UNIVERZITET U BEOGRADU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Miodrag Mateljević

PROCENA NORMI I EKSTREMALNI PROBLEMI U H^1

(Doktorska disertacija)

Beograd, 1979.

S A D R Ž A J

UVOD

Teorija H^p ima veoma značajnu ulogu u mnogim oblastima teorije funkcija: u teoriji graničnih svojstava analitičkih funkcija, rešavanju ekstremalnih problema i harmonijskog analizi.

H^p prostore uveo je Hary 1914. god., a detaljno su ih izučavali mnogi matematičari. Do sredine ovog veka većina radova ispituje individualna svojstva funkcija klase H^p, ne posmatrajući H^p prostore kao linearne vektorske prostore.

U okviru ove problematike posebno mesto zauzima teorija ekstremalnih problema koja je u vezi sa teorijom linearnog programiranja i optimizacije i koja ima dugu istoriju. Medjutim, veći napredak u ovoj oblasti postignut je tek početkom pedesetih godina kada su se pojavili prvi radovi u kojima se linearni ekstremalni problemi teorije analitičkih funkcija rešavaju pomoću teoreme Hahn-Banach-a o produženju linearne funkcije. Prvi takav rad je nota Havinson-a koja je objavljena 1949. Do sada se pojavilo mnogo radova iz ove problematike i slobodno bi se moglo reći da su ekstremalni problemi u H^p prostorima postali posebna oblast istraživanja.

Ja sam se zainteresovao za problematiku uporedjivanja normi u prostoru H^1 i dobio niz rezultata kojima sam uspeo ne samo da poboljšam već postojeće procene, nego u većini slučajeva i da rešim odgovarajući ekstremalni problem, to jest da nadjem klasu funkcija za koju u razmatranim procenama važi jednakost. Pored toga, razmatrao sam procene normi funkcija čija je slika u uglu i mogućnost prenošenja ovih procena na prostore H^1 (U^n) $(n \in N)$ i dobio nekoliko interesantnih rezultata.

Rad se sastoji iz tri glave.

U prvoj glavi data su osnovna svojstva teorije H^p prostora od kojih bih istakao samo teoremu o faktorizaciji i teoremu koja daje kvalitativnu formu rešenja ekstremalnog problema u slučaju racionalnog jezgra. Većina teorema je samo navedena, a za neke su skicirani dokazi da bi se bar donekle ilustrovala tehnika rada sa funkcijama klase H^p. Strogi dokazi ovih teorema sa istorijskim napomenama mogu se naći u monografiji [6]. Ostali rezultati, potrebni za razumevanje ovog rada, navedeni su tamo gde ih primenjujemo.

Moji rezultati su izloženi u drugoj i trećoj glavi.

U drugoj glavi dajem procenu za Dirichlet-ov integral $\iint_U |f'(z)|^2\,dx\,dy \le \pi \|f'\|_1^2$ ako je $f' \in H^1$ (Teorema 2.2.1, Posledica 2.2.1) i iz ovog rezultata izvodim niz generalizacija i posledica (Teoreme 2.2.2-4, Posledice 2.2.2-5). Koristeći ove rezultate i neke druge činjenice o H^p prostorima poboljšavam procene koje su dobili Hardy-Littlewood i nedavno Shapiro, pokazujući da je norma identičnog preslikavanja prostora $H^{1/2}$ u $B_{1/2}$ jednaka π, gde je $B_{1/2}$ sadržavajući

Banach-ov prostor za $H^{1/2}$ (Teorema 2.3.1). Zatim, dobijam nekoliko posledica i uopštenja ove teoreme (Treorema 2.3.2-3, Posledice 2.3.1-2) i kao ilustraciju ovih rezultata dajem rešenje jednog poznatog ekstremalnog problema (Teorema 2.3.4, Posledica 2.3.3). Primenjujući na ovu problematiku dualnu relaciju u nekim slučajevima dobijam bolje procene od onih koje sam dobio pomoću izoperimetrijske nejednakosti (Teoreme 2.4.1-2, Posledice 2.4.1-2). Na kraju odeljka 2.4 prenosim neke rezultate iz prethodnih odeljaka na prostore $E_1(D)$ (Teorema 2.4.3, Posledica 2.4.3) i iz Shwartz-ove i izoperimetrijske nejednakosti izvodim jednu integralnu nejednakost za dužine krivih (Teorema 2.4.4).

U odeljku 2.5 dajem: rešenje problema Gehring-a (Teorema 2.5.1), nekoliko rezultata koji se odnose na uporedjivanje Hardy-eve norme funkcija klase H^p $(1 \leq p \leq 2)$ (Teorema 2.5.3 Posledice 2.5.1-2) i novi dokaz izoperimetrijske nejednakosti (Teorema 2.5.4), koji je u suštini baziran na Bieberbach-ovom stavu o površini i graničnim svojstvima analitičkih funkcija. Daljim usavršavanjem ovog metoda i uvodjenjem novih pojmova dobijam generalazije izoperimetrijske nejednakosti (Teoreme 2.5.5-7, Posledica 2.5.5) kao i dve interesantne nejednakosti (Posledice 2.5.3-4).

U trećoj glavi dajem procenu za Hardy-jevu i Bergman-ovu normu funkcija jedne kompleksne promenljive čija je slika u uglu (Teoreme 3.1.1-2, 3.2.1-2 i Posledice 3.2.1-2). Zatim, koristeći neke ideje Rudin-a koji je poznatu Hardy-jevu jednodimenzionu nejednakost preneo na višedimenzioni slučaj, razmatram mogućnost prenošenja ovih procena na prostore $H^1(U^n)$ ($n\in N$) i dobijam nekoliko zanimljivih rezultata (Teoreme 3.3.1-3, Posledica 3.3.1).

Napomenimo još samo to da su neki delovi ove disertacije objavljeni u radovima [21], [22], [23], i [24], a da je ovaj poslednji saopšten na Konferenciji za analitičke funkcije, koja je održana u Kozubniku (Poljska) 1979.

Glava I

PROCENE NORMI I EKSTREMALNI PROBLEMI

U ovoj glavi dajemo osnovna svojstva H^p prostora, a zatim razmatramo ekstremalne probleme u H^p. Koristeći metode funkcionalne analize posmatramo paralelno početni i dualni ekstremalni problem i dokazujemo važnu dualnu relaciju. Takodje, dajemo kvalitativnu formu rešenja u slučaju racionalnog jezgra, koja je dovoljno opšta da uključi većinu interesantnih primera. Na kraju glave date su neke odabrane procene i teoreme koje imaju jasne geometrijske interpretacije i koje su me podstakle da razmotrim H^1 prostor sa geometrijskog aspekta i dam priloge koji su sadržani u drugoj i trećoj glavi.

1.1. OSNOVNA SVOJSTVA H^p PROSTORA

1. Poisson-ov integral. Svaka realna funkcija $u(z)$ koja je harmonijska u $|z|<1$ i neprekidna u $|z|\leq 1$ može biti rekonstruisana iz njene granične funkcije pomoću Poisson-ovog integrala

(1.1.1) $$u(z) = u(re^{i\vartheta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\vartheta-t)\, u(e^{it})\, dt \;,$$

gde je

$$P(r,\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta + r^2}$$

Poisson-ovo jezgro. Sa druge strane, ako se umesto funkcije $u(e^{it})$ u integralu (1.1.1) uzme proizvoljna neprekidna funkcija $\varphi(t)$ koja zadovoljava uslov $\varphi(0)=\varphi(2\pi)$, funkcija $u(z)$ koja je izražena preko integrala (1.1.1) biće harmonijska u $|z|<1$, neprekidna u $|z|\le 1$ i imati graničnu vrednost $u(e^{it})=\varphi(t)$. Uopštavajući ovu ideju možemo doći do pojma klase harmonijskih funkcija koje se mogu predstaviti preko Poisson-Stieltjes-ovog integrala, tj. do klase funkcija oblika

$$u(z)= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)\,d\mu(t) ,$$

gde je $\mu(t)$ funkcija ograničene varijacije na $[0,2\pi]$.

Definicija 1.1.1. - Za realnu funkciju $u(z)$ harmonijsku u $|z|<1$ kaže se da je klasa h^1 ako je

$$\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})|\,d\theta < +\infty .$$

Teorema 1.1.1. - Harmonijska funkcija $u \in h^1$ može biti predstavljena preko Poisson-Stieltjes-ovog integrala.

Dokaz - Definišimo familiju funkcija

$$\mu_r(t) = \int_0^t u(re^{i\theta})\,d\theta .$$

Kako su funkcije $\mu_r(t)$ uniformno ograničene varijacije, primenom Helly-jeve izborne teoreme, zaključujemo da postoji niz $\{r_n\}$ koji konvergira ka 1 tako da $\mu_{r_n}(t)\to\mu(t)$ skoro svuda na $[0,2\pi]$, gde je $\mu(t)$ funkcija ograničene varijacije. Tada je

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)\,d\mu(t) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)\,d\mu_{r_n}(t)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)\,u(r_n e^{it})\,dt = \lim_{n\to\infty} u(r_n z) = u(z).$$

Iz dokaza proizilazi da svaka pozitivna harmonijska funkcija u jediničnom disku može biti predstavljena pomoću Poisson-Stieltjes-ovog integrala od neopadajuće funkcije $\mu(t)$. Ova činjenica poznata je pod nazivom Herglotz-ova reprezentacija. Funkcija $\mu(t)$ ograničene varijacije koja je korespondirana datoj funkciji $u\in h^1$ je jedinstvena.

Ako je u(z) Poisson-ov integral od integrabilne funkcije $\varphi(t)$, tada za svaku tačku $t=\theta_0$ gde je φ neprekidna, $u(z)\to\varphi(\theta_0)$ kada $z\to e^{i\theta_0}$. Ova činjenica može biti uopštena sa Poisson-Stiltjes-ovim integralom: $u(z)\to\mu'(\theta_0)$ ako je μ neprekidno-diferencijabilna u θ_0; ili, još opštije, ako je μ diferencijabilna. Otuda imamo sledeću teoremu.

Teorema 1.1.2. - Ako je u Poisson integral od funkcije $\varphi\in L^1$, tada $u(re^{i\theta})\to\varphi(\theta)$ skoro svuda kada $r\to 1$.

2. Prostori H^p i N. - Ako je f(z) analitička funkcija u $|z|<1$, tada su $\log^+|f(z)|$ i $|f(z)|^p$ $(0<p<\infty)$ subharmonijske. Otuda dobijamo sledeću teoremu.

Teorema 1.1.3. - Ako je f analitička funkcija u $|z|<1$ i ako je

$$M_0(f;r) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log^+|f(re^{i\theta})|\,d\theta\right\},$$

$$M_p(f,r) = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta\right\}^{1/p} \quad (0<p<\infty),$$

$$M_\infty(f,r) = \sup_\theta |f(re^{i\theta})| ,$$

tada Mo, Mp i M_∞ su monotono neopadajuće funkcije za $r \in (0,1)$.

Definicija 1.1.2. - Za svaku funkciju koja je analitička u $|z|<1$ i za $0 \le p \le \infty$ definišemo $\|f\|_p$ sa

$$\|f\|_p = \lim_{r\to 1} M_p(f,r) .$$

Definicija 1.1.2. nam omogućuje da definišemo prostore H^p i N. Za funkciju analitičku u $|z|<1$ kažemo da je klase H^p $(0<p\le\infty)$ ako je $\|f\|_p < +\infty$. Klasa N se sastoji od svih analitičkih funkcija u $|z|<1$ za koje je $\|f\|_0 < +\infty$. Lako je dokazati da je $H^\infty \subset H^p \subset H^q \subset N$ ako je $0<q<p<\infty$.

Koristeći Jensen-ovu formulu možemo precizno odrediti koje uslove moraju zadovoljiti nule nekonstantne funkcije $f \in H^\infty$.

Teorema 1.1.3. - Ako je $\{\alpha_n\}$ niz u $|z|<1$ takav da je $\alpha_n \ne 0$, k nenegativan prirodan broj

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-|\alpha_n|) < \infty ,$$

i ako je

$$B(z) = z^k \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n - z}{1-\bar{\alpha}_n z} \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n} \quad (|z|<1) \tag{1.1.2}$$

tada $B \in H^\infty$ i B nema nula izuzev u tačkama α_n i kordinatnom početku ako je $k>0$.

Funkcija B se naziva Blaschke-ov proizvod. Podvucimo da neki članovi niza α_n mogu biti ponovljeni u kom slučaju B ima višestruku nulu u toj tački. Istaknimo, takodje, da svaki faktor u (1.1.2) ima apsolutnu vrednost 1 na $|z| = 1$.

Koristeći Jensen-ovu formulu zaključujemo da nule svake funkcije $f \in N$ zadovoljavaju Blaschke-ov uslov $\sum (1-|\alpha_n|) < \infty$. Otuda ta činjenica važi i za $f \in H^p$.

Sledeća teorema se jednostavno dokazuje.

<u>Teorema</u> 1.1.4. - Ako je $f \in H^p (0<p\leq\infty)$, B Blaschke-ov proizvod i $g = f/B$, tada je

$$\|f\|_p = \|g\|_p$$

1.2. PROSTORI H^2 i H^1 I TEOREMA O FAKTORIZACIJI

1. Prostor H^2. Posebna važnost prostora H^2 proizilazi iz činjenice da je Hilbert-ov prostor i da može biti identifikovan sa nekim potprostorom od $L^2(T)$, gde je T jedinični krug. Norma za svako $g \in L^2(T)$ je definisana sa

$$\|g\|_2 = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(e^{i\theta})|^2 d\theta \right\}^{1/2}$$

i svaka funkcija $g \in L^2(T)$ ima Fourier-ove koeficijente

$$\hat{g}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Osnovna svojstva H^2 prostora su sažeta u sledećoj teoremi.

Teorema 1.2.1. -

(a) Funkcija f analitička u $|z|<1$, definisana sa

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad (|z|<1)$$

je u H^2 ako i samo ako je $\sum |a_n|^2 < \infty$; u tom slučaju je

$$\|f\|_2 = \left\{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2\right\}^{1/2}.$$

(b) Ako je $f \in H^2$, tada f ima radijalnu granicu $f(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1} f(re^{i\theta})$ u skoro svim tačkama od T, $f(e^{i\theta}) \in L^2$; n-ti Fourier-ov koeficient od $f(e^{i\theta})$ je a_n ako je $n \geq 0$ i 0 ako je $n<0$; takodje L^2-aproksimacija važi

$$\lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta}) - f(re^{i\theta})|^2 d\theta = 0$$

i $f(z)$ se može predstaviti pomoću Poisson-ovog i Canchy-evog integrala od $f(e^{i\theta})$: Ako je $z = re^{i\theta}$, tada je

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, \theta - t)\, f(e^{it})\, dt$$

i

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta ,$$

gde je Γ pozitivno orjentisan jedinični krug.

(c) Preslikavanje $f(z) \to f(e^{i\theta})$ je izometrija od H^2 na potprostor od $L^2(T)$ koji se sastoji od svih funkcija $g \in L^2(T)$ koje zadovoljavaju uslov $\hat{g}(n)=0$ za sve $n<0$.

Napomena 1.2.1. - Pretpostavimo da je $f\in H^p$ za neko $p>0$, B Blaschke-ov proizvod formiran od nula funkcije f i $g=f/B$. Teorema 1.1.4 pokazuje da $g\in H^p$ i da je $\|g\|_p=\|f\|_p$. Kako $[g(z)]^{p/2}\in H^2$ možemo primeniti rezultate koje smo dobili u prostoru H^2 na funkcije klase H^p za $0<p\le\infty$.

Sledeća teorema ilustruje ovu tehniku.

Teorema 1.2.2. - Ako je $f\in H^1$ tada

(1.2.1) $$f(e^{i\theta})=\lim_{r\to 1} f(re^{i\theta})$$

postoji u skoro svim tačkama skupa T i važi relacija

$$\lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(e^{i\theta})-f(re^{i\theta})|\,d\theta = 0$$

Dokaz. - Neka je $u=\mathrm{Re} f$, $v=\mathrm{im} f$. Iz $f\in H^1$ sledi $u,v\in h^1$. Sada egzistencija granične vrednosti (1.2.1) sledi iz Teorema 1.1.1 i 1.1.2. Ako je B Blaschke-ov proizvod formiran od nula funkcije f, prethodna napomena pokazuje da postoji $h\in H^2$ tako da je $h^2=f/B$ i $\|h\|_2^2=\|f\|_1$. Uvedimo funkciju $g=Bh$. Tada je $g\in H^2$, $\|g\|_2=\|h\|_2$ i $f=gh$. Dakle, mi imamo funkciju predstavljenu kao proizvod dve funkcije koje pripadaju H^2. Definišimo funkciju f_r na T sa $f_r(e^{i\theta})=f(re^{i\theta})$ i na isti način h_r i g_r. Tada je

(1.2.2) $$f-f_r=g(h-h_r)+h_r(g-g_r)$$

Primenom Schwarz-ove nejednakosti na svaki od dva proizvoda koji se nalaze na desnoj strani relacije (1.2.2) zaključujemo da $\|f-f_r\|\to 0$ kada $r\to 1$.

