Univerzitet u Beogradu
Matematički fakultet

Milan Dražić

Konvergencija diferencijskih shema ka slabim rešenjima paraboličkog graničnog zadatka

– doktorska disertacija –

Beograd, 1995.

SADRŽAJ

Uvod

Granični zadaci za paraboličke parcijalne diferencijalne jednačine drugog reda se često javljaju kao matematički modeli velikog broja realnih problema, na primer provođenja toplote, difuzije, dinamike fluida, atmosferskih pojava i drugih. Po pravilu se za rešavanje ovakvih problema mora primeniti neka približna metoda u nedostatku egzaktne. Najčešće se koriste metode konačnih razlika, metode konačnih elemenata, a u novije vreme i metode graničnih elemenata.

Metoda konačnih razlika je doživela svoj razvoj pojavom savremene elektronske računske tehnike 40–tih godina (npr. shema Crank–Nicolson, [8]) da bi njen razvoj dalje išao u pravcu efikasnih shema za više prostornih dimenzija (faktorizovane i aditivne sheme). Ovi rezultati, bazirani na primeni Taylor–ovog razvoja rešenja zadatka u cilju procene greške metode, objavljeni su u nekoliko klasičnih monografija iz ove oblasti (Richtmyer, Morton [44], Samarski [45], Marčuk [38]). U novije vreme je došlo do primene metode Richardson–ove ekstrapolacije (Marčuk, Šajdurov [39]) i multigrid metode (Hackbush [15]) u cilju povećanja efikasnosti metoda.

Drugi pravac razvoja metoda konačnih razlika u novije vreme predstavlja ispitivanje konvergencije postojećih metoda u slučaju nedovoljno glatkih (ili čak prekidnih) rešenja. Klasična metodologija bazirana na Taylor–ovom razvoju dovodi do visokih zahteva na glatkost rešenja pa je zbog toga praktično neprimenljiva. Nove tehnike ispitivanja konvergencije se zasnivaju na lemi Bramble–Hilberta ([4], [5]) i njenim uopštenjima (npr. Jovanović [20]).

Nedugo nakon prvih rezultata za zadatke eliptičkog tipa (Weinelt [52], Lazarov [32], Jovanović, Ivanović, Süli [19], [49]) dobijeni su i rezultati za paraboličke granične zadatke (Lazarov [34], Jovanović, Ivanović, Süli [17]). Ovi radovi ispituju konvergenciju čisto implicitnih shema (dvoslojnih shema sa težinom $\sigma = 1$) u slučajevima kada rešenje problema $u \in W_2^{s,s/2}(Q)$. Dobijene su ocene tipa

$$\|u - v\|_{W_2^{r,r/2}(Q_{h\tau})} \leq C(h + \sqrt{\tau})^{s-r} \, \|u\|_{W_2^{s,s/2}(Q)}\,, \quad s > r$$

za koje se kaže da su saglasne sa glatkošću rešenja u. Svi ovi radovi kao osnovu koriste Bramble–Hilbertovu lemu ili njena uopštenja.

Dalji razvoj je išao u pravcu dobijanja ocena gornjeg tipa za necelobrojne vrednosti s (Jovanović, Ivanović, Süli [28], Dražić [9]), zatim ispitivanje greške u slučaju varijabilnih koeficijenata u parcijalnoj jednačini (Jovanović [21], [22]) kao i ispitivanju ekonomičnih shema za slučaj više prostornih promenljivih. U poslednje vreme su ispitivane i vektorske diferencijske sheme promenljivih pravaca (Jovanović [26], [27]). Takođe je rešavan i problem optimalnog upravljanja sa paraboličkom jednačinom (Ivanović, Jovanović [16]). Dobijene su i ocene brzine konvergencije u prostorima sa drugačijom metrikom (recimo $L_\infty((0,T); W_2^k(\Omega))$) kao i u negativnim normama.

Ocene prethodno navedenog tipa zahtevaju da rešenje $u(x,t)$ posmatramo u prostoru $W_2^{s,s/2}(Q)$ (koji jeste prirodan prostor ukoliko nemamo dodatnih informacija o glatkosti ulaznih podataka u graničnom zadatku) a često se u praksi dešava da rešenje poseduje dodatnu glatkost po jednoj od promenljivih. U takvim slučajevima su često efektivno ostvarene brzine konvergencije bolje od procenjenih. Cilj istraživanja u ovom radu je da se razvije aparat koji će dati bolje ocene brzine konvergencije u pomenutom slučaju kao i da se generalno što više oslabe zahtevi na glatkost rešenja zadatka. Takođe, u radu se istražuju pored čisto implicitne sheme (težina $\sigma = 1$) i ostale dvoslojne sheme sa težinama $\sigma \geq 1/2$ nepravedno zapostavljene u dosadašnjoj literaturi.

U prvoj glavi disertacije se, posle uvođenja standardnih polunormi Soboljevskog tipa celobrojne i necelobrojne glatkosti, definišu uopšteni funkcionalni prostori $W_p^A(Q)$ za proizvoljne skupove multiindeksa A koji zadovoljavaju izvesne uslove regularnosti. Takođe se definišu i standardni operatori izglađivanja Steklova, kao i produženja funkcije preko granice oblasti. Posebno se analiziraju neparna produženja funkcija.

Posle postavke problema i njegove diskretizacije, u trećoj glavi se daju uopštenja Bramble–Hilbert–ove leme neophodna za primenu na prethodno definisanim funkcionalnim prostorima. Glavni rezultati su uopštenje Tartarove leme na sublinearne funkcionale i lema koja omogućava dodatno poboljšanje dobijenih ocena funkcionala u nekim specijalnim slučajevima W_p^A prostora.

Četvrta glava je posvećena izvođenju apriornih ocena kako za sam granični zadatak, tako i za dvoslojne diferencijske sheme sa težinama. Posebno se izvode apriorne ocene za sheme sa težinama $\sigma_j = 1$, $\sigma_j \geq \sigma > 1/2$ i $\sigma_j = 1/2$.

Na osnovu izvedenih apriornih ocena, a primenjujući aparat razvijen u prvoj i trećoj glavi, u poslednje tri glave se dobijaju ocene brzine konvergencije za sheme sa ranije pomenutim težinama. U svakoj od ovih glava se izvode ocene u diskretnim $\|\cdot\|_{h\tau}$, $\|\cdot\|_{1,h\tau}$ i $\|\cdot\|_{2,h\tau}$ normama.

U dodatku su na pregledan način date vrednosti svih funkcionala koji su se koristili u procesu izvođenja ocena brzine konvergencije.

Glava 1. Funkcionalni prostori

1.1. Jednodimenzioni slučaj.

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}$. Definišimo polunorme (za $s \geq 0$):

$$
|u|_{s,p,\Omega} = \begin{cases} \|D^s u\|_{L_p(\Omega)}, \qquad s = [s], \\ \left(\displaystyle\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x_1) - u(x_2)|^p}{|x_1 - x_2|^{1+sp}} \, dx_1 dx_2 \right)^{1/p}, \qquad 0 < s < 1, \ 1 \leq p < \infty, \\ \displaystyle\sup_{x_1, x_2 \in \Omega} \text{ess} \frac{|u(x_1) - u(x_2)|}{|x_1 - x_2|^s}, \qquad 0 < s < 1, \ p = \infty, \\ \left| D^{[s]} u \right|_{s-[s],p,\Omega}, \qquad s > 1. \end{cases}
$$

Prostorom Soboljeva $W_p^k(\Omega)$ nazivaćemo adherenciju prostora $C^\infty(\Omega)$ u normi

$$
\|u\|_{W_p^s(\Omega)} = \left(\ |u|_{0,p,\Omega}^p + |u|_{s,p,\Omega}^p \ \right)^{1/p}
$$

uz odgovarajuću modifikaciju za slučaj $p = \infty$ [Adams, 1975].

Važi sledeća

LEMA 1.1. *Ukoliko je* $s > \frac{1}{p}$ *tada je* $W_p^s(\Omega) \hookrightarrow C(\Omega)$, *gde* $\hookrightarrow$ *označava relaciju utapanja funkcionalnih prostora (tada je za svako* u : $\|u\|_C \leq C\|u\|_{W_p^s(\Omega)}$ *).*

Posebno izdvajamo slučaj $p = 2$ kada $W_2^s(\Omega)$ predstavlja Hilbertov prostor. U tom slučaju ćemo koristiti jednostavnije oznake

$$
H^s(\Omega) = W_2^s(\Omega), \qquad |u|_{s,\Omega} = |u|_{s,2,\Omega} .
$$

1.2. Dvodimenzioni slučaj.

U slučaju dve prostorne promenljive postoji više različitih načina definisanja funkcionalnih prostora tipa Soboljeva. Ovde ćemo dati jednu prilično široku definiciju koja će biti pogodna za dalji rad, a koja obuhvata, kao specijalne slučajeve, dobro poznate i u literaturi korišćene prostore.

Prostori funkcija u ovom odeljku će biti definisani na pravougaoniku $Q = \Omega \times I$, gde je $\Omega = (0,1)$, $I = (0,T)$.

Definišimo prvo polunorme za nenegativne multiindekse (α, β) sa uobičajenom modifikacijom u slučaju $p = \infty$. Za $\alpha = [\alpha]$, $\beta = [\beta]$ neka je:

$$
|u|_{(\alpha,\beta),p} = \left\| D^{\alpha,\beta} u \right\|_{L_p} .
$$

Za $\alpha = 0,\ 0 < \beta < 1$:

$$|u|_{(\alpha,\beta),p} = \left(\int_\Omega \int_I \int_I \frac{|u(x,t_1) - u(x,t_2)|^p}{|t_1 - t_2|^{1+\beta p}} \, dt_1 dt_2 dx \right)^{1/p} .$$

Za $\beta = 0,\ 0 < \alpha < 1$:

$$|u|_{(\alpha,\beta),p} = \left(\int_I \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x_1,t) - u(x_2,t)|^p}{|x_1 - x_2|^{1+\alpha p}} \, dx_1 dx_2 dt \right)^{1/p} .$$

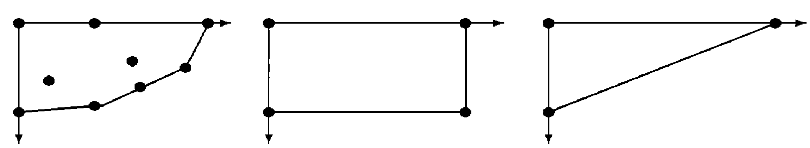
Za $0 < \alpha, \beta < 1$:

$$|u|_{(\alpha,\beta),p} =$$
$$= \left(\int_I \int_I \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x_1,t_1) + u(x_2,t_2) - u(x_1,t_2) - u(x_2,t_1)|^p}{|x_1 - x_2|^{1+\alpha p} \, |t_1 - t_2|^{1+\beta p}} \, dx_1 dx_2 dt_1 dt_2 \right)^{1/p} .$$

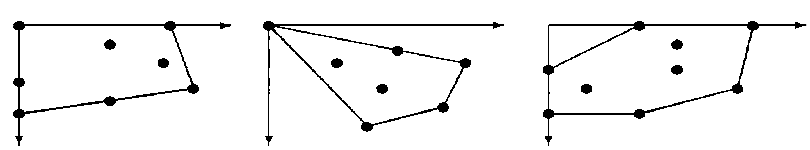
U ostalim slučajevima je $\alpha \geq 1$, ili $\beta \geq 1$ i tada definišemo:

$$|u|_{(\alpha,\beta),p} = \left| D^{[\alpha],[\beta]} u \right|_{(\alpha - [\alpha], \beta - [\beta]),p} .$$

DEFINICIJA 1.1. *Konačan skup* A *multiindeksa* (α_i, β_i) *zvaćemo regularnim ukoliko* $(0,0) \in A$, *i ako za svaki* $(\alpha, \beta) \in A$ *postoje* $\alpha_0 \geq \alpha$ *i* $\beta_0 \geq \beta$ *takvi da* $(\alpha_0, 0) \in A$ *i* $(0, \beta_0) \in A$.



Slika 1.1. Primeri regularnih skupova multiindeksa.



Slika 1.2. Primeri neregularnih skupova multiindeksa.

DEFINICIJA 1.2. *Za dati regularan skup multiindeksa* A , *funkcionalnim prostorom* W_p^A *nazivaćemo adherenciju* $C^\infty(Q)$ *u normi*

$$\|u\|_{W_p^A} = \left(\sum_{(\alpha,\beta) \in A} |u|^p_{(\alpha,\beta),p} \right)^{1/p} .$$

Napomena 1: Da bi navedeni izraz predstavljao normu, neophodno je da $(0,0)\in A$. Prostore W_p^A je moguće definisati i bez preostala dva uslova regularnosti skupa A (kao u [3] gde je dokazan niz rezultata u slučaju celobrojnih multiindeksa). Ta dva uslova nam, međutim, omogućavaju da koristimo teoriju interpolacije funkcionalnih prostora a istovremeno ne ograničavaju primenu rezultata pošto postojeća teorija paraboličkih parcijalnih jednačina ne koristi prostore funkcija definisane pomoću neregularnih skupova A.

Kao specijalan slučaj prostora W_p^A pomenimo izotropne prostore Soboljeva-Slobodeckog W_p^s koji su upravo prostori W_p^A sa $A=\{(0,0),(s,0),(0,s)\}$ i ekvivalentnom normom. Za $A=\{(0,0),(s_1,0),(0,s_2)\}$ dobijamo anizotropne prostore Soboljeva–Slobodeckog $W_p^{s_1,s_2}$. Na kraju pomenimo prostore $W_p^{s_2}(I;W_p^{s_1}(\Omega))$ definisane kao prostore tragova pomoću norme

$$\|u\|^p_{W_p^{s_2}(I;W_p^{s_1}(\Omega))}=\int_I\|u\|^p_{W_p^{s_1}(\Omega)}\,dt\;+\;|u|^p_{W_p^{s_2}(I;W_p^{s_1}(\Omega))}$$

gde je

$$|u|^p_{W_p^{s_2}(I;W_p^{s_1}(\Omega))}=\begin{cases}\displaystyle\int_I\|D_t^{s_2}u\|^p_{W_p^{s_1}(\Omega)}\,dt, & s_2=[s_2]\,,\\ \displaystyle\int_I\int_I\frac{\|u(t_1)-u(t_2)\|^p_{W_p^{s_1}(\Omega)}}{|t_1-t_2|^{1+s_2p}}\,dt_1dt_2, & 0<s_2<1\,,\\ \left|D_t^{[s_2]}u\right|^p_{W_p^{s_2-[s_2]}(I;W_p^{s_1}(\Omega))}, & s_2>1\,.\end{cases}$$

Više o ovim prostorima se može saznati u [13], gde je razvijena i teorija interpolacije za ove prostore. Poznato je da je $C^\infty(\Omega)$, posmatran kao prostor tragova (za fiksirane vrednosti t) svuda gust u prostoru $W_p^{s_2}(I;W_p^{s_1}(\Omega))$. Ako uzmemo $A=\{(0,0),(s_1,0),(0,s_2),(s_1,s_2)\}$ neposrednom proverom zaključujemo da su norme u prostorima W_p^A i $W_p^{s_2}(I;W_p^{s_1}(\Omega))$ jednake, pa su prema tome prostori izomorfni, zbog čega ćemo ih smatrati za iste. Pošto ćemo ovakve prostore češće koristiti, označićemo ih kraće $W_{p,\square}^{s_1,s_2}$.

Za dati regularni skup multiindeksa A, neka $\Pi=\Pi(A)$ označava konveksni omotač skupa A u $\mathbb{R}^2$. Neka $\partial\Pi$ označava onaj deo poligonalne granice Π koji ne leži na koordinatnim osama a uključuje dve granične tačke na osama. Na kraju, neka je $\overset{\circ}{\Pi}=\Pi\setminus\partial\Pi$., i $A_\partial=\{(\alpha_i,\beta_i)\in A\cap\partial\Pi\}$ skup multiindeksa na granici $\partial\Pi$.

Poznato je [51] da prostori Soboljeva–Slobodeckog ne čine zatvorenu klasu u odnosu na interpolaciju funkcionalnih prostora, osim u slučaju $p=2$. Drugim rečima, prostor dobijen interpolacijom dva prostora tipa Soboljeva–Slobodeckog ne mora biti istog tipa. Zbog toga se i neki rezultati koje ćemo izvesti razlikuju u slučajevima $p=2$ i $p\neq 2$.

Kao i u slučaju jedne prostorne dimenzije, koristićemo kraće oznake u slučaju $p=2$:

$$H^A = W_2^A, \quad H_{\square}^{\alpha,\beta} = W_{2,\square}^{\alpha,\beta}, \quad H^{\alpha,\beta} = W_2^{\alpha,\beta},$$

$$|u|_{(\alpha,\beta),Q} = |u|_{(\alpha,\beta),2,Q}.$$

LEMA 1.2. *Neka $u \in H^A(Q)$, gde je A regularni skup multiindeksa. Ako $(\alpha,\beta) \in \Pi(A)$, tada je*

$$|u|_{(\alpha,\beta)} \le C(\alpha,\beta,A,Q) \cdot \|u\|_{H^A(Q)}.$$

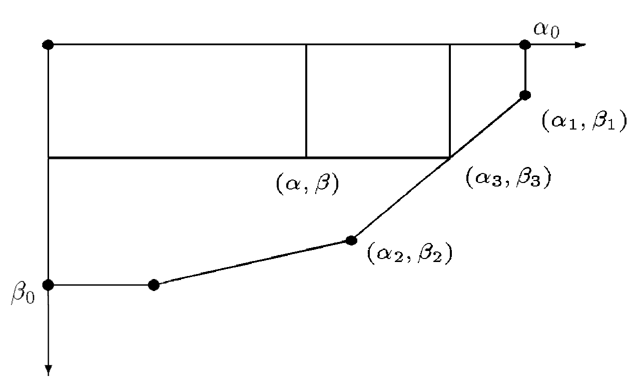
Takođe važi da su norme $\|\,.\,\|_{H^A}$ i $\|\,.\,\|_{H^{A'}}$ ekvivalentne ukoliko je A' skup multiindeksa koji odgovaraju temenima poligona Π.

DOKAZ: Neka $(\alpha,\beta) \in \Pi(A)$. Tada postoji tačka $(\alpha_3,\beta_3) \in \partial\Pi$ takva da je $\alpha_3 \ge \alpha$, $\beta_3 = \beta$. Poznato je iz teorije interpolacije funkcionalnih prostora [37] da je

$$[H^{s_1}(I;H^{r_1}(\Omega)), H^{s_2}(I;H^{r_2}(\Omega))]_\theta \;=\; H^{(1-\theta)s_1+\theta s_2}(I;H^{(1-\theta)r_1+\theta r_2}(\Omega))$$

i

$$\|u\|_{[X,Y]_\theta} \le C\cdot \|u\|_X^{1-\theta}\, \|u\|_Y^\theta \le C_1(\theta)\cdot(\|u\|_X^2 \,+\, \|u\|_Y^2)^{1/2}.$$



Slika 1.3. Ilustracija uz dokaz leme.

Odavde možemo zaključiti da je (za $s_1 = s_2 = 0$) i α_0 i β_0 iz definicije skupa multiindeksa A:

$$|u|_{(\alpha_i,0)}^2 \le C_2(\alpha_i,A)\cdot(|u|_{(0,0)}^2 \,+\, |u|_{(\alpha_0,0)}^2), \qquad i=1,2,3$$

i, na analogan način, da je

$$|u|_{(0,\beta_i)}^2 \le C_3(\beta_i,A)\cdot(|u|_{(0,0)}^2 \,+\, |u|_{(0,\beta_0)}^2), \qquad i=1,2,3.$$

Poslednje nejednakosti dokaziju neprekidno utapanje

$$H^A \hookrightarrow H^{\beta_i}(I; H^{\alpha_i}(\Omega)) = H_{\Box}^{\alpha_i,\beta_i}(\Omega) \qquad i = 1, 2, 3.$$

Pošto je $\beta = \beta_3$, $\alpha \le \alpha_3$ takođe će biti [37] $H^{\beta_3}(I; H^{\alpha_3}(\Omega)) \hookrightarrow H^{\beta}(I; H^{\alpha}(\Omega))$. Zbog toga imamo

$$H^A \hookrightarrow H^{\beta}(I; H^{\alpha}(\Omega)) = H_{\Box}^{\alpha,\beta}(\Omega)$$

što dokazuje prvi deo leme. Iz njega neposredno sledi i drugi deo leme. ■

NAPOMENA 2: Lema 2 nam omogućava da normi u prostoru H^A možemo dodati konačan broj polunormi koje odgovaraju tačkama zatvorenog skupa Π , pri čemu je dobijena norma ekvivalentna polaznoj. Takođe, opet do na ekvivalentnost normi, možemo iz norme u H^A isključiti sve polunorme koje ne odgovaraju temenima poligona Π .

NAPOMENA 3: Lema 2 važi samo za slučaj $p = 2$. U slučaju $p \ne 2$ prvi deo tvrđenja se može dokazati samo ako $(\alpha, \beta) \in \mathring{\Pi}$, dok je drugi deo tačan samo ako su jedine tačke na $A \cap \partial\Pi$ temena poligona.

Od ovog trenutka u razmatranju prostora H^A podrazumevaćemo, ukoliko nije drugačije naglašeno, da skup A sadrži samo temena poligona Π . Tada je $A = \{(0, 0)\} \cup A_\partial$.

LEMA 1.3. *Ukoliko* $(1/2, 1/2) \in \mathring{\Pi}$ *tada je* $H^A \hookrightarrow C(\overline{Q})$.

DOKAZ: Pošto $(1/2, 1/2) \in \mathring{\Pi}$, postoji $\alpha > 1/2$ takvo da $\alpha, \alpha) \in \Pi$. Kao i u dokazu leme 2, biće $H^A \hookrightarrow H^{\alpha}(I; H^{\alpha}(\Omega))$. Međutim, $H^{\alpha}(I; H^{\alpha}(\Omega)) \hookrightarrow C(\overline{Q})$ za $\alpha > 1/2$ čime je lema dokazana. ■

NAPOMENA 4: U slučaju prostora W_p^A , ekvivalent leme 3 će važiti ali uz uslov $(1/p, 1/p) \in \mathring{\Pi}$, $p \ne \infty$. Za $p = \infty$, uslov će biti da Π sadrži bar jednu unutrašnju tačku. Ako to nije ispunjeno, tada je samo $W_\infty^A \hookrightarrow L_\infty$.

LEMA 1.4. *Neka je* $e = \Omega_x \times \Omega_t$ *i neka je linearnom transformacijom* $x = x_0 + h\bar{x}$, $t = t_0 + \tau\bar{t}$ *domen* e *preslikan na odgovarajući* $E = \widetilde{\Omega}_x \times \widetilde{\Omega}_t$. *Ukoliko je* $u(x, t) = \bar{u}(\bar{x}, \bar{t})$, $(x, t) \in e$, $(\bar{x}, \bar{t}) \in E$, *tada je*

$$|\bar{u}(\bar{x}, \bar{t})|_{(\alpha,\beta),p,E} = h^{\alpha-1/p}\tau^{\beta-1/p} \cdot |u(x, t)|_{(\alpha,\beta),p,e} \; .$$

DOKAZ: Pošto je dokaz elementaran, ne navodimo ga.

LEMA 1.5. *Neka je* $a = (a_1, \ldots, a_N)$ *proizvoljan vektor. Tada je*

$$\|a\|_{l_q} \le N^{\max\{0,1/q-1/p\}} \|a\|_{l_p} \qquad 1 \le p, q \le \infty \, .$$

DOKAZ: Primetimo prvo da u lemi očigledno važi jednakost u slučaju $p = q$. Na osnovu toga je dokazan slučaj $p = q = \infty$. U slučaju $p = \infty$, $q \neq \infty$ je

$$\sum_{i=1}^{N} |a_i|^q \leq \sum_{i=1}^{N} (\max_i |a_i|)^q = N \cdot \|a\|_{l_\infty}^q$$

odakle sledi tvrđenje leme u ovom slučaju. Za $p \neq \infty$, $q = \infty$ je

$$|a_i| = (|a_i|^p)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{N} |a_i|^p \right)^{1/p}$$

za svako i, pa je i $\|a\|_{l_\infty} \leq \|a\|_{l_p}$. Ostaje da se lema dokaže u slučaju $1 \leq p, q < \infty$. Funkcija $f(x) = |x|^r$ je konveksna za $r \geq 1$, pa je zato

$$\sum_{i=1}^{N} |a_i|^r \leq \left(\sum_{i=1}^{N} |a_i| \right)^r .$$

U slučaju $p \leq q$ je zbog toga

$$\sum_{i=1}^{N} |a_i|^q = \sum_{i=1}^{N} (|a_i|^p)^{q/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{N} |a_i|^p \right)^{q/p} = \|a\|_{l_p}^q$$

što dokazuje lemu u slučaju $p \leq q$. Neka je $p > q$. Tada je uz pomoć Hölderove nejednakosti

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} |a_i|^q &= \sum_{i=1}^{N} |a_i|^q \cdot 1 \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{N} |a_i|^p \right)^{q/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} 1 \right)^{1-q/p} \\ &= N^{q(1/q-1/p)} \cdot \|a\|_{l_p}^q \end{aligned}$$

čime je dokaz leme završen. ∎

NAPOMENA 5: U prethodnoj lemi jednakost se dostiže ili za $a = (1, 0, \ldots, 0)$ ili za $a = (1, 1, \ldots, 1)$ tako da se navedena ocena ne može poboljšati.

LEMA 1.6. *Neka je* $u(x) \in W_p^s(\Omega)$, $s \geq 0$, $\Omega = \cup_{i=1}^N \Omega_i$. *Tada je*

$$\left(\sum_{i=1}^{N} |u|_{s,p,\Omega_i}^q \right)^{1/q} \leq N^{\max\{0, 1/q-1/p\}} \cdot |u|_{s,p,\Omega} .$$

DOKAZ: U slučaju da je s celobrojno, lema je direktna posledica prethodne leme. U slučaju necelobrojnog $s = m + \delta$, $0 < \delta < 1$, biće primenom prethodne leme

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{N} |u|_{s,p,\Omega_i}^{q}\right)^{1/q} &\leq N^{\max\{0,1/q-1/p\}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} |u|_{s,p,\Omega_i}^{p}\right)^{1/p} \\ &= N^{\max\{0,1/q-1/p\}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i}\int_{\Omega_i} \frac{|D^m u(x) - D^m u(y)|^p}{|x-y|^{1+p\delta}}\, dx\, dy\right)^{1/p} \\ &\leq N^{\max\{0,1/q-1/p\}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega}\int_{\Omega_i} \frac{|D^m u(x) - D^m u(y)|^p}{|x-y|^{1+p\delta}}\, dx\, dy\right)^{1/p} \\ &= N^{\max\{0,1/q-1/p\}} \cdot \left(\int_{\Omega}\int_{\Omega} \frac{|D^m u(x) - D^m u(y)|^p}{|x-y|^{1+p\delta}}\, dx\, dy\right)^{1/p} \\ &= N^{\max\{0,1/q-1/p\}} \cdot |u|_{s,p,\Omega}\,.\end{aligned}$$

NAPOMENA 6: Analogan rezultat važi i u slučaju Besovskih polunormi.

LEMA 1.7. *Neka je* $Q = \Omega_x \times \Omega_t$, $\Omega_x = \cup_{i=1}^{N_x} \Omega_{x,i}$, $\Omega_t = \cup_{j=1}^{N_t} \Omega_{t,j}$, $Q_{ij} = \Omega_{x,i} \times \Omega_{t,j}$. *Tada je, pod pretpostavkom konačnosti polunormi*

$$\left(\sum_{j=1}^{N_t}\left(\sum_{i=1}^{N_x} |u|_{(\alpha,\beta),p,Q_{ij}}^{q_1}\right)^{q_2/q_1}\right)^{1/q_2} \leq N_x^{\max\{0,1/q_1-1/p\}} \cdot N_t^{\max\{0,1/q_2-1/p\}} \cdot |u|_{(\alpha,\beta),p,Q}\,.$$

DOKAZ:

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{j=1}^{N_t}\left(\sum_{i=1}^{N_x} |u|_{(\alpha,\beta),p,Q_{ij}}^{q_1}\right)^{q_2/q_1}\right)^{1/q_2} \\ &\quad\leq N_x^{\max\{0,1/q_1-1/p\}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{N_t}\left(\sum_{i=1}^{N_x} |u|_{(\alpha,\beta),p,Q_{ij}}^{p}\right)^{q_2/p}\right)^{1/q_2} \\ &\quad\leq N_x^{\max\{0,1/q_1-1/p\}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{N_t} |u|_{(\alpha,\beta),p,\Omega_x\times\Omega_{t,j}}^{q_2}\right)^{1/q_2} \\ &\quad\leq N_x^{\max\{0,1/q_1-1/p\}} \cdot N_t^{\max\{0,1/q_2-1/p\}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{N_t} |u|_{(\alpha,\beta),p,\Omega_x\times\Omega_{t,j}}^{p}\right)^{1/p} \\ &\quad\leq N_x^{\max\{0,1/q_1-1/p\}} \cdot N_t^{\max\{0,1/q_2-1/p\}} \cdot |u|_{(\alpha,\beta),p,Q}\,.\end{aligned}$$

Ovim je završen dokaz leme. ∎

1.3. Funkcije diskretnog argumenta.

Neka su date mreže $\bar{\omega}_h = \{\, x_i \,|\, x_0 = 0, x_N = 1, x_i - x_{i-1} = h\}$ i $\bar{\omega}_\tau = \{\, t_j \,|\, t_0 = 0, t_M = T, t_j - t_{j-1} = \tau_j\}$. Za funkciju v definisanu na mreži $\bar{Q}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$ uvedimo sledeće oznake

$$\begin{gathered} v_i^j = v(x_i, t_j)\,, \quad v_i = v|_{x=x_i}\,, \quad v^j = v|_{t=t_j}\,, \\ v_{x,i}^{\;j} = (v_{i+1}^j - v_i^j)/h\,, \quad v_{\bar{x},i}^{\;j} = (v_i^j - v_{i-1}^j)/h\,, \\ v_{t,i}^{\;j} = (v_i^{j+1} - v_i^j)/\tau_{j+1}\,, \quad v_{\bar{t},i}^{\;j} = (v_i^j - v_i^{j-1})/\tau_j\,, \\ v_{x\bar{x},i}^{\;j} = (v_{i-1}^j - 2v_i^j + v_{i+1}^j)/h^2\,, \quad \check{v}_i^j = v_i^{j-1}\,. \end{gathered}$$

U linearnom prostoru funkcija definisanih na mreži $\bar{\omega}_h$ možemo definisati sledeće skalarne proizvode

$$\begin{gathered} (u,v) = \sum_{i=1}^{N-1} h u_i v_i\,, \qquad [u,v) = \sum_{i=0}^{N-1} h u_i v_i\,, \\ (u,v] = \sum_{i=1}^{N} h u_i v_i\,, \qquad [u,v] = \sum_{i=0}^{N} h u_i v_i \end{gathered}$$

koji generišu odgovarajuće norme

$$\|v\|_h = (v,v)^{1/2}\,, \qquad \|[v\|_h = [v,v)^{1/2}\,,$$

$$\|v]\|_h = (v,v]^{1/2}\,, \qquad \|[v]\|_h = [v,v]^{1/2}\,.$$

Operator

$$\Lambda v = \begin{cases} -\,v_{x\bar{x}}\,, & x = x_i\,,\ \ 1 \le i \le N-1 \\ 0\,, & i = 0\,,\ \ i = N \end{cases}$$

je simetričan i pozitivno definitan operator na prostoru funkcija definisanih na $\bar{\omega}_h$ koje su jednake nuli za $i = 1$ i $i = N$ (vidi [46]). Zato se mogu uvesti norme

$$\|v\|_\Lambda = (\Lambda v, v)^{1/2} = \|[v_x\|_h\,, \qquad \|v\|_{\Lambda^{-1}} = (\Lambda^{-1} v, v)^{1/2}\,.$$

U prostoru diskretnih funkcija definisanih na $\bar{Q}_{h\tau}$ i jednakih nuli za $i = 0$ i $i = N$ mogu se uvesti sledeće norme

$$\begin{aligned} \|v\|_{h\tau} &= \left(\sum_{j=1}^{M} \tau_j\, \|v_j\|_h^2\right)^{1/2}, \\ \|[v\|_{h\tau} &= \left(\sum_{j=1}^{M} \tau_j\, \|[v_j\|_h^2\right)^{1/2}, \\ \|v\|_{0,h\tau} &= \|v\|_{h\tau}\,, \\ \|v\|_{1,h\tau} &= \|[v_x\|_{h\tau}\,, \\ \|v\|_{2,h\tau} &= \|v_{x\bar{x}}\|_{h\tau}\,. \end{aligned}$$

U radu ćemo često koristiti i sledeće dobro poznate jednakosti za diskretne funkcije [46]

$$\begin{aligned}
(u, v_x) &= u_N v_N - u_0 v_1 - (u_{\bar{x}}, v]\,, \\
(u, v_{\bar{x}}) &= u_N v_{N-1} - u_0 v_0 - [u_x, v)\,, \\
[u_x, v) &= u_N v_{N-1} - u_0 v_0 - (u, v_{\bar{x}}]\,, \\
(u_{x\bar{x}}, v) &= u_{\bar{x},N} v_N - u_{x,0} v_0 - [u_x, v_x)\,.
\end{aligned}$$

1.4. Operatori izglađivanja.

Za funkciju dve promenljive $f(x,t)$ mogu se definisati operatori izglađivanja (usrednjavanja) Steklova

$$T_x f = \int_0^1 f(x+hs,t)\,ds\,, \qquad T_{\bar{x}} f = \int_{-1}^0 f(x+hs,t)\,ds\,,$$

$$T_t f = \int_0^1 f(x,t+\tau s)\,ds\,, \qquad T_{\bar{t}} f = \int_{-1}^0 f(x,t+\tau s)\,ds\,,$$

$$T_x^2 f = T_{\bar{x}}(T_x f) = \int_{-1}^1 (1-|s|) f(x+hs,t)\,ds\,.$$

Za ove operatore je poznato da povećavaju glatkost funkcije po promenljivoj po kojoj se izglađuje. Nije teško pokazati da ako $f \in H^A(Q)$, gde je $A = \{(\alpha_i, \beta_i)\}$ regularan skup multiindeksa, tada $f \in H^{A_1}(Q_1)$ gde je $A_1 = \{(\alpha_i + 1, \beta_i)\} \cup \{(0, \max_i \beta_i)\}$ i $Q_1 \subset Q$ je podoblast sastavljena od tačaka čije je rastojanje (u pravcu x–ose) do granice oblasti Q ne manje od h.

Navedeni operatori imaju sledeće svojstvo. Ako je u neprekidna funkcija, tada je

$$T_x^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = u_{x\bar{x}}\,, \qquad T_{\bar{t}}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = u_{\bar{t}}\,.$$

pri čemu se navedeni parcijalni izvodi uzumaju u generalizovanom smislu.

1.5. O produženju funkcija.

Tehnika izvođenja ocena brzine konvergencije diferencijskih shema ponekad zahteva da se definiše produženje rešenja $u(x,t)$ preko bočnih granica $x = 0$ i $x = 1$. To produženje ne bi trebalo da ima manju glatkost od rešenja da bi se dobile optimalne ocene.

Razmotrićemo prvo slučaj funkcija jedne promenljive. Neka $u \in H^s(0,1)$. Definišimo produženje u^* funkcije u sa $(0,1)$ na $(-1,1)$ na sledeći način (Hestenes–ovo produženje, vidi [42])

$$u^*(x) = \begin{cases} u(x)\,, & x \geq 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{k+1} \lambda_i u(-\frac{x}{i})\,, & x < 0 \end{cases}$$

gde su konstante λ_i rešenja sistema jednačina

$$(-1)^j \lambda_1 + (-\tfrac{1}{2})^j \lambda_2 + \cdots + (-\tfrac{1}{k+1})^j \lambda_{k+1} = 1\,, \quad j = 0, 1, \ldots, k\,.$$

Za prvih nekoliko k te konstante su

$$\begin{array}{lllll} k=0: & \lambda_1 = 1 & & & \\ k=1: & \lambda_1 = -3 & \lambda_2 = 4 & & \\ k=2: & \lambda_1 = 6 & \lambda_2 = -32 & \lambda_3 = 27 & \\ k=3: & \lambda_1 = -10 & \lambda_2 = 160 & \lambda_3 = -405 & \lambda_4 = 256 \end{array}$$

Neka je $k \geq r$. Tada ova produženja čuvaju polinome stepena $\leq k$ i važi

$$\|u^*\|_{r,(-1,1)} \leq C\,\|u\|_{r,(0,1)}\,,$$

$$|u^*|_{r',(-1,1)} \leq C(r')\,|u|_{r',(0,1)}\,, \quad 0 \leq r' \leq r\,.$$

Za neparno produženje preko granice (koje se dobija za $k = 0$) koje ćemo povremeno koristiti važi sledeća

LEMA 1.8. *Neka $u \in H^s(0,1)$, $s \geq 0$. Za neparno produženje u^* funkcije u preko granice $x = 0$ važi*

$$\|u^*\|_{H^s(-1,1)} \leq C(s)\,\|u\|_{H^s(0,1)}$$

ukoliko je ispunjen jedan od sledećih uslova:

(i) $0 \leq s < 1/2$,

(ii) $1/2 \leq s < 5/2$, $s \neq 3/2$ *i* $u(0) = 0$,

(iii) $5/2 \leq s < 9/2$, $s \neq 7/2$ *i* $u(0) = u''(0) = 0$.

