

UNIVERZITET U BEOGRADU
SAOBRAĆAJNI FAKULTET
RUDARSKO-GEOLOŠKI FAKULTET

**Dragoslav Kuzmanović, Nebojša Vasović, Srđan Kostić
Srboljub Simić, Igor Franović, Ines Grozdanović,
Kristina Todorović-Vasović, Biljana Ranković Plazinić**

UVOD U TEORIJU HAOSA

BEOGRAD
2013.

Dragoslav Kuzmanović, Nebojša Vasović, Srđan Kostić, Srboljub Simić, Igor Franović,
Ines Grozdanović, Kristina Todorović-Vasović, Biljana Ranković Plazinić
UVOD U TEORIJU HAOSA
I izdanje

Recenzenti:	akademik Aleksandar Ivić dr Nikola Burić dr Slobodan Prvanović
Za izdavača:	dekan SF, dr Branimir Stanić
Za suizdavača:	dekan RGF, dr Ivan Obradović
Glavni i odgovorni urednik SF:	dr Dragoslav Kuzmanović
Glavni i odgovorni urednik RGF:	dr Rudolf Tomanec
Lektor:	Jovanka Cvetković
Tehnički urednik:	Gordana Marjanović
Korice:	Predrag S. Zdravković
Izdavač:	Univerzitet u Beogradu – Saobraćajni fakultet, Vojvode Stepe 305, telefon: 3976–017, fax: 3096–704 http://www.sf.bg.ac.rs
Suizdavač:	Univerzitet u Beogradu – Rudarsko-geološki fakultet, Đušina 7, tel.: 3219–100, fax: 3235–539 http://www.rgf.bg.ac.rs/
Štampa:	SaTCIP (Scientific and Technical Center for Intellectual Property) LTD Vrnjačka Banja, Tržni centar Pijaca br. 101 Tel./fax: 036-622-454 http://www.satcip.com
Tiraž:	100 primeraka

ISBN 978–86–7395–317–5

Na osnovu odluke Uređivačkog odbora Saobraćajnog fakulteta Univerziteta u Beogradu broj 907/2 od 20. decembra 2013. godine, odobrava se za upotrebu u nastavi kao osnovni udžbenik

Izdavač zadržava sva prava. Reprodukција pojedinih delova ili celine ove publikacije nije dozvoljena.

Sadržaj

I	Teorijske osnove	5
1	Uvod	7
1.1	Poreklo i upotreba termina "haos"	9
1.2	Istorija razvoja haosa	10
1.3	Haotično ponašanje	12
1.4	Značaj nelinearnosti	15
1.5	Dinamički pogled na svet	18
2	Jednodimenzionalni sistemi	21
2.1	Uvod	21
2.2	Geometrijski pristup rešavanju	21
2.3	Kvalitativna analiza diferencijalnih jednačina	24
2.4	Fiksne tačke i stabilnost	25
2.5	Kratak istorijat teorije stabilnosti	25
2.6	Rast brojnosti populacije	26
2.7	Linearna analiza stabilnosti	28
2.8	Teorema o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja	29
2.9	Nemogućnost oscilacija	30
2.10	Potencijali	31
3	Bifurkacije u jednodimenzionalnim sistemima	33
3.1	Uvod	33
3.2	Sedlo-čvor bifurkacija	34
3.3	Transkritična bifurkacija	36
3.4	Vilasta bifurkacija	37
3.5	Kretanje perle po rotirajućem obruču	41

3.6	”Nesavršene” bifurkacije i katastrofe	48
3.7	Naježda insekata	52
3.7.1	Analiza fiksnih tačaka	53
3.7.2	Određivanje bifurkacionih krivih	54
4	Jednodimenzionalni sistemi na kružnici	57
4.1	Uvod	57
4.2	Uniformni oscilator	58
4.3	Neuniformni oscilator	59
4.3.1	Period oscilovanja	61
4.3.2	”Duhovi” i ”uska grla”	62
4.4	Klatno u otpornoj sredini	64
4.5	Svetlucanje svitaca	65
5	Dvodimenzionalni linearni sistemi	69
5.1	Definicije i primeri	69
5.1.1	Fizička interpretacija	71
5.1.2	Definicija stabilnosti	72
5.2	Klasifikacija linearnih sistema	73
5.2.1	Klasifikacija fiksnih tačaka	76
6	Nelinearni sistemi u ravni	81
6.1	Fazni portret	81
6.2	Egzistencija i jedinstvenost rešenja	83
6.3	Fiksne tačke i linearizacija	84
6.3.1	Linearizovani sistem	84
6.3.2	Klasifikacija fiksnih tačka	85
6.4	Lotka-Voltera model	87
6.5	Konzervativni sistemi	90
7	Granični ciklus	95
7.1	Uvod	95
7.1.1	Odbacivanje mogućnosti pojave zatvorene orbite	98
7.2	Poenkare-Bendiksonova teorema	100
7.3	Relaksacione oscilacije	103
7.4	Slabo nelinearni oscilatori	105
8	Bifurkacije u višedimenzionalnim sistemima	115
8.1	Uvod	115
8.2	Transkritične i vilaste bifurkacije	119

8.3	Hopfove bifurkacije	120
8.3.1	Natkritična Hopfova bifurkacija	120
8.3.2	Potkritična Hopfova bifurkacija	122
8.4	Oscilujuća hemijska reakcija	125
8.5	Globalne bifurkacije ciklusa	129
8.5.1	Bifurkacije sa beskonačnim periodom	130
8.5.2	Homoklinička bifurkacija	131
8.6	Spregnuti oscilatori i kvaziperiodičnost	133
8.6.1	Spregnuti sistemi	135
8.7	Poenkareova preslikavanja	137
9	Lorencove jednačine	143
9.1	Uvod	143
9.2	"Haotični" vodenični točak	144
9.2.1	Zakon održanja mase	147
9.2.2	Zakon promene momenta količine kretanja	149
9.2.3	Amplitudne jednačine	150
9.2.4	Fiksne tačke sistema	151
9.3	Neka svojstva Lorencovih jednačina	152
9.3.1	Fiksne tačke Lorencovog sistema	154
9.3.2	Linearna stabilnost koordinantog početka	155
9.3.3	Stabilnost fiksnih tačaka sistema C^+ i C^-	156
9.4	Haos na stranom atraktoru	158
9.4.1	Ljapunovljev eksponent	160
9.4.2	Kolmogorovljeva (K) entropija	162
9.4.3	Definisanje haosa	163
9.4.4	Definisanje atraktora i stranog atraktora	163
9.5	Istraživanje parametarskog prostora	167
9.6	Upotreba haosa za slanje tajnih poruka	169
9.6.1	Eksperiment	169
9.6.2	Dokaz sinhronizacije	171
10	Jednodimenzionalna preslikavanja	175
10.1	Uvod	175
10.2	Fiksne tačke i paukove mreže	176
10.2.1	Paukove mreže za jednodimenzionalna preslikavanja	177
10.3	Numerički pristup logističkom preslikavanju	177
10.4	Periodični prozori	181
10.4.1	Intermitentnost	183
10.5	Ljapunovljevi eksponenti	185

10.6	Univerzalnost i eksperimenti	186
10.6.1	Kvalitativna univerzalnost: U -niz	187
10.6.2	Kvantitativna univerzalnost	188
10.6.3	Reslerov sistem	189
10.7	Renormalizacija	190
10.7.1	Renormalizacija za "pešake"	194
11	Fraktali	197
11.1	Uvod	197
11.2	Kantorov skup	199
11.2.1	Kantorova funkcija	200
11.3	Pojam dimenzije i fraktalne dimenzije	202
11.3.1	Konstrukcija Mengerovog sundera	204
11.3.2	Konstrukcija trougla Sierpinskog	205
11.3.3	Zmajolika kriva	205
11.3.4	Opštiji Kantorovi skupovi	207
11.4	Dimenzija objekta	207
11.4.1	Tačkaste i korelacione dimenzije	208
11.5	Multifraktali	210
11.6	Slučajni fraktali	213
12	Strani atraktori	215
12.1	Uvod	215
12.1.1	Značaj disipacije	217
12.2	Enoovo preslikavanje	218
12.2.1	Biranje parametara	220
12.3	Reslerov sistem	222
12.4	Bistabilnost magnetno-elastičnog mehaničkog sistema	226
12.5	Oscilator sa "dve jame" pod dejstvom prinudne sile	227
12.5.1	Tranzijentni kaos	229
II	Primena	231
13	Modelovanje saobraćajnog toka	233
13.1	Uvod	233
13.2	Osnovna i praktična pitanja	235
13.2.1	Neka osnovna pitanja	235
13.2.2	Neka praktična pitanja	236
13.3	Klasifikacija modela saobraćajnog toka	237

13.4	Makroskopski modeli	237
13.5	Mikroskopski modeli	237
13.5.1	Modeli sleđenja vozila	238
13.5.2	Modeli ćelijskih automata (CA)	238
13.5.3	Kinetičko teorijski modeli	239
13.6	Mezoskopski modeli	239
13.6.1	Eksperimentalno-empirijsko-numerički pristup	239
13.7	Teorija drumskog saobraćaja zasnovana na dinamici fluida . .	240
13.8	Kinetička teorija u automobilskom saobraćaju	240
13.8.1	Prigožinov model	241
13.8.2	Teorija "praćenja vozila"	241
13.8.3	"Rešetka modeli" drumskog saobraćaja	247
13.8.4	Model Jukava-Kikući	248
13.8.5	Nagel-Šrekenbergov model ćelijskih automata, za saobraćajni tok na autoputu	249
13.9	Saobraćajna gužva izazvana fluktuacijom u kretanju vodećeg vozila	252
13.10	Efekti vremenskog kašnjenja u modelima saobraćajnog toka .	254
13.10.1	Poreklo vremenskog kašnjenja u saobraćajnoj dinamici	254
13.11	Koja je prava mera vremenskog kašnjenja u reakcijama vozača	257
13.12	Modeli saobraćajnog toka sa uključenim vremenskim kašnjenjem	258
13.12.1	Čendlerov model	258
13.12.2	Gazisovi modeli	259
13.12.3	Modeli optimalne brzine	259
13.13	Kontrola saobraćaja na osnovi modela optimalne brzine . . .	260
13.13.1	Dejvisovi modeli	261
13.14	Model inteligentnog vozača i model	261
13.15	Modeli praćenja više vozila	262
13.16	Pretpostavke i analiza matematičkih modela	263
13.17	Linearna analiza sa jednim kašnjenjem	264
13.17.1	Slučaj kada se N vozila kreću u kružnom toku	264
13.17.2	Slučaj $N = 2$	265
13.18	Modeli sa više kašnjenja	265
13.19	Kašnjenja koja zavise od vremena	266
13.20	Unapređenje stabilnosti saobraćaja praćenjem više vozila . . .	266
13.21	Zaključak	267

14 Nelinearni geodinamički procesi	269
14.1 Zemljotresi	270
14.1.1 Mehanizam nastanka zemljotresa	271
14.1.2 Baridž-Knopof model	274
14.1.3 Zakoni trenja zavisni od brzine i stanja	279
14.1.4 Dinamika kretanja bloka u BK modelu	283
14.1.5 Madariaga sistem	288
14.1.6 Sistem Bekera	294
14.2 Klizišta	299
14.2.1 Nelinearni dinamički model	303
14.2.2 Polinomijalni model	310
14.2.3 Model katastrofe	312
15 Primena metoda teorije nelinearne dinamike	321
15.1 Uvod	321
15.2 Neuronski sistemi kao primer kompleksnih sistema	322
15.3 Glavni elementi teorije sinhronizacije	327
15.3.1 Sinhronizacija dva slabo kuplovana fazna oscilatora	330
15.3.2 Sinhronizacija na populaciji globalno kuplovanih faznih oscilatora	334
15.3.3 Pogled na sinhronizaciju haotičnih oscilatora	337
15.3.4 Stabilnost kompletno sinhronizovanog stanja na kompleksnim mrežama	339
15.4 Uloga i značaj sinhronizacije na neuronskim sistemima	342
15.5 Fizičko modelovanje lokalne i kolektivne dinamike	346
15.5.1 Fiziološka osnova dinamike neurona	347
15.5.2 Modeli neurona iz ugla teorije nelinearne dinamike	348
15.5.3 Šum i kašnjenje u interakcijama: poreklo i uloga u modelima dinamike neuronskih sistema	353
15.5.4 Pojam ekscitabilnosti	355
15.5.5 Klasifikacija ekscitabilnih sistema	356
15.5.6 Ekscitabilnost i šum: pojava rezonantnih fenomena	357
15.5.7 Fithugh-Nagumo model: primer ekscitabilne dinamike tipa II	358
15.5.8 Dinamika populacije FHN neurona pod dejstvom šuma i sinaptičkog kašnjenja: paradigma kolektivnog ponašanja makroskopskih neuronskih sistema	362
15.5.9 Pojam stohastičke bifurkacije	364
15.5.10 MF pretpostavke i izvođenje MF modela	366

15.5.11 Spontano klasterovanje kao fenomen samoorganizacije u populaciji FHN neurona pod dejstvom šuma i sinaptičkog kašnjenja	370
III Dodaci	373
16 Fazni portreti dvodimenzionalnih linearnih sistema	375
16.1 Linearni sistemi drugog reda	375
16.1.1 Konstrukcija rešenja linearnih sistema	376
16.1.2 Normalna forma linearnih sistema	381
16.1.3 Klasifikacija stacionarnih tačaka linearnih sistema . . .	385
17 Definicije i dokazi teorema	393
17.1 Dokaz teoreme o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja	393
17.2 Definicija invarijante	398
17.3 Hartman-Grobmanova teorema	399
17.4 Neki osnovni pojmovi iz topologije	401
18 Poznatiji haotični sistemi	403
18.1 Neinvertibilna preslikavanja	403
18.1.1 Logističko preslikavanje	403
18.1.2 Sinusno preslikavanje	403
18.1.3 "Šator" preslikavanje	403
18.1.4 Linearni kongruentni generator	404
18.1.5 Kubno preslikavanje	404
18.1.6 Rikerov populacioni model	404
18.1.7 Gausovo preslikavanje	404
18.1.8 "Šiljato" preslikavanje	404
18.1.9 Gausovo "belo" haotično preslikavanje	405
18.1.10 Pinčersovo preslikavanje	405
18.1.11 Spensovo preslikavanje	405
18.1.12 "Sinusno-kružno" preslikavanje	405
18.2 Disipativna preslikavanja	405
18.2.1 Enoovo preslikavanje	405
18.2.2 Lozievo preslikavanje	406
18.2.3 Logističko preslikavanje sa kašnjenjem	406
18.2.4 Zvonasto preslikavanje	406
18.2.5 Burgersovo preslikavanje	406
18.2.6 Holmsovo preslikavanje	407

18.2.7	Kaplan-Jorkovo preslikavanje	407
18.2.8	Disipativno standardno preslikavanje	407
18.2.9	Ikedino preslikavanje	407
18.2.10	Sinajevo preslikavanje	408
18.2.11	Diskretno "predator-lovina" preslikavanje	408
18.3	Konzervativna preslikavanja	408
18.3.1	Čirikovljevo (standardno) preslikavanje	408
18.3.2	Enoovo kvadratno preslikavanje koje očuvava oblast	408
18.3.3	Arnoldovo preslikavanje	409
18.3.4	Džindžerbredmanovo preslikavanje	409
18.3.5	Haotično "mrežasto" preslikavanje	409
18.3.6	Lorencovo 3-D haotično preslikavanje	409
18.4	Disipativni tok pod dejstvom prinudne sile	410
18.4.1	Klatno sa prigušenjem	410
18.4.2	Van der Polov oscilator	410
18.4.3	Šo-Van der Polov oscilator	410
18.4.4	Prinudni Briselator	410
18.4.5	Uedin oscilator	411
18.4.6	Dafingov oscilator sa dve "jame"	411
18.4.7	Dafing- Van der Polov oscilator	411
18.4.8	Rejli-Dafingov oscilator	411
18.5	Autonomni disipativni tok	412
18.5.1	Lorencov atraktor	412
18.5.2	Reslerov atraktor	412
18.5.3	Lorencov atraktor bez difuzije	412
18.5.4	Složeni leptir	413
18.5.5	Čenov sistem	413
18.5.6	Hedlijeva cirkulacija	413
18.5.7	ACT atraktor	414
18.5.8	Rabinovič-Fabrikant atraktor	414
18.5.9	Linearni sistem za kretanje krutog tela, sa povratnom spregom	414
18.5.10	Čuino kolo	415
18.5.11	Mur-Špigelov oscilator	415
18.5.12	Tomasov kružno-simetrični atraktor	415
18.5.13	Halvorsenov kružno-simetrični atraktor	416
18.5.14	Burk-Šoov atraktor	416
18.5.15	Raklidžov atraktor	416
18.5.16	VINDMI atraktor	417

18.5.17	Najprostiji kvadratni haotični tok	417
18.5.18	Najprostiji kubni haotični tok	417
18.5.19	Najprostiji deo-po-deo linearni haotični tok	418
18.5.20	”Dvostruko klizni” sistem	418
18.6	Konzervativni tok	418
18.6.1	Klatno pod dejstvom prinudne sile	418
18.6.2	Najprostiji haotični tokovi sa prinudom	419
18.6.3	Noze-Huverov oscilator	419
18.6.4	”Lavirint” haos	419
18.6.5	Eno-Heilesov sistem	420
19	Haotični sistemi necelog reda	421
19.1	Uvod	421
19.2	Definicija necelog izvoda	422
19.3	Stabilnost rešenja nelinearnih sistema necelog reda	423
19.4	Čuin sistem	426
19.4.1	Tradicionalni Čuin oscilator	426
19.4.2	Novi Čuin oscilator necelog reda	428
19.5	Dafingov oscilator necelog reda	429
19.6	Lorencov oscilator necelog reda	430
19.7	Reslerov oscilator necelog reda	431
20	Spektralna analiza	433
20.1	Uvod	433
20.2	FT diskretnih signala i DFT	436
20.2.1	Uvod	436
20.2.2	Furijeova transformacija diskretnih signala	438
20.2.3	Diskretna Furijeova transformacija	441
21	Neke približne metode rešavanja diferencijalnih jednačina prvog reda	449
21.1	Metoda sukcesivnih aproksimacija	449
21.2	Metoda neodređenih koeficijenata	451
21.3	Analitička metoda	452
21.4	Ojlerova metoda poligonalnih linija	453
21.5	Metoda Runge-Kuta	456
21.6	Adamsova metoda	457
21.7	Milnova metoda	458
21.8	Metoda Krilova	459
21.9	Poboljšana Pikarova metoda	460

22 Rešavanje diferencijalnih jednačina pomoću redova	463
22.1 Funkcionalni redovi. Potencijalni redovi	463
22.2 Rešavanje diferencijalnih jednačina pomoću redova	467
22.2.1 Korišćenje potencijalnog reda pri rešavanju diferencijalnih jednačina	468
23 Korisne matematičke formule	469
23.1 Trigonometrijske relacije	469
23.2 Hiperboličke funkcije	469
23.3 Logaritmi	470
23.4 Kompleksni brojevi	470
23.5 Diferencijali	471
23.6 Neodređeni integrali	472
23.7 Aproksimacije	473
23.8 Matrice i determinante	473
23.9 Koreni polinoma	474
23.9.1 Linearni sistemi	474
23.9.2 Kvadratni polinom	474
23.9.3 Polinom trećeg stepena	474
23.9.4 Njutn-Rafsonov metod	475
23.10 Vektorska analiza	475
IV Zadaci	477
24 Zadaci	479
24.1 Zadaci iz poglavlja 2	479
24.2 Zadaci iz poglavlja 3	485
24.3 Zadaci iz poglavlja 4	491
24.4 Zadaci iz poglavlja 5	492
24.5 Zadaci iz poglavlja 6	499
24.6 Zadaci iz poglavlja 7	505
24.7 Zadaci iz poglavlja 8	513
24.8 Zadaci iz poglavlja 9	519
24.9 Zadaci iz poglavlja 10	521
24.10 Zadaci iz poglavlja 11	529
24.11 Zadaci iz poglavlja 12	532
25 Beleške	537

Literatura	543
26 Rečnik	565
Beleška o autorima	571
Registar pojmova	575

Predgovor

Knjiga, čije ste korice upravo otvorili, plod je višegodišnjeg rada grupe autora.

Namenjena je studentima doktorskih studija Saobraćajnog fakulteta i studijskih programa Rudarsko inženjerstvo i Geotehnika Rudarsko-geološkog fakulteta Univerziteta u Beogradu. Sadržaj ovog udžbenika pokriva programe kurseva "Uvod u teoriju haosa" i "Nelinearna dinamika", kao i delove programa kurseva "Metode analize nelinearnih vremenskih serija u inženjerstvu" i "Fraktali u geomehanici".

Udžbenik se sastoji od četiri celine:

I TEORIJSKE OSNOVE (1-12. Glave),

II PRIMENA (13-15. Glave),

III DODATAK (16-23. Glave),

IV ZADACI (24. Glava).

Celina I, rađena je prema "koracima" knjige *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Stevena Strogatz, jer smo smatrali da je njena "težina" prilagođena nivou naših studenata doktorskih studija.

U delu udžbenika TEORIJSKE OSNOVE date su osnovne teorijske postavke iz nelinearne dinamike i teorije haosa, u okviru 12 poglavlja.

U 1. poglavlju **uvod** dat je kratak pregled razvoja teorije haosa, počevši od kvalitativne analize Poenkarea, preko Lorencovog modela konvektivnog strujanja u atmosferi, do naučno-popularne knjige Glajka "Haos". Takođe su objašnjeni poreklo i upotreba termina "haos", kao i osnovne razlike između linearnih i nelinearnih sistema, kao i autonomnih i neautonomnih sistema diferencijalnih jednačina.

U 2. poglavlju **jednodimenzionalni sistemi** opisane su osnovne postavke kvalitativne analize diferencijalnih jednačina (geometrijski pristup), sa prikazom osnovnih tipova fiksni tačaka.

U 3. poglavlju **bifurkacije u jednodimenzionalnim sistemima** predstavljene su bifurkacije koje se mogu javiti u jednodimenzionalnim sistemima.

U 4. poglavlju **jednodimenzionalni sistemi na kružnici** predstavljena su osnovna svojstva jednodimenzionalnih sistema na kružnici.

U 5. poglavlju **dvodimenzionalni linearni sistemi** opisani se dvodimenzionalni linearni sistemi na primeru kretanja tega određene mase okačenog za oprugu.

U 6. poglavlju **nelinearni sistemi u ravni** na početku su objašnjena osnovna svojstva faznog portreta u ravni. Potom je proširena teorema o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja na n -dimenzionalne sisteme.

U 7. poglavlju **granični ciklus** opisana su osnovna svojstva graničnih ciklusa i data je njihova podela po stabilnosti.

U 8. poglavlju **bifurkacije u višedimenzionalnim sistemima** opisuju se bifurkacije u višedimenzionalnim sistemima.

U 9. poglavlju **lorencove jednačine** opisan je sistem jednačina, inicijalno predložen kao model konvektivnih strujanja u atmosferi, čija rešenja pokazuju deterministički haotično ponašanje.

U 10. poglavlju **jednodimenzionalna preslikavanja** posmatrana su jednodimenzionalna preslikavanja (diferencne jednačine), sa određivanjem fiksni tačaka konstrukcijom "paukovih mreža".

U 11. poglavlju **fraktali** uvodi se pojam fraktala, sa opisom nekih osnovni svojstava Kantorovog skupa, kao jednog od najjednostavnijih primera fraktala.

U 12. poglavlju **strani atraktori** u uvodnom delu se opisuje postupak istežanja i previjanja, čime se stvara osetljivost sistema na male promene početni uslova, što je ilustrovano na primeru potkovičastog prelikavanje (Smejlova potkovičica). Potom se prelazi na Enoovo preslikavanje sa opisom njegovih osnovni svojstava.

U II celini PRIMENA dat je prikaz primene metoda nelinearne dinamike u modelovanju saobraćajnog toka (Glava 13), geodinamici (Glava 14) i teorijskoj neurologiji (Glava 15).

U III celini DODATAK data su objašnjenja osnovni pojmova i brojni primeri iz više matematike, matematičke fizike i nelinearne dinamike, koji mogu poslužiti studentima u toku savladavanja gradiva iz predmeta za koji je ovaj udžbenik namenjen.

U IV celini ZADACI dato je 76 zadataka sa rešenjima, koji su obuhvaćeni prvom celinom TEORIJSKE OSNOVE.

Na kraju udžbenika dat je spisak korišćene literature i englesko-srpski rečnik osnovnih pojmova.

Autori izražavaju zahvalnost recenzentima akademiku Aleksandru Iviću, profesoru Rudarsko-geološkog fakulteta Univerziteta u Beogradu, dr Nikoli Buriću i dr Slobodanu Prvanoviću, naučnim savetnicima Instituta za fiziku. Njihova pomoć pri izradi ovog udžbenika prevazilazi uobičajenu pomoć recenzenta. Uložili su veliki trud i vreme da bi ovaj tekst bio što bolji.

Posebnu zahvalnost dugujemo dr Predragu Cvetkoviću, profesoru Saobraćajnog fakulteta, akademiku Teodoru Atanackoviću i dr Dušanu Zorici, naučnom saradniku Matematičkog instituta SANU, koji su pažljivo pročitali delove rukopisa i dali niz dragocenih sugestija za poboljšanje kvaliteta ove knjige.

Gospođa Jovanka Cvetković pomogla je svojim korisnim jezičkim sugestijama, na čemu smo joj zahvalni.

Takođe veliku zahvalnost dugujemo i Gordani Marjanović, dr Gordani Kastratović i Ireni Stepić, koje su pomogle oko tehničke pripreme ove knjige i ulepšale njene stranice.

Zahvaljujemo se i studentima doktorskih studija Saobraćajnog fakulteta: Mariju Vidasu, Jeleni Simićević, Ani Trpković, Stanku Bajčetiću, Milanu Božoviću, Ljubici Radovanović, Milanu (junioru) Vujaniću, Dušku Pešiću, Nenadu Markoviću, Dragani Macuri, Vladimiru Simiću, Pavlu Kecmanu, Milanu Andrejiću, Branislavi Ratković, Ivanu Beloševiću, Jovani Kocić, Jeleni Trifunović, Milošu Nikoliću, Vladimiru Jevtiću, Ivani Vukićević, Dušanu Radosavljeviću, Mariji Milovanović, Andrei Đorđević, Svetlani Smiljanić, Mladenu Krstiću, Miliji Đurović, Biljani Vitkovac, Tamari Jakovljević i Katarini Vukadinović, koji su takođe, svojim komentarima i predlozima, doprineli da ovaj udžbenik poprimi ovakav oblik.

Svesni da do grešaka i propusta uvek dolazi, naravno nenamerno, bićemo zahvalni svakome ko nam na njih ukaže.

Beograd, decembra 2013. god.

Autori

Deo I

Teorijske osnove

Glava 1

Uvod

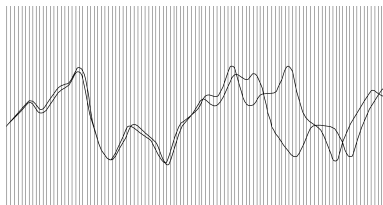
*Sve što treba da znate o haosu
sadržano je u ovom uvodnom
poglavlju. Ali da biste ga
razumeli, morate najpre da
pročitajte celu knjigu.*

Prof. Gary Morriss, University
of New South Wales, Australia.

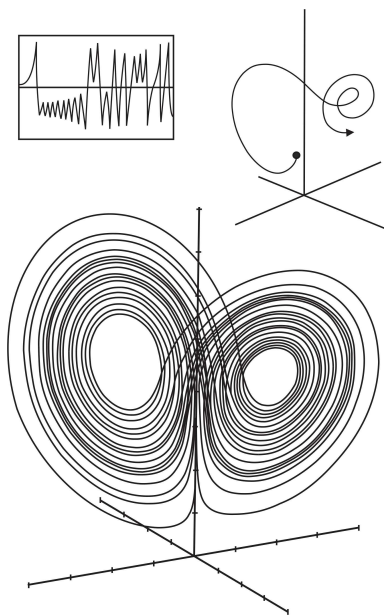
Kada je američki meteorolog sa Tehnološkog instituta u Masačusetsu (MIT), Edvard Lorenc, 1963.g. objavio svoju naučnu publikaciju "Deterministički neperiodični tok" [186], nije ni slutio da je otkrio osnovno svojstvo fizičkih sistema. Međutim, rad objavljen u meteorološkom časopisu "Journal of Atmospheric Sciences", ostao je nezapažen preko deset godina, sve dok, nezavisno od Lorencovog otkrića, naučnici nisu počeli da se interesuju za mnoge nepravilnosti u prirodi. Naime, ono što se do tada smatralo eksperimentalnom greškom, sada je posmatrano kao posledica duboke zakonitosti, koja je predmet izučavanja novostvorene **Teorije haosa**.

Lorenc je 60-ih godina XX veka numerički simulirao atmosferske prilike na računaru, kada je utvrdio da determinističke jednačine, koje opisuju cirkulaciju tečnosti i gasova u atmosferi, sadrže najvažniju osobinu vremena - nepredvidivost. Ali, kako je moguće da matematika bude nepredvidiva? Naime, ovde se radi o jednoj od fundamentalnih svojstava haotičnih sistema - osetljivosti na male promene početnih uslova. Lorenc je rešavanjem diferencijalnih jednačina sa nekoliko ciklusa iteracija, to jest ponovljenom primenom jednačina na rezultate prethodne iteracije, za dva početna uslova

dobio dve različite krive razvoja sistema (sl. 1.1).



Slika 1.1: Trajektorije rešenja Lorencovog sistema za dva različita početna uslova [102].



Naime, Lorenc je utvrdio da se rešenja njegovih jednačina nikad "ne smiruju" u obliku ravnotežnog stanja ili periodičnog ponašanja. Umesto toga, rešenja osciluju na neregularan, aperiodičan način. Posledica ovog zaključka je činjenica da je sistem suštinski nepredvidiv - male greške u merenju trenutnog stanja atmosfere uvećavaju se velikom brzinom dovodeći do pogrešnih prognoza.

Pored toga, Lorenc je takođe pokazao da postoji i struktura u haosu - kada se rešenja jednačina predstave u tri dimenzije, ona čine skup tačaka oblika leptirovih krila^a (sl. 1.2).

Slika 1.2: Strani atraktor Lorencovog sistema jednačina u obliku leptirovih krila [102].

^abutterfly effect

Naime, on je tvrdio da ovaj skup predstavlja "beskonačni kompleks površi", što, u stvari, savremenim jezikom rečeno, predstavlja primer fraktala.

Međutim, većina matematičara bi se složila da će sistem, ako krene iz dve susedne tačke, slediti dve susedne putanje, i nakon određenog vremenskog intervala, "završiti" u susednim tačkama faznog prostora. To je u potpunosti tačno kod linearnih sistema. S druge strane, nelinearni sistemi, za određene vrednosti kontrolnih parametara, kojima se kvantitativno podešavaju osobine sistema, postaju "haotični", odnosno potpuno je nepredvidivo gde će

se nalaziti putanje tog sistema, koje su krenule iz susednih tačaka. Ove putanje mogu biti sasvim blizu, a i jako daleko jedna od druge.

1.1 Poreklo i upotreba termina "haos"

Reč "haos" u našem jeziku se upotrebljava u nekoliko značenja. Tako, na primer, u Etimologijskom rečniku hrvatskoga ili srpskoga jezika [305], pod pojmom haos (kaos) podrazumeva se zjap, otvor, i u prasrodstvu je sa grčkim $\chi\alpha\omicron\varsigma$ (internacionalno haos kaos).

S druge strane, u Rečniku stranih reči i izraza [344], haos vodi poreklo od grčke reči za zbrku, nered, darmar.

Nešto slično, može se naći i u Velikom rečniku stranih reči i izraza [155], haos vodi poreklo od grčke reči za prvobitnu prazninu, neuređen prostor, zbrku, nered, pometnju, darmar.

U anglosaksonskoj terminologiji, reč "haos" takođe ima višestruko značenje:

- u Rečniku engleskog jezika Webster-Miriam, pod pojmom haos (chaos), koji se prvi put pominje tokom XV veka, podrazumeva se:
 - * stanje stvari u kojem je slučajnost dominantna;
 - * konfuzno neorganizovano stanje prvobitne stvari pre stvaranja različitih formi i oblika;
 - * suštinska nepredvidivost ponašanja kompleksnog prirodnog sistema;
 - * stanje unutrašnje konfuzije;
 - * nepreglednu mešavinu.
- u Oksfordskom rečniku engleskog jezika, haos vodi poreklo od grčke reči khaos, što označava prazninu, i definiše se kao:
 - * potpuni nered i konfuzija;
 - * svojstvo kompleksnih sistema čije je ponašanje toliko nepredvidivo da se sistem ponaša kao slučajan, a sve zbog velike osetljivosti na male promene početnih uslova;
 - * u grčkoj mitologiji haos označava prvostvoreno biće, iz kojeg su nastale prvobitne boginje Gaja, Tartarus, Erebus i Njukta.
- u Tezaurusu (rečnik sinonima i antonima) pod pojmom haos se podrazumeva:

- * unutrašnja konfuzija;
- * nered, zbrka;
- * konfuzija.

Osim prethodno navedenih, jasnih lingvističkih odrednica, termin "haos" danas se široko koristi u mnogim aspektima ljudskog života:

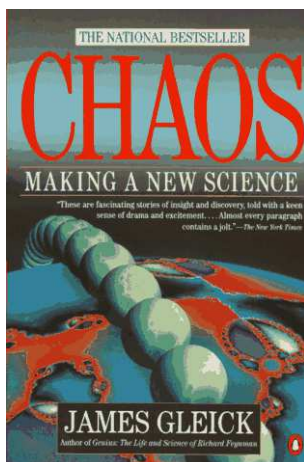
- u mitologiji, filozofiji i religiji:
 - * u Bibliji, termin haos odnosi se na prazninu, odnosno ambis;
 - * magija haosa, kao grana okultizma;
 - * haos, kao koncept u klasičnoj mitologiji.
- u nauci:
 - * bilo koje stanje konfuzije ili nereda;
 - * slučajnost;
 - * haos (rod), tip ogromne amebe;
 - * polinomni haos, kao proširenje teorije verovatnoće (N. Wiener);
 - * 19521 haos, nebesko telo unutar Saturnovog prstena;
 - * haotična mreža, kao rana postavka protokola mrežne komunikacije.

1.2 Istorija razvoja haosa

Mogućnost da kretanje bude haotično prvi je formulisao francuski matematičar Anri Poenkare 1890.g. (terminologijom koja se, očito, veoma razlikuje od današnje), u svom radu o stabilnosti Sunčevog sistema. Nešto kasnije, ruska matematičarka, Sofija Kovalevska, dokazala je da je kretanje teške asimetrične čigre obično haotično. Ovi rezultati uglavnom su zaboravljeni, a "živeli su" u prvoj polovini XX veka, samo kroz radove američnog naučnika Džordža Birkofa i njegovog nemačkog kolege Ebergarda Hopfa, u oblasti statističke mehanike i ergodičke teorije. Nezavisno od ovih rezultata, haotično ponašanje je pronađeno u određenim nelinearnim električnim kolima tokom II svetskog rata, ali rezultati nisu bili pravilno rastumačeni. Nastavljujući Birkof-Hopfovu istraživačku liniju, Rusi Andrej Kolmogorov i Vladimir Arnold i Nemač Jirgen Mozer, sredinom šezdesetih godina XX veka, izveli su dokaz teoreme (kasnije, po njihovim inicijalima, nazvane KAM-teorema) u kojoj je bio formulisani uslov za nastanak slabog

haotičnog kretanja u konzervativnim sistemima. Istraživanje "razvijenog haosa" postalo je moguće s pojavom računara. Ponašanje povezano sa haotičnim atraktorima koji se pojavljuju u disipativnim sistemima prvi put je opisao američki meteorolog Edvard Lorenc, 1963.g., koji je istakao nepredvidivost haotičnog ponašanja, dobijenog numeričkim rešavanjem matematičkog modela, kasnije nazvanim po njemu. Sam naziv "haos" uveo je američki matematičar Džejms Jork, opisujući naizgled potpuno slučajno ponašanje jednostavnih determinističkih sistema u članku objavljenom 1975.g. Rad američkog fizičara Mičela Fajgenbauma pomogao je da naziv postane opšte prihvaćen, a sam Mičel Fajgenbaum je, 1978.g., dokazao postojanje osobine univerzalnosti, osobine koja važi nezavisno od konkretno izabranog sistema, i u vezi je sa jednim od mogućih puteva u haos. U istraživanju statističkih svojstava haosa, važne uloge, pored ostalih, imali su: B. Čirikov, M. Beri, L. Bunimovič, J.P. Ekman, H. Fudžisaka, P. Grasberger, C. Grebogi, M. Enon, P., Holms, L. Kadanof, E. Ot, O. Resler, D. Ruel, I. Sinaj, S. Smejl. Mogućnost pojave "haosa" (haotičnog ponašanja) ustanovila je novu "tačku gledišta", prihvaćenu u velikom broju različitih naučnih disciplina, a "pioniri" u ovom "poslu" bili su: H. Aref, P. Cvitanović, M. Golab, A. Libhaber, R. Maj, K. Nikolis, H. Svini, I. Ueda, Dž. Vizdom, i dr.

Teorija haosa postaje opšte popularna nakon objavljivanja knjige *Haos* novinara Džejmsa Glajka [102], koja je postala jedna od najprodavanijih knjiga iz oblasti popularne nauke (sl. 1.3)



Slika 1.3: Naslovna strana knjige "Haos", Džejmsa Glajka, iz 1987.

1.3 Haotično ponašanje

Pojavu haosa najpre srećemo u slučaju rasporeda molekula nekog gasa, na primer vazduha, koji se "divlje" kreću u opštoj "zbrci". Čak ni najbrži računari nisu u stanju da proračunaju puteve pojedinih molekula gasa. Kažemo da u ovom slučaju vlada **mikroskopski haos**. Čak i ako nam uspe da na početku molukule dovedemo u red, nakon čega im omogućuje kretanje određenom brzinom, ipak bi uzajamno delovanje molekula dovelo do stvaranja potpuno neuređenog haotičnog stanja. Kvantitativno se takav porast nereda opisuje pomoću tzv. entropije koju je Bolcman uspeo dovesti u vezu sa mikroskopskim konfiguracijama. U opštem slučaju, prema Bolcmanu, može se reći da u svakom zatvorenom sistemu entropija raste do jedne određene vrednosti, odnosno, nered postaje sve veći.

Nasuprot mikroskopskom haosu, **makroskopski haos** predstavlja determinističko predviđanje ponašanja koje je nepredvidivo tokom dužeg perioda. Atmosferske prilike se smatraju najboljim primerom dugoročno nepredvidljivog ponašanja. Tako, na primer, za period od jednog minuta, vreme se može predvideti sa velikom sigurnošću. Samo jednim pogledom kroz najbliži prozor, može se odmah dati prognoza. Da bi se vreme prognoziralo za jedan sat unapred, pogledaćemo horizont, kako bismo saznali nešto više o preovlađujućem stanju atmosferskih prilika. Međutim, kada bi od nas tražili da damo prognozu za dve nedelje unapred, verovatno to ne bismo ni pokušali, pošto je količina informacija neophodna za ovakvu prognozu isuviše velika, i nepouzdana. No, uprkos dugoročnoj nepredvidljivosti, meteorolog može u svakom trenutku ispisati jednačine za promenu sila koje kontrolišu promenu vremena. Stoga, promena atmosferskih prilika je u potpunosti definisana. Gde se onda u ovakvoj situaciji javlja nepredvidljivost? Odgovor glasi: iako zakoni koji upravljaju prirodom mogu biti izraženi u kompaktnoj simboličkoj formi, isto tako mogu i implicitno određivati proizvoljno komplikovano ponašanje. Budući da prirodne zakone spoznajemo objektivno, izražavamo ih jednačinama kretanja. Ovim postupkom se, ukoliko imamo dovoljan broj izmerenih stanja sistema, određuje način prognoziranja budućih stanja sistema. Prognoziranje, međutim, zahteva znanje o ponašanju za svako buduće vreme.

U haosu postoji red - iza haosa skrivaju se geometrijske strukture. Haos, doduše, načelno ograničava mogućnost predviđanja, ali i daje uzročno-posledične veze tamo gde ih pre nismo ni naslućivali.

Čini se paradoksalnim da je haos deterministički, nastao po "čvrstim" pravilima, bez stohastičkih elemenata. Buduća stanja sistema se u načelu mogu određivati na osnovu prošlih, ali se male greške u određivanju početnog

stanja sistema "drastično brzo" povećavaju - stoga je ponašanje predvidivo kratkoročno, ali ne i dugoročno.

Ideja haosa postaje jasnija na primeru kamena koji se kotrlja sa nekog uzvišenja: slab udarac u jednom ili drugom smeru dovoljan je da se kamen otkotrlja nizbrdo jednim od dva različita puta. Drugim rečima, male promene u početnim uslovima dovode do nepredidivog ponašanja u dužem vremenskom intervalu. Ovo potvrđuju i Pakard i dr. (1980) u svom radu "Geometrija iz vremenskih serija" [241], kada kažu: "...*ukoliko se zane-mari samo jedan efekat čija snaga odgovara gravitacionoj privlačnosti elek-trona na granici Mlečnog puta, predviđanje bi već nakon jednog minuta bilo pogrešno!*". Pri tome, rast greške odvija se eksponencijalno - pri svakom koraku, nove greške se dodaju starim, tako da veličina greške raste slično broju bakterija koje se razmnožavaju na neograničenom životnom prostoru i uz neograničen izvor hrane. Na ovaj način, svaki mali poremećaj brzo dostiže makroskopske dimenzije. Ovo je jedno od osnovnih svojstava haosa.

Da bismo opisali "haotični" sistem, iz teorije dinamičkih sistema sledi da moramo poznavati stanje sistema i njegovu dinamiku, kojom se određuje promena stanja u vremenu. Vremenski razvoj sistema možemo predstaviti u prostoru stanja (faznom prostoru), čije su koordinate komponente stanja. U opštem slučaju, koordinate prostora stanja menjaju se sa modelom - kod mehaničkih sistema, za koordinate prostora stanja mogu se usvojiti položaj i brzina, dok kod ekoloških modela, kao koordinate prostora stanja, mogu se usvojiti brojnost i promena brojnosti populacije različitih vrsta.

Ponekad se jednačine kretanja jednostavnijih sistema, kao, na primer, za klatno koje se kreće u sredini bez otpora, mogu rešiti u zatvorenoj formi: postoji formula koja svako buduće stanje zadaje kao funkciju početnih vrednosti i vremena. Uspeh u traženju ovih zatvorenih rešenja davao je nadu da će takva rešenja postojati za svaki mehanički sistem. Međutim, danas znamo da je to, u opštem slučaju, pogrešno: nepredvidivo ponašanje haotičnih sistema ne može se izraziti eksplicitno, tako da ne postoji "prečica" pri predviđanju njihovog budućeg ponašanja.

Neophodno je naglasiti da haos ni u kom slučaju ne objašnjava svako slučajno ponašanje. Ako neki sistem ima mnogo stepeni slobode, onda mogu nastati kretanja koja su u pravom smislu reči slučajna - takva kretanja nisu utemeljena na haotičnom ponašanju. S druge strane, čak i ako znamo da je neki sistem haotičan, sama ta činjenica ne može nam biti od velike koristi.

Dobar primer, u tom smislu, predstavljaju sudari molekula gasa: premda znamo da je taj sistem haotičan, sama ta činjenica neće pojednostaviti predviđanje ponašanja sistema. U tom sistemu postoji toliko mnogo čestica, da se jedino možemo pouzdati u statističke sudove, a vrednosti statističkih parametara možemo ocenjivati i bez znanja o "haotičnoj" prirodi sistema.

Sa otkrićem haosa, u prirodnim naukama nastala je nova paradigma. S jedne strane, iz toga su usledila temeljna ograničenja predvidljivosti, a s druge strane je iz determinizma haosa usledilo da se mnogi slučajni fenomeni ipak mogu predvideti tačnije nego što se mislilo. Podaci koji su se pojavljivali kao slučajni, a koji su ranije mereni i ostavljani po strani bez daljeg istraživanja, zato što se mislilo da su previše komplikovani, danas se mogu objasniti jednostavnim zakonima. Haos omogućava da pronađemo red u tako različitim sistemima kao što su atmosfera, kapanje vode iz slavine ili rad srca.

Postojanje haosa utiče i na samu naučnu metodu. Ukoliko želimo da neku teoriju potvrdimo eksperimentalno, kod "haotičnih" fenomena dugoročna predviđanja su ipak nemoguća. Stoga se verifikacija neke teorije pretvara u veoma izdiferenciran postupak, čiji cilj nije detaljno prikupljanje informacija o stanju sistema, koliko određivanje njegovih geometrijskih i statističkih svojstava.

Haos dovodi u pitanje i redukcionističko stanovište po kojem se neki sistem može objasniti tako što ga "rastavimo" na delove i izučavamo svaki od tih pojedinačnih delova. Haos ipak pokazuje da neki sistem kao skup jednostavnih nelinearnih veza između malobrojnih elemenata sistema može pokazati komplikovano ponašanje, i stoga se ne može prosto rastaviti na pojedinačne elemente, čija će suma rešenja dati i rešenje celog sistema.

Teorija haosa je jedan korak napred u pokušaju da razumemo svet, i mogla bi nam pomoći da prepoznamo i ne prekoračimo kritične vrednosti parametara koje stalno menjamo ne znajući kakva nas katastrofalna promena tog sistema čeka "iza ugla". U opštem slučaju, važno je saznanje da mali uzroci mogu dovesti do vrlo velikih posledica, da jednostavna pravila generisanja iteracijom uzrokuju stvaranje vrlo složene i nepredvidive strukture, i da iza puno nereda, stoje vrlo uredni, mada malo neobični atraktori.

Navedimo na kraju suprotstavljena mišljenja dva velika matematičara, Laplase i Poenkarea, o slučajnosti i verovatnoći. Veliki francuski matematičar Pjer Simon Laplas (1749-1827) tvrdio je da su zakoni prirode striktno determinisani (određeni) - teorija verovatnoće je nužna samo zbog neizbežnih grešaka u merenju. Navodimo citat iz Laplasovih beleški, 1776.g.:

"...trenutno stanje sistema prirode očito je posledica onoga što je bilo

u prethodnom trenutku, i ako zamislimo da smo u stanju da u datoj tački vremena možemo obraditi sve odnose između delova svemira, onda bi bili u stanju da predvidimo položaje, kretanja i opšte odnose između svih tih delova za sve vremenske trenutke u prošlosti i budućnosti ... jednostavnost zakona po kojima se kreću nebeska tela i odnos između njihovih masa i udaljenosti dopuštaju analizi da sledi njihova kretanja do određene tačke. Da bi odredili stanje ovog sistema za buduće ili prošle vekove, matematičarima je dovoljno da u jednom vremenskom trenutku poznaju položaj i brzine planeta, a što je omogućeno korišćenjem instrumenata i već postojećih jednačina koje opisuju njihovo kretanje. Ali naše neznanje o raznim uzrocima koji deluju pri nastajanju nekog događaja, kao i njegova složenost, onemogućuju nam da budemo jednako sigurni u većinu drugih problema. Dakle, ima stvari koje su neodređene, koje su više ili manje verovatne, i mi pokušavamo da kompenzujemo nemogućnost njihovog određivanja tako što određujemo različite stepene verovatnoće. Stoga, razvoj jedne od najlepših i najgenijalnih matematičkih teorija - teorije verovatnoće, dugujemo samo slabosti ljudskog uma ..."

S druge strane, takođe veliki francuski matematičar Anri Poenkare (1854-1912) smatrao je da se čak i najmanje nepoznanice o stanju sistema mogu s vremenom povećati, tako da predviđanja daleke budućnosti postaju nemoguća, što je blisko današnjem shvatanju. Navodimo citat iz Poenkareovih beleški, 1903.g., dakle oko 130 godina nakon Laplasovog razmatranja:

"... neki veoma mali uzrok koji ne opažamo utiče na bitan efekat koji ne možemo zanemariti, i tada kažemo da je to efekat slučaja. Kada bi prirodni zakoni i stanje svemira bili egzaktno poznati do početne tačke, mogli bismo precizno da odredimo stanje svemira u nekom kasnijem trenutku. Međutim, čak i kada ne bi više bilo tajni u prirodnim zakonima, početne uslove bismo mogli odrediti samo približno. Kada bi nam to omogućilo da buduće stanje predvidimo sa istom verovatnoćom, rekli bismo da je fenomen predviđen i da sledi zakone. Ali nije uvek tako - moguće je da mala odstupanja u početnim uslovima proizvedu velike razlike u konačnom vremenskom intervalu. Mala greška u početku izaziva veliku grešku u nekom budućem trenutku. Predviđanja postaju nemoguća i imamo slučajan događaj."

1.4 Značaj nelinearnosti

Postoje dva glavna tipa jednačina kojima se predstavljaju dinamički sistemi: **diferencijalne jednačine** i **diferencne jednačine (iterativna preslikavanja)**. Diferencijalne jednačine opisuju ponašanje sistema u uslo-

vima kada se vreme t posmatra kao neprekidno nezavisna promenljiva ($t \in \mathbb{R}^+ \cup \{\emptyset\}$), dok je kod iterativnih preslikavanja vreme diskretna nezavisno promenljiva ($t \in \mathbb{N}_0$). U ovom udžbeniku najveća pažnja biće usmerena na diferencijalne jednačine, zbog njihove široke primene u nauci i tehnici. Sa druge strane, iterativna preslikavanja mogu biti veoma korisna kao jednostavni primeri determinističkog haosa, i kao pogodan "alat" za analizu periodičnih i haotičnih rešenja diferencijalnih jednačina.

Kao primer **linearnog** dinamičkog sistema navodimo prigušeni harmonijski oscilator, čije se kretanje opisuje diferencijalnom jednačinom drugog reda

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0, \quad \left(\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt}, \quad \ddot{x} \equiv \frac{d^2x}{dt^2} \right). \quad (1.1)$$

Ukoliko uvedemo nove promenljive $x_1 = x$ i $x_2 = \dot{x}$ tada ova jednačina može da se napiše u obliku

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{b}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1. \end{aligned}$$

S druge strane, kao primer **nelinearnog sistema**, navodimo kretanje matematičkog klatna, opisano jednačinom

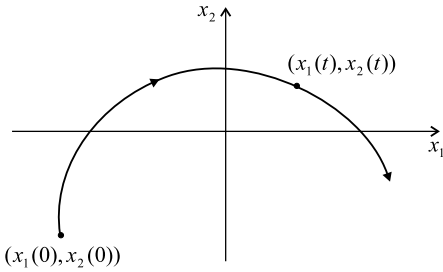
$$\ddot{x} + \frac{g}{L} \sin x = 0,$$

gde je x – ugaoni otklon klatna od vertikale, g – gravitaciono ubrzanje, L – dužina klatna. Smenom promenljivih, kao u primeru linearnog sistema, dobijamo ekvivalentni sistem:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{L} \sin x_1. \end{aligned}$$

Kako rešenje ove diferencijalne jednačine ne može da se dobije u zatvorenom obliku, obično se izvrši aproksimacija $\sin x \approx x$, koja je dovoljno tačna za male vrednosti ugla x ($x \ll 1$). Na taj način nelinearna jednačina postaje linearna, čime se njeno rešavanje znatno olakšava. Uvođenjem ove aproksimacije (malo x), opisuju se samo kretanja bliska ravnotežnom položaju, čime se zanemaruju neki tipovi kretanja, kao što je npr. progresivno kretanje po kružnoj putanji.

Upravo, u ovakvim sličajevima, Poenkareov geometrijski pristup, dolazi do punog izražaja.



Slika 1.4: Trajektorija u faznom prostoru.

Naime, pretpostavimo da nam je, za određene početne uslove, poznato rešenje prethodne jednačine. Ovo rešenje, dato sa dve funkcije $x_1(t)$ i $x_2(t)$, određuje položaj i brzinu klatna. U apstraktnom prostoru, sa koordinatama (x_1, x_2) , rešenje $(x_1(t), x_2(t))$ odgovara tački koja se kreće duž krive (slika 1.4).

Kriva, prikazana na sl. 1.4, naziva se **trajektorija**, a posmatrani prostor – **fazni prostor** sistema. Fazni prostor je potpuno ispunjen trajektorijama, pošto svaka tačka prostora može da određuje početno stanje sistema.

Geometrijski pristup podrazumeva inverzni ("u suprotnom smeru") postupak – konstrukcijom trajektorije, u faznom prostoru, "prikupljamo" informacije o rešenjima.

Neautonomni sistemi

Prethodni primeri nisu uključivali eksplicitnu zavisnost od vremena t . Jednačine koje eksplicitno zavise od vremena, nazivaju se **neautonomne jednačine**, a jednačine koje eksplicitno ne zavise od vremena, nazivaju se **autonomne jednačine**.

Kao primer neautonomne jednačine navodimo harmonijski oscilator pod dejstvom prinudne sile

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F \cos t.$$

Kao u slučaju autonomnih jednačina, uvodimo smenu promenljivih $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, s tom razlikom što sada uvodimo još jednu promenljivu $x_3 = t$.

Sada, ekvivalentni sistem je oblika:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{m}(-kx_1 - bx_2 + F \cos x_3), \\ \dot{x}_3 &= 1. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Na ovaj način, oslobađamo se eksplicitne zavisnosti od vremena i neautonomne jednačine prevodimo u autonomne.

1.5 Dinamički pogled na svet

Nakon upoznavanja sa osnovnim pojmovima, dajemo pregled nekih važnih dinamičkih sistema, kao i oblasti u kojima se primenjuju (vidi tabelu na sl.1.5). U gornjem delu tabele prikazani su linearni sistemi, a u donjem - nelinearni sistemi.

U gornjem levom uglu tabele (sl.1.5) prikazani su mali¹, linearni sistemi, čija rešenja rastu, opadaju ili su u ravnoteži za $n = 1$, odnosno osciluju za $n = 2$.

Kao primer linearnog dinamičkog sistema sa jednom promenljivom ($n = 1$, vidi tabelu na sl.1.5), navedimo model rasta brojnosti populacije organizama. Ovaj sistem je opisan diferencijalnom jednačinom prvog reda

$$\dot{x} = r x,$$

gde je x brojnost populacije u trenutku t , a r je parametar rasta.

Kao primer nelinearnog dinamičkog sistema sa dve promenljive ($n = 2$, vidi tabelu na sl.1.5), navedimo kretanje klatna, opisano sledećom diferencijalnom jednačinom

$$\ddot{x} + \frac{g}{L} \sin x = 0.$$

Suprotno prethodnom primeru, stanje ovog sistema određeno je pomoću dve promenljive: trenutnom vrednošću ugla x i ugaonom brzinom \dot{x} .

U gornjem desnom uglu tabele "žive" linearne parcijalne diferencijalne jednačine, kao što su: Maksvelove jednačine elektromagnetizma, jednačina provođenja toplote, Šredingerova talasna jednačina, i tako dalje. One predstavljaju beskonačno dimenzionalne dinamičke sisteme, čije je stanje određeno beskonačnim brojem promenljivih (kontinuum, vidi tabelu na sl.1.5).

U donjem levom, "nelinearnom" delu tabele, nalaze se nelinearni dinamički sistemi, kao i tipovi ponašanja njihovih rešenja. Povećanjem dimenzije faznog prostora, rešenja sistema pokazuju nove fenomene, od fiksnih tačaka i bifurkacija ($n = 1$), preko nelinearnih oscilacija ($n = 2$), sve do pojave determinističkog haosa ($n \geq 3$).

¹Pod "malim" sistemom se ovde podrazumeva sistem sa malim brojem dimenzija, odnosno malim brojem veličina stanja.

		Broj promenljivih →				
		n=1	n=2	n≥3	n>>1	Kontinuum
Linearno → Nonlinearno	<p>Rast, opadanje ili ravnoteža</p> <p>Eksponencijalni rast</p> <p>Električno strujno kolo sastavljeno od otpornika i kondenzatora</p> <p>Radioaktivno raspadanje</p>	<p>Oscilacije</p> <p>Linearni oscilator</p> <p>Masa i klatno</p> <p>Električno strujno kolo, sastavljeno od izvora struje, otpornika i kondenzatora</p> <p>Problem 2 tela (Kepler, Njutn)</p>	<p>Gradivinarstvo, konstrukcije</p> <p>Elektrotehničko inženjerstvo</p>	<p>Kolektivni fenomeni</p> <p>Spregnuti harmonijski oscilatori</p> <p>Fizika čvrstog stanja</p> <p>Molekularna dinamika</p>	<p>Talasi</p> <p>Elastičnost</p> <p>Talasne jednačine</p> <p>Elektromagnetizam (Maksvel)</p>	
	<p>Fiksne tačke</p> <p>Bifurkacije</p> <p>Prigušeni sistemi, relaksaciona dinamika</p> <p>Logistička jednačina za rast, jedne vrste</p>	<p>Klatno</p> <p>Aharmonijski oscilatori</p> <p>Granični ciklusi</p> <p>Bioške oscilacije (neuroni, srčane ćelije)</p> <p>Predator-žrtva ciklusi</p> <p>Nonlinearna elektronika (van der Pol, Džozefson)</p>	<p>Strani atraktori (Lorenc)</p> <p>Problem 3 tela (Poenkare)</p> <p>Hemijaska kinetika</p> <p>Iterativna preslikavanja (Fajgenbaum)</p> <p>Fraktali (Mandelbrot)</p> <p>Nonlinearni oscilatori pod dejstvom sile (Levinson, Smejil)</p>	<p>Spregnuti nelinearni oscilatori</p> <p>Laseri, nelinearna optika</p> <p>Statistička mehanika</p> <p>neravnoleže</p> <p>Nonlinearna fizika čvrstog stanja (poluprovodnici)</p> <p>Džozefsonovi čvorovi</p> <p>Sinhronizacija srčanih ćelija</p> <p>Neuronske mreže</p> <p>Imunološki sistem</p> <p>Ekosistemi</p> <p>Ekonomika</p> <p>Neuronske mreže</p>	<p>Nelinearni talasi (šokovi, solitoni)</p> <p>Plazme</p> <p>Zemljotresi</p> <p>Opšta teorija relativiteta (Ajnštajn)</p> <p>Teorija kvantnog polja</p> <p>Reakcija-difuzija, biološki i hemijski talasi</p> <p>Fibrilacija</p> <p>Epilepsija</p> <p>Turbulentni fluidi (Navije-Stoksove jednačine)</p> <p>Zivot</p> <p>Fibrilacija</p>	
		<i>Haos</i>				<i>Prostorno-vremenska kompleksnost</i>

Slika 1.5: Tabelarni pregled važnih dinamičkih sistema [316].

U donjem desnom delu tabele, prikazani su nelinearni sistemi, čije ponašanje, još uvek, nije dovoljno istraženo: spregnuti nelinearni oscilatori, imunološki i neurološki sistemi, zemljotresi, turbulentno kretanje fluida, saobraćajni tok. Neki od primera ovih sistema, biće detaljnije razmatrani u posebnim poglavljima ovog udžbenika.

Glava 2

Jednodimenzionalni sistemi

Za neke fizičare haos predstavlja nauku o procesu (postajanju), a ne nauku o stanju.

Džejms Glajk, Haos (1987).

2.1 Uvod

Posmatrajmo opštu diferencijalnu jednačinu prvog reda

$$\dot{x} = f(x),$$

gde je $x(t)$ realna funkcija vremena t , a $f(x)$ je glatka, realna funkcija promenljive x . Ovakve jednačine predstavljaju **jednodimenzionalni sistem** ili **sistem prvog reda**.

Napomenimo, da ćemo u ovom užbeniku, pod pojmom **sistem** podrazumevati dinamički sistem, a ne sistem dve ili više jednačina.

Nadalje, posmatraćemo uglavnom autonomne sisteme, tj. funkcije f neće zavisiti od vremena.

2.2 Geometrijski pristup rešavanju

Posmatrajmo sledeću nelinearnu diferencijalnu jednačinu:

$$\dot{x} = \sin x. \tag{2.1}$$

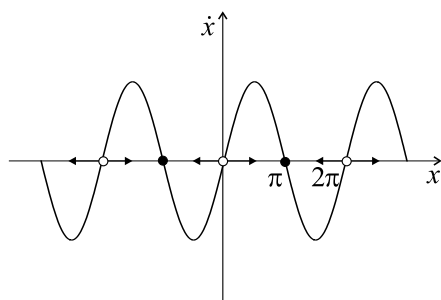
Ova jednačina je jedna od malobrojnih nelinearnih jednačina koje mogu biti analitički rešene (u zatvorenom obliku). Razdvajanjem promenljivih, uz početne uslove $x = x_0$ za $t = 0$, dobijamo

$$t = \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x_0}{2}} \right|. \quad (2.2)$$

Ovo rešenje je tačno, ali nije pogodno za interpretaciju. Naime, samo posmatranjem ovog rešenja, ne znamo kako se funkcija $x(t)$ ponaša, kada $t \rightarrow \infty$, za proizvoljan početni uslov x_0 .

Nasuprot prethodnom analitičkom postupku, geometrijski pristup znatno je pogodniji za analizu rešenja jednačine (2.1).

Neka je t vreme, x položaj zamišljene čestice koja se kreće duž realne linije, a \dot{x} njena brzina.



Slika 2.1: Vektorsko polje na liniji.

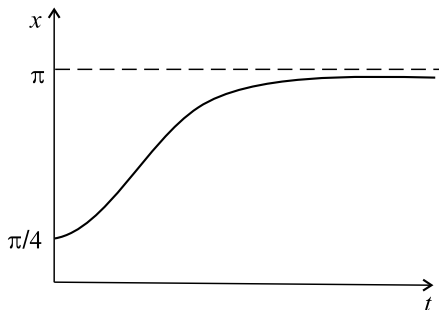
Predstavimo \dot{x} u funkciji od x tako što ćemo za sve vrednosti promenljive x , iz oblasti definisanosti, skicirati vektor brzine \dot{x} , pomoću odgovarajućih strelica. Tada diferencijalna jednačina $\dot{x} = \sin x$ predstavlja **vektorsko polje** na liniji, jer određuje brzinu vektora \dot{x} za svako x . Strelice su usmerene nadesno kada je $\dot{x} > 0$ i nalevo kada je $\dot{x} < 0$, kao što je kvalitativno prikazano na slici 2.1.

Slika 2.1 pokazuje da se čestica, polazeći iz položaja $x_0 = \pi/4$, kreće na desnu stranu ubrzavajući sve dok ne prođe kroz položaj u kome je $x = \pi/2$ ($\sin x$ tu postiže maksimum). Odatle čestica počinje da usporava približavajući se tački $x = \pi$ sa leve strane.

Vektorsko polje možemo da posmatramo i na drugačiji način. Zamislimo da fluid teče duž x -ose brzinom \dot{x} . Tada je tok na desnu stranu kada je $\dot{x} > 0$, a na levu - kada je $\dot{x} < 0$.

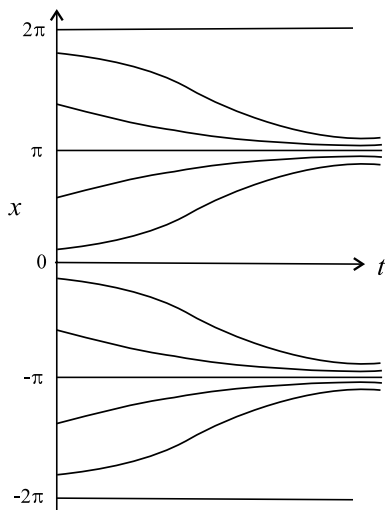
Tačke, na x -osi, u kojima je $\dot{x} = 0$ nazivaju se **fiksne tačke**. Na slici 2.1 prikazane su dve vrste fiksnih tačaka; crni (puni) kružići predstavljaju **stabilne fiksne tačke** (poznate još i kao **atraktori** ili **ponori**, zato što je tok usmeren prema njima), a beli (prazni) kružići predstavljaju **nestabilne fiksne tačke** (**repeleri** ili **izvori**).

Sada, analizom ovog vektorskog polja, prikazanog na sl. 2.1, možemo da odredimo ponašanje $x(t)$ za svako t i za proizvoljne početne uslove. Naime, ako u početnom trenutku važi $\dot{x} > 0$, čestica je usmerena na desnu stranu i asimptotski se približava najbližoj stabilnoj fiksnoj tački (vidi sl. 2.2).



Slika 2.2: Kvalitativan prikaz trajektorije sistema $\dot{x} = \sin x$.

Slično, ako je u početnom trenutku $\dot{x} < 0$, čestica se približava najbližoj stabilnoj fiksnoj tački na levoj strani. Ako je $\dot{x} = 0$, x ostaje konstantno. Kvalitativni oblik rešenja, za bilo koji početni uslov, prikazan je na slici 2.3.



Slika 2.3: Kvalitativan prikaz rešenja sistema $\dot{x} = \sin x$, za različite početne uslove.

2.3 Kvalitativna analiza diferencijalnih jednačina

U početnom periodu razvoja teorije diferencijalnih jednačina, prevladavalo je rešavanje tih jednačina pomoću kvadratura. Jednačina $y' = f(x, y)$ smatrala se rešenom kada se dobije opšti integral $y = \varphi(x, C)$ ili $\psi(x, y, C) = 0$, pri čemu su u datim izrazima mogli figurisati i integrali tipa $\int f(x) dx$ ili $\int f(y) dy$ nezavisno od toga da li definišu elementarne funkcije ili funkcije koje se mogu izraziti samo pomoću redova, tzv. specijalne funkcije. U tom periodu, proučavani su određeni tipovi jednačina koje se svode na kvadrature. Među njima bilo je jednačina koje se sreću u praksi, ali i onih koje naročitom jednostavnošću svog oblika dopuštaju integraciju. Naravno, svaka jednostavnost oblika ne obezbeđuje uvek egzistenciju opšteg integrala izraženog pomoću kvadratura. S druge strane, oblik diferencijalne jednačine može biti vrlo složen, a da je njena struktura ipak takva da podesno izabranom smenom ili transformacijom uspevamo bez većih teškoća da je rešimo.

Radovima Sofus Lia¹ završen je, uglavnom, period traženja rešenja diferencijalnih jednačina preko kvadratura. Budući da je zadatak svodenja na kvadrature nerešiv za opštije tipove jednačina, ovaj put nije mogao dovesti do opšte teorije.

Isti je slučaj i sa inače sve korisnijom i sve šire primenjivanom numeričkom integracijom, koja se, međutim, uvek bavi samo jednim partikularnim rešenjem. Kada su ustanovljeni fundamentalni Košijevi² stavovi o egzistenciji rešenja, stvoreni su uslovi za bujan razvoj kvalitativne analize (integracije) rešenja diferencijalnih jednačina, čijim se osnivačem smatra veliki francuski matematičar Henri Poencare³.

Kvalitativna analiza nam daje uvid u niz svojstava integralnih krivih (ograničenost, broj i položaj nula i ekstrema, asimptote, ponašanje u okolini singularnih tačaka i u beskonačnosti, periodičnost, monotonost, i dr.). Drugim rečima, u najjednostavnijim slučajevima ona nam omogućava da crtamo približan grafik rešenja, ne znajući njegov analitički izraz. Ova problematika je od posebnog značaja kada jednačinu ne možemo rešiti preko kvadratura, a sem toga često je (čak i u slučaju opšteg integrala eksplicitno izraženog u zavisnosti od elementarnih funkcija) izraz za opšti integral toliko složen da se mora pristupiti posebnim metodama kvalitativne integracije.

Do zaključka u kvalitativnoj analizi dolazi se, u opštem slučaju na osnovu analiza funkcija koje figurišu u samoj diferencijalnoj jednačini. Međutim, da bismo mogli rasuđivati o svojstvima integralnih krivih, moramo najpre

¹Sophus Lie, 1842-1899

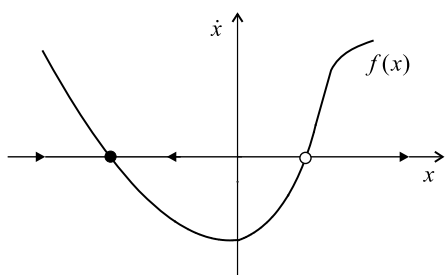
²Cauchy, 1789-1857

³Poencare, 1854-1912

da budemo sigurni da one postoje. Zbog toga već spomenuti stavovi o egzistenciji rešenja moraju činiti osnovu kompletne teorije diferencijalnih jednačina. I do zaključka o egzistenciji rešenja dolazi se ispitivanjem same jednačine, funkcija koje se javljaju u jednačini, dakle bez poznavanja eksplicitno izraženog opšteg integrala.

2.4 Fiksne tačke i stabilnost

Razmatranje iz prethodnog odeljka može biti prošireno na bilo koji jednodimenzionalni sistem $\dot{x} = f(x)$ (vidi sl. 2.4).



Slika 2.4: Fazni portret.

Da bismo našli rešenje jednačine $\dot{x} = f(x)$, polazeći od proizvoljnog početnog uslova x_0 , posmatrajmo kretanje tačke duž x ose, određeno funkcijom $x(t)$. Ova funkcija se naziva **trajektorija** kroz x_0 , i predstavlja rešenje diferencijalne jednačine koje polazi iz početnog položaj x_0 . Slika 2.4, koja prikazuje sve kvalitativno različite trajektorije sistema, za različite početne uslove, naziva se **fazni portret**.

Izgled faznog portreta određen je fiksnim tačkama x^* , koje su definisane jednačinom $f(x^*) = 0$. Na slici 2.4, crni kružić je stabilna fiksna tačka, a beli kružić je nestabilna fiksna tačka.

U odnosu na početnu diferencijalnu jednačinu fiksne tačke predstavljaju **ravnotežna rešenja** (ponekad se nazivaju i konstantna rešenja, jer ako je u početnom trenutku $x = x^*$, onda je i $x(t) = x^*$ u svakom sledećem trenutku). Ravnotežno rešenje se naziva stabilno, ako je svaki, dovoljno mali otklon od rešenja, tokom vremena, prigušen. Položaji stabilne ravnoteže su, na taj način, geometrijski predstavljeni **stabilnim fiksnim tačkama**. Obrnuto, položaji nestabilne ravnoteže, kod kojih otkloni od ravnotežnog rešenja rastu tokom vremena, predstavljeni su **nestabilnim fiksnim tačkama**.

2.5 Kratak istorijat teorije stabilnosti

Problemi stabilnosti najpre su proučavani u mehanici, a zatim su se tim problemom počeli baviti naučni istraživači različitih disciplina. Prva

značajnija ispitivanja stabilnosti vezana su za 1644.g., kada je Toričeli formulisao izvesne kriterijume stabilnosti ravnotežnih sistema. Sledeća istraživanja su vezana za Lagranža koji je 1788.g. dokazao teoremu kojom se određuju dovoljni uslovi stabilnosti ravnoteže proizvoljnih konzervativnih sistema. Ova teorema je poslužila kao polazna tačka izvesnim ispitivanjima Rauta koji je ustanovio neke kriterijume stabilnosti za izvesne specijalne slučajeve kretanja. Razvoj proučavanja teorije stabilnosti pri kraju XIX veka nastavlja najpre Maksvel 1868.g., u svom radu o upravljanju. Tada postavlja matematički problem stabilnosti sistema sa povratnom spregom na linearnom modelu jednog astronomskeg instrumenta. U radu je pokazano da je problem stabilnosti linearnih sistema u suštini algebarski problem određivanja uslova koje treba da zadovolje koeficijenti odgovarajuće algebarske (karakteristične) jednačine, tako da svi koreni imaju negativni relani deo. Ovaj algebarski problem Maksvel je rešio delimično za kvadratnu i kubnu jednačinu i zaključio da u opštem slučaju algebarske jednačine problem stabilnosti nije trivijalan. Problemom stabilnosti bavili su se i Tomson, Žukovski i Poenkare, koji prvi daje "strožije" rešavanje ovog zadatka. 1892.g. A.M. Ljapunov brani doktorsku disertaciju pod naslovom "Opšti zadatak o stabilnosti kretanja", koja otvara u svoj svojoj opštosti teoriju stabilnosti, a takođe se u njoj predlažu stroge metode rešavanja pitanja stabilnosti rešenja diferencijalnih jednačina. U toj disertaciji se prvi put pojavljuje i precizna definicija stabilnosti koja je mogla biti podvrgnuta matematičkim ispitivanjima. Posle Ljapunova, teorija stabilnosti se razvijala u različitim pravcima, pri čemu se velika pažnja poklanjala izučavanjima: stabilnosti autonomnih sistema, stabilnosti pri konstantnim poremećajima, stabilnosti pri velikim početnim poremećajima, stabilnosti periodičnih rešenja, stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu, stabilnosti orbita, stabilnosti pri dejstvu slučajnih sila, i dr. Sve te vrste stabilnosti proučavaju se u raznim oblastima savremene nauke, a posebno u nekim delovima fizike, hemije, biologije, astronomije, balistike, saobraćaja, geologije, neurologije, socijalne dinamike, i dr.

2.6 Rast brojnosti populacije

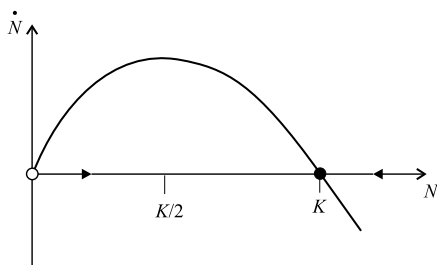
Pokažimo, sada, na jednom primeru, kako se određuju fiksne tačke sistema i ispituje njihova stabilnost. Posmatrajmo rast brojnosti populacije, koji je opisan **logističkom jednačinom**

$$\dot{N} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right),$$

gde je $N(t)$ - brojnost populacije u trenutku t , r - parametar rasta, a K - parametar populacije⁴.

Relaciju, u ovom obliku, prvi je predložio Verholst 1838. god.

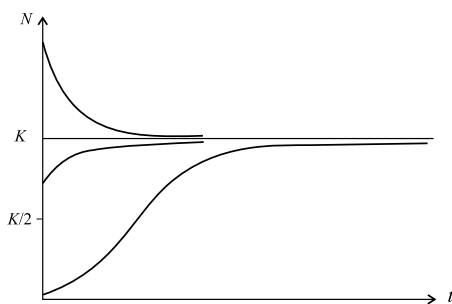
Da bismo odredili izgled vektorskog polja, crtamo grafik funkcije \dot{N} u zavisnosti od N . Na grafiku prikazujemo samo pozitivne vrednosti N (sl.2.5), jer brojnost populacije ne može biti negativna.



Slika 2.5: Fazni portret promene brojnosti populacije.

Iz analize toka, prikazanog na slici 2.5, zaključujemo da je $N^* = 0$ nestabilna fiksna tačka, a $N^* = K$ stabilna fiksna tačka. Sa biološke tačke gledišta, $N = 0$ predstavlja nestabilno ravnotežno stanje: mala populacija raste eksponencijalno brzo i "beži" od $N = 0$. Sa druge strane, ako N malo odstupa od K , tada $N(t) \rightarrow K$ monotono, za $t \rightarrow \infty$. Jedini izuzetak je za $N_0 = 0$. Tada nema rasta populacije, jer nema nikoga da započne reprodukciju, pa je $N = 0$ sve vreme.

Grafik funkcije $N(t)$ skiciran je na slici 2.6, za različite početne vrednosti N_0 . Za $N_0 < K/2$ grafik ove funkcije je **sigmoidnog** oblika (S-oblika).



Slika 2.6: Skica funkcije $N(t)$.

⁴Ovaj parametar predstavlja maksimalnu brojnost populacije koju resursi prirodne sredine mogu da izdrže.

2.7 Linearna analiza stabilnosti

Radi određivanja stabilnosti fiksnih tačaka, do sada smo koristili grafičke metode. Međutim, često postoji potreba za kvantitativnim merama stabilnosti, kao što je, na primer, brzina približavanja trajektorije stabilnoj fiksnoj tački. Ovu informaciju možemo da dobijemo linearizacijom u okolini fiksne tačke.

Neka je x^* fiksna tačka, i neka je

$$\eta(t) = x(t) - x^* \quad (2.3)$$

mali poremećaj (perturbacija) od tačke x^* . Da bismo utvrdili da li poremećaj raste ili opada, nađimo izvod funkcije (2.3). Diferenciranjem dobijamo

$$\dot{\eta} = \frac{d}{dt}(x - x^*) = \dot{x}.$$

jer je x^* konstantno. Zato je $\dot{\eta} = \dot{x} = f(x) = f(x^* + \eta)$. Koristeći Tejlorov razvoj u red, dobijamo

$$f(x^* + \eta) = f(x^*) + \eta f'(x^*) + O(\eta^2), \quad \left(f' = \frac{df}{d\eta} \right)$$

gde $O(\eta^2)$ označava članove reda 2 i više, po η .

Takođe je i $f(x^*) = 0$, jer je x^* fiksna tačka. Stoga dobijamo

$$\dot{\eta} = \eta f'(x^*) + O(\eta^2).$$

Ako je $f'(x^*) \neq 0$, članove $O(\eta^2)$ možemo da zanemarimo, čime uvodimo aproksimaciju

$$\dot{\eta} \approx \eta f'(x^*).$$

Na taj način smo izvršili linearizaciju u okolini fiksne tačke x^* . Prethodna jednačina pokazuje da, ako je $f'(x^*) > 0$, poremećaj $\eta(t)$ raste eksponencijalno, a ako je $f'(x^*) < 0$ - opada eksponencijalno. Naglasimo da kada je $f'(x^*) = 0$, članovi višeg reda $O(\eta^2)$ ne mogu se zanemariti, pa je za određivanje stabilnosti potrebna nelinearna analiza (vidi zadatak 6 na str. 482).

Mera stabilnosti naše fiksne tačke određena je veličinom $f'(x^*)$, čija vrednost određuje eksponencijalni rast ili opadanje. Njena recipročna vrednost $1/|f'(x^*)|$ naziva se **karakteristična vremenska skala**.

2.8 Teorema o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja

U prethodnim poglavljima nije posebno razmatran problem egzistencije i jedinstvenosti rešenja sistema $\dot{x} = f(x)$. Međutim, kada nema jedinstvenosti, ne može se primeniti geometrijski pristup. Tada tačka u faznom prostoru "ne zna kuda da krene", jer postoji više rešenja koja polaze iz istog početnog položaja. Imajući ovo na umu, formulisaćemo teoremu

Teorema 1 (o egzistenciji i jedinstvenosti) *Neka je data diferencijalna jednačina:*

$$y' = f(x, y), \quad \text{sa početnim uslovima } y(x_0) = y_0 \quad (2.4)$$

Neka su ispunjeni uslovi:

- 1° $f(x, y)$ je neprekidna funkcija dve nezavisno promenljive u zatvorenoj oblasti R :

$$x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, \quad y_0 - b \leq y \leq y_0 + b,$$

gde su a i b pozitivni brojevi. (Kako je neprekidna funkcija u zatvorenoj oblasti ograničena, to iz uslova 1° sledi egzistencija takvog pozitivnog broja M da nejednakost:

$$|f(x, y)| \leq M$$

bude ispunjena za sve tačke iz R .)

- 2° *Funkcija $f(x, y)$ zadovoljava u oblasti R Lipšicov uslov:*

$$|f(x, Y) - f(x, y)| \leq N|Y - y|,$$

gde je N pozitivna konstanta.

Tada postoji jedinstveno (jedno i samo jedno) rešenje diferencijalne jednačine, $y = \varphi(x)$, definisano i neprekidno za vrednosti x iz intervala:

$$x_0 - h \leq x \leq x_0 + h,$$

gde je:

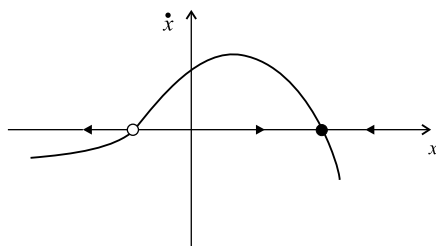
$$h = \min \left(a, \frac{b}{M} \right),$$

koje za $x = x_0$ uzima vrednost y_0 .

Napomenimo da ćemo, nadalje, razmatrati samo dovoljno glatka vektorska polja, tako da će teorema o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja biti uvek zadovoljena.

2.9 Nemogućnost oscilacija

U svim našim primerima do sada, sve trajektorije su se ili približavale fiksnoj tački, ili divergirale ka $\pm\infty$. Zapravo, to je jedino što se može dogoditi u okviru vektorskog polja na realnoj liniji. Trajektorije monotono rastu ili opadaju, ili se zadržavaju u fiksnoj tački (sl. 2.7).



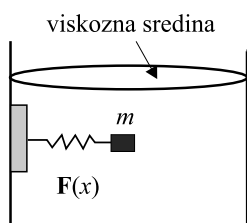
Treba istaći da "preskakanje" fiksne tačke i oscilacije (prigušene ili neprigušene) ne mogu da se pojave u sistemu prvog reda. Dakle, ne postoje periodična rešenja jednačine $\dot{x} = f(x)$.

Slika 2.7: Fazni portret trajektorije.

Ovi rezultati odražavaju činjenicu da $\dot{x} = f(x)$ odgovara toku na liniji, što znači da ako se tačka u faznom prostoru kreće monotono po liniji, nikad se neće vratiti u svoj početni položaj. Zbog toga su periodična rešenja nemoguća.

Mehanička analogija: sistemi u otpornoj sredini

Na prvi pogled, može izgledati iznenađujuće da rešenja jednačine $\dot{x} = f(x)$ ne mogu da osciluju. Međutim, uvođenjem mehaničke analogije, ovaj rezultat postaje očigledan.



Slika 2.8: Kretanje čestice u viskoznoj tečnosti.

Posmatrajmo kretanje materijalne čestice, zakačene za oprugu, koja se nalazi u sudu ispunjenom viskoznom tečnošću (med, motorno ulje, ...). Njeno kretanje opisano je jednačinom (II Njutnov zakon) $m\ddot{x} + b\dot{x} = F(x)$, gde je m – masa čestice, b – koeficijent prigušenja (viskoznosti), $F(x)$ – sila u opruzi, opisana nelinearnom funkcijom, x – pomeranje čestice (sl. 2.8).

Kada je viskozno trenje vrlo jako u poređenju sa inercijalnom silom ($b\dot{x} \gg m\ddot{x}$), sistem se može opisati jednačinom $b\dot{x} = F(x)$, ili, ekvivalentno $\dot{x} = f(x)$, gde je $f(x) = \frac{1}{b}F(x)$.

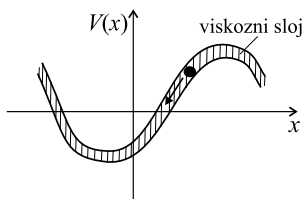
U slučaju jakog trenja, čestica mase m uvek teži stanju stabilne ravnoteže, gde je $f(x) = 0$ i $f'(x) < 0$. Ako se malo pomeri, čestica se sporo vraća u položaj ravnoteže, pod uticajem sile u opruzi. Nema ni prigušenih ni neprigušenih oscilacija zato što je trenje izuzetno veliko.

Naglasimo da je zanemarivanje inercijalnog člana ($m\ddot{x}$) dozvoljeno, ali samo posle brzog, početnog, tranzijentnog (prolaznog) ponašanja, tokom koga su inercijalni član i trenje uporedive veličine.

2.10 Potencijali

Drugi način da se predstavi sistem prvog reda $\dot{x} = f(x)$, zasnovan je na fizičkoj ideji o potencijalnoj energiji. Posmatramo česticu kako "klizi" duž zidova potencijalnog izvora, gde je **potencijal** $V(x)$ definisan jednačinom

$$f(x) = -\frac{dV}{dx}. \quad (2.5)$$



Slika 2.9: Kretanje čestice duž "zidova" potencijala.

Pretpostavimo da je kretanje čestice veoma prigušeno, pa je inercijalna sila zanemarljiva u poređenju sa silom trenja i potencijalnom silom. Zamislimo da čestica mora da se probije kroz debeli sloj želatina, kojim su premazani "zidovi" potencijala (sl. 2.9).

Negativni predznak u definiciji potencijala V u skladu je sa standardnom konvencijom u fizici, što znači da se čestica uvek pomera "nadole" tokom kretanja. Posmatrajmo, nadalje, x kao funkciju od t i izračunajmo izvod po vremenu veličine $V(x(t))$. Izvod složene funkcije je

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dt}.$$

Za sistem prvog reda, prema (2.5), je

$$\frac{dx}{dt} = (f(x)) - \frac{dV}{dx},$$

pa važi

$$\frac{dV}{dt} = -\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 \leq 0.$$

Prema tome, $V(t)$ opada duž trajektorije, pa se čestica uvek kreće prema nižem potencijalu. Naravno, ako se čestica nađe u ravnotežnom položaju, gde je $\frac{dV}{dx} = 0$, tada V ostaje konstantno. Uočimo da lokalni minimumi funkcije $V(x)$ odgovaraju stabilnim fiksnim tačkama, a da lokalni maksimumi nestabilnim fiksnim tačkama, što smo intuitivno i očekivali.

Glava 3

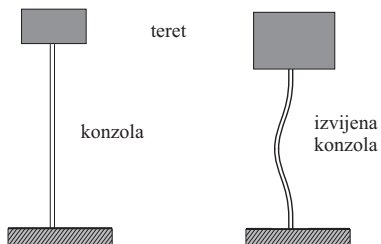
Bifurkacije u jednodimenzionalnim sistemima

Kompleksnost ove slike je tolika da neću ni pokušati da je nacrtam.

Anri Poenkare, u vezi sa otkrićem homokliničnih orbita.

3.1 Uvod

Kao što smo prethodno videli, dinamika vektorskih polja na liniji je relativno "siromašna". Sva rešenja se mogu svrstati u sledeće tri kategorije: (a) ravnotežna rešenja, (b) rešenja koja monotonno konvergiraju ka ravnotežnim stanjima, ili (c) divergentna rešenja (koja teže $\pm\infty$). Ova "trivijalna" dinamika navodi nas na pitanje šta je uopšte interesantno u vezi jednodimenzionalnih sistema. Odgovor je **zavisnost od parametara**. Sa promenom vrednosti parametara menja se i kvalitativna struktura toka. Fiksne tačke, na primer, mogu da nastanu ili nestanu, a njihova stabilnost može da se promeni. Ove kvalitativne promene dinamike sistema nazivaju se **bifurkacije**, a vrednosti parametara za koje dolazi do ovih kvalitativnih promena nazivaju se **bifurkacione tačke**.



Slika 3.1: Konzola pod dejstvom opterećenja.

Razmotrimo sada primer izvijanja konzole (sl. 3.1). Ako na slobodni kraj konzole postavimo teret male težine, nosač ostaje u vertikalnom položaju. Povećavanjem težine tereta dolazi do izvijanja nosača (nosač gubi stabilnost).

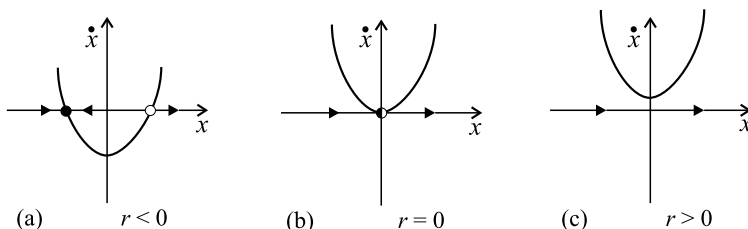
U ovom slučaju, težina tereta ima ulogu kontrolnog parametra, a odstupanje nosača od vertikale ima ulogu dinamičke promenljive x .

3.2 Sedlo–čvor bifurkacija

Najjednostavniji primer **sedlo–čvor bifurkacije**¹ dat je sistemom prvog reda

$$\dot{x} = r + x^2, \quad (3.1)$$

gde je r **kontrolni parametar**. Kada je $r < 0$ postoje dve fiksne tačke, jedna je stabilna, a druga je nestabilna (sl. 3.2a).

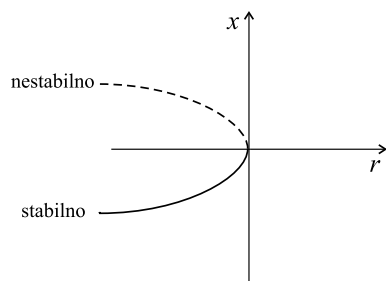


Slika 3.2: Sedlo–čvor bifurkacija.

Povećanjem vrednosti r do nule, parabola se "pomera nagore" i dve fiksne tačke se kreću jedna prema drugoj. Za $r = 0$, fiksne tačke se stapaju u jednu polustabilnu fiksnu tačku, kada je $x^* = 0$ (vidi sl. 3.2b). Ovaj tip fiksne tačke je ekstremno "osetljiv" – čim r postane veće od nule, fiksne tačke nestaju i sistem postaje strukturno nestabilan (sl. 3.2c). U ovom slučaju bifurkacija se javlja za $r = 0$, jer su vektorska polja za $r < 0$ i $r > 0$ kvalitativno različita.

¹saddle-node bifurcation (eng.)

Uobičajeni način da se predstavi bifurkacija je **bifurkacioni dijagram**, kao na slici 3.3. Kontrolni parametar nanosi se na apscisu, a vrednosti promenljive na ordinatu.



Slika 3.3: Bifurkacioni dijagram za sedlo-čvor bifurkaciju.

Napomenimo da se pored naziva sedlo-čvor bifurkacija koriste i nazivi:

- **fold-bifurkacija**², jer kriva na slici 3.3 ima prevoj (u tački $x = 0$),
- **bifurkacija sa povratnom tačkom** ili **bifurkacija sa tačkom preokreta**³ (jer je tačka $(x, r) = (0, 0)$ "tačka preokreta").

Normalne forme

Primeri $\dot{x} = r + x^2$ ili $\dot{x} = r - x^2$ (zadatak 11, na str. 485) su reprezentativni za sve sedlo-čvor bifurkacije, pa ih nazivamo "prototipovi", ili uobičajeno **normalne forme** za sedlo-čvor bifurkaciju.

U blizini sedlo-čvor bifurkacije, jednačine koje opisuju dinamiku jednodimenzionalnih sistema mogu da se svedu na "prototipske" oblike:

$$\dot{x} = r - x^2 \quad \text{ili} \quad \dot{x} = r + x^2.$$

Posmatrajmo sistem prvog reda

$$\dot{x} = r - x - e^{-x}$$

za koji smo u zadatku 12, na str. 485, pokazali da "prolazi" kroz sedlo-čvor bifurkaciju, za $x = 0$ i $r = 1$.

²prevoj=fold (eng.)

³turning-point bifucation (eng.)

Razvojem funkcije e^{-x} u Tejlorov red oko $x = 0$, dobijamo

$$\begin{aligned}\dot{x} &= r - x - e^{-x} = r - x - \left[1 - x + \frac{x^2}{2!} - \dots \right] = \\ &= (r - 1) - \frac{x^2}{2} + \dots\end{aligned}$$

zadržavajući se na kvadratnom članu po x . Primenom odgovarajućih koordinatnih transformacija, izraz $\dot{x} = (r - 1) - \frac{x^2}{2}$ postaje istovetan sa izrazom $\dot{x} = r - x^2$.

Posmatrajmo sada opšti slučaj, kada je f funkcija dve promenljive x i r . Razmotrimo ponašanje jednačine $\dot{x} = f(x, r)$ blizu bifurkacije u tački $x = x^*$ i $r = r_c$. Razvojem u Tejlorov red, dobijamo

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, r) = \\ &= f(x^*, r_c) + (x - x^*) \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x^*, r_c)} + (r - r_c) \left. \frac{\partial f}{\partial r} \right|_{(x^*, r_c)} + \\ &+ \frac{1}{2} (x - x^*)^2 \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{(x^*, r_c)} + \dots\end{aligned}$$

gde smo odbacili kvadratne članove po $(r - r_c)$ i kubne članove po $(x - x^*)$. U prethodnoj jednačini anuliraju se dva člana, $f(x^*, r_c) = 0$, jer je x^* fiksna tačka i $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x^*, r_c)} = 0$, zbog tangentsnog uslova sedlo-čvor bifurkacije. Stoga je

$$\dot{x} = a(r - r_c) + b(x - x^*)^2 + \dots \quad (3.2)$$

gde je $a = \left. \frac{\partial f}{\partial r} \right|_{(x^*, r_c)}$ i $b = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{(x^*, r_c)}$. Jednačina (3.2) u saglasnosti je sa oblikom naših prototipskih primera. Pretpostavljamo da je $a, b \neq 0$, što je tipičan slučaj.

3.3 Transkritična bifurkacija

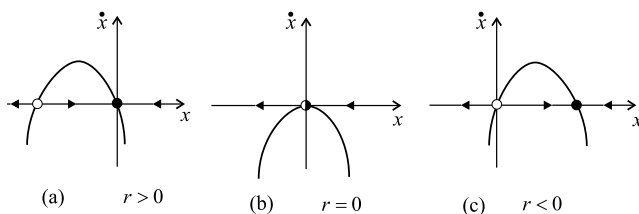
U slučaju **transkritične bifurkacije**, za razliku od sedlo-čvor bifurkacije, fiksna tačka uvek postoji za sve vrednosti parametra.

Normalna forma za transkritičnu bifurkaciju je

$$\dot{x} = rx - x^2, \quad (3.3)$$

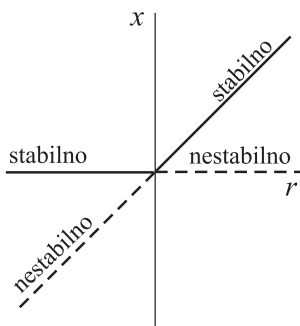
gde promenljiva x i parametar r mogu biti i pozitivni i negativni, za razliku od logističke jednačine.

Na slici 3.4 prikazano je vektorsko polje, za različite vrednosti parametra r . Uočimo da za $x^* = 0$ postoji fiksna tačka za sve vrednosti r .



Slika 3.4: Transkritična bifurkacija.

Kada je $r < 0$, postoji nestabilna fiksna tačka za $x^* = r$ i stabilna fiksna tačka za $x^* = 0$. Kako r raste, nestabilna fiksna tačka približava se koordinatnom početku i za $r = 0$ sistem ima samo jednu polustabilnu fiksnu tačku. Za $r > 0$, koordinatni početak postaje nestabilan i $x^* = r$ je sada stabilna fiksna tačka. Pojedini autori ovaj slučaj nazivaju "razmena stabilnosti" između dve fiksne tačke.



Slika 3.5: Bifurkacioni dijagram za transkritičnu bifurkaciju.

Treba uočiti važnu razliku između sedlo-čvor i transkritične bifurkacije: u transkritičnom slučaju, dve fiksne tačke ne nestaju posle bifurkacije, već, umesto toga, one samo "razmenjuju stabilnost".

Slika 3.5 prikazuje bifurkacioni dijagram za transkritičnu bifurkaciju. Kao na slici 3.3, parametar r se posmatra kao nezavisna promenljiva, a fiksne tačke $x^* = 0$ i $x^* = r$ prikazane su kao zavisne promenljive.

3.4 Vilasta bifurkacija

U slučaju **vilaste bifurkacije**⁴ fiksne tačke se pojavljuju i nestaju u simetričnim parovima.

Postoje dva različita tipa vilaste bifurkacije: **natkritična** i **potkritična**.

⁴vilasta ili viljuškasta bifurkacija=pitchfork bifurcation (eng.)

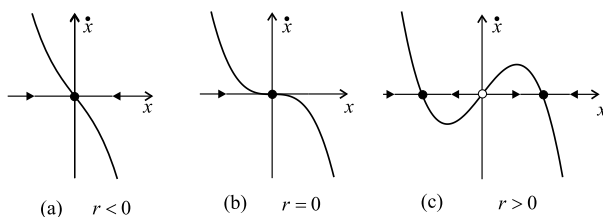
Natkritična vilasta bifurkacija

Normalna forma **natkritične vilaste bifurkacije**⁵ je

$$\dot{x} = rx - x^3. \quad (3.4)$$

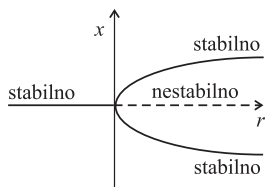
Zapazimo da je ova jednačina invarijantna pri promeni $x \rightarrow -x$.

Slika 3.6 prikazuje vektorsko polje (3.4) za različite vrednosti r .



Slika 3.6: Natkritična vilasta bifurkacija.

Za $r < 0$, koordinatni početak je jedina fiksna tačka, i to stabilna. Za $r = 0$, koordinatni početak je i dalje stabilan, ali mnogo slabije, jer je tada linearizovani deo jednak nuli. U ovom slučaju rešenja ne opadaju eksponencijalno brzo. Umesto toga, opadanje je mnogo "sporija" funkcija vremena, i često se u literaturi naziva **kritično usporavanje**. Za $r > 0$ koordinatni početak postaje nestabilan. Dve nove stabilne fiksne tačke pojavljuju se simetrično sa obe strane koordinatnog početka, u $x^* = \pm\sqrt{r}$.



Slika 3.7: Bifurkacioni dijagram natkritične vilaste bifurkacije.

Na slici 3.7 prikazan je bifurkacioni dijagram natkritične vilaste bifurkacije.

Natkritična vilasta bifurkacija ponekad se naziva "**bifurkacija unapred**", i blisko je povezana sa neprekidnim ili faznim prelazom drugog reda u statističkoj mehanici.

Takođe, u tehničkoj literaturi, često se za natkritičnu bifurkaciju koriste nazivi "**meka**" ili "**sigurna**" bifurkacija, jer fiksne tačke, različite od nule, nastaju na maloj udaljenosti od položaja fiksne tačke pre bifurkacije.

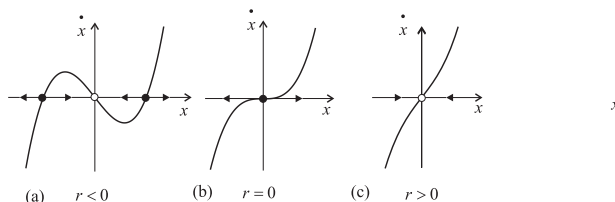
⁵natkritična ili superkritična vilasta bifurkacija=supercritical pitchfork bifurcation (eng.)

Potkritična vilasta bifurkacija

Normalna forma **potkritične vilaste bifurkacije**⁶ data je jednačinom

$$\dot{x} = rx + x^3. \tag{3.5}$$

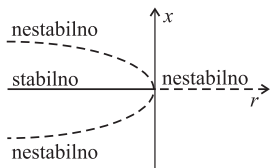
Na slici 3.8 prikazan je primer potkritične vilaste bifurkacije, a na slici 3.9 prikazan je njen bifurkacioni dijagram .



Slika 3.8: Potkritična vilasta bifurkacija, za jednačinu (3.5).

Fiksne tačke različite od nule $x^* = \pm\sqrt{-r}$ su nestabilne i postoje samo pre bifurkacije ($r < 0$). Koordinatni početak je stabilan za $r < 0$, a nestabilan za $r > 0$, kao u slučaju natkritične bifurkacije.

Međutim, u ovom slučaju, za razliku od natkritične bifurkacije, može se pokazati da $x(t) \rightarrow \pm\infty$ za konačno vreme, polazeći iz bilo kog početnog uslova $x_0 \neq 0$.



Slika 3.9: Bifurkacioni dijagram potkritične vilaste bifurkacije, za jednačinu (3.5).

U realnim fizičkim sistemima, takva "eksplozivna" nestabilnost obično se stabilizuje uticajem članova višeg reda, pa je kanonički primer za sistem koji prolazi kroz potkritičnu vilastu bifurkaciju

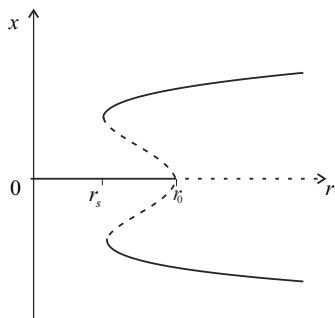
$$\dot{x} = rx + x^3 - x^5. \tag{3.6}$$

Nema gubitka u opštosti ako pretpostavimo da su koeficijenti uz članove x^3 i x^5 jednaki jedinici.

Slika 3.10 prikazuje bifurkacioni dijagram za jednačinu (3.6). Za malo x (zanemarujemo x^5), bifurkacioni dijagram je dat na slici 3.9. U ovom slučaju, za $r < 0$, postoji jedna stabilna fiksna tačka $x^* = 0$ i dve simetrično raspoređene fiksne tačke.

⁶potkritična ili subkritična bifurkacija=subcritical pitchfork bifurcation (eng.)

Za vrednosti x , za koje ne možemo da zanemarimo x^5 , "nestabilne grane se okreću" i postaju stabilne za $r = r_s$, gde je $r_s < r_0$. Ove stabilne grane postoje za svako $r > r_s$.

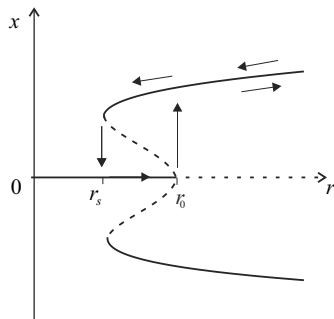


Slika 3.10: Potkritična vilasta bifurkacija za jed. (3.6).

Sa slike 3.10 može da se uoči da u intervalu $r_s < r < r_0$ postoje dva kvalitativno različita stabilna rešenja sistema.

U zavisnosti od početnog uslova x_0 rešenje "prilazi" stabilnoj ili nestabilnoj fiksnoj tački, kada $t \rightarrow \infty$. Zapanimo da je koordinatni početak stabilan, u odnosu na male poremećaje, ali ne i u odnosu na velike. Dakle, koordinatni početak je **lokalno stabilan**, ali ne i **globalno stabilan**.

Naglasimo da postojanje različitih stabilnih stanja omogućava skokove i histerezis pri promeni vrednosti parametra r . Pretpostavimo da je početno stanje sistema $x^* = 0$. Postepenim povećavanjem vrednosti parametra r (prikazano strelicom duž r -ose na slici 3.11), stanje sistema ostaje u istom položaju, sve do $r = r_0$. Tada fiksna tačka $x^* = 0$ gubi stabilnost, pa će i najmanje "gurkanje" prouzrokovati skok ("ekskurziju") stanja sistema na jednu od udaljenih stabilnih grana.



Slika 3.11: Bifurkacioni dijagram za jed. (3.6).

Daljim povećanjem vrednosti parametra r stanje sistema ostaje na udaljenim stabilnim granama.

Ukoliko sada počnemo da smanjujemo vrednost parametra r stanje sistema i dalje ostaje na stabilnim granama, čak i za $r < r_0$! Potrebno je da vrednost parametra r postane manja od r_s , da bi se stanje sistema "vratilo" u početni položaj $x^* = 0$.

Odsustvo reverzibilnosti pri promeni parametra naziva se **histerezis**.

U ovom slučaju, bifurkacija u tački r_s je sedlo-čvor bifurkacija, pri kojoj se stabilne i nestabilne fiksne tačke, pri promeni parametra r , pojavljuju "kao iz vedra neba".

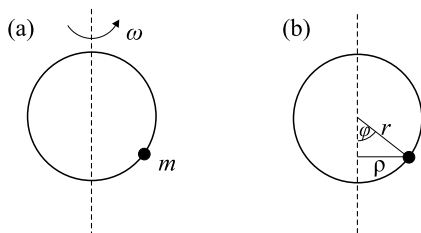
Naglasimo da analiza nelinearnog sistema (3.6) pokazuje da je bifurkaciona analiza, kojom se ovde bavimo, isključivo lokalnog karaktera. Bifurkacione vrednosti parametra i tip bifurkacije se mogu utvrditi samo u okolini tačke bifurkacije. Globalna analiza, u koju spada i analiza histerezisa, privilegija je jednostavnih sistema male dimenzije, u koje spada i opisani model. Već u slučaju dvodimenzionalnih sistema globalna analiza može biti izuzetno zahtevna.

Potkritična bifurkacija ponekad se naziva ”invertovana” ili ”bifurkacija unazad” i povezana je sa faznim prelazom prvog reda.

Često se za potkritičnu bifurkaciju koriste i nazivi ”teška” ili ”opasna”, zbog skoka od položaja u fiksnoj tački pre bifurkacije do stabilnih grana, na velikoj udaljenosti, posle bifurkacije.

3.5 Kretanje perle po rotirajućem hrapovom obroču u otpornoj sredini

Posmatrajmo kretanje perle, mase m , koja klizi duž krutog žičanog obruča poluprečnika r . Obruč rotira konstantnom ugaonom brzinom ω oko svoje vertikalne ose (sl. 3.12a).



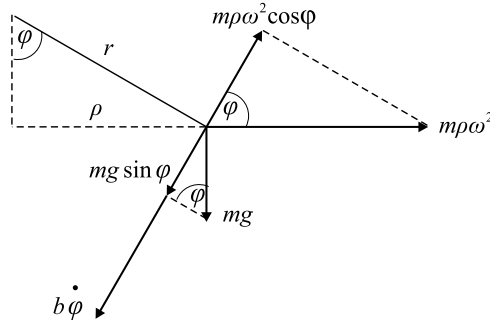
Slika 3.12: Kretanje perle po rotirajućem obroču.

Analizirajmo kretanje perle pod dejstvom sledećih sila (sl. 3.13):

- gravitacione sile $m\mathbf{g}$,
- centrifugalne sile, intenziteta $m\varrho\omega^2$, gde $\varrho = r \sin \varphi$ označava rastojanje perle od vertikalne ose, koja prolazi kroz centar obruča,
- sile trenja, intenziteta $b\dot{\varphi}$, koja je suprotna smeru kretanja perle.

Konstanta b predstavlja koeficijent trenja, \mathbf{g} je gravitaciono ubrzanje, a φ je ugao između pravca perla-centar obruča i pravca vertikalne ose (vidi

sl. 3.12b). Ugao φ je u intervalu $-\pi < \varphi \leq \pi$, tako da postoji samo jedan ugao za svaki položaj perle na obruču.



Slika 3.13: Sile koje deluju na perlu.

Polazeći od drugog Njutnovog zakona, jednačina kretanja perle⁷ je

$$mr\ddot{\varphi} = -b\dot{\varphi} - mg \sin \varphi + mr\omega^2 \sin \varphi \cos \varphi. \quad (3.7)$$

Ako je sila trenja velika, može da se zanemari inercijalni član $mr\ddot{\varphi}$, pa se posmatrani dinamički sistem može opisati diferencijalnom jednačinom prvog reda, koji ćemo nadalje analizirati.

Razmotrimo sada sistem prvog reda

$$\begin{aligned} b\dot{\varphi} &= -mg \sin \varphi + mr\omega^2 \sin \varphi \cos \varphi = \\ &= mg \left(\frac{r\omega^2}{g} \cos \varphi - 1 \right) \sin \varphi. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Fiksne tačke jednačine (3.8) odgovaraju ravnotežnim položajima perle. Jednačina (3.8) pokazuje da uvek postoje fiksne tačke u položaju gde je $\sin \varphi = 0$, odnosno za $\varphi^* = 0$ (na dnu obruča) i za $\varphi^* = \pi$ (na vrhu obruča). Osim ovih fiksnih tačaka, postoje i dve dodatne fiksne tačke, ukoliko pretpostavimo da se obruč obrće dovoljno brzo, tj. ako važi

$$\frac{r\omega^2}{g} > 1.$$

Dve nove fiksne tačke dobijaju se iz jednačine

$$\varphi^* = \pm \arccos \left(\frac{g}{r\omega^2} \right).$$

⁷Ova jednačina je zapravo projekcija II Njutnovog zakona na pravac tangente na obruč.

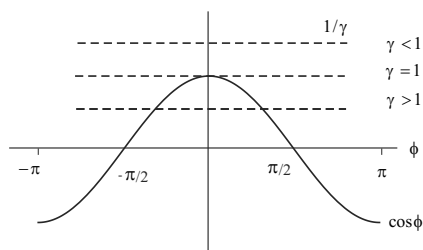
Uvedimo parametar

$$\gamma = \frac{r\omega^2}{g}$$

i geometrijski pristupimo rešavanju jednačine

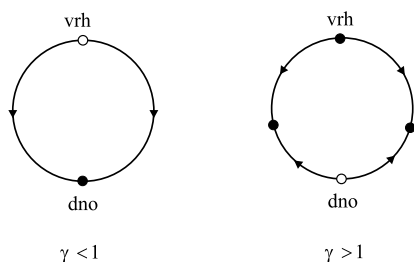
$$\cos \varphi^* = \frac{1}{\gamma}.$$

Rešenje (grafik) ove jednačine je presek funkcije $\cos \varphi$ sa konstantom $1/\gamma$ (vidi sl. 3.14). Kako je funkcija $\cos \varphi$ ograničena između ± 1 , to će presek biti samo ako je $0 < 1/\gamma \leq 1$, jer je γ veće od nule, prema definiciji.

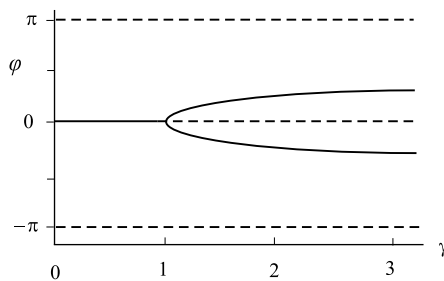


Slika 3.14: Presek funkcija $\cos \varphi$ i $1/\gamma$.

Za $\gamma < 1$ nema preseka sa krivom $\varphi = \cos \varphi$, dok za $\gamma > 1$ postoji simetričan par preseka sa obe strane položaja $\varphi^* = 0$. Za $\gamma \rightarrow \infty$, ovi preseki se "približavaju" položajima $\pm\pi/2$. Na slici 3.15 prikazani su položaji fiksni tačkica na obruču, za slučajeve $\gamma < 1$ i $\gamma > 1$.



Slika 3.15: Položaji fiksni tačkica na obruču.



Slika 3.16: Bifurkacioni dijagram promenljive φ , u funkciji parametra γ .

Skicirajmo sada bifurkacioni dijagram promenljive φ , u funkciji parametra γ (sl. 3.16). Kao i obično, pune linije označavaju stabilne fiksne tačke, a isprekidane linije označavaju nestabilne fiksne tačke.

Uočimo da se natkritična vilasta bifurkacija pojavljuje u položaju $\gamma = 1$.

Fizička interpretacija rezultata

Za $\gamma < 1$, obruč rotira sporo i centrifugalna sila je suviše slaba da bi se uravnotežila sa silom gravitacije. Zato perla klizi nadole i ostaje na

dnu. Za $\gamma > 1$ obruč se obrće brzo i dno obruča postaje nestabilno. Kako centrifugalna sila raste sa pomeranjem perle sa dna obruča nagore, bilo kakav (proizvoljno mali) pomeraj perle biće pojačan. Perla je, zato, "primorana" da se kreće uz obruč naviše sve dok se gravitaciona sila ne izjednači sa centrifugalnom silom. Ova ravnoteža pojavljuje se u položaju $\varphi^* = \pm \arccos(g/r\omega^2)$. U kom ravnotežnom položaju će se perla naći, zavisíce od početnog otklona.

Dimenzionalna analiza i skaliranje

Kada je ispravno zanemariti inercioni član $mr\ddot{\varphi}$ u jednačini (3.7)? Možemo da pretpostavimo da $m \rightarrow 0$, ali tada "nestaju" centrifugalna i gravitaciona sila, pa taj pristup nije pogodan za dalju analizu.

U ovakvim problemima, korisno je izraziti jednačinu u bezdimenzionalnom obliku (sada svi članovi u jednačini (3.7) imaju dimenziju sile). Prednost bezdimenzionalne formulacije je u tome što se broj parametara u jednačini redukuje, njihovim grupisanjem u bezdimenzionalne grupe. Ova redukcija uvek pojednostavljuje analizu.

Postoji nekoliko načina da se jednačina svede na bezdimenzionalni oblik. Definišimo bezdimenzionalno vreme τ

$$\tau = \frac{t}{T},$$

gde je T karakteristična vremenska skala, koja će kasnije biti odabrana. Kada T izaberemo ispravno, novi izvodi $\frac{d\varphi}{d\tau}$ i $\frac{d^2\varphi}{d\tau^2}$ treba da budu $O(1)$, tj. reda jedinice. Koristeći posredno diferenciranje (izvod složene funkcije), dobijamo

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &\equiv \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{T} \frac{d\varphi}{d\tau} \\ \ddot{\varphi} &= \frac{1}{T^2} \frac{d^2\varphi}{d\tau^2}.\end{aligned}$$

Stoga, jednačina (3.7) postaje

$$\frac{mr}{T^2} \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} = -\frac{b}{T} \frac{d\varphi}{d\tau} - mg \sin \varphi + mr\omega^2 \sin \varphi \cos \varphi.$$

Da bismo ovu jednačinu sveli na bezdimenzionalni oblik, podelićemo je članom mg , koji ima dimenziju sile. Tada je

$$\left(\frac{r}{gT^2}\right) \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} = -\left(\frac{b}{mgT}\right) \frac{d\varphi}{d\tau} - \sin \varphi + \left(\frac{r\omega^2}{g}\right) \sin \varphi \cos \varphi. \quad (3.9)$$

Svaki od članova u zagradama je bezdimenzionalni. Član $\frac{r\omega^2}{g}$, u prethodnoj jednačini, označićemo sa γ .

Određimo uslove pod kojima je leva strana jednačine (3.9) zanemarljiva, u poređenju s ostalim članovima, i gde su svi članovi na desnoj strani istog reda veličine. Kako su izvodi, po pretpostavci, reda veličine $O(1)$ i kako je $\sin \varphi \approx O(1)$, potrebno je da važi i:

$$\frac{b}{mgT} \approx O(1) \quad \text{i} \quad \frac{r}{gT^2} \ll 1.$$

Prvi od ovih uslova određuje vremensku skalu (razmeru) T , pa je prirodan izbor

$$T = \frac{b}{mg}.$$

Uslov

$$\frac{r}{gT^2} \ll 1$$

postaje

$$\frac{r}{g} \left(\frac{mg}{b} \right)^2 \ll 1, \quad (3.10)$$

ili, ekvivalentno

$$b^2 \gg m^2 gr.$$

Poslednji uslov važi kada je trenje veoma jako, ili kada je masa perle veoma mala.

Uslov (3.10) motiviše nas da uvedemo bezdimenzionalni član

$$\varepsilon = \frac{m^2 gr}{b^2}. \quad (3.11)$$

Jednačina (3.9) postaje

$$\varepsilon \frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} = -\frac{d\varphi}{d\tau} - \sin \varphi + \gamma \sin \varphi \cos \varphi. \quad (3.12)$$

Kao što smo i predvideli, bezdimenzionalna jednačina (3.12) jednostavnija je od jednačine (3.7): pet parametara m , g , r , ω i b zamenjeni su sa dva bezdimenzionalna člana (parametara) γ i ε , koji su izraženi pomoću prethodnih pet.

Prethodna dimenzionalna analiza pokazuje da se, u uslovima velikog trenja, kada $\varepsilon \rightarrow 0$, jednačina (3.12) može dobro aproksimirati sistemom prvog reda

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = f(\varphi), \quad (3.13)$$

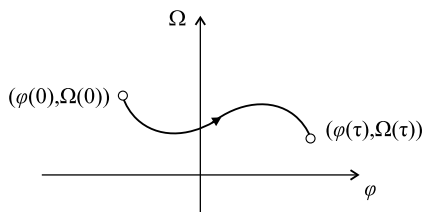
gde je

$$\begin{aligned} f(\varphi) &= -\sin \varphi + \gamma \sin \varphi \cos \varphi = \\ &= \sin \varphi (\gamma \cos \varphi - 1). \end{aligned}$$

Analiza u faznoj ravni

Sistem drugog reda (3.12) može biti posmatran kao vektorsko polje u **faznoj ravni** (sl. 3.17).

Ravan "razapinju" dve ose: prva na koju se nanosi ugao φ , i druga na koju se nanosi ugaona brzina Ω .



Slika 3.17: Fazna ravan.

Početni uslov za jednačinu (3.12) odgovara tački (φ_0, Ω_0) u faznoj ravni (slika 3.17). Tokom vremena, fazna tačka $(\varphi(t), \Omega(t))$ se kreće u faznoj ravni duž trajektorije određene rešenjem jednačine (3.12).

Da bismo jednačinu (3.12) predstavili kao vektorsko polje, zapišimo je u obliku

$$\varepsilon \Omega' = f(\varphi) - \Omega.$$

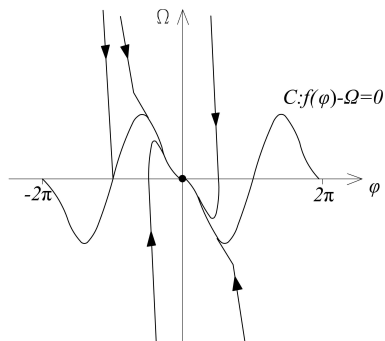
Zajedno sa definicijom $\varphi' (= \frac{d\varphi}{d\tau}) = \Omega$, ovo daje vektorsko polje

$$\varphi' = \Omega, \tag{3.14}$$

$$\Omega' = \frac{1}{\varepsilon} (f(\varphi) - \Omega). \tag{3.15}$$

Vektor (φ', Ω') u tački (φ, Ω) interpretiramo kao lokalnu brzinu faznog fluida koji teče u ravni. Uočimo da vektor brzine sada ima dve komponente, jednu u φ -pravcu i jednu u Ω -pravcu. Radi bolje predstave o trajektorijama, zamislimo kako bi se fazna tačka kretala, "nošena" faznim fluidom.

Kada važi $\varepsilon \rightarrow 0$, sve trajektorije oštro "padaju" na krivu C definisanu sa $f(\varphi) = \Omega$, a zatim se duž ove krive, "polako kreću" ka fiksnoj tački (slika 3.18).



Slika 3.18: Trajektorije u faznoj ravni.

Potvrdimo prethodni zaključak izračunavanjem reda veličine prethodno pomenutih promenljivih. Neka je fazna tačka na krivoj C . Pretpostavimo da se (φ, Ω) nalazi na malom rastojanju, reda veličine $O(1)$, ispod krive C , tj. da važi

$$\Omega < f(\varphi) \quad \text{i} \quad f(\varphi) - \Omega \approx O(1).$$

Tada iz (3.15) sledi da je Ω' "veoma" pozitivno:

$$\Omega' \approx O(1/\varepsilon) \gg 1.$$

Zato fazna tačka "skače" velikom brzinom u oblast gde je $f(\varphi) - \Omega \approx O(\varepsilon)$, koju možemo poistovetiti sa krivom C , kada $\varepsilon \rightarrow 0$. Tada se tačka u faznoj ravni kreće po trajektoriji koja se nalazi u oblasti $\Omega \approx f(\varphi)$, tj. ona približno zadovoljava jednačinu prvog reda $\varphi' = f(\varphi)$.

Prema tome, tipična trajektorija sastoji se iz dva dela: brzog početnog **tranzijenta**, tokom koga fazna tačka "skače" na krivu gde je $\varphi' = f(\varphi)$, i drugog znatno sporijeg dela kad se fazna tačka kreće duž krive $\varphi' = f(\varphi)$.

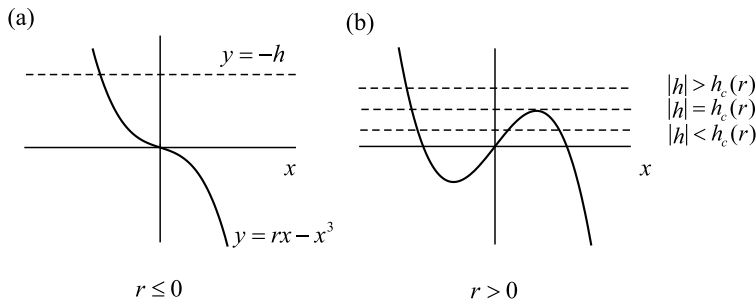
3.6 "Nesavršene" bifurkacije i katastrofe

Posmatrajmo sistem

$$\dot{x} = h + rx - x^3. \quad (3.16)$$

Za $h = 0$ dobićemo normalnu formu za natkritičnu vilastu bifurkaciju, i tada je funkcija \dot{x} neparna, tj. $(-x) = -\dot{x}$ (simetrična u odnosu na koordinatni početak). Ova simetrija se narušava za $h \neq 0$ i zbog ovog razloga, h posmatramo kao parametar "narušavanja simetrije".

Pretpostavimo da je r konstantno, pa ispitajmo uticaj promene parametra h . Skicirajmo grafike funkcija $y = rx - x^3$ i $y = -h$ (sl. 3.19). U presecima ovih funkcija nalaze se fiksne tačke jednačine (3.16). Za $r \leq 0$, kubna jednačina je monotono opadajuća i preseca horizontalnu liniju $y = -h$ u jednoj tački (slika 3.19a). Za $r > 0$ moguća su jedan, dva ili tri preseka, u zavisnosti od vrednosti parametra h (slika 3.19b).



Slika 3.19: Grafici funkcija $y = rx - x^3$ i $y = -h$.

Kritični slučaj pojavljuje se kada horizontalna linija zauzima tačno tangentni položaj na lokalni minimum, ili na lokalni maksimum, kubne krive. U tom slučaju, pojavljuje se sedlo-čvor bifurkacija. Da bismo odredili vrednosti h , za koje se ova bifurkacija pojavljuje, zapazimo da kubna kriva ima lokalni maksimum kada važi

$$\frac{d}{dx} (rx - x^3) = r - 3x^2 = 0.$$

Odavde dobijamo

$$x_{\max} = \sqrt{\frac{r}{3}},$$

i vrednost kubne krive u položaju lokalnog maksimuma je

$$rx_{\max} - (x_{\max})^3 = \frac{2r}{3} \sqrt{\frac{r}{3}}.$$

Slično, vrednost u položaju lokalnog minimuma je $-\frac{2r}{3}\sqrt{r/3}$. Dakle, sedlo-čvor bifurkacija pojavljuje se za $h = \pm h_c(r)$, gde je

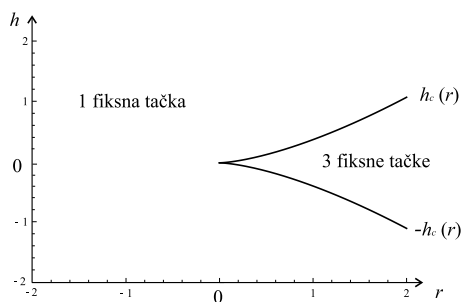
$$h_c(r) = \frac{2r}{3}\sqrt{\frac{r}{3}}.$$

Jednačina (3.16) ima tri fiksne tačke za $|h| < h_c(r)$ i jednu fiksnu tačku za $|h| > h_c(r)$.

Nacrtajmo bifurkacione krive $h = \pm h_c(r)$ u (r, h) ravni (slika 3.20). Uočimo da se dve bifurkacione krive seku u tački $(r, h) = (0, 0)$ u kojoj imaju zajedničku tangentu. Ova tačka naziva se **tačka "šiljak"**⁸.

Ove krive, takođe, razdvajaju oblasti koje odgovaraju različitim brojevima fiksnih tačaka. Sedlo-čvor bifurkacije pojavljuju se duž granica ovih oblasti, osim u tački-šiljku, gde se pojavljuje **bifurkacija kodimenzije-2** (bifurkacija koja nastaje podešavanjem dva parametra).

Do sada, sve bifurkacije koje smo razmatrali bile su postignute podešavanjem samo jednog parametra (**bifurkacije kodimenzije-1**).

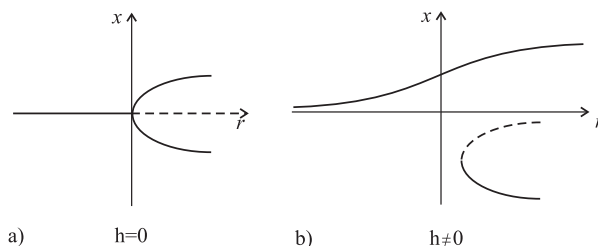


Slika 3.20: Bifurkacione krive u prostoru parametara h i r .

Ovakve dijagrame (sl. 3.20) nazivamo **dijagrami stabilnosti**, koji pokazuju različite tipove ponašanja sistema u prostoru parametara (ovde (r, h) ravan).

Nacrtajmo sada bifurkacioni dijagram promenljive x u funkciji r , za fiksno h , u okolini fiksne tačke x^* (slika 3.21).

⁸cusp point (eng).

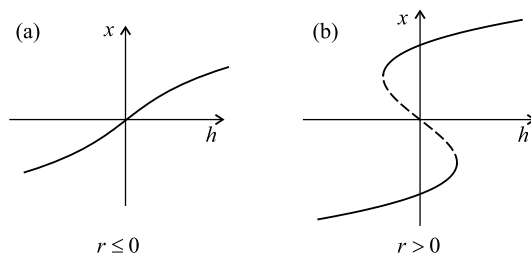


Slika 3.21: Bifurkacioni dijagrami, za različite vrednosti parametra h .

Za $h = 0$ dobijamo uobičajeni bifurkacioni dijagram za vilastu bifurkaciju (sl. 3.21a). Za $h \neq 0$, bifurkacioni dijagram razdvaja se na dva dela (sl. 3.21b). U gornjem delu dijagrama javljaju se samo stabilne fiksne tačke, dok donji deo ima i stabilnu i nestabilnu "granu".

Uočimo da za $r = 0$ više nema oštrog prelaza (kao na sl. 3.21a), već fiksna tačka glatko "klizi" duž gornje grane. Samo veliki poremećaj "vodi" tačku u faznoj ravni na donju stabilnu granu bifurkacionog dijagrama (sl. 3.21b)

Nacrtajmo sada bifurkacioni dijagram promenljive x u funkciji h , za fiksno r , u okolini fiksne tačke x^* (slika 3.22).

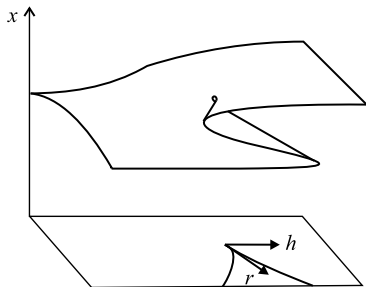


Slika 3.22: Bifurkacioni dijagrami, za različite vrednosti parametra r .

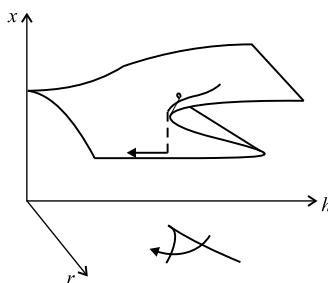
Za $r \leq 0$ postoji jedna stabilna fiksna tačka za svako h (slika 3.22a). Međutim, za $r > 0$ postoje tri fiksne tačke za $|h| < h_c(r)$, i jedna stabilna fiksna tačka, kad je $|h| > h_c(r)$ (slika 3.22b).

Predstavimo sada rezultate u tri dimenzije. Ako nacrtamo fiksne tačke x^* iznad (r, h) ravni, dobijamo površ, koju nazivamo **šiljak - katastrofa**, prikazanu na slici 3.23.

Projekcija prevoja površi, na (r, h) ravan, predstavlja bifurkacione krive prikazane na slici 3.20. Presek za fiksno h daje sliku 3.21, a presek za fiksno r daje sliku 3.22.



Slika 3.23: Površ šiljak - katastrofa.

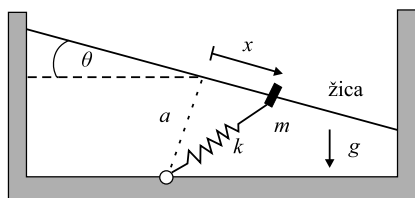


Slika 3.24: "Pretrčavanje" stanja sistema preko ivice gornje površi.

Naziv **katastrofa** motivisan je činjenicom da pri promeni vrednosti parametra, stanje sistema može "pretrčati" preko ivice gornje površi, posle čega se ono "strmoglavljuje" diskontinualno (slika 3.24).

Perla na glatkoj žici

Kao jednostavni primer nesavršene bifurkacije i katastrofe, razmotrimo sistem, prikazan na slici 3.25.



Slika 3.25: Perla na glatkoj žici.

Perla mase m klizi duž prave žice nagnute pod uglom θ u odnosu na horizontalu. Opruga krutosti k i dužine L_0 u nenapregnutom stanju, zakačena je za perlu. Ceo sistem nalazi se u polju sile Zemljine teže. Koordinatna osa x postavljena je duž žice (sl. 3.25). Koordinatni početak biramo tako da je $x = 0$ u položaju koji je najbliži tački u kojoj je opruga zakačena za osnovu. Ovo rastojanje označimo sa a .

Kada je žica horizontalna ($\theta = 0$), postoji savršena (tačna) simetrija između leve i desne strane žice i $x = 0$ je uvek položaj ravnoteže. Stabilnost ove ravnoteže zavisi od relativnog odnosa veličina L_0 i a : ako je $L_0 < a$, opruga je istegnuta i položaj ravnoteže je stabilan. Međutim, ako je $L_0 > a$, opruga je sabijena i očekujemo **nestabilnu ravnotežu** u položaju $x = 0$ i par stabilnih ravnotežnih položaja sa obe strane ove nestabilne ravnoteže.

Kada nagnemo žicu, u odnosu na horizontalu ($\theta \neq 0$), za malu vrednost ugla θ , očekujemo da i dalje postoje tri ravnotežna položaja, kada je $L_0 > a$. Za vrednosti ugla θ veće od određene granične vrednosti, može se očekivati da gornja ravnoteža iznenada nestane i da perla naglo, "katastrofalno", skoči u donji ravnotežni položaj, kao u prethodno razmatranom opštem slučaju šiljak-katastrofe.

3.7 Najezda insekata

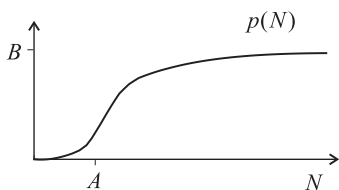
Model, koji su Ludvig i dr. [189] predložili i analizirali, za interakcije između insekata i šume, opisan je jednačinom

$$\dot{N} = RN \left(1 - \frac{N}{K} \right) - p(N). \quad (3.17)$$

Ovaj model predstavlja biološki primer bifurkacije i katastrofe, za iznenadnu najezdu jedne vrste insekata, koja napada četinare.

U odsustvu predatora, pretpostavlja se da populacija insekata $N(t)$ raste logistički sa koeficijentom rasta R i parametrom populacije⁹ K .

Vrednost parametra populacije zavisi od količine četina preostalih na drveću. Ovaj parametar se sporo menja i u ovoj fazi tretiramo ga kao konstantu.



Član $p(N)$ predstavlja stopu smrtnosti, kao posledicu postojanja predatora (u ovom slučaju ptica). Njegov oblik prikazan je na slici 3.26.

Slika 3.26: Funkcija $p(N)$.

Ludvig je, 1978. god., predložio specijalan oblik funkcije $p(N)$

$$p(N) = \frac{BN^2}{A^2 + N^2},$$

gde je $A, B > 0$. Zamenom ove jednačine, u jednačinu (3.17), dobijamo

$$\dot{N} = RN \left(1 - \frac{N}{K} \right) - \frac{BN^2}{A^2 + N^2}. \quad (3.18)$$

⁹Ovaj parametar predstavlja maksimalnu brojnost populacije koju resursi prirodne sredine mogu da izdrže.

Model, prikazan jednačinom (3.18), ima četiri parametra: R , K , A i B . Prvi član, na desnoj strani ove jednačine, predstavlja takozvani logistički član, a drugi član predstavlja takozvani predatorski član.

Svedimo ovu jednačinu na bezdimenzionalni oblik, tako da svi bezdimenzionalni članovi budu u logističkom delu jednačine, a nijedna u predatorskom delu.

Da bismo se oslobodili parametara u predatorskom delu, podelimo jednačinu (3.18) sa B i uvedimo smenu

$$x = \frac{N}{A},$$

odakle dobijamo

$$\frac{A}{B} \frac{dx}{dt} = \frac{R}{B} Ax \left(1 - \frac{Ax}{K}\right) - \frac{x^2}{1+x^2}. \quad (3.19)$$

Uvedimo sada bezdimenzionalno vreme τ i bezdimenzionalne parametre r i k , na sledeći način:

$$\tau = \frac{Bt}{A}, \quad r = \frac{RA}{B}, \quad k = \frac{K}{A}.$$

Tada jednačina (3.19) postaje

$$\frac{dx}{d\tau} = rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{x^2}{1+x^2}. \quad (3.20)$$

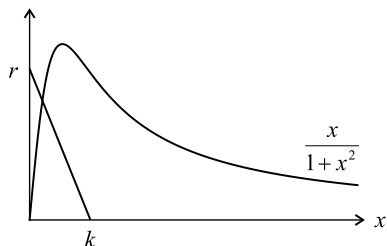
Ovde su r i k bezdimenzionalni koeficijent rasta i parametar populacije.

3.7.1 Analiza fiksnih tačaka

Jednačina (3.20) ima fiksnu tačku u položaju $x^* = 0$; ona je **uvek nestabilna**. Druge fiksne tačke jednačine (3.20) date su rešenjima jednačine

$$r \left(1 - \frac{x}{k}\right) = \frac{x}{1+x^2}. \quad (3.21)$$

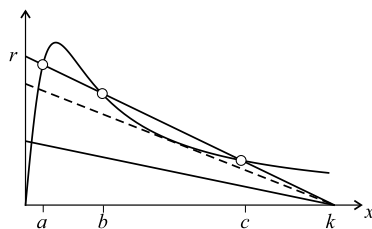
Ova jednačina se lako grafički analizira – crtamo desnu i levu stranu jednačine (3.21) i određujemo preseke (sl. 3.27). Leva strana jednačine (3.21) predstavlja pravu liniju, koja preseca x -osu u k , y -osu u r , a desna strana predstavlja krivu koja je nezavisna od vrednosti parametara.



Slika 3.27: Grafički funkcija, leve i desne strane, jednačine (3.21).

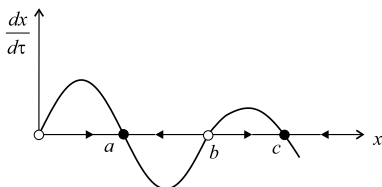
Slika 3.27 pokazuje da ako je k dovoljno malo postoji tačno jedan presek za bilo koje $r > 0$. Međutim, za veliku vrednost k , mogu postojati jedan, dva ili tri preseka, zavisno od vrednosti r (sl. 3.28). Pretpostavimo da postoje tri preseka a , b i c . Smanjivanjem vrednosti r , za fiksno k , linija rotira oko k suprotno smeru kazaljke na časovniku.

Tada se fiksne tačke b i c "približavaju" jedna drugoj i konačno se sjedinjuju u sedlo-čvor bifurkaciji kada linija tangira krivu (isprekidana linija na slici 3.28). Posle bifurkacije, jedina preostala fiksna tačka je a , pored fiksne tačke u $x^* = 0$. Takođe, pri povećanju vrednosti parametra r , a i b mogu da se "sudare" i ponište u sedlo-čvor bifurkaciji.



Slika 3.28: Grafički funkcija, leve i desne strane, jednačine (3.21), pri smanjivanju vrednosti parametra r .

Da bismo odredili stabilnost fiksni tačaka, podsetimo se da je $x^* = 0$ nestabilna fiksna tačka, i uočimo, takođe, da se tip stabilnosti mora menjati pri kretanju duž x -ose.



Slika 3.29: Vektorsko polje jednačine 3.17, za r i k u opsegu koji odgovara postojanju tri pozitivne fiksne tačke.

Tako je a stabilno, b nestabilno, a c , opet, stabilno. Dakle, za r i k u opsegu koji odgovara postojanju tri pozitivne fiksne tačke, vektorsko polje kvalitativno liči na ono prikazano na slici 3.29.

3.7.2 Određivanje bifurkacionih krivih

Oredimo krive u (k, r) prostoru, gde sistem prolazi kroz sedlo-čvor bifurkaciju. Kao što je prethodno pomenuto, uslov za sedlo-čvor bifurkaciju je da linija $r(1 - x/k)$ tangira krivu $x/(1 + x^2)$. Zato, zahtevamo da važe

dva uslova

$$r \left(1 - \frac{x}{k}\right) = \frac{x}{1 + x^2} \quad (3.22)$$

i

$$\frac{d}{dx} \left[r \left(1 - \frac{x}{k}\right) \right] = \frac{d}{dx} \left[\frac{x}{1 + x^2} \right]. \quad (3.23)$$

Posle diferenciranja, jednačina (3.23) svodi se na

$$-\frac{r}{k} = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}. \quad (3.24)$$

Prethodni izraz za r/k zamenjujemo u jednačinu (3.22), što nam omogućava da izrazimo r samo u funkciji od x . Dobijamo

$$r = \frac{2x^3}{(1 + x^2)^2}. \quad (3.25)$$

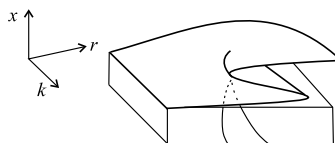
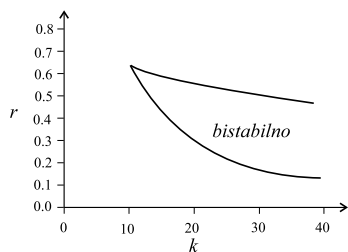
Zamenom (3.25) u (3.24) dobijamo

$$k = \frac{2x^3}{x^2 - 1}. \quad (3.26)$$

Iz uslova $k > 0$ sledi da je $x > 1$.

Izrazi (3.25) i (3.26) zajedno definišu bifurkacione krive. Za svako $x > 1$, crtamo odgovarajuću tačku $(k(x), r(x))$ u (k, r) ravni. Rezultujuće krive prikazane su na slici 3.30.

Različite oblasti na slici 3.30 označene su prema broju stabilnih fiksni tačaka koje postoje. Za male vrednosti r jedino stabilno stanje je a , dok je za velike vrednosti r jedino stabilno stanje c . U bistabilnoj oblasti, postoje oba stabilna stanja.



Slika 3.31: Površ šiljak-katastrofa za model dat jednačinom (3.20).

Slika 3.30: Bifurkacione krive u (k, r) ravni.

Dijagram stabilnosti veoma je sličan slici 3.20. Ovaj dijagram, takođe može biti posmatran kao projekcija šiljatog dela površi katastrofe, što je prikazano na slici 3.31.

Glava 4

Jednodimenzionalni sistemi na kružnici

*Poznavati jednačine i poznavati rešenja su dve različite stvari.
Jako, jako različite.*

T.D. Li, američki fizičar
kineskog porekla, dobitnik
Nobelove nagrade 1957.g.

4.1 Uvod

Razmotrimo jednačinu

$$\dot{\theta} = f(\theta),$$

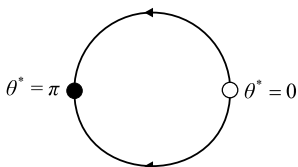
koja odgovara vektorskom polju na kružnici. Sa θ određen je položaj tačke na kružnici, a $\dot{\theta}$ je intenzitet brzine u tom položaju, određen jednačinom $\dot{\theta} = f(\theta)$.

Kao i linija, kružnica je jednodimenzionalna, ali, za razliku od linije, poseduje važno novo svojstvo: krećući se u jednom smeru, čestica će se posle izvesnog vremena ponovo naći u početnom položaju. Tako periodična rešenja, postaju moguća. Drugim rečima, vektorska polja na kružnici predstavljaju osnovni model za sisteme čija su rešenja periodična.

Skicirajmo vektorsko polje na kružnici koje odgovara jednačini

$$\dot{\theta} = \sin \theta. \tag{4.1}$$

Da bismo skicirali vektorsko polje, prvo određujemo fiksne tačke, definisane relacijom $\dot{\theta} = 0$. Rešenja ove jednačine, tj. fiksne tačke su u položajima $\theta^* = 0$ i $\theta^* = \pi$. Da bismo odredili njihovu stabilnost, zapazimo da je $\sin \theta > 0$ na gornjoj polukružnici.



Slika 4.1: Vektorsko polje za $\dot{\theta} = \sin \theta$.

Kako je $\dot{\theta} > 0$, to je tok usmeren suprotno kretanju kazaljke na satu. Slično, tok je u smeru kretanja na satu na donjoj polukružnici, gde je $\dot{\theta} < 0$. Pa je tako $\theta = \pi$ stabilna fiksna tačka, a $\theta^* = 0$ nestabilna, kao što je prikazano na slici 4.1.

Napomenimo, da postoje diferencijalne jednačine prvog reda koje ne mogu da se predstavljaju kao vektorsko polje na kružnici. Na primer, jednačina $\dot{\theta} = \theta$ ne može da se posmatra kao vektorsko polje na kružnici, za θ u opsegu $-\infty < \theta < \infty$, jer brzina nije jednoznačno definisana ($\theta = 0$ i $\theta = 2\pi$ su dve različite vrednosti za istu tačku na kružnici).

Prema tome, vektorskim poljima na kružnici mogu da se predstavljaju samo oni sistemi prvog reda $\dot{\theta} = f(\theta)$, za koje je funkcija $f(\theta)$ realna 2π -periodična funkcija, odnosno kada je $f(\theta + 2\pi) = f(\theta)$ za svako realno θ . Pretpostavljamo (kao i obično) da je funkcija $f(\theta)$ dovoljno glatka da bi postojalo jedinstveno rešenje (ispunjeni uslovi teoreme o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja). Iako ovaj sistem može biti predstavljen kao specijalan slučaj vektorskog polja na pravoj liniji, obično je mnogo jasnije kada se on predstavi kao vektorsko polje na kružnici. Ovo znači da ne pravimo razliku između raznih vrednosti θ , koje se razlikuju za celobrojni umnožak 2π . Ovde periodičnost $f(\theta)$ postaje važna, jer ona osigurava da je brzina $\dot{\theta}$ jedinstveno definisana u svakoj tački θ na kružnici. To znači da $\dot{\theta}$ ima istu vrednost za svako $\theta + 2k\pi$, za bilo koju celobrojnu vrednost k .

4.2 Uniformni oscilator

Najjednostavniji oscilator je onaj kod koga se faza θ menja ravnomerno (jednoliko)

$$\theta(t) = \omega t + \theta_0, \quad (4.2)$$

što odgovara ravnomernom kretanju po kružnici ugaonom brzinom ω . Ovo rešenje je periodično, jer se $\theta(t)$ menja za 2π (vraća u istu tačku na kružnici),

nakon perioda $T = 2\pi/\omega$. Naime, prema pretpostavci, $f(\theta)$ je periodična funkcija, tj.

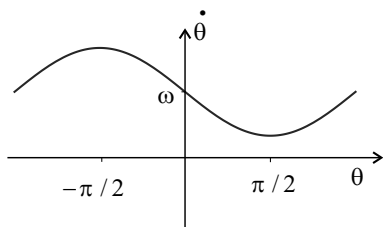
$$f(\theta) = f(\omega t + \theta_0) = f(\omega t + \omega T\theta_0) = f(\underbrace{\omega t + \theta_0}_{\theta} + 2\pi).$$

4.3 Neuniformni oscilator

Jednačina

$$\dot{\theta} = \omega - a \sin \theta \tag{4.3}$$

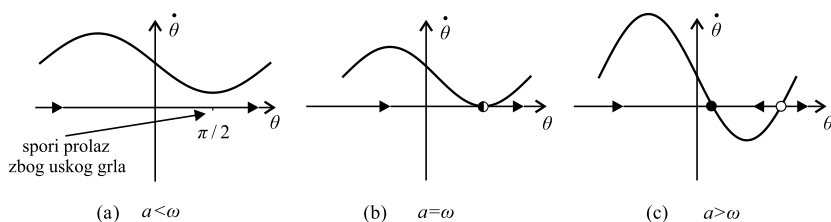
pojavljuje se u mnogim granama nauke i tehnike: biologije (oscilujući neuroni, ritam svetlucanja kod svitaca, ciklusi spavanja i budnog stanja kod čoveka), fizike čvrstog stanja, mehanike (klatno pod dejstvom jakog trenja i konstantnog momenta), itd.



Slika 4.2: Grafik funkcije (4.3).

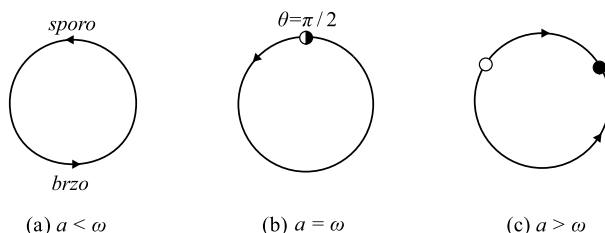
Da bismo analizirali jednačinu (4.3), pretpostavimo da je $\omega > 0$ i $a \geq 0$. Rezultati za negativne vrednosti ω i a su slični. Grafik funkcije $f(\theta) = \omega - a \sin \theta$ prikazan je na sl. 4.2.

Ako je $a = 0$, jednačina (4.3) svodi se na jednačinu (4.2) (uniformni oscilator). Parametar a uvodi neuniformnost u tok na kružnici. Tok je najvećeg intenziteta za $\theta = -\pi/2$ (sl. 4.3a), a najmanjeg za $\theta = \pi/2$. Ova neuniformnost postaje sve izraženija sa porastom vrednosti parametra a . Za malu vrednost a manje od ω , oscilacija je veoma "nemirna": tački $\theta(t)$, u faznoj ravni, potrebno je mnogo vremena dok "prođe kroz usko grlo" blizu $\theta = \pi/2$, posle čega ona "skače" mnogo brže po ostalom delu kruga. Za $a = \omega$, sistem prestaje da osciluje. Polustabilna fiksna tačka nastaje kroz sedlo-čvor bifurkaciju u tački $\theta = \pi/2$ (sl. 4.3b). Konačno, za $a > \omega$, polustabilna fiksna tačka deli se na stabilnu i nestabilnu fiksnu tačku (sl. 4.3c). Kada $t \rightarrow \infty$ sve trajektorije "kreću" se ka stabilnoj fiksnoj tački.



Slika 4.3: Sedlo-čvor bifurkacija, u faznoj ravni.

Sedlo-čvor bifurkacija, iz ovog primera, može da se prikaže vektorskim poljem na kružnici (sl. 4.4).



Slika 4.4: Sedlo-čvor bifurkacija, na kružnici.

Izvršimo klasifikaciju fiksnih tačaka, jednačine (4.3), korišćenjem linearne analize stabilnosti, za $a > \omega$.

Fiksne tačke θ^* zadovoljavaju jednakosti

$$\sin \theta^* = \frac{\omega}{a}, \quad \cos \theta^* = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{a}\right)^2},$$

a njihova linearna stabilnost je određena pomoću

$$f'(\theta^*) = -a \cos \theta^* = \mp a \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{a}\right)^2}.$$

Dakle, fiksna tačka, za koju važi $\cos \theta^* > 0$ je stabilna, jer je $f'(\theta^*) < 0$, što je prikazano na slici 4.3c. Ovde ' označava izvod po θ .

4.3.1 Period oscilovanja

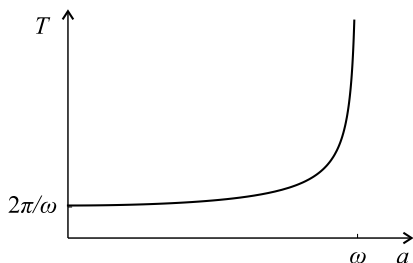
Za $a < \omega$, period oscilovanja može da bude određen analitički. Vreme potrebno da se ugao θ promeni za 2π dato je izrazom

$$T = \int_0^T dt = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{d\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\omega - a \sin \theta}.$$

Ovaj integral može da se reši smenom $u = \operatorname{tg}(\theta/2)$, pa dobijamo

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - a^2}} = T(a). \quad (4.4)$$

Kako je T realna funkcija, to sledi da je definisana za $0 \leq a < \omega$.



Slika 4.5: Grafik funkcije $T(a)$.

Slika 4.5 prikazuje period T u funkciji parametra a .

Za $a = 0$, jednačina (4.4) redukuje se na $T = 2\pi/\omega$, što predstavlja poznat rezultat, koji važi za uniformni oscilator. Period raste sa porastom parametra a i ima vertikalnu asimptotu u $a = \omega^*$, kada $a \rightarrow \omega^-$ (teži sa leve strane). Za $a = \omega^+$ funkcija nije definisana.

Kada $a \rightarrow \omega^-$ tada je

$$\sqrt{\omega^2 - a^2} = \sqrt{\omega + a}\sqrt{\omega - a} \approx \sqrt{2\omega}\sqrt{\omega - a},$$

odakle dobijamo

$$T \approx \left(\frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{\omega}} \right) \frac{1}{\sqrt{\omega - a}}. \quad (4.5)$$

Jednačina (4.5) pokazuje da T raste kao $(a_c - a)^{-1/2}$, gde je $a_c = \omega$. Uobičajeno je, u savremenoj literaturi, da se zakon oblika (4.5) naziva "stepeni" zakon¹. Kada je stepen jednak $-1/2$, kao u ovom slučaju, koristi se i termin "zakon skaliranja oblika kvadratnog korena"².

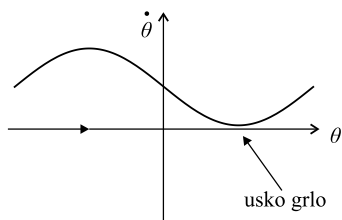
¹power law (eng.)

²square-root scaling law (eng.)

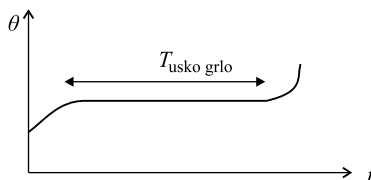
4.3.2 "Duhovi" i "uska grla"

Prethodno razmatrani stepeni zakon predstavlja opšte svojstvo sistema, koji su blizu sedlo-čvor bifurkacije. Neposredno pošto se fiksne tačke "sudare", pojavljuje se "ostatak" sedlo-čvor bifurkacije. Ovaj ostatak naziva se i "duh"³, i vodi do sporog prolaza kroz "usko grlo"⁴.

Na primer, razmotrimo jednačinu $\dot{\theta} = \omega - a \sin \theta$ za opadajuće vrednosti a , polazeći od $a > \omega$. Kako vrednost parametra a opada, dve fiksne tačke "prilaze" jedna drugoj, "sudaraju" se i nestaju (ovaj niz događaja prikazan je na sl. 4.4, posmatrajući sada sdesna nalevo). Za vrednost parametra a , malo manje od ω , fiksne tačke bliske položaju $\pi/2$ više ne postoje, ali se i dalje osećaju kroz "duh" sedlo-čvor tačke (sl. 4.6).



Slika 4.6: Grafik funkcije $\omega - a \sin \theta$, u faznoj ravni.



Slika 4.7: Grafik funkcije $\theta(t)$.

Grafik funkcije $\theta(t)$ prikazan je na sl. 4.7. Uočimo da trajektorija najveći deo vremena "troši" prolazeći kroz usko grlo.

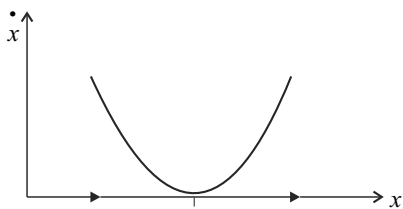
Izvedimo sada zakon skaliranja, u opštem obliku, za vreme potrebno da se "prođe" kroz usko grlo. Ponašanje funkcije $\dot{\theta}$ razmatramo u neposrednoj blizini minimuma, gde funkcija, u ovom slučaju, "troši" najviše vremena. Lokalno, u okolini minimuma funkcije $\dot{\theta}$, gde se javlja usko grlo, vektorsko polje možemo napisati u obliku

$$\dot{x} = r + x^2,$$

što predstavlja normalnu formu za sedlo-čvor bifurkaciju.

³ghost (eng.)

⁴bottleneck (eng.)



Slika 4.8: Grafik funkcije $r + x^2$, u faznoj ravni.

U ovoj jednačini r je proporcionalno rastojanju od bifurkacije, a pripada intervalu $0 < r \ll 1$. Grafik funkcije \dot{x} je prikazan na sl. 4.8.

Da bismo procenili vreme provedeno u uskom grlu, računamo vreme potrebno da x pređe put od $-\infty$ (put na jednoj strani uskog grla), do $+\infty$ (put na drugoj strani).

Tada je

$$T_{uskog\ grlo} \approx \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{r + x^2} = \frac{\pi}{\sqrt{r}}. \quad (4.6)$$

Ova jednačina takođe predstavlja stepeni zakon, što potvrđuje opštost zakona skaliranja u obliku kvadratnog korena.

Polazeći od funkcije $\dot{\theta} = \omega - a \sin \theta$, kada $a \rightarrow \omega^-$, procenimo vreme potrebno da se prođe kroz usko grlo, korišćenjem metode normalnih formi.

Koristeći Tejlorov razvoj u red, oko $\theta = \pi/2$, gde dolazi do pojave uskog grla, dobijamo

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \omega - a \sin(\phi + \pi/2) = \omega - a \cos \phi = \\ &= \omega - a + \frac{1}{2}a\phi^2 + \dots \end{aligned}$$

gde je $\phi = \theta - \pi/2$, za malo ϕ .

Smenom

$$x = \sqrt{\frac{a}{2}}\phi, \quad r = \omega - a$$

dobijamo

$$\sqrt{\frac{2}{a}}\dot{x} \approx r + x^2,$$

zadržavajući se na članu drugog reda. Razdvajanjem promenljivih, dobijamo

$$T \approx \sqrt{\frac{a}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{r + x^2} = \sqrt{\frac{a}{2}} \frac{\pi}{\sqrt{r}} = \sqrt{\frac{a}{2}} \frac{\pi}{\sqrt{\omega - a}}.$$

Kako $a \rightarrow \omega^-$, možemo zameniti $2/a$ sa $2/\omega$, pa dobijamo

$$T \approx \left(\frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{\omega}} \right) \frac{1}{\sqrt{\omega - a}}$$

što je u saglasnosti sa jednačinom (4.5).

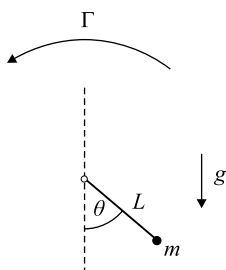
4.4 Klatno u otpornoj sredini

Razmotrimo jednostavan primer neuniformnog oscilatora: kretanje klatna u otpornoj sredini pod dejstvom konstantnog momenta. Neka je θ ugao između klatna i vertikale (sl. 4.9), i pretpostavimo da θ raste u smeru suprotnom kretanju kazaljke na časovniku.

Polazeći od II Njutnovog zakona, jednačina kretanja je

$$mL^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mgL \sin \theta = \Gamma, \quad (4.7)$$

gde je m masa, L dužina klatna, b je koeficijent viskoznog prigušenja, g je ubrzanje sile Zemljine teže, a Γ je moment konstantnog intenziteta. Sve ove vrednosti su pozitivne, a $\Gamma > 0$ znači da moment obrće klatno u smeru suprotnom kretanju kazaljke na časovniku, kao što je prikazano na sl. 4.9.



Slika 4.9: Klatno u otpornoj sredini pod dejstvom konstantnog momenta.

Jednačina (4.7) je sistem drugog reda. Međutim, ako je otpor sredine veliki (velike vrednosti konstante b), tada inercijalni član $mL^2\ddot{\theta}$ može da se zanemari, pa jednačina (4.7) postaje

$$b\dot{\theta} + mgL \sin \theta = \Gamma. \quad (4.8)$$

Sa fizičke tačke gledišta, možemo da pretpostavimo da se klatno kreće kroz gusti sirup.

Napomenimo da je ovo suprotno od slučaja kada se otpor sredine zanemaruje, energija očuvava, a klatno stalno kreće napred-nazad. U ovom slučaju, energija se gubi zbog otpora sredine, a obnavlja dejstvom momenta.

Pre nego što počnemo da razmatramo jednačinu (4.8), svedimo je, najpre, na bezdimenzionalni oblik, deljenjem sa mgL

$$\frac{b}{mgL} \dot{\theta} = \frac{\Gamma}{mgL} - \sin \theta.$$

Dalje, smenom

$$\tau = \frac{b}{mgL}t, \quad \gamma = \frac{\Gamma}{mgL} \quad (4.9)$$

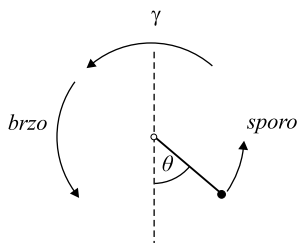
dobijamo

$$\theta' = \gamma - \sin \theta,$$

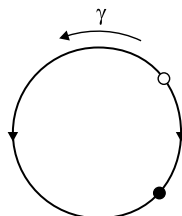
gde ' označava izvod po τ , tj.

$$\theta' = \frac{d\theta}{d\tau}. \quad (4.10)$$

Bezdimenzionalni član γ je odnos momenta Γ i maksimalnog momenta gravitacione sile. Ako je $\gamma > 1$, moment Γ nikada neće biti uravnotežen momentom gravitacione sile i klatno će se neprekidno okretati. Brzina rotacije nije uniformna (ravnomerna), jer moment gravitacione sile menja smer pri prelasku klatna sa jedne strane na drugu (sl. 4.10).



Slika 4.10: Neravnomerno kretanje klatna.



Slika 4.11: Fiksne tačke sistema.

Kada $\gamma \rightarrow 1^+$, klatnu treba sve više vremena da dođe do položaja $\theta = \pi/2$ na "sporoj" strani. Za $\gamma = 1$, u položaju $\theta^* = \pi/2$ pojavljuje se fiksna tačka, a zatim se "deli" u dve fiksne tačke za $\gamma < 1$ (sl. 4.11). Sa fizičke tačke gledišta, jasno je da je donji položaj, od dva ravnotežna položaja, stabilan.

Kada se vrednost γ smanjuje, dve fiksne tačke sve više se međusobno "udaljavaju". Za $\gamma = 0$, Γ je jednako nuli i nestabilan položaj ravnoteže je na vrhu, a stabilni položaj ravnoteže na dnu.

4.5 Svetlućanje svitaca

Hanson [121] je, 1978. god., eksperimentalno razmatrao pojavu svetlućanja svitaca, periodično paleći lampu i prateći napor svica da svoje svetlućanje sinhronizuje sa svetlošću lampe. Za niz perioda bliskih prirodnom

periodu svetlućanja svica (oko 0,9 [s]), svitac je bio u stanju da uskladi sopstvenu frekvenciju sa frekvencijom lampe. Međutim, kad se lampa suviše brzo ili suviše sporo pali-gasi, svitac ne može da uskladi svoju frekvenciju svetlućanja sa frekvencijom lampe. Tada fazna razlika, između svica i lampe, ne raste uniformno. Ova razlika raste sporo tokom dela ciklusa, kada se svitac uzalud "trudi" da se sinhronizuje sa lampom. Nakon toga, fazna razlika brzo raste sve do 2π , posle čega se ceo proces ponavlja. Ovaj periodični proces pokušaja sinhronizacije naziva se **fazno kretanje**, ili **fazno nagomilavanje**⁵.

Pretpostavimo da je $\theta(t)$ faza ritma svetlućanja svica, gde $\theta = 0$ odgovara trenutku kada se svetlost emituje. U odsustvu stimulansa (spoljašnji izvor svetlosti) svetlućanje svica opisano je jednačinom $\dot{\theta} = \omega$, gde je ω frekvencija svetlućanja.

Pretpostavimo sada da postoji periodični stimulanis čije je svetlućanje opisano jednačinom

$$\dot{\Theta} = \Omega, \quad (4.11)$$

gde je Ω frekvencija svetlućanja stimulansa, a $\Theta = 0$ odgovara trenutku emitovanja svetlosti stimulansa. "Odgovor" svica na stimulanis modelujemo na sledeći način: ako stimulanis "prednjači" u ciklusu, tada pretpostavljamo da se svetlućanje svica ubrzava u pokušaju da se sinhronizuje sa stimulanisom. U suprotnom, svitac usporava emitovanje sopstvene svetlosti. Jednostavni model, koji opisuje ovaj proces, dat je jednačinom [85]

$$\dot{\theta} = \omega + A \sin(\Theta - \theta), \quad (4.12)$$

gde A ($A > 0$) predstavlja jačinu "resetovanja" koja meri sposobnost svica da modifikuje svoju trenutnu frekvenciju.

Razmotrimo sada dinamiku fazne razlike $\phi = \Theta - \theta$. Oduzimajući jednačinu (4.12) od jednačine (4.11), dobijamo

$$\dot{\phi} = \dot{\Theta} - \dot{\theta} = \Omega - \omega - A \sin \phi, \quad (4.13)$$

što predstavlja jednačinu neuniformnog oscilovanja. Jednačina (4.13) može da se svede na bezdimenzionalni oblik smenama

$$\tau = At, \quad \mu = \frac{\Omega - \omega}{A}. \quad (4.14)$$

Parametar τ je bezdimenzionalno vreme, a parametar μ je mera razlike frekvencija svetlućanja svica i stimulansa, u odnosu na jačinu resetovanja A .

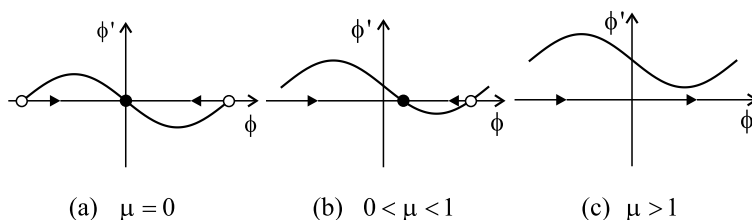
⁵phase drift (eng.)

Uvodeći smene (4.14) u jednačinu (4.13), dobijamo

$$\phi' = \mu - \sin \phi, \quad (4.15)$$

gde je $\phi' = d\phi/d\tau$. Kada je μ malo, frekvencije su relativno blizu jedna drugoj i očekujemo da je "usklađivanje"⁶ moguće.

Na slici 4.12 prikazano je vektorsko polje, koje odgovara jednačini (4.15), za različite vrednosti parametra $\mu \geq 0$. Kvalitativno slično vektorsko polje dobija se i za $\mu < 0$.



Slika 4.12: Vektorsko polje za jednačinu (4.15).

Za $\mu = 0$, sve trajektorije "kreću se" prema stabilnoj fiksnoj tački $\phi^* = 0$ (sl. 4.12a). Svitac se, najzad, usklađuje sa stimulansom kada je $\Omega = \omega$ (nulta fazna razlika). Drugim rečima, svitac i stimulans svetlucaju istovremeno ako je frekvencija stimulanasa jednaka prirodnoj frekvenciji svitca.

Za $0 < \mu < 1$ (sl. 4.12b), kriva se podiže i stabilna i nestabilna fiksna tačka se približavaju jedna drugoj. Sve trajektorije i dalje bivaju "privučene" stabilnoj fiksnoj tački, ali je sada $\phi^* > 0$. Kako se fazna razlika približava konstantnoj vrednosti, kaže se da je svetlosni ritam svica fazno "zaključan"⁷ sa svetlosnim ritmom stimulanasa.

Fazno zaključavanje znači da svitac i stimulans svetlucaju istom frekvencijom, mada to svetlućanje više nije istovremeno (sinhrono). Ako je $\phi^* > 0$ znači da stimulans svetluca pre svica u svakom ciklusu.

Ako se vrednost μ dalje povećava, stabilna i nestabilna fiksna tačka se sjedinjavaju u sedlo-čvor bifurkaciji, u tački $\mu = 1$. Za $\mu > 1$ obe fiksne tačke nestaju i fazno zaključavanje se gubi. Fazna razlika ϕ raste beskonačno, što odgovara faznom nagomilavanju⁸ (sl. 4.12b). Kada ϕ dostigne vrednost 2π , oscilatori su opet u fazi. Uočimo da se faze ne razdvajaju ravnomerno, što je u kvalitativnoj saglasnosti sa Hansonovim eksperimentima [121]: ϕ raste

⁶entrainment (eng.)

⁷phase-locked (eng.)

⁸phase-drift (eng.)

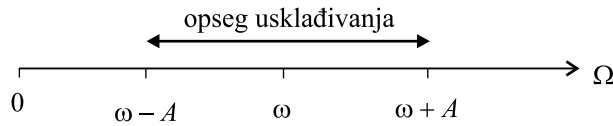
najsporije kada prolazi ispod minimuma funkcije (sl. 4.12c), za $\phi = \pi/2$, a najbrže kada prolazi ispod maksimuma funkcije za $\phi = -\pi/2$.

Prema tome, usklađivanje je moguće samo u intervalu

$$\omega - A \leq \Omega \leq \omega + A,$$

što je u saglasnosti sa predloženim modelom.

Ovaj interval naziva se opseg usklađivanja (sl. 4.13).



Slika 4.13: Opseg usklađivanja frekvencija.

Na osnovu eksperimentalno određene vrednosti parametra A , model strogo "predviđa" vrednost fazne razlike, tokom opsega usklađivanja,

$$\sin \phi^* = \frac{\Omega - \omega}{A}, \quad (4.16)$$

gde $-\pi/2 \leq \phi^* \leq \pi/2$ odgovara stabilnoj fiksnoj tački jednačine (4.13).

Za $\mu > 1$, period faznog nagomilavanja, odnosno vreme potrebno da se ϕ promeni za 2π , dat je izrazom

$$\begin{aligned} T_{pomeraj} &= \int dt = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{d\phi} d\phi = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\Omega - \omega - A \sin \phi}, \end{aligned}$$

tj.

$$T_{pomeraj} = \frac{2\pi}{\sqrt{(\Omega - \omega)^2 - A^2}}. \quad (4.17)$$

Glava 5

Dvodimenzionalni linearni sistemi

*"Ali", Bor je protestovao "niko mi neće verovati ukoliko ne budem mogao da objasnim svaki atom i svaki molekul."
Raderford je brzo odgovorio "Bor, ti samo objasni vodonik i helijum i svi će poverovati u ostalo."*

J. A. Wheeler (1911-2008),
američki teorijski fizičar,
saradnik Nilsa Bora.

5.1 Definicije i primeri

Dvodimenzionalni linearni sistem je sistem oblika

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax + by, \\ \dot{y} &= cx + dy,\end{aligned}$$

ili u matričnom obliku

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \tag{5.1}$$

gde je

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

a a , b , c i d parametri.

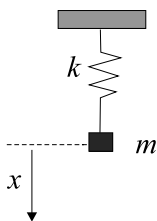
Takav sistem je linearan u smislu da ako su \mathbf{x}_1 i \mathbf{x}_2 rešenja, tada je rešenje i bilo koja njihova linearna kombinacija $c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2$. Zapazimo da je $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ kada je $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, tako da je $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ uvek fiksna tačka za bilo koji izbor matrice A .

Rešenja jednačine $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ mogu biti predstavljena kao trajektorije reprezentativne tačke, koja se "kreće" u (x, y) faznoj ravni.

Kretanje tega mase m , okačenog za oprugu, opisano je linearnom diferencijalnom jednačinom

$$m\ddot{x} + kx = 0, \quad (5.2)$$

gde je m masa, k je koeficijent krutosti opruge, a x je udaljenje mase od položaja ravnoteže (sl. 5.1). Analizirajmo kretanje ovog jednostavnog harmonijskog oscilatora, u faznoj ravni.



Slika 5.1: Harmonijski oscilator.

Da bismo odredili vektorsko polje, jednačine (5.2), zapazimo da je stanje sistema određeno njegovim trenutnim položajem x i brzinom v . Ako su nam poznate obe vrednosti, tada jednačina (5.2) jednoznačno određuje stanje sistema u svakom trenutku. Zato, koristeći promenljive x i v , jednačina (5.2) može da se napiše obliku:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= -\frac{k}{m}x. \end{aligned} \quad (5.3)$$

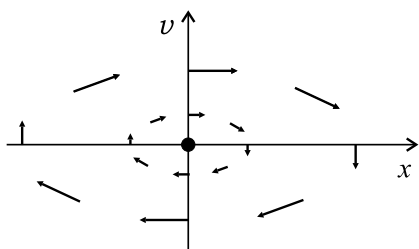
Smenom $\omega^2 = k/m$, jednačina (5.3) postaje

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= -\omega^2 x. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Sistem (5.4) dodeljuje vektor $(\dot{x}, \dot{v}) = (v, -\omega^2 x)$ svakoj tački (x, v) , i zato predstavlja vektorsko polje u faznoj ravni.

