U N I V E R Z I T E T U B E O G R A D U

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Milan R. Tasković

BANACHOVA PRESLIKAVANJA NA PROSTORIMA I UREDJENIM SKUPOVIMA

Doktorska disertacija

BEOGRAD, 1978. GOD.

SADRŽAJ

UVODNE NAPOMENE

Jedno osnovno matematičko pitanje, pitanje matematičkog stvaranja i rasudjivanja, i ne samo matematičkog je: Na nepraznom skupu 0, i za preslikavanje T:0 ——>0 odrediti skup tačaka $x \in 0$ sa svojstvom Tx=x. Teorijski, to je topološko funkcionalni problem, no praktično odgovor na njega, krije eksplicitno, ponekad implicitno, rešenja raznih matematičkih problema (skupovnih, algebarskih, numeričkih,...). To je proizvod ove toliko primenljive teorije, teorije fiksnih tačaka (fixed point theory). Danas, sigurno da nema spora, da teorija fiksne (nepokretne) tačke predstavlja u matematici koliko značajnu toliko i inspirativnu oblast. Više je razloga za to. Jedan svakako leži u činjenici koja je omogućila da početkom ovog veka u situaciji kada je se u matematici nagomilao veliki broj rezultata koji su pružali dosta anarhičnu sliku, mnogi rezultati (naizgled potpuno različiti) mogu biti opisani jednim opštijim, koji odgovara na pitanje svih prethodnih. Bila je, to jedna, i od ideja, iz koje su proistekla ova naša istraživanja i rasućivanja.

Prvi fundamentalan rezultat iz teorije fiksnih tačaka dobio je 1909. godine holandski matematičar L.BROUWER u radu [35]. On je dokazao da svako neprekidno preslikavanje konačno-dimenzionog simpleksa Euklidskog prostora u sebe sama ima bar jednu postojanu tačku.

No, ovde moramo izraziti i izvesnu rezervu ukoliko je rač o pravim počecima ove teorije, jer su mnoga tvrdjenja bila dokazana i pre same pojave teorije. To su bili dokazi raznih tvrdjenja, koji su se pojavljivali u raznim oblicima. Sa druge strane i pitanje prioriteta u nauci je često vrlo složeno ne samo zbog nedostatka podataka, nego i zbog činjenice da mnogi fundamentalni rezultati, možda čak i većina njih ne dolaze kao iznenadni blesak genijalnog uma, nego su izvorišno pripremljena rezultatima ponekad čitave grupe prethodnika. Ovo ističemo i iz razloga što su mnogi danas skloni da navedeni rezultat BROUWER-a pripišu nekim drugim, takodje izuzetnim matematičarima, POINCARE-u ili možda PIERS BOHL-u iz Rige.

G. BIRKHOFF i A. KELLOG su 1922.godine u radu [21] prvi pokazali kako se stavovi o postojanim tačkama, kao metod funkcionalne analize mogu koristiti u dokazima stavova o egzistenciji rešenja raznih tipova jednačina. SCHAUDER je u radu [243], 1927.godine proširio BROUWEROV stav na kompaktne konveksne podskupove Banachovih prostora. Ovo je dalje A.TIHONOV [272] 1935. proširio na kompaktne konveksne podskupove lokalno konveksnih linearnih topoloških prostora. U novije vreme ovim su se bavili FELIX BROWDER [25], R.HALPERN i M.BERGMAN [282] ,koji uopštavaju stav SCHAUDERA odnosno TIHONOVA.

S druge strane jedan drugi fundamentalni rezultat poljskog matematičara STEFANA BANACH-a (1892-1945) iz 1922. godine otvorio je takodje jedan novi pravac istraživanja u teoriji fiksnih tačaka, koji je nezavisan od BROUWER-ovog stava. Ovde, takodje izvorište za ovaj rezultat treba tražiti u radovima PICARD-a, a LIOUVILLE-a,CAUCHY-a ,LIPSCHITZ-a, a možda zasluga imaju i SCHAUDER i francuski matematičar LERAY.

Topološki smisao BANACHOVOG stanja iskazuje se u t.zv. obrnutim Banachovim stavovima. JANOŠ L. [133] za kompaktne metrizabilne i P.MEYERS [178] za metrizabilne topološke prostore X dokazuju da ako operator A:X ——>X.

(a) Ima jedinstvenu postojanu tačku $\xi \in X$.

(b) $\xi \in X$ je granična vrednost nizova $\{A^n x\}$ za svako $x \in X$

(c) Postoji neka okolina V tačke ξ takva da za svaku okolinu U tačke $A\xi$ postoji prirodan broj n_u sa svojstvom da je $A^n V \subset U$ za svako $n \geq n_u$, tada postoji metrika ρ koja definiše topologiju indentičnu datoj u odnosu na koju je A kontrakcija.

Preslikavanja koja imaju bar jednu od osobina (a), (b), (c) zvaćemo BANACHOVA preslikavanja, inače gornja svojstva karakterišu t.zv. BANACHOV princip kontrakcije.

Jedan od daljih pravaca istraživanja u teoriji fiksne tačke su i istraživanja postojanih tačaka izotononih preslikavanja na uredjenim skupovima. Tu je fundamentalni rezultat A.TARSKOG [251], da je skup postojanih tačaka monotono rastućih preslikavanja koje preslikavaju kompletnu latisu (mrežu) u samu sebe na neprazan, i šta više, obrazuje kompletnu mrežu.

Značajne priloge u ovom pravcu dali su kasnije ANNE DAVIS [3], M S, ABAIN i A. BROWN [13], DJ. KUREPA [154] i V. DEVIDE [73].

Cilj ovog rada je, nastavak istraživanja u okvirima rezultata BANACHOVOG tipa, u pravcima koje smo ovde posebno i isticali. Navedeni pravci i rezultati bili su nam i metod i inspiracija u našim razmatranjima i proučavanjima.

I. KONVERGENCIJA NEKIH NIZOVA, DIFERENCIJSKE NEJEDNAKOSTI I PRIMENE

I.1. DIFERENCIJSKE NEJEDNAKOSTI, KONVERGENCIJA NEKIH NIZOVA I PRIMENE.

I.2. NEKE (LOKALIZACIONE) TEOREME FIKSNE TAČKE I INTEGRABILNA REŠENJA NEKIH FUNKCIONALNIH JEDNAČINA.

I.2.1. JEDNA TEOREMA FIKSNE TAČKE I NEKE POSLEDICE.

I.2.2.1. NELINEARNA FUNKCIONALNA JEDNAČINA I REDA.

I.2.2.2. INTEGRABILNA REŠENJA FUNKCIONALNIH JEDNAČINA VIŠEG REDA.

I.3. KONVERGENCIJA NEKIH NIZOVA I REŠAVANJE SISTEMA JEDNAČINA NA METRIČKIM PROSTORIMA.

Osnovna ideja ovog poglavlja je da se podje od nekih diferencijskih nejednakosti na uredjenim skupovima i da se dokažu tvrdjenja koja će davati dovoljne (ponekad i potrebne) uslove za konvergenciju odgovarajućih nizova. Dve su činjenice koje smo ovde uočili. Figurativno rečeno jedna je BANAHOVSKA a druga nije. To će biti i osnovna ideja rada koju ćemo pratiti i kroz sve tri prve glave. Kao direktne primene ovih teorema biće neki opšti stavovi fiksne tačke i u vezi sa tim krajnji domet rešavanje nekih nelinearnih funkcionalnih jednačina. Zadnji deo ove glave odnosi se na sisteme jednačina i konvergenciju nekih nizova. Kroz čitavo poglavlje mi uopštavamo i veliki broj rezultata drugih matematičara.

I.1. DIFERENCIJSKE NEJEDNAKOSTI, KONVERGENCIJA NEKIH NIZOVA I PRIMENE

U ovom delu rada posmatraju se neka preslikavanja uredjenih skupova i u vezi sa tim jedna klasa nejednačina sa konačnim razlikama. Pri tome se dokazuju neke teoreme koje daju dovoljne uslove za konvergenciju nizova definisanih diferencijskim nejednačinama. Na kraju se daju neke posledice i primene.

Neka je $(E,\leqslant)$ uredjen skup relacijom poretka $\leqslant$, i o proizvoljna operacija na skupu E sa svojstvima:

$$\text{(A)}\quad \begin{array}{l} \text{(a)}\ (\forall x,y,z\in E)\ x\leqslant z o y \Longleftrightarrow x\alpha(o)y\leqslant z, \\ \text{(b)}\ (\forall x,y,z\in E)\ x\leqslant y \Longrightarrow z o x\leqslant z o y, \end{array}$$

gde je $\alpha(o)$ inverzna operacija operacije o.

Preslikavanje $\psi : E^k \longrightarrow E\,(k\in N)$ je monotono rastuće $(\psi\uparrow)$ na uredjenom skupu $(E,\leqslant)$ ako je:

$x_i,\ y_i\in E\wedge x_i\leqslant y_i\,(i=1,\ldots,k) \Longrightarrow \psi(x_1,\ldots,x_k)\leqslant\psi(y_1,\ldots,y_k)$,

odnosno monotono opadajuće $(\psi\downarrow)$ ako je:

$x_i,\ y_i\in E\wedge x_i\leqslant y_i\,(i=1,\ldots,k)\Longrightarrow\psi(y_1,\ldots,y_k)\leqslant\psi(x_1,\ldots,x_k)$

Inače, ovde ćemo koristiti i semihomogena preslikavanja, koja definišemo na sledeći način: Preslikavanje $\psi:E^k\longrightarrow E$ $(k\in N)$ je semihomogeno na skupu $(E,\leqslant)$ ako je $\psi(\lambda o x_1,\ldots,\lambda o x_k)\leqslant\lambda o\psi(x_1,\ldots,x_k)$, odnosno homogeno ako je $\psi(\lambda o x_1,\ldots,\lambda o x_k) = \lambda o\psi(x_1,\ldots,x_k)$, gde je $\lambda\in E$.

Neka je dalje svojstvom M nazvana osobina:

Za uredjen skup $(E,\leqslant)$ svaka dva elementa imaju majorantu (u oznaci μ).

Pod ovim uslovom očigledno i svaki konačan podskup skupa $(E,\leqslant)$ ima majorantu. Sada možemo navesti i rezultate koji se odnose na monotona i semihomogena preslikavanja skupa $(E,\leqslant)$.

TEOREMA I.1.1. Neka je $E\neq\phi$ uredjen skup relacijom poretka $\leqslant$ sa svojstvom M i preslikavanje $\psi:E^k\longrightarrow E$ $(k\in N)$ monotono rastuće i semihomogeno, a (x_n) i (X_n) nizovi koji zadovoljavaju relacije

$$\text{(1)}\quad \begin{array}{l} x_{n+k}\leqslant\psi(x_n,x_{n+1},\ldots,x_{n+k-1}) \\ \psi(X_n,X_{n+1},\ldots,X_{n+k-1})\leqslant X_{n+k}\quad(n\in N); \end{array}$$

Tada postoji element $L\in E$ sa osobinom da je $x_n\leqslant L o X_n\,(n\in N)$, gde je o operacija na skupu E sa svojstvom (A).

DOKAZ: Stavljajući da je

$L = \mu(x_1\alpha(o)\ X_1,\dots,x_k\alpha(o)X_k)$ dokažimo da važi naše tvrdjenje. Za $n=1,2,\dots,k$ tvrdjenje je tačno, jer je

$$x_\nu \leqslant L o X_\nu \Longleftrightarrow x_\nu \alpha(o) X_\nu \leqslant L\ (\nu=1,2,\dots,k)$$

Pretpostavimo da je tvrdjenje tačno i za $n, n+1,\dots, n+k-1$, tj. da je

(2) $$x_{n+\nu-1} \leqslant L o X_{n+\nu-1}\ (\nu=1,2,\dots,k).$$

Prema (1) i (2) je

$$\begin{aligned} x_{n+k} &\leqslant \psi(x_n,x_{n+1},\dots,x_{n+k-1}) \\ &\leqslant \psi(LoX_n,\ LoX_{n+1},\dots,\ LoX_{n+k-1}) \\ &\leqslant Lo\,\psi(X_n,\ X_{n+1},\dots,\ X_{n+k-1}) \\ &\leqslant LoX_{n+k}, \end{aligned}$$

što znači (prema principu matematičke indukcije) da je naše tvrdjenje tačno za svaki prirodan broj n.

Napomenimo dalje da se teorema I.1.1. može proširiti i na parove nejednačina sa konačnim razlikama, za preslikavanja $\psi_i : E^k \longrightarrow E\ (k\in N)$ oblika

$$x_n \leqslant \psi_i(x_1,x_2,\dots,x_{n-1})$$
$$\psi_i(X_1,X_2,\dots,X_{n-1}) \leqslant X_n\ ,\ n\in N;$$

ili na parove sistema nejednačina ovog tipa. Navedimo jednu propoziciju za slučaj sistema nejednačina sa konačnim razlikama na nekom uredjenom skupu $(E,\leqslant)$, (videti [260], s.168.)

TEOREMA I.1.2. Neka je $E \neq \phi$ uredjen skup relacijom poretka $\leqslant$ sa svojstvom M i $\psi : E^{2n-2} \longrightarrow E\ (n\in N)$ monotono rastuće i semihomogeno preslikavanje, a (x_n), (y_n), (X_n), (Y_n) nizovi koji zadovoljavaju relacije

$$x_n,\ y_n \leqslant \psi(x_1,\dots,x_{n-1},y_1,\dots,y_{n-1})$$
$$\psi(X_1,\dots,X_{n-1},Y_1,\dots,Y_{n-1}) \leqslant X_n, Y_n,\ n\in N.$$

Tada postoje elementi $L_1,\ L_2 \in E$ sa osobinom da je

$$x_n \leqslant L_1 o X_n\ ,\ y_n \leqslant L_2 o Y_n\ (n\in N),$$

gde je o operacija na skupu E sa osobinom (A).

DOKAZ ovog tvrdjenja videti u [259] i [263].

Navedimo dalje neke realizacije skupa E sa prethodnim osobinama iz teorema I.1.1 i I.1.2. Jedan najjednostavniji i najviše korišćeni primer u našem radu je skup $R_+ \stackrel{def}{=} (0,+\infty)$, sa uobičajenim uredjenjem manje ili jednako ($\leq$). Pored ovoga i niz kombinacija intervala raznih oblika može takodje biti primer skupa E sa prethodnim osobinama. No, navedimo i jedan drugi zanimljiv primer ove realizacije.

PRIMER I.1.1. Neka je X realan vektorski prostor i neka je on K-lineal. Tada X ima sve osobine parcijalno uredjenog skupa $(E, \preccurlyeq)$. Navedimo, da je skup X K-lineal (lineal Л.В.Канторовича [139]) ako je prvo u X izdvojena klasa pozitivnih elemenata (u smislu da se zna koji je element $x \in X$, takav da je $x > \theta$; θ je nulti element). Sada se uvodi parcijalno uredjenje u vektorskom prostoru X, stavljajući po definiciji da je $x \preccurlyeq y$ $(x, y \in X)$ ako i samo ako je $x - y \geqq \theta$, sa sledećim osobinama:

(a) $x > \theta \Longrightarrow x \neq \theta$,

(b) $x > \theta,\ y > \theta \Longrightarrow x + y > \theta$,

(c) Za bilo koja dva elementa $x, y \in X$ postoji njihov $\sup\{x,y\}$,

(d) $x > \theta,\ \lambda > \theta \Longrightarrow \lambda x > \theta$.

U daljem radu koristićemo preslikavanja $\psi : R_+^k \longrightarrow R_+$ $(k \in N)$ koja za neko $A \in R_+$ zadovoljavaju nejednakost

$$\psi(x_1, \dots, x_k) \leqq A \max\{x_1, \dots, x_k\}\ ;\ x_1, \dots, x_k \in R_+.$$

Za ovakva preslikavanja rećićemo da imaju osobinu M(max). Inače kada je ψ rastuće i semihomogeno preslikavanje na skupu R_+ tada ono ima osobinu M(max). Preslikavanje $\psi : R_+^k \longrightarrow R_+$ $(k \in N)$ zvaćemo semihomogeno reda α, ako važi nejednakost $\psi(\delta, \dots, \delta) \leqq A\delta$, za $\delta > \alpha \geqq o$ i neko $A \in R_+$. Kada je preslikavanje ψ semihomogeno onda je ono i semihomogeno reda $\alpha = o$.

Kao dalju razradu prethodnih propozicija dokazaćemo neka tvrdjenja, koja smo inače u radovima [259], [263] izložili u nešto drugačijem obliku.

TEOREMA I.1.3. Neka preslikavanje $\psi : R_+^k \longrightarrow R_+$ $(k \in N)$ ima osobinu M(max) sa konstantom A i neka niz (x_n) pozitivvnih realnih brojeva zadovoljava nejednakost

$$x_{n+k} \leqq \psi(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k-1}),\ n \in N,$$

gde je $k \in N$ fiksiran broj. Tada postoje pozitivni brojevi L i θ takvi da je

(3) $$x_n \leqq L\theta^n \quad (n=1,2,\ldots).$$

Specijalno kada je i $A \in (0,1)$ tada je $\theta \in (0,1)$ u nejednakosti (3).

TEOREMA I.1.4. Neka preslikavanje $\psi: R_+^{k+1} \longrightarrow R_+ \ (k \in N)$ ima osobinu M(max) sa konstantom $A \in (0,1)$, i neka niz (x_n) pozitivnih realnih brojeva zadovoljava nejednakost

(4) $$x_{n+k} \leqq \psi(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}),\ n \in N.$$

gde je $k \in N$ fiksiran broj. Tada postoje brojevi $L>0$ i $\theta \in (0,1)$, tako da važi nejednakost (3).

Primećujemo da iz rašćenja i semihomogenosti preslikavanja $\psi: R_+^k \longrightarrow R_+ \ (k \in N)$ sledi da je ono i sa osobinom M(max), dok obrnuto ne važi, šta više iz osobine M(max) ne mora da sledi ni rašćenje a ni semihomogenost preslikavanja. Potvrdimo ovo jednim primerom.

PRIMER I.1.2. Neka je preslikavanje $\psi: R_+^2 \longrightarrow R_+$ definisano specijalno sa

$$\psi(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+y}, & 1 \leqq x,y < +\infty \\ 0, & \text{za ostale vrednosti } x,y. \end{cases}$$

Ovo preslikavanje nije ni rastuće, a ni semihomogeno, medjutim ono poseduje osobinu M(max).

Možemo reći da je $\max\{t_1, \ldots, t_k\}$ najbolja majoranta za rastuća i semihomogena preslikavanja $\psi: R_+^k \longrightarrow R_+ \ (k \in N)$. Sa druge strane ovde se postavlja kao osnovni problem, pitanje kako još više proširiti domen obuhvatnosti što šire klase nizova vezanih prethodnim diferencijskim nejednakostima. Postavlja se pitanje šta se dogadja kada se osobine M(max) ili semihomogenosti zamene nekim slabijim osobinama preslikavanja (M(max) reda α ili sa semihomogenošću reda α, ili nekom drugom osobinom). Da li i tada gore definisani nizovi imaju osobinu geometrijskih nizova. Odgovor na ovo pitanje daju sledeća dva tvrdjenja. Ovo možemo potkrepiti i sledećim primerom.

PRIMER I.1.3. Neka je preslikavanje $\psi:R_+^k \longrightarrow R_+ (k\in N)$ monotono rastuće i semihomogeno reda $\alpha>0$ i neka niz (x_n) realnih nenegativnih brojeva zadovoljava nejednakost

$$x_{n+k} \leqq \psi(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k-1}),\ n\in N,$$

gde je $k\in N$ fiksiran broj. Tada postoje pozitivni brojevi L i θ takvi da je ispunjen uslov (3). Specijalno kada je i $A = \psi(1,\ldots,1) \in (0,1)$, to još uvek nije dovoljan uslov da niz (x_n) teži nuli.

Da je ovo tvrdjenje tačno izvodi se indukcijom, a bazira na lemi I.1.1. koju ćemo kasnije dokazati. Dokažimo samo drugi deo tvrdjenja, da uslov $A\in(0,1)$ još uvek ne obezbedjuje u ovom slučaju konvergenciju niza ka nuli. Dovoljno je to dokazati i kada je $k=1$. Neka je u tom cilju, preslikavanje $\psi:R_+ \longrightarrow R_+$ definisano specijalno sa

$$\psi(x) = \begin{cases} 1/2, & 0<x\leqq 1 \\ \dfrac{x}{1+x}, & 1\leqq x<+\infty. \end{cases}$$

Tada niz (x_n) koji zadovoljava nejednakost $x_{n+1}\leqq \psi(x_n)$, $n\in N$ ne konvergira ka nuli, iako je $\psi:R_+\longrightarrow R_+$ rastuće, semihomogeno reda $\alpha=1$ i $\psi(1) = A\in(0,1)$.

TEOREMA I.1.5. Neka je preslikavanje $\psi:R_+^k \longrightarrow R_+ (k\in N)$ rastuće sa osobinama $(\forall t\in R_+)\psi(t,\ldots,t)<t$ i $\limsup\limits_{z\to t+0} \psi(z,\ldots,z)<t\ (t\in R_+)$. Neka niz (x_n) realnih nenegativnih brojeva zadovoljava nejednakost

(5) $$x_{n+k} \leqq \psi(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k-1}),\ n\in N.$$

Tada niz (x_n) konvergira ka nuli. Konvergencija ne mora biti geometrijskom brzinom.

TEOREMA I.1.6. Neka je preslikavanje $\psi:R_+^{k+1} \longrightarrow R_+ (k\in N)$ rastuće sa osobinama $(\forall t\in R_+)\ \psi(t,\ldots,t)<t$ i $\limsup\limits_{z\to t+0} \psi(z,\ldots,z)<t\ (t\in R_+)$

Neka niz (x_n) realnih nenegativnih brojeva zadovoljava nejednakost

(6) $$x_{n+k} \leqq \psi(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}),\ n\in N.$$

Tada niz (x_n) konvergira ka nuli. Konvergencije ne mora biti geometrijskom brzinom.

Napomenimo, da prethodna tvrdjenja mogu imati i jedan operativniji oblik (lakše je proveriti dovoljne uslove) kada se za

preslikavanje $\psi:R_+^k \longrightarrow R_+ (k\in N)$ pored rašćenja zahteva i uslov semihomogenosti reda α i uslovi $(\forall t\in(o,\alpha])\ \psi(t,\dots,t)<t$ i $\limsup_{z\to t+o} \psi(z,\dots,z)<t\ (t\in(o,\alpha])$. Ali kako svako semihomogeno preslikavanje reda α ima i osobinu $\limsup_{z\to t+o} \psi(z,\dots,z)<t (t\in[\alpha,+\infty))$ to su prethodne formulacije naših tvrdjenja opštije, mada prethodna konstatacija može biti vrlo korisna. Sa druge strane za tvrdjenje prethodnog oblika u slučaju kada je $\psi: R_+ \longrightarrow R_+$ ne mora se zahtevati rašćenje preslikavanja $\psi:R_+ \longrightarrow R_+$.
Naime važi

TEOREMA I.1.7. Neka je preslikavanje $\psi:R_+\longrightarrow R_+$ sa osobinama $(\forall t\in R_+)\psi(t)<t$ i $\limsup_{z\to t+o} \psi(z)<t\ (t\in R_+)$. Ako niz (x_n) realnih nenegativnih brojeva zadovoljava nejednakost $x_{n+1}\leq\psi(x_n)$, $n\in N$, tada on konvergira ka nuli, pri čemu brzina konvergencije ne mora biti geometrijska. Prethodni dovoljni uslovi za preslikavanje ne mogu se izostaviti.

Kao direktnu posledicu ovog tvrdjenja nešto kasnije (I.2.1) dokazaćemo jedan stav fiksne tačke, koji će biti primenjen na rešavanje nekih funkcionalnih jednačina u ovom poglavlju.

Na kraju navedimo i jedan rezultat koji se dokazuje isto kao i neka prethodna odgovarajuća tvrdjenja.

TEOREMA I.1.8. Neka preslikavanje $\psi:R_+^k \longrightarrow R_+(k\in N)$ ima osobinu M(max), sa konstantom $A\in(0,1)$, i neka nizovi (x_n), (y_n) realnih nenegativnih brojeva zadovoljavaju nejednakost

$$x_{n+k} \leq \psi(x_n,x_{n+1},\dots,x_{n+k-1}) + y_n\ (n\in N).$$

Tada: (a) Ako red $\Sigma\, y_k$ konvergira tada i red Σx_k konvergira.

(b) Ako je niz (y_n) ograničen tada je i niz (x_n) ograničen,

(c) Ako je $\lim y_n=0$ tada je i $\lim x_n=0$.

Navedimo dalje rezultate i razne primere koji su obuhvaćeni prethodnim tvrdjenjima.

PRIMER I.1.4. Lema 1 iz rada [205] S.PREŠIĆA specijalan je slučaj naše teoreme I.1.1. Dovoljno je pod pretpostavkama propozicije interpretirati E = R (gde je R skup realnih brojeva), a relaciju sa $\leq$ (manje ili jednako u R), gde se još operacija o zadaje kao obično množenje u R, a preslikavanje $\psi:R^k\longrightarrow R$

specijalno definiše sa

$$\psi(t_1,\ldots,t_k) = t_1 + t_2 + \ldots + t_k \quad (t_i \geqq o)$$

Na isti način je njegova lema 2 specijalan slučaj rezultata I.1.3. Formulišimo je:

POSLEDICA I.1.1. (S.PREŠIĆ [205], s. 76) Neka je (x_n) niz nenegativnih brojeva koji ispunjava uslov

$$x_{n+k} \leqq a_1 x_n + \ldots + a_k x_{n+k-1} \quad (n = 1,2, \ldots) ,$$

gde su $a_1, a_2, \ldots, a_k$ nenegativne konstante. Tada postoje pozitivni brojevi L i θ sa svojstvom (3).

PRIMER I.1.5. Neka je niz realnih funkcija $(\gamma_n(x))$ definisan na sledeći način

$$\gamma_1(x) = x\,(1+x^2)^{-1}, \quad \gamma_{n+1}(x) = \gamma_1(\gamma_n(x)) \quad ,(x \in R; n=1,2,\ldots)$$

tada niz $(\gamma_n(x))$ nije kontrakcija, ali ima fiksnu tačku.

DOKAZ sada sledi primenom teoreme I.1.5. , na gore definisan niz.

POSLEDICA I.1.2. (DJ.KUREPA [155], s. 103)

Neka niz (x_n) u metričkom prostoru (X,ρ) ispunjava uslov

$$\rho\,[x_{n+1}, x_n] \leqq a_1 \rho\,[x_n, x_{n-1}] + \ldots + a_k \rho\,[x_{n-k+1}, x_{n-k}]$$

gde je $a_1 + \ldots + a_k \in [0,1)$, $a_i \geqq 0$. Tada je (x_n) fundamentalan niz u prostoru (X,ρ)

DOKAZ. Koristeći terminologiju metričkih prostora i primenjujući na niz $(\rho[x_n, x_{n+1}])$ tvrdjenje propozicije I.1.3. (jer on ispunjava njene uslove za primenu) direktno sledi gornje tvrdjenje.

POSLEDICA I.1.3. (J.MATKOWSKI [184], s. 51.)

Neka je $\beta_i \geqq o$ $(i=1,2,\ldots,n)$ i neka sve nule polinoma $p(z)=z^n-\beta_1 z^{n-1}- \ldots -\beta_n$ leže u krugu poluprečnika 1. Ako nizovi a_k, $b_k \geqq o$ $(k=1,2,\ldots)$ zadovoljavaju nejednakost

$$a_{k+n} \leqq \beta_1 a_{n+k-1} + \ldots + \beta_n a_k + b_k \quad (k=o,1,\ldots)$$

tada: 1) Ako je niz (b_k) ograničen onda je i niz (a_k) ograničen.

2) Ako je $\lim b_k = o$, onda je i $\lim a_k = o$.

DOKAZ. Pošto je uslov: da sve nule polinoma $p(z)$ leže u krugu $|z|<1$ ekvivalentan prema Cauchy-evoj teoremi za polinome, uslovu $\beta_1+\beta_2 \ldots +\beta_n<1$, to primenom naše teoreme I.1.9. na ovaj slučaj, za preslikavanje $\psi: R_+^n \longrightarrow R_+$ definisano sa $\psi(t_1,\ldots,t_n) = t_1+\ldots+ t_n$ $(t_i \geq o)$ dobijamo u specijalnom slučaju prethodno tvrdjenje.

Sledeća posledica odnosi se na jedan specijalan slučaj naših tvrdjenja i jedna je uža klasa od naših dovoljnih uslova za konvergenciju nizova, u tom specijalnom (prividno) slučaju.

POSLEDICA I.1.4. (John Bibby [44], s.63)

Neka je preslikavanje $\psi: R^k \longrightarrow R$ $(k \in N)$ neprekidno i rastuće strogo po svakom argumentu pri čemu zadovoljava uslov $x=\psi(x,\ldots,x)$ za svako $x \in R$. Ako je niz (x_n) ograničen i ispunjava uslov

$$x_{n+k} \leq \psi(x_{n+k-1},\ldots, x_n), \; n>k \; ;$$

tada je on konvergentan.

NAPOMENA. Navedimo da je italijanski matematičar EDUARDO PASCALI [248] polazeći od nekih naših ranijih rezultata (za rastuća i semihomogena preslikavanja [259]) razmatrao sličan problem, samo je semihomogenost uzeta sa proizvoljnim stepenom. Sa druge strane, prof. DJ. KUREPA mi je u recenziji odgovarajućeg članka [259] za štampu dao takvu ideju, napominjući da bi i taj problem vredelo posebno naknadno razmatrati. I na kraju E. PASCALI polazeći od naših rezultata [255] dokazao je i neka tvrdjenja fiksne tačke na metričkim prostorima.

DOKAZI PRETHODNIH TVRDJENJA

DOKAZ TEOREME 1.3. Prethodno se dokaže jedno pomoćno tvrdjenje.

LEMA I.1.1. Neka je preslikavanje $h: R_+^k \longrightarrow R_+$ $(k \in N)$ monotono rastuće i semihomogeno. Tada za proizvoljne realne brojeve $a_1,\ldots, a_k$ nejednačina

$$h(a_1, a_2 x,\ldots, a_k x^{k-1}) \leq x^k \quad (k \in N)$$

ima bar jedno rešenje.

DOKAZ LEME. Neka je preslikavanje $g: R_+ \longrightarrow R_+$ (specijalno) definisano sa

$$g(x) \overset{def}{=\!=} h(|a_1|x^{1-k}, |a_2|x^{2-k}, \dots, |a_k|).$$

Prema datim predpostavkama, preslikavanje g je monotono opadajuće, pa otuda sledi da postoji neko $\theta > 0$ tako da je $g(\theta) \leqq \theta$. Sa druge strane zbog semihomogenosti i monotonije važe nejednakosti

$$h(a_1, a_2\theta, \dots, a_k\theta^{k-1}) \leqq h(|a_1|, |a_2|\theta, \dots, |a_k|\theta^{k-1}) \leqq \theta^{k-1} g(\theta) \leqq \theta^k,$$

čime je i dokazana gornja lema.

Sada indukcija. Neka je $\theta \in R_+$ i neka je $L = \max\{x_1\theta^{-1}, \dots, x_k\theta^{-k}\}$. Onda za $n = 1, 2, \dots k$ tvrdjenje (nejednakost (3)) je tačno. Neka je (3) tačno i za $n, n+1, \dots, n+k-1$ $(n>k)$. Onda je prema predpostavkama i lemi I.1.1

$$\begin{aligned} x_{n+k} &\leqq \psi(x_n, \dots, x_{n+k-1}) \leqq \max\{x_n, \dots, x_{n+k-1}\} \cdot A \leqq \\ &\leqq L\theta^n \max\{1, \theta, \dots, \theta^{k-1}\} A \leqq L\,\theta^{n+k}. \end{aligned} \tag{7}$$

Sa druge strane kada je konstanta $A \in (0,1)$ pošto je funkcija $g_1(x) \overset{def}{=\!=} x^{-k} \max\{1, x, \dots, x^{k-1}\} A$ neprekidna u tački $x = 1$ i $g_1(1) < 1$, to postoji $\theta \in (0,1)$ tako da je $g_1(\theta) < 1 \iff \max\{1, \theta, \dots, \theta^{k-1}\} A < \theta^k)$, što zajedno sa (7) potvrdjuje teoremu I.1.3.

DOKAZ TEOREME I.1.4. Prvo zaključujemo da za član x_{n+k} ne može biti tačna nejednakost $x_{n+k} \geqq \max\{x_n, \dots, x_{n+k-1}\}$, jer u tom slučaju bi bilo

$$x_{n+k} \leqq \psi(x_n, \dots, x_{n+k}) \leqq A\, x_{n+k},$$

a što je kontradikcija. Prema tome diferencijska nejednakost (4) se onda svodi na nejednakost (osobina M(max))

$$x_{n+k} \leqq A \max\{x_n, \dots, x_{n+k-1}\},$$

čime je problem sveden na prethodnu teoremu I.1.3. Otuda je i ovo tvrdjenje tačno.

DOKAZ TEOREME I.1.5. Neka je $t_n = \max\{x_n, \dots x_{n+k-1}\}$. Zbog rašćenja funkcije ψ, nejednakosti (5) i uslova zadatka je

$$x_{n+k} \leqq \psi(t_n, \dots, t_n) < t_n \quad (n \in N). \text{ Zato je}$$

$$t_n = \max\{x_n, \dots, x_{n+k-1}\} \geqq \max\{x_{n+1}, \dots, x_{n+k}\} = t_{n+1},$$

tj. niz (t_n) je opadajući. Otuda $t_n \longrightarrow r \geqq 0$ $(n \longrightarrow k)$ i $\limsup x_n \leqq r$. Čak više $\limsup x_n = \limsup t_n$.

Pokazaćemo da $\limsup x_n = x > 0$ dovodi do kontradikcije, znači $x = 0$, a time i $\lim x_n = 0$. Zaista (prema predpostavkama) je

$$x = \limsup_{n \to \infty} x_{n+k} \leqq \limsup_{n \to \infty} \psi(x_n, \dots, x_{n+k-1})$$
$$\leqq \limsup_{n \to \infty} \psi(t_n, \dots, t_n)$$
$$\leqq \limsup_{z \to x+0} \psi(z, \dots, z) < x,$$

a ovo je kontradikcija, pa je $x=0$. Da nepomenemo samo na kraju da smo prethodni prelaz izveli jer je preslikavanje $\psi: R_+^k \longrightarrow R_+$ $(k \in N)$ monotono rastuće sa osobinom da je $(\forall t \in R_+) \limsup_{z \to t+0} \psi(z, \dots, z) < t$.

Da niz (x_n) ne mora da teži nuli geometrijskom brzinom potvrdjuje

PRIMER I.1.6. Neka niz nenegativnih realnih brojeva (x_n) zadovoljava nejednakost

$$x_{n+1} \leqq x_n(1+x_n)^{-1}, \quad (n=1,2,\dots).$$

Tada niz (x_n) konvergira ka nuli za $n \longrightarrow \infty$, ali ne mora geometrijskom brzinom (vid. Adamović [12]).

DOKAZ. Kako je preslikavanje $\psi: R_+ \longrightarrow R_+$ definisano sa $\psi(x) = x(1+x)^{-1}$ rastuće i sa osobinama $(\forall t \in R_+) \psi(t) < t$ i $\limsup_{z \to t+0} \psi(z) < t$ (čak i neprekidno) to primenom prethodnog tvrdjenja neposredno sledi da $x_n \longrightarrow 0$ $(n \longrightarrow \infty)$, ali to nije geometrijska brzina.

DOKAZ TEOREME I.1.6. Prvo zaključujemo da za član x_{n+k} ne može biti $x_{n+k} \geqq t_n$, jer u tom slučaju bi prema (6) bilo

$$x_{n+k} \leqq \psi(x_{n+k}, \dots, x_{n+k}) < x_{n+k},$$

a što je kontradikcija. Ovim je problem sveden na teoremu I.1.5. i dalji dokaz potpuno bi isto tekao.

DOKAZ TEOREME I.1.7. Kako niz (x_n) ispunjava diferencijsku nejednakost $x_{n+1} \leqq \psi(x_n)$ sledi (zbog osobine preslikavanja) da je i $x_{n+1} \leqq x_n$ ($n \in N$), tj. niz (x_n) je monotono opadajući pa i konvergira. Dakle, $x_n \longrightarrow x \geqq o$. Predpostavimo da je $x>o$. No, kada $n \longrightarrow \infty$ iz nejednakosti $x_{n+1} \leqq \psi(x_n)$ i osobine $\limsup\limits_{z \to t+o} \psi(z)<t$ sledi da je $x \leqq \psi(x)<x$. Kontradikcija. Otuda je $x=o$. Da brzina ne mora biti geometrijska potvrdjuje primer I.1.6. Da se ne može izostaviti nijedan od uslova za funkciju $\psi:R_+ \longrightarrow R_+$ potvrdjuje i funkcija konstruisana u primeru I.1.3.

DOKAZ TEOREME I.1.8. Neka je $t_n = \max\{x_n, \ldots, x_{n+k-1}\}$. Sada je za $n \in N$:

$$t_{n+1} = \max\{x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}\} \leqq \max\{t_n, x_{n+k}\}.$$

Odavde, sobzirom na nejednakost za nizove (x_n) i (y_n) važi i nejednakost

$$t_{n+1} \leqq \max\{t_n, At_n+y_n\}, \quad n \in N.$$

Kada je (t_n) opadajući niz, dokaz teče isto kao i u prethodnim teoremama. Ostaje slučaj kada je tačna nejednakost

$$t_{n+1} \leqq At_n + y_n, \quad n \in N.$$

No, tada je (indukcijom)

$$t_{n+1} \leqq A^n t_1 + \Sigma_{i=o}^{n-1} A^i y_{n-i} \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Odavde slede svi zaključci teoreme, korišćenjem odgovarajuće date nejednakosti za nizove (x_n) i (y_n).

I.2. NEKE (LOKALIZACIONE) TEOREME FIKSNE TAČKE I INTEGRABILNA REŠENJA NEKIH FUNKCIONALNIH JEDNAČINA

U ovom poglavlju koristeći rezultate dobijenih teorema za diferencijske nejednakosti proučavamo integrabilna rešenja funkcionalnih jednačina sa jednom promenljivom. Ove su funkcionalne jednačine bile ispitivane za razne klase funkcija (neprekidne, diferencijalne). Poznat je rad od M. Kuczma [140]. No prethodno dajemo neke teoreme fiksne tačke, koje ćemo primeniti u prethodnom pravcu, specijalno jedan lokalizacioni teorem na uredjenim skupovima. Navedimo prvo neke osnovne pojmove i definicije.

Neka je (X,S,μ) prostor sa merom i za $p>0$ sa $L^P(X,S,\mu)$ označimo skup svih S-merljivih funkcija $\beta: X \longrightarrow R$ tako da je $\int_X |\beta|^P d\mu<\infty$. Relaciju "$\sim$" definišimo u prostoru $L^P(X,S,\mu)$ sa

$$\beta_1 \sim \beta_2 \Longleftrightarrow \beta_1=\beta_2 \quad \text{s. s. y } X.$$

Lako je pokazati da je ova relacija, jedna relacija ekvivalencije. Sa $\mathcal{L}^P(X,S,\mu)$ označimo skup količnik $L^P(X,S,\mu)/\sim$, a sa $[\beta]$ klasu ekvivalencije za $\beta\in L^P(X,S,\mu)$. Ovde koristimo i poznate činjenice da je za svako p $(0<p<1)$ prostor $\mathcal{L}^P(X,S,\mu)$ sa metrikom

$$\rho([\beta_1],[\beta_2]) = \int_X|\beta_1 - \beta_2|^P \, d\mu$$

kompletan metrički prostor, a za $p \geq 1$ sa normom

$$\| [\beta] \| = (\int_X |\beta|^P \, d\mu)^{1/P}$$

je Banach-ov prostor.

Stavimo

$$\alpha(p) = \begin{cases} 1, & 0<p<1, \\ 1/p, & p\geq 1, \end{cases}$$

tada je za svako $p>0$

$$(\int_X |\beta|^P \, d\mu)^{\alpha(p)}, \quad [\beta]\in \mathcal{L}^P(X,S,\mu),$$

pseudonorma na prostoru.

Predpostavimo dalje sledeće konvencije.

Izraz: "$\beta\in L^P(X,S,\mu)$ je rešenje funkcionalne jednačine", podrazumeva da posle zamene u jednačini, da je zadovoljena indentična odgovarajuća relacija u X, sobzirom na činjenicu: "$[\beta] \in \mathcal{L}^P$

(X,S,μ) je rešenje neke funkcionalne jednačine" označava da za svako $g\in[\beta]$, g zadovoljava ovu jednačinu s.s. u X. Pored ovoga, elemente skupa $\mathcal{L}^p$ smatraćemo funkcijama.

Za $A\subset X$, $S(A) = \{B\in S : B\subset A\}$. Očigledno je $S(A)$ σ-prsten i $\mu_A(B) = \mu(B)$, $B\in S(A)$ jeste mera. Predpostavimo da $f_k : X \longrightarrow X$ $(k=1,\dots,n)$, $F : X \times R^{n+1} \longrightarrow R$ i $\mu(X)>0$.

DEFINICIJA I.2.1. Kažemo da rešenje $\beta\in L^p(X,S,\mu)$ funkcionalne jednačine

$$F(x, \beta(x), \beta[f_1(x)], \dots, \beta[f_n(x)]) = 0$$

zavisi od proizvoljne funkcije, ako tu postoji skup $A\in S$ pozitivne mere tako da za svaku funkciju $\beta_0\in L^p(A,S(A),\mu_A)$ postoji $\beta\in L^p(X,S,\mu)$ koje zadovoljava ovu jednačinu u X, i tako da je $\beta=\beta_0$ u A.

Dokažimo sada u prvom koraku neke teoreme fiksne tačke, lokalizacionog tipa.

TEOREMA I.2.1. Neka je (X,ρ) kompletan metrički prostor i neka preslikavanje T prostora X^k u X ispunjava uslov

$$\text{(A)}\qquad \rho[T(u_1,\dots,u_k),T(u_2,\dots,u_{k+1})] \leq \psi(\rho[u_1,u_2],\dots,\rho[u_k,u_{k+1}])$$

za proizvoljne $u_1,\dots,u_k\in X$, gde je preslikavanje $\psi : R_+^k \longrightarrow R_+$ $(k\in N)$ sa osobinom M(max) i $A\in(0,1)$, tada:

(a) $(\exists\xi\in X)\ T(\xi,\dots,\xi) = \xi$,

(b) ξ je granična vrednost niza (x_n) koji zadovoljava diferencijsku jednakost

$$\text{(1)}\qquad x_{n+k} = T(x_n,\dots, x_{n+k-1}),\ n\in N;$$

za proizvoljnu početnu vrednost.

(c) Konvergencija niza (x_n) ka tački ξ procenjuje se nejednakošću

$$\rho[x_{n+k},\xi] \leq \theta^n(1-\theta)^{-1} \max_{i=1,\dots,k} \{\rho[x_i,x_{i+1}]\ \theta^{-i}\},\quad (n\in N,\theta\in(0,1))$$

TEOREMA I.2.2. Neka je (X,ρ) kompletan metrički prostor i neka niz preslikavanja $T_n : X^k \longrightarrow X$ $(k\in N)$ ispunjava uslov

(B) $\rho[T_n(u_1,\ldots,u_k), T_{n-1}(u_2,\ldots,u_{k+1})] \leqq \psi(\rho[u_1,u_2],\ldots,\rho[u_k,u_{k+1}])+a_n$

za proizvoljne $u_1,\ldots,u_k \in X$ i $\Sigma a_n < +\infty (a_i \geqq 0)$,
gde je preslikavanje $\psi: R_+^k \longrightarrow R_+ (k \in N)$ sa osobinom $M(\max)$ za $A \in (0,1)$. Tada

(a) Niz funkcija $T_n(u,\ldots,u)$ uniformno konvergira ka funkciji $T(u,\ldots,u)$,

(b) $(\exists \xi \in X) \quad T(\xi,\ldots,\xi) = \xi$,

(c) ξ je granična vrednost niza (x_n) koji je definisan sa

(2) $$x_{n+k} = T_n(x_n,\ldots, x_{n+k-1}),\ n \in N;$$

za proizvoljnu početnu vrednost iz prostora X.