DOKAZ: Funkcija $u(x)$ i njeni izvodi su ili parne ili neparne funkcije. Ako je proizvoljna funkcija $v(x)$ bilo parna ili neparna tada je

$$\|v\|^2_{L_2(-1,1)} = 2\,\|v\|^2_{L_2(0,1)}\,. \qquad (1.1)$$

Iz definicije polunormi sa početka ove glave se u slučaju da je $v(x)$ parna funkcija dobija

$$|v|^2_{H^s(-1,1)} \leq 4\,|v|^2_{H^s(0,1)}\ , \quad 0 < s < 1\,. \tag{1.2}$$

Ukoliko je, pak, $v(x)$ neparna funkcija tada je

$$|v|^2_{H^s(-1,1)} = 2\,|v|^2_{H^s(0,1)} + 2\int_0^1\int_0^1 \frac{[v(x_1)+v(x_2)]^2}{|x_1+x_2|^{1+2s}}\,dx_1\,dx_2\,.$$

Ukoliko iskoristimo nejednakost

$$\int_0^1 x^{-2s} g^2(x)\,dx \leq C(s)\left(\int_0^1\int_0^1 \frac{[g(x_1)-g(x_2)]^2}{|x_1-x_2|^{1+2s}}\,dx_1\,dx_2 + \int_0^1 g^2(x)\,dx\right)$$

koja važi za $0 < s < 1/2$, a uz dodatni uslov $g(0) = 0$ važi i za $1/2 < s < 1$, tada dobijamo da je pod istim pretpostavkama

$$|v|^2_{H^s(-1,1)} \leq C(s)\,\|v\|^2_{H^s(0,1)}\ . \tag{1.3}$$

Tvrđenje leme je direktna posledica (1.1), (1.2) i (1.3). ∎

U slučaju funkcije dve promenljive pretpostavimo da je $u(x,t) \in H^A(Q)$ gde je $Q = (0,1)\times(0,1)$ i $A = \{(\alpha_i,\beta_i)\}$ regularan skup multiindeksa. Na $Q_1 = (-1,1)\times(0,1)$ definišimo produženje kao u jednodimenzionom slučaju

$$u^*(x,t) = \begin{cases} u(x,t)\,, & x \geq 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i u(-\frac{x}{i},t)\,, & x < 0 \end{cases}$$

gde je k izabrano tako da je $k \geq \max\{\,\alpha_i\,|\,(\alpha_i,\beta_i) \in A\}$. Za ovako definisano produženje važi

$$\|u^*\|_{H^A(Q_1)} \leq C\,\|u\|_{H^A(Q)}\ ,$$

$$|u^*|_{(\alpha,\beta),Q_1} \leq C(\alpha,\beta)\,|u|_{(\alpha,\beta),Q}\ , \quad (\alpha,\beta) \in A\,.$$

Za neparno produženje funkcije $u(x,t)$ preko granice $x = 0$ lako se izvodi na analogan način kao prethodna lema

LEMA 1.9. *Neka* $u(x,t) \in H^A(Q)$, $A = \{(\alpha_i,\beta_i)\}$. *Tada je za neparno produženje* u^* *funkcije* u *preko granice* $x = 0$ *i* $A_s = \{(\min\{s,\alpha_i\},\beta_i)\}$

$$\|u^*\|_{H^{A_s}(Q_1)} \leq C(s)\,\|u\|_{H^{A_s}(Q)}$$

ukoliko je ispunjen jedan od sledećih uslova:

(i) $0 \leq s < 1/2$,

(ii) $1/2 \leq s < 5/2$, $s \neq 3/2$, $\alpha_i \neq 1/2, 3/2$ *i* $u(0,t) = 0$,

(iii) $5/2 \leq s < 9/2$, $s \neq 7/2$, $\alpha_i \neq 1/2, 3/2, 5/2, 7/2$ *i* $u(0,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t) = 0$.

Glava 2. Postavka problema i diskretizacija

U radu ćemo posmatrati parabolički granični zadatak sa graničnim uslovima prve vrste

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)\,, \quad (x,t) \in Q = (0,1) \times (0,T)\,, \\
&u(0,t) = \alpha(t)\,, \\
&u(1,t) = \beta(t)\,, \\
&u(x,0) = u^0(x)\,.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Pretpostavićemo, takođe, da generalisano rešenje ovog zadatka (u smislu distribucija, vidi [25]) $u \in H^A(Q)$, gde je A neki regularni skup multiindeksa razmatran u prethodnoj glavi. Takođe ćemo, kao specijalne slučajeve, rešenje u posmatrati u prostorima $H^s(Q)$ i $H^{s,s/2}(Q)$. Ovaj poslednji prostor je uobičajen prostor u kojem se posmatra rešenje problema ukoliko nemamo dodatnih informacija o glatkosti funkcije $f(x,t)$ [37]. Pošto funkcije $f(x,t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ i $u^0(x)$ posmatramo kao generalisane funkcije (distribucije) ukoliko nisu neprekidne, jasno je da i rešenje problema u ne mora biti neprekidna funkcija.

Za rešavanje graničnog zadatka (2.1) koristićemo diferencijsku shemu

$$\begin{aligned}
&v_{\bar{t}} = \sigma v_{x\bar{x}} + (1-\sigma)\check{v}_{x\bar{x}} + \varphi_i^j\,, \quad 0.5 \le \sigma \le 1\,, \\
&v_0^j = a_j\,, \\
&v_N^j = b_j\,, \\
&v_i^0 = c_i\,.
\end{aligned}$$

U navedenoj shemi ćemo uzeti $\varphi_i^j = T_x^2 T_{\bar{t}} f(x_i,t_j)$, zatim $a_j = \alpha(t_j)$, $b_j = \beta(t_j)$, $c_i = u^0(x_i)$ u slučaju da je rešenje graničnog zadatka u neprekidno, a u slučaju prekidnog rešenja $a_j = T_{\bar{t}}\alpha(t_j)$, $b_j = T_{\bar{t}}\beta(t_j)$, $c_i = T_x^2 u^0(x_i)$.

Standardnom metodologijom baziranom na razvoju rešenja u Tejlorov red dobija se (vidi [46]) da je

$$\begin{aligned}
&\|u - v\|_{h\tau} = O(h^2 + \tau)\,, \quad s > 0.5\,, \quad u \in C_2^4\,, \\
&\|u - v\|_{h\tau} = O(h^2 + \tau^2)\,, \quad s = 0.5\,, \quad u \in C_3^4\,.
\end{aligned}$$

U narednim glavama biće dokazana konvergencija ove sheme pod znatno slabijim pretpostavkama o glatkosti rešenja u. Pored toga iz apriornih ocena i ocena brzine konvergencije biće vidljiva i činjenica da je implicitna shema ($\sigma = 1$) stabilnija od ostalih shema sa težinama $\sigma < 1$.

Glava 3. Bramble-Hilbertova lema i njena uopštenja

Rezultati ove glave imaju presudnu ulogu pri dokazivanju ocena brzina konvergencije diferencijskih shema.

Bramble-Hilbertova lema glasi:

LEMA 3.1 (Bramble-Hilbert,[4]). *Neka je $F(u)$ linearan funkcional na prostoru $W_p^k(D)$ ($1 \le p < \infty$, $k \in D$, D je ograničen domen u $\mathbb{R}^N$ diametra ρ), koji zadovoljava*

(1) $|F(u)| \le C\, \|u\|_{W_p^k(D)}$ *za sve* $u \in W_p^k(D)$ *sa konstantom* C *nezavisnom od* ρ *i* u, *i*
(2) $F(u) = 0$ *za sve* $p \in P_{k-1}$.

Tada je

$$|F(u)| \le C\, \rho^k\ |u|_{W_p^k(D)}$$

za sve $u \in W_p^k(D)$ *sa konstantom* C *nezavisnom od* ρ *i* u .

Ova lema, kao što se vidi, odnosi se samo na izotropne prostore celobrojnog reda glatkosti, i linearne funkcionale. Moguća su uopštenja ove leme u više pravaca. Uopštenje leme za prostore $W_p^s(D)$ necelobrojnog reda glatkosti omogućava izvođenje boljih ocena za zadatke sa nedovoljno glatkim rešenjima. Za razliku od eliptičkih graničnih zadataka, gde je prirodno rešenja izučavati u izotropnim prostorima, kod paraboličkih zadataka prirodnije je koristiti anizotropne prostore.

Uopštenje Bramble-Hilbertove leme za slučaj izotropnih necelobrojnih prostora Soboljeva dato je u [10]. U istom radu razvijena je tehnika koja uopštava Bramble-Hilbertovu lemu na slučaj prostora tipa W_p^A sa celobrojnim multiindeksima.

Naredno uopštenje je Tartarova lema (vidi [7]) koja glasi:

LEMA 3.2 (Tartar). *Neka je V Banahov prostor a V_1 , V_2 i W tri normirana vektorska prostora. Neka su $A_i \in \mathcal{L}(V;V_i)$, $i = 1, 2$, dva zadana linearna preslikavanja, pri čemu je preslikavanje A_1 kompaktno. Pretpostavimo da postoji takva konstanta C_0 da je*

$$\|v\|_V \le C_0\, (\|A_1 v\|_{V_1} + \|A_2 v\|_{V_2}) \qquad \forall v \in V\, .$$

Na kraju, neka je $L \in \mathcal{L}(V;W)$ takvo linearno preslikavanje da

$$v \in \ker A_2 \Rightarrow Lv = 0\, .$$

Tada:

(1) $P = \ker A_2$ *je konačnodimenzioni linearni prostor.*

(2) *Postoji takva konstanta* C_1 *da je*

$$\inf_{p\in P} \|v-p\|_V \le C_1 \, \|A_2 v\|_{V_2} \qquad \forall v \in V\,.$$

(3) *Postoji takva konstanta* C *da je*

$$\|Lv\|_W \le C \, \|A_2 v\|_{V_2} \qquad \forall v \in V\,.$$

Dva uopštenja ove leme omogućiće primenu na anizotropne prostore i prostore tipa W_p^A .

LEMA 3.3. *Neka je* V *Banahov prostor a* V_1 *i* W *dva normirana vektorska prostora. Neka je* $A \in \mathcal{L}(V;V_1)$, *kompaktan linearan operator, a* $S_2 : V \mapsto \mathbb{R}$ *neprekidan sublinearan funkcional (takav da je* $S_2(au+bv) \le |a|S_2(u)+|b|S_2(v), \quad a,b \in \mathbb{R}, \quad u,v\in V$ *). Pretpostavimao da postoji konstanta* C_0 *takva da je*

$$\|v\|_V \le C_0 \left(\|Av\|_{V_1} + S_2(v)\right) \qquad \forall v \in V\,.$$

Na kraju, neka je $L \in \mathcal{L}(V;W)$ *takvo linearno preslikavanje da*

$$v \in \ker S_2 \Rightarrow Lv = 0\,.$$

Tada:

(1) $P = \ker S_2$ *je konačnodimenzioni linearni prostor.*
(2) *Postoji takva konstanta* C_1 *da je*

$$\inf_{p\in P} \|v-p\|_V \le C_1 \, S_2(v) \qquad \forall v \in V\,.$$

(3) *Postoji takva konstanta* C *da je*

$$\|Lv\|_W \le C \, S_2(v) \qquad \forall v \in V\,.$$

LEMA 3.4. *Neka je* V *Banahov prostor a* V_1 *normiran vektorski prostor. Neka je* $A \in \mathcal{L}(V;V_1)$, *kompaktan linearan operator, a* $S_1 : V \mapsto \mathbb{R}$ *i* $S_2 : V \mapsto \mathbb{R}$ *dva neprekidna sublinearna funkcionala (takva da je* $S_i(au+bv) \le |a|S_i(u) + |b|S_i(v), \quad i=1,2\,, \quad a,b\in\mathbb{R}\,, \quad u,v \in V$ *). Pretpostavimo da postoji konstanta* C_0 *takva da je*

$$\|v\|_V \le C_0 \left(\|Av\|_{V_1} + S_2(v)\right) \qquad \forall v \in V\,.$$

i neka

$$v \in \ker S_2 \Rightarrow S_1(v) = 0\,.$$

Tada:

(1) $P = \ker S_2$ *je konačnodimenzioni linearni prostor.*
(2) *Postoji takva konstanta* C_1 *da je*

$$\inf_{p\in P} \|v-p\|_V \le C_1 \, S_2(v) \qquad \forall v \in V\,.$$

(3) *Postoji takva konstanta* C *da je*

$$S_1(v) \le C \, S_2(v) \qquad \forall v \in V\,.$$

Dokaz leme 3 i leme 4: Pošto je lema 3 specijalni slučaj leme 4, dokaz ćemo izvesti za ovu poslednju.

Dokažimo prvo neka svojstva sublinearnih funkcionala. Zamenom $a = b = 0$ u

$$S(au + bv) \leq |a|S(u) + |b|S(v)$$

dobijamo $S(\vec{0}) \leq 0$ (gde $\vec{0}$ označava nulti element prostora V). Zamenom $u = v = \vec{0}$, $a = b = 1$ u istu relaciju dobijamo $S(\vec{0} + \vec{0}) \leq S(\vec{0}) + S(\vec{0})$ odakle je neposredno $S(\vec{0}) \geq 0$. Upoređujući sa prethodnim rezultatom, dobijamo

$$S(\vec{0}) = 0\,.$$

Stavljajući $b = 0$, $a = -1$ dobijamo $S(-u) \leq S(u)$, $\forall u \in V$. Smenjujući u ovoj nejednakosti u sa $-u$ dobijamo suprotnu nejednakost, pa mora biti

$$S(-u) = S(u).$$

Dalje, za proizvoljne $u, v \in V$ je

$$\begin{gathered} S(u) = S(u - v + v) \leq S(u - v) + S(v) \\ S(u) - S(v) \leq S(u - v) \\ S(v) - S(u) \leq S(v - u) = S(u - v) \end{gathered}$$

pa je

$$|S(u) - S(v)| \leq S(u - v). \tag{3.1}$$

Neposredne posledice ove relacije su da je (za $v = 0$)

$$S(u) \geq 0 \qquad \forall u \in V \tag{3.2}$$

i

$$S(u) = 0 \;\Rightarrow\; S(au) = 0 \qquad \forall a \in \mathbb{R}\,,\ \forall u \in V. \tag{3.3}$$

Pređimo sada na dokaz tvrđenja leme 4.

(1) Skup $\ker S_2$ je na osnovu (3.2) i (3.3) linearan vektorski prostor. Osim toga, taj prostor je zatvoren zbog neprekidnosti operatora S_2 . Zbog toga je P potprostor Banahovog prostora V , pa je i sam Banahov prostor. Uočimo preslikavanje

$$\widetilde{A} : P \to \widetilde{A}(P) \qquad \widetilde{A}(v) = A(v).$$

Za $v \in P$ važiće

$$\|v\|_V \leq C_0\, \|Av\|_{V_1}$$

što znači da je operator $\widetilde{A}^{-1} : \widetilde{A}(P) \to P$ ograničen. Operator $I : P \to P$, $I = \widetilde{A}^{-1} \cdot \widetilde{A}$, $I(v) = v$ je predstavljen kao kompozicija neprekidnog i kompaktnog operatora pa je zato i sam kompaktan. Međutim, identički operator je kompaktan ako i samo ako je prostor P konačnodimenzioni.

(2) Neka je $\{p_i\}_{i=1}^N$ baza prostora P, i neka je $\{f_j\}_{j=1}^N$ baza dualnog prostora P^* :

$$f_j(p_i) = \delta_{ij} .$$

Prema Hahn–Banach–ovoj teoremi postojaće proširenja $\bar{f}_j$, $j = 1, \ldots, N$, definisana na V koja će biti linearne neprekidne (ograničene) forme. Ako je $p \in P$ tada

$$\bar{f}_j(p) = 0 \qquad j = 1, \ldots, N$$

zbog $\bar{f}_j(p) = f_j(p)$ može važiti ako i samo ako je $p = 0$.

Pokažimo da postoji konstanta C_1 takva da je

$$\|v\|_V \leq C_1 \left(S_2(v) + \sum_{j=1}^N |\bar{f}_j(v)| \right) \qquad \forall v \in V .$$

Kada takva konstanta ne bi postojala, postojao bi niz $\{v_i\}_{i=1}^\infty$ takav da je

$$\|v_i\|_V = 1$$

i

$$\lim_{i \to \infty} \left(S_2(v_i) + \sum_{j=1}^N |\bar{f}_j(v_i)| \right) = 0 . \tag{3.4}$$

Pošto je $\{v_i\}$ ograničen niz, a A je kompaktan operator, postoji podniz, označimo ga opet sa $\{v_i\}$, takav da je $\{Av_i\}$ fundamentalan niz. Iz (3.4) neposredno zaključujemo da mora biti (zbog nenegativnosti S_2)

$$\lim_{i \to \infty} S_2(v_i) = 0 ,$$

pa je zbog

$$\begin{aligned} \|v_m - v_n\|_V &\leq C_0 \left(\|Av_m - Av_n\|_{V_1} + S_2(v_m - v_n) \right) \\ &\leq C_0 \left(\|Av_m - Av_n\|_{V_1} + S_2(v_m) + S_2(v_n) \right) \end{aligned}$$

i $\{v_i\}$ fundamentalan niz. Pošto je V Banahov prostor postoji

$$\lim_{i \to \infty} v_i = v_0 .$$

Zbog neprekidnosti funkcionala S_2 je

$$S_2(v_0) = \lim_{i \to \infty} S_2(v_i) = 0 ,$$

pa je zbog toga $v_0 \in P$.

Iz (3.4) je takođe

$$\lim_{i\to\infty} \bar{f}_j(v_i) = 0 \qquad j = 1,\dots,N\,,$$

a to je moguće samo kada je $v_0 = 0$ jer $v_0 \in P$. Ovo je kontradikcija jer, prema pretpostavci mora biti

$$\|v_0\|_V = \lim_{i\to\infty} \|v_i\|_V = 1\,.$$

Pronađimo $p_0 \in P$ takvo da je $\bar{f}_j(v - p_0) = 0\,, j = 1,\dots,N$:

$$\bar{f}_j(v) = \bar{f}_j(p_0) = f_j(p_0)$$

$$p_0 = \sum_{j=1}^{N} \bar{f}_j(v)\cdot p_j$$

gde je $\{p_i\}$ ranije uvedena baza prostora P . Za takvo p_0 biće

$$\inf_{p\in P} \|v-p\|_V \le \|v-p_0\|_V \le C_1 \cdot S_2(v)$$

čime je završen dokaz tvrđenja (2).

(3) Zbog neprekidnosti funkcionala S_1 biće

$$S_1(v) \le C_2\, \|v\|_V \qquad \forall v \in V\,.$$

Dalje je, za $p \in P$

$$\begin{aligned} S_1(v) &= S_1(v) - 0 \\ &= S_1(v) - S_1(p) \\ &\le S_1(v-p) \\ &\le C_2 \cdot \|v-p\|_V \end{aligned}$$

i, na kraju

$$S_1(v) \le C_2 \cdot \inf_{p\in P} \|v-p\|_V \le C_1\cdot C_2 \cdot S_2(v) = C\cdot S_2(v)$$

čime je kompletiran dokaz leme 3 i leme 4. ∎

Napomena: Lema 4 je opštija od prethodnih lema koje se mogu dokazati kao specijalni slučajevi leme 4. Međutim, iako lema dokazuje egzistenciju konstante C koja ne zavisi od funkcije v, sam dokaz nije konstruktivan, tj. ne omogućava nam da procenimo veličinu konstante C. U članku [10] dat je konstruktivan dokaz Bramble–Hilbertove leme za izotropne prostore Soboljeva–Slobodeckog proizvoljnog pozitivnog realnog reda glatkosti. Takođe se na osnovu rezultata iz tog rada može proceniti konstanta C u slučaju prostora tipa W_p^A gde A sadrži isključivo celobrojne multiindekse.

Kao neposrednu posledicu dokazane leme pomenućemo najpre uopštenje Bramble–Hilbertove leme u slučaju necelobrojnog reda glatkosti.

LEMA 3.5. *Neka je* $\eta = \eta(u)$ *ograničen linearan funkcional na* $W_p^s(D)$, $1 \leq p \leq \infty$, $s > 0$. *Neka je* $s = m + \alpha$, $m \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in (0,1]$. *Ako je* $\eta(u) = 0$ *za sve* $u = x^i = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}$, $i_j \geq 0$, $i_1 + \cdots + i_n \leq m$, *tada je*

$$|\eta(u)| \leq C\,|u|_{W_p^s(D)} .$$

Sledeću lemu ćemo često koristiti u dokazima. I dokaz te leme je neposredna posledica leme 4.

LEMA 3.6. *Neka je* $\eta = \eta(u)$ *ograničen linearan funkcional na* W_p^A , *takav da je* $\eta(u) = 0$ *za sve* $u = x^i t^j$, *gde su* i, j *takvi da* $(i,j) \in \widetilde{\Pi}$. *Tada je*

$$|\eta(u)|^p \leq C \cdot \sum_{(\alpha_i,\beta_i) \in A_\partial} |u|^p_{(\alpha_i,\beta_i),p} .$$

Napomena: Iako se termin Bramble-Hilbertova lema, striktno gledano, odnosi na lemu 1, isti naziv koristićemo i za leme 5 i 6 pošto su one njena direktna uopštenja.

LEMA 3.7. *Neka je* $\eta = \eta(u)$ *ograničen linearan (ili neprekidan sublinearan) funkcional na* $W_p^A(Q)$ *i neka* $(\alpha,\beta) \in A$. *Pretpostavimo:*

(1) $|\eta(u)|^p \leq C \cdot (\, |u|^p_{(\alpha,0),p} + |u|^p_{(\alpha,\beta),p} + |u|^p_* \,)$, *gde* $|u|^p_*$ *označava (moguće i praznu) sumu polunormi* $|u|^p_{(\alpha_i,\beta_i),p}$ *takvih da je* $\beta_i \geq \beta$ *i* $(\alpha_i,\beta_i) \in A$,

(2) *Ako je* $\beta = m + \delta$, $m \in \mathbb{Z}$, $\delta \in (0,1]$ *tada* $\eta(u) = 0$ *važi za sve* $u = x^i t^j$, $j = 0, 1, \ldots, m$, $i \in \mathbb{N}_0$.

Tada je

$$|\eta(u)|^p \leq C_1 \cdot (\, |u|^p_{(\alpha,0),p} + |u|^p_* \,) .$$

Dokaz: Ovu lemu ćemo dokazati u četiri koraka.

Korak 1: Ako je $\eta(u) = 0$ za sve $u = x^i t^j$, $j = 1, 2, \ldots, m$, $i \in \mathbb{N}_0$, tada je $\eta(u) = 0$ za sve $u \in P = \{\varphi_0(x) + t \cdot \varphi_1(x) + \cdots + t^m \cdot \varphi_m(x) : \varphi_i(x) \in C^\infty[0,1]\,\}$ kao posledica neprekidnosti η i gustine skupa polinoma u $C^\infty[0,1]$.

Korak 2: Za $v(t) \in C^\infty[0,1]$ uz pomoć Bramble-Hilbertove leme lako je pokazati da je

$$\left| v(t) - \left(v(0) + t v'(0) + \cdots + \frac{t^m}{m!} v^{(m)}(0) \right) \right| \leq C_2(T, m, \beta, p) \cdot |v|_{\beta,p,(0,T)} .$$

Korak 3: Neka je $\alpha = n + \varepsilon$, $n \in \mathbb{Z}$ i pretpostavimo da je $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Slučaj $\varepsilon = 1$ povlači još jednostavniji dokaz. Naka je $u(x,t) \in C^\infty(\overline{Q})$, $Q = (0,1) \times (0,T)$.

Definišimo

$$\begin{aligned} w(x,t) &:= u(x,0) + t\cdot D^{0,1}u(x,0) + \cdots + \frac{t^m}{m!}D^{0,m}u(x,0) \\ &= \varphi_0(x) + t\cdot\varphi_1(x) + \cdots + \frac{t^m}{m!}\varphi_m(x) \quad \in P\,, \\ u_1(x,t) &:= D^{n,0}u(x,t) \quad \in C^\infty(\overline{Q})\,, \\ w_1(x,t) &:= D^{n,0}w(x,t) \quad \in P\,, \\ v(t;x_1,x_2) &:= u(x_1,t) - u(x_2,t) \quad \in C^\infty[0,T] \text{ za fiksirane } x_1, x_2\,, \\ v_1(t;x_1,x_2) &:= D^{n,0}u(x_1,t) - D^{n,0}u(x_2,t)\,. \end{aligned}$$

Biće

$$\begin{aligned} \inf_{p\in P} |u-p|^p_{(\alpha,0),p} &\le |u-w|^p_{(\alpha,0),p} \\ &= |u_1 - w_1|^p_{(\varepsilon,0),p} \\ &= \int_I\int_\Omega\int_\Omega \frac{|\,v_1(t;x_1,x_2) - (\,w_1(x_1,t) - w_1(x_2,t)\,)\,|^p}{|\,x_1-x_2\,|^{1+\varepsilon p}}\,dx_1dx_2dt\,. \end{aligned}$$

Za fiksirane x_1 , x_2 je

$$v_1(0,x_1,x_2) + \cdots + \frac{t^m}{m!}v_1^{(m)}(0,x_1,x_2) = w_1(x_1,t) - w_1(x_2,t)$$

pa, primenjujući korak 2 imamo

$$\begin{aligned} \inf_{p\in P}|u-p|^p_{(\alpha,0),p} &\le \int_I\int_\Omega\int_\Omega \frac{C_2^p\cdot|\,v_1(t;x_1,x_2)\,|^p_{\beta,(0,T)}}{|\,x_1-x_2\,|^{1+\varepsilon p}}\,dx_1dx_2dt \\ &= C_2^p\cdot T\cdot|u|^p_{(\alpha,\beta),p}\,. \end{aligned}$$

Korak 4: Pošto je $|u-p|_{(\alpha,\beta),p} = |u|_{(\alpha,\beta),p}$ i $|u-p|_* = |u|_*$ za $p\in P$, prema koraku 3 će biti

$$\begin{aligned} |\eta(u)|^p &= \inf_{p\in P}|\eta(u)-\eta(p)|^p \\ &\le \inf_{p\in P}|\eta(u-p)|^p \\ &\le C\cdot\inf_{p\in P}\left(|u-p|^p_{(\alpha,0),p} + |u-p|^p_{(\alpha,\beta),p} + |u-p|^p_*\right) \\ &= C\cdot\inf_{p\in P}|u-p|^p_{(\alpha,0),p} + C\cdot\left(|u|^p_{(\alpha,\beta),p} + |u|^p_*\right) \\ &\le C_1\cdot\left(|u|^p_{(\alpha,\beta),p} + |u|^p_*\right)\,. \end{aligned}$$

Zbog činjenice da je skup $C^\infty(\overline{Q})$ svuda gust u prostoru W_p^A , ovim je dokaz leme završen. ■

Napomena: Očigledno je da lema 7 važi i u slučaju zamene uloga promenljivih x i t (i zamene $(\alpha,0)$ sa $(0,\beta)$). Taj rezultat ćemo ubuduće koristiti ali ga nećemo navoditi kao posebnu lemu već ćemo se i u tom slučaju pozivati na lemu 7.

Glava 4. Apriorne ocene za prvi granični zadatak

4.1. Apriorne ocene za parcijalnu jednačinu.

U ovom odeljku ćemo dokazati apriorne ocene za parabolički granični zadatak

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)\,, \\ &u(0,t) = u(1,t) = 0\,, \\ &u(x,0) = u_0(x)\,. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Označimo $\Omega = (0,1)$, $I = (0,T)$, $Q = \Omega \times I$. Ako parcijalnu jednačinu pomnožimo sa $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, zatim integralimo po $Q = (0,1) \times (0,T)$, primenimo parcijalnu integraciju i nejednakost $|ab| \le \varepsilon a^2 + b^2/4\varepsilon$, biće:

$$\int_0^T \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx\,dt = \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 dx\,dt + \int_0^T \int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} f\,dx\,dt\,,$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2_{L_2(\Omega)} dt \;=\; \left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\|^2_{L_2(Q)} + \int_0^T \int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} f\,dx\,dt\,,$$

$$\begin{aligned} \left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\|^2_{L_2(Q)} + \frac{1}{2}\left(\left\|\frac{\partial u(.,T)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(\Omega)} - \left\|\frac{\partial u(.,0)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(\Omega)}\right) &= \int_0^T \int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} f\,dx\,dt \\ &\le \left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\|_{L_2(Q)} \cdot \|f\|_{L_2(Q)} \\ &\le \varepsilon \cdot \left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\|^2_{L_2(Q)} + \frac{1}{4\varepsilon} \cdot \|f\|^2_{L_2(Q)}\,, \end{aligned}$$

$$\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\|^2_{L_2(Q)} \le \frac{1}{2(1-\varepsilon)} \cdot \left\|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{4\varepsilon(1-\varepsilon)} \cdot \|f\|^2_{L_2(Q)}\,.$$

Za $\varepsilon = 1/2$ biće

$$\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\|^2_{L_2(Q)} \le \left\|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \|f\|^2_{L_2(Q)}\,. \tag{4.2}$$

Napomena: Ova ocena je izvedena pod pretpostavkom neprekidnosti, odnosno dovoljne glatkosti rešenja $u(x,t)$. Isto važi i za naredne ocene.

Za parabolički granični zadatak

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial x}\,, \\
&u(0,t) = u(1,t) = 0\,, \\
&u(x,0) = u_0(x)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

apriornu ocenu možemo dobiti množenjem jednačine sa u i nastavljajući kao ranije:

$$\int_0^T \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t}\, u\, dx\, dt = \int_0^T \int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, u\, dx\, dt + \int_0^T \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}\, u\, dx\, dt\,,$$

$$\frac{1}{2}\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}\|u(.,t)\|^2_{L_2(\Omega)}\, dt \;=\; -\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2_{L_2(Q)} - \int_0^T \int_0^1 f\, \frac{\partial u}{\partial x}\, dx\, dt\,,$$

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2_{L_2(Q)} + \frac{1}{2}\Big(\|u(.,T)\|^2_{L_2(\Omega)} - \|u(.,0)\|^2_{L_2(\Omega)}\Big) &= -\int_0^T \int_0^1 f\, \frac{\partial u}{\partial x}\, dx\, dt \\
&\le \left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{L_2(Q)} \cdot \|f\|_{L_2(Q)} \\
&\le \varepsilon \cdot \left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2_{L_2(Q)} + \frac{1}{4\varepsilon} \cdot \|f\|^2_{L_2(Q)}\,,
\end{aligned}$$

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2_{L_2(Q)} \le \frac{1}{2(1-\varepsilon)} \cdot \|u_0\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{4\varepsilon(1-\varepsilon)} \cdot \|f\|^2_{L_2(Q)}\,.$$

Za $\varepsilon = 1/2$ biće

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2_{L_2(Q)} \le \|u_0\|^2_{L_2(\Omega)} + \|f\|^2_{L_2(Q)}\,. \tag{4.4}$$

Na kraju, posmatrajmo granični zadatak

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,, \\
&u(0,t) = u(1,t) = 0\,, \\
&u(x,0) = u_0(x)
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Za potrebe izvođenja odgovarajuće apriorne ocene dokažimo prvo sledeću lemu.

LEMA 4.1. *Neka je* $u(x) \in L_1(0,1)$. *Neka je* $v(x)$ *takva funkcija da je* $v''(x) = u(x)$, *i* $v(0) = v(1) = 0$. *Tada je:*

$$(i) \qquad v(x) = -(1-x)\int_0^x \xi\, u(\xi)\, d\xi - x\int_x^1 (1-\xi)\, u(\xi)\, d\xi$$

$$(ii) \qquad v'(x) = \int_0^x \xi\, u(\xi)\, d\xi - \int_x^1 (1-\xi)\, u(\xi)\, d\xi$$

$$(iii) \qquad v'(0) = -\int_0^1 (1-\xi)\, u(\xi)\, d\xi \qquad v'(1) = \int_0^1 \xi\, u(\xi)\, d\xi$$

$$(iv) \qquad \|v'(x)\|_{L_\infty(\Omega)} \le C_p \cdot \|u\|_{L_p(\Omega)}\,, \qquad \text{ukoliko desna norma postoji,}$$

gde je $C_p = 1$ *za* $p = 1$, $C_p = 1/2$ *za* $p = \infty$, $C_p = \left(\frac{p-1}{2p-1}\right)^{\frac{p-1}{p}}$ *za* $1 < p < \infty$.

DOKAZ: Tvrđenja (i) i (ii) se dokazuju neposrednom proverom, a (iii) i (iv) slede neposredno iz (ii). ■

Pređimo sada na izvođenje apriorne ocene. Neka je $v(x,t)$ takva funkcija da je $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = u$, $v(0,t) = v(1,t) = 0$, čija je egzistencija obezbeđena lemom 1. Pomnožimo jednačinu (4.5) funkcijom v i postupimo kao ranije:

$$\int_0^T\int_0^1 \frac{\partial^3 v}{\partial^2 x \partial t}\, v\, dx\, dt = \int_0^T\int_0^1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\, v\, dx\, dt + \int_0^T\int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\, v\, dx\, dt\,.$$

Ako označimo $f(0,t) = \alpha_0(t)$, $f(1,t) = \alpha_1(t)$, posle dvostruke parcijalne integracije poslednjeg člana biće

$$-\frac{1}{2}\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|^2_{L_2(\Omega)} dt = \|u\|^2_{L_2(Q)} + \int_0^T\int_0^1 f\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\, dx\, dt - \\ - \int_0^T \left(\alpha_1(t)\frac{\partial v}{\partial x}(1,t) - \alpha_0(t)\frac{\partial v}{\partial x}(0,t)\right) dt\,,$$

$$\|u\|^2_{L_2(Q)} + \frac{1}{2}\left(\left\|\frac{\partial v}{\partial x}(.,T)\right\|^2_{L_2(\Omega)} - \left\|\frac{\partial v}{\partial x}(.,0)\right\|^2_{L_2(\Omega)}\right) = \\ = \int_0^T \left(\alpha_1(t)\frac{\partial v}{\partial x}(1,t) - \alpha_0(t)\frac{\partial v}{\partial x}(0,t)\right) dt - \int_0^T\int_0^1 f\, u\, dx\, dt\,,$$

$$\|u\|^2_{L_2(Q)} - \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial v}{\partial x}(.,0)\right\|^2_{L_2(\Omega)} \le$$

$$\le \int_0^T \left(|\alpha_1(t)|\frac{1}{\sqrt{3}}\|u(.,t)\|_{L_2(\Omega)} + |\alpha_0(t)|\frac{1}{\sqrt{3}}\|u(.,t)\|_{L_2(\Omega)}\right)dt +$$

$$+\|f\|_{L_2(Q)}\|u\|_{L_2(Q)} \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\|\alpha_0\|_{L_2(0,T)} + \|\alpha_1\|_{L_2(0,T)}\right)\|u\|_{L_2(Q)} + \|f\|_{L_2(Q)}\|u\|_{L_2(Q)} .$$

Označimo sa $v_0(x)$ takvu funkciju da je $v_0'' = u_0$, $v_0(0) = v_0(1) = 0$. Rešimo sada prvo jednostavniji slučaj kada je $\alpha_0(t) \equiv \alpha_1(t) \equiv 0$. Tada je, koristeći isti način izvođenja kao ranije

$$\|u\|^2_{L_2(Q)} \le \frac{1}{2(1-\varepsilon)}\left\|\frac{\partial v_0}{\partial x}\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{4\varepsilon(1-\varepsilon)}\|f\|^2_{L_2(Q)} ,$$

i, za $\varepsilon = 1/2$:

$$\|u\|^2_{L_2(Q)} \le \left\|\frac{\partial v_0}{\partial x}\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \|f\|^2_{L_2(Q)} , \qquad f(0,t) \equiv f(1,t) \equiv 0 . \tag{4.6}$$

U slučaju kada funkcija $f(x,t)$ nije jednaka nuli na granicama imaćemo:

$$\|u\|^2_{L_2(Q)} - \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial v_0}{\partial x}\right\|^2_{L_2(\Omega)} \le 2\varepsilon_1\|u\|^2_{L_2(Q)} +$$

$$+\frac{1}{12\varepsilon_1}\left(\|\alpha_0\|^2_{L_2(0,T)} + \|\alpha_1\|^2_{L_2(0,T)}\right) + \varepsilon_2\|u\|^2_{L_2(Q)} + \frac{1}{4\varepsilon_2}\|f\|^2_{L_2(Q)} ,$$

$$\|u\|^2_{L_2(Q)} \le \frac{1}{2(1-2\varepsilon_1-\varepsilon_2)}\left\|\frac{\partial v_0}{\partial x}\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{4\varepsilon_2(1-2\varepsilon_1-\varepsilon_2)}\|f\|^2_{L_2(Q)} +$$

$$+\frac{1}{12\varepsilon_1(1-2\varepsilon_1-\varepsilon_2)}\left(\|\alpha_0\|^2_{L_2(0,T)} + \|\alpha_1\|^2_{L_2(0,T)}\right).$$

Za $\varepsilon_1 = 1/6$, $\varepsilon_2 = 1/2$ biće:

$$\|u\|^2_{L_2(Q)} \le 3\left(\left\|\frac{\partial v_0}{\partial x}\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \|f\|^2_{L_2(Q)} + \|\alpha_0\|^2_{L_2(0,T)} + \|\alpha_1\|^2_{L_2(0,T)}\right). \tag{4.7}$$

4.2. Apriorne ocene za diferencijsku shemu, $\sigma = 1$.

Razmotrimo prvo diferencijsku shemu

$$\begin{aligned} &u_{\bar{t}} = u_{x\bar{x}} + \varphi \,, \\ &u(0,t) = u(1,t) = 0 \,, \\ &u(x,0) = u^0(x) \,. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Za izvođenje ocena koristićemo sledeće poznate rezultate [46]:

$$\begin{aligned} (u_{x\bar{x}}, v) &= u_{\bar{x},N} v_N - u_{x,0} v_0 - [u_x, v_x) \,, \\ [u_x, v) &= u_N v_N - u_0 v_0 - [u, v_x) \,. \end{aligned}$$

Takođe ćemo koristiti nejednakost

$$(a-b)\cdot a \ge \varepsilon_1 a^2 - \varepsilon_2 b^2 \,, \qquad \varepsilon_2 > 0, \quad \varepsilon_2(1-\varepsilon_1) \ge \frac{1}{4}$$

koja, za $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1/2$ glasi

$$(a-b)\cdot a \ge \frac{1}{2}(a^2 - b^2) \,.$$

Koristeći ovu nejednakost, za proizvoljne vektore u i v važi

$$(u - v, u) \ge \frac{1}{2}[(u,u) - (v,v)] \,.$$

Pomnožimo jednačinu (4.8) sa $h\tau_j u_{x\bar{x}}$ i sumirajmo po unutrašnjosti mreže:

$$\sum_{j=1}^{M} \tau_j (u_{\bar{t}}, u_{x\bar{x}}) = \|u_{x\bar{x}}\|_{h\tau}^2 + \sum_{j=1}^{M} \tau_j (\varphi, u_{x\bar{x}}) \,,$$

$$-\sum_{j=1}^{M} \tau_j [u_{x\bar{t}}, u_x) = \|u_{x\bar{x}}\|_{h\tau}^2 + \sum_{j=1}^{M} \tau_j (\varphi, u_{x\bar{x}}) \,,$$

$$\begin{aligned} \|u_{x\bar{x}}\|_{h\tau}^2 &= -\sum_{j=1}^{M} [u_x - \check{u}_x, u_x) - \sum_{j=1}^{M} \tau_j (\varphi, u_{x\bar{x}}) \\ &\le -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{M} (\,[u_x, u_x) - [\check{u}_x, \check{u}_x)\,) + \|\varphi\|_{h\tau} \|u_{x\bar{x}}\|_{h\tau} \,, \end{aligned}$$

$$\|u_{x\bar{x}}\|_{h\tau}^2 - \frac{1}{2}[u_x^0, u_x^0) \le \varepsilon \|u_{x\bar{x}}\|_{h\tau}^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|\varphi\|_{h\tau}^2 \,.$$

Uzimajući $\varepsilon = 1/2$ dokazali smo sledeću lemu.

