

UNIVERZITET U BEOGRADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

DO 134

Mr RAŠIT I. ALIDEMA

STABILNOST REŠENJA SISTEMA NELINEARNIH DIFERENCIJALNIH
JEDNAČINA SA DVEAMA LINIJAMA PREKIDA U KRITIČKIM SLUČAJEVIMA

UNIVERZITET U BEOGRADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
BEOGRAD
BROJ: dobel 102/1
DATUM: 11. XI 1980.

DISERTACIJA NA STICANJU NAUČNOG
STEPENA DOKTORA MATEMATIČKIH NAUKA

BEOGRAD, 1980

Uvod. Razmatra se nelinearni diferencijalni sistem poremećenih kretanja

$$(0.1) \quad \dot{X}_1 = a + b \operatorname{sgn} X_1 + c \operatorname{sgn} X_2, \quad \dot{X}_2 = d + e \operatorname{sgn} X_1 + f \operatorname{sgn} X_2,$$

gde su a, \dots, f neprekidne diferencijabilne funkcije od X_1, X_2 , i pri $X_1 \rightarrow 0, X_2 \rightarrow 0$,

$$(0.2) \quad a = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + O(X_1^2 + X_2^2), \quad \dots, \quad f = f_0 + f_1 X_1 + f_2 X_2 + O(X_1^2 + X_2^2),$$

a a_i, \dots, f_i ($i = 0, 1, 2$) - konstante.

Sistem koji se dobija pri $a = a_0, \dots, f = f_0$, naziva se sistemom nultog¹⁾ približenja, tj.

$$(0.3) \quad \dot{X}_1 = a_0 + b_0 \operatorname{sgn} X_1 + c_0 \operatorname{sgn} X_2, \quad \dot{X}_2 = d_0 + e_0 \operatorname{sgn} X_1 + f_0 \operatorname{sgn} X_2.$$

Sistemi takvog vida razmatrani, naprimer, u [14].

U [12, 13] za sistem (0.3) dobijeni su sledeći neophodni i dovoljni uslovi asimptotske stabilnosti:

$$(0.4) \quad |c_0| > |a_0| + |b_0|, \quad |e_0| > |d_0| + |f_0|, \quad c_0 e_0 < 0,$$

$$(0.5) \quad f_0 (b_0^2 + c_0^2 - a_0^2) < \frac{b_0 c_0}{e_0} (e_0^2 + f_0^2 - d_0^2),$$

ili, ako uslovi (0.4) nisu ispunjeni,

$$(0.6) \quad b_0 < ||a_0| - |c_0||, \quad f_0 < ||d_0| - |e_0||,$$

$$(0.7) \quad |D_{01}| < D_0, \quad |D_{02}| < D_0,$$

gde

1) Umesto termina "nulto", upotrebljavaćemo "nula" (po našem mišljenju, bolje odgovara).

$$(0.8) \quad D_0 = \begin{vmatrix} b_0 & c_0 \\ e_0 & f_0 \end{vmatrix}, \quad D_{01} = \begin{vmatrix} a_0 & c_0 \\ d_0 & f_0 \end{vmatrix}, \quad D_{02} = \begin{vmatrix} b_0 & a_0 \\ e_0 & d_0 \end{vmatrix}.$$

Kritički slučajevi su ti slučajevi, kada pri proizvoljno malim promenama koeficijenata nule - rešenja sistema (0.3) može biti kako asimptotski stabilne, tako i nestabilne. Na taj način, u kritičnim slučajevima koeficijenti a_0 , \dots , f_0 nalaze se na granici oblasti asimptotske stabilnosti, određeni nejednakostima (0.4), (0.7), tj. u kritičkim slučajevima jedna ili nekoliko iz tih nejednakosti zamjenjuju se jednakostima.

Kritički slučajevi k -og reda ($k = 1, 2, 3, \dots$) su oni kritički slučajevi, koji se određuju relacijama tipa jednakosti, sadržavajući koeficijente a_0, \dots, f_0 .

Dokazuje se, da će pri određenim uslovima nametnutim članovima koji su beskonačno male prvog reda, nultog rešenja posmatranog sistema biti asimptotski stabilna.

Disertacija se sastoji iz uvoda, dve glave i spiska korišćene literature.

Prva glava se sastoji iz tri paragrafa, a druga iz četiri, numeracija koja je snabdevena dvema ciframa: prva od njih ukazuje paragraf, druga - formulu, definiciju, lemu, teoremu i tome slično.

Prva glava posvećena je izučavanju asimptotskih rešenja sistemu dvema linijama prekida u tri osnovna kritička slučaja "prvog reda", kada samo jedna od nejednakosti za a_0, \dots, f_0 u uslovima stabilnosti zamene se jednakostima. U §1 razmatra se stabilnost položaja ravnoteže sistema (0.1), kada za sistem (0.3), tačka (0,0) je singular-

na tačka tipa centr. U §2 - slučaj, kada za (0.3) singularna tačka (0,0) je neizolovana, i položaj ravnoteže ispuni jednu od poluosa. U §3 - slučaj, kada u jednoj od kvadranta za (0.3) vektor brzine (\dot{X}_1, \dot{X}_2) usmeren paralelno jednoj od osa koordinata. Pokazano je, da u ovim slučajevima su iscrpljeni svi kritički slučajevi prvog reda, i dati su dovoljni uslovi asimptotske stabilnosti tački (0,0) za (0.1), izraženi pomoću koeficijente $a_0, \dots, f_0, a_1, a_2, \dots$, a takođe dovoljni uslovi nestabilnosti (u tim slučajevima, kada postojanje stabilnosti ili nestabilnosti ne zavisi od beskonačno mali članova drugog reda u razlaganju (0.2)).

U drugoj glavi metod opisan predhodnoj glavi, osim § 6, primenjuje se za ispitivanje stabilnosti razmotrenog sistema u kritičkim slučajevima "drugog reda", kada u uslovima stabilnosti dve iz nejednakosti (0.6), (0.7) se zamenjuju jednakostima. U §4 razmatra se veći broj slučajeva, kada u dva i više kvadranta vektor brzine sistema (0.3) je paralelan osi (ovde su razmotreni takođe neki kritički slučajevi trećeg reda). U ovim slučajevima u (0.6) nejednakosti zamenjuju se jednakostima. U § 5 razmatra se slučaj, kada u jednom od kvadranta vektor brzine za (0.3) je paralelan osi, i na jednoj iz poluosa ima položaj ravnoteže. Ovde se jedno od (0.6) i jedno od (0.7) zamenjuju jednakostima. U §6 izlaže se slučaj kada položaj ravnoteže sistema (0.3) ispuni jedan koordinatni kvadrant. Tada u tome kvadrantu glavni članovi u razlaganju vektora brzine se javljaju linearnim, i rasprostiranje trajektorija u tome kvadrantu ispituje se dobrim poznatim metodama. Dobijeni

su dovoljni uslovi asimptotske stabilnosti (a takođe uslovi nestabilnosti), izraženi pomoću konstantnih i linearnih članova razlaganja oblika (0.2) koeficijenata a, \dots, \dots, f . U §7 razmatra se slučaj, kada su dve koordinatne poluose ispunjene položajima ravnoteže sistema (0.3).

Osim dovoljnih uslova asimptotske stabilnosti i nestabilnosti, izvedeno ispitivanje daje takođe opštu sliku rasprostiranja trajektorija sistema (0.1) u okolini koordinatnog početka u raznim slučajevima. Koriste se jednostavne metode kvalitativne teorije diferencijalnih jednačina, teorije stabilnosti i metode sukcesivnih aproksimacija za dobijanje jedne - dve aproksimacije ka rešenju i ocene reda ostatka.

Prema tome, izvedeno ispitivanje stabilnosti u kritičkim slučajevima za sisteme dvema linijama prekida, javlja se prilogom teoriji prekidnih sistema - jednoj od teorija koje se intenzivno razvijaju u sadašnje vreme, i čije korišćenje je neophodno u mehanici i tehnici, posebno, u teoriji automatskog upravljanja.

Osnovni rezultati disertacije u toku 1978 - 1979 godine saopšteni su na naučnom seminaru iz teorije prekidnih sistema u MGU (Moskva), na Beogradskom matematičkom institutu i na PMF u Beogradu, i predati za štampu u časopisima "VJESTNIK MGU", "PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHEMATIQUE BELGRADE".

Priština, decembar 1979 g.

Mr Rašit I. Alidema

G L A V A I

ISPITIVANJE STABILNOSTI SISTEMA U KRITIČKIM SLUČAJEVIMA PRVOG REDA

U ovoj glavi razmatraju se tri osnovna kritička slučaja u zavisnosti rešenja od početnih vrednosti i koeficijenata.

1. Ispitivanje stabilnosti u prvom kritičnom slučaju

Definicija 1.1. Nazvaćemo prvim kritičkim slučajem za sistem (0.1) slučaj, kada za sistem (0.3) tačka (0,0) je singularna tačka tipa centr, tj. (0.4) je ispunjena i u (0.5) - jednakost.

Ispitaćemo pitanje o stabilnosti ove tačke za sistem (0.1), uzimajući beskonačno male članove prvog reda u (0.2).

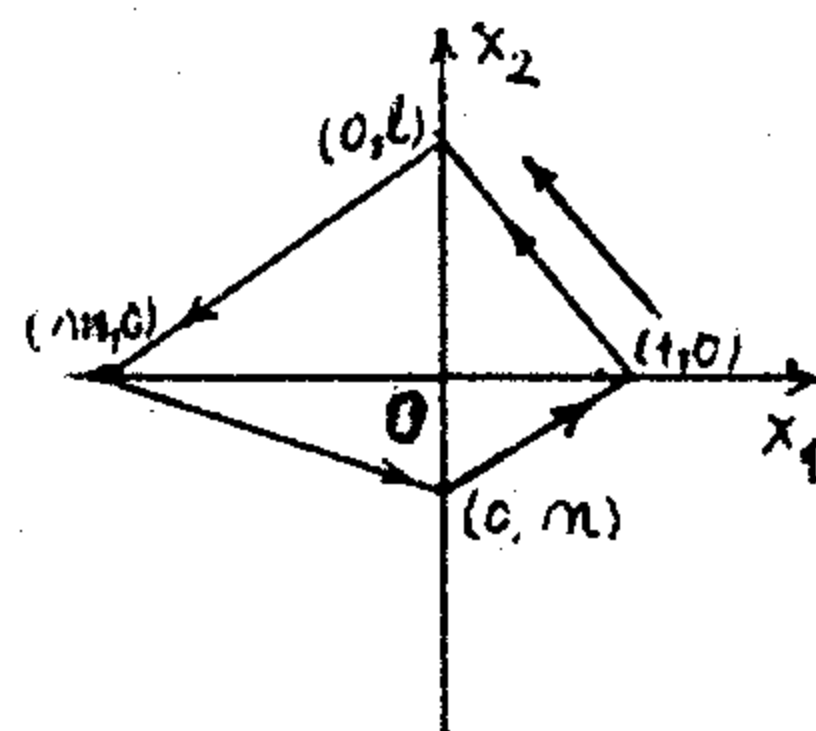
Uvedimo sada u fazoj ravni sistema (0.3) linearnu transformaciju koordinata, zato, da bi pridodali njemu najprostiji oblik:

$$(1.1) \quad \dot{X}_1 = -\text{sgn} X_2, \quad \dot{X}_2 = \text{sgn} X_1.$$

Neka trajektorija sistema (0.3), izlazeći iz tačke (1,0) (sl.1.1), seće ose koordinat u tačkama (0, l), (m, 0), (0, n) i vraća se u početnoj tački (1,0).

Znajući, da brzina kretanja u i - om kvadrantu jednaka je

$$(1.2) \quad \dot{X}_i = u_i, \quad \dot{X}_2 = v_i,$$



Sl.1.1

dobijamo

$$l = -\frac{V_1}{u_1}, m = -\frac{u_2}{V_2} l = \frac{V_1 u_2}{u_1 V_2}, n = -\frac{V_3}{u_3} m = -\frac{V_1 u_2 V_3}{u_1 V_2 u_3}.$$

Pošto se trajektorija zatvara u tački (0,1), to

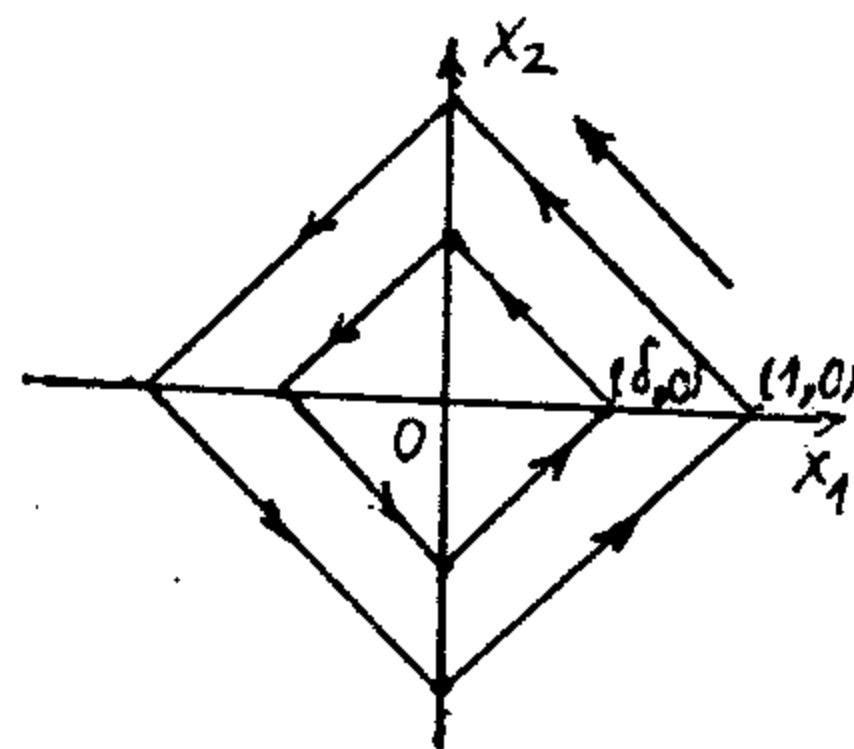
$$-\frac{u_4}{V_4} n = 1, \text{ tj. } \frac{V_1 u_2 V_3 u_4}{u_1 V_2 u_3 V_4} = 1.$$

Da bi dobili traektorije, nagnute ka koordinatnim osama pod uglom 45° (sl.1.2), izvršimo zamenu promenljivih

$$(1.3) \quad \eta = \begin{cases} \frac{x_2}{l}, & \text{pri } x_2 > 0, \\ \frac{x_2}{n}, & \text{pri } x_2 < 0, \end{cases}$$

i

$$(1.4) \quad \xi = \begin{cases} \frac{x_1}{m}, & \text{pri } x_1 < 0, \\ x_1, & \text{pri } x_1 > 0. \end{cases}$$



Sl.1.2

Tada dobijamo:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \begin{cases} -1, & \text{u 1 - om i 3 - em kvadrantu,} \\ +1, & \text{u 2 - om i 4 - om kvadrantu,} \end{cases}$$

ili podrobnije, u prvom kvadrantu imamo $\dot{x}_1 = u_1, \dot{x}_2 = V_1$.

Koristeći (1.3), (1.4), tj. $x_1 = \xi, x_2 = l\eta$, nalazimo vrednosti $\dot{\xi} = u_1, \dot{\eta} = lV_1 = -u_1$.

Neka kretanje u fazovoj ravni sistema (0.3) proizlazi u pozitivnom smeru. Tada $u_1 < 0$. Izvršivši zamenu vremena $-u_1 dt = d\tilde{t}$, dobijamo $\dot{\xi}(\tilde{t}) = -1, \dot{\eta}(\tilde{t}) = 1$.

Izvršivši takve transformacije u sve kvadrante, dobijamo sistem

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = -\operatorname{sgn}\eta, \quad \frac{d\eta}{d\tau} = \operatorname{sgn}\zeta,$$

tj. (1.1).