Posledica 1.2.1. - Ako je $f \in H^1$ tada je f Poisson-ov i Canchy-ev integral od $f(e^{i\theta})$.

Dokaz. - Ako je $R<1$, funkcija $f(Rz)$ je analitička u oblasti $|z|<1/R$. Otuda za $R<1$ nalazimo

$$f(Rz) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{it})}{e^{it}-z}\, e^{it}\, dt .$$

Za fiksirano z ($|z|<1$), prelaskom na graničnu vrednost kada $R \to 1$ i korišćenjem relacije (1.2.1) dobijamo Cauchy-evu reprezentaciju. Poisson-ova reprezentacija se dobija na isti način.

Koristeći odgovarajuće rezultate za H^2 prostor i neke rezultate iz teorije mere i konvergencije možemo izvesti teoremu koja govori o konvergenciji u srednjem.

<u>Teorema</u> 1.2.3. - Ako je $f \in H^p$ $(0<p<\infty)$, tada je

$$\lim_{r\to 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta = \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p d\theta$$

i

$$\lim_{r\to 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|^p d\theta = 0$$

Iz prethodne teoreme i nejednakosti $|\log^+ a - \log^+ b| \le 1/p\, |a-b|^p$ za $a>0$, $b>0$ i $0<p\le 1$, sledi

Posledica 1.2.2. - Ako je $f \in H^p$ za neko $p>0$, tada je

$$\lim_{r\to 1} \int_0^{2\pi} \left| \log^+|f(re^{i\theta})| - \log^+|f(e^{i\theta})| \right| d\theta = 0$$

2. Teorema o faktorizaciji. Riesz-ova faktorizacija (Teorema 1.1.4) je prvi korak ka izvodjenju teoreme o faktorizaciji koja je od bitne važnosti i za teoriju H^p prostora i za njene primene. Dalji rezultati su bazirani na sledećoj nejednakosti.

<u>Teorema</u> 1.2.4. - Ako je $f \in H^p$ $(p>0)$, tada je

$$\log|f(re^{i\theta})| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)\log|f(e^{it})|\,dt .$$

Dokaz. - Kako prisustvo Blasche-ovog proizvoda u Riesz-ovoj faktorizaciji samo pojačava nejednakost, možemo pretpostaviti da je $f(z)\neq 0$ u $|z|<1$. Tada je $\log f(z)$ harmonijska funkcija u $|z|<1$ i

$$\log|f(\rho re^{i\theta})| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)\log|f(\rho e^{it})|\,dt .$$

S druge strane primenom Fatou-ove leme dobijamo

$$\lim_{\rho\to 1}\int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)\log^-|f(\rho e^{it})|\,dt \ge \int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)\log^-|f(e^{it})|\,dt .$$

Dokaz sada sledi iz Posledice 1.2.2. Teorema ne važi za klasu N kao što pokazuje primer funkcije $\exp\ (1+z)/(1-z)$.

Vratimo se ponovo problemu faktorizacije; neka je $f(z)\neq 0$ funkcija klase H^p za neko $p>0$. Kako je $f\in H^p$ iz Fatou-ove leme sledi $f(e^{i\theta})\in L^p$ i $\log|f(e^{i\theta})|\in L^1$. Neka je $f(z)=$ $B(z)\,g(z)$ kao u Teoremi 1.1.4; tj. $g(z)\neq 0$ i $|f(e^{i\theta})|=|g(e^{i\theta})|$ s.s. Razmotrimo analitičku funkciju

$$F(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\log|f(e^{it})|\,dt\right\}.$$

Iz Teoreme 1.2.4. sledi $|g(z)|\le|F(z)|$ za $|z|<1$. Takodje iz Teoreme 1.1.2. proizilazi $|g(e^{i\theta})|=|F(e^{i\theta})|$ s.s. Otuda ako stavimo $e^{i\gamma}=g(0)/|g(0)|$ funkcija $S(z)=e^{-i\gamma}g(z)/F(z)$ je analitička u $|z|<1$ i ima svojstva

$$0 < |S(z)| \leq 1 \ ; \quad |S(e^{i\theta})| = 1 \quad s.s. \ ; \quad S(0) > 0 .$$

Na osnovu ovoga zaključujemo da je $-\log S(z)$ pozitivna harmonijska funkcija koja je 0 skoro svuda na $|z|=1$. Koristeći Herglotz-ovu reprezentaciju i Teoremu 1.1.2 zaključujemo da harmonijska funkcija $-\log S(z)$ može biti predstavljena kao Poisson-Stieltjes-ov integral od ograničene funkcije $\mu(t)$ koja ima svojstvo $\mu'(t)=0$ s.s. Kako je $S(o) > 0$ nalazimo da je

(1.2.3.) $$S(z) = \exp\left\{-\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, d\mu(t)\right\}.$$

Uzimajući u obzir prethodno izlaganje imamo faktorizaciju

$$f(z) = e^{i\gamma} B(z)\, S(z)\, F(z)$$

Sada možemo uvesti nove pojmove

Definicija 1.2.1. - Spoljna funkcija klase H^p je funkcija oblika

(1.2.4) $$F(z) = e^{i\gamma} \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} \log \psi(t)\, dt\right\}.$$

gde je γ realan broj, $\psi(t) \geq 0$, $\log \psi(t) \in L^1$ i $\psi(t) \in L^p$.

Definicija 1.2.2. - Unutrašnja funkcija je funkcija koja ima svojstva $|f(z)| \leq 1$ i $|f(e^{i\theta})|=1$ s.s. Mi smo pokazali da svaka unutrašnja funkcija ima faktorizaciju $e^{i\gamma} B(z)\, S(z)$, gde je $B(z)$ Blashke-ov proizvod i $S(z)$ je funkcija oblika (1.2.3), $\mu(t)$ ograničena neopadajuća singulatura funkcija ($\mu'(t)=0$ s.s.) Takva funkcija $S(z)$ naziva se singularna unutrašnja funkcija.

Teorema 1.2.5. - Svaka funkcija $f(z)\not\equiv 0$ klase $H^p (p>0)$ ima jedinstvenu faktorizaciju oblika $f(z)=B(z)\ S(z)\ F(z)$, gde je $B(z)$ Blasche-ov proizvod, $S(z)$ singularna unutrašnja funkcija, a $F(z)$ spoljna funkcija klase H^p (sa $\gamma(t)=|f(e^{it})|$. Suprotno svaki takav proizvod pripada klasi H^p.

Dokaz. - Uzimajući u obzir sve ono što je prethodno rečeno dobijamo $f(z)=B(z)\ S(z)\ F(z)$, čime je teorema dokazana u jednom smeru. Da bismo dokazali suprotno dovoljno je dokazati da spoljna funkcija oblika (1.2.4) pripada klasi H^p. Koristeći aritmetičko-geometrijsku nejednakost nalazimo da je

$$|F(z)|^p \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta-t)\,[\gamma(t)]^p dt$$

tj.

$$\int_0^{2\pi} |F(re^{i\theta})|^p d\theta \leq \int_0^{2\pi} |\gamma(t)|^p dt$$

1.3. EKSTREMALNI PROBLEMI I JEDINOST REŠENJA

Teorija ekstremalnih problema u H^p prostorima ima dugu istoriju. Istaknimo samo sledeće: Carathéodory i Fejer predložili su minimalnu interpolaciju za nalaženje minimuma po svim $f(z)= \sum a_k z^k \in H^\infty$, gde je prvih n koeficijenata $a_0, a_1, \ldots,$ an dato. Oni su dokazali egzistenciju i jedinost rešenja i dali algebarske metode za računanje minimuma. Zatim se niz istaknutih matematičara bavilo raznim specijalnim ekstremalnim problemima, da bi tek kada su Havinson [13], [14] i nezavisno Rogosinski i Shapiro [27] uveli metode funkcionalne analize teorija bila potpuno objedinjena. Napomenimo još samo to da ovde nisu razmatrane brojne primene ove teorije na razne specijalne primere, već samo rezultati neophodni za dalje izlaganje.

1. Ekstremalni problem i dualni problem. Kao što je poznato iz Riesz-ove teoreme o reprezentaciji svaka ograničena linearna funkcionela na L^p ima reprezentaciju

$$(1.3.1) \qquad \Phi(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\, g(e^{i\theta})\, d\theta$$

gde je $g \in L^q$ ($p \geq 1$, $1/p + 1/q = 1$) i $\|\Phi\| = \|g\|_q$.

Odgovarajući problem za H^p ($p \geq 1$) poznat je pod nazivom tipičan ekstremalni problem. Naime, ako je ϕ ograničeni linearni funkcional na H^p ($1 \leq p < \infty$) treba odrediti njegovu normu. Kako svaki $\phi \in (H^p)^*$ ($1 \leq p < \infty$) može biti proširen (primenom Hahn-Banach-ove teoreme) na $L^p[0,2\pi]$ i otuda ima reprezentaciju kao u (1.3.1); tipičan ekstremalni problem je za dato $k(e^{i\theta}) \in L^q$ ($1/p + 1/q = 1$) odrediti

$$\sup_{f \in H^p,\ \|f\|_p \leq 1} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} f(z)\, k(z)\, dz \right|$$

Da bismo mogli primeniti metode funkcionalne analize potrebno je da odredimo anihilatore od H^p u $(L^p)^*$, tj. skup funkcionela $(H^p)^{\perp}$ koje se anuliraju na H^p.

Lema 1.3.1. - Ako je $1 \leq p < \infty$, tada je

$$(H^p)^{\perp} = H_0^q \qquad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right),$$

gde je $H_0^q = \{g \in H^q :\ g(0) = 0\}$.

Dokaz. - Ako se $g \in L^q$ (shvaćen kao funkcional na L^p) anulira na H^p, tada je

$$\int_0^{2\pi} e^{in\theta}\, g(e^{i\theta})\, d\theta = 0 \quad , \ n = 0, 1, 2, \dots \ .$$

Otuda je $g(e^{i\theta})$ granična funkcija od neke analitičke funkcije $g(z)$ koja u tački 0 ima vrednost 0. Suprotno, ako je $g(e^{i\theta}) \in H_0^q$, tada je

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\, g(e^{i\theta})\, d\theta = 0$$

za svako $f(e^{i\theta}) \in H^p$, jer su polinomi po $e^{i\theta}$ gusti u H^p $(1 \le p < \infty)$.

Iz prethodne leme i Hahn-Banach-ovog stava o proširenju linearne funkcionele sledi

Teorema 1.3.1. - Ako je $1 \le p < \infty$ i $K(e^{i\theta}) \in L^q$ $(1/p + 1/q = 1)$, tada je

(1.3.1) $$\sup_{f \in H^p,\, \|f\|_p \le 1} \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|z|=1} f(z) K(z)\, dz \right| = \min_{g \in H^q} \|K - g\|.$$

Ova relacija se naziva dualna i povezuje originalan (prvobitno postavljen ekstremalni problem) i takozvani dualni ekstremalni problem koji glasi za dato $K(e^{i\theta}) \in L^q$ odrediti

$$\inf_{g \in H^q} \|K - g\|.$$

Iz prethodne teoreme zaključujemo da je inf dostignut za neko $g \in H^q$, tj. da dualni ekstremalni problem ima uvek rešenje za $1 < q \le \infty$.

Isti postupak ne može biti primenjen za $p = \infty$ $(q = 1)$ jer je konjugovani prostor od L^∞ veći od L^1. Ipak, dualni ekstremalni problem ima rešenje i dualna relacija važi. Da bi ovo pokazali uvedimo u razmatranje prostor $C \in L^\infty$ koji se sastoji od svih neprekidnih, periodičnih funkcija perioda 2π i potprostor P od C koji je generisan sa $1, e^{i\theta}, e^{i2\theta}, \ldots$. Iz Hahn-Banach-ove teoreme o proširenju linearne funkcionele sledi

(1.3.2) $$\sup_{f \in P,\, \|f\|_\infty < 1} |\Phi(f)| = \min_{\Psi \in P^\perp} \|\Phi + \Psi\|,$$

gde je $P^\perp$ potprostor od C^* koji se anulira na P. Lako je opisati $P^\perp$. Koristeći Riesz-ovu teoremu o reprezentaciji zaključujemo da svaki $\Psi \in C^*$ ima oblik

$$\Psi(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\, d\mu(\theta),$$

gde je $\mu(\theta)$ funkcija ograničene varijacije. Kako se Ψ anulira na P iz Teoreme F. i M.Riesz-a zključujemo da je

$$d\mu(\theta) = g(e^{i\theta})e^{i\theta}d\theta$$

za neko $g\in H^1$. Otuda je

$$\psi(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} f(z)g(z)dz\ ,$$

gde je $g\in H^1$. Kako je suprotno očigledno relacija (1.3.2) dobija oblik

(1.3.3) $$\sup_{f\in P,\ \|f\|_\infty\le 1} |\Phi(f)| = \min_{g\in H^1} \|K-g\|$$

Specijalno, dualni ekstremalni problem ima rešenje u slučaju $q=1$. S druge strane imamo

$$\sup_{f\in P,\ \|f\|\le 1} |\Phi(f)| \le \sup_{f\in H^\infty,\ \|f\|\le 1} |\Phi(f)| \le \min_{g\in H^1} \|K+g\|$$

Sada, iz (1.3.3) sledi da je dualna relacija istinita za $p = \infty$.

Vratimo se ponovo početnom ekstremalnom problemu i pokažimo da rešenje uvek postoji za $1<p\le\infty$. Drugim rečima, za svaku L^q funkciju $K(e^{i\theta})$ supremum (1.3.1) je dostignut. Ideja dokaza je da razmatramo

(1.3.4) $$\psi(K) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} f(z)\,K(z)\,dz$$

kao ograničen linearni funkcional na L^q generisan sa fiksiranom funkcijom $f(e^{i\theta})\in L^p$. Tada je $\|\psi\| = \|f\|$. Za $1\le q<\infty$, svaki $\psi\in(L^q)^*$ ima oblik (1.3.4) za neko $f\in L^p$; i oni koji se anuliraju na H^q su generisani sa nekim $f\in H^p$. Otuda sleduje da postavljeni problem ima rešenje, jer

$$\sup_{\psi\in(H^q)^\perp,\ \|\psi\|\le 1} |\psi(K)|$$

je dostignut za svako fiksirano K.

Dokaz ne važi u slučaju p=1 i kao što ćemo pokazati početni (originalni) ekstremalni problem ne mora imati rešenje u slučaju p=1.

2. Jedinost rešenja. Za dalje izlaganje biće pogodno da se uvedu izrazi ekstremalna funkcija i ekstremalno jezgro. Funkcija $K\sim k$ $(K-k\in H^q)$ za koju je

$$\|K\|_q = \inf_{h\in H^q} \|k-h\|$$

naziva se ekstremalno jezgro. Ekstremalna funkcija F je funkcija koja zadovoljava relaciju

$$\|\phi\| = |\phi(F)|,$$

gde je $\phi\in(H^p)^*$. Medjutim, iz $\|F\|_p=\|e^{i\alpha}F\|_p$ i $|\phi(F)|=|\phi(e^{i\alpha}F)|$ ($p\geq 1$, $\alpha\in R$) zaključujemo da ekstremalna funkcija ne može biti jedinstvena. Zbog toga je pogodno da se razmatraju ekstremalne funkcije za koje je $\phi(F)=\|\phi\|$, koje se nazivaju normalizovane ekstremalne funkcije. Da bi u teoremama koje ćemo formulisati izbegli trivijalne funkcije, dogovorimo se da uvek pretpostavljamo da funkcional $\phi\in(H^p)^*$ nije nula funkcionala, tj. $\kappa(e^{i\theta})\notin H^q$. Sada možemo formulisati i dokazati glavni rezultat koji se odnosi na egzistenciju i jedinost rešenja originalnog i dualnog ekstremalnog problema.

<u>Teorema</u> 1.3.2. - Za svako p ($1\leq p\leq\infty$) i za svaku funkciju $K(e^{i\theta})\in L^q$ ($1/p+1/q=1$, $\kappa(e^{i\theta})\notin H^q$) važi dualna relacija

$$\sup_{f\in H^p,\ \|f\|_p\leq 1}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1} f(z)K(z)\,dz\right| = \inf_{g\in H^q}\|K-g\|_q .$$

Ako je $p>1$, tada postoji jedinstvena ekstremalna funkcija za koju je $\phi(f)>0$, gde je $\phi(f)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}f(z)\,\kappa(z)dz$. Ako je $p=1$ i $\kappa(e^{i\theta})$ neprekidna funkcija bar jedna ekstremalna funkcija postoji. Ako je $p>1$ ($q<\infty$) dualni ekstremalni problem ima jedinstveno rešenje. Ako je $p=1$ ($q=\infty$) dualni ekstremalni problem ima bar jedno rešenje; ono je jedinstveno ako postoji ekstremalna funkcija.

