MILOMIR N. TRIFUNOVIĆ

VIŠESTRUKA POTPUNOST SISTEMA SOPSTVENIH I PRIDRUŽENIH FUNKCIJA NEKIH GRANIČNIH PROBLEMA

(Doktorska disertacija)

U BEOGRADU 1972. GOD.

S A D R Ž A J

U V O D

Izučavanju problema potpunosti sistema sopstvenih funkcija diferencijalnih operatora, posvećeni su brojni radovi mnogih istaknutih matematičara. Poznato je, da su još D'Alembert, Euler i D. Bernoulli u svome znamenitom sporu o prirodi funkcije, razmatrali istovremeno i mogućnost razlaganja funkcija u trigonometriske redove na intervalu ($0, \pi$), (Luzin N.N., [23]). To pitanje je, znatno kasnije, ponovo tretirano u radovima Fourier-a, u kojima su izučavani problemi sprovodjenja toplote. Tom prilikom, Fourier je formulisao postupak izračunavanja koeficijenata trigonometriskog reda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ pri zadanoj funkciji $f(x)$, ostavljajući otvorenim pitanje dali taj red konvergira ka pomenutoj funkciji. (Bari N.K., str. 57, [3]). Na toj osnovi tokom vremena, zahvaljujući pre svega Cauchy-u, Dirichlet-u, M.V. Ostrogradskom i V.A. Steklovu, precizno je formulisan i strogo obrazložen metod sopstvenih funkcija ili, kako se još naziva, Fourier-ov metod koji ima široku primenu u savremenoj matematici. Pojmovi potpunosti i ortogonalnosti niza sopstvenih funkcija u odgovarajućem funkcionalnom prostoru predstavljaju bitne elemente toga metoda. Medjutim, pri rešavanju složenijih graničnih problema nestacionarnih parcijalnih jednačina višega reda, pojavila se potreba generalizacije pojma obične potpunosti. To uopštenje, poznato u matematičkoj literaturi kao višestruka (n-to struka) potpunost sistema sopstvenih i pridruženih funkcija, dao je M.V. Keldiš u svom poznatom radu [13]. Opravdanost uvodjenja tog pojma ilustrovaćemo na sledećem primeru.

Neka je data linearna parcijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima α_p, oblika

$$\text{(I)} \quad \mathcal{L}(z) = \sum_{|p|\leq m} \alpha_p D^{|p|} z = 0$$

i neka su dati granični uslovi

$$\text{(II)} \quad U_j(z) = \sum_{|p|\leq m} \left[a_p^{(j)} D^{|p|} z \Big|_{x=0} + b_p^{(j)} D^{|p|} z \Big|_{x=\pi} \right] = 0, \quad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

pri čemu su: $a_p^{(j)}$ i $b_p^{(j)}$ realne ili kompleksne konstante,

$p=(p_1,p_2)$ vektor sa nenegativnim celim koordinatama, $|p|=p_1+p_2$ $D^{|p|}=(\frac{\partial}{\partial t})^{p_1}(\frac{\partial}{\partial x})^{p_2}$; $z=z(x,t)$ $(0\leq x\leq \pi$, $0\leq t<\infty)$. Neka su dalje, zadani i početni uslovi

$$\text{(III)}\quad \frac{\partial^s z}{\partial t^s}\Big|_{t=0}=\varphi_s(x)\qquad (s=0,1,\ldots,n-1;\ n\leq m)$$

Potražimo rešenje parcijalne jednačine (I) u obliku $z=e^{\lambda t}y(x)$, zahtevajući istovremeno da zadovoljava i granične uslove (II). Smenom, a zatim deobom sa $e^{\lambda t}$, iz (I) i (II) sledi

$$\text{(I)}_1\quad \sum_{|p|\leq m}\alpha_p\lambda^{p_1}y^{(p_2)}(x)=0$$

$$\text{(II)}_1\quad \sum_{|p|\leq m}\lambda^{p_1}\left[a_p^{(j)}y^{(p_2)}(0)+b_p^{(j)}y^{(p_2)}(\pi)\right]=0\qquad (j=1,2,\ldots,m)$$

Sve vrednosti parametra λ, za koje granični problem (I)_1-(II)_1 ima netrivijalna rešenja $y(x,\lambda)$, su sopstvene vrednosti, a funkcije $y(x,\lambda)$ odgovarajuća sopstvena rešenja. Pošto su koeficijenti obične diferencijalne jednačine (I)_1 i graničnih uslova (II)_1 polinomi po promenljivom parametru λ, važi sledeće tvrdjenje: ili je skup sopstvenih vrednosti najviše prebrojiv skup, ili je svaki kompleksan broj sopstvena vrednost (Najmark M.A., str. 21, [24]). Uzmimo u obzir prvi slučaj. Neka svakoj sopstvenoj vrednosti $\lambda=\lambda_k$ $(k=1,2,\ldots)$ odgovara samo jedna sopstvena funkcija $y_k(x)=y(x,\lambda_k)$. Obrazujmo sumu, oblika

$$z(x,t)=\sum_{k=1}^{K}C_k e^{\lambda_k t}y_k(x)$$

pri čemu su: C_k $(k=1,2,\ldots,K)$ proizvoljne konstante, K proizvoljan prirodan broj. Zbog linearnosti parcijalne jednačine (I) i graničnih uslova (II), funkcija $z(x,t)$ je rešenje graničnog problema (I)-(II). Naredni zadatak sastoji se u izračunavanju koeficijenata C_k $(k=1,2,\ldots,K)$ tako, da budu zadovoljeni početni uslovi (III), ili da se bar aproksimativno odrede sa željenom tačnošću iz skupa nejednakosti

$$\left|\varphi_s(x)-\frac{\partial^s z(x,0)}{\partial t^s}\right|=\left|\varphi_s(x)-\sum_{k=1}^{K}C_k\lambda_k^s y_k(x)\right|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{n\pi}},\ \forall x\in(0,\pi)$$

pri čemu je ε proizvoljno mali pozitivan broj, $K=K(\varepsilon)$ prirodan broj $(s=0,1,\ldots,n-1)$. Primetimo da koeficijenti C_k $(k=1,2,\ldots,K)$ ne zavise od indeksa s. U tom cilju formirajmo direktnu n-ortogonalnu sumu prostora $\mathcal{L}^2(0,\pi)$, oblika

$$\mathcal{L}_n^2(0,\pi)=\bigcup_n \oplus \mathcal{L}^2(0,\pi)$$

Stavljajući

$$\varphi(x)=\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),\ldots,\varphi_{n-1}(x)\}\,,\quad \varphi_s\in\mathcal{L}^2(0,\pi)$$

$$Y_k(x)=\{y_k(x),\lambda_k y_k(x),\ldots,\lambda_k^{n-1}y_k(x)\}$$

i, s obzirom na poznatu definiciju skalarnog proizvoda u prostoru $\mathcal{L}_n^2(0,\pi)$, iz prethodnog skupa nejednakosti sledi

$$\left\| \varphi(x)-\sum_{k=1}^{K} c_k Y_k(x)\right\| < \varepsilon$$

Odatle proizilazi sledeći zaključak: niz funkcija $Y_k(x)$ $(k=1,2,\ldots,$ mora biti potpun u prostoru $\mathcal{L}_n^2(0,\pi)$. U vezi sa tim, M.V. Keldiš je u pomenutom radu [13] definisao pojam n-to struke potpunosti, koja u našem konkretnom slučaju glasi: niz funkcija $y_k=y(x,\lambda_k)$ $(k=1,2,\ldots,)$ je n-to struko potpun u prostoru $\mathcal{L}^2(0,\pi)$ ako je niz funkcija $Y_k(x)$ $(k=1,2,\ldots,)$ potpun u prostoru $\mathcal{L}_n^2(0,\pi)$. Treba istaći, da ovaj fundamentalan pojam nije ranije uočen uglavnom zbog toga, što su ispitivanja graničnih problema vršena nezavisno od nestacionarnih parcijalnih jednačina.

Keldiš je dokazao n-to struku potpunost niza sopstvenih i pridruženih vektora apstraktnog operatornog polinomnog pramena

$$L(\lambda)=E-T_0-\lambda HT_1-\ldots-\lambda^{n-1}H^{n-1}T_{n-1}-\lambda^n H^n \tag{1}$$

zadanog u proizvoljnom Hilbertovom prostoru, pri čemu su: T_j $(j=0,1,\ldots,n-1)$ potpuno neprekidni operatori; H potpuno neprekidan i normalan operator konačnoga reda i H^n samokonjugovani operator (Gohberg I.C. i Krein M.G., str.328, [7]). Pored toga, M.G. Krein i G.K. Langer dokazali su dvostruku potpunost niza sopstvenih i pridruženih vektora kvadratnog samokonjugovanog operatornog pramena

$$L(\eta)=E+\eta B+\eta^2 C \tag{2}$$

pri sledećim pretpostavkama: C pozitivan i potpuno neprekidan operator; B nenegativan, ograničen i samokonjugovani operator i $\underline{\lim}\, n^2\lambda_n(C)=0$, pri čemu su sa $\lambda_n(C)$ označene sopstvene vrednosti operatora C (Gohberg I.C. i Krein M.G., str.353, [7]). Problem višestruke potpunosti tretiran je i u monografiji Rasulova [27], ali samo kada su granični uslovi regularni.

I pored navedenih rezultata, pitanje višestruke potpunosti ostalo je otvoreno za široku klasu graničnih problema. Ilustracije radi, navodimo jedan prost primer.

Neka je data obična diferencijalna jednačina

$$y''+\lambda\alpha y'+\beta\lambda^2 y=0 \tag{3}$$

i neka su dati nulti granični uslovi

$$y(0)=0,\quad y(\pi)=0 \tag{4}$$

pri čemu je λ parametar, i $4\beta-\alpha^2>0$. Označimo sa A diferencijalni operator odredjen diferencijalnim izrazom $\ell(y)=-y''$ i graničnim uslovima (4). Neposredno se proveravaju sledeće činjenice:

$$Ay=0 \Longrightarrow y(x)\equiv 0,\ (Ay,y)=\int_0^{\pi}|y'|^2dx,\ A=A^*.$$

Odatle sledi egzistencija inverznog operatora A^{-1}, koji je samokonjugovan i potpuno neprekidan. Sopstvene vrednosti operatora A^{-1} su: $\lambda_n=\frac{1}{n^2}$ ($n=1,2,\ldots,$). Primenom operatora $A^{-1/2}$ sa leva i desna na jednačinu (3), dobijamo

$$y-\lambda\alpha A^{-1/2}\frac{d}{dx}A^{-1/2}y-\lambda^2\beta A^{-1}y=0 \tag{5}$$

odnosno

$$L(\lambda)y=(E-\lambda HT_1-\lambda^2H^2)y=0 \tag{6}$$

pri čemu je: $H=\sqrt{\beta}A^{-1/2}$, $H^2=\beta A^{-1}$ i $T_1=\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}\frac{d}{dx}A^{-1/2}$ $(\beta>0,\alpha\neq 0)$. Pošto operator T_1 nije potpuno neprekidan, to operatorni pramen $L(\lambda)$ odredjen jednakošću (5) ne pripada Keldiševoj klasi operatornih pramenova (1).

Zamenjujući $\lambda=\eta i$ u jednačini (5), nalazimo

$$\tilde{L}(\eta)y=(E+\eta B+\eta^2C)y=0 \tag{7}$$

gde je: $C=\beta A^{-1}$ i $B=-\alpha iA^{-1/2}\frac{d}{dx}A^{-1/2}$ ($\beta>0$). Sopstvene vrednosti operatora C su: $\eta(C)=\frac{1}{n^2}$ ($n=1,2,\ldots,$). Kako je $n^2\eta(C)=1$ to operatorni pramen $\tilde{L}(\eta)$ iz jednakosti (7) ne pripada klasi samokonjugovanih operatornih pramenova (2).

Rezultati Rasulova se ne mogu primeniti na ovaj primer zbog toga što su dati granični uslovi (4) neregularni. Medjutim, dvostruka potpunost niza sopstvenih i pridruženih funkcija izloženog primera postoji, što će u ovom radu biti i dokazano.

U 1965 god. bio sam na desetomesečnoj specijalizaciji u Moskvi kod A.G.Kostjučenka i B.M.Levitana, profesora MGU-a. Na njihov predlog pristupio sam ispitivanju višestruke potpunosti sopstvenih i pridruženih funkcija jedne klase linearnih diferencijalnih operatora, ne ograničavajući granične uslove svojstvom regularnosti. Pri tome sam koristio klasičan postupak, vezan za teoriju analitičkih funkcija, koji se inače veoma često sreće u radovima Levinsona, Winera, Levina i drugih autora.

Ukratko o sadržaju rada.

1. U prvom delu izložena su neka opšta spektralna svojstva diferencijalnog operatora $L_n(\lambda)$, koji je definisan linearnim diferencijalnim izrazom

$$\ell(y) = y^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda^k y^{(n-k)}$$

i graničnim uslovima

$$U_j(y) = \sum_{k=1}^{n} \left[a_{jk} y^{(k-1)}(0) + b_{jk} y^{(k-1)}(\pi) \right] = 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, n)$$

gde su: a_{jk}, b_{jk} i a_k $(j, k = 1, 2, \dots, n)$ konstante, a λ kompleksni parametar. Pomoću indikatornih dijagrama celih funkcija eksponencijalnoga tipa, dat je pregledan raspored sopstvenih vrednosti operatora $L_n(\lambda)$ u kompleksnoj λ-ravni. Uspostavljena je veza izmedju izvodnih lanaca i odgovarajućih sopstvenih funkcija posmatranog operatora. Dato je uopštenje poznatog stava (Levin B., str. 90, [19]) o odsečcima indikatornih dijagrama celih funkcija. Sažeto je izložen pojam regularnosti graničnih uslova.

Ovaj deo ima, uglavnom, pripremni karakter u odnosu na dalji tok izlaganja.

2. Drugi deo posvećen je detaljnom ispitivanju operatora $L_2(\lambda)$. Odgovarajući linearni diferencijalni izraz je oblika

$$\ell(y) = y'' + 2a\lambda y' + b\lambda^2 y \qquad (b - a^2 > 0)$$

a koeficijenti graničnih uslova su, u opštem slučaju kompleksni brojevi. Dati su potrebni i dovoljni uslovi regularnosti graničnih uslova. Dokazana je dvostruka potpunost niza sopstvenih i pridruženih funkcija operatora $L_2(\lambda)$, pri veoma opštim graničnim uslovima. Pri tome su korišćena dva metoda paralelno: prvi, zasnovan na korišćenju teorema Phragmen-a i Lindelof-a i drugi, koji se temelji na Laplase-ovim transformacijama i formuli inverzije Stieltjes-a. Na kraju su navedeni neki poznati rezultati iz domena obične potpunosti, koji iz ovog rada proizilaze kao specijalni slučajevi.

3. U trećem delu izlaže se analogna problematika operatora $L_4(\lambda)$. Pretpostavlja se, da su koeficijenti toga operatora realni brojevi. Ispitivanja su vršena u dva pravca, i to kada su koreni karakteristične jednačine

$$\omega^4 + a_1\omega^3 + a_2\omega^2 + a_3\omega + a_4 = 0$$

kompleksni i različiti, odnosno kompleksni i jednaki. Dati su potrebni i dovoljno uslovi regularnosti graničnih uslova. Dokazana je četvorostruka potpunost sistema sopstvenih i pridruženih funkcija pomenutog operatora. U izvesnim slučajevima taj sistem je dopunjavan najviše sa tri funkcije specijalnog tipa, koje smo nazvali funkcijama defekta. Dokazano je, da tako prošireni sistem sopstvenih i pridruženih funkcija poseduje svojstvo četvorostruke potpunosti. Pri tome je korišćen metod indikatornih dijagrama celih funkcija. Zbog svoje specifičnosti, posebno je izučavan slučaj kada je linearni diferencijalni izraz oblika

$$\ell(y) = y^{IV} + 2a\lambda^2 y'' + b\lambda^4 y \qquad (b - a^2 > 0)$$

4. Svi numerisani stavovi, definicije i primeri su originalni. Za korišćene teoreme i pojmove navedena su imena autora, ili izvorna literatura.

5. Na kraju je dat spisak literature, koju sam manje-više efektivno koristio pri pisanju ovog rada.

Želim ovom prilikom da izrazim svoju duboku zahvalnost profesorima: A. G. Kostjučenku, B. M. Levitanu i B. Rašajskom na pruženoj pomoći u vezi sa brojnim pitanjima iz ove teme.

I DEO

1. HOMOGENI GRANIČNI PROBLEM (A_n) I KARAKTERISTIČNA DETERMINANTA $\Delta(\lambda)$

Neka je data obična linearna diferencijalna jednačina

$$\text{(I)} \quad \ell(y) = y^{(n)} + \sum_{r=1}^{n} a_r \lambda^r y^{(n-r)} = 0$$

sa graničnim uslovima:

$$\text{(II)} \quad U_j(y) = \sum_{r=1}^{n} \left[a_{jr} y^{(r-1)}(0) + b_{jr} y^{(r-1)}(\pi) \right] = 0,$$

pri čemu su: a_r ($r=1,2,\ldots,n$) realne, a_{jr} i b_{jr} ($j,r=1,2,\ldots,n$) u opštem slučaju kompleksne konstante, λ kompleksni parametar, $n=2m$ i $U_j(y)$ ($j=1,2,\ldots,n$) linearno nezavisne forme. Problem odredjivanja svih rešenja diferencijalne jednačine $\ell(y)=0$, koja zadovoljavaju granične uslove $U_j(y)=0$ ($j=1,2,\ldots,n$), naziva se homogenim graničnim problemom.

D E F I N I C I J A 1.1. Homogeni granični problem (I)-(II) zvaćemo kratko PROBLEM $(A\,n)$ i pisaćemo

$$L_n(\lambda) y = 0$$

gde je $L_n(\lambda)$ DIFERENCIJALNI OPERATOR odredjen linearnim diferecijalnim izrazom $\ell(y)$ i graničnim uslovima $U_j(y)=0$ ($j=1,2,\ldots,n$).

Neka su svi koreni jednačine

$$\omega^n + a_1 \omega^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\omega + a_n = 0$$

kompleksni i medjusobno različiti. Zbog pretpostavljene realnosti koeficijenata a_r ($r=1,2,\ldots,n$), svakom kompleksnom korenu ω_p odgovaraće konjugovano kompleksan koren $\overline{\omega_p}$ ($p=1,\ldots,n$; $n=2m$). Zamenjujući opšte rešenje

$$y = \sum_{s=1}^{n} C_s e^{\lambda \omega_s x}$$

jednačine $\ell(y)=0$ u (II), dobijamo

$$U_j(y) = \sum_{s=1}^{n} C_s U_{js}(\lambda) = 0 \qquad (j=1,2,\ldots,n) \tag{1.1}$$

pri čemu je: $U_{js}(\lambda) = A_{js}(\lambda) + B_{js}(\lambda) e^{\lambda\omega_s \pi}$

$$A_{js}(\lambda) = \sum_{r=1}^{n} a_{jr} (\lambda\omega_s)^{r-1}, \quad B_{js}(\lambda) = \sum_{r=1}^{n} b_{jr} (\lambda\omega_s)^{r-1} \tag{1.2}$$

$j,s=1,2,\ldots,n$).

U skladu sa poznatom terminologijom, matricu

$$\mathcal{D}(\lambda)=\| \mathcal{U}_{js}(\lambda)\|_{n,n}$$

zvaćemo <u>KARAKTERISTIČNOM MATRICOM</u>, a determinantu

$$\Delta(\lambda)=\det\mathcal{D}(\lambda)$$

<u>KARAKTERISTIČNOM DETERMINANTOM</u> problema (A_n). Imajući u vidu strukturu elemenata $\mathcal{U}_{js}(\lambda)$, determinantu $\Delta(\lambda)$ možemo napisati u obliku

$$\Delta(\lambda)=\sum_{g=0}^{G} p_g(\lambda)e^{\lambda\pi\eta_g}$$

pri čemu smo sa η_g označili: korene ω_s $(s=1,2,\dots,n)$, 0 i sve sume tih korena koje se dobijaju pri razvijanju determinante, a sa $p_g(\lambda)$ polinome po λ, čiji koeficijenti zavise od koeficijenata graničnih uslova (II).

<u>D E F I N I C I J A 1.2.</u> Polinome $p_g(\lambda)$ $(g=0,1,\dots,G)$ karakteristične determinante $\Delta(\lambda)=\sum_{g=0}^{G}p_g(\lambda)e^{\lambda\pi\eta_g}$, zvaćemo <u>$\Delta$ -POLINOMIMA.</u>

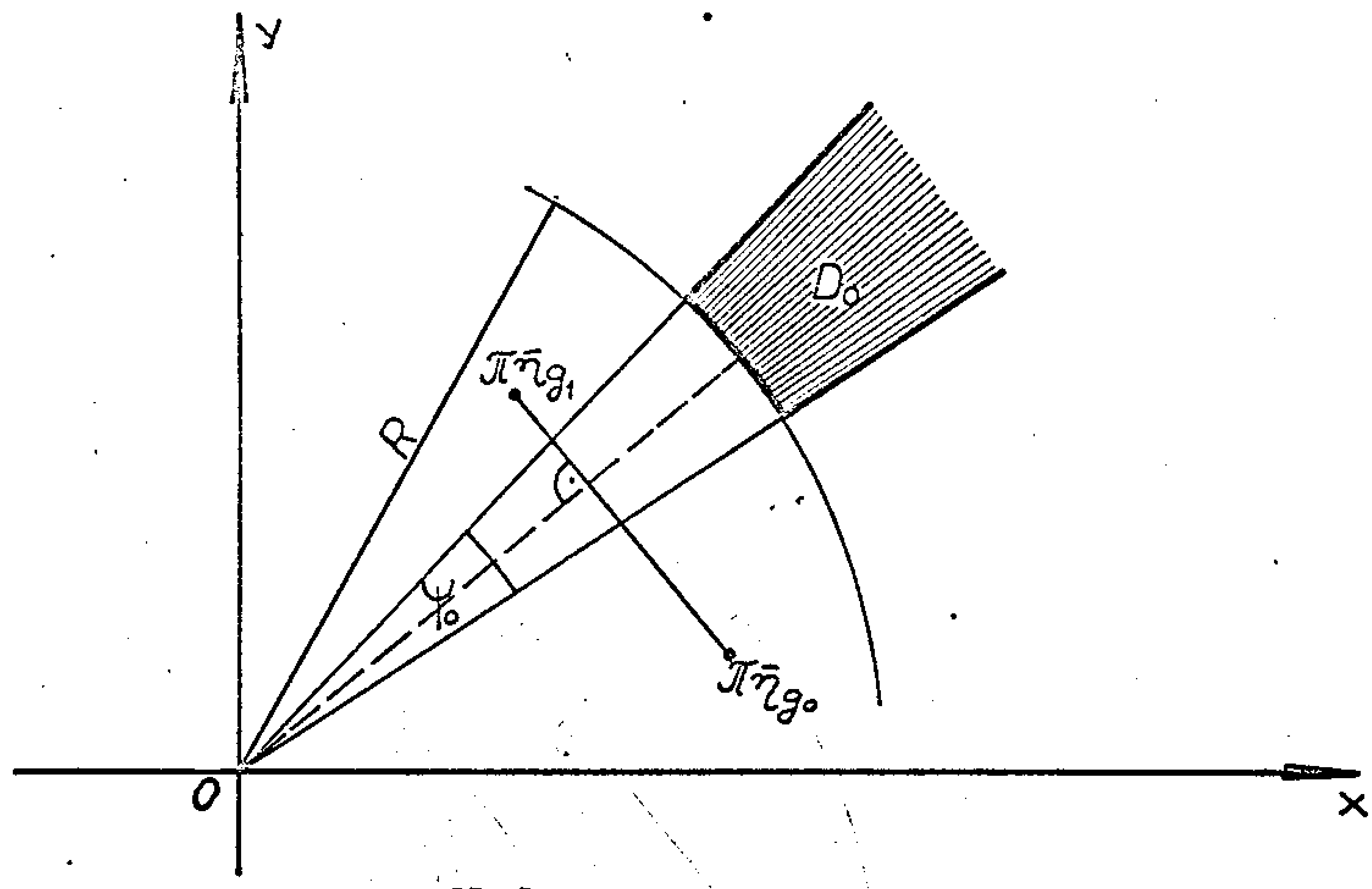
Da bi sistem linearnih algebarskih jednačina (1.1) imao netrivijalna rešenja po C_s $(s=1,2,\dots,n)$, potrebno je i dovoljno da pri fiksiranoj vrednosti $\lambda=\lambda_0$, determinanta sistema bude jednaka nuli ($\Delta(\lambda_0)=0$). Funkcija $\Delta(\lambda)$ je cela funkcija, što znači da je skup njenih nula najviše prebrojiv (drugu mogućnost kada je $\Delta(\lambda)\equiv 0$, isključujemo iz razmatranja).

Raspored nula funkcije $\Delta(\lambda)$ može biti prikazan pregledno u kompleksnoj λ -ravni pomoću njenog indikatornog dijagrama. Označimo sa $\mathcal{P}_\Delta$ najmanji konveksni mnogougaonik koji sadrži sve tačke $\pi\eta_g$ $(g=0,1,\dots,G)$. Temena toga mnogougaonika su upravo te tačke, sve ili neke od njih. Pošto je $\Delta(\lambda)$ cela funkcija eksponencijalnog tipa, to je na osnovu teoreme Poly-a indikatroni dijagram funkcije $\Delta(\lambda)$, u oznaci $\mathcal{P}_\Delta$, simetričan mnogougaoniku $\mathcal{P}_\Delta$ u odnosu na realnu osu (Levin B., str. 114, [18]).

Neka su $\pi\overline{\eta}_{g_0}$ i $\pi\overline{\eta}_{g_1}$ ma koja dva susedna temena dijagrama $\mathcal{P}_\Delta$, s tim da stranica $\gamma_0=[\pi\overline{\eta}_{g_0},\pi\overline{\eta}_{g_1}]$ ne sadrži nijednu od preostalih tačaka $\pi\eta_g$. Konstruišimo ugao Ψ_0 proizvoljno maloga otvora sa vrhom u koordinantnom početku i simetralom ℓ_0 upravnoj na pravoj koja sadrži stranicu γ_0. Neka je dalje, sa $\delta(\Psi_0)$ označena uglovna gustina nula finkcije $\Delta(\lambda)$, koje se nalaze u unutrašnjosti ugla Ψ_0. Uvedimo u razmatranje oblast

$$D_0=\{\lambda;\ \lambda\in\Psi_0,\ |\lambda|>\mathcal{R}\}$$

pri čemu je $\mathcal{R}$ dovoljno veliki pozitivan broj (sl.1.).



Sl.1

Postoje sledeća tvrdjenja:

1. van kruga $\mathcal{R} = |\lambda|$, nule funkcije $\Delta(\lambda)$ nalaze se isključivo u unutrašnjosti oblasti tipa D_0, i odredjuju se pomoću formule

$$\lambda_{m,0} = \frac{2m\pi i}{\pi\bar{\eta}_{g_1} - \pi\bar{\eta}_{g_0}}\left[1 + o(1)\right], \quad m \to \infty, \quad i = \sqrt{-1},$$

(Lidski V.B. i Sadovničij V.A. [22]),

2. uglovna gustina nula funkcije $\Delta(\lambda)$, budući da je funkcija $\Delta(\lambda)$ cela i potpuno regularnoga rasta, izračunava se po obrascu

$$\delta(\psi_0) = \frac{1}{2}\left|\bar{\eta}_{g_1} - \bar{\eta}_{g_0}\right|$$

(Levin B., str. 99 [19]).

2. SOPSTVENE I PRIDRUŽENE FUNKCIJE DIFERENCIJALNOG OPERATORA $L_m(\lambda)$. OSNOVNA FUNKCIJA $y(x,\lambda)$ I FUNKCIJA POTPUNOSTI $F(\lambda)$. UOPŠTENJE STAVA O OTSEČKU INDIKATORNIH DIJAGRAMA CELIH FUNKCIJA EKSPONENCIJALNOGA [illegible]

Neka jednačina

$$L_m(\lambda_0)\,y = 0$$

gde je $\lambda = \lambda_0$ fiksiran kompleksan broj, ima netrivijalno rešenje $y_0 = y_0(x)$. Kao što je poznato, broj $\lambda = \lambda_0$ naziva se SOPSTVENOM VREDNOŠĆU a korespodentno rešenje $y_0(x)$ SOPSTVENOM FUNKCIJOM operatora $L_m(\lambda)$.

Pod RANGOM SOPSTVENE VREDNOSTI $\lambda=\lambda_o$ podrazumeva se broj odgovarajućih linearno nezavisnih sopstvenih funkcija. U ovom radu biće uvek korišćen jedinični rang svih sopstvenih vrednosti operatora $L_n(\lambda)$, odnosno uslov

$$rang\, \mathcal{D}(\lambda_o)=n-1$$

i činjenica, da $\lambda=0$ nije sopstvena vrednost. Ako sa Λ obeležimo skup svih sopstvenih vrednosti operatora $L_n(\lambda)$, tada možemo pisati

$$\Lambda=\{\lambda_k;\ \lambda_k\neq 0,\ rang\,\mathcal{D}(\lambda_k)=n-1,\ \Delta(\lambda_k)=0,\ k=1,2,\dots,\}$$

Neka je $\lambda=\lambda_k$ proizvoljna sopstvena vrednost, $y_k(x)$ odgovarajuća sopstvena funkcija i $p=p_k$ red korena $\lambda=\lambda_k$ jednačine $\Delta(\lambda)=0$. Po Keldišu (I.C.Gohberg i M.G.Krein, str.323-328, [7]), funkcije $\varphi_p^{(k)}(x)$ ($p=1,2,\dots,p_k-1$) koje zadovoljavaju skup jednačina

$$\sum_{v=0}^{p}\frac{1}{v!}\frac{\partial^v L_n(\lambda)}{\partial\lambda^v}\left(\varphi_{p-v}^{(k)}\right)\Big|_{\lambda=\lambda_k}=0 \qquad (p=1,2,\dots,p_k-1) \qquad (2.1)$$

obrazuju LANAC PRIDRUŽENIH FUNKCIJA sopstvene funkcije $\varphi_o^{(k)}=y_k(x)$ a funkcije $y_k^{(v,p)}$, definisane formulom

$$y_k^{(v,p)}=\frac{d^v}{dt^v}\left[e^{\lambda_k t}\left(\varphi_p^{(k)}+\frac{t}{1!}\varphi_{p-1}^{(k)}+\dots+\frac{t^p}{p!}\varphi_o^{(k)}\right)\right]_{t=0} \qquad (2.2)$$

($v=0,1,\dots,n-1$; $p=0,1,\dots,p_k-1$), IZVODNI LANAC prethodnog lanca. Istaknimo da se skup jednačina (2.1), s obzirom na to da granični uslovi po pretpostavci ne zavise od kompleksnog parametra λ, ustvari svodi na sistem jednačina oblika

$$\sum_{v=0}^{p}\frac{1}{v!}\frac{\partial^v \ell}{\partial\lambda^v}\left(\varphi_{p-v}^{(k)}\right)\Big|_{\lambda=\lambda_k}=0,\quad U_j(\varphi_p^{(k)})=0$$

($j=1,2,\dots,n$; $p=1,2,\dots,p_k-1$), pri čemu $\frac{\partial^v \ell}{\partial\lambda^v}(y)$ označava diferencijalni izraz, čiji su koeficijenti izvodi reda v po λ odgovarajućih koeficijenata linearnog diferencijalnog izraza $\ell(y)$ (Najmark M.A., str. 22, [24]).

Neka je gornjim postupkom, svakoj sopstvenoj funkciji $y_k(x)$ ($k=1,\dots,$) dodeljen niz vektor funkcija: $\{y_k^{(v,p)}\}_0^{n-1}$ ($p=0,1,\dots,p_k-1$; $k=1,2,\dots,$), i neka je $\mathcal{L}_n^2(0,\pi)=\bigoplus_n \mathcal{L}^2(0,\pi)$ direktna ortogonalna suma, sastavljena od prostora $\mathcal{L}^2(0,\pi)$. Po definiciji Keldiša (I.C.Gohberg i M.G.Krein, str. 328, [7]), sistem sopstvenih i pridruženih funkcija operatora $L_n(\lambda)$ je N-TO ŠTRUKO POTPUN u prostoru $\mathcal{L}^2(0,\pi)$, ako je niz funkcija $\{y_k^{(v,p)}\}_0^{n-1}$ potpun u prostoru $\mathcal{L}_n^2(0,\pi)$.

Sopstvene funkcije operatora $L_n(\lambda)$ odredjuju se iz opšteg rešenja

$$y=\sum_{s=1}^{n} C_s e^{\lambda\omega_s x} \tag{2.3}$$

diferencijalne jednačine $\ell(y)=0$,i zadanih graničnih uslova

$$U_j(y)=\sum_{s=1}^{n} C_s U_{js}(\lambda)=0, \quad (j=1,2,\dots,n) \tag{2.4}$$

u zavisnosti od kompleksnog parametra λ .Pri proizvoljnoj sopstvenoj vrednosti $\lambda=\lambda_k$,budući da je $rang\,\mathcal{D}(\lambda_k)=n-1$,konstante C_s $(s=1,\dots,n$ moraju biti proporcionalne kofaktorima elemenata neke vrste determinante sistema (2.4).Sopstvena funkcija može biti napisana u obliku

$$y_k(x)=y(x,\lambda_k)=\begin{vmatrix} e^{\lambda\omega_1 x} & \dots & e^{\lambda\omega_n x} \\ U_{11}(\lambda) & \dots & U_{1n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots \\ U_{n-1\,1}(\lambda) & \dots & U_{n-1\,n}(\lambda) \end{vmatrix}_{\lambda=\lambda_k} \tag{2.5}$$

pod pretpostavkom da je bar jedan minor elemenata prve vrste različit od nule;u protivnom slučaju,treba uzeti u obzir druge vrste determinante $\Delta(\lambda)$ tako da bi pomenuti zahtev bio ispunjen.Ukoliko bi bar jedan minor elemenata prve vrste determinante (2.5) bio različit od nule kada $\lambda=\lambda_k$ prolazi čitav skup sopstvenih vrednosti Λ ,tada se iz funkcije $y(x,\lambda)$ mogu dobiti sve sopstvene funkcije putem zamene $\lambda=\lambda_k$,dakle $y_k(x)=y(x,\lambda_k$ ($k=1,2,\dots,$).Pri ispitivanju višestruke potpunosti,pomenuta funkcija $y(x,\lambda)$ imaće fundamentalnu ulogu.

<u>D E F I N I C I J A 1.3.</u> Funkcija $y(x,\lambda)$ iz koje se putem zamene sopstvenih vrednosti $\lambda=\lambda_k$, $\forall\lambda_k\in\Lambda$ mogu dobiti sve sopstvene funkcije diferencijalnog operatora $L_n(\lambda)$,zove se <u>OSNOVNA FUNKCIJA</u> problema (A_n).