Ove iste transformacije privode sistem (0.1) u obliku (umesto ζ, η pišemo X_1, X_2):

$$(1.5) \begin{cases} \dot{X}_1 = a_1 X_1 + a_2 X_2 + (b_1 X_1 + b_2 X_2) \operatorname{sgn} X_1 + (-1 + c_1 X_1 + c_2 X_2) \operatorname{sgn} X_2 + O(X_1^2 + X_2^2), \\ \dot{X}_2 = d_1 X_1 + d_2 X_2 + (1 + e_1 X_1 + e_2 X_2) \operatorname{sgn} X_1 + (f_1 X_1 + f_2 X_2) \operatorname{sgn} X_2 + O(X_1^2 + X_2^2). \end{cases}$$

Teorema 1.1. Ako su za sistem (1.5) ispunjeni uslovi $a_1 + d_2 < 0$, to rešenje $X_1(t) \equiv 0, X_2(t) \equiv 0$ je asimptotski stabilno, a pri uslovu $a_1 + d_2 > 0$ - nestabilno.

Dokaz. Razmatračemo trajektoriju ovog sistema, počevši u tački $(\delta, 0)$ ($\delta > 0$ je mali broj) (sl.1.2). Kako je $\dot{X}_2 > 0$ pri $X_1 > 0$ i malim X_1, X_2 , to iz tačke $(\delta, 0)$ trajektorija ide u gornju poluravni.

Integraleći sistem u granicama od nula do t sa početnim uslovima $X_1(0) = \delta, X_2(0) = 0$, dobijamo

$$(1.6) \begin{cases} X_1(t) = \delta - t + o(t^2 + t\delta), \\ X_2(t) = t + o(t^2 + t\delta), \end{cases}$$

gde je $0 \leq t \leq t_1, t_1 = o(\delta)$.

Postavimo (1.6) u desnoj strani sistema. Integraleći, nalazimo $X_1(t), X_2(t)$ sa tačnošću $O(\delta^3)$, pri tome $X_1(0) = \delta, X_2(0) = 0$,

$$(1.7) \quad \begin{cases} X_1(t) = \delta + t(\alpha\delta - 1) + \beta t^2 + o(\delta^3), \\ X_2(t) = t(\gamma\delta + 1) + \eta t^2 + o(\delta^3), \end{cases}$$

gde $\alpha, \beta, \gamma, \eta$ - konstante, koje se izražavaju pomoću a_j, \dots, f_j ($j = 0, 1, 2$).

Nađimo tačku presecanja trajektorije (1.7) sa osom $X_1 = 0, X_2 > 0$. Iz prve jednačine (1.7), imamo

$$\delta + t(\alpha\delta - 1) + \beta t^2 + o(\delta^3) = 0.$$

Oдавде izvodimo:

a) Prvo približenje

$$\delta + (\alpha\delta - 1)t = 0, \quad t = \frac{\delta}{1 - \alpha\delta};$$

b) Drugo približenje

$$\delta + t(\alpha\delta - 1) + \beta \left(\frac{\delta}{1 - \alpha\delta} \right)^2 + o(\delta^3) = 0.$$

Oдавде je

$$t = \delta + (\alpha + \beta)\delta^2 + o(\delta^3) = t_1.$$

Iz druge od jednačina (1.7), nalazimo $X_2(t)$ takođe približno do $o(\delta^3)$

$$(1.8) \quad X_2(t_1) = \delta + A_1\delta^2 + o(\delta^3), \quad A_1 = \alpha + \beta + \gamma + \eta.$$

Razmatrajući produžetak te trajektorije u drugom, trećem i četvrtom kvadrantu, slično dobijamo, da trajektorija preseca poluose u tačkama (v.sl.1.3):

$$X_1(T_2) = -\bar{c} + A_2 \bar{c}^2 + o(\bar{c}^3),$$

$$X_2(T_3) = -\delta + A_3 \delta^2 + o(\delta^3),$$

i ponovo preseca poluosu $X_2 = 0$,
 $X_1 > 0$ u tački

$$(1.9) X_{m+1} = X_m + A_4 X_m^2 + o(X_m^3),$$

gde je $A_4 = 2(a_1 + d_2) = \text{const.}$

Iz ove ocene sledi da u slučaju $a_1 + d_2 < 0$ pri dovoljno malom X_1 imamo $X_{(0)+1} > X_{(1)+1} > X_{(2)+1} > \dots \rightarrow 0$, tako da rešenje za svaki obrtaj se približava koordinatnom početku. Znači, rešenje $X_1(t) \equiv 0$, $X_2(t) \equiv 0$ je asimptotski stabilno.

Ako je $A_4 = \text{const} > 0$, to rešenje $X_1(t) = 0$, $X_2(t) = 0$ je nestabilno.

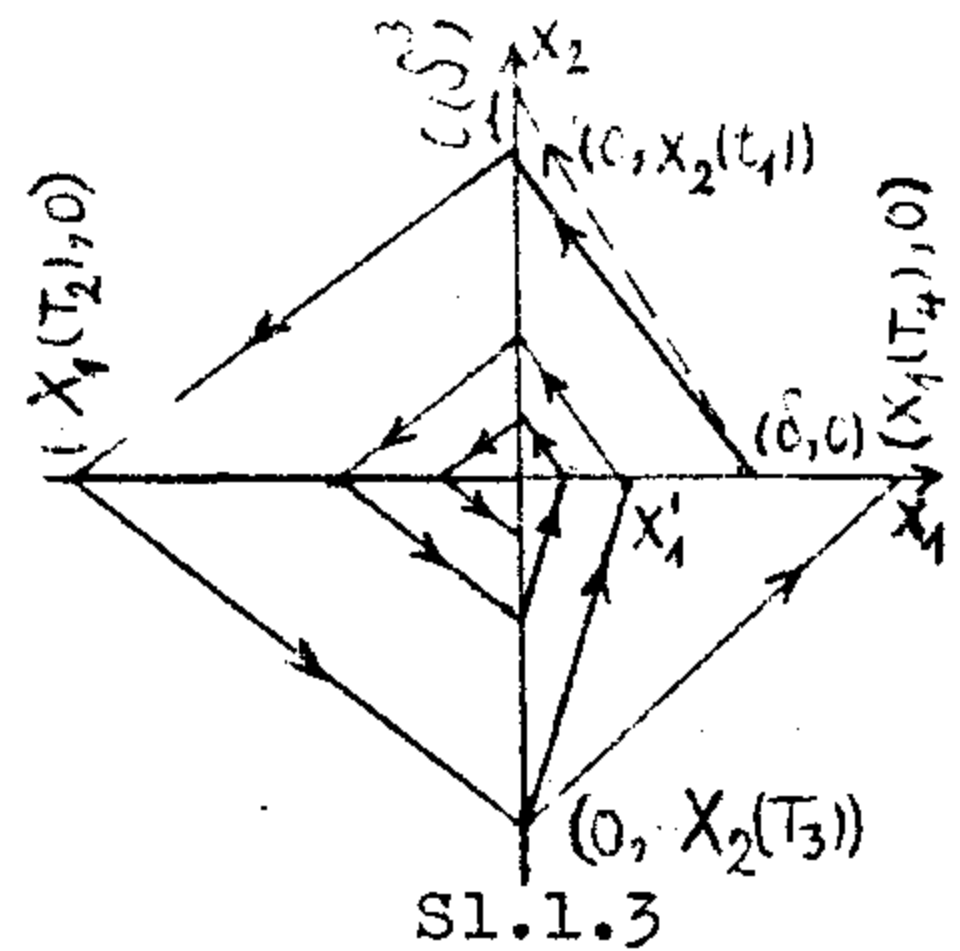
Ako je pak $A_4 = 0$, to pitanje o stabilnosti može se rešiti, ako se uzimaju u obzir dalji članovi razlaganja, tj. ovo će zavisiti od članova višeg reda, i mi ovde zasa nećemo ispitati. Teorema je dokazana.

2. Ispitivanje stabilnosti u drugom kritičkom slučaju

Definicija 2.1. Nazvaćemo drugim kritičkim slučajem za sistem (0.1) slučaj, kada za sistem (0.3) na jednoj iz poluosa imamo položaj ravnoteže, tj. (0.4) je neispunjeno, (0.6) je ispunjeno i u jednoj iz formula (0.7) imamo jednakost.

Odredimo vrednosti \dot{X}_1 , \dot{X}_2 , pri $\dot{X}_1 = 0$ ili $\dot{X}_2 = 0$.

1) Ako je vektor brzine usmeren sa jedne strane ose,



a s druge - od ose, tada trajektorije prelaze s jedne strane na drugu (sl.2.1).

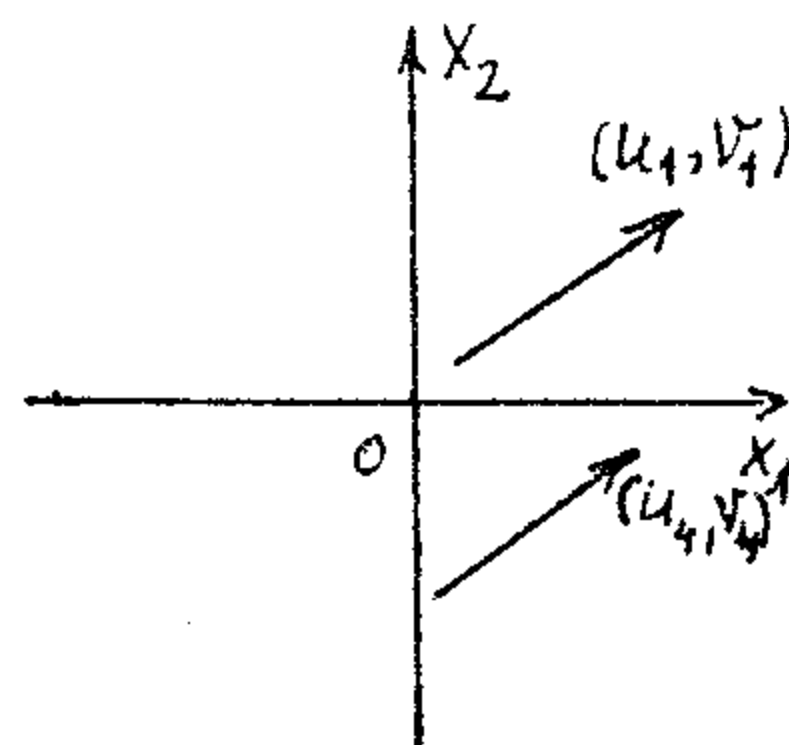
Uzmimo $X_2 = 0, X_1 > 0$. U ovom slučaju je $\text{sgn } V_4 = \text{sgn } V_1$, tj.

$$V_1 = d + e + f, \quad V_4 = d + e - f.$$

Oдавде je potrebno i dovoljno:

$|f| < |d + e|$. Analogno na granici

2 - og i 3 - eg kvadranta $|f| < |d - e|$ (pri $X_2 = 0, X_1 < 0$).



Sl.2.1

2) U tim slučajevima, kada rešenje, padajući na osu koordinata, ne može sa nje silaziti, brzina kretanja po toj osi određuje se saglasno [12, 13]. U slučaju predstavljenom na slici 2.2, rešenje ostaje

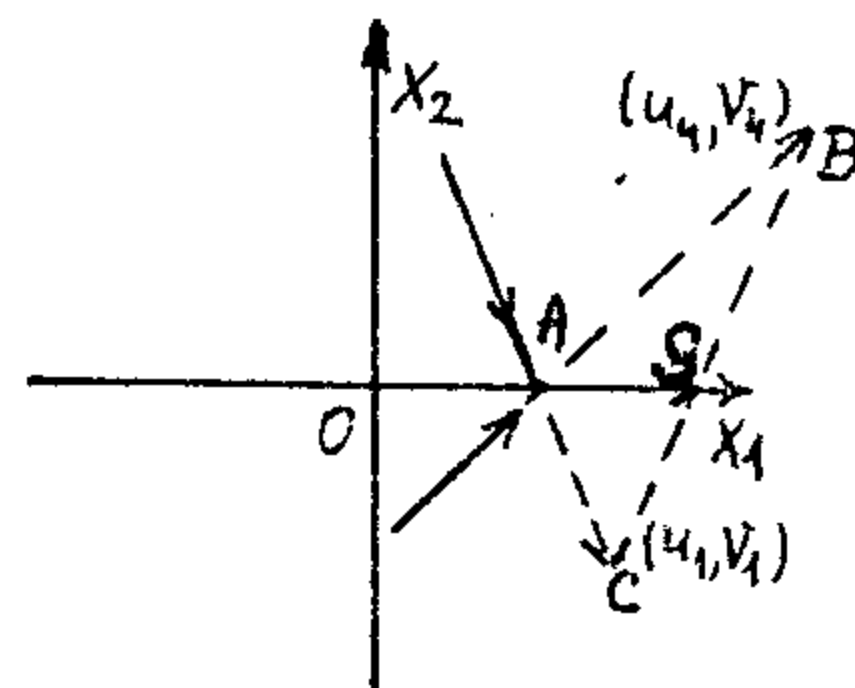
na poluosu $X_2 = 0, X_1 > 0$. Tada imamo

$V_4 > 0, V_1 < 0$, tj. $d + e - f > 0$,

$d + e + f < 0$, i $f < |d + e|$,

a pri $X_2 = 0, X_1 < 0, f < -|d - e|$.

Svaka tačka, koja pripada odsečku BC



Sl.2.2

(sl.2.2), ima oblik $(a + b + \lambda c, d + e + \lambda f)$, gde je

$|\lambda| \leq 1$. U tački preseka odsečka BC sa osom OX_1 druga

koordinata se izjednačuje sa nulom, tj. $a + b + \lambda c = \dot{X}_1$,

$d + e + \lambda f = 0$. Znači, u slučaju $f < -|d + e|$ ($f < -|d - e|$) imaćemo rešenja, idući po poluosi $X_2 = 0$,

$X_1 > 0$ ($X_2 = 0, X_1 < 0$) sa brzinom

$$\dot{X}_1 = \frac{1}{f} \left(\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \right) = \frac{1}{f} (D_1 + D),$$

$$(\dot{X}_1 = \frac{1}{f} (D_1 - D)).$$

U slučaju jednakosti, brzina biće paralelna osi OX_1 .

Može da bude slučaj narušavanja jedinstvenosti:

$V_4 < 0, V_1 > 0$. Tada $f > |d \pm e|$ (pri $X_2 = 0, X_1 \geq 0$) (S1.2.3).

Sumirajući na osu $X_2 = 0, X_1 \geq 0$, imamo

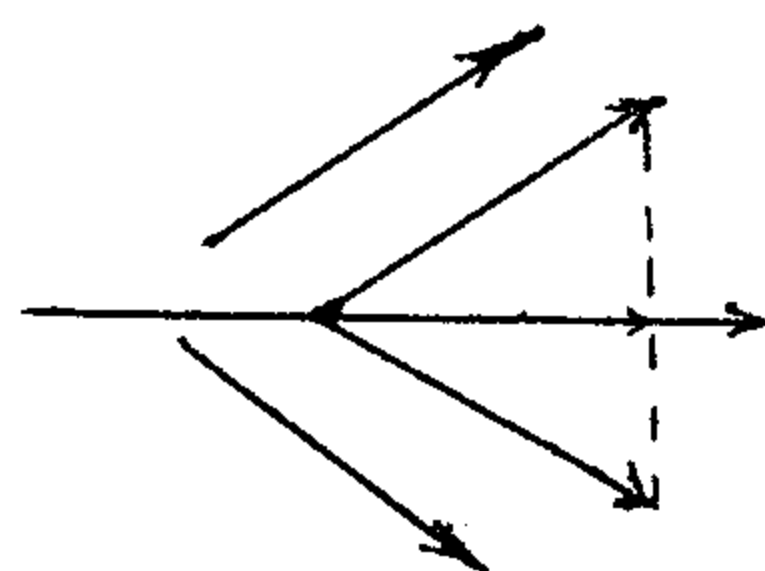
$$(2.1) \quad \dot{X}_1 = \frac{1}{f}(D_1 \pm D), \text{ ako je } |f| \geq |d \pm e|.$$

Analogno, za rešenja po poluosi $X_1 = 0, X_2 \geq 0$, imamo

$$\dot{X}_1 = 0, \dot{X}_2 = d + e + \lambda f, \text{ tj.}$$

$$(2.2) \quad X_2 = \frac{1}{b}(D_2 \pm D), \text{ ako je } |b| \geq |a \pm c|.$$

Pokazaćemo, da u drugom kritičkom slučaju imamo $b_0 < 0$, ili $f_0 < 0$. Ako je na poluosu $X_1 > 0, X_2 = 0$ položaj ravnoteže za (0.3), to na ovu poluosu je ispunjeno (2.1), tj.



