DO 276

Mr. Miroslava Stojanović

Nekoliko novih algoritama za numeričko rešavanje diferencijalnih jednačina i sistema diferencijalnih jednačina

Doktorska disertacija

Beograd

1973.

Sadržaj

Uvod

Partikularno rešenje početnog problema običnih diferencijalnih jednačina u obliku stepenog reda javlja se prvobitno u vezi sa pitanjima egzistencije rešenja date diferencijalne jednačine koje zadovoljava date početne uslove.

1. Metoda sukcesivnih aproksimacija koristila se, pre E. Picard-a, u astronomiji. Isto tako, poznato je, da se i Cauchy bavio tom metodom. Moigno[1/] je izložio Cauchy-evu metodu sukcesivnih aproksimacija u slučaju diferencijalne jednačine drugog reda:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=X(x)\cdot y,\quad y(x_0)=y_0;\quad y'(x_0)=y_0',$$

pod uslovom da je funkcija $X(x)$ neprekidna za

$$|x-x_0|<a.$$

Za prvu aproksimaciju se uzima

$$y_1=y_0'(x-x_0)+y_0.$$

Dalje se uzima

$$\frac{d^2y_2}{dx^2}=X(x)\cdot y_1,\quad y_2(x_0)=y_0;\quad y_2'(x_0)=y_0',$$

$$\frac{d^2y_3}{dx^2}=X(x)\cdot y_2,\quad y_3(x_0)=y_0;\quad y_3'(x_0)=y_0',$$

$$\vdots$$

1/ Traité 2, p. 702.

Na taj način se $y_2, y_3, \ldots,$ odredjuju sukcesivnim kvadraturama. Niz $y_1, y_2, y_3, \ldots,$ konvergira rešenju $y(x)$ datog problema. Ovde nisu dati uslovi neprekidnosti koji obezbedjuju primenu metode.

Analognu metodu, u slučaju linearnih diferencijalnih jednačina n-tog reda, primenjivali su J.Caqué[1/], L. Fuchs[2/] i G. Peano[3/] .

Metodu sukcesivnih aproksimacija, u današnjem obliku, dao je E. Picard[4/].

Za sistem

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x, y, z, \ldots, w),$$

$$/1/ \quad \frac{dz}{dx} = f_2(x, y, z, \ldots, w),$$

$$\vdots$$

$$\frac{dw}{dx} = f_n(x, y, z, \ldots, w),$$

sa početnim uslovima

$$/2/ \quad y(x_0) = y_0, \ z(x_0) = z_0, \ldots, w(x_0) = w_0,$$

pretpostavlja :

a/ f_i su neprekidne funkcije u oblasti

$$|x - x_0| \leq a, \ |y - y_0| \leq b, \ldots, |w - w_0| \leq b,$$

$$|f_i| \leq M \qquad \text{za sve } i = 1, 2, \ldots, n.$$

1/ Journal de math. /2/, 9, 1864, p 185

2/ Ann. di mat. /2/ 4, 1870, p 36

3/ Math. Ann. 32, 1888. p 145

4/ Journal de math. /4/ 6, 1890, p 145

b/ početna vrednosti zadovoljavaju Lipschitz-ove uslove, tj.

$$|f_i(x,y,z,\dots,w) - f_i(x,y_0,z_0,\dots,w_0)| <$$
$$< K_1|y-y_0| + K_2|z-z_0| + \dots + K_n|w-w_0|,$$
$$(i = 1,2,\dots,n)$$

gde su K_i - konstante.

E. Picard dokazuje da funkcije, $y_p, z_p, \dots, w_p$, definisane sa

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x,y_0,z_0,\dots,w_0), \dots, \frac{dw_1}{dx} = f_n(x,y_0,\dots,w_0),$$

$$\frac{dy_2}{dx} = f_1(x,y_1,z_1,\dots,w_1), \dots, \frac{dw_2}{dx} = f_n(x,y_1,\dots,w_1),$$

$$\vdots$$

$$\frac{dy_p}{dx} = f_1(x,y_{p-1},\dots,w_{p-1}), \dots, \frac{dw_p}{dx} = f_n(x,y_{p-1},\dots,w_{p-1}),$$

konvergiraju ka funkcijama $y(x), z(x), \dots, w(x)$, kada $p \to \infty$, jednom rešenju datog sistema /1/ koje zadovoljava početne uslove /2/, dogod je

$$|x - x_0| < h,$$

gde je

$$l = \min(a, b/M), \quad h = \min(l, (K_1+K_2+\dots+K_n)^{-1}).$$

Za početnu aproksimaciju, može se, umesto $y_0, z_0, \ldots, w_0$ uzeti proizvoljan sistem neprekidnih funkcija $Y(x), Z(x), \ldots, W(x)$ takvih da je

$$Y(x_0) = y_0, \quad Z(x_0) = z_0, \ldots, W(x_0) = w_0.$$

I. Benedixon[1] i E. Lindelöf[2] su dokazali konvergenciju metode u intervalu $(x_0 - \ell, x_0 + \ell)$ i da je najveći mogući interval konvergencije $(x_0 - h, x_0 + h)$. Lindelöf je dokazao i jedinost rešenja u intervalu $(x_0 - \lambda, x_0 + \lambda)$, gde je

$$\lambda = \min\left(a, \frac{1}{(K_1 + K_2 + \ldots + K_n)} \log\left[1 + \frac{b(K_1 + K_2 + \ldots + K_n)}{M_0}\right]\right)$$

$$M_0 = \max_{|x - x_0| < a} |f_i(x, y_0, z_0, \ldots, w_0)|$$

/ λ je, u mnogim slučajevima broj veći od ℓ /. Tačno odredjivanje intervala konvergencije, za ovu metodu, nije poznato.

U slučaju kada nisu zadovoljeni Lipschitz-ovi uslovi, I. Bendixon je dokazao da ako Picard-ova metoda konvergira, tada ona predstavlja jedno rešenje datog sistema, ali nije jedino koje zadovoljava date početne uslove.

1/ Stockh. Ofv. 1893, p 599

2/ Par. C. R. 118, 1894, p 454

2. Metoda sukcesivnih diferenciranja za dobijanje partikularnog rešenja početnog problema, u obliku Tajlorovog reda, pretpostavlja da su sve funkcije f_i $(i=1,\dots,n)$ u sistemu /1/ analitičke funkcije svojih argumenata i da je tačka $(x_0, y_0, z_0, \dots, w_0)$ regularna tačka svih funkcija f_i $(i=1,2,\dots,n)$. A. Cauchy je prvi dokazao da je takav red rešenje početnog problema /1/-/2/ i da on ima odredjenu oblast konvergencije. Njegov dokaz se zasniva na ograničenosti /limitation/ apsolutnih vrednosti izvoda jedne analitičke funkcije. Pri tome koristi jednu majorantnu funkciju za sve f_i $(i=1,2,\dots,n)$ iz /1/ i dokazuje egztenciju jednog analitičkog rešenja koje zadovoljava početne uslove /2/ u krugu konvergencije $|x-x_0|<\rho$, gde je

$$\rho = a\left(1 - e^{-\frac{b}{(n+1)Ma}}\right)$$

$$\left(|f_i|<M;\ |x-x_0|<a;\ |y-y_0|<b, \dots, |w-w_0|<b.\right)$$

Cauchy je u dokazu koristio teoriju funkcija kompleksne promenljive.

Briot i Bouquet su ga dali u znatno jednostavnijem obliku. Weierstrass je dokaz izveo na osnovu teorije stepenih redova.

Isto tako, donja granica za radijus konvergencije ρ kasnije je pomerana.

E. Picard je za radijus konvergencije dobio veličinu

$$\frac{b}{(n+1)M}.$$

Najzad Lindelöf dobija za radijus konvergencije

$$\min\left(a, \frac{b}{M_1}\right),$$

gde je M_1 maksimalna vrednost razvoja funkcije f_i po stepenima $(x-x_0), (y-y_0), \ldots, (w-w_0)$ u kojima su svi članovi zamenjeni njihovim apsolutnim vrednostima. Prema E. Picard-u i P. Painlevé-u jedna metoda za dobijanje partikularnog rešenja početnog problema /1/ - /2/ potpuno postiže svoj cilj kada daje rešenje čiji je radijus konvergencije jednak intervalu regularnosti rešenja[1/]. Taj cilj u potpunosti postiže metoda Cauchy - Lipschitz-a. Metoda sukcesivnih aproksimacija Picard-a i metoda dobijanja rešenja u obliku Tajlorovog reda imaju manje radijuse konvergencije od intervala regularnosti.

3. Praktično dobijanje partikularnih rešenja početnih problema za diferencijalne jednačine u obliku stepenih redova, realizovalo se uglavnom dvema metodama: a/ metodom sukcesivnih diferenciranja - metodom Briot - Bouquet, b/ metodom neodredjenih koeficijenata.

1/ Najveći interval (x_1, x_2) u kome su sve funkcije $y(x), z(x), \ldots, w(x)$ neprekidne i u kome nijedan sistem vrednosti $(x, y(x), \ldots, w(x))$ za sistem /1/ nije singularan.

Što se tiče praktične realizacije metode sukcesivnih aproksimacija treba pomenuti modifikovanu metodu E. Picard-a.

a/ Prema metodi Briot-Bouquet-a koeficijenti Tajlorovog reda rešenja diferencijalne jednačine

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0,$$

dobijaju se iz formula

$$a_{n+1} = \frac{1}{n!}\left[f_n\right]_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}, \quad (n=0,1,2,\dots)$$

gde je niz funkcija f_n, definisan rekurentnim obrascem

$$f_n = \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x} + \frac{\partial f_{n-1}}{\partial y}\cdot f. \quad (n=1,2,\dots)$$

Već jednostavni primeri pokazuju glomaznost, pa prema tome i nepodesnost metode za praksu. Iz tih tazloga, metoda Briot-Bouquet-a nije se uvrstila u red efektivnih metoda za dobijanje partikularnih rešenja diferencijalnih jednačina u obliku stepenog reda.

Na primer, za početni problem

$$y' = 1 + x^3y^2 - x^{13}y, \quad y(0)=0,$$

funkcije f_n, izgledaju ovako:

$$f = 1 + x^3y^2 - x^{13}y,$$

$$f_1 = 3x^2y^2 + 2x^3y + 2x^6y^3 - 13x^{12}y - 3x^{16}y^2 + x^{26}y,$$

$\vdots$

Funkcija f_2 ima 15 članova, f_3 - 40 članova, dok f_{14} ima nekoliko hiljada članova.

Metoda Briot-Bouquet-a dopušta generalizaciju i za početni problem diferencijalne jednačine n-tog reda odnosno za sistem normalnih jednačina I reda, ali njena primena u praksi dovodi do još mnogo glomaznijih izraza u procesu izračunavanja funkcija f_n, odnosno $f_{e,n}$.

b/ Metoda neodredjenih koeficijenata pokazala se podesnom samo za linearne diferencijalne jednačine. Partikularno rešenje početnog problema

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$

$$y^{(i)}(x_0) = C_i, \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1)$$

traži se u obliku

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k,$$

gde su $a_k (k = n, n+1, \ldots)$ koeficijenti koje treba izračunati. Izračunavanje koeficijenata $a_k (k = n, n+1, \ldots)$ vrši se, u slučaju linearnih diferencijalnih jednačina, pomoću rekurentnih formula. U slučaju nelinearnih diferencijalnih jednačina izračunavanje koeficijenata $a_k \; (k = n, n+1, \ldots)$ se vrši na taj način što se prvo fiksira broj p koeficijenata a_k, koje želimo da izračunamo, zatim se formira izraz

$$\sum_{k=0}^{n+p} a_k (x - x_0)^k$$

koji se uvršćuje u diferencijalnu jednačinu. Posle toga bi, po teoriji, trebalo izjednačiti koeficijente uz jednake stepene $(x - x_0)$. To u praksi, ukoliko je izvodljivo, dovodi do velikog broja glomaznih jednačina tako da je metoda nepregledna i neprihvatljiva u praksi.

c/ Modifikovana metoda E. Picard-a. Koliko je ranije izložena metoda sukcesivnih aproksimacija Picard-a od teorijskog značaja i koliko malo ograničenja nalaže na desnu stranu diferencijalne jednačine čiji se partikularni integral traži, toliko je ona nepodesna za praksu. Partikularno rešenje dobija se sukcesivnim kvadraturama aproksimacija rešenja. Te aproksimacije su različite funkcije argumenta x i kvadrature su ili veoma složene ili sasvim nemoguće.

Modifikovana Picard-ova metoda[1/] daje integral

1/ K. P. Orlov, Jedna metoda aproksimacije za integraljenje diferencijalnih jednačina, /Glas CAH CLXIII, 1934, Beograd/

početnog problema za diferencijalne jednačine u obliku Tajlorovog reda i zahteva da je funkcija na desnoj strani diferencijalne jednačine

$$y' = f(x,y)$$

analitička funkcija svojih argumenata u blizini početnih vrednosti

$$x = x_0, \quad y = y_0 .$$

Partikularno rešenje diferencijalne jednačine

$$y' = f(x,y)$$

koje zadovoljava početne uslove

$$x = x_0, \quad y = y_0,$$

dobija se uzastopnim aproksimacijama sledećih oblika:

$$y_1^* = y_0 + \int_{x_0}^{x} \overline{f(x, y_0)}^{1} dx,$$

$$y_2^* = y_0 + \int_{x_0}^{x} \overline{f(x, y_1^*)}^{2} dx,$$

$$\vdots$$

$$y_n^* = y_0 + \int_{x_0}^{x} \overline{f(x, y_{n-1}^*)}^{n} dx,$$

gde simbol $\overline{f(x, y_{i-1}^*)}^{i}$ označava da funkciju treba razviti u Tajlorov red po stepenima $(x - x_0)$ i zadržati i prvih članova reda.

Na taj način, uzastopne aproksimacije su polinomi čiji se koeficijenti iz ranije aproksimacije novom aproksimacijom ne menjaju, nego svaka nova aproksimacija daje jedan sledeći član polinoma.

Metoda se generališe na sisteme od n diferencijalnih jednačina prvog reda,

$$y_l' = f_l(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \; (l = 1, 2, \dots, n)$$

$$y_l(x_0) = y_{l,0},$$

a samim tim i na diferencijalne jednačine n-tog reda

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

$$y^{(i)}(x_0) = y_0^{(i)}, \; (i = 0, 1, \dots, n-1).$$

Primer

$$y' = x + \sqrt{y+x},$$

$$y(0) = 0.$$

Rešavajući modofikovanom Picard-ovom metodom, dobiće se:

$$y_1^* = 1 + \int_0^x \overline{(x + \sqrt{1+x})}^1 dx,$$

$$x + \sqrt{1+x} = 1 + \frac{3}{2}x + \dots,$$

i

$$\overline{x + \sqrt{1+x}}^1 = 1,$$

pa je

$$y_1^* = 1 + \int_0^x dx = 1 + x.$$

Dalje je

$$y_2^* = 1+\int_0^x \overline{(x+\sqrt{1+2x})}^{\,2} dx,$$

$$x+\sqrt{1+2x} = 1+2x+\dots,$$

pa je

$$y_2^* = 1+\int_0^x (1+2x)dx = 1+x+x^2$$

jer je

$$\overline{x+\sqrt{1+2x}}^{\,2} = 1+2x.$$

Za

$$y_3^* = 1+\int_0^x \overline{(x+\sqrt{1+2x+x^2})}^{\,3} dx,$$

biće

$$x+\sqrt{1+2x+x^2} = 1+2x,$$

i

$$y_3^* = 1+\int_0^x (1+2x)dx = 1+x+x^2,$$

tj. y_3^* je tačan integral date jednačine.

Iako je metoda sukcesivnog karaktera, kao što se iz ovog primera vidi, ona može dati i tačno rešenje što će uvek biti slučaj kada je to tačno rešenje polinom.

Metoda je u praksi prihvatljiva ali je izvesna teškoća u tome što se, prilikom svake uzastopne aproksimacije, mora izvršiti razvijanje integralne funkcije u red /doduše, sa ograničenim brojem članova/.

Glava I

U ovoj glavi izložiće se, najpre, metoda K. P. Orlova za praktično dobijanje rešenja početnog problema diferencijalnih jednačina ~~prvog~~ n-tog reda u obliku Tajlorovog reda [1] , [2] .

Posle toga daju se dva priloga koji proširuju mogućnosti praktične realizacije izložene metode [11] i [12].

Metoda K. P. Orlova sastoji se u sledećem.

Razmatra se diferencijalna jednačina

$$/1/ \quad y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$

sa početnim uslovima

$$/1'/ \quad y^{(i)}(x_0) = y_0^{(i)}, \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1)$$

gde je f analitička funkcija svojih argumenata, a tačka $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$ regularna tačka funkcije f.