Kako smo egzistenciju rešenja već dokazali, ostaje nam da dokažemo jedinost. U tom cilju, dajemo sledeću lemu.

Lema 1.3.2. - Da bi $F\in H^p$ ($\|F\|=1$ i $\phi(F)>0$) i K ($K\sim\kappa$) bili respektivno ekstremalna funkcija i ekstremalno jezgro potrebno je i dovoljno da je

(1.3.5) $\quad e^{i\theta}F(e^{i\theta})K(e^{i\theta})\geq 0 \quad$ s.s.

i da je

$$|K(e^{i\theta})|=\|K\| \quad \text{s.s. ako je } p=1;$$

(1.3.6) $|F(e^{i\theta})|^p = \|K\|^{-q} |K(e^{i\theta})|^q$ s.s. ako je $1<p<\infty$,

$|F(e^{i\theta})| = 1$ s.s. na $\{\theta : K(e^{i\theta}) \neq 0\}$ ako je $p=\infty$.

Dokaz. - Iz dualne relacije je jasno da je F normalizovana ekstremalna funkcija i K ekstremalno jezgro ako i samo i samo ako je $\Phi(F)=\|K\|$. Lema 1.3.2 tada jedino izražava uslov za jednakost u Hölder-ovoj nejednačini.

U slučaju p=1 koristi se činjenica ako se $F(e^{i\theta})$ analura na skupu pozitivne mere tada je $F(z)\equiv 0$ za $|z|<1$.

Dokaz Teoreme 1.3.2. - Neka su F i K normalizovana ekstremalna funkcija i jezgro. Kako $k \notin H^q$, K $(e^{i\theta})$ je različito od 0 na skupu E pozitivne mere. Iz relacija (1.3.4) i (1.3.6) nalazimo da su veličine sgn F $(e^{i\theta})$ i $F(e^{i\theta})$ odredjene s.s. na E ako je $1<p\leq\infty$. Ovo znači da su normalizovane ekstremalne funkcije jednake na nekom skupu pozitivne mere i otuda da su jednake s.s. na $[0, 2\pi]$. Drugim rečima F je jedinstvena. Za p=1 na isti način zaključujemo da sgn $F(e^{i\theta})$ je odredjen ako ekstremalna funkcija F postoji.

Dokažimo jedinstvenost ekstremalnog jezgra K. Iz (1.3.5) sledi

$$\mathrm{Re}\{ i e^{i\theta} F(e^{i\theta}) K(e^{i\theta}) \} = 0 \quad \text{s.s.}$$

Neka je $G = \kappa - K$, tako da je $G \in H^q$, i neka je $h(z) = i zF(z)G(z)$. Tada je

$$\mathrm{Re}\{ h(e^{i\theta})\} = \mathrm{Re}\{ie^{i\theta}F(e^{i\theta})K(e^{i\theta})\} = 0 \text{ s.s.}$$

Ali, kako $h \in H^1$ i $h(0)=0$, poznato je, da Re $h(e^{i\theta})$ potpuno odredjuje h(z) sa Poisson-ovom formulom. Ovo pokazuje da je G i otuda K jedinstveno odredjeno. Dokaz važi i u slučaju p=1 $(q=\infty)$ ako ekstremalna funkcija postoji.

1.4. RACIONALNA JEZGRA

1. Racionalna jezgra. Opšti oblik linearne funkcionele ϕ na H^p može biti dat sa

$$\phi(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} f(z)\, K(z)\, dz ,$$

gde je $K(e^{i\theta}) \in L^q$, $1/p + 1/q = 1$. Funkcionele koje se najčešće sreću u praksi generisane su sa jezgrima koja su granične vrednosti od racionalnih funkcija. Navedimo samo neke primere:

a) $\quad K(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{z-\beta_j} , \quad |\beta_j| < 1 ; \quad \phi(f) = \sum_{j=1}^{n} c_j f(\beta_j)$

b) $\quad K(z) = m!\,(z-\beta)^{-n-1} , \quad |\beta| < 1 ; \quad \phi(f) = f^{(n)}(\beta)$

c) $\quad K(z) = \sum_{j=0}^{n} c_j z^{-j-1} ; \quad \phi(f) = \sum_{j=0}^{n} c_j a_j ,$

gde $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$.

Jedan od najvećih dometa ove teorije je odredjivanje kvalitativne forme ekstremalnog jezgra i ekstremalne funkcije.

Teorema 1.4.1. - Neka je funkcija (z) analitička u $|z|<1$ izuzev u tačkama $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ ($|\beta_k|<1$), gde ima polove koji su u niz uračunati onoliko puta koliki im je red i neka je $K(z)$ neprekidna u drugim tačkama skupa $|z|\le 1$. Tada ekstremalna funkcija $F(z)$ i ekstremalno jezgro $K(z)$ mogu biti izraženi u obliku

$$F(z) = A \cdot \prod_{i=s+1}^{\lambda} \frac{z-\alpha_i}{1-\bar{\alpha}_i z} \prod_{i=1}^{n-1} (1-\bar{\alpha}_i z)^{2/p} \prod_{i=1}^{n} (1-\bar{\beta}_i z)^{-2/p} \tag{1.4.1}$$

$$K(z) = B \prod_{i=1}^{s} \frac{z-\alpha_i}{1-\bar{\alpha}_i z} \prod_{i=1}^{n-1} (1-\bar{\alpha}_i z)^{2/q} \prod_{i=1}^{n} \frac{(1-\bar{\beta}_i z)^{1-2/q}}{z-\beta_i} \tag{1.4.2}$$

Formule (1.4.1) i (1.4.2) važe i u slučaju $p=1$ i $p=\infty$, ako se podrazumeva da je $1/\infty = 0$. Za $p = \infty$ ekstremalna funkcija ima prost oblik

$$F(z) = e^{i\gamma} \prod_{i=s+1}^{\lambda} \frac{z-\alpha_i}{1-\bar{\alpha}_i z} .$$

Praktična vrednost formula(1.4.1) i (1.4.2)zavisi od mogućnosti da odredimo parametre α_i. Napomenimo da to može biti vrlo težak problem. Pretpostavimo, ipak, da prirodan broj $\lambda \leq n-1$ i brojevi B i $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ ($|\alpha_i|<1$ za $1 \leq i \leq \lambda$ i $|\alpha_i| =1$ za $\lambda+ 1 \leq i \leq n-1$) mogu biti odredjeni tako da za neko $s \leq \lambda$ funkcija K definisana sa formulom (1.4.2) bude ekvivalentna originalnom jezgru $\bar{K}$; tada K je ekstremalno jezgro i sa odgovarajućim izborom konstantne A funkcije F definisana sa (1.4.1) je normalizovana ekstremalna funkcija (jedinstvena ako je $p>1$).

Problem se stoga svodi na interpolacioni problem: naći brojeve B i α_i koji zadovoljavaju gore navedene uslove tako da K ima isti glavni deo Lauran-ovog reda kao $\bar{K}$ u svakom polu β_i. Ovaj problem ima jedinstveno rešenje ako je $1<p\leq\infty$.

Interpolacioni problem ima bar jedno rešenje za p=1. U tom slučaju problem se svodi na nalaženje brojeva B i $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ ($|\alpha_i| < 1$, $s \leq n-1$) tako da

$$K(z) = B \prod_{i=1}^{s} \frac{z-\alpha_i}{1-\bar{\alpha}_i z} \prod_{i=1}^{n} \frac{1-\bar{\beta}_i z}{z-\beta_i}$$

ima dati glavni deo u svakom polu β_i. Ovaj modifikovani ekstremalni problem ima jedinstveno rešenje, jer postoji samo jedno ekstremalno jezgro. Ako je s =n-1 ekstremalna funkcija je jedinstveno odredjena sa (1.4.1). U drugim slučajevima (ako je $0 \leq s < n-1$) preostali α_i mogu biti odredjeni proizvoljno.

1.5. PRIMENE

U ovom paragrafu navedene su neke teoreme koje se odnose na primene teorije H^p prostora na teoriju konformnih preslikavanja.

1. Analitičke funkcije neprekidne u $|z| \leq 1$. Kao što je poznato neprekidna funkcija ograničene varijacije ne mora biti apsolutno neprekidna. Medjutim, za granične vrednosti analitičkih

funkcija u jediničnom disku neprekidnost je ekvivalentna sa apsolutnom neprekidnošću. Ova činjenica je posledica sledeće teoreme.

<u>Teorema</u> 1.5.1 - Neka je $f \in H^1$ i neka je njena granična funkcija skoro svuda jednaka sa funkcijom ograničene varijacije, tada je f(z) neprekidna u $|z| \leq 1$ i $f(e^{i\theta})$ apsolutno neprekidna.

Dokaz. - Pretpostavimo da je $f(e^{i\theta}) = \mu(\theta)$ skoro svuda, gde je μ funkcija ograničene varijacije normalizovana sa uslovom $\mu(0) = \mu(2\pi)$. Iz $f \in H^1$ sledi

$$\int_0^{2\pi} e^{in\theta} \mu(\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} e^{in\theta} f(e^{i\theta})\, d\theta \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad .$$

Otuda, primenom parcijalne integracije, dobijamo

$$\int_0^{2\pi} e^{in\theta}\, d\mu(\theta) = 0 \quad , \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad .$$

Iz poslednje jednakosti primenom teoreme F. i M. Riesz-a zaključujemo da je $\mu(\theta)$ apsolutno neprekidna funkcija. Kako je $f(e^{i\theta}) = \mu(\theta)$ skoro svuda f(z) može biti reprezentovana kao Poisson-ov integral od $\mu(\theta)$. Prema tome radijalna granica $f(e^{i\theta})$ postoji u svim tačkama jediničnog kruga i jednaka je sa $\mu(\theta)$.

Sada ćemo pokazati da se funkcije koje smo upravo razmatrali (analitičke funkcije sa apsolutno neprekidnom graničnom vrednošću) mogu okarakterisati sa jednostavnim uslovom $f' \in H^1$. U tom slučaju izraz $f'(e^{i\theta})$ može se shvatiti na dva načina: kao radijalna granica od $f'(z)$ ili kao izvod po θ od granične funkcije bez faktora $ie^{i\theta}$. Sledeća teorema pokazuje da su ova dva shvatanja ista.

<u>Teorema</u> 1.5.2 - Funkcija f analitička u $|z| < 1$ je neprekidna u $|z| \leq 1$ i apsolutno neprekidna na $|z| = 1$ ako i samo ako je $f' \in H^1$. Ako je $f' \in H^1$, tada je

$$\frac{d}{d\theta} f(e^{i\theta}) = \lim_{r \to 1} i e^{i\theta} f'(re^{i\theta}) \qquad \text{s. s.}$$

2. Primena na konformna preslikavanja. Teorema koje smo upravo dokazali kombinovane sa nekim opštim činjenicama o H^p funkcijama mogu poslužiti da se dobiju neki dublji rezultati u teoriji konformnih preslikavanja.

Definicija 1.5.1. - Jordan-ova kriva (ili prosta zatvorena kriva) je homeomortna slika jediničnog kruga. Neka je kriva K u kompleksnoj ravni definisana sa funkcijom $w(t)$ na $[0,2\pi]$. Kriva K se naziva rektificibilna ako je $w(t)$ ograničene varijacije. U tom slučaju njena dužina je definisana kao totalna varijacija funkcije $w(t)$:

$$L = \sup \sum_{k=1}^{n} |w(t_k) - w(t_{k-1})| ,$$

gde se supremum uzima preko svih konačnih podela

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 2\pi$$

intervala $[0,2\pi]$. Lako je dokazati da L zavisi samo od krive K i da je invarijanta u odnosu na zamenu parametra. Ako je $w(t)$ apsolutno neprekidna dužina dela krive K koji je korespondiran intervalu $a \le t \le b$ je

$$\int_a^b |w'(t)|\, dt .$$

Otuda sledi da proizvoljni merljiv skup E (mera u smislu Lebesgue) ima sliku na K mere

$$\int_E |w'(t)|\, dt .$$

Poznata Carathéodory-eva teorema tvrdi da konformno preslikavanje $W=f(z)$ jediničnog diska $|z|<1$ na unutrašnjost proste zatvorene krive K može biti homeomorfno prošireno na $|z|\le 1$. U tom slučaju, $W=f(e^{i\theta})$ je parametrizacija krive K. Primenjujući Teoreme 1.5.1 i 1.5.2 dobijamo važan rezultat

Teorema 1.5.3. - Neka je $f(z)$ konformno preslikavanje jedininog diska $|z|<1$ na unutrašnjost proste zatvorene krive K. Tada kriva K je rektificibilna ako i samo ako je $f' \in H^1$.

Ova teorema ima jasnu geometrijsku interpretaciju. Naime, dužine

$$L_r = r \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})|\, d\theta$$

krivih K_r koje su slike kruga $|z| = r$ ograničene su ako i samo ako granica krive K ima konačnu dužinu. Interesantno je napomenuti da ako je kriva K iz Teoreme 1.5.3 rektificibilna skupovi mere 0 na $|z| = 1$ preslikavaju se na skupove mere 0 na K i preslikavanje $W=f(z)$ je konformno u skoro svim tačkama granice.

1.6. NEJEDNAKOSTI FEJER-RIESZ-A, HILBERT-A I HARDY-A

U ovom paragrafu izlažemo neke nejednakosti koje se odnose na uporedjivanje dveju normi u Hardy-evim prostorima. Podvucimo da je ovde izložen jedan specijalan metod za dobijanje nejednakosti, jer u teoriji nelinearnih ekstremalnih problema bar do sada nije pronadjen metod koji bi obuhvatio većinu primera, kao u teoriji linearnih ekstremalnih problema.

Teorema 1.6.1. - (Fejér-Riesz-ova nejednakost). - Ako je $f \in H^p$ $(0 < p < \infty)$, tada integral $\int_{-1}^{1} |f(x)|^p dx$ konvergira i važi nejednakost

$$\int_{-1}^{1} |f(x)|^p dx \le \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p d\theta .$$

Konstanta 1/2 je najbolja moguća.

Kombinujući ovu teoremu sa Teoremom 1.5.3 dobijamo posledicu koja ima jasno geometrijsko tumačenje.

Posledica 1.6.1. - Ako je jedinični disk konformno preslikan na unutrašnjost proste, zatvorene, rektificibilne krive K, tada kriva koja je slika bilo kog dijametra kruga ima manju dužinu od polovine dužine krive K.

Nejednakosti koje ćemo sada dokazati nazvane su po Hilbert-u i Hardy-ju. Napomenimo samo da ćemo u formulaciji sledeće teoreme za kompleksan vektor $x = (x_0, x_1, \dots, x_N)$ upotrebiti oznaku

$$\|x\|^2 = \sum_{\nu=0}^{N} |x_\nu|^2 .$$

Teorema 1.6.2. - Neka je $\psi \in L^\infty$,

(1.6.1) $$\lambda_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} \psi(t)\, dt, \quad n = 0,1,2,\dots$$

i

$$A_N(x,y) = \sum_{n,m=0}^{N} \lambda_{n+m} x_n y_m .$$

Tada je

$$|A_N(x,y)| \leq \|\psi\|_\infty \|x\| \|y\|$$

Dokaz. - Ako stavimo $P(t) = \sum_{n=0}^{N} x_n e^{-int}$ dobijamo da je

$$|A_N(x,x)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [P(t)]^2 \psi(t)\, dt \right|$$

$$\leq \|\psi\|_\infty \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P(t)|^2\, dt = \|\psi\|_\infty \|x\|^2.$$

Kako je

$$A_N(x,y) = \frac{1}{4} A_N(x+y, x+y) - \frac{1}{4} A_N(x-y, x-y)$$

nalazimo da je

$$|A_N(x,y)| \leq \frac{1}{4} \|\psi\|_\infty \{ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \}$$

$$= \frac{1}{2} \|\psi\|_\infty \{ \|x\|^2 + \|y\|^2 \}$$

Otuda sledi da je $|A_N(x\ y)| \leq \|\psi\|_\infty$ ako je $\|x\| = \|y\| = 1$. Medjutim, dokaz u opštem slučaju sledi ako dobijeni rezultat primenimo na vektore $x\,\|x\|^{-1}$, $y\,\|y\|^{-1}$.

Ako u prethodnoj nejednakosti izaberemo specijalno $\psi(t)=ie^{-it}(\pi-t)$ dobijamo da je $\lambda_n=(n+1)^{-1}$ i $\|\psi\|_\infty=\pi$. Otuda imamo sledeću posledicu koja je poznata pod nazivom Hilbert-ova nejednakost.