S1.2.3

$$(2.3) \quad |f_0| \geq |d_0 + e_0|.$$

Za ova rešenja saglasno (2.1) $\dot{X}_1 = \frac{1}{f_0}(D_{01} + D_0)$, $\dot{X}_2 = 0$. U položaju ravnoteže, $\dot{X}_1 = 0, \dot{X}_2 = 0$, znači, $D_0 = -D_{01}$. Kako je (0.6) ispunjeno po definiciju 2.1, to

$$(2.4) \quad f_0 < ||d_0| - |e_0||.$$

Iz (2.3) i (2.4) sledi $f_0 < 0$.

Analogno, ako na poluosu $X_1 = 0, X_2 > 0$ (ili $X_2 < 0$), imamo položaj ravnoteže, to $b_0 < 0$.

Teorema 2.1. Ako za sistem (0.3) sve tačke na jednoj iz poluosa javljaju se u položaju ravnoteže, to nula-rešenje sistema (0.1) je stabilno, ako je:

a) Na poluosu $X_1 = 0, X_2 \geq 0, \Delta_{\pm 2} > 0$ (nestabilno, ako je $\Delta_{\pm 2} < 0$);

b) Na poluosu $X_2 = 0, X_1 \geq 0, \Delta_{\pm 1} > 0$ (nestabilno, ako je $\Delta_{\pm 1} < 0$), gde su

$$\Delta_{\pm 1} = \begin{vmatrix} a_0 \pm b_0 & c_1 \\ d_0 \pm e_0 & f_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 \pm b_1 & c_0 \\ d_1 \pm e_1 & f_0 \end{vmatrix}, \Delta_{\pm 2} = \begin{vmatrix} b_0 & a_2 \pm c_2 \\ e_0 & d_2 \pm f_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_2 & a_0 \pm c_0 \\ e_2 & d_0 \pm f_0 \end{vmatrix}.$$

Dokaz. Neka na poluosu $X_1 = 0, X_2 > 0$ za sistem (0.3) imamo $\dot{X}_1 = \dot{X}_2 = 0$. Tada, saglasno (2.2), $D_{02} + D_0 = 0$. Tako da za sistem (0.1) na poluosu $X_1 = 0, X_2 > 0$ sa (0.2), imamo

$$(2.5) \quad \dot{X}_2 = \frac{1}{b} (D_2 + D) = \frac{D_{02} + D_0 + X_2 \Delta_{\pm 2}}{b_0 + b_2 X_2 + O(X_2^2)} + O(X_2^2).$$

Oдавде lako se određuje kriterijum stabilnosti ili nestabilnosti datog sistema. Kako je $D_{02} + D_0 = 0, X_2 > 0, b_0 < 0$, to pri dovoljno malom $X_2 > 0$ imamo $b_0 + b_2 X_2 + O(X_2^2) < 0$. Iz (2.5) sledi: pri $\Delta_{\pm 2} > 0$ ($\Delta_{\pm 2} < 0$) imamo $\dot{X}_2 = \varphi(X_2) < 0$ ($\dot{X}_2 = \varphi(X_2) > 0$), i rešenje $X_1 \equiv X_2 \equiv 0$ je asimptotski stabilno (nestabilno).

Analogno razmatraju se i ostala tri slučaja. Teorema je dokazana.

3. Ispitivanje stabilnosti u trećem kritičnom slučaju

Definicija 3.1. Nazvaćemo trećim kritičnim slučajem za sistem (0.1) slučaj, kada za sistem (0.3) u jednoj iz formula (0.6) imamo jednakost, (0.4) je neispunjeno, (0.7) je ispunjeno i samo u jednom kvadrantu vektor brzine

(\dot{X}_1, \dot{X}_2) je paralelan osi.

U lemi 3.3 biće dokazano, da u ovom slučaju ovaj vektor je usmeren od druge ose.

Lema 3.1. Ako je bar u jednom od kvadranta Q_i za sistem

$$(3.1) \quad \frac{dx_j}{dt} = R_j(x_1, x_2) \in C, \quad (j = 1, 2),$$

imamo

$$(3.2) \quad x_j \dot{x}_j > 0 \quad (j = 1, 2),$$

to nula rešenje $\dot{x} = 0$ sistema (3.1) je nestabilno.

Dokaz. Neka su uslovi leme ispunjeni u prvom kvadrantu Q_1 . Razmotrimo funkciju $V = x_1 x_2$ u zatvorenoj oblasti

$$\bar{Q}_1 = \{0 \leq t \leq \infty, \|X\| = \sqrt{\sum x_j^2} \leq h < H\}$$

i h je dovoljno malo. Sglasno (3.2) u Q_1 izvod $\frac{dV}{dt}$ je pozitivan.

U oblasti R_X^2 razmotrimo podoblast

$$P = \{ \|X\| \leq h, x_1 > 0, x_2 > 0, x_1 x_2 \geq \alpha > 0 \},$$

cela ležuci u Q_1 . Na osnovu (3.1), (3.2) imamo $x_1 R_1 > 0$, $x_2 R_2 > 0$. Dokažimo da je

$$\dot{V} = R_1(x_1, x_2)x_1 + R_2(x_1, x_2)x_2 \geq \beta > 0.$$

Kako je zatvorena podoblast \bar{P} - kompaktna skup i funkcija V je neprekidna i pozitivna na \bar{P} , to na osnovu teoreme Vajerštrasa donja granica ove funkcije dostićiće u nekoj tački $(x_1^*, x_2^*) \in P$ i, znači, u \bar{P} :

$$\inf \dot{V}(X_1, X_2) = \dot{V}(X_1^*, X_2^*) \geq \beta > 0.$$

Tada su ispunjeni svi uslovi teoreme Četajeva o nestabilnosti kretanja (vd. [15]). Stoga, nula - rešenje razmatranog sistema je nestabilno.

Slučaj, kada su uslovi leme ispunjeni u bilo kom drugom kvadrantu, svodi se u razmatranom obrtanjem koordinatnog sistema. Lema je dokazana.

Lema 3.2. Ako bar u jednom od kvadranata za sistem (0.3) imamo

$$(3.3) \quad \dot{X}_1 \operatorname{sgn} X_1 > 0, \quad \dot{X}_2 \operatorname{sgn} X_2 > 0,$$

to nula - rešenje je nestabilno i ovaj slučaj se ne javlja kritičkim.

Dokaz. Zaista, u kritičkim slučajevima koeficijenti sistema (0.3) leže na granici oblasti asimptotske stabilnosti, tj. može se izmeniti proizvoljno malom tako da sistema bude asimptotski stabilan. U slučaju (3.3) pri dovoljno malim promenama koeficijenata, nejednakosti (3.3) očuvaju će se, znači, u razmatranom kvadrantu $|X_1|$ i $|X_2|$ rastu i asimptotske stabilnosti ne može biti. Takim obrazom, slučaj (3.3) ne može biti kritičkim, što je i trebalo dokazati.

Sada možemo formulisati sledeću važnu lemu.

Lema 3.3. Neka je (0.4) neispunjeno, (0.7) je ispunjeno i u jednoj od formula (0.6) imamo jednakost, a u drugoj znak $<$. Tada u jednom od kvadranata vektor

brzine za sistem (0.3) je paralelan jednoj osi i usmeren od druge ose.

Dokaz. Neka je

$$(3.4) \quad b_0 = ||a_0| - |c_0||.$$

Pokazaćemo, da je tada u jednom od kvadranta $\dot{X}_1 = 0$.

1) Ako je $a_0 c_0 < 0$, to $||a_0| - |c_0|| = |a_0 + c_0|$, znači $b_0 = |a_0 + c_0|$. Tada ili $a_0 + c_0 \geq 0$, $b_0 = a_0 + c_0$, i u drugom kvadrantu je $\dot{X}_1 = a_0 - b_0 + c_0 = 0$, ili $a_0 + c_0 < 0$, $b_0 = -(a_0 + c_0)$, i u prvom kvadrantu je $\dot{X}_1 = 0$.

2) Ako je $a_0 c_0 > 0$, to $b_0 = ||a_0| - |c_0|| = |a_0 - c_0|$. Tada ili $a_0 - c_0 \geq 0$, $b_0 = a_0 - c_0$, $a_0 - b_0 - c_0 = 0$ i u trećem kvadrantu je $\dot{X}_1 = 0$, ili $a_0 - c_0 < 0$, $b_0 = c_0 - a_0$, $a_0 + b_0 - c_0 = 0$ i u trećem kvadrantu imamo $\dot{X}_1 = 0$.

3) Ako je jedan od skalara a_0 i c_0 jednako nuli, to $b_0 = ||a_0| - |c_0|| = |a_0 \pm c_0|$, i u dva kvadranta je $\dot{X}_1 = 0$.

4) Ako je $a_0 = c_0 = 0$, to $b_0 = 0$. Tada je $D_0 = D_{01} = D_{02} = 0$ - kritički slučaj trećeg reda, i (0.7) je neispunjeno.

Analogno, ako u drugoj formuli (0.6) imamo jednakost, to u jednom od kvadranta je $\dot{X}_2 = 0$. Zamenom promenljivih može se odrediti, da bi se u prvom kvadrantu $\dot{X}_1 = 0$. Tada

$$(3.5) \quad a_0 + b_0 + c_0 = 0.$$

Iz (3.4) i (3.5) sledi $b_0 = -(a_0 + c_0) = ||a_0| - |c_0|| \geq 0$, dakle $a_0 c_0 \leq 0$, $a_0 + c_0 \leq 0$.

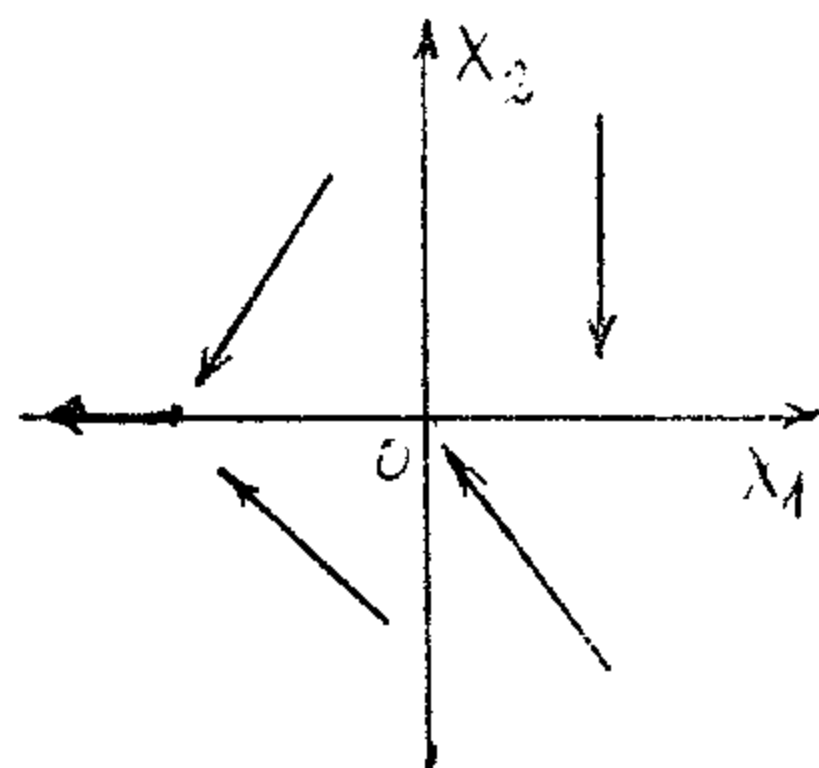
U slučaju $b_0 < 0$, (3.4) je neispunjeno, a pri $b_0 = 0$,

$|a_0| \neq |c_0|$, takođe je neispunjeno. ostaju slučajji $b_0 > 0$ i $b_0 = 0$,

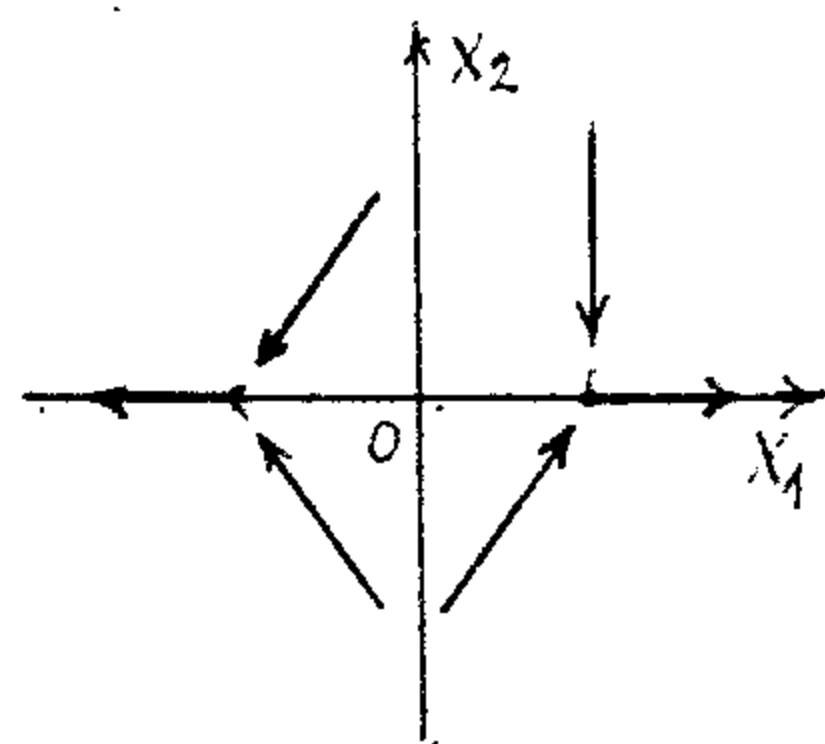
$|a_0| = |c_0|$. U poslednjem slučaju u dva kvadranta imamo $\dot{X}_1 = 0$ i ovo je ne kritički slučaj 1 - og reda. Ostaje $b_0 > 0$. Znači mogući slučajji su $a_0 + b_0 + c_0 = 0, d_0 + e_0 + f_0 < 0$ i $a_0 + b_0 + c_0 = 0, d_0 + e_0 + f_0 > 0$.

Razmotrimo, kako vektor (\dot{X}_1, \dot{X}_2) može biti usmeren u kvadrantima.

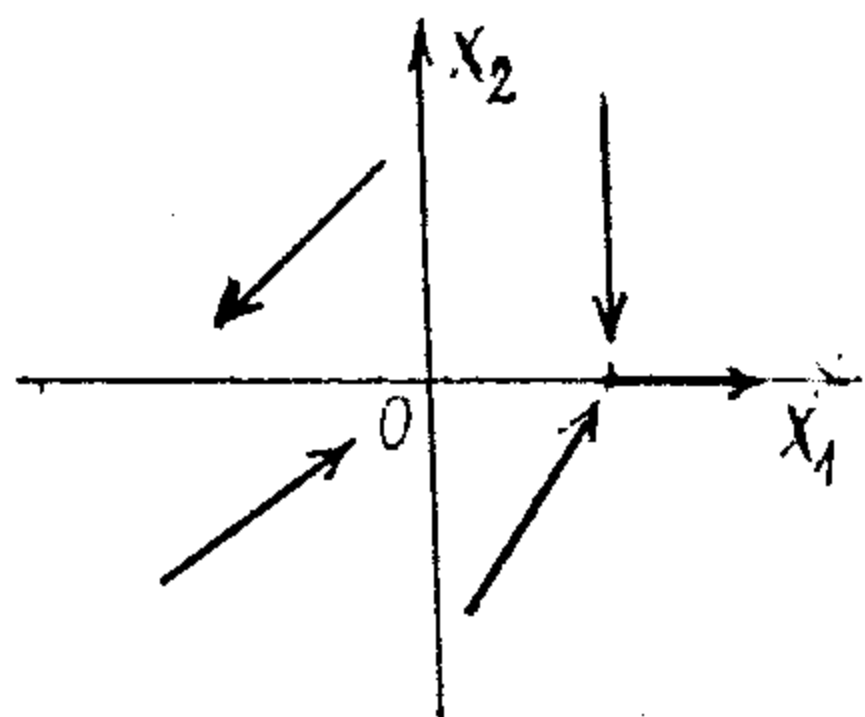
Ako u bilo koji kvadrant imamo $X_1 \dot{X}_1 > 0, X_2 \dot{X}_2 > 0$, to po lemi 3.2, ovaj slučaj je nestabilan i ne kritički slučaj (sl.3.1-3.4).