Poznato je da u datim uslovima, početni problem /1/ - /1'/ ima partikularno rešenje u obliku Tajlorovog reda

$$/2/ \quad y = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-x_0)^i = y_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{y_0^{(i)}}{i!}(x-x_0)^i + \sum_{i=n}^{\infty} a_i (x-x_0)^i.$$

K. P. Orlov daje efektivnu metodu za izračunavanje koeficijenta $a_i \; (i=n, n+1, \ldots)$ Tajlorovog reda rešenja problema /1/ - /1'/.

Zadržimo se prvo na nekim uvedenim pojmovima i oznakama [1], [2].

Pod ostatkom diferencijalne jednačine /1/, s obzirom na njeno približno rešenje

$$y = \varphi(x),$$

podrazumeva se izraz

$$/3/ \quad \delta = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x)) - \varphi^{(n)}(x).$$

Ako se za približno rešenje uzme k -ta delimična suma Tajlorovog reda tačnog rešenja problema /1/ - /1'/

$$/4/ \quad \varphi(x) = s_k = \sum_{i=0}^{k} a_i (x - x_0)^i, \quad (k \geq n-1)$$

tada se izrazi

$$/3'/ \quad \delta_k = f(x, s_k, s_k', \ldots, s_k^{(n-1)}) - s_k^{(n)}$$
$$(k \geq n-1)$$

nazivaju Tajlorovim ostatkom k -tog reda, u tački $x = x_0$, diferencijalne jednačine /1/ sa početnim uslovima /1'/.

Osnovu ove metode čine dve teoreme. U prvoj teoremi daje se oblik izraza $f(x, s_k, s_k', \ldots, s_k^{(n-1)})$ koji figuriše na desnoj strani /3'/. Druga teoreme daje izraza za koeficijente a_i $(i = n, n+1, \ldots)$, Tajlorovog reda rešenja početnog problema /1/ - /1'/, u najopštijem obliku. Dve posledice druge teoreme daju dve pojednostavljene formule za koeficijente a_i $(i = n, n+1, \ldots)$.

Ovde se daju obe pomenute teoreme.

Teorema 1. Ako je u diferencijalnoj jednačini /1/ funkcija f analitička funkcija svojih argumenata i ako početni uslovi /1'/ predstavljaju regularnu tačku funkcije f, tada je rešenje diferencijalne jednačine /1/ dato Tajlorovim redom /2/. Pod ovim uslovima izrazi

$$f(x, s_k, s_k', \ldots, s_k^{(n-1)}), \quad (k = n-1, n, n+1, \ldots)$$

u kojima je s_k, k-ta delimična suma Tajlorovog reda /2/, imaju sledeći oblik

$$/4/ \quad f(x, s_k, s_k', \ldots, s_k^{(n-1)}) = \sum_{j=0}^{k-n+1} \frac{(j+n)!}{j!} a_{j+n} (x-x_0)^j + \sum_{j=k-n+2}^{\infty} b_j^k (x-x_0)^j,$$

gde su a_{j+n} koeficijenti Tajlorovog reda /2/ a b_j^k zavise ne samo od j nego i od k.

Teorema 2. Ako je u diferencijalnoj jednačini n-tog reda /1/ sa početnim uslovima /1'/, funkcija f

analitička funkcija svojih argumenata a tačka

$$(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)})$$

regularna tačka funkcije f , tada diferencijalna jednačina /1/ sa početnim uslovima /1'/ ima partikularno rešenje u obliku Tajlorovog reda /2/. Koeficijenti toga reda dati su sledećim formulama

$$/5/ \quad a_i = \frac{(i-n-p_i)!}{i!} \lim_{x \to x_0} \frac{1}{(x-x_0)^{i-n-p_i}} \frac{d^{p_i} \delta_{i-1}}{dx^{p_i}},$$

$$(i = n, n+1, \dots)$$

gde je p_i proizvoljan ceo broj $0 \leq p_i \leq i-n$. Uzimajući najmanju moguću vrednost za p_i , tj $p_i=0$, dobija se

$$/5'/ \quad a_i = \frac{(i-n)!}{i!} \lim_{x \to x_0} \frac{\delta_{i-1}}{(x-x_0)^{i-n}},$$

$$(i = n, n+1, \dots)$$

a za $p_i = i-n$, tj za najveću moguću vrednost p_i, imamo

$$/5''/ \quad a_i = \frac{1}{i!} \lim_{x \to x_0} \frac{d^{i-n} \delta_{i-1}}{dx^{i-n}}.$$

$$(i = n, n+1, \dots)$$

Analogne dve teoreme date su za sistem normalnih diferencijalnih jednačina prvog reda sa n nepoznatih funkcija

/6/ $y_l' = f_l(x, y_1, \ldots, y_n), \quad (l = 1, 2, \ldots, n)$

sa početnim uslovima

/6'/ $y_l(x_0) = y_{l,0}, \quad (l = 1, 2, \ldots, n)$

pod uslovom da su sve funkcije f_l $(l = 1, 2, \ldots, n)$ analitičke funkcije svojih argumenata i da je tačka

$$(x_0, y_{1,0}, y_{2,0}, \ldots, y_{n,0})$$

regularna tačka svih funkcija f_l $(l = 1, 2, \ldots, n)$.

Koeficijenti Tajlorovog reda rešenja početnog problema /6/ - /6'/ izračunavaju se po formulama, analognim formulama /5/, /5'/ i /5''/, tj

/7/
$$a_{l,i} = \frac{(i-1-p_{li})!}{i!} \lim_{x \to x_0} \frac{1}{(x-x_0)^{i-1-p_{li}}} \cdot \frac{d^{p_{li}} \delta_{l,i-1}}{dx^{p_l}},$$

$$(l = 1, 2, \ldots, n;\ i = 1, 2, \ldots;\ 0 \le p_{li} \le i-1)$$

/7'/
$$a_{l,i} = \frac{1}{i} \lim_{x \to x_0} \frac{\delta_{l,i-1}}{(x-x_0)^{i-1}},$$

$$(l = 1, 2, \ldots, n;\ i = 1, 2, \ldots,)$$

i
$$a_{l,i} = \frac{1}{i!} \lim_{x \to x_0} \frac{d^{i-1} \delta_{l,i-1}}{dx^{i-1}},$$

/7''/ $(l = 1, 2, \ldots, n;\ i = 1, 2, \ldots)$

gde su

$$\delta_{\ell,k} = f_\ell(x, s_{1,k}, s_{2,k}, \dots, s_{n,k}) - s'_{\ell,k}.$$

$$(\ell = 1,2,\dots,n;\ k = 0,1,2,\dots)$$

U Uvodu je dat pregled metoda za dobijanje partikularnog rešenja početnog problema diferencijalnih jednačina u obliku Tajlorovog reda. Te metode predstavljaju logičan pokušaj da se Tajlorov red, koji je odigrao izvanrednu ulogu u mnogobrojnim i različitim oblastima matematike, primeni i na dobijanje partikularnih integrala diferencijalnih jednačina, koji zadovoljavaju date početne uslove.

Medjutim nijedna od izloženih metoda /metoda Briot-Bouquet-a, metoda neodredjenih koeficijenata / nisu ispunile nade koje su u njih polagane.

Prešlo se na numeričke metode. Za pojedine diferencijalne jednačine numeričke metode daju potpuno zadovoljavajuće rezultate. Te metode su, obično, primenljive na diferencijalne jednačine najviše drugog reda / Runge - Kutta/, inače se prelazi na odgovarajući sistem diferencijalnih jednačina prvog reda. Sve ove numeričke metode, baš zato što su numeričke, isključuju mogućnost ulaženja parametara u diferencijalne jednačine. Ukoliko se parametri javljaju u tim jednačinama, onda se pristupa davanju niza pojedinih numeričkih vrednosti, što dovodi do niza diferencijalnih jednačina od kojih se svaka posebno rešava numeričkom metodom. Na primer, ako se radi o diferencijalnoj jednačini sa tri parametra, to bi se, dajući samo po 10 raznih vrednosti svakom parametru, moralo rešavati 1000 različitih diferencijalnih jednačina.

Vratimo se, sada, na metodu K.P. Orlova, koja je analitička. Ova metoda je toliko jednostavna da se može koristiti i u praksi, a rezultati se dobijaju nesravnjeno brže / na desetine a ponekad i znatno više puta brže / od rezultata po metodi Briot-Bouquet-a ili metodom neodredjenih koeficijenata. Metoda ima i tu osobinu da red diferencijalne jednačine ne predstavlja nikakav problem za dobijanje partikularnog rešenja u traženom obliku. Ona se uspešno primenjuje na rešavanje diferencijalnih jednačina sa jednim ili više parametara, bilo neprekidnih, bilo diskretnih. Napomenimo da diskretni parametri, na primer kada su celi pozitivni brojevi, mogu ulaziti na veoma širok način i kao red izvoda koji figuriše u datoj jednačini, i to ne samo na desnoj strani nego i na levoj strani jednačine, što ćemo ilustrovati primerom. Rešenje se u tim slučajevima direktno dobija kao funkcija svih parametara odjednom. Najzad, kako će to biti pokazano u Glavi III, metoda se može programirati za rešavanje vrlo široke klase početnik problema na elektronskim računarima.

Metoda se ilustruje sledećim primerima :

1. U diferencijalnoj jednačini

$$y' = a + \frac{x^5}{2} + \frac{x^2 y^3}{2a^3},$$

sa početnim uslovom

$$y(0) = 0,$$

gde je $a > 0$, neprekidni parametar, odrediti taj parametar / sa četiri decimale/ tako, da ordinata u prevojnoj tački / u blizini $x = 0$ / ima vrednost

$$y = -\frac{25}{99000}.$$

Primenom formule /5'/, dobija se rešenje date diferencijalne jednačine sledećim računskim koracima :

$$s_0 = s_0' = 0, \quad \delta_0 = a, \quad a_1 = a,$$

$$s_1 = ax, \quad s_1' = a, \quad \delta_1 = x^5 + a.$$

Kako je $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^5 + a}{x^{i-1}} \neq 0$ za $i = 6$ biće

$$a_2 = a_3 = \ldots = a_5 = 0, \quad \delta_5 = \delta_1,$$

$$a_6 = \frac{5!}{6!} \lim_{x \to 0} \frac{x^5 + a}{x^5} = \frac{1}{6}, \quad s_6 = ax + \frac{x^6}{6},$$

$$s_6' = a + x^5, \quad \delta_6 = \frac{x^{10}}{4a} + \frac{x^{15}}{24a^2} + \frac{x^{20}}{432\, a^3},$$

$$i - 1 = 10, \quad i = 11,$$

pa je

$$a_7 = a_8 = \ldots = a_{10} = 0, \quad \delta_{10} = \delta_6.$$

Dalje je

$$a_{11} = \frac{10!}{11!} \lim_{x \to 0} \frac{\delta_6}{x^{10}} = \frac{1}{44a}, \qquad \text{itd.}$$

Približno rešenje biće :

$$/R/ \quad y \approx ax + \frac{x^6}{6} + \frac{x^{11}}{44a} + \frac{5x^{16}}{1056a^2}.$$

Iz

$$y'' \approx 5x^4 + \frac{5}{2a}x^9 = 0,$$

i

$$5x^4\left(1 + \frac{x^5}{2a}\right) = 0,$$

dobija se, uzimajući u obzir samo prva dva člana,

$$x = -\sqrt[5]{2a}.$$

Na taj način je

$$y(-\sqrt[5]{2a}) = -\frac{25a}{33}\sqrt[5]{2a} = -\frac{25}{99000},$$

i

$$a = 0,008866.$$

Kako je red /R/ za $x < 0$, naizmeničan, za dobijenu vrednost x greška je

$$|R_{11}| < 2 \cdot 10^{-5},$$

što opravdava uzimanje samo tri člana reda /R/.

2. Data je diferencijalna jednačina [2]

$$y' = 1 + x^{k_1} y^{k_2},$$

gde su $k_i, (i = 1, 2)$ pozitivni celi brojevi, sa početnim uslovom

$$y(0) = 0.$$

Koristeći formulu /5'/ dobijaju se

$$a_1 = 1, \quad a_{k_1+k_2+1} = \frac{1}{k_1+k_2+1},$$

$$a_{2k_1+2k_2+1} = \frac{k_2}{(k_1+k_2+1)(2k_1+2k_2+1)},$$

$$a_{3k_1+3k_2+1} = \frac{4k_2^3 + (4k_1+1)k_2^2 - (2k_1+1)k_2}{2(k_1+k_2+1)^2(2k_1+2k_2+1)(3k_1+3k_2+1)},$$

svi ostali $a_i \; (i = 4k_1 + 4k_2)$ jednaki su nuli.

3. Razmatra se familija diferencijalnih jednačina koja zavisi od jednog diskretnog parametra k [2]:

$$y^{(2k)} = 1 + y^2 + (y^{(k)})^2, \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

sa sledećim početnim uslovima

$$y^{(i)}(0) = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, 2k-1).$$

Ova familija sadrži sve jednačine parnog reda jer k neograničeno raste. Svi koeficijenti a_i mogu se izračunati odjednom kao funkcije parametra k .

Iz formule /5'/ dobijamo

$$a_{2k} = \frac{1}{(2k)!}, \quad a_{4k} = \frac{(2k)!}{(k!)^2 (4k)!}.$$

Za $i = 4k - 1$, svi a_i jednaki su nuli.

4. Data je familija sistema diferencijalnih jednačina [2]

$$y_l' = \sum_{j=1}^{n} y_j + l y_l^2 + 1, \quad (l = 1,2,\ldots,n;\ n = 2,3,\ldots)$$

$$y_l(0) = 0.$$

Smatraćemo da ceo broj n nije fiksirani broj nego diskretan parametar. Na taj način razmatraju se sistemi sledećih oblika :

/1/ $$y_1' = 1 + y_1 + y_2 + y_1^2,$$
$$y_2' = 1 + y_1 + y_2 + 2y_2^2,$$

/2/ $$y_1' = 1 + y_1 + y_2 + y_3 + y_1^2,$$
$$y_2' = 1 + y_1 + y_2 + y_3 + 2y_2^2,$$
$$y_3' = 1 + y_1 + y_2 + y_3 + 3y_3^2,$$

itd.

Koristeći formulu /7'/, dobija se

$a_{l,1} = 1,\quad a_{l,2} = n/2,\quad a_{l,3} = l/3 + n^2/6,$

$(l = 1, 2, \ldots, n; \; n = 2, 3, \ldots,).$

Za sistem /1/ odnosno /2/, dobijamo sledeća rešenja :

$$/1'/ \quad \begin{aligned} y_1 &= x + x^2 + x^3 + \ldots, \\ y_2 &= x + x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \ldots, \end{aligned}$$

i

/2'/

$$y_1 = x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 + \ldots,$$

$$y_2 = x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{13}{6}x^3 + \ldots,$$

$$y_3 = x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x^3 + \ldots,$$

itd.

Sada će se izložiti dve metode :

a/ Metoda diferenciranja i b/ Korišćenje jedne vrste transformacija diferencijalnih jednačina [11] i [12], koje proširuju mogućnosti praktične primene izložene metode K.P. Orlova.

a/ Metoda diferenciranja. Metoda integracije diferencijalnih jednačina pomoću diferenciranja poznata je još od vremena Euler-a, Legendre-a i drugih matematičara, a sastoji se u sledećem :

Data je diferencijalna jednačina

$$/1/ \quad y^{(x)} = f_1(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)}).$$

Traži se Cauchy-ev integral koji zadovoljava uslove :

/1'/ $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \ldots,\ y^{(k-1)}(x_0) = y_0^{(k-1)}.$

Diferenciranjem te jednačine po x , dobija se :

$$/2/\quad y^{(k+1)} = f_2(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)}, y^{(k)}),$$

sa početnim uslovima

/2'/ $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \ldots,\ y^{(k)}(x_0) = f_1(x_0).$

Iz jednačine /1/ i /2/ može se izvesti beskonačno mnogo posledica oblika :

$$/3/\quad y^{(k+1)} = f_3(x, y, y', \ldots, y^{(k)}),$$

sa početnim uslovima /2'/

Po sebi se razume, da se diferenciranje ne mora ograničiti na jedno diferenciranje, već se može dobiti

$$y^{(k+1)} = f_2^1(x, y, y', \ldots, y^{(k)}),$$

$$/4/\quad y^{(k+2)} = f_2^2(x, y, y', \ldots, y^{(k+1)}),$$

$$\vdots$$

$$y^{(k+p)} = f_2^p(x, y, y', \ldots, y^{(k+p-1)}),$$

/ $p > 0$ - ceo broj /, sa odgovarajućim početnim uslovima oblika /2'/, pa se rezultujuća jednačina reda

$$/3'/\quad y^{(k+p)} = f_3(x, y, y', \ldots, y^{(k+p-1)})$$

dobija se kao posledica polazna jednačine /1/ i svih jednačina /4/. Smisao metode je, da se izabere ona posledica za koju f_3 prima što jednostavniji oblik s našeg gledišta, odnosno s gledišta one metode integracije koju ćemo primeniti.