DOKAZI NAVEDENIH TEOREMA. I.2.1. i I.2.2.

U prvom koraku pokažimo da je niz (1) Cauchy-ev. Kako je prema uslovu (A)

$$\rho[x_{n+k},x_{n+k+1}] = \rho[T(x_n,\ldots,x_{n+k-1}),\ T(x_{n+1},\ldots x_{n+k})]$$
$$\leqq \psi(\rho[x_n,x_{n+1}],\ldots,\rho[x_{n+k-1},x_{n+k}]),$$

primenom Teoreme I.1.3. (jer su njeni uslovi za primenu ispunjeni za niz $(\rho[x_n,x_{n+1}])$),

$$\rho[x_n,x_{n+1}] \leqq \theta^n \max_{i=1,\ldots,k} \{\rho[x_i,x_{i+1}]\,\theta^{-i}\},\ n \in N.$$

Otuda za $n,\ s \in N$ je

$$\rho[x_n,x_{n+s}] \leqq \Sigma_{j=1}^{s} \rho[x_{n+j-1},\ x_{n+j}]$$
$$\leqq \max_{i=1,\ldots,k} \{\rho[x_i,x_{i+1}]\theta^{-i}\}\, \Sigma_{j=1}^{s}\ \theta^{n+j-1}$$
$$\leqq \theta^n(1-\theta)^{-1} \max_{i=1,\ldots,k} \{\rho[x_i,x_{i+1}]\theta^{-i}\},$$

što implicira gornju tvrdnju da je (x_n), Cauchy-ev niz. Otuda (zbog kompletnosti) na prostoru X postoji tačka $\xi = \lim x_n$.

Označimo sa

$$x^i_{n+k} = T(x_{n+i}, x_{n+i+1}, \ldots, x_{n+k-1}, \underbrace{\xi, \ldots, \xi}_{i})$$

za $n=1,2,\ldots$, $i=0,1,\ldots,k$; pri čemu se uzima da je specijalno

$$x^o_{n+k} = T(x_n, \ldots, x_{n+k-1}) = x_{n+k}, \; x^k_{n+k} = T(\xi, \ldots, \xi).$$

Tada za $n \in N$, mi imamo (relacija trougla)

$$\rho[\xi, T(\xi, \ldots, \xi)] \leq \rho[\xi, x^o_{n+k}] + \rho[x^o_{n+k}, x^1_{n+k}] + \ldots + \rho[x^{k-1}_{n+k}, x^k_{n+k}]$$

pa primenom Teoreme I.1.3. na svaki sabirak desne strane dobija se jednakost

$$\xi = \lim x_{n+k} = T(\xi, \ldots, \xi).$$

Da bi dokazali tačku (a) teoreme I.2.2. stavimo $u_1 = u_2 = \ldots = u_{k+1} = u$ u nejednakosti (B). Tada je

$$\rho[T_n(u, \ldots, u), T_{n-1}(u, \ldots, u)] \leq a_n \; (n \in N),$$

što implicira da niz funkcija $T_n(u, \ldots, u)$ uniformno konvergira ka funkciji $T(u, \ldots, u)$. Ostali deo dokaza potpuno je isti kao i u teoremi I.2.1., samo što treba teoremu I.1.3. primenjivati na niz (2).

Sada dokažimo jedan lokalizacioni teorem fiksne tačke na generalisanom metričkom prostoru (E, ρ), gde je funkcija $\rho: E \times E \longrightarrow \sigma$ (kao uobičajena metrička funkcija) sa slikama na parcijalno uredjenom skupu $(\sigma, \leqslant)$.

U daljem tekstu skup $(\sigma, \leqslant)$ imaće sledeća svojstva (vid. [158], [280]):

1) $(\exists \theta \in \sigma)$ $\theta \leqslant u$ za $u \in \sigma$,

2) Za svako $u, v \in \sigma$ definisan je element $u + v \in \sigma$ sa svojstvima:

a) $(\forall u, v \in \sigma)$ $u + v = v + u$, $u + \theta = u$,

b) $(\forall u, v, w \in \sigma)$ $u \leqslant v \Longrightarrow u + w \leqslant v + w$

c) $(\forall u, v, w \in \sigma)$ $u + v \leqslant w \Longrightarrow u \leqslant w$

3) Za svaki nerastući niz (u_n) postoji jedinstveni element $u \in \sigma$, koji zovemo limes niza (u_n) u oznaci $\lim u_n = u$ $(u_n \downarrow u)$ takav da je

(a) $u_n = u \ (n \in N) \Longrightarrow u_n \downarrow u$

(b) $u_n \downarrow u \wedge v_n \downarrow v \Longrightarrow u_n + v_n \downarrow u + v$

(c) $(u_n \downarrow u, v_n \downarrow v \wedge u_n \leqslant v_n) \Longrightarrow u \leqslant v$

(d) limes od (u_n) je invarijantan u odnosu na početne uslove.

Primećujemo da se osobina 3) specijalno realizuje ako je u skupu σ uvedena obična "uredjajna" topološka struktura i gde svaki sa gornje strane ograničeni podskup od σ ima supremum, pri čemu izraz za limes ima svoje standardno topološko značenje.

Neka niz $u_n^i \downarrow u^i$ $(u_n^i \in \sigma,\ n \in N,\ i=1,\dots,k)$. Ako je za rastuće preslikavanje $g: \sigma^k \longrightarrow \sigma$ i $g(u_n^1,\dots,u_n^k) \downarrow g(u^1,\dots,u^k)$ tada ćemo reći da je preslikavanje g neprekidno (nizovno). Par (E,ρ), gde je E neprazan skup, a $\rho: E^2 \longrightarrow \sigma$, pri čemu je $(\sigma, \leqslant)$ skup sa prethodnim svojstvima 1), 2) i 3), a funkcija ρ ispunjava standardne metričke uslove, zvaćemo generalisan metrički prostor. Ako svaki niz (x_n) iz skupa E još ispunjava uslov $\rho[x_n, x_m] \leqslant c_n$ $(m,n = 1,2,\dots)$ gde $c_n \downarrow \theta$ $(c_n \in \sigma)$, kazaćemo da je generalisan prostor kompletan.

TEOREMA I.2.3. Neka je E generalisani i kompletan metrički prostor i neka je $S(z,r) \subset E$, sfera. Dalje, neka preslikavanje $T: E^k \longrightarrow E$ $(k \in N)$ ispunjava uslov

$$\text{(C)} \quad \rho[T(u_1,\dots,u_k), T(v_1,\dots,v_k)] \leqslant \psi(\rho[u_1,v_1],\dots,\rho[u_k,v_k])$$

za proizvoljne $u_i, v_i \in S(z,r)$; $i=1,\dots,k$, pri čemu je preslikavanje $\psi: [\theta,h]^k \longrightarrow \sigma$ $([\theta,h] \subset \sigma)$ rastuće i neprekidno sa svojstvom da jednačina $x = \psi(x,\dots,x)$, $(x \in [\theta,h])$, ima jedinstveno rešenje θ. Takodje, neka postoji $q \in [\theta,h]$ sa svojstvima

$$\rho[z, T(z,\dots,z)] \leqslant q, \quad q + \psi(r,\dots,r) \leqslant r,$$

gde je $\psi(y,\dots,y) \leqslant y$ za $2r \leqslant y$. Tada

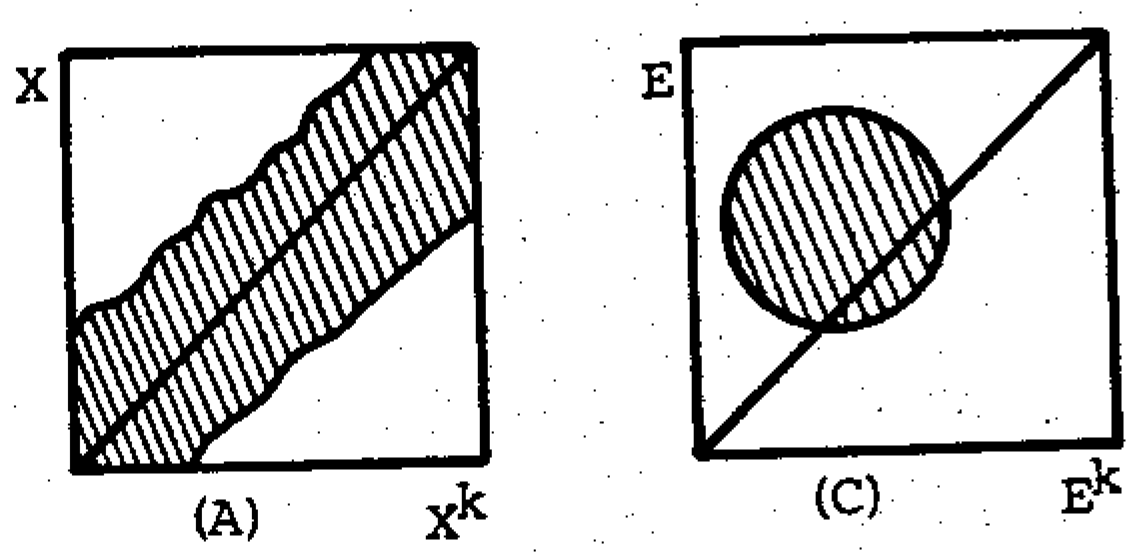
(a) $(\exists\xi\in S(z,r))\ T(\xi,\dots,\xi)=\xi$

(b) ξ je granična vrednost niza (x_n) definisanog sa (1), za proizvoljne početne vrednosti $x_1,\dots,x_k\in S(z,r)$.

(c) Jedinstveno rešenje jednačine $T(\xi,\dots,\xi)=\xi$ je $\xi=\lim x_n$.

NEKE NAPOMENE

1) Zanimljivo je sada uporediti uslove (A) i (C), navedenih lokalizacionih teorema. Na sledećoj skici dajemo geometrijsku interpretaciju navedenih lokalizacija, kako se one otprilike ostvaruju.



2) Zamenjujući u prethodnoj teoremi I.2.3. uslov (C) sa uslovom (za niz preslikavanja $T_n: E^k \longrightarrow E$)

$$\rho\left[T_n(u_1,\dots,u_k),T_n(v_1,\dots,v_k)\right]\leqslant\psi(\rho[u_1,v_1],\dots,\rho[u_k,v_k])$$

uz ostale pretpostavke, ostaje u važnosti tvrdjenje, uz modifikaciju da se odnosi samo na niz (2).

DOKAZ TEOREME I.2.3. (a) Neka su $u_1,\dots,u_k$ $S(z,r)$ tada je

$$\rho[T(u_1,\dots,u_k),z]\leqslant\rho[T(u_1,\dots,u_k),T(z,\dots,z)]+\rho[T(z,\dots,z),z]$$

$$\leqslant\psi(\rho[u_1,z],\dots,\rho[u_k,z])+q$$

$$\leqslant\psi(r,\dots,r)+q\leqslant r$$

odakle sledi da je T preslikavanje skupa $(S(z,r))^k$ u skup $S(z,r)$. Neka je dalje $x_n\in S(z,r)$, $n\in N$, tada je

$$\rho[x_i,x_{m+i}]\leqslant\rho[x_i,z]+\rho[z,x_{m+i}]\leqslant 2r\leqslant y\ (i=1,2,\dots,k;\ m\in N)$$

Sa druge strane, neka je

$$(3) \qquad \rho[x_{n+i}, x_{n+m+i}] \leqslant f_{n+i}(y,\dots,y) \stackrel{\text{def}}{=\!=} F_{n+i}(y), \quad (i=1,\dots,k),$$

gde je

$$(4) \qquad \begin{aligned} &f_i(y,\dots,y) = \psi(f_{i-k}(y,\dots,y),\dots,f_{i-1}(y,\dots,y)) \stackrel{\text{def}}{=\!=} F_i(y), (i>k) \\ &f_i(y,\dots,y) = y \stackrel{\text{def}}{=\!=} F_i(y), \quad (i \leqq k). \end{aligned}$$

Tada je

$$\begin{aligned} \rho[x_{n+k+1}, x_{n+k+m+1}] &= \rho[T(x_{n+1},\dots,x_{n+k}), T(x_{n+m+1},\dots,x_{n+k+m})] \\ &\leqslant \psi(\rho[x_{n+1}, x_{n+m+1}],\dots,\rho[x_{n+k}, x_{n+m+k}]) \\ &\leqslant \psi(f_{n+1}(y,\dots,y),\dots, f_{n+k}(y,\dots,y)) \\ &\stackrel{\text{def}}{=\!=} f_{n+k+1}(y,\dots,y) = F_{n+k+1}(y), \end{aligned}$$

pa prema tome nejednakosti (3) važe na osnovu principa indukcije za sve $n \in N$. Dalje, neka je $F_{n+i}(y) \leqslant F_{n+i-1}(y), (i=1,\dots,k)$, tada je

$$F_{n+k+1}(y) = \psi(F_{n+1}(y),\dots,F_{n+k}(y)) \leqslant \psi(F_n(y),\dots,F_{n+k-1}(y)) = F_{n+k}(y)$$

za $F_1(y) = \dots = F_k(y) = y$. Prema tome niz $(F_n(y))$ je opadajući i $\theta \leqslant F_n(y)$, tj. niz $F_n(y)$ je konvergentan. Neka je $x = \lim F_n(y)$, i neka $n \longrightarrow \infty$ i u (4). Tada x zadovoljava i jednačinu $x = \psi(x,\dots,x)$ i prema pretpostavkama teoreme $x = \theta$ tj. $\lim F_n(y) = \theta$, što implicira konvergenciju i niza (1). Neka je $\xi = \lim x_n$. Tačka ξ je iz sfere $S(z,r)$, jer je ona zatvoren skup. Kada $m \longrightarrow \infty$ u (3), mi imamo sledeću nejednakost

$$\rho[x_{n+k}, \xi] \leqslant F_{n+k}(y).$$

Sa druge strane važi procena

$$\begin{aligned} \rho[\xi, T(\xi,\dots,\xi)] &\leqslant \rho[\xi, x_{n+k}] + \rho[T(x_n,\dots,x_{n+k-1}), T(\xi,\dots,\xi)] \\ &\leqslant \rho[\xi, x_{n+k}] + \psi(\rho[x_n,\xi] \dots, \rho[x_{n+k-1},\xi]) \\ &\leqslant F_{n+k}(y) + \psi(F_n(y),\dots,F_{n+k-1}(y)) \\ &= 2\,F_{n+k}(y). \end{aligned}$$

I kada $n \longrightarrow \infty$ odavde sledi da je $\xi = \lim x_n$ rešenje jednačine $T(\xi,\dots,\xi) = \xi$. Neka je $p \in S(z,r)$ neko drugo rešenje ove jednačine. Tada je $T(p,\dots,p) = p$ i važe nejednakosti.

$$\rho[p,x_i] \leqslant \rho[p,z] + \rho[z,x_i] \leqslant 2r \leqslant y = F_i(y), (i=1,\dots,k)$$

Neka je

(5) $$\rho[p,x_{n+i}] \leqslant F_{n+i}(y), \quad (i=1,\dots,k),$$

tada je i

$$\rho[p,x_{n+k+1}] = \rho[T(p,\dots,p),\ T(x_{n+1},\dots,x_{n+k-1})]$$
$$\leqslant \psi(\rho[p,x_{n+i}],\dots,\ \rho[p,x_{n+k}])$$
$$\leqslant \psi(F_{n+1}(y),\dots,F_{n+k}(y)) = F_{n+k+1}(y).$$

Otuda (5) važi za sve prirodne brojeve n, pa kada $n \longrightarrow \infty$ iz (5) je $\rho[\xi,p] = \theta$, čime je dokaz kompletan.

I.2.0. POSLEDICE I PRIMERI

Navedimo prvo neke specijalne slučajeve dokazanih teorema

POSLEDICA I.2.1. Kada je skup $(\sigma,\leq)$ iz Teoreme I.2.3., skup nenegativnih realnih brojeva i $\psi(r,\ldots,r) = \psi(1,\ldots,1)<1$, sleduje naš poznati rezultat iz [258].

POSLEDICA I.2.2. Specijalno za $k=1$ (u teoremi I.2.3.) dobija se teorema НУРПЕЛЬ-a [155].

POSLEDICA I.2.3 (S. PREŠIĆ [205], s. 78.) Neka je (X,ρ) kompletan metrički prostor i $T:X^k \longrightarrow X$ $(k\in N)$ preslikavanje koje ima svojstvo

$$\rho[T(u_1,\ldots,u_k),\ T(u_2,\ldots,u_{k+1})] \leq q_1\ \rho[u_1,u_2]+\ldots+q_k\rho[u_k,u_{k+1}]$$

za proizvoljne $u_1,\ldots,u_k\in X$ i $q_1+\ldots+q_k<1$ $(q_i\geq 0)$.

Tada svaki niz (x_n) koji je definisan sa (1) je konvergentan i $\lim x_n$ je rešenje jednačine $x=T(x,\ldots,x)$.

Na isti način kao direktna posledica Teoreme I.2.2. u specijalnom slučaju sleduje i jedan rezultat M. Marjanovića i S. Prešića [169].

POSLEDICA I.2.4. (MARJANOVIĆ-PREŠIĆ [172])

Neka je (X,ρ) kompletan metrički prostor i neka je $T_n:X^k \longrightarrow X$ niz funkcija sa svojstvima

$$\text{(D)}\quad \begin{aligned} &\rho[T_n(u_1,\ldots,u_k),T_n(u_2,\ldots,u_{k+1})]\leq q_1\rho[u_1,u_2]+\ldots+q_k\rho[u_k,u_{k+1}],\\ &\rho[T_{n+1}(u_1,\ldots,u_k),T_n(u_1,\ldots,u_k)]\leq a_n \quad (n = 1,2,\ldots) \end{aligned}$$

za proizvoljne $u_1,\ldots,u_{k+1}\in X$ i $q_1+\ldots+q_k<1\ (q_i\geq 0)$, i $k\in N$ fiksirano, pri čemu red $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ $(a_\nu\leq 0)$ konvergira. Tada niz (x_n) definisan sa (2) konvergira i $\lim x_n$ je rešenje jednačine $x=T(x,\ldots,x)$, pri čemu niz funkcija $T_n(x,\ldots,x)$ uniformno konvergira ka funkciji $T(x,\ldots,x)$.

Kako uslov (D) direktno implicira uslov (B) sa funkcijom $\psi = q_1t_1+\ldots+q_kt_k$ naša teorema je generalizacija ovog rezultata. Ovde nećemo navoditi ni jedan primer da je to prava generalizacija jer, o tome je već dosta rečeno u poglavlju I.1.

PROPOZICIJA I.2.1. Neka je R skup realnih brojeva i neka preslikavanje $T:R^k \longrightarrow R$ ispunjava uslov

$$|T(u_1,\ldots,u_k)-T(u_2,\ldots,u_{k+1})| \leqq \psi(|u_1-u_2|,\ldots,|u_k-u_{k+1}|)$$

za proizvoljne $u_1,\ldots,u_{k+1} \in R$, $k \in N$ fiksirano, gde je preslikavanje $\psi:(R_+^o)^k \longrightarrow R_+^o$ sa osobinom M(max) i $A \in [0,1)$. Tada niz (x_n) dat sa (1) konvergira i $\lim x_n$ je rešenje jednačine $x=T(x,\ldots,x)$.

Ova propozicija direktna je posledica naše teoreme I.2.1, na skupu R.

PROPOZICIJA I.2.2. Neka je R skup realnih brojeva i neka preslikavanje $T : R^{k+1} \longrightarrow R$ ispunjava uslov

$$|T(u_1,\ldots,u_k,x)-T(u_2,\ldots,u_{k+1},y)| \leqq \psi(|u_1-u_2|,\ldots,|u_k-u_{k+1}|)+|x-y|$$

za proizvoljne $u_1\ldots,u_{k+1},x,y \in R$, pri čemu je preslikavanje $\psi:(R_+^o)^k \longrightarrow R_+^o$ sa osobinom M(max) i $A \in [0,1)$. Neka je dalje niz (x_n) definisan sa jednakošću

$$x_{n+k} = T(x_n,x_{n+1},\ldots,x_{n+k-1}, a_n) \; , \; (n \in N),$$

za proizvoljne početne vrednosti $x_1,\ldots,x_k$, gde je niz (a_n) monoton i $\lim a_n = a \in R$.

Tada niz (x_n) konvergira u prostoru R i $\lim x_n$ je rešenje jednačine $x=T(x,\ldots,x,a)$.

DOKAZ. Stavljajući $A_n(u_1,u_2,\ldots,u_k) = T(u_1,\ldots,u_k,a_n)$ neposredno se vidi da niz (A_n) ispunjava uslove teoreme I.2.2, pa otuda niz funkcija $A_n(u,\ldots,u)$ uniformno konvergira ka funkciji $A(u,\ldots,u) = T(u,\ldots,u,a)$, pri čemu onda i za niz (x_n) važi tvrdjenje teoreme I.2.2.

PRIMER I.2.1. Neka je realni niz (x_n) definisan jednakošću

$$x_{n+2} = \frac{1}{2} x_n + \frac{1}{3} x_{n+1} + 1 + 1/_n \quad (n = 1,2,\dots)$$

Tada niz (x_n) konvergira ka tački $x=6$.

Kako preslikavanje $\psi(t_1,t_2) = \frac{1}{2}t_1 + \frac{1}{3}t_2$ ispunjava uslove teoreme I.1.2. i propozicije I.2.2., i kako je niz $a_n=1+\frac{1}{n}$ monoton i $\lim a_n=1$, pa onda primenom gornje propozicije niz (x_n) konvergira i to je rešenje odgovarajuće jednačine $x=\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x + 1$.

POSLEDICA I.2.5. Neka je σ skup nenegativnih k-vektora sa uobičajenim uredjenjem i neka je (E,ρ) kompletan metrički prostor, gde je metrika definisana sa

$$D(X,Y) = \left\| \begin{matrix} \rho(x_1,y_1) \\ \vdots \\ \rho(x_k,y_k) \end{matrix} \right\| , \quad (x_i,y_i \in E) ,$$

za $X = (x_1,\dots,x_k)$, $Y = (y_1,\dots,y_k)$. Neka je dalje preslikavanje $F:(E^k)^p \longrightarrow E^k$ $(k,p \in N)$ definisano sa

$$F(Y_1,\dots,Y_p) \stackrel{def}{=\!=} (f_1(Y_1,\dots,Y_p),\dots,f_k(Y_1,\dots,X_k))$$

gde $f_i:F^{pk} \longrightarrow E$, $Y_i \in E^k$ $(i=1,2,\dots,p)$, i neka je niz (X_n) definisan sa

$$X_{n+p} = F(X_n,\dots,X_{n+p-1}) \; , \quad (X_n \in E^k)$$

a preslikavanje ψ sa

$$\psi(U_1,\dots,U_p) \stackrel{def}{=\!=} A_1U_1 + \dots + A_pU_p$$

gde su A_i matrice reda kxk sa nenegativnim fiksnim elementima i U_i $(i=1,\dots,p)$ k-vektori koji ispunjavaju uslov

$$N(A_1+ \dots + A_p) < 1 \quad ,$$

gde je N matrična norma koja se definiše na uobičajeni način.

POSLEDICA I.2.6. Neka je (X,ρ) kompletan metrički prostor i neka preslikavanje T prostora X u X ispunjava uslov

$$\rho[Tx,Ty] \leq \psi(\rho[x,y]) \quad .$$

za proizvoljne tačke $x,y \in S(z,r) \subset X$, gde je preslikavanje $\varphi : R_+ \longrightarrow R_+$, rastuće, neprekidno i ispunjava uslov $(\forall t \in R_+)\, \varphi(t) < t$ pri čemu $(\exists q \in R_+)\, c[z,Tz] \leqq q,\ q + \varphi(r) \leqq r$. Tada

(a) $\exists \xi \in S(z,r) \quad T(\xi) = \xi$.

(b) ξ je granični vrednost niza (x_n) definisanog sa $x_{n+1} = Tx_n$ $(n \in N)$, za proizvoljnu početnu vrednost $x_1 \in S(z,r)$.

JEDNO ZAPAŽANJE. Interesantno je pitanje kako se realizuje egzistencija broja q u ovom slučaju. Jedan specifičan odgovor bio bi, da kada je centar sfere na dijagonali onda je $q=0$.

Inače gornje tvrdjenje generalniji je stav od mnogih poznatnih. Dalji komentar biće u poglavlju II .

I.2.1. JEDNA TEOREMA FIKSNE TAČKE I NEKE POSLEDICE

Kao direktnu posledicu Teoreme I.1.7. navešćemo jedan opšti stav fiksne tačke, koji ćemo kasnije primeniti (I.2.2) na rešavanje nekih funkcionalnih jednačina I reda. Navešćemo i neke druge posledice.

TEOREMA I.2.1.1. Neka je T preslikavanje kompletnog metričkog prostora (X,ρ) u samog sebe, i neka dalje postoji funkcija $\psi:R_+^o \longrightarrow R_+^o \overset{def}{=} [0,+\infty)$ sa svojstvima $(\forall t\in R_+)\psi(t)<t$ i $\limsup_{z\to t+0} \psi(z)<t$ za $t\in R_+$, tako da je

$$\rho[Tx,Ty] \leq \psi(\Delta),$$

$$\Delta\in\{\rho[x,y],\rho[x,Tx],\rho[y,Ty],\rho[x,Ty],\rho[y,Tx]\},$$

za proizvoljne $x,y\in X$. Tada:

(a) $(\exists\xi\in X)T\xi=\xi$,

(b) ξ je granična vrednost niza (x_n) definisanog sa $x_n = Tx_{n-1}(n\in N,\ x_o = x\in X)$,

(c) Brzina konvergencije niza (x_n) ka tački $\xi\in X$ je preko jednog monotonog niza.

Navedimo sada neke direktne posledice ovog tvrdjenja. Neke šire komentare daćemo u poglavlju II.

POSLEDICA I.2.1.1. (E.RAKOTCH [207]). Neka je T preslikavanje kompletnog metričkog prostora (X,ρ) u samog sebe. Neka dalje egzistira rastuća funkcija $0<\alpha<1$ definisana na skupu R_+^o tako da je za svako $x\in X$ ispunjena nejednakost

$$\rho[Tx,Ty]\leq \alpha(\rho[x,y])\,\rho[x,y].$$

Tada preslikavanje T ima jedinstvenu fiksnu tačku $\xi\in X$ i niz $(T^n x)$ konvergira ka tački ξ za sve $x\in X$.

POSLEDICA I.2.1.2. (D.BOYD-J.WONG [24])

Neka je T preslikavanje kompletnog metričkog prostora (X,ρ) u samog sebe. Neka dalje egzistira funkcija $\Phi:R_+^0 \longrightarrow R_+^0$ sa svojstvom da je $\Phi(t)<t$ za $t\in R_+$ i Φ je poluneprekidno sa gornje strane, pri čemu je za sve $x,y\in X$

$$\rho[Tx,Ty] \leq \Phi(\rho[x,y]).$$

Tada preslikavanje T ima jedinstvenu fiksnu tačku $\xi\in X$, kojoj konvergira proizvoljan niz iteracija $(T^n x)$, $x\in X$.

POSLEDICA I.2.1.3. (M. Maiti, J. Achari, T. Pal [171])

Neka je T preslikavanje kompletnog metričkog prostora (X,ρ) u samog sebe, tako da su zadovoljeni sledeći uslovi:

(a) $\rho[Tx,Ty]<\max\{\Phi(\rho[x,y]),\Phi(\rho[x,Tx]),\Phi(\rho[y,Ty])\}, x,y\in X$

gde je preslikavanje $\Phi:\mathrm{cl}\{d(x,y):x,y\in X\} \longrightarrow R_+^0$, poluneprekidno sa gornje strane i $\Phi(t)<t$ za $t\in R_+$ i $\Phi(0)=0$,

(b) Funkcionela $F(x)=d(x,Tx)$ je poluneprekidna sa donje strane.

Tada postoji jedinstvena nepokretna tačka $\xi\in X$ preslikavanja T i $\lim T^n x=\xi$ za svako $x\in X$.

Navedimo sada i jednu posledicu iz monografije [129] A.A. Ivanova, koja je inače dosta komplikovano dokazivana. Ona takodje direktno sledi iz našeg tvrdjenja I.2.1.1.

POSLEDICA I.2.1.4. Neka je T preslikavanje kompletnog metričkog prostora (X,ρ) u samog sebe tako da je za sve $x,y\in X$ ispunjena nejednakost

$$\rho[Tx,Ty]\leq\max\{w(\rho[x,y]),w(\rho[x,Tx]),w(\rho[y,Ty]),w(\rho[x,Ty]),w(\rho[y,Tx])\}$$

gde je w rastuća, poluneprekidna funkcija takva da je za $t\in R_+$, $w(t)<t$ i $t-w(t) \longrightarrow +\infty$ $(t\longrightarrow +\infty)$. Tada postoji jedinstvena nepokretna tačka $\xi\in X$ preslikavanja T i $\lim T^n x=\xi$ za svako $x\in X$.

DOKAZ TEOREME I.2.1.1. Neka je za $n\in N$
$a_n \overset{def}{=} \sup\{\rho[T^r x,T^s x]: r,s \geq n\}$. Sada je za $r,s\in N$,

$$\rho[T^r x,\ T^s x] \leq \psi(\nabla),$$

$$\nabla \in \{\rho[T^{r-1}x,\ T^{s-1}x], \rho[T^{s-1}x,\ T^s x], \rho[T^{r-1}x, T^r x],$$

$$\rho[T^{r-1}x,\ T^s x], \rho[T^{s-1}x,\ T^r x]\},$$

Otuda, za r, s $\geq$ n važi i nejednakost

$$\alpha_n \leq \psi(\alpha_{n-1}),\ n \in N.$$

Sada, primenom teoreme I.1.7. sledi da $\alpha_n \longrightarrow 0$ $(n \longrightarrow \infty)$, što implicira da niz $(T^n x)$ jeste Cauchy-ev niz na prostoru X, pa zbog kompletnosti postoji jedna tačka ξ X sa svojstvom $T^n x \longrightarrow \xi\ (n \longrightarrow \infty)$.

Dalje

$$\rho[T\xi, T^{n+1}x] \leq \psi(\nabla),$$

$$\nabla \in \{\rho[\xi, T^n x], \rho[\xi, T\xi], \rho[T^n x, T^{n+1}x], \rho[\xi, T^{n+1}x], \rho[T^n x, T\xi]\}$$

a odavde kada $n \longrightarrow \infty$ sledi da $\rho[T\xi, \xi] = 0$, tj. $\xi = T\xi$. Fiksna tačka $\xi \in X$ je i jedinstvena.

JEDNA NAPOMENA

Nedavno smo pronašli da je rezultat (posledica) I.2.1.2. dokazana mnogo ranije od poznatog matematičara FELIX BROWDERA u radu [26]. U novijoj literaturi ovaj podatak se nigde ne nalazi, već se rezultat pripisuje BOYD i WONGU [24].

I.2.2. INTEGRABILNA REŠENJA NEKIH FUNKCIONALNIH JEDNAČINA

I.2.2.1. NELINEARNA FUNKCIONALNA JEDNAČINA I REDA

U prvom koraku razmatraćemo opštu funkcionalnu jednačinu I reda u obliku $F(x,\beta(x),\beta[g(x)])=0$, gde su F i g date a β nepoznata funkcija. Specijalno ograničićemo se na razmatranju jednačine $\beta(x)=h(x,\beta[g(x)])$ i ispitivaćemo egzistenciju i jedinstvenost njenih rešenja. Ovde predpostavljamo sledeće:

(a) g je strogo rastuća funkcija na intervalu $I=(o,x_o)$, $0<x_o\leq+\infty$, i g, g^{-1} su apsolutno neprekidne funkcije respektivno na I i $g(I)$, pri čemu je $0<g(x)<x$ $(x\in I)$.

(b) Funkcija $h:I\times R \longrightarrow R$ je za svako $x\in I$ neprekidna, a za svako $y\in R$ je merljiva na I i važi nejednakost

$$|h(x,y)-h(x,z)|\leq\psi(|y-z|),\quad (x\in I;\ y,z\in R)$$

gde je $\psi:R_+\longrightarrow R_+$ konkavna funkcija sa svojstvima $(\forall t\in R_+)\,\psi(t)<t$ i $\limsup\limits_{z\to t+o}\psi(z)<t$ $(t\in R_+)$.

Sada možemo formulisati i dokazati sledeće tvrdjenje, uz pomoć teoreme I.2.1.1.

TEOREMA I.2.4. Neka je $I=(0,1)$ i neka su ispunjeni uslovi (a) , (b) pri čemu je $h(x,0)\in L(0,1)$. Tada funkcionalna jednačina $\beta(x)=h(x,\beta[g(x)])$ ima bar jedno rešenje $[\beta]\in L(0,1)$. Čak više, za svako $\beta_o\in L\,(0,1)$ niz sukcesivnih aproksimacija $\beta_{n+1}(x)=h(x,\beta_n[g(x)])$, $n\in N$, konvergira ka β po meri.

DOKAZ. Dokažimo prvo, da transformacija T definisana sa $T([\beta])=|h(x,\beta[g(x)])|$ preslikava prostor $L(0,1)$ u samog sebe. U tom cilju, neka je $\beta\in L(0,1)$. Tada je prema uslovu (b)

$$|h(x,\beta[g(x)])|\leq\psi(|\beta[g(x)]|)+|h(x,0)|$$

odakle je dalje prema (a) i delu uslova (b)

$$\int_I |T([\beta])| \leq \int_I |\beta o g| + \int_I |h(x,0)|$$

$$\leq \int_{g(I)} |\beta| + \int_I |h(x,0)| < +\infty$$

Sa druge strane neka su β_1, $\beta_2 \in L(0,1)$. Prema uslovima (a) i (b) dobijamo

$$\rho(T([\beta_1]), T([\beta_2])) = \int_I |h(x,\beta_1[g(x)]) - h(x,\beta_2[g(x)])| dx$$

$$\leq \int_I \psi(|\beta_1[g(x)] - \beta_2[g(x)]|) dx$$

$$= \int_{g(I)} \psi(|\beta_1(x) - \beta_2(x)|) dx$$

$$\leq \int_I \psi(|\beta_1(x) - \beta_2(x)|) dx.$$

Sada iskoristimo sledeći rezultat W.Feller-a [93]:

LEMA. Ako je $f:(a,b) \longrightarrow R$, $-\infty \leq a < b = +\infty$ konkavna funkcija, tada za svaku funkciju $\beta \in L(X,S,\mu)$, $\mu(X)=1$, gde $\beta: X \longrightarrow (a,b)$ je

$$\int_X f o \beta d\mu \leq f(\int_X \beta d\mu).$$

Napominjemo, da smo u početku dokaza koristili i jedan rezultat Carathéodory-a i Šragin-a [184], koji glasi: Ako je $h: I\times R \longrightarrow R$ za svako $x \in I$ neprekidna, a za svako $y \in R$ merljiva funkcija, tada za svaku merljivu funkciju $\beta: I \longrightarrow R$ funkcija $h(x,\beta(x))$ je merljiva u I.

Sada se vratimo na gornje nejednakosti, pa primenom rezultata W.Feller-a, pošto je naša funkcija ψ konkavna sledi nejednakost

$$\rho(T([\beta_1]), T([\beta_2])) \leq \psi(\int_I |\beta_1(x) - \beta_2(x)| dx) = \psi(\rho[x_1, x_2])$$

Primenom sada naše dokazane teoreme I.1.8. sledi tvrdjenje ove teoreme.

za $x\in I$; $u_i, v_i \in R$ $(i=1,\ldots,n)$, pri čemu preslikavanje $\psi:(R^o_+)^n \longrightarrow R^o_+$ ima osobinu M(max) sa $A\in[0,1)$.

Uz ove predpostavke, jednačina (1) ima više neprekidnih rešenja na intervalu $I\setminus\{0\}$, koja zavise od proizvoljne funkcije. No u opštem slučaju neprekidna rešenja ne mogu se uvek p- roširiti na čitav interval I. Šta više ne postoji uvek $\lim_{x\to 0+} \beta(x)$. Otuda je od interesa sledeće tvrdjenje, kojim dajemo odgovor na to pitanje, uz napomenu da uz to proširujemo i rafiniramo, i neke rezultate J.Matkowski-og [184] i C.Dyjak-a [75].

TEOREMA I.2.5. Neka važe osobine (c). Tada svako neprekidno rešenje $\beta:I\setminus\{0\}\longrightarrow R$ funkcionalne jednačine (1) ispunjava uslov $\lim_{x\to 0+}\beta(x) = 0$. Preciznije, postoje konstante $L>0$ i $\theta\in[0,1)$ tako da je $x_n \leq L\theta^n$ $(n\in N, x_n=\sup\{|\beta(x)|: x\in(g^n, g^{n-1})\}$.

OSOBINE (d).

Inače, kada je pored osobina (c) funkcija g i striktno rastuća na intervalu I, pri čemu su g i g^{-1} apsolutno neprekidne funkcije na intervalima I i g(I) respektivno, možemo dati i još neke podatke o rešenju funkcionalne jednačine (1). Ove osobine nazovimo (d). Iz njih specijalno sledi: 1) za svako $x\in I$, niz iteracija $(g^n(x))$ je striktno opadajući niz i $\lim g^n(x) = 0$.

2) Za svaki interval $J=(0,y)$, $y\leq x_o$ je $g(J)$ J.

3) Za proizvoljan $n\in N$, g^n je apsolutno neprekidna na I a g^{-n} apsolutno neprekidna na $g^n(I)$.

4) $g'\neq 0$ c.c. u I.

Imajući ovako primenljive činjenice za jednačinu (1), bilo je moguće izvoditi razne zaključke i interesantne posledice. Iz istih razloga, i primenom naših propozicija I.1.1. i I.1.5. možemo izložiti i sledeće tvrdjenje.

TEOREMA I.2.6.1). Neka važe osobine (c) i (d). Tada za svaki niz funkcija $\beta_k: [x_k, x_{k+1}] \longrightarrow R$ $(k=1,\ldots,n)$ postoji tačno jedna funkcija $\beta:I\longrightarrow R$ koja zadovoljava jednačinu (1) na I i takva da je $\beta = \beta_k$ u $[x_k, x_{k+1}]$, $(k=1,\dots,n)$. Sa druge strane ako je $\beta_k \in L^p(x_k, x_{k+1})$, $(k=1,\dots,n)$ i red

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{x_{k+n}}^{x_{k+n-1}} |h(g^{-n}, 0, \dots, 0)|^p \right)^{\alpha(p)}$$

konvergentan, tada je $\beta \in L^p(0, x_o)$. Drugim rečima rešenje jednačine (1) u klasi $L^p(0, x_o)$ zavisi od proizvoljne funkcije.

2) Neka važe osobine (c) i neka red

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{x_{k+n}}^{x_{k+n-1}} |h(x, 0, \dots, 0)|^p \right)^{\alpha(p)}$$

konvergira, tada je $\beta \in L^p(0, x_o)$.

NEKE NAPOMENE. Uz pretpostavke (d) koje su vrlo implikativne mi u tački 1) teoreme I.2.6. proširujemo tvrdjenje J. Matkowski-og [184], a sa druge strane tačkom 2) teoreme I.2.6. pokazujemo da se predpostavke (d) mogu izostaviti sačuvavši tvrdjenje prethodne tačke; da rešenje jednačine (1) u klasi $L^p(0, x_o)$ zavisi od proizvoljne funkcije. Na ovaj način mi generalizujemo i proširujemo rezultate J. Matkowski-og [184] i M.Kuczma-e [140], znatno oslabivši dovoljne uslove, uz dosta veću opštost.

Napomenimo da je u rezultatu J.Matkowski-og [184] figurisao i uslov

$$(\exists s_i > 0) \left((g^{-n})^p / (g^{-i})' \right)^{\alpha(p)} \leq s_i \; (i=1,2,\dots,n)$$

koji neophodno indirektno zahteva i uslove (d). Mi smo uspeli i ovaj uslov eliminisati (kao i (d)), uz znatno proširenje domena primene rezultata, što ujedno povećava i težinu naših teorema fiksne tačke ovog poglavlja.

Inače, napomenimo da se implikativna svojstva 1), 2), 3) uslova (d) lako dokazuju i da je 4) tačno, dokažimo. Neka je $m(A)$ Lebesgne-ova mera skupa A R. Sa druge strane za svaki merljivi skup A I je $m(g(A)) = \int_A g'$. Neka je dalje $A = \{x \in I : g'(x) = 0\}$ i $m(A) > 0$. Tada je $m(g(A)) = 0$, pa otuda g^{-1} nije apsolutno neprekidna funkcija, i ova kontradikcija dokazuje tvrdjenje.

DOKAZ TEOREME I.2.5. Neka je $I_k=(g^k(x_o),g^{k-1}(x_o))$ za $k=1,2,\ldots$. Tada je

$$g^i(I_k)=I_{k+i},\quad I\setminus\{0\}=\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \quad (i,k=1,2,\ldots)$$

Neka je β proizvoljna neprekidna funkcija koja zadovoljava jednačinu (1) na $I\setminus\{0\}$, i neka je $x_k=\sup\{|\beta(x)|: x\in I_k\}$, a $y_k=\sup\{|h(x,0,\ldots,0)|: x\in I_k\}$. Sada je

$$x_{n+k}=\sup\{|\beta(x)|: x\in I_{k+n}\}=\sup\{\beta[g^n(x)]: x\in I_k\}$$

$$=\sup\{|h(x,\beta[g^{n-1}(x)],\ldots,\beta[g(x)],\beta(x))|: x\in I_k\}$$

$$\leq \sup_{x\in I_k}\psi(|\beta[g^{n-1}(x)]|,\ldots,|\beta[g(x)]|,|\beta(x)|)+$$

$$+\sup_{x\in I_k}|h(x,0,\ldots,0)|$$

$$\leq A\max\{|\sup_{x\in I_k}\beta[g^{n-1}(x)]|,\ldots,\sup_{x\in I_k}|\beta(x)|\}+y_k$$

$$=A\max\{\sup_{x\in I_{k+n-1}}|\beta(x)|,\ldots,\sup_{x\in I_k}|\beta(x)|\}+y_k$$

$$=A\max\{x_{k+n-1},\ldots,x_k\}+y_k.$$

Kako je h neprekidna funkcija i $h(0,\ldots,0)=0$ biće $\lim y_k=0$ $(y_k\geq 0)$. Primenom sada naših teorema I.1.6. i I.1.3. na nizove (x_k) i (y_k) sleduje naša tvrdnja. Ovo iz razloga jer je tačna ekvivalencija $\lim\limits_{k\to\infty} x_k=0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to 0+}\beta(x)=0$. Kako je sa druge strane $x_k=\sup\{|\beta(x)|: x\in I_k\}$, to primenom naše teoreme I.1.3. izlazi: niz (x_k) ponašaće se geometrijski. Ovim je dokaz završen.

