrow \not\models_{RW} A$ (Jer je, prema teoremi 2.20 RW kanonski RW model takodje i RW model, pa kako u njemu A ne važi to nije RW valjana)

Primene C semantike

U prethodnom odeljku je dokazana potpunost računa RW u odnosu na odgovarajuću semantiku, koju, jednostavnije, nazivamo C semantikom. Teoremom 2.22 dobijen je i jedan širi rezultat. Naime svaka ekstenzija S računa RW je potpuna u odnosu na svoj S kanonski RW model. Prirodno se nameće zamisao da se ovaj rezultat iskoristi za dokazivanje potpunosti različitih ekstenzija računa RW (medju njima je i R!). Prvo, preciziramo smisao u kom shvatamo potpunost.

2.24 Definicija
Neka je S ekstenzija računa RW i $\mathbb{K}(RW)$ klasa svih RW okvira.
2.24.1 Neka je $K \subseteq \mathbb{K}(RW)$ i $A \in ForL$

$$\models_K A \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall x(x \in K \Rightarrow x \models A)$$

2.24.2 S je potpun u odnosu na klasu okvira $K \subseteq \mathbb{K}(RW)$ akko

$$\forall A(\vdash_S A \Leftrightarrow \models_K A)$$

2.24.3 S je potpun akko je potpun u odnosu na bar jednu klasu $K \subseteq \mathbb{K}(RW)$.
2.24.4 S je aksiomatski potpun akko je potpun u odnosu na bar jednu klasu $K \subseteq \mathbb{K}(RW)$ koja je aksiomatska u jeziku prvog reda $\mathcal{L} = \{R, P, C\}$
2.24.5 S je ZFC potpun akko je potpun u odnosu na bar jednu klasu $K \subseteq \mathbb{K}(RW)$ koja je aksiomatska u ZFC u jeziku $\{R, P, C\} \cup L(ZFC)$.

2.24.6 S je <u>odredjen klasom $K \subseteq \mathbb{K}(RW)$</u> akko
$\forall \mathcal{X}(\mathcal{X} \in K \Leftrightarrow \forall A(\vdash_S A \Leftrightarrow \mathcal{X} \models A))$

Naglašavamo da iako teorema 2.22 obezbedjuje potpunost svake ekstenzije S računa RW u odnosu na njen kanonski <u>model</u>, iz nje ne proizlazi da je S potpun u odnosu na neku klasu <u>okvira</u> - čak ni u odnosu na $\{\mathcal{K}(S)\}$, jer sem kanonskog modela na kanonskom okviru mogu postojati i drugi modeli o čijim se osobinama a priori ništa ne zna.

Sledećom teoremom odredjujemo jedan dovoljan uslov za potpunost neke ekstenzije S računa RW u odnosu na neku klasu okvira K.

<u>2.25 Teorema</u>

Neka su S neka ekstenzija računa RW i $S \subseteq \mathbb{K}(RW)$ takvi da važi
2.25.1 $\forall A(\vdash_S A \Rightarrow \models_K A)$, i
2.25.2 $\mathcal{K}(S) \in K$.
Tada je S potpun u odnosu na klasu okvira K.

<u>Dokaz</u>:

Dovoljno je dokazati $\models_K A \Rightarrow \vdash_S A$ odnosno $\not\vdash_S A \Rightarrow \not\models_K A$. Neka $\not\vdash_S A$, tada, prema teoremi 2.22, $\mathcal{M}_k(S) \not\models A$, te, kako po pretpostavci $\mathcal{K}(S)$ koji je nosač modela $\mathcal{M}_k(S)$ pripada K, $\not\models_S A$.

Koristeći prethodni rezultat u ovom odeljku dokazujemo potpunost nekih ekstenzija računa RW.

Račun R se dobija kao ekstenzija računa RW shema-aksiomom $\bar{\bar{A}} \to A$. Sledećim stavovima opisujemo klasu RW okvira u odnosu na koju je potpun račun R.

<u>2.26 Teorema</u>

Za svaki RW okvir $\mathcal{X}$ važi
$\mathcal{X} \models \bar{\bar{A}} \to A \Leftrightarrow \mathcal{X} \models \forall x \exists y \forall z(y\bar{R}z \Leftrightarrow z \leqslant x)$

<u>Dokaz</u>:

Neka je $k(\bar{\bar{A}} \to A) \stackrel{def}{=} \forall x \exists y \forall z(y\bar{R}z \Leftrightarrow z \leqslant x)$. Lako je dokazati da je $\models k(\bar{\bar{A}} \to A) \Leftrightarrow \forall x \exists y(x\bar{R}y \text{ } \underline{i} \text{ } \forall z(y\bar{R}z \Rightarrow z \leqslant x))$

$(\Leftarrow)$ Neka $\mathcal{X} \models k(\bar{\bar{A}}$ $A)$. Dokazujemo da u svakom modelu $\mathcal{M}$, na okviru $\mathcal{X}$, važi $\mathcal{M} \models \bar{\bar{A}} \to A$ odnosno da $x \models \bar{\bar{A}} \Rightarrow x \models A$ što je ekvivalentno sa (1) ... $\forall y(x\bar{R}y \Rightarrow \exists z(y\bar{R}z \text{ } \underline{i} \text{ } z \models A)) \Rightarrow x \models A$.

Poslednja formula je tačna jer zbog $k(\bar{\bar{A}} \to A)$ postoji x^o takav da (2) ... $x\bar{R}x^o \text{ } \underline{i} \text{ } \forall z(x^oRz \Rightarrow z \leqslant x)$,
a prema antecedensu u (1) za x^o postoji x^{oo} takav da
(3) ... $x^oRx^{oo} \text{ } \underline{i} \text{ } x^{oo} \models A$

iz (3) i (2) (zamenom $z=x^{oo}$) proizlazi $x^{oo}\leqslant x$ i $x^{oo}\models A$ što zbog postojanosti daje $x\models A$ QED

($\Longrightarrow$) Dokazujemo kontrapoziciju.

Neka $\mathcal{X}\not\models k(\bar{\bar{A}}\rightarrow A)$ odnosno $\exists x\forall y(x\bar{R}y \Rightarrow \exists z(y\bar{R}z$ i $\neg z\leqslant x))$ što znači da za neko $a\in \mathrm{dom}\mathcal{X}$ važi

(4) ... $\mathcal{X}\models \forall y(a\bar{R}y \Rightarrow \exists z(y\bar{R}z$ i $\neg z\leqslant a))$

Definišimo $v:\mathrm{dom}\mathcal{X}\rightarrow P(V)$ sa

$$v(x)=\begin{cases} V-\{p_o\}, & \text{ako } t\leqslant a \\ V, & \text{ako } \neg t\leqslant a \end{cases}$$

v je valuacija na okviru $\mathcal{X}$ (jer $x\leqslant y$ i $x\models p_o \Rightarrow x\leqslant y$ i $\neg x\leqslant a \Rightarrow \neg y\leqslant a \Rightarrow y\models p_o$) i, zbog, (4) $a\models \bar{\bar{p}}_o$ ali $a\not\models p_o$ (jer $a\leqslant a$) te u modelu $\langle\mathcal{X},v\rangle$ ne važi shema $\bar{\bar{A}}\rightarrow A$ (jer ne važi $\bar{\bar{p}}_o\rightarrow p_o$).

Prema prethodnoj teoremi, klasa $\mathbb{K}(\bar{\bar{A}}\rightarrow A)$ svih RW okvira u kojima važi $k(\bar{\bar{A}}\rightarrow A)$ je klasa kojom je odredjen (u smislu definicije 2.24.6) račun R. Dokazaćemo da je R i potpun u odnosu na tu klasu kojom je odredjen. S obzirom na teoremu 2.25 dovoljno je još dokazati da važi

<u>2.27 Teorema</u>

$$\mathcal{K}(R)\in \mathbb{K}(\bar{\bar{A}}\rightarrow A)$$

<u>Dokaz</u>:

Neka $x\in \mathrm{dom}\mathcal{K}(R)$. Definišimo $x^* \overset{def}{=} \{A \mid \bar{A}\notin x\}$. Prema teoremi 2.8 $x^*\in \mathrm{dom}\mathcal{K}(R)(=H'(R))$ i $x^{**}=x$. Takodje, važi:

$$\begin{aligned} x^*\bar{R}_k z &\Longleftrightarrow \forall A(\bar{A}\notin x^* \ \underline{\text{ili}}\ A\notin z) && \text{(Prema 2.18)} \\ &\Longleftrightarrow \forall A(A\in z \Rightarrow \bar{A}\notin x^*) \\ &\Longleftrightarrow \forall A(A\in z \Rightarrow \bar{\bar{A}}\in x^{**}) \\ &\Longleftrightarrow z\subseteq x^{**} \\ &\Longleftrightarrow z\subseteq x && \text{(Jer } x^{**}=x) \end{aligned}$$

Dakle $x^*\bar{R}_k z \Longleftrightarrow z\subseteq x$ te u $\mathcal{K}(R)$ važi $k(\bar{\bar{A}}\rightarrow A)$ tj. $\mathcal{K}(R)\in \mathbb{K}(\bar{\bar{A}}\rightarrow A)$.

Prema tome važi

<u>2.28 Teorema</u>

$$\vdash_R A \Longleftrightarrow \models_{\mathbb{K}(\bar{\bar{A}}\rightarrow A)} A$$

Postavlja se pitanje kakav je odnos klase R okvira u smislu semantike Routley&Meyer i klase $\mathbb{K}(\bar{\bar{A}}\rightarrow A)$ u odnosu na koju smo dokazali potpunost računa R.

Sledećom teoremom dokazujemo da su te dve klase iste (preciznije, s obzirom na različite jezike na kojima su definisane, jedna preko druge definabilne) te da je Routley&Meyer semantika samo poseban slučaj naše semantike.

2.29 Teorema

Neka je $\mathcal{X}^+ = \langle X,R,P\rangle$ R^+okvir. Tada važi:

2.29.1 Ako na X postoji binarna relacija $\bar{R}$ takva da

1° $x \leq y$ i $y\bar{R}z \Rightarrow x\bar{R}z$

2° $R\bar{R}xyz \Rightarrow R\bar{R}xzy$

3° $\forall x \exists y \forall z (y\bar{R}z \Leftrightarrow z \leq x)$

onda postoji tačno jedno preslikavanje $^*: X \to X$ takvo da

P5 $Rxyz \Rightarrow Rxz^*y^*$

P6 $x^{**} = x$

$\bar{R}^*$ $x\bar{R}y \Leftrightarrow y \leq x^*$

2.29.2 Ako postoji preslikavanje $^*: X \to X$ takvo da je $\mathcal{X} = \langle \mathcal{X}^+, ^*\rangle$ R okvir (tj. važe P5 i P6) onda relacija $\bar{R}$ definisana na X sa

$$x\bar{R}y \overset{def}{\Longleftrightarrow} y \leq x^*$$

zadovoljava 1°, 2° i 3°.

Dokaz:

2.29.1

Iz 2° proizlazi

$\exists t(Rxyt$ i $t\bar{R}z) \Rightarrow \exists s(Rxzs$ i $s\bar{R}y)$, odakle, za x takvo da Px,

$\exists t(y \leq t$ i $t\bar{R}z) \Rightarrow \exists s(z \leq s$ i $s\bar{R}y)$, odnosno, zbog 1°,

$\exists t(y \leq t$ i $t\bar{R}z) \Rightarrow z\bar{R}y$, odakle, za t=y, dobijamo

$y\bar{R}z \Rightarrow z\bar{R}y$.

Dakle, relacija $\bar{R}$ je simetrična, što nadalje koristimo bez napomene.

Neka je (1) ... $\forall x \forall z(fx\bar{R}z \Leftrightarrow z \leq x)$ jedna Skolemizacija formule 3°. Za z=x iz (1) dobijamo

(2) ... $x\bar{R}fx$, odakle, zamenom x sa fx, i

(3) ... $fx\bar{R}f^2x$, što zajedno sa (1) daje

(4) ... $f^2x \leq x$.

Iz (4) dobijamo $f^3x \leq fx$ što, zbog (1) daje $x\bar{R}f^3x$, odnosno $f^3x\bar{R}x$ iz čega ponovnom primenom (1) dobijamo $x \leq f^2x$ što sa (4) daje (5) ... $f^2x = x$

Dakle, svaka Skolemova funkcija formule 3° zadovoljava

(6) ... $(fx\bar{R}z \Leftrightarrow z \leq x)$ i $x = f^2x$ i $x\bar{R}fx$

Odavde, stavljajući fx umesto x dobijamo $f^2x\bar{R}z \Leftrightarrow z \leq fx$ te zbog $x = f^2x$ i

(7) ... $x\bar{R}z \Leftrightarrow z \leq fx$

Ako je g neka Skolemova funkcija formule 3° onda ona takodje zadovoljava $x\bar{R}gx$ pa stavljajući z=gx u (7) dobijamo

(8) ... $gx \leq fx$

za svake dve Skolemove funkcije formule 3^o. Dakle, funkcija f je jedinstvena.
Prema do sada dokazanom postoji tačno jedna funkcija $^*: X \to X$ takva da (prema (6)) zadovoljava

$$\begin{array}{ll} P6 & x^{**} = x, \text{ i} \\ \bar{R}^* & x\bar{R}z \Leftrightarrow z \leq x^* \end{array}$$

Dovoljno je dokazati da * zadovoljava i P5

$$\begin{array}{lll} Rxyz & \Rightarrow Rxyz \text{ \underline{i} } z\bar{R}z^* & (\text{Iz } \bar{R}^* \text{ za } z = x^* \text{ sledi } x\bar{R}x^*) \\ & \Rightarrow R\bar{R}xyz^* & \\ & \Rightarrow R\bar{R}xz^*y & (\text{Prema } 2^o) \\ & \Rightarrow \exists t(Rxz^*t \text{ \underline{i} } t\bar{R}y) & \\ & \Rightarrow \exists t(Rxz^*t \text{ \underline{i} } t \leq y^*) & (\text{Prema } \bar{R}^*) \\ & \Rightarrow \exists t\exists v(Rxz^*t \text{ \underline{i} } Rvty^* \text{ \underline{i} } Pv) & \\ & \Rightarrow \exists t\exists v(Rxz^*t \text{ \underline{i} } Rtvy^* \text{ \underline{i} } Pv) & (1.2.2) \\ & \Rightarrow \exists v(R^2xz^*vy^* \text{ \underline{i} } Pv) & \\ & \Rightarrow \exists v(R^2vxz^*y^* \text{ \underline{i} } Pv) & (1.2.4) \\ & \Rightarrow \exists v\exists t(Rvxt \text{ \underline{i} } Rtz^*y^* \text{ \underline{i} } Pv) & \\ & \Rightarrow \exists t(x \leq t \text{ \underline{i} } Rtz^*y^*) & \\ & \Rightarrow Rxz^*y^* & (P3) \end{array}$$

2.29.2
Neka je $\mathfrak{X} = \langle \mathfrak{X}^+, v \rangle$ R okvir i

$$x\bar{R}y \overset{def}{\Longleftrightarrow} y \leq x^*$$

Dokazujemo 1^o, 2^o i 3^o

$$\begin{array}{lll} 1^o & x \leq y \text{ \underline{i} } y\bar{R}z & \Rightarrow x \leq y \text{ \underline{i} } z \leq y^* \\ & & \Rightarrow y^* \leq x^* \text{\underline{i} } z \leq y^* \\ & & \Rightarrow z \leq x^* \\ & & \Rightarrow x\bar{R}z \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} 2^o & R\bar{R}xyz & \Rightarrow \exists t(Rxyt \text{ \underline{i} } t\bar{R}z) & \\ & & \Rightarrow \exists t(Rxyt \text{ \underline{i} } t \leq z^*) & \\ & & \Rightarrow Rxyz^* & (1.2.5) \\ & & \Rightarrow Rxz^{**}y^* & \\ & & \Rightarrow Rxz^{**}y^* \text{\underline{i} } y^*\bar{R}y & \\ & & \Rightarrow Rxzy^* \text{\underline{i} } y^*\bar{R}y & \\ & & \Rightarrow R\bar{R}xzy & \end{array}$$

3^o $\quad \forall x\exists y\forall z(y\bar{R}z \Leftrightarrow z \leq x)$ je ekvivalentno (po definiciji $\bar{R}$)
sa $\quad \forall x\exists y\forall z(z \leq y^* \Leftrightarrow z \leq x)$ što je tačno za $y = x^*$.

Podudaranje R okvira i RW okvira iz klase $\mathbb{K}(\bar{\bar{A}}\to A)$ je i jače nego što tvrdi teorema 2.29. Naime, ono se proširuje i na semantiku.

2.30 Posledica

U svakom RW okviru iz klase $\mathbb{K}(\bar{\bar{A}}\to A)$, za sve modele na njemu, za sve x iz domena i za sve $A \in ForL$ važi

$$x\models\bar{A} \iff x^{*}\not\models A,$$

pri čemu je $\models$ sa leve strane ekvivalencije definisana u RW modelima a sa desne u R modelu definisanom na njemu posredstvom teoreme 2.29.

Dokaz:

$x\models\bar{A} \iff \forall y(x\bar{R}y \Rightarrow y\not\models A)$

$\iff \forall y(y\leqslant x^{*} \Rightarrow y\not\models A)$ (Prema 2.29.1 postoji tačno jedno preslikavanje * takvo da je $x\bar{R}y \iff y\leqslant x^{*}$ i koje čini taj RW model R modelom)

$\iff x^{*}\not\models A$

Poslednja ekvivalencija je tačna jer ($\Rightarrow$) važi za $y=x^{*}$ a ($\Leftarrow$) važi jer $y\leqslant x^{*}$ i $x^{*}\not\models A \Rightarrow y\not\models A$ zbog postojanosti.

Primetimo da smo, ovom analizom posvećenom potpunosti računa R u odnosu na C semantiku, dokazali ne samo da je Routley&Meyer semantika poseban slučaj naše, već i da je R (v. 2.26) potpun u odnosu na maksimalno moguću klasu RW okvira - klasu svih okvira u kojima važe sve teoreme R.

2.31 Definicija

R_{int} je ekstenzija računa RW shema-aksiomom

$$I13 \qquad \bar{\bar{A}}\wedge\bar{\bar{B}}\to\overline{\overline{A\wedge B}}$$

$k(\bar{\bar{A}}\wedge\bar{\bar{B}}\to\overline{\overline{A\wedge B}})$ je zamena za

$\forall x\forall y(x\bar{R}y \Rightarrow \exists z(x\bar{R}z \text{ i } \forall u_1\forall u_2(z\bar{R}u_1 \text{ i } z\bar{R}u_2 \Rightarrow \exists t(u_1\leqslant t \text{ i } u_2\leqslant t \text{ i } y\bar{R}t)))$

$\mathbb{K}(\bar{\bar{A}}\wedge\bar{\bar{B}}\to\overline{\overline{A\wedge B}}) \overset{def}{=} \{\mathcal{X}\in\mathbb{K}(RW) \mid \mathcal{X}\models k(\bar{\bar{A}}\wedge\bar{\bar{B}}\to\overline{\overline{A\wedge B}})$

2.32 Teorema

$$\vdash_{R_{int}} A \iff \models_{\mathbb{K}(\bar{\bar{A}}\wedge\bar{\bar{B}}\to\overline{\overline{A\wedge B}})} A$$

Dokaz:

Prema teoremi 2.25, dovoljno je dokazati da

1° Sve teoreme R_{int} važe na svim okvirima iz klase $\mathbb{K}(\bar{\bar{A}}\wedge\bar{\bar{B}}\to\overline{\overline{A\wedge B}})$, i

2° $\mathcal{K}(R_{int})\in\mathbb{K}(\bar{\bar{A}}\wedge\bar{\bar{B}}\to\overline{\overline{A\wedge B}})$

1° Dovoljno je dokazati da u svakom ovakvom okviru važi I13 odnosno

$x \models \bar{\bar{A}} \wedge \bar{\bar{B}} \Rightarrow x \models \overline{\overline{A \wedge B}}$ (za sve x u svakom modelu tog okvira)

akko $x \models \bar{\bar{A}}, x \models \bar{\bar{B}} \Rightarrow (x\bar{R}y \Rightarrow y \not\models \overline{A \wedge B})$

akko $x\bar{R}y, x \models \bar{\bar{A}}, x \models \bar{\bar{B}} \Rightarrow \exists t(y\bar{R}t, t \models A, t \models B)$

Dokazujemo poslednju implikaciju. Kako je $x\bar{R}y$ to zbog formule $k(\bar{\bar{A}} \wedge \bar{\bar{B}} \to \overline{\overline{A \wedge B}})$ postoji z takav da

(1) ... $x\bar{R}z$ i $\forall u_1 \forall u_2 (z\bar{R}u_1$ i $z\bar{R}u_2 \Rightarrow \exists t(u_1 \leq t$ i $u_2 \leq t$ i $y\bar{R}t))$.

Prema pretpostavci, $x \models \bar{\bar{A}}$ i $x \models \bar{\bar{B}}$ pa, kako $x\bar{R}z$, $z \not\models \bar{A}$ i $z \not\models \bar{B}$ što znači da postoje u_1 i u_2 takvi da $z\bar{R}u_1$, $z\bar{R}u_2$, $u_1 \models A$ i $u_2 \models B$. No prema (1) postoji t takav da je veći ili jednak i od u_1 i od u_2 (pa zbog postojanosti za njega važi $t \models A$ i $t \models B$) i takav da je $y\bar{R}t$. To je i zaključak dokazivane implikacije.

2° Dokazujemo da u $\mathcal{K}(R_{int})$ važi $k(\bar{\bar{A}} \wedge \bar{\bar{B}} \to \overline{\overline{A \wedge B}})$.

Neka $x\bar{R}_k y$ i neka je $\mathfrak{f} = \{A \mid \bar{\bar{A}} \in y\}$. Zbog I13 $\bar{\bar{A}} \wedge \bar{\bar{B}} \to \overline{\overline{A \wedge B}}$ proizlazi da je $\mathfrak{f}$ zatvoren za AD a zbog $\vdash A \to B \Rightarrow \vdash \bar{\bar{A}} \to \bar{\bar{B}}$ i za MP pa je $\mathfrak{f}$ R_{int} d.z. tj. pripada $H(R_{int})$. Takodje, zbog $\vdash A \to \bar{\bar{A}}$, $y \subseteq \mathfrak{f}$.

Dokazujemo da $x\bar{R}\mathfrak{f}$. U suprotnom postoje $\bar{A} \in x$ i $A \in \mathfrak{f}$, ali tada $\bar{\bar{A}} \in y$ i (zbog $\vdash \bar{A} \to \bar{\bar{\bar{A}}}$) $\bar{\bar{\bar{A}}} \in x$ što je nemoguće zbog pretpostavke $x\bar{R}y$. Dakle $x\bar{R}\mathfrak{f}$. $\mathfrak{f}$ ne mora biti prost ali zbog leme 2.18.1 postoji prost z takav da $z \supseteq \mathfrak{f} \supseteq y$ i $x\bar{R}z$. Dokazujemo da taj z zadovoljava

(2) ... $z\bar{R}u_1$ i $z\bar{R}u_2 \Rightarrow \exists t(u_1 \subseteq t$ i $u_2 \subseteq t$ i $y\bar{R}t)$

što je dovoljno da važi $k(\bar{\bar{A}} \wedge \bar{\bar{B}} \to \overline{\overline{A \wedge B}})$. Neka $z\bar{R}u_1$ i $z\bar{R}u_2$ i neka je $u = [u_1 \cup u_2]_{R_{int}}$. Važi

(3) ... $y\bar{R}u$

U suprotnom, postoje $\bar{A} \in y$ i $A \in u$. No $A \in u$ znači da za neke $U_1 \in u_1$ i $U_2 \in u_2$ važi $\vdash U_1 \wedge U_2 \to A$ odakle $\vdash \bar{A} \to \overline{U_1 \wedge U_2}$ pa zbog $\bar{A} \in y$ važi $\overline{U_1 \wedge U_2} \in y$ pa i $\overline{\overline{\overline{U_1 \wedge U_2}}} \in y$. Medjutim, zbog I13 imamo da je $\vdash \bar{\bar{U}}_1 \wedge \bar{\bar{U}}_2 \to \overline{\overline{U_1 \wedge U_2}}$ pa je i formula $\overline{\bar{\bar{U}}_1 \wedge \bar{\bar{U}}_2}$ u y; poslednja formula je (i u RW) ekvivalentna sa $\bar{\bar{\bar{U}}}_1 \vee \bar{\bar{\bar{U}}}_2$ te i ova pripada y a prema definiciji $\mathfrak{f}$ njemu pripada formula $\bar{U}_1 \vee \bar{U}_2$. No $\mathfrak{f} \subseteq z$ pa z sadrži formulu $\bar{U}_1 \vee \bar{U}_2$. z je, medjutim, prost pa sadrži ili $\bar{U}_1$ ili $\bar{U}_2$; medjutim $U_1 \in u_1$ i $U_2 \in u_2$ i $z\bar{R}u_1$ i $z\bar{R}u_2$ što je u kontradikciji sa prethodnim zaključkom. Dakle, važi (3).

Kako je $y\bar{R}u$ to prema lemi 2.18.1 postoji t takav da je $u \subseteq t$ i $y\bar{R}t$. Prema konstrukciji u, t sadrži i u_1 i u_2. QED

Shema I13 je teorema u H pa je prethodno izložen račun zato i nazvan R_{int} (intuicionistički).

U računu RW formule $\overline{A}\wedge\overline{B}\leftrightarrow\overline{A\vee B}$ i $\overline{A}\vee\overline{B}\to\overline{A\wedge B}$ su teoreme. Formula $\overline{A\vee B}\to\overline{A}\vee\overline{B}$ to, medjutim, nije. Ona nije teorema ni u H pa je, stoga, sledećom definicijom uvedeno jedno neintuicionističko proširenje računa RW.

2.33 Definicija

2.33.1 RDeM je ekstenzija računa RW shema-aksiomom

$$\text{DeM}\quad \overline{A\wedge B}\to\overline{A}\vee\overline{B}$$

2.33.2 $k(\text{DeM}) \overset{\text{def}}{=} \forall x\forall y_1\forall y_2(x\bar{R}y_1 \ \underline{i}\ x\bar{R}y_2 \Rightarrow \exists y(x\bar{R}y \ \underline{i}\ y_1\leq y \ \underline{i}\ y_2\leq y))$

2.33.3 $\mathbb{K}(\text{RDeM}) \overset{\text{def}}{=} \{\mathfrak{X}\in\mathbb{K}(\text{RW}) \mid \mathfrak{X}\models k(\text{DeM})\}$

2.34 Lema

RDeM je ekstenzija računa R_{int}

Dokaz:

$\vdash_{RW} \overline{\overline{A}}\wedge\overline{\overline{B}}\to\overline{\overline{A}\vee\overline{B}}$, $\vdash_{RDeM} \overline{\overline{A}\vee\overline{B}}\to\overline{\overline{A\wedge B}} \Rightarrow \vdash_{RDeM} \overline{\overline{A}}\wedge\overline{\overline{B}}\to\overline{\overline{A\wedge B}}$.

2.35 Teorema

U svakom RW okviru $\mathfrak{X}$ važi

$$\mathfrak{X}\models\overline{A\wedge B}\to\overline{A}\vee\overline{B} \iff \mathfrak{X}\models k(\text{DeM})$$

Dokaz:

($\Leftarrow$) Neka u RW okviru $\mathfrak{X}$ važi k(DeM) i neka je $\mathfrak{M}$ neki model čiji je okvir $\mathfrak{X}$.