U nizu partikularnih slučajeva, integracija jednačine /3/, sa odgovarajućim početnim uslovima, jednostavnija je od integracije polazne jednačine /1/.

Metoda diferenciranja, medjutim, nije mogla da dobije šire značenje zato što se, prilikom njene primene, povećavao red diferencijalne jednačine što je dovodilo do velikih komplikacija. Tako se metoda svela na niz posebnih zadataka.

S obzirom da se metoda K.P. Orlova neposredno primenjuje na početne probleme za diferencijalne jednačine viših redova tako da povećanje reda jednačine ne povećava, osetno, potrebna izračunavanja, koristiće se metoda diferenciranja sa ciljem da se omogući izbor takve jednačine oblika /3/ koja će uprostiti rešavanje jedne klase zadataka oblika /1/ - /1'/.

U nizu praktičnih zadataka s kojima se susrećemo, funkcija $f_1(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)})$, iz /1/ sadrži algebarske /iracionalne/ ili transcedentne / eksponencijalne, trigonometrijske, logaritamske, ciklometrijske itd/ funkcije složenih argumenata, u koje čak mogu da udju i nepoznata funkcija i njeni izvodi. Sukcesivnim diferenciranjem po x polazne jednačine /1/, moguće je, u slučajevima koji se najčešće javljaju u praksi, eliminisati takve argumente.

Naglasićemo sledeće. Veliki broj zadataka iz prakse, koji se formuliše u obliku /1/ - /1'/, ima tu osobinu / takav oblik desne strane - $f_1(x, y, \ldots, y^{(k-1)})$ /, da se iz dva ili više uzastopnih izvoda, tj iz /1/, /2/ i /4/, mogu eliminisati trigonometrijske funkcije i koreni složenih argumenata.

Na taj način, od posledica oblika /3/ - /3'/ možemo izabrati one čije su desne strane racionalne funkcije svih ili nekih argumenata :

$$f_3 = \mathcal{R}(x, y, y', \ldots, y^{(k+p-1)}),$$

ili

$$f_3 = \mathcal{R}(y, y', \ldots, y^{(k+p-1)}) + F(x),$$

gde su $\mathcal{R}$ - racionalna, a F - proizvoljna analitička funkcija.

U specijalnim slučajevima desne strane mogu biti polinomi svojih argumenata.

Primer 1. U ovom primeru pokazaće se eliminacija iracionalnosti /korena/ iz desne strane jednačine.

Naći rešenje početnog problema za diferencijalnu jednačinu

/1/ $$y'' = 2\sqrt{e^{2x} - y^2},$$

/1'/ $$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Iz

$$y'' = 2\sqrt{e^{2x} - y^2}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1,$$

i

$$y''' = \frac{2e^{2x} - 2yy'}{\sqrt{e^{2x} - y^2}}, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 1, \; y''(0) = 2,$$

eliminiše se koren i dobija se sledeći početni zadatak:

$$/2/ \quad y''' = \frac{2(2e^{2x} - 2yy')}{y''},$$

$$/2'/ \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 2.$$

Predjimo sada, na njegovo rešavanje.

Iz /2/ i /2'/ biće

$$s_2 = x + x^2, \quad s_2' = 1 + 2x, \quad s_2'' = 2, \quad s_2''' = 0,$$

tj.

$$\delta_2 = \frac{4e^{2x} - 4(x^2+x)(2x+1)}{2},$$

i za $i = 3$, na osnovu formule /5'/ dobija se

$$a_3 = \frac{1}{3!} \lim_{x \to 0} \delta_2 = \frac{1}{3}.$$

Dalje, uopšte je

$$\delta_{i-1} = \frac{4e^{2x} - 4s_{i-1}s_{i-1}' - s_{i-1}'' \cdot s_{i-1}'''}{s_{i-1}''}. \quad (i \geq 3).$$

U sledećem koraku dobija se

$$a_4 = 0.$$

Za $a_i = 0$, biće $\delta_i = \delta_{i-1}$, te se odmah dobija

$$a_5 = -\frac{1}{30}.$$

Približno rešenje zadatka /1/ - /1'/ je

$$/3/ \quad y \simeq x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30}.$$

Napomena. Uporedjujući rešenje, dobijeno jednom diferencnom metodom[1/], može se ustanoviti da se za vrednosti

$$x \in [0; 0.5]$$

rešenje /3/, iako ima tako mali broj članova, ima prve tri decimale tačne. Napomenimo, da bi se još jednim diferenciranjem jednačine /2/ eliminisala eksponencijalna funkcija e^{2x}, što bi dovelo do jednačine IV reda :

$$y^{IV} = \frac{2y''y''' + 8yy' - 4y'^2 - 4yy'' - y'''^2}{y''}.$$

Primer2.

$$/1/ \quad y' = tg\, y + \cos x,$$

$$/1'/ \quad y(0) = 0.$$

1/ H. Levy and E.A. Baggott, Numerical solutions of differential equations, Dover Publications, 1950.

Iz

$$y' = tg\, y + \cos x, \quad y(0) = 0,$$

i

$$y'' = \frac{y'}{\cos^2 y} - \sin x, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 1,$$

eliminišu se $tg\, y$ i $\cos^2 y$, pa se dobija sledeći početni zadatak :

/2/ $$y'' = y'(y' - \cos x)^2 + y' - \sin x,$$

/2'/ $$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Predjimo na njegovo rešavanje.

Primenom formule /5'/, lako se dobijaju prvih šest članova reda, za rešenje :

/3/ $$y = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{8} + \frac{61}{720}x^6 + \ldots$$

Napomenimo da se još jednim diferenciranjem jednačine /2/ mogu eliminisati funkcije $\sin x$ i $\cos x$, samo se, pri tome, dobija dosta glomazan izraz na desnoj strani jednačine III reda. Stoga je, u ovom slučaju, praktičnije zaustaviti se na rešavanju jednačine II reda

Primer 3. $$y' = \sin y + \cos x, \quad y(0) = 0.$$

U ovom slučaju iz

$$/1/ \quad y' = \sin y + \cos x, \; y(0) = 0,$$

$$/2/ \quad y'' = y' \cos y - \sin x, \; y(0) = 0, \; y'(0) = 1,$$

mogu se eliminisati $\sin y$ i $\cos y$, te se dobija

$$/2'/ \quad y'' = y' \sqrt{1 - (y' - \cos x)^2} - \sin x.$$

Iz /2'/ i

$$/3/ \quad y''' = y'' \sqrt{1 - (y' - \cos x)^2} - \frac{y'(y' - \cos x)(y'' + \sin x)}{\sqrt{1 - (y' - \cos x)^2}} - \cos x,$$

eliminiše se koren i dobija se

$$/3'/ \quad y''' = y'^2 \cos x - y'^3 + \frac{y''(y'' + \sin x)}{y'} - \cos x,$$

sa uslovima

$$/3''/ \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 1, \; y''(0) = 1.$$

Približno rešenje zadatka /3'/ - /3''/ biće

$$y \approx x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{6}.$$

b/ <u>Korišćenje jedne vrste transformacija</u> diferencijalnih jednačina radi dobijanja partikularnih rešenja. U prethodnom slučaju koristilo se diferenciranje diferencijalnih jednačina sa ciljem da se eliminišu transcendentne funkcije složenih argumenata iz desnih strana jednačina. Kombinacija metode K.P.Orlova i metode diferenciranja pokazuje se kao vrlo efikasna za rešavanje čitave klase početnih problema koji se najčešće javljaju u praksi.

Sada prelazim, oslanjajući se, isto tako, na metodu K.P.Orlova, na transformaciju koja se sastoji u tome da se transcedentne funkcije koje ulaze u desnu stranu diferencijalne jednačine

$$/1/ \quad y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

sa početnim uslovima

$$/1'/ \quad y^{(i)}(x_0) = y_0^{(i)}, \quad (i = 0, 1, \dots, n-1),$$

zamene njihovim Tajlorovim odsečkom.

Pretpostavlja se da je u jednačini /1/ funkcija f analitička funkcija svojih argumenata i da je tačka

$$(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)})$$

regularna tačka funkcije f.

Rešenje početnog problema /1/ - /1'/ traži se u obliku Tajlorovog reda, metodom K.P.Orlova :

$$/A/ \quad y = y_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{y_0^{(i)}}{i!}(x-x_0)^i + \sum_{i=n}^{\infty} a_i (x-x_0)^i,$$

gde se koeficijenti a_i $(i \geqslant n)$ izračunavaju po ranije pomenutim, ekvivalentnim formulama /5/, /5'/ ili /5''/.

U tom cilju razmatra se diferencijalna jednačina

$$/2/\quad y^{(n)} = f(\mathscr{C}_1(x), \mathscr{C}_2(y), \dots, x, y, \dots, y^{(n-1)}),$$

sa početnim uslovima

$$/2'/\quad y^{(i)}(x_0) = y_0^{(i)}, \quad (i = 0, 1, \dots, n-1)$$

gde su $f, \mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \dots,$ analitičke funkcije svojih argumenata, a tačka $(x_0, y_0, \dots, y_0^{(n-1)})$ - regularna tačka funkcije f.

Rešavanje problema /2/ - /2'/ sastoji se u tome što se funkcije $\mathscr{C}_i$ zamenjuju odsečcima njihovog Tajlorovog reda

$$\mathscr{C}_1(x) = T_k(x), \quad \mathscr{C}_2(y) = T_e(y), \dots,$$

u blizini tačke $x = x_0$, odnosno $y = y_0$. Takvu transformaciju zvaćemo nadalje, <u>uprošćavanje</u> diferencijalne jednačine. Pitanje koje ću tom prilikom rešiti je sledeće : koliko članova reda T_k, odnosno redova $T_e, \dots$, treba uzeti da bi se rešavanjem uprošćene jednačine

$$/3/\quad y^{(n)} = f(T_k(x), T_e(y), \dots, x, y, \dots, y^{(n-1)})$$

sa istim uslovima /2'/, došlo do Tajlorovog reda /A/ koji je do koeficijenta a_i / indeks i je proizvoljan / identičan sa rešenjem problema /2/-/2'/ u obliku Tajlorovog reda. Radi toga dokazaćemo sledeće dve teoreme.

Теорема !

Data je diferencijalna jednačina

$$/4/ \quad y^{(n)} = \mathcal{R}\left(f(x), x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right),$$

sa početnim uslovima

$$/4'/ \quad y^{(i)}(x_0) = y_0^{(i)}, \quad (i = 0, 1, \dots, n-1)$$

gde su $\mathcal{R} = \frac{P}{Q}$, P i Q su linearne funkcije od $f(x)$, a analitičke funkcije po ostalim argumentima, f - analitička funkcija argumenta x, i $(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)})$ - regularna tačka funkcije $\mathcal{R}$. Ako mesto $f(x)$ stavimo $T_k(x)$, gde je $T_k(x)$ odsečak Tajlorovog reda k-tog stepena funkcije $f(x)$ u blizini tačke $x = x_0$, dobićemo drugačiju diferencijalnu jednačinu koju ćemo zvati <u>uprošćena</u> diferencijalna jednačina i ona glasi :

$$/5/ \quad y^{(n)} = \mathcal{R}\left(T_k(x), x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$$

sa početnim uslovima /4'/. Ona će imati rešenje u obliku Tajlorovog reda :

$$/B/ \quad y = y_0 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{y_0^{(i)}}{i!}(x-x_0)^i + \sum_{i=n}^{\infty} b_i (x-x_0)^i .$$

Teorema 1. Da bi koeficijenti Tajlorovih redova /A/ i /B/ bili jednaki, tj. $a_i = b_i$, za svako $i = n, n+1, \dots, n+p,$ dovoljan uslov je da je $k=p$.

Dokaz. Zamenimo $f(x)$ sa $T_k(x)$, tada je

$$/6/ \quad a_i = \frac{(i-n)!}{i!}\lim_{x\to x_0}\frac{\delta_{i-1}}{(x-x_0)^{i-n}},$$

i

$$/6'/ \quad b_i = \frac{(i-n)!}{i!}\lim_{x\to x_0}\frac{\delta^*_{i-1}}{(x-x_0)^{i-n}},$$

gde je

$$\delta^*_{i-1} = R\left(T_k(x), x, s^*_{i-1}, s^{*\prime}_{i-1}, \dots, s^{*(n-1)}_{i-1}\right) - s^{*(n)}_{i-1} =$$

$$= \frac{P\left(T_k(x), x, s^*_{i-1}, \dots, s^{*(n-1)}_{i-1}\right) - s^{*(n)}_{i-1}\cdot Q\left(T_k(x), x, s^*_{i-1}, \dots, s^{*(n-1)}_{i-1}\right)}{Q\left(T_k(x), x, s^*_{i-1}, s^{*\prime}_{i-1}, \dots, s^{*(n-1)}_{i-1}\right)}$$

a $s^*_{i-1}, s^{*\prime}_{i-1}, \dots, s^{*(n)}_{i-1},$

su delimične sume Tajlorovog reda rešenja uprošćene diferencijalne jednačine.

Stavimo

$$P\left(T_k(x), x, s^*_{i-1}, \dots, s^{*(n-1)}_{i-1}\right) =$$

$$= T_k(x)\, P_1\left(x, s^*_{i-1}, \dots, s^{*(n-1)}_{i-1}\right) + P_2\left(x, s^*_{i-1}, \dots, s^{*(n-1)}_{i-1}\right),$$

$$Q\left(T_k(x), x, \overset{*}{\delta}_{i-1}, \ldots, \overset{*(n-1)}{\delta_{i-1}}\right) =$$
$$= T_k(x)\cdot Q_1\left(x, \overset{*}{\delta}_{i-1}, \ldots, \overset{*(n-1)}{\delta_{i-1}}\right) + Q_2\left(x, \overset{*}{\delta}_{i-1}, \ldots, \overset{*(n-1)}{\delta_{i-1}}\right).$$

Dobijamo

$$/7/ \lim_{x\to x_0} \frac{\overset{*}{\delta}_{i-1}}{(x-x_0)^{i-n}} = \lim_{x\to x_0} \frac{T_k(x)\cdot P_1 + P_2 - \overset{*(n)}{\delta_{i-1}}\left[T_k(x)Q_1 + Q_2\right]}{(x-x_0)^{i-n}\cdot Q}.$$

Primenjujući Lopitalovo pravilo $(i-n)$ - puta na desnu stranu /7/ imamo

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\overset{*}{\delta}_{i-1}}{(x-x_0)^{i-n}} = \frac{\sum_{m=0}^{i-n}\binom{i-n}{m} P_{1/x=x_0}^{(i-n-m)} T_k(x)_{x=x_0}^{(m)} + P_{2\,x=x_0}^{(i-n)}}{(i-n)!\, Q\left(T_k(x), x, \overset{*}{\delta}_{i-1}, \ldots, \overset{*(n-1)}{\delta_{i-1}}\right)_{x=x_0}} -$$

$$- \frac{\sum_{m=0}^{i-n}\binom{i-n}{m}\left(\overset{*(n)}{\delta_{i-1}}\cdot Q_1\right)_{x=x_0}^{(i-n-m)}\cdot T_k(x)_{x=x_0}^{(m)} + \sum_{m=0}^{i-n}\binom{i-n}{m} Q_{2/x=x_0}^{(i-n-m)}\left(\overset{*(n)}{\delta_{i-1}}\right)_{x=x_0}^{(m)}}{(i-n)!\, Q\left(T_k(x), x, \overset{*}{\delta}_{i-1}, \ldots, \overset{*(n-1)}{\delta_{i-1}}\right)_{x=x_0}}.$$

Prelaskom na $f(x)$ iz /4/, dobijamo :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\overset{*}{\delta}_{i-1}}{(x-x_0)^{i-n}} = \frac{\sum_{m=0}^{i-n}\binom{i-n}{m} P_{1/x=x_0}^{(i-n-m)} f(x)_{x=x_0}^{(m)} + P_{2\,x=x_0}^{(i-n)}}{(i-n)!\, Q\left(T_k(x), x, \overset{*}{\delta}_{i-1}, \ldots, \overset{*(n-1)}{\delta_{i-1}}\right)_{x=x_0}} -$$

$$- \frac{\sum_{m=0}^{i-n}\binom{i-n}{m}\left(\overset{*(n)}{\delta_{i-1}}\cdot Q_1\right)_{x=x_0}^{(i-n-m)}\cdot f(x)_{x=x_0}^{(m)} + \sum_{m=0}^{i-n}\binom{i-n}{m} Q_{2/x=x_0}^{(i-n-m)}\left(\overset{*(n)}{\delta_{i-1}}\right)_{x=x_0}^{(m)}}{(i-n)!\, Q\left(T_k(x), x, \overset{*}{\delta}_{i-1}, \ldots, \overset{*(n-1)}{\delta_{i-1}}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{P_1 f(x) + P_2 - \overset{(n)}{\delta_{i-1}}\left(Q_1\cdot f(x) + Q_2\right)}{(x-x_0)^{i-n}\cdot Q} = \lim_{x\to x_0} \frac{\delta_{i-1}}{(x-x_0)^{i-n}},$$

tj. $b_i = a_i$, na osnovu /6/ za $i = n, n+1, \ldots, n+p$.