Razmotrimo izgled vektorskog polja kada se "nalazimo" na x -osi. Tada je $v = 0$, pa je $(\dot{x}, \dot{v}) = (0, -\omega^2 x)$, tako da su vektori usmereni vertikalno nadole za pozitivno x i vertikalno nagore za negativno x (sl. 5.2). Sa povećanjem vrednosti x , vektori $(v, -\omega^2 x)$ postaju "duži". Slično, na v osi,

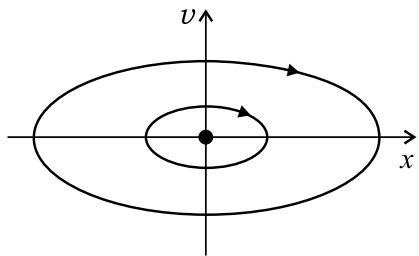
vektorsko polje je $(\dot{x}, \dot{v}) = (v, 0)$, i usmereno je na desnu stranu kada je $v > 0$ i na levu stranu kada je $v < 0$. Kako se "krećemo" u faznom prostoru, vektori menjaju pravac kao što je prikazano na slici 5.2.



Slika 5.2: Vektorsko polje jednačine (5.4).

Kao i ranije, korisno je predstaviti vektorsko polje pomoću kretanja zamišljenog fluida. U našem slučaju zamišljamo da fluid teče ravnomerno u faznoj ravni, lokalnom brzinom koja je data izrazom $(\dot{x}, \dot{v}) = (v, -\omega^2 x)$. Tada, da bismo našli trajektoriju, koja polazi iz tačke (x_0, v_0) , smestamo zamišljenu česticu u položaj (x_0, v_0) i gledamo kako se ona dalje kreće, nošena fluidnim tokom.

Tok na slici 5.2 obrće se oko koordinatnog početka. Koordinatni početak je izuzetak - tačka u faznoj ravni, koja se nalazi u koordinatnom početku ostaje u stanju mirovanja, jer je $(\dot{x}, \dot{v}) = (0, 0)$ za $(x, v) = (0, 0)$. Drugim rečima, koordinatni početak je fiksna tačka.



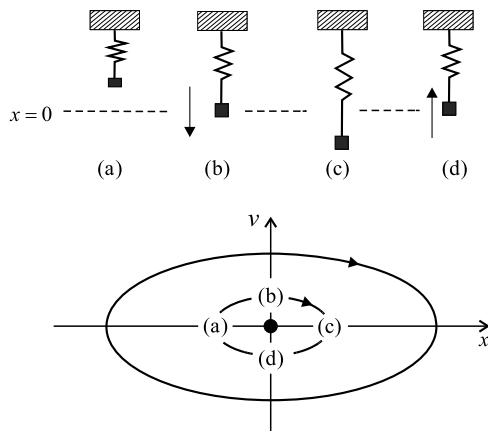
Slika 5.3: Fazni portret sistema.

Međutim, tačka u faznoj ravni, koja polazi iz bilo kog drugog početnog položaja, kružiće oko koordinatnog početka i konačno će se vratiti u svoj početni položaj. Takve trajektorije formiraju zatvorene orbite, kao što je prikazano na slici 5.3, koja se naziva **fazni portret sistema**.

5.1.1 Fizička interpretacija

Fiksna tačka $(x, v) = (0, 0)$ odgovara statičkoj ravnotežnoj tački sistema: teg je u stanju mirovanja, u položaju ravnoteže, i ostaće tamo zauvek, jer je sila u opruzi jednaka težini a nema druge sile da tačku pomeri iz položaja ravnoteže.

Zatvorene orbite odgovaraju periodičnim kretanjima, tj. oscilacijama tega (sl. 5.4).



Slika 5.4: Fazni portret jednostavnog harmonijskog oscilatora.

Orbite na slici 5.4 su elipse određene jednačinom $\omega^2 x^2 + v^2 = c$, gde je $c \geq 0$ konstanta.

5.1.2 Definicija stabilnosti

Posmatrajmo fiksnu tačku \mathbf{x}^* sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Kažemo da je \mathbf{x}^* **privlačna fiksna tačka** ako postoji $\delta > 0$ tako da je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^* \quad (5.5)$$

kada važi

$$\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}^*\| < \delta. \quad (5.6)$$

Drugim rečima, bilo koja trajektorija koja polazi unutar rastojanja δ od fiksne tačke \mathbf{x}^* , sigurno konvergira ka \mathbf{x}^* . Trajektorije koje polaze iz δ okoline tačke \mathbf{x}^* mogu "na kratko" da se udalje iz te okoline, ali moraju "dugoročno" da konvergiraju ka \mathbf{x}^* .

Suprotno, Ljapunovljeva stabilnost zahteva da bliske trajektorije ostanu bliske sve vreme. Kažemo da je \mathbf{x}^* **stabilna po Ljapunovu** ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da je

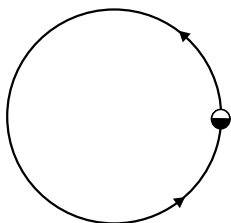
$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| < \varepsilon, \quad (5.7)$$

kada, za $t \geq 0$, važi i

$$\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}^*\| < \delta. \quad (5.8)$$

Zato, trajektorije koje polaze iz δ -okoline tačke \mathbf{x}^* ostaju unutar ε -okoline tačke \mathbf{x}^* za $t \geq 0$. Na slikama 24.15a-d (vidi zadatak 18, na str. 492), koordinatni početak je stabilan po Ljapunovu.

Slika 5.4d pokazuje da fiksna tačka može da bude stabilna po Ljapunovu, ali ne i privlačna. U tom slučaju naziva se **neutralno stabilna fiksna tačka**. Neutralna stabilnost često se pojavljuje u mehaničkim sistemima u kojima otpor sredine može da se zanemari. Tako, kao drugi primer neutralno stabilne fiksne tačke, navedimo ravnotežnu tačku jednostavnog harmonijskog oscilatora (sl. 5.3).



Slika 5.5: Vektorsko polje na kružnici.

Sa druge strane, moguće je da fiksna tačka bude privlačna, ali ne i stabilna po Ljapunovu. Primer sistema, u kojem se javlja privlačna fiksna tačka, ali ne i stabilna po Ljapunovu, dat je vektorskim poljem na kružnici (sl. 5.5):

$$\dot{\theta} = 1 - \cos \theta.$$

Ovde fiksna tačka $\theta^* = 0$ privlači sve trajektorije kada $t \rightarrow \infty$, ali nije stabilna po Ljapunovu. Postoje trajektorije koje polaze infinitezimalno blizu tačke θ^* , ali "odlaze na vrlo velike ekskurzije" pre nego što se vrate u tačku θ^* .

U praksi, dva tipa stabilnosti često se pojavljuju zajedno. Ako je fiksna tačka a stabilna po Ljapunovu i privlačna, nazivamo je **stabilna fiksna tačka**, ili ponekad **asimptotski stabilna fiksna tačka**. Najzad, \mathbf{x}^* je **nestabilna** na slici 24.15d, zato što nije ni privlačna, ni stabilna po Ljapunovu.

5.2 Klasifikacija linearnih sistema

U poslednjem odeljku razmatrali smo sisteme takve da su dva člana matrice A jednaka nuli. Razmotrimo sada slučaj proizvoljne matrice tipa 2×2 , sa ciljem da klasifikujemo sve moguće fazne portrete, koji se mogu pojaviti.

U zadatku 18 na str. 492 ose x i y imaju ključnu geometrijsku ulogu. Ove ose određuju pravac trajektorija kada $t \rightarrow \pm\infty$. Istovremeno, duž osa x i y pojavljuju se posebne pravolinijske trajektorije - trajektorije koje polaze sa jedne od koordinatnih osa, ostaju sve vreme na toj osi.

Za $2 - D$ linearni sistem (5.1), nađimo sada trajektorije, analogne ovim pravolinijskim trajektorijama, oblika

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v}, \quad (5.9)$$

gde je $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ neki konstantni vektor, koji treba da bude određen, a λ je koeficijent rasta, koji takođe treba da bude određen (\mathbf{v} i λ su, za sada, neodređene veličine). Ako rešenja ovakvog oblika postoje, ona odgovaraju eksponencijalnom kretanju duž linije određene vektorom \mathbf{v} .

Da bismo odredili \mathbf{v} i λ , zamenom $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v}$ u jednačini (5.1) i deobom skalarom $e^{\lambda t}$, dobijamo

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}. \quad (5.10)$$

Odavde sledi da tražena pravolinijska rešenja postoje ako je \mathbf{v} **sopstveni vektor**¹ matrice A sa **sopstvenom vrednošću** λ . U ovom slučaju rešenje (5.9) nazivamo **sopstveno rešenje**.

U opštem slučaju, sopstvene vrednosti matrice A date su karakterističnom jednačinom

$$\det(A - \lambda\mathbf{I}) = 0,$$

gde je \mathbf{I} jedinična matrica. Za matricu 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

karakteristična jednačina je

$$\det \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix},$$

odnosno

$$\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0, \quad (5.11)$$

gde je

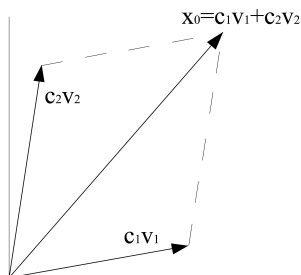
$$\begin{aligned} \tau &= \text{trag}(A) = a + d, \\ \Delta &= \det(A) = ad - bc. \end{aligned}$$

Koreni jednačine (5.11) su:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}. \quad (5.12)$$

¹eigenvector (eng.)=sopstveni, karakteristični vektor

Drugim rečima, sopstvene vrednosti zavise samo od traga (zbir elemenata na glavnoj dijagonali) i determinante matrice A .



Slika 5.6: "Razapinjanje" ravni.

U slučaju kad su koreni jednačine (5.11) različiti, tj. $\lambda_1 \neq \lambda_2$, teorema linearne algebre tvrdi da su odgovarajući sopstveni vektori \mathbf{v}_1 i \mathbf{v}_2 linearno nezavisni [56], pa "razapinju" celu ravan (sl. 5.6). Poznato je da kada su koreni karakteristične jednačine (5.11) različiti, tada su sopstveni vektori \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 linearno nezavisni.

Dakle, ako je rešenje $\mathbf{x}_1 = c_1\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{x}_2 = c_2\mathbf{v}_2$, tada je opšte rešenje njihova linearna kombinacija, jer je $\dot{\mathbf{x}}_1 = A\mathbf{x}_1$, $\dot{\mathbf{x}}_2 = A\mathbf{x}_2$, a kako je $\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2$ sledi da je $\dot{\mathbf{x}} = c_1\dot{\mathbf{x}}_1 + c_2\dot{\mathbf{x}}_2 = c_1A\mathbf{x}_1 + c_2A\mathbf{x}_2 = A\mathbf{x}$.

Drugim rečima, bilo koji početni uslov \mathbf{x}_0 može biti napisan kao linearna kombinacija sopstvenih vektora

$$\mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2.$$

Sada možemo da napišemo opšte rešenje $\mathbf{x}(t)$, u obliku

$$\mathbf{x}(t) = c_1e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2. \quad (5.13)$$

Ovo predstavlja opšte rešenje, jer je linearna kombinacija rešenja jednačine $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ (tako i sama rešenje). Takođe, ovo rešenje zadovoljava i početni uslov $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, pa po teoremi o egzistenciji i jedinstvenosti to je i jedino rešenje.

Sistematska analiza fiksnih tačaka i faznih portreta u njihovoj okolini može, na prvi pogled, izgledati komplikovano. To se prvenstveno odnosi na analizu linearnih sistema u opštem obliku. Da bi se ovo učinilo jednostavnijim, neophodno je transformisati sistem na tzv. normalnu ili Žordanovu formu. Budući da se radi o postupku koji je zanimljiv prvenstveno sa matematičkog aspekta, njegov detaljni prikaz je dat u Dodatku posvećenom linearnim sistemima (Dodatak 16).

5.2.1 Klasifikacija fiksnih tačaka

Klasifikacija fiksnih tačaka ima i svoju jednostavnu grafičku interpretaciju, koja može biti veoma pogodna prilikom rešavanja konkretnih problema. Posmatrajmo linearni sistem zapisan u matričnom obliku:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}; \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Kao što smo videli, odgovarajuća karakteristična jednačina glasi:

$$\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0,$$

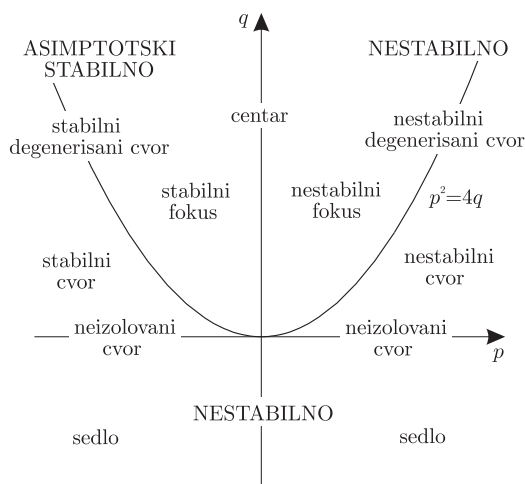
gde su:

$$\tau = \text{trag}(A) = a + d; \quad \Delta = \det(A) = ad - bc,$$

a sopstvene vrednosti imaju sledeći oblik:

$$\lambda_{1/2} = \frac{1}{2} \left(\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta} \right).$$

Na ovaj način se lako uočava da su u (τ, Δ) -ravni parovi realnih i konjugovano-kompleksnih sopstvenih vrednosti odvojeni parabolom $\tau^2 = 4\Delta$, a da se granični slučajevi mogu pojaviti i kada je $\Delta = 0$, odnosno $\tau = 0$. Analizirajmo strukturu sopstvenih vrednosti u (τ, Δ) -ravni.



Slika 5.7: Grafički prikaz klasifikacije singularnih tačaka ($p = \tau$, $q = \Delta$).

Realne sopstvene vrednosti: $\tau^2 > 4\Delta$. Sopstvene vrednosti koje zadovoljavaju nejednakost $\tau^2 > 4\Delta$ nalaze se ispod parabole u (τ, Δ) -ravni. Tada se mogu razlikovati dva karakteristična slučaja.

1. *slučaj:* $\Delta > 0$. U ovoj situaciji se lako može pokazati da su sopstvene vrednosti *istog znaka*, pošto je $\sqrt{\tau^2 - 4\Delta} < |\tau|$. Tada važi:

1. ako je $\tau < 0$ fiksna tačka je *stabilni čvor*;
2. ako je $\tau > 0$ fiksna tačka je *nestabilni čvor*.

Geometrijsko mesto ovih fiksnih tačaka je ograničeno parabolom $\tau^2 = 4\Delta$ i pravom $\Delta = 0$.

2. *slučaj:* $\Delta < 0$. Sa ovom pretpostavkom se može pokazati da su sopstvene vrednosti *različitog znaka*, jer je $\sqrt{\tau^2 - 4\Delta} > |\tau|$. Tada je stacionarna tačka *tačka-sedlo*, bez obzira na znak parametra τ . Geometrijsko mesto ovih fiksnih tačaka je ograničeno pravom $\Delta = 0$ i obuhvata celu poluravan određenu sa $\Delta < 0$.

Konjugovano-kompleksne sopstvene vrednosti: $\tau^2 < 4\Delta$. Sopstvene vrednosti koje zadovoljavaju nejednakost $\tau^2 < 4\Delta$ nalaze se iznad parabole u (τ, Δ) -ravni, čime je istovremeno zadovoljena i nejednakost $\Delta > 0$. One se, s obzirom na znak parametra τ , mogu podeliti u dve grupe:

1. ako je $\tau < 0$ fiksna tačka je *stabilni fokus*;
2. ako je $\tau > 0$ fiksna tačka je *nestabilni fokus*.

Geometrijsko mesto ove dve grupe sopstvenih vrednosti je ograničeno parabolom $\tau^2 = 4\Delta$ i pravom $\tau = 0$.

Grafični slučajevi. Ako se analiziraju realne sopstvene vrednosti mogu se uočiti sledeći grafični slučajevi.

1. *slučaj:* $\tau^2 = 4\Delta$. Sa ovom pretpostavkom se dobijaju parovi dvostrukih realnih sopstvenih vrednosti $\lambda_1 = \lambda_2 = \tau/2$ koje odgovaraju *degenerisanim čvorovima*. Oni će biti *stabilni* kada je $\tau < 0$, a *nestabilni* kada je $\tau > 0$. Geometrijsko mesto ovih fiksnih tačaka je parabola $\tau^2 = 4\Delta$.

2. *slučaj:* $\Delta = 0$. Pod ovom pretpostavkom imamo sledeće sopstvene vrednosti: $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = \tau$. One odgovaraju *neizolovanim čvorovima* koji su *stabilni* kada je $\tau < 0$, odnosno *nestabilni* kada je $\tau > 0$.

U slučaju $\Delta < 0$, $\tau = 0$ dobija se par sopstvenih vrednosti $\lambda_{1/2} = \pm\sqrt{\Delta}$ koje su realne i različite i odgovaraju *tački-sedlu*. Dakle, oblast ispod apscise u kojoj se nalazi ovaj tip stacionarnih tačaka ostaje nepodeljena.

Ako se analiziraju konjugovano-kompleksne sopstvene vrednosti, granični slučaj se dobija za $\tau = 0$. Tada imamo par imaginarnih sopstvenih vrednosti $\lambda_{1/2} = \pm i\sqrt{\Delta}$ koje odgovoraju stacionarnim tačkama tipa *centra*. Njihovo geometrijsko mesto je pozitivni deo ordinate $\tau = 0$, $\Delta > 0$.

Prethodnu analizu ćemo najpre ilustrovati sa dva jednostavna primera.

Primer 1 Klasifikovati fiksnu tačku $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ za sistem $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, gde je $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Rešenje.

Za ovu matricu važi $\Delta = -2$; tako, fiksna tačka je tačka-sedlo. ☺

Primer 2 Ponovo uraditi primer 1 za $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Rešenje.

Za prethodnu matricu važi $\Delta = 5$ i $\tau = 6$. Kako je $\Delta > 0$ i $\tau^2 - 4\Delta = 16 > 0$, fiksna tačka je čvor. Ona je nestabilna, jer važi $\tau > 0$.

☺

U dinamičkim sistemima često figurišu parametri čije se vrednosti mogu menjati na kontrolisan ili slučajan način. Zato je u takvim sistemima važno analizirati uticaj vrednosti parametara na tip fiksne tačke. Ovo se može činiti neposrednom analizom sopstvenih vrednosti, a možemo se poslužiti i rezultatima grafičke analize rasporeda fiksnih tačaka.

Primer 3 Za linearni dinamički sistem opisan jednačinama:

$$\dot{x} = x - 2y; \quad \dot{y} = 2x + \gamma y,$$

analizirati tip fiksne tačke u zavisnosti od vrednosti parametra γ .

Rešenje.

Matrica desnih strana datog sistema glasi:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & \gamma \end{pmatrix},$$

odakle sledi:

$$\tau = \text{trag}(A) = 1 + \gamma; \quad \Delta = \det(A) = 4 + \gamma,$$

pa su, na osnovu karakteristične jednačine, sopstvene vrednosti matrice A :

$$\lambda_{1/2} = \frac{1}{2} \left(1 + \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 2\gamma - 15} \right).$$

Ovde će biti analizirani samo regularni (ne i granični) slučajevi.

Parovi realnih i konjugovano-kompleksnih sopstvenih vrednosti su podeljeni graničnom krivom $\tau^2 = 4\Delta$. Otuda se granične vrednosti parametra γ dobijaju iz uslova:

$$D = \tau^2 - 4\Delta = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma_1 = -3, \quad \gamma_2 = 5.$$

Imajući u vidu strukturu diskriminante D , možemo utvrditi da za $\gamma \in (\gamma_1, \gamma_2)$ imamo konjugovano-kompleksne, a za $\gamma \notin [\gamma_1, \gamma_2]$ realne sopstvene vrednosti. U slučaju konjugovano-kompleksnih vrednosti stabilnost zavisi od realnog dela $\tau \leq 0$, odakle sledi da za $\gamma < -1$ fiksna tačka predstavlja stabilni fokus, a za $\gamma > -1$ nestabilni fokus. Sa druge strane, kod realnih sopstvenih vrednosti važnu ulogu ima znak $\Delta = \det(A)$: $\Delta > 0$ kada je $\gamma > -4$, a $\Delta < 0$ za $\gamma < -4$. Kombinovanjem ovih nejednakosti, uslova egzistencije realnih sopstvenih vrednosti i rezultata analize fiksnih tačaka dobijamo sledeće:

$\gamma \in (-\infty, -4)$	- sedlo;
$\gamma \in (-4, -3)$	- stabilni čvor;
$\gamma \in (-3, -1)$	- stabilni fokus;
$\gamma \in (-1, 5)$	- nestabilni fokus;
$\gamma \in (5, \infty)$	- nestabilni čvor.

Nelinearni sistemi u ravni

*"Deluje veoma lepo", rekla je kad je završila "ali je prilično teško za razumevanje!"
(Očigledno je da joj nije bilo drago da prizna, čak ni samoj sebi, da ništa ne razume) "Čini se da mi je glava puna ideja - samo mi uopšte nisu jasne!"*

Luis Kerol, Alisa u zemlji čuda.

6.1 Fazni portret

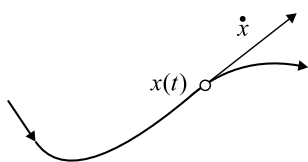
Opšti oblik vektorskog polja u faznoj ravni je

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2),\end{aligned}$$

gde su f_1 i f_2 date funkcije. Ovaj sistem može biti prikazan u vektorskoj notaciji, na sledeći način

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

gde je $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ i $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}))$. Ovde \mathbf{x} predstavlja tačku u faznoj ravni, a $\dot{\mathbf{x}}$ je vektor brzine u toj tački. "Kretanjem" u vektorskom polju, tačka u faznoj ravni "iscrtava" rešenje $\mathbf{x}(t)$, predstavljeno na slici 6.1.

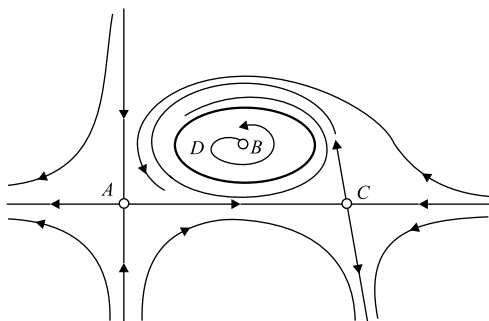


Slika 6.1: Trajektorija u faznoj ravni.

Štaviše, cela fazna ravan je ispunjena trajektorijama, jer svaka tačka može biti početni uslov. Međutim, karakteristično je za nelinearne sisteme da se, u većini slučajeva, trajektorije ne mogu odrediti analitički. Kao i ranije, pokušaćemo da odredimo kvalitativno ponašanje rešenja.

Naš cilj je da odredimo fazni portret sistema direktno na osnovu svojstava $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Naglasimo da postoji veliki broj različitih faznih portreta. Jedan primer prikazan je na slici 6.2.



Slika 6.2: Primer faznog portreta.

Neka značajna svojstva svakog faznog portreta su:

1. Postojanje fiksnih tačaka, kao što su A , B i C na slici 6.2. Fiksne tačke zadovoljavaju jednačinu $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ i odgovaraju stanjima mirovanja ili ravnoteže sistema.
2. Postojanje zatvorene orbite, kao što je D na slici 6.2. One odgovaraju periodičnim rešenjima, tj. rešenjima za koje važi $\mathbf{x}(t + T) = \mathbf{x}(t)$ za svako t , za neko $T > 0$.
3. Raspored trajektorija blizu fiksnih tačaka i zatvorenih orbita. Na primer, "izgled" toka blizu tačaka A i C je sličan, ali istovremeno različit od toka u blizini tačke B .
4. Stabilnost ili nestabilnost fiksnih tačaka i zatvorenih orbita. Fiksne tačke A , B i C su nestabilne, jer se bliske trajektorije udaljavaju od ovih tačaka, dok je zatvorena orbita D stabilna.

6.2 Egzistencija i jedinstvenost rešenja

Proširimo sada teoremu o egzistenciji i jedinstvenosti, datu u odeljku 2.8 (str. 29), na n -dimenzionalne sisteme:

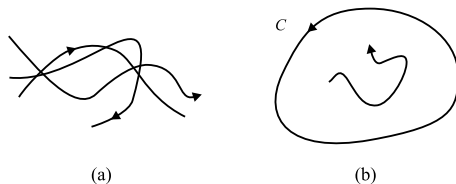
Teorema 2 (o egzistenciji i jedinstvenosti) *Razmotrimo sistem $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, sa početnim uslovom $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Pretpostavimo da je funkcija \mathbf{f} neprekidna i da su svi njeni parcijalni izvodi $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, \dots, n$ neprekidni u nekom otvorenom povezanom skupu $D \subset \mathbb{R}^n$. Tada, za $\mathbf{x}_0 \in D$, prethodno definisani sistem sa početnim uslovom ima rešenje $\mathbf{x}(t)$ u nekom vremenskom intervalu $(-\tau, \tau)$ u okolini $t = 0$ i to rešenje je jedinstveno.*

Drugim rečima, egzistencija i jedinstvenost rešenja zagantovani su ako je \mathbf{f} neprekidno diferencijabilna funkcija. Dokaz teoreme je sličan dokazu u slučaju $n = 1$ i može da se nađe u većini udžbenika o diferencijalnim jednačinama.

Nadalje, usvajamo da su sva naša vektorska polja dovoljno glatka kako bi osigurali egzistenciju i jedinstvenost rešenja, polazeći iz bilo koje tačke faznog prostora.

Teorema o egzistenciji i jedinstvenosti ima važnu posledicu u faznoj ravni: različite trajektorije nikad se ne presecaju. Kada bi se dve trajektorije presecale, tada bi postojala dva rešenja koja polaze iz iste tačke (tačke preseka), a to bi bilo u suprotnosti sa delom teoreme koji se odnosi na jedinstvenost. Slobodnije rečeno, trajektorija ne može da krene u dva pravca istovremeno.

Pošto trajektorije ne mogu da se presecaju, fazni portreti uvek imaju "pristojan" izgled. U suprotnom, oni bi mogli da se degenerišu u "čvorove" međusobno ispresecanih krivih (sl. 6.3a). Teorema o egzistenciji i jedinstvenosti (vidi 2.8, str. 29) onemogućava da se ovo dogodi.



Slika 6.3: a) "Čvorovi" međusobno ispresecanih orbita ("zabranjen" slučaj); b) Trajektorija u unutrašnjosti zatvorene orbite C ("dozvoljen" slučaj).

U dvodimenzionalnom faznom prostoru (suprotno višedimenzionalnim faznim prostorima), ovi rezultati imaju vrlo važne topološke posledice. Na

primer, pretpostavimo da postoji zatvorena orbita C u faznoj ravni. Tada bilo koja trajektorija koja polazi iz unutrašnjosti C ostaje u toj unutrašnjosti zauvek (slika 6.3b).

Šta se "dešava" sa tako ograničenom trajektorijom? Ako postoje fiksne tačke u unutrašnjosti C , tada trajektorija, naravno, može da se približi nekoj od fiksnih tačaka. Ako nema fiksnih tačaka u unutrašnjosti C , intuitivno je jasno da trajektorija ne može da "vijuga" unaokolo zauvek. Za vektorska polja u ravni, Poenkare-Bendiksonova teorema tvrdi da ako je trajektorija ograničena na zatvorenu, ograničenu oblast, tada trajektorija mora da, posle određenog vremena, počne da se približava zatvorenoj orbiti. Ovu važnu teoremu razmotrićemo kasnije. Pre toga, moramo se bolje upoznati sa fiksnim tačkama.

6.3 Fiksne tačke i linearizacija

Proširimo sada, ranije usvojenu, tehniku linearizacije na dvodimenzionalne sisteme (odjeljak 2.4, na str. 25). Cilj nam je da fazni portret blizu fiksne tačke aproksimiramo faznim portretom odgovarajućeg linearnog sistema.

6.3.1 Linearizovani sistem

Razmotrimo sistem

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y)$$

i pretpostavimo da je (x^*, y^*) fiksna tačka tj.

$$f(x^*, y^*) = 0, \quad g(x^*, y^*) = 0.$$

Neka su

$$u = x - x^* = 0, \quad v = y - y^* = 0$$

neka su mali "poremećaji" $u, v \ll 1$ u odnosu na fiksnu tačku. Da bismo videli da li poremećaj raste ili opada, izvedimo diferencijalne jednačine za u i v . Učinimo to prvo za funkciju u

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \dot{x} = (\text{jer je } x^* \text{ konstanta}) = f(x^* + u, y^* + v) \\ &= f(x^*, y^*) + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + O(u^2, v^2, uv) \quad (\text{razvoj u Tejlorov red}) \\ &= u \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=x^*} + v \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{y=y^*} + O(u^2, v^2, uv) \quad (\text{jer je } f(x^*, y^*) = 0). \end{aligned}$$

Naglasimo da parcijalne izvode $\frac{\partial f}{\partial x}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ treba izračunati u fiksnoj tački (x^*, y^*) . Ostatak $O(u^2, v^2, uv)$ sadrži kvadratne članove poremećaja u i v . Kako su veličine u i v male, kvadratni članovi su još manji i mogu da se zanemare.

Slično prethodnom, za v možemo da napišemo

$$\dot{v} = u \frac{\partial g}{\partial x} + v \frac{\partial g}{\partial y} + O(u^2, v^2, uv). \quad (6.1)$$

Dakle, poremećaj (u, v) može da se prikaže i u obliku matrice

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \text{kvadratni članovi}, \quad (6.2)$$

gde je matrica A

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \Big|_{(x^*, y^*)}.$$

Matrica A naziva se **Jakobijeva matrica** ili kraće **Jakobijan** u fiksnoj tački (x^*, y^*) . Ova matrica analogna je izvodu $f'(x^*)$, koji je korišćen u Poglavlju 2.7, samo u dve dimenzije.

Kako su kvadratni članovi u jednačini (6.2) "sićušni", možemo da ih sve zanemarimo, pa dobijamo linearizovani sistem

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

Postavlja se pitanje: da li zaista smemo da zanemarimo kvadratne članove u jednačini (6.2)? Drugim rečima, da li linearizovan sistem daje kvalitativno ispravnu sliku faznog portreta u blizini fiksne tačke (x^*, y^*) ? Odgovor je potvrđan, ako fiksna tačka linearizovanog sistema nije specijalan slučaj (centar, degenerisani čvor, zvezda ili neizolovana fiksna tačka), što je već razmatrano u Poglavlju 5.2, na str. 73.

6.3.2 Klasifikacija fiksnih tačka

Prema stabilnosti, fiksne tačke možemo da podelimo u dve grupe. Jednoj grupi pripadaju fiksne tačke kod kojih mala promena vrednosti parametara

ne dovodi do kvalitativne promene u faznom portretu, i to su "robustni" (grubi, hiperbolički) slučajevi:

- **repeleri** (ili izvori): obe sopstvene vrednosti imaju pozitivne realne delove;
- **atraktori** (ili jame): obe sopstvene vrednosti imaju negativne realne delove;
- **sedla**: jedna sopstvena vrednost je pozitivna, a druga je negativna.

Drugu grupu čine fiksne tačke kod kojih mala promena vrednosti parametara dovodi do kvalitativne promene u faznom portretu, i to su "granični" (marginalni, nehiperbolički) slučajevi:

- **centri**: obe sopstvene vrednosti su čisto imaginarne;
- **fiksne tačke višeg reda i neizolovane fiksne tačke**: najmanje jedna sopstvena vrednost jednaka je nuli.

Tako, sa tačke gledišta stabilnosti, granični slučajevi su oni kod kojih najmanje jedna sopstvena vrednost zadovoljava $Re(\lambda) = 0$.

Ove ideje jednostavno se mogu uopštiti na sisteme višeg reda. Fiksna tačka sistema n -tog reda je **hiperbolička**, ako sve sopstvene vrednosti linearizovanih sistema leže van imaginarne ose, tj. $Re(\lambda_i) \neq 0$ za $i = 1, 2, \dots, n$. Prema važnoj **Hartman-Grobmanovoj teoremi** lokalni fazni portret, u okolini hiperboličke fiksne tačke, je "topološki ekvivalentan" faznom portretu linearizovanog sistema; preciznije, tip stabilnosti fiksne tačke verno je "sačuvan" linearizacijom. Intuitivno, dva fazna portreta su topološki ekvivalentna ako je jedan "deformisana" verzija drugog. Savijanje i uvijanje su dozvoljeni, ali ne i cepanje i kidanje, tako da zatvorene orbite moraju da ostanu zatvorene, trajektorije koje povezuju tačke-sedla ne smeju biti prekinute itd.

Hiperboličke fiksne tačke takođe ilustruju važan opšti pojam strukturne stabilnosti. Fazni portret je strukturno stabilan ako njegova topologija ne može biti promenjena proizvoljno malom perturbacijom (promenom) vektorskog polja. Na primer, fazni portret tačke-sedla je strukturno stabilan, ali fazni portret centra nije. Proizvoljno mala vrednost prigušenja (promena u vrednosti parametra) "prevodi" centar u fokus.

6.4 Lotka-Voltera model

Razmotrimo sada klasični **Lotka-Voltera model** takmičenja između dve biološke vrste, za koje pretpostavljamo da se takmiče za istu, ograničenu, količinu hrane. Dinamiku odnosa, između dve vrste, možemo da modelujemo sledećim sistemom:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(3 - x - 2y), \\ \dot{y} &= y(2 - x - y),\end{aligned}$$

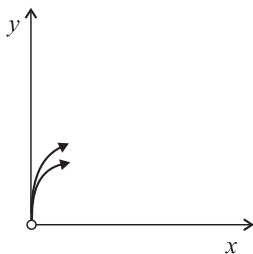
gde je

- $x(t)$ – brojnost prve populacije,
- $y(t)$ – brojnost druge populacije, a $x, y \geq 0$.

Da bismo odredili fiksne tačke sistema, rešavamo istovremeno jednačine $\dot{x} = 0$ i $\dot{y} = 0$. Postoje četiri fiksne tačke: $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(3, 0)$ i $(1, 1)$. Da bismo ih klasifikovali, izračunajmo Jakobijan:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 2x - 2y & -2x \\ -y & 2 - x - 2y \end{pmatrix}.$$

Razmotrimo sada pojedinačne fiksne tačke:



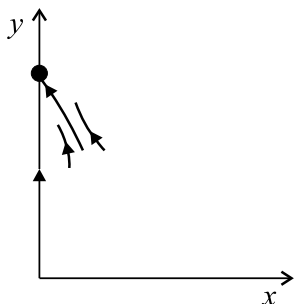
Slika 6.4: Fazni portret u okolini fiksne tačke $(0, 0)$.

Za tačku $(0, 0)$: Jakobijan je

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sopstvene vrednosti su: $\lambda_1 = 3$ i $\lambda_2 = 2$, tako da je $(0, 0)$ nestabilni čvor. Trajektorije "napuštaju" koordinatni početak paralelno sa sopstvenim vektorom za $\lambda_2 = 2$, tj. tangentno na $\mathbf{v} = (0, 1)$, što je vektor koji "razapinje" y -osu.

Podsetimo se opšteg pravila: u čvoru, trajektorije su tangentne na spori pravac, što je sopstveni pravac sa najmanjim $|\lambda|$. Zato, fazni portret blizu $(0, 0)$ izgleda kao na slici 6.4.

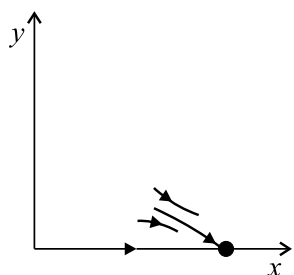


Slika 6.5: Fazni portret u okolini fiksne tačke (0, 2).

Za tačku (0, 2): Jakobijan je

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ova matrica ima sopstvene vrednosti $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = -2$, tako da je fiksna tačka stabilni čvor. Trajektorije "kreću" duž sopstvenog pravca čija je sopstvena vrednost $\lambda_1 = -1$. Može se proveriti da je ovaj pravac "razapet" vektorom $\mathbf{v} = (1, -2)$. Slika 6.5 prikazuje fazni portret blizu fiksne tačke (0, 2).

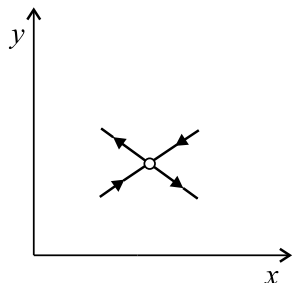


Slika 6.6: Fazni portret u okolini fiksne tačke (3, 0).

Za tačku (3, 0): Jakobijan je

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

i $\lambda_1 = -3$ i $\lambda_2 = -1$. Ovo je takođe stabilni čvor. Trajektorije "prilaze" stabilnom čvoru duž sporog sopstvenog pravca "razapetog" vektorom $\mathbf{v} = (3, -1)$, kao što je prikazano na slici 6.6.

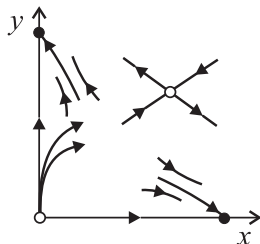


Slika 6.7: Fazni portret u okolini fiksne tačke (1, 1).

Za tačku (1, 1): Jakobijan je

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

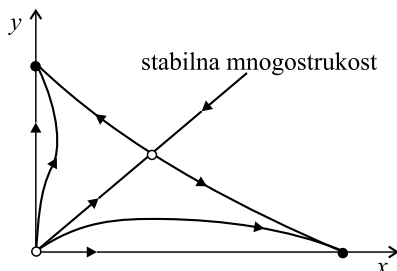
i za tu matricu važi: $\tau = -2$, $\Delta = -1$ i $\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$. Dakle, ova fiksna tačka je tačka-sedlo. Može se proveriti da je fazni portret u blizini tačke (1, 1) sličan portretu prikazanom na slici 6.7.



Korišćenjem sve četiri slike 6.4-6.7, dobijamo sliku 6.8, koja daje dobar uvid u ceo fazni portret. Zapazimo da x i y ose sadrže pravolinijske trajektorije, jer je $\dot{x} = 0$ za $x = 0$ i $\dot{y} = 0$ za $y = 0$.

Slika 6.8: Fazni portret Lotka-Voltera sistema.

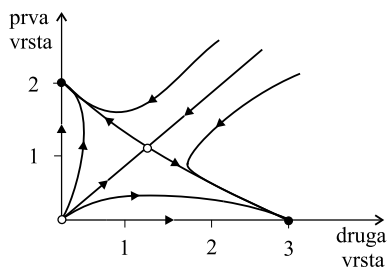
Sada, "prema osećaju", možemo popuniti ostatak faznog portreta (sl. 6.9).



Slika 6.9: Konačni izgled faznog portreta Lotka-Voltera sistema.

Neke od trajektorija, koje polaze iz blizine koordinatnog početka, moraju "ići" u stabilni čvor na x -osi, a druge – u stabilni čvor na y -osi. U sredini mora postojati trajektorija koja kao da "ne može da odluči" kuda da krene, tako da "završava" u tački-sedlu. Ova trajektorija je deo stabilne mnogostrukosti sedla, prikazana na slici 6.9.

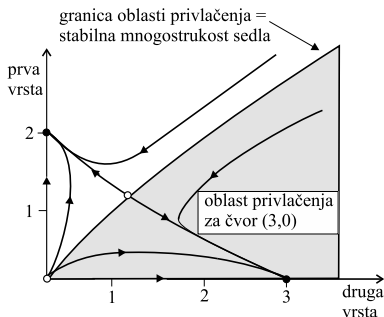
Druga grana stabilne mnogostrukosti sastoji se od trajektorije koja dolazi iz beskonačnosti. Kompjuterski generisan fazni portret (sl. 6.10) potvrđuje tačnost naše skice, nacrtane "prema osećaju". Fazni portret ima zanimljivu biološku interpretaciju. Pokazuje da jedna vrsta, u opštem slučaju, istrebljuje drugu.



Slika 6.10: Kompjuterski generisan fazni portret Lotka-Voltera sistema.

Trajektorije koje polaze ispod stabilne mnogostrukosti vode do konačnog istrebljenja jedne vrste, dok one koje polaze iznad, vode do konačnog istrebljenja druge vrste. Ova dihotomija pojavljuje se i u drugim modelima takmičenja i navela je biologe da formulišu **princip takmičarskog isključenja**. Prema ovom principu, dve vrste, koje se takmiče za iste ograničene

resurse, u opštem slučaju, ne mogu da koezistiraju. **Oblast privlačenja** fiksne tačke \mathbf{x}^* predstavlja skup početnih uslova \mathbf{x}_0 tako da $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}^*$ kada $t \rightarrow \infty$. Na primer, oblast privlačenja za čvor u tački $(3, 0)$ sastoji se od svih tačaka koje leže ispod stabilne mnogostrukosti sedla. Ova oblast prikazana je osenčenom oblašću na slici 6.11.



Slika 6.11: Oblast privlačenja za fiksnu tačku $(3, 0)$ u Lotka-Voltera modelu.

Kako stabilna mnogostrukost razdvaja oblasti za dva čvora, naziva se **granica oblasti privlačenja**. Iz istih razloga, dve trajektorije koje čine stabilnu mnogostrukost tradicionalno se nazivaju **separatrice**. Oblasti privlačenja i njihove granice su važne zato što dele fazni prostor na oblasti različitog "dugoročnog" ponašanja.

6.5 Konzervativni sistemi

Posmatrajmo pravolinijsko kretanje čestice mase m , duž x -ose pod dejstvom nelinearne sile $F(x)$. Diferencijalna jednačina kretanja, prema II Njutnovom zakonu, je

$$m\ddot{x} = F(x).$$

Ako je sila F konzervativna, tada postoji potencijal V takav da je $F(x) = -\frac{dV}{dx}$, pa jednačina kretanja dobija oblik

$$m\ddot{x} + \frac{dV}{dx} = 0. \quad (6.4)$$

Kada pomnožimo obe strane jednačine sa \dot{x} , leva strana postaje totalni izvod po vremenu:

$$m\dot{x}\ddot{x} + \frac{dV}{dx}\dot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) \right] = 0,$$

član $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ predstavlja kinetičku energiju (E_k), a V potencijal (potencijalnu energiju). Iz prethodnog izraza sledi da zbir kinetičke i potencijalne energije nije eksplicitna funkcija vremena, odnosno $E_k + V = \text{const.} = E$. Na ovaj način praktično smo integralili polaznu jednačinu i dobili diferencijalnu jednačinu prvog reda (nelinearnu). Drugim rečima, za dato rešenje $x(t)$, ukupna energija sistema

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x)$$

je funkcija samo položaja čestice (ne i vremena).

Sistemi, u kojima energija nije funkcija vremena, nazivaju se **konzervativni sistemi**. U opštem slučaju, postojanje konzervativnih veličina (prvih integrala) može značajno da olakša analizu sistema. I više od toga: ako autonomni sistemi drugog reda poseduju konzervativnu veličinu koja ne zavisi od vremena (nezavisna promenljiva), onda se njihovo rešavanje svodi na kvadraturu (jednu integraciju), a sama konzervativna veličina predstavlja implicitnu jednačinu fazne trajektorije.

Neka je dat sistem $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Tada je konzervativna veličina neprekidna realna funkcija $E(\mathbf{x})$ koja je konstantna duž trajektorija, tj. $\frac{dE}{dt} = 0$. Da bismo izbegli trivijalan primer, zahtevamo, takođe, da $E(\mathbf{x})$ ne bude konstantno na svakom otvorenom skupu. U suprotnom, konstantna funkcija, kao što je $E(\mathbf{x}) \equiv 0$ predstavljala bi konzervativnu veličinu (veličina koja ne zavisi od vremena t) za svaki sistem, pa bi svaki sistem bio konzervativan! Uslov da $E(\mathbf{x})$ ne bude konstantno na svakom otvorenom skupu sprečava ovakve slučajeve.

Pokažimo, sada, da konzervativni sistem ne može da ima nijednu privlačnu fiksnu tačku.

Pretpostavimo da je \mathbf{x}^* privlačna fiksna tačka. Tada sve tačke u njenoj oblasti privlačenja treba da imaju istu energiju $E(\mathbf{x}^*)$, jer je energija konstantna na trajektorijama, a sve trajektorije u oblasti privlačenja teku ka \mathbf{x}^* . Tako $E(\mathbf{x})$ mora biti konstantna funkcija za \mathbf{x} u oblasti privlačenja. Međutim, ovo je u suprotnosti sa našom definicijom konzervativnog sistema, po kojoj je zahtevano da $E(\mathbf{x})$ ne bude konstantno na svim otvorenim skupovima.

Ako privlačne fiksne tačke ne mogu da se pojave, koje to, onda, fiksne tačke mogu? U opštem slučaju, pojavljuju se tačke-sedla i centri.

Da bismo ovo pokazali, razmotrimo kretanje čestice mase $m = 1$ u potencijalnom polju, sa dva udubljenja (jame), oblika

$$V(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4.$$

Kao što je već rečeno (vidi jed. (6.4)), za konzervativne sisteme, sila je data izrazom

$$F = -\frac{\partial V}{\partial x},$$

pa je, u ovom slučaju

$$-\frac{dV}{dx} = x - x^3.$$

Prema tome, jednačina kretanja (6.4) je

$$\ddot{x} = x - x^3.$$

Diferencijalna jednačina drugog reda može da se prikaže sistemom od dve diferencijalne jednačine prvog reda, tj.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x - x^3, \end{aligned} \tag{6.5}$$

Ravnotežne tačke pojavljuju se za $(\dot{x}, \dot{y}) = (0, 0)$. Dakle, postoje tri ravnotežne tačke i to: $(0, 0)$ i $(\pm 1, 0)$. Da bismo ispitali stabilnost fiksnih tačaka, odredimo Jakobijan:

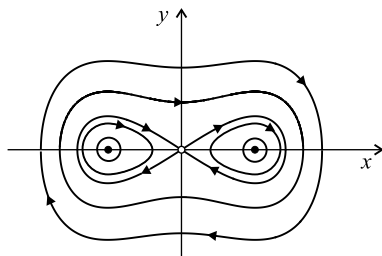
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

U tački $(0, 0)$ je $\Delta = -1$, pa je koordinatni početak tačka-sedlo. Ali kada je $(x^*, y^*) = (\pm 1, 0)$ važi $\tau = 0$ i $\Delta = 2$. Dakle, trebalo bi da ove dve ravnotežne tačke budu centri.

Međutim, poznato je da mali nelinearni članovi mogu lako da "unište" centar, čije je postojanje predviđeno linearnom aproksimacijom (linearizacijom). Ali, to ovde nije tačno, zbog očuvanja energije, pa su trajektorije zatvorene krive, definisane konturama konstantne energije, tj.

$$E = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 = \text{const}. \tag{6.6}$$

Slika 6.12 prikazuje trajektorije koje odgovaraju različitim vrednostima energije E .



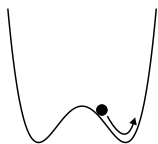
Slika 6.12: Fazni portret konzervativnog sistema (6.5).

Da bismo odredili smer kretanja duž trajektorija, izračunajmo vektor (\dot{x}, \dot{y}) na nekoliko pogodnih mesta. Na primer, $\dot{x} > 0$ i $\dot{y} = 0$ na pozitivnom delu y -ose, tako da je kretanje usmereno na desnu stranu. Orijentacija susednih trajektorija je ista zbog neprekidnosti.

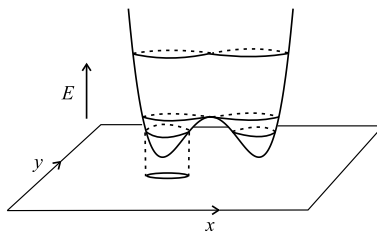
Kao što se i očekivalo, sistem ima tačku-sedlo u $(0, 0)$ i centre u $(1, 0)$ i $(-1, 0)$. Svaki od neutralno stabilnih centara okružen je familijom malih zatvorenih orbita. Postoje takođe i velike zatvorene orbite koje okružuju sve tri fiksne tačke.

Kao što vidimo, rešenja sistema su tipično periodična, osim za ravnotežna rešenja i dve specijalne trajektorije, koje počinju i završavaju se u koordinatnom početku. Trajektorije čiji je početak i kraj u istoj fiksnoj tački nazivaju se **homokliničke orbite**. One su uobičajene u konzervativnim sistemima, a inače se retke pojavljuju. Zapazimo da homoklinička orbita ne odgovara periodičnom rešenju, zato što je trajektoriji potrebno beskonačno vreme da stigne u fiksnu tačku.

Sa fizičke tačke gledišta, neutralno stabilna tačka ravnoteže odgovara čestici u miru na dnu jednog od udubljenja, a male zatvorene orbite predstavljaju male oscilacije oko ovog položaja ravnoteže. Velike orbite predstavljaju oscilacije sa više energije, kada se čestica kreće tako što "preskače" iz jednog udubljenja u drugo (sl. 6.13).



Slika 6.13: "Preskakanje" čestice iz jednog udubljenja u drugo.



Slika 6.14: Grafik funkcije E .

Skicirajmo sada grafik funkcije energije $E(x, y)$ (6.6).

Grafik funkcije $E(x, y)$ prikazan je na slici 6.14. Funkcija E nacrtana je iznad svake tačke (x, y) fazne ravni. Rezultujuća površ često se naziva

površ energije sistema.

Sa slike 6.14 može da se vidi da se lokalni minimumi funkcije E projektuju na centre u faznoj ravni. Konture malo više energije odgovaraju malim orbitama, koje okružuju centre. Tačka-sedlo i njene homokliničke orbite imaju nešto višu energiju, a energija velikih orbita koje okružuju sve tri fiksne tačke, je najveća.

Glava 7

Granični ciklus

Danas, kakva god da je istina u vezi sa postojanjem materije (što verovatno nikad nećemo ni saznati), najjednostavnije rešenje više nije dovoljno. Sve što znamo o svetu oko nas govori protiv toga. Koncepti haosa su se "uvukli" iz više nauke, potvrđujući već postojeće sumnje.

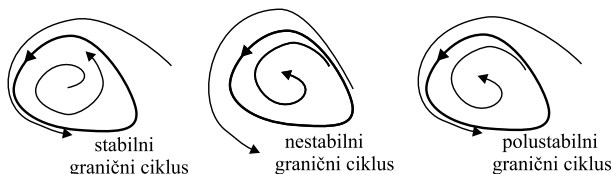
Recenzija knjige Džejsma Elroja
"Revizija američkog tabloida"
(1995).

7.1 Uvod

Granični ciklus¹ je izolovana zatvorena putanja (trajektorija). Izolovana znači da susedne trajektorije nisu zatvorene - one se ili spiralno uvijaju ka graničnom ciklusu, ili se udaljavaju od graničnog ciklusa (sl. 7.1).

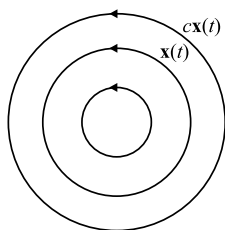
Ako se sve susedne trajektorije približavaju graničnom ciklusu, tada kažemo da je granični ciklus **stabilan** ili privlačnog karaktera. U suprotnom, granični ciklus je **nestabilan** ili, u izuzetnim slučajevima, **polustabilan**.

¹limit cycle (eng.)



Slika 7.1: Granični ciklus.

Stabilni granični ciklusi su veoma važni, jer predstavljaju sisteme koji ispoljavaju samoodržive oscilacije. Drugim rečima, ovi sistemi osciluju čak i u odsustvu spoljne periodične sile. Navedimo neke primere: rad srca; dnevne promene telesne temperature; hormonske promene; spontano oscilujuće hemijske reakcije, kao i vibracije kod mostova i na krilima aviona. U svakom od navedenih primera, postoji standardno oscilovanje sa nekom određenom periodom i amplitudom. Mali poremećaji sistema ne menjaju stabilnost graničnog ciklusa.



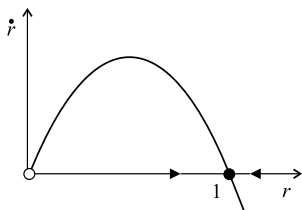
Slika 7.2: Zatvorene orbite linearnog sistema.

Granični ciklusi su, po prirodi, nelinearne pojave - ne javljaju se u linearnim sistemima. Naravno, linearni sistem $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ može imati zatvorene orbite, ali one neće biti izolovane. Ako je $\mathbf{x}(t)$ periodično rešenje, onda je takođe i $c\mathbf{x}(t)$ periodično rešenje, za $c \neq 0$. Stoga je $\mathbf{x}(t)$ okruženo jednoparametarskom familijom zatvorenih orbita (Slika 7.2).

Razmotrimo, sada, primer jednostavnog graničnog ciklusa

$$\dot{r} = r(1 - r^2), \quad \dot{\theta} = 1, \quad (7.1)$$

gde je $r \geq 0$.



Slika 7.3: Fiksne tačke sistema.

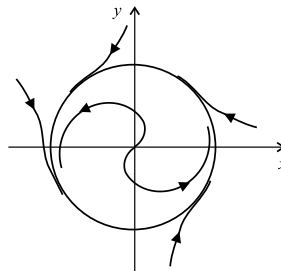
Radijalne i ugaone dinamičke promenljive nisu spregnute, tako da se mogu analizirati odvojeno. Posmatrajući $\dot{r} = r(1 - r^2)$ kao vektorsko polje na liniji, vidimo da je $r^* = 0$ nestabilna fiksna tačka, a $r^* = 1$ je stabilna fiksna tačka (sl. 7.3).

U faznoj ravni, sve trajektorije (osim $r^* = 0$) monotono se približavaju krugu $r^* = 1$ (sl. 24.5).

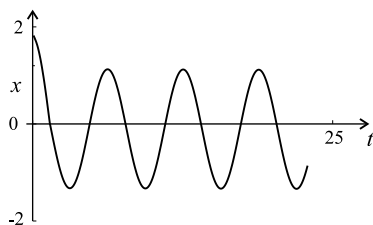
Ukoliko jednačinom $x(t) = r(t) \cos \theta(t)$ predstavimo trajektoriju koja "polazi" iz tačke van graničnog ciklusa, onda će se ova trajektorija "približavati" oscilacijama, konstantne amplitude - graničnom ciklusu, koji je predstavljen jednačinom

$$x(t) = r(t) \cos(t + \theta_0)$$

(sl. 7.5).



Slika 7.4: Stabilni ciklus sistema (7.1).



Slika 7.5: Oscilacije konstantne amplitude - granični ciklus.

Navedimo sada još jedan primer graničnog ciklusa, poznat pod imenom Van der Polov oscilator. Ovaj oscilator opisan je jednačinom

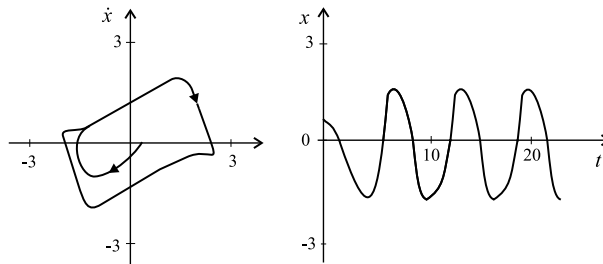
$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \quad (7.2)$$

gde je parametar $\mu \geq 0$.

Ovaj oscilator ima centralnu ulogu u razvoju nelinearne dinamike. Ova jednačina (7.2) prvi put se pominje u vezi sa nelinearnim električnim kolima, koja su korišćena kod prvih radio-prijemnika.

Jednačina (7.2) podsća na jednačinu koja opisuje prost harmonijski oscillator, ali sa nelinearnim članom $\mu(x^2 - 1)\dot{x}$, kojim je predstavljeno prigušenje.

Na slici 7.6a, za vrednost parametra $\mu = 1,5$, nacrtano je rešenje u faznoj ravni, a na slici 7.6b prikazan je grafik funkcije $x(t)$. Sada, nasuprot prethodnom primeru, granični ciklus nije krug, a oscilacije nisu sinusoidalne.



Slika 7.6: Van der Polov oscilator.

7.1.1 Odbacivanje mogućnosti pojave zatvorene orbite

Postoje sistemi koji nemaju periodično rešenje (nemaju zatvorene orbite). Predstavimo, sada, tri različita postupka za odbacivanje mogućnosti postojanja zatvorenih orbita.

Gradijentni sistemi

Pretpostavimo da se sistem može zapisati u obliku $\dot{\mathbf{x}} = -\nabla V$ za neku jednoznačnu, neprekidnu, diferencijabilnu, skalarnu funkciju $V(\mathbf{x})$. Takav sistem se naziva gradijentni sistem sa potencijalnom funkcijom V .

Teorema 3 *Zatvorene orbite ne postoje u gradijentnim sistemima.*

Dokaz.

Pretpostavimo suprotno, da postoji zatvorena orbita. Tada postoji period $T > 0$ takav da se posmatrana tačka, nakon perioda T , vraća u isti položaj u faznoj ravni. U specijalnom slučaju, $\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}(0)$. Pošto je funkcija $V(\mathbf{x})$ jednoznačna, važi sledeća jednakost $V(\mathbf{x}(T)) = V(\mathbf{x}(0))$, odnosno priraštaj funkcije V je tokom jednog perioda jednak nuli: $\Delta V = V(\mathbf{x}(T)) - V(\mathbf{x}(0)) = 0$. Međutim, ako priraštaj funkcije V izračunamo pomoću integrala, dobijamo

$$\Delta V = \int_0^T \frac{dV}{dt} dt = \int_0^T (\nabla V \cdot \dot{\mathbf{x}}) dt = - \int_0^T \|\nabla V\|^2 dt < 0,$$

što je u kontradikciji sa prethodno dobijenim rezultatom, koji je dobijen pod pretpostavkom da postoji zatvorena orbita. Na taj način je pokazano da zatvorene orbite ne postoje u gradijentnim sistemima. ©

Naglasimo da većina dvodimenzionalnih sistema nisu gradijentni sistemi, pa je primena ove teoreme ograničena.

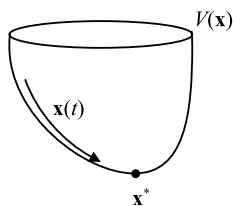
Funkcije Ljapunova

Posmatrajmo sistem $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ sa fiksnom tačkom u \mathbf{x}^* . Pretpostavimo da možemo naći neprekidnu, diferencijabilnu realnu funkciju $V(\mathbf{x})$ sa sledećim osobinama:

1. $V(\mathbf{x}) > 0$ za svako $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$ i $V(\mathbf{x}^*) = 0$ (kažemo da je V pozitivno definitna).
2. $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ za svako $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$. (Sve trajektorije teku "na dole" ka \mathbf{x}^* .)

Takva funkcija naziva se **funkcija Ljapunova**. Ako funkcija Ljapunova postoji, onda zatvorene orbite ne postoje iz istih razloga kao u zadatku 29, str. 505.

U ovom slučaju x^* je globalno asimptotski stabilna - za sve početne uslove, $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}^*$ kada $t \rightarrow \infty$. Drugim rečima, sistem nema zatvorene orbite.



Intuitivno je jasno da se sve trajektorije monotone duž grafika $V(\mathbf{x})$ prema fiksnoj tački \mathbf{x}^* (sl. 7.7). U ovom slučaju, rešenja se nigde ne "zaustavljaju", jer je, prema pretpostavci, $\dot{V} < 0$ svuda osim u \mathbf{x}^* .

Slika 7.7: Funkcija Ljapunova.

Nažalost, ne postoji sistematičan način za konstruisanje funkcije Ljapunova. Međutim, pokazalo se da zbir kvadrata ili potpune kvadratne forme predstavljaju dobro probno rešenje za funkciju Ljapunova (vidi zadatak 30, str. 505).

Dulakov kriterijum

Treći metod za odbacivanje mogućnosti postojanja zatvorenih orbita zasnovan je na Grinovoj teoremi i poznat je kao **Dulakov kriterijum**.

Kriterijum 1 (Dulakov) *Neka je $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ neprekidno, diferencijabilno vektorsko polje, definisano na jednostavno povezanom podskupu R , u ravni.*

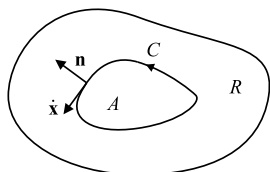
Ako postoji neprekidna, diferencijabilna realna funkcija $g(\mathbf{x})$, takva da je $\nabla \cdot (g\dot{\mathbf{x}})$ stalnog znaka u R , onda nema zatvorenih orbita koje se u celosti nalaze u R .

Dokaz.

Pretpostavimo da postoji zatvorena orbita C koja leži u unutrašnjosti oblasti R . Neka A označava oblast unutar C (sl. 7.8). Onda je, prema Grinovoj teoremi,

$$\iint_A \nabla \cdot (g\dot{\mathbf{x}}) dA = \oint_C g\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n} dl$$

gde je \mathbf{n} spoljašnja normala, a dl deo dužine luka duž C . Prvo pogledajmo dvostruki integral na levoj strani: mora biti različit od nule, pošto je $\nabla \cdot (g\dot{\mathbf{x}})$ stalnog znaka u R . S druge strane, linijski integral na desnoj strani jednak je nuli pošto je $\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n} = 0$ svuda zbog pretpostavke da je C trajektorija (tangentni vektor $\dot{\mathbf{x}}$ je normalan na \mathbf{n}). Iz ove kontradikcije proističe da takva zatvorena orbita C ne može postojati. ☺



Slika 7.8: Zatvorena orbita C , u oblasti R .

Dulakov kriterijum ima isti nedostatak kao i metod Ljapunova - ne postoji algoritam za nalaženje $g(\mathbf{x})$. "Kandidati" koji se povremeno pokažu korisnim su $g = 1$, $1/x^a y^b$, e^{ay} i e^{ay} .

7.2 Poenkare-Bendiksonova teorema

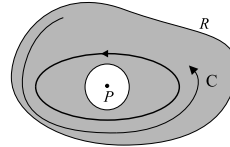
Isključivši mogućnost pojave zatvorene orbite, pređimo na pronalaženje metoda za utvrđivanje uslova za postojanje zatvorenih orbita u određenom sistemu. Odgovor na ovo pitanje daje nam Poenkare-Bendiksonova teorema, koja predstavlja jednu od ključnih teorijskih rezultata u nelinearnoj dinamici i iz nje sledi da se kaos ne može dogoditi u faznoj ravni.

Teorema 4 (Poenkare-Bendiksonova) *Pretpostavke:*

- (1) R je zatvoren, ograničen podskup u ravni;
- (2) $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ je neprekidno, diferencijabilno vektorsko polje na otvorenom skupu koji sadrži R ;

- (3) R ne sadrži nijednu fiksnu tačku i
- (4) postoji trajektorija C koja leži u R , u smislu da počinje u R i ostaje u R tokom budućeg vremena (sl. 7.9).

Onda je C ili zatvorena orbita, ili se spiralno uvija ka zatvorenoj orbiti kada $t \rightarrow \infty$. U svakom od ovih slučajeva, R sadrži zatvorenu orbitu (prikazana kao podebljana kriva na slici 7.9).

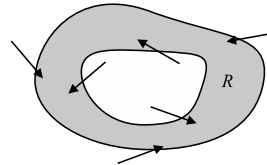


Slika 7.9: Zatvoren ograničen podskup ravni R .

Za dokaz ove teoreme pogledati [52], [137], [46] i [248]. ☺

Na slici 7.9 nacrtali smo R kao oblast prstenastog oblika zato što svaka zatvorena orbita mora okruživati fiksnu tačku (P na slici 7.9), a ne postoje fiksne tačke koje se nalaze u R .

U većini slučajeva, pri primeni Poenkare-Bendiksonove teoreme, uslovi (1)-(3) su zadovoljeni. Međutim, uslov (4) je teško zadovoljiti - kako možemo biti sigurni da ograničena trajektorija C postoji?



Slika 7.10: Zatvorena povezana oblast R .

Možemo konstruisati zatvorenu povezanu oblast R , takvu da je vektorsko polje usmereno ka "unutra", bilo gde na granici oblasti R (sl. 7.10). To nam omogućava da sve trajektorije u oblasti R budu ograničene. Kada ne postoje fiksne tačke u oblasti R , tada iz Poenkare-Bendiksonove teoreme sledi da oblast R sadrži zatvorenu orbitu.

Poenkare-Bendiksonova teorema se teško može primeniti u praksi. Pogodnije je primeniti teoremu kada je sistem predstavljen u polarnim koordinatama, kao što je slučaj u sledećem primeru. Posmatrajmo sistem

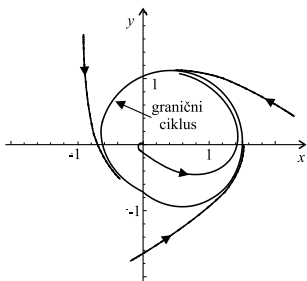
$$\dot{r} = r(1 - r^2) + \mu r \cos \theta, \quad \dot{\theta} = 1. \quad (7.3)$$

Kada je $\mu = 0$, postoji stabilan granični ciklus za $r = 1$. Pokažimo da zatvorena orbita postoji za $\mu > 0$, sve dok je μ dovoljno malo. Nađimo sada dva koncentrična kruga sa radijusima r_{\min} i r_{\max} , takve da je $\dot{r} < 0$ na spoljašnjem krugu i $\dot{r} > 0$ na unutrašnjem krugu. Tada će prsten

$0 < r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$ biti van željene zatvorene oblasti. Moramo imati na umu da ne postoje fiksne tačke u prstenu, jer je $\dot{\theta} \neq 0$. Dakle, ako se mogu naći r_{\min} i r_{\max} , tada iz Poenkare-Bendiksonove teoreme sledi postojanje zatvorene orbite.

Da bismo našli r_{\min} , potrebno je da je $\dot{r} = r(1 - r^2) + \mu r \cos \theta > 0$ za svako θ . Pošto je $\cos \theta \geq -1$, dovoljan uslov za r_{\min} je da $1 - r^2 - \mu > 0$. Dakle, bilo koje $r_{\min} < \sqrt{1 - \mu}$ predstavlja dobar izbor, sve dok je $\mu < 1$, tako da kvadratni koren ima smisla. Na primer, možemo odabrati $r_{\min} = 0,999\sqrt{1 - \mu}$. Slično, dobar izbor za r_{\max} je $r_{\max} = 1,001\sqrt{1 + \mu}$. Stoga zatvorena orbita postoji za svako $\mu < 1$ i leži negde u prstenu $0,999\sqrt{1 - \mu} < r < 1,001\sqrt{1 + \mu}$. ☺

Naglasimo da zatvorena orbita može postojati čak i ako je $\mu \geq 1$. Slika 7.11 prikazuje fazni portret sistema (7.3) za $\mu = 1$.



Slika 7.11: Fazni portret sistema (7.3) za $\mu = 1$.

Ponovimo da je Poenkare-Bendiksonova teorema jedna od glavnih rezultata nelinearne dinamike. Iz ove teoreme sledi da ako je trajektorija ograničena na zatvorenoj, ograničenoj oblasti koja ne sadrži fiksne tačke, onda se trajektorija mora približavati zatvorenoj orbiti. Složenije ponašanje nije moguće.

U višedimenzionalnim sistemima $n \geq 3$, Poenkare-Bendiksonova teorema se ne primenjuje. U ovim sistemima trajektorije mogu zauvek "lutati" u ograničenoj oblasti, bez kretanja ka fiksnoj tački ili zatvorenoj orbiti. U pojedinim slučajevima, trajektorije mogu biti privučene ka složenim geometrijskim objektima, koje nazvamo **strani atraktori**. Strani atraktori predstavljaju **fraktalne skupove** na kojima je kretanje neperiodično i osetljivo na male promene početnih uslova. Ova osetljivost, na male promene početnih uslova, čini da je kretanje nepredvidivo na duže staze, kada dolazi do pojave **determinističkog haosa**. Prema tome, iz Poenkare-Bendiksonove teoreme proizilazi da se haos nikada ne može pojaviti u sistemima dimenzija $n < 3$.

7.3 Relaksacione oscilacije

Posmatrajmo Van der Polovu jednačinu:

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \quad (7.4)$$

za $\mu \gg 1$. Tada se granični ciklus najpre razvija vrlo sporo, a zatim dolazi do brzog "pražnjenja" što je opet praćeno sporim razvojem, itd. Oscilacije ovog tipa se često nazivaju relaksacione oscilacije, jer je "napon", akumuliran tokom sporog razvoja, "relaksiran" tokom brzog pražnjenja. Relaksacione oscilacije se pojavljuju u mnogim drugim oblastima nauke i tehnike, od trzajućih² oscilacija duž seizmogenih raseda (Baridž-Knopof model) do relaksaciono-oscilatornog ponašanja nervnih ćelija (Hodžkin-Haksli i Ficju-Nagumo modeli).

Izvršimo sada analizu Van der Polove jednačine, u faznoj ravni, za $\mu \gg 1$.

Da bismo uveli nove promenljive, zapazimo da važi

$$\ddot{x} + \mu\dot{x}(x^2 - 1) = \frac{d}{dt} \left[\dot{x} + \mu \left(\frac{1}{3}x^3 - x \right) \right].$$

Iz prethodne relacije sledi da je, u jednačinu (7.4), pogodno uvesti sledeće smene:

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x, \quad w = \dot{x} + \mu F(x), \quad (7.5)$$

pa dobijamo

$$\dot{w} = \ddot{x} + \mu\dot{x}(x^2 - 1) = -x. \quad (7.6)$$

Ova jednačina je ekvivalentna sistemu diferencijalnih jednačina prvog reda

$$\begin{aligned} \dot{x} &= w - \mu F(x), \\ \dot{w} &= -x. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Smenom promenljivih

$$y = \frac{w}{\mu}$$

jednačina (7.7) može da se prikaže u sledećem obliku

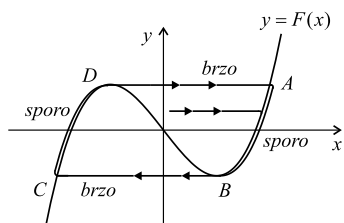
$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu [y - F(x)], \\ \dot{y} &= -\frac{1}{\mu}x. \end{aligned} \quad (7.8)$$

²stick-slip (eng.)

Razmotrimo sada tipičnu trajektoriju u (x, y) faznoj ravni.

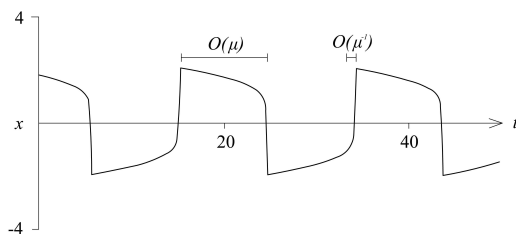
Polazeći od bilo koje tačke u faznoj ravni, osim koordinatnog početka, trajektorije se brzo "kreću" horizontalno ka kubnoj nulklini $y = F(x)$ (sl. 7.12). Nakon toga, trajektorija se vrlo sporo "kreće" nadole, dok ne dođe do tačke B (sl. 7.12), a zatim brzo "prelazi" na drugu stranu nulklinae u tačku C . Ovo je praćeno narednim sporim kretanjem duž nulklinae, sve dok trajektorija ne dostigne sledeću "odskočnu" tačku u D . Nakon toga, kretanje se nastavlja periodično.

Preciznije, počimo od početnog uslova, koji nije suviše blizu kubnoj nulklini, $y - F(x) \sim O(1)$. Tada iz jednačine (7.8) sledi da je $|\dot{x}| \sim O(\mu) \gg 1$ i $|\dot{y}| \sim O(\mu^{-1}) \ll 1$. Dakle, brzina je veoma velika u horizontalnom pravcu, a veoma mala u vertikalnom pravcu. Ukoliko je početni uslov iznad nulklinae, tada $y - F(x) > 0$ i $\dot{x} > 0$. Trajektorija se pomera bočno ka nulklini. Međutim, kada je trajektorija na dovoljno bliskom rastojanju od nulklinae, $y - F(x) \sim O(\mu^{-2})$, tada postaju \dot{x} i \dot{y} uporedive, reda veličine $O(\mu^{-1})$.



Onda trajektorija preseca nulklinu (tačka C na sl. 7.12) i kreće se skoro vertikalno, kao što je prikazano na slici 7.12. Zatim se sporo pomera brzinom, reda veličine $O(\mu^{-1})$, sve dok ne dođe do "prevojne" tačke (tačka D na sl. 7.12) i potom ponovo "prelazi" na drugu

Slika 7.12: Nulklinae Van der stranu. Polovog oscilatora.



Slika 7.13: Van der Polovog oscilator za $\mu = 10$.

Ova analiza pokazuje da, u ovom slučaju, granični ciklus ima dve različite vremenske skale - delove na kojima je $\Delta t \sim O(\mu)$ i delove na kojima je $\Delta t \sim O(\mu^{-1})$. Ove vremenske skale prikazane su na slici 7.13, za $\mu = 10$ i početne uslove $(x_0, y_0) = (2, 0)$.

Procenimo sada period graničnog ciklusa za Van der Polovu jednačinu, kada je $\mu \gg 1$.

Period graničnog ciklusa T u suštini predstavlja vreme "sporog" kretanja, jer je vreme provedeno u "skokovima" zanemarljivo za veliko μ .

Zbog simetrije, vreme provedeno na svakoj "grani" je isto. Dakle, $T \approx 2 \int_{t^A}^{t^B} dt$. Da bismo odredili dt , zapazimo da je na "sporim" granama $y \approx F(x)$, pa je tako

$$\frac{dy}{dt} \approx F'(x) \frac{dx}{dt} = (x^2 - 1) \frac{dx}{dt}.$$

Međutim, kako je $\frac{dy}{dt} = -x/\mu$ iz jednačine (7.8), sledi da je

$$\frac{dx}{dt} = -x/\mu(x^2 - 1).$$

Prema tome dt je na sporijoj grani

$$dt \approx -\frac{\mu(x^2 - 1)}{x} dx. \quad (7.9)$$

Lako se pokazuje, da pozitivna grana počinje u $x_A = 2$, a završava se u $x_B = 1$. Dakle,

$$T \approx 2 \int_2^1 \frac{-\mu}{x} (x^2 - 1) dx = 2\mu \left[\frac{x^2}{2} - \ln x \right]_1^2 = \mu [3 - 2 \ln 2], \quad (7.10)$$

što je reda veličine $O(\mu)$, kao što je i pretpostavljeno.

7.4 Slabo nelinearni oscilatori

U ovom poglavlju razmatramo jednačine oblika

$$\ddot{x} + x + \varepsilon h(x, \dot{x}) = 0, \quad (7.11)$$

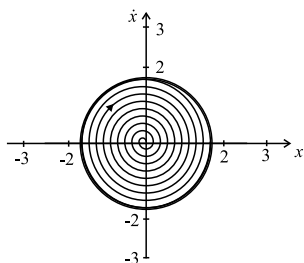
gde je $0 \leq \varepsilon \ll 1$, a $h(x, \dot{x})$ proizvoljna glatka funkcija. Oscilatori, opisani jednačinom ovakvog tipa, nazivaju se **slabo nelinearni oscilatori**. Dva osnovna primera, slabo nelinearnih oscilatora, predstavljena su:

- van der Polovom jednačinom

$$\ddot{x} + x + \varepsilon (x^2 - 1) \dot{x} = 0, \quad (7.12)$$

- Dufingovom jednačinom

$$\ddot{x} + x + \varepsilon x^3 = 0. \quad (7.13)$$



Slika 7.14: Fazni portret slabo nelinearnog oscilatora.

Slika 7.14 prikazuje rešenje Van der Polove jednačine, u (x, \dot{x}) faznoj ravni, za $\varepsilon = 0, 1$ i za početne uslove u blizini koordinatnog početka. Trajektorija je zavojnica (spirala) sa sporim "namotavanjem" (mali korak) i teži graničnom ciklusu oblika bliskog kružnici, čiji je

poluprečnik 2. Da bismo predvideli oblik, period i poluprečnik ovog graničnog ciklusa, iskoristitićemo činjenicu da ovaj oscilator podseća na, ranije posmatran, prost harmonijski oscilator.

Teorija regularnih perturbacija

Potražimo, najpre, rešenja jednačine (7.11) u obliku stepenog reda po ε . Pretpostavimo da je rešenje diferencijalne jednačine (7.11) oblika $x(t, \varepsilon)$ i razvijmo ga u Tejlrov red

$$x(t, \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots \quad (7.14)$$

Nepoznate funkcije $x_k(t)$ određuju se iz uslova da jednačina (7.11), za date početne uslove, bude identički zadovoljena. Pretpostavićemo da su sve važne informacije sadržane u prvih nekoliko članova (najčešće prva dva), a da se članovi višeg reda mogu zanemariti. Ova tehnika se zove **teorija regularnih perturbacija**.

Posmatrajmo **slabo prigušeni linearni osilator**:

$$\ddot{x} + 2\varepsilon \dot{x} + x = 0, \quad (7.15)$$

sa početnim uslovima

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1. \quad (7.16)$$

Rešenje ove jednačine, za date početne uslove, je

$$x(t, \varepsilon) = (1 - \varepsilon^2)^{-1/2} e^{-\varepsilon t} \sin \left[(1 - \varepsilon^2)^{1/2} t \right]. \quad (7.17)$$

Rešimo sada isti problem koristeći teoriju perturbacije. Zamenom (7.14) u (7.15) dobijamo

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_0 + \varepsilon x_1 + \dots) + 2\varepsilon \frac{d}{dt}(x_0 + \varepsilon x_1 + \dots) + (x_0 + \varepsilon x_1 + \dots) = 0. \quad (7.18)$$

Nakon diferenciranja, grupišemo članove uz iste stepene po ε , pa dobijamo

$$(\ddot{x}_0 + x_0) + \varepsilon(\ddot{x}_1 + 2\dot{x}_0 + x_1) + O(\varepsilon^2) = 0. \quad (7.19)$$

Kako relacija (7.19) treba da važi za sve dovoljno male vrednosti ε , sledi da je

$$\ddot{x}_0 + x_0 = 0, \quad (7.20)$$

$$\ddot{x}_1 + 2\dot{x}_0 + x_1 = 0, \quad (7.21)$$

pri čemu članove drugog i višeg reda zanemarujemo. Za $t = 0$, iz (7.14) proizilazi da je $x_0(0) + \varepsilon x_1(0) + \dots = 0$, za sve vrednosti ε , tako da je

$$x_0(0) = 0, \quad x_1(0) = 0. \quad (7.22)$$

Slično, za $\dot{x}(0)$, dobijamo

$$\dot{x}_0(0) = 1, \quad \dot{x}_1(0) = 0. \quad (7.23)$$

Rešenje jednačine (7.20), za početne uslove $x_0(0) = 0$, $\dot{x}_0(0) = 1$, je

$$x_0(t) = \sin t. \quad (7.24)$$

Zamenom ovog rešenja u (7.21), dobija se

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -2 \cos t. \quad (7.25)$$

Rešenje ove jednačine, za $x_1(0) = 0$ i $\dot{x}_1(0) = 0$, je

$$x_1(t) = -t \sin t, \quad (7.26)$$

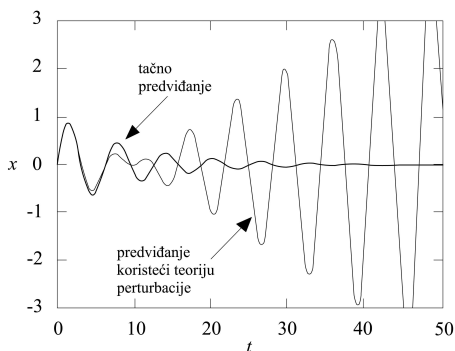
gde član, na desnoj strani, neograničeno raste kada $t \rightarrow \infty$.

Konačno, rešenje (7.15), za (7.16), primenom teorije perturbacije, je

$$x(t, \varepsilon) = \sin t - \varepsilon t \sin t + O(\varepsilon^2). \quad (7.27)$$

Ako ovo rešenje uporedimo sa tačnim rešenjem (7.17) videćemo da (7.27) predstavlja početak razvoja tačnog rešenja u Tejllov (konvergentni) red.

Razlika između tačnog rešenja i rešenja dobijenog primenom teorije regularnih perturbacija za $\varepsilon = 0, 1$, prikazana je na slici 7.15. Kao što možemo da vidimo, teorija regularnih perturbacija daje dobru aproksimaciju rešenja samo za $\varepsilon \cdot t \ll 1$, odnosno za $t \ll 1/\varepsilon = 10$.



Slika 7.15: Razlika između tačnog rešenja i rešenja dobijenog primenom teorije regularnih perturbacija za $\varepsilon = 0, 1$

Poredeći ova dva rešenja, (7.17) i (7.27) dolazimo do sledećih zaključaka:

1. Sa slike (7.15) vidi se da u okviru tačnog rešenja (7.17) možemo izdvojiti dve različite vremenske skale (razmere): "brzo" vreme $t \sim O(1)$ (sinusoidalne oscilacije) i "sporo" vreme $t \sim 1/\varepsilon$, za koje amplituda oscilacija opada.

Ako uporedimo ova dva rešenja, vidimo da približno rešenje (7.27) odstupa od tačnog rešenja, u okviru "spore" vremenske skale. Drugim rečima, zbog postojanja člana $t \sin t$, relacija (7.27) pogrešno navodi na zaključak da rešenje raste sa vremenom, iako vidimo iz (7.17) da amplituda $A = (1 - \varepsilon^2)^{-1/2} e^{\varepsilon t}$ eksponencijalno opada.

2. Frekvencija oscilacija u (7.17) je $\omega = (1 - \varepsilon^2)^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2$, i blago je pomenjena u odnosu na frekvenciju oscilacija iz (7.27), $\omega = 1$. Posle veoma dugog vremena $t \sim O(1/\varepsilon^2)$, ova greška u frekvenciji će imati značajan kumulativni efekat, kada dolazi do pojave nove, treće, "super-spore" vremenske skale!

Iz prethodnog, jasno je da postoje najmanje dve vremenske skale, u slabo nelinearnom oscilatoru. Napomenimo da, u opštem slučaju, mogu postojati više od dve vremenske skale, ali taj slučaj, nadalje, nećemo razmatrati.

Metoda dva vremena

Analitička metoda, koja se naziva **metoda dva vremena**, bolje aproksimira rešenje jednačina od teorije regularnih perturbacija. U stvari, mogu se koristiti više od dva vremena, ali mi ćemo se zadržati na najjednostavnijem slučaju.

Da bismo primenili metodu dva vremena na jednačinu (7.11), označimo sa $\tau = t$ brzo vreme, a sa $T = \varepsilon t$ sporo vreme. Posmatraćemo ova dva vremena kao nezavisne promenljive.

Razvijmo rešenje jednačine (7.11) u Tejlorov red

$$x(\varepsilon, t) = x_0(\tau, T) + \varepsilon x_1(\tau, T) + O(\varepsilon^2). \quad (7.28)$$

Izvod ove funkcije je

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial x}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial \tau} + \varepsilon \frac{\partial x}{\partial T}, \quad (7.29)$$

ili kraće zapisano

$$\dot{x} = \partial_t x + \varepsilon \partial_T x. \quad (7.30)$$

Zamenom (7.28) u (7.30) i grupisanjam, uz isti stepen po ε , dobijamo

$$\dot{x} = \partial_\tau x_0 + \varepsilon (\partial_T x_0 + \partial_\tau x_1) + O(\varepsilon^2). \quad (7.31)$$

Slično, za drugi izvod, dobijamo

$$\ddot{x} = \partial_{\tau\tau} x_0 + \varepsilon (\partial_{\tau T} x_1 + 2\partial_{T\tau} x_0) + O(\varepsilon^2). \quad (7.32)$$

Primenjujući metodu dva vremena, aproksimirajmo rešenje prigušenog linearnog oscilatora

$$\ddot{x} + 2\varepsilon \dot{x} + x = 0, \quad (7.33)$$

za početne uslove $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$.

Zamenom (7.31) i (7.32) u jednačinu (7.33), dobijamo

$$\partial_{\tau\tau} x_0 + \varepsilon (\partial_{\tau T} x_1 + 2\partial_{T\tau} x_0) + 2\varepsilon \partial_\tau x_0 + x_0 + \varepsilon x_1 + O(\varepsilon^2) = 0. \quad (7.34)$$

Grupisanjem članova uz iste koeficijente, dobijamo dve diferencijalne jed.:

$$\partial_{\tau\tau} x_0 + x_0 = 0, \quad (7.35)$$

$$\partial_{\tau T} x_1 + 2\partial_{T\tau} x_0 + 2\partial_\tau x_0 + x_1 = 0. \quad (7.36)$$

Jednačina (7.35) opisuje prost harmonijski oscilator, i njeno opšte rešenje je

$$x_0 = A \sin \tau + B \cos \tau. \quad (7.37)$$

U ovom slučaju veličine A i B su funkcije sporog vremena T . Pretpostavimo da su funkcije od T konstante, na skali brzog vremena t .

Da bismo odredili $A(T)$ i $B(T)$, zamenimo (7.37) u (7.36), odakle dobijamo

$$\begin{aligned}\partial_{\tau\tau}x_1 + x_1 &= -2(\partial_{T\tau}x_0 + \partial_{\tau}x_0) = \\ &= -2(A' + A)\cos\tau + 2(B' + B)\sin\tau,\end{aligned}\tag{7.38}$$

gde oznaka $(')$ predstavlja diferenciranje po T .

Da bismo izbegli nelinearne članove, na desnoj strani jednačine (7.38), pretpostavićemo da je

$$A' + A = 0,\tag{7.39}$$

$$B' + B = 0.\tag{7.40}$$

Ovde smo koeficijente uz nelinearne članove izjednačili sa nulom, što je karakteristično za metodu dva vremena.

Rešenja za (7.39) i (7.40) su:

$$A(T) = A(0)e^{-T},$$

$$B(T) = B(0)e^{-T}.$$

Početne vrednosti $A(0)$ i $B(0)$, određuju se iz početnih uslova $x(0) = 0$ i $\dot{x}(0) = 1$. Iz jednačine (7.28) sledi da je $x(0) = x_0(0,0) + \varepsilon x_1(0,0) + O(\varepsilon^2) = 0$. Da bi ova jednačina bila zadovoljena za sve dovoljno male vrednosti ε , treba da je

$$x_0(0,0) = 0 \quad \text{i} \quad x_1(0,0) = 0.\tag{7.41}$$

Slično,

$$\dot{x}(0) = \partial_{\tau}x_0(0,0) + \varepsilon(\partial_{T\tau}x_0(0,0) + \partial_{\tau}x_1(0,0)) + O(\varepsilon^2) = 1,$$

pa je

$$\partial_{\tau}x_0(0,0) = 1 \quad \text{i} \quad \partial_{T\tau}x_0(0,0) + \partial_{\tau}x_1(0,0) = 0.\tag{7.42}$$

Kombinujući (7.37) i (7.41), nalazimo da je $B(0) = 0$, odakle je $B(T) \equiv 0$. Slično, iz (7.37) i (7.42) sledi da je $A(0) = 1$, pa je $A(T) = e^{-T}$. Stoga (7.37) postaje

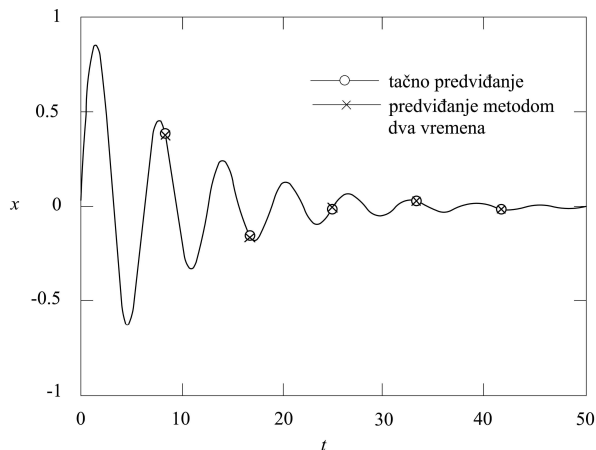
$$x_0(\tau, T) = e^{-T} \sin\tau.\tag{7.43}$$

Dakle,

$$\begin{aligned}x &= e^{-T} \sin\tau + O(\varepsilon) = \\ &= e^{\varepsilon t} \sin t + O(\varepsilon).\end{aligned}\tag{7.44}$$

predstavlja aproksimativno rešenje dobijeno metodom dva vremena.

Na slici 7.16 prikazana su rešenja (7.44) i (7.17), za $\varepsilon = 0, 1$. Ove dve krive skoro da se poklapaju, iako ε nije isuviše malo. Prema tome, očigledno je da se metodom dve vremena dobijaju tačnija rešenja u odnosu na rešenja dobijena primenom teorije regularnih perturbacija.



Slika 7.16: Rešenja (7.44) i (7.17), za $\varepsilon = 0, 1$.

Usrednjavanje jednačina

Posmatrajmo jednačinu za opšti, slabo nelinearni oscilator:

$$\ddot{x} + x + \varepsilon h(x, \dot{x}) = 0. \quad (7.45)$$

Primenom metode dva vremena važi

$$\partial_{\tau\tau} x_0 + x_0 = 0, \quad (7.46)$$

$$\partial_{\tau\tau} x_1 + x_1 = -2\partial_{\tau T} x_0 - h, \quad (7.47)$$

gde je $h = h(x_0, \partial_{\tau} x_0)$. Kao u zadatku 36, na str. 510, rešenje jednačine 7.46 je

$$x_0 = r(T) \cos(\tau + \phi(T)). \quad (7.48)$$

Izvedimo diferencijalne jednačine za r' i ϕ' . Zamenom (7.48) u (7.47), dobijamo da je desna strana

$$2 \left[r' \sin(\tau + \phi) + r \phi' \cos(\tau + \phi) \right] - h, \quad (7.49)$$

gde je $h = h(r \cos(\tau + \phi), -r \sin(\tau + \phi))$.

Da bismo našli članove, u izrazu za h , proporcionalne sa $\cos(\tau + \phi)$ i $\sin(\tau + \phi)$, primenimo Furijeovu analizu. Imajmo na umu da je h 2π -periodična funkcija od $\tau + \phi$. Neka je

$$\theta = \tau + \phi.$$

Razvijmo sada $h(\theta)$ u **Furijeov red**

$$h(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos k\theta + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \sin k\theta, \quad (7.50)$$

gde su **Furijeovi koeficijenti** dati izrazima

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) d\theta, \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) \cos k\theta d\theta, \quad k \geq 1, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) \sin k\theta d\theta, \quad k \geq 1. \end{aligned} \quad (7.51)$$

Tada (7.49) postaje

$$2 \left[r' \sin \theta + r\phi' \cos \theta \right] - \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos k\theta - \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\theta. \quad (7.52)$$

Jedini nelinearni članovi, u (7.52), su $[2r' - b_1] \sin \theta$ i $[2r\phi' - a_1] \cos \theta$. Da bismo "izbegli" ove nelinearne članove, potrebno je da su $r' = b_1/2$ i $r\phi' = a_1/2$. Koristeći Furijeove koeficijente, iz (7.51), za a_1 i b_1 , dobijamo

$$\begin{aligned} r' &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) \sin \theta d\theta \equiv \langle h \sin \theta \rangle, \\ r\phi' &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta) \cos \theta d\theta \equiv \langle h \cos \theta \rangle, \end{aligned} \quad (7.53)$$

gde ugaone zagrade $\langle \cdot \rangle$ označavaju srednju vrednost funkcije tokom jednog ciklusa θ .

Jednačine (7.53) nazivaju se **usrednjene** ili **”spore” jednačine**. Da bismo mogli da ih primenimo, predstavimo $h = h(r \cos(\tau + \phi), -r \sin(\tau + \phi)) = h(r \cos \theta, -r \sin \theta)$ eksplicitno, a zatim računamo srednje vrednosti, za ”brzu” promenljivu θ , pri čemu ”sporu” promenljivu r smatramo konstantnom. Neke od srednjih vrednosti, koje se često pojavljuju, su:

$$\begin{aligned} \langle \cos \theta \rangle = \langle \sin \theta \rangle = 0, \quad \langle \sin \theta \cos \theta \rangle = 0, \quad \langle \cos^3 \theta \rangle = \langle \sin^3 \theta \rangle = 0, \\ \langle \cos^{2n+1} \theta \rangle = \langle \sin^{2n+1} \theta \rangle = 0, \\ \langle \cos^2 \theta \rangle = \langle \sin^2 \theta \rangle = \frac{1}{2}, \quad \langle \cos^4 \theta \rangle = \langle \sin^4 \theta \rangle = \frac{3}{8}, \quad \langle \cos^2 \theta \sin^2 \theta \rangle = \frac{1}{8}, \\ \langle \cos^{2n} \theta \rangle = \langle \sin^{2n} \theta \rangle = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)}, \quad n \geq 1. \end{aligned} \tag{7.54}$$

Ostale srednje vrednosti se mogu ili izvesti iz ovih, ili pronaći direktnom integracijom. Na primer,

$$\langle \cos^2 \theta \sin^4 \theta \rangle = \langle (1 - \sin^2 \theta) \sin^4 \theta \rangle = \langle \sin^4 \theta \rangle - \langle \sin^6 \theta \rangle = \frac{3}{8} - \frac{15}{48} = \frac{1}{16},$$

i

$$\langle \cos^3 \theta \sin \theta \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^3 \theta \sin \theta \, d\theta = -\frac{1}{2\pi} [\cos^4 \theta]_0^{2\pi} = 0.$$

Bifurkacije u višedimenzionalnim sistemima

*Stvari kojih se najviše plašimo -
fluktuacije, poremećaji,
neravnotežna stanja -
predstavljaju primarne izvore
kreativnosti.*

Liderstvo i nova nauka:
otkrivanje reda u haotičnom
svetu (2006), Margaret Vitli.

8.1 Uvod

Ovo poglavlje se nadovezuje na našu raniju priču o bifurkacijama (Pogl. 3). Kako postepeno prelazimo sa jednodimenzionalnih na dvodimenzionalne sisteme, uviđamo da fiksne tačke i dalje mogu nastati ili nestati ili se destabilizovati promenom vrednosti parametara. Sada to isto važi i za zatvorene orbite.

U slučaju višedimenzionalnih sistema, uobičajena definicija bifurkacije, uvodi koncept "topološke ekvivalentnosti": kada fazni portret menja svoju topološku strukturu, pri promeni vrednosti parametara, kažemo da dolazi do **bifurkacije**.

Pre nego što započnemo sistematsku analizu različitih tipova bifurkacija,

pozabavićemo se jednim uvodnim primerom koji će nam nagovestiti bogatstvo fenomena koji se pojavljuju u ovoj problematici.

Posmatrajmo kretanje materijalne tačke mase m po glatkoj kružnoj žici poluprečnika R koja se konstantnom ugaonom brzinom ω obrće oko nepokretne vertikalne ose koja se poklapa sa njenim prečnikom. Diferencijalna jednačina kretanja tačke ima sledeći oblik:

$$\ddot{\theta} = \left(\omega^2 \cos \theta - \frac{g}{R} \right) \sin \theta, \quad (8.1)$$

odakle se dobijaju sledeća stacionarna rešenja problema $\theta(t) = \text{const.}$:

$$\begin{aligned} \theta^{(1)} &= 0 && \text{za svako } \omega; \\ \theta^{(2)} &= \arccos \left(\frac{g}{R\omega^2} \right) && \text{za } \omega > \omega^* = \sqrt{\frac{g}{R}}; \\ \theta^{(3)} &= -\arccos \left(\frac{g}{R\omega^2} \right) && \text{za } \omega > \omega^* = \sqrt{\frac{g}{R}}. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Ovde se može uočiti da broj stacionarnih rešenja zavisi od vrednosti parametra - ugaone brzine ω : kada je $\omega < \omega^*$ imamo samo jedno rešenje, dok za $\omega > \omega^*$ postoje tri rešenja.

Osim promene broja stacionarnih rešenja može se uočiti i promena njihovog karaktera u pogledu stabilnosti, što je prikazano u sledećoj tabeli.

Tabela 8.1: Promena stabilnosti stacionarnih rešenja.

	$\omega < \omega^*$	$\omega > \omega^*$
$\theta^{(1)}$	stabilno	nestabilno
$\theta^{(2)}$	-	stabilno
$\theta^{(3)}$	-	stabilno

Na taj način vidimo da su u posmatranom problemu zastupljena oba aspekta kvalitativnog ponašanja karakteristična za teoriju bifurkacija: promena broja rešenja i izmena njihove stabilnosti.

Prikazana kvalitativna analiza se može obogatiti analizom dinamičkog sistema drugog reda dobijenog smenom $y_1 = \theta$, $y_2 = \dot{\theta}$:

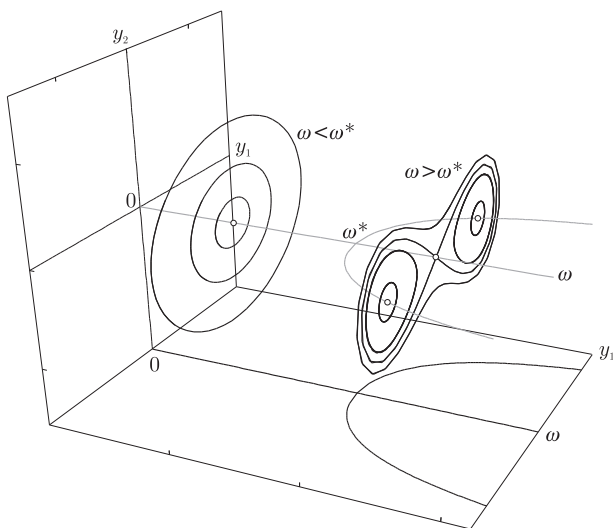
$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2; \\ \dot{y}_2 &= \left(\omega^2 \cos y_1 - \frac{g}{R} \right) \sin y_1. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Tada stacionarna rešenja (8.2) postaju fiksne tačke sistema (8.3) za koje važi $y_2(t) \equiv 0$. Može se pokazati da se sa promenom ugaone brzine javlja promena tipa fiksne tačke $\mathbf{y}^{(1)}$.

Tabela 8.2: Promena tipa fiksne tačke sa promenom ugaone brzine.

	$\omega < \omega^*$	$\omega > \omega^*$
$\mathbf{y}^{(1)}$	centar	sedlo
$\mathbf{y}^{(2)}$	-	centar
$\mathbf{y}^{(3)}$	-	centar

Fiksne tačke $\mathbf{y}^{(i)} = (y_1^{(i)}, y_2^{(i)})$ odgovaraju stacionarnim rešenjima θ_i . Očito je da vrednost ugaone brzine utiče na strukturu faznog portreta dinamičkog sistema: njena promena u okolini kritične vrednosti ω^* povlači za sobom njegovu topološku promenu.



Slika 8.1: Fazni portreti i bifurkacioni dijagram dinamičkog sistema (8.3).

Na slici 8.1 dat je grafički prikaz ove analize u proširenom faznom prostoru (ω, y_1, y_2) . U osnovnom faznom prostoru (y_1, y_2) prikazani su fazni portreti dinamičkog sistema za dve vrednosti parametra ω . Kada je $\omega < \omega^*$ vidimo da postoji samo jedna stacionarna tačka tipa centra u čijoj se okolini nalaze zatvorene fazne trajektorije. Za $\omega > \omega^*$ uočava se topološka prome-

na globalnog faznog portreta usled postojanja tri stacionarne tačke: dva centra i jednog sedla. Primitimo da u slučaju $\omega > \omega^*$ postoji trajektorija koja asimptotski povezuje sedlo sa samim sobom: polazi iz njega prateći nestabilnu granu linearizovanog problema i konvergira ka njemu tangirajući stabilnu granu linearizovanog problema. Dakle, u pitanju je **homoklinička orbita**.

U ravni (ω, y_1) prikazane su i krive koje opisuju položaje stacionarnih rešenja. One predstavljaju rešenja **bifurkacione jednačine**:

$$Y_2(y_1, \omega) = \left(\omega^2 \cos y_1 - \frac{g}{R} \right) \sin y_1 = 0. \quad (8.4)$$

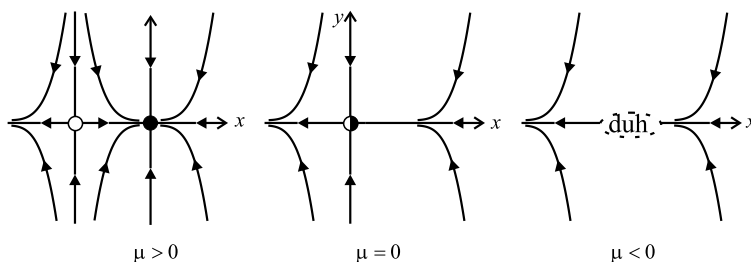
Ovaj grafik, koji se zove **bifurkacioni dijagram**, jasno prikazuje grananje stacionarnih rešenja prilikom promene vrednosti parametra, a zahvaljujući faznim portretima otkriva nam i tip fiksne tačke. On se, međutim, mnogo češće prikazuje posebno, kao na donjem grafiku, uz naznaku stabilnih i nestabilnih grana rešenja, što će detaljnije biti analizirano u daljem tekstu.

Sedlo-čvor bifurkacija

Sedlo-čvor bifurkacija predstavlja osnovni mehanizam za stvaranje i iščezavanje fiksni tačaka, kao što je ranije rečeno. Tipičan dvodimenzionalni primer je:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu - x^2, \\ \dot{y} &= -y. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Posmatrajmo fazni portret pri promeni vrednosti parametra μ . Za $\mu > 0$ (sl. 8.2) postoje dve fiksne tačke, stabilan čvor u $(x^*, y^*) = (\sqrt{\mu}, 0)$ i sedlo u $(-\sqrt{\mu}, 0)$. Kada vrednost μ opada, "sedlo" i "čvor" se približavaju jedno drugom, zatim sudaraju kada je $\mu = 0$ i najzad nestaju kada je $\mu < 0$.



Slika 8.2: Sedlo-čvor bifurkacija u dvodimenzionalnom sistemu.

Čak i nakon što fiksne tačke "ponište" jedna drugu, one nastavljaju da utiču na tok. Kao što je poznato, dolazi do pojave, "uskog grla" (**duh**), gde se trajektorija zadržava znatno duže nego u ostalim oblastima faznog prostora.

8.2 Transkritične i vilaste bifurkacije

Na sličan način, kao u prethodnom poglavlju, možemo konstruisati i tipične primere transkritične i vilaste bifurkacije u stabilnoj fiksnoj tački. Tipični dvodimenzionalni primeri su:

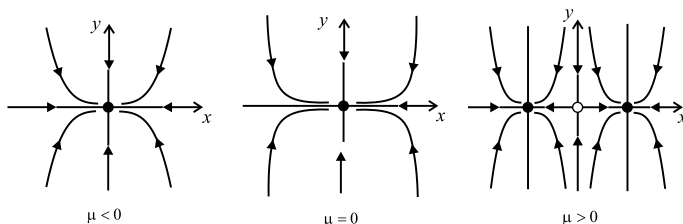
$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x - x^2, & \dot{y} &= -y, & & \text{(transkritična),} \\ \dot{x} &= \mu x - x^3, & \dot{y} &= -y, & & \text{(natkritična vilasta),} \\ \dot{x} &= \mu x + x^3, & \dot{y} &= -y, & & \text{(potkritična vilasta).} \end{aligned}$$

Analiza svakog od ovih slučajeva vrši se na isti način, pa ćemo razmatrati samo natkritičnu vilastu bifurkaciju.

Skicirajmo fazne portrete sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x - x^3, \\ \dot{y} &= -y \end{aligned} \tag{8.6}$$

za $\mu < 0$ i $\mu > 0$. Za $\mu < 0$, jedina fiksna tačka je stabilan čvor u koordinatnom početku. Za $\mu = 0$, koordinatni početak je još uvek stabilan, ali sada pokazuje veoma sporo (algebarsko) opadanje duž x -ose umesto eksponencijalnog opadanja (kritično usporavanje). Za $\mu > 0$, koordinatni početak gubi stabilnost i rađaju se dve nove stabilne fiksne tačke, simetrično postavljene u $(x^*, y^*) = (\pm\sqrt{\mu}, 0)$. Izračunavanjem Jakobijana u svakoj tački, može se proveriti da koordinatni početak predstavlja sedlo, a druge dve fiksne tačke su stabilni čvorovi. Fazni portreti su prikazani na slici 8.3.



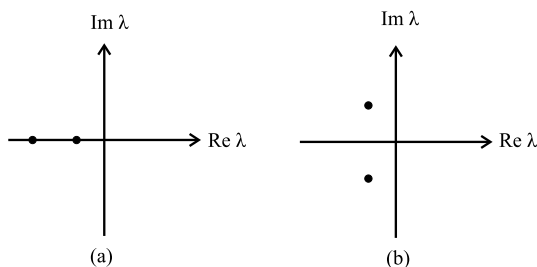
Slika 8.3: Natkritična vilasta bifurkacija u faznom portretu sistema 8.6.

8.3 Hopfove bifurkacije

U prethodnim poglavljima, videli smo da do pojave bifurkacija dolazi kada je $\Delta = 0$ odnosno, kada je jedna od sopstvenih vrednosti jednaka nuli. U opštem slučaju, sedlo-čvor, transkritična i vilasta bifurkacija predstavljaju primere bifurkacija sa sopstvenom vrednošću jednakom nuli¹. U ovom slučaju, do pojave bifurkacija dolazi pri "sudaru" dve ili više fiksni tačkama.

Razmotrimo sada mogućnost da fiksne tačke izgube stabilnost bez sudaranja sa drugim fiksnim tačkama, što je karakteristično za višedimanzionalne sisteme.

Pretpostavimo da dvodimenzionalni sistem ima stabilnu fiksnu tačku. Na koje sve načine fiksna tačka može da izgubi stabilnost pri promeni parametra μ ? Ako su fiksne tačke stabilne, onda obe sopstvene vrednosti λ_1 i λ_2 , moraju da leže u levoj poluravni $\text{Re}\lambda < 0$. Pošto λ zadovoljava kvadratnu jednačinu sa realnim koeficijentima, moguća su dva slučaja: ili su obe sopstvene vrednosti realne i negativne (sl. 8.4a) ili su konjugovano kompleksni brojevi (sl. 8.4b). Da bi se fiksna tačka destabilizovala, potrebno je da jedna ili obe sopstvene vrednosti pređu na desnu poluravan, pri promeni parametra μ .



Slika 8.4: Sopstvene vrednosti Jakobijana u kompleksnoj ravni.

8.3.1 Natkritična Hopfova bifurkacija

Jednostavan primer natkritične Hopfove bifurkacije dat je sledećim sistemom:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \mu r - r^3, \\ \dot{\theta} &= \omega + b r^2. \end{aligned} \tag{8.7}$$

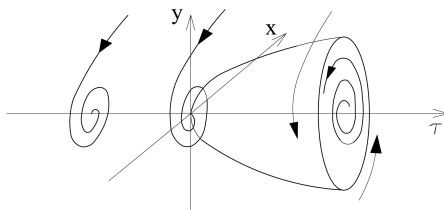
Postoje tri kontrolna parametra: μ kontroliše stabilnost fiksne tačke u koordinatnom početku, ω je frekvencija infinitezimalnih oscilacija, a b određuje

¹zero-eigenvalue bifurcations (eng.)

zavisnost frekvencije od amplitude za oscilacije sa većom amplitudom.

Kada je $\mu < 0$, koordinatni početak $r = 0$ je stabilna zavojnica čiji smer rotacije zavisi od predznaka ω (sl. 8.5). Za $\mu = 0$, koordinatni početak je još uvek stabilna zavojnica, s tim što je opadanje sporije.

Za $\mu > 0$, koordinatni početak postaje nestabilan i pojavljuje se stabilni granični ciklus, oblika bliskog kružnici $r = \sqrt{\mu}$.



Slika 8.5: Natkritična Hopfova bifurkacija.

Da bismo videli kako se sopstvene vrednosti ponašaju tokom bifurkacije, zapišimo sistem u Dekartovim koordinatama. Smenom $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, dobijamo:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta = (\mu r - r^3) \cos \theta - r(\omega + b r^2) \sin \theta = \\ &= [\mu - (x^2 + y^2)] x - [\omega + b(x^2 + y^2)] y = \\ &= \mu x - \omega y + \text{kubni članovi} \end{aligned}$$

i

$$\dot{y} = \omega x + \mu y + \text{kubni članovi.}$$

Tada je Jakobijan u koordinatnom početku

$$J = \begin{pmatrix} \mu & -\omega \\ \omega & \mu \end{pmatrix},$$

a sopstvene vrednosti su:

$$\lambda_{1,2} = \mu \pm i\omega.$$

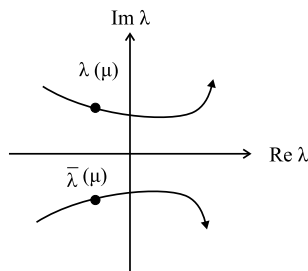
Kao što smo i pretpostavili, sopstvene vrednosti prelaze imaginarnu osu sleva nadesno kada μ raste od negativne ka pozitivnoj vrednosti.

Naglasimo da ovaj idealizovani slučaj ilustruje dva pravila koja su tipična za natkritičnu Hopfovu bifurkaciju:

1. Veličina graničnog ciklusa raste neprekidno od nule, a povećava se proporcionalno veličini $\sqrt{\mu - \mu_c}$, za μ blisko μ_c .

2. Frekvencija graničnog ciklusa približno je $\omega = \text{Im}\lambda$, za $\mu = \mu_c$. Ova jednakost je tačna u začetku graničnog ciklusa, reda veličine $O(\mu - \mu_c)$ za μ blisko μ_c . U tom slučaju, period je $T = (2\pi/\text{Im}\lambda) + O(\mu - \mu_c)$.

Naglasimo, takođe, da ovaj idealizovani primer ima i neka svojstva, koja se ne sreću često u primenama. Prvo, u najvećem broju slučajeva, granični ciklus ima oblik elipse, a ne kružnice. Pri tome, oblik graničnog ciklusa deformiše se kako se μ "pomera" od bifurkacione tačke. Drugo, u našem idealizovanom slučaju, sopstvene vrednosti se pomeraju po horizontalnoj liniji kako se μ menja, tj. $\text{Im}\lambda$ je strogo nezavisno od vrednosti μ . Međutim, sopstvene vrednosti mogu pratiti trajektoriju krive i preći imaginarnu osu sa nagibom različitim od nule (sl. 8.6).



Slika 8.6: "Rađanje" natkritične Hopfove bifurkacije u kompleksnoj ravni.

8.3.2 Potkritična Hopfova bifurkacija

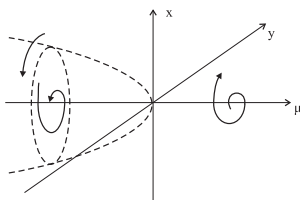
Kao što je poznato, potkritična bifurkacija predstavlja "dramatičniji" i potencijalno opasniji slučaj od natkritične, u tehnici. Naime, nakon bifurkacije, trajektorije "skaču" na udaljeni atraktor, koji može biti fiksna tačka, granični ciklus, beskonačnost ili, u prostorima sa tri ili više dimenzija, strani atraktor.

Posmatrajmo sada primer dvodimenzionalnog sistema:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \mu r + r^3 - r^5, \\ \dot{\theta} &= \omega + br^2. \end{aligned} \tag{8.8}$$

Fazni portreti sistema prikazani su na slici 8.7. Za vrednosti $\mu < 0$ postoje dva atraktora - stabilan granični ciklus i stabilna fiksna tačka u koordinatnom početku. Između njih leži nestabilan ciklus, prikazan isprekidanom linijom na slici 8.7. Kako μ raste, nestabilan ciklus se sužava oko fiksne tačke. Potkritična Hopfova bifurkacija se pojavljuje u $\mu = 0$, gde se

nestabilan granični ciklus "skuplja" do nulte amplitude i zahvata koordinatni početak, čineći ga nestabilnim. Za $\mu > 0$, granični ciklus sa velikom amplitudom je jedini atraktor. Rešenja u blizini koordinatnog početka, sada "prelaze" u oscilacije velikih amplituda.



Slika 8.7: Potkritična Hopfova bifurkacija.

Uočimo da sistem ispoljava efekat histerezisa, pri promeni vrednosti μ . Jednom, kada počnu oscilacije velikih amplituda, one se ne mogu zaustaviti prostim vraćanjem vrednosti parametra μ na nulu. U tom slučaju, oscilacije velikih amplituda trajaće do vrednosti $\mu = -1/4$, gde se stabilni i nestabilni ciklusi "sudaraju" i "poništavaju".

Potkritične Hopfove bifurkacije pojavljuju se u dinamici nervnih ćelija [85], u aeroelastičnom podrhtavanju i drugim aerodinamičkim vibracijama [75], [332], kao i pri pojavi nestabilnosti u strujanju fluida [76].

Pod uslovom da, u posmatranom sistemu, dolazi do pojave Hopfove bifurkacije, kako se može odrediti da li je ta bifurkacija nat- ili potkritična? Linearizacija ne daje odgovor na naše pitanje - u oba slučaja par sopstvenih vrednosti se pomera sa leve na desnu poluravan.

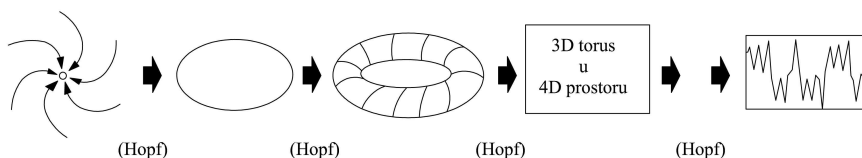
Tip bifurkacije može da se odredi analitički, ali je veoma komplikovan. Međutim, primenom računara (numerički eksperimenti), tip bifurkacije određujemo znatno brže i jednostavnije.

Ako se mali, privlačni granični ciklus pojavi odmah nakon što fiksna tačka postane nestabilna i ako se njegova amplituda vrati na nulu kada se parametar menja, bifurkacija je, gotovo sigurno, natkritična. U suprotnom, bifurkacija je, gotovo sigurno, potkritična, kada najbliži atraktor može biti daleko od fiksne tačke, a sistem može ispoljavati efekat histerezisa sa promenom vrednosti parametara.

Važno je naglasiti da može doći do pojave i degenerisane Hopfove bifurkacije. Tipičan primer predstavlja klatno u viskoznoj sredini $\ddot{x} + \mu \dot{x} + \sin x = 0$. Kako se menja prigušenje μ , od pozitivnog ka negativnom, tako se stabilnost fiksne tačke, u koordinatnom početku, menja iz stabilne u nestabilnu zavojnicu (fokus). Međutim, za $\mu = 0$ nema "prave" Hopfove

bifurkacije, jer ne postoje granični ciklusi ni za $\mu < 0$, ni za $\mu > 0$. Umesto toga, za $\mu = 0$ imamo tačku tipa centra, koja je u faznoj ravni okružena familijom zatvorenih trajektorija. Međutim, ove trajektorije ne predstavljaju granične cikluse, jer nisu izolovane - u svakoj okolini bilo koje od ovih zatvorenih trajektorija nalazi se bar još jedna zatvorena trajektorija.

Pojava Hopfovih bifurkacija predstavlja osnovu kvaziperiodičnog puta u kaos, koji je prvi put uočen u dinamici van der Polovog oscilatora, gde spiralni čvor postaje nestabilan i prelazi u granični ciklus kroz Hopfovu bifurkaciju [192], koji potom prelazi u torus kroz drugu Hopfovu bifurkaciju (ili Najmark-Zaker bifurkaciju²), nakon čega dolazi do pojave haosa [282], [226]. Naročito je interesantan istorijski razvoj pronalaska kvaziperiodičnog puta u kaos. Pre nego što su strani atraktori bili poznati, opšte prihvaćena je bila teorija turbulencije, data od strane Landaua [172], koji je tvrdio da se fluid sastoji od velikog broja oscilatora sa određenim frekvencijama koji se sukcesivno pobuđuju sa porastom energije sistema [173]. Stoga, dinamika sistema se menja od stabilnog ravnotežnog stanja ka grničnom ciklusu, zatim ka torusu perioda 2 i perioda 3, i tako dalje, sve dok spektar frekvencije ne postane neprekidan (sl. 8.8).

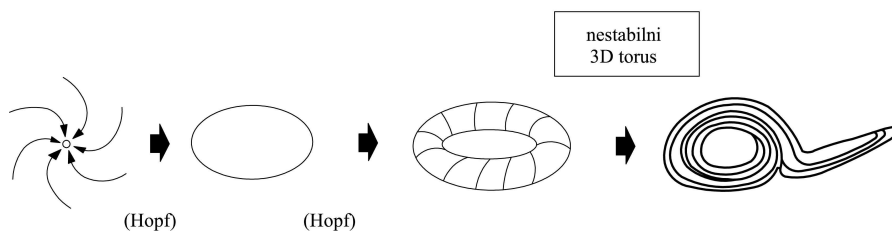


Slika 8.8: Landauov model turbulencije.

Nemački matematičar Eberhard Hopf [134] nezavisno je razvio sličnu teoriju. Međutim, Peiksoto [245] je pokazao da su torusi stabilni samo za dimenzije manje od tri. Ruel i Takens [282]³ su predložili alternativnu promenu dinamike, pri kojoj dvostruki torus prelazi u strani atraktor (sl. 8.9).

²Hopf je dokazao bifurkacionu teoremu za tok, ali su odgovarajuće bifurkacije za preslikavanja dokazane nezavisno od strane Najmarka (1959) i Zakerera (1956), pa zato i bifurkacija nosi noziv Najmark-Zakerova bifurkacija.

³Interesantno je napomenuti da je rad Ruela i Takensa, kao i Fajgenbaumov rad o udvajanju perioda inicijalno bio odbijen za publikovanje.



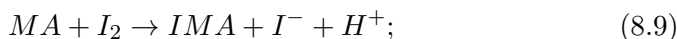
Slika 8.9: Ruel-Takens-Njuhaus put u kaos.

Nezavisno, Golab i Svini [103], [104] su, koristeći spektralnu analizu, proučavali nastanak turbulencija u Tejlor-Kuetovom sistemu, koji sadrži vodu između dva koncentrična cilindra koji rotiraju u suprotnim smerovima, ali nisu uspeali da potvrde Landauovu teoriju. Ruel je čuo za njihov negativan rezultat i potom dao korektnu interpretaciju ovog važnog eksperimenta. Naime, njegova analiza je pokazala da turbulencija predstavlja jedan oblik haosa. S obzirom na to da Landauov put u turbulenciju do sada nije eksperimentalno potvrđen, smatra se da je ova teorema netačna.

Iako je veoma teško odrediti kompletan niz bifurkacija koje vode do haosa, smatra se da je Hopfova bifurkacija i kvaziperiodični put u kaos najčešće susretana u primenama [74]. Ovaj rezultat je logičan, s obzirom na to da su sopstvene vrednosti slučajnog (nasumičnog) višedimenzionalnog sistema raspoređene preko cele kompleksne ravni, sa samo malim brojem na realnoj osi. Stvarna putanja ka haosu je verovatno mnogo komplikovanija, uključujući pojavu višestruke Hopfove bifurkacije, inverzne Hopfove bifurkacije, i dr. Međutim, neophodno je istaći da je ponekad u primenama moguće naići i na stabilni torus sa periodom 3 (tri nezavisne frekvencije) [27].

8.4 Oscilujuća hemijska reakcija

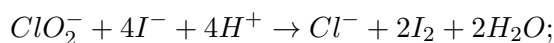
Mehanizmi hemijskih reakcija mogu biti veoma složeni. Lengjel i dr. [177] predložili su i analizirali model oscilujuće reakcije za hlor-dioksid-jodmalonsku kiselinu ($CIO_2 - I_2 - MA$), koja može da se prikaže na sledeći način



$$\frac{d[I_2]}{dt} = -\frac{k_{1a}[MA][I_2]}{k_{1b} + [I_2]}, \quad (8.10)$$



$$\frac{d[\text{ClO}_2]}{dt} = -k_2[\text{ClO}_2][\text{I}^-], \quad (8.12)$$



$$\frac{d[\text{ClO}_2^-]}{dt} = -k_{3a}[\text{ClO}_2^-][\text{I}^-][\text{H}^+] - k_{3b}[\text{ClO}_2][\text{I}_2] \frac{[\text{I}^-]}{u + [\text{I}^-]^2} \quad (8.13)$$

Tipične vrednosti koncentracija (veličine u uglastim zagradama) i kinetički parametri dati su u radovima [177] i [178]. Nakon pogodnog svođenja na bezdimenzionalni oblik, model postaje

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a - x - \frac{4xy}{1+x^2}, \\ \dot{y} &= bx \left(1 - \frac{y}{1+x^2} \right), \end{aligned} \quad (8.14)$$

gde su \dot{x} i \dot{y} bezdimenzionalne koncentracije I^- i ClO_2^- . Parametri $a, b > 0$ određuju se empirijski.

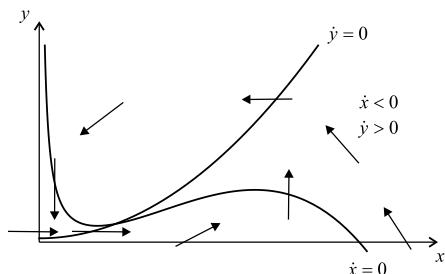
Dokažimo, sada, da sistem (8.14) ima zatvorenu orbitu u pozitivnom kvadrantu $x, y > 0$, ako a i b zadovoljavaju izvesne uslove, koje treba odrediti.

Pomoću nulklina, konstruišimo zatvorenu oblast, kao u primeru 33, na str. 506. Prva jednačina, u sistemu (8.14), pokazuje da je $\dot{x} = 0$ na krivoj

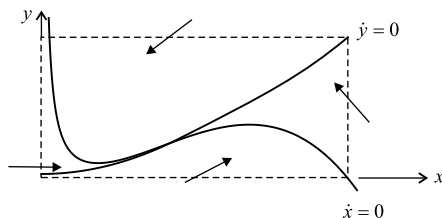
$$y = \frac{(a-x)(1+x^2)}{4x}, \quad (8.15)$$

a iz druge jednačine (8.14) sledi da je $\dot{y} = 0$ na y -osi i na paraboli $y = 1+x^2$. Ove nulklone su skicirane na slici 8.10, zajedno sa nekim reprezentativnim vektorima⁴.

⁴Naglasimo da je zakrivljenost nulklone (8.15) preuveličana da bismo istakli njen oblik, kao i da bismo imali više prostora za crtanje vektora.



Slika 8.10: Nulcline sistema (8.14).



Slika 8.11: Zatvorena oblast sistema.

Posmatrajmo pravougaonik, prikazan na slici 8.11. Ovaj pravougaonik je zatvorena oblast, jer su svi vektori na stranicama usmereni ka njegovoj unutrašnjosti.

Još uvek ne možemo primeniti Poenkare-Bendiksonovu teoremu, zato što postoje fiksne tačke

$$x^* = \frac{a}{5}, \quad y^* = 1 + (x^*)^2 = 1 + \left(\frac{a}{5}\right)^2$$

unutar pravougaonika, u preseku nulclina. Ukoliko pretpostavimo da je fiksna tačka odbojna (repeler), možemo primeniti Poenkare-Bendiksonovu teoremu na oblast dobijenu uklanjanjem infinitezimalnog kruga, čiji je centar fiksna tačka, iz pravougaonika, dobijen uklanjanjem fiksne tačke.

Odredimo sada uslove za koje je fiksna tačka repeler. Jakobijan u fiksnoj tački (x^*, y^*) je

$$A = \frac{1}{1 + (x^*)^2} \begin{pmatrix} 3(x^*)^2 - 5 & -4x^* \\ 2b(x^*)^2 & -bx^* \end{pmatrix}.$$

Determinanta i trag su

$$\Delta = \frac{5bx^*}{1 + (x^*)^2} > 0, \quad \tau = \frac{3(x^*)^2 - 5 - bx^*}{1 + (x^*)^2}.$$

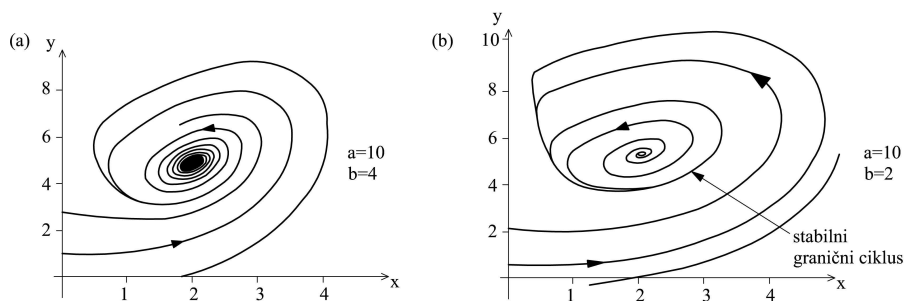
Kako je $\Delta > 0$, fiksna tačka nikada nije sedlo. Dakle, (x^*, y^*) je repeler, ako je $\tau > 0$, tj. ako je

$$b < b_c \equiv \frac{3a}{5} - \frac{25}{a}. \quad (8.16)$$

Kada (8.16) važi, na osnovu Poenkare-Bendiksonove teoreme, zaključujemo da postoji zatvorena orbita negde u "oslabljenoj" pravougaoniku.

Pokažimo, sada, da se Hopfova bifurkacija pojavljuje za $b = b_c$ i odredimo tip bifurkacije.

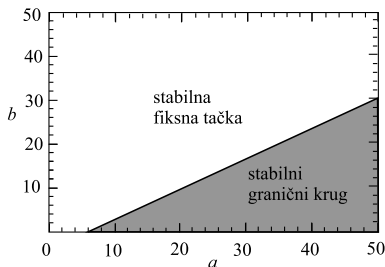
Analički rezultati, prethodno dobijeni, pokazuju da kako b opada ka b_c , tako fiksna tačka prelazi iz stabilne zavojnice u nestabilnu zavojnicu, što ukazuje na pojavu Hopfove bifurkacije. Na slici 8.12 su prikazana dva tipična fazna portreta sistema, za $a = 10$ i $b = 4$ i 2 , redom. U tom slučaju iz (8.16) sledi da je $b_c = 3,5$. Kada je $b > b_c$, sve trajektorije se uvijaju oko stabilne fiksne tačke (sl. 8.12a), a kada je $b < b_c$, one bivaju privučene ka stabilnom graničnom ciklusu (sl. 8.12b).



Slika 8.12: Fazni porteti sistema.

Prema tome, bifurkacija je natkritična - nakon što fiksna tačka izgubi stabilnost, okružena je stabilnim graničnim ciklusom.

Dobijeni rezultati sumirani su na bifurkacionom dijagramu (sl. 8.13). Hopfove bifurkacije pojavljuje se na granici dve oblasti, gde je $b < b_c \equiv \frac{3a}{5} - \frac{25}{a}$.



Slika 8.13: Bifurkacioni dijagram sistema.

Aproksimirajmo period graničnog ciklusa za b neznatno manje od b_c (mala okolina b_c).

Frekvencija je aproksimirana imaginarnim delom sopstvenih vrednosti u bifurkaciji. Kao i obično, sopstvene vrednosti zadovoljavaju uslov $\lambda^2 - \tau\lambda +$

$\Delta = 0$. Pošto je $\tau = 0$ i $b = b_c$, nalazimo da je

$$\lambda = \pm i\sqrt{\Delta}.$$

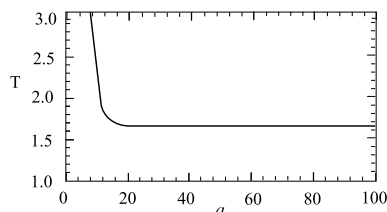
Ali u b_c ,

$$\Delta = \frac{5b_c x^*}{1 + (x^*)^2} = \frac{5\left(\frac{3a}{5} - \frac{25}{a}\right)\left(\frac{a}{5}\right)}{1 + (a/5)^2} = \frac{15a^2 - 625}{a^2 + 25}.$$

Stoga je $\omega \approx \Delta^{1/2} = [(15a^2 - 625)/(a^2 + 25)]^{1/2}$, i prema tome

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi [(a^2 + 25)/(15a^2 - 625)]^{1/2}.$$

Grafik $T(a)$ je dat na slici 8.14. Kada $a \rightarrow \infty$, $T \rightarrow 2\pi/\sqrt{15} \approx 1,63$.



Slika 8.14: Promena perioda graničnog ciklusa u funkciji parametra a .

8.5 Globalne bifurkacije ciklusa

Osim Hopfove bifurkacije, u dvodimenzionalnim sistemima, mogu se javiti još tri tipa globalnih bifurkacija. Ove bifurkacije ređe se sreću u primenama, jer obuhvataju velike oblasti faznog prostora, a ne samo malu okolinu fiksne tačke.

Sedlo-čvor bifurkacija ciklusa

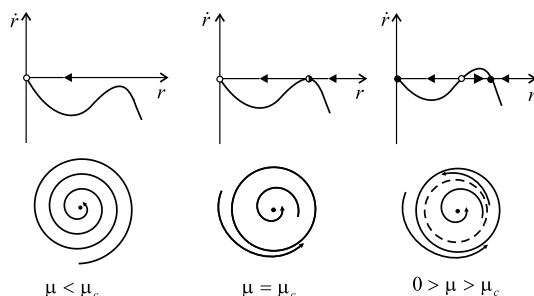
Bifurkacija u kojoj se dva granična ciklusa sudaraju i poništavaju zove se **prevojna**⁵ ili **sedlo-čvor bifurkacija** ciklusa, po analogiji sa bifurkacijom fiksnih tačaka. Jedan tipičan primer predstavljen je sistemom

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \mu r + r^3 - r^5, \\ \dot{\theta} &= \omega + b r^2 \end{aligned} \tag{8.17}$$

⁵fold bifurcation (eng.)

razmatranom u poglavlju 8.1. Tada smo razmatrali pojavu potkritične Hopfove bifurkacije za $\mu = 0$. Izvršimo sada analizu dinamike sistema za $\mu < 0$.

Može se pokazati da jednodimenzionalni sistem $\dot{r} = \mu r + r^3 - r^5$ prolazi kroz sedlo-čvor bifurkaciju, za $\mu_c = -1/4$. Ako sada posmatramo dvodimenzionalni sistem, ove fiksne tačke odgovaraju kružnim graničnim ciklusima. Na slici 8.15 predstavljeni su fazni portreti jednodimenzionalnog i dvodimenzionalnog sistema.



Slika 8.15: Fazni portreti jednodimenzionalnog i dvodimenzionalnog sistema.

Za $\mu = \mu_c$ granični ciklus se pojavljuje kao iz "vedra neba". Kako μ raste, granični ciklus se "deli" na stabilan i nestabilan. Ukoliko posmatramo iz suprotnog smera, stabilan i nestabilan granični ciklusi se sudaraju i nestaju kada je vrednost parametra $\mu < \mu_c$. Uočimo da koordinatni početak ostaje sve vreme stabilan.

Naglasimo, da je, u ovom slučaju, granični ciklus neposredno posle nastanka, reda veličine $O(1)$, nasuprot Hopfovoj bifurkaciji, gde je veličina graničnog ciklusa proporcionalna veličini $\sqrt{\mu - \mu_c}$.

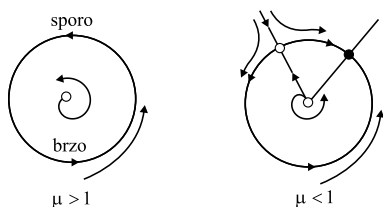
8.5.1 Bifurkacije sa beskonačnim periodom

Posmatrajmo sistem

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(1 - r^2), \\ \dot{\theta} &= \mu - \sin \theta, \end{aligned} \tag{8.18}$$

gde je $\mu \geq 0$.

U radijalnom smeru, sve trajektorije (osim $r^* = 0$) se monotono približavaju jediničnom krugu kada $t \rightarrow \infty$. Smer obrtanja je suprotan smeru kretanja kazaljke na satu, ako je $\mu > 1$. Naglasimo da postoje dva invarijantna pravca, određena sa $\sin \theta = \mu$, za $\mu < 1$. Dakle, kako se vrednost parametra μ smanjuje, dolazi do promene dinamike sistema (sl. 8.16).



Slika 8.16: Fazni portreti sistema 8.18.

Kako μ opada, za $\theta = \pi/2$ dolazi do pojave "uskog grla". Kada $\mu \rightarrow 1^+$, oscilatorni period se produžava i postaje beskonačan za $\mu_c = 1$ (odavde potiče naziv bifurkacija sa beskonačnim periodom). Tada dolazi do pojave fiksne tačke na kružnici. Za $\mu < 1$, pojavljuju se dve fiksne tačke - sedlo i čvor.

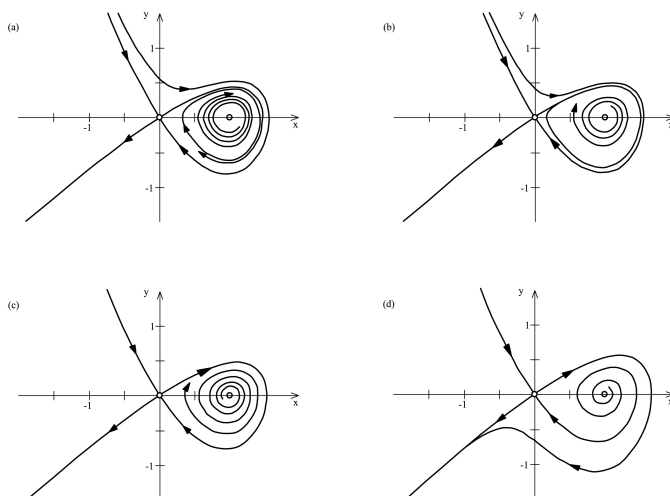
8.5.2 Homoklinička bifurkacija

Homoklinička bifurkacija predstavlja još jedan tip bifurkacije sa beskonačnim periodom. U ovom slučaju, deo graničnog ciklusa se pomera sve bliže i bliže sedlu, a do pojave bifurkacije dolazi kada granični ciklus "dodirne" sedlo, pri čemu dolazi do pojave homokliničke orbite.

Naglasimo da je za homokliničku bifurkaciju teško naći jednostavan analitički primer. Stoga se često pribegava numeričkim metodama.

Posmatrajmo sistem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \mu y + x - x^2 + xy.\end{aligned}$$



Slika 8.17: Fazni portreti sistemi pre, za vreme i posle homokliničke bifurkacije.

Na slici 8.17 prikazana je serija faznih portreta pre, za vreme i posle bifurkacije, dobijenih numeričkim postupkom.

Može se pokazati da se bifurkacija dešava za $\mu_c = -0,8645$. Za $\mu < \mu_c$ (npr. $\mu = -0,92$), stabilan granični ciklus "prolazi" blizu sedla u koordinatnom početku (sl. 8.17a). Kako μ raste do μ_c , granični ciklus se uvećava (sl. 8.17b) i nakon "dodira" sa sedlom, dolazi do pojave homokliničke orbite (sl. 8.17c). Za $\mu > \mu_c$, veza sa sedlom se prekida i petlja nestaje (sl. 8.17d).

Naglasimo da je ponašanje nestabilne mnogostrukosti sedla ključno za homokliničku bifurkaciju. Uočimo "granu" nestabilne mnogostrukosti, koja "napušta" koordinatni početak udesno (sl. 8.17c). Nakon što napravi jednu petlju, ona se ili vraća u koordinatni početak (sl. 8.17a) ili se obrće na jednu, ili na drugu stranu (sl. 8.17d).

Zakoni razmere (skaliranje)

Za svaku bifurkaciju koja je ovde data postoje karakteristični **zakoni razmere** koji određuju veličinu amplitude i perioda graničnog ciklusa, pri promeni vrednosti parametra koja vodi do pojave bifurkacije. Neka μ označava neku bezdimenzionalnu meru rastojanja od bifurkacije i pretpostavimo da je $\mu \ll 1$. Tipični zakoni razmere za bifurkacije ciklusa u dvodimenzionalnim sistemima dati su u tabeli 8.3.

Svaki od ovih zakona je prethodno objašnjen, osim onih za homokliničku bifurkaciju. Razmera perioda u tom slučaju je dobijena procenom vremena koje je potrebno da trajektorija prođe sedlo.

Tabela 8.3: Tipični zakoni razmere za bifurkacije ciklusa u dvodimenzionalnim sistemima

	Amplituda stabilnog graničnog ciklusa	Period ciklusa
Natkritična Hopfova	$O(\mu^{1/2})$	$O(1)$
Sedlo-čvor bifurkacija ciklusa	$O(1)$	$O(1)$
Sa beskonačnim periodom	$O(1)$	$O(\mu^{-1/2})$
Homoklinička	$O(1)$	$O(\ln \mu)$

Zakoni razmere, koji su ovde dati, izvedeni su na osnovu razmatranja dvodimenzionalnih sistema. U faznim prostorima u više dimenzija, postaju moguće još neke bifurkacije graničnih ciklusa, pa tako naša tabela 8.3 nije više potpuna. Takođe, u ovom slučaju, homoklinička bifurkacija postaje

mnogo suptilnija i teža za analiziranje. Tada može doći do pojave haotične dinamike, sa svim njenim posledicama ([117], [348]).

8.6 Spregnuti oscilatori i kvaziperiodičnost

Još jedan važan dvodimenzionalni fazni prostor predstavlja torus, koji je prirodan fazni prostor za sisteme oblika:

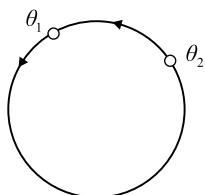
$$\dot{\theta}_1 = f_1(\theta_1, \theta_2), \quad \dot{\theta}_2 = f_2(\theta_1, \theta_2)$$

gde su funkcije f_1 i f_2 periodične po oba argumenta.

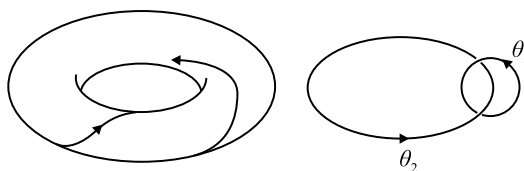
Jedan primer ovakvih sistema predstavlja model spregnutih oscilatora:

$$\dot{\theta}_1 = \omega_1 + K_1 \sin(\theta_2 - \theta_1), \quad \dot{\theta}_2 = \omega_2 + K_2 \sin(\theta_1 - \theta_2), \quad (8.19)$$

gde su θ_1 i θ_2 faze oscilatora, $\omega_1, \omega_2 > 0$ su njihove prirodne frekvencije, a K_1, K_2 su konstante. Jednačine (8.19) se koriste za modeliranje interakcije između rada ljudskog srca i ciklusa spavanja i budnosti ([314], [315]).



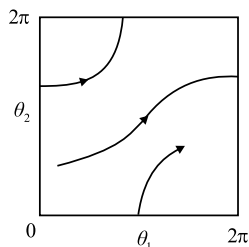
Slika 8.18: "Kretanje" dve tačke po kružnici.



Slika 8.19: Ilustracija toka na torusu.

Da bismo ilustrovali neka opšta svojstva toka na torusu i, takođe, da bismo dali primer sedlo-čvor (prevojne) bifurkacije ciklusa, zamislimo dve tačke koje se "kreću" po krugu trenutnim brzinama $\dot{\theta}_1$ i $\dot{\theta}_2$ (sl. 8.18).

Tok možemo da ilustrujemo i ukoliko zamislimo jednu tačku koja "iscrtava" trajektoriju na torusu sa koordinatama θ_1 i θ_2 (sl. 8.19). Kako je na torusu teško crtati fазne portrete, površ torusa ćemo predstaviti kvadratom sa periodičnim graničnim uslovima. Onda, ukoliko trajektorija "pređe" ivicu kvadrata, ona se na "magičan način" opet pojavljuje na suprotnoj ivici (sl. 8.20).



Slika 8.20: Kvadrat sa periodičnim graničnim uslovima.

Nespregnuti sistemi

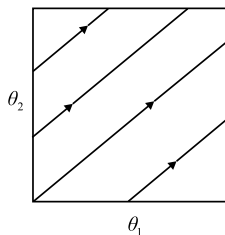
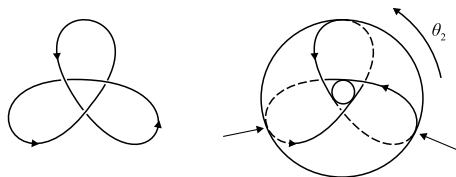
U ovom slučaju, sistem (8.19) redukuje se na $\dot{\theta}_1 = \omega_1$, $\dot{\theta}_2 = \omega_2$. Odgovarajuće trajektorije na kvadratu su prave linije sa konstantnim nagibom $d\theta_2/d\theta_1 = \omega_2/\omega_1$. Postoje dva kvalitativno različita slučaja u zavisnosti od toga da li je nagib racionalni ili iracionalni broj.

Ako je nagib racionalan broj, onda je $\omega_1/\omega_2 = p/q$, gde su p i q celi brojevi. U tom slučaju su sve trajektorije zatvorene orbite na torusu, jer θ_1 načini p obrtaja za isto vreme za koje θ_2 načini q obrtaja. Kao primer, na slici 8.21, prikazana je trajektorija na kvadratu za $p = 3$, $q = 2$.

Ukoliko ove trajektorije predstavimo na torusu (sl. 8.22), one obrazuju trolisni čvor ("detelinu").

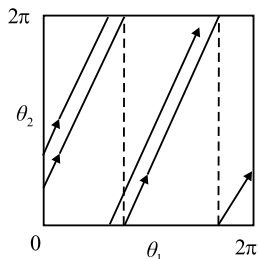
Postavlja se pitanje zašto se nespregnuti sistem, za $p = 3$ i $q = 2$, može prikazati ovakvom trajektorijom na torusu?

Da bismo odgovorili na ovo pitanje, posmatrajmo trajektoriju na slici 8.22 i računajmo broj obrtaja koje načini θ_2 za vreme za koje θ_1 načini jedan obrtaj.

Slika 8.21: Trajektorija na kvadratu za $p = 3$, $q = 2$.Slika 8.22: Trajektorija nespregnutog sistema, za $p = 3$ i $q = 2$, na torusu.

Počevši od tačke na površi torusa, na najvećoj udaljenosti od centra, trajektorija se kreće po gornjoj površi, "skače" u središnji deo torusa, a

zatim se kreće preko donje površi, da bi se ponovo pojavila na spoljašnjoj strani torusa (na dve trećine ukupnog puta oko torusa). Tako θ_2 napravi dve trećine obrtaja, za vreme dok θ_1 napravi jedan obrtaj. Dakle, $p = 3$, $q = 2$.



Slika 8.23: Kvaziperiodična trajektorija na torusu.

Naglasimo da su trajektorije uvek "zapatljane", kada $p, q \geq 2$ nemaju zajednički delilac. Rezultujuće krive zovu se $p : q$ **torusni čvorovi**. Ukoliko je nagib trajektorije iracionalan (sl. 8.23), onda se za tok kaže da je kvaziperiodičan. Svaka trajektorija se beskonačan broj puta obavlja oko torusa, a pritom se nikad ne preseca i nikada se sasvim ne zatvara.

Da bi se trajektorija zatvorila, ona mora da načini ceo broj obrtaja i po θ_1 i po θ_2 . Dakle, nagib bi morao da bude racionalan, što je suprotno pretpostavci. Štaviše, kada je nagib iracionalan, svaka trajektorija je "gusta" na torusu. Drugim rečima, svaka trajektorija prilazi proizvoljno blizu bilo kojoj datoj tački na torusu. Ona ne prolazi kroz svaku tačku, već joj samo prilazi proizvoljno blizu.

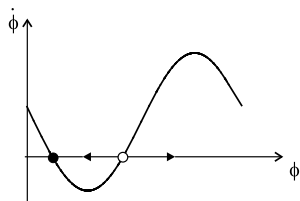
Kvaziperiodičnost je značajna zbog toga što predstavlja novu vrstu dugoročnog ponašanja. Za razliku od ranijih pojmova (fiksna tačka, zatvorena orbita, homokliničke i heterokliničke orbite i ciklusi), kvaziperiodičnost se dešava samo na torusu.

8.6.1 Spregnuti sistemi

Sada posmatrajmo sistem (8.19) u spregnutom slučaju kada su $K_1, K_2 > 0$. Dinamika se može odrediti posmatranjem fazne razlike $\phi = \theta_1 - \theta_2$. Tada iz (8.19) sledi

$$\dot{\phi} = \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 = \omega_1 - \omega_2 - (K_1 + K_2) \sin \phi, \quad (8.20)$$

što predstavlja jednačinu koja opisuje kretanje neuniformnog oscilatora.



Slika 8.24: Fazni portret sistema (8.20.)

Na faznom portretu (sl. 8.24) vidimo da postoje dve fiksne tačke za sistem (8.20), ako je $|\omega_1 - \omega_2| < K_1 + K_2$ i nijedna fiksna tačka, za $|\omega_1 - \omega_2| > K_1 + K_2$. Sedlo-čvor bifurkacija se pojavljuje kada je $|\omega_1 - \omega_2| = K_1 + K_2$.

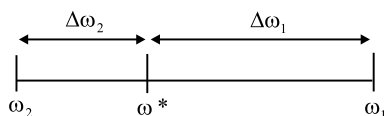
Pretpostavimo da postoje dve fiksne tačke, implicitno definisane sa

$$\sin \phi^* = \frac{\omega_1 - \omega_2}{K_1 + K_2}.$$

Kao što je prikazano na slici 8.24, sve trajektorije sistema (8.20) asimptotski se približavaju stabilnoj fiksnoj tački. Prema tome, ako se vratimo na torus, trajektorije sistema (8.19) se približavaju stabilnom **fazno-zaključanom** rešenju⁶ za koje su oscilatori razdvojeni konstantnom faznom razlikom ϕ^* . Fazno zatvoreno rešenje je periodično - oba oscilatora imaju konstantnu frekvenciju, $\omega^* = \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = \omega_2 + K_2 \sin \phi^*$. Zamenom $\sin \phi^*$, iz prethodnog izraza, dobijamo

$$\omega^* = \frac{K_1 \omega_2 + K_2 \omega_1}{K_1 + K_2}.$$

Ova frekvencija naziva se **kompromisna frekvencija**, jer se nalazi između prirodnih frekvencija dva oscilatora (sl. 8.25).



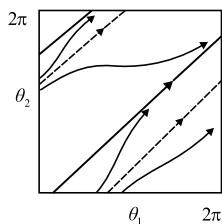
Slika 8.25: Kompromisna frekvencija.

Kompromisna frekvencija u opštem slučaju se ne nalazi na polovini razlike frekvencije oscilatora. Umesto toga, frekvencije se menjaju proporcionalno jačinama sprežanja, kao što je prikazano identitetom

$$\left| \frac{\Delta \omega_1}{\Delta \omega_2} \right| = \left| \frac{\omega_1 - \omega^*}{\omega_2 - \omega^*} \right| = \left| \frac{K_1}{K_2} \right|.$$

Posmatrajmo sada fazni portret na torusu (sl. 8.26). Stabilna i nestabilna fazno zatvorena rešenja predstavljena su pravama, jediničnog nagiba, jer je $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = \omega^*$.

⁶phase-locked solution (eng.)



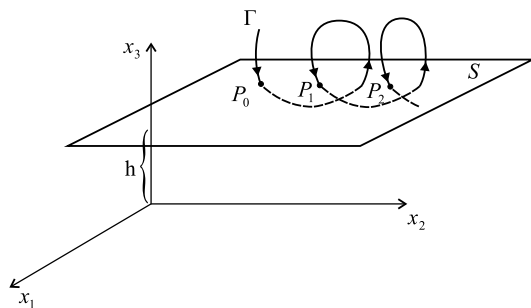
Slika 8.26: Trajektorije fazno zatvorenih rešenja na torusu.

Ukoliko razdvojimo prirodne frekvencije, podešavanjem jednog od oscilatora, onda se zatvorena rešenja približavaju jedno drugom i "sudaraju" kada je $|\omega_1 - \omega_2| = K_1 + K_2$. Tako zatvoreno rešenje nestaje u sedlo-čvor bifurkaciji ciklusa.

Nakon bifurkacije, tok izgleda kao u nespregnutom slučaju - tok je ili kvaziperiodičan ili racionalan, u zavisnosti od vrednosti parametara. Jedina razlika je u tome što su sada trajektorije na kvadratu krive, a ne prave linije.

8.7 Poenkareova preslikavanja

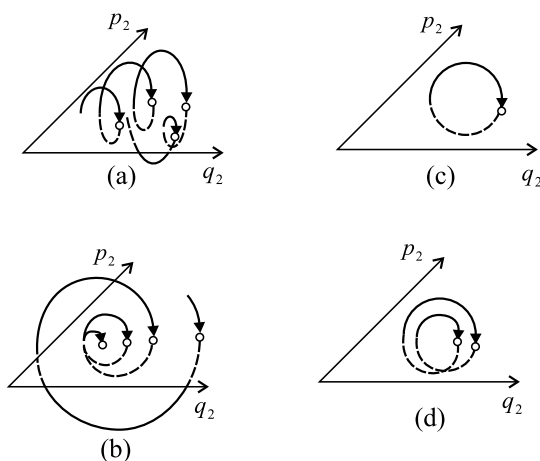
Posmatrajmo neku trajektoriju u m -dimenzionalnom faznom prostoru i presecimo je nekom $(m-1)$ -dimenzionalnom hiperpovrši (ne mora biti ravan; važno je da je transverzalna na tok). Skup tačaka u preseku, pri čemu se u obzir uzimaju samo ulazne tačke trajektorije sa jedne strane površi naziva se **Poenkareov presek** (sl. 8.27). Preslikavanje koje nas vodi od jedne tačke preseka do druge duž trajektorije naziva se **Poenkareovo preslikavanje** P . Ono zamenjuje vremenski neprekidnu evoluciju diskretnim preslikavanjem.



Slika 8.27: Poenkareov presek i Poenkareovo preslikavanje $P_{n+1} = f_P(P_n)$.

Pogodnost Poenkareovog preseka ogleda se u tome što se iz njegovog izgleda može odrediti karakter kretanja koje ga generiše. To je na nekoliko primera prikazano na slici 8.28. Dakle, granični ciklus generiše samo jednu tačku u Poenkareovom preseku, a ciklus udvostručene periode generiše dve tačke. Kvaziperiodično kretanje sa dve nesamerljive frekvencije na torusu

ostavlja otisak kruga. Ukoliko su frekvencije samerljive, onda se krug razbija na niz tačaka, itd. Kod haotičnog kretanja nikakve figure se ne mogu razaznati u preseku. Haotične tačke manje-više ravnomerno ispunjavaju celu ravan preseka.



Slika 8.28: Različiti Poenkareovi preseki: (a) Neuređeno kretanje; (b) Prilaz ravnotežnoj tački; (c) Granični krug; (d) Granični krug udvostručene periode.

Pretpostavimo da je \mathbf{x}^* fiksna tačka za P , tj. $P(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*$. Onda se trajektorija, koja počinje u \mathbf{x}^* , vraća u \mathbf{x}^* posle nekog vremena T , i stoga predstavlja zatvorenu orbitu za početni sistem $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Štaviše, posmatrajući kako se P ponaša u blizini ove fiksne tačke, možemo odrediti stabilnost zatvorene orbite. Na taj način, Poenkareovo preslikavanje svodi teške probleme sa zatvorenom orbitom na lakše probleme sa fiksnom tačkom preslikavanja. Otežavajuća okolnost je to što je obično nemoguće eksplicitno odrediti formulu za P . Radi ilustracije, posmatrajmo dva primera za koje se P može eksplicitno izračunati.

Posmatrajmo, najpre, vektorsko polje dato u polarnim koordinatama

$$\dot{r} = r(1 - r^2), \quad \dot{\theta} = 1. \quad (8.21)$$

Neka je S pozitivan deo x -ose. Odredimo sada Poenkareovo preslikavanje i pokažimo da sistem ima jedinstvenu periodičnu orbitu, čiju stabilnost treba da odredimo.

Neka je r_0 početni uslov na S . Pošto je $\dot{\theta} = 1$, prvi povratak u S se dešava posle vremenskog intervala $t = 2\pi$. Tada je $r_1 = P(r_0)$, gde r_1

zadovoljava dif. jednačinu (8.21). Razdvajanjem promenljivih, dobijamo

$$\int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{r(1-r^2)} = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi,$$

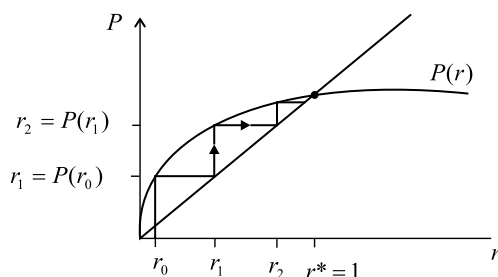
odakle se dobija

$$r_1 = [1 + e^{-4\pi} (r_0^{-2} - 1)]^{-1/2}.$$

Prema tome je,

$$P(r) = [1 + e^{-4\pi} (r^{-2} - 1)]^{-1}.$$

Grafik Poenkareovog preslikavanja P prikazan je na slici 8.29.



Slika 8.29: Poenkareovo preslikavanje i "paukova mreža".

Fiksna tačka se nalazi u $r^* = 1$, gde grafik seče polpravu, koeficijenta pravca 1. Poenkareovo preslikavanje možemo odrediti grafički, konstrukcijom "paukove mreže"⁷ (sl. 8.29) omogućava nam da ponovimo preslikavanje grafički. Konstrukcija paukove mreže izvodi se na sledeći način: za datu ulaznu veličinu r_k crtamo vertikalnu liniju do preseka sa grafikom P . Ordinata ovog preseka je polazna veličina r_{k+1} za sledeći korak. Od preseka crtamo horizontalnu liniju do preseka sa polpravom koeficijenta pravca 1, a onda crtamo vertikalnu do preseka sa krivom P , i tako redom, do preseka krive i polprave.

Paukova mreža dokazuje da je fiksna tačka $r^* = 1$ stabilna i jedinstvena. Stabilna je jer niz iteracija teži (konvergira) ka fiksnoj tački. Jedinstvena je, jer kriva P i polprava imaju samo jedan presek (sl. 8.29).

Linearna stabilnost periodičnih orbita

Sada razmotrimo opšti slučaj. Pod uslovom da sistem $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ima zatvorenu orbitu, odredimo da li je ta orbita stabilna, odnosno, da li odgo-

⁷cobweb construction=eng.

varajuća fiksna tačka x^* Poenkareovog preslikavanja stabilna. Neka je \mathbf{v}_0 infinitezimalni poremećaj takav da $\mathbf{x}^* + \mathbf{v}_0$ element S . Onda je nakon prvog povratka u S

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^* + \mathbf{v}_1 &= P(\mathbf{x}^* + \mathbf{v}_0) = \\ &= P(\mathbf{x}^*) + [DP(\mathbf{x}^*)] \mathbf{v}_0 + O(\|\mathbf{v}_0\|^2)\end{aligned}$$

gde $DP(\mathbf{x}^*)$ predstavlja $(n-1) \times (n-1)$ matricu, koja se zove **linearizovano Poenkareovo preslikavanje** u \mathbf{x}^* . Pošto je $\mathbf{x}^* = P(\mathbf{x}^*)$, dobijamo

$$\mathbf{v}_1 = [DP(\mathbf{x}^*)] \mathbf{v}_0$$

pod pretpostavkom da možemo zanemariti male kvadratne članove $O(\|\mathbf{v}_0\|^2)$.

Traženi kriterijum stabilnosti izražava se preko sopstvenih vrednosti λ_j ili $DP(\mathbf{x}^*)$: *Zatvorena orbita je linearno stabilna akko je $|\lambda_j| < 1$ za svako $j = 1, \dots, n-1$.*

Da bismo razumeli ovaj kriterijum, posmatrajmo tipičan slučaj gde nema višestrukih sopstvenih vrednosti. Tada postoji baza, koju čine sopstveni vektori $\{\mathbf{e}_j\}$, pa je $\mathbf{v}_0 = \sum_{j=1}^{n-1} v_j \mathbf{e}_j$ za neke skalare v_j . Stoga je

$$\mathbf{v}_1 = [DP(\mathbf{x}^*)] \sum_{j=1}^{n-1} v_j \mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^{n-1} v_j \lambda_j \mathbf{e}_j.$$

Ponavljanjem linearizovanog preslikavanja k puta, dobijamo

$$\mathbf{v}_k = \sum_{j=1}^{n-1} v_j (\lambda_j)^k \mathbf{e}_j.$$

Dakle, ako je svako $|\lambda_j| < 1$, onda $\|\mathbf{v}_k\| \rightarrow 0$ brzinom geometrijske progresije. To dokazuje da je x^* linearno stabilna. U suprotnom, ako je $|\lambda_j| > 1$, za neko j , onda poremećaji duž \mathbf{e}_j rastu, pa je \mathbf{x}^* nestabilna. Granični slučaj se dešava kada je najveća sopstvena vrednost $|\lambda_m| = 1$. Ovo se dešava u bifurkaciji periodičnih orbita, pa je tada potrebno izvršiti nelinearnu analizu stabilnosti.

Sopstvene vrednosti λ_j se, u ovom slučaju, nazivaju **karakteristični** ili **Flokeovi multiplikatori**.

Nađimo, sada, karakterističan multiplikator za granični ciklus sistema 8.21.

Izvršimo, najpre, linearizaciju u okolini fiksne tačke $r^* = 1$ Poenkareovog preslikavanja. Neka je $r = 1 + \eta$, gde je η infinitezimalno. Onda je $\dot{r} =$

$\dot{\eta} = (1 + \eta)(1 - (1 + \eta)^2)$. Posle zanemarivanja članova višeg reda $O(\eta^2)$, dobijamo $\dot{\eta} = -2\eta$, odnosno $\eta(t) = \eta_0 e^{-2t}$. Novi poremećaj $\eta_1 = e^{-4\pi} \eta_0$ pojavljuje se za $t + 2\pi$. Prema tome, $e^{-4\pi}$ je karakteristični multiplikator. Kako je $|e^{-4\pi}| < 1$, granični ciklus je linearno stabilan.

Lorencove jednačine

Kada eliminišete nemoguće, šta god da je ostalo, ma kako bilo neverovatno, mora biti istinito.

Šerlok Holms, "Znak četvorice".

9.1 Uvod

Kao što je rečeno, u Uvodnom poglavlju ovog udžbenika, veće interesovanje za teoriju haosa započinje sa Lorencovim modelom konvektivnih strujanja u atmosferi. Prema tome, naše istraživanje haosa počinjemo sa **Lorencovim jednačinama**:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz\end{aligned}$$

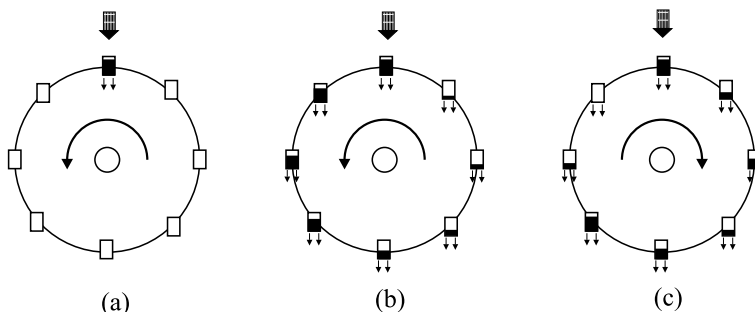
gde su $\sigma, r, b > 0$ parametri. Edvard Lorenc [186] izveo je ovaj trodimenzionalni sistem polazeći od vrlo pojednostavljenog modela konvektivnog strujanja u atmosferi. Iste jednačine pojavljuju se u modelima lasera i dinamici, i kao što ćemo nadalje videti, ove jednačine tačno opisuju kretanje vodeničnog točka.

Lorenc je uočio da bi ovaj deterministički sistem, jednostavan na prvi pogled, mogao da ima izuzetno neobičnu dinamiku: za širok raspon vrednosti parametara, rešenja osciluju neregularno, nikad se ne ponavljaju, ali

uvek ostaju u ograničenoj oblasti faznog prostora. Kada je predstavio traektorije u tri dimenzije, Lorenc je otkrio da se približavaju komplikovanom skupu, koji se sada naziva **strani atraktor**. Za razliku od stabilnih fiksnih tačaka i graničnih ciklusa, strani atraktor nije ni tačka, ni kriva, čak ni površ - u pitanju je fraktal, sa fraktalnom dimenzijom između 2 i 3.

9.2 "Haotični" vodenični točak

Fizički model, opisan Lorencovim jednačinama, predložili su V. Malkus i L. Hauard sa Tehnološkog instituta u Masačusetsu (MIT) tokom 70-ih godina prošlog veka. Najjednostavniju verziju ovog modela predstavlja vodenični točak sa propustljivim papirnim čašama obešenim o njegove ivice (sl. 9.1).



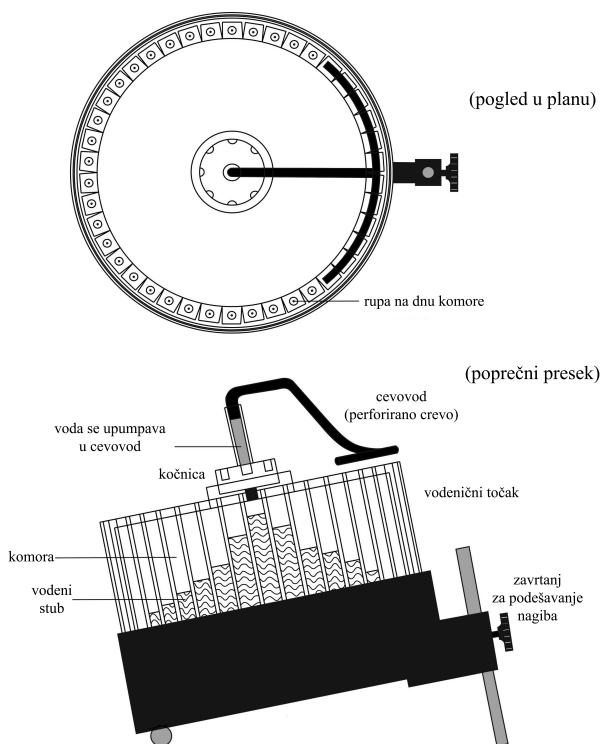
Slika 9.1: Fizički model Lorencovog sistema.

Da bismo opisali kretanje (dinamiku) vodeničnog točka, posmatrajmo šta se dešava kada nalivamo vodu u papirnatu čašu, sa gornje strane točka (sl. 9.1a). Ukoliko polako nalivamo vodu, količina vode u gornjim čašama neće biti dovoljna (jer su čaše sa perforiranim dnom) da pokrene točak (veći deo vode ističe kroz perforirano dno čaše), tako da točak ostaje u stanju mirovanja (stabilne ravnoteže). Kada se voda brže doliva, gornje čaše postaju dovoljno teške da pokrenu vodenični točak (sl. 9.1a). Konačno, točak dolazi u stanje lagane rotacije u jednom ili drugom smeru (sl. 9.1b). Zbog simetrije, rotacija u oba smera je jednako moguća; smer zavisi od početnih uslova.

Povećavajući dalje brzinu dotoka vode, možemo destabilizovati laganu rotaciju. Tada kretanje postaje haotično - točak rotira u jednom smeru nekoliko obrtaja, kada pojedine čaše bivaju prepunjene vodom i točak ne može da ih prebaci preko vrha, tako da postepeno usporava, a može čak i

promeniti smer kretanja (sl. 9.1c). Zatim se određeni period vremena obrće u drugom smeru. Drugim rečima, točak nastavlja da menja smer kretanja bez uočljive pravilnosti.

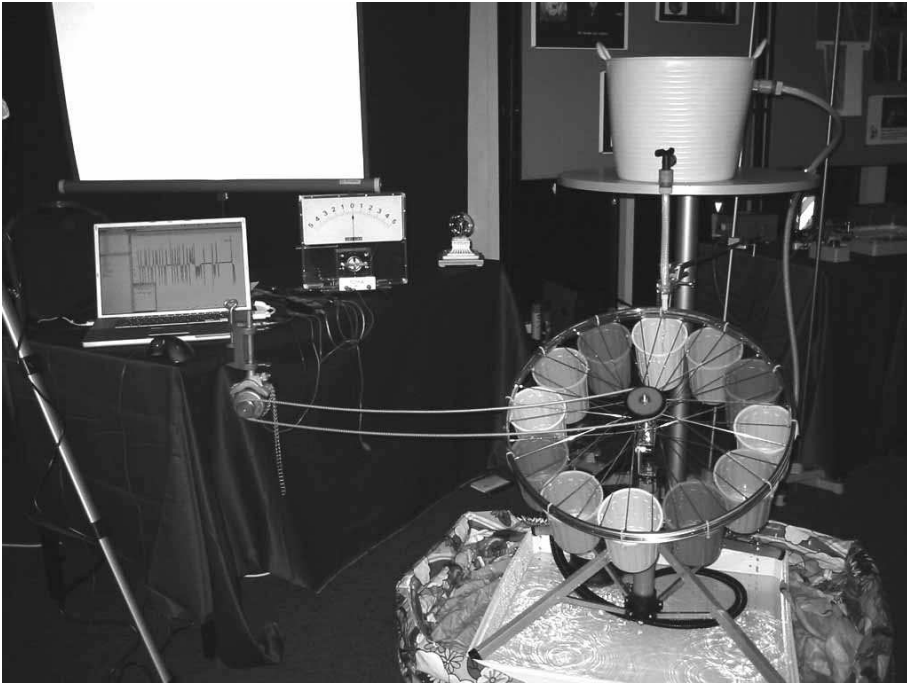
Na slici 9.2 pokazana je sofisticiranija verzija ovog modela.



Slika 9.2: Sofisticiranija verzija Malkusovog modela [316].

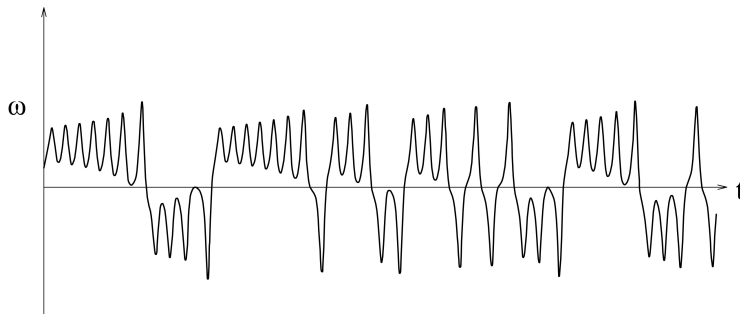
Točak je postavljen na sto i rotira u ravni koja je blago nagnuta u odnosu na horizontalu (za razliku od običnog vodeničnog točka, koji rotira u vertikalnoj ravni). Voda se upumpava u cev iznad točka i onda biva istisnuta kroz veliki broj malih otvora. Otvori usmeravaju vodu u odvojene komore oko ivice točka. Komore su prozirne, dok je voda obojena, tako da je lako pratiti distribuciju vode po ivici točka. Dalje, voda ističe kroz malu rupu na dnu svake komore i biva prikupljena ispod točka, odakle se ponovo upumpava kroz otvore. Na taj način, ovaj sistem obezbeđuje stalni unos vode.

Parametri sistema mogu se menjati na dva načina. Kočnica na točku može biti podešena tako da stvara manje ili veće trenje. Nagib točka se takođe može menjati okretanjem navoja koji podupire točak. Na ovaj način menja se efektivna snaga gravitacije.



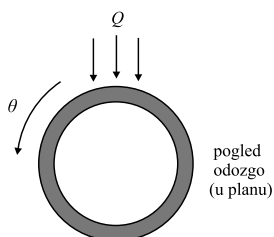
Slika 9.3: Fizički model Malkus-ovog haotičnog vodeničnog točka [256].

Poseban senzor meri ugaonu brzinu točka $\omega(t)$ i šalje podatke u zapisnik, koji potom iscrtava dijagram $\omega(t)$ u realnom vremenu. Slika 9.4 pokazuje zapis $\omega(t)$ kada točak rotira haotično.



Slika 9.4: Vremenska serija ugaone brzine $\omega(t)$ haotičnog kretanja točka.

Koordinate, promenljive i parametri koji opisuju kretanje točka (sl. 9.5) su:



Slika 9.5: Parametri sistema.

r - poluprečnik točka,

K - brzina isticanja,

ν - ugaona brzina,

I - moment inercije točka,

θ - ugao obrtanja točka (oko ose upravne na ravan točka),

$\omega(t)$ - ugaona brzina točka (pozitivna je kada se θ menja u smeru suprotnom smeru kretanja kazaljke na satu),

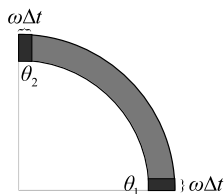
$m(\theta, t)$ - distribucija mase vode po obimu točka, definisana tako da je masa između θ_1 i θ_2 jednaka $M(t) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} m(\theta, t) d\theta$,

$Q(\theta)$ - dotok (brzina kojom se voda upumpava u otvore).