DOKAZ TEOREME I.2.6. Stavimo

$$\beta_{k+n}(x)=h(g^{-n}(x),\beta_{k+n-1}\circ g^{-1}(x),\ldots,\beta_k\circ g^{-n}(x))$$

za $x\in(x_{k+n},x_{k+n-1})$, $k=1,2,\ldots$, i neka je $\beta=\beta_k$ u intervalima (x_k,x_{k-1}), $k=1,2,\ldots$. Sada je β rešenje jednačine (1) na $(0,x_o)$, i ovo rešenje je jedinstveno (prema teoremi I.2.3.). Sa druge strane za $x\in(x_{k+n},x_{k+n-1})$ je

$$|\beta_{k+n}| \leq A \max_{i=1,\ldots,n}\{|\beta_{k+n-i}\circ g^{-i}|\} + |h(g^{-n},0,\ldots,0)|.$$

Primenom dalje nejednakosti Minkowski-og, sledi da je

$$\left(\int_{x_{k+n}}^{x_{k+n-1}} |\beta_{k+n}|^p\right)^{\alpha(p)} \leq A^{p\alpha(p)} \max_{i}\left\{\left(\int_{x_{k+n}}^{x_{k+n-1}} |\beta_{k+n-i}\circ g^{-i}|^p\right)^{\alpha(p)}\right.$$

$$+\left(\int_{x_{k+n}}^{x_{k+n-1}} |h(g^{-n},0,\ldots,0)|^p\right)^{\alpha(p)} \leq$$

$$\leq A^{p\alpha(p)} \max_{i=1,\ldots,n}\left(\int_{x_{k+n-i}}^{x_{k+n-i-1}} |\beta_{k+n-i}|^p\right)^{\alpha(p)} + \left(\int_{x_{k+n}}^{x_{k+n-1}} |h(g^{-n}, 0,\ldots,0)|^p\right)^{\alpha(p)}$$

Stavljajući, da je za $k=1,2,\ldots,$

$$a_k = \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} |\beta_k|^p\right)^{\alpha(p)}, \quad b_k = \left(\int_{x_{k+n}}^{x_{k+n-1}} |h(g^{-n}, 0,\ldots,0)|^p\right)^{\alpha(p)}.$$

gornja nejednakost imaće formu nejednakosti iz teoreme I.1.8. pa sumiranjem leve i desne strane (pošto red Σb_k konvergira) imamo primenom teoreme I.1.8. da konvergira i red Σa_k, pa pošto važi i nejednakost

$$\left(\int_{o}^{x_o} |\beta|^p\right)^{\alpha(p)} \leq \sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_{x_k}^{x_{k-1}} |\beta_k|^p\right)^{\alpha(p)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty$$

sleduje tvrdjenje teoreme za tačku 1). Uz isti postupak sleduje (i dokazuje se) tvrdjenje tačke 2) jedino umesto funkcije $h(g^{-n},0,\ldots,0)$ treba dodati i oduzeti funkciju $h(x,0,\ldots,0)$. Ovim je dokaz kompletiran.

I.3. KONVERGENCIJA NEKIH NIZOVA I REŠAVANJE SISTEMA JEDNAČINA NA METRIČKIM PROSTORIMA

U ovom delu rada dajemo neke dovoljne uslove za konvergenciju nizova definisanih rekurentnim relacijama i u vezi sa tim metod za rešavanje sistema jednačina na metričkim prostorima.

TEOREMA I.3.1. Neka je (X,ρ) kompletan metrički prostor i neka preslikavanja $A,T:X^4 \longrightarrow X$ ispunjavaju uslov

$$\text{(A)}\quad \begin{aligned} &\max\{\rho[A(u_1,u_2,u_3,u_4),A(u_3,u_4,u_5,u_6)],\rho[T(u_1,u_2,u_3,u_4),T(u_3u_4,u_5,u_6 \\ &\leqq \alpha \max\{\rho[u_1,u_3],\rho[u_2,u_4],\rho[u_3,u_5],\rho[u_4,u_6]\}, \end{aligned}$$

za $\alpha \in [0,1)$ i proizvoljne $u_1,\ldots,u_6 \in X$. Tada nizovi (x_n), (y_n) definisani sa

$$(1)\quad x_{n+2}=A(x_n,y_n,x_{n+1},y_{n+1}),\ y_{n+2}=T(x_n,y_n,x_{n+1},y_{n+1})$$

gde su elementi x_1,x_2,y_1,y_2 proizvoljni početni, konvergiraju respektivno ka $x,y \in X$ i (x,y) je rešenje sistema jednačina

$$x=A(x,y,x,y),y=T(x,y,x,y).$$

Brzina konvergencije može se proceniti sa nejednakošću

$$(2)\quad \max\{\rho[x_{n+2},x],\rho[y_{n+2},y]\} \leqq \max\{L_1,L_2\}\theta^n(1-\theta)^{-1},(\theta \in [0,1),n \in N$$

pri čemu se pozitivne konstante L_1,L_2 zadaju kao u propoziciji I.1.3.

Treba napomenuti da se tvrdjenje ovog stava jednostavnom tehnikom automatski prenosi i na slučaj, kada se na kompletnom metričkom prostoru X razmatra niz preslikavanja $T_i:X^{pk} \longrightarrow X$ $(i=1,2,\ldots k;$ p je prirodan broj). Tada, samo nizovi $(x_n^1),\ldots,(x_n^k)$ zadovoljavaju jednakosti

$$x_{n+p}^i = T_i(x_n^{(1)},\ldots,x_{n+p-1}^{(1)},x_n^{(k)},\ldots,x_{n+p-1}^{(k)}),$$

za $i=1,2,\ldots,k$ i $x_i^{(j)} \in X$. U specijalnom slučaju kada je $k=2$ i

$p=2$, mi dajemo prethodno tvrdjenje. Generalna teorema u ovom opštem slučaju bilo bi samo prenošenje tehnike stava I.3.1.

No, sa druge strane zanimljiv je i opštiji stav, koji bi se dokazao koristeći iskaze dokazanih propozicija u I.1.

TEOREMA I.2.2. Neka je (X,ρ) kompletan metrički prostor i neka preslikavanja $A,T:X^3 \longrightarrow X$ ispunjavaju uslove

$$\max\{\rho[A(u_1,u_2,u_3),A(u_3,u_4,u_5)],\rho[T(u_1,u_2,u_3),T(u_3,u_4,u_5)]\}$$

$$\leqq \psi(\rho[u_1,u_3],\ \rho[u_2,u_4],\ \rho[u_3,u_5]) ,$$

za proizvoljne $u_1,u_2,u_3 \in X$, pri čemu je funkcija $\psi:(R_+^o)^3 \longrightarrow R_+^o$ sa osobinom $M(\max)$ i $A \in [0,1)$. Tada nizovi (x_n) i (y_n) definisani sa

$$x_{n+2} = A(x_n,y_n,x_{n+1}),\quad y_{n+2} = T(x_n,y_n x_{n+1})$$

gde su elementi x_1,x_2,y_1 proizvoljni početni, konvergiraju respektivno ka $x,y \in X$ i (x,y) je rešenje sistema jednačina

$$x=A(x,y,x),\ y= T(x,y,x).$$

DOKAZ TEOREME I.3.1. Označimo nizove $\rho[x_n,x_{n+1}]$ sa Δ_n, i $\rho[y_n,y_{n+1}]$ sa ∇_n. Tada prema uslovu (A) sledi nejednakost

$$\max\{\Delta_{n+2},\nabla_{n+2}\} \leqq \alpha \max\{\Delta_n,\nabla_n,\Delta_{n+1},\nabla_{n+1}\}. \tag{3}$$

Označavajući lim sup Δ_n sa Δ i lim sup ∇_n sa ∇ iz (3) je

$$\max\{\Delta,\nabla\} \leqq \alpha \max\{\Delta,\nabla,\Delta,\nabla\}=\alpha \max\{\Delta,\nabla\} ,$$

odakle se dobija $\lim \max\{\Delta_n,\nabla_n\}= 0$, što implicira jednakost

$$\max\{[x_n,x_{n+p}],\rho[y_n,y_{n+p}]\} \longrightarrow 0 \quad (n \longrightarrow \infty). \tag{4}$$

Prema tome nizovi (x_n), (y_n) su konvergentni nizovi na prostoru X. Neka je $x=\lim x_n$, i $y=\lim y_n$. Tada je

$$\rho\left[x_{n+2},A(x,y,x,y)\right]+\rho\left[y_{n+2},T(x,y,x,y)\right]\leqq$$

$$\leqq \rho\left[A(x_n,y_n,x_{n+1},y_{n+1}),A(x_{n+1},y_{n+1},x,y)\right]+\rho\left[A(x_{n+1},y_{n+1},x,y),A(x,y,x,y)\right]$$

$$+\rho\left[T(x_n,y_n,x_{n+1},y_{n+1}),T(x_{n+1},y_{n+1},x,y)\right]+\rho\left[T(x_{n+1},y_{n+1},x,y),T(x,y,x,y)\right]$$

$$\leqq 2\max\{\rho\left[A(x_n,y_n,x_{n+1},y_{n+1}),A(x_{n+1},y_{n+1},x,y)\right],\rho\left[T(x_n,y_n,x_{n+1},y_{n+1}),T(x_{n+1},y_{n+1},x,y)\right]\}$$

$$+2\max\{\rho\left[A(x_{n+1},y_{n+1},x,y),A(x,y,x,y)\right],\rho\left[T(x_{n+1},y_{n+1},x,y),T(x,y,x,y)\right]\}$$

$$\leqq 2\alpha\max\{\rho\left[x_n,x_{n+1}\right],\rho\left[y_n,y_{n+1}\right],\rho\left[x_{n+1},x\right],\rho\left[y_{n+1},y\right]\}+$$

$$+2\alpha\max\{\rho\left[x_{n+1},x\right],\rho\left[y_{n+1},y\right],0,\ 0\}\ ,$$

odakle se dobija da je

$$\lim \rho\left[x_{n+2},A(x,y,x,y)\right]=0,\ \lim \rho\left[y_{n+2},T(x,y,x,y)\right]=0$$

tj. $\lim x_n=x=T(x,y,x,y)$, $\lim y_n=y=T(x,y,x,y)$.

Ovim je dokaz teoreme završen. Dokaz teoreme I.3.2., na isti se način izvodi samo uz još pomoć dokazanih propozicija iz I.1. Procena brzine konvergencije dobija se primenom propozicije I.1.2. na nizove Δ_n i ∇_n, za koje važi (3), pa je otuda

$$\Delta_n \leqq \theta_1^n \max_{i=1,\dots,k} (\Delta_i\theta_1^{-i}) = L_1\theta^n$$

$$\nabla_n \leqq \theta_2^n \max_{i=1,\dots,k} (\nabla_i\theta_2^{-i}) = L_2\theta^n$$

$$(n\in N,\ \theta=\max\{\theta_1,\theta_2\}\in[0,1)\ ,$$

a što je ekvivalentno sa nejednakošću

$$\max\{\rho\left[x_{n+2},x_{n+p}\right],\rho\left[y_{n+2},y_{n+p}\right]\}\leqq \max\{L_1,L_2\}\theta^n(1-\theta)^{-1}$$

$$(n,p\in N,\ \theta=\max\{\theta_1,\theta_2\}\in[0,1)\ ,$$

odakle kada $p \longrightarrow \infty$ sledi nejednakost (2).

Sada možemo formulisati i dokazati odgovarajuću teoremu za niz preslikavanja. No opet se ograničimo na slučaj dva niza preslikavanja A_n, $T_n : X^2 \longrightarrow X$, gde je X metrički prostor.

TEOREMA I.3.3. Neka je (X,ρ) kompletan metrički prostor i neka nizovi preslikavanja A_n, $T_n : X^3 \longrightarrow X$ ispunjavaju uslov

$$\tag{B} \begin{aligned} &\max\{\rho[A_n(u_1,u_2,u_3),A_{n-1}(u_3,u_4,u_5)],\rho[T_n(u_1,u_2,u_3),T_{n-1}(u_3,u_4,u_5)]\} \\ &\leqq \alpha \max\{\rho[u_1,u_3],\ \rho[u_2,u_4],\ \rho[u_3,u_5]\} + a_n \end{aligned}$$

za $\alpha \in [0,1)$ i proizvoljne $u_1,\dots,u_5 \in X$ pri čemu red $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \ (a_\nu \geqq 0)$ konvergira. Tada

(a) Nizovi funkcija $A_n(u,v,u)$, $T_n(u,v,u)$ uniformno konvergiraju ka funkcijama $A(u,v,u)$, $T(u,v,u)$.

(b) Nizovi (x_n) i (y_n) definisani sa

$$x_{n+2}=A_n(x_n,y_n,x_{n+1}),\quad y_{n+2}=T_n(x_n,y_n,x_{n+1})$$

gde su elementi x_1,x_2,y_1 proizvoljni početni konvergiraju u X

(c) Rešenja sistema jednačina

$$\tag{5} x=A(x,y,x),\quad y=T(x,y,x)$$

je $x=\lim x_n$, $u=\lim y_n$.

(d) Brzina konvergencije procenjuje se sa nejednakošću (2).

Gornja tvrdjenja važe i kada bi se dovoljan uslov dat nejednakošću (B) zamenio opštijim

$$\begin{aligned} &\max\{\rho[A_n(u_1,u_2,u_3),\ A_{n-1}(u_3,u_4,u_5)],\ \rho[T_n(u_1,u_2,u_3),T_{n-1}(u_3,u_4,u_5)]\} \\ &\leqq \psi(\rho[u_1,u_3],\ \rho[u_2,u_4],\ \rho[u_3,u_5]) + a_n. \end{aligned}$$

pri čemu funkcija $\psi: R_+^3 \longrightarrow R_+$ ima osobinu M(max) i $A \in [0,1)$, uz ostale predpostavke.

DOKAZ TEOREME I.3.3. Stavljajući $u_1=u_3=u_5=u$, $u_2=u_4=\nu$ u nejednakosti (B), dobija se

$$\max\{\rho[A_n(u,\nu,u),\ A_{n-1}(u,\nu,u)],\ \rho[T_n(u,\nu,u),\ T_{n-1}(u,\nu,u)]\} \leqq a_n,$$

a što implicira uniformnu konvergenciju nizova $A_n(u,\nu,u)$, $T_n(u,\nu,u)$.

Ostali deo dokaza ide potpuno isto kao i u teoremi I.3.1. No, moguće je i direktno pozivanje na propoziciju I.1.2. Detaljniji dokaz ovih tvrdjenja nalazi se u radovima [265], [266].

NEKE POSLEDICE I PRIMENE GORNJIH REZULTATA
SPECIJALNO PRIMENE NA REALNOJ PRAVOJ

TEOREMA I.3.4. Neka je X zatvoren interval na realnoj pravoj, i neka realne funkcije $A(u_1,u_2,u_3,u_4)$, $T(u_1,u_2,u_3,u_4)$ imaju parcijalne izvode za koje je

$$\sum_i \left|\frac{\partial A}{\partial u_i}\right|,\quad \sum_i \left|\frac{\partial T}{\partial u_i}\right| \leqq \alpha \quad (i=1,2,3,4;\ \alpha \in [0,1)).$$

Tada nizovi (x_n), (y_n) dati sa (1) imaju sve osobine iz tvrdjenja teoreme I.3.1.

DOKAZ. Kako je X zatvoren interval, to je on kompletan metrički prostor, sa uobičajenim Euklidskim rastojanjem. Kako je

$$|A(u_1,u_2,u_3,u_4) - A(u_3,u_4,u_5,u_6)| \leqq$$

$$\leqq \left|\frac{\partial A}{\partial u_1}\right| |u_1-u_3| + \left|\frac{\partial A}{\partial u_2}\right| |u_2-u_4| + \left|\frac{\partial A}{\partial u_3}\right| |u_3-u_5| + \left|\frac{\partial A}{\partial u_4}\right| |u_4-u_6|$$

$$\leqq \alpha \max\{|u_1-u_3|, |u_2-u_4|, |u_3-u_5|, |u_4-u_6|\}$$

i na sličan način i

$$|T(u_1,u_2,u_3,u_4)-T(u_3,u_4,u_5,u_6)| \leqq$$

$$\leqq \alpha \max \{|u_1-u_2|,|u_2-u_3|,|u_3-u_5|,|u_4-u_6|\};$$

pa su svi uslovi za primenu teoreme I.3.1. ispunjeni pa je samim tim sledeće: Nizovi (x_n), (y_n) dati sa (1) konvergiraju i

$$\lim x_n=x=A(x,y,x,y), \quad \lim y_n=y=T(x,y,x,y).$$

TEOREMA I.3.5. Neka preslikavanja $A,T:R^3 \longrightarrow R$ (R je skup realnih brojeva) i neka je

$$\max \{|A(u_1,u_2,u_3)-A(u_3,u_4,u_5)|, |T(u_1,u_2,u_3)-T(u_3,u_4,u_5)|\}$$

$$\leqq \alpha \max \{|u_1-u_3|,|u_2-u_4|,|u_3-u_5|\}$$

za $\alpha \in [0,1)$ i proizvoljne $u_1,\ldots,u_5 \in R$. Tada nizovi (x_n) i (y_n) dati sa

$$x_{n+2}=A(x_n,y_n,x_{n+1}), \quad y_{n+2}=T(x_n,y_n,x_{n+1})$$

konvergiraju u prostoru R, i sistem jednačina (5) ima rešenja $x=\lim x_n$, $y=\lim y_n$.

DOKAZ, direktno sledi primenom tvrdjenja teoreme I.3.1.

TEOREMA I.3.6. Neka su A, $T:R^3 \longrightarrow R$ (R je skup realnih brojeva) i neka je

$$\max \{|A(u_1,u_2,x)-A(u_2,u_3,y)|,|T(u_1,u_2,x)-T(u_2,u_3,y)|\}$$

$$\leqq \alpha \max\{|u_1-u_2|,|u_2-u_3|\} +|x-y|$$

gde je $\alpha \in [0,1)$ i $u_1,u_2,u_3,u_4,x,y \in X$. Neka su dalje nizovi (x_n), (y_n) definisani sa

$$x_{n+1}=A(x_n,y_n,a_n), \quad y_{n+1}=T(x_n,y_n,b_n), \quad n\ N,$$

gde su elementi x_1,y_1 proizvoljni početni, a nizovi (a_n) i (b_n) monotoni i $\lim a_n=a$, $\lim b_n=b$ $(a,\ b \in R)$. Tada nizovi (x_n) i (y_n)

konvergiraju i sistem jednačina

$$x=A(x,y,a),\quad y=T(x,y,b)$$

ima rešenje $x=\lim x_n$, $y=\lim y_n$.

DOKAZ. Stavimo $A(x_n,y_n,a_n) = A_n(x_n,y_n), T(x_n,y_n,b_n) = T_n(x_n,y_n)$. Tada je

$$\max \{|A_n(x_n,y_n)-A_{n-1}(x_{n-1},y_{n-1})|,\ |T_n(x_n,y_n)-T_{n-1}(x_{n-1},y_{n-1})|\}$$

$$\leqq \alpha \max\{|x_n-x_{n-1}|,|y_n-y_{n-1}|\}+ \max\{| a_n-a_{n-1}|,|b_n-b_{n-1}|\}$$

Kako je $\max \{|a_n-a_{n-1}|,|b_n-b_{n-1}|\}<\infty$, to su uslovi teoreme I.3.3. ispunjeni onda primenjujući je sledi da nizovi (x_n) i (y_n) konvergiraju. Otuda i

$$\max\{ |x_{n+1}-A(x,y,a)|,\ |y_{n+1}-T(x,y,a)|\} \longrightarrow 0 \ (n\longrightarrow\infty),$$ čime je tvrdjenje pokazano.

POSLEDICA I.3.1. (J. Kečkić [143], s.76.) Neka preslikavanja $A,T:X^4 \longrightarrow X$ (X je kompletan metrički prostor) ispunjavaju uslove

$$\rho[A(u_1,u_2,u_3,u_4),\ A(u_3,u_4,u_5,u_6)]$$

$$\leqq a_1\rho[u_1,u_3]+a_2\rho[u_2,u_4]+a_3\rho[u_3,u_5]+a_4\rho[u_4,u_6] \quad ,$$

$$\rho[T(u_1,u_2,u_3,u_4),\ T(u_3,u_4,u_5,u_6)]$$

$$\leqq b_1\rho[u_1,u_3]+ b_2\rho[u_2,u_4] + b_3\rho[u_3,u_5] + b_4\rho[u_4,u_6]$$

za proizvoljne $u_1,\dots,u_6\in X$, gde nenegativni brojevi a_i,b_i $(i=1,2,3,4$ ispunjavaju uslov

(6) $\max \{a_1+b_1+a_3+b_3,a_2+b_2+a_4+b_4\} < 1.$

Tada nizovi (x_n) i (y_n) dati sa (1) konvergiraju ka $x,y\in X$ i (x,y)

je jedinstveno rešenje sistema

$$x=A(x,y,x,y), \quad y=T(x,y,x,y)$$

Uporedjujući teoremu I.3.1. sa ovim tvrdjenjem možemo potražiti odgovarajuće odnose. Prvo, dovoljni uslovi za konvergenciju nizova iz teoreme J. Kečkića impliciraju dovoljne uslove teoreme I.3.1. Prema tome ona je generalizacija teoreme J. Kečkića. Čak šta više postoje primeri kada su uslovi naše teoreme I.3.1. ispunjeni, a uslovi teoreme J. Kečkića nisu. Navedimo takav jedan primer.

PRIMER I.3.1. Neka je $X=R$ i

$$x_{n+2} = 1/3\ x_n+1/12\ y_n+1/4\ x_{n+1}+1/10\ y_{n+1}$$

$$y_{n+2} = 1/3\ x_n+1/4\ y_n+1/12\ x_{n+1}+1/10\ y_{n+1},\ n\in N.$$

Tada uslov (6) teoreme J. Kečkića nije ispunjen jer je

$$\max\{a_1+b_1+a_3+b_3,\ a_2+b_2+a_4+b_4\} =$$

$$= \max\{1/3+1/3+1/4+1/12,1/12+1/4+1/10+1/10\} = \tfrac{2}{3}+1/3=1.$$

Sa druge strane naš uslov (A) je ispunjen, jer je

$$\alpha = \max\{1/3+1/12+1/4+1/10,1/3+1/4+1/12+1/10\}= 23/30\in[0,1)$$

pa se na nizove (x_n) i (y_n) može primeniti teoremi I.3.1 i otuda oni konvergiraju ka rešenju (0,0) gornjeg sistema jednačina.

PRIMER I.3.2. Neka je $X=R$ i neka realni nizovi (x_n) i (y_n) zadovoljavaju sledeće diferencijske nejednakosti

$$x_{n+2}=\frac{1}{3}x_n + \frac{1}{12}y_n + \frac{1}{4}x_{n+1} + \frac{1}{10}y_{n+1} + \frac{4}{15} - 1/2n$$

$$y_{n+2}=\frac{1}{3}x_n + \frac{1}{4}y_n + \frac{1}{12}x_{n+1} + \frac{1}{10}y_{n+1} + \frac{1}{5} + 1/2n^2$$

i neka su x_1,y_1,x_2,y_2 proizvoljni realni brojevi. Kako su uslovi za primenljivost teoreme I.3.6. ispunjeni, sledi da je $\lim x_n=33/10$, $\lim y_n=9/2$.

II. GENERALIZACIJA BANACH-OVOG PRINCIPA KONTRAKCIJE

Cilj ovog poglavlja je nastavak istraživanja u okvirima rezultata BANACH-ovog tipa i onih koji to nisu, a koji se odnose često na dobijanje dovoljnih uslova za egzistenciju fiksnih tačaka. Ovde opisujemo u ovom smislu i jednu klasu dovoljnih uslova, preko koje generalizujemo BANACHOV princip kontrakcije (i veliki broj drugih rezultata), sledeći doslovce ideje iz poglavlja I. Ovde naročito primenjujemo naše prethodne rezultate iz dela I. Mi ovde generalizujemo i rezultate mnogih matematičara, uvodeći pojam ψ- kontrakcije i generalisane ψ -kontrakcije. Na kraju dajemo i jednu primenu dobivenih rezultata, ispitujući egzistenciju jedne nelinearne funkcionalne jednačine.

II, GENERALIZACIJA BANACH-OVOG PRINCIPA KONTRAKCIJE

II.1. PRESLIKAVANJA KOJA UMANJUJU ORBITE, ψ-KONTRAKCIJA I GENERALISANA ψ-KONTRAKCIJA

U teoriji fiksnih tačaka kontraktivnih operatora postoji danas ogroman broj rezultata. To svakako govori o interesantnosti ideje PICARD-a, koju je tako efektno realizovao u funkcionalnoj analizi poljski matematičar STEFAN BANACH, objavljujući svoj veoma poznati rezultat. Rezultat koji je otvorio čitava nova poglavlja i nove matematičke teorije. Može se slobodno reći da je to i rezultat na kome danas počiva Numerička matematika, a i mnoge druge oblasti matematičkog stvaranja i primenjivanja. Otuda i jedno objašnjenje za važnost i aktuelnost ove problematike, kao i za postojanje velikog broja rezultata.

Poznato je više generalizacija BANACH-ovog stava o kontrakciji u okvirima potpunih metričkih prostora, gde se ili uslov

(A) $\rho[Tx,Ty]\leq q\rho[x,y]$, za neko $q\in[0,1)$,

zahteva za proizvoljne $x,y\in X$ i za neku iteraciju $T^k(k\in N)$ preslikavanja $T:X\longrightarrow X$, gde je (X,ρ) metrički prostor (V.Bryant [17], V.Sehgal [233]), ili pak preslikavanju $T:X\longrightarrow X$ stavlja blaži uslov (u smislu da (A) važi samo za izvesne parove tačaka) ali se nešto više istovremeno zahteva od prostora (X,ρ). Prirodno je pitanje da li se može generalisati stav BANACH-a, tako da se samo ublaži uslov (A) za preslikavanje, a da se pri tome sem potpunosti ne zahteva više od prostora X ili pak da se i predpostavka potpunosti oslabi istovremeno. U ovom delu rada biće dati neki odgovori na ova pitanja. No, prvo navedimo kako su tekla neka proširenja BANACH-ovog stava u ovom pravcu.

Kannan je u radu [135] dokazao sledeću teoremu:

Neka je T preslikavanje kompletnog metričkog prostora (X,ρ) u samog sebe, pri čemu zadovoljava uslov da postoji broj

$0\geq q>1/2$ sa svojstvom da za svako $x,y\in X$

(B) $\rho[Tx,Ty]\leq q(\rho[x,Tx]+\rho[y,Ty])$.

Tada T ima jedinstvenu fiksnu tačku $\xi\in X$.

U prvom koraku izložićemo koncept ψ-kontrakcije preslikavanja T metričkog prostora (X,ρ) u samog sebe tj. to je preslikavanje $T:X\longrightarrow X$ sa svojstvom da za svako $x,y\in X$ važi nejednakost

(C) $\rho[Tx,Ty]\leq\psi(\rho[x,y],\rho[x,Tx],\rho[y,Ty],\rho[x,Ty],\rho[y,Tx])$,

pri čemu funkcija $\psi:(R_+^o)^5\longrightarrow R_+^o\overset{def}{=\!=}[0,+\infty)$ ima osobinu M(max) sa $A=\lambda\in[0,1)$.

U ovom delu rada izložićemo i koncept klase preslikavanja koju ćemo zvati generalisana ψ-kontrakcija. To su preslikavanja $T:X\longrightarrow X$ sa svojstvom da za svako $x,y\in X$ važi nejednakost

(D) $\rho[Tx,Ty]\leq\psi(\rho[x,y],\rho[x,Tx],\rho[y,Ty],\rho[x,Ty],\rho[y,Tx])$

gde je $\psi:(R_+^o)^5\longrightarrow R_+^o$ neka rastuća funkcija sa osobinom

$$(\forall t\in R_+)(\psi(t,\dots,t)<t\wedge\limsup_{z\to t+o}\psi(z,\dots,z)<t).$$

Ovako uvedena klasa ψ-kontraktivnih preslikavanja T obuhvata kao specijalan slučaj mnoge do sada proučavane klase preslikavanja T, u ovom pravcu. Primena teoreme I.1.6. ovde je odlučujuća, pa je onda prirodno da se i odgovarajuća karakteristika (raniji komentar) prenosi i ovde (teorema II.1.1.).

U magistarskom radu [263] mi smo proučavali jednu užu, specijalniju klasu preslikavanja prethodnog tipa. Prethodna klasa preslikavanja (ψ-kontrakcija, generalisana ψ-kontrakcija) specifikacijom daju:

(1) (BIANCHINI [19]) Postoji broj $q\in[0,1)$, sa svojstvom da za svako $x,y\in X$ je

$$\rho[Tx,Ty]\leq q\max\{\rho[x,Tx],\rho[y,Ty]\}$$

(2) (REICH [209]) Postoje nenegativni brojevi a,b,c sa svojstvom $a+b+c<1$, tako da je za svako $x,y\in X$

$$\rho[Tx,Ty]\leq a\rho[x,Tx]+b\rho[y,Ty]+c\rho[x,y]$$

(3) (REICH [209]) Za svako $x,y\in X$, postoje nenegativne funkcije a,b,c sa svojstvima

$$\sup\{a(x,y)+b(x,y)+c(x,y)\,|\,x,y\in X\}\leq q<1$$
$$\rho[Tx,Ty]\leq a\rho[x,Tx]+b\rho[y,Ty]+c\rho[x,y]$$

(4) (CHATTERJEA [47]) Postoji broj $q\in(0,1/2)$ sa svojstvom da za svako $x,y\in X$

$$\rho[Tx,Ty]\leq q(\rho[x,Ty]+\rho[y,Tx])$$

(5) (RHOADES [221]) Postoji broj $q\in[0,1)$ sa svojstvom da za svako $x,y\in X$

$$\rho[Tx,Ty]\leq q\max\{\rho[x,Ty],\rho[y,Tx]\}$$

(6) (RHOADES [221]) Postoje nenegativni brojevi a,b,c sa svojstvom $a+b+c<1$ tako da za svako $x,y\in X$

$$\rho[Tx,Ty]\leq a\rho[x,Ty]+b\rho[y,Tx]+c\rho[x,y]$$

(7) (HARDY-ROGERS [119]) Postoje nenegativni brojevi a_i sa svojstvom $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5<1$ tako da za $x,y\in X$ je

$$\rho[Tx,Ty]\leq a_1\rho[x,y]+a_2\rho[x,Tx]+a_3\rho[y,Ty]+a_4\rho[x,Ty]+a_5\rho[y,Tx]$$

(8) (ĆIRIĆ [57]) Za svako $x,y\in X$ postoje nenegativne funkcije $a_i(x,y)=a_i\,(i=1,\ldots,4)$ sa svojstvima

$$\sup\{a_1+a_2+a_3+2a_4\,|\,x,y\in X\}\leq q<1$$
$$\rho[Tx,Ty]\leq a_1\rho[x,y]+a_2\rho[x,Tx]+a_3\rho[y,Ty]+a_4(\rho[x,Ty]+\rho[y,Tx])$$

(9) (S.MASSA [175], LJ.ĆIRIĆ [65]) Postoji konstanta $q\in[0,1)$ tako da za svako $x,y\in X$ je

$$\rho[Tx,Ty] \leq q \max\{\rho[x,y], \rho[x,Tx], \rho[y,Ty], \rho[x,Ty], \rho[y,Tx]\}$$

NEKI UVODNI POJMOVI, JEDNA LEMA
I GLAVNI REZULTAT

Neka je T preslikavanje metričkog prostora (X,ρ) u samog sebe. Za skup $A \subset X$ neka je $\beta(A)=\sup\{\rho[x,y]:x,y\in A\}$, a za proizvoljno $x\in X$ neka je

$$\sigma(T^m x,n)=\{T^m x, T^{m+1}x,\ldots,T^{m+n}x\}; m=0,1,\ldots; n=1,2,\ldots$$

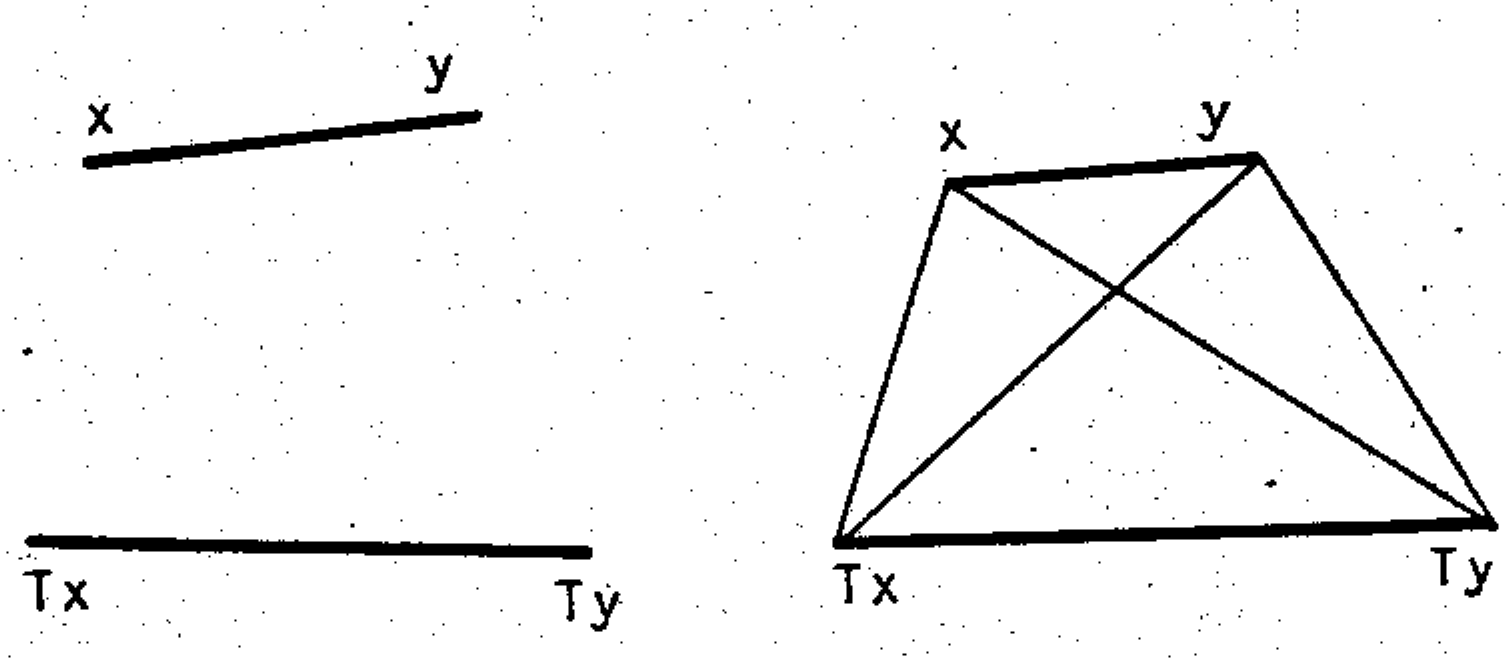
$$\sigma(T^m x,\infty)=\{T^m x, T^{m+1}x,\ldots\}, m=0,1,\ldots,$$

gde se uzima da je $T^0x=x$.

DEFINICIJA II.1.1. Prostor (X,ρ) je T-orbitalno kompletan ako i samo ako svi Cauchy-evi nizovi kada su sadržani u $\sigma(x,\rho)$ za $x\in X$, imaju graničnu vrednost u prostoru X. Nekad ćemo za X reći i samo T-orbitalan.

Ovakav pojam kompletnosti prvi je koristio M. EDELŠTEIN [85], a kasnije i R. KANNAN [136].

Dalje, zanimljiva je geometrijska intempretacija uslova (A), (B) i (1)-(9).



Konstruišimo sada jedan primer koji pokazuje da postoji preslikavanje $T:X \longrightarrow X$ na T-orbitalnom prostoru koje zadovoljava naš uslov ψ-kontrakcija a ne ispunjava nijedan od ranije navedenih uslova (A), (B) i (1)-(9). S obzirom da važi sledeći red implikacija

$$\begin{tikzcd}
 & & (5) \arrow[r, Leftrightarrow] & (4) \arrow[d, Rightarrow] & & \\
(A) \arrow[r, Rightarrow] & (2) \arrow[r, Rightarrow] & (3) \arrow[r, Leftrightarrow] & (6) \arrow[r, Rightarrow] & (8) \arrow[r, Rightarrow] & (7) \arrow[d, Leftrightarrow] \\
 & (2) & (B) \arrow[l, Rightarrow] \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r, Leftrightarrow] & (1) \arrow[r, Rightarrow] & (C),(D) & (9) \arrow[l, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

to je dovoljno konstruisati primer koji pokazuje da je ispunjen uslov generalisane ψ-konstrakcije a nisu ispunjeni uslovi (7) i (9).

PRIMER II.1.1. Neka je $X=[0,+\infty)$ i definišimo preslikavanje $T:X\longrightarrow X$ sa $Tx=x(x+1)^{-1}$, pri čemu je funkcija ρ uobičajeno Euklidsko rastojanje. Preslikavanje T je generalisana ψ-kontrakcija sa funkcijom $\psi:(R_+^o)^5\longrightarrow R_+^o$ definisanom sa

$$\psi(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)\overset{\text{def}}{=} t_1(1+t_1)^{-1}$$

Lako je proveriti da ψ ispunjava sve uslove za generalisanu ψ-kontraktivnost, i otuda je

$$\rho[Tx,Ty]=\frac{|x-y|}{1+x+y+xy}\leq\frac{|x-y|}{1+|x-y|}$$

$$\overset{\text{def}}{=}\psi(\rho[x,y],\rho[x,Tx],\rho[y,Ty],\rho[x,Ty],\rho[y,Tx]).$$

Otuda je naš uslov (D) ispunjen. Sa druge strane uslov (9) nije ispunjen, jer za $q<1$ i $x\in X$ je

$$\rho[To,Tx]=\frac{x}{1+x}\leq q\max\{0,\frac{x^2}{1+x},x,\frac{x}{1+x},x\}$$

Kako je za $x>0$, $x^2(1+x)^{-1}\leq x$, to je odavde $(1+x)^{-1}\leq q$, a što je kontradikcija, jer q je uniformna konstanta, i $q<1$.

Na osnovu ovoga možemo smatrati opravdanim sledeći naš stav.

TEOREMA II.1.1.(a). Neka je preslikavanje $T:X\longrightarrow X$ ψ-kontrakcija na T-orbitalnom kompletnom prostoru (X,ρ). Tada je preslikavanje T BANACH-OVOG tipa, sa sva tri karakteristična svojstva.

(b) Kada je preslikavanje $T:X \longrightarrow X$ generalisana ψ-kontrakcija na T-orbitalnom kompletnom prostoru (X,ρ), tada za proizvoljno $x \in X$ niz interacija $(T^n x)$ konvergira jedinstvenoj fiksnoj tački preslikavanja T. Pri tom brzina konvergencije ne mora biti geometrijska, kao u slučaju ψ-kontrakcije.

Pre nego što izložimo dokaz ove teoreme formulišimo i dokažimo jednu lemu, koja će nam koristiti u dokazu, a i daljem radu.

LEMA II.1.1. Neka je preslikavanje $T:X \longrightarrow X$ ψ-kontrakcija na prostoru (X,ρ) i n pozitivan ceo broj. Tada za $x \in X$ i sve pozitivne cele broje i i j je

(a) $1 \leqq i, j \leqq n \Longrightarrow \rho[T^i x, T^j x] \leqq \lambda\beta[\sigma(x,n)]$,

(b) $(\forall x \in X)(\exists k \leqq n)\, \rho[x, T^k x] = \beta[\sigma(x,n)]$,

(c) $\beta[\sigma(x,\infty)] \leqq (1-\lambda)^{-1}\rho[x, Tx]$.

DOKAZ LEME. Tvrdjenje tačke (a) direktna je posledica teoreme I.1.4. ranije dokazane. Naime, definišimo niz (Δ_n), za $n \in N$ sa

$$\Delta_n = \sup\{\rho[T^i x, T^j x] : i,j \geqq n\},$$

i primenjujući na njega tvrdjenje teoreme I.1.4. dobijamo

$$\rho[T^i x, T^j x] \leqq \Delta_n \leqq \theta^n \max_{i=1,\dots,k}\{\Delta_i \theta^{-i}\}$$

$$\leqq \lambda\beta[\sigma(x,n)].$$

Odavde imamo za posledicu i tvrdjenje tačke (b). (c) Neka je tačka $x \in X$. Kako je

$$\beta[\sigma(x,1)] \leqq \beta[\sigma(x,2)] \leqq \dots$$

odavde sledi jednakost

$$\beta[\sigma(x,\infty)]=\sup\{\beta[\sigma(x,n)]:n\in N\}.$$

Neka je n pozitivan broj. Prema relaciji (b) egzistira $T^k x\in\sigma(x,n), k\leq n$ sa svojstvom $\rho[x,T^k x]=\beta[\sigma(x,n)]$. Sada je, prema nejednakosti trougla

$$\rho[x,T^k x]\leq\rho[x,Tx]+\rho[Tx,T^k x]$$

$$\leq\rho[x,Tx]+\lambda\beta[\sigma(x,n)]=\rho[x,Tx]+\lambda\rho[x,T^k x],$$

odakle je

$$\beta[\sigma(x,n)]=\rho[x,T^k x]=(1-\lambda)^{-1}\rho[x,Tx],$$

čime je tvrdjenje leme pokazano u potpunosti.

DOKAZ TEOREME .(a). Neka je x proizvoljna tačka iz prostora (X,ρ), i m,n (n<m) dva proizvoljna cela pozitivna broja. Koristeći pretpostavku da je preslikavanje T ψ-kontrakcija prema prethodnoj lemi je

$$\rho[T^n x,T^m x]=\rho[T(T^{n-1}x),T^{m-n+1}(T^{n-1}x)]\leq$$

$$\leq\lambda\beta[\sigma(T^{n-1}x,m-n+1)].$$

Prema tački (a) leme II.1.1. postoji ceo broj k_1, $n\leq k_1\leq n-m+1$ sa svojstvom

$$\rho[T^{n-1}x,T^{k_1}T^{n-1}x]=\beta[\sigma(T^{n-1}x,m-n+1)].$$

Kako je $T^{n-1}x=T(T^{n-2}x)$, $T^{k_1}(T^{n-1}x)=T^{k_1+1}(T^{n-2}x)$, to je

$$\rho[T^{n-1}x,T^{k_1}(T^{n-1}x)]=\lambda\beta[\sigma(T^{n-2}x,k_1+1)]$$

$$\leq\lambda\beta[\sigma T^{n-2}x,m-n+2)].$$

Prema tome:

$$\rho[T^n x, T^m x] = \lambda\beta[\sigma(T^{n-1}x, m-n+1)] \leqq$$

$$\leqq \lambda^2\beta[\sigma(T^{n-2}x, m-n+2)] \leqq \ldots\ldots$$

$$\leqq \lambda^n\beta[\sigma(x,m)]$$

Primenjujući sada tvrdjenje (c) leme III.1.1. dobija se da je

(1) $\rho[T^n x, T^m x] \leqq \lambda^n(1-\lambda)^{-1}\rho[x, Tx]$, $(n,m \in N)$,

odakle sleduje da je niz iteracije $(T^n x)$ Cauchy-ev. No sa druge strane prostor (X,ρ) je T-orbitalno kompletan, pa prema ovom ima graničnu vrednost $\xi \in X$. Dokažimo da je ξ fiksna tačka preslikavanja T. Kako je $\xi = \lim T^n x = \lim x_n = \lim Tx_{n-1}$. prema nejednakostima

(2) $$\rho[x_n, T\xi] = \rho[Tx_{n-1}, T\xi] \leqq$$

$$\leqq \psi(\rho[x_{n-1}, \xi], \rho[x_{n-1}, x_n], \rho[\xi, T\xi], \rho[x_{n-1}, T\xi], \rho[\xi, x_n])$$

i koristeći teoremu I.1.4. (lema III.1.1) sleduje da je ξ fiksna tačka preslikavanja $T:X \longrightarrow X$. Da je ξ jedinstvena fiksna tačka takodje sleduje na osnovu navedene teoreme I.1.4., jer ako je u neka druga postojana tačka sledi nejednakost

$$r = \rho[\xi, u] \leqq \psi(r,0,0,r,r) \leqq$$

$$\leqq \psi(r,r,r,r,r) \quad ,$$

odakle na osnovu teoreme I,1,4, sledi da je $r=0$ tj. $\xi=u$. Da važi i treće svojstvo Banach-ovih preslikavanja (brzina konvergencije) sledi iz nejednakosti (1) kada $m \longrightarrow \infty$. Ovim je teorema u potpunosti dokazana za slučaj (a).