Posledica 1.6.2. - (Hilbert-ova nejednakost). - Ako je $x=(x_0,x_1,\ldots,x_N)$ i $y=(y_1,y_2,\ldots,y_N)$ tada je

$$\left|\sum_{n,m=0}^{N} \frac{x_n y_m}{n+m+1}\right| \leq \pi \|x\| \|y\| .$$

Teorema 1.6.3. - Neka je $\lambda_n>0$ definisano sa (1.6.1) i $f(z)=\sum a_n z^n \in H^1$, tada je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n |a_n| \leq \|\psi\|_\infty \|f\|_1 .$$

Dokaz. - Kako svaka funkcija $f\in H^1$ može biti predstavljena u obliku $f=gh$, gde su g i h funkcije klase H^2 koje zadovoljavaju uslov $\|g\|_2^2=\|h\|_2^2=\|f\|_1$, primenom Teoreme 1.6.2 dobijamo

$$\sum_{n=0}^{N} \lambda_n|a_n| \leq \sum_{n=0}^{N}\lambda_n \sum_{k=0}^{n}|b_k|\,|c_{n-k}|$$

$$\leq \sum_{k,m=0}^{N}\lambda_{k+m}\,|b_k|\,|c_m| \leq \|\psi\|_\infty \|g\|_2\,\|h\|_2 = \|\psi\|_\infty \|f\|_1 .$$

Posledica 1.6.3. (Hardy-eva nejednakost). - Ako je $f(z)=\sum a_n z^n \in H^1$, tada je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|}{n+1} \leq \pi \|f\|_1 .$$

Ova nejednakost se dokazuje sa istim izborom funkcije ψ kao u dokazu Hilbert-ove nejednakosti. Navedimo jednu interesantnu posledicu. Pretpostavimo da je $f(z)=\sum a_n z^n$ analitička u $|z|<1$. Ako je $\sum |a_n| < +\infty$, tada f ima neprekidno proširenje na $|z|\leq 1$, ali suprotno ne mora biti tačno. Hardy-eva nejednakost pokazuje, ipak, da ako je $f'\in H^1$

(ili ekvivalentno, u pogledu Teoreme 1.5.2, ako je f neprekidna u $|z| \leq 1$ i apsolutno neprekidna na $|z|=1$), tada $\sum |a_n| < +\infty$. Specijalno, $\sum |a_n| < +\infty$ ako je f konformno preslikavanje jediničnog diska na unutrašnost proste, zatvorene i rektificiO bilne krive.

Glava II

PRIMENA IZOPERIMETRIJSKE NEJEDNAKOSTI U PROSTORU H^1

Mada je klasična izoperimetrijska nejednakost bila poznata još starim Grcima, ona nije prestala da interesuje matematičare o čemu svedoče mnogobrojna istraživanja koja imaju za cilj da primene ovu nejednakost u drugim oblastima ili daju nove dokaze i generalizacije.

U ovom radu neće biti reči o mnogobrojnim geometrijskim generalizacijama ove nejednakosti (stoga opsežna literatura koja govori o tome ovde nije citirana), s obzirom da su predmet ovog istraživanja medjusobne veze i uticaji teorije konformnih preslikavanja i H^1 prostora (specijalno ekstremalnih problema u H^1) s jedne strane i izoperimetrijske nejednakosti sa druge strane.

2.1. IZOPERIMETRIJSKA NEJEDNAKOST

Kao što smo već napomenuli u uvodu izoperimetrijska nejednakost je poslužila kao osnova za rezultate koje sam dobio. U [7] je dokazana izoperimetrijska nejednakost za proste, zatvorene, glatke krive. Iz Green-ove formule sledi da se površina oblasti koju ograničava prosta, zatvorena glatka kriva K može definisati sa krivolinijskim integralom

$$\frac{1}{2}\int_K x\,dy - y\,dx\,.$$

Prenoseći ovaj pojam površine na zatvorene, neprekidne, rektificibilne krive i modifikujući dokaz iz [7]* možemo izvesti izoperimetrijsku nejednakost za zatvorene, neprekidne rektificibilne krive. Najpre dajemo Wirtinger-ovu lemu na kojoj baziramo dokaz izoperimetrijske nejednakosti.

*) Razni dokazi izoperimetrijske nejednakosti mogu se naći, na primer, u [3].

Lema 2.1.1. - Ako je realna funkcija f neprekidna na $[0,2\pi]$, $f' \in L^2[0,2\pi]$, $f(0)=f(2\pi)$ i

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0$$

tada je

$$\int_0^{2\pi} [f'(x)]^2 dx \geq \int_0^{2\pi} [f(x)]^2 dx ,$$

gde znak jednakosti važi ako i samo ako je $f(x)= A\cos x + B\sin x$.

Ova lema se jednostavno dokazuje ako se primeni Parseval-ova teorema na Fourier-ove razvoje

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

$$f'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n(b_n \cos nx - a_n \sin nx) .$$

Teorema 2.1.1. (Izoperimetrijska nejednakost). - Ako je K neprekidna, zatvorena i rektificibilna kriva u kompleksnoj ravni C, čija je dužina L i koja ograničava površinu F, tada je

$$L^2 - 4\pi F \geq 0 ,$$

gde znak jednakosti važi ako i samo ako je kriva K krug sa pozitivnim smerom obilaska.

Dokaz. - Uvedimo parametar t

$$t = \frac{2\pi s}{L}$$

gde je s dužina luka krive računata počev od neke tačke. Sada jednačinu kojom je zadata kriva K možemo napisati u obliku

$$x = x(t) , \quad y = y(t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi) .$$

Ne umanjujući opštost dokaza možemo pretpostaviti da je

$$\int_0^{2\pi} x(t)\,dt = 0$$

Kako je

$$[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 = [s'_t]^2 = \frac{L^2}{4\pi^2}$$

primenom Wirtinger-ove leme dobijamo

$$\frac{L^2}{2\pi} - 2F = \int_0^{2\pi}[x'^2 + y'^2]\,dt - 2\int_0^{2\pi} x\,y'\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi}[x - y']^2\,dt + \int_0^{2\pi}[x'^2 - x^2]\,dt \geq 0$$

Otuda, takodje, primenom Wirtinger-ove leme nalazimo da znak jednakosti važi ako i samo ako je

$$x(t) = A\cos t + B\sin t$$

i

$$y(t) = \int x(t)\,dt = A\sin t - B\cos t + C,$$

tj. ako je kriva K krug.

2.2. IZOPERIMETRIJSKA NEJEDNAKOST U H^1

U ovom paragrafu daje se procena za Dirichlet-ov integral $\iint_{|z|<1} |f'(z)|^2 dx dy \leq \pi \|f'\|_1^2$ ako je $f' \in H^1$ i niz posledica i uopštenja ovog rezultata. Ovi moji rezultati objavljeni su u [23].

1. Uvod. - Neka je H^p Hardy-ev prostor analitičkih funkcija u jediničnom disku $|z|<1$ i $B_p(0<p<1)$ Banach-ov prostor koji ga sadrži, tj. prostor analitičkih funkcija u $|z|<1$, u kome je norma definisana sa

$$\|f\|_{B_p} = \iint_{|z|<1} |f(z)|\,(1-|z|)^{1/p-2}\,dx\,dy < +\infty .$$

Kao ilustracija Teoreme o množiteljima prostora H^1 u prostor H^2 ([6] , Teorema 6.7, str. 103) navedena je sledeća posledica: ako je $f(z) = \sum a_n z^n \in H^1$, tada je $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}|a_n|^2 < +\infty$. Takodje, je istaknuto da ovaj rezultat sledi iz Hardy-eve nejednakosti ([6] , str. 48) i činjenice da $a_n \to 0$.

Hardy i Littlewood [10] su pokazali da je identičko preslikavanje prostora $H^{1/2}$ u prostor $B_{1/2}$ neprekidno, tj. da postoji konstanta C koja ne zavisi od $f \in H^{1/2}$ tako da je $\|f\|_{B_{1/2}} \leq C \|f\|_{1/2}$. Kratak dokaz ovog rezultata baziran na unutrašnje-spoljašnjoj faktorizaciji dat je u nedavnom radu Shapiro-a ([30], str. 117-118), gde je takodje dokazano da je

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{-1} |a_n|^2 \leq \pi \|f\|_1^2$$

za svako $f(z) = \sum a_n z^n \in H^1$.

Koristeći izoperimetrijsku najednakost pokazao sam da konstanta π može biti zamenjena sa 1 i dobio niz posledica i generalizacija ovog rezultata. Sve procene koje navodim su najbolje moguće, jer za sve njih rešavam i odgovarajući ekstremalni problem, tj. nalazim klasu funkcija za koju je u pomenutim nejednakostima važi znak jednakosti.

Lema 2.2.1. - Ako je kriva K definisana pomoću apsolutno neprekidne kompleksne funkcije realne promenljive $W(t)=x(t)+iy(t)$ $(0 \leq t \leq 2\pi$, $W(0)=W(2\pi))$, tada je

$$\left[\int_0^{2\pi} |W'(t)|\, dt\right]^2 - 4\pi \int_0^{2\pi} x(t)\, y'(t)\, dt \geq 0 ,$$

gde znak jednakosti važi ako i samo ako je kriva K krug sa pozitivnom orijentacijom.

Dokaz. - Kako je dužina L krive K, definisana apsolutno-neprekidnom funkcijom W(t), data formulom

$$L = \int_0^{2\pi} |W'(t)|\, dt$$

primenom izoperimetrijske nejednakosti dobijamo Lemu 2.2.1.

Lema 2.2.2. - Ako je $f(z) = u + iv = \sum a_n z^n$ analitička funkcija u $|z| < 1$, tada je

$$\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\, v'_\theta(re^{i\theta})\, d\theta = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 r^{2n} \quad (0<r<1)$$

Dokaz. - Kako je

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n e^{in\theta} + \bar{a}_n e^{-in\theta}) r^n$$

i

$$v(re^{i\theta}) = \frac{1}{2i} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n e^{in\theta} - \bar{a}_n e^{-in\theta}) r^n ,$$

dobijamo

$$\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) v'_\theta(re^{i\theta})\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \{ \frac{1}{4} \sum_{m=0}^{\infty} r^m (a_m e^{im\theta} + \bar{a}_m e^{-im\theta}) \times \sum_{n=0}^{\infty} n r^n (a_n e^{in\theta} + \bar{a}_n e^{-in\theta}) \} d\theta$$

$$= \pi \sum_{n=0}^{\infty} n |a_n|^2 r^{2n} .$$

Lema 2.2.3. - Ako je $f(z) = \sum a_n z^n$, u=Ref, V=imf i $f' \in H^1$, tada je

$$\int_0^{2\pi} u(\theta) v'(\theta)\, d\theta = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 .$$

Dokaz. - Kako je $f' \in H^1$, na osnovu Teoreme 1.5.2 zaključujemo da je f neprekidna u $|z| \leq 1$ i apsolutno neprekidna na $|z|=1$, pa za proizvoljno $\varepsilon > 0$, postoji r_0 ($0 < r_0 < 1$) tako da je $|f(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})| < \varepsilon$ za $r \geq r_0$. Tada je za $r \geq r_0$

$$\left| \int_0^{2\pi} Re\, f(re^{i\theta})\, Re\, e^{i\theta} f'(re^{i\theta})\, d\theta - \int_0^{2\pi} Re\, f(e^{i\theta})\, Re\, e^{i\theta} f'(re^{i\theta})\, d\theta \right| \leq$$

(2.2.1)

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|\; |f'(re^{i\theta})|\, d\theta \leq 2\pi\, \varepsilon\, \|f'\|_1 .$$

S druge strane nalazimo

$$\left| \int_0^{2\pi} Re\, f(e^{i\theta})\; Re\, e^{i\theta} f'(e^{i\theta})\, d\theta - \int_0^{2\pi} Re\, f(e^{i\theta})\; Re\, e^{i\theta} f'(re^{i\theta})\, d\theta \right|$$

(2.2.2)

$$\leq \|f\|_\infty \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta}) - f'(e^{i\theta})|\, d\theta .$$

Kako je $u(re^{i\theta}) = Ref(re^{i\theta})$ i $V'_\theta(re^{i\theta}) = r\, Re\, e^{i\theta} f'(re^{i\theta})$ iz (2.2.1) i (2.2.2) nalazimo

$$\lim_{r\to 1} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\, V'_\theta(re^{i\theta})\, d\theta = \int_0^{2\pi} u(\theta)\, V'_\theta(e^{i\theta})\, d\theta .$$

Na osnovu Leme 2.2.2 dobijamo

$$\pi \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 = \lim_{r\to 1} \pi \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 r^{2n} = \int_0^{2\pi} u(\theta)\, V'_\theta(e^{i\theta})\, d\theta .$$

Napomena 2.2.1 - Dokaz prethodne leme se može takodje izvesti pomoću sledeće teoreme o H^1 funkcijama: ako je $f(z) = \sum a_n z^n \in H^1$ i ako su Cn Fourier-ovi koeficijenti granične funkcije $f(e^{i\theta})$, tada je $Cn = a_n$ za $n \geq 0$ i $Cn = 0$ za $n < 0$ ([6] , Teorema 3.4, str. 38) i činjenice da Parseval-ova relacija važi ako je jedna od fukcija integrabilna, a druga ograničene varijacije ([32]; str. 88-91).

Teorema 2.2.1. - Ako je $f(z) = \sum a_k z^k$ i $f' \in H^1$, tada je

(2.2.3)
$$\sum_{k=0}^{\infty} k|a_k|^2 \leq \|f'\|_1^2 ,$$

gde znak jednakosti važi ako i samo ako je

$$f(z) = \lambda(z-\alpha)(1-\bar{\alpha} z)^{-1} + w_0 \quad (\lambda \in C,\ |\alpha|<1,\ w_0 \in C).$$

Dokaz. - Kako je $f' \in H^1$, na osnovu Teoreme 1.5.2 zaključujemo da je f apsolutno neprekidna i da je

$$\frac{d}{d\theta} f(e^{i\theta}) = i e^{i\theta} \lim_{r\to 1} f'(re^{i\theta}) \qquad \text{s.s.}$$

Otuda je

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{d}{d\theta} f(e^{i\theta}) \right| d\theta = 2\pi \|f'\|_1 .$$

Sada, nejednakost (2.2.3) direktno sledi iz prethodnih lema.

Neka je $\sum_{k=0}^{\infty} k|a_k|^2 = \|f'\|_1^2$. Primenom Leme 2.2.1 i Leme 2.2.3 zaključujemo da je kriva K definisana funkcijom $W = f(e^{it})$ $(0 \le t \le 2\pi)$ krug sa pozitivnom orijentacijom, centrom u nekoj tački Wo i radijusom $r = \|f'\|_1$. Tada je funkcija $g(z) = \|f'\|_1^{-1} \cdot (f(z) - W_0)$ analitička u $|z| < 1$, neprekidna u [illegible] homeomorfna na $|z| = 1$. Iz principa invernog principu korespondencije granica sledi da je g konformno preslikavanje jediničnog diska $|z| < 1$ na $|z| < 1$. Otuda je na osnovu poznate teoreme ([28] , str. 242) $g(z) = \lambda(z-\alpha)(1-\bar{\alpha}z)^{-1}$ $(|\lambda| = 1, |\alpha| < 1)$.

<u>Definicija</u> 2.2.1. - Dirichlet-ov prostor D je prostor analitičkih funkcija u kome je norma definisana sa

$$\|f\|_D^2 = \iint_{|z|<1} |f'(z)|^2 \, dx \, dy .$$

Iz Teoreme 2.2.1 neposredno sledi

Posledica 2.2.1. - Ako je $f' \in H^1$, tada je

$$\|f\|_D \le \pi^{1/2} \|f'\|_1 ,$$

gde znak jednakosti važi ako i samo ako je $f(z) = \lambda(z-\alpha)(1-\bar{\alpha}z)^{-1} + W_0$ $(\lambda, W_0 \in$ [illegible]

Posledica 2.2.2. - Ako je $f(z) = \sum a_n z^n$, $f(0) = 0$ i $f' \in H^1$, tada je

$$\|f\|_1 \le \|f'\|_1$$

gde znak jednakosti važi ako i samo ako je $f(z) = a_1 z$ (a_1 je proizvoljna kompleksna konstanta).

Dokaz. - Iz Parseval-ove relacije i Teoreme 2.2.1 sledi

$$\|f\|_1^2 \le \|f\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 \le \|f'\|_1^2$$

Otuda je $\|f\|_1 \le \|f'\|_1$. Drugi deo teoreme neposredno sledi.

Teorema 2.2.2. - Ako je $f(z)=\sum a_n z^n \in H^1$, tada je

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{-1}|a_n|^2 \leq \|f\|_1^2,$$

gde znak jednakosti važi ako i samo ako je

$$f(z)=\alpha(1-\beta z)^{-2} \quad (\alpha\in C,\ |\beta|<1).$$

Dokaz. - Neka je $g(z)=\int_0^z f(\zeta)\,d\zeta \quad (|z|<1)$. Tada je

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+1)^{-1}z^{n+1} \quad i \quad g'(z)=f(z).$$

Primenjujući Teoremu 2.2.1 na funkciju $g(z)$ dobijamo

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{-1}|a_n|^2 \leq \|f\|_1^2$$

gde jednakost važi ako i samo ako je $g(z)=\lambda(z-z_0)(1-\bar{z}_0 z)^{-1}+w_0$ $(\lambda\in C,\ |z_0|<1,\ w_0\in C)$. Iz $f(z)=g'(z)$ nalazimo da znak jednakosti važi ako i samo ako je $f(z)=\alpha(1-\beta z)^{-2}$ $(\alpha\in C,\ |\beta|<1)$.