Nepoznati parametri su $m(\theta, t)$ i $\omega(t)$. Naš prvi zadatak je da izvedemo jednačine koje opisuju ovo kretanje. U ovom slučaju to su: jednačina održanja mase (voda utiče i ističe, ali ne napušta sistem), i zakon momenta količine kretanja (rotaciono kretanje).

9.2.1 Zakon održanja mase

Posmatrajmo bilo koji deo točka, između položaja θ_1 i θ_2] (sl. 9.6).



Masa ovog dela točka je $M(t) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} m(\theta, t) d\theta$.

Odredimo, sada, promenu mase ΔM , nakon infinitezimalnog vremenskog intervala Δt .

Slika 9.6: Deo vodeničnog točka između položaja $[\theta_1, \theta_2]$.

Do promene mase dolazi zbog:

1. upumpavanja vode kroz otvore, čija masa iznosi $\left[\int_{\theta_1}^{\theta_2} Q d\theta \right] \Delta t$;
2. isticanja vode, čija masa iznosi $\left[- \int_{\theta_1}^{\theta_2} K m d\theta \right]$. Obratimo pažnju na veličinu m u integralu, koja ukazuje na to da se isticanje odvija brzinom koja je proporcionalna masi vode u komori;
3. unošenja nove količine vode u posmatrani segment, tokom kretanja točka, čija masa iznosi $m(\theta_1)\omega\Delta t$ (sl.9.6);
4. isticanja određene količine vode iz posmatranog segmenta, tokom kretanja točka, čija je masa $-m(\theta_2)\omega\Delta t$.

Prema tome, ukupna promena mase je

$$\Delta M = \Delta t \left[\int_{\theta_1}^{\theta_2} Q d\theta - \int_{\theta_1}^{\theta_2} K m d\theta \right] + m(\theta_1)\omega\Delta t - m(\theta_2)\omega\Delta t. \quad (9.1)$$

Ako ovu jednačinu (9.1) podelimo sa Δt i iskoristimo relaciju

$$m(\theta_1) - m(\theta_2) = - \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\partial m}{\partial \theta} d\theta$$

dobijamo, za $\Delta t \rightarrow 0$

$$\frac{dM}{dt} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(Q - K m - \omega \frac{\partial m}{\partial \theta} \right) d\theta.$$

Međutim, iz definicije veličine M , sledi da je

$$\frac{dM}{dt} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\partial m}{\partial t} d\theta.$$

Stoga,

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\partial m}{\partial t} d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(Q - K m - \omega \frac{\partial m}{\partial \theta} \right) d\theta.$$

Kako ovo važi za svako $\theta_1 < \theta < \theta_2$, to je:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = Q - Km - \omega \frac{\partial m}{\partial \theta}. \quad (9.2)$$

Jednačina (9.2) se često naziva **jednačina kontinuiteta**.

9.2.2 Zakon promene momenta količine kretanja

Neka I označava moment inercije točka. Primitimo da I , u opštem slučaju, zavisi od vremena, jer i distribucija vode zavisi od vremena. Međutim, kada $t \rightarrow \infty$, može se pokazati da $I(t) \rightarrow \text{const}$. Stoga, nakon dovoljno dugo vremena, jednačina kretanja postaje:

$$I\dot{\omega} = \text{moment usporavanja} + \text{moment gravitacije}.$$

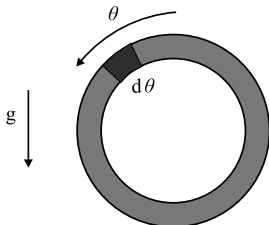
Postoje dva uzroka usporavanja: viskozno usporavanje - usled postojanja viskozno ulja u osovini točka, i "inercijalno" usporavanje kao posledica inercijalnih sila (voda utiče u točak pri nultoj ugaonoj brzini, ali dostiže brzinu ω pre nego što iscuri).

Oba ova efekta su proporcionalna ugaonoj brzini ω , tj.

$$\text{moment usporavanja} = -\nu\omega.$$

gde je $\nu > 0$. Negativni predznak ukazuje na to da se kretanje usporava.

Moment gravitacione sile je nalik onom kod "obrnutog klatna", jer se voda upumpava na vrhu točka (sl. 9.7).



Slika 9.7: Moment gravitacione sile.

Deo točka $d\theta$ ima masu $dM = md\theta$, pa je odgovarajući moment

$$d\tau = (dM)gr \sin \theta = mgr \sin \theta d\theta.$$

Moment gravitacione sile je

$$gr \int_0^{2\pi} m(\theta, t) \sin \theta d\theta,$$

pa je, prema zakonu promene momenata količine kretanja:

$$I\dot{\omega} = -\nu\omega + gr \int_0^{2\pi} m(\theta, t) \sin \theta d\theta. \quad (9.3)$$

9.2.3 Amplitudne jednačine

Jednačine (9.2) i (9.3) potpuno određuju kretanje sistema. Prva od ovih jednačina predstavlja parcijalnu diferencijalnu jednačinu, a druga integro-diferencijalnu. Njihovo rešenje ćemo potražiti primenom Furijeove analize.

Kako je $m(\theta, t)$ periodična funkcija po θ , možemo je prikazati u obliku Furijeovog reda:

$$m(\theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n(t) \sin n\theta + b_n(t) \cos n\theta]. \quad (9.4)$$

Zamenjujući ovu funkciju u (9.2) i (9.3), dolazimo do niza amplitudnih jednačina, običnih diferencijalnih jednačina za amplitude a_n, b_n različitih harmonika (modova). Međutim, potrebno je i dotok vode prikazati u obliku Furijeovog kosinus reda, jer je funkcija koja opisuje dotok vode simetrična (voda se dodaje na vrhu točka: isti dotok vode je i za θ i za $-\theta$), pa je funkcija parna:

$$Q(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n \cos n\theta. \quad (9.5)$$

Zamenjujući izraze za m i Q , u obliku Furijeovog reda, u (9.2) dobijamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \sin n\theta + b_n(t) \cos n\theta \right] &= -\omega \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \sin n\theta + b_n(t) \cos n\theta \right] \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} q_n \cos n\theta - K \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \sin n\theta + b_n(t) \cos n\theta \right]. \end{aligned}$$

Posle diferenciranja, izjednačavanjem koeficijenata, uz iste članove, dobijamo,

$$\dot{a}_n = n\omega b_n - K a_n, \quad (9.6)$$

$$\dot{b}_n = -n\omega a_n - K b_n + q_n. \quad (9.7)$$

Jednačine (9.6) i (9.7) važe za svako $n = 0, 1, 2, \dots$

Zamenivši izraz za masu (9.4) (razvoj u Furijeov red) u jednačinu (9.3), dobijamo, zbog ortogonalnosti funkcija koje se pojavljuju pod integralom,

samo:

$$\begin{aligned}
 I\dot{\omega} &= -\nu\omega + gr \int_0^{2\pi} \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \sin n\theta + b_n(t) \cos n\theta \right] \sin \theta \, d\theta = \\
 &= -\nu\omega + gr \int_0^{2\pi} a_1 \sin^2 \theta \, d\theta = \\
 &= -\nu\omega + \pi gra_1.
 \end{aligned} \tag{9.8}$$

Jednačine (9.6) i (9.7), za $n = 1$, i (9.8), čine sistem:

$$\begin{aligned}
 \dot{a}_1 &= \omega b_1 - K a_1 \\
 \dot{b}_1 &= -\omega a_1 - K b_1 + q_1 \\
 \dot{\omega} &= (-\nu\omega + \pi gra_1)/I.
 \end{aligned} \tag{9.9}$$

Ovde smo uprostiti naš problem, tj. početne parcijalne i integrodiferencijalne jednačine (9.2) i (9.3) sveli smo na sistem običnih diferencijalnih jednačina (9.9), za koji se može pokazati da je ekvivalentan Lorencovim jednačinama (9.9).

9.2.4 Fiksne tačke sistema

Podsetimo se da su fiksne tačke određene jednačinom

$$f^* = f(x^*) = 0,$$

pa su fiksne tačke sistema (9.9):

$$a_1 = \omega b_1 / K \tag{9.10}$$

$$\omega a_1 = q_1 - K b_1 \tag{9.11}$$

$$a_1 = \nu\omega / \pi gr. \tag{9.12}$$

Potražimo rešenje za b_1 eliminacijom a_1 iz (9.10) i (9.11):

$$b_1 = \frac{K q_1}{\omega^2 + k^2} \tag{9.13}$$

Iz (9.10) i (9.12) dobijamo da je $\omega b_1 / K = \nu\omega / \pi gr$. Stoga je $\omega = 0$ ili

$$b_1 = \frac{K \nu}{\pi gr} \tag{9.14}$$

Iz (9.13) i (9.14) sledi da je

$$\omega^2 = \frac{\pi q_1 q_2}{\nu} - K^2 \quad (9.15)$$

Sprovedimo sada kraću analizu dobijenih rezultata:

1. Ako je $\omega = 0$, onda je $a_1 = 0$ i $b_1 = q_1/K$. Ova fiksna tačka

$$(a_1^*, b_1^*, \omega^*) = (0, q_1/K, 0) \quad (9.16)$$

odgovara stanju bez rotacije; točak je u stanju mirovanja, sa dotokom vode koji je uravnotežen njenim isticanjem.

2. Ako je $\omega \neq 0$, onda iz (9.13) i (9.14) sledi (9.15). Ukoliko je desna strana jednačine (9.15) pozitivna, onda postoje dva rešenja, $\pm\omega^*$, koja odgovaraju laganoj rotaciji u oba smera. Ova rešenja postoje akko je:

$$\frac{\pi g r q_1}{K^2 \nu} > 1 \quad (9.17)$$

Izraz na levoj strani nejednačine (9.17) naziva se **Rejlijev broj**. Ovaj broj predstavlja odnos između g i q_1 (gravitacije i dotoka vode, koji teže da zavrtu točak), sa jedne strane, i K i ν (isticanja vode i prigušenja, koji teže da zaustave točak), sa druge strane. Odavde sledi da je lagana rotacija moguća jedino kada Rejlivev broj ima dovoljno veliku vrednost.

9.3 Neka svojstva Lorencovih jednačina

Lorencov model konvektivnih strujanja definisan je sistemom jednačina:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - bz, \end{aligned} \quad (9.18)$$

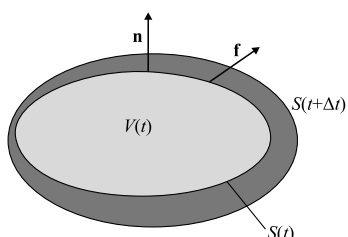
gde su $\sigma, r, b > 0$ parametri. σ je Prantlov broj, r je Rejlijev broj, a b je bezdimenzionalni parametar (u problemima strujanja, ovaj parametar je povezan sa debljinom fluidnog sloja).

Sistem (9.18) sadrži samo dva nelinearna člana xy i xz . Ovaj sistem podseća na jednačine vodeničnog točka (9.9), koje su, takođe, sadržale dva nelinearna člana, ωa_1 i ωb_1 .

Naglasimo da je Lorencov sistem invarijantan u odnosu na promenu znaka, tj. ukoliko zamenimo $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$ u jednačini (9.18), jednačine ostaju iste. Stoga, ako je $(x(t), y(t), z(t))$ rešenje, onda je i $(-x(t), -y(t), z(t))$.

Takođe, Lorencov sistem je **disipativan**, tj. zapremine u faznom prostoru se, tokom vremena, pod "dejstvom toka", smanjuju.

Drugim rečima, ako posmatramo proizvoljno veliku oblast faznog prostora, u kojoj su neprekidno raspoređeni početni uslovi, ona će se na kraju skupiti do graničnog skupa nulte zapremine, nalik izduvanom balonu. Sve trajektorije koje kreću iz te oblasti završavaju se negde u ovom graničnom skupu. Kasnije ćemo videti da se taj skup sastoji od fiksnih tačaka, graničnih krugova, ili, za neke vrednosti parametara, uključuje i strani atraktor.

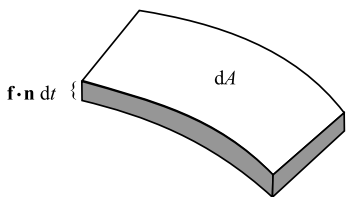


Slika 9.8: Proizvoljne zatvorene površi $S(t)$ i $S(t + dt)$.

Posmatrajmo sada proizvoljni trodimenzionalni sistem $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Neka je $S(t)$ proizvoljna, zatvorena površ zapremine $V(t)$ u faznom prostoru (sl. 9.8).

Zamislamo tačke na površi S kao početne uslove za trajektorije, i posmatrajmo njihov tok za infinitezimalni period vremena dt .

Za to vreme površ S se menja i prelazi u novu površ $S(t + dt)$. Odredimo njenu zapreminu $V(t + dt)$.



Slika 9.9: Zapremina faznog prostora "obuhvaćena" sa dA .

Neka je \mathbf{n} spoljašnja normala površi S , \mathbf{f} trenutna brzina tačaka, a $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}$ njena normalna komponenta. Stoga, tokom beskonačno malog intervala vremena Δt , deo površi dA , krećući se, "obuhvata" zapreminu $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dt dA$, kao što je prikazano na slici 9.9.

Prema tome, zapremina površi $S(t + \Delta t)$ je

$$V(t + \Delta t) = V(t) + \int_S (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \Delta t) dA.$$

Stoga,

$$\dot{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V(t + \Delta t) - V(t)}{\Delta t} = \int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dA.$$

Konačno, primenom teoreme o divergenciji, dobijamo

$$\dot{V} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{f} dV, \quad (9.19)$$

gde je $\nabla \cdot \mathbf{f} = \text{div} \mathbf{f}$.

Za Lorencov sistem (9.18), dobijamo:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{f} &= \frac{\partial}{\partial x} [\sigma(y-x)] + \frac{\partial}{\partial y} [rx-y-xz] + \frac{\partial}{\partial z} [xy-bz] = \\ &= -\sigma - 1 - b < 0. \end{aligned}$$

Kako je divergencija konstantna, (9.19) se svodi na $\dot{V} = -(\sigma+1+b)V$. Njeno rešenje je $V(t) = V(0)e^{-(\sigma+1+b)t}$. Odavde zaključujemo da se zapremine u faznom prostoru skupljaju eksponencijalno brzo.

Pokažimo, sada, da ne postoje kvaziperiodična rešenja Lorencovih jednačina. Ako bi postojalo kvaziperiodično rešenje, ono bi moralo da leži na površi torusa i ovaj torus bi morao biti invarijantan u odnosu na tok. Stoga, zapremina unutar torusa morala bi biti konstantna u vremenu. Međutim, ovo je u suprotnosti sa činjenicom da se sve zapremine skupljaju eksponencijalno brzo.

Naglasimo, takođe, da Lorencov sistem nema odbojne fiksne tačke niti odbojne zatvorene orbite. Ovo se može objasniti time da odbojne fiksne tačke ili zatvorene orbite predstavljaju "izvore" povećanja zapremine. Pretpostavimo da okružimo odbojnu fiksnu tačku nekom zatvorenom površi početnih uslova u faznom prostoru. Preciznije, uzimamo malu sferu oko fiksne tačke, ili uzanu cev oko zatvorene orbite. Nakon kraćeg vremena, površ se proširila, jer se odgovarajuće trajektorije udaljavaju. Stoga, zapremina unutar te površi bi se povećala, što je u suprotnosti sa pretpostavkom o smanjenju zapremine.

Na taj način, zaključujemo da sve fiksne tačke moraju biti ili privlačne ili sedla, dok zatvorene orbite (ukoliko postoje) moraju biti stabilne ili nalik sedlu.

9.3.1 Fiksne tačke Lorencovog sistema

Kao u slučaju vodeničnog točka, Lorencov sistem sadrži dva tipa fiksnih tačaka. Koordinatni početak $(x^*, y^*, z^*) = (0, 0, 0)$ predstavlja fiksnu tačku za sve vrednosti parametara, kao u stanju mirovanja vodeničnog točka. Za $r > 1$, takođe postoji simetričan par fiksnih tačaka $x^* = y^* = \pm\sqrt{b(r-1)}$, $z^* = r-1$. Lorenc ih je nazvao C^+ i C^- . One predstavljaju

levo i desno konvektivno strujanje (analogno laganoj rotaciji vodeničnog točka). Kako $r \rightarrow 1^+$, C^+ i C^- se spajaju sa koordinatnim početkom u vilastoj bifurkaciji.

9.3.2 Linearna stabilnost koordinatnog početka

Linearizacijom, u koordinatnom početku, dobijamo $\dot{x} = \sigma(y - x)$, $\dot{y} = rx - y$, $\dot{z} = -bz$ (zanemarivanjem nelinearnih članova xy i xz u Lorencovom sistemu). Jednačina za z nije spregnuta sa ostalim jednačinama i iz nje sledi da $z(t) \rightarrow 0$ eksponencijalno brzo. Preostale dve promenljive određene su sistemom diferencijalnih jednačina, koji se u matricnom obliku mogu prikazati:

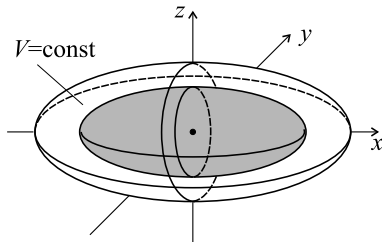
$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma \\ r & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

čiji je trag $\tau = -\sigma - 1 < 0$, a determinanta $\Delta = \sigma(1 - r)$. Ako je $r > 1$, koordinatni početak je sedlo, zato što je $\Delta < 0$. Primitimo da je ovo novi tip sedla, pošto je sistem trodimenzionalan. Uključujući i opadajući z -pravac, sedlo ima jedan odbijajući i dva privlačna smera. Ako je $r < 1$, svi pravci su privlačni i koordinatni početak je privlačna fiksna tačka. Preciznije, kako je $\tau^2 - 4\Delta = (\sigma + 1)^2 - 4\sigma(1 - r) = (\sigma - 1)^2 + 4\sigma r > 0$, koordinatni početak je stabilna fiksna tačka za $r < 1$.

Zapravo, za $r < 1$, možemo pokazati da se svaka trajektorija približava koordinatnom početku kada $t \rightarrow \infty$. Prema tome, koordinatni početak je **globalno stabilan**. Stoga, ne mogu postojati granični ciklusi ili deterministički kaos, za $r < 1$.

Dokaz ove globalne stabilnosti, zahteva konstrukciju **Ljapunovljeve funkcije**, (glatka, pozitivno definitna funkcija koja opada duž trajektorija). Kao što je već rečeno, Ljapunovljeva funkcija predstavlja uopštenje energijske funkcije za klasični mehanički sistem - u prisustvu trenja ili druge vrste disipacije, energija opada monotono. Ne postoji sistematski pristup kako konstruisati Ljapunovljevu funkciju, ali je često zgodno pokušati da se ona izrazi pomoću sume kvadrata.

U ovom slučaju, posmatrajmo funkciju $V(x, y, z) = \frac{1}{\sigma}x^2 + y^2 + z^2$. Površi konstantne zapremine predstavljaju koncentrične elipsoide oko koordinatnog početka (sl. 9.10).



Slika 9.10: Ljapunovljeva funkcija.

Ideja je da pokažemo da ako je $r < 1$ i $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, onda $\dot{V} < 0$ duž trajektorija. Ovo bi ukazivalo na to da se trajektorija kreće prema manjoj zapremini V i prema tome prolazi kroz manje i manje elipsoide kada $t \rightarrow \infty$. Međutim, V je ograničeno nulom sa donje strane, tako da $V(\mathbf{x}(t)) \rightarrow 0$ i stoga $\mathbf{x}(t) \rightarrow 0$, što je i traženo.

Dalje dobijamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\dot{V} &= \frac{1}{\sigma}x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = \\ &= (yx - x^2) + (rzx - y^2 - xyz) + (zxy - bz^2) = \\ &= (r+1)xy - x^2 - y^2 - bz^2. \end{aligned}$$

Formirajući razliku kvadrata, dobijamo:

$$\frac{1}{2}\dot{V} = - \left[x - \frac{r+1}{2}y \right]^2 - \left[1 - \left(\frac{r+1}{2} \right)^2 \right] y^2 - bz^2.$$

Sada tvrdimo da je desna strana jednačine strogo negativna za $r < 1$ i $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$. Ono što sigurno znamo je da nije pozitivna, jer je u pitanju negativna suma kvadrata. Takođe, ne može biti ni $\dot{V} = 0$, jer bi to zahtevalo da je $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, što je suprotno pretpostavci. Dakle, tvrđenje je dokazano, i koordinatni početak je globalno stabilan za $r < 1$.

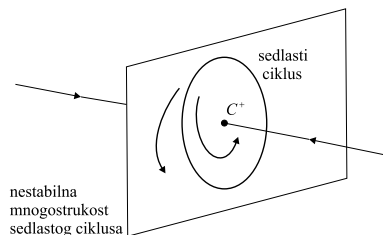
9.3.3 Stabilnost fiksnih tačaka sistema C^+ i C^-

Pretpostavimo da je $r > 1$, tako da C^+ i C^- postoje. Analizom stabilnosti dobija se da su C^+ i C^- linearно stabilne fiksne tačke kada je:

$$1 < r < r_H = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}$$

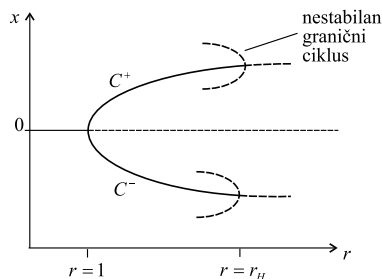
pretpostavljajući takođe da je $\sigma - b - 1 > 0$ (sl. 9.11). Stavljajući indeks H uz r , želeli smo da istaknemo da C^+ i C^- gube stabilnost kroz Hopfovnu bifurkaciju, za $r = r_H$.

Šta se dešava odmah nakon bifurkacije, za r neznatno veće od r_H ? Moglo bi se pretpostaviti da je Hopfova bifurkacija natkritična, odnosno da su C^+ i C^- okruženi malim stabilnim graničnim ciklusom. Međutim, Hopfova bifurkacija je potkritična - granični ciklusi su nestabilni i postoje samo za $r < r_H$.



Slika 9.11: Fazni portret sistema u maloj okolini fiksne tačke C^+ , za $r < r_H$,

Za $r < r_H$ fiksna tačka je stabilna. Okružena je **sedlastim ciklusom**, novim tipom nestabilnog graničnog ciklusa, koji se javlja jedino u faznom prostoru sa tri ili više dimenzija. Ciklus ima dvodimenzionalnu nestabilnu mnogostrukost (presek na sl. 9.11) i dvodimenzionalnu stabilnu mnogostrukost (nije prikazana na sl.). Kada $r \rightarrow r_H$ sa donje strane, ciklus se "skuplja" oko fiksne tačke. U Hopfovoj bifurkaciji, za $r = r_H$, granični ciklus u potpunosti obuhvata fiksnu tačku, sjedinjuje se s njom, usled čega fiksna tačka gubi stabilnost i prelazi u tačku sedlo. Za $r > r_H$, nema atraktora u maloj okolini fiksne tačke. Dakle, za $r > r_H$, trajektorije se moraju kretati ka udaljenom atraktoru. Međutim, za sada ne znamo kako bi taj atraktor mogao da izgleda. Delimični bifurkacioni dijagram za sistem, zasnovan na dosadašnjim rezultatima, ne pokazuje nikakve tragove bilo kakvih stabilnih struktura, za $r > r_H$ (sl. 9.12). Lorenc je pokazao da je za bilo koje $r > r_H$ svaki granični ciklus nestabilan.

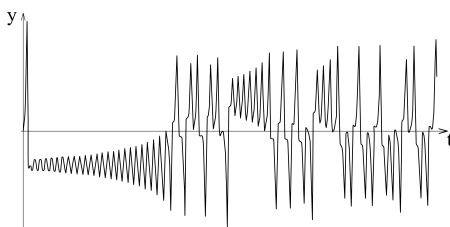


Slika 9.12: Bifurkacioni dijagram sistema.

9.4 Haos na stranom atraktoru

Koristeći numeričku integraciju, Lorenc je analizirao dugoročno ponašanje trajektorija, za $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$, $r = 28$. Ovo je vrednost r odmah nakon Hopfove bifurkacije $r_H = \sigma(\sigma + b + 3)/(\sigma - b - 1) = 24.74$. Naravno, do neočekivanih rešenja moglo je doći i zato što su, elektromehanički kompjuteri u to doba, bili nepouzdati i teški za korišćenje, pa je Lorenc morao da bude veoma oprezan pri interpretaciji dobijenih numeričkih rezultata.

Lorenc je izveo numeričku integraciju za početne uslove $(0, 1, 0)$, blizu tačke sedla, koja se nalazi u koordinatnom početku. Rezultat njegove analize prikazan je na slici 9.13.



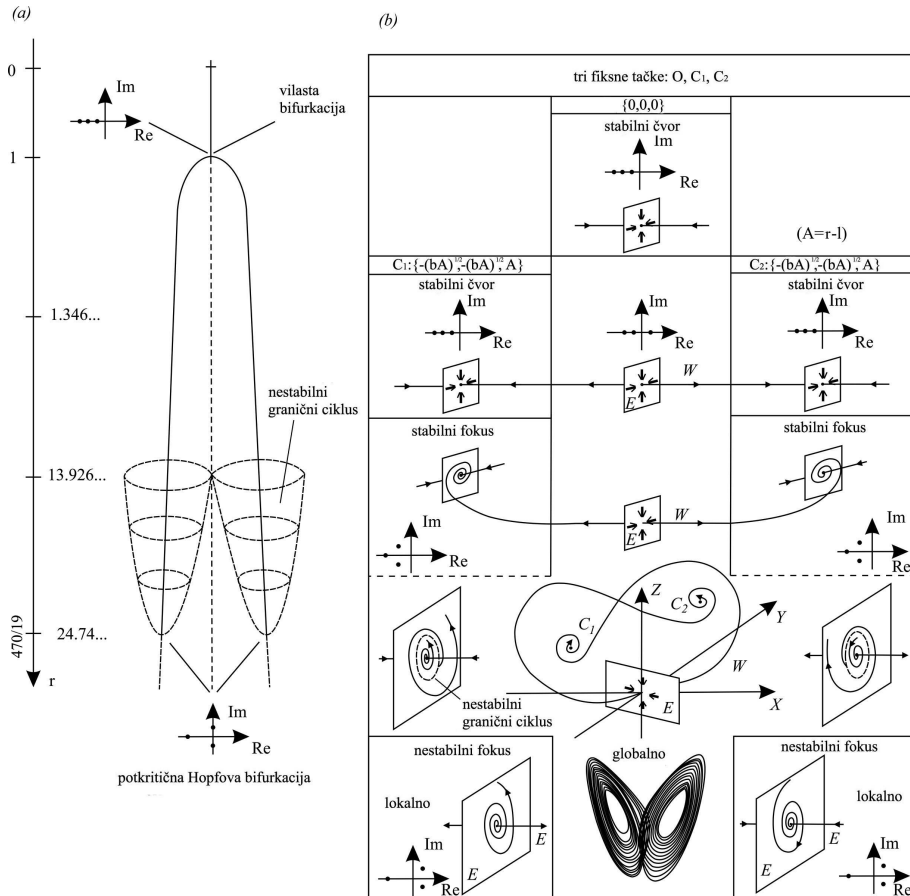
Slika 9.13: Rezultujuća vremenska serija $y(t)$, Lorencovog sistema.

Nakon početnog tranzijentnog dela, rešenje se ustaljuje u obliku neregularnih oscilacija koje ne prestaju ni za $t \rightarrow \infty$ i nikad se ne ponavljaju na isti način. Tada kažemo da je takvo kretanje aperioidično.

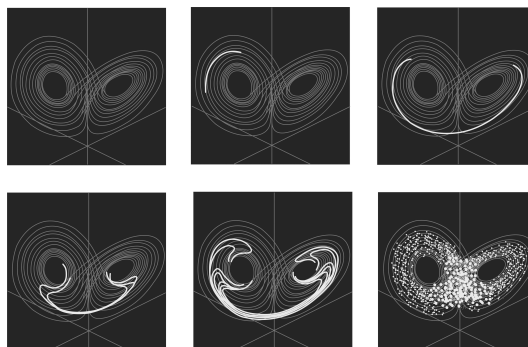
Kada se trajektorija rešenja predstavi u faznom prostoru $x(t) - z(t)$, dobija se dijagram u obliku leptirovih krila. Odavde vodi poreklo naučno popularni termin "efekat leptira"¹, kojim se opisuje velika osetljivost na male promene početnih uslova.

Na prvi pogled se čini da trajektorija periodično preseca samu sebe, ali je to samo posledica projekcije trodimenzionalne trajektorije na dvodimenzionalnu ravan. U tri dimenzije presecanja nema! Trajektorija počinje blizu koordinatnog početka, onda osciluje udesno i zatim "potone" u centar spirale na levoj strani. Nakon veoma laganog spiralnog kretanja, trajektorija se brzo vraća na desnu stranu, rotira nekoliko puta, zatim se brzo prebacuje na levu stranu, potom opet rotira (praveći spiralu), i tako beskonačno dugo. Broj rotacija načinjenih na obe strane predstavlja potpuno neregularan niz brojeva. Fizički posmatrano, promene kretanja sa desne na levu stranu i obrnuto odgovaraju, prethodno pomenutim, neregularnim obrtajima vodeničnog točka.

¹butterfly effect (eng.)



Slika 9.14: Leptirova krila i bifurkacije u Lorencovom sistemu.



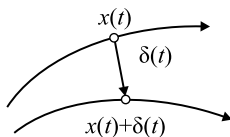
Slika 9.15: Trajektorija na stranom atraktoru Lorencovog sistema.

Kada se trajektorija posmatra u tri dimenzije, čini se da se ustaljuje na skupu čiji oblik podseća na par leptirovih krila (sl. 9.15).

Naglasimo da kretanje (tok), na stranom atraktoru, pokazuje osetljivu zavisnost na početne uslove. Drugim rečima, dve trajektorije, koje počinju veoma blizu jedna drugoj, divergiraju međusobno. Stoga, dve susedne reprezentativne tačke mogu završiti bilo gde na atraktoru! Prema tome, dugoročno predviđanje postaje nemoguće u ovakvim sistemima, gde se mala odstupanja u početnim uslovima, nastala zbog neodređenosti (prilikom merenja, na primer), vrlo brzo uvećavaju.

9.4.1 Ljapunovljev eksponent

Da bismo pokazali kako trajektorije eksponencijalno divergiraju, pretpostavimo da je trajektorija već na atraktoru (zanemarili smo tranzijentno ponašanje). Neka je $\mathbf{x}(t)$ tačka na atraktoru u vremenu t , i neka je $\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{\delta}(t)$ susedna tačka, gde je $\boldsymbol{\delta}$ mali vektor rastojanja između ove dve tačke početnog intenziteta $\delta_0 = 10^{-15}$ (sl. 9.16).



Slika 9.16: Divergencija susednih trajektorija.

Posmatrajmo, sada, kako se rastojanje $\delta(t)$ menja. Iz numeričke analize Lorencovog atraktora, sledi

$$\|\delta(t)\| \sim \|\delta_0\| e^{\lambda t}$$

gde je $\lambda \approx 0.9$. Prema tome, susedne trajektorije se međusobno razilaze eksponencijalno brzo. Broj λ se često naziva **Ljapunovljev eksponent**.

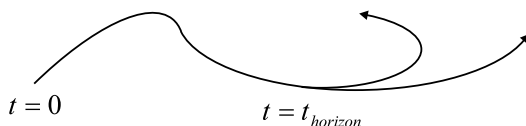
Naglasimo, međutim, da postoji zapravo n različitih Ljapunovljevih eksponenata za n -dimenzionalni sistem. Naime, ukoliko razmotrimo kretanje infinitezimalno male sfere perturbovanih početnih uslova, ova će se sfera, nakon vremena t , deformisati u infinitezimalni elipsoid. Označimo sa $\delta_k(t)$, $k = 1, \dots, n$ dužinu k -te glavne ose elipsoida. Tada je $\delta_k(t) \sim \delta_k(0)e^{\lambda_k t}$, gde su λ_k Ljapunovljevi eksponenti. Za veliko t , prečnik elipsoida je određen najvećom pozitivnom vrednošću λ_k . Prema tome, u ovom slučaju, λ je, u stvari, najveći (maksimalni) Ljapunovljev eksponent.

Takođe, naglasimo da λ zavisi i od trajektorije koju posmatramo.

Kada sistem ima pozitivni Ljapunovljev eksponent, nakon određenog vremenskog intervala predviđanje postaje nemoguće, kao što je shematski prikazano na slici 9.17. Pretpostavimo da vrlo precizno merimo početne uslove eksperimentalnog sistema. Ovaj vremenski interval dat je izrazom

$$t_{horizon} \sim O\left(\frac{1}{\lambda} \ln \frac{a}{\|\delta_0\|}\right),$$

gde je a prihvatljiva mera odstupanja od tačnog rešenja. Dakle, $t_{horizon}$ je vreme nakon koga $\delta(t)$ postaje veće od a .



Slika 9.17: Eksponencijalna divergencija susednih trajektorija.

Naglasimo da, ma koliko se trudili da smanjimo početnu grešku merenja, ne možemo predvideti ponašanje sistema duže od nekoliko umnožaka od $1/\lambda$. Da bismo ovo ilustrovali, pretpostavimo da pokušavamo da predvidimo buduće stanje haotičnog sistema u granicama tolerancije $a = 10^{-3}$. Pod uslovom da je naša procena početnog stanja neizvesna do granice $\delta_0 = 10^{-7}$, koliko dugo možemo predvideti stanje sistema unutar date granice tolerancije?

Prvobitno predviđanje daje:

$$t_{horizon} \approx \frac{1}{\lambda} \ln \frac{10^{-3}}{10^{-7}} = \frac{1}{\lambda} \ln(10^4) = \frac{4 \ln 10}{\lambda}, \quad (9.20)$$

a poboljšano:

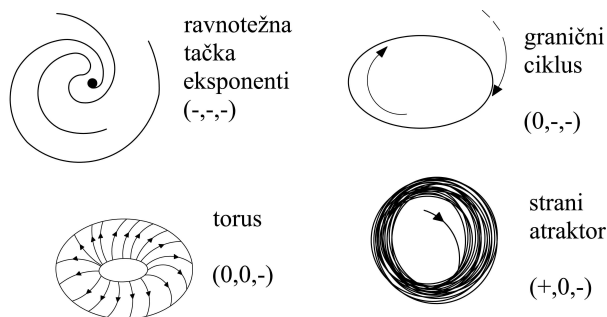
$$t_{horizon} \approx \frac{1}{\lambda} \ln \frac{10^{-3}}{10^{-13}} = \frac{1}{\lambda} \ln(10^{10}) = \frac{10 \ln 10}{\lambda}. \quad (9.21)$$

Prema tome, nakon poboljšanja početne greške u merenju, za 10^6 , dužina predviđanja povećava se samo $10/4 = 2,5$ puta!

Ovaj primer pokazuje uzaludnost naših pokušaja da predvidimo dugoročno ponašanje haotičnog sistema.

Ljapunovljevi eksponenti pogodni su za klasifikaciju stacionarnih ponašanja i atraktora. Najpre, za bilo koji atraktor ukupna kontrakcija mora biti veća od ukupne ekspanzije, $\sum \lambda_i < 0$. Za granični ciklus je $\lambda_1 = 0$, dok su ostali $\lambda_i < 0$; za torus $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ i ostali $\lambda_i < 0$. U slučajevima

stranih atraktora mora najmanje jedan eksponent biti veći od nule. U trodimenzionalnom faznom prostoru, vodeći računa o tome da mora biti $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 < 0$, jedina mogućnost za pojavu stranog atraktora je kombinacija ekponenata $(+, 0, -)$, odnosno $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 < 0$ (sl. 9.18). U četvorodimenzionalnim prostorima moguće su kombinacije $(+, 0, -, -)$, $(+, 0, 0, -)$ i $(+, +, 0, -)$. Slučaj sa dva pozitivna Ljapunovljeva eksponenta, $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, $\lambda_3 = 0$, i $\lambda_4 < 0$ naziva se **hiperhaos**.



Slika 9.18: Veza između dimenzija i Ljapunovljevih eksponenta kod atraktora u trodimenzionalnom faznom prostoru.

9.4.2 Kolmogorovljeva (K) entropija

Kolmogorovljeva entropija (K -entropija) je mera neuređenosti, odnosno haotičnosti nekog sistema, pri čemu je neuređenost usko povezana sa količinom informacija koju posedujemo o sistemu [108]. K -entropija se definiše kao granična vrednost:

$$K = \lim_{\ell \rightarrow 0} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{T} I(\ell, T),$$

gde je $I(\ell, T)$ količina informacije dobijena praćenjem trajektorije u intervalu T sa preciznošću ℓ . Dakle, K -entropija meri količinu informacije potrebnu za precizno određivanje trajektorije u faznom prostoru. Takođe, može se shvatiti i kao brzina gubljenja početne informacije o položaju sistema u faznom prostoru.

K -entropija razgraničava haotično kretanje od regularnog ili slučajnog: za regularna kretanja $K = 0$, a za slučajna kretanja $K \approx \ln N \rightarrow \infty$. Haotična kretanja su u odnosu na vrednost K negde između regularnih i slučajnih. Napomenimo da je kod jednodimenzionalnih haotičnih sistema, K -entropija jednaka Ljapunovljevom eksponentu. U više dimenzija, ukoliko je više od jednog Ljapunovljevog eksponenta pozitivno, tada je K jednako zbiru pozitivnih eksponenta, $K = \sum \lambda_i^+$.

9.4.3 Definisiranje haosa

Nijedna definicija pojma "haos" nije još uvek univerzalno prihvaćena, ali bi se većina istraživača složila sa sledećom definicijom, koja obuhvata tri osnovna svojstva haosa:

Haos predstavlja aperiodično dugoročno ponašanje u determinističkom sistemu koje pokazuje veliku osetljivost na promenu početnih uslova.

1. "Aperiodično dugoročno ponašanje" znači da postoje trajektorije koje se ne ustaljuju prema fiksnim tačkama, periodičnim orbitama, ili kvazi-periodičnim orbitama, kada $t \rightarrow \infty$. Iz praktičnih razloga, trebalo bi da zahtevamo da takve trajektorije nisu toliko retke. Na primer, mogli bismo da insistiramo da postoji otvoreni skup početnih uslova koji vodi ka aperiodičnim trajektorijama, ili možda da se takve trajektorije javljaju sa određenom verovatnoćom, uzimajući slučajno izabran početni uslov.
2. "Determinističko" znači da sistem nema slučajne ulazne parametre i da ne uključuje šum².
3. "Osetljivost na malu promenu početnih uslova" podrazumeva da se susedne trajektorije razdvajaju eksponencijalno brzo, to jest, sistem ima pozitivni Ljapunovljev eksponent.

Naglasimo da haos nije samo elegantan naziv za nestabilnost. Kao primer nestabilnog sistema, koji nije haotičan, navedimo sistem $\dot{x} = x$, koji je deterministički i pokazuje eksponencijalno razdvajanje susednih trajektorija. Ovaj sistem nije haotičan, iako se trajektorije odbijaju u beskonačnost (nikada se ne vraćaju). Međutim, haotično ponašanje bi trebalo da bude aperiodično, što isključuje mogućnost pojave haosa u datom primeru.

9.4.4 Definisiranje atraktora i stranog atraktora

Uopšteno govoreći, **atraktor** predstavlja skup ka kome sve susedne trajektorije konvergiraju. Prema tome, stabilne fiksne tačke i stabilni granični ciklusi su primeri atraktora. Preciznije, atraktor definišemo kao zatvoreni skup A sa sledećim svojstvima:

- 1° A je invarijantni skup: bilo koja trajektorija $\mathbf{x}(t)$ koja počinje u A ostaje u A sve vreme.

²noise (eng.)

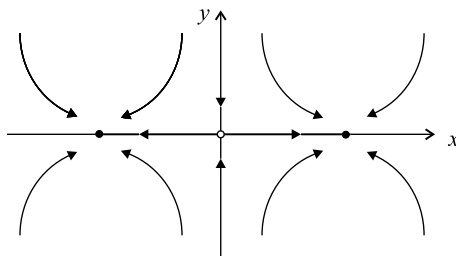
- 2° A je privlačni otvoreni skup početnih uslova: postoji otvoreni skup U koji sadrži A tako da ako $\mathbf{x}(0) \in U$, onda rastojanje od $\mathbf{x}(t)$ do A teži nuli kada $t \rightarrow \infty$. To znači da A privlači sve trajektorije koje počinju dovoljno blizu skupu A . Najveći takav skup U naziva se baza privlačenja skupa A .
- 3° A je minimalno: ne postoji podskup od A koji zadovoljava uslove 1° i 2°.

Posmatrajmo, sada, sistem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - x^3, \\ \dot{y} &= -y\end{aligned}\tag{9.22}$$

i proverimo da li ima atraktor.

Neka I označava interval $-1 \leq x \leq 1, y = 0$. Fazni portret je prikazan na slici 9.19. Stabilne fiksne tačke javljaju se na krajevima intervala $(\pm 1, 0)$ dok je sedlo u koordinatnom početku.



Slika 9.19 pokazuje da je I invarijantan skup - bilo koja trajektorija koja počinje u I ostaje u I zauvek. U stvari, x -osa je invarijantan skup, jer ako je $y(0) = 0$, onda je $y(t) = 0$ za svako t . Prema tome, uslov 1° je zadovoljen.

Slika 9.19: Fazni portret sistema (9.22).

Štaviše, I sigurno privlači otvoreni skup početnih uslova - skup I privlači sve trajektorije u xy ravni, pa je i uslov 2° takođe zadovoljen. Međutim, I nije atraktor zato što nije minimalan. Stabilne fiksne tačke $(\pm 1, 0)$ su podskupovi od I koji takođe zadovoljavaju svojstva 1° i 2°. Ove tačke su jedini atraktori sistema.

Prema tome, možemo zaključiti da i kada izvesni skup privlači sve trajektorije, može se desiti da ne bude atraktor zato što nije minimalan - može sadržati jedan ili više manjih atraktora.

Isto tvrđenje bi moglo biti tačno i za Lorencove jednačine. Iako su sve trajektorije privučene ka ograničenom skupu nulte zapremine, taj skup nije nužno i atraktor, pošto se može desiti da nije minimalan. Naglasimo da još uvek nije dokazano da je Lorencov atraktor, dobijen kompjuterskim eksperimentima, zaista atraktor u smislu prethodno pomenutih uslova.

Konačno, definišimo i **strani atraktor** kao atraktor koji pokazuje osetljivu zavisnost na početne uslove. Strani atraktori nazivaju se i **čudnim atraktorima** zato što vrlo često predstavljaju fraktalne skupove.

Naglasimo da je ovo geometrijsko svojstvo manje važno u odnosu na dinamičko svojstvo osetljive zavisnosti na početne uslove.

Drugi zanimljiv primer stranih atraktora, osim Lorencovog sistema, predstavljaju dinamički modeli sa vremenskim kašnjenjem, oblika:

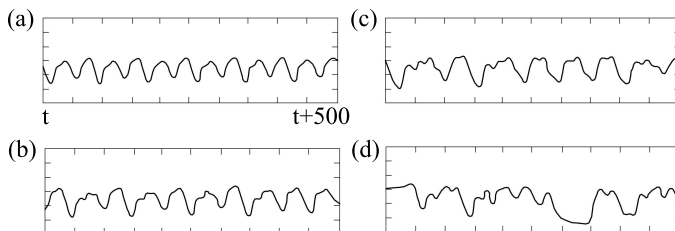
$$x(t) = F\mu(x(t), x(t - \tau))$$

gde je τ vreme kašnjenja. Ovakvi modeli su beskonačno dimenzionalni, jer je za određivanje $x(t)$ potrebno znati vrednosti promenljive x u intervalu $(t - \tau, t)$. Sistem je beskonačno dimenzionalan onda kada zadavanje početnih uslova zahteva beskonačan skup brojeva. Kod modela sa kašnjenjem je isto tako evidentno postojanje povratne sprege: na signal u vremenu t ima uticaja signal iz ranijeg trenutka $t - \tau$. Kako su, po pravilu, ovi modeli i nelinearni, pojava haosa u takvim sistemima ne treba predstavljati iznenađenje.

Konkretan primer sistema sa vremenskim kašnjenjem je **Maki-Glasov model** [190] stvaranja krvi u ljudskom organizmu:

$$x = \frac{Ax_\tau}{1 + x_\tau^c} - Bx, \quad (9.23)$$

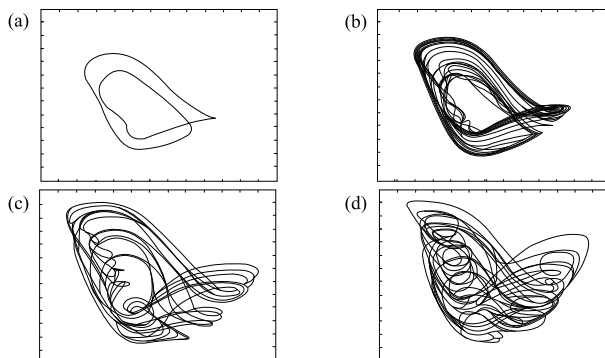
gde je x_τ promenljiva sa kašnjenjem, u ovom slučaju koncentracija krvi u nekom ranijem trenutku $t - \tau$, a A i B empirijski parametri. Kada se iz bilo kog razloga u organizmu pojavi potreba za povećanom proizvodnjom krvi, onda od trenutka kada se potreba pojavi do trenutka kada povećanje proizvodnje usledi, po pravilu, prođe određeni interval vremena.



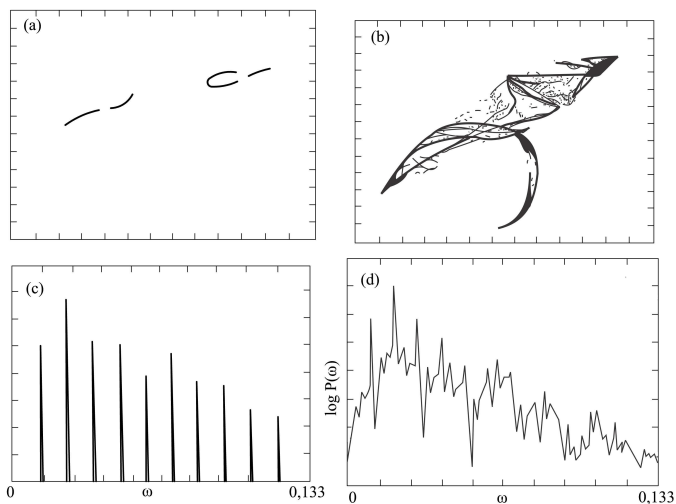
Slika 9.20: Vremenski signal Maki-Glasove jednačine za različita vremena kašnjenja. (a) $\tau = 14$; (b) $\tau = 17$, (c) $\tau = 23$, (d) $\tau = 27$. U svim slučajevima parametri modela su $A = 0, 2$, $B = 0, 1$ i $C = 10$.

Kod nekih bolesti to vreme kašnjenja može biti veoma izraženo i opasno, jer izaziva čudne pojave u nivou snabdevenosti krvlju: oscilacije u snabde-

vanju, pa i haos. Primer vremenskih signala Maki-Glas modela dat je na slici 9.20, a fazni portreti prikazani su na slici 9.21.



Slika 9.21: Fazni portret Maki-Glasovog modela za iste vrednosti kašnjenja kao na prethodnoj slici.



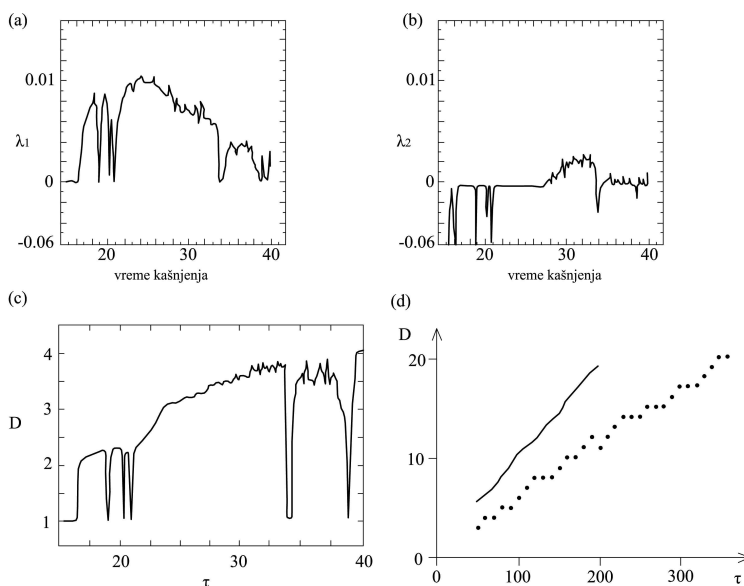
Slika 9.22: Strani atraktori Maki-Glas modela (a) za $\tau = 17$, i (b) $\tau = 23$. Spektri snage (c) za $\tau = 14$, i (d) $\tau = 17$.

Slika 9.22 prikazuje Poenckareov presek kroz atraktor pre i posle prelaska u haos, kao i odgovarajuće spektre snage. Na svim slikama parametri su fiksirani, $A = 0,2$ i $B = 0,1$, a menja se vreme kašnjenja. Sve veličine su bezdimenzionalne.

Numerička ispitivanja pokazuju sledeće faze u ponašanju sistema (9.23). Za $\tau < 4,53$ u sistemu postoji samo jedna fiksna tačka. U $\tau = 4,53$ dešava

se prva Hopfova bifurkacija, a u $\tau = 13,3$ dolazi do prvog udvajanja periode graničnog ciklusa. Udvojeni ciklus za $\tau = 14$ prikazan je na slici 9.21a. Zatim dolazi do kaskade udvajanja periode i u $\tau = 16,8$ sistem prelazi u kaos. U spektru snage prikazanom na slici 9.22 uočava se izdizanje širokog kontinuuma.

Na slici 9.23 prikazani su Ljapunovljev spektri za različite vrednosti vremenskog kašnjenja. Iako je početni prelaz u kaos moguće objasniti jednostavnim "scenarijima" u par dimenzija, vidi se da kako τ raste, sve veći broj stepeni slobode biva pobuđen i sistem postepeno prelazi u kaos u višedimenzionom prostoru, odnosno poprima karakteristike razvijene turbulencije.



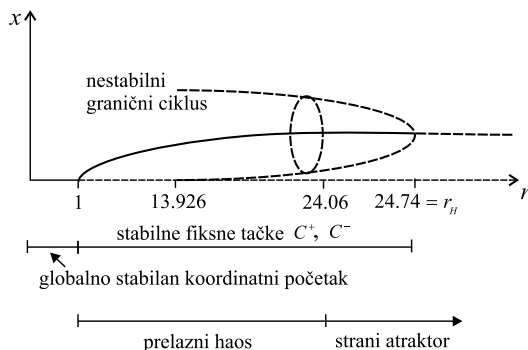
Slika 9.23: Ljapunovljev spektral Maki-Glas modela u funkciji vremena kašnjenja (a) λ_1 , i (b) λ_2 .

9.5 Istraživanje parametarskog prostora

Do sada smo analizu Lorencovog sistema vršili samo za tačno određene vrednosti parametara $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$, $r = 28$. Šta se dešava ukoliko promenimo parametre?

Da bi pojednostavili analizu, mnogi istraživači su smatrali vrednosti parametara $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$, konstantnim, dok su analizirali promenu dinamike sistema za različite vrednosti parametra r .

Ponašanje sistema, za male vrednosti r , prikazano je na slici 9.24.



Slika 9.24: Ponašanje Lorencovog sistema za: $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$, $r < 28$.

Sa slike se uočava da je koordinatni početak globalno stabilan za $r < 1$. Za $r = 1$ koordinatni početak gubi stabilnost u natkritičnoj vilastoj bifurkaciji, i pojavljuje se simetričan par privlačnih fiksnih tačaka (na sl. 9.24, prikazan je samo jedan par fiksnih tačaka). Za $r \approx 13,926$, dolazi do pojave globalne homokliničke bifurkacije (zbog spajanja ciklusa i tačke sedla). Takođe, za $r = 13,296$ dolazi do pojave para nestabilnih graničnih ciklusa. Za $r_H = 24,74$ fiksne tačke gube stabilnost "apsorbujući" nestabilan granični ciklus u potkritičnoj Hopf bifurkaciji.

Ova homoklinična bifurkacija je vrlo raznovrsna sa stanovišta dinamike, ali je nećemo analizirati.

Bitno je istaći da se vrlo komplikovan invarijantni skup javlja za $r = 13,926$, zajedno sa nestabilnim graničnim ciklusima. U pitanju je skup beskonačno mnogo sedlastih ciklusa i aperiodičnih orbita. Ovaj skup nije atraktor i nije ga moguće direktno osmatrati, ali generiše osetljivost na male promene početnih uslova, u svojoj okolini. Trajektorije se mogu "zapetljati" u blizini ovog skupa, nakon čega se one izvesno vreme kreću haotično, a zatim se ustaljuju na fiksnim tačkama C^+ i C^- . Vreme haotičnog kretanja trajektorija, u okolini skupa, povećava se sve više sa porastom vrednosti parametra r . Konačno, za $r = 24,06$, vreme haotičnog kretanja postaje beskonačno dugo i skup prelazi u strani atraktor.

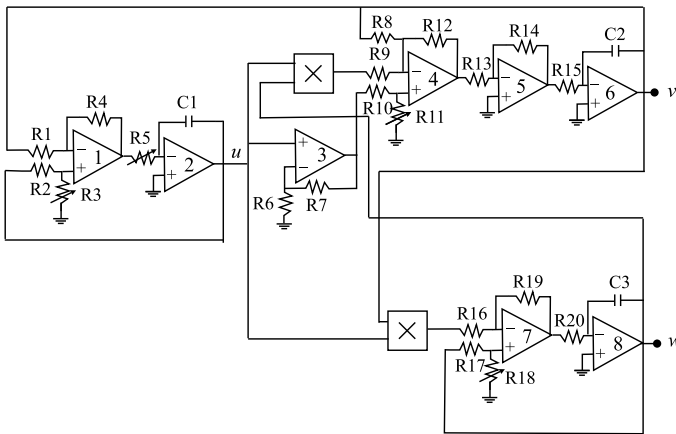
Istaknimo još jedno važno svojstvo dinamike Lorencovog sistema, koje se jasno uočava na slici 9.24. Naime, za $24,06 < r < 24,74$, postoje dva tipa atraktora: fiksne tačke i strani atraktor. Ovo istovremeno postojanje znači da se histerezis može pojaviti između haosa i ravnotežnog stanja, pri promeni vrednosti parametra r u datom intervalu.

9.6 Upotreba haosa za slanje tajnih poruka

Kuomo i Openhajm [57], [58] primenili su teoriju haosa za slanje šifrovanih poruka, oslanjajući se na otkriće **sinhronizovanog haosa** u radu [242]. Njihova ideja sastojala se u sledećem: pri prenošenju poruke, da bismo sakrili njen sadržaj, moramo da je "maskiramo" mnogo "glasnijim" haosom. Slušalac, na drugoj strani, čuje samo haos, koji zvuči kao besmislena buka. U slučaju da on ima prijemnik, koji savršeno reprodukuje haos, onda on može "demaskirati" poruku, i slušati njen originalni sadržaj.

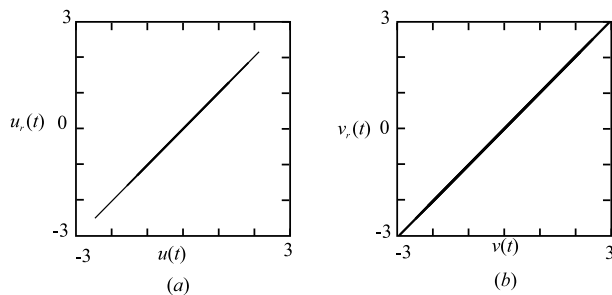
9.6.1 Eksperiment

Kuomo je izveo eksperiment, kojim je pokazao da je moguće slati šifrovane poruke, primenom teorije haosa, koristeći elektronsku implementaciju Lorensovih jednačina (sl. 9.25). Električno strujno kolo uključuje otpornike, kondenzatore, pojačivače i analogne višestruke čipove.



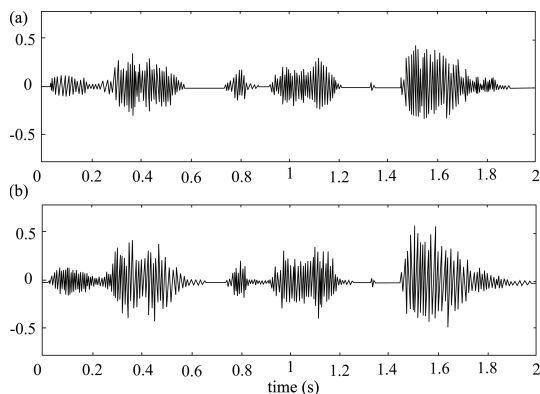
Slika 9.25: Postavka Kuomovog eksperimenta.

Naponi u , v , w u tri različite tačke u kolu odgovaraju promenljivim x , y , z , u Lorensovom sistemu. Prema tome, strujno kolo se ponaša kao analogni računar za Lorensove jednačine. Odnos napona $u(t)$ $w(t)$, snimljen osciloskopom, na primer, potvrđuje analogiju ponašanja struje u kolu i poznatog Lorensovog atraktora. Dakle, priključenjem strujnog kola na zvučnik, moguće je "čuti" haos, koji zvuči kao smetnje na radiju. U sledećem koraku, konstruisan je prijemnik, koji će se savršeno sinhronizovati sa "haotičnim" predajnikom. Slika 9.26 prikazuje odnos napona $u_r(t)$ i $v_r(t)$ na prijemniku, i njihovih analoga $u(t)$ i $v(t)$, na predajniku.



Slika 9.26: Odnos napona: a) $u_r(t)$ i $v_r(t)$ na prijemniku, i b) $u(t)$ i $v(t)$ na predajniku.

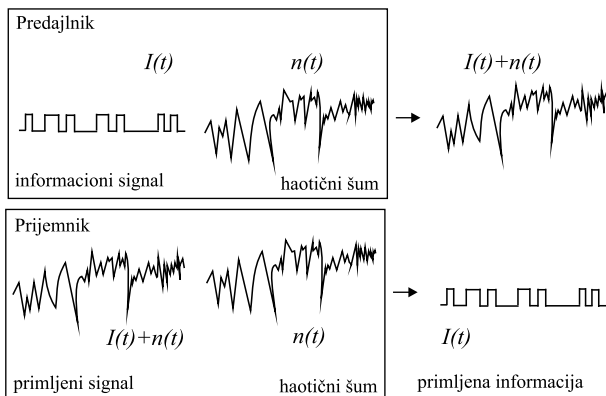
Trag na osciloskopu pod uglom od 45° , koji se jasno uočava na prethodnoj slici, nedvosmisleno ukazuje na to da je sinhronizacija skoro savršena, uprkos tome što je "ponašanje" struje, i na prijemniku i na predajniku, haotično. Sinhronizacija je takođe prilično stabilna - trajanje skoro savršene korelacije napona, prikazane na slici 9.26, iznosi nekoliko minuta, dok bi bez "elektronike" došlo do dekorelacije za oko 1 milisekundu.



Slika 9.27: Vremenska serija originalne i rekonstruisane poruke.

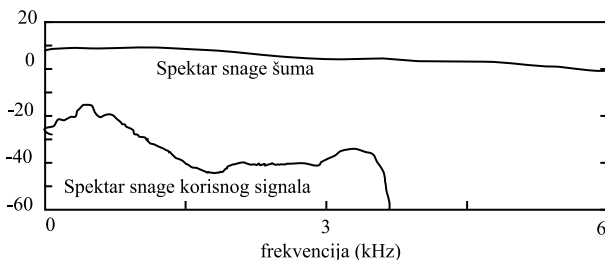
Na slici 9.27 prikazan je rezultat eksperimenta. Slika 9.27a predstavlja deo originalne poruke, dobijen uzorkovanjem frekvencijom od 48kHz i sa 16-bitnom rezolucijom. Ova signal je potom maskiran "glasnijim" haosom.

Ideja "sigurne" komunikacije prikazana je jednostavnom šemom na slici 9.28.



Slika 9.28: Osnovna ideja "sigurne" komunikacije.

Spekter snage na slici 9.29 pokazuje da je haos za oko 20 [dB] glasniji od poruke, prekrivši, pritom, ceo frekventni raspon. Konačno, demaskirana poruka, registrovana na prijemniku, prikazana je na slici 9.27b. Originalna poruka je rekonstruisana sa malim odstupanjem.



Slika 9.29: Spekter snage korisnog signala i šuma.

9.6.2 Dokaz sinhronizacije

Da bismo dokazali sinhronizaciju haotičnih signala, u prethodnom eksperimentu, pođimo od jednačina koje definišu i predajnik i prijemnik. Koristeći Kirhofova pravila, jednačine koje opisuju dinamiku predajnika, u bezdimenzionalnom obliku, su:

$$\begin{aligned}
 \dot{u} &= \sigma(v - u), \\
 \dot{v} &= ru - v - 20uw, \\
 \dot{w} &= 5uv - bw.
 \end{aligned}
 \tag{9.24}$$

Ovo su zapravo Lorencove jednačine, dobijene sledećom smenom promenljivih:

$$u = \frac{1}{10}x, \quad v = \frac{1}{10}y, \quad w = \frac{1}{20}z.$$

Dinamika prijemnika opisuje se sa:

$$\begin{aligned} \dot{u}_r &= \sigma(v_r - u_r), \\ \dot{v}_r &= ru(t) - v_r - 20u(t)w_r, \\ \dot{w}_r &= 5u(t)v_r - bw_r, \end{aligned} \tag{9.25}$$

gde je eksplicitno navedena zavisnost napona od vremena, $u(t)$, da bismo naglasili da je prijemnik pokrenut haotičnim signalom $u(t)$ koji dolazi od predajnika.

Kao rezultat, dobijamo da se prijemnik asimptotski približava savršenoj sinhronizaciji sa predajnikom, polazeći od bilo kojih početnih uslova! Preciznije, neka je:

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= (u, v, w) = \text{stanje predajnika,} \\ \mathbf{r} &= (u_r, v_r, w_r) = \text{stanje prijemnika,} \\ \mathbf{e} &= \mathbf{d} - \mathbf{r} = \text{odstupanje signala.} \end{aligned}$$

Tvrdimo da $\mathbf{e}(t) \rightarrow \mathbf{0}$, kada $t \rightarrow \infty$, za sve početne uslove. Da bismo ovo dokazali, pođimo od jednačina koje opisuju dinamiku odstupanja signala.

Oduzimajući (9.25) od (9.24) dobijamo:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= \sigma(e_2 - e_1), \\ \dot{e}_2 &= -e_2 - 20u(t)e_3, \\ \dot{e}_3 &= 5u(t)e_2 - be_3. \end{aligned}$$

Ovo je linearni sistem za $\mathbf{e}(t)$, ali sadrži haotični vremenski zavisni koeficijent $u(t)$ u dva člana. Ideja je da rekonstruišemo Ljapunovljevu funkciju tako da isključimo mogućnost pojave haosa. U tom cilju, pomnožimo drugu jednačinu sa e_2 , a treću jednačinu sa $4e_3$ i saberimo ih. Tada je:

$$e_2\dot{e}_2 + 4e_3\dot{e}_3 = -e_2^2 - 20u(t)e_2e_3 + 20u(t)e_2e_3 - 4be_3^2 = -e_2^2 - 4be_3^2 \tag{9.26}$$

tako da haotični član nestaje!

Leva strana jednačine (9.26) je $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(e_2^2 + 4e_3^2)$. Ovo ukazuje na oblik Ljapunovljeve funkcije. Kao u radu [57], definišemo funkciju:

$$E(\mathbf{e}, \tau) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma}e_1^2 + e_2^2 + 4e_3^2 \right).$$

Funkcija E je sigurno pozitivno definitna, jer je zbir kvadrata (kao i uvek, pretpostavljamo da je $\sigma > 0$). Da bismo pokazali da je E Ljapunovljeva funkcija, moramo da pokažemo da opada duž trajektorija, tj. treba dokazati da je $\dot{E} < 0$:

$$\begin{aligned}\dot{E} &= \left[\frac{1}{\sigma} e_1 \dot{e}_1 \right] + e_2 \dot{e}_2 + 4e_3 \dot{e}_3 = \\ &= - [e_1^2 - e_1 e_2] - e_2^2 - 4be_3^2.\end{aligned}$$

Koristeći (9.26), dobijamo

$$\begin{aligned}\dot{E} &= - \left[e_1 - \frac{1}{2} e_2 \right]^2 + \left(\frac{1}{2} e_2 \right)^2 - e_2^2 - 4be_3^2 = \\ &= - \left[e_1 - \frac{1}{2} e_2 \right]^2 - \frac{3}{4} e_2^2 - 4be_3^2.\end{aligned}$$

Prema tome, $\dot{E} \leq 0$, jednako je za $\mathbf{e} = \mathbf{0}$. Dakle, E je Ljapunovljeva funkcija, i $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ je globalno asimptotski stabilno.

Može se, takođe, pokazati da $\mathbf{e}(t)$ opada eksponencijalno brzo. Ovo je važno, zato što je brza sinhronizacija neophodna za željenu primenu.

Glava 10

Jednodimenzionalna preslikavanja

*U svakom haosu postoji kosmos,
u svakom neredu postoji skriveni
red.*

Karl Jung, "Arhetipovi kolektivno nesvesnog".

10.1 Uvod

U ovom poglavlju razmatramo novu klasu dinamičkih sistema u kojima se vreme posmatra kao diskretna promenljiva. Sistemi ovog tipa opisuju se tzv. **diferencnim jednačinama (preslikavanja)**¹.

Preslikavanja imaju široku primenu:

1. Kao alati za analizu diferencijalnih jednačina. Na primer, pomoću Poenkareovih preslikavanja može se dokazati postojanje periodičnog rešenja za klatno. Takođe, može se vršiti analiza stabilnosti periodičnih rešenja, u opštem slučaju.
2. Kao modeli za prirodne fenomene. U nekim oblastima nauke i tehnike pogodno je posmatrati vreme kao diskretnu veličinu, kao na primer u

¹rekurzivne relacije, iterativna preslikavanja itd.

digitalnoj elektronici, u delovima ekonomije i finansijske teorije, i u studijama izvesnih životinjskih populacija.

3. Kao jednostavni primeri haosa. Preslikavanja su zanimljiva za istraživanje sama po sebi, kao matematičke "laboratorije" za haos. Zaista, kod preslikavanja moguće je raznovrsnije ponašanje nego kod diferencijalnih jednačina, jer tačke x_n više "skaču" duž njihovih orbita nego što neprekidno "teku" (sl. 10.2).



Slika 10.1: Jednodimenzionalno preslikavanje.

10.2 Fiksne tačke i paukove mreže

Posmatrajmo jednodimenzionalno preslikavanje $x_{n+1} = f(x_n)$, gde je f glatka funkcija, koja preslikava realnu liniju u samu sebe. Pretpostavimo da x^* zadovoljava $f(x^*) = x^*$. Tada je x^* fiksna tačka, jer ako je $x_n = x^*$ onda je $x_{n+1} = f(x_n) = f(x^*) = x^*$. Prema tome, orbita ostaje u x^* za sve buduće iteracije.

Da bismo odredili stabilnost x^* , razmatramo susednu orbitu $x_n = x^* + \eta_n$, gde je η mali poremećaj. Odredimo, sada, da li se orbita kreće ka fiksnoj tački x^* ili od fiksne tačke x^* , tj. da li mali poremećaj η_n raste ili opada kada se n povećava. Razvojem funkcije $f(x)$ u red, u okolini tačke x^* , dobijamo

$$x^* + \eta_{n+1} = x_{n+1} = f(x^* + \eta_n) = f(x^*) + f'(x^*)\eta_n + O(\eta_n^2).$$

Ali, kako je $f(x^*) = x^*$, ova jednačina svodi se na:

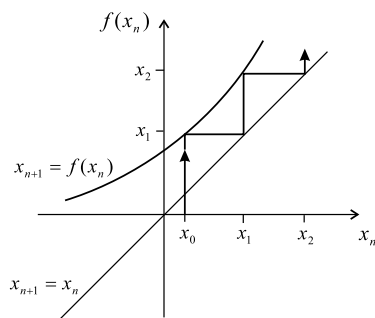
$$\eta_{n+1} = f'(x^*)\eta_n + O(\eta_n^2).$$

Ukoliko zanemarimo članove višeg reda $O(\eta_n^2)$, dobijamo linearizovano preslikavanje $\eta_{n+1} = f'(x^*)\eta_n$, čija je sopstvena vrednost $\lambda = f'(x^*)$. Rešenje ovog linearnog preslikavanja može se naći eksplicitno, uvodeći oznake: $\eta_1 = \lambda\eta_0$, $\eta_2 = \lambda\eta_1 = \lambda^2\eta_0$, tako da je u opštem slučaju $\eta_n = \lambda^n\eta_0$. Ukoliko je $|\lambda| = |f'(x^*)| < 1$, onda $\eta_n \rightarrow 0$ kada $n \rightarrow \infty$ i fiksna tačka x^* je linearно stabilna. U suprotnom, ako je $|f'(x^*)| > 1$ fiksna tačka je nestabilna. Iako je ova analiza lokalne stabilnosti zasnovana na linearizaciji, može se pokazati da važi i za početno nelinearno preslikavanje. Ali, na osnovu linearizacije,

ne možemo ništa zaključiti o stabilnosti sistema, kada je $|f'(x^*)| = 1$. U tom slučaju, članovi reda $O(\eta_n^2)$, koje smo prethodno zanemarili, određuju lokalnu stabilnost. Svi ovi rezultati se analogno pojavljuju i kod diferencijalnih jednačina (Poglavlje 2.)

10.2.1 Paukove mreže za jednodimenzionalna preslikavanja

Konstruišimo, sada, **paukovu mrežu** za opšte preslikavanje $x_{n+1} = f(x_n)$ (sl. 10.2).



Slika 10.2: Konstrukcija paukove mreže, za preslikavanje $x_{n+1} = f(x_n)$.

Nacrtajmo, prvo, vertikalnu liniju, za početni uslov x_0 , do preseka sa grafikom funkcije f . Označimo ordinatu (visinu) tog preseka sa x_1 . U ovoj fazi mogli bismo da se vratimo na horizontalnu osu i da ponovimo postupak kako bismo dobili x_2 iz x_1 . Međutim, pogodnije je da od prethodnog preseka dalje pratimo horizontalnu liniju do sledećeg preseka sa dijagonalom kvadranta $x_{n+1} = x_n$, nakon čega dalje pratimo vertikalnu liniju do ponovnog preseka sa krivom. Nadalje, ponavljamo proces n puta, da bismo dobili prvih n tačaka u orbiti.

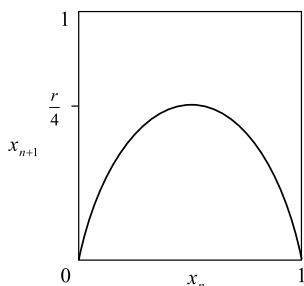
Paukove mreže su korisne, jer nam omogućavaju da uočimo globalno ponašanje, dopunjujući na taj način ono što nam je poznato o lokalnom ponašanju, na osnovu linearizacije. Značaj paukovih mreža dolazi do izražaja kada linearna analiza nije moguća.

10.3 Numerički pristup logističkom preslikavanju

Robert Mej (1976) predložio je sledeće diskretno logističko preslikavanje

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n). \quad (10.1)$$

koje predstavlja analogon logističke jednačine za rast populacije u diskretnom vremenu (poglavlje 2). Ovde je $x \geq 0$ bezdimenzionalna mera populacije u n -toj generaciji, a $r \geq 0$ predstavlja unutrašnju stopu rasta.



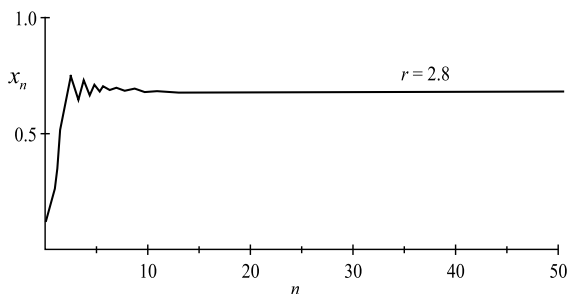
Slika 10.3: Grafik funkcije diferencijalne jednačine (10.1).

Kao što je prikazano na slici 10.3, grafik jednačine (10.1) je parabola sa maksimalnom vrednošću $r/4$ za $x = \frac{1}{2}$. Posmatraćemo preslikavanje za vrednosti kontrolnog parametra r u intervalu $0 \leq r \leq 4$, tako da funkcija (10.1) preslikava interval $0 \leq x \leq 1$ u samog sebe.

Udvostručavanje perioda

Posmatrajmo preslikavanje (10.1) za fiksiranu vrednost r . Pođimo od neke početne populacije x_0 , a zatim, koristeći (10.1), odredimo x_n :

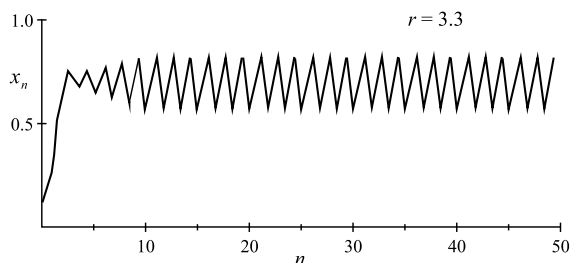
- za malu vrednost r ($r < 1$), populacija uvek biva istrebljena, tj. $x_n \rightarrow 0$ kada $n \rightarrow \infty$;
- za vrednost parametra r , u intervalu $1 < r < 3$, populacija raste i na kraju dostiže konstantnu vrednost, različitu od nule (sl. 10.4). Rezultati su ovde prikazani kao vremenska serija $x_n(n)$;



Slika 10.4: Vremenska serija $x_n(n)$, za $r = 2,8$.

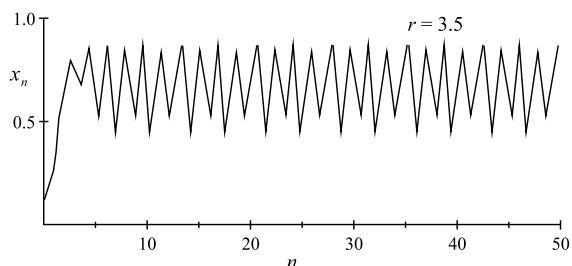
- za $r = 3,3$, populacija opet raste, ali sada osciluje oko prethodne konstantne vrednosti, između velike populacije u jednoj generaciji i

manje populacije u sledećoj (sl. 10.5). Ovaj tip oscilacija, gde se x_0 ponavlja na svake dve iteracije, naziva se **ciklus perioda 2**;



Slika 10.5: Vremenska serija $x_n(n)$, za $r = 3,3$.

- za $r = 3,5$, populacija se približava ciklusu, koji se sada ponavlja na svake četiri "generacije". Prethodni ciklus je, sada, udvostručio svoj period i postaje **ciklus perioda 4** (sl. 10.6).



Slika 10.6: Vremenska serija $x_n(n)$, za $r = 3,5$.

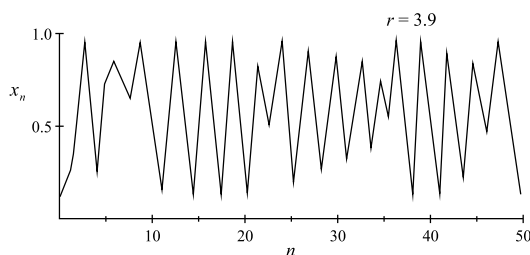
Dalja udvostručavanja perioda ka ciklusima perioda 8, 16, 32 itd, javljaju se se povećavanjem vrednosti r . Numerički, dobija se:

$r_1 = 3$	(nastanak ciklusa perioda 2) 2^1
$r_2 = 3,449\dots$	$4 = 2^2$,
$r_3 = 3,54409\dots$	$8 = 2^3$,
$r_4 = 3,5644\dots$	$16 = 2^4$
$r_5 = 3,568759\dots$	$32 = 2^5$
\vdots	\vdots
$r_\infty = 3,569946\dots$	$\infty = 2^\infty$.

Posmatrajući ovaj niz, možemo zapaziti da se sukcesivne bifurkacije javljaju sve brže i brže, pri čemu r_n konvergira ka graničnoj vrednosti $r_\infty = 3,569946$. Naglasimo da je ova konvergencija, u osnovi, geometrijska. Odnos uzastopnih rastojanja, između susednih ciklusa, različitih perioda, teži konstantnoj vrednosti, za $n \rightarrow \infty$, tj.:

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} = 4,669\dots$$

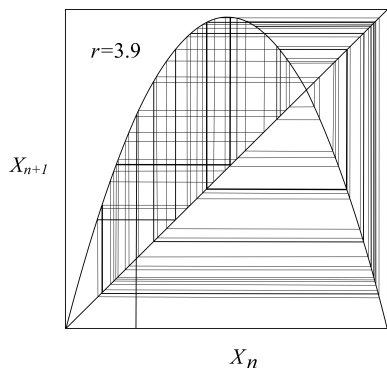
Daljim povećanjem vrednosti parametra r , niz $\{x_n\}$ nikada ne konvergira ka fiksnoj tački ili periodičnoj orbiti. Umesto toga, dugoročno ponašanje je aperiodično (vidi sl. 10.7). Drugim rečima, dolazi do pojave haosa, koji smo već sreli pri razmatranju jednačina Lorencovog sistema, ali sada u diskretnom vremenu (poglavljje 9).



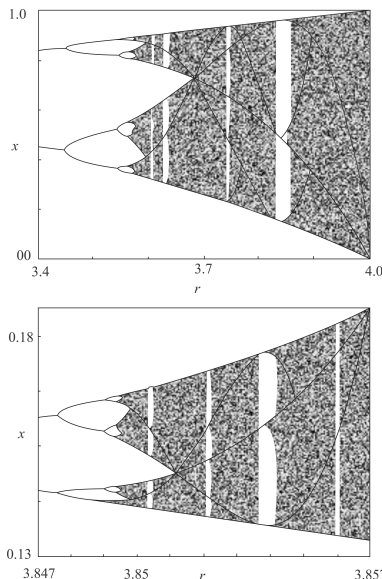
Slika 10.7: Vremenska serija $x_n(n)$, za $r = 3,9$.

Izgled paukove mreže, u ovom slučaju, veoma je složen (sl. 10.8).

Da bismo odredili dugoročno ponašanje, za sve vrednosti r , konstruišimo **orbitalni dijagram** (sl. 10.9). Dijagram, na ovoj slici, predstavlja atraktor sistema u funkciji od r . Za $r = 3,4$, atraktor je ciklus perioda 2, što je predstavljeno dvema granama na orbitalnom dijagramu. Kako se r povećava, obe grane se istovremeno "račvaju", dajući ciklus perioda 4. Ovo "račvanje" predstavlja ranije pomenutu bifurkaciju udvostručavanja perioda. Dalje udvostručavanje perioda pojavljuje se sa povećanjem vrednosti parametra r i pojavom ciklusa perioda 8, 16, \dots , sve dok za $r = r_\infty = 3,57$, preslikavanje ne postane haotično i atraktor se ne promeni od konačnog ka beskonačnom skupu tačaka na orbitalnom dijagramu.



Slika 10.8: Konstrukcija paukove mreže, za preslikavanje $x_{n+1} = f(x_n)$, i za vrednost parametra $r = 3.9$.



Slika 10.9: Orbitalni dijagram logističkog preslikavanja.

Za $r > r_\infty$ orbitalni dijagram otkriva neočekivanu "mešavinu" reda i haosa, sa **periodičnim prozorima** koji se smenjuju sa haotičnim "oblacima" tačaka. Početak velikog prozora, u blizini $r \approx 3,83$, sadrži stabilni ciklus perioda 3. Deo prozora perioda 3 prikazan je u donjem delu slike 10.9. Primitimo da se kopija orbitalnog dijagrama ponovo javlja u minijaturnom obliku.

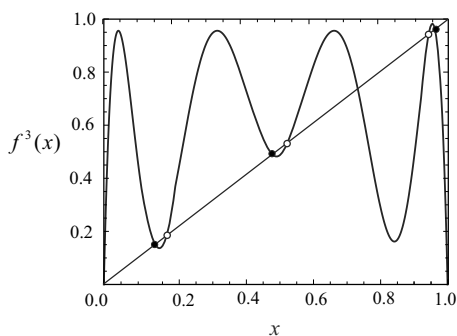
10.4 Periodični prozori

Jedno od bitnih svojstava orbitalnog dijagrama (sl. 10.9) jeste pojava periodičnih prozora za $r > r_\infty$. Prozor perioda 3 koji se javlja u okolini intervala $3,8284 \dots \leq r \leq 3,8415 \dots$ je posebno izražen, jer se iznenada, posle intervala haotičnog ponašanja, javlja stabilni ciklus perioda 3. Naglasimo da se i ostali periodični prozori javljavaju na sličan način, pa je dovoljno da razmotrimo ovaj najjednostavniji slučaj.

Neka je funkcijom $f(x) = rx(1-x)$ zadato logističko preslikavanje $x_{n+1} = f(x_n)$. Radi jednostavnosti korišćićemo sledeće oznake: $x_{n+2} = f(f(x_n))$ ili $x_{n+2} = f^2(x_n)$, odnosno $x_{n+3} = f^3(x_n)$.

Preslikavanje sa tri iteracije (trostruko preslikavanje) $f^3(x)$ je od ključnog

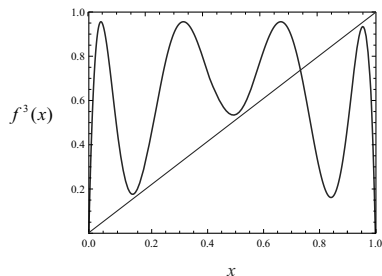
značaja za razumevanje nastanka ciklusa perioda 3. Bilo koja tačka p na ciklusu perioda 3 ponavlja se, po definiciji, na svake tri iteracije, tako da takve tačke zadovoljavaju $p = f^3(p)$ i zato predstavljaju fiksne tačke trostrukog preslikavanja. Međutim, kako je f^3 polinom osmog stepena, jednačina se ne može rešiti eksplicitno, pa se, na taj način, ne mogu odrediti ni fiksne tačke. Ali, za potrebe ove analize, dovoljan je grafički prikaz. Na slici 10.10 prikazan je grafik $f^3(x)$ za $r = 3,835$.



Slika 10.10: Grafik $f^3(x)$ za $r = 3,835$.

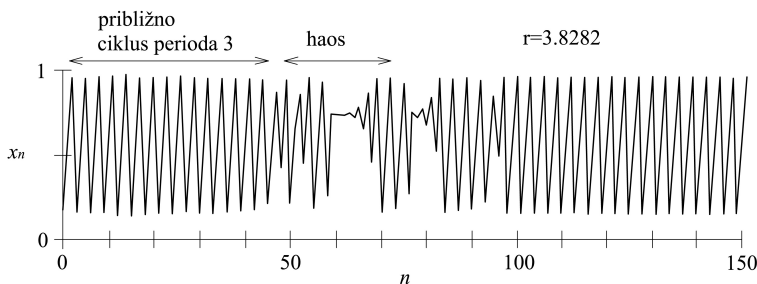
Preseci grafika i dijagonale kvadranta odgovaraju rešenjima jednačine $f^3(x) = x$. Postoji ukupno osam rešenja, od kojih su šest od interesa za ovu analizu. Ova rešenja, na grafiku, obeležena su "punim" i "praznim" kružićima. Preostala dva rešenja predstavljaju fiksne tačke, ili tačke ciklusa perioda 1, za koje je $f(x^*) = x^*$. Puni kružići, na slici 10.10, odgovaraju stabilnom ciklusu perioda 3. Uočimo da je nagib funkcije $f^3(x)$ mali u ovim tačkama, što odgovara stabilnosti ciklusa. S druge strane, koeficijent pravca postaje veći od 1 za ciklus obeležen praznim kružićima. U ovom slučaju ciklus perioda 3 je nestabilan.

Pretpostavimo, sada, da smanjujemo vrednost parametra r prema oblasti "haotičnog" ponašanja. Tada grafik, na slici 10.10, menja oblik i za $r = 3,8$ nema više preseka krive i dijagonale kvadranta (sl. 10.11). Prema tome, za neku srednju vrednost parametra r , između $r = 3,8$ i $r = 3,835$, grafik funkcije $f^3(x)$ mora biti tangentan na dijagonalu kvadranta. Za ovu kritičnu vrednost parametra r , stabilni i nestabilni ciklus perioda 3 "spajaju" se i "nestaju" u **tangentnoj bifurkaciji**. Ovom bifurkacijom određen je početak periodičnog prozora.

Slika 10.11: Grafik $f^3(x)$ za $r = 3,8$.

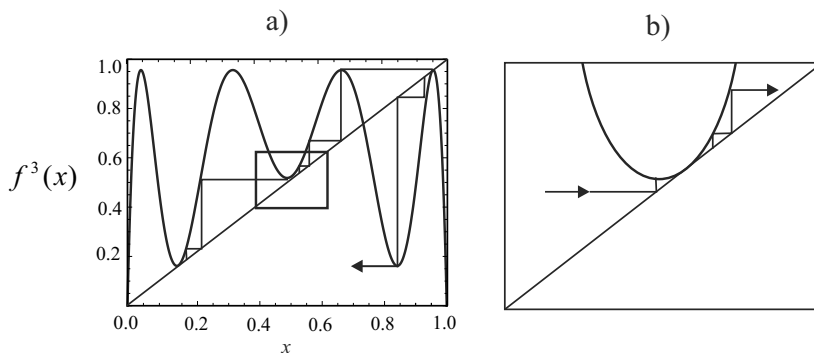
10.4.1 Intermitentnost

Za vrednost parametra r , pre pojave prozora perioda 3, pojavljuje se neobična vrsta haosa. Na slici 10.12 prikazana je tipična orbita, za $r = 3,8282$.

Slika 10.12: Dijagram preslikavanja u funkciji broja preslikavanja, za $r = 3,8282$.

Deo ovog dijagrama podseća na stabilni ciklus perioda 3, što je i označeno punim kružićima. Međutim ovakvo ponašanje je neobično, s obzirom na to da ciklus perioda 3 još uvek ne postoji. Mi, zapravo, vidimo "duh" ciklusa perioda 3. Ovo nije iznenađenje - duhovi se uvek javljaju u blizini sedlo-čvor bifurkacije (poglavlja 4). Tangentna bifurkacija je, u suštini, sedlo-čvor bifurkacija, pod drugim imenom kod preslikavanja. Međutim, novinu predstavlja to što se orbita vraća ka "duhu" ciklusa perioda 3, u više navrata, sa intermitentnim pojavama haosa između tih "povrataka". Shodno tome, ova vrsta haotičnog ponašanja naziva se **intermitentnost** ([258]).

Na slici 10.13 prikazana je geometrija intermitentnosti, konstrukcijom paukove mreže.



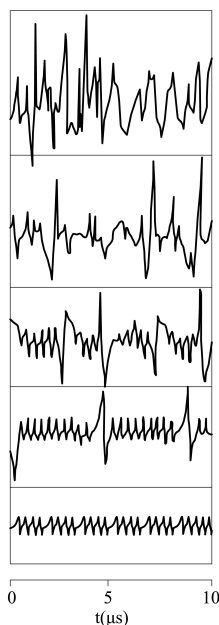
Slika 10.13: Grafik funkcije $f^3(x)$ i konstrukcija paukove mreže.

Na slici 10.13a, treba uočiti tri uska "kanala" između dijagonale kvadranta i grafika $f^3(x)$. Ovi kanali su nastali nakon tangente bifurkacije, kada se grafik funkcije $f^3(x)$ "udaljio" od dijagonale kvadranta. Posmatrajmo, sada, uski kanal u malom pravougaoniku, prikazanom na slici 10.13a, a uvećanom na slici 10.13b. Kao što se vidi, potrebno je mnogo iteracija da bi se orbita "provukla" kroz kanal. Prema tome, funkcija $f^3(x_n) \approx x_n$, tokom prolaza kroz ovaj uski kanal, pa orbita podseća na ciklus perioda 3, što i objašnjava pojavu duha.

Konačno, orbita uspeva da prođe kroz kanal, nakon čega "poskakuje" unaokolo haotično, sve dok se opet ne vrati u kanal, u nekom kasnijem nepredvidljivom vremenskom trenutku i položaju.

Naglasimo da intermitentnost nije svojstvo samo logističkog preslikavanja. Pojavljuje se obično u sistemima gde prelaz iz periodičnog u haotično ponašanje nastaje usled sedlo-čvor bifurkacije ciklusa.

U eksperimentalnim sistemima, intermitentnost se pojavljuje kao približno periodično ponašanje "isprekidano" povremenim neregularnim intervalima. Deo sistema, između ovih intervala, predstavlja slučajnu promenljivu, iako je početni sistem potpuno deterministički. Povećanjem vrednosti kontrolnog parametra, u odnosu na pojavu periodičnog prozora, ovi intervali postaju sve češći, dok sistem, na kraju, ne postane potpuno haotičan. Ovaj "scenarij" prelaska u haotično ponašanje, poznat je kao **intermitentni put ka haosu**.



Slika 10.14: Intermitentni "scenarij" prelaska u haotično ponašanje, kod lasera.

Na slici 10.14 prikazan je eksperimentalni primer intermitentnog puta ka haosu kod lasera.

Naglasimo da se udvostručavanje perioda javlja i kod preslikavanja $f^3(x)$. Naime, odmah nakon pojave stabilnog ciklusa perioda 3, u tangentnoj bifurkaciji, koeficijent pravca tangente funkcije $f^3(x)$ približno iznosi $+1$. Daljim povećanjem vrednosti parametra r koeficijent pravca opada i konačno dostiže vrednost -1 . Tada, flip bifurkacija uzrokuje da ciklus perioda 3 "duplira" svoj period i postane ciklus perioda 6. Slična "kaskada" udvostručavanja perioda može se naći u svim periodičnim prozorima.

10.5 Ljapunovljevi eksponenti

Da bismo potvrdili, da je prethodno analizirano ponašanje zaista haotično, potrebno je da pokažemo da je sistem osetljiv na male promene početnih uslova, u smislu da se susedne orbite tipično razdvajaju eksponencijalno brzo. Drugim rečima, moramo pokazati da je vrednost maksimalnog Ljapunovljevog eksponenta pozitivna.

Polazeći od x_0 (početni uslov), posmatrajmo susednu tačku $x_0 + \delta_0$, gde je δ_0 mali početni poremećaj. Označimo sa δ_n poremećaj nakon n iteracija. Ukoliko pretpostavimo da se poremećaj δ_0 , nakon n iteracija, menja po zakonu $|\delta_n| \approx |\delta_0| e^{n\lambda}$, tada λ predstavlja tzv. Ljapunovljev eksponent, čija pozitivna vrednost ukazuje na pojavu haosa.

Ukoliko označimo $\delta_n = f^n(x_0 + \delta_0) - f^n(x_0)$, dobijamo:

$$\lambda \approx \frac{1}{n} \ln \left| \frac{\delta_n}{\delta_0} \right| = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{f^n(x_0 + \delta_0) - f^n(x_0)}{\delta_0} \right| = \frac{1}{n} \ln |(f^n)'(x_0)|$$

gde smo pretpostavili da $\delta_0 \rightarrow 0$ u poslednjem koraku. Član unutar logarit-

ma može biti proširen na sledeći način:

$$(f^n)'(x_0) = \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i)$$

Prema tome,

$$\begin{aligned} \lambda &\approx \frac{1}{n} \ln \left| \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i) \right| \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \end{aligned}$$

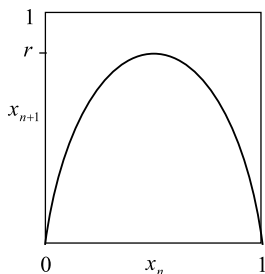
Ukoliko ovaj izraz ima graničnu vrednost kada $n \rightarrow \infty$, onda se ona definiše kao Ljapunovljev eksponent, za orbitu koja počinje u x_0 :

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|.$$

Primetimo da λ zavisi od x_0 . Međutim, ono je isto za svako x_0 u bazi atrakcije datog atraktora. Za stabilne fiksne tačke i krugove λ je negativno, a za strane atraktore - λ je pozitivno.

10.6 Univerzalnost i eksperimenti

Nacrtajmo grafik preslikavanja $x_{n+1} = r \sin \pi x_n$, za $0 \leq r \leq 1$, i $0 \leq x \leq 1$, i uporedimo ga sa logističkim preslikavanjem. Zatim konstruišimo orbitalne dijagrame za oba preslikavanja, i odredimo njihove sličnosti i razlike.

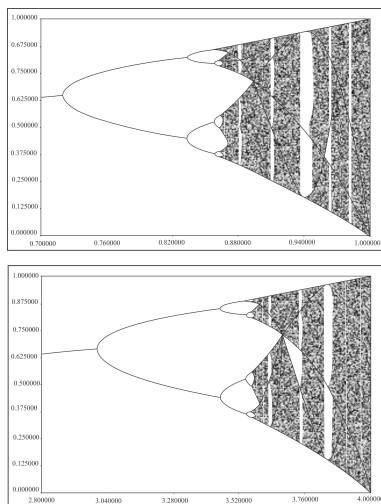


Slika 10.15: Preslikavanje $x_{n+1} = r \sin \pi x_n$.

Grafik sinusnog preslikavanja prikazan je na slici 10.15. Ovaj grafik je istog oblika kao i grafik logističkog preslikavanja. Obe krive su glatke, konveksne nadole, i imaju jedan maksimum. Takva preslikavanja nazivaju se **unimodalna**. Na slici 10.16 prikazani su orbitalni dijagrami za sinusno preslikavanje (gornji deo slike) i za logističko preslikavanje (donji deo slike).

Primetimo da oba dijagrama imaju istu vertikalnu razmeru, ali je horizontalna osa dijagrama sinusnog preslikavanja sa četiri puta većom razmerom. Razlika u razmeri sledi iz prirode preslikavanja, jer je

$$\frac{|r \sin \pi x|_{\max}}{|r x(1-x)|_{\max}} = 4.$$



Slika 10.16: Orbitalni dijagrami: a) sinusnog preslikavanja, b) logističkog preslikavanja.

Sa slike 10.16 jasno je da je kvalitativna dinamika dva preslikavanja identična. U oba slučaja uočava se scenario prelaska u haotično ponašanje kroz niz udvostručavanja perioda, što je praćeno pojavom periodičnih prozora. Štaviše, periodični prozori javljaju se po istom redu, i sa istim relativnim veličinama. Na primer, prozor perioda 3 je najveći u oba slučaja, a sledeći prozori, po veličini, su prozori perioda 5 i 6.

Međutim, naglasimo da postoje kvantitativne razlike između ova dva preslikavanja. Na primer, bifurkacije sa udvostručavanjem perioda javljaju se kasnije u logističkom preslikavanju, a intervali vrednosti parametra, u kojima se javljaju periodični prozori, su kraći.

10.6.1 Kvalitativna univerzalnost: U -niz

Prethodno razmatranje ilustruje važnu teoremu, prikazanu u radu [201]. U ovoj teoremi razmatraju se sva unimodalna preslikavanja oblika $x_{n+1} = r f(x_n)$, gde $f(x)$ zadovoljava uslove $f(0) = f(1) = 0$. Iz dokaza teoreme

sledi da kako se vrednost parametra r menja, red po kome se stabilna periodična rešenja javljaju nezavisan je od unimodalnog preslikavanja. Drugim rečima, periodični atraktori uvek se javljaju u istom redosledu, koji se naziva **univerzalni** ili **U -niz**.

Primer U -niza, do perioda 6, je:

$$1, 2, 2 \times 2, 6, 5, 3, 2 \times 3, 5, 6, 4, 6, 5, 6.$$

Početak ovog niza je poznat - periodi 1, 2 i 2×2 predstavljaju prve korake u scenariju udvostručavanja perioda. Naredni koraci dovode do pojave atraktora perioda većih od 6, tako da su ovde izostavljene.

U -niz je uočen i u eksperimentima Belousov-Zabotinski hemijskih reakcija.

Naglasimo da je U -nizom predstavljeno samo kvalitativno svojstvo sistema. Drugim rečima, ovim nizom predstavljen je redosled ali ne i precizne vrednosti parametara, za koje se javljaju periodični atraktori.

10.6.2 Kvantitativna univerzalnost

Sedamdesetih godina prošlog veka, Fajgenbaum je počeo da istražuje udvostručavanje perioda u logističkom preslikavanju. Najpre je razvio komplikovanu "funkcionalnu teoriju"² kako bi predvideo r_n , vrednost r za koje se ciklus perioda 2^n prvi put javlja. Da bi, svoju teoriju, proverio numerički, programirao je svoj ručni kalkulator u cilju proračuna prvih nekoliko vrednosti r_n . Kako je u tom slučaju bilo potrebno više vremena za izračunavanje, Fajgenbaum je mogao da pogađa mesto pojave sledeće bifurkacije. Nakon nekoliko iteracija, uočio je jednostavno pravilo: niz vrednosti r_n predstavlja geometrijski red, sa količnikom razlika rastojanja, između sukcesivnih prelaza, koji konvergira ka 4,669. Drugim rečima, broj

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} = 4,669 \dots$$

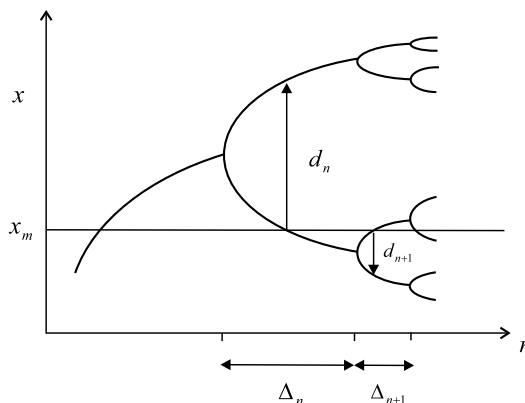
je univerzalan. U pitanju je nova matematička konstanta, karakteristična za udvostručavanje perioda, kao što je broj π za kružnice.

Neka $\Delta_n = r_n - r_{n-1}$ (sl. 10.17) označava rastojanje između susednih bifurkacionih vrednosti. Tada $\Delta_n / \Delta_{n-1} \rightarrow \delta$ kada $n \rightarrow \infty$.

Takođe, ova univerzalnost postoji i duž x -ose. Međutim, ovo je teže utvrditi precizno, zato što su bifurkacione grane, na različitim udaljenostima, čak i za istu vrednost parametra r (vidi sl. 10.16). Da bismo uzeli

²generating function theory (eng.)

u obzir ovu neuniformnost, definišimo standardnu razmeru duž x -ose na sledeći način: neka x_m označava maksimum funkcije f , i neka d_n označava rastojanje od x_m do najbliže tačke na ciklusu perioda 2 (sl. 10.17).



Slika 10.17: Orbitalni dijagrami unimodalnog preslikavanja.

Odnos d_n/d_{n+1} teži univerzalnoj graničnoj vrednosti kada $n \rightarrow \infty$:

$$d_n/d_{n+1} \rightarrow \alpha = -2,5029\dots,$$

nezavisno od oblika funkcije f . Negativan predznak ukazuje na to da se najbliža tačka na ciklusu perioda 2 naizmenično nalazi iznad i ispod x_m , kako je i prikazano na slici 10.17. Stoga, d_n je niz naizmenično pozitivnih i negativnih brojeva.

10.6.3 Reslerov sistem

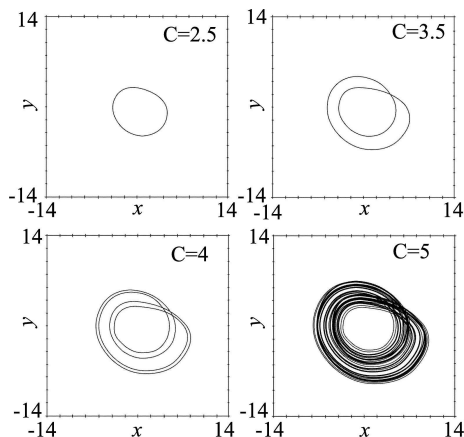
Reslerov³ sistem (1976) opisan je sledećim diferencijalnim jednačinama:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= b + z(x - c)\end{aligned}$$

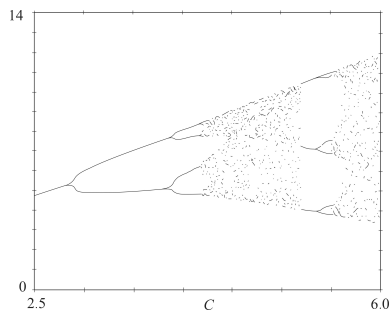
gde su a , b i c parametri. Ovaj sistem sadrži samo jedan nelinearni član, zx , i jednostavniji je od Lorencovog sistema, koji ima dva nelinearna člana.

Na slici 10.18 prikazane su dvodimenzionalne projekcije atraktora Reslerovog sistema za različite vrednosti parametra c , a za $a = b = 0,2$.

³Rössler



Slika 10.18: Dvodimenzionalne projekcije atraktora Reslerovog sistema.



Slika 10.19: Orbitalni dijagram za Reslerov sistem.

Za $c = 2,5$ atraktor je jednostavan granični ciklus. Sa povećanjem vrednosti parametra c , do $3,5$, granični ciklus se dva puta "namota", pre nego što se "zatvori", a njegov period je približno dva puta veći od početnog ciklusa. Prema tome, za vrednosti parametra c , između $c = 2,5$ i $3,5$, mora da dođe do pojave bifurkacije ciklusa sa udvostručavanjem perioda. Naglasimo da se ova bifurkacija može pojaviti samo u tri i više dimenzija. Naredna bifurkacija, sa udvostručavanjem perioda, uzrokuje nastanak ciklusa sa četiri "namotaja", za vrednost parametra $c = 4$. Nakon beskonačne "kaskade" udvostručavanja perioda, dolazi do pojave stranog atraktora, koji je prikazan na slici 10.18, za vrednost parametra $c = 5$.

Na slici 10.19 prikazan je orbitalni dijagram za Reslerov sistem.

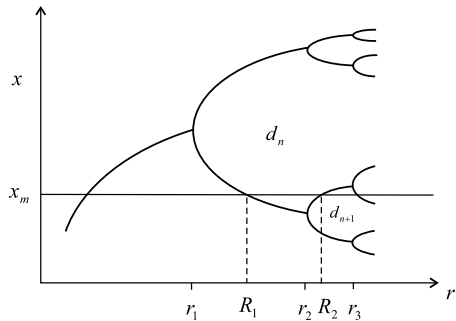
Na dijagramu vidimo da i kod Reslerovog sistema, do pojave haotičnog ponašanja dolazi preko niza bifurkacija, sa udvostručavanjem perioda.

10.7 Renormalizacija

Neka je $f(x, r)$ unimodalno preslikavanje, kod kojeg dolazi do pojave haotičnog ponašanja, preko niza bifurkacija, sa udvostručavanjem perioda, sa povećanjem vrednosti parametra r . Pretpostavimo da je x_m maksimum funkcije f , i neka r_n označava vrednost parametra r za koju dolazi do pojave ciklusa perioda 2^n . Neka R_n označava vrednost parametra r , za koju je ciklus perioda 2^n superstabilan.

Pre nego što počnemo da razmatramo teoriju renormalizacije, analizirajmo jedan ilustrativni primer.

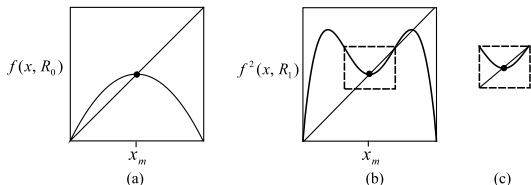
Nađimo R_0 i R_1 za preslikavanje $f(x, r) = r - x^2$.



Za R_0 , preslikavanje ima superstabilnu fiksnu tačku, po definiciji. Uslov za fiksnu tačku je $x^* = R_0 - (x^*)^2$, a uslov za superstabilnost je $\lambda = (\partial f / \partial x)_{x=x^*} = 0$. Kako je $\partial f / \partial x = -2x$, onda je $x^* = 0$, tj. fiksna tačka je maksimum funkcije f . Zamenjujući $x^* = 0$ u uslov za fiksnu tačku, dobijamo da je $R_0 = 0$.

Slika 10.20: Orbitalni dijagram preslikavanja $f(x, r) = r - x^2$.

Za R_1 , preslikavanje ima superstabilni ciklus perioda 2. Neka p i q označavaju tačke na ciklusu. Da bi došlo do pojave superstabilnosti, potrebno je da je sopstvena vrednost $\lambda = (-2p)(-2q) = 0$. Prema tome, tačka $x = 0$ mora biti jedna od tačaka na ciklusu perioda 2. Tada iz uslova za pojavu ciklusa perioda 2 $f^2(0, R_1) = 0$, sledi da je $R_1 - (R_1)^2 = 0$. Prema tome, $R_1 = 1$, jer drugi koren daje fiksnu tačku, a ne ciklus perioda 2.



Prethodni primer ilustruje opšte pravilo: superstabilni ciklus unimodalnog preslikavanja uvek sadrži x_m (maksimum funkcije f) kao jednu od svojih tačaka.

Slika 10.21: Postupak renormalizacije.

Kao posledica, postoji jednostavan grafički način da se odredi R_n (sl. 10.20). Crtamo najpre horizontalnu liniju na visini x_m . U tom slučaju, R_n se javlja tamo gde ova linija preseca razgranati deo orbitalnog dijagrama.

Primitimo da R_n leži između r_n i r_{n+1} . Numerički eksperimenti pokazuju da se rastojanje između sukcesivnih R_n takođe smanjuje za istu univerzalnu vrednost $\delta \approx 4,669$.

Teorija renormalizacije je zasnovana na samosličnosti (fraktalnosti) razgranatog dela orbitalnog dijagrama. Bifurkacione grane su međusobno slične, s tim što su umanjene duž x i r pravca. Ova struktura odražava beskonačno ponavljanje istog dinamičkog procesa - pojavljuje se ciklus perioda 2^n , koji

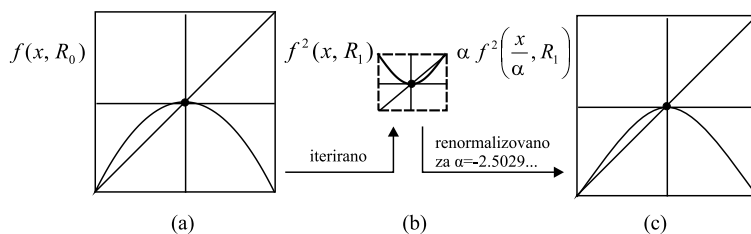
daljim povećanjem vrednosti parametra r postaje superstabilan, a potom gubi stabilnost kroz bifurkaciju sa udvostručavanjem perioda.

Da bismo matematički izrazili samosličnost, poredimo preslikavanje f sa njegovom drugom iteracijom f^2 za odgovarajuće vrednosti parametra r , a zatim "renormalizujemo" jedno preslikavanje u drugo (videti grafike funkcija $f(x, R_0)$ i $f^2(x, r_1)$, na slici 10.21).

Grafici ove dve funkcije mogu da se porede, jer preslikavanja imaju ista svojstva stabilnosti - x_m je superstabilna fiksna tačka za oba slučaja. Slika 10.21b, dobijena je tako što smo uzeli drugu iteraciju od f i povećavali r od R_0 do R_1 . Ova promena vrednosti parametra r je osnovni deo postupka renormalizacije.

Jedan deo slike 10.21b prikazan je na slici 10.21c, koja izgleda gotovo identično kao slika 10.21a, izuzev promene razmere i zamene mesta osa.

Da bismo, ove "kvalitativne" opservacije izrazili odgovarajućim formulama, translatorno pomerimo koordinatni početak iz x u x_m (sl. 10.22).



Slika 10.22: Postupak renormalizacije sa translatorno pomerenim koordinatnim početkom iz x u x_m .

Da bismo sliku 10.22b učinili sličnom slici 10.22a, pomnožimo koordinate sa α ($|\alpha| > 1$), a zatim osama promenimo smer ((x, y) postaje $(-x, -y)$). Obe ove operacije mogu biti ostvarene u jednom koraku ukoliko usvojimo da je faktor razmere α negativan. Množenje faktorom α ekvivalentno je smeni $f^2(x, R_1)$ sa $\alpha f^2(x/\alpha, R_1)$. Konačno, sličnost između slike 10.22a i slike 10.22b pokazuje da je:

$$f(x, R_0) \approx \alpha f^2\left(\frac{x}{\alpha}, R_1\right).$$

Drugim rečima, preslikavanje f je renormalizovano tako što je uzeta njegova druga iteracija, izvršena smena $x \rightarrow x/\alpha$, i vrednost parametra r je promenjeno ka sledećoj superstabilnoj vrednosti.

Ukoliko nastavimo postupak, nakon n renormalizacija, dobijamo:

$$f(x, R_0) \approx \alpha^n f^{2^n}\left(\frac{x}{\alpha^n}, R_n\right).$$

Fajgenbaum je numerički dobio da je:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n f^{2^n} \left(\frac{x}{\alpha^n}, R_n \right) = g_0(x) \quad (10.2)$$

gde je $g_0(x)$ univerzalna funkcija sa superstabilnom fiksnom tačkom. Granična funkcija postoji jedino za $\alpha = 2,5029\dots$

Ovde pojam "univerzalna" znači da je granična funkcija $g_0(x)$ skoro nezavisna od prvobitne funkcije f . Ovo izgleda neverovatno na prvi pogled, ali oblik jednačine (10.2) daje objašnjenje: $g_0(x)$ zavisi od f samo kroz njegovo ponašanje blizu $x = 0$, jer je to sve što preostaje u članu x/α^n , kada $n \rightarrow \infty$. Svakom sledećom renormalizacijom, uvećava se sve manja i manja okolina maksimuma funkcije f , tako da je praktično celokupna informacija o globalnom obliku f izgubljena.

Zapazimo da se red maksimuma "ne zaboravlja" tokom renormalizacije. U tom smislu, preciznije je reći da je $g_0(x)$ univerzalno za svako f sa kvadratnim maksimumom (opšti slučaj). Drugačiji $g_0(x)$ se dobija za f -ove sa maksimumom četvrtog stepena, i tako dalje.

Da bismo dobili druge univerzalne funkcije $g_i(x)$, počnimo sa $f(x, R_i)$ umesto $f(x, R_0)$:

$$g_i(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n f^{2^n} \left(\frac{x}{\alpha^n}, R_{n+i} \right).$$

Ovde je $g_i(x)$ univerzalna funkcija sa superstabilnim 2^i -krugom. Slučaj kada počnemo sa $R_i = R_\infty$ (na početku haosa) je najinteresantniji i najvažniji, jer je onda:

$$f(x, R_\infty) \approx \alpha^n f^2 \left(\frac{x}{\alpha}, R_\infty \right).$$

Za početak, ne moramo da menjamo r kada vršimo renormalizaciju! Granična funkcija $g_\infty(x)$, koja se obično naziva $g(x)$, zadovoljava jednačinu:

$$g(x) = \alpha g^2 \left(\frac{x}{\alpha} \right). \quad (10.3)$$

Ovo je funkcionalna jednačina za $g(x)$ i za univerzalni faktor razmere α .

Funkcionalna jednačina nije kompletna sve dok ne definišemo granične uslove za $g(x)$. Nakon premeštanja koordinatnog početka, sve naše unimodalne funkcije f imaju maksimum za $x = 0$, tako da zahtevamo da je $g'(0) = 0$. Takođe, skaliranjem možemo podesiti da je $g(0) = 1$ bez gubitka opštosti. Ovo samo definiše razmeru za x ; ukoliko je $g(x)$ rešenje jednačine (10.3), onda je i $\mu g(x/\mu)$, sa istim α .

Za $x = 0$, funkcionalna jednačina daje $g(0) = \alpha g(g(0))$. Ali $g(0) = 1$, tako da je $1 = \alpha g(1)$. Stoga,

$$\alpha = 1/g(1),$$

što pokazuje da je α određeno sa $g(x)$. Funkciju $g(x)$ nije moguće naći u zatvorenom obliku, pa ćemo je potražiti u obliku reda:

$$g(x) = 1 + c_2x^2 + c_4x^4 + \dots$$

Koeficijenti se određuju zamenom ovog red u jednačinu (10.3) i grupišući koeficijente uz iste stepene od x . Feigenbaum (1979) se zadržao na sedmom članu i izračunao $c_2 \approx -1,5276$ i $c_4 \approx 0,1048$, a $\alpha \approx -2,5029$.

10.7.1 Renormalizacija za "pešake"

Sledeći školski primer dat je sa namerom da razjasni proces renormalizacije. Dodatna korist je da se aproksimacije za α i δ mogu izračunati u zatvorenom obliku. Ovaj postupak predstavlja modifikaciju postupka iz [202].

Neka je $f(x, \mu)$ bilo koje unimodalno preslikavanje koje prolazi put do haosa sa udvostručavanjem perioda. Pretpostavimo da su promenljive definisane tako da se period-2 krug javlja za $x = 0$ kada je $\mu = 0$. Tada je i za x i za μ , u okolini 0, preslikavanje aproksimirano sledećom jednačinom:

$$x_{n+1} = -(1 + \mu)x_n + \alpha x_n^2 + \dots$$

jer je sopstvena vrednost -1 u tački bifurkacije. Zanemarićemo sve članove višeg reda po x i μ , pa će naši rezultati biti samo približni. Bez gubitka u opštosti, pretpostavimo da je $\alpha = 1$ i zamenimo $x \rightarrow x/\alpha$. U ovom slučaju, lokalno, naše preslikavanje ima oblik:

$$x_{n+1} = -(1 + \mu)x_n + x_n^2 + \dots \quad (10.4)$$

Ideja se sastoji u sledećem: za $\mu > 0$, postoje period-2 tačke, na primer p i q . Kako se μ povećava, p i q će na kraju udvostručiti period. Kada se ovo dogodi, dinamika funkcije f^2 u okolini p će neminovno biti aproksimirana preslikavanjem istog algebarskog oblika kao (10.4), pošto sva preslikavanja imaju ovaj oblik u okolini bifurkacije sa udvostručavanjem perioda. Naš cilj je da nađemo preslikavanje upravljajući se dinamikom f^2 u okolini p , i da je renormalizujemo kako bi izgledala poput jednačine (10.4). Ovo definiše iteraciju renormalizacije, što za uzvrat vodi do predviđanja vrednosti α i δ .

Prvo, nalazimo p i q . Po definiciji period-2, p je preslikano u q i q u p . Stoga, (10.4) daje:

$$p = -(1 + \mu)q + q^2, \quad q = -(1 + \mu)p + p^2.$$

Rešenja ovog sistema su:

$$p = \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 + 4\mu}}{2}, \quad q = \frac{\mu - \sqrt{\mu^2 + 4\mu}}{2}.$$

Sada pomeramo koordinatni početak u p , i posmatramo lokalnu dinamiku. Neka je:

$$f(x) = -(1 + \mu)x + x^2.$$

Onda je p fiksna tačka funkcije f^2 . Razvijamo $p + \eta_{n+1} = f^2(p + \eta_n)$ u red po malom parametru η_n . Nakon malo algebre (Vežbanje 10.7.10) i zanemarivanjem članova višeg reda kao i obično, dobijamo:

$$\eta_{n+1} = (1 - 4\mu - \mu^2)\eta_n + C\eta_n^2 + \dots \quad (10.5)$$

gde je:

$$C = 4\mu + \mu^2 - 3\sqrt{\mu^2 + 4\mu}. \quad (10.6)$$

Kao što smo nagovestili, η -preslikavanje (10.5) ima isti algebarsko oblik kao originalno preslikvanje (10.4)! Možemo renormalizovati (10.5) u (10.4) dajući η drugu razmeru i definišući novo η . Potreba za oba ova koraka već je bila predviđena u uvodnoj verziji renormalizacije, o čemu je već diskutovano. Moramo da skaliramo glavnu promenljivu η i da pomerimo bifurkacioni parametar μ .

Da bismo promenili razmeru η , pretpostavimo da je $\tilde{x}_n = C\eta_n$. Tada (10.5) postaje:

$$\tilde{x}_{n+1} = (1 - 4\mu - \mu^2)\tilde{x}_n + \tilde{x}_n^2 + \dots \quad (10.7)$$

Ovo se, skoro savršeno, poklapa sa (10.4). Sve što preostaje je da definišemo novi parametar $\tilde{\mu}$ sa $-(1 + \tilde{\mu}) = (1 - 4\mu - \mu^2)$. Tada (10.7) postaje:

$$\tilde{x}_{n+1} = -(1 + \tilde{\mu})\tilde{x}_n + \tilde{x}_n^2 + \dots \quad (10.8)$$

gde je renormalizovani parametar μ dat sa:

$$\tilde{\mu} = \mu^2 + 4\mu - 2. \quad (10.9)$$

Kada je $\tilde{\mu} = 0$, renormalizovano preslikavanje (10.8) prolazi kroz flip bifurkaciju. Ekvivalentno, 2-krug za pvobitno preslikavanje gubi stabilnost i stvara 4-krug. Ovo nas dovodi do kraja prvog udvostručavanja perioda.

Fraktali

Haos je samo red koji čeka da bude dešifrovan.

Hose Saramago (2001) Duplo.

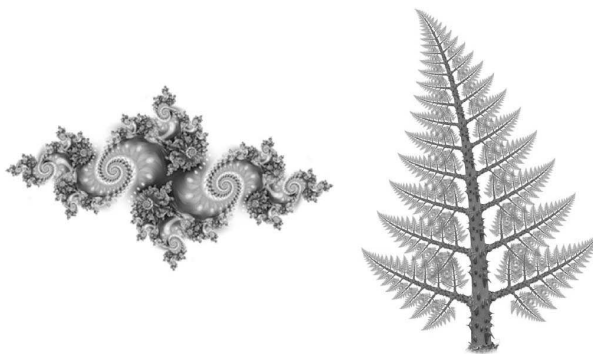
11.1 Uvod

"...Fraktalna geometrija će promeniti vaše viđenje stvari. Opasno je nastaviti sa čitanjem! Rizikujete da poljuljate svoje shvatanje o strukturi oblaka, šuma, galaksija, lišća, pera, cvetova, stena, planina, tepiha, i mnogih drugih stvari. Ako nastavite sa čtanjem, nikada se nećete vratiti interpretaciji ovih stvari, za koju ste mislili do sada da je pouzdana..."

Ovako Majkl Barnsli, čuveni britanski matematičar, započinje svoju, sada već kultnu knjigu "Fraktali su svuda"¹. Nakon pojavljivanja Mandelbrotovog kapitalnog dela "Fraktalna geometrija prirode" (1982), matematika i prirodne nauke doživljavaju korenite promene. Fraktalna geometrija predstavlja, pre svega, novi matematički jezik, koji se odupire do sada uvreženom euklidskom shvatanju prirode oko nas, u obliku linija, kružnica, sfere, i dr. Fraktali su zapravo algoritmi koji se tek pomoću modernih brzih računara preobražavaju u forme i strukture. Ukoliko ovladamo tim jezikom, možemo opisati formu oblaka jednako precizno i jednostavno kao što arhitekta opisuje zgradu jezikom tradicionalne (euklidske) geometrije.

¹Fractals everywhere, 1988.g

Sušтина Mandelbrotove poruke je da mnoge prirodne strukture, prividno beskonačne složenosti (oblaci, planine, obalske linije, tektonski rasedi, sistemi krvnih sudova, i dr.) poseduju geometrijsku invarijantnost i razmeru (skaluu) koja se može matematički primereno opisati svojom fraktalnom dimenzijom. Drugim rečima, veliki broj prirodnih pojava zapravo predstavlja fraktale, koji važe za, možda, najsluženije i najlepše objekte ikada viđene u matematici. Ovo "bizarno" carstvo formi, struktura i dubina, prividno su u "grotesknoj" suprotnosti prema jednostavnim pravilima koja ih proizvode. Najfascinantnije svojstvo fraktala je njegova samosličnost - možemo ga interpretirati kao likovni leksikon beskonačno mnogo algoritama. Ovakve strukture je bilo moguće generisati i uočiti tek sa pojavom modernih brzih računara. Mnoštvo čudnih i ponekad zastrašujućih oblika može se generisati iz prilično jednostavnih sistema (sl. 11.1).



Slika 11.1: Primeri fraktala.

Možda nije slučajna izrazita ljupkost, povremena divljina i punoća asocijacija koje se javljaju pri posmatranju slika na računaru. Možda je sve to izraz njihovog naslućenog, ali ne i shvaćenog sklada sa oblikujućim načelima prirode, kojima i ljudski mozak zahvaljuje svoju strukturu. Svakako, povezanost prirode, umetnosti i nauke postoji, na šta je i sam Ajnštajn ukazao u jednom od svojih nadahnutih govora:

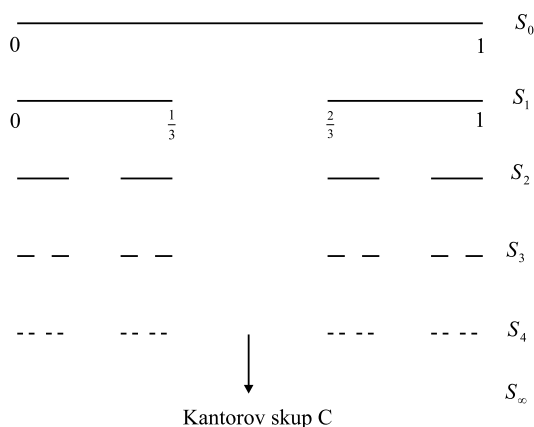
"...gde svet prestaje da bude pozornica ličnog nadanja, želja i htenja, gde se prema njemu postavljamo kao slobodna stvorenja diveći se, pitajući i posmatrajući, onde stupamo u carstvo umetnosti i nauke. Ukoliko se viđeno i doživljeno oponaša jezikom logike, tada se bavimo naukom. Ukoliko viđeno predstavimo oblicima, čiji su odnosi svesnom mišljenju nedovoljni, ali intuitivno shvaćeni kao smisleni, onda se bavimo umetnošću. I umetnost i

nauka predstavlja tu tada ljubavnu predanost onome što je iznad ličnog, što je daleko od volje... ”

U tom smislu, slike i njihova matematička pozadina upadljivo lepim načinom dokazuju da su eksperimentalna i teorijska matematika stupile u novu simbiotičku fazu. Štaviše, sada je i potpunom laiku sasvim jasno da su matematika i estetika u najtešnjoj vezi. Fraktali sada pokazuju svetove koji su donedavno bili dostupni samo razumu matematičara. Primeri fraktala prikazani na slici 11.1, u neku ruku ilustruju tezu Armanda Borela da je matematika izuzetno složeno stvaranje koje ima mnoge bitne zajedničke crte sa umetnošću, sa ekperimentalnim i teorijskim prirodnim naukama, tako da se mora istovremeno posmatrati kao sve tri oblasti, a takođe, i razlikovati od sve tri.

11.2 Kantorov skup

Jedan od najjednostavnijih primera fraktala predstavlja Kantorov skup. Da bismo konstruisali ovaj skup, počimo od zatvorenog intervala $S_0 = [0, 1]$, podelimo ga na tri dela i uklonimo njegov otvoreni srednji interval (srednju trećinu). Na taj način, dobijamo par zatvorenih intervala, označenih sa S_1 (sl. 11.2). U sledećem koraku, uklanjamo otvorene srednje trećine dva nova intervala, pa dobijamo parove zatvorenih intervala, označenih sa S_2 , itd. Granični skup $C = S_\infty$ je **Kantorov skup**, koji se sastoji od beskonačnog broja infinitezimalnih delova, razdvojenih ”prazninama” različitih veličina (sl. 11.2).



Slika 11.2: Konstrukcija Kantorovog skupa.

Svojstva Kantorovog skupa C su:

- C pokazuje strukturu na proizvoljno malim delovima. Svakim uveličavanjem dela skupa C , i dalje uočavamo skup zatvorenih intervala, razdvojenih prazninama različitih veličina. Ovo svojstvo fraktala naziva se **samosličnost**.
- Dimenzija skupa C nije ceo broj. Kao što ćemo kasnije pokazati, njegova dimenzija je zapravo $\ln 2 / \ln 3 \approx 0,63$.
- Skup C ima nultu meru, u smislu da može biti prekriven intervalima, čija je ukupna dužina proizvoljno mala (videti zadatak 56, na str. 529).
- Skup C je neprebrojiv.

Napomenimo da nemaju svi geometrijski objekti fraktalna svojstva. Tako, ukoliko posmatramo glatku krivu ili površ, nakon više ponovljenih uvećavanja, slika postaje sve nejasnija, odnosno ovi geometrijski objekti ne pokazuju fraktalna (samoslična) svojstva.

Naglasimo, takođe, da je "stroga" samosličnost Kantorovog skupa odlika samo najjednostavnijih fraktala. Većina fraktalnih objekata ima samo "približno" svojstvo samosličnosti.

11.2.1 Kantorova funkcija

Teorema 5 *Bilo koja realna funkcija $F(x)$ na intervalu $[0, 1]$, koja je monotono rastuća i zadovoljava uslove da je $F(0) = 0$, $F(x/3) = F(x/2)$ i $F(1 - x) = 1 - F(x)$ predstavlja **Kantorovu funkciju**.*

U odnosu na Kantorov skup C , Kantorova funkcija $F(x)$ definiše se na sledeći način: ukoliko je x na C dato sa

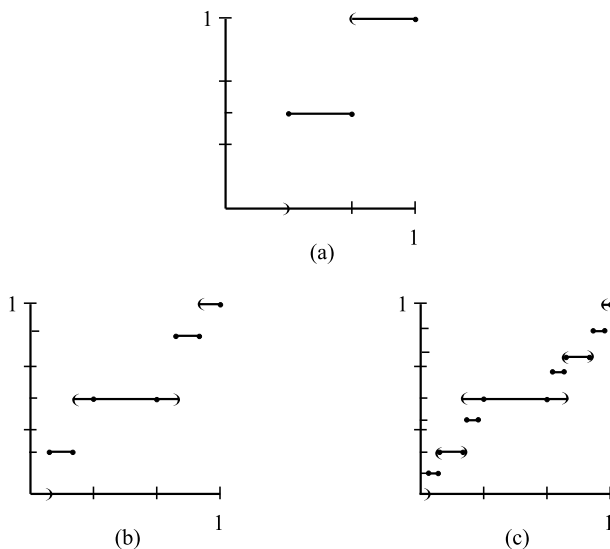
$$x = \sum_i 2 \times 3^{-n},$$

onda je $F(x)$

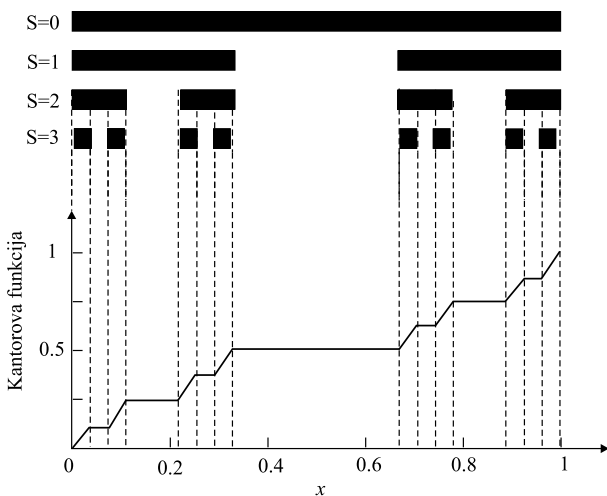
$$F(x) = \sum_i 2^{-n}.$$

Funkcija F je monotona i ima iste vrednosti na granicama svakog uklonjenog intervala u Kantorovom skupu, tako da predstavlja neprekidnu funkciju na $[0, 1]$. Drugim rečima, na intervalu $[1/3, 2/3]$, F uzima vrednost $1/2$, na intervalu $[1/9, 2/9]$ i $[7/9, 8/9]$, F uzima vrednost $1/4$ i $3/4$, redom. Na intervalima $[1/27, 2/27]$, $[7/27, 8/27]$, $[19/27, 20/27]$ i $[25/27, 26/27]$, vrednosti

funkcije F su $1/8, 3/8, 5/8$ i $7/8$, redom (sl. 11.3). Kako je F (lokalno) konstantna u nekoj okolini svake tačke na intervalu $[0, 1]/C$, $F'(x) = 0$ skoro svuda na intervalu $[0, 1]$. Nastavljajući konstrukciju funkcije F na ovaj način, kada $n \rightarrow \infty$, dobija se Kantorov skup, odnosno odgovarajuća Kantorova funkcija (sl. 11.4).



Slika 11.3: Prvih nekoliko koraka konstrukcije Kantorove funkcije.



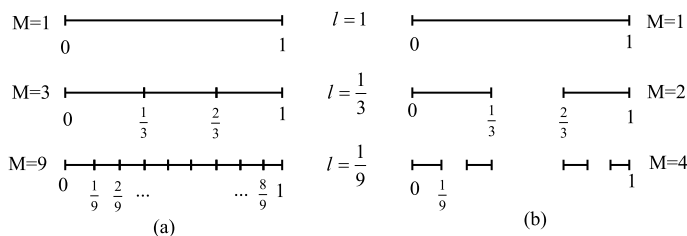
Slika 11.4: Veza Kantorovog skupa i Kantorove funkcije.

Kantorova funkcija naziva se i **Đavolje stepenice**² upravo zbog toga što, uprkos tome što je $F'(x) = 0$ skoro svuda na intervalu $[0, 1]$, funkcija neprekidno raste, što predstavlja pravo čudo! Zašto čudo? Zato što, sa stanovišta teorije verovatnoće, ono što omogućava rast Kantorove funkcije predstavlja najmanje verovatan događaj.

11.3 Pojam dimenzije i fraktalne dimenzije

Strogo matematički posmatrano, dimenzija predstavlja broj nezavisnih komponenti vektora u nekom linearnom vektorskom prostoru ili (kod dinamičkih sistema) broj nezavisnih konstanti potreban za potpuno zadavanje početnih uslova. Ovakavo shvatanje, međutim, preodređuje celobrojnost dimenzije. Logično se nameće pitanje: da li postoji geometrijski objekat čija je dimenzija predstavljena necelim brojem? Odgovor je da postoji. Posmatrajmo, na primer, proizvoljan geometrijski objekat u m -dimenzionalnom euklidskom prostoru. Pri tome, dimenzija objekta ne mora biti jednaka m - duž se lako smešta u trodimenzionalni prostor. Prekrijmo taj objekat malim m -dimenzionalnim sferama prečnika ℓ ; neka nam je za to potrebno M sfera. Broj sfera potrebnih za potpuno prekrivanje objekta zavisi od linearnih dimenzija objekta: ukoliko je ℓ manje, to je potreban veći broj sfera za prekrivanje. Ukoliko taj broj $M(\ell)$ raste kao $1/\ell^D$, kako se ℓ smanjuje, onda je Hausdorfova dimenzija posmatranog objekta data sa:

$$D = - \lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{\ln M(\ell)}{\ln \ell}.$$



Slika 11.5: Proces određivanja Hausdorfove dimenzije.

Proverimo najpre da li se ova definicija slaže sa našim intuitivnim celobrojnim predstavama. Razmotrimo duž podeljenu na N intervala, kao

²devil's staircase (eng.)

na slici 11.5; neka je, jednostavnosti radi, njena ukupna dužina ℓ . Tada je $M(\ell) \cdot \ell = 1$, odnosno $M(\ell) \approx \ell^{-1}$. Dakle, $D = 1$, saglasno našim očekivanjima. Za kvadrat jedinične površine, broj potrebnih krugova ili kvadratića za prekrivanje iznosi $M \approx (\ell^{-1})(\ell^{-1}) = (\ell^{-2})$, i $D = 2$.

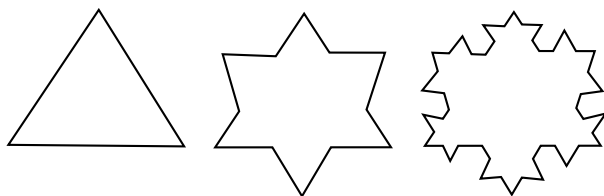
Da bismo odredili dimenziju Kantorovog skupa, po Hausdorfovom postupku, potrebno je utvrditi na koji način se menja broj kružića (ili malih duži) $M(\ell)$ potrebnih za prekrivanje odsečaka u funkciji njihovog prečnika ℓ , pa zatim pustiti da ℓ teži nuli. Vidi se da je na svakom koraku konstrukcije $M = 2^m$ i $\ell = (1/3)^m$, pa je:

$$D = -\lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{\ln 2^m}{\ln (1/3)^m} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,631.$$

Geometrijska dimenzija Kantorovog skupa manja je od 1. Kantorov skup, međutim, nije ekvivalentan nekom skupu izolovanih tačaka: prebrojiv skup tačaka ima dimenziju 0. Kantorov skup ima neku finu strukturu koja se ponavlja i izvire iz osnovnog motiva sve finijeg isecanja intervala iz jedinične duži. Drugim rečima, Kantorov skup predstavlja ono što ostane od jedinične duži kada se odstrani beskonačno mnogo isečaka. Kantorov skup, međutim, nema dužinu; njegova dužina je 0. To se lako uočava ukoliko se saberu svi intervali koji su iz njega isečeni:

$$L = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots = \frac{1}{3} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^m = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1.$$

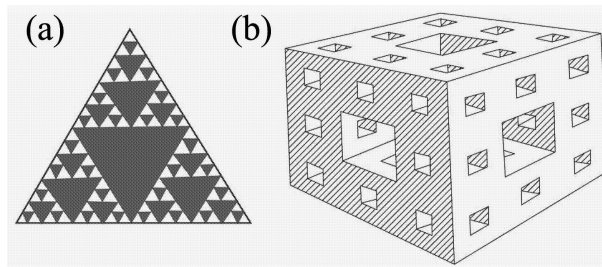
Ovaj zaključak i nije iznenađujući ukoliko se ima u vidu da ni kriva nema površinu, niti kvadrat zapreminu. Na sličan način moguće je konstruisati krivu čija je dimenzija veća od 1 (sl. 11.6).



Slika 11.6: Konstrukcija krive Kohove ("pahuljice").

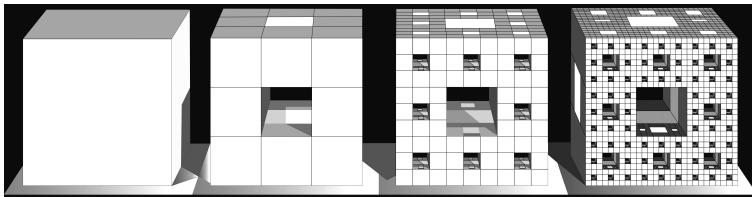
Iz načina konstrukcije proizilazi da se u svakom koraku broj stranica trouglova povećava po zakonu $M = 4^m$, dok dužina svake stranice opada po zakonu $\ell = (1/3)^m$. Prema tome, dimenzija ove fraktalne krive je $D = \ln 4 / \ln 3 \approx 1,262$. Ova kriva naziva se **kriva Kohove**. Na ovom primeru

lepo se uočava osnovno svojstvo fraktala - njihova invarijantnost u odnosu na promenu razmere posmatranja. Naime, po prirodi konstrukcije, bilo koja stranica trougla od 0 do 1 izgledaće isto kao i njen deo od 0 do $1/3$, ukoliko se ovaj uveliča trostruko. Slika 11.7a prikazuje **trougao Sierpinskog**, a slika 11.7b **Mengerov sunder**. Fraktalna dimenzija trougla je $\ln 3 / \ln 2 \approx 1,585$, a sundera $D = \ln 20 / \ln 3 \approx 2,727$.



Slika 11.7: (a) Trougao Sierpinskog. (b) Mengerov sunder.

11.3.1 Konstrukcija Mengerovog sundera



Slika 11.8: Konstrukcija Mengerovog sundera; (a) Početna kocka; (b) Mengerov sunder nivoa 1; (c) Mengerov sunder nivoa 2; (d) Mengerov sunder nivoa 3.

korak 1. Pođimo od kocke proizvoljne dužine ivice (sl. 11.8a).

korak 2. Podelimo svaku stranu kocke na 9 jednakih kvadrata, kao kod Rubikove kocke. Na taj način, početna kocka je podeljena na 27 malih kocki iste veličine.

korak 3. Uklonimo male 3 "kvadrata" (kocke) na sredini svake strane, kao i malu kocku u sredini početne velike kocke. Na taj način, preostaje 20 malih kocki (sl. 11.8b), što predstavlja Mengerov sunder nivoa 1;

korak 4. Ponavljamo korake 2 i 3 za svaku preostalu malu kocku.

korak 5. Objekat koji nastaje kada broj ponavljanja (iteracija) $n \rightarrow \infty$, naziva se **Mengerov sunder**.

Drugom iteracijom dobijamo Mengerov sunder nivoa 2 (sl. 11.8c), trećom iteracijom - Mengerov sunder nivoa 3 (sl. 11.8d), i tako redom.

11.3.2 Konstrukcija trougla Sierpinskog

korak 1. Pođimo od trougla proizvoljne veličine (sl. 11.9a).

korak 2. Podelimo početni trougao na četiri jednaka trougla, kako je i prikazano na slici 11.9b.

korak 3. Ponavljamo korak 2 za svaki dobijeni trougao.

korak 4. Objekat koji nastaje kada broj ponavljanja (iteracija) $n \rightarrow \infty$, naziva se **trougao Sierpinskog**.



Slika 11.9: Konstrukcija trougla Sierpinskog. (a) Početni trougao; (b) I iteracija; (c) II iteracija; (d) III iteracija.

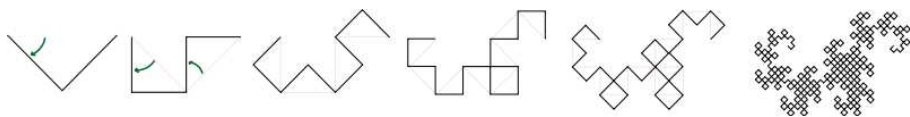
11.3.3 Zmajolika kriva

Zmajolika kriva³ dobila je ime po mitološkom biću, a konstruisala je grupa fizičara iz instituta NASA (Džona Hajveja, Brusa Benksa i Vilijama Hartera), pa se ponekad naziva i **Hajvejova kriva**. Konstrukcija krive se izvodi pomoću metode Lindenmajer sistema (sl. 11.10):

- Pođimo od dve duži, međusobno spojene pod uglom od 90° i nagnute u odnosu na horizontalu pod uglom od 45° ;
- zarotirajmo početni oblik unapred za 45° i doctrajmo isti oblik u nastavku;
- Zarotirajmo novostvoreni oblik unazad za 45° i doctrajmo isti oblik u nastavku, i tako redom.

³dragon curve (eng.)

- Kada broj iteracija $n \rightarrow \infty$, dobijamo fraktalnu krivu koja se naziva Zmajolika kriva.



Slika 11.10: Konstrukcija Zmajolike krive.

Fraktalna dimenzija granice ove krive iznosi:

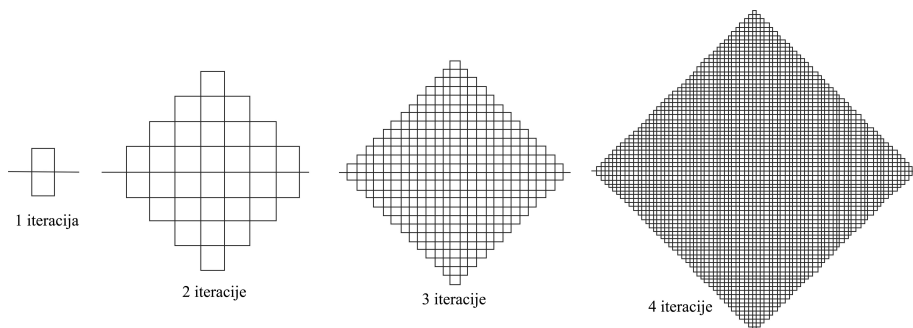
$$\log_2 \left(\frac{1 + \sqrt[3]{73 - 6\sqrt{87}} + \sqrt[3]{73 + 6\sqrt{87}}}{3} \right) \cong 1,523627086202492.$$

Peanova kriva

Peanova kriva predstavlja gustu krivu u jediničnom kvadratu, konstruisanu od strane italijanskog matematičara Peana. Konstrukcija Peanove krive izvodi se na sledeći način:

1. korak: Odaberemo jedan linijski segment;
2. korak: Ovaj linijski segmet se proširuje sa devet novih segmenata, od kojih je svaki jednak jednoj trećini početne dužine (sl. 11.11a), a potom se taj postupak dalje ponavlja (sl. 11.11b i c);
3. korak: Kada broj ponavljanja ovog postupka $n \rightarrow \infty$, dobija se kriva koju nazivamo Peanova kriva (sl. 11.11d).

Fraktalna dimenzija Peanove krive iznosi 2.



Slika 11.11: Konstrukcija Peanove krive.

11.3.4 Opštiji Kantorovi skupovi

Kantorov skup može da se dobije i tako što se početni interval, umesto na tri, podeli na pet jednakih delova. Zatim se obriše drugi i četvrti podinterval, a onda ponovimo čitav proces beskonačni broj puta (sl. 11.12). Ovaj granični skup nazivamo **Kantorov skup parnih petina**, pošto se parne petine uklanjaju u svakoj fazi. Slično, prethodno razmatrani (standardni) Kantorov skup često se naziva **Kantorov skup srednjih trećina**.



Slika 11.12: Kantorov skup parnih petina.

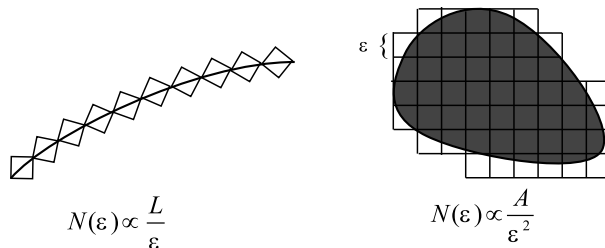
Zatvoreni skup S naziva se **topološki Kantorov skup** ukoliko ima sledeća svojstva:

- Skup S je "potpuno nepovezan". Ovo znači da S ne sadrži povezane podskupove (izuzev pojedinačnih tačaka). U tom smislu, sve tačke u S su razdvojene jedna od druge. Za Kantorov skup srednjih trećina i druge podskupove realne linije, ovaj uslov prosto kaže da S ne sadrži nikakve intervale.
- Skup S ne sadrži "izolovane tačke". Ovo znači da za svaku tačku u skupu S postoji susedna tačka, koja je u njenoj proizvoljnoj okolini. Drugim rečima, ukoliko posmatramo bilo koju tačku $p \in S$ i bilo koje malo rastojanje $\varepsilon > 0$, postoji neka druga tačka $q \in S$ takva da je $\|p - q\| < \varepsilon$.

11.4 Dimenzija objekta

Da bismo izučavali fraktale koji nemaju samoslična svojstva, moramo dalje da uopštimo, do sada korišćen, pojam **dimenzije**. Obično se ova dimenzija određuje "merenjem u razmeri ε ". Drugim rečima, dimenzija posmatranog skupa se određuje tako što se zanemaruju nepravilnosti u veličini koje su manje od ε , a potom se posmatra njena promena kada $\varepsilon \rightarrow 0$.

Jedan postupak određivanja dimenzije podrazumeva prekrivanje skupa ćelijama (kvadratima u 2D, kockama u 3D, itd.) veličine ε (sl. 11.13).



Slika 11.13: Prekrivanje skupa ćelijama.

Neka je S podskup D -dimenzionalnog Euklidskog prostora, i neka je $N(\varepsilon)$ minimalni broj D -dimenzionalnih kocki stranice ε potrebnih za pokrivanje skupa S . Kako $N(\varepsilon)$ zavisi od ε ? Da bismo dobili odgovor na ovo pitanje, posmatrajmo skupove prikazane na slici 11.13. Za glatku krivu dužine L , $N(\varepsilon) \propto L/\varepsilon$; za površ A , ograničenu glatkom krivom, $N(\varepsilon) \propto A/\varepsilon^2$. Uočimo da je dimenzija skupa jednaka eksponentu d u eksponencijalnom zakonu⁴ $N(\varepsilon) \propto 1/\varepsilon^d$. Ova zakonitost važi za većinu fraktalnih skupova S , s tim što d više nije ceo broj. Veličina d obično se naziva **kapacitet** ili **dimenzija objekta** skupa S . Ekvivalentna definicija je:

$$d = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)},$$

ukoliko granična vrednost postoji.

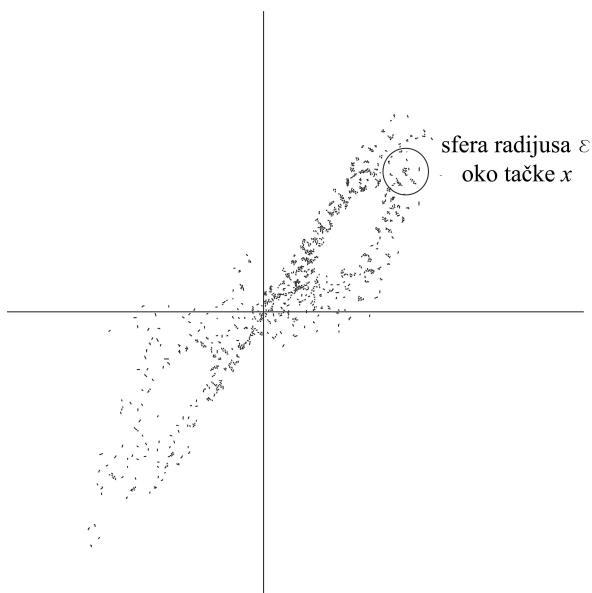
11.4.1 Tačkaste i korelacione dimenzije

Pretpostavimo, sada, da istražujemo haotični sistem koji se ustaljuje na stranom atraktoru u faznom prostoru. Pod uslovom da strani atraktori imaju, obično, fraktalnu mikrostrukturu, kako možemo proceniti njihovu fraktalnu dimenziju?

Formirajmo, najpre, skup tačaka $\{\mathbf{x}_i\}$, $i = 1, \dots, n$ na atraktoru koji se dobija "razvojem" sistema u dužem vremenskom intervalu (nakon odbacivanja tranzijenata). Sada, nakon formiranja skupa, možemo da odredimo fraktalnu dimenziju stranog atraktora njegovim prekrivanjem dovoljnim brojem ćelija (2D). Međutim, fraktalna dimenzija stranih atraktora, zbog složenosti, teško se određuje na ovaj način. Umesto dimenzije objekta obično se određuje korelaciona dimenzija, primenom Grasberger - Prokačia algoritma, koji se sastoji u sledećem. Fiksirajmo tačku \mathbf{x} na atraktoru A . Neka

⁴power law (eng.)

$N_x(\varepsilon)$ označava broj tačkica na A unutar sfere radijusa ε oko tačke \mathbf{x} (sl. 11.14). Najveći deo tačkica u sferi potiče iz kasnijih delova, za koje se samo slučajno dogodilo da prolaze blizu tačke \mathbf{x} . Prema tome, $N_x(\varepsilon)$ meri koliko često tipična trajektorija posećuje ε -okolinu tačke \mathbf{x} .



Slika 11.14: Sfera, radijusa ε , sa centrom u tački \mathbf{x} , na stranom atraktoru.

Varirajmo, sada, vrednost ε . Kako ε raste, broj tačkica u sferi tipično raste po eksponencijalnom zakonu:

$$N_x(\varepsilon) \propto \varepsilon^d,$$

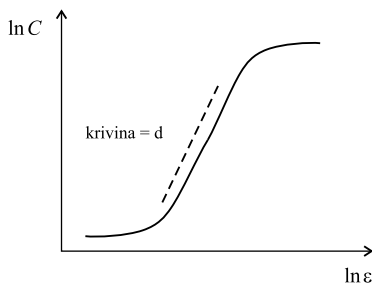
gde se d naziva **tačkasta dimenzija** u \mathbf{x} . Vrednost tačkaste dimenzije može značajno da zavisi od \mathbf{x} . Drugim rečima, biće manja u "razređenim" delovima atraktora. Da bismo odredili ukupnu dimenziju atraktora A , odredimo srednju vrednost $N_x(\varepsilon)$ za veći broj tačkica \mathbf{x} . Rezultujuća veličina $C(\varepsilon)$ menja se po eksponencijalnom zakonu

$$C(\varepsilon) \propto \varepsilon^d,$$

gde se d naziva **korelaciona dimenzija**.

Korelaciona dimenzija uzima u obzir gustinu tačkica na atraktoru, pa se razlikuje od dimenzije objekta, koja daje "težinu" svim zauzetim ćelijama podjednako, bez obzira na to koliko tačkica sadrže. U opštem slučaju, korelaciona dimenzija je manja od dimenzije objekta ($d_{\text{korelacija}} \leq d_{\text{objekta}}$).

Da bismo procenili veličinu dimenzije d , nacrtajmo grafik $C(\varepsilon) - \varepsilon$ u logaritamskoj razmeri. Ukoliko bi relacija $C(\varepsilon) \propto \varepsilon^d$ bila tačna za svako ε , dobili bismo pravu liniju nagiba d , što, u praksi, važi samo za srednje vrednosti ε (sl. 11.15).



Slika 11.15: Grafik $C(\varepsilon) - \varepsilon$ u logaritamskoj razmeri.

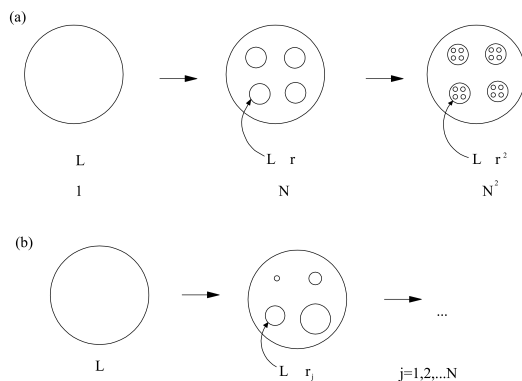
Kriva "saturira" za veliku vrednost ε , jer ε -sfere obuhvataju ceo atraktor, tako da $N_x(\varepsilon)$ ne može dalje da se povećava. S druge strane, za veoma malo ε , jedina tačka u svakoj ε -sferi je tačka \mathbf{x} . Prema tome, očekuje se da eksponencijalna zakonitost važi samo za srednje vrednosti ε :

(minimalno razdvajanje tačaka na atraktoru A) $\ll \varepsilon \ll$ (prečnik A).

11.5 Multifraktali

Za atraktor logističkog preslikavanja, zadatak 62 na str. 531, skaliranje u različitim koracima se razlikuje, za razliku od Kantorovog skupa srednjih trećina, gde postoji uniformno skaliranje ($\frac{1}{3}$). Prema tome, ne možemo potpuno da okarakterišemo atraktor logističkog preslikavanja njegovom dimenzijom, ili bilo kojim drugim brojem. Potrebna nam je neka vrsta funkcije distribucije koja nam govori kako dimenzija varira na atraktoru. Skupovi ovog tipa se nazivaju **multifraktali**.

Pokazalo se da su za pravilno shvatanje turbulencije, sa njenim karakterističnim haosom u svim razmerama (skalama), vrlo korisni fraktali koji u konstrukciji takođe zahtevaju više skala - multifraktali. Razlika između fraktala na jednoj skali i fraktala na više skala najlakše se uočava na slici 11.16.



Slika 11.16: Razlika između fraktala i multifraktala. (a) Konstrukcija fraktala; (b) Konstrukcija multifraktala.

Kod običnih fraktala počinje se od jednog objekta veličine L , pa se on podeli na M identičnih delova od kojih je svaki umanjena kopija početnog objekta veličine Lr ($r < 1$). U sledećem koraku na svakom od umanjenih objekata ponavlja se isti postupak: kreira se novih M kopija veličine Lr^2 , tako da ih ukupno ima M^2 , itd. Osnovna razlika između običnih fraktala i multifraktala sastoji se u tome što se u prvom koraku konstrukcije kod multifraktala stvara M kopija početnog objekta, ali različite veličine Lr_j ($r_j < 1$, $j = 1, \dots, M$).

Razlika u konstrukciji povlači razliku u definiciji fraktalne dimenzije. Neka je $M_j(\varepsilon)$ broj ćelija potrebnih za prekrivanje dela j fraktala, koji je verna kopija celog fraktala umanjenog za faktor r_j . Ukupan broj ćelija potrebnih za prekrivanje celokupnog fraktala tada je:

$$M(\varepsilon) = \sum_{j=1}^M M_j(\varepsilon),$$

a iz relacije samosličnosti sledi:

$$M_j(\varepsilon) = M \left(\frac{\varepsilon}{r_j} \right).$$

Konačno, dobijamo formulu za dimenziju multifraktala:

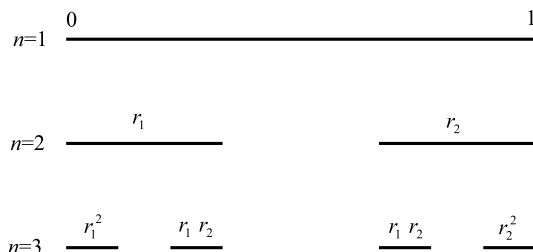
$$\sum_{j=1}^M r_j^{D_0} = 1.$$

U slučaju kada je $r_1 = r_2 = \dots = r_M = r$ dobija se formula za dimenziju fraktala:

$$D_0 = -\frac{\ln M}{\ln r}.$$

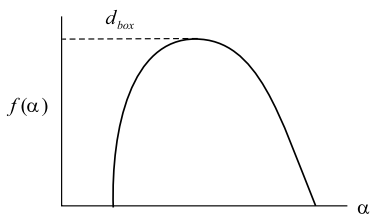
Jednostavan primer multifraktala je Kantorov skup sa dve skale (sl. 11.19). Početni interval dužine ℓ zamenjuje se sa dva intervala dužine r_1 i r_2 ($r_1 + r_2 < \ell$). U sledećem koraku svaki od intervala deli se na isti način i procedura se ponavlja beskonačni broj puta. Tada je opšta formula za dimenziju

$$r_1^{D_0} + r_2^{D_0} = 1.$$



Slika 11.17: Kantorov skup na dve skale. Povećavanje broja i dužine segmenata kod ovog bifraktala prati pravilo stepenovanja binoma.

Pojam tačkaste dimenzije nam omogućava da kvantifikujemo lokalne promene u skaliranju. Pod uslovom da je poznat multifraktal A , neka je S_α podskup od A koji se sastoji od svih tačkaka sa tačkastom dimenzijom α . Svaki S_α je sam po sebi fraktal, tako da ima smisla odrediti njegovu "veličinu" korišćenjem njegove fraktalne dimenzije. Neka $f(\alpha)$ označava dimenziju S_α . Onda se $f(\alpha)$ naziva **multifraktalni spektar** od A ili **spektar skalirajućih indeksa** [120].

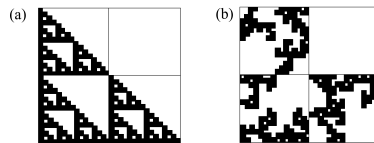


Slika 11.18: Tipičan oblik $f(\alpha)$.

Grubo govoreći, multifraktale možemo smatrati isprepletanim skupovima fraktala različitih dimenzija α , gde $f(\alpha)$ određuje njihove relativne težine. Tipičan oblik $f(\alpha)$ prikazan je na slici 11.18. Maksimalna vrednost $f(\alpha)$ predstavlja dimenziju objekta [120].

11.6 Slučajni fraktali

Od fraktala sa jednom skalom i multifraktala, lako se prelazi na tzv. **slučajne fraktale**, koji se dobijaju kada se u inače deterministički pravilne konstrukcije fraktala uvede slučajnost (sl. 11.19). U prvom koraku konstrukcije determinističkog fraktala na slici 11.19a eliminiše se gornji desni kvadrat velikog kvadrata. Zatim se ista procedura ponavlja na svakom od preostala tri kvadrata. Posle četiri koraka dobija se objekat na slici 11.19a. Kod objekta na slici 11.19b primenjeno je isto pravilo eliminacije jednog od četiri kvadrata, ali nije uvek eliminisan gornji desni kvadrat, već nasumično izabrani jedan kvadrat.



Slika 11.19: (a) Deterministički fraktal; (b) Slučajni fraktal. Geometrijska dimenzija oba fraktala je ista, $D_0 = \ln 3 / \ln 2$.

Glava 12

Strani atraktori

Dva puta su me pitali: "Je li, gospodine Bebidž, ukoliko u vašu mašinu ubacite pogrešne slike, da li će na drugom kraju izaći tačni odgovori?"

Čarls Bebidž (1791-1871),
američki matematičar, prvi
konstruktor računara.

12.1 Uvod

Strani atraktori imaju dva naizgled kontradiktorna svojstva. Trajektorije na atraktoru kreću se u ograničenom delu faznog prostora, ali se istovremeno međusobno razdvajaju eksponencijalno brzo (bar u početku). Postavlja se logično pitanje: kako je moguće da trajektorije divergiraju beskonačno dugo, a da su i dalje ograničene?

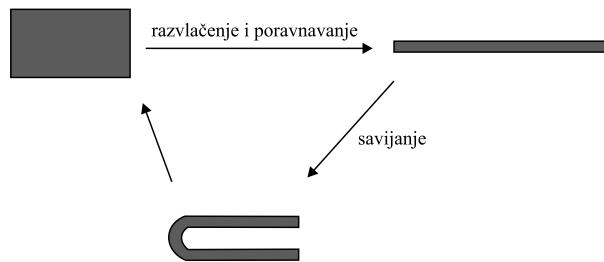
Osnovni mehanizam, koji ovo omogućava, podrazumeva ponavljano istežanje i savijanje. Posmatrajmo malu oblast početnih uslova u faznom prostoru (sl. 12.1).



Slika 12.1: Postupak istežanja i savijanja.

Strani atraktor tipično se javlja kada se mala oblast početnih uslova sažima, u skladu sa jednačinama kretanja, duž pojedinih pravaca (disipacija sistema), a isteže duž drugih pravaca (osetljivost na početne uslove). Istezanje ne može trajati beskonačno dugo - rastegnuta oblast mora biti presavijena, kako bi ostala u ograničenom delu faznog prostora.

Da bismo ilustrovali efekte izvlačenja i savijanja, razmotrimo jedan tipičan primer, sa kojim se svakodnevno susrećemo. Na slici 12.2 prikazan je proces pravljenja kolača.

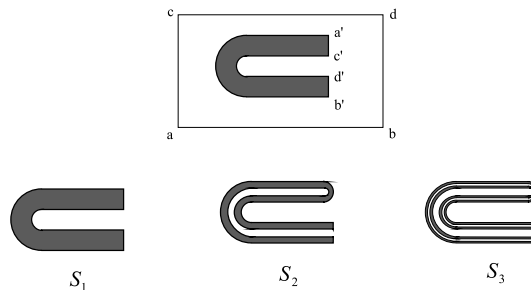


Slika 12.2: Pravljenje kolača - istezanje i savijanje.

Testo se razvlači i poravnava, a onda se savija, pa se potom opet razvlači, i tako dalje. Nakon mnogo ponavljanja, konačni proizvod je pahuljasta, višeslojna struktura - kulinarski analog fraktalnog atraktora.

Ovim postupkom, stvara se osetljivost sistema na male promene početnih uslova. Da bismo ovo ilustrovali, pretpostavimo da je kapljica boje za hranu stavljena u testo, predstavljajući na taj način malu oblast početnih uslova. Nakon mnogo iteracija istezanja i savijanja, boja će se proširiti preko celog testa.

Na slici 12.3 prikazano je ovo preslikavanje, modelovano kao neprekidno preslikavanje praovugaonika u samog sebe.



Slika 12.3: "Potkovičasto" preslikavanje praovugaonika u samog sebe.

Pravougaonik $abcd$ se poravnava, isteže i savija u oblik potkovice $a'b'c'd'$ (oblast S_1). Na isti način, oblast S_1 poravnava se, isteže se i savija u oblast S_2 , i tako dalje. Kako prelazimo iz jedne faze u drugu, slojevi postaju sve tanji i ima ih, svaki put, duplo više.

Pokušajmo, sada, da zamislimo granični skup S_∞ . Sastoji se od beskonačno mnogo glatkih slojeva, razdvojenih prazninama različitih veličina. U stvari, vertikalni presek kroz sredinu S_∞ bi bio sličan Kantorovom skupu! Stoga, može da se kaže, da je S_∞ (lokalno) "proizvod" glatke krive sa Kantorovim skupom. Fraktalna struktura atraktora je posledica istežanja i savijanja, koje je na prvom mestu i dovelo do nastanka skupa S_∞ .

Transformacija prikazana na slici 12.3 obično se naziva **potkovičasto preslikavanje**, ali se ovde, umesto tog naziva, koristi pojam "preslikavanje kolača", jer može dovesti do zabune sa drugim potkovičastim preslikavanjem (**Smejlova potkoviča**), koje ima sasvim drugačija svojstva. Naime, Smejlovo potkovičasto preslikavanje nema strani atraktor. Njegov invarijantni skup više podseća na "strano sedlo" ([?], [9]).

12.1.1 Značaj disipacije

Za $a < \frac{1}{2}$, pekarsko preslikavanje (vidi zad.63, na str. 532) smanjuje oblasti u faznom prostoru. Uzimajući bilo koju oblast kvadrata (pekarsko preslikavanje),

$$\text{površina } (B(R)) < \text{površina } (R).$$

Ovaj rezultat sledi iz elementarne geometrije. Pekarsko preslikavanje izdužuje R 2 puta i poravnava ga a puta, tako da je njegova površina $(B(R)) = 2a \times \text{površina } (R)$. Pošto je $a < \frac{1}{2}$ po pretpostavci, površina $(B(R)) < \text{površina } (R)$ kako je i traženo.

Smanjivanje površine je analogno smanjenju zapremine do kojeg smo došli za Lorencove jednačine u Poglavlju 9. Istaknimo, da kao i u tom slučaju, atraktor A , za pekarsko preslikavanje, mora da ima nultu površinu. Takođe, pekarsko preslikavanje ne može da ima odbojnu fiksnu tačku, pošto bi takve tačke "proširile" elemente površine u njihovoj okolini.

Nasuprot tome, kada je $a = \frac{1}{2}$, pekarsko preslikavanje očuvava površinu, pa je površina $(B(R)) = \text{površina } (R)$. Kvadrat S preslikava se u samog sebe, bez praznina između traka. Preslikavanje ima kvalitativno drugačiju dinamiku u ovom slučaju. Tranzijenti nikad ne opadaju - orbite se "mešaju" beskonačno dugo u kvadratu, ali se nikada ne ustaljuju na niže dimenzionalnom atraktoru. Ovo je tip haotičnog ponašanja, sa kakvim se do sada nismo sreli.

Ukoliko preslikavanje ili tok smanjuju zapremine u faznom prostoru, onda se takvi sistemi nazivaju **disipativni**, i oni se obično javljaju kao modeli sistema koji uključuju trenje, viskoznost, ili neki drugi disipativni proces. Nasuprot tome, preslikavanja koja očuvavaju površine odnose se na konzervativne sisteme, kao što su Hamiltonovi sistemi klasične mehanike.

Suštinska razlika, između ova dva preslikavanja je u tome što preslikavanja sa očuvavanjem površina ne mogu imati atraktore (strane ili bilo koje druge). Po definiciji, atraktor bi trebalo da privlači sve orbite koje polaze iz dovoljno malog otvorenog skupa, što je u suprotnosti sa zahtevom za očuvanjem površine.

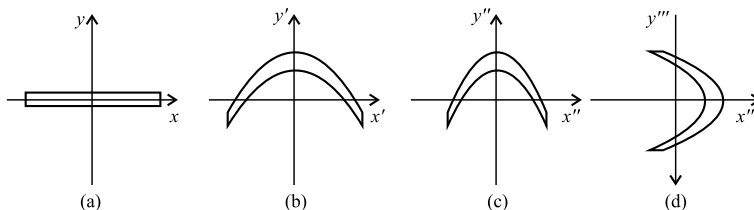
12.2 Enoovo preslikavanje

Enoovo preslikavanje¹ dato je sa:

$$x_{n+1} = y_n + 1 - ax_n^2, \quad y_{n+1} = bx_n,$$

gde su a i b parametri. Eno (1976) je formulisao ovo preslikavanje, tako što je, umesto da posmatra Lorencov sistem direktno, tražio preslikavanje koje bi obuhvatilo njegova osnovna svojstva, ali sa promenljivom količinom disipacije. Eno je izabrao preslikavanja umesto diferencijalnih jednačina, jer su preslikavanja brža za simulaciju i njihova rešenja mogu se pratiti tačnije i u dužem periodu vremena.

Da bi simulirao istezanje i savijanje, koje se javlja u Lorencovom sistemu, razmatrao je sledeći niz transformacija (sl. 12.4).



Slika 12.4: Enoovo preslikavanje.

Počnimo sa pravougaonom oblasti izduženom duž x -ose (sl. 12.4a). Istegnimo i presavijmo pravougaonik primenjujući transformaciju:

$$T' : x' = x, \quad y' = 1 + y - ax^2.$$

¹Hénon map (eng.)

Naglasimo da, u ovom slučaju, 'prim' označava iteraciju, a ne diferenciranje. Donja i gornja strana pravougaonika preslikavaju se u parabole (sl. 12.4b). Parametar a "kontrolise" savijanje. Zatim, dalje savijamo oblast sužavajući oblast na slici 12.4b, duž x -ose:

$$T'' = x'' = bx', \quad y'' = y'$$

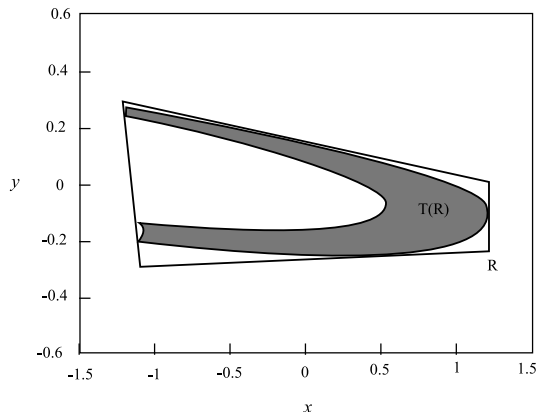
gde je $-1 < b < 1$ (sl. 12.4c). Poslednji korak transformacije je zamena x sa y i obrnuto (sl. 12.4d):

$$T''' : x''' = y'', \quad y''' = x''.$$

Složena transformacija $T = T'''T''T'$ predstavlja Enoovo preslikavanje (12.2), gde koristimo oznake (x_n, y_n) za (x, y) i (x_{n+1}, y_{n+1}) za (x''', y''') .

Elementarna svojstva Enoovog preslikavanja

- Enoovo preslikavanje je invertibilno (povratno). Ovo svojstvo je posledica da u Lorencovom sistemu postoji jedinstvena trajektorija kroz svaku tačku u faznom prostoru. Drugim rečima, svaka tačka ima "jedinstvenu prošlost". U ovom smislu, Enoovo preslikavanje je superiornije u odnosu na logističko preslikavanje. Logističko preslikavanje isteže i presavija jedinični interval, ali nije invertibilno.
- Enoovo preslikavanje je disipativno. Ono smanjuje površine, i to istom brzinom svuda u faznom prostoru. Ovo svojstvo je analogno konstantnoj negativnoj divergenciji u Lorencovom sistemu.
- Za izvesne vrednosti parametara, Enoovo preslikavanje ima zatvorenu oblast. Drugim rečima, postoji oblast R , koja se preslikava u samu sebe (sl. 12.5). Kao i u Lorencovom sistemu, strani atraktor je "zarobljen" u zatvorenoj oblasti.



Slika 12.5: Zatvorena oblast R , kod Enoovog preslikavanja.

- Pojedine trajektorije Enoovog preslikavanja "beže" u beskonačnost. Ovo svojstvo naglašava važnu razliku između Enoovog preslikavanja i Lorencovog sistema. Naime, sve trajektorije u Lorencovom sistemu su ograničene, odnosno ostaju unutar izvesnog velikog elipsoida. Naglasimo, da nije iznenađujuće da Enoovo preslikavanje ima neke neograničene trajektorije. Daleko od koordinatnog početka, kvadratni član u (12.2) dominira i odbija orbite u beskonačnost. Slično ponašanje se pojavljuje i u logističkom preslikavanju - prisetimo se da orbite koje počinju izvan jediničnog intervala na kraju postaju neograničene.