(b) Ovaj deo dokaza izvešćemo uz pomoć teoreme I.1.6. Neka je za $n \in N$

$$\Delta_n=\sup\{\rho[T^i x,T^j x]:i,j\geq n\}.$$

Ovaj niz je u prostoru R_+ nerastući. No sa druge strane za $i,j\in N$ i $x\in X$ je prema uslovu generalisane ψ-kontrakcije

$$\rho[T^i x,T^j x]\leq\psi(\rho[T^{i-1}x,T^{j-1}x],\rho[T^{i-1}x,T^i x],\rho[T^{j-1}x,T^j x],$$
$$\rho[T^{i-1}x,T^j x],\rho[T^{j-1}x,T^i x]),$$

odakle je za $i,j\geq n$

$$\Delta_n\leq\psi(\Delta_{n-1},\Delta_{n-1},\Delta_{n-1},\Delta_{n-1},\Delta_{n-1}).$$

Primenjujući sada na niz (Δ_n) tvrdjenje teoreme I.1.6., odavde sledi da $\Delta_n\longrightarrow 0(n\longrightarrow\infty)$, što implicira da je niz $(T^n x)$ Cauchy-ev u X, i otuda zbog T-orbitalnosti $T^n x\longrightarrow\xi(n\longrightarrow\infty)$. Sa druge strane je

$$(3)\quad \rho[T\xi,T^{n+1}x]\leq\psi(\rho[\xi,T^n x],\rho[\xi,T\xi],\rho[T^n x,T^{n+1}x],\rho[\xi,T^{n+1}x],\rho[T^n x,T\xi])$$

odakle kada $n\longrightarrow\infty$ važi implikacija

$$r=\rho[T\xi,\xi]\leq\psi(r,r,r,r,r)\Longrightarrow r=0\quad(T\xi=\xi).$$

Da je ξ jedinstvena postojana tačka sledi prema nejednakosti (i važenju implikacije)

$$r=\rho[T\xi,Tu]\leq\psi(r,r,r,r,r)\Longrightarrow r=0\quad(\xi=u),$$

a i prema teoremi I.1.5.

Da ne važi geometrijska brzina konvergencije ka fiksnoj tački dovoljno je videti primer II.1.1.

NEKE NAPOMENE. Prethodni primer II.1.1. pokazuje da je naša teorema prava generalizacija ranijih rezultata.

Ovom teoremom ne samo da se opisuje jedna klasa dovoljnih uslova za egzistenciju Banach-ovih preslikavanja na prostoru (X,ρ) nego se ta klasa primene ove teoreme znatno proširuje. Ovde se iz klase rastućih (semihomogenih) preslikavanja može proizvoljno birati preslikavanje $\psi: (R_+^o)^5 \longrightarrow R_+^o$ i to u zavisnosti od tačke do tačke, a što takodje znatno proširuje oblast primene.

Često puta u funkcionalnoj analizi specijalno u teoriji diferencijalnih jednačina (Kolmogorov-Fomin [151], s.77-78) iz odredjenih osobina preslikavanja T^k $(k\in N)$ potrebno je znati nešto i o preslikavanju $T:X\longrightarrow X$, kao i obrnuto. Na ovo u našem radu odgovara sledeće tvrdjenje

TEOREMA II.1.2. Neka je T preslikavanje metričkog prostora X u samog sebe, gde je prostor (X,ρ) T-orbitalno kompletan. Ako postoji pozitivan ceo broj k sa svojstvom da je iteracija T^k ψ-kontrakcija, tada preslikavanje $T:X\longrightarrow X$ jeste BANACH-ovog tipa, sa sve tri osobine. Kada je T^k generalisana ψ-kontrakcija tada T takodje ima jedinstvenu fiksnu tačku.

DOKAZ. Kako $T^k:X\longrightarrow X$ prema teoremi III.1.1. ima jedinstvenu postojanu tačku $\xi\in X$ i kako je $T^k(T\xi)=T(T^k\xi)=T(\xi)$ sleduje da je i $T(\xi)=\xi$, tj. ξ je jedinstvena postojana tačka i preslikavanja T. No dokažimo sada i treću karakteristiku BANACH-ovog preslikavanja u tom cilju neka je n neki pozitivan broj, tada je $n=mk+j$ $(0\leq j<k, m\geq 0)$ i za sve $x\in X$ je $T^n x=(T^k)^m T^j x$. Kako je T^k ψ-kontrakcija, koristeći teoremu III.1.1, specijalno relaciju (1), dobija se da je

$$\rho[T^n x,\xi]=\rho[(T^k)^m T^j x,\xi]\leq\lambda^m(1-\lambda)^{-1}\rho[T^j x,T^k(T^j x)]$$

$$\leq\lambda^m(1-\lambda)^{-1}\max\{\rho[T^i x,T^k T^i x]: i=0,1,\dots,k-1\}$$

čime je teorema dokazana.

NAPOMENA. Ovde treba istaći u vezi sa ovim problemom da je u radu [12] D.ADAMOVIĆ dokazao sledeće tvrdjenje:

Neka je T preslikavanje proizvoljnog nepraznog skupa E u sebe sama i ako za neko $k\in N$, T^k (kao iteracija shvaćeno) ima jedinstvenu fiksnu tačku, tada preslikavanje $T:E\longrightarrow E$ takodje ima jedinstvenu postojanu tačku $\xi\in E$.

DVE LOKALIZACIONE TEOREME ZA ψ-KONTRAKCIJU

TEOREMA II.1.3. Neka je x_o proizvoljna tačka iz prostora (X,ρ) i neka je $S=S(x_o,r)=\{x\in X \mid \rho[x_o,x]\leq r\}$ i dalje $T:S\longrightarrow X$ neka je ψ-kontrakcija na S, gde je X T-orbitalno kompletan prostor i $\rho[x_o,Tx_o]\leq(1-\lambda)r$. Tada je preslikavanje T BANACH-avog tipa, sa sve tri osobine.

DOKAZ. Kako je $\lambda<1$ iz nejednakosti $\rho[x_o,Tx_o]\leq(1-\lambda)r<r$ sledi $x_1=Tx_o\in S$, pa primenom principa indukcije sleduje da je i niz $x_n=T^n x\in S$. Dokažimo to. Predpostavimo da je $x_o,x_1,\ldots,x_m\in S$. Tada pošto je T ψ-kontrakcija možemo iskoristiti relaciju (1) odakle za n=o i $x=x_o$ sleduje

$$\rho[x_o,T^m x_o]=\rho[x_o,x_{m+1}]\leq(1-\lambda)^{-1}\rho[x_o,Tx_o],$$

pa prema nejednakosti $\rho[x_o,Tx_o]\leq(1-\lambda)r$ odavde sleduje da je $\rho[x_o,x_{m+1}]\leq r$ tj. $x_{m+1}\in S$. Prema tome niz iteracija $\{T^n x_o \mid n\in N\}$ je sadržan u S. Koristeći sada ideje teoreme III. 1.1. i primenjujući odgovarajući postupak dobijamo da je niz iteracija CAUCHY-ev i prema tome zbog T-orbitalnosti on ima graničnu vrednost $\xi\in X$, koja je fiksna tačka preslikavanja T. No, skup S je zatvoren pa je tačka ξ i u skupu S, čime uz procenu brzine konvergencije koja sleduje iz (1) dokaz je kompletan.

DEFINICIJA II.1. Preslikavanje $T:X\longrightarrow X$, naziva se (ε,ψ)-lokalna kontrakcija ako postoji $\varepsilon>0$, tako da važi implikacija $\rho(x,y)<\varepsilon \Longrightarrow (c)$.

TEOREMA II.1.4. Neka je preslikavanje $T:X\longrightarrow X$ (ε,ψ)-lokalna kontrakcija na T-orbitalnom prostoru (X,ρ). Tada za proizvoljno $x\in X$ važi alternativa:

(a) Za s=0,1,... niz $\rho[T^s x,T^{s+1}x]<\varepsilon$ ili

(b) Niz $\{T^n x \mid n\in N\}$ konvergira fiksnoj tački preslikavanja T.

DOKAZ. Neka je $x\in X$ i konstruišimo niz

$$\rho[x,Tx], \rho[Tx,T^2x], \ldots, \rho[T^s x, T^{s+1}x], \ \ldots$$

za koji sada postoje dve mogućnosti: ako je

(3) $\quad$ za $s=0,1,\ldots, \rho[T^s x, T^{s+1}x] > \varepsilon$

alternativa (a) je ispunjena, pa neka je zato

(4) $\quad$ za neki ceo broj $s=s_o, \rho[T^{s_o}x, T^{s_o+1}x] < \varepsilon.$

Kako je preslikavanje T (ε,ψ)-lokalna kontrakcija i važi (4) to ponavljajući postupak korišćen u dokazu teoreme II.1.1. i korišćenjem leme II.1.1. sledi da je

$$\rho[T^{s_o+1}x, T^{s_o+2}x] \leqq \lambda\beta[\sigma(T^{s_o}x,1)] \leqq \lambda\varepsilon < \varepsilon.$$

Korišćenjem principa indukcije dobija se

$$\rho[T^{s_o+p}x, T^{s_o+p+1}x] \leqq \lambda^p \beta[\sigma(T^{s_o}x,1)] < \varepsilon$$

za $p=0,1,2,\ldots,$ pa prema lemi II.1.1. za $n>s_o$

(5) $$\rho[T^n x, T^{n+p}x] \leqq \lambda^{n-s_o}(1-\lambda)^{-1}\rho[T^{s_o}x, T^{s_o+1}x].$$

Otuda je niz $\{T^n x \mid n=0,1,\ldots\}$ Cauchy-ev i postoji tačka $\xi \in X$, $\xi = \lim\limits_n T^n x = \lim\limits_p T^{s+p}x$, za $s>n_o$. Otuda iz (5) je za $n>n_o$.

$$\rho[T^n x, \xi] \leqq \lambda^{n-s_o}(1-\lambda)^{-1}\rho[T^{s_o}x, T^{s_o+1}x]$$

što implicira nejednakost $\rho[T^n x, \xi] < \varepsilon$.

Iz nejednakosti

$$\rho[T\xi, T(T^n x)] \leqq \psi(\rho[\xi, T^n x], \rho[\xi, T\xi], \rho[T^n x, T^{n+1}x],$$
$$\rho[\xi, T^{n+1}x], \rho[T^n x, T\xi])$$

primenom teoreme I.1.4. sleduje da je ξ fiksna tačka preslikavanja T. Time je dokaz kompletan.

Kao specijalan slučaj teoreme II.1.4. možemo navesti sledeći interesantan rezultat.

PROPOZICIJA II.1.1. Neka je $T:X \longrightarrow X$ (ε,ψ)-lokalna kontrakcija na T-orbitalno kompletnom prostoru (X,ρ). Ako za proizvoljno $x\in X$ postoji ceo broj $n(x)$ sa svojstvom $\rho[T^{n(x)}x,T^{n(x)+1}x]<\varepsilon$, i ako su p i q dve fiksne tačke od T^n tako da je $\rho[p,q]<\varepsilon$, tada T ima tačno jednu fiksnu tačku i svi nizovi $\{T^n x|n\in N\}$ konvergiraju jedinstvenoj fiksnoj tački od T.

Inače M.Edelstein [84] je dokazao sličnu verziju lokalizovanog teorema ali za ε-lančaste metričke prostore.

TEOREMA E. Neka je T preslikavanje kompletnog ε-lančastog metričkog prostora (za proizvoljne $p,q\in X$ postoji konačan skup tačaka $p=x_0,x_1,\dots,q=x_n$ u X sa svojstvom

$\rho[x_{i-1},x_i]<\varepsilon (i=1,2,\dots,n)$) uz uslov

$$\rho[x,y]<\varepsilon \Longrightarrow \rho[Tx,Ty]\leq a\rho[x,y],\ a\in[0,1).$$

Tada T ima jedinstvenu fiksnu tačku.

II.2. NEKI REZULTATI O ψ I. GENERALISANOJ ψ-KONTRAKCIJI

II.2.1. OSLABLJENE ψ I GENERALISANA ψ-KONTRAKCIJA

U jednom našem ranijem radu [266] mi smo dokazali sledeće tvrdjenje.

TEOREMA II.2.1. Neka je (X,ρ) metrički prostor. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni:

(a) X je T-orbitalno kompletan prostor

(b) Ako je S neprazan, zatvoren podskup od X i $T:S\longrightarrow S$ ψ-kontrakcija tada preslikavanje T ima fiksnu tačku.

Tvrdjenje važi i kada je T generalisana ψ-kontrakcija. Jedan deo dokaza ovog tvrdjenja dat je u iskazu Teoreme III.1.1., a drugi deo oslanja se na jedan rezultat od HU-a [113], čiji rezultat ujedno i generalizujemo našim uslovom ψ-kontrakcije (generalisane ψ-kontrakcije).

Na ovaj način mi smo dali jednu karakterizaciju kompletnosti (T-orbitalne kompletnosti) metričkih prostora u terminima ψ-kontrakcija. Jasno je inače da kompletnost prostora X implicira T-orbitalnu kompletnost, dok obrnuto ne važi. Potvrdimo to sledećim primerom.

PRIMER II.2.1. Neka je $X=(0,1]$, a preslikavanja T ,$g:X\longrightarrow X$ zadajmo sa $T(x)=(x+1)/2$, $g(x)=x/2$. Tada je prostor X sa Euklidskim rastojanjem T-orbitalno kompletan, dok nije g-orbitalno kompletan, odnosno nije čak ni kompletan.

Sada dokazujemo neke teoreme koje izostavljaju (kao dovoljan uslov) kompletnost prostora, čak i T-orbitalnu kompletnost, ali sa ciljem da se ipak sačuvaju neki bitni zaključci Banach-ovog principa kontrakcije.

TEOREMA II.2.2. Neka je (X,ρ) metrički prostor i T preslikavanje prostora X u sebe samo sa osobinama:

(a) T je ψ-kontrakcija ili generalisana ψ-kontrakcija.

(b) T je neprekidno preslikavanje u tački $\xi\in X$.

(c) Postoji tačka $x\in X$ sa svojstvom da niz iteracija $(T^n x)$ ima podniz $(T^{n_i}x)$, koji konvergira ka tački ξ.

Tada je $\xi\in X$ jedinstvena postojana tačka preslikavanja T.

Uporedjujući ovu teoremu sa teoremom II.1.1. (kao i sa teoremom Banach-a) vidi se da smo izostavili kompletnost, odnosno T-orbitalnu kompletnost prostora X i umesto njih uveli smo predpostavke (b) i (c). Uslovi (b) i (c) ove teoreme čak i zajedno ne garantuju kompletnost odnosno T-orbitalnu kompletnost prostora. Ilustrujmo to sledećim primerom.

PRIMER II.2.2. Neka je prostor $X=[0,1)$ i preslikavanje $T:X\longrightarrow X$ definisano sa $Tx=x/2$, gde se rastojanje zadaje kao Euklidsko. Prostor X nije kompletan a za preslikavanje T važe osobine (b) i (c).

TEOREMA II.2.3. Neka je (X,ρ) metrički prostor i T neprekidno preslikavanje prostora X u samog sebe sa svojstvom:

(a) T je ψ-kontrakcija ili generalisana ψ-kontrakcija na skupu $M\subset X$ koji je svuda gust u prostoru X.

(b) Postoji tačka $x\in X$, tako da niz iteracija $(T^n x)$ ima podniz $(T^{n_i}x)$ koji konvergira tački $\xi\in X$.

Tada je $\xi\in X$ jedinstvena postojana tačka preslikavanja T.

Iz prethodnih razmatranja jasno je da ψ-kontrakcija i generalisana ψ-kontrakcija ne moraju i nisu obavezno neprekidna preslikavanja na metričkim prostorima. (vid.primer II.1.1.). Ali ova klasa preslikavanja poseduje jedno drugo svojstvo koje ćemo nazvati orbitalna neprekidnost (vid. Edelstein [85]). Naime preslikavanje T metričkog prostora X u samog sebe je orbitalno neprekidno ako i samo ako za $t \in X$ kada je $t = \lim_{i \to \infty} T^{n_i} x$ za neko $x \in X$, je onda i $Tt = \lim_{i \to \infty} T T^{n_i} x$.

Otuda možemo dati sledeće tvrdjenje.

TEOREMA II.2.4. Neka je preslikavanje $T: X \longrightarrow X$ ψ-kontrakcija ili generalisana ψ-kontrakcija na metričkom prostoru X. Ako je $\xi \in X$, sa svojstvom $\xi = \lim_{i \to \infty} T^{n_i}(x)$ za neko $x \in X$, tada je i $T\xi = \lim_{i \to \infty} T^{n_i+1}(x)$.

DOKAZI NAVEDENIH TVRDJENJA

DOKAZ TEOREME II.2.2. Kako je T neprekidno preslikavanje u tački $\xi \in X$, to znači onda da i $(T^{n_i+1}x)$ konvergira ka $T(\xi)$. Predpostavimo da je $\xi \neq T\xi$. Tada postoje disjunktne kugle $S_1 = S_1(\xi, r)$ i $S_2 = S_2(T\xi, r)$ sa centrima ξ i $T\xi$, a poluprečnika $r > 0$, pri čemu je još $r < 3^{-1} \rho[\xi, T\xi]$. Kako niz iteracija $(T^{n_i}x)$ konvergira tački ξ, a niz $(T^{n_i+1}x)$ konvergira ka $T\xi$, to će postojati prirodan broj No sa svojstvom da za sve $i > No$ je $T^{n_i}x \in S_1$ i $T^{n_i+1}x \in S_2$. Odavde mora biti da je i

$$(1) \qquad \rho[T^{n_i}(x), T^{n_i+1}(x)] > r \quad (i > No).$$

Sa druge strane, kako je preslikavanje T ψ-kontrakcija, iz nejednakosti za procenu $\rho[T^{n_i+1}x, T^{n_i+2}x]$ dobija se prema lemi III.1.1. za $e > j > No$

$$\begin{aligned} \rho[T^{n_e}x, T^{n_e+1}x] &\leq \lambda\beta[\sigma(x, n_e+1)] \\ &\leq \lambda^{n_j}\beta[\sigma(x, n_e+n_j)] \\ &\leq \lambda^{n_e-n_j}(1-\lambda)^{-1}\rho[x, Tx]. \end{aligned}$$

Sada odavde kada $e \longrightarrow \infty$, sobzirom da izraz na desnoj strani teži 0, dobija se kontradiktoran rezultat u odnosu na (1), tj. $\rho[T^{n_e}x, T^{n_e+1}x] < r$ za dovoljno veliko e. Prema tome u ovom slučaju je $T\xi = \xi$. Da je ξ jedinstvena fiksna tačka sledi kao i u teoremi II.1.1.

DOKAZ TEOREME II.2.3. U ovom slučaju dovoljno je pokazati da je preslikavanje $T:X \longrightarrow X$ ψ-kontrakcija (generalisana ψ-kontrakcija) za svako $x,y \in X$. I ta situacija bi se onda svodila na prethodnu teoremu II.2.2., pa bi ovo tvrdjenje sledilo direktno kao njena posledica. U tom cilju neka su prvo $x \in M, y \in X \setminus M$ i neka je niz (z_n) iz skupa M, ali takav da $z_n \longrightarrow y\,(n \longrightarrow \infty)$. Kako je preslikavanje $\psi:(R_+^o)^5 \longrightarrow R_+^o$ rastuće u slučaju (generalisane) ψ-kontrakcije to će biti tačna i nejednakost $(n \longrightarrow \infty)$

$$\rho[Tx,Ty] \leq \psi\,(\rho[x,y],\rho[x,Tx],\rho[y,Ty],\rho[x,Ty],\rho[y,Tx])$$

kao i nejednakost $(n \longrightarrow \infty)$

$$\rho[Tx,Ty] \leq A\max\{\rho[x,y],\rho[x,Tx],\rho[y,Ty],\rho[x,Ty],\rho[y,Tx]\}$$

kada je $\psi:(R_+^o)^5 \longrightarrow R_+^o$ sa osobinom $M(\max)$; a

na osnovu nejednakosti

$$\rho[Tx,Ty] \leq \rho[Tx,Tz_n]+\rho[Tz_n,Ty] \leq \rho[Tz_n,Ty]+$$
$$+\psi(\rho[x,z_n],\rho[x,Tx],\rho[z_n,Tz_n],\rho[x,Tz_n]\rho[z_n,Tx]).$$

Na isti način se postupa (zbog simetrije) i kada je $y \in M$ a $x \in X \setminus M$. Ostaje još slučaj kada su $x,y \in X \setminus M$. Isto se postupa kao u prethodnom slučaju i primenjuje teorema II.2.2.

DOKAZ TEOREME II.2.4. Neka su $\xi, x \in X$ sa svojstvom $\xi=\lim\limits_{i \to \infty} T^{n_i}x$. Konstruišimo dalje niz $(T^n x)$ koji sadrži (uključuje) i niz $(T^{n_i}x)$ kao podniz. Kako je T ψ-kontrakcija (generalizovana ψ-kontrakcija) sledi da je niz $(T^n x)$ Cauchy-ev. Dokaz bi tekao isto kao i u delu dokaza teoreme II.1.1. Prema tome, niz $(T^n x)$ je Cauchy-ev i sadrži podniz (T^{n_i}) sa svojstvom $\xi=\lim\limits_{i \to \infty} T^{n_i}x$, odakle sledi da je i $\xi=\lim\limits_{n \to \infty} T^n x$. Tada, prema nejednakostima (2) i (3) iz dela dokaza teoreme II.1.1. sledi $\lim \rho[T\xi,TT^n x]=0$, tj. $T\xi=\lim\limits_{n \to \infty} T^{n+1}x$, što implicira i nejednakost $T\xi=\lim\limits_{i \to \infty} T^{n_i+1}x$. Ovim je dokaz završen.

II.2.2. VIŠEZNAČNA ψ-KONTRAKTIVNA PRESLIKAVANJA

U radu [185] S.NADLER je prvi proširio Banach-ov princip kontrakcije na višeznačna preslikavanja. Ostajući pri terminologiji i oznakama NADLER-a nastavićemo sa nekim uvodnim pojmovima. Neka je (X,ρ) metrički prostor, tada neka je:

(a) $CL(X)=\{A:A$ je neprazan, zatvoren podskup od $X\}$

(b) $BN(X)=\{A:A$ je neprazan i ograničen podskup od $X\}$

(c) $N(A,\varepsilon)=\{x\in X:\rho[x,a]<\varepsilon$ za neko $a\in A,\varepsilon>0\}$

(d) $D(A,B)=\inf\{\rho[x,y]:x\in A,y\in B\}$

(e) $H(A,B)=\inf\{\varepsilon>0:A\subset N(B,\varepsilon),\ B\subset N(A,\varepsilon)\}$

(f) $\beta(A,B)=\sup\{\rho[x,y]:x\in A,\ y\in B\}$

(g) $\delta(A,B)=\operatorname{diam}(A\cup B)$.

Odavde je jasno da u opštem slučaju H, β i δ mogu biti i beskonačni, ali na skupu $BN(X)$ oni su konačni. Funkcija H je metrika na $CL(X)\cap BN(X)$ i naziva se HAUSDORFF-ova metrika. Nekad je (efikasnije, za ovu metriku upotrebljavati jednakost $H(A,B)=\max\{\sup\{D(x,B):x\in A\},\sup\{D(A,y):y\in B\}\}$. Višeznačno preslikavanje $F:X\longrightarrow CL(X)$ naziva se višeznačna kontrakcija (pri ovom preslikavanju) ako postoji fiksiran pozitivan broj $q<1$ sa svojstvom $H(Fx,Fy)=q\rho[x,y]$, za sve $x,y\in X$. S.NADLER je u radu [185] dokazao da ako je (X,ρ) kompletan prostor, tada višeznačna kontrakcija F ima fiksnu tačku $\xi\in X$ u smislu da je $\xi\in F\xi$. L. DUBE i S.SING su u radu [77] proširili rezultat R.Kannan-a [135] na višeznačna preslikavanja koja su neprekidna i za svako $x,y\in X$ i neko $q\in[0,1/2)$ ispunjavaju uslov $H(Fx,Fy)\leq q\{D(x,Fx)+D(y,Fy)\}$. S.REICH [209] i LJ.ĆIRIĆ [58] su takodje proširivali ove rezultate na višeznačna preslikavanja za neke šire klase preslikavanja. U našem magistarskom radu [263] mi smo dokazali izvesna tvrdjenja o višeznačnim preslikavanjima. U ovom poglavlju cilj nam je da poboljšamo i proširimo ove rezultate, proširujući istovremeno i Banach-ov princip kontrakcije na višeznačna ψ-kontraktivna preslikavanja, generalizujući neke rezultate S.NADLER-a [185] i gore navedenih autora.

Za preslikavanje $F:X\longrightarrow CL(X)$ kažemo da je višeznačna ψ-kontrakcija ako i samo ako za sve $x,y\in X$ je

(1) $H(Fx,Fy)\leq\psi(\rho[x,y],D(x,Fx),D(y,Fy),D(x,Fy),D(y,Fx))$,

gde je preslikavanje $\psi:(R_+^o)^5\longrightarrow R_+^o$ sa osobinom M(max) i $A=\lambda\in[0,1)$.

Sa druge strane orbita višeznačnog preslikavanja $F:X\longrightarrow X$ u tački $x_o\in X$ neka je niz $\{(x_n):x_n\in Fx_{n-1}\}$. Za prostor (X,ρ) kazaćemo da je F-orbitalno kompletan ako i samo ako svi CAUCHY-evi nizovi prethodnog oblika konvergiraju u prostoru X. Inače sada je ovde jasno da ako je prostor X kompletan onda je i F-orbitalno kompletan za svaku višeznačnu funkciju $F:X\longrightarrow X$, dok obrnuto ne važi. Ova definicija je samo jedna mala modifikacija definicije T-orbitalnosti za jednoznačna preslikavanja prostora.

TEOREMA II.2.2.1. Neka je $F:X\longrightarrow CL(X)$ višeznačna ψ-kontrakcija na prostoru (X,ρ), koji je F-orbitalno kompletan, tada:

(a) Za proizvoljnu tačku $x_o\in X$ postoji na orbiti $\{x_n\}$ tačka $\xi\in X$, tako da je $\lim x_n=\xi$. Tačka ξ je fiksna tačka preslikavanja F i

(b) $\rho[x_n,\xi]\leq(\lambda^{1-a})^n(1-\lambda^{1-a})^{-1}\rho[x_o,x_1]$, $a\in(0,1)$.

Navedimo neke posledice ovog tvrdjenja.

POSLEDICA II.2.2.1. (S.Reich [209], s.5.) Neka je X kompletan metrički prostor i neka višeznačno preslikavanje $F:X\longrightarrow CL(X)$ ispunjava uslov

$$H(Fx,Fy)\leq aD(x,Fx)+bD(y,Fy)+c\rho[x,y],$$

gde su $a,b,c\geq 0$ i $a+b+c\in[0,1)$, tada preslikavanje F ima fiksnu tačku.

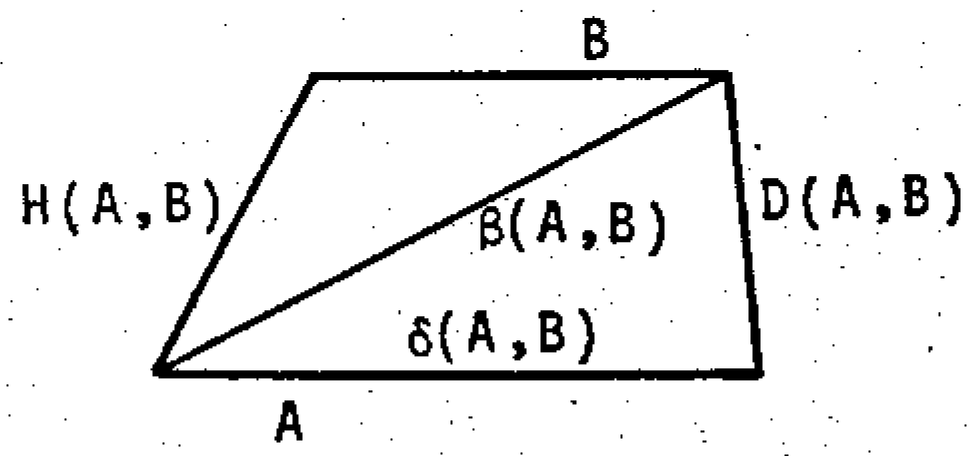
POSLEDICA II.2.2.2. (LJ.ĆIRIĆ [58], s.268). Neka je $F:X \longrightarrow CL(X)$ višeznačno preslikavanje na prostoru (X,ρ), koji je F orbitalno kompletan i neka za svako $x,y \in X$ postoji $q \in (0,1)$ tako da je

$$H(Fx,Fy) \leq q\max\{\rho[x,y],D(x,Fx),D(y,Fy),2^{-1}(D(x,Fy)+D(y,Fx))\}$$

tada preslikavanje F ima fiksnu tačku $\xi \in X$.

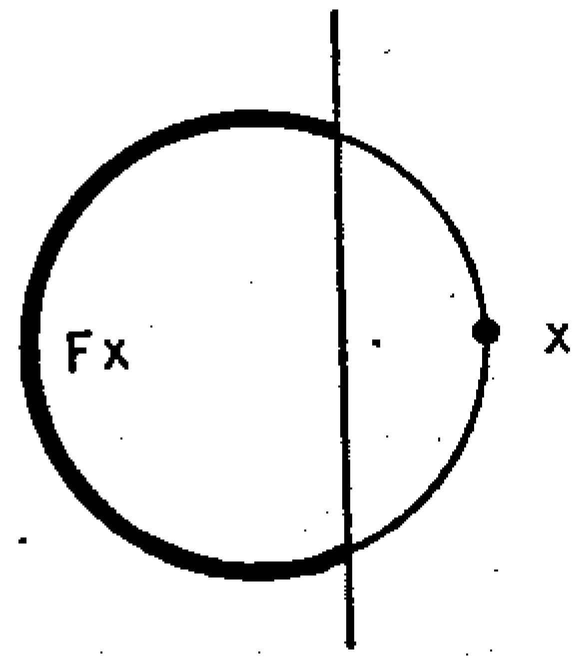
Sada dalje možemo dokazati neke teoreme fiksne tačke za višeznačna preslikavanja, znajući da važi relacija $D(A,B) \leq H(A,B) \leq \beta(A,B) \leq \delta(A,B)$. Inače kada je $A=\{a\}$, tada je $H(A,B)=\beta(a,B)$. Konstruišimo jedan primer za gornju ilustraciju.

PRIMER II.2.2.1. Neka je $X=R$, a skupovi A,B neka su definisani sa $A=\{(x,o):0 \leq x \leq 4\}$ i $B=\{(x,1):0 \leq x \leq 2\}$, tada je $D(A,B)=1$, $H(A,B)=\sqrt{2}$, $\beta(A,B)=\sqrt{10}$, $\delta(A,B)=4$; što se inače geometrijski može ilustrovati sa sledećom slikom.



Sa druge strane treba napomenuti da kada bi se umesto procene za $H(Fx,Fy)$ procenjivao izraz $D(Fx,Fy)$ desnom stranom nejednakosti (1) i sličnim varijacijama procena, to ne bi bili dovoljni uslovi za egzistenciju fiksnih tačaka preslikavanja $F: X \longrightarrow CL(X)$, čak i u slučaju kada bi prostor X bio kompaktan. Sledeći primer je takva jedna ilustracija.

PRIMER II.2.2.2. Neka je $X=\{x=(x_1,x_2):x_1^2+x_2^2=1\} \subset R^2$ sa uobičajenom metrikom, a preslikavanje F neka je zadato sa $F(x)=\{y \in X:\rho[x,y]=1\}$. Tada je $D(Fx,Fy)=0$, $H(Fx,Fy) \leq 1$, $H(x,Fy) \geq \sqrt{3}$ za sve $x,y \in X$. Odavde je jasno da će nejednakost (procena) za $D(Fx,Fy)$ biti ispunjena, mada preslikavanje F nema fiksne tačke. Geometrijski:



Otuda je od interesa sledeći rezultat.

TEOREMA II.2.2.2. Neka na metričkom prostoru (X,ρ) višeznačno preslikavanje $F:X\longrightarrow BN(X)$ ima sledeće svojstvo: za sve $x,y\in X$ je

$$(2)\quad \beta(Fx,Fy)\leq\psi(\rho[x,y],\beta(x,Fx),\beta(y,Fy),D(x,Fy),D(y,Fx))$$

gde je preslikavanje $\psi:(R^o_+)^5 \longrightarrow R^o_+$ sa osobinom M(max) i $A=\lambda\in[0,1)$. Ako je prostor X F-orbitalno kompletan, tada je preslikavanje F Banach-ovog tipa pri čemu je za fiksnu tačku $\xi\in X, F\xi=\{\xi\}$. Ako se uslov (2) zameni sa uslovom

$$\delta(Fx,Fy)=\psi(\rho[x,y],H(x,Fx),H(y,Fy),D(x,Fy),D(y,Fx))$$

tada tvrdjenje takodje važi.

DOKAZI NAVEDENIH TVRDJENJA

DOKAZ TEOREME II.2.2.1. Neka je tačka $x_o\in X$ proizvoljno zadata i $x_1\in Fx_o$, tada je $H(Fx_o,Fx_1)>0$, jer bi iz suprotnog sledilo da je $Fx_o=Fx_1$, i odatle bi sledilo $x_1\in Fx_1$, tj. x_1 bi bila fiksna tačka preslikavanja F. Neka je dalje $a\in(0,1)$. Sada je $H(Fx_o,Fx_1)<\lambda^{-a}H(Fx_o,Fx_1)$, odakle je $x_1\in Fx_o$; a sa druge strane po definiciji za H postoji $x_2\in Fx_1$ sa svojstvom

$$\rho[x_1,x_2]\leq\lambda^{-a}H(Fx_o,Fy_1).$$

Neka je $H(Fx_1,Fx_2)>0$. Kako je $H(Fx_1,Fx_2)<\lambda^{-a}H(Fx_1,Fx_2)$ i $x_2\in Fx_1$, onda postoji i $x_3\in Fx_2$ sa svojstvom da je

$$\rho[x_2,x_3]\leq\lambda^{-a}H(Fx_1,Fx_2).$$

Nastavljajući sada ovaj postupak dobijamo niz (x_n) za koji je

$x_{n+1}\in Fx_n$ i $\rho[x_n,x_{n+1}]\leqq\lambda^{-a}H(Fx_{n-1},Fx_n)$, $n\in N$. Pokazaćemo da je ovako konstruisan niz i CAUCHY-EV. Kako je preslikavanje $F:X\longrightarrow CL(X)$ višeznačna ψ-kontrakcija i $D(x,B)\leqq\rho[x,y]$ za sve $y\in B\subset X$, dobija se

$$\rho[x_n,x_{n+1}]\leqq\lambda^{-a}H(Fx_{n-1},Fx_n)\leqq\psi\big(\rho[x_{n-1},x_n],D(x_{n-1},Fx_{n-1}),$$
$$D(x_n,Fx_n),D(x_{n-1},Fx_n),D(x_n,Fx_{n-1})\big)\leqq\lambda^{1-a}\max\{[x_{n-1},x_n],$$
$$\rho[x_{n-1},x_n],\rho[x_n,x_{n+1}],\rho[x_{n-1},x_{n+1}],0\}$$

Kako je $\lambda^{1-a}<1$, odavde sledi da je

(3) $\rho[x_n,x_{n+1}]\leqq\lambda^{1-a}\rho[x_{n-1},x_n]$, $n\in N$,

što dalje uz korišćenje relacije trougla daje nejednakost

(4) $$\rho[x_n,x_{n+s}]\leqq\Sigma_{i=1}^{s}\rho[x_{n+i-1},x_{n+i}]\leqq$$
$$\leqq\Sigma_{i=1}^{s}(\lambda^{1-a})^{n+i-1}\rho[x_0,x_1]\leqq$$
$$\leqq(\lambda^{1-a})^n(1-\lambda^{1-a})^{-1}\rho[x_0,x_1].$$

Iz ove nejednakosti neposredno sleduje da je niz (x_n) Canchy-ev. Kako je i $x_{n+1}\in Fx_n$ $(n\in N)$ i (X,ρ) F-orbitalno kompletan prostor, znači da postoji neka tačka $\xi\in X$ sa svojstvom $\xi=\lim x_n$, čime je tvrdjenje tačke (a) dokazano. Dokazaćemo dalje i drugi deo tvrdjenja. Kako je

$$D(\xi,F\xi)\leqq\rho[\xi,x_n+1]+D(x_{n+1},F\xi)\leqq$$
$$\leqq\rho[\xi,x_{n+1}]+H(Fx_n,F\xi)\leqq\rho[\xi,x_{n+1}]+$$
$$+\psi(\rho[x_n,\xi],D(x_n,Fx_n),D(\xi,F\xi),D(x_n,F\xi),D(\xi,x_{n+1}))\,,$$

odakle kada $n\longrightarrow\infty$ sledi da je $D(\xi,F\ )=0$, a prema tome $\xi\in F\xi$ tj. $\xi\in X$ je fiksna tačka preslikavanja F. Treba još dokazati relaciju (C), no ona direktno sleduje iz (4) kada $s\longrightarrow\infty$. Ovim je dokaz završen.

DOKAZ TEOREME II.2.2.2. Neka je $a\in(0,1)$ i konstruišimo jednoznačno preslikavanje $T:X\longrightarrow X$ sa osobinom: za proizvoljno $x\in X$ neka je Tx tačka iz Fx, za koju je

$$\rho[x,Tx]\geq\lambda^{a}\delta(x,Fx),\lambda\in(0,1). \tag{5}$$

Sada je za $x,y\in X$ i prema lemi II.1.1.

$$\begin{aligned}\rho[Tx,Ty]&\leq\delta(Fx,Fy)\leq\\&\leq\psi(\rho[x,y],\delta(x,Fx),\delta(y,Fy),D(x,Fy,D(y,Fx))\\&\leq\lambda^{1-a}\max\{\rho[x,y],\rho[x,Tx],\rho[y,Ty],\rho[x,Ty],\rho[y,Tx]\}.\end{aligned}$$

Primenom dokazane teoreme II.1.1.(a) odavde sledi da je preslikavanje $T:X\longrightarrow X$ BANACH-ovog tipa tj. postoji tačka $\xi\in X$ tako da je $\xi=T\xi$, što s obzirom na prethodne činjenice, implicira da je $\xi\in F\xi$. Sa druge strane zbog $\xi\in F\xi$ je

$$\delta(F\xi,F\xi)\leq\psi(0,\delta(\xi,F\xi),\delta(\xi,F\xi),0,0)\leq\lambda\delta(\xi,F\xi),$$

odakle (zbog nejednakosti (5) sledi da je $F\xi=\xi$, tj. kada je ξ fiksna tačka preslikavanja T ona je fiksna tačka i preslikavanja F. Kako je za $x\in X$ niz iteracija $(T^{n}x)$ na orbiti F od x, otuda primenom teoreme II.1.1.(a) sleduje naše tvrdjenje.

II.2.3. REŠAVANJE NELINEARNIH FUNKCIONALNIH JEDNAČINA

U ovom poglavlju izložićemo neke primene dobijenih rezultata dela II. Slično smo postupali u magistarskom radu, ali za jednu užu klasu preslikavanja. Specijalno ovde ćemo primeniti stav II.1.1. na rešavanje nelinearnih funkcionalnih jednačina oblika $Tx=Ax$, na kompletnom metričkom prostoru (X,ρ), metodom sukcesivnih aproksimacija u formi $Ax_{n+1}=Tx_n$ ($x_0\in X$; $n=0,1,\ldots$), pri čemu su T i A nelinearni operatori prostora X.

TEOREMA II.2.3.1. Neka je (X,ρ) kompletan metrički prostor i $A,T:X \longrightarrow X$ nelinearni operatori sa svojstvima (1): za svako $x,y\in X$ je $\rho[Ax,Ay]\geq a\rho[x,y]$, $a\in R+$ i

$$\rho[Tx,Ty]\leq a\psi(\rho[x,y],\rho[x,A^{-1}Tx],\rho[y,A^{-1}Ty],\rho[x,A^{-1}Ty],\rho[y,A^{-1}Tx])$$

gde je preslikavanje ψ: $(R_+^o)^5 \longrightarrow R_+^o$ sa osobinom M(max) i $A=\lambda\in[0,1)$ ili rastuće sa osobinama $(\forall t\in R+)$ $\psi(t,t,t,t,t)<t$ i $\limsup\limits_{z\to t+0}\psi(z,z,z,z,z)<t$ $(t\in R+)$. Tada jednačina $T(x)=A(x)$ ima jedinstveno rešenje u prostoru (X,ρ), koje je i granična vrednost niza (x_n) definisanog sa $A(x_{n+1})=T(x_n)$, $n\in N$.

DOKAZ. Prema predpostavkama teoreme dobija se da egzistira preslikavanje $A^{-1}:X \longrightarrow X$, koje zadovoljava nejednakost

$$\rho[A^{-1}x,A^{-1}y]=a^{-1}\rho[x,y],\quad (x,y\in X).$$

Sada uz uslov (1) za preslikavanje A^{-1} je

$$\rho[A^{-1}Tx,A^{-1}Ty]\leq a^{-1}\rho[Tx,Ty],\leq\psi(\rho[x,y],\rho[x,A^{-1}Tx],$$

$$\rho[y,A^{-1}Ty],\rho[x,A^{-1}Ty],\rho[y,A^{-1}Tx]).$$

za sve tačke $x,y\in X$. Kako odavde, preslikavanje $A^{-1}T$ zadovoljava predpostavke teoreme II.1.1., uzimajući jednu proizvoljnu tačku $x\in X$ i niz

(2) $x_o=x, x_1=A^{-1}Tx_o, \ldots\ldots, x_{n+1}=A^{-1}Tx_n, \ldots\ldots;$

i primenjujući onda teoremu II.1.1. sledi da niz (2) konvergira ka fiksnoj tački preslikavanja $A^{-1}T:X\longrightarrow X$. Prema tome, $A^{-1}T\xi=\xi$, odakle je $T\xi=A\xi$, a što je i trebalo pokazati.

NAPOMENA. 1) Primenjujući Banachov stav fiksne tačke CHATTERJEA [47] je dokazao odgovarajući stav za nelinearne funkcionalne jednačine predhodnog oblika. Otuda je i naša prethodna ideja.

2) Prilikom mog boravka na Cherles University u Pragu januara 1978.god. sa profesorom S.FUČIK-om rešavan je problem nelinearne funkcionalne jednačine $Tx=Ax$, sa ciljem da se izostavi pretpostavka: za $x,y\in X$

$$\rho[Ax,Ay]\geq a\rho[x,y] \qquad (a\in R_+).$$

Ti rezultati biće publikovani u jednom zajedničkom radu, u časopisu COMM .MATH.UNIVERSITATIS CAROLINAE, PRAGENSIS.