$\mathfrak{M}\models\overline{A\wedge B}\to\overline{A}\vee\overline{B}$

akko $x\models\overline{A\wedge B} \Rightarrow x\models\overline{A}\vee\overline{B}$

akko $\forall y(x\bar{R}y \Rightarrow y\not\models A\wedge B) \Rightarrow x\models\overline{A}$ ili $x\models\overline{B}$

akko $x\not\models\overline{A}, x\not\models\overline{B} \Rightarrow \exists y(x\bar{R}y, y\models A\wedge B)$

akko $\exists y_1(x\bar{R}y_1, y_1\models A), \exists y_2(x\bar{R}y_2, y_2\models B) \Rightarrow \exists y(x\bar{R}y, y\models A, y\models B)$

Poslednja implikacija je tačna jer, po pretpostavci, u $\mathfrak{X}$ važi k(DeM) pa, za y_1 i y_2 iz antecedensa, postoji y takav da je $x\bar{R}y$ i $y_1\leq y$ i $y_2\leq y$; no, zbog $y_1\models A$ i $y_2\models B$ i zbog postojanosti, važi i $y\models A$ i $y\models B$ QED

($\Rightarrow$) Dokazujemo kontrapoziciju. Neka $\mathfrak{X}\not\models k(\text{DeM})$. Tada u $\mathfrak{X}$ važi $\exists x\exists y_1\exists y_2(x\bar{R}y_1 \ \underline{i}\ x\bar{R}y_2 \ \underline{i}\ \forall y(x\bar{R}y \Rightarrow \neg y_1\leq y$ ili $\neg y_2\leq y))$ što znači da za neke $a,b,c\in\text{dom}\,\mathfrak{X}$ u $\mathfrak{X}$ važi

$$(*)\ \ldots\quad a\bar{R}b \ \underline{i}\ a\bar{R}c \ \underline{i}\ \forall y(a\bar{R}y \Rightarrow \neg b\leq y \ \underline{\text{ili}}\ \neg c\leq y)$$

Definišimo $v:\text{dom}\,\mathfrak{X}\to P(V)$ sa: $v(t)\ni p_0 \Leftrightarrow t\geq b, v(t)\ni p_1 \Leftrightarrow t\geq c$ i $v(t)\ni p_i$ za sve $i\geq 2$. Lako se proverava da je v valuacija. Medjutim, u modelu $\langle\mathfrak{X},v\rangle$ definisanom na $\mathfrak{X}$ ovom valuacijom važi $a\bar{R}c$ i $c\models p_1$ i $a\bar{R}b$ i $b\models p_0$ tj. $a\not\models\overline{p_0}$ i $a\not\models\overline{p_1}$ odnosno $a\not\models\overline{p_0}\vee\overline{p_1}$; ali zbog $\forall y(a\bar{R}y \Rightarrow \neg b\leq y$ ili $\neg c\leq y)$, važi i $a\models\overline{p_0\wedge p_1}$. Dakle, u ovom modelu ne važi DeM QED

Prethodnom teoremom je dokazano da je $\mathbb{K}$(RDeM) klasa svih RW okvira u kojima važe sve teoreme računa RDeM. Dokazujemo da je RDeM i potpun u odnosu na ovu klasu. Za to je, prema kriterijumu 2.25 dovoljno dokazati da važi

2.36 Teorema

$$\mathcal{K}(\mathrm{RDeM}) \in \mathbb{K}(\mathrm{RDeM})$$

Dokaz:

Dokazujemo da u $\mathcal{K}$(RDeM) važi k(DeM). Pretpostavimo da za neke $x,y_1,y_2 \in H'(\mathrm{RDeM})$ važi $x\bar{R}y_1$ i $x\bar{R}y_2$. Neka je $z \overset{def}{=} [y_1 \cup y_2]_{\mathrm{RDeM}}$. Dokazujemo da $x\bar{R}z$. U suprotnom, prema 2.18.3.3, za neku formulu A važi $\bar{A} \in x$ i $A \in z$. Kako je z deduktivno zatvorenje unije skupova formula y_1 i y_2, to postoje $Y_1 \in y_1$ i $Y_2 \in y_2$ takvi da $\vdash_{\mathrm{RDeM}} Y_1 \wedge Y_2 \rightarrow A$ odakle i $\vdash_{\mathrm{RDeM}} \bar{A} \rightarrow \overline{Y_1 \wedge Y_2}$. Kako $\bar{A} \in x$ to $\overline{Y_1 \wedge Y_2} \in x$. Medjutim (DeM) $\overline{Y_1 \wedge Y_2} \rightarrow \bar{Y}_1 \vee \bar{Y}_2$ pa $\bar{Y}_1 \vee \bar{Y}_2 \in x$ te, kako je x prost, $\bar{Y}_1 \in x$ ili $\bar{Y}_2 \in x$ što je nemoguće jer je x, po polaznoj pretpostavci uzajamno neprotivrečan i sa y_1 i sa y_2. Dakle $x\bar{R}z$. Prema lemi 2.18.1 postoji $y \in H'(\mathrm{RDeM})$ takav da $z \subseteq y$ i $x\bar{R}y$. Kako $y \geq z$ i $y_1,y_2 \subseteq z$ to i $y_1,y_2 \subseteq y$ QED.

Prema tome

2.37 Teorema

$$\vdash_{\mathrm{RDeM}} A \Longleftrightarrow \models_{\mathbb{K}(\mathrm{RDeM})} A$$

Može se, medjutim, dokazati da je RDeM potpun i u odnosu na jednu, takodje aksiomatsku, ali užu od $\mathbb{K}$(RDeM), klasu RW okvira koja se, uz to, opisuje i jednostavnijom karakterističnom formulom.

2.38 Lema

$$\mathcal{K}(\mathrm{RDeM}) \models \forall x \exists y \forall z (x\bar{R}z \Longleftrightarrow z \leq y)$$

Dokaz:

Neka je, za $x \in H'(\mathrm{RDeM})$, $x^* \overset{def}{=} \{A \mid \bar{A} \notin x\}$. x^* je zatvoren za MP i prost (što se dokazuje samo uz teoreme računa RW; videti dokaz teoreme 2.8). Medjutim, zbog DeM važi i

$A,B \in x^* \Rightarrow \bar{A},\bar{B} \notin x$

$\Rightarrow \bar{A} \vee \bar{B} \notin x$ (Jer je x prost po pretpostavci)

$\Rightarrow \overline{A \wedge B} \notin x$ (Jer DeM i x je zatvoren za MP)

$\Rightarrow A \wedge B \in x^*$

Dakle, x^* je zatvoren i za AD pa $x^* \in H'(\mathrm{RDeM})$

Prema 2.18.3.3 $x\bar{R}z$ je u kanonskom okviru ekvivalentno sa $\forall A(\bar{A} \notin x$ ili $A \notin x)$ a to je, po definiciji x^*, dalje ekvivalentno sa $\forall A(A \in x^*$ <u>ili</u> $A \notin z)$ odnosno sa $\forall A(A \in z \Rightarrow A \in x^*)$ i sa $z \subseteq x^*$. Dakle u $\mathcal{K}(RDeM)$ važi $x\bar{R}z \Leftrightarrow z \subseteq x^*$ te je x^* traženi y.

<u>2.39 Teorema</u>

Neka je $\mathbb{K}'(RDeM) = \{\mathfrak{X} \in \mathbb{K}(RW) \mid \mathfrak{X} \models \forall x \exists y \forall z (x\bar{R}z \Leftrightarrow z \leqslant y)\}$ tada

2.39.1 $\mathbb{K}'(RDeM) \subseteq \mathbb{K}(RDeM)$

2.39.2 $\vdash_{RDeM} A \Leftrightarrow \models_{\mathbb{K}'(RDeM)} A$

<u>Dokaz:</u>

2.39.1 Dokazujemo da u svakom okviru iz $\mathbb{K}'(RDeM)$ važi k(DeM). Neka je $x\bar{R}y_1$ i $x\bar{R}y_2$. Prema svojstvu okvira iz $\mathbb{K}'(RDeM)$ za x postoji y takav da je $x\bar{R}z \Leftrightarrow z \leqslant y$ (za sve z). Odavde, stavljajući, redom, z=y, $z=y_1$ i $z=y_2$ dobijamo $x\bar{R}y$, $y_1 \leqslant y$ i $y_2 \leqslant y$ QED

2.39.2 je tačno jer, prema lemi 2.38 kanonski okvir za RDeM pripada klasi $\mathbb{K}'(RDeM)$, a prema 2.39.1 klasa $\mathbb{K}'(RDeM)$ je podklasa klase $\mathbb{K}(RDeM)$ pa na okvirima klase $\mathbb{K}'(RDeM)$ važe sve teoreme računa RDeM, što je, prema 2.25, dovoljno.

Teorema slična teoremi 2.29 važi i za račun RDeM što omogućuje i alternativnu semantizaciju računa RDeM u duhu Routley&Meyer semantike.

<u>2.40 Teorema</u>

Neka je $\langle X,R,P \rangle$ R^+ okvir

2.40.1 Ako na X postoji binarna relacija $\bar{R}$ takva da važi

1° $x \leqslant y$ <u>i</u> $y\bar{R}z \Rightarrow x\bar{R}z$

2° $R\bar{R}xyz \Rightarrow R\bar{R}xzy$

3° $\forall x \exists y \forall z (x\bar{R}z \Leftrightarrow z \leqslant y)$

onda na X postoji tačno jedna funkcija $^*: X \to X$ takva da važi

P5 $Rxyz \Rightarrow Rxz^*y^*$

P6′ $x \leqslant x^{**}$

$x\bar{R}y \Leftrightarrow y \leqslant x^*$

2.40.2 Ako na X postoji funkcija $^*: X \to X$ takva da na X važi P5 i P6′ onda relacija $\bar{R}$ definisana sa

$$x\bar{R}y \overset{def}{\Longleftrightarrow} y \leqslant x^*$$

zadovoljava $1^\circ, 2^\circ$ i 3° iz 2.40.1

2.40.3 Račun RDeM je potpun u odnosu na klasu okvira signature $\langle X,R,P,^* \rangle$ gde je $\langle X,R,P \rangle$ R^+okvir, *zadovoljava P5 i P6′a definicija $\models$ za $^-$ glasi $x \models \bar{A} \overset{def}{\Longleftrightarrow} x^* \not\models A$.

<u>Dokaz:</u>

2.40.1 Iz dokaza teoreme 2.29 proizlazi da u svakom R^+ okviru 1° i 2° povlače simetričnost relacije $\bar{R}$ (nezavisno od 3°) što

nadalje koristimo.
Skolemizacijom formule 3^o dobijamo da za bar jednu funkciju $f:X\to X$ važi

$(1)_f$ ... $x\bar{R}z \Leftrightarrow z\leq fx$, odakle, za $z=fx$, dobijamo

$(2)_f$ ... $x\bar{R}fx$

Medjutim, ako je i g neka Skolemova funkcija formule 3^o ona takodje zadovoljava $(1)_g$ i $(2)_g$ pa, stavljajući $z=gx$ u $(1)_f$ dobijamo $x\bar{R}gx \Leftrightarrow gx\leq fx$ odakle, zbog $x\bar{R}gx$, i $gx\leq fx$ za sve $x\in X$ i sve Skolemove funkcije formule 3^o. Dakle, Skolemova funkcija formule 3^o je jedinstvena i označavaćemo je sa $*$. Stavljajući u (1) $z=x$ i, umesto x, x^* dobijamo

(3) ... $x^*\bar{R}x \Leftrightarrow x\leq x^{**}$, odakle zbog simetrije i (2),

P6′ $x\leq x^{**}$

Ostaje da se dokaže P5. Važi sledeći niz implikacija

$Rxyz \Rightarrow Rxyz \text{ \underline{i} } z\bar{R}z^*$ (Prema (2))

$\Rightarrow R\bar{R}xyz^*$

$\Rightarrow R\bar{R}xz^*y$ (Prema 2^o)

$\Rightarrow \exists t(Rxz^*t \text{ \underline{i} } t\bar{R}y)$

$\Rightarrow \exists t(Rxz^*t \text{ \underline{i} } t\leq y^*)$ (Prema (1))

$\Rightarrow Rxz^*y^*$ (Prema 1.2.5) QED

2.40.2 Neka $*$ zadovoljava P5 i P6′ i neka je $x\bar{R}y \overset{def}{\Leftrightarrow} y\leq x^*$. Dokazujemo 1^o, 2^o i 3^o. Prethodno dokazujemo

(4) ... $x\leq y \Rightarrow y^*\leq x^*$

$x\leq y \Rightarrow \exists t(Pt \text{ \underline{i} } Rtxy)$

$\Rightarrow \exists t(Pt \text{ \underline{i} } Rty^*x^*)$

$\Rightarrow y^*\leq x^*$

(5) ... $x\bar{R}y \Rightarrow y\bar{R}x$

$x\bar{R}y \Rightarrow y\leq x^*$

$\Rightarrow x^{**}\leq y^*$ (Prema (4))

$\Rightarrow x\leq y^*$ (Jer je prema P6′ $x\leq x^{**}$)

$\Rightarrow y\bar{R}x$

1^o $x\leq y \text{ \underline{i} } y\bar{R}z \Rightarrow x\leq y \text{ \underline{i} } z\bar{R}y$ (Prema (5))

$\Rightarrow x\leq y \text{ \underline{i} } y\leq z^*$

$\Rightarrow x\leq z^*$

$\Rightarrow z\bar{R}x$

$\Rightarrow x\bar{R}z$

2^o $R\bar{R}xyz \Rightarrow \exists t(Rxyt \text{ \underline{i} } t\bar{R}z)$

$\Rightarrow \exists t(Rxyt \text{ \underline{i} } t\leq z^*)$

$\Rightarrow Rxyz^*$ (Prema 1.2.5)

$\Rightarrow Rxz^{**}y^*$ (Prema P5)

$\Rightarrow Rz^{**}xy^*$

$\Rightarrow Rzxy^*$ (Jer je $z \leq z^{**}$ prema P6′)

$\Rightarrow Rxzy^*$

$\Rightarrow Rxzy^*$ i $y^*\bar{R}y$

$\Rightarrow R\bar{R}xzy$

3^o je neposredna posledica definicione aksiome za $\bar{R}$.
2.40.3 U okviru $\langle X,R,P,^*\rangle$, gde je $\langle X,R,P\rangle$ R^+ okvir a * zadovoljava P5 i P6′, postoji relacija $\bar{R}$ koja, na osnovu 2.40.2, zadovoljava 1^o, 2^o i 3^o. No 1^o i 2^o su, tim redom, 2.13.1.1 i 2.13.1.2, pa, prema teoremi 2.13.2 relacija C definisana sa $Cx \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall u \forall v(Ruvx \Rightarrow u\bar{R}v)$ je takva da važi $x\bar{R}y \Leftrightarrow \exists z(Rxyz$ i $Cz)$ te je $\langle X,R,P,C\rangle$ jedan RW okvir u kome je relacija $\bar{R}$ upravo relacija kojom se semantizuje negacija. Prema tome, važi:

$x \models \bar{A} \Leftrightarrow \forall y(x\bar{R}y \Rightarrow y \not\models A)$

$\Leftrightarrow \forall y(y \leq x^* \Rightarrow y \not\models A)$ (Po definiciji relacije $\bar{R}$)

$\Leftrightarrow x^* \not\models A$

Poslednja ekvivalencija je tačna jer ($\Rightarrow$) važi zbog $x^* \leq x^*$ a ($\Leftarrow$) proizlazi iz postojanosti.
Dakle, klasa okvira tipa $\langle X,R,P,^*\rangle$ je takva da svaki okvir u njoj verifikuje iste formule kao i okvir iz klase $\mathbb{K}'$(RDeM) te je, stoga, račun RDeM i u odnosu na nju potpun.

Ovo poglavlje zaključujemo prikazivanjem semantike za još dva iskazna računa koji doduše nisu relevantni (nemaju svojstvo zajedničke promenljive) ali su zato u vezi sa nekim od ključnih (nerelevantnih) iskaznih računa.

<u>2.41 Teorema</u>

Neka $\mathfrak{X} \in \mathbb{K}$(RW), tada važi

2.41.1 $\mathfrak{X} \models A \to (\bar{A} \to B) \Leftrightarrow \mathfrak{X} \models \forall x \forall y \forall z(Rxyz \Rightarrow y\bar{R}x)$

2.42.2 $\mathfrak{X} \models A \wedge \bar{A} \to B \Leftrightarrow \mathfrak{X} \models \forall x\, x\bar{R}x$

<u>Dokaz</u>:

2.41.1 ($\Leftarrow$)

$\mathfrak{X} \models A \to (\bar{A} \to B)$

akko $x \models A \Rightarrow x \models \bar{A} \to B$ (Za sve modele na $\mathfrak{X}$ i sve $x \in \mathrm{dom}\,\mathfrak{X}$)

akko $x \models A \Rightarrow (Rxyz, y \models \bar{A} \Rightarrow z \models B)$

akko $x \models A, Rxyz, \forall t(y\bar{R}t \Rightarrow t \not\models A) \Rightarrow z \models B$

Poslednja formula je tačna jer Rxyz povlači, po pretpostavci, $y\bar{R}x$ te zbog $\forall t(y\bar{R}t \Rightarrow t \not\models A)$ proizlazi $x \not\models A$. No, ovo je protivrečno sa $x \models A$ pa je antecedens ove formule netačan.

($\Rightarrow$) Dokazujemo kontrapoziciju. Neka, dakle u RW okviru $\mathcal{X}$ za neke $a,b,c \in \mathrm{dom}\mathcal{X}$ važi $Rabc$ i $\neg b\bar{R}a$. Definišimo $v:\mathrm{dom}\mathcal{X} \to P(V)$ sa $p_0 \in v(t) \Leftrightarrow \neg b\bar{R}t$, $p_1 \in v(t) \Leftrightarrow \neg t \leqslant c$ i $p_i \in v(t)$ za $i \geqslant 2$. Lako se proverava da je v valuacija u okviru $\mathcal{X}$ i to takva da važi $a \models p_0$ i $a \not\models \bar{p}_0 \to p_1$. Dakle, u modelu $\langle \mathcal{X}, v \rangle$ ne važi formula $p_0 \to (\bar{p}_0 \to p_1)$ pa u okviru $\mathcal{X}$ ne važi shema $A \to (\bar{A} \to B)$ QED

2.41.2

($\Leftarrow$) $\mathcal{X} \models A \wedge \bar{A} \to B$

akko $x \models A \wedge \bar{A} \Rightarrow x \models B$ (Za sve modele na $\mathcal{X}$ i sve $x \in \mathrm{dom}\,\mathcal{X}$)

akko $x \models A, \forall y(x\bar{R}y \Rightarrow y \not\models A) \Rightarrow x \models B$

Poslednja implikacija je tačna jer pretpostavka $x\bar{R}x$ i antecedens $x \models A, \forall y(x\bar{R}y \Rightarrow y \not\models A)$ daju $x \models A, x \not\models A$ što je kontradikcija pa povlači $x \models B$.

($\Rightarrow$) Dokazujemo kontrapoziciju. Neka, dakle u RW okviru $\mathcal{X}$ za neko $a \in \mathrm{dom}\mathcal{X}$ važi $\neg a\bar{R}a$. Definišimo $v:\mathrm{dom}\mathcal{X} \to P(V)$ sa $p_0 \in v(t) \Leftrightarrow \neg a\bar{R}t$, $p_1 \in v(t) \Leftrightarrow \neg t \leqslant a$ i $p_i \in v(t)$ za $i \geqslant 2$. Lako se proverava da je v valuacija u okviru $\mathcal{X}$ i to takva da $a \models p_0$, $a \models \bar{p}_0$ i $a \not\models p_1$. Dakle u modelu $\langle \mathcal{X}, v \rangle$ ne važi formula $p_0 \wedge \bar{p}_0 \to p_1$ pa u okviru $\mathcal{X}$ ne važi shema $A \wedge \bar{A} \to B$ QED

<u>2.42 Definicija</u>

2.42.1 C_1 je ekstenzija računa Rw shema-aksiomom $A \to (\bar{A} \to B)$

2.42.2 C_2 je ekstenzija računa RW shema-aksiomom $A \wedge \bar{A} \to B$

Teoremom 2.41 je utvrdjeno da su klase $\mathbb{K}(C_1)$ i $\mathbb{K}(C_2)$ aksiomatske. Prirodno se nameće pitanje potpunosti računa C_1 i C_2 u odnosu na ove klase. Medjutim, prethodno korišćena tehnika dokazivanja potpunosti se za ove račune ne može iskoristiti jer ni $\mathcal{K}(C_1)$ ni $\mathcal{K}(C_2)$ ne pripadaju klasama $\mathbb{K}(C_1)$ odnosno $\mathbb{K}(C_2)$. Naime, $Rxyz \Rightarrow y\bar{R}x$ ne važi u $\mathcal{K}(C_1)$ jer je netačna ako je $x=y=z=\mathrm{For}L$. Slično, $x\bar{R}x$ ne važi u $\mathcal{K}(C_2)$ jer je netačna ako je $x=\mathrm{For}L$. Ipak, računi C_1 i C_2 su potpuni u odnosu pomenute klase. U dokazu potpunosti umesto kanonskih okvira i modela koristimo striktne kanonske okvire i modele.

<u>2.43 Teorema</u>

Neka je S neka ekspanzija računa Rw u jeziku L. Tada važi:

2.43.1 Striktan S kanonski okvir $\mathcal{K}'(S)$ je RW okvir.

2.43.2 Striktan S kanonski model $\mathcal{M}'_k(S)$ je RW model.

<u>Dokaz</u>: 2.43.2 je trivijalna posledica 2.43.1 jer je kanonska valuacija v_k svakako valuacija. Dokazujemo 2.43.1. $\mathcal{K}'(S)$ je

ekspanzija striktnog $^{+}$kanonskog R^{+} okvira za račun S (koji prema 1.8.2 jeste R^{+} okvir) jednom unarnom relacijom C_k koja, budimo formalni do kraja, ostaje unarna i kada joj se suzi domen.

2.44 Lema o kanoničnosti striktnog S kanonskog RW modela

Neka je S neka ekspanzija računa RW u jeziku L. Tada je $\mathcal{M}'_k(S)$ kanoničan.

Dokaz:

Za veznike $\wedge, \vee$ i $\rightarrow$ je isti kao i dokaz leme 1.10.2 jer je S kao ekspanzija računa RW takodje i ekspanzija računa R^{+}. Preostaje da se kanoničnost dokaže za veznik $^{-}$. Ona je u dokazu leme 2.21 već dokazana za proizvoljne $x,y,z \in H'(S)$. Dovoljno je, prema tome, dokazati da isti dokaz važi u slučaju da se iz domena $H'(S)$ odstrane $\emptyset$ i ForL. Kako se radi o sužavanju domena, dovoljno je dokazati da egzistencijalne formule iz pomenutog dokaza važe. Jedina egzistencijalna formula je

$$\bar{B} \notin x \Rightarrow \exists y(x\bar{R}y \ \underline{i}\ B \in y)$$

Neka $x \in H'(S)-\{\emptyset, \mathrm{ForL}\}$. y iz konsekvensa gornje implikacije, prema dokazu 2.21, postoji; prema tome, dovoljno je dokazati da nije ni prazan ni ForL ako ni x nije takav. y je očigledno neprazan jer $B \in y$. $y \neq$ ForL jer u suprotnom, kako je u kanonskom okviru $x\bar{R}y$ ekvivalentno (vidi 2.18.3.2) sa $C_k(x \circ y)$, važi (jer $x \neq \emptyset$) $x \circ y = x \circ \mathrm{ForL} = \mathrm{ForL}$ (vidi 0.8.7); to bi značilo da je $C_k(\mathrm{ForL})$ što je naravno nemoguće jer ForL sadrži sve formule pa i negacije teorema. Kraj dokaza.

2.45 Teorema

2.45.1 $\vdash_{C_1} A \Longleftrightarrow \models_{\mathbb{K}(C_1)} A$

2.45.2 $\vdash_{C_2} A \Longleftrightarrow \models_{\mathbb{K}(C_2)} A$

Dokaz:

Prema teoremi 2.43 i lemi 2.44 striktni kanonski okviri za račune C_1 i C_2 su RW okviri i striktni kanonski modeli su kanonični. Prema tome, da bi dokazali potpunost ovih računa u odnosu na odgovarajuće klase okvira dovoljno je, prema 2.25, dokazati da striktni kanonski okviri pripadaju tim klasama.

2.45.1 $\mathcal{K}'(C_1) \in \mathbb{K}(C_1)$. Prema 2.41 dovoljno je dokazati da u $\mathcal{K}'(C_1)$ važi formula $Rxyz \Rightarrow y\bar{R}x$ za sve x,y,z iz domena. Neka Rxyz. U striktnom kanonskom okviru to znači da $x \circ y \subseteq z$. Kako je $z \neq$ ForL to mora biti $y\bar{R}x$ jer u suprotnom za neko $A \in x$ važi

$\bar{A} \in y$ pa kako je $A \to (\bar{A} \to B)$ teorema u C_1 to $B \in x \circ y$, odnosno $B \in z$ za sve $B \in ForL$; tj. $z = ForL$ što je nemoguće.

2.45.2 $\mathcal{K}'(C_2) \in \mathbb{K}(C_2)$. Prema 2.41 dovoljno je dokazati da u $\mathcal{K}'(C_2)$ važi $x\bar{R}x$ za sve x iz domena. Pretpostavimo suprotno. Tada za neko x koje nije ni prazno ni ForL važi $x\bar{R}x$ što znači da postoji $A \in x$ tako da $\bar{A} \in x$; no kako je $A \wedge \bar{A} \to B$ teorema u C_2 dobijamo da $B \in x$ za sve $B \in ForL$. Dakle, $x = ForL$. Kontradikcija. Kraj dokaza.

$\bar{R}$ semantika. Dalje slabljenje negacije

Semantika za negaciju u računima čiji je pozitivan fragment R^+, uvedena pomoću unarne relacije C, razvijana je, u prethodnom odeljku, pomoću binarne relacije $\bar{R}$ definisane sa

$$(*) \ldots \quad x\bar{R}y \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists z(Rxyz \text{ i } Cz)$$

Teoremom 2.13 je dokazano da relacija R ima osobine

$$1^o \quad x \leq y \text{ i } y\bar{R}z \Rightarrow x\bar{R}z$$

$$2^o \quad R\bar{R}xyz \Rightarrow R\bar{R}xzy$$

kao i da se u svakom R^+ okviru u kome postoji binarna relacija $\bar{R}$ sa osobinama 1^o i 2^o može, formulom

$$Cx \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall u \forall v(Ruvx \Rightarrow u\bar{R}v)$$

definisati unarna relacija C takva da važi (*).

Prirodno, nameće se pitanje daljeg poopštavanja. Naime, možemo se zapitati koji su to računi i kako izgleda negacija u njima ako se za osnovnu relaciju pri definisanju važenja negacije u njihovim semantikama uzme relacija $\bar{R}$ a $x \models \bar{A}$ definiše, kako se i očekuje, sa $\forall y(x\bar{R}y \Rightarrow y \not\models A)$. Podsetimo se da smo za $x\bar{R}y$ predložili tumačenje: x i y su uzajamno neprotivrečni. Osnovna zamisao koja stoji iza ovakvog tumačenja je da se relacija $\bar{R}$ shvati kao relacija relativne neprotivrečnosti (jednog sveta u odnosu na drugi) nasuprot relaciji C koja je relacija lokalne ali apsolutne neprotivrečnosti (jednog sveta za sebe). Ako ovu situaciju posmatramo u svetlosti kanonskih modela (u kojima su svetovi gradjeni od formula) primećujemo da se (definicija 2.17.1) svojstvo apsolutne neprotivrečnosti za svet x (Cx) u njima svodi na to da x ne sadrži ni jednu negaciju teoreme. Svojstvo uzajamne neprotivrečnosti svetova x i y ($x\bar{R}y$) svodi se u njima na to da x (ili y) ne sadrži ni jednu negaciju formule iz y (ili x). Čini se da ove osobine kanonskih modela takodje idu u prilog po-

menutog razlikovanja pojmova apsolutne i relativne neprotivrečnosti. Istaknimo i to da se apsolutna neprotivrečnost može tretirati i kao poseban oblik relativne ako se uoči (2.13.2) da relacija C, definisana u R^+ okviru preko binarne relacije $\bar{R}$, koja zadovoljava 1^o i 2^o, na prethodan način, takodje zadovoljava i $Cx \Leftrightarrow \exists t(Pt \ \underline{i} \ x\bar{R}t)$ tj. x je apsolutno neprotivrečan akko je relativno neprotivrečan sa nekim od osnovnih svetova (koji, ne zaboravimo, u kanonskom modelu, predstavljaju proste skupove formula koji sadrže sve teoreme).
Jasno je, prema prethodno izloženom, da prihvatanje relacije $\bar{R}$ kao osnovne pri semantizaciji negacije predstavlja uopštenje ranijeg metoda koji se zasniva na relaciji C. Ako, formalizujući ovu ideju, u R^+ okvire uvedemo relaciju $\bar{R}$, postavlja se pitanje minimalnih svojstava koja ona treba da zadovoljava i računa koji ona semantizuje. Svojstvo 1^o se koristi pri dokazivanju leme o postojanosti (vidi 2.14) koja je neophodna već pri verifikaciji aksioma računa R^+ te se ne može otkloniti. Stoga svojstvo 1^o (u nešto izmenjenom obliku) usvajamo kao osnovno svojstvo relacije $\bar{R}$. Nešto kasnije dokazujemo da je ono i neophodno za važenje leme o postojanosti. Svojstvo 2^o se koristi samo pri verifikaciji aksiome $(A \to \bar{B}) \to (B \to \bar{A})$ (vidi 2.16.1) te njega, a i ovu shemu, možemo otkloniti. Kako iz svojstva 2^o proizlazi simetrija relacije $\bar{R}$, time otklanjamo i ovo svojstvo relacije $\bar{R}$ te sada $x\bar{R}y$ tumačimo kao: y je neprotivrečan sa x (ali ne nužno i obratno).
Sledećim definicijama formalizujemo predloženu semantiku.