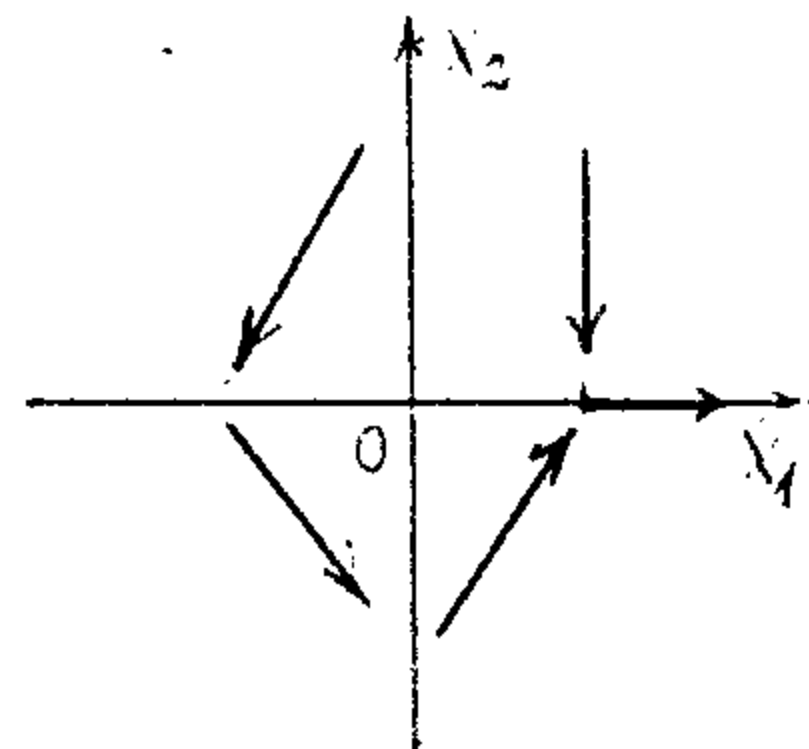
Sl.3.1



Sl.3.2



Sl.3.3



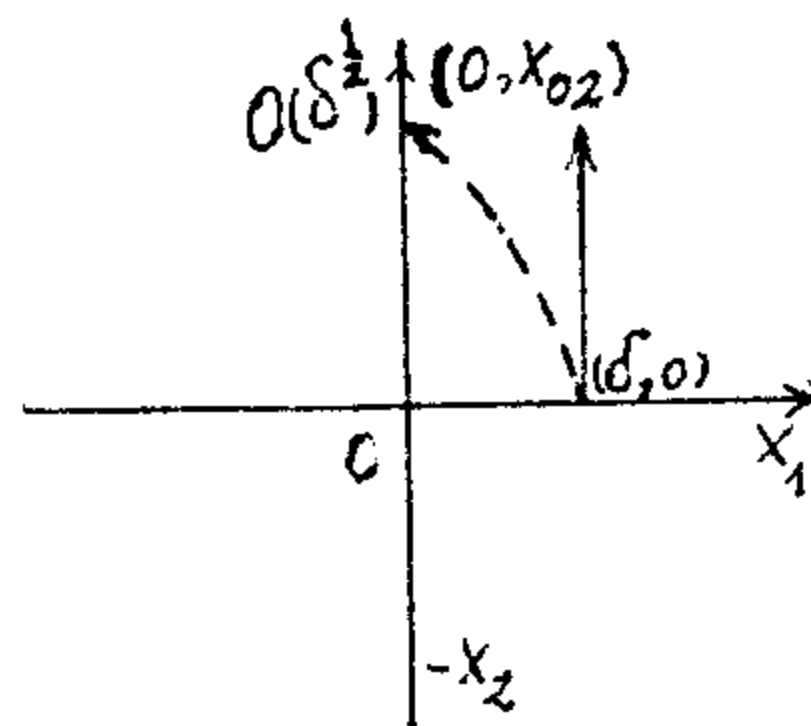
Sl.3.4

Ako na poluosi $X_2 = 0, X_1 > 0$ (ili $X_1 < 0$) imamo $X_1 \dot{X}_1 > 0$, a u blizini nje $X_2 \dot{X}_2 < 0$, to $f_0 < 0$ i saglasno (2.1) $\dot{X}_1 = \frac{1}{f_0} (D_{01} \pm D_c)$. Tada $D_0 < -D_{01}$ (ili $D_0 > D_{01}$) i (0.7) je neispunjeno.

Slučajji, kada u prvom i drugom kvadrantu vektori brzine usmereni ka osi OX_2 ili paralelno njoj, a u trećem i četvrtom kvadrantu - od ove ose, su nemogući, zato

šti iz $u_1 = a_0 + b_0 + c_0 \leq 0$, $u_2 = a_0 - b_0 + c_0 \geq 0$, sledi $b_0 \leq 0$, a iz $u_3 = a_0 - b_0 - c_0 < 0$, $u_4 = a_0 + b_0 - c_0 > 0$ sledi $b_0 > 0$.

Prema tome, pri uslovima leme 3.3, u prvom kvadrantu je $\dot{X}_1 = 0$, $\dot{X}_2 > 0$, tj. od ose (sl.3.5). Lema je dokazana.



Sl.3.5

Lema 3.4. Ako su ispunjeni uslovi

$$(3.6) \quad a_0 + b_0 + c_0 = 0, \quad d_0 + e_0 + f_0 = \beta_0 > 0,$$

$$(3.7) \quad \alpha_2 = a_2 + b_2 + c_2 < 0,$$

to u prvom kvadrantu trajektorija sistema (0.1), izlažeći iz tačke $X_1 = \delta > 0$, $X_2 = 0$, gde je $0 < X_1 < \delta_1$, δ_1 - dovoljno malo, pada na osu $X_2 > 0$, $X_1 = 0$ u tački

$$(3.8) \quad X_{02} = \sqrt{-\frac{2\delta\beta_0}{\alpha_2}} + o(\delta).$$

Ako su ispunjeni (3.6) i $\alpha_2 > 0$, to nula - rešenje je nestabilno.

Dokaz. Iz sistema (0.1) u slučajevima (3.6),

(3.7) imamo

$$(3.9) \quad \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + o(X_1^2 + X_2^2), \\ \frac{dx_2}{dt} = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + o(X_1^2 + X_2^2), \end{cases}$$

gde su α_1, \dots, β_2 - konstante, koje se izražavaju sa a_j, \dots, f_j ($j = 0, 1, 2$).

Integraleći (3.9) od nula do t pri datim početnim uslovima $X_1(0) = \delta > 0$, $X_2(0) = 0$, dobijamo rešenja nula - približenja za (0.1):

$$(3.10) \quad \begin{cases} X_1(t) = \delta + o(t^2 + t\delta), \\ X_2(t) = \beta_0 t + o(t^2 + t\delta), \end{cases}$$

gde je $0 \leq t = t_1$.

Postavimo (3.10) na desnoj strani (3.9), integroleći takođe od 0 do t , nalazimo prvo približenje $X_1(t)$, $X_2(t)$ sa tačnošću $o(\delta^3)$, pri tome $X_1(0) = \delta$, $X_2(0) = 0$,

$$(3.11) \quad \begin{cases} X_1(t) = \delta + \alpha_1 \delta t + \alpha t^2 + o(t^3 + t\delta^2), \\ X_2(t) = t(\beta_0 + \beta_1 \delta) + \beta t^2 + o(t^3 + t\delta^2), \end{cases}$$

gde su

$$(3.12) \quad \alpha = \alpha_2 \beta_0 / 2, \quad \beta = \beta_0 \beta_2 / 2.$$

Drugo¹⁾ približenje dobićemo, postavljajući (3.11) u (3.9) i integrirujući,

$$(3.13) \quad \begin{cases} X_1(t) = \delta + \alpha_1 \delta t + [\alpha_1^2 \delta + \alpha_2(\beta_0 + \beta_1 \delta)] \frac{t^2}{2} + o(t^3 + t\delta^2), \\ X_2(t) = (\beta_0 + \beta_1 \delta) t + [\beta_0 \beta_2 + \beta_1 \delta(\alpha_1 + \beta_2)] \frac{t^2}{2} + o(t^3 + t\delta^2). \end{cases}$$

1) Jednačine prvog približenja mogu da daju potpuno ne tačan zaključak o stabilnosti kretanja (vd., naprimer, [8, str. 20-22]).

Izvedena analiza pokazuje, da sa tačnošću do $O(t^3 + t\delta^2)$ desne strane jednačina (3.13) poklapaju se sa (3.11). Stoga, o stabilnosti ili nestabilnosti kretanja možemo suditi po jednačinama (3.11).

Potražimo uslov da bi rešenje (3.11) izašlo na osu $X_1 = 0, X_2 > 0$.

Iz prve jednačine (3.11) imamo:

$$\delta + \alpha_1 \delta t + \alpha t^2 + O(\delta^3) = 0.$$

Iz ove jednačine proizilaze:

a) prvo približenje

$$\delta + \alpha t^2 = 0, \quad t^2 = -\frac{\delta}{\alpha};$$

b) drugo približenje

$$\delta + \alpha_1 \delta \sqrt{-\frac{\delta}{\alpha}} + \alpha t^2 + O\left(\sqrt{-\frac{\delta^3}{\alpha^3}}\right) = 0,$$

odavde je:

$$t^2 = -\frac{\delta}{\alpha} - \frac{\alpha_1}{\alpha} \delta \sqrt{-\frac{\delta}{\alpha}} + O\left(\sqrt{-\frac{\delta^3}{\alpha^3}}\right),$$

ili sa tačnošću $O(\delta^{\frac{3}{2}})$,

$$t^2 = -\frac{\delta}{\alpha} + O(\delta^{\frac{3}{2}}),$$

ili, posle korenovanja,

$$(3.14) \quad t = \pm \sqrt{-\frac{\delta}{\alpha} + O(\delta^{\frac{3}{2}})} = \pm \sqrt{-\frac{\delta}{\alpha}} + O(\delta) = t_1.$$

Kako pri uslovima: 1° $\alpha_1 > 0, \alpha < 0$; 2° $\alpha_1 = 0, \alpha < 0$; 3° $\alpha_1 < 0, \alpha < 0$; 4° $\alpha_1 < 0, \alpha = 0$, funkcija $X_1(t)$ opada,

to tada iz druge jednačine (3.11) može se naći tačka preseka sa ordinatnom osom $X_2 > 0, X_1 = 0$.

U slučaju 4^o, $\delta + \alpha_1 \delta t + o(t^3) = 0, t = -\frac{1}{\alpha_1}$ nije malo, i iza $o(t^3)$ naći t u sledećem približenju je nemoguće. Na ponašanje rešenja utiču članovi sa X_1^2, X_2^2 i td.

U slučajevima 1^o, 2^o, 3^o, unoseći izraz (3.14) za t_1 u drugoj jednačini (3.11) i uzimajući u obzir (3.12), pri $\alpha_2 < 0$, dobijamo (3.8), gde je $X_2(t_1)$ - reda $\delta^{\frac{1}{2}}$.

Na taj način, trajektorija poremećenog sistema (3.9) pada na ordinatnu osu $X_2 > 0, X_1 = 0$ u tački $(0, X_{02})$ (sl.3.5).

Prvi deo leme je dokazan.

Prelazimo na dokaz drugog dela leme. Ako je pak ispunjeno (3.6) i

$\alpha_2 > 0$, to saglasno (3.9), u blizini tačke $(0,0)$ na osi $OX_2 (X_2 > 0)$ imamo $\frac{dx_1}{dt} > 0$, a na osi $OX_1 (X_1 > 0)$ $\frac{dx_2}{dt} > 0$. Znači, rešenja ostaju u prvom kvadrantu (sl.3.6).

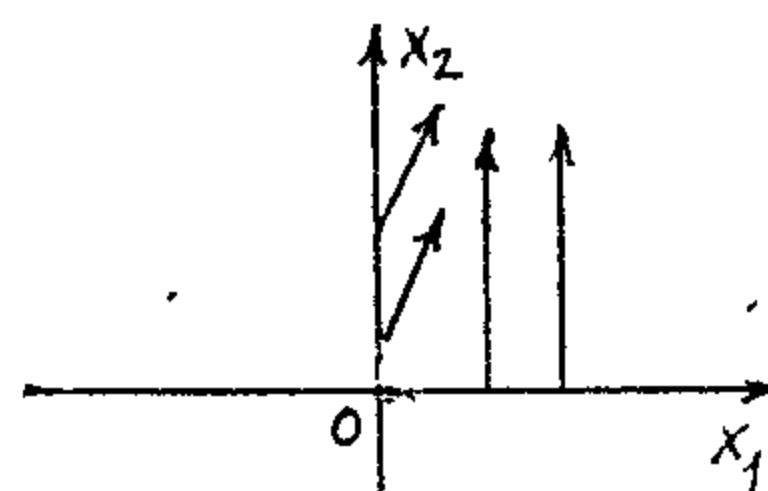
Pošto je tamo $\dot{X}_2 \geq \text{const} > 0$, pri $|X_1| + |X_2| < \xi, \xi$ - dovoljno malo, to rešenja izlaze iz okoline tačke $(0,0)$, i nula - rešenje je nestabilno.

Lema 3.5. Ako su u sistemu (0.3) ispunjeni uslovi (3.6), (3.7) i

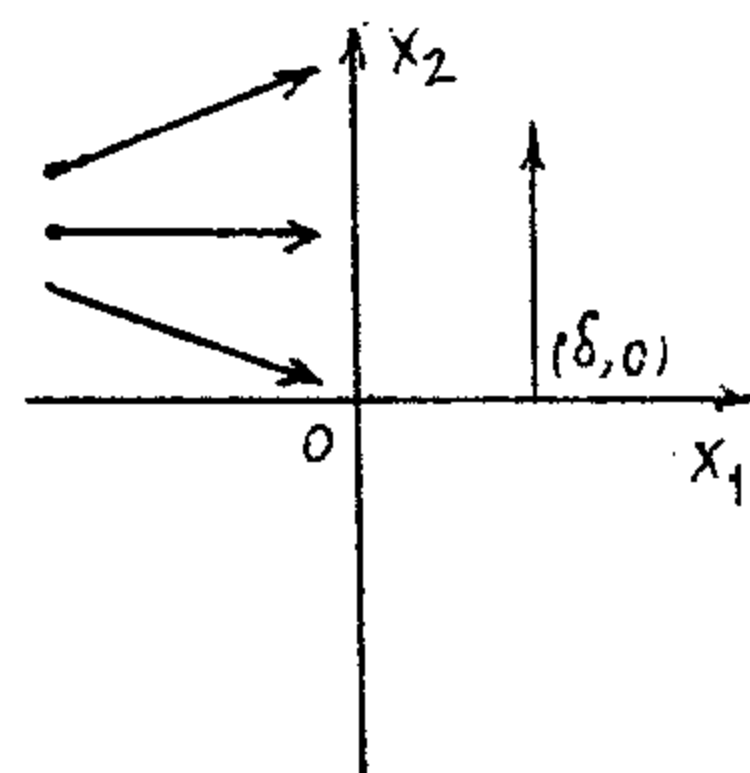
$$(3.15) \quad a_0 - b_0 + c_0 > 0,$$

nula - rešenje je nestabilno, to

(0.7) je neispunjeno i ovaj slučaj je nekritički (sl.3.7).