LEMA 4.2. *Za rešenje diferencijske sheme* (4.8) *važi apriorna ocena*

$$\|u_{x\bar{x}}\|_{h\tau}^2 \le \|[u_x^0\|_h^2 + \|\varphi\|_{h\tau}^2 \ .$$

Razmotrimo sada diferencijsku shemu

$$\begin{aligned} & u_{\bar{t}} = u_{x\bar{x}} + \varphi_{x\bar{x}} \,, \\ & u(0,t) = u(1,t) = 0 \,, \\ & u(x,0) = u^0(x) \,. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Množenjem jednačine (4.9) sa $h\tau_j u$ i sumiranjem dobijamo

$$\sum_{j=1}^{M} \tau_j (u_{\bar{t}}, u) = \sum_{j=1}^{M} \tau_j (u_{x\bar{x}}, u) + \sum_{j=1}^{M} \tau_j (\varphi_{x\bar{x}}, u) \,,$$

$$\sum_{j=1}^{M} \tau_j [u_x, u_x) = -\sum_{j=1}^{M} \tau_j (u_{\bar{t}}, u) - \sum_{j=1}^{M} \tau_j [\varphi_x, u_x) \,,$$

$$\begin{aligned} \|[u_x\|_{h\tau}^2 &\le \frac{1}{2}(u^0, u^0) + \|[\varphi_x\|_{h\tau} \, \|[u_x\|_{h\tau} \\ &\le \frac{1}{2}\|u^0\|_h^2 + \varepsilon \, \|[u_x\|_{h\tau}^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \, \|[\varphi_x\|_{h\tau}^2 \end{aligned}$$

Uzimajući $\varepsilon = 1/2$ dokazali smo narednu lemu.

LEMA 4.3. *Za rešenje diferencijske sheme* (4.9) *važi apriorna ocena*

$$\|[u_x\|_{h\tau}^2 \le \|u^0\|_h^2 + \|[\varphi_x\|_{h\tau}^2 \ .$$

Za izvođenje sledeće ocene potrebni su nam neki pomoćni rezultati:

LEMA 4.4. *Neka je* $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = 1$, $x_{i+1} - x_i = h_i$ *i* $u_0 = u_N = 0$. *Ako je* $v_{x\bar{x}} = u$, $v_0 = v_N = 0$. *Tada je*

(*i*) $$v(x_i) = -(1 - x_i) \sum_{k=1}^{i-1} h_k x_k u_k - x_i \sum_{k=i}^{N-1} h_k (1 - x_k) u_k \,,$$

(*ii*) $$v_{\bar{x}}(x_i) = \sum_{k=1}^{i-1} h_k x_k u_k - \sum_{k=i}^{N-1} h_k (1 - x_k) u_k \,,$$

(*iii*) $$v_x(x_0) = -\sum_{k=1}^{N-1} h_k (1 - x_k) u_k \,, \qquad v_{\bar{x}}(x_N) = \sum_{k=1}^{N-1} h_k x_k u_k \,,$$

(*iv*) $$\max_i |v_x(x_i)| \le C_p \cdot \|u\|_{L_{p,h}} \qquad p \in [1, \infty] \,.$$

Dokaz: Dokaz leme se svodi na neposrednu proveru (*i*) i (*ii*) i primenu (*ii*) u dokazu (*iii*) i (*iv*) . ■

LEMA 4.5. *Neka je* $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = 1$, $x_{i+1} - x_i = h_i$ *i* $u_0 = u_N = 0$. *Ako je* $v_{x\bar{x}} = \mu_x$, $v_0 = v_N = 0$. *Tada je*

$$(i) \qquad v(x_i) = \sum_{k=1}^{i} h_{k-1}\mu_k - x_i \sum_{k=1}^{N} h_{k-1}\mu_k ,$$

$$(ii) \qquad v_{\bar{x}}(x_i) = \mu_i - C = \mu_i - \sum_{k=1}^{N} h_{k-1}\mu_k$$

$$(iii) \qquad \max_i |v(x_i)| \le C_p \cdot \|\mu\|_{L_{p,h}} \qquad p \in [1, \infty] .$$

DOKAZ: Dokaz je opet elementaran i sličan dokazu prethodne leme. ■

Radi dobijanja sledeće apriorne ocene označimo $\alpha_0(t) = \varphi(0,t)$, $\alpha_1(t) = \varphi(1,t)$. Neka je v takva funkcija da za svako fiksirano $t = t_j$ važi $v_{x\bar{x}} = u$, $v_0 = v_N = 0$. Tada, množeći jednačinu (4.9) sa $h\tau_j v$ i sumiranjem dobijamo:

$$\sum_{j=1}^{M} \tau_j (v_{x\bar{x}\bar{t}}, v) = \sum_{j=1}^{M} \tau_j (u_{x\bar{x}}, v) + \sum_{j=1}^{M} \tau_j (\varphi_{x\bar{x}}, v) ,$$

$$-\sum_{j=1}^{M} \tau_j [v_{x\bar{t}}, v_x) = \sum_{j=1}^{M} \tau_j (u, u) - \sum_{j=1}^{M} \tau_j [\varphi_x, v_x) ,$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{M} ([v_x, v_x) - [\check{v}_x, \check{v}_x)) \ge \|u\|_{h\tau}^2 + \sum_{j=1}^{M} \tau_j (\varphi, v_{x\bar{x}}) + \sum_{j=1}^{M} \tau_j (\varphi_0 v_{x,0} - \varphi_N v_{\bar{x},N}) ,$$

$$\|u\|_{h\tau}^2 - \frac{1}{2}[v_x^0, v_x^0) \le \|\varphi\|_{h\tau} \|u\|_{h\tau} + \sum_{j=1}^{M} \tau_j C_2(|\alpha_0(t_j)| + |\alpha_1(t_j)|) \cdot \|u^j\|_h ,$$

i, na potpuno isti način kao u slučaju apriorne ocene za parcijalnu jednačinu, dobijamo sledeći rezultat:

LEMA 4.6. *Za rešenje diferencijske sheme (4.9) važi sledeća apriorna ocena*

$$\|u\|_{h\tau}^2 \le C \left(\|[v_x^0\|_h^2 + \|\varphi\|_{h\tau}^2 + \|\alpha_0\|_\tau^2 + \|\alpha_1\|_\tau^2 \right) ,$$

gde je $\alpha_0(t_j) = \varphi_0^j$, $\alpha_1(t_j) = \varphi_N^j$, $v_{x\bar{x}} = u$, $v_0^j = v_N^j = 0$. *Ukoliko je* $\alpha_0(t_j) \equiv \alpha_1(t_j) \equiv 0$, *tada je*

$$\|u\|_{h\tau}^2 \le \|[v_x^0\|_h^2 + \|\varphi\|_{h\tau}^2 .$$

U procesu izvođenja ocene brzine konvergencije diferencijske sheme biće nam potrebna i apriorna ocena za shemu

$$
\begin{aligned}
&u_{\bar t} = u_{x\bar x} + \varphi_{x\bar x} + \psi_{\bar t}\,,\\
&u(0,t) = u(1,t) = 0\,,\\
&u(x,0) = u^0(x)\,.
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

Primetimo prvo da shema ne zavisi od graničnih vrednosti funkcije ψ. Ako dodefinišemo $\psi_0^j = \psi_N^j = 0$, $j = 1,\ldots,M$, apriorne ocene se neposredno dobijaju primenjujući prethodne leme na funkciju $u-\psi$. Malo je komplikovaniji slučaj kada su $\psi_0^j = \beta_0(t_j)$, $\psi_N^j = \beta_1(t_j)$ različiti od nule. U tom slučaju razmotrimo shemu

$$
\begin{aligned}
&u_{\bar t} = u_{x\bar x} + \psi_{\bar t}\,, \\
&u(0,t) = u(1,t) = 0\,, \qquad \qquad \psi_0^j = \beta_0(t_j)\\
&u(x,0) = u^0(x)\,. \qquad \qquad \quad\ \ \psi_N^j = \beta_1(t_j)
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

Predstavimo $\psi = \psi_1 + \psi_2$, gde je $\psi_2 = \beta_0(t_j) + x_i(\beta_1(t_j) - \beta_0(t_j)) = (1 - x_i)\beta_0(t_j) + x_i\beta_1(t_j)$. Tada je $\psi_{2\bar t} = (1-x)\beta_{0\bar t} + x\beta_{1\bar t}$, i $\psi_{2x} = \beta_1(t) - \beta_0(t)$. Predstavimo i rešenje kao zbir $u = u_1 + u_2$ gde su u_1 i u_2 rešenja shema

$$
\begin{aligned}
&u_{1\bar t} = u_{1x\bar x} + \psi_{1\bar t}\,, && u_{2\bar t} = u_{2x\bar x} + \psi_{2\bar t}\,,\\
&u_1(0,t) = u_1(1,t) = 0\,, && u_2(0,t) = u_2(1,t) = 0\,,\\
&u_1(x,0) = u^0(x)\,, && u_2(x,0) = 0\,.
\end{aligned}
$$

Pošto je $\psi_1(0,t) \equiv \psi_1(1,t) \equiv 0$, biće, primenjujući lemu 3 na funkciju $u_1 - \psi_1$:

$$
\begin{aligned}
|[u_{1x}\|^2_{h\tau} &\le C\,(\,\|u^0 - \psi_1^0\|_h^2 + |[\psi_{1x}\|^2_{h\tau}\,)\\
&\le C\,(\,\|u^0 - \psi^0 - (1-x)\beta_0^0 - x\beta_1^0\|_h^2 + \|\beta_0\|_\tau^2 + \|\beta_1\|_\tau^2\,)\,.
\end{aligned}
$$

Biće i

$$
\begin{aligned}
|[u_{2x}\|^2_{h\tau} &\le C\ \|\psi_{2\bar t}\|^2_{h\tau}\\
&\le C\,(\,\|\beta_{0\bar t}\|_\tau^2 + \|\beta_{1\bar t}\|_\tau^2\,)\,.
\end{aligned}
$$

Kombinujući ocene za u_1 i u_2 dobijamo ocenu za funkciju u. Sve ove rezultate sumiraćemo u sledećoj lemi.

LEMA 4.7. *Za rešenje diferencijske sheme (4.10) važe apriorne ocene:*

(i)
$$
\|u_{x\bar x}\|^2_{h\tau} \le |[u_x^0\|_h^2 + \|\varphi_{x\bar x}\|^2_{h\tau} + \|\psi_{\bar t}\|^2_{h\tau}\,,
$$

$$
\|u_{x\bar x}\|^2_{h\tau} + \|u_{\bar t}\|^2_{h\tau} \le C\,(\,|[u_x^0\|_h^2 + \|\varphi_{x\bar x}\|^2_{h\tau} + \|\psi_{\bar t}\|^2_{h\tau}\,)\,.
$$

(ii) *Ukoliko je* $\psi_0^j = \beta_0(t_j)$, $\psi_N^j = \beta_1(t_j)$, *tada je*

$$\|[u_x\|^2_{h\tau} \leq C\,(\,\|u^0 - \psi^0 - (1-x)\beta_0^0 - x\beta_1^0\|^2_h + \|[\psi_x\|^2_{h\tau} + \|[\varphi_x\|^2_{h\tau} \; + \\ + \|\beta_0\|^2_\tau + \|\beta_0\|^2_\tau + \|\beta_{0\bar{t}}\|^2_\tau + \|\beta_{1\bar{t}}\|^2_\tau\,)\,.$$

(iii) *Ukoliko je* $\psi_0^j \equiv \psi_N^j \equiv 0$ *tada je*

$$\|[u_x\|^2_{h\tau} \leq C\,(\,\|u^0 - \psi^0\|^2_h + \|[\psi_x\|^2_{h\tau} + \|[\varphi_x\|^2_{h\tau}\,)\,.$$

(iv) *Ukoliko je* $\psi_0^j \equiv \psi_N^j \equiv 0$ *i* $\varphi_0^j = \alpha_0(t_j)$, $\varphi_N^j = \alpha_1(t_j)$ *tada je*

$$\|u\|^2_{h\tau} \leq C\,(\,\|u^0 - \psi^0\|^2_{\Lambda^{-1}} + \|\varphi\|^2_{h\tau} + \|\alpha_0\|^2_\tau + \|\alpha_1\|^2_\tau + + \|\psi\|^2_{h\tau}\,)\,.$$

4.3. Apriorne ocene za diferencijsku shemu, $\sigma_j \geq \sigma > \frac{1}{2}$.

Razmotrimo diferencijsku shemu sa promenljivim korakom τ_j i promenljivom težinom $\sigma_j \geq \sigma > \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} & u_{\bar{t}} = \sigma_j u_{x\bar{x}} + (1-\sigma_j)\check{u}_{x\bar{x}} + \varphi\,, \qquad \sigma_j \geq \sigma > \tfrac{1}{2}\,, \qquad t = t_j\,, \\ & u(0,t) = u(1,t) = 0\,, \\ & u(x,0) = u^0(x)\,. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Množenjem jednačine sa $h\tau_j u_{x\bar{x}}$ i sumiranjem po mreži dobijamo:

$$\sum_{j=1}^M \tau_j(u_{\bar{t}}, u_{x\bar{x}}) = \sum_{j=1}^M \tau_j\sigma_j(u_{x\bar{x}}, u_{x\bar{x}}) + \sum_{j=1}^M \tau_j(1-\sigma_j)(u_{x\bar{x}}, \check{u}_{x\bar{x}}) + \sum_{j=1}^M \tau_j(\varphi, u_{x\bar{x}})\,,$$

$$\sum_{j=1}^M \tau_j\sigma_j(u_{x\bar{x}}, u_{x\bar{x}}) + \frac{1}{2}(\,\|[u_x^M\|^2_h - \|[u_x^0\|^2_h\,) \leq \\ \leq \sum_{j=1}^M \tau_j(1-\sigma_j)\frac{1}{2}[(u_{x\bar{x}}, u_{x\bar{x}}) + (\check{u}_{x\bar{x}}, \check{u}_{x\bar{x}})] + \|\varphi\|_{h\tau}\,\|u_{x\bar{x}}\|_{h\tau}\,,$$

$$\sigma\,\|u_{x\bar{x}}\|^2_{h\tau} - \frac{1}{2}\|[u_x^0\|^2_h \leq (1-\sigma)\frac{1}{2}2\,\|u_{x\bar{x}}\|^2_{h\tau} + \frac{(1-\sigma_1)\tau_1}{2}\|u^0_{x\bar{x}}\|^2_h + \\ + \varepsilon\,\|u_{x\bar{x}}\|^2_{h\tau} + \frac{1}{4\varepsilon}\,\|\varphi\|^2_{h\tau}\,.$$

Uzimajući $\varepsilon = \sigma - \frac{1}{2}$ dobijamo sledeću ocenu:

LEMA 4.8. *Za diferencijsku shemu (4.12) važi apriorna ocena*

$$\|u_{x\bar{x}}\|_{h\tau}^2 \le \frac{1}{\sigma-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\|[u_x^0\|_h^2 + \frac{(1-\sigma_1)\tau_1}{2}\|u_{x\bar{x}}^0\|_h^2 + \frac{1}{4(\sigma-\frac{1}{2})}\|\varphi\|_{h\tau}^2\right).$$

Razmotrimo sada shemu:

$$\begin{aligned}
&u_{\bar{t}} = \sigma_j u_{x\bar{x}} + (1-\sigma_j)\check{u}_{x\bar{x}} + \varphi_{x\bar{x}}\,, \qquad \sigma_j \ge \sigma > \tfrac{1}{2}\,, \qquad t = t_j\,,\\
&u(0,t) = u(1,t) = 0\,,\\
&u(x,0) = u^0(x)\,.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Pomnožimo (4.13) sa $h\tau_j u$ i sumirajmo po mreži:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{M}\tau_j(u_{\bar{t}},u) &= \sum_{j=1}^{M}\tau_j\sigma_j(u_{x\bar{x}},u) + \sum_{j=1}^{M}\tau_j(1-\sigma_j)(\check{u}_{x\bar{x}},u) + \sum_{j=1}^{M}\tau_j(\varphi_{x\bar{x}},u)\\
&= -\sum_{j=1}^{M}\tau_j\sigma_j[u_x,u_x) - \sum_{j=1}^{M}\tau_j(1-\sigma_j)[\check{u}_x,u_x) - \sum_{j=1}^{M}\tau_j[\varphi_x,u_x)\,.
\end{aligned}$$

Kao i u prethodnoj oceni, zbog $\sigma_j \ge \sigma$, $1-\sigma_j \le 1-\sigma$, biće

$$\begin{aligned}
\sigma\,\|[u_x\|_{h\tau}^2 - \frac{1}{2}\|u^0\|_h^2 \le (1-\sigma)\frac{1}{2}2\,\|[u_x\|_{h\tau}^2 + \frac{(1-\sigma_1)\tau_1}{2}\|[u_x^0\|_h^2 +&\\
+\,\varepsilon\,\|[u_x\|_{h\tau}^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\,\|[\varphi_x\|_{h\tau}^2\,.&
\end{aligned}$$

Za sledeću lemu dovoljno je uzeti $\varepsilon = \sigma - \frac{1}{2}$.

LEMA 4.9. *Za diferencijsku shemu (4.13) važi apriorna ocena*

$$\|[u_x\|_{h\tau}^2 \le \frac{1}{\sigma-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\|u^0\|_h^2 + \frac{(1-\sigma_1)\tau_1}{2}\|[u_x^0\|_h^2 + \frac{1}{4(\sigma-\frac{1}{2})}\|[\varphi_x\|_{h\tau}^2\right).$$

Na kraju, radi dobijanja ocene u $\|\,.\,\|_{h\tau}$ normi, neka je $\varphi_0^j = \alpha_0(t_j)$ i $\varphi_N^j = \alpha_1(t_j)$, i neka je v_i^j takva diskretna funkcija da je $v_0^j \equiv v_N^j \equiv 0$ i $v_{x\bar{x}} = u$. Njena egzistencija i osobine date su u lemi 4.

Pomnožimo jednačinu (4.13) sa $h\tau_j v$ i sumirajmo po mreži:

$$\sum_{j=1}^{M}\tau_j(v_{x\bar{x}\bar{t}},v) = \sum_{j=1}^{M}\tau_j\sigma_j(u_{x\bar{x}},v) + \sum_{j=1}^{M}\tau_j(1-\sigma_j)(\check{u}_{x\bar{x}},v) + \sum_{j=1}^{M}\tau_j(\varphi_{x\bar{x}},v)\,,$$

$$-\sum_{j=1}^{M} \tau_j \sigma_j [v_{x\bar{t}}, v_x) = \sum_{j=1}^{M} \tau_j \sigma_j (u, u) + \sum_{j=1}^{M} \tau_j (1-\sigma_j)(\check{u}, u) + \\ + \sum_{j=1}^{M} \tau_j (\varphi, u) + \sum_{j=1}^{M} \tau_j (\varphi_0 v_{x,0} - \varphi_N v_{\bar{x},N}),$$

$$\sigma \|u\|_{h\tau}^2 - \frac{1}{2} \|[v_x^0\|_h^2 \leq (1-\sigma) \sum_{j=1}^{M} \frac{\tau_j}{2}(u,u) + (1-\sigma) \sum_{j=2}^{M} \frac{\tau_j}{2}(\check{u}, \check{u}) + \\ + \frac{(1-\sigma_1)\tau_1}{2}(u^0, u^0) + \|\varphi\|_{h\tau} \|u\|_{h\tau} + C \sum_{j=1}^{M} \tau_j (\, |\alpha_0^j| + |\alpha_1^j|\,) \|u(.,t_j)\|_h \,.$$

Posle dvostruke primene ε –nejednakosti dobijamo

$$\|u\|_{h\tau}^2 \leq \frac{1}{2\sigma - 1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 C_2} \left(\frac{1}{2} \|[v_x^0\|_h^2 + \frac{(1-\sigma_1)\tau_1}{2} \|u^0\|_h^2 + \frac{1}{4\varepsilon_1} \|\varphi\|_{h\tau}^2 + \right. \\ \left. + \frac{C_2}{4\varepsilon_2} (\, \|\alpha_0\|_\tau^2 + \|\alpha_1\|_\tau^2 \,) \right),$$

gde je $C_2 = \frac{1}{2} + O(h)$, $C_2 < 1$. Uzimajući $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 C_2 = (\sigma - \frac{1}{2})/2$ dobijamo sledeću lemu:

LEMA 4.10. *Za rešenje diferencijske sheme (4.13) važi sledeća apriorna ocena sa konstantom C nezavisnom od u i σ :*

$$\|u\|_{h\tau}^2 \leq \frac{C}{\sigma - \frac{1}{2}} \left(\|[v_x^0\|_h^2 + (1-\sigma_1)\tau_1 \|u^0\|_h^2 + \right. \\ \left. + \frac{C}{\sigma - \frac{1}{2}} (\, \|\varphi\|_{h\tau}^2 + \|\alpha_0\|_\tau^2 + \|\alpha_0\|_\tau^2 \,) \right).$$

Ukoliko je $\alpha_0^j \equiv \alpha_1^j \equiv 0$ *, tada je*

$$\|u\|_{h\tau}^2 \leq \frac{C}{\sigma - \frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \|[v_x^0\|_h^2 + \frac{(1-\sigma_1)\tau_1}{2} \|u^0\|_h^2 + \frac{1}{4(\sigma - \frac{1}{2})} \|\varphi\|_{h\tau}^2 \right).$$

Na potpuno isti način kao kod dokazivanja leme 7 moguće je korišćenjem lema 8, 9 i 10 dobiti apriorne ocene za zadatak:

$$\begin{aligned} & u_{\bar{t}} = \sigma_j u_{x\bar{x}} + (1-\sigma_j)\check{u}_{x\bar{x}} + \varphi_{x\bar{x}} + \psi_{\bar{t}}, \qquad \sigma_j \geq \sigma > \tfrac{1}{2}, \qquad t = t_j, \\ & u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ & u(x,0) = u^0(x). \end{aligned} \tag{4.14}$$

LEMA 4.11. *Za diferencijsku shemu (4.14) važe sledeće apriorne ocene*

(i) *Važi*

$$\|u_{x\bar{x}}\|_{h\tau}^2 + \|u_{\bar{t}}\|_{h\tau}^2 \le \frac{C}{\sigma - \frac{1}{2}}\bigg(\|[u_x^0\|_h^2 + (1-\sigma_1)\tau_1\|u_{x\bar{x}}^0\|_{h\tau}^2 + \\ + \frac{1}{\sigma - \frac{1}{2}}\big(\|\varphi_{x\bar{x}}\|_{h\tau}^2 + \|\psi_{\bar{t}}\|_{h\tau}^2 \big)\bigg).$$

(ii) *Ukoliko je $\psi_0^j \equiv \psi_N^j \equiv 0$ tada je*

$$\|[u_x\|_{h\tau}^2 \le 2\,\|[\psi_x\|_{h\tau}^2 + \frac{1}{\sigma - \frac{1}{2}}\bigg(\|u^0 - \psi^0\|_h^2 + (1-\sigma_1)\tau_1\|[(u^0-\psi^0)_x\|_h^2 + \\ + \frac{1}{\sigma - \frac{1}{2}}\big(\|[\varphi_x\|_{h\tau}^2 + \|[\psi_x\|_{h\tau}^2 + (1-\sigma_1)\tau_1\|[\psi_x^0\|_h^2 \big)\bigg).$$

(iii) *Ukoliko je $\psi_0^j = \beta_0(t_j)$, $\psi_N^j = \beta_1(t_j)$, tada je*

$$\|[u_x\|_{h\tau}^2 \le \frac{C}{\sigma - \frac{1}{2}}\bigg(\|u^0 - \psi^0 + (1-x)\beta_0^0 + x\beta_1^0\|_h^2 + \\ + (1-\sigma_1)\tau_1\|[u_x^0 - \psi_x^0 + \beta_1^0 - \beta_0^0\|_h^2 \bigg) + \\ + \frac{C}{(\sigma - \frac{1}{2})^2}\bigg(\|[\varphi_x\|_{h\tau}^2 + \|[\psi_x\|_{h\tau}^2 + (1-\sigma_1)\tau_1\|[\psi_x^0 + \beta_1^0 + \beta_0^0\|_h^2 \bigg) + \\ + \frac{C}{(\sigma - \frac{1}{2})^2}\bigg(\|\beta_0\|_\tau^2 + \|\beta_1\|_\tau^2 + \|\beta_{0\bar{t}}\|_\tau^2 + \|\beta_{1\bar{t}}\|_\tau^2 \bigg).$$

(iv) *Ukoliko je $\psi_0^j \equiv \psi_N^j \equiv 0$, $\varphi_0^j = \alpha_0(t_j)$, $\varphi_N^j = \alpha_1(t_j)$ tada je*

$$\|u\|_{h\tau}^2 \le \frac{C}{\sigma - \frac{1}{2}}\bigg(\|u^0 - \psi^0\|_{\Lambda^{-1}}^2 + (1-\sigma_1)\tau_1\|u^0 - \psi^0\|_h^2 \bigg) + \\ + \frac{1}{(\sigma - \frac{1}{2})^2}\bigg(\|\varphi\|_{h\tau}^2 + \|\psi\|_{h\tau}^2 + (1-\sigma_1)\tau_1\|\psi^0\|_h^2 + \|\alpha_0\|_\tau^2 + \|\alpha_1\|_\tau^2 \bigg).$$

Napomena: Kao što se iz apriornih ocena vidi, za shemu sa (promenljivim) težinama $\sigma_j \ge \sigma > \frac{1}{2}$ apriorne ocene se razlikuju od apriornih ocena za $\sigma = 1$ u dva glavna momenta. Prvo, uočljiv je faktor $(\sigma - \frac{1}{2})^{-1}$ koji ograničava primenu ocena samo za $\sigma > \frac{1}{2}$, pri čemu odgovarajuća konstanta može biti daleko veća nego u oceni za implicitnu shemu ($\sigma = 1$). Drugo, razlikuje se zavisnost apriorne ocene od početnog uslova i graničnih uslova. Međutim, ako je prvi korak u shemi implicitan ($\sigma_1 = 1$), tada je ta zavisnost ista kao kod implicitne sheme.

4.4. Apriorne ocene za diferencijsku shemu, $\sigma_j \geq \sigma_\varepsilon = \frac{1}{2} - \frac{(1-\varepsilon)h^2}{4\tau}$.

Razmotrimo diferencijsku shemu sa promenljivim korakom τ_j i promenljivom težinom $\sigma_j \geq \sigma_\varepsilon$, gde je $\sigma_\varepsilon = \frac{1}{2} - \frac{(1-\varepsilon)h^2}{4\tau}$, $\varepsilon > 0$, $\tau = \max \tau_j$:

$$\begin{aligned} &u_{\bar t} = \sigma_j u_{x\bar x} + (1-\sigma_j)\check u_{x\bar x} + \varphi\,, \quad \sigma_j \geq \sigma_\varepsilon\,, \quad t = t_j\,, \\ &u(0,t) = u(1,t) = 0\,, \\ &u(x,0) = u^0(x)\,. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Napomenimo da se za $\varepsilon = 1$ dobija težina $\sigma = \frac{1}{2}$ koja daje poznatu simetričnu Crank–Nicolson–ovu shemu koja na glatkim rešenjima ima veću tačnost od shema sa težinom $\sigma > \frac{1}{2}$.

Primetimo prvo da, ukoliko obeležimo $\Lambda u = -u_{x\bar x}$, diferencijsku shemu iz (4.15) možemo zapisati u pogodnijem obliku za dalju analizu [46] :

$$u_{\bar t} + (\sigma_j - 1/2)\tau_j \Lambda u_{\bar t} + 1/2\Lambda(u + \check u) = \varphi \tag{4.16}$$

Množenjem ove jednačine sa $2h\tau_j\Lambda u_{\bar t}$ i sumiranjem po prostornoj promenljivoj dobija se

$$2\tau_j(u_{\bar t}, \Lambda u_{\bar t}) + 2(\sigma_j - 1/2)\tau_j^2(\Lambda u_{\bar t}, \Lambda u_{\bar t}) + (\Lambda(u+\check u), \Lambda(u - \check u)) = 2\tau_j(\varphi, \Lambda u_{\bar t}) \tag{4.17}$$

Poznato je [46] da je za proizvoljno y uz uslov $y_0 = y_N = 0$:

$$\begin{aligned} (\Lambda y, y) &= \|[y_x\|_h^2 \\ (\Lambda(y+\check y), (y - \check y)) &= \|[y_x\|_h^2 - \|[\check y_x\|_h^2 \\ (\Lambda(y+\check y), \Lambda(y - \check y)) &= \|y_{x\bar x}\|_h^2 - \|\check y_{x\bar x}\|_h^2 = \|\Lambda y\|_h^2 - \|\Lambda \check y\|_h^2 \\ \|[y_x\|_h^2 &\leq \frac{4}{h^2}\|y\|_h^2 \\ \|y\|_h^2 + (\sigma_j - 1/2)\tau_j \|[y_x\|_h^2 &\geq \varepsilon \|y\|_h^2 \end{aligned}$$

Na osnovu ovih ocena prva dva sabirka u (4.17) nisu manja od $2\tau_j \|[u_{x\bar t}\|_h^2$ pa je

$$\begin{aligned} 2\tau_j\varepsilon\|[u_{x\bar t}\|_h^2 + \|\Lambda u\|_h^2 - \|\Lambda\check u\|_h^2 &\leq 2\tau_j(\varphi, \Lambda u_{\bar t}) \\ &= 2\tau_j[\varphi_x, u_{x\bar t}) + 2\tau_j\varphi_0 u_{x\bar t,0} - 2\tau_j\varphi_N u_{\bar x\bar t,N} \\ &\leq 2\tau_j\varepsilon\|[u_{\bar x\bar t}\|_h^2 + \frac{\tau_j}{2\varepsilon}\|[\varphi_x\|_h^2 + 2\tau_j\varphi_0 u_{x\bar t,0} - 2\tau_j\varphi_N u_{\bar x\bar t,N}\,, \end{aligned}$$

$$\|\Lambda u\|_h^2 \leq \|\Lambda\check u\|_h^2 + \frac{\tau_j}{2\varepsilon}\|[\varphi_x\|_h^2 + 2\tau_j\varphi_0 u_{x\bar t,0} - 2\tau_j\varphi_N u_{\bar x\bar t,N}\,. \tag{4.18}$$

LEMA 4.12. *Ukoliko je $\varphi_0^j \equiv \varphi_N^j \equiv 0$ i $1 \leq p \leq \infty$, tada za diferencijsku shemu (4.15) važi apriorna ocena*

$$\Big(\sum_{j\geq 1}\tau_j\|\Lambda u\|_h^p\Big)^{1/p} \leq C\big(\|\Lambda u^0\|_h + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\|[\varphi_x\|_{h\tau}\big)$$

sa uobičajenom modifikacijom za $p = \infty$.

DOKAZ: Za $\varphi_0^j \equiv \varphi_N^j \equiv 0$ iz (4.18) se dobija

$$\|\Lambda u\|_h^2 \leq \|\Lambda \check{u}\|_h^2 + \frac{\tau_j}{2\varepsilon} \|[\varphi_x\|_h^2 \ .$$

Sumiranjem po vremenskim slojevima se dobija

$$\begin{aligned} \|\Lambda u^j\|_h^2 &\leq \|\Lambda u^0\|_h^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{k=1}^{j} \tau_k \|[\varphi_x^k\|_h^2 \\ &\leq \|\Lambda u^0\|_h^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|[\varphi_x\|_{h\tau}^2 \ . \end{aligned}$$

Pošto desna strana nejednakosti ne zavisi od indeksa j , iz nje se neposredno dobija iskaz leme. ■

LEMA 4.13. *Neka je $\sigma_1 = 1$ ili $u_0^0 = u_1^0$ i $u_{N-1}^0 = u_N^0$. Ako označimo $\alpha^j = \varphi_1^j$, $\beta^j = \varphi_{N-1}^j$, $j \geq 1$, i ako je $\alpha^0 = \alpha^1$, $\beta^0 = \beta^1$ tada za diferencijsku shemu (4.15) važi apriorna ocena*

$$\|\Lambda u\|_{h\tau} \leq C\big(\|\Lambda u^0\|_h + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \|[\varphi_x\|_{h\tau} + \|\alpha\|_\tau + \|\beta\|_\tau + \|\alpha_{\bar t}\|_\tau + \|\beta_{\bar t}\|_\tau \big) \ .$$

DOKAZ: Pošto u shemi (4.15) učestvuju vrednosti desne strane φ samo u unutrašnjim čvorovima, dodefinišimo prvo $\varphi_i^0 = \varphi_i^1$, $1 \leq i \leq N-1$, $\varphi_0^j = \varphi_1^j$, $\varphi_N^j = \varphi_{N-1}^j$, $j \geq 0$. Uz ove pretpostavke je polazeći od jedne od prethodnih relacija

$$\begin{aligned} 2\tau_j \varepsilon \|[u_{x\bar t}\|_h^2 + \|\Lambda u\|_h^2 - \|\Lambda \check{u}\|_h^2 &\leq 2\tau_j (\varphi, \Lambda u_{\bar t}) \\ &= 2\tau_j [\varphi_x, u_{x\bar t}) + 2\tau_j \alpha u_{x\bar t,0} - 2\tau_j \beta u_{\bar x\bar t,N} \\ &= 2\tau_j [\varphi_x, u_{x\bar t}) + 2\alpha u_{x,0} - 2\check{\alpha} \check{u}_{x,0} - 2\tau_j \alpha_{\bar t} \check{u}_{x,0} \\ &\qquad - 2\beta u_{\bar x,N} + 2\check{\beta} \check{u}_{\bar x,N} + 2\tau_j \beta_{\bar t} \check{u}_{\bar x,N} \ . \end{aligned}$$

Sumiranjem po $j \geq 1$ i primenjujući ε –nejednakost dobijamo

$$\begin{aligned} 2\varepsilon \|[u_{x\bar t}\|_{h\tau}^2 + \|\Lambda u^M\|_h^2 - \|\Lambda u^0\|_h^2 &\leq 2\varepsilon \|[u_{x\bar t}\|_{h\tau}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|[\varphi_x\|_{h\tau}^2 \\ &\quad + 2\alpha^M u_{x,0}^M - 2\alpha^0 u_{x,0}^0 - 2 \sum_{j\geq 1} \tau_j \alpha_{\bar t} \check{u}_{x,0} \\ &\quad - 2\beta^M u_{\bar x,N}^M + 2\beta^0 u_{\bar x,N}^0 + 2 \sum_{j\geq 1} \tau_j \beta_{\bar t} \check{u}_{\bar x,N} \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\Lambda u^M\|_h^2 - \|\Lambda u^0\|_h^2 \leq \frac{1}{2\varepsilon} \|[\varphi_x\|_{h\tau}^2 &+ 2\alpha^M u_{x,0}^M - 2\alpha^0 u_{x,0}^0 - 2 \sum_{j\geq 1} \tau_j \alpha_{\bar t} \check{u}_{x,0} \\ &- 2\beta^M u_{\bar x,N}^M + 2\beta^0 u_{\bar x,N}^0 + 2 \sum_{j\geq 1} \tau_j \beta_{\bar t} \check{u}_{\bar x,N} \ . \end{aligned}$$

Koristeći rezultate leme 4.4 dalje je

$$\begin{aligned}
\|\Lambda u^M\|_h^2 - \|\Lambda u^0\|_h^2 &\leq \frac{1}{2\varepsilon}\,|[\varphi_x\|_{h\tau}^2 + 2C_2\big(|\alpha^M| + |\beta^M|\big)\|\Lambda u^M\|_h \\
&\qquad + 2C_2 \sum_{j\geq 2} \tau_j\big(|\alpha_{\bar t}| + |\beta_{\bar t}|\big)\|\Lambda u^j\|_h \\
&\leq \frac{1}{2\varepsilon}\,|[\varphi_x\|_{h\tau}^2 + 4C_2\varepsilon_1\|\Lambda u^M\|_h^2 + \frac{C_2}{2\varepsilon_1}\big(|\alpha^M|^2 + |\beta^M|^2\big) \\
&\qquad + 4C_2\varepsilon_2\,\|\Lambda u\|_{h\tau}^2 + \frac{C_2}{2\varepsilon_2}\big(\,\|\alpha_{\bar t}\|_\tau^2 + \|\beta_{\bar t}\|_\tau^2\,\big)\,.
\end{aligned}$$

Množenjem nejednakosti sa τ_j i sumiranjem po $j \geq 1$ dobijamo

$$\begin{aligned}
\|\Lambda u\|_{h\tau}^2 - T\|\Lambda u^0\|_h^2 &\leq \frac{T}{2\varepsilon}\,|[\varphi_x\|_{h\tau}^2 + 4C_2(\varepsilon_1 + T\varepsilon_2)\,\|\Lambda u\|_{h\tau}^2 \\
&\qquad + \frac{C_2}{2\varepsilon_1}\big(\,\|\alpha\|_\tau^2 + \|\beta\|_\tau^2\,\big) + \frac{C_2T}{2\varepsilon_2}\big(\,\|\alpha_{\bar t}\|_\tau^2 + \|\beta_{\bar t}\|_\tau^2\,\big)\,.
\end{aligned}$$

Uzimajući dovoljno malo ε_1 i ε_2, recimo za $4C_2(\varepsilon_1 + T\varepsilon_2) = 0.5$ dobijamo

$$\|\Lambda u\|_{h\tau}^2 \leq C\Big(\|\Lambda u^0\|_h^2 + \frac{1}{\varepsilon}\,|[\varphi_x\|_{h\tau}^2 + \|\alpha\|_\tau^2 + \|\beta\|_\tau^2 + \|\alpha_{\bar t}\|_\tau^2 + \|\beta_{\bar t}\|_\tau^2\Big)$$

čime je lema dokazana. ∎

LEMA 4.14. *Za diferencijsku shemu (4.15) važi apriorna ocena*

$$\Big(\sum_{j\geq 1} \tau_j\,|[u_x\|_h^p\Big)^{1/p} \leq C\big(\,|[u_x^0\|_h + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,\|\varphi\|_{h\tau}\,\big)$$

sa uobičajenom modifikacijom za $p = \infty$.