<u>2.46 Definicija</u>

2.46.1 $\mathcal{X} = \langle X, R, P, \bar{R} \rangle$ je <u>R_{min} okvir</u> akko

(i) $\mathcal{X}^+ = \langle X, R, P \rangle$ je R^+ okvir, i

(ii) $\bar{R}$ je binarna relacija na X za koju važi

$$\bar{R}1 \quad \leqslant \circ \bar{R} \subseteq \bar{R} \circ \geqslant$$

$\mathbb{K}(R_{min}) \overset{def}{=} \{\mathcal{X} \mid \mathcal{X} \text{ je } R_{min} \text{ okvir}\}$, $\mathrm{dom}\mathcal{X} \overset{def}{=} X$

2.46.2 $\mathcal{M} = \langle \mathcal{X}, v \rangle$ je <u>R_{min} model</u> akko

(i) $\mathcal{X}$ je R_{min} okvir

(ii) v je valuacija na $\mathrm{dom}\mathcal{X}$.

$\mathrm{dom}\mathcal{M} \overset{def}{=} \mathrm{dom}\mathrm{Fr}\mathcal{M}$, $\mathrm{Fr}\mathcal{M} \overset{def}{=} \mathcal{X}$, $\mathbb{M}(R_{min}) \overset{def}{=} \{\mathcal{M} \mid \mathcal{M} \text{ je } R_{min} \text{ model}\}$

Važenje u R_{min} modelima definišemo na predložen način narednom definicijom.

2.47 Definicija

Neka je $\mathcal{M}$ neki R_{min} model, $x \in dom\mathcal{M}$, $A \in ForL$.
Predikat Formula A važi u svetu x R_{min} modela ($\langle\mathcal{M},x\rangle \models A$, odnosno, kraće, $x \models A$) se definiše rekurzijom po izgradjenosti formule A. Aksiome ove rekurzije su iste kao u definiciji 1.3 za veznike $\wedge, \vee$ i $\rightarrow$ a za veznik $^-$ aksioma glasi

$(^-)$ $A = \bar{B}$, $\quad x \models \bar{B}$ akko $\forall y(x\bar{R}y \Rightarrow y \not\models B)$

Predikati $\mathcal{X} \models A$, $\mathcal{M} \models A$ i $\models_{R_{min}} A$ se definišu kao u 1.3 tako što se R^+ smeni sa R_{min}.

2.48 Lema o postojanosti

U svakom R_{min} modelu $\mathcal{M}$, za sve $x,y \in dom\mathcal{M}$ i sve $A \in ForL$ važi

$$(p) \quad \ldots \quad x \leq y \ \underline{i} \ x \models A \Rightarrow y \models A$$

Dokaz: Rekurzijom po broju veznika formule A i isti je za veznike $\wedge, \vee$ i $\rightarrow$ kao dokaz leme 1.4 o postojanosti računa R^+ a za veznik glasi:

$(^-)$ $A = \bar{B}$ $\quad x \leq y \ \underline{i} \ x \models \bar{B} \Rightarrow x \leq y \ \underline{i} \ \forall t(x\bar{R}t \Rightarrow t \not\models B)$

$\Rightarrow \forall t(y\bar{R}t \Rightarrow t \not\models B)$

$\Rightarrow y \models \bar{B}$

Dokazujemo pretposlednju implikaciju. $y\bar{R}t$, zbog pretpostavke $x \leq y$, povlači $x \leq \circ \bar{R}t$ odakle, prema $\bar{R}1$, proizlazi $x\bar{R} \circ \geq t$ što znači da za neko $s \in dom\mathcal{M}$ važi $x\bar{R}s$ i $s \geq t$. Kako je $x\bar{R}s$ to $s \not\models B$ pa i $t \not\models B$ jer bi u suprotnom (ako $t \models B$) bilo, zbog indukcijske hipoteze o postojanosti za formule manje složenosti od A, i $s \models B$ QED

Dokazujemo da je važenje leme o postojanosti na neki način ekvivalentno sa $\bar{R}1$. Naime, važi

2.49 Lema

Neka je $\mathcal{X}^+ = \langle X,R,P\rangle$ R^+ okvir i $\bar{R}$ binarna relacija na X takva da $\mathcal{X}^+ \not\models \bar{R}1$. Ako je $x \models A$ na okviru $\mathcal{X} = \langle\mathcal{X}^+,\bar{R}\rangle$ definisano kao u definiciji 2.47, onda postoji model $\mathcal{M}$ na okviru $\mathcal{X}$ takav da za neke $a,b \in X$, $A \in ForL$ važi $a \leq b$, $a \models A$ i $b \not\models A$.

Dokaz: Kako $\mathcal{X}^+ \not\models \bar{R}1$ to postoje $a,c \in X$ takvi da $a \leq \circ \bar{R}c$ i da $\neg a\bar{R} \circ \geq c$ a tada postoji i $b \in X$ takav da $a \leq b$ i $b\bar{R}c$. Definišimo $v: X \rightarrow P(V)$ sa $p_o \in v(t) \Leftrightarrow \neg a\bar{R} \circ \geq t$ i $p_i \in v(t)$ za $i \geq 1$. Lako se proverava da je v valuacija na X takva da $a \leq b$, $a \models \bar{p}_o$ i $b \not\models \bar{p}_o$.

Dakle, za važenje leme o postojanosti, uz definiciju $\models$ za $^-$ kakva je data u 2.47, neophodno je i dovoljno da važi $\bar{R}1$. Primećujemo da je uslov $\leq \circ \bar{R} \subseteq \bar{R}$ od koga smo u uvodnoj analizi ovog odeljka pošli zamenjen slabijim ($\bar{R}1$ $\leq \circ \bar{R} \subseteq \bar{R} \circ \geq$). Sledeća teorema pokazuje da je ovo oslabljenje nebitno.

2.50 Teorema

Neka je $\mathcal{X}=\langle X,R,P,\bar{R}\rangle$ neki R_{min} okvir i neka je

$$\mathcal{X}^c \overset{def}{=} \langle X,R,P,\bar{R}\circ\geqslant\rangle,$$

tada je i $\mathcal{X}^c$ R_{min} okvir i za svako $A\in ForL$ važi

$$\mathcal{X}\models A \Longleftrightarrow \mathcal{X}^c\models A$$

Dokaz: Neka je $\bar{\bar{R}} \overset{def}{=} \bar{R}\circ\geqslant$, tada važi

$\leqslant\circ\bar{\bar{R}} = \leqslant\circ\ \bar{R}\circ\geqslant\subseteq\bar{R}\circ\geqslant\circ\geqslant\ \subseteq\bar{R}\circ\geqslant\ =\bar{\bar{R}}\subseteq\bar{\bar{R}}\circ\geqslant$

pa relacija $\bar{\bar{R}}$ takodje zadovoljava R1 te je $\mathcal{X}^c$ R_{min} okvir. Osim toga $\bar{\bar{R}}$ zadovoljava i stroži uslov $\leqslant\circ\bar{\bar{R}}\subseteq\bar{\bar{R}}$.

Dokaz tvrdjenja iz iskaza teoreme sprovodimo indukcijom po broju veznika formule A. Za veznike $\wedge,\vee$ i $\rightarrow$ tvrdjenje se svodi na valjane formule pošto u definicijama $\models$ za ove veznike ne učestvuje relacija $\bar{R}$. Tvrdjenje dokazujemo za veznik $^-$. Neka $A = \bar{B}$, tada važi

$$\forall y(x\bar{R}y \Rightarrow y\not\models B)\Longleftrightarrow\forall y(x\bar{\bar{R}}y \Rightarrow y\not\models B)$$

($\Leftarrow$) je očigledno jer $x\bar{R}y \Rightarrow x\bar{R}y$ i $y\geqslant y \Rightarrow x\bar{R}\circ\geqslant y \Rightarrow x\bar{\bar{R}}y$

($\Rightarrow$) Neka $x\bar{\bar{R}}y$ tj. $x\bar{R}\circ\geqslant y$; tada, za neko $t\in dom\mathcal{X}$, važi $x\bar{R}t$ i $t\geqslant y$. Zbog $x\bar{R}t$ i pretpostavke $\forall y(x\bar{R}y \Rightarrow y\not\models B)$,dobijamo $t\not\models B$ te zbog postojanosti i $t\geqslant y$ dobijamo i $y\not\models B$ QED

Prema prethodnoj teoremi, nebitno je da li važenje formula izučavamo u okvirima sa osobinom R1 ili u okvirima sa osobinom $\leqslant\circ\bar{R}\subseteq\bar{R}$. Poslednje okvire ćemo nazivati <u>kondenzovanim</u> i nadalje ne pravimo razliku izmedju kondenzovanih R_{min} okvira i R_{min} okvira. Klasu kondenzovanih R_{min} okvira označavamo sa $\mathbb{K}^c(R_{min})$.

Sa nekoliko prethodnih stavova je opisana lema o postojanosti i uslovi za njeno važenje. Kako je definicija važenja formula u čitavom modelu ista kao i za R^+ okvire to je sledeće tvrdjenje neposredna posledica leme o postojanosti.

2.51 Lema o važenju implikacije

U svakom R_{min} modelu $\mathcal{M}$, za svaku formulu $A\rightarrow B\in ForL$ važi

$$\mathcal{M}\models A\rightarrow B\Longleftrightarrow\forall x(x\models A \Rightarrow x\models B)$$

Zahvaljujući lemi o važenju implikacije sve shema-aksiome i sva pravila izvodjenja računa R^+ (na jeziku L) su potvrdjena u svim R_{min} modelima. Sledećom definicijom uvodimo iskazni račun koji je, što zatim i dokazujemo, potpun u odnosu na klasu svih R_{min} okvira.

2.52 Definicija

R_{min} je ekspanzija računa R^{+} u jeziku L shema-aksiomom

$$\text{N1} \quad \bar{A}\wedge\bar{B}\to\overline{A\vee B}$$

i shema-pravilom izvodjenja

$$\text{NI} \quad \frac{A\to B}{\bar{B}\to\bar{A}}$$

2.53 Teorema o saglasnosti računa R_{min} sa R_{min} semantikom

$$\vdash_{R_{min}} A \Rightarrow \models_{R_{min}} A$$

Dokaz: Kako je svaki R_{min} model ekspanzija R^{+} modela i kako važi lema o postojanosti i njena posledica, lema o važenju implikacije to su sve aksiome i pravila računa R^{+} potvrdjeni u svakom R_{min} modelu. Preostaje da potvrdimo N1 i NI.

N1 $\bar{A}\wedge\bar{B}\to\overline{A\vee B}$

$x\models\bar{A}\wedge\bar{B} \Rightarrow x\models\overline{A\vee B}$

akko $x\models\bar{A}, x\models\bar{B} \Rightarrow x\models\overline{A\vee B}$

akko $\forall y(x\bar{R}y\Rightarrow y\not\models A), \forall y(x\bar{R}y\Rightarrow y\not\models B) \Rightarrow \forall y(x\bar{R}y\Rightarrow y\not\models A\vee B)$

akko $\forall y(x\bar{R}y\Rightarrow y\not\models A, y\not\models B) \Rightarrow \forall y(x\bar{R}y\Rightarrow y\not\models A, y\not\models B)$

Poslednja formula je valjana.

$$\text{NI} \quad \frac{A\to B}{\bar{B}\to\bar{A}}$$

Dokazujemo da u svakom R_{min} modelu važi

$\mathfrak{M}\models A\to B \Rightarrow \mathfrak{M}\models\bar{B}\to\bar{A}$, što je, zbog leme 2.51, ekvivalentno sa

$\mathfrak{M}\models A\to B \Rightarrow (x\models\bar{B} \Rightarrow x\models\bar{A})$ odnosno

$\mathfrak{M}\models A\to B, x\models\bar{B} \Rightarrow (x\bar{R}y \Rightarrow y\not\models A)$ odnosno

$\mathfrak{M}\models A\to B, x\models\bar{B}, x\bar{R}y \Rightarrow y\not\models A$

Poslednje je tačno jer $x\models\bar{B}$ i $x\bar{R}y$ daju $y\not\models B$; no $\mathfrak{M}\models A\to B$ povlači (lema 2.51) $y\models A \Rightarrow y\models B$ što (zbog $y\not\models B$) daje $y\not\models A$ QED

Dokazujemo i obrat prethodne teoreme tj. teoremu o potpunosti. U tu svrhu gradimo kanonske okvire i modele analogno prethodnim tehnikama.

2.54 Definicija

Neka je S neka ekstenzija računa R_{min}

2.54.1 $\mathcal{K}(S) \overset{def}{=} \langle H'(S), R_k(S), P'(S), \bar{R}_k\rangle$ je S kanonski R_{min} okvir akko je $x\bar{R}_k y \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall A(\bar{A}\notin x \text{ ili } A\notin y)$ za sve $x,y\in H'(S)$.

2.54.2 $\mathfrak{M}_k(S) \overset{def}{=} \langle\mathcal{K}(S), v_k\rangle$ je S kanonski R_{min} model akko je $\mathcal{K}(S)$ S kanonski R_{min} okvir i v_k kanonska valuacija

2.54.3 Napomena

Analogno ranijem izlaganju, definišu se i striktan S kanonski R_{min} okvir i model kao restrikcije S kanonskog R_{min} okvira i modela sa domena $H'(S)$ na domen $H'(S)-\{\emptyset,ForL\}$. Naglašavamo da, kao i u prethodnom odeljku, oznaku $x\overline{R}_k y$ upotrebljavamo za sve $x,y\in H(S)$ (tj. i one koji nisu nužno prosti).

2.55 Teorema

Neka je S neka ekstenzija računa R_{min}, tada važi:

2.55.1 S kanonski R_{min} okvir i model su kondenzovani R_{min} model i okvir.

2.55.2 Striktan S kanonski R_{min} okvir i model su kondenzovani R_{min} okvir i model.

Dokaz:

Kako su pozitivni (R^+) delovi ovih okvira i modela već R^+ okviri i modeli (vidi teoremu 1.8) to je dovoljno dokazati da relacija $\overline{R}_k$ u ovim okvirima zadovoljava $\leqslant\circ\overline{R}_k\subseteq\overline{R}_k$. No, relacija $\leqslant$ se u kanonskim okvirima svodi na $\subseteq$ (vidi teoreme 0.11 i 0.12) pa se svojstvo kondenzovanog okvira (modela) svodi na $\subseteq\circ\overline{R}_k\subseteq R_k$ što je očigledno tačno.

2.56 Lema

Neka je S neka ekstenzija računa R_{min} i neka su $x,y\in H(S)$ takvi da $x\overline{R}_k y$. Tada postoje $m,n\in H'(S)$ takvi da $x\subseteq m, y\subseteq n$ i $m\overline{R}_k n$.

Dokaz:

Nije neočekivano što se ovaj dokaz razlikuje od dokaza leme 2.18 i njenih posledica (2.18.1, 2.18.2 i 2.18.3) koji regulišu ista pitanja jer je u slučaju računa RW relacija R_k simetrična, što u slučaju računa R_{min} nije.

Neka je $\mathcal{C}_x=\{t\in H(S)\mid t\overline{R}_k y$ i $x\subseteq t\}$. $\mathcal{C}_x\neq\emptyset$ jer sadrži x i zatvoren je za unije lanaca što se jednostavno proverava. Prema Zornovoj lemi $\mathcal{C}_x$ ima maksimalan element m. Kako je $m\in H(S)$ i $x\subseteq m$ to je dovoljno dokazati da je m prost. Ako nije, onda postoje $B,C\notin m$ takvi da $B\vee C\in m$. Tada $[B,m]$ i $[C,m]$ jesu S d.z. pravi nadskupovi od m pa nisu u $\mathcal{C}_x$. Kako očigledno sadrže x (jer sadrže m) to ne zadovoljavaju uslov $t\overline{R}_k y$ tj. postoje $B_1,C_1\in y$ takvi da $\overline{B}_1\in[B,m]$ i $\overline{C}_1\in[C,m]$. Ovo dalje povlači da postoje $M_1,M_2\in m$ takvi da su formule $M_1\wedge B\to\overline{B}_1$ i $M_2\wedge C\to\overline{C}_1$ teoreme u S odakle proizlazi i da je $M_1\wedge M_2\wedge(B\vee C)\to\overline{B}_1\vee\overline{C}_1$ teorema u S. Kako $M_1,M_2,B\vee C\in m$ to i $\overline{B}_1\vee\overline{C}_1\in m$. Kako je u R_{min} (pa i u S) $\overline{B}_1\vee\overline{C}_1\to\overline{B_1\wedge C_1}$ teorema to $\overline{B_1\wedge C_1}\in m$. Ali $B_1\wedge C_1\in y$ što bi značilo da nije $m\bar{R}_k y$. Kontradikcija. Dakle, m je prost. Neka je $\mathscr{C}_y = \{t \in H(S) \mid m\bar{R}_k t \text{ i } y \subseteq t\}$. Slično prethodnom, zaključujemo da $\mathscr{C}_y$ ima maksimalan element n. Dokazujemo da je n prost. Ako nije, postoje $B, C \notin n$ takvi da $B \vee C \in n$ pa $[B,n]$ i $[C,n]$ jesu pravi nadskupovi od n te nisu u $\mathscr{C}_y$. Kako su S d.z. to ne zadovoljavaju uslov $m\bar{R}_k t$ pa postoje $\bar{B}_1, \bar{C}_1 \in m$ takvi da $B_1 \in [B,n]$ i $C_1 \in [C,n]$ odakle proizlazi da za neke $N_1, N_2 \in n$ formule $N_1 \wedge B \to B_1$ i $N_2 \wedge C \to C_1$ jesu teoreme u S pa je i formula $N_1 \wedge N_2 \wedge (B \vee C) \to B_1 \vee C_1$ teorema u S. Kako $N_1, N_2, B \vee C \in n$ to i $B_1 \vee C_1 \in n$. Medjutim u R_{min} (pa i u S) je teorema (N1) formula $\bar{B}_1 \wedge \bar{C}_1 \to \overline{B_1 \vee C_1}$ te zbog $\bar{B}_1, \bar{C}_1 \in m$ dobijamo $\overline{B_1 \vee C_1} \in m$ što sa $B_1 \vee C_1 \in n$ povlači $\neg m\bar{R}_k n$. Kontradikcija. Dakle, n je prost. Kraj dokaza.

2.57 Lema o kanoničnosti

Neka je S neka ekstenzija računa R_{min} i $\mathcal{M}_k(S)$ njen S kanonski R_{min} model. Tada za sve $x \in H'(S)$ i sve $A \in ForL$ u $\mathcal{M}_k(S)$ važi

$$(k) \ \ldots \ x \models A \iff A \in x$$

Dokaz:

Indukcijom po broju veznika formule A. Kako je S, kao ekstenzija računa R_{min} istovremeno i ekspanzija računa R^+ to je pozitivni deo kanonskog modela ($\mathcal{M}_k^+(S)$) kanoničan u odnosu na veznike p_i, $\wedge$, $\vee$ i $\to$. Dokazujemo kanoničnost za veznik $^-$.

$$
\begin{aligned}
(^-) \quad A = \bar{B}, \qquad x \models \bar{B} &\iff \forall y (x\bar{R}_k y \Rightarrow y \not\models B) \\
&\iff \forall y (x\bar{R}_k y \Rightarrow B \notin y) \qquad \text{(Ind Hyp)} \\
&\iff \bar{B} \in x
\end{aligned}
$$

Dokazujemo poslednju ekvivalenciju.

($\Leftarrow$) Neka $\bar{B} \in x$ i neka $x\bar{R}_k y$; tada $B \notin y$ jer, u suprotnom, $B \in y$ i $\bar{B} \in x$ daju $\neg x\bar{R}_k y$.

($\Rightarrow$) Dokazujemo kontrapoziciju. Neka $\bar{B} \notin x$. Tada je $x\bar{R}_k[B]$ jer, u suprotnom, ako neki $C \in [B]$ ima osobinu $\bar{C} \in x$ onda, po definiciji $[B]$, u S je teorema $B \to C$ pa i $\bar{C} \to \bar{B}$ tj. $\bar{B} \in x$ što je suprotno pretpostavci. Kako je $x\bar{R}_k[B]$ to prema lemi 2.56 postoji $y \in H'(S)$ takav da $x\bar{R}_k y$ i $y \supseteq [B] \ni B$ tj. $\exists y (x\bar{R}_k y \text{ i } B \in y)$ QED

2.57.1 Napomena

Striktan S kanonski R_{min} model ne mora, za proizvoljnu ekstenziju S računa R_{min}, biti kanoničan. Takav je slučaj sa računima koji sadrže kao teoreme sve formule oblika $B \to F$ (B fiksiran, F proizvoljan). Tada y iz dokaza leme 2.57 sadrži sve formule!

Prethodno dokazani stavovi povlače teoremu o potpunosti računa R_{min} jer, slično kao u ranijim dokazima, ako A nije teorema računa R_{min} onda A ne pripada bar jednom prostom regularnom R_{min} d.z. skupu formula (prema lemi 0.10.1) pa kako je taj skup element domena R_{min} kanonskog R_{min} modela $\mathcal{M}_k(R_{min})$ to (prema lemi 2.57) u njemu A ne važi pa ne važi ni u $\mathcal{M}_k(R_{min})$ te ne važi ni u okviru $\mathcal{K}(R_{min})$ koji je (prema teoremi 2.55) R_{min} okvir; dakle, A ne važi u svim R_{min} okvirima pa nije R_{min} valjana. Prema tome, a uzevši u obzir i teoremu 2.53, važi

<u>2.58 Teorema</u>

$$\vdash_{R_{min}} A \Longleftrightarrow \models_{R_{min}} A$$

Za dokazivanje potpunosti pravih ekstenzija računa R_{min}, može se dati kriterijum analogan kriterijumu 2.25. Neka, kao u 2.25, $\models_{\mathbb{K}} A$ znači $\forall \mathcal{X}(\mathcal{X} \in \mathbb{K} \Rightarrow \mathcal{X} \models A)$

<u>2.59 Teorema</u>

Neka je S neka ekstenzija računa R_{min} i $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}(R_{min})$ takva da

2.59.1 $\vdash_S A \Rightarrow \models_{\mathbb{K}} A$, za sve $A \in ForL$

2.59.2 $\mathcal{K}(S) \in \mathbb{K}$

Tada je

$$\vdash_S A \Longleftrightarrow \models_{\mathbb{K}} A \text{ , za sve } A \in ForL$$

<u>Dokaz:</u>

Dovoljno je dokazati kontrapoziciju obrata tvrdjenja 2.59.1

$$
\begin{aligned}
\nvdash_S A &\Rightarrow A \notin Th(S) \\
&\Rightarrow \exists t(t \in P'(S) \ \underline{i} \ A \notin t) && \text{(Prema lemi 0.10.1)} \\
&\Rightarrow \exists t(P'(S)t \ \underline{i} \ t \nvDash A) && \text{(Prema lemi 2.57)} \\
&\Rightarrow \mathcal{M}_k(S) \nvDash A && \text{(Prema definiciji } \mathcal{M} \models A) \\
&\Rightarrow \mathcal{K}(S) \nvDash A \\
&\Rightarrow \nvDash_{\mathbb{K}} A && \text{(Jer Fr } \mathcal{M}_k(S) = \mathcal{K}(S) \in \mathbb{K})
\end{aligned}
$$

Koristeći ovaj kriterijum, mogu se dati semantički opisi računa koji nastaju proširenjem računa R_{min} raznim novim negacijskim aksiomama. Neinteresantne su, medjutim one shema-aksiome koje račun R_{min} proširuju do nadračuna od RW jer za takve račune već imamo semantičke opise u C semantici. Razmatramo, dakle, samo one shema-aksiome koje račun R_{min} proširuju do podračuna računa RW. U stvari, radi se o sledećim računima koji aksiomatizuju najslabija svojstva negacije.

2.60 Definicija

N2 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $(A\to B)\to(\bar{B}\to\bar{A})$

N3 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $A\to\bar{\bar{A}}$

N4 $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $(A\to\bar{B})\to(B\to\bar{A})$

Neka je u jeziku $\{R,\bar{R}\}$ $R\bar{R}xyz$ zamena za $\exists t(Rxyt \text{ i } t\bar{R}z)$ i $R\bar{R}^{-1}xyz$ zamena za $\exists t(Rxyt \text{ i } z\bar{R}t)$

k(N2) $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x\forall y\forall z(R\bar{R}xyz \Rightarrow R\bar{R}^{-1}xzy)$

k(N3) $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x\forall y(x\bar{R}y \Rightarrow y\bar{R}x)$

k(N4) $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x\forall y\forall z(R\bar{R}xyz \Rightarrow R\bar{R}xzy)$

$\mathbb{K}(Ni) \overset{def}{=} \{\mathfrak{X}\in \mathbb{K}(R_{min}) \mid \mathfrak{X}\models Ni\}$ $(2\leq i\leq 4)$

$R_{min}+Ni$ je ekstenzija računa R_{min} shema aksiomom Ni $(2\leq i\leq 4)$

Primetimo da su u računima $R_{min}+N2$ i $R_{min}+N4$, NI i N1 suvišni jer proizlaze (za dokaz su dovoljne teoreme R^+) iz N2 odnosno N4; takodje $Th(RW) = Th(R_{min}+N4) = Th(R_{min}+N2+N3)$.

2.61 Teorema

Za i=2,3,4 važi

$$\vdash_{R_{min}+Ni} A \Longleftrightarrow \models_{\mathbb{K}(Ni)} A$$

Dokaz:

Prema kriterijumu 2.59 dovoljno je dokazati

i.1 $\vdash_{R_{min}+Ni} A \Rightarrow \models_{\mathbb{K}(Ni)} A$, i za i=2,3,4

i.2 $\mathcal{K}(R_{min}+Ni)\in \mathbb{K}(Ni)$

i=2

2.1 Dovoljno je dokazati da u svakom R_{min} modelu $\mathfrak{M}$ na čijem okviru važi k(N2) važi i N2.

$$\mathfrak{M}\models (A\to B)\to(\bar{B}\to\bar{A})$$

akko $x\models A\to B, Rxyz, z\bar{R}s, \forall t(y\bar{R}t \Rightarrow t\not\models B) \Rightarrow s\not\models A$

Poslednja formula je tačna jer, u suprotnom, ako uz pretpostavke iz antecedensa, važi $s\models A$ onda $Rxyz$ i $z\bar{R}s$ daju $R\bar{R}xys$ i, prema k(N2), $R\bar{R}^{-1}xsy$ te za neko t važi $Rxst$ i $y\bar{R}t$; no tada iz $s\models A$ i $x\models A\to B$ i $Rxst$ dobijamo $t\models B$ što je nemoguće jer $y\bar{R}t$ povlači $t\not\models B$.