<u>D E F I N I C I J A 1.4.</u> Funkciju $y(x,\lambda_0)$,pri čemu je $\lambda=\lambda_0$ proizvoljan kompleksan broj različit od nule i svih sopstvenih vrednosti,a $y(x,\lambda)$ osnovna funkcija,nazivamo <u>FUNKCIJOM DEFEKTA</u> problema (A_n).

<u>D E F I N I C I J A 1.5.</u> Neka je $f_v(x)$ ($v=1,2,\dots,n$) proizvoljan niz funkcija iz prostora $\mathcal{L}^2(0,\pi)$ i $y(x,\lambda)$ osnovna funkcija problema (A_n).Funkciju

$$F(\lambda)=\sum_{v=1}^{n}\lambda^{v-1}\int_0^{\pi} y(x,\lambda)f_v(x)\,dx \tag{2.6}$$

zvaćemo <u>FUNKCIJOM POTPUNOSTI</u> problema (A_n).

Predjimo na izvodjenje dokaza nekih stavova, koji će imati konkretnu primenu u drugom i trećem delu ovoga rada.

S T A V 1.1. Neka je sopstvena vrednost $\lambda=\lambda_{n}$ operatora $L_{n}(\lambda)$, koren jednačine $\Delta(\lambda)=0$ reda $p=p_{n}$. Tada je

$$y_{n}^{(\nu,p)}=\frac{1}{p!}\frac{\partial^{p}(\lambda^{\nu}y)}{\partial\lambda^{p}}\Big|_{\lambda=\lambda_{n}} \tag{2.7}$$

pri čemu je $y_{n}^{(\nu,p)}$ $(p=1,2,\ldots,p_{n}-1;\ \nu=0,1,\ldots,n-1)$, izvodni lanac sopstvene funkcije $y=\varphi_{0}^{(n)}(x)$.

D O K A Z. Po pretpostavci, sopstvenoj vrednosti $\lambda=\lambda_{n}$ odgovara samo jedna sopstvena funkcija $y=\varphi_{0}^{(n)}(x)$. Veza izmedju sopstvene funkcije i njenih pridruženih funkcija $\varphi_{p}^{(n)}(x)$ $(p=1,2,\ldots,p_{n}-1)$ izražena je u obliku

$$\varphi_{p}^{(n)}(x)=\frac{1}{p!}\frac{\partial^{p}y}{\partial\lambda^{p}}\Big|_{\lambda=\lambda_{n}} \tag{2.8}$$

(Najmark M.A., str.22, [24]). Iz definicione formule izvodnog lanca (2.2), sledi

$$y_{n}^{(\nu,p)}=\sum_{s=0}^{\nu}\binom{\nu}{s}\lambda_{n}^{\nu-s}\varphi_{p-s}^{(n)} \tag{2.9}$$

Uzimajući u obzir (2.8), imamo

$$\begin{aligned}\binom{\nu}{s}\lambda_{n}^{\nu-s}\varphi_{p-s}^{(n)}&=\binom{\nu}{s}\lambda^{\nu-s}\frac{1}{(p-s)!}\frac{\partial^{p-s}y}{\partial\lambda^{p-s}}\Big|_{\lambda=\lambda_{n}}=\\&=\frac{1}{p!}\binom{p}{s}\frac{d^{s}(\lambda^{\nu})}{d\lambda^{s}}\cdot\frac{\partial^{p-s}y}{\partial\lambda^{p-s}}\Big|_{\lambda=\lambda_{n}}\end{aligned} \tag{2.10}$$

Zamenjujući izraz (2.10) u jednakosti (2.9), koristeći pri tome Leibnitzovu formulu, konačno nalazimo

$$y_{n}^{(\nu,p)}=\frac{1}{p!}\sum_{s=0}^{p}\binom{p}{s}\frac{d^{s}(\lambda^{\nu})}{d\lambda^{s}}\cdot\frac{\partial^{p-s}y}{\partial\lambda^{p-s}}\Big|_{\lambda=\lambda_{n}}=\frac{1}{p!}\frac{\partial^{p}(\lambda^{\nu}y)}{\partial\lambda^{p}}\Big|_{\lambda=\lambda_{n}}$$

Primetimo, da su sopstvene i njima pridružene funkcije medjusobno linearno nezavisne, i da samim tim induciraju podprostore čije su dimenzije jednake redu odgovarajućih sopstvenih vrednosti-korena jednačine $\Delta(\lambda)=0$.

S T A V 1.2. Neka je osnovna funkcija problema (A_n) odredjena relacijom (2.5) i neka je $p_g(\lambda) \not\equiv 0$ ($g=0,1,2,\dots, G$), gde su $p_g(\lambda)$, Δ - polinomi. Tada je indikatorni dijagram funkcije potpunosti $F(\lambda)$ sadržan u indikatornom dijagramu karakteristične determinante $\Delta(\lambda)$

D O K A Z. Imajući u vidu strukturu funkcija $U_{js}(\lambda)$ ($j=1,2,\dots n$; $s=1,2,\dots, n-1$), razvijeni oblik determinante (2.5) glasi

$$y(x,\lambda)=\sum_{s=1}^{n}\Big[q_s(\lambda)e^{\lambda\omega_s x}+\sum_{(g)}q_{sg}(\lambda)e^{\lambda(\omega_s x+\eta_g\pi)}\Big] \tag{2.11}$$

pri čemu su $q_s(\lambda)$ i $q_{sg}(\lambda)$ polinomi po parametru λ. Funkcija potpunosti $F(\lambda)$ (str.11) je cela i eksponencijalnoga tipa. Njena asocirana funkcija ima oblik

$$\Psi(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda z}F(z)dz\;;\quad z=re^{-\Theta i},\ r\geq 0$$

pri čemu je Θ proizvoljan ugao. Na osnovu teoreme Polya-a, indikatorni dijagram $\mathcal{P}_F$ funkcije $F(\lambda)$ simetričan je indikatornom dijagramu $\mathcal{P}_\Psi$ funkcije $\Psi(\lambda)$ u odnosu na realnu osu (Levin B., str.114,[18]). Prema tome, tvrdjenje stava će biti dokazano ako pokažemo da se indikatorni dijagram funkcije $\Psi(\lambda)$ sadrži u konjugovanom dijagramu $\bar{\mathcal{P}}_\Delta$ funkcije $\Delta(\lambda)$ (vid.str.8). U spoljašnjosti indikatornog dijagrama $\mathcal{P}_\Psi$ funkcija $\Psi(\lambda)$ je analitička i može biti predstavljena u obliku

$$\Psi(\lambda)=\sum_{\nu=1}^{n}\int_0^\pi f_\nu(x)\Psi_\nu(x,\lambda)dx\,,$$

pri čemu je

$$\Psi_\nu(x,\lambda)=\sum_{s=1}^{n}\int_0^\infty z^{\nu-1}\Big[q_s(z)e^{z(\omega_s x-\lambda)}+\sum_{(g)}q_{sg}(z)e^{z(\omega_s x+\eta_g\pi-\lambda)}\Big]dz\equiv\sum_{s=1}^{n}\Psi_{\nu s}(x,\lambda)$$

Pošto su $q_s(z)$ i $q_{sg}(z)$ polinomi po z sa koeficijentima koji zavise od koeficijenata graničnih uslova (II), to putem integracije dobijamo

$$\Psi_{\nu s}(x,\lambda)=\sum_{(e)}\frac{A_{s\nu}^{(e)}}{(\omega_s x-\lambda)^e}+\sum_{(g,m)}\frac{A_{s\nu g}^{(m)}}{(\omega_s x+\eta_g\pi-\lambda)^m}$$

gde su: $A_{s\nu}^{(e)}$ i $A_{s\nu g}^{(m)}$ konstante, e i m nenegativni celi brojevi. Stoga je

$$\Psi_\nu(x,\lambda)=\sum_{(s,e)}\frac{A_{s\nu}^{(e)}}{(\omega_s x-\lambda)^e}+\sum_{(s,g,m)}\frac{A_{s\nu g}^{(m)}}{(\omega_s x+\eta_g\pi-\lambda)^m}$$

Singulariteti funkcija $\Psi_\nu(x,\lambda)$ ($\nu = 1,2,\ldots,n;\ 0\le x\le\pi$) mogu biti samo tačke u kompleksnoj λ -ravni koje pripadaju segmentima, oblika $[\eta_g\pi,(\omega_s+\eta_g)\pi]$. Krajnje tačke tih segmenata, su ustvari tačke $\eta_g\pi$ ($g=$ $1,2,\ldots,G$) koje pripadaju konjugovanom dijagramu $\widetilde{\mathcal{P}}_\Delta$ funkcije $\Delta(\lambda)$. Zbog konveksnosti toga dijagrama, i svi pomenuti segmenti moraju biti sadržani u dijagramu $\widetilde{\mathcal{P}}_\Delta$. Otuda zaključujemo, da je dijagram $\mathcal{P}_\psi$ sadržan u dijagramu $\widetilde{\mathcal{P}}_\Delta$, što je trebalo dokazati.

U teoriji celih funkcija postoje stavovi o takozvanom otsečku indikatornih dijagrama celih funkcija eksponencijalnoga tipa. U njima se pretpostavlja da su nule tih funkcija prirodni, ili opštije pozitivni brojevi, koje ispunjavaju odredjene uslove (Levin B., str. 90, [19]). Pošto ćemo u ovom radu koristiti fukcije iz pomenute klase, čije nule ne moraju biti samo pozitivni brojevi, to se nameće potreba za generalizaciju navedenog stava.

S T A V 1.3. Neka je $f(\lambda)$ cela funkcija eksponencijalnoga tipa, čije nule $\lambda=\lambda_n$ ($n=1,2,\ldots,$) zadovoljavaju uslov

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\lambda_n}=d \qquad (\ d>0\ ) \quad .$$

Tada postoji prava (ℓ), paralelna imaginarnoj osi na kojoj se nalazi stranica indikatornog dijagrama funkcije $f(\lambda)$, čija dužina nije manja od $2\pi d$. Pomenuti dijagram leži u levoj poluravni u odnosu na pravu (ℓ)

D O K A Z. Obrazujmo sledeće funkcije

$$g(\lambda)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\right) \qquad \text{i} \qquad \psi(\lambda)=\frac{f(\lambda)}{g(\lambda)}$$

Funkcija $g(\lambda)$ je cela, eksponencijalnoga tipa i potpuno regularnoga rasta (Levin B., str. 287, [18]). Indikatorni dijagram funkcije $g(\lambda)$ je otsečak imaginarne ose dužine $2\pi d$. Pošto je $f(\lambda)$ cela funkcija eksponencijalnoga tipa po pretpostavci, i kako je $f(\lambda_n)=g(\lambda_n)=0$ ($n=1,2,\ldots,$) to je funkcija $\psi(\lambda)$ takodje cela i eksponencijalnoga tipa. Na osnovu poznatog stava (Levin B., str. 208, [18]) izmedju indikatora tih funkcija posotji sledeća veza

$$h_f(\Theta)=h_\psi(\Theta)+h_g(\Theta), \quad 0\le\Theta\le 2\pi$$

ili

$$\mathcal{P}_f=\mathcal{P}_\psi+\mathcal{P}_g$$

gde je sa $\mathcal{P}$ označen indikatorni dijagram odgovarajuće funkcije. Konstruišimo pravu (ℓ) paralelno imaginarnoj osi, koja sa dijagramom $\mathcal{P}_\psi$

ima bar jednu zajedničku tačku $\lambda = \lambda_0$,s tim da se dijagram $\mathcal{P}_{\psi}$ nalazi u njenoj levoj poluravni.Bilo koja tačka $\lambda=\lambda_f$ dijagrama $\mathcal{P}_f$ odredjuje se pomoću jednakosti $\lambda_f=\lambda_\psi+\lambda_g$, $\lambda_\psi \in \mathcal{P}_\psi$, $\lambda_g \in \mathcal{P}_g$ .Kako dijagram $\mathcal{P}_g$ leži na imaginarnoj osi,to tačke $\lambda_f=\lambda_0+\lambda_g$, $\lambda_g \in \mathcal{P}_g$,opisuju duž koja leži na pravoj (ℓ),i istovremeno pripada dijagramu $\mathcal{P}_f$ Dužina te duži iznosi $2\pi d$ .Imajući u vidu izbor tačke $\lambda=\lambda_0$,zaključujema da se indikatorni dijagram funkcije $f(\lambda)$ nalazi u levoj poluravni u odnosu na pravu (ℓ),čime je dokaz završen.

S T A V 1.4. Neka je osnovna funkcija $y(x,\lambda)$ problema (A_m) odredjena relacijom (2.5),i neka je funkcija potpunosti $F(\lambda)$ identički jednaka nuli ($F(\lambda)\equiv 0$).Tada je $f_v(x)=0$ s.s. u intervalu ($0,\pi$), ($v=1,2,\dots,n$).

D O K A Z. Polazeći od (2.11),funkciju $F(\lambda)$ možemo predstaviti u obliku

$$F(\lambda)=\sum_{s=1}^{n} Q_s(\lambda)F_s(\lambda)+\sum_{s=1}^{n}\sum_{(g)} Q_{sg}(\lambda)F_{sg}(\lambda) \tag{2.12}$$

pri čemu su $Q_s(\lambda)$ i $Q_{sg}(\lambda)$ polinomi po λ ,i dalje

$$F_s(\lambda)=\sum_{v=1}^{n}\lambda^{v-1}\int_0^\pi e^{\lambda\omega_s x} f_v(x)dx$$

$$F_{sg}(\lambda)=e^{\lambda\eta_g\pi}F_s(\lambda)$$

Neka je $\lambda=re^{\Theta i}$ ($0\le r<\infty$), Θ fiksiran ugao.Na toj polupravoj svi sabirci desne strane jednakosti (2.12) mogu biti grupisani u sume $\Phi_m(\lambda)$ ($m=1,2,\dots,M$) po brzini rasta.Radi odredjenosti,uzmimo da funkcija $\Phi_1(\lambda)$ ima najbrži rast na posmatranoj polupravoj.Napišimo funkciju $F(\lambda)$ u obliku

$$F(\lambda)=\Phi_1(\lambda)\left[1+\Psi(\lambda)\right]$$

gde je

$$\Psi(\lambda)=\frac{1}{\Phi_1(\lambda)}\sum_{m=2}^{M}\Phi_m(\lambda)$$

Za dovoljno velike vrednosti realne promenljive r ($r>R$),funkcija može se učiniti dovoljno malom veličinom po modulu.Pošto je funkcija $\Phi_1(\lambda)$ cela,to na polupravoj $\lambda=re^{\Theta i}$ ($r>R$) može imati najviše prebrojivo mnogo nula.Iz pretpostavke $F(\lambda)\equiv 0$,sledi

$$\Phi_1(re^{\Theta i})\left[1+\Psi(re^{\Theta i})\right]\equiv 0\,,\quad r>R.$$

Kako je $1+\Psi(re^{\Theta i})\neq 0$,to mora biti $\Phi_1(re^{\Theta i})\equiv 0$ na posmatranoj polupravoj.Pošto je $\Phi_1(\lambda)$ cela funkcija,to je $\Phi_1(\lambda)\equiv 0$,odnosno i $\Phi_m(\lambda)\equiv 0$ ($m=2,3,\dots,M$).Nastavljajući tim putem,dobićemo

$$F_s(\lambda)\equiv 0, \qquad (s=1,2,\dots,n)$$

Stavljajući $\lambda\omega_s=z$ u skup identiteta

$$F_s(\lambda)=\sum_{v=1}^{n}\lambda^{v-1}\int_0^{\pi}e^{\lambda\omega_s x}f_v(x)dx\equiv 0$$

dobijamo sistem jednačina po z ,oblika

$$\sum_{v=1}^{n}\left[\frac{\bar{\omega}_s}{|\omega_s|^2}\right]^{v-1}\Psi_v(z)=0, \quad (s=1,2,\dots,n) \tag{2.13}$$

pri čemu je

$$\Psi_v(z)=z^{v-1}\int_0^{\pi}e^{zx}f_v(x)dx \qquad ;$$

Kako je po pretpostavci $\omega_s\neq\omega_t$ ($s,t=1,2,\dots,n;\ s\neq t$) to je determinanta sistema (2.13) različita od nule,što znači da sistem ima samo trivijalna rešenja

$$\Psi_v(z)=0, \qquad (v=1,2,\dots,n)$$

No z može biti ma kakav kompleksan broj.Stoga je

$$\Psi_v(z)\equiv 0 \Longrightarrow \int_0^{\pi}e^{zx}f_v(x)dx\equiv 0$$

ili

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^m}{m!}a_m^{(v)}\equiv 0 \Longrightarrow a_m^{(v)}=\int_0^{\pi}x^m f_v(x)dx=0$$

Konačno,zbog potpunosti niza funkcija $\{x^m\}_0^{\infty}$ u prostoru $\mathcal{L}^2(0,\pi)$, dobijamo

$$f_v(x)=0 \qquad (v=1,2,\dots,n) \text{ s.s. u intervalu } (0,\pi)$$

Time je stav u potpunosti dokazan.

3.REGULARNOST GRANIČNIH USLOVA HOMOGENOG GRANIČNOG PROBLEMA (A_n).

Pri izučavanju grupe zadataka graničnih problema(asimptotika sopstvenih vrednosti i sopstvenih funkcija,razlaganja po sopstvenim funkcijama,funkcija Grenn-a i dr.),pojam regularnosti graničnih uslova predstavlja jednu od bitnih pretpostavki.U konkretnim situacijama niz autora kao na primer:Najmark M.A. [24] (str.51),Ždanovič [11] i Rasulov [27] definišu regularnost graničnih uslova,koristeći pri tome jednu specijalnu klasu graničnih uslova koja je detaljno opisana u monoggrafija Tamarkina [29] (gl.IV).Treba odmah istaći da Tamarkin tu klasu graničnih uslova nije nazvao regularnom,ma da se u savremenoj terminologiji ona tako i naziva.Koristeći postupak Tamarkina,definisaćemo regularnost graničnih uslova homogenog graničnog problema (A_n).Prethodno uvedimo sledeće oznake:

$$\tilde{g} = g^* + o(1) \ , \ \lambda \to \infty \tag{3.1}$$

i

$$\det \| A_{js} + B_{js} e^{\lambda \omega_s \pi} \|_1^n = [A_{j1} + B_{j1} e^{\lambda \omega_1 \pi} \dots A_{jn} + B_{jn} e^{\lambda \omega_n \pi}] \tag{3.2}$$

pri čemu je g^* konstanta,ili opštije funkcija od λ .

U kompleksnoj λ - ravni konstruišimo prave L_r ($r = 1, 2, \dots, \sigma$) koje prolaze kroz koordinatni početak,i na kojima se nalaze sve tačke ω_s ($s = 1, 2, \dots, n$).Neka na pravoj L_r leže tačke $\omega_1^{(r)}, \omega_2^{(r)}, \dots \omega_{s_r}^{(r)}$ i neka je α_r ugao koji ta prava zaklapa sa pozitivnim delom realne ose.Konstruišimo dalje,sektor S_r proizvoljno maloga otvora (sl.2) čija simetrala zaklapa sa pozitivnim delom realne ose ugao β_r po formuli

$$\beta_r = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \alpha_r \ ; & 0 \le \alpha_r \le \pi/2 \\ \frac{3\pi}{2} - \alpha_r \ ; & \frac{\pi}{2} < \alpha_r < \pi. \end{cases}$$

U daljem toku izlaganja,jednačinu $\Delta(\lambda) = 0$ posmatraćemo u sektoru S_K . Elemente determinante $\Delta(\lambda)$ možemo napisati u obliku

$$A_{js} + B_{js} e^{\lambda \omega_s \pi} = \lambda^{p_s} [\tilde{A}_{js} + \tilde{B}_{js} e^{\lambda \omega_s \pi}] \tag{3.3}$$

gde je p_s najveći stepen polinoma $A_{js}(\lambda)$ i $B_{js}(\lambda)$ .Sve brojeve ω_s

koji su različiti od $\omega_1^{(r)}, \omega_2^{(r)}, \ldots, \omega_{s_r}^{(r)}$ podelimo u dve grupe koje su okarakterisane relacijama:

$$\lim_{\lambda \in S_r,\ \lambda \to \infty} Re(\lambda\omega') = 0, \quad \lim_{\lambda \in S_r,\ \lambda \to \infty} Re(\lambda\omega'') = \infty \tag{3.4}$$

pri čemu su ω' i ω'' reprezenti tih grupa. Uzimajući u obzir (3.3) i (3.4) determinantu $\Delta(\lambda)$ u sektoru S_r, možemo napisati u obliku

$$\Delta(\lambda) = \lambda^{\sum_{s=1}^{m} p_s} e^{\sum \lambda \pi \omega''} \Delta_0(\lambda), \quad \lambda \in S_r$$

pri čemu determinanta $\Delta_0(\lambda)$ ima sledeću strukturu

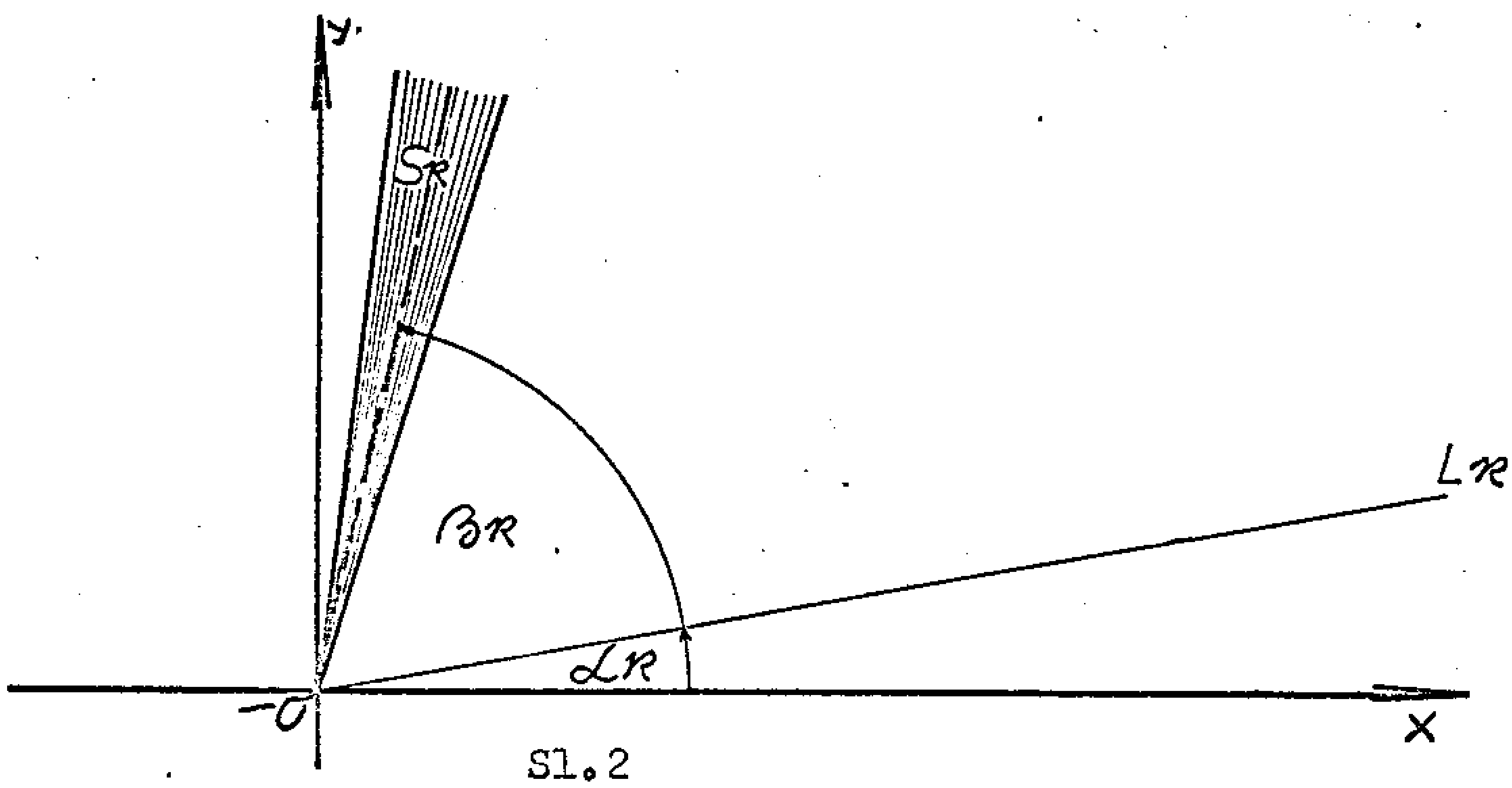
$$\Delta_0(\lambda) = \left[\tilde{g}_{j1} \ldots \tilde{A}_{js_p} + \tilde{B}_{js_p} e^{\lambda \omega_{s_p}^{(r)} \pi} \ldots \tilde{g}_{jn}\right], \quad \lambda \in S_r$$

Zamenom $\lambda e^{\alpha_r i} = z$ a zatim razvijanjem determinante $\Delta_0(\lambda)$, dobijamo

$$\Delta_0(\lambda) = H_r(z) = \tilde{M}_1^{(r)} e^{m_1^{(r)} z} + \tilde{M}_2^{(r)} e^{m_2^{(r)} z} + \ldots + \tilde{M}_{\sigma_r}^{(r)} e^{m_{\sigma_r}^{(r)} z} = 0 \tag{3.5}$$

pri čemu je: $m_1^{(r)} < m_2^{(r)} < \ldots < m_{\sigma_r}^{(r)}$, $\tilde{M}_p^{(r)} = M_p^{*(r)} + o(1), z \to \infty$, i $M_1^{*(r)}, M_2^{*(r)}, \ldots, M_{\sigma_r}^{*(r)}$ konstante.

Svakom sektoru S_r ($r = 1, 2, \ldots, \sigma$) gornjim postupkom korespondira se jednačina oblika (3.5). Na taj način vidimo, da se rešenja jednačine $\Delta(\lambda) = 0$ koja pripadaju sektorima S_r nalaze putem rešavanja jednačina $H_r(z) = 0$ ($r = 1, 2, \ldots, \sigma$).



Sl. 2

Specijalnu klasu graničnih uslova, o kojoj je u početku ovog paragrafa bilo reči, Tamarkin je odredio pomoću sledećih uslova:

$$M_1^{*(r)} \neq 0, \quad M_{\sigma_r}^{*(r)} \neq 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, \sigma) \tag{3.6}$$

To su ustvari pretpostavke, koje pomenuti autori (str.17) koriste pri definisanju pojma regularnosti graničnih uslova (istina u konkretnijem obliku zavisno od graničnog problema koji se proučava). Na osnovu izloženog, a u cilju terminološke preciznosti u daljem radu, definisaćem regularnost graničnih uslova na sledeći način.

<u>D E F I N I C I J A 1.6.</u> Ako su ispunjeni uslovi (3.6), tada ćemo reći da su granični uslovi homogenog graničnog problema (A_n) regularni po Tamarkinu, ili jednostavno regularni.

II D E O

1. DIFERENCIJALNI OPERATOR $L_2(\lambda)$. SOPSTVENE FUNKCIJE I KARAKTERISTIČNA DETERMINANTA $\Delta(\lambda)$.

Ovaj deo posvećen je izučavanju homogenog graničnog problema (A_2), koji je odredjen skupom jednačina:

$$\text{(I)} \quad \ell(y) = y'' + 2a\lambda y' + b\lambda^2 y = 0$$

$$\text{(II)} \quad U_j(y) = \sum_{k=1}^{2} \left[a_{jk} y^{(k-1)}(0) + b_{jk} y^{(k-1)}(\pi) \right] = 0 \qquad (j = 1, 2)$$

ili kraće jednačinom $L_2(\lambda)y = 0$, gde je $L_2(\lambda)$ diferencijalni operator definisan linearnim diferencijalnim izrazom $\ell(y)$ i graničnim uslovima (II). Koristićemo sledeće pretpostavke: koeficijenti a_{jk} i b_{jk} ($j, k = 1, 2$) su u opštem slučaju kompleksne, a i b $(b - a^2 > 0)$ realne konstante i λ je kompleksni parametar.

Stavljajući opšte rešenje $y = C_1 e^{\lambda\omega_1 x} + C_2 e^{\lambda\omega_2 x}$ diferencijalne jednačine $\ell(y) = 0$ u (II), dobijamo homogeni sistem linearnih jednačina po C_s ($s = 1, 2$), oblika

$$\sum_{s=1}^{2} C_s U_{js}(\lambda) = 0 \qquad (j = 1, 2)$$

Matrica toga sistema

$$\mathcal{D}(\lambda) = \| U_{js}(\lambda) \|_{2,2}$$

ima elemente

$$U_{js}(\lambda) = A_{js} + B_{js} e^{\lambda\omega_s \pi}$$

gde je

$$A_{js} = \sum_{k=1}^{2} a_{jk} (\lambda\omega_s)^{k-1}, \quad B_{js} = \sum_{k=1}^{2} b_{jk} (\lambda\omega_s)^{k-1}, \quad \omega_1 = -a + i\sqrt{b - a^2}, \quad \omega_2 = \overline{\omega_1}.$$

Iz

$$\Delta(\lambda) = \det \mathcal{D}(\lambda) = \left[A_{j1} + B_{j1} e^{\lambda\omega_1 \pi} \;\; A_{j2} + B_{j2} e^{\lambda\omega_2 \pi} \right]$$

putem razlaganja, dobija se karakteristična determinanta u razvijenom obliku, dakle

$$\Delta(\lambda)=p_0(\lambda)+p_1(\lambda)e^{\lambda\omega_1\pi}+p_2(\lambda)e^{\lambda\omega_2\pi}+p_3(\lambda)e^{\lambda(\omega_1+\omega_2)\pi} \tag{1.1}$$

pri čemu je:

$$\begin{aligned} &p_0(\lambda)=-2\beta A_0\lambda i,\quad p_1(\lambda)=A_1|\omega_1|^2\lambda^2+(A_2\omega_1+A_3\omega_2)\lambda+A_4 \\ &p_3(\lambda)=-2\beta A_5\lambda i,\quad p_2(\lambda)=-A_1|\omega_1|^2\lambda^2-(A_2\omega_2+A_3\omega_1)\lambda-A_4 \\ &A_0=[a_{j1}a_{j2}],\quad A_1=[b_{j2}a_{j2}],\quad A_2=[b_{j2}a_{j1}],\quad A_3=[b_{j1}a_{j2}] \\ &A_4=[b_{j1}a_{j1}],\quad A_5=[b_{j1}b_{j2}],\quad \beta=\sqrt{b-a^2}\,. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Neka je Λ skup svih sopstvenih vrednosti operatora $L_2(\lambda)$. Svaka sopstvena vrednost je istovremeno nula cele funkcije $\Delta(\lambda)$, dakle

$$\Lambda=\{\lambda_\kappa;\ \Delta(\lambda_\kappa)=0,\ \kappa=1,2,\dots,\}.$$

Pretpostavljamo da $\lambda=0$ nije sopstvena vrednost, i da je $rang\,\mathcal{D}(\lambda_\kappa)=$ $\forall\lambda_\kappa\in\Lambda$. Pod tim pretpostavkama može se odrediti osnovna funkcija problema (A_2), koja je definisana u prvom delu. Dokažimo to tvrdjenje.

<u>S T A V 2.1.</u> Neka su sve sopstvene vrednosti $\lambda=\lambda_\kappa$ ($\kappa=1,2,\dots,$) operatora $L_2(\lambda)$, jediničnog ranga. Tada postoji funkcija $y(x,\lambda)$ iz koje se mogu dobiti sve sopstvene funkcije toga operatora putem zamene $\lambda=\lambda_\kappa$.

<u>D O K A Z.</u> Uvedimo nove granične uslove, oblika

$$(\tilde{II})\quad \begin{aligned} &\tilde{U}_1(y)=U_1(y)+\alpha U_2(y)=0 \\ &\tilde{U}_2(y)=U_2(y)=0 \end{aligned}$$

i odredimo broj $\alpha\neq0$ tako, da bar jedan izraz

$$\tilde{U}_s(\lambda)=U_{1s}(\lambda)+\alpha U_{2s}(\lambda)\qquad (s=1,2)$$

bude različit od nule pri ma kojoj vrednosti $\lambda=\lambda_\kappa$, $\lambda_\kappa\in\Lambda$. Da je to uvek moguće postići, možemo se uveriti na sledeći način. Pošto je po pretpostavci, za proizvoljnu sopstvenu vrednost $\lambda=\lambda_\kappa$, $rang\,\mathcal{D}(\lambda_\kappa)=1$ to bar jedan element $U_{js}(\lambda_\kappa)$ ($j,s=1,2$) karakteristične matrice $\mathcal{D}(\lambda_\kappa)$ mora biti različit od nule. Neka je $U_{2s}(\lambda_\kappa)=0$ ($s=1,2$) Tada je jedan od brojeva $U_{1s}(\lambda_\kappa)$ ($s=1,2$) različit od nule pri čemu je α proizvoljan broj, što znači da je $\tilde{U}_s(\lambda_\kappa)\neq0$. Ukoliko je $U_{2s}(\lambda_\kappa)$ ($s=1,2$), tada pri $\alpha\neq-\frac{U_{1s}(\lambda_\kappa)}{U_{2s}(\lambda_\kappa)}$ dobijamo $\tilde{U}_s(\lambda_\kappa)\neq0$.

Drugim rečima, parametar α treba izabrati tako da bude različit od nule i svih brojeva oblika $-\frac{U_{1s}(\lambda_k)}{U_{2s}(\lambda_k)}$, za koje je $U_{2s}(\lambda_k) \neq 0$, $\lambda_k \in \Lambda$ ($s = 1, 2$).

Iz identiteta

$$\tilde{\Delta}(\lambda) = \begin{vmatrix} U_{11}(\lambda) + \alpha U_{21}(\lambda) & U_{12}(\lambda) + \alpha U_{22}(\lambda) \\ U_{21}(\lambda) & U_{22}(\lambda) \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} U_{11}(\lambda) & U_{12}(\lambda) \\ U_{21}(\lambda) & U_{22}(\lambda) \end{vmatrix} = \Delta(\lambda)$$

sledi ekvivalentnost graničnih uslova (II) i ($\widetilde{\text{II}}$). Obrazujmo funkciju

$$y(x,\lambda) = \begin{vmatrix} e^{\lambda\omega_1 x} & e^{\lambda\omega_2 x} \\ U_{11}(\lambda) + \alpha U_{21}(\lambda) & U_{12}(\lambda) + \alpha U_{22}(\lambda) \end{vmatrix} \tag{1.3}$$

Pri proizvoljnoj sopstvenoj vrednosti $\lambda = \lambda_k$, funkcija $y(x, \lambda_k)$ je netrivijalno rešenje jednačine $\ell(y) = 0$, koje zadovoljava granične uslove ($\widetilde{\text{II}}$), što znači i granične uslove (II). Prema tome, sve sopstvene funkcije operatora $L_2(\lambda)$ dobijamo iz funkcije $y(x,\lambda)$, putem zamene odgovarajućih sopstvenih vrednosti $\lambda = \lambda_k$ ($k = 1, 2, \dots$). Po definiciji 1.3, funkcija $y(x,\lambda)$ je osnovna funkcija problema (A_2), što je i trebalo dokazati.