DOKAZ: Množenjem jednačine (4.16) sa $2h\tau_j u_{\bar t}$ i sumiranjem po prostornoj promenljivoj dobijamo

$$2\tau_j\big(\,\|u_{\bar t}\|_h^2 + (\sigma_j - 1/2)\tau_j\,|[u_{x\bar t}\|_h^2\,\big) + |[u_x\|_h^2 = |[\check u_x\|_h^2 + 2\tau_j(\varphi, u_{\bar t})\,,$$

$$2\tau_j\varepsilon\,\|u_{\bar t}\|_h^2 + |[u_x\|_h^2 - |[\check u\|_h^2 \leq 2\tau_j\varepsilon\,\|u_{\bar t}\|_h^2 + \frac{\tau_j}{2\varepsilon}\,\|\varphi\|_h^2\,.$$

Sumirajući po vremenskoj promenljivoj dobijamo

$$\begin{aligned}
|[u_x^j\|_h^2 &\leq |[u_x^0\|_h^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\sum_{k=1}^{j}\tau_k\|\varphi^k\|_h^2 \\
&\leq |[u_x^0\|_h^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\|\varphi\|_{h\tau}^2\,.
\end{aligned}$$

Pošto desna strana nejednakosti ne zavisi od indeksa j iz nje se neposredno dobija iskaz leme. ■

Razmotrimo sada diferencijsku shemu

$$\begin{aligned} & u_{\bar{t}} = \sigma_j u_{x\bar{x}} + (1-\sigma_j)\check{u}_{x\bar{x}} + \varphi_{x\bar{x}}\,, \quad \sigma_j \ge \sigma_\varepsilon\,, \quad t = t_j\,, \\ & u(0,t) = u(1,t) = 0\,, \\ & u(x,0) = u^0(x)\,. \end{aligned} \tag{4.19}$$

LEMA 4.15. *Za diferencijsku shemu (4.19) važi apriorna ocena*

$$\Big(\sum_{j\ge 1} \tau_j\, \|[u\|_h^p\Big)^{1/p} \le C\big(\,\|u^0\|_h + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,\|[\varphi_x\|_{h\tau}\,\big)$$

sa uobičajenom modifikacijom za $p=\infty$.

DOKAZ: Shemu (4.19) možemo zapisati u obliku

$$u_{\bar{t}} + (\sigma_j - 1/2)\tau_j \Lambda u_{\bar{t}} + 1/2\Lambda(u+\check{u}) = \varphi_{x\bar{x}}\,.$$

Ako je $v_{x\bar{x}} = u$, $v_0^j \equiv v_N^j \equiv 0$ tada množenjem jednačine sa $2h\tau_j v_{\bar{t}}$ i sumiranjem po prostornoj promenljivoj dobijamo

$$2\tau_j(v_{x\bar{x}\bar{t}}, v_{\bar{t}}) + 2(\sigma_j - 1/2)\tau_j^2(\Lambda u_{\bar{t}}, v_{\bar{t}}) + (\Lambda(u+\check{u}), v-\check{v}) = 2\tau_j(\varphi_{x\bar{x}}, v_{\bar{t}})\,,$$

$$-2\tau_j\big(\,[v_{x\bar{t}}, v_{x\bar{t}}) + (\sigma_j - 1/2)\tau_j(v_{x\bar{x}\bar{t}}, v_{x\bar{x}\bar{t}})\big) - \|u\|_h^2 + \|\check{u}\|_h^2 = 2\tau_j(\varphi_{x\bar{x}}, v_{\bar{t}})\,,$$

$$\begin{aligned} 2\tau_j\varepsilon\,\|[v_{x\bar{t}}\|_h^2 + \|u\|_h^2 - \|\check{u}\|_h^2 &= -2\tau_j(\varphi_{x\bar{x}}, v_{\bar{t}}) \\ &= 2\tau_j[\varphi_x, v_{x\bar{t}}) \\ &\le 2\tau_j\,\|[\varphi_x\|_h\,\|[v_{x\bar{t}}\|_h \\ &\le 2\tau_j\varepsilon\,\|[v_{x\bar{t}}\|_h^2 + \frac{\tau_j}{2\varepsilon}\,\|[\varphi_x\|_h^2\,, \end{aligned}$$

$$\|u^j\|_h^2 \le \|\check{u}\|_h^2 + \frac{\tau_j}{2\varepsilon}\,\|[\varphi_x\|_h^2\,.$$

Sumirajući po vremenskoj promenljivoj dobijamo

$$\begin{aligned} \|u^j\|_h^2 &\le \|u^0\|_h^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\sum_{k=1}^{j} \tau_k\,\|[\varphi_x\|_h^2 \\ &\le \|u^0\|_h^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\,\|[\varphi_x\|_{h\tau}^2\,. \end{aligned}$$

Pošto desna strana nejednakosti ne zavisi od indeksa j , iz nje direktno sledi iskaz leme. ■

I, na kraju, za shemu

$$\begin{aligned} & u_{\bar{t}} = \sigma_j u_{x\bar{x}} + (1-\sigma_j)\check{u}_{x\bar{x}} + \psi_{\bar{t}}\,, \quad \sigma_j \ge \sigma_\varepsilon\,, \quad t = t_j\,, \\ & u(0,t) = u(1,t) = 0\,, \\ & u(x,0) = u^0(x) \end{aligned} \tag{4.20}$$

važi

LEMA 4.16. *Za diferencijsku shemu (4.20) važi apriorna ocena*

$$\Big(\sum_{j\geq 1} \tau_j \, \|[u\|_h^p\Big)^{1/p} \leq C\big(\|u^0\|_h + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\|\psi_{\bar{t}}\|_{h\tau}\big)$$

sa uobičajenom modifikacijom za $p = \infty$.

DOKAZ: Ako primetimo da je zbog homogenih graničnih uslova $\|u\|_h \leq C\,\|[u_x\|_h$, tada se tvrđenje ove leme dobija primenom leme 15 sa $\varphi \equiv 0$ i leme 14 sa $\varphi = \psi_{\bar{t}}$.
∎

Glava 5. Implicitna shema, $\sigma = 1$

Pošto ćemo u dokazima težiti da maksimalno oslabimo uslove glatkosti rešenja parcijalne jednačine, zasad nećemo pominjati kojim funkcionalnim prostorima pripada rešenje. Takođe, ograničićemo se na ekvidistantnu mrežu po prostoru i vremenu sa koracima h i τ.

5.1. Konvergencija u $\|\,.\,\|_{2,h\tau}$ normi.

Za ocenu brzine konvergencije u ovoj normi pretpostavimo zasad da je rešenje u parcijalne jednačine neprekidno. Kasnije će iz rezultata proizaći da je to prirodna pretpostavka za konvergenciju u ovoj normi.

Pošto je u neprekidna funkcija, jedinstveno su definisane njene vrednosti u svakoj tački, pa je prirodno definisati grešku $z = u - v$, gde je v diskretno rešenje diferencijske sheme

$$\begin{aligned} &v_{\bar t} = v_{x\bar x} + T_{\bar t} T_x^2 f\,,\\ &v(0,t) = \alpha(t)\,,\\ &v(1,t) = \beta(t)\,,\\ &v(x,0) = u^0(x)\,. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Greška z će biti rešenje diferencijske sheme

$$\begin{aligned} &z_{\bar t} = z_{x\bar x} + \varphi_{x\bar x} + \psi_{\bar t}\,,\\ &z(0,t) = z(1,t) = 0\,,\\ &z(x,0) = 0\,, \end{aligned} \tag{5.2}$$

gde je $\varphi_i^j = (T_{\bar t} u - u)_i^j$, $\psi_i^j = (u - T_x^2 u)_i^j$. Prema lemi 4.7 dovoljno je oceniti $\|\varphi_{x\bar x}\|_{h\tau}$ i $\|\psi_{\bar t}\|_{h\tau}$.

Preslikajmo prvo domen $e_{ij} = \{(x,t) : x_{i-1} \le x \le x_{i+1},\ t_{j-1} \le t \le t_j\}$ na $E = \{(x',t') : -1 \le x' \le 1,\ -1 \le t' \le 0\}$ linearnim preslikavanjem $x = x_i + hx'$, $t = t_j + \tau t'$. Tada će biti

$$\varphi_{x\bar x,i}^{\;j} = \frac{1}{h^2}\left(\int_{-1}^{0} [\, u'(-1,s) - 2u'(0,s) + u'(1,s)\,]\, ds - \right.$$
$$\left. - [\, u'(-1,0) - 2u'(0,0) + u'(1,0)\,]\right),$$

$$\psi_{\bar t,i}^{\;j} = \frac{1}{\tau}\left([\, u'(0,0) - u'(0,-1)\,] - \int_{-1}^{1} (1-|s|)[\, u'(s,0) - u'(s,-1)\,]\, ds\right),$$

gde je $u'(x',t') = u(x,t)$. Vrednosti ovih funkcionala na funkcijama oblika $u' = x^i t^j$ date su u prilogu.

Pretpostavimo da $u \in W_p^A$, $A = \{(0,0),(\alpha,0),(0,\beta),(\alpha,\beta)\}$ gde je $1/p < \alpha \le 2$, $1/p < \beta \le 1$. Na osnovu rezultata izvedenih u poglavlju o funkcionalnim prostorima jasno je da $W_p^A \hookrightarrow C$ pa je

$$|\varphi_{x\bar{x},i}^{\ j}| \le \frac{8}{h^2}\,\|u'\|_C \le \frac{C}{h^2}\,\|u'\|_{W_p^A(E)} \ ,$$
$$|\psi_{\bar{t},i}^{\ j}| \le \frac{4}{\tau}\,\|u'\|_C \le \frac{C}{\tau}\,\|u'\|_{W_p^A(E)} \ .$$

Znači, funkcionali $\varphi_{x\bar{x},i}^{\ j}$ i $\psi_{\bar{t},i}^{\ j}$ su ograničeni na prostoru $W_p^A(E)$. Primenjujući prvo lemu 3.6 a potom dva puta lemu 3.7 zaključujemo da je

$$|\varphi_{x\bar{x},i}^{\ j}| \le \frac{C}{h^2}\,|u'|_{(\alpha,\beta),p,E} \ ,$$
$$|\psi_{\bar{t},i}^{\ j}| \le \frac{C}{\tau}\,|u'|_{(\alpha,\beta),p,E} \ .$$

Posle vraćanja originalnih promenljivih dobijamo

$$|\varphi_{x\bar{x},i}^{\ j}| \le \frac{C}{h^2} h^{\alpha-1/p}\tau^{\beta-1/p}\,|u|_{(\alpha,\beta),p,e_{ij}} \ ,$$
$$|\psi_{\bar{t},i}^{\ j}| \le \frac{C}{\tau} h^{\alpha-1/p}\tau^{\beta-1/p}\,|u|_{(\alpha,\beta),p,e_{ij}} \ .$$

Posle sumiranja, koristeći lemu 1.7 sa $q_1 = q_2 = 2$ dobijamo

$$\begin{aligned} \|\varphi_{x\bar{x}}\|_{h\tau} &\le (N_x N_t)^{\max\{1/2-1/p,0\}} C h^{\alpha-1/p-2+1/2}\tau^{\beta-1/p+1/2}\,|u|_{(\alpha,\beta),p,Q} \\ &= C h^{\alpha-2-\max\{0,1/p-1/2\}}\tau^{\beta-\max\{0,1/p-1/2\}}\,|u|_{(\alpha,\beta),p,Q} \ . \end{aligned} \tag{5.3}$$

Na isti način dobijamo i

$$\|\psi_{\bar{t}}\|_{h\tau} \le C h^{\alpha-\max\{0,1/p-1/2\}}\tau^{\beta-1-\max\{0,1/p-1/2\}}\,|u|_{(\alpha,\beta),p,Q} \ . \tag{5.4}$$

U specijalnom slučaju $p = 2$ dobijamo sledeću teoremu:

TEOREMA 5.1. *Neka rešenje jednačine (2.1) pripada prostoru* $H_{\square}^{\alpha_1,\beta_1}(Q) \cap H_{\square}^{\alpha_2,\beta_2}(Q)$, $\alpha_i \in (1/2, 2]$, $\beta_i \in (1/2, 1]$. *Ako je* v *rešenje diferencijske sheme (1) tada je*

$$\|u - v\|_{2,h\tau} \le C h^{\alpha_1-2}\tau^{\beta_1}\,|u|_{(\alpha_1,\beta_1),Q} + C h^{\alpha_2}\tau^{\beta_2-1}\,|u|_{(\alpha_2,\beta_2),Q} \ .$$

DOKAZ: Ova teorema neposredno sledi iz apriorne ocene 4.7 i nejednakosti (3) i (4). ■

U slučaju da je funkcija $f(x,t)$ u jednačini ((2.1)) podjednako glatka po promenljivim x i t, prirodno je rešenje jednačine izučavati u prostorima tipa $W_p^{s,s/2} = W_p^{A_1}$, $A_1 = \{(0,0),(s,0),(0,s/2)\}$. Ograničimo se opet na slučaj $p = 2$, u kojem možemo koristiti brojne rezultate teorije interpolacije funkcionalnih prostora.

TEOREMA 5.2. *Neka* u *, rešenje problema (2.1), pripada anizotropnom prostoru* $H^{s,s/2}(Q)$ *,* $2 < s \leq 4$ *. Ukoliko je* v *rešenje problema (1) tada je*

$$\|u - v\|_{2,h\tau} = O(h^{s-2} + \tau^{(s-2)/2}), \qquad 3 < s \leq 4\,.$$

Ukoliko je $C_1\tau \leq h^r \leq C_2\tau$ *,* $r > 0$ *, i* $\delta > 0$ *proizvoljno mali broj tada je:*

$$\begin{aligned}
\|u - v\|_{2,h\tau} &= O(h^{s-2-(2-r)/2-\delta}), && r < 2, \quad 2 < s \leq 3\,,\\
\|u - v\|_{2,h\tau} &= O(h^{s-2}), && r = 2, \quad 2 < s \leq 3\,,\\
\|u - v\|_{2,h\tau} &= O(h^{s-2}), && r > 2, \quad 2.5 < s \leq 3\,,\\
\|u - v\|_{2,h\tau} &= O(\tau^{(s-2)/2-(r-2)/4r-\delta}), && r > 2, \quad 2 < s \leq 2.5\,.
\end{aligned}$$

DOKAZ: Primetimo prvo da je $H^{s,s/2} \hookrightarrow H_{\square}^{\alpha,\beta}$ ukoliko je $\alpha/s + 2\beta/s \leq 1$, tj. $\alpha + 2\beta \leq s$.

U slučaju $3 < s \leq 4$ možemo uzeti $\alpha_1 = 2$, $\beta_2 = 1$, $\alpha_2 = s - 2 > 1/2$, $\beta_1 = (s-2)/2 > 1/2$ i direktno primeniti teoremu 5.1.

U slučaju $2.5 < s \leq 3$ uzećemo $\alpha_1 = 1/2 + \varepsilon$, $\beta_1 = (s - 1/2 - \varepsilon)/2$, $\alpha_2 = s - 2$, $\beta_2 = 1$, gde je ε proizvoljno mali broj.

U slučaju $2 < s \leq 2.5$ možemo uzeti $\alpha_1 = 1/2 + \varepsilon$, $\beta_1 = (s - 1/2 - \varepsilon_1)/2$, $\beta_2 = 1/2 + \varepsilon_2$, $\alpha_2 = s - 1 - 2\varepsilon_2$, gde su ε_1 i ε_2 proizvoljno mali brojevi.

U poslednja dva slučaja posle primene teoreme 5.1 u oceni preostaju negativni stepeni od h i τ . Za $r = 2$, i $r > 2$, $s > 2.5$ opet direktno dobijamo optimalne ocene (bez δ). U ostalim slučajevima posle smene $\tau \sim h^r$ u oceni ostaje proizvoljno mali pozitivni broj δ koji prouzrokuje suboptimalne ocene. ∎

5.2. Konvergencija u $\|\,.\,\|_{0,h\tau}$ normi.

Pošto ćemo izučavati konvergenciju u $\|\,.\,\|_{0,h\tau}$ normi i za rešenja koja nisu neprekidna, vrednosti funkcije u u pojedinačnim tačkama više nisu korektno definisane. Na primer, u često sretanom slučaju prekidnih, deo po deo glatkih, početnih ili graničnih uslova nije jasno u shemi (5.1) koje vrednosti uzeti u tačkama prekida, ili blizu tih tačaka. Zbog toga, umesto diferencijske sheme (5.1) posmatrajmo shemu

$$\begin{aligned}
v_{1\bar{t}} &= v_{1x\bar{x}} + T_{\bar{t}} T_x^2 f(x,t)\,,\\
v_1(0,t) &= T_{\bar{t}}\alpha(t)\,,\\
v_1(1,t) &= T_{\bar{t}}\beta(t)\,,\\
v_1(x,0) &= T_x^2 u^0(x)\,.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Diferencijska shema (5.5) je korektno definisana čak i u slučaju da $\alpha(t)$, $\beta(t) \in H^s$, $s > -1/2$ i $u_0 \in H^s$, $s > -3/2$. Ovaj poslednji prostor sadrži, na primer, Dirakovu δ funkciju (tj. distribuciju).

Pošto nema smisla upoređivati rešenje sheme (5.5) sa vrednostima rešenja u u slučaju kada u nije neprekidna funkcija, grešku ćemo definisati kao

$$z = \widetilde{T}_{\bar{t}} u - v_1 \,,$$

gde je

$$\widetilde{T}_{\bar{t}} u = T_{\bar{t}} u \,, \quad t > 0 \,, \qquad \widetilde{T}_{\bar{t}} u = T_x^2 u \,, \quad t = 0 \,. \tag{5.6}$$

Na ovaj način su jednoznačno definisane vrednosti $\widetilde{T}_{\bar{t}} u$ na diskretnoj mreži za veoma široku klasu rešenja. Naime, važi

LEMA 5.1. *Ukoliko* $u \in H^{s_1, s_2}$, $s_1, s_2 > 1/2$, *tada* $T_{\bar{t}} u, T_x^2 u \in C$.

DOKAZ: Neka $u \in H^{s_1, s_2}$. Tada se lako može pokazati na osnovu osobina operatora usrednjenja $T_{\bar{t}}$ i T_x^2 da $T_{\bar{t}} u \in H^{A_1}$, $A_1 = \{(0,0),(s_1,0),(s_1,1),(0,s_2+1)\}$ i da $T_x^2 u \in H^{A_2}$, $A_2 = \{(0,0),(s_1+2,0),(0,s_2),(2,s_2)\}$ pa, pošto odgovarajući poligoni sadrže $(1/2,1/2)$ kao unutrašnju tačku, zaključak sledi iz leme 1.3. ■

Za grešku definisanu na ovaj način važiće

$$\begin{aligned} & z_{\bar{t}} = z_{x\bar{x}} + (\widetilde{T}_{\bar{t}} u - T_x^2 u)_{\bar{t}} \,, \\ & z(0,t) = z(1,t) = 0 \,, \\ & z(x,0) = 0 \,. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Označimo $\psi_i^j = \widetilde{T}_{\bar{t}} u - T_x^2 u$. Očigledno je $\psi_i^0 \equiv 0$. Pošto se ψ_0^j i ψ_N^j ne pojavljuju u shemi možemo ih dodefinisati da budu nula. Tada, na osnovu apriornih ocena u lemi 4.7, dovoljno je samo oceniti $\|\psi\|_{h\tau}$.

Preslikajmo domen $e_{ij} = \{(x,t) : x_{i-1} \le x \le x_{x+1},\ t_{j-1} \le t \le t_j\}$ na $E = \{(x',t') : -1 \le x' \le 1,\ -1 \le t \le 0\}$ linearnim preslikavanjem $x = x_i + hx'$, $t = t_j + \tau t'$. Tada je, uz $u(x,t) = u'(x',t')$:

$$\psi_i^j = \int_{-1}^0 u'(0,s)\,ds - \int_{-1}^1 (1-|s|) u'(s,0)\,ds \,.$$

Zbog ulaganja $H^{s_1} \hookrightarrow C$, $s_1 > 1/2$ biće

$$\begin{aligned} \left| \int_{-1}^0 u'(0,s)\,ds \right| & \le \sup_{x'} \left| \int_{-1}^0 u'(x',s)\,ds \right| \\ & \le C \sup_{x'} \|u'(x',.)\|_{L_2(-1,0)} \\ & \le C \|u'\|_{L_2((-1,0);H^{s_1}(-1,1))} \,. \end{aligned}$$

Na isti način je i

$$\left| \int_{-1}^1 (1-|s|) u'(s,0)\,ds \right| \le C_2 \|u'\|_{H^{s_2}((-1,0);L_2(-1,1))} \,,$$

što znači da je funkcional ψ_i^j ograničen na prostoru $H_{\Box}^{s_1,0}(E)\cap H_{\Box}^{0,s_2}(E)=H^{s_1,s_2}(E)$.

Funkcional ψ_i^j se anulira za $u'=1$ i $u'=x$ (vidi prilog). Zbog toga, pod pretpostavkom $s_1\le 2$, $s_2\le 1$, upotrebom Bramble–Hilbertove leme dobijamo

$$\begin{aligned}|\psi_i^j|^2 &\le C\big(\,|u'|^2_{(s_1,0),E}+|u'|^2_{(0,s_2),E}\big)\\ &\le \frac{C}{\sqrt{h\tau}}\big(\,|u|^2_{(s_1,0),e_{ij}}+|u|^2_{(0,s_2),e_{ij}}\big)\,.\end{aligned}$$

Sumiranjem po mreži i primenom leme 1.7 dobijamo na kraju

$$\|\psi\|_{0,h\tau}\le C\big(\,h^{s_1}\,|u|_{(s_1,0),Q}+\tau^{s_2}\,|u|_{(0,s_2),Q}\big)\,.$$

Primenom apriorne ocene iz leme 4.7 neposredno sledi

TEOREMA 5.3. *Neka rešenje u problema (2.1) pripada prostoru $H^{s_1,s_2}(Q)$, gde je $1/2<s_1\le 2$, $1/2<s_2\le 1$. Ako je v_1 rešenje diferencijske sheme (5.5) tada je*

$$\|T_{\bar t}u-v_1\|_{0,h\tau}\le Ch^{s_1}\,|u|_{(s_1,0),Q}+C\tau^{s_2}\,|u|_{(0,s_2),Q}\ .$$

Mada nam ova teorema daje brzinu konvergencije diferencijske sheme (5.5) čak i kada rešenje u nije neprekidno, korisno je znati u slučaju neprekidnog rešenja koja je brzina konvergencije sheme (5.5) ili sheme (5.1) ka rešenju u a ne ka $T_{\bar t}u$.

LEMA 5.2. *Neka $u\in H_{\Box}^{s_1,\beta}\cap H_{\Box}^{\alpha,s_2}$, i neka je $s_1>1/2$, $1/2<s_2\le 1$, $0<\alpha\le s_1$, $0<\beta\le s_2$, a u slučaju $(\alpha-s_1)(\beta-s_2)\ne 0$ i $\alpha+\beta-2\alpha\beta>s_1+s_2-2s_1s_2$. Tada je*

$$\|T_{\bar t}u-u\|_{0,h\tau}\le C\tau^{s_2}\,|u|_{(0,s_2),Q}+Ch^{\alpha}\tau^{s_2}\,|u|_{(\alpha,s_2),Q}+Ch^{s_1}\tau^{\beta}\,|u|_{(s_1,\beta),Q}\ .$$

DOKAZ: Uslov $\alpha+\beta-2\alpha\beta>s_1+s_2-2s_1s_2$ obezbeđuje da $(1/2,1/2)\in\mathring{\Pi}$, tj. da je $H_{\Box}^{s_1,\beta}\cap H_{\Box}^{\alpha,s_2}\hookrightarrow C$. Primetimo (vidi prilog) da se funkcional $\psi=T_{\bar t}u-u$, koji je linearan ograničen funkcional, anulira za $u'=x^i$, $i=0,1,2,\dots$. Koristeći poznatu tehniku kao u teoremi 5.3, dokaz jednostavno sledi posle primene Bramble–Hilbertove leme i leme 3.7. ■

Neposredna posledica leme 5.2 i teoreme 5.3 je

TEOREMA 5.4. *Neka rešenje problema (2.1), $u\in H_{\Box}^{s_1,\beta}\cap H_{\Box}^{\alpha,s_2}$, $1/2<s_1\le 2$, $1/2<s_2\le 1$, $0<\alpha\le s_1$, $0<\beta\le s_2$, a u slučaju $(\alpha-s_1)(\beta-s_2)\ne 0$ i $\alpha+\beta-2\alpha\beta>s_1+s_2-2s_1s_2$. Tada je*

$$\|u-v_1\|_{0,h\tau}=O(h^{s_1}+\tau^{s_2})$$

gde je v_1 diskretno rešenje sheme (5.5).

Na kraju, ispitajmo konvergenciju sheme (5.1) ka neprekidnim rešenjima. Greška $z = u - v$ će zadovoljavati (5.2) sa

$$\begin{aligned} \varphi_i^j &= (T_{\bar t} u - u)_i^j\,, \quad 1 \le i \le N-1\,, \quad j \ge 1\,,\\ \psi_i^j &= (u - T_x^2 u)_i^j\,, \quad 1 \le i \le N-1\,, \quad j \ge 1\,. \end{aligned}$$

Dodefinišimo $\psi_i^0 \equiv 0$, $\psi_0^j = \psi_N^j = 0$. Na osnovu apriorne ocene u lemi 4.7 vidimo da je dovoljno oceniti $\|\varphi\|_{h\tau}$, $\|\psi\|_{h\tau}$, $\|\varphi_0\|_\tau$ i $\|\varphi_N\|_\tau$. Pri tome, ocenu za $\|\varphi\|_{h\tau}$ već imamo u lemi 5.2. Za ocenu norme funkcionala ψ primetimo da se on anulira na funkcijama $u' = t^j$ i $u' = xt^j$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ (vidi prilog). Istom tehnikom kao ranije, uz primenu Bramble–Hilbertove leme i leme 3.7 dokazuje se

LEMA 5.3. *Neka* $u \in H_\square^{s_1,\beta} \cap H_\square^{\alpha,s_2}$, *i neka je* $1/2 < s_1 \le 2$, $s_2 > 1/2$, $0 < \alpha \le s_1$, $0 < \beta \le s_2$, *a u slučaju* $(\alpha - s_1)(\beta - s_2) \ne 0$ *i* $\alpha + \beta - 2\alpha\beta > s_1 + s_2 - 2s_1 s_2$. *Tada je*

$$\left\|u - T_x^2 u\right\|_{0,h\tau} \le C h^{s_1} |u|_{(s_1,0),Q} + C h^{s_1} \tau^\beta |u|_{(s_1,\beta),Q} + C h^\alpha \tau^{s_2} |u|_{(\alpha,s_2),Q}\,.$$

Preostala dva funkcionala deluju samo na granične uslove. Pošto je rešenje zadatka (2.1) neprekidno po pretpostavci, takvi moraju biti i granični uslovi $\alpha(t)$ i $\beta(t)$. Pretpostavimo da $\alpha(t), \beta(t) \in H^{s_3}(0,T)$, gde je $s_3 > 1/2$. Napomenimo da s_3 može biti dovoljno veliko (≥ 1) a da tragovi $u(x_0, t)$ za fiksirane vrednosti x imaju manju glatkost, uzrokovanu osobinama funkcije $f(x,t)$ ili početnog uslova. Tako je, očigledno, u slučaju homogenih graničnih uslova. Jednostavnom primenom Bramble–Hilbertove tehnike za $1/2 < s_3 \le 1$ se pokazuje da je

$$\|(T_{\bar t} u - u)|_{x=0}\|_\tau \le C\tau^{s_3} |\alpha|_{s_3,(0,T)}$$

pošto se odgovarajući funkcional anulira na konstantama. Analogan rezultat važi i za drugi funkcional, odnosno drugi granični uslov.

Uz apriornu ocenu iz leme 4.7, lemu 5.2 i lemu 5.3, ovim smo dokazali sledeću teoremu.

TEOREMA 5.5. *Neka rešenje problema (2.1),* $u \in H_\square^{s_1,\beta} \cap H_\square^{\alpha,s_2}$, *a granični uslovi* $\alpha, \beta \in H^{s_3}(0,T)$. *Neka je dalje,* $1/2 < s_1 \le 2$, $1/2 < s_2 \le 1$, $1/2 < s_3 \le 1$, $0 < \alpha \le s_1$, $0 < \beta \le s_2$, *a u slučaju* $(\alpha - s_1)(\beta - s_2) \ne 0$ *i* $\alpha + \beta - 2\alpha\beta > s_1 + s_2 - 2s_1 s_2$. *Ako je* v *rešenje diferencijske sheme (5.1) tada je*

$$\begin{aligned} \|u - v\|_{0,h\tau} \le{}& C h^{s_1} |u|_{(s_1,0),Q} + C h^{s_1}\tau^\beta |u|_{(s_1,\beta),Q} + C h^\alpha \tau^{s_2} |u|_{(\alpha,s_2),Q} + \\ & C\tau^{s_2} |u|_{(0,s_2),Q} + C\tau^{s_3}\left(|\alpha|_{s_3,(0,T)} + |\alpha|_{s_3,(0,T)}\right). \end{aligned}$$

5.3. Konvergencija u $\|\,.\,\|_{1,h\tau}$ normi.

Razmotrimo prvo slučaj kada je rešenje u problema (2.1) neprekidno, a zadatak rešavamo shemom (5.1). Greška će tada zadovoljavati shemu (5.2) za koju su apriorne ocene date u lemi 4.7. Te ocene se bitno razlikuju u zavisnosti od toga da li je $\psi_i^j = 0$ na granicama ili nije. Granične vrednosti ψ ne učestvuju ni na koji način u shemi (5.1) pa imamo slobodu da ih sami definišemo.

Najpre rešimo jednostavniji deo posla, ocenu člana $\|[\varphi_x\|_{h\tau}$. Kao i ranije, preslikajmo domen $e_{ij} = [x_i, x_{i+1}]\times[t_{j-1}, t_j]$ na skup $E = [0,1]\times[-1,0]$ linearnim preslikavajnem $x = x_i + hx'$, $t = t_j + \tau t'$. Ako je $u'(x',t') \equiv u(x,t)$ biće

$$\varphi_{\bar{x},i}^{\;j} = \frac{1}{h}\left(\int_{-1}^{0}[\,u'(1,s) - u'(0,s)\,]\,ds - [\,u'(1,0) - u'(0,0)\,]\right).$$

LEMA 5.4. *Neka* $u \in H_{\Box}^{s_1,\beta} \cap H_{\Box}^{\alpha,s_2}$, *gde je* $1/2 < s_1$, $1/2 < s_2 \le 1$, $0 < \alpha$, $0 < \beta \le s_2$, *a u slučaju* $(\alpha - s_1)(\beta - s_2) \neq 0$ *i* $\alpha + \beta - 2\alpha\beta > s_1 + s_2 - 2s_1s_2$. *Tada je*

$$\|[\varphi_x\|_{h\tau} \le Ch^{s_1-1}\tau^{\beta}\,|u|_{(s_1,\beta),Q} + Ch^{\alpha-1}\tau^{s_2}\,|u|_{(\alpha,s_2),Q} + Ch^{\alpha'-1}\tau^{s_2}\,|u|_{(0,s_2),Q}\,,$$

gde je $\alpha' = \min\{\alpha, 1\}$.

DOKAZ: Iz uslova leme da je $\alpha+\beta-2\alpha\beta > s_1+s_2-2s_1s_2$ u slučaju $(\alpha-s_1)(\beta-s_2) \neq 0$ obezbeđeno je da $H^A \equiv H_{\Box}^{s_1,\beta} \cap H_{\Box}^{\alpha,s_2} \hookrightarrow C$ pa je zato φ_x ograničen linearan funkcional na tom prostoru. Iz priloga se vidi da se funkcional φ_x anulira za $u = x^i$, $i \ge 0$ i $u = t^j$, $j \ge 0$. Iz napomene 2 u poglavlju o funkcionalnim prostorima proizilazi da, ukoliko je $\alpha > 1$, možemo normi prostora H^A dodati polunormu $|\,.\,|_{(1,s_1)}$ pri čemu je novodobijena norma ekvivalentna polaznoj. Ako na ovako modifikovanu normu primenimo Bramble–Hilbertovu lemu i lemu 3.7 posle sumiranja po mreži ćemo dobiti navedeni rezultat. ∎

Sa funkcionalom ψ_x situacija je komplikovanija jer taj funkcional nema jednoznačnu reprezentaciju u prigraničnim čvorovima. Razmotrimo prvo nesporni slučaj kada je $1 \le i \le N-2$. Tada funkcional ima reprezentaciju

$$\psi_{x,i}^{\;j} = \frac{1}{h}\big(\,[u'(1,0) - u'(0,0)\,] - \int_{-1}^{1}(1-|s|)[\,u'(1+s,0) - u'(s,0)]\,ds\,\big) \tag{5.8}$$

gde je opet $u'(x',t') \equiv u(x,t)$, $x = x_i + hx'$, $t = t_j + \tau t'$, a domen $e_{ij} = (x_{i-1}, x_{i+2}) \times (t_{j-1}, t_j)$ je preslikan na $E = (-1,2)\times(-1,0)$.

Pretpostavimo sada da $u \in H_{\Box}^{s_1,\beta} \cap H_{\Box}^{\alpha,s_2}$, $\alpha \le s_1 \le 3$, $\beta \le s_2$ i da je navedeni prostor neprekidno uložen u C. To nam omogućuje da zaključimo da je ψ_x ograničen linearan funkcional na tom prostoru. Iz dodatka se vidi da se funkcional anulira za $u = x^i t^j$, $i = 0,1,2$, $j \geq 0$. Primenom Bramble–Hilbertove leme i leme 3.7 dobijamo da je za $1 \leq i \leq N-2$:

$$|\psi_{x,i}^{\;j}| \leq Ch^{s_1-1}\,|u'|_{(s_1,0),E} + Ch^{s_1-1}\tau^{\beta}\,|u'|_{(s_1,\beta),E} + Ch^{\alpha-1}\tau^{s_2}\,|u'|_{(\alpha,s_2),E}$$

i, posle vraćanja na originalne promenljive

$$|\psi_{x,i}^{\;j}| \leq \frac{C}{\sqrt{h\tau}}\big(h^{s_1-1}\,|u|_{(s_1,0),e_{ij}} + h^{s_1-1}\tau^{\beta}\,|u|_{(s_1,\beta),e_{ij}} + h^{\alpha-1}\tau^{s_2}\,|u|_{(\alpha,s_2),e_{ij}}\big)\,. \quad (5.9)$$

Situacija sa prigraničnim čvorovima je drugačija. Razmotrimo slučaj $i = 0$ (slučaj $i = N-1$ se rešava na analogan način). Razlikovaćemo dva slučaja: $\psi_0^j = 0$ i $\psi_0^j \neq 0$. U prvom slučaju apriorna ocena 4.7 je jednostavnija, ali je reprezentacija funkcionala drugačija:

$$\psi_{x,0}^{\;j} = \frac{1}{h}\Big(\,u'(1,0) - \int_{-1}^{1}(1-|s|)u'(1+s,0)\,ds\Big)\,.$$

Iz dodatka vidimo da se ovaj funkcional anulira na istim funkcijama kao prethodni, osim za $u' = x^2$. Zbog toga će u ovom slučaju rezultat (5.9) važiti uz uslov $s_1 \leq 2$ (umesto $s_1 \leq 3$).

U slučaju da je za rešenje u zadatka (2.1) stvarno $s_1 \leq 2$ ovo ne predstavlja nikakvo ograničenje i važi ocena (5.9) i u slučaju graničnih čvorova. Razmotrimo slučaj kada je $2 < s_1 \leq 3$. Neka je tada $\beta' > 0$ takav broj da se tačka $(2,\beta')$ nalazi na poligonalnoj liniji određenoj tačkama $(s_1,0)$, (s_1,β) , (α,s_2) , $(0,s_2)$ (tj. na granici $\partial\Pi$ odgovarajuće poligonalne oblasti koja karakteriše funkcionalni prostor $H_{\Box}^{s_1,\beta} \cap H_{\Box}^{\alpha,s_2}$). Očigledno će važiti $H_{\Box}^{s_1,\beta} \cap H_{\Box}^{\alpha,s_2} \hookrightarrow H_{\Box}^{2,\beta'} \cap H_{\Box}^{\alpha',s_2}$ pri čemu je $\alpha' = \min\{\alpha,2\}$.