2.2 Dokazujemo da u $\mathcal{K}(R_{min}+N2)$ važi k(N2). Neka je $R_k\bar{R}_kxyz$ što znači da za neko $t\in H'(R_{min}+N2)$ važi $x\circ y\subseteq t$ i $t\bar{R}_kz$. Dokazujemo da je $R_k\bar{R}_k^{-1}xzy$ tj. da $(*)\ldots\ \exists s(x\circ z\subseteq s \text{ i } y\bar{R}_ks)$. Dovoljno je dokazati da je $y\bar{R}_kx\circ z$ jer tada prema lemi 2.56 postoji s sa osobinom (*). Neka $\urcorner y\bar{R}_k x\circ z$ što znači da za neko $A\in x\circ z$ važi $\bar{A}\in y$ te je tada za neke $B\in x$ i $C\in z$ formula $B\to(C\to A)$ teorema u R_{min}+N2 pa je, zbog N2, i formula $B\to(\bar{A}\to\bar{C})$ teorema; no $B\in x$ i $\bar{A}\in y$ povlači $\bar{C}\in x\circ y\subseteq t$ što je nemoguće jer $C\in z$ i $t\bar{R}_k z$ povlači $\bar{C}\notin t$ QED

i=3

3.1 Dokazujemo da u svakom R_{min} modelu na čijem okviru važi k(N3) važi i N3

$$\mathfrak{M}\models A\to\bar{\bar{A}}$$

akko $x\models A, x\bar{R}y \Rightarrow \exists z(y\bar{R}z \text{ i } z\models A)$

Poslednja formula je tačna jer se zbog k(N3) za z može uzeti x.

3.2 Dokazujemo da u $\mathcal{K}(R_{min}$+N3) važi k(N3). Neka je $x\bar{R}_k y$ i neka $A\in x$. Tada je $\bar{\bar{A}}\in x$ jer je $A\to\bar{\bar{A}}$ teorema pa kako zbog $x\bar{R}_k y$ važi $B\in y \Rightarrow \bar{B}\notin x$ to $\bar{\bar{A}}\in x \Rightarrow \bar{A}\notin y$. Dakle $A\in x \Rightarrow \bar{A}\notin y$ pa je $y\bar{R}_k x$ QED

i=4

4.1 je dokazano u dokazu teoreme 2.16.1 pri čemu je korišćeno samo k(N4) pa dokaz i u ovom slučaju važi.

4.2 Dokazujemo da u $\mathcal{K}(R_{min}$+N4) važi k(N4). Neka je $R_k\bar{R}_k xyz$ tj. $\exists t(x\circ y\subseteq t \text{ i } t\bar{R}_k z)$. Dokazujemo da je $R_k\bar{R}_k xzy$ odnosno da je (*) ... $\exists s(x\circ z\subseteq s \text{ i } s\bar{R}_k y)$. Da važi (*) dovoljno je dokazati da je $x\circ z\bar{R}_k y$ (prema lemi 2.56). Neka $\urcorner x\circ z\bar{R}_k y$ što znači da za neko $A\in y$ važi $\bar{A}\in x\circ z$ pa je za neke $B\in x$ i $C\in z$ formula $B\to(C\to\bar{A})$ teorema u R_{min}+N4 te je prema N4 i formula $B\to(A\to\bar{C})$ takodje teorema što zbog $B\in x$ i $A\in y$ povlači $\bar{C}\in x\circ y\subseteq t$. No to je nemoguće jer je $C\in z$ i $t\bar{R}_k z$ QED

Na kraju ovog odeljka i poglavlja dajemo nekoliko zapažanja umesto zaključka.

Možemo primetiti da je $\bar{R}$ semantika u neku ruku (osim što je uopštenje) istovremeno i profinjenje C semantike. Naime, ne samo da se na osnovu prethodne teoreme i teoreme 2.13 C semantika može redukovati na $\bar{R}$ semantiku, već se $\bar{R}$ semantika može koristiti za dalje razdvajanje i slabljanje negacijskih aksioma koje C semantika ne razlikuje,kao što su N2 i N3 ili kao što je odnos pravila NI i njegove linearizacije N2.

Takodje, i u terminima $\bar{R}$ semantike se može produžiti istraživanje jakih negacijskih aksioma kao što su $\bar{\bar{A}}\to A$ ili De Morganovi zakoni, pri čemu se dobijaju opisi slični onim iz prethod-

nog odeljka. Ovde ih ne navodimo zbog toga što smatramo da semantički opis aksiome $\bar{\bar{A}} \to A$ na primer, u računu $R_{\min \bar{}}$ ne znači ništa ako u njemu nije prisutna čak ni aksioma $A \to \bar{\bar{A}}$.
$\bar{R}$ semantici se mogu staviti i prigovori heurističke prirode. Naime, minimalan račun koji je potpun u odnosu na klasu svih $R_{\min}$ okvira je $R_{\min}$ koji od negacijskih svojstava ima samo pravilo NI i shema-aksiomu N1. Mnogi logičari bi odbili da ovakvu negaciju prihvate kao plauzibilnu. Uostalom, svojstva ove negacije kao i same relacije R pre podsećaju na nekakvu "osporenu modalnost" o čemu ćemo više raspravljati u sledećem poglavlju.
Ne osporavajući argumente ovakve kritike možemo reći da odbrana $\bar{R}$ semantike upravo u njoj i leži jer, slobodnije rečeno,
1° $\bar{R}$ semantika semantizuje jedan logički veznik čiji je poseban slučaj i negacija pa i klasična negacija
2° $\bar{R}$ semantika može koristiti i kao matematičko sredstvo za istraživanje odnosa raznih logičkih računa koje grublja C semantika ne može da razdvoji.

3. SEMANTIKA ZA NORMALNE RELEVANTNE MODALNE LOGIKE

U ovom poglavlju izlažemo semantičkoj analizi jednu klasu iskaznih računa koji nastaju kao ekspanzije računa R^+ ne samo veznikom $^-$ kao u prethodnoj raspravi, već i modalnim veznikom $\Box$ kao i različitim odnosnim aksiomama i pravilima izvodjenja. U prethodnom poglavlju smo prikazali jednu hijerarhiju relevantnih iskaznih računa koji su ekspanzije računa R^+ veznikom $^-$ i raznim aksiomama i pravilima izvodjenja. Jasno je da se svaki od ovih računa može posmatrati kao osnovni nemodalni iskazni račun koji se širi različitim modalnim aksiomama. Mi ćemo, medjutim, pokazati da se $\Box$ može semantički istraživati potpuno nezavisno od $^-$ te da je izbor ovih ili onih negacijskih i modalnih aksioma stvar tačke gledišta a da semantika koju ovde predlažemo dopušta prilično slobodno kombinovanje i preplitanje negacije i modalnosti.

Kako relevantni modalni računi nisu do sada(osim računa $RN(R_\Box)$ v. [35]) bili istraživani u literaturi, dužni smo da objasnimo pojavu izraza "normalan" u sintagmi iz naslova ovog poglavlja. U matematičko-logičkoj literaturi koja se bavi modalnim logikama zasnovanim na klasičnom i, u novije vreme, intuicionističkom iskaznom računu (v. npr [9] , [25] , [6]) je uobičajeno da se normalnim (klasičnim, intuicionističkim) modalnim računom naziva iskazni račun na jeziku L takav da njegov skup teorema

1° Sadrži sve (klasične, intuicionističke) tautologije, i

2° Bude zatvoren za pravila

(1) $\dfrac{A_1,\dots,A_n}{A}$ $n \geqslant 0$, gde je $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \rightarrow A$ tautologija
$n=0$ znači: A je tautologija

(2) $\dfrac{A_1\wedge\ldots\wedge A_n\rightarrow A}{\Box A_1\wedge\ldots\wedge\Box A_n\rightarrow\Box A}$ $n\geqslant 0$, gde $n=0$ znači: $\dfrac{A}{\Box A}$

Dokazuje se da je najmanji klasičan normalan modalni račun K potpun u odnosu na Kripkeovu (ovog puta stvarno Kripkeovu a ne Kripkeovsku jer upravo njemu dugujemo pomenuti rezultat) semantiku sa binarnom relacijom R_M koja je proizvoljna (tj. nema nikakva posebno postulirana svojstva).

Razmotrimo pravilo (2) koje je jedino u kome se pominje modalni veznik $\Box$. Ono je, što se trivijalno proverava, i u klasičnom i u intuicionističkom slučaju, zamenjivo (preciznije, račun koji se dobija ima isti skup teorema) shema-aksiomama

$\Box T$ - T je (klasična, intuicionistička) tautologija

$\Box A\wedge\Box B\rightarrow\Box(A\wedge B)$

i pravilom izvodjenja

$\Box I\ \dfrac{A\rightarrow B}{\Box A\rightarrow\Box B}$

Ovako postavljen pojam normalnog modalnog računa proširujemo i na relevantne račune uz jednu izmenu. Nema, naime, nikakvog osnova da se kao aksioma prihvati svaka formula oblika $\Box T$ gde je T proizvoljna teorema relevantnog iskaznog računa koji uzimamo za baznu logiku jer bi time prihvatili gledište da su sve relevantne logičke istine istovremeno i nužne istine. Mogu se naravno, izučavati (i mi ćemo ih izučavati) i takvi iskazni računi koji formalizuju pomenuto gledište ali ne verujemo da ono predstavlja opštevažeću logičku zakonitost. Uostalom, ovo naše ubedjenje potvrdjujemo u ovom poglavlju i via facti - dokazujemo, naime, da je minimalan normalan relevantan račun (u njemu nije $\Box T$ teorema za svaku teoremu T) potpun u odnosu na semantiku u kojoj relacija R_M ima minimalna svojstva.

<u>3.1 Definicija</u>

Neka je S neka ekspanzija računa R^+ u jeziku $L^+_\Box$ ili računa R_{min} u jeziku $L_\Box$.

SK$\Box$ je ekspanzija računa S u jeziku $L^+_\Box$ ili $L_\Box$ aksiomom

K $\Box A\wedge\Box B\rightarrow\Box(A\wedge B)$

i pravilom izvodjenja

$\Box I\ \dfrac{A\rightarrow B}{\Box A\rightarrow\Box B}$

3.1.1 Napomena

Minimalni računi u smislu prethodne definicije su $R^+K\Box$ i $R_{min}K\Box$ gde su R^+ i R_{min} ovog puta na jeziku $L^+_\Box$ odnosno $L_\Box$.

3.2 Definicija

3.2.1 $\mathfrak{X}=\langle X,R,P,R_M\rangle$ je $R^+K\Box$ okvir akko

(i) $\mathfrak{X}'=\langle X,R,P\rangle$ je R^+ okvir, i

(ii) R_M je binarna relacija na X takva da

$$\leqslant\circ R_M \subseteq R_M\circ\leqslant$$

$\mathrm{dom}\,\mathfrak{X} \overset{def}{=} X$, $\mathbb{K}(R^+K\Box)$ je klasa svih $R^+K\Box$ okvira.

3.2.2 $\mathfrak{X}=\langle X,R,P,\bar{R},R_M\rangle$ je $R_{min}K\Box$ okvir akko

(i) $\mathfrak{X}'=\langle X,R,P,R_M\rangle$ je $R^+K\Box$ okvir, i

(ii) $\mathfrak{X}''=\langle X,R,P,\bar{R}\rangle$ je R_{min} okvir

$\mathrm{dom}\,\mathfrak{X} \overset{def}{=} X$, $\mathbb{K}(R_{min}K\Box)$ je klasa svih $R_{min}K\Box$ okvira.

3.2.3 $\mathfrak{M}=\langle\mathfrak{X},v\rangle$ je $R^+K\Box$ model ($R_{min}K\Box$ model) akko

(i) $\mathfrak{X}$ je $R^+K\Box$ okvir ($R_{min}K\Box$ okvir), i

(ii) v je valuacija na $\mathrm{dom}\,\mathfrak{X}$.

$\mathrm{Fr}\,\mathfrak{M} \overset{def}{=} \mathfrak{X}$, $\mathrm{dom}\,\mathfrak{M} \overset{def}{=} \mathrm{dom}\,\mathrm{Fr}\,\mathfrak{M}$, $\mathbb{M}(R^+K\Box)$ ($\mathbb{M}(R_{min}K\Box)$) je klasa svih $R^+K\Box$ ($R_{min}K\Box$) modela.

3.2.4 Napomena

Kako je svaki $R_{min}K\Box$ okvir (model) ekspanzija $R^+K\Box$ okvira (modela) relacijom $\bar{R}$ a svaki $R^+K\Box$ okvir (model) restrikcija nekog $R_{min}K\Box$ okvira (modela) (npr. onog u kome je $\bar{R}=\emptyset$) to sve sledeće stavove i definicije formulišemo samo za $R_{min}K\Box$ semantiku. Odnosni stavovi i definicije za pozitivne fragmente se jednostavno dobijaju (ako to nije drukčije istaknuto) eliminacijom delova koji se tiču negacije odnosno relacije $\bar{R}$.

3.3 Definicija

Neka je $\mathfrak{M}$ $R_{min}K\Box$ model, $x\in\mathrm{dom}\,\mathfrak{M}$ i $A\in \mathrm{For}L_\Box$.

Predikat Formula A važi u svetu x modela $\mathfrak{M}$ ($\langle\mathfrak{M},x\rangle\models A$, odnosno $x\models A$) se definiše rekurzijom po broju veznika formule A i to za veznike $p_i, \wedge, \vee$ i $\rightarrow$ kao u definiciji 1.3, za veznik $^-$ kao u definiciji 2.47 a za veznik $\Box$ sa

($\Box$) $A=\Box B$, $\quad x\models\Box B$ akko $\forall y(xR_My \Rightarrow y\models B)$

Ostali $\models$ predikati se definišu kao u definiciji 1.3 zamenom R^+ sa $R_{min}K\Box$.

Sledeća lema (o postojanosti) obezbedjuje da $R_{min}K\Box$ modeli budu modeli i za R_{min}.

3.4 Lema o postojanosti

U svakom $R_{min}K\Box$ modelu $\mathfrak{M}$, za sve $A \in ForL_{\Box}$ i sve $x,y \in dom\,\mathfrak{M}$, važi:

$$(p) \ldots \quad x \leqslant y \text{ i } x \models A \Rightarrow y \models A$$

Dokaz:

Indukcijom po broju veznika formule A. Kako je svaki $R_{min}K\Box$ model ekspanzija R^+ odnosno R_{min} modela to su indukcijski koraci za veznike p_i, $\wedge$, $\vee$ i $\rightarrow$ isti kao u dokazu leme 1.4, za veznik $^-$ kao u dokazu leme 2.48 a za veznik $\Box$ dokaz indukcijskog koraka glasi:

$$(\Box)\ A = \Box B, \quad x \leqslant y \text{ i } x \models \Box B \Rightarrow x \leqslant y \text{ i } \forall t(xR_M t \Rightarrow t \models B)$$
$$\Rightarrow \forall s(yR_M s \Rightarrow s \models B)$$
$$\Rightarrow y \models \Box B$$

Pretposlednja implikacija je tačna jer ako $yR_M s$ onda zbog $x \leqslant y$ važi $x \leqslant \circ R_M s$ pa zbog osobine relacije R_M i $xR_M \circ \leqslant s$, odakle, za neko t , $xR_M t$ i $t \leqslant s$; $xR_M t$ daje, po pretpostavci, $t \models B$ što zbog $t \leqslant s$ i Ind Hyp (B ima manje veznika od A) povlači $s \models B$.

Kako je definicija važenja u $R_{min}K\Box$ modelima ista kao i u R^+ modelima ($\mathfrak{M} \models A \Leftrightarrow \forall x(Px \Rightarrow x \models A)$) to je neposredna posledica leme o postojanosti

3.5 Lema o važenju implikacije

U svakom $R_{min}K\Box$ modelu $\mathfrak{M}$; za svaku formulu $A \rightarrow B \in ForL_{\Box}$ važi:

$$\mathfrak{M} \models A \rightarrow B \Leftrightarrow \forall x(x \models A \Rightarrow x \models B)$$

3.6 Teorema o saglasnosti računa $R_{min}K\Box$ sa semantikom

$$\vdash_{R_{min}K} A \Rightarrow \models_{R_{min}K} A$$

Dokaz:

Kako je svaki $R_{min}K\Box$ model ekspanzija R_{min} modela i kako važi lema o važenju implikacije, to je potvrdjivanje aksioma R1 R11 i K i pravila MP, AD i NI isto kao za R_{min} (R^+) semantiku (v. 1.6, 2.53). Dovoljno je, dakle, potvrditi aksiomu K i pravilo $\Box$I.

K $\quad \Box A \wedge \Box B \rightarrow \Box(A \wedge B)$

$$x \models \Box A \wedge \Box B \Rightarrow x \models \Box(A \wedge B)$$

akko $x \models \Box A, x \models \Box B \Rightarrow (xR_M y \Rightarrow y \models A \wedge B)$

akko $xR_M y, \forall t(xR_M t \Rightarrow t \models A), \forall t(xR_M t \Rightarrow t \models B) \Rightarrow y \models A, y \models B$

Poslednja formula je valjana

$\Box$I $\dfrac{A \rightarrow B}{\Box A \rightarrow \Box B}$

Sledeći niz ekvivalencija potvrdjuje da važi $\Box$I.

$\mathcal{M} \models A \to B \Rightarrow \mathcal{M} \models \Box A \to \Box B$

akko $\forall y(y \models A \Rightarrow y \models B) \Rightarrow (x \models \Box A \Rightarrow x \models \Box B)$

akko $\forall y(y \models A \Rightarrow y \models B), \forall y(xR_M y \Rightarrow y \models A) \Rightarrow (xR_M t \models t \models B)$

akko $\forall y(y \models A \Rightarrow y \models B), \forall y(xR_M y \Rightarrow y \models A), xR_M t \Rightarrow t \models B$

Poslednja formula je valjana.

Da bi dokazali teoremu potpunosti (tj. i obrat prethodne teoreme) uvodimo aparat kanonskih okvira i modela.

<u>3.7 Definicija</u>

Neka je S ekspanzija računa $R_{min}K\Box$ u jeziku $L_\Box$.

3.7.1 $\mathcal{K}(S) = \langle \mathcal{K}'(S), R_M^k \rangle$ je <u>S kanonski $R_{min}K\Box$ okvir</u> akko

(i) $\mathcal{K}'(S)$ je S kanonski R_{min} okvir, i

(ii) $xR_M^k y \overset{def}{\Longleftrightarrow} x_\Box \subseteq y$ gde je $x_\Box \overset{def}{=} \{A \in ForL_\Box \mid \Box A \in x\}$

3.7.2 $\mathcal{M}_k(S) = \langle \mathcal{K}(S), v_k \rangle$ je <u>S kanonski $R_{min}K\Box$ model</u> akko

(i) $\mathcal{K}(S)$ je S kanonski $R_{min}K\Box$ okvir, i

(ii) v_k je kanonska valuacija na dom$\mathcal{K}(S)$.

<u>3.8 Teorema</u>

Neka je S ekspanzija računa $R_{min}K\Box$ u jeziku $L_\Box$. Tada važi:

3.8.1 S kanonski $R_{min}K\Box$ okvir $\mathcal{K}(S)$ je $R_{min}K\Box$ okvir.

3.8.2 S kanonski $R_{min}K\Box$ model $\mathcal{M}_k(S)$ je $R_{min}K\Box$ model.

<u>Dokaz</u>:

3.8.2 je trivijalna posledica od 3.8.1. Kako je S ekspanzija računa R_{min} to je $\mathcal{K}'(S)$ kao S kanonski R_{min} okvir, prema teoremi 2.55, takodje i R_{min} okvir. Dakle, dovoljno je dokazati da R_M^k zadovoljava uslov $\leq \circ R_M^k \subseteq R_M^k \circ \leq$.

Dokazujemo da važi jače tvrdjenje

(1) ... $\leq \circ R_M^k \subseteq R_M^k$

Kako se u kanonskim okvirima računa koji su ekspanzije od R^+ (a takav je i S) $\leq$ svodi na $\subseteq$ to je da važi (1) dovoljno dokazati da važi

(2) ... $x \subseteq y$ i $yR_M^k z \Rightarrow xR_M^k z$

što je, po definiciji R_M^k, ekvivalentno sa

(3) ... $x \subseteq y$ i $y_\Box \subseteq z \Rightarrow x_\Box \subseteq z$

Poslednje je tačno jer $x \subseteq y \Rightarrow x_\Box \subseteq y_\Box$.

<u>3.8.3 Napomena</u>

Kako u kanonskom okviru važi $\leq \circ R_M \subseteq R_M$ to smo se i u definiciji 3.2 mogli ograničiti ovim uslovom. Jedini razlog za uvodjenje slabijeg uslova $\leq \circ R_M \subseteq R_M \circ \leq$ je u tome što ovaj uslov garantuje da je tako definisana klasa $R_{min}K\Box$ okvira najveća klasa u kojoj važi postojanost. Naime, lako se dokazuje (dokaz je potpuno sličan dokazu 2.49) da, ako u nekom okviru koji je proširenje R_{min} okvira binarnom relacijom R_M ne važi $\leqslant \circ R_M \subseteq R_M \circ \leqslant$ onda postoji valuacija na tom okviru(dakle model) u kome za neke x i y važi $x \leqslant y$ i $x \models \Box p_0$ ali ne važi $y \models \Box p_0$. Za svaku drugu svrhu uslov $\leqslant \circ R_M \subseteq R_M$ je dovoljan. Tako, po potrebi ili želji klasu $R_{min}K\Box$ okvira možemo sužavati na klasu $R_{min}K\Box$ okvira u kojima važi $\leqslant \circ R_M \subseteq R_M$. Ovakve okvire (kao i modele definisane na njima) ćemo (slično R_{min} okvirima u kojima se ovaj uslov odnosi na relaciju R; v. komentar posle teoreme 2.50) nazivati <u>kondenzovanim</u>.

<u>3.9 Lema o kanoničnosti S kanonskog $R_{min}K\Box$ modela</u>

Neka je S ekspanzija računa $R_{min}K\Box$ na jeziku $L_\Box$ i $\mathfrak{M}_k(S)$ S kanonski $R_{min}K\Box$ model. Tada za sve $x \in H'(S)$ i sve $A \in ForL_\Box$ važi:

$$(k) \ldots \quad x \models A \Longleftrightarrow A \in x$$

<u>Dokaz</u>:

Indukcijom po broju veznika formule A. Kako je svaki S kanonski $R_{min}K\Box$ model ekspanzija jednog kanonskog R_{min} (pa i $^+$kanonskog R^+ modela) to je dokaz indukcijskog koraka za veznike $p_i, \wedge, \vee$ i $\rightarrow$ isti kao u 1.10, za veznik $^-$ isti kao u 2.57, a za $\Box$ glasi:

$$(\Box)\ A = \Box B, \qquad x \models \Box B \Longleftrightarrow \forall y(xR_M^k y \Rightarrow y \models B)$$
$$\Longleftrightarrow \forall y(x_\Box \subseteq y \Rightarrow B \in y) \qquad \text{(Ind Hyp)}$$
$$\Longleftrightarrow \Box B \in x$$

Dokazujemo poslednju ekvivalenciju.

($\Leftarrow$) Neka $\Box B \in x$. Tada $B \in x_\Box$ pa ako $x_\Box \subseteq y$ onda $B \in y$.

($\Rightarrow$) Dokazujemo kontrapoziciju. Neka $\Box B \notin x$. Tada $B \notin x_\Box$.

$x_\Box$ je S d.z. jer važi

1° $A, B \in x_\Box \Rightarrow \Box A, \Box B \in x$
$\Rightarrow \Box A \wedge \Box B \in x$
$\Rightarrow \Box(A \wedge B) \in x$ (Jer, $\vdash_S \Box A \wedge \Box B \rightarrow \Box(A \wedge B)$)
$\Rightarrow A \wedge B \in x_\Box$

2° $A \in x_\Box$, $\vdash_S A \rightarrow B \Rightarrow \Box A \in x, \vdash_S \Box A \rightarrow \Box B$ (S je zatvoren
$\Rightarrow \Box B \in x$ za $\Box$I)
$\Rightarrow B \in x_\Box$

Kako je $x_\Box$ S d.z. (tj. pripada H(S)) i $B \notin x_\Box$ to prema lemi 0.10.1 postoji $y \in H'(S)$ takav da $x_\Box \subseteq y$ i $B \notin y$. Dakle,

$\Box B \notin x \Rightarrow \exists y(x_\Box \subseteq y$ <u>i</u> $B \notin y)$ QED

3.10 Teorema o potpunosti u odnosu na kanonske modele

Neka je S neka ekspanzija računa $R_{min}K\Box$ u jeziku $L_\Box$. Tada važi:

$$\vdash_S A \Leftrightarrow \mathfrak{M}_k(S) \models A$$

Dokaz:

Isti kao i dokaz teoreme 1.11 jer je definicija važenja formule u modelu ista kao i za R^+ modele i jer je $\mathfrak{M}_k(S)$ kanoničan.

Na osnovu prethodne teoreme, slično teoremi 2.25 (dokaz je isti!) važi (i u odsustvu negacije!):

3.11 Teorema

Neka je S neka ekspanzija računa $R_{min}K\Box(R^+K\Box)$ u jeziku $L_\Box(L^+_\Box)$ i $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}(R_{min}K\Box)$ $(\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}(R^+K\Box))$ takva da

3.11.1 $\vdash_S A \Rightarrow \models_{\mathbb{K}} A$

3.11.2 $\mathcal{K}(S) \in \mathbb{K}$

Tada je račun S potpun u odnosu na klasu $\mathbb{K}$.

Primenom ove teoreme na $S=R_{min}K\Box$, $\mathbb{K} = \mathbb{K}(R_{min}K\Box)$ (3.11.1 važi na osnovu teoreme 3.6 a 3.11.2 važi na osnovu teoreme 3.8.1) dobijamo:

3.12 Teorema o potpunosti računa $R_{min}K\Box$

$$\vdash_{R_{min}K\Box} A \Leftrightarrow \models_{R_{min}K\Box} A$$

Sve prethodno dokazano važi i u odsustvu negacije pa važi i

3.13 Teorema o potpunosti računa $R^+K\Box$

$$\vdash_{R^+K\Box} A \Leftrightarrow \models_{R^+K\Box} A$$

Teoremom 3.11 utvrdjen je kriterijum za dokazivanje potpunosti modalnih računa koji nastaju kao ekspanzije računa $R_{min}K\Box$ ili $R^+K\Box$. Koristeći ovaj kriterijum prvo dajemo semantički opis u upravo uvedenoj semantici, računa $R_\Box$ (označava se i sa RN ili NR) jedinog do sada istraživanog u literaturi o modalnim relevantnim logikama (v. [35])

3.14 Definicija

$R_\Box$ je ekspanzija računa $RK\Box$ u jeziku $L_\Box$ pravilom

N $\dfrac{A}{\Box A}$ i shema-aksiomama

R□1 $\Box A \to A$

R□2 $\Box A \to \Box\Box A$

R□3 $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$

3.14.1 Napomena

$R_{\Box}$ je neka vrsta S4 relevantnog modalnog računa sa računom R kao bazom. Primetimo da je pravilo NI u ovom računu redundantno jer proizlazi iz N i $R\Box 3$.

3.15 Teorema

Neka je $\mathbb{K}(R_{\Box})$ klasa svih $RK\Box$ okvira u kojima važe:

k(N) $\forall x\forall y(xR_My \Rightarrow (Px \Rightarrow Py))$

$k(R\Box 1)$ $\forall x\ xR_Mx$

$k(R\Box 2)$ $R_M^2 \subseteq R_M$

$k(R\Box 3)$ $\forall x\forall y\forall z(RR_Mxyz \Rightarrow \exists u\exists v(xR_Mu$ i yR_Mv i $Ruvz))$

Tada je račun $R_{\Box}$ potpun u odnosu na klasu okvira $\mathbb{K}(R_{\Box})$.

Dokaz:

Prema 3.11 dovoljno je proveriti da u svim $R_{\Box}$ okvirima važe shema-aksiome $R\Box 1$ - $R\Box 3$ i da pravilo N čuva $R_{\Box}$ valjanost, kao i da kanonski okvir za račun $R_{\Box}$ pripada klasi $\mathbb{K}(R_{\Box})$.

1^o Verifikacija pravila N i shema $R\Box 1$ - $R\Box 3$.

N

$\mathfrak{M}\models A \Rightarrow \mathfrak{M}\models\Box A$

akko $\forall t(Pt \Rightarrow t\models A) \Rightarrow (Px \Rightarrow x\models\Box A)$

akko $\forall t(Pt \Rightarrow t\models A), Px, xR_My \Rightarrow y\models A$

Poslednja formula je, zbog k(N), tačna.

$R\Box 1$

$\mathfrak{M}\models R\Box 1$

akko $x\models\Box A \Rightarrow x\models A$

akko $\forall y(xR_My \Rightarrow y\models A) \Rightarrow x\models A$

Poslednja formula je, zbog $k(R\Box 1)$, tačna.