Sl.3.6



Sl.3.7

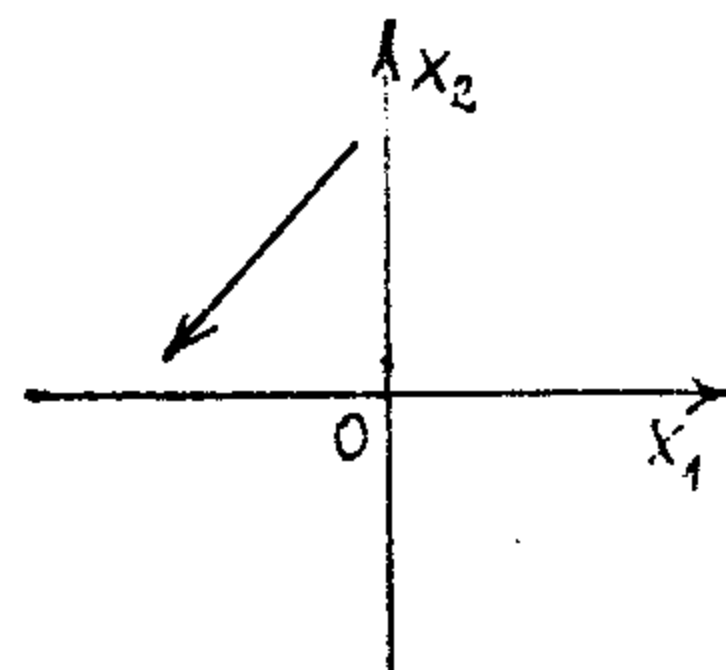
Dokaz. Iz (3.6) i (3.15) je $b_0 < 0$; na OX_2 ($X_2 > 0$)
 $\dot{X}_2 = (D_{02} + D_c) / b_0 = d_0 + e_0 + f_0 > 0$, znači $D_{02} + D_0 < 0$, i
 (0.7) je neispunjeno, tj. ovo je nekritički slučaj.
 Lema je dokazana.

Pošto mi razmatramo slučajeve, kada samo u jednom kvadrantu vektor (\dot{X}_1, \dot{X}_2) za (0.3) je paralelan osi, to staje da se razmotri samo slučaj, kada su u drugom kvadrantu

$$(3.16) \quad \dot{X}_1 = a_0 - b_0 + c_0 = u_2 < 0, \quad \dot{X}_2 = d_0 - e_0 + f_0 = v_2 < 0,$$

(sl.3.8).

Lema 3.6. a) Neka je za sistem (0.3) ispunjeno (3.16). Tada trajektorija sistema (0.1), izlazeći iz tačke $(0, X_{02})$, gde je $0 < X_{02} < \eta$,



Sl.3.8

η - dovoljno malo, i prelazeći u drugom kvadrantu, dostiže osu OX_1 u tački

$$(3.17) \quad X_{-01} = -\frac{u_2}{v_2} X_{02} + o(X_{02}^2).$$

Analogna tvrđenja važe za druge kvadrante.

b) Ako je

$$(3.18) \quad a_0 - b_0 - c_0 = u_3 > 0, \quad d_0 - e_0 - f_0 = v_3 < 0,$$

to trajektorija izlazeći iz tačke $(X_{-01}, 0)$ doći će u tačku $(0, X_{-02})$, gde je

$$(3.19) \quad X_{-02} = -\frac{v_3}{u_3} X_{-01} + o(X_{-01}^2).$$

c.) Ako je

$$(3.20) \quad U_4 = a_0 + b_0 - c_0 > 0, \quad V_4 = d_0 + e_0 - f_0 > 0,$$

to trajektorija izlazeći iz tačke ordinate $(0, X_{02})$, pada na osu abscis $X_1 > 0, X_2 = 0$ u tačku

$$(3.21) \quad X_{01} = -\frac{U_4}{V_4} X_{02} + o(X_{02}).$$

Dokaz. Pokazaćemo samo tvrđenje a). Iz uslova leme sledi, da za sistem (0.1) u drugom kvadrantu u blizini tačke $(0,0)$ imamo

$$(3.22) \quad \dot{X}_1 = U_2 + o(|X_1| + |X_2|), \quad \dot{X}_2 = V_2 + o(|X_1| + |X_2|) < 0.$$

Integraleći sistem (3.22) sa početnim uslovima $X_1(t_1) = 0, X_2(t_1) = X_{02} > 0$ (na taj isti način, kao u sistem (3.9)) pri $t = t_1 + \tau, \tau > 0$, dobijamo

$$(3.23) \quad \begin{cases} X_1(t_1 + \tau) = U_2 \tau + o(\tau^2 + \tau X_{02}), \\ X_2(t_1 + \tau) = X_{02} + V_2 \tau + o(\tau^2 + \tau X_{02}). \end{cases}$$

Kako su $U_2 < 0, V_2 < 0$, to X_1 i X_2 opadaju (vd, sl. 3.16); kao pri dokazu leme 3.4 dobijamo, da rešenje (3.23) dostiže osu $OX_1 (X_1 < 0)$ pri

$$\tilde{\tau} = -\frac{X_{02}}{V_2} + o(X_{02}^2) = \tilde{\tau}_2,$$

u tačku

$$(3.24) \quad X_1(t_1 + \tilde{\tau}_2) = -\frac{U_2}{V_2} X_{02} + o(X_{02}^2) = X_{01},$$

što je traženiji oblik.

Lema 3.7. Neka su ispunjeni uslovi (3.16), (0.7) i

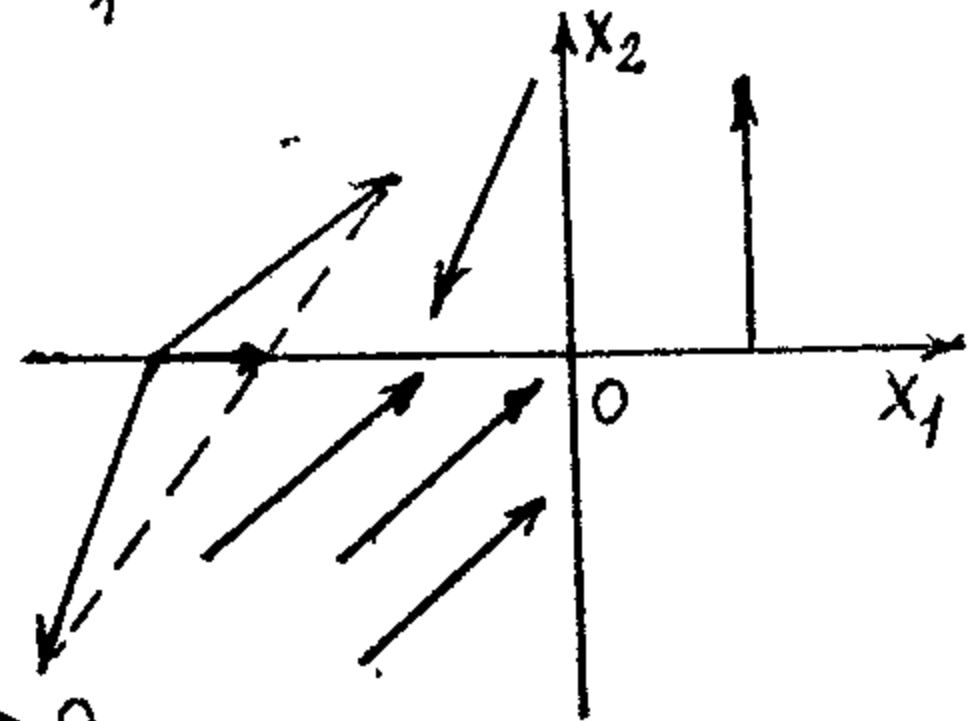
$$(3.25) \quad a_0 - b_0 - c_0 > 0, \quad d_0 - e_0 - f_0 > 0,$$

tada na osu $X_2 = 0, X_1 < 0$ imamo $\dot{X}_1 > \text{const} > 0$.

Dokaz. Iz (3.16), (3.25)

je $f_0 < 0$. Tada pri $X_2 = 0,$
 $-\delta_1 < X_1 < 0, \delta_1$ - dovoljno
 malo, dobijamo

$$\dot{X}_1 = (D_0 - D_{01})/f_0 + \alpha(X_1) > \text{const} > 0,$$



sl.3.9

pošto je $D_0 > D_{01}$ na osnovu (0.7)

(sl.3.9). Lema je dokazana.

Ako sistem (0.3) zadovoljava uslove (3.16),

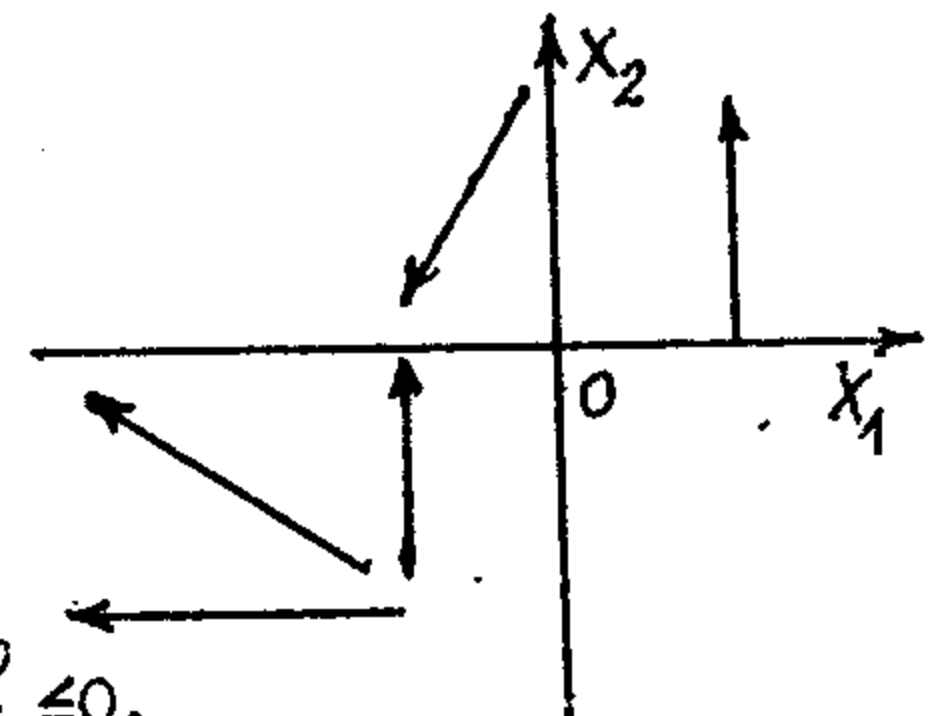
$$(3.26) \quad u_3 = a_0 - b_0 - c_0 \leq 0, \quad v_3 = d_0 - e_0 - f_0 \leq 0,$$

tada je $f_0 < 0$ i (0.7) je neispunjeno. Ovo nije treći kritički slučaj (sl.3.10).

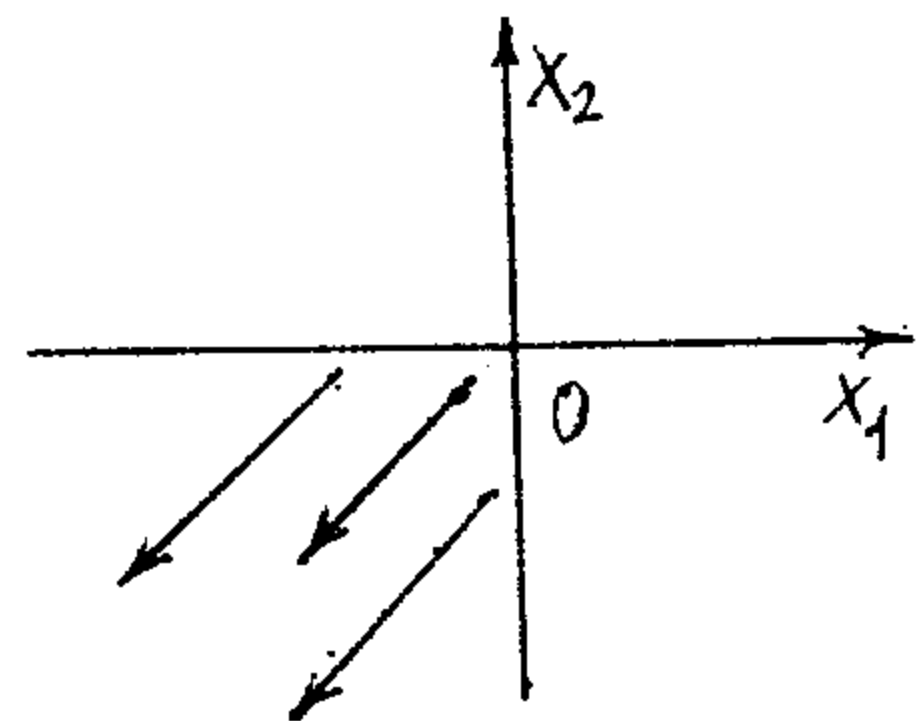
Slučaj $u_3 < 0, v_3 < 0$ nejavlja se kritičkim po lemi 3.2 (sl.3.11).

U trećem kvadrantu ostaje da se razmotri slučaj (3.25) i slučaj (3.18) (sl.3.9 i 3.12).

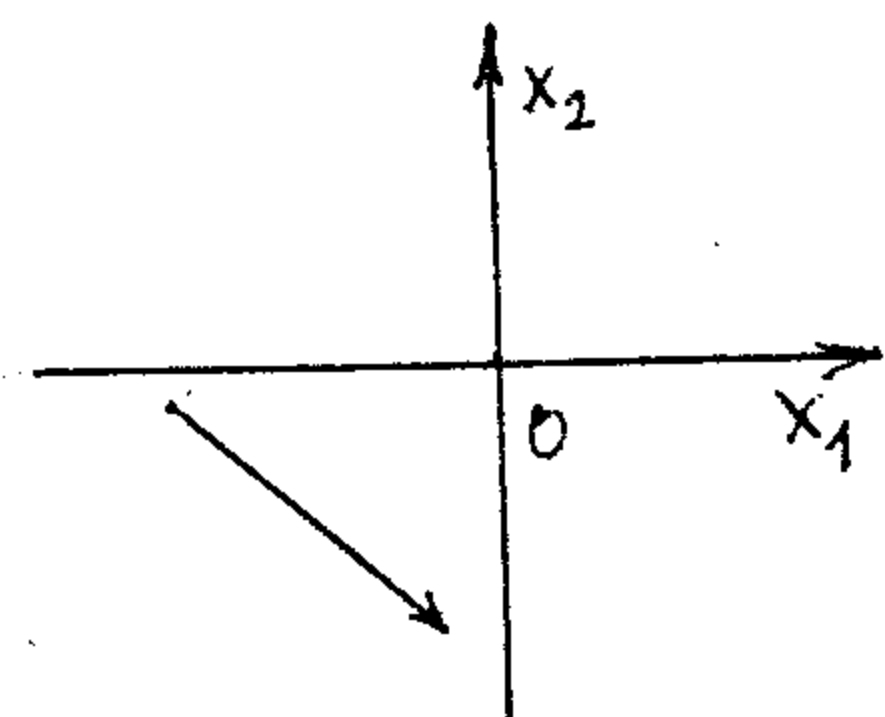
Pri uslovima (3.6), (3.16) i $a_0 - b_0 - c_0 \geq 0$ i u četvrtom kvadrantu slučaj $a_0 + b_0 - c_0 \leq 0$ je nemoguć (sl.3.13). Zaista,