U graničnim čvorovima će biti (za $i = 1$, $i = N-2$):

$$|\psi_{x,i}^{\;j}| \leq \frac{C}{\sqrt{h\tau}}\big(h\,|u|_{(2,0),e_{ij}} + h\tau^{\beta'}\,|u|_{(2,\beta'),e_{ij}} + h^{\alpha'-1}\tau^{s_2}\,|u|_{(\alpha',s_2),e_{ij}}\big)\,.$$

Sumiranjem ćemo dobiti

$$\begin{aligned}\|[\psi_x\|_{h\tau} \leq{}& Ch^{s_1}\,|u|_{(s_1,0),Q} + Ch^{s_1-1}\tau^{\beta}\,|u|_{(s_1,\beta),Q} + Ch^{\alpha-1}\tau^{s_2}\,|u|_{(\alpha,s_2),Q}\\ &+ Ch\tau^{\beta'}\,|u|_{(2,\beta'),*} + Ch^{\alpha'-1}\tau^{s_2}\,|u|_{(\alpha',s_2),*} + Ch\,|u|_{(2,0),*} \qquad (5.10)\end{aligned}$$

gde smo sa $|u|_{(\alpha,\beta),*} = |u|_{(\alpha,\beta),(0,2h)\times(0,T)} + |u|_{(\alpha,\beta),(1-2h,1)\times(0,T)}$ označili zbir polunormi u prigraničnim oblastima. U slučaju da je $s_1 > 2$ moguće je još jedno poboljšanje ocene. Naime, poznato je da je [42]:

$$\|v\|_{L_2(0,h)} \leq C(h,\varepsilon)\,\|v\|_{H^{\varepsilon}(0,1)}$$

gde je

$$C(h,\varepsilon)=\begin{cases} Ch^{\varepsilon}, & 0\le\varepsilon<1/2\,,\\ Ch^{1/2}|\ln h|, & \varepsilon=1/2\,,\\ Ch^{1/2}, & \varepsilon>1/2\,. \end{cases}$$

Koristećovu prigraničnu ocenu za funkcije jedne nezavisne promenljive, moguće je jednostavno u našem slučaju dokazati da je

$$\begin{aligned} |u|_{(2,0),(0,2h)\times(0,T)} &= \left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\|_{L_2(0,2h)\times(0,T)}\\ &\le C(h,\varepsilon)\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\|_{(\varepsilon,0),Q}\\ &\le C(h,\varepsilon)\Big(|u|_{(2,0),Q}+|u|_{(2+\varepsilon,0),Q}\Big) \end{aligned}$$

ukoliko su navedene norme konačne. U slučaju $s_1>2$ koristićemo ovu nejednakost za $\varepsilon=s_1-2$ i primenićemo je na poslednji član u (5.10). Preostale polunorme u prigraničnim oblastima ocenićemo istim polunormama u celoj oblasti Q, čime smo dokazali sledeću lemu.

LEMA 5.5. *Neka* $u\in H_{\square}^{s_1,\beta}\cap H_{\square}^{\alpha,s_2}$ *, gde je* $\alpha\le s_1\le 3$ *,* $1/2<s_2$ *,* $\beta\le s_2$ *,* $\alpha+\beta-2\alpha\beta>s_1+s_2-2s_1s_2$ *u slučaju* $(\alpha-s_1)(\beta-s_2)\ne 0$ *,* $\alpha'=\min\{\alpha,2\}$ *i* β' *je takvo da* $(2,\beta')$ *leži na poligonalnoj liniji određenoj tačkama* $(s_1,0)$ *,* (s_1,β) *,* (α,s_2) *,* $(0,s_2)$ *. Tada je*

$$\begin{aligned} \|[\psi_x\|_{h\tau} \le Cf(h)\,|u|_{(s_1,0),Q} &+ Ch^{s_1-1}\tau^{\beta}\,|u|_{(s_1,\beta),Q}+Ch^{\alpha-1}\tau^{s_2}\,|u|_{(\alpha,s_2),Q}\\ &+Ch\tau^{\beta'}\,|u|_{(2,\beta'),Q}+Ch^{\alpha'-1}\tau^{s_2}\,|u|_{(\alpha',s_2),Q} \end{aligned}$$

gde je

$$f(h)=\begin{cases} h^{s_1-1}, & s_1<2.5\,,\\ h^{1.5}|\ln h|, & s_1=2.5\,,\\ h^{1.5}, & s_1>2.5\,. \end{cases}$$

Iz ove leme je vidljivo da u slučaju $s_1\ge 2.5$ dolazi do smanjenja brzine konvergencije u odnosu na maksimalno očekivanu. Zbog ovoga je primenom ovih ocena nemoguće dobiti konvergenciju bržu od $O(h^{1.5})$ u $\|\,.\,\|_{1,h\tau}$ normi čak i u slučaju dovoljno glatkog rešenja u.

U nekim specijalnim slučajevima je moguće dokazati i bržu konvergenciju. U tim slučajevima ćemo uzimati u obzir neprekidna produženja $\bar u(x,t)$ rešenja $u(x,t)$ preko granica $x=0$ i $x=1$.

Najpre, razmotrimo neparno produženje $\bar u(x,t)$ funkcije $u(x,t)$ preko bočnih granica. Tada je

$$\begin{aligned} \bar u(-x,t)&=u(0,t)-u(x,t), \qquad 0<x<1\,,\\ \bar u(1+x,t)&=u(1,t)-u(1-x,t), \qquad 0<x<1\,. \end{aligned}$$

Na ovaj način je definisana neprekidna funkcija na oblasti $\overline{Q} = (-1,2) \times (0,T)$. Pretpostavimo da $\bar{u} \in H_{\square}^{s_1,\beta}(\overline{Q}) \cap H_{\square}^{\alpha,s_2}(\overline{Q})$, tj. da neparno produženje ima istu glatkost kao i rešenje u na oblasti Q.

LEMA 5.6. *Ukoliko postoji produženje* $\bar{u} \in H_{\square}^{s_1,\beta} \cap H_{\square}^{\alpha,s_2}$ *rešenja zadatka* u, *tada je, pod uslovima prethodne leme*

$$\|[\psi_x\|_{h\tau} \le Ch^{s_1-1}\, |\bar{u}|_{(s_1,0),Q_h} + Ch^{s_1-1}\tau^{\beta}\, |\bar{u}|_{(s_1,\beta),Q_h} + Ch^{\alpha-1}\tau^{s_2}\, |\bar{u}|_{(\alpha,s_2),Q_h}$$

gde je $Q_h = (-h, 1+h) \times (0,T)$, *a funkcional* ψ_x *ima reprezentaciju* (5.8) *u svim čvorovima, uključujući i granične (sa* $\bar{u}$ *umesto* u *u reprezentaciji).*

DOKAZ: Ocene funkcionala ψ_x su potpuno iste u slučaju unutrašnjih čvorova kao u prethodnoj lemi pošto se tu ove funkcije poklapaju. Za granične čvorove $i = 0$ i $i = N$ se opet koristi ista reprezentacija (5.8) sa produženjem $\bar{u}(x,t)$. ■

Poslednja navedena lema važi u slučaju bilo kakvog proširenja $\bar{u}$. Međutim, ako je to produženje još i neparno, tada je

$$\psi_0^j = u(0,t_j) - (T_x^2\bar{u})(0,t_j) = 0$$

pa možemo koristiti jednostavniju apriornu ocenu. U opštem slučaju neparno produženje $\bar{u}(x,t)$ neće pripadati prostoru $H_{\square}^{s_1,\beta}(Q)$ za $s_1 \ge 2.5$, međutim, u nekim specijalnim slučajevima je to ispunjeno. Jedan od takvih slučajeva je i slučaj homogenih graničnih uslova ($\alpha(t) \equiv \beta(t) \equiv 0$) kada je bilo $f(x,t) = 0$ za $x = 0$, $x = 1$, gde je $f(x,t)$ glatka u blizini granica, bilo $f(x,t) = 0$ u nekoj okolini granica $x = 0$, $x = 1$. U oba slučaja je $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1,t) = 0$ što omogućava dokazivanje veće glatkosti produženja $\bar{u}$.

Drugu mogućnost poboljšanja ocena iz leme 5 za slučaj $s_1 \ge 2.5$ predstavlja korišćenje komplikovanije apriorne ocene 4.7. Pri tome pretpostavljamo da je blizu granice rešenje u problema (2.1) glađe nego unutar oblasti. Pretpostavimo da $u \in W_{p,\square}^{s_1,s_2}$ u oblastima $(0,\delta_x) \times (0,T)$, $(1-\delta_x, 1) \times (0,T)$ gde je δ_x proizvoljno mala fiksirana vrednost. Koristeći standardno (Hestensovo) produženje preko granice dobijamo $\bar{u} \in W_{p,\square}^{s_1,s_2}$ u oblastima $Q_0 = (-\delta_x, \delta_x) \times (0,T)$ i $Q_1 = (1-\delta_x, 1+\delta_x) \times (0,T)$.

LEMA 5.7. *Neka* $u \in W_{p,\square}^{s_1,s_2}(0,\delta_x) \times (0,T)$, $1/2 < s_1 \le 2$, $1/2 < s_2 \le 1$, $2 \le p \le \infty$. *Neka je dalje* $\bar{u}$ *standardno produženje preko granice* $x = 0$ *koje čuva glatkost funkcije* u, *i* $\psi_0^j = (\bar{u} - T_x^2\bar{u})(0,t_j)$. *Tada je*

$$\|(\psi_0^j)_{\bar{t}}\|_{\tau} \le Ch^{s_1-1/p}\tau^{s_2-1}\, |\bar{u}|_{(s_1,s_2),p,Q_0}\,.$$

DOKAZ: Na isti način kao kod izvođenja ocena u $\|\,.\,\|_2$ normi dobićemo da je

$$|\psi_{\bar{t},0}^j| \le Ch^{s_1-1/p}\tau^{s_2-1/p-1}\, |\bar{u}|_{(s_1,s_2),p,e_{0j}}\,.$$

Sumirajući ove članove, uz upotrebu leme 1.6 dobićemo za $p \geq 2$

$$\begin{aligned}\|\psi_{\bar{t}}\|_\tau &= \left(\sum_j \tau|\psi_{\bar{t}}|^2\right)^{1/2} \\ &\leq Ch^{s_1-1/p}\tau^{s_2-1/p-1+1/2}(1/\tau)^{1/2-1/p}\,|\bar{u}|_{(s_1,s_2),p,Q_0} \\ &= Ch^{s_1-1/p}\tau^{s_2-1}\,|\bar{u}|_{(s_1,s_2),p,Q_0}\ ,\end{aligned}$$

čime je lema dokazana. ■

LEMA 5.8. *Pod pretpostavkama leme 7 je*

$$\|\psi_0^j\|_\tau \leq Ch^{s_1-1/p}\,|\bar{u}|_{(s_1,0),p,Q_0} + Ch^{s_1-1/p}\tau^{s_2}\,|\bar{u}|_{(s_1,s_2),p,Q_0}\ .$$

DOKAZ: Uz činjenicu da je ovoga puta

$$|\psi_0^j| \leq Ch^{s_1-1/p}\tau^{-1/p}\,|\bar{u}|_{(s_1,0),p,e_{0j}} + Ch^{s_1-1/p}\tau^{s_2-1/p}\,|\bar{u}|_{(s_1,s_2),p,e_{0j}}$$

dokaz se izvodi na isti način kao u prethodnoj lemi. ■

LEMA 5.9. *Ako* $u \in W_{p,\square}^{s_1,s_2}(Q_0)$, $1/2 < s_1 \leq 2$, $1/2 < s_2 \leq 1$, $2 \leq p \leq \infty$ *tada je*

$$\|(\psi_0^j)_{\bar{t}}\|_\tau^2 + \|\psi_0^j\|_\tau^2 \leq \left(Ch^{s_1-1/p}\tau^{s_2-1}\,\|u\|_{W_{p,\square}^{s_1,s_2}}\right).$$

DOKAZ: Ova lema je posledica prethodne dve leme i činjenice da je

$$\|\bar{u}\|_{W_{p,\square}^{s_1,s_2}(Q_0)} \leq C\|u\|_{W_{p,\square}^{s_1,s_2}(0,\delta_x)\times(0,T)}$$

što je osobina produženja funkcije. ■

U slučaju da rešenje problema (2.1) $u \in W_{\infty,\square}^{s_1,1}$, $1/2 < s_1 \leq 2$ tada pomoću leme 9 zaključujemo da se navedena dva člana ponašaju kao $O(h^{s_1})$. U slučaju da je $s_2 = 2$ (tj. da $\frac{\partial^3 u}{\partial^2 x \partial t} \in L_\infty$ u okolini granica) dobijamo optimalnu brzinu konvergencije $O(h^2)$.

Za kompletiranje ocena konvergencije neophodno je još ispitati i oceniti član

$$\|z^0 - \psi^0 + (1-x)\psi_0^0 + x\psi_N^0\|_h \leq \|z^0 - \psi^0\|_h + \max\{\psi_0^0, \psi_N^0\}$$

gde je $u^0 = u^0(x_i)$ početni uslov, $z = u - v$, $z^0 \equiv 0$, $\psi = u - T_x^2 u$. Pošto je $z^0 - \psi^0 = -u^0 + T_x^2 u^0$, za ocenu će nam biti potrebna sledeća

LEMA 5.10. *Neka* $u^0 \in W_p^s(0,1)$, $1/p < s \leq 2$. *Tada je*

$$\|u^0 - T_x^2 u^0\|_h \leq C h^{s-\max\{0,1/p-1/2\}} |u^0|_{s,p,(0,1)} .$$

DOKAZ: Uslov $s > 1/p$ obezbeđuje da $W_p^s \hookrightarrow C$ pa je prema tome funkcional

$$\eta = u'(0) - \int_{-1}^{1} (1 - |s|) u'(s)\, ds$$

ograničen na $W_p^s(-1,1)$. Funkcional se anulira za $u' = 1$ i $u' = x$. Uvodeći slična preslikavanja kao ranije i koristeći Bramble–Hilbertovu lemu zaključujemo da je

$$|(u^0 - T_x^2 u^0)_i| \leq C h^{s-1/p} |u^0|_{s,p,(x_{i-1},x_{i+1})} .$$

Posle sumiranja, uz korišćenje leme 1.6, neposredno sledi dokaz ove leme. ■

LEMA 5.11. *Ukoliko* $u^0 \in W_\infty^s(0,\delta_x) \cap W_\infty^s(1-\delta_x,1)$ *za* $s > 0$, *i* δ_x *proizvoljno malo, tada je*

$$\max\{\psi_0^0, \psi_N^0\} \leq C h^s \max\{|u^0|_{s,\infty,(0,\delta_x)}, |u^0|_{s,\infty,(1-\delta_x,1)}\} .$$

DOKAZ: Primetimo da funkcional ψ_0^0 deluje na produženje $\bar{u}(x,t)$ funkcije $u(x,t)$. Međutim, pošto funkciju $u(x,t)$ produžavamo preko granice $x = 0$ po pravcima $t = const.$ to će se $\bar{u}(x,0)$ poklopiti sa standardnim produženjem $\bar{u}^0$ istog reda. To drugim rečima znači da funkcional

$$\psi_0^0 = u^0 - T_x^2 u^0$$

zavisi samo od početnog uslova. Primenom leme 10 i osobine neprekidnog produženja je

$$\begin{aligned} |\psi_0^0| &\leq C h^s |\bar{u}^0|_{s,\infty,(-h,h)} \\ &\leq C h^s |\bar{u}^0|_{s,\infty,(-\delta_x,\delta_x)} \\ &\leq C h^s |\bar{u}^0|_{s,\infty,(0,\delta_x)} \end{aligned}$$

Slučaj granice $x = 1$ se rešava na isti način. ■

Primenimo dobijene rezultate u specijalnom slučaju kada $u \in H^{s,s/2}(Q)$.

TEOREMA 5.6. *Neka rešenje zadatka (2.1)* $u \in H^{s,s/2}(Q)$, $1.5 < s \leq 4$. *Ako je* v *diskretno rešenje diferencijske sheme (5.1) tada je*

(i) za $1.5 < s \leq 2$, $C_1 \tau \leq h^r \leq C_2 \tau$ *i* δ *proizvoljno malo*

$$\begin{aligned} \|u - v\|_{1,h\tau} &= O(h^{s-1-(2-r)/2-\delta}), \qquad & r < 2, \\ &= O(h^{s-1}), & r \geq 2, \end{aligned}$$

(ii) za $2 < s \le 2.5$
$$\|u-v\|_{1,h\tau} = O(h^{s-1} + \tau^{(s-1)/2})\,,$$

(iii) za $s = 2.5$
$$\|u-v\|_{1,h\tau} = O(h^{1.5}\ln|h| + \tau^{0.75})\,,$$

(iv) za $2.5 < s \le 3$
$$\|u-v\|_{1,h\tau} = O(h^{1.5} + \tau^{(s-1)/2})\,,$$

(v) za $3 < s \le 4$
$$\|u-v\|_{1,h\tau} = O(h^{s/2} + \tau^{(s-1)/2})\,.$$

DOKAZ: Ukoliko $u \in H^{s,s/2}(Q)$ tada (vidi [37]) $u^0(x) = u(x,0) \in H^{s-1}(0,1)$, i možemo primeniti lemu 10 za $s > 1.5$.

(i) U ovom slučaju je $H^{s,s/2} \hookrightarrow H_{\square}^{s-1-2\varepsilon,1/2+\varepsilon} \cap H_{\square}^{s,0}$ za proizvoljno malo ε. Ako definišemo da je $\psi_0^j \equiv \psi_N^j \equiv 0$ dokaz neposredno sledi primenom leme 4, leme 5, leme 10 i apriorne ocene 4.7.

(ii) U ovom slučaju dokaz je isti kao u (i) uz činjenicu da je sada $H^{s,s/2} \hookrightarrow H_{\square}^{1,(s-1)/2} \cap H_{\square}^{s,0}$.

(iii) i (iv) U ovim slučajevima dokaz isto neposredno sledi primenom leme 4, leme 5 i apriorne ocene 4.7 kao u (ii). Suboptimalna brzina konvergencije je rezultat ograničenja leme 5.

(v) Ovaj rezultat je posledica teorije interpolacije. Naime, važi [41]:
$$\|z\|_{1,h\tau} \le C(\|z\|_{0,h\tau} \cdot \|z\|_{2,h\tau})^{1/2}\,.$$
U našem slučaju, za $s > 3$ je $\|u-v\|_{0,h\tau} = O(h^2 + \tau)$, a prema teoremi 2 je $\|u-v\|_{2,h\tau} = O(h^{s-2} + \tau^{(s-2)/2})$. ∎

NAPOMENA: Svi rezultati teoreme 6 važe i u slučaju da $u \in H_{\square}^{s-1-2\varepsilon,1/2+\varepsilon} \cap H_{\square}^{s,0}$ kada je $s \le 2$, odnosno $u \in H_{\square}^{1,(s-1)/2} \cap H_{\square}^{s,0}$ za $s > 2$.

TEOREMA 5.7. *Neka rešenje zadatka (2.1)* $u \in H^{s,s/2}(Q)$, $2.5 < s \le 3$ *i neka je pored toga za prigranične oblasti* $Q_0 = (0,\delta_x) \times (0,T)$ *i* $Q_1 = (1-\delta_x,1) \times (0,T)$ $u \in W_{\infty,\square}^{s_1,1}(Q_0) \cap W_{\infty,\square}^{s_1,1}(Q_1)$ *gde je* $1/2 < s_1 \le 2$. *Tada je*
$$\|u-v\|_{1,h\tau} = O(h^{s-1} + \tau^{(s-1)/2} + h^{s_1})\,.$$

DOKAZ: Za dokaz ćemo koristiti lemu 9 sa $p = \infty$, $s_2 = 1$. Takođe, iz teorije funkcionalnih prostora imamo da je $u^0(x) \in W_{\infty}^{s_1}(0,\delta_x) \cap W_{\infty}^{s_1}(1-\delta_x,1)$ što omogućava primenu leme 11. Koristeći komplikovaniju apriornu ocenu u lemi

4.7 dobijamo iskaz teoreme posle primene leme 4, leme 6, leme 9, leme 10 i leme 11. ■

Ovim smo praktično završili ispitivanje konvergencije u $\|\,.\,\|_{1,h\tau}$ normi u slučaju neprekidnih rešenja.

U slučaju da rešenje u zadatka (2.1) nije neprekidno, recimo ako $u \in H^{s,s/2}(Q)$ za $s \le 1.5$ (bez dodatnih informacija) greška nije više korektno definisana, a i nije jasno koje vrednosti početnih i graničnih uslova uzeti u okolini eventualnih prekida. Zbog toga ćemo, kao i u slučaju ispitivanja konvergencije u $\|\cdot\|_{0,h\tau}$ normi definisati grešku kao $z = \widetilde{T}_{\bar t} u - v_1$ gde je v_1 diskretno rešenje diferencijske sheme (5.5), a operator usrednjavanja $\widetilde{T}_{\bar t}$ je definisan sa (5.6). Prema lemi 1, greška z je korektno definisana ukoliko $u \in H^{s_1,s_2}(Q)$, $s_1, s_2 > 1/2$. Greška z će zadovoljavati diferencijsku shemu (5.7). Označimo $\psi = \widetilde{T}_{\bar t} u - T_x^2 u$. Očigledno je $\psi_i^0 = 0$, $\psi_i^j = T_{\bar t} u - T_x^2 u$, $1 \le i \le N-1$, $j > 0$. Vrednosti ψ_0^j i ψ_N^j ne učestvuju u shemi (5.5) pa ćemo ih dodefinisati nulom radi upotrebe jednostavnije apriorne ocene.

Posle linearne transformacije $x = x_i + hx'$, $t = t_j + \tau t'$, $u'(x',t') = u(x,t)$, kojom smo domen $e_{ij} = (x_{i-1}, x_{i+2}) \times (t_{j-1}, t_j)$ preslikali na $E = (-1,2) \times (-1,0)$ biće za $1 \le i \le N-2$

$$\psi_{x,i}^{\;j} = \frac{1}{h}\left(\int_{-1}^{0} [u'(1,s) - u'(0,s)]\,ds - \int_{-1}^{1} (1-|s|)[u'(1+s,0) - u'(s,0)]\,ds\right).$$

Iz dodatka se vidi da se ovaj funkcional anulira za $u' = t^j$, $j \ge 0$ i $u' = x$, $u' = x^2$. Ukoliko $u \in H_{\Box}^{s_1,\beta} \cap H_{\Box}^{\alpha,s_2}$, $1/2 < s_1 \le 3$, $1/2 < s_2 \le 1$, $0 \le \alpha \le \min\{1, s_1\}$, $0 \le \beta \le s_2$, poznatom tehnikom dobijamo da je

$$|\psi_{x,i}^{\;j}| \le \frac{C}{\sqrt{h\tau}}\left(h^{s_1-1}\,|u|_{(s_1,0),e_{ij}} + h^{s_1-1}\tau^{\beta}\,|u|_{(s_1,\beta),e_{ij}} + h^{\alpha-1}\tau^{s_2}\,|u|_{(\alpha,s_2),e_{ij}}\right).$$

U prigraničnim čvorovima reprezentacija funkcionala ψ_x je drugačija. Za $i = 0$, na primer, je

$$\psi_{x,0}^{\;j} = \frac{1}{h}\left(\int_{-1}^{0} [u'(1,s)]\,ds - \int_{-1}^{1} (1-|s|)[u'(1+s,0)]\,ds\right).$$

Ovaj funkcional se anulira za $u' = 1$ i $u' = x$ (vidi dodatak), pa je zato za $s_1 \le 2$

$$|\psi_{x,0}^{\;j}| \le \frac{C}{\sqrt{h\tau}}\Big(h^{s_1-1}\,|u|_{(s_1,0),e_{0j}} + h^{s_1-1}\tau^{\beta}\,|u|_{(s_1,\beta),e_{0j}} + \\ + h^{\alpha-1}\tau^{s_2}\,|u|_{(\alpha,s_2),e_{0j}} + h^{-1}\tau^{s_2}\,|u|_{(0,s_2),e_{0j}}\Big).$$

Primenimo dobijene rezultate na slučaj $\alpha = \beta = 0$, $1/2 < s_1 \le 2$, $1/2 < s_2 \le 1$. Tada je

$$\|[\psi_x\|_{h\tau} = O(h^{s_1-1} + h^{-1}\tau^{s_2}).$$

Neposrednom primenom leme 4.7 dobijamo sledeću teoremu.

TEOREMA 5.8. *Neka rešenje zadatka (2.1)* $u \in H^{s,s/2}(Q)$, $1 < s \le 2$. *Ako je* v_1 *rešenje diferencijske sheme* (5.5) *tada je uz uslov* $C_1\tau \le h^r \le C_2\tau$:

$$\begin{aligned} \|T_{\bar{t}}u - v_1\|_{1,h\tau} &= O(h^{sr/2-1}), \qquad && r < 2, \\ &= O(h^{s-1}), && r \ge 2\,. \end{aligned}$$

Ovim smo završili detaljno ispitivanje greške diferencijske sheme sa težinom $\sigma = 1$.

Glava 6. Shema sa težinama $\sigma_j \geq \sigma > 1/2$

Kao i u prethodnoj glavi, ograničićemo se na ekvidistantnu mrežu po prostoru i vremenu, sa koracima h i τ.

Zadatak (2.1) ćemo rešavati diferencijskom shemom

$$
\begin{aligned}
& v_{\bar{t}} = \sigma_j v_{x\bar{x}} + (1-\sigma_j)\check{v}_{x\bar{x}} + T_{\bar{t}} T_x^2 f\,, \quad t = t_j\,, \\
& v(0,t) = \alpha(t)\,, \\
& v(1,t) = \beta(t)\,, \\
& v(x,0) = u^0(x)
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

u slučaju da je rešenje graničnog zadatka (2.1) neprekidno, odnosno

$$
\begin{aligned}
& v_{1\bar{t}} = \sigma_j v_{1x\bar{x}} + (1-\sigma_j)\check{v}_{1x\bar{x}} + T_{\bar{t}} T_x^2 f\,, \\
& v_1(0,t) = T_{\bar{t}}\alpha(t)\,, \\
& v_1(1,t) = T_{\bar{t}}\beta(t)\,, \\
& v_1(x,0) = T_x^2 u^0(x)
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

u slučaju da rešenje nije neprekidno.

Za kompletiranje diferencijske sheme (6.2) potrebno je još definisati vrednosti početnog uslova u krajnjim tačkama. Naime, pošto rešenje nije neprekidno (a često je prekidno baš i samo u tim tačkama) nije očigledno koje vrednosti uzeti u krajnjim tačkama: da li uzeti neko usrednjenje početnog uslova, usrednjenje graničnog uslova ili kombinaciju ova dva.

Ukoliko je prvi korak u shemi implicitan, $\sigma_1 = 1$, izbor početnog uslova u krajevima nije bitan pošto se ne koristi u shemi, a i odgovarajući članovi u apriornoj oceni se anuliraju.

Ukoliko je $\sigma_1 < 1$ tada možemo tražene vrednosti dobiti na sledeći način. Produžimo najpre rešenje u preko granica $x = 0$ i $x = 1$, a zatim uzmimo ${v_1}_0^0 = T_x^2 \bar{u}^0(0)$, ${v_1}_N^0 = T_x^2 \bar{u}^0(1)$, gde je $\bar{u}^0$ dobijeno navedenim produženjem početnog uslova $u^0(x)$.

Sledeća mogućnost je da za vrednosti u uglovima uzmemo usrednjenje graničnih uslova po vremenu: ${v_1}_0^0 = T_t\alpha(0)$, ${v_1}_0{}^0 = T_t\beta(0)$.

Na kraju, ukoliko je rešenje neprekidno u okolini tačaka $(0,0)$ i $(1,0)$, tada za vrednosti u krajnjim tačkama možemo uzeti baš tačne vrednosti rešenja u tim tačkama.

Grešku diferencijskih shema ćemo definisati na isti način kao u prethodnoj glavi: $z = u - v$ za shemu (6.1) i $z_1 = \widetilde{T}_t u - v_1$ za shemu (6.2). Greške će zadovoljavati diferencijske sheme

$$\begin{aligned}
&z_{\bar{t}} = \sigma_j z_{x\bar{x}} + (1-\sigma_j)\check{z}_{x\bar{x}} + (T_{\bar{t}}u - \sigma_j u - (1-\sigma_j)\check{u})_{x\bar{x}} + (u - T_x^2 u)_{\bar{t}}\,,\\
&z(0,t) = z(1,t) = 0\,,\\
&z(x,0) = 0\,,
\end{aligned}\tag{6.3}$$

i

$$\begin{aligned}
&z_{1\bar{t}} = \sigma_j z_{1x\bar{x}} + (1-\sigma_j)\check{z}_{1x\bar{x}} + (T_{\bar{t}}u - \sigma_j u - (1-\sigma_j)\check{u})_{x\bar{x}} + (u - T_x^2 u)_{\bar{t}}\,,\\
&z_1(0,t) = z_1(1,t) = 0\,,\\
&z_1(x,0) = 0\,.
\end{aligned}\tag{6.4}$$

Primetimo prvo da, u slučaju neprekidnog rešenja i diferencijske sheme (6.1), funkcional $\psi = u - T_x^2 u$ je identičan funkcionalu za slučaj implicitne sheme ($\sigma = 1$), a funkcional $\varphi = T_{\bar{t}}u - \sigma_j u - (1-\sigma_j)u$ se anulira na istim polinomima kao funkcional $T_{\bar{t}}u - u$. Zbog toga će zavisnost ocena za grešku od funkcionala ψ i φ biti identična kao u slučaju implicitne sheme. Za ove funkcionale će važiti ocene (5.3), (5.4), lema 5.3, lema 5.4, lema 5.5, lema 5.6, lema 5.7, lema 5.8, lema 5.9, lema 5.11.

6.1. Konvergencija u $\|\,.\,\|_{2,h\tau}$ normi.

Kao što smo već pomenuli, za funkcionale

$$\varphi = T_{\bar{t}}u - \sigma_j u - (1-\sigma_j)\check{u} \tag{6.5}$$

$$\psi = u - T_x^2 u \tag{6.6}$$

važe ocene (5.3) i (5.4). Pošto je $z^0 \equiv 0$, na osnovu apriorne ocene (lema 4.11) važiće

TEOREMA 6.1. *Neka rešenje zadatka (2.1)* $u \in H_{\Box}^{\alpha_1,\beta_1}(Q) \cap H_{\Box}^{\alpha_2,\beta_2}(Q)$, $\alpha_i \in (1/2, 2]$, $\beta_i \in (1/2, 1]$, $i = 1, 2$ *i neka je* v *rešenje diferencijske sheme (6.1). Tada je*

$$\|u - v\|_{2,h\tau} \leq \frac{C}{\sigma - 1/2}\left(h^{\alpha_1 - 2}\tau^{\beta_1}\,|u|_{(\alpha_1,\beta_1),Q} + h^{\alpha_2}\tau^{\beta_2 - 1}\,|u|_{(\alpha_2,\beta_2),Q}\right).$$

TEOREMA 6.2. *Neka rešenje zadatka (2.1)* $u \in H^{s,s/2}(Q)$, $2 < s \leq 4$. *Ako je* v *rešenje diferencijske sheme (6.1) tada je*

(i) Za $3 < s \leq 4$

$$\|u - v\|_{2,h\tau} = O(h^{s-2} + \tau^{(s-2)/2})$$

(ii) Ukoliko je $C_1\tau \le h^r \le C_2\tau$, $r > 0$ *i ako je* $\delta > 0$ *proizvoljno malo*

$$\begin{aligned}
\|u-v\|_{2,h\tau} &= O(h^{s-2-(2-r)/2-\delta}), && r<2\,, \quad 2<s\le 3\,,\\
&= O(h^{s-2}), && r=2\,, \quad 2<s\le 3\,,\\
&= O(h^{s-2}), && r>2\,, \quad 2.5<s\le 3\,,\\
&= O(\tau^{(s-2)/2-(r-2)/4r-\delta}), && r>2\,, \quad 2<s\le 2.5\,.
\end{aligned}$$

NAPOMENA: Dokazi teorema 6.1 i 6.2 su skoro identični dokazima teorema 5.1 i 5.2. Jedina razlika je što se u ocenama pojavljuje faktor $(\sigma-1/2)^{(-1)}$ koji je ograničen pa ne može uticati na brzinu konvergencije, ali za vrednosti σ bliske $1/2$ može dati bitno veću konstantu u ocenama u odnosu na odgovarajuću konstantu u oceni za implicitnu shemu ($\sigma = 1$).

6.2. Konvergencija u $\|\,.\,\|_{0,h\tau}$ normi.

Ka o i u poglavlju 5.2. za implicitnu shemu, počnimo ispitivanjem greške $z_1 = \widetilde{T}_{\bar t}u - v_1$ gde je v_1 rešenje diferencijske sheme (6.2). Greška z_1 će zadovoljavati shemu (6.4). Napomenimo da je u slučaju čvorova koji nisu na početnom vremenskom sloju, $j > 0$, $\widetilde{T}_{\bar t}u = T_{\bar t}u$, a u slučaju početnog vremenskog sloja $\widetilde{T}_{\bar t}u = T_x^2 u$. Definišimo

$$\psi = \widetilde{T}_{\bar t}u - T_x^2 u\,, \tag{6.7}$$

$$\varphi = T_{\bar t}u - \sigma_j \widetilde{T}_t bu - (1-\sigma_j)\widetilde{T}_t b\check{u} = (1-\sigma_j)(T_{\bar t}u - \widetilde{T}_{\bar t}\check{u})\,. \tag{6.8}$$

Za $j = 0$ biće $\psi_i^0 = 0$, a za $j > 0$ $\psi = T_{\bar t}u - T_x^2 u$. Ovaj funkcional je ispitan u poglavlju 5.2. i za njega važi

LEMA 6.1. *Neka je* $u \in H^{s_1,s_2}(Q)$, $1/2 < s_1 \le 2$, $1/2 < s_2 \le 1$. *Tada je*

$$\|T_{\bar t}u - T_x^2 u\|_{0,h\tau} \le C(h^{s_1}\,|u|_{(s_1,0),Q} + \tau^{s_2}\,|u|_{(0,s_2),Q})\,.$$

Pošto je $z_{1,i}^{\;0} = 0$ i $\psi_i^0 = 0$ iz apriorne ocene 4.11 se vidi da je dovoljno oceniti još samo $\|\psi\|_{0,h\tau}$, $\|\alpha_0\|_\tau$ i $\|\alpha_1\|_\tau$.

LEMA 6.2. *Neka je* $u \in H^{s_1,s_2}(Q)$, $1/2 < s_1 \le 2$, $1/2 < s_2 \le 1$. *Tada je*

$$\|(1-\sigma_j)(T_{\bar t}u - \widetilde{T}_{\bar t}\check{u})\|_{0,h\tau} \le C(h^{s_1}\,|u|_{(s_1,0),Q} + \tau^{s_2}\,|u|_{(0,s_2),Q})\,.$$

DOKAZ: Razmotrimo prvo slučaj $j > 1$. Tada je

$$\varphi = (1-\sigma_j)(T_{\bar t}u - \widetilde{T}_{\bar t}\check{u})\,.$$

Linearnom transformacijom $t = t_{j-1} + \tau t'$, $x = x_i + hx'$ oblast $e_{ij} = (x_{i-1}, x_{i+1}) \times (t_{j-2}, t_j)$ se preslikava na $E = (-1,1)\times(-1,1)$. Tada je za $u(x,t) = u'(x',t')$

$$\varphi_i^j = (1-\sigma_j)\left(\int_0^1 u'(0,s)\,ds - \int_{-1}^0 u'(0,s)\,ds\right)\,.$$

Ovaj funkcional je neprekidan (ograničen) linearan funkcional na H^{s_1,s_2} za $s_1, s_2 > 1/2$ i anulira se za $u' = 1$ i $u' = x$ (vidi dodatak). Zbog toga će biti

$$
\begin{aligned}
|\varphi_i^j| &\leq C\left(h^{s_1}\,|u'|_{(s_1,0),E} + \tau^{s_2}\,|u'|_{(0,s_2),E}\right) \\
&\leq \frac{C}{\sqrt{h\tau}}\left(h^{s_1}\,|u|_{(s_1,0),e_{ij}} + \tau^{s_2}\,|u|_{(0,s_2),e_{ij}}\right).
\end{aligned}
\tag{6.9}
$$

Ova ocena važi za $j > 1$. Za $j = 1$ preslikajmo $e_{ij} = (x_{i-1}, x_{i+1}) \times (0, \tau)$ na $E = (-1, 1) \times (0, 1)$ istom linearnom transformacijom. Tada je

$$
\varphi_i^1 = (1 - \sigma_1)\left(\int_0^1 u'(0, s)\, ds - \int_{-1}^1 (1 - |s|)u'(s, 0)\, ds\right).
$$

Pošto je ovaj funkcional takođe neprekidan na H^{s_1,s_2} i anulira se za $u' = 1$ i $u' = x$ kao i u prethodnom slučaju, za njega će važiti ista ocena (6.9). Sumiranjem po tačkama mreže, koristeći (6.9) dobijamo trvrđenje leme. ■

Još nam preostaje da ocenimo $\|\alpha_0\|_\tau$ i $\|\alpha_1\|_\tau$ iz apriorne ocene. Ispitajmo, recimo, α_0. Biće

$$
\alpha_0^j = (1 - \sigma_j)(T_{\bar{t}}\alpha(t_j) - T_{\bar{t}}\alpha(t_j - \tau)), \quad j > 1,
$$

i

$$
\alpha_0^0 = (1 - \sigma_1)(T_t\alpha(0) - v_{1,0}^{\;0}),
$$

gde $v_{1,0}^{\;0}$ zavisi od metoda izabranog za definisanje krajnjih početnih vrednosti. Jasno je da je $\alpha_0^0 = 0$ u slučaju da je $\sigma_1 = 1$ ili da smo izabrali $v_{1,0}^{\;0} = T_t\alpha(0)$.