Definicija 2.2.2. - Prostor Σ_α $(\alpha>0)$ je prostor analitičkih funkcija $f(z)=\sum a_n z^n$ u $|z|<1$, u kome je norma definisana sa

$$\|f\|_\alpha^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{-\alpha}|a_n|^2 < +\infty.$$

Napomena 2.2.2. - Prostor Σ_α $(\alpha>0)$ je Hilbert-ov prostor u kome je skalarni proizvod definisan sa

$$(f,g)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{-\alpha}a_n\bar{b}_n,$$

gde je $g(z)=\sum b_n z^n$.

Posledica 2.2.3. - Ako je $f\in H^1$, tada je

$$\left\{\pi^{-1}\|f^2\|_{B_{1/2}}\right\}^{1/2} = \|f\|_{\Sigma_1} \leq \|f\|_1$$

gde znak jednakosti važi ako i samo ako je

$$f(z)=\alpha(1-\beta z)^{-2} \quad (\alpha\in C,\ |\beta|<1).$$

Primenjujući TEoremu 2.2.2 na funkciju $q(z) = (f(z) - a_0) z^{-1}$ dobijamo sledeću

Posledica 2.2.4. - Ako je $f(z) = \sum a_n z^n \in H^1$, tada je

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} |a_n|^2 \leq \|f - a_0\|_1^2 ,$$

gde znak jednakosti važi ako i samo ako je $f(z) = \alpha z (1-\beta z)^{-2} + a_0 \ (\alpha \in C, |\beta| < 1)$.

Teorema 2.2.3. - Ako je $f(z) = \sum a_n z^n \in H^2$, tada je

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{-1} \left| \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu a_{n-\nu} \right|^2 \leq \|f\|_2^4 = \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 \right\}^2 ,$$

gde znak jednakosti važi ako i samo ako je $f(z) = \alpha (1-\beta z)^{-1} \ (\alpha \in C, |\beta| < 1)$.

Dokaz. - Iz $f(z) = \sum a_n z^n \in H^2$ sledi da je

(2.2.4) $$f^2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \in H^1 ,$$

gde je $c_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu a_{n-\nu}$. Na osnovu Parseval-ove relacije nalazimo da je

(2.2.5) $$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 \, d\theta = \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu|^2 .$$

Primenom Teoreme 2.2.2 na funkciju $f^2 \in H^1$ i korišćenjem relacija (2.2.4) i (2.2.5) dobijamo Teoremu 2.2.3.

Posledica 2.2.5. - Ako je $(a_\nu)_{\nu = 0,1,2,\ldots} \in \ell_2$, tada je

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{-1} \left| \sum_{j,k=0}^{n} a_j a_k a_{n-j} a_{n-k} \right| \leq \|a_\nu\|_{\ell^2}^4$$

gde znak jednakosti važi ako i samo ako je

$$a_\nu = \alpha \beta^\nu \ (\nu = 0,1,2,\ldots , \ \alpha \in C, \ |\beta| < 1) .$$

Teorema 2.2.4. - Neka $f(z)=\sum a_k z^k$, $f'\in H^1$ i $g(z)=\sum b_k z^k \in H^1$. Tada je

(2.2.6) $$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\bar{a}_k b_k\right| \leq \|g-b_0\|_1 \, \|f'\|_1 ,$$

gde znak jednakosti važi ako i samo ako je

(2.2.7) $$f(z)=\alpha(z-\beta)(1-\bar{\beta}z)^{-1}+w_0 , \quad g(z)=b_0+\gamma z(1-\bar{\beta}z)^{-2} \quad (\alpha,\gamma,b_0,w_0\in\mathbb{C},$$

$|\beta|<1$).

Dokaz. - Iz Teoreme 2.2.1 i Posledice 2.2.4 sledi

(2.2.8) $$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}|b_k|^2 \leq \|g-b_0\|_1^2$$

i

(2.2.9) $$\sum_{k=1}^{\infty} k\,|a_k|^2 \leq \|f'\|_1^2 .$$

Kombinujući Schwarz-ovu nejednakost sa (2.2.8) i (2.2.9) nalazimo da je

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\bar{a}_k b_k\right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_k b_k|\right)^2$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} k\,|a_k|^2\right) \times \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}|b_k|^2\right)$$

$$\leq \|f'\|_1^2 \quad \|g-b_0\|_1^2$$

Jednakost u relaciji (2.2.6) važi ako i samo ako u svim prethodnim nejednakostima važi znak jednakosti. Otuda je

(2.2.10) $$\bar{a}_k b_k = |\bar{a}_k b_k|\, e^{i\varphi} \quad (0\leq\varphi<2\pi)$$

i

(2.2.11) $$|b_k| = \rho\, k\, |a_k| \quad (\rho>0,\ k=1,2,3,\ldots) .$$

Iz relacije (2.2.10) i (2.2.11) sledi $b_k = \gamma k a_k$ $(\gamma = \zeta e^{i\varphi}, \ldots)$, tj. $q(z) - b_0 = \gamma z f'(z)$. Sada, na osnovu Teoreme 2.2.1 i Posledice 2.2.4 nalazimo da f i q imaju oblik dat sa (2.2.7).

2.3. IZOPERIMETRIJA I NEKI EKSTREMALNI PROBLEMI U H^1

1. Uvod. Hardy i Litllewood [10] su pokazali da je indentičko preslikavanje prostora $H^{1/2}$ u prostor $B_{1/2}$ neprekidno, tj. da postoji konstanta C koja ne zavisi od $f \in H^{1/2}$ tako da je $\|f\|_{B_{1/2}} \leq C \|f\|_{1/2}$. Kratak dokaz ovog rezultata baziran na unutrašnje-spoljašnjoj faktorizaciji dat je u nedavnom radu Shapiro-a ([30] , str. 117-118), gde je takodje pokazano da je $\|f\|_{B_{1/2}} \leq 3\pi^2 \|f\|_{1/2}$ za svako $f \in H^{1/2}$. Koristeći izoperimetrijsku nejednakost pokazao sam da konstanta $3\pi^2$ može biti zamenjena sa π i dobio nekoliko posledica i generalizacija ovog rezultata.

<u>Teorema</u> 2.3.1. - Ako je $f \in H^{1/2}$, tada je

$$\|f\|_{B_{1/2}} \leq \pi \|f\|_{1/2}, \tag{2.3.1}$$

gde znak jednakosti važi ako i samo ako je $f = \alpha(1-\beta z)^{-4}$ $(\alpha \in \mathbb{C}, |\beta| < 1)$.

Dokaz. Ako f nema nula u $|z|<1$, tada je $f^{1/2} \in H^1$ i iz Posledice 2.2.3 nalazimo

$$\|f\|_{B_{1/2}} \leq \pi \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^{1/2} d\theta \right\}^2 = \pi \|f\|_{1/2}$$

Ako $f \in H^{1/2}$ ima nula u $|z|<1$, tada se f može napisati u obliku $f(z) = B(z)\, q(z)$, gde je B Blaschke-ov proizvod, a $q(z)$ funkcija klase $H^{1/2}$ koja nema nula u $|z|<1$. U tom slučaju je

$$\iint_{|z|<1} |f(z)|\, dx\, dy \leq \iint_{|z|<1} |q(z)|\, dx\, dy \leq \pi \|q\|_{1/2} = \pi \|f\|_{1/2} . \tag{2.3.2}$$

Ako u relaciji (2.3.1) važi znak jednakosti tada u obe nejednakosti relacije (2.3.2) važi znak jednakosti. Otuda je $|B(z)| = 1$ za $|z| < 1$ i na osnovu Posledice 2.2.3 $[q(z)]^{1/2} = \alpha_1 (1-\beta z)^{-2}$ $(\alpha_1 \in C, \ |\beta| < 1)$, tj. f ima oblik dat sa Teoremom 2.3.1.

Koristeći istu tehniku možemo izvesti opštiju teoremu.

<u>Teorema</u> 2.3.2. - Ako je $f \in H^p$ $(0 < p < \infty)$, tada je

$$\iint_{|z|<1} |f|^{2p} dx\,dy \leq \pi \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p d\theta \right\}^2, \tag{2.3.3}$$

gde znak jednakosti važi ako i samo ako je $f = \alpha (1-\beta z)^{-2/p}$ $(\alpha \in C, \ |\beta| < 1)$.

Dokaz. Neka je $f \in H^p$ $(0 < p < \infty)$ i neka f nema nula u $|z| < 1$. Tada je $f^{2p} \in H^{1/2}$ i relacija (2.3.3) sledi iz Teoreme 2.3.1. Ako $f \in H^p$ ima nula u $|z| < 1$, tada se f može predstaviti u obliku $f(z) = B(z)\, q(z)$, gde je B(z) Blaschke-ov proizvod, a $q(z) \in H^p$ nema nula u $|z| < 1$. U tom slučaju je

$$\iint_{|z|<1} |f|^{2p} dx\,dy \leq \iint_{|z|<1} |q|^{2p} dx\,dy \leq \pi \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |q(e^{i\theta})|^p d\theta \right\}^2 = \pi \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p d\theta \right\}^2.$$

Sličnim postupkom kao u Teoremi 2.3.1. dobijamo da ekstremalna funkcija f(z) ima oblik $f(z) = \alpha (1-\beta z)^{-2/p}$ $(\alpha \in C, \ |\beta| < 1)$.

<u>Definicija</u> 2.3.1. - Bergman-ov prostor B_2 je prostor analitičkih funkcija f u jediničnom disku u kome je norma definisana sa

$$\|f\|^2 = \pi^{-1} \iint_{|z|<1} |f|^2 dx\,dy .$$

Napomena 2.3.1. - Prostor B_2 je Hilbert-ov prostor u kome je skalarni proizvod definisan sa

$$(f, q) = \pi^{-1} \iint_{|z|<1} f \bar{q} \, dx\,dy$$

gde su $f, q \in B_2$.

Teorema 2.3.3. - Ako su $f, q \in H^1$, tada je

(2.3.4) $\quad |(f,q)| \leq \|f\|_1 \, \|q\|_1$,

gde znak jednakosti važi ako i samo ako je $f=\alpha(1-\beta z)^{-2}$, $q=\lambda f$ $(\alpha,\lambda\in C,\ |\beta|<1)$.

Dokaz. - Iz Schwarz-ove nejednakosti i Posledice 2.2.3 sledi

(2.3.5) $\quad |(f,q)| \leq \|f\|_{B_2} \, \|q\|_{B_2} \leq \|f\|_1 \, \|q\|_1$.

Ako u relaciji (2.3.4) važi znak jednakosti, tada u svim nejednakostima relacije (2.3.5) važi znak jednakosti. Otuda, s obzirom da u Schwarz-ovoj nejednakosti $|(f,q)| \leq \|f\|_{B_2} \|q\|_{B_2}$ važi znak jednakosti ako i samo ako je $q=\lambda f$ $(\lambda\in C)$ i na osnovu Posledice 2.2.3 dobijamo da f i q imaju oblik kao u Teoremi 2.3.3.

Iz prethodne Teoreme neposredno sledi

Posledica 2.3.1. - Bilinearna funkcionela na H^1, definisana sa

$$\Omega(f,q) = \pi^{-1} \iint_{|z|<1} f\bar{q}\, dx\, dy \qquad (f,q\in H^1)$$

ima normu $\|\Omega\| = 1$.

Da bismo iz Teoreme 2.3.3 izveli rešenje jednog poznatog ekstremalnog problema potrebna nam je sledeća lema.

Lema 2.3.1. - Ako su $f(z)=\sum a_n z^n \in H^1$, $g(z)=\sum c_n z^n \in H^1$ i $h(z)=\int_0^z g(\zeta)\,d\zeta$ $(|z|<1)$,

tada je

(2.3.6) $\quad \pi^{-1} \iint_{|z|<1} f\bar{g}\, dx\, dy = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} f\bar{h}\, dz$.

Dokaz. - Kako je $f\in H^1$ i $h(z)$ apsolutno neprekidna na $|z|=1$, primenom Parseval-ove relacije ([32], str. 88-91), na Fourier-ove razvoje

$$f(e^{i\theta}) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta}$$

$$h(e^{i\theta})\, e^{-i\theta} \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+1)^{-1} e^{in\theta}$$

nalazimo da je

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\,\overline{h(e^{i\theta})\,e^{-i\theta}}\,d\theta = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n\bar{c}_n}{n+1}\,. \tag{2.3.7}$$

S druge strane imamo

$$\begin{aligned}\pi^{-1}\iint_{|z|<1} f\,\bar{g}\,dx\,dy &= \pi^{-1}\int_0^1 r\,dr\int_0^{2\pi}\left(\sum a_n r^n e^{in\theta}\right)\times\left(\sum \bar{c}_n r^n e^{-in\theta}\right)d\theta \\ &= 2\int_0^1\left(\sum a_n\bar{c}_n r^{2n+1}\right)dr = \sum\frac{a_n\bar{c}_n}{n+1}\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

iz relacije (2.3.7) i (2.3.8) sledi (2.3.6).

Iz Teoreme 2.3.3 i Leme 2.3.1 neposredno sledi

Posledica 2.3.2. - Ako je $f, h' \in H^1$, tada je

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=1} f(z)\,\overline{h(z)}\,dz\right| \le \|f\|_1\,\|h'\|_1\,,$$

gde znak jednakosti važi ako i samo ako je

$$h'(z) = \alpha(1-\beta z)^{-2},\quad f = \gamma h'(z)\quad (\alpha,\gamma\in C,\ |\beta|<1).$$

Teorema 2.3.4.* - Ako je $f(z) = \sum a_n z^n \in H^1$ i $|\beta|<1$, tada je

$$|f(\beta)| \le (1-|\beta|^2)^{-1}\,\|f\|_1,$$

gde znak jednakosti važi ako i samo ako je $f(z) = \alpha(1-\beta z)^{-2}$ $(\alpha\in C, |\beta|<1)$.

Dokaz. Na osnovu Parseval-ove relacije nalazimo

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f(z)\,\overline{(1-\beta z)^{-1}}\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\beta^{n+1} = \beta f(\beta)$$

i

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|\beta|}{|1-\beta e^{i\theta}|^2}\,d\theta = |\beta|\sum_{n=0}^{\infty}|\beta|^{2n} = \frac{|\beta|}{1-|\beta|^2}\,.$$

Sada dokaz Teoreme 2.3.4 sledi ako u Posledici 2.3.2 za funkciju $h(z)$ stavimo $(1-\beta z)^{-1}$.

Iz prethodne teoreme neposredno sledi

Posledica 2.3.3.* - Ako je $f \in H^p$ ($0 < p \leq \infty$), tada je

$$|f(\beta)| \leq (1-|\beta|^2)^{-1/p} \|f\|_p \quad (|\beta|<1) .$$

Znak jednakosti važi ako i samo ako je $f(z)= \alpha (1-\bar{\beta} z)^{-2/p}$ ($\alpha \in \mathbb{C}$, $|\beta|<1$).

2.4. DUALNA RELACIJA I IZOPERIMETRIJA

U ovom paragrafu, primenjujući dualnu relaciju na neke probleme iz prethodnog paragrafa, u nekim slučajevima dobijam bolje procene. Pored toga nalazim klasu ekstremalnih funkcija za razmatrani problem i Teoreme 2.2.1 i 2.2.2 prenosim na prostore $E_1(D)$.

Teorema 2.4.1. - Ako je $h \in H^1$, $K(z) = \int_0^z h(\zeta)\, d\zeta$ i sa

$$\Phi(f) = \pi^{-1} \iint_{|z|<1} f \bar{h} \, dx\, dy$$

definisana linearni funkcional na H^1, tada je

$$\|\Phi\| = \min_{g \in H^\infty} \|\bar{K} - g\|_\infty . \tag{2.4.1}$$

Dokaz. - Na osnovu Leme 2.3.1 nalazimo

$$\Phi(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} f(z)\, \overline{K(z)}\, dz . \tag{2.4.2}$$

Dualna relacija (Teorema 1.3.2) pokazuje da je

$$\sup_{f \in H^1,\, \|f\|_1 \leq 1} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} f(z)\, \overline{K(z)}\, dz \right| = \min_{g \in H^\infty} \|\bar{K} - g\|_\infty . \tag{2.4.3}$$

Iz relacija (2.4.2) i (2.4.3) sledi relacija (2.4.1).