Ne ograničavajući opštost, mi ćemo ubuduće koristiti funkciju

$$y(x,\lambda) = \begin{vmatrix} e^{\lambda\omega_1 x} & e^{\lambda\omega_2 x} \\ U_{11}(\lambda) & U_{12}(\lambda) \end{vmatrix}$$

u svojstvu osnovne, pretpostavljajući da je $|U_{11}(\lambda_k)| + |U_{12}(\lambda_k)| > 0$, $\forall \lambda_k \in \Lambda$.
Njen razvijeni oblik, glasi

$$y(x,\lambda) = \sum_{s=1}^{2} q_s(\lambda) e^{\lambda\omega_s x} + \sum_{s,j=1}^{2} q_{sj}(\lambda) e^{\lambda(\omega_s x + \omega_j \pi)} \tag{1.4}$$

pri čemu je

$$q_s(\lambda) = (-1)^{s-1}(a_{11} + a_{12}\omega_j\lambda)$$
$$q_{sj}(\lambda) = (-1)^{s-1}(b_{11} + b_{12}\omega_j\lambda) \qquad (s, j = 1, 2;\ s \neq j)$$

2. INDIKATORNI DIJAGRAMI KARAKTERISTIČNE DETERMINANTE $\Delta(\lambda)$. REGULARNOST GRANIČNIH USLOVA.

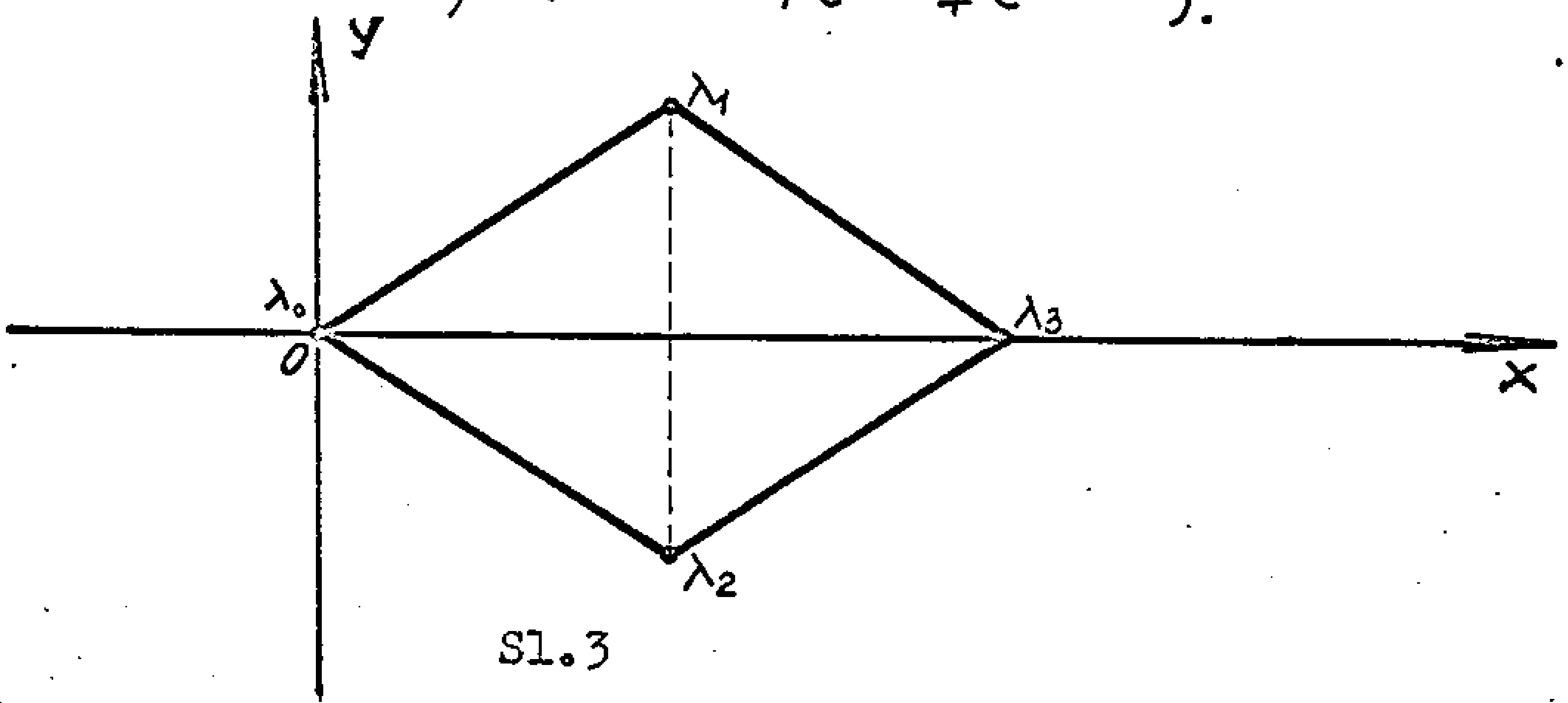
Uvedimo sledeće oznake: $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = \omega_1\pi$, $\lambda_2 = \omega_2\pi$ i $\lambda_3 = -2\alpha\pi$ i pretpostavimo da je $\alpha < 0$. Pošto singulariteti asocirane funkcije $\psi(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda z}\Delta(z)dz$ funkcije $\Delta(z)$, mogu biti samo tačke λ_s ($s = 0, 1, 2, 3$) to temena indikatornog dijagrama funkcije $\Delta(\lambda)$ čine, upravo tačke $\overline{\lambda_s}$ (sve ili neke od njih). Vrsta indikatornog dijagrama, očevidno zavisi od toga, dali neki Δ-polinom iščezava u funkciji $\Delta(\lambda)$.

Predjimo sada, na klasifikaciju indikatornih dijagrama.

1. $\prod_{s=0}^{3} p_s(\lambda) \not\equiv 0$. Romb sa temenima λ_s ($s=0,1,2,3$).

<u>Primer 1.</u> $\ell(y)=0$; $U_1=y(0)+y(\pi)=0$, $U_2=y'(0)+y'(\pi)=0$.

$$\Delta(\lambda)=-2\beta i(1+e^{\lambda\omega_1\pi}+e^{\lambda\omega_2\pi}+e^{-2a\pi\lambda}).$$



Sl. 3

2. $\prod_{s=0}^{2} p_s(\lambda) \not\equiv 0$, $p_3(\lambda)\equiv 0$. Trougao T_1 sa temenima λ_s ($s=0,1,2$

<u>Primer 2.</u> $\ell(y)=0$; $U_1=y(0)=0$, $U_2=y'(0)+y'(\pi)=0$.

$$\Delta(\lambda)=-2\beta i\lambda+\lambda\omega_2 e^{\lambda\omega_2\pi}-\lambda\omega_1 e^{\lambda\omega_1\pi}.$$

3. $\prod_{s=1}^{3} p_s(\lambda) \not\equiv 0$, $p_0(\lambda)\equiv 0$. Trougao T_2 sa temenima λ_s ($s=1,2,3$).

<u>Primer 3.</u> $\ell(y)=0$; $U_1=y(\pi)=0$, $U_2=y(0)+y'(\pi)=0$.

$$\Delta(\lambda)=e^{\lambda\omega_1\pi}-e^{\lambda\omega_2\pi}-2\beta i\lambda e^{-2a\pi\lambda}.$$

4. $\prod_{\substack{s=0\\ s\neq 1}}^{3} p_s(\lambda) \not\equiv 0$, $p_1(\lambda)\equiv 0$. Trougao T_3 sa temenima λ_s ($s=0,1,3$).

<u>Primer 4.</u> $\ell(y)=y''-2\lambda y'+2\lambda^2 y=0$; $U_1=y(0)+y(\pi)=0$, $U_2=i y'(0)+y'(\pi)=0$.

$$\Delta(\lambda)=2\lambda+2\lambda e^{\lambda\pi(1-i)}-2\lambda i e^{2\pi\lambda}.$$

5. $\prod_{\substack{s=0\\ s\neq 2}}^{3} p_s(\lambda) \not\equiv 0$, $p_2(\lambda)\equiv 0$. Trougao T_4 sa temenima λ_s ($s=0,2,3$).

<u>Primer 5.</u> $\ell(y)=y''-2\lambda y'+2\lambda^2 y=0$; $U_1=y(0)+y(\pi)=0$, $U_2=y'(0)+i y'(\pi)=$

$$\Delta(\lambda)=-2i\lambda+2\lambda(1-i)e^{\lambda\pi(1+i)}+2\lambda e^{2\pi\lambda}.$$

6. $p_1(\lambda)\not\equiv 0$, $p_2(\lambda)\not\equiv 0$; $p_0(\lambda)\equiv 0$, $p_3(\lambda)\equiv 0$. Odsečak $\mathcal{J}=[\lambda_1,\lambda_2]$.

<u>Primer 6.</u> $\ell(y)=0$; $U_1=y(0)=0$, $U_2=y(\pi)=0$.

$$\Delta(\lambda)=e^{\lambda\omega_2\pi}-e^{\lambda\omega_1\pi}.$$

Za slučaj kada je $a=0$, indikatorni dijagram je odsečak $\mathcal{J}_0=[-\beta\pi i,\beta\pi$ ($\beta=\sqrt{6}, 6>0$), dok se za $a>0$ dobijaju simetrični dijagrami konstruisanim, u odnosu na imaginarnu osu. Lako se proverava da navedena klasifikacija obuhvata sve moguće dijagrame funkcije $\Delta(\lambda)$. Primetimo da je u svim datim primerima 1-6: $\Delta(0)=0$ i $\Delta'(0)\neq 0$.

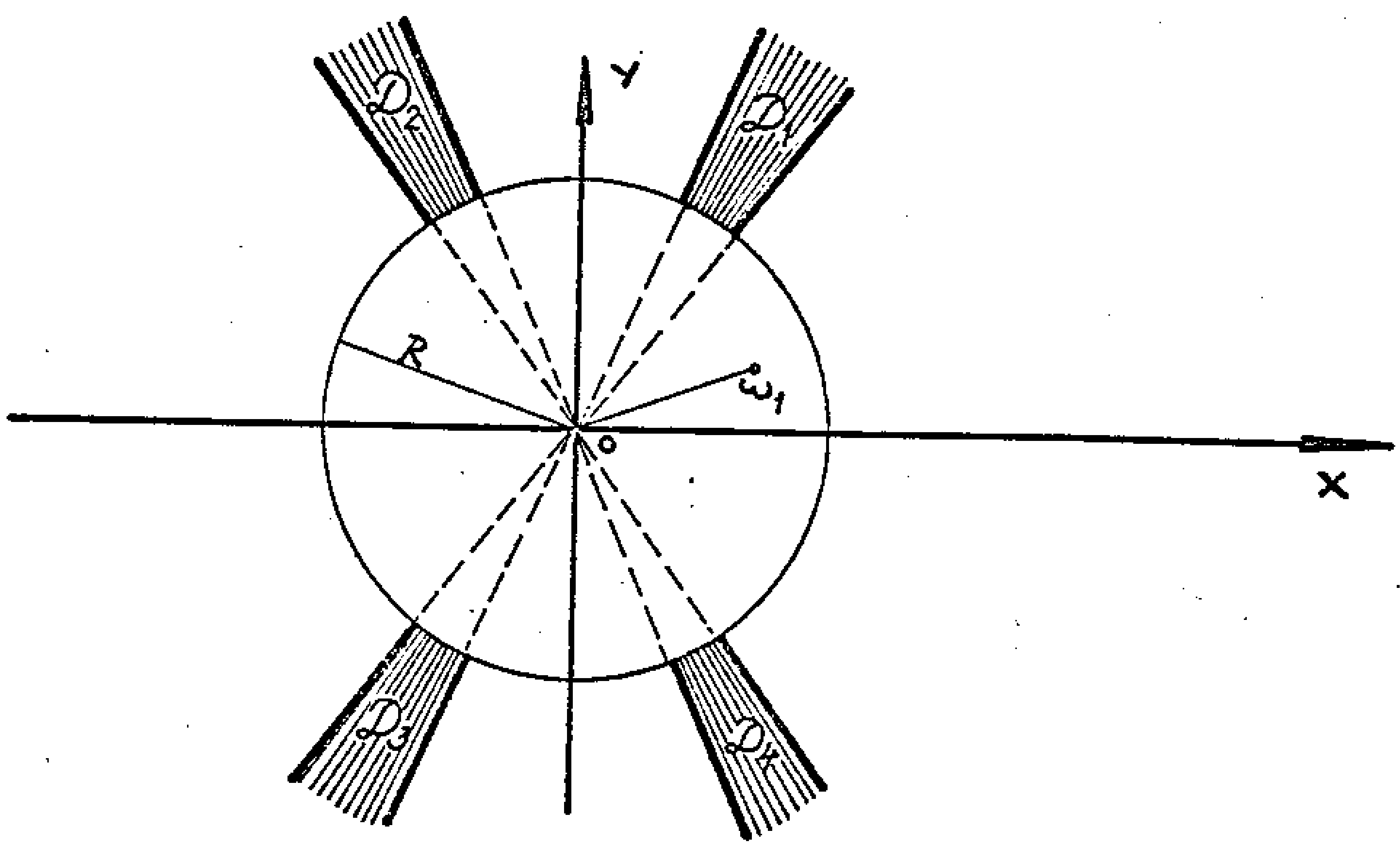
Pri ispitivanju regularnosti graničnih uslova u smislu definicije 1.6 (I deo), razlikovaćemo sledeće slučajeve: $\mathcal{R}e\,(\omega_1)\neq 0$ i $\mathcal{R}e\,(\omega_1)=0$.

S T A V 2.2. Granični uslovi homogenog graničnog problema (A_2) pri uslovu $\mathcal{R}e\,(\omega_1)\neq 0$, regularni su tada i samo tada, kada su svi Δ -polinomi karakteristične determinante $\Delta(\lambda)$ prvoga stepena.

D O K A Z. Radi odredjenosti, pretpostavimo da je $0<\arg\omega_1=\Theta<\frac{\pi}{2}$. U kompleksnoj λ - ravni konstruišimo oblasti $\mathcal{D}_i$ i $\mathcal{D}_{2+i}$ ($i=1,2$) na sledeći način:

$$\mathcal{D}_1:\ |\arg\lambda-(\tfrac{\pi}{2}-\Theta)|<\varepsilon,\ |\lambda|>\mathcal{R}$$
$$\mathcal{D}_2:\ |\arg\lambda-(\tfrac{\pi}{2}+\Theta)|<\varepsilon,\ |\lambda|>\mathcal{R}$$

i $\mathcal{D}_{2+i}$ simetrične oblastima $\mathcal{D}_i$ ($i=1,2$) u odnosu na kordinatni početak, pri čemu je $\varepsilon>0$ proizvoljno mali, a $\mathcal{R}$ dovoljno veliki pozitivan broj.



Sl. 4

Očevidne su sledeće nejednakosti:

$$\mathcal{R}e\,(\lambda\omega_2)>0,\ \lambda\in\mathcal{D}_1 \quad \text{i} \quad \mathcal{R}e\,(\lambda\omega_1)<0,\ \lambda\in\mathcal{D}_2. \tag{2.1}$$

U oblasti $\mathcal{D}_1$ na primer, funkciju $\Delta(\lambda)$ polazeći od (2.1), možemo napisati pri dovoljno velikom $\mathcal{R}$ u obliku

$$\Delta(\lambda)=[A_{j1}+B_{j1}e^{\lambda\omega_1\pi}\ A_{j2}+B_{j2}e^{\lambda\omega_2\pi}]=e^{\lambda\omega_2\pi}[A_{j1}+B_{j1}e^{\lambda\omega_1\pi}\ \widetilde{B}_{j2}]=$$
$$=e^{\lambda\omega_2\pi}\left\{[A_{j1}\ \widetilde{B}_{j2}]+[B_{j1}\ \widetilde{B}_{j2}]e^{\lambda\omega_1\pi}\right\}=e^{\lambda\omega_2\pi}\left\{\widetilde{P}_2+\widetilde{P}_3e^{\lambda\omega_1\pi}\right\}$$

gde je

$$\widetilde{P}_2=P_2(\lambda)+o(1),\ \widetilde{P}_3=P_3(\lambda)+o(1),\ \lambda\to\infty,\ \lambda\in\mathcal{D}_1.$$

Odatle proizilazi

$$\Delta(\lambda)=0 \Longleftrightarrow \hat{P}_2+\tilde{P}_3 e^{\lambda\omega_1\pi}=0,\ \lambda\in\mathcal{D}_1. \qquad (2.2)$$

Sličnim postupkom, dobijamo

$$\Delta(\lambda)=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \hat{P}_0+\tilde{P}_2 e^{\lambda\omega_2\pi}=0, & \lambda\in\mathcal{D}_2 \\ \tilde{P}_0+\hat{P}_1 e^{\lambda\omega_1\pi}=0, & \lambda\in\mathcal{D}_3 \\ \tilde{P}_1+\hat{P}_3 e^{\lambda\omega_2\pi}=0, & \lambda\in\mathcal{D}_4. \end{cases} \qquad (2.3)$$

<u>Uslov je dovoljan</u>. Neka su svi polinomi $P_s(\lambda)$ ($s=0,1,2,3$) prvoga stepena. Tada je

$$\tilde{P}_s = P_s(\lambda)+o(1)\equiv\lambda[\mathcal{P}_s+o(1)]\equiv\lambda\tilde{\mathcal{P}}_s \qquad (s=0,1,2,3)$$

pri čemu su svi koeficijenti $\mathcal{P}_s$ ($s=0,1,2,3$) različiti od nule. U tom slučaju skupu jednačina (2.2) i (2.3) ekvivalentan je sistem jednačina, oblika

$$\Delta(\lambda)=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \tilde{\mathcal{P}}_2+\hat{\mathcal{P}}_3 e^{\lambda\omega_1\pi}=0, & \lambda\in\mathcal{D}_1 \\ \hat{\mathcal{P}}_0+\tilde{\mathcal{P}}_2 e^{\lambda\omega_2\pi}=0, & \lambda\in\mathcal{D}_2 \\ \tilde{\mathcal{P}}_0+\hat{\mathcal{P}}_1 e^{\lambda\omega_1\pi}=0, & \lambda\in\mathcal{D}_3 \\ \tilde{\mathcal{P}}_1+\hat{\mathcal{P}}_3 e^{\lambda\omega_2\pi}=0, & \lambda\in\mathcal{D}_4 \end{cases}$$

Po definiciji 1.6, granični uslovi problema (A_2) su regularni.
<u>Uslov je potreban</u>. Ukoliko su granični uslovi regularni, tada postoje sledeće relacije:

$$\Delta(\lambda)=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \hat{M}_1^{(i)}+\hat{M}_2^{(i)} e^{\lambda\omega_i\pi}=0, & \lambda\in\mathcal{D}_i \\ \tilde{N}_1^{(i)}+\tilde{N}_2^{(i)} e^{\lambda\omega_i\pi}=0, & \lambda\in\mathcal{D}_{2+i} \end{cases} \quad (i=1,2) \qquad (2,4)$$

pri čemu su $M_s^{*(i)}, N_s^{*(i)}$ ($i, s = 1, 2$) konstante, različite od nule. Drugim rečima, skup jednačina (2.2) i (2.3) može biti sveden na sistem jednačina (2.4). S obzirom na strukturu polinoma $P_s(\lambda)$ $(s=0,1,2,3)$ to je moguće samo onda ako su svi prvoga stepena.

<u>S T A V 2.3.</u> Granični uslovi homogenog graničnog problema (A_2) pri uslovu $Re(\omega_1)=0$, regularni su tada i samo tada, kada je ispunjen ma koji zahtev oblika:

1). $A_1\neq 0$,
2). $A_1=0,\ A_2-A_3\neq 0$,
3). $A_1=0,\ A_2-A_3=0,\ A_0+A_5=0,\ A_4\neq 0$,

pri čemu su A_s ($s=0,1,2,3,4,5$) determinante iz (1.2).

D O K A Z. Pošto je po pretpostavci $\omega_1=\beta i$ i $\omega_2=-\beta i$ $(\beta=\sqrt{c}>0)$, to je odgovarajuća karakteristična determinanta oblika

$$\Delta(\lambda)=-2\beta i(A_0+A_5)\lambda+[A_1\beta^2\lambda^2+(A_2-A_3)\beta\lambda i+A_4]e^{\lambda\beta i}+[-A_1\beta^2\lambda^2+(A_2-A_3)\beta\lambda i-A_4]e^{-\lambda\beta i} \quad (2.5)$$

Uvedene oblasti u prethodnom stavu, u ovom slučaju svode se na dve oblasti i to:

$$\mathcal{D}_1: \ |\arg\lambda|<\varepsilon, \ |\lambda|>\mathcal{R};$$

$$\mathcal{D}_2: \ |\arg\lambda-\pi|<\varepsilon, \ |\lambda|>\mathcal{R}.$$

Zbog toga što je funkcija $\Delta(\lambda)$ neparna ($\Delta(-\lambda)=-\Delta(\lambda)$), dovoljno je ispitati regularnost graničnih uslova u oblasti $\mathcal{D}_1$. Ukoliko su granični uslovi regularni, tada mora biti

$$\Delta(\lambda)=0 \Longleftrightarrow \tilde{M}_1 e^{-i\beta\lambda}+\tilde{M}_2+\tilde{M}_3 e^{i\beta\lambda}, \ \lambda\in\mathcal{D}_1 \quad (2.6)$$

pri čemu su M_s^* ($s=1,2,3$) konstante i $M_1^*, M_3^*\neq 0$. Kao u prethodnom slučaju, uporedjivanjem jednačina (2.5) i (2.6), dobija se tvrdjenje stava.

3. DVOSTRUKA POTPUNOST SISTEMA SOPSTVENIH I PRIDRUŽENIH FUNKCIJA OPERATORA $L_2(\lambda)$ U PROSTORU $\mathcal{L}^2(0,\pi)$.

Uzmimo iz prostora $\mathcal{L}^2(0,\pi)$ ma kakve funkcije $f_v(x)$ ($v=1,2$), i obrazujmo sledeće funkcije:

$$F(\lambda)=\sum_{v=1}^{2}\lambda^{v-1}\int_0^\pi y(x,\lambda)f_v(x)\,dx$$

$$\varphi(\lambda)=\frac{F(\lambda)}{\Delta(\lambda)}$$

pri čemu je $y(x,\lambda)$ osnovna funkcija problema (A_2), a $\Delta(\lambda)$ karakteristična determinanta. Funkcija potpunosti $F(\lambda)$ može biti predstavljena u obliku

$$F(\lambda)=\sum_{s,v=1}^{2}\lambda^{v-1}q_s(\lambda)F_{sv}(\lambda)+\sum_{s,g,v=1}^{2}\lambda^{v-1}q_{sg}(\lambda)F_{sgv}(\lambda) \quad (3.1)$$

gde je

$$F_{sv}(\lambda)=\int_0^\pi e^{\lambda\omega_s x}f_v(x)\,dx \quad (3.2)$$

$$F_{sgv}(\lambda)=e^{\lambda\omega_g\pi}F_{sv}(\lambda) \quad (s\neq g)$$

S T A V 2.4. Neka je $\varphi(\lambda)=\frac{F(\lambda)}{\Delta(\lambda)}$ cela funkcija. Tada u kompleksnoj λ-ravni postoji bar jedna prava ℓ na kojoj važi jednakost

$$\varphi(\lambda)=O(\lambda^{p+1/2}),\ \lambda\in\ell$$

pri čemu p može biti 0 ili -1.

D O K A Z. Polazeći od date klasifikacije indikatornih dijagrama, sve moguće oblike funkcije $\Delta(\lambda)$ možemo podeliti u dve grupe i to : kada je $p_s(\lambda)\not\equiv 0$ ($s=1,2$), odnosno $p_s(\lambda)\not\equiv 0$ ($s=0,3$). Zbog toga ćemo u dokazanom postupku razlikovati ta dva slučaja.

1). $p_s(\lambda)\not\equiv 0$ ($s=1,2$). Pokazaćemo da se za pravu ℓ može uzeti imaginarna osa.

Kako je $\mathcal{R}e(\lambda\omega_1)=-r\beta$, $\mathcal{R}e(\lambda\omega_2)=r\beta$, $\lambda=ri$, $\omega_1=\alpha+i\beta$, $\omega_2=\overline{\omega_1}$; to funkciju $|\Delta(ri)|$ ($-\infty<r<\infty$), za dovoljno velike vrednosti $|r|$, možemo napisati u obliku

$$|\Delta(ri)|=\begin{cases} e^{\pi\beta r}|p_2(ri)||1+O_2(1)|, & r\to+\infty \\ e^{-\pi\beta r}|p_1(ri)||1+O_2(1)|, & r\to-\infty \end{cases} \tag{3.3}$$

Neka je r_0 dovoljno veliki pozitivan broj. Primenom nejednakosti Höldera na funkcije iz (3.2), nalazimo

$$|F_{sv}(ri)|,|F_{sgv}(ri)|\leq\frac{\|f_v\|}{\sqrt{2\beta}}|r|^{-1/2}e^{\pi\beta|r|},\quad |r|>r_0 \tag{3.4}$$

Neka je dalje, sa $q(\lambda)$ označen ma kakav polinom tipa $q_s(\lambda)$ i $q_{sg}(\lambda)$ ($s,g=1,2$; $s\neq g$). Polinomi $p_s(\lambda)\not\equiv 0$ ($s=1,2$) su uvek istog, i ne manjeg stepena od polinoma $q(\lambda)$. Stoga postoji nejednakost

$$\left|\frac{q(ri)}{p_s(ri)}\right|\leq M|r|^{p},\quad |r|>r_0 \tag{3.5}$$

gde je M neka pozitivna konstanta, a p može biti samo 0 ili -1. Na osnovu (3.3) - (3.5), imamo

$$|\varphi(ri)|=\frac{|F(ri)|}{|\Delta(ri)|}\leq\left[\frac{4M}{\eta\sqrt{2\beta}}\sum_{v=1}^{2}\|f_v\|\right]|r|^{p+1/2},\quad |r|>r_0$$

ili

$$|\varphi(ri)|=O(|r|^{p+1/2}),\quad |r|\to\infty$$

gde je $0<\eta<|1+O_s(1)|$ ($s=1,2$; $|r|>r_0$)

Kako je $\varphi(\lambda)$ po pretpostavci cela funkcija, to konačno dobijamo

$$\varphi(ri)=O(r^{p+1/2}) \qquad (-\infty < r < \infty) \tag{3.6}$$

2) $p_s(\lambda)\not\equiv 0$ ($s=0,3$).U tom slučaju,dokazuje se slično kao u prethodnom,da realna osa ima svojstvo prave ℓ ,dakle

$$\varphi(r)=O(r^{p+1/2}) \qquad (-\infty < r < \infty) \tag{3.7}$$

P O S L E D I C A. Ako je funkcija potpunosti oblika

$$F(\lambda)=\int_0^\pi y(x,\lambda)f(x)dx$$

tada važi: $\varphi(\lambda)\rightarrow 0$,kada $\lambda\rightarrow\infty$, $\lambda\in\ell$ .Taj rezultat sledi neposredno iz stava 2.4,pri specijalnim slučajevima: $f_2(x)\equiv 0$, $f_1(x)=f(x)$.

Reći ćemo da je zadovoljen USLOV (B) ,ako je u formuli prethodnog stava $p=-1$ .Predjimo sada,na izvodjenje stavova dvostruke potpunosti.

S T A V 2.5. Neka svakoj sopstvenoj vrednosti $\lambda_n\neq 0$ $(n=1,2,\ldots,)$ operatora $L_2(\lambda)$,odgovara samo jedna sopstvena funkcija $y(x,\lambda_n)$,i neka su zadovoljeni sledeći uslovi: (B) i $\Delta'(0)\neq 0$.Tada je sistem sopstvenih i pridruženih funkcija toga operatora dvostruko potpun u prostoru $\mathcal{L}^2(0,\pi)$.

D O K A Z. Neka je $f=\{f_v(x)\}_1^2$ proizvoljna vektor funkcija,ortogonalna na skupu svih vektor funkcija,oblika

$$Y_n^{(p_n)}=\left\{y^{(v-1,p_n)}(x,\lambda_n)\right\}_1^2 \qquad (p_n=0,1,\ldots,m_n-1;\ n=1,\ldots,)$$

u prostoru $\mathcal{L}_2^2(0,\pi)$,pri čemu je

$$y^{(v-1,0)}=\lambda_n^{v-1}y(x,\lambda_n),\quad y^{(v-1,p_n)}=\frac{1}{p_n!}\left.\frac{\partial^{p_n}(\lambda^{v-1}y)}{\partial\lambda^{p_n}}\right|_{\lambda=\lambda_n} \tag{3.8}$$

i $y=y(x,\lambda)$ osnovna funkcija homogenog graničnog problema (A_2). S obzirom na definiciju skalarnog proizvoda u prostoru $\mathcal{L}_2^2(0,\pi)$,uvedenoj pretpostavci o ortogonalnosti,ekvivalentan je skup jednakosti:

$$0=\sum_{v=1}^{2}\int_0^\pi y^{(v-1,p_n)}(x,\lambda_n)f_v(x)dx \qquad (p_n=0,1,\ldots,m_n-1;\ n=1,\ldots) \tag{3.9}$$

Obrazujmo funkciju

$$F(\lambda)=\sum_{v=1}^{2}\lambda^{v-1}\int_0^\pi y(x,\lambda)f_v(x)dx$$

Na osnovu (3.8) i (3.9),imamo

$$F(\lambda_n)=\sum_{\nu=1}^{2}\int_0^{\pi}\lambda_n^{\nu-1}y(x,\lambda_n)f_\nu(x)dx=\sum_{\nu=1}^{2}\int_0^{\pi}y^{(\nu-1,0)}_{(x,\lambda_n)}f_\nu(x)dx=0 \tag{3.10}$$

i

$$F^{(p_n)}_{(\lambda_n)}=\sum_{\nu=1}^{2}\int_0^{\pi}\frac{\partial^{p_n}(\lambda^{\nu-1}y)}{\partial\lambda^{p_n}}\bigg|_{\lambda=\lambda_n}f_\nu(x)dx=\sum_{\nu=1}^{2}p_n!\int_0^{\pi}y^{(\nu-1,p_n)}_{(x,\lambda_n)}f_\nu(x)dx=0 \tag{3.11}$$

($p_n=1,2,\ldots,m_n-1;\ n=1,\ldots,$),gde je m_n red korena $\lambda=\lambda_n$ jednačine $\Delta(\lambda)=0$ (stav 1.1).Neposredno se proverava da je: $\Delta(0)=0$ i $F(0)=0$,nezavisno od vrste graničnih uslova (II) i izbora funkcija $f_\nu(x)$ ($\nu=1,2$).

Pošto je $\Delta'(0)\neq 0$ po pretpostavci,to na osnovu svega izloženog zaključujemo,da su sve nule funkcije $\Delta(\lambda)$,istovremeno nule ne manje višestrukosti i funkcije $F(\lambda)$ .S obzirom na to,da su funkcije $\Delta(\lambda)$ i $F(\lambda)$ cele i eksponencijalnoga tipa,sledi da je funkcija

$$\varphi(\lambda)=\frac{F(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \tag{3.12}$$

takodje cela i eksponencijalnoga tipa.Kako je funkcija $\Delta(\lambda)$ potpuno regularnoga rasta,to na osnovu poznatog stava (Levin B.,str.208 [13]) izmedju indikatora funkcija u formuli (3.12) postoji sledeća veza

$$h_\varphi=h_F-h_\Delta \quad ,\ 0\leq\theta\leq 2\pi. \tag{3.13}$$

Pokazaćemo da je $h_\varphi=h_\varphi(\theta)\equiv 0$ ($0\leq\theta\leq 2\pi$).U zavisnosti od tipa indikatornih dijagrama funkcije $\Delta(\lambda)$,dokazni postupak biće izveden u nekoliko etapa.

1).Neka je indikatorni dijagram romb ili odsečak J_0 .Pošto je $P_s(\lambda)\not\equiv 0$ ($s=0,1,2,3$) u slučaju romba,odnosno $P_s(\lambda)\not\equiv 0$ ($s=1,2$) ukoliko je reč o odsečku J_0 ,to na osnovu stava 1.2(I deo) indikatorni dijagram funkcije $F(\lambda)$ mora ležati unutar odgovarajućeg dijagrama funkcije $\Delta(\lambda)$ .Otuda rezultira sledeća nejednakost

$$h_F\leq h_\Delta\ ,\quad 0\leq\theta\leq 2\pi. \tag{3.14}$$

Za cele funkcije eksponencijalnoga tipa(u našem slučaju reč je o funkciji $\varphi(\lambda)$),indikatori zadovoljavaju nejednakost

$$h_\varphi(\theta)+h_\varphi(\theta+\pi)\geq 0,\ 0\leq\theta\leq 2\pi. \tag{3.15}$$

(Levin B.,str.84, [13]).Koristeći nejednakosti (3.14) i (3.15),iz (3.13) sledi

$$h_\varphi=h_\varphi(\theta)\equiv 0,\ 0\leq\theta\leq 2\pi. \tag{3.16}$$

2). Pretpostavimo sada da je indikatorni dijagram funkcije $\Delta(\lambda)$, jedan od trouglova T_s ($s=1,2$), ili odsečak $\mathcal{J}$. Neka je to trougao T_1. Unutar ugla proizvoljno maloga otvora, sa temenom u koordinatnom početku čiju simetralu čini pozitivni deo realne ose, koreni jednačine $\Delta(\lambda)=0$, izračunavaju se po formuli

$$\lambda_n=\frac{n}{\beta}[1+o(1)],\ n\to\infty \quad (\ \beta>0\ )$$

odakle, sledi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\lambda_n}=\beta \qquad (\ \beta>0\ )$$

(vid., str.9). Pošto je $\Delta(\lambda_n)=F(\lambda_n)=0$, to primenom stava 1.3 na funkciju $F(\lambda)$, nalazimo da indikatorni dijagram te funkcije ima stranicu upravnu na realnu osu dužine ne manje od $2\pi/\beta$, i da se nalazi u levoj poluravni u odnosu na pravu koja sadrži pomenutu stranicu. S druge strane, taj dijagram ograničen je rombom (sl.3). Zbog toga, stranica o kojoj je reč može biti samo odsečak $\mathcal{J}$, a to je ustvari stranica trougla T_1. Prema tome, indikatorni dijagram funkcije $F(\lambda)$ leži u indikatornom dijagramu T_1 funkcije $\Delta(\lambda)$. Odatle sledi $h_F(\theta)\leq h_\Delta(\theta)$ $0\leq\theta\leq 2\pi$, i dalje sličnim postupkom kao u prethodnom slučaju i identičnost $h_\varphi(\theta)\equiv 0,\ 0\leq\theta\leq 2\pi$. Analogno se dokazuje i za trougao T_2, odnosno odsečak $\mathcal{J}$, s tim što se u poslednjem slučaju dva puta primenjuje stav 1.3.