Funkcional α_0^j je ograničen linearan funkcional na prostoru H^{s_4}, $0 \leq s_4 \leq 1$, i pošto se anulira na konstantama neposredno dobijamo da je

$$
|\alpha_0^j| \leq C(1 - \sigma)\tau^{s_4 - 1/2}\,|\alpha|_{s_4,(t_{j-2},t_j)}, \quad j > 1.
$$

Ostaje da ocenimo α_0^1. Već smo napomenuli da je $\alpha_0^1 = 0$ u slučaju da je $\sigma_1 = 1$ ili $v_{1,0}^{\;0} = T_t\alpha(0)$. Neka je sada

$$
v_{1,0}^{\;0} = \theta T_t\alpha(0) + (1 - \theta)T_x u_0(0), \quad 0 \leq \theta \leq 1
$$

konveksna kombinacija (nekih) usrednjenja graničnog i početnog uslova. Pod uslovom da je rešenje u ograničeno u okolini tačaka $(0, 0)$ i $(1, 0)$ takva će biti i usrednjenja, pa je

$$
\|\alpha_0\|_\tau = \left(\tau(\alpha_0^1)^2 + \sum_{j=2}^{N_t}\tau(\alpha_0^j)^2\right)^{1/2} = O(\tau^{1/2} + \tau^{s_4}).
$$

Ova ocena se dobija za bilo koju graničnu vrednost $v_{1,0}^{\;0}$.

LEMA 6.3. *Neka granični uslovi* $\alpha(t),\beta(t)\in H^{s_4}(0,T)$, $0\le s_4\le 1$. *Tada je*

(i) Za $v_{1,0}^{\;0}=T_t\alpha(0)$, $v_{1,N}^{\;0}=T_t\beta(0)$, *ili ako je* $\sigma_1=1$

$$\|\alpha_0\|_\tau\le C\tau^{s_4}\,|\alpha|_{s_4,(0,T)}\ ,$$

$$\|\alpha_1\|_\tau\le C\tau^{s_4}\,|\beta|_{s_4,(0,T)}\ .$$

(ii) Ukoliko je rešenje u *ograničeno u okolini tačaka* $(0,0)$ *i* $(1,0)$ *a* $v_{1,0}^{\;0}$ *i* $v_{1,N}^{\;0}$ *se nalaze u tim granicama*

$$\|\alpha_0\|_\tau\le C\tau^{s_4}\,|\alpha|_{s_4,(0,T)}+C_1\tau^{1/2}(1-\sigma_1)\,,$$

$$\|\alpha_1\|_\tau\le C\tau^{s_4}\,|\beta|_{s_4,(0,T)}+C_1\tau^{1/2}(1-\sigma_1)\,.$$

DOKAZ: (i) U ovom slučaju je $\alpha_0^0=\alpha_1^0=0$ pa rezultat sledi neposrednim sumiranjem ocena za φ_0^j , $j>1$.

(ii) U ovom slučaju je $T_t\alpha$ i $T_t\beta$ ograničeno pa, pošto su takvi i $v_{1,0}^{\;0}$ i $v_{1,N}^{\;0}$ biće

$$\begin{aligned}\|\alpha_0\|_\tau^2&=\tau(\alpha_0^1)^2+\sum_{j=2}^{N_t}\tau(\alpha_0^j)^2\\&\le\tau C_1+C(1-\sigma)^2\tau^{2s_4}\,|\alpha|_{s_4,(0,T)}^2\end{aligned}$$

odakle sledi trvrđenje leme. ■

NAPOMENA: Ukoliko $u\in H^{s,s/2}(Q)$ tada je obezbeđeno [37] da $\alpha(t),\beta(t)\in H^{s/2-1/4}(0,T)$ kao tragovi rešenja $u(x,t)$ za $x=0$ i $x=1$. Međutim, često su funkcije $\alpha(t)$ i $\beta(t)$ glađe, što dovodi do boljih rezultata za konvergenciju diferencijske sheme.

Dosad dobijene rezultate sumiraćemo u sledeću teoremu.

TEOREMA 6.3. *Neka rešenje zadatka (2.1)* $u\in H^{s_1,s_2}(Q)$, $1/2<s_1\le 2$, $1/2<s_2\le 1$, $\alpha(t),\beta(t)\in H^{s_4}(0,T)$, $0\le s_4\le 1$. *Tada, ako je* v_1 *diskretno rešenje sheme (6.2)*

(i) U slućaju da je $\sigma_1=1$, *ili da je* $v_{1,0}^{\;0}=T_t\alpha(0)$, $v_{1,N}^{\;0}=T_t\beta(0)$ *tada je*

$$\begin{aligned}\|\widetilde{T}_{\bar t}u-v_1\|_{0,h\tau}\le\frac{C}{\sigma-1/2}\Big(&h^{s_1}\,|u|_{(s_1,0),Q}+\tau^{s_2}\,|u|_{(0,s_2),Q}+\\&+\tau^{s_4}\big(\,|\alpha|_{s_4,(0,T)}+|\beta|_{s_4,(0,T)}\big)\Big)\ .\end{aligned}$$

(ii) Ukoliko je rešenje u *ograničeno u okolini tačaka* $(0,0)$ *i* $(1,0)$ *konstantom* C_1 *tada je u slučaju proizvoljnih* $|v_{1,0}^{\;0}| \le C_1$ *i* $|v_{1,N}^{\;0}| \le C_1$

$$\|\widetilde{T}_{\bar t} u - v_1\|_{0,h\tau} \le \frac{C}{\sigma - 1/2} \Big(h^{s_1} |u|_{(s_1,0),Q} + \tau^{s_2} |u|_{(0,s_2),Q} + \\ + \tau^{s_4} \big(|\alpha|_{s_4,(0,T)} + |\beta|_{s_4,(0,T)} \big) + C_1 \tau^{1/2} \Big) \,.$$

Ispitajmo sada ponašanje greške u $\|\,.\,\|_{0,h\tau}$ normi za slučaj neprekidnog rešenja. Pored diferencijske sheme (6.1) koristićemo i shemu

$$\begin{aligned} &v_{\bar t} = \sigma_j v_{x\bar x} + (1-\sigma_j)\check v_{x\bar x} + T_{\bar t} T_x^2 f \,, \\ &v(0,t_j) = \alpha(t_j)\,, \quad v(1,t_j) = \beta(t_j)\,, \\ &v(x,0) = T_x^2 u^0(x)\,, \quad v_0^0 = u^0(0)\,, \quad v_N^0 = u^0(1)\,. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Kao što se vidi, sheme (6.1) i (6.10) razlikuju se jedino u izboru početnog uslova.

Ako je v rešenje diferencijske sheme (6.10) tada će greška $z = u - v$ zadovoljavati shemu

$$\begin{aligned} &z_{\bar t} = \sigma_j z_{x\bar x} + (1-\sigma_j)\check z_{x\bar x} + (T_{\bar t} u - \sigma_j u - (1-\sigma_j)\check u)_{x\bar x} + (u - T_x^2 u)_{\bar t}\,, \\ &z(0,t_j) = z(1,t_j) = 0\,, \\ &z(x,0) = u_0(x) - T_x^2 u^0(x)\,, \quad z_0^0 = z_N^0 = 0\,. \end{aligned}$$

Ako označimo $\varphi = T_{\bar t} u - \sigma_j u - (1-\sigma_j)\check u$ i $\psi = u - T_x^2 u$, vidimo da je $u^0 - \psi^0 \equiv 0$ što uzrokuje da otpadaju prva dva člana iz apriorne ocene 4.11. Ocena norme funkcionala ψ data je u lemi 5.3.

LEMA 6.4. *Neka* $u \in H_{\Box}^{s_1,\beta}(Q) \cap H_{\Box}^{\alpha,s_2}(Q)$ *i neka je* $1/2 < s_1$, $1/2 < s_2 \le 1$, $0 \le \alpha \le s_1$, $0 \le \beta \le s_2$, *i* $\alpha + \beta - 2\alpha\beta > s_1 + s_2 - 2 s_1 s_2$ *u slučaju da je* $(s_1 - \alpha)(s_2 - \beta) \ne 0$. *Tada je*

$$\|T_{\bar t} u - \sigma_j u - (1-\sigma_j)\check u\|_{0,h\tau} \le C h^{s_1} \tau^{\beta} |u|_{(s_1,\beta),Q} + \\ + C h^{\alpha} \tau^{s_2} |u|_{(\alpha,s_2),Q} + C \tau^{s_2} |u|_{(0,s_2),Q} \,.$$

DOKAZ: Uslovi leme obezbeđuju da $H_{\Box}^{s_1,\beta}(Q) \cap H_{\Box}^{\alpha,s_2}(Q) \hookrightarrow C(Q)$ pa je zato

$$\varphi_i^j = \int_{-1}^{0} u'(0,s)\,ds - \sigma u'(0,0) - (1-\sigma) u'(0,-1)$$

ograničen linearan funkcional na $H_{\Box}^{s_1,\beta}(Q) \cap H_{\Box}^{\alpha,s_2}(Q)$. Ovde smo, kao i ranije, koristili transformaciju $x = x_i + h x'$, $t = t_j + \tau t'$, $u'(x',t') = u(x,t)$ kojom se $e_{ij} = (x_{i-1}, x_{i+1}) \times (t_{j-1}, t_j)$ preslikava na $E = (-1,1) \times (-1,0)$. Iz dodatka se vidi da se ovaj funkcional anulira na svim funkcijama oblika $u' = x^i$, $i \ge 0$. Zbog ovoga je primenom Bramble–Hilbertove leme i leme 3.7

$$|\varphi_i^j| \le C \left(|u'|_{(s_1,\beta),E} + |u'|_{(\alpha,s_2),E} + |u'|_{(0,s_2),E} \right) \,.$$

Odavde se, vraćanjem originalnih koordinata i sumiranjem po mreži dobija navedeni rezultat. ∎

LEMA 6.5. *Neka* $\alpha(t) \in H^{s_4}(0,T)$, $1/2 < s_4 \le 1$. *Tada je*

$$\|T_{\bar{t}}\alpha - \sigma_j \alpha(t_j) - (1-\sigma_j)\alpha(t_{j-1})\|_{0,\tau} \le C\tau^{s_4} \left|\alpha\right|_{s_4,(0,T)} .$$

DOKAZ: Kao funkcija jedne promenljive, $\alpha(t)$ je neprekidna zbog utapanja $H^{s_4} \hookrightarrow C$, $s_4 > 1/2$. Zato će funkcional

$$\varphi_j = \int_{-1}^{0} \alpha'(s)\,ds - \sigma\alpha'(0) - (1-\sigma)\alpha'(-1)$$

(sa uobičajeno transformisanom funkcijom α') biti ograničen linearan funkcional na $H^{s_4}(-1,0)$. Pošto se taj funkcional anulira na konstantama, rezultat leme se dobija neposrednom primenom Bramble–Hilbertove leme. ∎

LEMA 6.6. *Neka* $u^0(x) \in H^{s_3}(0,1)$, $1/2 < s_3 \le 2$. *Tada je*

$$\|u^0 - T_x^2 u^0\|_h \le Ch^{s_3} \left|u^0\right|_{s_3,(0,1)} ,$$

$$\|u^0 - T_x^2 u^0\|_{\Lambda^{-1}} \le Ch^{s_3} \left|u^0\right|_{s_3,(0,1)} .$$

DOKAZ: Prvi iskaz leme se dobija primenom Bramble–Hilbertove leme pošto se $u^0 - T_x^2 u^0$ anulira na konstantama i linearnim funkcijama, i $H^{s_3} \hookrightarrow C$ za $s_3 > 1/2$. Pošto je [46]

$$\|w\|_{\Lambda^{-1}} \le C\,\|w\|_h .$$

drugi iskaz leme sledi iz prvog. ∎

LEMA 6.7. *Neka* $u^0(x) \in W_1^{s_3}(0,1)$, $1 < s_3 \le 2$. *Tada je*

$$\|u^0 - T_x^2 u^0\|_{\Lambda^{-1}} \le Ch^{s_3} \left|u^0\right|_{s_3,1,(0,1)} .$$

DOKAZ: Koristeći standardnu Bramble–Hilbertovu tehniku lako se dobija da je

$$|(u^0 - T_x^2 u^0)(x_i)| \le Ch^{s_3-1} \left|u^0\right|_{s_3,1,(x_{i-1},x_{i+1})} .$$

Naka je z data diskretna funkcija i $-v_{x\bar{x}} = z$, $v_0 = v_N = 0$. Tada je

$$\|z\|^2_{\Lambda^{-1}} = (\Lambda^{-1}z, z) = (v, \Lambda v) = \|[v_{\bar{x}}\|^2_h$$

a prema lemi 4.4 je

$$v_{\bar{x},i} = \sum_{k=0}^{i-1} h x_k z_k - \sum_{k=i}^{N} h(1-x_k) z_k .$$

Uzimajući $z = u^0 - T_x^2 u^0$ biće

$$\begin{aligned}|v_{\bar{x},i}| &\leq \sum_{k=0}^{N} h|z_k| \\ &\leq \sum_{k=0}^{N} C h^{s_3} \left|u^0\right|_{s_3,1,(x_{i-1},x_{i+1})} \\ &\leq C h^{s_3} \left|u^0\right|_{s_3,1,(0,1)} .\end{aligned}$$

Pošto desna strana nejednakosti ne zavisi od indeksa i, iz nje direktno sledi iskaz leme. ∎

Napomena: Lema 6.7 omogućava da se u nekim konkretnim slučajevima početnog uslova u^0 poboljšaju ocene brzine konvergencije. Naime, čest je slučaj da $u^0 \in W_1^{s_3}(0,1)$ ali i da $u^0 \notin H^{s_3}(0,1)$. Za ilustrativan primer uzmimo funkciju $u^0(x) = 0.5 - |x - 0.5|$. Poznato je da $u^0 \in H^{1.5-\delta}(0,1)$ i $u^0 \in W_1^{2-\delta}(0,1)$, gde je $\delta > 0$ proizvoljno malo. Na osnovu leme 6.7 dobijamo da je $\|u^0 - T_x^2 u^0\|_{\Lambda^{-1}} = O(h^{2-\delta})$ dok na osnovu leme 6.6 dobijamo samo $O(h^{1.5-\delta})$. U smislu ove napomene moguće je u takvim slučajevima i poboljšati ocene brzine konvergencije u sledećoj teoremi.

Na osnovu leme 5.3, leme 6.4, leme 6.5, leme 6.6 i apriorne ocene 4.11 sledi

TEOREMA 6.4. *Neka rešenje zadatka (2.1)* $u \in H_{\square}^{s_1,\beta}(Q) \cap H_{\square}^{\alpha,s_2}(Q)$, *pri čemu je* $1/2 < s_1 \leq 2$, $1/2 < s_2 \leq 1$, $0 \leq \alpha \leq s_1$, $0 \leq \beta \leq s_2$, *i* $\alpha + \beta - 2\alpha\beta > s_1 + s_2 - 2s_1 s_2$ *u slučaju da je* $(s_1 - \alpha)(s_2 - \beta) \neq 0$. *Neka je još* $\alpha(t), \beta(t) \in H^{s_4}(0,T)$, $u^0(x) \in H^{s_3}(0,1)$. *Ako je* v *diskretno rešenje diferencijske sheme (6.1), a* v_2 *diskretno rešenje sheme (6.10) tada je*

$$\begin{aligned}\|u - v_2\|_{0,h\tau} \leq \frac{C}{\sigma - 1/2} \Big(& h^{s_1} |u|_{(s_1,0),Q} + h^{s_1}\tau^{\beta} |u|_{(s_1,\beta),Q} + \\ & + h^{\alpha}\tau^{s_2} |u|_{(\alpha,s_2),Q} + \tau^{s_2} |u|_{(0,s_2),Q} + \\ & + h^{s_3}\tau(1-\sigma_1) \left|u^0\right|_{s_3,(0,1)} + \tau^{s_4}\big(|\alpha|_{s_4,(0,T)} + |\beta|_{s_4,(0,T)}\big)\Big) ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|u - v\|_{0,h\tau} \leq \frac{C}{\sigma - 1/2} \Big(& h^{s_1} |u|_{(s_1,0),Q} + h^{s_1}\tau^{\beta} |u|_{(s_1,\beta),Q} + \\ & + h^{\alpha}\tau^{s_2} |u|_{(\alpha,s_2),Q} + \tau^{s_2} |u|_{(0,s_2),Q} + \\ & + h^{s_3} \left|u^0\right|_{s_3,(0,1)} + \tau^{s_4}\big(|\alpha|_{s_4,(0,T)} + |\beta|_{s_4,(0,T)}\big)\Big) .\end{aligned}$$

TEOREMA 6.5. *Neka rešenje zadatka (2.1)* $u \in H^{s_1,s_2}(Q)$, $s > 3/2$. *Ako* $\alpha(t), \beta(t) \in H^{s_4}(0,T)$ *i* $u^0(x) \in H^{s_3}(0,1)$, $1/2 < s_3 \leq 2$, $1/2 < s_4 \leq 1$ *tada je*

$$\|u - v_2\|_{0,h\tau} = O(h^s + \tau^{s/2} + (1-\sigma_1)h^{s_3}\tau + \tau^{s_4}) ,$$

$$\|u-v\|_{0,h\tau} = O(h^s + \tau^{s/2} + h^{s_3} + \tau^{s_4})\,.$$

NAPOMENA: Ukoliko $u \in H^{s,s/2}(Q)$ tada je [37] $\alpha(t), \beta(t) \in H^{s/2-1/4}(0,T)$ i $u^0(x) \in H^{s-1}(0,1)$ pa ukoliko ove funkcije u konkretnom problemu (2.1) nisu glađe imamo ocene

$$\|u-v_2\|_{0,h\tau} = O(h^s + \tau^{s/2-1/4} + (1-\sigma_1)h^{s-1}\tau)\,,$$

$$\|u-v\|_{0,h\tau} = O(h^{s-1} + \tau^{s/2-1/4})\,,$$

što su lošiji rezultati nego u slučaju implicitne sheme ($\sigma = 1$).

6.3. Konvergencija u $\|\,.\,\|_{1,h\tau}$ normi.

Ispitajmo prvo slučaj neprekidnog rešenja u zadatka (2.1). U tom slučaju zadatak rešavamo shemom (6.1) ili shemom (6.10).

Primetimo prvo da se funkcional

$$\varphi_x = (T_{\bar t} u - \sigma_j u - (1-\sigma_j)\breve{u})_x$$

anulira za potpuno iste funkcije kao i funkcional $(T_{\bar t} u - u)_x$ razmatran u lemi 5.4 na osnovu čega neposredno zaključujemo da za njega važi lema 5.4.

Dalje, funkcional $\psi = u - T_x^2 u$ je identičan kao u poglavlju 5.1. pa će za njega važiti sve ocene iz tog poglavlja; naime, važiće lema 5.5, lema 5.6, lema 5.7, lema 5.8, lema 5.9, lema 5.11.

U našem slučaju je $\psi^0 = u^0 - T_x^2 u^0$ i $u^0 - \psi^0 = T_x^2 u^0 - u^0$. Ocena ovih funkcionala je data u lemi 5.10. Iz apriorne ocene 4.11 se vidi da je još potrebno oceniti funkcional $(u^0 - T_x^2 u^0)_x$.

LEMA 6.8. *Neka* $u^0 \in H^{s_3}(0,1)$, $1/2 < s_3 \le 3$. *Tada je*

(i) Ukoliko je $\psi_i^0 = T_x^2 u^0(x_1) - u^0(x_i)$, $\psi_0^0 = \psi_N^0 = 0$

$$\|[\psi_x^0\|_h \le C h^{s_3-1} \left|u^0\right|_{s_3,(0,1)}\,, \quad 1/2 < s_3 \le 2\,,$$

$$\|[\psi_x^0\|_h \le C h^{s_3-1} \left(\left|u^0\right|_{2,(0,1)} + \left|u^0\right|_{s_3,(0,1)}\right)\,, \quad 2 < s_3 < 2.5\,,$$

$$\|[\psi_x^0\|_h \le C h^{1.5} |\ln h| \left(\left|u^0\right|_{2,(0,1)} + \left|u^0\right|_{2.5,(0,1)}\right)\,, \quad s_3 = 2.5\,,$$

$$\|[\psi_x^0\|_h \le C h^{1.5} \left(\left|u^0\right|_{2,(0,1)} + \left|u^0\right|_{s_3,(0,1)}\right)\,, \quad 2.5 < s_3 \le 3\,.$$

(ii) Ukoliko je $(u^0)''(0) = (u^0)''(1) = 0$ *tada je pod istim uslovima*

$$\|[\psi_x^0\|_h \le C h^{s_3-1} \left|u^0\right|_{s_3,(0,1)}\,, \quad 1/2 < s_3 \le 3\,.$$

DOKAZ: Za $s_3 > 1/2$ je $H^{s_3} \hookrightarrow C$ pa je

$$\psi_x^0 = (u^0 - T_x^2 u^0)_x$$

ograničen linearan funkcional na prostoru H^{s_3}. U unutrašnjim čvorovima ovaj se funkcional anulira za proizvoljni polinom drugog stepena, dok se za $i = 0$ i $i = N-1$ u slučaju $\psi_0^0 = \psi_N^0 = 0$ anulira samo na linearnim funkcijama. Zbog toga je primenom Bramble–Hilbertove tehnike

$$|\psi_{x,i}^0| \leq C h^{s_3 - 3/2} |u|_{s_3,(x_{i-1},x_{i+2})}, \quad 1 \leq i \leq N-2,$$

$$|\psi_{x,0}^0| \leq C h^{\bar{s}_3 - 3/2} |u|_{\bar{s}_3,(0,2h)},$$

$$|\psi_{x,N-1}^0| \leq C h^{\bar{s}_3 - 3/2} |u|_{\bar{s}_3,(1-2h,1)},$$

gde je $\bar{s}_3 = \min\{s_3, 2\}$. U slučaju kada je $s_3 \leq 2$ svi stepeni uz h su isti i rezultat se dobija direktno sumiranjem. U slučaju $2 < s_3 \leq 3$ koristićemo prigraničnu ocenu [42]

$$|u|_{2,(0,2h)} \leq C(h,\varepsilon)(|u|_{2,(0,1)} + |u|_{2+\varepsilon,(0,1)}),$$

gde je

$$C(h,\varepsilon) = \begin{cases} Ch^{\varepsilon}, & 0 \leq \varepsilon < 1/2, \\ Ch^{1/2}|\ln h|, & \varepsilon = 1/2, \\ Ch^{1/2}, & \varepsilon > 1/2. \end{cases}$$

pa je

$$\begin{aligned} \|[\psi_x^0\|_h^2 &= \sum_{i=0}^{N-1} h(\psi_{x,i}^0)^2 = h(\psi_{x,0}^0)^2 + h(\psi_{x,N-1}^0)^2 + \sum_{i=1}^{N-2} h(\psi_{x,i}^0)^2 \\ &\leq C(hC(h,s-2))^2(|u|_{2,(0,1)} + |u|_{s,(0,1)})^2 + Ch^{2(s-1)}|u|_{s,(0,1)}^2. \end{aligned}$$

Odavde se dobija prvi deo iskaza leme.

Drugi deo leme se dokazuje tako što u slučaju da postoji trag drugog izvoda za $x = 0$ i $x = 1$, neparno produženje u odnosu na $x = 0$ i $x = 1$ čuva glatkost H^s. Za neparno produženje je automatski ispunjeno da je $\psi_0^0 = \psi_N^0 = 0$. Funkcional ψ_x^0 će se sad anulirati u svim, pa i graničnim tačkama, na polinomima drugog stepena, pa je

$$\|[\psi_x^0\|_h \leq Ch^{s_3-1} |\bar{u}|_{s_3,(-h,1+h)} \leq C_1 h^{s_3-1} |u|_{s_3,(0,1)}, \tag{6.11}$$

primenom Bramble–Hilbertove leme i osobine neparnog produženja. ∎

Radi lakšeg zapisa rezultata definišimo

$$E(h,s) = \begin{cases} h^{s}, & 0 \leq s < 1.5, \\ h^{1/2}|\ln h|, & s = 1.5, \\ h^{1/2}, & s > 1.5. \end{cases}$$

i sumirajmo dobijene rezultate za slučaj da $u \in H^{s,s/2}$.

TEOREMA 6.6. *Neka rešenje zadatka (2.1)* $u \in H^{s,s/2}(Q)$, $1.5 < s \leq 4$, $u(0,t), u(1,t) \in H^{s_4}(0,T)$, $1/2 < s_4 \leq 1$, $u(x,0) \in H^{s_3}(0,1)$, $1/2 < s_3 \leq 2$. *Ako je* v *diskretno rešenje diferencijske sheme (6.1), a* v_2 *diskretno rešenje diferencijske sheme (6.10) tada je*

(i) Za $1.5 < s \leq 2$, $C_1\tau \leq h^r \leq C_2\tau$ *i* $\delta > 0$ *proizvoljno malo*

$$\begin{aligned} \|u - v\|_{1,h\tau} &= O(h^{s-1-(2-r)/2-\delta}), & r < 2\,, \\ &= O(h^{s-1}), & r \geq 2\,. \end{aligned}$$

(ii) Za $2 < s \leq 3$

$$\|u - v\|_{1,h\tau} = O(\, E(h, s-1) + \tau^{(s-1)/2} + (1-\sigma_1)\tau E(h, s_3 - 1)\,)\,.$$

(iii) Za $3 < s \leq 4$

$$\|u - v\|_{1,h\tau} = O(h^{s/2} + \tau^{s/4})\,.$$

Sve navedene ocene važe i u slučaju diskretnog rešenja v_2.

DOKAZ: (i) U celom dokazu koristimo jednostavniju apriornu ocenu iz leme 4.11. U slučaju kada $u \in H^{s,s/2}(Q)$ možemo koristiti lemu 5.4 sa $s_1 = s$, $\beta = 0$, $\alpha = \alpha' = s - 1 - 2\varepsilon$, $s_2 = 1/2 + \varepsilon$, zatim lemu 5.5 sa istim ovim uslovima. U zavisnosti od izabrane sheme, $\|z^0 - \psi^0\|_h$ će biti bilo 0 bilo $O(h^{s_3})$, a poznato je da je $s_3 \geq s - 1$ pošto je u^0 trag funkcije u. Zbog ovoga se ovaj član ponaša kao $O(h^{s-1})$. Iz istih razloga je i $\tau\|(z^0 - \psi^0)_x\|_h = O(\tau h^{s-2}) = O(h^{s-2+r})$. Član $\tau\|[\psi^0_x\|_h$ se iz istih razloga ponaša kao $O(h^{s-2+r})$. Vidimo, dakle, da u ovom slučaju najlošiju ocenu daju $\|[\varphi_x\|_{h\tau}$ i $\|[\psi_x\|_{h\tau}$, a ta ocena je ista kao u slučaju implicitne sheme ($\sigma = 1$). Time je dokazan prvi deo teoreme.

(ii) U ovom slučaju se za $\|[\varphi_x\|_{h\tau}$ i $\|[\psi_x\|_{h\tau}$ primenom leme 5.4 i leme 5.5 dobija da su reda $O(E(h, s-1) + \tau^{(s-1)/2})$. U slučaju diskretnog rešenja v je $\|[(u^0 - \psi^0)_x\|_h = O((1-\sigma_1)\tau E(h, s_3 - 1))$, za $\|[\psi^0_x\|_h$ važi ista ocena, a $\|u^0 - \psi^0\|_h = O(h^{s_3}) = O(h^{s-1})$. Za rešenje v_2 je čak $u^0 - \psi^0 \equiv 0$, a za $\|[\psi^0_x\|_{h\tau}$ važi ista ocena. Na taj način je dokazan drugi deo teoreme.

(iii) Kao i u slučaju implicitne sheme, ovaj rezultat se dobija interpolacijom, tj. korišćenjem nejednakosti

$$\|z\|^2_{1,h\tau} \leq C\,\|z\|_{0,h\tau}\,\|z\|_{2,h\tau}\ .$$

Ovim je u potpunosti završen dokaz teoreme. ∎

Zbog insistiranja da je $\psi^j_0 = \psi^j_N = 0$ i korišćenja jednostavnije apriorne ocene, brzina konvergencije u teoremi 6.6 nije veća od $h^{1.5}$ za $s \leq 3$ što je slabije od optimalne ocene. Ocena se može poboljšati uz pretpostavku povećane glatkosti rešenja u u okolini granica $x = 0$ i $x = 1$ i korišćenjem druge apriorne ocene gde je $\psi_0^j, \psi_N^j \not\equiv 0$.

Pretpostavimo da u prigraničnim oblastima $Q_0 = (0, \delta_x) \times (0, T)$ i $Q_1 = (1-\delta_x, 1) \times (0, T)$ rešenje $u \in W^{s_1,1}_{\infty,\square}$. Tada je i $u^0(x) \in W^{s_1}_\infty(0, \delta_x) \cap W^{s_1}_\infty(1-\delta_x, 1)$.

Važiće u ovom slučaju lema 5.7, lema 5.8 i lema 5.9 sa $s_2 = 1$, $p = \infty$, a važiće i lema 5.10 sa $p = \infty$, $s = s_1$ kao i lema 5.11. Rešenje u je moguće neprekidno produžiti preko granica sa očuvanjem glatkosti. Za ovakvo produženje $\bar{u}$ granične vrednosti za ψ_0^j i ψ_N^j više neće biti 0 kao ranije ako se računaju na isti način kao i unutar mreže. Na taj način se dobija optimalna ocena za član $\|[\psi_x\|_{h\tau}$ u apriornoj oceni (koju pod uslovima prethodne teoreme nije bilo moguće dobiti). Sumirajući već dokazane navedene rezultate dobijamo sledeću teoremu.

TEOREMA 6.7. *Neka rešenje zadatka (2.1)* $u \in H^{s,s/2}(Q)$, $2.5 < s \leq 3$ *, i neka je pored toga* $u \in W^{s_1,1}_{\infty,\square}(Q_0) \cap W^{s_1,1}_{\infty,\square}(Q_1)$, $1/2 < s_1 \leq 2$ *gde su* Q_0 *i* Q_1 *ranije definisane prigranične oblasti. Ako* $u^0 \in H^{s_3}(0, 1)$, $s_3 \leq 2$ *tada je*

$$\|u - v\|_{1,h\tau} = O(\, h^{s-1} + \tau^{(s-1)/2} + h^{s_1} + (1 - \sigma_1)\tau h^{s_3 - 1}\,) .$$

Isti rezultat važi i za diskretno rešenje v_2 .

NAPOMENA: U slučaju da je $\sigma_1 = 1$ ili da je $\tau \leq Ch$ što je u primenama prirodno ograničenje poslednji član u teoremi 6.7 se može izostaviti jer je $s_3 \geq s - 1$ (kao trag rešenja) i $(1 - \sigma_1)\tau h^{s_3-1} \leq Ch^{s-1}$.

Glava 7. Shema sa težinama $\sigma_j = 1/2$

Shema sa težinom $\sigma_j = 1/2$ predstavlja poznatu Crank–Nicolson–ovu simetričnu shemu koja, za razliku od prethodno razmatranih shema, na dovoljno glatkim rešenjima ima veću tačnost $O(h^2+\tau^2)$ dok je tačnost shema sa težinama $\sigma_j > 1/2$ samo $O(h^2+\tau)$. Neka je zadata ravnomerna mreža sa koracima h i τ.

Zadatak (2.1) ćemo rešavati diferencijskom shemom

$$
\begin{aligned}
& v_{\bar{t}} = \tfrac{1}{2} v_{x\bar{x}} + \tfrac{1}{2} \check{v}_{x\bar{x}} + T_{\bar{t}} T_x^2 f \,, \\
& v(0,t) = \alpha(t) \,, \\
& v(1,t) = \beta(t) \,, \\
& v(x,0) = u^0(x) \,.
\end{aligned}
\tag{7.1}
$$

Za rešenje se pretpostavlja da je neprekidno, što je u ovom slučaju opravdano budući da za prekidna rešenja ovde korišćena metodologija nije u stanju da dokaže konvergenciju jer pretpostavlja veću glatkost rešenja.

Grešku diferencijske sheme možemo definisati sa $z = u - v$ i ona će biti rešenje diferencijske sheme

$$
\begin{aligned}
& z_{\bar{t}} = \tfrac{1}{2} z_{x\bar{x}} + \tfrac{1}{2} \check{z}_{x\bar{x}} + (u - T_x^2 u)_{\bar{t}} + (T_{\bar{t}} u - \tfrac{1}{2} u - \tfrac{1}{2} \check{u})_{x\bar{x}} \,, \\
& z(0,t) = z(1,t) = 0 \,, \\
& z(x,0) = 0 \,.
\end{aligned}
\tag{7.2}
$$

Granični zadatak ćemo još rešavati i diferencijskom shemom

$$
\begin{aligned}
& v_{1\bar{t}} = \tfrac{1}{2} v_{1x\bar{x}} + \tfrac{1}{2} \check{v}_{1x\bar{x}} + T_{\bar{t}} T_x^2 f \,, \\
& v_1(0,t) = \alpha(t) \,, \\
& v_1(1,t) = \beta(t) \,, \\
& v_1(x,0) = \widetilde{T}_x^2 u^0(x) \,.
\end{aligned}
\tag{7.3}
$$

gde je $\widetilde{T}_x^2 u = T_x^2 u$ u unutrašnjim čvorovima i $\widetilde{T}_x^2 = u$ u graničnim čvorovima. Ako grešku diferencijske sheme definišemo sa $z_1 = \widetilde{T}_x^2 u - v_1$ ona će biti rešenje diferencijske sheme

$$
\begin{aligned}
& z_{1\bar{t}} = \tfrac{1}{2} z_{1x\bar{x}} + \tfrac{1}{2} \check{z}_{1x\bar{x}} + (T_{\bar{t}} u - \tfrac{1}{2} \widetilde{T}_x^2 u - \tfrac{1}{2} \widetilde{T}_x^2 \check{u})_{x\bar{x}} \,, \\
& z_1(0,t) = z_1(1,t) = 0 \,, \\
& z_1(x,0) = 0 \,.
\end{aligned}
\tag{7.4}
$$

7.1. Konvergencija u $\|\,.\,\|_{2,h\tau}$ normi.

Za ocenu konvergencije sheme (7.1) u $\|\,.\,\|_{2,h\tau}$ normi koristićemo apriornu ocenu datu u lemi 4.13, naime

$$\|z\|_{2,h\tau} \le C(\|[\phi_x\|_{h\tau} + \|\phi_1\|_\tau + \|\phi_{N-1}\|_\tau + \|\phi_{\bar t,1}\|_\tau + \|\phi_{\bar t,N-1}\|_\tau) \tag{7.5}$$

gde je $\phi = (u - T_x^2 u)_{\bar t} + (T_{\bar t}u - \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}\check u)_{x\bar x} \equiv \psi_{\bar t} + \varphi_{x\bar x}$, ako označimo $\psi = u - T_x^2 u$, $\varphi = T_{\bar t}u - \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}\check u$.

Za ocenu $\|[\phi_x\|_{h\tau}$ napomenimo da su, po konstrukciji ϕ , prvi i poslednji sabirak u normi jednaki 0 što eliminiše probleme ocene u graničnim tačkama. Važiće

$$\|[\phi_x\|_{h\tau}^2 = \sum_{\substack{1\le i\le N-2\\ j>0}} h\tau|\phi_{x,i}^{\;j}|^2 \le \sum_{\substack{1\le i\le N-2\\ j>0}} h\tau|\varphi_{x\bar x x,i}^{\;j}|^2 + \sum_{\substack{1\le i\le N-2\\ j>0}} h\tau|\psi_{\bar t x,i}^{\;j}|^2 . \tag{7.6}$$

Razmotrimo prvo funkcional $\varphi_{x\bar x x,i}^{\;j} = (T_{\bar t}u - \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}\check u)_{x\bar x x}$. Linearnom transformacijom $t = t_j + \tau t'$, $x = x_i + hx'$ oblast $e_{ij} = (x_{i-1}, x_{i+2}) \times (t_{j-1}, t_j)$ se preslikava na $E = (-1,2)\times(-1,0)$. Tada je za $u(x,t) = u'(x',t')$

$$\begin{aligned}\varphi_{x\bar x x,i}^{\;j} = \frac{1}{h^3}\Bigg(&\int_{-1}^{0}[\,u'(2,s) - 3u'(1,s) + 3u'(0,s) - u'(-1,s)\,]\,ds - \\ &- \frac{1}{2}[\,u'(2,0) - 3u'(1,0) + 3u'(0,0) - u'(-1,0)\,] - \\ &- \frac{1}{2}[\,u'(2,-1) - 3u'(1,-1) + 3u'(0,-1) - u'(-1,-1)\,]\Bigg) .\end{aligned}$$

Ovaj linearan funkcional je neprekidan (ograničen) na $H_{\square}^{s_1,s_2}$ za $s_1, s_2 > 1/2$ i anulira se za $u' = x^i$, $i \ge 0$, $u' = x^i t$, $i \ge 0$, $u' = x^i t^j$, $i = 0,1,2$ $j \ge 0$ (vidi dodatak). Zbog toga je, primenom iste tehnike kao u prethodne dve glave, za $1/2 < s_1 \le 3$, $1/2 < s_2 \le 2$

$$\begin{aligned}|\varphi_{x\bar x x,i}^{\;j}| &\le \frac{C}{h^3} h^{s_1}\tau^{s_2}\,|u'|_{(s_1,s_2),E} \\ &\le \frac{C}{h^3\sqrt{h\tau}} h^{s_1}\tau^{s_2}\,|u|_{(s_1,s_2),e_{ij}} .\end{aligned}$$

Odavde je, sumiranjem po mreži

$$\sum_{\substack{1\le i\le N-2\\ j>0}} h\tau|\varphi_{x\bar x x,i}^{\;j}|^2 \le \left(Ch^{s_1-3}\tau^{s_2}\,|u|_{(s_1,s_2),Q}\right)^2 .$$

Ocenimo sada $\psi_{\bar t x} = (u - T_x^2 u)_{\bar t x}$. Uz pomoć iste linearne transformacije je

$$\begin{aligned}\psi_{\bar t x,i}^{\;j} = \frac{1}{h\tau}\Bigg(&[\,u'(1,0) - u'(1,-1) - u'(0,0) + u'(0,-1)\,] - \\ &- \int_{-1}^{1}(1-|s|)[\,u'(1+s,0) - u'(1+s,-1) - u'(s,0) + u'(s,-1)\,]\,ds\Bigg) .\end{aligned}$$

Za $1/2 < s_1 \leq 3$, $1/2 < s_2 \leq 2$, $\psi_{\bar{t}x,i}^{\;j}$ je ograničen linearan funkcional na $H_{\square}^{s_1,s_2}$ i anulira se za $u' = x^i t^j$, $i = 0,1,2$ $j \geq 0$ (vidi dodatak). Zbog toga je

$$|\psi_{\bar{t}x,i}^{\;j}| \leq \frac{C}{h\tau} h^{s_1}\tau^{s_2}\,|u'|_{(s_1,s_2),E}$$
$$\leq \frac{C}{h\tau\sqrt{h\tau}} h^{s_1}\tau^{s_2}\,|u|_{(s_1,s_2),e_{ij}}\;.$$

Sumiranjem po mreži dobijamo

$$\sum_{\substack{1\leq i\leq N-2 \\ j>0}} h\tau|\psi_{\bar{t}x,i}^{\;j}|^2 \leq \left(Ch^{s_1-1}\tau^{s_2-1}\,|u|_{(s_1,s_2),Q}\right)^2 .$$

Ovim je dokazana sledeća lema.