sl.3.10



sl.3.11

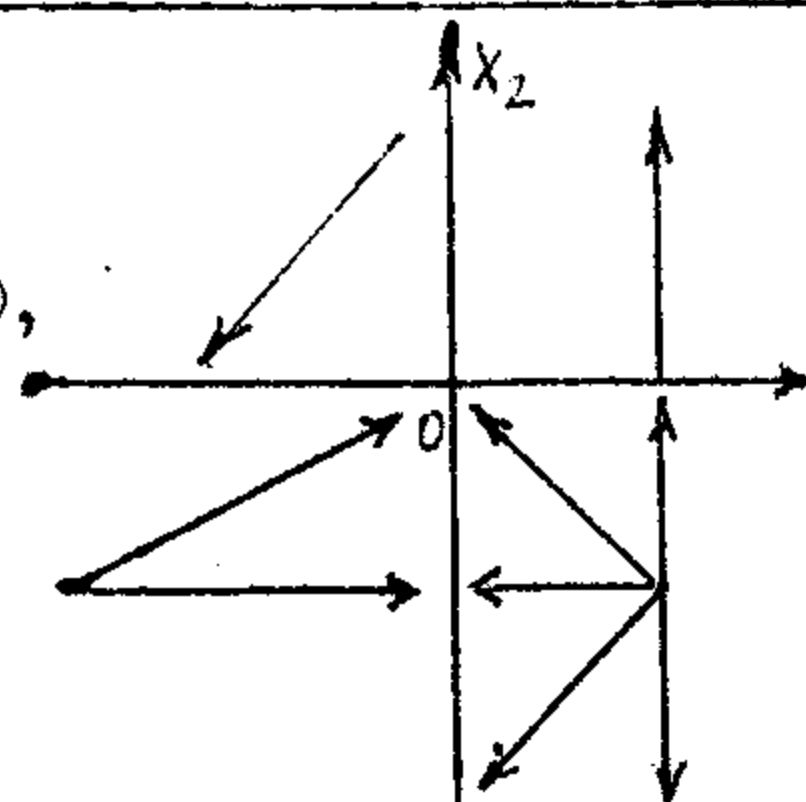


sl.3.12

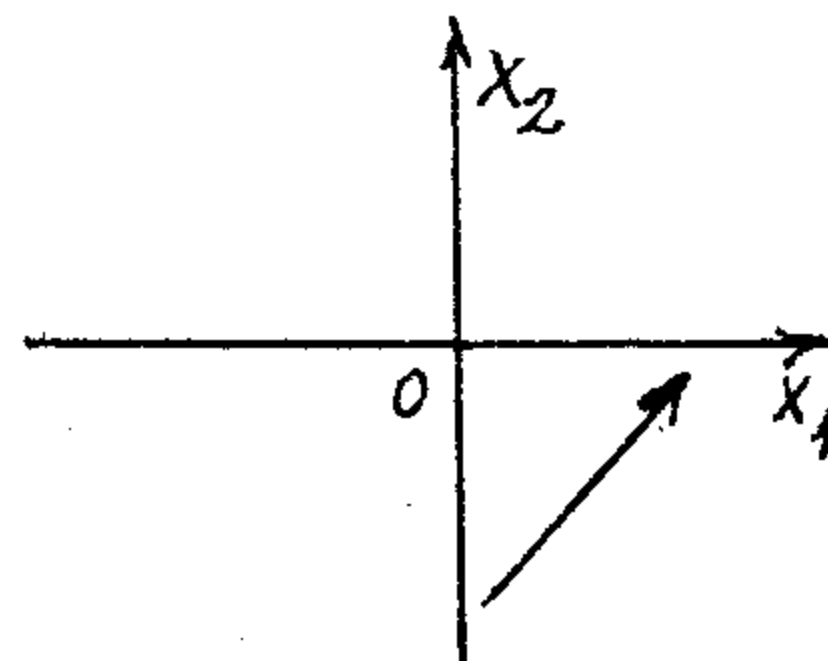
iz (3.6) i (3.16) sledi $b_0 > 0$,
 i u trećem kvadrantu $a_0 - b_0 - c_0 \geq 0$,
 a u četvrtom kvadrantu uvek
 imamo $a_0 + b_0 - c_0 \leq 0$, odatle
 proizilazi $b_0 \leq 0$. Protivrečnost.

Slučaj $a_0 + b_0 - c_0 > 0$,

$d_0 + e_0 - f_0 < 0$, nejavlja se
 kritičkim po lemi 3.2, ostaje
 slučaj (3.20) (sl.3.14).



Sl.3.13



Sl.3.14

Teorema 3.1. Pri uslovima

$$D_{01} < D_0,$$

$$(3.27) \quad a_2 + b_2 + c_2 < 0, \quad 0 < -a_0 - c_0 = b_0 < a_0 - c_0, \quad |d_0 + f_0| < e_0 < d_0 - f_0,$$

položaj ravnoteže sistema (0.1) je stabilan.

Dokaz. Kako je iz (3.27) $f_0 < 0$, to pri malom $x_1 < 0$ imamo $f < 0$, $D_1 < D$. Na osnovu formule (2.1) na osu Ox_1 ($x_1 < 0$, x_1 - malo) imamo $\dot{x}_1 > \text{const} > 0$. Iz (3.27) sledi, da u okolini koordinatnog početka u drugom kvadrantu,

$\dot{x}_1 < 0$, $\dot{x}_2 < 0$, u trećem i četvrtom $\dot{x}_1 > 0$, $\dot{x}_2 > 0$. Pre-

ma tome, u okolini koordinatnog

početka sva rešenja iz trećeg

kvadranta padaju ili na osu Ox_1

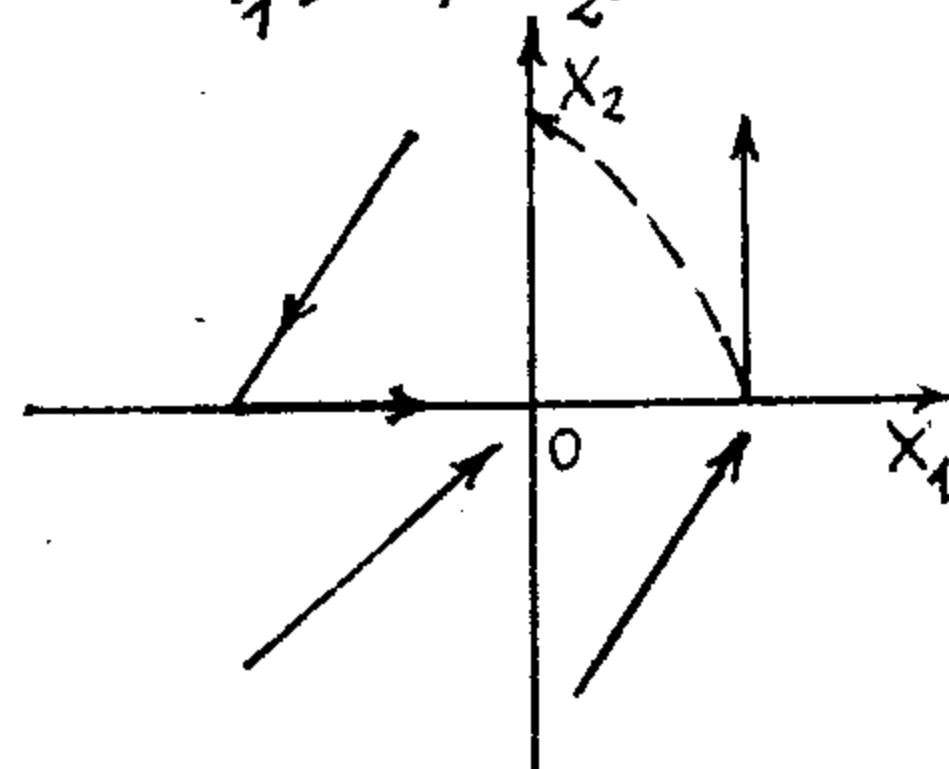
($x_1 < 0$), ili na osu Ox_2 ($x_2 < 0$),

zatim ili ulaze u tačku 0 po

toj osi, ili prelaze u četvrti

kvadrant, zatim u prvi, odavde

u drugi po lemi 3.4, zatim na osu Ox_1 ($x_1 < 0$) i ulaze u



Sl.3.15

u tačku 0.

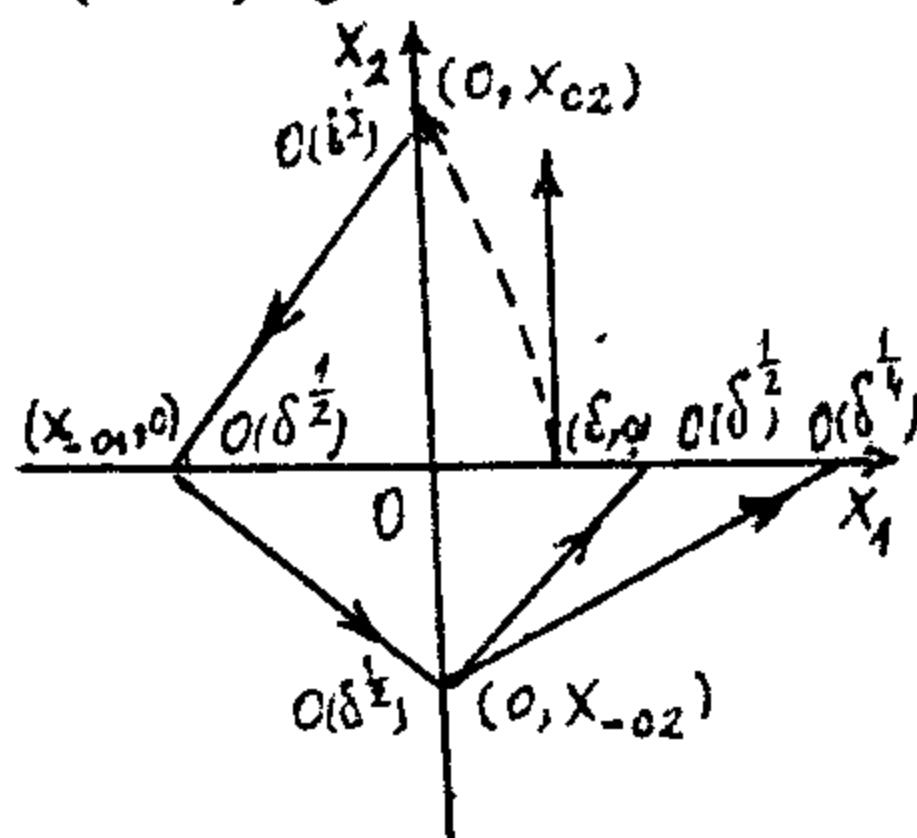
Dakle, sva rešenja iz δ - okoline tačke 0 ulaze u tačku 0, ne izlazeći, pri tome, iz ξ - okoline tačke 0 (i $\xi \rightarrow 0$, kada $\delta \rightarrow 0$). Na taj način, rešenje $X_1 \equiv 0$, $X_2 \equiv 0$ je asimptotski stabilno (sl.3.15).

Teorema 3.2. Neka su ispunjeni uslovi

$$(3.28) \quad \begin{cases} 0 < -a_0 - c_0 = b_0 < a_0 - c_0, & a_2 + b_2 + c_2 < 0, \\ -e_0 < d_0 - f_0 < e_0, & e_0 > |d_0 + f_0|, \end{cases}$$

tada položaj ravnoteže (0,0) sistema (0.1) je nestabilan.

Dokaz. Na osnovu lema 3.4, 3.6 i analognih ocena za treći i četvrti kvadrant trajektorija, izlazeći iz tačke $(\delta, 0)$ (sl.3.16), preseca koordinatne poluose u tačkama $(0, X_{02})$, $(X_{-01}, 0)$, $(0, X_{-02})$, $(X_{01}, 0)$, gde su (kraće pišemo)



Sl.3.16

$$(3.29) \quad \begin{cases} X_{02} = o(\delta^{1/2}), & X_{-01} = o(\delta^{1/2}), \\ X_{-02} = o(\delta^{1/2}), & X_{01} = c\delta^{1/2} + o(\delta). \end{cases}$$

Tada pri dovoljno malom δ :

$$X_{01} > 2\delta,$$

i rešenje se udaljava od koordinatnog početka, tj. rešenje sistema je nestabilno.

Teorema je dokazana.

G L A V A II

ISPITIVANJE STABILNOSTI SISTEMA U KRITIČKIM SLUČAJEVIMA DRUGOG REDA

4. Slučaj, kada u dva kvadranta vektor brzine je paralelan osi

Lema 4.1. Slučaji, kada jedno iz nejednakosti (0.6) zamene se jednakošću, (0.7) je ispunjeno, i u dva kvadranta vektor brzine je paralelan jednoj istoj osi, nejavljaju se kritičkim slučajevima drugog reda.

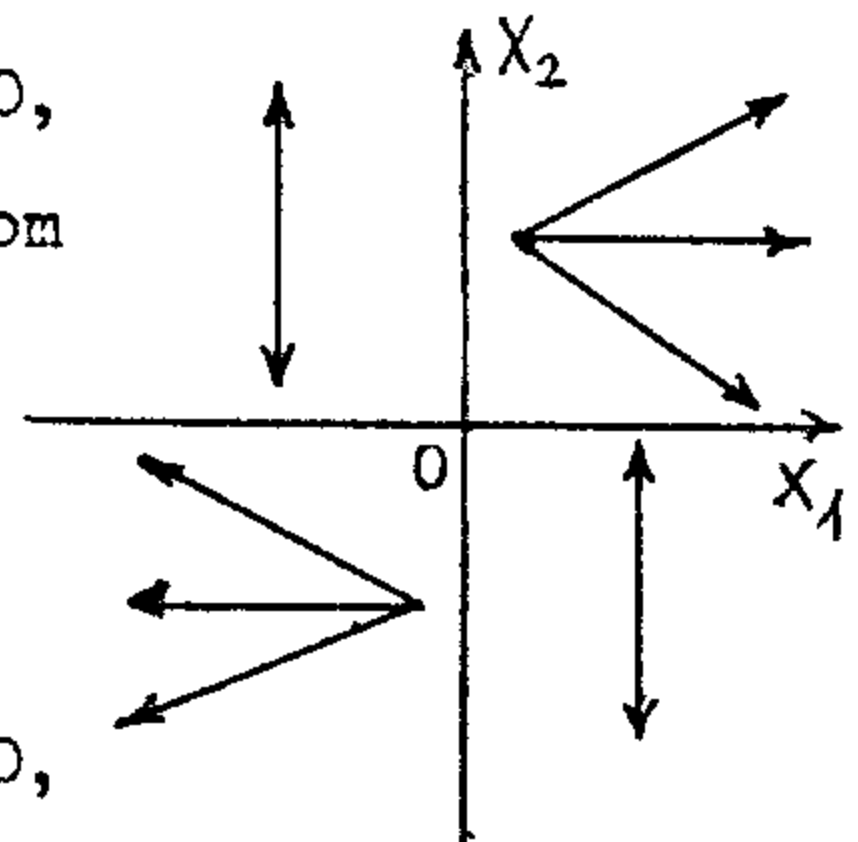
Dokaz. Neka je ispunjeno (3.4).

a) Ako je $a_0 \neq 0$, $c_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$, to $|a_0| \neq |c_0|$ i tada samo u jednom kvadrantu vektor je paralelan osi OX_2 . Ovaj slučaj je razmotren u § 3.

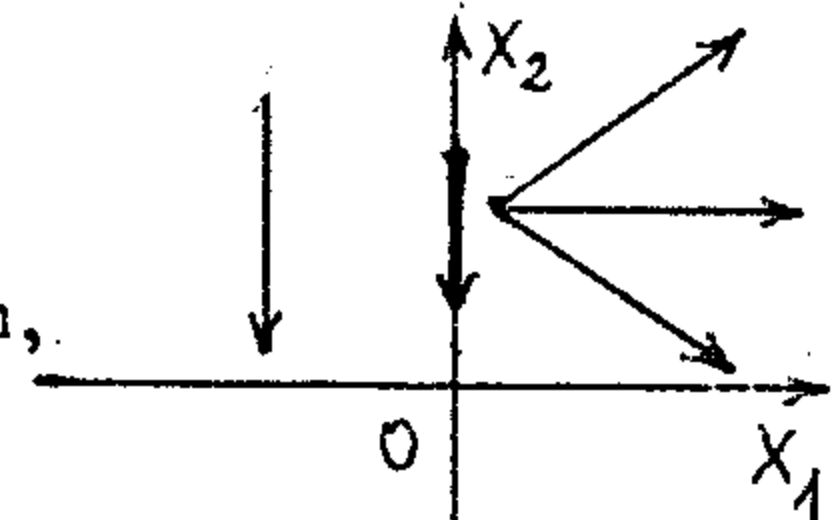
b) Ako je $b_0 = 0$, $a_0 \neq 0$, $c_0 \neq 0$, to $|a_0| = |c_0| \neq 0$. Tada u dva susedna kvadranta vektor je paralelan osi (u prvom i drugom, ako je $a_0 = -c_0$ ili u trećem i četvrtom, ako je $a_0 = c_0$). Kako je

$$D_{02} \pm D_0 = \begin{vmatrix} b_0 & a_0 \pm c_0 \\ e_0 & d_0 \pm f_0 \end{vmatrix},$$

to $D_{02} + D_0 = 0$ ili $D_{02} - D_0 = 0$, što je suprotno (0.7).