III. BANACH-OVA PRESLIKAVANJA NA RAZNIM PROSTORNIM STRUKTURAMA

III.1. NEKA KONTRAKTIVNA PRESLIKAVANJA U METRIČKIM I TOPOLOŠKIM PROSTORIMA.

III.2. JEDNA KLASA BANACH-OVIH PRESLIKAVANJA U LOKALNO KONVEKSNIM PROSTORIMA.

III.3. REFLEKSIVAN BANACH-OV PROSTOR I NEKI REZULTATI FIKSNE TAČKE.

U prvom koraku smo na metričkim i topološkim prostorima proučavali jednu klasu kontraktivnih preslikavanja koju smo nazvali generalisana kontrakcija. Dalje, prethodne rezultate prenosimo u ovom poglavlju na refleksivne prostore. Uvodimo i osobinu B_k koja se zajedno sa pojmom normalne strukture (koju je uveo KIRK) pokazuje vrlo korisnom, i praktičnom, u ovom pravcu teorije. Radovi koje su dali GÖHDE, GOEBEL, BROWDER, KIRK i KANNAN bili su nam polazna tačka u prethodnom pravcu. I na lokalno konveksnim prostorima dajemo neke dovoljne uslove za egzistenciju fiksnih tačaka. Ovo ima posebnog interesa s obzirom na osobenost strukture lokalno konveksnih prostora.

III. NEKA KONTRAKTIVNA PRESLIKAVANJA U METRIČKIM I TOPOLOŠKIM PROSTORIMA

III.1.1. GENERALISANA KONTRAKCIJA

U prvom delu ovog poglavlja proučićemo jednu klasu kontraktivnih preslikavanja T što preslikavaju metrički prostor (X,ρ) u sebe sama, a nisu i obavezno neprekidna. Ona zadovoljavaju sledeći uslov: za svako $x,y\in X$ postoje realni brojevi $\alpha_i(x,y)=\alpha_i (i=1,2,3,4), \beta(x,y)=\beta$ koji zadovoljavaju sledeće nejednakosti: $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3>\beta$ i

$$\beta-\alpha_2\geqq 0,\ \sup(\beta-\alpha_2)(\alpha_1+\alpha_3)^{-1}=q_1\in[0,1),$$

ili

$$\beta-\alpha_3\geqq 0,\ \sup(\beta-\alpha_3)(\alpha_1+\alpha_2)^{-1}=q_2\in[0,1),$$

i nejednakost:

$$\text{(A)}\quad \alpha_1\rho[Tx,Ty]+\alpha_2\rho[x,Tx]+\alpha_3\rho[y,Ty]+\alpha_4\min\{\rho[x,Ty],\rho[y,Tx]\}\leqq\beta\rho[x,y]$$

Preslikavanja koja imaju ovo svojstvo zvaćemo generalisana kontrakcija.

Ovo je klasa preslikavanja koja je opštija od svih dosada proučavanih (navedenih u poglavlju II.1, sem ψ-kontraktivnih), kao i od jedne klase preslikavanja koju je proučavao A. IVANOV [129].

Ovo će kasnije biti potkrepljeno i odgovarajućim primerom. Inače, prethodni uslov generalisane kontrakcije konstruisan je na osnovu jedne logičke formule iskazanog računa. Naime, važe sledeće ekvivalencije:

$$((\forall x)A(x)\Longrightarrow B)\Longleftrightarrow(\exists x)(A(x)\Longrightarrow B),$$

$$((\exists x)A(x)\Longrightarrow B)\Longleftrightarrow(\forall x)(A(x)\Longrightarrow B),$$

gde su $A(x)$, B neki iskazi, i iskaz B ne zavisi od x. Interesantno je da se onda koristeći ove logičke formule može na drugi način intempretirati i BANACH-ov uslov kontrakcije. U tom smislu neka je (X,ρ) kompletan metrički prostor i $T:X \longrightarrow X$. Tada je

$$\Big(((\exists\alpha\in[0,1))(\forall x,y\in X)\,\rho[Tx,Ty]\leq\alpha\rho[x,y])\Rightarrow(\exists\xi\in X)\,T\xi=\xi\Big)\Longleftrightarrow$$

$$\Big(\,((\forall\alpha\in[0,1))(\exists x,y\in X)(\rho[Tx,Ty]\leq\alpha\rho[x,y]\Rightarrow(\exists\xi\in X)\,T\xi=\xi)\,\Big)$$

TEOREMA III.1.1. Neka je T preslikavanje T-orbitalnog kompletnog metričkog prostora (X,ρ) u samog sebe. Ako je preslikavanje T generalisana kontrakcija na X, tada za proizvoljno $x\in X$, niz iteracija $(T^n x)$ konverira ka fiksnoj tački preslikavanja T.

DOKAZ. Neka je $x\in X$ proizvoljno. Pokažimo da je niz iteracija

(1) $\qquad x_0=x,\ x_n=T(x_{n-1});\ n=1,2,\ldots;$

Cauchy-ev niz. Kako jednakost $x_{k-1}=x_k\ (k\in N)$ odmah inicira da je niz (x_n) Cauchy-ev, to pretpostavimo da je $x_{n-1}\neq x_n$, za $n\in N$. Prema (1) za $x=x_{n-1}$ i $y=x_n$ mi imamo nejednakost

$$\alpha_1\rho[x_n,x_{n+1}]+\alpha_2\rho[x_{n-1},x_n]+\alpha_3\rho[x_n,x_{n+1}]+$$

$$+\alpha_4\min\{0,\rho[x_{n-1},x_{n+1}]\}\leq\beta\rho[x_{n-1},x_n],$$

koja je ekvivalentna sa nejednakošću

$$\rho[x_n,x_{n+1}]\leq q_1\rho[x_{n-1},x_n],$$

Odavde se dobija red nejednakosti

$$\rho[x_n,x_{n+1}]\leq q_1\rho[x_{n-1},x_n]\leq\ldots\leq q_1^n\rho[x,Tx].$$

Sa druge strane za proizvoljno $s\in N$ je

$$\rho[x_n,x_{n+s}]\leq\sum_{i=1}^{n+s-1}\rho[x_i,x_{i+1}]\leq q_1^n(1-q_1)^{-1}\rho[x,Tx].$$

Odavde sledi da je niz (x_n) Cauchy-ev, pa pošto je prostor X T-orbitalno kompletan postoji tačka $\xi=\lim T^n x$. Dokažimo da je $\xi=T\xi$. Za $x=T^n x$ i $y=\xi$ iz (A) sledi

$$\alpha_1\rho[T^{n+1}x,T\xi]+\alpha_2\rho[T^n x,T^{n+1}x]+\alpha_3\rho[\xi,T\xi]+$$
$$+\alpha_4\min\{\rho[T^n n,T\xi],\rho[T^{n+1}x,\xi]\}\leq\beta\rho[T^n x,\xi]$$

Odavde kada $n\longrightarrow\infty$ sledi da je $\rho[\xi,T\xi]=0$ tj. $T\xi=\xi$, a što je i trebalo dokazati. Ovaj dokaz izveden pod uslovom $\beta-\alpha_2\geq 0$ ($\Longrightarrow \alpha_1+\alpha_3>0$). No korišćenjem osobine simetrije za rastojanje na isti način sledi dokaz i kada je $\beta-\alpha_3\geq 0$ ($\Longrightarrow\alpha_1+\alpha_2>0$).

POSLEDICA III.1.1.(A.IVANOV, [129], s.V.284.) Neka je (X,ρ) kompletan metrički prostor i preslikavanje $T:X\longrightarrow X$ neka zadovoljava sledeće nejednakosti

$$a\rho[x,y]+b\rho[Tx,Ty]+c\{\rho[x,Tx]+\rho[y,Ty]\}+d\{\rho[x,Ty]+\rho[y,Tx]\}\geq 0$$

$$a+b+2c<\min\{0,-2d\},\ b+c+d<0.$$

Tada preslikavanje T ima nepokretnu tačku $\xi\in X$, koja je jedinstvena kada je i $a+b+2d<0$.

DOKAZ. Specifikacijom odgovarajućih parametara i stavljajući $a=\beta$, $b=-\alpha_1$, $c=-\alpha_2=-\alpha_3$ i $d=-\alpha_4$, neposredno se vidi da je ispunjen i naš uslov generalisane konstrukcije. Da obrnuto ne važi poslužiće sledeći primer.

Pre navodjenja sledeće posledice, kažimo da preslikavanje $T:X\longrightarrow X$ nazivamo arbitalno neprekidnim ako za proizvoljno $x\in X$ važi implikacija

$$\lim_{i\to\infty} T^{n_i}x=u\Longrightarrow\lim_{i\to\infty}T(T^{n_i}x)=Tu.$$

Sada smo u mogućnosti da navedemo sledeću posledicu naše teoreme.

POSLEDICA III.1.2. (LJ.ĆIRIĆ [61], s.53). Neka je $T:X \longrightarrow X$ orbitalno neprekidno preslikavanje, gde je X T-orbitalno kompletan prostor. Ako T zadovoljava uslov: postoji $q \in [0,1)$ tako da za $x,y \in X$ je

$$\min\{\rho[Tx,Ty],\rho[x,Tx],\rho[y,Ty]\}-\min\{\rho[x,Ty],\rho[y,Tx]\} \leq q\rho[x,y],$$

tada preslikavanje T ima fiksnu tačku u X.

DOKAZ. Neposredno se specifikacijom parametara u uslovu (A) dobija ova posledica.

Dokažimo da je naša teorema prava generalizacija ova dva tvrdjenja. U tom cilju konstruišimo odgovarajući primer.

PRIMER. III.1.1. Neka je $X=[0,1)$, i definišimo preslikavanje $T:X \longrightarrow X$ sa $Tx=0 \, (0 \leq x \leq 10/11)$, $Tx=10x/11 \, (10/11<x \leq 1)$, sa uobičajenom Euklidskom metrikom na X. Tada preslikavanje T zadovoljava uslov (A) za generelisanu kontrakciju teoreme III.1.1. sa $\alpha_1=-1$; $\alpha_2=0$, $\alpha_3=2$ ili $\alpha_2=2, \alpha_3=0$; $\beta=2/3$ i $\alpha_4<0$. Kako je prostor X kompletan pa onda i T-orbitalno kompletan, to je onda teorema III.1.1. primenljiva i $\xi=0$ je fiksna tačka ovog preslikavanja na osnovu toga. No, sa druge strane uslovi posledica III.1.1. i III.1.2 nisu ispunjeni već za tačke $x=10/11$ i $y=1$. Dokažimo to. Sada je za ove tačke

$$\min\{\rho[Tx,Ty],\rho[x,Tx],\rho[y,Ty]\}-\min\{\rho[x,Ty],\rho[y,Tx]\}=$$

$$=\min\{10/11,10/11,1/11\}-\min\{0,1\} = \frac{1}{11} > q/11 = q\rho(x,y)$$

i otuda uslovi teoreme LJ.ĆIRIĆ-a nisu ispunjeni.

Sa druge strane i uslovi teoreme A.IVANOV-a takodje nisu ispunjeni za tačke $x=10/11, y=1$:

$a+10(b+c)+c+11d \geq 0$ i za

$d \leq 0$: $a+b+2c<0 \Longleftrightarrow a+c<-(b+c) \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow a+10(b+c)+c+11d=a+c+10(b+c)+11d$$
$$<-(b+c)+10(b+c)+11d$$
$$=9(b+c+d)+2d<0+0=0.$$

$$d>0:\ a+b+2c<-2d \Longleftrightarrow a+c<-(b+c)-2d \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow a+10(b+c)+c+11d <-(b+c)-2d+10(b+c)+11d$$
$$= 9(b+c)+9d$$
$$= 9(b+c+d)<0.$$

Ove kontradikcije potvrdjuju našu tvrdnju.

Prema tome, možemo tvrditi da je naša teorema prava generalizacija gornjih rezultata, kao i rezultata navedenih u poglavlju III.1., koji su posledice i ψ- kontraktivnosti. Napomenimo još da se u posledici III.1.2. zahteva još i neprekidnost (orbitalna) dok u našoj teoremi takvog zahteva nema. Inače da se pokaže da je uslov generalisane kontrakcije opštiji od onih navedenih u poglavlju II.1. dovoljno je uzeti primer III.1.1. Ovo je proveravanje lako izvršiti. Mi smo to i pokazali u radu [269].

TEOREMA III.1.2. Neka je preslikavanje $T:X\longrightarrow X$ orbitalno neprekidno na metričkom prostoru (X,ρ) sa osobinom

$$(B)\ \alpha_1\rho[Tx,Ty]+\alpha_2\rho[x,Tx]+\alpha_3\rho[y,Ty]+\alpha_4\min\{\rho[x,Ty],\rho[y,Tx]\}<\beta\rho[x,y],$$

gde je $x \neq y$ i $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \geq \beta$ i $\beta-\alpha_2>0 \vee \beta-\alpha_3>0$ (α_i,β su realne konstante. Ako za neko $x_0 \in X$ niz $(T^n x_0)$ ima tačku nagomilavanja $u \in X$, tada je tačka u fiksna tačka preslikavanja T.

DOKAZ. Ako je $T^{r-1}x_0=T^r x$. Za neko $r\in N$, tada je $T^n x_0= =T^r x_0= u$ za sve $n \geq r$ i otuda je tvrdjenje tačno. Neka je zato $T^{r-1}x_0 \neq T^r x_0$ za sve $r \in N$, i neka je $\lim T^{n_i}u = u$. Tada za $T^{n-1}x_0$, $T^n x_0 \in X$, prema (B) je

$$\alpha_1\rho[T^n x_0,T^{n+1}x_0]+\alpha_2\rho[T^{n-1}x_0 T^n x_0]+\alpha_3\rho[T^n x_0,T^{n+1}x_0]+$$
$$+\alpha_4\min\{0,\rho[T^{n-1}x_0,T^{n+1}x_0]\}<\beta\rho[T^{n-1}x_0,T^n x_0]$$

odakle se dobija

$$\rho[T^n x_0,T^{n+1}x_0]<(\beta-\alpha_2)(\alpha_1+\alpha_3)^{-1}\rho[T^{n-1}x_0,T^n x_0] \leq \rho[T^{n-1}x_0,T^n x_0]$$

tj.

$$\rho[T^n x_o, T^{n+1}x_o] < \rho[T^{n-1}x_o, T^n x_o].$$

Prema tome, niz $(\rho[T^n x_o, T^{n+1}x_o])$ je opadajući niz nenegativnih realnih brojeva, i otuda konvergentan. Kako je

$$\lim \rho[T^{n_i} x_o, T^{n_i+1} x_o] = \rho[\xi, T\xi]$$

$$\{\rho[T^{n_i} x_o, T^{n_i+1} x_o]\} \subseteq \{\rho[T^n x_o, T^{n+1} x_o]\}$$

dobija se

(2) $$\lim_n \rho[T^n x_o, T^{n+1} x_o] = \rho[\xi, T\xi].$$

Kako je $\lim T^{n_i+1} x_o = T\xi$, $\lim T^{n_i+2} x_o = T^2 u$ i

$$\{\rho[T^{n_i+1} x_o, T^{n_i+2} x_o]\} \subseteq \{\rho[T^n x_o, T^{n+1} x_o]\}$$

prema (2) dobijamo

(3) $$\rho[T\xi, T^2\xi] = \rho[\xi, T\xi].$$

Pod pretpostavkom da je $\rho[\xi, T\xi] > 0$ prema (B) je i $\rho[T\xi, T^2\xi] < \rho[\xi, T\xi]$, a što je kontradiktorno sa (3). Otuda $\rho[T\xi, \xi] = 0$, tj. $\xi = T\xi$.

Na isti način dokaz bi bio izveden u slučaju kada je $\beta - \alpha_3 > 0 \Leftrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 > 0)$. Prema tome dokaz je kompletan.

NAPOMENA. Prethodni rezultat važi i na proizvoljnom topološkom prostoru X, uz izvesne modifikacije. No na topološkom Hausdorff-ovom prostoru imamo i opštije rezultate.

III.1.2. DVE TEOREME FIKSNE TAČKE NA TOPOLOŠKIM PROSTORIMA

TEOREMA.III.1.3. Neka je X HAUSDORFF-ov topološki prostor i T-orbitalno neprekidno preslikavanje prostora X u samog sebe, i neka je preslikavanje $A:X\times X \longrightarrow [0,+\infty)$, $A(t,t)=0$, neprekidno sa svojstvom

(C) $\alpha_1 A(Tx,Ty)+\alpha_2 A(x,Tx)+\alpha_3 A(y,Ty)+\alpha_4 \min\{A(x,Ty),A(y,Tx)\}<\beta A(x,y)$

gde je $x\neq y$, i $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \geq \beta$ i $\beta-\alpha_2>0 \vee \beta-\alpha_3>0$ (α_i,β su realne konstante). Ako za neko $x_0 \in X$ niz iteracija $(T^n x_0)$ ima konvergentan podniz, tada preslikavanje T ima fiksnu tačku.

JEDNA NAPOMENA. Ovaj rezultat se može još više proširiti i uopštiti u sledećem slučaju. Umesto preslikavanja $A:X\times X \longrightarrow [0,+\infty)$ može se uzeti preslikavanje $A:X\times X \longrightarrow (E,\leq)$, gde je E parcijalno uredjen skup, a neprekidnost indukovana uredjajnom topologijom na E. Odgovarajući stav uz još neke modifikacije potpuno bi se isto dokazivao, uz još napomenu da bi skup E za konvergenciju monotonih nizova trebalo da bude uredjen slično kao u teoremi I.2.2.

DOKAZ TEOREME III.1.3. Neka je definisan niz iteracija (x_n) sa (1). Sada je za $x_{n-1}\neq x_n$ kao i u teoremi III.1.2.

$$A(T^n x_0,T^{n+1}x_0)<(\beta-\alpha_2)(\alpha_1+\alpha_3)^{-1}A(T^{n-1}x_0,T^n x_0)\leq A(T^{n-1}x_0,T^n x_0)$$

odakle je za $n=1,2,\ldots$

$$A(x_n,x_{n+1})<A(x_{n-1},x_n)<\ldots\ldots<A(x_0,x_1).$$

Prema tome niz $(A(x_n,x_{n+1}))$ je opadajući niz nenegativnih realnih brojeva, i prema tome je konvergentan. Neka konvergira broju r. Neka je dalje, prema pretpostavci $u=\lim x_{n_k}$, $u \in X$, $x_{n_k}=T^{n_k}x_0$. Dokažimo da je $u=Tu$. Pretpostavimo suprotno, $z_{n+1}=Tz_n$, $z_0=u$ $(n=0,1,2,\ldots)$. Sada je prema (C):

(4) $A(z_n,z_{n+1})<A(z_{n},z_n)<\ldots.<A(z_0,z_1)=A(u,Tu)$.

Kako su T i A neprekidna preslikavanja dobijamo:

$$(5)\quad A(u,Tu)=A\left(\lim x_{n_k},T\lim x_{n_k}\right)=A(\lim x_{n_k},\lim x_{n_{k+1}})$$

$$=\lim A(x_{n_k},x_{n_{k+1}})=r$$

$$=\lim A(x_{n_{k+n}},x_{n_{k+n+1}})=A(z_n,z_{n+1})$$

Otuda mi imamo kontradikciju prema (4) i (5) i u je onda fiksna tačka za preslikavanje T.

Uz isti postupak dokazivanja i uz isto rezonovanje u mogućnosti smo da pokažemo i jedan opštiji rezultat.

TEOREMA III.1.4. Neka su T_1 i T_2 orbitalno neprekidna preslikavanja HAUSDORFF-ovog topološkog prostora X u samog sebe, i neka je preslikavanje $A:X\times X\longrightarrow[0,+\infty)$, $A(t,t)=0$, neprekidno sa svojstvom

$$\alpha_1A(T_1x,T_2y)+\alpha_2A(x,T_1x)+\alpha_3A(y,T_2y)+\alpha_4\min\{A(x,T_2y),A(y,T_1x)\}<\beta A(x,y)$$

gde je $x\neq y$, $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\geq\beta$ i $\beta-\alpha_2>0\vee\beta-\alpha_3>0$ (α_i,β su realne konstante). Ako za neko $x_0\in X$, niz (x_n), definisan sa $x_{2n+1}=T_1x_{2n}$, $x_{2n+2}=T_2x_{2n+1}$, $n=0,1,2,\ldots$, ima konvergentan podniz, tada preslikavanja T_1 i T_2 imaju zajedničku fiksnu tačku u prostoru X.

Jasno odavde kada je $T_1=T_2=T$ uz ostale modifikacije sledi prethodno tvrdjenje.

III.2. JEDNA KLASA BANACH-ovih PRESLIKAVANJA U LOKALNO KONVEKSNIM PROSTORIMA

Neka je X normiran prostor. Za skup K iz normiranog prostora X kaže se da je konveksan ako ima svojstvo da za svaki par tačaka $x,y\in K$ pravolinijski put $\omega(I)\subset K$, gde je I putanja $K(z,r)\subset X$. Kako kugle čine bazu topologije u X, vidimo da normirani vektorski prostori imaju važno svojstvo da poseduju bazu topologije sastavljenu od samih konveksnih skupova. Topološki vektorski prostori sa ovim svojstvom zovu se lokalno konveksni prostori i predstavljaju danas okvir u kojem se izučava i obradjuje savremena matematička analiza. Otuda, izmedju ostalog, i naši razlozi da se pozabavimo izučavanjima BANACH-ovih preslikavanja i u lokalno konveksnim prostorima. Posebno kada se ima u vidu činjenica da teorija nepokretne tačke predstavlja snažno sredstvo u teoriji diferencijalnih jednačina, koja se sada specijalno obradjuje u lokalno konveksnim prostorima. Inače, s obzirom da se lokalno konveksni prostori mogu ekvivalentno okarakterisati seminormama (što je vrlo operativno) mi ćemo tu činjenicu iskoristiti, i naši iskazi biće u tim terminima. No, napomenimo da ovde sve potiče od SCHAUDER-a [231] i TIHONOV-a [272] koji je na lokalno konveksne prostore preneo tvrdjenje Schauder-a. Poznato je puno generalizacije ovih stavova (Milionščik-ov [179], G.Marinescu i A. Deleanu [71], B.Stanković i O. Hadžić [115]).

Za nas je specijalno zanimljiva teorema W.W. TAYLOR-a [275]. On je dokazao da ako je K kompaktan zvezdasti podskup separiranog lokalno konvesnog topološkog vektorskog prostora i preslikavanje $T:K\longrightarrow K$ sa svojstvom $\Pi(Tx-Ty)\leq\Pi(x-y)$ za sve $x,y\in K$ i proizvoljnu seminormu Π, tada preslikavanje T ima fiksnu tačku u K.

Naš cilj je da dokažemo neke teoreme fiksne tačke prvo za jednu širu klasu preslikavanja, a drugo da pokažemo da uslov $T:K\longrightarrow K$ u radu [275] može biti oslabljen sa $T:K\longrightarrow E$ i $T(\mathrm{Cl}K)\subseteq K$, gde ClK označava granicu skupa K.

Inače, napomenimo da se ovde pod zvezdastim skupom A od E podrazumeva da za skup A postoji tačka $\eta\in S$ sa svojstvom

$(1-\lambda)\eta+\lambda y\in A$ za svako $y\in A$ i svako $\lambda\in[0,1)$. Element η zove se centar zvezde A.

TEOREMA. III.2.1. Neka je E separirani lokalno konveksni topološki vektorski prostor, K kompaktan podskup od E i $\mathfrak{P}$ familija seminormi koja generiše topologiju prostora E, a preslikavanje $T:K\longrightarrow E$ za neko $\Pi\in\mathfrak{P}$ i $x,y\in K$ ima svojstvo

(1) $\Pi(Tx-Ty)<\min\{\Pi(x-y),\Pi(x-Tx),\Pi(y-Ty)\}$, $\min\neq 0$,

$\Pi(Tx-Ty)=0$ kada je $\min = 0$,

gde je $T(\mathrm{Cl}K)\subseteq K$. Tada postoji tačka $t\in K$ sa svojstvom $T(t)\in K$ i $\Pi(t-Tt)=0$. Ako je preslikavanje T neprekidno i uslov (1) važi za sve $\Pi\in\mathfrak{P}$, tada preslikavanje T ima jedinstvenu fiksnu tačku.

Sledeće tvrdjenje direktno generalizuje teoremu W.W. TAYLOR-a [275].

TEOREMA. III.2.2. Neka je E separirani lokalno konveksni topološki vektorski prostor, K kompaktan zvezdasti podskup od E i $\mathfrak{P}$ familija seminormi koja generiše topologiju prostora E, a preslikavanje $T:K\longrightarrow E$ za neko $\Pi\in\mathfrak{P}$ i $x,y\in K$ ima svojstvo

$$\Pi(Tx-Ty)\leq\min\{\Pi(x-y),\Pi(x-Tx),\Pi(y-Ty)\}.$$

Ako je $T(\mathrm{Cl}K)\subseteq K$ i T neprekidno preslikavanje, tada ono ima fiksnu tačku u K.

Navedimo dalje neke posledice (pored teoreme W.W. TAYLOR-a [275]) naših tvrdjenja.

POSLEDICA. 2.1. Neka je K kompaktan podskup normiranog linearnog prostora X i neka preslikavanje $T:K\longrightarrow X$ ispunjava za $x,y\in K$ uslov

$$\|Tx-Ty\|<\min\{\|x-y\|,\|x-Tx\|,\|y-Ty\|\},\ x\neq y \text{ i } T(\mathrm{Cl}K)\subseteq K,$$

tada preslikavanje T ima jedinstvenu fiksnu tačku u K.

POSLEDICA.2.2.(W.W.TAYLOR [275]). Neka je K kompaktan zvezdasti podskup od prostora E (E ima značenje kao u teoremi III.2.2.) i neka je $T:K \longrightarrow K$ sa svojstvom $\Pi(Tx-Ty) \leq \Pi(x-y)$ za neko $\Pi \in \mathfrak{P}$. Tada preslikavanje T ima fiksnu tačku u skupu K.

POSLEDICA.2.3.(W.DOTSON [76]). Neka je K kompaktan zvezdasti podskup normiranog linearnog prostora X, i preslikavanje $T:K \longrightarrow X$ za sva $x,y \in K$ ispunjava uslov $\|Tx-Ty\| \leq \|x-y\|$, gde je $T(\mathrm{Cl}K) \subset K$. Tada preslikavanje T ima fiksnu tačku.

DOKAZ TEOREME. III.2.1. Stavimo da je $\Delta(x)=\Pi(x-Tx)$. Onda je Δ preslikavanje skupa K u skup R_+, i pritom neprekidno. Pošto je skup K kompaktan (po pretpostavci) to onda postoji tačka $\xi \in K$ sa svojstvom $\Delta(\xi)=\min\{\Delta(x) \mid x \in K\}$. Ako je $T(\xi) \in K$ onda je $\Pi(\xi-T(\xi))=0$, inače je tada

$$\Delta(T\xi)=\Pi(T\xi-T(T\xi))<\min\{\Pi(\xi-T\xi),\Pi(\xi-T\xi),\Pi(T\xi-T(T\xi))\}$$
$$=\min\{\Delta(\xi),\Delta(\xi),\Delta(T\xi)\}=\Delta(\xi)$$

a što je kontradikcija sa činjenicom da je $\Delta(\xi)$ minimum. I u ovom slučaju onda za $\xi=t, \Pi(t-Tt)=0$, pa tvrdjenje važi. Pre nego što razmotrimo slučaj kada je $T(\xi) \notin K$ dokažimo jedno pomoćno tvrdjenje (verovatno poznato).

PROPOZICIJA.III.2.1. Neka je E separirani lokalno konveksni topološki vektorski prostor i K zatvoreni podskup od E. Ako je $x \in K$ i $y \notin K$, tada postoji broj $\lambda \in [0,1)$ sa svojstvom $(1-\lambda)x+\lambda y=z \in \mathrm{Cl}K$. Ako je $x \notin \mathrm{Cl}K$ tada je $\lambda \in (0,1)$.

DOKAZ. Neka je $A=\{\beta \geq 0 \mid (1-\alpha)x+\alpha y \in K,\ 0 \leq \alpha \leq \beta\}$ Kako je $x \in K$ biće skup A neprazan. Sa druge strane uslov $y \notin K$ implicira da je $\lambda=\sup\{\beta \mid \beta \in A\} \leq 1$. Kako je skup K zatvoren sledi da je $z=(1-\lambda)x+\lambda y \in K$ i otuda $\lambda<1$. Da bi dokazali da je $z \in \mathrm{Cl}K$, izaberimo $\gamma>\lambda$ sa svojstvom $(\gamma-\lambda)\Pi(x-y)<1$. Prema definiciji za λ, postojaće $\delta, \lambda<\delta \leq \gamma$ sa svojstvom $z_1=(1-\delta)x+\delta y \notin K$. Kako je $\Pi(z-z_1)=$ $=(\gamma-\lambda)\Pi(x-y)<1$ za $z_1 \in U+z$ gde je ovde kolekcija U baza prostora E. Ovo implicira da je tačka $z \in \mathrm{Cl}K$. Ako je $x \in K$ onda $x \notin \mathrm{Cl}K$ implicira da je $\lambda>o$, čime je dokaz propozicije završen.

Sada nastavljamo sa dokazom teoreme i u tom cilju neka je slučaj $T(\xi)\notin K$.

Ako je $T(\xi)\notin K$, po pretpostavci sledi da je i $\xi\notin ClK$. Otuda, primenjujući prethodnu propoziciju III.1.1., postojaće broj $\lambda\in(0,1)$ sa svojstvom da je $t=(1-\lambda)\xi+\lambda T(\xi)\in ClK$. Ovo znači da je $\Pi(\xi-t)=0$. Inače, pretpostavka $\Pi(\xi-t)\neq 0$, daje

$$\begin{aligned}\Delta(t)=\Pi(t-T(t)) &\leq \Pi(t-T\xi)+\Pi(T\xi-Tt)\\ &<\Pi(t-T\xi)+\min\{\Pi(\xi-t),\ \Pi(\xi-T\xi),\ \Pi(t-Tt)\}\\ &=(1-\lambda)\Pi(\xi-T\xi)+\min\{\lambda\Pi(\xi-T\xi),\Pi(\xi-T\xi),\ \Pi(t-Tt)\}\\ &=(1-\lambda)\Pi(\xi-T\xi)+\lambda\Pi(\xi-T\xi)=\Delta(\xi),\end{aligned}$$

a što je kontradikcija sa činjenicom da je $\Delta(\xi)$ minimum. Otuda $\Pi(\xi-t)=0$. Kako je $\Pi(\xi-t)=\lambda\Delta(\xi)$ i $\Pi(T(\xi)-t)=(1-\lambda)\Delta(\xi)$ sledi da je $\Pi(\xi-T\xi)=0$, $\Pi(T\xi-t)=0$ i sa druge strane $\Pi(t-Tt)\leq\Pi(t-T\xi)+\Pi(T\xi-Tt)=0$. Ovim smo dokazali prvi deo teoreme. Neka je dalje preslikavanje T neprekidno i neka za $\Pi\in\mathcal{F}$, $K(\Pi)=\{(x,Tx)\in K\times K\,|\,\Pi(x-Tx)=0\}$. Ovako definisani skup $K(\Pi)\neq\phi$ za neko $\Pi\in\mathcal{F}$, prema prethodno dokazanoj činjenici. No, preslikavanje T je neprekidno pa je skup $K(\Pi)$ zatvoren, a familija $\{K(\Pi)\,|\,\Pi\in\mathcal{F}\}$ ima svojstvo konačnog presecanja odakle za svaki konačan skup $\{\Pi_1,\ldots,\Pi_n\}\subseteq\mathcal{F}$, $\Pi=\Pi_1+\ldots+\Pi_n\in\mathcal{F}$ i $K(\Pi)\subseteq\bigcap_{i=1,\ldots,n}K(\Pi_i)$. Otuda sledi da postoji $t\in K$ sa svojstvom $(t,Tt)\in\bigcap\{K(\Pi)\,|\,\Pi\in\mathcal{F}\}$, a ovo implicira da je $\Pi(t-Tt)=0$ za svako $\Pi\in\mathcal{F}$. Pošto je prostor E separiran, imamo $T(t)=t$. Neka je $s\in K$ i $T(s)=s$. Za neko $\Pi\in\mathcal{F}$ ako je $\Pi(t-s)>0$, tada je $\Pi(t-s)=\Pi(Tt-Ts)<\min\{\Pi(t-s),0,0\}=0$, a što je kontradikcija. Prema tome $\Pi(t-s)=0$ za sve $\Pi\in\mathcal{F}$ i otuda $t=s$.

DOKAZ TEOREME III.2.2. Neka je η centar zvezde od skupa K i (α_n) niz realnih brojeva sa svojstvima $0\leq\alpha_n<1$ gde $\alpha_n\longrightarrow 1\,(n\to\infty)$. Za proizvoljan ceo broj n definišimo preslikavanje $T_n:K\longrightarrow E$ sa $T_n(x)\overset{def.}{=\!=}(1-\alpha_n)\eta+\alpha_n T(x)$. Sada je za $x\in ClK$, $Tx\in K$ i onda $T_n(ClK)\subseteq K$. Takodje za neko $\Pi\in\mathcal{F}$ i $x,y\in K$ je

$$\Pi(T_nx-T_ny)=\alpha_n\Pi(Tx-Ty)\leq\alpha_n\min\{\Pi(x-y),\Pi(x-Tx),\Pi(y-Ty)\}.$$

Primenjujući, sada ovde Teoremu III.2.1. sledi da za neko $n\in Z$

(=celi brojevi) postoji $x_n \in K$ sa svojstvom $T_n(x_n)=x_n$. Kako je K kompaktan skup sledi da niz $x_k \longrightarrow \xi \ K \in (k \in I \subseteq Z)$, pa otuda i niz $\alpha_k \longrightarrow 1 (k \in I)$. Kako je T neprekidno preslikavanje iz jednakosti $x_n - T(x_n) = (1-\alpha_n)(\eta - T(x_n))$ sledi da je $T\xi = \xi$, a što je i trebalo dokazati.

III.3. REFLEKSIVAN BANACH-OV PROSTOR I NEKI REZULTATI FIKSNE TAČKE

U ovom delu rada pokazaćemo neke teoreme fiksne tačke na refleksivnim BANACH-ovim prostorima za klasu operatora koju smo nazvali ψ_{RBS}-kontrakcija. U tom cilju neka je X refleksivan BANACH-ov prostor i K neprazan, ograničen, zatvoren i konveksan podskup iz X.

PRESLIKAVANJE $T:K \longrightarrow K$ zvaćemo ψ_{RBS}-kontrakcija ako i samo ako za svako $x,y\in K$ važi nejednakost

$$\|Tx-Ty\| \leq \psi(\|x-y\|,\|x-Tx\|,\|y-Ty\|,\|x-Ty\|,\|y-Tx\|) \quad ,$$

pri čemu funkcija $\psi:(R_+^o)^5 \longrightarrow R_+^o \overset{def}{=\!=} [0,1)$ ima osobinu M(max) sa $A=\lambda\in[0,1]$.

Specijalno, u prvom koraku ovog dela rada neka tvrdjenja formulisaćemo i dokazati za metričke prostore odnosno normirane prostore, i te rezultate iskoristiti za dobijanje drugih na Banach-ovim (refleksivnim) prostorima. U tom smislu, ako preslikavanje T preslikava metrički prostor (X,ρ) u samog sebe i za svako $x,y\in X$ je tačna nejednakost

$$\rho[Tx,Ty] \leq \psi(\rho[x,y],\rho[x,Tx],\rho[y,Ty],\rho[x,Ty],\rho[y,Tx])$$

pri čemu funkcija $\psi:(R_+^o)^5 \longrightarrow R_+^o$ ima osobinu M(max) sa konstantom $A=\lambda\in[0,1]$, kazaćemo da je preslikavanje T ψ_{MS}-kontrakcija na X.

DEFINICIJA III.3.1.([146],s.1004.) Ograničen i konveksan skup K u Banach-ovom prostoru X kažemo da ima normalnu strukturu ako za svaki konveksan podskup S iz K koji sadrži više od jedne tačke postoji $x\in S$ takvo da je $\sup\limits_{y\in S}\|x-y\|<\delta(S)$. Ovde je $\delta(S)$ dijametar skupa.

U svom radu [146] KIRK je dokazao sledeću teoremu:

Ako je T neekspanzivno preslikavanja K u samog sebe tj. $\|Tx-Ty\| \leq \|x-y\|$, $x,y\in K$ i ako K ima normalnu strukturu, tada T ima nepokretnu tačku u K.

Ovaj rezultat bio je takodje dokazan u uniformno konveksnim prostorima od BROWDER [27], GÖHDE [106] i GOEBEL [103]. U ovom slučaju refleksivnost prostora i normalna struktura na K postaju posledice uniformne konveksnosti.

DEFINICIJA III.3.2. (vid. [137], s.170). Ako je T preslikavanje K u samog sebe takvo da za svako $x\in K$ je

(1) $$\lim \delta[\sigma(T^n x,\infty)]<\delta[\sigma(x,\infty)],\ \delta[\sigma(x,\infty)]>0.$$

Tada kažemo da T ima umanjene orbitalne dijametre kroz K.

Inače, preslikavanje T ima umanjene kružne dijametre na metričkom prostoru X, ako je za svako $x\in X$ u važnosti (1).

DEFINICIJA III.3.3. Preslikavanje T ograničenog podskupa K iz BANACH-ovog prostora X u samog sebe kažemo da ima osobinu B_k na K ako za svaki zatvoreni konveksni podskup F iz K, koji je preslikan u samog sebe sa T i koji sadrži više od jednog elementa postoje $x\in F$ i $k\in N$ tako da je $\|x-T^k x\|<\sup\limits_{y\in F}\|y-T^k y\|$.

Za preslikavanje $T: X \longrightarrow X$, gde je (X,ρ) metrički prostor, kazaćemo da ima osobinu B_k na skupu $G\subset X$ ako za svaki zatvoreni podskup F iz G koji sadrži više od jednog elementa i preslikava se u samog sebe sa T postoje $x\in F$ i $k\in N$ takvi da je $\rho[x,T^k x]<\sup\limits_{y\in F}\rho[y,T^k y]$.

Sada ćemo u prvom koraku ovog poglavlja rafinirati i povezati pojmove normalne strukture, umanjenih orbitalnih dijametara i našeg novo uvedenog pojma B_k na K i X.

Navedimo sada i dokažimo nekoliko naših tvrdjenja u ovom pravcu.

TEOREMA III.3.1. Neka je X metrički prostor i neka je T preslikavanje prostora X u samog sebe, ψ_{MS}- kontrakcija na X. Tada ako T ima umanjene kružne dijametre na X, onda T poseduje i osobinu B_k na prostoru X.

Ovde je zanimljivo pitanje da li (u izvesnom smislu obrt) kada je preslikavanje T ψ_{MS}- kontraktivno sa osobinom B_k, ima umanjene kružne dijametre. Odgovor na ovo pitanje zasad nemamo.

TEOREMA. III.3.2. Neka je K ograničen konveksan podskup BANACH-ovog prostora X i neka se K preslikava u samog sebe sa T, pri čemu je T ψ_{MS}- kontrakcija na K. Tada ako K ima normalnu strukturu, T ima osobinu B_k na K.

Konstruišimo sada jedan primer koji pokazuje da obratove teoreme ne važi.

PRIMER.III.3.1. Neka je na prostoru ℓ_2 norma uvedena sa $\|x\|=\max\{\|x\|_{\ell_2}/\sqrt{2}, \|x\|_{\ell_\infty}\}$, (vid. [232], s.95.). Prostor ℓ_2 nema normalnu strukturu, kao ni skup $K \subset \ell_2$, $K=\{x=(\xi_i): \xi_i \geq 0, \|x\|_{\ell_2} \leq 1\}$ Skup K je inače ograničen i konveksan podskup u prostoru ℓ_2. Medjutim, operator $T: K \longrightarrow K$ definisan sa $Tx=x/3, x \in K$ je takav da zadovoljava osobinu ψ_{MS}- kontraktivnosti za $x,y \in K$, i za svaki zatvoreni podskup A od K, koji je preslikan u samog sebi sa T i sadrži više od jednog elementa, postoje $x \in A$ i $k \in N$ tako da je $\|x-T^k x\| < \sup_{y \in A} \|y-T^k y\|$.

TEOREMA III.3.3. Neka je T neprekidno preslikavanje kompaktnog metričkog prostora (X,ρ) u samog sebi i neka je preslikavanje T ψ_{MS}- kontraktivno sa osobinom B_k na X. Tada T ima jedinstvenu nepokretnu tačku u X.

Napomenimo, da se pretpostavka o neprekidnosti preslikavanja T može u ovom slučaju izostaviti i zameniti sa: T je takvo preslikavanje, da za neki neprazan podskup F iz X koji se preslikava u samog sebe sa T bude $F' \subset (TF)'$.

DOKAZI NAVEDENIH TEOREMA

DOKAZ TEOREME III.3.1. Neka je F zatvoren podskup skupa X, koji se preslikava u samog sebe preko preslikavanja T i neka F još sadrži više od jednog elementa. Neka je dalje za svaki element $x \in F$ $\rho[x,T^k x]=\sup_{y \in F} \rho[y,T^k y]=C$. Broj C očigledno nije nula, jer kada je $C=0$, tada skup F sadrži više od jedne nepokretne tačke za T, što je inače nemoguće. Sa druge strane za $x\in F$ važi nejednakost

$$\rho[x_r,x_s]\leq\psi(\rho[x_{r-1},x_{s-1}],\rho[x_{r-1},x_r],\rho[x_{s-1},x_s],$$

$$\rho[x_{r-1},x_s],\quad \rho[x_{s-1},x_r]),$$

odakle je primenom leme II.1.1. $\rho[x_r,x_s]\leq C$, za $r,s\geq 1$. Otuda za $r\geq 1$ je $\delta[\mathcal{O}(x_r,\infty)]=\delta(x_r,x_{r+1},\ldots)=C$. Ovo je posledica činjenica da je $\rho[x_r,x_s]\leq C$ i $\rho[x_r,x_{r+1}]\leq C$. Prema tome, sada je $Tx\in F$ i preslikavanje T onda nema smanjene kružne dijametre. Ova kontradikcija dokazuje gornja tvrdjenja.

DOKAZ TEOREME III.3.2. Pretpostavimo da tvrdjenje teoreme nije tačno. U tom slučaju postoji zatvoren konveksan podskup F iz K koji sadrži više od jednog elementa i koji se preslikava u samog sebe sa T i takav da za svaki element $x\in F$ je

$$(2)\qquad \|x-T^kx\|=\sup_{y\in F}\|y-T^ky\|=C\ (\neq 0).$$

Uočimo dalje skup T(F). Ovaj skup ima više od jednog elementa, jer kada bi imao samo jedan element, taj element bi bio nepokretna tačka preslikavanja T i otuda $\|y-T^ky\|=0$, a što je u kontradikciji sa jednakošću (2). Otuda skup T(F) sadrži više od jednog elementa. Neka je $S=\mathrm{Conv}[T(F)]$ tj. konveksan omotač od T(F) i neka su $x,y\in S$. Tada postoje tri mogućnosti za tačke ovog skupa:
1) $x=Tx',y=Ty'\ (x',y'\in F)$, 2) $x=Tx',y=\Sigma\alpha_iTy'\ (x',y'\in F,\Sigma\alpha_i=1)$,
3) $x=\Sigma\alpha_iTx'_i,y=\Sigma\beta_iTy'_i\ (x'_i,y'_i\in F,\Sigma\alpha_i=\Sigma\beta_i=1)$. Sa druge strane kako je preslikavanje T ψ_{MS}- kontrakcija na K to primenom leme II.1.1. u svakom od gornje tri mogućnosti dobija se nejednakost $\|x-y\|\leq C$, a otuda i nejednakost $\delta(S)\leq C$. Takodje je za neki element $x\in F$ ($x=Tx'$ ili $x=\Sigma\alpha_iTx'_i$; $x',x'_i\in F,\Sigma\alpha_i=1$) $Tx\in\mathrm{Conv}(TF)$ pa otuda T preslikava skup F u samog sebe. Dakle $\|x-T^kx\|=C$ (prema 2) pa je i $\sup_{y\in F}\|x-y\|=C$ za neko $x\in S$. No ova činjenica je u kontradikciji sa pretpostavkom normalne strukture na K, što dokazuje teoremu.