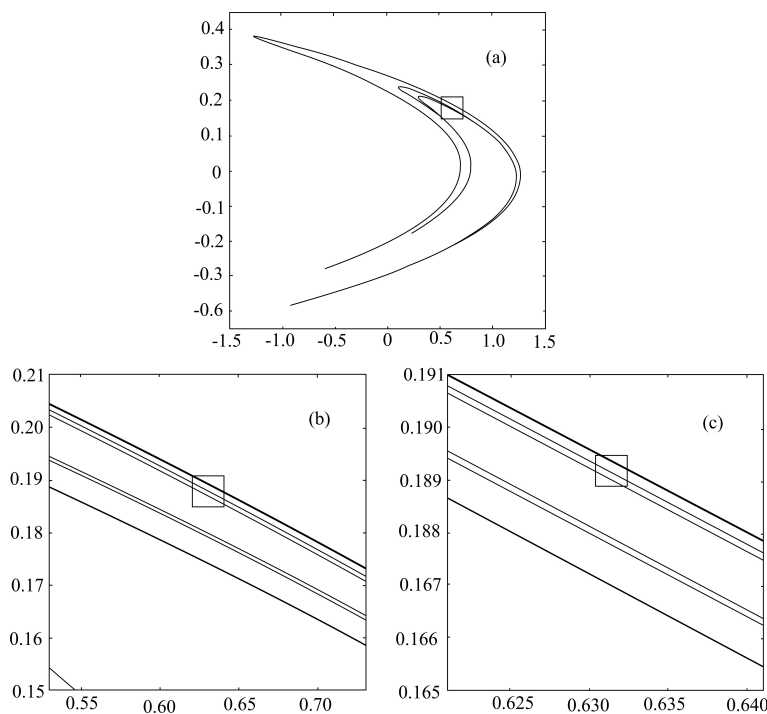
12.2.1 Biranje parametara

Sledeći korak u preslikavanju predstavlja izbor pogodnih vrednosti parametara. Vrednost parametra b ne bi trebalo da bude blizu nule, jer će, u suprotnom, smanjenje površine biti preveliko i fina struktura atraktora neće biti uočljiva. U slučaju da je vrednost parametra b prevelika, savijanje neće biti dovoljno izraženo. Prisetimo se da parametar b ima dvostruku ulogu: kontroliše disipaciju i proizvodi dodatno savijanje pri prelazu iz oblika na slici 12.4b u oblik na slici 12.4c. Dobar izbor je $b = 0,3$.

S druge strane, ukoliko je vrednost parametra a premala ili prevelika, sve trajektorije "beže" u beskonačnost. U ovim slučajevima ne postoji atraktor (ovo podseća na logističko preslikavanje, gde skoro sve trajektorije "beže" u beskonačnost, sem za $0 \leq r \leq 4$). Za srednje vrednosti parametra a , trajektorije ili "beže" u beskonačnost ili prilaze atraktoru, zavisno od početnih uslova. Kako se vrednost parametra a povećava u intervalu srednjih vrednosti, atraktor se menja od stabilne fiksne tačke do stabilnog ciklusa perioda

2. U ovom slučaju, sa povećanjem a , dolazi do pojave haotičnog ponašanja kroz scenario sa udvostručavanjem perioda, koji je "prošaran" periodičnim prozorima. Eno je odabrao $a = 1,4$, što je vrednost parametra za koju je sistem u "haotičnoj" oblasti.

Usvajanjem vrednosti parametara $a = 1,4$ i $b = 0,3$, i nakon 10 000 sukcesivnih iteracija, sistema (12.2), počevši od koordinatnog početka, atraktor ima oblik bumeranga i sačinjen je od velikog broja međusobno paralelnih krivih (sl. 12.6a).



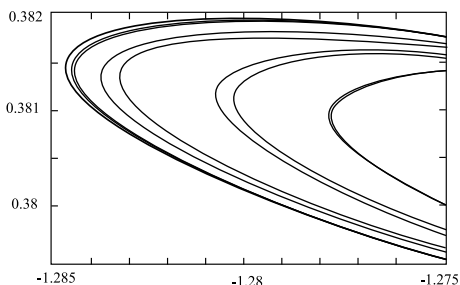
Slika 12.6: Atraktor Enoovog preslikavanja.

Na slici 12.6b prikazan je uvećani deo atraktora sa slike 12.6a. Može se uočiti karakteristična fina struktura atraktora. Na prvi pogled se čini da postoji šest paralelnih krivih - usamljena kriva na sredini slike, zatim dve blisko postavljene krive iznad i još tri iznad njih. Međutim, ukoliko uveličamo ove tri krive (sl. 12.6c), postaje jasno da postoji, u stvari, šest krivih, grupisanih tačno kao u prethodnom slučaju! I ove krive su takođe sastavljene od "tanjih" krivih po istom principu, i tako dalje. Ova samosličnost, kao bitna osobina fraktala, zapaža se i u proizvoljno malom području posmatranja.

Enoov atraktor, prikazan na slici 12.6, sličan je Kantorovom skupu u

poprečnom pravcu, ali je gladak u podužnom pravcu. Ovo važi jer je atraktor blisko povezan sa lokalno glatkim objektom - nestabilnom mnogostrukošću sedlaste tačke, koja se nalazi na ivici atraktora. Može se pokazati da atraktor predstavlja završetak dela nestabilne mnogostrukosti [26].

Istaknimo jednu zanimljivost. Hobson je pokazao da neka uvećanja, manje poznatih delova Enoovog atraktora, podsećaju na Saturnove prstenove (sl. 12.7).



Slika 12.7: Uvećani delovi Enoovog atraktora, nalik na Saturnove prstenove.

12.3 Reslerov sistem

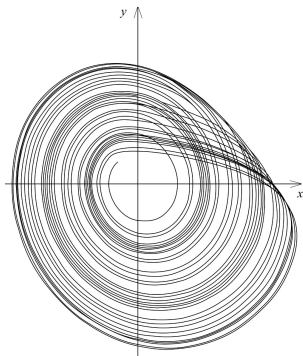
Resler (1976.), inspirisan pekarskim preslikavanjem, predložio je sledeći sistem, u želji da nađe još jednostavniji "haotični" sistem, od Lorencovog:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= b + z(x - c)\end{aligned}$$

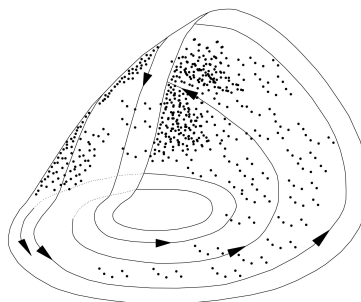
Kao što se vidi, Reslerov sistem ima samo jedan nelinearni član xz .

Numeričkim simulacijama, može da se pokaže da ovaj sistem ima strani atraktor za $a = b = 0, 2$, $c = 5, 7$ (sl. 12.8).

Na slici 12.9 dat je shematski prikaz atraktora Reslerovog sistema. Sa ove slike jasno se vidi da se susedne trajektorije razdvajaju tako što se, u obliku spirale, kreću ka spoljašnjosti ("istežanje"), a zatim se preklapaju bez presecanja, tako što idu u treću dimenziju ("savijanje") i potom se vraćaju nazad blizu njihovih početnih položaja ("reinjektiranje"). Na osnovu ovog, vidi se zašto su tri dimenzije potrebne da bi sistem bio haotičan.

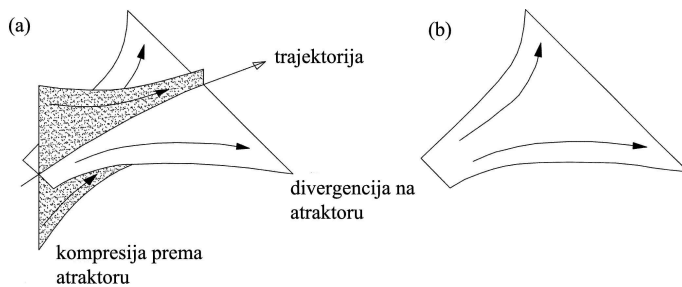


Slika 12.8: Strani atraktor, Reslerovog sistema, za $a = b = 0, 2, c = 5, 7$.



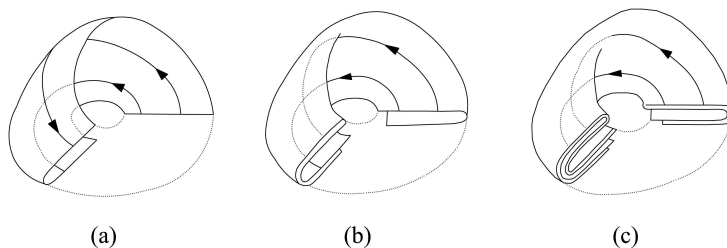
Slika 12.9: Shematski prikaz atraktora Reslerovog sistema.

Na slici 12.10a prikazan je tok u okolini tipične trajektorije. Duž jednog pravca dolazi do "sažimanja" trajektorija, prema atraktoru, dok u drugom, dolazi do "istezanja" trajektorija duž atraktora (sl. 12.10b).

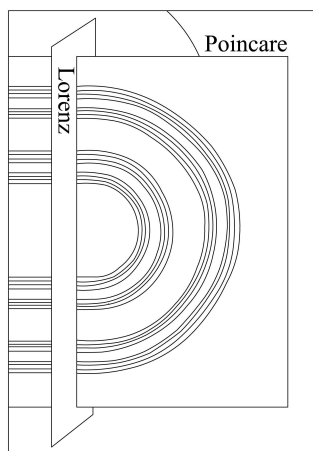


Slika 12.10: "Sažimanje" i "istezanje" trajektorije, Reslerovog sistema.

Višestrukim istežanjem i presavijanjem, atraktor zadobija, svaki put, složeniji oblik (12.11).



Slika 12.11: Višestruko istežanje i presavijanje.



Slika 12.12: Preseci atraktora Reslerovog sistema.

Na slici 12.12 prikazan je Poenkareov presek atraktora Reslerovog sistema. Ukoliko ovaj presek, u sledećem koraku, presećemo normalnom ravni, uočavamo da se atraktor sastoji od beskonačnog skupa tačaka, razdvojenih prazninama različitih veličina.

Prethodno pomenuti skup tačaka i praznina, topološki, predstavlja Kantorov skup. Kako svaka tačka, ovog skupa, odgovara jednom "sloju" atraktora, model Reslerovog atraktora, u stvari, predstavlja **Kantorov skup površi**.

Osnovne postavke nelinearne analize vremenskih serija

Do sada je naš zadatak bio lak - na osnovu postojećih diferencijalnih jednačina određenog sistema, trebalo je samo izvršiti analizu stabilnosti variranjem jednog ili više parametara. Međutim, šta ako ne postoje diferencijalne jednačine problema koji rešavamo? Ovaj slučaj je jako čest u inženjerskoj praksi, gde najčešće rapoložemo samo podacima osmatranja nekog procesa, dok sam mehanizam procesa ili nije dovoljno dobro izučen da bi bio precizno definisan, ili je mehanizam nastanka procesa toliko složen da ga nije moguće opisati relativno jednostavnim matematičkim modelima (ovde pre svega mislimo na obične diferencijalne jednačine). U tom smislu, potrebno je na osnovu podataka osmatranja suditi o dinamičkim svojstvima posmatranog procesa. Ovo je moguće primenom teorije razvijanja² ([346], [324]). Naime, podaci osmatranja su uvek vezani za jednu promenljivu, na primer pomeranje tla tokom zemljotresa u vertikalnom pravcu z . Međutim, da bi kretanje tla u potpunosti bilo definisano, potrebne su nam i vrednosti pomeranja u dva međusobna upravna horizontalna pravca x i y (sistem sa tri stepena slobode). Kako onda da izvršimo analizu stabilnosti ako kretanje nije potpuno definisano? Ključ leži u činjenici da su sve promenljive determinističkog dinamičkog sistema suštinski povezane, odnosno utiču jedna na drugu. Posledica ove tvrdnje je sledeća: ako je u vremenskom trenutku

²delay embedding theorem (eng). U domaćoj literaturi uobičajen je termin "teorema o potapanju".

t samo vrednost promenljive z poznata, onda sledeća izmerena vrednost z u vremenskom trenutku $t + \tau$ mora implicitno sadržati određenu količinu informacije i o promenljivama x i y . Nastavljajući merenje promenljive z u vremenskim trenucima $t + 2\tau$, $t + 3\tau$, ..., mi istovremeno prikupljamo informacije i o drugim dvema promenljivama, x i y . Zapravo, ukoliko vremenski interval τ pravilno odaberemo, onda su podaci o vrednosti promenljive z dovoljni, i možemo vrednosti promenljive z u vremenskim trenucima $t + \tau$ i $t + 2\tau$ koristiti kao zamenu za promenljive x i y . Iako ova tvrdnja može na prvi pogled delovati "prestrogo", ipak postoji strog matematički dokaz koji potvrđuje njenu tačnost [324]. Naš konačni cilj je da, primenom ove tehnike, izvršimo rekonstrukciju faznog prostora početnog sistema, i to razvijanjem samo postojeće skalarne vremenske serije z . Da bismo to uradili, neophodno je da najpre odredimo minimalnu dimenziju i optimalni vremenski interval razvijanja³. Minimalna dimenzija razvijanja se određuje najčešće tehnikom "prividno najbliže vrednosti"⁴, kada dve početno bliske vrednosti promenljive, moraju ostati bliske nakon izvršenog razvijanja. Drugim rečima, dve udaljene vrednosti promenljive pre razvijanja ne smeju postati bliske nakon izvršene rekonstrukcije, jer bi to ukazivalo na činjenicu da skalarne vremenske serija nije u potpunosti razvijena. Shodno tome, ova metoda omogućuje određivanje minimalne dimenzije razvijanja, koja predstavlja onu vrednost za koju je procenat prividno najbližih vrednosti blizak nuli. S druge strane, optimalni vremenski interval razvijanja određuje se primenom metode "uzajamne informacije"⁵. Naime, uzajamna informacija kvantifikuje količinu podataka o promenljivoj $x_{t+\tau}$ pod uslovom da je poznata vrednost x_t . Smatra se da prvi lokalni minimum funkcije uzajamne informacije predstavlja optimalni vremenski interval razvijanja, imajući u vidu činjenicu da u tom slučaju $x_{t+\tau}$ dodaje najveću količinu informacija onome što već znamo na osnovu vrednosti promenljive x_t , bez potpunog gubitka korelacije između te dve vrednosti. Izračunavanjem minimalne dimenzije i optimalnog vremenskog intervala razvijanja, sada smo u mogućnosti da konstruišemo razvijeni fazni prostor početne skalarne vremenske serije z . U tom prostoru dalje možemo sprovesti deterministički test (radi ispitivanja determinističnosti izučavanog procesa) i test stacionarnosti (radi ispitivanja stacionarnosti procesa), koji su potrebni uslovi da bi izučavani sistem pokazivao deterministički haotično ponašanje. U ovom odeljku nećemo davati opis ovih metoda, čime bismo si-

³minimum embedding dimension and optimal embedding delay (eng.)

⁴false nearest neighbour method (eng.)

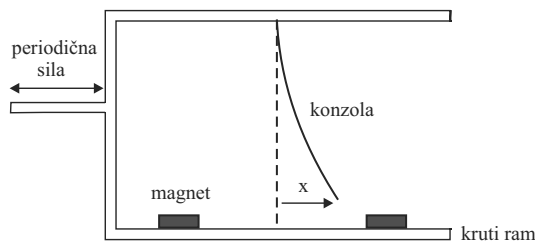
⁵mutual information method (eng.)

gurno izašli iz okvira ovog udžbenika. Takođe, moguće je pristupiti izračunavanju maksimalnog Ljapunovljevog eksponenta, korelacione dimenzije, entropije Kolmogorova, i dr. Odličan uvod u oblast nelinearne analize predstavlja članak M. Perca [246], objavljen u časopisu "Fizika A". Naglasimo da su ove metode već primenjivane u izučavanju registrovanih vremenskih serija oscilovanja tla, pri zemljotresu [160], i vibracija tla izazvanih miniranjima [164].

Potreban je čitav niz statističkih testova da bi se pokazalo da je izmerena vremenska serija posledica nelinearnog determinističkog haotičnog procesa, koji se nalazi u "pozadini". Međutim, mogućnost rekonstrukcije atraktora iz skalarne nelinearne vremenske serije samo jedne promenljive impresionirala je mnoge istraživače, uključujući i samog Edvarda Lorenca, jednog od pionira u oblasti teorije haosa.

12.4 Bistabilnost magnetno-elastičnog mehaničkog sistema

Mun i Holms [204] istraživali su mehanički sistem prikazan na slici 12.13.



Slika 12.13: Magneto-elastični mehanički sistem.

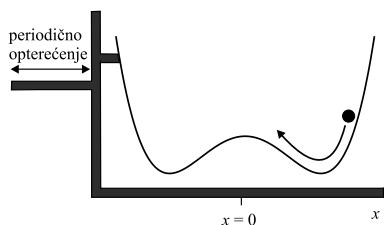
Vitka čelična konzola spojena je sa krutim ramom. Dva stalna magneti u osnovi rama privlače konzolu u suprotnim smerovima. Magneti su tako jaki da se greda savija ka jednoj ili drugoj strani (obe konfiguracije su lokalno stabilne). Ova savijena stanja razdvojena su energetsom barijerom koja odgovara nestabilnoj ravnoteži u kojoj je konzola prava i uravnotežena na pola puta između magneti.

Da bismo pokrenuli sistem iz njegove stabilne ravnoteže, čitavu aparaturu pomeramo sa jedne strane na drugu, koristeći generator elektromagnetskih oscilacija. Za slabo delovanje sile, konzola osciluje neznatno blizu jednog ili drugog magneti, ali kako se delovanje sile polako povećava, u jednom trenutku konzola počinje da se kreće nepravilno napred-nazad, poput biča.

Neppravilno kretanje se održava i može biti trajati satima, čak i za desetine hiljada ciklusa.

12.5 Oscilator sa "dve jame" pod dejstvom prinudne sile

Magnetno-elastični sistem predstavnik je široke klase bistabilnih sistema, pod dejstvom prinudne sile. Jednostavniji sistem za vizuelizaciju predstavljen je kretanjem čestice, pod dejstvom sile u dvostrukoj potencijalnoj jami (sl. 12.14). Ovde dve jame su analogne savijenim stanjima grede, razdvojenim "grbom" za $x = 0$.



Slika 12.14: Kretanje čestice, pod dejstvom sile u dvostrukoj potencijalnoj jami.

Haotično ponašanje, u ovom sistemu, može se očekivati kada čestica ima dovoljno energije da se prebaci preko vrha "grbe", a delovanje prinudne sile i trenje su uravnoteženi, tako da održavaju sistem u ovom nestabilnom stanju. Tada čestica može jednom pasti na jednu, drugi put na drugu stranu, zavisno od trenutka delovanja sile.

Mun i Holms [204] modelovali su magnetno-elastični sistem pomoću jednačine

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} - x + x^3 = F \cos \omega t, \quad (12.1)$$

gde je $\delta > 0$ konstanta prigušenja, F je prinudna sila, a ω frekvencija prinudne sile. Ove veličine su bezdimenzionalne. Jednačina (12.1) predstavlja II Njutnov zakon, za česticu u dvostrukoj potencijalnoj jami, čiji je potencijal oblika $V(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2$.

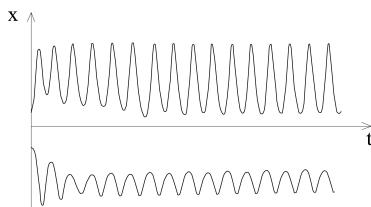
Možemo pokazati numeričkim simulacijama da sistem predstavljen jednačinom (12.1), ima nekoliko stabilnih graničnih ciklusa, za $F = 0, 18$. U svim simulacijama, vrednosti parametara δ i ω smatramo konstantnim:

$$\delta = 0, 25, \quad \omega = 1,$$

dok variramo vrednost sile F .

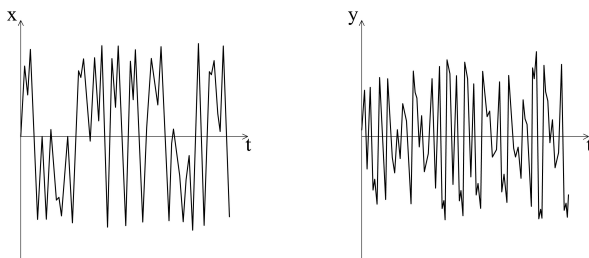
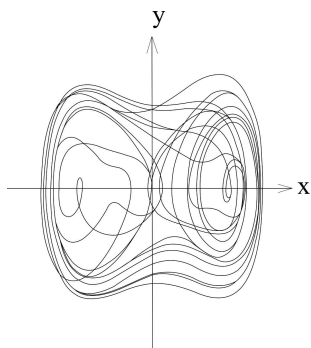
Dobijena vremenska serija $x(t)$ prikazana je na slici 12.15.

Rešenja konvergiraju ka periodičnim rešenjima. Osim ova dva granična ciklusa, postoje još najmanje dva (granična ciklusa). U fizičkom smislu, sva ova rešenja odgovaraju oscilacijama čestice u jednoj jami.

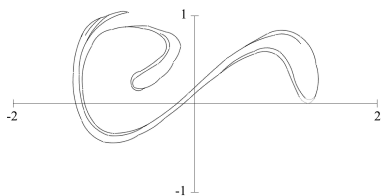
Slika 12.15: Vremenska serija $x(t)$.

Oredimo, sada, $x(t)$ i brzinu $y(t) = \dot{x}(t)$, za $F = 0,40$ i početne uslove $(x_0, y_0) = (0, 0)$, a zatim nacrtajmo grafik, u koordinatnom sistemu xy .

Aperiodično ponašanje promenljivih $x(t)$ i $y(t)$ (sl. 12.16) ukazuje na to da je sistem haotičan, barem za ove početne uslove. Primetimo da x menja znak u više navrata - čestica prelazi preko "grbe" u nekoliko navrata, što je i očekivano za delovanje "jake" sile.

Slika 12.16: Vremenske serije $x(t)$ i $y(t)$.Slika 12.17: Grafik u koordinatnom sistemu xy .

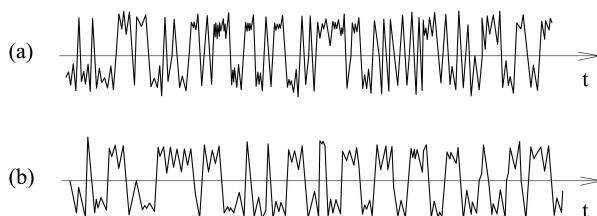
Grafik u koordinatnom sistemu xy , prikazan je na slici 12.17. Primetimo da ovaj grafik nije "stvarni" fazni portret, jer je sistem neautonoman. Drugim rečima, stanje sistema određeno je sa (x, y, t) , a ne samo sa (x, y) . Prema tome, grafik na slici 12.17 bi trebalo posmatrati kao dvodimenzionalnu projekciju trodimenzionalne trajektorije. Naglasimo da su ovakvi "zamršeni" grafici, tipični za neautonomne sisteme.



Slika 12.18: Poenkareov presek sistema.

Jasniju predstavu o dinamici sistema dobijamo na osnovu Poenkareovog preseka (sl. 12.18), koji se dobija crtanjem tačaka $(x(t), y(t))$ kad god je t celi umnožak od 2π . U fizičkom smislu, kao da "osvetljavamo" sistem u istoj fazi za svaki ciklus (stroboskopski efekat).

Uočimo, sada, da se "zamršena" slika "raspetljava" sama - tačke padaju na fraktalni skup, koji predstavlja strani atraktor, za sistem (12.1). Uzastopne tačke $(x(t), y(t))$ "skaču" nepravilno po atraktoru, a sistem pokazuje osetljivost na male promene početnih uslova, što je i očekivano.



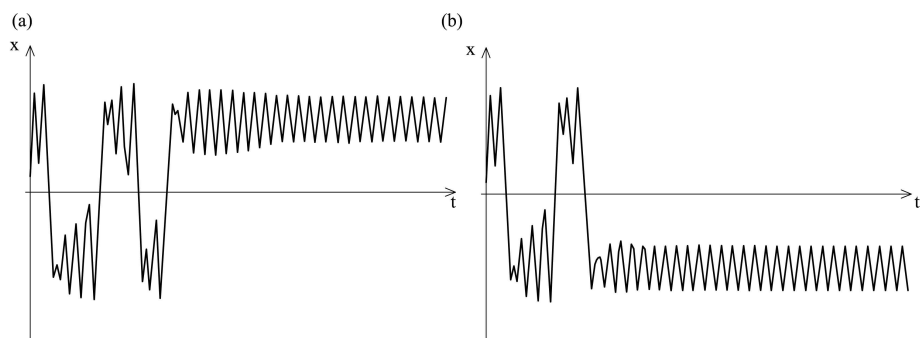
Slika 12.19: Poenkareov presek stranog atraktora.

12.5.1 Tranzijentni haos

Čak i u slučaju da sistem (12.1) nema strane atraktore, i dalje može pokazivati "haotičnu" dinamiku [205]. Na primer, razmotrimo režim u kojem dva ili više stabilnih graničnih ciklusa koegzistiraju. Tada može da dođe do pojave **tranzijentnog haosa**, pre nego što se sistem "ustali". Štaviše, konačno stanje je osetljivo na malu promenu početnih uslova [109].

Možemo pokazati da za $F = 0,25$, u sistemu (12.1) postoje dve susedne trajektorije, koje pokazuju tranzijentno haotično ponašanje, pre nego što konačno konvergiraju ka različitim periodičnim atraktorima.

Za početne uslove $(x_0, y_0) = (0, 2; 0, 1)$ vremenska serija $x(t)$ prikazana je na slici 12.20a. Nakon tranzijentnog haosa, rešenje se približava periodičnom stanju za koje je $x > 0$. U fizičkom smislu, ovo rešenje opisuje česticu koja se kreće napred-nazad preko "grbe", nekoliko puta, pre nego što se "ustali" u obliku malih oscilacija na dnu jame na desnoj strani. Međutim, ukoliko promenimo x_0 od 0,2, neznatno ka 0,195, čestica na kraju osciluje u levoj jami (sl. 12.20b).



Slika 12.20: Vremenska serija $x(t)$ za: a) $(x_0, y_0) = (0, 2; 0, 1)$ b) $(x_0, y_0) = (0, 195, 0, 1)$.

Deo II

Primena

Glava 13

Modelovanje saobraćajnog toka

*"This ain't no technological
breakdown... Oh no, this is the
road to Hell".*

(Kris Ria, odlomak iz pesme
"Road to Hell" (1989)
posvećena tada novoizgrađenoj
obilaznici oko Londona)

13.1 Uvod

Istraživački interes za oblast saobraćajne dinamike je iznenađujuće star. Grinšilds¹ je još 1935. godine razmatrao kretanje vozila u saobraćaju, a već pedesetih godina dvadesetog veka, u vezi sa ovom temom postojao je znatan broj štampanih članaka u referentnim naučnim časopisima koji se bave operacionim istraživanjima i inženjerstvom (tehnikom). U ovim člancima uveden je pojam **osnovnog dijagrama**, (fundamentalnog dijagrama) koji predstavlja vezu između saobraćajnog toka i gustine vozila na putu, kao i pojam **nestabilnosti saobraćajnog toka**, pojmovi koji su i danas važni. Motivacija za takve studije bila je očigledna, jer, kako je Grinberg pisao 1959. god.: "Obim drumskog saobraćaja u poslednjih nekoliko godina znatno je prevazišao kapacitete nacionalnih autoputeva. Potreba

¹Greenshields

za razumevanjem dinamike saobraćajnog toka i potreba za matematičkim opisom ovog procesa znatno su povećane” [113].

U Evropi, vreme koje vozači provedu u automobilima, zaglavljani u saovrećajnom toku, iznosi nekoliko dana svake godine. Za vreme godišnjih odmora, saobraćajne kolone, gde se vozila kreću po obrascu ”kreni-stani”, mogu narasti i do 100 km dužine. Emisija gasova SO_2 , NO_2 , CO , CO_2 iz izduvnih cevi vozila, čestice prašine, smog i buka dostigli su (ili prestigli) nivo do kojih stiže industrijska proizvodnja i veoma su štetni za životnu sredinu. Svaki drugi vozač, u proseku, tokom života učestvuje u ozbiljnom saobraćajnom udesu. Finansijska šteta prouzrokovana saobraćajem, zbog udesa i uticaja na životnu sredinu, samo u Nemačkoj, procenjuje se na oko 100 milijardi dolara godišnje. Ekonomski gubitak zbog zagušenja saobraćaja približava se prethodno pomenutom iznosu. Uprkos tome, opseg drumskog saobraćaja i dalje raste zbog povećane potrebe za mobilnošću i moderne logistike.

Bez ikakve sumnje, efikasan transportni sistem je od suštinske važnosti za funkcionisanje i uspeh modernih industrijalizovanih društava. Dani kada su auto-putevi (freeways) bili ”slobodni putevi” (free ways) su, međutim prošli. Povećani problemi drumskog saobraćaja postavili su sledeća pitanja:

- da li je održivo i javno prihvatljivo, i dalje proširivati infrastrukturu?
- Da li će vozači i dalje kupovati automobile, ako se ulice, u suštini, pretvore u parkirališta?

Automobilske kompanije, zabrinute za svoje tržište u budućnosti, troše značajne količine novca na istraživanju saobraćajne dinamike na to kako da se postojeća infrastruktura efikasnije iskoristi korišćenjem novih tehnologija.

Fizičari su se, takođe, bavili problemima saobraćajne dinamike. Mada među matematičarima, fizičarima i teorijskim hemičarima postoje ”pioniri”, začetnici istraživanja u ovoj oblasti, kao što su Vitam, Prigožin, Montrol i Kune, primarna istraživanja počela su 1992. i 1993. god. istraživačkim člancima ihama [29], Nagela i Šrekenberga [219] i Knera i Konhauzera [150]. Ovi članci bili su začetak prave lavine publikacija u različitim međunarodnim časopisima iz fizike. Od tada, zbog velikog obima publikovanog materijala i raznovrsnosti primenjenih metoda, postalo je veoma teško pratiti sve nove istraživačke rezultate [126].

Pristup fizičara obično se znatno razlikuje od pristupa saobraćajnog inženjera. Fizičar želi da razvije saobraćajni model koji uključuje samo najbitnije sastojke koji su apsolutno neophodni za opis **opštih svojstava** tipičnog realnog saobraćaja. Teorijska analiza i kompjuterske simulacije ovih

modela ne samo da omogućavaju duboki uvid u svojstva modela već, takođe, pomažu u boljem razumevanju kompleksnih (složenih) pojava uočenih u realnom saobraćaju.

Postoje dva različita konceptualna okvira za modelovanje saobraćaja. U "grubo-zrnastom"² opisu zasnovanom na dinamici fluida, saobraćaj se sastoji od vozila, ali se ova pojedinačna vozila ne pojavljuju eksplicitno u teoriji (ovi modeli nazivaju se "makroskopski modeli"). Suprotno tome, u tzv. "mikroskopskim modelima" drumskog saobraćaja, pažnja se eksplicitno fokusira na pojedinačna vozila od kojih je svako predstavljeno "česticom", a priroda interakcija između ovih čestica određena je načinom na koji vozila utiču na kretanje drugih vozila u saobraćaju. Drugim rečima, "mikroskopske" teorije drumskog saobraćaja razmatraju se kao sistemi interagirajućih čestica daleko od ravnoteže.

13.2 Osnovna i praktična pitanja

Jedan od ciljeva nauke o saobraćaju je da se odrede **osnovni zakoni** koji upravljaju saobraćajnim sistemima. Glavni zadaci saobraćajnog inženjerstva sastoje se u planiranju, oblikovanju i realizaciji saobraćajnih mreža i saobraćajnih kontrolnih sistema. Fizičari su doprineli nauci o saobraćaju tako što su razvijali saobraćajne modele i izvodili opšte zaključke o osnovnim principima koji upravljaju saobraćajnim fenomenima. U analizi saobraćajnih modela korišćeni su metode nelinearne dinamike i statističke fizike. Korišćenjem ovih modela i odgovarajućih metoda njihove analize, teorijski fizičari su odredili nekoliko veličina koje mogu naći praktičnu primenu u saobraćajnom inženjerstvu. Finansijski teret koji bitno opterećuje budžet država današnjice, može biti značajno umanjen novim doprinosima u oblasti saobraćajnog inženjerstva.

13.2.1 Neka osnovna pitanja

Dinamičke faze sistema koji se kreću daleko od ravnoteže su kopije stabilnih faza sistema u ravnoteži. Neka od osnovnih pitanja povezana sa prirodom ovih faza su:

- 1) koje su to različite dinamičke faze saobraćaja? Da li saobraćaj pokazuje faznu koegzistenciju, fazne prelaze, kritičnost ili samo-organizirajuću kritičnost, i, ako je tako, pod kojim uslovima?

²coarse-grained (eng.)

- 2) Kakva je priroda fluktuacija oko ravnotežnih stanja saobraćaja? Analogni fenomen fluktuacije oko stabilnih stanja u ravnoteži je do sada prilično dobro razjašnjen.
- 3) Ako je početno stanje razmatranog sistema daleko od njegovog ravnotežnog stanja, kako ono evoluira tokom vremena da bi stiglo do ravnotežnog stanja?
- 4) Kakvi su efekti prigušenog (stacionarnog ili vremenski zavisnog) poremećaja u vezi sa prethodno postavljenim pitanjima 1)-3)?

13.2.2 Neka praktična pitanja

Definišimo prvo neke karakteristične kvantitativne osobine drumskog saobraćaja. **Protok** J , koji se ponekad naziva još i **tok** ili **struja**, definiše se kao broj vozila koja prolaze pored detektorskog mesta u jedinici vremena. Rastojanje od određene tačke na vodećem vozilu do iste tačke na vozilu koje sledi, definiše se kao **rastojanje sleđenja**³. **Interval sleđenja** definiše se kao vremenski interval između odlazaka (ili prispeća) dva uzastopna vozila, uočeno od strane detektora smeštenog na fiksiranoj poziciji na auto-putu. Raspodele prostornih i vremenskih rastojanja su važne karakteristike saobraćajnog toka. Na primer, veće rastojanje omogućava veću sigurnost, a veći kapacitet auto-puta "zahteva" manja rastojanja među vozilima.

Postavimo sada neka pitanja koja su od praktičnog interesa u saobraćajnom inženjerstvu.

- 1) Kakav je odnos između gustine c i protoka J ? U saobraćajnom inženjerstvu, ova relacija obično je predstavljena osnovnim dijagramom.
- 2) Kakve su raspodele prostornog i vremenskog rastojanja između vozila?
- 3) Kako treba da izgledaju priključenja na auto-putu i isključenja sa auto-puta?
- 4) Da li dodatna auto traka zaista unapređuje saobraćaj?
- 5) Kakvi su efekti novog puta na karakteristike putne mreže?
- 6) Kakvu strategiju u vezi signalizacije treba usvojiti da bi se optimizovao saobraćajni tok za datu mrežu ulica i auto-puteva?
- 7) Generalisani problem trgovačkog putnika: da li je najkraći put takođe i najbrži?

³headway (eng.)

13.3 Klasifikacija modela saobraćajnog toka

Veliki broj modela saobraćajnog toka, koji postoje u naučnoj literaturi, mogu se, zavisno od matematičkog pristupa koji se primenjuje, podeliti u dve osnovne grupe:

- deterministički modeli i
- stohastički modeli.

Među determinističkim modelima, jedna "modelarska struja" "posmatra" gustinu toka i protok (fluks) kao zavisne promenljive, dok druga struja "posmatra" dinamiku individualnih vozila u saobraćajnom toku kao zavisne promenljive.

Mnoge "tehnikе" modelovanja saobraćajnog toka potiču iz oblasti dinamike fluida, termodinamike, transfera toplote i teorija granularnih materijala, koje pod određenim fizičkim pretpostavkama i u okviru određene fizičke interpretacije, vrlo uspešno predstavljaju mnoštvo fenomena dinamike saobraćajnog toka. Mnogi matematički modeli zasnovani su na ovoj "filozofiji", tj. fizičke interpretacije vode do modela koji matematički evoluiraju od jednostavnog do složenog.

13.4 Makroskopski modeli

Po analogiji sa hidrodinamičkom teorijom fluida, makroskopski modeli nastali su na osnovi fundamentalnih jednačina dinamike fluida i zbog toga se često nazivaju "fluidno-dinamičke teorije". U okviru ovog pristupa, saobraćaj se posmatra kao stišljivi fluid, a matematičko modelovanje postaje moguće "ispisivanjem" tipičnih jednačina "vezanih" za kretanje fluida, kao što je, na primer, jednačina kontinuiteta. Ovakvi modeli obično se opisuju pomoću parcijalnih diferencijalnih jednačina sa gustinom saobraćaja i saobraćajnim protokom, kao promenljivim.

13.5 Mikroskopski modeli

Modeli ovog tipa uzimaju u obzir dinamiku svakog vozila u saobraćajnom toku. Tako, interakcija između vozila postaje ključna za ove modele. Posledica toga je da saobraćajni tok postaje skup međusobno interagujućih čestica. U skladu sa ovom definicijom, neki od parametara koji se uobičajeno pojavljuju u ovakvim modelima su: brzine vozila, rastojanja između vozila,

karakteristike vozača koji upravljaju vozilima, sigurna udaljenost između vozila i efekti postojanja samo jedne ili više saobraćajnih traka.

Mikroskopske modele možemo dalje podeliti na modele:

- **sleđenja vozila,**
- **ćelijski (celularni) automati**⁴ (CA) i
- **kinetičko-teorijske.**

Naglasimo da su prostor i vreme u CA modelu diskretne veličine, a ovi modeli po svojoj prirodi nisu deterministički, već stohastički. Modelovanje korišćenjem kinetičke teorije omogućava da se povežu gasno-kinetičke teorije sa ponašanjem saobraćajnog toka.

13.5.1 Modeli sleđenja vozila

U okviru ovog "modelarskog pravca" obraća se pažnja na različite vozačke strategije. Osnovna ideja sastoji se u tome da vozači nastoje da prate susedna vozila, u nameri da održe sigurne uslove tokom vožnje. Ukratko, vozači dobijaju određeni "stimulus" koji, na primer, može biti "pogrešno" rastojanje između dva uzastopna vozila, a zatim, u skladu sa tim "stimulusom" dolazi do određenog "odgovora", koji, u krajnjem ishodu, dovodi do ubrzavanja ili usporavanja vozila. Modeli ovog tipa često se nazivaju i "**prati vođu**"⁵. Ovim modelom dobro su predstavljena pojedinačna vozila i vozači, u slučaju saobraćaja duž jedne saobraćajne trake, korišćenjem običnih diferencijalnih jednačina, ali ne i u slučaju kada postoji više saobraćajnih traka, uglavnom zbog toga što vozači, sve dok održavaju sigurnu brzinu i rastojanje u svojoj saobraćajnoj traci ne žele da je menjaju.

13.5.2 Modeli ćelijskih automata (CA)

CA modeli su definisani diskretnim jednačinama i po tome se razlikuju od modela "prati vođu". Ovi modeli su i prostorno i vremenski diskretni: prostor u kome se odvija saobraćajni tok je diskretizovan u ćelije fiksne dimenzije, a dinamika modela (i numeričke simulacije) prikazana je u diskretnim vremenskim trenucima. Određeni "ako-onda" uslovi su uvedeni da bi se predstavio realni saobraćaj i ovi uslovi se primenjuju na pojedinačna vozila posle svakog vremenskog intervala tokom kretanja vozila. CA modeli

⁴cellular-automata (eng.)

⁵follow the leader (eng.)

omogućavaju brza izračunavanja koja uključuju veliki broj vozila i vrlo su pogodni za uključivanje stohastičkih efekata prisutnih u realnom saobraćaju.

13.5.3 Kinetičko teorijski modeli

U okviru ove "teorije", modelovanje saobraćajnog toka je zasnovano na pretpostavci da se vozila ponašaju kao interagujuće čestice gasa. Da bi omogućili analizu dinamike saobraćajnog toka, jednačine gasne kinetike moraju biti prilagođene fizičkoj realnosti. Na primer, u gasno-kinetičkoj teoriji, čestice gasa "prenose" količinu kretanja (moment) jedna drugoj, tako što se međusobno sudaraju, a to sudaranje mora da se izbegne u potpunosti ukoliko, korišćenjem ovog pristupa, treba modelovati realnu dinamiku saobraćajnog toka.

13.6 Mezoskopski modeli

Ovaj tip modela se, u suštini, dobija tako što se "polazi" od mikroskopskih gasno-kinetičkih modela da bi se "stiglo" do makroskopskih modela zasnovanih na dinamici fluida. Korišćenjem ovog pristupa, jednačine kontinuiteta Navije-Stoksovog tipa izvedene su polazeći od jednačina Bolemanovog tipa. Fenomen "saobraćajnog zagušenja"⁶ je "potvrđen" korišćenjem ovog termodinamičkog pristupa.

13.6.1 Eksperimentalno-empirijsko-numerički pristup

Paralelno sa analitičkim pristupom razvijan je i eksperimentalno-numerički pristup. Glavni cilj ovog pristupa je da se ukaže na slaganje sa analitičkim rezultatima, i/ili da se razviju empirijsko-analitički modeli zasnovani na eksperimentalnim podacima.

Kompjuterske simulacije izvode se u cilju razumevanja dinamike saobraćajnog toka korišćenjem matematičkih modela. Razvijeni su mnogobrojni programski paketi u nameri da se predstavi (simulira) saobraćaj sa velikim brojem učesnika i u dugom vremenskom intervalu, zasnovani na određenom matematičkom modelu ili na kombinaciji više različitih matematičkih modela.

⁶traffic jam (eng).

13.7 Teorija drumskog saobraćaja zasnovana na dinamici fluida

Posmatran sa velikog rastojanja (iz aviona, na primer) saobraćajni tok velike gustine liči na struju fluida. Zato, po analogiji sa hidrodinamičkom teorijom fluida, makroskopska teorija saobraćajnog toka može biti razvijena posmatranjem saobraćaja kao jednodimenzionalnog stišljivog fluida (kontinuum). Obično, istraživači prihvataju konvenciju da saobraćaj teče sa leva na desno.

Pristup zasnovan na dinamici fluida omogućava potpuni matematički opis saobraćajnog toka na auto-putu korišćenjem dve jednačine, jednačine kontinuiteta

$$\frac{\partial c(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial J(x, t)}{\partial x} = 0, \quad (13.1)$$

i jednačine za brzinu, slične jednačini Navije-Stoksa

$$c \left[\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] = -D \frac{\partial c}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{c}{t_d} [v_{sig}(c) - v], \quad (13.2)$$

gde su $c(x, t)$ i $J(x, t)$ "grubo zrnasta" gustina i protok u proizvoljnom položaju x u proizvoljnom trenutku t , a D , μ i t_d fenomenološke konstante.

Treba naglasiti da se jednačina kontinuiteta svodi na jednostavni oblik (13.1) u specijalnom slučaju, kada razmatramo dati deo auto puta bez ulaza i izlaza [50].

13.8 Kinetička teorija u automobilskom saobraćaju

U kinetičkoj teoriji, saobraćaj se posmatra kao kolekcija međusobno interagujućih čestica, u gasnom stanju, gde svaka čestica reprezentuje jedno vozilo. Različite verzije kinetičke teorije kretanja vozila u saobraćaju razvijene su modifikovanjem kinetičke teorije gasova.

Podsetimo se da u kinetičkoj teoriji gasova $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d^3r d^3p$ označava broj molekula koji, u trenutku t , zauzimaju položaj unutar zapreminskog elementa d^3r oko vektora \mathbf{r} i imaju moment koji se nalazi unutar zapreminskog elementa d^3p oko \mathbf{p} , u prostoru momenata. Bolcmanova jednačina, koja opisuje vremensku evoluciju raspodele $f(x, v, t)$ data je sledećom relacijom

$$\left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla_r + \mathbf{F} \cdot \nabla_p \right] f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll},$$

gde su ∇_r i ∇_p operatori gradijenta u odnosu na \mathbf{r} i \mathbf{p} , respektivno, dok \mathbf{F} predstavlja spoljašnju silu. Član $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll}$ predstavlja brzinu promene veličine f , u odnosu na vreme, izazvanu sudarom molekula.

13.8.1 Prigožinov model

Pretpostavimo da $f(x, v, t) dx dv$ označava broj vozila, u trenutku t , između x i $x + dx$, koja imaju trenutnu brzinu između v i $v + dv$. Prigožin je [263] uveo raspodelu $f_{zel}(x, v)$ koja predstavlja matematičku idealizaciju ciljeva koje vozači zajednički nastoje da postignu. Stvarna raspodela može da odstupa od željene raspodele zbog različitih mogućih uticaja, kao što su, na primer, stanje puta, vremenski uslovi ili interakcija sa drugim vozilima. U svoja razmatranja autori su uključili i to da neki od ovih uticaja prestaju posle nekog vremena dok se interakcije sa drugim vozilima ne prekidaju. Na primer, samo kratak deo puta može biti zaleđen, a jak vetar ili kiša mogu, posle kratkog vremena da prestanu. U takvim situacijama f može da postane f_{zel} za vreme relaksacije τ_{rel} , pod uslovom da su međusobne interakcije vozila zanemarljivo male. U skladu sa ovim argumentima Prigožin je predložio da jednačina kretanja vozila u saobraćaju, analogna Bolcmanovoj jednačini, treba da ima oblik

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{rel} + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{int}$$

gde član $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{rel}$ uključuje promenu f ka f_{zel} u odsustvu međusobnih interakcija vozila, dok član $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{int}$ uključuje promenu f koja nastaje zbog međusobnih interakcija vozila.

13.8.2 Teorija "praćenja vozila"

U teorijama "praćenja vozila", za svako pojedinačno vozilo pišemo jednačinu analognu Njutnovoj jednačini za svaku pojedinačnu česticu u sistemu interagujućih čestica. U Njutnovoj mehanici, ubrzanje može biti posmatrano kao odgovor čestice na delovanje unutrašnjih i spoljašnjih sila. Zato, osnovna "filozofija" teorije "praćenja vozila" može da bude predstavljena jednačinom [odgovor] $_n \sim$ [stimulus], za n -to vozilo.

Svaki vozač može da odgovori na postojeće saobraćajne uslove samo ubrzanjem ili usporenjem vozila. Različiti oblici jednačina kretanja pojedinačnih vozila u različitim modelima "praćenja vozila" proističu iz razlika

u pretpostavkama o prirodi stimulusa, tj. da li je u pitanju "bihevioralna sila"⁷ ili "generalisana sila". Stimulus može biti funkcija brzina vozila, razlika u rastojanjima ili brzinama između određenog vozila i vozila koje mu prethodi i, zato, u opštem slučaju, možemo pisati

$$\ddot{x}_n = f_{sti}(v_n, \Delta x_n, \Delta v_n)$$

gde funkcija f_{sti} predstavlja stimulus od strane n -tog vozila.

U različitim modelima "praćenja vozila" koriste se različite verzije funkcije f_{sti} . U sledeća dva odeljka razmotrićemo dva različita konceptualna okvira za modelovanje funkcije f_{sti} .

Model "prati vođu"

U najranijim modelima praćenja vozila, razlika u brzinama n -tog i $(n+1)$ -vog vozila, usvojena je za stimulus n -tog vozila. Drugim rečima, usvojeno je da svaki vozač teži da se kreće istom brzinom kao i vozilo koje je neposredno ispred njega, tako da je

$$\ddot{x}_n(t) = \frac{1}{\tau} [\dot{x}_{n+1}(t) - \dot{x}_n(t)], \quad (13.3)$$

gde je τ parametar koji uspostavlja vremensku skalu modela. Zapazimo da član $1/\tau$ u prethodnoj jednačini može da bude interpretiran kao mera osetljivosti S vozača, odnosno pokazuje koliko brzo vozač reaguje na jedinični stimulus. U skladu sa takvim modelima (i njihovim uopštenjima predloženim pedesetih i šezdesetih godina dvadesetog veka) vozačka strategija sastoji se u tome da se prati vođa i odatle sledi zajedničko ime za ove "prati vođu" modele.

Pajps [255] je izveo jednačinu (13.3) diferenciranjem po vremenu jednačine

$$\Delta x_n(t) = (\Delta x)_{sig} + \tau \dot{x}_n(t), \quad \text{gde je } \Delta x_n(t) = x_{n+1}(t) - x_n(t)$$

i koja u sebi sadrži dve osnovne pretpostavke:

- a) što je veća brzina vozila, to treba da je veće rastojanje do vozila koje mu prethodi i
- b) da bi se izbegao sudar sa vozilom ispred, svaki vozač mora da održava **sigurno rastojanje** $(\Delta x)_{sig}$ od vozila ispred.

⁷behavioral force (eng.)

U cilju realnijeg opisa, predloženo je (1958. god.) da odgovor vozača u trenutku t treba da zavisi od stimulusa primljenog od drugih vozila u trenutku $t - T$, gde je T vreme potrebno za reakciju vozača. Tako, uopštavanjem jednačine (13.3) dobijamo

$$\ddot{x}_n(t + \tau) = S [\dot{x}_{n+1}(t) - \dot{x}_n(t)] \quad (13.4)$$

gde je S **koeficijent osetljivosti**, konstanta nezavisna od n .

U skladu sa jednačinama (13.3) i (13.4) vozilo će ubrzavati ili usporavati da bi postiglo istu brzinu kao što je brzina vozila koje mu prethodi. Odavde sledi da sporije prateće vozilo biva "vučeno" od strane bržeg vodećeg vozila. U ovakvim, linearnim dinamičkim modelima ubrzanje vozača potpuno je nezavisno od rastojanja do vozila ispred. Zato, rešenje ove suviše pojednostavljene jednačine ne može da predstavlja nagomilavanje vozila uočeno u realnom saobraćaju. Kako ova dinamička jednačina ne zavisi od gustine, iz njene dinamike ne može se dobiti funkcionalna relacija (relacija gustina-tok). Zbog toga usvajamo pretpostavku da što je bliže n -to vozilo ($n + 1$)-om, to je veća osetljivost vozača n -tog vozila. U ovom slučaju dinamička jednačina (13.4) dalje se uopštava i postaje

$$\ddot{x}_n(t + T) = \frac{k}{[x_{n+1}(t) - x_n(t)]} [\dot{x}_{n+1}(t) - \dot{x}_n(t)],$$

gde je k - konstanta. Dalje uopštenje modela može se postići izražavanjem faktora osetljivosti vozača n -tog vozila na sledeći način

$$S_n = \frac{k [v_n(t + \tau)]^m}{[x_{n+1}(t) - x_n(t)]^\ell},$$

gde su ℓ i m fenomenološki parametri koji se određuju u saglasnosti sa empirijskim podacima. Ovi uopšteni modeli "prati vođu" "dovode" do spregnutih nelinearnih diferencijalnih jednačina za x_n . Tako, korišćenjem ovog "mikroskopskog" teorijskog pristupa, problem saobraćajnog toka redukuje se na probleme nelinearne dinamike.

Kada je u pitanju analiza stabilnosti, obično se sprovode dva tipa analize. Lokalna analiza stabilnosti daje informacije o prirodi ponašanja vozila, u odnosu na fluktuacije u kretanju njemu neposredno prethodećeg vozila. Sa druge strane, način na koji se fluktuacije (poremećaji) u kretanju proizvoljnog vozila šire na veću udaljenost kroz kolonu vozila može se odrediti korišćenjem asimptotske analize stabilnosti.

Poznato je da u realnom saobraćaju vozači često obraćaju pažnju ne samo na vozilo neposredno ispred njih, već i na još nekoliko vozila ispred.

Sličan efekat uključen je u različite "rešetka" modele u statističkoj mehanici i tamo se naziva efekat veze "najbližeg suseda". Linearna dinamička jednačina koja uzima u obzir ovu vezu "do najbližeg suseda", unutar okvira modela "prati vođu", može biti napisana na sledeći način (1998. god.):

$$\ddot{x}_n(t+T) = S^{(1)} [\dot{x}_{n+1}(t) - \dot{x}_n(t)] + S^{(2)} [\dot{x}_{n+2}(t) - \dot{x}_n(t)],$$

gde su $S^{(1)}$ i $S^{(2)}$ dva fenomenološka koeficijenta povezana sa reakcijom vozača.

Najveća slabost ovih teorija je to što one uključuju nekoliko fenomenoloških parametara koji se određuju "kalibracijom", tj. usklađivanjem ("fitovanjem") teorijskih predviđanja sa odgovarajućim empirijskim podacima. Pored toga, proširenje ovih modela na saobraćaj u više traka nije lako.

Modeli optimalne brzine

Strategija vozača u modelima "praćenja vozila", može biti iskazana na sledeći način

$$\ddot{x}_n(t) = \frac{1}{\tau} [v_n^{zel}(t) - v_n(t)],$$

gde je $v_n^{zel}(t)$ željena brzina n -tog vozila u trenutku t . U svim prethodno pomenutim modelima "prati vođu", vozač održava sigurnu udaljenost od vozila ispred izborom brzine tog vozila za svoju brzinu, tj. $v_n^{zel}(t) = \dot{x}_{n+1}$.

Sredinom devedesetih godina prošlog veka, predstavljena je model [17] koji se zaniva na pristupu "praćenja vozila". Ovaj model zasnovan je na pretpostavci da $v_n^{zel}(t)$ zavisi od rastojanja do vozila ispred, tj. $v_n^{zel}(t) = v^{opt}(\Delta x_n(t))$, tako da je

$$\ddot{x}_n(t) = \frac{1}{\tau} [v^{opt}(\Delta x_n(t)) - v_n(t)] \quad (13.5)$$

gde **funkcija optimalne brzine** $v^{opt}(\Delta x_n)$ zavisi od odgovarajućeg trenutnog rastojanja do vozila ispred $\Delta x_n(t) = x_{n+1}(t) - x_n(t)$. Drugim rečima, prema ovoj vozačkoj strategiji, n -to vozilo teži da održi sigurnu brzinu koja zavisi od relativnog položaja, umesto od brzine n -tog vozila. U opštem slučaju $v^{opt}(\Delta x) \rightarrow 0$ kada $\Delta x \rightarrow 0$ i mora biti ograničeno za $\Delta x \rightarrow \infty$. Iz očiglednih razloga, ovi modeli se obično nazivaju **modeli optimalne brzine (OV)**.

Kako jednačine kretanja u modelima "prati vođu" uključuju samo brzine, a ne i položaje vozila, one mogu biti diferencijalne jednačine prvog reda (po brzinama) ili drugog reda (po položajima vozila), u odnosu na vreme.

Najjednostavniji oblik funkcije $v^{opt}(\Delta x)$ je

$$v^{opt}(\Delta x) = v_{max}\Theta(\Delta x - d), \quad (13.6)$$

gde je d konstanta, a Θ je Hevisajdova funkcija⁸. U skladu sa ovim oblikom funkcije $v^{opt}(\Delta x)$, vozilo treba da se zaustavi ako je odgovarajuće rastojanje do vozila ispred manje od d . Ako to rastojanje nije manje od d , vozilo bi ubrzavalo dok ne postigne maksimalnu dozvoljenu brzinu v_{max} . Realniji izbor funkcije $v^{opt}(\Delta x)$ dat je jednačinom

$$v^{opt}(\Delta x) = \begin{cases} 0, & \text{za } \Delta x < \Delta x_A \\ f\Delta x, & \text{za } \Delta x_A \leq \Delta x \leq \Delta x_B, \\ v_{max}, & \text{za } \Delta x_B < \Delta x. \end{cases} \quad (13.7)$$

Glavna prednost oblika (13.6) i (13.7) funkcije optimalne brzine je da je moguće dobiti tačna analitička rešenja. Naglasimo da, iako funkcije (13.6) i (13.7) možda, na prvi pogled, izgledaju suviše pojednostavljeno, one uključuju nekoliko bitnih osobina realnijih oblika funkcije optimalne brzine, kao na primer funkciju

$$v^{opt}(\Delta x) = \text{tgh} [\Delta x - \Delta x_C] + \text{tgh} [\Delta x_C] \quad (13.8)$$

za koju su analitička izračunavanja veoma teška. Radi lakšeg numeričkog istraživanja, dinamička jednačina (13.5) za vozila u modelu optimalne brzine diskretizuje se i postaje diferencna jednačina [215].

Glavno pitanje u vezi modela optimalne brzine je sledeće: koji je uslov za stabilnost homogenog rešenja

$$x_n^h = bn + ct,$$

gde je $b = L/N$ konstantno srednje rastojanje između vozila, a c je konstantna brzina. Nije teško pokazati da, u opštem slučaju, u modelima optimalne brzine, homogeni tok postaje nestabilan kada važi

$$\left. \frac{dv^{opt}}{d\Delta x} \right|_{\Delta x=b} > \frac{2}{\tau} \quad [17].$$

U odnosu na stabilnost mikroskopskih stanja može se razlikovati pet različitih režima gustine. Pri malim i velikom gustinama, homogena stanja su stabilna. Pri srednjim gustinama mogu se razlikovati tri režima gde postoje zagušena (nagomilana) stanja. U trećoj oblasti nagomilano stanje

⁸Heavyside step function

je stabilno, dok u drugoj i četvrtoj oblasti i homogena i nehomogena stanja formiraju stabilne strukture. Pored stanja nagomilavanja, primećuje se i pojava efekta histerezisa. Tako, modelom optimalne brzine mogu da se reprodukuju mnogi aspekti eksperimentalno uočenih fenomena [50].

Saobraćaj se često sastoji od dva različita tipa vozila, recimo automobila i kamiona. Zbog toga je Mazon [198] uopštio formulaciju Bando-a [17], zamenom konstante τ sa τ_n , tako da je

$$\ddot{x}_n(t) = \frac{1}{\tau_n} [v_n^{opt}(t) - v_n(t)],$$

gde τ_n sada zavisi od toga da li je n -to vozilo automobil ili kamion. Kamionu treba više vremena da reaguje nego automobilu, pa veću vrednost τ treba dodeliti kamionu. Razmatrana su i druga uopštenja modela optimalne brzine [212], [215], [222].

Kao što je ranije pomenuto, na vozača često utiče i nekoliko vozila, koja se nalaze u koloni ispred. Da bi se u razmatranje uključile takve interakcije, modeli optimalne brzine mogu se modifikovati tako da dinamičke jednačine postaju

$$\ddot{x}_n = \sum_{j=1}^m S_j \left[v^{opt} \left(\frac{x_{n+j} - x_n}{j} \right) - v_n \right], \quad (13.9)$$

gde su S_j koeficijenti osetljivosti. Jedan od često korišćenih oblika funkcije optimalne brzine, na primer (13.8) može biti izabran za funkciju v^{opt} u jednačini (13.9).

Pre nego što zaključimo naše razmatranje modela optimalne brzine, pomenimo model Nagataniya [209], gde se pretpostavlja da je

$$\ddot{x}_n(t) = \begin{cases} a, & \text{za } \Delta x_n \geq \Delta x_C, \\ -a, & \text{za } \Delta x_n < \Delta x_C, \end{cases}$$

gde je $a > 0$. Očigledno Δx_C može biti interpretirano kao sigurno rastojanje. Uvedeno je i ograničenje $v_{min} \leq v_n \leq v_{max}$ na dozvoljene brzine vozila uvođenjem dozvoljene minimalne brzine v_{min} i dozvoljene maksimalne brzine v_{max} . Zapazimo da u ovom, znatno pojednostavljenom modelu, \ddot{x}_n zavisi od odgovarajućeg rastojanja do vozila ispred i, zato, ima neke očigledne sličnosti sa modelima optimalne brzine. Za razliku od opštijih modela optimalne brzine, u ovom modelu \ddot{x}_n ne zavisi od svoje trenutne brzine. Osnovni razlog za razmatranje takvog znatno pojednostavljenog modela je da brzina prostiranja stanja nagomilavanja može biti određena analitički.

Pre zaključenja ovog odeljka, treba naglasiti da pri formulisanju dinamičkih jednačina, koje određuju vezu između položaja i brzine vozila,

u bilo kojoj "mikroskopskoj" teoriji, moraju biti razmotrena sledeća važna pitanja:

- 1) u odsustvu bilo kog poremećaja uzrokovanog uslovima puta i interakcijama sa drugim vozilima, vozač teži da vozi željenom brzinom v_{zel} ; ako je trenutna brzina vozila $v(t)$ manja (veća) od v_{zel} , vozilo ubrzava (usporava) tako da mu se brzina približava v_{zel} .
- 2) U saobraćaju, koji se slobodno odvija, čak i kada vozač uspe da postigne željenu brzinu v_{zel} , brzina vozila se menja oko v_{zel} , umesto da bude konstantna tokom vremena.
- 3) Interakcije između para uzastopnih vozila u koloni ne mogu biti zanezarene ako je rastojanje između njih kraće od $v_{zel} \cdot 1s$; u takvim situacijama, vozilo koje prati mora da uspori da bi izbeglo sudar sa vozilom ispred.

Pouzdanost predviđanja modela optimalne brzine, naravno, zavisi od odgovarajućeg izbora funkcije optimalne brzine.

13.8.3 "Rešetka modeli" drumskog saobraćaja

Podsetimo se da je, u modelima "praćenja vozila"⁹, prostor neprekidan, vreme je predstavljeno neprekidnom promenljivom t , a brzina i ubrzanje, individualnih vozila su realne neprekidne promenljive. Zbog numeričkog rešavanja diferencijalnih jednačina modela "praćenja vozila", najčešće je potrebno diskretizovati neprekidne promenljive sa odgovarajuće izabranim korakom. Obrnuto, u pristupu, koji koristi "model rešetke", vreme je diskretna promenljiva, a dinamičke jednačine za pojedinačna vozila formulisane su kao diskretna dinamička preslikavanja koja povezuju promenljive stanja u trenutku t sa onima u trenutku $t + 1$ (iako položaj, brzina i ubrzanje nisu ograničeni samo na diskretne celobrojne vrednosti). Jedinica vremena u ovoj šemi, tj. jedan vremenski korak, može biti interpretirana kao vreme reakcije vozača individualnih vozila, jer brzina vozila u trenutku t zavisi od uslova saobraćaja u prethodnom trenutku $t - 1$.

Opšti oblik dinamičkih preslikavanja, u skladu sa prethodno pomenutim postavkama, u "rešetka modelima"¹⁰ je:

$$\begin{aligned}v_n(t + 1) &= Map_n [v_n(t), v_{des}, \Delta x_n(t)], \\x_n(t + 1) &= v_n(t) + x_n(t)\end{aligned}$$

⁹car following models (eng.)

¹⁰coupled-map lattice (eng.)

gde je v_{zel} željena brzina. U opštem slučaju, dinamičko preslikavanje

$$Map_n [v_n(t), v_{des}, \Delta x_n(t)]$$

koristi brzinu $v_n(t)$ i rastojanje $\Delta x(t)$ vozila n do vozila ispred, u trenutku t , za određivanje brzine $v_n(t+1)$ u trenutku $t+1$. Efekti interakcije između vozila uvode se, u prethodno zapisane dinamičke jednačine, preko člana Δx_n .

13.8.4 Model Jukava-Kikuči

Jukava i Kikuči ([362], [363]) razmatrali su "rešetka modele" zasnovane na preslikavanju

$$v(t+1) = F(v(t)) \equiv \gamma v(t) + \beta \text{tgh} \left(\frac{v^F - v(t)}{\delta} \right) + \varepsilon$$

za kretanje jednog vozila bez uticaja sa strane. v^F je željena brzina vozila, a β , γ , δ i ε su parametri. Za vrednosti parametra γ bliske jedinici, preslikavanje postaje haotično, a ubrzanje i usporenje su približno konstantne vrednosti za vrednosti v znatno različite od v^F . Njihova veličina određena je parametrom β . ε kontroliše razliku između uslova za ubrzanje i uslova za usporenje. Mada je model deterministički, fluktuacije brzine uvedene su kroz deterministički kaos. Ove fluktuacije oko v^F određene su parametrom δ .

Ako postoji više od jednog vozila na putu, potreban je dodatni mehanizam za kontrolu usporenja radi izbegavanja sudara. Ovo može biti postignuto uvođenjem posebnog preslikavanja za usporenje. Jukava i Kikuči [362] razmatrali su dva modela zasnovana na pretpostavci da rastojanje do vozila ispred ima glavni uticaj na usporenje. U modelu A , preslikavanje za usporenje opisuje iznenadni proces kočenja. Ako je rastojanje Δx_n , od prednjeg branika vozila do prednjeg branika vozila ispred, manje od trenutne brzine n -tog vozila $v_n(t)$, ($\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$), tada se brzina, u jedinici vremena, redukuje na $\Delta x_n - \ell$, gde je ℓ dužina vozila. Odgovarajuće preslikavanje je

$$B(\Delta x_n(t)) = \Delta x_n(t) - \ell.$$

U modelu B usporenje je predstavljeno znatno složenijim preslikavanjem:

$$v_n(t+1) = G(\Delta x_n(t), v_n(t)) \equiv \frac{F(v_n(t)) - v_n(t)}{(\alpha - 1)v_n(t)} [\Delta x_n(t) - \ell - v_n(t)],$$

$$\text{za } v_n(t) \leq \Delta x_n(t) - \ell \leq \alpha v_n(t).$$

Parametar α određuje opseg preslikavanja za usporenje $G(\Delta x, v)$. Za rastojanje manje od $\alpha v_n(t)$ koristi se preslikavanje G umesto $F(v)$.

Kompletno preslikavanje, kojim je određena brzina za model B , je

$$\text{Map}_n(v_n(t), \Delta x_n(t)) = \begin{cases} F(v_n(t), v_n^F), & \text{za } \alpha v_n \leq \Delta x_n(t), \\ G(\Delta x_n(t), v_n), & \text{za } v_n \leq \Delta x_n(t) \leq \alpha v_n, \\ B(\Delta x_n(t)), & \text{za } \Delta x_n(t) \leq v_n. \end{cases}$$

Tadaki i Kikuči [322] uveli su "rešetka model" zasnovan na funkcijama optimalne brzine, diskretizujući vremensku promenljivu modela optimalne brzine. Ova diskretizacija omogućava da se razmotre sistemi sa otvorenim granicama (dozvoljen ulaz/izlaz vozila), kao i sistemi sa više saobraćajnih traka. Multiplikativni (parametarski) šum može biti uveden u izraz za brzinu, tako da je preslikavanje za brzinu

$$v(t+1) = [v(t) + \alpha(v_{opt}(\Delta x) - v(t))](1 + f_{sum}\xi)$$

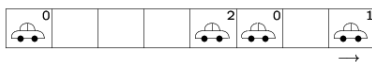
gde je $\xi \in [-1/2, 1/2]$ uniformna slučajna promenljiva, a f_{sum} je nivo (intenzitet) šuma.

13.8.5 Nagel-Šrekenbergov model ćelijskih automata, za saobraćajni tok na autoputu

U opštim crtama, model "ćelijskih automata" (CA-model) predstavlja idealizaciju fizičkih sistema, tako da su i prostor i vreme diskretne veličine i svaka od interagujućih jedinica može imati samo konačan broj diskretnih stanja. Zapazimo da pri diskretizaciji diferencijalnih jednačina, na primer kod hidrodinamičkog pristupa, promenljive prostora i vremena jesu diskretne, ali je promenljiva stanja ipak neprekidna. CA koncept uveden je pedesetih godina dvadestog veka od strane fon Nojmana [224] u okviru njegove formulacije apstraktne teorije samoumnožavajućih računskih mašina [53]. Osamdesetih godina prošlog veka, familija jednodimenzionalnih CA modela sistematski je razmatrana sa tačke gledišta dinamičkih sistema, i od tada se koncept CA primenjuje pri modelovanju različitih sistema.

CA model je, verovatno, prvi put primenjen u modelovanju drumskog saobraćaja od strane Kremera i Ludviga [55].

U CA modelima drumskog saobraćaja, položaj, brzina, ubrzanje vozila, kao i vreme, posmatraju se kao diskretne promenljive. U ovim modelima, saobraćajna traka je predstavljena kao jednodimenzionalna "rešetka". Svaki položaj na rešetki predstavlja "ćeliju", koja može biti ili prazna ili zauzeta najviše jednim "vozilom" u datom trenutku vremena (sl. 13.1).



Slika 13.1: Tipična konfiguracija u NaSch modelu.

Broj u gornjem desnom uglu je brzina vozila.

Pri svakom diskretnom vremenskom koraku $t \rightarrow t + 1$, menja se stanje sistema, na jasan i dobro definisan način. Pogodnost pri izračunavanju, kod diskretnih CA modela, predstavlja glavnu prednost ovog pristupa u odnosu na modele "praćenja vozila" i "rešetka modela".

U NaSch modelu, brzina v svakog vozila može imati jednu od $v_{max} + 1$ dozvoljenih celobrojnih vrednosti, tj. važi $v = 0, 1, \dots, v_{max}$. Pretpostavimo da x_n označava položaj, v_n brzinu n -tog vozila, i da je $d_n = x_{n+1} - x_n$ razmak između n -tog vozila i vozila ispred, u trenutku t . Posle svakog vremenskog koraka $t \rightarrow t + 1$, konfiguracija N vozila na konačnoj "rešetki" dužine L menja se paralelno u skladu sa sledećim "pravilima":

pravilo 1: Ubrzanje. Ako je $v_n < v_{max}$, brzina n -tog vozila povećava se za jedan, ali v_n ostaje nepromenjeno ako je $v_n = v_{max}$, tj.

$$v_n \rightarrow \min(v_n + 1, v_{max}).$$

pravilo 2: Usporenje (zbog drugih vozila). Ako je $d_n \leq v_n$, brzina n -tog vozila redukuje se na $d_n - 1$, tj.

$$v_n \rightarrow \min(v_n, d_n - 1).$$

pravilo 3: "Randomizacija". Ako je $v_n > 0$, brzina n -tog vozila smanjuje se za jedan, slučajno, u skladu sa verovatnoćom P , ali se v_n ne menja ako važi $v_n = 0$, tj.

$$v_n \rightarrow \max(v_n - 1, 0) \quad \text{sa verovatnoćom } P.$$

pravilo 4: Kretanje vozila. Svako vozilo kreće se unapred u skladu sa svojom novom brzinom određenom u koracima 1-3, tj.

$$x_n \rightarrow x_n + v_n.$$

NaSch model je minimalni model u smislu da sva četiri pravila moraju da važe da bi bila predstavljena osnovna svojstva realnog saobraćaja. U slučaju složenijih situacija, moraju se formulisati dodatna pravila. Pravilo

1 odražava opštu tendenciju vozila da se kreću što je brže moguće, ako im je to dozvoljeno, bez prelaska maksimalnog ograničenja brzine. Svrha pravila 2 je da se izbegnu sudari između vozila. Randomizacija u pravilu 3 uključuje različite obrasce ponašanja pojedinačnih vozila, posebno nedeterminističko ubrzanje i preterano usporavanje. Ovo je od suštinske važnosti za spontano formiranje saobraćajnog zagušenja. Čak i promena precizno utvrđenog redosleda u pravilima (ako se promena ne odvija paralelno) dovodi do promene svojstava modela. Na primer, ako promenimo redosled pravila 2 i 3 neće više biti preteranog kočenja, pa tako ni spontanog formiranja saobraćajnih zagušenja. NaSch model se može posmatrati kao stohastički CA model ([353], [354]). U specijalnom slučaju, kada je $v_{max} = 1$, deterministička granica NaSch modela je ekvivalentna modelu CA-184 u Volframovoj notaciji.

Zašto u saobraćajnim modelima, sličnim NaSch modelu, promena treba da bude izvršena paralelno, a ne slučajno izabranim redosledom? Suprotno promeni slučajno izabranim redosledom, paralelna promena može da dovede do lanca reakcija. Pretpostavimo da vozilo usporava zbog randomizacijskog pravila. Ako je gustina vozila na putu dovoljno velika, ovo može proizvesti i kočenje vozila iza posmatranog vozila u koraku za usporavanje. Dalje, ako je P veće od nule, to može dovesti do daljeg kočenja posmatranog vozila u pravilu 3. Niz ovakvih događaja može, na kraju, da dovede do zaustavljanja vozila, stvarajući tako **zagušenje**¹¹ u saobraćaju. Ovaj mehanizam spontane formacije saobraćajnog zagušenja je vrlo realističan i ne može biti modelovan ako se promena vrši slučajno izabranim redosledom pravila.

Složeno ponašanje saobraćajnog toka na autoputu privuklo je istraživački interes i različiti tipovi dinamičkih stanja uočeni su u realnom saobraćaju. Poseban fluktuirajući tok, koji se naziva **sinhronizovani tok** (SF), uočen je u oblastima visoke gustine i može rezultovati **saobraćajnim zagušenjem**¹². Protok automobila je veći nego u slučaju zagušenja toka, ali fluktuiraju između različitih saobraćajnih traka. Uočeno je da SF počinje lokalizovanom perturbacijom kao što je priključak na auto-put¹³ i može trajati i po nekoliko časova. Stanje **kreni-stani**¹⁴ (SGS) je stanje gde saobraćaj prolazi kroz obrazac ili zagušenog ili slobodnog toka, na malom prostoru i u kratkom periodu vremena. SGS se često uočava posle SF oblasti. Efekat histerezisa takođe je uočen u prelazu između zagušenog toka ili SF i slobodnog toka, kada se menja gustina vozila na autoputu [203].

¹¹jam (eng.)

¹²jammed flow (eng.)

¹³on ramp (eng.)

¹⁴stop-and-go state (eng.)

”Modelari” saobraćaja na auto-putevima su podeljeni u nekoliko frakcija [351]:

Prvo, postoje ”jednofazni modelari” koji u svojim modelima strogo koriste hiperboličke parcijalne diferencijalne jednačine zajedno sa trougaonim osnovnim dijagramom, kada je to potrebno, i koji se suprostavljaju ideji da je saobraćajni tok nestabilan pri bilo kojoj gustini. Umesto toga, ovi istraživači predlažu da slučajni događaji velike amplitude, na mikroskali, uzrokuju saobraćajna zagušenja.

Drugo, postoje ”dvofazni modelari”, koji veruju da je nestabilnost u ”srcu” ”kreni-stani” talasa i koji tipično koriste modele ”praćenja vozila”, jer teorija sa dobrim svojstvima globalne egzistencije tek treba da bude zasnovana.

13.9 Saobraćajna gužva izazvana fluktuacijom u kretanju vodećeg vozila

Posmatrajmo tok mnogo vozila na auto-putu sa jednom trakom bez preticanja i priključivanja novih vozila. Vozila su numerisana brojevima $1, 2, 3, \dots, N, N+1, \dots, N+i, \dots$ ($N+i \equiv i, i = 1, \dots, N$). Pretpostavlja se da se brzina vozila N slučajno menja¹⁵. Tada će se poremećaj (fluktuacija) prostirati suprotno smeru kretanja vozila. Tokom vremena, poremećaj će ili nestati ili će se pretvoriti u ”**talase gustine**”¹⁶. Ovde istražujemo dinamička stanja saobraćaja i kriterijum za pojavu ”talasa gustine”. Dinamika ovog sistema suštinski je određena kretanjem vodećeg vozila, odnosno ”vodećeg vozila na velikom rastojanju”. Ovde se koristi mikroskopski saobraćajni model ”praćenja vozila”, jer je teško uključiti u razmatranje fluktuacije kretanja u slučaju kontinualnog ili makroskopskog saobraćajnog modela.

Njuel i Vitam [225] analizirali su model saobraćajnog toka predstavljen sledećom jednačinom kretanja j -tog vozila:

$$\frac{dx_j(t+\tau)}{dt} = V(\Delta x_j(t)), \quad (13.10)$$

koja, uvođenjem smene ($t+\tau \rightarrow t_1$) i ”povratkom” na $t_1 \rightarrow t$, postaje

$$\frac{dx_j(t)}{dt} = V(\Delta x_j(t-\tau)),$$

¹⁵fluctuates randomly (eng.)

¹⁶density waves (eng.)

gde je: $x_j(t)$ - položaj j -tog vozila u trenutku t , $\Delta x_j(t) = x_{j+1}(t) - x_j(t)$ - rastojanje j -tog vozila od $j + 1$ -og vozila u trenutku t , a τ - vremensko kašnjenje.

Ideja se sastoji u tome da vozač prilagođava brzinu vozila $dx_j(t)/dt$ u skladu sa uočenim rastojanjem $\Delta x_j(t)$.

Razvojem, u Tejlorov red, jednačine (13.10) (po τ , a u okolini t), dobija se model izražen običnom diferencijalnom jednačinom, tj. važi:

$$\begin{aligned} \frac{dx_j(t + \tau)}{dt} &\approx \frac{dx_j(t)}{dt} + \frac{d^2x_j(t)}{dt^2}(t + \tau - t) = \\ &= \frac{dx_j(t)}{dt} + \frac{d^2x_j(t)}{dt^2} \cdot \tau \approx V(\Delta x_j(t)) \Rightarrow \\ \frac{d^2x_j(t)}{dt^2} &= a \left[V(\Delta x_j(t)) - \frac{dx_j(t)}{dt} \right], \end{aligned} \quad (13.11)$$

gde je a osetljivost vozača, pri čemu je $a = 1/\tau$. Transformišući vremenski izvod u konačnu razliku u jednačini (13.10), dobija se model predstavljen diferencijalnom jednačinom

$$x_j(t + 2\tau) = x_j(t + \tau) + \tau V(\Delta x_j(t)). \quad (13.12)$$

Jednačina (13.12) je dobijena usvajanjem, za brzinu, diferencne aproksimacije unapred, tj.

$$\frac{dx_j(t + \tau)}{dt} = [x_j(t + 2\tau) - x_j(t + \tau)] \cdot \frac{1}{\tau}.$$

Ako upotrebimo simetričnu diferencnu aproksimaciju

$$\frac{dx_j(t + \tau)}{dt} = \frac{1}{\tau} [x_j(t + 2\tau) - x_j(t)],$$

rezultujuća diferencna jednačina ne pokazuje ponašanje saobraćajnog toka slično jednačinama (13.10) i (13.11).

Model predstavljen diferencijalnom jednačinom pogodniji je za izračunavanje.

Korisno je napisati jednačinu (13.12) koristeći samo rastojanje do vozila ispred, tj. Δx . Na taj način dobijamo sledeću diferencnu jednačinu:

$$\Delta x_j(t + 2\tau) - \Delta x_j(t + \tau) - \tau [V(\Delta x_{j+1}(t)) - V(\Delta x_j(t))] = 0,$$

jer se, oduzimajući od jednačine

$$x_{j+1}(t + 2\tau) - x_{j+1}(t + \tau) - \tau V(\Delta x_{j+1}(t)) = 0$$

jednačinu

$$x_j(t + 2\tau) - x_j(t + \tau) - \tau V(\Delta x_j(t)) = 0,$$

dobija

$$\Delta x_j(t + 2\tau) - \Delta x_j(t + \tau) - \tau [V(\Delta x_{j+1}(t)) - V(\Delta x_j(t))] = 0.$$

Granični uslovi u ovom modelu su

$$\Delta x_{N-1}(t + \tau) = \Delta x_{N-1}(t) + \tau [v_N(t) - V(\Delta x_{N-1}(t - \tau))],$$

gde je

$$v_N(t) = v_b + \delta[2R(t) - 1.0],$$

a $R(t)$ je slučajni broj između 0 i 1 (uniformna raspodela), dok je v_b srednja brzina N -tog vozila. Korelacija je data izrazom

$$\langle R(t + m)R(t) \rangle = \delta_{t+m,t}$$

gde je $\delta_{t,t} = 1$ za $m = 0$ i $\delta_{t+m,t} = 0$ za $m \neq 0$. $\delta_{j,m}$ označava Kronekerov simbol. Napomenimo da je Kronekerov delta simbol različit od amplitude δ same fluktuacije. Zato se brzina N -tog vozila menja slučajno oko konstantne vrednosti v_b sa amplitudom δ .

13.10 Efekti vremenskog kašnjenja u modelima saobraćajnog toka

U ovom odeljku prvo ćemo objasniti kako nastaje vremensko kašnjenje, u saobraćaju, a zatim kako ono utiče na dinamiku saobraćajnog toka, i koje su njegove uobičajene razmere. Posle toga, biće predstavljen istorijski pregled modela saobraćajnog toka koji uključuju vremensko kašnjenje.

13.10.1 Poreklo vremenskog kašnjenja u saobraćajnoj dinamici

Vremensko kašnjenje u dinamici saobraćajnog toka može se razvrstati po poreklu. Ovo razvrstavanje je važno, jer omogućava da se razume gde i na koji način vremensko kašnjenje treba da se pojavi u matematičkim modelima saobraćajnog toka. Osnovni razlog za uključivanje vremenskog kašnjenja u dinamiku saobraćaja je to što vozači ne reaguju trenutno na "stimuluse" koje primaju tokom vožnje, već posle određenog intervala vremena, koje se obično naziva **vreme relaksacije**.

Ovde razmatramo samo determinističke modele saobraćajnog toka, što znači da u jednačine ne uključujemo stohastičke komponente i/ili stohastički karakter samog vremenskog kašnjenja. Bez gubitka opštosti, vremensko kašnjenje se, u opštem slučaju, može predstaviti veličinom koja zavisi od vremena $\tau = \tau(t)$. Mada ima različitu vrednost za svakog vozača, vreme kašnjenja se načelno sastoji od dve komponente:

- a) komponente koja ne zavisi od vremena τ_{in} ,
- b) vremenski zavisne komponente $\tau_v(t)$,

tako da je

$$\tau(t) = \tau_{in} + \tau_v(t).$$

Čisto vremensko kašnjenje u dinamici saobraćajnog toka sastoji se od dve glavne komponente izazvane **fiziološkim i mehaničkim zaostajanjem**.

- a) Prva komponenta, fiziološko zaostajanje, $\tilde{\tau}$, deo ukupnog vremenskog kašnjenja, direktno je povezana sa onima koji upravljaju vozilom, tj. vozačima. Kada vozač primi "stimulus" on reaguje tako što izvodi radnje čiji je rezultat ubrzavanje ili usporavanje vozila kojim upravlja. Kako je vozač ljudsko biće, onda primanje "stimulusa", njegova obrada i donošenje odluke, nisu trenutni već je za to potreban konačan period vremena $\tilde{\tau}$, koji se naziva "fiziološko zaostajanje" (kašnjenje). Ovo kašnjenje takođe može biti podeljeno na dva dela:

- deo nezavisan od vremena $\tilde{\tau}_{inv}$ i
- deo zavisian od vremena $\tilde{\tau}_v(t)$.

Tako, možemo napisati jednačinu

$$\tilde{\tau}(t) = \tilde{\tau}_{inv} + \tilde{\tau}_v(t)$$

gde $\tilde{\tau}(t)$ predstavlja "čisto vremensko kašnjenje" u matematičkim modelima. "Kvantitet" čistog vremenskog kašnjenja je dobro određen i o tome će biti više reči u narednom delu teksta.

- b) Druga komponenta $\tilde{\tau}$ vremenskog kašnjenja, mehaničko zaostajanje, je nezavisna od osposobljenosti i karaktera vozača, i u potpunosti je određena mehničkim svojstvima vozila u saobraćaju. Mehaničko kašnjenje je period vremena koji protekne između trenutka kada vozač pritisne kočnicu ili gas-pedalu i trenutka kada vozilo počinje da reaguje (usporava ili ubrzava).

Očigledno je da ovo kašnjenje postoji u svim vozilima, da "prati" fiziološko kašnjenje u vezi usporenja ili ubrzanja, i da se i ovakvo kašnjenje pojavljuje u matematičkim modelima kao čisto vremensko kašnjenje. Za određeno vozilo, u opštem slučaju, može da se pretpostavi da $\tilde{\tau}$ ne zavisi od vremena.

Neki autori ([19], [20]) nazivaju zbir fiziološkog i mehaničkog zaostajanja **vremensko kašnjenje odgovora**.

Fiziološko zaostajanje može dalje da se razdvoji na:

1. **Osetljivost**, što predstavlja vreme potrebno da se uoči objekat na putu (na primer, da se na putu uoči neravnina). Pod jednakim uslovima, vreme reakcije opada ako je signal izrazitiji (osvetljenost, kontrast, veličina, čujnost i tome slično). Uopšteno, vreme reakcije je kraće za zvučne signale nego za vizuelne.
2. **Raspoznavanje**, što predstavlja vreme potrebno da se shvati značenje "senzacije" (na primer, da se uoči oblik). Vreme reakcije raste sa smanjivanjem verovatnoće pojave signala, neodređenošću (lokacija pojave signala, trenutak pojave ili oblik samog signala) i neočekivanušću. Vreme reakcije je duže ako postoji više mogućih signala koji mogu da se pojave, kao i više mogućih odgovora, nego vreme reakcije kada postoji samo jedan mogući signal koji se može pojaviti i mali broj mogućih odgovora.
3. **Izbor odgovora i mentalno "programiranje"**, što predstavlja vreme potrebno da se odluči koji od ponuđenih odgovora treba izabrati i vreme potrebno da se izvrše mentalne pripreme za predstojeću radnju (na primer, da li da se "prikači" ili da se promeni pravac kretanja ulevo). Kada postoji više mogućih odgovora, reakcija je sporija, dok, sa druge strane, "praksa" povećava brzinu reakcije.
4. **Izvršenje radnje**, što predstavlja vreme potrebno da "mišići vozača izvedu odgovarajući niz pokreta" (na primer, vreme potrebno da se podigne stopalo sa gas-pedale, a onda pritisne kočnica). Uopšteno, složeniji pokret zahteva više vremena, a "praksa" (kao i u ostalim slučajevima) omogućava bržu reakciju.

Iz prethodnog je jasno da nije jednostavno odrediti kašnjenje prouzrokovano fiziologijom, jer postoji mnogo činilaca koji utiču na uspostavljanje reakcije vozača. Svi ti uticaji su međusobno različiti, a zajednički cilj im je da vozač izvrši najoptimalniju radnju (ubrzavanje, usporavanje ili promena pravca). U opštem slučaju, vreme reakcije vozača menja se u skladu

sa osvetljenošću i vidljivošću okoline, veličinom objekata koji se kreću duž putanje vozila, većim ili manjim brojem različitih odgovora koji se nalaze pred vozačem, kao i u skladu sa tim da li je uočeni signal auditorni ili vizuelni. Na vreme reakcije utiče i iskustvo, uzrast i pol vozača.

13.11 Koja je prava mera vremenskog kašnjenja u reakcijama vozača motornih vozila?

U skladu sa [20] i [63], vozači pri izvršavanju radnje ubrzavanja ili usporavanja kasne 0,75-1 [s], od trenutka prijema "stimulusa".

Grin [110] određuje vreme reakcije vozača (vreme od početka kočenja - vremensko kašnjenje) u skladu sa događajima koji se pojavljuju u saobraćaju. Na primer, ako su vozači potpuno svesni toga da će na određenom mestu i u određenom vremenskom trenutku morati da reaguju tako što će usporiti ili ubrzati vozilo, onda je kašnjenje u njihovoj reakciji u intervalu 0,70-0,75 [s]. Reakcija postaje sporija ako vozači treba da reaguju na očekivane i uobičajene signale (kao kada se upale stop-svetla na vozilu ispred), i tada kašnjenje iznosi oko 1,25 [s]. U slučaju pojave iznenadnog i neočekivanog signala (kao što je iznenadna pojava objekta koji se kreće u istoj traci u kojoj se kreće i vozilo), potrebno je oko 1,5 [s] da bi došlo do ubrzavanja ili usporavanja vozila.

Tabela 13.1: Izmerene vrednosti vremenskog kašnjenja: vreme reakcije vozača u saobraćaju pod uticajem različitih "stimulusa".

Vrednost vremenskog kašnjenja [s]	Referenca
0,496	[111]
0,73	[228]
0,7	[78]
1,16	[338]
1,13	[4]
0,75-1,0	[20], [63]
1,2-1,35	[110]
1,1	[273], [337]
0,70-0,75	[110]
1,5	[6]

U tabeli 13.1 predstavljene su vrednosti vremenskog kašnjenja u reakcijama vozača, koje su izmerene u eksperimentima izvršenim u realnom saobraćaju ili na simulatorima. Predstavljene vrednosti razlikuju se od autora do autora, uglavnom zbog različitosti u "stimulusima" (signalima) u odnosu na koje se meri vreme reakcije vozača.

U radu [6] poredi se kontrola brzine (ubrzanje ili usporenje) bez promene pravca (kada vozilo ne menja saobraćajnu traku) i sa promenom pravca. Vozačima (ljudi a ne mašine!) je bilo potrebno svega 0,2-0,3 [s] da promene pravac, a više od 1,5 [s] za ubrzanje ili usporenje vozila. Mada promena pravca ima, na prvi pogled, prednost, zbog kraćeg vremena reakcije (znatno manje vremensko kašnjenje) u odnosu na longitudinalnu promenu brzine, ona ne bi bila "najpametniji" izbor u uslovima veće gustine saobraćaja ili kretanja vozila većom brzinom.

Iz prethodno rečenog, očigledno je da vozači (ljudi a ne mašine!) tokom vožnje donose odluke i izvršavaju radnje u skladu sa brojnim različitim činiocima, a uticaj svakog od tih činilaca može se predstaviti određenom vrednošću vremenskog kašnjenja, u reakciji vozača. Vremensko kašnjenje, koje je svuda prisutno u realnom saobraćaju, najčešće se zanemaruje pri formiranju i analizi modela saobraćajnog toka. Razlog tome je, najverovatnije, komplikovana priroda modela sa uključenim vremenskim kašnjenjem.

Važno je istaći da su vremenska kašnjenja, koja se pojavljuju u reakcijama vozača, nezaobilazna, i da njihov uticaj može iz korena da izmeni dinamiku saobraćajnog toka.

13.12 Modeli saobraćajnog toka sa uključenim vremenskim kašnjenjem

13.12.1 Čendlerov model

Prvi model sa uključenim vremenskim kašnjenjem je, najverovatnije, bio Čendlerov model [47], iz 1958. god. Ovaj model predstavljen je jednostavnom linearnom diferencijalnom jednačinom sa jednim kašnjenjem

$$\ddot{x}_n(t) = k [\dot{x}_{n-1}(t - \tau) - \dot{x}_n(t - \tau)], \quad (13.13)$$

gde su: $x_n(t)$, $\dot{x}_n(t)$, $\ddot{x}_n(t)$, položaj, brzina i ubrzanje n -tog vozila, redom, dok je $k > 0$ konstanta koja predstavlja sposobnost vozača (veću ili manju) da uoči razliku u brzini između sopstvenog vozila i vozila neposredno ispred, x_{n-1} je položaj vozila koje se nalazi ispred vozila x_n . τ je vremensko kašnjenje, koje odgovara vremenu potrebnom da vozači "uoče i reaguju"

(ubrzavanjem ili usporavanjem vozila koje voze) na razliku u brzini. Zanimljivo je da se ovaj model i dalje koristi za modelovanje saobraćajnog toka ([33], [366]).

Čendlerov model je dobra osnova za dalju analizu. Desna strana jednačine (13.13) predstavlja samo slučajeve kada stimulus zavisi samo od određene informacije u nekom trenutku u prošlosti. Kako vozači neprekidno prate šta se dešava u saobraćaju, neke funkcije, "raspodeljene duž određenog intervala u prošlosti", mogu biti dobar izbor da se predstavi stimulus. Fizički, to bi odgovaralo uključivanju "memorije" vozača u model saobraćajnog toka [295].

13.12.2 Gazisovi modeli

Model u članku [98], iz 1959. god., je nelinearni i predstavljen je sledećom jednačinom

$$\ddot{x}_n(t) = \frac{k}{x_{n-1}(t-\tau) - x_n(t-\tau)} [\dot{x}_{n-1}(t-\tau) - \dot{x}_n(t-\tau)], \quad (13.14)$$

gde količnik na desnoj strani uzima u obzir osetljivost vozača kao funkciju razmaka do vozila ispred¹⁷ τ sekundi ranije. Ovaj model je u skladu sa fizičkom realnošću: što je manji razmak do vozila ispred, to je veća osetljivost vozača i brže su njegove/njene reakcije.

U članku [99], iz 1961. god., Gazis je unapredio prethodni model tako što je pretpostavio znatno komplikovaniji oblik za množilac k

$$\ddot{x}_n(t) = \frac{\lambda [\dot{x}_n(t)]^m}{[x_{n-1}(t-\tau) - x_n(t-\tau)]}, \quad (13.15)$$

gde su λ , m i l konstantni parametri.

Vrednosti slobodnih parametara, koji se pojavljuju u (13.15), treba pažljivo odabrati tako da model bude u skladu sa eksperimentalnim rezultatima. Model (13.14) je specijalan slučaj modela (13.15), kada važi $\lambda = k$, $m = 0$ i $l = 1$.

13.12.3 Modeli optimalne brzine

Model optimalne brzine (OVM) predložen je 1995. god. (Bando [18]), a zatim je, 1998. god. ovaj model unapređen, uključivanjem vremenskog kašnjenja

$$\ddot{x}_n(t+\tau) = k[V(x_{n-1}(t) - x_n(t)) - \dot{x}_n(t)], \quad (13.16)$$

¹⁷headway (eng.)

gde se funkcija $V(x_{n-1}(t) - x_n(t))$ naziva **funkcija optimalne brzine** (OVF), i ona je, u opštem slučaju, nelinearna hiperbolička funkcija koja određuje željenu brzinu vozača u funkciji razmaka do vozila ispred

$$\Delta x(t) = x_{n-1}(t) - x_n(t).$$

Različiti autori koristili su različite funkcije optimalne brzine. U članku [319] OVF ima oblik

$$V(\Delta x(t)) = v_{\max} \cdot \Theta(\Delta x(t) - d), \quad (13.17)$$

gde je $d > 0$ konstanta, a Θ je Hevisajdova funkcija. Kada funkcija optimalne brzine ima oblik (13.17), vozilo se zaustavlja u slučaju kada je rastojanje do vozila ispred manje od d . U suprotnom, vozilo ubrzava dok ne dostigne maksimalnu dozvoljenu brzinu v_{\max} .

U članku [238], OVF je oblika

$$V(h) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } 0 \leq h \leq 1, \\ v^0 \frac{(h-1)^3}{1+(h-1)^3}, & \text{ako je } h > 1, \end{cases} \quad (13.18)$$

gde je v^0 željena brzina, a h je normalizovani razmak do vozila ispred.

Postoje funkcije optimalne brzine koje su dobijene "fitovanjem", u skladu sa eksperimentalnim rezultatima [20],

$$V(\Delta x(t)) = 16,8 [\text{th}(0,086(\Delta x(t)) - 25) + 0,913]. \quad (13.19)$$

Bando [20] je analitički ispitao linearnu stabilnost u okolini fiksne tačke i numerički istražio ponašanje rešenja jednačine (13.16). Rezultat istraživanja bio je da mala kašnjenja (0-0,2 [s]) ne utiču na homogeni saobraćajni tok, dok veća kašnjenja (0,2-0,4 [s]) dovode do zagušenja saobraćajnog toka. Interesantno je da su obe vrednosti kašnjenja četiri do pet puta manje od vrednosti koje su date u tabeli 13.1.

13.13 Kontrola saobraćaja na osnovi modela optimalne brzine

U članku [158] razmatrana je dinamika modela saobraćajnog toka zasnovanog na modelu (13.16). Prvo je izvedena linearna analiza stabilnosti, a zatim je ispitivan model sa vremenskim kašnjenjem i "kontrolorom" koji

je konstruisan kao "greška" između trenutnog rastojanja do vozila ispred i rastojanja koje "kasni" τ sekundi

$$\begin{aligned}\ddot{x}_n(t + \tau) &= k [V(x_{n-1}(t) - x_n(t)) - \dot{x}_n(t)] + U_n(t), \\ U_n(t) &= k (x_{n-1}(t) - x_n(t) + x_n(t - \tau) - x_{n-1}(t - \tau)).\end{aligned}\quad (13.20)$$

Izvršena je linearna analiza stabilnosti modela sa "kontrolorom" (13.20), a zatim je predstavljen uticaj parametra k za razne vrednosti vremenskog kašnjenja τ .

13.13.1 Dejvisovi modeli

U članku [62], testiran je Bando-model optimalne brzine (13.16), koji se sastojao od 100 vozila. Čak i u slučaju postojanja vremenskog kašnjenja od svega 0,3 [s], prvih 14 vozila u nizu izbeglo je sudar pod dejstvom malih poremećaja linearizovanog modela. Ovo je jasan pokazatelj da model optimalne brzine sa uključenim vremenskim kašnjenjem možda nije sasvim u skladu sa realnom dinamikom saobraćajnog toka, jer se, u realnosti, sudari ne događaju ni u slučajevima kada vozači "mnogo kasne" u reakcijama tokom vožnje.

U članku [63] ponuđena su dva unapređena modela optimalne brzine, koji bolje odslikavaju realnost, a ovde predstavljamo jedan od njih. U "popravljenom" modelu, umesto $V(x_{n-1}(t) - x_n(t))$ u jednačini (13.16), koristi se sledeća nelinearna funkcija

$$V_{ov} = V(\Delta x_n(t - \tau) + \tau \Delta \dot{x}_n(t - \tau)). \quad (13.21)$$

Mada ova "popravka" omogućava stabilnu saobraćajnu dinamiku za kašnjenja do 1 [s], uočena su prevelika ubrzanja i usporenja na kraju "lanca" vozila. Još jedna "ispravka" uključena je u model zbog približavanja realnosti. Modifikacije omogućavaju da model predvidi nastanak saobraćajne gužve, ali ne i niz fenomena predstavljen u članku [203]. Važno je istaći da je Dejvis uglavnom koristio numerički pristup u ispitivanju svojih modela, a 2004. god. je, još jednom, "popravljaio" svoje modele da bi ispitivao dinamiku saobraćajnog toka na putu sa više saobraćajnih traka i uključenim ulazima i izlazima sa puta [64].

13.14 Model inteligentnog vozača i model prilagođen ljudima-vozačima

U članku [334] predložen je model inteligentnog vozača (IDM), a namera kreatora modela bila je da stvore matematički model koji je robustan,

isključuje sudare među vozilima, "štedljiv" po pitanju numerike i omogućava jednostavno kalibrisanje. Pokazano je da IDM dobro reprodukuje empirijski dobijene podatke i da su ubrzanja i usporenja koja "predviđa" model u skladu sa onim uočenim u realnom saobraćaju. Model je predstavljen jednačinom

$$\ddot{x}_n(t) = k_n \left[1 - \left(\frac{\dot{x}_n(t)}{\dot{x}_0^{(n)}} \right) - \left(\frac{S^*(\dot{x}_n(t), \Delta\dot{x}_n(t))}{S_n(t)} \right) \right], \quad (13.22)$$

gde je δ eksponent ubrzanja za koji se najčešće uzima vrednost 4, $\dot{x}_0^{(n)}$ je željena brzina, $\Delta\dot{x}_n(t) = d(\Delta x_n(t))/dt$ je izvod po vremenu razmaka do vozila ispred, $S_n(t)$ je trenutna vrednost rastojanja do vozila ispred, a S^* je željeno rastojanje do vozila ispred, čija se vrednost određuje relacijom

$$S^*(\dot{x}_n(t), \Delta\dot{x}_n(t)) = S_0^{(n)} + S_1^{(n)} \sqrt{\frac{\dot{x}_n(t)}{\dot{x}_0^{(n)}}} + T^{(n)} \dot{x}_n(t) + \frac{\dot{x}_n(t), \Delta\dot{x}_n(t)}{2\sqrt{a^{(n)}b^{(n)}}}, \quad (13.23)$$

gde su $S_0^{(n)}$, $S_1^{(n)}$ rastojanje u saobraćajnoj gužvi, $T^{(n)}$ je sigurno vremensko odstojanje, $a^{(n)}$ je maksimalna moć ubrzanja vozila, a $b^{(n)}$ je željeno (komforno) usporenje vozila.

IDM model je kasnije prolagođen ljudima-vozačima (ljudi a ne mašine!) [337] i to je unapređenje dovelo do modela "prilagođenog ljudima - vozačima" (HDM). HDM model uključuje vreme reakcije vozača tako što se čitava desna strana jednačine (13.22) posmatra u trenutku $(t - \tau)$, a ne u trenutku t , gde je τ kašnjenje u reakcijama vozača. U članku [337], rezmatrane su vrednosti parametra τ između 0 i 2 [s].

13.15 Modeli praćenja više vozila

U modelima razmatranim do sada pretpostavljeno je da vozač obraća pažnju samo na jedno vozilo, koje se nalazi neposredno ispred. Ovaj koncept se može proširiti tako da se pretpostavi da vozač usklađuje kretanje svog vozila sa kretanjem više vozila unapred. U članku [281] predložen je model u okviru koga svi vozači prate dva vozila ispred sebe, i prema njima usklađuju svoju vožnju. Model je dat sledećom jednačinom

$$\ddot{x}_n(t) = k_1 [\dot{x}_{n-1}(t - \tau) - \dot{x}_n(t - \tau)] + k_2 [\dot{x}_{n-2}(t - \tau) - \dot{x}_n(t - \tau)]. \quad (13.24)$$

Mogu se, naravno, kreirati modele u kojima vozač prati veći broj vozila ispred sebe [179], [337].

13.16 Pretpostavke i analiza matematičkih modela, sa uključenim vremenskim kašnjenjem

Neka ograničenja mikroskopskih modela sa uključenim vremenskim kašnjenjem su:

- a) Simulacije saobraćajnog toka korišćenjem mikroskopskih modela, sa uključenim velikim brojem vozila, mogu biti numerički neracionalne, mada je "saobraćajni scenario" sa oko 1000 vozila u okviru numeričkih mogućnosti savremenih računara.
- b) Neki mikroskopski modeli nisu u stanju da objasne neke fenomene saobraćajnog toka, kao što je saobraćajni tok sa velikom gustinom vozila.
- v) Često nije moguće uspostaviti direktnu vezu između osobina makroskopskih i mikroskopskih modela, pa je, na primer, nejasno šta je to "viskoznost" u mikroskopskom modelu.
- g) "Fitovanje" empirijskih podataka "na" matematički model sa uključenim vremenskim kašnjenjem postaje komplikovanije u odnosu na slučaj bez uključenog kašnjenja, jer je vremensko kašnjenje dodatni parametar koji mora biti uključen u razmatranje.
- d) Vremensko kašnjenje koje zavisi od vremena, ovde nije razmatrano i u tom slučaju bi "fitovanje" moglo biti izuzetno teško ostvarivo.
- đ) Određivanje vrednosti vremenskog kašnjenja može biti teško i/ili nepraktično.

Uobičajena pojednostavljena koja se pojavljuju u matematičkom modelovanju i u analizi stabilnosti uključuju linearizaciju u okolini fiksni tačaka (tačaka ravnoteže) i homogenost, u smislu da se pretpostavlja da su sva vozila, vozači i kašnjenja u reakcijama svih vozača jednaki među sobom: $k_n = k$ i $\tau_n = \tau$. Iako linearizacija znači pojednostavljenje analize, ona omogućava dublji uvid u dinamiku kretanja u okolini fiksne (ravnotežne) tačke. U mnogim istraživačkim člancima linearizovana dinamika modela je razmatrana korišćenjem analitičkih metoda ([19], [20], [158]) i/ili numeričkih metoda ([62], [64]), dok je nelinearna analiza stabilnosti sprovedena u člancima [335]-[337] i [366] numeričkim metodama, a u člancima [235], [236] i [237] analitičkim putem. Posebno ističemo rad [235], koja spada u najranije istraživačke članke posvećene analitičkom rešavanju nelinearne dinamike

saobraćajnog toka sa uključenim vremenskim kašnjenjem. Ova studija je zasnovana na ispitivanju Hopfovih bifurkacija sistema sa uključenim vremenskim kašnjenjem i translacionom simetrijom.

Dinamika identičnih brzina je veoma često pojednostavljena u većini razmatranih modela. Ovo ograničenje može biti eliminisano pristupom sa stanovišta upravljanja kretanjem [298], [300]-[302].

Sledeće važno pojednostavljenje sadržano je u pretpostavci da su kašnjenja kod svih vozača jednaka među sobom, što se ogleda u tome da se u modelu pojavljuje samo jedna vrednost kašnjenja τ . Veliki izazov leži u tome da se analiziraju višestruka (heterogena) kašnjenja, zato što različiti vozači, prirodno, različito "kasne" tokom vožnje.

13.17 Linearna analiza sa jednim kašnjenjem

13.17.1 Slučaj kada se N vozila kreću u kružnom toku

U istraživačkom članku [237] razmatran je model

$$\ddot{x}_n(t) = k [V(x_{n-1}(t - \tau) - x_n(t - \tau)) - \dot{x}_n(t)], \quad (13.25)$$

gde je $n = 1, \dots, N$, N je broj vozila a uslov $x_0 = x_N$ važi jer se vozila kreću u kružnom toku. Ravnotežna tačka je

$$x_n^{eq}(t) = V(L/N)t + x_n^0, \text{ gde je } x_{n-1}^0 - x_n^0 = L/N,$$

L je dužina kružnog toka. Dinamika malih perturbacija $y_n(t)$ (linearizovana jednačina jednačine (13.25) predstavljena je izrazom

$$\ddot{y}(t) = -ky_n + b_1 (y_{n-1}(t - \tau) - y_n(t - \tau)), \quad (13.26)$$

gde je $b_1 = kV'(L/N)$. Karakteristična jednačina (13.26) je

$$f(s, \tau, N) = (s^2 + ks + b_1 e^{-\tau s})^N - (b_1 e^{-\tau s})^N = 0. \quad (13.27)$$

U radu [236] ispitivane su bifurkacije korišćenjem softvera DDE-BIFTOOL [82] i dobijene su zaustavne i kolizione krive.

U slučaju $N > 2$, analiza stabilnosti jednačine (13.27) postaje znatno teža, mada postoje razvijene metode za ispitivanje stabilnosti ovog tipa karakterističnih jednačina sa jednim kašnjenjem ([227], [231], [297], [312]).

13.17.2 Slučaj $N = 2$

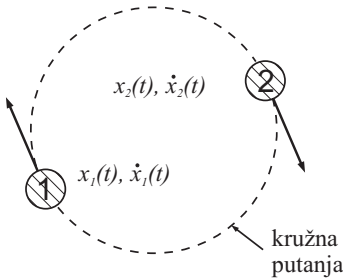
U istraživačkim člancima razmatrani su jednostavniji oblici jednačina (13.27), što je omogućilo da se lakše analitički dobiju i interpretiraju rezultati u vezi sa dinamikom saobraćajnog toka. Slučajevi $N = 2$ i $N = 3$ razmatrani su u [235] i [237], redom.

Linearizovana dinamika modela razmatranog u članku [235], u okolini ravnotežne tačke, sa jednim vremenskim kašnjenjem, data je jednačinama

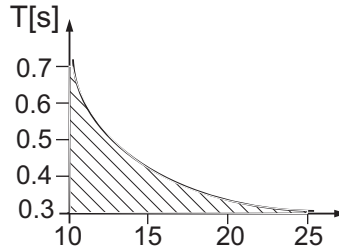
$$\begin{aligned}\ddot{y}_1(t) &= -\frac{1}{T}\dot{y}_1(t) + b_1(y_2(t - \tau) - y_1(t - \tau)), \\ \ddot{y}_2(t) &= -\frac{1}{T}\dot{y}_2(t) + b_1(y_1(t - \tau) - y_2(t - \tau)),\end{aligned}\tag{13.28}$$

gde je τ vremensko kašnjenje, a b_1 i T su konstante.

Na slici 13.3 prikazana je oblast stabilnosti u prostoru parametra τ i T .



Slika 13.2: Saobraćajni "scenario": dva vozila u kružnom toku.



Slika 13.3: Oblast stabilnosti (osenačena) dinamike saobraćajnog toka (13.28) u prostoru parametra τ i T .

13.18 Modeli sa više kašnjenja

Matematički modeli sa jednim kašnjenjem mogu biti dalje unapređeni uvođenjem više različitih kašnjenja.

Razmotrimo model (13.28) sa dva različita međusobno nezavisna kašnjenja, koja odražavaju različitu osetljivost vozača na promenu rastojanja i promenu brzine

$$\begin{aligned}\ddot{y}_1(t) &= -\frac{1}{T}\dot{y}_1(t - \tau_2) + b_1(y_2(t - \tau_1) - y_1(t - \tau_1)), \\ \ddot{y}_2(t) &= -\frac{1}{T}\dot{y}_2(t - \tau_2) + b_1(y_1(t - \tau_1) - y_2(t - \tau_1)),\end{aligned}\tag{13.29}$$

Pitanje u vezi sa stabilnošću sistema može biti postavljeno na sledeći način: za koje vrednosti vremenskog kašnjenja τ_1 i τ_2 tačka ravnoteže ostaje stabilna? Realni delovi korena karakterističke jednačine

$$f(s, \tau_1, \tau_2) = \left(s^2 + \frac{s}{T} e^{-\tau_2 s} + b_1 e^{-\tau_1 s} \right)^2 - b_1^2 = \quad (13.30)$$

$$= \left(s^2 + \frac{s}{T} e^{-\tau_2 s} + b_1 e^{-\tau_1 s} - b_1 \right) \times \left(s^2 + \frac{s}{T} e^{-\tau_2 s} + b_1 e^{-\tau_1 s} + b_1 \right) = 0 \quad (13.31)$$

moraju biti manji od nule, da bi tačka ravnoteže odgovarajućeg nelinearizovanog sistema 13.29 bila asimptotski stabilna. Analiza stabilnosti rešenja karakteristične jednačine 13.31 može biti određena tehnikama izloženim u radovima [116], [296] i [297]. Od interesa je određivanje stabilnosti sistema 13.29 u zavisnosti od parametra τ_2 . Maksimalna dozvoljena vrednost ovog parametra, da bi stabilnost bila očuvana, mora biti manja od 0,8 [s], što je uporedivo sa kašnjenjem u reakcijama vozača (ljudi, a ne mašina!) u realnom saobraćaju. Stabilnost se održava za mnogo veće vrednosti parametra τ_1 (τ_1 može biti za red veličine veće od τ_2 , a da stabilnost ne bude narušena).

13.19 Kašnjenja koja zavise od vremena

Realnije je kada se pretpostavi da kašnjenje zavisi od vremena, tj. da je oblika

$$\tau(t) = \tau_0 + \delta(t), \quad \text{gde je } 0 \leq \delta(t) \leq \varepsilon,$$

a τ_0 je konstanta. U radu [133] empirijski je pokazano da su promene u kašnjenju reakcija kod vozača vrlo spore, tj. da je $0 \leq |\dot{\delta}(t)| \leq \varrho$, gde je ϱ dovoljno malo.

13.20 Unapređenje stabilnosti saobraćaja praćenjem više vozila

U radovima [273] i [337], razmatrana je analiza stabilnosti za kolonu od 100 vozila i pokazano je da je oblast stabilnosti celokupne saobraćajne dinamike značajno uvećana kada vozači prate (usklađuju svoju vožnju) više od jednog vozila. Drugim rečima, "destabilizujući efekti kašnjenja u reakcijama vozača kompenzovani su strategijom praćenja više vozila". Autori su predstavili fazne dijagrame (stabilno, oscilatorno i nestabilno kretanje kolone) saobraćajnog toka u funkciji broja vozila (ispred), koja se prate i vrednosti vremenskog kašnjenja u reakcijama vozača.

Sa druge strane, u radu [299], pretpostavlja se da vozači različito reaguju na promene u kretanju kod vozila neposredno ispred i na promene u kretanju vozila dalje napred u koloni, i da su osetljiviji na promene u kretanju vozila ispred. Drugačije rečeno, kašnjenja u reakcijama vozača nisu identična za sva vozila koja se prate, a nalaze se ispred u koloni. Vozači češće vrše usklađivanja sa kretanjem vozila neposredno ispred.

13.21 Zaključak

Poslednjih decenija objavljen je veliki broj istraživačkih članaka u kojima se razmatra dinamika saobraćajnog toka. Mnogi od tih članaka uključuju u analizu i efekte vremenskog kašnjenja u reakcijama vozača.

Predstavićemo, sada, neka opšta zapažanja u vezi matematičkih modela koji uključuju efekte vremenskog kašnjenja u reakcijama vozača:

- 1) Većina modela sa uključenim vremenskim kašnjenjem predstavljena je sistemima spregnutih nelinearnih diferencijalnih jednačina, koje su, u dugim vremenskim intervalima, numerički rešavane da bi se razumelo njihovo ponašanje.
- 2) Vrlo često se sprovodi linearna analiza modela saobraćajne dinamike, u okviru koje se razmatra stabilnost linearne dinamike, najčešće bez kašnjenja, a uslovi stabilnosti dati su u funkciji parametara sistema.
- 3) U istraživačkim člancima najčešće su predstavljeni modeli samo sa jednim kašnjenjem.
- 4) Mali broj objavljenih publikacija uključuje i bifurkacionu analizu razmatranih modela.

Uvereni smo da postoji mnogo prostora za dalje istraživanje saobraćajne dinamike sa uključenim vremenskim kašnjenjem, i da u ta istraživanja treba da budu uključeni istraživači iz mnogih oblasti, a naročito matematičari, fizičari, saobraćajni inženjeri i inženjeri iz različitih oblasti tehničkih nauka.

Nelinearni geodinamički procesi

*Sve dok se matematički zakoni
odnose na realnost – nisu
pouzdati, a sve dok su pouzdani,
ne mogu se odnositi na realnost.*

(Albert Ajnštajn)

Geodinamika predstavlja naučnu disciplinu geologije koja se bavi izučavanjem endogenih i egzogenih geoloških procesa. U stručnoj literaturi mogu se naći različita tumačenja područja izučavanja Geodinamike. Tako, na primer, Tarkot i Šubert [326] navode da je Geodinamika, u principu, fizika fundamentalnih procesa tektonike ploča. Šajdeger [292] smatra Geodinamiku naukom orogenih procesa koji oblikuju Zemljin reljef. Prema Kleševu i Šajnu [156], Geodinamika predstavlja nauku razvoja Zemlje i dubokih procesa transfera materijala i energije, kao i fizičko-hemijskih i mehaničkih promena stenskih masa. U našoj literaturi Geodinamika se obično naziva Dinamičkom geologijom, koja izučava geološke procese koji menjaju Zemljinu koru i nenu površinu, razaranjem starih struktura i formiranjem novih [249]. Geološki procesi se dele na egzogene (dejstvo spoljašnjih činilaca) i endogene (koji se odvijaju pod dejstvom unutrašnjih sila). U ovom poglavlju izučavaćemo dve vrste geoloških procesa - **zemljotrese**, kao endodinamičke procese, i **kliženje**, kao egzodinamički proces. Disciplina geologije koja proučava tektonske procese i uslove koji dovode do nastanka zemljotresa naziva se **Seizmotektonika**. S druge strane, disciplina geologije koja se bavi izučavanjem savremenih geoloških procesa (gde spadaju i klizišta) sa aspekta njihovog uticaja na podobnost terena za građenje objekata

i urbanizaciju naziva se **Inženjerska geodinamika**. U ovom poglavlju, zemljotresi i klizišta se izučavaju sa aspekta mehanizma njihovog nastanka i dinamike procesa, sa naglaskom na mogućnost primene metoda nelinearne dinamike i teorije haosa.

14.1 Zemljotresi

Izučavanje zemljotresa, polazeći od toga da predstavljaju deterministički haotične sisteme, motivisano je činjenicom da su mnogi prirodni i veštački fenomeni haotični po svojoj prirodi. U takve sisteme mogu se ubrojati laserski sistemi, dinamika bioloških populacija, tokovi električne struje, požari i dinamika atmosferskih strujanja. Nasuprot naučno-popularnom shvatanju da "haos" predstavlja potpuno neuređeno stanje sistema, osnovna odlika determinističko-haotičnih pojava je njihova predvidljivost u kratkom vremenskom intervalu. Ovo svojstvo haotične dinamike privuklo je pažnju mnogih seizmologa i fizičara, koji su počeli da izučavaju dinamičko ponašanje zemljotresa i njihovih efekata na površini terena, u potrazi za determinističkim haosom. Međutim, primena metoda nelinearne dinamike i teorije haosa u izučavanju zemljotresa je jako otežana, pre svega zbog nepostojanja tačne matematičke formulacije mehanizma nastanka potresa, za razliku od brojnih dinamičkih modela u biologiji, saobraćaju i drugim potencijalno haotičnim pojavama.

Uobičajeni način izučavanja zemljotresa sa stanovišta nelinearne dinamike podrazumeva korišćenje postojećih **fenomenoloških modela**, koji kvalitativno opisuju mehanizam nastanka potresa, čija se dinamika osmatra variranjem različitih parametara. Negativna strana ovog pristupa je da ovi modeli obično predstavljaju samo aproksimaciju realnog sistema. Najčešće korišćen model u ovom slučaju je **Baridž-Knopof model**¹ (1967), [37], koji se sastoji od niza blokova povezanih oprugama određene krutosti k . Svaki od blokova je, takođe, preko opruga različite krutosti povezan sa pokretnom pločom, koja uzrokuje trzajuće² kretanje čitavog sistema. Blokovi se kreću po hrapavoj površi donje nepokretne ploče, čime se simulira realno uočeno trenje duž raseda *in situ*. Dosadašnja istraživanja dinamike ovog modela bloka (ili blokova) sa oprugom ukazuju na prisustvo determinističkog haosa. Tako, na primer, De Sousa Vieira, 1999.god. [68] prva je pokazala da BK model sa dva bloka u simetričnoj konfiguraciji pokazuje deterministički haotično ponašanje. Takođe, analiza BK modela sa jednim blokom,

¹U daljem tekstu za Baridž-Knopof model koristiće se skraćenica BK model.

²stick-slip (eng.)

pri čemu se trenje između nepokretne ploče i bloka menja po Diterih-Ruina zakonu, izvedena od strane Erikson i dr., 2008. god. [84], pokazala je da dinamika kretanja bloka, za određene vrednosti kontrolnih parametara, pokazuje, nama poznati, Fajgenbaumov put u haos (sa udvajanjem perioda).

Kasnije, iz ovog modela razvilo se izučavanje potresa zasnovano na tzv. **ćelijskim automatima**³, kao diskretnim modelima potresa, među kojima je najpoznatiji Olami-Feder-Christensen model (OCF, 1992., [229]). Naime, utvrđeno je da zemljotresi predstavljaju primer samoorganizovane kritičnosti (SOC), u tom smislu da je interakcija blokova stenske mase na mestu nastanka zemljotresa uvek takva da neminovno vodi ka stvaranju novih potresa, tj. kritičnom stanju (Bak, Tang, Wiesenfeld, 1987.,[15]). S tim u vezi, modeli ćelijskih automata, pre svega, izučavani su upravo zbog svojstva samo-organizovane kritičnosti, i njihove relacije sa **seizmološkim zakonima** (Gutenberg-Rihter i Omori-Utsu zakon). Shodno tome, izostala su detaljnija izučavanja ovih modela sa stanovišta nelinearne dinamike i teorije haosa.

Neophodno je naglasiti da se metodama nelinearne dinamike i teorije haosa izučavaju:

- tektonski zemljotresi, koji nastaju na lokacijama transkurentnih raseda, duž kojih se tektonske ploče ili blokovi stenske mase kreću u subhorizontalnom pravcu, i
- potresi izazvani rudarskom aktivnošću, a koji su nastali usled promene naponskog stanja i reaktiviranja kretanja duž postojećih raseda. Praktično, ovaj tip potresa ima gotov isti mehanizam nastanka (kretanje duž raseda) kao i prethodno pomenuti tektonski zemljotres.

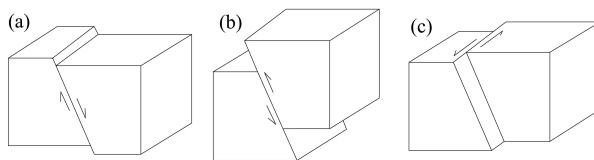
Po pojedinim autorima, BK modelom moguće je opisivati i zone subdukcije (Karlson, Langer, 1989.,[43]), mada bi tada kretanje blokova trebalo da bude upravno na vezivne opruge. Ostali tipovi zemljotresa (vulkanski, urvinski, gorski udari) nisu toliko zastupljeni u prirodi, a, takođe, njihova pojava je vezana za dejstvom nekog spoljašnjeg faktora (vulkanska aktivnost, provala tavanica pećina i podzemnih prostorija, tehnogena aktivnost), tako da oni ne mogu biti simulirani opisanim fenomenološkim BK modelom.

14.1.1 Mehanizam nastanka zemljotresa

Hipoteza o mehanizmu nastanka tektonskih zemljotresa, opšte prihvaćena u našoj stručnoj literaturi, u potpunosti se oslanja na **hipotezu H. F.**

³cellular automata (eng.)

Rida⁴ o elastičnom odgovoru tla (1910). Naime, bočni pritisci u Zemljinoj kori, stvoreni usled kretanja tektonskih ploča koncentrišu se u vidu napona u stenama - duž konvergentnih granica tektonskih ploča, ili na kontaktu dva bloka stenske mase. Pošto tektonske ploče u kretanju predstavljaju ogromne mase stena, sa zapreminom reda veličine miliona kubnih kilometara, to je i njihova kinetička energija ogromna, bez obzira na relativno malu brzinu tog kretanja, reda veličine [cm/god]. Pri sučeljavanju dve tektonske ploče, vrši se transformisanje njihove kinetičke energije u mehaničku energiju, koja se preko pritisaka koncentriše u stenama zone sučeljavanja. Akumuliranje pritisaka (i njihovih posledica - napona) u stenama obavlja se do momenta kada ovi naponi dostignu granicu čvrstoće stene. Tada, duž površi maksimalne koncentracije napona, nastaje mehanički lom stene, formiranje raseda i dislociranje stenskih masa duž rasedne ravni (sl. 14.1). Na taj način se postiže naponsko rasterećenje stena i privremeno se uspostavlja novo stabilno stanje, a stena je zatim "sposobna" da akumulira nove napone.

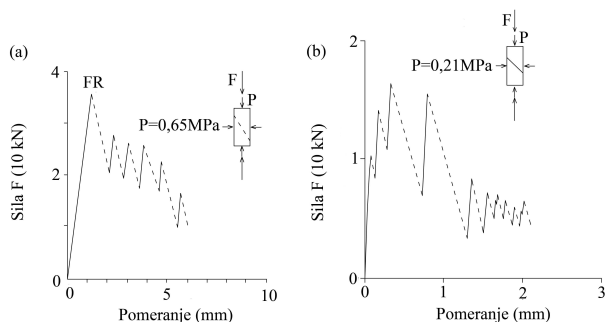


Slika 14.1: Osnovni tipovi rasedanja u Zemljinoj kori: (a) normalni (gravitacioni) rased; (b) reversni rased; (c) horizontalni (transkurentni) rased.

Međutim, iako se čini da Ridova hipoteza daje moguće objašnjenje za zemljotrese, već 60-ih godina prošlog veka bila je izložena brojnim kritikama. Mnogi autori su ukazivali na to da je, naročito za duboke potrese, oslobađanje energije usled loma malo verovatno. Ono što takođe ne ide u prilog Ridovoj hipotezi je da tokom potresa dolazi do oslobađanja male količine napona (reda veličine 10 [MPa]). S obzirom na to da se, u laboratorijskim uslovima, veličina oslobođenog napona za vreme loma stene meri stotinama [MPa], teško je objasniti kako dolazi do ponovnog akumuliranja napona, dovoljnog za stvaranje novog potresa (prema Ridovom mehanizmu). Shodno tome, Brejs i Bajerli (1966) [35] izveli su eksperimente na uzorcima granita i na osnovu dobijenih rezultata predložili novi tip kretanja seizmo-

⁴Harry Fielding Reid (1859-1944), američki geofizičar, dao veliki doprinos razvoju seizmologije u SAD; od strane Seizmološkog društva SAD ustanovljena je nagrada za najboljeg istraživača iz oblasti seizmologije, koja nosi njegovo ime.

genih raseda - **trzanje**⁵. Pri tome, ispitivanja neporemećenih i poremećih⁶ uzoraka stena vršena su u triaksijalnom aparatu za smicanje (sl. 14.2).



Slika 14.2: (a) Kriva sila-pomeranje za cilindričan uzorak Vesterli granita (ostrvo Roud, Vašington, SAD); uzorak se polomio po dejstvu sile u tački FR formirajući pukotinu koja je prikazana kao isprekidana linija na malom dijagramu; tačan oblik krivih za vreme pada napona nije poznat, tako da su one na grafiku predstavljene isprekidano; (b) Kriva sila-pomeranje za cilindričan uzorak Vesterli granita sa predisponiranom pukotinom [35].

Laboratorijski opiti izvedeni su na sledeći način. Kako je i prikazano na malom dijagramu u gornjem desnom uglu na slici 14.2(a), cilindričan uzorak granita se izlaže hidrostatičkom pritisku. Potom se u vertikalnom pravcu izlaže sili kompresije, do loma. Na mestu loma, može se uočiti veliki pad napona (prva isprekidana linija na slici 14.2a). Nakon toga, kretanje duž pukotine prestaje, što omogućava ponovnu primenu sile. Nakon dostizanja određene veličine, ponovo dolazi do pada napona, i tako redom. U svakom novom ciklusu opterećenje-lom, napon u uzorku se naizmenično akumulira i oslobađa. Svako oslobađanje napona praćeno je malom veličinom kretanja duž pukotine.

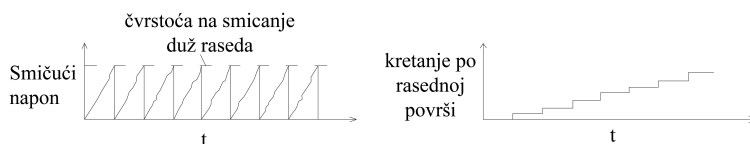
U drugom opitu (sl. 14.2b), pristupilo se ispitivanju poremećenog uzorka sa već postojećim diskontinuitetom, približno iste orijentacije sa pukotinom koja je formirana u prethodnom slučaju. Karakter kretanja u ovom slučaju zavisio je od hrapavosti pukotine; kada je površ pukotine hrapava, sa dosta neravnina, kretanje je trzajuće, slično prethodnom (sl. 14.2b).

Ovakvo trzanje kvalitativno odgovara realno osmatranim pojavama akumulacije i oslobađanja napona tokom kretanja duž seizmogenog raseda (sl. 14.3). Za razliku od Ridove hipoteze elastičnog odgovora, trzanjem duž raseda moguće je objasniti sledeće:

⁵stick-slip motion (eng.)

⁶poremećeni uzorak je uzorak sa postojećom pukotinom

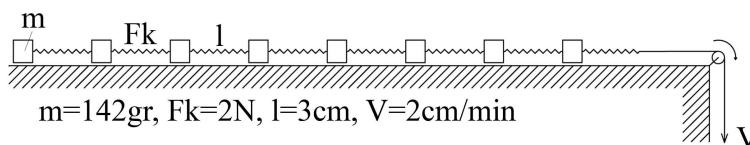
- kao što je i simulirano u opitu, pad napona tokom događanja zemljotresa može predstavljati oslobađanje samo malog dela ukupnog napona koji može da podnese stenska masa. Ovim bi moglo da se objasni zašto je pad napona, čak i za jače potrese, mali u odnosu na čvrstoću većine stena;
- trzanjem se objašnjava mehanizam za iznenadno oslobađanje energije u već polomljenoj stenskoj masi.



Slika 14.3: Naizmenično smenjivanje ciklusa akumulacije i oslobađanja napona izazvano trzanjem duž seizmogenog raseda.

14.1.2 Baridž-Knopof model

U opštem slučaju, trzanje predstavlja kretanje koje se javlja na kontaktu dva čvrsta tela, usled naizmeničnog smanjenja i povećanja jačine trenja. Osnovni fenomenološki model kojim se opisuje trzanje predstavlja **Baridž-Knopof model bloka sa oprugom**⁷ (1967). U originalnom radu Baridža i Knopofa iz 1967.g., model se sastoji od osam blokova koji su međusobno povezani oprugama određene krutosti, i kreću se po hrapavoj površi, pri čemu je prvi blok, preko kotura povezan sa motorom, koji pokreće ceo sistem (sl. 14.4).



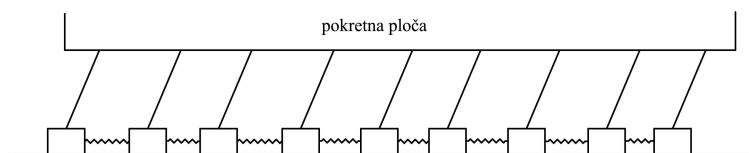
Slika 14.4: Shematski prikaz laboratorijskog BK modela; m predstavlja masu bloka, F_k - silu u opruzi, l - dužinu opruge, a V - brzinu kretanja sistema [37].

Model je konstruisan u cilju ispitivanja raspodele potencijalne energije u posmatranom sistemu, i poređenja te raspodele sa **Gutenberg-Rihter**⁸

⁷Burridge-Knopoff spring-block model (eng.)

⁸Gutenberg-Rihter zakon predstavlja odnos između magnitude M (količine oslobođene energije u žarištu) i ukupnog broja dogođenih zemljotresa N u određenoj oblasti i u određenom vremenskom periodu, i izražava se formulom $\log N = a - bM$.

i **Omori-Utsu zakonom**⁹ koji važe za tektonske zemljotrese u realnim uslovima. U tom smislu, razmatrana su dva slučaja: a) kada su blokovi povezani oprugama istih karakteristika; b) kada su blokovi povezani oprugama različitih karakteristika, pri čemu je uzeto da je krutost opruge proporcionalna zbiru masa svih blokova između opruge i slobodnog kraja. U ovom opitu svi blokovi su mase 142 [gr]. Sila u oprugama u oba slučaja iznosila je 2 [N], pri čemu su u prvom opitu dužine svih opruga bile 3 [cm], dok su u drugom opitu dužine opruga bile različite (1,5-12 [cm]). Čitav sistem bio je povezan sa motorom, koji je uzrokovao njegovo kretanje, brzinom od oko 2 [cm/min]. U istom radu, Baridž i Knopof su odmah predložili i modifikaciju modela, tako da su umesto motora, sve blokove povezali oprugama određene krutosti za gornju pokretnu ploču (sl. 14.5). Na taj način, postigli su kvalitativnu simulaciju kretanja na kontaktu tektonskih ploča ili blokova stenske mase, duž rasedne zone. Upravo ovaj model se, u različitim varijantama, i danas koristi kao osnova u razmatranjima dinamike zemljotresa.



Slika 14.5: BK model sa pokretnom pločom (umesto motora) koja uzrokuje kretanje sistema, simulirajući kontakt dve tektonske ploče ili dva bloka stenske mase duž raseda [37].

Ukoliko usvojimo da je $x_{i,m}$ položaj i -tog bloka nakon kretanja čitavog sistema (tzv. "lavine"), a ℓ_i dužina opruge u nezategnutom stanju, onda je potencijalna energija sistema odmah nakon m -te lavine¹⁰ data sledećim izrazom:

$$E = \frac{1}{2}k_1 (x_0 - x_{1,m} - \ell_1)^2 + \sum_{n=2}^N k_n (x_{n-1,m} - x_{n,m} - \ell_n)^2 \quad (14.1)$$

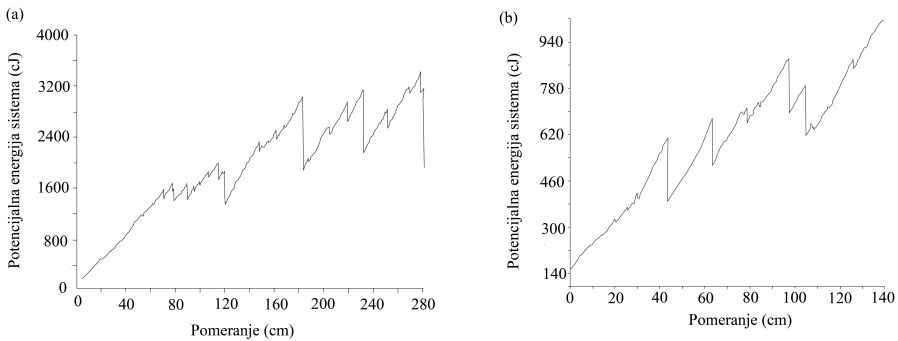
koji predstavlja Hukov zakon elastičnosti. Ovde x_0 predstavlja položaj prvog bloka, koji je jedini izložen dejstvu spoljne sile motora \mathbf{F}_p , i, kao takav, kreće

⁹Omori-Utsu zakon predstavlja empirijsku relaciju kojom se izražava opadanje jačine naknadnih udara ("afteršokova"), koje je obrnuto proporcionalno u odnosu na vreme proteklo od glavnog udara. Izražava se formulom $N(t) = K/(c+t)^p$, gde je K amplituda, c parametar koji određuje vreme u odnosu na glavni udar, t vremenski interval u odnosu na glavni udar, a p je empirijski parametar (0,7 - 1,5).

¹⁰Lavina označava kretanje većeg broja blokova.

se konstatnom brzinom tokom celokupnog trajanja eksperimenta. U tom smislu, može se smatrati da je proporcionalan vremenu.

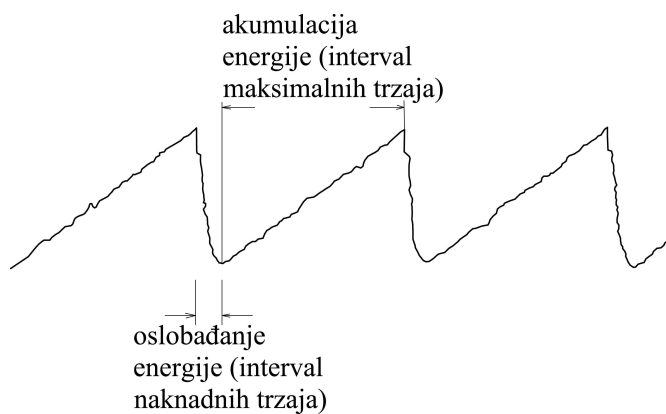
Tokom trajanja eksperimenta, prvi blok deluje preko opruge određenom silom F_1 na susedni blok. Kada sila F_1 prevaziđe vrednost statičkog koeficijenta trenja, drugi blok počinje da se kreće, uzrokujući kretanje trećeg bloka, itd. Svaka promena energije nakon pomeranja blokova računa se po formuli (14.1). Shodno tome, moguće je odrediti količinu oslobođene energije u pojedinim vremenskim intervalima tokom kretanja sistema, kako je i prikazano na slici 14.6. U oba slučaja (kada su opruge jednake i različite dužine) jasno se uočava početni stadijum akumulacije potencijalne energije do trenutka kada pojedini blokovi počinju da se kreću. Međutim, za slučaj kada su opruge jednake dužine, vidimo da je početni stadijum akumulacije energije praćen kraćim intervalima oslobađanja energije (kada blokovi počinju da se kreću nezavisno jedan od drugog) da bi od $x_0 = 120$ [cm] došlo do znatnog većeg oslobađanja akumulirane energije, što označava početak kretanja čitavog sistema. S druge strane, ukoliko opruge nisu jednake dužine, jasno se uočava da već od $x_0 = 40$ [cm] dolazi do kretanja celog sistema (sl. 14.6b). Prema tome, može se zaključiti da je drugi slučaj znatno nepovoljniji po stabilnost sistema, i kao takav se često razmatra u savremenoj literaturi, najčešće putem variranja krutosti opruga.



Slika 14.6: Raspodela oslobađanja potencijalne energije u funkciji pomeranja prvog bloka x_0 u modelu više blokova povezanih oprugama, za slučaj kada su: (a) sve opruge jednake dužine; (b) opruge različite dužine [37], [163].

Naglasimo da je pojava većih oslobađanja energije gotovo periodična, pri čemu se ta, gotovo periodičnost, može objasniti na sledeći način. Očigledno je da mora da postoji određena gornja granica potencijalne energije, iznad koje je sistem uvek nestabilan, što je slučaj kada su sve opruge zategnute tako da su svi blokovi na granici stabilnosti i nestabilnosti. Stoga

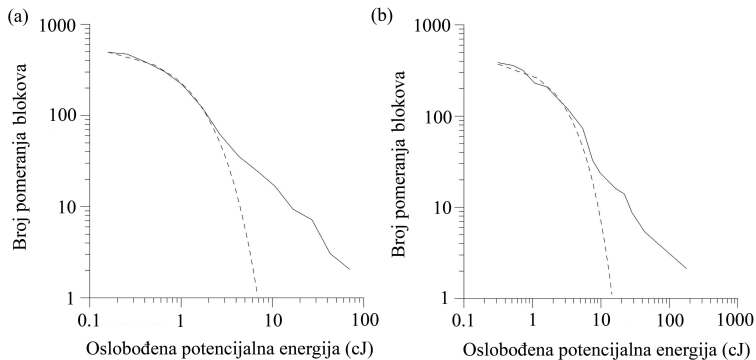
će, bilo koji "okidač" dovesti do naglog oslobađanja velike količine energije (tj. potresa u realnim uslovima). Tada se sistem ponaša kao relaksacioni oscilator, čiji je osnovni predstavnik već detaljno razmatran u jednom od prethodnih poglavlja ovog udžbenika (Van Der Polov oscilator). U prilog ovoj činjenici ide i grafik potencijalne energije sistema tokom dužeg vremenskog intervala, prikazan na slici 14.7, koji sa jedne strane podseća na relaksacioni oscilator, a s druge strane, na cikluse akumulacije i oslobađanja energije u blokovima stenske mase za vreme potresa.



Slika 14.7: Skica oscilacija potencijalne energije u BK modelu u dužem vremenskom periodu.

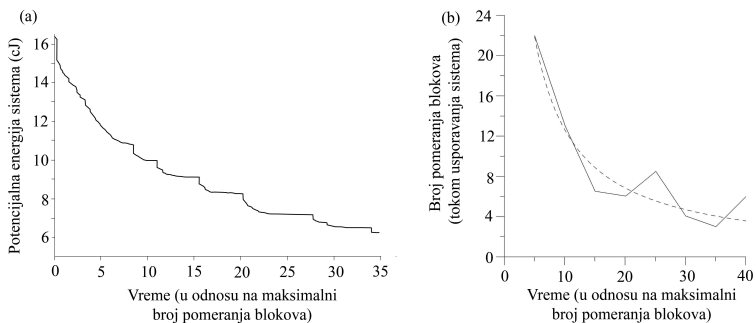
Sada se logično nameće pitanje: na koji način su Baridž i Knopof povezali svoj model i mehanizam nastanka zemljotresa? Odgovor je prilično intuitivno jasan. U prvoj fazi, najpre su pretpostavili da se količina oslobođene energije za vreme opita i magnituda potresa mogu smatrati analognim veličinama, s obzirom na to da postoji veliki broj empirijskih korelacija između ove dve veličine ([101], [321]). Potom su određivali korelaciju između broja pokrenutih blokova i sile u opruzi (veličina oslobođene energije), a zatim uporedili sa Gutenberg-Richter zakonom, dobivši zadovoljavajuće rezultate (sl. 14.8).

Naime, u prvom slučaju, kada su opruge jednake dužine (sl. 14.8a), dobijena je veoma dobra aproksimacija sa Gutenberg-Richter zakonom ($R^2 = 0,99$), sa vrednostima parametara, $a = 2,76$ i $b = 0,42$, što je u skladu sa vrednostima za realno osmatrano zemljotrese. U drugom slučaju, kada su opruge nejednake dužine (sl. 14.8b), kriva oslobađanja energije je takođe dobro aproksimirana Gutenberg-Richter zakonom ($R^2 = 0,98$), sa vrednostima parametara $a = 2,63$ i $b = 0,18$, koje su, takođe, u skladu sa vrednostima za tektonske zemljotrese u realnim uslovima.



Slika 14.8: Dijagram broja trzaja prema količini oslobođene energije za vreme potresa za BK model, za slučaj kada su: (a) sve opruge jednake dužine ($R^2 = 0,99$); (b) opruge različite dužine ($R^2 = 0,98$). Puna linija označava eksperimentalno dobijene podatke; isprekidanom linijom je predstavljena aproksimacija rezultata Gutenberg-Richter zakonom. Razlika između krivih je uvećana zbog logaritamske razmere [163], [165].

Osim poređenja sa Gutenberg-Richter zakonom, Baridž i Knopof su takođe merili veličinu oslobođene potencijalne energije tokom usporavanja blokova do konačnog zaustavljanja sistema (sl. 14.9a) za BK model sa 10 blokova i oprugama jednake dužine (iste krutosti). Dobijene rezultate poredili su sa Omori-Utsu zakonom opadanja energije naknadnih udara (afteršokova), čime su dobili zadovoljavajuću aproksimaciju, sa koeficijentom korelacije $R^2 = 0,92$ (sl. 14.9b).

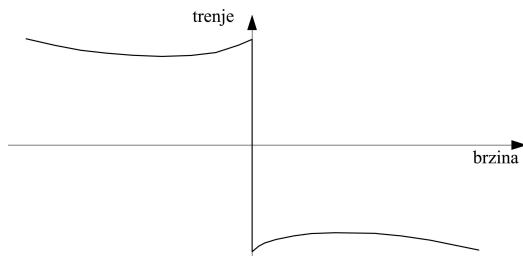


Slika 14.9: (a) Potencijalna energija u funkciji vremena izmerena tokom usporavanja blokova i konačnog zaustavljanja sistema. (b) Omori-Utsu zakon za ispitivani BK model. Na slici (b) puna linija označava eksperimentalno dobijene podatke; isprekidanom linijom je predstavljena aproksimacija rezultata Omori-Utsu zakonom [163], [165].

Ove teorijsko-kvalitativne korelacije sa realno osmatranim zemljotresima, predložene u originalnom radu Baridža i Knopofa (1967), privukle su

pažnju mnogih fizičara i matematičara i navele ih da studioznije pristupe ovom problemu. U daljem tekstu biće prikazani osnovi matematički modeli koji se danas koriste za izučavanje mehanizma nastanka zemljotresa.

U pogledu izraza za trenje, Baridž i Knopof su pretpostavili da je čitava potencijalna nestabilnost sistema uslovljena trenjem između blokova i hrapave podloge. Pri tome, oni su smatrali da je trenje funkcija samo brzine blokova u odnosu na hrapavu površ podloge po kojoj se blokovi kreću (sl. 14.10). Ova pretpostavka (da je trenje glavni izvor nelinearnosti i nestabilnosti sistema) predstavljaće osnovu čitavog jednog pravca daljeg istraživanja, čije ćemo rezultate delimično predstaviti u okviru ovog poglavlja.



Slika 14.10: Skica promene trenja u funkciji brzine u BK modelu [37].

Zakon trenja zavisan od brzine, predložen od strane Karlsona i Langera, 1989. god., [43], dat je u sledećem obliku:

$$\phi(u_i) = \begin{cases} (-\infty, 1], & \text{za } u_i \leq 0, \\ \frac{1 - \delta}{1 + 2\alpha u_i / (1 - \delta)}, & \text{za } u_i > 0. \end{cases} \quad (14.2)$$

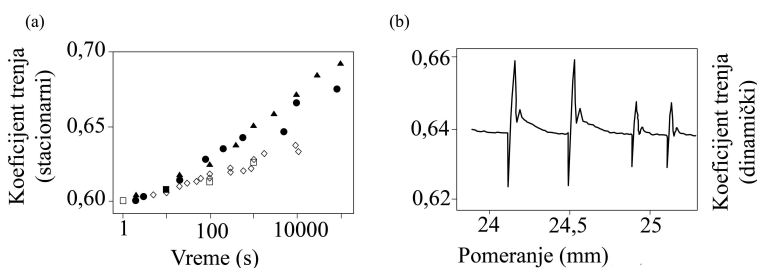
Kao što se može videti, sila trenja se karakteriše sa dva parametra: δ i α . Parametar δ , uveden od strane Karlsona i dr. [44], predstavlja trenutni pad sile trenja na početku kretanja, dok parametar α predstavlja stepen opadanja sile trenja pri porastu brzine kretanja. Ovakav zakon trenja naziva se **slabi zakon trenja**¹¹.

14.1.3 Zakoni trenja zavisni od brzine i stanja

Dosadašnja razmatranja dinamike BK modela polazila su od činjenice da je trenje glavni izvor nelinearnosti sistema. Međutim, izraz za trenje dat jednačinom (14.2), ili prikazan na slici 14.10, i na prvi pogled deluje

¹¹velocity-weakening friction law (eng.)

veoma jednostavno. S tim u vezi, nakon predloga modela bloka sa oprugom od strane Baridža i Knopofa (1967), razvio se poseban pravac izučavanja prirode trenja između bloka i nepokretne podloge. Ova istraživanja naročito su bila podstaknuta činjenicom da je moguće izvoditi laboratorijske opite na uzorcima stenskih masa, i na taj način realnije definisati zakone trenja. Upravo su eksperimentalna ispitivanja na uzorcima stenskih masa pokazala da trenje između bloka i hrapave podloge ne zavisi samo od brzine kretanja bloka, već i od stanja hrapave površi. Rezultati ispitivanja prikazani su na slici 14.11.



Slika 14.11: (a) Merenja promene vrednosti stacionarnog trenja u funkciji vremena kontakta za inicijalno uglacane površine stenske mase (tamni simboli) i zdrobljeni kataklastični materijal (svetli simboli). Različiti oblici simbola odgovaraju različitim literaturnim izvorima (kružić - Dieterich (1972), kvadrat - Dieterich (1981), trougao - Beeler i dr. (1994), deltoid - Marone (1998)) (b) Dijagram trenje-pomeranje koji ilustruje promenu koeficijenta trenja pri trzanju. Vreme stacionarnog kontakta izraženo je u sekundama, a brzina smicanja je $3[\mu \text{ m/s}]$ [195]

Na slici 14.11(a) jasno se uočava zavisnost veličine koeficijenta stacionarnog trenja od vremena kontakta bloka i podloge. U sva četiri eksperimenta, za uzorke različitih vrsta stenskih masa, evidentno je da trenje raste tokom vremena, iako je blok u stanju mirovanja. Ova činjenica se objašnjava boljim prijanjanjem kontakata između hrapavih površina¹² bloka i podloge. Na slici 14.11(b) data je promena koeficijenta trenja tokom trajanja opita, kada se blok pomera trzajući. Jasno je da pri delovanju sile dolazi do naglog povećanja veličine trenja, i u momentu kada primenjena sila prevaziđe vrednost koeficijenta trenja, dolazi do kretanja bloka i naglog pada vrednosti trenja, koje sa usporavanjem bloka ponovo uspostavlja svoju prethodnu vrednost.

Prethodno pomenuta osmatranja opisana su empirijskim konstitutivnim zakonom od strane Diteriha [70] i Ruine [283] u sledećem obliku:

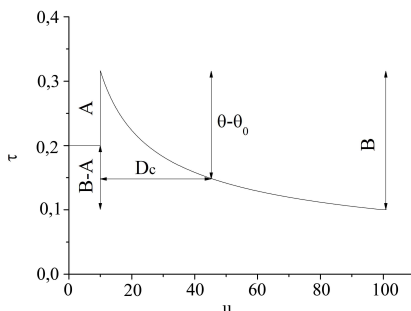
$$\mu(V, \theta) = \mu_0 + A \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) + B \ln\left(\frac{V_0 \theta}{D_c}\right) \quad (14.3)$$

¹²asperities (eng.)

gde su parametri A i B empirijske konstante. Prema Rajsu ([274], [275]), parametar A predstavlja meru direktne zavisnosti od brzine (koja se ponekad naziva "direktni efekat"), dok je $(A - B)$ mera zavisnosti od brzine za vreme kretanja bloka. Parametar D_c predstavlja "kritično" rastojanje - ono rastojanje koje je potrebno da blok pređe da bi se opet uspostavio stacionarni kontakt hrapavih površi bloka i podloge¹³. Parametar θ predstavlja "promenljivu stanja", koja oslikava uticaj hrapavosti podloge na kretanje bloka, i menja se na sledeći način:

$$\dot{\theta} = 1 - \left(\frac{V \theta}{D_c} \right). \quad (14.4)$$

Jednačina (14.3) zajedno sa jednačinom (14.4) predstavlja tzv. **Diterihov zakon** ili **zakon usporavanja**, zato što trenje raste i tokom stanja mirovanja, kada je $V = 0$. Na slici 14.12 data je grafička ilustracija Diterihovog zakona trenja.



Slika 14.12: Dijagram zavisnosti koeficijenta trenja μ od pomeranja u koji ilustruje odgovor sistema na iznenadno povećanje brzine smicanja i koji definiše članove u Diterihovom zakonu trenja. Primenjena brzina, čija je početna vrednost V_0 , iznenada se povećava za ΔV , i potom se održava konstantnom, $V_0 + \Delta V$. Kao posledica toga, koeficijent trenja, μ , u početku konstantan, iznenada se poveća za vrednost A , a potom eksponencijalno opada, uzimajući novu vrednost B . Dužina D_c predstavlja rastojanje potrebno da bi promenljiva stanja θ_0 "uzela" novu vrednost θ .

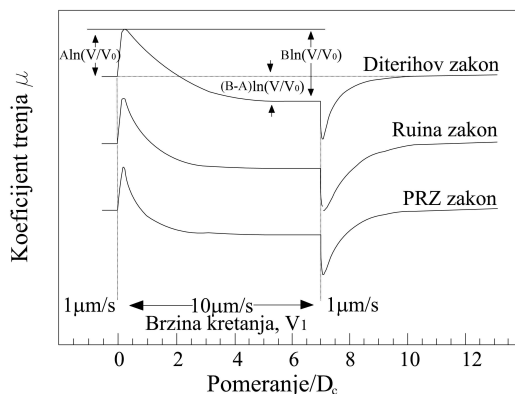
Ruina (1983) je predložio nešto drugačiji zakon trenja:

$$\mu(V, \theta) = \mu_0 + A \ln \left(\frac{V}{V_0} \right) + B \ln \left(\frac{V_0 \theta}{D_c} \right), \quad (14.5)$$

$$\dot{\theta} = - \left(\frac{V \theta}{D_c} \right) \ln \left(\frac{V \theta}{D_c} \right). \quad (14.6)$$

¹³creeping (eng.)

U ovom slučaju, Ruina smatra da bilo koja promena trenja zahteva kretanje duž površi. Drugim rečima, trenje se ne menja za vreme stanja mirovanja bloka, kao u Diterihovom zakonu trenja. Međutim, iako je razlika između ova dva zakona trenja fundamentalna u smislu mikromehaničke interpretacije procesa, oba zakona "reprodukuju" laboratorijske podatke na sličan način (sl. 14.13). Drugim rečima, u oba slučaja zapaža se tzv. direktni efekat, kada usled povećanja sile koja deluje na blok, raste i koeficijent trenja do neke vršne vrednosti. Tada dolazi do naglog pada vrednosti trenja, koje dostiže minimum kada se blok konačno zaustavi, a potom se ceo proces ponavlja. Zakoni se jedino razlikuju u karakteru i veličini promena koeficijenta trenja. Naime, kod Diterihovog zakona trenja, imajući u vidu značaj vremena kontakta između bloka i podloge, kriva promene trenja u zasivnosti od pomeranja je asimetrična (prva kriva na slici 14.13). S druge strane, kod **Ruina zakona trenja**, povećanje vrednosti stacionarnog trenja je nezavisno od vremena, i, stoga je simetrično u odnosu na promene brzine (druga kriva na slici 14.13).



Slika 14.13: Promena trenja u zavisnosti od normalizovanog pomeranja za tri zakona trenja zavisna od brzine i stanja. Konstitutivni parametri definisani su na slici za prvu krivu, i važe i za ostale razmatrane slučajeve. Za početnu brzinu kretanja usvojeno je da je $V_0 = 1 \mu\text{m/s}$. Krive su dobijene za sledeće vrednosti parametara: $a = 0,01$; $b = 0,015$; $D_c = 20 \mu\text{m}$, i $k = 0,01 \mu/m$.

Treći zakon trenja predložen je od strane Perina, Rajsa and Zenga (1995), tzv. **PRZ zakon trenja**, u sledećem obliku:

$$\mu(V, \theta) = \mu_0 + A \ln \left(\frac{V}{V_0} \right) + B \ln \left(\frac{V_0 \theta}{D_c} \right), \quad (14.7)$$

$$\dot{\theta} = 1 - \left(\frac{V \theta}{D_c} \right)^2. \quad (14.8)$$

Ovaj zakon trenja daje slične rezultate kao i drugi zakoni (sl. 14.13), sa opadanjem vrednosti trenja do stacionarnog stanja po zakonu $e^{(-u/D_c)}$, gde je u pomeranje.

Neophodno je napomenuti da Diterihov zakon trenja opisuje promenu koeficijenta trenja ne samo za površine stenskih masa, već i za metale [259], papir [129], i druge materijale. Međutim, i pored široke univezalnosti i aplikativnosti ovog zakona ponašanja materijala, jedan broj eksperimenata ukazuje na činjenicu da Diterihov zakon trenja ne važi u uslovima velike brzine klizanja, što se objašnjava različitim mehaničko - hemijskim reakcijama (zagrevanje tela¹⁴, frikciono topljenje¹⁵, stvaranje silikatne želatinske mase duž površine kontakta¹⁶, stvaranje granularnog sloja na kontaktu, koji odgovara tektonski zdrobljenim stenskim masama¹⁷) koje nastaju usled frikcionog zagrevanja, koje "podmazuje" kontaktne površine do nekog stepena; tada koeficijent trenja postaje jednak 0,2, ili čak i manji od 0,1 ([71], [105], [131]). Pojedini autori smatraju da je uloga frikcionog zagrevanja od velikog značaja pri kretanju duž raseda, s obzirom na to da su pritisci u seizmogenoj zoni reda veličine 100 [MPa]. Međutim, naše znanje o ovim pojavama još uvek nije potpuno, tako da se smatra da se, u laboratorijskim uslovima (uzimajući u obzir razmeru posmatranja) Diterihovim zakonom trenja može kvalitativno da opiše glavni mehanizma nastanka potresa.

Pored BK modela bloka sa oprugom, vrlo često se koriste i tzv. mrežni modeli sa spregnutim preslikavanjima¹⁸, poznatiji kao modeli samo-organizovane kritičnosti, sa najpoznatijim OFC modelom¹⁹, potom model svežnja vlakana²⁰, kao i model preklapanja dve fraktalne površi²¹.

14.1.4 Dinamika kretanja bloka u BK modelu

Jednačina kretanja i -tog bloka u jednodimenzionalnom BK modelu glasi:

$$m\ddot{U}_i = k_p (v' t' - U_i) + k_c (U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}) - \Phi_i \quad (14.9)$$

gde je t' vreme, U_i pomeranje i -tog bloka, v' brzina kretanja gornje pokretne ploče, a Φ_i je sila trenja za i -ti blok [43].

¹⁴flash heating (eng.)

¹⁵frictional melting and thermal pressurization (eng.)

¹⁶lubrication by silica-gel production (eng.)

¹⁷sub-micron grains worn out by high-speed friction (eng.)

¹⁸coupled map lattice models (eng.)

¹⁹Olami, Feder and Christensen model (1992)

²⁰fiber bundle model (eng.)

²¹two fractal overlap model (eng.)

Da bismo predstavili jednačinu u bezdimenzionalnom obliku, vreme t' izražavamo u jedinicama karakteristične frekvencije $\omega = (k_p/m)^{1/2}$, a pomeranje U_i u jedinicama dužine $L^* = \Phi_0/k_p$, gde je Φ_0 referentna vrednost sile trenja. Stoga, jednačina kretanja u bezdimenzionalnom obliku glasi:

$$\ddot{u}_i = v t - u_i + \ell^2 (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) - \phi_i \quad (14.10)$$

gde je $t = t'\omega$ bezdimenzionalno vreme, $u_i = U_i/L^*$ bezdimenzionalno pomeranje i -tog bloka, $\ell = (k_c/k_p)^{1/2}$ je bezdimenzionalni parameter krutosti, $v = v'/(L^*\omega)$ predstavlja bezdimenzionalnu brzinu, a $\phi_i = \Phi_i/\Phi_0$ - bezdimenzionalnu silu trenja za i -ti blok.

Odgovarajuća jednačina kretanja za dvodimenzionalni BK model u bezdimenzionalnom obliku glasi:

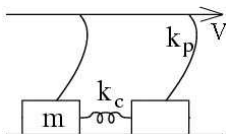
$$u_{i,j} = v t - u_{i,j} + \ell^2 (u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}) - \phi_{i,j} \quad (14.11)$$

gde je $u_{i,j} = U_{i,j}/L^*$ bezdimenzionalno pomeranje bloka (i, j) . Ovde se pretpostavlja da se kretanje svakog bloka odvija samo u pravcu kretanja gornje ploče. Kretanja upravno na ovaj pravac se zanemaruju.

Jednačina kretanja BK modela (14.9) predstavlja II Njutnov zakon primenjen u konkretnom slučaju, i kao takva je osnova za sve dalje matematičke formulacije BK modela. Međutim, jednačina kretanja (14.9) je neautonomna, i, samim tim, nepogodna za dalju analizu stabilnosti. Shodno tome, polazimo od jednačine kretanja za BK model predložene od strane Karlsona i Langerana [43], bez eksplicitne vremenske zavisnosti:

$$m \ddot{x}_j = k_c (x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}) - k_p x_j - F(v + \dot{x}_j) \quad (14.12)$$

gde se diferenciranje vrši po vremenu t , j označava broj bloka, x_j predstavlja pomeranje bloka mase m , a v predstavlja brzinu gornje ploče. Parametar k_c označava krutost opruge koja povezuje blokove, a k_p krutost opruga koje povezuju blokove i gornju pokretnu ploču (sl. 14.14).



Slika 14.14: Baridž-Knopof model sa dva bloka, gde m označava masu bloka, k_c i k_p konstante krutosti opruga, a V predstavlja brzinu gornje ploče.

Intenzitet sile trenja F zavisi samo od brzine bloka:

$$F(\dot{X}_j) = F_0 \left(\dot{X}_j / \nu_c \right) \quad (14.13)$$

gde je $\phi = 0$ za velike vrednosti argumenta (brzine) i $\phi(0) = 1$, a ν_c označava neku karakterističnu brzinu [43], [161]. Radi pogodnosti, sistem (14.13) može se izraziti u bezdimenzionalnom obliku uvodeći nove promenljive:

$$\begin{aligned} T &\equiv \omega_p t, \quad \omega_p \equiv k_p/m, \quad U_j \equiv k_p X_j/F_0, \\ v &\equiv \nu/V_0, \quad v^c \equiv \nu_c/V_0, \quad V_0 \equiv F_0/\sqrt{k_p m}, \quad k \equiv k_c/k_p. \end{aligned} \quad (14.14)$$

Veličina $2\pi/\omega_p$ predstavlja period oscilacija jednog bloka sa oprugom u odsustvu trenja [43]. Uvodeći nove promenljive (14.14) sistem (14.12) može se izraziti u sledećem obliku [68]:

$$\begin{aligned} \ddot{U}_1 &= k_1 (U_2 - U_1) - U_1 + vt - \phi \left(\dot{U}_1/v_1^c \right), \\ \ddot{U}_2 &= k_2 (U_1 - U_2) - U_2 + vt - \phi \left(\dot{U}_2/v_2^c \right). \end{aligned} \quad (14.15)$$

U ovom slučaju, diferenciranje se vrši u odnosu na bezdimenzionalno vreme T . Parametri k_1 i k_2 označavaju odnos krutosti opruge koja povezuje blokove, k_c , i krutosti opruga koje povezuju blokove i gornju pokretnu ploču, k_p , za prvi i drugi blok, redom. Promenljiva U predstavlja pomeranje bloka, \dot{U} je brzina bloka, v je bezdimenzionalna brzina kretanja ploče, a t je promenljiva vremena. Veličine v_1^c i v_2^c predstavljaju bezdimenzionalne karakteristične brzine. Odgovarajući zakon trenja ϕ je:

$$\phi \left(\dot{U}/v^c \right) = \frac{1}{1 + \dot{U}/v^c}. \quad (14.16)$$

Da bismo odredili fiksnu tačku sistema (14.15), za $\dot{U}_1 = \dot{U}_2 = v$, $\ddot{U}_1 = \ddot{U}_2 = 0$, pri pretpostavci homogenih uslova (istih uslova za oba bloka) $k_1 = k_2 = k$ dobijamo:

$$\begin{aligned} 0 &= (U_2 - U_1) - U_1 - \frac{v_1^c}{v_1^c + v} + vt, \\ 0 &= (U_1 - U_2) - U_2 - \frac{v_2^c}{v_2^c + v} + vt. \end{aligned} \quad (14.17)$$

Sabiranjem jednačina u sistemu (14.17) dobijamo:

$$-(U_1 + U_2) = \left(\frac{v_1^c}{v_1^c + v} + \frac{v_2^c}{v_2^c + v} \right) - 2vt. \quad (14.18)$$

S druge strane, ukoliko oduzmemo drugu jednačinu od prve u sistemu (14.17) dobijamo sledeći izraz:

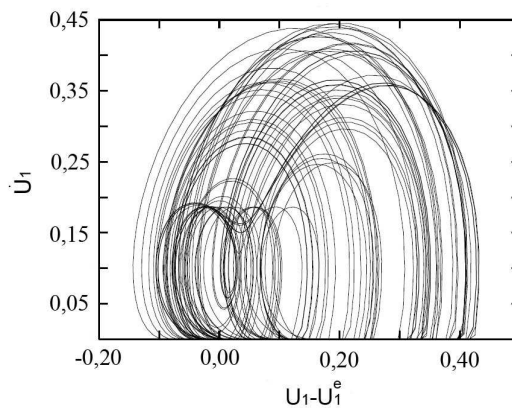
$$3(U_2 - U_1) + \left(\frac{v_2^c}{v_2^c + v} - \frac{v_1^c}{v_1^c + v} \right) = 0, \quad (14.19)$$

odakle je:

$$\begin{aligned} U_1 &= U_2 + \frac{1}{3} \left(\frac{v_2^c}{v_2^c + v} - \frac{v_1^c}{v_1^c + v} \right), \\ U_2 &= U_1 + \frac{1}{3} \left(\frac{v_1^c}{v_1^c + v} - \frac{v_2^c}{v_2^c + v} \right). \end{aligned} \quad (14.20)$$

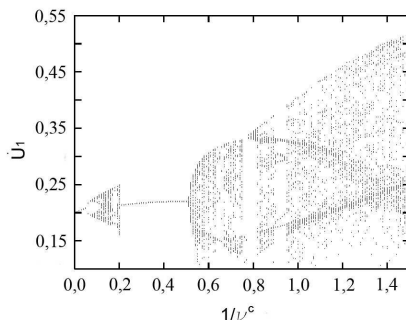
Zamenom (14.20) into (14.18), jednačine ravnotežnog stanja sistema (14.15) glase:

$$\begin{aligned} U_1^e &= -\frac{1}{3} \left(2 \frac{v_1^c}{v_1^c + v} + \frac{v_2^c}{v_2^c + v} \right) + v t, \\ U_2^e &= -\frac{1}{3} \left(2 \frac{v_2^c}{v_2^c + v} + \frac{v_1^c}{v_1^c + v} \right) + v t. \end{aligned} \quad (14.21)$$

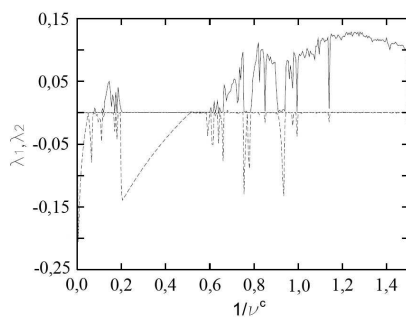


Slika 14.15: Fazni portret sistema (14.15) za prvi blok kada je $1/v_1^c = 1/v_2^c = 1$.

Numeričkom simulacijom rešenja sistema (14.15), tako da nije dozvoljeno kretanje unazad, uočava se prelaz od periodičnog, preko kvaziperiodičnog do haotičnog ponašanja. Na slici 14.15 prikazan je primer haotičnog ponašanja, na dijagramu dU_1/dt u odnosu na $U_1 - U_1^e$, za vrednost parametara $1/v^c = 1/v_1^c = 1/v_2^c = 1$, $k = 1$ i $v = 0,1$. Orbitalni dijagram za sistem od dva bloka prikazan je na slici 14.16.



Slika 14.16: Orbitalni dijagram $dU_1/d\tau$ u funkciji od $1/v^c$, za koji je $U_1 - U_1^e = 0$.



Slika 14.17: Najveći Ljapunovljev eksponent λ_1 (puna linija) i drugi po veličini Ljapunovljev eksponent λ_2 (isprekidana linija). Ljapunovljevi eksponenti su izračunati za perturbacije reda veličine 10^{-4} , vremenski korak od 0,05, i za 400.000 iteracija. Linija $\lambda = 0$ je prikazana samo radi poređenja.

Kao što se na orbitalnom dijagramu (sl. 14.16) jasno može uočiti, za vrednost parametra $1/v^c < 0,1$, kretanje blokova je napre periodično, potom kvaziperiodično (dve razdvojene tačke na preseku), a potom postaje haotično za vrednost parametra $1/v^c \approx 0,112$. Nakon toga, za vrednost parametra $0,2 < 1/v^c < 0,55$, kretanje opet postaje periodično, da bi opet prešlo u haotično ponašanje. Vrednosti kontrolnog parametra $1/v^c$ za koje dolazi do pojave bifurkacije mogu se proveriti izračunavanjem dva najveća Ljapunovljeva eksponenta sistema. Kvaziperiodično ponašanje se javlja u ovom sistemu kada je najveći Ljapunovljev eksponent i drugi po veličini Ljapunovljev eksponent jednaki nuli, dok je kretanje periodično kada je najveći Ljapunovljev eksponent jednak nuli i drugi po veličini Ljapunovljev eksponent negativan. Rezultati su prikazani na slici 14.17. Puna linija se odnosi na najveći Ljapunovljev eksponent, dok je isprekidanom linijom prikazan drugi najveći Ljapunovljev eksponent.

14.1.5 Madariaga sistem

Za razliku od prethodnog sistema (14.6), u kojem je pretpostavljeno da trenje na kontaktu bloka i hrapave podloge zavisi samo od brzine kretanja bloka, u radu Erikson i dr., 2008. god. [84], razmatra se sistem jednačina koji opisuje kretanje modela jednog bloka sa oprugom, gde trenje zavisi od brzine i stanja hrapave površi (Diterihov zakon trenja):

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= -\left(\frac{V}{D_c}\right)\left(\theta + \left(\frac{V}{V_0}\right)\right), \\ \dot{u} &= V - V_0, \\ \dot{v} &= \left(-\frac{1}{M}\right)\left[ku + \theta + A \log\left(\frac{V}{V_0}\right)\right],\end{aligned}\tag{14.22}$$

gde je parametar M masa posmatranog bloka, a k predstavlja krutost opruge koja povezuje blok i pokretnu ploču. Parametri A , B , V , V_0 i D_c preuzeti su iz Diterihovog zakona trenja. Uvođenjem novih bezdimenzionalnih promenljivih θ' , V' , u' i t' dobijamo:

$$\theta = A\theta', \quad V = V_0V', \quad u = D_c u', \quad t = (D_c/V_0)t'\tag{14.23}$$

tako da sistem (14.22) u bezdimenzionalnom obliku glasi:

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= -v[\theta + (1 + \varepsilon)\log(v)], \\ \dot{u} &= v - 1, \\ \dot{v} &= -\gamma^2\left[u + \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\log(v)\right],\end{aligned}\tag{14.24}$$

gde $\varepsilon = (B - A)/A$ predstavlja promenu koeficijenta trenja tokom kretanja bloka; $\xi = (kD_c)/A$ je bezdimenzionalna konstanta opruge, a $\gamma = (k/M)^{1/2}(D_c/V_0)$ predstavlja bezdimenzionalnu frekvenciju trzanja.