$R\Box 2$

$\mathfrak{M}\models R\Box 2$

akko $x\models\Box A \Rightarrow x\models\Box\Box A$

akko $\forall t(xR_Mt \Rightarrow t\models A) \Rightarrow (xR_My \Rightarrow (yR_Mz \Rightarrow z\models A))$

akko $\forall t(xR_Mt \Rightarrow t\models A), xR_M^2z \Rightarrow z\models A$

Zbog $k(R\Box 2)$, xR_M^2z povlači xR_Mz što zbog $\forall t(xR_Mt \Rightarrow t\models A)$ daje $z\models A$ QED.

$R\Box 3$

$\mathfrak{M}\models R\Box 3$

akko $x\models\Box(A\to B) \Rightarrow x\models\Box A\to\Box B$

akko $x\models\Box(A\to B) \Rightarrow (Rxyt, y\models\Box A \Rightarrow t\models\Box B)$

akko $x\models\Box(A\to B), Rxyt, y\models\Box A \Rightarrow (tR_Mz \Rightarrow z\models B)$

akko $x\models\Box(A\to B), y\models\Box A, Rxyt, tR_Mz \Rightarrow z\models B$

akko $x \models \Box(A \to B), y \models \Box A, RR_M xyz \Rightarrow z \models B$
Poslednja formula je tačna jer $RR_M xyz$ povlači, prema k(R□3), da postoje u i v takvi da $xR_M u$, $yR_M v$ i Ruvz. No $x \models \Box(A \to B)$ i $xR_M u$ daju $u \models A \to B$, $y \models \Box A$ i $yR_M v$ daju $v \models A$ te, konačno, $v \models A$, $u \models A \to B$ i Ruvz daju $z \models B$ QED

2° Kanonski okvir za $R_\Box$ zadovoljava k(N) i k(R□1) - k(R□3)
k(N) se svodi na $x_\Box \subseteq y$ $\underline{i}$ $Th(R_\Box) \subseteq x \Rightarrow Th(R_\Box) \subseteq y$. Ova formula je neposredna posledica pravila N jer ako $A \in Th(R_\Box)$ onda $\Box A \in Th(R_\Box)$ pa $\Box A \in x$ te $A \in x_\Box$ odnosno $A \in y$ QED
k(R□1) se svodi na $x_\Box \subseteq x$ što je tačno jer $A \in x_\Box$ povlači $\Box A \in x$ što zbog R□1 $\Box A \to A$ daje $A \in x$ QED
k(R□2) se svodi na $x_\Box \subseteq y$ $\underline{i}$ $y_\Box \subseteq z \Rightarrow x_\Box \subseteq z$ što je tačno jer $A \in x_\Box$ povlači $\Box A \in x$ što zbog R□2 $\Box A \to \Box\Box A$ daje ~~$\Box\Box A \in x$~~ te $(x_\Box \subseteq y)$ $\Box A \in y$ pa kako $y_\Box \subseteq z$ to $A \in z$ QED
k(R□3) se svodi na

$$x \circ y \subseteq t \ \underline{i} \ t_\Box \subseteq z \Rightarrow \exists u \exists v (x_\Box \subseteq u \ \underline{i} \ y_\Box \subseteq v \ \underline{i} \ u \circ v \subseteq z)$$

Dokazujemo ovu formulu. Dovoljno je dokazati da uslov iz antecedensa povlači $x_\Box \circ y_\Box \subseteq z$ jer kako su tada $x_\Box$ i $y_\Box$ deduktivno zatvoreni (v. dokaz leme 3.9 o kanoničnosti) to postoje, prema 0.10.3, prosti u i v koji zadovoljavaju konsekvens gornje formule. Neka, dakle, $A \in x_\Box \circ y_\Box$. tada postoje $B \in x_\Box$ i $C \in y_\Box$ takvi da je u $R_\Box$ formula $B \to (C \to A)$ teorema. Primenom pravila □I i sheme R□3 dobijamo da je i formula $\Box B \to (\Box C \to \Box A)$ teorema, te kako $\Box B \in x$ i $\Box C \in y$ to $\Box A \in x \circ y \subseteq t$. Dakle $\Box A \in t$ te $A \in t_\Box \subseteq z$ odnosno $A \in z$ QED

<u>3.15.1 Napomena</u>
Prethodna teorema je semantički opis "u celo" računa $R_\Box$. Jasno je da pravilo N i sheme R□1 - R□3 imaju semantički opis, dat odgovarajućim formulama iz iskaza teoreme, nezavisno od toga da li je relevantna baza račun RK□ ili R_{min}K□ ili čak R^+K□. Takodje, u šta se možemo uveriti neposrednom inspekcijom dokaza, k(N) i k(R□1) - k(R□3) su nezavisni.

<u>3.16 Napomena</u>
Dokaz teoreme 3.15 ukazuje na još jednu značajnu činjenicu. Potvrdjivanje shema oblika $A \to B$ gde su A i B shema-formule na jeziku $\wedge, \vee, \Box$ ne zavisi od relevantnog računa koji je podloga pa čak ni od toga da li je uopšte u pitanju relevantan račun. Razlog je, naravno, u tome što se $\models$ za veznike $\wedge, \vee$ i □ definiše

isto kao i u klasičnom slučaju a $\mathfrak{M}\models A\to B$ se, prema lemi o važenju implikacije, svodi na $\forall x(x\models A \Rightarrow x\models B)$ tj. opet na klasičan slučaj. Prema tome, karakteristične formule, ako postoje, za formule pomenutog oblika su iste i u relevantnim i u klasičnom računu. U tom smislu izučavanje ovakvih shema u relevantnim računima nije interesantno.

Medju najznačajnije sheme, u klasičnim modalnim logikama, dolaze sheme oblika $A\to B$ gde su A i B sheme na jeziku $\wedge,\vee,\Box$ i $\Diamond$. Kako se modalni operator $\Diamond$ definiše preko $\Box$ sa $\Diamond A \overset{def}{\Longleftrightarrow} \overline{\Box\overline{A}}$, to "pravi" (operatoru $\Box$ dualan) modalni operator $\Diamond$ možemo imati samo u relevantnim računima u kojima važi zakon dvojne negacije i svi De Morganovi zakoni kao i zakon jake kontrapozicije (zbog pravila dualnog pravilu $\Box$I za modalni operator $\Box$). Drugim rečima, o dualnosti se može govoriti samo u računu RK$\Box$ i, naravno, njegovim ekspanzijama. Nije nemoguće izučavati $\Diamond$ definisan na gornji način i u računima sa slabijom negacijom ali se tada dualnost (pa i mnoge slabije ali značajne osobine) gubi. Osim toga, nemamo skoro nikakvu epistemološki koncepciju kojom bi se pravdao $\Diamond$ u relevantnim logikama slabijim od R. Pomenimo da su već u računu H (intuicionističkom) koji ima znatno jači implikacijski fragment od R i ne tako slabu negaciju (u odnosu na R_{min}) problemi ovakvog tretiranja operatora $\Diamond$ veliki (v. [6] i [12])

Mi ćemo ovde raznotriti semantiku, preko $\Box$ definisanog, operatora $\Diamond$ u ekstenzijama od R (preciznije RK$\Box$). Napomenimo da je u slučaju računa R kao relevantne podloge moguće i $\Diamond$ uzeti kao osnovni veznik i račun RK$\Diamond$ definisati kao ekspanziju računa R u jeziku $L_\Box$ shemom $\Diamond(A\vee B)\to \Diamond A\vee\Diamond B$ i pravilom $\Diamond$I $A\to B \vdash \Diamond A\to\Diamond B$; tada se $\Box$ definiše na očekivan način.

<u>3.17 Definicija</u>

Neka je S neka ekspanzija računa RK$\Box$ u jeziku $L_\Box$ i $A\in ForL_\Box$.

$\Diamond A$ je z.z. $\overline{\Box\overline{A}}$

$\Box^n A$ je z.z. $\underbrace{\Box\ldots\Box}_{n} A$, $n\geq 1$; $\Box^o A$ je z.z. A

$\Diamond^n A$ je z.z. $\underbrace{\Diamond\ldots\Diamond}_{n} A$, $n\geq 1$; $\Diamond^o A$ je z.z. A

<u>3.17.1 Napomena</u>

U RK$\Box$ važe sledeća uopštenja osnovnih shema i pravila, koja ubuduće koristimo bez posebnog naglašavanja:

K$\Box^n$ $\quad \Box^n A\wedge\Box^n B\to\Box^n(A\wedge B)$, K$\Diamond^n$ $\quad \Diamond^n(A\vee B)\to\Diamond^n A\vee\Diamond^n B$

$\Box^n I \ \dfrac{A\to B}{\Box^n A\to\Box^n B}$ $\qquad$ $\Diamond^n I \ \dfrac{A\to B}{\Diamond^n A\to\Diamond^n B}$

3.18 Lema

Neka je $\mathfrak{M}$ neki RK$\Box$ model, $x\in dom\mathfrak{M}$ i $A\in ForL_{\Box}$. U $\mathfrak{M}$ važi:

3.18.1 $\quad x\models\Box^n A \Longleftrightarrow \forall y(xR^n_M y \Rightarrow y\models A)$ $\quad$ gde je $xR^0_M y \overset{def}{\Longleftrightarrow} x\leq y$

3.18.2 $\quad x\models\Diamond^n A \Longleftrightarrow \exists y(x^*R^n_M y^*$ i $y\models A)$

Dokaz:

$x\models\Diamond A \Longleftrightarrow x\models\overline{\Box\bar{A}}$

$\Longleftrightarrow x^*\not\models\Box\bar{A}$

$\Longleftrightarrow$ ne $\forall t(x^*R_M t \Rightarrow t\models\bar{A})$

$\Longleftrightarrow \exists t(x^*R_M t$ i $t^*\models A)$

$\Longleftrightarrow \exists y(x^*R_M y^*$ i $y\models A)$ $\quad$ (Zamenom $t=y^*$, jer je $t^{**}=t$)

Iskazi leme se, dalje, dokazuju trivijalnom indukcijom po n. Naglasimo da se za n=0 3.18.1 i 3.18.2 svode na

$x\models A \Longleftrightarrow \forall y(x\leq y \Rightarrow y\models A)$ i $\quad x\models A \Longleftrightarrow \exists y(x^*\leq y^*$ i $y\models A)$

i važe zbog postojanosti.

3.19 Lema

Neka je S neka ekspanzija računa RK$\Box$ u jeziku $L_{\Box}$. Za $x,y\in H(S)$ definišimo:

$$x_{\Box n} \overset{def}{=} \{A \mid \Box^n A\in x\},\quad x^{\Diamond n} \overset{def}{=} \{\Diamond^n A \mid A\in x\}$$

Tada u kanonskom okviru $\mathcal{K}(S)$ za S važi:

3.19.1 $\quad xR^n_M y \Longleftrightarrow x_{\Box n}\subseteq y$

3.19.2 $\quad x^*R^n_M y^* \Longleftrightarrow y^{\Diamond n}\subseteq x$

Dokaz:

3.19.1 je za $n\geq 1$ očigledno a za n=0 se svodi na $x\leq y \Longleftrightarrow x_{\Box o}\subseteq y$ što je tačno jer se u kanonskom okviru $\leq$ svodi na $\subseteq$.

3.19.2 se za n=0 svodi na $x^*\leq y^* \Longleftrightarrow y^{\Diamond o}\subseteq x$ odnosno na ($\leq$ je $\subseteq$) $x^*\subseteq y^* \Longleftrightarrow y\subseteq x$ što važi u svim ekspanzijama od R. Dovoljno je 3.19.2 dokazati za n=1; dalji dokaz je trivijalna indukcija.

$x^*R_M y^* \Longleftrightarrow (x^*)_{\Box}\subseteq y^*$

$\Longleftrightarrow \forall A(A\in(x^*)_{\Box} \Rightarrow A\in y^*)$

$\Longleftrightarrow \forall A(\bar{A}\in y \Rightarrow \overline{\Box A}\in x)$

$\Longleftrightarrow \forall B(B\in y \Rightarrow \overline{\Box\bar{B}}\in x)$ $\quad$ (Zamenom $B=\bar{A}$)

$\Longleftrightarrow \forall B(B\in y \Rightarrow \Diamond B\in x)$

$\Longleftrightarrow y^{\Diamond}\subseteq x$

Sledećim definicijama i lemama uvodimo pojmove modalitet i kanonski modalitet kao pripremni aparat za glavni stav.

3.20 Definicija

Niz φ veznika $\Diamond, \Box$ i $^{-}$ je modalitet.

Modalitet φ je pozitivan akko je broj javljanja veznika $^{-}$ u njemu paran; inače je negativan.

Pozitivan modalitet φ je kanonski akko je

$$\varphi = \Box^{p_1}\Diamond^{q_1}\ldots\Box^{p_k}\Diamond^{q_k}$$

U tom slučaju definišemo

dužinu: $d(\varphi) \overset{\text{def}}{=} p_1+q_1+\ldots+p_k+q_k$, i

indeks: $i(\varphi) \overset{\text{def}}{=} \langle p_1,q_1,\ldots,p_k,q_k\rangle$ pozitivnog kanonskog modaliteta φ.

Negativan modalitet φ je kanonski akko je $\varphi = \overline{\Psi}$ gde je Ψ neki kanonski pozitivan modalitet.

3.21 Lema

Neka je $A \in \mathrm{ForL}_{\Box}$ i φ neki modalitet. Tada postoji pozitivan kanonski modalitet Ψ takav da važi:

$$(*) \ldots \vdash_{RK\Box} \varphi A \leftrightarrow \Psi A \quad \underline{\text{ili}} \quad \vdash_{RK\Box} \varphi A \leftrightarrow \overline{\Psi}A$$

Dokaz:

Indukcijom po broju $s(\varphi)$ veznika u φ.

Ako je $s(\varphi)=0$ tj. $\varphi=\emptyset$ onda $(*)$ važi jer je $\vdash A\leftrightarrow A$ $(\Psi=\emptyset)$

Neka je $s(\varphi)>0$ i neka $(*)$ (Ind Hyp) važi za sve modalitete θ takve da je $s(\theta)<s(\varphi)$. Nastupaju slučajevi:

$\varphi=\Box\theta$ Tada se φA svodi na $\Box\theta A$ pa kako je, po Ind Hyp, u $RK\Box$, θA ekvivalentno sa ΨA ili $\overline{\Psi}A$ gde je Ψ neki pozitivan modalitet, to je $\Box\theta A$ ekvivalentno sa $\Box\Psi A$ ili sa $\Box\overline{\Psi}A$. $\Box\Psi$ je pozitivan kanonski modalitet a $\Box\overline{\Psi}A$ je ekvivalentno sa $\overline{\Diamond\Psi A}$ tj. sa $\overline{\Box^{0}\Diamond\Psi A}$ te je, opet, $\Box^{0}\Diamond\Psi$ kanonski pozitivan modalitet.

$\varphi=\Diamond\theta$ Tada se φA svodi na $\Diamond\theta A$ pa kako je po Ind Hyp, θA ekvivalentno sa ΨA ili sa $\overline{\Psi}A$, gde je Ψ neki pozitivan kanonski modalitet, to je $\Diamond\theta A$ ekvivalentno sa $\Diamond\Psi A$ ili sa $\Diamond\overline{\Psi}A$ odnosno sa $\Box^{0}\Diamond\Psi A$ ili sa $\overline{\Box\Psi}A$.

$\varphi=\overline{\theta}$ Tada se φA svodi na $\overline{\theta}A$ pa kako je, po Ind Hyp, θA ekvivalentno sa ΨA ili sa $\overline{\Psi}A$, gde je Ψ neki kanonski pozitivan modalitet, to je $\overline{\theta}A$ ekvivalentno sa $\overline{\Psi}A$ ili sa $\overline{\overline{\Psi}}A$ tj. ΨA.

Kraj dokaza.

3.22 Definicija

Neka je φ kanonski pozitivan modalitet i $n\in\omega$.

Formula $xR_M^{\varphi,n}y$ (R_M je binarna relacija) se definiše rekurzijom po složenosti modaliteta φ.

Aksiome ove rekurzije su:

$$xR_M^{\emptyset,n}y \overset{def}{\iff} xR_M^n y$$

$$xR_M^{\Box\varphi,n}y \overset{def}{\iff} \forall t(yR_M t \Rightarrow xR_M^{\varphi,n}t)$$

$$xR_M^{\Diamond\varphi,n}y \overset{def}{\iff} \exists t(y^*R_M t^* \ \underline{i}\ xR_M^{\varphi,n}t)$$

3.23 Lema

Neka je $\mathfrak{M}$ neki RK model, $x,y \in \mathrm{dom}\,\mathfrak{M}$, $A \in ForL_\Box$. U $\mathfrak{M}$ važi:

$$(*) \ldots \quad x \models \Box^n A \ \underline{i}\ xR_M^{\varphi,n}y \Rightarrow y \models \varphi A$$

za sve pozitivne kanonske modalitete φ.

Dokaz:

Indukcijom po $d(\varphi)$.

Ako je $d(\varphi)=0$, (*) se svodi na $x \models \Box^n A \ \underline{i}\ xR_M^n y \Rightarrow y \models A$ što je prema lemi 3.18.1 tačno.

Neka je $d(\varphi) > 0$ i neka (*) (Ind Hyp) važi za sve pozitivne kanonske modalitete ψ takve da je $d(\psi) < d(\varphi)$. Nastupaju slučajevi:

$$\begin{aligned}
\varphi=\Box\psi, \quad & x \models \Box^n A \ \underline{i}\ xR_M^{\Box\psi,n}y \\
& \Rightarrow x \models \Box^n A \ \underline{i}\ \forall t(yR_M t \Rightarrow xR_M^{\psi,n}t) \\
& \Rightarrow \forall t(yR_M t \Rightarrow t \models \psi A) && \text{(Ind Hyp)} \\
& \Rightarrow y \models \Box\psi A \\
\varphi=\Diamond\psi, \quad & x \models \Box^n A \ \underline{i}\ xR_M^{\Diamond\psi,n}y \\
& \Rightarrow x \models \Box^n A \ \underline{i}\ \exists t(y^*R_M t^* \ \underline{i}\ xR_M^{\psi,n}t) \\
& \Rightarrow \exists t(y^*R_M t^* \ \underline{i}\ t \models \psi A) && \text{(Ind Hyp)} \\
& \Rightarrow y \models \Diamond\psi A
\end{aligned}$$

3.24 Teorema

Neka je S neka ekspanzija računa RK$\Box$. Tada u $\mathcal{K}(S)$ za svaki pozitivan kanonski modalitet φ i sve $x,y \in H'(S)$ važi:

$$(*) \ldots \quad xR_M^{\varphi,n}y \iff (x_{\Box n})^{\varphi} \subseteq y$$

gde je $t^{\varphi} \overset{def}{=} \{\varphi A \mid A \in t\}$.

Dokaz:

Indukcijom po $d(\varphi)$.

Ako je $d(\varphi)=0$, (*) se svodi na $xR_M^{\emptyset,n}y \iff (x_{\Box n})^{\emptyset} \subseteq y$ odnosno na $xR_M^n y \iff x_{\Box n} \subseteq y$ što je, prema 3.19.1, tačno.

Neka je $d(\varphi) > 0$ i neka (*) (Ind Hyp) važi za sve pozitivne kanonske modalitete ψ takve da je $d(\psi) < d(\varphi)$. Nastupaju slučajevi:

$\varphi = \Box\Psi$, $\quad xR_M^{\Box\Psi,n}y \iff \forall t(yR_M t \Rightarrow xR_M^{\Psi,n}t)$

$\iff \forall t(y_\Box \subseteq t \Rightarrow (x_{\Box n})^\Psi \subseteq t)$ (Ind Hyp i 3.19.1)

$\iff (x_{\Box n})^{\Box\Psi} \subseteq y$

Dokazujemo poslednju ekvivalenciju.

($\Leftarrow$) Neka je $(x_{\Box n})^{\Box\Psi} \subseteq y$ i pretpostavimo da je $y_\Box \subseteq t$. Dokazujemo $(x_{\Box n})^\Psi \subseteq t$. Neka $B \in (x_{\Box n})^\Psi$ tj. $B = \Psi A$ gde $A \in x_{\Box n}$ te $\Box\Psi A \in y$ odakle $\Psi A \in y_\Box$ što, zbog $y_\Box \subseteq t$, daje $B = \Psi A \in t$.

($\Rightarrow$) Dokazujemo kontrapoziciju. Neka $(x_{\Box n})^{\Box\Psi} \nsubseteq y$. Tada za neko $A \in x_{\Box n}$, $\Box\Psi A \notin y$ te $\Psi A \notin y_\Box$. Prema dokazu leme 3.9 o kanoničnosti, $y_\Box$ je S d.z. (tj. pripada $H(S)$) pa prema lemi 0.10.1 postoji $t \supseteq y_\Box$ takav da $\Psi A \notin t \in H'(S)$ tj. $\exists t(y_\Box \subseteq t$ $\underline{i}$ $(x_{\Box n})^\Psi \nsubseteq t)$.

$\varphi = \Diamond\Psi$, $\quad xR_M^{\Diamond\Psi,n}y \iff \exists t(y^* R_M t^*$ $\underline{i}$ $xR_M^{\Psi,n}t)$

$\iff \exists t(t^\Diamond \subseteq y$ $\underline{i}$ $(x_{\Box n})^\Psi \subseteq t)$ (Ind Hyp i 3.19.2)

$\iff (x_{\Box n})^{\Diamond\Psi} \subseteq y$

Dokazujemo poslednju ekvivalenciju.

($\Rightarrow$) Neka $B \in (x_{\Box n})^{\Diamond\Psi}$ tj. $B = \Diamond\Psi A$ za neko $A \in x_{\Box n}$ pa je tada $\Psi A \in (x_{\Box n})^\Psi \subseteq t$ te je $B = \Diamond\Psi A \in t^\Diamond \subseteq y$ tj. $B \in y$.

($\Leftarrow$) Neka je $(x_{\Box n})^{\Diamond\Psi} \subseteq y$. Dokazujemo da postoji $t \in H'(S)$ sa osobinom $t^\Diamond \subseteq y$ $\underline{i}$ $(x_{\Box n})^\Psi \subseteq t$. Neka je

$$\mathcal{C} \overset{def}{=} \{ s \in H(S) \mid s^\Diamond \subseteq y \text{ } \underline{i} \text{ } (x_{\Box n})^\Psi \subseteq s \}$$

$\mathcal{C} \neq \emptyset$.

Dovoljno je dokazati da $s_0 \overset{def}{=} [(x_{\Box n})^\Psi]_S \in \mathcal{C}$. Kako s_0 očigledno sadrži $(x_{\Box n})^\Psi$ to dokazujemo da je $s_0^\Diamond \subseteq y$. Neka $A \in s_0^\Diamond$. Tada postoji $B \in s_0$ takav da je $A = \Diamond B$ i (s obzirom na to kako je s_0 definisan) postoje $B_1, \ldots, B_m \in (x_{\Box n})^\Psi$ takvi da je $\vdash_S B_1 \wedge \ldots \wedge B_m \rightarrow B$. No B_i su oblika ΨA_i za neke $A_i \in x_{\Box n}$ pa važi i $\vdash_S \Psi A_1 \wedge \ldots \wedge \Psi A_m \rightarrow B$ odnosno (jer svaki pozitivan modalitet prolazi kroz implikaciju i konjunkciju pošto su $\Box$ i $\Diamond$ takvi) $\vdash_S \Psi(A_1 \wedge \ldots \wedge A_m) \rightarrow B$. Prema $\Box^n I$ i $K\Box^n$, $x_{\Box n}$ je S d.z. ako je x takav pa $C = A_1 \wedge \ldots \wedge A_m \in x_{\Box n}$. Prema tome, $\vdash_S \Psi C \rightarrow B$ za neko $C \in x_{\Box n}$ odakle i $\vdash_S \Diamond\Psi C \rightarrow \Diamond B$ te, zbog $A = \Diamond B$, $\vdash_S \Diamond\Psi C \rightarrow A$. Medjutim, $\Diamond\Psi C \in (x_{\Box n})^{\Diamond\Psi}$ što zbog polazne pretpostavke i prethodnog zaključka daje $A \in y$ QED

Kako je $\mathcal{C} \neq \emptyset$ i, što se trivijalno pokazuje, zatvoren za unije lanaca to, prema Zornovoj lemi, $\mathcal{C}$ ima maksimalan element t. Kako $t \in \mathcal{C}$ to je, da zadovoljava tražene uslove, dovoljno dokazati da je t prost. Pretpostavimo suprotno, što znači da za neke $A, B \notin t$ važi $A \vee B \in t$. Kako $A, B \notin t$ to $[t, A]_S$ i $[t, B]_S$, kao pra-

vi nadskupovi od t, nisu u $\mathcal{C}$. Oba ova skupa sadrže t pa i $(x_{\Box n})^{\Psi}$; stoga ne zadovoljavaju uslov $s^{\Diamond} \subseteq y$ što znači da postoje $A' \in [t,A]_S^{\Diamond}$ i $B' \in [t,B]_S^{\Diamond}$ ... (1) takvi da $A', B' \notin y$ .. (2).
Iz (1) proizlazi da za neke $T_1, T_2 \in t$, A_1 i B_1 važi:
(3)... $\vdash_S T_1 \wedge A \to A_1$, $\vdash_S T_2 \wedge B \to B_1$, $A' = \Diamond A_1$ i $B' = \Diamond B_1$
Iz (3) proizlazi $\vdash_S T_1 \wedge T_2 \wedge (A \vee B) \to A_1 \vee B_1$ te, kako $T_1, T_2, A \vee B \in t$, $A_1 \vee B_1 \in t$. No, $\vdash_S \Diamond(A_1 \vee B_1) \to \Diamond A_1 \vee \Diamond B_1$ što zbog $A_1 \vee B_1 \in t$ povlači $\Diamond A_1 \vee \Diamond B_1 \in t^{\Diamond} \subseteq y$. Prema (3) to znači da $A' \vee B' \in y$ pa, kako je y prost, dobijamo da $A' \in y$ ili $B' \in y$. Kontradikcija sa (2).
Kraj dokaza.

Koristeći prethodne rezultate možemo dati semantički opis jedne veoma široke klase relevantnih računa koji nastaju ekspanzijom računa RK$\Box$ shema-aksiomama odredjenog oblika koje obuhvataju skoro sve najznačajnije modalno-logičke sheme.

3.25 Definicija

Hintikka shema je svaka shema-formula oblika

$$H \quad \bigwedge_{j=1}^{k} \Diamond^{m_j} \Box^{n_j} A_j \to \bigvee_{i=1}^{r} \Box^{p_i} \Diamond^{q_i} \Big(\bigwedge_{j=1}^{k} \varphi_j^i A_j \Big)$$

gde su φ_j^i pozitivni kanonski modaliteti.

Karakteristična formula sheme H je predikatska formula

$$k(H) \quad \forall x \forall y_1 \ldots \forall y_k \Big[\bigwedge_{j=1}^{k} x^* R_M^{m_j} y_j^* \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigvee_{i=1}^{r} \forall z_i (x R_M^{p_i} z_i \Rightarrow \exists t_i (z_i^* R_M^{q_i} t_i^* \ \underline{\text{i}} \ \bigwedge_{j=1}^{k} y_j R_M^{\varphi_j^i, n_j} t_i)) \Big]$$

3.25.1 Napomena

Od sada pa do kraja ovog poglavlja, radi pojednostavljivanja pisanja, pretpostavljamo da indeks i uzima vrednosti od 1 do r a indeks j uzima vrednosti od 1 do j. Takodje, što smo uostalom već i činili u dokazu prethodne teoreme, modalnu binarnu relaciju u kanonskom modelu označavamo samo sa R_M umesto sa R_M^k kako je definisana.