DOKAZ TEOREME III.3.3. Neka je $X(K)$ parcijalno uredjen skupovima $K_\alpha \subset X$ koji su neprazni, zatvoreni i relativno invarijantni preko T na sledeći način: $K\alpha_1 \subset K\alpha_2$ ili $K\alpha_2 \subset K\alpha_1$, $K\alpha_1 \neq K\alpha_2$. Koristeći lemu KURATOVSKI-ZORN-a možemo konstruisati skup K koji je minimalan uz osobine da je neprazan, zatvoren i relativno invarijantan preko T. Ako K sadrži više od jednog elementa, tada pošto T ima osobinu B_K kroz X, postojeće tačka $z \in K$ takva da je $\rho[z, T^k z] = r < \sup_{y \in K} \rho[y, T^k y]$. Neka je dalje $K_1 = \{t \in K : \rho[t, T^k t] \leq r\}$. Očigledno skup K_1 je neprazan i pravi podskup iz K. Sa druge strane prema osobini ψ_{MS}-kontraktivnosti za proizvoljnu tačku $t \in K_1$ dobija se da je $\rho[Tt, T^{k+1}t] \leq \lambda \rho[t, T^k t] \leq r$, što znači da se sa T skup K_1 preslikava u samog sebe. Neka je dalje $\Pi_n \in K_1$ takav da je $\Pi_n \longrightarrow y$ i $y \in K$. Sada je

$$\rho[y, T^k y] \leq \rho[y, \Pi_n] + \rho[\Pi_n, T^k \Pi_n] + \rho[T^k \Pi_n, T^k y]$$

$$\leq \rho[y, \Pi_n] + r + \rho[T^k \Pi_n, T^k y]$$

odakle je zbog neprekidnosti kada $n \longrightarrow \infty$ $\rho[y, T^k y] \leq r$. Prema tome tačka $y \in K_1$ i otuda je skup K_1 zatvoren. Sada je skup K_1 neprazan, zatvoren podskup iz skupa K koji se preslikava u samog sebe pomoću T. No, ovo je kontradiktorno minimalnosti skupa K. Otuda K sadrži samo jedan element koji je ujedno i jedinstvena nepokretna tačka preslikavanja T, čime je teorema dokazana.

U vezi sa napomenom prethodne teoreme, dokaz potpuno isto teče, jedino se u momentu kada se koristi pretpostavka neprekidnosti za T koristi zamenjena pretpostavka da se pokaže da je skup K_1 zatvoren. Naime, neka je y granična tačka od K_1, tada iz pretpostavke postoji $\Pi n \in K_1$ sledi da je i $T\Pi_n \in TK_1$, tako da za proizvoljno $\varepsilon > 0$, postoji No takvo da je $\rho[y, T^k \Pi_n] \leq \varepsilon$, za $n >$ No. Otuda procenjujući rastojanje $\rho[y, T^k y]$ uz korišćenje prethodne činjenice i osobine ψ_{MS}-kontraktivnosti sledi da je $\rho[y, T^k y] \leq r$, odnosno $y \in K_1$; pa je stoga skup K_1 zatvoren. Ostali deo dokaza je potpuno isti.

REFLEKSIVAN BANACH-OV PROSTOR

Neka je X refleksivan Banach-ov prostor i neka je K neprazan, ograničen, zatvoren i konveksan podskup iz X. U ovom delu rada mi proširujemo i generalizujemo izmedju ostalog i rezultate Kannan-a i Delfina Roux-Paolo Soardy ([136], [70]). Za preslikavanje $T:K \longrightarrow K$ njihovi dovoljni uslovi (izmedju ostalog) okarakterisani su nejednakostima

$$\text{(Kannan)}\ \|Tx-Ty\| \leq 2^{-1}(\|x-Tx\|+\|y-Ty\|)\ ;\ x,y\in K,$$
$$\text{(Roux-Soardy)}\ \|Tx-Ty\| \leq a(\|x-Tx\|+\|y-Ty\|)+b\|x-y\|$$
$$(a=a(x,y)\geq 0,\ b=b(x,y)\geq 0,\ 2a+b=1).$$

Ako su još ispunjeni uslovi

1) X je uniformno konveksan i u skupu K postoji tačka sa ograničenom orbitom,

2) X je Banach-ov prostor, K je slabo kompaktan, T neprekidno preslikavanje i $\sup\{b(x,y)\,|\,x,y\in K\}<1$,

tada preslikavanje T ima fiksnu tačku u skupu K.

Mi smo u radu [264] proučavali sličnu situaciju za jednu klasu od ψ_{RBS}- kontraktivnih operatora na refleksivnim Banach-ovim prostorima. U ovom slučaju korespondencija sa poljskim matematičarem Dr JULIAN MUSIELAK-om (POZNAN) bila nam je od dragocene koristi. Možemo, sada navesti i naše glavne rezultate.

TEOREMA III.3.4. Neka je T preslikavanje nepraznog, ograničenog, zatvorenog i konveksnog podskupa K od refleksivnog Banachovog prostora X u samog sebe, pri čemu je T i ψ_{RBS}- kontrakcija na K. Tada ako $(\exists k\in N)\ \sup_{y\in F}\|y-T^k y\|<\delta(F)$ za svaki neprazan, ograničen, zatvoren i konveksan podskup F iz K, koji sadrži više od jednog elementa i koji se preslikava u samog sebe preko T, preslikavanje T ima jedinstvenu nepokretnu tačku u skupu K.

TEOREMA III.3.5. Neka je T neprekidno preslikavanje nepraznog, zatvorenog, ograničenog i konveksnog podskupa K iz refleksivnog Banach-ovog prostora X u samog sebe i neka preslikavanje T ima osobine ψ_{RBS}- kontraktivnosti i B_k na K. Tada preslikavanje T ima jedinstvenu nepokretnu tačku u K.

Napomenimo da smo gornju teoremu III.3.4. u nešto izmenjenom obliku dokazali u radu [264]. Recimo još, da smo gornje rezultate dobili zahvaljujući karakterizaciji refleksivnih Banach-ovih prostora koju je dao Smullian [236]. On je naime dokazao sledeće tvrdjenje.

TEOREMA S ([236],s.327) X je refleksivan Banach-ov prostor ako i samo ako svaki opadajući niz nepraznih, ograničenih, zatvorenih i konveksnih podskupova iz X ima neprazan presek.

DOKAZI NAVEDENIH TEOREMA. Neka je $\mathfrak{F}$ familija svih zatvorenih, ograničenih i konveksnih podskupova iz K koja se pomoću T preslikava u samu sebe. Otuda $\mathfrak{F}$ je neprazna familija. Primenom Zorn-ove leme dobijamo minimalni element S u $\mathfrak{F}$, koji nastaje ako uzmemo u obzir da postoji neprazan, ograničen, zatvoren i konveksan skup invarijantan pomoću T, primenom Smullian-ovog rezultata. Ako skup S sadrži samo jedan element, tada taj element je nepokretna tačka preslikavanja T. Ako ovo nije slučaj neka S sadrži više od jednog elementa. Tada za $x,y\in S$ (prema lemi II .1.1) je

$$\|Tx-Ty\|\leq\psi(\alpha_1\|x-y\|,\alpha_2\|x-Tx\|,\alpha_3\|y-Ty\|,\alpha_4\|x-Ty\|,\alpha_5\|y-Tx\|)$$
$$=\lambda\delta[\sigma(x,n)]=\sup_{x\ S}\|x-T^kx\|.$$

Otuda skup T(S) je sadržan u zatvorenoj sferi M sa T kao centrom i $\sup_{x\in S}\|x-T^kx\|$ kao poluprečnikom. Sa druge strane $S\cap M$ je invarijantan preko preslikavanja T, pa zbog minimalnosti skupa S sledi da je $S\subset M$, odnosno $\|Ty-x\|\leq\sup\|x-T^kx\|$ za svako $x\in S$. Otuda za proizvoljno fiksirano $y\in S$ mi imamo

$$(3)\qquad \sup_{x\in S}\|Ty-x\|\leq\sup_{x\in S}\|x-T^kx\| .$$

Neka je dalje

$$S_1=\{z\in S:\sup_{x\in S}\|z-x\|\leq\sup_{x\in S}\|x-T^kx\|,k\in N\}$$

Skup S_1 je zatvoren, konveksan i neprazan (naprimer $Ty\in S_1$). Ako je $z\in S_1$, tada je $z\in S$ i otuda $Tz\in S_1$ prema (3). Prema tome skup S_1 je i invarijantan preko T, pa prema pretpostavci je još i $\delta(S_1)\leq \sup_{x\in S}\|x-T^k x\| <\delta(S)$. Sada je S_1 pravi podskup iz skupa S, a što protivreči minimalnosti skupa S. Kontradikcija. Otuda skup S ima samo jedan element koji je ujedno i jedinstvena nepokretna tačka preslikavanja T u skupu K.

DOKAZ TEOREME III.3.5. Neka skup S ima iste osobine kao u prethodnom slučaju. Ako skup S sadrži samo jedan element teorema je dokazana. Ako to nije slučaj onda prema osobini B_k na skupu S postoji tačka $x\in S$ takva da je

(4) $\|x-T^k x\|\leq r \sup_{y\in S}\|y-T^k y\|$.

Neka je dalje $P=\{x\in S: \|x-T^k x\|\leq r\}$. Ako je dalje $x\in P$ tada pošto je preslikavanje T ψ_{RBS}-kontraktivno dobija se da je $\|Tx-T^{k+1}x\|\leq r$, što znači da je $T(P)\subset P$. Neka je $P'=C\ell Conv(TP)$. Ako je $z\in P'$ tada su tri slučaja moguća:

1) $z\in TP$ i pošto je $TP\subset P$ sledi $Tz\in P'$.
2) $z=\Sigma_1^n \alpha_i Tz_i\,(\alpha_i\geq 0), \Sigma\alpha_i\geq 1, z_i\in P'$

$$\|z-T^k z\|= \|(\Sigma\alpha_i Tz_i)-T^k z\| \leq \Sigma\alpha_i\|Tz_i-T^k z\|$$
$$\leq \Sigma\alpha_i\psi(\alpha_i\|z_i-T^{k-1}z\| ,\dots \quad)$$
$$\leq \Sigma\alpha_i\|z_i-T^k z_i\| \leq\Sigma\alpha_i r=r,$$

što znači da je tačka $z\in P$ i otuda i $Tz\in TP\subset P'$.

3) z je granična tačka iz skupa P', u tom slučaju zbog neprekidnosti preslikavanja T sledi da je $z\in P$ i otuda $Tz\in P'$.

Sada konačno skup P' je zatvoren, konveksan podskup iz S i invarijantan je pomoću T i za svaki element $z\in P'$ je $\|z-T^k z\|\leq r$ što znači prema (4), da je P' pravi podskup iz S. No, ovo je kontradiktorno minimalnosti skupa S, pa otuda S sadrži samo jedan element koji je jedinstvena nepokretna tačka preslikavanja T.

NEKA ZAPAŽANJA

1) Ranije smo već zapazili da su refleksivnost prostora i normalna struktura na skupu K posledice uniformne konveksnosti. Naime, ako je X uniformno konveksan Banach-ov prostor, tada skup K mora da ima normalnu strukturu, a kako smo već i dokazali (Teorema III.3.2.) normalna struktura u K povlači osobinu B_k u K za preslikavanje T kada je ono ψ_{RBS}- kontraktivno na K. Zato možemo zabeležiti sledeći rezultat.

TEOREMA III.3.6. Ako je X uniformno konveksan Banach-ov prostor i K neprazan, ograničen, zatvoren i konveksan podskup iz X koji se preslikava u samog sebe pomoću neprekidnog preslikavanja T, ψ_{MS}- kontraktivnog na K, tada preslikavanje T ima jedinstvenu nepokretnu tačku u K.

2) Zanimljivo je inače da refleksivnost prostora X može da bude zamenjena sa slabom kompaktnošću skupa K u tvrdjenju teoreme III.3.5. U ovom slučaju može se zabeležiti sledeći rezultat.

PROPOZICIJA III.3.1. Neka je K neprazan zatvoren, konveksan i ograničen podskup iz Banach-ovog prostora X i neka je T neprekidno preslikavanje skupa K u samog sebe sa svojstvima ψ_{MS}-kontraktivnosti i B_k na K. Ako je F slabo kompaktan podskup iz K takav da je $\overline{\{T^n x\}} \cap F \neq \emptyset$ za svako $x \in K$, tada preslikavanje T ima jedinstvenu nepokretnu tačku u K.

DOKAZ. Ako je H neprazan, zatvoren i konveksan podskup iz K i ako je H preslikan u samog sebe pomoću T, tada za $x \in H$ je $\overline{\{T^n x\}} \cap F \neq \emptyset$. Otuda je $H \cap F \neq \emptyset$, pa koristeći slabu kompaktnost skupa F možemo dobiti podskup K_1 iz K koji je minimalan (neprazan, zatvoren, konveksan i invarijantan pomoću T) i $K_1 \cap F \neq \emptyset$. Ostali deo dokaza sada teče kao i u dokazu teoreme III.3.5.

TEOREMA III.3.7. Neka je T neprekidno preslikavanje ograničenog, kompaktnog i konveksnog podskupa K iz Banach-ovog prostora X u samog sebe i neka T ima osobinu ψ_{MS}-kontraktivnosti na K. Tada preslikavanje T ima jedinstvenu nepokretnu tačku u K.

DOKAZ Neka je S minimalan element kao zatvoren, konveksan i invarijantan pomoću T. Sa druge strane kompaktni i konveksni podskupovi Banach-ovog prostora imaju normalnu strukturu pa otuda preslikavanje T ima osobinu B_k na S (Teorema III.3.5.). Dokaz dalje teče kao i u teoremi III.3.5.

Sledeći rezultat je zanimljiv zbog činjenice da se može dati ekvivalentan oblik za osobinu B_k. Naime, važi sledeće tvrdjenje.

TEOREMA III.3.8. Neka je T preslikavanje skupa K nepraznog, ograničenog, zatvorenog i konveksnog podskupa iz refleksivnog Banach-ovog prostora X u samog sebe koje ima osobinu ψ_{RBS}-kontraktivnosti. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni:

(a) T ima osobinu B_k na K

(b) Za svaki neprazan, ograničen, zatvoren i konveksan podskup F iz K, T - invarijantan koji sadrži više od jednog elementa, postoji $x \in F$ takav da je $\sup_s \|x-T^s x\| < \sup_{z,y \in F} \|z-Ty\|$.

DOKAZ.(a)$\Longrightarrow$(b). Da je ova implikacija tačna dovoljno je videti da ako je x postojeći element za koji važi uslov B_k, element $Tx \in F$ biće element za koji važi osobina (b), jer je zbog ψ_{RBS}- kontraktivnosti $\|Tx-T^r(Tx)\| \leq \|x-T^r x\|$.

(b)$\Longrightarrow$(a). Neka uslov (a) nije tačan.

Tada postoji neprazan, ograničen, zatvoren i konveksan podskup F iz K koja je T-invarijantan i sadrži više od jednog elementa, takav da za svako $x \in F$ je $\|x-T^k x\| = \sup_{y \in F} \|y-T^k y\| = 0$. Zatim uočimo skup $F' = Cl Conv(TF)$. Za neka dva elementa $z,w \in F'$ jednostavno se utvrdjuje (kao u teoremi III.3.5.) da je $\|z-Tw\| \leq r$. Takodje, pošto je F' T-invarijantan i sadržan u F, sledi da za svaki $z \in F$ je $\sup_s \|z-T^s z\| = \sup_{z,y \in F'} \|z-Tw\|$, a što je kontradikcija sa pretpostavkom (b). Ovim je tvrdjenje dokazano.

IV. MONOTONA PRESLIKAVANJA NA UREDJENIM SKUPOVIMA

IV.1. NEKE ITERATIVNE METODE NA PARCIJALNO UREDJENIM SKUPOVIMA.

IV.2. KARAKTERIZACIJA KOMPLETNOSTI I POLUKOMPLETNOSTI UREDJENIH SKUPOVA

IV.3. NEKI REZULTATI FIKSNE TAČKE NA UREDJENIM SKUPOVIMA

IV.4. JOŠ NEKI REZULTATI, ZAPAŽANJA I PRIMENE.

Sledeći jednu našu ideju nagoveštenu u magistarskom radu, mi ovde formulišemo jedan iterativni test na parcijalno uredjenim skupovima, kao potreban i dovoljan uslov za egzistenciju fiksnih tačaka, uopštavajući i povezujući usput više rezultata. U drugom delu ovog poglavlja polazeći od ideje A.TARSKOG dajemo karakterizaciju polukompletnosti uredjenih skupova preko nekih teorema fiksne tačke. Zatim, sa aksiomom izbora povezujemo jedan naš rezultat fiksne tačke, izvodeći iz njega čuvenu teoremu KIRK i CARISTIA. Na kraju, jedan naš raniji rezultat o izvesnim uredjenjima i strukturalnim povezivanjima totalno uredjenih skupova prenosimo na latise. Usput dajemo i izvesnu karakterizaciju jednog specijalnog skupa tačaka na totalno uredjenim skupovima. To je ujedno i jedan novi specijalni kriterijum za fiksne tačke na uredjenim skupovima.

IV. MONOTONA PRESLIKAVANJA NA UREDJENIM SKUPOVIMA

IV.1. NEKE ITERATIVNE METODE NA PARCIJALNO UREDJENIM SKUPOVIMA

Polazeći od jedne ideje koju smo nagovestili u magistarskom radu [263], gde smo za jednu klasu jednačina dali odgovarajući iterativni postupak na skupu realnih brojeva $(R,\leq)$, u ovom odeljku tu ideju realizujemo na proizvoljno parcijalno uredjenom skupu. Naime, neka je $(0,\preccurlyeq)$ parcijalno uredjen skup relacijom poretka $\preccurlyeq$, i $T: 0^k \longrightarrow 0 (k\in N)$ monotono preslikavanje, pri čemu je monotonija definisana kao u poglavlju I. Neka je dalje $I(0,T) \overset{def}{=} \{x\in 0: T(x,\ldots,x)=x\}$. U prvom od rezultata koji slede dajemo potrebne i dovoljne uslove da je skup $I(0,T)$ neprazan; na ovaj osnovni rezultat nadovezuje se niz posledica i primena. Krajnji domet ovog iskaza je primena na pitanje egzistencije i kvalitativno proučavanje rešenja nekih poznatih integralnih diferencijalnih jednačina. Prelazimo na formulaciju osnovnog stava o kome je reč.

TEOREMA IV.1.1. Neka je 0 parcijalno uredjen skup relacijom poretka $\preccurlyeq$, tako da svaki sa gornje strane ograničen skup ima supremum, a preslikavanje $T:0^k \longrightarrow 0 (k\in N)$ rastuće i neprekidno, u smislu uredjajne topologije, sa svojstvom

(1) $(\exists u\in 0)\, T(x_1,\ldots,x_k)\prec x_k \,(u\preccurlyeq x_k\preccurlyeq\cdots\preccurlyeq x_2\preccurlyeq x_1)$.

Nazovimo kanoničkim nizom bilo koji niz (x_n) elemenata skupa 0 sa osobinom

(2) $x_{n+k}=T(x_n,x_{n+1},\ldots, x_{n+k-1}), (n\in N\wedge u\preccurlyeq x_k\preccurlyeq\cdots\preccurlyeq x_1)$

(a) Ako je bar jedan kanonički niz ograničen tada skup $I(0,T)$ nije prazan i pritom svaki ograničeni kanonički niz monotono opadajući konvergira tački iz skupa $I(0,T)$.

(b) Pod dopunskom predpostavkom da je $(0,\preccurlyeq)$ totalno uredjen skup, ograničenost bar jednog kanoničkog niza dovoljna je za postojanje maksimuma skupa $I(0,T)$, a za nepraznost skupa $I(0,T)$ potrebno je da svaki takav niz bude ograničen. U tom slučaju svaki kanonički niz monotono opadajući konvergira ka $\max I(0,T)$.

Ako preslikavanje $U:0^k \longrightarrow 0$ ima sva navedena svojstva preslikavanja T i sem toga važi

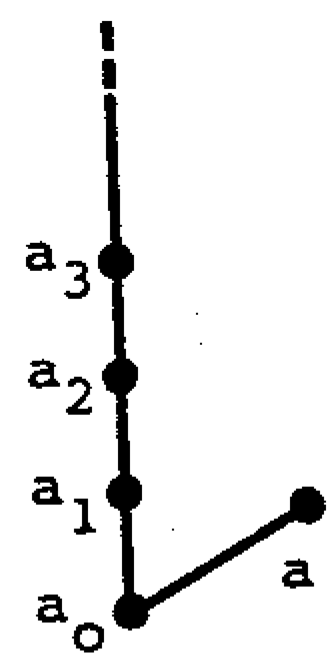
(3) $(\forall u_1,\ldots u_k \in 0)\, T(u_1,\ldots u_k) \preccurlyeq U(u_1,\ldots,u_k)$,

tada je $\max I(0,T) \preccurlyeq \max I(0,U)$.

MALI KOMENTAR

U opštem slučaju kada je skup 0 parcijalno uredjen tačka (b) tvrdjenja teoreme ne važi u navedenom obliku. To na neki način daje težinu i našem rezultatu. Potvrdimo to i sledećim primerima:

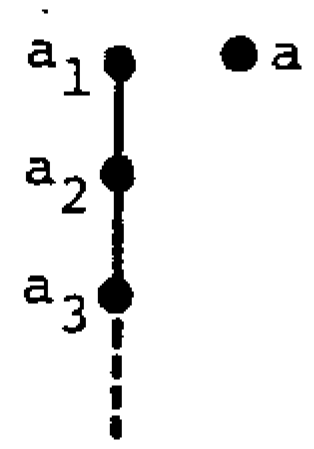
1) Neka je $0=\{a,a_o,a_1,a_2,\ldots\}$ gde sva ova slova označavaju različite elemente, relacija $\preccurlyeq$ je odredjena sledećom shemom



a preslikavanje T za $k=1$ sa $T(a_\nu)=a_\nu (\nu=o,1,2,\ldots) T(a)=a_o$. Preslikavanje T je neprekidno, stoga što je u ovom slučaju topologija diskretna, pri čemu se može uzeti da je $u=a$ iz uslova (1). Medjutim, sada je $I(0,T)=\{a_o,a_1,a_2,\ldots\}$, a ovaj skup nema maksimalnog elementa, mada je kanonički niz $x_1=a, x_\nu=a_o (\nu=2,3,\ldots)$ ograničen (on konvergira ka $a_o \in I(0,T)$). Dakle, u ovom slučaju, ograničenost bar jednog (čak i svakog) kanoničkog niza ne povlači postojanje maksimuma skupa $I(0,T)$.

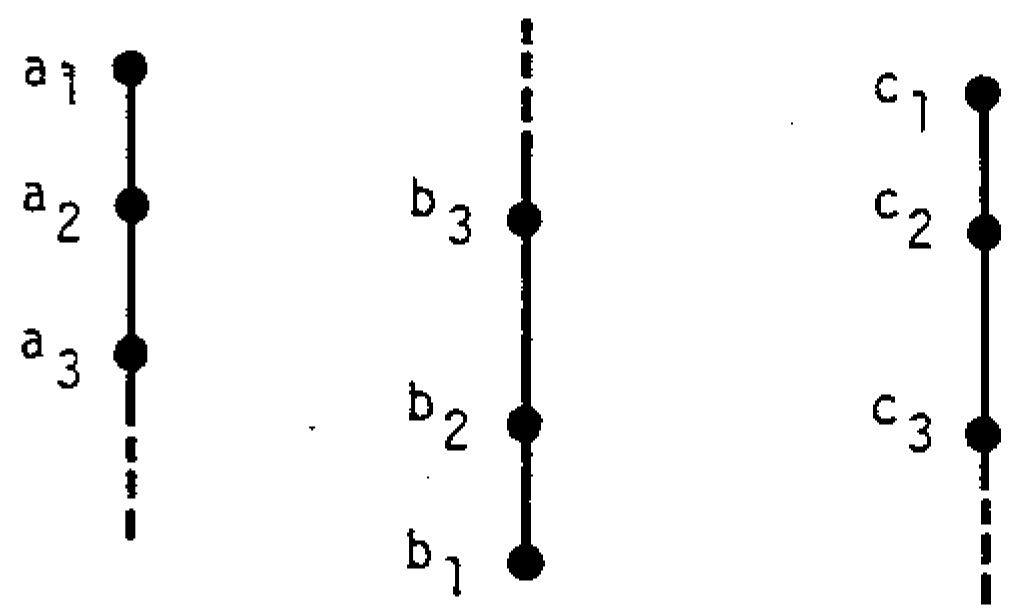
2) Neka je $0=\{a,a_1,a_2,\ldots\}$, gde sva ova slova oz-

načavaju različite elemente i neka je relacija $\preccurlyeq$ odredjena shemom,



Ovde je a neuporedivo sa ostalim elementima. Ako je zatim $T(a)=a$, $T(a_\nu)=a_{\nu+1}(\prec a_\nu)$ za $\nu=1,2,3,\ldots$; pri čemu se za u može uzeti a_o(ili bilo koja od tačaka $a_\nu(\nu=1,2,3,\ldots)$. U ovom slučaju nijedan kanonički niz nije ograničen, a $I(0,T)$ ima maksimum a i to je ujedno i jedina tačka skupa $I(0,T)$.

3) Neka je $0=\{a_1a_2,\ldots\}\cup\{b_1,b_2,\ldots\}\cup\{c_1,c_2,\ldots\}$, i relacija $\preccurlyeq$ prema shemi:



Neka je dalje,

$$T(a_\nu)=a_{\nu+1}(\nu=1,2,\ldots),T(b_1)=b_1,$$
$$T(b_\nu)=b_{\nu+1}(\nu=2,3,\ldots),T(c_\nu)=c_{\nu+1}(\nu=1,2,\ldots)$$
$$U(a_1)=a_1,U(a_\nu)=a_{\nu+1}(\nu=2,3,\ldots),U(b_\nu)=b_{\nu+1}$$
$$(\nu=2,3,4,\ldots),U(C_\nu)=C_{\nu+1}(\nu=1,2,\ldots)$$

Ovde je za oba preslikavanja $u=c_1$; zatim $I(0,T)=\{b_1\}$, $T(0,U)=\{a_1\}$, pa imamo $b_1=\max I(0,T)$, $a_1=\max I(0,U)$, a tačke a_1 i b_1 su neuporedive.

Napomenimo da tvrdjenje tačke (a) važi i u slučaju kada je poredak na svim mestima u (1) obrnut. Dovoljno je konstatovati da osobina skupa $(0,\preccurlyeq)$ da svaki sa gornje strane ograničen skup ima supremum ima za posledicu odgovarajuću činjenicu da i svaki sa donje strane ograničen skup ima infimum. Na skupu o kome je dosad bilo reči svaki monoton i ograničen niz konvergira. No u ovom smislu moguće je još više oslabiti topološka svojstva skupa uz neke kompenzacije druge vrste.

Neka je skup O parcijalno uredjen relacijom poretka $\leqslant$ sa sledećim svojstvima:

1) $(\exists\theta\in O)(\forall u\in O)\theta\leqslant u$

2) Za svaki nerastući niz elemenata (u_n) iz O postoji jedinstveni element $u\in O$, nazvan granica niza, u oznaci $\lim u_n=u$ (ili $u_n\downarrow u$), sa sledećim osobinama:

(a) $u_n=u\,(n\in N)\Longrightarrow u_n\downarrow u$
(b) $u_n\downarrow u, v_n\downarrow v\wedge u_n\leqslant v_n)\Longrightarrow u\leqslant v$
(c) Egzistencija i vrednost granice niza (u_n) invarijantna je u odnosu na početne uslove.

Uredjeni skup O koji ispunjava sve prethodne uslove nazovimo M-skup. U svakom konkretnom slučaju kad je reč o M-skupu pretpostavljamo da je, ukoliko ima mogućnosti, izvršen izbor odredjenog limesa, tj. odredjenog preslikavanja skupa svih nerastućih nizova u O, sa navedenim svojstvima.

Primetimo da se skup O sa ovim osobinama specijalno realizuje, ako je uvedena obična "uredjajna" topološka struktura sa svojstvom da svaki sa gornje strane ograničen skup ima supremum, pri čemu je pojam granice na uobičajen način definisan. Što se tiče odnosa ovako uvedenih topoloških svojstva (definicija limesa) sa osobinama iz teoreme IV.1.1, ona su opštija, tj. slabija od ovih, ali, sa druge strane, ovde se koristi osobina minimuma skupa, koja uopšte ne figuriše u teoremi IV.1.1. Otuda je od interesa i sledeće tvrdjenje.

TEOREMA IV.1.2. Neka je skup O parcijalno uredjen relacijom poretka $\leqslant$ i neka je on M-skup, a preslikavanje T: $O^k \longrightarrow O$ $(k\in N)$ rastuće, neprekidno i sa svojstvom (1). Tada postoji bar jedna tačka $\xi\in I(0,T)$ koja je majoranta skupa $I(\Delta,T|\Delta)$, sa $\Delta=[\bar{\theta},u]$, i pritom svaki kanonički niz (2) monotono opadajući konvergira ka nekoj tački sa prethodnom osobinom.

Sada ćemo, u okviru primena prethodnih rezultata, preko sledeće posledice dovesti u vezu rezultate (dovoljne uslove) koje smo dali za konvergenciju ka nuli realnih nenegativnih nizova u poglavlju I (vid.teoreme I.1.6. i I.1.7.). Pre svega kao direktnu posledicu teoreme IV.1.1. možemo formulisati sledeći iskaz.

POSLEDICA IV.1.1. Neka je preslikavanje $T:R^k \longrightarrow R$ $(k\in N)$ rastuće i neprekidno sa svojstvom (1), gde je relacija poretka $\leqslant$ uobičajeni brojni poredak $\leq$. Da jednačina $x=T(x,\ldots,x)$ ima realna rešenja dovoljno je da je bar jedan niz (2) ograničen, a potrebno da je svaki takav niz ograničen. U ovom slučaju niz (2) strogo monotono opadajući konvergira ka najvećem rešenju jednačine $x=T(x,\ldots,x)$.

Inače, drugačija formulacija jednog dela ovog iskaza mogla bi biti i sledeća:

Neka je preslikavanje $T:R^k \longrightarrow R(k\in N)$ rastuće, neprekidno i sa svojstvom (1), i neka niz (x_n) realnih brojeva zadovoljava nejednakost

$$(4)\quad x_{n+k} \leq T(x_n,\ldots,x_{n+k-1}),\ n\in N.$$

Tada niz (x_n) konvergira ka realnom rešenju nejednačine $x\leq T(x,\ldots,x)$ ili odredjeno divergira.

Uporedjujući ovaj rezultat sa prethodnim ([259], [263]), vidimo da je ograničenost niza (x_n) realnih brojeva u ovom slučaju i potreban i dovoljan uslov za konvergenciju. Odavde, zaključujemo da na skupu R niz koji zadovoljava nejednakost (4) predstavlja generalizaciju monotonih nizova. Neki autori to i nazivaju T-monotonija (vid. [44]).

POSLEDICA IV.1.2.(WAZEWSKI [280],s.50.). Neka je skup O parcijalno uredjen relacijom poretka $\leqslant$ i neka je on M-skup, i pritom za sve $u,\nu \in O$ definisan je element $u+\nu \in O$ sa sledećim svojstvima:

(a) $u+\nu = \nu+u,\ u+\theta = u,$

(b) $u \leqslant \nu \Longrightarrow u+w \leqslant \nu+w,$

(c) $u+\nu \leqslant w \Longrightarrow u \leqslant w,$

(d) $(u_n \downarrow u \wedge \nu_n \downarrow \nu) \Longrightarrow u_n + \nu_n \downarrow u + \nu$

i neka je funkcija $T(u)$ definisana na segmentu $\Delta = [\theta, h] \subset O$ i na njemu rastuća, neprekidna i sa osobinom $(\exists b \in \Delta) q+T(b) \leqslant b$, za neko fiksirano $q \in O$. Tada jednačina $q+T(u)=u$ ima na segmentu Δ maksimalno rešenje $\xi \in O$. Stavljajući $b_0=b, b_{n+1}=q+T(b_n)$ sledi da niz $b_n \downarrow \xi \leqslant b$.

POSLEDICA IV.1.3.(BARBAŠIN[42]) Neka su $u(t)$ i $f(t)$ realne, nenegativne i integrabilne funkcije na segmentu $[a,a+A]$, i funkcija $K(t,s)$ realna, nenegativna, merljiva i ograničena za $a \leq s \leq t \leq a+A$. Ako važi nejednakost

$$u(t) \leq f(t) + \int_a^t K(t,s) u(s) ds,$$

tada važi i nejednakost $u(t) \leq \psi(t)$ za $t \in [a,a+A]$ gde je $\psi(t)$ rešenje integralne jednačine

$$\psi(t) = f(t) + \int_a^t K(t,s)\ \psi(s) ds.$$

Primetimo, dalje, da možemo koristeći prethodne rezultate o parcijalno uredjenim skupovima, dati potrebne i dovoljne uslove za egzistenciju rešenja jedne dosta opšte klase integralnih jednačina na Banach-ovim prostorima.

POSLEDICA IV.1.4. Neka je data jednačina

(5) $$x(t) = f(t) + \int_a^t F(t,s,x(s)) ds \quad (t,s \in [a,b] \subset R),$$

gde je preslikavanje F rastuće po trećoj koordinati sa svojstvom da neprekidan operator $Tx(t)$ pridružen jednačini (5) preslikava Banach-ov prostor X u samog sebe. Da integralna jednačina (5) ima rešenje na prostoru X dovoljno je da je bar jedan kanonički niz za T ograničen i pritom svaki ograničeni kanonički niz monotono opadajući konvergira ka rešenju jednačine. Kada je skup X totalno uredjen, tada je potreban uslov za egzistenciju rešenja jednačine (5) da je svaki niz iteracija ograničen i pritom postoji maksimalno rešenje jednačine.

Koristeći prethodnu ideju možemo formulisati i jedan rezultat opštiji od ranije navedenog tvrdjenja BARBAŠINA.

POSLEDICA IV.1.5. (GENERALIZACIJA rez.BARBAŠINA) Neka je data jednačina (5), gde je preslikavanje F rastuće po trećoj koordinati, sa svojstvom da neprekidnan operator T pridružen jednačini (5) preslikava totalno uredjen Banach-ov prostor X u samog sebe, pri čemu je i

$$u(t)\leq f(t) + \int_a^t F(t,s,x(s))ds \quad (t,s\in[a,b]\subset R).$$

Tada važi nejednakost $u(t)\leq\psi(t)$ $(t,s\in[a,b])$ gde je $\psi(t)$ rešenje jednačine (5).

POSLEDICA IV.1.6.(TASKOVIĆ [263]). Neka je preslikavanje $f:R \longrightarrow R$ monotono rastuće i neprekidno sa svojstvom: $(\exists\alpha\in R)f(x)<x^n$ za $x\geq\alpha$. Da jednačina $x^n=f(x)$ ima realna rešenja dovoljno je da je bar jedan kanonički niz $x_{k+1}=(f(x_k))^{1/n},(k\in N,x_1\geq\alpha)$ definisan i ograničen, a potrebno je da svaki takav niz bude definisan i ograničen. U tom slučaju kanonički niz strogo monotono opadajući konvergira ka najvećem rešenju jednačine $x^n=f(x)$.

U radu [176] M.MARJANOVIĆ je definisao kanonički niz za jednačinu

$$(6) \quad x^n+a_1x^{n-1}+\dots +a_n=0 \quad (a_i\ R).$$

u obliku $x_{k+1}=(q(x_k))^{1/n},(k=0,1,\dots)$, pri čemu je $q(x)=x^n+1(1-\lambda)\Pi(x)$ $\Pi(x)=-b_1x^{n-1}-\dots-b_n$, a b_i koeficijenti translacitne jednačine, koju je dobio translacijom jednačine (8) zamenjujući $x+a=y$. U ovom smislu možemo sada navesti sledeću posledicu.

POSLEDICA IV.1.7(MARJANOVIĆ [76]) Jednačina(6) ima realnu nulu ako i samo ako je kanonički niz definisan. Ako je kanonički niz definisan, tada on konvergira realnoj nuli jednačine (6).

Napomenimo da smo u magistarskom radu [263] ovaj rezultat MARJANOVIĆA [76] izveli iz posledice IV.1.6, kao specijalan slučaj. Inače, ovo je interesantan rezultat, jer u opštem slučaju (kao što je poznato) BANACH-ov princip kontrakcije ne može se direktno primeniti na nalaženje rešenja polinomnih jednačina. No, ovom prilikom ukazujemo na činjenicu da je posledica IV.1.7. zanimljiv slučaj jedne opštije metode date u knjizi DEMIDOVIČ-MARON [83].

POSLEDICA IV.1.8.(MÜLLER [283]). Neka je funkcija $f(t,x)$ neprekidna, i po x monotono rastuća na skupu $D\subset[o,a]\times R^n$, a funkcije v,w su diferencijabilne na skupu $[o,a]$ pri čemu je:

(a) $v(o)<w(o)$,

(b) $v'-f(t,v)<w'-f(t,w)$, na $(o,a]$.

Tada je $v\leq w$ na skupu $[o,a]$.

Ovaj rezultat je interesantan jer primenjujući naš postupak, mogli bi smo dobiti odgovarajući rezultat i za diferencijalne jednačine u Banach-ovim prostorima i neke rezultate MLAK-a i OLECH-a. Medjutim, ovde to pitanje nećemo raspravljati.

Neka je u daljem tekstu $(E,\preceq)$ uredjen metrički prostor u smislu da je uredjenje $\preceq$ saglasno sa topologijom prostora,tj. kada je $u_i\preceq u$, $u_i \longrightarrow v$, tada je $v\preceq u$. Na sličan način se i Banach-ov prostor može urediti da relacija poretka $\preceq$ bude saglasna sa topološkom ali i algebarskom strukturom prostora. Neka je dalje skup $A\subset E$ ograničen. U radu [162] KURATOWSKI je definisao meru nekompaktnosti u oznaci $\gamma(A)$ kao $\inf\{\varepsilon>0 \mid A$ je pokriven sa konačnim brojem skupova poluprečnika $\leq\varepsilon\}$. Odavde je jasno da da kada je skup A relativno kompaktan, onda je $\gamma(A)=0$. Čak više na kompaktnom metričkom prostoru samo relativno kompaktni skupovi imaju meru nekompaktnosti jednaku nuli. Neka dalje funkcija $T:E \longrightarrow E$ preslikava ograničene skupove u ograničene. Preslikavanje T zvaćemo γ-kontrakcija ako i samo ako postoji broj $\alpha\in[0,1)$ tako da je za dati ograničeni skup $A\subset E$, $\gamma(TA)\leqq\alpha\gamma(A)$. Sada možemo formulisati sledeći rezultat.

POSLEDICA IV.1.9. Neka je E ograničeni, kompletan i uredjen metrički prostor i $T:E\longrightarrow E$ rastuće, neprekidno i γ-kontraktivno preslikavanje, pri čemu $(\exists t\in E)$ $T(t)\leqslant t$. Tada preslikavanje T ima fiksnu tačku u skupu E, kojoj konvergira niz sukcesivnih aproksimacija $(T^n t)$.

POSLEDICA IV.1.10. Neka je E ograničeni i uredjeni metrički prostor i neka je preslikavanje $T:E\longrightarrow E$ rastuće pri čemu je za svaki $A\subset E$, $f(A)$ relativno kompaktan skup i $(\exists t\in E) T(t)\leqslant t$. Tada niz $(T^n t)$ konvertira fiksnoj tački $\xi\in E$ preslikavanja T.

Dokaz ove posledice svodi se na dokaz prethodne posledice IV.1.9. s obzirom da kada je T(A) relativno kompaktan onda je preslikavanje T γ-kontrakcija sa konstantom $\alpha=0$.

Posmatrajmo dalje HAMMERSTEIN-ovu [43] diferencijalno-integralnu jednačinu

$$(7)\quad x(t)=Tx(t)=\int_0^a K(t,s)T(s,x(s))ds,\ (a=\text{const}>0)$$

gde su $K:[0,a]\times[0,a]\longrightarrow[0,+\infty)$ i $T:[0,a]\times R\longrightarrow R$ neprekidna preslikavanja. Pre nego što formulišemo sledeće tvrdjenje, napomenimo da su se ovim problemom bavili i Bakhtin [43], Shandra i A.Fleischman [152], Krasnoselski [152] pored drugih matematičara.

POSLEDICA IV.1.11. Neka važe sledeći uslovi: (a) za svako $s\in[0,a]$ funkcija $T(s,r)$ je rastuća po drugoj koordinati.

(b) Postoji $u\in R$ takvo da je

$$\int_0^a K(t,s)T(s,u)ds \leqq \text{ i za } t\in[0,a).$$

(c) Postoji $x_o \in C[o,a]$, tako da je za sve $t \in [o,a]$

$$u \leqq x_o(t) \leqq \int_o^a K(t,s)T(s,x_o(s))ds.$$

Tada postoji rešenje $x(t) \in C[o,a]$ jednačine (7).

DOKAZI NAVEDENIH REZULTATA I POSLEDICA

DOKAZ TEOREME IV.1.1.(a)i (b). Dovoljan uslov.

Neka je ovaj uslov ispunjen i neka niz (x_n) koji ispunjava uslove (2) tj. kanonički je niz i uz to je ograničen. Tada je

$$x_{k+1} = T(x_1,x_2,\dots,x_k) \preceq x_k$$

$$x_{k+2} = T(x_2,\dots,x_{k+1}) \preceq T(x_1,\dots,x_k) = x_{k+1}.$$

Neka je dalje $x_{n+\nu} \preceq x_{n+\nu-1}$ $(\nu=1,2,\dots,k)$. Ovo implicira nejednakost

$$x_{n+k+1} = T(x_{n+1},\dots,x_{n+k})$$

$$\preceq T(x_n,\dots,x_{n+k-1}) = x_{n+k}.$$

Prema tome, na osnovu principa matematičke indukcije, niz (x_n) je monotono opadajući. Kako je on i po predpostavci ograničen, on je i konvergentan. Ako je $\lim x_n = t$, zbog neprekidnosti, imamo $t = T(t,\dots,t)$. Dokažimo da je $T = \max I(0,T)$, kada je 0 totalno uredjen skup. Prema relaciji (1), imamo za neku tačku $r \in I(0,T), r \neq t$ sledeće relacije

$$r = T(r,\dots,r) \preceq T(u,\dots,u) \preceq T(x_1,\dots,x_k) = x_{k+1}.$$

Neka je $r \preceq x_{n+\nu}$ $(\nu=1,\dots,k-1)$. Ovo implicira nejednakost

$$r = T(r,\dots,r) \preceq T(x_n,\dots,x_{n+k-1}) = x_{n+k}.$$

Otuda, prema principu matematičke indukcije, za sve $n \in N$ je $r \preceq x_n$, te je i $r \preccurlyeq \lim x_n = t$, odnosno t je najdalje rešenje iz skupa $I(0,t)$.