LEMA 7.1. *Neka je* $u \in H_{\square}^{s_1,s_2}(Q)$, $1/2 < s_1 \leq 3$, $1/2 < s_2 \leq 2$. *Ako označimo* $s_2' = \min\{1, s_2\}$ *tada je*

$$\|[\phi_x\|_{h\tau} \leq C\left(h^{s_1-3}\tau^{s_2}\,|u|_{(s_1,s_2),Q} + h^{s_1-1}\tau^{s_2'-1}\,|u|_{(s_1,s_2'),Q}\right)\;.$$

Ocenimo sada drugi član u (7.5), $\|\phi_1\|_\tau$ ($\|\phi_{N-1}\|_\tau$ se ocenjuje analogno). Biće $\|\phi_1\|_\tau \leq \|\psi_{\bar{t},1}\|_\tau + \|\varphi_{x\bar{x},1}\|_\tau$. Funkcional $\psi_{\bar{t}}$ je ispitan pri izvođenju teoreme 5.1 i za njega važi za $1/2 < s_1 \leq 2$, $1/2 < s_2 \leq 1$

$$\left(\sum_{j\geq 2}\tau|\psi_{\bar{t},1}^{\;j}|^2\right)^{1/2} \leq Ch^{s_1}\tau^{s_2-1}\,|u|_{(s_1,s_2),(0,2h)\times(0,T)}\;.$$

Ocenimo sada $\|\varphi_{x\bar{x},1}\|_\tau$. Posle linearnog preslikavanja $t = t_j + \tau t'$, $x = x_i + hx'$ biće

$$\varphi_{x\bar{x},1}^{\;j} = \frac{1}{h^2}\bigg(\int_{-1}^{0}[\,u'(-1,s) - 2u'(0,s) + u'(1,s)\,]\,ds -$$
$$- \frac{1}{2}[\,u'(-1,0) - 2u'(0,0) + u'(1,0)\,] -$$
$$- \frac{1}{2}[\,u'(-1,-1) - 2u'(0,-1) + u'(1,-1)\,]\bigg).$$

Za $u \in H_{\square}^{s_1,s_2}$, $1/2 < s_1, s_2 \leq 2$ ovo je ograničen linearan funkcional koji se anulira za $u' = x^i t^j$, $i \leq 1$ ili $j \leq 1$ (vidi dodatak). Na osnovu toga standardnom tehnikom dobijamo

$$\left(\sum_{j\geq 2}\tau|\varphi_{x\bar{x},1}^{\;j}|^2\right)^{1/2} \leq Ch^{s_1-2}\tau^{s_2}\,|u|_{(s_1,s_2),(0,2h)\times(0,T)}\;.$$

Na osnovu prethodnog je za $s_1' = \min\{2, s_1\}$, $s_2' = \min\{1, s_2\}$, $Q_h = (0,2h) \times (0,T) \cup (1-2h,1) \times (0,T)$

$$\|\phi_1\|_\tau + \|\phi_{N-1}\|_\tau \le C\left(h^{s_1'} \tau^{s_2'-1} \, |u|_{(s_1',s_2'),Q_h} + h^{s_1'-2} \tau^{s_2} \, |u|_{(s_1',s_2),Q_h} \right) . \tag{7.7}$$

Za kompletiranje ocene brzine konvergencije preostaje još da procenimo $\|\phi_{\bar t,1}\|_\tau$ (i analogno $\|\phi_{\bar t,N-1}\|_\tau$). Zbog konstrukcije ϕ biće

$$\|\phi_{\bar t,1}\|_\tau^2 = \sum_{j\ge 2} \tau |\phi_{\bar t,1}^{\;j}|^2 \le \sum_{j\ge 2} \tau |\varphi_{x\bar x\bar t,1}^{\;j}|^2 + \sum_{j\ge 2} \tau |\psi_{\bar t\bar t,1}^{\;j}|^2 .$$

Posle linearnog preslikavanja $t = t_j + \tau t'$, $x = x_i + hx'$ koje oblast $e_{ij} = (0,2h) \times (t_{j-2}, t_j)$ preslikava na $E = (-1,1) \times (-2,0)$ biće

$$\psi_{\bar t\bar t,1}^{\;j} = \frac{1}{\tau^2}\Bigg([\,u'(0,0) - 2u'(0,-1) + u'(0,-2)\,] - \\ - \int_{-1}^{1} (1-|s|)[\,u'(s,0) - 2u'(s,-1) + u'(s,-2)\,]\,ds \Bigg) .$$

Ako $u \in H_\Box^{s_1,s_2}$ za $1/2 < s_1, s_2 \le 2$ ovo je ograničen linearan funkcional. On se anulira za $u' = x^i t^j$, $i \le 1$ ili $j \le 1$ (vidi dodatak). Zbog toga je

$$\left(\sum_{j\ge 2} \tau |\psi_{\bar t\bar t,1}^{\;j}|^2 \right)^{1/2} \le C h^{s_1} \tau^{s_2-2} \, |u|_{(s_1,s_2),(0,2h)\times(0,T)} .$$

Istom linearnom transformacijom je

$$\varphi_{x\bar x\bar t,1}^{\;j} = \frac{1}{h^2\tau}\Bigg(\int_{-1}^{0} [\,u'(-1,s) - 2u'(0,s) + u'(1,s) - \\ - u'(-1,s-1) + 2u'(0,s-1) - u'(1,s-1)\,]\,ds - \\ - \frac{1}{2}[\,u'(-1,0) - 2u'(0,0) + u'(1,0)\,] + \frac{1}{2}[\,u'(-1,-2) - 2u'(0,-2) + u'(1,-2)\,] \Bigg) .$$

Ako $u \in H_\Box^{s_1,s_2}$ za $1/2 < s_1 \le 2$, $1/2 < s_2 \le 3$, uzimajući u obzir da se ovaj ograničen linearan funkcional anulira za $u' = x^i t^j$, $i \le 1$ ili $j \le 2$ (vidi dodatak), standardnom tehnikom dobijamo

$$\left(\sum_{j\ge 2} \tau |\varphi_{x\bar x\bar t,1}^{\;j}|^2 \right)^{1/2} \le C h^{s_1-2} \tau^{s_2-1} \, |u|_{(s_1,s_2),(0,2h)\times(0,T)} .$$

Na osnovu prethodnog je za $s_2'' = \min\{2, s_2\}$

$$\|\phi_{\bar t,1}\|_\tau + \|\phi_{\bar t,N-1}\|_\tau \le C\left(h^{s_1} \tau^{s_2''-1} \, |u|_{(s_1,s_2''),Q_h} + h^{s_1-2} \tau^{s_2-1} \, |u|_{(s_1,s_2),Q_h} \right) . \tag{7.8}$$

Uz pomoć leme 7.1, (7.7) i (7.8) lako se dokazuje sledeća teorema.

TEOREMA 7.1. *Neka rešenje zadatka (2.1)* $u \in H_{\Box}^{s_1,\beta}(Q) \cap H_{\Box}^{\alpha,s_2}(Q)$, *pri čemu je* $1/2 < s_1 \le 3$, $1/2 < s_2 \le 3$, $1/2 < \alpha \le \min\{2, s_1\}$, $1/2 < \beta \le \min\{2, s_2\}$. *Tada je uz* $s_2' = \min\{1, s_2\}$, $s_2'' = \min\{2, s_2\}$, $\beta' = \min\{1, \beta\}$

$$\begin{aligned}\|u - v\|_{2,h\tau} \le C \Big(& h^{s_1-3}\tau^{\beta} \, |u|_{(s_1,\beta),Q} + h^{s_1-1}\tau^{\beta'-1} \, |u|_{(s_1,\beta'),Q} + \\ & + h^{\alpha}\tau^{s_2'-1} \, |u|_{(\alpha,s_2'),Q} + h^{\alpha-2}\tau^{s_2''} \, |u|_{(\alpha,s_2''),Q} + \\ & + h^{\alpha}\tau^{\sigma_2''-2} \, |u|_{(\alpha,s_2''),Q)} + h^{\alpha-2}\tau^{s_2-1} \, |u|_{(\alpha,s_2),Q} \Big) \, .\end{aligned}$$

Uobičajen funkcionalni prostor u kojem se posmatra rešenje zadatka u je $H^{s,s/2}(Q)$. Diferencijska shema (7.1) se najčešće koristi sa $\tau \sim h$ a ređe sa $\tau \sim h^2$. Radi određivanja brzina konvergencije kada $u \in H^{s,s/2}(Q)$ uočimo da $H^{s,s/2} \hookrightarrow H_{\Box}^{\alpha,\beta}$ za $\alpha + 2\beta = s$. Za ocenu prva dva člana u (7.5) uzmimo (α, β) da je presek prave $x + 2y = s$ sa izlomljenom linijom određenom tačkama $(3, 2)$, $(3, 1/2 + \delta)$, $(0, 1/2 + \delta)$. Za ocenu ostala četiri člana uzmimo (α, β) u preseku $x + 2y = s$ sa linijom određenom tačkama $(2, 3)$, $(2, 1/2 + \delta)$, $(0, 1/2 + \delta)$. U zavisnosti od glatkosti s za procenu ovih članova se dobijaju sledeći izrazi

s	$\|[\phi_x\|_{h\tau}$
$7 < s \le 8$	$h^2 + \tau^2$
$6 < s \le 7$	$h^2 + \tau^{\frac{s-3}{2}}$
$5 < s \le 6$	$h^2 + \tau^{\frac{s-3}{2}}$
$4 < s \le 5$	$h^2\tau^{\frac{s-5}{2}} + \tau^{\frac{s-3}{2}}$
$3 < s \le 4$	$h^{s-4-2\delta}\tau^{1/2+\delta} + h^{s-2-2\delta}\tau^{-1/2+\delta}$
$1.5 < s \le 3$	$h^{s-4-2\delta}\tau^{1/2+\delta} + h^{s-2-2\delta}\tau^{-1/2+\delta}$

s	$\|\phi_1\|_{\tau}$	$\|\phi_{\bar{t},1}\|_{\tau}$
$7 < s \le 8$	$h^2 + \tau^2$	$h^2 + \tau^{\frac{s-4}{2}}$
$6 < s \le 7$	$h^2 + \tau^2$	$h^2 + \tau^{\frac{s-4}{2}}$
$5 < s \le 6$	$h^2 + \tau^{\frac{s-2}{2}}$	$h^2\tau^{\frac{s-6}{2}} + \tau^{\frac{s-4}{2}}$
$4 < s \le 5$	$h^2 + \tau^{\frac{s-2}{2}}$	$h^2\tau^{\frac{s-6}{2}} + \tau^{\frac{s-4}{2}}$
$3 < s \le 4$	$h^2\tau^{\frac{s-4}{2}} + \tau^{\frac{s-2}{2}}$	$h^2\tau^{\frac{s-6}{2}} + \tau^{\frac{s-4}{2}}$
$1.5 < s \le 3$	$h^{s-1-2\delta}\tau^{-1/2+\delta} + h^{s-3-2\delta}\tau^{1/2+\delta}$	$h^{s-1-2\delta}\tau^{-3/2+\delta} + h^{s-3-2\delta}\tau^{1/2+\delta}$

Na osnovu ove tabele neposredno sledi

TEOREMA 7.2. *Neka rešenje zadatka (2.1)* $u \in H^{s,s/2}(Q)$, $s > 1.5$.

(i) Ako je $C_1\tau \le h \le C_2\tau$ *tada je za* $\delta > 0$ *proizvoljno malo*

$$\begin{aligned}\|u - v\|_{2,h\tau} &= O(h^2)\,, && 8 \le s\,,\\ \|u - v\|_{2,h\tau} &= O(h^{(s-4)/2})\,, && 3 < s \le 8\,,\\ \|u - v\|_{2,h\tau} &= O(h^{s-3.5-\delta})\,, && 1.5 < s \le 3\,.\end{aligned}$$

(ii) Ako je $C_1\tau \le h^2 \le C_2\tau$ *tada je*

$$\|u-v\|_{2,h\tau} = O(h^2)\,, \qquad 6 \le s\,,$$
$$\|u-v\|_{2,h\tau} = O(h^{s-4})\,, \quad 1.5 < s \le 6\,.$$

U slučaju da rešenje pripada izotropnom prostoru, $u \in H^{s,s}(Q) = H^s(Q)$ tada za ocenu prva dva člana u (7.5) uzimamo $9\alpha, \beta)$ u preseku $x+y=s$ i linije određene tačkama $(3,2)$, $(3,1)$, $(1/2+\delta,1)$, $(1/2+\delta,0)$, za druga dva člana presek sa linijom određenom tačkama $(2,2)$, $(2,1)$, $(1/2+\delta,1)$, $(1/2+\delta,0)$ i za poslednja dva člana presek sa linijom određenom tačkama $(2,3)$, $(2,2)$, $(1/2+\delta,2)$, $(1/2+\delta,0)$. U zavisnosti od glatkosti s dobijaju se sledeći izrazi

s	$\|[\phi_x\|_{h\tau}$	$\|\phi_1\|_\tau$	$\|\phi_{\bar{t},1}\|_\tau$
$4 < s \le 5$	$\tau^{s-3} + h^2$	$h^2 + \tau^2$	$h^2 + \tau^{s-3}$
$3 < s \le 4$	$h^{s-4}\tau + h^{s-2}$	$h^2 + \tau^{s-2}$	$h^{s-2} + h^{s-4}\tau$
$2.5 < s \le 3$	$h^{s-4}\tau + h^{s-2}$	$h^{s-1} + h^{s-3}\tau$	$h^{s-2} + h^{s-4}\tau$
$1.5 < s \le 2.5$	$h^{s-4}\tau + h^{s-2}$	$h^{s-1} + h^{s-3}\tau$	$h^{1/2+\delta}\tau^{s-2.5-\delta} + h^{-1.5+\delta}\tau^{s-1.5-\delta}$

Na osnovu ove tabele se neposredno dokazuje sledeća teorema.

TEOREMA 7.3. *Neka rešenje zadatka (2.1)* $u \in H^{s,s}(Q)$, $s > 1.5$.

(i) Ako je $C_1\tau \le h \le C_2\tau$ *tada je*

$$\|u-v\|_{2,h\tau} = O(h^2)\,, \qquad 5 \le s\,,$$
$$\|u-v\|_{2,h\tau} = O(h^{s-3})\,, \quad 1.5 < s \le 5\,.$$

(ii) Ako je $C_1\tau \le h^2 \le C_2\tau$ *tada je za* $\delta > 0$ *proizvoljno malo*

$$\|u-v\|_{2,h\tau} = O(h^2)\,, \qquad 4 \le s\,,$$
$$\|u-v\|_{2,h\tau} = O(h^{s-2})\,, \qquad 2.5 < s \le 4\,,$$
$$\|u-v\|_{2,h\tau} = O(h^{2s-4.5-\delta})\,, \quad 1.5 < s \le 2.5\,.$$

Ukoliko su ispunjeni uslovi apriorne ocene iz leme 4.12 tada je moguće i poboljšati ocene brzine konvergencije. Pretpostavkom da su granični uslovi zadatka (2.1) homogeni i da neparno produženje preko bočnih granica ne narušava njegovu glatkost automatski su ispunjeni uslovi leme 4.12 pa na brzinu konvergencije utiče samo član $\|[\phi_x\|_{h\tau}$ koji je već ispitan. Poznato je inače da ako $u \in H_{\Box}^{\alpha,\beta}(Q)$ tada neparno produženje pripada istom prostoru samo za $\alpha < 2.5$. Pod pretpostavkom dovoljne glatkosti neparnog produženja iz prethodnih rezultata neposredno slede sledeće dve teoreme.

TEOREMA 7.4. *Ako neparno produženje zadatka (2.1) sa homogenim graničnim uslovima* $\bar{u} \in H^A(\bar{Q})$, $A = \{(0,0),(3,0),(3,(s-3)/2),(0,s/2)\}$, $s > 1.5$ *(odgovara slučaju kada rešenje* $u \in H^{s,s/2}(Q)$ *) tada je*

(i) Za $C_1\tau \le h \le C_2\tau$ *i* $\delta > 0$ *proizvoljno malo*

$$\begin{aligned}
\|u-v\|_{2,h\tau} &= O(h^2)\,, && 6 \le s\,,\\
\|u-v\|_{2,h\tau} &= O(h^{(s-3)/2})\,, && 4 < s \le 6\,,\\
\|u-v\|_{2,h\tau} &= O(h^{s-3.5-\delta})\,, && 1.5 < s \le 4\,.
\end{aligned}$$

(ii) Za $C_1\tau \le h^2 \le C_2\tau$ *je*

$$\begin{aligned}
\|u-v\|_{2,h\tau} &= O(h^2)\,, && 5 \le s\,,\\
\|u-v\|_{2,h\tau} &= O(h^{s-3})\,, && 1.5 < s \le 5\,.
\end{aligned}$$

TEOREMA 7.5. *Ako neparno produženje zadatka (2.1) sa homogenim graničnim uslovima* $\bar{u} \in H^A(\bar{Q})$, $A = \{(0,0),(3,0),(3,s-3),(0,s)\}$, $s > 1.5$ *(odgovara slučaju kada rešenje* $u \in H^{s,s}(Q)$ *) tada je*

(i) Za $C_1\tau \le h \le C_2\tau$ *je*

$$\begin{aligned}
\|u-v\|_{2,h\tau} &= O(h^2)\,, && 5 \le s\,,\\
\|u-v\|_{2,h\tau} &= O(h^{s-3})\,, && 1.5 < s \le 5\,.
\end{aligned}$$

(ii) Za $C_1\tau \le h^2 \le C_2\tau$ *je*

$$\begin{aligned}
\|u-v\|_{2,h\tau} &= O(h^2)\,, && 4 \le s\,,\\
\|u-v\|_{2,h\tau} &= O(h^{s-2})\,, && 1.5 < s \le 4\,.
\end{aligned}$$

7.2. Konvergencija u $\|\,.\,\|_{1,h\tau}$ normi.

Za ocenu konvergencije sheme (7.1) u $\|\,.\,\|_{1,h\tau}$ normi koristićemo apriornu ocenu datu u lemi 4.14, naime

$$\|z\|_{1,h\tau} \le C\|\phi\|_{h\tau} \le C\,\|\psi_{\bar{t}}\|_{h\tau} + C\,\|\varphi_{x\bar{x}}\|_{h\tau} \tag{7.9}$$

gde je $\phi = (u - T_x^2 u)_{\bar{t}} + (T_{\bar{t}}u - \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}\check{u})_{x\bar{x}} = \psi_{\bar{t}} + \varphi_{x\bar{x}}$ ako označimo $\psi = u - T_x^2 u$ i $\varphi = T_{\bar{t}}u - \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}\check{u}$.

Funkcional $\psi_{\bar{t}}$ je ispitan ranije i ako $u \in H_{\square}^{s_1,s_2}(Q)$, $1/2 < s_1 \le 2$, $1/2 < s_2 \le 1$ tada je standardnom tehnikom

$$\|\psi_{\bar{t}}\|_{h\tau} \le C h^{s_1} \tau^{s_2-1}\,|u|_{(s_1,s_2),Q}\ . \tag{7.10}$$

Funkcional $\varphi_{x\bar{x}}$ se posle transformacije $t = t_j + \tau t'$, $x = x_i + hx'$ koja oblast $e_{ij} = (x_{i-1}, x_{i+1}) \times (t_{j-1}, t_j)$ preslikava na $E = (-1,1) \times (-1,0)$ svodi na

$$\varphi_{x\bar{x},i}^{\;j} = \frac{1}{h^2}\bigg(\int_{-1}^{0} [\, u'(-1,s) - 2u'(0,s) + u'(1,s)\,]\, ds - \\ - \frac{1}{2}[\, u'(-1,0) - 2u'(0,0) + u'(1,0)\,] - \\ - \frac{1}{2}[\, u'(-1,-1) - 2u'(0,-1) + u'(1,-1)\,]\bigg).$$

Ovaj linearan funkcional je ograničen za $u \in H_{\Box}^{s_1,s_2}(Q)$, $1/2 < s_1, s_2 \le 2$, i anulira se za $u' = x^i t^j$, $i \le 2$, $j \ge 0$ i $u' = x^i t^j$, $j \le 2$, $i \ge 0$ (vidi dodatak). Zbog toga je

$$|\varphi_{x\bar{x},i}^{\;j}| \le \frac{C}{h^2} h^{s_1} \tau^{s_2} \, |u'|_{(s_1,s_2),E} \\ \le \frac{C}{h^2\sqrt{h\tau}} h^{s_1} \tau^{s_2} \, |u|_{(s_1,s_2),e_{ij}} \; .$$

Posle sumiranja po mreži je za $1/2 < s_1, s_2 \le 2$

$$\|\varphi_{x\bar{x}}\|_{h\tau} \le C h^{s_1-2} \tau^{s_2} \, |u|_{(s_1,s_2),Q} \; . \tag{7.11}$$

Na osnovu (7.9), (7.10) i (7.11) neposredno sledi

TEOREMA 7.6. *Neka rešenje zadatka (2.1)* $u \in H_{\Box}^{s_1,\beta}(Q) \cap H_{\Box}^{\alpha,s_2}(Q)$ *, pri čemu je* $1/2 < s_1 \le 2$ *,* $1/2 < s_2 \le 2$ *,* $1/2 < \alpha \le 2$ *,* $1/2 < \beta \le 1$ *. Tada je*

$$\|u - v\|_{1,h\tau} \le C \left(h^{s_1} \tau^{\beta-1} \, |u|_{(s_1,\beta),Q} + h^{\alpha-2} \tau^{s_2} \, |u|_{(\alpha,s_2),Q} \right) .$$

Na osnovu ove teoreme, pogodnim izborom s_1 , s_2 , α i β se lako mogu dokazati sledeći rezultati.

TEOREMA 7.7. *Neka rešenje zadatka (2.1)* $u \in H^{s,s/2}(Q)$ *,* $s > 1.5$ *.*

(i) Ako je $C_1 \tau \le h \le C_2 \tau$ *i* $\delta > 0$ *proizvoljno malo tada je*

$$\begin{aligned} \|u - v\|_{1,h\tau} &= O(h^2)\,, && 6 \le s\,, \\ \|u - v\|_{1,h\tau} &= O(h^{(s-2)/2})\,, && 3 < s \le 6\,, \\ \|u - v\|_{1,h\tau} &= O(h^{s-2.5-\delta})\,, && 1.5 < s \le 3\,. \end{aligned}$$

(ii) Ako je $C_1 \tau \le h^2 \le C_2 \tau$ *tada je*

$$\begin{aligned} \|u - v\|_{1,h\tau} &= O(h^2)\,, && 4 \le s\,, \\ \|u - v\|_{1,h\tau} &= O(h^{s-2})\,, && 1.5 < s \le 4\,. \end{aligned}$$

TEOREMA 7.8. *Neka rešenje zadatka (2.1)* $u \in H^{s,s}(Q)$, $s > 1$.
(i) Ako je $C_1\tau \le h \le C_2\tau$ *tada je*

$$\begin{aligned} \|u-v\|_{1,h\tau} &= O(h^2), && 4 \le s, \\ \|u-v\|_{1,h\tau} &= O(h^{s-2}), && 1 < s \le 4. \end{aligned}$$

(ii) Ako je $C_1\tau \le h^2 \le C_2\tau$ *i* $\delta > 0$ *proizvoljno malo tada je*

$$\begin{aligned} \|u-v\|_{1,h\tau} &= O(h^2), && 3 \le s, \\ \|u-v\|_{1,h\tau} &= O(h^{s-1}), && 1.5 < s \le 3, \\ \|u-v\|_{1,h\tau} &= O(h^{2s-2.5-\delta}), && 1 < s \le 1.5. \end{aligned}$$

7.3. Konvergencija u $\|\,.\,\|_{0,h\tau}$ normi.

Za diferencijsku shemu (7.1) na osnovu leme 4.15 i leme 4.16 važi

$$\|z\|_{0,h\tau} \le C(\|\psi_{\bar t}\|_{h\tau} + \|[\varphi_x\|_{h\tau}) \tag{7.12}$$

gde je $\psi = u - T_x^2 u$ i $\varphi = T_{\bar t} u - \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}\check{u}$.

Funkcional $\psi_{\bar t}$ je ranije ispitan i za njega važi ocena (7.10). Ostaje da se ispita funkcional $\varphi_x = (T_{\bar t} u - \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}\check{u})_x$. Posle uobičajene transformacije promenljivih je

$$\varphi_{x,i}^{\;j} = \frac{1}{h}\biggl(\int_{-1}^{0} [\,u'(1,s) - u'(0,s)\,]\,ds - \\ - \frac{1}{2}[\,u'(1,0) - u'(0,0)\,] - \frac{1}{2}[\,u'(1,-1) - u'(0,-1)\,]\biggr).$$

Za $u \in H_{\Box}^{s_3,s_4}(Q)$, $1/2 < s_3 \le 1$, $1/2 < s_4 \le 2$ ovo je ograničen linearan funkcional. Pošto se on anulira za $u' = t^j$, $j \ge 0$ i $u' = x^i t^j$, $j \ge 0$, $j = 0,1$ uobičajenom tehnikom se dobija da je

$$\|[\varphi_x\|_{h\tau} \le C h^{s_3-1}\tau^{s_4}\,|u|_{(s_3,s_4),Q}.$$

Na osnovu ove ocene i ocena (7.12) i (7.10) neposredno sledi

TEOREMA 7.9. *Neka rešenje zadatka (2.1)* $u \in H_{\Box}^{s_1,\beta}(Q) \cap H_{\Box}^{\alpha,s_2}(Q)$, *pri čemu je* $1/2 < s_1 \le 1$, $1/2 < s_2 \le 2$, $1/2 < \alpha \le 1$, $1/2 < \beta \le 2$. *Tada je*

$$\|u-v\|_{h\tau} \le C\left(h^{s_1}\tau^{\beta-1}\,|u|_{(s_1,\beta),Q} + h^{\alpha-1}\tau^{s_2}\,|u|_{(\alpha,s_2),Q}\right).$$

Na osnovu ove teoreme, pogodnim izborom s_1, s_2, α, β lako se dokazuju sledeći rezultati.

TEOREMA 7.10. *Neka rešenje zadatka (2.1)* $u \in H^{s,s/2}(Q)$, $s > 1.5$.
(i) Ako je $C_1\tau \le h \le C_2\tau$ *i* $\delta > 0$ *dovoljno malo tada je*

$$\begin{aligned} \|u-v\|_{h\tau} &= O(h^2), && 5 \le s, \\ \|u-v\|_{h\tau} &= O(h^{(s-1)/2}), && 2 < s \le 5, \\ \|u-v\|_{h\tau} &= O(h^{s-1.5-\delta}), && 1.5 < s \le 5. \end{aligned}$$

(ii) Ako je $C_1\tau \le h^2 \le C_2\tau$ *tada je*

$$\begin{aligned} \|u-v\|_{h\tau} &= O(h^2), && 4 \le s, \\ \|u-v\|_{h\tau} &= O(h^{s-2}), && 1.5 < s \le 4. \end{aligned}$$

TEOREMA 7.11. *Neka rešenje zadatka (2.1)* $u \in H^{s,s}(Q)$, $s > 1$.
(i) Ako je $C_1\tau \le h \le C_2\tau$ *tada je*

$$\begin{aligned} \|u-v\|_{h\tau} &= O(h^2), && 3 \le s, \\ \|u-v\|_{h\tau} &= O(h^{s-1}), && 1 < s \le 3. \end{aligned}$$

(ii) Ako je $C_1\tau \le h^2 \le C_2\tau$ *tada je za* $\delta > 0$ *proizvoljno malo*

$$\begin{aligned} \|u-v\|_{h\tau} &= O(h^2), && 3 \le s, \\ \|u-v\|_{h\tau} &= O(h^{s-1}), && 1.5 < s \le 3, \\ \|u-v\|_{h\tau} &= O(h^{2s-2.5-\delta}), && 1 < s \le 1.5. \end{aligned}$$

Ocene brzine konvergencije se mogu poboljšati ako koristimo shemu (7.3) i za grešku uzmemo $z_1 = \widetilde{T}_x^2 u - v_1$. Greška će zadovoljavati shemu (7.4). Na osnovu apriorne ocene iz leme 4.15 biće

$$\|z_1\|_{h\tau} \le C\|[\varphi_x\|_{h\tau} \tag{7.13}$$

gde je $\varphi = T_{\bar t} u - \frac{1}{2}\widetilde{T}_x^2 u - \frac{1}{2}\widetilde{T}_x^2 \check{u}$. U unutrašnjim čvorovima je $\varphi = T_{\bar t} u - \frac{1}{2} T_x^2 u - \frac{1}{2} T_x^2 \check{u}$ pa je posle uobičajene transformacije

$$\begin{aligned} \varphi_{x,i}^{\ j} = \frac{1}{h}\bigg(&\int_{-1}^{0} [\, u'(1,s) - u'(0,s)\,]\, ds - \\ &- \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (1-|s|)[\, u'(1+s,0) - u'(s,0) - u'(1+s,-1) + u'(s,-1)\,]\, ds \bigg). \end{aligned}$$

Pošto se ovaj funkcional anulira za $u' = t^j$, $j \ge 0$ i $u' = x^i t^j$, $i = 0,1,2$ $j = 0,1$ (vidi dodatak), tada se uobičajenom tehnikom dobija za $1/2 < s_1 \le 3$, $1/2 < s_2 \le 1$, $1/2 < s_3 \le 2$ i $s_1 + s_2 > s_3$

$$|\varphi_{x,i}^{\ j}| \le \frac{C}{\sqrt{h\tau}} \left(h^{s_1-1} |u|_{(s_1,0),e_{ij}} + h^{s_2-1}\tau^{s_3} |u|_{(s_2,s_3),e_{ij}} \right), \quad 1 \le i \le N-2. \tag{7.14}$$

U graničnim čvorovima je $\varphi = T_{\bar{t}}u - \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}\check{u}$ pa je za $i = 0$ (slučaj $i = N-1$ se analogno analizira)

$$\varphi_{x,0}^{\;j} = \frac{1}{h}\biggl(\int_{-1}^{0}[\,u'(1,s) - u'(0,s)\,]\,ds + \frac{1}{2}[\,u'(0,0) + u'(0,-1)\,] - \\ - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-|s|)[\,u'(1+s,0) + u'(1+s,0)\,]\,ds\biggr).$$

Ovaj funkcional se anulira za $u' = t^j$, $j \geq 0$ i $u' = x$ i $u' = xt$ (vidi dodatak). Zbog toga je za $1/2 < s_4 \leq 2$, $1/2 < s_2 \leq 1$, $1/2 < s_3 \leq 2$ i $s_4 + s_2 > s_3$

$$|\varphi_{x,0}^{\;j}| \leq \frac{C}{\sqrt{h\tau}}\left(h^{s_4-1}\,|u|_{(s_4,0),e_{ij}} + h^{s_2-1}\tau^{s_3}\,|u|_{(s_2,s_3),e_{ij}}\right). \tag{7.15}$$

Sumiranjem po mreži dobijamo

$$\|z_1\|_{h\tau} \leq C\left(h^{s_2-1}\tau^{s_3}\,|u|_{(s_2,s_3),Q} + h^{s_1-1}\,|u|_{(s_1,0),Q} + h^{s_4-1}\,|u|_{(s_4,0),Q_h}\right) \tag{7.16}$$

gde je $Q_h = (0,2h)\times(0,T)\cup(1-2h,1)\times(0,T)$, $1/2 < s_1 \leq 3$, $1/2 < s_2 \leq 1$, $1/2 < s_3 \leq 2$, $1/2 < s_4 \leq 2$, $s_1 + s_2 > s_3$ i $s_4 + s_2 > s_3$.

Za $s_1 \leq 2$ možemo uzeti $s_4 = s_1$ pa nema gubitka u oceni brzine konvergencije. Za $2 < s_1 \leq 3$ bez drugih pretpostavki možemo uzeti $s_4 = 2$ i iskoristiti prigranične ocene [42] po kojima je

$$|u|_{(2,0),Q_h} \leq C(h, s_1 - 2)\bigl(\,|u|_{(2,0),Q} + |u|_{(s,0),Q}\bigr)$$

gde je

$$C(h,\varepsilon) = \begin{cases} Ch^{\varepsilon}, & 0 \leq \varepsilon < 1/2\,, \\ Ch^{1/2}|\ln h|, & \varepsilon = 1/2\,, \\ Ch^{1/2}, & \varepsilon > 1/2\,. \end{cases}$$

U slučaju da neparno produženje $\bar{u}$ rešenja u preko bočnih granica čuva glatkost, tj. ako je $|\bar{u}|_{(s,0),\bar{Q}} \leq C\,|u|_{(s,0),Q}$, tada je zbog neparnosti produženja $u(0,t) = T_x^2\bar{u}(o,t)$ pa će funkcional $\varphi_{x,0}^{\;j}$ imati istu reprezentaciju kao i u unutrašnjosti mreže. Pošto za njega važi tada bolja ocena, važiće (7.16) bez trećeg člana.

Prethodno navedene ocene direktno vode sledećim rezultatima.

TEOREMA 7.12. *Neka rešenje zadatka (2.1)* $u \in H^{s,s/2}(Q)$, $s > 1.5$.

(i) Ako je $C_1\tau \leq h \leq C_2\tau$ *i* $\delta > 0$ *priozvoljno malo tada je*

$$\begin{aligned} \|\widetilde{T}_x^2 u - v_1\|_{h\tau} &= O(h^{1.5})\,, && 4 \leq s\,, \\ \|\widetilde{T}_x^2 u - v_1\|_{h\tau} &= O(h^{(s-1)/2})\,, && 2 < s \leq 4\,, \\ \|\widetilde{T}_x^2 u - v_1\|_{h\tau} &= O(h^{s-1.5-\delta})\,, && 1.5 < s \leq 2\,. \end{aligned}$$

Ako, dodatno, neparno produženje $\bar{u} \in H^{s,s/2}(\bar{Q})$ *tada je i*

$$\|\widetilde{T}_x^2 u - v_1\|_{h\tau} = O(h^{(s-1)/2}), \quad 2 < s \le 5 .$$

(ii) Ako je $C_1\tau \le h^2 \le C_2\tau$ *tada je*

$$\begin{aligned} \|\widetilde{T}_x^2 u - v_1\|_{h\tau} &= O(h^{1.5}), && 2.5 < s , \\ \|\widetilde{T}_x^2 u - v_1\|_{h\tau} &= O(h^{1.5} \ln |h|), && s = 2.5 , \\ \|\widetilde{T}_x^2 u - v_1\|_{h\tau} &= O(h^{s-1}), && 1.5 < s < 2.5 . \end{aligned}$$

Ako, dodatno, neparno produženje $\bar{u} \in H^{s,s/2}(\bar{Q})$ *tada je i*

$$\|\widetilde{T}_x^2 u - v_1\|_{h\tau} = O(h^{s-1}), \quad 1.5 < s \le 3 .$$

TEOREMA 7.13. *Neka rešenje zadatka (2.1)* $u \in H^{s,s}(Q)$, $s > 1$.
(i) Ako je $C_1\tau \le h \le C_2\tau$ *tada je*

$$\begin{aligned} \|\widetilde{T}_x^2 u - v_1\|_{h\tau} &= O(h^{1.5}), && 2.5 < s , \\ \|\widetilde{T}_x^2 u - v_1\|_{h\tau} &= O(h^{1.5 \ln |h|}), && s = 2.5 , \\ \|\widetilde{T}_x^2 u - v_1\|_{h\tau} &= O(h^{s-1}), && 1 < s < 2.5 . \end{aligned}$$

Ako, dodatno, neparno produženje $\bar{u} \in H^{s,s}(\bar{Q})$ *tada je i*

$$\|\widetilde{T}_x^2 u - v_1\|_{h\tau} = O(h^{s-1}), \quad 1 < s \le 3 .$$

(ii) Ako je $C_1\tau \le h^2 \le C_2\tau$ *tada je*

$$\begin{aligned} \|\widetilde{T}_x^2 u - v_1\|_{h\tau} &= O(h^{1.5}), && 2.5 < s , \\ \|\widetilde{T}_x^2 u - v_1\|_{h\tau} &= O(h^{s-1}), && 1 < s < 2.5 . \end{aligned}$$

Ako, dodatno, neparno produženje $\bar{u} \in H^{s,s}(\bar{Q})$ *tada je i*

$$\|\widetilde{T}_x^2 u - v_1\|_{h\tau} = O(h^{s-1}), \quad 1 < s \le 3 .$$

Ovim je završeno ispitivanje brzine konvergencije za simetričnu diferencijsku shemu sa težinom $\sigma = \frac{1}{2}$.

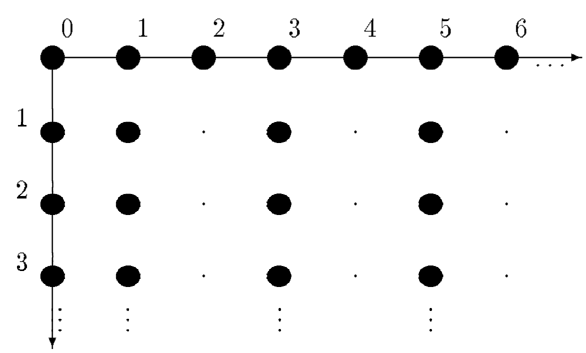
Dodatak : Vrednosti nekih funkcionala

Za svaki od narednih funkcionala, na dijagramu su crnim kružićem označeni oni multiindeksi (i,j) za koje se funkcional anulira na funkcijama $u(x,t)=x^it^j$. Belim kružićima su označeni oni multiindeksi za koje se funkcional anulira samo za neke posebne vrednosti slobodnog parametra. Tri tačkice označavaju da se funkcional anulira za sve multiindekse u tom smeru. Takođe su date i izračunate vrednosti funkcionala.