3.26 Lema

Za svaki RK$\Box$ okvir $\mathfrak{X}$ i svaku Hintikka shemu H važi:

$$\mathfrak{X} \models k(H) \Rightarrow \mathfrak{X} \models H$$

Dokaz:

Neka je $\mathfrak{M}$ neki RK$\Box$ model na $\mathfrak{X}$, H Hintikka shema kao u definiciji 3.25 i $x \in \mathrm{dom}\,\mathfrak{M}$. Dovoljno je dokazati da, uz pretpostavku

$\mathfrak{X} \models k(H)$, važenje antecedensa od H u x povlači važenje konsekvensa od H u x. Neka, dakle, u x važi antecedens od H. Prema lemi 3.18.2 to znači da

(1) ... $x^* R_M^{m_j} y_j^*$ i $y_j \models \square^{n_j} A_j$ za neke $y_j \in dom\, \mathfrak{M}$

Kako u $\mathfrak{X}$ važi k(H), to zbog (1) dobijamo da važi

(2) ... $\forall z_i (x R_M^{p_i} z_i \Rightarrow \exists t_i (z_i^* R_M^{q_i} t_i^*$ i $\bigwedge_j y_j R_M^{\varphi_j^i, n_j} t_i))$ za neko i

Prema (1) $y_j \models \square^{n_j} A_j$ za sve j, te prema lemi 3.23, pretpostavka $y_j R_M^{\varphi_j^i, n_j} t_i$ povlači $t_i \models \varphi_j^i A_j$ za sve j. Zato iz (2) proizlazi:

(3) ... $\forall z_i (x R_M^{p_i} z_i \Rightarrow \exists t_i (z_i^* R_M^{q_i} t_i^*$ i $t_i \models \bigwedge_j \varphi_j^i A_j))$ za neko i

Ponovna primene leme 3.18 na (3) daje:

$x \models \square^{p_i} \lozenge^{q_i} (\bigwedge_j \varphi_j^i A_j)$ za neko i

što je konsekvens Hintikka sheme H. Kraj dokaza.

3.27 Teorema

Neka je RK$\square$+H ekspanzija računa RK$\square$ u jeziku $L_\square$ Hintikka shemom H i $\mathbb{K}_H$ klasa RK$\square$ okvira u kojima važi k(H). Tada je račun RK$\square$+H potpun u odnosu na klasu $\mathbb{K}_H$.

Dokaz:

Sve teoreme računa RK$\square$ kao i njegova pravila izvodjenja važe u $\mathbb{K}_H$ (jer je to podklasa klase $\mathbb{K}$(RK$\square$)) a, takodje, i shema H važi u $\mathbb{K}_H$ s obzirom na prethodnu lemu. Dakle, sve teoreme računa RK$\square$+H su valjane u $\mathbb{K}_H$.

Da bi dokazali potpunost, prema kriterijumu 3.11, dovoljno je dokazati da $\mathfrak{K}$(RK$\square$+H) $\in \mathbb{K}_H$.

Kako je RK$\square$+H ekspanzija računa RK$\square$ pa i računa $R_{min}K\square$ to je $\mathfrak{K}$(RK$\square$+H) $R_{min}K\square$ okvir a takodje i RK$\square$okvir što se trivijalno proverava (dovoljno je uveriti se da važe P5 $x^{**} = x$ i P6 $x \circ y \subseteq z \Rightarrow x \circ z^* \subseteq y^*$ a to važi u H'(S) za svaku ekspanziju S računa R v.2.8.1). Dakle, da $\mathfrak{K}$(RK +H) $\in \mathbb{K}_H$, dovoljno je dokazati da u $\mathfrak{K}$(RK$\square$+H) važi k(H). k(H) se, u kanonskim okvirima, primenom lema 3.19 i 3.24 svodi na

(*) ... $\forall x \forall y_1 \ldots \forall y_k \Big[\bigwedge_j y_j^{\lozenge m_j} \subseteq x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \bigvee_i \forall z_i (x_{\square p_i} \subseteq z_i \Rightarrow \exists t_i (t_i^{\lozenge q_i} \subseteq z_i \text{ i } \bigwedge_j (y_{j \square n_j})^{\varphi_j^i} \subseteq t_i))\Big]$$

Sledeća lema omogućuje da se (*) još više pojednostavi.

3.28 Lema

Neka je S neka ekspanzija računa RK$\square$. U $\mathcal{K}(S)$ važi:

$$\exists t(t^{\Diamond q} \subseteq z \ \underline{i} \ \bigwedge_j (y_{j \square n_j})^{\varphi_j} \subseteq t) \Longleftrightarrow \left[\bigcup_j (y_{j \square n_j})^{\varphi_j}\right]^{\Diamond q} \subseteq z$$

za sve $y, z \in H'(S)$.

Dokaz:

Neka je $U \overset{\text{def}}{=} \bigcup_j (y_{j \square n_j})^{\varphi_j}$

($\Rightarrow$) Kako t sadrži sve $(y_{j \square n_j})^{\varphi_j}$ to t sadrži i U; kako je t i S d.z. to t sadrži $[U]_S$.

No tada $t^{\Diamond q}$ sadrži i $[U]_S^{\Diamond q}$ a kako je $t^{\Diamond q} \subseteq z$ to $[U]_S^{\Diamond q} \subseteq z$ QED

($\Leftarrow$) Neka je

$$\mathcal{C} \overset{\text{def}}{=} \{s \in H(S) \mid s^{\Diamond q} \subseteq z \ \underline{i} \ \bigwedge_j (y_{j \square n_j})^{\varphi_j} \subseteq s\}$$

$\mathcal{C} \neq \emptyset$

zato što sadrži $[U]_S$ jer je, po pretpostavci, $[U]_S^{\Diamond q} \subseteq z$, a $[U]_S$, naravno, sadrži sve $(y_{j \square n_j})^{\varphi_j}$.

Takodje, $\mathcal{C}$ je zatvoren za unije lanaca što se trivijalno proverava pa, na osnovu Zornove leme, ima maksimalan element t. Da bi t bio onaj iz uslova leme, dovoljno je dokazati da je prost. Pretpostavimo suprotno. To znači da postoje $A, B \notin t$ takvi da $A \vee B \in t$. Tada su $[t,A]_S$ i $[t,B]_S$ pravi nadskupovi od t i ne pripadaju $\mathcal{C}$. Oni sadrže t pa sadrže sve što i t te, prema tome, ne zadovoljavaju prvi definicioni uslov skupa $\mathcal{C}$, tj. $s^{\Diamond q} \subseteq z$. To, dalje, znači da za neke $\Diamond^q A' \in [t,A]_S^{\Diamond q}$, $\Diamond^q B' \in [t,B]_S^{\Diamond q}$ važi

(1) ... $\Diamond^q A', \Diamond^q B' \notin z$

Dalje, kako A' i B' pripadaju prethodno navedenim deduktivnim zatvorenjima, to postoje $T_1, T_2 \in t$ takvi da $\vdash_S T_1 \wedge A \rightarrow A'$ i $\vdash_S T_2 \wedge B \rightarrow B'$. Odavde $\vdash_S T_1 \wedge T_2 \wedge (A \vee B) \rightarrow A' \vee B'$. Kako su konjunkti u antecedensu prethodne formule u t to je i $A' \vee B'$ u t. Medjutim, t je prost pa važi $A' \in t$ ili $B' \in t$ odakle $\Diamond^q A' \in t^{\Diamond q}$ ili $\Diamond^q B' \in t^{\Diamond q}$; no, $t^{\Diamond q} \subseteq z$ pa, konačno, dobijamo da je $\Diamond^q A' \in z$ ili $\Diamond^q B' \in z$. Kontradikcija sa (1). Kraj dokaza.

Primenom ove leme, formula (*) se svodi na

$$(*)' \ldots \ \forall x \forall y_1 \ldots \forall y_k \Big[\bigwedge_j y_j^{\Diamond m_j} \subseteq x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigvee_i \forall z_i \Big(x_{\square p_i} \subseteq z_i \Rightarrow \left[\bigcup_j (y_{j \square n_j})^{\varphi_j^i}\right]^{\Diamond q_j}_{RK\square + H} \subseteq z_i\Big)\Big]$$

Takodje, prema dokazu teoreme 3.24,

$$\forall z_i(x_{\Box p_i} \subseteq z_i \Rightarrow \Big[\bigcup_j (y_{j\Box n_j})^{\varphi^i_j}\Big]^{\Diamond q_i}_{RK\Box +H} \subseteq z_i)$$

se svodi na

$$\Big[\bigcup_j (y_{j\Box n_j})^{\varphi^i_j}\Big]^{\Diamond q_i}_{RK\quad +H} \subseteq x_{\Box p_i}$$

(Može izgledati neobično što se formula oblika $\forall t(x\subseteq t \Rightarrow y\subseteq t) \Leftrightarrow y\subseteq x$ dokazuje, jer se čini da je valjana, ali ne treba zaboraviti da je domen univerzalnog kvantifikatora skup $H'(S)$ samo nekih a ne svih skupova (formula, u ovom slučaju) te je, čak nekonstruktivan dokaz (uz primenu Zornove leme v. 3.24) potreban) Iskoristivši prethodnu primedbu formulu (*) svodimo na

$$(*)''\ldots \forall x\forall y_1\ldots\forall y_k\Big[\bigwedge_j y_j^{\Diamond m_j} \subseteq x \Rightarrow \bigvee_i \Big[\bigcup_j (y_{j\Box n_j})^{\varphi^i_j}\Big]^{\Diamond q_i}_{RK\Box +H} \subseteq x_{\Box p_i}\Big]$$

Dokazujemo da u $\mathcal{K}(RK\Box +H)$ važi $(*)''$:

Neka je $y_j^{\Diamond m_j} \subseteq x$ za sve j i neka B_i pripada i - tom deduktivnom zatvorenju iz konsekvensa implikacije u $(*)''$. $(*)''$ je dokazano ako se dokaže da za bar jedno i $B_i \in x_{\Box p_i}$.

Prema izboru B_i postoji B_i' iz pomenutog deduktivnog zatvorenja takav da je $B_i = \Diamond^{q_i} B_i'$. Dalje, to znači da postoje $C^i_j \in (y_{j\Box n_j})^{\varphi^i_j}$ takvi da je

$$(1)\ldots \vdash_{RK\Box +H} C^i_1\wedge\ldots\wedge C^i_k \rightarrow B_i'$$

No, tada postoje $A^i_j \in y_{j\Box n_j}$ takvi da je $C^i_j = \varphi^i_j A^i_j$ pa važi:

$$(2)\ldots \vdash_{RK\quad +H} \varphi^i_1 A^i_1\wedge\ldots\wedge\varphi^i_k A^i_k \rightarrow B_i'$$

U (2) se svaki A^i_j može zameniti sa $A_j = A^1_j\wedge\ldots\wedge A^r_j$ (time se samo jača uslov u antecedensu) pa važi sledeći niz tvrdjenja:

$$(3)\ldots \vdash_{RK\Box +H} \varphi^i_1 A_1\wedge\ldots\wedge\varphi^i_k A_k \rightarrow B_i'$$

$$(4)\ldots \vdash_{RK\Box +H} \Diamond^{q_i}(\varphi^i_1 A_1\wedge\ldots\wedge\varphi^i_k A_k) \rightarrow \Diamond^{q_i} B_i'$$

$$(5)\ldots \vdash_{RK\Box +H} \Box^{p_i}\Diamond^{q_i}(\varphi^i_1 A_1\wedge\ldots\wedge\varphi^i_k A_k) \rightarrow \Box^{p_i}\Diamond^{q_i} B_i'$$

$$(6)\ldots \vdash_{RK\Box +H} \bigvee_i \Box^{p_i}\Diamond^{q_i}(\varphi^i_1 A_1\wedge\ldots\wedge\varphi^i_k A_k) \rightarrow \bigvee_i \Box^{p_i} B_i$$

No, antecedens formule (6) je konsekvens Hintikka sheme H pa

$$(7)\ldots \vdash_{RK\quad +H} \bigwedge_j \Diamond^{m_j}\Box^{n_j} A_j \rightarrow \bigvee_i \Box^{p_i} B_i$$

Formule A_j kao konjunkcije formula A^i_j po i pripadaju $y_{j\Box n_j}$ (jer je ovaj deduktivno zatvoren zbog $\Box^n I$ i $K\Box^n$). Stoga

$\Box^{n}jA_j \in y_j$ te $\Diamond^{m}j\Box^{n}jA_j \in y_j^{\Diamond^{m}j} \subseteq x$. Dakle, konjunkti u antecedensu formule (7) pripadaju x pa i ceo antecedens (jer je x d.z.) pripada x. Stoga konsekvens formule (7) pripada x, a kako je konsekvens oblika disjunkcije po i i x je prost, to $\Box^{p}iB_i \in x$ za bar jedno i. Dakle, $B_i \in x_{\Box p_i}$.
Kraj dokaza.

Skoro sve shema-aksiome koje se razmatraju u modalnoj logici, a koje se mogu karakterizovati predikatskim formulama prvog reda, mogu se dobiti kao slučajevi Hintikka sheme.

Za k=r=1, $\varphi_1^1=\emptyset$, označavajući A_1 sa A dobijamo:

G(m,n,p,q) $\quad \Diamond^{m}\Box^{n}A \rightarrow \Box^{p}\Diamond^{q}A$

čija je karakteristična formula

k(G(m,n,p,q)) $\quad \forall x\forall y\forall z(x^{*}R_M^{m}y^{*} \ \underline{i}\ xR_M^{p}z \Rightarrow \exists t(z^{*}R_M^{q}t^{*} \ \underline{i}\ yR_M^{n}t))$

Već sama shema G obuhvata mnoge tipične modalne sheme:

T $\quad \Box A \rightarrow A \quad$ (m=p=q=0, n=1)
4 $\quad \Box A \rightarrow \Box\Box A \quad$ (m=q=0, n=1,p=2)
B $\quad \Diamond\Box A \rightarrow A \quad$ (p=q=0,m=n=1)
E $\quad \Diamond\Box A \rightarrow \Box A \quad$ (m=n=p=1, q=0)
itd

U vezi sa shemom G, prirodno se nameće pitanje shema, na neki način, dualnih njoj. Tako, na primer, shema

$\Box\Diamond A \rightarrow \Diamond\Box A$

nije Hintikka shema ali deluje jednostavno i mogao bi se steći utisak da se ona može karakterisati na prethodni način. Ipak, to nije slučaj. Goldblatt [18] je dokazao da klasa svih klasičnih Kripkeovih okvira u kojima važi ova shema nije zatvorena za ultraproizvode pa zato nije ni aksiomatska. Skoro doslovna reprodukcija Goldblattovog dokaza se može sprovesti i za slučaj proširenja računa RK$\Box$ gornjom shemom.
Napomenimo da, jasno, nije nužno vršiti ekspanziju računa RK samo jednom Hintikka shemom. Lako se može dokazati da je i svaka ekspanzija računa RK$\Box$ ma kojim skupom Hintikka shema potpuna u odnosu na klasu RK$\Box$ okvira u kojima važe sve karakteristične formule tih shema.

U zaključku ovog poglavlja pomenimo jedan, po našem mišljenju, interesantan otvoren problem. U poglavlju 2 smo, semantizujući negaciju uveli jednu binarnu relaciju $\overline{R}$ preko koje smo definisali predikat $x \models \bar{A}$ sa $\forall y(x\bar{R}y \Rightarrow y \not\models A)$ što se može napisati i u obliku $x \models \bar{A} \Leftrightarrow \neg\exists y(x\bar{R}y \text{ i } y \models A)$ i što podseća na klasičnu osporenu modalnost(tj. $x \models \bar{A} \Leftrightarrow x \not\models \Diamond A$). Jasno, $\Diamond$ u relevantnom iskaznom računu, ako se želi da bude dualan $\Box$, nije definisan na gornji način. Ipak, može se postaviti pitanje modalnih svojstava relacije $\bar{R}$. U slučaju klase R_{min} kondenzovanih okvira (v. str. 59)odgovor je trivijalan; naime, ta klasa je ništa drugo do klasa svih kondenzovanih $R^+K\Box$ okvira! Jednostavno poistovećivanje relacije $\bar{R}$ sa R_M pokazuje da ista klasa okvira može da se posmatra kao semantika za račun R^+ proširen, u jednom slučaju negacijom a u drugom slučaju modalnim operatorom $\Box$. Uostalom i bez ove koincidencije semantika,jednostavan uvid u aksiome i sheme računa R_{min} ($=R^+$+N1+NI) i računa $R^+K\Box$ ($=R^+$+K+$\Box$I) ukazuje na njihovu sličnost.

Zanimljivije je medjutim, pitanje odnosa jačih računa. Uopšteno,problem bi se mogao formulisati ovako:

Odrediti za neku ekspanziju računa R_{min} u jeziku L koja je potpuna u odnosu na neku klasu R_{min} okvira,odgovarajuću ekspanziju računa $R^+K\Box$ koja je, u jeziku L^+, potpuna u odnosu na istu klasu R_{min} okvira, ovog puta shvaćenih kao $R^+K\Box$ okviri.

Jasno, i problem obratan ovome ima svoj značaj.

Svakako, nema skoro nikakve šanse da se gornji problem reši generalno. Zato se,verovatno, treba koncentrisati na ključne $R^+K\Box$ ekspanzije odnosno ključne R_{min} ekspanzije. Od posebnog interesa bi bilo naći odgovarajući modalni račun za račune R i RW. Čini se da je tu glavni problem svojstvo $R\bar{R}xyz \Rightarrow R\bar{R}xzy$ (kojim se karakteriše formula $(A \rightarrow \bar{B}) \rightarrow (B \rightarrow \bar{A})$) za koje se, bar za sada, ne vidi odgovarajuća modalna formula koja bi njime bila karakterisana.

4. SEMANTIKA ZA NEDISTRIBUTIVNE RELEVANTNE LOGIKE

U ovom poglavlju izlažemo naša istraživanja semantike relevantnih iskaznih računa koji nisu distributivni; tj. za koje se ne pretpostavlja da je R11 $A\wedge(B\vee C)\rightarrow(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$ teorema.

Prvo prikazujemo semantiku za pozitivnu bazu ovih iskaznih računa - račun RA^+; koji, na jeziku L^+, da podsetimo, ima shema aksiome R1 - R10 i pravila izvodjenja MP i AD (v. definiciju 0.3) i ima ulogu sličnu ulozi računa R^+ u poglavljima 1,2 i 3. Zatim prikazujemo semantizaciju veznika $^-$ i $\Box$ koja je donekle slična već izloženoj u poglavljima 2 i 3.

<u>4.1 Definicija</u>

4.1.1 $\mathfrak{X}=\langle X,R,P,0,1\rangle$ je <u>RA^+ okvir</u> akko

(i) $\mathfrak{X}'=\langle X,R,P\rangle$ je R^+ okvir, i

(ii) U $\mathfrak{X}$ važe

RA0 $0\neq 1$

RA1 $x\leqslant 1$

RA2 $R1xy \Longleftrightarrow x=0$ <u>ili</u> $y=1$

RA3 $\exists z(z\leqslant x$ <u>i</u> $z\leqslant y$ <u>i</u> $\forall t(t\leqslant x$ <u>i</u> $t\leqslant y \Rightarrow t\leqslant z))$

i, uz definiciju,

$z=x\cap y \overset{def}{\Longleftrightarrow} z\leqslant x$ <u>i</u> $z\leqslant y$ <u>i</u> $\forall t(t\leqslant x$ <u>i</u> $t\leqslant y\Rightarrow t\leqslant z)$

RA4 $Rx(y_1\cap y_2)z \Longrightarrow \exists z_1\exists z_2(Rxy_1z_1$ <u>i</u> Rxy_2z_2 <u>i</u> $z_1\cap z_2\leqslant z)$

dom $\mathfrak{X} \overset{def}{=} X$, $\mathbb{K}(RA^+)$ je klasa svih RA^+ okvira

4.1.2 $\mathfrak{M}=\langle\mathfrak{X},v\rangle$ je <u>RA^+ model</u> akko

(i) $\mathfrak{X}$ je RA^+ okvir, i

(ii) v je valuacija na dom $\mathfrak{X}$ takva da za sve $x,y\in$ dom $\mathfrak{X}$ važi

$v(x\cap y)=v(x)\cap v(y)$

$v(0)=\emptyset$

$v(1)=V$

Fr $\mathfrak{M} \overset{def}{=} \mathfrak{X}$, dom $\mathfrak{M} \overset{def}{=}$ domFr $\mathfrak{M}$ $\mathbb{M}(RA^+)$ je klasa svih RA^+ modela.

4.2 Lema

Definicija 4.1 je korektna

Dokaz:

Dovoljno je (a i potrebno) dokazati da je definicija operacije $\cap$ korektna. Kako je RA3 aksioma o postojanju infimuma za relaciju $\leqslant$ to je, da bi postojao tačno jedan z iz iskaza RA3, dovoljno da je $\leqslant$ relacija poretka što ona i jeste jer je svaki RA^+ okvir ekspanzija nekog R^+ okvira (v. 1.1 i 1.2)

4.3 Teorema

U svakom RA^+ okviru $\mathfrak{X}$ važi:

4.3.1 $\langle \mathrm{dom}\,\mathfrak{X},\cap,0,1\rangle$ je polumreža sa krajevima 0 i 1 takva da je $x=x\cap y \Leftrightarrow x\leqslant y$

4.3.2 R010

4.3.3 $u\cap v=0 \Rightarrow u=0$ ili $v=0$

Dokaz:

4.3.1 Prema lemi 4.2 $x\cap y$ je infimum za x i y u odnosu na relaciju $\leqslant$ a $x=x\cap y \Leftrightarrow x\leqslant y$ je neposredna posledica definicije operacije $\cap$ (zamena z=x u definicionoj formuli). Da bi dokazali da su 0 i 1 krajevi ove mreže, dovoljno je dokazati da je $0\leqslant x$ jer je $x\leqslant 1$ prema RA1. Iz RA2 (stavljajući umesto x, 0) dobijamo R10y. Neka je $s\in \mathrm{dom}\,\mathfrak{X}$ takav da Ps (takav s postoji jer je RA^+ okvir ekspanzija R^+ okvira u kome, jer mu je domen neprazan, za neko x iz domena postoji, prema P1, s takav da Ps). Prema RA2, $s\leqslant 1$ što zajedno sa R10y daje, prema P3, Rs0y za neko s za koje je Ps što po definiciji relacije $\leqslant$ znači da je $0\leqslant y$ QED

4.3.2 Iz RA2, stavljajući x=0 i y=0, dobijamo R100 odnosno R010.

4.3.3 Pretpostavimo suprotno. Neka je, za neke u i v, $u\cap v=0$ i $u\neq 0$ i $v\neq 0$. Prema prethodnom, važi R100 te kako je $u\cap v=0$ i $R1u\cap v0$. Na osnovu RA4 to povlači da za neke z_1 i z_2 važi $R1uz_1$, $R1vz_2$ i $z_1\cap z_2\leqslant 0$. Kako je $u\neq 0$ i $v\neq 0$ to zbog RA2 iz $R1uz_1$ i $R1vz_2$ proizlazi $z_1=z_2=1$ što zbog $z_1\cap z_2\leqslant 0$ daje 1=0. Kontradikcija.

4.4 Napomena

Primetimo da se, s obzirom na prethodne stavove, RA^+ okvir mogao definisati kao R^+ okvir $\mathfrak{X}$ sa elementima 0 i 1 na kome postoji operacija $\cap$ takva da je $\langle \mathrm{dom}\,\mathfrak{X},\cap,0,1\rangle$ polumreža sa krajevima 0 i 1 takva da važe RA0,RA1,RA2 i RA4. Predloženi način smo odabrali zato da bi izbegli proširenje polaznog jezika $\{R,P\}$ na kome definišemo okvire, novim, nedefinisanim, operacijskim znakom $\cap$. Primetimo i da je $\mathbb{K}(RA^+) \subseteq \mathbb{K}(R^+)$ i $\mathbb{M}(RA^+) \subseteq \mathbb{M}(R^+)$ jer svojstvo RA^+ valuacije: $v(x \cap y) = v(x) \cap v(y)$ povlači svojstvo R^+ valuacije: $x \leqslant y \Rightarrow v(x) \subseteq v(y)$.

<u>4.5 Definicija</u>

Neka je $\mathfrak{M}$ neki RA^+ model, $x \in \mathrm{dom}\,\mathfrak{M}$ i $A \in \mathrm{For}L^+$. Predikat <u>Formula A važi u svetu x RA^+ modela $\mathfrak{M}$</u> ($\langle \mathfrak{M}, x \rangle \models A$, odnosno $x \models A$) se definiše rekurzijom po izgradjenosti formule A. Aksiome ove rekurzije su za veznike p_i, $\wedge$ i $\rightarrow$ iste kao u definiciji 1.3 a za veznik $\vee$ aksioma glasi

($\vee$) $A = B \vee C$, $x \models B \vee C$ akko $\exists u \exists v (u \models B$ <u>i</u> $v \models C$ <u>i</u> $u \cap v \leqslant x)$

Predikati $\mathfrak{M} \models A$, $\mathfrak{X} \models A$ i $\models_{RA^+} A$ se definišu kao i ranije.

Eto, dakle, mesta gde se RA^+ semantika bitno razlikuje od R^+ semantike i njenih proširenja. Ovo, naravno, nije neočekivano jer, s obzirom da je meta-logika koju koristimo klasična, prethodni način potvrdjivanja formula oblika $A \wedge B$ i $A \vee B$ je uvek "morao da propusti" i distributivnost. Pitanje je bilo kako izmeniti ovaj način potvrdjivanja formula tako da distributivnost ne važi uvek. U ovom poglavlju dokazujemo da je način koji mi predlažemo odgovarajući, tj. da važi teorema o potpunosti RA^+ računa u odnosu na RA^+ semantiku. Pitanje tumačenja $\models$ pravila za $\vee$ ostavljamo izvan ove rasprave jer smatramo da je iskustvo kojim savremena logika raspolaže u radu sa nedistributivnim računima još uvek nedovoljno da bi omogućilo neka podrobnija heuristička i epistemološka razmatranja.

Po, u prethodnim poglavljima, već utvrdjenoj metodološkoj shemi prvo pristupamo dokazivanju teoreme o saglasnosti računa RA^+ sa semantikom. Struktura uporišnih stavova se donekle razlikuje od prethodne jer su RA^+ okvirima i modelima nametnuti nešto striktniji uslovi.

Sledeći stav je analogon teoreme o postojanosti (koja, uostalom iz njega i proizlazi) jer, slično toj teoremi, pokazuje da se svojstvo valuacije na RA^+ modelima, koje je definisano na iskaznim slovima, proširuje na sve formule iz $\mathrm{For}L^+$.

<u>4.6 Lema</u>

U svakom RA^+ modelu $\mathfrak{M}$ za svaku formulu $A \in \mathrm{For}L^+$ i sve $x, y \in \mathrm{dom}\,\mathfrak{M}$ važi

($\cap$) ... $x \models A$ <u>i</u> $y \models A \Longleftrightarrow x \cap y \models A$

Dokaz:

Indukcijom po broju $s(A)$ veznika formule A.

Ako je $s(A)=0$ onda je $A=p_i$ za neko $i\in\omega$ pa

(p_i) $A=p_i$, $\quad x\models p_i$ i $y\models p_i \Leftrightarrow p_i\in v(x)$ i $p_i\in v(y)$

$\Leftrightarrow p_i\in v(x)\cap v(y)$

$\Leftrightarrow p_i\in v(x\cap y)$

$\Leftrightarrow x\cap y\models p_i$

Pretposlednja ekvivalencija je tačna po definiciji RA^+ valuacije.

Neka je $s(A)>0$ i neka $(\cap) \overset{def}{=}$ Ind Hyp važi za sve $F\in ForL^+$ takve da je $s(F)<s(A)$. Dokazujemo da $(\cap)$ važi i za A. Nastupaju slučajevi:

$(\wedge)$ $A=B\wedge C$, $\quad x\models B\wedge C$ i $y\models B\wedge C \Leftrightarrow (x\models B$ i $x\models C)$ i $(y\models B$ i $y\models C)$

$\Leftrightarrow (x\models B$ i $y\models B)$ i $(x\models C$ i $y\models C)$

$\Leftrightarrow x\cap y\models B$ i $x\cap y\models C$ (Ind Hyp)

$\Leftrightarrow x\cap y\models B\wedge C$

$(\rightarrow)$ $A=B\rightarrow C$, Dokazujemo $x\models B\rightarrow C$ i $y\models B\rightarrow C \Leftrightarrow x\cap y\models B\rightarrow C$

$(\Leftarrow)$ Neka $x\cap y\models B\rightarrow C$. Dokazujemo $x\models B\rightarrow C$. Pretpostavimo $Rxuv$ i $u\models B$; dovoljno je dokazati $v\models C$. Kako je $x\cap y\leqslant x$ to, prema P3, važi $R(x\cap y)uv$ što, sa $u\models B$ i $x\cap y\models B\rightarrow C$ daje $v\models C$. Dakle, $x\models B\rightarrow C$. Zamonom x sa y dobijamo i $y\models B\rightarrow C$.