Kako je $F(z)=f(z) \|f\|_1^{-1} \in H^1$ i $\|F\|_1=1$ za $f \in H^1$, iz Teoreme 2.4.1 sledi

Posledica 2.4.1. - Ako je $f, h \in H^1$ i $K(z)= \int_0^z h(\zeta)\, d\zeta$, tada je

$$\left|\pi^{-1}\iint\limits_{|z|<1} f\,\bar{h}\,dx\,dy\right| \le \|f\|_1 \min_{g\in H^\infty}\|\bar{h}-g\| .$$

Iz posledice 2.4.1 neposredno sledi

Posledica 2.4.2. - Ako je $f\in H^1$ i $K(z)=\int_0^z f(\zeta)\,d\zeta$, tada je

$$\pi^{-1}\iint\limits_{|z|<1}|f|^2\,dx\,dy \le \|f\|_1\,\|K\|_\infty .$$

<u>Teorema</u> 2.4.2. - Ako je $f'\in H^1$, tada je

(2.4.4) $$\pi^{-1}\iint\limits_{|z|<1}|f'|^2\,dx\,dy \le \|f'\|_1\,\|f\|_\infty ,$$

gde znak jednakosti važi ako i samo ako je $f(z)=Bz^m\prod_{i=1}^{n}(z-\alpha_i)(1-\bar{\alpha}_i z)^{-1}$ $(m,n\in N,\ |\alpha_i|<1,\ B\in C)$.

Dokaz. - Na osnovu Leme 2.3.1 nalazimo

(2.4.5) $$\begin{aligned}\pi^{-1}\iint\limits_{|z|<1}|f'|^2\,dx\,dy &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1} f'\bar{f}\,dz = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(e^{i\theta})\,\overline{f(e^{i\theta})}\,e^{i\theta}\,d\theta \\ &\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f'(e^{i\theta})\,f(e^{i\theta})|\,d\theta \le \|f'\|_1\,\|f\|_\infty .\end{aligned}$$

Ako u relaciji (2.4.4) važi znak jednakosti tada znak jednakosti važi u svim nejednakostima relacije (2.4.5). Otuda je

(2.4.6) $$f'(e^{i\theta})\,\overline{f(e^{i\theta})}\,e^{i\theta}\ge 0 \qquad \text{s.s.}$$

$$|f(e^{i\theta})| = \|f\|_\infty \qquad \text{s.s.}$$

Kako je $f'\in H^1$, iz Teoreme 1.5.2 zaključujemo da je $f(z)$ neprekidna na $|z|\le 1$. Stoga, ako je $\|f\|_\infty\ne 0$, postoji r_0 $(0<r_0<1)$ tako da je $|f(re^{i\theta})|\ge 2^{-1}\|f\|_\infty$ za $r\ge r_0$ i $\theta\in[0,2\pi]$. Dakle, funkcija $f(z)$ može imati nule samo na $|z|\le r_0$, a to znači konačno nula. Otuda, $f(z)$ možemo predstaviti u obliku $f=B\chi$ gde je $B(z)$ Blaschke-ov proizvod koji se sastoji od konačno faktora, a $q(z)$ neprekidna funkcija na $|z|\le 1$ koja nema nula u $|z|<1$ i koja zadovoljava uslov $|q(e^{i\theta})| = \|f\|_\infty = A > 0$. Na osnovu Schwarz-ovog principa simetrije sledi da q može biti proširena na celu kompleksnu ravan a da pri tome ostane analitička i ograničena.

Otuda je $q(z) \equiv B$, gde je $|B| = \|f\|_\infty$. Dakle, ako je f ekstremalna funkcija, tada je

(2.4.7) $$f(z) = \delta z^m \prod_{i=1}^{n} (z-\alpha_i)(1-\bar{\alpha}_i z)^{-1} \quad (\delta \in C,\ m, n \in N,\ |\alpha_i| < 1).$$

Suprotno, neka je f funkcija oblika (2.4.7) i neka je $B_i(z) = (z-\alpha_i)(1-\bar{\alpha}_i z)^{-1}$ $(|\alpha_i| < 1)$. Tada je

(2.4.8) $$|B|^{-2} f'(e^{i\theta}) \overline{f(e^{i\theta})} e^{i\theta} = \frac{d}{d\theta} \arg f(e^{i\theta})$$

i

(2.4.9) $$\frac{d}{d\theta} \arg B_i(e^{i\theta}) = (1-|\alpha_i|^2)\, |1-\bar{\alpha}_i e^{i\theta}|^{-2}$$

Iz relacije (2.4.8) i (2.4.9) zaključujemo da funkcija f zadovoljava relaciju (2.4.6), tj. da u relaciji (2.4.4) važi znak jednakosti.

Napomena 2.4.1. - Da za funkcije date relacijom (2.4.7) važi znak jednakosti u relaciji (2.4.4) možemo zaključiti i na drugi način. Zaista, dovoljno je primetiti da je $\iint_{|z|<1} |f'(z)|^2\, dx\, dy$ površina oblasti $f(U)$ na Riemanm-ovoj površini funkcije f, gde je $U = \{z : |z|<1\}$ i da, ako tačka z obidje jedanput krug $|z| = 1$ u pozitivnom smeru, njena slika f(z) obidje m+n puta krug $|z| = |B|$ u pozitivnom smeru.

Definicija 2.4.1. - Neka je data oblast D koja je ograničena sa rektificibilnom krivom γ i neka je f analitička funkcija u D. Kažemo da f pripada prostoru analitičkih funkcija $E_1(D)$, ako postoji niz rektificibilnih krivi γ_n koje konvergiraju ka γ, tako da je $\int_{\gamma_n} |f(z)|\,|dz| < C$, gde C ne zavisi od n.

Karakteristično svojstvo funkcija klase H^1 (Teorema 1.5.2) važi i za funkcije klase E_1: da bi analitička funkcija u oblasti D koja je ograničena rektificibilnom krivom L pripadala klasi E_1 potrebno je i dovoljno da njena primitivna funkcija bude neprekidna u D i apsolutno neprekidna na L ([26], str. 208).

Teorema 2.4.3. - Neka je D oblast ograničena rektificibilnom krivom γ čija je dužina L i s parametar dužine krive γ računat počev od neke tačke. Ako je $f \in E^1(D)$, tada je

$$\pi^{-1} \iint_D |f(z)|^2 \, dx\, dy \leq \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^L |f(s)| \, ds \right]^2, \tag{2.4.10}$$

sa znak jednakosti ako i samo ako je $f(z) = \alpha \psi'(z)(1-\beta\psi(z))^{-2}$, gde je α proizvoljna kompleksna konstanta, $|\beta| < 1$, a $\psi(z)$ proizvoljno konformno preslikavanje oblasti D na otvoren jedinični disk.

Dokaz. - Ako je $f(z) \in E^1(D)$, tada je $F(w) = f(\varphi(w))\, \varphi'(w) \in H^1$, za neko konformno preslikavanje $\varphi(W)$ jediničnog diska $|W| < 1$ na D. Otuda na osnovu Posledice 2.2.1, nalazimo

$$\pi^{-1} \iint_{|w|<1} |f(\varphi(w))|^2 \, |\varphi'(w)|^2 du\, dv \leq \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\varphi(e^{i\theta}))| \, |\varphi'(e^{i\theta})| d\theta \right]^2. \tag{2.4.11}$$

Ako se u relaciji (2.4.11) izvrši smena promenljivih $z = \varphi(W)$, s obzirom na poznate osobine integrala dobija se relacija (2.4.10).

Definicija 2.4.2. - Bergman-ov prostor $B_2(D)$ je prostor analitičkih funkcija u oblasti D u kome je norma definisana sa

$$\|f\|_D^2 = \iint_D |f|^2 \, dx\, dy < \infty.$$

Napomena 2.4.2. - Prostor $B_2(D)$ je Hilbert-ov prostor u kome je skalarni proizvod definisan sa

$$(f, g) = \iint_D f \bar{g}\, dx\, dy .$$

Iz prethodne teoreme i poznatih svojstava Hilbert-ovog prostora neposredno sledi

Posledica 2.4.3. - Neka je oblast D ograničena rektificibilnom krivom γ čija je dužina L, s parametar dužine krive γ računat počev od neke tačke i neka su $\hat{f}_i$ Fourier-ovi koeficijenti funkcije $f \in E^1(D)$ u odnosu na potpun ortonormiran sistem $\{f_i\}_{i \in I}$ u prostoru $B_2(D)$. Tada je

$$\sum_{i \in I} |\hat{f}_i|^2 \leq \frac{1}{4\pi} \left[\int_0^L |f(s)|\, ds \right]^2 ,$$

sa znakom jednakosti ako i samo ako je $f(z) = \alpha\, \varphi'(z)\, (1-\beta \varphi(z))^{-2}$, gde je α proizvoljna kompleksna konstanta, $|\beta| < 1$, a $\varphi(z)$ proivoljno konformno preslikavanje oblasti D na otvoren jedinični disk $|W| < 1$.

Podvucimo da iz ovog rezultata sledi Teorema 2.2.2 kao specijalan slučaj, ako za oblast D uzmemo otvoren jedinični disk, a za potpun ortonormiran sistem $\{\sqrt{n+1}\, \pi^{-1/2} z^n\}$ $n \in N$.

Teorema 2.4.4. - Neka je $f(z)$ analitička funkcija u otvorenom jediničnom disku $|z| < 1$ i $L(s)$ $(0 \leq s < 1)$ dužina krive definisane funkcijom $W(\theta) = f(s e^{i\theta})$ $(0 \leq \theta < 2\pi)$. Tada je

a) $$\int_0^s \frac{L^2(x)}{x}\, dx \leq \frac{L^2(s)}{2} \qquad (0 \leq s < 1)$$

b) $$\int_0^1 \frac{L^2(x)}{x}\, dx \leq 2\pi^2 \|f'\|_1^2 \quad \text{ako je } f' \in H^1.$$

Dokaz. - Uvedimo funkciju $f_s(z)=f(sz)$ $(0\le s<1)$ i primetimo da je

$$L(s)=\int_0^{2\pi}|f_s'(e^{i\vartheta})|\,d\vartheta = 2\pi\,\|f_s'\|_1 .$$

Na osnovu Posledice 2.2.1 imamo

(2.4.12) $$\pi^{-1}\iint_{|z|<1}|f_s'(z)|^2\,dx\,dy \le \|f_s'\|_1^2 = (2\pi)^{-2}L^2(s) \quad (0\le s<1).$$

Primenom Schwarz-ove nejednakosti na $|f_s'(re^{i\theta})|$ $(0\le\theta<2\pi)$ dobijamo

(2.4.13) $$(2\pi)^{-1}\left[\int_0^{2\pi}|f_s'(re^{i\theta})|\,d\theta\right]^2 \le \int_0^{2\pi}|f_s'(re^{i\theta})|^2\,d\theta .$$

Iz relacije (2.4.12) i (2.4.13) sledi

$$\int_0^s L^2(x)\,x^{-1}\,dx \le 2^{-1}L^2(s) \quad (0\le s<1).$$

Ako je $f'\in H^1$ prelaskom na graničnu vrednost u poslednjoj nejednakosti kada $s\to 1-$ dobijamo

$$\int_0^1 L^2(x)\,x^{-1}\,dx \le 2^{-1}L^2(1) = 2\pi^2\,\|f'\|_1^2$$

2.5. NEKE TEOREME O DIJAMETRU

U ovom paragrafu dajem rešenje problema ([17] , Problem 7,22) koji je F.W.Gehring postavio na simpozijumu za kompleksnu analizu održanom u Canterbury 1973. i nekoliko rezultata o upoređivanju transfinitnog diametra oblasti $f(U)$ i Hardy-eve norme za funkcije f klase H^2 i H^1.

Teorema 2.5.1. - Ako su A i B svezane, zatvorene, Jordan-ove krive u R^3 na medjusobnom rastojanju 1, tada je dužina krive A veća od 2π.

Dokaz. - Neka je x proizvoljna tačka krive A i

$$c(x,A) = \{ tx + (1-t)y \ : \ t \in [0,1],\ y \in A \}.$$

Prvo ćemo dokazati da je $c(x,A) \cap B \neq \emptyset$.

Pretpostavimo da je $c(x,A) \cap B = \emptyset$ i definišimo preslikavanje

$$F : A \times I \to R^3 \setminus B \ , \ I = [0,1]$$

sa

$$F(y,t) = tx + (1-t)y \ , \ (y,t) \in A \times I .$$

Preslikavanje F je dobro definisano jer je

$$F(y,t) = tx + (1-t)y \in c(x,A) \subset R^3 \setminus B$$

i

$$F(y,0) = y \ , \ F(y,1) = x .$$

Medjutim, ovo bi značilo da je kriva A kontraktibilna u $R^3 \setminus B$ što je kontradiktorno uslovima teoreme.

Dakle, $c(x,B) \cap A \neq \emptyset$. Otuda, neka je $y_0 \in c(x,A) \cap B$, tj. $y_0 = px + (1-p)\, y_1$, gde je $y_1 \in A$ i $0<p<1$.

Označimo sa

$$S(y_0,1) = \{ y \in R^3 \ : \ \|y - y_0\| = 1 \}.$$

Dalje, neka je preslikavanje

$$g : A \to S(y_0,1)$$

definisano sa

$$g(y) = y_0 + \frac{y-y_0}{\|y-y_0\|}$$

Ako su y' i y'' dve različite tačke krive A, $g(y') - y_0 = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ i $g(y'') - y_0 = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, lako je dokazati da je

$$(2.5.1) \qquad 2(K_1 K_2 - 1) \sum_{i=1}^{3} \xi_i \eta_i \leq K_1^2 + K_2^2 - 2 ,$$

gde je $K_1 = \|y' - y_0\|$ i $K_2 = \|y'' - y_0\|$.

Iz (2.5.1) sledi

$$2 - 2\sum_{i=1}^{3} \xi_i \eta_i \leq K_1^2 + K_2^2 - 2K_1K_2 \sum_{i=1}^{3} \xi_i \eta_i . \tag{2.5.2}$$

Kako je

$$\|g(y') - g(y'')\| = \sqrt{2 - 2\sum_{i=1}^{3} \xi_i \eta_i}$$

i

$$\|y' - y''\| = \sqrt{K_1^2 + K_2^2 - 2K_1K_2\sum_{i=1}^{3} \xi_i \eta_i}$$

na osnovu (2.5.2) nalazimo da je

$$\|g(y') - g(y'')\| \leq \|y' - y''\| \qquad (y', y'' \in A). \tag{2.5.3}$$

Sada, neka je kriva A definisana pomoću neprekidne funkcije $h: [a,b] \to R^3$

$$a = t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_n = b$$

podela intervala $[a, b]$. Iz (2.5.3) sledi

$$\sum_{i=1}^{n-1} \|g\circ h(t_{i+1}) - g\circ h(t_i)\| \leq \sum_{i=1}^{n-1} \|h(t_{i+1}) - h(t_i)\| \tag{2.5.4}$$

i

$$\sup \sum_{i=1}^{n-1} \|g\circ h(t_{i+1}) - g\circ h(t_i)\| \leq \sup \sum_{i=1}^{n-1} \|h(t_{i+1}) - h(t_i)\| , \tag{2.5.5}$$

gde se sup uzima preko svih konačnih podela intervala $[a,b]$

$$a = t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_n = b .$$

Definišimo krivu A' pomoću funkcije $f = g\circ h$ ($f: [a,b] \to A' \subset S(y_0, 1)$) i označimo sa $L(A)$ i $L(A')$ respektivno dužine krivih A i A'. Na osnovu (2.5.5) dobijamo

$$L(A) \geq L(A').$$

Kriva A' je zatvorena i sadrži dve dijametralno suprotne tačke $g(x)$ i $g(y_1)$ jedinične sfere $S(Yo,1)$. Otuda je $L(A') \geq 2\pi$, jer su geodezijske linije na sferi lukovi velikih krugova.

Definicija 2.5.1. - Neka je E ograničeno, beskonačno, zatvoreno mnoštvo u kompleksnoj ravni. Definišimo funkciju $\rho_n : E^n \to C$ $(n \geq 2)$ sa

$$\rho_n (z_1, z_2, \dots, z_n) = \prod_{\substack{k,\ell=1 \\ k<\ell}}^{n} (z_k - z_\ell) \quad ,$$

gde $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in E^n$. Označimo sa V_n maksimum funkcije $|\rho_n|$ na skupu E^n i stavimo

$$d_n = V_n^{\frac{2}{n(n-1)}}$$

Granica niza d_n kada $n \to \infty$ naziva se transfinitni diametar mnoštva E i označava sa $d = d(E)$. TRansfinitni dijametar konačnog mnoštva je 0.

Napomena 2.5.1. - Granična vrednost niza d_n postoji jer je niz d_n monotono opadajući i nenegativan. Kako je d_2 diametar mnoštva E, transfinitni dijametar je manji ili jednak od diametra mnoštva E.

Navedimo sledeću teoremu koju je dokazao Polya ([9], str. 327) a na kojoj baziramo dalje rezultate.

Teorema 2.5.2. - Spoljna Jordan-ova mera zatvorenog ograničenog mnoštva $E \subset C$ manja je ili jednaka od πd^2, gde je d transfinitni dijametar mnoštva E.

Teorema 2.5.3. - Ako je $f \in H^\infty$ i $f(o)=0$, tada je

$$\|f\|_2 \leq d \tag{2.5.6}$$

gde je d transfinitni diametar skupa $\overline{f(U)}$, $U = \{ z : |z| < 1 \}$.