Sistem ima samo jedno stacionarno rešenje $(\theta, u, v) = (0, 0, 1)$, koje odgovara ravnomernom kretanju. Jakobijan matrica J iznosi:

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -(1 + \varepsilon) \\ 0 & 0 & 1 \\ -\gamma^2/\varepsilon & -\gamma^2 & -\gamma^2/\varepsilon \end{bmatrix}$$

Karakteristična jednačina, u tom slučaju, glasi:

$$\det \begin{bmatrix} -1 - \lambda & 0 & -(1 + \varepsilon) \\ 0 & 0 - \lambda & 1 \\ -\gamma^2/\varepsilon & -\gamma^2 & -\gamma^2/\varepsilon - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

odnosno:

$$\lambda^3 + \lambda^2 \left(\frac{\gamma^2}{\xi} + 1 \right) + \lambda \frac{\gamma^2}{\xi} (\xi - \varepsilon) + \gamma^2 = 0 \quad (14.25)$$

sa realnim i konjugovano-kompleksnim rešenjima (jedna realna sopstvena vrednost različita od nule i par kompleksno-konjugovanih sopstvenih vrednosti), što ukazuje na mogućnost pojave Hopf bifurkacije. Naime, numeričkom simulacijom se pokazuje da sistem, za vrednosti kontrolnih parametara $\varepsilon = 0,2$, $\xi = 0,8$ i $\gamma = 0,8$, teži ravnotežnom stanju u konačnom vremenskom intervalu. S druge strane, povećavajući vrednost samo parametra ε na $0,5$, i sa vrednostima druga dva parametra $\xi = 0,6$ i $\gamma = 0,6$, sistem pokazuje periodično ponašanje, što predstavlja prvu natkritičnu Hopfovu bifurkaciju.

Ukoliko u ovaj model uvedemo **vremensko kašnjenje** τ :

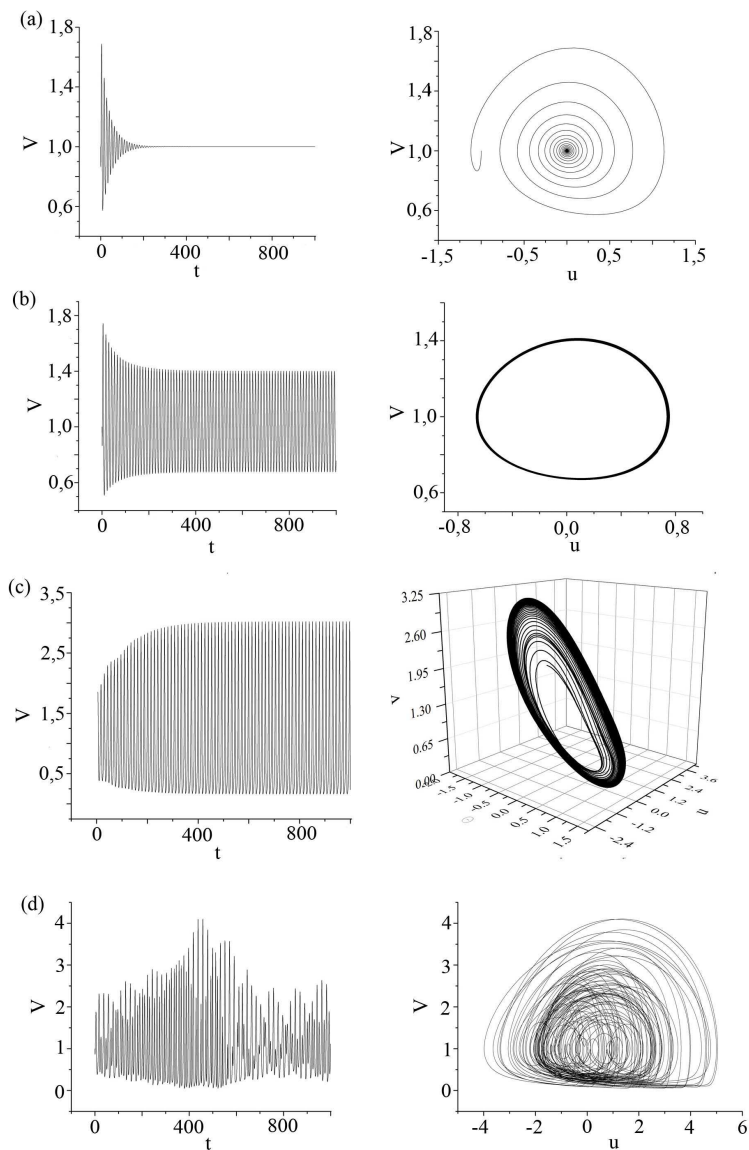
$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= -v \{ \theta + (1 + \varepsilon) \log [v(t - \tau)] \}, \\ \dot{u} &= v - 1, \\ \dot{v} &= -\gamma^2 \left[u + \left(\frac{1}{\xi} \right) (\theta + \log(v)) \right], \end{aligned} \quad (14.26)$$

dolazi do pojave determinističkog haotičnog ponašanja za određene vrednosti parametara (sl. 14.18).

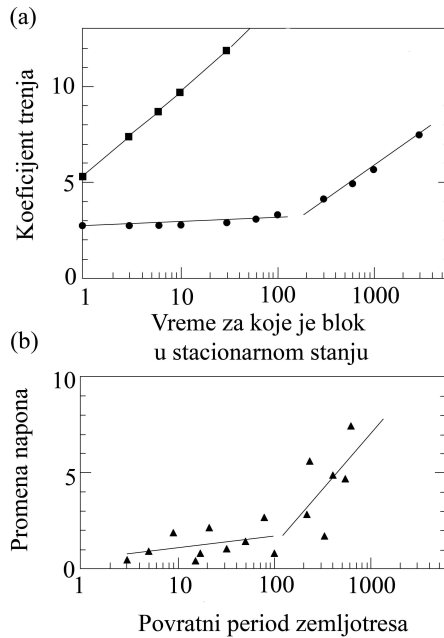
Postoji više razloga za uvođenje parametra vremenskog kašnjenja τ [165]:

- 1) povećanje stacionarnog koeficijenta trenja sa vremenom od ključne je važnosti za pojavu nestabilnosti trenja, a, time i za pojavu potresa. Opšte posmatrano, trenje predstavlja dinamičku promenljivu, koja je suštinski povezana sa brzim procesima tokom kretanja blokova, i sporim procesima tokom stanja mirovanja blokova [25]. Ovaj **spori proces "zaceljenja raseda"**, koji započinje po prestanku kretanja bloka, obično se naziva "starenjem" raseda, i odvija se tokom vremena koje je određeno "lokalnom memorijom" sistema o efektivnom kontaktu između bloka i hrapave površi. Drugim rečima, proces "starenja" raseda, koji podrazumeva obnavljanje kontakta između bloka i hrapave podloge, kao i logaritamski porast koeficijenta trenja u stacionarnom stanju u dužem vremenskom intervalu, primarno je određen dužinom i karakterom kontakta između bloka u kretanju i hrapave površi donje ploče u prethodnoj brznoj fazi kretanja. Vremensko kašnjenje τ , kao dopuna članu za trenje, opisuje ovaj složeni odnos dve susedne faze kretanja bloka, koje su od posebnog značaja za proces trzanja, i, stoga, nastanak nestabilnosti trenja. Preciznije, vremensko kašnjenje τ daje

vezu trenja u stenskoj masi sa "istorijom" kretanja bloka pre nego što se blok zaustavio. Direktna posledica ove zavisnosti procesa "starenja" raseda od prethodnog stanja kontaktne zone ogleda se u početnom periodu relativno nepromenjene vrednosti koeficijenta trenja u stacionarnom stanju. Naime, do porasta koeficijenta trenja dolazi tek nakon određenog vremenskog intervala od trenutka zaustavljanja bloka. Ovo ponašanje je utvrđeno u laboratorijskim opitima na blokovima granita, koji su klizali preko kataklastičnog, zdrobljenog tektonskog materijala kvarcnog sastava [195]. Opiti su sprovedeni za brzine bloka $V_b = 0,01-10 [m/s]$ i pri stalnoj brzini gornje ploče ($V_L = 30mm/god. \approx 3 \times 10^{-9} [m/s]$). Na slici 14.19a jasno se uočava početni period "stagniranja" u porastu koeficijenta trenja. Za $V_b = V_L = 10^{-6} [m/s]$, koeficijent trenja se linearno povećava sa $\log t$. Međutim, za veće brzine bloka, $V_b = 1 [m/s]$, i pri brzini gornje ploče $V_L = 10^{-9} [m/s]$ efektivna brzina regenerisanja raseda "kasni" u vremenskom intervalu odmah nakon dogođenog potresa. Dužina ovog kašnjenja zavisi od krtosti materijala u rasednoj zoni i od veličine rupture (deformacije) koja nastaje usled pojave potresa. Parametri trenja $a = 0,01$; $b = 0,02$; i $D_c = 5 [mm]$, u saglasnosti su sa laboratorijskim i terenskim procesima [195]. Pored ovih laboratorijskih rezultata, slično ponašanje je osmatrano i u slučaju tektonskih raseda *in situ*, gde se takođe javlja **početni period kašnjenja** u povećanju (akumulaciji) napona duž rasedne zone (≈ 100 dana od poslednjeg zemljotresa), sa malim promenama u naponu, reda veličine $1 [MPa]$, nakon čega dolazi do povećanja napona duž raseda, reda veličine nekoliko $[MPa]$ (sl. 14.19b).



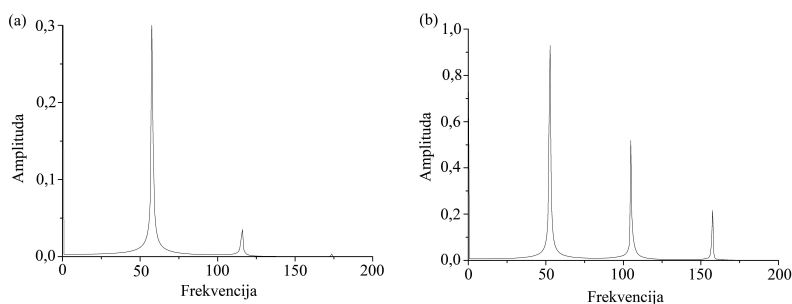
Slika 14.18: Vremenske serije $V(t)$ i odgovarajući fazni portreti za: a) $\tau = 0$; $\varepsilon = 0,2$; $\xi = 0,5$ i $\gamma = 0,8$ (ravnotežno stanje); b) $\tau = 10$; $\varepsilon = 0,3$; $\xi = 0,5$ i $\gamma = 0,8$ (periodično ponašanje); c) $\tau = 13$; $\varepsilon = 0,5$; $\xi = 0,5$ i $\gamma = 0,8$ (kvaziperiodično ponašanje); d) $\tau = 20$; $\varepsilon = 0,5$; $\xi = 0,5$ i $\gamma = 0,8$ (deterministički kaos).



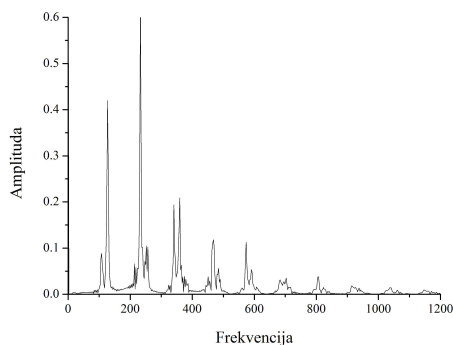
Slika 14.19: Vremensko kašnjenje τ , osmatrano u laboratorijskim uslovima (a), i *in situ* (b). Rezultati numeričke simulacije i poređenje sa terenskim podacima. Različiti simboli pod (a) označavaju različite brzine kretanja bloka (V_b) i gornje ploče (V_L): kvadrat za $V_b = V_L = 10^{-6} [m/s]$, i kružić za $V_b = 1 [m/s]$, $V_L = 10^{-6} [m/s]$ [?].

- 2) uvođenjem vremenskog kašnjenja u izraz za trenje samo se pojačava efekat kompleksne prirode trenja na sam proces kretanja bloka (a i proces kretanja duž raseda *in situ*). Naime, u rasednoj zoni, usled kretanja, dolazi do pojave zagrevanja i topljenja stenske mase, termalnih pritisaka, stvaranja silika-gela koji deluje kao lubrikant ("podmazuje rasednu zonu"), kao i efekata granularnog trenja (trenja između zdrobljenih delova stenske mase). Prema tome, vremensko kašnjenje τ se može smatrati dopunom parametru stanja θ . Naime, vrlo često se u modelima koji uzimaju u obzir Diterihov zakon trenja, koriste dva ili više parametara stanja. U ovom slučaju, koristi se samo jedan parametar stanja, ali uz dopunu vremenskim kašnjenjem. Na taj način, pojačavaju se tzv. **memorijski efekti kontaktne površine**, koja "kao da pamti" prethodne cikluse kretanja, tako da pri svakom novom kretanju, kontaktna površ ima nova, drugačija svojstva;
- 3) još jedna motivacija za uvođenje vremenskog kašnjenja τ proizilazi iz **sličnosti BK modela sa relaksacionim oscilatorom**. Naime,

trzajuće kretanje predstavlja inherentnu karakteristiku relaksacionih oscilatora, čija je glavna odlika postojanje dve vremenske skale - "brze" tokom koje dolazi do oslobađanja akumulirane energije ("slip" faza) i "spore" tokom koje se akumulira napon u stenskoj masi ("stick" faza). S obzirom na to da je vremensko kašnjenje τ inherentno svojstvo relaksacionih oscilatora, u ovom slučaju se uvodi i u BK model, i razmatra se uticaj ovog parametra na dinamiku modela.



Slika 14.20: (a) Izraženi "pik" za osnovnu frekvenciju, i drugi, manji pik, kao celobrojni umnožak osnovne frekvencije (harmonik) u Furijeovom spektru snage ukazuju na periodično ponašanje. (b) Tri nesamerljive frekvencije u Furijeovom spektru snage ukazuju na pojavu kvaziperiodičnog ponašanja. Vrednosti parametara su iste kao na slici 14.18(b) i 14.18(c), redom.



Slika 14.21: Kontinualni širokopojasni šum u Furijeovom spektru snage ukazuje na determinističko haotično ponašanje. Vrednosti ostalih parametara su kao na slici 14.18(d).

Prelaz od periodičnog preko kvaziperiodičnog do determinističkog haotičnog ponašanja potvrđen je izračunavanjem Furijeovog spektra snage (sl. 14.20 i 14.21) za odgovarajuće vremenske serije prikazane na slikama 14.18(b), 14.18(c) i 14.18(d), redom [159], [162].

14.1.6 Sistem Bekera

Za razliku od sistema Madariage, analiziranog u prethodnom odeljku, Beker, 2000. god., [23] polazi od Diterihovog konstitutivnog zakona trenja sa dve promenljive stanja, θ_1 i θ_2 :

$$\tau(V, \theta_1, \theta_2) = \tau_* + A \ln\left(\frac{V}{V_*}\right) + \sum_2^{i=1} B_i \ln\left(\frac{V_* \theta_i}{L_i}\right). \quad (14.27)$$

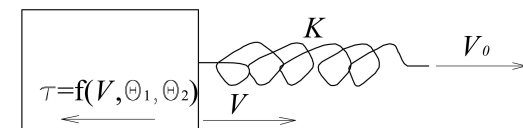
Radi pojednostavljenja, može se pretpostaviti da su parametri A , B_i i L_i konstante; V_* i τ_* označavaju referentnu brzinu i koeficijent trenja, redom, dok θ_i i V zavise od vremena t . Parametar L_i odgovara kritičnom rastojanju D_c datom u jednačini (14.3) za Diterihov zakon trenja. Kada je zakon trenja dat u obliku (14.27), promenljive stanja mogu biti interpretirane kao prosečno vreme kontakta između neravnina na kontaktu bloka i hrapave podloge. U ovom slučaju, promenu stanja (promenljivve θ) definišemo na sledeći način:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = -\frac{V \theta_i}{L_i} \ln\left(\frac{V \theta_i}{L_i}\right), \quad i = 1, 2, \quad (14.28)$$

što je prvobitno predloženo od strane Ruine, 1983. god. [283]. Promena trenja u zavisnosti od brzine izazvane delovanjem sile na slobodnom kraju opruge V_0 , brzine kretanja bloka V i krutosti opruge, $K > 0$, data je u sledećem obliku:

$$\frac{d\tau}{dt} = K(V_0 - V) \quad (14.29)$$

čime je kompletiran matematički model bloka sa oprugom (sl. 14.22). Primećimo da u ovom slučaju blok nije povezan preko opruge sa pokretnom pločom, već je zadnji kraj opruge izložen dejstvu spoljašnje sile.



Slika 14.22: Blok sa oprugom. Blok se pokreće konstantnom brzinom V_0 , dok se trenje duž kontaktne površi menja po zakonu zavisnom od brzine i dve promenljive stanja.

Jednačine (14.27), (14.28) i (14.29) mogu biti predstavljene u bezdimen-

zionalnom obliku, uvođenjem sledećih promenljivih:

$$\begin{aligned} x &= \ln \left(\frac{V}{V_*} \right), & y &= \frac{\tau - \tau_*}{A}, & z &= \beta_2 \ln \left(\frac{V_* \theta_2}{L_2} \right) \\ \beta_i &= \frac{B_i}{A}, & \kappa &= \frac{L L_i}{A}, \\ \varrho &= \frac{L_1}{L_2}, & T &= \frac{V_*}{L_1} t \end{aligned} \quad (14.30)$$

kada se dobija rezultujući sistem jednačina u bezdimenzionalnom obliku:

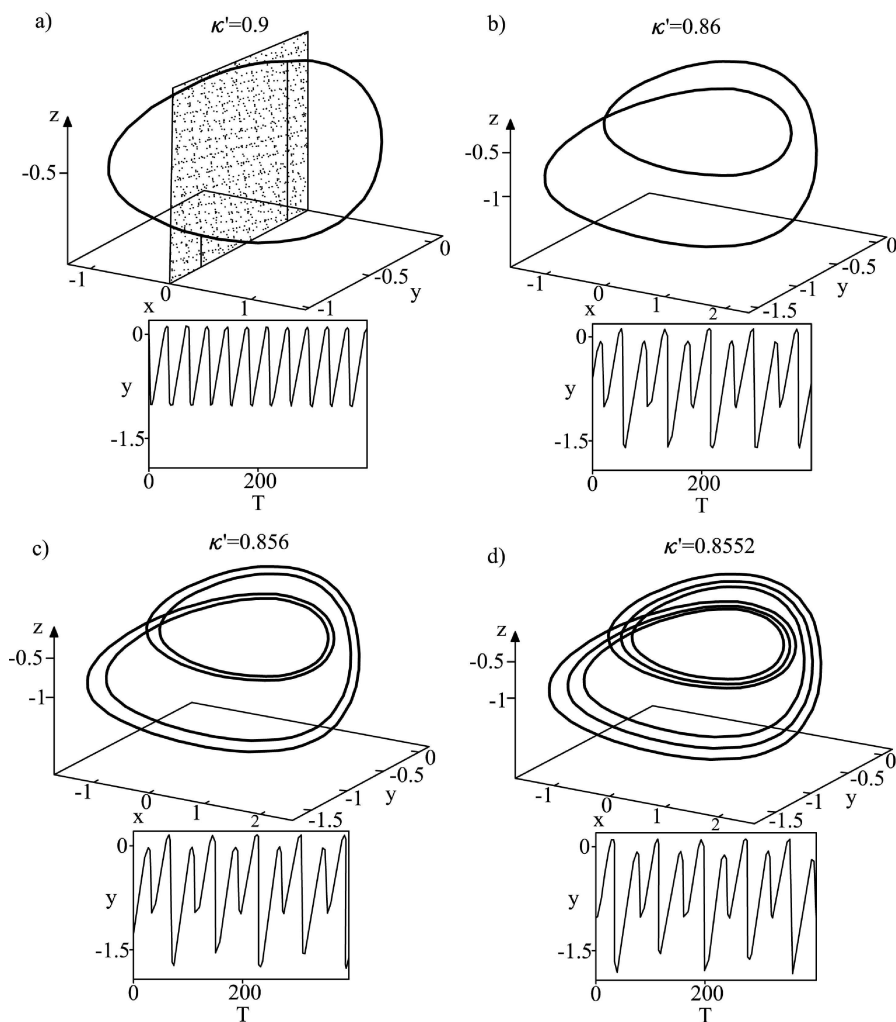
$$\begin{aligned} \dot{x} &= e^x ((\beta_1 - 1)x + y - z) + (1 - e^x) \kappa + e^x \varrho (\beta_2 x + z), \\ \dot{y} &= (1 - e^x) \kappa, \\ \dot{z} &= -e^x \varrho (\beta_2 x + z), \end{aligned} \quad (14.31)$$

gde je diferenciranje izvedeno u odnosu na bezdimenzionalno vreme T , dok je referentna brzina V_0 izjednačena sa referentnom brzinom V_* bez gubitka opštosti. Sistem (14.31) opisuje kretanje bloka u funkciji bezdimenzionalne brzine x , napona (stresa) y , i druge promenljive stanja, z .

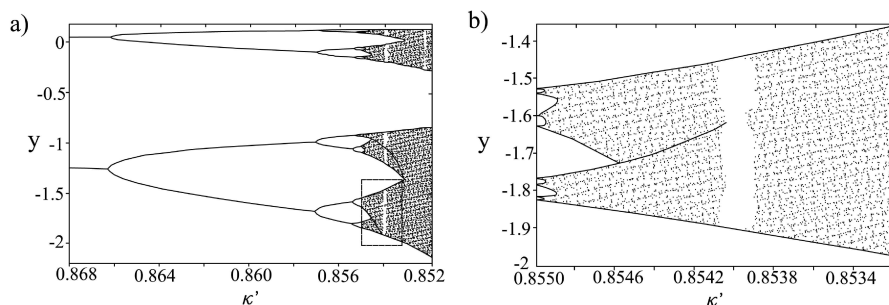
Analiza sistema jednačina (14.31) izvedena je numeričkom integracijom Keš-Karp Runge-Kuta postupkom za fiksirane vrednosti parametara $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0,84$ i $\varrho = 0,048$, i promenom samo jednog kontrolnog parametra κ , koji predstavlja bezdimenzionalnu krutost opruge. Pri tome, početni parametar κ se normira kritičnom krutošću κ_{cr} , čime se dobija novi kontrolni parametar κ' :

$$\kappa' = \frac{\kappa}{\kappa_{cr}}$$

gde je $\kappa_{cr} = 0,08028$ za prethodno fiksirane vrednosti parametara β_1, β_2 i ϱ . Kod izbora početne vrednosti kontrolnog parametra κ' , uključeni su rezultati prethodnih istraživanja, koji su ukazali na činjenicu da $\kappa' = 1$ predstavlja granicu stabilnosti sistema, ispod koje se može očekivati da sistem postane nestabilan. Rezultati dobijeni numeričkom integracijom pokazali su da sa smanjivanjem vrednosti kontrolnog parametra κ' sistem prolazi kroz niz bifurkacija sa udvajanjem perioda, da bi za vrednost $\kappa' = 0,8525$ ponašanje sistema postalo deterministički haotično. Fazni dijagrami i odgovarajuće vremenske serije za različite vrednosti parametra κ' , koji se odnose na bifurkacije sa udvajanjem perioda, prikazani su na slici 14.23. Odgovarajući Poenkareov presek na kojem se jasno uočavaju bifurkacije sa udvajanjem perioda prikazan je na slici 14.24.

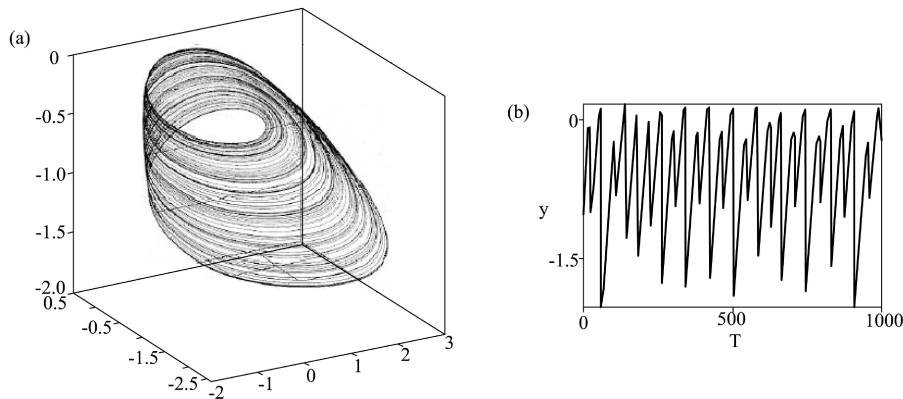


Slika 14.23: Trajektorije u faznom prostoru (gornji delovi slika) i vremenske serije zavisnosti promenljive napona, y , od vremena T (donji delovi slika) za različite vrednosti kontrolnog parametra κ' ; početno tranzijentno (prolazno) ponašanje je u svim slučajevima zanemareni; (a) bifurkacija sa udvajanjem perioda; (b) bifurkacija sa dvostrukim udvajanjem perioda; (c) bifurkacija sa četvostrukim udvajanjem perioda; (d) bifurkacija sa osmostrukim udvajanjem perioda graničnih ciklusa. Osenčena $x - z$ ravan na slici (a) ilustruje način dobijanja Poenkareovih preseka za slike 14.24a i 14.24b; trajektorije su projektovane na ravan za $z = 0$, tako da je trajektorija sa udvajanjem periode predstavljena sa dve tačke sa različitim vrednostima parametra y . Trajektorije su generisane numerički, na osnovu sistema jednačina (14.31) za početne uslove: $x = 0,05$, $y = 0$ i $z = 0$, za početnih 2000 vremenskih jedinica, pri čemu je trajektorija sistema prikazana samo za narednih 1000-2000 vremenskih jedinica.



Slika 14.24: (a) Poenkareov presek, dobijen integracijom sistema (14.31) za početne uslove $x = 0,05$, $y = 0$ i $z = 0$ do $T = 20.000$, i potom praćenjem svih Poenkareovih preseka do $T = 23.000$. Prividna distorzija y ose za gornji deo slike je posledica izbora Poenkareovog preseka i može biti poboljšana prilagodavanjem projekcije bliže ka atraktoru. Ponašanje sistema za $\kappa' \leq 0.852$ je nestabilno; (b) uvećanje pravougaonog polja u delu (a).

Na slici 14.25 prikazana je trajektorija u faznom portretu i odgovarajuća vremenska serija za vrednost kontrolnog parametra $\kappa' = 0,8525$ (haotično ponašanje).

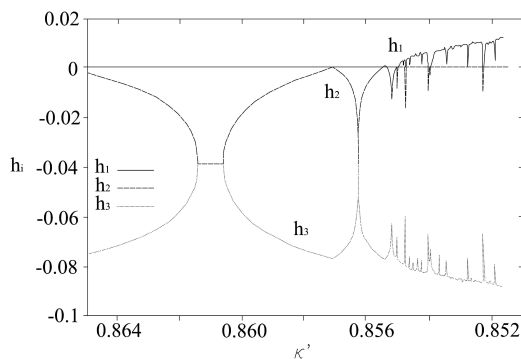


Slika 14.25: (a) Strani atraktor za deterministički haotično ponašanje sistema za $\kappa' = 0.8525$ u faznom prostoru; (b) odgovarajuća vremenska serija promenljive napona y . Intermitentno kvaziperiodično ponašanje je očigledno, u odnosu na trzajuću sekvencu, koja je strogo aperiodična i iregularna.

Na kraju, može se izračunati maksimalni Ljapunovljev eksponent u zavisnosti od vrednosti kontrolnog parametra κ' . Na slici 14.26 prikazani su dijagrami tri maksimalna Ljapunovljeva eksponenta, koji su određeni za sva tri sopstvena pravca.

Sa slike 14.26 se jasno može uočiti da za vrednost parametra $\kappa' = 0,8525$,

ponašanje sistema postaje deterministički haotično, na šta ukazuju vrednosti izračunatih maksimalnih Ljapunovljevih eksponenata. Naime, $\lambda_1 > 0$ odgovara eksponencijalno progresivnom izezanju toka upravno na trajektoriju duž atraktora; $\lambda_3 < 0$ proizilazi iz skupljanja toka sistema prema atraktoru, dok preostali Ljapunovljev eksponent ($\lambda_2 \approx 0$) odgovara toku koji je tangencijalan u odnosu na trajektoriju sistema.



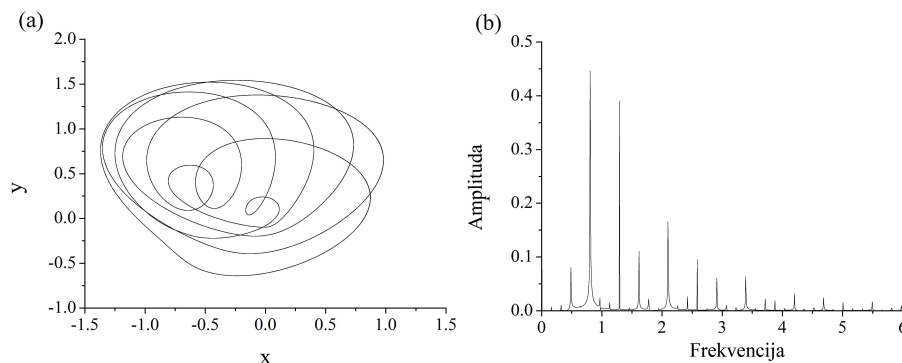
Slika 14.26: (a) Ljapunovljevi eksponenti λ_1 , λ_2 , λ_3 , obeleženi punom, isprekidanom i istačkanom linijom, redom.

Pojava determinističkog haosa u sistemu (14.31) uočava se ukoliko pretpostavimo periodičnu perturbaciju parametara β_1 i κ :

$$\begin{aligned}\beta_1(t) &= \beta_1 + \delta_\beta \sin(\omega_\beta t), \\ \kappa(t) &= \kappa + \delta_\kappa \sin(\omega_\kappa t)\end{aligned}\tag{14.32}$$

tako da δ_β , δ_κ , ω_β , i ω_κ predstavlja konstantne amplitude i ugaone frekvencije, redom, i $\delta_\beta \leq \beta_1$, $\delta_\kappa \leq \kappa$. Ugaona frekvencija je odabrana tako da odgovara prirodnoj frekvenciji oscilacija sistema (14.31) u nerperturbovanom stanju. Perturbacijom ova dva parametra u sistemu (14.32), uz fiksirane vrednosti ostalih parametara $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0,84$ i $\varrho = 0,048$, uočava se pojava determinističkog haosa (sl. 14.27).

Naglasimo da se ovako idelane periodične perturbacije parametara retko sreću u realnim uslovima u Zemljinoj kori. Jedino se mogu javiti kao seizmički talasi nekih udaljenih zemljotresa, ili kao posledica vibracija nastalih različitim tehnogenim faktorima [106]. Međutim, značaj ovakvog izučavanja je u tome što superponiranjem jednostavnih sinusoidalnih oscilacija nastaje kompleksan seizmički signal.

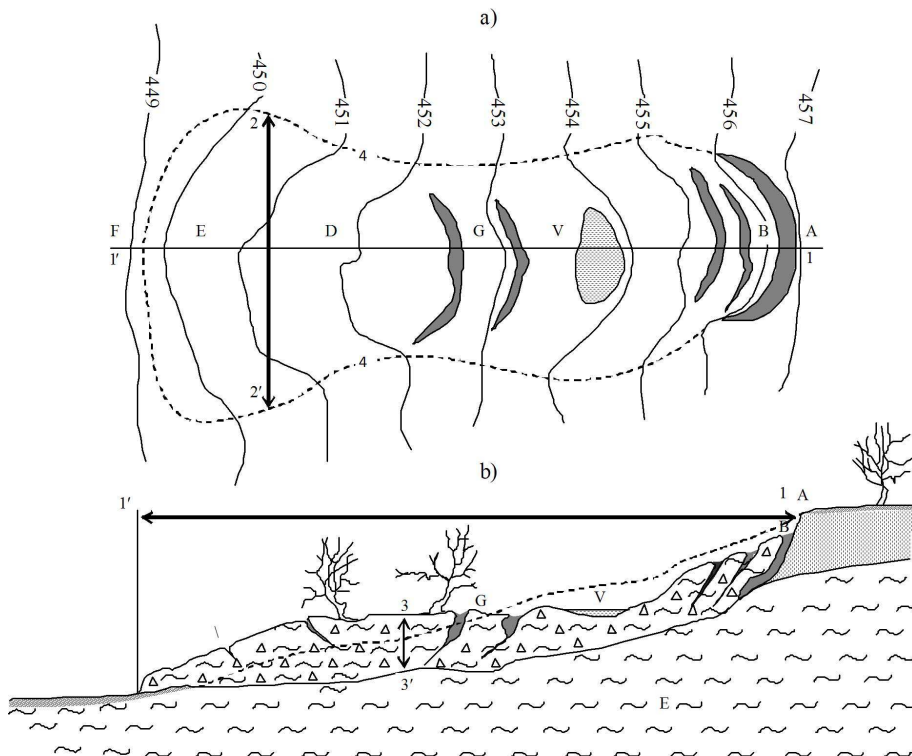


Slika 14.27: (a) Fazni portret sistema (14.31) pri periodičnoj perturbaciji parametara β_1 i κ . Za amplitude perturbacije usvojene su vrednosti $\delta_\beta = 0,9$ i $\delta_\kappa = 0,5$, dok su vrednosti ostalih parametara podešene tako da odgovaraju periodičnom ponašanju rešenja sistema (14.31) u nepertubovanom stanju: $\beta_1 = 1$; $\kappa = 1,5$; $\beta_2 = 0,84$; $r = 0,048$; $\omega_\beta = 0,8$; $\omega_\kappa = 0,5$. (b) Kontinualni širokopojasni šum u Furijeovom spektru snage ukazuje na determinističko haotično ponašanje.

14.2 Klizišta

Kliženje predstavlja savremeni geološki proces otkidanja i pomeranja stenskih masa u padinama i kosinama, preko stabilne podloge, po jasno ispoljenoj površini ili zoni kliženja [143]. Sa druge strane, klizište predstavlja tvorevinu procesa kliženja. Zapravo, klizište je deo terena koji se translaciono ili rotaciono pomera preko stabilne podloge, ili je to deo terena u kome su sačuvana strukturalna i reljefna svojstva stvorena procesom kliženja (sl. 14.28). Činioci koji izazivaju početak kliženja najčešće su mehanički (moment preopterećenja, zemljotres, gubljenje oslonca preteranim zasecanjem) i hidrodinamički (kritična vrednost hidrauličkog pritiska podzemnih voda, naglo sniženje ili naglo izdizanje nivoa izdani, promena nivoa stajaćih i tekućih voda, i dr.).

Klizišta nastaju narušavanjem stabilnosti terena, odnosno savlađivanjem otpornosti na smicanje stenskih masa. Uobičajeni pristup analizi stabilnosti podrazumeva statičku aproksimaciju, odnosno primenu metoda granične ravnoteže [303], sa jednostavnim statičkim **Kulon-Morovim zakonom trenja**, koji zavisi od kohezije c i ugla unutrašnjeg trenja φ [184]. Prema ovom zakonu, do pojave kliženja dolazi onda kada se prevaziđe čvrstoća na smicanje stenske mase [107]. Međutim, Kulonov kriterijum loma ne objašnjava promenu parametara čvrstoće na smicanje duž klizne površi tokom vremena, i važi samo za slučaj kada je $V = 0$.



Slika 14.28: Šematski prikaz klizišta, a) situacija, b) presek, sa elementima: AB - ožiljak klizišta, V - depresija, G - sekundarni ožiljak, D - trbuh klizišta, E - nožica klizišta, F - podloga klizišta, 1-1 - dužina klizišta, 2-2 - širina klizišta, 3-3 - dubina klizenja, 4 - granica klizišta [144].

Promena vrednosti parametara trenja duž hrapave površi tokom vremena prvi put je osmatrana za čvrste stenske mase, i odnosi se, pre svega, na mehanizam nastanka zemljotresa [195], što je već predstavljeno u prethodnom poglavlju. Naime, i realna osmatranja i laboratorijski opiti ukazali su na logaritamski porast koeficijenta trenja za vreme interseizmičkog intervala ili kvazistacionarnog kontakta između bloka i hrapave podloge u Baridž-Knopof modelu [287]. Ovakva promena trenja tokom vremena može se opisati Diterih-Ruina zakonom trenja zavisnim od brzine bloka i stanja površi, koji je originalno formulisana za čvrste stenske mase ([70], [283], [274], [115], [341]). Za razliku od Kulonovog zakona loma, Diterih-Ruina zakon trenja ne predviđa prekoračenje čvrstoće na smicanje kao potreban uslov za pojavu nestabilnosti. Umesto toga, zahteva se da brzina klizenja dostigne kritičnu vrednost da bi došlo do pojave loma. Naglasimo da se Kulonov kriterijum loma, kao tradicionalni pristup u proceni čvrstoće na smicanje

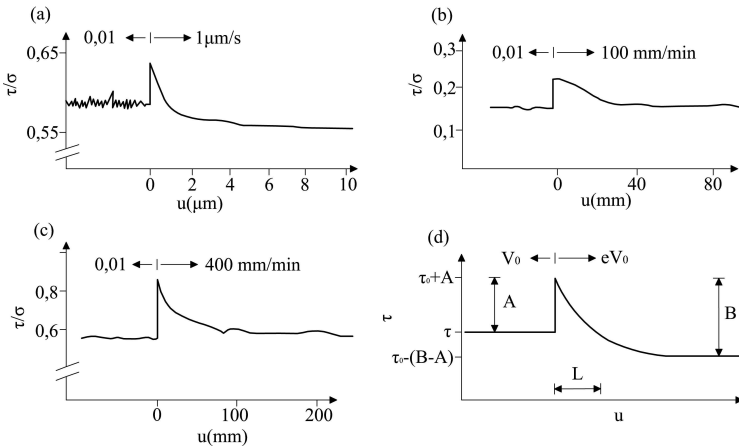
duž klizne površi, može smatrati graničnim slučajem Diterih-Ruina zakona trenja. Naime, pođimo od izraza za čvrstoću na smicanje u Diterih-Ruina zakonu trenja sa dve promenljive stanja:

$$\tau = \tau_0 + \theta_1 + \theta_2 + A \ln(V/V_0). \quad (14.33)$$

Podelimmo sada jednačinu (14.33) efektivnim naponom $\bar{\sigma}$ duž klizne površi:

$$\mu = \mu_0 + \frac{\theta_1}{\bar{\sigma}} + \frac{\theta_2}{\bar{\sigma}} + \frac{A}{\bar{\sigma}} \ln(V/V_0) \quad (14.34)$$

gde μ i μ_0 predstavljaju trenutnu i početnu vrednost koeficijenta trenja, redom. Za slučaj kada je brzina jednaka nuli, jednačina (14.33) odgovara Kulonovom zakonu trenja, jer je tada $\theta_1 = \theta_2 = V = 0$. S druge strane, ukoliko već ne postoji predisponirana klizna površ u terenu, onda umesto μ_0 važi izraz $\mu_0 + c/\bar{\sigma}$, gde c predstavlja koheziju intaktne stenske mase. Prema tome, tradicionalni pristup proceni smičuće otpornosti tla duž klizne površi (Kulonov zakon loma) može se smatrati graničnim slučajem Diterih-Ruina zakona trenja.

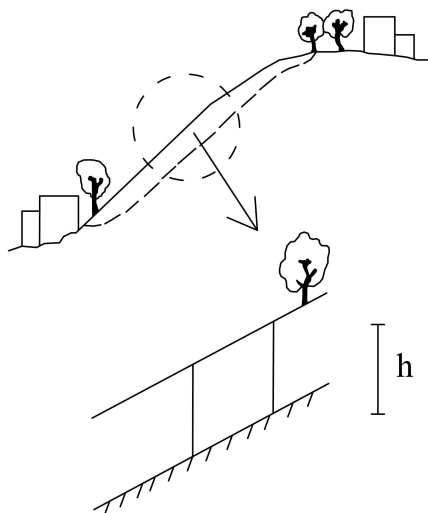


Slika 14.29: Promena trenja u zavisnosti od brzine klizanja: (a) u kvarcitu [283], (b) u glinama na mestu brane Kalabah u Pakistanu [304] i (c) u zaglinjenom alevrolitu [304]; teorijska kriva promene trenja data je pod (d) za zakon trenja sa jednom promenljivom stanja. Oznake: τ i σ označavaju smičući i normalni napon, redom. Parametri A , B i L odgovaraju parametrima prvobitno datim u jednačini (14.3), pri čemu je $L = D_c$.

Premda je Diterih-Ruina zakon trenja definisan za čvrste stenske mase, Skempton [304] je osmatrao slično ponašanje i u glinama (sl. 14.29), tokom opita direktnog smicanja u prstenastom aparatu, za mnogo manje brzine

klizanja ($V < 0,01$ [mm/min]), u poređenju sa rezultatima Baridž-Knopof modela ([283], [43], [84]).

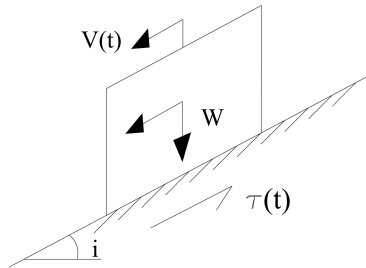
Prateći rezultate Skempton [304], i kvalitativnu sličnost teorijskog modela i realno osmatranih promena trenja (sl. 14.29), opravdano je pretpostaviti da Diterih-Ruina zakon trenja, sa logaritamskim porastom koeficijenta trenja tokom kvazistacionarnog kontakta, važi i za klizišta. Na primer, osmatranje reaktiviranog klizanja na jednoj lokalnosti, za spora klizišta velikih zapremina, sa periodičnom reaktivacijom procesa klizanja (klizišta Umka i Duboko na desnoj obali Save kod Beograda) ukazuju na to da se parametri čvrstoće na smicanje menjaju za vreme faze mirovanja. Shodno tome, mora postojati određeni mehanizam promene parametara trenja između dve susedne faze klizanja. I, zaista, Čau (1995) [48] je predložio da se Diterihov zakon trenja sa jednom promenljivom stanja može koristiti pri osmatranju dinamike klizišta sa ravnom kliznom površi (sl. 14.30). Naime, vrlo često u terenima sa korom površinskog raspadanja veće debljine (dijabaz-rožnačka formacija, fliš, i dr.) klizna površ može biti na velikoj dužini paralelna površini terena. U tom slučaju, odgovarajuća klizna tela mogu se posmatrati kao beskonačne kosine, duž koje su naponsko-deformacijski uslovi isti, zanemarujući uticaje krajeva. Tada je moguće izdvojiti jedan blok, kao na slici 14.30, i dalju analizu sprovoditi samo za ovaj slučaj, uz pretpostavku da se dobijeni rezultati odnose i na čitavo telo klizišta [59].



Slika 14.30: Kosina sa kliznom površi koja je paralelna površini terena (slučaj beskonačne kosine).

14.2.1 Nelinearni dinamički model

Za slučaj beskonačne kosine, Čau [48] i Helmšteter i dr. [127] pretpostavili su da se proces klizenja može aproksimirati kretanjem jednog bloka po nagnutoj hrapavoj površi (sl. 14.31), pod uglom φ u odnosu na horizontalu ([80], [61], [79]). U ovom slučaju se pretpostavlja da na padini već postoji neka predisponirana klizna površ. Neophodno je naglasiti da se ovakav pristup razlikuje od tradicionalnog pristupa sa Baridž-Knopof modelom, pre svega zbog toga što se ovde kao glavna sila javlja gravitaciona sila, a ne delovanje gornje ploče.



Slika 14.31: Idealizacija beskonačne kosine jednim blokom težine W i brzine $V(t)$ duž postojeće klizne površi, gde i predstavlja ugao nagiba kosine, a $\tau(t)$ čvrstoću na smicanje stenskih masa duž klizne površi.

Kretanje bloka na nagnutoj hrapavoj površi (sl. 14.31) može se opisati sistemom tri obične diferencijalne jednačine prvog reda:

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= g \sin i - \frac{\tau}{\rho h}, \\ \frac{d\tau}{dt} &= \frac{d\theta}{dt} + \frac{A}{V} \frac{dV}{dt}, \\ \frac{du}{dt} &= V,\end{aligned}\tag{14.35}$$

gde g predstavlja gravitacionu konstantu ($9.83[m/s]$), i predstavlja nagib padine, ρ predstavlja gustinu tla, h debljinu povlatnog sloja, τ čvrstoću na smicanje duž klizne površi, V i u predstavljaju brzinu i pomeranje bloka, redom, dok A predstavlja empirijsku konstantu, koja zavisi od svojstava stenske mase.

Čvrstoća na smicanje duž klizne površi može se opisati pomoću Diteri-

hovog zakona trenja zavisnog od brzine bloka i stanja hrapave površi [283]:

$$\begin{aligned}\tau &= \sigma \left[\tau_0 + A \ln \left(\frac{V}{V_0} \right) + B \ln \left(\frac{V^* \theta}{L} \right) \right], \\ \dot{\theta} &= 1 - \frac{V \theta}{L},\end{aligned}\tag{14.36}$$

gde σ predstavlja normalni napon, a τ_0 smičući napon za neku referentnu brzinu V_0 . Parametar B predstavlja empirijsku konstantu koja zavisi od svojstava tla, dok je L karakteristična dužina klizanja (D_c). Parametar θ predstavlja promenljivu stanja, u funkciji prethodne istorije klizanja [257], dok je V referentna brzina klizanja.

Model (14.35) može se zapisati u bezdimenzionalnom obliku na sledeći način [48]:

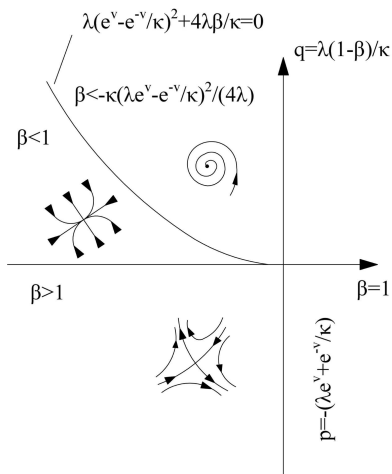
$$\begin{aligned}\frac{ds}{dT} &= -\lambda e^v [s - s_0 - (1 - \beta)V] + \frac{e^{-v}}{k}(\gamma - s), \\ \frac{dV}{dT} &= \frac{e^{-v}}{k}(\gamma - s), \\ \frac{d\delta}{dT} &= e^v\end{aligned}\tag{14.37}$$

gde su uvedene bezdimenzionalne veličine: $s = \tau/A$ (bezdimenzionalni napon), $v = \ln(V/V_0)$ (bezdimenzionalna brzina), $\delta = u/h$ (bezdimenzionalno pomeranje), $T = V_0 t/h$ (bezdimenzionalno vreme), $s_0 = \tau_0/A$, $k = \rho V_0^2/A$, $\gamma = \rho g h \sin \alpha/A$ i $\lambda = h/L$.

Izraz za ravnotežno stanje sistema (14.37) dobija se pod pretpostavkom da je $ds/dT = dV/dT = 0$, i $d\delta/dT = \text{const.}$, odnosno:

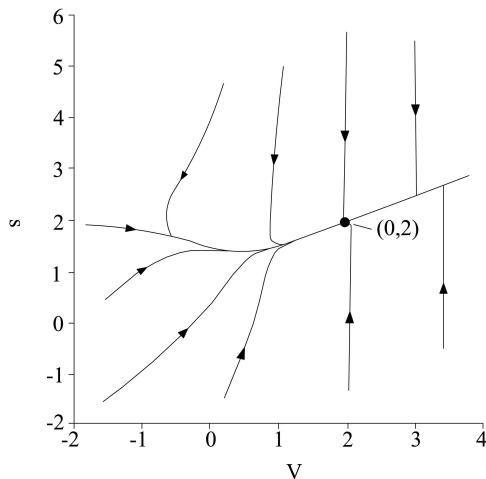
$$\begin{aligned}s &= \gamma, \\ V &= \frac{\gamma - s_0}{1 - \beta}, \\ \delta &= e^V.\end{aligned}\tag{14.38}$$

Numerička analiza ponašanja rešenja modela (14.37) za različite vrednosti parametara pokazuje dva različita područja stabilnosti zavisno od vrednosti parametra β , koji se pojavljuje kao kontrolni parametar sistema čije vrednosti određuju pojavu bifurkacija (sl. 14.32).



Slika 14.32: Područja različitih tipova ravnotežnih stanja sistema (14.37) u $p - q$ parametarskom prostoru: $\beta < -\kappa(\lambda e^v - e^{-v}/\kappa)^2 / (4\lambda)$ za asimptotski stabilne spiralne fiksne tačke (fokus), $\beta < 1$ za asimptotski stabilne čvorove; $\beta > 1$ za nestabilne sedlo tačke [48].

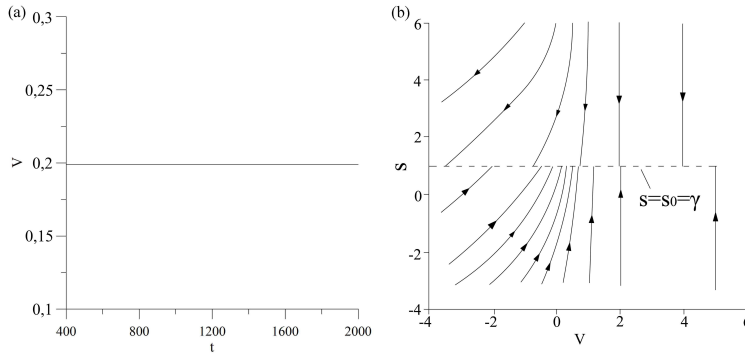
Za $\beta < 1$ (**slabo ponašanje materijala**²²) kretanje bloka je toliko sporo da se može smatrati da je blok u stanju mirovanja (sl.14.33). Sva rešenja prilaze stabilnoj fiksnoj tački za $t \rightarrow \infty$ [48].



Slika 14.33: Fazni portret rešenja sistema (14.37) za slučaj kada je $\beta < 1$: $\beta = 0,5$; $\gamma = 2$; $s_0 = 1$; $\lambda = 1,5$ i $\kappa = 1$. Početni uslovi su dati blizu ravnotežne (singularne) tačke: $s = 0,5$; $v = 0,1$ i $\delta = 0,5$. Fiksna tačka tipa čvor dobija se za $V = 0$ i $s = 2$. [48]

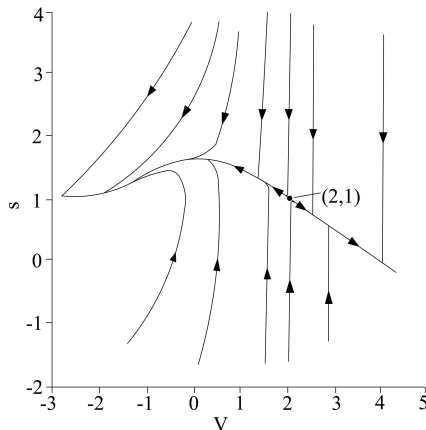
²²velocity weakening behavior (eng.)

Slično, za $\beta = 1$, blok se pomera duž nagnute površi konstantnom brzinom, čija se veličina povećava sa povećanjem vrednosti parametra s_0 u intervalu $[0, 1]$ (sl. 14.34). Sve trajektorije sistema (14.37) u ovom režimu teže neutralnoj stabilnoj fiksnoj tački [48].



Slika 14.34: Vremenska serija $V(t)$ i odgovarajući fazni portret za slučaj kada je $\beta = 1$. Vrednosti ostalih parametara su: $s_0 = 1, 0$; $\lambda = 1, 5$; $k = 2, 0$; $\gamma = 1, 0$ i $\beta = 1, 0$. Početni uslovi su dati blizu ravnotežne (singularne) tačke: $s = 0, 5$; $v = 0, 1$ i $\delta = 0, 5$.

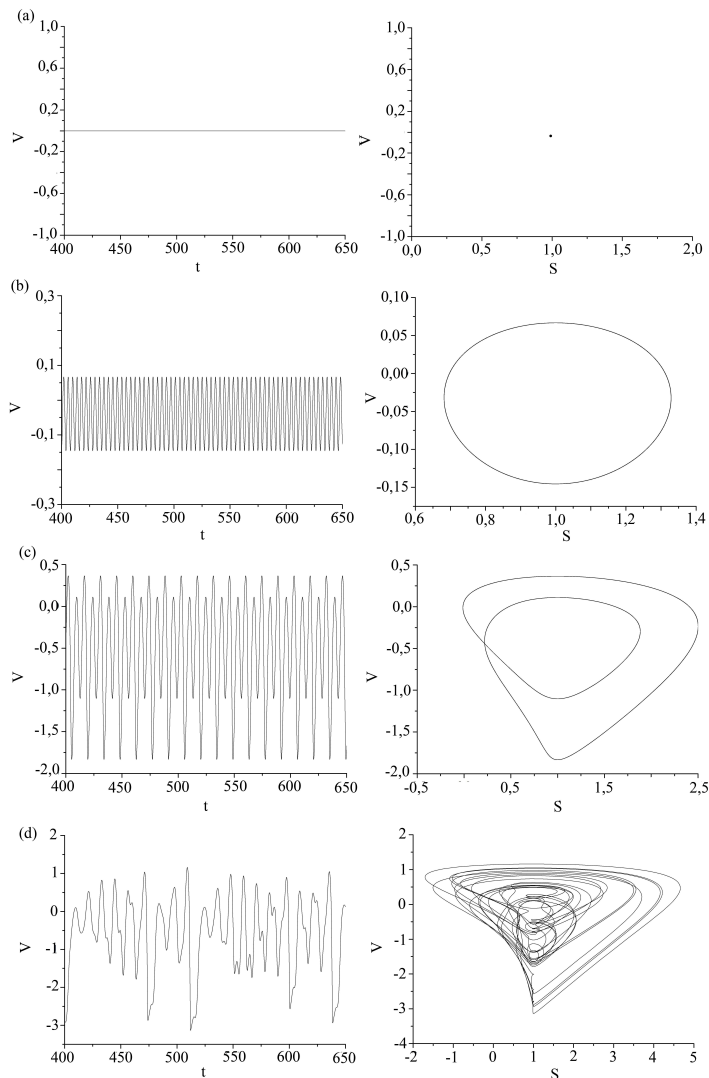
S druge strane, za $\beta > 1$ (**jako ponašanje materijala**²³) kretanje postaje nestabilno, u smislu da se brzina bloka vrlo brzo povećava i za kratak vremenski interval divergira u beskonačnost (sl. 14.35). Čau [48] je pokazao da, za $\beta > 1$, ravnotežna tačka predstavlja nestabilnu sedlo-tačku.



Slika 14.35: Fazni portret rešenja sistema (14.37) za slučaj kada je $\beta > 1$: $\beta = 1, 5$; $\gamma = 1$; $s_0 = 2$; $\lambda = 1, 5$ i $\kappa = 1$. Fiksna tačka tipa sedlo dobija se za $V = 2$ i $s = 1$.

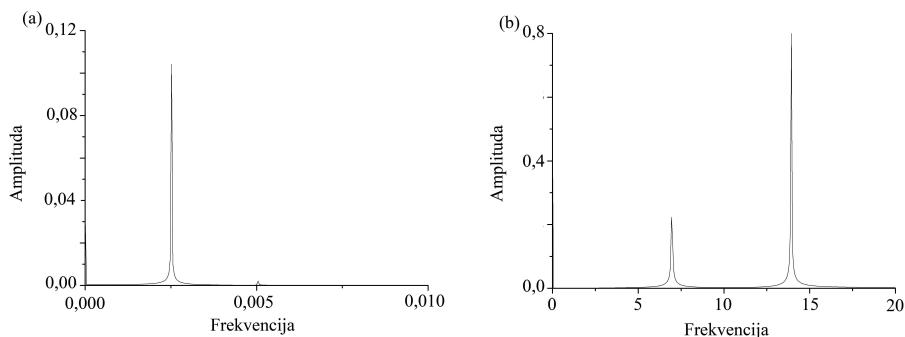
²³velocity strengthening behavior (eng.)

Ukoliko se u model (14.37) uvede vremensko kašnjenje τ , iz istih razloga kao kod Baridž-Knopof modela u prethodnom poglavlju, za $\beta < 1$ sistem pokazuje prelaz od periodičnog i kvaziperiodičnog ponašanja ka determinističkom haosu (sl. 14.36).

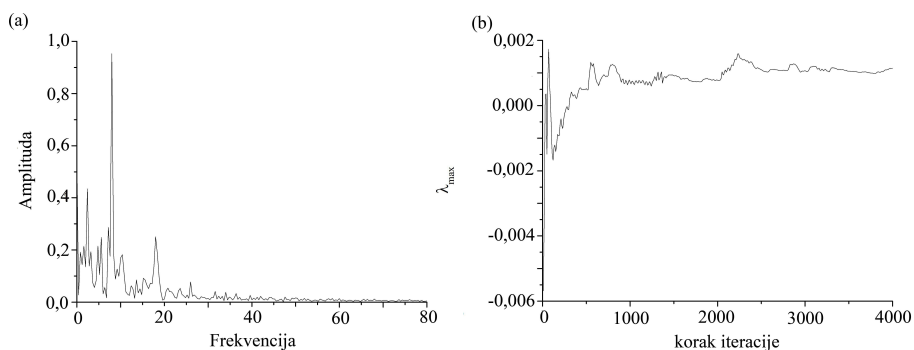


Slika 14.36: Vremenske serije $V(t)$ i odgovarajući fazni portreti za: (a) $\tau = 0,1$; $\beta = 0,3$ (ravnotežno stanje); (b) $\tau = 1,5$; $\beta = 0,5$ (periodično ponašanje); (c) $\tau = 3$; $\beta = 0,2$ (kvaziperiodično ponašanje); (d) $\tau = 7,5$; $\beta = 0,2$ (deterministički kaos). Vrednosti ostalih parametara su: $s_0 = 1,0$; $\lambda = 1,5$; $k = 2,0$ i $\gamma = 1,0$.

Put ka determinističkom haosu može se potvrditi pomoću Furijeovog spektra snage, i to jednim pikom, koji ukazuje na periodično ponašanje (sl. 14.37a) i sa dva pika koji ukazuju da se dinamika sistema odvija na torusu (sl. 14.37b). Kontinualni širokopojasni šum u Furijeovom spektru snage (sl. 14.38a) i pozitivna vrednost maksimalnog Ljapunovljevog eksponenta, [352] ukazuje na prisustvo stranog atraktora (sl. 14.38b).

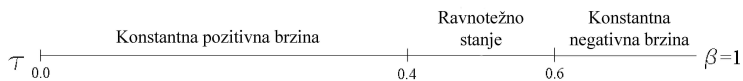


Slika 14.37: (a) Usamljeni pik u Furijeovom spektru snage ukazuje na periodično ponašanje. (b) Dva pika u Furijeovom spektru snage ukazuju na kvaziperiodično ponašanje. Vrednosti parametara su iste kao na slici 14.36(b) i 14.36(c), redom.



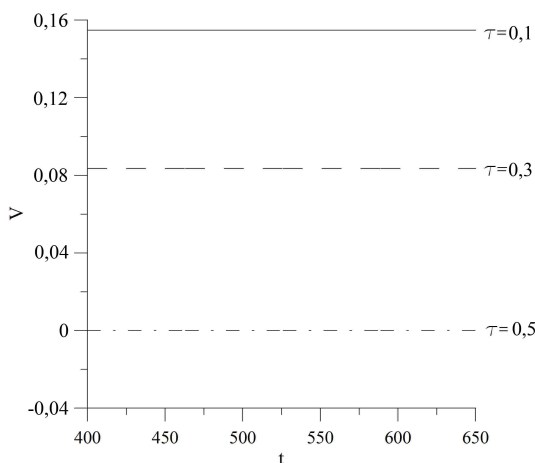
Slika 14.38: (a) Kontinualni širokopojasni šum u Furijeovom spektru snage ukazuje na haotično ponašanje; (b) Maksimalni Ljapunovljev eksponent konvergira ka pozitivnoj vrednosti, $\lambda_{\max} \approx 0,0011$, ukazujući na prisustvo determinističkog haosa. Vrednosti ostalih parametara su kao na slici 14.36(4).

Za $\beta = 1$, sistem ne pokazuje kompleksnu dinamiku sa uvedenim vremenskim kašnjenjem (sl. 14.39).

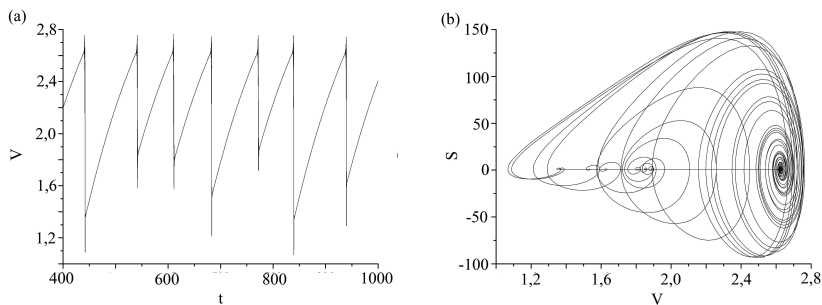


Slika 14.39: Bifurkacije sistema (14.37) pri promeni parametra τ , za $\beta = 1$. Ostali parametri "uzimaju" vrednosti u okolini ravnotežnog stanja sistema: $s_0 = 1, 0$, $\lambda = 1, 5$, $k = 2, 0$ i $\gamma = 1, 0$.

Drugim rečima, kada je $\beta = 1$, uvođenje vremenskog kašnjenja usporava kretanje bloka, dovodeći ga konačno u ravnotežno stanje (sl. 14.40). Ovakav tip ponašanja razlikuje se od prethodnog slučaja, za $\beta < 1$, gde uvođenje τ generiše mnogo kompleksnije ponašanje.

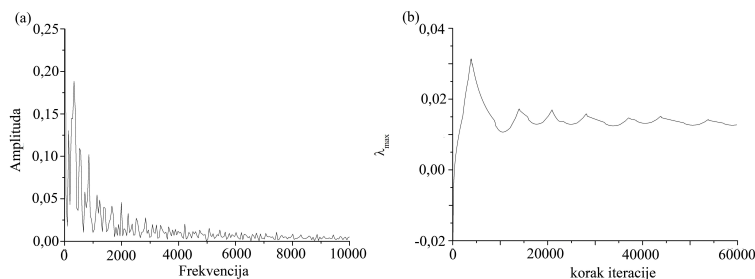


Slika 14.40: Vremenska serija $V(t)$ za blok na nagnutoj površi. Vrednosti parametra su kao na slici 14.39.



Slika 14.41: Vremenska serija $V(t)$ i fazni portret za $\beta = 1, 1$ i $\tau = 0, 1$. Vrednosti ostalih parametara su: $s_0 = 1, 0$; $\lambda = 1, 5$; $k = 2$ i $\gamma = 1$.

Za $\beta = 1,1$ i $\tau = 0,1$, dolazi do pojave determinističkog haotičnog ponašanja (sl. 14.41), što se potvrđuje kontinualnim šumom u Furijeovom spektru snage (sl. 14.42a) i pozitivnom vrednošću najvećeg Ljapunovljevog eksponenta (sl. 14.42b).



Slika 14.42: (a) Kontinualni širokopojasni šum u Furijeovom spektru snage ukazuje na pojavu haotičnog ponašanja. (b) Maksimalni Ljapunovljev eksponent konvergira ka pozitivnoj vrednosti, $\lambda_{max} \approx 0,013$.

14.2.2 Polinomijalni model

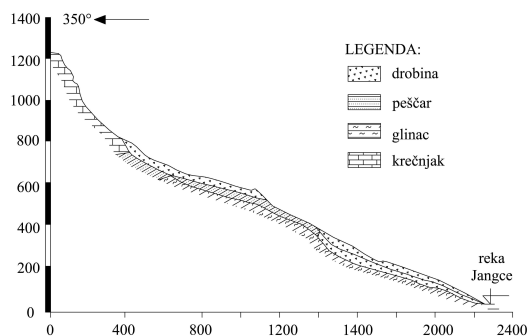
Radi proučavanja klizišta ogromnih zapremina u Kini, Kin i dr., 2002. god. [267], predložili su poseban model, kojim se, kao glavni (kontrolni) parametri kretanja klizišta obuhvataju napon X , pomeranje Y i količina padavina Z :

$$\begin{aligned}
 \frac{dX}{dt} &= a_1 X + a_2 Y + a_3 Z + a_4 X^2 + a_5 Y^2 + a_6 Z^2 + \\
 &\quad + a_7 XY + a_8 XZ + a_9 YZ, \\
 \frac{dY}{dt} &= b_1 X + b_2 Y + b_3 Z + b_4 X^2 + b_5 Y^2 + b_6 Z^2 + \\
 &\quad + b_7 XY + b_8 XZ + b_9 YZ, \\
 \frac{dZ}{dt} &= c_1 X + c_2 Y + c_3 Z + c_4 X^2 + c_5 Y^2 + c_6 Z^2 + \\
 &\quad + c_7 XY + c_8 XZ + c_9 YZ,
 \end{aligned} \tag{14.39}$$

gde su $a_1, a_2, \dots, a_9; b_1, b_2, \dots, b_9; c_1, c_2, \dots, c_9$ konstante koje se izračunavaju numeričkim putem. Neophodno je naglasiti da se kao kontrolni parametri sistema, umesto ponuđenih, mogu koristiti i podaci osmatranja drugih svojstava, poput oscilacija nivoa podzemne vode, razvoja deformacija, i dr.

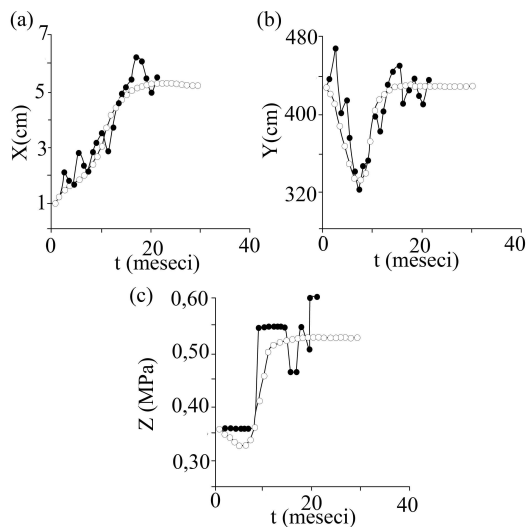
Potvrda predloženog modela izvršena je na primeru klizišta Ksintan u Kini, koje se aktiviralo 1985.god. u blizini grada Ksintan, na levoj obali

reke Jangce. Zapremina kliznog tela iznosila je $20 \times 10^6 [m^3]$. Klizište je aktivirano na kontaktu drobinskog nanosa i svežih nepolomljenih glinaca i peščara (sl. 14.43).



Slika 14.43: Inženjerskogeološki presek klizišta Ksintan u Kini [267].

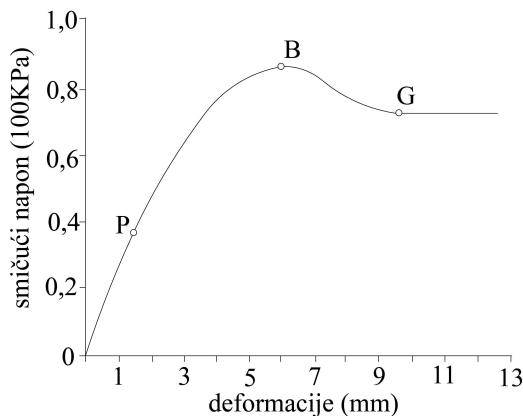
Koristeći model (14.39) i rezultate osmatranja deformacija, oscilacija nivoa podzemne vode i promena geostatičkog pritiska, Kin i dr. [267] izvršili su poređenje teorijski predviđenih vrednosti modela i realno osmatranih podataka i dobili rezultate zadovoljavajuće tačnosti (sl. 14.44).



Slika 14.44: Poređenje između realno osmatranih podataka i teorijski predviđenih vrednosti na osnovu modela (14.39): (a) razvoj širine pukotina X u vremenu; (b) oscilacije nivoa podzemne vode Y u vremenu; (c) promena geostatičkog pritiska Z u vremenu. Puni kružići označavaju realno osmatrane podatke, prazni kružići - podatke predviđene teorijskim modelom (14.39)

14.2.3 Model katastrofe

Najjednostavniji slučaj klizanja javlja se kada je klizna površ homogena. Ukoliko pretpostavimo da se stenska masa ponaša kao elasto-plastična sredina, njena čvrstoća na smicanje duž klizne površi može se uopšteno izraziti kao nelinearna funkcija smičućeg napona τ i pomeranja u (sl. 14.45). Ovakav dijagram u mehanici tla odgovara ponašanju zbijenog tla (tvrda glina i zbijeni pesak), za koji smičući napon τ u početku raste dosta naglo u odnosu na pomeranje u do granice proporcionalnosti P , a zatim sporije, pri čemu se zakrivljenost dijagrama povećava i dolazi do maksimalne visine B . Nakon toga, dijagram na izvesnoj dužini opada, i na kraju asimptotski se približava horizontalnoj vrednosti. Zona približno pravolinijskog rasta dijagrama deformacija, u kojoj je porast smičućeg napona proporcionalan porastu deformacija, usvaja se da je oblast elastičnih deformacija. Iza granice P porast smičućeg napona τ opada prema porastu deformacija u do najviše tačke B dijagrama. U ovoj zoni materijal počinje da "teče" i ova zona se usvaja kao oblast plastičnih deformacija. Najviša tačka B dijagrama predstavlja maksimalni smičući napon τ , tako da se usvaja da u ovoj tački nastaje lom tla, tj. da je tačka B granica loma. Iza tačke B je tečno stanje materijala, čvrstoća smicanja opada, te se usvaja da u ovoj zoni u kojoj više nema kohezije, postoji još samo otpor klizanja koji se suprotstavlja sili smicanja. Tačka G u kojoj dijagram prelazi u horizontalni pravac usvaja se kao granica klizanja [221].

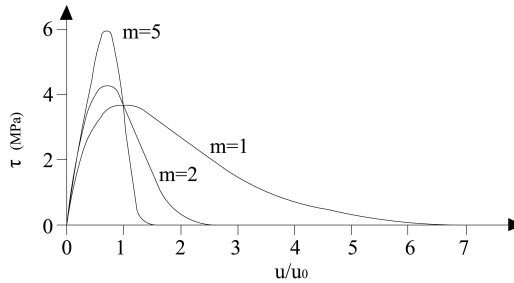


Slika 14.45: Kriva ponašanja stenske mase kao elasto-plastične sredine (zbijeni pesak i tvrda glina). Sličan dijagram se dobija i za prekonsolidovanu glinu, s tim da dijagram ima veću zakrivljenost.

Da bi se opisala čvrstoća na smicanje stenske mase duž klizne površi, usvaja se da ima Weibull-ovu raspodelu, koja odgovara eksperimentalno osmatranim podacima [136]:

$$\tau = G_s \frac{u}{h} e^{-(u/u_0)^m}, \quad (14.40)$$

gde je G_s početni modul smicanja, u_0 predstavlja meru prosečnog pomenanja, a m je koeficijent oblika (sl. 14.46). Weibulova²⁴ raspodela je naročito pogodna za korišćenje u inženjerskoj praksi, jer je vrlo fleksibilna, i može opisati raspodelu velikog broja različitih podataka.



Slika 14.46: Konstitutivne krive Weibull-ove raspodele smičućeg napona duž klizne površi za različite vrednosti parametra m . Vrednosti ostalih parametara su: $G_s = 10 [MPa]$, $u_0 = 0,1 [m]$, i $h = 0,1 [m]$.

Kada su sile koje deluju na klizno telo u ravnoteži, važi da je:

$$\frac{G_s \ell_s}{h} u e^{-(u/u_0)^m} - W g \sin \theta = 0. \quad (14.41)$$

gde je ℓ_s dužina klizne površi, W težina kliznog tela, g ubrzanje Zemljine teže, a θ ugao klizne površi u odnosu na horizontalnu ravan (ostali simboli su kao u prethodnoj jednačini (14.40)). Ukoliko pretpostavimo da je klizna površ dvodimenzionalna, to znači da je drugi izvod jednačine (14.41), odnosno treći izvod potencijalne energije sistema, jednak nuli (nema torzije krive):

$$u_1 = \left(\frac{m+1}{m} \right)^{1/m} u_0. \quad (14.42)$$

Razvojem u Tejlorov red jednačine (14.41) do trećeg člana, i zamenom

²⁴Weibull

(14.42) u (14.41) dobijamo:

$$\frac{1}{6} \frac{G_s \ell_s u_1 e^{-(u/u_0)^m}}{h} \left[3 \left(\frac{u - u_1}{u_1} \right) + 6 \left(-\frac{1}{(m+1)^2} \right) \left(\frac{u - u_1}{u_1} \right) + \frac{6}{m(m+1)^2} \left(1 - \frac{Wgh \sin \theta e^{(u/u_0)^m}}{G_s \ell_s u_1} \right) \right] = 0. \quad (14.43)$$

Radi pojednostavljenja, uvedimo smenu:

$$x = \frac{u - u_1}{u_1}, \quad \xi = \frac{Wgh \sin \theta e^{(u/u_0)^m} G_s \ell_s u_1}{6}, \quad (14.44)$$

$$a = -\frac{6}{(m+1)^2}, \quad b = \frac{6}{m(m+1)^2} (1 - \xi).$$

Zamenom (14.44) u (14.43) dobijamo standardni model katastrofe za proces kliženja:

$$x^3 + ax + b = 0, \quad (14.45)$$

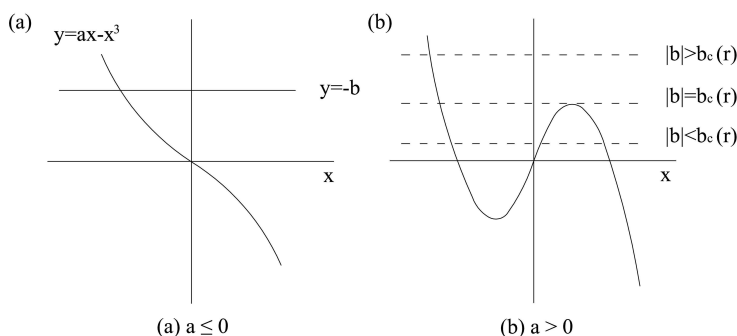
gde su a i b kontrolni parametri, a x je zavisno promenljiva. Kada sistem nije u ravnoteži (sile u jednačini (14.41) nisu u ravnoteži), odnosno kada dođe do kliženja, tada se jednačina (14.45) izražava u sledećem obliku:

$$\frac{dx}{dt} = b + ax + x^3. \quad (14.46)$$

Ukoliko je $b = 0$, tada jednačina (14.46) predstavlja normalnu formu potkritične vilaste bifurkacije. Međutim, kada je $b \neq 0$, onda nema simetrije između x i $-x$, i tada se parametar b naziva parametrom nesavršenosti, o kojem je već bilo reči, u teorijskom delu udžbenika 48.

Neophodno je naglasiti da jednačina (14.41) uzima u obzir samo težinu kliznog tela i otpornost na smicanje duž klizne površi. Dodatne analize su pokazale da je moguće razmatrati i efekat pornog pritiska i infiltracije [356].

Analizirajmo najpre fiksne tačke sistema (14.46), koristeći geometrijski pristup (kvalitativna analiza). Skicirajmo grafike funkcija $y = ax - x^3$ i $y = -b$, i potražimo njihove preseke (fiksne tačke sistema (14.46)). Kada je $a \leq 0$, kriva monotono opada, i preseca horizontalnu pravu $y = -a$ u tačno jednoj tački (sl. 14.47a). U slučaju kada je $a > 0$, moguća su jedan, dva ili tri preseka, zavisno od vrednosti parametra b (sl. 14.47b).



Slika 14.47: Grafici funkcija $y = ax - x^3$ i $y = -b$ za različite vrednosti parametra a .

Kritičan slučaj se javlja kada je horizontalna prava tangenta na kubnu krivu, kada dolazi do pojave sedlo-čvor bifurkacije. Da bismo našli vrednost parametra b za koju dolazi do pojave bifurkacije, uočimo da kubna kriva ima lokalni maksimum kada je:

$$\frac{d}{dx}(ax - x^3) = a - 3x^2 = 0. \quad (14.47)$$

Prema tome:

$$x_{\max} = \sqrt{a/3}, \quad (14.48)$$

a vrednost funkcije u lokalnom maksimumu je:

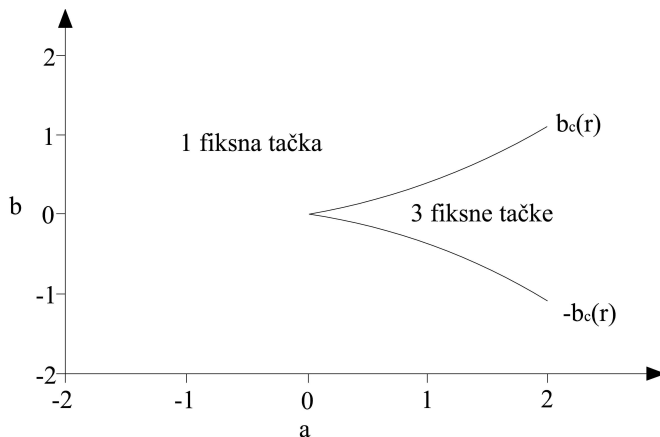
$$ax_{\max} - (x_{\max})^3 = \frac{2a}{3}\sqrt{a/3}. \quad (14.49)$$

Slično, vrednost funkcije u lokalnom minimumu predstavlja negativnu vrednost jednačine (14.49). Prema tome, sedlo-čvor bifurkacija se javlja kada je $b = +/- b_c(a)$, gde je:

$$b_c(a) = \frac{2a}{3}\sqrt{a/3}. \quad (14.50)$$

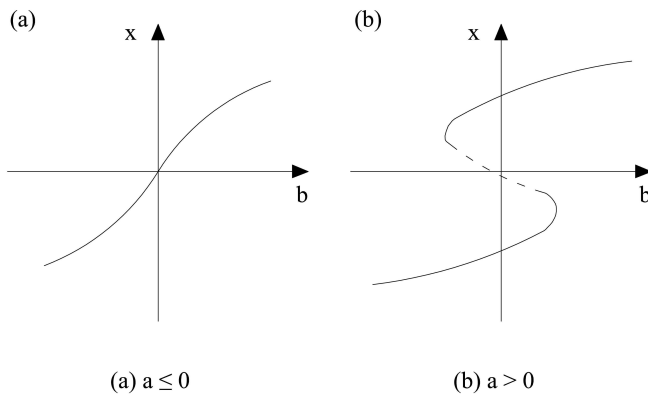
Jednačina (14.46) ima tri fiksne tačke za $|b| < b_c(a)$ i jednu fiksnu tačku za $|b| > b_c(a)$. Skicirajmo sada bifurkacione krive $b = +/- b_c(a)$, u ravni (a, b) (sl. 14.48). Možemo uočiti da se dve bifurkacione krive seku u tački $(a, b) = (0, 0)$, koja se naziva šiljak tačka²⁵. Sedlo-čvor bifurkacije javljaju se duž granica područja sa različitim brojem fiksnih tačaka, izuzev u tački šiljku, gde dolazi do pojave bifurkacije kodimenzije 2.

²⁵cusp point (eng.)



Slika 14.48: Bifurkacioni dijagram sistema (14.46) u parametarskom prostoru (a, b) .

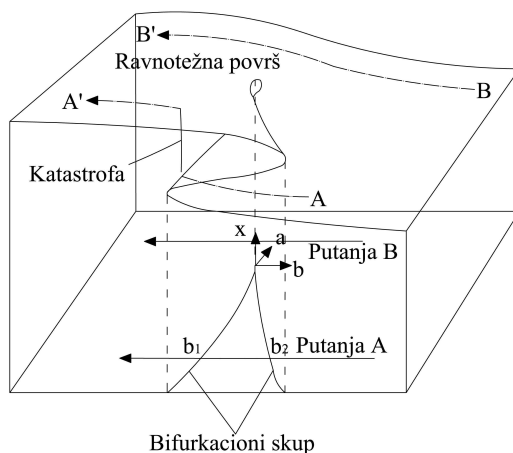
Alternativno, možemo skicirati x u zavisnosti od promene b , za fiksnu vrednost parametra a (sl. 14.49).



Slika 14.49: Grafik funkcije (14.46) za različite vrednosti parametra a .

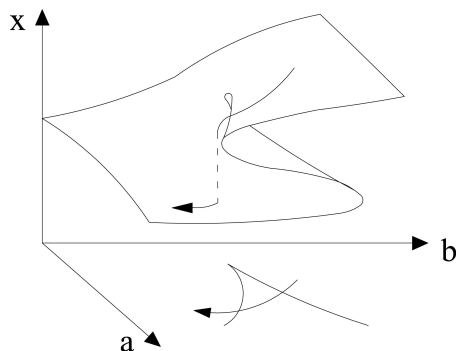
Kada je $a \leq 0$, postoji jedna stabilna fiksna tačka za svaku vrednost b (sl. 14.49a). Međutim, kada je $a > 0$, postoje tri fiksne tačke za $|b| < b_c(a)$, i jedna za $|b| > b_c(a)$.

Ukoliko fiksne tačke x^* postavimo iznad (a, b) ravni, dobijamo površ šiljak katastrofe (sl. 14.50). Putanja $A - A'$ na slici 14.50 opisuje nestabilan proces, a putanja $B - B'$ stabilan proces [128].



Slika 14.50: Model šiljak-katastrofe za klizišta.

Termin katastrofa motivisan je činjenicom da sa promenom vrednosti parametara, stanje sistema može biti dovedeno do ivice gornje površi, nakon čega diskontinualno "pada" na donju površ (sl. 14.51).



Slika 14.51: Diskontinualni skok preko ivice gornje površi šiljak katastrofe.

Kriva na slici 14.49(b) predstavlja bifurkacioni skup i može se izraziti kao [331]:

$$D = 4a^3 + 27b^2 = 0. \quad (14.51)$$

Smenom (14.44) u (14.51) dobija se:

$$D = -4\beta^3 + 27(\beta/m)^2(1-\xi)^2 = 0, \quad (14.52)$$

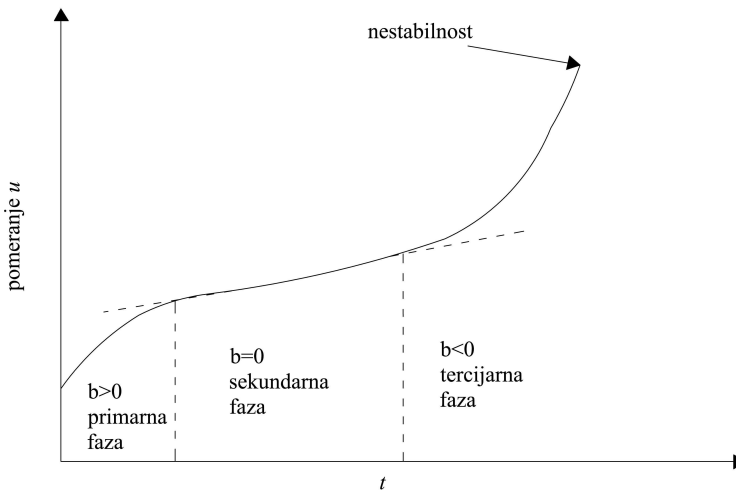
gde je $\beta = 6/(m+1)^2$.

Bifurkaciona kriva definisana jednačinom (14.52) određuje prag za koji dolazi do iznenadnih promena dinamike sistema. Sve dok je stanje sistema izvan bifurkacionog skupa ($D > 0$), ponašanje sistema se menja glatko i kontinualno u funkciji kontrolnih parametara. Čak i za $D < 0$ - ne osmatra se nikakva iznenadna promena. Međutim, kada je $D = 0$, katastrofa je neizbežna. Stoga, jednačina (14.51) ili (14.52) predstavlja potreban i dovoljan mehanički kriterijum za pojavu nestabilnosti u ravanskoj površi smicanja (pojava klizišta). U daljoj analizi D je označeno kao karakteristični indeks katastrofe.

Parametar b , definisan u (14.44), smenom četvrte jednačine u treću, može se izraziti na sledeći način:

$$b = \frac{6e^{(m+1/m)}}{2m(m+1)G_s \ell_s u} \left[G_s \ell_s u e^{-(m+1/m)} - Wgh \sin \theta \right]. \quad (14.53)$$

Parametar b zavisi od vrednosti otpornih i smučućih sila, i odgovara različitim fazama pripreme procesa klizenja (sl. 14.52).



Slika 14.52: Različite faze pripreme procesa klizenja u zavisnosti od vrednosti parametra b .

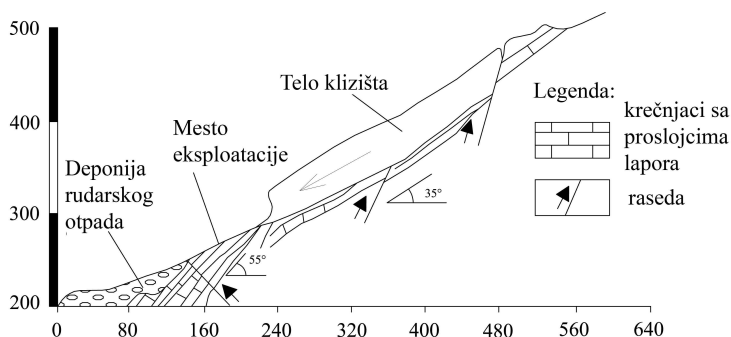
Ukoliko u obzir uzmemo i uticaj viskoznosti duž klizne površi, čvrstoća na smicanje τ se može izraziti u sledećem obliku:

$$\tau = G_s \frac{u}{h} e^{-(u/u_0)^m} + \frac{\eta}{h} \frac{du}{dt} \quad (14.54)$$

gde je η koeficijent viskoznosti. U tom slučaju, jednačina (14.46) postaje:

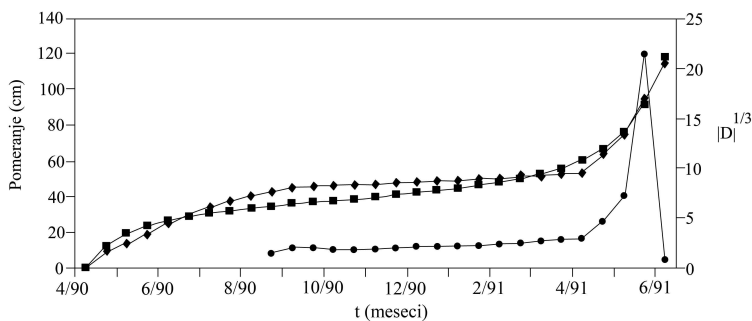
$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{6} \frac{G_s e^{-(m+1/m)} m(m+1)^2}{\eta} (x^3 + ax + b). \quad (14.55)$$

Model (14.55) predstavlja nelinearni dinamički model ili model predviđanja razvoja procesa klizanja. Kin i dr. [265] proveru ovog modela izvršili su na primeru klizišta Džimingsi u Hubej provinciji u Kini, na osnovu rezultata osmatranja promene širina pukotina u telu klizišta. Klizište je aktivirano 1991.god., pri čemu je pokrenuta zapremina od oko $6 \times 10^5 [m^3]$, rudarskim radovima u krečnjacima, koji su u smeni sa tankim proslojcima mekših laporaca (sl. 14.53).



Slika 14.53: Inženjerskogeološki presek klizišta Džimingsi u Kini [265].

Ukoliko se uporede rezultati teorijskog predviđanja promene širine pukotina i realno osmatranih podataka, jasno je da model daje predviđanja zadovoljavajuće tačnosti (sl. 14.54).



Slika 14.54: Krive promene širine pukotina u telu klizišta, dobijene na osnovu realnih osmatranja u terenu (crni kvadrat), i teorijski (crni deltoidi), kao i vrednost karakterističnog indeksa katastrofe D (crni kružić) na osnovu jednačine (14.55) [265].

Sa slike 14.54 jasno se uočava da je karakteristični indeks katastrofe D u drugoj fazi kliženja ($b = 0$) pokazuje relativno male promene, da bi dostigao vršnu vrednost u trećoj fazi kliženja ($b < 0$), nakon čega brzo opada do nulte vrednosti neposredno pre početka procesa kliženja. Drugim rečima, indeks D se može smatrati relativno pouzdanim prekursorom pojave kliženja.

Ovo poglavlje je posvećeno metodama i tehnikama nelinearne dinamike koje se primenjuju u izučavanju zemljotresa i klizišta. Dobijeni rezultati prethodnih istraživanja ukazuju na moguću deterministički haotičnu prirodu ovih geodinamičkih pojava, što, sa šireg teorijskog i praktičnog stanovišta ima višestruki značaj. Kao prvo, prisustvo deterministički haotične dinamike ukazuje na činjenicu da se mehanizam nastanka ovih pojava može egzaktno definisati pomoću odgovarajućeg determinističkog modela, što može biti od presudnog značaja i sa teorijskog ali i sa čisto inženjerskog aspekta. S druge strane, "haotično" ponašanje implicira da su klizišta i zemljotresi kratkoročno predvidive pojave [266], što može imati značajne posledice, pre svega u odnosu na zaštitu ljudi i materijalnih dobara. Nažalost, metode nelinearne dinamike samo ukazuju na ovu mogućnost, i ne mogu odrediti vrstu predviđanja (vremenska, mesna, lokalna, globalna), niti način predviđanja. U tom smislu, očekuju se dalji zajednički naponi inženjera i teorijskih fizičara kako bi pomenute metode našle primenu i u praksi.

Glava 15

Primena metoda teorije nelinearne dinamike na neuronskim sistemima

15.1 Uvod

Između teorije nelinearne dinamike i oblasti neuronauke razvijen je veoma aktivan odnos, koji podseća na pozitivnu povratnu spregu. S jedne strane, primena metoda nelinearne dinamike suštinski je doprinela fizičkom modelovanju neuronskih sistema, dok su s druge strane, pojave otkrivene na neuronskim sistemima motivisale razvoj novih koncepata u teoriji nelinearne dinamike, kao što su ekscitabilnost, različite forme sinhronizacije ili "haotično lutanje"¹. U ovom poglavlju, cilj je da izdvojimo univerzalne (paradigmatske) elemente lokalne i kolektivne dinamike neuronskih sistema, kao i da prikažemo teorijske metode korisne ne samo za analizu neuronskih, nego i velikog broja drugih klasa sistema. Mehanizme samoorganizacije i fenomene makroskopskog ponašanja predstavimo iz perspektive teorije kompleksnih sistema, imajući u vidu da je upravo ljudski mozak najbolji i ujedno najstroženiji poznati primer kompleksnog sistema u prirodi. Ključni emergent fenomen na neuronskim sistemima je sinhronizacija, koju ćemo osvetliti fokusirajući se na dva teorijski najvažnija rezultata. Prvo, koristeći model globalno kuplovanih faznih oscilatora, predstavimo sinhronizaciju kao proces koji ima karakteristike faznog prelaza drugog reda, a kao drugo, preko metoda master-stability funkcije, pokazaćemo da je stabilnost globalno sinhronizovanog stanja separabilna na stepene slobode koji

¹chaotic itinerancy (eng.)

potiču od lokalne dinamike jedinica i topologije mreže kojom je zadata shema interakcija. Posle opšteg prikaza kooperativnih fenomena datog u kontekstu kompleksnih sistema, ukazaćemo na činjenicu da i lokalno ponašanje neurona može da bude paradigmatično za širu klasu sistema. Zaista, ne samo što je za pojedinačne neurone tipično da se nalaze u ekscitabilnom režimu, već su neuroni najbolji i najznačajniji primer ekscitabilnih sistema u prirodi. Zato je jedan od najpoznatijih modela lokalne neuronske dinamike predstavljen kao generički za celu klasu ekscitabilnih sistema. Pri tom, usled velikog broja stepeni slobode i širokog opsega prostornih i vremenskih skala, modelovanje neuronskih sistema tipično uključuje delovanje šuma, kao i eksplicitno uvođenje kašnjenja u interakcijama, koji pojedinačno ili u sadejstvu mogu značajno da utiču na asimptotsku dinamiku. U tom kontekstu, razmotrićemo koncept stohastičke bifurkacije na modelima matematički zadatim sistemima kuplovanih stohastičkih diferencijalnih jednačina s kašnjenjem, ističući razlike između stohastičkih bifurkacija i dosad analiziranih bifurkacija na modelima determinističkih sistema. Na kraju, pokazaćemo kako kombinovanom primenom metoda teorije nelinearne dinamike i statističke fizike može da se izvede mean-field model kolektivne dinamike makroskopskih neuronskih sistema pod uticajem šuma i kašnjenja u interakcijama. Prednost ovakvog pristupa je u tome što na kvalitativno ispravan način može da opiše stohastičke bifurkacije, predviđajući različite scenarije nastanka i prigušenja kolektivne mode, kao i pojedine bistabilne režime.

15.2 Neuronski sistemi kao primer kompleksnih sistema

Zašto je važno posmatrati makroskopske neuronske sisteme, kao što je ljudski mozak, iz perspektive teorije kompleksnih sistema [170, 31, 119, 194, 187, 11]? Pre svega, zato što ova relativno nova oblast, koja se intenzivno razvija, nudi koncepte i metode koji su najbolje adaptirani za analizu i modelovanje funkcionalne organizacije neuronskih sistema, koja se zasniva na brojnim kooperativnim fenomenima na čitavom nizu prostornih i vremenskih skala [342, 83, 40, 269]. Iako u opštem slučaju istraživanje kompleksnih sistema zahteva interdisciplinarni pristup, metode razvijene u fizici (teorija nelinearne dinamike, kao i teorije kritičnih fenomena, renormalizacione grupe, samoorganizovane kritičnosti ili sinergije) pružaju najbolju osnovu za izučavanje kompleksnosti.

Šta dakle, s fizičkog stanovišta, podrazumeva pojam kompleksnosti? Na

intuitivnom nivou, pojam kompleksnosti možemo da posmatramo u kontekstu pojave netrivialnog uređenog ponašanja, koje nastaje kao posledica strukture sistema i interakcija između njegovih konstituenata, pri čemu je sama pojava uređenog ponašanja, bar na prvi pogled, neočekivana [170, 194]. Za formalniju definiciju, potrebno je uvesti pojam **emergent fenomena**, koje možemo da razumemo kao vidove kolektivnog ponašanja sistema sačinjenih od velikog broja jedinica, koji ne mogu neposredno da se izvedu ili predvide na osnovu poznavanja unutrašnje strukture sistema i karakteristika interakcije između konstituenata. Napomenimo da emergent ponašanje može da se manifestuje kako na vremenskom, tako i na prostornom ili prostorno-vremenskom nivou kroz različite paterne kolektivne aktivnosti. Koristeći pojam emergent fenomena, kompleksne sisteme možemo uslovno da definišemo kao sisteme sastavljene od velikog broja (nelinearno) interagujućih jedinica, koji ispoljavaju kolektivnu emergent dinamiku, i koji, zahvaljujući interakciji s okruženjem kroz razmenu informacija i energije (otvoreni sistemi), mogu da modifikuju unutrašnju strukturu i paterne aktivnosti [170]. Iako nije matematički rigorozna, ovakva definicija ističe glavne elemente kolektivne dinamike i strukture kompleksnih sistema, na osnovu kojih je lako razlučiti koji sistemi sačinjeni od mnogo jedinica jesu, a koji nisu kompleksni. Očigledno, koncept kompleksnosti obuhvata veliki broj prirodnih i socijalnih sistema, uključujući makroskopske neuronske sisteme, finansijska tržišta, jezike (posmatrane kao sintaksičke ili semantičke strukture), internet, komunikacione mreže, kao i brojne primere iz hidrodinamike, hemijske kinetike, nelinearne optike ili genetike. Sa stanovišta fizike, jedna od glavnih specifičnosti kompleksnih sistema se sastoji u tome što su otvoreni, tako da standardne metode ravnotežne statističke fizike nisu primenjive [12, 170]. Naime, poznato je da ravnotežno stanje sistema odgovara minimumu slobodne energije. Minimum je upravo određen sadejstvom mehanizama uređivanja, vođenih interakcijama unutar sistema i opisanih unutrašnjom energijom, i mehanizama neuređenosti, koji proizlaze iz činjenice da različite konfiguracije (stanja) sistema mogu da imaju istu energiju, što je opisano entropijom sistema. Kompleksni sistemi su, međutim, po pravilu daleko od ravnotežnog stanja, pa se njihov fizički opis zasniva na metodama iz oblasti sinergije [119]. Iako zasad ne postoji matematička definicija kompleksnosti, koja bi bila univerzalno primenjiva nezavisno od klase posmatranih sistema, većina dosadašnjih pokušaja koristila je pojmove iz teorije informacija. Jedan od matematičkih pogleda na kompleksnost zasnovan je na postojanju statističkih zavisnosti između konstituenata sistema. U tom smislu, što je značajnija funkcionalna zavisnost, to je kompleksnost

analiziranog sistema veća. Tako shvaćena kompleksnost može da se kvantifikuje preko tzv. međusobne informacije, koja opisuje količinu informacija koje o posmatranom podsystemu možemo da saznamo posmatrajući ostale podsysteme. Na primer, za dva podsystema X_1 i X_2 , međusobna informacija je definisana kao $I(X_1, X_2) = H_I(X_1) + H_I(X_2) - H_I(X_1, X_2)$, gde je $H_I(X_1, X_2)$ združena entropija sistema X_1 i X_2 . U ovoj simplifikaciji, sistem bismo smatrali kompleksnim ako bi bilo ispunjeno $0 < I(X_1, X_2) < H_I(X_1)$ [170].

Sa našeg stanovišta, najvažnija je činjenica da kompleksni sistemi, bez obzira na različitu morfologiju i lokalnu dinamiku jedinica, kao i tipove interakcija, manifestuju univerzalne karakteristike kako na nivou makroskopske organizacije, tako i u pogledu kolektivne dinamike pod određenim uslovima. Dosad smo neke od univerzalnih osobina naveli pri definisanju kompleksnih fenomena, ali nam je sada cilj da te, i još neke karakteristike, osvetlimo iz perspektive makroskopskih neuronskih sistema. Napomenimo da među zajedničke osobine kompleksnih sistema ubrajamo veliki broj interagujućih jedinica, emergent dinamiku, hijerarhijsku strukturu, koegzistenciju kolektivne dinamike i šuma, dugodometnost interakcija, invarijantnost u pogledu karakterističnih prostornih i vremenskih skala, kritičnost i multifraktalnost [170, 12].

Uzmimo za primer ljudski mozak, kao kanonski primer kompleksnog sistema. S makroskopske tačke gledišta, ako se ograničimo na njihovu električnu aktivnost, neuroni, čiji je prosečan broj reda 10^{11} [269, 145, 119], mogu da se posmatraju kao pojedinačni stepeni slobode. Naravno, s mikroskopskog stanovišta, sami neuroni manifestuju kompleksnost, kako kroz morfološke karakteristike (razgranata struktura ćelije sa fraktalnim osobinama), tako i kroz fiziologiju (nelinearnost procesa koji se odvijaju unutar i izvan ćelije) [187, 194]. Svaki neuron prosečno interaguje sa oko 10^4 drugih jedinica, pri čemu veze mogu da budu lokalnog tipa, ostvarene preko kratkih nastavaka na telo ćelije, dendrita, ili dugodometne, koje se ostvaruju preko dužih nastavaka, aksona. Komunikacija između ćelija odvija se razmenom električne aktivnosti, pri čemu neuroni generišu tzv. akcione potencijale (impulse ili spike-ove). Neposredan kontakt između ćelija ostvaruje se preko električnih (difuzionih, gap-junction) ili hemijskih sinapsi, koje u matematičkom smislu odgovaraju linearnoj ili nelinearnoj (threshold) funkciji kuplovanja među neuronima [289, 207, 327]. Pri tom, električne (hemijske) sinapse su tipično bidirekzione (usmerene). Prema tipu efekata koje izazivaju, hemijske sinapse mogu da budu ekscitatorne ili inhibitorne, što se manifestuje kroz povećanje (depolarizaciju) ili smanjenje (hiperpo-

larizaciju) membranskog potencijala datog neurona ("ekscitatorni ili inhibitorni postsinaptički potencijal") kao odgovor na primljeni impuls s drugog neurona. Poznato je da je za emitovanje akcionog potencijala potrebno sinhronizovano pristizanje većeg broja presinaptičkih impulsa [100, 269]. Posmatrano na komparativno dugačkim vremenskim skalama, sinapse su dinamičke strukture, čija se jačina menja u zavisnosti od tipičnog relativnog odnosa vremena opaljivanja presinaptičkog i postsinaptičkog neurona (plastičnost sinapsi) [100, 196, 42].

Pokazuje se da je u funkcionalnom smislu vertikalna organizacija nervnog sistema zasnovana na hijerarhijskom principu, uz poštovanje analognih metoda umrežavanja na svakom horizontalnom nivou strukture [83]. Na prostornom nivou uslovno je moguće izdvojiti bar tri karakteristične prostorne skale (mikroskopsku, mezoskopsku i makroskopsku), kao i čak 12 različitih vremenskih skala [40, 145]. Kao i kod većine drugih kompleksnih sistema, i u slučaju mozga se može smatrati da pojedini nivoi hijerarhije manifestuju osobine kompleksnosti u poređenju s nižim nivoima hijerarhije [170, 83]. Glavni mehanizam koji omogućava nastanak hijerarhijske strukture je tzv. slaving princip [119], prema kojem kuplovanje više stepeni slobode dovodi do efektivnog smanjenja ukupnog broja stepeni slobode, tako da iz perspektive spoljašnjeg posmatrača ceo sistem počinje da se ponaša kao jedinstvena celina [170, 187, 194]. Ovaj princip se na neuronskim sistemima, ali i na drugim sistemima predstavljenim modelima kuplovanih oscilatora, ostvaruje preko sinhronizacije aktivnosti između elemenata sistema [251, 194, 253, 16].

Već smo napomenuli da je postojanje emergent fenomena kolektivne dinamike ključna odlika kompleksnih sistema. Do pojave uređenog ponašanja dolazi putem **samoorganizacije** [194, 11, 119, 13], koja može da se shvati kao kontinuirana promena unutrašnje dinamike sistema, koja je omogućena interakcijom sistema s njegovim okruženjem. Sam proces samoorganizacije tipično odgovara neravnotežnom procesu u kome sistem daleko od ekvilibrijuma, prolazeći bifurkaciju izazvanu promenom nekog spoljašnjeg parametra, postaje nestabilan tako da i veoma male fluktuacije mogu da izazovu spontano narušenje simetrije, prevodeći sistem u novo stabilno stanje [170]. Pojavu uređenog stanja matematički je moguće opisati nenultom vrednošću odgovarajućeg parametra poretka. U slučaju neuronskih sistema, potrebno je da precizno definišemo odnos između pojmova emergent fenomena i samoorganizacije s jedne strane, i sinhronizacije s druge strane. U tom kontekstu, sinhronizacija kao proces usklađivanja generisanih ritmova između jedinica sistema (preciznije određenje daćemo u narednom poglavlju), predstavlja osnovni mehanizam samoorganizacije kod neuronskih sistema. S

druge strane, kolektivna stanja koja nastaju kao rezultat procesa sinhronizacije smatraćemo emergent fenomenima [251].

Ne ulazeći zasad u detalje i konkretnu ulogu sinhronizacije u mozgu, napomenimo da veliki broj sinhronizovanih stanja kao supstrat koristi tzv. modularni tip funkcionalne organizacije aktivnosti [83, 308, 269, 188], odnosno postojanje makroskopskih celina specijalizovanih za generisanje pojedinih tipova dinamike (oscilatornih ritmova). Drugim rečima, modularna organizacija podrazumeva postojanje struktura poznatih kao "mreže sastavljene od mreža" (network of networks). Najznačajnija implikacija ove činjenice je to što kolektivna stanja nikada nisu zasnovana na koordinaciji aktivnosti svih participirajućih jedinica, jer bi tada i kolektivna stanja bila svedena na prostu repliku aktivnosti pojedinačnog neurona [194]. Dinamika unutar samih modula, međutim, veoma često ima samosličnu strukturu, tj. odlikuje se odsustvom karakteristične skale i scale-free distribucijom stepena povezanosti odgovarajuće funkcionalne mreže, dobijene merenjem korelacija između aktivnosti jedinica koje čine funkcionalni modul [308]. Odsustvo karakteristične skale u kolektivnoj dinamici mnogih kompleksnih sistema, pa tako i u slučaju mozga, može da znači da se sistem nalazi u blizini kritičnog stanja [83, 313]. Koncept prema kojem se aktivnosti u mozgu u dinamičkom smislu odvijaju na ivici uređenog i neuređenog stanja može da se izrazi i preko ideje o samoorganizovanoj kritičnosti, prema kojem dinamika sistema spontano teži ka kritičnom stanju [194, 342]. Koji su razlozi za ovakvu ideju? Pošto konstantno interaguje s okolinom, mozak ne može da ostane zarobljen u nekom stabilnom stanju, jer bi tada izgubio osobinu fleksibilnosti. Takođe, stanje u kome se nalazi mozak bi trebalo da bude osetljivo na male perturbacije, tako da prema potrebi može brzo da dođe do promene stanja. S druge strane, stanje ne sme da bude ni sasvim nestabilno, zato što bi onda postojale reakcije i na marginalne stimuluse, što bi dovelo do neželjene nepredvidivosti i ponašanja koje nije optimalno. Navedeni argumenti opravdavaju ideju da se mozak kao sistem nalazi u blizini kritičnog stanja, upravo u smislu kojim se to definiše u okviru koncepta samoorganizovane kritičnosti.

S obzirom na značaj sinhronizacije za kolektivnu dinamiku neuronskih sistema, ali i svih drugih sistema koji se mogu reprezentovati modelom populacija kuplovanih nelinearnih oscilatora, celo naredno poglavlje posvetićemo matematičkom opisu fenomena sinhronizacije. Brojna su mišljenja prema kojima je sinhronizacija jedan od najznačajnijih nelinearnih fenomena. Naš cilj će biti da prikazemo glavne rezultate dva najvažnija pristupa sinhronizaciji, od kojih jedan ističe univerzalne karakteristike procesa sinhronizacije

koristeći model ansambla slabo interagujućih globalno (po sistemu svako-sa-svakim) povezanih faznih oscilatora [278, 3, 168], dok se drugi bavi pitanjem kako stabilnost globalno sinhronizovanog stanja proizvoljnih oscilujućih jedinica zavisi od topologije povezanosti sistema [21, 7, 31], koja u opštem slučaju može da ima osobine kompleksne mreže. Napomenimo da oba pravca istraživanja, udružena u okviru teorije sinhronizacije, čine jednu od najaktuelnijih tema u okviru teorije nelinearne dinamike.

15.3 Glavni elementi teorije sinhronizacije

Sistemi interagujućih oscilatora pružaju fenomenološki opis kolektivne dinamike kompleksnih sistema čija je kolektivna evolucija uslovljena procesom sinhronizacije. Primeri sistema čija je dinamička paradigma zadata na ovakav način su brojni, i obuhvataju širok spektar različitih oblasti, od fizike, hemije, biologije, tehnologije, ekologije i klimatologije do društvenih nauka [278, 13, 288, 157]. Ovakav opis pokazao se suštinskim za razumevanje nastanka i prilagođavanja koherentnih ritmova u slučaju regulacije rada srca [49], fizioloških i patoloških paterna aktivnosti u mozgu [342, 40, 207], elektrohemijske kinetike [153], kao i kolektivnog ponašanja sistema Josephsonovih spojeva [350] ili interagujućih lasera [152]. S druge strane, svi smo često svedoci društvenih pojava baziranih na sinhronizaciji [318]. Tako, kada je publika u pozorištu dovoljno brojna, za vreme aplauza po pravilu dolazi do samoorganizacije: nakon svega nekoliko oscilatornih ciklusa primetan je prelaz od šuma ka ritmičnom, skoro periodičnom oscilovanju [251]. Na kraju, jedan od najspektakularnijih primera nelinearne sinhronizacije desio se prilikom otvaranja Milenijumskog mosta u Londonu 2000. godine [31]. Zbog koračanja preko 80000 ljudi, most se isprva zaljuljao oscilujući regularno, s maksimalnom amplitudom oko 70 mm. Čim se most zaljuljao, pešaci su počeli da usklađuju svoj ritam koraka s frekvencijom oscilovanja mosta, dodatno amplifikujući efekat. Bez obzira na neprijatnost, most je izdržao test iz sinhronizacije koračanja velikog broja pešaka.

U naučnom kontekstu, fenomen sinhronizacije prvi je pomenuo Christiaan Huygens, koji je 1673. objavio zapažanja o (anti-faznoj) sinhronizaciji dva sata s klatnom [251]. U modernoj eri, sistematsku analizu sinhronizacije, kako teorijsku, tako i eksperimentalnu, započeli su Appleton (1922) i van der Pol (1927), dok su van der Polove metode dodatno poboljšali i generalizovali Andronov i Witt (1930), jasno definišući pojam autonomnog (self-sustained) oscilatora. Većina istraživanja u prvim decenijama XX veka bila su motivisana problemom prilagođavanja frekvencije generatora koji su se

koristili u radio-tehnici slabim spoljašnjim signalom malo različite sopstvene frekvencije [251, 253].

Intuitivno je razumljivo da karakteristike sinhronizacije zavise kako od tipa dinamike jedinica, tako i od prirode interakcija [251, 31]. Interakcije s jedne strane mogu da budu usmerene ili bidirekzione, a s druge strane linearne ili nelinearne. Sinhronizacija do koje dolazi u slučaju usmerenih interakcija odgovara tzv. master-slave, ili drive-response konfiguraciji, dok u slučaju bidirekcionih veza govorimo o međusobnoj sinhronizaciji [251], na koju ćemo se ograničiti u nastavku. Iako moderni koncept sinhronizacije obuhvata i sisteme haotično oscilujućih jedinica i interagujuće rotatore, razmotrimo zasad klasičnu definiciju, prema kojoj je sinhronizacija usaglašavanje ritmova između slabo interagujućih autonomnih periodičnih oscilatora [251]. Ovakva definicija se odnosi na **faznu sinhronizaciju**² oscilatora, i zahteva nekoliko bitnih napomena. Pre svega, permanentnim³ oscilacijama u matematičkom smislu odgovara stabilni granični ciklus u faznom prostoru autonomnog kontinualnog dinamičkog sistema. Stabilni granični ciklus, kao atraktor, privlači sve ostale trajektorije u faznom prostoru. Postojanje atraktora podrazumeva da se fazna zapremina koja odgovara ansamblu početnih uslova tokom vremena smanjuje. Drugim rečima, pomenuta definicija odnosi se na disipativne, a ne obuhvata konzervativne sisteme, pošto konzervativni sistemi "ne zaboravljaju" početne uslove, tj. početna fazna zapremina se ne smanjuje tokom evolucije sistema [251, 253]. S druge strane, pojam atraktora podrazumeva stabilnost orbite, koja uključuje i stabilnost amplitude oscilovanja. Ova činjenica implicira da se definicija sinhronizacije odnosi na nelinearne oscilatore, pošto bi zahtev za stabilnošću amplitude oscilovanja u slučaju linearnih oscilatora kao neposrednu posledicu imao konzervativnu dinamiku sistema [251]. Što se tiče sintagme "slabo interagujući oscilatori", iza nje u kvalitativnom smislu stoji ideja da je interakcija dovoljno slaba da se kuplovani oscilatori ne ponašaju kao jedan makroskopski entitet, već postoje kao nezavisni entiteti [251]. Naglasimo da prema usvojenoj definiciji sinhronizacije dve jedinice mogu da budu sinhronizovane i ukoliko su im amplitude oscilovanja različite. Takođe, dva oscilatora mogu da budu sinhronizovana i ako su im talasne forme različite. Na primer, kod jednog oscilatora kretanje reprezentativne tačke duž graničnog kruga može biti uniformno (fazni oscilatori koje ćemo u nastavku detaljno opisati), dok kod drugog oscilatora može da bude neuniformno (relaksacioni oscilatori).

²phase locking, frequency entrainment (eng.)

³self-sustained (eng.)

Zasad možemo da kažemo da se definicija sinhronizacije odnosi na M -dimenzione disipativne autonomne sisteme običnih diferencijalnih jednačina

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_M)^T, \quad (15.1)$$

koji imaju stabilno periodično rešenje $\mathbf{x}_0(t) = \mathbf{x}_0(t + T)$. Objasnimo sada detaljnije zašto navedena definicija sinhronizacije eksplicitno sadrži pojam slabo interagujućih jedinica. U tom cilju, primetimo da kretanje fazne tačke može da se opiše uvodeći dva tipa novih promenljivih, fazu i amplitudu, od kojih faza odgovara tangencijalnom kretanju duž graničnog kruga, dok amplituda odgovara kretanju koje je lokalno transversalno u odnosu na granični krug [251, 253]. U pogledu stabilnosti na male perturbacije, ova dva tipa promenljivih se ponašaju suštinski drugačije: faza je neutralno (marginalno) stabilna, dok su amplitude asimptotski stabilne. Naime, fazi odgovara pravac duž kojeg se fazna zapremina niti smanjuje niti povećava, ili drugim rečima, granični krug ima jedan Ljapunovljev eksponent jednak nuli, koji odgovara promenljivoj fazi. S druge strane, otpornost amplituda na male perturbacije znači da odgovarajućim pravcima odgovaraju negativni Ljapunovljevi eksponenti. Kao posledica, vreme relaksacije amplituda nakon male perturbacije, koje je inverzno proporcionalno njihovim Ljapunovljevim eksponentima, je malo, dok perturbacije faze uopšte ne relaksiraju. Neutralna stabilnost faze odražava invarijantnost autonomnih sistema na vremensku translaciju, koja podrazumeva da ukoliko je $\mathbf{x}(t)$ neko periodično rešenje sistema, onda je i $\mathbf{x}(t + \Delta t)$ takođe rešenje. Za samu sinhronizaciju, ovakvo ponašanje faze je od suštinskog značaja. Zahvaljujući neutralnoj stabilnosti, male perturbacije faze se lako akumuliraju, pa je moguće usklađivanje ritma posmatranog oscilatora sa *slabim* spoljašnjim signalom ili s drugim oscilatorom u slučaju *slabe* interakcije [251]. Takođe, sada je jasno i zašto navedena definicija sinhronizacije eksplicitno pominje slabu interakciju. Taj slučaj je od posebnog interesa pošto je tada, koristeći razlike u relaksacionom ponašanju amplituda i faze, moguće svesti dinamiku sistema samo na fazni opis. U slučaju jače interakcije, amplitude ne relaksiraju dovoljno brzo, pa se u obzir moraju uzeti i promene amplitude.

Podsetimo se da se faza ϕ standardno služi pri parametrizaciji graničnog kruga, kao i da monotono raste tokom kretanja povećavajući se za 2π tokom svake rotacije. Dodatno, zahteva se i da faza raste uniformno, tako da zadovoljava jednačinu

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_0, \quad (15.2)$$

gde je $\omega_0 = 2\pi/T$ prirodna frekvencija oscilatora. Uniformno rotirajuća faza postoji uvek, a moguće ju je dobiti od proizvoljne neuniformno rotirajuće 2π -periodične angularne promenljive θ preko transformacije $\phi = \omega_0 \int_0^\theta [\frac{d\theta}{dt}]^{-1} d\theta$. U slučaju slabe interakcije s drugim oscilatorom, perturbacije u radijalnim (trasverzalnim) pravcima biće male, tako da će trajektorija ostati u blizini stabilnog cikusa (neperturbovane orbite). To znači da je dinamici slabo kuplovanog oscilatora moguće pristupiti perturbativnom tehnikom, koja odgovara malim promene u transverzalnim pravcima, ali dozvoljava velike promene faze. Da bi primenili ovakvu tehniku, neophodno je proširiti pojam faze, tako da bude definisana ne samo na graničnom krugu, nego i u tačkama faznog prostora u okolini graničnog kruga [251, 253, 194]. Ovakva generalizacija se standardno postiže uvođenjem izohrona, određene familije Poincare-ovih preseka koja omogućava da se identifikuju tačke faznog prostora (stanja) koje su u istoj fazi. Svaka izohrona se sastoji od stanja koja se preslikavaju jedna u drugo nakon jednog oscilatornog perioda T ($\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}(t+T) \equiv \Phi(x)$), a koja konvergiraju ka odgovarajućem stanju na graničnom ciklusu gde je faza definisana jednoznačno. Drugim rečima, izohrone su transverzalne hiperpovrši karakterisane konstantnom fazom, invarijantne na dinamiku sistema ako se ona posmatra stroboskopski s periodom T . Očigledno, izohrone je moguće parametrizovati preko faze ϕ , pri čemu evolucija sistema transformiše zadate hiperpovrši iz jedne u drugu.

U nastavku ćemo iskoristiti model slabo interagujućih faznih oscilatora za detaljniju analizu fenomena sinhronizacije. Kao uvod za glavni rezultat, koji se odnosi na sinhronizaciju ansambla faznih oscilatora, prvo ćemo razmotriti paradigmatički slučaj dva interagujuća fazna oscilatora.

15.3.1 Sinhronizacija dva slabo kuplovana fazna oscilatora

Koristeći ekstenziju pojma faze na okolinu graničnog kruga, u mogućnosti smo da formulišemo fazni opis dva slabo interagujuća oscilatora primenom perturbativne tehnike [251, 194, 253]. U opštem slučaju, dinamika dva slabo kuplovana oscilatora zadata je sistemom

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}_1}{dt} &= f_1(\mathbf{x}_1) + \epsilon p_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \\ \frac{d\mathbf{x}_2}{dt} &= f_2(\mathbf{x}_2) + \epsilon p_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \end{aligned} \tag{15.3}$$

gde f_i predstavljaju respektivne autonomne dinamike separabilne od interakcionih članova p_i , dok za konstantu interakcije ϵ važi $|\epsilon| \ll 1$. U slučaju da nema interakcije, svaki od sistema ima stabilan granični ciklus, kome

odgovaraju frekvencije ω_i . Tada na pripadajućim graničnim krugovima i u njihovim okolinama mogu da se uvedu fazne promenljive ϕ_i , tako da važi

$$\begin{aligned}\frac{d\phi_1}{dt} &= \omega_1, \\ \frac{d\phi_2}{dt} &= \omega_2.\end{aligned}\tag{15.4}$$

Polazeći od relacije [251, 194]

$$\frac{d\phi_i(\mathbf{x}_i)}{dt} = \sum_k \frac{\partial \phi_i}{\partial \mathbf{x}_{i,k}} \frac{d\mathbf{x}_{i,k}}{dt},\tag{15.5}$$

gde se indeks $k = 1, \dots, M$ odnosi na k -tu koordinatu, i imajući u vidu definiciju faza neperturovanih jedinica (15.4), dalje se dobija

$$\begin{aligned}\frac{d\phi_1(\mathbf{x}_1)}{dt} &= \omega_1 + \epsilon \sum_k \frac{\partial \phi_1}{\partial \mathbf{x}_{1,k}} p_{1,k}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t), \\ \frac{d\phi_2(\mathbf{x}_2)}{dt} &= \omega_2 + \epsilon \sum_k \frac{\partial \phi_2}{\partial \mathbf{x}_{2,k}} p_{2,k}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1, t)\end{aligned}\tag{15.6}$$

Pošto je, po pretpostavci o slaboj interakciji, drugi član na desnoj strani (15.6) mali, tada bi i odstupanja \mathbf{x}_i od neperturovanog graničnog kruga $\mathbf{x}_{0,i}$ trebalo da su mala. Stoga u prvoj aproksimaciji desnu stranu jednačine (15.6) možemo da izračunamo na graničnom krugu

$$\begin{aligned}\frac{d\phi_1(\mathbf{x}_1)}{dt} &= \omega_1 + \epsilon \sum_k \frac{\partial \phi_1(\mathbf{x}_{0,1})}{\partial \mathbf{x}_{1,k}} p_{1,k}(\mathbf{x}_{0,1}, \mathbf{x}_{0,2}, t), \\ \frac{d\phi_2(\mathbf{x}_2)}{dt} &= \omega_2 + \epsilon \sum_k \frac{\partial \phi_2(\mathbf{x}_{0,2})}{\partial \mathbf{x}_{2,k}} p_{2,k}(\mathbf{x}_{0,2}, \mathbf{x}_{0,1}, t).\end{aligned}\tag{15.7}$$

Potrebno je naglasiti da vektori $Z_i(\phi_i) = \frac{\partial \phi_i(\mathbf{x}_{0,i})}{\partial \mathbf{x}_{i,k}}$ predstavljaju tzv. infinitezimalne funkcije faznog odgovora (infinitesimal phase-response curves) [289], koje su od velikog praktičnog značaja za predviđanje odgovora na spoljašnje perturbacije, kao i sinhronizabilnosti arbitrarne oscilatorne jedinice. Kako je veza između tačaka na graničnim krugovima i odgovarajućih faza zadata na jednoznačan način, za dinamiku faza dva slabo kuplovana oscilatora se konačno dobija sistem

$$\begin{aligned}\frac{d\phi_1}{dt} &= \omega_1 + \epsilon Q_1(\phi_1, \phi_2), \\ \frac{d\phi_2}{dt} &= \omega_2 + \epsilon Q_2(\phi_2, \phi_1).\end{aligned}\tag{15.8}$$

Pri tom, uvedene funkcije

$$Q_1 = \sum_k \frac{\partial \phi_1(\mathbf{x}_{0,1})}{\partial \mathbf{x}_{1,k}} p_{1,k}(\mathbf{x}_{0,1}, \mathbf{x}_{0,2}, t) \quad \text{i}$$

$$Q_2 = \sum_k \frac{\partial \phi_2(\mathbf{x}_{0,2})}{\partial \mathbf{x}_{2,k}} p_{2,k}(\mathbf{x}_{0,2}, \mathbf{x}_{0,1}, t)$$

su 2π -periodične po obe fazne promenljive:

$$Q_i(\phi_i + 2\pi n_i, \phi_j + 2\pi n_j) = Q_i(\phi_i, \phi_j),$$

pri čemu $i, j \in 1, 2, i \neq j$. Činjenica da je dobijen zatvoren sistem jednačina za fazne promenljive znači da u faznom prostoru promenljivih $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ postoji dvodimenzionalna invarijantna površ parametrizovana preko faza ϕ_1 i ϕ_2 . Dodatno, znamo da je ova površ torus, pošto pomeraj za 2π po svakoj od faza vodi u istu tačku faznog prostora [251]. Za karakterizaciju dinamike na torusu potrebno je iskoristiti malu vrednost konstante interakcije i izvršiti usrednjavanje sistema (15.8). Ne ulazeći u detalje postupka, pomenućemo samo konačni rezultat, prema kojem se, uz pretpostavku da je kuplovanje između oscilatora simetrično (identični oblik funkcije kuplovanja na oba oscilatora), dobija da je sama funkcija kuplovanja antisimetrična funkcija razlike faza $\phi_1 - \phi_2$ [251]. Najjednostavniji i najprirodniji izbor antisimetrične 2π -periodične funkcije je sinusna funkcija, pa se dobija da je dinamika sistema dva slabo kuplovana oscilatora u faznoj aproksimaciji data sa

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_1}{dt} &= \omega_1 + \frac{\epsilon}{2} \sin(\phi_2 - \phi_1), \\ \frac{d\phi_2}{dt} &= \omega_2 + \frac{\epsilon}{2} \sin(\phi_1 - \phi_2). \end{aligned} \quad (15.9)$$

Potrebno je da damo kratak komentar povodom znaka konstante interakcije ϵ . Ako je $\epsilon > 0$, može da se kaže da je interakcija između oscilatora privlačna (atraktivna), u smislu da je znak sile koja deluje na oscilator 1 suprotan od njegovog faznog pomaka u odnosu na oscilator 2 i vice versa [194]. Analogno, slučaj $\epsilon < 0$ odgovara odbojnoj (repulzivnoj) interakciji. Pogodno je da sistem (15.9) prepisemo uvodeći nove promenljive $\rho(t) = \phi_1(t) + \phi_2(t)$ i $\Psi(t) = \phi_1(t) - \phi_2(t)$

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \omega_1 + \omega_2, \\ \frac{d\Psi}{dt} &= \Delta\omega - \epsilon \sin \Psi, \end{aligned} \quad (15.10)$$

gde je $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ razlika prirodnih frekvencija oscilatora. Iz prve od jednačina sistema (15.10) proizlazi da je kretanje zbira dve faze uniformno, tj. $\rho(t) = \rho(0) + (\omega_1 + \omega_2)t$. S druge strane, što se tiče dinamike razlike faza Ψ , odvojeno ćemo razmatrati slučajeve kada su prirodne frekvencije oscilatora identične ($\Delta\omega = 0$) i kada su prirodne frekvencije oscilatora različite.

U slučaju identičnih frekvencija, sistem ima dve fiksne tačke, $\Psi = 0$ i $\Psi = \pi$, čija stabilnost zavisi od karaktera interakcije, određenog znakom konstante kuplovanja ϵ . Ako je sila privlačna ($\epsilon > 0$), stabilna je fiksna tačka $\Psi = 0$, dok je tačka $\Psi = \pi$ nestabilna [194]. Drugim rečima, kada je interakcija privlačna, asimptotska dinamika dva oscilatora odgovara stanju **fazne sinhronizacije**, u kome dve jedinice imaju potpuno usklađene faze (in-phase synchronization). Dakle, tada važi $\phi_1(t) = \phi_2(t) = \Omega t$, gde je $\Omega = \omega_1 = \omega_2$. S druge strane, ako je interakcija repulzivna ($\epsilon < 0$), stabilna je fiksna tačka $\Psi = \pi$, dok je tačka $\Psi = 0$ nestabilna [194]. To znači da repulzivna interakcija dovodi do novog asimptotskog režima, u kome jedinice osciluju s konstantnim faznim pomakom π : $\phi_1(t) = \Omega t, \phi_2(t) = \Omega t + \pi$, gde je $\Omega = \omega_1 = \omega_2$. Ovakvo stanje sistema naziva se **antifazna sinhronizacija**.

Razmotrimo sada slučaj kada se prirodne frekvencije oscilatora razlikuju ($\omega_1 \neq \omega_2$). Ako je $\Delta\omega < \epsilon$, sistem (15.10) i dalje ima dve fiksne tačke koje su zadate relacijom $\sin\Psi = \Delta\omega/\epsilon$. Kao i za identične prirodne frekvencije, ponovo je jedna od fiksnih tačaka stabilna, a druga nestabilna. Ovog puta, međutim asimptotska dinamika sistema opisana stabilnom fiksnom tačkom odgovara stanju u kome se održava konstantna fazna razlika između oscilatora data sa $\arcsin(\Delta\omega/\epsilon)$. Pri tom, oba oscilatora se kreću uniformno s konstantnom frekvencijom Ω , koja je određena srednjom vrednošću dve prirodne frekvencije: $\Omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$. Asimptotska dinamika pri kojoj se održava konstantna fazna razlika između dve oscilujuće jedinice se obično naziva **phase-locking**. S druge strane, ukoliko je razlika prirodnih frekvencija isuviše velika ($\Delta\omega > \epsilon$), sistem (15.10) nema stabilnu fiksnu tačku, tako da oscilovanje dve jedinice ostaje nekoherentno [194].

Sumirajući navedene rezultate, možemo da kažemo da će u slučaju privlačne interakcije ($\epsilon > 0$), dva oscilatora doći u stanje potpune fazne sinhronizacije $\phi_1(t) = \phi_2(t)$ ukoliko su im prirodne frekvencije identične, ili u stanje s konstantnom faznom razlikom⁴, ukoliko je razlika između njihovih prirodnih frekvencija dovoljno mala. Prikazano u (ω_1, ϵ) ravni, oblast parametara u kojoj se održava konstantna razlika faza (nula ili različita od nule) ima oblik trougla sa temenom u $\omega_1 = \omega_2$ i poznata je kao Arnold-ov jezik⁵

⁴phase-locking (eng.)

⁵Arnold's tongue (eng.)

[194].

Na ovom mestu je potrebno da damo kratak komentar povodom upotrebe termina koji odgovaraju dosad pomenutim stanjima sinhronizacije. U literaturi se ponekad razdvajaju termini frekventne i fazne sinhronizacije. To konkretno znači da se kao fazna (antifazna) sinhronizacija označavaju stanja $\Psi = 0$ ($\Psi = \pi$), dok se svi ostali slučajevi konstantne fazne razlike nazivaju frekventnom sinhronizacijom. Mi smo, međutim, skloniji terminologiji gde su svi pomenuti slučajevi tretirani kao usklađivanje frekvencija⁶ ili ekvivalentno phase-locking. U tom kontekstu, napomenimo i da smo dosad posmatrali samo scenario u kome dolazi do izjednačavanja frekvencije dva kuplovana oscilatora ukoliko su im prirodne frekvencije različite. U opštem slučaju pak važi i da dva frekvencije dva interagujuća oscilatora, Ω_1 i Ω_2 , mogu da se asimptotski nađu u odnosu $n\Omega_1 = m\Omega_2$, ukoliko su prirodne frekvencije (frekvencije izolovanih oscilatora) zadovoljavale $n\omega_1 \approx m\omega_2$. Kao posledica usklađivanja frekvencija dolazi i do usklađivanja faza, tako da opšti uslov za phase-locking može da se napiše kao [251, 253]

$$|n\phi_1 - m\phi_2| < const. \quad (15.11)$$

Primitimo da uslov zadat relacijom (15.11) ne pokriva samo slučajeve u kome se održava konstantni fazni pomak, nego dodatno dozvoljava i (male) fluktuacije fazne razlike. To je učinjeno namerno, kako bi pojam sinhronizacije mogao da se generalizuje na druge tipove sistema (periodični oscilatori perturbovani šumom, haotični oscilatori) [251].

15.3.2 Sinhronizacija na populaciji globalno kuplovanih faznih oscilatora

U ovom poglavlju ćemo ispitati kako rezultati dobijeni u paradigmatom slučaju dva slabo interagujuća fazna oscilatora mogu da se generalizuju i na složenije sisteme. Cilj je da se pokaže da proces sinhronizacije na sistemu oscilatora heterogenih prirodnih frekvencija, koji odgovara nastanku **kolektivne mode** oscilovanja [251, 327, 207, 157], ima karakteristike faznog prelaza drugog reda [168, 3]. Ovaj rezultat je krucijelan za razmatranje univerzalnosti fenomena sinhronizacije. U čemu se sastoji fenomenologija nastanka kolektivne mode? Intuitivno je jasno iz izlaganja u prethodnom poglavlju da će dinamika sistema ostati nekoherentna ukoliko je diverzitet prirodnih frekvencija preveliki u odnosu na jačinu interakcije između jedinica. S druge strane, ukoliko je interakcija dovoljno jaka, sve jedinice se

⁶frequency entrainment (eng.)

sinhronizuju. Pri tom, prelaz između dva tipa kolektivnih stanja ("faza" u teoriji faznih prelaza), nekoherentnog i koherentnog, se dešava kada konstanta interakcije pređe određeni prag (**kritična vrednost** konstante interakcije), koji zavisi od parametara distribucije prirodnih frekvencija oscilatora [168, 3, 194, 251]. U samoj kritičnu vrednost, određena grupa oscilatora je u stanju phase-locking-a, što odgovara pojavi sinhronizovanog klastera. U superkritičnom režimu, populacija se deli na klaster sinhronizovanih jedinica i na grupu jedinica čije su prirodne frekvencije suviše udaljene da bi mogle da se priključe sinhronizovanom klasteru [7]. S dodatnim povećanjem jačine interakcije, sve više jedinica se usklađuje sa srednjom fazom kolektivnih oscilacija, dok sistem konačno ne pređe u potpuno sinhronizovano stanje.

Iako je izloženi scenario intuitivno razumljiv, problem izbora odgovarajućeg modela koji bi omogućio fizičku analizu fenomena se pokazao kao netrivialan. Pravo rešenje ponudio je Kuramoto (1984.) [citeK84], koji je zadao model koji je matematički dovoljno jednostavan, ali s druge strane, u fizičkom smislu dovoljno kompleksan da obuhvati glavne karakteristike procesa sinhronizacije. Glavni doprinos Kuramota je u tome što je ukazao da se ispravan pristup problemu sastoji u primeni **metode srednjeg polja (mean-field method)** [278, 157, 13]. Naime, Kuramoto je razmatrao populaciju N globalno i identično kuplovanih faznih oscilatora, što implicira da se član koji opisuje uticaj svih ostalih jedinica na zadati oscilator može posmatrati kao rezultat kolektivne aktivnosti populacije (srednje polje). Kuramotov model zadan je sistemom jednačina

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i + \frac{\epsilon}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\phi_j - \phi_i) \quad (i = 1, \dots, N), \quad (15.12)$$

gde je jačina veze normirana sa $1/N$ da bi sistem imao korektno ponašanje u termodinamičkom limesu $N \rightarrow \infty$. Prirodne frekvencije ω_i distribuirane su prema nekoj funkciji $g(\omega)$, za koju se obično pretpostavlja da je unimodalna i simetrična oko srednje frekvencije Ω [7, 3]. Zbog rotacione simetrije modela moguće je preći i na opis u sistemu koji rotira frekvencijom Ω , tako da se nakon transformacije $\phi_i \rightarrow \phi_i - \Omega t$ dobija sistem ekvivalentan (15.12) u kome je prvi moment distribucije prirodnih frekvencija nula. Naravno, uvodeći netrivialnu matricu povezanosti $\hat{\epsilon}_{ij}$, model je lako prilagoditi da uključi i kompleksnije topologije povezanosti između jedinica sistema [3].

Za opis kolektivne (makroskopske) dinamike sistema (15.12), koja se zasniva na međusobnoj sinhronizaciji jedinica, pogodno je uvesti kompleksno

srednje polje (parametar poretka) [7, 251]

$$Z(t) = X(t) + iY(t) = K(t)e^{i\Theta(t)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\phi_j}, \quad (15.13)$$

gde su K i Θ amplituda i faza srednjeg polja, respektivno, pri čemu važi $K \cos \Theta = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \cos \phi_j$ i $K \sin \Theta = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sin \phi_j$. Jasno je da amplituda $0 \leq K(t) \leq 1$ predstavlja meru fazne sinhronizacije u populaciji, dok je $\Theta(t)$ odgovarajuća srednja faza. Vrednosti $K \simeq 1$ i $K \simeq 0$ (znak \simeq pokazuje da su dozvoljene fluktuacije reda $\mathcal{O}(N^{-1/2})$) predstavljaju slučajeve kada su oscilatori fazno sinhronizovani (phase-locked) i potpuno nekoherentni, respektivno. Nakon množenja sa $e^{-i\phi_i}$ i izjednačavanja imaginarnih delova s leve i desne strane, iz jednačine (15.13) se dobija $K \sin(\Theta - \phi_i) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\phi_j - \phi_i)$, odakle proizlazi

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i + \epsilon K \sin(\Theta - \phi_i) \quad (i = 1, \dots, N). \quad (15.14)$$

Sistem (15.14) u stvari pokazuje da arbitrarna jedinica interaguje sa svim ostalim samo preko mean-field promenljivih K i Θ . Pri tom, amplituda srednjeg polja obezbeđuje pozitivnu povratnu spregu [7]: kako K raste s porastom koherencije u populaciji, tako jača i interakcija između oscilatora, pa se veći broj jedinica pridružuje sinhronizovanom klasteru. Sistem (15.14) dodatno omogućava izračunavanje kritične vrednosti jačine veze ϵ_c na kojoj se dešava fazni prelaz. Naime, stavljajući $\Theta = 0$ u (15.14), moguće je pokazati da se u superkritičnom režimu ($\epsilon > \epsilon_c$) dobijaju dva tipa asimptotskog ponašanja [7, 251]. Konkretno, postoji jedna grupa oscilatora za koje u rotirajućem sistemu reference važi $|\omega_i| \leq \epsilon K$, i koji su u izvornom sistemu reference usklađeni na frekvenciji Ω . S druge strane, postoji i druga grupa koju čine jedinice s prirodnim frekvencijama $|\omega_i| > \epsilon K$. Njihova dinamika se sastoji u driftovanju oko graničnog kruga prve grupe, nekad oscilujući s većom, a nekad s manjom frekvencijom od Ω . Postavljajući dodatne zahteve za stacionarnu distribuciju driftujućih jedinica, moguće je dobiti jednačinu koja daje samousaglašeni uslov za mean-field amplitudu K [251, 3, 7]

$$K = \epsilon K \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \phi g(\omega) d\phi, \quad (15.15)$$

gde je $\omega = \epsilon K \sin \phi$. Jednačina (15.15) ima netrivialno rešenje [7]

$$\epsilon_c = \frac{2}{\pi g(0)}, \quad (15.16)$$

iznad kojeg je $K > 0$. Jednačina (15.16) je Kuramotov mean-field izraz za kritičnu jačinu veze pri faznom prelazu sinhronizacije. Takođe, moguće je pokazati da parametar poretka K u blizini kritične vrednosti zadovoljava relaciju skaliranja [251, 7]

$$K \sim (\epsilon - \epsilon_c)^\beta, \quad (15.17)$$

gde je kritični eksponent $\beta = 1/2$. Na ovaj način je eksplicitno pokazano da proces sinhronizacije u populaciji globalno kuplovanih faznih oscilatora ima osobine neravnotežnog faznog prelaza.

15.3.3 Pogled na sinhronizaciju haotičnih oscilatora

Interesantno je pitanje da li teorija sinhronizacije može da se proširi i na sisteme interagujućih haotičnih autonomnih oscilatora. Prvi problem s kojim se suočavamo je da li je uopšte moguće definisati promenljivu faze za haotične sisteme. Kod periodičnih oscilatore, faza je uvedena kao promenljiva koja parametrizuje kretanje duž graničnog kruga i raste proporcionalno s vremenom. Na ovaj način, faza uniformno rotira i odgovara neutralno stabilnom pravcu u faznom prostoru, tj. pravcu u kome je Ljapunovljev eksponent jednak nula. Poznato je da bilo koji autonomni kontinualni sistem čije je ponašanje haotično sigurno ima u spektru jedan Ljapunovljev eksponent jednak nuli, koji odgovara pomeranjima duž toka [251, 253]. Stoga izgleda verovatno da u nekoj formi faza može da se uvede i kod haotičnih sistema.

Konkretno, u slučaju da definišemo Poenkareov presek za posmatrani haotični atraktor, fazu možemo da uvedemo kao promenljivu koja će biti linearna funkcija vremena između dva sukcesivna preseka t_n , dodajući inkrement od 2π za svaku zabeleženu tačku preseka [251, 290]

$$\phi(t) = 2\pi \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} + 2\pi n, \quad t_n \leq t \leq t_{n+1}. \quad (15.18)$$

Naravno, ova definicija nije jednoznačna jer ni sam Poenkareov presek nije jednoznačno definisan. S druge strane, uvedena faza ima osobinu da njene perturbacije niti rastu, niti opadaju s vremenom, tako da zaista odgovara pravcu s nultim Ljapunovljevim eksponentom u faznom prostoru. Za razliku od periodičnih oscilatora, porast faze kod haotičnih sistema nije uniforman [290]. Zaista, Poincare-ova vremena povratka ("efektivni period oscilovanja") najčešće zavise od samih koordinata preseka s Poincare-ovom površi, tj. od iregularne amplitude oscilovanja. Ovakva zavisnost "efektivnog perioda" od amplitude može da se interpretira kao delovanje šuma,

iako sama iregularnost ima čisto determinističko poreklo. Stoga, sinhronizacija haotičnih oscilatora može da se posmatra u analogiji sa sinhronizacijom periodičnih oscilatora pod delovanjem šuma [290].

Pored problema uvođenja faze, postavlja se i pitanje uvođenja izofaza, kao analogona izohrona definisanih za periodične oscilatore. Na prvi pogled, zbog haotične fazne difuzije, moglo bi da se dogodi i da stanja za koja smatramo da su u istoj fazi divergiraju. Stoga izofaze nisu kontinualne hiperpovršni, već imaju osobine fraktalnih skupova tačaka. Nedavno je pokazano da je jednostavnu definiciju fazne promenljive (15.18) moguće poboljšati tako da ona rotira što je uniformnije moguće, dajući optimalne faze, i kao posledicu, optimalne izofaze kao skupove stanja s jednakom optimalnom fazom [290]. Efektivno, cilj ovakve metode je konstruisanje optimalnih izofaza kao glatkih Poincare-ovih preseka s minimalnom varijacijom vremena povratka.

Ostavljajući po strani teorijska pitanja, napomenimo da je u poslednjih dvadesetak godina dokumentovana izuzetno bogata fenomenologija povezana sa sinhronizacijom haotičnih sistema. Kao i kod periodičnih oscilatora, značajno se razlikuju slučajevi kada su interakcije usmerene ili neusmerene (bidirekzione) [30, 31]. Plauzibilnom definicijom pojma sinhronizacije između haotičnih jedinica smatra se stav da je sinhronizacija proces u kome interagujući (ekvivalentni ili neekvivalentni) haotični sistemi usklađuju neke od osobina kretanja usled kuplovanja ili spoljašnjeg vođenja [31]. U kvalitativnom smislu, ovim je pokriven širok spektar ponašanja, od kompletnog poklapanja trajektorija do usaglašavanja faza. Značajni primeri međusobne sinhronizacije haotičnih jedinica dolaze iz fiziologije, a uključuju srčane, respiratorne i neuronske sisteme. Iz korpusa uočenih stanja sinhronizacije izdvojićemo kompletnu (egzaktnu, identičnu) sinhronizaciju, faznu sinhronizaciju, sinhronizaciju s kašnjenjem (lag-synchronization), generalizovanu sinhronizaciju (generalized synchronization), intermitentnu sinhronizaciju s kašnjenjem (intermittent lag synchronization) i nesavršenu faznu sinhronizaciju (imperfect phase synchronization). Ukratko ćemo pomenuti na kakve se fenomene odnose navedeni pojmovi [30].

Kompletna sinhronizacija, kod koje se dva haotična signala identično poklapaju, moguća je u slučaju usmerene interakcije (drive-response konfiguracija sistema). Što se tiče međusobne sinhronizacije, dva slabo kuplovana sistema mogu da se nađu u stanju generalizovane sinhronizacije, kada je output jednog sistema funkcionalno povezan s output-om drugog interagujućeg sistema. Faznoj sinhronizaciji dva različita haotična oscilatora odgovara scenario u kome su usklađene faze, ali korelacija između odgovarajućih am-

plituda ostaje slaba. Sinhronizacija s kašnjenjem podrazumeva da su u asimptotskom smislu ograničene razlike između svih promenljivih sistema, ali tako da je output jednog od posmatranih sistema vremenski pomeren u odnosu na output drugog sistema. To znači da dolazi do usklađivanja i faza i amplituda, ali s vremenskim pomerajem. Intermitentna fazna sinhronizacija uključuje smenu perioda fazne sinhronizacije i perioda karakterisanih neusklađenošću faza⁷.

15.3.4 Stabilnost kompletno sinhronizovanog stanja na kompleksnim mrežama

Pristup kojim smo se dosad bavili bio je fokusiran na pružanje kvalitativno ispravnog opisa procesa sinhronizacije, zbog čega je uključivao minimalne modele oscilujućih jedinica i interakcija. U ovom poglavlju krenućemo korak dalje od aproksimacije zasnovane na sistemima kuplovanih faznih oscilatora. Cilj nam je da predstavimo drugu važnu granu istraživanja u teoriji sinhronizacije, koja se bavi ispitivanjem stabilnosti kompletno sinhronizovanog stanja identičnih oscilatora. Formalizam ove grane istraživanja zasnovan je na tzv. master-stability funkciji, koju su uveli Carroll i Pecora [243]. Iako je metod izvorno primenjen na sisteme oscilatora na regularnim rešetkama, vremenom se kao glavna tema, naročito zahvaljujući radu Barahone i Pecore [21], nametnulo utvrđivanje veze između sinhronizabilnosti sistema i topologije **kompleksne mreže** kojom je zadata shema interakcija između jedinica. Sama veza uspostavlja se analizom zavisnosti transverzalne stabilnosti kompletno sinhronizovanog stanja od spektralnih osobina kompleksne mreže. Napomenimo da je formalizam master-stability funkcije zasnovan na ispitivanju linearne stabilnosti sinhronizovanog stanja, koja obezbeđuje potreban, ali ne i dovoljan uslov za sinhronizaciju [7].

Za početak, posmatrajmo sistem od N arbitrarno povezanih *identičnih* oscilatora, čije je stanje predstavljeno vektorom \mathbf{x} u m -dimenzionom faznom prostoru. Lokalna (izolovana) dinamika svake jedinice i je zadata sistemom običnih diferencijalnih jednačina oblika $\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{F}(\mathbf{x}_i)$. Iako se u našem slučaju bavimo kontinualnim sistemima, sam formalizam primenjiv je i na diskretne sisteme, kao što su kuplovane mape [7]. Što se tiče interakcija, pretpostavićemo da su u opštoj formi zadate preko m -dimenzione vektorske output funkcije $\mathbf{H}(\mathbf{x})$, koja je istog oblika za sve jedinice. Drugim rečima, funkcija \mathbf{H} opisuje signal generisan na jedinici i u stanju \mathbf{x} , koji se prenosi na druge jedinice u mreži. Dinamika sistema od N interagujućih jedinica je

⁷phase slips (eng.)

tada data sa

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_i &= \mathbf{F}(\mathbf{x}_i) + \sigma \sum_{i=1}^N a_{ij} w_{ij} [\mathbf{H}(\mathbf{x}_j) - \mathbf{H}(\mathbf{x}_i)] \\ &= \mathbf{F}(\mathbf{x}_i) - \sigma \sum_{j=1}^N G_{ij} \mathbf{H}(\mathbf{x}_j),\end{aligned}\tag{15.19}$$

gde su sa a_{ij} označeni elementi odgovarajuće matrice susedstva⁸, σ predstavlja konstantu kuplovanja, dok članovi $w_{ij} > 0$ zadaju težine veza, uvedene da pokriju opšti slučaj oteženjenih, a ne samo binarnih mreža. Primećimo da je u poslednjem koraku uvedena matrica povezanosti \hat{G} , za čije elemente je pretpostavljeno da zadovoljavaju često korišćen uslov nulte sume po vrstama. To konkretno znači da je za dijagonalne elemente ispunjeno $G_{ii} = -\sum_{j \neq i} G_{ij}$, pri čemu je $G_{ij} = -a_{ij} w_{ij}$ za $i \neq j$. Iz ovog uslova proizilazi da je matrica G dijagonalizabilna, tj. da postoje sopstvene vrednosti λ_i i svojstveni vektori \mathbf{v}_i , tako da je $G\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$, pri čemu vektori \mathbf{v}_i čine ortonormiran bazis u \mathbb{R}^N (posledica simetričnosti matrice \hat{G}). Dodatno, spektar svojstvenih vrednosti je semi-pozitivan ($\lambda_i \geq 0$). Očigledno, u slučaju kada su težine veza uniformne, matrica \hat{G} predstavlja Laplasijan zadate mreže. S obzirom na to da interakcioni član u potpunosti nestaje kada za svako i važi $\mathbf{x}_i(t) = \mathbf{s}(t)$, jasno je da dinamika sistema (15.19) dozvoljava potpuno sinhronizovano stanje čija je evolucija opisana sa $\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{F}(\mathbf{s})$. Uobičajeno je da se invarijantni potprostor ukupnog prostora stanja sistema zadatog preko (15.19) u kome svi oscilatori imaju sinhronizovanu evoluciju (ekvivalentnu dinamici izolovanog oscilatora) naziva *mногоstrukost sinhronizacije* [7, 31].

Činjenica da je mnogostrukost sinhronizacije invarijantni potprostor podrazumeva da evolucija svakog početnog stanja izabranog na toj mnogostrukosti i ostaje na toj mnogostrukosti u asimptotskom limesu. Za nas je, međutim, važno pitanje transversalne stabilnosti na male perturbacije $\delta \mathbf{x}_i$. Evolucija $\delta \mathbf{x}_i$ određuje se na standardan način, vršeći linearizaciju sistema (15.19) oko sinhronizovanog rešenja $\mathbf{s}(t)$. Konkretno, stavljanjem izraza $\mathbf{x}_i(t) = \mathbf{s}(t) + \delta \mathbf{x}_i(t)$ u (15.19) i razvojem do prvog člana Taylor-ovog razvoja funkcija \mathbf{F} i \mathbf{H} , $\mathbf{F}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{F}(\mathbf{s}) + D\mathbf{F}(\mathbf{s})\delta \mathbf{x}_i$ i $\mathbf{H}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{H}(\mathbf{s}) + D\mathbf{H}(\mathbf{s})\delta \mathbf{x}_i$, za dinamiku malih perturbacija se dobija [7]

$$\delta \dot{\mathbf{x}}_i = D\mathbf{F}(\mathbf{s})\delta \mathbf{x}_i - \sigma D\mathbf{H}(\mathbf{s}) \sum_{j=1}^N G_{ij} \delta \mathbf{x}_j.\tag{15.20}$$

⁸adjacency matrix (eng.)

Naravno, $D\mathbf{F}(\mathbf{s})$ i $D\mathbf{H}(\mathbf{s})$ su matrice Jakobijana funkcija \mathbf{F} i \mathbf{H} na \mathbf{s} , respektivno. Glavna ideja metode je da se analiza linearne stabilnosti na mnogostrukosti sinhronizacije obavi razdvajanjem topoloških i dinamičkih karakteristika sistema. U tom cilju, primetimo da uvodeći $m \times N$ -dimenzione vektore $\mathbf{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)^T$ i $\delta\mathbf{X} = (\delta\mathbf{x}_1, \dots, \delta\mathbf{x}_N)^T$, sistem (15.20) može da se prepíše kao [31]

$$\delta\dot{\mathbf{X}} = (\mathbb{I}_N \otimes D\mathbf{F}(\mathbf{s}) - \sigma G \otimes D\mathbf{H}(\mathbf{s}))\delta\mathbf{X}, \quad (15.21)$$

pri čemu \otimes označava direktan proizvod matrica, a \mathbb{I}_N jediničnu matricu reda N . Sledeći korak je da projektujemo $\delta\mathbf{X}$ u svojstvene potprostore određene svojstvenim vektorima \mathbf{v}_i matrice povezanosti \hat{G} . Drugim rečima, iskoristićemo činjenicu da $\delta\mathbf{X}$ može da se napiše kao $\delta\mathbf{X} = \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \otimes \zeta_i(t)$, gde je $\zeta_i(t) = (\zeta_{1,i}, \dots, \zeta_{m,i})$. Dalje, množeći obe strane (15.21) skalarno s leva sa \mathbf{v}_j^T i koristeći ortonormiranost bazisa matrice \hat{G} , $\mathbf{v}_j^T \mathbf{v}_i = \delta_{ij}$, matična jednačina (15.21) može da se prevede u N -blok dijagonalnu formu. Time je sistem (15.21), koji je opisivao evoluciju malih perturbacija, transformisan u sistem koji opisuje evoluciju N dekuplovanih svojstvenih moda

$$\dot{\zeta}_j = (D\mathbf{F}(\mathbf{s}) - \sigma\lambda_j D\mathbf{H}(\mathbf{s}))\zeta_j, \quad (j = 1, \dots, N) \quad (15.22)$$

koje odgovaraju svojstvenim vrednostima λ_j matrice povezanosti \hat{G} . Važno je primetiti da svaki od N blokova u stvari zadaje m Ljapunovljevih eksponenata duž svojstvenih moda pridruženih λ_j .

Kao posledica načina na koji je uvedena matrica G (zbir elemenata u svakoj vrsti je nula), minimalna svojstvena vrednost je $\lambda_1 = 0$, kojoj odgovara svojstveni vektor $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{N}}(1, \dots, 1)^T$. Stoga prva svojstvena moda $\dot{\zeta}_1 = D\mathbf{F}(\mathbf{s})\zeta_1$ predstavlja perturbaciju duž mnogostrukosti sinhronizacije. Kako je m Ljapunovljevih eksponenata koji odgovaraju ovoj modi u stvari jednako Ljapunovljevim eksponentima jednog izolovanog oscilatora, jasno je da kretanje duž mnogostrukosti sinhronizacije može da bude i haotično [31]. Pomenimo još i da osobine matrice G garantuju da je samo jedna njena svojstvena vrednost nula. Preostalih $N - 1$ moda su transversalne, pa bi one trebalo da budu prigušene da bi mnogostrukost sinhronizacije bila stabilna.

Važno je primetiti da sve jednačine sistema (15.22) imaju istu opštu formu

$$\dot{\zeta} = (D\mathbf{F}(\mathbf{s}) - \alpha D\mathbf{H}(\mathbf{s}))\zeta, \quad (15.23)$$

i da se razlikuju samo po vrednosti parametra $\alpha_j = \sigma\lambda_j$. To znači da ukoliko znamo stabilnost rešenja $\zeta = 0$ za bilo koju plauzibilnu vrednost α , moći

ćemo da odredimo i stabilnost proizvoljne svojstvene mode koja odgovara nekom α_j . Da bi utvrdili stabilnost rešenja varijacione jednačine (15.23), potrebno je da izračunamo njen maksimalni Ljapunovljev eksponent λ_{max} u funkciji α . Ova funkcija upravo predstavlja master-stability funkciju [7]. Evolucija malog ζ je onda opisana u srednjem kao $|\zeta(t)| \sim \exp(\lambda_{max}(\alpha)t)$, što znači da je moda stabilna ($\lim_{t \rightarrow \infty} |\zeta(t)| \rightarrow 0$) ako je $\lambda_{max}(\alpha) < 0$.

15.4 Uloga i značaj sinhronizacije na neuronskim sistemima

Pošto smo prikazali najvažnije analitičke metode iz teorije sinhronizacije, sledeći cilj je da ukratko predstavimo fenomenologiju i ukažemo na značaj sinhronizacije na neuronskim sistemima. Interesantno je da prvo odgovorimo na pitanje zašto baš sinhronizacija, a ne neki drugi proces, igra toliko bitnu ulogu. Pre svega, biološki "hardware" na kome su zasnovana aktivnost u nervnom sistemu je relativno spor: prosečan interval između dva emitovanja impulsa po ćeliji iznosi oko 50 [ms], dok ni vreme potrebno da signal propagira od jedne do druge ćelije nije značajno kraće [194]. S obzirom da računari čija je frekvencija oko 10^9 puta veća i dalje ne mogu sasvim da reprodukuju kolektivno ponašanje velikih populacija, može da se zaključiti da mozak radi po principa fundamentalno drugačijim od onih na kojima je zasnovana digitalna obrada informacija. Jednostavne procene pokazuju da mora da postoji sinhronizovana neuronska aktivnost da bi najvažnije funkcije u mozgu mogle nesmetano da se izvrše. Na primer, poznato je da ljudi prepoznaju i klasifikuju složene vizuelne scene u okviru 400 – 500 ms. To je dobijeno u eksperimentima koji mere brzinu odgovora pritiskom na dugme, pri čemu je za samo pomeranje prsta potrebno oko 200 – 300 ms. To ostavlja manje od 200 ms da se donese ispravna odluka i pravilno klasifikuje zadata scena, što implicira da informacije nikako nisu sadržane samo u frekvenciji opaljivanja neurona, već i u fazi (trenutcima opaljivanja) pojedinih neurona [194]. Dakle, fazni odnosi između spike-ova su od suštinske važnosti, pri čemu je neophodno je da postoji korelisanost aktivnosti između jedinica.

Oscilatorni ritmovi su uočeni u različitim oblastima mozga [40, 119, 313, 342], uključujući i strukture korteksa, neokorteksa, hipokampusu i talamusa. Na nivou dinamike pojedinačnih neurona i tipova interakcija, sve je više eksperimentalnih dokaza da pomenute ritmovi nastaju zahvaljujući fast-spiking interneuronima, povezanim kako električnim, tako i inhibitorynim hemijskim sinapsama [289, 313]. Pretpostavlja se da upravo takve neuronske

populacije obezbeđuju mehanizam sinhronizacije preko kojih su generisani γ (25 – 100 Hz) ili mešoviti γ i θ ritam (4 – 12 Hz). U nekoliko slučajeva je pokazano je da interneuroni povezani samo inhibitornim hemijskim sinapsama mogu da proizvedu γ oscilacije, ali da su oscilacije stabilnije i koherentnije u prisustvu električnih sinapsi [194]. S druge strane, postoje i oblasti mozga u kojima bi postojanje električnih sinapsi moglo da predstavlja potreban, ali ne i dovoljan uslov za uspostavljanje sinhronizacije [187].

Kao što smo već nagovestili, fenomeni sinhronizacije su povezani s nekoliko centralnih tema neuronauke [251]. Pri tom, uloga sinhronizacije može biti korisna (fiziološka) ili štetna (patološka) [269]. Slučajevi kada sinhronizacija igra korisnu ulogu uključuju reprezentovanje i obradu informacija u senzornim i sensorimotornim centrima, komunikaciju između prostorno distribuiranih regija mozga, kao i generisanje ritmova bitnih za održavanje autonomnih radnji (disanje, rad srca) [194, 251, 313]. S druge strane, neželjena sinhronizacija predstavlja supstrat za neka neurološka oboljenja, među kojima su epilepsija i pojava tremora kod Parkinsonove bolesti. Na eksperimentalnom nivou, postoje veoma čvrsti dokazi da sinhronizacija predstavlja centralni mehanizam reprezentovanja (enkodiranja) i obrade informacije u pojedinim senzornim regijama mozga, kao što je vizuelni korteks [194, 251]. Saznanja o specijalizaciji neurona u toj oblasti, prema kojoj jedinica generiše oscilacije frekvencije između 40 i 60 [Hz] samo ukoliko vizuelna scena sadrži jedan zadati element (npr. liniju određene prostorne orijentacije), dovela su do pretpostavke da sinhronizacija oscilatornih odgovora u prostorno odvojenim delovima vizuelnog korteksa može da služi za uspostavljanje tranzijentnog odnosa između zajedničkih, ali prostorno distribuiranih osobina paterna. Stoga može da se kaže da sinhronizacija služi kao mehanizam za izdvajanje nepovezanih, kao i reprezentovanje globalnih i koherentnih osobina vizuelne scene. S dinamičkog stanovišta, obrada kompleksnih vizuelnih stimulusa može da se predstavi preko klaster stanja, koja podrazumevaju koegzistenciju više grupa sastavljenih od izohrono sinhronizovanih jedinica, pri čemu su grupe međusobno ili nesinhronizovane ili nisu sinhronizovane izohrono (obično je u pitanju phase lag sinhronizacija). Drugim rečima, postojanje klastera odgovara kognitivnim procesima nazvanim "feature binding" i "feature segmentation" [294, 327, 342]. U prvom slučaju, višestruke reprezentacije koje se odnose na jedan objekat su udružene putem klaster stanja, dok u drugom slučaju klasterovanje doprinosi razlikovanju između opaženih objekata. Konačno, osim uloge u još nekim senzornim regijama (centri za miris i dodir), napomenimo i da sinhronizacija oscilatorne aktivnosti može da u sensorimotornom korteksu služi prilikom integracije in-

formacija neophodnih za kontrolu motoričkih reakcija [194].

Analiza rezultata dobijenih EEG merenjima sugerise da se pored sinhronizacije unutar pojedinih funkcionalnih regija, sinhronizovana aktivnost odvija i između prostorno udaljenih (moguće anatomski nepovezanih) i u funkcionalnom smislu distinktnih oblasti mozga [251, 327]. EEG signal predstavlja električnu aktivnost usrednjenu po makroskopskim oblastima mozga, koje obuhvataju veliki broj neurona. Zato je sama činjenica da takav signal ima vremenske varijacije dovoljan indikator za postojanje korelacije u opaljivanju neurona. EEG signali imaju složen spektar, a obuhvataju opseg frekvencija od 2 Hz do preko 60 Hz. Pri tom, izdvaja se nekoliko tipičnih komponenti [194, 269, 119], od kojih je najbrža tzv. γ komponenta, koja pripada domenu frekvencija između 20 [Hz] i 80 [Hz]. Postoje jednostavni argumenti koji ukazuju da γ oscilacije uključuju komunikaciju između dve moždane hemisfere. Naime, poznato je da između hemisfera postoje brojne veze i da je brzina provođenja signala reda 10 [m/s]. Prema tome, za jedan ciklus izmene spike-ova između dve hemisfere je potrebno oko 40 [ms], što tačno odgovara frekvenciji iz γ pojasa (oko 25 [Hz]).

Već smo pomenuli da pored korisne sinhronizacije, postoje i primeri patološke sinhronizacije, koji su dinamička pozadina epilepsije i tremora kod Parkinsonove bolesti [251, 194]. Tretiranje ovakvih oboljenja zasniva se na ometanju perzistentne sinhronizacije namernim perturbovanjem faza oscilovanja pojedinih interagujućih populacija neurona.

Pošto je permanentna makroskopska sinhronizacija zapravo štetna, pokušajmo da odgovorimo na pitanje kako izgleda kolektivno ponašanje koje bi trebalo da odgovara tipičnim kognitivnim operacijama. Pod normalnim okolnostima, oblasti korteksa nisu ni potpuno sinhronizovane, ni potpuno nesinhronizovane. U svakom trenutku, neki neuroni su uključeni u kolektivne oscilacije, dok se drugi ponašaju kao skoro neinteragujuće (slabo perturbovane) jedinice. To implicira da bi neka mentalna stanja, zamišljena kao "momenat" [194], mogla da budu reprezentovana tzv. **ćelijским ansamblima**⁹, koji predstavljaju veće grupe tranzijentno sinhronizovanih i prostorno distribuiranih (udaljenih) neurona [269]. Prelaz iz jednog u drugi "momenat" tada odgovara epizodi desinhronizacije. Na taj način, mentalni proces bi na nivou neuronske aktivnosti trebalo da izgleda kao sekvenca perioda sinhronizacije, koji odgovaraju različitim ćelijским ansamblima, prekinutih kratkim epizodama nesinhronizovanosti.

Takođe, razvijena je i pretpostavka o postojanju "dinamičkog jezgra"¹⁰,

⁹cell assemblies (eng.)

¹⁰dynamic core hypothesis (eng.)

koji bi predstavljao veliki klaster sastavljen od neuronskih populacija ("network of networks" konfiguracija), koji na skali od nekoliko stotina milisekundi generišu proces visoke kompleksnosti [194]. Naravno, populacije unutar jezgra mnogo čvršće interaguju međusobno, nego sa ostatkom mozga. Pri tom, jezgro nije uključeno u dnevne automatske (nesvesne) operacije, već ima primarnu ulogu da integriše različite stanja percepcije i druga mentalna stanja.

Sa dinamičkog stanovišta, kao posledica mehanizma koji dovodi do pojave i nestanka sinhronizovanih epizoda, izgleda da bi mozak trebalo da se permanentno nalazi u metastabilnom stanju. Ova činjenica vrlo je bliska poznatom konceptu da se biološki sistemi nalaze na ivici haosa. Poznati, ali manje jasno definisan koncept je haotično lutanje¹¹ [308, 92, 339, 83]. Po tom konceptu, aktivnost mozga može da se izrazi preko trajektorije koja se sastoji od nekoliko nestabilnih periodičnih orbita, tzv. "atraktorskih ostataka" (attractor ruins). Tada proces percepcije (i potencijalno asocijativne memorije) odgovara privremenoj stabilizaciji dinamike na jednoj od zadatih orbita, i njenom relativno brzom napuštanju.

Sa stanovišta teorije nelinearne dinamike izuzetno su zanimljiva i tzv. "bump" stanja u makroskopskim sistemima [233, 272], eksperimentalno okarakterisana kao koegzistencija sinhronizovanih i potpuno nesinhronizovanih regiona. U dinamičkom smislu, paradigmu za bump-stanja mogle bi da predstavljaju tzv. himere [232, 1, 233], koje uključuju scenario narušenja simetrije ("spontana narušenja sinhronizacije") pri kome se homogena populacija identičnih oscilatora spontano deli na regione sinhronizovanih i nesinhronizovanih jedinica. Najznačajniji element za pojavu takvih paterna aktivnosti su nelokalne interakcije, dovoljno različite kako od globalne sheme povezanosti, tako i od sheme s interakcijama najbližih suseda.

Uočeni paterni sinhronizovane aktivnosti su pokrenuli brojna teorijska pitanja o odnosu između strukture paterna i osobina dinamike neuronskih ćelija, zatim prirode njihovih interakcija, lokalne i globalne arhitekture mreža, kao i interakcije između makroskopskih neuronskih sistema. S teorijske strane, suštinska pitanja uključuju i to kako delovanje šuma i kašnjenja u interakcijama, heterogenost sistema, kao i fluktuacije mreže povezanosti između jedinica utiču na fenomene sinhronizacije. Imajući u vidu ovako bogat korpus pitanja, sledeće poglavlje je posvećeno detaljnijem prikazu najvažnijih modela lokalne i kolektivne dinamike neuronskih sistema.

¹¹chaotic itinerancy (eng.)

15.5 Fizičko modelovanje lokalne i kolektivne dinamike neuronskih sistema

Širok spektar modela lokalne i kolektivne dinamike neuronskih sistema posledica je činjenice da relevantne forme aktivnosti zauzimaju veći broj prostornih i vremenskih skala, pri čemu emergent fenomeni mogu da predstavljaju ozbiljnu prepreku za primenu metoda coarse-graining-a pri prelasku s niže na višu skalu [269]. Odgovor na pitanje koji je nivo apstrahovanja osobina pojedinačnih neurona i njihovih interakcija, kroz odstupanja od detalja biohemijskih procesa i dinamičkih moda realnih ćelija, potreban i poželjan pri definisanju fizički opravdanih modela najviše zavisi od cilja istraživanja. Na primer, određeni kvalitativan uvid u neke od značajnih kognitivnih funkcija, kao što su učenje i asocijativna memorija, ostvaren je primenom modela "odozgo–nadole" strukture (Hopfield-ove mreže [286]), za koje je pokazano da mogu da manifestuju željenu multistabilnu (poliatraktorsku) dinamiku. U takvim modelima, neuroni su redukovani na binarne (logičke) integratore koji mogu da budu u aktivnom i neaktivnom stanju ($S_i(t) \in \{0, 1\}$). Pri tom, prelazak u aktivno stanje opisan je sigmoidalnom transfer funkcijom H , čija vrednost zavisi od odnosa potencijala neurona $u_i(t)$ i praga opaljivanja θ_i , $S_i(t) = H(u_i(t) - \theta_i)$.

S druge strane, koristeći princip modelovanja "odozdo–nagore", načinjene su mreže koje uspešno reprodukuju osnovne elemente funkcionalne organizacije (kompeticiju ili paralelizam) i kooperativnih pojava. Konkretno karakteristike ovakvih modela blisko su povezane s pretpostavljenim načinima reprezentovanja (enkodiranja) i prenosa informacija u mreži. Naime, sve do početka devedesetih godina XX veka, veoma popularni su bili frekventni (*rate*) modeli [343], zasnovani na ideji da najveći značaj u prenosu i obradi informacija ima frekvencija opaljivanja neurona. Primenom usavršenih eksperimentalnih metoda je pokazano da umesto frekvencija, glavnu ulogu u tim procesima igra (vremenski) precizno emitovanje akcionih potencijala, koje za posledicu ima sinhronizaciju aktivnosti neurona. Bitno je da napomenemo da tipovi sinhronizacije u neuronskim sistemima zavise od same veličine sistema [269], od koje ujedno zavisi i njihova fiziološka uloga. Na primer, poznato je da mezoskopske neuronske mreže [145] uglavnom igraju asocijativnu ulogu (prenos informacija između senzornih ili senzornih i motornih centara), pa je za njih karakteristična tranzijentna sinhronizacija. U tom slučaju, kolektivna dinamika na mreži može da se predstavi kao propagacija paketa sinhronizovane aktivnosti s jednog na drugi ćelijski ansambl [8], pri čemu odgovarajući paterni aktivnosti mogu da imaju osobine jednostavnih

lanaca sinhronizovane aktivnosti (synfire chains [8, 69]), ili formu složenih fraktalnih struktura [88].

S druge strane, lokalna dinamika kod makroskopskih sistema tipično je predstavljena *modelima zasnovanim na jonskoj provodnosti (conductance-based models)* [140] ili *spiking* modelima [100]. U prvom slučaju, zadržava se detaljna struktura dinamike emitovanja akcionog potencijala, što povlači i veći broj potrebnih parametara i velike dimenzije faznog prostora sistema. Modeli zasnovani na jonskoj provodnosti sadrže četiri klase promenljivih, grupisanih prema funkciji i karakterističnoj vremenskoj skali: membranski potencijal, promenljive pobuđivanja (excitation variables), koje imaju ulogu u fazi porasta akcionog potencijala, promenljive relaksacije, koje obezbeđuju repolarizaciju, tj. fazu opadanja akcionog potencijala, i kao poslednje, promenljive adaptacije, koje regulišu promenu osetljivosti neurona pri dugotrajnom delovanju stimulusa [140]. Težiste kod formulisanja spiking modela nije na fenomenološkom opisivanju dinamike nastanka akcionog potencijala, nego na korektnom predstavljanju statistike opaljivanja neurona, uključujući trenutke emitovanja impulsa, dužinu refraktornog perioda (interval posle opaljivanja u kome dodatne ekscitacije nisu moguće), kao i distribuciju intervala između sukcesivnih spike-ova (interspike intervals). Spiking modeli za opis stanja neurona koriste samo jednu promenljivu (membranski potencijal), dok je dinamika nastanka impulsa i resetovanja potencijala nakon emitovanog impulsa redukovana.