$(\Rightarrow)$ Neka $x\models B\rightarrow C$ i $y\models B\rightarrow C$. Dokazujemo $x\cap y\models B\rightarrow C$. Pretpostavimo $R(x\cap y)uv$ i $u\models B$; dovoljno je dokazati $v\models C$. Kako važi i $Ru(x\cap y)v$ to prema RA4 postoje v_1 i v_2 takvi da je $Ruxv_1$, $Ruyv_2$ i $v_1\cap v_2\leqslant v$. No, tada je i $Rxuv_1$ i $Ryuv_2$ što zbog $x\models B\rightarrow C, y\models B\rightarrow C$ i $u\models B$ povlači $v_1\models C$ i $v_2\models C$. Kako C ima manje veznika od $B\rightarrow C$ to, prema Ind Hyp, važi i $v_1\cap v_2\models C$. Medjutim $v_1\cap v_2\leqslant v$ povlači $v\cap(v_1\cap v_2)=v_1\cap v_2$ te $v\cap(v_1\cap v_2)\models C$ što, opet prema Ind Hyp, povlači $v\models C$ QED

$(\vee)$ $A=B\vee C$, Dokazujemo $x\models B\vee C$ i $y\models B\vee C \Leftrightarrow x\cap y\models B\vee C$

$(\Rightarrow)$ $x\models B\vee C$ i $y\models B\vee C \Rightarrow \exists u_1\exists v_1(u_1\models B$ i $v_1\models C$ i $u_1\cap v_1\leqslant x)$ i

$\exists u_2\exists v_2(u_2\models B$ i $v_2\models C$ i $u_2\cap v_2\leqslant y)$

$\Rightarrow \exists u_1\exists u_2\exists v_1\exists v_2(u_1\cap u_2\models B$ i $v_1\cap v_2\models C$ i $u_1\cap v_1\leqslant x$ i $u_2\cap v_2\leqslant y)$ (Ind Hyp)

$\Rightarrow \exists u\exists v(u\models B$ i $v\models C$ i $u\cap v\leqslant x\cap y)$

Poslednja implikacija važi jer je $(u_1\cap v_1)\cap(u_2\cap v_2)\leqslant x\cap y$ pa se za u i v mogu uzeti $u_1\cap u_2$ i $v_1\cap v_2$.

$(\Leftarrow)$ Kako je $x\cap y\leqslant x$ i $x\cap y\leqslant y$ to isti u i v koji potvrdjuju B i C u odnosu na $x\cap y$ potvrdjuju B i C i u odnosu na x i u odnosu na y.

4.6.1 Lema o postojanosti

U svakom RA^+ modelu $\mathfrak{M}$, za svaku formulu $A \in ForL^+$ i sve $x,y \in dom\,\mathfrak{M}$, važi:

$$(p) \ldots \quad x \leqslant y \ \underline{i}\ x \models A \Rightarrow y \models A$$

Dokaz:

$$x \leqslant y \ \underline{i}\ x \models A \Rightarrow x = x \cap y \ \underline{i}\ x \models A$$
$$\Rightarrow x \cap y \models A$$
$$\Rightarrow x \models A \ \underline{i}\ y \models A \qquad \text{(Prema lemi 4.6)}$$
$$\Rightarrow y \models A$$

4.7 Lema o važenju implikacije

U svakom RA^+ modelu $\mathfrak{M}$, za svaku formulu $A \rightarrow B \in ForL^+$, važi:

$$\mathfrak{M} \models A \rightarrow B \Longleftrightarrow \forall x(x \models A \Rightarrow x \models B)$$

Dokaz:

Isti kao i u R^+ modelima jer je $\mathfrak{M} \models A$ definisano sa $\forall x(Px \Rightarrow x \models A)$ i važi lema o postojanosti.

4.8 Lema

U svakom RA^+ modelu, za svaku formulu $A \in ForL^+$, važi:

$$0 \not\models A \ \underline{i}\ 1 \models A$$

Dokaz: Indukcijom po broju $s(A)$ veznika formule A

Ako je $s(A)=0$ onda je $A=p_i$ za neko $i \in \omega$ pa

(p_i) $A=p_i$, $\quad 0 \not\models p_i \ \underline{i}\ 1 \models p_i \Leftrightarrow p_i \notin v(0) \ \underline{i}\ p_i \in v(1)$
$\qquad\qquad \Leftrightarrow p_i \notin \emptyset \ \underline{i}\ p_i \in V \quad$ (Definicija v)

Neka je $s(A) > 0$ i neka iskaz leme (Ind Hyp) važi za sve formule $F \in ForL^+$ za koje je $s(F) < s(A)$. Nastupaju slučajevi:

$(\wedge)$ $A=B \wedge C$, $\quad 0 \not\models B \wedge C \ \underline{i}\ 1 \models B \wedge C \Leftrightarrow (0 \not\models B \ \underline{ili}\ 0 \not\models C) \ \underline{i}\ (1 \models B \ \underline{i}\ 1 \models C)$

Desna strana gornje ekvivalencije je tačna po Ind Hyp.

$(\rightarrow)$ $A=B \rightarrow C$, $0 \not\models B \rightarrow C \ \underline{i}\ 1 \models B \rightarrow C \Leftrightarrow \exists u \exists v(R0uv \ \underline{i}\ u \models B \ \underline{i}\ v \not\models C) \ \underline{i}$
$\qquad \forall x \forall y(R1xy \ \underline{i}\ x \models B \Rightarrow y \models C)$

Desna strana gornje ekvivalencije je tačna za $u=1$ i $v=0$ jer je, prema 4.3.2, $R010$ i po Ind Hyp $1 \models B$ i $0 \not\models C$; drugi konjunkt je tačan jer $R1xy$, prema RA2, povlači $x=0$ ili $y=1$, pa ako $x \models B$, onda po Ind Hyp, nije $x=0$ te je $y=1$ te, opet po Ind Hyp, $y \models C$.

$(\vee)$ $A=B \vee C$, $\quad 0 \not\models B \vee C \ \underline{i}\ 1 \models B \vee C \Leftrightarrow \forall u \forall v(u \cap v \leqslant 0 \Rightarrow u \not\models B \ \underline{ili}\ v \not\models C)$
$\qquad \exists x \exists y(x \models B \text{ i } y \models C \ \underline{i}\ x \cap y \leqslant 1)$

Desna strana gornje ekvivalencije je tačna za $x=1$ i $y=1$ (po Ind Hyp $1 \models B$ i $1 \models C$) i zato jer $u \cap v \leqslant 0$ povlači $u \cap v = 0$ pa je, prema 4.3.3, $u=0$ ili $v=0$ te, opet po Ind Hyp, $u \not\models B$ ili $v \not\models C$.

4.9 Teorema o saglasnosti računa RA^+ sa semantikom

$$\vdash_{RA^+} A \Rightarrow \models_{RA^+} A$$

Dokaz:

Kako je svaki RA^+ model istovremeno i R^+ model i kako su definicije $\models$ za p_i, $\wedge$ i $\rightarrow$ kao i $\mathfrak{M} \models A$ isti i u RA^+ i u R^+ modelima to, uz primenu leme o važenju implikacije, R1 - R7 i MP i AD važe u svakom RA^+ modelu. Dovoljno je dakle, dokazati da aksiome R8, R9 i R10 važe u svakom RA^+ modelu. Kako su i ove aksiome oblika implikacije, kao i ranije, koristimo lemu o važenju implikacije.

R8 $A \rightarrow A \vee B$

$x \models A \Rightarrow x \models A \vee B$

akko $x \models A \Rightarrow \exists u \exists v (u \models A$ i $v \models B$ i $u \cap v \leq x)$

Poslednja formula je tačna za $u=x$ i $v=1$ jer, prema 4.8, $1 \models B$.

R9 $B \rightarrow A \vee B$

Analogno R8

R10 $(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C)$

$x \models (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow x \models A \vee B \rightarrow C$

akko $x \models A \rightarrow C, x \models B \rightarrow C \Rightarrow (Rxyz, y \models A \vee B \Rightarrow z \models C)$

akko $x \models A \rightarrow C, x \models B \rightarrow C, Rxyz, (u \models A, v \models B, u \cap v \leq y) \Rightarrow z \models C$

Dokazujemo poslednju formulu. $Rxyz$ i $u \cap v \leq y$ povlači $Ryxz$ i $u \cap v \leq y$ što, zbog P3, daje $R(u \cap v)xz$ odnosno $Rx(u \cap v)z$ odakle prema RA4 proizlazi da za neke z_1 i z_2 važi $Rxuz_1$ i $Rxvz_2$ i $z_1 \cap z_2 \leq z$. No, kako $x \models A \rightarrow C$, $x \models B \rightarrow C$, $u \models A$ i $v \models B$ to važi $z_1 \models C$ i $z_2 \models C$ te prema lemi 4.6 i $z_1 \cap z_2 \models C$ što zbog postojanosti daje $z \models C$ QED

Za dokazivanje teoreme o potpunosti koristimo kanonske okvire i modele koje uvodimo sledećom definicijom.

4.10 Definicija

Neka je S ekspanzija računa RA^+ u jeziku $L(S) \supseteq L^+$

4.10.1 $\mathcal{K}^+(S) = \langle H(S), R_k(S), P(S), \emptyset, ForL(S) \rangle$ je S $^+$kanonski RA^+ okvir

4.10.2 $\mathfrak{M}_k^+(S) = \langle \mathcal{K}^+(S), v_k \rangle$ je S $^+$kanonski RA^+ model

Primećujemo da su S $^+$kanonski RA^+ okviri i modeli definisani na svim $(H(S))$ a ne samo na prostim $(H'(S))$ S d.z. skupovima formula. Razlog je, prirodno, u izmenjenoj definiciji $\models$ za $\vee$ tako da uslov $x \ni A \vee B \Leftrightarrow x \ni A$ ili $x \ni B$ koji je igrao ključnu ulogu u S $^+$kanonskim R^+ modelima nema više nikakav značaj. Time se, istovremeno, eliminiše iz dokaza i Zornova lema.

4.11 Teorema

Za svaku ekspanziju S računa RA^+ važi:

4.11.1 S $^+$kanonski RA^+ okvir $\mathcal{K}^+(S)$ je RA^+ okvir.

4.11.2 S $^+$kanonski RA^+ model $\mathcal{M}_k^+(S)$ je RA^+ model.

Dokaz:

Primenjujemo teoremu 0.8 (v.) koja važi za sve ekspanzije od RA^+.

4.11.1 Prvo dokazujemo da u $\mathcal{K}^+(S)$ važi

(1) ... $x \leqslant y \Leftrightarrow x \subseteq y$

$$
\begin{array}{lll}
(\Rightarrow) & x \leqslant y \Rightarrow \exists t(P(S)t \ \underline{i}\ R_k txy) & \\
& \Rightarrow \exists t(Th(S) \subseteq t \ \underline{i}\ t \circ x \subseteq y) & \\
& \Rightarrow Th(S) \circ x \subseteq y & \text{(Prema 0.8.5)} \\
& \Rightarrow x \subseteq y & \text{(Prema 0.8.4, } Th(S) \circ x = x) \\
(\Leftarrow) & x \subseteq y \Rightarrow Th(S) \circ x \subseteq y & \text{(Prema 0.8.4)} \\
& \Rightarrow \exists t(Th(S) \subseteq t \ \underline{i}\ t \circ x \subseteq y) & \text{(Za } t=Th(S) \text{ jer } Th(S) \in H(S)) \\
& \Rightarrow \exists t(P(S)t \ \underline{i}\ R_k txy) & \\
& \Rightarrow x \leqslant y &
\end{array}
$$

Dokazujemo da u $\mathcal{K}^+(S)$ važe P0 - P4 i RA0 - RA4.

P0 $x \leqslant y \ \underline{i}\ y \leqslant x \Rightarrow x = y$

se, prema (1), svodi na $x \subseteq y \ \underline{i}\ y \subseteq x \Rightarrow x = y$ što je tačno.

P1 $\exists t(P(S)t \ \underline{i}\ R_k txx)$

se svodi na $\exists t(t \in P(S) \ \underline{i}\ t \circ x \subseteq x)$ što je tačno za $t = Th(S)$ (v. (1))

P2 $R_k xxx$

se svodi na $x \circ x \subseteq x$ što je tačno jer 0.8.6.

P3 $x \leqslant y \ \underline{i}\ R_k yzt \Rightarrow R_k xzt$

se svodi na (zbog (1)) $x \subseteq y \ \underline{i}\ y \circ z \subseteq t \Rightarrow x \circ z \subseteq t$ što je tačno jer važi 0.8.5.

P4 $R_k^2 xyzt \Rightarrow R_k^2 xzyt$

se svodi na $x \circ y \subseteq u \ \underline{i}\ u \circ z \subseteq t \Rightarrow \exists v(x \circ z \subseteq v \ \underline{i}\ v \circ y \subseteq t)$ što je tačno za $v = x \circ z$ jer je, zbog 0.8.1, $x \circ z \in H(S)$.

RA0 $0 \neq 1$

se svodi na $\emptyset \neq ForL(S)$ što je tačno.

RA1 $x \leqslant 1$

se svodi na $x \subseteq ForL(S)$ što je tačno.

RA2 $R1xy \Leftrightarrow x = 0$ ili $y = 1$

se svodi na $ForL(S) \circ x \subseteq y \Leftrightarrow x = \emptyset$ ili $y = ForL(S)$. Dokazujemo ovo.

($\Rightarrow$) $ForL(S) \circ x \subseteq y$ povlači, ako je $x \neq \emptyset$, zbog 0.8.7, $ForL(S) \circ x = ForL(S)$ pa je $y = ForL(S)$.

($\Leftarrow$) $x = \emptyset \Rightarrow ForL(S) \circ x = \emptyset \subseteq y$

$y = ForL(S) \Rightarrow ForL(S) \circ x \subseteq ForL(S) = y$

RA3 $\exists z(z\leqslant x \ \underline{i} \ z\leqslant y \ \underline{i} \ \forall t(t\leqslant x \ \underline{i} \ t\leqslant y \Rightarrow t\leqslant z))$
se, zbog (1), svodi na $\exists z(z\subseteq x \ \underline{i} \ z\subseteq y \ \underline{i} \ \forall t(t\subseteq x \ \underline{i} \ t\subseteq y \Rightarrow t\subseteq z))$
što je tačno za $z=x\cap y$.
RA4 $R_k x(y_1\cap y_2)z \Rightarrow \exists z_1\exists z_2(R_k xy_1z_1 \ \underline{i} \ R_k xy_2z_2 \ \underline{i} \ z_1\cap z_2\leqslant z)$
se, zbog (1) i definicije za R_k, svodi na

$$x\circ(y_1\cap y_2)\subseteq z \Rightarrow \exists z_1\exists z_2(x\circ y_1\subseteq z_1 \ \underline{i} \ x\circ y_2\subseteq z_2 \ \underline{i} \ z_1\cap z_2\subseteq z).$$

Dovoljno je dokazati $x\circ(y_1\cap y_2)=(x\circ y_1)\cap(x\circ y_2)$ pa je onda gornja formula tačna za $z_1=x\circ y_1$ i $z_2=x\circ y_2$.
Dokazujemo $x\circ(y_1\cap y_2)=(x\circ y_1)\cap(x\circ y_2)$
($\subseteq$) Neka $A\in x\circ(y_1\cap y_2)$. Tada za neke $B\in x$ i $C\in y_1\cap y_2$ važi $\vdash_S B\to(C\to A)$; no, kako $C\in y_1$ i $C\in y_2$ to $A\in x\circ y_1$ i $A\in x\circ y_2$.
($\supseteq$) Neka $A\in(x\circ y_1)\cap(x\circ y_2)$. Tada $A\in x\circ y_1$ i $A\in x\circ y_2$ pa za neke $B_1,B_2\in x, C_1\in y_1, C_2\in y_2$ važi $\vdash_S B_1\to(C_1\to A)$ i $\vdash_S B_2\to(C_2\to A)$ odakle proizlazi $\vdash_S B_1\wedge B_2\to(C_1\vee C_2\to A)$; medjutim, kako je x zatvoren za AD to $B_1\wedge B_2\in x$ a kako $C_1\in y_1$ i $C_2\in y_2$ to $C_1\vee C_2\in y_1\cap y_2$ te $A\in x\circ(y_1\cap y_2)$ QED
4.11.2 Dovoljno je dokazati da je kanonska valuacija v_k valuacija u smislu definicije 4.1.2. Ona to i jeste jer

$$v_k(x\cap y)=(x\cap y)\cap V=(x\cap V)\cap(y\cap V)=v_k(x)\cap v_k(y).$$

Kraj dokaza.

<u>4.12 Lema o $^+$kanoničnosti $^+$kanonskog RA$^+$ modela</u>
Neka je S ekspanzija računa RA$^+$.
Za sve $x\in H(S)$ i sve $A\in ForL^+$, u $\mathfrak{M}_k^+(S)$ važi:

$$(k) \ \ldots \quad x\models A \Leftrightarrow A\in x$$

<u>Dokaz</u>:
Indukcijom po broju s(A) veznika formule A.
Ako je s(A)=0 onda je $A=p_i$ za neko $i\in\omega$ pa

$$(p_i) \quad A=p_i, \qquad x\models p_i \Leftrightarrow p_i\in v_k(x) \Leftrightarrow p_i\in x\cap V \Leftrightarrow p_i\in x$$

Neka je $s(A)>0$ i neka je (k) $\overset{def}{=}$ Ind Hyp tačno za sve formule $F\in ForL^+$ za koje je $s(F)<s(A)$. Nastupaju slučajevi:

($\wedge$) $A=B\wedge C$, $\quad x\models B\wedge C \Leftrightarrow x\models B \ \underline{i} \ x\models C$
$\Leftrightarrow B\in x \ \underline{i} \ C\in x$ (Ind Hyp)
$\Leftrightarrow B\wedge C\in x$ (Jer je x d.z.)

($\to$) $A=B\to C$, $\quad x\models B\to C \Leftrightarrow \forall y\forall z(R_k xyz \ \underline{i} \ y\models B \Rightarrow z\models C)$
$\Leftrightarrow \forall y\forall z(x\circ y\subseteq z \ \underline{i} \ B\in y \Rightarrow C\in z)$ (Ind Hyp)
$\Leftrightarrow B\to C\in x$

Dokazujemo poslednju ekvivalenciju.

($\Leftarrow$) Neka $B\to C\in x$. Ako je $x\circ y\subseteq z$ i $B\in y$ tada je, jer je formula $(B\to C)\to(B\to C)$ teorema u S, $C\in x\circ y(\subseteq z)$ te je $C\in z$.
($\Rightarrow$) Dokazujemo kontrapoziciju. Neka $B\to C\notin x$. Tada $C\notin x\circ[B]_S$ jer, u suprotnom, ako $C\in x\circ[B]_S$ onda za neko $A\in x$ važi $\vdash_S A\to(B\to C)$ te, jer je x S d.z., $B\to C\in x$. Medjutim, prema 0.8.1, $x\circ[B]_S\in H(S)$ pa je $\exists y\exists z(x\circ y\subseteq z$ i $B\in y$ i $C\notin z)$ tačno za $y=[B]_S$ i $z=x\circ[B]_S$ što je i trebalo dokazati.

($\vee$) $A=B\vee C$, $x\models B\vee C\Leftrightarrow\exists u\exists v(u\models B$ i $v\models C$ i $u\cap v\leq x)$

$\Leftrightarrow\exists u\exists v(B\in u$ i $C\in v$ i $u\cap v\subseteq x)$

$\Leftrightarrow B\vee C\in x$

Dokazujemo poslednju ekvivalenciju.
($\Rightarrow$) Ako $\exists u\exists v(B\in u$ i $C\in v$ i $u\cap v\subseteq x)$ onda $B\vee C\in u\cap v$ pa $B\vee C\in x$.
($\Leftarrow$) Neka $B\vee C\in x$. Tada je, prema 0.7.4, $[B]_S\cap[C]_S=[B\vee C]_S$ pa je $\exists u\exists v(B\in u$ i $C\in v$ i $u\cap v\subseteq x)$ tačno za $u=[B]_S$ i $v=[C]_S$.

4.13 Teorema

Neka je S ekspanzija računa RA^+. Tada, za sve $A\in ForL^+$, važi:

$$\vdash_S A\Leftrightarrow \mathfrak{M}_k^+(S)\models A$$

Dokaz:

Neka $A\in ForL^+$. Tada važi sledeći ekvivalencijski lanac:

$$\not\vdash_S A\Leftrightarrow A\notin Th(S)$$
$$\Leftrightarrow \exists t(t\in P(S) \text{ i } A\notin t)$$

Gornja ekvivalencija je tačna jer ($\Rightarrow$) važi za $t=Th(S)$ a ($\Leftarrow$) važi jer ako za neko $t\in P(S)$, $A\notin t$ onda, zbog $Th(S)\subseteq t$, $A\notin Th(S)$.

$\Leftrightarrow \exists t(Pt$ i $t\not\models A)$ (Zbog leme 4.12)

$\Leftrightarrow \mathfrak{M}_k^+(S)\not\models A$ (Po definiciji $\models$)

4.14 Teorema

Neka je S ekspanzija računa RA^+ u jeziku L^+ i $\mathbb{K}\subseteq\mathbb{K}(RA^+)$ takva da

4.14.1 $\forall A(\vdash_S A\Rightarrow\models_{\mathbb{K}} A)$

4.14.2 $\mathcal{K}^+(S)\in\mathbb{K}$

Tada je S potpun u odnosu na klasu $\mathbb{K}$.

Dokaz:

Zbog 4.14.1, dovoljno je dokazati da $\models_{\mathbb{K}} A\Rightarrow\vdash_S A$.
Dokazujemo kontrapoziciju.

$\not\vdash_S A\Rightarrow\mathfrak{M}_k^+(S)\not\models A$ (Prema teoremi 4.13)

$\Rightarrow\mathcal{K}^+(S)\not\models A$ (Jer je $Fr\,\mathfrak{M}_k^+(S)=\mathcal{K}^+(S)$)

$\Rightarrow\not\models_{\mathbb{K}} A$ (Jer, zbog 4.14.2, $\mathcal{K}^+(S)$ pripada klasi $\mathbb{K}$)

Dakle, 4.14 je analogon odgovarajućih dovoljnih uslova za potpunost iz prethodnih poglavlja.
Primenjujući teoremu 4.14 na račun RA^+($S=RA^+$, $\mathbb{K}=\mathbb{K}(RA^+)$)dobijamo (4.14.1 je 4.9 a 4.14.2 je 4.11):

4.15 Teorema o potpunosti računa RA^+

$$\vdash_{RA^+} A \Longleftrightarrow \models_{RA^+} A$$

Korišćenjem kriterijuma 4.14 možemo dobiti i teoremu o potpunosti računa R^+ (koji je, naravno, ekstenzija računa RA^+ shema-aksiomom R11) u odnosu na neku klasu RA^+ okvira. To nam, istovremeno, pokazuje kako se u svetlosti RA^+ semantike vlada aksioma R11, tj. distributivnost.

4.16 Teorema o potpunosti računa R^+
Neka je $\mathbb{K}(R11)$ klasa svih RA^+ okvira u kojima važi formula
$\forall x \forall y \forall z (x \cap y \leqslant z \Rightarrow \exists u \exists v (x \leqslant u \ \underline{i}\ z \leqslant u \ \underline{i}\ y \leqslant v \ \underline{i}\ z \leqslant v \ \underline{i}\ u \cap v \leqslant z))$
Tada je, za sve $A \in ForL^+$

$$\vdash_{R^+} A \Longleftrightarrow \models_{\mathbb{K}(R11)} A$$

Dokaz:
Prema 4.14, dovoljno je dokazati: 1^o R11 važi u svim okvirima iz klase $\mathbb{K}(R11)$ i 2^o $\mathcal{K}^+(R^+)$ pripada toj klasi.
1^o Neka je $\mathfrak{M}$ neki RA^+ model čiji okvir pripada klasi $\mathbb{K}(R11)$

$\mathfrak{M} \models R11$

akko $z \models A \wedge (B \vee C) \Rightarrow z \models (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
akko $z \models A, \exists x \exists y (x \models B, y \models C, x \cap y \leqslant z) \Rightarrow \exists u \exists v (u \models A \wedge B, v \models A \wedge C, u \cap v \leqslant z)$
Poslednja formula je tačna jer, ako važi antecedens, onda postoje u i v takvi da je $x,z \leqslant u$ i $y,z \leqslant v$ i $u \cap v \leqslant z$; no, tada, zbog postojanosti, dobijamo da $u \models A \wedge B$ i $v \models A \wedge C$ QED
2^o Neka su $x,y,z \in H(R^+)$ takvi da $x \cap y \subseteq z$. Neka je $u=[x \cup z]_{R^+}$ i $v=[y \cup z]_{R^+}$. Očigledno, $x,z \subseteq u$ i $y,z \subseteq v$. Dokazujemo $u \cap v \subseteq z$.
Neka je $C \in u \cap v$. Tada je $C \in u$ i $C \in v$ pa za neke $A \in x$, $B \in y$ i $C_1, C_2 \in z$ važi $\vdash_{R^+} A \wedge C_1 \rightarrow C$ i $\vdash_{R^+} B \wedge C_2 \rightarrow C$ odakle proizlazi (koristi se i R11!) $\vdash_{R^+} (A \vee B) \wedge (C_1 \wedge C_2) \rightarrow C$. $C_1 \wedge C_2 \in z$ a, zbog $A \in x$ i $B \in y$, $A \vee B \in x \cap y$ te, kako $x \cap y \subseteq z$, $A \vee B \in z$. Dakle, antecedens gornje implikacije pripada z pa i konsekvens tj. C takodje pripada z QED

Primetimo da se, umesto u odnosu na klasu $\mathbb{K}(R11)$, potpunost R^+ mogla dokazati i u odnosu na (užu od $\mathbb{K}(R11)$) klasu okvira u kojima je $\langle dom \mathcal{X}, \leqslant \rangle$ distributivna mreža u kojoj je $\cap$ infimum.

Negacija u RA semantici

4.17 Definicija

4.17.1 $\mathcal{X}=\langle \mathcal{X}^+,\bar{R}\rangle$ je RA$_{min}$ okvir akko

(i) $\mathcal{X}^+$ je RA$^+$ okvir, i

(ii) $\bar{R}$ je binarna relacija na dom$\mathcal{X}^+$ takva da u $\mathcal{X}$ važi

$\bar{R}\cap$ $\quad (x\cap y)\bar{R}z \Longleftrightarrow x\bar{R}z$ ili $y\bar{R}z$

$\bar{R}1$ $\quad 0\bar{R}1$

$\bar{R}2$ $\quad 1\bar{R}x \Longrightarrow x=0$

dom$\mathcal{X} \overset{def}{=}$ dom$\mathcal{X}^+$, $\mathbb{K}$(RA$_{min}$) je klasa svih RA$_{min}$ okvira.

4.17.2 $\mathcal{M}=\langle \mathcal{X},v\rangle$ je RA$_{min}$ model akko

(i) $\mathcal{X}$ je RA$_{min}$ okvir

(ii) v je RA$^+$ valuacija na dom$\mathcal{X}$.

dom$\mathcal{M} \overset{def}{=}$ dom$\mathcal{X}$, $\mathbb{M}$(RA$_{min}$) je klasa svih RA$_{min}$ modela.

4.17.3 Napomena

Zbog $\quad x\leqslant y$ i $y\bar{R}z \Longrightarrow x=x\cap y$ i ($x\bar{R}z$ ili $y\bar{R}z$)

$\Longrightarrow (x\cap y)\bar{R}z$ i $x=x\cap y$ $\qquad$ (Prema $\bar{R}\cap$)

$\Longrightarrow x\bar{R}z$

zaključujemo da je svaki RA$_{min}$ okvir istovremeno i R$_{min}$ okvir.