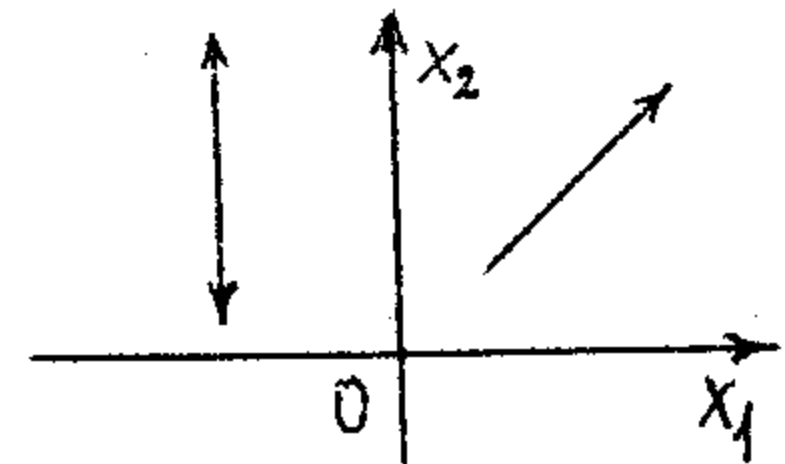


S1.4.1

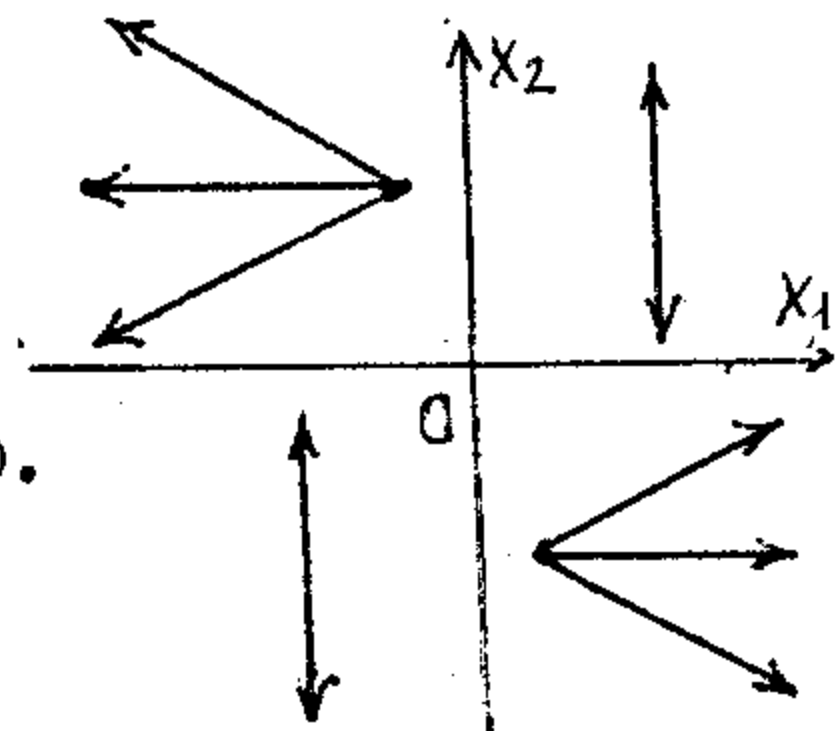


S1.4.1a

c) Ako je $a_0 = 0$, $c_0 \neq 0$, to $b_0 = |c_0| > 0$ (sl.4.1, 4.2). Ako je u prvom i drugom kvadrantu $\dot{X}_2 < 0$, to $D_{02} + D_0 < 0$, $D_0 < -D_{02}$ i (0.7) je neispunjeno (sl.4.1a). U slučaju $\dot{X}_2 > 0$ u prvom i trećem kvadrantu (sl.4.1b) nestabilnost sledi iz teoreme Četajeva [15] ako se uzme $V(X_1, X_2) = X_2$, gde, na osnovu sistema, $\frac{dV}{dt} > \text{const} > 0$ kada $X_2 > 0$. Znači, i pri malim promenama koeficijenata ostaje $\frac{dV}{dt} > 0$, tj. nestabilno, odnosno ovaj slučaj je nekritički.



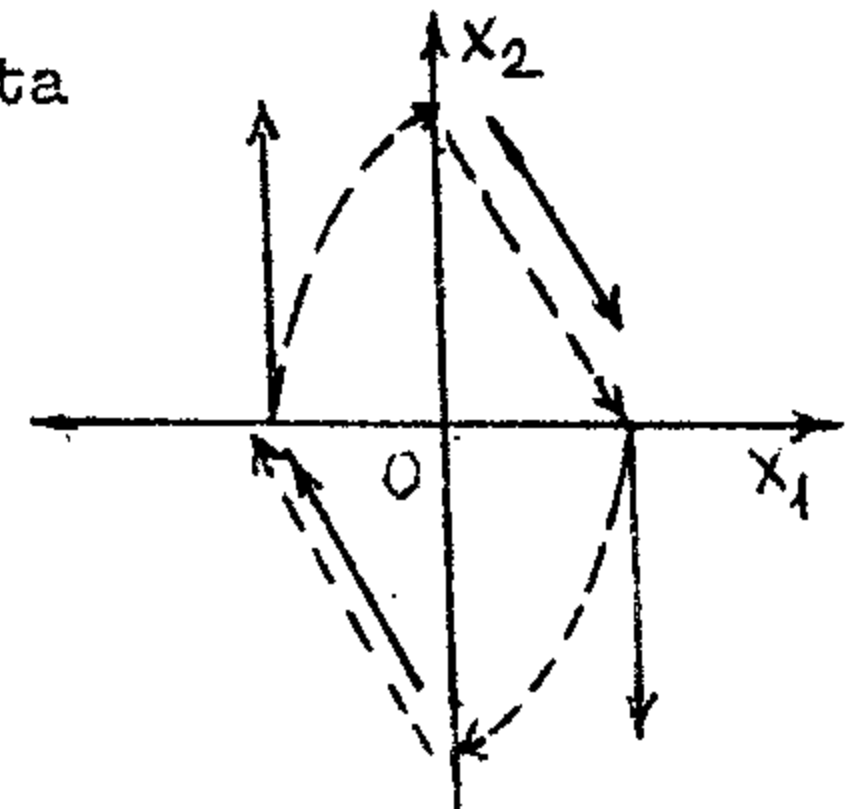
Sl.4.1b



Sl.4.2

Mi vidimo sada, da kada je ispunjeno (0.7) ostaje samo slučaj na slici 4.3. Ovo je nekritički slučaj, pošto pri malim promenama koeficijenata

uvek ostaje nestabilno (ako posle promene koeficijenata u drugom kvadrantu bude $\dot{X}_1 \leq 0$ ili u četvrtom $\dot{X}_1 \geq 0$, tada u ovom kvadrantu ima se rešenje, udaljavajuće iz okoline tačke $(0,0)$ u beskonač-



Sl.4.3

nost); ako je pak u drugom kvadrantu $\dot{X}_1 > 0$, u četvrtom $\dot{X}_1 < 0$, onda biće ispunjeno (0.4), a (0.5) je neispunjeno - zato tačka $(0,0)$ biće nestabilnim fokusom.

d) Ako je $c_0 = 0$, $a_0 \neq 0$, tada je $b_0 = |a_0| > 0$ (sl.4.4a, 4.4b). Kako je

$$D_{01} + D_0 = \begin{vmatrix} a_0 \pm b_0 & c_0 \\ d_0 \pm e_0 & f_0 \end{vmatrix},$$

to $D_{01} + D_0 = 0$ ili $D_{01} - D_0 = 0$.

Ovo je suprotno (0.7).

e) Ako su dva od brojeva a_0, b_0, c_0 jednaki nuli, to na osnovu (3.4) trčei je tkaode jednak nuli, tj. $a_0 = b_0 = c_0 = 0$. Tada su $D_0 = D_{01} = D_{02} = 0$, i ovaj je kritički slučaj više drugog reda.

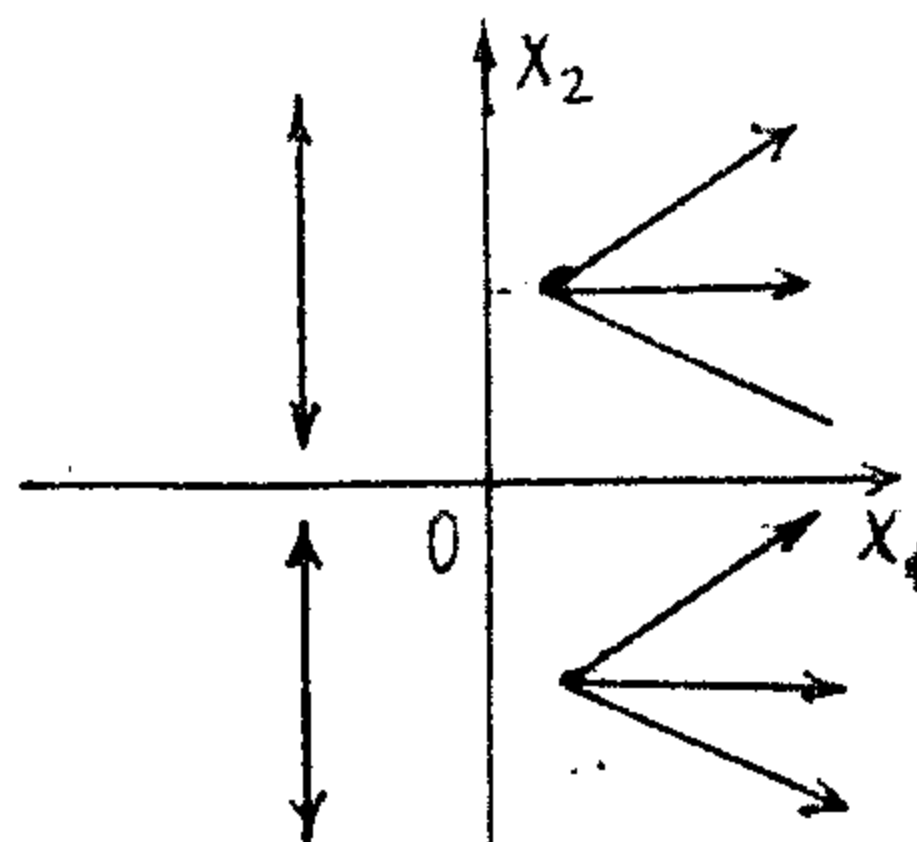
Lema 4.2. Neka se u (0.6) obe nejednakosti zamene jednakostima i (0.7) je ispunjeno.

Tada su uslovi $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0,$

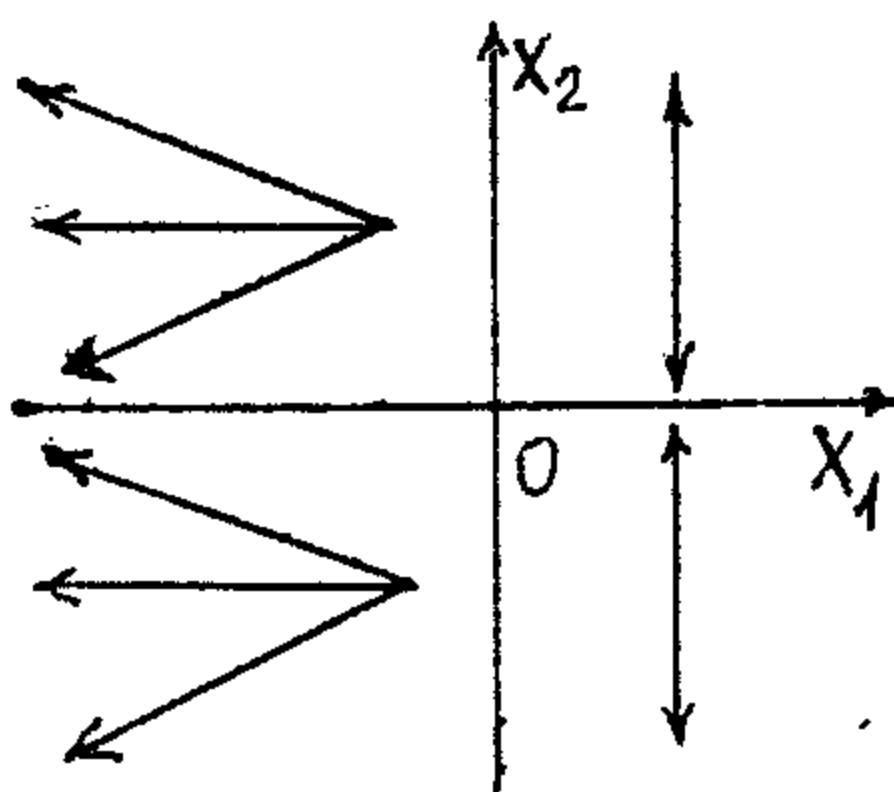
$c_0 \neq 0, d_0 \neq 0, e_0 \neq 0, f_0 \neq 0$ potrebni i dovoljni, da bi za sistem (0.3) vektor brzine bio samo u dva kvadranta paralelan osi. Pri tome u jednom kvadrantu on je paralelan OX_1 , a u drugom paralelan OX_2 .

Dokaz. Pri (3.4) u nekom kvadrantu vektor (\dot{X}_1, \dot{X}_2) je paralelan OX_2 (vd. odeljke 1) i 2) dokaza leme 3.3), iz $f_0 = |d_0| - |e_0|$ - analogno, negde vektor je paralelan osi OX_1 . Znači, potrebno je, da bi samo u jednom kvadrantu vektor bio paralelan OX_2 , i u drugom paralelan OX_1 . Iz dokaza leme 3.3 vidi se, da za to potrebno je $a_0 \neq 0, c_0 \neq 0, |a_0| \neq |c_0|$ (znači, $b_0 \neq 0$ na osnovu (3.4) i analogno za d_0, e_0, f_0).

Potrebno je, da bi vektor (\dot{X}_1, \dot{X}_2) bio paralelan OX_1



Sl.4.4a



Sl.4.4b

i OX_2 ne u jednom istom kvadrantu. (Ako je u jednom kvadrantu $\dot{X}_1 = 0, \dot{X}_2 = 0$, tada je u ovom kvadrantu položaj ravnoteže. Ovo će se razmotriti u §6).