3). Najzad, neka su indikatorni dijagrami funkcije $\Delta(\lambda)$ preostali trouglovi T_s ($s=3,4$). Dokazni postupak je isti kao pod tačkom 2), s tim što se još koristi smena $\lambda=zi$.

Prema tome, u svim posmatranim slučajevima 1)-3), dokazana je identičnost $h_\varphi(\theta)\equiv 0,\ 0\leq\theta\leq 2\pi$. Pošto se tip funkcije $\varphi(\lambda)$, u oznaci σ_φ odredjuje pomoću jednakosti: $\sigma_\varphi=\max h_\varphi(\theta),\ 0\leq\theta\leq 2\pi$ (Levin B., str.98 [18]), to je u našem slučaju $\sigma_\varphi=0$. Drugim rečima, funkcija $\varphi(\lambda)$ je minimalnoga tipa.

Pošto je po pretpostavci zadovoljen uslov (B) ($p=-1$), to iz stava 2.4, sledi

$$\varphi(\lambda)\to 0 \quad \text{kada} \quad \lambda\to\infty \quad \text{i} \quad \lambda\in\ell.$$

Kako je funkcija $\varphi(\lambda)$ minimalnoga tipa, to po teoremi Phragmena-Lindelöfa mora biti $\varphi(\lambda)\equiv 0$, odnosno $F(\lambda)\equiv 0$. Funkcija potpunosti $F(\lambda)$ zadovoljava uslove stava 1.4 ($\omega_1\neq\omega_2$). Na osnovu tog stava, sledi

$$f_\nu(x)=0 \qquad (\ \nu=1,2\ ) \ \text{s.s. u intervalu} \ (\ 0,\pi\ ).$$

Otuda zaključujemao da je niz vektor funkcija $\left\{Y_n^{(p_n)}\right\}_1^\infty$ potpun u u prostoru $\mathcal{L}^2_2(0,\pi)$, i konačno po definiciji višestruke potpunosti, sistem sopstvenih i pridruženih funkcija operatora $L_2(\lambda)$ je dvostruko potpun u prostoru $\mathcal{L}^2(0,\pi)$.

Stav je u potpunosti dokazan.

Korišćenjem prethodnog stava, može se pokazati da je sistem sopstvenih i pridruženih funkcija operatora $L_2(\lambda)$ obično potpun u prostoru $\mathcal{L}^2(0,\pi)$ za široku klasu graničnih uslova (II). Formulišimo taj rezultat.

S T A V 2.6. Neka svakoj sopstvenoj vrednosti $\lambda_n \neq 0$ ($n=1,2,\dots,$) operatora $L_2(\lambda)$ odgovara samo jedna sopstvena funkcija $y(x,\lambda_n)$, i neka je $\Delta'(0)\neq 0$. Tada je sistem sopstvenih i pridruženih funkcija toga operatora potpun u prostoru $\mathcal{L}^2(0,\pi)$.

D O K A Z. U formulaciji stava 2.5, pored pretpostavki stava 2.6, nalazi se još uslov (B). Zahvaljujući tom uslovu bila je moguća relacija

$$\varphi(\lambda)=\frac{F(\lambda)}{\Delta(\lambda)}\to 0 \qquad \text{kada } \lambda\to\infty \text{ i } \lambda\in\mathcal{C} \tag{3.17}$$

a samim tim i primena teoreme Phragmena-Lindelöfa. Postupajući kao u dokazu prethodnog stava, dolazimo do funkcije potpunosti, oblika

$$F(\lambda)=\int_0^{\pi} y(x,\lambda)f(x)dx\,,\quad f(x)\in\mathcal{L}^2(0,\pi).$$

U tom slučaju, relaciju (3.17) obezbedjuje posledica stava 2.4. Drugim rečima, svi uslovi na kojima se zasniva dokazni postupak stava 2.5 postoje. Primenom tog stava na slučaj kada je: $f_1(x)=f(x)$ i $f_2(x)\equiv 0$, dobija se tvrdjenje o običnoj potpunosti.

Primetimo, da je uvodjenjem uslova (B) ustvari izvršeno razbijanje posmatrane klase graničnih uslova na dve podklase okarakterisane sa: $p=0$ i $p=-1$. Dokazana je dvostruka potpunost za slučaj kada je $p=-1$. Pitanje dvostruke potpunosti u drugom slučaju ($p=0$) biće kasnije razmatrano primenom drugih metoda, u kojima se ne koristi teorema Phragmena-Lindelöfa. Sada ćemo izložiti nekoliko prostih primera, u cilju ilustracije stava 2.5.

Primer 1. $\ell(y)=y''-2\lambda y'+2\lambda^2 y=0$

$$U_1 = y(0)=0$$
$$U_2 = y'(\pi)=0.$$

Opšte rešenje jednačine $\ell(y)=0$ je $y=C_1e^{\lambda(1+i)x}+C_2e^{\lambda(1-i)x}$, a karakteristična determinanta $\Delta(\lambda)$, glasi

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda(1+i)e^{\lambda(1+i)\pi} & \lambda(1-i)e^{\lambda(1-i)\pi}\end{vmatrix}=\lambda(1-i)e^{\lambda(1-i)\pi}-\lambda(1+i)e^{\lambda(1+i)\pi}$$

Indikatorni dijagram funkcije $\Delta(\lambda)$ je odsečak $\mathcal{J}=[(1-i)\pi,(1+i)\pi]$, što znači da su granični uslovi neregularni. Sopstvene vrednosti su: $\lambda_n = n-1/4$ ($n=0,\pm1,\pm2,\ldots,$), a to su proste nule funkcije $\Delta(\lambda)$. ($\lambda=0$ nije sopstvena vrednost). Prema tome, svakoj sopstvenoj vrednosti $\lambda=\lambda_n$, odgovara samo jedna sopstvena funkcija oblika $y(x,\lambda_n) = e^{\lambda_n x}\sin\lambda_n x$, bez pridruženih funkcija ($\Delta'(\lambda_n)\neq 0$).

S obzirom da je funkcija potpunosti $F(\lambda)$, oblika

$$F(\lambda)=\sum_{\nu=1}^{2}\lambda^{\nu-1}\int_0^{\pi}[e^{\lambda(1+i)x}-e^{\lambda(1-i)x}]f_\nu(x)dx$$

to, očevidno važi

$$\varphi(ri)=\frac{F(ri)}{\Delta(ri)}\to 0,\quad r\to\pm\infty$$

Pored toga je: $\Delta(0)=0$, $F(0)=0$ i $\Delta'(0)\neq 0$. Prema tome, sve pretpostavke stava 2.4 postoje. Sledi, niz sopstvenih funkcija

$$\{e^{\lambda_n x}\sin\lambda_n x\}_{-\infty}^{\infty},\quad \lambda_n=n-1/4,$$

obrazuje dvostruko potpuni sistem funkcija u prostoru $\mathcal{L}^2(0,\pi)$.

Primer 2. $\ell(y)=y''+\lambda^2 y=0$

$$U_1 = y(0)=0$$

$$U_2 = y'(0)+y'(\pi)=0$$

Indikatorni dijagram karakteristične determinante

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda i(1+e^{\lambda\pi i}) & -\lambda i(1+e^{-\lambda\pi i})\end{vmatrix}=-\lambda i e^{-\lambda\pi i}(1+e^{\lambda\pi i})^2$$

je odsečak $\mathcal{J}_0=[-\pi i,\pi i]$, što znači da su granični uslovi regularni. Sopstvene vrednosti $\lambda_n=2n+1$ ($n=0,\pm1,2,\ldots,$) su očevidno, koreni drugoga reda jednačine $\Delta(\lambda)=0$, pri čemu je $rang\,\mathcal{D}(\lambda_n)=1,\ \forall\lambda_n$ ($\lambda=0$ nije sopstvena vrednost). Svakoj sopstvenoj vrednosti $\lambda=\lambda_n$ odgovara samo jedna sopstvena funkcija $y(x,\lambda_n)=\sin\lambda_n x$ i jedna pridružena funkcija $\Psi(x,\lambda_n)=x\cos\lambda_n x$. Da pridružene funkcije zadovoljavaju diferencijalnu jednačinu

$$\ell(\Psi)+\frac{\partial\ell}{\partial\lambda}(y)\Big|_{\lambda=\lambda_n}=\Psi''(x,\lambda_n)+\lambda_n^2\Psi(x,\lambda_n)+2\lambda_n y(x,\lambda_n)=0$$

i granične uslove, proverava se neposredno. Polazeći od funkcije potpunosti

$$F(\lambda)=\sum_{\nu=1}^{2}\lambda^{\nu-1}\int_0^{\pi}(e^{\lambda xi}-e^{-\lambda xi})f_\nu(x)dx$$

lako se utvrdjuju sledeće činjenice: $\varphi(ki)=\frac{F(ki)}{\Delta(ki)}\to 0$, $k\to\pm\infty$, $\Delta(0)=0$, $\Delta'(0)\neq 0$ i $F(0)=0$. Na osnovu stava 2.5, niz sopstvenih i pridruženih funkcija obrazuje dvostruko potpun sistem u prostoru $\mathcal{L}^2(0,\pi)$

------------- . -------------

Predjimo sada na slučaj, kada nije zadovoljen uslov (B). Reč je dakle, o formuli

$$\varphi(\lambda)=O(\lambda^{1/2}),\ \lambda\in\ell$$

iz stava 2.4. Kao što je pokazano, funkcija $\varphi(\lambda)$ je cela, jediničnoga reda i minimalnoga tipa (stav 2.5). Dokazaćemo, da se pod tim pretpostavkama pomenuta funkcija svodi na konstantu.

<u>S T A V 2.7.</u> Neka je $f(\lambda)$ cela funkcija, jediničnoga reda ($\rho_f=1$ i minimalnoga tipa ($\sigma_f=0$), i neka na pravoj ℓ koja prolazi kroz koordinatni početak, važi jednakost

$$f(\lambda)=O(\lambda^{\alpha})$$

pri čemu je α pozitivan racionalan broj. Tada je funkcija $f(\lambda)$ polinom stepena $n\le\alpha$.

<u>D O K A Z.</u> Bez ograničenja opštosti, možemo uzeti imaginarnu osu u svojstvu date prave ℓ.

Neka je

$$f_1(\lambda)=\frac{f(\lambda)}{(1+\lambda)^{\alpha}},\ \mathrm{Re}\,\lambda\geq 0$$

i

$$f_2(\lambda)=\frac{f(\lambda)}{(1-\lambda)^{\alpha}},\ \mathrm{Re}\,\lambda\leq 0 .$$

Polazeći od jedne fiksne grane funkcije $g(\lambda)=(1+\lambda)^{\alpha}$, i imajući u vidu osobine funkcije $f(\lambda)$, zaključujemo da je funkcija $f_1(\lambda)$ analitička, jediničnoga reda ($\rho_{f_1}=1$) i minimalnoga tipa ($\sigma_{f_1}=0$) u poluravni $\mathrm{Re}\,\lambda\geq 0$, i da važi nejednakost

$$|f_1(\lambda)|\leq M,\ \mathrm{Re}\,\lambda=0$$

pri čemu je: $|f(\lambda)|\leq M|\lambda|^{\alpha}$, $\mathrm{Re}\,\lambda=0$, M pozitivna konstanta i

$$\left|1+\frac{1}{\lambda}\right|=\sqrt{1+\frac{2}{|\lambda|}\cos\theta+\frac{1}{|\lambda|^2}}>1,\ |\theta|\leq\pi/2,\ \arg\lambda=\theta.$$

Na osnovu poznate teoreme (Levin B., str. 70, [13]), sledi

$$|f_1(\lambda)|\leq M,\ \mathrm{Re}\,\lambda\geq 0. \tag{3.18}$$

Slično nalazimo

$$|f_2(\lambda)|\leq M,\ \mathrm{Re}\,\lambda\leq 0. \tag{3.19}$$

Iz nejednakosti (3.18) i (3.19), dobijamo

$$|f(\lambda)| \leq M|1+\lambda|^{\alpha} + M|1-\lambda|^{\alpha}$$

Neka je $M_f = \max\limits_{|\lambda|=r} |f(\lambda)|$ i $f(\lambda) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n$. Pošto je

$$|c_n| \leq \lim_{r\to\infty} \frac{M_f}{r^n} = 0, \quad n > \alpha;$$

to je

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} c_k \lambda^k, \quad n \leq \alpha$$

što je trebalo dokazati. Napominjem da u literaturi možda postoji slič tvrdjenje, ali meni nije poznato.

Primenjujući prethodni stav na naš konkretan slučaj ($\alpha = 1/2$), nalaz

$$\varphi(\lambda_0) = c_0 \quad \text{, odnosno} \quad F(\lambda) = c_0 \Delta(\lambda) \tag{3.20}$$

pri čemu je c_0 konstanta.

Neka je $\mathcal{P}_\Delta$ bilo koji indikatorni dijagram funkcije $\Delta(\lambda)$. Na osn stava 2.5, indikatorni dijagram $\mathcal{P}_F$ odgovarajuće funkcije potpunosti $F($ mora biti sadržan u dijagramu $\mathcal{P}_\Delta$. Pri tome, za osnovnu funkciju uzim

$$y(x,\lambda) = \begin{vmatrix} e^{\lambda\omega_1 x} & e^{\lambda\omega_2 x} \\ U_{11}(\lambda) + \alpha U_{21}(\lambda) & U_{12}(\lambda) + \alpha U_{22}(\lambda) \end{vmatrix}$$

odredjenu u stavu 2.1. Neka je, dalje

$$\Delta_1(z) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda z} c_0 \Delta(\lambda) d\lambda, \quad F_1(z) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda z} F(\lambda) d\lambda \tag{3.21}$$

gde je $\lambda = t e^{-i\Theta_0}$ ($0 \leq t < \infty$) i Θ_0 proizvoljan fiksiran ugao. Asocirana funkcija $\Delta_1(z)$ funkcije $c_0\Delta(z)$, posle integracije glasi

$$\Delta_1(z) = \frac{D_0}{z^2} + \frac{D_1}{(z+2a\pi)^2} + \sum_{k=1}^{3} \left[\frac{A_k}{(z-\omega\pi)^k} + \frac{B_k}{(z-\overline{\omega}\pi)^k} \right]$$

pri čemu su: D_0, D_1 , A_k , B_k ($k=1,2,3$) konstante. Funk $\Delta_1(z)$ je jednoznačna i analitička sa mogućim singularitetima tipa polova konačnoga reda u tačkama: $z_0 = 0$, $z_1 = \omega\pi$, $z_2 = \overline{\omega}\pi$, $z_3 = -2a\pi$. Po teo Poly-a (Levin B., str. 114, [18]) , indikatorni dijagram $\mathcal{P}_\Delta$ je najman konveksna oblast koja sadrži tačke z_s ($s=0,1,2,3$) . Očevidno, to će biti romb sa temenima u tim tačkama u najopštijem slučaju. Predstavlja funkciju $F_1(z)$ u obliku

$$F_1(z)=\sum_{\nu=1}^{4}\varphi_\nu(z)$$

a zatim integracijom, dobijamo

$$\varphi_1(z)=-\mathcal{A}_{11}\int_0^\pi\frac{f_1(x)dx}{\omega x-z}+\mathcal{A}_{12}\bar\omega\int_0^\pi\frac{f_1(x)dx}{(\omega x-z)^2}+\mathcal{A}_{11}\int_0^\pi\frac{f_2(x)dx}{(\omega x-z)^2}-2\mathcal{A}_{12}\bar\omega\int_0^\pi\frac{f_2(x)dx}{(\omega x-z)^3}$$

$$\varphi_2(z)=\mathcal{A}_{11}\int_0^\pi\frac{f_1(x)dx}{\bar\omega x-z}-\mathcal{A}_{12}\bar\omega\int_0^\pi\frac{f_1(x)dx}{(\bar\omega x-z)^2}-\mathcal{A}_{11}\int_0^\pi\frac{f_2(x)dx}{(\bar\omega x-z)^2}+2\mathcal{A}_{12}\omega\int_0^\pi\frac{f_2(x)dx}{(\bar\omega x-z)^3} \tag{3.22}$$

$$\varphi_3(z)=-\mathcal{B}_{11}\int_0^\pi\frac{f_1(x)dx}{\omega x+\bar\omega\pi-z}+\mathcal{B}_{12}\bar\omega\int_0^\pi\frac{f_1(x)dx}{(\omega x+\bar\omega\pi-z)^2}+\mathcal{B}_{11}\int_0^\pi\frac{f_2(x)dx}{(\omega x+\bar\omega\pi-z)^2}-2\mathcal{B}_{12}\bar\omega\int_0^\pi\frac{f_2(x)dx}{(\omega x+\bar\omega\pi-z)^3}$$

$$\varphi_4(z)=\mathcal{B}_{11}\int_0^\pi\frac{f_1(x)dx}{\bar\omega x+\omega\pi-z}-\mathcal{B}_{12}\bar\omega\int_0^\pi\frac{f_1(x)dx}{(\bar\omega x+\omega\pi-z)^2}-\mathcal{B}_{11}\int_0^\pi\frac{f_2(x)dx}{(\bar\omega x+\omega\pi-z)^2}+2\mathcal{B}_{12}\omega\int_0^\pi\frac{f_2(x)dx}{(\bar\omega x+\omega\pi-z)}$$

pri čemu je: $\mathcal{A}_{11}=a_{11}+\alpha a_{21}$, $\mathcal{A}_{12}=a_{12}+\alpha a_{22}$, $\mathcal{B}_{11}=b_{11}+\alpha b_{21}$ i $\mathcal{B}_{12}=b_{12}+\alpha b_{22}$ (parametar α definisan je u stavu 2.1). Svi integrali u sistemu (3,22) su oblika

$$\psi_n(z)=\int_0^\pi\frac{f(x)dx}{(x-z)^n},\quad f(x)\in\mathcal{L}^2(0,\pi).$$

Neka je: $|x-z|>d$, $|x-z-\Delta z|>d$ i $|\Delta z|<\delta$ $(0\le x\le\pi)$ pri čemu je d fiksiran pozitivan broj i δ proizvoljno mali pozitivan broj. Iz nejednakosti

$$\left|\frac{\psi_1(z+\Delta z)-\psi_1(z)}{\Delta z}-\psi_2(z)\right|=\left|\int_0^\pi\frac{\Delta z\, f(x)dx}{(x-z)^2(x-z-\Delta z)}\right|\le\frac{\sqrt{\pi}\,\|f\|}{d^3}|\Delta z|$$

sledi $\psi_1'(z)=\psi_2(z)$, što znači da je funkcija $\psi_1(z)$ analitička van segmenta $S=[0,\pi]$. Pokazaćemo dalje, da su singulariteti funkcije $F_1(z)$ samo pomenuti polovi z_s $(s=0,1,2,3)$. U tom cilju, napišimo na primer funkciju $\varphi_1(z)$ u obliku

$$\varphi_1(z)=F_1(z)-\sum_{\nu=2}^{4}\varphi_\nu(z) \tag{3.23}$$

Sve tačke segmenta $[0,\omega\pi]$ mogu biti singulariteti funkcije $\varphi_1(z)$, dok za desnu stranu jednakosti (3.23) ta svojstva mogu imati samo njegove krajnje tačke. Pošto je funkcija $\varphi_1(z)$ analitička van posmatranog segmenta, zaključujemo da su jedino tačke $z_0=0$ i $z_1=\omega\pi$ njeni mogući singulariteti. Slično se pokazuje i za preostale funkcije $\varphi_\nu(z)$ $(\nu=2,3,4)$. Prema tome, mogući singulariteti zbirne funkcije $F_1(z)$ su isključivo tačke z_s $(s=0,1,2,3)$.

Uvodjenjem smena:

$$z=\omega\zeta,\ z=\bar{\omega}\zeta,\ z=\omega\zeta+\bar{\omega}\pi,\ z=\bar{\omega}\zeta+\omega\pi$$

respektivno u funkcije $\Phi_\nu(z)$ ($\nu=1,2,3,4$), a zatim i

$$y_s(\zeta)=\int_0^\pi \frac{f_s(x)dx}{x-\zeta},\ s=1,2;\ y_1-\frac{1}{\omega}y_2'=u,\ y_1-\frac{1}{\bar{\omega}}y_2'=v, \tag{3.23}$$

iz (3.22) posle prostih transformacija, dobijamo sledeći sistem diferencijalnih jednačina:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_1 &= -A_{11}\omega u + A_{12}\bar{\omega}u' \\ \tilde{\Phi}_2 &= A_{11}\bar{\omega}v - A_{12}\omega v' \\ \tilde{\Phi}_3 &= -B_{11}\omega u + B_{12}\bar{\omega}u' \\ \tilde{\Phi}_4 &= B_{11}\bar{\omega}v - B_{12}\omega v' \end{aligned} \tag{3.24}$$

pri čemu su $\tilde{\Phi}_\nu$ ($\nu=1,2,3,4$) jednoznačne analitičke funkcije sa mogućim singularitetima tipa polova konačnoga reda u tačkama $\zeta=0$ i $\zeta=\pi$.

Neka je sa $\mathcal{D}$ označen deo kompleksne ζ -ravni, iz koje je isključen segment $S=[0,\pi]$. Uvedimo u razmatranje determinantu, oblika

$$C(\alpha)=\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ B_{11} & B_{12} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11}+\alpha a_{21} & a_{12}+\alpha a_{22} \\ b_{11}+\alpha b_{21} & b_{12}+\alpha b_{22} \end{vmatrix} \tag{3.25}$$

Očevidno, razvijena determinanta $C(\alpha)$ je kvadratni trinom, čiji koeficijenti zavise od koeficijenata graničnih uslova (II). Neka je bar jedan koeficijent trinoma $C(\alpha)$ različit od nule, i neka su α_1 i α_2 nule tog trinoma. Neka je dalje, $\alpha=\alpha_0\neq\alpha_1,\alpha_2$ s tim da broj $\alpha=\alpha_0$ ima svojstvo definisano u stavu 2.1. Na taj način dobijamo, da je $C(\alpha_0)\neq 0$.

Reći ćemo da je zadovoljen USLOV (C), ako je bar jedan koeficijent kvadratnog trinoma $C(\alpha)$ različit od nule.

S T A V 2.8. Neka svakoj sopstvenoj vrednosti $\lambda_n\neq 0$ ($n=1,2,\ldots,$) operatora $L_2(\lambda)$, odgovara samo jedna sopstvena funkcija $y(x,\lambda_n)$, i neka su zadovoljeni sledeći uslovi: (C) i $\Delta'(0)\neq 0$. Tada je sistem sopstvenih i pridruženih funkcija toga operatora dvostruko potpun u prostoru $\mathcal{L}^2(0,\pi)$.

D O K A Z. Sve pretpostavke iz stava 2.6, na osnovu kojih je formirana cela funkcija minimalnoga tipa $f(\lambda)=\frac{F(\lambda)}{\Delta(\lambda)}$, sadržane su i u ovom stavu. Zbog toga se ceo odgovarajući dokazni postupak iz tog stava, prenosi i na ovaj slučaj bez ikakvih izmena. Drugim rečima, treba pokazati da je $f_\nu(x)=0$ ($\nu=1,2$) s.s. u intervalu ($0,\pi$) ne koristeći teoremu Phragmena-Lindelöfa. U tom cilju, poći ćemo od sistema diferencijalnih jednačina (3.24). S obzirom na pretpostavljeni uslov (C), homogeni sistem toga sistema ima samo trivijalna rešenja. Zbog toga su rešenja $u=u(z)$ i $w=w(z)$ nehomogenog sistema (3.24) linearne kombinacije funkcija $\varphi_\nu(z)$ ($\nu=1,2,3,4$), regularnih u oblasti $\mathcal{D}$ i u unutrašnjim tačkama segmenta $S=[0,\pi]$. Uzevši u obzir smene (3.22), nalazimo

$$y_1=\frac{1}{2\beta i}(\omega u-\bar{\omega}w)=\int_0^\pi\frac{f_1(x)dx}{x-z}$$

$$y_2'=\frac{|\omega|^2}{2\beta i}(u-w)=\int_0^\pi\frac{f_2(x)dx}{(x-z)^2}$$

Funkcije $y_1=y_1(z)$ i $y_2'=y_2(z)$, budući da su linearne kombinacije funkcija $u=u(z)$ i $w=w(z)$, mogu imati singularitete u vidu polova samo u tačkama $z=0$ i $z=\pi$.

Neka je

$$\rho_1(x)=\int_a^x f_1(x)dx,\quad z=\sigma+i\tau,\quad 0<a\le\sigma\le x<\pi.$$

Primenom formule inverzije Stieltjes-a (Najmark M.A., str.339 [24]) na funkciju $y_1(z)$, nalazimo

$$\rho_1(x)-\rho_1(a)=-\frac{1}{2\pi i}\lim_{\tau\to 0}\int_a^x[y_1(\sigma+i\tau)-y_1(\sigma-i\tau)]d\sigma=0$$

a odatle

$$\rho_1'(x)=f_1(x)=0 \qquad \text{s.s., u intervalu } (0,\pi).$$

Razvijanjem funkcije $y_2'(z)$ u Laurent-ov red u prstenu $0<|z|<\pi$, a zatim integracijom, dobijamo

$$\int_0^\pi\frac{f_2(x)dx}{x-z}=A\ln z+\psi(z)+D$$

pri čemu je A fiksirana konstanta, $\psi(z)$ regularna funkcija i D integraciona konstanta. Uvodeći funkciju

$$\rho_2(x)=\int_a^x f_2(x)dx$$

analogno kao u prethodnom slučaju, nalazimo

$$\rho_2(x)-\rho_2(a)=-\frac{1}{2\pi i}\lim_{\tau\to 0}\int_a^x[A\ln(\sigma+i\tau)-A\ln(\sigma-i\tau)+\psi(\sigma+i\tau)-\psi(\sigma-i\tau)]d\sigma$$

odnosno

$$\rho_2(x)-\rho_2(a)=A$$

i konačno

$$\rho_2'(x)=f_2(x)=0 \qquad \text{s.s., u intervalu } (0,\pi).$$

Time je dokaz završen.

Primer 3. $\ell(y)=y''+2a\lambda y'+b\lambda^2 y=0$
$$U_1=y(0)=0$$
$$U_2=y(\pi)=0.$$

Kako je karakteristična determinanta oblika
$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\lambda\omega\pi} & e^{\lambda\bar{\omega}\pi}\end{vmatrix}, \quad \omega=-a+\beta i,\ \beta=\sqrt{b-a^2},$$
to su sve sopstvene vrednosti $\lambda_n=\frac{n}{\beta}$ $(\pm n=1,2,\ldots,)$ prosti koreni jednačine $\Delta(\lambda)=0$ .Očevidne su činjenice: $\Delta(0)=0$ i $\Delta'(0)\neq 0$. Isto tako, $\lambda=0$ nije sopstvena vrednost. Za osnovnu funkciju možemo uzeti funkciju
$$y(x,\lambda)=\begin{vmatrix} e^{\lambda\omega x} & e^{\lambda\bar{\omega}x} \\ 1 & 1\end{vmatrix}$$

Uslov (C) je ispunjen, jer je $\mathcal{C}(0)\neq 0$ .Prema tome, sve pretpostavke iz stava 2.8 postoje. Sledi, sistem sopstvenih funkcija je dvostruko potpun u prostoru $\mathcal{L}^2(0,\pi)$. Napomenimo, da je ovaj primer korišćen u uvodnom delu i da su njegovi granični uslovi neregularni.

Primer 4. $\ell(y)=y''+2a\lambda y'+b\lambda^2 y=0$
$$U_1=y(0)+y'(0)=0$$
$$U_2=y(\pi)+y'(\pi)=0.$$

Nule karakteristične determinante
$$\Delta(\lambda)=(1+\lambda\omega)(1+\lambda\bar{\omega})(e^{\lambda\bar{\omega}\pi}-e^{\lambda\omega\pi}), \quad \omega=-a+\beta i,\ \beta=\sqrt{b-a^2}$$
su: $\lambda_0'=-\frac{1}{\omega}$, $\lambda_0''=-\frac{1}{\bar{\omega}}$ i $\lambda_n=\frac{n}{\beta}$ $(\pm n=1,2,\ldots,)$. Pošto su sve prvoga reda, predstavljaće sopstvene vrednosti jediničnoga ranga. Važi uslov $\Delta'(0)\neq 0$, ali ne i uslov (C), jer je $\mathcal{C}(\lambda)\equiv 0$. Prema tome, stav 2.8 se ne može primeniti. Medjutim dvostruka potpunost sistema sopstvenih funkcija postoji na osnovu stava 2.5, što se lako može proveriti ako se za osnovnu funkciju koristi funkcija, oblika
$$y(x,\lambda)=\begin{vmatrix} e^{\lambda\omega x} & e^{\lambda\bar{\omega}x} \\ 1+\lambda\omega & 1+\lambda\bar{\omega}\end{vmatrix}$$

Imajući u vidu stavove 2.5 i 2.8, kao i ilustrativne primere 3 i 4, prirodno se nameće zahtev za nalaženje najšire klase graničnih uslova problema (A_2) za koje postoji dvostruka potpunost sistema sopstvenih i pridruženih funkcija u prostoru $\mathcal{L}^2(0,\pi)$. Koristeći pomenute stavove, pokazaćemo da tu klasu graničnih uslova definišu sledeći uslovi: sve sopstvene vrednosti su jediničnoga ranga i $\Delta'(0)\neq 0$.

S T A V 2.9. Neka svakoj sopstvenoj vrednosti $\lambda=\lambda_n\neq 0$ ($n=1,2,\dots$) operatora $L_2(\lambda)$ odgovara samo jedna sopstvena funkcija $y(x,\lambda_n)$ i neka je $\Delta'(0)\neq 0$. Tada je sistem sopstvenih i pridruženih funkcija toga operatora dvostruko potpun u prostoru $\mathcal{L}^2(0,\pi)$.

D O K A Z. Prethodno istaknimo, da je uslov (B) ispunjen u tom slučaju ako su svi polinomi $Q(\lambda)$ osnovne funkcije $y(x,\lambda)$ manjega stepena od stepena bar dva Δ-polinoma funkcije $\Delta(\lambda)$. Ta činjenica biće korišćena u ovom dokazu.

Podjimo od graničnih uslova

$$\text{(II)}\quad \begin{aligned} U_1(y)&=a_{11}y(0)+a_{12}y'(0)+b_{11}y(\pi)+b_{12}y'(\pi)=0\\ U_2(y)&=a_{21}y(0)+a_{22}y'(0)+b_{21}y(\pi)+b_{22}y'(\pi)=0\end{aligned}$$

i karakteristične determinante

$$\Delta(\lambda)=p_0(\lambda)+p_1(\lambda)e^{\lambda\omega\pi}+p_2(\lambda)e^{\lambda\bar{\omega}\pi}+p_3(\lambda)e^{\lambda(\omega+\bar{\omega})\pi}$$

pri čemu su Δ-polinomi: $p_s(\lambda)$ ($s=0,1,2,3$) dati formulama (1.2).

1. Neka je $A_1\neq 0$. Tada su polinomi $p_s(\lambda)$ ($s=1,2$), budući da su drugoga stepena, istovremeno i višega stepena od bilo kojih polinoma $Q(\lambda)$ osnovne funkcije $y(x,\lambda)$, bez obzira na to kako se ona formira. Prema tome, zadovoljen je uslov (B) i važi stav 2.5.

2. Pretpostavimo da je $A_1=0$ i $|A_0|+|A_5|>0$. Radi odredjenosti, neka je $A_0\neq 0$. U tom slučaju, rešavajući sistem (II) po $y(0)$ i $y'(0)$, dobijamo ekvivalentan sistem graničnih uslova, oblika

$$(\widetilde{\text{II}})\quad \begin{aligned} \widetilde{U}_1(y)&=y(0)+\beta_{11}y(\pi)=0\\ \widetilde{U}_2(y)&=y'(0)+\beta_{21}y(\pi)+\beta_{22}y'(\pi)=0,\end{aligned}$$

pri čemu je: $\beta_{11}=A_3/A_0$, $\beta_{21}=-A_4/A_0$ i $\beta_{22}=-A_2/A_0$. Odgovarajuća karakteristična determinanta će biti

$$\widetilde{\Delta}(\lambda)=\begin{vmatrix} 1+\beta_{11}e^{\lambda\omega\pi} & 1+\beta_{11}e^{\lambda\bar{\omega}\pi}\\ \lambda\omega+(\beta_{21}+\lambda\omega\beta_{22})e^{\lambda\omega\pi} & \lambda\bar{\omega}+(\beta_{21}+\lambda\bar{\omega}\beta_{22})e^{\lambda\bar{\omega}\pi}\end{vmatrix}$$

Razlikovaćemo dva slučaja.

a) Neka je bar jedan od izraza $1+\beta_{11}e^{\lambda\omega\pi}$ i $1+\beta_{11}e^{\lambda\bar{\omega}\pi}$ različit od nule pri proizvoljnoj sopstvenoj vrednosti $\lambda=\lambda_n$. Tada, za osnovnu funkciju, možemo uzeti funkciju oblika

$$\tilde{y}(x,\lambda) = (1+\beta_{11}e^{\lambda\bar{\omega}\pi})e^{\lambda\omega x} - (1+\beta_{11}e^{\lambda\omega\pi})e^{\lambda\bar{\omega}x}$$

pri čemu je očevidno ispunjen uslov (B), odnosno moguća je primena stava 2.5.

b). Ako se na primer, pri sopstvenoj vrednosti $\lambda=\lambda_0$, oba pomenuta izraza poništavaju, tada ćemo koristiti uslov (C). Funkcija $C(\alpha)$, definisana relacijom (3.25) u ovom slučaju glasi: $C(\alpha) = -\alpha^2\beta_{21}+\alpha(\beta_{22}-\beta_{11})$. Ukoliko bi bilo, $C(\alpha)\equiv 0$, dakle $\beta_{21}=0$ i $\beta_{11}=\beta_{22}$, tada bi svi elementi determinante $\tilde{\Delta}(\lambda_0)$ bili jednaki nuli, što znači da sopstvena vrednost $\lambda=\lambda_0$ nije jediničnog ranga, a to je suprotno pretpostavci. Prema tome, možemo odrediti broj $\alpha=\alpha_0$ takav da je $C(\alpha_0)\neq 0$. Drugim rečima, važi uslov (C) i primena stava 2.8.