Time je teorema dokazana.

Neka je data diferencijalna jednačina

$$/8/ \quad y^{(n)} = R(f(y), x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$

sa početnim uslovima

$$/8'/ \quad y^{(i)}(x_0) = y_0^{(i)}, \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1)$$

gde R, f i tačka $(x_0, y_0, \ldots, y_0^{(n-1)})$ imaju iste osobine, kao u teoremi 1.

Ako umesto $f(y)$ uzmemo $T_k(y)$ gde je $T_k(y)$ odsečak Tajlorovog reda, k-tog stepena funkcije $f(y)$ u blizini tačke $y = y_0$ dobićemo drugačiju diferencijalnu jednačinu koju ćemo zvati uprošćena diferencijalna jednačina.

Teorema 2. Da bi koeficijenti Tajlorovih redova rešenja diferencijalne jednačine /8/ - /8'/ i odgovarajuće uprošćene jednačine, u napred izloženom smislu, bili jednaki za svako $i = n, n+1, \ldots, n+p$, dovoljan uslov je da je $k = p$. Dokaz je potpuno analogan.

Napomena 1. Ograničenje za funkciju $R(f(x), x, y, \ldots, y^{(n-1)})$ odnosno za funkcije $P(f(x), x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ i $Q(f(x), x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ koje su linearne funkcije od $f(x)$, izgleda vrlo oštro ali se, u stvari, može znatno ublažiti.

Napomena 2. Teorema 1. i teorema 2. mogu se generalisati na mnogo šire klase funkcija. Slične teoreme vrede i za kanoničke sisteme diferencijalnih jednačina.
Napomena 3. Metoda diferenciranja i izložena metoda transformacija mogu se uspešno kombinovati.
Dati dovoljni uslovim za stepene odsečaka Tajlorovih redova transcedentnih funkcija na desnoj strani jednačine /1/ obezbedjuju rešenje tačno zaključno sa koeficijentom a_{n+p} . Medjutim, praktično se obično postiže veća tačnost.
Primer 1.

$$y''' = \frac{4(e^{2x} - yy')}{y''},$$

$$y(0) = 0, \; y'(0) = 1, \; y''(0) = 2$$

a/ Ako se e^{2x} zameni sa $T_1(x) = 1 + 2x$, dobija se rešenje tačno zaključno sa koeficijentom a_4,
$/ i-3 = 1; \; i = 4 /.$

$$y = s_4 = x + x^2 + \frac{x^3}{3}, \quad (a_4 = 0).$$

b/ Ako se e^{2x} zameni sa $T_2(x) = 1 + 2x + 2x^2$, dobija se tačno

$$y = s_5 = x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30}; \quad (i-3=2; \; i=5).$$

c/ Ako se e^{2x} zameni sa $T_3(x) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3$, dobiće se

$$y = s_6 = x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} - \frac{x^6}{90}.$$

Primer 2.

$$y'' = \frac{\ln x - 20}{\ln x + 20} y', \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1$$

a/ Ako se $\ln x$ zameni sa $T_2(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2$.
dobiće se tačno

$$y = s_5 = (x-1) - \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{120} + \frac{67}{12000}(x-1)^5$$

/ $i - 2 = 2$; $i = 4$, dobijena je tačnost do a_5 zaključno /

Primer 3.

$$y'' = \frac{-y'^2 \cdot e^y}{1 + e^y},$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = \frac{1}{2}.$$

a/ Ako se e^y zameni sa $T_1(y) = 1 + y$,
dobiće se tačno

$$y = s_3 = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{16} + \frac{x^3}{192} \cdot (i - 2 = 1, \; i = 3).$$

b/ Ako se umesto e^y uzme $T_2(y) = 1 + y + \frac{y^2}{2}$,
dobiće se tačno

$$y = s_5 = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{16} + \frac{x^3}{192} + \frac{x^4}{3072} - \frac{13x^5}{80 \cdot 768},$$

/ ($i - 2 = 2$, $i = 4$, a tačnost je zaključno sa a_5 /.

Primer 4.

$$y'' = \cos^2(yy') + x^3 y^2,$$

$$y(0) = y'(0) = 0.$$

a/ Ako se $\cos^2(yy')$ zameni sa $T_0(yy') = 1,$ dobiće se tačno

$$y = S_2 = \frac{x^2}{2}, \quad (i-2=1, \; i=3)$$

b/ Ako se $\cos^2(yy')$ zameni sa $T_2(yy') = 1-(yy')^2$ dobiće se tačno

$$y = S_9 = \frac{x^2}{2} - \frac{x^8}{224} + \frac{x^9}{288}, \quad (i-2=3, \; i=5)$$

c/ Ako se $\cos^2(yy')$ zameni sa $T_4(y) = 1-(yy')^2 + \frac{(yy')^4}{3},$ dobiće se tačno

$$y = S_{13} = \frac{x^2}{2} - \frac{x^8}{224} + \frac{x^9}{288}, \quad (i-2=5; \; i=7; \; a_{10} = \ldots = a_{13} = 0)$$

d/ Ako se $\cos^2(yy')$ zameni sa $T_6(yy') = 1-(yy')^2 + \frac{(yy')^4}{3} - \frac{(yy')^6}{35},$ dobija se

$$y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^8}{224} + \frac{x^9}{288} + \frac{29x^{11}}{122\,304} + \ldots$$

Napomena. U ovom slučaju, funkcija $\cos(yy')$ javlja se nelinearno.

Primer 5.

$$y''' = \cos^2(yy'y'') + x^3y^2,$$

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0.$$

Ovaj primer je interesantan zato što se tačnost rešenja, na primer, za sve $i \le 21$, dobija već za

$$T_0(yy'y'') = 1.$$

Ako se $\cos^2(yy'y'')$ zameni sa $T_0(yy'y'') = 1$

dobija se

$$y = S_{21} = \frac{x^3}{6} + \frac{x^{12}}{10\cdot 11\cdot 12\cdot 36} + \frac{x^{21}}{3\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 19\cdot 20\cdot 21\cdot 36}.$$

Primena formule

$$\lim_{x\to 0}\frac{\delta^*_{i-1}}{x^{i-3}} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2(S^*_{i-1}\cdot S^{*\prime}_{i-1}\cdot S^{*\prime\prime}_{i-1}) + x^3 S^{*2}_{i-1} - S^{*\prime\prime\prime}_{i-1}}{x^{i-3}}$$

/ kako je $S^*_3 = \frac{x^3}{6}$, $S^{*\prime\prime\prime}_{i-1} = 1 + \mathcal{O}(x)$, za sve

$i > n$ / dovodi do sledećeg rezultata.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\delta^*_{i-1}}{x^{i-3}} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2(S^*_{i-1} S^{*\prime}_{i-1} S^{*\prime\prime}_{i-1}) + x^3 S^{*2}_{i-1} - \mathcal{O}(x)}{x^{i-3}}$$

tj. $$\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2(S^*_{i-1}\cdot S^{*\prime}_{i-1}\cdot S^{*\prime\prime}_{i-1})}{x^{i-3}} = 0,$$

na primer, za sve $i \le 21$.

Napomena. Primena metode K.P.Orlova omogućuje da se sa nekoliko računskih koraka ustanove praznine u Tajlorovom redu - rešenju početne diferencijalne jednačine.

Primer 6. $\dot{x} = y + tg^2 t - 1, \quad x(0) = 0,$

$$\dot{y} = -x + tg\, t, \quad y(0) = 3.$$

Iz uprošćenog sistema

$$\dot{x} = y + \left(t + \frac{t^3}{3} + \frac{2}{15}t^5\right)^2 - 1, \quad x(0) = 0,$$

$$\dot{y} = -x + t + \frac{t^3}{3} + \frac{2}{15}t^5, \quad y(0) = 3,$$

/ ovde je $tg\, t$ zamenjeno sa $T_5(t)$ /, veoma brzo, dobija se rešenje

$$x = s_{1,7} = 2t + \frac{t^3}{3!} + \frac{17}{5!}t^5 + \frac{271}{7!}t^7,$$

$$y = s_{1,6} = 3 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!}$$

$$(r - 1 = 5\ ;\ r = 6)$$

Napomena. Ovde je ilustrovana primena teoreme 1. na kanonički sistem diferencijalnih jednačina. U slučaju da se u jednačinama javlja više funkcija koje se zamenjuju odsečcima svojih Tajlorovih redova, tj. $T_k(t), T_m(t), \ldots$, dovoljan uslov iz teoreme 1. je $\min(k, m, \ldots) = p$.

Glava II

U ovoj glavi dati su sledeći prilozi.

1. Metoda K.P. Orlova proširena je na sistem od n diferencijalnih jednačina m -tog reda $/m>1/$, rešenih po izvodima najvišeg reda. Osnovne su teorema 1. i teorema 2. One predstavljaju, u svakom slučaju, i teorijsku osnovu za dalja proširenja metode na : a/ sistem od s diferencijalnih jednačina reda $m_1, m_2, \ldots, m_s$, respektivno, b/ sistem od n diferencijalnih jednačinaod kojih je l - reda m_1 , p - reda m_2 , ..., s - reda m_k $/ l+p+\ldots+s=n;\ m_1\geq 1, m_2\geq 1, \ldots, m_k\geq 1)$.

2. U slučajevima pod a/ i b/ dati su dovoljni uslovi za važenje teoreme 1. i teoreme 2. pod 1. Oni su od praktičnog značaja.

3. Pored toga, u specijalnom slučaju, kada su desne strane sistema diferencijalnih jednačina pod a/ i b/ racionalne funkcije svojih argumenata dati su neophodni i dovoljni uslovi za važenje teoreme 1. i teoreme 2. iz tačke 1. Ovi rezultati omogućuju odredjene redosledе u dobijanju pojedinih komponenata vektora rešenja datog početnog problema za sistem, što može da bude od interesa u praksi. Zajedno sa rezultatima iz

Glave I, mogu se korisno kombinovati za vrlo široku klasu početnih problema u praksi.

1. Neka je dat sistem diferencijalnih jednačina

$$/1/\quad y_l^{(m)} = f_l(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n', \ldots, y_1^{(m-1)}, \ldots, y_n^{(m-1)}),$$

$$(m > 1,\ l = 1, 2, \ldots, n)$$

sa početnim uslovima

$$/2/\quad y_l^{(i)}(x_0) = y_{l,0}^{(i)} \quad (i = 0, 1, \ldots, m-1)$$

Partikularno rešenje sistema /1/ sa početnim uslovima /2/ traži se u obliku Tajlorovog reda, metodom K.P. Orlova.

Za slučajeve a/ $l = 1$ i $m \geq 1$ i b/ $m = 1$ i $l = 1, 2, \ldots n$, K.P. Orlov dao je novu efektivnu metodu za izračunavanje koeficijenata Tajlorovog reda rešenja odgovarajućih početnih problema, pod uslovom da su f odnosno $f_l\ (l = 1, 2, \ldots, n)$ analitičke funkcije svojih argumenata, a tačka $(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(m-1)})$ – regularna tačka funkcije f, odnosno tačka $(x_0, y_{1,0}, y_{2,0}, \ldots, y_{n,0})$ – regularna tačka svih funkcija $f_l\ (l = 1, 2, \ldots, n)$.

Ovde će se izložiti proširenje teorema 1., 2., 3., i 4 [2] na sistem /1/ sa početnim uslovima /2/.

Neka su u sistemu /1/ sa početnim uslovima /2/, sve funkcije $f_l \ (l=1,2,\dots,n)$ analitičke funkcije svojih argumenata i neka je tačka

$$(x_0, y_{1,0}, y'_{1,0}, \dots, y^{(m-1)}_{1,0}, y_{2,0}, \dots, y^{(m-1)}_{2,0}, \dots, y_{n,0}, \dots, y^{(m-1)}_{n,0})$$

regularna tačka svih funkcija $f_l \ (l=1,2,\dots,n)$.

Tada sistem /1/ - /2/ ima partikularno rešenje u obliku Tajlorovog reda

$$/3/ \quad y_l = \sum_{i=0}^{\infty} a_{l,i}(x-x_0)^i = y_{l,0} + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{y^{(i)}_{l,0}}{i!}(x-x_0)^i + \sum_{i=m}^{\infty} a_{l,i}(x-x_0)^i$$

gde su $a_{l,i} \ (l=1,2,\dots,n)$ koeficijenti Tajlorovog reda tačnog rešenja sistema /1/ -/2/.

Neka su, dalje

$$/4/ \quad s_{l,k} = \sum_{i=0}^{k} a_{l,i}(x-x_0)^i \qquad (k \geq m-1;\ l=1,2,\dots,n)$$

k -te delimične sume Tajlorovog reda rešenja /3/. Tada izrazi

$$\delta_{l,k} = f_l(x, s_{1,k}, \dots, s^{(m-1)}_{1,k}, s_{2,k}, \dots, s^{(m-1)}_{2,k}, \dots, s^{(m-1)}_{n,k}) - s^{(m)}_{l,k}$$

$$(k \geq m-1;\ l=1,2,\dots,n)$$

predstavljaju Tajlorov ostatak k -tog reda, u tački

$x = x_0$, sistema /1/ sa početnim uslovima /2/.

[2].

Teorema 1. Ako su u sistemu /1/ sa početnim uslovima /2/ sve funkcije $f_l \ (l = 1, 2, \dots, n)$ analitičke funkcije svojih argumenata i tačka

$$(x_0, y_{1,0}, \dots, y_{1,0}^{(m-1)}, y_{2,0}, \dots, y_{2,0}^{(m-1)}, \dots, y_{n,0}, \dots, y_{n,0}^{(m-1)})$$

je regularna tačka svih funkcija $f_l \ (l = 1, 2, \dots, n)$, tada izrazi

$$f_l(x, s_{1,k}, \dots, s_{1,k}^{(m-1)}, s_{2,k}, \dots, s_{2,k}^{(m-1)}, \dots, s_{n,k}, \dots, s_{n,k}^{(m-1)}),$$
$$(l = 1, 2, \dots, n; \ k \geq m-1)$$

imaju sledeći oblik

$$/5/ \quad f_l(x, s_{1,k}, \dots, s_{1,k}^{(m-1)}, s_{2,k}, \dots, s_{2,k}^{(m-1)}, \dots, s_{n,k}, \dots, s_{n,k}^{(m-1)}) =$$

$$= \sum_{j=0}^{k-m+1} \frac{(j+m)!}{j!} a_{l,j+m} (x-x_0)^j + \sum_{j=k-m+2}^{\infty} b_{l,j}^{k} (x-x_0)^j,$$

$$(l = 1, 2, \dots, n; \ m > 1; \ k = m-1, m, \dots),$$

gde su $a_{l,j+m}$ koeficijenti Tejlorovih redova tačnog rešenja sistema /1/ koje zadovoljava početne uslove /2/, i gde $b_{l,j}^{k}$ zavise od l, j i k.

Dokaz ove teoreme je potpuno analogan dokazu teoreme 1. i teoreme 3. [2].

Teorema 2. Pod uslovom da su sve funkcije $f_l \ (l = 1, 2, \dots, n)$

sistema /1/, sa početnim uslovima /2/ analitičke funkcije svojih argumenata i da je tačka

$$\left(x_0, y_{1,0}, \dots, y_{1,0}^{(m-1)}, y_{2,0}, \dots, y_{2,0}^{(m-1)}, \dots, y_{n,0}, \dots, y_{n,0}^{(m-1)}\right)$$

regularna tačka svih funkcija $f_\ell \ (\ell = 1,2,\dots,n)$, sistem /1/ ima partikularno rešenje, sa početnim uslovima /2/, u obliku Tajlorovog reda.

Koeficijenti ovoga reda dati su formulama

$$/6/ \quad a_{\ell,i} = \frac{(i-m-p_i)!}{i!} \lim_{x\to x_0} \frac{1}{(x-x_0)^{i-m-p_i}} \cdot \frac{d^{p_i} \delta_{\ell,i-1}}{dx^{p_i}}$$

$$(i = m, m+1, \dots ; \ \ell = 1, 2, \dots, n)$$

gde je $0 \leq p_i \leq i-m$, proizvoljan ceo broj, ili ekvivalentnim formulama oblika

$$/6'/ \quad a_{\ell,i} = \frac{(i-m)!}{i!} \lim_{x\to x_0} \frac{\delta_{\ell,i-1}}{(x-x_0)^{i-m}}, \quad (p_i = 0)$$

i

$$/6''/ \quad a_{\ell,i} = \frac{1}{i!} \lim_{x\to x_0} \frac{d^{i-m} \delta_{\ell,i-1}}{dx^{i-m}} \cdot (p_i = i-m)$$

$$(\ell = 1,2,\dots,n; \ i = m, m+1, \dots).$$

Dokaz ove teoreme sledi iz prethodne teoreme 1. i potpuno je analogan dokazub teoreme 2. [2].