15.5.1 Fiziološka osnova dinamike neurona

Pre nego što nastavimo s predstavljanjem modela dinamike neurona, osvrnimo se ukratko na realne fiziološke procese koji prate pojavu akcionog potencijala i njegovu relaksaciju [264]. Poznato je da se sam mehanizam zasniva na protoku jonskih struja kroz ćelijsku membranu. U stanju mirovanja, sve struje koje ulaze u ćeliju i depolarizuju membranu su u dinamičkoj ravnoteži sa svim strujama koje izlaze iz ćelije i hiperpolarizuju je. Sinaptičke struje slabog (jakog) intenziteta izazivaju postsinaptičke potencijale male (velike) amplitude. Postsinaptički potencijali veće amplitude ne dovode obavezno do brze relaksacije membrane, već njihovo delovanje može da bude amplifikovano zahvaljujući natrijumovim Na^+ i/ili kalcijumovim Ca^{2+} jonskim kanalima, strukturama u membrani čija otvorenost zavisi od membranskog potencijala (napona između spoljašnje i unutrašnje strane membrane). Upravo kao rezultat amplifikovanja nastaju akcioni potencijali, nagle i tranzijentne promene membranskog potencijala ćelije, koje propagiraju, skoro ne menjajući oblik, od tela ćelije, preko aksona, do sinapsi s drugim ćelijama.

Ispostavlja se da je emitovanje akcionog potencijala posledica pozitivne povratne sprege [140] između porasta potencijala, izazvanog sinaptičkim strujama, i otvaranja jonskih kanala, koji dovode do još bržeg priliva jona u ćeliju, a time i dodatnog porasta potencijala membrane. S druge strane, terminacija akcionog potencijala je rezultat negativne povratne sprege na dužoj vremenskoj skali. Na njoj porast potencijala izaziva inaktivaciju (zatvaranje) jonskih kanala i/ili pomaže pojavu izlazne kalijumove K^+ struje, što efektivno dovodi do smanjenja mebranskog potencijala.

15.5.2 Modeli neurona iz ugla teorije nelinearne dinamike

U dinamičkom smislu, postoje tri generička režima aktivnosti neurona: **ekscitabilnost**, (permanently) opaljivanje (spiking) i burstovanje¹²[140, 141]. U faznom prostoru, režimu ekscitabilnosti kao atraktor odgovara fiksna tačka, dok opaljivanju odgovara granični ciklus. Bursting je, pak, kompleksna forma oscilovanja, sastavljena iz aktivnih faza (serije sukcesivnih gusto emitovanih impulsa) i faza mirovanja, pri čemu su prelasci faza mirovanja \leftrightarrow aktivna faza opisani bifurkacijama fiksna tačka \leftrightarrow granični ciklus. Primećimo da režim ekscitabilnosti, kome odgovara fiksna tačka, nismo odmah nazvali stanje mirovanja (rest state) zbog jedne specifičnosti. Naime, ekscitabilnost podrazumeva da neuron može, kao odgovor na spoljašnje stimuluse, da generiše dva suštinski različita tipa odgovora—”linearne”, koji su male amplitude (postsinaptički potencijali), i ”nelinearne” odgovore velike amplitude (akcioni potencijali)[185, 140]. Pri tom, tip generisanog odgovora osetljivo zavisi od intenziteta stimulusa [185, 154]. Pošto će ova tema biti mnogo detaljnije elaborirana u nastavku, zasad samo napomenimo da je takvo ponašanje omogućeno time što se ekvilibrijum nalazi u blizini bifurkacije ka periodičnom kretanju. Ovim komentarom smo želeli da istaknemo da govoreći o stanju mirovanja¹³ kod neurona u stvari mislimo na stanje koje ima osobinu ekscitabilnosti.

Primena teorije nelinearne dinamike u modelovanju aktivnosti neurona je od velikog značaja, pošto obezbeđuje jasan formalizam i pruža mogućnosti za prepoznavanje univerzalnih karakteristika posmatranih sistema. Po pitanju formalizma, na primer, stabilnost fiksne tačke, kojom je reprezentovano stanje mirovanja, određena je otpornošću na male perturbacije, kao što smo u ovoj knjizi već mnogo puta ponovili. Takođe, s dinamičke tačke gledišta, prelazak iz stanja mirovanja u spiking stanje odgovara kvalitativnoj

¹²bursting (eng.)

¹³rest state (eng.)

promeni asimptotske dinamike, tj. bifurkaciji iz fiksne tačke u granični ciklus. U pogledu univerzalnosti, najznačajnija je činjenica da, uprkos brojnim razlikama u detaljima elektrofiziologije, **svi neuroni (realni i matematički modelovani), mogu da se klasifikuju u samo četiri klase**, i to upravo prema tipu bifurkacije kojom se odvija prelaz iz fiksne tačke u granični ciklus [140, 141]. Napomenimo da se ovo tvrđenje odnosi na bifurkacije kodimenzije 1, koje su ujedno i najverovatnije u realnim biološkim uslovima. S druge strane, pretpostavljamo i da posmatrani sistem nema dodatnih simetrija.

Pomenuta četiri generička mehanizma prelaska neurona iz stanja mirovanja u spiking zasnovana su na četiri tipa bifurkacija koje vode iz fiksne tačke u granični ciklus, koje uključuju saddle-node bifurkaciju, saddle-node bifurkaciju na invarijantnom ciklusu, kao i subkritičnu i superkritičnu Hopfovu bifurkaciju [140]. Svaka od ovih bifurkacija je već detaljno objašnjena ranije. Ono što sada želimo da istaknemo je da ovakav pristup ne nudi samo klasifikaciju modela, već pruža još jednu značajnu prednost pri proučavanju neuronskih sistema. Prisetimo se da svaka bifurkacija ima odgovarajuću normalnu formu, koju možemo da interpretiramo kao minimalni model sistema koji prolazi kroz zadatu bifurkaciju. Generalizujući ideju topološke normalne forme, možemo da kažemo da u slučaju neurona svakoj od četiri generičke bifurkacije odgovara **kanonski model**, karakterističan za celu familiju modela. Pri tom, model se formalno smatra kanonskim za familiju dinamičkih sistema ako se svaki član familije može preslikati u taj model deo po deo kontinualnom (potencijalno neinvertibilnom) transformacijom promenljivih [140, 141]. Naravno, kanonski model je tipično jednostavniji u analitičkom smislu i manje dimenzionalan od ostalih članova familije, ali dobro odražava njihova najvažnija dinamička svojstva, uključujući tipove atraktora i eventualnu multistabilnost.

Po pitanju klasifikacije modela, dodajmo da neurone koji u blizini bifurkacije fiksna tačka \rightarrow granični ciklus ispoljavaju koegzistenciju između stacionarnog i oscilatornog rešenja nazivamo bistabilnim, dok su neuroni koji ne pokazuju takvu koegzistenciju monostabilni. Bistabilnost se pojavljuje u slučajevima saddle-node bifurkacije i subkritične Hopfove bifurkacije, što se reflektuje kroz fenomen **histerezisa** [140]. Naime, sporim povećanjem bifurkacionog parametra (na primer intenziteta spoljašnje struje pobude) preko bifurkacionog praga, a zatim njegovim sporim smanjivanjem, pokazuje se da se prelasci mirovanje \rightarrow spiking i spiking \rightarrow mirovanje dešavaju na različitim vrednostima parametra.

U neuronauci je mnogo značajnija klasifikacija neurona na **integratore** i **rezonatore** [140, 86, 100]. Ova podela je rezultat činjenice da neuroni

koji napuštaju stanje mirovanja Hopfovima bifurkacijama manifestuju male prigušene oscilacije potencijala (subthreshold oscillations), što nije slučaj sa sistema karakterisanim saddle-node bifurkacijama. Neuroni koji imaju (nemaju) podpragovske oscilacije potencijala su rezonatori (integratori). Termin rezonatori je upotrebljen zato što postojanje subthreshold-oscilacija može da dovede do rezonantnih efekata s frekvencijom stimulusa, čime se otvara niz interesantnih mogućnosti. Pomenimo nekoliko bitnih razlika između neurona-rezonatora i neurona-integratora [140]. Pre svega, kod rezonatora početak opaljivanja značajno zavisi od frekvencije stimulusa, tj. izdvajaju se preferentne frekvencije koje će pre izazvati opaljivanje. Kod integratora, pak, je početak opaljivanja verovatniji što je frekvencija stimulusa veća. Pored toga, integratori imaju, a rezonatori nemaju dobro definisan prag opaljivanja. Dodatno, integratori emituju stereotipne spike-ove konstantne amplitude i trajanja, dok se kod rezonatora u retkim slučajevima mogu pojaviti i parcijalni spike-ovi manje amplitude. Na kraju, kod integratora inhibitorski input sprečava emitovanje akcionog potencijala, dok kod rezonatora može da ga potpomogne u zavisnosti od odnosa s fazom podpragovskih oscilacija.

S neurobiološkog stanovišta, najverniji opis dinamike neurona pruža **Hodgkin-Huxley model** (1952) [132], koji je zasnovan na jonskoj provodnosti, a motivisan je istraživanjem nastanka akcionog potencijala na velikom aksonu lignje. Model uvodi četvorodimenzionalni fazni prostor, koji uključuje membranski potencijal V i tri nezavisne gating-promenljive [140, 145]. Pretpostavljeno je da postoje tri jonske struje—tranzijentna Na^+ , perzistentna K^+ i omska struja curenja (koja najviše odgovara Cl^- jonima), od kojih su prve dve naponski regulisane, a provodnost treće je konstantna. Naponska regulacija se odvija preko "kapija", koje utiču na otvaranje, zatvaranje ili inaktivaciju jonskih kanala, pri čemu su uvedene verovatnoće da kapije za Na^+ i K^+ struje budu otvorene, m i n , respektivno, dok je verovatnoća da kapija inaktiviranja bude otvorena označena sa h . Kapije mogu da budu delimično ($0 < m < 1$) ili potpuno otvorene ($m = 1$), zatvorene ($m = 0$), inaktivirane ($h = 0$) ili reaktivirane ($h = 1$). Prema Hodgkin-Huxley-evom modelu, pretpostavlja se da su Na^+ kanali kontrolisani sa tri kapije aktivacije i jednom kapijom inaktivacije, dok su K^+ kanali regulisani sa četiri kapije aktivacije. U slučaju velikog broja kanala, verovatnoća otvorenosti (za Na^+ kanale data sa $p(t) = m^a h^b$, gde a i b predstavljaju broj kapija aktiviranja, odnosno inaktiviranja) jednaka je udelu otvorenih kanala. U skladu s tim, jonske struje provodnosti mogu da se definišu formulama $I_K = g_K n^4 (V - E_K)$, $I_{Na} = g_{Na} m^3 h (V - E_{Na})$,

$I_{Leak} = g_L(V - E_L)$, gde su sa g_i označene maksimalne vrednosti provodnosti, a sa E_i ravnotežni elektrohemijski potencijali zadatog jona. Evolucija membranskog potencijala, zajedno sa jednačinama dinamike gating-promenljivih, čini skup od četiri kuplovane obične diferencijalne jednačine sa nekoliko desetina slobodnih parametara:

$$\begin{aligned} C\dot{V} &= I - g_K n^4(V - E_K) - g_{Na} m^3 h(V - E_{Na}) - g_L(V - E_L), \\ \dot{n} &= \alpha_n(V)(1 - n) - \beta_n(V)n, \\ \dot{m} &= \alpha_m(V)(1 - m) - \beta_m(V)m, \\ \dot{h} &= \alpha_h(V)(1 - h) - \beta_h(V)h. \end{aligned} \tag{15.24}$$

Uobičajeno je da se jednačine evolucije gating-promenljivih dovedu u oblik $\dot{x} = -\frac{1}{\tau_x(V)}(x - x_\infty(V))$, pri čemu su ravnotežne vrednosti u konačnoj formi sigmoidalnog oblika $x_\infty(V) = \frac{\alpha_x(V)}{\alpha_x(V) + \beta_x(V)}$, dok su vremena relaksacije unimodalne funkcije napona $\tau_x(V) = \frac{1}{\alpha_x(V) + \beta_x(V)}$. Napomenimo da su x_∞ i τ_x eksperimentalno merljive veličine.

U teorijskim razmatranjima, a naročito kada je cilj proučavanje makroskopskih sistema, poželjno je da modeli dinamike neurona u kvalitativnom smislu odražavaju njihova najbitnija svojstva, a da istovremeno dozvoljavaju analitički pristup i jasnu interpretaciju rezultata. U tom kontekstu, umesto četvorodimenzionalnog Hodgkin-Huxley modela, pogodnije je posmatrati jednostavnije modele koji omogućavaju geometrijsku analizu bifurkacija u faznoj ravni [86]. Većina relevantnih bifurkacija može da se ilustruje na sistemima čija je opšta forma data sa [140, 141, 86]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= \mu g(x, y). \end{aligned} \tag{15.25}$$

Najbolji uvid u dinamiku sistema opisanih (15.25) dobija se analizom nulklina, krivih koje su određene sa $f(x, y) = 0$ i $g(x, y) = 0$. Napomenimo da kod ovakvih modela značajnu ulogu igra odnos karakterističnih vremenskih skala μ , za koji se tipično pretpostavlja da važi $0 < \mu \ll 1$. To efektivno podrazumeva razdvajanje dinamike sistema na brzu x i sporu y komponentu, kojima odgovaraju "brze" i "spore" nulklina. Pokazuje se da najvažniji modeli u formi (15.25) mogu da se dobiju redukcijom Hodgkin-Huxley sistema (15.24) u okviru kvazistacionarne aproksimacije, zasnovane na eliminaciji brzih promenljivih (promenljivih s kratkim vremenima relaksacije). To se

odnosi kako na **Morris-Lecar**-ov model [206]

$$\begin{aligned} C_M \frac{dV}{dt} &= I_{app} - g_L(V - E_L) - g_K n(V - E_K) - g_{Ca} m_\infty(V)(V - E_{Ca}), \\ \frac{dn}{dt} &= \phi(n_\infty(V) - n) / \tau_n(V), \end{aligned} \tag{15.26}$$

tako i na **Fitzhugh-Nagumo** model [87, 220], kojim ćemo se detaljno baviti u nastavku.

Dok je spiking dinamika tipično predstavljena sistemima u formi (15.25), opis bursting dinamike obično je zasnovan na modelima slične forme, s tim što su tada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ i $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^k$ vektori, pri čemu \mathbf{x} predstavlja "brzi" podsistem kome odgovara spiking dinamika, dok je \mathbf{y} "spori" podsistem zadužen za modulaciju spiking dinamike (određivanje početka i kraja aktivne faze burst-ova) [140, 141]. Standardni metod analize modela burster-a je *singularna teorija perturbacije* [86], u kome se stavljanjem $\mu = 0$ dinamika početnog sistema razdvaja na dve nezavisne komponente, brzu i sporu. U tom slučaju, na nivou brzog podsistema $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, \mathbf{y} može da se posmatra kao vektor sporo promenljivih bifurkacionih parametara. Bursting dinamika može da se odvija prema dva scenarija, u zavisnosti od toga da li je $k = 1$ ili $k > 1$. U slučaju $k = 1$, brzi podsistem je bistabilan (koegzistencija fiksne tačke i graničnog ciklusa za istu vrednost y), a mehanizam prelaska iz aktivne faze u mirovanje i *vice versa* je zasnovan na histerezi¹⁴ [140]. Ako je pak $k > 1$, spori podsistem $\mathbf{y} = \mu g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ može da ima kao atraktor granični ciklus koji je relativno neosetljiv na promene \mathbf{x} . Tada spori sistem manifestuje kvazi-autonomne oscilacije koje periodično prevode brzi podsistem u aktivnu fazu. Ovakav mehanizam poznat je kao slow-wave bursting [140]. Na osnovu izloženog, jasno je da kontinualni model bursting dinamike zahteva sistem od minimalno 3 promenljive. U tom kontekstu, kao minimalni model burster-a najčešće se koristi **Hindmarsh-Rose** model [130]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + 3x^2 - x^3 - z + I, \\ \dot{y} &= 1 - 5x^2 - y, \\ \dot{z} &= -rz + rS(x - C_x), \end{aligned} \tag{15.27}$$

gde x odgovara membranskom potencijalu, y i z predstavljaju brzu i sporu struju, respektivno, dok su r , S i C_x parametri.

U kvalitativnom smislu, bursting modeli topološki mogu da se klasifikuju prema tipu bifurkacija koje prevode sistem iz mirovanja u aktivnu

¹⁴hysteresis-loop bursting (eng.)

fazu i *vice versa* [140, 141]. Pri tom, napomenimo da stanje mirovanja može da bude opisano fiksnom tačkom ili graničnim ciklusom male amplitude (podpragovske oscilacije). Najpoznatiju klasu bursting modela (tip I) čine fold/homoklinični burster-i, nazvani još i square-wave burster-i prema karakterističnoj talasnoj formi oscilovanja. Ovoj klasi pripada i Hindmarsh-Rose model. Preostalih pet klasa bursting modela čine circle/circle (parabolični ili tip II) burster-i, subkritična Hopf/fold cycle (eliptični ili tip III) burster-i, fold/fold cycle (tip IV) burster-i, fold/Hopf (tapered ili tip V) burster-i, kao i fold/circle (trougaoni) burster-i.

15.5.3 Šum i kašnjenje u interakcijama: poreklo i uloga u modelima dinamike neuronskih sistema

Već smo pomenuli da modelovanje evolucije kompleksnih sistema, a time i neuronskih sistema, tipično podrazumeva eksplicitno uvođenje šuma i kašnjenja u interakcijama, koji pojedinačno ili u sadejstvu mogu značajno da promene asimptotsku dinamiku izvornog (nultog) modela, koji ne uključuje takve efekte. Istraživanja sprovedena u poslednjih petnaest godina pokazuju da su sistemi u kojima je potrebno razmatrati koefekte šuma i kašnjenja pre pravilo nego izuzetak [340, 261], pri čemu najznačajniji primeri dolaze iz neuronauke i genetike. Uvođenje šuma predstavlja paradigmu kojom se opisuju varijabilni uslovi spoljašnje sredine (setimo se da su kompleksni sistemi otvoreni), kao i fluktuacije unutrašnjih parametara sistema [252, 223]. Dakle, u zavisnosti od toga kakvim stepenima slobode odgovaraju, moguće je govoriti o šumu spoljašnjeg i šumu unutrašnjeg porekla. S druge strane, kašnjenja u interakcijama posledica su konačne brzine prenosa signala duž odgovarajućih kanala komunikacije, kao i konačnih brzina odgovora sistema na spoljašnji stimulus [72, 73]. Pri tom, eksplicitno uvođenje kašnjenja u jednačine dinamike potrebno je kada je odgovarajuća vremenska skala uporediva s nekom od karakterističnih skala sistema [11]. Već je rečeno da je kod neuronskih sistema vreme propagacije signala između dva neurona uporedivo s tipičnim trajanjem intervala između dva sukcesivna spike-a.

Sada ćemo napraviti kratak pregled najznačajnijih efekata šuma i kašnjenja koji su uočeni na modelima populacija interagujućih oscilatora. Glavni efekat kašnjenja u interakcijama (sinaptičkog kašnjenja u slučaju kupulovanih neurona) se sastoji u sposobnosti kontrole, tj. indukovanja ili supresije kolektivne mode oscilovanja putem **delayed-feedback**-a (mehanizam kojim ranije vrednosti mean-field promenljivih utiču na trenutnu dinamiku sistema) [278, 260, 142]. Mogućnost kontrole je bazirana na uvođenju nove karakteristične skale u dinamiku sistema, pri čemu generički karakter meh-

anizma obezbeđuje činjenica da niti zavisi od osobina lokalne dinamike, niti utiče na njenu promenu [278]. Ostale uloge kašnjenja odnose se na pojavu različitih formi multistabilnosti, omogućavanju prelaska u haos [123] i izazivanje efekta klasterovanja [3, 327].

Što se tiče delovanja šuma, trebalo bi jasno razlikovati scenarije u kojima su oscilacije izazvane šumom¹⁵ ili samo perturbovane šumom¹⁶. U drugom slučaju, poznato je da šum, umesto štetne, može da ima konstruktivnu ulogu u kontekstu uvođenja reda (regularnosti) u ponašanje sistema. To se posebno odnosi na sadejstvo šuma i nelinearnosti. Stoga, umesto traženja načina za minimizovanje efekata šuma, prava strategija pri analizi kompleksnih sistema se sastoji u pronalazanju onih parametara sistema gde je uticaj šuma optimalan. U tom kontekstu, posebno treba izdvojiti efekte uvođenja reda u dinamiku opisanu determinističkim haosom, zatim poboljšanje sinhronizacije izazvano šumom, i kao najvažniji, efekat **stohastičke rezonance**. Pojam stohastičke rezonance se odnosi na postojanje intermedijarnih intenziteta šuma na kojima je odgovor sistema na slab spoljašnji signal (subthreshold signal, čiji intenzitet ne izaziva oscilovanje sistema) optimalan. Otkriće ovog efekta 1981. godine predstavljalo bilo je ključno za preokret u načinu razmišljanja o uticaju šuma na ponašanje dinamičkih sistema. Fizički posmatrano, stohastička rezonanca može da se interpretira na sledeći način. Slab spoljašnji signal efektivno menja energijski najpoželjnije stanje sistema, pri čemu se prelasci u novo optimalno stanje izazvani šumom odvijaju upravo onda kada je njihova frekvencija usklađenja s frekvencijom spoljašnjeg signala (forcing člana).

S aspekta modelovanja, u poređenju s njihovim determinističkim verzijama, moguće je uslovno razlikovati dva tipa stohastičkih modela [185]. U prvom slučaju, šum može da deluje tako da amplifikuje ili potiskuje određene tipove ponašanja, procese ili događaje. Drugim rečima, šum tada deluje nehomogeno u različitim delovima faznog prostora, pa, iako ne dovodi do pojave novih karakterističnih vremenskih skala, svejedno modifikuje forme dinamike determinističkog sistema. Drugi tip stohastičkih modela se odnosi na sisteme čija dinamika uključuje postojanje nestabilnih granica u faznom prostoru (pragova, separatrisa ili sedlastih struktura). U prisustvu šuma, verovatnoća prelaska bilo kog tipa barijere postaje nenulta, što dovodi do pojave novih formi ponašanja, tj. uvođenja novih karakterističnih vremenskih skala u poređenju s determinističkom verzijom sistema.

¹⁵noise-induced oscillations (eng.)

¹⁶noise-perturbed oscillations (eng.)

15.5.4 Pojam ekscitabilnosti

Već smo naglasili da je ekscitabilnost fundamentalna osobina neuronske dinamike, kao i da je neuron najbolji primer ekscitabilnog sistema u prirodi. Generalno, ekscitabilna dinamika je tip kretanja koji se odvija u sistemima čiji se ekvilibrijum nalazi u blizini bifurkacije ka permanentnoj periodičnoj aktivnosti [140, 154]. Sam pojam ekscitabilnosti se odnosi na formu ponašanja gde sistem pod dejstvom perturbacije može da generiše linearan odgovor male amplitude, ili izrazito nelinearan odgovor velike amplitude, što osetljivo zavisi od magnitude stimulusa. Ukoliko perturbacije interpretiramo kao izbor različitih početnih uslova, sledi da dva (u faznom prostoru) malo udaljena uslova mogu da izazovu kvalitativno različite ekscitacije: nakon linearnog odgovora sistem se brzo vraća u ravnotežno stanje, dok u slučaju nelinearnog odgovora, koji odgovara spike-u, reprezentativna tačka sistema opisuje stereotipnu veliku ekskurziju u faznom prostoru pre nego što relaksira u ravnotežno stanje. Granica koja razdvaja dva tipa početnih uslova, koji odgovaraju dvama odgovorima sistema, može da bude "meka" ili "tvrda" [185, 140, 154], što se manifestuje kroz nagli (threshold-like) ili gladak prelaz (smooth crossover) između odgovora male i velike amplitude, respektivno.

Paradigma iza ekscitabilne dinamike je zasnovana na oštrom razdvajanju karakterističnih vremenskih skala brze (ekscitatorne ili aktivatorske) i spore (inhibitorne ili recovery) promenljive, pri čemu je za relaksacionu fazu nakon ekscitacije odgovorna upravo spora promenljiva [175, 208, 34]. U kontekstu dekomponovanja kretanja na brzu i sporu komponentu, oscilacija se sastoji iz sporog kretanja, koje se odvija na "sporoj" mnogostrukosti, i brzog kretanja, koje se sastoji iz brzih prelazaka (skokova) između pojedinih delova spore mnogostrukosti. Svi ekscitabilni sistemi imaju jedinstveno stacionarno rešenje (stabilnu fiksnu tačku), ali takođe mogu da se nađu i u dva nestabilna stanja, ekscitovanom (firing, spiking) i refraktornom (recovery) stanju. Nestabilnost posednja dva stanja podrazumeva da ih sistem napušta čak i onda kada nije perturbovan. Drugim rečima, u odsustvu spoljašnje pobude, ekscitabilan sistem se nalazi u ekvilibrijumu. Pod dejstvom slabe perturbacije, sistem kratko fluktuiru u okolini fiksne tačke, da bi se brzo vratio u ravnotežno stanje. S druge strane, ukoliko je perturbovana na adekvatan način, ekscitabilna jedinica prikazuje ekskurziju velike amplitude, koja odgovara prolasku kroz spiking i refraktorno stanje pre povratka u ekvilibrijum. Posle emisije spike-a, potrebno je da prođe interval poznat kao vreme refraktornosti pre nego što je moguća nova ekscitacija.

Napomenimo da treba pažljivo razdvajati pojmove ekscitabilnosti i bistabilnosti, s obzirom da ekscitabilnost ne uključuje koegzistenciju između fik-

sne tačke i graničnog ciklusa. Kao što je već naglašeno, ekscitabilni sistemi su monostabilni (ekvilibrijum kao jedinstveni atraktor), a postojanje orbita koje odgovaraju odgovorima velike amplitude je povezano sa strukturom faznog prostora, tj. njegovom geometrijom u okolini fiksne tačke. Ta činjenica takođe implicira i da je ekscitabilnost *per se* intrinzična karakteristika sistema, čije manifestovanje ne zavisi od toga da li je karakter stimulusa deterministički ili stohastički. U determinističkom scenariju, odgovor velike amplitude može da se zamisli kao posledica toga što sistem prolazi kroz stanja daleko od ravnoteže [185]. Što se tiče stohastičkih efekata, intuitivno je jasno da šum može da deluje kao amplifikator ekscitabilnosti [140]. Ovo se odnosi na činjenicu da ekscitabilni sistemi mogu da generišu kontinuirane oscilacije pod dejstvom permanentne perturbacije, pri čemu sekvenca ekscitacija čini *spike train*. Dodajmo da oscilacije izazvane šumom mogu da izgledaju sasvim regularno, pa je u nekim situacijama odgovarajuće serije skoro nemoguće razlikovati od serija tipičnih relaksacionih oscilatora. Ključna razlika, međutim između oscilacija autonomnih oscilatora i ekscitabilnih jedinica leži u mogućnosti definisanja faze. U slučaju autonomnih oscilatora, efekte šuma nije teško uključiti perturbativno u osnovni opis zadat dinamikom faze [361]. S druge strane, promenljiva faze ne može na jednostavan način da se pridruži ekscitabilnim jedinicama [288], pošto se one u dinamičkom smislu nalaze u ekvilibrijumu.

15.5.5 Klasifikacija ekscitabilnih sistema

Već smo naglasili da ekscitabilno ponašanje nastaje kada deterministički sistem leži u blizini bifurkacije između stacionarnog stanja i oscilatornog kretanja. U subkritičnom režimu, svaka oscilacija je zapravo tranzijent izazvan dovoljno jakom perturbacijom koja sistem privremeno prevodi u superkritično stanje. Prema generičkom mehanizmu kojim se odvija bifurkacija ka periodičnom oscilovanju, svi ekscitabilni sistemi mogu da se podele u dve klase [185, 140]. Ekscitabilni sistemi tipa I se nalaze u blizini saddle-node bifurkacije na invarijantnom ciklusu. Tada u okolini kritične tačke oscilacije mogu da imaju arbitrarno malu frekvenciju zbog formiranja homoklinične orbite. Kanonski model neurona za ovu klasu je kvadratni integrate-and-fire model [140]. Pošto pripada grupi spiking modela, kod njega je porast potencijala do praga V_{max} zadat jednačinom oblika $\dot{V} = b + V^2$, gde je b bifurkacioni parametar, dok se za $V(t) = V_{max}$ potencijal resetuje na vrednost $V_{reset} < 0$. Među modelima zasnovanim na jonskoj provodnosti, tipičan predstavnik klase ekscitabilnosti tipa I je Morris-Lecar-ov model (15.26). Ekscitabilni sistemi tipa II odlikuju se time što

bi u kritičnoj tački prošli kroz superkritičnu Hopfovnu bifurkaciju, što znači da frekvencija oscilovanja u blizini bifurkacionog praga ostaje konačna. U slučaju ekscitabilnosti tipa II granica između početnih uslova koji dovode do odgovora male i velike amplitude je manje jasna, tako da sam prelaz izgleda kontinuirano. Kanonski model neurona za ovu klasu ekscitabilnosti je Fitzhugh-Nagumo model.

15.5.6 Ekscitabilnost i šum: pojava rezonantnih fenomena

Iako se tipično pojavljuju u biofiziološkom kontekstu (neuronski sistemi, tkivo srčanog miokarda), ekscitabilni sistemi pod uticajem šuma se sreću u velikom broju različitih oblasti, uključujući kinetiku hemijskih reakcija [153], klimatologiju [185], kao i dinamiku poluprovodnika [357] i lasera [77]. Izvori šuma mogu da budu jednako različiti kao i izvori ekscitabilnosti [185]. U slučaju neuronskih sistema postoji nekoliko koegzistirajućih izvora šuma. Slučajni inputi koji dolaze na neuron zbog pozadinske aktivnosti drugih jedinica čine osnovu sinaptičkog šuma, **šum u jonskim kanalima** je posledica slučajnog otvaranja kanala, dok treći izvor šuma leži u slučajnom otpuštanja neurotransmitera u sinapsama [67].

Za razumevanje efekata šuma na ekscitabilnim sistemima ključna je činjenica da šum utiče na ekscitacionu i refraktornu fazu oscilacija na sasvim drugačiji način [340, 252, 185]. To se najbolje vidi kroz zavisnost srednjih vrednosti i varijansi karakterističnih skala pomenutih procesa, čije proučavanje pripada oblasti statističke fizike. Ovde ćemo se samo osvrnuti na dva važna rezultata. Kao prvo, pokazuje se da vreme aktivacije (vreme koje je potrebno faznoj tački da napusti ekvilibrijum) značajno zavisi od intenziteta šuma, pri čemu je statistika ekscitacionih događaja poasonovska [185, 154]. S druge strane, vreme ekskurzije, koje odgovara relaksaciji spiking i refraktornog stanja, je u potpunosti opisano determinističkom dinamikom, što opravdava upotrebu sintagme "stereotipna oscilacija" kod definisanja ekscitabilnosti. Napomenimo da iako srednje vreme ekskurzije slabo zavisi od šuma, zavisnost varijanse postaje vidljiva za veće intenzitete šuma.

Već je rečeno da oscilacije izazvane šumom mogu da postanu koherentne na optimalnoj vrednosti šuma. U slučaju jedne ekscitabilne jedinice, postoje dva scenarija rezonantnih fenomena, poznatih kao **rezonanca koherencije**¹⁷, *CR* [252] i **samoindukovana stohastička rezonanca**¹⁸, *SISR* [175, 208]. U određenoj meri, oba fenomena mogu da se uporede sa stohastičkom rezonancom, iako se odvijaju bez prisustva spoljašnjeg signala.

¹⁷coherence resonance (eng.)

¹⁸self-induced stochastic resonance (eng.)

Mehanizam rezonance koherencije se eksplicitno oslanja na različite tipove zavisnosti srednjih vrednosti i varijacija vremena aktivacije i ekskurzije od šuma. Rezonanca je u stvari posledica balansa između dva efekta: s jedne strane, šum treba da bude dovoljno jak da bi vremena aktivacije bila značajno kraća od vremena ekskurzije, dok s druge strane, intenzitet šuma ne sme da bude ni prevelik da bi fluktuacije vremena ekskurzije ostale male [252, 185]. Mehanizam u osnovi samoindukovane stohastičke rezonance je značajno komplikovaniji, a zasniva se na sprečavanju reprezentativne tačke ekscitabilnog sistema da dođe u blizinu ekvilibrijuma [208]. Konkretno razlike između *CR* i *SISR* fenomena se odnose na sledeća tri aspekta [175]: u *CR* slučaju, granični ciklus je prethodnik determinističkog ciklusa (ciklusa u superkritičnom režimu), dok je u slučaju *SISR* u pitanju ciklus drugačiji od determinističkog; kod rezonance koherencije, bifurkacioni parametar mora da se fino podesi u okolinu kritične vrednosti, dok kod samoindukovane stohastičke rezonance ne mora; koherencija oscilacija kod *SISR* je osetljiva ne samo na šum, nego i na odnos karakterističnih skala brze i spore promenljive.

15.5.7 Fithugh-Nagumo model: primer ekscitabilne dinamike tipa II

U ovom odeljku ćemo razmotriti dinamiku Fitzhugh-Nagumo (*FHN*) jedinice, prvo u determinističkom slučaju, a zatim i pod dejstvom šuma. Napomenimo da jednačine *FHN* modela mogu da se posmatraju kao generalizacija van der Pol-ovog oscilatora [32], koji je uveden kao jedan od prvih primera autonomnih oscilatora. U kontekstu ekscitabilne dinamike, *FHN* sistem je prvi put analiziran početkom 60-tih godina XX veka [87, 220], kada je prepoznato da može da se interpretira kao pojednostavljenje Hodgkin-Huxley modela (15.24). Osim kao model neuronske aktivnosti, *FHN* sistem može da se koristi pri opisu rada ćelija srca [49, 51], kao i pri deskripciji nastanka talasa u okviru kinetike Belousov-Zhabotinsky reakcije [146]. Dinamika izolovane *FHN* jedinice je data sa [140]

$$\begin{aligned} \epsilon dx &= F(x, y)dt = (x - x^3/3 - y)dt, \\ dy &= G(x, y)dt = (x + b)dt. \end{aligned} \tag{15.28}$$

Parametar $\epsilon \ll 1$ obezbeđuje oštro razdvajanje karakterističnih vremenskih skala promenljivih $x(t)$ i $y(t)$. U nastavku, vrednost ϵ biće fiksirana na $\epsilon = 0.01$. U kontekstu neuronauke, brza promenljiva (promenljiva aktivacije) igra ulogu membranskog potencijala, a spora (recovery) promenljiva se odnosi na kinetiku K^+ jonskih kanala [154]. Naglašavamo da ovu analogiju

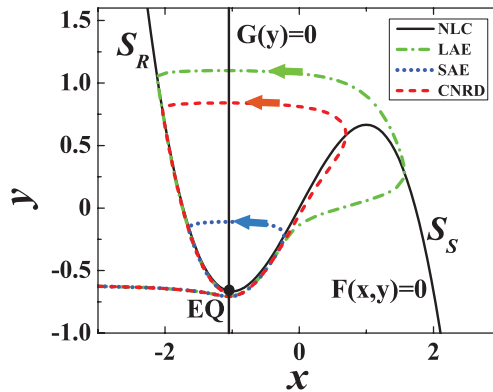
treba shvatiti uslovno i u kvalitativnom, a nikako ne u kvantitativnom smislu. Sa b je označen bifurkacioni parameter, koji se tradicionalno naziva i **parametar ekscitabilnosti**. Njegovu ulogu možemo da sagledamo na sledeći način. Lako je pokazati da sistem (15.28) ima jedinstvu fiksnu tačku datu sa

$$x_0 = -b, \quad y_0 = -b + b^3/3, \tag{15.29}$$

čiji su karakteristični eksponenti

$$\lambda_{\pm} = \frac{b^2 - 1 \pm \sqrt{(b^2 - 1)^2 - 4\epsilon}}{2\epsilon}. \tag{15.30}$$

Stoga, fiksna tačka je stabilna ako i samo ako je $|b| > 1$, dok sistem prolazi kroz superkritičnu Hopfov bifurkaciju za $|b| = 1$. Kada je $|b| < 1$, dinamika sistema određena je graničnim ciklusom koji je globalno stabilan. Dakle, različitim odabirom vrednosti b , sistem opisan pomoću (15.28) možemo da dovedemo u ekscitabilni režim ili oscilatorno stanje. S obzirom da je sistem (15.28) invarijantan na transformaciju $(x, y, b) \rightarrow (-x, -y, -b)$, dovoljno je da posmatramo slučaj $b > 0$ [208, 175].



Slika 15.1: Analiza u faznoj ravni ekscitabilne dinamike Fitzhugh-Nagumo modela

Sada ćemo pokazati primenu metode analize u faznoj ravni na primeru ekscitabilne dinamike koja se dobija za vrednost parametra ekscitabilnosti b malo iznad 1. Analiza je zasnovana na ulozu nullcline-a $F(x, y) = 0$ i $G(x) = 0$ [140, 86], prikazanim punim crnim linijama na slici 15.1. Pojedinačne krive predstavljaju granice između oblasti u kojima odgovarajući izvod ($\dot{x}(t)$, odnosno $\dot{y}(t)$), ima suprotan znak. Položaj ekvilibrijuma određen je presekom dve nulcline, čije koordinate očigledno zavise od vrednosti b . Kubni

nullcline $F(x, y) = 0$ može da se podeli na tri grane, pri čemu su refraktorna grana S_R (levo na slici 15.1) i spiking grana S_S (desno na slici 15.1) stabilne, dok je grana u sredini nestabilna. Ekscitabilni režim, na slici 15.1 ilustrovan u slučaju $b = 1.05$, je karakterisan fiksnom tačkom koja leži u blizini kolena leve grane. S druge strane, kada je $b < 1$, fiksna tačka se pomera ka srednjoj grani, tj. postaje nestabilna.

Za ekscitabilno ponašanje sistema (15.28) su od ključnog značaja kubna nelinearnost brzog nullcline-a i oštra seperacija između karakterističnih skala brze i spore promenljive [34]. Kao što pomenuli, spoljašnja perturbacija može da se posmatra kao definisanje početnih uslova [154]. U slučaju da su početni uslovi takvi da trajektorija prvo dođe do grane S_R , reprezentativna tačka se spušta niz nju do ekvilibrizuma, gde ostaje do naredne perturbacije. Ovakvo ponašanje odgovara opisu ekscitacije male amplitude, vidi trajektoriju označenu sa SAE na slici 15.1. S druge strane, ukoliko su početni uslovi takvi da trajektorija prvo dosegne S_S granu, reprezentativna tačka sistema (15.28) beleži veliku ekskurziju u faznom prostoru [175]. Takva orbita (primer označen sa LAE na slici 15.1) se sastoji od kretanja nagore do prevojne tačke $(x, y) = (1, 2/3)$, zatim skoka na granu S_R i potom povratka u ekvilibrizum, kao što je već opisano. Drugim rečima, dovoljno velika perturbacija može da pobudi spiking odgovor sistema (15.28).

Sintagma "dovoljno velika perturbacija" implicira postojanje praga koji razdvaja odgovore male i velike amplitude. Postojanje praga je tipično povezano sa sedlastim strukturama, koje razdvajaju baze atrakcije dva stabilna stanja. U našem slučaju, menjajući početne uslove, moguće je uočiti granicu koja upravo na taj način razdvaja dve oblasti faznog prostora, a pri tom i sama predstavlja jednu od mogućih trajektorija (vidi orbitu označenu sa $CNRD$ na slici 15.1). Pomenuta trajektorija podseća na kanard [34], a pokazuje se da su trajektorije u njenoj blizini izuzetno osetljive na početne uslove. Upravo zbog takve osetljivosti prelaz s ekscitacija male amplitude na ekscitacije velike amplitude izgleda kao kontinualan, pre nego kao da postoji jasno određena granica (prag). Ovakav tip granice u stvari je nasleđen iz singularnog limesa $\epsilon \rightarrow 0$, u kojem grane S_R i S_S mogu da se posmatraju kao atraktori. Takođe, tada i separatriisa između takva dva atraktora uključuje srednju granu nullcline-a $F(x, y) = 0$. Kada je ϵ konačno separatriisa nestaje, ali postoji ceo sloj linija koje igraju sličnu ulogu. Tako je čak i u slučaju konačnog ϵ opravdano tretirati pomenutu trajektoriju sličnu kanardu kao "prividnu separatriisu" (ghost-separatrix) [154].

Napomenimo da zbog uslova $\epsilon \ll 1$ Hopfova bifurkacija, do koje dolazi na $b = 1$, ima singularan karakter [86, 140]. Drugim rečima, njena nor-

malna forma, koja odgovara kvaziharmonijskim oscilacijama, opstaje samo u malom intervalu vrednosti $b < 1$. U tom intervalu je frekvencija oscilovanja reda $\nu(b) = \mathcal{O}(1)$, dok su amplitude promenljivih x i y reda $\mathcal{O}(\epsilon) = \mathcal{O}(\sqrt{b-1})$ i $\mathcal{O}(\epsilon)$, respektivno [34]. S druge strane, ispod vrednosti b zadate uslovom $1 - b = \epsilon/8$ dešava se prelaz ka graničnom ciklusu koji odgovara relaksacionim oscilacijama [208], čija je amplituda reda $\mathcal{O}(1)$ i po x i po y promenljivoj. Ovakvo ponašanje odgovara scenariju "eksplozije kanarda" [34]. Period relaksacionih oscilacija određen je globalnom strukturom faznog prostora, a pre svega zavisi od sporog kretanja duž grana S_R i S_S kubnog nullcline-a. Korisno je da procenimo trajanje tog perioda. Kada je $b < 1$ i $\epsilon \rightarrow \infty$, kretanje na graničnom krugu može da se razdvoji na dva segmenta sporog i dva segmenta brzog kretanja. Sporo kretanje se odvija na vremenskoj skali $\mathcal{O}(1)$, a trajektorija prati grane S_R i S_S duž kojih važi $\dot{x} = \frac{x+b}{1-x^2}$ i $y = x - \frac{1}{3}x^3$. Spori segmenti su povezani brzim skokovima (karakteristična vremenska skala $\mathcal{O}(\epsilon)$) s grane S_R na S_S i *vice versa*, koji su karakterisani sa $\epsilon\dot{x} = x - \frac{1}{3}x^3 - y, y = \pm\frac{2}{3}$. Period graničnog ciklusa T_{LC} može da se aproksimira samo sporim segmentima [175]:

$$T_{LC} = \int_{-2}^{-1} \frac{1-x^2}{x+b} dx + \int_2^1 \frac{1-x^2}{x+b} dx = 3 - (1-b^2) \ln \frac{4-b^2}{1-b^2}, \quad (15.31)$$

što u blizini kritične tačke daje $\lim_{b \rightarrow 1^-} T_{LC}(b) \approx 3$.

Osvrnimo se sada ukratko na slučaj dinamike *FHN* jedinice izložene delovanju šuma. U najopštijoj formi, jednačine *FHN* modela tada glase

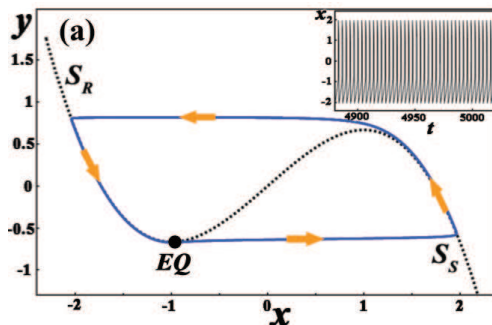
$$\begin{aligned} \epsilon dx &= (x - x^3/3 - y)dt + \sqrt{\epsilon} \sqrt{2D_1} dW_1, \\ dy &= (x + b)dt + \sqrt{2D_2} dW_2, \end{aligned} \quad (15.32)$$

pri čemu su stohastički efekti uključeni i u brzom i u sporom podsystemu da bi uračunali potencijalno različite izvore šuma. Članovi $\sqrt{2D_i} dW_i$ predstavljaju stohastičke inkremente nezavisnih Wiener-ovih procesa, čije očekivane vrednosti i korelacije zadovoljavaju $\langle dW_i \rangle = 0, \langle dW_i dW_j \rangle = \delta_{i,j} dt$ where $i, j \in \{1, 2\}$. Pri tom, D_1 član u brzom promenljivoj $x(t)$ kvalitativno odgovara sinaptičkom šumu, dok delovanje D_2 člana može da se pripíše šumu u jonskim kanalima [154]. Na ovom mestu ne možemo da ulazimo u detaljniju analizu rezonantnih efekata, pošto se njima bavi statistička fizika. Ipak, pomenućemo da za konfiguraciju $D_1 > 0, D_2 = 0$ postoje optimalne vrednosti D_1 na kojima se dešava samoindukovana stohastička rezonanca, dok za konfiguraciju $D_1 = 0, D_2 > 0$ postoji interval vrednosti D_2 koji obezbeđuje rezonancu koherencije. Koherencija vremenskih serija, tj. varijabilnost spike

train-a, standardno se meri *koeficijentom varijacije* R , poznatom i kao jitter [252, 39, 90]. Koeficijent varijacije je definisan kao standardna devijacija interspike intervala T , normalizovana njegovom srednjom vrednošću

$$R = \frac{\sqrt{\langle \Delta T^2 \rangle}}{\langle T \rangle}, \quad (15.33)$$

pri čemu se $\langle \cdot \rangle$ odnosi na vremensko usrednjavanje, dok $\langle \Delta T^2 \rangle = \langle T^2 \rangle - \langle T \rangle^2$ označava varijansu. Na osnovu definicije, jasno je da važi $R \in [0, 1]$, s tim što manje vrednosti indikuju bolju koherenciju. Već smo pomenuli da je u slučaju rezonance koherencije granični krug koji odgovara oscilacijama izazvanim šumom samo prethodnik kruga koji se pojavljuje u superkritičnom stanju (iznad praga Hopfove bifurkacije). Ova činjenica je ilustrovana na slici 15.2, odakle se vidi i da je forma graničnog ciklusa analogna onoj kod relaksacionih oscilatora [175]. Kao što smo i očekivali, tipična orbita se sastoji iz dva segmenta sporog kretanja povezanih dvama brzim segmentima koji su inicirani u okolini prevojnih tačaka brzog nullcline-a, $(x, y) = (-1, -2/3)$ i $(x, y) = (1, 2/3)$.



Slika 15.2: Tipični fazni portret FHN neurona u režimu rezonance koherencije dobijenom za $D = 0.003, b = 1.05, \epsilon = 0.01$. Vremenska serija prikazana u insetu pokazuje visok nivo koherencije.

15.5.8 Dinamika populacije FHN neurona pod dejstvom šuma i sinaptičkog kašnjenja: paradigma kolektivnog ponašanja makroskopskih neuronskih sistema

U nekoliko prethodnih odeljaka bavili smo se ekscitabilnošću kao fundamentalnom osobinom dinamike neurona. Sledećih nekoliko odeljaka biće posvećeno kolektivnom ponašanju makroskopskih sistema neurona, čija je lokalna dinamika predstavljena FHN modelom, generičkim za ekscitabilnost tipa II. Radi biofiziološke opravdanosti, razmatraćemo model popu-

lacije neurona koji uključuje delovanje šuma i sinaptičkog kašnjenja (kašnjenja u interakcijama). Pri tom, pretpostavićemo da su neuroni identični (homogena populacija), interakcije linearne (električne sinapse), da je šum lokalni i aditivan, kao i da su sinaptička kašnjenja τ uniformna. Da bi omogućili primenu mean-field (*MF*) aproksimacije, smatraćemo da su jedinice globalno povezane, i to simetričnim vezama uniformne jačine c . U skladu s prethodnim, dinamika posmatrane populacije neurona opisana je sledećim sistemom kuplovanih nelinearnih stohastičkih diferencijalnih jednačina s kašnjenjem¹⁹, *SDDE*:

$$\begin{aligned} \epsilon dx_i &= (x_i - x_i^3/3 - y_i + I)dt + \frac{c}{n_i} \sum_{j=1}^N g_{ij}[x_j(t - \tau) - x_i(t)], \\ dy_i &= (x_i + b)dt + \sqrt{2D}dW_i, \end{aligned} \quad (15.34)$$

pri čemu za očekivane vrednosti i korelacije stohastičkih inkremenata Wienerovih procesa važi $\langle dW_i \rangle = 0$, $\langle dW_i dW_j \rangle = \delta_{ij}dt$.

Naš cilj je da u narednih nekoliko odeljaka na primeru sistema (15.34) ukratko predstavimo dosadašnje rezultate dve linije istraživanja kolektivnog ponašanja makroskopskih populacija ekscitabilnih jedinica. Jedna linija se sastoji u razvijanju aproksimativnih modela makroskopske dinamike zasnovanih na primeni metode srednjeg polja (*MF* method) u slučaju populacija ekscitabilnih jedinica izloženih šumu i sinaptičkom kašnjenju, pri čemu je fokus na ispitivanju stohastičke stabilnosti i stohastičkih bifurkacija posmatranog sistema. Iako je motivacija za takav pristup višestruka, glavna korist se sastoji u tome što problem stohastičkih (fenomenoloških) bifurkacija na egzaktnom sistemu može da se transformiše u pitanje analize bifurkacija na kompaktnim sistemima običnih diferencijalnih jednačina s kašnjenjem, gde se intenzitet šuma ponaša kao (bifurkacioni) parametar [185, 365]. Druga linija istraživanja kojom ćemo se baviti razmatra da li i u kojoj meri je moguće uspostaviti analogiju između kompleksnih fenomena samoorganizacije na sistemima interagujućih nelinearnih oscilatora i kolektivnog ponašanja kuplovanih ekscitabilnih jedinica. Pitanje je opravdano s obzirom na poznate činjenice da interagujuće ekscitabilne jedinice mogu da se sinhronizuju kao posledica kuplovanja unutar populacije [125], kao i da je oscilatorne mode izazvane šumom moguće kontrolisati preko delayed feedback-a [34]. Pre nego što se neposredno pozabavimo prvom linijom istraživanja, neophodno je da detaljnije predstavimo fenomen stohastičke bifurkacije.

¹⁹system of stochastic delay-differential equations (eng.)

15.5.9 Pojam stohastičke bifurkacije

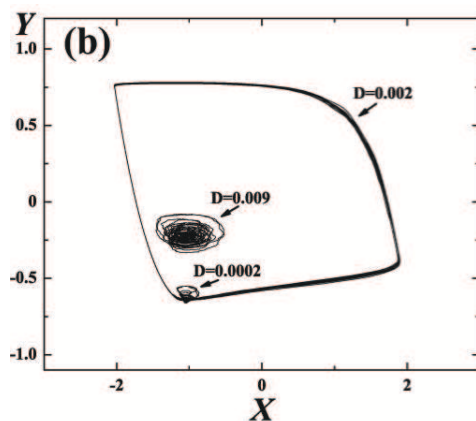
Da bi objasnili pojam stohastičke bifurkacije, najbolje je odmah napraviti poređenje s fenomenom bifurkacije koji nam je poznat u determinističkim sistemima. Znamo da se u determinističkom slučaju bifurkacije odnose na kvalitativnu promenu asimptotske dinamike sistema iznad kritične vrednosti bifurkacionog parametra (ili bifurkacionih parametara). Iako još uvek ne postoji formalna definicija stohastičkih (fenomenoloških) bifurkacija, moguće ih je uslovno posmatrati kao kvalitativnu promenu neke vremenski usrednjene veličine, kao što je distribucija gustine verovatnoće ili spektar snage (Arnold, 1998) [10]. Na primer, jedan od tipičnih primera podrazumeva da asimptotska distribucija gustine verovatnoće zabeleži prelaz iz unimodalne u bimodalnu [340, 365, 2]. Primetimo da za razliku od determinističkih bifurkacija, bifurkacije vođene šumom mogu da budu "razmazane" preko neke oblasti vrednosti, umesto da se dešavaju na kritičnoj vrednosti bifurkacionog parametra.

Pošto analitičko tretiranje pitanja stohastičke stabilnosti i stohastičkih bifurkacija pripada oblasti statističke fizike, ovde ćemo kratko navesti dosadašnje rezultate i glavne probleme u istraživanju. Pomenimo prvo da monovarijantni sistemi opisani stohastičkom linearnom diferencijalnom jednačinom s kašnjenjem oblika $dx(t) = (ax(t) + bx(t - \tau))dt + \sigma dW(t)$ čine jednu od retkih klasa sistema čiju je stabilnost moguće tretirati analitički [191, 176]. Naime, u slučaju gausijanskog šuma, poznato je da je stabilnost određena dinamikom prvih i drugih momenata stohastičke promenljive $\langle x(t) \rangle$ i $\langle x^2(t) \rangle$, gde $\langle \cdot \rangle$ označava usrednjavanje po različitim realizacijama stohastičkog procesa.

S druge strane, u statističkoj fizici se stabilnost sistema nelinearnih diferencijalnih jednačina bez kašnjenja standardno određuje primenom Fokker-Planck-ovog formalizma [276, 94]. Kod monovarijantnih sistema, rezultate dobijene Fokker-Planck-ovim formalizmom moguće je proširiti na limes malog kašnjenja i kašnjenja koje je uporedivo s vremenom korelacije sistema [96, 97]. Međutim, glavni problem analitičkih metoda se sastoji u tome da Fokker-Planck-ov formalizam u opštem slučaju nije primenjiv na nelinearne *SDDE*, pre svega zbog nemarkovljevog karaktera procesa i nemogućnosti da se metode sa linearnih prenesu na nelinearne sisteme *SDDE* [123, 96, 97]. Upravo ova činjenica ističe značaj primene *MF* aproksimacije. Kao što smo već pomenuli, stohastičke bifurkacije *SDDE* sistema koji odgovara egzaktnom modelu mogu da se kvalitativno uporede s bifurkacijama determinističkog aproksimativnog *MF* sistema u kome intenzitet šuma igra ulogu bifurkacionog parametra.

Na kraju ovog odeljka predstavimo koncept stohastičkih bifurkacija na konkretnom primeru. Naime, poznato je da se najznačajniji efekat šuma u ekscitabilnim medijima sastoji u tome što šum može da igra ulogu kontrolnog parametra, tako da njegovim monotonim povećavanjem sistem prolazi kroz tri generička režima kolektivnog ponašanja [148]:

- i nekoherentno opaljivanje ("subthreshold motion") na malim intenzitetima šuma, gde je opaljivanje pojedinačnih neurona sporadično i nesinhronizovano;
- ii koherentni režim na intermedijarnim šumovima, gde sistem manifestuje kolektivnu modu zahvaljujući aproksimativnoj sinhronizaciji između aktivnosti jedinica, koja podrazumeva regularno opaljivanje relativno velike frekvencije;
- iii haotično kolektivno stanje na velikim intenzitetima šuma, gde jedinice opaljuju velikim frekvencijama, ali je njihova aktivnost nekoherentna.



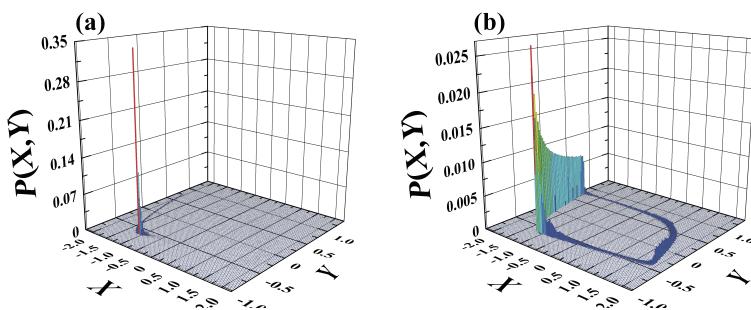
Slika 15.3: Tri generička režima koji u ekscitabilnim medijima nastaju pri monotonom povećanju intenziteta šuma D u slučaju trenutnih interakcija. Fazni portreti odgovaraju globalnim promenljivima Fitzhugh-Nagumo populacije opisane sistemom (15.34) kada je $\tau = 0$. Na slici su ilustrovani nekoherentno kretanje ($D = 0.0002$), koherentne kolektivne oscilacije ($D = 0.002$) i haotični režim ($D = 0.009$). Ostali parametri su $\epsilon = 0.01$, $b = 1.05$, $c = 0.1$.

Sva tri režima ilustrovana su na slici 15.3, koja je dobijena simulacijom sistema (15.34) za različite vrednosti šuma D pri fiksiranom $\tau = 0$. Napomenimo da je kolektivna dinamika opisana uvođenjem globalnih (makroskop-

skih) promenljivih

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \\ Y &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i. \end{aligned} \tag{15.35}$$

Na slici 15.4 je prikazana promena oblika asimptotske distribucije globalnih promenljivih (15.35), koja odgovara prelasku iz režima nekoherentnog opaljivanja u koherentno stanje, tj. stohastičkoj bifurkaciji iz stohastički stabilne fiksne tačke u stohastički stabilan granični ciklus. U poslednjem odeljku ćemo pokazati da se dinamička paradigma ilustrovana na slici 15.3 značajno menja ukoliko se uračunaju efekti sinaptičkog kašnjenja.



Slika 15.4: Asimptotske distribucije gustine verovatnoće $P(X, Y)$ tipične za (a) nekoherentno kolektivno stanje ($D = 0.0002$) i (b) kolektivno koherentno stanje ($D = 0.002$). Slučaju (a) dinamički odgovara stohastički stabilna fiksna tačka, dok je slučaj (b) opisan stohastički stabilnim graničnim ciklusom.

15.5.10 MF pretpostavke i izvođenje MF modela

Dosad smo već pomenuli glavni razlog za uvođenje MF aproksimacije. Napomenimo sada i da se MF opis globalne dinamike sistema uklapa u poznati koncept nelinearne dinamike, prema kojem se svaki ansambl kuplovanih oscilatora koji ispoljava kolektivnu modu može posmatrati kao makroskopski nelinearni oscilator [16]. Naravno, ne treba zanemariti ni praktični razlog za uvođenje MF aproksimacije, koji se odnosi na činjenicu da je numerička integracija MF sistema mnogo efikasnija od numeričke integracije egzaktnog sistema. Naime, računarsko vreme potrebno za simuliranje populacije od N kuplovanih oscilatora raste kao N^2 [124], pri čemu u slučaju stohastičkih sistema postoji i dodatni zahtev za usrednjavanje po različitim realizacijama stohastičkog procesa.

Prilikom izvođenja MF modela, prvo se postavlja pitanje da li su pretpostavke pod kojima važi MF aproksimacija univerzalne, ili zavise od klase sistema kojoj posmatrani model pripada. U našem slučaju, pokazuje se da je standardne MF pretpostavke potrebno modifikovati i adaptirati na kvalitativne osobine sistema, koje proizlaze iz ekscitabilnosti tipa II. Najvažnija od tih osobina se odnosi na činjenicu da oscilacije imaju relaksacioni karakter. Imajući to u vidu, pokazuje se da su za važenje MF aproksimacije u našem slučaju relevantne pretpostavka o kvazinezavisnosti i gausijanska pretpostavka, koje mogu da se formulišu kao:

i pretpostavka o kvazinezavisnosti

slučajne promenljive $\{x_i(t)|i = 1, \dots, N\}$ i $\{y_i(t)|i = 1, \dots, N\}$ za svako t i dovoljno veliko N zadovoljavaju aproksimativne jednakosti

$$X(t) \equiv \frac{1}{N} \sum_i^N x_i(t) \approx \langle x_i(t) \rangle$$

$$Y(t) \equiv \frac{1}{N} \sum_i^N y_i(t) \approx \langle y_i(t) \rangle$$

ii gausijanska pretpostavka

za većinu trenutaka t_0 , inkrementi $dx_i(t)$, $dy_i(t)$ odgovarajućih slučajnih procesa mogu da se izračunaju u intervalu $t \in (t_0, t_0 + \delta t)$ sa zadovoljavajućom tačnošću pretpostavljajući da su slučajne promenljive $x_i(t)$, $y_i(t)$ za svako $i = 1, \dots, N$ i $t \in (t_0, t_0 + \delta t)$ normalno distribuirane oko očekivanih vrednosti $(\langle x_i(t) \rangle, \langle y_i(t) \rangle) \approx (X(t), Y(t))$.

Između ostalog, sintagma "za većinu trenutaka" u formulaciji gausijanske pretpostavke odražava adaptaciju na relaksacioni karakter oscilacija.

Ne ulazeći u detalje, ispostavlja se da obe pretpostavke važe ukoliko lokalna i globalna dinamika imaju atraktore istog tipa (fiksna tačka ili granični ciklus), pod uslovom da D nije suviše veliko. S druge strane, gausijanska pretpostavka prestaje da važi kada fluktuacije faze uzrokovane šumom naruše kvalitativnu analogiju između dinamike pojedinačnih realizacija i očekivanih vrednosti. Takođe, moguće je pokazati i da bistabilnost dinamike MF modela, koja nastaje kao posledica globalne bifurkacije kontrolisane intenzitetom šuma D , ukazuje na narušenje pretpostavke o kvazinezavisnosti. Poslednji rezultat je od izuzetnog značaja jer pokazuje da dinamika MF modela može na samousaglašen način da ukaže na oblasti parametara gde MF aproksimacija ne važi. Naglasimo da bistabilnost dinamike MF modela

predstavlja potreban, ali ne i dovoljan uslov narušenja MF aproksimacije, pošto, kao što smo već pomenuli, do narušenja može da dođe i zbog prestanka važenja gausijanske pretpostavke.

Sada ćemo ukratko predstaviti izvođenje MF modela za populaciju ekscitabilnih jedinica pod uticajem šuma i sinaptičkog kašnjenja [38, 91]. MF model se sastoji od pet jednačina za prve momente $m_x(t)$, $m_y(t)$ i druge momente $s_x(t)$, $s_y(t)$, $u(t)$ distribucije lokalnih promenljivih $x_i(t)$ i $y_i(t)$

$$\begin{aligned} m_x(t) &= \langle x_i(t) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} (1/N) \sum_{i=1}^N x_i(t), \\ m_y(t) &= \langle y_i(t) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} (1/N) \sum_{i=1}^N y_i(t), \\ s_x(t) &= \langle n_{x_i}^2(t) \rangle = \langle (\langle x_i(t) \rangle - x_i(t))^2 \rangle, \\ s_y(t) &= \langle n_{y_i}^2(t) \rangle = \langle (\langle y_i(t) \rangle - y_i(t))^2 \rangle, \\ u(t) &= \langle n_{x_i}(t) n_{y_i}(t) \rangle = \langle (\langle x_i(t) \rangle - x_i(t)) (\langle y_i(t) \rangle - y_i(t)) \rangle, \end{aligned} \quad (15.36)$$

gde su $n_{x_i}(t) = \langle x_i(t) \rangle - x_i(t)$ i $n_{y_i}(t) = \langle y_i(t) \rangle - y_i(t)$ devijacije od odgovarajućih srednjih vrednosti $\langle x_i(t) \rangle$ i $\langle y_i(t) \rangle$.

Bitan korak u izvođenju konačnih jednačina MF modela se sastoji u uvođenju tzv. "closure"-hipoteze [185]. Naime, kao posledica nelinearnosti početnog $SDDE$ sistema (15.34), sistem (15.36) je nezatvoren u smislu da dinamika momenata nižeg reda zahteva poznavanje dinamike momenata višeg reda. Na tom mestu je pogodno iskoristiti gausijansku aproksimaciju [185, 340, 277, 365], prema kojoj nestaju svi kumulanti reda većeg od dva, tako da je kolektivno ponašanje efektivno moguće opisati preko globalnih promenljivih i njihovih fluktuacija. Koristeći pomoćne jednačine koje proizlaze iz "closure"-hipoteze [94], za dinamiku MF modela se dobija

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{dm_x(t)}{dt} &= m_x(t) - m_x(t)^3/3 - s_x(t)m_x(t) - m_y(t) + \\ &\quad g_{in}(m_x(t - \tau_{in}) - m_x(t)) \\ \frac{dm_y(t)}{dt} &= m_x(t) + b \\ \frac{\epsilon ds_x(t)}{2 dt} &= s_x(t)(1 - m_x^2(t) - s_x(t) - g_{in}) - u(t) \\ \frac{1 ds_y(t)}{2 dt} &= u(t) + D \\ \frac{du(t)}{dt} &= \frac{u(t)}{\epsilon} (1 - m_x^2(t) - s_x(t) - g_{in}) - \frac{1}{\epsilon} s_y(t) + s_x(t). \end{aligned} \quad (15.37)$$

Ispostavlja se da bifurkacionu analizu sistema (15.37) nije moguće sprovesti analitički. Zato je pogodno da se uvede dodatna "adijabatska aproksimacija" [185], prema kojoj je vreme relaksacije momenata drugog reda malo. Eliminacijom brzih promenljivih iz sistema (15.37) dobija se verzija MF modela od samo dve jednačine za prve momente [38]

$$\begin{aligned} \epsilon \frac{dm_x(t)}{dt} &= m_x(t) - m_x(t)^3/3 - \\ &\quad - \frac{m_x(t)}{2} \left\{ 1 - c - m_x(t)^2 + \sqrt{[c - 1 + m_x(t)^2]^2 + 4D} \right\} \\ &\quad - m_y(t) + c[m_x(t - \tau) - m_x(t)], \\ \frac{dm_y(t)}{dt} &= m_x(t) + b, \end{aligned} \quad (15.38)$$

koja dozvoljava da se bifurkaciona analiza izvede analitički. Iz perspektive teorije nelinearne dinamike, važna je činjenica da aproksimativni model (15.38) ima osobinu ekscitabilnosti, analogno jedinicama koje čine populaciju [38, 91].

Bifurkacionom analizom MF modela i poređenjem s ponašanjem egzaktnog sistema, pokazuje se da MF model može kvalitativno da opiše stabilnost egzaktnog sistema, scenario za pojavu kolektivne mode putem direktne superkritične Hopfove bifurkacije, supresiju kolektivne mode (fenomen poznat kao "smrt amplitude", "amplitude death" [270, 317]) pod dejstvom sinaptičkog kašnjenja kroz scenario inverzne subkritične Hopfove bifurkacije, kao i bistabilne režime, karakterisane koegzistencijom stacionarnog i oscilatornog rešenja ili dve oscilatorne mode [38, 91]. Ističemo da pored kvalitativnih, aproksimativni model može da obezbedi i kvantitativno ispravna predviđanja, što se odnosi na poklapanje perioda oscilovanja MF modela i srednjeg interspike intervala makroskopske promenljive $X(t)$ egzaktnog sistema. Dodajmo da analogni zaključci važe i u slučaju MF aproksimacije dobijene za sistem od dve populacije ekscitabilnih jedinica, pri čemu je interakcija između populacija zadata nelinearnom funkcijom globalnih promenljivih [91]. Egzaktni sistem tada uključuje delovanje šuma na svaku jedinicu posmatranih populacija, kao i dva tipa kašnjenja, jedan koji se odnosi na interakcije unutar, a drugi između populacija. Kao polazna ideja za konstruisanje MF aproksimacije iskorišćena je činjenica da svaka populacija koja manifestuje kolektivnu modu može da se posmatra kao makroskopski nelinearni oscilator [13], što implicira i da dinamika svake od populacija može da bude zamenjena odgovarajućim MF modelom.

15.5.11 Spontano klasterovanje kao fenomen samoorganizacije u populaciji FHN neurona pod dejstvom šuma i sinaptičkog kašnjenja

Već smo pomenuli kako je sa teorijskog stanovišta, kako za oblast nelinearne dinamike, tako i za neuronauku, konceptualno značajan pravac istraživanja usmeren ka ekstenziji analogije između kompleksnih formi kolektivnog ponašanja uočenog na populacijama nelinearnih autonomnih oscilatora i makroskopske dinamike ansambala ekscitabilnih elemenata. U tom kontekstu, ukratko ćemo razmotriti nedavno objavljene rezultate koji se odnose na fenomen spontane klaster-sinhronizacije na homogenoj populaciji ekscitabilnih jedinica opisanoj sistemom (15.40), do kojeg dolazi jedino usled sadejstva ekscitabilnosti, šuma i sinaptičkog kašnjenja (kašnjenja u interakcijama) [89, 90]. Zašto je uočeni efekat važan? Pre svega zato što eksplicitno pokazuje da sistemi ekscitabilnih jedinica, analogno sistemima nelinearnih autonomnih oscilatora, mogu da manifestuju kompleksne fenomene samoorganizacije zasnovane na sinhronizaciji lokalne aktivnosti.

Ne ulazeći u detalje koji su izvan domena ovog pregleda, pomenimo samo da se efekat klasterovanja zasniva na kompeticiji dve karakteristične vremenske skale, od kojih jedna odgovara kolektivnoj oscilatornoj modi izazvanoj šumom, a druga modi vođenoj kašnjenjem. Najjednostavnije rečeno, u slučaju klaster stanja prevladava moda izazvana šumom, dok kod homogenih stanja dominira moda određena sinaptičkim kašnjenjem [89, 90]. Detaljna analiza pokazuje i da klasterovanje ima osobine rezonantnog fenomena u odnosu na kašnjenje τ . Pri tom, rezonantne vrednosti τ_{res} zadovoljavaju relaciju

$$\tau_{res} = T_0(D)/2 + n * T_0(D), \quad (15.39)$$

koja formalno podseća na već poznati rezultat [359] u slučaju kuplovanih faznih oscilatora. Bitnu razliku, međutim, predstavlja činjenica da rezonantna kašnjenja u našem slučaju implicitno zavise od šuma preko sopstvenog perioda oscilovanja nekuplovanog neurona $T_0(D)$. Na nivou lokalne dinamike, mehanizam klasterovanja može da se objasni primenom metoda statističke fizike, uspostavljajući analogiju između kretanja ekscitabilnih jedinica i kretanja čestica u double-well potencijalu [90].

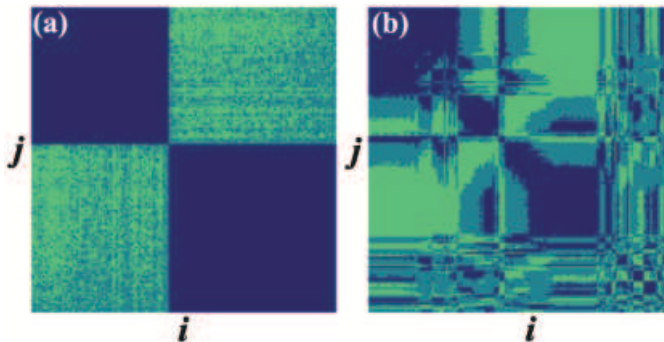
Pošto je opaljivanje neurona rezultat koefekta šuma i sinaptičkog kašnjenja, za karakterizaciju međusobne koordinacije aktivnosti neurona pogodno je da se uvede koherencija [360, 320]

$$\kappa_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^m \xi_i(k)\xi_j(k)}{\sqrt{\sum_{k=1}^m \xi_i(k)\xi_j(k)}}, \quad (15.40)$$

koja efektivno predstavlja korelaciju spike train-ova (serija impulsa) posmatranih neurona. Pri tom, spike train-ovi su zadati tako što je svakom neuronu i dodeljena binarna promenljiva $\xi_i(k) \in \{1, 0\}$, u zavisnosti od toga da li je opalio ($\xi_i(k) = 1$) ili ne ($\xi_i(k) = 0$) u posmatranom vremenskom binu k . Tada se stanja populacije mogu opisati preko globalne koherencije

$$\kappa = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i,j=1; i \neq j}^N \kappa_{ij}.$$

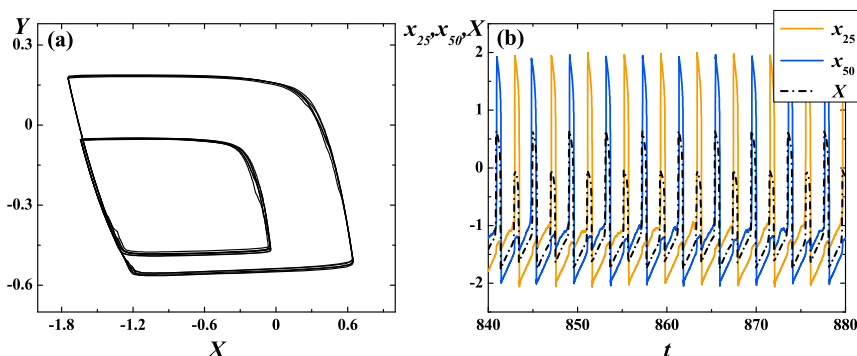
Istaknimo da globalna koherencija pravi jasnu razliku između tri tipa kolektivnih stanja sistema: homogenog sinhronizovanog (koherentnog) stanja, klaster stanja i homogenog nekoherentnog stanja. Na primer, jasno je da je vrednost κ manja za klaster stanja, nego za homogena koherentna stanja. U tom smislu, ako posmatramo zavisnosti $\kappa(D)$ pri fiksnom τ ili $\kappa(\tau)$ pri fiksnom D , klaster stanja odgovaraju lokalnim minimumima [90].



Slika 15.5: Preuređene matrice koherencije za (a) stabilno dvoklaster stanje i (b) dinamičku troklaster particiju. Veća koherencija prikazana je tamnijom bojom. (a) pokazuje jasnu razdvojenost između klastera, dok je na slici (b) vidljivo mešanje između tri klastera. (a) je dobijeno za vrednosti parametara $\tau = 5, D = 0.0005, c = 0.1$, a (b) za $\tau = 10, D = 0.0013, c = 0.1$.

Koristeći opisane metode, uočeno je da postoje asimptotski **stabilne dvo- i troklaster particije**, kao i **troklaster stanja dinamičkog karaktera** [86], kod kojih jedinice mogu da prelaze između klastera. Razlika između asimptotski stabilnih i dinamičkih particija ilustrovana je na slici 15.5 preko preuređenih matrica koherencije [89, 90], pri čemu se jasno vidi da je koherencija između klastera mnogo izraženija na slici 15.5(b) nego na slici 15.5(a). Samo postojanje dvo- i troklaster stanja može da se interpretira kao posledica relaksacionog karaktera oscilovanja, odnosno ekcitabilnosti klase II, kojoj *FHN* model neurona pripada. Intuitivno je jasno da dvoklaster stanja odražavaju postojanje dve stabilne grane kubnog nullcline-a, dok se pojava dinamičkih troklaster stanja može dovesti u vezu s produženim bo-

ravkom reprezentativne tačke neurona u blizini ekvilibrjuma. U slučaju dvoklaster stanja, vidi fazni portret na slici 15.6(a), dinamika sistema je usklađena tako da se aproksimativno održava fazna razlika π između klastera. To znači da kada je jedan klaster aktivan, drugi je refraktoran, što je ilustrirano na slici 15.6(b). Napomenimo i da je primenom metoda statističke fizike moguće pokazati da su dvoklaster stanja stabilna i u termodinamičkom limesu $N \rightarrow \infty$. U biofiziološkom kontekstu, relevantna je međutim činjenica da klasterovanje opstaje u slučaju razuđenih topologija povezanosti neurona, kao i pri neuniformnim vrednostima lokalnih parametara. U tom kontekstu, potvrđena je pojava klaster stanja na *scale-free* mrežama, čiji je karakteristični eksponent $\gamma \approx 2$ tipičan za realne neuronske sisteme [5, 308]. S druge strane, kao interesantan i neočekivan rezultat se pokazalo da globalna fold-cycle bifurkacija aproksimativnog *MF* modela (15.40) može da anticipira pojavu klasterovanja u pojedinim oblastima parametara sistema [89, 90].



Slika 15.6: Karakterizacija dvoklaster stanja. (a) Fazni portret za kolektivne promenljive pokazuje dva jasno razlučiva segmenta koji odgovaraju dinamici pojedinačnih klastera. (b) Vremenska serija globalne promenljive $X(t)$ (isprekidana crna linija) je prikazana zajedno sa dve $x_i(t)$ serije (pune linije) arbitrarnih neurona koji pripadaju različitim klasterima. Rezultati su dobijeni za vrednosti parametara $c = 0.1$, $D = 0.00025$, $\tau = 2$.

Deo III

Dodaci

Glava 16

Fazni portreti dvodimenzionalnih linearnih sistema

Analiza dvodimenzionalnih linearnih sistema sprovedena je u Glavi 5. Tada je pažnja bila usmerena na mogućnost potpune analize rešenja i klasifikaciju stacionarnih tačaka. Međutim, ostala je po strani geometrijska analiza trajektorija sistema, koja je u faznoj ravni moguća i, štaviše, veoma upečatljiva. Cilj ovog dodatka je da detaljno prikaže strukturu faznih portreta dvodimenzionalnih linearnih dinamičkih sistema. Iako se u prethodnom tekstu mogu naći elementi analize rešenja sistema običnih diferencijalnih jednačina, ona će ovde biti prikazana u kontekstu sistema drugog reda. Pored toga, posebna pažnja će biti posvećena normalnoj formi dinamičkih sistema, jer je u tom slučaju moguće vrlo lako sprovesti analizu faznih trajektorija i konstrukciju faznog portreta. Najzad, treba imati na umu da analiza linearnih sistema ima reperkusije i na analizu nelinearnih sistema: lokalni fazni portreti u okolini stacionarnih tačaka mogu predstavljati ključne delove mozaika koji predstavlja globalni fazni portret nelinearnog sistema.

16.1 Linearni sistemi drugog reda

Posmatrajmo linearni dinamički sistem drugog reda, opisan pomoću dve obične diferencijalne jednačine prvog reda:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax + by; \\ \dot{y} &= cx + dy.\end{aligned}\tag{16.1}$$

Cilj analize je da za linearne dinamičke sisteme oblika (16.1) konstruišemo rešenje i dobijemo njihov lokalni fazni portret u okolini stacionarne tačke $(x, y) = (0, 0)$.

16.1.1 Konstrukcija rešenja linearnih sistema

Zapišimo linearni dinamički sistem (16.1) u vektorskom obliku:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (16.2)$$

koristeći vektor stanja \mathbf{x} i matricu desne strane sistema \mathbf{A} :

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}. \quad (16.3)$$

U nastavku ćemo razmotriti neka bitna svojstva linearnih sistema.

Princip superpozicije. Neka su:

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{x}_2(t) = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix},$$

dva nezavisna rešenja sistema (16.3):

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_i(t), \quad i = 1, 2.$$

Tada svaka njihova linearna kombinacija $\mathbf{x}(t) = C_1\mathbf{x}_1(t) + C_2\mathbf{x}_2(t)$ takođe predstavlja rešenje sistema (16.3):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= C_1\dot{\mathbf{x}}_1(t) + C_2\dot{\mathbf{x}}_2(t) = C_1\mathbf{A}\mathbf{x}_1(t) + C_2\mathbf{A}\mathbf{x}_2(t) \\ &= \mathbf{A}(C_1\mathbf{x}_1(t) + C_2\mathbf{x}_2(t)) = \mathbf{A}\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Opšte rešenje. Fundamentalna matrica. Kao što je poznato iz teorije linearnih diferencijalnih jednačina, opšte rešenje linearne homogene jednačine reda n se može konstruisati kao linearna kombinacija n međusobno nezavisnih rešenja. Na isti način se opšte rešenje linearnog homogenog sistema n ODJ prvog reda dobija kao linearna kombinacija n nezavisnih vektora rešenja. U slučaju sistema drugog reda to se svodi na linearnu kombinaciju dva linearno nezavisna vektora rešenja:

$$\mathbf{x}(t) = C_1\mathbf{x}_1(t) + C_2\mathbf{x}_2(t), \quad (16.4)$$

gde su $\mathbf{x}_1(t)$ i $\mathbf{x}_2(t)$ dva linearno nezavisna rešenja sistema (16.3).

Opšte rešenje se može zapisati i pomoću *fundamentalne matrice* rešenja $\Phi(t)$ koja je sačinjena od linearno nezavisnih rešenja sistema (16.3):

$$\Phi(t) = [\mathbf{x}_1(t) \ \mathbf{x}_2(t)] = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{bmatrix}. \quad (16.5)$$

Tada se opšte rešenje (16.4) može zapisati u obliku:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{C} = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ y_1(t) & y_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}.$$

Konstrukcija rešenja. Sva linearno nezavisna rešenja linearnog sistema sa konstantnim koeficijentima određena su *sopstvenim vrednostima* i *sopstvenim vektorima* matrice \mathbf{A} . Sopstvene vrednosti predstavljaju korene karakteristične jednačine:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0,$$

odnosno:

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0. \quad (16.6)$$

Pretpostavimo da su koreni karakteristične jednačine različiti, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Ova pretpostavka će olakšati dalju matematičku proceduru. Bez nje je analiza nešto složenija u formalnom smislu, ali osnovna ideja ostaje ista. U tom slučaju sopstvenim vrednostima odgovaraju nezavisni sopstveni vektori \mathbf{e}_1 i \mathbf{e}_2 koji se dobijaju rešavanjem jednačina:

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_1 = \lambda_1\mathbf{e}_1; \quad \mathbf{A}\mathbf{e}_2 = \lambda_2\mathbf{e}_2. \quad (16.7)$$

Linearno nezavisna rešenja sistema imaju sledeću strukturu:

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{\lambda_1 t}\mathbf{e}_1; \quad \mathbf{x}_2(t) = e^{\lambda_2 t}\mathbf{e}_2. \quad (16.8)$$

Lako se proverava da ovako konstruisana rešenja zaista zadovoljavaju polazni sistem:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_i(t) &= \lambda_i e^{\lambda_i t} \mathbf{e}_i = e^{\lambda_i t} \lambda_i \mathbf{e}_i \\ &= e^{\lambda_i t} \mathbf{A} \mathbf{e}_i = \mathbf{A} e^{\lambda_i t} \mathbf{e}_i = \mathbf{A} \mathbf{x}_i(t), \end{aligned}$$

za $i = 1, 2$.

Sopstvene vrednosti mogu biti realne, ali i konjugovano-kompleksne:

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta; \quad \lambda_2 = \overline{\lambda_2} = \alpha - i\beta. \quad (16.9)$$

U tom slučaju su i sopstveni vektori konjugovano-kompleksni:

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{a} + i\mathbf{b}; \quad \mathbf{e}_2 = \overline{\mathbf{e}_1} = \mathbf{a} - i\mathbf{b}, \quad (16.10)$$

a rešenje ima sledeću strukturu:

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 t} \mathbf{e}_1 &= e^{\alpha t} e^{i\beta t} (\mathbf{a} + i\mathbf{b}) \\ &= e^{\alpha t} (\mathbf{a} \cos \beta t - \mathbf{b} \sin \beta t) + ie^{\alpha t} (\mathbf{a} \sin \beta t + \mathbf{b} \cos \beta t); \\ e^{\lambda_2 t} \mathbf{e}_2 &= \overline{(e^{\lambda_1 t} \mathbf{e}_1)} \end{aligned}$$

stoga se kao linearno nezavisna rešenja sistema (16.3) usvajaju realni i imaginarni deo dobijenih kompleksnih rešenja:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(t) &= e^{\alpha t} [\mathbf{a} \cos \beta t - \mathbf{b} \sin \beta t]; \\ \mathbf{x}_2(t) &= e^{\alpha t} [\mathbf{a} \sin \beta t + \mathbf{b} \cos \beta t]. \end{aligned} \quad (16.11)$$

Tehniku konstrukcije rešenja linearnih autonomnih sistema ćemo ilustrovati sa dva primera.

Primer 4

Linearni dinamički sistem opisan je jednačinama:

$$\dot{x} = -x + 2y; \quad \dot{y} = 2x - y.$$

Konstruisati opšte rešenje i odrediti rešenja koja su saglasna sa početnim uslovima $\mathbf{x}(0) = (0.5, 0.5)^T$ i $\mathbf{x}(0) = (-2, 2)^T$.

Rešenje.

Matrica desne strane datog sistema glasi:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Odgovarajuća karakteristična jednačina i njeni koreni, odnosno spostvene vrednosti matrice \mathbf{A} , imaju sledeći oblik:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0; \\ \lambda_1 &= 1, \quad \lambda_2 = -3. \end{aligned}$$

Odgovarajući sopstveni vektori predstavljaju rešenja jednačina $\mathbf{A}\mathbf{e}_i = \lambda_i\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2$. Ako se sopstveni vektori zapišu u obliku $\mathbf{e}_i = (a_i, b_i)^T$, onda se njihove komponente dobijaju kao rešenja sledećeg sistema jednačina:

$$\begin{aligned} -a_i + 2b_i &= \lambda_i a_i; \\ 2a_i - b_i &= \lambda_i b_i. \end{aligned}$$

Pošto su ovi sistemi neodrejeni, dobijaju se sledeće veze između komponenta: $b_1 = a_1$ i $b_2 = -a_2$, pa se sopstveni vektori mogu usvojiti u sledećem obliku:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Otuda linearno nezavisna rešenja zadanog sistema glase:

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{\lambda_1 t} \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} e^t \\ e^t \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x}_2(t) = e^{\lambda_2 t} \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} e^{-3t} \\ -e^{-3t} \end{bmatrix}.$$

Fundamentalna matrica i opšte rešenje se svode na:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{C} = \begin{bmatrix} e^t & e^{-3t} \\ e^t & -e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 e^t + C_2 e^{-3t} \\ C_1 e^t - C_2 e^{-3t} \end{bmatrix}.$$

Rešenja zadatah početnih problema se svode na određivanje integracionih konstanti C_1 i C_2 koje zadovoljavaju početne uslove. U prvom slučaju $\mathbf{x}(0) = (0.5, 0.5)^T$ rešavanjem sistema linearnih algebarskih jednačina dobija se sledeće rešenje:

$$\left. \begin{aligned} C_1 + C_2 &= 0.5 \\ C_1 - C_2 &= 0.5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow C_1 = 0.5, C_2 = 0; \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 0.5e^t \\ 0.5e^t \end{bmatrix}.$$

U drugom slučaju $\mathbf{x}(0) = (-2, 2)^T$ dobija se:

$$\left. \begin{aligned} C_1 + C_2 &= -2 \\ C_1 - C_2 &= 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow C_1 = 0, C_2 = -2; \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} -2e^{-3t} \\ 2e^{-3t} \end{bmatrix}.$$

Primetimo da su zadati početni uslovi vrlo specifični, jer definišu vektore početnih stanja koji su kolinearni sa sopstvenim vektorima. Zbog toga se i dobijaju rešenja koja su za svako t kolinearna sa sopstvenim vektorima.

Primer 5

Za linearni dinamički sistem opisan jednačinama:

$$\dot{x} = -2x - 2y; \quad \dot{y} = x - 4y.$$

konstruisati opšte rešenje i odrediti rešenje koje je saglasno sa početnim uslovom $\mathbf{x}(0) = (2, 1)^T$.

Rešenje.

Matrica desne strane ovog sistema glasi:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix},$$

pa karakteristična jednačina i sopstvene vrednosti imaju sledeći oblik:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \lambda^2 + 6\lambda + 10 = 0;$$

$$\lambda_1 = -3 + i, \quad \lambda_2 = -3 - i.$$

Kao što vidimo, matrica \mathbf{A} ima par konjugovano-kompleksnih sopstvenih vrednosti čiji su realni i imaginarni deo imaginarni deo:

$$\alpha = \operatorname{Re}(\lambda_1) = -3; \quad \beta = \operatorname{Im}(\lambda_1) = 1.$$

Imaginarni deo sopstvene vrednosti je određen sa tačnošću do na znak: može biti -1 , ali i 1 . Isto važi i za sopstvene vektore koji se dobijaju rešavanjem jednačina $\mathbf{A}\mathbf{e}_j = \lambda_j\mathbf{e}_j$, $j = 1, 2$, što u slučaju prve sopstvene vrednosti za $\mathbf{e}_1 = (a_1, b_1)^T$ daje:

$$-2a_1 - 2b_1 = (-3 + i)a_1;$$

$$a_1 - 4b_1 = (-3 + i)b_1.$$

Lako se može pokazati da sopstveni vektori obrazuju konjugovano-kompleksni par:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 + i \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 1 - i \\ 1 \end{bmatrix},$$

čiji su realni i imaginarni deo:

$$\mathbf{a} = \operatorname{Re}(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \operatorname{Im}(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

Kao što su realni sopstveni vektori određeni do na skalarnog faktor, kompleksni sopstveni vektori određeni su sa tačnošću do kompleksnog skalarnog

množitelja. Imajući u vidu opštu strukturu rešenja (16.11) dobijamo sledeća dva linearno nezavisna rešenja zadanog sistema:

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} e^{-3t}(\cos t - \sin t) \\ e^{-3t} \cos t \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x}_2(t) = \begin{bmatrix} e^{-3t}(\sin t + \cos t) \\ e^{-3t} \sin t \end{bmatrix},$$

dok fundamentalna matrica i opšte rešenje glase:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{C} &= \begin{bmatrix} e^{-3t}(\cos t - \sin t) & e^{-3t}(\sin t + \cos t) \\ e^{-3t} \cos t & e^{-3t} \sin t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-3t}((C_1 + C_2) \cos t - (C_1 - C_2) \sin t) \\ e^{-3t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Da bi dobijeno rešenje bilo saglasno sa početnim uslovom $\mathbf{x}(0) = (2, 1)^T$, integracione konstante moraju zadovoljiti sledeći sistem linearnih algebarskih jednačina:

$$\left. \begin{array}{l} C_1 + C_2 = 2 \\ C_1 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow C_1 = 1, C_2 = 1,$$

odakle sledi:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-3t} \cos t \\ e^{-3t}(\cos t + \sin t) \end{bmatrix}.$$

16.1.2 Normalna forma linearnih sistema

Opšte rešenje linearnih dinamičkih sistema, mada eksplicitno, ne daje tako očiglednu informaciju o njegovom kvalitativnom ponašanju. Za kvalitativnu analizu je mnogo pogodnija *normalna* forma linearnih jednačina. Ona se još naziva i *Žordanova* ili *dijagonalna* forma.

Konstrukcija normalne forme se zasniva na formiranju odgovarajuće regularne, invertibilne linearne transformacije koordinata $(x, y) \rightarrow (u, v)$, kojom se polazni sistem svodi na jednostavniju formu pogodnu za analizu. Označimo transformisani vektor stanja sa $\mathbf{u} = (u, v)^T$, a matricu tražene linearne transformacije sa \mathbf{T} . Veza između starih i novih promenljivih ima sledeći oblik:

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{u}, \tag{16.12}$$

odakle sledi:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{T}\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{A}(\mathbf{T}\mathbf{u}) = (\mathbf{AT})\mathbf{u}.$$

Primenom inverzne transformacije \mathbf{T}^{-1} dobija se:

$$\dot{\mathbf{u}} = (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT})\mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{u}. \tag{16.13}$$

Matrice \mathbf{A} i \mathbf{B} koje su povezane nesingularnom linearnom transformacijom $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ zovu se *slične matrice*.

Lema 1 *Ako su matrice \mathbf{A} i \mathbf{B} slične, onda su njihove karakteristične jednačine iste.*

Dokaz.

Primetimo najpre da je $\mathbf{I} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{T}$. Tvđenje Leme sledi iz jednakosti karakterističnih polinoma ove dve matrice:

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}) &= \det(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I}) = \det(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{T}) \\ &= \det\mathbf{T}^{-1} \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) \det\mathbf{T} = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}),\end{aligned}$$

jer je $\det\mathbf{T}^{-1} = 1/\det\mathbf{T}$.

Posledica ove Leme jeste da slične matrice imaju jednake sopstvene vrednosti, što znači da lokalno ponašanje dinamičkog sistema ne menja svoja kvalitativna svojstva posle transformacije $(x, y) \rightarrow (u, v)$. Može se pokazati da Lema 1 važi za matrice prozivoljnog reda.

Ključno pitanje je da li se matrica \mathbf{T} može izabrati na takav način da matrica transformisanog sistema \mathbf{B} ima jednostavniju strukturu od matrice \mathbf{A} , odnosno da ima dijagonalnu formu? Može se pokazati, što ovde nećemo dokazivati, da je matrica \mathbf{T} sačinjena od linearno nezavisnih sopstvenih vektora. Kada su sopstvene vrednosti proste, odnosno različite, mogu se uočiti sledeća dva slučaja.

1. slučaj: realne i različite sopstvene vrednosti. U ovom slučaju ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), kada su sopstveni vektori $\mathbf{e}_j = (a_j, b_j)^T$, $j = 1, 2$, matrica transformacije \mathbf{T} i matrica sistema \mathbf{B} imaju sledeću strukturu:

$$\mathbf{T} = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2] = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}. \quad (16.14)$$

Transformisani linearni dinamički sistem tada ima sledeći oblik:

$$\dot{u} = \lambda_1 u; \quad \dot{v} = \lambda_2 v, \quad (16.15)$$

a fundamentalna matrica rešenja glasi:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}. \quad (16.16)$$

2. slučaj: konjugovano-kompleksne sopstvene vrednosti. U ovom slučaju, kada je $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \alpha + i\beta$, a sopstveni vektori su $\mathbf{a} = \operatorname{Re}(\mathbf{e}_1) = \operatorname{Re}(\mathbf{e}_2)$ i $\mathbf{b} = \operatorname{Im}(\mathbf{e}_1) = -\operatorname{Im}(\mathbf{e}_2)$, matrica transformacije \mathbf{T} i matrica sistema \mathbf{B} glase:

$$\mathbf{T} = [\mathbf{a} \quad \mathbf{b}]; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}. \quad (16.17)$$

Linearni dinamički sistem u transformisanom obliku se svodi na:

$$\dot{u} = \alpha u + \beta v; \quad \dot{v} = -\beta u + \alpha v, \quad (16.18)$$

dok fundamentalna matrica rešenja ima sledeći oblik:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{\alpha t} \cos \beta t & e^{\alpha t} \sin \beta t \\ -e^{\alpha t} \sin \beta t & e^{\alpha t} \cos \beta t \end{bmatrix}. \quad (16.19)$$

Transformacija linearnih sistema koji ne zadovoljavaju pretpostavke prethodna dva slučaja zahteva razvijanje procedure formiranja generalisanih sopstvenih vektora. U te detalje ovde nećemo ulaziti, ali ćemo zato u nastavku prikazati strukturu transformisanih sistema u tim slučajevima.

3. slučaj: dvostruke realne sopstvene vrednosti. U ovom slučaju je $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, što znači da se karakteristična jednačina svodi na potpuni kvadrat, $(\alpha - \lambda)^2 = 0$. Iz linearne algebre je poznato da matrica \mathbf{A} zadovoljava sopstvenu karakterističnu jednačinu, koja se u ovom slučaju svodi na:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^2 \mathbf{e} = \mathbf{0},$$

za svako \mathbf{e} . Odavde slede dve mogućnosti:

- a) postoji vektor $\mathbf{e}_2 \neq \mathbf{0}$ takav da važi $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{e}_2 \neq \mathbf{0}$; tada se može definisati vektor:

$$\mathbf{e}_1 = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{e}_2,$$

za koji važi¹ $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{e}_1 = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^2 \mathbf{e}_2 = \mathbf{0}$; matrica transformacije \mathbf{T}_1 i matrica sistema \mathbf{B}_1 u tom slučaju glase:

$$\mathbf{T}_1 = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2]; \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}; \quad (16.20)$$

¹Primitimo da je \mathbf{e}_1 pravi sopstveni vektor matrice \mathbf{A} , dok iz njegove definicije sledi da \mathbf{e}_2 zadovoljava jednačinu $\mathbf{A}\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 + \lambda\mathbf{e}_2$. Vektor \mathbf{e}_2 se zove *generalisani sopstveni vektor*.

linearni sistem u transformisanom obliku glasi:

$$\dot{u} = \lambda u + v; \quad \dot{v} = \lambda v, \quad (16.21)$$

a fundamentalna matrica rešenja je:

$$\Phi_1(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}; \quad (16.22)$$

b) jednačina $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{e} = \mathbf{0}$ je zadovoljena za svako \mathbf{e} ; tada matrica \mathbf{A} ima dijagonalnu formu:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad (16.23)$$

za bilo koji izbor nesingularne matrice transformacije \mathbf{T}_2 ; linearni dinamički sistem tada glasi

$$\dot{u} = \lambda u; \quad \dot{v} = \lambda v, \quad (16.24)$$

a fundamentalna matrica rešenja je:

$$\Phi_2(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}. \quad (16.25)$$

4. slučaj: jedna sopstvena vrednost je 0. Ovo je degenerativni slučaj u kom sopstvene vrednosti imaju strukturu $\lambda_1 = \lambda$ i $\lambda_2 = 0$, a stacionarna tačka $\mathbf{x} = (0, 0)^T$ nije izolovana. Matrica transformisanog sistema tada glasi:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (16.26)$$

a fundamentalna matrica rešenja ima sledeći oblik:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (16.27)$$

5. slučaj: imaginarne sopstvene vrednosti. U ovom slučaju važi $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = i\beta$, odnosno $\alpha = 0$. To dovodi do vrlo jednostavne matrice transformisanog sistema:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{bmatrix}, \quad (16.28)$$

dok se fundamentalna matrica rešenja svodi na:

$$\Phi(t) = \Phi(t) = \begin{bmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{bmatrix}. \quad (16.29)$$

Primer 6

Za dinamičke sisteme opisane u Primerima 16.1.1 i 16.1.1 formirati matrice transformacija \mathbf{T} i odrediti matrice \mathbf{B} transformisanih sistema.

Rešenje.

U Primeru 16.1.1 linearni sistem je imao par realnih i različitih sopstvenih vrednosti $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = -3$, dok su sopstveni vektori imali oblik $\mathbf{e}_1 = (1, 1)^T$ i $\mathbf{e}_2 = (1, -1)^T$. Otuda matrica linearne transformacije \mathbf{T} i njoj inverzna matrica imaju strukturu:

$$\mathbf{T} = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix},$$

a matrica transformisanog sistema \mathbf{B} postaje:

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

U Primeru 16.1.1 sopstvene vrednosti su bile konjugovano-kompleksne $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = -3 + i$, a odgovarajući realni i imaginarni delovi sopstvenih vektora su glasili $\mathbf{a} = (1, 1)^T$ i $\mathbf{b} = (1, 0)^T$. Na osnovu toga, matrica transformacije \mathbf{T} i njoj inverzna matrica imaju sledeći oblik:

$$\mathbf{T} = [\mathbf{a} \quad \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

a matrica transformisanog sistema postaje:

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

16.1.3 Klasifikacija stacionarnih tačaka linearnih sistema

Transformacija linearnih sistema na normalnu formu omogućuje vrlo jednostavnu analizu faznih trajektorija i značajno olakšava prikaz faznog portreta sistema u okolini stacionarne tačke. Stoga će se u nastavku podrazumevati da je dinamički sistem dat u normalnoj formi.

Cilj klasifikacije stacionarnih tačaka jeste uočavanje tipičnih obrazaca kvalitativnog ponašanja linearnih dinamičkih sistema u njihovoj okolini. U tom smislu ona će u potpunosti pratiti analizu sprovedenu u prethodnom odeljku u kom su prikazane različite normalne forme koje neposredno zavise od strukture sopstvenih vrednosti.

1. slučaj: čvor i sedlo. Pretpostavimo da je $\lambda_2 < \lambda_1$. Tada se linearni sistem (16.15) može zapisati na sledeći način:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{u} = \lambda_1 u \\ \dot{v} = \lambda_2 v \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\dot{v}}{\dot{u}} = \frac{dv}{du} = \frac{\lambda_2 v}{\lambda_1 u},$$

tako da se nakon integracije fazne trajektorije mogu opisati jednačinom:

$$v = Cu^{\lambda_2/\lambda_1}. \quad (16.30)$$

Struktura faznih trajektorija zavisi od toga da li su sopstvene vrednosti istog ili različitog znaka.

Čvor. Ako su sopstvene vrednosti istog znaka, onda se singularna tačka naziva *čvorom*. Uvodeći oznaku $a = \lambda_2/\lambda_1 > 0$ jednačinu fazne trajektorije možemo zapisati kao:

$$v = Cu^a.$$

Struktura faznog portreta u okolini stacionarne tačke zavisi od vrednosti parametra a , a njena stabilnost od znaka sopstvenih vrednosti. Kada je $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ imamo *stabilni čvor*, a kada je $0 < \lambda_2 < \lambda_1$ imamo *nestabilni čvor*. Vidimo da fazni portret čini familija parabola stepena a , kao i prave koje se poklapaju sa koordinatnim osama. U slučaju stabilnog čvora reprezentativna tačka uvek asimptotski teži stacionarnoj tački za $t \rightarrow \infty$, dok će u slučaju nestabilnog čvora za ma koji početni uslov $\mathbf{x}(0) \neq \mathbf{0}$ (odnosno $\mathbf{u}(0) \neq \mathbf{0}$) za konačno vreme napustiti svaku unapred zadatu njenu malu okolinu².

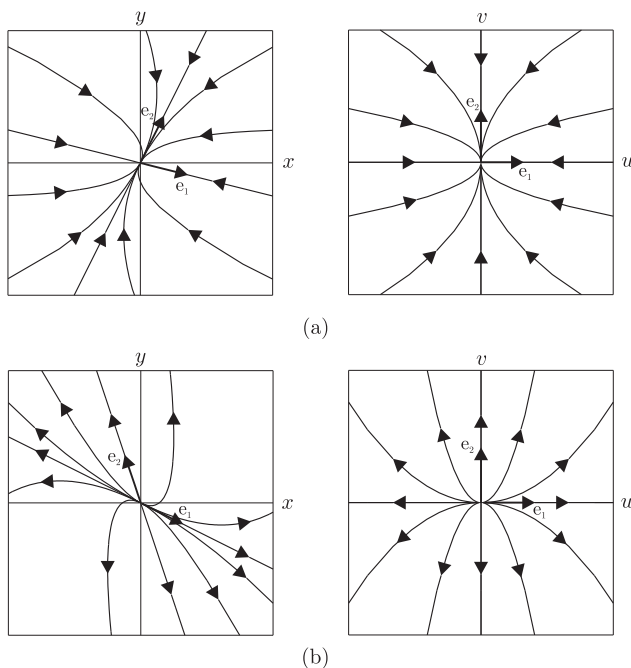
Sedlo. Ako su sopstvene vrednosti različitog znaka, $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$, onda se singularna tačka zove *sedlo*. Uvodeći oznaku $b = -\lambda_2/\lambda_1 < 0$ jednačinu fazne trajektorije možemo dati u sledećem obliku:

$$v = \frac{C}{u^b}.$$

Fazni portret obrazuje familija hiperbola i prave koje se poklapaju sa koordinatnim osama. Reprezentativna tačka se duž hiperbola kreće tako da se uvek približava u -osi kao asimptoti. Kada se kreće duž trajektorija koje se poklapaju sa osama imamo dva slučaja: duž u -ose se neograničeno udaljuje od stacionarne tačke (odnosno asimptotski joj teži kada $t \rightarrow -\infty$), a duž v -ose joj asimptotski teži³ kada $t \rightarrow \infty$. Sedlo je *nestabilna* stacionarna tačka.

²Ovo svojstvo se može i drugačije interpretirati: reprezentativna tačka će asimptotski težiti stacionarnoj tački kada $t \rightarrow -\infty$.

³U slučaju sedla ovo su i jedine trajektorije kod kojih se stacionarna tačka javlja kao rubna. Sve ostale trajektorije je mimoilaze.



Slika 16.1: Fazni portreti linearnih sistema u okolini (a) stabilnog i (b) nestabilnog čvora

2. slučaj: fokus. U ovom slučaju je $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \alpha + i\beta$. Linearni sistem u normalnoj formi (16.18):

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \alpha u + \beta v; \\ \dot{v} &= -\beta u + \alpha v,\end{aligned}$$

ćemo transformisati prelazeći na polarne koordinate:

$$\begin{aligned}u &= r \cos \varphi & \Leftrightarrow & & r^2 &= u^2 + v^2 \\ v &= r \sin \varphi & & & \varphi &= \tan(v/u).\end{aligned}$$

Jednačine ponašanja sistema u polarnim koordinatama imaju sledeći oblik:

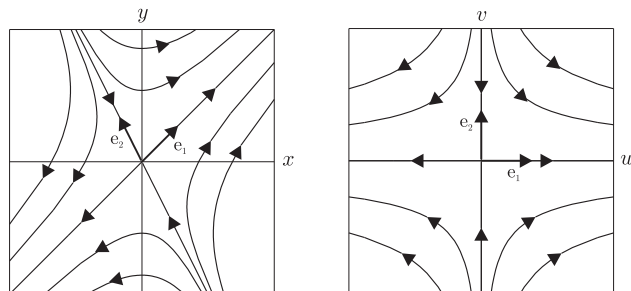
$$\dot{r} = \alpha r; \quad \dot{\varphi} = -\beta. \quad (16.31)$$

Parametarske jednačine dobijene rešavanjem ovog sistema glase:

$$r(t) = C_1 e^{\alpha t}; \quad \varphi(t) = -\beta t + C_2.$$

Eliminacijom parametra iz sistema (16.31) dolazi se do diferencijalne jednačine fazne trajektorije:

$$\frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = \frac{dr}{d\varphi} = -\frac{\alpha}{\beta} r,$$



Slika 16.2: Fazni portret linearnog sistema u okolini sedla

odakle sledi:

$$r(\varphi) = r_0 e^{-\frac{\alpha}{\beta}(\varphi - \varphi_0)}. \quad (16.32)$$

Stacionarna tačka se u slučaju $\alpha \neq 0$ zove *fokus*. U zavisnosti od vrednosti parametra α razlikujemo *stabilni fokus* ($\alpha < 0$) i *nestabilni fokus* ($\alpha > 0$). U oba slučaja fazna trajektorija ima oblik logaritamske spirale. U slučaju stabilnog fokusa reprezentativna tačka asimptotski teži stacionarnoj tački kada $t \rightarrow \infty$, dok se u slučaju nestabilnog fokusa neograničeno udaljuje od nje (asimptotski joj teži za $t \rightarrow -\infty$). Vremenska promena normalnih koordinata (u, v) ima kvaziperiodični karakter:

$$\begin{aligned} u(t) &= C_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t + C_2); \\ v(t) &= C_1 e^{\alpha t} \sin(\beta t + C_2). \end{aligned}$$

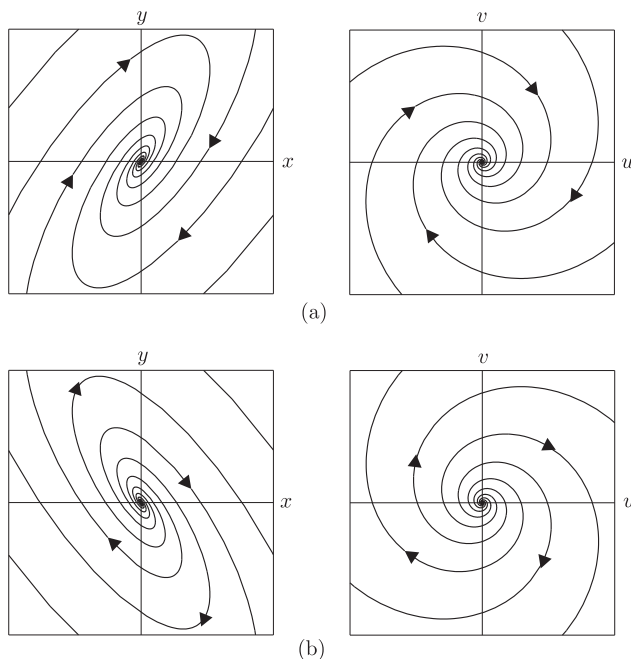
Osim tipičnih slučajeva, u kojima su sopstvene vrednosti različite, treba analizirati i fazne portrete linearnih sistema čije sopstvene vrednosti ne zadovoljavaju ovaj uslov.

3. slučaj: degenerisani čvor. Videli smo u slučaju dvostrukih realnih sopstvenih vrednosti imamo dve moguće strukture normalnog sistema (jednačine (16.20) i (16.23)). U prvom slučaju (matrica \mathbf{B}_1) se jednačina fazne trajektorije linearnog sistema može svesti na sledeći oblik:

$$\left. \begin{aligned} \dot{u} &= \lambda u + v \\ \dot{v} &= \lambda v \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\dot{u}}{\dot{v}} = \frac{du}{dv} = \frac{\lambda u + v}{\lambda v},$$

odakle se posle integracije dobija:

$$u = Cv + \frac{1}{\lambda} v \ln |v|. \quad (16.33)$$



Slika 16.3: Fazni portreti linearnih sistema u okolini (a) stabilnog i (b) nestabilnog fokusa

Naziv *degenerisani čvor* ova tačka dobila je zato što od dve pravolinijske fazne trajektorije koje postoje kod običnog čvora (u -osa i v -osa) ovde opstaje samo jedna - u našem slučaju to je u -osa. U originalnom linearnom sistemu to bi značilo da se sopstveni vektori poklapaju, odnosno da ostaje samo jedan sopstveni vektor⁴. Za $\lambda < 0$ degenerisani čvor je *stabilan*, a za $\lambda > 0$ je *nestabilan*. Kao i kod običnog čvora, stacionarna tačka predstavlja rubnu tačku svih faznih trajektorija, bilo da joj reprezentativne tačke asimptotski teže kada $t \rightarrow \infty$ ili da se neograničeno udaljuju od nje (odnosno teže kada $t \rightarrow -\infty$).

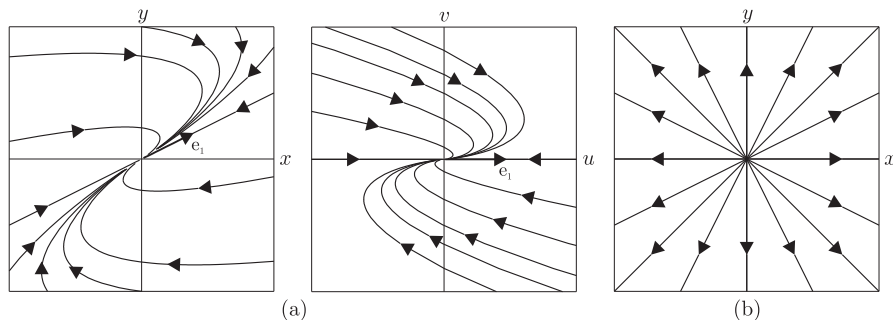
U drugom slučaju (matrica \mathbf{B}_2) jednačina fazne trajektorije se svodi na sledeći oblik:

$$\left. \begin{aligned} \dot{u} &= \lambda u \\ \dot{v} &= \lambda v \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\dot{u}}{\dot{v}} = \frac{du}{dv} = \frac{u}{v},$$

odakle posle integracije sledi:

$$v = Cu. \quad (16.34)$$

⁴Zbog toga se za konstrukciju matrice transformacije \mathbf{T}_1 i koriste generalisani sopstveni vektori.



Slika 16.4: Fazni portreti linearnih sistema u okolini (a) stabilnog degenerisanog čvora prvog tipa i (b) nestabilnog degenerisanog čvora drugog tipa

Vidimo da je fazni portret sačinjen od familije pravolinijskih trajektorija (uključujući i koordinatne ose) čija je rubna tačka $\mathbf{x} = (0, 0)^T$. I ovom slučaju za $\lambda < 0$ degenerisani čvor je *stabilan*, dok je za $\lambda > 0$ *nestabilan*. Za razliku od prethodnog slučaja, ovde je u originalnom linearnom sistemu *svaki vektor* $\mathbf{e} = (a, b)^T$ sopstveni vektor.

4. slučaj: neizolovani čvor. Polazeći od linearnog sistema u normalnoj formi, koji je opisan matricom sistema (16.26), i koristeći fundamentalnu matricu rešenja (16.27) dolazimo do zaključka da stacionarna tačka $\mathbf{x} = (0, 0)^T$ nije izolovana: sve tačke koje pripadaju v -osi su takođe stacionarne. Ovaj skup tačaka bi u polaznom linearnom sistemu bio predstavljen pravom u faznoj ravni. Budući da je:

$$v = C = \text{const.} \quad (16.35)$$

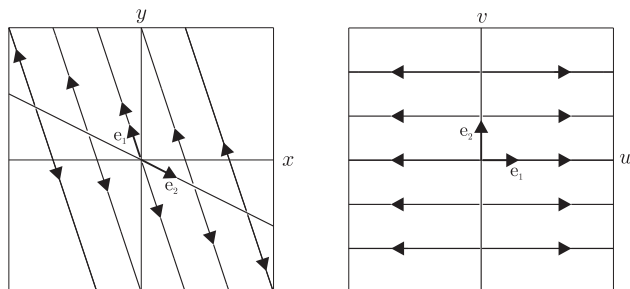
fazni portret čine prave paralelne u -osi, sa rubnim tačkama koje pripadaju v -osi. Za $\lambda < 0$ neizolovani čvor je *stabilan u običnom smislu* ako je norma veličine v mala po modulu, dok je za $\lambda > 0$ *nestabilan*.

5. slučaj: centar. U ovom slučaju imamo par imaginarnih sopstvenih vrednosti $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = i\beta$. Polazeći od matrice sistema (16.28), prelaskom na polarne koordinate $u = r \cos \varphi$, $v = r \sin \varphi$ dobijamo:

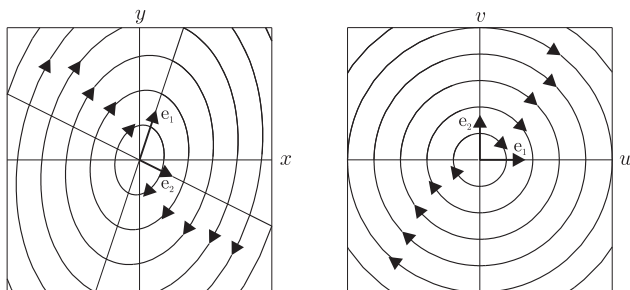
$$\left. \begin{array}{l} \dot{u} = \beta v \\ \dot{v} = -\beta u \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \dot{r} = 0 \\ \dot{\varphi} = -\beta. \end{array}$$

Odavde se lako dobija:

$$r(t) = C_1 = \text{const.}; \quad \varphi(t) = -\beta t + C_2, \quad (16.36)$$



Slika 16.5: Fazni portret linearnog sistema u okolini nestabilnog neizolovanog čvora



Slika 16.6: Fazni portret linearnog sistema u okolini centra

što znači da fazni portret čini familija krugova sa centrom u stacionarnoj tački. Kod originalnog sistema to bi bila familija elipsi sa istim centrom. U pogledu stabilnosti za ovu stacionarnu tačku možemo reći da je *stabilna u običnom smislu*.

Kao što smo videli, analiza stacionarnih tačaka i fazni portreti linearnih sistema se oslanjaju na analizu sopstvenih vrednosti (i sopstvenih vektora) matrice \mathbf{A} linearnog dinamičkog sistema. Veoma pogodan način za određivanje tipa stacionarne tačke jeste geometrijska analiza rešenja karakteristične jednačine u prostoru parametara $\tau = \text{trag} \mathbf{A}$ i $\Delta = \det \mathbf{A}$. Ovo je učinjeno u odeljku 5.2.1, pa se ovde neće ponavljati.

Glava 17

Definicije i dokazi teorema

17.1 Dokaz teoreme o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja

Dokaz.

U dokazu ove teoreme upotrebićemo Pikarovu metodu sukcesivnih aproksimacija, koja istovremeno daje i jedan način približne integracije.

Napišimo datu diferencijalnu jednačinu u obliku integralne jednačine:

$$y = \int_{x_0}^x f(x, y) dx + y_0$$

i obrazujmo uzastopna (sukcesivna) rešenja:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx, \\ y_2 &= y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_1) dx, \\ &\vdots \\ y_n &= y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}) dx. \end{aligned}$$

Pokažimo najpre da se sva ova rešenja nalaze u oblasti R za $|x - x_0| \leq h$. Imamo:

$$\begin{aligned} |y_1 - y_0| \left| \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx \right| &\leq \left| \int_{x_0}^x |f(x, y_0)| dx \right| \leq M \left| \int_{x_0}^x dx \right| = \\ &= M|x - x_0| \leq Mh \leq M \frac{b}{M} = b. \end{aligned}$$

Dalje:

$$\begin{aligned} |y_2 - y_0| \left| \int_{x_0}^x f(x, y_1) dx \right| &\leq \left| \int_{x_0}^x |f(x, y_1)| dx \right| \leq M \left| \int_{x_0}^x dx \right| = \\ &= M|x - x_0| \leq Mh \leq M \frac{b}{M} = b. \end{aligned}$$

(pošto je za y_1 već pokazano da leži u R , mogla se za majoraciju upotrebiti ista konstanta M).

Matematičkom indukcijom pokazuje se lako da je i:

$$|y_n - y_0| \leq b.$$

Sada treba pokazati da postoji funkcija

$$Y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$$

i da granična funkcija zadovoljava kako početne uslove tako i diferencijalnu jednačinu.

Formirajmo funkcionalni red:

$$y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \cdots + (y_n - y_{n-1}) + \dots$$

Kako je $S_{n+1} = y_n$, naš se problem svodi na ispitivanje konvergencije napisanog reda. Već smo videli da je:

$$|y_1 - y_0| \leq M|x - x_0|.$$

Posmatrajmo sada apsolutnu vrednost:

$$\begin{aligned} |y_2 - y_1| &= \left| \int_{x_0}^x [f(x, y_1) - f(x, y_0)] dx \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(x, y_1) - f(x, y_0)| dx \right| \leq \\ &\leq N \left| \int_{x_0}^x |y_1 - y_0| dx \right| \leq MN \left| \int_{x_0}^x |x_1 - x_0| dx \right| = \frac{MN}{1 \cdot 2} |x - x_0|^2 \leq \frac{MNh^2}{1 \cdot 2}. \end{aligned}$$

Dalje:

$$|y_3 - y_2| = \left| \int_{x_0}^x [f(x, y_2) - f(x, y_1)] dx \right| \leq N \left| \int_{x_0}^x |y_2 - y_1| dx \right| \leq$$

$$N \left| \int_{x_0}^x \frac{M N}{1 \cdot 2} |x - x_0|^2 dx \right| = \frac{M N^2 |x - x_0|^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} |x - x_0|^2 \leq \frac{M N^2 h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Matematičkom indukcijom neposredno se pokazuje da je:

$$|y_n - y_{n-1}| \leq \frac{M N^{n-1}}{n!} h^n.$$

Dakle, članovi ispitivanog reda redom su manji po apsolutnoj vrednosti od reda sa pozitivnim članovima:

$$M h + \frac{M N h^2}{2!} + \dots + \frac{M N^{n-1} h^n}{n!} + \dots$$

Ovaj red konvergira, jer primena Dalamberovog kriterijuma daje:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N h}{n+1} = 0$$

Po Vajerštrasovom kriterijumu i naš red konvergira uformno, pa postoji neprekidna funkcija:

$$Y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

S obzirom na neprekidnost:

$$Y(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x_0) = y_0.$$

Znači da dobijena funkcija $Y(x)$ zadovoljava početne uslove. Kako je:

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}) dx,$$

prelaskom na graničnu vrednost kad $n \rightarrow \infty$ (s obzirom na učinjene pretpostavke ovakav prelazak je ispravan), dobijamo:

$$Y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, Y) dx,$$

dakle, polaznu jednačinu, što znači da dobijena funkcija $Y(x)$ jeste rešenje diferencijalne jednačine u intervalu $x_0 - h \leq x \leq x_0 + h$.

Treba još pokazati da je to rešenje jedino.

Neka je $Y(x)$ naše dobijeno rešenje, a $Y_1(x)$ neko drugo rešenje, tak da je i $Y_1(x_0) = y_0$. Tada je:

$$\frac{dY_1}{dx} = f(x, Y),$$

$$Y_1 = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, Y) dx$$

i dalje

$$Y_1 - y_n = \int_{x_0}^x [f(x, Y_1) - f(x, y_{n-1})] dx$$

$$|Y_1 - y_1| = \left| \int_{x_0}^x [f(x, Y_1) - f(x, y_0)] dx \right| \leq N \left| \int_{x_0}^x |Y_1 - y_0| dx \right| \leq$$

$$\leq \frac{N M |x - x_0|^2}{2!} \leq \frac{M N h^2}{2!}.$$

Matematičkom indukcijom pokazuje se da je:

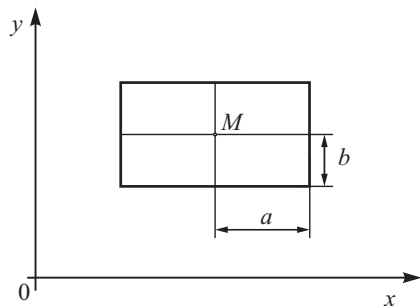
$$|Y_1 - y_n| \leq \frac{M N^n h^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0 \text{ kada } n \rightarrow \infty$$

Dakle

$$Y_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = Y,$$

pa drugih rešenja nema. ☺

Na slici 17.1 prikazana je oblast R . Na slici 17.2 prikazano je kako se mogu produžiti rešenja diferencijalne jednačine do granice oblasti.

Slika 17.1: Oblast R .

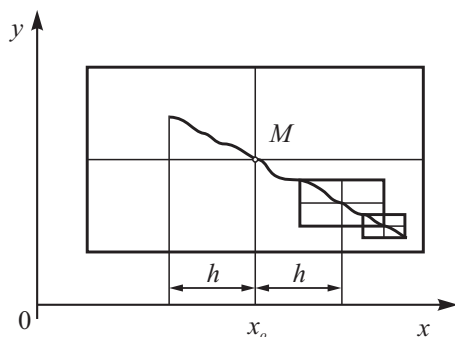
Na osnovu dokazane teoreme egzistencija je obezbedena samo u intervalu $|x - x_0| \leq h$. Za $x = x_0 + h$ neka je y_0 ordinata rešenja. Kako je

$$h = \min \left(a, \frac{a}{M} \right)$$

očigledno u opštem slučaju rešenje nije došlo do granice oblasti R , nego je definisano u nekom užem intervalu.

Tačku $(x_0 + h, y_0^1)$ uzimamo kao centar novog pravougaonika u kome su ispunjeni uslovi egzistencije rešenja, tako da po novnom primenom teoreme dobijamo produženje rešenja u nekom intervalu $[x_0 + h, x_0 + h_1]$.

Postupak dalje ponavljamo tako da možemo doći koliko hoćeramo blizu do ruba oblasti R .



Slika 17.2: Produženje oblasti.

Zatim se može pokazati da, ako je $f(x, y)$ definisana i neprekidna u celoj ravni XOY i zadovoljava Lipsčicov uslov u svakoj ograničenoj oblasti te ravni, svaka integralna kriva pri rašćenju x ili se može neograničeno produžiti do $x = +\infty$ ili ima vertikalnu asimptotu za neku konačnu vrednost $x = \bar{x}$.

Da se u skupu integralnih krivih (to jasno proističe iz teoreme egzistencije) istakne jedna posebna integralna kriva treba, za neku vrednost argumenta $x = x_0$, zadati ordinatu integralne krive $y_0 = y(x_0)$. Krive skupa integralnih krivih razvrstavaju se, dakle, prema ordinati njihovog preseka sa nekom pravom $x = x_0$. Koja prava $x = x_0$ je izabrana ne igra bitnu ulogu, jer je već jednom tačkom (x_0, y_0) kriva određena. Zato, vidimo da skup rešenja zavisi od jednog parametra (y_0), pa je prirodno tražiti opšti integral

u obliku $y = \varphi(x, C)$. To nam daje mogućnost da jednoznačno odredimo C iz jednačine $y_0 = \varphi(x_0, C)$, u slučaju jedinstvenosti rešenja.

U najopštijem slučaju:

$$y_0 = \varphi(x_0, C)$$

može imati i više rešenja po C . To odgovara slučajevima kada kroz tačku (x_0, y_0) ne prolazi samo jedno nego više rešenja diferencijalne jednačine. Za egzistenciju ovakvih rešenja takođe su dokazani stavovi koji je obezbeđuju.

☺

Dokazana teorema, koja se odnosi na jedinstvenost, pominje se često pod Košijevim imenom.

17.2 Definicija invarijante

Neka je data diferencijalna jednačina

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (17.1)$$

gde je $f(x, y)$ racionalna funkcija po y , čiji su koeficijenti $a_i(x)$ funkcije od x . Kada se u ovoj jednačini izvrši smena promenljivih, tj. umesto promenljivih x i y uvedu nove promenljive ξ i η , uvodeći pri tome i proizvoljne funkcije koje zavise od prvobitne promenljive x , na primer, $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$, itd., jednačina (17.1) postaje

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \varphi(\xi, \eta). \quad (17.2)$$

Ako je jednačina (17.2) istog oblika kao i jednačina (17.1), i ako postoji neka funkcija $\lambda[a_i(x), a'_i(x), \dots]$ formirana od koeficijenata jednačine (17.1) i njihovih izvoda po x , takva da je identički

$$\lambda [a_i(x), a'_i(x), \dots] \equiv \lambda [\alpha_i(\xi), \alpha'_i(\xi), \dots]$$

kada se koeficijenti $\alpha_i(\xi)$ i $\alpha'_i(\xi)$ jednačine (17.2) zamene njihovim vrednostima izraženim sa $a_i(x)$, $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$ i njihovim izvodima, onda se takva funkcija $\lambda [\alpha_i(\xi), \alpha'_i(\xi), \dots]$ naziva apsolutna invarijanta jednačine (17.1). Ako je pak identički

$$\lambda [a_i(x), a'_i(x), \dots] \equiv \mu \lambda [\alpha_i(\xi), \alpha'_i(\xi), \dots]$$

gde činilac μ zavisi samo od funkcija $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$, ..., onda se funkcija $\lambda [\alpha_i(\xi), \alpha'_i(\xi), \dots]$ naziva relativna invarijanta jednačine (17.1). Ako se u

jednačini (17.1) izvrši smena samo funkcije ili samo nezavisno promenljive, onda se funkcija $\lambda[a_i(x), a'_i(x), \dots]$ naziva apsolutna semi-invarijanta jednačine (17.1), odnosno relativna semi-invarijanta jednačine (17.1).

Iz same definicije invarijanata vidi se da se polazna tačka za formiranje invarijanata neke diferencijalne jednačine sastoji u nalaženju takvih relacija između starih i novih promenljivih, da transformisana jednačina bude istog oblika kao i prvobitna. Za jednačine koje imaju istu transformaciju kaže se da pripadaju istoj klasi.

17.3 Hartman-Grobmanova teorema

Linearizacija sistema se sprovodi zato što, prema Hartman-Grobmanovoj teoremi [122]; [114] ponašanje dinamičkog sistema u okolini hiperboličke¹ fiksne (ravnotežne) tačke je kvalitativno isto kao ponašanje linearnizovanog sistema u blizini fiksne tačke, pod uslovom da sve svojstvene vrednosti linearizovanog sistema imaju realni deo $Re(\lambda) \neq 0$. Drugim rečima, izučavanje ponašanja dinamičkog sistema u maloj okolini ravnotežnog stanja (fiksne tačke) pogodnije je nakon izvršene linearizacije. U daljem tekstu, dajemo Hartman -Grobmanovu teoremu u originalu, bez izvođenja dokaza.

Teorema 6 (Hartman-Grobmanova) teorema: *Neka je $x = 0$ hiperbolička fiksna tačka jednačine:*

$$x = V(\mu, X), \quad x \in R^n, \quad \mu \in R, \quad (17.3)$$

za neku fiksiranu vrednost kontrolnog parametra μ . Neka φ_t označava trajektorije rešenja posmatrane jednačine, a φ'_t - tok rešenja odgovarajućeg linearnog sistema:

$$x = D_x V(\mu, 0)x. \quad (17.4)$$

Tada postoji homeomorfizam²:

$$\Psi : R^n \rightarrow R^n \quad (17.5)$$

¹Ovde se pod hiperboličkom fiksnom tačkom podrazumeva fiksna tačka za koju svojstvene vrednosti Jakobijan matrice linearizovanog sistema imaju realne vrednosti različite od nule. Naziv "hiperbolička" potiče od sličnosti oblika trajektorija dvodimenzionalnog ne-disipativnog sistema, koj u blizini fiksne tačke podseća na hiperbolu; ovaj naziv ne ukazuje na to da je fiksna tačka sedlo.

²Topološki posmatrano, homeomorfizam ili topološki izomorfizam (bikontinualno preslikavanje) predstavlja kontinualno preslikavanje između topoloških prostora koje ima kontinualnu inverznu funkciju. Homeomorfizam predstavlja preslikavanje koje očuvava topološka svojstva posmatranog prostora. Grubo rečeno, topološki prostor je geometrijski objekat, a homeomorfizam predstavlja kontinualno istežanje i savijanje objekta u novi oblik.

i okolina U fiksne tačke $x = 0$ za koju važi:

$$\varphi_t(x) = \Psi - 1 \circ \varphi'_t \circ \Psi(x), \quad \forall(x, t), \quad x \in U \text{ i } \varphi_t(x) \in U. \quad (17.6)$$

Neophodno je naglasiti da se pre izvođenja linearizacije sistema oko fiksne tačke vrlo često pristupa bezdimenzionalizaciji posmatranog sistema jednačina, naročito ako je u pitanju sistem sa većim brojem parametara, čije bi razdvajanje u određene bezdimenzionalne grupe sličnih svojstava u znatnoj meri olakšalo izvođenje postupka analize stabilnosti.

Bezdimenzionalizacija matematičkog modela predstavlja konstruktivan način formulisanja modela samo pomoću bezdimenzionalnih veličina. Time se pre svega smanjuje broj parametara sistema. Osnovna ideja bezdimenzionalne analize može se objasniti na sledeći način. Posmatrajmo niz skalarnih promenljivih x_1, \dots, x_k , i skalarnih parametara p_1, \dots, p_ℓ , čime dobijamo da je ukupni broj posmatranih veličina $N = k + \ell$. Formirajmo sada proizvode:

$$x_1^{r_1} \dots x_k^{r_k}, \quad p - 1^{r_{k+1}} \dots p_\ell^{r_N}. \quad (17.7)$$

Sada tražimo vrednosti r_i za koje su ovi proizvodi bezdimenzionalni, što se dobija smenom svake promenljive x_i i svakog parametra p_i njihovom osnovnom dimenzijom. Ukoliko postoji m dimenzija, d_1, \dots, d_m , smenom dobijamo novi proizvod:

$$d_1^{s_1} \dots d_m^{s_m}, \quad (17.8)$$

gde su brojevi s_i , $i = 1, \dots, m$, linearne funkcije r_j , $j = 1, \dots, N$. Ukoliko postavimo uslov da je $s_i = 0$, $i = 1, \dots, m$, dobijamo skup m linearnih jednačina za N nepoznatih parametara r_1, \dots, r_N . Brojevi r_j , $j = 1, \dots, N$ su racionalni, s obzirom na to da predstavljaju rešenja linearnih jednačina sa racionalnim koeficijentima. Racionalnost ovih koeficijenata proizilazi iz činjenice da, po prirodi, sve merljive veličine imaju dimenzije koje predstavljaju proizvod celobrojnih stepena osnovnih dimenzija. Iz linearne algebre sledi da postoji najviše $N - m$ linearno nezavisnih rešenja, koja odgovaraju $N - m$ bezdimenzionalnim veličinama q_i , $i = 1, \dots, (N - m)$, što je Bakingem formalizovano u obliku sledeće teoreme, čiji dokaz nećemo navesti.

Teorema 7 (π -teorema Bakingema) (*[Buckingham, 1914]*): *Posmatrajmo sistem sa promenljivama x_1, \dots, x_k , i parametrima p_1, \dots, p_ℓ , za koje postoje m osnovnih dimenzija. Onda, $k + \ell - m$ bezdimenzionalnih veličina q_i mogu biti definisane, koje predstavljaju proizvode i količnike originalnih promenljivih i parametara. Svaka skalarna jednačina:*

$$f(x_1, \dots, x_k, p_1, \dots, p_\ell) = 0. \quad (17.9)$$

Između promenljivih x_i i parametara p_i može biti zamenjena odgovarajućom relacijom između bezdimenzionalnih veličina q_i :

$$f^*(q_1, \dots, q_{k+\ell-m}) = 0. \quad (17.10)$$

U opštem slučaju, ne postoji opšti metod određivanja najpogodnijih bezdimenzionalnih veličina q_i , već se za svaku jednačinu posebno konstruišu ove veličine probanjem (trial and error).

17.4 Neki osnovni pojmovi iz topologije

Zamislimo neki skup R , čije ćemo elemente zvati tačkama. Neka je, za svaku tačku x posmatranog skupa R , određen neki sistem podskupova, koje ćemo obeležavati sa $U(x)$, $V(x)$, $W(x)$, i dr. Ti skupovi nazivaju se okoline odgovarajuće tačke x , a sam skup naziva se okolinski prostor, ako sistem pomenutih podskupova, određenih za sve tačke, zadovoljava zahteve sledećih aksioma:

1. Svaka okolina $U(x)$ sadrži tačku x ;
2. Ako su $U(x)$ i $V(x)$ dve okoline jedne iste tačke x , postoji okolina $W(x)$ koja je deo kako od $U(x)$ tako i od $V(x)$;
3. Ako tačka y leži u $U(x)$ postoji okolina $U(y)$ koja je deo od $U(x)$;
4. Za dve različite tačke x, y postoje dve okoline $U(x)$, $U(y)$ bez zajedničkih tačaka.

U ravni, na primer, kao okoline možemo uzeti unutrašnje delove krugova ili kvadrata. U okolinskom prostoru možemo za svaki skup odrediti granične tačke: tačka x zove se granična tačka skupa M , ako ma koja okolina $U(x)$ sadrži bar jednu tačku iz M , različitu od x . Skup ovih graničnih tačaka skupa M zove se izvodni skup za M i obeležava se sa M' . Ako se tačkama skupa M priključe sve njegove granične tačke, onda se dobijeni skup zove zaključenje datog skupa i obeležava se sa \bar{M} ($\bar{M} = M + M'$). Skup koji se poklapa sa svojim zaključenjem naziva se zatvoreni skup.

Aksiome 1-4 dopuštaju da se dokažu osnovne teoreme o zaključenjima i zatvorenim skupovima, koje su poznate iz kruga elementarne analize i teorije funkcija. U proizvoljnom okolinskom prostoru nema merenja geometrijskih veličina, ali okoline date u prostoru daju sadržine pojmu blizine dve tačke. Možemo reći da se promenljiva x_n beskonačno približava tački x (ili niz

tačkaka za granicu ima tačku x) ako se za ma koju okolinu $U(x)$ može navesti takav indeks n , da počev od tog indeksa tačka x_n ostaje u $U(x)$.

Posmatrajmo skup svih pravih euklidskog prostora. U tom skupu uvešćemo sistem okolina na sledeći način: okolinom $U(x)$ pravih zvaćemo skup svih pravih koje se nalaze unutar proizvoljnog jednogranog hiperboloida čija je osa prava x . Ispunjeni su svi zahtevi aksioma 1-4.

Ako je, za svaki skup M koji leži u osnovnom skupu R određeno njegovo zaključenje, onda se kaže da je u skupu R data topologija, a skup R se tada naziva **topološkim prostorom**. Topologija u R biće data ako je u R dat sistem okolina koji zadovoljava aksiome 1-4. Ako dva istema okolina data u osnovnom skupu R određuju jednaka zaključenja za svaki skup M iz R , onda za ta dva sistema okolina kažemo da su ekvivalentni. Ekvivalentni sistemi okolina definišu u R jednu istu topologiju.

Saglasimo se da posmatramo samo one prostore čija se topologija može dati pomoću nekog prebrojivog sistema okolina (prostori sa prebrojivom osnovnom).

Posmatrajmo dva topološka prostora R i R' (svaki sa prebrojivom osnovom). Zamislimo da je svakoj tački x prostora R po nekom zakonu korespondirana neka tačka x' prostora R' . U tom slučaju govorićemo da je dato preslikavanje prostora R u prostor R' : ako se svaki konvergentan niz tačkaka x_1, x_2, \dots, x_n , sa tačkom a kao granicom preslika u konvergentan niz tačkaka $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$, čija je granica tačka $f(a)$, onda se za preslikavanje $x' = f(x)$ kaže da je neprekidno u tački a .

Ako je preslikavanje $x' = f(x)$ neprekidno u svakoj tački prostora R , onda ga nazivamo neprekidnim u celom prostoru ili, jednostavno, neprekidnim. Ako su uzajamno jednoznačno preslikavaje $x' = f(x)$ prostora R u R' , i njemu obratno preslikavanje $x = \varphi(x')$ prostora R' u R neprekidni, onda svako od njih zovemo homeomorfno preslikavanje ili homeomorfizam.

Pri homeomorfizmu granične tačke skupova M i M' odgovaraju jedna drugoj. Ako smo proučili topologiju R znamo i topologiju R' . Homeomorfni prostori se zato i zovu topološki ekvivalentni.

Glava 18

Poznatiji haotični sistemi

18.1 Neinvertibilna preslikavanja

18.1.1 Logističko preslikavanje

$$X_{n+1} = A X_n(1 - X_n),$$

uobičajena vrednost parametra : $A = 4,$

početni uslov : $X_0 = 0, 1,$

Ljapunovljev eksponent : $\lambda = \ln 2 = 0, 693147181 \dots$

18.1.2 Sinusno preslikavanje

$$X_{n+1} = A \sin \pi X_n,$$

uobičajena vrednost parametra : $A = 1,$

početni uslov : $X_0 = 0, 1,$

Ljapunovljev eksponent : $\lambda \simeq 0, 689067$

18.1.3 "Šator" preslikavanje

$$X_{n+1} = A \min(X_n, 1 - X_n),$$

uobičajena vrednost parametra : $A = 2,$

početni uslov : $X_0 = 1/\sqrt{2},$ (ili iracionalno $0 < X_0 < 1$)

Ljapunovljev eksponent : $\lambda = \ln |A| = 0, 693147181 \dots$

18.1.4 Linearni kongruentni generator

$$X_{n+1} = A X_n + B, (\text{ mod } C)$$

uobičajena vrednost parametara : $A = 7141, B = 54773, C = 259200$

početni uslov : $X_0 = 0$

Ljapunovljev eksponent : $\lambda = \ln |A| = 8,873608101\dots$

18.1.5 Kubno preslikavanje

$$X_{n+1} = A X_n(1 - X_n^2)$$

uobičajena vrednost parametra : $A = 3$

početni uslov : $X_0 = 0, 1$

Ljapunovljev eksponent : $\lambda \simeq 1,0986122883$

18.1.6 Rikerov populacioni model

$$X_{n+1} = A X_n e^{-X_n}$$

uobičajena vrednost parametra : $A = 20$

početni uslov : $X_0 = 0, 1$

Ljapunovljev eksponent : $\lambda \simeq 0,384846$

18.1.7 Gausovo preslikavanje

$$X_{n+1} = 1/X_n (\text{ mod } 1)$$

početni uslov : $X_0 = 0, 1$

Ljapunovljev eksponent : $\lambda \simeq 2,373445$

18.1.8 "Šiljato" preslikavanje

$$X_{n+1} = 1 - A\sqrt{|X_n|}$$

uobičajena vrednost parametra : $A = 2$

početni uslov : $X_0 = 0, 5$

Ljapunovljev eksponent : $\lambda = 0,5$ tačna vrednost

18.1.9 Gausovo "belo" haotično preslikavanje

$$X_{n+1} = A \operatorname{erf}^{-1} [1 - 2 \operatorname{erf} (X_n/A)]$$

uobičajena vrednost parametra : $A = \sqrt{2}$
 početni uslov : $X_0 = 1$
 Ljapunovljev eksponent : $\lambda = \ln 2 = 0,693147181 \dots$

18.1.10 Pinčersovo preslikavanje

$$X_{n+1} = |\operatorname{th} s(X_n - c)|$$

uobičajena vrednost parametara : $s = 2, c = 0,5$
 početni uslov : $X_0 = 0$
 Ljapunovljev eksponent : $\lambda \simeq 0,467944$

18.1.11 Spensovo preslikavanje

$$X_{n+1} = |\ln X_n|$$

početni uslov : $X_0 = 0,5$
 Ljapunovljev eksponent : $\lambda \rightarrow \infty$

18.1.12 "Sinusno-kružno" preslikavanje

$$X_{n+1} = X_n + \Omega - \frac{K}{2\pi} \sin 2\pi X_n \pmod{1},$$

uobičajena vrednost parametara : $\Omega = 0,5, K = 2$
 početni uslov : $X_0 = 0,1,$
 Ljapunovljev eksponent : $\lambda \simeq 0,353863$

18.2 Disipativna preslikavanja

18.2.1 Enoovo preslikavanje

$$X_{n+1} = 1 - a X_n^2 + b Y_n,$$

$$Y_{n+1} = X_n,$$

uobičajena vrednost parametara : $a = 1,4, b = 0,3$
 početni uslovi : $X_0 = 0, Y_0 = 0,9$
 Ljapunovljevi eksponenti : $\lambda_1 \simeq 0,41922, \lambda_2 \simeq -1,62319$

18.2.2 Lozievo preslikavanje

$$X_{n+1} = 1 - a|X_n| + bY_n,$$

$$Y_{n+1} = X_n,$$

$$\text{uobičajena vrednost parametara : } a = 1,7, b = 0,5$$

$$\text{početni uslovi : } X_0 = -0,1, Y_0 = 0,1$$

$$\text{Ljapunovljevi eksponenti : } \lambda_1 \simeq 0,47023, \lambda_2 \simeq -1,6338$$

18.2.3 Logističko preslikavanje sa kašnjenjem

$$X_{n+1} = AX_n(1 - Y_n),$$

$$Y_{n+1} = X_n,$$

$$\text{uobičajena vrednost parametra : } A = 2,27$$

$$\text{početni uslovi : } X_0 = 0,001, Y_0 = 0,001$$

$$\text{Ljapunovljevi eksponenti : } \lambda_1 \simeq 0,18312 \lambda_2 \simeq -1,24199$$

18.2.4 Zvonasto preslikavanje

$$X_{n+1} = X_n^2 - Y_n^2 + aX_n + bY_n,$$

$$Y_{n+1} = 2X_nY_n + cX_n + dY_n,$$

$$\text{uobičajena vrednost parametara : } a = 0,9, b = -0,6, c = 2, d = 0,5$$

$$\text{početni uslovi : } X_0 = 0, Y_0 = 0,5$$

$$\text{Ljapunovljev eksponent : } \lambda_1 \simeq 0,18997 \lambda_2 \simeq -0,52091.$$

18.2.5 Burgersovo preslikavanje

$$X_{n+1} = aX_n - Y_n^2,$$

$$Y_{n+1} = bY_n + X_nY_n,$$

$$\text{uobičajena vrednost parametara : } a = 0,75, b = 1,75$$

$$\text{početni uslovi : } X_0 = -0,1, Y_0 = 0,1$$

$$\text{Ljapunovljevi eksponenti : } \lambda_1 \simeq 0,12076 \lambda_2 \simeq -0,22136.$$

18.2.6 Holmsovo preslikavanje

$$\begin{aligned}
 X_{n+1} &= Y_n, \\
 Y_{n+1} &= -bX_n + dY_n - Y_n^3, \\
 \text{uobičajena vrednost parametara : } & b = 0,2, \quad d = 2,77 \\
 \text{početni uslovi : } & X_0 = 1,6, \quad Y_0 = 0 \\
 \text{Ljapunovljevi eksponenti : } & \lambda_1 \simeq 0,59458 \quad \lambda_2 \simeq -2,20402.
 \end{aligned}$$

18.2.7 Kaplan-Jorkovo preslikavanje

$$\begin{aligned}
 X_{n+1} &= aX_n \pmod{1}, \\
 Y_{n+1} &= bY_n + \cos 4\pi X_n \pmod{1}, \\
 \text{uobičajena vrednost parametara : } & a = 2, \quad b = 0,2 \\
 \text{početni uslovi : } & X_0 = 1/\sqrt{2}, \quad Y_0 = -0,4 \\
 \text{Ljapunovljevi eksponenti : } & \lambda_1 = \ln a = 0,693147181\dots, \\
 & \lambda_2 = \ln b = -1,609437912\dots
 \end{aligned}$$

18.2.8 Disipativno standardno preslikavanje

$$\begin{aligned}
 X_{n+1} &= X_n + Y_{n+1} \pmod{2\pi}, \\
 Y_{n+1} &= bY_n + k \sin X_n \pmod{2\pi}, \\
 \text{uobičajena vrednost parametara : } & b = 0,1, \quad k = 0,8 \\
 \text{početni uslovi : } & X_0 = 0,1, \quad Y_0 = 0,1 \\
 \text{Ljapunovljevi eksponenti : } & \lambda_1 \simeq 1,46995 \quad \lambda_2 \simeq -3,77254.
 \end{aligned}$$

18.2.9 Ikedino preslikavanje

$$\begin{aligned}
 X_{n+1} &= \gamma + \mu(X_n \cos \phi - Y_n \sin \phi), \\
 Y_{n+1} &= \mu(X_n \cos \phi + Y_n \sin \phi), \\
 \text{gde je } \phi &= \beta - \alpha / (1 + X_n^2 + Y_n^2), \\
 \text{uobičajena vrednost parametara : } & \alpha = 6, \quad \beta = 0,4, \quad \gamma = 1, \quad \mu = 0,9 \\
 \text{početni uslovi : } & X_0 = 0, \quad Y_0 = 0 \\
 \text{Ljapunovljevi eksponenti : } & \lambda_1 \simeq 0,50760 \quad \lambda_2 \simeq -0,71832.
 \end{aligned}$$

18.2.10 Sinajevo preslikavanje

$$\begin{aligned}
 X_{n+1} &= X_n + Y_n + \delta \sin 2\pi Y_n \pmod{1}, \\
 Y_{n+1} &= X_n + 2Y_n \pmod{1}, \\
 \text{uobičajena vrednost parametra :} & \quad \delta = 0,1 \\
 \text{početni uslovi :} & \quad X_0 = 0,5 \quad Y_0 = 0,5 \\
 \text{Ljapunovljevi eksponenti :} & \quad \lambda_1 \simeq 0,95946 \quad \lambda_2 \simeq -1,07714.
 \end{aligned}$$

18.2.11 Diskretno "predator-lovina" preslikavanje

$$\begin{aligned}
 X_{n+1} &= X_n \exp [r(1 - X_n/K) - \alpha Y_n] \text{ (lovina)}, \\
 Y_{n+1} &= X_n [1 - \exp(-\alpha Y_n)] \text{ (predator)}, \\
 \text{uobičajena vrednost parametara :} & \quad r = 3, K = 1, \alpha = 5 \\
 \text{početni uslovi :} & \quad X_0 = 0,5, Y_0 = 0,5 \\
 \text{Ljapunovljevi eksponenti :} & \quad \lambda_1 \simeq 0,19664 \quad \lambda_2 \simeq -0,03276.
 \end{aligned}$$

18.3 Konzervativna preslikavanja

18.3.1 Čirikovljevo (standardno) preslikavanje

$$\begin{aligned}
 X_{n+1} &= X_n + Y_{n+1} \pmod{2\pi}, \\
 Y_{n+1} &= Y_n + k \sin X_n \pmod{2\pi}, \\
 \text{uobičajena vrednost parametra :} & \quad k = 1, \\
 \text{početni uslovi :} & \quad X_0 = 0, Y_0 = 6, \\
 \text{Ljapunovljev eksponent :} & \quad \lambda \simeq \pm 0,10497.
 \end{aligned}$$

18.3.2 Enoovo kvadratno preslikavanje koje očuvava oblast

$$\begin{aligned}
 X_{n+1} &= X_n \cos \alpha - (Y_n - X_n^2) \sin \alpha, \\
 Y_{n+1} &= X_n \cos \alpha + (Y_n - X_n^2) \sin \alpha, \\
 \text{uobičajena vrednost parametra :} & \quad \cos \alpha = 0,24, \\
 \text{početni uslovi :} & \quad X_0 = 0,6, Y_0 = 0,13, \\
 \text{Ljapunovljev eksponent :} & \quad \lambda \simeq \pm 0,00643.
 \end{aligned}$$

18.3.3 Arnoldovo preslikavanje

$$X_{n+1} = X_n + Y_n \pmod{1},$$

$$Y_{n+1} = X_n + k Y_n \pmod{1},$$

uobičajena vrednost parametra : $k = 2$,

početni uslovi : $X_0 = 0, Y_0 = 1/\sqrt{2}$,

Ljapunovljevi eksponenti : $\lambda_{1,2} = \pm \ln \left[\frac{1}{2} (3 + \sqrt{5}) \right] = \pm 0,96242365 \dots$

18.3.4 Džindžerbredmanovo preslikavanje

$$X_{n+1} = 1 + |X_n| - Y_n,$$

$$Y_{n+1} = X_n,$$

početni uslovi : $X_0 = 0,5, Y_0 = 3,7$,

Ljapunovljevi eksponenti : $\lambda_{1,2} \simeq \pm 0,07339$.

18.3.5 Haotično "mrežasto" preslikavanje

$$X_{n+1} = X_n \cos \alpha - (Y_n + k \sin X_n) \sin \alpha,$$

$$Y_{n+1} = X_n \sin \alpha + (Y_n + k \sin X_n) \cos \alpha,$$

uobičajena vrednost parametara : $\alpha = \pi/2, k = 1$,

početni uslovi : $X_0 = 0, Y_0 = 3$,

Ljapunovljevi eksponenti : $\lambda_{1,2} \simeq \pm 0,04847$.

18.3.6 Lorencovo 3-D haotično preslikavanje

$$X_{n+1} = X_n Y_n - Z_n,$$

$$Y_{n+1} = X_n,$$

$$Z_{n+1} = Y_n,$$

početni uslovi : $X_0 = 0,5, Y_0 = 0,5, Z_0 = -1$,

Ljapunovljevi eksponenti : $\lambda_1 \simeq 0,07456, \lambda_2 = 0, \lambda_3 \simeq -0,07456$.

18.4 Disipativni tok pod dejstvom prinudne sile

18.4.1 Klatno sa prigušenjem

$$\frac{dx}{dt} = y,$$

$$\frac{dy}{dt} = -\sin x - by + A \sin \Omega t,$$

uobičajena vrednost parametara : $b = 0,05, A = 0,6, \Omega = 0,7,$

početni uslovi : $x_0 = 0, y_0 = 0, t_0 = 0,$

Ljapunovljevi eksponenti : $\lambda_1 \simeq 0,1414, \lambda_2 = 0, \lambda_3 \simeq -0,1914.$

18.4.2 Van der Polov oscilator

$$\frac{dx}{dt} = y,$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + b(1 - x^2)y + A \sin \Omega t,$$

uobičajena vrednost parametara : $b = 3, A = 5, \Omega = 1,788,$

početni uslovi : $x_0 = -1,9, y_0 = 0, t_0 = 0,$

Ljapunovljevi eksponenti : $\lambda_1 \simeq 0,1933, \lambda_2 = 0, \lambda_3 \simeq -2,0725$

18.4.3 Šo-Van der Polov oscilator

$$\frac{dx}{dt} = y + A \sin \Omega t,$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + b(1 - x^2)y,$$

uobičajena vrednost parametara : $b = 1, A = 1, \Omega = 2$

početni uslovi : $x_0 = 1,3, y_0 = 0, t_0 = 0,$

Ljapunovljevi eksponenti : $\lambda_1 \simeq 0,1180, \lambda_2 = 0, \lambda_3 \simeq -1,2736$

18.4.4 Prinudni Briselator

$$\frac{dx}{dt} = x^2y - (b + 1)x + a + A \sin \Omega t,$$

$$\frac{dy}{dt} = -x^2y + bx,$$

uobičajena vrednost parametara : $a = 0,4, b = 1,2, A = 0,05, \Omega = 0,8$

početni uslovi : $x_0 = 0,3, y_0 = 2, t_0 = 0,$

Ljapunovljevi eksponenti : $\lambda_1 \simeq 0,0140, \lambda_2 = 0, \lambda_3 \simeq -0,2619.$

18.4.5 Uedin oscilator

$$\frac{dx}{dt} = y,$$

$$\frac{dy}{dt} = -x^3 - by + A \sin \Omega t,$$

uobičajena vrednost parametara : $b = 0,05, A = 7,5, \Omega = 1$

početni uslovi : $x_0 = 2,5, y_0 = 0, t_0 = 0,$

Ljapunovljevi eksponenti : $\lambda_1 \simeq 0,1034, \lambda_2 = 0, \lambda_3 \simeq -0,1534.$

18.4.6 Dafingov oscilator sa dve "jame"

$$\frac{dx}{dt} = y,$$

$$\frac{dy}{dt} = -x^3 + x - by + A \sin \Omega t,$$

uobičajena vrednost parametara : $b = 0,05, A = 0,4, \Omega = 1$

početni uslovi : $x_0 = 0,2, y_0 = 0, t_0 = 0,$

Ljapunovljevi eksponenti : $\lambda \simeq 0,1572, \lambda_2 = 0, \lambda_3 \simeq -0,4072.$

18.4.7 Dafing- Van der Polov oscilator

$$\frac{dx}{dt} = y,$$

$$\frac{dy}{dt} = \mu(1 - \gamma y^2)y - x^3 + A \sin \Omega t,$$

uobičajena vrednost parametara : $\mu = 0,2, \gamma = 8, A = 0,35, \Omega = 1,02$

početni uslovi : $x_0 = 0,2, y_0 = -0,2, t_0 = 0,$

Ljapunovljevi eksponenti : $\lambda \simeq 0,0963, \lambda_2 = 0, \lambda_3 \simeq -0,2778.$

18.4.8 Rejli-Dafingov oscilator

$$\frac{dx}{dt} = y,$$

$$\frac{dy}{dt} = \mu(1 - \gamma y^2)y - x^3 + A \sin \Omega t,$$

uobičajena vrednost parametara : $\mu = 0,2, \gamma = 4, A = 0,3, \Omega = 1,1$

početni uslovi : $x_0 = 0,3, y_0 = 0, t_0 = 0,$

Ljapunovljevi eksponenti : $\lambda_1 \simeq 0,0963, \lambda_2 = 0, \lambda_3 \simeq -0,2778.$

18.5 Autonomni disipativni tok

18.5.1 Lorencov atraktor

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x), \\ \frac{dy}{dt} &= -xz + rx - y, \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz,\end{aligned}$$

uobičajena vrednost parametara : $\sigma = 10, r = 28, b = 8/3,$

početni uslovi : $x_0 = 0, y_0 = -0,01, z_0 = 9,$

Ljapunovljevi eksponenti : $\lambda_1 \simeq 0,9056, \lambda_2 = 0, \lambda_3 \simeq -14,5723.$

18.5.2 Reslerov atraktor

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -y - z, \\ \frac{dy}{dt} &= x + ay, \\ \frac{dz}{dt} &= b + z(x - c),\end{aligned}$$

uobičajena vrednost parametara : $a = b = 0,2, c = 5,7,$

početni uslovi : $x_0 = -9, y_0 = 0, z_0 = 0,$

Ljapunovljevi eksponenti : $\lambda_1 \simeq 0,0714, \lambda_2 = 0, \lambda_3 \simeq -5,3943.$

18.5.3 Lorencov atraktor bez difuzije

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -y - x, \\ \frac{dy}{dt} &= -xz, \\ \frac{dz}{dt} &= xy + R,\end{aligned}$$

uobičajena vrednost parametra : $R = 1,$

početni uslovi : $x_0 = 1, y_0 = -1, z_0 = 0,01,$

Ljapunovljevi eksponenti : $\lambda_1 \simeq 0,2101, \lambda_2 = 0, \lambda_3 \simeq -1,2101.$

18.5.4 Složeni leptir

$$\frac{dx}{dt} = a(y - z),$$

$$\frac{dy}{dt} = -z \operatorname{sgn} x,$$

$$\frac{dz}{dt} = |x| - 1,$$

uobičajena vrednost parametra : $a = 0,55$,

početni uslovi : $x_0 = 0,2, y_0 = 0, z_0 = 0$,

Ljapunovljevi eksponenti : $\lambda_1 \simeq 0,1690, \lambda_2 = 0, \lambda_3 \simeq -0,7190$.

18.5.5 Čenov sistem

$$\frac{dx}{dt} = a(y - x),$$

$$\frac{dy}{dt} = (c - a)x - xz + cy,$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - bz,$$

uobičajena vrednost parametara : $a = 35, b = 3, c = 28$

početni uslovi : $x_0 = -10, y_0 = 0, z_0 = 37$,

Ljapunovljevi eksponenti : $\lambda_1 \simeq 2,0272, \lambda_2 = 0, \lambda_3 \simeq -12,0272$.

18.5.6 Hedlijeva cirkulacija

$$\frac{dx}{dt} = -y^2 - z^2 - ax + aF,$$

$$\frac{dy}{dt} = xy - bxz - y + G,$$

$$\frac{dz}{dt} = bxy + xz - z,$$

uobičajena vrednost parametara : $a = 0,25, b = 4, F = 8, G = 1$

početni uslovi : $x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 1,3$,

Ljapunovljevi eksponenti : $\lambda_1 \simeq 0,1665, \lambda_2 = 0, \lambda_3 \simeq -4,4466$.

18.5.7 ACT atraktor

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \alpha(x - y), \\ \frac{dy}{dt} &= -4\alpha y + xz + \mu x^3, \\ \frac{dz}{dt} &= -\delta\alpha z + xy + \beta z^2,\end{aligned}$$

uobičajena vrednost parametara : $\alpha = 1,8$, $\beta = -0,07$, $\delta = 1,5$, $\mu = 0,02$

početni uslovi : $x_0 = 0,5$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$,

Ljapunovljevi eksponenti : $\lambda_1 \simeq 0,1634$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \simeq -9,2060$.

18.5.8 Rabinovič-Fabrikant atraktor

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y(z - 1 + x^2) + \gamma x, \\ \frac{dy}{dt} &= x(3z + 1 - x^2) + \gamma y, \\ \frac{dz}{dt} &= -2z(\alpha + xy),\end{aligned}$$

uobičajena vrednost parametara : $\alpha = 1,1$, $\gamma = 0,87$,

početni uslovi : $x_0 = -1$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0,5$,

Ljapunovljevi eksponenti : $\lambda_1 \simeq 0,1981$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \simeq -0,6581$

18.5.9 Linearni sistem za kretanje krutog tela, sa povratnom spregom

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -0,4x + y + 10yz, \\ \frac{dy}{dt} &= -x - 0,4y + 5xy, \\ \frac{dz}{dt} &= \alpha z - 5xy,\end{aligned}$$

uobičajena vrednost parametra : $\alpha = 0,175$,

početni uslovi : $x_0 = 0,6$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$,

Ljapunovljevi eksponenti : $\lambda_1 \simeq 0,1421$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \simeq -0,7671$.

18.5.10 Čuino kolo

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(y - x + bx) + \alpha \left[\frac{1}{2}(a - b)(|x + 1| - |x - 1|) \right]$$

$$\frac{dy}{dt} = x - y + z,$$

$$\frac{dz}{dt} = -\beta y,$$

uobičajena vrednost parametara : $\alpha = 9, \beta = 100/7, a = 8/7, b = 5/7$

početni uslovi : $x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0, 6,$

Ljapunovljevi eksponenti : $\lambda_1 \simeq 0, 3271, \lambda_2 = 0, \lambda_3 \simeq -2, 5197.$

18.5.11 Mur-Špigelov oscilator

$$\frac{dx}{dt} = y,$$

$$\frac{dy}{dt} = z,$$

$$\frac{dz}{dt} = -z - (T - R + Rx^2)y - Tx,$$

uobičajena vrednost parametara : $T = 6, R = 20,$

početni uslov : $x_0 = 0, 1, y_0 = 0, z_0 = 0,$

Ljapunovljevi eksponenti : $\lambda_1 \simeq 0, 1119, \lambda_2 = 0, \lambda_3 \simeq -1, 1119.$

18.5.12 Tomasov kružno-simetrični atraktor

$$\frac{dx}{dt} = -bx + \sin y,$$

$$\frac{dy}{dt} = -by + \sin z,$$

$$\frac{dz}{dt} = -bz + \sin x,$$

uobičajena vrednost parametra : $b = 0, 18,$

početni uslovi : $x_0 = 0, 1, y_0 = 0, z_0 = 0,$

Ljapunovljevi eksponenti : $\lambda_1 \simeq 0, 0349, \lambda_2 = 0, \lambda_3 \simeq -0, 5749.$

18.5.13 Halvorsenov kružno-simetrični atraktor

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -ax - 4y - 4z - y^2, \\ \frac{dy}{dt} &= -ay - 4z - 4x - z^2, \\ \frac{dz}{dt} &= -az - 4x - 4y - x^2,\end{aligned}$$

uobičajena vrednost parametra : $a = 1, 27,$

početni uslov : $x_0 = -5, y_0 = 0, z_0 = 0,$

Ljapunovljevi eksponenti : $\lambda_1 \simeq 0, 7899, \lambda_2 = 0, \lambda_3 \simeq -4, 5999.$

18.5.14 Burk-Šoov atraktor

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -Ux - Uy, \\ \frac{dy}{dt} &= -Uxz - y, \\ \frac{dz}{dt} &= -Uxy + V,\end{aligned}$$

uobičajena vrednost parametara : $U = 10, V = 13,$

početni uslovi : $x_0 = 0, 6, y_0 = 0, z_0 = 0,$

Ljapunovljevi eksponenti : $\lambda_1 \simeq 2, 2499, \lambda_2 = 0, \lambda_3 \simeq -13, 2499.$

18.5.15 Raklidžov atraktor

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\kappa x + \lambda y - yz, \\ \frac{dy}{dt} &= x, \\ \frac{dz}{dt} &= -z + y^2,\end{aligned}$$

uobičajena vrednost parametara : $\kappa = 2, \lambda = 6, 7,$

početni uslovi : $x_0 = 1, y_0 = 0, z_0 = 4, 5,$

Ljapunovljevi eksponenti : $\lambda_1 \simeq 0, 0643, \lambda_2 = 0, \lambda_3 \simeq -3, 0643.$

18.5.16 VINDMI atraktor

$$\frac{dx}{dt} = y,$$

$$\frac{dy}{dt} = z,$$

$$\frac{dz}{dt} = -az - y + b - e^x,$$

uobičajena vrednost parametara : $a = 0,7$, $b = 2,5$,

početni uslovi : $x_0 = 0$, $y_0 = 0,8$, $z_0 = 0$,

Ljapunovljevi eksponenti : $\lambda_1 \simeq 0,0755$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \simeq -0,7755$.

18.5.17 Najprostiji kvadratni haotični tok

$$\frac{dx}{dt} = y,$$

$$\frac{dy}{dt} = z,$$

$$\frac{dz}{dt} = -az + y^2 - x,$$

uobičajena vrednost parametra : $a = 2,017$,

početni uslovi : $x_0 = -0,9$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0,5$,

Ljapunovljevi eksponenti : $\lambda_1 \simeq 0,0551$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \simeq -2,0721$.

18.5.18 Najprostiji kubni haotični tok

$$\frac{dx}{dt} = y,$$

$$\frac{dy}{dt} = z,$$

$$\frac{dz}{dt} = -az + xy^2 - x,$$

uobičajena vrednost parametra : $a = 2,028$,

početni uslovi : $x_0 = 0$, $y_0 = 0,96$, $z_0 = 0$,

Ljapunovljevi eksponenti : $\lambda_1 \simeq 0,0837$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \simeq -2,1117$.

18.5.19 Najprostiji deo-po-deo linearni haotični tok

$$\frac{dx}{dt} = y,$$

$$\frac{dy}{dt} = z,$$

$$\frac{dz}{dt} = -az - y + |x| - 1,$$

uobičajena vrednost parametra : $a = 0,6$,

početni uslovi : $x_0 = 0, y_0 = -0,7, z_0 = 0$,

Ljapunovljevi eksponenti : $\lambda_1 \simeq 0,0362, \lambda_2 = 0, \lambda_3 \simeq -0,6362$.

18.5.20 "Dvostruko klizni" sistem

$$\frac{dx}{dt} = y,$$

$$\frac{dy}{dt} = z,$$

$$\frac{dz}{dt} = -a[z + y + x - \operatorname{sgn} x],$$

uobičajena vrednost parametra : $a = 0,8$,

početni uslovi : $x_0 = 0,01, y_0 = 0,01, z_0 = 0$,

Ljapunovljevi eksponenti : $\lambda_1 \simeq 0,0497, \lambda_2 = 0, \lambda_3 \simeq -0,8497$.

18.6 Konzervativni tok

18.6.1 Klatno pod dejstvom prinudne sile

$$\frac{dx}{dt} = y,$$

$$\frac{dy}{dt} = -\sin x + A \sin \Omega t,$$

uobičajena vrednost parametara : $A = 1,0, \Omega = 0,5$,

početni uslovi : $x_0 = 0, y_0 = 0, t_0 = 0$,

Ljapunovljevi eksponenti : $\lambda_1 \simeq 0,1633, \lambda_2 = 0, \lambda_3 \simeq -0,1633$.

18.6.2 Najprostiji haotični tokovi sa prinudom

$$\frac{dx}{dt} = y,$$

$$\frac{dy}{dt} = -x^3 + \sin \Omega t,$$

uobičajena vrednost parametra : $\Omega = 1,88$

početni uslovi : $x_0 = 0, y_0 = 0, t_0 = 0,$

Ljapunovljevi eksponenti : $\lambda_1 \simeq 0,0971, \lambda_2 = 0, \lambda_3 \simeq -0,0971.$

18.6.3 Noze-Huverov oscilator

$$\frac{dx}{dt} = y,$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + yz,$$

$$\frac{dz}{dt} = a - y^2,$$

uobičajena vrednost parametra : $a = 1,$

početni uslovi : $x_0 = 0, y_0 = 5, z_0 = 0,$

Ljapunovljevi eksponenti : $\lambda_1 \simeq 0,0138, \lambda_2 = 0, \lambda_3 \simeq -0,0138.$

18.6.4 "Lavirint" haos

$$\frac{dx}{dt} = \sin y,$$

$$\frac{dy}{dt} = \sin z,$$

$$\frac{dz}{dt} = \sin x,$$

početni uslovi : $x_0 = 0,1, y_0 = 0, z_0 = 0,$

Ljapunovljevi eksponenti : $\lambda_1 \simeq 0,1402, \lambda_2 = 0, \lambda_3 \simeq -0,1402.$

18.6.5 Eno-Heilesov sistem

$$\frac{dx}{dt} = v,$$

$$\frac{dy}{dt} = w,$$

$$\frac{dv}{dt} = -x - 2xy,$$

$$\frac{dw}{dt} = -y - x^2 + y^2,$$

početni uslovi : $x_0 = 0,499, y_0 = 0, v_0 = 0, w_0 = 0,03160676\dots$

Ljapunovljevi eksponenti : $\lambda_1 \simeq 0,0450, \lambda_2 = 0, \lambda_3 \simeq -0,0450.$

Haotični sistemi necelog reda

19.1 Uvod

Opšte je poznato da se deterministički haos ne može javiti u neprekidnim (kontinualnim) sistemima reda manjeg od tri. Ovo tvrđenje je zasnovano na uobičajenom konceptu reda, kao broju stanja sistema ili ukupnom broju posebnih diferenciranja ili integraljenja u sistemu. Međutim, sistem može biti predstavljen i u obliku tri diferencijalne jednačine, čiji su izvodi neceli brojevi. U tom slučaju, ukupni red sistema jednak je sumi svkog pojedinačnog reda, tako da se haos može javiti i u sistemima reda manjeg od tri. U ovom slučaju red sistema nije jednak broju diferencijalnih jednačina, već predstavlja najviši izvod date **diferencijalne jednačine necelog reda** (tzv. **frakcione diferencijalne jednačine**).

Nelinearni sistem necelog reda, u opštem obliku, može biti predstavljen na sledeći način:

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{q_i} &= f_i(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \\ x_i(0) &= c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \tag{19.1}$$

gde su c_i početni uslovi. U vektorskom obliku, jednačina (19.1) glasi:

$$\mathbf{D}^q = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{19.2}$$

gde je $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$, za $0 < q_i < 1$, ($i = 1, 2, \dots, n$), i $x \in R^n$. Fiksne tačke sistema (19.2) određuju se iz uslova:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \tag{19.3}$$

i pod pretpostavkom da je $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ fiksna tačka sistema (19.2).