4.18 Definicija

Neka je $\mathcal{M}$ neki RA$_{min}$ model, $A\in$ ForL i $x\in$ dom$\mathcal{M}$. Predikat Formula A važi u svetu x modela $\mathcal{M}$ ($\langle \mathcal{M},x\rangle\models A$, odnosno, $x\models A$) se definiše rekurzijom po broju veznika formule A tako što se definicija 4.5 proširuje aksiomom za $^-$:

($^-$) $\quad A=\bar{B}, \qquad x\models\bar{B} \Longleftrightarrow \forall y(x\bar{R}y \Longrightarrow y\not\models B)$

Ostali $\models$ predikati se definišu (zamenom R$^+$ sa RA$_{min}$) kao u 1.3.

4.19 Lema

U svakom RA$_{min}$ modelu $\mathcal{M}$, za sve $A\in$ ForL i sve $x,y\in$ dom$\mathcal{M}$ važi:

($\cap$) ... $\quad x\models A$ i $y\models A \Longleftrightarrow x\cap y\models A$

Dokaz:

Indukcijom po broju veznika formule A i za veznike p_i, $\wedge$, $\vee$ i $\rightarrow$ je isti kao i dokaz leme 4.6 a za veznik $^-$ glasi:

($^-$) $\quad A=\bar{B}, \qquad x\models\bar{B}$ i $y\models\bar{B} \Longleftrightarrow \forall t(x\bar{R}t \Longrightarrow t\not\models B)$ i $\forall t(y\bar{R}t \Longrightarrow t\not\models B)$

$\Longleftrightarrow \forall t(x\bar{R}t$ ili $y\bar{R}t \Longrightarrow t\not\models B)$

$\Longleftrightarrow \forall t(x\cap y\bar{R}t \Longrightarrow t\not\models B)$ $\qquad$ (Prema $\bar{R}\cap$)

$\Longleftrightarrow x\cap y\models\bar{B}$

Prema prethodnoj lemi u svakom RA$_{min}$ modelu važi svojstvo ($\cap$) pa (v. 4.6.1 i 4.7) u njemu važe leme o postojanosti i važenju implikacije.

4.20 Lema

U svakom RA_{min} modelu $\mathfrak{M}$, za svaku formulu $A \in ForL$, važi:

$$0 \not\models A \ \underline{i}\ 1 \models A$$

Dokaz:

Indukcijom po broju veznika formule A i za veznike $p_i, \wedge, \vee$ i $\rightarrow$ je isti kao u 4.8 a za $^-$ glasi:

$(^-)$ $A=\overline{B}$, $0 \not\models \overline{B}$ i $1 \models \overline{B} \Longleftrightarrow \forall y(0\overline{R}y \ \underline{i}\ y \models B)$ $\underline{i}$ $\forall t(1\overline{R}t \Rightarrow t \not\models B)$

Desna strana gornje ekvivalencije je tačna jer je prvi konjunkt, zbog $0\overline{R}1$ i $1 \models B$ (Ind Hyp), tačan za $y=1$ a drugi, jer $1\overline{R}t \Rightarrow t=0$ pa $0 \not\models B$, opet po Ind Hyp.

4.21 Definicija

RA_{min} je ekspanzija računa RA^+ u jeziku L pravilom

$$NI \quad \frac{A \rightarrow B}{\overline{B} \rightarrow \overline{A}}$$

4.22 Teorema o saglasnosti računa RA_{min} sa semantikom

$$\vdash_{RA_{min}} A \Rightarrow \models_{RA_{min}} A$$

Dokaz:

Kako važe leme o postojanosti i o važenju implikacije, potvrdjivanje aksioma R1 - R10 i pravila MP i AD u RA_{min} modelima je isto kao i u dokazu teoreme 4.9. Dovoljno je potvrditi pravilo NI.

$$NI \quad \frac{A \rightarrow B}{\overline{B} \rightarrow \overline{A}}$$

$$\mathfrak{M} \models A \rightarrow B \Rightarrow \mathfrak{M} \models \overline{B} \rightarrow \overline{A}$$

akko $\forall t(t \models A \Rightarrow t \models B) \Rightarrow (x \models \overline{B} \Rightarrow x \models \overline{A})$

akko $\forall t(t \models A \Rightarrow t \models B), \forall t(x\overline{R}t \Rightarrow t \not\models B), x\overline{R}y \Rightarrow y \not\models A$

Poslednja formula je tačna jer $x\overline{R}y$ povlači, zbog pretpostavke $\forall t(x\overline{R}t \Rightarrow t \not\models B)$, $y \not\models B$ što zbog $\forall t(t \models A \Rightarrow t \models B)$ daje $y \not\models A$ QED

Sledećom definicijom uvodimo kanonske okvire i modele.

4.23 Definicija

Neka je S ekspanzija računa RA_{min} u jeziku $L(S) \geq L$.

4.23.1 $\mathcal{K}(S) = \langle \mathcal{K}^+(S), \overline{R}_k \rangle$ je <u>S kanonski RA_{min} okvir</u> akko

(i) $\mathcal{K}^+(S)$ je S $^+$kanonski RA^+ okvir, i

(ii) $x\overline{R}_k y \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall A(A \in y \Rightarrow \overline{A} \notin x)$ za sve $x, y \in H(S)$.

4.23.2 $\mathfrak{M}_k(S) = \langle \mathcal{K}(S), v_k \rangle$ je <u>S kanonski RA_{min} model</u> akko

(i) $\mathcal{K}(S)$ je S kanonski RA_{min} okvir, i

(ii) v_k je kanonska valuacija na $H(S)$.

4.24 Teorema

Neka je S ekspanzija računa RA_{min}, tada važi:

4.24.1 S kanonski RA_{min} okvir $\mathcal{K}(S)$ je RA_{min} okvir.

4.24.2 S kanonski RA_{min} model $\mathcal{M}_k(S)$ je RA_{min} model.

Dokaz:

Dovoljno je dokazati da $\bar{R}_k$ ispunjava uslove definicije 4.17 (što se tiče kanonske valuacije, za nju je u 4.11.2 već dokazano da je valuacija u RA smislu).

$\bar{R}\cap$ $(x\cap y)\bar{R}_k z \Longleftrightarrow x\bar{R}_k z$ ili $y\bar{R}_k z$

Dokazujemo $\neg(x\cap y)\bar{R}_k z \Longleftrightarrow \neg x\bar{R}_k z$ i $\neg y\bar{R}_k z$

($\Rightarrow$) Neka $\neg(x\cap y)\bar{R}_k z$. Tada za neko $A\in z$ važi $\bar{A}\in x\cap y$ pa $\bar{A}\in x$ i $\bar{A}\in y$ tj. $\neg x\bar{R}_k z$ i $\neg y\bar{R}_k z$.

($\Leftarrow$) Neka $\neg x\bar{R}_k z$ i $\neg y\bar{R}_k z$. Tada za neke $A_1,A_2\in z$ važi $\bar{A}_1\in x$ i $\bar{A}_2\in y$ pa $\bar{A}_1\vee\bar{A}_2\in x\cap y$; no, $\vdash_{RA_{min}} \bar{A}_1\vee\bar{A}_2\rightarrow\overline{A_1\wedge A_2}$ (u dokazu se koriste samo R5,R6,R10 i NI) pa $\overline{A_1\wedge A_2}\in x\cap y$ tj. $\neg(x\cap y)\bar{R}_k z$.

$O\bar{R}_k 1$

se svodi na $\forall A(A\in ForL(S)\Rightarrow \bar{A}\notin\emptyset)$ što je tačno.

$1\bar{R}_k x \Rightarrow x=0$

se svodi na $ForL(S)\bar{R}_k x \Rightarrow x=\emptyset$ odnosno $x\neq\emptyset \Rightarrow \neg ForL(S)\bar{R}_k x$ što je tačno jer ako $x\neq\emptyset$ onda postoji $A\in x$ a tada je $\bar{A}\in ForL(S)$.

4.25 Lema o kanoničnosti S kanonskih RA_{min} modela

Neka je S neka ekspanzija računa RA_{min}. Tada u $\mathcal{M}_k(S)$, za sve $A\in ForL$ i sve $x\in dom\,\mathcal{M}_k(S)$ važi:

$$(k)\ \ldots\quad x\models A \Longleftrightarrow A\in x$$

Dokaz:

Indukcijom po složenosti formule A i za veznike p_i, $\wedge$, $\vee$ i $\rightarrow$ je isti kao u 4.12 a za $^-$ glasi:

$(^-)$ $A=\bar{B}$, $\quad x\models\bar{B} \Longleftrightarrow \forall y(x\bar{R}_k y \Rightarrow y\not\models B)$

$\Longleftrightarrow \forall y(x\bar{R}_k y \Rightarrow B\notin y)$ (Ind Hyp)

$\Longleftrightarrow \bar{B}\in x$

Dokazujemo poslednju ekvivalenciju.

($\Leftarrow$) Neka $\bar{B}\in x$. tada $x\bar{R}_k y$, po definiciji $\bar{R}_k$, povlači $B\notin y$.

($\Rightarrow$) Dokazujemo kontrapoziciju. Neka $\bar{B}\notin x$. Tada je $x\bar{R}_k[B]_S$ jer, u suprotnom, za neko $A\in[B]_S$ važi $\bar{A}\in x$ pa zbog $\vdash_S B\rightarrow A$ i NI dobijamo $\vdash_S \bar{A}\rightarrow\bar{B}$ tj. $\bar{B}\in x$. Prema tome, $\exists y(x\bar{R}_k y$ i $B\in y)$ važi za $y=[B]_S$.

Neposredna posledica leme o kanoničnosti je (dokaz je isti kao i dokaz teoreme 4.13):

4.26 Teorema

Neka je S ekspanzija računa RA_{min} u jeziku $L(S) \supseteq L$. Tada za sve $A \in ForL$ važi:

$$\vdash_S A \Longleftrightarrow \mathfrak{M}_k(S) \models A$$

Korišćenjem prethodne teoreme dobijamo kriterijum analogan kriterijumu 4.14 (dokaz je isti):

4.27 Teorema

Neka je S neka ekspanzija računa RA_{min} u jeziku L i $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}(RA_{min})$ takva da važi:

4.27.1 $\forall A(\vdash_S A \Rightarrow \models_{\mathbb{K}} A)$

4.27.2 $\mathfrak{K}(S) \in \mathbb{K}$

Tada je račun S potpun u odnosu na klasu $\mathbb{K}$.

Neposrednom primenom ove teoreme na $S=RA_{min}$ i $\mathbb{K}=\mathbb{K}(RA_{min})$, (4.27.1 važi zbog 4.22 a 4.27.2 zbog 4.24) dobijamo:

4.28 Teorema o potpunosti računa RA_{min}-

RA_{min} je potpun u odnosu na klasu svih RA_{min} okvira.

Primenjujući kriterijum 4.27, analogno dokazivanju potpunosti za razne ekstenzije računa R_{min} u poglavlju 2, može se dokazati potpunost nekih ekstenzija računa RA_{min}. Tako, za račune koji se dobijaju ekstenzijom računa RA_{min} shemama N2,N3 i N4 iz definicije 2.60 (str.64) važi:

4.29 Teorema

Neka je RA_{min}+Ni (i=2,3,4) ekstenzija računa RA_{min} shema-aksiomom Ni i $\mathbb{K}$(Ni) klasa svih RA_{min} okvira u kojima važi k(Ni). Tada je račun RA_{min}+Ni potpun u odnosu na klasu $\mathbb{K}$(Ni).

Dokaz:

Kako u shemama Ni ne učestvuje veznik $\vee$ to je njihovo potvrdjivanje u RA_{min} okvirima u kojima važi k(Ni) isto kao i njihovo potvrdjivanje u R_{min} okvirima u kojima važi k(Ni) (definicija $\models$ za veznike $\wedge, \rightarrow$ i $^{-}$ je u oba slučaja ista). Time je zadovoljen uslov 4.27.1 kriterijuma 4.27.

Proveravanje uslova 4.27.2 se svodi na proveravanje važenja karakterističnih formula k(Ni) u odgovarajućim kanonskim okvirima. Primetimo da se u kanonskim okvirima za ekspanzije računa RA_{min}, zahvaljujući tome što su zatvoreni za operaciju $\circ$ jer se radi sa svim d.z. skupovima, pomoću formula

$$R_k\overline{R}_kxyz \Longleftrightarrow (x\circ y)\overline{R}_kz \quad \text{i} \quad R_k\overline{R}_k^{-1}xyz \Longleftrightarrow z\overline{R}_k(x\circ y)$$

formule k(Ni) svode na

k(N2)′ ... $\forall x\forall y\forall z(x\circ y\bar{R}_k z \Rightarrow y\bar{R}_k x\circ z)$

k(N3)′ ... $\forall x\forall y(x\bar{R}_k y \Rightarrow y\bar{R}_k x)$

k(N4)′ ... $\forall x\forall y\forall z(x\circ y\bar{R}_k z \Rightarrow x\circ z\bar{R}_k y)$

Dokazujemo da $\mathcal{K}(RA_{min}+Ni)\models k(Ni)'$ za i=2,3,4.

i=2

Neka je $x\circ y\bar{R}_k z$. Dokazujemo $y\bar{R}_k x\circ z$. U suprotnom postoji $A\in x\circ z$ takvo da $\bar{A}\in y$ pa za neke $B\in x$ i $C\in z$ važi da je u $RA_{min}+N2$ formula $B\to(C\to A)$ teorema. Primenom N2 $(A\to B)\to(\bar{B}\to\bar{A})$ dobijamo i da je formula $B\to(\bar{A}\to\bar{C})$ teorema. Medjutim $B\in x$ i $\bar{A}\in y$ daju $\bar{C}\in x\circ y$ što je nemoguće jer $x\circ y\bar{R}_k z$ i $C\in z$ povlači $\bar{C}\notin x\circ y$.

i=3

Neka je $x\bar{R}_k y$. Dokazujemo $y\bar{R}_k x$. U suprotnom postoji $A\in x$ takav da je $\bar{A}\in y$. No zbog N3 $A\to\bar{\bar{A}}$ dobijamo da je $\bar{\bar{A}}\in x$ što protivreči pretpostavci $x\bar{R}_k y$ jer ispada da $B=\bar{A}\in y$ i $\bar{B}=\bar{\bar{A}}\in x$.

i=4

Neka je $x\circ y\bar{R}_k z$. Dokazujemo $x\circ z\bar{R}_k y$. U suprotnom postoji $B\in y$ takav da $\bar{B}\in x\circ z$ te postoje $A\in x$ i $C\in z$ takvi da je formula $A\to(C\to\bar{B})$ teorema u $RA_{min}+N4$. No, tada, zbog N4 $(A\to\bar{B})\to(B\to\bar{A})$ dobijamo i da je formula $A\to(B\to\bar{C})$ teorema što zbog $A\in x$ i $B\in y$ povlači $\bar{C}\in x\circ y$. Kontradikcija sa $x\circ y\bar{R}_k z$ i $C\in z$.

Kraj dokaza.

Primećujemo da aksioma N1 $\bar{A}\wedge\bar{B}\to\overline{A\vee B}$ računa R_{min} nije teorema računa RA_{min} što nije neočekivano zbog različitog tretmana disjunkcije u R_{min} i RA_{min}. Sledeća teorema daje semantičku karakterizaciju sheme N1 u RA_{min} semantici.

<u>4.30 Teorema</u>

Neka je $RA_{min}+N1$ ekspanzija računa RA_{min} u jeziku L shema-aksiomom N1 i $\mathbb{K}(N1)$ klasa svih RA_{min} okvira u kojima važi

k(N1) ... $x\bar{R}y\cap z \Leftrightarrow x\bar{R}y$ <u>ili</u> $x\bar{R}z$

Tada je račun $RA_{min}+N1$ potpun u odnosu na klasu $\mathbb{K}(N1)$.

<u>Dokaz:</u>

Primenjujemo kriterijum 4.27.

1° Dokazujemo da u svakom RA_{min} okviru u kome važi k(N1) važi i N1. Neka je $\mathfrak{M}$ model na jednom takvom okviru.

$\mathfrak{M}\models N1$

akko $x\models\bar{A}, x\models\bar{B} \Rightarrow x\models\overline{A\vee B}$

akko $\forall t(x\bar{R}t \Rightarrow t\not\models A), \forall t(x\bar{R}t \Rightarrow t\not\models B) \Rightarrow (x\bar{R}y \Rightarrow y\not\models A\vee B)$

akko $\forall t(x\bar{R}t \Rightarrow t\not\models A, t\not\models B), x\bar{R}y \Rightarrow (u\cap v\leq y \Rightarrow u\not\models A$ ili $v\not\models B)$
akko $\forall t(x\bar{R}t \Rightarrow t\not\models A, t\not\models B), x\bar{R}y, u\cap v\leq y \Rightarrow u\not\models A$ ili $v\not\models B$
Dokazujemo poslednju formulu. $u\cap v\leq y$ povlači $u\cap v\cap y=u\cap v$ pa je $x\bar{R}u\cap v$ ekvivalentno (zbog k(N1)) sa ($x\bar{R}u\cap v$ ili $x\bar{R}y$) što je tačno. Dalje, $x\bar{R}u\cap v$ povlači $x\bar{R}u$ ili $x\bar{R}v$ odakle, zbog pretpostavke $\forall t(x\bar{R}t \Rightarrow t\not\models A, t\not\models B)$ proizlazi $u\not\models A$ ili $v\not\models B$ QED

2^{o} Dokazujemo da $\mathcal{K}(RA_{min}+N1)\models k(N1)$.
k(N1) dokazujemo u obliku

$$\neg x\bar{R}y\cap z \Leftrightarrow \neg x\bar{R}y \text{ i } \neg x\bar{R}z$$

($\Rightarrow$)Prema $x\bar{R}y\cap z$ postoji $A\in y\cap z$ takav da je $\bar{A}\in x$. No, to znači da je $A\in y, \bar{A}\in x$ i $A\in z, \bar{A}\in x$ tj. $\neg x\bar{R}y$ i $\neg x\bar{R}z$.
($\Leftarrow$)Prema $\neg x\bar{R}y$ i $\neg x\bar{R}z$ dobijamo da postoje $A\in y$ i $B\in z$ takvi da $\bar{A},\bar{B}\in x$. No, prema N1 $\bar{A}\wedge\bar{B}\rightarrow\overline{A\vee B}$, proizlazi da $\overline{A\vee B}\in x$; medjutim iz $A\in y$ i $B\in z$ proizlazi da $A\vee B\in y\cap z$. Dakle $\neg x\bar{R}y\cap z$.
Kraj dokaza.

* * *

Zaključimo ovo poglavlje nekim zapažanjima koja se istovremeno mogu smatrati i razmišljanjem nad celom ovom raspravom.
Unutar svakog poglavlja se može, što je sasvim očekivano, zapaziti usložnjavanje karakterizujućih uslova odnosno odgovarajućih semantika, koje prati usložnjavanje računa koji se semantizuje. U tom smislu, Hintikka shema je možda najdramatičniji primer.
Medjutim, poglavlje 4 deluje, na prvi pogled, kao protivargument upravo iskazanome. Ipak, malo podrobnija analiza nas uverava da to nije slučajno. Kripkeovska semantika je koncipirana tako da se predikat $\models$ definiše uz što više oslanjanja na meta-logiku koja je, naravno, prvobitno zamišljena kao klasična. To je istovremeno i glavna prednost Kripkeovske semantike u odnosu na algebarsku. U ovom poglavlju pak, razmatran je račun u kome distributivnost $\wedge$ prema disjunkciji ne važi uvek. Time je narušen jedan od osnovnih zakona klasične meta-logike što se odmah odrazilo i na složenost definicije predikata $\models$.
Stvar se može i drukčije postaviti. Možemo, naime, zamisliti da smo definicijom predikata $\models$ za $\vee$, onakvom kakva je, izvršili izmenu meta-logike. Umesto jedne prirodne konjunktivno-disjunktivne mreže, kakva je klasična meta-logička mreža, mi

smo uveli jednu polumrežu sa bitno različitim osobinama od klasične. To, istovremeno, ukazuje na granice Kripkeovske semantike na kojima se ona približava algebarskoj.
Tako, na primer, ukoliko bismo hteli da u RA izvršimo semantizaciju veznika $\Box$ binarnom relacijom R_M uvideli bi da je to nemoguće jer u kanonskom modelu, koji se, ne zaboravimo, definiše na svim d.z. skupovima formula a ne samo na prostim, ne važi uslov $(x \cap y) R_M z \Longleftrightarrow x R_M z$ ili $y R_M z$ koji je neophodan da bi važilo svojstvo $\cap$ (v.lemu 4.6) koje je,pak, neophodno da se potvrde aksiome i sheme baznog RA^+ računa. Ukoliko se ipak želi semantizacija veznika $\Box$ u ovom duhu onda se sa polumreže mora preći na mrežu i izmeniti $\models$ za sve veznike. U tom slučaju nestaju svi tragovi klasične meta-logike i mi smo se našli u klasičnoj algebarskoj semantici u kojoj meta-logika slepo prati unutrašnju strukturu računa o kome je reč brišući, praktično, sve veze sa logikom u uobičajenom smislu reči.
Situacija, slična ovoj sa veznikom $\Box$, važi i za, na primer, veznik $^-$ ako se pokuša semantizacija neke jake aksiome kao što je $\bar{\bar{A}} \rightarrow A$ u RA_{min} bez prisustva N1,N2,N3 i N4, i, naravno, distributivnosti. Tada se ispostavlja da se nalazimo u semantici sličnoj onoj iz modalnog primera sa str.85 gde nema karakterizacije predikatskom formulom prvog reda. Ako se takva karakterizacija ipak želi, opet se mora preći sa polumreže na mrežu i izvršiti izmena definicije važenja. Možemo zaključiti da ne samo uvodjenje novog veznika u neki "osakaćeni" račun kao što je RA^+, već i uvodjenje nove aksiome u "neprirodnom" poretku može uticati na gubljenje važnih svojstava Kripkeove semantike.

Mislimo, da je smer budućih istraživanja u semantici,ne samo relevantnih, već i mnogih drugih neklasičnih logika, odredjen upravo duhom prethodnih razmišljanja. Mislimo, takodje, da će buduća istraživanja odnosa algebarskih i Kripkeovih semantika za što šire klase iskaznih računa dati odgovarajući matematički aparat kojim će se moći odredjivati neka mera bliskosti i srodnosti sa klasičnom logikom.

LITERATURA

[1] Ackermann, W., "Begründung einer strengen Implikation", The Journal of Symbolic Logic, vol.21, 1956, pp.113-128.

[2] Anderson, A.R. i Belnap, N.D.Jr, Entailment: The Logic of Relevance and Necessity, vol.1 (drugi tom se do sada nije pojavio) Princeton University Press, Princeton, 1975.

[3] Bell, J. i Machover, M., A Course in Mathematical Logic, North-Holland Publishing Company, Amsterdam,New York,1977.

[4] Belnap, N.D.Jr, "Modal and relevance logics:1977", Modern Logic - a Survey, uredio E.Agazzi, D.Reidel, 1981.

[5] Belnap, N.D.Jr, Gupta, A. i Dunn, J.M. "A consecution calculus for positive relevant implication with necessity", Journal of Philosophical Logic, vol.9, 1980, pp.343-362.

[6] Božić, M. i Došen, K., "Models for normal intuitionistic modal logics" (u štampi u Publ.Math.Inst. Beograd)

[7] Chang, C.C. i Keisler, H.J., Model Theory, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1973.

[8] Charlwood, G., "An axiomatic version of positive semilattice relevance logic", The Journal of Symbolic Logic, vol.46, 1981, pp.233-239.

[9] Chellas, B.F., Modal Logic: an Introduction, Cambridge University Press, Cambridge New York, 1980.

[10] Coppeland, B.J., "On when a semantics is not a semantics: Some reasons for disliking the Routley-Meyer semantics for relevance logic", Journal of Philosophical Logic, vol.8, 1979, pp.399-413.

[11] Došen, K., "A reduction of classical propositional logic to the conjunction-negation fragment of an intuitionistic relevant logic", Journal of Philosophical Logic, vol.10, 1981, pp.399-408.

[12] Došen, K., "Models for stronger normal intuitionistic modal logics" (u štampi u Publ.Math.Inst. Beograd)

[13] Dunn, J.M., "A natural family of sentential calculi intermediate between R and R-mingle" (abstract), The

Journal of Symbolic Logic, vol.41, 1976, pp.553.

[14] Dunn, J.M., "A Kripke-style semantics for R-mingle using a binary accessibility relation", Studia Logica, vol. XXXV, 1976, pp.163-172.

[15] Dunn, J.M., "Relevant Robinson's arithmetic", Studia Logica, vol.XXXVIII, 1979, pp.407-418.

[16] Fine, K., "Models for entailment", Journal of Philosophical Logic, vol.3, 1974, pp.347-372.

[17] Goldblatt, R.I., "Metamathematics of modal logic, I", Reports on Mathematical Logic, No.6, 1976, pp.41-77

[18] Goldblatt, R.I., "Metamathematics of modal logic, II", Reports on Mathematical Logic, No.7, 1976, pp.21-52.

[19] Hintikka, J., "The modes of modality", Acta philosophica fennica, Modal and Many-Valued Logics, 1963, pp.65-81.

[20] Kielkopf, C.F., Formal Sentential Entailment, Ohio State University Press of America, Washington, 1977.

[21] Kripke, S.A., "Semantical analysis of modal logic" (abstract) The Journal of Symbolic Logic, vol.24, 1959, pp.323-324.

[22] Kripke, S.A., "A completeness theorem in modal logic", The Journal of Symbolic Logic, vol.24, 1959, pp.1-15.

[23] Kripke, S.A., "Semantical analysis of modal logic, I" Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, vol.9, 1963, pp.67-96. (Ovo je 21 in extenso)

[24] Kron, A., Marić, Z. i Vujošević, S., "Entailment and quantum logic", Current Issues in Quantum Logic, uredili Beltrametti, E. i van Fraassen, B., Plenum Press, London New York, 1981, pp.193-207.

[25] Lemmon, E.J., An Introduction to Modal Logic, American Philosophical Quarterly Monograph Series, No.11, Oxford, 1977. (Ovo je prvo objavljivanje čuvenih uvodnih poglavlja u intenzionalne logike koje je Lemmon napisao uoči smrti 1966,pripremajući sa D.Scottom knjigu o intenzionalnim logikama. Godinama je matematičko-logičkim svetom kružila šapirografisana verzija,koju je napravio Scott, pod nazivom "Lemmon Notes")

[26] Maksimova, L.L., "A semantics for the calculus E of entailment", Bulletin of the Section of Logic, Polish Academy of Sciences, Institute of Philosophy and Sociology, vol.2, 1973, pp.18-21.

[27] Meyer, R.K., "Relevant arithmetic", Bulletin of the Section of Logic, Polish Academy of Sciences, Institute of Philosophy and Sociology, vol.2, 1973, pp.133-137.

(Radovi [26] i [27] su, u stvari,apstrakti; ipak, iako veoma značajni, nikada se nisu pojavili in extenso)

[28] Meyer, R.K. i Dunn, J.M., "E,R and γ", The Journal of Symbolic Logic, vol.34, 1969, pp.460-474.

[29] Monk, J.D., Mathematical Logic, Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1976.

[30] Mortensen, C.E., "Model structures and set algebras for Sugihara matrices", Notre Dame Journal of Formal Logic, vol.23, 1981, pp.85-90.

[31] Popov, V.M., "O razrešimosti relevantnoj sistemi R_A", Metodi logičeskova analiza, Nauka, Moskva, 1977.

[32] Rasiowa, H., An Algebraic Approach to non-Classical Logics, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1974.

[33] Rasiowa, H. i Sikorski, R., The Mathematics of Metamathematics, Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, Warsaw, 1968.

[34] Routley, R. i Meyer, R.K.,"The semantics of entailment,I", Truth,Syntax,Modality. North-Holland, Amsterdam, 1973.

[35] Routley, R. i Meyer, R.K.,"The semantics of entailment,II", Journal of Philosophical Logic, vol.1, 1972, pp.53-73.

[36] Routley, R. i Meyer, R.K.,"The semantics of entailment,III", Journal of Philosophical Logic, vol.1, 1972, pp.192-208.

[37] Routley, R. i Meyer, R.K.,"Towards a general semantical theory of implication and conditionals (I)" Reports on Mathematical Logic, vol.4, 1975, pp.67-90.

[38] Segerberg, K., An Essay in Classical Modal Logic", vol.1,2,3. Filosofiska Studier, No.13, Uppsala,1971 (doktorska teza).

[39] Urquhart, A., "Semantics for relevant logic", The Journal of Symbolic Logic, vol.37, 1972, pp.159-169.