3. Neka je sada $A_s=0$ ($s=0,1,5$) i $|A_2|+|A_3|>0$. Uzmimo na primer, da je $A_2\neq 0$. Rešavajući sistem (II) po $y(0)$ i $y'(\pi)$ dobijamo

$$(\tilde{\mathrm{II}})\quad \begin{aligned} \tilde{U}_1(y) &= y(0)=0 \\ \tilde{U}_2(y) &= \beta_{21}y(\pi)+y'(\pi)=0 \end{aligned}$$

pri čemu je $\beta_{21}=A_4/A_2$. Za osnovnu funkciju, može se uzeti funkcija

$$\tilde{y}(x,\lambda) = e^{\lambda\omega x} - e^{\lambda\bar{\omega}x}$$

Kako su $\hat{\Delta}$ -polinomi karakteristične determinante $\hat{\Delta}(\lambda)$, prvoga stepena, to egzistira uslov (B), dakle moguća je primena stava 2.5.

4. Najzad, neka je $A_s=0$ ($s=0,1,2,3,5$) i $A_4\neq 0$. Slično kao u prethodnim slučajevima, dobijamo ekvivalentan sistem graničnih uslova

$$(\tilde{\mathrm{II}})\quad \begin{aligned} \tilde{U}_1(y) &= y(0)=0 \\ \tilde{U}_2(y) &= y(\pi)=0 \end{aligned}$$

Ustvari, to su granični uslovi iz primera 4, za koje je utvrdjeno da važi uslov (C).

Time je stav u potpunosti dokazan.

Na kraju, navodimo nekoliko poznatih rezultata obične potpunosti niza funkcija u prostoru $L^2(0,\pi)$, koji su posledice stava 2.6.

1. Niz funkcija $\{$[illegible]$\}$ su sopstvene funkcije diferencijalnog operatora

$$L_2(\lambda): \quad \begin{array}{l} \ell(y) = y'' + \lambda^2 y = 0 \\ U_1(y) = y(0) = 0 \\ U_2(y) = y(\pi) = 0. \end{array}$$

2. Niz funkcija $\{e^{anx}\sin nx\}_1^\infty$ (a-realan parametar). To su sopstvene funkcije diferencijalnog operatora

$$L_2(\lambda): \quad \begin{array}{l} \ell(y) = y'' - 2a\lambda y' + (a^2+1)\lambda^2 y = 0 \\ U_1(y) = y(0) = 0 \\ U_2(y) = y(\pi) = 0 \end{array}$$

Teorema Kostjučenka A.G. (Lëvin B., [19]).

3. Niz sopstvenih funkcija graničnog problema

$$\begin{array}{l} \ell(y) = y'' + 2B\lambda y' + C\lambda^2 y = 0, \qquad (C - B^2 > 0) \\ U_1(y) = y'(0) + a\lambda y(0) = 0 \\ U_2(y) = y'(\pi) + a\lambda y(\pi) = 0. \end{array}$$

Teorema Džavadova M.G. [10] . Činjenica, što granični uslovi zavise od parametra λ , nema bitnog značaja za primenu stava 2.6.

III DEO

1. HOMOGENI GRANIČNI PROBLEM (A_4).

Neka je data obična linearna diferencijalna jednačina

$$\text{(I)} \quad \ell(y) = y^{IV} + a_1 \lambda y''' + a_2 \lambda^2 y'' + a_3 \lambda^3 y' + a_4 \lambda^4 y = 0$$

i neka su dati granični uslovi

$$\text{(II)} \quad U_j(y) = \sum_{k=1}^{4} \left[a_{jk} y^{(k-1)}(0) + b_{jk} y^{(k-1)}(\pi) \right] = 0 \qquad (j = 1, 2, 3, 4)$$

pri čemu su: a_k, a_{jk} i b_{jk} ($j, k = 1, 2, 3, 4$) realne konstante $U_j(y)$ ($j = 1, 2, 3, 4$) linearno nezavisne forme, i λ kompleksni parametar.

Skup jednačina (I) i (II) zvaćemo HOMOGENIM GRANIČNIM PROBLEMOM (A_4) ili kraće problem (A_4), i pisaćemo

$$L_4(\lambda) y = 0$$

gde je $L_4(\lambda)$, linearni diferencijalni operator odredjen linearnim diferencijalnim izrazom $\ell(y)$ i graničnim uslovima (II).

Stavljajući opšte rešenje

$$y = \sum_{s=1}^{4} C_s y_s(x, \lambda)$$

diferencijalne jednačine $\ell(y) = 0$ u granične uslove (II), i vodeći računa o linearnosti formi $U_j(y)$ ($j = 1, 2, 3, 4$), dobijamo sistem linearnih algebarskih jednačina po C_s ($s = 1, 2, 3, 4$), oblika

$$\sum_{s=1}^{4} C_s U_{js}(\lambda) = 0, \qquad (j = 1, 2, 3, 4), \quad (1.1)$$

pri čemu je $U_{js}(\lambda) = U_j(y_s)$ ($j, s = 1, 2, 3, 4$). Sistem (1.1) ima netrivijalna rešenja pri fiksnoj vrednosti $\lambda = \lambda_0$, tada i samo tada ako je

$$\Delta(\lambda_0) = [illegible] = \det \| U_{js}(\lambda_0) \|_{4,4} = 0$$

Prema tome, sve sopstvene vrednosti operatora $L_4(\lambda)$ moraju biti nule cele funkcije (karakteristične determinante) $\Delta(\lambda)$. Pretpostavljamo da su sve sopstvene vrednosti jediničnoga ranga, i da $\lambda=0$ nije sopstvena vrednost. Skup sopstvenih vrednosti označićemo sa Λ, dakle

$$\Lambda=\{\lambda_n;\ \Delta(\lambda_n)=0,\ \mathrm{rang}\ \mathcal{D}(\lambda_n)=3,\ \lambda_n\neq 0;\ n=1,2,\dots\}$$

gde je $\mathcal{D}(\lambda)$ karakteristična matrica problema (A_4).

S T A V 3.1. Neka su sve sopstvene vrednosti $\lambda=\lambda_n$ ($n=1,2,\dots$) operatora $L_4(\lambda)$, različite od nule i jediničnoga ranga. Tada postoji funkcija $y(x,\lambda)$, iz koje se putem zamene $\lambda=\lambda_n$ mogu dobiti sve sopstvene funkcije toga operatora..

D O K A Z. Uvedimo nove granične uslove

$$(\widetilde{\mathrm{II}})\quad \begin{aligned}\widetilde{U}_1(y)&=U_1(y)+\alpha U_2(y)=0\\ \widetilde{U}_2(y)&=U_2(y)+\alpha U_3(y)=0\\ \widetilde{U}_3(y)&=U_3(y)+\alpha U_4(y)=0\\ \widetilde{U}_4(y)&=U_4(y)=0\end{aligned}$$

pri čemu će parametar $\alpha\neq 0$ biti kasnije preciziran. Označimo sa $\widetilde{\Delta}(\lambda)$ karakterističnu determinantu problema (A_4), korespodentnu graničnim uslovima $(\widetilde{\mathrm{II}})$. Neposredno se proverava identičnost

$$\Delta(\lambda)\equiv\widetilde{\Delta}(\lambda)$$

Očevidno, svako rešenje diferencijalne jednačine $\ell(y)=0$ koje zadovoljava granične uslove (II), zadovoljavaće i granične uslove $(\widetilde{\mathrm{II}})$, i obrnuto. Drugim rečima, granični uslovi (II) i $(\widetilde{\mathrm{II}})$ su ekvivalentni.

Neka su $y_s(x,\lambda)$ ($s=1,2,3,4$) linearno nezavisna rešenja diferencijalne jednačine $\ell(y)=0$. Funkcija

$$y(x,\lambda)=\begin{vmatrix} y_1(x,\lambda) & y_2(x,\lambda) & y_3(x,\lambda) & y_4(x,\lambda)\\ U_{11}(\lambda)+\alpha U_{21}(\lambda) & U_{12}(\lambda)+\alpha U_{22}(\lambda) & U_{13}(\lambda)+\alpha U_{23}(\lambda) & U_{14}(\lambda)+\alpha U_{24}(\lambda)\\ U_{21}(\lambda)+\alpha U_{31}(\lambda) & U_{22}(\lambda)+\alpha U_{32}(\lambda) & U_{23}(\lambda)+\alpha U_{33}(\lambda) & U_{24}(\lambda)+\alpha U_{34}(\lambda)\\ U_{31}(\lambda)+\alpha U_{41}(\lambda) & U_{32}(\lambda)+\alpha U_{42}(\lambda) & U_{33}(\lambda)+\alpha U_{43}(\lambda) & U_{34}(\lambda)+\alpha U_{44}(\lambda)\end{vmatrix}$$

je takodje rešenje te jednačine, pri svakom $\lambda\neq 0$. Njen razvijeni oblik glasi

$$y(x,\lambda)=\sum_{s=1}^{4}(-1)^{s-1}\widetilde{M}_{1s}(\lambda)\,y_s(x,\lambda)$$

pri čemu su $\widetilde{M}_{1s}(\lambda)$ ($s=1,2,3,4$) minori elemenata prve vrste razložene determinante.

Lako se izvode sledeće jednakosti

$$\tilde{M}_{1s}=\tilde{M}_{1s}(\lambda,\alpha)=M_{1s}(\lambda)\alpha^3+M_{2s}(\lambda)\alpha^2+M_{3s}(\lambda)\alpha+M_{4s}(\lambda) \qquad (1.2)$$

gde su $M_{rs}(\lambda)$ ($r,s=1,2,3,4$) minori trećega reda karakteristične determinante $\Delta(\lambda)$.

Neka je $\lambda=\lambda_n$ proizvoljna sopstvena vrednost iz skupa Λ. Kako je po pretpostavci $rang\,\mathcal{D}(\lambda_n)=3$,to postoji bar jedan minor $M_{rs}(\lambda_n)$ ($r,s=1,2,3,4$) različit od nule. Drugim rečima, postoji bar jedan polinom iz (1.2),u oznaci $\tilde{\tilde{M}}_{1s}(\lambda_n,\alpha)$,koji nije identički jednak nuli po promenljivom parametru α . Obrazujmo skup $\mathcal{L}$ na sledeći način

$$\mathcal{L}=\{\alpha;\ \tilde{\tilde{M}}_{1s}(\lambda_n,\alpha)=0,\ n=1,2,\dots,\}$$

Pošto je $\mathcal{L}$ prebrojiv skup,to postoji broj $\alpha=\alpha_0\notin\mathcal{L}$,takav da je $\tilde{M}_{1s}(\lambda_n,\alpha_0)\neq 0,\ \forall\lambda_n\in\Lambda$ ($1\leq s\leq 4$). Za tako odabranu vrednost $\alpha=\alpha_0$,funkcije $y(x,\lambda_n)$ ($n=1,2,\dots,$) su netrivijalna rešenja jednačine $L_4(\lambda_n)y=0$,odnosno sopstvene funkcije sopstvenih vrednosti $\lambda=\lambda_n$ ($n=1,2,\dots,$) operatora $L_4(\lambda)$. Po definiciji 1.3,funkcija $y(x,\lambda)$ ($\alpha=\alpha_0$) je osnovna funkcija problema (A_4),što je i trebalo dokazati.

U cilju uprošćavanja daljeg izlaganja,a bez ograničenja opštosti,mi ćemo ubuduće stavljati $\alpha_0=0$,naravno pod pretpostavkom da se osnovna funkcija može formirati na pokazani način pomoću karakteristične determinante $\Delta(\lambda)$.

Neka jednačina

$$\omega^4+a_1\omega^3+a_2\omega^2+a_3\omega+a_4=0 \qquad (1.3)$$

ima samo kompleksne korene ω_s ($s=1,2,3,4$). Zbog pretpostavljene realnosti koeficijenata a_r ($r=1,2,3,4$),izmedju tih korena postoje sledeće veze:

$$\overline{\omega_1}=\omega_3,\ \overline{\omega_2}=\omega_4 \qquad (\omega_s=\alpha_s+i\beta_s;\ \beta_s\neq 0,\ s=1,2\ )$$

Pri tome postoje dve mogućnosti: $\omega_1\neq\omega_2$ i $\omega_1=\omega_2$. Mi ćemo u ovom radu ispitivati 4-struku potpunost sistema sopstvenih i pridruženih funkcija u oba slučaja,s tim što će oznake za operatore biti: $L_4(\lambda)$ ako je $\omega_1\neq\omega_2$,i $\tilde{L}_4(\lambda)$ ukoliko je $\omega_1=\omega_2$.

2. LINEARNI DIFERENCIJALNI OPERATOR $L_4(\lambda)$.

Pošto su linearno nezavisna rešenja diferencijalne jednačine $\ell(y)=0$, oblika $y_s(x,\lambda)=e^{\lambda\omega_s x}$ ($s=1,2,3,4$), to je

$$U_{js}=A_{js}+B_{js}e^{\lambda\omega_s\pi} \qquad (\ j,s=1,2,3,4\ )$$

gde je

$$A_{js}=\sum_{r=1}^{4}a_{jr}(\lambda\omega_s)^{r-1} \quad \text{i} \quad B_{js}=\sum_{r=1}^{4}b_{jr}(\lambda\omega_s)^{r-1}.$$

Putem razlaganja karakteristične determinante

$$\Delta(\lambda)=\left[A_{j1}+B_{j1}e^{\lambda\omega_1\pi}\ .\ .\ A_{j4}+B_{j4}e^{\lambda\omega_4\pi}\right]$$

dobijamo

$$\Delta(\lambda)=p_0(\lambda)+p_5(\lambda)e^{2\lambda\pi(d_1+d_2)}+\sum p_s(\lambda)e^{\lambda\omega_s\pi}+\sum p_{st}(\lambda)e^{\lambda\pi(\omega_s+\omega_t)}+$$
$$+\sum p_{stu}(\lambda)e^{\lambda\pi(\omega_s+\omega_t+\omega_u)},$$

pri čemu je

$$p_0(\lambda)=D_0\left[a_{j1}\,a_{j2}\,a_{j3}\,a_{j4}\right]\lambda^6,$$

$$p_5(\lambda)=D_5\left[b_{j1}\,b_{j2}\,b_{j3}\,b_{j4}\right]\lambda^6,$$

$$p_s(\lambda)=D_s\sum\lambda^{r+\ell+m+n-4}\omega_s^{r}\omega_{r_1}^{\ell}\omega_{r_2}^{m}\omega_{r_3}^{n}\left[b_{jr}\,a_{j\ell}\,a_{jm}\,a_{jn}\right] \tag{2.1}$$

$$p_{st}(\lambda)=D_{st}\sum\lambda^{r+\ell+m+n-4}\omega_s^{r}\omega_t^{\ell}\omega_{r_2}^{m}\omega_{r_3}^{n}\left[b_{jr}\,b_{j\ell}\,a_{jm}\,a_{jn}\right]$$

$$p_{stu}(\lambda)=D_{stu}\sum\lambda^{r+\ell+m+n-4}\omega_s^{r}\omega_t^{\ell}\omega_u^{m}\omega_{r_3}^{n}\left[b_{jr}\,b_{j\ell}\,b_{jm}\,a_{jn}\right]$$

($r,\ell,m,n,s,t,u,r_1,r_2,r_3=1,2,3,4;\ s\neq t\neq u;\ r_1<r_2<r_3$); D_0 , D_5 D_s , D_{st} i D_{stu} konstante različite od nule. Izrazi u uglastim zagradama predstavljaju determinante četvrtoga reda sa označenom j —tom vrstom, čiji su elementi koeficijenti graničnih uslova (II). U Δ -polinomima (2.1), sumiranje se vrši po indeksima r , ℓ m i n .

Izdvojimo iz funkcije $\Delta(\lambda)$ ma koja dva sabirka, oblika $p(\lambda)e^{\lambda\tau\pi}$ i $p^*(\lambda)e^{\lambda\overline{\tau}\pi}$ ($\mathrm{Im}\,\tau\neq 0$).

S T A V 3.2. Prelaz od polinoma $p(\lambda)$ ka polinomu $p^*(\lambda)$, vrši se pomoću konjugacije koeficijenata polaznog polinoma $p(\lambda)$.

D O K A Z. Uzmimo na primer, polinome $p_1(\lambda)$ i $p_3(\lambda)$, i neka je $\lambda = t$ realna promenljiva. Ti polinomi u obliku determinante, glase

$$p_1(t) = \left[\mathcal{B}_{j1}(t)\ A_{j2}(t)\ A_{j3}(t)\ A_{j4}(t)\right]$$

i

$$p_3(t) = \left[A_{j1}(t)\ A_{j2}(t)\ \mathcal{B}_{j3}(t)\ A_{j4}(t)\right]$$

Pošto su koeficijenti graničnih uslova (II) po pretpostavci realni brojevi, to je

$$\overline{\mathcal{B}_{j1}(t)} \equiv \mathcal{B}_{j3}(t),\ \overline{A_{j2}(t)} \equiv A_{j4}(t),\ \overline{A_{j1}(t)} \equiv A_{j3}(t).$$

Stoga je

$$\overline{p_1(t)} \equiv \left[\overline{\mathcal{B}_{j1}(t)}\ \overline{A_{j2}(t)}\ \overline{A_{j3}(t)}\ \overline{A_{j4}(t)}\right] \equiv p_3(t).$$

Slično se dokazuje i za ostale slučajeve. U vidu posledice proizilazi sledeća relacija

$$p(\lambda) \equiv 0 \iff p^*(\lambda) \equiv 0. \tag{2.2}$$

Obratimo sada pažnju koeficijentima Δ -polinoma. Uzmimo na primer, polinome $p_s(\lambda)$. Svi koeficijenti tih polinoma su linearne kombinacije izraza $\omega_s^{r}\,\omega_{r_1}^{e}\,\omega_{r_2}^{m}\,\omega_{r_3}^{n}\,[b_{jr}a_{je}a_{jm}a_{jn}]$, dakle proizvoda realnih i kompleksnih brojeva. Očevidno, ako su sve determinante oblika $[b_{jr}a_{je}a_{jm}a_{jn}]$ jednake nuli, tada su svi polinomi $p_s(\lambda)$ identički jednaki nuli. S obzirom na strukturu koeficijenata, važi i obrnuti zaključak, izuzev u nekim retkim slučajevima. Slična analiza važi i za druge Δ -polinome. Na osnovu izloženog, uvodimo sledeće relacije

$$\begin{aligned} p_s(\lambda) \equiv 0 &\iff [b_{jr}a_{je}a_{jm}a_{jn}] = 0 \\ p_{st}(\lambda) \equiv 0 &\iff [b_{jr}b_{je}a_{jm}a_{jn}] = 0 \\ p_{stu}(\lambda) \equiv 0 &\iff [b_{jr}b_{je}b_{jm}a_{jn}] = 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

$(s, t, r, e, m, n, u = 1, 2, 3, 4;\ s \neq u \neq t).$

D E F I N I C I J A 3.1. Klasu graničnih uslova (II), za koje važe relacije (2.3), zvaćemo klasom graničnih uslova (G).

2.1. INDIKATORNI DIJAGRAMI FUNKCIJE $\Delta(\lambda)$.

Svi indikatorni dijagrami funkcije $\Delta(\lambda)$ su mnogougaonici, čija temena pripadaju skupu tačaka: 0, $\pi\omega_s$, $\pi(\omega_s+\omega_t)$ i $\pi(\omega_s+\omega_t+\omega_u)$ ($s,t,u=1,2,3,4;\ s\neq t\neq u$). Medjutim, ukoliko je tačka $\pi\tau$ teme dijagrama, tada je na osnovu relacije (2.2) i tačka $\pi\bar{\tau}$ takodje teme odgovarajućeg dijagrama. Otuda zaključujemo, da su svi indikatorni dijagrami funkcije $\Delta(\lambda)$ simetrični u odnosu na realnu osu.

Skup svih indikatornih dijagrama razbićemo na potskupove $\mathcal{P}_k$ ($k=1,2,4,5,6$), koje karakterišu sledeća svojstva:

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{P}_1): && p_{st}(\lambda)\not\equiv 0,\ p_s(\lambda)\not\equiv 0,\ p_{stu}(\lambda)\not\equiv 0;\\
&(\mathcal{P}_2): && p_{st}(\lambda)\not\equiv 0,\ p_{stu}(\lambda)\equiv 0;\\
&(\mathcal{P}_3): && p_{st}(\lambda)\not\equiv 0,\ p_s(\lambda)\equiv 0;\\
&(\mathcal{P}_4): && p_{st}(\lambda)\not\equiv 0,\ p_s(\lambda)\equiv 0,\ p_{stu}(\lambda)\equiv 0;\\
&(\mathcal{P}_5): && p_{st}(\lambda)\equiv 0,\ p_s(\lambda)\not\equiv 0;\\
&(\mathcal{P}_6): && p_{st}(\lambda)\equiv 0,\ p_{stu}(\lambda)\not\equiv 0;
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

($s,t,u=1,2,3,4,5,6;\ s\neq t\neq u$). Egzistencija svih navedenih skupova indikatornih dijagrama, lako se može utvrditi pomoću konkretnih primera.

Neka su

$$(\widetilde{\mathrm{II}})\quad \widetilde{U}_j(y)=\sum_{k=1}^{4}\left[\hat{a}_{jk}\,y^{(k-1)}_{(0)}+\hat{b}_{jk}\,y^{(k-1)}_{(\pi)}\right]=0 \qquad (j=1,2,3,4)$$

granični uslovi problema (A), dobijeni iz datih graničnih uslova (II), putem rešavanja sistema linearnih jednačina $U_j(y)=0$ ($j=1,2,3,4$) po ma kojoj četvorci promenljivih: $y(0)$, $y(\pi)$, $y^{(k-1)}_{(0)}$ i $y^{(k-1)}_{(\pi)}$ ($k=2,3,4$). Očevidno, granični uslovi ($\widetilde{\mathrm{II}}$) ekvivalentni su graničnim uslovima (II). Neka je sa $\widetilde{\Delta}(\lambda)$, označena karakteristična determinanta graničnih uslova ($\widetilde{\mathrm{II}}$).

S T A V 3.3. Ako su granični uslovi (II) klase (G), tada važe sledeći iskazi:

1. $(\mathcal{P}_2)\Longrightarrow\ \widetilde{p}_5(\lambda)\equiv 0,\ \widetilde{p}_{stu}(\lambda)\equiv 0;$
2. $(\mathcal{P}_3)\Longrightarrow\ \widetilde{p}_0(\lambda)\equiv 0,\ \widetilde{p}_s(\lambda)\equiv 0;$
3. $(\mathcal{P}_4)\Longrightarrow\ \widetilde{p}_0(\lambda)\equiv 0,\ \widetilde{p}_5(\lambda)\equiv 0,\ \widetilde{p}_s(\lambda)\equiv 0,\ \widetilde{p}_{stu}(\lambda)\equiv 0;$
4. $(\mathcal{P}_5)\Longrightarrow\ \widetilde{p}_5(\lambda)\equiv 0,\ \widetilde{p}_{st}(\lambda)\equiv 0,\ \widetilde{p}_{stu}(\lambda)\equiv 0;$
5. $(\mathcal{P}_6)\Longrightarrow\ \widetilde{p}_0(\lambda)\equiv 0,\ \widetilde{p}_{st}(\lambda)\equiv 0,\ \widetilde{p}_s(\lambda)\equiv 0;$

($s,t,u=1,2,3,4$; $s\neq t\neq u$),pri čemu su sa $\widetilde{p}(\lambda)$ označeni polinomi funkcije $\widetilde{\Delta}(\lambda)$.

D O K A Z.

1.Pošto je $p_{stu}(\lambda)\equiv 0$ ($s,t,u=1,2,3,4$; $s\neq t\neq u$),to iz (2.3) sledi da su sve determinante oblika $[b_{jr}\,b_{je}\,b_{jm}\,a_{jn}]$,jednake nuli.Kako je dalje po pretpostavci $p_{st}(\lambda)\not\equiv 0$,to mora postojati bar jedna determinanta tipa $[b_{jr}\,b_{je}\,a_{jm}\,a_{jn}]$,različita od nule.U tom slučaju,rešavanjem sistema jednačina $U_j(y)=0$ ($j=1,2,3,4$) po $y^{(r-1)}_{(\pi)}$, $y^{(e-1)}_{(\pi)}$, $y^{(m-1)}_{(0)}$ i $y^{(n-1)}_{(0)}$,dolazimo do ekvivalentnih graničnih uslova ($\widetilde{\text{II}}$),u kome je

$$\widetilde{b}_{jr}=0 \qquad (\ j=1,2\ ;\ r=1,2,3,4\ )$$

Otuda sledi da su sve determinante $[\widetilde{b}_{jr}\,\widetilde{b}_{je}\,\widetilde{b}_{jm}\,\widetilde{a}_{jn}]$ ($r,e,m,n=1,2,3,$ i $[\widetilde{b}_{j1}\,\widetilde{b}_{j2}\,\widetilde{b}_{j3}\,\widetilde{b}_{j4}]$ jednake nuli.S obzirom na strukturu koeficijenata polinoma $\widetilde{p}_{stu}(\lambda)$ i $\widetilde{p}_{s}(\lambda)$ (vid.,2.1),nalazimo $\widetilde{p}_{s}(\lambda)\equiv 0$ i $\widetilde{p}_{stu}(\lambda)\equiv 0$ ($s,t,u=1,2,3,4$; $s\neq t\neq u$).

2.Dokazuje se na potpuno isti način kao u prethodnom slučaju.

3.Sledi iz 1. i 2.

4.Po pretpostavci i na osnovu (2.3) proizilazi,da su sve determinante $[b_{jr}\,b_{je}\,a_{jm}\,a_{jn}]$ ($r,e,m,n=1,2,3,4$) jednake nuli,a da je bar jedna oblika $[b_{jr}\,a_{je}\,a_{jm}\,a_{jn}]$ različita od nule.Rešavajući sistem jednačina $U_j(y)=0$ ($j=1,2,3,4$) po $y^{(r-1)}_{(\pi)}$, $y^{(e-1)}_{(0)}$, $y^{(m-1)}_{(0)}$ i $y^{(n-1)}_{(0)}$,dobijamo ekvivalentan sistem graničnih uslova ($\widetilde{\text{II}}$) u kome će biti

$$\widetilde{b}_{jr}=0 \qquad (\ j=1,2,3\ ;\ r=1,2,3,4\ )$$

Zbog toga su sve determinante: $[\widetilde{b}_{jr}\,\widetilde{b}_{je}\,\widetilde{a}_{jm}\,\widetilde{a}_{jn}]$, $[\widetilde{b}_{jr}\,\widetilde{b}_{je}\,\widetilde{b}_{jm}\,\widetilde{a}_{jn}]$ i $[\widetilde{b}_{j1}\,\widetilde{b}_{j2}\,\widetilde{b}_{j3}\,\widetilde{b}_{j4}]$ jednake nuli,odnosno $\widetilde{p}_{s}(\lambda)\equiv 0$, $\widetilde{p}_{st}(\lambda)\equiv 0$ i $\widetilde{p}_{stu}(\lambda)\equiv 0$ ($s,t,u=1,2,3,4$; $s\neq t\neq u$).

5.Dokazuje se analogno prethodnom.

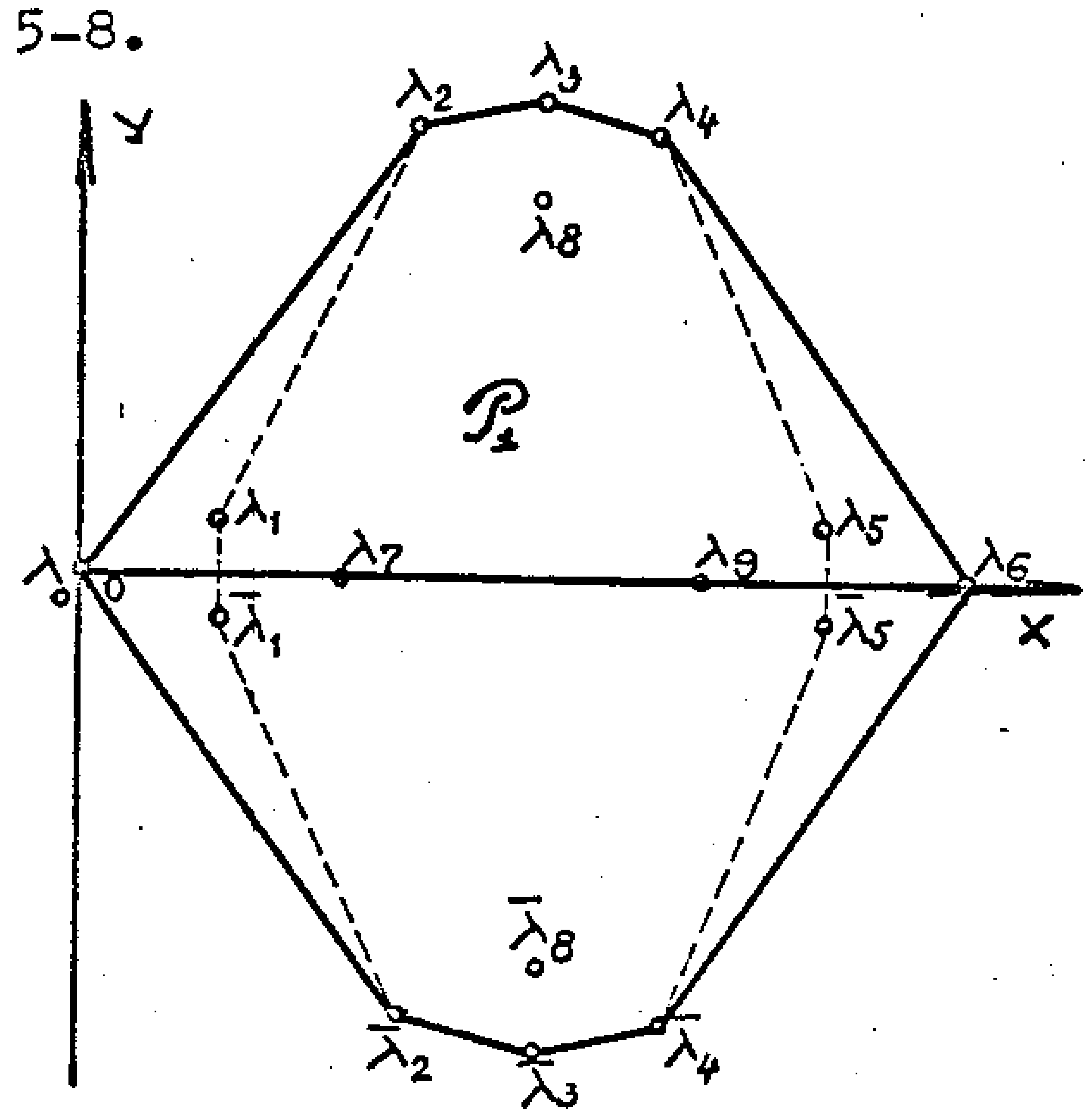
Primetimo,da iz pretpostavke: $p_s(\lambda)\equiv 0$, $p_{st}(\lambda)\equiv 0$ i $p_{stu}(\lambda)\equiv 0$ slede ekvivalentni granični uslovi tipa: $y^{(r)}(0)=0$ ili $y^{(r)}_{(\pi)}=0$ ($r=0,1,2,3$).Pošto u oba slučaja ne postoje sopstvene vrednosti različite od nule,to takvu mogućnost odbacujemo.

U narednom izlaganju umesto graničnih uslova (II),koristićemo kad god je to moguće ekvivalentne granične uslove ($\widetilde{\text{II}}$),ne menjajući pri tome oznake karakteristične determinante,indikatornih dijagrama iΔ-polinoma.