19.2 Definicija necelog izvoda

Frakcioni sistemi, odnosno sistemi necelog reda, mogu se smatrati uopštenjem sistema celog reda ([230], [280], [285], [151], [60]). Frakcioni račun predstavlja uopštenje diferencijalnog operatora na operator necelog reda, ${}_a D_t^r$, gde su a i t granice integracije, i $r \in R$.

Koriste se, najčešće, tri definicije:

- Grinvald-Letnikov- a^1 (GL)

$${}_{a}^{GL} D_t^r f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-r} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-a}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{r}{j} f(t-jh), \quad (19.4)$$

gde $\lfloor \cdot \rfloor$ označava celobrojni deo.

- Riman-Liuvilova² (RL)

$${}_{a}^{RL} D_t^r f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-r)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{r-n+1}} d\tau, \quad (19.5)$$

za $(n-1 < r < n)$, gde je $\Gamma(\cdot)$ gama funkcija, definisana za pozitivno realno m

$$\Gamma(m) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{m-1} du, \quad (19.6)$$

pri čemu je, za m ceo broj, faktorijel funkcija

$$\Gamma(m+1) = m! \quad (19.7)$$

- Kaputova³

$${}_a D_t^r f(t) = \frac{1}{\Gamma(r-n)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{r-n+1}} d\tau, \quad (19.8)$$

za $(n-1 < r < n)$.

¹Grünwald-Letnikov

²Riemann-Liouville

³Caputo

Definicija **necelog izvoda** lako se može motivisati ukoliko pođemo od n -tog izvoda (gde je n ceo broj) integrala m -tog reda (gde m nije ceo broj), čime dobijamo izvod reda $q = n - m$:

$$\frac{d^q f(t)}{dt^q} = \frac{d^n}{dt^n} ({}_0I_t^m f) = \frac{1}{\Gamma(m)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t-y)^{m-1} f(y) dy, \quad (19.9)$$

gde smo koristili sledeću definiciju integrala necelog reda $m \in R_+$

$${}_0I_t^m f = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^t (t-\tau)^{m-1} f(\tau) d\tau.$$

Napomenimo da Lajbnicovo pravilo, u obliku

$$\frac{d^m(f(t) \cdot g(t))}{dt^m} = \frac{d^m f(t)}{dt^m} g(t) + \frac{d^m g(t)}{dt^m} f(t) \quad (19.10)$$

ne važi, kao ni izvod složene funkcije, tj.

$$\frac{d^m(f(g(t)))}{dt^m} \neq \frac{d^m f}{dg^m} \cdot \frac{d^m g}{dt^m}. \quad (19.11)$$

Za $q = 1$, može da se pokaže da jednačina (19.9) predstavlja zapravo prvi izvod.

19.3 Stabilnost rešenja nelinearnih sistema necelog reda

Osnovna razlika između nelinearnih sistema celog i necelog reda je u tome što se ekponencijalna stabilnost ne može primeniti kod opisa stabilnosti sistema necelog reda [199]. Definicija asimptotske stabilnosti data je na sledeći način [239]: trajektorija $x(t) = 0$ sistema (19.1) je t^{-q} asimptotski stabilna, ukoliko postoji pozitivan realni broj q takav da je:

$$\forall \|x(t)\|, t \leq t_0, \exists N(x(t)) \text{ takvo da za } \forall t \geq t_0, \|x(t)\| \leq N t^{-q}. \quad (19.12)$$

Članovi $x(t)$ sporo opadaju ka nuli po ekponencijalnom zakonu t^{-q} tako da su sistemi necelog reda "sa velikom memorijom". Ova ekponencijalna stabilnost t^{-q} je specijalan slučaj Mittag-Leffler stabilnosti [183].

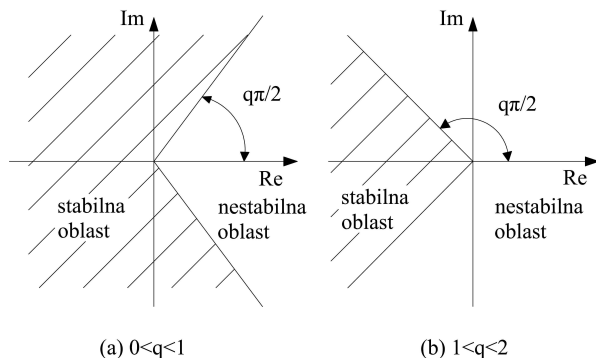
Prema teoremi o stabilnosti [330], fiksne tačke su asimptotski stabilne za $q_1 = q_2 = \dots = q_n \equiv q$ ukoliko sve sopstvene vrednosti λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) Jakobijan matrice:

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}, \quad (19.13)$$

gde se funkcija $f = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T$ određuje u fiksnoj tački, zadovoljavaju sledeći uslov [328]:

$$|\arg(\text{eig}(\mathbf{J}))| = |\arg(\lambda_i)| > q\frac{\pi}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (19.14)$$

Na slici 19.1 prikazane su oblasti stabilnosti u kompleksnoj ravni za ovaj slučaj.



Slika 19.1: Oblasti stabilnosti za nelinearni sistem necelog reda.

Posmatrajmo sada sistem necelog reda takav da je $q_1 \neq q_2 \neq \dots \neq q_n$, i pretpostavimo da je m najmanji zajednički množilac imenioca u_i od q_i , gde je $q_i = v_i/u_i$, a $v_i, u_i \in \mathbb{Z}^+$, za $i = 1, 2, \dots, n$, i usvojimo da je $\gamma = 1/m$. Ovaj sistem je asimptotski stabilan ukoliko:

$$\left| \arg(\lambda) > \gamma \frac{\pi}{2} \right| \quad (19.15)$$

važi za sve korene λ karakteristične jednačine:

$$\det(\text{diag}([\lambda m q_1 \lambda m q_2 \dots \lambda m q_n]) - \mathbf{J}) = 0. \quad (19.16)$$

Potreban uslov da sistem necelog reda bude haotičan je da bar jedna sopstvena vrednost λ bude u nestabilnoj oblasti na slici 19.1 [328]. Posmatrajmo, na primer, strani atraktor Čuinog kola, i pretpostavimo da su sopstvene vrednosti nestabilnih sedlastih tačaka konjugovano-kompleksne:

$\lambda_{1,2} = \alpha_{1,2} \pm j\beta_{1,2}$. Potreban uslov postojanja stranog atraktora Čuinog kola je da se sopstvene vrednosti $\lambda_{1,2}$ nalaze u nestabilnoj oblasti, odnosno:

$$q > \frac{2}{\pi} \operatorname{atg} \left(\frac{|\beta_i|}{\alpha_i} \right), \quad i = 1, 2. \quad (19.17)$$

Ova relacija se može koristiti za određivanje minimalnog reda za koji može doći do pojave haosa u nelinearnom sistemu [328]. Drugim rečima kada je mera nestabilnosti $\pi/(2m) - \min(|\arg(\lambda)|)$ negativna, sistem ne može biti haotičan.

Analizirajmo sada Čenov sistem, koji pokazuje karakteristični strani atraktor, i koji se može opisati pomoću tri diferencijalne jednačine necelog reda [329]:

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{0,8} x_1(t) &= 35 [x_2(t) - x_1(t)], \\ {}_0D_t^{1,0} x_2(t) &= -7x_1(t) - x_1(t)x_3(t) + 28x_2(t), \\ {}_0D_t^{0,9} x_3(t) &= x_1(t)x_2(t) - 3x_3(t). \end{aligned} \quad (19.18)$$

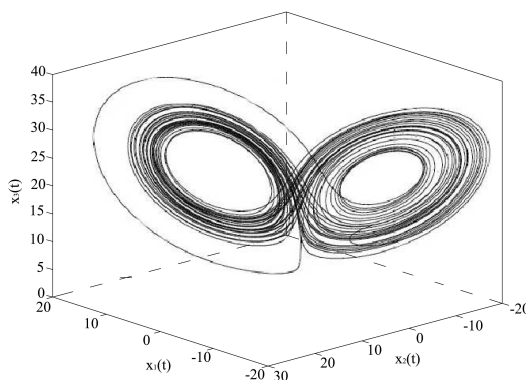
Sistem (19.18) ima tri fiksne tačke $(0, 0, 0)$, $(7, 94; 7, 94; 21)$ i $(-7, 94; -7, 94; 21)$. Jakobijan matrice sistema u fiksnoj tački (x_1^*, x_2^*, x_3^*) je:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -35 & 35 & 0 \\ -7 - x_3^* & 28 & -x_1^* \\ x_2^* & x_1^* & -3 \end{bmatrix} \quad (19.19)$$

Dve poslednje fiksne tačke predstavljaju sedlaste tačke stranog atraktora, i za ove dve fiksne tačke karakteristična jednačina sistema (19.18) je:

$$\lambda^{27} + 35\lambda^{19} + 3\lambda^{18} - 28\lambda^{17} + 105\lambda^{10} - 21\lambda^8 + 4410 = 0. \quad (19.20)$$

Karakteristična jednačina (19.20) ima nestabilna rešenja $\lambda_{1,2} = 1,2928 \pm 0,2032j$, $|\arg(\lambda_{1,2})| = 0,156$, i stoga sistem (19.18) zadovoljava potreban uslov za pojavu stranog atraktora. Mera nestabilnosti u ovom slučaju iznosi 0,0012. Na slici 19.2 prikazane su trajektorije Čenovog sistema, za početne uslove $(-9, -5, -14)$.



Slika 19.2: Strani atraktor Čenovog sistema (19.18), za početne uslove (-9, -5, -14).

19.4 Čuin sistem

19.4.1 Tradicionalni Čuin oscilator

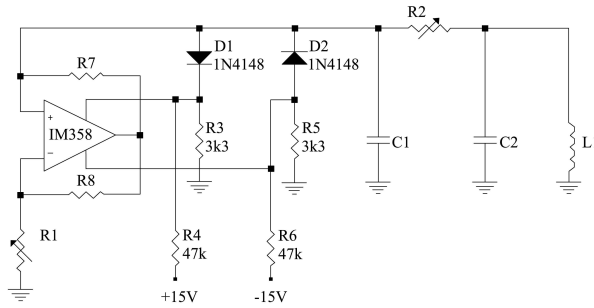
Tradicionalni Čuin oscilator, prikazan na slici 19.3, predstavlja jednostavno strujno kolo koje za određene vrednosti parametara pokazuje haotično ponašanje. Jednačina kretanja struje u ovom električnom strujnom kolu može se opisati sledećim sistemom jednačina [200]:

$$\begin{aligned}\frac{dV_1(t)}{dt} &= \frac{1}{C_1} [G V_2(t) - V_1(t) - f(V_1(t))], \\ \frac{dV_2(t)}{dt} &= \frac{1}{C_2} [G V_1(t) - V_2(t) + I(t)], \\ \frac{dI(t)}{dt} &= \frac{1}{L_1} [-V_2(t) - R_L I(t)],\end{aligned}\tag{19.21}$$

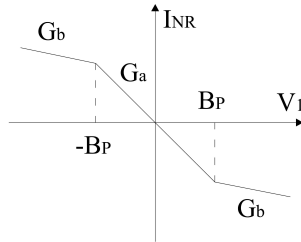
gde: $G = 1/R_2$, $I(t)$ predstavlja jačinu struje u zavojnici L_1 , $V_1(t)$ i $V_2(t)$ predstavljaju napone na kondenzatorima C_1 i C_2 , redom, a $f(V_1(t))$ deo-po-deo linearnu karakterističnu funkciju nelinearnog otpornika (Čuine diode), koja je prikazana na slici 19.4, i može biti opisana na sledeći način:

$$I_{NR}(t) = f(V_1(t)) = G_b V_1(t) + \frac{1}{2} (G_a - G_b) (|V_1(t) + B_p| - |V_1(t) - B_p|)\tag{19.22}$$

gde je B_p tačka prekida napona diode, a $G_a < 0$ i $G_b < 0$ predstavljaju odgovarajuće konstante (nagib deo-po-deo linearnog otpora).



Slika 19.3: Tradicionalno Čuino strujno kolo.



Slika 19.4: Deo-po-deo linearna karakteristična funkcija nelinearnog otpornika.

Uvedeći nove promenljive:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{V_1}{B_p}, & y &= \frac{V_2}{B_p}, & z &= \frac{I_L}{B_p G}, \\
 \alpha &= \frac{C_2}{C_1}, & \beta &= \frac{C_2}{L_1 G^2}, & \gamma &= \frac{C_2 R}{L G}, \\
 m_1 &= \frac{G_b}{G}, & m_0 &= \frac{G_a}{G}, & \tau &= \frac{t G}{C_2},
 \end{aligned} \tag{19.23}$$

sistem (19.21) može se izraziti u bezdimenzionalnom obliku [200]:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx(t)}{dt} &= \alpha(y(t) - x(t) - f(x)), \\
 \frac{dy(t)}{dt} &= x(t) - y(t) + z(t), \\
 \frac{dz(t)}{dt} &= -\beta y(t) - \gamma z(t),
 \end{aligned} \tag{19.24}$$

gde je:

$$f(x) = m_1 x(t) + \frac{1}{2} (m_0 - m_1) x (|x(t) + 1| - |x(t) - 1|), \tag{19.25}$$

a τ u (19.23) predstavlja bezdimenzionalno vreme.

19.4.2 Novi Čuin oscilator necelog reda

Dinamika strujnog kola može se opisati i sa tri necele diferencijalne jednačine različitog reda. Primenjujući Kirhofova pravila, kao i relacije:

$$I(t) = C \frac{d^\alpha V(t)}{dt^\alpha} \quad \text{i} \quad V(t) = L \frac{d^\alpha I(t)}{dt^\alpha}$$

za strujno kolo prikazano na slici 19.3, dinamika strunog kola se može opisati na sledeći način:

$$\begin{aligned} C_{10} D_t^{q_1} V_1(t) + I_{NR}(t) &= \frac{V_2(t) - V_1(t)}{R_2}, \\ C_{20} D_t^{q_2} V_2(t) - I(t) &= \frac{V_1(t) - V_2(t)}{R_2}, \\ L_{10} D_t^{q_3} I(t) + V_2(t) + R_L I(t) &= 0. \end{aligned} \tag{19.26}$$

Jednačine (19.26) mogu se napisati i u sledećem obliku:

$$\begin{aligned} {}_0 D_t^{q_1} V_1(t) &= \frac{1}{C_1 R_2} [V_2(t) - V_1(t)] - \frac{f(V_1(t))}{C_1}, \\ {}_0 D_t^{q_2} V_2(t) &= \frac{1}{C_2 R_2} [V_1(t) - V_2(t)] - \frac{I(t)}{C_2}, \\ {}_0 D_t^{q_3} I(t) &= \frac{1}{L_1} [-V_2(t) - R_L I(t)], \end{aligned} \tag{19.27}$$

gde je V_1 napona na kondenzatoru C_1 , V_2 je napon na kondenzatoru C_2 , I je jačina struje kroz zavojnicu L_1 , q_1 je realni red kondenzatora C_1 , q_2 je realni red kondenzatora C_2 , q_3 je realni red zavojnice L_1 , $f(V_1)$ je deo-po-deo linearna $v - i$ karakteristična funkcija nelinearne Čuine diode, koja se opisuje jednačinom (19.25).

Koristeći smenu (19.23), sistem (19.27) može se napisati u sledećem bezdimenzionalnom obliku [250]:

$$\begin{aligned} {}_0 D_t^{q_1} x(t) &= \alpha (y(t) - x(t) - f(x)), \\ {}_0 D_t^{q_2} y(t) &= x(t) - y(t) + z(t), \\ {}_0 D_t^{q_3} z(t) &= -\beta y(t) - yz(t), \end{aligned} \tag{19.28}$$

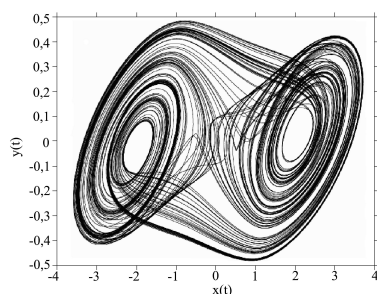
gde je funkcija $f(x)$ defisana sa (19.25).

Na slici 19.5 prikazan je atraktor necelog Čuinog strujnog kola (19.28), dobijen numeričkim putem, za početne uslove:

$$(x(0), y(0), z(0)) = (0, 6; 0, 1; -0, 6),$$

i za vrednosti parametara:

$$\begin{aligned} C_1 &= 4,7 \text{ nF}, & C_2 &= 48 \text{ nF}, & L_1 &= 4,64 \text{ mH}, \\ R_L &= 15,8 \Omega, & R_1 &= 897 \Omega, & R_7 &= R_8 = 393 \Omega. \end{aligned} \quad (19.29)$$



Slika 19.5: Strani atraktor Čuinog sistema necelog reda $q = 2,9$ (19.28) za sledeće vrednosti parametara: $\alpha = 10,1911$, $\beta = 10,3035$, $\gamma = 0,1631$, $q_1 = q_2 = 0,98$, $q_3 = 0,94$, $m_0 = -1,1126$, i $m_1 = -0,8692$.

19.5 Dafingov oscilator necelog reda

Specijalan oblik jednačine Dafingovog oscilatora, dat još 1918.g. od strane G. Dafinga, glasi:

$$x^{(2)}(t) - x^{(s)}(t) + \alpha x(t) + x^3(t) = \delta \cos(\omega t). \quad (19.30)$$

Da bismo dobili Dafingov sistem necelog reda, jednačina (19.30) može se zapisati u obliku dve diferencijalne jednačine prvog reda:

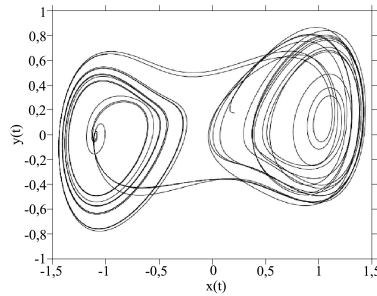
$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= y(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= x(t) - x^3(t) - \alpha y(t) + \delta \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (19.31)$$

U sledećem koraku, celi izvodi u jednačinama (19.31) zamenjuju se necelim izvodima, čime se dobija Dafingov sistem necelog reda:

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{q_1} x(t) &= y(t), \\ {}_0D_t^{q_2} y(t) &= x(t) - x^3(t) - \alpha y(t) + \delta \cos(\omega t), \end{aligned} \quad (19.32)$$

gde su q_1 i q_2 dva realna broja koji zadovoljavaju $0 < q_1, q_2 \leq 1$, a α , δ i ω parametri sistema.

Na slici 19.6 prikazan je strani atraktor Dafingovog sistema necelih redova $q_1 = 0,9$ i $q_2 = 1$ (19.32), za vrednosti parametara $\alpha = 0,15$; $\delta = 0,3$ i $\omega = 1$, i za početne uslove $(x(0), y(0)) = (0,21; 0,13)$.



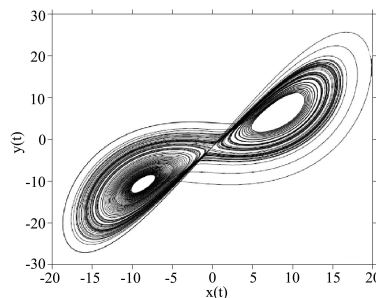
Slika 19.6: Atraktor Dafingovog oscilatora necelih redova $q_1 = 0,9$ i $q_2 = 1$ (19.32), u faznoj ravni (x, y) za vrednosti parametara $\alpha = 0,15$; $\delta = 0,3$ i $\omega = 1$, i za početne uslove $(x(0), y(0)) = (0,21; 0,13)$.

19.6 Lorencov oscilator necelog reda

Lorencov sistem necelog reda može se opisati pomoću sledećeg sistema jednačina [183]:

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{q_1} x(t) &= \sigma(y(t) - x(t)), \\ {}_0D_t^{q_2} y(t) &= x(t)(\varrho - z(t)) - y(t), \\ {}_0D_t^{q_3} z(t) &= x(t)y(t) - \beta z(t), \end{aligned} \quad (19.33)$$

gde za $(\sigma, \varrho, \beta) = (10, 28, 8/3)$, $q_1 = q_2 = q_3 = 0,993$, Lorencov sistem necelog reda (19.33) ima strani atraktor (slika 19.7).



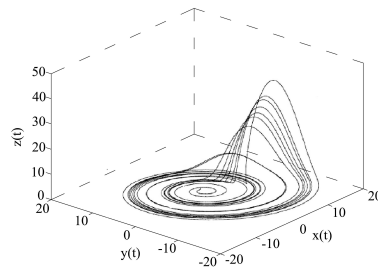
Slika 19.7: Strani atraktor Lorencovog sistema necelog reda $q_1 = q_2 = q_3 = 0,993$, za $(\sigma, \varrho, \beta) = (10, 28, 8/3)$, i za početne uslove $(x(0), y(0), z(0)) = (0, 1; 0, 1; 0, 1)$.

19.7 Reslerov oscilator necelog reda

Reslerov sistem necelog reda dat je sledećim sistemom jednačina [182]:

$$\begin{aligned} {}_0D_t^q x(t) &= -(y(t) + z(t)), \\ {}_0D_t^q y(t) &= x(t) + a y(t), \\ {}_0D_t^q z(t) &= 0,2 + z(t) (x(t) - 10), \end{aligned} \quad (19.34)$$

gde se parametar a menja, a q predstavlja neceli red. Na slici 19.8 prikazana je trajektorija sistema (19.34) u faznom prostoru, za Reslerov sistem necelog reda $q = 0,8$, i za vrednost parametra $a = 0,5$.



Slika 19.8: Trajektorija sistema (19.34) u faznom prostoru, za Reslerov sistem necelog reda $q = 0,8$, za vrednost parametra $a = 0,5$, i za početne uslove: $(x(0), y(0), z(0)) = (0,5; 1,5; 0,1)$.

Glava 20

Spektralna analiza

20.1 Uvod

Najranija posmatranja prirodnih fenomena otkrila su njihovu periodičnost. Merenje vremena, npr. zasniva se na posmatranju periodičnosti trajanja dana, trajanja godine, sezonskih promena, kretanja nebeskih tela itd. U šestom veku Pitagora je uspostavio relaciju između periode tona koji proizvodi vibracija žice fiksne dužine i broja koji predstavlja dužinu žice. Međutim, njegove relacije bile su zasnovane na empirijskom iskustvu. Matematičku osnovu moderne spektralne analize postavio je u XVII veku Njutn. On je proučavao prelamanje sunčeve svetlosti kroz staklenu prizmu i uočio da se ona razlaže u spektar boja, a svaka boja ima određenu talasnu dužinu. Tada je prvi put uveden pojam spektar¹ da opiše razlaganje sunčeve svetlosti na boje određenih talasnih dužina.

Od Njutna do današnjih dana veliki broj naučnika ostavio je svoj pečat u razvoju ove oblasti nauke. Francuski naučnik Furije smatra se utemeljivačem harmonijske analize. Šuster² razvija metod periodograma za računanje gustine spektra snage. Britanski statističar Jul uvodi alternativne metode spektralne analize. Viner³ daje precizne statističke definicije gustine spektra snage i autokorelacije za stacionarne slučajne procese i smatra se tvorcem moderne teorijske spektralne analize. Nemački matematičar Toplic⁴ doprineo je efikasnosti rešavanja problema linearne predikcije izučavajući speci-

¹spectrum (eng.)

²Shuster

³Wiener

⁴Toeplitz

jalne strukture Jul-Vokerovih jednačina.

Pedesetih godina ovoga veka geofizička grupa analitičara predvođena Robinsonom dala je značajan doprinos modernim digitalnim metodama spektralne analize i obrade seizmičkih digitalnih signala.

Taki⁵ se smatra tvorcem moderne empirijske analize. Njegov ključni doprinos zajedno sa Kulijem⁶ je efikasan algoritam za računanje diskretne brze Furijeove transformacije, koji je predstavljao prekretnicu u daljem korišćenju digitalne spektralne analize, kao alata za digitalnu obradu signala.

Spektralna analiza visoke rezolucije, naročito kada su u pitanju kratki (ograničeni) nizovi podataka, pripisuje se radovima Burga. Njegov proračun spektra visoke rezolucije metodom maksimalne entropije skreće pažnju na parametarske metode računanja spektra snage.

Naravno, iako moderne i savremene, parametarske metode ne predstavljaju kraj istraživanja u pokušaju da se signal analizira na ovaj način. U narednim poglavljima videćemo da se spektar snage definiše preko statistike momenata drugog reda, koja podrazumeva da se analizirani proces tokom vremena ne menja, tj. stacionaran je. Dakle, spektar nije kompletna statistička slika slučajnog procesa koji može sadržati dodatne informacije u statistici trećeg, četvrtog i viših redova.

Jedan od pristupa u izučavanju nestacionarnih procesa je da se razmatraju segmenti koji mogu biti lokalno stacionarni, a da se promena spektra snage ispituje od segmenta do segmenta itd.

Spektralna analiza opisuje frekventijski sadržaj signala, slučajnog procesa ili sistema konačnog broja podataka. Stoga statistika igra značajnu ulogu u spektralnoj analizi, pošto većina signala sadrži slučajnu smetnju (ima slučajni karakter ili sadrži slučajni šum). Za konačni segment signala moguće je samo proceniti spektar tako da spektralna analiza nije egzaktna, odnosno signal ne može biti predstavljen njegovim statističkim atributima bez greške. I pored toga, procena spektra snage je korisna u raznim primenama uključujući otkrivanje signala maskiranog širokopojasnim šumom. Poznavanje frekventijskog sadržaja signala od posebnog je značaja za dizajniranje frekventijski selektivnih digitalnih filtara.

Na osnovu Parsevalove teoreme totalna snaga signala ista je bilo da se računa u vremenskom ili frekventijskom domenu. Neka je $h(t)$ deterministički signal koji ima konačnu energiju E , pa na osnovu Parsevalove teoreme

⁵Tukey

⁶Cooley

važi:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df. \quad (20.1)$$

Veličina $|H(f)|^2$ predstavlja raspodelu energije signala u frekvencijskom domenu i naziva se gustina energijskog spektra signala

$$P_h(f) = |H(f)|^2. \quad (20.2)$$

Gustinu energijskog spektra snage determinističkog signala možemo sračunati i pomoću autokorelacione funkcije signala. Ako je autokorelaciona funkcija definisana sa

$$r(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)h(t + \tau) dt, \quad (20.3)$$

tada Furijeova transformacija autokorelacione funkcije daje energijski spektar

$$P_n = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (20.4)$$

Za diskretne determinističke signale određivanje gustine energijskog spektra moguće je na dva načina: direktno Furijeovom transformacijom diskretnog signala i indirektno ako se prvo izračuna autokorelaciona funkcija, a zatim njena Furijeova transformacija. Problemi praktičnog računanja gustine spektra snage nastaju:

1. kod određivanja spektra signala konačne dužine, koji su u praksi najčešći,
2. kad su signali slučajne prirode, a ne deterministički, pa nemaju konačnu energiju.

U oba slučaja razvijene su metode za poboljšanje procene gustine spektra snage: u prvom modifikovanjem diskretnog slučajnog niza prozorskim funkcijama, a u drugom uobličavanjem ili osrednjavanjem spektra o čemu će biti reči u narednim poglavljima.

20.2 Furijeova transformacija diskretnih signala i diskretna Furijeova transformacija

20.2.1 Uvod

Furijeova analiza spada u grupu matematičkih tehnika, koje se zasnivaju na dekompoziciji signala u trigonometrijske funkcije (sinus i kosinus).

Generalno, termin Furijeova transformacija obuhvata različite oblike, što zavisi od toga na koji se signal primenjuje (Oran E.B, 1974, [234] Smith S., 1999 [306]).

Furijeovi redovi, razvijani nezavisno od Furijeove transformacije, primenjuju se na periodične neprekidne signale (funkcije), definisane od $-\infty$ do $+\infty$. Primeri takvih funkcija su sinusni signali, trougaoni ili pravougaoni signali itd.

U slučaju aperiodičnih neprekidnih signala (ili funkcija), definisanih od $-\infty$ do $+\infty$, koristi se Furijeova (integralna) transformacija.

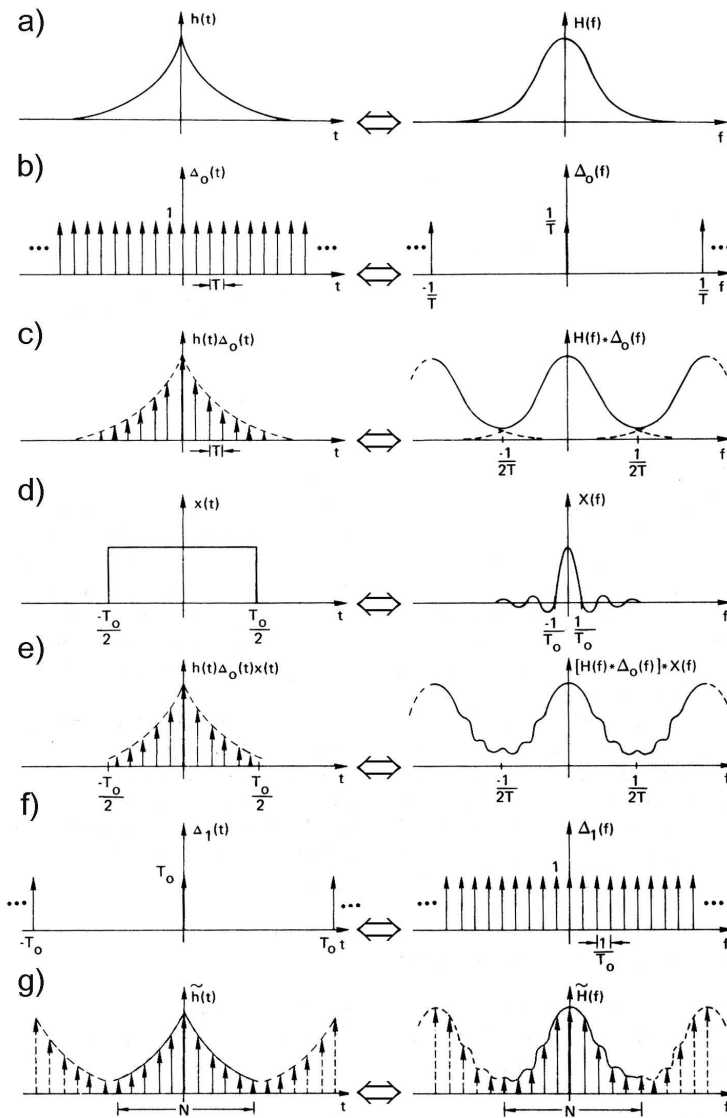
Razvoj digitalne obrade signala, posebno digitalne obrade diskretnih signala, vezuje se za razvitak telekomunikacija, elektronike, računarstva, mada se koriste i u drugim naučnim i tehničkim disciplinama. Posledica toga je da se Furijeova transformacija razvijala u tom pravcu, odnosno veća pažnja je poklanjana diskretnoj Furijeovoj transformaciji.

U ovom poglavlju ćemo definisati Furijeovu transformaciju diskretne funkcije (DTFT) i Furijeovu diskretnu transformaciju (DFT), kao i vezu između njih.

Pre nego što damo matematičke izraze za DTFT i DFT, grafički ćemo ilustrovati korake prelaska od jedne ka drugoj transformaciji.

Na slici 20.1a prikazana je eksponencijalna funkcija (signal) $h(t)$ i njena Furijeova transformacija $H(f)$, odnosno transformacioni par $h(t) \Leftrightarrow H(f)$. Na slici 20.1b prikazana je funkcija kojom se vrši odabiranje (povorka jediničnih impulsa), kao i njena DTFT. Na slici 20.1c prikazana je povorka otežinjenih impulsa (odabirana funkcija) i odgovarajuća DTFT.

Furijeova transformacija ovakvog signala je modifikovana u odnosu na Furijeovu transformaciju neprekidnog signala. Razlika se uočava u frekven-cijskom domenu (vidi sl. 20.1c-desno). Ovaj efektu naziva se alijasing. Ako signal nije ograničen po opsegu frekvencija, to jest $H(f) \neq 0$ za neke frekvencije $|f| > f_c$ odabiranjem se javlja efekat preslikavanja frekvencija. Da bismo redukovali ovaj efekat potrebno je smanjiti T , odnosno povećati brzinu odabiranja.



Slika 20.1: Prikaz grafičkog izvođenja diskretne Furijeove transformacije.

Furijeova transformacija diskretnog signala na slici 20.1c još uvek nije primenljiva za rad na računaru. Broj odbiraka niza nije ograničen i kreće se u granicama od $-\infty$ do $+\infty$. Neophodno je ograničiti diskretni signal tako da u proračun ulazi konačan broj odbiraka N signala.

Na slici 20.1d prikazana je pravougaona prozorska funkcija i njena Furijeova transformacija. Proizvod beskonačnog diskretnog signala i pravougaone

prozorske funkcije daje diskretni niz konačne dužine prikazan na slici 20.1e. Ograničavanje niza beskonačne dužine na niz konačne dužine uvodi novu modifikaciju u Furijeovoj transformaciji. Pored preslikavanja frekvencija koje smo pomenuli kao prateći efekat diskretizacije neprekidnog niza, njegovim ograničavanjem na konačan broj odbiraka javljaju se bočni lukovi u Furijeovoj transformaciji ovakvog niza.

Ovaj efekat prikazan je na slici 20.1e. Da bi smo objasnili kako da smanjimo ovaj uticaj vratimo se ponovo na sliku 20.1d. Širina pravougaone (prozorske) funkcije u vremenskom domenu utiče na oblik funkcije u frekvencijskom domenu (Furijeova transformacija pravougaone funkcije). Odnosno, povećanjem dužine pravougaone funkcije, sa kojom vršimo ograničavanje, (odsecanje) beskonačnog signala, dovodi do suženja funkcije $\frac{\sin f}{f}$ i njenog približavanja impulsnom obliku. Ovo direktno utiče na smanjivanje bočnih lukova Furijeove transformacije ograničenog niza. Zaključak je da se smanjenje bočnih lukova u Furijeovoj transformaciji konačnog diskretnog niza može postići izborom što je moguće duže pravougaone prozorske funkcije, kojom ograničavamo niz beskonačne dužine.

Furijeova transformacija diskretnog ograničenog niza, prikazanog na slici 20.1e, još uvek nije pogodna za primenu na računaru, jer je frekvencija neprekidna veličina. Sledeći korak je odabiranje (diskretizacija) frekvencije. Postupak je sličan postupku odabiranja neprekidne funkcije. Odabiranje frekvencije prikazano je na slici 20.1f. Interval odabiranja frekvencija je $1/T_0$.

Transformacioni par, na slici 20.1g, predstavlja oblik pogodan za računarsku obradu signala, odnosno diskretnu Furijeovu transformaciju, s obzirom da je izvršeno odabiranje (diskretizacija) i u vremenskom i u frekvencijskom domenu.

Važno je napomenuti da odabiranje u vremenskom domenu rezultuje periodičnom funkcijom u frekvencijskom domenu (slika 20.1c). Odabiranje u frekvencijskom domenu rezultuje periodičnom funkcijom u vremenskom domenu (slika 20.1g).

20.2.2 Furijeova transformacija diskretnih signala

Odziv linearnog, vremenski invarijantnog, sistema

Može se pokazati da u slučaju pobude linearnog, vremenski invarijantnog sistema periodičnog signala, izlazni signal zadržava periodični oblik. Promeni mu se samo amplituda i faza, u zavisnosti od karakteristika sistema. Zbog ove osobine, periodični signali imaju važnu ulogu, kako kod analognih, tako

i kod diskretnih signala i sistema. Pokažimo ovo na primeru periodičnog kompleksnog eksponencijalnog signala (niza). Neka je ulazni niz $\{x[n]\}$, čiji je n -ti član određen sa

$$\tilde{x}[n] = e^{j(\omega n + \theta)}. \quad (20.5)$$

Ovaj niz na izlazu daje

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{j(\omega n - \omega k + \theta)} = e^{j(\omega n + \theta)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k}, \quad (20.6)$$

gde je $h[k]$ - impulsni odziv.

Ako uvedemo oznaku

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k} \quad (20.7)$$

izlazni signal $\{y[n]\}$ (tj. njegov n -ti član) može da se predstavi u obliku

$$\begin{aligned} y[n] &= e^{j(\omega n + \theta)} H(e^{j\omega}) = \\ &= |H(e^{j\omega})| e^{j(\omega n + \theta + \varphi)}. \end{aligned} \quad (20.8)$$

Oдавде se može zaključiti, poredeći (20.5) i (20.8), da je izlazni signal zadržao isti oblik, ali mu se promenila amplituda $|H(e^{j\omega})|$ puta, kao i faza za $\varphi = \arg H(e^{j\omega})$. Frekvencija je ostala ista.

Veličina:

- $H(e^{j\omega})$ naziva se **frekvencijski odziv** sistema $h[n]$,
- $|H(e^{j\omega})|$ naziva se **amplitudska karakteristika** sistema,
- $\varphi = \arg H(e^{j\omega}) = \arctg \frac{\text{Im}H}{\text{Re}H}$ naziva se **fazna karakteristika** sistema.

Napomenimo da je funkcija $H(e^{j\omega})$ neprekidna funkcija svog argumenta ω .

Uočimo da je frekvencijski odziv diskretnog sistema periodičan. Dokaz ovog tvrđenja zasniva se na osobini eksponencijalne funkcije $e^{-j(\omega + 2\pi n)} = e^{-j\omega} e^{-j2\pi n} = e^{-j\omega}$, jer je $e^{-j2\pi n} = 1$ za n ceo broj. Iskoristivši ovu osobinu, vidimo da je (prema (20.7))

$$\begin{aligned} H(e^{j(\omega + 2\pi n)}) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j(\omega k + 2\pi n k)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{j\omega} e^{-2j\pi n k} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{j\omega} = H(e^{j\omega}). \end{aligned}$$

Furijeova transformacija diskretnog signala

Relacija (20.7) može da se uopšti na proizvoljan diskretni signal $x[n]$, pa dobijamo

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \mathfrak{F}\{x[n]\}. \quad (20.9)$$

U literaturi relacija (20.9) poznata je kao **Furijeova transformacija diskretnog signala**. $X(e^{j\omega})$ predstavlja frekvencijski sadržaj signala $x[n]$.

Uočimo različitu prirodu veličina u originalnom i transformisanom domenu. Signal $x[n]$ je diskretan u vremenu, a njegova transformacija $X(e^{j\omega})$ neprekidna i periodična funkcija promenljive ω . Kao takva, može da se razvije u Furijeov red, pa su koeficijenti Furijeoveg reda jednaki članovima polaznog niza $x[n]$.

Napomenimo da ovaj red (20.9) u opštem slučaju nije konvergentan. Dovoljan uslov, ali ne i potreban, da ovaj red uniformno konvergira ka vrednosti $X(e^{j\omega})$ je

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty. \quad (20.10)$$

Inverzna Furijeova transformacija diskretnog signala

Nalaženje niza $\{x[n]\}$, kada je poznato $X(e^{j\omega})$, je inverzni proces. U tom cilju pomnožimo levu i desnu stranu relacije (20.9) sa $e^{j\omega k}$, a zatim izvršimo integraciju (u granicama jedne periode)

$$\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega k} d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n]e^{j\omega(k-n)} d\omega.$$

Ako je red pod integralom uniformno konvergentan, za svako ω , operacije sabiranja i integraljenja se mogu razmeniti, pa dobijamo

$$\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega k} d\omega = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n] \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(k-n)} d\omega = 2\pi x[n]. \quad (20.11)$$

Ovde smo iskoristili da je

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(k-n)} d\omega = \begin{cases} 2\pi, & k = n, \\ 0, & k \neq n. \end{cases} \quad (20.12)$$

Dakle, ako je poznata funkcija $X(e^{j\omega})$ možemo da izračunamo $x[n]$ iz jednačine

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \mathfrak{F}^{-1}\{X(e^{j\omega})\}. \quad (20.13)$$

Ova relacija (20.13) predstavlja **inverznu Furijeovu transformaciju** diskretnog signala $x[n]$.

Jednačine (20.9) i (20.13) predstavljaju **Furijeov transformacioni par** za diskretne signale.

20.2.3 Diskretna Furijeova transformacija

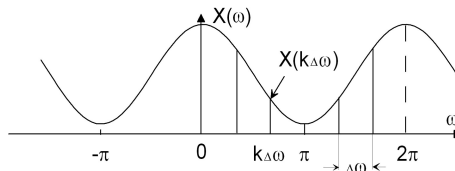
U prethodnom delu definisali smo Furijeovu transformaciju diskretnih signala.

Egzaktno izračunavanje Furijeove transformacije diskretnog signala, moguće je samo u slučajevima kada je poznato analitičko rešenje jednačine (20.9). U ostalim slučajevima, numeričko izračunavanje Furijeove transformacije nije moguće, pošto zbir sadrži beskonačan broj sabiraka. Ako niz (signal) ima konačan broj članova, za praktično izračunavanje na računaru, uobičajeno je da se vrši diskretizacija jednačine (20.9). Na taj način se dobija Diskretna Furijeova Transformacija (DFT), čiji je značaj u digitalnoj obradi signala veliki. DFT je jedna od osnovnih alatki u spektralnoj analizi. Postojanje brzih algoritama za njeno izračunavanje omogućava efikasnu obradu signala u frekvencijskom domenu.

Furijeova transformacija diskretnog signala, prema (20.9), je:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}. \quad (20.14)$$

Već smo videli da je ova funkcija neprekidna i periodična sa periodom 2π .



Slika 20.2: Odbiranje Furijeove transformacije u frekvencijskom domenu.

Izvršivši diskretizaciju ove funkcije u osnovnom periodu $(0, 2\pi)$ (vidi sl. 20.2), u N ekvidistantnih odbiraka, sa korakom $\Delta\omega = 2\pi/N$ i smenom

$\omega = 2\pi k/N$ u (20.14), dobija se

$$X \left[\frac{2\pi}{N} k \right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N} kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (20.15)$$

Ovaj beskonačni zbir može da se prikaže i kao beskonačan zbir parcijalnih zbrova od N članova, tj.:

$$\begin{aligned} X \left[\frac{2\pi}{N} k \right] &= \dots + \sum_{n=-N}^{-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N} kn} + \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N} kn} + \sum_{n=N}^{2N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N} kn} + \\ &+ \dots = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \sum_{n=\ell N}^{(\ell+1)N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N} kn}. \end{aligned}$$

Ako u prethodnoj relaciji svako n zameni sa $n - \ell N$, prethodni izraz može da se zapiše u obliku

$$X \left[\frac{2\pi}{N} k \right] = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{N-1} x[n - \ell N] e^{-j\frac{2\pi}{N} kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x[n - \ell N] \right\} e^{-j\frac{2\pi}{N} kn}. \quad (20.16)$$

Pri pisanju prethodne relacije iskoristili smo da je

$$e^{j(2\pi/N)k(n-\ell N)} = e^{j(2\pi/N)kn} \cdot e^{-j(2\pi/N)k\ell N} = e^{j(2\pi/N)kn} e^{-j2\pi k\ell} = e^{j(2\pi/N)kn}$$

U relaciji (20.16) izraz u zagradi predstavlja signal dobijen periodičnim ponavljanjem signala $x[n]$, sa periodom N . Označimo ga sa $\tilde{x}[n]$, tj.

$$\tilde{x}[n] = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x[n - \ell N]. \quad (20.17)$$

Zamenom (20.17) u(20.16), dobijamo

$$X[k] = X \left[\frac{2\pi}{N} k \right] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j\frac{2\pi}{N} kn}. \quad (20.18)$$

Ako je niz $x[n]$ konačne dužine L , a period ponavljanja niza $x[n]$, unutar $\tilde{x}[n]$, $N \geq L$, onda se niz $x[n]$ može jednoznačno izdvojiti iz $\tilde{x}[n]$ kao

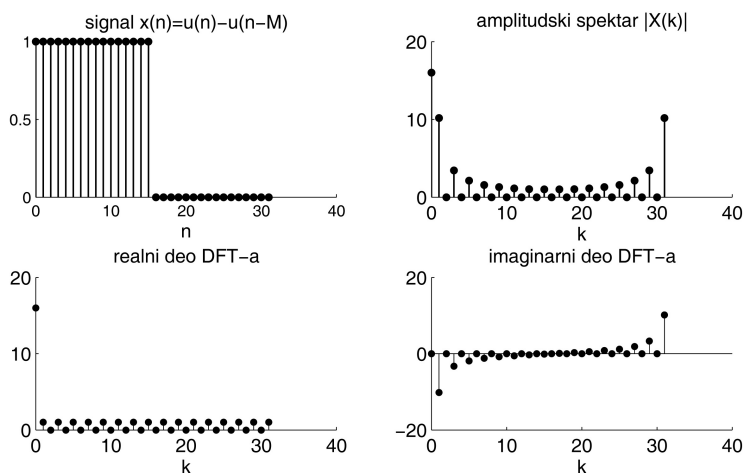
$$\tilde{x}[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \leq n \leq L-1, \\ 0, & n < 0 \text{ i } n > L-1 \end{cases} \quad (20.19)$$

pa jednačina (20.18) može da se napiše u obliku

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (20.20)$$

Relacija (20.20), koja transformiše niz $x[n]$, dužine $L \leq N$ u niz odbiraka u frekvencijskom domenu $X[k]$, dužine N , naziva se **diskretna Furijeova transformacija** (DFT) niza $x[n]$.

Diskretna Furijeova transformacija niza $x[n]$ ima svoj realni i imaginarni deo. Na slici 20.3 prikazan je realni i imaginarni deo DFT, kao i amplitudski spektar (apsolutna vrednost $|X[k]|$, $k = 0, 1, \dots, 31$) niza $x[n]$, dužine 32, koji sadrži pravougaoni impuls.



Slika 20.3: Spektar signala $x[n]$, dužine 32, koji sadrži pravougaoni impuls. DFT sračunata u onoliko tačaka kolika je dužina signala $x[n]$.

Niz $x[n]$, pod navedenim uslovima (20.19), može da se rekonstruiše iz odbiraka u frekvencijskom domenu $X[k]$, tj. ako su nam poznate vrednosti $X[k]$ dobijamo

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j \frac{2\pi}{N} kn}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (20.21)$$

Ova relacija poznata je u literaturi kao **inverzna diskretna Furijeova transformacija** (IDFT).

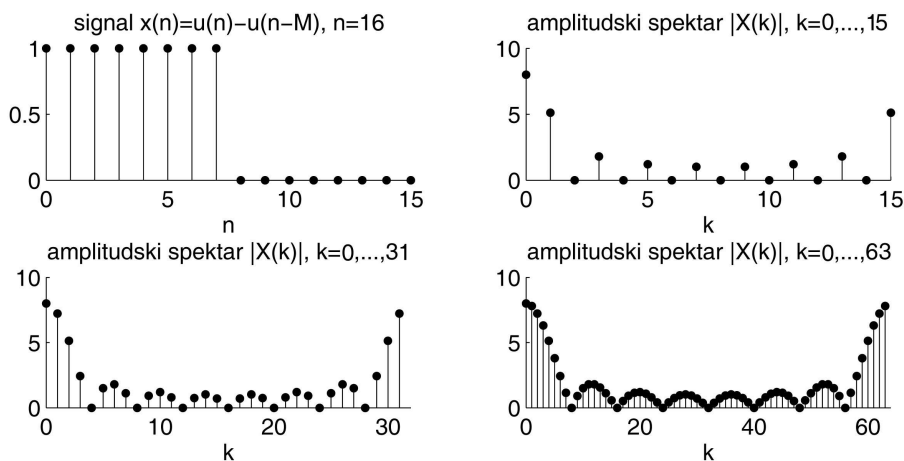
Iz (20.20) se vidi da se DFT računa za diskretne frekvencije, čiji je korak $\Delta\omega = 2\pi/N$, odnosno $\Delta f = f_s/N$. Priraštaj frekvencija naziva se **frekvencijska rezolucija DFT-a**.

Jednačine (20.20) i (20.21) definišu veličine $X[k]$ i $x[n]$ koje se često u literaturi nazivaju transformacioni par (transformacija-inverzna transformacija)

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(2\pi/N)kn},$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j(2\pi/N)kn}.$$

Prikažimo dva primera DFT elementarnih signala, pravougaonog i trougaonog impulsa.



Slika 20.4: Amplitudski spektar niza dužine 16, koji sadrži pravougaoni impuls sračunat u 16, 32 i 64 tačke.

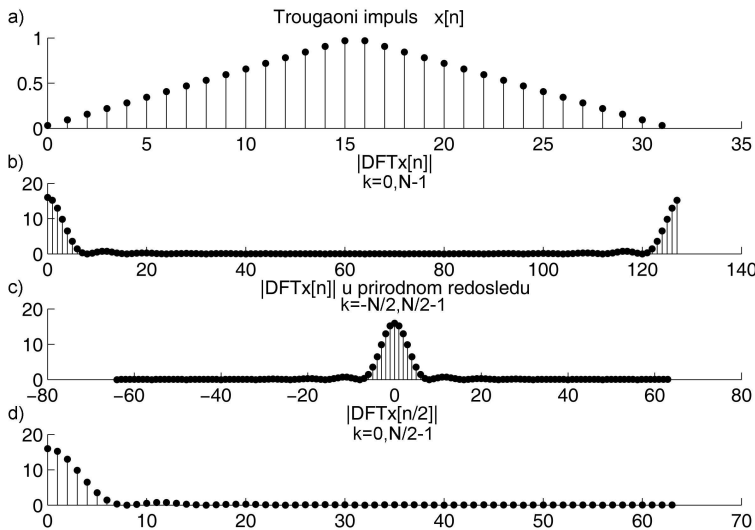
Na slici 20.4 prikazan je niz dužine 16, koji sadrži pravougaoni impuls. DFT sračunat je u 16 (onoliko tačaka kolika je dužina niza), zatim u 32 i 64 tačke.

Izračunavanje DFT vrši u onoliko tačaka koliko iznosi period ponavljanja niza $x[n]$ unutar periodičnog signala $\tilde{x}[n]$. Da bi se izvršila pravilna rekonstrukcija signala $x[n]$ iz odbiraka u spektralnom domenu, broj tačaka u kojima se vrši računanje spektra N , mora biti jednak ili veći od dužine niza $x[n]$. Ako je potrebno izvršiti detaljniji prikaz spektra, originalni niz se može dop-

uniti nulama⁷, pa se na taj način dobija spektar u povećanom broju tačka.

Trougaoni impuls dužine 32 prikazan je na slici 20.5a. Na istoj slici pod b) prikazana je DFT ovog signala, dopunjavanjem nulama, u rasporedu koji se dobija računanjem DFT u $N=128$ tačaka. DFT u tzv. prirodnom rasporedu prikazana je na slici 20.5c. Obzirom na simetriju DFT-a na slici 20.5d prikazano je samo prvih 64 tačke u rasporedu koji se dobija računanjem DFT-a u 128 tačaka.

Osobine simetrije DFT-a omogućavaju da se za realni niz izračunavaju samo vrednosti DFT-a od 0 do $N/2 - 1$, pošto je amplitudski spektar simetričan, sledi da se za indekse od $N/2$ do N dobija preslikan amplitudski spektar. Zbog toga se u analizi realnih signala, kao deo spektra koji sadrži korisnu informaciju, uvek analizira samo prvih $N/2$ odbiraka DFT niza, koji odgovara $0 \leq \omega \leq \pi$ (slika 20.5d). Međutim, prilikom prikazivanja spektra realnog signala, uobičajeno je da se odbirci DFT-a od $N/2$ do N , preurede tako da se prikaže i oblast negativnih učestanosti od $-\pi \leq \omega \leq 0$, tako da se dobija tzv. prirodni raspored spektralnih komponenti u opsegu od $-\pi \leq \omega \leq \pi$ (sl. 20.5c).

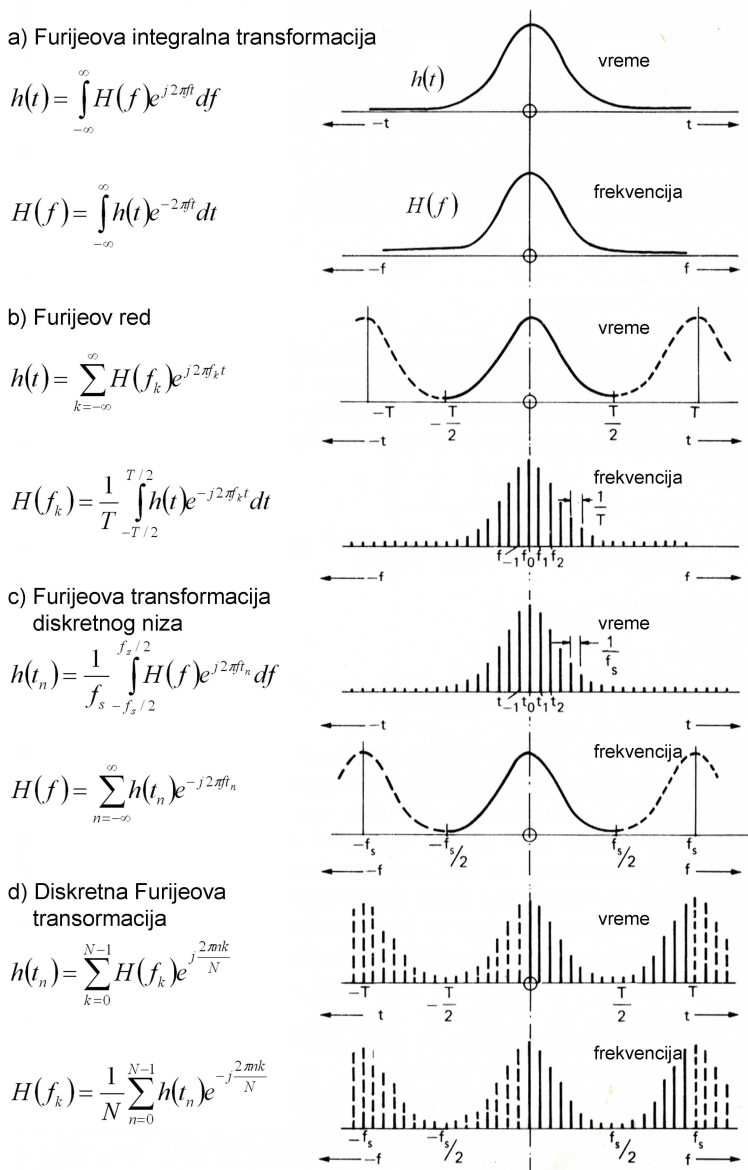


Slika 20.5: DFT trougaonog impulsa.

⁷zero padding (eng.)

Oblici Furijeove transformacije

Na kraju ovog poglavlja rekapituliraćemo različite oblike Furijeove transformacije u zavisnosti od tip signala (funkcije) na koji se primenjuje [271].



Slika 20.6: Oblici Furijeove transformacije.

Na slici 20.6 prikazana su četiri oblika Furijeove transformacije opisana u prethodnim poglavljima, zajedno sa pripadajućim jednačinama za "direktnu" i "inverznu" Furijeovu transformaciju, odnosno odgovarajući "transformacioni par".

Furijeova integralna transformacija, slika 20.6a, primenjuje se na beskonačne neprekidne signale u vremenskom i frekvencijskom domenu.

Furijeov red, slika 20.6b, primenjuje se na signale periodične u vremenskom domenu. Signal periodičan u vremenu ima diskretni spektar u frekvencijskom domenu.

Naredni oblik Furijeove transformacije odnosi se na signal dobijen odabirom neprekidnog signala u vremenu (Furijeova transformacija diskretnog signala), 20.6c. Uočava se, u ovom slučaju, obrnuta situacija u odnosu na Furijeov red. Diskretni signal u vremenu postaje periodičan i neprekidan signal u frekvencijskom domenu, sa periodom jednakom frekvenciji odabiranja.

Na kraju, diskretna Furijeova transformacija, odnosi se na signal diskretan u vremenskom domenu i u frekvencijskom domenu (sl. 20.6d). U tom slučaju, kao posledica odabiranja (u vremenskom domenu) i frekvencijski spektar (u frekvencijskom domenu) su periodične funkcije.

Glava 21

Neke približne metode rešavanja diferencijalnih jednačina prvog reda

21.1 Metoda sukcesivnih aproksimacija

Poznata je osnovna Koši-Pikarova teorema egzistencije rešenja diferencijalne jednačine prvog reda, koja glasi:

Neka je data diferencijalna jednačina

$$y' = f(x, y)$$

i početni uslov

$$y(x_0) = y_0$$

i neka:

A) $f(x, y)$ je neprekidna funkcija od dve nezavisno promenljive u zatvorenoj oblasti R

$$x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, \quad y_0 - b \leq y \leq y_0 + b$$

gde su a i b pozitivni brojevi. (Kako je neprekidna funkcija u zatvorenoj oblasti i ograničena, to iz uslova sleduje egzistencija takvog pozitivnog broja M da nejednakost

$$|f(x, y)| \leq M$$

bude ispunjena za sve tačke iz R .)

B) Funkcija $f(x, y)$ zadovoljava u oblasti R Lipšicov uslov

$$|f(x, Y) - f(x, y)| \leq N|Y - y|$$

gde je N pozitivna konstanta. Tada postoji jedinstveno (jedno i samo jedno) rešenje diferencijalne jednačine $y = \varphi(x)$, definisano i neprekidno za vrednosti x iz intervala

$$x_0 - h \leq x \leq x_0 + h,$$

gde je

$$h = \min \left(a, \frac{b}{M} \right),$$

koje za $x = x_0$ uzima vrednost y_0 .

U dokazu ove teoreme koriste se sukcesivne aproksimacije

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

kojima je definisan niz funkcija koji uniformno konvergira rešenju date diferencijalne jednačine.

Posmatrajmo jednačinu

$$y' = y^2 - x^2.$$

U intervalu $|x| \leq 1$, za $|y| \leq 1$ treba naći približno rešenje $y(0) = 0$.

Ako je $\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq K$, onda je Lipšicov uslov ispunjen. Naime, po Lagranževoj teoremi:

$$f(x, y_2) - f(x, y_1) = (y_2 - y_1) f'_y(x, y_1 + \theta(y_2 - y_1)).$$

Ako je $|f'_y| \leq K$, onda je dakle

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| = |f'_y| |y_2 - y_1| \leq K |y_2 - y_1|,$$

što je Lipšicov uslov. Za jedinstvenost rešenja ograničenost $\frac{\partial f}{\partial y}$ javlja se kao dovoljan uslov.

Kod nas je $M = 1$, jer posmatramo za $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$, a $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$. Za $|y| \leq 1$ je $K = 2$. Dakle, ispunjeni su uslovi Koši-Pikarove teoreme.

Sukcesivne su aproksimacije:

$$y_1 = 0 + \int_0^x (-t^2) dt = -\frac{x^3}{3},$$

$$y_2 = 0 + \int_0^x \left[\left(-\frac{t^3}{3} \right)^2 - t^2 \right] dt = \frac{x^7}{7 \cdot 9} - \frac{x^3}{3}.$$

Dalje će biti

$$y_3 = \frac{x^{15}}{3^4 \cdot 7^2 \cdot 15} - \frac{2x^{11}}{3 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 11} + \frac{x^7}{7 \cdot 9} - \frac{x^3}{3} \text{ itd.}$$

Ovde je $a = 1$, $b = 1$, $b/M = 1$, pa je i $h = 1$. Loše strane ove metode su u velikim računskim komplikacijama koje nastaju pri integraciji već kod jednostavnijih slučajeva.

21.2 Metoda neodređenih koeficijenata

Za diferencijalnu jednačinu

$$y' = f(x, y)$$

tražimo rešenje u obliku reda

$$y = y_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

Očigledno je $y(0) = y_0$.

Formalno određujemo koeficijente tako da zadovoljavaju datu jednačinu, a onda ispitujemo konvergenciju dobijenog reda. Uzmimo, na primer, jednačinu

$$y' - xy = 1.$$

Ovo je linearna jednačina, ali smo je uzeli zbog jednostavnosti računa i mogućnosti poređenja rezultata.

Diferenciranjem ispisanog reda, zamenom i grupisanjem dobijamo:

$$(a_1 - 1) + (2a_2 - a_0)x + (3a_3 - a_1)x^2 + (4a_4 - a_2)x^2 + \dots + \\ + [(n+1)a_{n+1} - a_{n-1}]x^{n-1} + \dots$$

Odakle je

$$(n+1)a_{n+1} - a_{n-1} = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

odnosno

$$\begin{array}{ll} a_1 = 1 & a_0 = y_0 \\ a_3 = \frac{1}{1 \cdot 3} & a_2 = \frac{y_0}{1 \cdot 2} \\ a_5 = \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} & a_4 = \frac{y_0}{1 \cdot 2 \cdot 4} \\ a_7 = \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} & a_6 = \frac{y_0}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6} \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

tj.

$$y = y_0 + \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 4} + \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots\right) + \left(x + \frac{x^3}{1 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{x^7}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots\right).$$

Inače je opšti integral

$$y = y_0 e^{x^2/2} + e^{x^2/2} \int_0^x e^{-t^2/2} dt.$$

21.3 Analitička metoda

Pod analitičkom metodom podrazumevaćemo traženje rešenja sa početnim uslovom $(0, y_0)$ u obliku reda

$$y = y_0 + \frac{x}{1!} y'_0 + \frac{x^2}{2!} y''_0 + \dots + \frac{x^n}{n!} y_0^{(n)} + \dots$$

Kako je $y' = f(x, y)$, to je $y'_0 = f(0, y_0)$. Dalje je

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f(x, y) = \varphi(x, y),$$

pa je $y'_0 = \varphi(0, y_0)$. Zatim je

$$\begin{aligned} y''' &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y'' = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} f + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} f^2 + \frac{\partial f}{\partial y} \varphi = \varphi_1(x, y), \end{aligned}$$

pa je $y'''_0 = \varphi_1(0, y_0)$, itd.

U slučaju Rikatijske jednačine

$$y' = x^2 + y^2$$

i tačke $M(0, 0)$ dobijamo

$$\begin{aligned} y' &= x^2 + y^2 & y'_0 &= 0, \\ y'' &= 2x + 2y y', & y''_0 &= 0, \\ y''' &= 2 + 2y'^2 + 2y y'', & y'''_0 &= 2, \\ y^{(4)} &= 4y' y'' + 2y' y''' + 2y y^{(4)}, & y_0^{(4)} &= 0, \text{ itd.} \end{aligned}$$

Napomenimo da se isti postupak može primeniti i kod diferencijalnih jednačina viših redova. Recimo, kod diferencijalnih jednačina drugog reda

$$y'' = f(x, y, y')$$

sa početnim uslovima $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$ imamo da je y'_0 dato, a za sledeći koeficijent y''_0 dobijamo iz same jednačine $y''_0 = f(x_0, y_0, y'_0)$. Dalje je

$$y''' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y'', \quad \text{pa je}$$

$$y'''_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=x_0} + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x=x_0} y'_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right)_{x=x_0} f(x_0, y_0, y'_0), \quad \text{itd.}$$

21.4 Ojlerova metoda poligonalnih linija

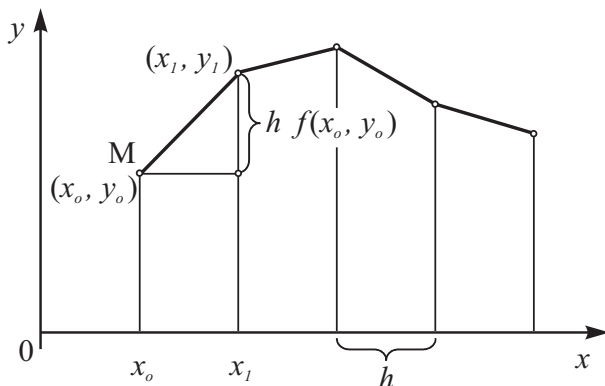
Interval $[x_0, a]$ podelimo na n jednakih delova duzine h , tako da je $x_0 + nh = a$. U tački (x_0, y_0) povučemo tangentu na integralnu krivu, koristeći jednačinu $y' = f(x, y)$. U tački u kojoj ova tangenta preseče pravu $x = x_1$ ponovimo postupak, i tako dalje. Očigledno će biti

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n).$$

Dovoljno je znati prvu tačku, jer onda je

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0),$$

zatim $y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$, itd. Ukoliko je broj podeljaka veći, utoliko dobita poligonalna linija bolje aproksimira integralnu krivu (videti sl. 21.1).



Slika 21.1: Aproksimacija integralne krive poligonalnom linijom.

Kod poboljšane Ojler-Košijevе metode (videti sl. 21.3) postupa se na sledeći način: u tački (x_n, y_n) povuče se tangenta sa koeficijentom pravca $f(x_n, y_n)$, do prave $x = x_{n+1} = x_n + h$. Kako je jednačina tangente

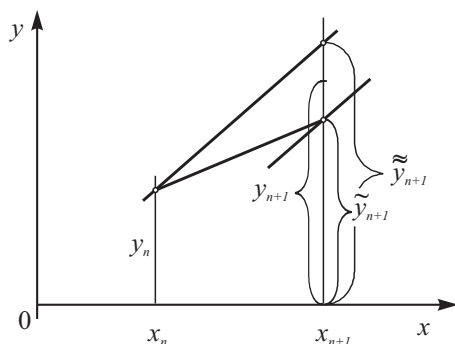
$$y - y_n = f(x_n, y_n)(x - x_n),$$

to je presek, o kome je reč,

$$\tilde{y}_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n).$$

U tački $(x_n + h, \tilde{y}_{n+1})$ povucimo tangentu. To je prava

$$y - \tilde{y}_{n+1} = f(x_n + h, \tilde{y}_{n+1})(x - x_{n+1}).$$



Slika 21.3: Poboljšana Ojler-Košijeva metoda.

Zatim u tački (x_n, y_n) povucimo pravu paralelnu ovoj tangenti. To je prava

$$y - y_n = f(x_n + h, \tilde{y}_{n+1})(x - x_n).$$

Označimo sa $\tilde{\tilde{y}}_{n+1}$ ordinatu preseka ove prave sa $x = x_n + h$. Tada je

$$\tilde{\tilde{y}}_{n+1} = y_n + h f(x_n + h, \tilde{y}_{n+1}).$$

Za y_{n+1} uzećemo aritmetičku sredinu \tilde{y}_{n+1} i $\tilde{\tilde{y}}_{n+1}$, tj.

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \frac{\tilde{y}_{n+1} + \tilde{\tilde{y}}_{n+1}}{2} = \frac{y_n + h f(x_n, y_n) + y_n + h f(x_n + h, \tilde{y}_{n+1})}{2} = \\ &= y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + h f(x_n, y_n))]. \end{aligned}$$

21.5 Metoda Runge-Kuta

Ova metoda daje veću tačnost. I kod nje je dovoljno znati jednu tačku, ali se mora više puta izračunati vrednost funkcije u tački.

Ovde je

$$y_{n+1} = y_n + k + O(h^5),$$

gde je

$$x_{i+1} - x_i = h, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

a

$$k = \frac{1}{6} [k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4],$$

$$k_1 = hf(x_n, y_n),$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3).$$

Ove formule su dobijene iz uslova da se vrednost $y_n + k$

$$k = \frac{1}{6} [k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4],$$

gde je

$$k_1 = hf(x_n, y_n),$$

$$k_2 = hf(x_n + ah, y_n + bk_1),$$

$$k_3 = hf(x_n + a_1h, y_n + b_1k_1 + c_1k_2),$$

$$k_4 = hf(x_n + a_2h, y_n + b_2k_1 + c_2k_2 + d_1k_2),$$

poklapa se Maklorenovim redom

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{1!}y_n' + \frac{h^2}{2!}y_n'' + \dots$$

do člana sa h^4 zaključno. Iz tih uslova dobijeni su neodređeni koeficijenti $a, a_1, a_2, b, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1$. Stoga je potrebno da funkcija $f(x, y)$ ima parcijalne izvode do četvrtog reda u intervalu $[x_0, x_0 + h)$.

Recimo, da je potrebno naći približno rešenje jednačine

$$y' = y^2 + x$$

sa početnim uslovom $y(0) = 0$. Izračunaćemo samo y_1 , uzimajući $h = 1/4$.
Ovde je $k_1 = 0$,

$$k_2 = \frac{1}{4} \left[0 + \frac{1}{8} \right] = \frac{1}{32} = 0,0312,$$

$$k_3 = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{64^2} + \frac{1}{8} \right] = \frac{1}{4} [0,0002 + 0,125] = 0,0313,$$

$$k_4 = \frac{1}{4} \left[0,0312^2 + \frac{1}{4} \right] = \frac{1}{4} [0,001 + 0,25] = 0,0628.$$

Dakle je

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{6} [2(0,0312 + 0,0313) + 0,0628] = \frac{1}{6} [0,0625 \cdot 2 + 0,0628] = \\ &= \frac{1}{6} [0,1250 + 0,0628] = \frac{1}{6} 0,1878 = 0,0313. \end{aligned}$$

Dakle je $y_1 = 0,0313$.

21.6 Adamsova metoda

Polazeći od $y' = f(x, y)$ i $y(x_0) = y_0$ uočimo

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y' dx.$$

Druga Njutnova formula, sa tačnošću do razlika četvrtog reda daje nam

$$y' = y'_i + q \Delta y'_{i-1} + \frac{q(q+1)}{2!} \Delta^2 y'_{i-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!} \Delta^3 y'_{i-3}$$

gde je

$$q = \frac{x - x_i}{h}.$$

Uzevši $dx = h dq$ i stavivši u $\int_{x_i}^{x_{i+1}} y' dx$ umesto y' interpolacionu formulu, dobićemo

$$y_{i+1} - y_i + h \int_0^1 \left[y'_i + q \Delta y'_{i-1} + \frac{q(q+1)}{2} \Delta^2 y'_{i-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{2} \Delta^3 y'_{i-3} \right] dq,$$

tj. posle integracije,

$$y_{i+1} = y_i + h \left(y'_i + \frac{1}{2} \Delta y'_{i-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 y'_{i-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 y'_{i-3} \right).$$

Izvršimo li potrebno razlaganje konačnih razlika, dobijamo konačno formulu

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{24} (55y'_i - 59y'_{i-1} + 37y'_{i-2} - 9y'_{i-3}) = \\ &= y_i + \frac{h}{24} [55f(x_i, y_i) - 59f(x_{i-1}, y_{i-1}) + \\ &\quad + 37f(x_{i-2}, y_{i-2}) - 9f(x_{i-3}, y_{i-3})]. \end{aligned}$$

Na osnovu ove formule vidi se da je izračunavanje y_{i+1} potrebno znati četiri prethodne vrednosti y_{i-3} , y_{i-2} , y_{i-1} , y_i .

21.7 Milnova metoda

U formulu

$$y' = y'_k + q \Delta y'_k + \frac{q^2 - q}{2!} \Delta^2 y'_k + \frac{q^3 - 3q^2 + q}{2!} \Delta^3 y'_k$$

(prva Njutnova interpolaciona formula za y') stavimo $k = i - k$ i izvršimo integraciju od x_{i-4} do x_i uz $q = \frac{x - x_{i-4}}{4}$, tj. $\int_{x_{i-4}}^{x_i} y' dx$. Dobiće se, analogno postupku kod Adamsove metode

$$y_i^{(1)} = y_{i-4} + \frac{4h}{3} (2y'_{i-3} - y'_{i-2} + 2y'_{i-1})$$

što predstavlja takozvanu prvu Milnovu formulu. Ako isti postupak ponovimo za $k = i - 2$, dobićemo drugu Milnovu formulu

$$y_i^{(2)} = y_{i-2} + \frac{h}{3} (y'_{i-2} + 4y'_{i-1} + y'_i).$$

Međutim, u izrazu y'_i u poslednjoj formuli ($y'_i = f(x_i, y_i)$), umesto y_i stavljamo $y_i^{(1)}$ dobijeno po prvoj Milnovojoj formuli. Miln je pokazao da je apsolutna greška vrednosti $y_i^{(2)}$ približno jednaka

$$E_i = \frac{1}{29} |y_i^{(2)} - y_i^{(1)}|.$$

Očigledno, da bi se dobilo y_i , treba znati y_{i-4} , y_{i-3} , y_{i-2} i y_{i-1} .

21.8 Metoda Krilova

Metoda Krilova predstavlja iteracioni postupak za formiranje tablice početnih vrednosti (početak te tablice) za Adamsovu metodu. Izvešćemo samo Krilovljeve formule, koje predstavljaju osnovu za postupak.

Posmatrajmo Adamsovu formulu

$$y_{n+1} - y_n = \Delta y_n = h \left(f_n + \frac{1}{2} \Delta f_{n-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 f_{n-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 f_{n-3} + \frac{251}{720} \Delta^4 f_{n-4} + \dots \right),$$

gde je $f_i = f(x_i, y_i)$. Uvedemo li oznaku $\eta_i = h f_i$, formula postaje

$$\Delta y_n = \eta_n + \frac{1}{2} \Delta \eta_{n-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 \eta_{n-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 \eta_{n-3} + \frac{251}{720} \Delta^4 \eta_{n-4} + \dots$$

Ako zanemarimo konačne razlike četvrtog reda i viših redova, pa uvedemo novu približnost izjednačavanjem konačnih razlika trećeg reda, tj. stavimo

$$\Delta^3 \eta_n = \Delta^3 \eta_{n-1} = \Delta^3 \eta_{n-2} = \Delta^3 \eta_{n-3},$$

odnosno

$$\Delta y_n = \eta_n + \frac{1}{2} \Delta \eta_{n-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 \eta_{n-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 \eta_{n-3} \quad (21.1)$$

Kako je

$$\Delta^3 \eta_{i-2} = \Delta^2 \eta_{n-1} - \Delta^2 \eta_{n-2}$$

a odatle dobijamo

$$\Delta^2 \eta_{i-2} = \Delta^2 \eta_{n-1} - \Delta^3 \eta_{n-2}$$

to je, dalje,

$$\Delta y_n = \eta_n + \frac{1}{2} \Delta \eta_{n-1} + \frac{5}{12} (\Delta^2 \eta_{n-1} - \Delta^3 \eta_{n-2}) + \frac{3}{8} \Delta^3 \eta_{n-2}$$

Stavljajući, umesto $\Delta^3 \eta_{i-2}$ razliku $\Delta^3 \eta_{i-1}$ dobijamo

$$\Delta y_n = \eta_n + \frac{1}{2} \Delta \eta_{n-1} + \frac{5}{12} (\Delta^2 \eta_{n-1} - \Delta^3 \eta_{n-1}) + \frac{3}{8} \Delta^3 \eta_{n-1},$$

odnosno

$$\Delta y_n = \eta_n + \frac{1}{2} \Delta \eta_{n-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 \eta_{n-1} - \frac{1}{24} \Delta^3 \eta_{n-1}. \quad (21.2)$$

Kako je

$$\begin{aligned} \Delta^2 \eta_{n-1} &= \Delta \eta_n - \Delta \eta_{n-1}, \\ \Delta^3 \eta_{n-1} &= \Delta^2 \eta_n - \Delta^2 \eta_{n-1}, \end{aligned}$$

to je

$$\Delta y_n = \eta_n + \frac{1}{2} (\Delta \eta_n - \Delta^2 \eta_{n-1}) + \frac{5}{12} (\Delta^2 \eta_n - \Delta^3 \eta_{n-1}) - \frac{1}{24} \Delta^3 \eta_{n-1},$$

odnosno

$$\Delta y_n = \eta_n + \frac{1}{2} [\Delta \eta_n - (\Delta^2 \eta_n - \Delta^3 \eta_{n-1})] + \frac{5}{12} (\Delta^2 \eta_n - \Delta^3 \eta_{n-1}) - \frac{1}{24} \Delta^3 \eta_{n-1},$$

$$\Delta y_n = \eta_n + \frac{1}{2} (\Delta \eta_n + \Delta^3 \eta_{n-1} - \Delta^2 \eta_n) + \frac{5}{12} (\Delta^2 \eta_n - \Delta^3 \eta_{n-1}) - \frac{1}{24} \Delta^3 \eta_{n-1}$$

Ako sada umesto svih konačnih razlika trećeg reda stavimo $\Delta^3 \eta_n$, dobijamo

$$\Delta y_n = \eta_n + \frac{1}{2} (\Delta \eta_n + \Delta^3 \eta_n - \Delta^2 \eta_n) + \frac{5}{12} (\Delta^2 \eta_n - \Delta^3 \eta_n) - \frac{1}{24} \Delta^3 \eta_n$$

i, najzad,

$$\Delta y_n = \eta_n + \frac{1}{2} \Delta \eta_n - \frac{1}{12} \Delta^2 \eta_n + \frac{1}{24} \Delta^3 \eta_n. \quad (21.3)$$

Stavimo sada u (21.3) $n = 0$, u (21.2) $n = 1$ i u (21.1) $n = 2$. Dobijamo

$$\Delta y_0 = \eta_0 + \frac{1}{2} \Delta \eta_0 - \frac{1}{12} \Delta^2 \eta_0 + \frac{1}{24} \Delta^3 \eta_0,$$

$$\Delta y_1 = \eta_1 + \frac{1}{2} \Delta \eta_0 + \frac{5}{12} \Delta^2 \eta_0 - \frac{1}{24} \Delta^3 \eta_0,$$

$$\Delta y_2 = \eta_2 + \frac{1}{2} \Delta \eta_1 + \frac{5}{12} \Delta^2 \eta_0 + \frac{3}{8} \Delta^3 \eta_0,$$

tj. **formule Krilova**. S obzirom na uvedene oznake, a da je i konačna razlika najvišeg reda

$$\Delta^3 \eta_0 = \Delta^2 \eta_1 - \Delta^2 \eta_0 = \Delta \eta_2 - 2\Delta \eta_1 + \Delta \eta_0 = \eta_3 - 3\eta_2 + 3\eta_1 - \eta_0$$

funkcija samo vrednosti y_1, y_2, y_3 , to je ovim dobijen sistem od tri jednačine sa tri nepoznate y_1, y_2, y_3 , u opštem slučaju nelinearan. Krilovljevom metodom uvodi se iterativni postupak $y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, y_3^{(k)}$,

21.9 Poboljšana Pikarova metoda

Ova metoda odnosi se na jednačinu prvog reda

$$y' = f(x, y).$$

Može se primeniti kada je $f(x, y)$ analitička funkcija u okolini $x = x_0, y = y_0$. Uzastopne aproksimacije su polinomi sve višeg stepena. Svi ovi polinomi su delimični zbirovi Tajlorovog reda. Aproksimacije se uvek mogu izvoditi do ma koje željene granice tačnosti. Metoda se uopštava i na sistem od n jednačina prvog reda, a time i na diferencijalne jediniče višeg reda. Imamo sledeće formule:

$$\begin{aligned}
 y_1^* &= y_0 + \int_{x_0}^x \overline{f(x, y_0)}^1 dx, \\
 y_2^* &= y_0 + \int_{x_0}^x \overline{f(x, y_1^*)}^2 dx, \\
 y_3^* &= y_0 + \int_{x_0}^x \overline{f(x, y_2^*)}^3 dx, \\
 &\dots\dots \\
 y_n^* &= y_0 + \int_{x_0}^x \overline{f(x, y_{n-1}^*)}^n dx,
 \end{aligned}$$

gde simbol $\overline{f(x, y_0)}^1$ označava da funkciju treba razviti u Tejlorov red po $(x - x_0)$ i zadržati samo jedan (prvi) član ovog razvitka, a sve ostale odbaciti. Simbol $\overline{f(x, y_1^*)}^2$ označava da treba funkciju razviti u Tejlorov red po $(x - x_0)$ i zadržati dva (prva) člana ovog razvitka itd.

Neka je

$$y' = f(x, y) = 1 + x^3 y^2 - x^{13} y \quad \text{i} \quad x_0 = 0, y_0 = 0$$

tada je

$$\begin{aligned}
 f(x, y_0) &= 1, \quad \overline{f(x, y_0)}^1 = 1, \quad y_1^* = \int_0^x dx = x, \\
 f(x, y_1^*) &= 1 + x^3 x^2 - x^{13} x = 1 + x^5 - x^{14}, \quad \overline{f(x, y_1^*)}^2 = 1 + x^5, \\
 y_2^* &= \int_0^x (1 + x^5) dx = x + \frac{x^6}{6},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(x, y_2^*) &= 1 + x^3 \left(x + \frac{x^6}{6} \right)^2 - x^{13} \left(x + \frac{x^6}{6} \right) = \\
 &= 1 + x^3 \left(x^2 + \frac{x^7}{3} + \frac{x^{12}}{36} \right) - x^{14} - \frac{x^{19}}{6} = \\
 &= 1 + x^5 + \frac{x^{10}}{3} + \frac{x^{15}}{36} - x^{14} - \frac{x^{19}}{6},
 \end{aligned}$$

$$\overline{f(x, y_2^*)}^3 = 1 + x^5 + \frac{x^{10}}{3},$$

$$y_3^* = \int_0^x \left(1 + x^5 + \frac{x^{10}}{3} \right) dx = x + \frac{x^6}{6} + \frac{x^{11}}{33},$$

itd.

Sledeći primer. Neka je

$$y' = x + \sqrt{y+x}, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 1.$$

Rešenje.

$$f(x, y_0) = x + \sqrt{x+1} = 1 + \frac{3x}{2} + \dots,$$

$$\overline{f(x, y_0)}^1 = 1, \quad y_1^* = 1 + \int_0^x dx = 1 + x,$$

$$f(x, Y_1^*) = x + \sqrt{1+2x} = 1 + 2x + \dots, \quad \overline{f(x, y_1^*)}^2 = 1 + 2x,$$

$$y_2^* = 1 + \int_0^x (1 + 2x) dx = 1 + x + x^2, \quad f(x, y_2^*) = x + \sqrt{1+2x+x^2} = 1 + 2x,$$

$$\overline{f(x, y_2^*)}^3 = 1 + 2x, \quad y_3^* = 1 + \int_0^x (1 + 2x) dx = 1 + x + x^2.$$

Međutim, ovo je baš tačno rešenje date jednačine koje se, dakle, može dobiti ovom metodom (ako je, partikularni integral polinom, to će uvek biti slučaj).

Zaista

$$y' = 1 + 2x,$$

pa je

$$1 + 2x = x + \sqrt{1+2x+x^2} = x + (1+x) = 1 + 2x.$$

Glava 22

Rešavanje diferencijalnih jednačina pomoću redova

22.1 Funkcionalni redovi. Potencijalni redovi

Neka su date realne funkcije $f_0(x), f_1(x), \dots, f_k(x), \dots$, definisane za $\forall x \in [a, b] \subset \mathbb{R}$, gde je \mathbb{R} - skup realnih brojeva.

Definicija 22.1. Beskonačan zbir funkcija

$$f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_k(x) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x), \quad (22.1)$$

čiji su članovi funkcije $f_k(x)$ definisane za $\forall x \in [a, b]$, nazivamo **funktionalnim redom** (beskonačan funkcionalan red).

Definicija 22.2. **Delimični zbir** (parcijalna suma) funkcionalnog reda (22.1) je zbir oblika

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x), \quad (n - \text{pozitivan ceo broj}). \quad (22.2)$$

Definicija 22.3. Red (22.1) je **konvergentan**, za neko $x = x_1 \in [a, b]$ ako je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_1) = S(x_1) \neq \pm\infty. \quad (22.3)$$

Ako ne postoji ovaj limes, tada kažemo da je red **divergentan**. Ako je red (22.1) konvergentan za sve vrednosti promenljivih $x \in [a, b]$, onda suma reda predstavlja neku funkciju $f(x)$, za $x \in [a, b]$, i može da se predstavi u obliku

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x), \quad (22.4)$$

gde je S_n - delimičan zbir, a $R_n(x)$ - ostatak. Tada je

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - S_n(x)] = 0, \quad (22.5)$$

ili

$$|f - S_n| = |R_n(x)| < \varepsilon$$

za svako

$$n \geq N(\varepsilon, x) \quad \text{i za} \quad \forall x \in [a, b].$$

Definicija 22.4. Za red

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$$

kažemo da je **apsolutno konvergentan** za neko $x = x_1 \in [a, b]$, ako je red

$$\sum_{k=0}^{\infty} |f_k(x_1)|$$

konvergentan.

Definicija 22.5. Red (22.1) **uniformno konvergira** u intervalu $[a, b]$, ako proizvoljno malom $\varepsilon > 0$ odgovara pozitivni broj $N(\varepsilon)$, koji ne zavisi od x tako da je

$$|R_n(x)| < \varepsilon \quad \text{za} \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \quad \text{i} \quad \forall x \in [a, b].$$

Napomenimo da konvergentan red ne mora da bude i uniformno konvergentan, u istom intervalu.

Osobine uniformno konvergentnih redova

- 1° Ako su članovi uniformno konvergentnog (beskonačnog) reda neprekidne funkcije, nezavisno promenljive $x \in [a, b]$, onda je i njihov zbir neprekidna funkcija od x , u istom intervalu.

2° Ako su članovi uniformno konvergentnog reda neprekidne funkcije, nezavisno promenljive $x \in [a, b]$, onda je integral njihovog zbira jednak zbiru integrala, tj.

$$\int_a^b f \, dx = \int_a^b \left[\sum_{k=0}^{\infty} f_k \right] dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k \, dx, \quad \text{za } \forall x \in [a, b]. \quad (22.6)$$

3° Neka članovi konvergentnog reda, u intervalu $[a, b]$, imaju neprekidne izvode (u istom intervalu). Ako red izvoda uniformno konvergira, za $x \in [a, b]$, tada će i polazni red biti uniformno konvergentan, u istom intervalu, i može da se diferencira član po član, tj.

$$f' = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} f_k = \sum_{k=0}^{\infty} f'_k, \quad \text{za } \forall x \in [a, b]. \quad (22.7)$$

Potencijalni red

Definicija 22.6. Red oblika

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots, \quad (22.8)$$

zove se **potencijalni** (ceo ili stepeni) **red**. Konstante a_0, a_1, \dots , zovu se **koeficijenti reda**, a konstanta x_0 **centar**.

Pretpostavimo da konstante i promenljiva x pripadaju skupu realnih brojeva (ako se drugačije ne naglasi). Napomenimo da je potencijalni red funkcionalni red kod koga je $f_k(x) = a_k (x - x_0)^k$.

U specijalnom slučaju, kada je $x_0 = 0$, potencijalni red ima oblik

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \quad (22.9)$$

Teorema 8 (I Abelova teorema) *Ako je red (22.9) konvergentan za $x = a$, on je i apsolutno konvergentan, za sve vrednosti x za koje je $|x| < |a|$.*

Definicija 22.7. Za svaki potencijalni red (22.9) postoji jedan nenegativan broj R (uključujući i $+\infty$), takav da je red apsolutno konvergentan za $\forall x \in (-R, R)$, tj. za $|x| < R$, a divergentan za $\forall x$ izvan ovog intervala. Ovako definisan broj R zove se **poluprečnik konvergencije**, a interval $(-R, R)$ **interval konvergencije**.

Operacije sa potencijalnim redovima

1° Svaki potencijalni red, konvergentan za $x \in (-R, R)$, može da se integrirati u intervalu $[0, x]$, gde je $|x| < R$ i tada je integral zbira jednak zbiru integrala, tj.

$$\int_0^x f(x) dx = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^x a_k x^k dx \right), \quad \text{za } |x| < R. \quad (22.10)$$

2° Svaki potencijalni red, konvergentan za $x \in (-R, R)$, može da se diferencira u intervalu $[0, x]$, gde je $|x| < R$ i tada je izvod zbira jednak zbiru izvoda, tj.

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d(a_k x^k)}{dx}, \quad \text{za } |x| < R. \quad (22.11)$$

3° Sabiranjem (oduzimanjem) dva potencijalna konvergentna reda dobija se potencijalni konvergentni red, čiji poluprečnik konvergencije nije manji od manjeg poluprečnika konvergencije datih redova. Naime, neka su

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad |x| < R, \\ g(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k, \quad |x| < R', \quad R' \leq R, \end{aligned} \quad (22.12)$$

potencijalni redovi, tada njihov zbir (razlika) predstavlja potencijalni red oblika

$$f(x) \pm g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \pm b_k) x^k, \quad (22.13)$$

konvergentan u intervalu $(-R', R')$.

4° Množenjem dva potencijalna konvergentna reda dobija se potencijalni konvergentni red, čiji poluprečnik konvergencije nije manji od manjeg poluprečnika konvergencije datih redova. Naime, neka su

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad |x| < R, \\ g(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k, \quad |x| < R', \quad R' \leq R, \end{aligned} \quad (22.14)$$

potencijalni redovi, tada njihov proizvod predstavlja potencijalni red oblika

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_0 \cdot b_k + a_1 \cdot b_{k-1} + \cdots + a_k \cdot b_0) x^k, \quad (22.15)$$

konvergentan u intervalu $(-R', R')$.

Teorema 9 *Ako potencijalni red ima pozitivan poluprečnik konvergencije ($R > 0$), a njegov zbir je identički jednak nuli, tada su svi koeficijenti tog reda jednaki nuli.*

Definicija 22.8. Za funkciju $f(x)$ kažemo da je **analitička**, u tački $x = x_0$, ako može da se predstavi potencijalnim redom, po $(x - x_0)$, sa poluprečnikom konvergencije $R > 0$.

22.2 Rešavanje diferencijalnih jednačina pomoću redova

Poznato je, iz matematičke analize, da homogena linearna diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima može da se reši metodama algebre, a rešenja su elementarne funkcije. Na primer, posmatrajmo homogenu linearnu diferencijalnu jednačinu drugog reda sa konstantnim koeficijentima:

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad (22.16)$$

gde su a, b, c konstante, a $y = y(x)$. Pretpostavlja se da je njeno rešenje oblika

$$y = C e^{\alpha x}, \quad (22.17)$$

gde su α i C konstante. Konstanta α određuje se iz uslova da pretpostavljeno rešenje identički zadovoljava polaznu jednačinu. Ovaj uslov, zamenom (22.17) u (22.16), svodi se na algebarsku (kvadratnu) jednačinu

$$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0, \quad (22.18)$$

koja ima dva rešenja (α_1, α_2). Ova rešenja, u opštem slučaju, kompleksni su brojevi. Konačno rešenje polazne jednačine je (dobijeno primenom principa superpozicije)

$$y = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x}. \quad (22.19)$$

U praksi, češći su slučajevi kada koeficijenti jednačine (22.16) nisu konstantni, već zavise od x . Pored toga jednačine su i nehomogene, što još više otežava njihovo rešavanje. Rešenja ovih diferencijalnih jednačina su često funkcije koje nisu elementarne. U ovom poglavlju biće navedene neke od njih (najčešće korišćene).

22.2.1 Korišćenje potencijalnog reda pri rešavanju diferencijalnih jednačina

Potencijalni redovi najčešće se koriste za rešavanje diferencijalnih jednačina kada rešenje ne možemo da dobijemo u zatvorenom obliku. Ova metoda je prirodna i relativno prosta. Sastoji se u tome da se sve funkcije, koje se pojavljuju u posmatranoj diferencijalnoj jednačini, razviju u potencijalni red po $x - x_0$ (22.8), ili specijalno po x ($x_0=0$). Zatim se pretpostavi rešenje u obliku potencijalnog reda

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m,$$

nađu se odgovarajući izvodi i zamene u polaznu jednačinu. Na kraju se, izjednačavanjem koeficijenata uz iste stepene od x , dobijaju nepoznati koeficijenti a_m , i na taj način dobijamo rešenje (u obliku reda).

Ovu tehniku ćemo da demonstriramo na primerima Ležandrove i Beselove jednačine. Međutim, pre nego što to uradimo, navedimo jednu teoremu, od značaja za rešavanje pomenutih jednačina.

Teorema 10 *Ako su funkcije p , q i r , u diferencijalnoj jednačini*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \quad (22.20)$$

analitičke u tački $x = x_0$, tada je svako rešenje ove jednačine (22.20) analitičko u tački $x = x_0$ i može da se predstavi potencijalnim redom po $(x - x_0)$, sa radijusom konvergencije $R > 0$.

Napomena. U primeni ove teoreme važno je napisati jednačinu u obliku (22.20), tj. koeficijent uz najviši izvod jednak je 1.

Na kraju napomenimo da je ovaj metod od praktične važnosti zbog mogućnosti izračunavanja numeričkih vrednosti.

Glava 23

Korisne matematičke formule

23.1 Trigonometrijske relacije

$$\sin \alpha = -\sin(-\alpha) = \cos(\pi/2 - \alpha)$$

$$\cos \alpha = \cos(-\alpha) = \sin(\pi/2 - \alpha)$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\sin \alpha \sin \beta = 1/2 [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = 1/2 [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \cos \alpha = 1/2 [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\sin^2 \alpha = 1/2(1 - \cos 2\alpha)$$

$$\cos^2 \alpha = 1/2(1 + \cos 2\alpha)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha / \cos \alpha$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \cos \alpha / \sin \alpha = 1 / \operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{sec} \alpha = 1 / \cos \alpha$$

$$\operatorname{csc} \alpha = 1 / \sin \alpha$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$A \sin \alpha \pm B \cos \alpha = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\alpha \pm \beta)$$

$$\text{gde je } \beta = \operatorname{arctg}(B/A),$$

$$A \cos \alpha \mp B \sin \alpha = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\alpha \pm \beta)$$

$$\text{gde je } \beta = \operatorname{arctg}(B/A)$$

23.2 Hiperboličke funkcije

Eksponent -1 u narednim izrazima označava inverznu funkciju, tj.

$$\sin^{-1} \alpha \equiv \operatorname{arcsin} \alpha, \quad \operatorname{arctg}(B/A) \equiv \operatorname{tg}^{-1}(B/A), \text{ itd.}$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\operatorname{sh}(-x) = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch}(-x) = \sqrt{\operatorname{sh}^2 x + 1}$$

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1} = -\operatorname{th}(-x) = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

$$\operatorname{coth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x} = -\operatorname{coth}(-x) = \sqrt{\operatorname{csch}^2 x + 1}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\operatorname{ch} x} = \operatorname{sech}(-x) = \sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}$$

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{sh} x} = -\operatorname{csch}(-x) = \sqrt{\operatorname{coth}^2 x - 1}$$

$$\operatorname{coth}^{-1} x = \frac{\ln(1+x) - \ln(x-1)}{2}$$

$$\operatorname{sh}^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = \operatorname{ch}^{-1} \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\operatorname{ch}^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) = \operatorname{sh}^{-1} \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\operatorname{th}^{-1} x = \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{2}$$

$$\operatorname{sech}^{-1} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}\right)$$

$$\operatorname{csch}^{-1} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}\right)$$

23.3 Logaritmi

$$\log_a x = \log_b x / \log_b a$$

$$\log(1/x) = -\log x$$

$$\log(xy) = \log x + \log y$$

$$\log(x/y) = \log x - \log y$$

$$\log x^n = n \log x$$

$$\log_a a = 1$$

$$a^{\log_a x} = x$$

$$\ln e^x = x$$

$$\log 0 = -\infty$$

$$\log 1 = 0$$

$$\ln e = 1$$

$$\ln(-1) = i\pi$$

$$\ln(\pm i) = \pm \frac{1}{2}\pi i, \quad \text{gde je } i = \sqrt{-1}.$$

23.4 Kompleksni brojevi

$$i = \sqrt{-1}, \quad i^2 = -1, \quad 1/i = -i$$

$$e^{i\pi/2} = i, \quad e^{i\pi} = -1, \quad e^{3i\pi/2} = -i, \quad e^{2\pi i} = 1$$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (\text{Ojlerova formula})$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2i} (e^{i\theta} + e^{-i\theta})$$

$$\sin i\theta = i \operatorname{sh} \theta$$

$$\cos i\theta = i \operatorname{ch} \theta$$

$$\operatorname{sh} i\theta = i \sin \theta$$

$$\operatorname{ch} i\theta = \cos \theta$$

Formule koje slede važe samo za $Z = A + Bi$, $\bar{Z} = A - Bi$ i $\theta = \operatorname{th}^{-1}(B/A)$:

$$|Z| = \sqrt{A^2 + B^2} \text{ (modul)}$$

$$|Z|^2 = Z\bar{Z} = A^2 + B^2$$

$$Z = |Z|e^{i\theta} = |Z|(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{\bar{Z}}{|Z|^2} = \frac{A - Bi}{A^2 + B^2}$$

$$Z^n = |Z|^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) \quad (\text{DeMoavr t.})$$

$$Z^2 = (A^2 - B^2) + 2iAB$$

$$Z^3 = (A^3 - 3AB^2) + i(3A^2B - B^3)$$

$$Z^4 = (A^4 - 6A^2B^2 + B^4) + i(4A^3B - 4AB^3)$$

$$Z^5 = (A^5 - 10A^3B^2 + 5AB^4) + i(5A^4B - 10A^2B^3 + B^5)$$

$$e^Z = e^A (\cos B + i \sin B)$$

$$\ln Z = \ln |Z| + i(\theta + 2\pi N), \quad N \text{ ceo broj}$$

$$\operatorname{Ln} Z = \ln |Z| + i\theta, \quad \text{glavna vrednost}$$

$$\sin Z = \sin A \operatorname{ch} B + i \cos A \operatorname{sh} B$$

$$\cos Z = \cos A \operatorname{ch} B - i \sin A \operatorname{sh} B$$

$$\operatorname{sh} Z = \operatorname{sh} A \cos B + i \operatorname{ch} A \sin B$$

$$\operatorname{ch} Z = \operatorname{ch} A \cos B + i \operatorname{sh} A \sin B.$$

23.5 Diferencijali

Neka su f i g funkcije jedne promenljive, a a konstanta, tada je:

$$d(a f) = a df$$

$$d(f + g) = df + dg$$

$$d(f \cdot g) = f dg + g df$$

$$d(f/g) = \frac{g df - f dg}{g^2}$$

$$d(a f^n) = n a f^{n-1} df$$

$$d(e^{af}) = a e^{af} df$$

$$d(a^f) = a^f \ln a df$$

$$d(\ln f) = df/f$$

$$\begin{aligned}d \sin f &= \cos f \, df \\d \cos f &= -\sin f \, df\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d \operatorname{tg} f &= \frac{df}{\cos^2 f} = \sec^2 f \, df \\d \operatorname{ctg} f &= -\frac{df}{\sin^2 f} = -\operatorname{csc}^2 f \, df\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d \operatorname{arctg} f &= d \operatorname{tg}^{-1} f = \frac{df}{1+f^2} \\d \operatorname{sh} f &= \operatorname{ch} f \, df \\d \operatorname{ch} f &= \operatorname{sh} f \, df\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d \operatorname{sec} f &= \operatorname{tg} f \operatorname{sec} f \, df \\d \operatorname{csc} f &= -\operatorname{ctg} f \operatorname{csc} f \, df\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d \operatorname{arcsin} f &= d \sin^{-1} f = (1-f^2)^{-1/2} \, df \\d \operatorname{arccos} f &= d \cos^{-1} f = -(1-f^2)^{-1/2} \, df\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d \operatorname{tgh} f &= \operatorname{sech}^2 f \, df \\d \operatorname{ctgh} f &= -\operatorname{csch}^2 f \, df \\d \operatorname{sech} f &= -\operatorname{sech} f \operatorname{th} f \, df \\d \operatorname{csch} f &= -\operatorname{csch} f \operatorname{coth} f \, df.\end{aligned}$$

23.6 Neodređeni integrali

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int e^{ax} \, dx = e^{ax}/a + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$$

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln(\cos x) + C$$

$$\int x \sin x \, dx = \sin x - x \cos x + C$$

$$\int x \cos x \, dx = \cos x + x \sin x + C$$

$$\int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + C$$

$$\int \sin^x \, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

$$\int \cos^x \, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

$$\int \operatorname{th} x \, dx = \ln(\operatorname{ch} x) + C.$$

23.7 Aproksimacije

Ove formule važe za vrednosti $|x| \ll 1$.

$$f(a+x) \simeq f(a) + x f'(a)$$

$$(1+x)^n \simeq 1 + nx$$

$$\sin x \simeq x$$

$$\cos x \simeq 1 - x^2/2$$

$$\operatorname{tg} x \simeq x$$

$$\sin^{-1} x = \arcsin x \simeq x$$

$$\cos^{-1} x = \arccos x \simeq \frac{\pi}{2} - x$$

$$\operatorname{tg}^{-1} x = \operatorname{arctg} x \simeq x$$

$$\operatorname{sh} x \simeq x$$

$$\operatorname{ch} x \simeq 1 + x^2/2$$

$$\operatorname{tgh} x \simeq x$$

$$e^x \simeq 1 + x$$

$$a^x \simeq x \ln a$$

$$\ln(1+x) \simeq x.$$

23.8 Matrice i determinante

Sledeće formule važe za matrice tipa 2×2 , koje ćemo zapisati u obliku

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} :$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}, \quad rA = \begin{pmatrix} ra & rb \\ rc & rd \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix} \neq BA$$

$$\operatorname{tr} A = a + d \quad (\operatorname{tr} \text{ označava trag matrice})$$

$$\det A = ad - bc \quad \det(AB) = \det A \det B$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad \text{- inverzna matrica}$$

$$\det(A^{-1}) = 1/\det A.$$

Sopstvene vrednosti matrice A :

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(a+d) \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}, \quad \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[\operatorname{tr} A \pm \sqrt{(\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A} \right]$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr} A$$

Determinanta matrice tipa 3×3 , tj. $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix}$ je

$$\det A = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & j \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} b & c \\ h & j \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} = aej + bfg + cdh - ceg - bdj - afh.$$

Determinanta matrice tipa 4×4 , tj. $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ j & k & l & m \\ n & o & p & q \end{pmatrix}$ je

$$\det A = a \begin{vmatrix} f & g & h \\ k & l & m \\ o & p & q \end{vmatrix} - e \begin{vmatrix} b & c & d \\ k & l & m \\ o & p & q \end{vmatrix} + j \begin{vmatrix} b & c & d \\ f & g & h \\ o & p & q \end{vmatrix} - n \begin{vmatrix} b & c & d \\ f & g & h \\ k & l & m \end{vmatrix}.$$

23.9 Koreni polinoma

23.9.1 Linearni sistemi

$$\begin{aligned} f(x) &= ax + b = 0 \\ x &= -b/a. \end{aligned}$$

23.9.2 Kvadratni polinom

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \text{koreni su realni ako je diskriminanata } D = b^2 - 4ac \geq 0.$$

23.9.3 Polinom trećeg stepena

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

uvodeći smenu $y = x + \frac{b}{3a}$ dobijamo polinom $y^3 + py + q = 0$,

$$\text{gde su : } p = \frac{1}{3a^2} (3ac - b^2), \quad q = \frac{1}{27a^3} (2b^3 - 9abc + 27a^2d).$$

Uvodeći oznake : $A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$, $B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$, rešenja su

$$y_{1,2,3} = A + B, -\frac{A+B}{2} \pm \frac{A-B}{2} \sqrt{-3}.$$

23.9.4 Njutn-Rafsonov metod

Za $f(x) = ax^k + bx^{k-1} + \dots = 0$ (sukcesivne aproksimacije realnih korena)

$$\bar{x} = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{ax^k + bx^{k-1} + \dots}{akx^{k-1} + b(k-1)x^{k-2} + \dots}$$

23.10 Vektorska analiza

U sledećim formulama f predstavlja skalarnu funkciju promenljivih (x, y, z) , a \mathbf{A} vektorsku funkciju istih promenljivih. Sa \mathbf{i} , \mathbf{j} i \mathbf{k} , označićemo jedinične vektore (ortove), tj. bazne vektore za dati koordinatni sistem

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{nabla operator})$$

$$\nabla f = \mathbf{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{delta operator})$$

$$\nabla^2 f = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad \text{gde je } \mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$$

$$\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \nabla f + f \nabla \cdot \mathbf{A}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} \right) \mathbf{k}$$

$$\nabla \times (f\mathbf{A}) = \nabla f \times \mathbf{A} + f \nabla \times \mathbf{A}$$

$$\nabla \times (\nabla f) = 0$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\nabla \cdot \nabla) \mathbf{A}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

$$(\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{A} = \nabla(\mathbf{A}^2/2) - \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A}).$$

Deo IV

Zadaci

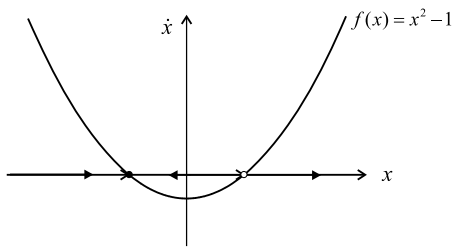
Glava 24

Zadaci

24.1 Zadaci iz poglavlja 2

Zadatak 1 Naći sve fiksne tačke za $\dot{x} = x^2 - 1$, i odrediti njihovu stabilnost.

Rešenje.

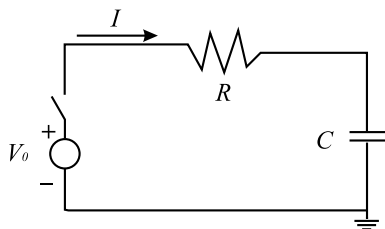


Slika 24.1: Grafik funkcije $f(x)$.

U ovom slučaju $f(x) = x^2 - 1$. Fiksne tačke određujemo iz jednačine $f(x^*) = 0$, koju rešavamo po x^* . Dakle, $x^* = \pm 1$. Da odredimo stabilnost, crtamo $x^2 - 1$ i zatim skiciramo vektorsko polje (sl. 24.1). Tok je na desnu stranu na mestima gde je $x^2 - 1 > 0$ i na levu stranu na mestima gde je $x^2 - 1 < 0$. Zato, $x^* = -1$ je stabilna fiksna tačka, a $x^* = 1$ je nestabilna fiksna tačka. ☺

Komentar. Fiksna tačka $x^* = -1$ je **lokalno stabilna**, ali ne i **globalno stabilna**, jer se definicija stabilne ravnoteže zasniva na malim poremećajima (otklonima). Pojedini veliki poremećaji možda se neće smanjivati tokom vremena.

U ovom zadatku svi mali otkloni od fiksne tačke $x^* = -1$ smanjivaće se tokom vremena, dok će za veliki poremećaj udesno od tačke $x = 1$ (nestabilna fiksna tačka) tačka u faznom prostoru biti odbačena ka $+\infty$.



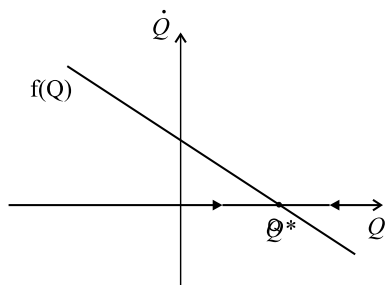
Slika 24.2: Električno kolo.

Zadatak 2 Razmotrimo električno kolo jednosmerne struje, prikazano na slici 24.2. Otpornik R i kondenzator C vezani su redno sa baterijom konstantnog napona V_0 . Pretpostavimo da je preklopnik zatvoren u trenutku $t = 0$ i da je u početku kondenzator prazan. Neka $Q(t)$ označava punjenje kondenzatora u trenutku $t \geq 0$. Skicirati grafik veličine $Q(t)$.

Rešenje.

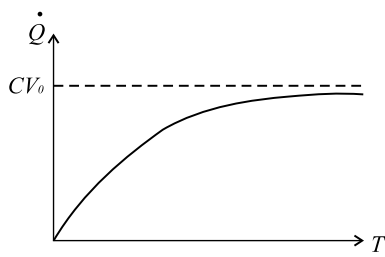
Posmatrajmo jednačinu električnog kola

$$\dot{Q} = f(Q) = \frac{V_0}{R} - \frac{Q}{RC}. \quad (24.1)$$



Slika 24.3: Fazni portret sistema (24.1).

Grafik funkcije $f(Q)$ je prava linija (slika 24.3). Fiksna tačka odgovarajućeg vektorskog polja zadovoljava jednačinu $f(Q) = 0$, i ta jednačina je zadovoljena za vrednost $Q^* = CV_0$. Za vrednosti promenljive Q za koje je $f(Q) > 0$, tok je na desnu stranu, a za vrednosti Q , gde je $f(Q) < 0$ - na levu. Dakle, tok je uvek usmeren prema Q^* , i to je **stabilna fiksna tačka**. Ona je ujedno i **globalno stabilna tačka**, u smislu da joj teže rešenja iz svih početnih položaja.

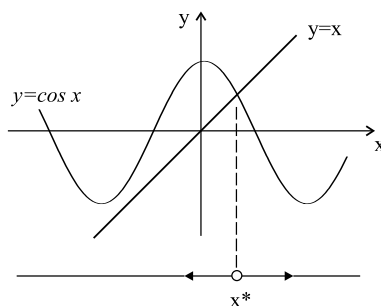


Slika 24.4: Trajektorija rešenja.

Da bismo skicirali trajektoriju rešenja $Q(t)$, postavimo tačku u koordinatni početak faznog prostora (vidi sl. 24.3) i posmatrajmo njeno kretanje. Tačka u faznom prostoru kreće se monotono prema Q^* . Približavajući se fiksnoj tački, njena brzina \dot{Q} linearno opada, tako da $Q(t)$ ima oblik prikazan na slici 24.4. ©

Zadatak 3 Skicirati fazni portret koji odgovara jednačini $\dot{x} = x - \cos x$ i odrediti stabilnost svih fiksni tačkaka.

Rešenje.



Slika 24.5: Grafici funkcija $y = x$ i $y = \cos x$ jednoj tački (slika 24.5).

Jedno od rešenja dobija se skiciranjem odgovarajućeg vektorskog polja, koje odgovara funkciji $f(x) = x - \cos x$. Ovaj pristup je ispravan, ali zahteva poznavanje grafika funkcije $x - \cos x$. Međutim, rešenje sistema možemo potražiti skiciranjem grafika funkcija $y = x$ i $y = \cos x$, odvojeno. Ako nacrtamo oba grafika na istim osama, uočićemo da se seku u tačno

Presek odgovara fiksnoj tački, jer je $x^* = \cos x^*$, pa je zato $f(x^*) = 0$. Kada prava linija leži iznad kosinusne krive, važi $x > \cos x$, pa je $\dot{x} > 0$: tok je na desnu stranu. Slično, tok je na levu stranu kada je prava linija ispod kosinusne krive. Jedina fiksna tačka je x^* i to nestabilna. ©

Komentar: Ovaj zadatak pokazuje da se, primenom geometrijskog pristupa, stabilnost fiksne tačke x^* može da odredi i bez poznavanja njene tačne vrednosti.

Zadatak 4 Korišćenjem linearne analize stabilnosti, odrediti stabilnost fiksni tačkaka jednačine

$$\dot{x} = \sin x.$$

Rešenje.

Fiksne tačke pojavljuju se na mestima gde je $f(x) = \sin x = 0$. Dakle, $x^* = k\pi$, gde je k ceo broj. Tada je

$$f'(x^*) = \cos k\pi = \begin{cases} 1, & k \text{ je parno,} \\ -1, & k \text{ je neparno.} \end{cases}$$

x^* je nestabilno ako je k parno i stabilno ako je k neparno. Ovo je u saglasnosti sa rezultatima prikazanim na slici 2.1. ©

Zadatak 5 Odrediti stabilnost fiksni tačkaka logističke jednačine, korišćenjem linearne analize stabilnosti i naći karakterističnu vremensku skalu u oba slučaja.

Rešenje.

U ovom slučaju je

$$f(N) = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right),$$

sa fiksnim tačkama $N^* = 0$ i $N^* = K$. Kako je $f'(N) = r - \frac{2rN}{K}$, to je $f'(0) = r$ i $f'(K) = -r$. Dakle, $N^* = 0$ je nestabilna fiksna tačka, a $N^* = K$ stabilna fiksna tačka, kao što je ranije i određeno, grafičkim pristupom. U oba slučaja karakteristična vremenska skala je

$$\frac{1}{|f'(N^*)|} = \frac{1}{r}. \quad \odot$$

Zadatak 6 Šta se može zaključiti o stabilnosti fiksnih tačaka kada je $f'(x^*) = 0$?

Rešenje.

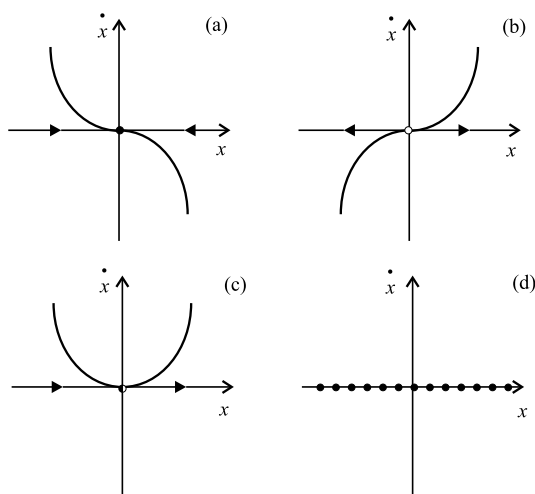
U opštem slučaju, ne može se ništa zaključiti! Stabilnost se najbolje određuje za svaki slučaj zasebno, korišćenjem grafičkih metoda. Razmotrimo sledeće primere:

a) $\dot{x} = -x^3$, b) $\dot{x} = x^3$, c) $\dot{x} = x^2$, d) $\dot{x} = 0$.

Svaki od ovih sistema ima fiksnu tačku $x^* = 0$ i važi $f'(x^*) = 0$. Međutim, stabilnost je različita u svakom od ovih slučajeva. Slika 24.6 pokazuje da je a) stabilno, a b) nestabilno. Slučaj pod c) je hibridni slučaj, koji se naziva **polustabilnim**, jer je fiksna tačka privlačna sa leve strane i odbojna sa desne strane. Zbog toga prikazujemo ovaj tip fiksne tačke kao polupopunjeni kružić.

U slučaju d) imamo celu liniju fiksnih tačaka; poremećaji niti rastu niti opadaju.

⊙

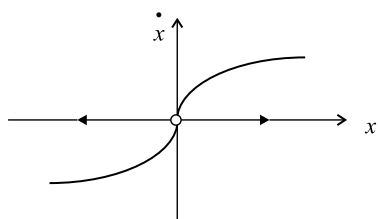


Slika 24.6: Tipovi stabilnosti fiksnih tačaka.

Zadatak 7 Pokažite da rešenje jednačine $\dot{x} = x^{1/3}$, koje polazi iz tačke $x_0 = 0$, nije jedinstveno.

Rešenje.

Tačka $x = 0$ je fiksna tačka, tako da je, očito, jedno rešenje $x(t) = 0$ za svako t . Iznenađujuće je da postoji drugo rešenje.



Slika 24.7: Fazni portret sistema $\dot{x} = x^{1/3}$.

Da bismo ga odredili, razdvajamo promenljive i integralimo

$$\int x^{-1/3} dx = \int dt,$$

tako da je $3/2x^{2/3} = t + C$. Za početni uslov $x(0) = 0$, dobijamo $C = 0$. Dakle, $x(t) = (\frac{2}{3}t)^{3/2}$ je, takođe, rešenje. ☺

Komentar: Ako fiksna tačka kreće iz koordinatnog početka, da li će tu i ostati ili će se kretati po krivoj $x(t) = (\frac{2}{3}t)^{3/2}$?

Zadatak 8 Razmotrimo egzistenciju i jedinstvenost rešenja jednačine $\dot{x} = 1 + x^2$, sa početnim uslovom $x(0) = x_0$. Da li rešenja postoje za svaki trenutak vremena?

Rešenje.

Ovde je $f(x) = 1 + x^2$. Ova funkcija je neprekidna i ima neprekidan izvod za svako x . Teorema nam, dakle, kaže da rešenje postoji i da je jedinstveno za svaki početni uslov x_0 . Ali teorema ne kaže da rešenje postoji za svaki trenutak vremena; ona jedino garantuje postojanje rešenja u (mogućno vrlo malom) vremenskom intervalu oko trenutka $t = 0$.

Na primer, razmotrimo slučaj kada je $x(0) = 0$. Problem tada može biti rešen analitički razdvajanjem promenljivih:

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \int dt,$$

odakle dobijamo

$$\text{arctg} x = t + C.$$

Iz početnog uslova $x(0) = 0$ dobijamo da je $C = 0$. Rešenje je, tako, $x(t) = \text{tg} t$. Ovo rešenje postoji samo za $-\pi/2 < t < \pi/2$, zato što $x(t) \rightarrow \pm\infty$ za $t \rightarrow \pm\pi/2$. Van tog vremenskog intervala, jednačina nema rešenje, za početnu vrednost $x_0 = 0$.

☺

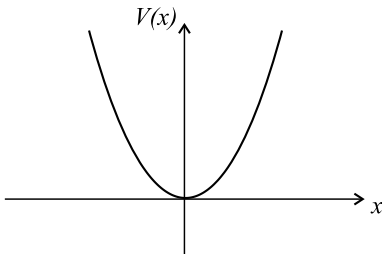
Komentar: Ono što je zapanjujuće, u vezi ovog primera, je to da sistem ima rešenje koje teži beskonačno u konačnom vremenskom intervalu. Ovaj fenomen naziva se **blou-ap**¹ fenomen, a može se uočiti prilikom modelovanja procesa koji se vrlo brzo odigravaju (recimo proces sagorevanja). Pored toga, javlja se i kod prostiranja ubrzavajućih talasa – poremećaja sa prekidom u prvom izvodu po prostornoj promenljivoj: amplituda poremećaja (skoka u prvom izvodu) za konačno vreme može postati beskonačno velika, što govori o pretvaranju ubrzavajućeg talasa u udarni.

Zadatak 9 *Nacrtati potencijal sistema $\dot{x} = -x$ i odrediti sve ravnotežne tačke.*

Rešenje.

Treba da odredimo $V(x)$ tako da važi $-\frac{dV}{dx} = -x$. Opšte rešenje je

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2 + C,$$



Slika 24.8: Grafik funkcije $V(x)$.

gde je C proizvoljna konstanta. Potencijal je uvek određen do na konstantu. Obično usvajamo $C = 0$, zbog pogodnosti. Grafik funkcije $V(x)$ je prikazan na slici 24.8. Jedina ravnotežna tačka pojavljuje se u položaju $x = 0$ i stabilna je. ☺

Zadatak 10 *Nacrtati potencijal sistema $\dot{x} = x - x^3$ i odrediti sve ravnotežne tačke.*

Rešenje.

Rešavanjem

$$-\frac{dV}{dx} = x - x^3$$

dobijamo

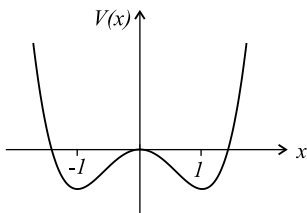
$$V(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + C.$$

Uzmimo da je $C = 0$. Slika 24.9 prikazuje grafik potencijala V . Lokalni minimumi u tačkama $x = \pm 1$ odgovaraju stabilnoj ravnoteži, a lokalni maksimum u tački $x = 0$ odgovara nestabilnoj ravnoteži. Potencijal prikazan na slici 24.9 često se naziva

¹blow-up (eng.)

potencijal sa dva udubljenja ("jame"). Posmatrani sistem nazivamo **bistabilan**, jer ima dva stabilna položaja ravnoteže.

☺



Slika 24.9: Grafik funkcije $V(x)$.

24.2 Zadaci iz poglavlja 3

Zadatak 11 *Izvesti linearnu analizu stabilnosti sistema $\dot{x} = r - x^2$.*

Rešenje.

Fiksne tačke jednačine

$$\dot{x} = f(x) = r - x^2$$

su $x^* = \pm\sqrt{r}$. Postoje dve fiksne tačke za $r \geq 0$ i nijedna za $r < 0$. Važi $f'(x^*) = -2x^*$, odakle zaključujemo da je $x^* = \sqrt{r}$ stabilna, jer je $f'(x^*) < 0$, a da je $x^* = -\sqrt{r}$ nestabilna fiksna tačka, jer je $f'(x^*) > 0$. U bifurkacionoj tački $r = 0$, je $f'(x^*) = 0$; linearizacija se anulira kada se fiksne tačke "spoje". ☺

Zadatak 12 *Pokazati da sistem prvog reda*

$$\dot{x} = r - x - e^{-x}$$

prolazi kroz sedlo-čvor bifurkaciju sa promenom r i odrediti vrednost r u bifurkacionoj tački.

Rešenje.

Fiksne tačke zadovoljavaju jednačinu

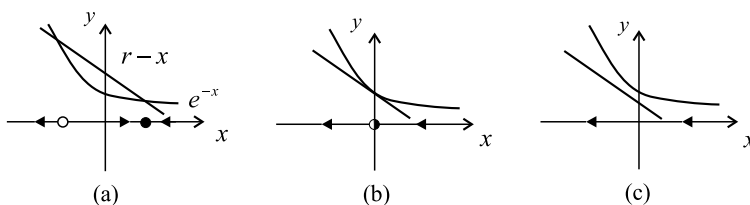
$$f(x) = r - x - e^{-x} = 0.$$

U ovom slučaju ne možemo odrediti fiksne tačke eksplicitno, u funkciji od r .

Umesto toga koristimo geometrijski pristup. Jedan način sastojao bi se u tome da se nacrtaju funkcije $f(x) = r - x - e^{-x}$ za različite vrednosti r , da se nađu njihovi koreni x^* , i da se onda skicira vektorsko polje na x -osi. Drugi način, koji je i lakši, sastoji se u skiciranju dve posebne funkcije: $r - x$ i e^{-x} (imaju poznate grafike,

vidi sl. 24.10a). U preseku ove dve krive je $r - x = e^{-x}$, pa je $f(x) = 0$, što odgovara fiksnim tačkama sistema. Ova slika omogućava nam da odredimo smer toka na x -osi. Tok je na desnu stranu na mestima gde linija leži iznad krive, jer je $r - x > e^{-x}$ i zato $\dot{x} > 0$. Dakle, fiksna tačka na desnoj strani je stabilna, a na levoj nestabilna.

Ukoliko smanjujemo vrednost parametra r , prava $r - x$ "klizi" na dole i fiksne tačke prilaze jedna drugoj. Za neku kritičnu vrednost $r = r_c$ prava postaje tangenta na eksponencijalnu krivu i fiksne tačke se sjedinjuju kroz sedlo-čvor bifurkaciju (slika 24.10b).



Slika 24.10: Sedlo-čvor bifurkacija.

Da bismo odredili bifurkacionu tačku r_c , pretpostavimo da se grafici funkcija $r - x$ i e^{-x} dodiruju. Zbog toga funkcije i njihovi izvodi moraju biti jednaki:

$$\begin{aligned} e^{-x} &= r - x, \\ \frac{de^{-x}}{dx} &= \frac{d(r - x)}{dx}. \end{aligned}$$

Iz druge jednačine sledi da je

$$-e^{-x} = -1,$$

odnosno $x = 0$. Iz prve jednačine zatim dobijamo $r = 1$. Bifurkaciona tačka je, tako, $r_c = 1$, a bifurkacija se pojavljuje za $x = 0$. ☺

Zadatak 13 Pokazati da sistem prvog reda

$$\dot{x} = x(1 - x^2) - a(1 - e^{-bx})$$

prolazi kroz transkritičnu bifurkaciju za $x = 0$, kada parametri a i b zadovoljavaju određenu jednačinu, koju, takođe, treba odrediti. Ova jednačina određuje **bifurkacionu krivu** u (a, b) parametarskom prostoru. Zatim, odrediti aproksimativnu formulu za fiksnu tačku koja "bifurkuje" iz $x = 0$, pod uslovom da su vrednosti parametara bliske bifurkacionoj krivoj.

Rešenje.

Treba zapaziti da je $x = 0$ fiksna tačka za svako (a, b) . Ovo čini prihvatljivom mogućnost da fiksna tačka prolazi kroz transkritičnu bifurkaciju, ako uopšte prolazi

kroz bifurkaciju. Za malo x važi

$$\begin{aligned} 1 - e^{-bx} &= 1 - \left[1 - bx + \frac{1}{2}b^2x^2 + O(x^3) \right] = \\ &= bx - \frac{1}{2}b^2x^2 + O(x^3), \end{aligned}$$

pa možemo da napišemo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - a \left(bx - \frac{1}{2}b^2x^2 \right) + O(x^3) = \\ &= (1 - ab)x + \left(\frac{1}{2}ab^2 \right) x^2 + O(x^3). \end{aligned}$$

Transkritična bifurkacija se pojavljuje u tačkama u kojima važi $ab = 1$; ovo je jednačina bifurkacione krive. Fiksna tačka različita od nule data je rešenjem jednačine

$$1 - ab + \left(\frac{1}{2}ab^2 \right) x \approx 0,$$

tj.

$$x^* \approx \frac{2(ab - 1)}{ab^2}.$$

Ova formula je aproksimativno tačna samo ako je x^* malo, jer je naš razvoj u red zasnovan na pretpostavci da je x malo. Naša formula, zato, važi samo kada je ab blisko jedinici, što znači da parametri moraju biti bliski bifurkacionoj krivoj.

Ovom primeru se može prići i sa aspekta analize stabilnosti fiksne tačke $x = 0$. Ako sistem prvog reda zapišemo u obliku $\dot{x} = f(x, a, b)$ i iskoristimo razvoj u red po promenljivoj x , dobićemo

$$\dot{x} = f(0, a, b) + f'(0, a, b)x + \frac{1}{2}f''(0, a, b)x^2 + O(x^3).$$

Pošto je $f(0, a, b) = 0$, analiza stabilnosti fiksne tačke se može izvršiti na osnovu linearizovane jednačine

$$\dot{x} = \lambda(a, b)x,$$

gde je $\lambda(a, b) = f'(0, a, b)$ sopstvena vrednost linearizovanog problema. Ako je $\lambda(a, b) < 0$, fiksna tačka $x = 0$ je stabilna; ako je $\lambda(a, b) > 0$, fiksna tačka $x = 0$ je nestabilna. Kritična, bifurkaciona vrednost parametara se dobija kao rešenje jednačine $\lambda(a, b) = 0$. U našem primeru se lako vidi da je

$$\lambda(a, b) = 1 - ab = 0 \implies ab = 1.$$

Da li se u okolini kritične vrednosti parametara zaista javlja promena stabilnosti fiksne tačke saznajemo na osnovu ponašanja sopstvene vrednosti sa promenom parametara. Naime,

$$\frac{\partial \lambda}{\partial a} = -b; \quad \frac{\partial \lambda}{\partial b} = -a.$$

Ako su oba parcijalna izvoda različita od nule za kritičnu vrednost parametara, onda je promena znaka sopstvene vrednosti striktna i fiksna tačka menja stabilnost. Upravo to se događa u ovom primeru. ☺

Zadatak 14 Izvršiti analizu dinamike sistema

$$\dot{x} = r \ln x + x - 1$$

u okolini tačke $x = 1$, i pokazati da sistem prolazi kroz transkritičnu bifurkaciju za određenu vrednost r . Odrediti, zatim, nove promenljive X i R tako da sistem bude redukovan na aproksimativnu normalnu formu

$$\dot{X} \approx RX - X^2$$

u okolini tačke bifurkacije.

Rešenje.

Treba uočiti, prvo, da je $x = 1$ fiksna tačka za sve vrednosti r . Kako smo zainteresovani za dinamiku blizu fiksne tačke, uvodimo novu promenljivu $u = x - 1$, gde je u malo. Tada je

$$\begin{aligned} \dot{u} = \dot{x} &= r \ln(1 + u) + u = \\ &= r \left[u - \frac{1}{2}u^2 + O(u^3) \right] + u \approx \\ &\approx (r + 1)u - \frac{1}{2}ru^2 + O(u^3). \end{aligned}$$

Dakle, transkritična bifurkacija pojavljuje se za $r_c = -1$.

Da bismo odredili normalnu formu ove jednačine, prvo se oslobađamo koeficijenta uz u^2 . Neka važi $u = a\nu$, gde će a biti određeno kasnije. Jednačina za ν je sada

$$\dot{\nu} = (r + 1)\nu - \left(\frac{1}{2}ra \right) \nu^2 + O(\nu^3).$$

Ako izaberemo $a = 2/r$, jednačina postaje

$$\dot{\nu} = (r + 1)\nu - \nu^2 + O(\nu^3).$$

Za $R = r + 1$ i $X = \nu$, odredili smo aproksimativnu normalnu formu

$$\dot{X} \approx RX - X^2,$$

gde su zanemareni kubni članovi reda $O(X^3)$. Koristeći početne promenljive, možemo pisati

$$X = \nu = \frac{u}{a} = \frac{1}{2}r(x - 1).$$

☺

Komentar: Preciznije rečeno, iz teorije normalnih formi sledi da možemo naći smenu promenljivih takvu da sistem postaje

$$\dot{X} = RX - X^2$$

sa strogom jednakošću umesto aproksimativne.

Prethodno rešenje daje aproksimaciju promene koordinata. U cilju bolje aproksimacije, zadržaćemo članove višeg reda, u razvoju u red.

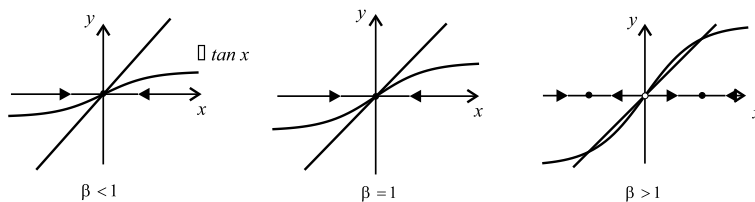
Zadatak 15 *Jednačine slične jednačini*

$$\dot{x} = -x + \beta \operatorname{th} x$$

pojavljuju se u statističkim mehaničkim modelima magneta i neuronskih mreža. Pokažimo da, kada se menja parametar β , ova jednačina prolazi kroz natkritičnu vilastu bifurkaciju. Zatim skicirati fiksne tačke za svako β .

Rešenje.

Koristeći geometrijski pristup, skiciramo grafike funkcija $y = x$ i $y = \beta \operatorname{th} x$, kao što je prikazano na slici 24.11.



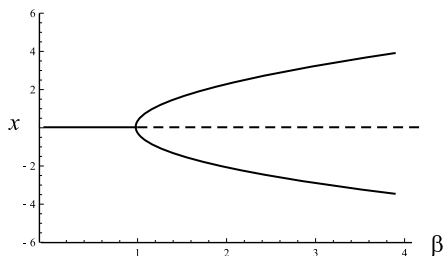
Slika 24.11: Natkritična vilasta bifurkacija.

Preseci grafika ovih funkcija odgovaraju fiksnim tačkama. Treba uočiti da, kako parametar β raste, kriva $y = \operatorname{th} x$ postaje sve strmija u koordinatnom početku (njen nagib u tom položaju je β). Tako, za $\beta < 1$ koordinatni početak je jedina fiksna tačka. Vilasta bifurkacija pojavljuje se za $\beta = 1$ i $x^* = 0$, kada je nagib krive $y = \operatorname{th} x$ $\pi/4$. Za $\beta > 1$, pojavljuju se dve nove stabilne fiksne tačke, i koordinatni početak postaje nestabilan.

Izračunamo fiksne tačke x^* za svako β . Jedna fiksna tačka uvek postoji za $x^* = 0$. Da bismo odredili ostale fiksne tačke, posmatramo x^* kao nezavisnu promenljivu, i onda računamo

$$\beta = \frac{x^*}{\operatorname{th} x^*}.$$

Sada crtamo bifurkacioni dijagram, tako što na apscisu nanosimo β , a na ordinatu x^* (slika 24.12).



Slika 24.12: Bifurkacioni dijagram.

I ovaj problem se može posmatrati sa aspekta stabilnosti fiksne tačke $x = 0$. Naime, pošto je $\lambda(\beta) = f'(0, \beta) = -1 + \beta$, kritična vrednost parametra se dobija iz uslova $\lambda(\beta) = 0$, to jest $\beta^* = 1$. Striktna promena stabilnosti fiksne tačke se javlja ako je $\lambda'(\beta^*) \neq 0$, što je ispunjeno ($\lambda'(\beta) = 1 \neq 0$).

Osim toga, razvojem u red funkcije $f(x, \beta)$ u okolini fiksne tačke $x = 0$ može se oponašati normalna forma

$$f(x, \beta) = (-1 + \beta)x - \frac{1}{3}\beta x^3 + O(x^4),$$

koja sugerše da se radi o pičfork bifurkaciji. ☺

Zadatak 16 Nacrtati potencijal $V(x)$ za sistem

$$\dot{x} = rx - x^3,$$

za vrednosti parametara $r < 0$, $r = 0$ i $r > 0$.

Rešenje.

Već znamo (odeljka 2.10 na str. 31) da je potencijal za $\dot{x} = f(x)$ definisan sa

$$f(x) = -\frac{dV}{dx}.$$

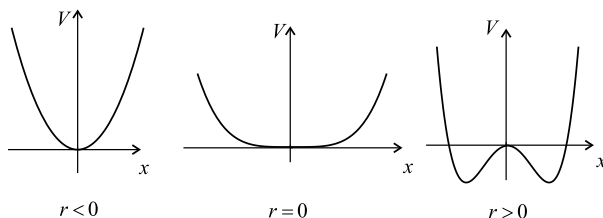
Stoga, rešavamo jednačinu

$$-\frac{dV}{dx} = rx - x^3.$$

Integracijom dobijamo

$$V(x) = -\frac{1}{2}rx^2 + \frac{1}{4}rx^4,$$

zanemariivši integracionu konstantu. Odgovarajući grafici prikazani su na slici 24.13.



Slika 24.13: Potencijali posmatranog sistema.

Za $r < 0$, minimum potencijala je u koordinatnom početku. Za bifurkacionu vrednost $r = 0$, okolina minimuma postaje "ravnija". Za $r > 0$, lokalni maksimum je u koordinatnom početku i simetrični par minimuma pojavljuje se sa obe strane maksimuma.

☺

24.3 Zadaci iz poglavlja 4

Zadatak 17 Dva trkača, A i B , trče ravnomernom brzinom po kružnoj stazi. Trkač A obiđe stazu za vreme T_1 , dok je trkaču B potrebno vreme T_2 ($T_2 > T_1$). Trkač A će, naravno, periodično prestizati trkača B . Koliko će vremena biti potrebno trkaču A da bude ispred trkača B tačno za jedan krug, pod uslovom da su počeli da trče istovremeno?

Rešenje.

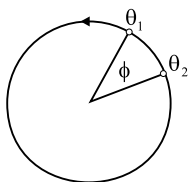
Neka je $\theta_1(t)$ položaj trkača A na kružnici. Tada je $\dot{\theta}_1(t) = \omega_1 = 2\pi/T_1$. Ova jednačina nam kaže da trkač A trči ravnomernom brzinom i prelazi jedan krug svakih T_1 sekundi. Slično tome, jednačina kretanja trkača B je $\dot{\theta}_2(t) = \omega_2 = 2\pi/T_2$.

Uslov da trkač A obiđe trkača B za jedan krug je da ugao između njih dostigne 2π . Zato, ako definišemo faznu razliku $\phi = \theta_1 - \theta_2$, treba da odredimo koliko je vremena potrebno da ϕ dostigne 2π (sl. 24.14). Oduzimanjem dobijamo da je $\dot{\phi} = \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 = \omega_1 - \omega_2$. Zato ϕ raste za 2π posle vremena

$$T_{krug} = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2} = \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right)^{-1}.$$

☺

Komentar. Primer razmatran u prethodnom zadatku, predstavlja efekat koji se naziva fenomen udara. Dva oscilatora sa različitim frekvencijama, koji nisu u međusobnoj interakciji, periodično će biti u fazi.



Slika 24.14: Trkači na kružnoj stazi.

Ako su dva oscilatora u međusobnoj interakciji (na primer, ako dva trkača pokušavaju da ostanu zajedno), onda se pojavljuje više interesantnih efekata, što se može videti u odeljku 4.5 (str. 65), na primeru svetlucanja kod svitaca.

24.4 Zadaci iz poglavlja 5

Zadatak 18 Rešiti linearni sistem $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, gde je $A \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Skicirati fazne portrete kada se vrednost parametra a menja od $-\infty$ do $+\infty$ i prikazati kvalitativno različite slučajeve.

Rešenje.

Sistem je dat izrazom

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

tj.

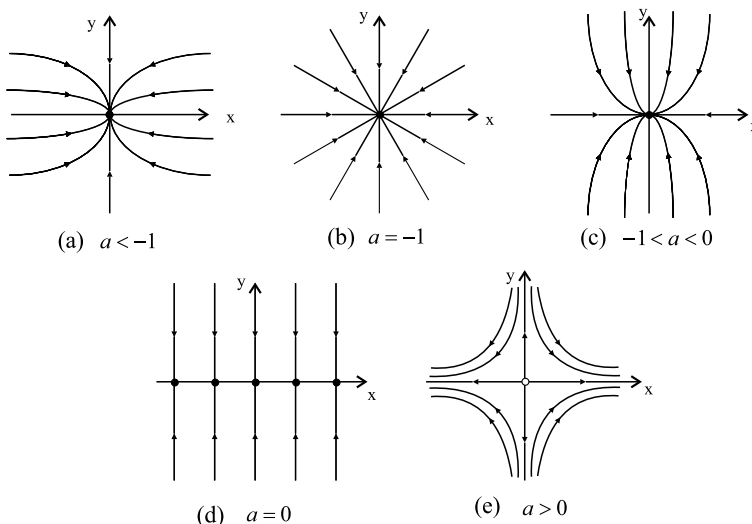
$$\dot{x} = ax,$$

$$\dot{y} = -y,$$

što pokazuje da dve jednačine nisu spregnute. U ovom jednostavnom slučaju svaka jednačina može biti rešena zasebno. Rešenje je

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 e^{at}, \\ y(t) &= y_0 e^{-t}. \end{aligned} \tag{24.2}$$

Fazni portreti za različite vrednosti parametra a prikazani su na slici 24.15. U svakom od prikazanih slučaja $y(t)$ opada eksponencijalno. Za $a < 0$, $x(t)$ takođe opada eksponencijalno, tako da sve trajektorije prilaze koordinatnom početku kada $t \rightarrow \infty$. Međutim, pravac prilaza zavisi od vrednosti parametra a .



Slika 24.15: Fazni portreti sistema, za različite vrednosti parametra a .

Kada je $a < -1$ (sl. 24.15a), $x(t)$ opada brže nego $y(t)$. Trajektorije prilaze koordinatnom početku tangentno na sporiji pravac (pravac y ose). Intuitivno objašnjenje je da kada je a "vrlo negativno", trajektorija se "survava" horizontalno na y -osu, zato što je opadanje promenljive $x(t)$ gotovo trenutno. Zatim trajektorija "troši vreme" duž y -ose prema koordinatnom početku, tako da je prilaz tangentan na y -osu. Sa druge strane, ako pogledamo unazad, duž trajektorije ($t \rightarrow -\infty$), tada sve trajektorije teže pravcu bržeg opadanja (pravac x ose). Na slici 24.15a, fiksna tačka $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ naziva se **stabilni čvor**.

Slika 24.15b prikazuje slučaj kada je $a = -1$. U ovom slučaju je $y(t)/x(t) = y_0/x_0 = \text{const.}$, pa su sve trajektorije prave linije kroz koordinatni početak. Ovo je specijalan slučaj – pojavljuje se jer su brzine opadanja u dva pravca jednaki. Fiksnu tačku \mathbf{x}^* sada nazivamo **simetričan čvor** ili **zvezda**.

Kada je $-1 < a < 0$, fiksna tačka je opet čvor, ali sada trajektorije prilaze tački \mathbf{x}^* duž x -pravca, što je sporiji pravac opadanja za ovaj opseg parametra a (slika 24.15c).

Za $a = 0$ dolazi do dramatične promene (slika 24.15d). U ovom slučaju, $x(t) \equiv x_0$, pa su fiksne tačke neprekidno raspoređene duž x -ose. Sve trajektorije prilaze ovim fiksnim tačkama duž pravaca upravnih na x -osu.

Kada je $a > 0$ (slika 24.15e), fiksna tačka \mathbf{x}^* postaje nestabilna, jer se rastojanje trajektorije, od fiksne tačke, povećava po eksponencijalnom zakonu. Izuzetno, ako trajektorija polazi sa y -ose, onda trajektorija ostaje y -osi i "spušta se" do koordinatnog početka. U ovom slučaju y -osa predstavlja **stabilnu mnogostrukost** "sedlaste tačke" $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$, definisanu kao skup početnih uslova \mathbf{x}_0 takvih da $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}^*$ kada $t \rightarrow \infty$. Slično, **nestabilna mnogostrukost** sedlaste tačke $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ je skup početnih uslova tako da $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}^*$ kada $t \rightarrow -\infty$. U ovom slučaju nestabilna mnogostrukost je x -osa. Zapazimo da tipična trajektorija asimptotski prilazi nestabilnoj mnogostrukosti kada $t \rightarrow \infty$, a prilazi stabilnoj mnogostrukosti kada $t \rightarrow -\infty$. Ovo možda zvuči neobično, ali je potpuno tačno!

☺

Zadatak 19 Rešiti sistem linearnih diferencijalnih jednačina

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + y, \\ \dot{y} &= 4x - 2y,\end{aligned}\tag{24.3}$$

čiji je početni uslov $(x_0, y_0) = (2, -3)$.

Rešenje.

Odgovarajuća matricna jednačina je

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Prvo nalazimo sopstvene vrednosti matrice A . Za ovu matricu je $\tau = -1$ i $\Delta = -6$, tako da je karakteristična jednačina

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0.$$

Njeni koreni su: $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = -3$. Dalje, nalazimo sopstvene vektore. Za sopstvenu vrednost λ , odgovarajući sopstveni vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ zadovoljava jednačinu

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 4 & -2 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Za $\lambda_1 = 2$ dobijamo

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

odakle sledi netrivialno rešenje $(v_1, v_2) = (1, 1)$ ili bilo koji skalarni umnožak prethodnog. Naravno, svaki proizvod sopstvenog vektora i skalara takođe je sopstveni vektor. Slično, za $\lambda_2 = -3$, jednačina za određivanje sopstvenog vektora postaje

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i njeno netrivialno rešenje je $(v_1, v_2) = (1, -4)$. Konačno važi

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Dalje, opšte rešenje je linearna kombinacija sopstvenih rešenja. Korišćenjem jednačine (5.13) dobijamo opšte rešenje u obliku

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-3t}. \quad (24.4)$$

Najzad, određujemo c_1 i c_2 tako da zadovoljimo početne uslove $(x_0, y_0) = (2, -3)$. Za $t = 0$, jednačina (24.4) postaje

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix},$$

što je ekvivalentno algebarskom sistemu

$$\begin{aligned} 2 &= c_1 + c_2, \\ -3 &= c_1 - 4c_2, \end{aligned}$$

čije je rešenje $c_1 = 1$ i $c_2 = 1$. Zamenom prethodnih vrednosti u jednačinu (24.4), dobijamo

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{2t} + e^{-3t}, \\ y(t) &= e^{2t} - 4e^{-3t}, \end{aligned}$$

što je rešenje našeg početnog problema. ☺

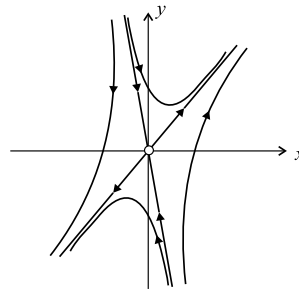
Koliko posla! Srećom, da bismo nacrtali fazni portret linearnog sistema, sve što je potrebno da znamo su sopstveni vektori i sopstvene vrednosti.

Zadatak 20 *Skicirati fazni portret sistema predstavljenog u prethodnom zadatku.*

Rešenje.

Sistem ima sopstvene vrednosti $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = -3$. Tako, prvo sopstveno rešenje raste eksponencijalno, a drugo sopstveno rešenje opada. Ovo znači da je koordinatni početak **tačka-sedlo**.

Njena stabilna mnogostrukost je linija razapeta sopstvenim vektorom $\mathbf{v}_2 = (1, -4)$ i ona odgovara opadajućim sopstvenim rešenjima. Slično, nestabilna mnogostrukost je linija razapeta sopstvenim vektorom $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$. Kao u slučaju svih sedlastih tačaka, tipična trajektorija se približava nestabilnoj mnogostrukosti kada $t \rightarrow \infty$, a stabilnoj mnogostrukosti kada $t \rightarrow -\infty$. Slika 24.16 prikazuje fazni portret.



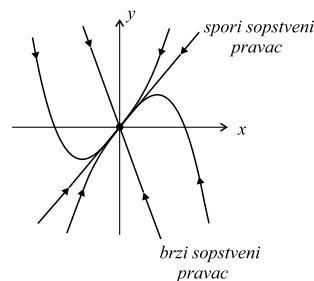
Slika 24.16: Fazni portret sistema (24.3).

⊙

Zadatak 21 *Skicirati tipičan fazni portret za slučaj $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$.*

Rešenje.

Prvo pretpostavimo da je $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. Tada oba sopstvena rešenja opadaju eksponencijalno. Fiksna tačka je stabilan čvor, kao na slikama 24.15a i 24.15b, osim što sada sopstveni vektori nisu, u opštem slučaju, međusobno upravni. Trajektorije tipično prilaze koordinatnom početku tangentno na spori sopstveni pravac, definisan kao pravac razapet svojstvenim vektorom sa manjim $|\lambda|$. Kada pustimo da vreme teče unazad ($t \rightarrow -\infty$), trajektorije postaju paralelne brzom sopstvenom pravcu.



Slika 24.17: Fazni portret sistema (24.3), za $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$.

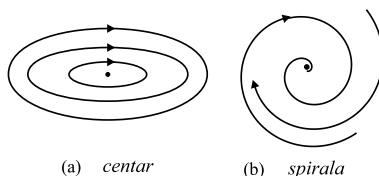
Slika 24.17 prikazuje fazni portret. Ako obrnemo sve strelice na slici 24.17, dobijamo tipičan fazni portret za nestabilni čvor.



Zadatak 22 Šta će se dogoditi u slučaju kada su sopstvene vrednosti kompleksni brojevi?

Rešenje.

Ako su sopstvene vrednosti kompleksne, fiksna tačka je ili centar (slika 24.18a) ili fokus (slika 24.18b). Mi smo već videli primer centra u slučaju jednostavnog harmonijskog oscilatora, gde je koordinatni početak okružen familijom zatvorenih orbita. Zapazimo da su centri neutralno stabilni, jer bliske trajektorije niti bivaju privučene niti odbijene od fiksne tačke. Ako u jednačine za harmonijski oscilator uvedemo blago (viskozno) trenje, ono će fiksnu tačku tipa centra pretvoriti u fokus. Tada trajektorija prestaje da bude zatvorena, zato što oscilator gubi energiju tokom kretanja.



Slika 24.18: Fiksna tačka – centar i fokus.

Da bismo dokazali prethodno tvrđenje, podsetimo se da su sopstvene vrednosti date izrazom

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta} \right).$$

Kompleksne sopstvene vrednosti pojavljuju se kada važi

$$\tau^2 - 4\Delta < 0.$$

Zapišimo sopstvene vrednosti u obliku

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega,$$

gde je $\alpha = \tau/2$, $\omega = \frac{1}{2}\sqrt{4\Delta - \tau^2}$.

Po pretpostavci, važi da je $\omega \neq 0$. Tada su sopstvene vrednosti različite tako da je opšte rešenje dato izrazom

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2.$$

Ali sada su c_1 , c_2 , \mathbf{v}_1 i \mathbf{v}_2 kompleksni brojevi, jer su i λ_1 i λ_2 kompleksni. Ovo znači da $\mathbf{x}(t)$ uključuje linearne kombinacije članova $e^{(\alpha \pm i\omega)t}$. Koristeći Ojlerovu formulu, $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$, $\mathbf{x}(t)$ možemo predstaviti kao kombinaciju $e^{i\omega t} \cos \omega t$

i $e^{i\omega t} \sin \omega t$. Pomoću ovako uvedenih članova, možemo opisati oscilacije čije amplitude eksponencijalno opadaju (za $\alpha = \operatorname{Re}(\lambda) < 0$) ili eksponencijalno rastu (za $\alpha = \operatorname{Re}(\lambda) > 0$).

Odgovarajuće fiksne tačke su, redom, stabilni i nestabilni fokus. Slika 24.18b prikazuje stabilni slučaj.

Ako su sopstvene vrednosti čisto imaginarne ($\alpha = 0$), tada su sva rešenja periodična sa periodom $T = 2\pi/\omega$. Oscilacije imaju fiksnu amplitudu, a fiksna tačka je centar.

U slučaju centra i fokusa, lako je odrediti da li je rotacija u smeru kazaljke na časovniku ili suprotno: samo treba izračunati nekoliko vektora u vektorskom polju i smer rotacije biće očigledan. ☺

Zadatak 23 U dosadašnjoj analizi, usvojili smo da su sopstvene vrednosti različite. Šta se događa u slučaju kada su one međusobno jednake?

Rešenje.

Pretpostavimo da je $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Postoje dve mogućnosti: ili postoje dva nezavisna sopstvena vektora, koji odgovaraju λ , ili postoji samo jedan.

Ako postoje dva nezavisna sopstvena vektora, onda oni razapinju ravan tako da je svaki vektor sopstveni vektor sa istom sopstvenom vrednošću λ . Da bismo ovo pokazali, zapišimo proizvoljan vektor \mathbf{x}_0 kao linearnu kombinaciju dva sopstvena vektora

$$\mathbf{x}_0 = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2.$$

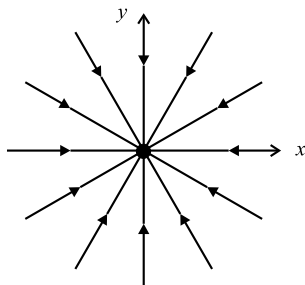
Tada je

$$A\mathbf{x}_0 = A(c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2) = c_1 \lambda \mathbf{v}_1 + c_2 \lambda \mathbf{v}_2 = \lambda \mathbf{x}_0,$$

pa je \mathbf{x}_0 takođe sopstveni vektor sa sopstvenom vrednošću λ . Kako množenje sa A jednostavno rasteže svaki vektor članom λ , matrica mora da bude umnožak identiteta

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Tada, ako je $\lambda \neq 0$, sve trajektorije su prave linije kroz koordinatni početak ($\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{x}_0$) i fiksna tačka je **čvor-zvezda** (slika 24.19).



Slika 24.19: Fiksna tačka – čvor-zvezda.

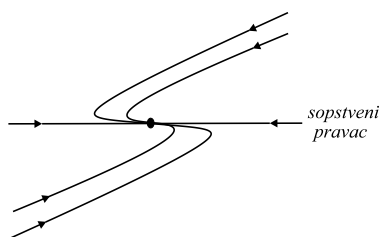
Sa druge strane, ako je $\lambda = 0$, cela ravan je ispunjena fiksnim tačkama! Nema tu iznenađenja – sistem je $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$.

Druga mogućnost je da postoji samo jedan sopstveni vektor (preciznije, sopstveni prostor koji odgovara λ je jednodimenzionalan). Na primer, bilo koja matrica oblika

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

sa $b \neq 0$ ima samo jednodimenzionalni sopstveni prostor.

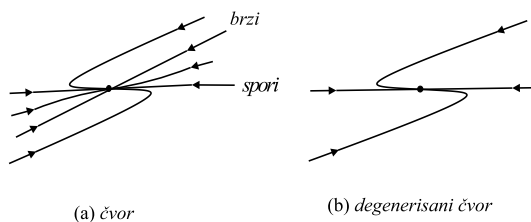
Kada postoji samo jedan sopstveni pravac, fiksna tačka je **degenerisani čvor**. Tipični fazni portret je prikazan na slici 24.20.



Slika 24.20: Fiksna tačka – degenerisani čvor.

Kada $t \rightarrow \pm\infty$, sve trajektorije postaju paralelne jednom jedinom sopstvenom pravcu.

Dobar način da se predstavi degenerisan čvor je da se zamisli da je on stvoren deformacijom običnog čvora. Običan čvor ima dva nezavisna sopstvena pravca. Sve trajektorije su paralelne sporom sopstvenom pravcu kada $t \rightarrow \infty$, i brzom sopstvenom pravcu kada $t \rightarrow -\infty$ (slika 24.21a).



Slika 24.21: "Kreiranje" degenerisanog čvora.

Sada pretpostavimo da počinjemo da menjamo parametre sistema na takav način da se dva sopstvena pravca približavaju jedan drugom. Tada će neke trajektorije biti "zgnječene" u "iščezavajućoj" oblasti između dva sopstvena pravca, a preostale trajektorije formiraju degenerisani čvor (slika 24.21b).

s druge strane, degenerisani čvor možemo shvatiti kao granicu između fokusa i čvora. Trajektorije pokušavaju da se obmotaju oko fiksne tačke kao fokusa, ali u tome ne uspeavaju. ☺

24.5 Zadaci iz poglavlja 6

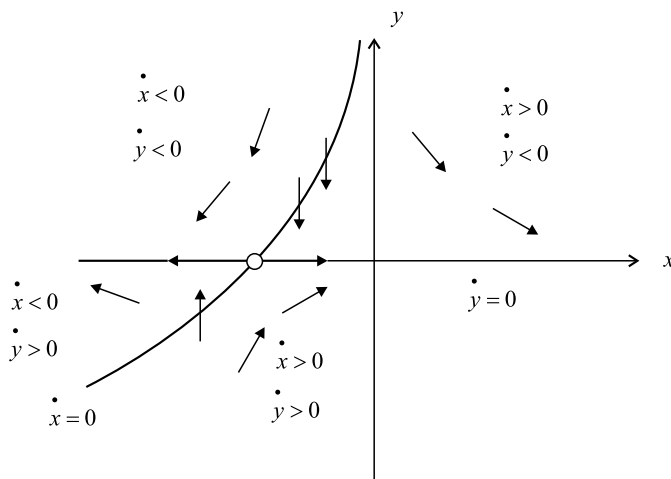
Zadatak 24 Izvršiti kvalitativnu analizu stabilnosti sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + e^{-y}, \\ \dot{y} &= -y,\end{aligned}$$

a zatim skicirati odgovarajuće vektorsko polje.

Rešenje.

Nađimo najpre fiksne tačke rešavajući istovremeno jednačine $\dot{x} = 0$ i $\dot{y} = 0$. Jedino rešenje je $(x^*, y^*) = (-1, 0)$. Da bismo odredili stabilnost fiksne tačke, zapazimo da $y(t) \rightarrow 0$ kada $t \rightarrow \infty$, jer rešenje jednačine $\dot{y} = -y$ je $y(t) = y_0 e^{-t}$. Tako $e^{-y} \rightarrow 1$ i, posle dužeg vremena, jednačina za x postaje $\dot{x} = x + 1$. Ova jednačina ima eksponencijalno rastuće rešenje, što sugerise da je fiksna tačka nestabilna. U suštini, ako posmatramo samo početne uslove duž x -ose, tada je $y_0 = 0$ i $y(t) = 0$ za svaki trenutak vremena. Dakle, tok duž x -ose određen je jednačinom $\dot{x} = x + 1$. Zbog toga je fiksna tačka nestabilna.



Slika 24.22: Nulklinae na faznom portretu.

Da bismo skicirali fazni portret, korisno je prethodno nacrtati "nulklinae", koje se definišu kao krive za koje važi da je $\dot{x} = 0$ ili $\dot{y} = 0$. Nulklinae određuju mesta u faznoj ravni gde je tok paralelan x -osi ili paralelan y -osi (slika 24.22). Na primer, tok je paralelan x -osi tamo gde je $\dot{y} = 0$ i, kako je $\dot{y} = -y$, ovo važi duž linije $y = 0$. Duž ove linije, tok je usmeren na desno u tačkama za koje je $\dot{x} = x + 1 > 0$, tj. gde je $x > -1$.

Slično, tok je paralelan y -osi tamo gde je $\dot{x} = x + e^{-y} = 0$, što odgovara krivoj prikazanoj na slici 24.22. Na gornjem delu krive, gde važi $y > 0$, tok je usmeren nadole, jer je $\dot{y} < 0$.

Nulcline takođe dele ravan na oblasti gde \dot{x} i \dot{y} imaju različite predznake. Neki od tipičnih vektora prikazani su na slici 24.22, koja daje dobar uvid u globalno ponašanje toka. ☺

Zadatak 25 *Odrediti sve fiksne tačke sistema*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + x^3, \\ \dot{y} &= -2y\end{aligned}$$

i klasifikovati ih koristeći tehniku linearizacije. Zatim proveriti svoje zaključke skiciranjem faznog portreta za početni nelinearni sistem.

Rešenje.

Fiksne tačke pojavljuju se kada važi $\dot{x} = 0$ i $\dot{y} = 0$ istovremeno. Zato postoje tri fiksne tačke $(0, 0)$, $(1, 0)$ i $(-1, 0)$. Jakobijan u proizvoljnoj tački (x, y) je

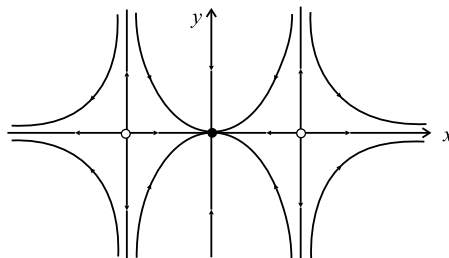
$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 3x^2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dalje, izračunajmo A u fiksnim tačkama. U tački $(0, 0)$, nalazimo da je $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, tako da je $(0, 0)$ stabilni čvor. U tački $(\pm 1, 0)$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, tako da su obe tačke $(1, 0)$ i $(-1, 0)$ tačke-sedla.

Kako stabilni čvorovi i tačke-sedla nisu granični slučajevi, možemo biti sigurni da su fiksne tačke polaznog nelinearnog sistema predviđene ispravno.

Ovaj zaključak može biti proveren eksplicitno za nelinearni sistem, jer jednačine za x i y nisu spregnute. Sistem se u suštini sastoji od dve nezavisne jednačine prvog reda, koje su "upravne" jedna na drugu. U y -pravcu, sve trajektorije opadaju eksplicitno ka $y = 0$. U x -pravcu, trajektorije prilaze ka $x = 0$ i udaljavaju se od $x = \pm 1$. Vertikalne linije $x = 0$ i $x = \pm 1$ su invarijantne, zato što je duž njih $\dot{x} = 0$. Drugim rečima, bilo koja trajektorija koja počinje na ovim linijama ostaje na njima zauvek. Slično, $y = 0$ je invarijantna horizontalna linija.

Najzad, fazni portret mora biti simetričan u odnosu na x i na y -osu, jer su jednačine invarijantne u odnosu na transformacije $x \rightarrow -x$ i $y \rightarrow -y$. Shodno tome, možemo da skiciramo fazni portret sličan onom prikazanom na slici 24.23



Slika 24.23: Fazni portret sistema.

Ova slika potvrđuje da je $(0,0)$ stabilni čvor, a tačke $(\pm 1,0)$ sedla, što je i bilo očekivano na osnovu postupka linearizacije.

☺

Zadatak 26 *Razmotrimo sistem*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + ax(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= x + ay(x^2 + y^2),\end{aligned}$$

gde je a parametar. Pokazati da linearizovani sistem netačno predviđa da je koordinatni početak centar za sve vrednosti parametra a , dok je, zapravo, koordinatni početak stabilni fokus ako je $a < 0$ i nestabilni fokus ako je $a > 0$.

Rešenje.

Da bismo izvršili linearizaciju u okolini tačke $(x^*, y^*) = (0,0)$, možemo da izračunamo Jakobijan direktno preko definicije ili korišćenjem sledeće "prečice". Za bilo koji sistem sa fiksnom tačkom u koordinatnom početku, x i y predstavljaju pomeranje u odnosu na fiksnu tačku, jer važi $u = x - x^* = x$ i $v = y - y^* = y$; tako da možemo izvršiti linearizaciju jednostavno izostavljajući nelinearne članove po x i y . Zato je linearizovan sistem oblika

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y, \\ \dot{y} &= x.\end{aligned}$$

Jakobijan je

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Za ovu matricu važi $\tau = 0$, $\Delta = 1 > 0$, tako da je koordinatni početak, u linearizovanom slučaju, uvek centar.

Zbog analize nelinearnog sistema, prelazimo na polarne koordinate. Neka je $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Da bismo dobili diferencijalnu jednačinu za r , zapazimo da važi $x^2 + y^2 = r^2$, pa je $x\dot{x} + y\dot{y} = r\dot{r}$. Zamenjujući izraze za \dot{x} i \dot{y} dobijamo

$$r\dot{r} = x(-y + ax(x^2 + y^2)) + y(x + ay(x^2 + y^2)) = a(x^2 + y^2)^2 = ar^4.$$

Zato važi $\dot{r} = ar^3$. Slično se dobija diferenciranjem jednačine po θ

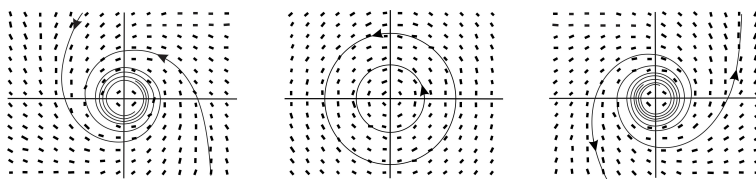
$$\dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2}.$$

Posle zamene izraza za \dot{x} i \dot{y} , dobijamo $\dot{\theta} = 1$. Zato, u polarnim koordinatama, polazni sistem postaje

$$\begin{aligned}\dot{r} &= ar^3, \\ \dot{\theta} &= 1.\end{aligned}$$

Sistem je, u ovom obliku, lak za analizu, zato što su radijalna i ugaona kretanja nezavisna. Sve trajektorije rotiraju oko koordinatnog početka konstantnom ugaonom brzinom $\dot{\theta} = 1$.

Radijalno kretanje zavisi od a , kao što je prikazano na slici 24.24.



Slika 24.24: Fazni portret sistema, za različite vrednosti parametra a .

Kada je $a < 0$, $r(t) \rightarrow 0$ monotono za $t \rightarrow \infty$. U ovom slučaju, koordinatni početak je stabilni fokus. Zapažimo, međutim, da je opadanje vrlo sporo, na šta ukazuju kompjuterski generisane trajektorije prikazane na slici 24.24. Za $a = 0$, $r = r_0$ za svako $t > 0$ i koordinatni početak je centar. Najzad, kada je $a > 0$, $r(t) \rightarrow \infty$ monotono i koordinatni početak je nestabilni fokus. ☺

Zadatak 27 *Analizirati fiksne tačke i globalni fazni portret matematičkog klatna.*

Rešenje.

Posmatrajmo matematičko klatno opisano diferencijalnom jednačinom kretanja $d^2\varphi/dt^2 + \omega^2 \sin \varphi = 0$, $\omega = \sqrt{g/\ell}$, gde je ℓ dužina klatna a g gravitaciono ubrzanje. Radi jednostavnije dalje analize, zapišimo ovu jednačinu u bezdimenzionalnom obliku usvajajući $\tau = \omega t$ za bezdimenzionalno vreme:

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \sin \varphi = 0. \quad (24.5)$$

Ova jednačina se može transformisati u sistem jednačina prvog reda pomoću smena $y_1 = \varphi$, $y_2 = d\varphi/d\tau$:

$$\dot{y}_1 = y_2; \quad \dot{y}_2 = -\sin y_1. \quad (24.6)$$

Tačkom je označen izvod po bezdimenzijskom vremenu τ .

Fiksne tačke ovog dinamičkog sistema određene su uslovima:

$$Y_1(\mathbf{y}) = y_2 = 0; \quad Y_2(\mathbf{y}) = -\sin y_1 = 0, \quad (24.7)$$

odakle slede dve familije rešenja:

$$\mathbf{y}_0^{(1)} = \begin{pmatrix} \pm 2k\pi \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{y}_0^{(2)} = \begin{pmatrix} \pm(2k+1)\pi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (24.8)$$

za $k = 0, 1, 2, \dots$. Iako je na ovaj način u matematičkom smislu određeno beskonačno mnogo fiksnih tačaka, fizički one određuju svega dva različita ravnotežna položaja - najniži i najviši položaj klatna. Linearizovane jednačine poremećaja u okolini fiksnih tačaka imaju oblik:

$$\mathbf{y}_0^{(1)} : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = -x_1; \end{cases} \quad \mathbf{y}_0^{(2)} : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = x_1, \end{cases} \quad (24.9)$$

odakle se dobijaju sledeće sopstvene vrednosti:

$$\begin{aligned} 1) \lambda_1^{(1)} = i; \quad \lambda_2^{(1)} = -i; \\ 2) \lambda_1^{(2)} = 1; \quad \lambda_2^{(2)} = -1. \end{aligned} \quad (24.10)$$

Na osnovu jednačine (24.10) može se zaključiti da familiju $\mathbf{y}_0^{(1)}$ čine fiksne tačke tipa *centra*, dok su fiksne tačke u familiji $\mathbf{y}_0^{(2)}$ *tačke-sedla*. Imajući u vidu da su odgovarajući sopstveni vektori:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{e}_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \\ \mathbf{e}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{e}_2^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (24.11)$$

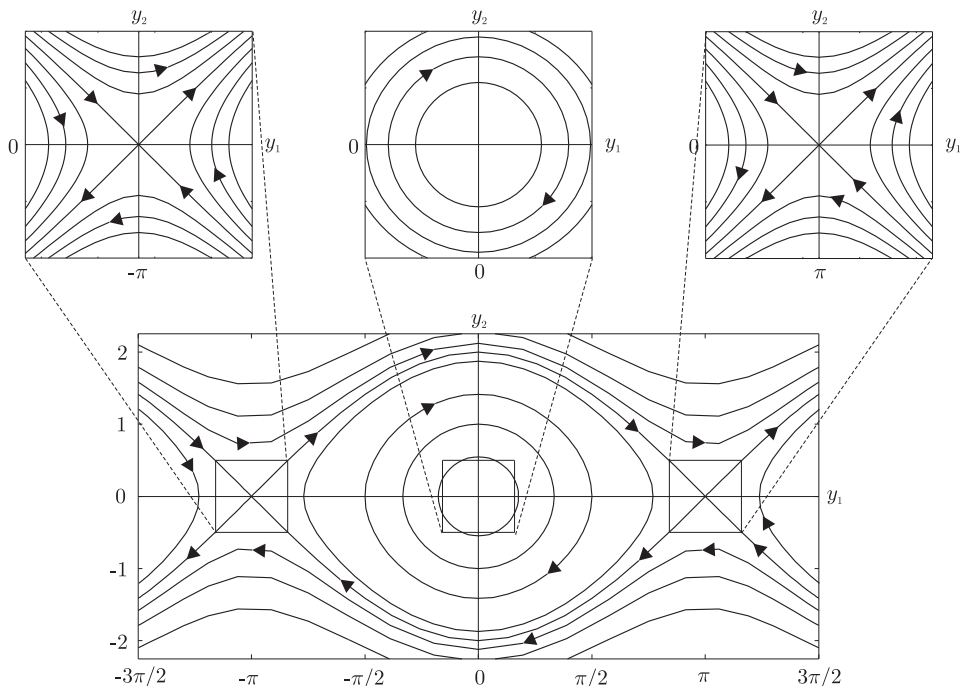
Iako se mogu konstruisati fazni portreti u okolini fiksnih tačaka.

Globalni fazni portret matematičkog klatna se može konstruisati ako se iskoristi prvi integral sistema (24.6):

$$\frac{1}{2}y_2^2 - \cos y_1 = \text{const.} \quad (24.12)$$

Međutim, ako na trenutak ignorišemo činjenicu da on postoji, onda možemo pažljivom numeričkom studijom problema doći do sledećih zaključaka:

- i) za početne uslove $\mathbf{y}(0) = (y_{10}, 0)^T$, gde je $y_{10} \neq k\pi$, $k = 0, 1, 2, \dots$, fazne trajektorije sistema su zatvorene; one odgovaraju periodičnim kretanjima, odnosno oscilacijama matematičkog klatna;
- ii) za početne uslove $\mathbf{y}(0) = ((2k+1)\pi, y_{20})^T$, $k = 0, 1, 2, \dots$, gde je $y_{20} \neq 0$, fazne trajektorije su otvorene; one odgovaraju progresivnim kretanjima matematičkog klatna;



Slika 24.25: Globalni fazni portret matematičkog klatna

- iii) stacionarne tačke koje pripadaju familiji $\mathbf{y}_0^{(2)}$ međusobno su povezane separatrisama - faznim trajektorijama koje razdvajaju oblast zatvorenih od oblasti otvorenih trajektorija, a poseduju sledeća svojstva:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{y}(t) = ((2k-1)\pi, 0)^T; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y}(t) = ((2k+1)\pi, 0)^T, \quad (24.13)$$

za $y_2(t) > 0$, odnosno:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \mathbf{y}(t) = ((2k+1)\pi, 0)^T; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{y}(t) = ((2k-1)\pi, 0)^T, \quad (24.14)$$

za $y_2(t) < 0$ i $k = 0, 1, 2, \dots$; tangente ovih trajektorija u graničnim slučajevima $t \rightarrow \pm\infty$ predstavljaju pravce koji su određeni sopstvenim vektorima (24.11)₂; opisane trajektorije se u literaturi nazivaju *heterokliničkim orbitama*, a tačke koje su njima povezane *heterokliničkim tačkama*.