POTREBAN USLOV. Neka jednačina $x=T(x,\ldots,x)$ ima rešenje. Tada, s obzirom na pretpostavke, ona ima i najdalje rešenje $t=\max I(0,T)$ pri čemu je $t \preccurlyeq u$. Sada je

$$t=T(t,\ldots,t) \preccurlyeq T(u,\ldots,u) \preccurlyeq T(x_1,\ldots,x_k)=x_{k+1}.$$

Neka je dalje $t \preccurlyeq x_{n+k-1} \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq x_{k+1} \preccurlyeq x_k$. Ovo implicira nejednakost

$$t=T(t,\ldots,t) \preccurlyeq T(x_n,\ldots,x_{n+k-1})=x_{n+k},$$

pa indukcijom sledi da je za sve $n \in N, t \preccurlyeq x_n$ $(n=1,2,\ldots)$. Takodje, kada je $x_{n+\nu} \preccurlyeq x_{n+\nu-1}$ $(\nu=1,\ldots,k)$ onda je tačna i relacija

$$\begin{aligned} x_{n+k+1} &= T(x_{n+1},\ldots,x_{n+k}) \\ &\preccurlyeq T(x_n,\ldots,x_{n+k-1}) = x_{n+k}, \end{aligned}$$

pa indukcijom sledi da je definisani niz (x_n) i monotono opadajući. Neka je zato $\lim x_n = s \in I(0,T)$. Kako je za svako $n \in N, t \preccurlyeq x_n$, biće i $t \preccurlyeq \lim x_n = s$. No, kako je $t=\max I(0,T)$, sledi da mora biti $s=t$.

DOKAZ DRUGOG DELA TVRDJENJA (b)

Sada dokažimo dalje da je tačna i nejednakost $\max I(0,T) \preccurlyeq \max I(0,U)$. Neka su nizovi (x_n) i (y_n) odredjeni jednakostima

$$\begin{aligned} x_{n+k} &= T(x_n, x_{n+1},\ldots,x_{n+k-1}) \\ y_{n+k} &= U(y_n, y_{n+1},\ldots,y_{n+k-1})\ n\ N, \end{aligned} \tag{8}$$

pri čemu neka je $(x_1,x_2,\ldots,x_k)=(y_1,y_2,\ldots y_k)$, početna tačka za koju važe osobine (1). Sada su tačne i relacije

$$x_{k+1}=T(x_1,\ldots,x_k) \preccurlyeq U(x_1,\ldots,x_k)=y_{k+1}$$
$$x_{k+2}=T(x_2,\ldots,x_{k+1}) \preccurlyeq U(x_2,\ldots,x_{k+1}) \preccurlyeq U(y_2,\ldots,y_{k+1})=y_{k+2}$$

$$x_{n+k}=T(x_n,\dots,x_{n+k-1})\preccurlyeq U(x_n,\dots,x_{n+k-1})\preccurlyeq U(y_n,\dots,y_{n+k-1})=y_{n+k}$$

Sada je prema (8) i koristeći prethodni postupak kao i tvrdjenja prvog dela tačke (b) sledi relacija maxI(0,T) $\preccurlyeq$ maxI(0,U), a što je i trebalo pokazati.

DOKAZ TEOREME IV.1.2. potpuno isto teče kao deo prethodnog koji se odnosi na dovoljnost.

DOKAZ POSLEDICE IV.1.1. Stavljajući specijalno 0=R (skup realnih brojeva) uz uobičajeni poredak u topologiju prostora R ova posledica dobija se kao specijalan slučaj teoreme IV.1.1.

POSLEDICA IV.1.2. je specijalan slučaj teoreme IV.1.2.

DOKAZ POSLEDICE IV.1.3. izvedimo u okviru dokaza opštijeg tvrdjenja posledice IV.1.5. Naime, operator T pridružen jednačini (5) je rastući i za njega važi osobina (1). Ovde je topologija prostora indukovana uredjenjem na $[a,b]\subset R$. Prema tome primenom teoreme IV.1.1. (b), na operator T dobija se ovo tvrdjenje.

POSLEDICA IV.1.4. je specijalan slučaj teoreme IV.1.1. primenjen na operator T koji je pridružen jednačini (5).

POSLEDICA IV.1.6. direktno izlazi iz teoreme IV.1.1. (b), kada je 0=R,k=1. Ova posledica služila nam je i kao ideja vodilja za prethodna uopštenja.

DOKAZ POSLEDICE IV.1.7. Kako preslikavanje q(x) gore definisano ima osobine preslikavanja T: 0 ——> 0(=R) iz teoreme IV.1.1. dela (b) direktno se dobija ovo tvrdjenje. Ovo sledi s druge strane i iz posledice IV.1.6.

DOKAZ POSLEDICE IV.1.8. isto se izvodi (uz neke drugačije tehničke varijante) kao i posledice IV.1.5.

DOKAZ POSLEDICE IV.1.9. Pošto je $T:E \longrightarrow E$ rastuće preslikavanje sa osobinom (1), primenom teoreme IV.1.1. (a) ustanovljava se da postoji tačka $\xi=\lim T^n t$, pri čemu je $T^n(t)\lessneqq\xi$, za $n\geqq 1$. Kako je T neprekidno ξ je fiksna tačka, tj. rešenje jednačine $Tx=x$, prema teoremi IV.1.1. Napomenimo da u ovom slučaju struktura prostora E ima osobine skupa $(0,\lessneqq)$ iz teoreme IV.1.1.

DOKAZ POSLEDICE IV.1.11. Operator T pridružen jednačini (9), na osnovu osobina (a), (b) i (c) rastući je na prostoru $C[o,a]$. S druge strane skup

$$E=\{x\in C[o,a] \ :x_o(t)\leqq x(t)\leqq u, t\in[o,a]\}$$

preslikava se operatorom T u samog sebe. Jasno je da je E uredjen metrički prostor sa uobičajenom metrikom i uredjenjem $\lessneqq$ definisanim sa:

$$x\lessneqq y \overset{def}{\Longleftrightarrow} x(t)\leqq y(t),\ t\in[o,a].$$

S druge strane skup T(E) je relativno kompaktan (vid. Kuratovski [63], na osnovu teoreme ARZELA). Primenjujući sada posledicu IV.1.10. zaključuje se da operator T ima fiksnu tačku $u\in E$, čime je dokaz završen.

IV.2. KARAKTERIZACIJA KOMPLETNOSTI I POLUKOMPLETNOSTI UREDJENIH SKUPOVA

Neka je dat skup 0 uredjen relacijom poretka $\preceq$ i preslikavanje T: $0 \longrightarrow 0$. Stavimo $I(0,T) \overset{def}{=} \{x \in 0 : Tx = x\}$, a za pojmove preslikavanja (rastućih-izotonih, ili opadajućih) na uredjenom skupu 0 iskoristimo definicije date u ranijim poglavljima (I i IV.1.). Pod latisom podrazumeva se sistem $(0,\preceq)$, formiran od nepraznog skupa 0 i binarne relacije delimičnog poretka $\preceq$, pri čemu za proizvoljna dva elementa $a,b \in 0$ postoji najmanja gornja granica sup{a,b} i najveća donja granica inf{a,b}. Inače, skup 0 je kompletno uredjen ako svaki neprazan podskup A od 0 ima najmanju gornju granicu (supremum) i najveću donju granicu (infimum). Ovakav skup 0 ima naročito dva karakteristična elementa inf0=min0 i sup0=max0. Ako samo svaki neprazan podskup A od 0 ima supremum (infimum), onda kažemo da je skup 0 desno (levo) kompletno uredjen. Odavde je jasno da je svaki kompletan skup desno (levo) kompletan, dok obrnuto ne važi.

Na isti način gorovimo o kompletnoj (polukompletnoj) latisi. Naročito ovde ističemo, kao fundamentalan, rezultat A. Tarskog iz 1955.

TEOREMA A.(TARSKI [25],s. 281) Neka je latisa 0 kompletno uredjena i $T:0 \longrightarrow 0$ rastuće preslikavanje. Tada:

(a) skup I(0,T) nije prazan,
(b) supI(0,T), infI(0,T) $\in$ I(0,T).

MALA ISTORIJA REZULTATA

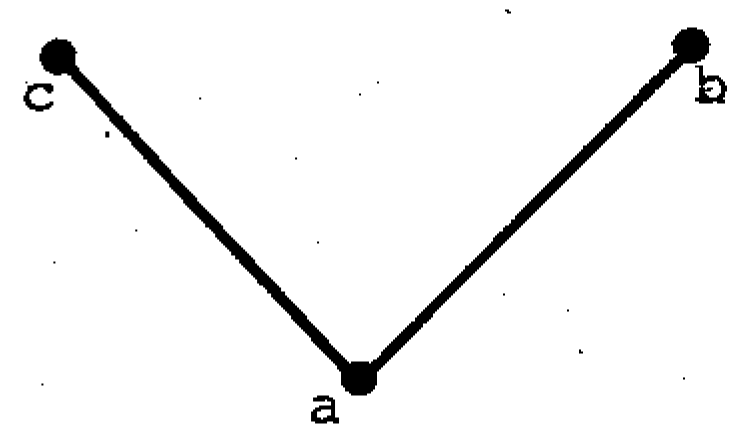
Nedavno smo ustanovili da je isti rezultat (bez tačke (b)) 1927.godine u radu [60] dokazao B.KNASTER, verovatno učenik A.Tarskog. Zanimljivo je što se gotovo nigde u literaturi (novijoj) ne pominje ime B.KNASTER-a. Da bi nedoumica bila veća, u radu [25] A. Tarski ističe da su on i Knaster 1927. dokazali prethodnu teoremu A. Verovatno bi sve bilo jasnije da smo uspeli pronaći original članka B.Knaster-a. Naša je pretpostavka da je tačno ono što o ovom piše Tarski (vid. [251]), ali da tada 1927. on nije uvidjao značaj gornjeg rezultata, pa se verovatno zato i nije pojavio kao autor. Profesor GARETT BIRKOHOFF napomenuo je TARSKOM da bi bilo podesno da u članku [251] iznese odgovarajuće istorijske napomene u vezi sa gornjim rezultatom. Članak je predat za štampu 25.juna 1953. god. a većina rezultata dobijena je već 1939. U tom periodu na mnogim javnim predavanjima u SAD TARSKI je iznosio prethodni rezultat i njegove primene.

TARSKI je postavio i pitanje da li obrat teoreme A važi. Potvrdan odgovor dala je ANNE DAVIS [3], dobivši time jednu karakterizaciju kompletno uredjenih latisa. Navodimo taj rezultat.

TEOREMA B. (A.DAVIS [3]). Ako svaka na latisi $(0,\leqslant)$ monotono rastuća funkcija ima fiksnu tačku, tada je ta latisa kompletna.

No, mi smo primetili da se ovaj rezultat u neizmenjenom obliku ne može preneti na kompletno uredjene skupove koji nisu latise. To potvrdjujemo i sledećom činjenicom.

PRIMER IV.2.1. Neka je skup $0=\{a,b,c\}$ uredjen relacijom poretka $\leqslant$ tako da je $a\leqslant b$ i $a\leqslant c$, pri čemu su elementi b,c neuporedivi; dijagramom prikazano:



Svako rastuće preslikavanje $T:0 \longrightarrow 0$ ima fiksnu tačku.

Drugim rečima, ne postoji na ovom, samo levo kompletnom, parcijalnom uredjenom skupu rastuća funkcija koja nema fiksnih tačaka, a to znači da nije tačan sledeći iskaz u najopštenijem obliku:"Na nekompletnom uredjenom skupu 0 postoji rastuća funkcija $T:0\longrightarrow 0$ bez nepokretne tačke".

Ovaj iskaz bio bi ekvivalentan obratu teoreme A u kome bi termin "latisa" bio zamenjen terminom "uredjen skup". Gornji primer potvrdjuje da on nije tačan. Sledeći iskaz je nešto precizniji oblik teoreme Anne Davis primenjene na totalno uredjen skup, kao specijalan slučaj latise. Ovaj stav naći će primene u našim daljim razmatranjima.

TEOREMA IV.2.1. Neka totalno uredjen skup $(0,\leqslant)$ nije desno (levo) kompletan. Tada postoji izotono preslikavanje $T:0 \longrightarrow 0$ bez fiksne tačke i sa osobinom $\{x:x\leqslant T(x)\}\neq\phi(\{x:Tx\leqslant x\}\neq\phi)$.

Znači, ovo tvrdjenje važi i kada (0,) nije kompletno uredjen skup. Da bi smo dokazali ovo tvrdjenje dokazaćemo prethodno jedan pomoćni iskaz.

LEMA IV.2.1. Neka neprazan deo A totalno uredjenog skupa $(0,\leqslant)$ nema supremuma. Tada postoji relacijom $\leqslant$ dobro uredjen podskup A_0 skupa A koji nema majorantu u A.

Sada smo u mogućnosti da formulišemo i sledeće tvrdjenje.

TEOREMA IV.2.2. Za latisu, specijalno za totalno uredjen skup, $(0,\leqslant)$ da bi bila kompletna potrebno je i dovoljno da svako izotono preslikavanje $T:0 \longrightarrow 0$ ima fiksnu tačku. Za proizvoljan uredjen skup ovo je potreban ali ne i dovoljan uslov.

Inače, u terminima desno (levo) kompletno uredjen skup možemo dati još i opštije rezultate. U tom cilju formulisaćemo jednu teoremu koja prvo generalizuje teoreme Tarskog [251] i Dj. Kurepe [154] za desno (levo) kompletne parcijalno uredjene skupove. Naime, neka je F skup funkcija zajedničkog domena 0 sa slikom u delu skupa $A\subset 0$, gde za $f,g\in F$ važi jednakost $fg=gf$ tj. $f(gx)=g(fx)$ za $x\in 0$. Skup F sa ovim osobinama zoveme komutativni skup funkcija. Ovde će još biti korišćene i oznake $0_f=\{x\in 0:x\leqslant fx\}$, $0^f=\{x\in 0:fx\leqslant x\}$. Sada možemo formulisati teoremu fiksne tačke i za desno (levo) kompletno uredjene skupove, uz prethodne oznake. Inspiraciju i metod našli smo u radovima A.TARSKOG [251] DJ. KUREPE [154], koji je dokazao jednu teoremu fiksne tačke za polukompletne skupove, čime je proširio odgovarajuću teoremu A.TARSKOG.

TEOREMA IV.2.3. Neka je skup $(0 \leqslant)$ desno kompletan, F jedan komutativni skup rastućih preslikavanja skupa 0 u isti skup, i neka je $I(0,F)$ skup svih zajedničkih fiksnih tačaka ovih funkcija $f \in F$, pri čemu je skup $0^F = \{x \in 0 : x \leqslant f(x), f \in F\}$ neprazan. Tada je skup $I(0,F)$ neprazan, desno kompletno uredjen i specijalno tačka $\sup 0^F = I_M$ jeste maksimum skupa $I(0,F)$.

Inače, odavde imamo i dualno tvrdjenje kad se tačka I_M zameni tačkom $I_m = \inf 0_F = \inf\{x \in 0 : fx \leqslant x, f \in F\}$ i relacija $\leqslant$ relacijom $\geqslant$.

Koristeći dalje ovu teoremu, teoremu IV.2.1. i primer IV.2.1., možemo dati karakterizaciju desno (levo) kompletno uredjenih skupova. U tom pravcu važi sledeći iskaz:

TEOREMA IV.2.4. Za totalno uredjen skup $(0 \leqslant)$, da bi bio desno(levo) kompletno uredjen potrebno je i dovoljno da svako izotono preslikavanje $f:0 \longrightarrow 0$ za koje je $0^f \neq \emptyset (0_f \neq \emptyset)$ ima nepokretnu tačku. Za proizvoljne parcijalno kompletno uredjene skupove ovo je potreban ali ne i dovoljan uslov.

Na kraju navedimo i rezultat Dj.Kurepe.

POSLEDICA IV.2.1. (KUREPA [154],s.167). Neka je $(0,\leqslant)$ uredjen skup i $f:0 \longrightarrow 0$ monotono rastuće preslikavanje pri čemu je 0 levo kompletan i skup 0_f neprazan. Tada je skup $I(0,f)$ neprazan, uredjen i levo kompletan, pri čemu je tačka $\inf 0_f = I_m$ minimum skupa $I(0,f)$.

DOKAZI NAVEDENIH TVRDJENJA

DOKAZ LEME IV.2.1. Prema Zermelo-ovoj teoremi, postoji dobro uredjenje $\otimes$ skupa A. Na osnovu teoreme o transfinitnoj definiciji, postoji, i jednoznačno je odredjena funkcija $f:A \to \{0,1\}$ sa osobinama: 1° $f(a)=1$, gde je $a = \min A$ u sistemu $(A,\otimes)$; 2° za svako $A \ni x \otimes a, f(x)=1$ ili $f(x)=0$ prema tome da li jeste ili nije

$t \not\leqslant x$ za svako $t \otimes x$ za koje $f(t)=1$.

Zbog $f(a)=1$ skup $A_o \overset{\text{def}}{=\!=} f^{-1}(\{1\})$ $(\subset A)$ nije prazan. Za svako $x,y\in A_o$ važi

(1) $$x \mathbin{\textcircled{<}} y \Longrightarrow x \prec y .$$

Zaista, neka je sa A_1 označen skup svih elemenata $t\in A_o$ sa osobinom da (1) važi za svako $x,y\in\{u : u\in A_o \wedge u \mathbin{\textcircled{\le}} t\}$. Očigledno, $a\in A_1$. Ako je $v\in A_1$ za svako $v\in\{u : u\in A_o \wedge u \mathbin{\textcircled{<}} t\}$, gde $t\in A_o$, tada $x \mathbin{\textcircled{<}} y \Longrightarrow x\prec y$ svakako važi ukoliko $x,y\in A_o$ i $y \mathbin{\textcircled{<}} t$ (jer ovaj uslov i pretpostavka $x \mathbin{\textcircled{<}} y$ povlače $y\in A_1$ i $x,y\in\{u : u\in A_o \wedge u \mathbin{\textcircled{\le}} y\}$); u slučaju kada je, medjutim, $y=t$ i $x\in A_o$, relacija $x \mathbin{\textcircled{<}} y$ tj. $x \mathbin{\textcircled{<}} t$, povlači, s obzirom na način na koji je skup A_o definisan i na svojstvo 2^o funkcije f, $x\prec t=y$. Time je, na osnovu teoreme o transfinitnoj indukciji, dokazana jednakost $A_1=A_o$, odnosno važenje implikacije (1) za svako $x,y\in A_o$. S obzirom na dobru uredjenost relacijom $\textcircled{\le}$ skupa A_o, odatle odmah izlazi

$$(\forall x\in A_o)(\forall y\in A_o)\quad x \mathbin{\textcircled{<}} y \Longleftrightarrow x\prec y$$

a ovo znači da je skup A_o dobro uredjen relacijom $\preccurlyeq$.

Najzad, neka $x\in A$. Ovaj element ne može biti majoranta skupa A, jer bi tada bilo $x=\max A=\sup A$. Stoga skup $X \overset{\text{def}}{=\!=} \{t : t\in A \wedge x\prec t\}$ nije prazan, pa postoji $y=\min X$ u sistemu $(A,\textcircled{\le})$. Onda $x\prec y$ i važi $(\forall t\in A_o)$ $t \mathbin{\textcircled{<}} y \Longrightarrow t\preccurlyeq x\prec y$, a ovo poslednje, s obzirom na način na koji je definisan skup A_o, povlači $y\in A_o$. Dakle, skup A_o nema majorantu u A.

DOKAZ TEOREME IV.2.1. Neka totalno uredjeni skup $(O,\preccurlyeq)$ nije, na primer, desno kompletan. Tada postoji neprazan skup $A\subset O$ bez supremuma, a neka je A_o skup o kome je, u vezi sa skupom A reč u lemi. Ukoliko skup B svih majoranata skupa A nije prazan, B nema minimum, pa stoga nema ni infimum, jer bi infimum ovog skupa bio ujedno njegov minimum. (Naime, ako je b infimum skupa B, tada budući da je svako $x\in A$ minoranta za B, mora biti $(\forall x\in A)\, x\preccurlyeq b$, pa $b\in B$ a stoga $b=\min B$). U tom slučaju, primenom leme na skupu B i relaciju $\succcurlyeq$ ustanovljava se da postoji relacijom $\succcurlyeq$ dobro uredjen skup $B_o\subset B$ sa osobinom $(\forall x\in B)$ $(\exists y\in B_o)$ $y\prec x$. Ako $x\in O\setminus B$ ne može biti $(t\in A_o)$ $t\preccurlyeq x$, jer bi ovo, s obzirom na ( ), povuklo $(\forall y\in A)$ $y\preccurlyeq x$. Dakle skup $A(x) \overset{\text{def}}{=\!=} \{t : t\in A_o \wedge x\prec t\}$ ni za jedno $x\in O\setminus B$ nije prazan. Isto tako, pod pretpostavkom

$B \neq \phi$, skup $B(x) \overset{def}{=} \{t : t \in B_0 \wedge t < x\}$ nije prazan ni za jedno $x \in B$. Na osnovu prethodnog, stavljajući, prema tome da li je $B \neq \phi$ ili $B = \phi$,

$$T(x) = \begin{cases} \min A(x), & x \in 0 \setminus B \\ \max B(x), & x \in B, \end{cases}$$

ili $T(x) = \min A(x), x \in 0$, jednoznačno se u oba slučaja definiše preslikavanje $T: 0 \longrightarrow 0$. Ono očigledno nema fiksnu tačku. Ovo preslikavanje je i monotono rastuće na 0. Zaista: neka $x, y \in 0$ i $x \leqslant y$; ako $x, y \in 0 \setminus B$ imamo $A(x) \supset A(y)$ i odatle $T(x) = \min A(x) \leqq \min A(y) = T(y)$; ako $x \in A, y \in B$, tada $T(x) \in A_0$ i $T(y) \in B_0$ i stoga $T(x) \leqq T(y)$; ako, najzad, $x, y \in B$, imamo $B(x) \subset B(y)$, što povlači $T(x) = \max A(x) \leqq \max B(y) = T(y)$.

DOKAZ TEOREME IV.2.3.

Skup 0_F, kao neprazan deo desno kompletnog skupa $(0 \leqslant)$, ima u njemu supremum I_m. Za svako $x \in 0_F$ je $x \in I_m$, i odatle

$$(\forall f \in F) \ (\forall x \in 0_F) \ x \leqslant f(x) \leqslant f(I_m).$$

To znači da je, za bilo koje $f \in F$, $f(I_m)$ majoranta skupa F, tako da imamo

$$(2) \qquad (\forall f \in F) \ I_m \leqslant f(I_m)$$

Odavde, $(\forall g \in F) \ I_m \leqslant g(I_m)$, i dalje, sa proizvoljno uzetim $f \in F, (\forall g \in F)$ $f(I_m) \leqslant f(g(I_m)) = g(f(I_m))$, što znači da $(\forall f \in F) \ f(I_m) \in 0_F$,

pa

$$(3) \qquad (\forall f \in F) \quad f(I_m) \leqslant I_m.$$

Iz relacija (2) i (3) izlazi $I_m = f(I_m)$. DAkle, $I_m \in I(0,F) \subset 0_F$, što povlači $I_m = \max I(0,F)$.

Treba još ustanoviti da je skup $I(0,F)$ desno kompletno uredjen. Neka $\phi \neq A \subset I(0,F)$. Skup A ima u $(0 \leqslant)$ supremum a. Prema prethodno ustanovljenom, I_m je majoranta skupa A, pa $a \in I_m$. Stoga skup

$$|\bar{a}, I_m| = \{x : x \in 0 \wedge a \leqslant x \leqslant I_m\}$$

nije prazan. Ovaj skup je relacijom $\leqslant$ kompletno uredjen. Zaista, svaki njegov neprazan deo C ima supremum c u $(0 \leqslant)$, koji, budući da su a i I_m redom majoranta i minoranta za C, pripada skupu $[a,I_m]$; jasno je da je c onda supremum skupa C i u $([a,I_m],\preccurlyeq)$. Sistem $([a,I_m],\preccurlyeq)$ je, dakle, desno kompletan, pa onda i kompletan, jer ima minimum a. Zbog toga i na osnovu već dokazanog svojstva desno kompletnog sistema primenjenog na sistem $([a,I_m],\succcurlyeq)$, skup $B \overset{def}{=} I(0,F) \cap [a,I_m]$ ima u $([a,I_m],\preccurlyeq)$ minimum b. Zbog $a,b \in I(0,F)$ i $a \preccurlyeq b$, b je majoranta skupa A u $(I(0,F),\preccurlyeq)$. Ako element x ima isto svojstvo, tada je $a \preccurlyeq x \preccurlyeq I_m$, tj. $x \in [a,I_m]$, i stoga $b \preccurlyeq x$. Dakle, b je supremum skupa A u uredjenom sistemu $(I(0,F),\preccurlyeq)$.

IV.3. NEKI REZULTATI FIKSNE TAČKE NA UREDJENIM SKUPOVIMA I NEKE PRIMENE

U ovom poglavlju u prvom koraku dokazujemo jednu teoremu fiksne tačke za uredjene skupove uz pomoć aksiome izbora (te toliko kontraverzne ideje) izvodeći usput neke poznate rezultate i specijalno jednu čuvenu teoremu W.KIRK-a i CARISTI-a [161] za kompletne metričke prostore. Ovu teoremu dokazivao je i FELIX BROWDER posebno, u knjizi [26], naglašavajući da može biti veoma korisna u budućem razvoju nelinearne funkcionalne analize. To na neki način daje i težinu našem uopštenju.

Dalje ćemo izložiti još neke rezultate zasnovane na nekim našim ranijim idejama iz radova [261], [263]. Posle toga (pored niza posledica) dokazujemo jedan stav fiksne tačke za kompletno uredjene skupove sa sva tri karakteristična svojstva Banach-a.

IV.3.1. JEDNA TEOREMA FIKSNE TAČKE ZA FAMILIJU PRESLIKAVANJA I NEKE POSLEDICE

TEOREMA IV.3.1. Neka je F familija preslikavanja parcijalno uredjenog skupa $(0,\preccurlyeq)$ u samog sebe, gde svaki lanac u 0 ima majorantu (minorantu), sa svojstvom

$$x \preccurlyeq f(x) \quad (f(x) \preccurlyeq x) \quad \text{za sve } f \in F \text{ i svako } x \in 0.$$

Tada familija F ima zajedničku fiksnu tačku za sva preslikavanja $f \in F$.

Zanimljivo je da smo u knjizi BROWN i PAGE:

Elements of functional Analysis našli rezultat koji je posledica ovog rezultata.

POSLEDICA IV.3.1. (ZERMELO [31], s.12.). Neka je neprazni skup X parcijalno uredjen relacijom poretka $\leqslant$, i $f:X \to X$ sa svojstvima:

(a) Postoji element $\theta \in X$ tako da je $\theta \leqslant x$ za sve $x \in X$,

(b) Svaki neprazan linearno uredjen podskup od X ima supremum.

(c) $x \leqslant f(x)$ za sve $x \in X$,

(d) ako $x,y \in X$ i $x \leqslant y \leqslant f(x)$, tada je ili $x=y$ ili $y=f(x)$.

Tada postoji element $\xi \in X$ sa svojstvom $f(\xi)=\xi$.

Ideja dokaza potiče od ZERMELA iz 1908. i teorema je dokazana bez aksiome izbora. No, uz pomoć ovog rezultata dokazana je poznata ZORN-ova lema: Neka je X neprazan parcijalno uredjeni skup sa osobinom da svaki neprazan lanac u X ima majorantu. Tada X ima maksimalni element.

Sada je zanimljivo istaći, da su nezavisno od aksiome izbora, ZORN-ova lema (ZL), teorema IV.3.1.(T.IV.3.1.) i posledica IV.3.1.(P.IV.3.1.) medjusobno ekvivalentne s obzirom na važenje implikacija

$$\text{ZL} \Longrightarrow \text{T.IV.3.1.} \Longrightarrow \text{P.IV.3.1.} \Longrightarrow \text{ZL},$$

od kojih su prva i druga evidentne, a treća je pomenuta u prethodnom komentaru.

POSLEDICA IV.3.2.(SMITSON [24]) Neka je F komutirajuća familija rastućih preslikavanja uredjenog skupa X u samog sebe sa svojstvom da, za svako $f \in F$ za koje $t \leqslant f(t)$ za svako $f \in F$, svaki lanac koji sadrži t ima majorantu. Tada postoji tačka $\xi \in X$ sa svojstvom $f(\xi)=\xi$ za sve $f \in F$.

POSLEDICA IV.3.3.(KIRK-CARISTI [16]) Neka je T preslikavanje kompletnog metričkog prostora (X,ρ) u samog sebe.

ko postoji jedna sa donje strane poluneprekidna funkcija ψ oja preslikava X u skup R_+^0 takva da za svako $x\in X$ važi nejednakost

$$\rho[x,Tx]\leq\psi(x)-\psi(Tx)$$

ada preslikavanje T ima fiksnu tačku.

Umesto ove posledice, dokazaćemo jednu opštiju, oja uključuje i ovo tvrdjenje.

POSLEDICA IV.3.4. Neka je F familija preslikavanja kompletnog nepraznog metričkog prostora (X,ρ) u samog sebe. ko postoji jedna sa donje strane poluneprekidna funkcija ψ koja preslikava X u skup R_+^0 i takva je da za svako $x\in X$ i svako $f\in F$ važi nejednakost

$$\rho[x,fx]\leq\psi(x)-\psi(fx),$$

tada familija F ima zajedničku fiksnu tačku.

DOKAZ NAVEDENIH REZULTATA

DOKAZ TEOREME IV.3.1. Prema Zorn-ovoj lemi, postoji maksimalni (minimalni) element x_0 skupa X. Za $f\in F$ je onda $x_0\leqslant f(x_0)$ $(f(x_0)\leqslant x_0)$, a pošto je x_0 maksimalni (minimalni) element skupa X biće i $f(x_0)\leqslant x_0$ $(x_0\leqslant f(x_0))$, što zajedno daje relaciju $f(x_0)=x_0$. Ovim je teorema dokazana.

DOKAZ POSLEDICE IV.3.2. Kako skup A svih $x\in X$, sa $x\leqslant f(x)$ za sve $f\in F$ postaje jedan uredjen skup indukovan predhodnim uredjenjem, dovoljno je zato dokazati samo da svaki lanac L u A ima minorantu, u ovom slučaju. Pošto je L lanac u X, on onda ima infimum $a\in X$. Neka je $f\in F$. Tada za svaki $x\in L$, imamo, zbog monotonije, da je $f(a)\leqslant f(x)\leqslant x$, pošto je $a\leqslant x$. Tako dobijamo da je $f(a)$ minoranta od L, pa otuda je i $f(a)\leqslant a$. Znači da je i $a\in A$.

DOKAZ POSLEDICE IV.3.4. U prvom koraku definišimo relaciju poretka $\leqslant$ u skupu X(kompletan metrički prostor), na sledeći način:

$$x\leqslant y \overset{def}{\Longleftrightarrow} \rho[x,y]\leq\psi(y)-\psi(x),\ (x,y\in X).$$

Posle ovoga neposredno se proverava da je prethodnim definisana relacija poretka $\leqslant$ u skupu X i da je $f(x)\leqslant x$, za sve $f\in F$ i za svako $x\in X$. Neka je $t\in X$ i neka je L jedan lanac u $(X,\leqslant)$ koji sadrži t. Neka je dalje $\alpha=\inf\{\psi(x)\,|\,x\in L\}$. Ako je za neko $a\in L$, $\psi(a)=\alpha$, tada je a minoranta za L. Naime, ako je $x\leqslant a$ za neko $x\in L\setminus\{a\}$, tada je

$$\rho[x,a]\leq\psi(a)-\psi(x)\leq 0 \Longrightarrow \rho[x,a]=0,$$

a to je kontradikcija. Predpostavimo da je $\psi(x)\neq\alpha$ za svako $x\in L$. Tada, za svako $x\in L$ i svako $n\in N$, skup $A(n,x)$ svih $y\in L$ sa osobinama $y\leqslant x$ i $\alpha<\psi(y)<\alpha+1/n$ nije prazan. Naime, postoji $y\in L$ koji zadovoljava prethodnu nejednakost, pa tada $y\in A(n,x)$ ukoliko je $y\leqslant x$. Ako je obrnuto $x\leqslant y$, tada imamo

$$0\leq\rho[x,y]\leq\psi(y)-\psi(x),$$

pa dobijamo

$$\alpha<\psi(x)\leq\psi(y)<\alpha+1/n,$$

što znači da je $x\in A(n,x)$. Neka je dalje I funkcija izbora iz familije svih nepraznih podskupova lanca L (aksiom izbora važi). Tada na osnovu poznate teoreme indukcije (vid. MARDEŠIĆ [159]) postoji niz $\{x_n\}$ iz L takav da je

$$x_0=t,\ x_{n+1}=I(A(n,x_n)),\ n\in N.$$

Pošto je $x_{n+1}\leqslant x_n$ za sve $n\in N$, sledi da je

$$\sum_{n=0}^{m}\rho[x_{n+1},x_n]<\psi(t) \text{ za sve } m\in N, \text{ i otuda}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\rho[x_{n+1},x_n]<+\infty.$$

Kako je prostor kompletan, sledi da $x_n \longrightarrow \xi\ (n\longrightarrow\infty)$, sa $\xi\in X$. Neka je sada $x\in L$. Tada se može naći $m\in N$, takvo da je $\psi(x_m)<\alpha+1/m<\psi(x)$. Kako su x i x_m iz lanca L, sledi da je $x_m\leqslant x$. Otuda je

$$\rho[x_n,x]+\psi(x_n)\leq\psi(x), \text{ za sve } n\geq m.$$

Odavde (funkcija na levoj strani nejednakosti je poluneprekidna sa donje strane) sledi i nejednakost

$\rho[\xi,x]+\psi(\xi)\leq\psi(x)$ tj. ξ x.

Ovo pokazuje da je ξ minoranta lanca L, što je i trebalo dokazai.

IV.4. JOŠ NEKI REZULTATI, ZAPAŽANJA I PRIMENE

Navedimo prvo jednu propoziciju, koju smo u radovima [252], [263] dokazali za totalno uredjene skupove. Ovde taj rezultat prenosimo na latise.

PROPOZICIJA IV.4.1. Neka je O latisa uredjena relacijom $\leqslant$, preslikavanje $f:O^k \longrightarrow O(k\in N)$ monotono opadajuće, pri čemu važi uslov:

(1) t uporedivo sa $f(t,\ldots,t) \Longrightarrow (\forall u\in O)$t uporedivo sa u.

Tada za proizvoljne $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ važe sledeće implikacije:

(a) $\xi\leqslant f(\xi,\ldots,\xi) \Longrightarrow \xi\leqslant \sup\{\lambda_1,\ldots,\lambda_k f(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)\}$,

(b) $f(\xi,\ldots,\xi)\leqslant\xi \Longrightarrow \inf\{\lambda_1,\ldots,\lambda_k,f(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)\}\leqslant\xi$,

(c) Specijalno, $\xi=f(\xi,\ldots,\xi) \Longrightarrow$

(2) $\inf\{\lambda_1,\ldots,\lambda_k,f(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)\}\leqslant\xi\leqslant\sup\{\lambda_1,\ldots,\lambda_k,f(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)\}$.

Napomenimo da zajedno sa odgovarajućim kvantifikovanjem tvrdjenja (a), (b) i (c) ove propozicije daju redom sledeće zanimljive zaključke koji su ujedno njihovi ekvivalentni oblici:

(a') $\xi\leqslant f(\xi,\ldots,\xi)\Longrightarrow\xi\leqslant \inf\limits_{\lambda_1,\ldots,\lambda_k\in O} \sup\{\lambda_1,\ldots,\lambda_k,f(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)\}$,

(b') $f(\xi,\ldots,\xi)\leqslant\xi \Longrightarrow \sup\limits_{\lambda_1,\ldots\lambda_k\in O} \inf\{\lambda_1,\ldots,\lambda_k,f(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)\}\leqslant\xi$,

(c') $\xi= f(\xi,\ldots,\xi) \Longrightarrow$

$$\sup\limits_{\lambda_1,\ldots,\lambda_k\in O} \inf\{\lambda_1,\ldots\lambda_k,f(\lambda_1,\ldots\lambda_k)\}\leqslant\xi\leqslant \inf\limits_{\lambda_1,\ldots,\lambda_k\in O} \sup\{\lambda_1,\ldots,\lambda_k,f(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)\}$$

Sa druge strane, specijalno kada se radi o totalno uredjenom skupu 0, zanimljiva je na neki način karakterizacija skupa tačaka koje imaju osobinu (2). Naime, važi sledeće tvrdjenje.

PROPOZICIJA IV.4.2. Neka je skup 0 totalno uredjen relacijom poretka $\leqslant$, i preslikavanje $f:0^k \longrightarrow 0\,(k\in N)$ opadajuće. Tada je tačna sledeća ekvivalencija:

$$\xi=\min\{x:f(x,\dots,x)\leqslant x\}\vee\xi=\max\{x:x\leqslant f(x,\dots,x)\} \Longleftrightarrow$$
$$(3)\qquad (\forall t\in 0)\min\{t,f(t,\dots,t)\}\leqslant\xi\leqslant\max\{t,f(t,\dots,t)\}.$$

Iz ovog tvrdjenja kao direktna posledica sledi da:

1) broj tačaka $\xi\in 0$ sa svojstvom (3) može biti 0,1 ili 2. Sem toga:

2) Svaki od ovih slučajeva može se realizovati.

3) Specijalno, ako je 0 u smislu poretka svuda gust skup tačaka onda je broj tačaka $\xi\in 0$ sa osobinom (3) 0 ili 1, a

4) ako skup 0 ima svojstvo potpunosti (da za svaki DEDEKIND-ov presek donja klasa ima maksimum ili gornja klasa ima minimum) broj tačaka je 1 ili 2.

5) Kada je $\xi\in 0$ fiksna tačka preslikavanja $f:0^k\longrightarrow 0$ (u smislu da je $f(\xi,\dots,\xi)=\xi$) tada je ξ tačka osobine (3).

Sada, koristeći prethodna tvrdjenja možemo formulisati teoremu koja ima sva tri karakteristična svojstva Banach-ovog stava. Ovaj stav saopštili smo u Matematičkom institutu (vid. [261]). U magistarskom radu [263] ovu ideju samo smo nagovestili.

Ovde, za preslikavanje $f:0^k \longrightarrow 0\,(k\in N)$ iteraciju $f^n\,(n\in N)$ definišemo na sledeći način:

$$f^n \stackrel{\text{def.}}{=\!=} f\psi^{n-1}\ (n=1,2,\dots),$$

gde je preslikavanje $\psi:0^k \longrightarrow 0^k\,(k\in N)$ definisano sa

$$\psi:(t_1,t_2,\dots,t_k) \longrightarrow (t_2,\dots,t_{k+1}),$$

$$t_{k+1}=f(t_1,\dots,t_k),\ t_i\in 0.$$

TEOREMA IV.4.1. Neka je skup O kompletno uredjen relacijom poretka $\preccurlyeq$ i preslikavanje $f:O^k \longrightarrow O (k\in N)$ monotono opadajuće i sa osobinom $f\preccurlyeq f^2 \vee f^2 \preccurlyeq f$. Tada važi sledeće:

(a) Niz (x_n) definisan sa

(4) $$x_{n+k}=f(x_n,\ldots,x_{n+k-1}),(n=1,2,\ldots)$$

za proizvoljne početne vrednosti konvergira na skupu O snabdevenom uredjajnom topologijom.

(b) Kada je f neprekidno preslikavanje u smislu uredjajne toplogije na O, tada niz (4) konvergira ka fiksnoj tački $\xi\in O$ preslikavanja $f:O^k \longrightarrow O (k\in N)$ u smislu da je $\xi=f(\xi,\ldots,\xi)$. Ova tačka je i jedinstvena.

(c) Za tačku $\xi\in O$ važi nejednakost

$$\inf\{x_n,\ldots,x_{n+k}\}\preccurlyeq\xi\preccurlyeq\sup\{x_n,\ldots,x_{n+k}\},\ n\in N.$$

Napomenimo, ovde da se uslov $f\preccurlyeq f^2$ ili $f^2\preccurlyeq f$ može zameniti sa restrikovanijim uslovom, da on važi kombinovano u smislu da je za neke $x\in A\subset O$ $f\preccurlyeq f^2$, i za $x\in O\setminus A$ je $f^2\preccurlyeq f$. Ovo ima naročito praktične svrhe.

POSLEDICE.

PRIMER IV.4.1. Neka je preslikavanje $A:R \longrightarrow R$ monotono opadajuće. Tada za proizvoljno $\lambda\in R$ važi relacija

$$(\forall\xi\in R)(\xi=A\xi\Longleftrightarrow \min\{\lambda,A(\lambda)\}\leq\xi\leq\{\max\{\lambda,A(\lambda)\}\})$$

POSLEDICA IV.4.1. (S.PREŠIĆ [204]) Neka je skup E totalno uredjen relacijom $\preccurlyeq$, a $E,\mho(x)$ jednačina koja ima rešenje ξ, $\xi\succ a$ i preslikavanje $g(t_1,\ldots,t_k)$ definisano za $t_i\succ a$ sa svojstvima:

(a) g je opadajuće preslikavanje i

(b) $x\succ a \Longrightarrow (\mho(x)\Longleftrightarrow x = g\ (x,\ldots,x))$.

Tada rešenje jednačine ξ zadovoljava uslov

$$\xi \leq \max\{\lambda_1,\ldots,\lambda_k,g(\lambda_1,\ldots,\lambda_k)\},$$

za proizvoljne $\lambda_1,\ldots,\lambda_k \in E, \lambda_i > a (1 \leq i \leq k)$.

POSLEDICA IV.4.2. Neka je α pozitivan koren jednačine

$$x^n=a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_o \quad (a_i \in R_+;\ i=o,1,\ldots,n-1)$$

i neka su $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1}$ proizvoljni nenegativni brojevi. Tada je

$$\min\{\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1},a_{n-1}+a_{n-2}\lambda_1^{-1}+\ldots+a_o\lambda_{n-1}^{1-n}\} \leq \alpha \leq$$

$$\leq \max\{\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1},a_{n-1}+a_{n-2}\lambda_1^{-1}+\ldots+a_o\lambda_{n-1}^{1-n}\}.$$

Navedimo sada neka tvrdjenja, koja se dobijaju kao direktne posledice prethodnih teorema. Pored strukturalnih svojstava skupa 0 i opšteg topološkog odnosa, koji se opisuju propozicijama IV.4.1. i IV.4.2. (kao i ranijim teoremama) ova tvrdjenja mogu korisno poslužiti i u primenama.

POSLEDICA IV.4.3. Neka je $f:R^n \longrightarrow R (n \in N)$ rastuće i homogeno preslikavanje. Tada, da jednačina $x^n=f(1,x,\ldots,x^{n-1})$ ima jedinstveno rešenje $\xi \in R$ dovoljno je da je preslikavanje f neprekidno i da za proizvoljne $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in R$ važe nejednakosti

$$\min\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n,f(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\} \leq \xi \leq \max\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n,f(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\},$$

a potrebno je da važe ove nejednakosti.

Dalje navedimo još jednu propoziciju koja direktno sledi iz naših propozicija IV.4.1. i IV.4.2, o granicama modula nula polinoma, a koja na ovaj način dopunjuje t.zv. metodu monotonih funkcija za nalaženje korena polinoma. Ova propozicija daje potrebne i dovoljne uslove za egzistenciju korena jednačine, a sadržaće i rezultat grčkog matematičara S.ZERVOS-a [281], kojim je on izveo niz poznatih rezultata o granicama nula polinoma, a koje su dali MONTEL, Landau, CAUCHY, Jensen, Birchoff, Marković, Carmichael, Walch, D.Simeunović, Kojima i drugi.