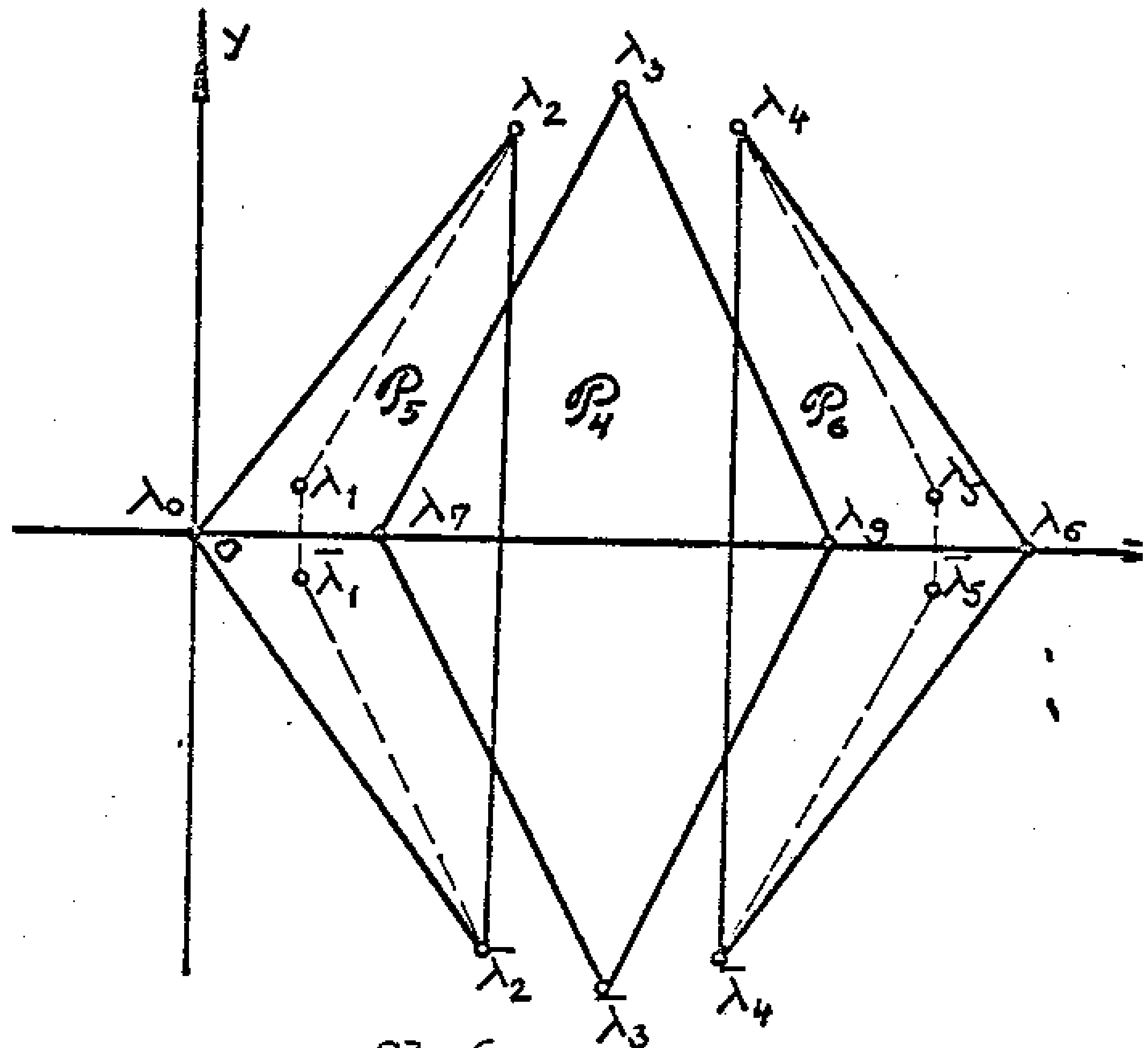
Predjimo sada na konstrukciju indikatornih dijagrama. Prethodno, izdvojimo iz kompleksne λ -ravni sledeće tačke: $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = \pi\omega_1$, $\lambda_2 = \pi\omega_2$, $\lambda_3 = \pi(\omega_1+\omega_2)$, $\lambda_4 = \pi(\omega_1+\omega_2+\omega_3)$, $\lambda_5 = \pi(\omega_1+\omega_2+\omega_4)$, $\lambda_6 = 2\pi(\alpha_1+\alpha_2)$, $\lambda_7 = 2\pi\alpha_1$, $\lambda_8 = \pi(\omega_2+\omega_3)$ i $\lambda_9 = 2\pi\alpha_2$, gde je $\alpha_s = \mathcal{R}e\,\omega_s$ ($s = 1, 2$). Kao što je ranije istaknuto, temena indikatornih dijagrama mogu biti samo tačke λ_s i $\overline{\lambda_s}$ ($s = 0, 1, \dots, 9$). Na osnovu date klasifikacije $\mathcal{P}_k$ ($k=1, \dots, 6$), stava 3.3., i pri pretpostavci

$$0 < \arg\omega_1 < \arg\omega_2 < \pi/2$$

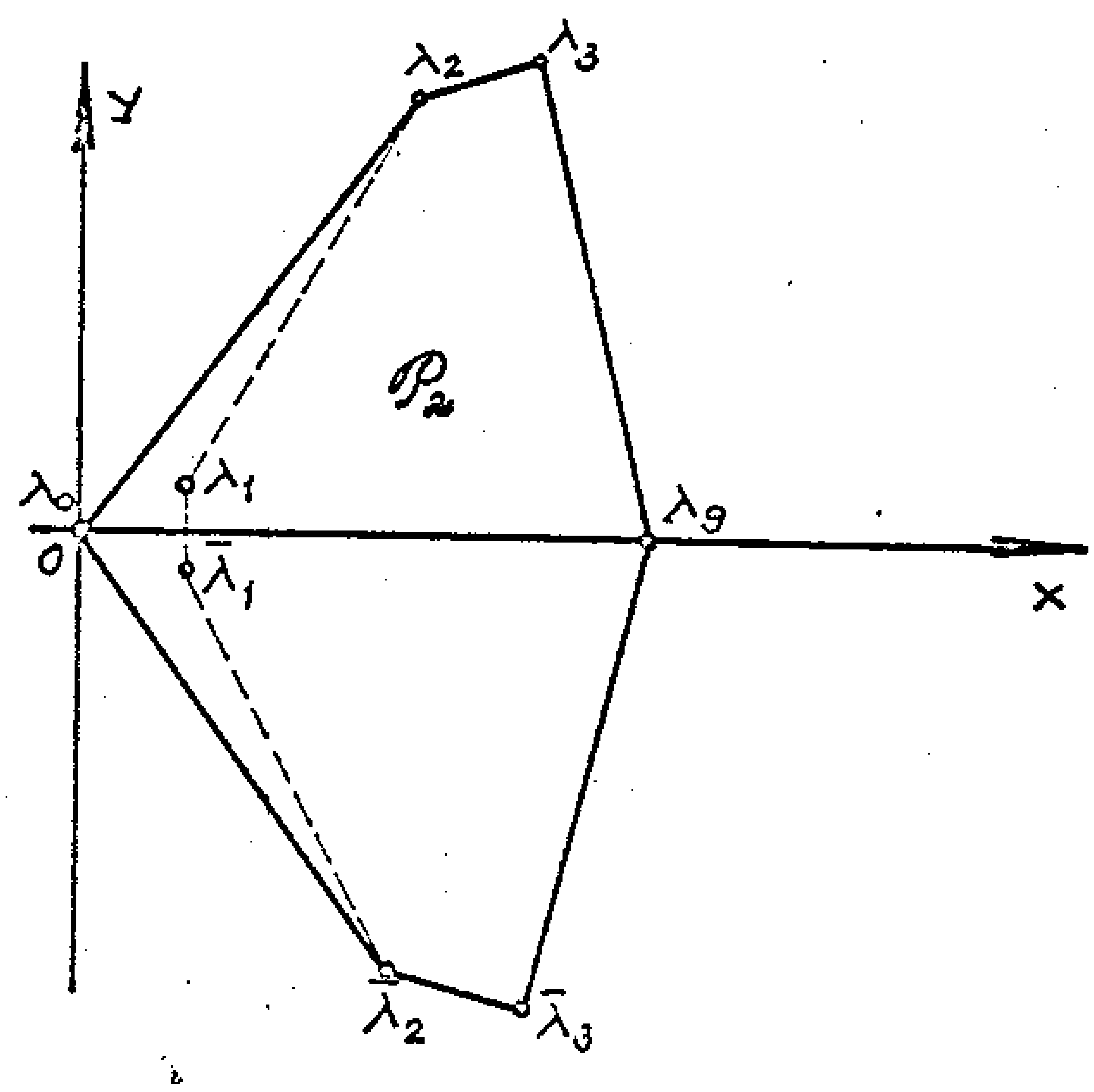
na primer, odgovarajući indikatorni dijagrami prikazani su na slikama 5-8.



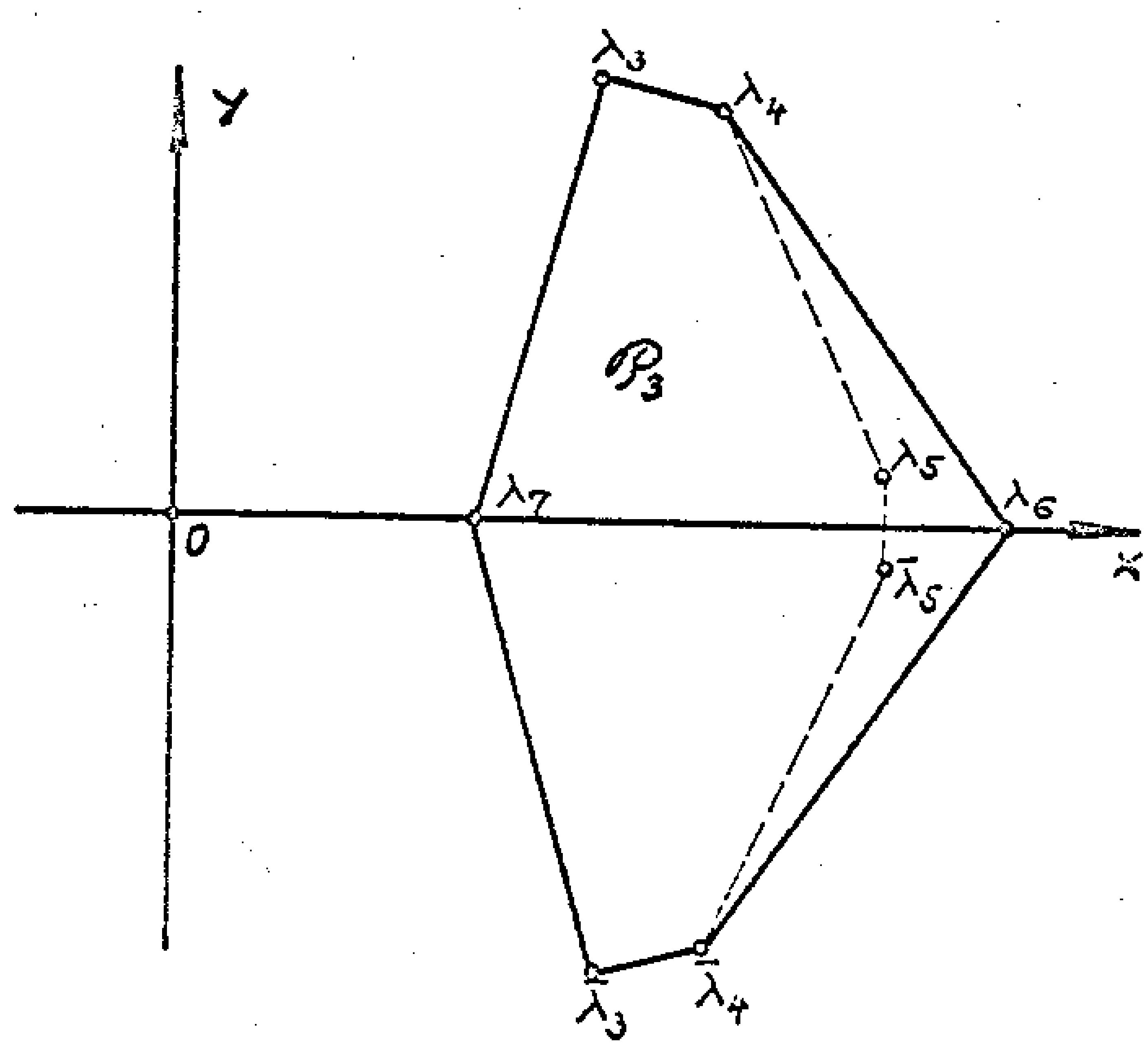
Sl.5



Sl.6



Sl.7



Sl.8

Indikatorni dijagram, u kome su sadržani svi ostali indikatorni dijagrami, u ovom slučaju je osmougao čija su temena tačke: λ_0 ; λ_6 , λ_s i $\bar{\lambda}_s$ ($s=2,3,4$). Taj specijalni dijagram nazvaćemo <u>OSNOVNIM INDIKATORNIM DIJAGRAMOM</u>, i obeležićemo ga sa $\mathcal{P}_0$. Ukoliko je $0<\arg\omega_1=\arg\omega_2<\frac{\pi}{2}$ $\mathcal{P}_0$ je romb, za $0<\arg\omega_1<\arg\omega_2=\pi/2$, $\mathcal{P}_0$ će biti šestougao, dok je za $\arg\omega_1=\arg\omega_2=\pi/2$ $\mathcal{P}_0$ odsečak imaginarne ose. Najzad, ako je $0<\arg\omega_1<\pi/2<\arg\omega_2$, $\mathcal{P}_0$ je ponovo osmougao.

2.2. REGULARNOST GRANIČNIH USLOVA.

Neka je $p(\lambda)e^{\lambda\eta\pi}$ ma koji sabirak u funkciji $\Delta(\lambda)$. Ako je tačk $\lambda=\eta\pi$ teme osnovnog indikatornog dijagrama $\mathcal{P}_0$, tada ćemo korespodentni polinom $p(\lambda)$ zvati <u>TEMENIM POLINOMOM</u>. Medjutim, ako pomenuta tačka leži na konturi dijagrama $\mathcal{P}_0$ a nije njegovo teme, tada ćemo reći da je $p(\lambda)$ <u>GRANIČNI POLINOM</u> .

<u>S T A V 3.3.</u> Granični uslovi homogenog graničnog problema (A_4), regularni su tada i samo tada, kada su svi temeni polinomi istoga, i ne manjega stepena od stepena ma kog graničnog polinoma.

<u>D O K A Z.</u> Bez ograničenja opštosti, može se poći od pretpostavke $0<\arg\omega_1\le\arg\omega_2\le\frac{\pi}{2}$. Pri tome, postoje tri mogućnosti: $0<\arg\omega_1<\arg\omega_2<\frac{\pi}{2}$, $0<\arg\omega_1<\arg\omega_2=\pi/2$ i $0<\arg\omega_1=\arg\omega_2\le\pi/2$.

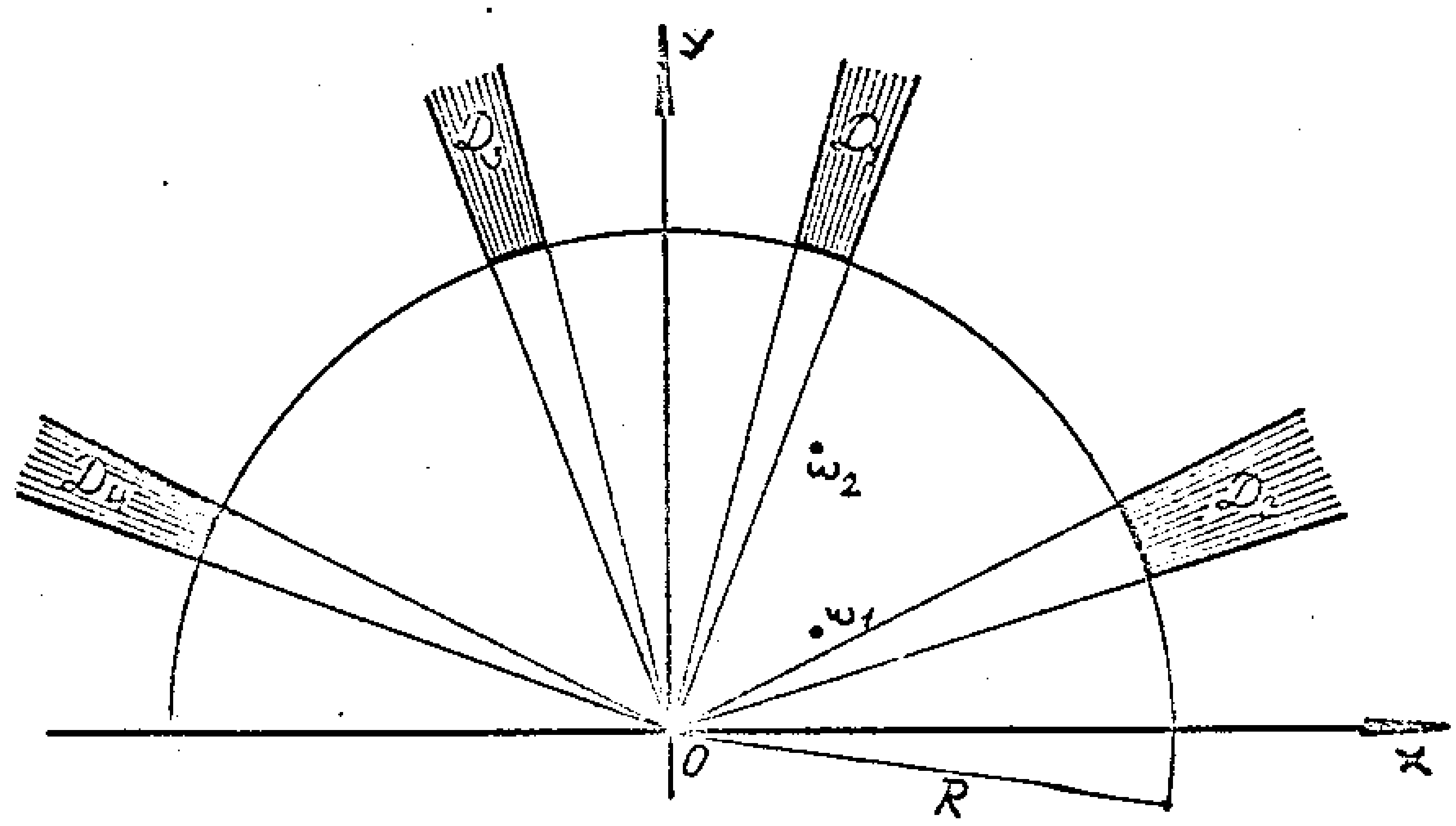
1. Neka je $0<\arg\omega_1<\arg\omega_2<\pi/2$ i $\arg\omega_s=\Theta_s$ ($s=1,2$).
U kompleksnoj λ -ravni, konstruišimo oblasti $\mathcal{D}_r$ ($r=1,2,3,4$) na sledeći način:

$$\mathcal{D}_r:\ |\arg\lambda-(\pi/2-\Theta_r)|<\varepsilon,\ |\lambda|>\mathcal{R};\quad r=1,2$$

i

$$\mathcal{D}_r:\ |\arg\lambda-(\pi/2+\Theta_r)|<\varepsilon,\ |\lambda|>\mathcal{R};\quad r=3,4$$

pri čemu je ε proizvoljno mali, a $\mathcal{R}$ dovoljno veliki pozitivan broj.



Sl.9

U oblastima $\mathcal{D}_{\kappa}$,važe sledeće nejednakosti:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}_1:\ Re\lambda\omega_2<0,\ Re\lambda\omega_3>0,\ Re\lambda\omega_4>0;\\
&\mathcal{D}_2:\ Re\lambda\omega_1>0,\ Re\lambda\omega_3>0,\ Re\lambda\omega_4>0;\\
&\mathcal{D}_3:\ Re\lambda\omega_1<0,\ Re\lambda\omega_2<0,\ Re\lambda\omega_4>0;\\
&\mathcal{D}_4:\ Re\lambda\omega_1<0,\ Re\lambda\omega_2<0,\ Re\lambda\omega_3<0;
\end{aligned}\tag{2.12}$$

Kako je

$$\Delta(\lambda)=\left[A_{j1}+B_{j1}e^{\lambda\omega_1\pi}\ \ .\ \ .\ \ A_{j4}+B_{j4}e^{\lambda\omega_4\pi}\right]$$

to za $\lambda\in\mathcal{D}_1$,imajući u vidu (2.12),dobijamo

$$\Delta(\lambda)=e^{\lambda\pi(\omega_3+\omega_4)}\left[A_{j1}+B_{j1}e^{\lambda\omega_1\pi}\ \widetilde{A}_{j2}\ \widehat{B}_{j3}\ \widetilde{B}_{j4}\right]=0$$

odnosno

$$\left[A_{j1}\ \widetilde{A}_{j2}\ \widehat{B}_{j3}\ \widehat{B}_{j4}\right]+\left[B_{j1}\widetilde{A}_{j2}\ \widehat{B}_{j3}\ \widetilde{B}_{j4}\right]e^{\lambda\omega_1\pi}=0$$

Prema tome,u oblasti $\mathcal{D}_1$ važi relacija

$$\Delta(\lambda)=0\iff\widetilde{p}_{34}+\widetilde{p}_{134}e^{\lambda\omega_1\pi}=0,\ \lambda\in\mathcal{D}_1\tag{2.13}$$

pri čemu je korišćena oznaka $\widehat{p}=p(\lambda)+o(1),\ \lambda\to\infty$ .U ostalim oblastima,na sličan način nalazimo

$$\Delta(\lambda)=0\iff\begin{cases}\widetilde{p}_{134}+\widetilde{p}_5e^{\lambda\omega_2\pi}=0,\ \lambda\in\mathcal{D}_2\\ \widetilde{p}_4+\widetilde{p}_{34}e^{\lambda\omega_3\pi}=0,\ \lambda\in\mathcal{D}_3\\ \widetilde{p}_0+\widetilde{p}_4e^{\lambda\omega_4\pi}=0,\ \lambda\in\mathcal{D}_4\end{cases}\tag{2.14}$$

Skup jednačina (2.13) i (2.14) označimo sa E.

<u>Uslov je potreban.</u> Ako su granični uslovi regularni u smislu definicije 1.6 (I deo),tada mora biti:

$$\Delta(\lambda)=0\iff\widetilde{M}_1^{(\kappa)}+\widetilde{M}_2^{(\kappa)}e^{\lambda\omega_k\pi}=0,\ \lambda\in\mathcal{D}_{\kappa},\ (\kappa=1,2,3,4)\tag{2.15}$$

pri čemu su $M_1^{(\kappa)}$ i $M_2^{(\kappa)}$ ($\kappa=1,2,3,4$) konstante,različite od nule.Skup jednačina (2.15) obeležimo sa F.U oblasti $\mathcal{D}_{\kappa}$,jednačini iz skupa F ekvivalentna je odgovarajuća jednačina iz skupa E.To je moguće samo onda,ako su polinomi posmatrane jednačine iz skupa E istoga stepe-

S obzirom na strukturu jednačina iz skupa E, polinomi: $p_0(\lambda)$, $p_5(\lambda)$ $p_4(\lambda)$, $p_{34}(\lambda)$ i $p_{134}(\lambda)$, moraju biti istoga stepena. No u tom slučaju, na osnovu relacije (2.2) sledi, da su svi polinomi u funkciji $\Delta(\lambda)$ istoga stepena.

Uslov je dovoljan. Očevidno, ako su svi temeni polinomi istoga stepena, tada se iz jednačina skupa E dobijaju odgovarajuće jednačine skupa

2. Posmatrajmo slučaj $0 < \arg\omega_1 < \arg\omega_2 = \pi/2$. Pošto je $\mathcal{R}e\,\omega_2 = 0$ ($\mathcal{R}e\,\omega_4 = 0$), to izraz $\mathcal{R}e\,\lambda\omega_4$ ($\mathcal{R}e\,\lambda\omega_2$) u oblasti $\mathcal{D}_2$ ($\mathcal{D}_4$) nema stalan znak. Stoga će na primer, u oblasti $\mathcal{D}_2$ biti

$$\Delta(\lambda) = e^{\lambda\pi(\omega_4+\omega_3)}\left[\tilde{\mathcal{B}}_{j1}\mathcal{A}_{j2} + \mathcal{B}_{j2}e^{\lambda\omega_2\pi}\tilde{\mathcal{B}}_{j3}\mathcal{A}_{j4} + \mathcal{B}_{j4}e^{\lambda\omega_4\pi}\right] = 0$$

odnosno

$$\Delta(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \tilde{p}_{13} + \tilde{p}_5 + \tilde{p}_{134}e^{\lambda\omega_4\pi} + \tilde{p}_{123}e^{\lambda\omega_2\pi} = 0,\ \lambda\in\mathcal{D}_2.$$

Slično postupamo i u slučaju $\lambda \in \mathcal{D}_4$. Prema tome skup E obrazuju sledeće jednačine:

$$\Delta(\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \tilde{p}_{34} + \tilde{p}_{134}e^{\lambda\omega_1\pi} = 0,\ \lambda\in\mathcal{D}_1 \\ \tilde{p}_4 + \tilde{p}_{34}e^{\lambda\omega_3\pi} = 0,\ \lambda\in\mathcal{D}_3 \\ \tilde{p}_{13} + \tilde{p}_5 + \tilde{p}_{134}e^{\lambda\omega_4\pi} + \tilde{p}_{123}e^{\lambda\omega_2\pi} = 0,\ \lambda\in\mathcal{D}_2 \\ \tilde{p}_0 + \tilde{p}_{24} + \tilde{p}_4 e^{\lambda\omega_4\pi} + \tilde{p}_2 e^{\lambda\omega_2\pi} = 0,\ \lambda\in\mathcal{D}_4 \end{cases}$$

Ukoliko su granični uslovi regularni, tada je jednačini $\Delta(\lambda) = 0$ u oblastima $\mathcal{D}_r$ ($r = 1, 2, 3, 4$) ekvivalentan skup jednačina F, oblika

$$\tilde{M}_1^{(r)} + \tilde{M}_2^{(r)}e^{\lambda\omega_r\pi} = 0,\quad r = 1, 3$$
$$\tilde{M}_0^{(r)} + \tilde{M}_1^{(r)}e^{\lambda\omega_4\pi} + \tilde{M}_2^{(r)}e^{\lambda\omega_2\pi} = 0,\quad r = 2, 4$$

pri čemu su $M_0^{(r)}$ ($r=2,4$) konstante, i $M_1^{(r)}$, $M_2^{(r)}$ ($r=1,2,3,4$) konstante različite od nule. Otuda sledi, polinomi: $p_{24}(\lambda)$, $p_{134}(\lambda)$ $p_{123}(\lambda)$, $p_4(\lambda)$ i $p_2(\lambda)$, moraju biti istoga stepena, i manjega od stepena ostalih polinoma u jednačinama skupa E. Putem konstrukcije osnovnog indikatornog dijagrama $\mathcal{P}_0$, lako se utvrdjuje da su to temeni polinomi.

3. Neka je najzad $\arg\omega_1 = \arg\omega_2 = \pi/2$. S obzirom na to, da je $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$ i $\mathcal{D}_3 = \mathcal{D}_4$, dokaz se izvodi analogno prethodnom za slučaj oblasti

Iz dokazanog stava proizilazi sledeći zaključak: regularnim graničnim uslovima homogenog graničnog problema (A_4), odgovaraju specijalni oblici osnovnih indikatornih dijagrama $\mathcal{P}_0$, karakteristične determinante $\Delta(\lambda)$

2.3. ČETVOROSTRUKA POTPUNOST SISTEMA SOPSTVENIH I PRIDRUŽENIH FUNKCIJA OPERATORA $L_4(\lambda)$ U PROSTORU $\mathcal{L}^2(0,\pi)$.

U stavu 3.1 odredjena je osnovna funkcija $y(x,\lambda)$ u obliku determinante. Razlažući je po elementima prve vrste, vodeći računa pri tome da je $y_s(x,\lambda)=e^{\lambda\omega_s x}$ ($s=1,2,3,4$), dobijamo

$$y(x,\lambda)=\sum_{s=1}^{4} q_s(\lambda)e^{\lambda\omega_s x} \tag{2.15}$$

gde je

$$q_s(\lambda)=q_{s0}(\lambda)+\sum q_{st}(\lambda)e^{\lambda\omega_t\pi}+\sum q_{stu}(\lambda)e^{\lambda\pi(\omega_t+\omega_u)}+\sum q_{stuv}(\lambda)e^{\lambda\pi(\omega_t+\omega_u+\omega_v)}$$

$q_{s0}(\lambda)$, $q_{st}(\lambda)$, $q_{stu}(\lambda)$ i $q_{stuv}(\lambda)$ polinomi po λ ($s,t,u,v=1,2,3,4$; $s\neq t\neq u\neq v$). Ukoliko je karakteristična determinanta oblika

$$\Delta(\lambda)=p_0(\lambda)+\sum_{s=1}^{4} p_s(\lambda)e^{\lambda\omega_s\pi}$$

tada se za osnovnu funkciju može uzeti, funkcija

$$y(x,\lambda)=\sum_{s=1}^{4} q_{s0}(\lambda)e^{\lambda\omega_s x} \tag{2.16}$$

pretpostavljajući da se bar jedan polinom $q_{s0}(\lambda)$ ($s=1,2,3,4$) ne poništava pri proizvoljnoj sopstvenoj vrednosti $\lambda=\lambda_n$. Isto tako, ako je karakteristična determinanta vida

$$\Delta(\lambda)=p_5(\lambda)+\sum p_{stu}(\lambda)e^{\lambda\pi(\omega_s+\omega_t+\omega_u)}$$

tada će korespodentna osnovna funkcija biti

$$y(x,\lambda)=\sum q_{stuv}(\lambda)e^{\lambda\pi(\omega_t+\omega_u+\omega_v)}\cdot e^{\lambda\omega_s x} \tag{2.17}$$

Istaknimo, da je u oba specijalna slučaja (2.16) i (2.17), $p_{st}(\lambda)\equiv 0$ ($s,t=1,2,3,4$; $s\neq t$; vid. stav 3.3).

Neka je λ^p najveći zajednički delitelj svih Δ - polinoma, a λ^q najveći zajednički delitelj svih polinoma u osnovnoj funkciji $y(x,\lambda)$, dakle

$$\Delta(\lambda)\equiv\lambda^p\Delta_0(\lambda) \quad , \quad y(x,\lambda)\equiv\lambda^q y_0(x,\lambda)$$

Pošto po pretpostavci $\lambda=0$ nije sopstvena vrednost, to ubuduće možemo koristiti $\Delta_0(\lambda)$ u svojstvu karakteristične determinante , i funkciju ju $y_0(x,\lambda)$ u ulozi osnovne funkcije. Da ne bi opterećivali izlagan uvodjenjem novih oznaka, zadržaćemo stara obeležavanja polinoma u tim funkcijama.

Neka su $f_\nu(x)$ ($\nu = 1, 2, 3, 4$), proizvoljne funkcije i prostora $\mathcal{L}^2(0,\pi)$. Funkcija potpunosti

$$F(\lambda)=\sum_{\nu=1}^{4}\lambda^{\nu-1}\int_0^{\pi} y_0(x,\lambda)\, f_\nu(x)\,dx$$

može biti predstavljena u obliku

$$F(\lambda)=\sum_{\lambda} q_{s0}F_{s0}+\sum_{\lambda} q_{st}F_{st}+\sum_{\lambda} q_{stu}F_{stu}+\sum_{\lambda} q_{stuv}F_{stuv} \tag{2.18}$$

gde je

$$F_{s0}=\sum_{\nu=1}^{4}\lambda^{\nu-1}\int_0^{\pi} e^{\lambda\omega_s x} f_\nu(x)\,dx$$

$$F_{st}=e^{\lambda\omega_t\pi}F_{s0}$$

$$F_{stu}=e^{\lambda\omega_u\pi}F_{st}$$

$$F_{stuv}=e^{\lambda\omega_v\pi}F_{stu}$$;

$q_n = q_n(\lambda)$ - polinomi po λ ($s,t,u,v= 1, 2, 3, 4;\ s\neq t\neq u\neq v$).

<u>S T A V 3.4.</u> Neka je $\Psi(\lambda)=\dfrac{F(\lambda)}{\Delta_0(\lambda)}$ cela funkcija. Tada važi jednakos

$$\Psi(ri)=O(r^{p+1/2}),\quad |r|<\infty$$

pri čemu je p ceo broj, ne veći od 2.

<u>D O K A Z</u>. Razlikovaćemo dva slučaja: $p_{st}(\lambda)\not\equiv 0$ i $p_{st}(\lambda)\equiv 0$ ($s,t= 1, 2, 3, 4;\ s\neq t$).

1. $p_{st}(\lambda)\not\equiv 0$. U funkciji $\Delta_0(\lambda)$, najbrži rast na imagin rnoj osi imaju sledeći sabirci: $p_{34}(ri)e^{\pi r(\omega_3+\omega_4)i}$ kada $r\to+\infty$ i $p_{12}(ri)e^{\pi r(\omega_1+\omega_2)i}$ kada $r\to-\infty$. Stoga imamo

$$|\Delta_0(ri)|=\begin{cases} e^{\pi r(\beta_1+\beta_2)}\,|p_{34}(ri)|\,|1+o(1)|, & r\to+\infty\\ e^{-\pi r(\beta_1+\beta_2)}\,|p_{12}(ri)|\,|1+o(1)|, & r\to-\infty \end{cases} \tag{2.19}$$

($\beta_s=\operatorname{Im}\omega_s>0$; $s = 1, 2$). Ta svojstva u funkciji $F(\lambda)$ imaju $q_{34}(ri)F_{34}(ri)$ kada $r\to+\infty$ i $q_{12}(ri)F_{12}(ri)$ kada $r\to-\infty$. Primenom nejednakosti Höldera na funkcije $F_{34}(ri)$ i $F_{12}(ri)$, nalazi

$$|F_{12}(ri)| \leq M_2 |r|^{2+1/2} e^{\pi |r| (\beta_1+\beta_2)}$$

$$|F_{34}(ri)| \leq M_1 |r|^{2+1/2} e^{\pi |r| (\beta_1+\beta_2)} \qquad (2.20)$$

za dovoljno veliko $|r|$,gde je $M_s = \frac{1}{\sqrt{2\beta_s}} \sum_{\nu=1}^{4} \| f_\nu \|$ ($s=1,2$).Polinomi $p_{12}(\lambda)$ i $p_{34}(\lambda)$ moraju biti istoga stepena (stav 3.2).Korespodentni polinomi $q_{12}(\lambda)$ i $q_{34}(\lambda)$,s obzirom na to kako su dobij ni,ne mogu biti većega stepena od stepena pomenutih polinoma.Zbog toga, postoje sledeće asimptotske relacije:

$$\frac{q_{12}(\lambda)}{p_{12}(\lambda)} = O(\lambda^{p'}) , \quad \lambda \to \infty$$

i (2.21)

$$\frac{q_{34}(\lambda)}{p_{34}(\lambda)} = O(\lambda^{p'}) , \quad \lambda \to \infty$$

pri čemu je p' ceo,nepozitivan broj.

Na osnovu (2.19)-(2.21),imamo

$$|\Psi(ri)| = \left| \frac{\varphi(ri) + q_{12}(ri) F_{12}(ri)}{\Delta_0(ri)} \right| \leq A_1 |r|^{p'+2+1/2} \qquad (2.22)$$

pri dovoljno velikom $|r|$ ($r \to -\infty$),gde je A_1 pozitivna konstant i $\varphi(ri)/\Delta_0(ri) \to 0$ kada $r \to -\infty$.

Slično dobijamo

$$|\Psi(ri)| \leq A_2 |r|^{p'+2+1/2} \qquad (2.23)$$

za dovoljno veliko $|r|$ ($r \to +\infty$).

Uzimajući u obzir nejednakosti (2.22) i (2.23),konačno nalazimo

$$\Psi(ri) = O(r^{p+1/2}) , \quad |r| \to \infty$$

gde je $p = p'+2$ ceo broj,ne veći od 2.

2.Neka je sada $p_{st}(\lambda) \equiv 0$ ($s,t=1,2,3,4$; $s \neq t$).U tom slučaju koristi se osnovna funkcija (2.16),odnosno (2.17),a dokazni postupak sličan je prethodnom.

<u>P O S L E D I C A</u>.Ako je $\vartheta_\nu(x) = 0$ ($\nu = 2,3,4$),tada važi

$$\Psi(ri) \to 0, \quad |r| \to \infty$$

S T A V 3.5. Neka je $\mathcal{P}_\Delta$ bilo koji indikatorni dijagram funkcije $\Delta(\lambda)$ i $\mathcal{P}_F$ indikatorni dijagram odgovarajuće funkcije potpunosti $F(\lambda)$. Neka je dalje

$$F(\lambda_n)=0,\ \forall \lambda_n \in \Lambda$$

Tada je dijagram $\mathcal{P}_F$ sadržan u dijagramu $\mathcal{P}_\Delta$.

D O K A Z. Ukoliko je reč o osnovnom indikatornom dijagramu $\mathcal{P}_0$ tada tvrdjenje neposredno rezultira iz stava 1.2. Za preostale slučajeve dokaz ćemo izvesti u dva dela.