<u>Primer</u>

$$x'' = x'(3x^2+y^2-1)+y'(2xy-1),$$

$$y'' = x'(1+2xy)+y'(x^2+3y^2-1),$$

$$x(0)=1;\quad x'(0)=0;$$

$$y(0)=0;\quad y'(0)=1.$$

Iz početnih uslova je

$$s_{1,1}=1;\quad s'_{1,1}=s''_{1,1}=0,$$

$$s_{2,1}=t;\quad s'_{2,1}=1;\quad s''_{2,1}=0.$$

Dalje, iz

$$\delta_{1,i}=s'_{1,i}(3s_{1,i}^2+s_{2,i}^2-1)+s'_{2,i}(2s_{1,i}\cdot s_{2,i}-1)-s''_{1,i}$$

i

$$\delta_{2,i}=s'_{1,i}(1+2s_{1,i}\cdot s_{2,i})+s'_{2,i}(s_{1,i}^2+3s_{2,i}^2-1)-s''_{2,i}$$

za $i=1,2,3,\ldots$ dobija se

$$a_{1,2}=\frac{1}{2!}\lim_{t\to 0}\delta_{1,1}=-\frac{1}{2};\quad s_{1,2}=1-\frac{t^2}{2},$$

$$a_{2,2}=\frac{1}{2!}\lim_{t\to 0}\delta_{2,1}=0;\quad s_{2,2}=t,$$

$$a_{1,3}=\frac{1}{3!}\lim_{t\to 0}\frac{\delta_{1,2}}{t}=0;\quad s_{1,3}=1-\frac{t^2}{2},$$

$$a_{2,3}=\frac{1}{3!}\lim_{t\to 0}\frac{\delta_{2,2}}{t}=-\frac{1}{3!};\quad s_{2,3}=t-\frac{t^3}{3!},$$

tj.

$$x = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \dots ,$$

$$y = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots$$

2. Dot je sistem diferencijalnih jednačina

$$y_1^{(m_1)} = f_1(x, y_1, \dots, y_1^{(m_1-1)}, y_2, \dots, y_2^{(m_2-1)}, \dots, y_r, \dots, y_s, \dots, y_s^{(m_s-1)}),$$

$$y_2^{(m_2)} = f_2(x, y_1, \dots, y_1^{(m_1-1)}, \dots, y_2^{(m_2-1)}, \dots, y_r, \dots, y_r^{(m_r-1)}, \dots, y_s^{(m_s-1)}),$$

/7/

$$\vdots$$

$$y_r^{(m_r)} = f_r(x, y_1, \dots, y_1^{(m_1-1)}, \dots, y_2^{(m_2-1)}, \dots, y_r^{(m_r-1)}, \dots, y_s^{(m_s-1)}),$$

$$y_s^{(m_s)} = f_s(x, y_1, \dots, y_1^{(m_1-1)}, \dots, y_2^{(m_2-1)}, \dots, y_r^{(m_r-1)}, \dots, y_s^{(m_s-1)}),$$

sa početnim uslovima

$$y_1^{(i)}(x_0) = y_{1,0}^{(i)}, \quad i = 0, 1, \dots, m_1 - 1,$$

$$y_2^{(j)}(x_0) = y_{2,0}^{(j)}, \quad j = 0, 1, \dots, m_2 - 1,$$

/8/

$$\vdots$$

$$y_r^{(k)}(x_0) = y_{r,0}^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, m_r - 1,$$

$$y_s^{(l)}(x_0) = y_{s,0}^{(l)}, \quad l = 0, 1, \dots, m_s - 1.$$

$$(m_1 \geq 1;\ m_2 \geq 1, \dots, m_r \geq 1, m_s \geq 1;)$$

$$(m_1 \neq m_2 \neq \dots \neq m_r \neq m_s)$$

Neka su u sistemu /7/ sa početnim uslovima /8/, sve funkcije $f_l \ (l = 1, 2, \ldots, s)$ analitičke funkcije svojih argumenata i tačka

$$(x_0, y_{1,0}, \ldots, y_{1,0}^{(m_1-1)}, y_{2,0}, \ldots, y_{2,0}^{(m_2-1)}, \ldots, y_{s,0}, \ldots, y_{s,0}^{(m_s-1)})$$

– regularna tačka svih funkcija $f_l \ (l = 1, 2, \ldots, s)$.

Tada sistem /7/ -/8/ ima partikularno rešenje u obliku Tajlorovog reda

$$y_1 = \sum_{i=0}^{\infty} a_{1,i} (x-x_0)^i = y_{1,0} + \sum_{i=1}^{m_1-1} \frac{y_{1,0}^{(i)}}{i!}(x-x_0)^i + \sum_{i=m_1}^{\infty} a_{1,i}(x-x_0)^i,$$

$$y_2 = \sum_{i=0}^{\infty} a_{2,i} (x-x_0)^i = y_{2,0} + \sum_{i=1}^{m_2-1} \frac{y_{2,0}^{(i)}}{i!}(x-x_0)^i + \sum_{i=m_2}^{\infty} a_{2,i}(x-x_0)^i,$$

/9/ $\vdots$

$$y_r = \sum_{i=0}^{\infty} a_{r,i} (x-x_0)^i = y_{r,0} + \sum_{i=1}^{m_r-1} \frac{y_{r,0}^{(i)}}{i!}(x-x_0)^i + \sum_{i=m_r}^{\infty} a_{r,i}(x-x_0)^i,$$

$$y_s = \sum_{i=0}^{\infty} a_{s,i} (x-x_0)^i = y_{s,0} + \sum_{i=1}^{m_s-1} \frac{y_{s,0}^{(i)}}{i!}(x-x_0)^i + \sum_{i=m_s}^{\infty} a_{s,i}(x-x_0)^i,$$

gde su $a_{l,i} \ (l = 1, 2, \ldots, s)$ koeficijenti Tajlorovog reda tačnog rešenja sistema /7/ -/8/.

<u>Teorema 3</u>. Neka su u sistemu /7/ -/8/ sve funkcije $f_l \ (l = 1, 2, \ldots, s)$ analitičke funkcije svojih argumenata i neka je tačka

$$(x_0, y_{1,0}, \ldots, y_{1,0}^{(m_1-1)}, y_{2,0}, \ldots, y_{2,0}^{(m_2-1)}, \ldots, y_{s,0}, \ldots, y_{s,0}^{(m_s-1)})$$

regularna tačka svih funkcija $f_l \ (l=1,2,\dots,s)$
Dovoljan uslov za to da teorema 1. i teorema 2. vrede za sistem /7/ -/8/ jeste da se za date $m_1, m_2, \dots, m_s$ koriste respektivno indeksi $i_1, i_2, \dots, i_2, i_s$, takvi da je

$$i_1 - m_1 = i_2 - m_2 = \dots = i_2 - m_2 = i_s - m_s,$$

$$(i_1 \geq m_1;\ i_2 \geq m_2;\ \dots;\ i_2 \geq m_2;\ i_s \geq m_s),$$

u svakom ciklusu sukcesivnog izračunavanja koeficijenata

$$a_{l,i_l}.\quad (l=1,2,\dots,s).$$

Tada se koeficijenti a_{l,i_l} izračunavaju po sledećim formulama

/10/
$$a_{l,i_l} = \frac{(i_l - m_l - p_{i_l})!}{i_l!} \lim_{x \to x_0} \frac{1}{(x-x_0)^{i_l - m_l - p_{i_l}}} \frac{d^{p_{i_l}} \delta_{l,i_l-1}}{dx^{p_{i_l}}},$$

$$(l=1,2,\dots,s;\ i_l = m_l, m_l+1,\dots;\ 0 \leq p_{i_l} \leq m_l - 1)$$

ili po ekvivalentnim formulama oblika

/10'/ $$a_{l,i_l} = \frac{(i_l - m_l)!}{i_l!} \lim_{x \to x_0} \frac{\delta_{l,i_l-1}}{(x-x_0)^{i_l - m_l}},\ (p_{i_l}=0),$$

/10''/

$$a_{l,i_l} = \frac{1}{i_l!} \lim_{x \to x_0} \frac{d^{i_l - m_l} \delta_{l,i_l-1}}{dx^{i_l - m_l}},\ (p_{i_l} = i_l - m_l)$$

$$(l=1,2,\dots,s;\ i_l = m_l, m_l+1,\dots)$$

/ Drugim rečima, u svakom ciklusu izračunava se po jedan odgovarajući koeficijent a_{l,i_l} $(l=1,2,\dots,s)$, svake komponente vektora rešenja sistema /7/ - /8/.)

Dokaz. Za svaku od jednačina sistema /7/ sa početnim uslovima /8/ i za respektivne vrednosti indeksa i_l $(l=1,2,\dots,s)$:

$$i_1 = m_1;\ i_2 = m_2;\ \dots;\ i_r = m_r,\ i_s = m_s,$$

vrede teorema 1. i teorema 2. , te se izračunavaju koeficijenti / na primer, po formulama /10'/ / :

$$a_{1,m_1} = \frac{1}{m_1!} \lim_{x\to x_0} \delta_{1,m_1-1},$$

$$a_{2,m_2} = \frac{1}{m_2!} \lim_{x\to x_0} \delta_{2,m_2-1},$$

/11/

$$\vdots$$

$$a_{r,m_r} = \frac{1}{m_r!} \lim_{x\to x_0} \delta_{r,m_r-1},$$

$$a_{s,m_s} = \frac{1}{m_s!} \lim_{x\to x_0} \delta_{s,m_s-1}.$$

Za sistem /7/ sa početnim uslovima /8/ i dopunskim početnim uslovima oblika

$$y_1^{(m_1)}(x_0) = y_{1,0}^{(m_1)} = m_1!\,a_{1,m_1},$$

/12/ $$y_2^{(m_2)}(x_0) = y_{2,0}^{(m_2)} = m_2!\,a_{2,m_2},$$

⋮

$$y_r^{(m_r)}(x_0) = y_{r,0}^{(m_r)} = m_r!\,a_{r,m_r},$$

$$y_s^{(m_s)}(x_0) = y_{s,0}^{(m_s)} = m_s!\,a_{s,m_s},$$

i za respektivne vrednosti indeksa $i_\ell\ (\ell = 1,2,\ldots, s)$:

$$i_1 = m_1+1;\ i_2 = m_2+1;\ldots,\ i_r = m_r+1,\ i_s = m_s+1,$$

vrede teorema 1. i teorema 2. , te se, po formulama /10/, /10'/ ili /10''/ izračunavaju koeficijenti

$$a_{1,m_1+1},\ a_{2,m_2+1},\ \ldots,\ a_{r,m_r+1},\ a_{s,m_s+1}.$$

Ovi koeficijenti obezbedjuju potrebne dopunske uslove za važenje teoreme 1. i teoreme 2. za sistem /7/ i početne uslove /8/ i respektivne vrednosti indeksa $i_\ell\ (\ell = 1,2,\ldots, s)$:

$$i_1 = m_1+2;\ i_2 = m_2+2;\ldots;\ i_r = m_r+2,\ i_s = m_s+2.$$

Ponavljajući ovaj postupak, obezbedjuje se važenje teoreme 1. i teoreme 2. za svaki dalji koeficijent a_{ℓ,i_ℓ} rešenja sistema /7/ - /8/, za $\ell=1,2,\ldots,s$, i proizvoljno velike i_ℓ .

Napomena. Iz teoreme 3. sledi da su ostaci δ_{ℓ,i_ℓ} $(\ell = 1,2,\ldots, s)$ odgovarajućih Tajlorovih redova u tački $x = x_0$, s obzirom na približna rešenja $s_{\ell,i_\ell+1}$, oblika :

$$\delta_{1,i_1} = f_1(x, b_{i_1}, \ldots, b_{i_1}^{(m_1-1)}, \ldots, b_{i_s}, \ldots, b_{i_s}^{(m_s-1)}) - b_{i_1}^{(m_1)},$$

$$\delta_{2,i_2} = f_2(x, b_{i_1}, \ldots, b_{i_1}^{(m_1-1)}, \ldots, b_{i_s}^{(m_s-1)}) - b_{i_2}^{(m_2)},$$

$$\vdots$$

$$\delta_{s,i_s} = f_s(x, b_{i_1}, \ldots, b_{i_1}^{(m_1-1)}, \ldots, b_{i_s}^{(m_s-1)}) - b_{i_s}^{(m_s)},$$

i gde je

$$i_1 - m_1 = i_2 - m_2 = \ldots = i_s - m_s$$

za svaki koeficijent a_{l,i_l} $(l = 1, 2, \ldots, s)$.

Primer

$$z' = z + y - y' + 5x + 2x'''^2 - x' - 3,$$

$$y'' = z + y' + x^2 - 2t x'' + x''',$$

$$x^{IV} = z + y' - 4t x' - 3x'''^2 + 1,$$

$$z(0) = -1,$$
$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 4,$$
$$x(0) = 2, \quad x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 1.$$

Iz

$$s_{1,0} = -1, \quad s'_{1,0} = 0,$$

$$s_{2,1} = 4t, \quad s'_{2,1} = 4, \quad s''_{2,1} = 0,$$

$$s_{3,3} = 2 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}, \quad s'_{3,3} = 1 + t + \frac{1}{2}t^2,$$

$$s''_{3,3} = 1 + t, \quad s'''_{3,3} = 1,$$

dobija se

$$\delta_{1,0} = s_{1,0} + s_{2,1} - s'_{2,1} + 5 s_{3,3} + 2 s'''^{2}_{3,3} - s'_{3,3} - 3 - s'_{1,0},$$

$$\delta_{1,0} = 3; \quad a_{1,1} = 3; \quad s_{11} = -1 + 3t; \quad s'_{11} = 3,$$

$$\delta_{2,1} = 8; \quad a_{22} = 4; \quad s_{22} = 4t + 4t^2, \quad s'_{22} = 4 + 8t,$$

$$s''_{22} = 8,$$

$$\delta_{3,3} = 1, \quad a_{3,4} = \frac{1}{4!}, \quad s_{3,4} = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!},$$

$$s'_{3,4} = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3, \quad s''_{3,4} = 1 + t + \frac{1}{2}t^2,$$

$$s'''_{3,4} = 1 + t,$$

$$s^{IV}_{3,4} = 1.$$

Nastavljajući izračunavanja koeficijenata istim redom, dobija se :

$$z = -1 + 3t + \frac{7}{2}t^2 + \frac{13}{6}t^3 + \frac{23}{24}t^4 + \frac{41}{120}t^5 + \frac{75}{720}t^6 + \dots$$

$$y = 4t + 4t^2 + \frac{7}{3}t^3 + t^4 + \frac{7}{20}t^5 + \frac{76}{720}t^6 + \dots$$

$$x = 2 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} + \frac{t^6}{6!} + \dots$$

Uslov dat u teoremi 3. nije neophodan. U slučajevima kada, na primer desna strana jedne od jednačina sistema ne sadrži najviše izvode drugih funkcija, moguće je " istrčavanje ", tj. izračunavanje više koeficijenata za jednu komponentu vektora rešenja.

Primer

$$z' = x + x'^2 + y,$$

$$y'' = x + x^2 - 2tx'' + y' + z - 1,$$

$$x^{IV} = -4tx' - 3x'''^2 + y' + z + 1,$$

$$z(0) = -1,$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 4,$$

$$x(0) = 2, \quad x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 1.$$

Shema izračunavanja koeficijenata $a_{l,i}$, data je u tablici 1. Svi koeficijenti $a_{l,i}$ / l - fiksirano, i - promenljiva / izračunati jedan za drugim, označeni su u gornjem desnom uglu istim rednim brojem algoritamskog koraka

$a_{1,0}$	1 $a_{1,1}$	1 $a_{1,2}$				
$a_{2,0}$	$a_{2,1}$	2 $a_{2,2}$	2 $a_{2,3}$	2 $a_{2,4}$		
$a_{3,0}$	$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$	3 $a_{3,4}$	3 $a_{3,5}$	3 $a_{3,6}$

Tablica 1.