Dokaz. - H. Alexander, B.A.Taylor i J.L.Ullman [2] su dokazali da je

$$(2.5.7)\qquad \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}|f(e^{i\theta})|^2\,d\theta \le m(f(U)) \quad (f\in N,\ f(0)=0),$$

gde je m oznaka za Lebesque-ovu meru. S druge strane, na osnovu Teoreme 2.5.2 zaključujemo da je

$$(2.5.8)\qquad m(f(U)) \le m(\overline{f(U)}) \le \pi d^2.$$

Iz relacija (2.5.7) i (2.5.8) neposredno sledi relacija (2.5.6).

Iz prethodne teoreme i Hölder-ove nejednakosti slede

Posledica 2.5.1. - Neka je $f\in H^\infty$, $f(o)=0$ i $1\le p\le 2$, tada je

$$\|f\|_p \le d$$

gde je d transfinitni dijametar skupa f(U).

Posledica 2.5.2. - Ako je $f\in H^\infty$ i $f(o)=0$, tada je

$$\|f\|_4 \le d_2$$

gde je d_2 dijametar oblasti f(U).

Interesantno je da se iz Teoreme 2.5.2 i poznatih činjenica o funkcijama koje pripadaju H^1 može izvesti izoperimetrijska nejednakost.

Teorema 2.5.4. - Neka je neprekidna, prosta zatvorena i rektificibilna kriva K zadata jednačinom $W=\lambda(t)$ $(o\le t\le 2\pi)$. Pretpostavimo da je dužina krive K jednaka L i da kriva K ograničava oblast D((o,o)∈ D) površine P. Tada je

$$4\pi P \le L^2$$

Dokaz. - Iz Teoreme 2.5.2 sledi

(2.5.9) $$P \leq \pi d^2,$$

gde je d transfirutni dijametar oblasti D. S druge strane transfinitni dijametar kontinuma D jednak je konformnom radijusu R oblasti CD u beskrajno dalekoj tački ([8] , str. 342), tj. postoji konformno preslikavanje

$$z(w) = \frac{w}{d} + a_0 + a_1 w^{-1} + \cdots$$

oblasti CD na oblast $|z|>1$. Inverzno preslikavanje preslikavanja z (w) preslikava $|z|>1$ na CD i ima oblik

(2.5.10) $$w(z) = b_0 + dz + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots \quad .$$

Dakle, preslikavanje $w_1(z) = [w(1/z)]^{-1}$ preslikava oblast $|z|<1$ na unutrašnjost proste, zatvorene, neprekidne i rektificibilne krive K' zadate jednačinom $w = [\lambda(t)]^{-1}$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$. Odatle je, na osnovu Teoreme 1.5.3 $w_1'(z) \in H^1$, tj. $(z\, f(z))' \in H^1$ i $z^2 f'(z) \in H^1$, gde je $f(z) = w(1/z)$. Specijalno $w = f(e^{i\theta})$ je parametrizacija krive K. Kako je

$$f(z) = b_0 + \frac{d}{z} + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots$$

i

$$f'(z) = -d/z^2 + b_1 + 2b_2 z + \cdots$$

nalazimo da je

$$d = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} z f'(z)\, dz \qquad (0<r<1),$$

to jest

(2.5.11) $$d \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r^2 |f'(re^{i\theta})|\, d\theta \, .$$

Dalje, iz $z^2 f'(z) \in H^1$, s obzirom na relaciju (2.5.11), sledi

(2.5.12) $$d \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f'(e^{i\theta})|\, d\theta = (2\pi)^{-1} L \, .$$

što je i trebalo dokazati.

Napomena 2.5.2. - Dokaz prethodne teoreme može se izvesti i na drugi način. S obzirom na oznake iz Teoreme 2.5.4 postoji konformno preslikavanje

$$w = f(z) = b_0 + d/z + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots$$

oblasti $|z| < 1$ na oblast $\overline{C} \setminus \overline{D}$. Površina $P(r)$ koju ograničava kriva $w = f(re^{i\theta})$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$ data je obrascem

$$P(r) = -\frac{1}{2i} \int_{|z|=r} \overline{f}\, df = -\frac{1}{2i} \int_{|z|=r} (\overline{b}_0 + \overline{d}/\overline{z} + \overline{b}_1 \overline{z} + \cdots)\cdot(-d/z^2 + b_1 + 2b_2 z + \cdots)\, dz.$$

Otuda, integracijom član po član proizvoda ovih redova dobijamo

$$P(r) = \pi\left(\frac{|d|^2}{r^2} - r^2 \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2\right) \le \frac{\pi}{r^2}|d|^2 \quad (0 < r < 1).$$

Prelaskom na graničnu vrednost kada $r \to 1-$ dobijamo

$$P \le \pi |d|^2$$

Sada se dokaz može izvesti ponavljanjem odgovarajućih detalja iz dokaza Teoreme 2.5.4.

<u>Definicija</u> 2.5.2. - Kažemo da konformno preslikavanje f oblasti $B = \{ z : |z| > 1 \}$ pripada klasi S_λ ako je

$$f(z) = \lambda z + \alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \cdots$$

za $z \in B$.

<u>Teorema</u> 2.5.5. - Ako je $g \in S_\lambda$, tada je

$$(2.5.13) \qquad m(C \setminus g(B)) \le \pi \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(e^{i\theta})|\, d\theta\right\}^2.$$

Dokaz. Slično kao u Napomeni 2.5.2 može se dokazati da je

(2.5.14) $$m(C\setminus g(B)) \le \pi |\lambda|^2 .$$

Iz teoreme o rezidumu sledi

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{g(z)}{z^2}\,dz = \lambda \qquad (1<r).$$

Otuda je

$$|\lambda| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r^{-1}|g(re^{i\theta})|\,d\theta .$$

Prelaskom na graničnu vrednost kada $r\to 1+$ dobijamo

(2.5.15) $$|\lambda| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g(e^{i\theta})|\,d\theta .$$

Iz (2.5.14) i (2.5.15) sledi nejednakost (2.5.13).

Posledica 2.5.3. - Neka je $g\in S_\lambda$, f konformno preslikavanje unutrašnjosti jediničnog diska U tako da je f(o)=0 i $f(U)\subseteq C\setminus\overline{g(B)}$ Tada je

$$\int_0^{2\pi}|f(e^{i\theta})|\,d\theta \le \int_0^{2\pi}|g(e^{i\theta})|\,d\theta .$$

Dokaz. - Iz Parseval-ove relacije i Teoreme 2.5.5 sledi

$$\|f\|_1^2 \le \|f\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 \le \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2$$

$$= \pi^{-1}\, m\, f(U) \le \pi^{-1}\, m\,(C\setminus\overline{g(B)}) \le \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g(e^{i\theta})|\,d\theta\right\}^2 .$$

Otuda je $$\|f\|_1 \le (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi}|g(e^{i\theta})|\,d\theta .$$

IZ prethodnog izlaganja neposredno sledi

Teorema 2.5.6. - Neka je $g \in S_\lambda$, $g(z) = \lambda z + \alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \cdots$, $f(U) \subseteq \mathbb{C} \setminus g_\lambda$, gde je $f(z) = \sum a_n z^n$ konformno preslikavanje i $f' \in H^1$. Tada je

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \{ |a_n|^2 + |\alpha_n|^2 \} \leq \|f'\|_1^2 .$$

Dakle, ova teorema daje bolju procenu od Teoreme 2.2.1.

Definicija 2.5.3. - Neka je $W = f(z)$ $(z = x + iy,\ W = U + iV)$ R - diferencijabilno preslikavanje oblasti D u kompleksnu ravan C.

Tada linearno preslikavanje

$$dU = U_x\,dx + U_y\,dy$$

$$(2.5.16) \qquad dV = V_x\,dx + V_y\,dy$$

možemo pisati u kompleksnoj formi

$$(2.5.17) \qquad dW = f_z\,dz + f_{\bar z}\,d\bar z ,$$

gde je

$$f_z = \frac{1}{2}(U_x + V_y) + \frac{i}{2}(V_x - U_y)$$

$$f_{\bar z} = \frac{1}{2}(U_x - V_y) + \frac{i}{2}(V_x + U_y) .$$

Jednostavan račun pokazuje da je

$$|f_z|^2 - |f_{\bar z}|^2 = U_x V_y - U_y V_x = J ,$$

gde J označava jakobijan preslikavanja u razmatranoj tački. Pretpostavimo za momenat da je $J > 0$, tj. $|f_z| > |f_{\bar z}|$. Geometrijski razmatramo (2.5.16) predstavlja afinu transformaciju iz (dx, dy) u (dU, dV) ravan. Ova transformacija preslikava krugove sa središtem u kordinatnom početku u slične elipse. Iz (2.5.17) neposredno sledi

$$(|f_z| - |f_{\bar z}|)\,|dz| \leq |dW| \leq (|f_z| + |f_{\bar z}|)\,|dz| ,$$

gde obe granice mogu biti dostignute. Maksimum je dostignut ako je količnik

$$\frac{f_{\bar z}\, d\bar z}{f_z\, dz}$$

pozitivan, minimum ako je negativan. Mi zaključujemo da je količnik izmedju veće i manje ose elipse

$$D_f = \frac{|f_z| + |f_{\bar z}|}{|f_z| - |f_{\bar z}|} \geq 1$$

D_f se naziva dilatacija u tački z. Često je pogodnije da razmatramo

$$d_f = \frac{|f_{\bar z}|}{|f_z|} < 1$$

koje je povezano sa D_f relacijama.

$$D_f = \frac{1+d_f}{1-d_f} \quad , \quad d_f = \frac{D_f - 1}{D_f + 1} \quad .$$

U opštem slučaju D_f definišemo relacijom

$$D_f = \begin{cases} \dfrac{|f_z| + |f_{\bar z}|}{\big||f_z| - |f_{\bar z}|\big|} & \text{za} \quad J \neq 0 \\ +\infty & \text{za} \quad J = 0 \end{cases}$$

Za R - diferencijabilno preslikavanje $W=f(z)$ oblasti D u kompleksnu ravan C kažemo da K- ograničene dilatacije odozdo ($K \geq 1$) u oblasti D ako je $D_f \geq K$ za $\forall z \in D$.

Uslov $D_f \geq K$ $(K > 1)$ je ekvivalentan uslovu $d_f \geq \kappa = \dfrac{K-1}{K+1}$.

Teorema 2.5.7. - Pretpostavimo da je $g(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^{-n}$ u [illegible] $(g(e^{it}) = U(e^{it}) + i V(e^{it}))$. Neka su $U(z)$ i $V(z)$ harmonijske funkcije koje rešavaju Dirichlet-ov problem za date granične funkcije $U(e^{it})$ i $V(e^{it})$ u oblasti $U = \{z : |z| < 1\}$ [illegible] kavanje $W = f(z) = U(z) + iV(z)$ K- ograničene dilatacije odozdo $(K \geq 1)$ i $f(U) \supseteq C \setminus \overline{g(B)}$. Tada je

$$m(C \setminus \overline{g(B)}) = \pi(1 - \sum_{n=1}^{\infty} n|\alpha_n|^2) \leq \pi(1 - K^2)$$

Dokaz. Iz $d_f \geq K$ sledi

$$U_x^2 + U_y^2 + V_x^2 + V_y^2 \geq (K + \frac{1}{K}) \, |J| \, .$$

Odatle je

$$\iint_{|z|<1} (U_x^2 + U_y^2 + V_x^2 + V_y^2) \, dx\,dy \geq (K + \frac{1}{K}) \iint_{|z|<1} |J| \, dx\,dy \geq (K + \frac{1}{K}) \; m(C \setminus \overline{g(B)})$$

S druge strane imamo

$$U(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, \theta - t) \, U(e^{it}) \, dt, \quad tj.$$

$$U(z) = \mathrm{Re}\,(z + \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\alpha}_n z^n) \, .$$

Na sličan način pokazujemo da je

$$V(z) = \mathrm{Im}\,(z - \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\alpha}_n z^n) \, .$$

Dakle, na osnovu prethodnih relacija dobijamo

$$(|1 + \bar{\alpha}_1|^2 + |1 - \bar{\alpha}_1|^2 + 2 \sum_{n=2}^{\infty} n|\alpha_n|^2) \geq (K + \frac{1}{K}) (1 - \sum_{n=1}^{\infty} n|\alpha_n|^2) \, .$$

Otuda je

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|\alpha_n|^2 \geq \kappa^2,$$

a to je ekvivalentno onom što treba da dokažemo.

Kombinujući prethodno izlaganje sa Dirichlet-ovim principom [5] dobijamo Lehto-ov rezultat [19].

Posledica 2.5.4. - Ako funkcija $g(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^{-n} \in S_1$ dopušta K_1- kvazi konformno produženje u krug $|z| \leq 1$, tada je

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|\alpha_n|^2 \leq \kappa_1^2,$$

gde je

$$\kappa_1 = \frac{K_1 - 1}{K_1 + 1} .$$

Posledica 2.5.5. - Ako su ispunjeni uslovi Teoreme 2.5.7 i Posledice 2.5.4, tada je

$$\pi(1-\kappa_1^2) \leq m(C \setminus \overline{g(B)}) \leq \pi(1-\kappa^2) .$$

Glava III

PROCENE HARDY-EVE I BERGMAN-OVE NORME ZA FUNKCIJE ČIJA JE SLIKA U SEKTORU

3.1. PROCENE HARDY-EVE NORME

1. Uvod. U ovom paragrafu dajem procenu Hardy-eve norme i rešavam odgovarajući ekstremalni problem za analitičke funkcije koje jedinični disk U preslikavaju u sektor. Prvi rezultat u ovom pravcu dao je Smirnov ([26], str. 93) koji je pokazao da je $f \in H^p$ za $o < p < 1$, ako je f analitička u U i ima pozitivan realni deo. G.T.Carago [4] je dobio opštiji rezultat: ako $f(U)$ pripada sektoru čija je uglovna Lebesgue-ova mera α, tada je $f \in H^p$ za $o < p < \pi/\alpha$. Studirajući sliku $f(U)$ dalje rezultate su dobili L.J.Hansen i W.K.Hayman [15] . Medjutim, u nijednom od spomenutih rezultata ne daje se procena norme funkcije, nego se samo pokazuje da, ako $f(U)$ zadovoljava neke geometrijske uslove, tada $f \in H^p$ za neke p.

Teorema 3.1.1. - Neka je f analitička funkcija u otvorenom jediničnom disku U i $|\arg f(z)| < \theta$ $(o < \theta \le \pi)$ za $z \in U$. Tada je, za $o < p < \pi/2\theta$, $f \in H^p$ i

$$\{\operatorname{cosec} p\theta \, \operatorname{Im} f^p(0)\}^{1/p} \le \|f\|_p \le \{\sec p\theta \, \operatorname{Re} f^p(0)\}^{1/p}. \tag{3.1.1.}$$

Dokaz. - Kako je $|\arg f(z)| < \theta$ funkcija

$$f^p(z) = |f(z)|^p \, e^{i p \arg f(z)}$$

je analitička i ima pozitivan realni deo u U za $0 < p < \pi/2\theta$. Otuda je

$$\frac{\operatorname{Im} f^p(z)}{\sin p\theta} < |f(z)|^p < \frac{\operatorname{Re} f^p(z)}{\cos p\theta} .$$

Integracijom polsednje nejednakosti dobijamo

$$\operatorname{cosec} p\theta \ \operatorname{Im} f^p(0) < \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\varphi})|^p \, d\varphi < \sec p\theta \ \operatorname{Re} f^p(0) \quad (0 < \rho < 1).$$

Prelaskom na graničnu vrednost kada $\rho \to 1$ i korišćenjem teoreme o konvergenciji u srednjem (Teorema 1.2.3) dobijamo nejednakost (3.1.1).

Sledeća teorema pokazuje za koje funkcije i nejednakosti (3.1.1) važi znak jednakosti.

Teorema 3.1.2. - Neka je f analitička funkcija u otvorenom jediničnom disku U, koja zadovoljava uslov $|\arg f(z)| < \theta$ $(0 < \theta \leq \pi)$ za $z \in U$. Tada je, za $0 < p < \pi/2\theta$,

$$\|f\|_p^p \leq \sec p\theta \ \operatorname{Re} f^p(0), \tag{3.1.2}$$

pri čemu znak jednakosti važi ako i samo ako je

$$f(z) = \left(\frac{e^{i\gamma} B(z) S(z) + 1}{1 - e^{i\gamma} B(z) S(z)} \right)^{\frac{2\theta}{\pi}} \tag{3.1.3}$$

gde je γ proizvoljan realan broj, a $B(z)$ i $S(z)$ respektivno proizvoljan Blaschke-ov proizvod i singularna unutrašnja funkcija.