1. $p_{st}(\lambda)\not\equiv 0$. Označimo sa $\mathcal{J}_k=[\lambda_k,\eta_k]$ bilo koju stranicu dijagrama $\mathcal{P}_\Delta$, čiji su krajevi tačke λ_k i η_k. Unutar ugla proizvoljno maloga otvora, sa temenom u koordinatnom početku i simetralom upravnoj na pravu koja sadrži stranicu $\mathcal{J}_k$, nalaze se koreni $\lambda_{n,k}$ jednačine $\Delta(\lambda)=0$, koji se izračunavaju po formuli

$$\lambda_{n,k}=\frac{2\pi n i}{\lambda_k-\eta_k}\left[1+o(1)\right],\quad n\to\infty$$

(vid. str.9). Neka je $\lambda=re^{(\pi/2-\Theta)i}$ i $F(re^{(\pi/2-\Theta)i})=\phi(r)$, gde je $\Theta=\arg(\lambda_k-\eta_k)$. U tom slučaju, poslednja jednakost dobija oblik

$$r_{n,k}=\frac{2\pi n}{|\lambda_k-\eta_k|}\left[1+o(1)\right],\quad n\to\infty$$

Po pretpostavci je $F(\lambda_{n,k})=0$, odnosno $\phi(r_{n,k})=0$. Pošto je funkcija $\phi(r)$, cela i eksponencijalnoga tipa, i kako je

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{r_{n,k}}=\frac{1}{2\pi}|\lambda_k-\eta_k|$$

to na osnovu stava 1.3, indikatorni dijagram funkcije $\phi(z)$ mora imati stranicu $\geq|\lambda_k-\eta_k|$, koja je upravna na realnu osu. Odatle sledi da indikatorni dijagram funkcije $F(\lambda)$ ima stranicu paralelnu stranici $\mathcal{J}_k$ i čija je dužina $\geq|\lambda_k-\eta_k|$. Drugim rečima, dijagrami $\mathcal{P}_\Delta$ i $\mathcal{P}_F$ su slični mnogouglovi. I najzad, pošto je $p_{st}(\lambda)\not\equiv 0$ i $q_{st}(\lambda)\not\equiv 0$, to su tačke λ_3 i $\overline{\lambda}_3$ zajednička temena oba dijagrama. Prema tome dijagram $\mathcal{P}_F$ sadržan je u dijagramu $\mathcal{P}_\Delta$.

2. $p_{st}(\lambda)\equiv 0$. Radi se o dijagramima tipa $\mathcal{P}_5$ i $\mathcal{P}_6$. U slučaju dijagrama $\mathcal{P}_5$, odgovarajuća osnovna funkcija odredjena je relacijom (2.16). Očevidno, indikatorni dijagram funkcije potpunosti mora ležati u trouglu, čija su temena tačke: 0, λ_2 i $\overline{\lambda}_2$. Dalji dokaz teče kao u prethodnoj tački. Slično se pokazuje i za dijagrame $\mathcal{P}_6$.

Istaknimo na kraju, da iz ovog stava u vidu posledice proizilazi sledeća nejednakost:

$$h_F(\Theta) \leq h_\Delta(\Theta), \quad 0 \leq \Theta \leq 2\pi$$

pri čemu su $h_F(\Theta)$ i $h_\Delta(\Theta)$ indikatori funkcija $F(\lambda)$, odnosno $\Delta(\lambda)$

-------- o --------

Neka je $\lambda = \lambda_n$, proizvoljna sopstvena vrednost jediničnog ranga i neka je $\Delta_o^{(p_n)}(\lambda_n) = 0$ i $\Delta_o^{(m_n)}(\lambda_n) \neq 0$ ($p_n = 0, 1, \ldots, m_n - 1$). Izvodni lanac, lanca pridruženih funkcija sopstvene funkcije $y_o(x, \lambda_n)$, odredjen je formulom

$$y^{(\nu-1, p_n)} = \frac{1}{p_n!} \frac{\partial^{p_n}(\lambda^{\nu-1} y_o)}{\partial \lambda^{p_n}}\Big|_{\lambda=\lambda_n} \tag{2.24}$$

($\nu = 1, 2, 3, 4$; $p_n = 0, 1, \ldots, m_n - 1$), gde je $y_o = y_o(x, \lambda)$ osnovna funkcija. Za $\nu = 1$, iz formule (2.24) dobijamo niz pridruženih funkcija.

Neka je dalje

$$\Delta_o^{(p)}(0) = 0, \quad \Delta_o^{(m)}(0) \neq 0, \quad \frac{\partial^p y_o}{\partial \lambda^p}\Big|_{\lambda=0} \equiv 0 \tag{2.25}$$

($p = 0, 1, 2, \ldots, m-1$), pri čemu je $\Delta_o(\lambda)$ karakteristična determinanta, i $y_o(x, \lambda)$ odgovarajuća osnovna funkcija.

D E F I N I C I J A 3.2. Ukoliko klasa graničnih uslova (G) ima svojstva izražena relacijama (2.25), tada ćemo reći da je zadovoljen USLOV (D)

Postupak odredjivanja pridruženih funkcija, kao i egzistenciju uslova (D), ilustrovaćemo na sledećem primeru.

Primer 1. $\ell(y) = y^{IV} + 5(a\lambda)^2 y'' + 4(a\lambda)^4 y = 0, \quad a > 0.$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$$

Karakteristična determinanta je

$$\Delta_o(\lambda) = 2 \sin a\lambda\pi - \sin 2a\lambda\pi$$

a osnovna funkcija

$$y_o(x, \lambda) = 2 \sin a\lambda x - \sin 2a\lambda x$$

Kako je: $\Delta_o^{(p)}(0) = 0$, $\Delta_o^{(3)}(0) \neq 0$ i $\frac{\partial^p y_o}{\partial \lambda^p}\Big|_{\lambda=0} \equiv 0$ ($p = 0, 1$), to je ispunjen uslov (D).

Sopstvene vrednosti su: $\lambda_n = \frac{n}{a}$ ($\pm n = 1, 2, \ldots,$). Neposredno se proveravaju sledeće činjenice:

$$\Delta_0'\left(\frac{2m+1}{a}\right)\neq 0,\ \Delta_0^{(p)}\left(\frac{2m}{a}\right)=0,\ \Delta_0^{(3)}\left(\frac{2m}{a}\right)\neq 0 \qquad (p=0,1,2;\ \pm m=1,2,\dots)$$

Odatle proizilazi da sopstvene funkcije $y_0(x,\frac{2m+1}{a})$ nemaju pridruženih, dok sopstvene funkcije $y_0(x,\frac{2m}{a})$ imaju po dve pridružene funkcije, oblika

$$\varphi_1(x,\frac{2m}{a})=2ax(\cos 2mx-\cos 4mx)$$

i

$$\varphi_2(x,\frac{2m}{a})=-(ax)^2(\sin 2mx-2\sin 4mx)$$

Te funkcije, očevidno zadovoljavaju date granične uslove a takodje i sistem jednačina

$$\ell(\varphi_k)+\frac{1}{1!}\frac{\partial\ell}{\partial\lambda}(\varphi_{k-1})+\dots+\frac{1}{k!}\frac{\partial^k\ell}{\partial\lambda^k}(\varphi_0)=0 \qquad (k=0,1,2$$

pri čemu je $\varphi_0=y_0(x,\lambda)$.

Predjimo sada na izvodjenje stavova o potpunosti sistema sopstvenih i pridruženih funkcija operatora $L_4(\lambda)$.

S T A V 3.6. Neka su sve sopstvene vrednosti $\lambda=\lambda_n\neq 0$ $(n=1,2,\dots,$ operatora $L_4(\lambda)$ jediničnoga ranga, i neka postoji uslov (D). Tada je sistem sopstvenih i pridruženih funkcija toga operatora četvorostruko potpun u prostoru $\mathcal{L}^2(0,\pi)$, ili se može učiniti četvorostruko potpunim putem dopune najviše sa tri funkcije defekta.

D O K A Z. Neka je $\mathcal{F}=\{f_\nu(x)\}_1^4$ proizvoljna vektor funkcija, ortogonalna na skupu svih vektor funkcija, oblika

$$Y_n^{(p_n)}=\left\{y^{(\nu-1,p_n)}(x,\lambda_n)\right\}_1^4 \qquad (p_n=0,1,\dots,m_n-1;\ n=1,2,\dots,)$$

u prostoru $\mathcal{L}_4^2(0,\pi)=\underset{4}{U}\oplus\mathcal{L}^2(0,\pi)$, pri čemu su funkcije $y^{(\nu-1,p_n)}(x,\lambda_n)$ date formulom (2.24). S obzirom na definiciju skalarnog proizvoda u prostoru $\mathcal{L}_4^2(0,\pi)$, uvedenoj pretpostavci o ortogonalnosti ekvivalentan je skup jednačina

$$0=\sum_{\nu=1}^{4}\int_0^\pi y^{(\nu-1,p_n)}(x,\lambda_n)\,\overline{f_\nu(x)}\,dx \qquad (2.26)$$

$(p_n=0,1,\dots,m_n-1;\ n=1,2,\dots;)$.

Obrazujmo funkciju

$$F(\lambda)=\sum_{\nu=1}^{4}\int_{0}^{\pi}\lambda^{\nu-1}y_0(x,\lambda)f_\nu(x)dx$$

Diferenciranjem funkcije $F(\lambda)$ i uzimajući u obzir (2.24) i (2.26), nalazimo

$$F^{(p_n)}(\lambda_n)=0 \qquad (p_n=0,1,\dots,m_n-1;\ n=1,2,\dots) \qquad (2.27$$

Kako važi uslov (D), zaključujemo da su sve nule funkcije $\Delta_0(\lambda)$ takodje nule i funkcije $F(\lambda)$ iste višestrukosti. Zbog toga je

$$\Psi(\lambda)=\frac{F(\lambda)}{\Delta_0(\lambda)}$$

cela funkcija. Pošto su funkcije $F(\lambda)$ i $\Delta_0(\lambda)$ cele i eksponencijalnoga tipa, i uz to funkcija $\Delta_0(\lambda)$ je i potpuno regularnoga rasta, to na osnovu poznate teoreme (Levin B., str 208 [18]), sledi

$$h_\Psi(\theta)=h_F(\theta)-h_{\Delta_0}(\theta),\quad 0\le\theta\le 2\pi \qquad (2.2$$

pri čemu je $h=h(\theta)$ indikatorna funkcija. S druge strane, indikatorna funkcija $h_\Psi(\theta)$ cele funkcije $\Psi(\lambda)$ eksponencijalnoga tipa, zadovoljava sledeću nejednakost

$$h_\Psi(\theta)+h_\Psi(\pi+\theta)\geq 0,\quad 0\le\theta\le 2\pi \qquad (2.2$$

Pošto je $h_F(\theta)\le h_{\Delta_0}(\theta)$ (stav 3.5), to iz (2.28) i (2.29), sledi

$$h_\Psi(\theta)\equiv 0,\quad 0\le\theta\le 2\pi$$

što znači da je funkcija $\Psi(\lambda)$ minimalnoga tipa.

U daljem izlaganju koristićemo formulu

$$\Psi(ri)=O(r^{p+1/2}),\quad |r|<\infty$$

izvedenu u stavu 3.4. Razlikovaćemo dva slučaja: $p<0$ i $0\le p\le 2$. (p ceo broj).

1. Neka je $p<0$. Tada očevidno važi: $\Psi(ri)\to 0$ kada $|r|\to\infty$ Pošto je funkcija $\Psi(\lambda)$ cela i minimalnoga tipa, to po teoremi Phragmena-Lindelofa mora biti

$$\Psi(\lambda)\equiv 0 \qquad \text{odnosno} \qquad F(\lambda)\equiv 0.$$

Na osnovu stava 1.4, nalazimo

$$f_\nu(x)=0 \quad (\nu=1,2,3,4) \quad \text{s.s., u intervalu } (0,\pi)$$

Na taj način je dokazano ,da je niz funkcija $y_n^{(pn)}$ potpun u prostoru $\mathcal{L}_4^2(0,\pi)$ .Po definiciji višestruke potpunosti,niz sopstvenih i pridruženih funkcija je četvorostruko potpun u prostoru $\mathcal{L}^2(0,\pi)$.

2.Neka je sada $0 \leq p \leq 2$ (p ceo broj).Proširimo sistem sopstvenih i pridruženih funkcija operatora $L_4(\lambda)$,putem uvodjenja funkcija, oblika $y_0(x,\tilde{\lambda}_s)$,gde su $\tilde{\lambda}_s$ fiksirani kompleksni brojevi različiti od sopstvenih vrednosti, $\operatorname{Re}\tilde{\lambda}_s \neq 0$, $1 \leq s \leq p+1$ i $y_0(x,\lambda)$ osnovna funkcija problema (A).Takve funkcije smo još u prvom delu nazvali funkcijama defekta.Neka je vektor funkcija $f=\{f_\nu(x)\}_1^4$ ortogonalna i na vektor funkcijama

$$Y_s=\left\{\tilde{\lambda}_s^{\nu-1}y_0(x,\tilde{\lambda}_s)\right\}_1^4$$

Polazeći od te pretpostavke,imamo

$$F(\tilde{\lambda}_s)=0\ ,\ 1\leq s\leq p+1.$$

Funkcija

$$\tilde{\varphi}(\lambda)=\frac{F(\lambda)}{(\lambda-\tilde{\lambda}_1)\ldots(\lambda-\tilde{\lambda}_{p+1})\,\Delta_0(\lambda)}$$

je cela ,minimalnoga tipa i za nju očevidno važe relacije: $\tilde{\varphi}(ri)\to 0$ kada $|r|\to\infty$ .Primenom teoreme Phragmena-Lindelofa,zaključujemo da je $\tilde{\varphi}(\lambda)\equiv 0$ odnosno $F(\lambda)\equiv 0$ .Prema tome,sličnim postupkom kao u završnom delu prethodne tačke,nalazimo da je tako dopunjeni sistem sopstvenih i pridruženih funkcija operatora $L_4(\lambda)$,četvorostruko potpun u prostoru $\mathcal{L}^2(0,\pi)$ .Broj funkcija defekta,pomoću kojih se proširuje pomenuti sistem,nije veći od tri.

Stav je u potpunosti dokazan.

Na osnovu posledice stava 3.4 i stava 3.6,sledi obična potpunost. Formulišimo taj rezultat.

<u>S T A V 3.7.</u> Neka su sve sopstvene vrednosti $\lambda=\lambda_n\neq 0$ $(n=1,2,\ldots)$ operatora $L_4(\lambda)$ jediničnoga ranga,i neka je zadovoljen uslov (D). Tada je sistem sopstvenih i pridruženih funkcija toga operatora potpun u prostoru $\mathcal{L}^2(0,\pi)$.

Na kraju posvetimo pažnju jednom specijalnom vidu operatora $L_4(\lambda)$ koji je definisan graničnim uslovima (II) i linearnim diferencijalnim izrazom

$$\ell(y)=y^{IV}+2a\lambda^2y''+b\lambda^4y \qquad (\ b-a^2>0\ )$$

Taj operator označićemo sa $L^{\circ}_{1}(\lambda)$. Izmedju korena jednačine

$$\omega^4 + 2a\omega^2 + b = 0$$

postoje sledeće veze: $\omega_3 = -\omega_1$ i $\omega_4 = -\omega_2$ $(\omega = \alpha + i\beta,\ \beta \geq 0)$

Zbog toga imamo

$$U_{j1}(\lambda) = \sum_{k=1}^{4} a_{jk}(\lambda\omega_1)^{k-1} + e^{\lambda\omega_1\pi}\sum_{k=1}^{4} b_{jk}(\lambda\omega_1)^{k-1} = U_{j3}(-\lambda)$$

$$U_{j2}(\lambda) = \sum_{k=1}^{4} a_{jk}(\lambda\omega_2)^{k-1} + e^{\lambda\omega_2\pi}\sum_{k=1}^{4} b_{jk}(\lambda\omega_2)^{k-1} = U_{j4}(-\lambda)$$

$(j = 1, 2, 3, 4)$. Otuda zaključujemo da je karakteristična determinanta

$$\Delta(\lambda) = \left[U_{j1}(\lambda)\, U_{j2}(\lambda)\, U_{j3}(\lambda)\, U_{j4}(\lambda)\right]$$

parna funkcija po λ ($\Delta(\lambda) = \Delta(-\lambda)$). Slično se pokazuje da je i odgovarajuća osnovna funkcija, takodje parna funkcija po λ ($y(x,\lambda) = y(x,-\lambda);\ 0 \leq x \leq \pi$).

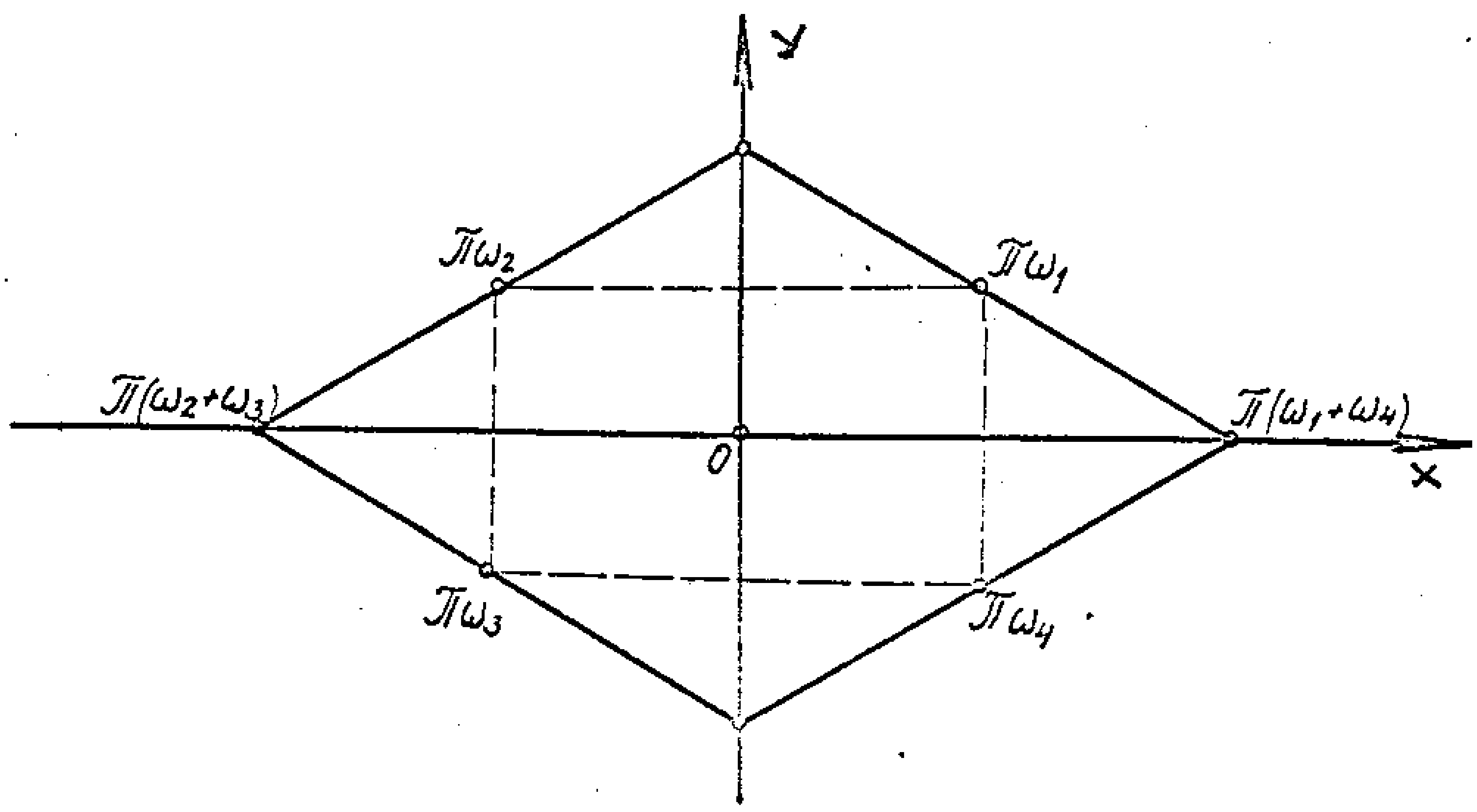
Razvijeni oblik karakteristične determinante $\Delta(\lambda)$, glasi

$$\Delta(\lambda) = p_0(\lambda) + \sum_{s=1}^{4} p_s(\lambda) e^{\lambda\omega_s\pi} + \sum_{s,t=1}^{4} p_{st}(\lambda) e^{\lambda\pi(\omega_s+\omega_t)},\ |s-t| \neq 2.$$

Neka je $Re\,\omega = \alpha \neq 0$. U tom slučaju, moguća su dva indikatorna dijagrama funkcije $\Delta(\lambda)$, i to:

1. romb, ako je $p_{st}(\lambda) \not\equiv 0$,
2. pravougaonik, ukoliko je $p_{st}(\lambda) \equiv 0$

$(s,t = 1,2,3,4\ ;\ |s-t| \neq 0)$. Pri pretpostavci $Re\,\omega = \alpha = 0$, dobijamo dva odsečka na imaginarnoj osi: $[-2\beta\pi i, 2\beta\pi i]$ i $[-\beta\pi i, \beta\pi i]$.



Sl. 10

Umesto funkcija $\Delta(\lambda)$ i $y(x,\lambda)$,koristićemo $\Delta_0(\lambda)$ i $y_0(x,\lambda)$ u svojstvu karakteristične determinante,odnosno osnovne funkcije,koje su odredjene pomoću jednakosti

$$\Delta(\lambda)=\lambda^{p}\Delta_0(\lambda) \quad \text{i} \quad y(x,\lambda)=\lambda^{q}y_0(x,\lambda)$$

(vid. str. 53). U zavisnosti od eksponenata p i q ,funkcije $\Delta_0(\lambda)$ i $y_0(x,\lambda)$ mogu biti parne ili neparne po λ . Ne umanjujući opštost razmatranja,pretpostavićemo da je $y_0(x,\lambda)$ parna funkcija. Uzevši u obzir parnost sopstvenih funkcija, iz (2.24) sledi

$$y^{(\nu-1,p_n)}(x,-\lambda_n)=(-1)^{\nu-1}(-1)^{p_n}y^{(\nu-1,p_n)}(x,\lambda_n)$$

($\nu=1,2,3,4$; $p_n=0,1,\dots,m_n-1$; $n=1,2,\dots$). Zahvaljujući tome, relacija (2.27)

$$F^{(p_n)}(\lambda_n)=p_n!\sum_{\nu=1}^{4}\int_0^{\pi}y^{(\nu-1,p_n)}(x,\lambda_n)f_\nu(x)dx=0 \tag{2.30}$$

za $\lambda=-\lambda_n$,glasi

$$F^{(p_n)}(-\lambda_n)=p_n!(-1)^{p_n}\sum_{\nu=1}^{4}(-1)^{\nu-1}\int_0^{\pi}y^{(\nu-1,p_n)}(x,\lambda_n)f_\nu(x)dx=0 \tag{2.31}$$

Sabiranjem, a zatim oduzimanjem jednakosti (2.30) i (2.31), dobijamo

$$p_n!\left[\int_0^{\pi}y^{(0,p_n)}(x,\lambda_n)f_1(x)dx+\int_0^{\pi}y^{(2,p_n)}(x,\lambda_n)f_3(x)dx\right]=0 \tag{2.32}$$

i

$$p_n!\left[\int_0^{\pi}y^{(1,p_n)}(x,\lambda_n)f_2(x)dx+\int_0^{\pi}y^{(3,p_n)}(x,\lambda_n)f_4(x)dx\right]=0 \tag{2.33}$$

Uvedimo funkcije

$$F_1(\lambda)=\int_0^{\pi}\left[f_1(x)+\lambda^2f_3(x)\right]y_0(x,\lambda)dx$$

i

$$\varphi_2(\lambda)=\int_0^{\pi}\left[f_2(x)+\lambda^2f_4(x)\right]\lambda y_0(x,\lambda)dx=\lambda F_2(\lambda)$$

Leve strane u jednakostima (2.32) i (2.33) su respektivno $F_1^{(p_n)}(\lambda_n)$ i $\varphi_2^{(p_n)}(\lambda_n)$. Kako je

$$\varphi_2^{(p_n)}(\lambda_n)=\lambda_nF_2^{(p_n)}(\lambda_n)+p_nF_2^{(p_n-1)}(\lambda_n)$$

to iz (2.30) i (2.31) konačno sledi

$$F_1^{(p_n)}(\pm\lambda_n)=0, \quad F_2^{(p_n)}(\pm\lambda_n)=0.$$

Zbog proizvoljnosti u izboru funkcija $f_\nu(x)$ ($\nu=1,2,3,4$) iz prostora $\mathcal{L}^2(0,\pi)$,funkcije $F_1(\lambda)$ i $F_2(\lambda)$ možemo poistovetiti.

Mi smo na taj način pokazali,da iz uslova $F^{(p_n)}(\lambda_n)=0$ (stav 3.6) sledi $F_1^{(p_n)}(\lambda_n)=0$ $(p_n=0,1,\dots,m_n-1;\ n=1,\dots)$.Prema tome,četvorostruka potpunost sistema sopstvenih i pridruženih funkcija operatora $L_4^0(\lambda)$,postojaće u tom slučaju ako iz uslova $F_1^{(p_n)}(\lambda_n)=0$ proizilazi $f_\nu(x)=0$ ($\nu=1,3$) s.s. u intervalu $(0,\pi)$.
Kako je funkcija $F_1(\lambda)$ specijalan oblik funkcije potpunosti $F(\lambda)$ ($f_2(x)=0,\ f_4(x)=0$),to asimptotska formula iz stava 3.4 u ovom konkretnom slučaju glasi

$$\Psi_1(ri)=\frac{F_1(ri)}{\Delta_0(ri)}=O(r^{p+1/2}), \quad |r|<\infty$$

pri čemu p može biti ceo broj ,ne veći od jedinice.

Na osnovu svega izloženog,i korišćenjem dokaznog postupka stava 3.. dolazimo do sledećeg rezultata.

S T A V 3.8. Neka su sve sopstvene vrednosti $\lambda=\lambda_n\neq0$ $(n=1,2,\dots)$ operatora $L_4^0(\lambda)$ jediničnoga ranga,i neka postoji uslov (D).Tada je sistem sopstvenih i pridruženih funkcija toga operatora četvorostruko potpun u prostoru $\mathcal{L}^2(0,\pi)$,ili se može učiniti četvorostruko potpunim putem dopune najviše sa dve funkcije defekta.

Primer 2 $\quad \ell(y)=y^{IV}+a_1\lambda y'''+a_2\lambda^2y''+a_3\lambda^3y'+a_4\lambda^4y=0,$

$$y'(0)=0,\ y''(0)=0,\ y'''(0)=0,\ y(0)+y'''(\pi)=0.$$

Karakteristična determinanta je

$$\Delta_0(\lambda)=\begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2 & \omega_4^2 \\ \omega_1^3 & \omega_2^3 & \omega_3^3 & \omega_4^3 \\ 1+(\lambda\omega_1)^3e^{\lambda\omega_1\pi} & 1+(\lambda\omega_2)^3e^{\lambda\omega_2\pi} & 1+(\lambda\omega_3)^3e^{\lambda\omega_3\pi} & 1+(\lambda\omega_4)^3e^{\lambda\omega_4\pi} \end{vmatrix}$$

[illegible] funkcija

[illegible]

Minori elemenata četvrte vrste determinante $\Delta_o(\lambda)$, ne zavise od paramet λ i svi su različiti od nule. Prema tome, sve sopstvene vrednosti su jedinočnoga ranga. Kako je $\Delta_o(0)\neq 0$, to je ispunjen uslov (D). Primenom st va 3.4, dobijamo: $\Psi(ri)\to 0$ kada $r\to\pm\infty$. Na osnovu stava 3.6, postoji četvorostruka potpunost.

Primer 3. $\ell(y)=y^{IV}+2a\lambda^2y''+b\lambda^4y=0,\ b-a^2>0$

$$y(0)=0,\ y'(0)=0,\ y''(0)=0,\ y(\pi)+y''(\pi)=0.$$

Karakteristična determinanta je

$$\Delta_o(\lambda)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & -\omega_1 & -\omega_2 \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_1^2 & \omega_2^2 \\ (1+\lambda^2\omega_1^2)e^{\lambda\omega_1\pi} & (1+\lambda^2\omega_2^2)e^{\lambda\omega_2\pi} & (1+\lambda^2\omega_1^2)e^{-\lambda\pi\omega_1} & (1+\lambda^2\omega_2^2)e^{-\lambda\pi\omega_2} \end{vmatrix}$$

a osnovna funkcija

$$y_o(x,\lambda)=\begin{vmatrix} e^{\lambda\omega_1x} & e^{\lambda\omega_2x} & e^{-\lambda\omega_1x} & e^{-\lambda\omega_2x} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & -\omega_1 & -\omega_2 \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_1^2 & \omega_2^2 \end{vmatrix}$$

Sopstvene vrednosti su jediničnoga ranga. Neposrednom proverom, nalazimo:

$$\Delta_o^{(r)}(0)=0,\ \Delta_o'''(0)\neq 0,\ \frac{\partial^r y_o(x,\lambda)}{\partial\lambda^r}\Big|_{\lambda=0}=0\ ;\ r=0,1,2.$$

Odatle zaključujemo da postoji uslov (D). Iz stava 3.4 sledi $\Psi_1(ri)\to 0$ kada $r\to\pm\infty$. Na osnovu stava 3.8, postoji četvorostruka potpunost.

3. LINEARNI DIFERENCIJALNI OPERATOR $\tilde{L}_4(\lambda)$.

S obzirom na definiciju operatora $\tilde{L}_4(\lambda)$, koja je data u početku ovog dela (str. 44), izmedju korena ω_s $(s=1,2,3,4)$ jednačine

$$\omega^4+a_1\omega^3+a_2\omega^2+a_3\omega+a_4=0$$

postoje sledeće veze: $\omega_1=\omega_2$ $(=\omega=\alpha+i\beta\,;\ \beta>0)$, $\omega_3=\omega_4=\bar{\omega}$. Zamenjujući osnovni sistem rešenja $y_s(x,\lambda)=e^{\lambda\omega_s x}$ $(s=1,3)$ i $y_s(x,\lambda)=x\,e^{\lambda\omega_s x}$ $(s=2,4)$ diferencijalne jednačine $\ell(y)=0$ u graničnim uslovima (II), dobijamo

$$U_{js}(\lambda)=A_{js}+B_{js}e^{\lambda\omega_s\pi} \qquad (s=1,3\,;\ j=1,2,3,4)$$

$$\tilde{U}_{js}(\lambda)=\tilde{A}_{js}+\tilde{B}_{js}e^{\lambda\omega_s\pi} \qquad (s=2,4\,;\ j=1,2,3,4)$$

gde je

$$A_{js}=\sum_{r=1}^{4}a_{jr}(\lambda\omega_s)^{r-1},\quad B_{js}=\sum_{r=1}^{4}b_{jr}(\lambda\omega_s)^{r-1}$$

$$\tilde{A}_{js}=\sum_{r=2}^{4}(r-1)a_{jr}(\lambda\omega_s)^{r-2},\quad \tilde{B}_{js}=\pi\sum_{r=1}^{4}b_{jr}(\lambda\omega_s)^{r-1}+\sum_{r=2}^{4}(r-1)b_{jr}(\lambda \ldots$$

Stoga će karakteristična determinanta biti

$$\tilde{\Delta}(\lambda)=\left[U_{j1}(\lambda)\ \tilde{U}_{j2}(\lambda)\ U_{j3}(\lambda)\ \tilde{U}_{j4}(\lambda)\right]$$

odnosno, u razvijenom obliku

$$\tilde{\Delta}(\lambda)=p_0(\lambda)+p_1(\lambda)e^{\lambda\omega\pi}+p_2(\lambda)e^{2\lambda\omega\pi}+p_3(\lambda)e^{\lambda(2\omega+\bar{\omega})\pi}+p_4(\lambda)e^{2\lambda\pi\alpha}+$$
$$+p_5(\lambda)e^{4\lambda\pi\alpha}+p_6(\lambda)e^{\lambda\bar{\omega}\pi}+p_7(\lambda)e^{2\lambda\bar{\omega}\pi}+p_8(\lambda)e^{\lambda(2\bar{\omega}+\omega)\pi},$$

pri čemu su $p_s(\lambda)$ $(s=0,1,2,\ldots,8)$ polinomi po λ.

Iz karakteristične determinante $\tilde{\Delta}(\lambda)$, izdvojimo ma koja dva sabirka oblika $p(\lambda)e^{\lambda\eta\pi}$ i $p^*(\lambda)e^{\lambda\bar{\eta}\pi}$ $(\mathrm{Im}\,\eta\neq 0)$.

S T A V 3.[illegible] Prelaz od polinoma $p(\lambda)$ ka polinomu $p^*(\lambda)$, vrši se pomoću konjugacije koeficijenata polaznog polinoma.

D O K A Z. Uzmimo na primer, polinome $p_2(\lambda)$ i $p_7(\lambda)$. Umesto kompleksnog parametra λ uvedimo realan parametar t. Posmatrani polinomi u obliku determinante, glase

$$p_2(t)=\left[\mathcal{B}_{j1}(t)\,\tilde{\mathcal{B}}_{j2}(t)\,\mathcal{A}_{j3}(t)\,\tilde{\mathcal{A}}_{j4}(t)\right]$$

i

$$p_7(t)=\left[\mathcal{A}_{j1}(t)\,\tilde{\mathcal{A}}_{j2}(t)\,\mathcal{B}_{j3}(t)\,\tilde{\mathcal{B}}_{j4}(t)\right]$$

Pošto su koeficijenti graničnih uslova (II) po pretpostavci realni brojevi, to je

$$\overline{\mathcal{B}_{j1}(t)}\equiv\mathcal{B}_{j3}(t),\quad \overline{\tilde{\mathcal{B}}_{j2}(t)}\equiv\tilde{\mathcal{B}}_{j4}(t),\quad \overline{\mathcal{A}_{j3}(t)}\equiv\mathcal{A}_{j1}(t),\quad \overline{\tilde{\mathcal{A}}_{j4}(t)}\equiv\tilde{\mathcal{A}}_{j2}(t)$$

Stoga je

$$\overline{p_2(t)}=\left[\overline{\mathcal{B}_{j1}(t)}\;\overline{\tilde{\mathcal{B}}_{j2}(t)}\;\overline{\mathcal{A}_{j3}(t)}\;\overline{\tilde{\mathcal{A}}_{j4}(t)}\right]\equiv\left[\mathcal{B}_{j3}(t)\,\tilde{\mathcal{B}}_{j4}(t)\,\mathcal{A}_{j1}(t)\,\tilde{\mathcal{A}}_{j2}(t)\right]=p_7$$

Slično se pokazuje i u ostalim slučajevima. U vidu posledice, dobijamo

$$p(\lambda)\equiv 0 \iff p^*(\lambda)\equiv 0 \tag{3.1}$$

3.1. INDIKATORNI DIJAGRAMI FUNKCIJE $\hat{\Delta}(\lambda)$.

U klasifikaciji indikatornih dijagrama, bitnu ulogu imaće polinom $p_2(\lambda)$. Odredimo najpre, strukturu koeficijenata toga polinoma. Kako je

$$\tilde{\mathcal{B}}_{j1}(\lambda)=\pi\,\mathcal{B}_{j1}(\lambda)+\sum_{k=2}^{4} b_{jk}(k-1)(\lambda\omega)^{k-2} \qquad (j=1,2,3,4)$$

to je

$$p_2(\lambda)=\left[\sum_{k=1}^{4} b_{jk}(\lambda\omega)^{k-1}\;\sum_{l=2}^{4}(l-1)\,b_{jl}(\lambda\omega)^{l-2}\;\sum_{m=1}^{4} a_{jm}(\lambda\bar{\omega})^{m-1}\;\sum_{n=2}^{4}(n-1)\,a_{jn}(\lambda\bar{\omega})^{n-2}\right]$$

odnosno, posle razlaganja determinante

$$p_2(\lambda)=\sum \lambda^{k+l+m+n-6}\,(l-1)\cdot(n-1)\,\frac{\omega^{k+l}\,\bar{\omega}^{m+n}}{|\omega|^{6}}\left[b_{jk}\,b_{jl}\,a_{jm}\,a_{jn}\right]$$

($k, m = 1,2,3,4$; $l, n = 2,3,4$). Očevidno, svi koeficijenti su linearne kombinacije izraza $\omega^{k+l}\bar{\omega}^{m+n}\left[b_{jk}\,b_{jl}\,a_{jm}\,a_{jn}\right]$, pri čemu su elementi determinanata $\left[b_{jk}\,b_{jl}\,a_{jm}\,a_{jn}\right]$ koeficijenti graničnih uslova (II).