Druga moguća varijanta "ritma" :

Ako se krene od II jednačine, na primer ovim redom

$$y'' = x + x^2 - 2tx'' + y' + z - 1,$$

$$x^{IV} = -4tx' - 3x'''^2 + y' + z + 1,$$

$$z' = x + x'^2 + y,$$

$$\delta_{2,1} = s_{3,3} + s_{3,3}^2 - 2t s''_{3,3} + s'_{2,1} + \underline{s_{1,0}} - 1 - s''_{2,1}$$

$$i_{min} = 0, \quad r_{min} = 0,$$

$$i - 2 = 0; \quad i = 2,$$

Što znači, izračunava se samo $a_{2,2}$.

Dalje je :

$$\delta_{3,3} = -4t s'_{3,3} - s'''^{2}_{3,3} + s'_{2,2} + \underline{s_{1,0}} + 1 - s''_{3,3}$$

$$i_{min} = 0, \quad r_{min} = 0,$$

$$i - 4 = 0, \quad i = 4,$$

pa se izračunava $a_{3,4}$.

Najzad

$$\delta_{1,0} = s_{3,4} + s'^{2}_{3,4} + \underline{s_{2,2}} - s'_{1,0}$$

$$i_{min} = 2, \quad r_{max} = 0, \quad i - 1 = 2, \quad i = 3,$$

izračunavaju se $a_{1,1}$; $a_{1,2}$; $a_{1,3}$.

$a_{2,0}$	$a_{2,1}$	1 $a_{2,2}$	4 $a_{2,3}$			
$a_{3,0}$	$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$	2 $a_{3,4}$	5 $a_{3,5}$	
$a_{1,0}$	3 $a_{1,1}$	3 $a_{1,2}$	3 $a_{1,3}$	6 $a_{1,4}$	6 $a_{1,5}$	6 $a_{1,6}$

Tablica 2.

3. Neka su sve funkcije $f_l \, (l = 1, 2, \ldots 6)$ u sistemu /7/ - /8/, racionalne funkcije svojih argumenata.

Tada su i veličine

$$\delta_{1,m_1-1} = f_1(x, s_{1,m_1-1}, \ldots, s^{(m_1-1)}_{1,m_1-1}, \ldots, s_{6,m_6-1}, \ldots, s^{(m_6-1)}_{6,m_6-1}) - s^{(m_1)}_{1,m_1-1}$$

$$\delta_{2,m_2-1} = f_2(x, s_{1,m_1-1}, \ldots, s_{1,m_1-1}^{(m_1-1)}, \ldots, s_{s,m_s-1}^{(m_s-1)}) - s_{2,m_2-1}^{(m_2)},$$

$\cdot$
$\cdot$
$\cdot$

$$\delta_{s,m_s-1} = f_s(x, s_{1,m_1-1}, \ldots, s_{1,m_1-1}^{(m_1-1)}, \ldots, s_{s,m_s-1}^{(m_s-1)}) - s_{s,m_s-1}^{(m_s)}$$

takodje racionalne funkcije svojih argumenata. Posmatrajmo, u brojiocu izraza za $\delta_{\ell,m_\ell-1}$ samo članove oblika

$$x^r \cdot s_{k,m}^{(j)},\ k \neq \ell,\ j = 0,1,\ldots, \max(m_\ell),$$

i medju njima odredimo onaj za koji je razlika $|m-j|$ minimalna. Ako takvih članova ima više, uočimo onaj za koji je i r minimalno.

Označimo

$$\min|m-j| = i_{min}$$

i

$$\min(r) = r_{min}.$$

Teorema 4. Neka su u sistemu /7/ - /8/, sve funkcije $f_\ell\ (\ell = 1,2,\ldots, s)$ racionalne funkcije svojih argumenata i neka je tačka

$$(x_0, y_{1,0}, \ldots, y_{1,0}^{(m_1-1)}, y_{2,0}, \ldots, y_{2,0}^{(m_2-1)}, \ldots, y_{s,0}, \ldots, y_{s,0}^{(m_s-1)})$$

regularna tačka svih funkcija $f_\ell\ (\ell = 1,2,\ldots, s)$.

Tada je neophodan i dovoljan uslov za važenje teoreme 1. i teoreme 2., na svakom algoritamskom koraku izračunavanja koeficijenata $a_{l,i}$ $(l=1,2,\dots,s)$ koji odgovaraju jednačini sistema /7/ reda m_l da je

$$0 \leq i - m_l \leq i_{min} + k_{min},$$

tj. na prvom algoritamskom koraku da se izračunava po p

$$p \leq 1 + i_{min} + k_{min}$$

novih koeficijenata u svakom sledećem ciklusu.

Dokaz

$$a_{l,i} = \frac{(i-m_l)!}{m_l!} \lim_{x\to x_0} \frac{\delta_{l,i-1}}{(x-x_0)^{i-m_l}} .$$

Granična vrednost na desnoj strani biće konačna i tačna, tj.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\delta_{l,i-1}}{(x-x_0)^{i-m_l}} = A$$

$A =$ Const.

ako i samo ako su u izrazu za $\delta_{l,i-1}$ sačuvani svi članovi čiji stepen nije manji od $i - m_l$.

U primeru / tablica 1. /

$$\delta_{1,0} = s_{3,3} + s_{3,3}^{12} + \underline{s_{2,1}} - s_{1,0}$$

$$i_{min} = 1, \quad k = 0,$$

$$i-1 = 1, \quad i = 2,$$

što znači, da se u prvoj jednačini sistema mogu odrediti koeficijenti zaključno sa $a_{1,2}$.

Dalje je :

$$\delta_{2,1} = s_{3,3} + s_{3,3}^{2} - \underline{2t\, s_{3,3}''} + s_{2,1}' + s_{1,2} - 1 - s_{2,1}''$$

$$i_{min} = 1\ ; \quad r_{min} = 1\ ;$$

$$i - 2 = 1 + 1\ ; \quad i = 4,$$

dakle, izračunavaju se koeficijenti $a_{2,i}$, zaključno sa $a_{2,4}$.

Iz

$$\delta_{3,3} = -4 s_{3,3}' - 3 s_{3,3}^{\prime\prime\prime 2} + s_{2,4}' + \underline{s_{1,2}} + 1 - s_{3,3}^{IV},$$

dobija se

$$i_{min} = 2, \ r_{min} = 0, \quad i - 4 = 2\ ; \ i = 6,$$

što znači da se koeficijenti $a_{3,i}$ mogu izračunati zaključno sa $a_{3,6}$. Time je odredjen, mogući konstantan "ritam" daljeg izračunavanja koeficijenata.

4. Dat je sistem diferencijalnih jednačina

$$
\begin{aligned}
&y_l^{(m_1)} = f_l(x, y_l, \dots, y_l^{(m_1-1)}, \dots, y_p, \dots, y_p^{(m_2-1)}, \dots, y_s, \dots, y_s^{(m_j-1)}), \\
/13/\quad &y_p^{(m_2)} = f_p(x, y_l, \dots, y_l^{(m_1-1)}, \dots, y_p, \dots, y_p^{(m_2-1)}, \dots, y_s, \dots, y_s^{(m_j-1)}), \\
&\vdots \\
&y_q^{(m_k)} = f_q(x, y_l, \dots, y_l^{(m_1-1)}, \dots, y_q, \dots, y_q^{(m_k-1)}, \dots, y_s, \dots, y_s^{(m_j-1)}), \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

$$y_s^{(m_j)} = f_s(x, y_e, \dots, y_e^{(m_1-1)}, \dots, y_p, \dots, y_p^{(m_2-1)}, \dots, y_s, \dots, y_s^{(m_j-1)}),$$

$$(l = 1,2,\dots,k_1;\ p = k_1+1,\dots,k_2;\ q = k_2+1,\dots,k_q;\ s = k_q+1,\dots,n).$$

sa početnim uslovima

$$y_e(x_0) = y_{e,0}, \dots, y_e^{(m_1-1)}(x_0) = y_{e,0}^{(m_1-1)},$$
$$(l = 1,2,\dots,k_1)$$

$$/14/\quad y_p(x_0) = y_{p,0}, \dots, y_p^{(m_2-1)}(x_0) = y_{p,0}^{(m_2-1)},$$
$$(p = k_1+1,\dots,k_2)$$

$$\vdots$$

$$y_q(x_0) = y_{q,0}, \dots, y_q^{(m_k-1)}(x_0) = y_{q,0}^{(m_k-1)},$$
$$(q = k_2+1,\dots,k_q)$$

$$y_s(x_0) = y_{s,0}, \dots, y_s^{(m_j-1)}(x_0) = y_{s,0}^{(m_j-1)} \quad (s = k_q+1,\dots,n).$$

Neka su u sistemu /13/ sa početnim uslovima /14/ sve funkcije $f_i\ /i = 1,2,\dots,n/$ analitičke funkcije svojih argumenata i tačka

$$(x_0, y_{e,0}, \dots, y_{e,0}^{(m_1-1)}, y_{p,0}, \dots, y_{p,0}^{(m_2-1)}, \dots, y_{q,0}, \dots, y_{q,0}^{(m_k-1)}, \dots, y_{s,0}^{(m_j-1)})$$

$$(l = 1,2,\dots,k_1;\ p = k_1+1,\dots,k_2;\ \dots,\ q = k_2+1,\dots,k_q;\ s = k_q+1,\dots,n)$$

- regularna tačka svih funkcija $f_i\ (i = 1,2,\dots,n)$.

Tada sistem /13/ sa početnim uslovima /14/ ima partikularno rešenje u obliku Tajlorovog reda :

$$y_e = \sum_{i=0}^{\infty} a_{e,i}(x-x_0)^i = y_{e,0} + \sum_{i=1}^{m_1-1} \frac{y_{e,0}^{(i)}}{i!}(x-x_0)^i + \sum_{i=m_1}^{\infty} a_{e,i}(x-x_0)^i,$$

$$(l = 1,2,\dots,k_1)$$

$$y_p = \sum_{i=0}^{\infty} a_{p,i}(x-x_0)^i = y_{p,0} + \sum_{i=1}^{m_2-1} \frac{y_{p,0}^{(i)}}{i!}(x-x_0)^i + \sum_{i=m_2}^{\infty} a_{p,i}(x-x_0)^i,$$

$$(p = k_1+1,\dots,k_2)$$

$$\vdots$$

$$y_q = \sum_{i=0}^{\infty} a_{q,i}(x-x_0)^i = y_{q,0} + \sum_{i=1}^{m_k-1} \frac{y_{q,0}^{(i)}}{i!}(x-x_0)^i + \sum_{i=m_k}^{\infty} a_{q,i}(x-x_0)^i,$$

$$(q = k_2+1, \ldots, k_q)$$

$$y_s = \sum_{i=0}^{\infty} a_{s,i}(x-x_0)^i = y_{s,0} + \sum_{i=1}^{m_j-1} \frac{y_{s,0}^{(i)}}{i!}(x-x_0)^i + \sum_{i=m_j}^{\infty} a_{s,i}(x-x_0)^i,$$

$$(s = k_q+1, \ldots, n),$$

gde su $a_{k,i}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ koeficijenti Tajlorovog reda tačnog rešenja sistema /13/ - /14/.

Teorema 5. Neka su u sistemu /13/ - /14/ sve funkcije f_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ analitičke funkcije svojih argumenata i neka je tačka

$$(x_0, y_{l,0}, \ldots, y_{l,0}^{(m_1-1)}, y_{p,0}, \ldots, y_{p,0}^{(m_2-1)}, \ldots, y_{q,0}, \ldots, y_{q,0}^{(m_k-1)}, y_{s,0}, \ldots, y_{s,0}^{(m_j-1)})$$

$$/l = 1, 2, \ldots, k_1;\ p = k_1+1, \ldots, k_2;\ \ldots, q = k_2+1, \ldots, k_q, s = k_q+1, \ldots, n/,$$

regularna tačka svih funkcija f_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Dovoljan uslov za to da teorema 1. i teorema 2. vrede za sistem /13/ - /14/ jeste da se za date $m_1, m_2, \ldots, m_j$, i za date $l, p, \ldots, q, s$ koriste respektivno indeksi $i_{l_1}, i_{p_1}, \ldots, i_{q_1}, i_{s_1}$, takvi da je

$$i_{l_1} - m_1 = i_{p_1} - m_2 = \ldots = i_{q_1} - m_k = i_{s_1} - m_j,$$

$$(i_{l_1} \geq m_1;\ i_{p_1} \geq m_2;\ \ldots,\ i_{q_1} \geq m_k;\ i_{s_1} \geq m_j)$$

u svakom ciklusu izračunavanja koeficijenata

$$a_{l,i_{l1}}, \quad (l=1,2,\ldots,k_1),$$

$$/15/ \quad a_{p,i_{p1}}, \quad (p=k_1+1,\ldots,k_2),$$

$$\vdots$$

$$a_{q,i_{q1}}, \quad (q=k_2+1,\ldots,k_g),$$

$$a_{s,i_{s1}}, \quad (s=k_g+1,\ldots,n).$$

Tada se koeficijenti /15/ izračunavaju po formulama /10/, /10'/ ili /10''/.

Dokaz ove teoreme je potpuno analogan dokazu teoreme 3.

<u>Teorema 6.</u> Neka su u sistemu /13/ - /14/ sve funkcije $f_i \; (i=1,2,\ldots,n)$ racionalne funkcije svojih argumenata, a tačka

$$(x_0, y_{l,0}, \ldots, y_{l,0}^{(m_1-1)}, y_{p,0}, \ldots, y_{p,0}^{(m_2-1)}, \ldots, y_{q,0}, \ldots, y_{q,0}^{(m_k-1)}, y_{s,0}, \ldots, y_{s,0}^{(m_j-1)})$$

$$(l=1,2,\ldots,k_1;\; p=k_1+1,\ldots,k_2;\; \ldots,\; q=k_2+1,\ldots,k_g;\; s=k_g+1,\ldots,n)$$

regularna tačka svih funkcija $f_i \; (i=1,2,\ldots,n)$.

Tada je neophodan i dovoljan uslov za važenje teoreme 1. i teoreme 2. za sistem /13/ - /14/, na svakom algoritamskom koraku izračunavanja koeficijenata /15/ koji odgovaraju jednačinama sistema /13/ respektivno reda $m_1, m_2, \ldots, m_k, m_j$ da je

$$0 \leq i_l - m_1 \leq i_{l,min} + r_{l,min}$$
$$(l = 1, 2, \ldots, k_1)$$

$$0 \leq i_p - m_2 \leq i_{p,min} + r_{p,min}$$
$$(p = k_1 + 1, \ldots, k_2)$$

$$\vdots$$

$$0 \leq i_s - m_j \leq i_{s,min} + r_{s,min}$$
$$(s = k_q + 1, \ldots, n)$$

$$(x^r \cdot s_{k,m}^{(j)}, \ k \neq l, \ j = 0, 1, \ldots, \max_i (m_i);$$
$$i_{l,min} = \min |m - j|; \ r_{l,min} = \min r)$$

na prvom algoritamskom koraku, tj. da se izračunava po t

$$t \leq 1 + i_{l,min} + r_{l,min}$$
$$\vdots$$

novih koeficijenata u svakom sledećem ciklusu.

Dokaz teoreme 6. je analogan dokazu teoreme 4.

Primer.

$$y'' = 3y + z^2 + v^2,$$
$$w'' = 3\sin t \cdot u''^2 - \frac{4\cos t}{x^2},$$

$$z^{V} = z^{IV} - 4v,$$

$$u^{V} = -z \cdot v - v \cdot \cos t,$$

$$v^{V} = z - 4x\cos t + 3yu\sin t,$$

$$x^{VIII} = y \cdot u,$$

$y(0) = 1, \quad y'(0) = 2,$

$w(0) = 0, \quad w'(0) = 1,$

$z(0) = 0, \quad z'(0) = 1, \quad z''(0) = 2, \quad z'''(0) = 2, \quad z^{IV}(0) = 0,$

$u(0) = 1, \quad u'(0) = -1, \quad u''(0) = 1, \quad u'''(0) = -1, \quad u^{IV}(0) = 1,$

$v(0) = 1, \quad v'(0) = 1, \quad v''(0) = 0, \quad v'''(0) = -2, \quad v^{IV}(0) = -4,$

$x(0) = x'(0) = x'' = \dots = x^{VII}(0) = 1.$

Neka su oznake za koeficijente komponenata rešenja :

$x : a_{1,i},$

$y : a_{2,i},$

$z : a_{3,i},$

$u : a_{4,i},$

$v : a_{5,i},$

$w : a_{6,i}.$

Pošto funkcije $f_i \ (i = 1, 2, \dots, 6)$ nisu sve racionalne funkcije svojih argumenata, koristiće se transformisani uprošćeni sistem, u smislu [12], pa se može primeniti teorema 6.
Od mogućih polaznih "ritmova" odabraće se onaj koji omogućuje na prvom koraku izračunavanje najvećeg broja koeficijenata.