1

$$\varphi_{x\bar{x}} = \frac{1}{h^2}\left(\int_{-1}^{0}[\,u'(-1,s)-2u'(0,s)+u'(1,s)\,]\,ds - \right.$$
$$\left. -\,[\,u'(-1,0)-2u'(0,0)+u'(1,0)\,]\right)$$

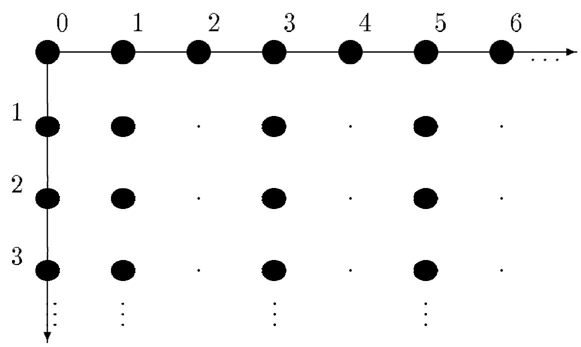
$$\varphi_{x\bar{x}}(1)=0 \qquad\qquad \varphi_{x\bar{x}}(t^j)=0\,, \qquad j>0$$
$$\varphi_{x\bar{x}}(x^i)=0\,,\quad i>0 \qquad \varphi_{x\bar{x}}(x^it^j)=\frac{1+(-1)^i}{h^2}\cdot\frac{(-1)^j}{j+1}\,,\quad i,j>0$$



2
$$\psi_{\bar t} = \frac{1}{\tau}\left([\, u'(0,0) - u'(0,-1)\,] - \int_{-1}^{1} (1-|s|)[\, u'(s,0) - u'(s,-1)\,]\, ds \right)$$

$$\psi_{\bar t}(1) = 0 \qquad \psi_{\bar t}(t^j) = 0\,, \quad j>0$$

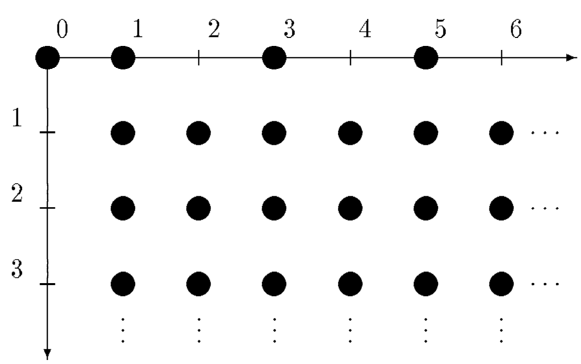
$$\psi_{\bar t}(x^i) = 0\,, \quad i>0 \qquad \psi_{\bar t}(x^i t^j) = \frac{1+(-1)^i}{(i+1)(i+2)} \cdot \frac{(-1)^{j+1}}{\tau}\,, \quad i,j>0$$



3
$$\psi = \int_{-1}^{0} u'(0,s)\, ds - \int_{-1}^{1} (1-|s|) u'(s,0)\, ds$$

$$\psi(1) = 0 \qquad \psi(t^j) = \frac{(-1)^j}{j+1}\,, \quad j>0$$

$$\psi(x^i) = \frac{1+(-1)^i}{(i+1)(i+2)}\,, \quad i>0 \qquad \psi(x^i t^j) = 0\,, \quad i,j>0$$

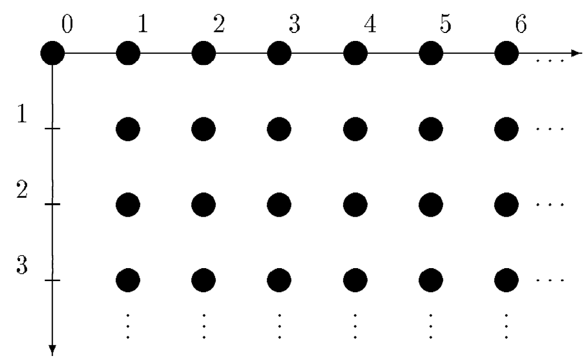


4

$$\varphi = \int_{-1}^{0} u'(0,s)\,ds - u'(0,0)$$

$$\varphi(1) = 0 \qquad \varphi(t^j) = \frac{(-1)^j}{j+1}\,, \quad j > 0$$

$$\varphi(x^i) = 0\,, \quad i > 0 \qquad \varphi(x^i t^j) = 0\,, \quad i,j > 0$$

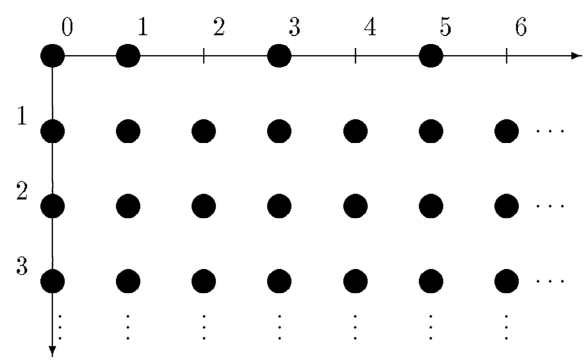


5

$$\psi = u'(0,0) - \int_{-1}^{1} (1-|s|)u'(s,0)\,ds$$

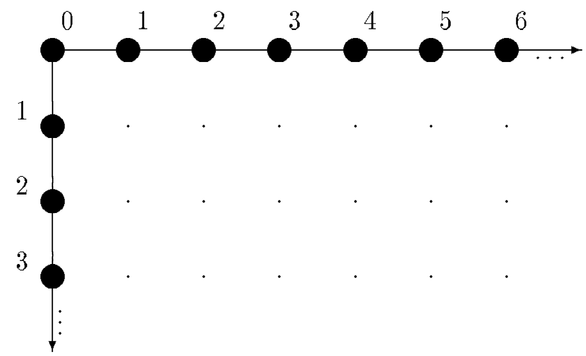
$$\psi(1) = 0 \qquad \psi(t^j) = 0\,, \quad j > 0$$

$$\psi(x^i) = \frac{1+(-1)^i}{(i+1)(i+2)}\,, \quad i > 0 \qquad \psi(x^i t^j) = 0\,, \quad i,j > 0$$



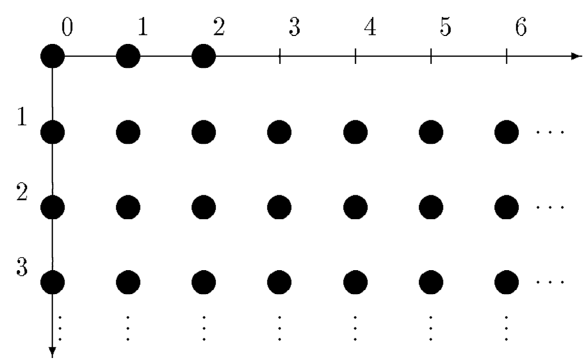
6
$$\varphi_x = \frac{1}{h}\left(\int_{-1}^{0}[\,u'(1,s) - u'(0,s)\,]\,ds - [\,u'(1,0) - u'(0,0)\,]\right)$$

$$\begin{aligned} &\varphi_x(1) = 0 & &\varphi_x(t^j) = 0\,, & &j > 0 \\ &\varphi_x(x^i) = 0\,, \quad i > 0 & &\varphi_x(x^i t^j) = \frac{1}{h}\cdot\frac{(-1)^j}{j+1}\,, & &i,j > 0 \end{aligned}$$



7
$$\psi_x = \frac{1}{h}\left([\,u'(1,0) - u'(0,0)\,] - \int_{-1}^{1}(1-|s|)[\,u'(1+s,0) - u'(s,0)\,]\,ds\right)$$

$$\begin{aligned} &\psi_x(1) = 0 & & \\ &\psi_x(x) = 0 & &\psi_x(x^i) = \frac{1}{h}\left(1 - \frac{2^{i+2} - (-1)^i - 3}{(i+1)(i+2)}\right), & &i > 2 \\ &\psi_x(x^2) = 0 & &\psi_x(x^i t^j) = 0\,, & &j > 0 \end{aligned}$$

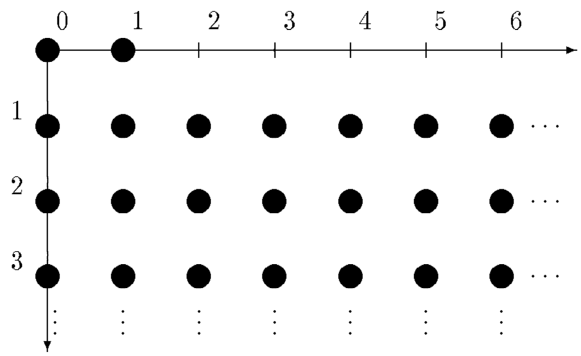


8

$$\psi_x = \frac{1}{h}\left(u'(1,0) - \int_{-1}^{1}(1-|s|)u'(1+s,0)\,ds\right)$$

$$\psi_x(1) = 0 \qquad \psi_x(x^i) = \frac{1}{h}\left(1 - \frac{2^{i+2}-2}{(i+1)(i+2)}\right), \quad i > 1$$

$$\psi_x(x) = 0 \qquad \psi_x(x^i t^j) = 0\,, \quad j > 0$$



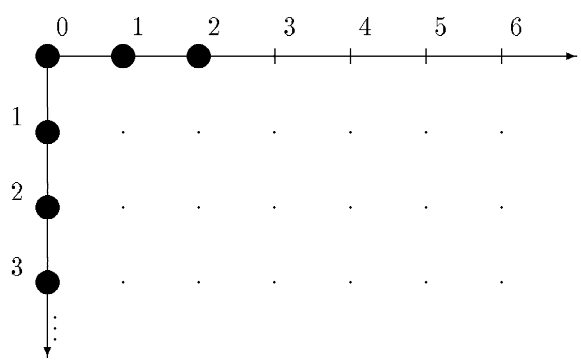
9

$$\psi_x = \frac{1}{h}\left(\int_{-1}^{0}[\,u'(1,s)-u'(0,s)\,]\,ds - \int_{-1}^{1}(1-|s|)[\,u'(1+s,0)-u'(s,0)\,]\,ds\right)$$

$$\psi_x(1) = 0$$

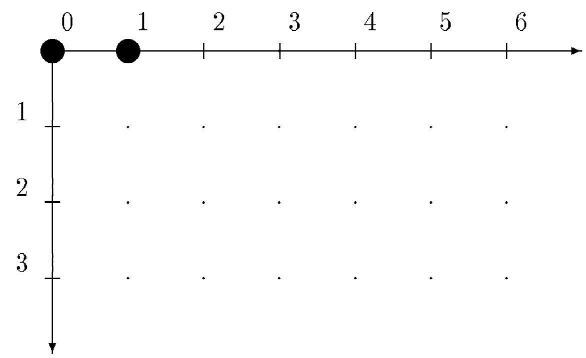
$$\psi_x(x^i) = 0\,, \quad i \le 2 \qquad \psi_x(t^j) = 0\,, \quad j > 0$$

$$\psi_x(x^i) = \frac{1}{h}\left(1 - \frac{2^{i+2}-(-1)^i-3}{(i+1)(i+2)}\right), \quad i > 2 \qquad \psi_x(x^i t^j) = \frac{(-1)^j}{h(j+1)}\,, \quad i,j > 0$$



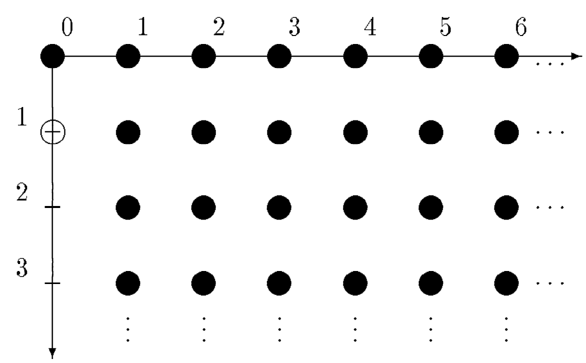
10
$$\psi_x = \frac{1}{h}\left(\int_{-1}^{0} u'(1,s)\,ds - \int_{-1}^{1}(1-|s|)u'(1+s,0)\,ds\right)$$

$$\psi_x(1) = 0$$
$$\psi_x(x) = 0$$
$$\psi_x(x^i) = \frac{1}{h}\left(1 - \frac{2^{i+2}-2}{(i+1)(i+2)}\right), \quad i > 1$$
$$\psi_x(t^j) = \frac{1}{h}, \qquad j > 0$$
$$\psi_x(x^i t^j) = \frac{(-1)^j}{h(j+1)}, \quad i,j > 0$$



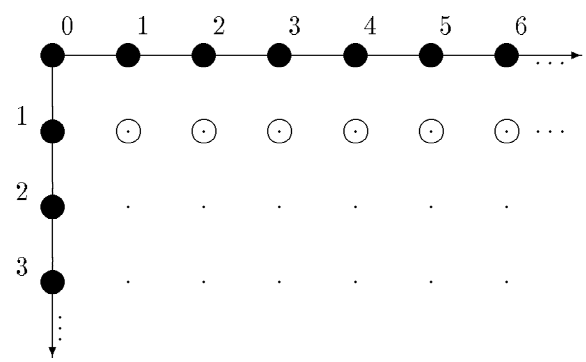
11
$$\varphi = \int_{-1}^{0} u'(0,s)\,ds - \sigma u'(0,0) - (1-\sigma)u'(0,-1)$$

$$\varphi(1) = 0$$
$$\varphi(x^i) = 0, \quad i > 0$$
$$\varphi(t^j) = (-1)^j\left(\frac{1}{j+1} - (1-\sigma)\right), \quad j > 0$$
$$\varphi(x^i t^j) = 0, \qquad i,j > 0$$



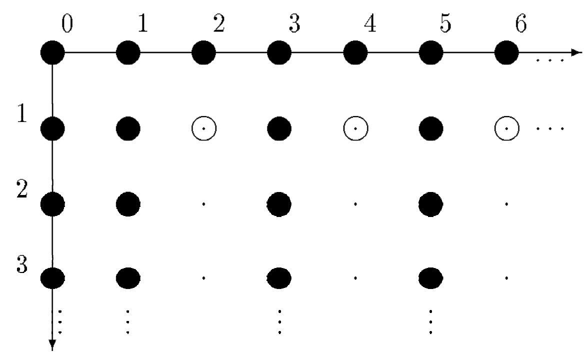
12 $$\varphi_x = \frac{1}{h}\Big(\int_{-1}^{0}[\,u'(1,s)-u'(0,s)\,]\,ds - \\ -\sigma[\,u'(1,0)-u'(0,0)\,]-(1-\sigma)[\,u'(1,-1)-u'(0,-1)\,]\Big)$$

$$\varphi_x(1)=0 \qquad \varphi_x(t^j)=0\,, \qquad j>0$$
$$\varphi_x(x^i)=0\,,\quad i>0 \qquad \varphi_x(x^it^j)=\frac{(-1)^j}{h^2}\big(\frac{1}{j+1}-(1-\sigma)\big)\,,\quad i,j>0$$



13 $$\varphi_{x\bar{x}} = \frac{1}{h^2}\Big(\int_{-1}^{0}[\,u'(-1,s)-2u'(0,s)+u'(1,s)\,]\,ds - \\ -\sigma[\,u'(-1,0)-2u'(0,0)+u'(1,0)\,] - \\ -(1-\sigma)[\,u'(-1,-1)-2u'(0,-1)+u'(1,-1)\,]\Big)$$

$$\varphi_{x\bar{x}}(1)=0 \qquad \varphi_{x\bar{x}}(xt^j)=0\,, \qquad j>0$$
$$\varphi_{x\bar{x}}(x^i)=0\,,\quad i>0 \qquad \varphi_{x\bar{x}}(x^it^j)=\frac{(1+(-1)^i)(-1)^j}{h^2}\big(\frac{1}{j+1}-(1-\sigma)\big)\,,\quad i,j>0$$
$$\varphi_{x\bar{x}}(t^j)=0\,,\quad j>0$$



14

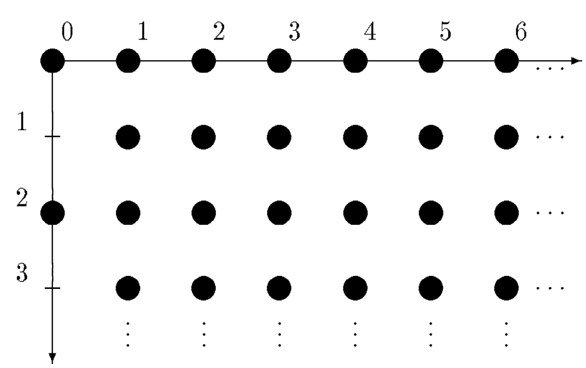
$$\varphi = (T_{\bar t}\alpha(t_j) - T_{\bar t}\alpha(t_{j-1})) = \int_0^1 \alpha'(s)\,ds - \int_{-1}^0 \alpha'(s)\,ds$$

$$\begin{aligned} \varphi(1) &= 0 \\ \varphi(t^j) &= \frac{1-(-1)^j}{j+1}\,, \quad j>0 \end{aligned}$$

15

$$\varphi = (1-\sigma)\left(\int_0^1 u'(0,s)\,ds - \int_{-1}^0 u'(0,s)\,ds\right)$$

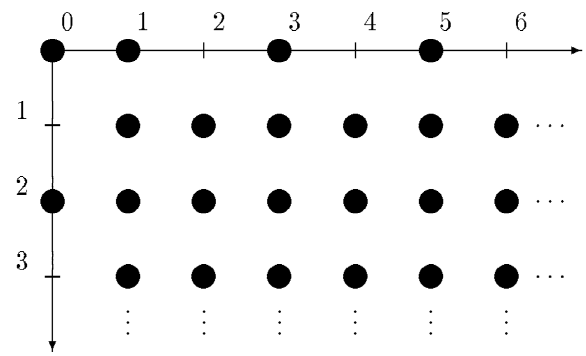
$$\begin{aligned} \varphi(1) &= 0 \\ \varphi(x^i) &= 0\,, \quad i>0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \varphi(t^j) &= (1-\sigma)\frac{1-(-1)^j}{j+1}\,, \quad j>0 \\ \varphi(x^i t^j) &= 0\,, \qquad i,j>0 \end{aligned}$$



16

$$\varphi = (1-\sigma)\Big(\int_0^1 u'(0,s)\,ds - \int_{-1}^1 (1-|s|)u'(s,0)\,ds\Big)$$

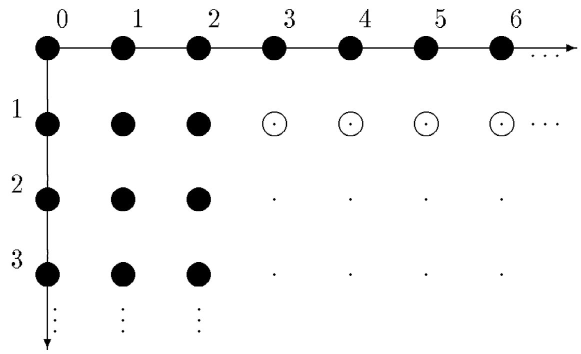
$$\begin{aligned} \varphi(1) &= 0 \\ \varphi(x^i t^j) &= 0\,, \quad i,j>0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \varphi(x^i) &= (1-\sigma)\frac{1+(-1)^i}{(i+1)(i+2)}\,, \quad i>0 \\ \varphi(t^j) &= (1-\sigma)\frac{1-(-1)^j}{j+1}\,, \quad j>0 \end{aligned}$$



17

$$\begin{aligned} \varphi_{x\bar{x}x} = \frac{1}{h^3}\Big(&\int_{-1}^0 [\,u'(2,s) - 3u'(1,s) + 3u'(0,s) - u'(-1,s)\,]\,ds - \\ &- \sigma[\,u'(2,0) - 3u'(1,0) + 3u'(0,0) - u'(-1,0)\,] - \\ &- (1-\sigma)[\,u'(2,-1) - 3u'(1,-1) + 3u'(0,-1) - u'(-1,-1)\,]\Big) \end{aligned}$$

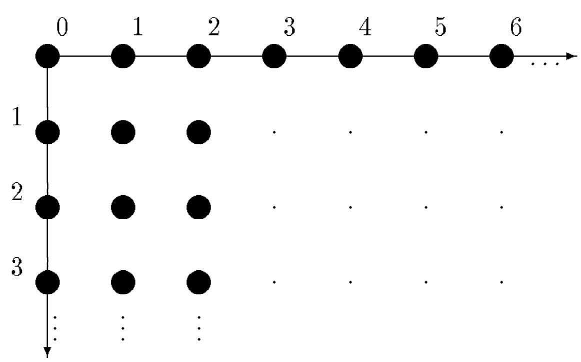
$$\begin{aligned} \varphi_{x\bar{x}x}(1) &= 0 \\ \varphi_{x\bar{x}x}(x^i) &= 0\,, \quad i>0 \\ \varphi_{x\bar{x}x}(x^i t^j) &= 0\,, \quad i=0,1,2 \quad j>0 \\ \varphi_{x\bar{x}x}(x^i t^j) &= \frac{(2^i - 3 - (-1)^i)(-1)^j}{h^3}\Big(\frac{1}{j+1} - (1-\sigma)\Big)\,, \quad i,j>0 \end{aligned}$$



18

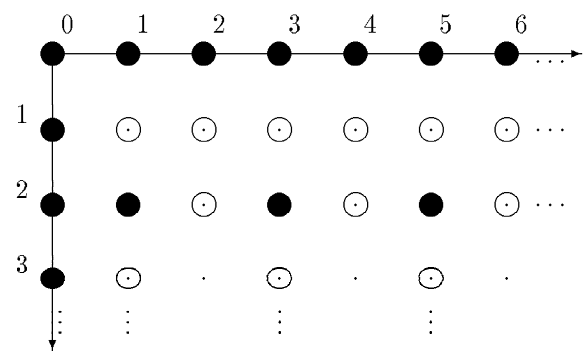
$$\psi_{\bar{t}x} = \frac{1}{h\tau}\Big([\,u'(1,0) - u'(1,-1) - u'(0,0) + u'(0,-1)\,] -$$
$$- \int_{-1}^{1} (1-|s|)[\,u'(1+s,0) - u'(1+s,-1) - u'(s,0) + u'(s,-1)\,]\,ds \Big)$$

$$\begin{aligned}
\psi_{\bar{t}x}(1) &= 0 \\
\psi_{\bar{t}x}(x^i) &= 0 \quad i > 0 \\
\psi_{\bar{t}x}(t^j) &= 0 \quad j > 0 \\
\psi_{\bar{t}x}(x^i t^j) &= \frac{(-1)^j}{h\tau}\left(\frac{2^{i+2} - 3 - (-1)^i}{(i+1)(i+2)} - 1 \right), \quad i > 0,\ j > 0 \\
\psi_{\bar{t}x}(x^i t^j) &= 0\,, \quad i = 1,2 \quad j > 0
\end{aligned}$$



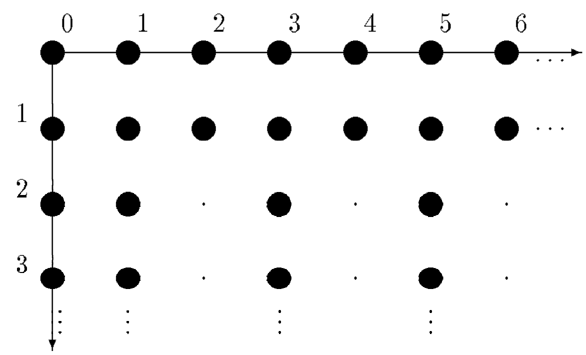
19
$$\varphi_{x\bar{x}\bar{t}} = \frac{1}{h^2\tau}\Bigg(\int_{-1}^{0}[\,u'(-1,s) - 2u'(0,s) + u'(1,s) -$$
$$- u'(-1,s-1) + 2u'(0,s-1) - u'(1,s-1)\,]\,ds -$$
$$-\sigma[\,u'(-1,0) - 2u'(0,0) + u'(1,0)\,] - (1-2\sigma)[\,u'(-1,-1) - 2u'(0,-1) + u'(1,-1)\,] +$$
$$+ (1-\sigma)[\,u'(-1,-2) - 2u'(0,-2) + u'(1,-2)\,]\Bigg)$$

$$\varphi_{x\bar{x}\bar{t}}(1) = 0$$
$$\varphi_{x\bar{x}\bar{t}}(x^i) = 0\,, \quad i > 0$$
$$\varphi_{x\bar{x}\bar{t}}(t^j) = 0\,, \quad j > 0$$
$$\varphi_{x\bar{x}\bar{t}}(x^i t^j) = \frac{1}{h^2\tau}\Bigg(\frac{((-1)^i + 1)(-1)^j}{j+1}2(1-2^j) -$$
$$- (1-2\sigma)((-1)^i + (-1)^j) + (1-\sigma)(-2)^j((-1)^i + 1)\Bigg)\,, \quad i,j > 0$$



20
$$\psi_{\bar{t}\bar{t}} = \frac{1}{\tau^2}\Bigg([\,u'(0,0) - 2u'(0,-1) + u'(0,-2)\,] -$$
$$- \int_{-1}^{1}(1-|s|)[\,u'(s,0) - 2u'(s,-1) + u'(s,-2)\,]\,ds\Bigg)$$

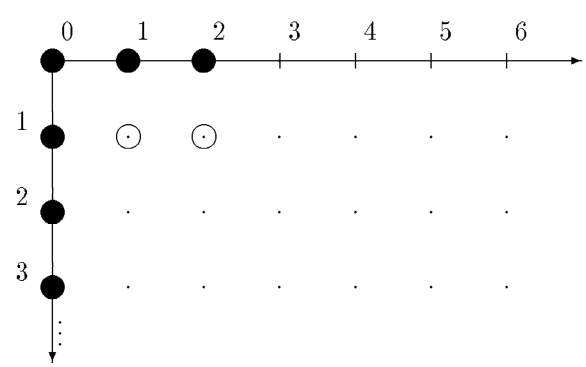
$$\psi_{\bar{t}\bar{t}}(1) = 0$$
$$\psi_{\bar{t}\bar{t}}(x^i) = 0 \quad i > 0$$
$$\psi_{\bar{t}\bar{t}}(t^j) = 0 \quad j > 0$$
$$\psi_{\bar{t}\bar{t}}(x^i t^j) = \frac{(-1)^j}{\tau^2}\frac{(-1)^i + 1}{(i+1)(i+2)}(2^j - 2)\,, \quad i > 0,\ j > 0$$



21

$$\varphi_x = \frac{1}{h}\biggl(\int_{-1}^{0}[\,u'(1,s) - u'(0,s)\,]\,ds - \\ - \sigma\int_{-1}^{1}(1-|s|)[\,u'(1+s,0) - u'(s,0)\,]\,ds - \\ - (1-\sigma)\int_{-1}^{1}(1-|s|)[\,u'(1+s,-1) - u'(s,-1)\,]\,ds\biggr)$$

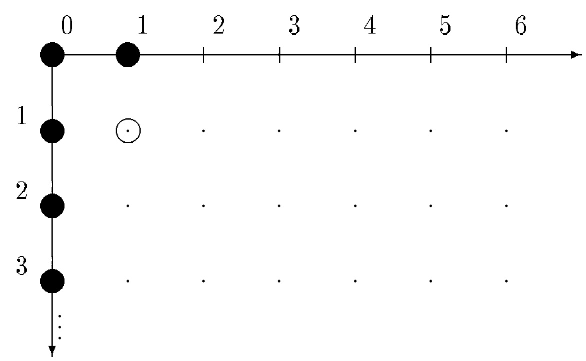
$$\begin{aligned} \varphi_x(1) &= 0 \\ \varphi_x(t^j) &= 0, \quad j > 0 \\ \varphi_x(x^i) &= \frac{1}{h}\biggl(1 - \frac{2^{i+2} - (-1)^i - 3}{(i+1)(i+2)}\biggr), \quad i > 0 \\ \varphi_x(x^i t^j) &= \frac{(-1)^j}{h}\biggl(\frac{1}{j+1} - (1-\sigma)\frac{3 + (-1)^i - 2^{i+2}}{(i+1)(i+2)}\biggr), \quad i,j > 0 \end{aligned}$$



22

$$\varphi_x = \frac{1}{h}\left(\int_{-1}^{0}[\,u'(1,s)-u'(0,s)\,]\,ds - \right.$$
$$- \int_{-1}^{1}(1-|s|)[\,\sigma u'(1+s,0)+(1-\sigma)u'(1+s,0)\,]\,ds +$$
$$\left. + \sigma u'(0,0)+(1-\sigma)u'(0,-1)\right)$$

$$\begin{aligned}
\varphi_x(1) &= 0\\
\varphi_x(t^j) &= 0, \quad j>0\\
\varphi_x(x^i) &= \frac{1}{h}\left(1-\frac{2^{i+2}-2}{(i+1)(i+2)}\right), \quad i>0\\
\varphi_x(x^i t^j) &= \frac{(-1)^j}{h}\left(\frac{1}{j+1}-(1-\sigma)\frac{2^{i+2}-2}{(i+1)(i+2)}\right), \quad i,j>0
\end{aligned}$$



BIBLIOGRAFIJA

1. R.A. Adams, *Sobolev spaces*, Academic Press, New York, 1975.
2. J. Bergh, J. Löfström, *Interpolation spaces*, Springer–Verlag, Berlin, 1976.
3. О.В. Бесов, В.П. Ильин, С.М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, Наука, Москва, 1975.
4. J.H. Bramble, S.R. Hilbert, *Estimation of linear functionals on Sobolev spaces with application to Fourier transform and spline interpolation*, SIAM J. Numer. Anal. **7** (1970), 112–124.
5. J.H. Bramble, S.R. Hilbert, *Bounds for a class of linear functionals with application to Hermite interpolation*, Numer. Math. **16** (1971), 362–369.
6. P. Brenner, V. Thomée, L.B. Wahlbin, *Besov spaces and applications to difference methods for initial value problems*, Lecture notes in mathematics 434, Springer–Verlag, Berlin, 1975.
7. P. Ciarlet, *The finite element methods for elliptic problems*, North-Holland, Amsterdam, 1978.
8. J. Crank, P. Nicolson, *A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat–conduction type*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **43** (1947), 50–67.
9. M. Dražić, *Convergence rates of difference approximations to weak solutions of the heat transfer equation*, Oxford University Computing Laboratory, Numerical Analysis Group 86/22, 1986.
10. T. Dupont, R. Scott, *Polynomial approximation of functions in Sobolev spaces*, Math. Comput. **34** (1980), 441–463.
11. K.N. Godev, R.D. Lazarov, *Error estimates of finite-difference schemes in L_p–metrics for parabolic boundary value problems*, Comptes rendus Acad. Bulgar. Sci. **37** (1984), 565–568.
12. К.Н. Годев, Р.Д. Лазаров, В.Л. Макаров, А.А. Самарский, *Однородные разностные схемы для одномерных задач с обобщенными решениями*, Мат. сборник **131** (1986), 159–184.
13. P. Grisward, *Commutativité de deux foncteurs d'interpolation et applications*, J. Math. Pures Appl. **45** (1966), 143–290.
14. W. Hackbusch, *Optimal $H^{p,p/2}$ error estimates for a parabolic Galerkin method*, SIAM J. Numer. Anal. **18** (1981), 681–692.
15. W. Hackbusch, *Multi–grid methods and applications*, Springer–Verlag, Berlin, 1985.

16. L.D. Ivanović, B.S. Jovanović, *Approximation and regularization of control problem governed by parabolic equation*, In: G.V. Milovanović (ed.), Numerical methods and approximation theory, Proc. Conf. held in Niš, University of Niš, Niš, 1984, pp. 161–166.

17. L.D. Ivanović, B.S. Jovanović, E.E. Süli, *On the rate of convergence of difference schemes for the heat transfer equation on the solutions from* $W_2^{s,s/2}$, Mat. vesnik **36** (1984), 206–212.

18. Б.С. Йованович, *О сходимости проекционно–разностных схем для уравнения теплопроводности*, Mat. vesnik **6(19)(34)** (1982), 279–292.

19. Б.С. Йованович, *О сходимости дискретных решений к обобщенным решениям краевых задач*, В. кн.: Н.С. Бахвалов, Ю.А. Кузнецов (изд.), Вариационно–разностные методы в математической физике, Труды конф. пров. в Москве 1983, ОВМ АН СССР, Москва 1984, 120–129.

20. B.S. Jovanović, *Jedno uopštenje leme Bramble–Hilberta*, Zbornik radova PMF u Kragujevcu, 8 (1987), pp. 81–87.

21. Б.С. Йованович, *О сходимости дискретных методов для нестационарных задач*, Вычисл. процессы сист. **6** (1988), 145–151.

22. B.S. Jovanović, *On the convergence of finite–difference schemes for parabolic equations with variable coefficients*, Numer. Math. **54** (1989), 395–404.

23. B.S. Jovanović, *Numeričke metode rešavanja parcijalnih diferencijalnih jednačina*, Savremena računska tehnika i njena primena 8, Mat. Institut, Beograd, 1989.

24. B.S. Jovanović, *Convergence of finite–difference schemes for parabolic equations with variable coefficients*, Z. Angew. Math. Mech. **71** (1991), 647–650.

25. B. Jovanović, *Parcijalne jednačine*, BS Procesor, Matematički fakultet, Beograd, 1993.

26. B.S. Jovanović, *On the convergence of a multicomponent alternating direction difference scheme*, Publ. Inst. Math. **56** (1994), 129–134.

27. B.S. Jovanović, *On the convergence of a multicomponent alternating direction method*, ZAMM **75, S II** (1995), 687–688.

28. B.S. Jovanović, L.D. Ivanović, E.E. Süli, *On the convergence rate of difference schemes for the heat transfer equation*, In: B. Vrdoljak (ed.), IV Conference on applied mathematics, Proc. Conf. held in Split 1984, University of Split, Split, 1985, pp. 41–44.

29. H.O. Kreiss, V. Thomée, O. Widlund, *Smoothing of initial data and rates of convergence for parabolic difference equations*, Comm. Pure Appl. Math. **23** (1970), 241–259.

30. A. Kufner, O. John, S. Fučik, *Function spaces*, Noordhoff Inter. Publ., Leyden, 1977.

31. О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, Москва, 1967.

32. Р.Д. Лазаров, *К вопросу о сходимости разностных схем для обобщенных решений уравнения Пуассона*, Дифф. уравнения **17** (1981), 1285–1294.

33. Р.Д. Лазаров, *Оценка сходимости разностных схем для параболических уравнений на обобщенных решениях*, Доклады Болгарской академии наук **35** (1982), 7–10.

34. Р.Д. Лазаров, *Сходимость разностных схем для параболических уравнений с обобщенными решениями*, Pliska Stud. Math. Bulgar. **5** (1983), 51–59.

35. Р.Д. Лазаров, В.Л. Макаров, А.А. Самарский, *Применение точных разностных схем для построения у исследования разностных схем на обобщенных решениях*, Мат. сборник **117** (1982), 469–480.

36. W. Lick, *Improved difference approximations to the heat equation*, Int. J. Numer. Meth. Eng. **21** (1985), 1957–1969.

37. J.-L. Lions, E. Magenes, *Problemés aux limites non homogénes et applications*, Dunod, Paris, 1968.

38. Г.И. Марчук, *Методы вычислительной математики*, Наука, Новосибирск, 1973.

39. Г.И. Марчук, Б.Б. Шайдуров, *Повышение точности решений разностных схем*, Наука, Москва, 1979.

40. Ю.И. Мокин, *Сеточный аналог теоремы вложения для классов типа W*, ЖВМ и МФ **11** (1971), 1361–1373.

41. Ю.И. Мокин, *Продолжение сеточных функций с сохранением класа*, ЖВМ и МФ **12** (1972), 858–870.

42. Л.А. Оганесян, Л.А. Руховец, *Вариационно–разностные методы решения эллиптических уравнений*, Академия наук Армянской ССР, Ереван, 1979.

43. R. Ranacher, *Finite element solution of diffusion problems with irregular data*, Numer. Math. **43** (1984), 309–327.

44. R.D. Richtmyer, K.W. Morton, *Difference methods for initial–value problems*, Wiley–Interscience, New York, London, Sydney, 1967.

45. А.А. Самарский, *Введение в теорию разностных схем*, Наука, Москва, 1971.

46. А.А. Самарский, *Теория разностных схем*, Наука, Москва, 1977.

47. А.А. Самарский, Р.Д. Лазаров, В.Л. Макаров, *Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями*, Выцшая школа, Москва, 1987.

48. J.A. Scott, W.L. Seward, *Finite difference methods for parabolic problems with*

nonsmooth iniial data, Oxford University Computing Laboratory, Numerical Analysis Group 86/23, 1987.

49. E.E. Süli, B.S. Jovanović, L.D. Ivanović, *Finite difference approximations of generalized solutions*, Math. of Comput. **45** (1985), 319–327.

50. V. Thomée, L.W. Wahlbin, *Converge rates of parabolic difference schemes for non–smooth data*, Math. of Comp. **28** (1974), 1–13.

51. H. Triebel, *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*, Veb Deutcher Verlag der Wissenscaften, Berlin, 1978.

52. W. Weinelt, *Untersuchungen zur Konvergenzgeschwindigkeit bei Differenzenverfahren*, Zeitschrift der THK **20** (1978), 763–769.

53. В. Вайнельт, Р.Д. Лазаров, У. Штрайт, *О порядке сходимости разностных схем для слабых решений уравнения теплопроводности в анизотропной неоднородной среде*, Дифференциальные уравнения **20** (1984), 1144–1151.

54. А.А. Злотник, *Оценка скорости сходимости в L_2 проекционно–разностных схем для параболических уравнений*, ЖВМ и МФ **18** (1978), 1454–1465.

55. А.А. Злотник, *Оценка скорости сходимости в $V_2(Q_T)$ проекционно–разностных схем для параболических уравнений*, Вестник Москов. Унив. Сер. 15 Вычисл. Мат. Кибернет. **1** (1980), 27–35.