Isto tako može se pokazati, da su koeficijenti polinoma $p_1(\lambda)$ ($p_3(\lambda)$ linearne kombinacije determinanti $[b_{jk} a_{je} a_{jm} a_{jn}]$ ($[b_{jk} b_{je} b_{jm} a_{jn}]$ Očevidno, pomenuti polinomi biće identički jednaki nuli ako su sve odgovarajuće determinante jednake nuli. Važi i obrnuto tvrdjenje, izuzev mož u nekim retkim slučajevima. Mi ćemo u narednom izlaganju smatrati, da su polinomi $p_s(\lambda)$ ($s=1,2,3$) identički jednaki nuli tada i samo tada, kada su sve odgovarajuće determinante jednake nuli, dakle

$$p_1(\lambda)\equiv 0 \Longleftrightarrow [b_{jk} a_{je} a_{jm} a_{jn}]=0$$

$$p_2(\lambda)\equiv 0 \Longleftrightarrow [b_{jk} b_{je} a_{jm} a_{jn}]=0$$

$$p_3(\lambda)\equiv 0 \Longleftrightarrow [b_{jk} b_{je} b_{jm} a_{jn}]=0$$

($k, e, m, n = 1,2,3,4$). Drugim rečima, uzimamo u obzir klasu graničnih uslova (G), koja je ranije uvedena (str.46).

Skup svih indikatornih dijagrama karakteristične determinante $\tilde{\Delta}(\lambda)$ klase graničnih uslova (G), razbićemo na podskupove $\tilde{\mathcal{P}}_r$ ($r=1,2,3$), koje karakterišu sledeća svojstva:

$$(\tilde{\mathcal{P}}_1):\ p_2(\lambda)\not\equiv 0$$

$$(\tilde{\mathcal{P}}_2):\ p_2(\lambda)\equiv 0,\ p_1(\lambda)\not\equiv 0$$

$$(\tilde{\mathcal{P}}_3):\ p_2(\lambda)\equiv 0,\ p_3(\lambda)\not\equiv 0.$$

S T A V 3.10. Indikatornim dijagramima $\tilde{\mathcal{P}}_r$ ($r=2,3$), odgovaraju sledeće karakteristične determinante:

1. ($\tilde{\mathcal{P}}_2$): $\tilde{\Delta}(\lambda)= p_0(\lambda)+ p_1(\lambda)e^{\lambda\omega\pi} + p_6(\lambda)e^{\lambda\bar{\omega}\pi}$

2. ($\tilde{\mathcal{P}}_3$): $\tilde{\Delta}(\lambda) = p_3(\lambda)e^{\lambda\pi(2\omega+\bar{\omega})} + p_8(\lambda)e^{\lambda\pi(2\bar{\omega}+\omega)} + p_5(\lambda)e^{2\lambda\pi(\omega+\bar{\omega})}$.

D O K A Z.

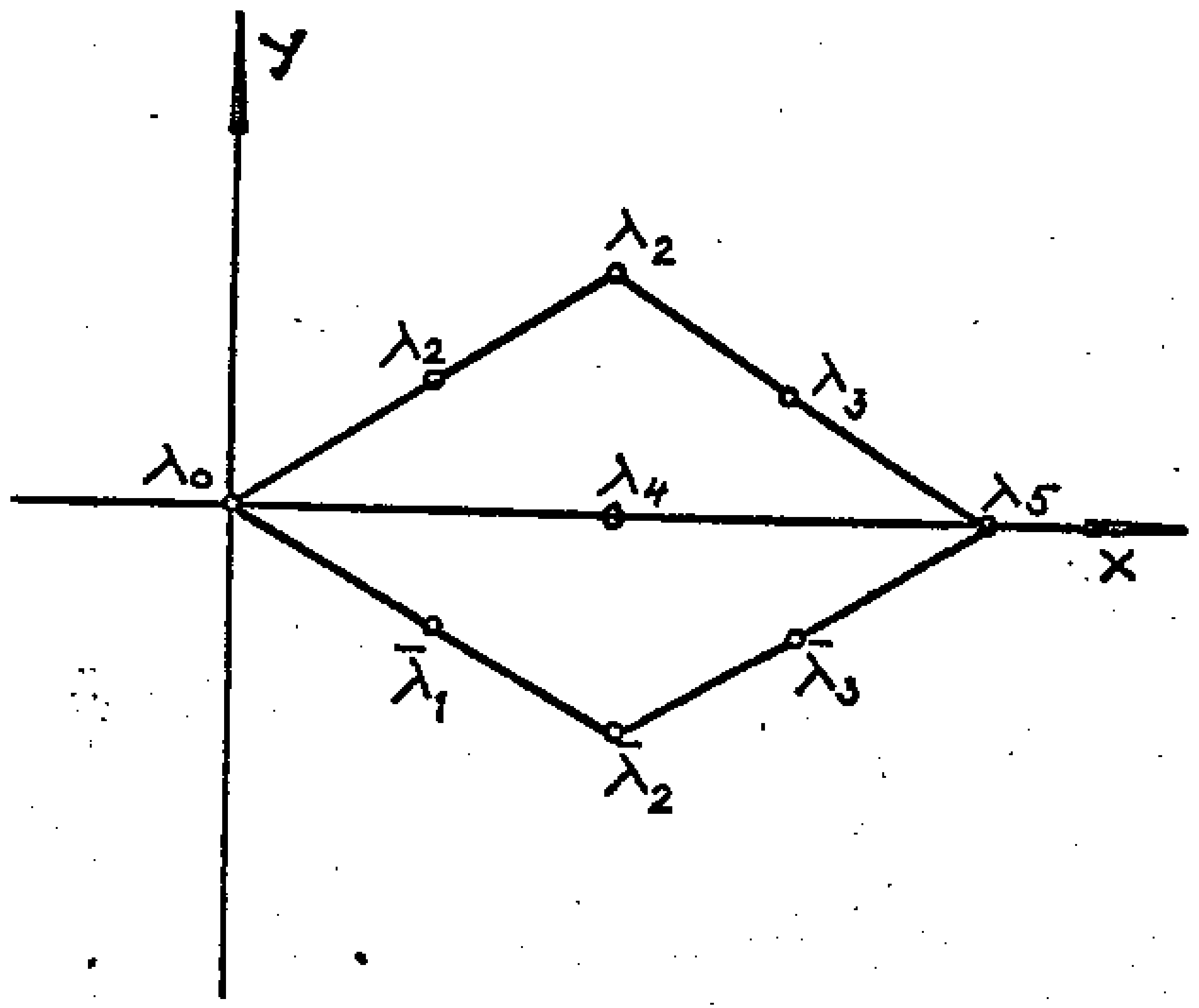
1. Pošto je po pretpostavci $p_1(\lambda)\not\equiv 0$, to mora postojati bar jedna determinanta oblika $[b_{jk} a_{je} a_{jm} a_{jn}]$ različita od nule. Rešavajući sistem jednačina $U_j(y)=0$ ($j=1,2,3,4$) po $y^{(k-1)}(\pi)$, $y^{(e-1)}(0)$, $y^{(m-1)}(0)$ i $y^{(n-1)}(0)$, i vodeći računa o tome da su sve determinante $[b_{jk} b_{je} a_{jm} a_{jn}]$ jednake nuli, dobijamo ekvivalentan sistem graničnih uslova u kome tri forme ne sadrže izraze $y^{(s)}(\pi)$ ($s=0,1,2,3$).

Prema tome,u sastavu karakteristične determinante mogu biti samo ekspo-nencijalne funkcije $e^{\lambda\pi\omega}$ i $e^{\lambda\pi\bar{\omega}}$.

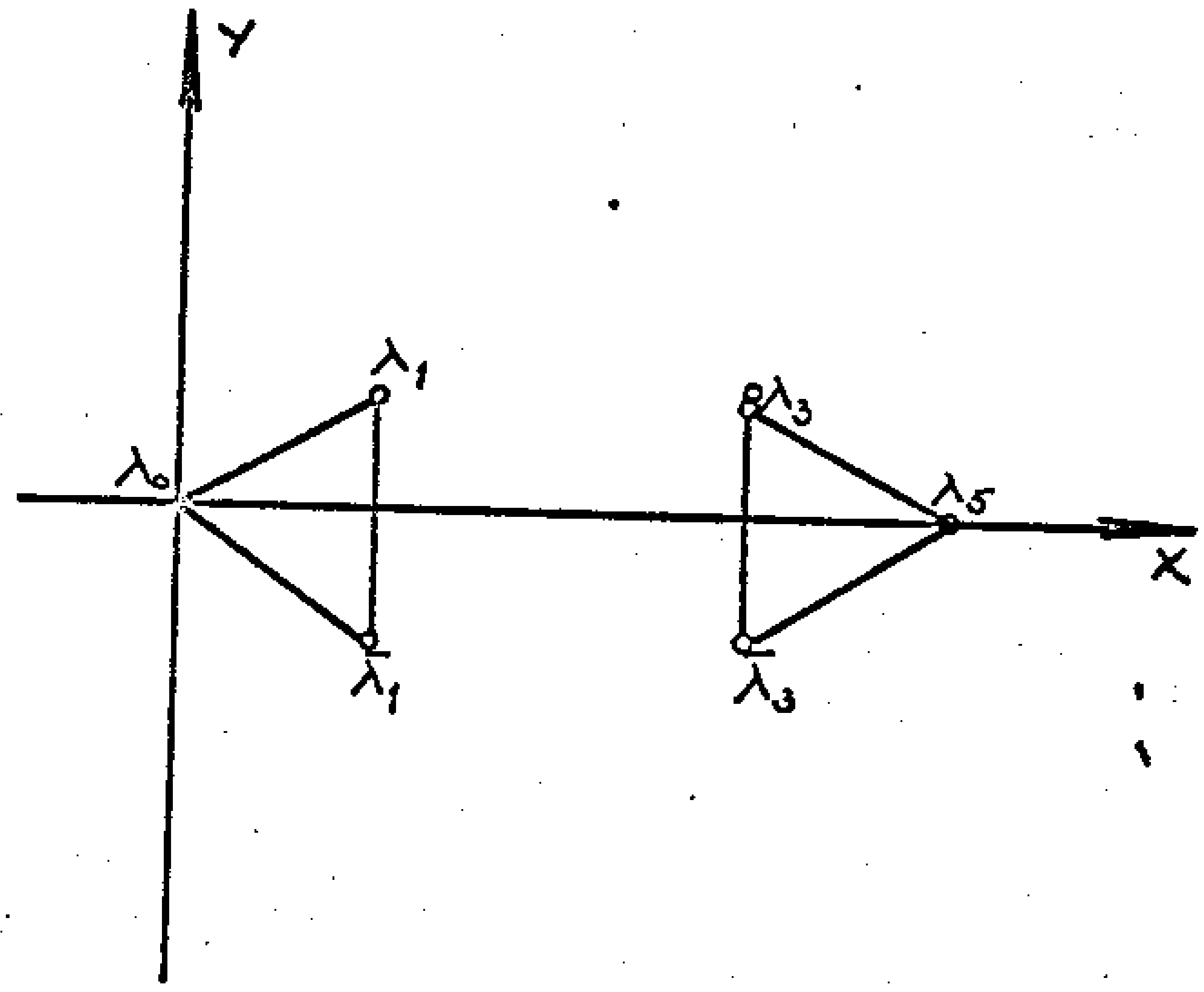
2. Analogno prethodnom.

Istaknimo,da u slučaju $p_1(\lambda)\equiv 0$; $p_2(\lambda)\equiv 0$ i $p_3(\lambda)\equiv 0$ ne postoje sopstvene vrednosti različite od nule.

Predjimo sada na konstrukciju indikatornih dijagrama funkcije $\tilde{\Delta}(\lambda)$. Radi odredjenosti,pretpostavljamo $0 < \arg\omega \le \pi/2$ .Izdvojimo iz kompleksne λ- ravni sledeće tačke: $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = \pi\omega$, $\lambda_2 = 2\pi\omega$, $\lambda_3 = \pi(2\omega+\bar{\omega})$, $\lambda_4 = 2\pi\alpha$ i $\lambda_5 = 4\pi\alpha$ .Pri uslovu $0 < \arg\omega < \pi/2$, dijagrami su prikazani na slikama (11) i (12).



Sl.11



Sl.12

U slučaju $\arg\omega = \frac{\pi}{2}$ ($\omega = \beta i, \beta > 0$),dijagrami će biti odsečci na imaginarnoj osi i to: $\tilde{\mathcal{I}}_0 = [-2\pi\beta i, 2\pi\beta i]$ i $\tilde{\mathcal{I}}_1 = [-\pi\beta i, \pi\beta i]$. Pod <u>OSNOVNIM INDIKATORNIM DIJAGRAMOM</u> podrazumevačemo sledeće dijagrame romb (sl.11),trouglove (sl.12) i odsečak $\mathcal{I}_0$ .Svi ostali dijagrami dobijaju se iz osnovnih,koji s obzirom na (3.1) moraju biti simetrični u odnosu na realnu osu.

3.2. ČETVOROSTRUKA POTPUNOST SISTEMA SOPSTVENIH I PRIDRUŽENIH FUNKCIJA OPERATORA $\tilde{L}_4(\lambda)$.

Kao i u slučaju operatora $L_4(\lambda)$,pretpostavljamo da su sve sopstvene vrednosti različite od nule i jediničnoga ranga.U svojstvu osnovne funkcije,koristićemo funkciju

$$\tilde{y}(x,\lambda) = \begin{vmatrix} e^{\lambda\omega x} & x e^{\lambda\omega x} & e^{\lambda\bar{\omega}x} & x e^{\lambda\bar{\omega}x} \\ u_{11}(\lambda) & \tilde{u}_{12}(\lambda) & u_{13}(\lambda) & \tilde{u}_{14}(\lambda) \\ u_{21}(\lambda) & \tilde{u}_{22}(\lambda) & u_{23}(\lambda) & \tilde{u}_{24}(\lambda) \\ u_{31}(\lambda) & \tilde{u}_{32}(\lambda) & u_{33}(\lambda) & \tilde{u}_{34}(\lambda) \end{vmatrix} \qquad (3.2)$$

pri uslovu da je bar jedan minor elemenata prve vrste različit od nule za proizvoljnu sopstvenu vrednost $\lambda=\lambda_n$. Ukoliko to nije slučaj, tada može koristiti osnovna funkcija, odredjena u stavu 3.1.

Razlaganjem determinante (3.2), dobijamo

$$\tilde{y}(x,\lambda)=q_1(\lambda)e^{\lambda\omega x}+q_2(\lambda)xe^{\lambda\omega x}+q_3(\lambda)e^{\lambda\bar{\omega}x}+q_4(\lambda)xe^{\lambda\bar{\omega}x}$$

gde je

$$q_s(\lambda)=q_{s0}(\lambda)+q_{s1}(\lambda)e^{\lambda\omega\pi}+q_{s2}(\lambda)e^{\lambda\bar{\omega}\pi}+q_{s3}(\lambda)e^{2\pi\alpha\lambda}+q_{s4}(\lambda)e^{2\pi\bar{\omega}\lambda}+q_{s5}(\lambda)e^{\pi\lambda(2\bar{\omega}+}$$

($s=1,2$), i

$$q_s(\lambda)=q_{s0}(\lambda)+q_{s1}(\lambda)e^{\lambda\omega\pi}+q_{s2}(\lambda)e^{\lambda\bar{\omega}\pi}+q_{s3}(\lambda)e^{2\pi\alpha\lambda}+q_{s4}(\lambda)e^{2\pi\omega\lambda}+q_{s5}(\lambda)e^{\pi\lambda(2\omega+}$$

($s=3,4$). Specijalno, kada je karakteristična determinanta oblika

$$\tilde{\Delta}(\lambda)=p_0(\lambda)+p_1(\lambda)e^{\lambda\omega\pi}+p_2(\lambda)e^{\lambda\bar{\omega}\pi}$$

tada ćemo za osnovnu funkciju uzeti

$$\hat{y}(x,\lambda)=q_{10}(\lambda)e^{\lambda\omega x}+q_{20}(\lambda)xe^{\lambda\omega x}+q_{30}(\lambda)e^{\lambda\bar{\omega}x}+q_{40}(\lambda)xe^{\lambda\bar{\omega}x}$$

Ako je λ^p (λ^q) najveći zajednički faktor svih polinoma u funkciji $\tilde{\Delta}(\lambda)$ ($\hat{y}(x,\lambda)$), dakle

$$\tilde{\Delta}(\lambda)=\lambda^p\tilde{\Delta}_0(\lambda),\quad \tilde{y}(x,\lambda)=\lambda^q\tilde{y}_0(x,\lambda)$$

tada ćemo koristiti $\tilde{\Delta}_0(\lambda)$ u svojstvu karakteristične determinante, odnosno $\tilde{y}_0(x,\lambda)$ u ulozi osnovne funkcije ($\lambda=0$ po pretpostavci nij sopstvena vrednost).

Neka je

$$\tilde{\Delta}_0^{(p)}(0)=0,\ \hat{\Delta}_0^{(m)}(0)\neq 0,\ \frac{\partial^p\tilde{y}_0}{\partial\lambda^p}\bigg|_{\lambda=0}=0 \qquad (3.3$$

($p=0,1,\dots,m-1$).

<u>D E F I N I C I J A 3.3.</u> Ukoliko klasa graničnih uslova (G) ima svojstva izražena relacijom (3.3), tada ćemo reći da postoji uslov ($\tilde{D}$).

Radi ilustracije, navodimo jedan prost primer.

<u>Primer 4.</u> $\ell(y)=0$,

$$y(0)=0,\ y'(0)=0,\ y''(0)=0,\ y(\pi)=0.$$

Karakteristična determinanta je

$$\tilde{\Delta}_0(\lambda)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda\omega & 1 & \lambda\bar{\omega} & 1 \\ \lambda\omega^2 & 2\lambda\omega & \lambda\bar{\omega}^2 & 2\bar{\omega} \\ e^{\lambda\omega\pi} & \pi e^{\lambda\omega\pi} & e^{\lambda\bar{\omega}\pi} & \pi e^{\lambda\bar{\omega}\pi} \end{vmatrix}\equiv -[illegible](\lambda\pi)e^{\lambda\omega\pi}-[illegible](\lambda\pi)e^{\lambda\bar{\omega}\pi}$$

a osnovna funkcija

$$\tilde{y}_0(x,\lambda)=\begin{vmatrix} e^{\lambda\omega x} & xe^{\lambda\omega x} & e^{\lambda\bar{\omega}x} & xe^{\lambda\bar{\omega}x} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda\omega & 1 & \lambda\bar{\omega} & 1 \\ \lambda\omega^2 & 2\omega & \lambda\bar{\omega}^2 & 2\bar{\omega} \end{vmatrix} = \mathcal{M}_1(\lambda x)e^{\lambda\omega x}+\mathcal{M}_2(\lambda x)e^{\lambda\bar{\omega}x}$$

gde je

$$\mathcal{M}_1(\lambda x)=\lambda x\,(2|\omega|^2-\omega^2-\bar{\omega}^2)+2(\omega-\bar{\omega}),\quad \mathcal{M}_2(\lambda x)=\lambda x\,(2|\omega|^2-\omega^2-\bar{\omega}^2)+2(\bar{\omega}-\omega).$$

Minor elementa $e^{\lambda\omega\pi}$ ne zavisi od parametra λ i različit je od nule. Prema tome, sve sopstvene vrednosti $\lambda=\lambda_n$ imaju jedinični rang, a $\tilde{y}_0(x,\lambda_n)$ su korespodentne sopstvene funkcije. Neposredno se proveravaju sledeće činjenice:

$$\tilde{\Delta}_0(0)=0,\ \tilde{\Delta}_0'(0)=0,\ \tilde{\Delta}_0''(0)\neq 0,\ \tilde{y}_0(x,0)\equiv 0,\ \frac{\partial\tilde{y}_0}{\partial\lambda}\Big|_{\lambda=0}\equiv 0.$$

Otuda zaključujemo, da postoji uslov $(\tilde{D})$.

Funkciju potpunosti

$$\tilde{F}(\lambda)=\sum_{\nu=1}^{4}\lambda^{\nu-1}\int_0^{\pi}\tilde{y}_0(x,\lambda)f_\nu(x)\,dx$$

možemo predstaviti u obliku

$$\tilde{F}(\lambda)=\sum_{s=1}^{4}q_s(\lambda)\,\tilde{F}_s(\lambda)$$

pri čemu je

$$\tilde{F}_1(\lambda)=\sum_{\nu=1}^{4}\lambda^{\nu-1}\int_0^{\pi}e^{\lambda\omega x}f_\nu(x)\,dx,\quad \tilde{F}_2(\lambda)=\sum_{\nu=1}^{4}\lambda^{\nu-1}\int_0^{\pi}xe^{\lambda\omega x}f_\nu(x)\,dx$$

$$\tilde{F}_3(\lambda)=\sum_{\nu=1}^{4}\lambda^{\nu-1}\int_0^{\pi}e^{\lambda\bar{\omega}x}f_\nu(x)\,dx,\quad \tilde{F}_4(\lambda)=\sum_{\nu=1}^{4}\lambda^{\nu-1}\int_0^{\pi}xe^{\lambda\bar{\omega}x}f_\nu(x)\,dx.$$

S T A V 3.11. Ako je funkcija potpunosti $\tilde{F}(\lambda)$ identički jednaka nuli, tada je $f_\nu(x)=0$ $(\nu=1,2,3,4)$ s.s. u intervalu $(0,\pi)$.

D O K A Z. Pretpostavimo suprotno, upravo neka je bar jedna funkcija $f_\nu(x)$ $(\nu=1,2,3,4)$ različita od nule do na skup nulte mere. U tom slučaju, s obzirom na strukturu funkcija $\tilde{F}_s(\lambda)$, neće biti $\tilde{F}_s(\lambda)\equiv 0$ $(s=1,2,3,4)$. Svi sabirci konačne sume $\tilde{F}(\lambda)$, su cele funkcije eksponencijalnoga tipa, koje se mogu porediti po brzini rasta. Uvedi u razmatranje polupravu

$$(\ell) \qquad \lambda = r e^{(\pi/2-\Theta)i} \qquad (r \geq 0,\ 0 < \Theta = \arg\omega \leq \pi/2)$$

Očevidne su relacije: $\mathcal{R}e(\lambda\omega) = 0$ i $\mathcal{R}e(\lambda\bar{\omega}) = r|\omega|\sin 2\Theta \geq 0$

Neka je dalje

$$\tilde{F}(r e^{(\pi/2-\Theta)i}) \equiv c\bar{p}(r) \equiv cp_1(r) + cp_2(r)$$

pri čemu sumu $cp_1(r)$ čine svi oni sabirci iz $cp(r)$, koji imaju brži rast od bilo kog sabirka iz $c\bar{p}_2(r)$ na polupravoj (ℓ).

Iz uslova

$$F(\lambda) \equiv 0 \Rightarrow c\bar{p}(r) \equiv 0$$

sledi

$$|cp_1(r)| \equiv |cp_2(r)|$$

Medjutim, poslednja jednakost je nemoguća za dovoljno velike pozitivne vrednosti r. Drugim rečima, uvodna pretpostavka je netačna. Otuda sled:

$$f_\nu(x) = 0 \quad (\nu = 1, 2, 3, 4) \text{ s.s. u intervalu } (0, \pi).$$

<u>S T A V 3.12.</u> Neka je $\tilde{\mathcal{P}}_\Delta$ bilo koji indikatorni dijagram funkcije $\tilde{\Delta}(\lambda)$, i $\tilde{\mathcal{P}}_F$ indikatorni dijagram odgovarajuće funkcije potpunosti $\tilde{F}(\lambda)$. Neka je dalje

$$\tilde{F}(\lambda_n) = 0$$

gde je $\lambda = \lambda_n$ proizvoljna sopstvena vrednost operatora $\tilde{L}_4(\lambda)$. Tada je dijagram $\tilde{\mathcal{P}}_F$ sadržan u dijagramu $\tilde{\mathcal{P}}_\Delta$.

<u>D O K A Z.</u> Ukoliko je reč o osnovnim indikatornim dijagramima funkcije $\Delta(\lambda)$, tada tvrdjenje neposredno rezultira iz stava 1.2. U svim ostalim slučajevima, s obzirom na to kako je definisana korespodentna osnovna funkcija, dijagram funkcije potpunosti mora biti sadržan u nekom osnovnom dijagramu. Dalji dokazni postupak zasniva se na primeni stava o odsečku indikatornih dijagrama, kako je to već radjeno u stavu 3.5.

<u>S T A V 3.13.</u> Neka je $\tilde{\varphi}(\lambda) = \dfrac{\tilde{F}(\lambda)}{\tilde{\Delta}_0(\lambda)}$ cela funkcija. Tada je

$$\tilde{\varphi}(ri) = O(r^{p+1/2}), \quad |r| < \infty$$

pri čemu p može biti ceo broj, ne veći od dva.

Dokaz je sličan dokazu stava 3.4, i zato ga ne navodimo.

P O S L E D I C A. Ukoliko je funkcija potpunosti oblika

$$\tilde{F}(\lambda)=\int_0^{\pi}\tilde{\varphi}_0(x,\lambda)f(x)dx$$

tada važi: $\tilde{\varphi}(ri)\longrightarrow 0$ kada $r\rightarrow\pm\infty$.

Predjimo sada na stavove o potpunosti. Dokaze nećemo izvoditi zbog toga, što se formalno ne razlikuju od dokaza stavota o potpunosti operatora $L_{\mu}(\lambda)$.

S T A V 3.14. Neka su sve sopstvene vrednosti $\lambda=\lambda_n\neq 0$ $(n=1,\dots$ operatora $\tilde{L}_{\mu}(\lambda)$ jediničnoga ranga, i neka postoji uslov $(\tilde{D})$. Tada je sistem sopstvenih i pridruženih funkcija toga operatora četvorostruko potpun u prostoru $\mathcal{L}^2(0,\pi)$, ili se može učiniti četvorostruko potpunim putem dopune najviše sa tri funkcije defekta.

S T A V 3.15. Neka su sve sopstvene vrednosti $\lambda=\lambda_n\neq 0$ $(n=1,\dots$ operatora $\tilde{L}_{\mu}(\lambda)$ jediničnoga ranga, i neka postoji uslov $(\tilde{D})$. Tada je sistem sopstvenih i pridruženih funkcija toga operatora potpun u prostoru $\mathcal{L}^2(0,\pi)$.

Primer 5. $\ell(y)=0,$

$$y(0)=0,\; y''(0)=0,\; y'''(0)=0,\; y'(0)+y'''(\pi)=0.$$

Karakteristična determinanta je

$$\tilde{\Delta}_0(\lambda)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0\\ \lambda\omega^2 & 2\omega & \lambda\bar{\omega}^2 & 2\bar{\omega}\\ \lambda\omega^3 & 3\omega^2 & \lambda\bar{\omega}^3 & 3\bar{\omega}^2\\ \lambda\omega+(\lambda\omega)^3e^{\lambda\omega\pi} & 1+[3(\lambda\omega)^2+\pi(\lambda\omega)^3]e^{\lambda\omega\pi} & \lambda\bar{\omega}+(\lambda\bar{\omega})^3e^{\lambda\bar{\omega}\pi} & 1+[3(\lambda\bar{\omega})^2+\pi(\lambda\bar{\omega})^3]e^{\lambda\bar{\omega}} \end{vmatrix}$$

a osnovna funkcija

$$\tilde{y}_0(x,\lambda)=\begin{vmatrix} e^{\lambda\omega x} & xe^{\lambda\omega x} & e^{\lambda\bar{\omega}x} & xe^{\lambda\bar{\omega}x}\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ \lambda\omega^2 & 2\omega & \lambda\bar{\omega}^2 & 2\bar{\omega}\\ \lambda\omega^3 & 3\omega^2 & \lambda\bar{\omega}^3 & 3\bar{\omega}^2 \end{vmatrix}$$

Sve sopstvene vrednosti su jediničnoga ranga, jer je na primer minor elementa $\lambda\omega + (\lambda\omega)^3 e^{\lambda\omega\pi}$ determinante $\widetilde{\Delta}_0(\lambda)$, konstantan i različit od nule. Očevidno, $\lambda = 0$ nije sopstvena vrednost. Neposrednim putem, nalazimo

$$\widetilde{\Delta}_0(0) = 0, \ \widetilde{\Delta}_0'(0) \neq 0, \ \widetilde{y}_0(x,0) \equiv 0$$

što znači da postoji uslov $(\widetilde{D})$. Razvijeni oblici karakteristične determinante i osnovne funkcije glase

$$\widetilde{\Delta}_0(\lambda) = p_0(\lambda) + p_1(\lambda) e^{\lambda\omega\pi} + p_2(\lambda) e^{\lambda\bar{\omega}\pi}$$

i

$$\widetilde{y}_0(x,\lambda) = q_1(\lambda) e^{\lambda\omega x} + q_2(\lambda) x e^{\lambda\omega x} + q_3(\lambda) e^{\lambda\bar{\omega} x} + q_4(\lambda) x e^{\lambda\bar{\omega} x}$$

pri čemu su polinomi $p_s(\lambda)$ ($s = 1, 2$) četvrtoga stepena, a polinomi $q_s(\lambda)$ ($s = 1, 2, 3, 4$) najviše prvoga stepena. Na osnovu stava 3.13 sledi: $\widetilde{\Psi}(ri) \to 0$ kada $r \to \pm\infty$. Prema tome sve pretpostavke iz stava 3.15 postoje u ovom slučaju. Otuda zaključujemo, da je sistem sopstvenih i pridruženih funkcija posmatranog graničnog problema četvorostruko potpun u prostoru $\mathcal{L}^2(0,\pi)$.

Istaknimo na kraju, da je operatorom $\widetilde{L}_4(\lambda)$ (slučaj $\mathcal{R}e\,\omega = 0$) obuhvaćena i diferencijalna jednačina

$$\ell(y) = y^{IV} + 2\lambda^2 y'' + \lambda^4 y = 0$$

koja je dobijena iz biharmoniske jednačine

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = 0$$

putem smene $u = e^{\lambda t} y(x)$.

LITERATURA

[1]. А л л а х в е р д и е в Д.Э.,О полноте системы собственных и присоединенных элементов несамосопряженных операторов,близких к нормальным,ДАН,115,Н°2,1957.

[2]. А х и е з е р Н.И. и Г л а з м а н И.М.,Теория линейных операторов в гилбертовом пространстве,"НАУКА",1966.

[3]. Б а р и Н.К.,Тригонометрические ряди,Физматгиз,1961.

[4]. Б и б е р б а х Л.,Аналитическое продолжение,"НАУКА",1967.

[5]. В и н е р Н. и П э л и Р.,Преобразование в комплексной области "НАУКА",1964.

[6]. Г е л ь ф а н д И.М. и К о с т ю ч е н к о А.Г.,Разложение по собственным функциям дифференциялнных и других операторов,ДАН, 103,3,1955.

[7]. Г о х б е р г И.Ц. и К р е й н М.Г.,Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов,"НАУКА",1965.

[8]. Г у р в и ц А. К у р а н т Р.,Теория функций,"НАУКА",1968.

[9]. Д а н ф о р д Н. и Ш в а р ц Д ж.,Линейные операторы,"МИР",1966.

[10]. Д ж а в а д о в М.Г.,О полноте некоторых части собственных функции несамосопряаженного дифф.оператора,ДАН,159,Н°4.

[11]. Ж д а н о в и ч В.Ф.,Решение методом Фурье несамосопряженных смешаних задач для гиперболических систем на плоскости,Мат.сб. 47,1959.

[12]. Е в г р а ф о в М.А.,Асимптотические оценки и целые функции, Гостехиздат,1962.

[13]. К е л д и ш М.В.,О собственних значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений,ДАН,87,1951.

[14]. K o d d i n g t o n E.A. L e v i n s o n N.,Theory of ordinary differential equations,New York Toronto London,1955.

[15]. К о л м о г о р о в А.Н. Ф о м и н С.В.,Элементи теории функции и функционального анализа,"НАУКА",1968.

[16]. К р е й н М.Г. и Л а н г е р Г.К.,К теории квадратичных пучков самосопряженных операторов,ДАН,154,Н°6.

[17]. L a n g e r N., Ein Zerspaltungssatz für Operatoren im Hilbertraum, Mat. Acad. Sci. Hung., 12, 1961.

[18]. Л е в и н Б.Я., Распределение корней целых функций, Гостехиздат, 1956.

[19]. Л е в и н Б.Я., Целые функции, курс лекции, 1[illegible].

[20]. Л е в и т а н Б.М., Разложение по собственным функциям дифференциялных уравнений второго порядка, ГТТИ, 1950.

[21]. Л и д с к и В.Б., О полноте системы собственних и присоединенніх функций несамосопряаженного диференциялього оператора, ДАН, 115, N°2, 1957.

[22]. Л и д с к и В.Б. и С а д о в н и ч и й В.А., Регуляризованйе суммы одного класса целых функций, функциональный анализ, Т I, Н 2, 1967.

[23]. Л у з и н Н.Н., функция (в математике), БСЭ (1-е изд.), 1934, Т 59, 314-334.

[24]. Н а й м а р к М.А., Линейные дифференциальные оператори, Гостехиздат, 1954.

[25]. Н а т а н с о н И.П., Теория функций вещественной переменной, ГТТИ, 1950.

[26]. П л е с н е р А.И., Спектралная теория линейных операторов, "НАУКА", 1965.

[27]. Р а с у л о в М.А., Метод контурного интеграла, "НАУКА", 1964.

[28]. R i e s z F. N a g y B., Voresungen über funktionalanalysis, Berlin, 1956.

[29]. Т а м а р к и н Я.Д., О некоторых общих задач теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, Петроград, 1917.

[30]. Ш и л о в Г.Е., Введение в теорию линейных пространств, Госизд. 1956.