Idući od jednačina nižeg reda, ka onima višeg reda / što uopšte nije bitno /, dobija se :

$$\delta_{2,1} = 3s_{2,1} + \underline{\overset{2}{s}_{3,4}} + \underline{\overset{2}{s}_{5,4}} - \overset{''}{s}_{2,1}$$

$$i_{min} = 4 - 0 = 4 \; ; \quad r_{min} = 0$$

Dakle : $i = 6$, tj. mogu se izračunati

$$a_{2,2},\ a_{2,3},\ a_{2,4},\ a_{2,5},\ a_{2,6};$$

$$\delta_{6,1} = \frac{3\left(\underline{t} - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} - \dots\right)\underline{\overset{12}{s}_{4,4}} \cdot \overset{2}{s}_{1,7} - 4\left(1 - \frac{t^2}{2} + \dots\right) - \overset{2}{s}_{1,7}\, \overset{''}{s}_{6,1}}{\overset{2}{s}_{1,7}}$$

/ transformisana jednačina /

$$i_{min} = 2, \quad r_{min} = 1,$$

$$i = 5$$

dakle $a_{6,2},\ a_{6,3},\ a_{6,4},\ a_{6,5}$.

$$\delta_{3,4} = \overset{IV}{s}_{3,4} - 4\,\underline{s_{5,4}} - \overset{V}{s}_{3,4}$$

$$i_{min} = 4, \quad r_{min} = 0,$$

$$i = 9,$$

pa će biti $a_{3,5},\ a_{3,6},\ a_{3,7},\ a_{3,8},\ a_{3,9}$.

Dalje je :

$$\delta_{4,4} = -\underline{s_{3,4}}\underset{\text{ili}}{\cdot}\underline{s_{5,4}}\ \underset{\text{ili}}{-}\ \underline{s_{5,4}}\left(1-\frac{t^2}{2}+\dots\right)-s_{4,4}^{V}$$

$$i_{min} = 4, \quad r_{min} = 0,$$

$$\bar{i} = 9,$$

$$a_{4,5},\ a_{4,6},\ a_{4,7},\ a_{4,8},\ a_{4,9}.$$

Za

$$\delta_{5,4} = s_{3,4} - 4s_{1,7}\left(1-\frac{t^2}{2}+\dots\right)+3\underline{s_{2,1}}\cdot s_{4,4}\left(t-\frac{t^3}{6}+\dots\right)-s_{5,4}^{V}$$

$$i_{min} = 1, \quad r_{min} = 1.$$

Za $\bar{i}-5=2$, biće $\bar{i}=7$, tj.

$$a_{5,5},\ a_{5,6},\ a_{5,7}.$$

Najzad

$$\delta_{1,7} = \underline{s_{2,1}}\cdot s_{4,4} - s_{1,7}^{VIII}$$

$$i_{min} = 1, \quad r_{min} = 0,$$

dakle za $\bar{i}-8=1$, samo $a_{1,8}$ i $a_{1,9}$.

Dakle, može se krenuti od jedne od sledećih jednačina :

$$y'' = 3y + z^2 + v^2,$$

$$z^{V} = z^{IV} - 4v,$$

ili $u^{V} = -z\cdot v - v\cos t \quad \left(u^{V} = -z\cdot v - v\left(1-\frac{t^2}{2}+\dots\right)\right)$

da bi se, u prvom koraku, u sva tri slučaja dobilo 5 novih koeficijenata.

U tablici 3. dat je pregled broja koeficijenata koji se može dobiti u prvom koraku za svaku jednačinu posebno.

a_{20}	a_{21}	a_{22}^{1}	a_{23}^{1}	a_{24}^{1}	a_{25}^{1}	a_{26}^{1}			
a_{30}	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{35}^{1}	a_{36}^{1}	a_{37}^{1}	a_{38}^{1}	a_{39}^{1}
a_{40}	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}^{1}	a_{46}^{1}	a_{47}^{1}	a_{48}^{1}	a_{49}^{1}
a_{60}	a_{61}	a_{62}^{1}	a_{63}^{1}	a_{64}^{1}	a_{65}^{1}				
a_{50}	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}^{1}	a_{56}^{1}	a_{57}^{1}		
a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}^{1}	a_{19}^{1}

Tablica 3.

Napomena 1. Zavisno od izbora polazne jednačine, formiraće se "ritam" izračunavanja koeficijenata za dati sistem.

Napomena 2. Ako su u rešavanju praktičnih zadataka tražene nepoznate funkcije sistema takve da je potrebnije izračunavanje jednih nego drugih, ili je potrebno njihovo izračunavanje sa većom tačnošću, tada postoji mogućnost da se odabere takav "ritam" koji će im dati tu prednost. Ako je, medjutim, potrebno istovremeno odredjivanje svih nepoznatih funkcija sa istim brojem koeficijenata Tajlorovih redova, tada treba ići na sukcesivno izračunavanje koeficijenata za svaku funkciju, jer će tada biti najmanj "suvišnih" koeficijenata.

Glava III

U ovoj glavi se izlažu dva različita postupka za programiranje metode K.P. Orlova, izložene u Glavi I, koji omogućuju realizaciju rešavanja na elektronskim računarima.
Pošto se pomenuta metoda pokazala kao veoma jednostavna i efikasna u praksi pri ručnom računanju, prirodno je da se nametnula misao o njenoj realizaciji na elektronskom računaru. Iako je ta metoda analitička metoda, moguće je njeno programiranje, tj. ~~njeno programiranje~~, tj. njena algoritmizacija za rešavanje na računaru, u slučaju kada je desna strana diferencijalne jednačine

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \ (n \geq 1)$$

racionalna funkcija svojih argumenata, odnosno kada su desne strane svih jednačina sistema

$$y_e^{(m)} = f_e(x, y_1, \ldots, y_1^{(m-1)}, \ldots, y_n, \ldots, y_n^{(m-1)})$$

$$(l = 1, 2, \ldots, n \ ; \ m \geq 1)$$

racionalne funkcije svojih argumenata. Samo je po sebi jasno, da to vredi i za sisteme od n diferencijalnih jednačina od kojih su prvih l_1 - reda m_1, drugih l_2 - reda m_2, . . . , l_s - reda m_s $(l_1 + l_2 + \dots + l_s = n;\ m_1 \geq 1, \dots, m_s \geq 1)$, a koje su analizirane u Glavi II, pod uslovom da su sve desne strane tih jednačina racionalne funkcije svojih argumenata.

S obzirom na to da se metoda uspešno kombinuje sa metodom diferenciranja [11] i metodom jedne vrste transformacija [12], gornje ograničenje nije tako oštro kako bi inače izgledalo. Kako, je pored toga, dat i dovoljan uslov koji obezbedjuje željenu tačnost prilikom korišćenja jedne vrste transformacija [12], onda je jasno da algoritmi za rešavanje na računaru ne impliciraju nikakve greške za približno rešenje u obliku odsečka Tajlorovog reda.

1. Prvi postupak za programiranje metode nazvaću, uslovno " metoda polinoma ". Zadatak se sastoji u sledećem.

Dat je početni problem za diferencijalnu jednačinu

/1/ $$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

/1'/ $$y^{(i)}(x_0) = y_0^{(i)}, \quad (i = 0, 1, \dots, n-1),$$

gde je f racionalna funkcija svojih argumenata. Približno rešenje zadatka /1/ - /1'/ traži se u obliku odsečka Tajlorovog reda tačnog rešenja

$$/2/ \quad y \approx s_x = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y_0^{(i)}}{i!}(x-x_0)^i + \sum_{i=n}^{K} a_i (x-x_0)^i,$$

$$(K > n)$$

gde se a_i izračunavaju po formuli :

$$/3/ \quad a_i = \frac{(i-n)!}{i!} \lim_{x \to x_0} \frac{\delta_{i-1}}{(x-x_0)^{i-n}}$$

$$(i = n, n+1, \ldots, K)$$

i gde su

$$f = \frac{P(x, y, \ldots, y^{(n-1)})}{Q(x, y, \ldots, y^{(n-1)})}$$

$(x_0, y_0, \ldots, y_0^{(n-1)})$ regularna tačka funkcije f

$$(4) \quad \delta_{i-1} = \frac{P(x, s_{i-1}, \ldots s_{i-1}^{(n-1)}) - s_{i-1}^{(n)} Q(x, s_{i-1}, \ldots, s_{i-1}^{(n-1)})}{Q(x, s_{i-1}, \ldots, s_{i-1}^{(n-1)})}$$

$$(i = n, n+1, \ldots, K)$$

Osnovna ideja za programiranje zadatka /2/ - /4/ je sledeća. Kako je

$$(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$$

regularna tačka funkcije $f = \dfrac{P}{Q}$, biće

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\delta_{i-1}}{(x-x_0)^{i-n}} = \frac{1}{Q(x_0, y_0, \ldots, y_0^{(n-1)})} \cdot A,$$

gde je A koeficijent uz $(x-x_0)^{i-n}$ polinoma

$$M_{i-1}(x-x_0) = P((x-x_0), s_{i-1}, \ldots, s_{i-1}^{(n-1)}) - s_{i-1}^{(n)} \cdot Q((x-x_0), s_{i-1}, \ldots, s_{i-1}^{(n-1)})$$

a

$$s_{i-1},\ s'_{i-1},\ \ldots,\ s^{(n)}_{i-1}$$

su takodje polinomi od $(x-x_0)$.

Na taj način, biće

$$a_i = \frac{(i-n)!}{i!}\cdot\frac{A}{Q_0} \quad (Q_0 = Q(y_0,\ldots,y_0^{(n-1)})$$

$$(i = n, n+1, \ldots, k).$$

Osnovno je sukcesivno formiranje polinoma

$$s_{i-1},\ s'_{i-1},\ \ldots,\ s^{(n)}_{i-1}$$

a zatim " polinoma od polinoma " M_{i-1} i najzad biranje samo onog njegovog koeficijenta A koji odgovara stepenu $(x-x_0)^{i-n}$.

Prema tome, približno rešenje - polinom s_k obrazuje se sukcesivno - cikličnim algoritmom iz početnog vektora rešenja s_{i-1} $(i = 1,2,\ldots,n)$ koji ulazi kao vektor sa komponentama - koeficijentima

$$a_i = \frac{y_0^{(i)}}{i!},\ (i = 0,1,\ldots,n-1).$$

Izvodi vektora koeficijenata s_{i-1}:

$$s'_{i-1},\ s''_{i-1},\ \ldots,\ s^{(n)}_{i-1},$$

obrazuju se jednostavno, aritmetičkim operacijama jer su to izvodi polinoma. Vektor koeficijenata "polinoma od polinoma " M_{i-1}, obrazuje se sledećim transformacijama nad polinomima $S_{i-1}, \ldots, S_{i-1}^{(n)}$ i $(x - x_0)^m$: množenje polinoma brojem, sabiranje, oduzimanje i množenje polinoma polinomom.
Iz dobijenog polinoma M_{i-1} po stepenima $(x-x_0)$ izdvaja se koeficijent uz $(x-x_0)^{i-n}$.
Ciklični algoritam obezbedjuje dobijanje približnog rešenja S_K $(K > n)$, gde je K unapred izabran indeks koeficijenta, tj. stepen odsečka Tajlorovog reda koji se želi dobiti.
Ova metoda se bez teškoća realizuje već na manjim računarima. Treba napomenuti, da se obrazovanje " polinoma od polinoma " $M_{i-1}(x-x_0)$, može u potpunosti, izvršiti koristeći podprograme koji postoje u biblioteci podprograma takvih računara.
U prilogu 1. dato je rešenje početnog problema

$$y'' = \frac{-y'^2 \cdot e^y}{1+e^y}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = \frac{1}{2}.$$

U ovom slučaju, rešavana je uprošćena diferencijalna jednačinam sa

$$e^y \approx T_4(y) = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{24}.$$

Traženo je približno rešenje oblika

$$y \approx S_{10}.$$

Koeficijenti Tajlorovog polinoma 10-tog stepena, kao i koeficijenti prvog izvoda tog polinoma, dati su u prilogu kao komponente vektora $S(I)$, odnosno $SP(I)$.

2. Metoda pseudospektara. Ova metoda [13] u potpunosti aritmetizuje postupak izračunavanja koeficijenata Tajlorovog reda rešenja početnog problema za diferencijalne jednačine n - tog reda.

$$/1/ \quad y^{(n)} = \frac{P(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})}{Q(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})}$$

$$/1'/ \quad y^{(i)}(x_0) = y_0^{(i)}, \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1),$$

gde su P i Q polinomi svojih argumenata / pretpostavimo da su im koeficijenti celi brojevi, što ne umanjuje opštost / i gde su $y_0^{(i)}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ celi brojevi. Tada su koeficijenti a_i Tajlorovog reda rešenja, racionalni brojevi.

Oni se mogu napisati u obliku :

$$/2/ \quad a_i = \frac{b_i}{i!\, A^{2(i-1)+1}}, \quad (i = n, n+1, \ldots)$$

gde su b_i - celi brojevi a

$$/3/ \quad A = Q(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$$

Na taj način, metoda pseudospektara primenjuje se na izračunavanje celih brojeva b_i, iz kojih se, na osnovu /2/ izračunavaju koeficijenti a_i. Celi brojevi b_i su :

$$/4/ \quad b_i = \lim_{x \to x_0} (i-n)! A^{2(i-1)+1} \frac{\delta_{i-1}}{(x-x_0)^{i-n}}$$

$$(i = n, n+1, \dots)$$

tj.

$$/5/ \quad b_i = \lim_{x \to x_0} \mathcal{C}_i . \quad (i = n, n+1, \dots)$$

Brojevi b_i biće celobrojni delovi pseudospektara funkcije $\mathcal{C}_i$, ako su ravnomerni ritmovi h_i dovoljno veliki da spreče prodiranje razlomljenih delova u celobrojne delove. Drugim rečima, birajući ritmove $h_n^{(1)} < h_n^{(2)}$ /$h_n^{(1)}$, $h_n^{(2)}$, su proizvoljni celi brojevi /, izračunavaju se

$$S_n^{(1)} = \mathcal{C}_n(x_0 + 10^{-h_n^{(1)}}),$$

$$S_n^{(2)} = \mathcal{C}_n(x_0 + 10^{-h_n^{(2)}}).$$

Posle zaokrugljivanja na jedinice i uporedjenja njihovih celobrojnih delova, postupa se ovako :

1/ Ako je

$$[S_n^{(1)}] = [S_n^{(2)}],$$

tada je

$$b_n = [S_n^{(1)}] = [S_n^{(2)}].$$

2/ Ako je

$$[S_n^{(1)}] \neq [S_n^{(2)}],$$

tada se za novi ritam uzima

/6/ $$h_n^{(3)} = h_n^{(2)} + p + 1,$$

gde je p broj cifara apsolutne vrednosti razlike celih brojeva $[S_n^{(1)}]$ u $[S_n^{(2)}]$

Tada je

/7/ $$b_n = [S_n^{(3)}], \quad S_n^{(3)} = \ell_n(x_0 + 10^{-h_n})$$

Programiranje ovakvog numeričkog algoritma za njegovu realizaciju na elektronskom računaru ne predstavlja teškoće. U ovom slučaju je osnovno obrazovanje tako-zvanog funkcijskog podprograma za sukcesivno izraču-navanje vrednosti funkcija

/8/ $$F_{i-1}(x_0 + 10^{-h_n}) = f(x_0 + 10^{-h_n}, s_{i-1}(x_0 + 10^{-h_n}), \dots, s_{i-1}^{(n-1)}(x_0 + 10^{-h_n})) - s_{i-1}^{(n)}(x_0 + 10^{-h_n}),$$

gde se vrednosti $S_{i-1}^{(k)}(x_0+10^{-h_n})(k=0,1,\ldots,n)$ izračunavaju kao vrednosti polinoma $S_{i-1}^{(k)}$ $(k=0,1,\ldots,n)$. Polinomi $S_{i-1}^{(k)}$ $(k=0,1,\ldots,n)$ obrazuju se, kao i u prethodnom slučaju, cikličnim algoritmom. Uslovni prelaz na povećani ritam $h_n^{(3)}$, kada je ispunjen kriterijum $[S_n^{(1)}]\neq[S_n^{(2)}]$, zahteva obrazovanje još jednog " ciklusa u ciklusu". Dužina ovoga ciklusa je promenljiva i zavisi od broja p iz /6/.

Kao što se vidi, programiranje ne predstavlja nikakve teškoće. Medjutim, potrebno je obratiti pažnju na sledeće : za funkcijski podprogram /8/ mora se odabrati takav algoritam koji će svesti na najmanju meru gubitak značajnih cifara prilikom oduzimanja dva broja, koja su mala i madjusobno / po apsolutnim vrednostima/ sve bliža :

$$S_{i-1}^{(n)}(x_0+10^{-h_n}) \quad i \quad f(x_0+10^{-h_n}, S_{i-1}(x_0+10^{-h_n}),\ldots S_{i-1}^{(n-1)}(x_0+10^{-h_n}))$$

Samo na taj način promenljiva dužina " ciklusa u ciklusu" svodi se na normalne razmere. Osim toga, time se omogućuje da i na manjim računarima dobijemo po volji veliki broj koeficijenata Tajlorovog reda rešenja. U svakom slučaju preporučljivo je programiranje sa takozvanom " proširenom" ili " dvostrukom" tačnošću. Ovo poslednje ne predstavlja nikakav poseban napor ni na manjim računarima.