POSLEDICA IV.4.4. Neka su $I_1, I_2, \dots, I_n$ skupovi indeksa i $\theta_{ij} (\geqq 0)$ realni brojevi koji zadovoljavaju uslov

$$\sum_{ij \in I_j} \theta_{ij} = j - t \quad (j=1,2,\dots,n;\ 0<t<1).$$

Broj $\xi \in R$ je jedinstveno rešenje algebarske jednačine

$$x^n = a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \quad (a_1, \dots, a_n \geqq 0)$$

ako i samo ako je

$$\min\left\{M, \left(\frac{\sum_{j=1}^{n} a_j}{\prod_{i_j \in I_j} M_{ij}^{\theta_{ij}}}\right)^{1/t}\right\} \leqq \xi \leqq \max\left\{M', \left(\frac{\sum_{j=1}^{n} a_j}{\prod_{i_j \in I_j} M_{ij}^{\theta_{ij}}}\right)^{1/t}\right\},$$

gde je $M=\max\{M_{ij}\}$.

DOKAZI

DOKAZ PROPOZICIJE IV.4.1. Neka je $\xi \preceq f(\xi)$ i $\lambda = \sup\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ pri čemu su elementi $\lambda_i (i=1,\dots,k)$ proizvoljno uzeti na skupu O. Za $\xi \preceq \lambda$ dobija se

$$\xi \preceq \sup\{\lambda_1, \dots, \lambda_k, f(\lambda_1, \dots, \lambda_k)\},$$

a ako je $\lambda \preceq \xi$, tada

$$\xi \preceq f(\xi, \dots, \xi) \preceq f(\lambda_1, \dots, \lambda_k),$$

odakle sledi (a). Kažimo da je uporedivost elemenata ξ i λ moguća jer uslov (1) za posledicu ima tu činjenicu. Da bi smo dokazali tvrdjenje pod (b) dovoljno je relaciju poretka $\preceq$ intempretirati kao relaciju $\preceq_1 \overset{\mathrm{def}}{=} \succeq$, sup zameniti sa inf, pa primenom tvrdjenja (a) i principa dualnosti sledi tvrdjenje (b).

Tvrdjenje tačke (c) izlazi neposredno iz tvrdjenja prethodne dve tačke.

DOKAZ PROPOZICIJE IV.4.2. ($\Longrightarrow$) Neka je $A=\{x:x\leqslant f(x,\dots,x)\}$, $B=\{x:f(x,\dots,x)\leqslant x\}$, i onda $\xi=\max A$ ili $\xi=\min B$. Sada, neka je $x\in A$, $y\in B$ i $y<x$. Tada $f(y,\dots,y)\leqslant y<x\leqslant f(x,\dots,x)$, tj. $f(y,\dots,y)<f(x,\dots,x)$ u suprotnosti sa opadanjem funkcije f. Dakle, $(\forall x\in A)$ $(\forall y\in B)$ $x\leqslant y$. Neka je $\xi=\max A$. Tada, ako $t\in A$, imamo $t\leqslant\xi$ i odatle je $\min\{t,f(t,\dots,t)\}\leqslant x$, i zatim $\max\{t,f(t,\dots,t)\}=f(x,\dots,x)\geqslant\geqslant f(\xi,\dots,\xi)\geqslant\xi$; ako $t\in B$, imamo $\xi<t$ i odatle $\xi\leqslant\max\{t,f(t,\dots,t)\}$; za $\xi<t$ imamo i $f(t,\dots,t)\leqslant f(\xi,\dots,\xi)\leqslant\xi$ i odatle $\min\{t,f(t,\dots,t)\}\leqslant\xi$. Slučaj $\xi=\min A$ simetričan je prethodnom.

($\Longleftarrow$). Neka tačka $\xi\in 0$ ima osobinu (3). Tada $x\in A$ povlači da je $x\leqslant f(x,\dots,x)$ tj. $x=\min\{x,f(x,\dots,x)\}\leqslant\xi$, a $x\in B$ implicira $f(x,\dots,x)\leqslant x$, tj. $x=\max\{x,f(x,\dots,x)\}\geqslant\xi$. Dakle, $(\forall x\in A)$ $x\leqslant\xi$ i $(\forall x\in B)\,\xi\leqslant x$. Prema tome, budući da $(\forall x\in A)$ $(\forall y\in B)$ $x\leqslant y$, imamo sledeće: ako $\xi\in A$, tada je $\xi=\max A$; ako $\xi\in B$, tada $\xi=\min B$. Stoga, ako i tačka $b>\xi$ zadovoljava uslov (3), mora biti $\xi=\max A$, $b=\min B$, i nijedna treća tačka ne može imati osobinu (3).

NEKE NAPOMENE

Da mogu postojati dve različite tačke osobine (3) dokazuje sledeći primer: $0=\{1,2\}$, $1<2$, $f(1)=2$, $f(2)=1$; u ovom slučaju obe tačke 1 i 2 poseduju svojstvo (3). Medjutim, ako je $(0,\leqslant)$ svuda gust skup$((\forall x,y\in 0)\ (x<y\Longrightarrow(\exists z\in 0)\,x<z<y))$, tada može postojati najviše jedna tačka sa osobinom (3).

Navedimo sada primer, koji pokazuje da tačke osobine (3) ne moraju biti fiksne tačke. Neka je preslikavanje

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqq x\leqq 1/2\\ 0, & 1/2<x\leqq 1\end{cases}$$

tada na skupu $0=[0,1]$ tačka 1/2 ima osobinu (3) ali nije fiksna tačka preslikavanja $f:[0,1]\longrightarrow[0,1]$.

DOKAZ TEOREME IV.4.1. Preslikavanje $f:0^k\longrightarrow 0\ (k\in N)$ je opadajuće, pa s obzirom na definisane iteracije i prethodne osobine sledi nejednakost

$$x_{n+k+1}=f(x_{n+1},\dots,x_{n+k})=f\psi(x_n,\dots,x_{n+k-1})$$

$$=f^2(x_n,\dots,x_{n+k-1})\leqslant f(x_n,\dots,x_{n+k-1})=x_{n+k},$$

ili nejednakost $x_{n+k}\leqslant x_{n+k+1}$ za sve $n\in N$. Otuda niz (x_n) konvergira na skupu $(0,\leqslant)$. Kada je f neprekidno preslikavanje, tada ono ima i fiksnu tačku

$$\xi=\lim x_{n+k}=f(\xi,\dots,\xi)$$

Prema propoziciji IV.4.1. sledi tvrdjenje pod (c). Na osnovu njega, fiksna tačka preslikavanja f je jedinstvena.

LITERATURA

1. ASSAD,N.A. : A fixed point theorem for weakly uniformly strict contractions, Canad, Math.Bull. 16,1973,15-18

2. ASSAD,N.A. and KIRK,W.A.: Fixed point theorems for set-valued mapping of contractive type, Pacific J.Math, 43,1972,553-562

3. ANNE C.Davis, : A characterization of complete lattices, Pacific J. Math. 5(1955),s.s.311-319.

4. ACHARI, J. : Non-unique fixed points in L-spaces, Publ. Inst.Math., T.21(35),1977,5-7

5. ALTMAN,M. : A Fixed Point Theorem in Banach Spaces, Bull. Acad.Polon.Sci,Cl.III,2,1957,89-92

6. ALJANČIĆ,S. : Uvod u realnu i funkcionalnu analizu, Gradjevinska knjiga, Beograd, 1968

7. ANTONOVSKIJ,M., BOLTJANSKI,V., SARYMSAKOV,T.: Topologičeskie polupolja, Taškent, 1960

8. AMANN,H. : Fixed Points of Asymptotically Linear Maps in Ordered Banach Spaces, Journal of Functional Analysis, Vol.14,No.2,October,1973, 162-171

9. — : Multiple positive fixed points of asymptotically linear maps. Journal of Functional Analysis,17,1974,174-213

10. — : Supersolutions, Monotone Iterations and Stability,Journal of Differential Equations, Vol.21,July,1976,363-377

11. - : Fixed point equations and non-linear eigenvalue problems in ordered Banach spaces, SIAM Rev,18,No.4,1976,620-709

12. ADAMOVIĆ D. : Matematički vesnik 8(23)sv.2,1971,problem 236

13. ABIAN S.,BROWN A.: A theorem on partially ordered sats, with applications to fixed point theorems, Can.J. Math. 13(1961),78-82

14. ASPLUND,E.,NAMIOKA,J.:A geometric proof of Ryll-Nardzewski's fixed point theorem,Bull.Amer.Math.Soc., 73(3),1967,443-445.

15. BAILEY D. : On contractive and expansive mappings, Dissert.Abstracts,vol. 26,No. 4,2332

16. BANACH S. : Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur applications aux equationa integrales,Fund.Math. 3(1922)133-181

17. BRYANT V. : A remark on a fixed point theorem for iterated mappings,Amer.Math.Monthly,75 (1968) No. 4,399-400

18. BELL,H. : On fixed point properties of plane continua Trans.Amer.Math.Soc., 128,1967-539-548

19. BIANCHINI R. : Su un probl. Boll.Un.Math.Ital. 5(1972),103-108.

20. BIRKHOFF,G. : Lattice theory, Moskva, 1952

21. BIRKHOFF,G.D.and KELLOG,O.D.: Invariant points in function space,Trans.Amer.Math.Soc., 23,1922,96-115

22. BIRKHOFF G., : Lattice theory, Amer. Math.Soc. Colloq. Publ. vol.25,New York, 1948.

23. BOCSAN,G. : On some fixed point theorem in probabilistic metric spaces, Math.Balk.,4,11,1974-67-70

24. BOYD,D.W., WONG,J.S.W.: On nonlinear contractions Proc.Amer. Math.Soc., 20,No.2, 1969,458-464

25. BROWDER,F.E. : On a generalization of the Schauder fixed point theorem,Duke Math.J.,26,1959,291-303

26. BROWDER F. : On the cowergence of succesive anproximations for non linear functional equations Indag.Math.30,68.

26. BROWDER,F.E. : Another generalization of the Schauder fixed point theorem,Duke Math.J,m 32,1965,399-406

27. — : Nonoxpansive nonlinear operators in a Banach space,Proc.Nat.Acad,Sci.54,1965,1041-1044

28. — : A further generalization of the Schauder fixed point theorem,Duke Math.J., 32,1965, 575-578

29. BOYD D.,WONG JAMES S.W.: On nonlinear contractions, Proc. Amer. Math.Soc., 20(1969),458-464

30. — : Topology anl nonlinear functional equations, Studia Math., 31,1968-189-204

31. BROWN A.,PAGE A.:Elements of functional analysis, London,1970, p.390.

32. BROWDER,F.E. : Fixed point theorems for multivalued mappings with compact attractors, Fixed Point Theory and Its Applications, Edited by Srinivasa Swaminathan, Academic Press, 1976,1-11

33. _ : On a theorem of Caristi and Kirk, Fixed Point Theory and Its Applications, Edited by Srinivasa Swaminathan, Academic Press, 1976, 79-89

34. BROWDER,F.E.,and NUSSBAUM,R.: The topological degree for non-compact nonlinear mappings in Banach spaces, Bull.Amer.Math.Soc.74,1968,671-676

35. BROUWER,L.E.J. : Uber Abbildung von Mannigfaltigkeiten, Math. Ann.,71,1910,97-115

36. BROUWER L. : Uber Abbildung von mannigfaltigkeiten, Math. Ann. 71(1911),97-115

37. BOHL,E. : Monotonie: Lösbarkeit und Numerik bei Operatorgleichungen, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York,1974

38. BOHNENBLUST,H.F.and KARLIN,S.: On a theorem of Ville, Contributions to the Theory of Games, Princeton, 1950,155-160

39. BELLUCE L., KIRK W.: Fixed point theorems for families of contraction mappings, Paci.J.Math. 18(1966) 213-217

40. _ : Some fixed point theorems in metric and Banach spaces, Canad.Math.Bull. 12(1969) 481-491

41. BERTOLINO M. : Primedba u vezi sa jednim stavom Mihaila Petrovića, Vesnik Društva matematičara i fizičara NRS.,X,Beograd 1958

42. БАРБАШИН Е.А. : Введение В теориос истоичивости, Изд. "Наука", Москва 1967

43. BAKHTIN I.A. : Existence of common fixed points for Abelian families od discontinuous operators, Sibirsk. Matem.Zh.13(1972),243-251

44. BIBBY JOHN. : Axiomations of the average and a further generalisation of monotonic sequences, Proc. Edinburgh Math. Soc.17(1973),62-65

45. BROWN T.,COMFORT W.: New methods for expansion and contraction maps in uniform spaces,Proc.Amer. Math:Soc.,11(1960),483-486

46. CELLINA,A. and LASOTA,A.: A new approach to the topological degree for multivalued mappings,Accad.Naz. Lincei rend.Cl.Sci.Fiz.Mat.Natur., 47, 1969,434-440

47. CHATTERJEA,S.K.: Fixed point theorems for a sequence of mappings with contractive iterates,Publ.Inst. Math., 14(28),1972,15-18

48. CHEW,KIM-PEU and TAN,KOK-KEONG: Remetrization and family of commuting contractive type mappings, Fixed Point Theory and Its Applications, Edited by Srinivasa Swaminathan,Academic Press,1976, 41-50

49. COLLATZ,L. : Funktionalanalysis und Numerische Matematik, Springer Verlag,1964

50. COLLATZ L. : Funktionanalysis und numerische Matematik, Grundlehren der Math.Wiss.Band 120, Springer, Berlin 1968

51. COVITZ,H.,NADLER,S.: Multivalued contraction mappings in generalized metric spaces,Isreal J.Math., 8,1970, 5-11

52. CRANDALL,M.G. and PAZY,A.: Semi-groups of non-linear contractions and dissipative sets,Journ.Functional Anal., 3,1969,1-34

53. CRONIN,J. : Fixed point and topological degree in nonlinear analysis, Amer.Math.Soc., New York, 1964

54. CACCIPPOLI R. : Sugli elementi transformationi funzionali, Atti Accad.Math. Lincei (6) 13(1931)498-502

55. CHANDLER R. : A generalised contraktion principle, Fund. Math., 65(1969)193-195

56. CHEORGHIU N. : Teorema contractiilor in spati uniforme, Studii si cercetari Mat.Acad.RSR,19(1967) 119-122

57. ĆIRIĆ,LJ. : Generalized contractions and fixed point theorems,Publ.Inst.Math.,T. 12(26),1971 19-26

58. ĆIRIĆ LJ. : Fixed points for generalized multi-valued contractions,Mat.vesnik 9(24),1972,265-272

59. — : Fixed point theorems for mappings with a generalized contractive iterate at a point, Publ.Inst.Math.13(27),1972-11-16

60. — : Fixed and periodic points of almost contractive operators,Math.Balk.,1973,33-43

61. — : On some maps with a nonunique fixed point, Publ.Inst.Math.T 17(31),1974-52-58

62. — : On a family of contractive maps and fixed points,Publ.Inst.Math.,T 17(31),1974,45-51

63. — : Fixed and periodic points for a class of contractive operators,Publ.Inst.Math.,T 18 (32),1975,57-69

64. — : On contraction type mappings, Math.Balk. 1,1971,52-57

65. — : A generalization of Banach's contraction principle,Proc.Amer.Math.Soc., 45,1974, 267-273

66. — : Quasi-contraction in Banach spaces, Publ. Inst.Math.,T 21(35),1977,41-48

67. — : Postojane i periodične tačke kontraktivnih preslikavanja, Doktorska teza,Beograd,1970

68. — : Fixed point theorems in topological spaces, Topology and Its Application,Beograd,1973

69. DANEŠ,J. : Some fixed point theorems,CMUC,9,1969, 223-235

70. DELFINA ROUX, SOARDY P., : Alcune generalizacioni del Teorema di Browder -Göhde - Kirk, Lincei.Rend.Sc. Fis.Mat.,e Mat., Vol.52(1972),682-688

71. ДЕЛАНУ.А.,МАРИНЕСНУ,Г.: Теорема о неподвижнои точке и неланних функци ц в локаллно влпуклллц пространствац, Revue de Math.pures et appliq.8,1963,91-99

72. DE MARR,R. : Common fixed points for commuting contraction mapping,Pacif.J.Math., 13,1963,1139-1141

73. DEVIDE,V. : On monotone mappings of complete lattice,Fund. Math., 53-1964,147-154

74. DOLD,A. : Fixed point index and fixed point theorem for euclidean neighbourhood retracts,Topology 4, 1965,1-8

75. DYJAK C. : On the depedence of tne continrous solutions of a functional equation on arbitrary function, Publ.I Inst. Math. Beograd,19 (33),1975,51-53

76. DOTSON,W.G.Jr. : On the Mann iterative process,Trans.Amer. Math.Soc.149,1970,65-73

77. DUBE,L.,SINGH,S.: On multivalued contraction mappings, Bull. Math.Soc.Sci.Math.,RSR,14,1970(1971),307-310

78. DUBE-SINGH S. : On multi-valued contraction mappings, Bull.Math.Soc.Sci.Math.RSR,14(1970)s.s. 307-310

79. DUGUNDJI,J. : Positive definite functions and coincidences, Fundamenta Mathematicae,XC 2,1976,131-142

80. DANFORD,N.and SCHWARTZ,J.T., Linear operators, Vol.I.,Interscience,1958,New York

81. DAVIS A. : Fixpoint theorem for contraction of a well-chained topological space,Proc.Amer.Math. Soc., 14(1963) 981-985

82. DIAZ J.,METCALF F.: On the structure of the set of subsequential limit points of sucessive approximations,Bull. Amer. Math.Soc., 73 (1967),No.4,516-519

83. DEMIDOVIČ -МАРОН: Основли бличислитэлвнои матэматики. Москва 1966,п.663

84. EDELSTEIN M. : An extension of Banach's contraction principle, Proc.Amer. Math.Soc., 12(1961) 7-10

85. _ : On fixed and periodic points under contractive mappings, J.London Math.Soc., 12(1962)74-79

86. _ : Fixed point theorems in uniformly convex Banach spaces,Proc.Amer.Math.Soc., 44,1974 369-380

87. _ : On nonexpansive mappings, Proc.Amer.Math.Soc., 15(1964),689-695

88. _ : On predominantly contractive mappings,J. London Math.Soc., 38(1963),81-86

89. EILENBERG,S.,STEENROD,N.: Foundations of algebraic topology, Princeton Univ.Press,Princeton,1952

90. FADELL,E. : Recent results in the fixed point theory of continuous maps.Bull.Amer.Math.Soc., 76, 1970,10-29

91. FAN,K. : Fixed point and minimax theorems in locally convex linear spaces, Proc.nat.Acad.Sci.USA 38,1952,121-126

92. _ : A generalisation of Tychonoff's fixed point theorem, Math.Ann.142,1961,305-310

93. FENSKE,C.C.and PEITGEN,H-O.: On fixed points of zero index in asymptotic fixed point theory, Pacific Journal of Mathematics, Vol.66 No 2, Oktober, 1976

94. FOURNIER,G.,PEITGEN,H-O.: On Some Fixed Point Principles for Cones in Linear Normed Spaces, Math.Ann., 225 1977,225-217

95. FRASER,R.B. : Sequences of contractive setvalued maps., Lect.Notes Math., 1970,1971,24-26

96. FELLER W. : An introduction to probality theory and its applications, Vol.II, Chapter V, pog.8b

97. FURI,M. : Un teorema di punto fisso per transformazioni di uno spazio metrico completo in se, Atti Accad,naz.Lincei Rend.Cl.sci.fis.mat.e natur, 45,No 5,1968(1969),207-211

99. FURI,M.,VIGNOLI,A.: A fixed point theorem in complete matric spaces, Boll.Unione mat.ital.,2,No 4-5.1969, 505-509

100. _ : Fixed points for densifying mappings, Atti Accad.naz.Lincei Rend.Cl.sci.fis.mat.e natur 47,No 6,1969 (1970) 465-467.

101. _ : On α -nonexpansive mappings and fixed point, Accad.naz.Lincel, 48-1970,195-198

102. CANDAC ,F. : Theoreme de punct fix in spatii local convexe, Studii si cerc.mat.,T. 24,Nr 7,1972,1097-1106

103. GOEBEL K. : An elementary proof of the fixed point theorem of Browder and Kirk, Michigen Math.J. 16(1969) 381-383

104. GOEBEL,K., KIRK,W. and SHIMI,T.: A fixed point theorem in uniformly convex spaces, Boll.U.M.I., 1973,67-75

105. GOEBEL,K.,and KIRK,W.A.: A fixed point theorem for asymptotically nonexpansive mappings, Proc.Amer.Math.Soc., 35,No 1, 1972,171-174

106. GÕHDE,D. : Uber Fixpunkte bei stetigen Selbatabbildungen mit kompakten Iterierten,Math.Nachr. 28,1964, 45-55

107. – : Zum Prinzip der kontraktiven Abbildung, Math.Nachr.30,1965,251-258

108. GRANAS,A. : Theorem on antipodes and theorem on fixed points for a cartain clase of multivalued mappings in Banach spaces,Bull.Acad.Polon.Sci., 7,1959,271-275

109. GROETSCH,C.W. : A nonstationary iterative process for non - expansive mappings,Proc.Amer. Math.Soc., 43,1974,155-158

110. – : Some aspects of Mann's iterative method for approximating fixed points,Fixed Points,Algorithms and Applications, Academic Press,1977, 359-365

111. GUSEMAN,L. : Fixed point theorems for mappings with a contractive iterate at a point,Proc.Amer.Math. Soc., 26, 1970,615-618

112. HADŽIĆ,O. : A fixed point theorem for a class of mappings in probabilistic locally convex spaces,Publ. Inst.Math., 21 (35),1977,79-85

113. HU T.K. : On a fixed point theorem for metric spaces, Amer.Math.Montly, 74(1967),436-437

114. HADŽIĆ,O. : Osnovi teorije nepokretne tačke,Novi Sad,1978, s.314

115. HADŽIĆ,O.,STANKOVIĆ,B.: Some theorems on the fixed point in locally convex spaces,Publ.Inst.Math., T 10 (24),1970,9-19

116. HAGOPIN,CH.L. : A fixed point theorem for plane continua,Bull. Amer.Math.Soc. 77,1971,351-354

117. HAHN,S. : A remark on a fixed point theorem for condensing set-valued mappings,Informationen, Technische Universität Dresden, 07-5-77

118. HAMILTON,O.H. : A fixed point theorem for pseudoarcs and certain other metric continua,Proc.Amer.Math. Soc., 2 1951,173-174

119. HARDY,G.E., ROGERS,T.D.: A generalization of fixed point theorem of Reich,Can.Math.Bull., 16,No 2,1973, 201.206

120. HOLMES,R. : Geometric Functional Analysis and its Applications,Springer Verlag, 1975

121. HOLMES,R.D. : Fixed points for local radial contractions, Fixed Point Theory and Its Applications, Edited by Srinivasa Swaminathan,Academic Presa, 1976,1-11

122. HALMOŠ,P.R. : Naive set theory, Princeton, 1960

123. ИЛИАДИС.С.Д. : О нерасагиваншиџ отображенирџ компантов, Fundamenta mathematicae, HS.2,1976,125-129

124. ISEKI, K. : On common fixed point theorem of mappings, Proc. Jap.Acad., 1974,50,No 7,468-469

125. ISTRATESCU,A.and V.: On the theory of fixed points for some classes of mappings VI,Rev.Roum.Math.Fures et Appl, tome XVII,1973,1639-1642

126. ISEKI K. : On Banach Theorem of Contraction Mappings, Proc.Japan Acad.,41 (1967),No,2,287-289

127. ISTRATESCU,I.and SACUIU,I.: Fixed Point Theorems for Contraction Mappings on Probabilistic Metric Spaces,Rev.Roum.Math.Pures et Appl., 18,9, 1973,1375-1381

128. ISTRATESCU,V. : Introducere in teoria punctelor fixe, Bucurescti, 1973

129. ИВАНОВ,А.А. : Неравенства и теорему о неподвижниих точнах, Math.Balk., 450,1974,283-287

130. _ : Исследовании по топологии II , записки научнех семинаров ломи, том 66,Ленинград,1976.

131. JAGGI,D.S. : Fixed point theorems for orbitally continuous functions,Mat.vesnik,1(14) (29),1977,129-135

132. _ : An approach to fixed points in product spaces, Publ. Inst.Math., T 21(35),1977,115-118

133. JANOS,L. : A converse of Banach's contraction theorem, Proc.Amer.Math.Soc., 18:2,1967,287-289

134. JUNG,C.F.K. : On generalized complete matric spaces, Bull.Amer.Math.Soc., 75, No 1,1696,113-116

135. KANNAN,R., : Some results on fixed points I,Bull.Calcutta Math.Soc., 60,1968,71-76

136. _ : Some results on fixed points II,Amer.Math. Monthly, 76,1969,405-408

137. KANNAN,R. : Some Results on Fixed Points III, Fundamenta Mathematicae, LXX,1971,169-177

138. – : Some Results on Fixed Points IV,Fundamenta Mathematicae, LXXIV,1972,181-187

139. НАНТОРОВИЧ,Л.В.и АНИЛОВ,Г.П.:Фуннционаллнлли анализ в нормированнлх пространствах,ФИЗМАТГИЗ,1959

140. KUCZMA M. : Functional equations in a singe variable, Warszawa 1968

141.KAMMERER V.,KASRIEL R. : On contractive mappings in uniform spaces, Proc.Amer.Math.Soc., 15(1964), 457-459

142. KASAHARA,S. : On some generalizations of the Banach contraction theorem,Math.Seminar Notes,13, 1975,1-10

143. KEČKIĆ J. : On the converyence of certain sequences, III, Mat.vesnik, Beograd,6(21)1969,75-80

144. KEELER,E.and MEIR,A.: A theorem on contraction mappings, J.Math.Anal.and Appl., 28,1969,326-329

145. KIRK,W.A. : A fixed point theorem for mappings which do not increase distance,Amer.Math.Monthly 72, 1965,1004-1006

146. KIRK W. : A fixed point for mappings which do not increase distences, Amer.Math.Monthly, 73, (1965), 1004-1006

147. KELLEY J.L. : General topology New York,Van Nostand 1955

148. KIRK W. : On mappings with dimniching orbital diameters, J.London Math.Soc., 44 (1969) 107-111

149. KELLOG,R.B. : Uniqueness in the Schauder fixed point theorem, Proc.Amer.Math.Soc., 60,1976,207-210

150. KNASTER,B.,KURATOWSKI,C.and MAZURKIEWICZ,S.: Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n-dimensionale Simplexe, Fundamenta Mathematicae,XIV,1929,132-137

151. KOLMOGOROV A.,FOMIN S. : Elementi teorij funkcij i funkcionalnogo analiza,Izdatelstvo "Nauka",1968

152. НРАСНОСЕЛЛСНИИ,М.А.:Положителлхлие решении операторннх уравнении, ФИЗМАТГИЗ,1962

153. KRASNOSELSKIJ M. : Dva zamečanija o metode posledovatelnih približenij,UMN,10(1955),123-127

154. KUREPA,Dj. : Fixpoints of monotone mappings of ordered sets,Glasnik mat.fiz.,19,1964,167-173

155. _ : Some fixed point theorems,Math.Balk., 1972,102-108

156. _ : Some cases in the fixed point theory, Topology and its applications,Budva,1972

157. _ : Fixpoints of decreasing mappings of ordered set,Publ.Inst.Math,1975-111-116

158. KURPEL,N.S. : Proekciono iterativne metode rešenja operatornih uravnjenja, Kiev, 1968.

159. MARDEŠIĆ,S. : Matematička analiza u n-dimenzionalnom realnom prostoru, Zagreb, 1974, s.270.

160. KNASTER B. : Une théoreme sur les fonctions d'ensembles, Annales Soc.Polonaise Math.6(1927),133-134

161. KIRK W.A., J.CARISTI,: Mapping theorems in metric and Banach spaces,Bull.Acad.Polon.Sci., 23(1975),s.s. 891-894

162. KURATOWSKI C. : Sur les espaces complets, Fund. Math.15 (1930),301-309

163. KURATOWSKI, C. : Topology, Hafner,New York,1968

164. MÜLLER M. : Über das Fundamentaltheorem in der Theorie,.. Math.Z. 26 (1926),619-645.

165. LUXEMBURG,W.A.J.: On the convergence of successive approximations in the theory of ordinary diff. equations.III.Nisun.Arch.Wisk.,1958,6,s.93--98

166. LANDSBERG,M. : Uber die Fixpunkte kompakter Abbildungen, Math.Ann., 154,1964,427-431

167. LEFSCHETZ,S. : Topology, New York,1956

168. LAU,A.T. : Invariant Means on Almost Periodic Functions and Fixed Point Properties,Rocky Mountain J. Math. 3,1973,69-76

169. LERY,J.and SCHAUDER,J.: Topologie et équations fonctionnelles, Ann.Ecole Norm.(3)51,1934,45-78

170. KAKUTANI,S. : A generalization of Brouwer's fixed point theorem,Duke Math.J.,8,1941,451-459

171. MAITI,M.,ACHARI,J.and PAL,T.K.: Remarks on some fixed point theorems,Publ.Inst.Math., T 21(35),1977, 115-118

172. MARJANOVIĆ M., PREŠIĆ S.: Remark on the convergence of a sequence, Publ.Elektro.Fak.Ser.Math.Fiz. No 143-155(1965),63-64

173. MARJANOVIĆ,M. : A further extencion of Banach's contraction principle,Proc.Amer.Math.Soc., 19,1968, 411-414

174. _ : Fixed points of local contractions,Publ.Inst. Maht. T 20(34),1976,185-190

175. MASSA,S. : Generalized contractions in metric spaces, Boll.Unione mat.ital.,10 No 3,1974,689-694

176. MARJANOVIĆ M. : An iterative method for solving polinomial equations,Tpology and its applications, Budva 1973, s.170-172

177.MEIR A., KAELER E.: A theorem on contraction mappings.J.Math. Anal.and Appl., 1969,28, N 2,s. 326-329

178. MEYERS P.R. : A convers to Banach's contraction theorem. J.Ros.Nat.Bur.Standards,1967, 71B,s.73-76

179. МИЛЛИОНШИКОВ,В.В.:Н твории дифференциаллнлих уравнении в локалнно влпучллх пространствах,Мат.об.т.57(99),1962

180. MARGOLIS B. : On some fixed points theorems in generalised complete metric spaces,Bull.Amer.Math.Soc., 74 (1968) 275-282

181. MEYERS PH.R. : Some extensions of Banach's contraction theorem J.Res.Bur.Stand.(U.S.)69 B:3,1965, 179-184

182. MELVIN,W. : Some extensions of the Krasnoseljskij fixed point theorem,Journal od Differential Equation,11,1972,335-348

183. MITCHELL,T. : Topological Semigroups and Fixed Points,Ill.J. Math.14,1970,630-641

184. MATKOWSKI J. : Integrable solutions of functional equations, Dissertationes Math.Warszawa 1975

185. NADLER,S.B. : Multivalued contraction mappings,Pacif.J. Math. 30,1969,475-488

186. _ : Some results on multivalued contraction mappings Lect.Notes.Math., 171,1970,64-69

187. _ : A note on iterative test of Edelstein, Can.Math.Bull., 15,No 3,1972,381-386

188. NAGUMO,M. : Degree of mapping in convex linear topological spaces,Amer.J.Math., 73,1951,497-511

189. _ : A theory of degree of mapping based on infinitesimal calculus,Amer.J.Math., 73,1951,485-496

190. НЕМЛЦКИИ,В, : Метод неподаижнои точки в анализе,УМН,I 1936, 141-174

191. NUSSBAUM,R.D. : Asymptotic fixed point theorems for local condensing maps,Math.Ann., 191,1971, 181-195

192. _ : The fixed point index for local condensing maps, Ann.Mat.Pura Appl., 89,1971,217-258

193. _ : Some asymptotic fixed point theorems,Trans. Amer. Math.Soc., 171,1972,349-375

194. _ : Existence and uniqueness theorems for some functional differential equations of neutral type, Journal of Differential Equations, 11, 1972,607-623

195. OPIAL,E. : Nonexpansive and monotone mappings in Banach spaces,Center for dynamical systems,Brown University, 1967

196. ОПОРИЦЕВ,В.И. : Обрашение принципа сжиманших отображении,УМХ, XXXI, вып.4.(190),1976,169-198

197. ORTEGA,J.M.,RHEINBOLDT,W.C.: Iterative solution of nonlinear equations in several variables,Academic Press, New York, 1970

198. OUTLAW,C.L.and GROETSCH,C.W.: Averaging iteration in a Banach space,Bull.Amer.Math.Soc.75,1969,430-432

199. PEITGEN,H.O. : Asymptotic fixed point theorems and stability, J.Math.Analysis Appl.,47,1974,32-42

200. PETRYSHYN,W.V. : On a fixed point theorem for nonlinear P-compact operators in Banach spaces,Bull.Amer. Math.Soc.,72,1966,329-334

201. _ : On existence theorems for nonlinear equations involving noncompact operators,Prec.Nat.Acad. Sci.USA,67,1970,326-330

202. _ : On the relationship of A-properness to mappings of monotone type with applications to elliptic equations,Fixed Point Theory and Its.Application,Academic Press,1976,149-174

203. ПОНТРАГИН.Л.С. : Основы комбинаторной топологии,Наука, Москва,1976

204. PREŠIĆ S. : Sur un theoreme de S.Zervos,Publ.Ins.Math. t.10 (24),197o,s.121-122.

205. _ : Sur une classe d' inequations aux differencees finies et sur la convergence de certaines suites,Publ.Inst.Math.5(19) 1965, s.75-78.

206. PETROVIĆ M. : Računanje sa brojnim razmacima,Beograd,1932.

207. RAKOTCH E. : A note on contractive mappings,Proc.Amer. Math.Soc.,13 (1962) No 3,459-465

208. RAKOTCH,E. : A note on alpha-locally contractive mappings, Bull.Res.Counc.Isreal,10,F,No 4, 1962,188-191

209. REICH,S. : Kannan's fixed point theorem,Bull.Un.Math. Ital. S.IV.4,1971,1-11

210. _ : Fixed points of contractive functions,Bull. Un.Math.Ital.S.IV,5,1972,26-42

211. _ : Fixed points in locally convex spaces,Math.Z. 125,1972,17-31

212. REICH,S. : Asymptotic behavior of contractions in Banach spaces,J.Math.Anal.Appl.44,1973,57-70

213. _ : Some fixed point problems,Rend.Accad.Nat. Lincei,57,1974,194-198

214. RUS I. : Some fixed point theorems in metric spaces, Math.Rev.Trieste

215. REINERMANN,J. : Uber Toeplitzsche Iterationsverfahren und einige Anwendungen in der konstruktiven Fixpunkttheorie,Studia Math. 32,1969,209-227

216. _ : Uber des Verfahren der sukzessiven Näherung in der Fixpunkttheerie kontrahierender Abbildungen, Habilitationsschrift,1970

217. _ : On a fixed-point theorem of Banach type, Annales Pol.Math.XXIII,1970,105-107

218. _ : Apprcximation von Fixpunkten,Studia Math., T 39,1971,1-15

219. REINERMANN,J.and SCHONBERG,R.: Some results in the fixed point theory of nonexpansive mappings and generalized contractions,Fixed Point Theory and Its. Applications, Academic Press,1976,175-186

220. REINERMANN,J.und STALLBOHM,V.: Eine Anwendung des Edelsteinschen Fixpunktsatzes auf Integralgleichungen vom Abelliouvilleschen Typ,Archiv der Mathematik,Vol.XXII,1971,642-647

221. RHOADES,B.E. : Fixed Point Iterations Using Infinite Matrices III,Fixed Points,Algorithms and Applications, Academic Press,1977

222. RHOADES B.E. : A comparison of various definitions of contractive mappings,Traus.Amer.Math.Soc., 226(1977),s.s.257-290

223. RIEDRICH,T. : Die Räume $L^p(0,1)$)0 p 1) sind zulässig, Wiss.Z.Techn.Univ.Dresden 12,1963,1149-1152

224. ROTHE,E. : Zur Theorie der topologischen Ordnung und der Vektorfelder in Banachschen Räumen, Compos. Math. 5,1937,177-196

225. REINERMANN,J. : On a fixed point theorem of Banach-type for uniform spaces,Matematički vesnik, 6 (21),1969,211-213

226. STEINLEIN,H. : Ein Satz über den Leray-schauderschen Abbildungsgrad,Math.Z., 120,1972,176-208

227. SU,C.,SEHGAL,V.: Some fixed point theorems for condensing multifunctions in locally convex spaces, Proc.Amer.Math.Soc.,50,1975,150-154

228. STOJAKOVIĆ M. : On a method of solution of linear difference equations,Mat.vesnik,6(21),1969,111-116

229. SADOVSKII,B.N. : A fixed point principle,Funct.Anal.and Applications,1,1967,151-153

230. — : Limit-Compact and condensing operators,Russ. Math.Surveys 27,1972,85-155

231. SCHAUDER,J. : Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen,Studia Math.,2,1930,171-180

232. SWAMINATHAN S. : Fixed point theory and its applications, Acad.press. 1976, s.216

233. SEHGAL,V. : A fixed point theorem for mappings with a contractive iterate,Proc.Amer.Math.Soc., 23,1969,631-634

234. — : On fixed and periodic points for a class of mappings,J.Lond.Math.Soc., 5,1972,571-576

235. SEHGAL,V. : Some fixed and common fixed point theorems in in matric spaces,Can.Math.Bull.,17,No 2, 1974,257-259

236. SMULIAN V. : On the principle of inclusion in the space of the type (B),Math.Sb.5(47),1939, 327-328

237. SHIAN CHYI,TAN KOK-KEONG and WONG CHI SONG: Quasi-nonexpansive multivalued maps and selections,Fundamanta Mathematicae,LXXXVII, 2,1975,109-119

238. SMART,D.R. : Fixed point theorems,Cambridge University Press,1974

239. SPANIER,E. : Algebraic topology, Mc Graw-Hill.New York 1966

240. STALLBOHM,V. : Fixpunkte nichtexpansiver Abbildungen, Fixpunkte kondensierender Abbildungen Fredholm'sche Sätze linearer kondensierender Abbildungen,Technischen Hochschule Achen, 1973.

241. SCHRÖDER J. : Das Iterationsferfahren bei allgemeineren Abstandsbegriff,Math.Z.,66,(1956),111-116

242. SINGH K. : Contraction mappings and fixed point theorems, Ann.Soc.Scient.Bruxelles,83(1969),34-44

243. SCHAUDER J. : Zur theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen,Math.Z., 26(1927),47-65

244. SADOVSKIJ,B. : Ob odnom principe nepodvyžnoj točke, Funk. Analiz i Priloženija,1,(1967)No 2,74-76

245. STANKOVIĆ B. : Solution de l'equation differentielle dans in sous-ensemble des opérateurs de J.Mikusinski,Publ.Inst.Math.Beograd T.5 (19),1965, s.89-95

246. SIMEUNOVIĆ D. : O granicama nula polinoma,Teza,Beograd,1970

247. SMITHSON R.E. : Fixed points in partially ordered sets,Pacific Jour.Math.,45(1973),s.s.363-367

248. PASCALY E. : Osservazitoni sulle F -contrazioni,Le Matematiche,Catania,Vol.30,Fasc.1(1975),123-132; Lin Teorema di esistenca di punti mati per particoleri transformacioni (u štampi)

249. SZASZ G. : Introduction to lattice theory, Acad.press. New York, London,1963,s.229

250. TAKAHASHI,W. : A convexity in matric space and nonexpansive mappings,Kodai Math.Semin.Repts.,22, No 2,1970,142-149

251. TARSKI,A. : A lattice theoretical fixed point theorem and its application,Pacif.J.Math., 5,1955, 285-309

252. TASKOVIĆ,M. : Remark on some results of S.Prešić and S. Zervos,Publ.Inst.Math. t.11 (25),Beograd, 1971,s.121-122

253. — : On some mappings of contraction type, Abstracts 4 th.Balkan Math.Congress (Istambul 30.8-5.9.1971)

254. — : Banachräume von Folgenabbildungen, Wien,OMK, 17 bis 21 September 1973,s.141

255. — : Banachs mappings and some generalisations, Publ.Inst.Math.t.16(30),Beograd 1973,s.169-175

256. — : Generalized f_λ contractions and fixed point theorem, Math.Balkanica 3,Beograd 1973,538-544

257. — : A generalization of Banach's contraction principle, Publ.Inst.Math,Beograd,t.23(37) 1978,s.s.179-191

258. — : Einige Abbildungen wom ß-typus,Publ.Inst.Math. Beograd,t.18(32)1975,ss.197-206

259. — : Monotone mappings on ordered sets a class of inequalities with finite differences and fixed points, Publ.Math.Inst.Beograd, t.17 (31),1974,ss.163-172

260. — : Une classe de conditions sufisantes pour qu'une application soit cele de Banach,Math.Balc.4 112 (1974) ss.587-589

261. — : Monotona preslikavanja na uredjenim skupovima (rad saopšten u Mat.Inst.1972)

262. — : Banach mappings in reflexive Banach space (još neobjavljen)

263. — : Fiksne tačke kontraktivnih i nekih drugih preslikvanja(magistarski rad,Univerziteta u Beogradu,Beograd 1975)

264. — : Reflexive Banach space and fixed point theorems,Publ.Inst.Math. t.20(34), 1976 ss.243-247

265. TASKOVIĆ, M. : On the convergence of certain sequences and some applications, Mat.vesnik 14(29) sv.1,Beograd 1977

266. _ : Some results in the fixed point theory,Publ. Inst.Math.t.20(34),1976,ss.231-242

267. _ : On the convergence of certain sequences and some applications-II,Publ.Inst.Math. .21(35),Beograd,1977

268. _ : On a family of contractive maps,Bull. Australian Math.Soc.,vol.13(1975),ss.301-308

269. _ : On contractive mappings in metric spaces, Comment.Math.Universitatis Carolinae, Pragensis, 19(2),1978,pp.409-413

270. TERKELSEN,F. : A short proof of Fan's fixed point theorem Proc.Amer.Math.Soc.42,1974,643-644

271. TODD,M. : The Computation of Fixed Points and Applications,Springer Verlag,1976

272. TYCHONOFF,A. : Ein Fixpunktsatz,Math.Ann., 111,1935,767-776

273. WONG,C.S., : Fixed point theorems for generalized nonexpansive mappings.-J.Austral.Math.Soc.,1974, 18, N 3.s.265-276

274. WONG,C.S. : Generalized contractions.-Yokohama Math.J. 1974,22,N 1-2,s.43-50

275. W.W. Taylor, : Fixed point theorem for non-expansive mappings in linear topological spacrs,J.Math.Anal. Appl,m 40(1972),164-173

276. WOLK, E.S. : Dedekind completeness and a fixed point theorem,Canad.J.Math.,9(1957),400-405

277. VIDOSSICH,G. : Applications of topology to analysis,Conf. Sem.Mat.Univ.Bari 126,1971,1-62

278. ZITAROSA,A. : Una generalizzazione del teorema di Banach sulle contrazioni,Matematiche,23,No 2,1968 417-424

279. ZEIDLER,E. : Vorlesungen über nictlineare Funktionalanalysis I-Fixpunktsätze,Teubner-Texte zur Mathematik,1976

280. WAŽEWSKI,T., : Sur un procédé de prouver la convergence des approximations succesive sans ultisations des séries comparaison,Bull.Acod.Polon.Sci. Math.Astronom.Phys.B,1960,47-52

281. ZERVOS S. : Aspects modernes de la localistion des zéros des polynomes d'une variable, these, Sci.math., Paris, 1960.

282. R. Halpern, M.Bergman : A fixed point theorem for inward and ontward maps,Trans.Amer.Math.Soc.130(1968) p.p.353-358.

283. MÜLLER M. : Über das Fundamentaltheorem in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, Math.Z. 26 (1926), 619-645.