Dokaz. - Iz prethodne teoreme sledi da funkcija

$$g(z) = f^p(z) \quad \in H^1$$

za $0 < p < \pi/2\theta$. Otuda radijalna granica

$$g(e^{i\varphi}) = \lim_{r \to 1-} g(re^{i\varphi})$$

postoji s.s. na $[0, 2\pi]$, a s obzirom na Cauchy-evu teoremu ([6], Teorema 3.6, str. 40) važi jednakost

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{i\varphi})\, d\varphi = g(0) ,$$

to jest

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\, g(e^{i\varphi})\, d\varphi = \mathrm{Re}\, g(0) .$$

Dakle, ako u relaciji (3.1.2) važi jednakost, tada je

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(e^{i\varphi})|\, d\varphi = (\sec p\theta)\, \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\, g(e^{i\varphi})\, d\varphi$$

i s obzirom da je

$$|g(e^{i\varphi})| \leq (\sec p\theta) \quad \mathrm{Re}\, g(e^{i\varphi})$$

nalazimo

$$|\arg g(e^{i\varphi})| = p\theta \qquad \text{s.s.},$$

to jest

(3.1.4) $$|\arg f(e^{i\varphi})| = \theta \qquad \text{s.s.}$$

Kako funkcija

$$w(z) = \frac{1 - z^{\pi/2\theta}}{1 + z^{\pi/2\theta}}$$

preslikava $|\arg z| < \theta$ na $|w| < 1$, s obzirom na relaciju (3.1.4) funkcija

(3.1.5) $$w_1(z) = \frac{1 - f(z)^{\pi/2\theta}}{1 + f(z)^{\pi/2\theta}}$$

preslikava $|z| < 1$ na $|w_1| < 1$ i zadovoljava uslov

$$|w_1(e^{i\varphi})| = 1 \qquad \text{s.s.}$$

Odatle, na osnovu teoreme o faktorizaciji, imamo

$$W_1(z) = e^{i\gamma} B(z) S(z),$$

gde je $\gamma \in R$, $B(z)$ Blaschke-ov proizvod i $S(z)$ singularna unutrašnja funkcija. Prema tome, iz relacije (3.1.5) nalazimo da funkcija f ima oblik dat sa relacijom (3.1.3).

3.2. PROCENE BERGMAN-OVE NORME

Definicija 3.2.1. - Bergmanov prostor $A^{p,\alpha}$ $(0 < p < \infty\ ,\ 0 \leq \alpha < \infty)$ je prostor analitičkih funkcija u jediničnom disku u kome je "norma" definisana sa

$$\left(\|f\|_{p,\alpha}\right)^p = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_U |f(z)|^p (1-|z|^2)^\alpha \, dx\,dy < \infty .$$

Teorema 3.2.1. - Neka je f analitička funkcija u otvorenom jediničnom disku U, koja zadovoljava uslov $|\arg f(z)| < \theta$ $(0 < \theta \leq \pi)$ za $z \in U$. Tada je, za $0 < p < \pi/2\theta$, $f \in A^{p,\alpha}$ i

$$\|f\|^p_{p,\alpha} < \frac{\sec p\theta}{2(\alpha+1)} \operatorname{Re} f^p(0) .$$

Dokaz. - Kako je, za $0 < p < \pi/2\theta$,

$$\left(\|f\|_{p,\alpha}\right)^p = \frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})|^p (1-r^2)^\alpha r \, dr\, d\varphi,$$

S obzirom na Teoremu 3.1.1. nalazimo

$$\|f\|^p_{p,\alpha} \leq (\sec p\theta) \operatorname{Re} f^p(0) \int_0^1 r(1-r^2)^\alpha dr = \frac{\sec p\theta}{2(\alpha+1)} \operatorname{Re} f^p(0) .$$

Ako je $f(z)=\sum a_n z^n$ analitička funkcija u U, tada je

$$(3.2.1) \qquad \|f\|_{2,0}^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1}$$

Iz Teoreme 3.2.1 i relacije (3.2.1) sledi

Posledica 3.2.1. - Ako je $f(z) = \sum a_n z^n$ analitička funkcija u jediničnom disku U i zadovoljava uslov $|\arg f(z)| \le \theta \ (0 \le \theta < \pi/4)$ za $z \in U$, tada je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1} \le \sec 2\theta \ \operatorname{Re} a_0^2 .$$

<u>Teorema</u> 3.2.2. - Neka je $f(z)=\sum a_n z^n$ analitička funkcija u otvorenom jediničnom disku U i $|\arg f(z)| \le \theta \ (0 \le \theta < \pi/2)$ za $z \in U$. Tada je

$$(3.2.2.) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1} \le \left|\frac{\operatorname{Re} a_0}{\cos\theta}\right|^2 ,$$

gde znak jednakosti važi ako i samo ako je $f(z)=\alpha$ za $z \in U$ i $|\arg\alpha| = \theta$.

Dokaz. - Kako je $0 \le \theta < \pi/2$ i $|\arg f(z)| \le \theta$ za $z \in U$, na osnovu Teoreme 3.1.2, imamo $f \in H^1$ i

$$\|f\|_1 \le \frac{\operatorname{Re} a_0}{\cos\theta} .$$

Otuda je s obzirom na Teoremu 2.2.2

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1} \le \left(\frac{\operatorname{Re} a_0}{\cos\theta}\right)^2 .$$

Ako u relaciji (3.2.2) važi znak jednakosti, tada je na osnovu Teoreme 2.2.2 $f(z)= \alpha(1-\beta z)^{-2} \ (\alpha \in C, |\beta| < 1)$. Medjutim, iz $|\arg f(z)| \le \theta$ $(0 \le \theta < \pi/2)$ za $z \in U$ sledi $\beta=0$, to jest $f(z)= \alpha$ za $z \in U$. Otuda, s obzirom na Teoremu 3.1.2 nalazimo $|\arg\alpha| = \theta$, a što je trebalo dokazati.

Iz Teoreme 2.3.2, 3.1.2 i prethodne teoreme sledi

Posledica 3.2.2. - Neka je f analitička funkcija u otvorenom jediničnom disku , koja zadovoljava uslov $|\arg f(z)| \le \vartheta$ $(0 \le \vartheta <$ za $z \in U$. Tada je, za $0 < p < \pi/2\alpha$, $f \in A^{2p,0}$ i

$$\|f\|_{2p,0}^{2p} \le \frac{1}{2} (\sec^2 p\vartheta) \left[\operatorname{Re} f^p(0)\right]^2$$

gde znak jednakosti važi ako i samo ako je $f(z) \equiv \alpha$ za $z \in U$ i $|\arg \alpha| = \vartheta$.

3.3. PROSTOR $H^1(U^n)$

U ovom paragrafu, koristeći metod koji je dat u ([29] , str. 64), pokazujem kako integracija jednodimenzionih nejednakosti, koje sam dokazao u prethodnom paragrafu, dovodi do raznih višedimenzionih uopštenja.

Definicija 3.3.1. - Ako je f proizvoljna funkcija definisana na U^n $(n \in N)$, $0 \le r < 1$, tada sa f_r označavamo funkciju definisanu na T^n($T = \{z \in C : |z|=1\}$, $n \in N$) jednačinom

$$f_r(w) = f(rw) \quad (w \in T^n) .$$

Definicija 3.3.2. - Prostor $H^p(U^n)$ $(n \in N)$ je prostor holomorfnih funkcija $f : U^n \to C$ u kome je norma definisana sa

$$\|f\|_p = \sup_{0 \le r < 1} \left\{ \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T^n} |f_r|^p \, dm_n \right\}^{1/p} ,$$

gde je m_n-dimenziona Lebesgue-ova mera.

<u>Teorema</u> 3.3.1. – Neka je f halomorfna funkcija u U^n i $|\arg f(z)| \leq \theta$ $(0 \leq \theta < \pi)$ za $z \in U^n$. Tada je, za $p < \pi/2\theta$,

(3.3.1) $$(\operatorname{cosec} p\theta) \operatorname{Im} f^p(0) \leq \|f\|_p^p \leq (\sec p\theta) \operatorname{Re} f^p(0)$$

Dokaz. – Za fiksirano $w \in T^n$ definisana je funkcija $f_w(\lambda)$ jedne kompleksne promenljive sa $f_w(\lambda) = f(\lambda w)$ $(\lambda \in U)$. Ako na funkciju $f_w(\lambda)$ primenimo Teoremu 3.1.1 nalazimo

$$\frac{1}{2\pi}\int_T |f_w(\rho\lambda)|^p \, dm_1(\lambda) \leq (\sec p\theta) \operatorname{Re} f^p(0).$$

Otuda, s obzirom na Lemu 3.3.2 ([29] , str. 43), imamo

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{T^n} dm_n(w) \, \frac{1}{2\pi}\int_T |f_w(\rho\lambda)|^p \, dm_1(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{T^n} |f(\rho w)|^p \, dm_n(w) \leq \sec p\theta \operatorname{Re} f^p(0)$$

Prelaskom na graničnu vrednost kada $r \to 1-$ dobijamo jedan deo nejednakosti (3.3.1). Slično se dokazuje drugi deo.

<u>Definicija</u> 3.3.3. – Neka je $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in Z_+^n$ (Z_+ je oznaka za nenegativne cele brojeve) i stavimo $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$. Pretpostavimo da je $f(z) = \sum_{\alpha \in Z_+^n} C(\alpha) z^\alpha$ $(z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \, z_2^{\alpha_2} \, z_n^{\alpha_n})$ holomorfna u nekom polikrugu sa centrom u O i sa $F_s(z)$ označimo sumu članova $C(\alpha) z^\alpha$ za koju je $|\alpha| = s$ $(S=0,1,2,\ldots)$. Stepeni red za f možemo napisati u obliku

$$f(z) = \sum_{s=0}^{\infty} F_s(z).$$

Ovo razlaganja naziva se homogeno.

<u>Teorema</u> 3.3.2. - Ako je $f(z)=\sum_{\alpha\in Z_+^n} c(\alpha) z^\alpha$ holomorfna u U^n $(n\in N)$ i $|\arg f(z)|\le \theta$ $(0\le\theta<\pi/2)$ za $z\in U^n$, tada je

$$(3.3.2)\qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \sum_{|\alpha|=k} |c(\alpha)|^2 \le \left[\frac{\operatorname{Re} f(0)}{\cos\theta}\right]^2$$

Dokaz. - Neka je $f=\sum_{k=0}^{\infty} F_k$ homogeno razlaganje funkcije f. Ako primenimo Teoremu 3.2.2. na funkciju

$$f_W(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty} F_k(W)\,\lambda^k$$

dobijamo nejednakost

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|F_k(W)|^2}{k+1} \le \left[\frac{\operatorname{Re} f(0)}{\cos\theta}\right]^2$$

Integracijom poslednje nejednakosti nalazimo

$$(3.3.3)\qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}\,\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{T^n} |F_k(W)|^2\, dm_n(W) \le \left[\frac{\operatorname{Re} f(0)}{\cos\theta}\right]^2 .$$

Iz relacije (3.3.3) i Parseval-ove relacije sledi (3.3.2).

Da bismo pokazali drugi metod prenošenja jedno-dimenzionih nejednakosti na više-dimenzioni slučaj, ograničimo razmatranje na funkciju dve promenljive.

<u>Teorema</u> 3.3.3. - Ako je funkcija $f(z_1,z_2)=\sum_{s,t\ge 0} c(s,t)\, z_1^s z_2^t$ holomorfna u U^2 i $|\arg f(z_1,z_2)|\le\theta$ $(0\le\theta<\pi/2)$ za $(z_1,z_2)\in U^2$, tada je

$$(3.3.4)\qquad \sum_{s,t\ge 0} \frac{1}{t+1}\,|c(s,t)|^2 \le \frac{1}{\cos^2\theta}\sum_{s=0}^{\infty} |c(s,0)|^2$$

Dokaz. - Neka je

$$f(z_1,z_2) = \sum_{s,t\geq 0} c(s,t)\, z_1^s z_2^t = \sum_{t=0}^{\infty} \varphi_t(z_1)\, z_2^t .$$

Na osnovu Teoreme 3.2.2 nalazimo

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{|\varphi_t(z_1)|^2}{t+1} \leq \frac{|\varphi_0(z_1)|^2}{\cos^2\theta} . \tag{3.3.5}$$

Integracijom poslednje nejednakosti dobijamo

$$\sum_{t=0}^{\infty} (t+1)^{-1} \int_T |\varphi_t(z_1)|^2\, dm_1(z_1) \leq \frac{1}{\cos^2\theta} \int_T |\varphi_0(z_1)|^2\, dm_1(z_1) . \tag{3.3.6}$$

Iz relacije (3.3.6) i Parsevalove relacije sledi (3.3.4).

Integracijom nejednakosti (3.3.5) po otvorenom jediničnom disku dobijamo

Posledica 3.3.1. - Ako je funkcija $f(z_1,z_2)= \sum_{s,t\geq 0} c(s,t)\, z_1^s z_2^t$ holomorfna u U^2 i $|\arg f(z_1,z_2)|\leq\theta$ $(0\leq\theta<\pi/2)$ za $(z_1,z_2)\in U^2$, tada je

$$\sum_{s,t\geq 0} (t+1)^{-1}(s+1)^{-1}\, |c(s,t)|^2 \leq \frac{1}{\cos^2\theta} \sum_{s=0}^{\infty} (s+1)^{-1}\, |c(s,0)|^2 .$$

L I T E R A T U R A

(1) Ahlfors, L.V. Conformal invariants: Topics in Geometric Function Theory. Mc Graw-Hill, New York, 1973.

(2) Alexander, H., Taylor, B.A., and Ulman, J.L. Area of projections of analytic sets. Invent. Math. 16(1972), (335-341), MR 46=2078.

(3) Blaschke, W., Kreis and Kugel, 2. Berlin 1956.

(4) Carago, G.T. Some geometric aspects of functions of Hardy class H^p. J. Math. Anal. Appl. 7, (1963), (471-474).

(5) Caurant, R.Dirichlet's principle, conformal mapping and minimal surfaces, Interscience publishers, INC., New York, 1950.

(6) Duren, P.L. Theöry of H^p spaces, Academic Press, New York and London, 1970.

(7) Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления том III, Москва, 1969.

(8) Gamelin, T.W. H^p spaces and extremal functions in H^1. Trans. Amer. Math. Soc. 124(1966), 158-167.

(9) Голузин, Г.М. Геометрическая теория комплексного переменного, Москва, 1952.

(10) Hardy, G.H., and Littlewood, J.E. Some properties of fractional integral II. Math. Z.34 (1932), 403-439.

(11) Hardy, G.H., Littlwood, J.E., and Pőliÿa, G. Inequalites, 2 nd ed. Cambridge Unik Press, London and New York, 1952.

(12) Хавин, В. П. Пространства аналитических функций. Математический анализ, 1964. АН СССР. Москва, 1966.

(13) Хавинсон, С. Я. Об одной экстремальной проблеме в теории аналитических функций. Успехи матем. наук, 1949, 4, № 4 (32), [illegible].

(14) Хавинсон, С. Я. О некторых экстремалных задачах теории аналитических функций, Учен. зап. МГУ, вып. 148, Математика IV (1951), 133-[illegible].

(15) Hansen, J.L. Hardy classes and ranges of functions, Michigan Math. J. 17 (1970), 235-248.

(16) Hayman, W.K. Многолистные функции, Москва, 1960.

(17) Hayman, W.K., and Clunie, J. Proceedings of the Symposium on Complex Analysis, Cambridge, the University Press 1974.

(18) Kühnau, R. Verzerrungssatze und Koeffizientenbedingungen vom Grunskyschen Typ für quasikonforme Abbildungen, Math. Nachr. 48, 77-105 (1971).

(19) Lehto, O. Schlicht functions with a quasiconformal extension, Ann. Acad. sci. Fenn., Ser A1, 500, (1971).

(20) Macintyre, A.J., and Rogosinski, W.W. Extremum problem in the theory of analytic funetions. Acta Math. 82(1950), 275-325.

(21) Mateljević, M. On linked Jordan curves in R^3, Mat. vesnik 12(27), 1975.

(22) Mateljević, M. Nejednakosti u H^p prostorima i njihove ekstremalna svojstva, Magistarski rad, 1976.

(23) Mateljević, M. The isoperimetric inequality in the Hardy class H^1, Mat. vesnik 3(16) (31), 1979.

(24) Mateljević, M. The isoperimetric inequality and some extremal problems in H^1, Proceedings of the conference on analytic functions, 1979, Kozubnik, Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag.

(25) Pólya, G., and Szegö, G. Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics. Princeton, Princeton University Press, 1951.

(26) Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций. М.-Л., 1950.

(27) Rogosinski, W.W., and Shapiro, H.S. On certain extremum problems for analytic functions. Acta Math. 90 (1953), 287-318.

(28) Rudin, W. Real and Complex Analysis. McGraw-Hill, New York, 1964.

(29) Rudin, W. Function Theory in Polydiscs. Benjamin, New York, 1969.

(30) Shapiro, J.H. Remarks on F-spaces of analytic functions. Lecture notes in Mathematics, Vol 604. Springer Verlag 1977.

(31) Treiber, D. Zur isoperimetrischen Ungleichung für die Ebene. Arch. Math. Vol. XXV, 1974, 79-82.

(32) Zygmund, A. Trigonometric Series. Cambridge Univ. Press, London and New York, 1959.