U prilogu 2. je dato rešavanje početnog problema

$$y' = \frac{1-x+y}{1+x^2y}, \quad y(0)=0.$$

Dobijeno rešenje sadrži koeficijente zaključno sa a_5.

```
DRIVE    CART SPEC   CART AVAIL  PHY DRIVE
00         0004         0004        0000

08   ACTUAL  8K  CONFIG  8K

OR
S(CARD,1132PRINTER)
 SOURCE PROGRAM
WORD INTEGERS

  DIFFERENCIJALNA JEDNACINA D2Y/DX2=-(DY/DX)2EXP(Y)/(1+EXP(Y)),Y(0)=0
 ,(DY/DX)(0)=0.5

  DIMENSION S(11),S2(21),S3(31),S4(41),SP(11),SP2(21),SSEC(11),DEL(6
 *1),P2(21),P3(31),P4(41),PSEC(11),S20(21),S30(31),S40(41),PSSO(11),
 *SI(41),SII(61),SIII(51),R(61)
  DATA S/11*0./,S2/21*0./,S3/31*0./,S4/41*0./,SP/11*0./,SP2/21*0./,
 *SSEC/11*0./,DEL/61*0./,P2/21*0./,P3/31*0./,P4/41*0./,PSEC/11*0./,
 *S20/21*0./,S30/31*0./,S40/41*0./,PSSO/11*0./,
 *SI/41*0./,SII/61*0./,SIII/51*0./,R/61*0./
  READ(2,1)N,K
1 FORMAT(2I4)
  S(1)=0.
  S(2)=0.5
  SP(1)=0.5
  F2=0.5
  F3=1./6.
  F4=1./24.
  FP=-0.5
  FS=2.
  I=N
0 CALL PMPY(S2,21,S,11,S,11)
  CALL PMPY(S3,31,S2,21,S,11)
  CALL PMPY(S4,41,S3,31,S,11)
  CALL PMPY(SP2,21,SP,11,SP,11)
  CALL PADDM(P2,21,S20,21,F2,S2,21)
  CALL PADDM(P3,31,S30,31,F3,S3,31)
  CALL PADDM(P4,41,S40,41,F4,S4,41)
  CALL PADDM(PSEC,11,PSSO,11,FS,SSEC,11)
  CALL PADD(SI,41,S,11,P2,21)
  CALL PADD(SI,41,SI,41,P3,31)
  CALL PADD(SI,41,SI,41,P4,41)
  CALL PMPY(SII,61,SP2,21,SI,41)
  CALL PMPY(SIII,51,SSEC,11,SI,41)
  CALL PADD(DEL,61,DEL,61,SP2,21)
  CALL PADD(DEL,61,DEL,61,SII,61)
  CALL PADD(DEL,61,DEL,61,PSEC,11)
  CALL PADD(DEL,61,DEL,61,SIII,51)
  CALL PADDM(DEL,61,R,61,FP,DEL,61)
  I=I+1
  S(I)=DEL(I-2)/((I-2)*(I-1))
  SP(I-1)=(I-1)*S(I)
  SSEC(I-2)=(I-2)*(I-1)*S(I)
  IF(I-K)4,5,5
4 DO 500 J=1,61
0 DEL(J)=0.
  GO TO 10
5 WRITE(3,6)(S(I),I=1,11)
6 FORMAT(31X,'PRIBLIZNO RESENJE S(I)'/3X,6E14.6/3X,5E14.6/)
  WRITE(3,7)(SP(I),I=1,11)
7 FORMAT(29X,'PRIBLIZNA VREDNOST SP(I)'/3X,6E14.6/3X,5E14.6/)
  CALL EXIT
  END
```

S SUPPORTED
RD INTEGERS

QUIREMENTS FOR
0 VARIABLES 1280 PROGRAM 450

COMPILATION

PRIBLIZNO RESENJE S(I)

```
00000E 00  0.500000E 00 -0.625000E-01  0.520833E-02  0.325521E-03 -0.2
 8738E-04  0.215561E-05 -0.232439E-05  0.649132E-06 -0.112061E-06
```

PRIBLIZNA VREDNOST SP(I)

```
00000E 00 -0.125000E 00  0.156250E-01  0.130208E-02 -0.105794E-02  0.1
60892E-04 -0.185951E-04  0.584219E-05 -0.112061E-05  0.000000E 00
```

```
// JOB T

LOG DRIVE   CART SPEC   CART AVAIL  PHY DRIVE
  0000        0005        0005          0000

V2 M09   ACTUAL  8K  CONFIG  8K

// FOR
*EXTENDED PRECISION
*ONE WORD INTEGERS

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS
 EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR VRED
 COMMON       0  VARIABLES        2  PROGRAM      52

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0006 (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

*STORE       WS  UA  VRED
CART ID 0005   DB ADDR  42ED   DB CNT   0005

// FOR
*EXTENDED PRECISION
*ONE WORD INTEGERS

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS
 EXTENDED PRECISION

CORE REQUIREMENTS FOR NFAKT
 COMMON       0  VARIABLES        2  PROGRAM      36

RELATIVE ENTRY POINT ADDRESS IS 0004 (HEX)

END OF COMPILATION

// DUP

*STORE       WS  UA  NFAKT
CART ID 0005   DB ADDR  42F2   DB CNT   0003

// FOR
*EXTENDED PRECISION
*IOCS(CARD,1132PRINTER)
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
      DIMENSIONS(20),SP(20),SI1(20),SI2(20),NSI1(20),NSI2(20)
      DATA S/20*0./,SP/20*0./,SI1/20*0./,SI2/20*0./
      FI(H,P,PP)=-PP+(1.-2.**H+P)/(1.+4.**H*P)
      ZAOK(X)=X*(1.+0.5/ABS(X))
C     DIFERENCIJALNA JEDNACINA DY/DX=(1-X+Y)/(1+X2*Y)
C     Y(0)=0
C     METODA PSEUDOSPEKTARA
      S(1)=0.
      S(2)=1.
      SP(1)=1.
      H1=-2.
      H2=-3.
      I=3
```

```
  401 H2=H1-1.
  400 X1=2.**H1
      X2=2.**H2
      WRITE(3,13)X1,X2
      CALL VRED(Q1,X1,S,20)
      CALL VRED(QP1,X1,SP,20)
      CALL VRED(Q2,X2,S,20)
      CALL VRED(QP2,X2,SP,20)
      WRITE(3,13)Q1,QP1,Q2,QP2
   13 FORMAT(4E20.10)
      K=I-2
      L=-K
      MFAKT=NFAKT(K)
      SI1(I)=FI(H1,Q1,QP1)
      SI2(I)=FI(H2,Q2,QP2)
      SI1(I)=MFAKT*X1**L*SI1(I)
      SI2(I)=MFAKT*X2**L*SI2(I)
      WRITE(3,9)SI1(I),SI2(I)
    9 FORMAT(3X,2F20.10)
      SI1(I)=ZAOK(SI1(I))
      NSI1(I)=SI1(I)
      SI2(I)=ZAOK(SI2(I))
      NSI2(I)=SI2(I)
       NW=IABS(NSI1(I))-IABS(NSI2(I))
      NW=IABS(NW)
      WRITE(3,150)NSI1(I),NSI2(I)
  150 FORMAT(3X,I10,5X,I10)
      WRITE(3,160) NW
  160 FORMAT(3X,I10)
      IF(NW) 20,10,20
   10 KFAKT=NFAKT(I-1)
      FAKT=KFAKT
      SKR=NSI1(I)
      S(I)=SKR/FAKT
      SP(I-1)=(I-1)*S(I)
      I=I+1
       IF(I-8)401,401,60
   20 M=1
   85 IF(NW/10)80,90,80
   90 H2=H2-M-1.
      H1=H2
      GO TO 400
   80 NW=NW/10
      M=M+1
      IF(M-3)85,85,60
   60 WRITE(3,1)
    1 FORMAT(3X,'VEKTOR KOEFICIJENATA'//)
      WRITE(3,70)(S(I),I=1,8)
   70 FORMAT(3X,4F20.10/)
      CALL EXIT
      END

FEATURES SUPPORTED
 ONE WORD INTEGERS
 EXTENDED PRECISION
 IOCS

CORE REQUIREMENTS FOR
 COMMON        0  VARIABLES     336  PROGRAM      578

END OF COMPILATION

// XEQ

    0.2500000002E 00     0.1250000001E 00
```

```
  -0.1230769232E 00    -0.3118908406E-01
        0                0
        0
0.2500000002E 00     0.1250000001E 00
0.2500000002E 00     0.1000000000E 01     0.1250000001E 00     0.1000000
  -0.4923076931E 00    -0.2495126725E 00
        0                0
        0
0.2500000002E 00     0.1250000001E 00
0.2500000002E 00     0.1000000000E 01     0.1250000001E 00     0.1000000
  -0.5907692318E 01    -0.5988304141E 01
       -6               -6
        0
0.2500000002E 00     0.1250000001E 00
0.2490234376E 00     0.9843750004E 00     0.1249389649E 00     0.9960468
  -0.4067553523E 01    -0.5520721441E 01
       -4               -6
        2
0.3124999993E-01     0.3124999993E-01
0.3124976153E-01     0.9999694838E 00     0.3124976153E-01     0.9999694
  -0.5976562570E 01    -0.5976562570E 01
       -6               -6
        0
0.3124999993E-01     0.1562500001E-01
0.3124976002E-01     0.9999692456E 00     0.1562498506E-01     0.9999961
  -0.1875000027E 01     0.0000000000E 00
       -2                0
        2
0.3906250003E-02     0.3906250003E-02
0.3906249944E-02     0.9999999410E 00     0.3906249944E-02     0.9999999
   0.0000000000E 00     0.0000000000E 00
        0                0
        0
0.3906250003E-02     0.1953124991E-02
0.3906249944E-02     0.9999999410E 00     0.1953124987E-02     0.9999999
   0.0000000000E 00     0.1811939385E 11
        0           32767
    32767
KTOR KOFFICIJENATA

   0.0000000000E 00     0.1000000000E 01     0.0000000000E 00     0.000000

  -0.2500000002E 00    -0.5000000006E-01     0.0000000000E 00     0.000000
```

Bibliografija

1. Orlov, Konstantin : Deux méthodes nouvelles d'integration par séries pour les equations différentielles . - C.R. Acad. Sc., Paris, t. 270, p. 1726 - 1728, 1970.
2. Orlov, Konstantin : Practical method for solving differential equations and their systems by means of Taylor series. - Matematički vesnik, 8 /23/, sv. 1, Beograd, 1971.
3. Orlov, Konstantin, P. : Jedna metoda aproksimiranja za integrale diferencijalnih jednačina. - Glas CLXIII, Prvi razred 80 A. Matematičke nauke, Beograd, 1934.
4. Orlov, Konstantin : Finding of the general integral of differential equations by means of Taylor series and finding of some form of non- - Cauchy's particular integrals. - Matematički vesnik 9 /24/ 1972, str. 273 - 279, Beograd, 1972.
5. Petrović, Mihailo : Integracija diferencijalnih jednačina pomoću redova. - Beograd, Izd. zadužbine Luke Ćelovića, 1938.
6. Petrovitch, M. : Les spectres numériques. - Gauthier - Villars, Paris, 1919.

7. Petrovich, Michel : Leçons sur les spectres mathématiques, - Gauthier - Villars, Paris, 1928.

8. Orloff, C. : Les spectres de nombres non entiers. - Comptes rendus du I Congrés des mathématiciens et physiciens de Yougoslavie. Beograd. 1950.

9. Orloff, Constantin : Application des spectres mathématiques à la résolutions des équations différentielles ordinaire - Bull. de la Société des mathématiciens et physiciens de la R.P. de Serbie, Vol. IX, 3 - 4 /1957/, Beograd.

10. Orlov, Konstantin : Osnovi praktične spektralne aritmetike i algebre - Društvo matematičara i fizičara NR Srbije, Beograd, 1955.

11. Stojanović, Miroslava : Metoda diferenciranja za dobijanje rešenja diferencijalnih jednačina i njihovih sistema u obliku Tajlorovog reda,- Zbornik radova Gradjevinskog fakulteta u Beogradu, sv. 14, broj 3. 1972.

12. Stojanović, Miroslava : Korišćenje jedne vrste transformacija diferencijalnih jednačina radi praktičnog dobijanja partikularnih rešenja - Matematički vesnik, 9 /24/, Sv. 3, 1972, Beograd.

13. Orlov, K. : L'Arithmétisation du procédé de calcul des coefficients de la série de Taylor, représentant l'intégrale de Cauchy des équations

differentielles. - Matematički vesnik 1973 / u Štampi /

14. Barton, D., Willers, M., and Zahar R.V.M. : The automatic solution of systems of ordinary differential equations by the method of Taylor series. - The Computer journal, Vol. 14., N. 3, 1970.

15. Gibbon, A. : A program for the automatic integration of differential equations using the method of Taylor series. - The Computer journal, Vol. 3 , p. 108, 1960.

16. Forsyth, Andrew, Russell, : Theory of differential equations, Part II. Vol. III - Cambridge, University Press, 1900.

17. Forsyth, A. R. : A treatise on differential equations. - Macmillan Comp., London, 1921.

18. Kneschke, A. : Differentialgleichungen und Randwertprobleme, Band I. - Veb Verlag, Berlin, 1960.

19. Zurmühl, R. : Praktische Mathematik für Ingineure und Physiker. - Springer Verlag, Berlin, 1963.

20. Kamke E. : Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen. - Bd. I, Leipzig, 1965.

21. Levy H. and Bagott, E.A. : Numerical Solutions of differential equations - Dover Publications, 1950.

22. Traltenbrot, B.A. : Algorithmes et machines a calculer. - Dunod, Paris, 1963.

23. Thüring, Bruno : Methoden der Programmierung, I. Teil : Die Logik der Programmiering. - Göller Verlag, Baden - Baden, 1957.

24. Collatz, Lothar : Numerical Treatment of differential equations. - Berlin, Springer, 1960.

25. Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. - Teubner Verlag, Leipzig, 1899 - 1916.

26. D'Ocagne, Maurice : Histoire abrégée des sciences mathématiques. - Vuibert, Paris, 1955.

27. Тихонов, А. Н, Горбунов, А. Д.,: Асимптотические погрешности разностного метода решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. — Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 1962, 2, №4.

28. Фильчаков, П. Ф.,: Об одном эффективном методе решения задачи Коши для нелинейных дифференциальных уравнений. — ДАН УССР, 1967, №1.

29. Гобра, И.Г., Иванов, В.В.: Анализ точности решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений на гибридной вычислительной системе. - Труды симпозиума „Вопросы точности и эффективности вычислительных алгоритмов", Киев, 1969.

30. Фильчаков, П.Ф., : Решение нелинейных и линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем при помощи степенных рядов. - УМЖ, 1969, 21, №2.

31. Бесараб, П.Н., Иванов, В.В.: Асимптотическая оценка полной погрешности численного решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и ее вычисление на ЦВМ. - Труды симпозиума „Вопросы точности и эффективности вычислительных алгоритмов", Киев, 1969.

32. Милн, В.Э.,: Численное решение дифференциальных уравнений, - ИЛ, 1955, Москва.

33. Бахвалов, Н.С.,: Условия сходимости и порядок ошибки при решении задачи Коши для одного линейного уравнения первого порядка методом конечных разностей. ПММ, 20 (1956), 279-283.

34. Тартаковский, В.А.: Явные формулы для локальных разложений решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений. ДАН, 72 (1950), 633-636.

35. Тартаковский, В. А.,: Явные формулы для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. - УМН, 3 (1951). 128 - 160.

36. Лозинский, С. М.,: Об интервале существования решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений. - ДАН, 94 (1954), 17 - 19.

37. Лозинский, С. М.,: О приближенном решении систем обыкновенных дифференциальных уравнений. - ДАН, 97 (1954), 29 - 32.

38. Лозинский, С. М.,: Оценка погрешности приближенных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений. - Труды 3-го Всесоюзного матем. съезда, т. 1. М. (1956), 58.

39. Лузин, Н. Н.,: О методе приближенного интегрирования академика С. А. Чаплыгина. - Труды ЦАГИ, 141 (1932), 1 - 32.

40. Bertolino, M.: O maksimalnom intervalu primene čaplyginovih nejednakosti, - Matematički vesnik 3(18), Beograd 1966, pp. 35 - 45.