Napomenimo na kraju ove analize da je interesantno analizirati i uticaj disipativnih sila na strukturu faznog portreta. U tom slučaju se model transformiše na sledeći oblik:

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \beta \frac{d\varphi}{d\tau} + \sin\varphi = 0, \quad (24.15)$$

gde je $\beta > 0$ bezdimenzijski koeficijent prigušenja. Za njega je tada karakteristično da više ne važi zakon održanja energije. Čitaocu ostavljamo da pokaže da će položaj

fiksni tačkama ostati nepromenjen, ali da će se promeniti njihov tip. Naime, centri će postati stabilni fokusi. Tačke-sedla, međutim, neće promeniti svoj karakter, ali će sopstveni vektori promeniti pravac zbog prisustva prigušenja. ☺

24.6 Zadaci iz poglavlja 7

Zadatak 28 Pokazati da ne postoje zatvorene orbite za sistem $\dot{x} = \sin y$, $\dot{y} = x \cos y$.

Rešenje.

Sistem je gradijentni sistem sa potencijalnom funkcijom $V(x, y) = -x \sin y$, pošto je $\dot{x} = -\partial V/\partial x$ i $\dot{y} = -\partial V/\partial y$. Prema teoremi 3, na str. 98 nema zatvorenih orbita. ☺

Zadatak 29 Pokazati da nelinearni prigušeni oscilator $\ddot{x} + (\dot{x})^3 + x = 0$ nema periodična rešenja.

Rešenje.

Pretpostavimo da su postojala periodična rešenja $x(t)$ sa periodom T . Posmatrajmo funkciju energije $E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}(x^2 + \dot{x}^2)$. Posle jednog ciklusa x i \dot{x} se vraćaju na svoje početne vrednosti, pa je stoga $\Delta E = 0$ oko bilo koje zatvorene orbite.

S druge strane, $\Delta E = \int_0^T \dot{E} dt$. Ako možemo pokazati da je ovaj integral različit od nule, postigli smo kontradiktornost. Napomenimo da je $\dot{E} = \dot{x}(x + \ddot{x}) = \dot{x}(-\dot{x}^3) = -\dot{x}^4 \leq 0$. Stoga je $\Delta E = -\int_0^T (\dot{x})^4 dt \leq 0$, sa jednakošću samo ako je $\dot{x} \equiv 0$. Ali $\dot{x} \equiv 0$ bi značilo da je trajektorija fiksna tačka, nasuprot početnoj pretpostavci da je zatvorena orbita. Prema tome, ΔE je strogo negativno, što je kontradiktorno sa $\Delta E = 0$. Dakle, ne postoje periodična rešenja. ☺

Zadatak 30 Konstrukcijom Ljapunovljeve funkcije pokazati da sistem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + 4y, \\ \dot{y} &= -x - y^3\end{aligned}$$

nema zatvorenih orbita.

Rešenje.

Posmatrajmo $V(x, y) = x^2 + ay^2$, gde je a parametar koji će biti izabran kasnije. Zatim,

$$\dot{V} = 2x\dot{x} + 2ay\dot{y} = 2x(-x + 4y) + 2ay(-x - y^3) = -2x^2 + (8 - 2a)xy - 2ay^4.$$

Ako izaberemo $a = 4$, izraz xy se gubi i $\dot{V} = -2x^2 - 8y^4$. Ispitujemo i zaključujemo da je $V > 0$ i $\dot{V} < 0$ za svako $(x, y) \neq (0, 0)$. Dakle, $V = x^2 + 4y^2$ je funkcija Ljapunova i, prema tome, nema zatvorenih orbita. U stvari, sve trajektorije se približavaju koordinatnom početku kada $t \rightarrow \infty$. ☺

Zadatak 31 Pokazati da sistem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(2 - x - y), \\ \dot{y} &= y(4x - x^2 - 3)\end{aligned}$$

nema zatvorenih orbita u pozitivnom kvadrantu $x, y > 0$.

Rešenje.

Intuitivno biramo $g = 1/xy$. Onda je

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (g\dot{\mathbf{x}}) &= \frac{\partial}{\partial x}(g\dot{x}) + \frac{\partial}{\partial y}(g\dot{y}) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2 - x - y}{y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{4x - x^2 - 3}{x} \right) = \\ &= -\frac{1}{y} < 0.\end{aligned}$$

Pošto je oblast $x, y > 0$ prosto povezana, a g i f zadovoljavaju zahtevane uslove glatkosti, Dulakov kriterijum povlači da nema zatvorenih orbita u pozitivnom kvadrantu. ☺

Zadatak 32 Pokazati da sistem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x - y + x^2 + y^2\end{aligned}$$

nema zatvorenih orbita.

Rešenje.

Neka je $g = e^{-2x}$. Onda je

$$\nabla \cdot (g\dot{\mathbf{x}}) = -2e^{-2x}y + e^{-2x}(-1 + 2y) = -e^{-2x} < 0.$$

Po Dulakovom kriterijumu, nema zatvorenih orbita. ☺

Zadatak 33 U osnovnom biohemijskom procesu, zvanom glikoliza, žive ćelije dobijaju energiju razlaganjem šećera. Glikoliza se može vršiti u oscilujućem ritmu, sa koncentracijom različitih posrednika koja raste i opada sa periodom od nekoliko

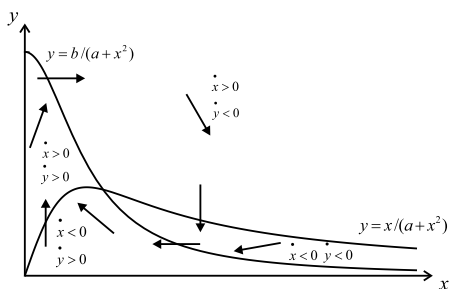
minuta. Selkov (1968) je predložio jednostavan model ovih oscilacija. U bezdimenzionalnom obliku, jednačine su

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + ay + x^2y, \\ \dot{y} &= b - ay - x^2y,\end{aligned}\tag{24.16}$$

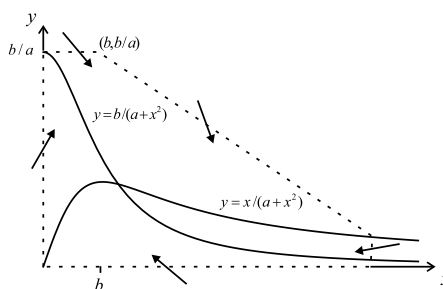
gde su x i y koncentracije adenzin-difosfata (ADP) i fruktoza-6-fosfata (F6P), $a, b > 0$ parametri sistema. Konstruisati zatvorenu oblast za ovaj sistem.

Rešenje.

Prvo nalazimo nulklinu. Iz prve jednačine sistema sledi da je $\dot{x} = 0$ na krivoj $y = x/(a + x^2)$, a iz drugu jednačinu da je $\dot{y} = 0$ na krivoj $y = b/(a + x^2)$. Ove nulklinae skicirane su na slici 24.26 zajedno sa nekim reprezentativnim vektorima.



Slika 24.26: Nulklina sistema (24.16).



Slika 24.27: Nulklina sistema (24.16), u zatvorenoj oblasti (trapez).

Posmatrajmo sada oblast ograničenu isprekidanom linijom, prikazanom na Slici 24.27. Da bismo potvrdili da je to zatvorena oblast, pokažimo da su svi vektori, na granici oblasti (trapeza), usmereni ka njoj. Sa slike 24.26 vidi se da su vektori usmereni ka "unutra" na horizontalnoj i vertikalnoj stranici trapeza. Međutim, smer vektora na bočnoj kosoj stranici trapeza, ne možemo odrediti samo na osnovu rasporeda nulklina na slici 24.26.

Da bismo odredili smer vektorskog polja bočnoj kosoj stranici trapeza, posmatrajmo \dot{x} i \dot{y} za veliku vrednost x . Tada je $\dot{x} = x^2y$ i $\dot{y} = -x^2y$, tako da je $\dot{y}/\dot{x} = \frac{dy}{dx} = -1$ duž trajektorija sistema u faznoj ravni. Dakle, vektorsko polje za veliko x je približno paralelno sa bočnom kosom stranicom trapeza.

Međutim, mi i dalje nismo u mogućnosti da rešimo problem, jer nismo odredili da li su vektori usmereni ka zatvorenoj oblasti ili ne. Da bismo ovo odredili, poredimo veličine \dot{x} i $-\dot{y}$ za dovoljno veliko x . Ako posmatramo $\dot{x} - (-\dot{y})$, nalazimo da je

$$\dot{x} - (-\dot{y}) = -x + ay + x^2y + (b - ay - x^2y) = b - x.$$

Dakle,

$$-\dot{y} > \dot{x} \quad \text{ako} \quad x > b.$$

Iz ove nejednakosti proizilazi da je vektorsko polje usmereno ka unutra na kosoj bočnoj stranici trapeza (sl. 24.27), jer je $\frac{dy}{dx} < -1$, pa su stoga vektori "strmiji" od nagiba kose bočne stranice. Prema tome, ovaj trapez predstavlja zatvorenu oblast, kako smo i pretpostavili. ☺

Zadatak 34 *Posmatrajmo opet glikolitički oscilator*

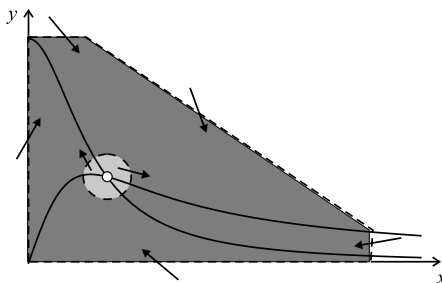
$$\dot{x} = -x + ay + x^2y,$$

$$\dot{y} = b - ay - x^2y$$

Odrediti uslove koje moraju da zadovolje parametri a i b , da bi postojala zatvorena orbita.

Rešenje.

Naglasimo da u ovom slučaju nisu zadovoljeni uslovi Poenkare-Bendiksonove teoreme, jer u zatvorenoj oblasti, u preseku nuklina, postoji fiksna tačka. Ako je ova fiksna tačka odbojna, onda možemo dokazati postojanje zatvorene orbite posmatrajući infinitezimalnu okolinu fiksne tačke, prikazanu na slici 24.28.



Slika 24.28: Infinitezimalna okolina fiksne tačke, u zatvorenoj oblasti.

Odbojna fiksna tačka "gura" ("odbija") sve susedne trajektorije u osenčenu oblast (sl. 24.28). Kako u osenčenoj oblasti nema fiksnih tačaka, Poenkare-Bendiksonova teorema može se primeniti.

Da bismo rešili zadatak, moramo da nađemo uslove pod kojima je fiksna tačka odbojna, tj. nestabilan čvor ili nestabilan fokus (spirala). Jakobijan sistema je

$$J = \begin{pmatrix} -1 + 2xy & a + x^2 \\ -2xy & -(a + x^2) \end{pmatrix}.$$

Lako se pokazuje da je fiksna tačka sistema

$$x^* = b, \quad y^* = \frac{b}{a + b^2}.$$

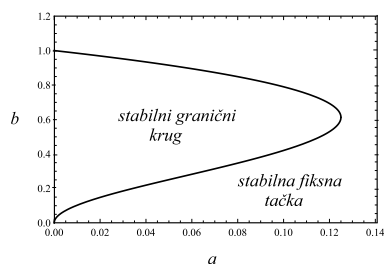
Determinanta Jakobijan je $\Delta = a + b^2 > 0$, a trag

$$\tau = -\frac{b^4 + (2a - 1)b^2 + (a + a^2)}{a + b^2}.$$

Dakle, fiksna tačka je nestabilna za $\tau > 0$, a stabilna za $\tau < 0$. Jednačina bifurkacione linije ($\tau = 0$) je

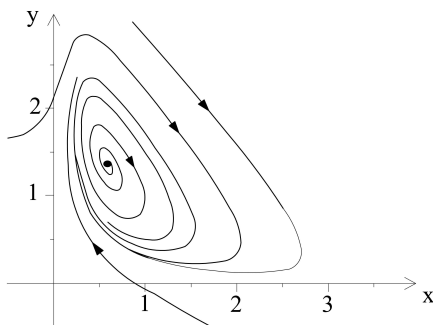
$$b^2 = \frac{1}{2} (1 - 2a \pm \sqrt{1 - 8a}),$$

kao što je prikazano na bifurkacionom dijagramu (sl. 24.29).



Slika 24.29: Bifurkacioni dijagram sistema.

Za parametre u oblasti za koju je $\tau > 0$, sistem ima zatvorenu orbitu. Može se pokazati da je to zapravo stabilan granični ciklus. Slika 24.30 prikazuje fazni portret za vrednosti parametara $a = 0,08$ i $b = 0,6$. ©



Slika 24.30: Fazni portret sistema za vrednosti parametara $a = 0,08$ i $b = 0,6$.

Zadatak 35 Posmatrajmo jednačinu,

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0, \quad (24.17)$$

kojom se mogu modelovati mnoge oscilatorne pojave.

Ova jednačina poznata je kao **Lenardova jednačina** i njen specijalan slučaj predstavlja, ranije pomenut, van der Polov oscilator

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0.$$

Lenardova jednačina može da se prikaže u obliku sistema dve diferencijalne jednačine prvog reda

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -g(x) - f(x)y.\end{aligned}\tag{24.18}$$

Ovaj sistem ima jedinstveni, stabilan granični ciklus, ukoliko pretpostavimo da $f(x)$ i $g(x)$ zadovoljavaju sledeće uslove:

- (1) $f(x)$ i $g(x)$ su neprekidno diferencijabilne za svako x ;
- (2) $g(-x) = -g(x)$ za svako x (tj. $g(x)$ je neparna funkcija);
- (3) $g(x) > 0$ za svako $x > 0$;
- (4) $f(-x) = f(x)$ za svako x (tj. $f(x)$ je parna funkcija);
- (5) neparna funkcija $F(x) = \int_0^x f(u) du$ ima tačno jednu pozitivnu nulu u $x = a$, negativna je za $0 < x < a$, pozitivna je i neopadajuća za $x > a$ i $F(x) \rightarrow \infty$ kada $x \rightarrow \infty$.

Pokazati da van der Polova jednačina ima jedinstven, stabilan granični ciklus.

Rešenje.

Za Van der Polovu jednačinu

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

je $f(x) = \mu(x^2 - 1)$ i $g(x) = x$, pa je jasno da su zadovoljeni uslovi (1)-(4) Lienarove teoreme. Da bismo proverili uslov (5), treba da imamo na umu da je

$$F(x) = \mu \left(\frac{1}{3}x^3 - x \right) = \frac{1}{3}\mu x(x^2 - 3).$$

Znači, uslov (5) je zadovoljen za $a = \sqrt{3}$. Zbog toga van der Polova jednačina ima jedinstven, stabilan granični ciklus. ©

Zadatak 36 Koristeći metodu dva vremena, pokazati da Van der Polova jednačina ima stabilan granični ciklus, koji je približno kružnog oblika, sa radijusom $2 + O(\varepsilon)$ i frekvencijom $1 + O(\varepsilon^2)$.

Rešenje.

Jednačina je $\ddot{x} + x + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} = 0$. Koristećenjem (7.31) i (7.32) i grupisanjem članova uz iste stepene po ε , dobijamo:

$$\partial_{\tau\tau}x_0 + x_0 = 0, \quad (24.19)$$

$$\partial_{\tau\tau}x_1 + x_1 = -2\partial_{\tau T}x_0 - (x_0^2 - 1)\partial_{\tau}x_0. \quad (24.20)$$

Jednačina (24.19) opisuje prost harmonijski oscilator i njeno opšte rešenje se može napisati u obliku (7.37), ili kao

$$x_0 = r(T) \cos(\tau + \phi(T)), \quad (24.21)$$

gde su $r(T)$ i $\phi(T)$ - ”spora” amplituda i ”spora” faza od x_0 , redom.

Zamenom (24.21) u (24.20), dobijamo jednačine za r i ϕ

$$\begin{aligned} \partial_{\tau\tau}x_1 + x_1 = & -2 \left(r' \sin(\tau + \phi) + r\phi' \cos(\tau + \phi) \right) - \\ & - r \sin(\tau + \phi) [r^2 \cos^2(\tau + \phi) - 1] \end{aligned} \quad (24.22)$$

Da bismo izbegnemo nelinearne članove, na desnoj strani, koristimo trigonometrijski identitet

$$\sin(\tau + \phi) \cos^2(\tau + \phi) = \frac{1}{4} [\sin(\tau + \phi) + \sin 3(\tau + \phi)]. \quad (24.23)$$

Zamene (24.23) u (24.22), dobijamo

$$\begin{aligned} \partial_{\tau\tau}x_1 + x_1 = & \left[-2r' + r - \frac{1}{4}r^3 \right] \sin(\tau + \phi) + \\ & + \left[-2r\phi' \right] \cos(\tau + \phi) - \frac{1}{4}r^3 \sin 3(\tau + \phi). \end{aligned} \quad (24.24)$$

U sledećem koraku, da bismo izbegli nelinearne članove, treba da je

$$-2r' + r - \frac{1}{4}r^3 = 0 \quad (24.25)$$

$$-2r\phi' = 0. \quad (24.26)$$

Razmotrimo, najpre, jednačinu (24.25), koja se može prikazati u obliku

$$r' = \frac{1}{8}r(4 - r^2), \quad (24.27)$$

što predstavlja vektorsko polje na polupravoj $r \geq 0$. Analizom stabilnosti, može se pokazati da je $r^* = 0$ nestabilna fiksna tačka, a $r^* = 2$ je stabilna fiksna tačka. Dakle, $r(T) \rightarrow 2$ kada $T \rightarrow \infty$. Dalje, (24.26) povlači da je $\phi' = 0$, pa je $\phi(T) = \phi_0$ za neko konstantno ϕ_0 . Znači, $x_0(\tau, T) \rightarrow 2 \cos(\tau + \phi_0)$, pa prema tome

$$x(t) \rightarrow 2 \cos(\tau + \phi_0) + O(\varepsilon) \quad (24.28)$$

kada $t \rightarrow \infty$. Stoga se $x(t)$ približava stabilnom graničnom ciklusu, poluprečnika $2 + O(\varepsilon)$.

Nađimo sada kružnu frekvenciju, u (24.28). Neka je $\theta = t + \phi(t)$ argument kosinusa. Tada je kružna frekvencija ω data sa

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = 1 + \frac{d\phi}{dT} \frac{dT}{dt} = 1 + \varepsilon \phi' = 1, \quad (24.29)$$

izražene preko ε . Dakle, $\omega = 1 + O(\varepsilon^2)$. ☉

Zadatak 37 Posmatrajmo Van der Polovu jednačinu $\ddot{x} + x + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} = 0$, za početne uslove $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$. Naći usrednjene jednačine, a zatim ih rešiti kako bi se dobila aproksimativna rešenja za $x(t, \varepsilon)$.

Rešenje.

Za Van der Polova jednačinu je $h = (x^2 - 1)\dot{x} = (r^2 \cos^2 \theta - 1)(-r \sin \theta)$. Dakle, (7.53), na str.112, postaje

$$\begin{aligned} r' &= \langle h \sin \theta \rangle = \langle (r^2 \cos^2 \theta - 1)(-r \sin \theta) \sin \theta \rangle = \\ &= r \langle \sin^2 \theta \rangle - r^3 \langle \cos^2 \theta \sin^2 \theta \rangle = \\ &= \frac{1}{2}r - \frac{1}{8}r^3 \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} r\phi' &= \langle h \cos \theta \rangle = \langle (r^2 \cos^2 \theta - 1)(-r \sin \theta) \cos \theta \rangle = \\ &= r \langle \sin \theta \cos \theta \rangle - r^3 \langle \cos^3 \theta \sin \theta \rangle = \\ &= 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

Ove jednačine se podudaraju sa onima koje su dobijene u zadatku 36.

Za početne uslove $x(0) = 1$ i $\dot{x}(0) = 0$ važi da je $r(0) \approx \sqrt{x^2(0) + \dot{x}^2(0)} = 1$ i $\phi(0) \approx \arctg \frac{\dot{x}(0)}{x(0)} - \tau = 0 - 0 = 0$. Kako je $\phi' = 0$, dobijamo da je $\phi(T) \equiv 0$. Da bismo izračunali $r(T)$, nađimo $r' = \frac{1}{2}r - \frac{1}{8}r^3$, za $r(0) = 1$. Parcijalnom integracijom i korišćenja uslova $r(0) = 1$, dobijamo traženo rešenje

$$r(T) = 2(1 + 3e^{-T})^{-1/2}. \quad (24.30)$$

Dakle,

$$\begin{aligned} x(t, \varepsilon) &\sim x_0(\tau, T) + O(\varepsilon) = \\ &= \frac{2}{\sqrt{1 + 3e^{-\varepsilon t}}} \cos t + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (24.31)$$

Jednačina (24.31) opisuje prolaznu (tranzijentnu) dinamiku oscilatora, jer se rešenje "odmotava" ka svoj granični ciklus. Zapazimo da $r(T) \rightarrow 2$ kada $T \rightarrow \infty$, kao u zadatku 36. ☉

Zadatak 38 Naći aproksimativnu vezu između amplitude i frekvencije Dufingovog oscilatora $\ddot{x} + x + \varepsilon x^3 = 0$, gde ε može imati bilo koj znak. Fizički protumačiti rešenje.

Rešenje.

U ovom slučaju je $h = x^3 = r^3 \cos^3 \theta$. Jednačina (7.53), na str.112, je

$$r' = \langle h \sin \theta \rangle = r^3 \langle \cos^3 \theta \sin \theta \rangle = 0$$

i

$$r\phi' = \langle h \cos \theta \rangle = r^3 \langle \cos^4 \theta \rangle = \frac{3}{8}r^3.$$

Dakle, $r(T) \equiv a$ za neko konstantno a , a $\phi' = \frac{3}{8}a^2$. Kao u zadatku 36, frekvencija ω data je sa

$$\omega = 1 + \varepsilon\phi' = 1 + \frac{3}{8}\varepsilon a^2 + O(\varepsilon^2). \quad (24.32)$$

Dufingova jednačina opisuje neprigušeno kretanje jedinične mase, pričvršćene za nelinearnu oprugu sa povratnom silom $F(x) = -x - \varepsilon x^3$. Možemo se poslužiti analogijom sa običnom linearnom oprugom, za koju je $F(x) = -kx$, gde krutost opruge, u ovom slučaju, zavisi od x na sledeći način:

$$k = k(x) = 1 + \varepsilon x^2.$$

Pretpostavimo da je $\varepsilon > 0$. Tada opruga postaje kruća kako se pomeraj x povećava - ovo se naziva **ojačanje opruge**. U fizičkom smislu, očekujemo da će frekvencija oscilacija porasti, u saglasnosti sa (24.32). Za $\varepsilon < 0$ imamo **omekšavanje opruge**, za koje, kao primer, služi klatno.

Takođe, ima smisla da je $r' = 0$. Dufingova jednačina je konzervativni sistem i za svako dovoljno malo ε ima nelinearni centar u koordinatnom početku. Pošto su sve orbite, koje su blizu koordinatnog početka, periodične, ne može biti dugotrajnih promena amplitude, u saglasnosti sa $r' = 0$. ☺

24.7 Zadaci iz poglavlja 8

Zadatak 39 Posmatrajmo dvodimenzionalni sistem, u bezdimenzionalnom obliku, opisan sistemom jednačina

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -ax + y, \\ \dot{y} &= \frac{x^2}{1+x^2} - by \end{aligned}$$

gde su x i y predstavljaju koncentracije proteina i nosioca RNK, redom, a parametri $a, b > 0$ određuju brzinu razgradnje x i y .

Ovaj sistem predstavlja model za genetičku kontrolu (Griffith (1971)).

Pokazati:

- da sistem ima tri fiksne tačke kada je $a < a_c$, gde a_c treba odrediti,
- da dve od ovih fiksni tačaka srastaju u sedlo-čvor bifurkaciju kada je $a = a_c$.

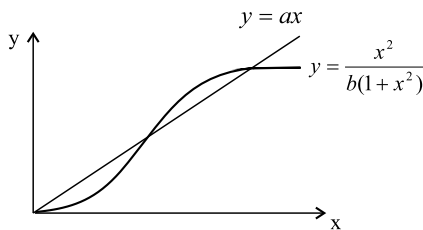
Zatim skicirati fazni portret za $a < a_c$.

Rešenje.

Nulcline date su pravom $y = ax$ i sigmoidnom krivom $y = \frac{x^2}{b(1+x^2)}$, kao što je prikazano na slici 24.31.

Posmatrajmo sada dinamiku sistema pri promeni vrednosti parametra a i konstantnoj vrednosti parametra b . Za malu vrednost a postoje tri preseka nulklina, kao što se vidi na slici 24.31.

Kako a raste, dva preseka se približavaju jedan drugom i sudaraju kada prava tangencira sigmoidnu krivu. Za veće vrednosti a ove fiksne tačke iščezavaju, ostavljajući koordinatni početak kao jedinu fiksnu tačku.



Slika 24.31: Nulcline date su pravom $y = ax$ i sigmoidnom krivom $y = \frac{x^2}{b(1+x^2)}$.

Da bismo našli a_c , odredimo gde se fiksne tačke spajaju. Nulcline se seku kada je

$$ax = \frac{x^2}{b(1+x^2)}.$$

Jedno rešenje je $x^* = 0$ i u tom slučaju je $y^* = 0$. Ostali preseki zadovoljavaju kvadratnu jednačinu

$$ab(1+x^2) = x \quad (24.33)$$

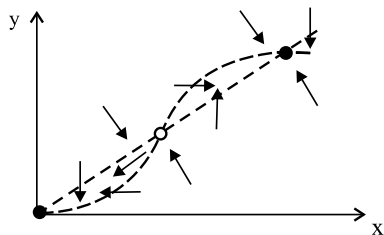
koja ima dva rešenja

$$x^* = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4a^2b^2}}{2ab},$$

uz uslov da je $1 - 4a^2b^2 > 0$, tj. $2ab < 1$. Ova rešenja (fiksne tačke) se "spajaju" kada je $2ab = 1$. Dakle,

$$a_c = \frac{1}{2b}.$$

Na slici 24.32 predstavljene su nulcline sistema, za $a < a_c$. Vektorsko polje, za tačke na pravoj $y = ax$ je paralelno y -osi, a za tačke na sigmoidnoj krivoj - paralelno x -osi. Na slici se uočava da je "srednja" fiksna tačka sedlo, a druge dve su čvorovi.

Slika 24.32: Nulcline sistema, za $a < a_c$.

Jakobijan sistema je

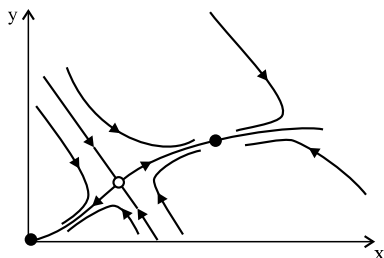
$$J = \begin{pmatrix} -a & 1 \\ \frac{2x}{(1+x^2)^2} & -b \end{pmatrix}.$$

Trag Jakobijana je $\tau = -(a + b) < 0$, pa su tako sve fiksne tačke ili čvor ili sedla, u zavisnosti od vrednosti determinante Δ . U koordinatnom početku $(0, 0)$, $\Delta = ab > 0$, pa je tako koordinatni početak uvek stabilna fiksna tačka. Zapravo, on je stabilan čvor, pošto je $\tau^2 - 4\Delta = (a - b)^2 > 0$ (osim u degenerisanom slučaju $a = b$, koji nećemo razmatrati). U ostalim dvema fiksним tačkama, Δ je

$$\Delta = ab - \frac{2x^*}{(1 + (x^*)^2)^2} = ab \left[1 - \frac{2}{1 + (x^*)^2} \right] = ab \frac{(x^*)^2 - 1}{1 + (x^*)^2}.$$

Prema tome, $\Delta < 0$ za svaku "središnju" fiksnu tačku, za koju je $0 < x^* < 1$. Ova fiksna tačka predstavlja sedlo tačku. Fiksna tačka za $x^* > 1$ uvek je stabilan čvor, pošto $\Delta < ab$, pa je zato $\tau^2 - 4\Delta > (a - b)^2 > 0$.

Poredeći fazne portete, na slikama 24.32 i 24.33, možemo da uočimo da je nestabilna mnogostrukost sedla "zarobljena" u uskom prostoru između dve nulcline. Šta više, stabilna mnogostrukost deli ravan na dve oblasti, a svaka od ovih oblasti je oblast privlačenja za čvor.



Slika 24.33: Fazni portet sistema.

Zadatak 40 Pokazati da dolazi do pojave natkritična vilasta bifurkacija u koordinatnom početku za sistem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu x + y + \sin x, \\ \dot{y} &= x - y\end{aligned}\tag{24.34}$$

i odrediti bifurkacionu vrednost μ_c . Nacrtati fazni portret u okolini koordinatnog početka za μ neznatno veće od μ_c .

Rešenje.

Sistem je invarijantan u odnosu na promenu promenljivih $x \rightarrow -x$, $y \rightarrow -y$, pa fazni portret mora da bude simetričan u odnosu na koordinatni početak. Koordinatni početak je fiksna tačka za svako μ , a njen Jakobijan je

$$A \begin{pmatrix} \mu + 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

koji ima $\tau = \mu$ i $\Delta = -(\mu + 2)$. Dakle, koordinatni početak je stabilna fiksna tačka ako je $\mu < -2$, a sedlo ako je $\mu > -2$. Odatle sledi da do pojave vilaste bifurkacije dolazi u $\mu_c = -2$. Da bismo ovo potvrdili, tražimo simetrični par fiksnih tačaka, koje su blizu koordinatnog početka kada je μ blizu μ_c . Primitimo da u ovoj fazi ne znamo da li je bifurkacija pot- ili natkritična. Fiksne tačke zadovoljavaju uslov da je $y = x$, pa je stoga $(\mu + 1)x + \sin x = 0$. Jedno rešenje je $x = 0$. Sada pretpostavimo da je x malo i različito od nule, pa razvijmo funkciju $\sin x$ u Tejlorov (stepeni) red. Sledi da je

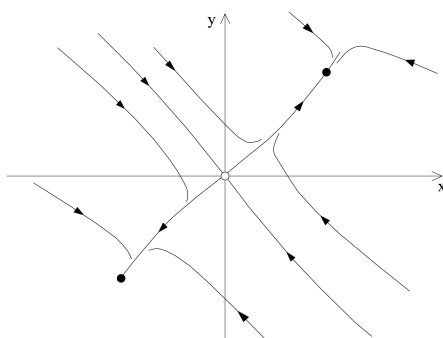
$$(\mu + 1)x + x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5) = 0.$$

Nakon deljenja sa x i zanemarivanja članova višeg reda, dobijamo $\mu + 2 - x^2/6 \approx 0$. Dakle, postoji par fiksnih tačaka sa $x^* = \pm\sqrt{6(\mu + 2)}$ za μ neznatno veće od -2 . Stoga se natkritična vilasta bifurkacija događa za $\mu_c = -2$. Da je bifurkacija bila potkritična, par fiksnih tačaka bi postojao dok je koordinatni početak bio stabilan, a ne nakon što je postao sedlo. Pošto je bifurkacija natkritična, znamo da su nove fiksne tačke stabilne bez proveravanja.

Da bismo nacrtali fazni portret u okolini $(0, 0)$ za μ neznatno veće od -2 , korisno je naći sopstvene vektore Jakobijana u koordinatnom početku. U tom slučaju, blizu bifurkacije, aproksimativna vrednost Jakobijana je

$$J \approx \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

koji ima sopstvene vektore $(1, 1)$ i $(1, -1)$, sa sopstvenim vrednostima $\lambda = 0$ i $\lambda = -2$, redom. Za μ neznatno veće od -2 , koordinatni početak postaje sedlo, pa tako nulta sopstvena vrednost postaje neznatno pozitivna. Na osnovu ovog, možemo skicirati fazni portret, prikazan na slici 24.34.



Slika 24.34: Fazni portret sistema 24.34.

Uočimo da, zbog aproksimacije koju smo napravili, ova slika važi samo lokalno za oba parametra. Na većoj udaljenosti od koordinatnog početka, gde μ nije blisko μ_c , aproksimacija više ne važi. U tom slučaju, fazni portret sistema više nije predstavljen slikom 24.34. ©

Zadatak 41 *Posmatrajmo sistem*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu x - y + x y^2, \\ \dot{y} &= x + \mu y + y^3.\end{aligned}\tag{24.35}$$

Pokazati da dolazi do pojave Hopfove bifurkacije u koordinatnom početku, pri promeni vrednosti parametra μ , i odrediti tip bifurkacije.

Rešenje.

Jakobijan u koordinatnom početku je

$$J = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix},$$

za koji je $\tau = 2\mu$, $\Delta = \mu^2 + 1 > 0$ i $\lambda = \mu \pm i$. Dakle, kako se vrednost μ povećava i prolazi kroz nulu, koordinatni početak se menja iz stabilne u nestabilnu zavojniju. Odavde sledi da za $\mu = 0$ dolazi do pojave neke vrste Hopfove bifurkacije.

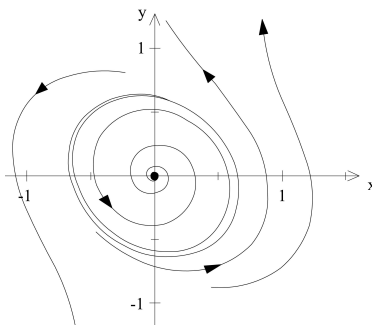
Da bismo odredili da li je bifurkacija potkritična, natkritična ili degenerisana, primenimo numeričku integraciju. Ako transformišemo sistem u polarne koordinate, dobijamo da je

$$\dot{r} = \mu r + r y^2,$$

Odavde sledi da je $\dot{r} \geq \mu r$, što povlači da, za $\mu > 0$, $r(t)$ raste brzo barem kao $r_0 e^{\mu t}$. Drugim rečima, sve trajektorije "odlaze" u beskonačnost. Na taj način je izvesno da nema zatvorenih orbita za $\mu > 0$. Preciznije, nestabilna zavojnica nije okružena stabilnim graničnim ciklusom. Zato bifurkacija ne može biti natkritična.

Može li bifurkacija biti degenerisana? To zahteva da koordinatni početak bude nelinearni centar kada je $\mu = 0$. Ali \dot{r} je "strogo pozitivno" udaljeno od x -ose, pa su zatvorene orbite ipak nemoguće.

Metodom eliminacije, očekujemo da je bifurkacija potkritična. To je potvrđeno na slici 24.35, koja predstavlja fazni portret dobijen numeričkim putem, za $\mu = -0,2$.



Slika 24.35: Potkritična Hopfova bifurkacija sistema 24.35.

Uočimo da nestabilan granični ciklus okružuje stabilnu fiksnu tačku, baš kao što smo i očekivali u potkritičnoj Hopf-ovoj bifurkaciji. Takođe, oblik graničnog ciklusa je blizak elipsi i okružuje zavojnicu, što su tipična svojstva bilo kog tipa Hopfove bifurkacije. ©

Zadatak 42 Tok strujnog kola, pod uticajem sinusoidalne sile, može da se opiše jednačinom (u bezdimenzionalnom obliku)

$$\dot{x} + x = A \sin \omega t, \quad (24.36)$$

gde je $\omega > 0$. Koristeći Poenkareovo preslikavanje, dokazati da sistem ima jedinstveni, globalno stabilan granični ciklus.

Rešenje.

Uvedimo smenu $\theta = \omega t$ i posmatrajmo sistem (24.36) kao vektorsko polje na cilindru: $\dot{\theta} = \omega$, $\dot{x} + x = A \sin \theta$. Bilo koja vertikalna linija na cilindru je odgovarajući presek S . Izaberimo S , tako da je $S = \{(\theta, x) : \theta = 0 \bmod 2\pi\}$. Posmatrajmo početni uslov na S , dat sa $\theta(0) = 0$, $x(0) = x_0$. Tada je vreme toka između uzastopnih preseka $t = 2\pi/\omega$. U fizičkom smislu, presecamo sistem jednom u toku ciklusa (toka) i posmatramo uzastopne vrednosti x .

Da bismo izračunali P , treba da rešimo diferencijalnu jednačinu. Njeno opšte rešenje je suma homogenih i partikularnih rešenja: $x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 \sin \omega t + c_3 \cos \omega t$. Konstante c_2 i c_3 se mogu eksplicitno naći, ali važno je naglasiti da one zavise od A i ω , ali ne i od početnog uslova x_0 . Samo konstanta c_1 zavisi od x_0 . Da

bismo zavisnost od x_0 učinili eksplisnom, uočimo da je u $t = 0$, $x = x_0 = c_1 + c_3$. Tako je

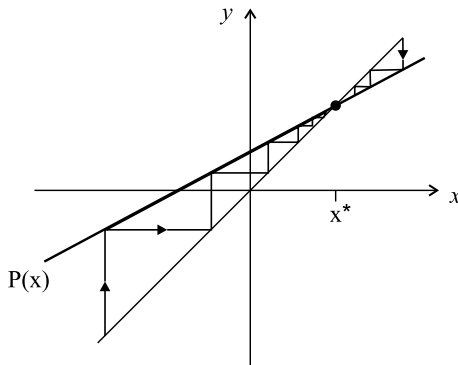
$$x(t) = (x_0 - c_3)e^{-t} + c_2 \sin \omega t + c_3 \cos \omega t.$$

Tada je prava P definisana jednačinom $x_1 = P(x_0) = x(2\pi/\omega)$. Zamenom dobijamo

$$\begin{aligned} P(x_0) &= x(2\pi/\omega) = (x_0 - c_3)e^{-2\pi/\omega} + c_3 = \\ &= x_0 e^{-2\pi/\omega} + c_4, \end{aligned}$$

gde je $c_4 = c_3(1 - e^{-2\pi/\omega})$.

Grafik P je prava linija sa nagibom $e^{-2\pi/\omega} < 1$, kao što je prikazano na slici 24.36.



Slika 24.36: Poenkareovo preslikavanje i "paukova mreža".

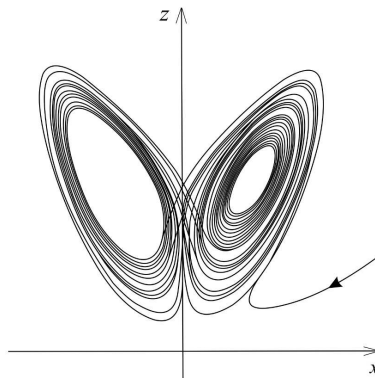
Pošto prava P ima nagib manji od 45° , ona seče dijagonalu samo u jednoj tački. Šta više, paukova mreža pokazuje da se odstupanje x_k od fiksne tačke smanjuje sa svakom iteracijom. Stoga je fiksna tačka jedinstvena i globalno stabilna. ©

24.8 Zadaci iz poglavlja 9

Zadatak 43 Pokazati numerički da Lorencove jednačine mogu pokazivati tranzijentni haos, za $r = 21$, $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$.

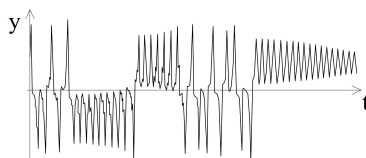
Rešenje.

Probanjem nekoliko različitih početnih uslova, lako je naći rešenja prikazanih na slici 24.37.



Slika 24.37: Atraktor Lorencovog sistema, za $r = 21$, $\sigma=10$, $b=\frac{8}{3}$.

Na prvi pogled, čini se da trajektorija opisuje strani atraktor, ali na kraju ipak ostaje na desnoj strani i kreće se spiralno prema stabilnoj fiksnoj tački C^+ . Prisetimo se da su i C^+ i C^- i dalje stabilne za $r = 21$. Grafik $y(t)$ nam pokazuje isti rezultat: početno nestabilno rešenje biva prigušeno, do ravnotežnog stanja, u konačnom vremenskom intervalu (sl. 24.38).



Slika 24.38: Vremenska serija $y(t)$ Lorencovog sistema za $r = 21$, $\sigma=10$, $b=\frac{8}{3}$.

Ovakav tip prolaznog haotičnog ponašanja nazivi se **tranzijentni, metastabilni haos** ili **preturbulencija**.

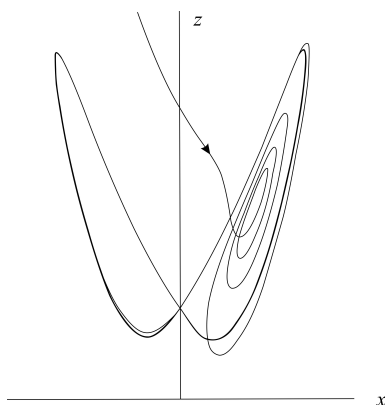
☺

Komentar. Prema definiciji, datoj u poglavlju 9.4.4 dinamika sistema, iz prethodnog zadatka, nije "haotična", pošto dugoročno ponašanje nije aperiodično. S druge strane, dinamika zaista pokazuje osetljivost na male promene početnih uslova - da smo izabrali nešto drugačije inicijalno stanje, trajektorije bi lako mogle završiti u C^- umesto u C^+ . Stoga, ponašanje sistema se ne može predvideti, barem za određene početne uslove. Prolazni haos pokazuje da deterministički sistem može biti nepredvidiv, čak iako su njegova konačna stanja vrlo jednostavna. Naime, nisu potrebni strani atraktori kako bi efektivno stvorili proizvoljno ponašanje.

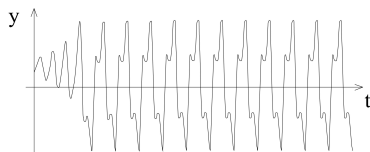
Zadatak 44 Opisati dugoročno ponašanje Lorencovog sistema, za velike vrednosti parametra r ($\sigma=10$, $b=\frac{8}{3}$). Interpretirati rezultate koristeći ponašanje vodeničnog točka iz poglavlja .

Rešenje.

Numeričke simulacije ukazuju na to da sistem ima globalno privlačan granični ciklus za svako $r > 313$. Na slikama 24.39 i 24.40 prikazujemo tipično rešenje za $r = 350$. Obratimo pažnju na prilaz graničnom ciklusu.



Slika 24.39: Fazni portet Lorencovog sistema za $r = 350$.



Slika 24.40: Vremenska serija $y(t)$ Lorencovog sistema za $r = 350$.

Na osnovu analogije sa kretanjem vodeničnog točka, iz ovog rešenja sledi da bi vodenični točak trebalo, nakon tranzijentnog perioda, da se kreće napred-nazad kao klatno, rotirajući jednom na desno, potom nazad na levo, itd. Ovo ponašanje uočeno je i eksperimentalno.

Dinamika sistema postaje mnogo složenija za vrednosti parametra r , između 28 i 313. Za većinu vrednosti r dolazi do pojave haotičnog ponašanja, ali se, takođe, javljaju i mali "razbacani prozori" periodičnog ponašanja. Tri najveća prozora su u intervalima $99,524... < r < 100,795...;$ $145 < r < 166;$ i $r > 214,4$. ©

24.9 Zadaci iz poglavlja 10

Zadatak 45 Odrediti fiksne tačke preslikavanja $x_{n+1} = x_n^2$ i analizirati njihovu stabilnost.

Rešenje.

Fiksne tačke zadovoljavaju $x^* = (x^*)^2$. Stoga je $x^*=0$ ili $x^*=1$. Sopstvena vrednost je $\lambda = f'(x^*) = 2x^*$. Fiksna tačka $x^*=0$ je stabilna, jer je $|\lambda| = 0 < 1$, a $x^*=1$ je nestabilna fiksna tačka, jer je $|\lambda| = 2 > 1$.

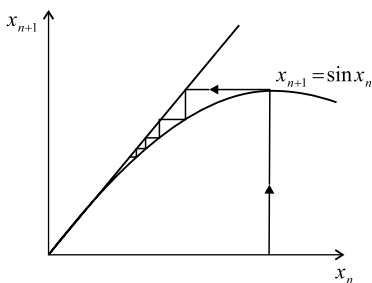
©

Komentar. Pokušajmo da rešimo prethodni zadatak tako što ćemo dugme x^2 , na ručnom kalkulatoru, da pritisnemo nekoliko puta zaredom. Uočićemo da je za dovoljno malo x_0 , konvergencija u x^* veoma brza. Fiksne tačke sa sopstvenom vrednošću $\lambda = 0$ nazivaju se **superstabilne**, jer perturbacije opadaju približno $\eta_n \sim \eta_0^{2^n}$, što je mnogo brže od opadanja $\eta_n \sim \lambda^n \eta_0$ u "običnoj" stabilnoj fiksnoj tački.

Zadatak 46 Posmatrajmo preslikavanje $x_{n+1} = \sin x_n$. Pokazati da se stabilnost fiksne tačke $x^* = 0$ ne može odrediti linearizacijom. Potom primeniti paukovu mrežu i pokazati da je fiksna tačka $x^* = 0$ globalno stabilna.

Rešenje.

Sopstvena vrednost, u fiksnoj tački $x^*=0$, je $f'(0) = \cos(0) = 1$, što predstavlja slučaj kada linearna analiza ne omogućava nikakve zaključke o stabilnosti početnog preslikavanja. Međutim, konstrukcijom paukove mreže (sl. 24.41) pokazuje se da je $x^*=0$ lokalno stabilna. Orbita se polako kreće naniže ka uskom "kanalu", monotono prema fiksnoj tački. Slično se dobija i za $x_0 < 0$.



Slika 24.41: Konstrukcija paukove mreže, za preslikavanje $x_{n+1} = \sin x_n$.

Da bismo dokazali da je stabilnost globalna, moramo pokazati da sve orbite teže fiksnoj tački $x^* = 0$ ($x_n \rightarrow 0$). S obzirom na to da je preslikavanje oblika $x_{n+1} = \sin x_n$, bilo koje x_0 , već nakon prve iteracije "upada" u interval $-1 \leq x_1 \leq 1$, jer je $|\sin x| \leq 1$. Izgled paukove mreže, u tom intervalu, je kao na slici 24.41, pa kako je konvergencija osigurana, stabilnost je globalna. ©

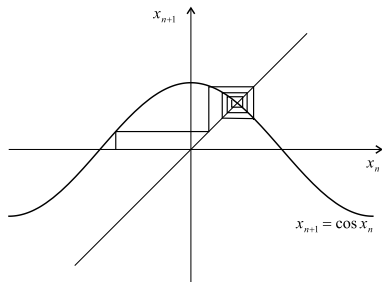
Zadatak 47 Posmatrajmo preslikavanje $x_{n+1} = \cos(x_n)$. Odrediti ponašanje x_n kada $n \rightarrow \infty$?

Pokušajmo da rešimo prethodni zadatak tako što ćemo dugme x^2 , na ručnom kalkulatoru, da pritisnemo nekoliko puta zaredom. Uočićemo da je za dovoljno malo x_0 , konvergencija u x^* veoma brza.

Rešenje.

Pokušajmo da rešimo prethodni zadatak tako što ćemo dugme $\cos x$, na ručnom kalkulatoru, da pritisnemo nekoliko puta zaredom.

Uočićemo da $x_n \rightarrow 0,739\dots$, bez obzira na početnu vrednost. U pitanju je rešenje transcendentne jednačine $x = \cos x$, i ono odgovara fiksnoj tački preslikavanja. Konstrukcija paukove mreže, na slici 24.42, pokazuje da se tipična orbita spiralno kreće ka fiksnoj tački $x^* = 0,739\dots$ kada $n \rightarrow \infty$.



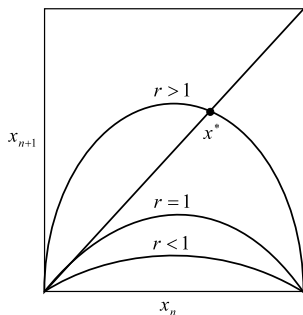
Slika 24.42: Konstrukcija paukove mreže, za preslikavanje $x_{n+1} = \cos x_n$.

Spiralno kretanje ukazuje na to da x_n konvergira ka x^* preko prigušenih oscilacija. To je karakteristika fiksni tačaka sa sopstvenom vrednošću $\lambda < 0$. Suprotno, u stabilnoj fiksnoj tački sa $\lambda > 0$ konvergencija je monotona. ☺

Zadatak 48 Razmotrimo logističko preslikavanje $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ za $0 \leq x_n \leq 1$ i za $0 \leq r \leq 4$. Odrediti sve fiksne tačke i razmotriti njihovu stabilnost.

Rešenje.

Fiksne tačke zadovoljavaju $x^* = f(x^*) = rx^*(1 - x^*)$. Stoga je $x^* = 0$ ili $1 = r(1 - x^*)$, to jest $x^* = 1 - \frac{1}{r}$.



Slika 24.43: Grafik logističkog preslikavanja, za različite vrednosti parametra r .

Koordinatni početak je fiksna tačka za svako r , dok je $x^* = 1 - \frac{1}{r}$ u rasponu dozvoljenog x , samo ako je $r \geq 1$.

Stabilnost zavisi od sopstvene vrednosti $f'(x^*) = r - 2rx^*$. Kako je $f'(0) = r$, koordinatni početak je stabilan za $r < 1$ i nestabilan za $r > 1$. U drugoj fiksnoj tački, $f'(x^*) = r - 2r(1 - \frac{1}{r}) = 2 - r$. Stoga, $x^* = 1 - \frac{1}{r}$ je stabilna fiksna tačka, za $-1 < (2 - r) < 1$, to jest za $1 < r < 3$, a nestabilna je za $r > 3$.

Rezultati su prikazani na slici 24.43.

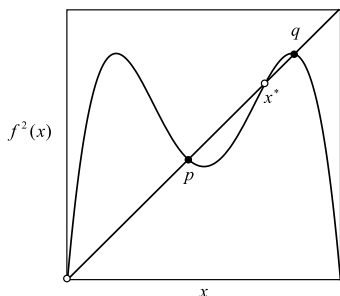
Za $r < 1$, parabola leži ispod dijagonale kvadranta, i koordinatni početak je jedina fiksna tačka. Kako se r povećava, parabola se "podigne", postajući tangenta na dijagonalu za $r = 1$. Za $r > 1$, parabola seče dijagonalu u drugoj fiksnoj tački $x^* = 1 - \frac{1}{r}$, dok koordinatni početak gubi stabilnost. Stoga, vidimo da fiksna tačka x^* , u koordinatnom početku, gubi stabilnost kroz transkriičnu bifurkaciju za $r = 1$.

Za $r = 3$ fiksna tačka $x^* = 1 - \frac{1}{r}$ gubi stabilnost i pojavljuje se ciklus perioda 2 kroz "flip" bifurkaciju.

Flip bifurkacija je često povezana sa udvostručavanjem perioda. U logističkom preslikavanju, kroz flip bifurkaciju, za $r = 3$, zaista dolazi do pojave ciklusa perioda 2, što ćemo dokazati u sledećem zadatku. ©

Zadatak 49 Pokazati da logističko preslikavanje ima ciklus perioda 2, za svako $r > 3$.

Rešenje.



Slika 24.44: Flip bifurkacija logističkog preslikavanja.

Ciklus peroda 2 postoji akko postoje dve tačke p i q tako da je $f(p) = q$ i $f(q) = p$. Ekvivalentno, takvo p mora da zadovolji $f(f(p)) = p$, gde je $f(x) = rx(1-x)$. Stoga, p je fiksna tačka preslikavanja sa dve iteracije $f^2(x) \equiv f(f(x))$. Pošto je $f(x)$ kvadratni polinom, $f^2(x)$ je polinom četvrtog stepena. Njegov grafik, za $r > 3$, prikazan je na slici 24.44.

Da bismo našli p i q , moramo da rešimo jednačinu četvrtog stepena $f^2(x) = x$. Fiksne tačke $x^* = 0$ i $x^* = 1 - \frac{1}{r}$ su trivijalna rešenja ove jednačine (automatski zadovoljavaju $f(x^*) = x^*$). Nakon nalaženja fiksnih tačaka, problem se svodi na rešavanje kvadratne jednačine.

Razvojem funkcije $f^2(x) - x = 0$, u Tejlorov red, dobijamo

$$r^2x(1-x)[1-rx(1-x)] - x = 0.$$

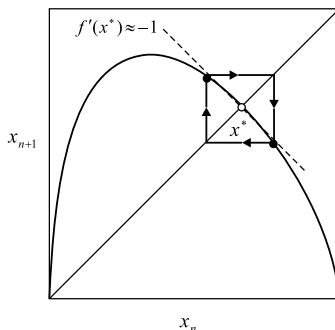
Rešavanjem rezultujuće kvadratne jednačine, dobijamo par korena:

$$p, q = \frac{r+1 \pm \sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r},$$

koji su realni za $r > 3$. Stoga, ciklus perioda 2 postoji za svako $r > 3$, kao što je i pretpostavljeno. Za $r = 3$, jednačina ima dvostruki koren $x^* = 1 - \frac{1}{r} = \frac{2}{3}$. Za $r < 3$, koreni su kompleksni, što znači da ciklus perioda 2 ne postoji.

Konstrukcijom paukove mreže, može se pokazati kako flip bifurkacije dovode do udvostručavanja perioda. Pođimo od bilo kog preslikavanja f , i pratimo lokalno ponašanje blizu fiksne tačke, gde je $f'(x^*) \approx -1$ (sl. 24.45).

Ukoliko je grafik funkcije f konveksan nadole, u blizini x^* , korišćenjem paukove mreže, može da se pokaže da postoji mali stabilni ciklus perioda 2, blizu fiksne tačke.



Slika 24.45: Izgled paukove mreže logističkog preslikavanja, blizu fiksne tačke.

Međutim, kao i vilaste bifurkacije, i flip bifurkacije mogu takođe da budu potkritične, kada ciklus perioda 2 postoji za vrednost parametra pre bifurkacione i nestabilan je.

U sledećem zadatku ćemo pokazati kako da odredimo stabilnost ciklusa perioda 2. ☺

Zadatak 50 Pokazati da je ciklus perioda 2, iz prethodnog zadatka, stabilan za vrednosti parametra r u intervalu $3 < r < 1 + \sqrt{6} = 3,449\dots$

Rešenje.

Da bismo analizirali stabilnost ciklusa, svodimo problem na pitanje stabilnosti fiksne tačke, na sledeći način. Oba p i q su rešenja jednačine $f^2(x) = x$, kao što je naglašeno u prethodnom zadatku. Prema tome, p i q su fiksne tačke preslikavanja sa dve iteracije $f^2(x)$. Početni ciklus perioda 2 je stabilan ako su p i q stabilne fiksne tačke za f^2 .

Da bismo odredili da li je p stabilna fiksna tačka funkcije f^2 , određujemo sopstvenu vrednost

$$\lambda = \frac{d}{dx}(f(f(x)))_{x=p} = f'(f(p))f'(p) = f'(q)f'(p).$$

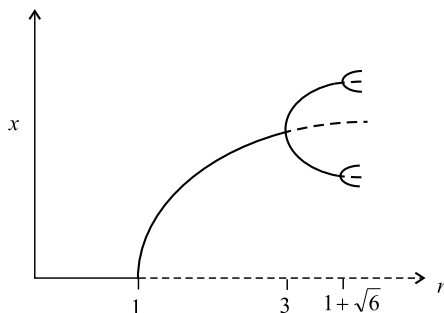
Primitimo da se isto λ dobija za $x = q$, zahvaljujući simetriji poslednjeg člana prethodnog izraza. Stoga, "grane" p i q , na bifurkacionom dijagramu, istovremeno prolaze kroz bifurkaciju. Ovo "račvanje" smo već uočili pri numeričkim ispitivanjima, u poglavlju 10.

Diferenciranjem, prethodnog izraza, i smenom za p i q , dobijamo:

$$\begin{aligned} \lambda &= r(1 - 2q)r(1 - 2p) \\ &= r^2[1 - 2(p + q) + 4pq] \\ &= r^2[1 - 2(r + 1)/r + 4(r + 1)/r^2] \\ &= 4 + 2r - r^2. \end{aligned}$$

Stoga, ciklus perioda 2 je linearno stabilan za $|4+2r-r^2| < 1$, tj. za $3 < r < 1+\sqrt{6}$.

Na slici 24.46 prikazan je deo **bifurkacionog dijagrama** za logističko preslikavanje, na kom su predstavljeni rezultati prethodno izvedene analize. Bifurkacioni dijagrami se razlikuju od orbitalnih dijagrama, po tome što su i nestabilni "objekti" takođe prikazani, dok orbitalni dijagrami prikazuju samo atraktore.



Slika 24.46: Deo bifurkacionog dijagrama logističkog preslikavanja.

☺

Zadatak 51 *Pretpostavimo da preslikavanje f ima stabilni ciklus perioda p , koji sadrži tačku x_0 . Pokazati da je Ljapunovljev eksponent $\lambda < 0$. Ukoliko je ciklus superstabilan, pokazati da $\lambda \rightarrow -\infty$.*

Rešenje.

Kao i obično, analizirajmo fiksne tačke preslikavanja f^p . Po pretpostavci, ciklus je stabilan, pa je sopstvena vrednost $|(f^p)'(x_0)| < 1$. Prema tome, $\ln |(f^p)'(x_0)| < \ln(1) = 0$.

Dalje, za ciklus perioda p , Ljapunovljev eksponent je

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \\ &= \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} \ln |f'(x_i)| \end{aligned}$$

jer je ciklus perioda p . Konačno, koristeći izvod složene funkcije, dobijamo:

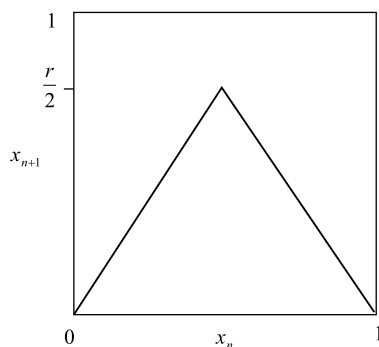
$$\lambda = \frac{1}{p} \sum_{i=0}^{p-1} \ln |f'(x_i)| = \frac{1}{p} \ln |f^p(x_0)| < 0.$$

Ukoliko je ciklus superstabilan, onda je $|f^p(x_0)| = 0$ po definiciji, i stoga $\lambda = \frac{1}{p} \ln(0) \rightarrow -\infty$. ☺

Zadatak 52 Posmatrajmo "tent" preslikavanje, koje je definisano na sledeći način:

$$f(x) = \begin{cases} rx, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ r - rx, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

za $0 \leq r \leq 2$ i $0 \leq x \leq 1$ (sl. 24.47).



Slika 24.47: Tent preslikavanje.

Zbog toga što je deo po deo linearno, tent preslikavanje je daleko jednostavnije za analizu od logističkog preslikavanja.

Pokazati da je $\lambda = \ln r$ za tent preslikavanje, nezavisno od početnog uslova x_0 .

Rešenje.

Kako je $f'(x) = \pm r$ za svako x , sledi da je

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| = \ln r.$$

©

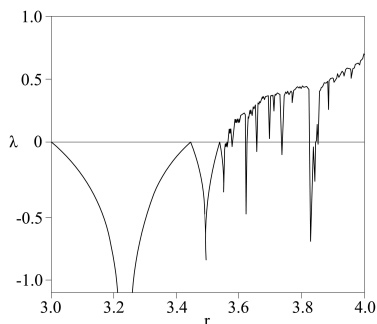
Komentar. Ovaj zadatak pokazuje da tent preslikavanje ima haotična rešenja za svako $r > 1$, jer je $\lambda = \ln r > 0$.

Zadatak 53 Opisati numerički postupak za proračun vrednosti λ za logističko preslikavanje $f(x) = rx(1-x)$. Rezultate prikazati grafički kao funkciju kontrolnog parametra r , za $3 \leq r \leq 4$.

Rešenje.

Usvojimo neku fiksiranu vrednost parametra r . Zatim, počevši od proizvoljnog početnog uslova, ponavljajmo preslikavanje dovoljno dugo, tako da zanemarimo tranzijentno ponašanje (na primer 300 ponavljanja). Ponavljajmo, nadalje, preslikavanje (na primer 10.000 koraka). Izračunajmo $\ln |f'(x_n)| = \ln |r - 2rx^n|$

i dodajmo dobijeni broj zbiru prethodnih logaritama. Ljapunovljev eksponent se onda dobija deljenjem glavnog zbira sa 10.000. Ponovimo ovaj postupak za sledeću vrednost r , i tako dalje. Konačni rezultat prikazan je na slici 24.48.



Slika 24.48: Promena vrednosti Ljapunovljevog eksponenta, u funkciji parametra r .

Poredeći ovaj grafik sa orbitalnim dijagramom (sl. 10.9), primetimo da λ ostaje negativno za $r < r_\infty = 3,57$, i približava se nuli u bifurkacijama sa udvostručavanjem perioda. Negativni pikovi odgovaraju ciklusima perioda 2^n . Do pojave haosa dolazi u blizini vrednosti parametra $r \approx 3,57$, gde λ prvi put postaje pozitivno. Za $r > 3,57$ Ljapunovljev eksponent raste svuda, izuzev u "udubljenjima" koji predstavljaju prozore periodičnog ponašanja. Uočimo veliko "udubljenje", koje ukazuje na prozor perioda 3, u blizini vrednosti parametra $r = 3,83$.

☺

Zadatak 54 Koristeći (10.9), izračunati vrednost μ za koju u početnom preslikavanju (10.4) dolazi do pojave ciklusa perioda 4.

Rešenje.

Ciklus perioda 4 pojavljuje se za $\tilde{\mu} = \mu^2 + 4\mu - 2 = 0$, čijim rešavanjem dobija se $\mu = -2 + \sqrt{6}$. Drugo rešenje ima negativan predznak, pa ga nećemo razmatrati. Za $\mu = 0$ nastaje ciklus perioda 2, koji se, inače, pojavljuje za $r = 3$ kod logističkog preslikavanja. Zato važi $r_2 = 3 + (-2 + \sqrt{6}) = 1 + \sqrt{6}$, što je saglasno sa ranije dobijenim rezultatom.

☺

Zadatak 55 Naći vrednost fiksne tačke μ^* za

$$\mu_{k-1} = \mu_k^2 + 4\mu_k - 2.$$

Rešenje.

Fiksna tačka zadovoljava $\mu^* = (\mu^*)^2 + 4\mu^* - 2$, i data je sa

$$\mu^* = \frac{1}{2}(-3 + \sqrt{17}) \approx 0,56. \quad (24.37)$$

Sasvim slučajno, ovo daje precizno predviđanje vrednosti parametra r_∞ , za logističko preslikavanje. Prisetimo se da za $\mu = 0$ dolazi do pojave ciklusa perioda 2, koji se, takođe, pojavljuje za $r = 3$ u logističkom preslikavanju. Dakle, μ^* odgovara vrednosti parametra $r_\infty \approx 3,56$, a što je veoma blizu numerički dobijenom rezultatu $r_\infty = 3,57$.

☺

24.10 Zadaci iz poglavlja 11

Zadatak 56 Pokazati da je mera Kantorovog skupa nula, u smislu da može biti obuhvaćena intervalima čija je totalna dužina proizvoljno mala.

Rešenje.

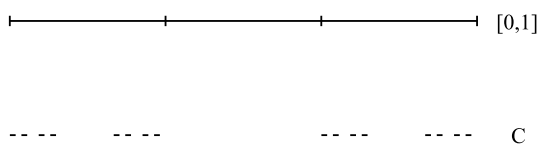
Neka L_n označava dužinu skupa S_n . Onda sa slike 11.2, na str. 199, vidimo da je $L_0 = 1, L_1 = \frac{2}{3}, L_2 = (\frac{2}{3})(\frac{2}{3}) = (\frac{2}{3})^2$, i u opštem slučaju, $L_n = (\frac{2}{3})^n$. Kako $L_n \rightarrow 0$ kada $n \rightarrow \infty$, Kantorov skup ima nultu ukupnu dužinu.

☺

Zadatak 57 Naći dimenziju sličnosti Kantorovog skupa C .

Rešenje.

Kao što je prikazano na slici 24.49, C je sastavljeno od dve svoje kopije, od kojih je svaka umanjena 3 puta. Dakle, za $r = 3, m = 2$. Prema tome, dimenzija sličnosti je $d = \ln 2 / \ln 3 \approx 0,63$.



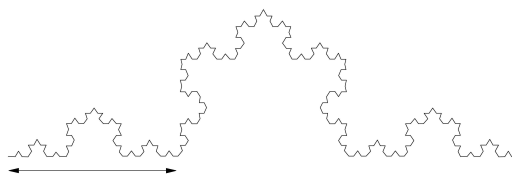
Slika 24.49: Kantorov skup C .

☺

Zadatak 58 Pokazati da kriva Kohove ima dimenziju sličnosti $d = \ln 4 / \ln 3 \approx 1,26$.

Rešenje.

Kriva se sastoji od četiri jednaka dela, od kojih je svaki sličan originalnoj krivoj, ali je umanjena 3 puta, u oba pravca. Jedan od delova je označen strelicom na slici 24.50. Dakle, za $r = 3, m = 4$, pa je dimenzija sličnosti $d = \ln 4 / \ln 3$.



Slika 24.50: Kriva Kohove.

☺

Zadatak 59 Naći dimenziju sličnosti Kantorovog skupa parnih petina.

Rešenje.

Označimo početni interval sa S_0 i neka S_n označava n -ti korak konstrukcije Kantorovog skupa parnih petina. Ukoliko skup S_n podelimo na 5 delova, dobijamo tri nova intervala, koji pripadaju skupu S_{n+1} . Prema tome, za $r = 5$ $m = 3$, pa je dimenzija sličnosti, ovog skupa, $d = \ln 3 / \ln 5$. ☺

Zadatak 60 Odrediti dimeziju Kantorovog skupa.

Rešenje.

Prisetimo se da je Kantorov skup pokriven svakim od skupova S_n korišćenim u njegovoj konstrukciji (sl. 11.2, 199). Svako S_n se sastoji od 2^n intervala dužine $(1/3)^n$, tako da ako uzmemo da je $\varepsilon = (1/3)^n$, potrebno nam je svih 2^n ovih intervala kako bismo prekrili Kantorov skup. Prema tome, $N = 2^n$ kada je $\varepsilon = (1/3)^n$. Kako $\varepsilon \rightarrow 0$ kada $n \rightarrow \infty$, dobijamo:

$$d = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} = \frac{\ln(2^n)}{\ln(3^n)} = \frac{n \ln 2}{n \ln 3} = \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

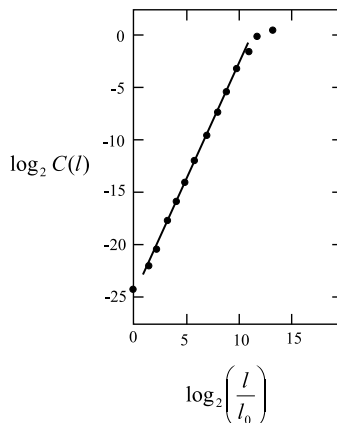
u saglasnosti sa dimenzijom sličnosti do koje se došlo u zadatku 57. ☺

Komentar. Ovde smo koristili diskretni niz $\varepsilon = (1/3)^n$ koji teži nuli kada $n \rightarrow \infty$, iako, po definiciji dimenzije objekta, treba da $\varepsilon \rightarrow 0$ neprekidno. Ukoliko je $\varepsilon \neq (1/3)^n$, prekrivanje će biti "rasipno". Drugim rečima, pojedini delovi "pokrivača štrče" - prelaze preko granice skupa, ali granična vrednost d ostaje ista.

Zadatak 61 Proceniti korelacionu dimeziju Lorencovog atraktora, za standardne vrednosti parametara $r = 28$, $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$.

Rešenje.

Na slici 24.51 prikazani su rezultati Grasbergera i Prokačie (1983). Primetimo da je u njihovoj notaciji, radijus sfere jednak l , a da je korelaciona dimenzija jednaka ν . Koeficijent pravca prave $d_{kor} = 2,05 \pm 0,01$ je u dobroj korelaciji sa podacima, izuzev za veliko ε , gde dolazi do očekivane saturacije. Ovi rezultati dobijeni su numerički, metodom Runge-Kuta.



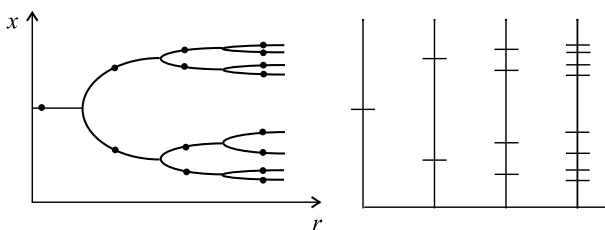
☺

Slika 24.51: Procena korelacione dimezije Lorenccovog atraktora.

Zadatak 62 Razmotirimo logističko preslikavanje $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ za vrednost parametra $r = r_\infty = 3,5699456\dots$, kada dolazi do haotičnog ponašanja. Pokazati da atraktor ovog preslikavanja predstavlja skup nalik Kantorovom, iako nije strogo samo-sličan. Onda izračunati njegovu korelacionu dimenziju numerički.

Rešenje.

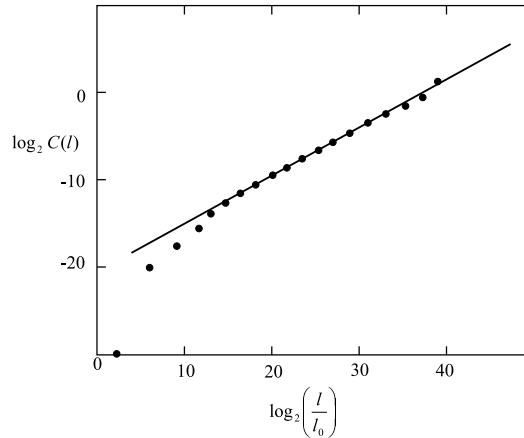
Grubo govoreći, atraktor izgleda kao ciklus perioda 2^n , za $n \gg 1$. Na slici 24.52 dat shematski prikazuje nekih tipičnih ciklusa perioda 2^n , za male vrednosti n .



Slika 24.52: Tipični ciklusi perioda 2^n , za male vrednosti n .

Tačke u levom delu slike 24.52 predstavljaju superstabilne cikluse perioda 2^n . Na desnom delu slike prikazane su odgovarajuće vrednosti x . Kako $n \rightarrow \infty$, rezultujući skup se približava topološkom Kantorovom skupu, sa tačkama razdvojenim prazninama različitih veličina. Međutim, ovaj skup nije strogo samo-sličan - veličina praznina se menja pod dejstvom različitih faktora koji zavise od njihovog položaja. Drugim rečima, razmaci između nekih "grana" u orbitalnom dijagramu su širi od drugih razmaka, za istu vrednost parametra r .

Na slici 24.53 prikazani su rezultati Grasbergera i Prokačie. Njihov logaritamski grafik $C(\varepsilon)$ - ε se dobro slaže sa pravom linijom nagiba $d_{kor} = 0,500 \pm 0,005$ (sl. 24.53).



Slika 24.53: Procena korelacione dimezije atraktora logističkog preslikavanja.

Ova dimenzija je manja od dimenzije objekta, $d_{objekat} \approx 0,538$ (Grasberger 1981), kao što je i očekivano.

☺

24.11 Zadaci iz poglavlja 12

Zadatak 63 Pekarsko prelikavanje² B kvadrata $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ u samog sebe dato je sa

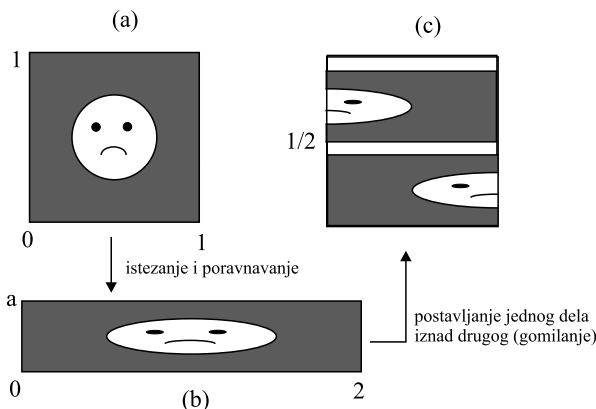
$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = \begin{cases} (2x_n, ay_n) & \text{za } 0 \leq x_n < \frac{1}{2} \\ (2x_n - 1, ay_n + \frac{1}{2}) & \text{za } \frac{1}{2} \leq x_n \leq 1 \end{cases}$$

gde je $0 < a \leq \frac{1}{2}$. Ilustrovati geometriju preslikavanja B , pokazujući njegov efekat na licu nacrtanom u jediničnom kvadratu.

Rešenje.

Lice, u jediničnom kvadratu, prikazano je na slici 24.54a.

²baker's map=eng.



Slika 24.54: Pekarsko prelikavanje.

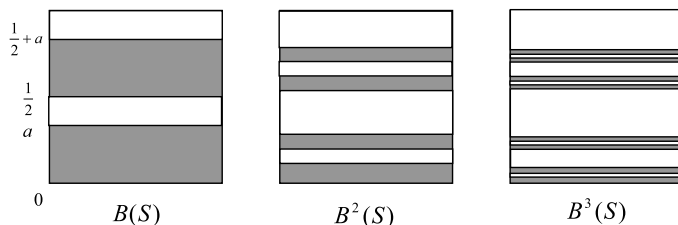
Postupak preslikavanja sastoji se u tome što se kvadrat, najpre, isteže i poravnava u pravougaonik površine $2 \times a$ (sl. 24.54b). Potom se pravougaonik deli na pola, dajući dva pravougaonika, površine $1 \times a$, pri čemu je desni pravougaonik postavljen iznad levog (sl. 24.54c).

Zašto je ovaj postupak ekvivalentan pekarskom preslikavanju B ? Razmotrimo najpre levu stranu kvadrata, gde je $0 \leq x_n < \frac{1}{2}$. Ovde je $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (2x_n, ay_n)$, tako da se horizontalni pravac izdužuje 2 puta, a vertikalni pravac se smanjuje a puta. Isto se događa i sa desnom polovinom kvadrata, s tim da je slika pomerena u levo za 1 i naviše za $\frac{1}{2}$, pošto je $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (2x_n, ay_n) + (-1, \frac{1}{2})$. Ovo pomeranje je ekvivalentno prethodno pomenutom "nagomilavanju". ©

Zadatak 64 Pokazati da za $a < \frac{1}{2}$, pekarsko preslikavanje ima fraktalni atraktor A koji privlači sve orbite. Preciznije, pokazati da postoji skup A tako da za bilo koje početne uslove (x_0, y_0) , rastojanje od $B^n(x_0, y_0)$ konvergira ka nuli kada $n \rightarrow \infty$.

Rešenje.

Konstruišimo, najpre, atraktor. Neka S označava kvadrat $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ (ovo obuhvata sve moguće početne uslove). Prve tri slike kvadrata S , dobijene preslikavanjem B , prikazane su kao osenčene oblasti na slici 24.55.



Slika 24.55: Pekarsko preslikavanje kvadrata S .

Prva slika $B(S)$ sastoji se od dve trake visine a , kao što znamo iz zadatka 63. Zatim $B(S)$ se poravnava, isteže, iseca i nagomilava (kao u prethodnom zadatku), pa se dobija $B^2(S)$. Ovako dobijamo četiri trake visine a^2 . Nastavljajući, na ovaj način, možemo uočiti da se $B^n(S)$ sastoji od 2^n horizontalnih traka visine a^n . Granični skup $A = B^\infty(S)$ je fraktal. Topološki, u pitanju je Kantorov skup linijskih delova.

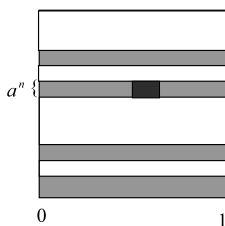
Postavlja se pitanje: kako možemo biti sigurni da zaista postoji "granični skup"? Da bismo pokazali da granični skup postoji, iskoristićemo teoremu iz topologije (Munkres 1975). Sukcesivne slike kvadrata nalaze se jedna u drugoj (kao ruske Babuške): $B^{n+1}(S) \subset B^n(S)$ za svako n . Štaviše, svaki $B^n(S)$ je kompaktni skup. Na osnovu ove teoreme, prebrojiv presek ovako dobijene familije kompaktnih skupova, gde pripada i traženi skup A , nije prazan kompaktni skup. Štaviše, $A \subset B^n(S)$, za svako n .

Takođe, na osnovu iste teoreme, možemo da pokažemo da A privlači sve orbite (da predstavlja atraktor). Tačka $B^n(x_0, y_0)$ leži negde u jednoj od traka $B^n(S)$, i sve tačke u ovim trakama su unutar rastojanja a^n od A , pošto je A sadržano u $B^n(S)$. S obzirom na to da $a^n \rightarrow 0$ kada $n \rightarrow \infty$, rastojanje od $B^n(x_0, y_0)$ do A teži nuli kada $n \rightarrow \infty$, što je i traženo. ☺

Zadatak 65 Naći dimenziju objekta atraktora za pekarsko preslikavanje, kada je $a < \frac{1}{2}$.

Rešenje.

Atraktor A se aproksimira sa $B^n(S)$, koji se sastoji od 2^n traka visine a^n i dužine 1. Izvršimo, sada, prekrivanje atraktora A kvadratnim ćelijama, čije su stranice dužine $\varepsilon = a^n$ (sl. 24.56).



Slika 24.56: Prekrivanje atraktora ćelijama.

Kako su trake jedinične dužine, potrebno je oko a^{-n} ćelija za prekrivanje svake od njih. Ukupno postoji 2^n traka, tako da je $N \approx a^{-n} \times 2^n = (a/2)^{-n}$. Stoga je

$$d = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln[(a/2)^{-n}]}{\ln(a^{-n})} = 1 + \frac{\ln \frac{1}{2}}{\ln a}.$$

Primitimo da $d \rightarrow 2$ kada $a \rightarrow \frac{1}{2}$. Ovo ima smisla jer atraktor ispunjava sve veći deo kvadrata S , kada $a \rightarrow \frac{1}{2}$. ☺

Zadatak 66 Pokazati da je Enoovo preslikavanje T invertibilno ukoliko je $b \neq 0$, i naći inverzno preslikavanje T^{-1} .

Rešenje.

Rešavamo jednačinu (12.2), sa str. 12.2, za x_n i y_n , pod uslovom da je dato x_{n+1} i y_{n+1} . Izračunavanjem dobijamo $x_n = b^{-1}y_{n+1}$, $y_n = x_{n+1} - 1 + ab^{-2}(y_{n+1})^2$. Prema tome, T^{-1} postoji za svako $b \neq 0$. ☺

Zadatak 67 Pokazati da Enoovo preslikavanje smanjuje površine, za $-1 < b < 1$.

Rešenje.

Da bismo odredili da li je proizvoljno dvodimenzionalno preslikavanje $x_{n+1} = f(x_n, y_n)$, $y_{n+1} = g(x_n, y_n)$ smanjuje površinu, određujemo, najpre, Jakobijan:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Ukoliko je $|\det J(x, y)| < 1$ za svako (x, y) , preslikavanje smanjuje površinu. Naime, ako je J Jakobijan dvodimenzionalnog preslikavanja T , onda T preslikava infinitezimalno mali pravougaonik, površine $dx dy$, u (x, y) , u infinitezimalno mali paralelogram površine $|\det J(x, y)| dx dy$. Prema tome, ako je $|\det J(x, y)| < 1$ svuda, preslikavanje je sa smanjenjem površine.

Za Enoovo preslikavanje, $f(x, y) = 1 - ax^2 + y$ i $g(x, y) = bx$, pa je

$$J = \begin{pmatrix} -2ax & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

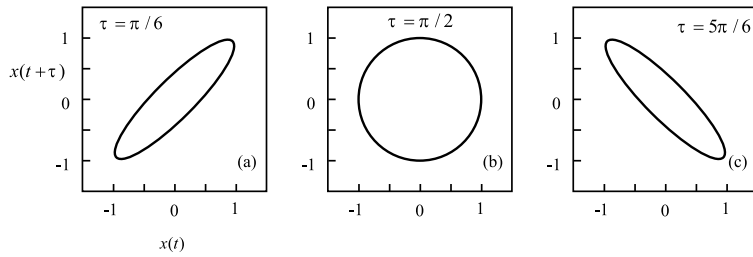
i $\det J(x, y) = -b$ za svako (x, y) . Stoga, preslikavanje smanjuje površinu za $-1 < b < 1$, kao što je i pretpostavljeno. Drugim rečima, površina bilo koj oblasti smanjuje se $|b|$ puta sa svakom iteracijom. ☺

Zadatak 68 Pretpostavimo da eksperimentalni sistem ima graničnim ciklus, kao atraktor. Pod uslovom da jedna od promenljivih sistema određena jednačinom $x(y) = \text{sint}$, nacrtati trajektoriju $x(t) = (x(t), x(t + \tau))$, za različite vrednosti intervala razvijanja τ . Koja bi vrednost τ bila najbolja, u slučaju da su podaci "deformisani" šumom?

Rešenje.

Na slici 24.57 prikazan je prostor razvijanja $x(t)$, za tri vrednosti τ . Za $0 < \tau < \frac{\pi}{2}$, trajektorija ima oblik elipse, sa dužom poluosom duž dijagonale kvadranta (sl. 24.57a). Kada je $\tau = \frac{\pi}{2}$, $x(t)$ ocrtava krug (sl. 24.57b). Ovo ima smisla jer je $x(t) = \text{sint}$ i $y(t) = \text{sin}(t + \frac{\pi}{2}) = \text{const}$, što predstavlja parametarske jednačine

kruga. Za veće vrednosti τ trajektorija ponovo ima oblik elipse, ali sa većom poluosom duž pravca $y = -x$ (sl. 24.57c).



Slika 24.57: Rekonstrukcija vremenske serije $x(t)$, za različite vrednosti intervala razvijanja τ .

☺

Komentar. Primetimo da se za svako τ dobija zatvorena kriva, koja predstavlja topološki veru rekonstrukciju osnovnog atraktora sistema (granični ciklus). Za ovaj sistem, optimalni interval razvijanja je $\tau = \frac{\pi}{2}$, jer je rekonstruisani atraktor tada u potpunosti "razvijen".

Glava **25**

Beleške

Literatura

- [1] D. Abrams, R. Mirollo, S. Strogatz, D. Wiley, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 084103 (2008).
- [2] J. A. Acebrón, A. Bulsara, W.-J. Rappel, *Phys. Rev. E* **69**, 026202 (2004).
- [3] J. A. Acebrón, L. L. Bonilla, C. J. P. Vicente, F. Ritort, R. Spigler, *Rev. Mod. Phys.* **77**, 137 (2005).
- [4] Aim H., and L. Nilsson, *Changes in driver behaviour as a function of handsfree mobile phones-A simulator study*. *Accid. Anal. Prev.*, 26: 441-451, 1994.
- [5] R. Albert, A.-L. Barabasi, *Rev. Mod. Phys.* **74**, 47 (2002).
- [6] Allen, R. W., T. D. Marcotte, T. J. Rosenthal, and B. L. Aponso, *Driver assessment with measures of continuous control behavior*. Presented at Proceedings of the Third International Driving Symposium on Human Factors in Driver Assessment, Training and Vehicle Design, 2005.
- [7] A. Arenas, A. Díaz-Guilera, J. Kurths, Y. Moreno, C. Zhou, *Phys. Rep.* **469**, 93 (2008).
- [8] M. A. Arbib, *Handbook of Brain Theory and Neural Networks*, MIT Press, Cambridge Massachusetts (2003).
- [9] Arrowsmith, D.K., Place, C.M. 1990. *An introduction to dynamical systems*. Cambridge University Press, Cambridge, England.
- [10] L. Arnold, *Random Dynamical Systems*, Springer-Verlag, Berlin, (1998).
- [11] F. M. Atay (Editor), *Complex Time-Delay Systems, Theory and Applications*, Springer, Berlin Heidelberg (2010).
- [12] R. Badii, A. Politi, *Complexity, Hierarchical Structures and Scaling in Physics*, Cambridge Nonlinear Science Series Vol. 6, Cambridge University Press, Cambridge (1999).

- [13] Y. Baibulatov, M. Rosenblum, Z. Zhanabaev, M. Kyzgarina, A. Pikovsky, Phys. Rev. E **80**, 046211 (2009).
- [14] Bak, P., Tang, C. and Wiesenfeld, K. 1988. Self-organized criticality. Phys.Rev. A **38** (1988) 364-374.
- [15] Bak, P., Tang, C. and Wiesenfeld, K. 1987. Self-organized criticality: an explanation of $1/f$ noise. Phys.Rev. Lett. **59** (4): 381-384.
- [16] A. Balanov, N. Janson, D. Postnov, O. Sosnovtseva, Synchronization: from simple to complex, Springer, Berlin (2009).
- [17] Bando, M., K. Hasebe, A.Nakayama, A. Shibata, and Y. Sugiyama, *Dynamical model of traffic congestion and numerical simulation* 1995. Phys. Rev. E **51**, pp. 1035-1042.
- [18] M. Bando, K. Hasebe, K. Nakanishi, A. Nakayama, A. Shibata, and Y. Sugiyama. Phenomenological study of dynamical model of traffic flow. de Physique I. France, 5: 1389-1399, 1995.
- [19] M. Bando, K. Hasebe, K. Nakanishi, and A. Nakayama. Delay of Vehicle Motion in Traffic Dynamics. Internal Report Aichi University, 1996. <http://arxiv.org/PS-cache/patt-sol/pdf/9608/9608002.pdf>
- [20] M. Bando, K. Hasebe, K. Nakanishi, and A. Nakayama. Analysis of optimal velocity model with explicit delay. Phys. Rev. E, **58**: 5429-5435, 1998.
- [21] M. Barahona, L. M. Pecora, Phys. Rev. Lett. **89**, 054101 (2002).
- [22] Barbosa, R.S., Machado, T.J.A., Vinagree, B.M., and Calderon, A.J. 2007. Analysis of the Van der Pol Oscillator Containing Derivatives of fractional order, Journal of Vibration and Control, **13**, 1291-1301.
- [23] Becker, T.W. 2000. Deterministic chaos in two state-variable friction sliders and the effect of elastic interactions. In: Rundle, J.B., Turcotte, D.L., Klein, W. (eds.) Geocomplexity and the physics of earthquakes, pp. 5-26, American Geophysical Union.
- [24] Beltrami, H. and Mareshal, J. 1993. Strange seismic attractor? Pageoph. **141**, 71-81.
- [25] Ben-David, O., Rubinstein, S.M., Fineberg, J. 2010. Slip-stick and the evolution of frictional strength, Nature **463**, 76-79.
- [26] Benedicks, M., Carleson, L. 1991. The dynamics of the Henon map. Annals of Math. **133**, 73.
- [27] Berge, P., Pomeau, Y., Vidal, C. 1986. Order within chaos, Wiley, New York.
- [28] Biham, O., A.A. Middleton, and D. Levine, 1992. Phys. Rev. A **46**, R6124,
- [29] Biham, O., Middleton, A.A., Levine, D. 1992. Self-organization and a dynamical transition in traffic flow models. Physical review **A46**, R6124.

- [30] S. Boccaletti, J. Kurths, G. Osipov, D. L. Valladares, C. S. Zhou, *Phys. Rep.* **366**, 1 (2002).
- [31] S. Boccaletti, *The Synchronized Dynamics of Complex Systems*, Monograph Series on Nonlinear Science and Complexity, Vol. 6, first edition, Elsevier, Amsterdam (2008).
- [32] K. Bonhoeffer, *J. Gen. Physiol.* **32**, 69 (1948).
- [33] A. Bose and P. A. Ioannou. Analysis of traffic flow with mixed manual and semiautomated vehicles. *IEEE Int. Trans. Sys.*, 4(4): 173-188, 2003.
- [34] S. Brandstetter, M. Dahlem, E. Schöll, *Phil. Trans. R. Soc. A* **368**, 391 (2010).
- [35] Brejs i Bajerli (1966)
- [36] Burazer, M., Kuzmanović, D., Damnjanović, V., *Digitalna obrada signala u geofizici*, DIT NIS-Naftagas, Novi Sad, (2009).
- [37] Burridge, R., Knopoff, L. 1967. *Model and theoretical seismicity*, *B.Seismol.Soc.Am.* 57, 341-371.
- [38] N. Burić, D. Ranković, K. Todorović and N. Vasović, *Physica A* **389**, 3956 (2010).
- [39] N. Burić, K. Todorović, N. Vasović, *Phys. Rev. E* **82**, 037201 (2010).
- [40] G. Buzsáki, *Rhythms of the Brain*, Oxford University Press, New York (2006).
- [41] R. Caponetto, G. Dongola, L. Fortuna, I. Petráv s, *Fractional order systems*, World Scientific series on nonlinear science, Serie A, Vol. 72, World Scientific, (2010).
- [42] N. Caporale, Y. Dan, *Annu. Rev. Neurosci.* **31**, 25 (2008).
- [43] Carlson, J. M. and Langer, J. S.: Mechanical model of an earthquake fault, *Phys. Rev. A*, 40, 6470-6484, 1989.
- [44] Carlson, J. M. 1991. Two-dimensional model of a fault. *Physical Review A*, vol. 44 issue 10, 6226-6232.
- [45] Caruso, F., Pluchino, F., Latora, V., Rapisarda, A., and Vinciguerra, S. 2007. Self-organized criticality and earthquakes, *Europhys. Lett.* 9, 1-4.
- [46] Cesari, L. 1963. Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations, Academic, New York.
- [47] R. E. Chandler, R. Herman, and E. W. Montroll. Traffic dynamics: Analysis of stability in car following. *Operat. Res.*, 7(1): 165-184, 1958.
- [48] Chau, K.T. 1995. Landslides modeled as bifurcations of creeping slopes with nonlinear friction law. *International Journal of Solids and Structures* 32, 3451-3464.
- [49] W.-Y. Chiang, P.-Y. Lai, C. Chan, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 254102 (2011).

- [50] Chowdhury, D., Santen, L., Schadchneider, A. 2000. *Statistical physics of vehicular traffic and some related systems*, Physics Reports 329, 199.
- [51] M. Ciszak, S. Euzzor, F. Arecchi, R. Meucci, Phys. Rev. E **87**, 022919 (2013).
- [52] Coddington, E.A., Levinson, N. 1955. Theory of Ordinary differential equations, Mc-Graw-Hill, New York.
- [53] Codd, E.F., Cellular Automata (Academic Press), (1968), *Cellular automata*
- [54] Conway, 1970., *Game of life*.
- [55] Cremer, M. and J. Ludwig, 1986, Math. Comput. Simul. **28**, p. 297, *A fast simulation model for traffic flow on the basis. Mathematics and Computers in Simulation*
- [56] Cullan, G., (1990) *Matrices and linear transformations*, Dover Publications, pp. 151
- [57] Cuomo, K.M., Oppenheim, A.V. 1992. Synchronized chaotic circuits and systems for communications. MIT research Laboratory of electronics Technical Report No. 575.
- [58] Cuomo, K.M., Oppenheim, A.V. 1993. Circuit implementation of synchronized chaos, with applications to communications, Physical review letters 71, 65.
- [59] Ćorić, S. 2008. Geostatički proračuni. Univerzitet u Beogradu, Rudarsko-geološki fakultet, 460 str.
- [60] Das, S. 2007. Functional Fractional calculus for System Identification and Controls, Springer, 240 p.
- [61] Davis, R.O., Smith, N.R., and Salt, G. 1990. Pore fluid frictional heating and stability of creeping landslides, International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 14, 427-443.
- [62] L. C. Davis. Comment on "Analysis of optimal velocity model with explicit delay". Phys. Rev. E, 66: Paper no. 038101, 2002.
- [63] L. C. Davis. Modifications of the optimal velocity traffic model to include delay due to driver reaction time. PhysicaA, 319: 557-567, 2003.
- [64] L. C. Davis. Multilane simulations of traffic phases. Phys. Rev. E, 69: Paper no. 016108, 2004.
- [65] Deregél, P. 1993. Chua's oscillator: Z zoo of attractors, Journal of circuits, Systems and Computers, 3, 309-359.
- [66] De Santis, A., Cianchini, G., Qamili, E. and Frepoli, A. 2010. The 2009 L'Aquila (Central Italy) seismic sequence as a chaotic process. Tectonophysics 496, 44-52.
- [67] A. Destexhe, M. Rudolph-Lilith, Neuronal Noise, Springer, New York (2012).

- [68] De Sousa Vieira, M. 1992. Self-organized criticality in a deterministic mechanical model. *Phys.Rev. A* 46, 6288-6293.
- [69] M. Diesmann, M.-O. Gewaltig, A. Aertsen, *Nature (London)* **402**, 529 (1999).
- [70] Dieterich, J.H. 1979. Modeling of rock friction: 1; Experimental results and constitutive equations. *J. Geophys. Res.* 84, 2161-2168.
- [71] DiToro, G., Goldsby, D.L., and Tullis, T.E. 2004. Friction falls toward zero at seismic slip rates, *Nature*, 427, 436-439.
- [72] M. Dhamala, V. Jirsa, M. Ding, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 074104 (2004).
- [73] B. Doiron, B. Lindner, A. Longtin, L. Maler, J. Bastian, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 048101 (2004).
- [74] Doyon, B., Cessac, B., Quoy, M., Samuelides, M. 1993. Control of the transition to chaos in neural networks with random connectivity. *International Journal of Bifurcation and chaos* 3, 279-291.
- [75] Dowell, E.H., Ilgamova, M. 1988. *Studies in Nonlinear Aeroelasticity*, Springer, New York.
- [76] Drazin, P.G., Reid, W.H. 1981. *Hydrodynamic stability*, Cambridge University Press, Cambridge, England.
- [77] J. Dubbeldam, B. Krauskopf, D. Lenstra, *Phys. Rev. E* **60**, 6580 (1999).
- [78] E. Dureman and C. Boden. *Fatigue in simulated car driving. Ergonomics.* 15: 299-308, 1972.
- [79] Durville, J.L. 1992. Study of mechanisms and modeling of large slope movements, *B. Eng. Geol. Environ.* 45, 25-42.
- [80] Eisbacher, G.H. 1979. Cliff collapse and rock avalanches in the Mackenzie Mountains, Northwestern Canada, *Canadian Geotechnical Journal*, 16, 309-334.
- [81] Enescu, B., Ito, K. Radulian, M., Popescu, E., and Bazacliu, O. 2005. Multifractal and Chaotic Analysis of Vrancea (Romania) Intermediate-depth Earthquakes: Investigation of the Temporal Distribution of Events. *Pure appl. geophys.* 162, 249-271.
- [82] K. Engelborghs. *DDE-Biftool: A Matlab Package for Bifurcation Analysis of Delay Differential Equations*. Department of Computer Science, Katholieke Universiteit Leuven, Leuven, Belgium, 2000.
- [83] P. Érdi, A. Esposito, M. Marinaro, S. Scarpetta (Editors), *Computational Neuroscience: Cortical Dynamics*, Springer, Berlin Heidelberg (2004).
- [84] Erickson, B., Birnir, B. and Lavalée, D. 2008. A model for aperiodicity in earthquakes. *Nonlinear Proc. Geoph.* 15, 1-12.

- [85] Ermentrout, G.B., Rinzel, J. 1984. Beyond a pacemaker's entrainment limit: phase walk-through, *American Journal of Physiology*, 246, R102.
- [86] G. B. Ermentrout, D. H. Terman, *Mathematical Foundations of Neuroscience*, Springer, New York (2010).
- [87] R. Fitzhugh, *Biophys. J.* **1**, 445 (1961).
- [88] I. Franović, V. Miljković, *Phys. Rev. E* **79**, 061923 (2009).
- [89] I. Franović, K. Todorović, N. Vasović, N. Burić, *Phys. Rev. Lett.* **108** (2012) 094101.
- [90] I. Franović, K. Todorović, N. Vasović and N. Burić, *CHAOS* **22**, 033147 (2012).
- [91] I. Franović, K. Todorović, N. Vasović, N. Burić, *Phys. Rev. E* **87** (2013) 012922.
- [92] W. J. Freeman, *Chaos* **13**, 1067 (2003).
- [93] L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung, F. Marchesoni, *Rev. Mod. Phys.* 70, 223 (1998).
- [94] C. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods*, Springer, Berlin, (2004).
- [95] M. Gardner, *For an amusing introduction see, for example*, *Sci. Am.* **220**(4), 120, (1970).
- [96] M. Gaudreault, F. Lépine, J. Viñals, *Phys. Rev. E* **80**, 061920 (2009).
- [97] M. Gaudreault, J. M. Berbert, J. Viñals, *Phys. Rev. E* **83**, 011903 (2011).
- [98] D. C. Gazis, R. Herman, and R. B. Potts. Car following theory of steady state traffic flow. *Oper. Res.*, 7: 499, 1959.
- [99] D. C. Gazis, R. Herman, and R. W. Rothery. Non-Linear follow the leader models of traffic flow. *Oper. Res.*, 9: 545-567, 1961.
- [100] W. Gerstner, W. Kistler, *Spiking Neuron Models: Single Neurons, Populations, Plasticity*, Cambridge University Press, Cambridge (2002).
- [101] Glavatović, B. 2002. *Seizmologija*. Skripta za studente Rudarsko-geološkog fakulteta, Beograd.
- [102] Gleick, J., *Chaos: Making a New Science*, Viking, New York, (1987).
- [103] Gollub, J.P., and Swinney, H.L. 1975. Onset of turbulence in a rotating fluid. *Physical Review Letters* 35, 927-930.
- [104] Gollub, J.P., Brunner, T.O., Danly, B.G. 1978. Periodicity and chaos in coupled nonlinear oscillators, *Science*, 200, 48-50.
- [105] Goldsby, D.L., and T.E. Tullis. 2002. Low frictional strength of quartz rocks at subseismic slip rates, *Geophysical Research Letters*, 29, 1844.

- [106] Gomberg, J., Bodin, P., Savage, W., Jackson, M.E. 1995. Landslide faults and tectonic faults, Analogs? – The slumgullion earthflow, Colorado. *Geology* 23, 41-44.
- [107] Gomberg, J., Beeler, N., and Blanpied, M. 2000. On rate-state and Coulomb failure models, *Journal of Geophysical Research*, 105, 7857-7871.
- [108] Grassberger, P., Procaccia, I. 1983. Measuring the strangeness of strange attractors, *Physica D* 9, 189.
- [109] Grebogi, C., Ott, E., Yorke, J.A. 1983. Fractal basin boundaries, long-lived chaotic transients, and unstable-unstable pair bifurcation, *Physical Review Letters* 50, 935.
- [110] M. Green. How long does it take to stop? methodological analysis of driver perception-brake times. *Transport. Hum. Factors*, 2: 195-216, 2000.
- [111] B. Greenshields. Reaction time in automobile driving. *J. Appl. Psychol.*, 20: 353-357, 1936.
- [112] Greenshields, B.D., 1935. in *Proceedings of the Highway Research Board (Highway Research Board, Washington, D.C.)*, Vol. 14, p. 448, *A study of traffic capacity*.
- [113] Greenberg, H., 1959., *An Analysis of Traffic Flow*, *Operations Research* 7, pp. 255-275.
- [114] Гробман, Д.М., О гомеоморфизме систем дифференциальных уравнений, Докладу Академии Наук СССР, 128: 880-881 (1959).
- [115] Gu, J-C., Rice, J. R., Ruina, A. L., and Tse, S. T. 1984. Slip motion and instability of a single degree of freedom elastic system with rate and state dependent friction, *Journal of Mechanics and Physics of Solids* 32, 167–196.
- [116] K. Q. Gu, S.-I. Niculescu, and J. Chen. On stability crossing curves for general systems with two delays. *J. Math. Anal. Appl.* 311: 231-253, 2005.
- [117] Guckenheimer, J., Holmes, P., (1983), *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*, Springer, New York.
- [118] Richard Haberman, *Mathematical Models*, Mechanical Vibrations, Population Dynamics, and Traffic Flow, Printice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, (1977).
- [119] H. Haken, *Information and Self-Organization, A Macroscopic Approach to Complex Systems*, third edition, Springer, Berlin Heidelberg (2006).
- [120] Halsey, T. C.; Jensen, M. H.; Kadanoff, L. P.; Procaccia, I.; Shraiman, B. I. 1986. *Fractal measures and their singularities* - The characterization of strange sets. *Physical Review A - General Physics*, 3rd Series, vol. 33, Feb. 1986, pp. 1141-1151.

- [121] Hanson, F.E. 1978. Comparative studies of firefly pacemakers, *Federation Proceedings*, 37, 2158.
- [122] Hartman, P. 1960. A lemma in the theory of structural stability of differential equations. *Proceedings of American Mathematical Society* 11, 610–620.
- [123] H. Hasegawa, *Phys. Rev. E* **70**, 021911 (2004).
- [124] H. Hasegawa, *Physica D* **237**, 137 (2008).
- [125] B. Hauschildt, N. Janson, A. Balanov, E. Schöll, *E. Phys. Rev. E* **74**, 051906 (2006).
- [126] Helbing, D. 2001. Traffic and related self-driven many-particle systems. *Reviews of Modern Physics* 73, 1067-1141.
- [127] Helmstetter, A., Sornette, D., Grasso, J.-R., Andersen, J.V., Gluzman, S., and Pisarenko, V. 2003. Slider-block friction model for landslides: application to Vaiont and La Clapiere landslides, arXiv: cond-mat/0208413v2
- [128] Henley, S. 1976. Catastrophe theory models in geology, *Mathematical Geology* 8, 649-655.
- [129] Heslot, F., Baumberger, T. Perrin B., and Caroli, C. 1994. Creep, stick-slip, and dry-friction dynamics: Experiments and a heuristic model, *Physical Review E* 49, 4973–4988.
- [130] J. Hindmarsh, R. M. Rose, *Proc. R. Soc. London, Ser. B* **221**, 87 (1984).
- [131] Hirose, T., and Shimamoto, T. 2005. Slip-Weakening Distance of Faults during Frictional Melting as Inferred from Experimental and Natural Pseudotachylytes, *Bulletin of the Seismological Society of America*, 95,1666-1673.
- [132] A. L. Hodgkin, A. F. Huxley, *J. Physiol.* **117**, 500 (1952).
- [133] S.P. Hoogendoorn and Ossen S. Parameter estimation and analysis of car-following models. In: H. S. Mahmassani (ed.) *Flow, Dynamics and Human Interaction (Transportation and Traffic Theort, 16)* Elsevier, The Netherlands, pp. 245-266 2005.
- [134] Hopf, E. 1948. A mathematical example displaying the features of turbulence. *Communications on Pure and Applied Mathematics* 1, 303-22.
- [135] Huang, J., and Turcotte, D.L. 1990. Are earthquakes an example of deterministic chaos? *Geophys. Res.Lett.* 17, 223-226.
- [136] Hudson, J.A., and Fairhurst, C. 1969. Tensile strength, Weibull's theory and a general statistical approach to rock failure. In: Te'eni, M. (ed.): *Proceedings of Southampton 1969 Civil Engineering materials Conference (part 2)*, 901-904.
- [137] Hurewicz, W. 1958. *Lectures on ordinary differential equations*, MIT Press, Cambridge, MA.

- [138] Iliopoulos, A.C. Pavlos, G.P., and Athanasiu, M.A. 2008. Spatiotemporal chaos into the Hellenic seismogenesis: evidence for a global seismic strange attractor, *Nonl.Phen.Compl. Syst.* **11**, 274-279.
- [139] M. Ivanchenko, G. Osipov, V. D. Shalfeev, J. Kurths, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 134101 (2004).
- [140] E. M. Izhikevich, *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting*, MIT Press, Cambridge Massachusetts (2007).
- [141] E. M. Izhikevich, *Int. J. Bifurcat. Chaos* **10**, 1171 (2000).
- [142] N. Janson, A. Balanov, E. Schoell, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 010601 (2004).
- [143] Janjić, M. 1979. Inženjerska geodinamika, Univerzitet u Beogradu Rudarsko-geološki fakultet, 174 str.
- [144] Jevremović, D. 2003. Inženjerska geologija, Univerzitet u Nišu, Građevinsko-arhitektonski fakultet, 449 str.
- [145] V. K. Jirsa, A. R. McIntosh (Editors), *Handbook of Brain Connectivity*, Springer, Berlin Heidelberg (2007).
- [146] S. Kadar, J. Wang, K. Showalter, *Nature* **91**, 770 (1998).
- [147] Kagan, Y.Y. 1997. Are earthquakes predictable? *Geophys. J. Int.* **131**, 505-525.
- [148] P. Kaluza, C. Strege, H. Meyer-Ortmanns, *Phys. Rev. E* **82**, 036104 (2010).
- [149] Kantz, H., and Schreiber, T. 2004. *Nonlinear time series analysis*, second ed., Cambridge University Press, Cambridge.
- [150] Kerner, B.S., Konhäuser, P. (1993.), *Cluster effect in initially homogeneous traffic flow*, *Physical review E* **48**, R2335.
- [151] Kilbas, A.A., Srivastava, H.M., and Trujillo, J.J. 2006. *Theory and Applications of Fractional Differential equations*, Elsevier, 540 p.
- [152] M. Kim, R. Roy, J. Aron, T. Carr, I. Schwartz, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 088101 (2005).
- [153] I. Kiss, Y. Zhai, J. Hudson, *Science* **296**, 1676 (2002).
- [154] I. A. Khovanov, A. V. Polovinkin, D. G. Luchinsky, P. V. E. McClintock, *Phys. Rev. E* **87** (2013) 032116.
- [155] Ivan Klajn, Milan Šipka, *Veliki rečnik stranih reči i izraza*, Prometej, Novi Sad, (2008).
- [156] Kleshev, K.A., and Shein, V.S. 1986. *Geology and geodynamics of oil and gas provinces in the south of the USSR*, Nedra, 232 p.
- [157] M. Komarov, A. Pikovsky, *Phys. Rev. E* **84**, 016210 (2011).

- [158] K. Konishi, H. Kokame, and K. Hirata. Decentralized delayed-feedback control of an optimal velocity traffic model. *Eur. Phys. J. B*, 15: 715-722, 2000.
- [159] Kostić, S., Franović, I., Todorović, K., Vasović, N. 2013. Friction memory effect in complex dynamics of earthquake model, *Nonlinear Dynamics*, 73 (3), 1933-1943.
- [160] Kostić, S., Vasović, N., Perc, M., Toljić, M., Nikolić, D. 2013. Stochastic nature of earthquake ground motion, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 392 (18), 4134-4145.
- [161] Kostić, S., Vasović, N., Franović, I., Todorović, K. 2013. Dynamics of simple earthquake model with time delay and variation of friction strength, *Nonlinear Processes in Geophysics* 20, 857-865.
- [162] Kostić, S., Gojković, N., Vasović, N. 2013. Kompleksna dinamika modela nastanka rudarski generisanih potresa duž reaktiviranih raseda, *Rudarski radovi*, 2013/1, 131-150.
- [163] Kostić, S., Vasović, N. 2012. Spring-block model for scaling laws of seismicity in Serbia. *Tehnika-rudarstvo, geologija i metalurgija*, LXVII 2012, pp. 61-66.
- [164] Kostić, S. Perc, M., Vasović, N., Trajković, S. 2013. Predictions of experimentally observed stochastic ground vibrations induced by blasting. *PLoS One* (accepted).
- [165] Kostić. S. 2013. Nelinearno dinamičko modelovanje potresa izazvanih promenom naponskog stanja pri izradi horizontalnih podzemnih prostorija. Doktorska disertacija, univerzitet u Beogradu Rudarsko-geološki fakultet.
- [166] Kühne, R. D., 1984a, in *Proceeding of the 9th International Symposium on Transportation and Traffic Theory*, edited by I. Volmuller and R. Hamerslag (VNU Science, Utrecht), p. 21, *Macroscopic freeway model for dense traffic*
- [167] Kühne, R. D., 1987, in *Proceeding of the 10th International Symposium on Transportation and Traffic Theory*, edited by N. H. Gartner and N. H. M. Wilson (Elsevier, New York), p. 119, *Freeway speed distribution and acceleration noise – calculations from a stochastic continuum theory and comparison with measurements*.
- [168] Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence*, Springer, Berlin (1984).
- [169] Kuzmanović, D., Sedmak, A., Obradović, I., Nikolić, D., *Matematička fizika*, Rudarsko-geološki fakultet, Beograd, (2003).
- [170] J. Kwapien, S. Drożdż, *Phys. Rep.* **515**, 115 (2012).
- [171] K. Kyamakya, W. A. Halang, H. Unger, J. C. Chedjou, N. F. Rulkov, Z. Li (Editors), *Recent Advances in Nonlinear Dynamics and Synchronization, Theory and Applications*, Springer, Berlin Heidelberg (2009).

- [172] Landau, L.D. 1944. On the problem of turbulence. Doklady Akademii nauk Soviza Sovetskikh Sotsialisticheskikh respublik 44, 339-44.
- [173] Landau, L.D., Lifshitz, E.M. 1959. Fluid mechanics. Pergamon, Cambridge.
- [174] Lee, H.Y., H.-W. Lee, and D. Kim, 1988, Phys. Rev. Lett. **81**, 1130, *Origin of Synchronized Traffic Flow on Highways and its dynamic phase transitions*
- [175] R. E. Lee DeVille, E. Vanden-Eijnden, C. Muratov, Phys. Rev. E **72**, 031105 (2005).
- [176] J. Lei, M. C. Mackey, SIAM J. Appl. Math. **67**, 387 (2007).
- [177] Lengyel, I. Rabai, G., Epstein, I.R. 1990. Experimental and modeling study of oscillations in the chlorine dioxide-iodine-malonic acid reaction, Journal of American Chemical Society 112, 9104.
- [178] Lengyel, I., Epstein, I.R. 1991. Modeling of Turing structures in the chlorite-iodide-malonic acid-starch reaction. Science 251, 650.
- [179] H. Lenz, C.K. Wagner, and R. Sollacher. Multi-anticipative car-following model. Eur. Phys. J.B, 7: 331-335, 1999.
- [180] Lighthill, M.J., Whitham, G.B. 1955. Kinematic Waves. I. Flood Movement in Long Rivers". Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences 229 (1178): 281.
- [181] Lise, S. and Paczuski, M. 2001. Self-organized criticality and universality in a nonconservative earthquake model, Phys.Rev. E 63, 036111-1-5.
- [182] Li, C., and Chen, G. 2004. Chaos and hyperchaos in the fractional-order Rossler equations, Physica A, 341, 55-61.
- [183] Li, C., and Yan, J. 2007. The synchronization of three fractional differential systems, Chaos, Solitons and Fractals, 32, 751-757.
- [184] Labuz, J., and Zang, A. 2012. Mohr-Coulomb Failure Criterion. Rock Mechanics and Rock Engineering, 45, 6, 975-979
- [185] B. Lindner, J. Garcia-Ojalvo, A. Neiman, L. Schimansky-Geier, Phys. Rep. **392**, 321 (2004).
- [186] Lorenz, E.N. 1963. Deterministic nonperiodic flow. Journal of Atmospheric Science, 20, 130.
- [187] A. C. J. Luo, J.-Q. Sun (Editors), Complex Systems, Fractionality, Time-delay and Synchronization, Springer, Berlin Heidelberg (2011).
- [188] S. Luccioli, A. Politi, Phys. Rev. Lett. **105**, 158104 (2010).
- [189] Ludwig, D., Jones, D.D., Holling, C.S. 1978. Qualitative analysis of insect outbreak systems: the spruce budworm and forest, Journal of Animal Ecology 47, 315.

- [190] Mackey, D. Glass, L. 1977. Oscillation and chaos in physiological control systems, *Science* 197, 287-289.
- [191] M. C. Mackey, I. G. Nechaeva, *Phys. Rev. E* **52**, 3366 (1995).
- [192] Marsden, J.E., McCracken, M. 1976. *The Hopf bifurcation and its applications*. Springer, New York.
- [193] Malamud, B.D. and Turcotte, D.L. 1999. Self-organized criticality applied to natural hazards, *Nat. Hazards* 20, 93-116.
- [194] S. C. Manrubia, A. S. Mikhailov, D. H. Zanette, *Emergence of Dynamical Order, Synchronization Phenomena in Complex Systems, World Scientific Lecture Notes in Complex Systems, Vol. 2, World Scientific, Singapore* (2004).
- [195] Marone, C. 1998. The effect of loading rate on static friction and the rate of fault healing during the earthquake cycle, *Nature* 391, 69-72.
- [196] H. Markram, M. Tsodyks, *Nature* (London) **382**, 807 (1996).
- [197] Marzocchi, W., Vilardo, G., Hill, D. P., Ricciardi, G. P. and Ricco, C. 2001. Common Features and Peculiarities of the Seismic Activity at Phlegraean Fields, Long Valley, and Vesuvius *Bulletin of the Seismological Society of America*, v. 91 no. 2 p. 191-205.
- [198] Mason, A. D., and A.W. Woods, 1997, *Phys. Rev. E* **55**, 2203, *Car following models of traffic flow*.
- [199] Matignon, D. 1996. Stability result on fractional differential equations with applications to control processing, in *IMACS-SMC Proceedings, Lille, France*, 963-968.
- [200] Matsumoto, T. 1984. A chaotic attractor from Chua's circuit, *IEEE Transactions on Circuit and Systems*, vol. CAS-31, No. 12, pp. 1055-1058.
- [201] Metropolis, N., Stein, M.L., Stein, P.R. 1973. On finite limit sets for transformations on the unit interval. *J. Combin. Theor.* 15, 25.
- [202] May, R.M., Oster, G.F. 1980. Period-doubling and the onset of turbulence an analytic estimate of the Feigenbaum ration. *Phys. Lett. A.* 78, 1.
- [203] N. Mitarai and H. Nakanishi, *Spatiotemporal structure of traffic flow in a system with an open boundary*, *Phys. Rev. Lett.*, 85: pp. 1766-1769, 2000.
- [204] Moon, F.C., Holmes, P.J. 1979. A magnetoelastic strange attractor. *Journal of Sound and Vibration* 65, 275.
- [205] Moon, F.C., Li, G.-X. 1985. Fractal basin boundaries and homoclinic orbits for periodic motion in a two-well potential. *Physical Review Letters* 55, 1439.
- [206] C. Morris, H. Lecar, *Biophys. J.* **35**, 193 (1981).
- [207] F. Moss, S. Gielen (Editors), *Neuro-Informatics and Neural Modelling, Handbook of Biological Physics, Vol. 4, Elsevier, Amsterdam* (2001).

- [208] C. Muratov, E. Vanden-Eijnden, *Chaos* **18**, 015111 (2008).
- [209] Nagatani, T., 1996a. *J. Phys. A* **29** (20), 6531-6542, *Kinetics of segregation in a 2-lane highway traffic flow*
- [210] Nagatani, T., 1996b. *J. Phys. Soc. Jpn.* **65** (10), 3150-3152, *Gas kinetic approach to 2-dimensional traffic flow*
- [211] Nagatani, T., 1996c. *J. Phys. Soc. Jpn.* **65** (10), 3386-3389, *Kinetics of clustering and acceleration in 1d traffic flow*
- [212] Nagatani, T., 1997a, *Physica A* **237** (1-2), 67-74, *Kinetic segregation in a multilane highway traffic flow*
- [213] Nagatani, T., 1997b. *J. Phys. Soc. Jpn.* **66** (4), 1219-1224, *Gas kinetics of traffic jam*
- [214] Nagatani, T., 1997c. *J. Phys. Soc. Jpn.* **66** (7), 1928-1931, *Instability of a traffic jam induced by slowing-down.*
- [215] Nagatani, T., 1998a, *Physica A* **248** (3-4), 353-364, *Phase-transition and critical phenomenon in the power-law model of traffic*
- [216] Nagatani, T., 1998b, *Phys. Rev. E* **58** (4), 4271-4276, *Thermodynamic theory for the jamming transition in traffic flow*
- [217] Nagatani, T., 1998a, *Physica A* **258** (1-2), 237-242, *Time-dependent Ginzburg-Landau equation for the jamming transition intraffic flow*
- [218] Nagatani, G., *Density waves in traffic flow*, *Physical Review E*, Vol. 61 (4), p. 3534-3570, 2000.
- [219] Nagel, K., Schreckenberg, M. 1992. *A cellular automaton model for freeway traffic*, *Journal de Phys. I* **2** (12): 2221.
- [220] J. Nagumo, S. Arimoto, S. Yoshizawa, *Proc. IRE* **50**, 2061 (1962).
- [221] Najdanović, N., i Obradović, R. 1999. *Mehanika tla u inženjerskoj praksi*, Rudarski institut, Beograd, 550 str.
- [222] Nakanishi, K., Itoh K., Igarashi Y., and Bando, M., 1997. *Phys. Rev. E* **55**, p. 6519, *Solvable optimal velocity models and asymptotic trajectory*
- [223] W. Nesse, C. Del Negro, P. Bressloff, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 088101 (2008).
- [224] Von Neumann, J., Burks, A.W. 1966. *Theory of self-reproducing automata*. Urbana, University of Illinois Press.
- [225] Newell, G.F., 1993. *A simplified theory of kinematic waves in highway traf?c*. Part (I), (II) and (III). *Transportation Research Part B* **27** (4), 281-313.
- [226] Newhouse, S.E., Ruelle, D. Takens, F. 1978. Occurrence of strange axiom A attractors near quasiperiodic flows on T^m , $m = 3$. *Communications in Mathematical Physics* **64**, 35-40.

- [227] S.-I. Niculescu, *Delay Effects on Stability*, Springer-Verlag, 2001.
- [228] O. Norman. Braking distance of vehicles from high speed. *Public Roads*. 27: 159-169, 1952.
- [229] Olami, Z., Feder, H. J. S. and Christensen, K. 1992. Self-organized criticality in a continuous, nonconservative cellular automaton modeling earthquakes. *Phys. Rev. Lett.* 68: 1244-1247.
- [230] Oldham, K.B., and Spanier, J. 2006. *The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*, Dover Books on mathematics, 234 p.
- [231] N. Olgac and R. Sipahi. An exact method for the stability analysis of time delayed LTI systems. *IEEE Trans. Autom. Cont.*, 47: 793-797, 2002.
- [232] O. E. Omel'chenko, Y. L. Maistrenko, P. A. Tass, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 044105 (2008).
- [233] O. E. Omel'chenko, M. Wolfrum, Y. L. Maistrenko, *Phys. Rev. E* **81**, 065201 (2010).
- [234] Oran E.B., *The fast Fourier transform*, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, USA, (1974).
- [235] G. Orosz and G. Stepan. Hopf bifurcation calculations in delayed systems with translational symmetry. *J. Nonlinear Sci.*, 14(6): 505-528, 2004.
- [236] G. Orosz, B. Krauskopf, and R. E. Wilson. Bifurcations and multiple traffic jams in a car-following model with reaction-time delay. *Physica D*, 211(3-4): 277-293, 2005.
- [237] G. Orosz, R. E. Wilson, and B. Krauskopf. Global bifurcation investigation of an optimal velocity traffic model with driver reaction time. *Phys. Rev. E*, 70(2): 026207, 2004.
- [238] G. Orosz and G. Stepan. Subcritical Hopf bifurcations in a car-following model with reaction-time delay. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 462(2073): 2643-2670, 2006.
- [239] Oustaloup, A., Sabatier, J., Lanusse, P., Malti, R., Melchior, P., Moreau, X., and Moze, M. 2008. An overview of the CRONE approach in system analysis, modeling and identification, observation and control, in: *Proceedings of the 17th World Congress IFAC*, Soul, Korea, July 6-11. 14254-14265.
- [240] Packard, N.H., Crutchfield, J.P., Farmer, J.D., and Shaw, R.S. 1980. Geometry from a time series. *Physical review Letters*, Vo. 45, No.9, 712-716.
- [241] Packard, N.H., Crutchfield, J.P., Farmer, J.D., Shaw, R.S. 1980. Geometry from a time series. *Physical Review Letters*, 45, 712.
- [242] Pecora, L.M., Carroll, T.L. 1990. Synchronization in chaotic systems. *Physical review letters* 64, 821.

- [243] L. M. Pecora, T. L. Carroll, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2110 (1998).
- [244] Peitgen, H.-O., and Richter, P.H., *The Beauty of Fractals*, Springer, New York.
- [245] Peixoto, M.M. 1962. Structural stability of two-dimensional manifolds. *Topology* 1, 101-20.
- [246] Perc, M. 2006. Introducing nonlinear time series in undergraduate courses, *Fizika A (Zagreb)* 15, 91-112.
- [247] Perc, M. 2006. Introducing nonlinear time series analysis in undergraduate courses, *Fizika A (Zagreb)* 15, 91-112.
- [248] Perko, L. 1991. *Differential equations and dynamical systems*, Springer, New York.
- [249] Pešić, L. 2002. *Opšta geologija – Endodinamika*, Univerzitet u Beogradu Rudarsko-geološki fakultet, Beograd, 204 str.
- [250] Petraš, I. 2008. A note on the fractional-order Chua's system, *Chaos, Solitons and Fractals*, 38, 140-147.
- [251] A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths, *Synchronization, A Universal Concept in Nonlinear Sciences*, Cambridge University Press, New York (2001).
- [252] A. Pikovsky, J. Kurths, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 775 (1997).
- [253] A. Pikovsky, Y. Maistrenko (Editors), *Synchronization: Theory and Application*, Kluwer Academic Publishers, Amsterdam (2003).
- [254] Pipes, L.A., 1953, *J. Appl. Phys.* **24**, 274,
- [255] Pipes, L.A. 1953. An Operational Analysis of Traffic Dynamics, *Journal of Applied Physics*, 24, 274–281.
- [256] Planeten Paultje, 2005, Godišnja konferencija nastavnika fizike, "Woudschotenconferentie Natuurkunde".
- [257] Pomeau, Y., Le Berre, M.: Critical speed-up vs critical slow-down: a new kind of relaxation oscillation with application to stick-slip phenomena, arXiv: 1107.3331v1, 2011.
- [258] Pomeau, Y., Manneville, P. 1980. Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems, *Communications in Mathematical Physics* 74, 189.
- [259] Popov, V.L., Grzempa, B., Starcevic, J., and Fabry, C. 2010. Accelerated creep as a precursor of friction instability and earthquake prediction. *Physical Mesomechanics*, 5–6, 283–291.
- [260] O. Popovych, C. Hauptmann, P. Tass, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 164102 (2005).
- [261] A. Pototsky, N. Janson, *Phys. Rev. E* **77**, 031113 (2008).

- [262] Prigogine, *Time, Dynamics and Chaos: Integrating Poincaré's "Non-Integrable Systems"*, Center for Studies in Statistical Mechanics and Complex Systems at the University of Texas-Austin, United States Department of Energy-Office of Energy Research, Commission of the European Communities (October 1990).
- [263] Prigogine, I., Herman, R. (1971), *Kinetic Theory of Vehicular Traffic*, New York: American Elsevier.
- [264] D. Purves, G.-J. Augustine, D. Fitzpatrick, W. C. Hall, A.-S. LaMantia, J. O. McNamara, L. E. White, *Neuroscience*, third edition, Sinauer Associates, Massachusetts (2004).
- [265] Qin, S.Q., Jiao, J.J., and Li, Z.G. 2006. Nonlinear evolutionary mechanisms of instability of plane-shear slope: catastrophe, bifurcation, chaos and physical prediction, *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 39, 59-76.
- [266] Qin, S.Q., Jiao, J.J., Wang, S.J. 2001. The predictable time scale of landslides. *Bulletin of Engineering Geology and Environment*, 59: 307-312.
- [267] Qin, S., Jiao, J.J., and Wang, S. 2002. A nonlinear dynamical model of landslide evolution, *Geomorphology* 43, 77-85.
- [268] Quorum, *Časopis za književnost*, godina VII, broj 3, Zagreb 1991. ISSN 0352-7654
- [269] M. I. Rabinovich, P. Varona, A. I. Selverston, H. D. I. Abarbanel, *Rev. Mod. Phys.* **78**, 1213 (2006).
- [270] D. V. Ramana Reddy, A. Sen, G. Johnson, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 5109 (1998).
- [271] Randall, R.B., *Application of B&K Equipment to FREQUENCY ANALYSIS*, Brüel & Kjær, 2nd ed., (1977).
- [272] A. Renart, P. Song, X.-J. Wang, *Neuron* **38**, 473 (2003).
- [273] A. Resting, M. Treiber. Influence of reaction times and anticipation on the stability of vehicular traffic flow. Invited session on Traffic Dynamics Under the Presence of Time Delays, 6th IFAC Workshop on Time-Delay Systems, L'Aquila, Italy, July 2006.
- [274] Rice, J.R. 1993. Spatio-temporal complexity of slip on a fault, *J. Geophys. Res.* 98, 9885-9907.
- [275] Rice, J. R., Lapusta, N., Ranjith, K. 2001. Rate and state dependent friction and the stability of sliding between elastically deformable solids, *J. Mech. Phys. Solids.* 49, 1865-1898.
- [276] H. Risken, *The Fokker-Planck Equation: Methods of Solutions and Applications*, second edition, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, (1989).
- [277] R. Rodriguez, H. Tuckwell, *Phys. Rev. E* **54**, 5585 (1996).

- [278] M. Rosenblum, A. Pikovsky, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 114102 (2004).
- [279] Rosenstein, M.T., Collins, J.J., and De Luca, C.J. 1993. A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets. *Physica D* 65, 117-134.
- [280] Ross, B. 1974. A brief history and exposition of fundamental theory of fractional calculus, In: "Fractional Calculus and Its Applications" (Proc. 1st Internat. Conf. held in New Haven, 1974; Ed. B. Ross), *Lecture Notes in Math.* 457, Springer-Verlag, N. York (1975), 1-37.
- [281] R. W. Rothery. Transportation Research Board (TRB) special report 165. In N. H. Gartner, C. J. Messner, and A. J. Rathi, (Eds.), *Traffic Flow Theory*, (2nd Ed.) Transportation Research Board of the National Academies. 1998.
- [282] Ruelle, D., Takens, F. 1971. On the nature of turbulence. *Communications in Mathematical Physics* 20, 167.
- [283] Ruina, A.L. 1983. Slip instability and state variable friction laws. *J. Geophys. Res.* 88, 10359-10370.
- [284] Rundle, J.B., Julian, B.R. and Turcotte, D.L. 1989. Are earthquakes deterministic or chaotic? *EOS, Trans. AGU* 70, 880.
- [285] Sabatier, J., Agrawal, O.P., and Tenreiro Machado, J.A. 2007. *Advances in Fractional Calculus: Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering*, Springer, 552 p.
- [286] A. Scott, *Theoretical Neuroscience: a Mathematical Primer*, Springer, New York (2002).
- [287] Scholz, C. 1998. Earthquakes and friction laws. *Nature* 391, 37-42.
- [288] J. Schwabedal, A. Pikovsky, *Phys. Rev. E* **81**, 046218 (2010).
- [289] N. W. Schultheiss, A. A. Prinz, R. J. Butera, *Phase Response Curves in Neuroscience, Theory, Experiment, and Analysis*, Springer Series in Computational Neuroscience, Vol. 6, Springer, New York (2012).
- [290] J. T. C. Schwabedal, A. Pikovsky, B. Kralemann, M. Rosenblum, *Phys. Rev. E* **85**, 026216 (2012).
- [291] J. T. C. Schwabedal, A. Pikovsky, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 204102 (2013).
- [292] Scheidegger, A.E. 1982. *Principles of Geodynamics*, Springer-Verlag, 395 p.
- [293] Scholz, C. H.: *The mechanics of earthquakes and faulting*, Cambridge University Press, 83-85, 2002.
- [294] W. Singer, C. Gray, *Annu. Rev. Neurosci.* **18**, 555 (1995).
- [295] R. Sipahi, F.M. Atay, and S.-I. Niculescu. Stability of traffic flow with distributed delays modeling the memory effects of the drivers. *SIAM Appl. Math.*, 68(3): 738-759, 2007.

- [296] R. Sipahi and N. Olgac, Complete stability robustness of third-order LTI multiple time-delay systems. *Automatica*, 41: 1413-1422, 2005.
- [297] R. Sipahi. Cluster Treatment of Characteristic Roots, CTCR, A Unique Methodology for the Complete Stability Robustness Analysis of Linear Time Invariant Multiple Time Delay Systems Against Delay Uncertainties, Ph.D. Thesis, University of Connecticut, Mechanical Engineering Department, August 2005.
- [298] R. Sipahi and S.-I. Niculescu. Some remarks on the characterization of delay interactions in deterministic car following models. MTNS 2006, Kyoto, Japan.
- [299] R. Sipahi and S.-I. Niculescu. Stability study of a deterministic car following model under multiple delay interactions. Invited session on Traffic Dynamics Under the Presence of Time Delays, 6th IFAC Workshop on Time-Delay Systems, L'Aquila, Italy, July 2006.
- [300] R. Sipahi, S.-I., Niculescu, and F. Atay. Effects of Short-Term Memory of Drivers on Stability Interpretations of Traffic Flow Dynamics. American Control Conference, New York, 2007.
- [301] R. Sipahi, and S.-I. Niculescu. Chain Stability in Traffic Flow with Driver Reaction Delays. American Control Conference (ACC), Seattle, June 2008.
- [302] R. Sipahi, S.-I. Niculescu, and Delice, 1.1. Asymptotic Stability of Constant Time Headway Driving Strategy with Multiple Driver Reaction Delays. American Control Conference, St Louis, June 2009.
- [303] Skempton, A.W. 1964. Long-term stability of clay slopes, *Geotechnique* 14, 77-102.
- [304] Skempton, A.W. 1985. Residual strength of clays in landslides, folded strata and the laboratory, *Geotechnique* 35, 3-18.
- [305] Petar Skok, *Etimologijski rečnik hrvatskoga ili srpskoga jezika*, Jugoslavenska akademija znanosti i umjetnosti (JAZU), Knjiga Treća, Zagreb, (1973).
- [306] Smith S., *The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing*, California Technical Publishing. San Diego, California, (1999).
- [307] Small, M. 2005. Applications in Physics, Physiology and Finance. *Nonlinear Science Series A*, vol. 52. World Scientific.
- [308] O. Sporns, *Networks of the brain*, MIT Press, Cambridge (2011).
- [309] Sprott, J.C. 2003. *Chaos and time-series analysis*. Oxford University Press. Oxford.
- [310] Srivastava, H.N., Bhattacharya, S.N. and Sinha Roy, K. 1996. Strange attractor Characteristics of earthquakes in Shillong Plateau and adjoining region. *Geophys.Res.Lett.* 23, 3519-3522.

- [311] Srivastava, H.N., and Bhattacharya, S.N. 1998. Nonchaotic earthquake occurrence near Oroville reservoir, California. *Curr. Sc.*, v.75, pp.1074-1078.
- [312] G. Stepan. *Retarded Dynamical Systems: Stability and Characteristic Function*. New York: Longman Scientific & Technical, co-publisher John Wiley & Sons Inc., US., 1989.
- [313] D. A. Steyn-Ross, M. Steyn-Ross (Editors), *Modeling Phase Transitions in the Brain*, Springer Series in Computational Neuroscience, Vol. 4, Springer, New York (2010).
- [314] Strogatz, S.H. 1986. The mathematical structure of the human sleep-wake cycle. *Lecture Notes in Biomathematics*, Vol. 69, Springer, New York.
- [315] Strogatz, S.H. 1987. Human sleep and circadian rhythms: a simple model based on two coupled oscillators. *Journal of Mathematical Biology* 25, 327.
- [316] Strogatz, S. 1994. *Nonlinear dynamics and chaos with applications to physics, biology, chemistry and engineering*. Perseus Books, Reading, Massachusetts.
- [317] S. H. Strogatz, *Nature* **394**, 316 (1998).
- [318] S. Strogatz, D. M. Abrams, B. Eckhardt, E. Ott, *Nature (London)* **438**, 43 (2005).
- [319] Y. Sugiyama, and H. Yamada. Simple and exactly solvable model for queue dynamics. *Phys. Rev. E*, 55: 7749-7752, 1997.
- [320] X. Sun, M. Perc, M., Q. Lu, J. Kurths, *Chaos* **20**, 033116 (2010).
- [321] Sunarić, D., i Nedeljković, S. 2008. Inženjerska seizmologija. Skripta za studente Rudarsko-geološkog fakulteta, Beograd.
- [322] Tadaki, S., M. Kikuchi, Y. Sugiyama and S. Yukawa, *J. Phys. Soc. Jap.* **67**, 2270 (1998),
- [323] Takens, F. 1981. Detecting strange attractors in turbulence. In D. A. Rand and L.-S. Young. *Dynamical Systems and Turbulence*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 898. Springer-Verlag. 366-381.
- [324] Takens, F. 1981. Detecting strange attractors in turbulence. In D. A. Rand and L.-S. Young. *Dynamical Systems and Turbulence*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 898. Springer-Verlag. 366-381.
- [325] S. Tanabe, K. Pakdaman, *Phys. Rev. E* **63**, 031911 (2001).
- [326] Turcotte, D.L., and Schubert, G. 1971. Structure of the olivine-spinel phase boundary in the descending lithosphere, *Journal of Geophysical Research*, 76, 7980-7987.
- [327] P. A. Tass, *Phase Resetting in Medicine and Biology*, Stochastic Modelling and Data Analysis, Springer, Berlin Heidelberg (2007).

- [328] Tavazoei, M.S., and Haeri, M. 2007. A necessary condition for double scroll attractor existence in fractional-order systems, *Physics Letters A*, 367, 102-113.
- [329] Tavazoei, M.S., and Haeri, M. 2008. Limitations of frequency domain approximation for detecting chaos in fractional order systems, *Nonlinear Analysis*, 69, 1299-1320.
- [330] Tavazoei, M.S, and Haeri, M. 2009. A note on the stability of fractional order system, *Mathematics and Computers in Simulation*, 79, 1566-1576.
- [331] Thom, R. 1975. *Structural stability and morphogenesis - an outline of a general theory of models*, W.A. Benjamin Inc, Reading, Massachusetts, 348 p.
- [332] Thompson, J.M.T., Stewart, H.B. 1986. *Nonlinear dynamics and chaos*, Wiley, Chichester, England.
- [333] Tiwari, R.K., Sri Kakshmi, S. and Rao, K.N.N. 2004. Characterization of earthquake dynamics in northeastern India regions: a modern nonlinear forecasting approach. *Pure Appl.Geophys.* 161, 865-880.
- [334] M. Treiber, A. Hennecke, and D. Helbing. Congested traffic states in empirical observations and microscopic simulations. *Phys. Rev. E*, 62: 1805-1824, 2000.
- [335] M. Treiber and D. Helbing. Memory effects in microscopic traffic models and wide scattering in flow-density data. *Phys. Rev. E*, 68: 2003.
- [336] M. Treiber, A. Hennecke, and D. Helbing. Congested traffic states in empirical observations and microscopic simulations. University of Stuttgart, Stuttgart <http://www.theo2.physik.uni-stuttgart.de/treiber/>, August 7 2004.
- [337] M. Treiber, A. Kesting and D. Helbing. Delays, inaccuracies and anticipation in microscopic traffic models. *Physica A*, 360: 71-88, 2006.
- [338] T.J. Triggs. Driver brake reaction times: Unobtrusive measurement on public roads. *Public Health Rev.*, 15: 275-290, 1987.
- [339] I. Tsuda, *Behav. Brain Sci.* **24**, 793 (2001).
- [340] L. Tsimring, A. Pikovsky, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 250602 (2001).
- [341] Tullis, T.E., and Weeks, J.D. 1986. Constitutive behaviour and stability of frictional sliding of granite, *Pure and Applied Geophysics* , 124, 383-414.
- [342] J. Velazquez, R. Wennberg (Editors), *Coordinated Activity in the Brain: Measurements and Relevance to Brain Function and Behavior*, Springer, New York (2009).
- [343] T. P. Vogels, K. Rajan, L. F. Abbott, *Annu. Rev. Neurosci.* **28**, 357 (2005).
- [344] Milan Vujaklija, *Leksikon stranih reči i izraza*, Prosveta, Beograd, (1954).
- [345] Whitham, G.B., (1990) *Exact solutions for a discrete system arising in traffic flow*, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **428** 49-69.

- [346] Whitney, 1936 Whitney, H. 1932. Congruent graphs and the connectivity of graphs, American Journal of Mathematics (The Johns Hopkins University Press) 1, 150–168.
- [347] J. White, J. Rubinstein, A. Kay, *Trends in Neurosci*, **23**, 131 (2000).
- [348] Wiggins, S. 1990. Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos, Springer, New York.
- [349] S. Wiggins, Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos, second edition, Springer, New York, Cambridge (2000).
- [350] K. Wiesenfeld, P. Colet, S. Strogatz, Phys. Rev. Lett. **76**, 404 (1996).
- [351] Wilson, R.E., *Mechanisms for spatio-temporal pattern formation in highway traffic models*, Phil. Trans. R. Soc. A (2008), **366**, pp. 2017-2032.
- [352] Wolf, A., Swift, J., Swinney, H., and Vastano, J. 1985. Determining Lyapunov exponents from a time series. Physica D, Vol. 16: 285-317.
- [353] Wolfram, 1986., *Tables of cellular automaton properties*
- [354] Wolfram, 1994.,
- [355] Wyss, M., and Toya, Y. 2000. Is background seismicity produced at a stationary Poissonian rate? Bull. Seism. Soc. Am. 90, 1174-1187.
- [356] Xie, L., Wnag, X., Zhang, M., and Li, Z. 2012. The catastrophe analysis of surrounding rock landslides for subsea tunnel on fault zone. The Electronic Journal of Geotechnical Engineering, 17/V, 3179-3191.
- [357] A. Yacomotti, P. Monnier, F. Raineri, B. Ben Bakir, C. Seassal, R. Raj, J. Levenson, Phys. Rev. Lett. **97**, 143904 (2006).
- [358] Yang, D., Yang, P. and Zhang, C. 2012. Chaotic characteristic analysis of strong earthquake ground motions. International journal of bifurcation and chaos, Vol. 22, No.3. 1250045-1-16.
- [359] M. Yeung, S. Strogatz, Phys. Rev. Lett. **82**, 648 (1999).
- [360] M. Yi, L. Yang, Phys. Rev. E **81**, 061924 (2010).
- [361] K. Yoshimura, K. Arai, Phys. Rev. Lett. **101**, 154101 (2008).
- [362] Yukawa, S., and Kikuchi, M., J. Phys. Soc. Jap. **64**, 35 (1995),
- [363] Yukawa, S., and Kikuchi, M., J. Phys. Soc. Jap. **65**, 916 (1996),
- [364] Yukawa, S., and Kikuchi, M., 1998. god.,
- [365] M. A. Zaks, A. B. Neiman, S. Feistel, L. Schimansky-Geier, Phys. Rev. E **68**, 066206 (2003).
- [366] J. Zhang and R Ioannou. Control of Heavy-Duty Trucks: Environmental and Fuel Economy Considerations. University of Southern California, Los Angeles T04203, 2004.

Glava 26

Rečnik

Englesko-srpski rečnik

engleski	srpski
Asperities	Hrapave površi, neravnine
Attractor	Atraktor
Baker map	Pekarsko preslikavanje
Basin of attraction	Baza atrakcije
Behavioral force	Bihevioralna sila
Bifurcation	Bifurkacija
Blow-up	Blou-ap fenomen
Bottleneck	Usko grlo
Butterfly effect	Efekat leptira
Car-following models	Modeli prati vođu
Cellular automata	Ćelijski automati
Coarse-grained description	Grubo-zrnasti opis
Cobweb construction	Konstrukcija paukove mreže
Codimension	Kodimenzija
Correlation dimension	Korelaciona dimenzija
Coupled-map lattice models	Rešetka modeli (mrežni modeli sa spregnutim preslikavanjem)
Coupled systems	Spregnuti sistemi
Cusp catastrophe	Šiljak-katastrofa
Cusp point	Tačka šiljak
Damping	Prigušenje

nastavak na sledećoj strani

engleski	srpski
Degenerate node	Degenerativni čvor
Delay embedding theorem	Teorema o razvijanju u određenom intervalu
Delay differential equation	Diferencijalna jednačina sa kašnjenjem
Delay embedding theory	Teorema o uranjanju u fazni prostor
Dense set	Gusti skup
Density waves	Talasi gustine
Devils' staircase	Đavolje stepenice
Difference equation	Diferencna jednačina
Discrete dynamical system	Diskretni dinamički sistem
Dragon curve	Zmajolika kriva
Driven oscillator	Oscilator pod dejstvom prinudne sile
Eigenvalue	Sopstvena vrednost
Eigenvector	Sopstveni vektor
Embedding	Razvijanje (potapanje, uranjanje)
Entrainment	Usklađivanje
Excitability	Ekscitabilnost
False nearest neighbor method	Metoda prividno najbliže susedne vrednosti
Fiber-bundle model	Model svežnja vlakana
Fixed point	Fiksna (singularna) tačka
Flash heating	Zagrevanje tela
Fold	Prevoj
Fold bifurcation	Prevojna bifurkacija
Follow the leader	Prati vođu
Fractal set	Fraktalni skup
Frequency locking	Fazno-zaključavanje
Frictional melting	Frikciono topljenje
Generating function theory	Funkcionalna teorija
Generic property	Tipično svojstvo
Ghost	Duh
Headway	Rastojanje sleđenja
Heaviside step function	Hevisajdova funkcija
Henon map	Enoovo preslikavanje
Improper node	Fiksna tačka sa realnim jednakim sopstvenim vrednostima

nastavak na sledećoj strani

engleski	srpski
Intermittency	Intermitentnost
Invariant measure	Invarijantna mera
Invertible map	Povratno preslikavanje
Jam	Zagušenje
Limit cycle	Granični ciklus
Linearisation	Linearizacija
Logistic map	Logističko preslikavanje
Lubrication by silica gel production	Stvaranje silikatne želatinske mase duž površine kontakta
Lyapunov exponent	Ljapunovljev eksponent
Manifold	Mnogostrukost
Measure-preserving map	Preslikavanje sa očuvanjem mere
Minimum embedding dimension	Minimalno prihvatljiva dimenzija rekonstruisanog faznog prostora
Neighbourhood	Okolina
Noise	Šum
Non-autonomous system	Neautonomni sistem
On-ramp	Priključak na autoputu
Optimal embedding delay	Optimalni vremenski interval u rekonstrukciji faznog prostora
Period-doubling bifurcation	Bifurkacija sa udvostručavanjem perioda
Periodic function	Periodična funkcija
Perturbation	Poremećaj
Phase drift	Fazno nagomilavanje
Phase-locked	Fazno-zaključan
Phase-locked solution	Fazno zaključano rešenje
Phase portrait	Fazni portret
Pitchfork bifurcation	Vilasta bifurkacija
Potential well	Potencijalna jama
Power spectrum	Spektar snage
Power law	Eksponencijalni zakon
Predator-prey equations	Jednačine predator-lovina
Random fluctuations	Slučajne promene

nastavak na sledećoj strani

engleski	srpski
Relaxation oscillations	Relaksacione oscilacije
Renormalisation group theory	Teorija renormalizacije grupa
Repellor	Odbojna fiksna tačka (repeler)
Saddle	Sedlo
Saddle-node bifurcation	Sedlo-čvor bifurkacija
Self-similarity	Samo-sličnost
Sink	Privlačna fiksna tačka
Source	Nestabilna fiksna tačka sa dve pozitivne sopstvene vrednosti
Spiral	Fokus
Square-root scaling law	Zakon skaliranja u obliku kvadratnog korena
Stick-slip motion	Trzanje
Stop-and-go state	Stanje kreni-stani
Strange attractor	Strani (čudni, neobični) atraktor
Subcritical bifurcation	Subkritična bifurkacija
Subcritical pitchfork bifurcation	Potkritična vilasta bifurkacija
Submicron grains worn out	Stvaranje granularnog sloja na kontaktu usled trenja pri velikoj brzini
Supercritical bifurcation	Superkritična bifurkacija
Supercritical pitchfork bifurcation	Natkritična vilasta bifurkacija
Thermal pressurization	Termalni pritisci
Traffic jam	Saobraćajno zagušenje
Trajectory	Trajektorija
Transient chaos	Tranzijentni (prolazni) haos
Trapping region	Zatvorena oblast ("oblast zarobljavanja")
Turning-point bifurcation	Bifurkacija sa povratnom tačkom
Two fractal overlap model	Model preklapanja dve fraktalne površi
Velocity strengthening behavior	Jako ponašanje materijala

nastavak na sledećoj strani

engleski

Velocity weakening behavior

Velocity-weakening friction law

Zero-eigenvalue bifurcation

srpski

Slabo ponašanje materijala

Slabi zakon trenja

Bifurkacije sa svojstvenom vrednošću jednakoj nuli

Srpsko-engleski**srpski**

aksijalna sila

aksijalni moment inercije

aksijalno naprezanje

deformacija

dilatacija

dopušteni napon

elastična deformacija

glatka površ

glavni moment

glavni napon

gredni nosač

izvijanje

jezgro preseka

klizač

koeficijent trenja

koncentrično opterećenje

kontinualne (neprekidno rasporedjene) sile

konzola

krutost

kruto telo

lančanica

moment savijanja

moment uvijanja

moment inercije

napon pri lomu

nepokretan (zglob) oslonac

neutralna osa

engleski

normal force

axial moment of inertia

axial load

deformation

strain

allowable stress,
permissible stress

elastic deformation

frictionless

(smooth) surface

principal moment

principal stress

beam

buckling

kern of a section

collar

coefficient of friction

concentric load

distributed load

console, cantilever

rigidness, stiffness

rigid body

cable

bending moment

torsional moment

moment of inertia

racking stress

pin, hinge, bearing,
joint

neutral axis

nastavak na sledećoj strani

srpski	engleski
normalni napon	normal stress
obična lančanica	catenary
otpornost materijala	strength of materials
parabolična lančanica	parabolic cable
pokretan (zglob) oslonac	support
polarni moment inercije	polar moment of inertia
poluprečnik inercije	radius of inertia
ram (okvir)	frame
ravan obrtanja	plane of rotation
ravan opterećenja	plane of applied load
ravan savijanja	plane of bending
ravan smicanja	plane of shear
ravnoteža	equilibrium
reakcije veza	forces of constraints, reaction forces
rešetka	truss, lattice
savijanje	bending
sila trenja	friction force
smičući napon	shear stress
spreg sila	couple
srednji napon	average stress
težište	center of gravity
transverzalna sila	shear force
trenje	friction
ugao uvijanja	torsional angle
ukleštenje	fixed support
ukupni napon	equivalent stress
unutrašnje sile	internal forces
uvijanje	torsion
veze	constraints
vitkost	fitness

Beleška o autorima

Dr **DRAGOSLAV S. KUZMANOVIĆ**. Rođen je 4.7.1949. godine u Beogradu. Diplomirao je 1974. godine na Prirodno-matematičkom fakultetu (sada Matematički fakultet) Univerziteta u Beogradu, na Institutu za mehaniku.

Zaposlio se 1976. godine, kao asistent pripravnik, na Rudarsko-geološkom fakultetu. Na istom fakultetu izabran je 1998. god. za redovnog profesora za predmete: Mehanika i Otpornost materijala. Na Saobraćajni fakultet prelazi 2001. god.

Predavao je na više fakulteta Beogradskog Univerziteta i to: Mehaniku 1 na Tehničkom fakultetu u Boru (1987/88.), Otpornost materijala na Matematičkom fakultetu (1993/94), Na Rudarsko-geološkom fakultetu, po prelasku na Saobraćajni fakultet: Metode matematičke fizike i Spektralnu analizu, na smeru za Geofiziku, Dinamiku fluida, na smeru za Ventilaciju i zaštitu, Teoriju elastičnosti sa reologijom, na smeru Mehanika stena.

U svom dosadašnjem radu rukovodio je i učestvovao u realizaciji više naučnih i stručnih projekata. Bio je član u više komisija za ocenu, pregled i odbranu magistarskih i doktorskih disertacija na Rudarsko-geološkom fakultetu u Beogradu, na Mašinskom fakultetu u Beogradu i Kragujevcu, kao i na Fakultetu tehničkih nauka Univerziteta u Novom Sadu.

Autor je sedam udžbenika, tri monografije i preko sedamdeset publikovanih ili saopštenih radova. Radovi su iz oblasti mehanike kontinuuma (porozni materijali, mešavine, suspenzije). Teorija razrađena u ovim radovima primenjena je u mehanici tla (generalisan Darsijev zakon, jednačina konsolidacije). Pored toga mehaniku kontinuuma primenjuje u nekim oblastima rudarstva (ventilacija u rudnicima, naftna industrija). Jedan broj radova bavi se primenom klasične mehanike (kinematika, dinamika) na probleme transporta u rudnicima.

Dr **NEBOJŠA VASOVIĆ**. Rođen je 22.09.1963.g. u Beogradu. Diplomirao je 1990.g. na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Beogradu. Zaposlio se 1991.g. kao asistent-pripravnik na Mašinskom fakultetu u Kraljevu. 1998.g. prelazi na Rudarsko-geološki fakultetu, gde je 2010.g. izabran za vanrednog profesora za grupu predmeta iz Mehanike na Katedri za primenjenu matematiku.

Na osnovnim studijama drži nastavu iz predmeta: Mehanika 2, Mehanika fluida, Nauka o čvrstoći; na master studijama: Mehanika fluida, a na doktorskim studijama: Metode analize nelinearnih vremenskih serija u inženjerstvu i Fraktali u geomehanici. Autor je preko 30 radova publikovanih u referentnim međunarodnim časopisima, koautor Zbirke zadataka iz Kinematike, kao i većeg broja saopštenja sa međunarodnih i domaćih naučnih i stručnih skupova objavljenih u celosti ili izvodu.

Dr **SRĐAN KOSTIĆ**. Rođen je 19.12.1986.godine u Leskovcu. Diplomirao je 2010.g. na smeru za Geotehniku, na Rudarsko-geološkom fakultetu Univerziteta u Beogradu kao student generacije. Iste godine upisao je doktorske studije na Rudarsko-geološkom fakultetu, a 2013.g. odbranio je doktorsku disertaciju pod nazivom *Nelinearno dinamičko modelovanje potresa izazvanih promenom naponskog stanja pri izradi horizontalnih podzemnih prostorija*. Od novembra 2012.g. zaposlen na Rudarsko-geološkom fakultetu u zvanju istraživača-saradnika. Od školske 2012/2013 angažovan kao honorarni saradnik na Građevinsko-arhitektonskom fakultetu Univerziteta u Nišu, na vežbama iz predmeta "Inženjerska geologija". Autor je 5 radova objavljenih u referentnim međunarodnim časopisima, 3 rada u domaćim časopisima i preko 20 saopštenja sa međunarodnih i domaćih naučnih i stručnih skupova objavljenih u celosti ili izvodu. Recenzent je u međunarodnom časopisu "Journal of Geological Resource and Engineering".

Dr **SRBOLJUB SIMIĆ**. Rođen 10.07.1968., diplomirao je 1993. godine na Mašinskom odseku Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu. Magistarski rad odbranio je je 1997. godine na Matematičkom fakultetu u Beogradu, a doktoru disertaciju 1999. godine na Fakultetu tehničkih nauka u Novom Sadu. Od 1994. godine zaposlen je na Katedri za mehaniku Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu i od tada je prošao kroz sva saradnička i nastavnička zvanja. Redovni je profesor od 2010. godine.

U nastavnoj delatnosti je angažovan na predmetima iz oblasti mehanike, koje predaje studentima različitih odseka Fakulteta tehničkih nauka (mašinstvo, građevinarstvo, elektrotehnika, inženjerstvo zaštite životne sredine) i studentima primenjene matematike na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu. Autor je dva udžbenika koji služe kao osnovni udžbenici za nastavne predmete.

U istraživačkom radu je u prvo vreme bio usmeren na istraživanja u oblasti analitičke mehanike. Bavio se primenama varijacionog računa i analizom zakona konzervacije dinamičkih sistema pomoću teoreme Neter. Potom se posvetio proučavanju neravnotežnih procesa u razređenim gasovima, kako sa aspekta mehanike neprekidnih sredina, tako i sa aspekta kinetičke teorije gasova. Posebno se bavi primenama teorije dinamičkih sistema u analizi strukture udarnih talasa. Na ovom polju je ostvario uspešnu saradnju sa renomiranim istraživačima iz inostranstva i imao niz studijskih boravaka na stranim univerzitetima. Kao istraživač je bio uključen na nekoliko domaćih projekata, a u poslednjem istraživačkom ciklusu rukovodi projektom iz oblasti mehanike u okviru fundamentalnih istraživanja. Takođe je koordinator bilateralnog projekta (Srbija-Francuska) koji je usmeren na istraživanja u oblasti kinetičke teorije gasova.

Dr **IGOR FRANOVIĆ** rođen je 25.2.1979. godine u Beogradu. Diplomirao je 2002. godine na smeru Teorijska fizika na Fizičkom fakultetu u Beogradu. Magistrirao je 2011. godine, dok je doktorsku disertaciju "Kolektivna dinamika i samorganizacija stohastičkih neuronskih sistema pod uticajem sinaptičkog kašnjenja" iz oblasti Statistička fizika odbranio na Fizičkom fakultetu u Beogradu 2013. godine. Od 2004.-2006. g. angažovan je na projektu kao stipendista Ministarstva nauke Republike Srbije. Na matičnom fakultetu zaposlen je od 2008. godine, gde je trenutno u naučnom zvanju istraživača-saradnika. Nosilac je stipendije nemačke DAAD fondacije za 2012. Dobitnik je nagrade za najboljeg mladog istraživača na Fizičkom fakultetu u Beogradu za 2013. godinu. Autor je 15 radova objavljenih u vodećim međunarodnim časopisima, kao i više saopštenja na domaćim i međunarodnim konferencijama.

Dr **INES GROZDANOVIĆ** rođena je 12.02.1967. god. u Beogradu. Prvu Beogradsku gimnaziju je završila u Beogradu 1985. god. Iste godine je upisala studije na PMF-u u Beogradu na Grupi za Mehaniku. Paralelno sa školovanjem bavila se profesionalno košarkom igrajući za KK "Crvena Zvezda" 8 godina i KK "Voždovac" 4 godine, i 2 godine u klubovima u Atini (Grčka) kao i za reprezentaciju SFRJ (sa statusom vrhunskog sportiste).

Poslediplomske studije na grupi za Mehaniku, na smeru "Mehanika čvrstih tela" upisala je 1994. godine.

Od 1994-1995. godine radila je u računarskom centru firme "Seabulk shipping", Pirej (Grčka). Od 1995-1996. bila je stipendista Ministarstva za nauku i tehnologiju u "Lola institutu". Od 01.02.1996. je zaposlena na Rudarsko-geološkom fakultetu u Beogradu. na Katedri za primenjenu matematiku.

Magistrirala je 13.07.1999. godine na Matematičkom fakultetu u Beogradu na Grupi za Mehaniku sa radom pod naslovom *O nekim mešovitim shemama metode konačnih elemenata u teoriji elastičnosti*. Doktorirala je 19.04.2007. godine na Matematičkom fakultetu u Beogradu na Grupi za Mehaniku sa disertacijom pod naslovom *Stabilnost i bifurkacije tipičnih ekscitabilnih sistema sa kašnjenjem*.

U zvanje docenta je izabrana 17.3.2008. za užu naučnu oblast Mehanika, a u zvanje vanrednog profesora izabrana je decembra 2012. Za užu naučnu oblast Mehanika. Od izbora u zvanje docenta drži nastavu i vežbe na predmetima Mehanika I (II semestar rudarski odsek), Otpornost materijala (III semestar Rudarski odsek), Tehnička mehanika (III semestar geološki odsek, i Master studije geološki odsek) i Nelinearna dinamika na doktorskim studijama (rudarski i geološki odsek). Uža oblast interesovanja su nelinearni dinamički sistemi i njihova primena u raznim oblastima.

Autor je dva udžbenika za studente Rudarsko geološkog fakulteta, i više publikovani i saopštenih naučno-stručnih radova, a učestvovala je (i trenutno učestvuje) u reaizaciji više naučnih projekata. Član je Srpskog društva za Mehaniku.

Dr **KRISTINA TODORVIĆ-VASOVIĆ** rođena je u Pte de la Courneuv, Paris, 15.11.1959. godine. Diplomirala je 1987.g. na Prirodno-matematičkom fakultetu u Beogradu, na smeru Astrofizika. Doktorsku disertaciju *Univerzalnost fraktalne strukture kod Hamiltonovih sistema* odbranila je januara 2005. godine na Fizičkom fakultetu u Beogradu. Od oktobra 1990. godine zaposlena je kao profesor fizike u Petoj beogradskoj gimnaziji. Od oktobra 1994. godine bila je honorarni asistent na Saobraćajnom fakultetu u Beogradu. 1996. godine postaje stručni saradnik za predmet Fizika na Farmaceutskom fakultetu u Beogradu, a 1998. godine postaje asistent za predmet Fizika u Institutu za Matematiku i Fiziku Farmaceutskog fakulteta u Beogradu. 2012.g. izabrana je za vanrednog profesora na Farmaceutskom fakultetu. Autor je više od 20 radova objavljenih u referentnim međunarodnim časopisima, koautor Praktikuma iz Fizike, kao i više saopštenja na domaćim i međunarodnim konferencijama.

BILJANA RANKOVIĆ PLAZINIĆ. Rođena 3.1.1986. godine u Valjevu. Diplomirala 2009. godine na Saobraćajnom fakultetu u Beogradu, smer drumski i gradski saobraćaj i transport. Doktorske studije je upisala 2010. godine na matičnom fakultetu, kao stipendista Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja. U svom dosadašnjem radu učestvovala je u realizaciji nekoliko projekata. Autor je radova objavljenih u domaćim stručnim časopisima ili saopštenih na međunarodnim skupovima, od kojih većina pripada oblasti planiranja saobraćaja za ruralna područja.

Registar pojmov

- amplitudska karakteristika, 439
- asimptotski stabilna
 - fiksna tačka, 73
- atraktor, 163
- atraktori, 22
- autonomne jednačine, 17

- Baridž-Knopof model, 270
 - bloka sa oprugom, 274
- bifurkacija, 33, 115
 - sa povratnom tačkom, 35
 - sa tačkom preokreta, 35
- bifurkacija kodimenzijske-1, 49
- bifurkacija kodimenzijske-2, 49
- bifurkacija unapred, 38
- bifurkacija unazad, 41
- bifurkaciona kriva, 486
- bifurkacione jednačine, 118
- bifurkacione tačke, 33
- bifurkacioni dijagram, 35, 118, 526
- blou-ap, 484

- ciklus perioda 2, 179
- čudni atraktor, 165
- ćelijski automati, 271

- degenerisani čvor, 498
- Dejvisovi modeli, 261
- delimični zbir, 463
- deterministički kaos, 102
- diferencijalna jednačina
 - Beselova, 468
 - Ležandrova, 468
- diferencijalne jednačine, 15
 - frakcione, 421
 - rešavanje pomoću redova, 467
- diferencne jednačine, 15
- diferencne jednačine, 175
- dijagrami stabilnosti, 49
- dimenzija, 207
- dimenzija objekta, 208
- disipativan sistem, 153
- disipativni sistemi, 218
- Diterihov zakon, 281
- duh, 119
- Dulakov kriterijum, 99
- đavolje stepenice, 202

- entropija
 - Kolmogorova, 162

- fazna karakteristika, 439
- fazna ravan, 46
- fazni portret, 25
- fazni portret sistema, 71
- fazni prostor, 17
- fazno kretanje, 66
- fazno nagomilavanje, 66
- fazno-zaključano rešenje, 136
- fenomenološki modeli, 270
- fiksne tačke, 22
 - nestabilne, 22
 - stabilne, 22
- fiziološko zaostajanje, 255
 - podela, 256

- flip bifurkacija, 524
- Flokeovi multiplikatori, 140
- Floquet multiplier, 140
- fold-bifurkacija, 35
- formule Krilova, 460
- fraktalin skupovi, 102
- frekvencijska rezolucija DFT, 444
- frekvencijski odziv, 439
- funkcija
 - analitička, 467
- funkcija Ljapunova, 99
- funkcija optimalne brzine, 244, 260
- Furijev red, 112
- Furijev transformacioni par
 - diskretnih signala, 441
- Furijeova transformacija
 - diskretnog signala, 440
- Furijeovi koeficijenti, 112

- geodinamika, 269
- globalna stabilna tačka, 480
- globalno stabilan, 155
- globalno stabilna
 - fiksna tačka, 479
- granični ciklus, 95
- granica oblasti privlačenja, 90
- grubo-zrnasti opis, 235
- Gutenberg-Rihter zakon, 274

- Hajvejeva kriva, 205
- haos, 9, 163
- Hartman-Grobmanova teorema, 86
- HDM model, 262
- Hindmarsh-Rose model, 352
- hiperhaos, 162
- hipoteza
 - o elastičnom odgovoru tla, 272
- histerezis, 40
- homoklinička bifurkacija, 131
- homokliničke orbite, 93
- homoklinička orbita, 118

- IDM model, 261
- inženjerska geodinamika, 270
- integratori, 349

- intermitentni put
 - ka haosu, 184
- intermitentnost, 183
- interval sleđenja, 236
- invertovana bifurkacija, 41
- inverzna Furijeova transformacija, 441
- iterirana preslikavanja, 15
- izvori, 22

- Jakobijan, 85
- Jakobijeva matrica, 85
- jednačina kontinuiteta, 149
- jednodimenzionalni sistemi, 21

- K* entropija, 162
- kanonski model, 349
- Kantorov skup, 199, 224
 - parnih petina, 207
 - topološki, 207
- Kantorov skup srednjih trećina, 207
- Kantorova funkcija, 200
- kapacitet, 208
- karakteristična vremenska skala, 28
- karakteristični multiplikatori, 140
- katastrofa, 51
- kliženje, 299
- klizišta, 269
- koeficijent osetljivosti, 243
- kompromisna frekvencija, 136
- kontrolni parametar, 34
- konvergencija
 - poluprečnik, 465
- konzervativni sistemi, 91
- korelaciona dimenzija, 209
- kritično usporavanje, 38
- kriva Kohove, 203
- Kulon-Morov zakon trenja, 299
- kvaziperiodičnost, 135

- Lenardova jednačina, 510
- linearan sistem, 16
- Ljapunovljevi eksponent, 160
- Ljapunovljeva funkcija, 155
- logistička jednačina, 26
- lokalno stabilna

- fiksna tačka, 479
- Lorenove jednačine, 143
- Lotka-Voltera model, 87
- Maki-Glasov model, 165
- makroskopski haos, 12
- makroskopski modeli, 235
- mehaničko zaostajanje, 255
- meka bifurkacija, 38
- memorijski efekti
 - kontaktne površine, 292
- Mengerov sunder, 204, 205
- metastabilni haos, 520
- metoda dva vremena, 109
- mikroskopski haos, 12
- mikroskopski modeli, 235
- model
 - ćelijski automati (CA), 238
 - kinetičko-teorijski, 238
 - optimalne brzine, 244
 - prati vođu, 238, 242
 - rešetka, 244
 - sleđenja vozila, 238
- model inteligentnog vozača, 261
- model optimalne brzine, 259
- modelari, 252
- multifraktali, 210
- multifraktalni spektar, 212
- natkritična bifurkacija, 37
- neautonomne jednačine, 17
- neautonomni sistemi, 17
- neceli izvod, 423
- nelinearan sistem, 16
- nestabilan ciklus, 95
- nestabilna mnogostrukost, 493
- nestabilne fiksne tačke, 25
- nestabilnost
 - saobraćajnog toka, 233
- neutralno stabilna tačka, 73
- normalna forma, 35
- oblast privlačenja, 90
- ojačanje opruge, 513
- omekšavanje opruge, 513
- Omori-Utsu zakon, 275
- opasna bifurkacija, 41
- orbitalni dijagram, 180
- osnovni dijagram, 233
- parcijalna suma, 463
- paukova mreža, 139
- paukova mreža, 177
- Peanova kriva, 206
- pekarsko prelikavanje, 532
- periodični prozori, 181
- Poenkareov presek, 137
- Poenkareovo preslikavanje, 137
 - linearizovano , 140
- poluprečnik
 - konvergencije, 465
- polustabilan ciklus, 95
- polustabilna tačka, 482
- ponori, 22
- potencijal, 31
- potkovičasto preslikavanje, 217
- potkritična bifurkacija, 37
- površ energije, 94
- preslikavanja, 175
- preturbulencija, 520
- prevojna bifurkacija ciklusa, 129
- privlačna fiksna tačka, 72
- protok, 236
- PRZ zakon trenja, 282
- rastojanje sleđenja, 236
- ravnotežna rešenja, 25
- red
 - apsolutno konvergentan, 464
 - ceo, 465
 - divergentan, 464
 - funkcionalni, 463
 - konvergentan, 464
 - potencijalni, 463, 465, 468
 - operacije, 466
 - stepeni, 465
 - uniformno konvergentan, 464
 - osobine, 464
- Rejlijev broj, 152
- repeleri, 22

- rezonatori, 349
 Ruina zakona trenja, 282

 samo-sličnost, 200
 saobraćajno zagušenje, 251
 sedlasti ciklus, 157
 sedlo-čvor bifurkacija, 34
 sedlo-čvor bifurkacija, 118
 sedlo-čvor bifurkacija ciklusa, 129
 seizmološki zakoni, 271
 seizmotektonika, 269
 separatriše, 90
 sigmoid, 27
 sigurna bifurkacija, 38
 sigurno rastojanje, 242
 simetričan čvor, 493
 sinhronizovan haos, 169
 sinhronizovani tok, 251
 sistem, 21
 - bistabilan, 485
 sistemi prvog reda, 21
 slabi zakon trenja, 279
 slabo nelinearni oscilatori, 105
 slabo prigušeni linearni osilator, 106
 slučajni fraktali, 213
 Smejlova potkovica, 217
 sopstvena vrednost, 176
 spektar skalirajućih indeksa, 212
 spora amplituda, 511
 spora faza, 511
 spore jednačine, 113
 srednja vrednost funkcije, 112
 stabilan ciklus, 95
 stabilna fiksna tačka, 73, 480
 stabilna mnogostrukost, 493
 stabilne fiksne tačke, 25
 stabilni čvor, 493
 stabilnost
 - po Ljapunovu, 72
 - asimptotska analiza, 243
 - lokalna analiza, 243
 stanje
 - kreni-stani, 251
 strani atraktor, 102, 144, 163, 165
 strani atraktori, 215

 struja, 236
 superstabilna fiksna tačka, 522
 šiljak - katastrofa, 50

 tačkasta dimenzija, 209
 talasi gustine, 252
 tangenta bifurkacija, 182
 teška bifurkacija, 41
 tent preslikavanje, 527
 teorema
 - Abelova, 465
 teorija
 - praćenje vozila, 241
 teorija haosa, 7
 teorija regularnih perturbacija, 106
 tok, 236
 topološki prostor, 402
 torusni čvorovi, 135
 trajektorija, 17, 25
 transkrična bifurkacija, 36, 524
 tranzijent, 47
 tranzijentni haos, 229, 520
 trougao Sierpinskog, 204, 205
 trzanje, 273

U-niz, 188
 unimodalno preslikavanje, 186
 univerzalni niz, 188
 usrednjene jednačine, 113

 vektorsko polje, 22
 vilasta bifurkacija, 37
 - natkritična, 38
 - potkritična, 39
 vreme relaksacije, 254
 vremensko kašnjenje, 289
 vremensko kašnjenje odgovora, 256

 zaceljenje raseda, 289
 zagušenje, 251
 zakon usporavanja, 281
 zakoni razmere, 132
 zavisnost od parametara, 33
 zemljotresi, 269
 Zmajolika kriva, 205
 zvezda, 493

CIP – КАТАЛОГИЗАЦИЈА У ПУБЛИКАЦИЈИ
Народна библиотека Србије, Београд

519.87:124.1(075.8)

UVOD u teoriju haosa / Dragoslav Kuzmanović ... [et al.]. – 1. izd.
– Beograd : Saobraćajni fakultet : Rudarsko-geološki fakultet, 2013
(Vrnjačka Banja : SaTCIP). – XIV, 578 str. : ilustr. ; 25 cm

Na vrhu nasl. str.: Univerzitet u Beogradu. – Tiraž 100. – Rečnik: str.
566-570. – Beleška o autorima: str. 571-574. – Bibliografija: str. 543-
563. – Registar.

ISBN 978-86-7395-317-5 (SF)

1. Кузмановић, Драгослав, 1949- [аутор]

а) Теорија хаоса

COBISS.SR-ID 203770892