Napišimo ovo razmatranje u obliku uslova na a_0, b_0, \dots, f_0 ; a) svi su oni različiti od nula, b) ako je $a_0 + b_0 + c_0 = 0$, to je $d_0 + e_0 + f_0 \neq 0$, i td. analogno - za druge kvadrante. Međutim, ako je $a_0 + b_0 + c_0 = 0$, $d_0 + e_0 + f_0 = 0$, to je

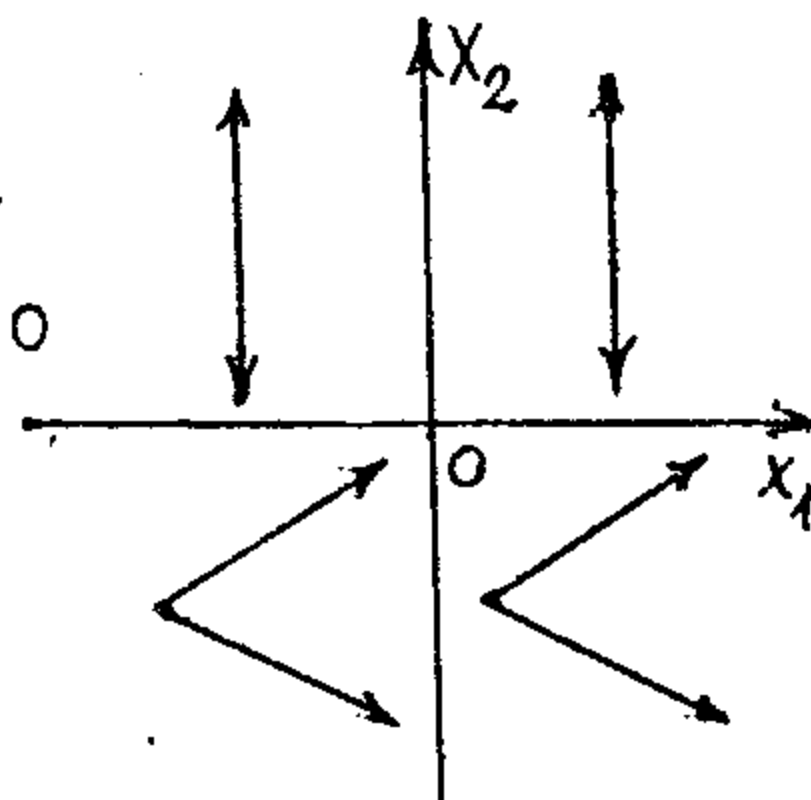
$$D_0 + D_{02} = \begin{vmatrix} b_0 & a_0 + c_0 \\ e_0 & d_0 + f_0 \end{vmatrix} = 0,$$

što je protivurečna (0.7). Lema je dokazana.

Napomena 4.1. U nekim slučajevima jednakosti (0.6) i (0.7) postaju zavisne. Naprimer, ako je $a_0 + b_0 + c_0 = 0$, $d_0 + e_0 + f_0 = 0$, $a_0 c_0 < 0$, $a_0 + c_0 < 0$, $d_0 e_0 < 0$, $d_0 + e_0 < 0$, to je $b_0 = ||a_0| - |c_0||$, $f_0 = ||d_0| - |e_0||$, $D_0 = |D_{01}|$, $D_0 = |D_{02}|$. Ovo je kritički slučaj drugog reda, pošto su nezavisne jednakosti samo dve.

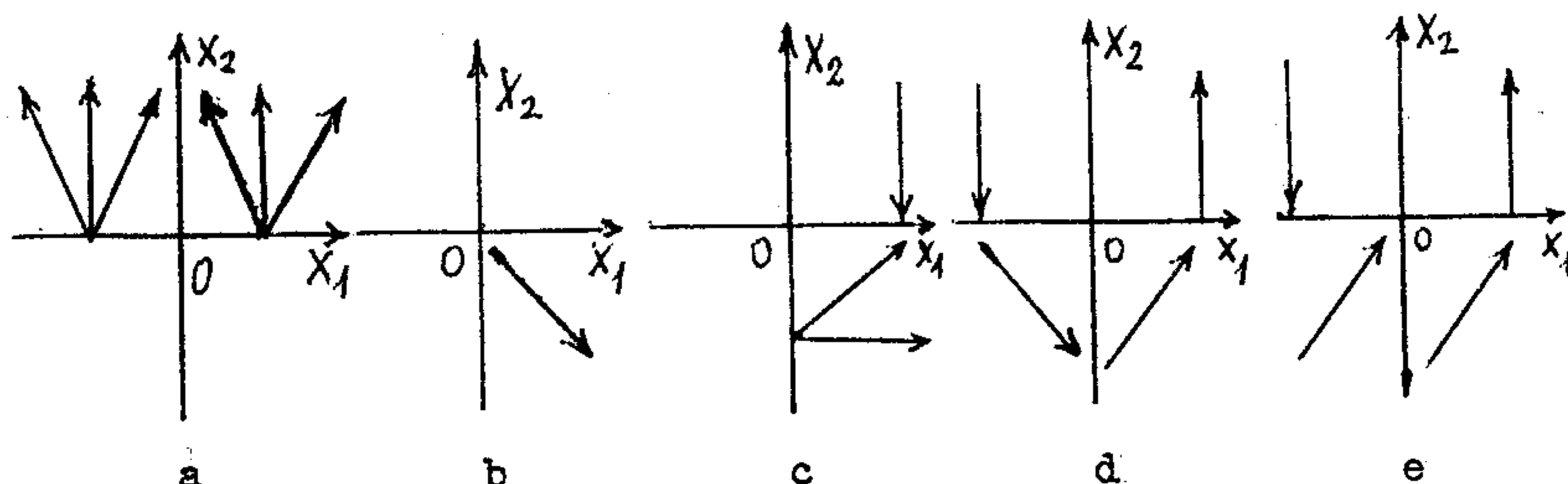
Razmotrimo još slučajeve, kada je u dva kvadranta vektor brzine paralelan jednoj istoj osi, pri tome u (0.7) dopušta se jednakost.

1) Ako je $\dot{X}_1 = 0$ u prvom i drugom kvadrantu, to je $a_0 \mp b_0 + c_0 = 0$ i, znači, $b_0 = 0, a_0 + c_0 = 0$. Stoga, a_0 i c_0 su različitih znakova. Neka je $a_0 > 0, c_0 = -a_0 < 0$. Tada je u trećem i četvrtom kvadrantu $\dot{X}_1 = a_0 \mp b_0 - c_0 = 2a_0 > 0$ (sl.4.5).



Sl.4.5

Pri tome su mogući takvi smerovi vektora brzina u kvadrantima: (sl.4.6a - 4.6e).



Sl.4.6

Slučaji 4.6a,b,c - su nestabilni, a 4.6d,e - treba ispitivati.

Slučaj, kada je u trećem i četvrtom kvadrantu $\dot{X}_1 = 0$ svodi se u razmatranom, zamenom X_2 na $-X_2$.

2) Ako je u prvom i četvrtom kvadrantu $\dot{X}_1 = 0$ (ako je u drugom i trećem - to je analogno),

to je $a_0 + b_0 \pm c_0 = 0$, znači, $c_0 = 0$,

$a_0 + b_0 = 0$. Ako je $b_0 > 0$, to

(vd.sl.4.7) pri $X_1 < 0$ imamo

$\dot{X}_1 = a_0 - b_0 = -2b_0 < 0$. Funkcija

Četajeva je $V = -X_1$, $\frac{dV}{dt} =$

$= 2b_0 = \text{const} > 0$, što daje ne-

stabilnost. Ovo je nekritički

slučaj. Ako je $b_0 < 0$, onda su

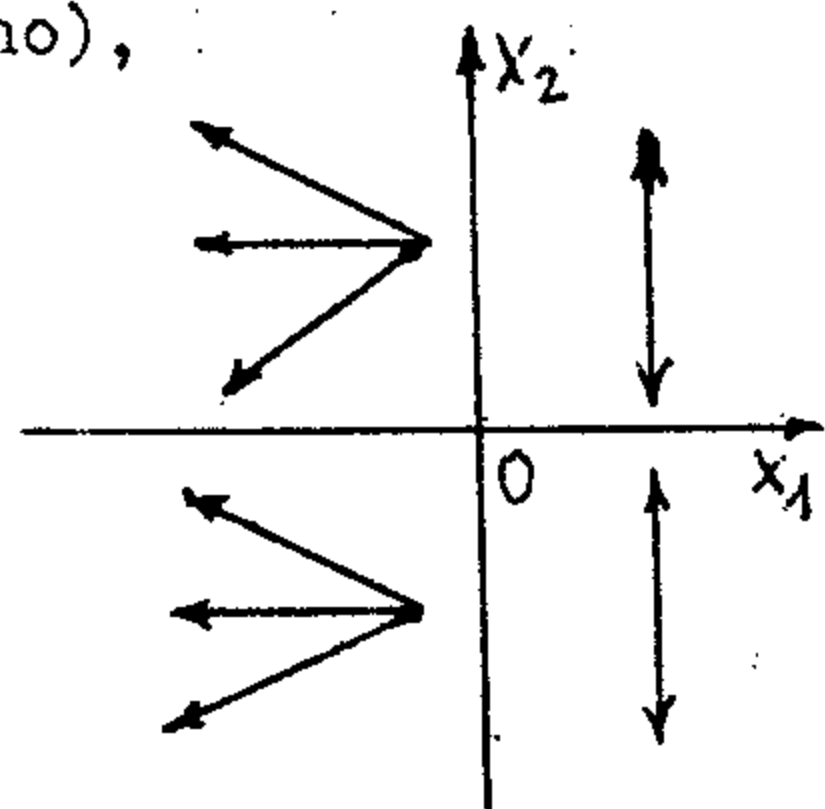
mogući takvi smerovi vektora

brzina u kvadrantima kako je

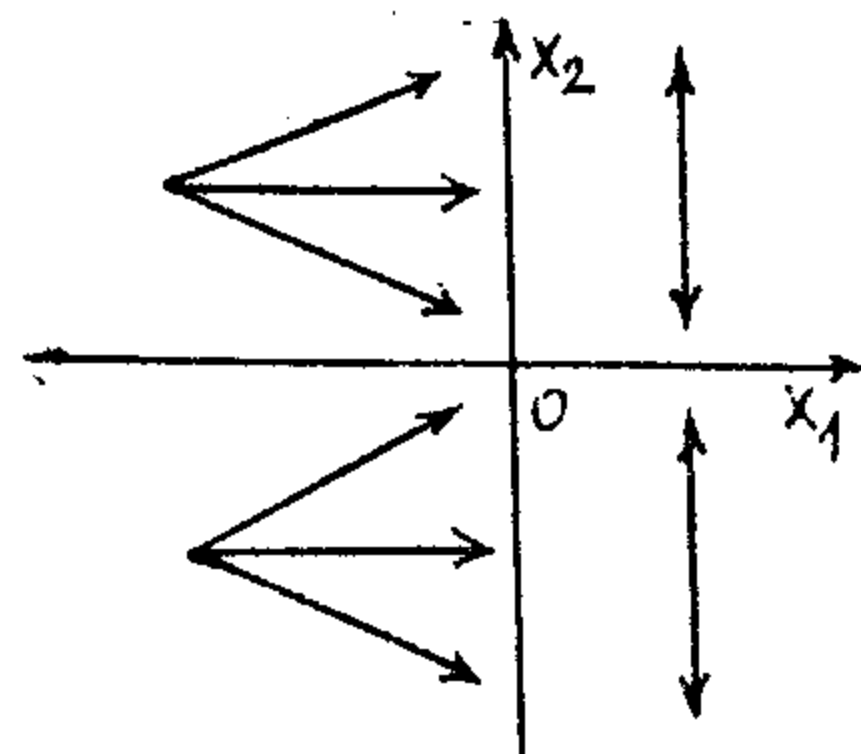
prikazano na slici 4.8.

Ako je pri ovome u prvom

kvadrantu $\dot{X}_2 > 0$, to po lemi 3.5



Sl.4.7

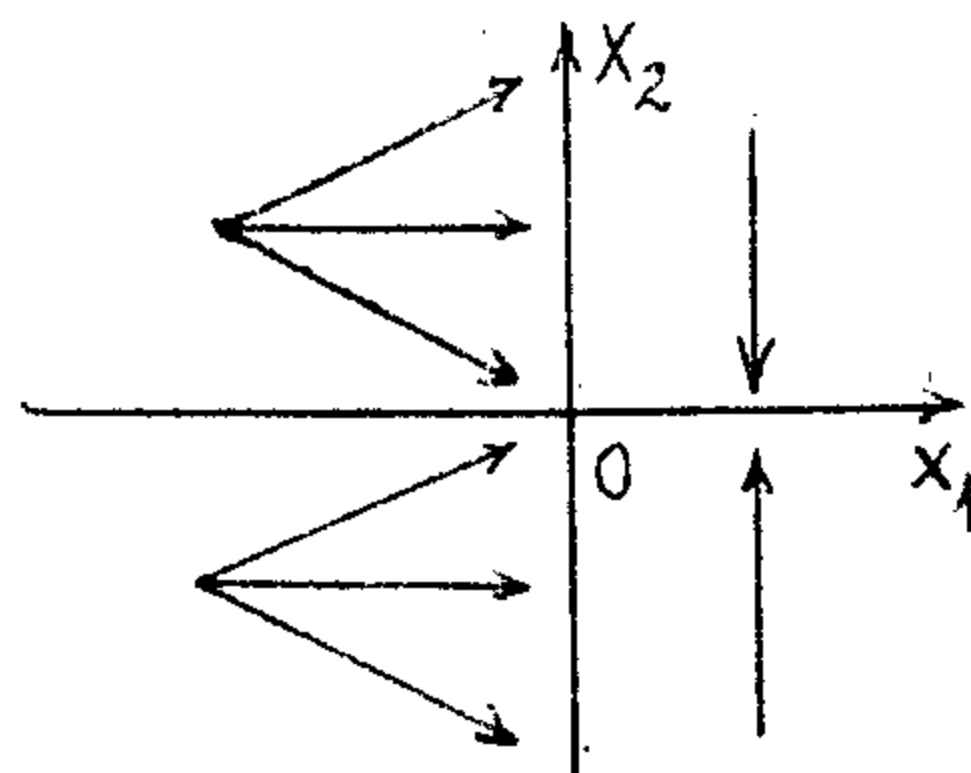


Sl.4.8

ovaj slučaj je nestabilan i nejavlja se kritičkim.

Isto tako biće u slučaju, kada je u četvrtom kvadrantu $\dot{X}_2 < 0$.

Ostaje slučaj, kada je u prvom kvadrantu $\dot{X}_1 = 0$, $\dot{X}_2 < 0$, a u četvrtom $\dot{X}_1 = 0$, $\dot{X}_2 > 0$ (sl.4.9). Ovo bilo je razmotreno u § 2.



Sl.4.9

Lema 4.3. Za sistem (0.3) sledeći slučaji su nestabilni i nejavljaju se kritičkim: 1) ako u jednom od poluravni X_1 i X_2 imaju jedan isti znak, tj. u poluravni $X_1 > 0$ (ili $X_1 < 0$) je $\dot{X}_1 X_1 > 0$, ili u poluravni $X_2 > 0$ (ili $X_2 < 0$) je $\dot{X}_2 X_2 > 0$ (sl.4.6a), 2) u jednom od kvadranta je $\dot{X}_1 X_1 > 0$, $\dot{X}_2 X_2 > 0$ (sl.4.6b), 3) u prvom kvadrantu je $\dot{X}_1 = 0$, $\dot{X}_2 < 0$, a u četvrtom $\dot{X}_1 > 0$, $\dot{X}_2 > 0$ (sl.4.6c) ili analogno uslovima u dva druga susedna kvadranta. Drugim rečima, slučajevi prikazani na slikama 4.6,a,b,c-su nestabilni i nejavljaju se kritičkim.

Dokaz. U slučaju 1) uzmimo $V = X_2$ u oblasti $X_2 > 0$, u slučaju 2) $V = -X_1 X_2$ u četvrtom kvadrantu. Tada je $\frac{dV}{dt} \geq \text{const} > 0$ i po teoremi Četajeva [15] nula - rešenje je nestabilno. Nejednakost $\frac{dV}{dt} > \text{const} > 0$ i nestabilnost se očuva i pri malim promenama koeficijenata sistema. Znači, ovaj slučaj je nekritički.

Slučaj 3) razmatra se analogno lemi 3.5. U prvom kvadrantu $\dot{X}_2 = d_0 + e_0 + f_0 < 0$, u četvrtom $\dot{X}_2 = d_0 + e_0 - f_0 \geq 0$. Znači, $f_0 < 0$ i kretanje postoji po OX_1 sa brzi-

nom $\dot{X}_1 = (D_{01} + D_0) / f_0$. Iz 3) uslova sleduje da je $\dot{X}_1 > 0$. Zato je $D_{01} + D_0 < 0$, tj. $D_0 < -D_{01}$, $D_0 < |D_{01}|$ i uslov (0.7) je neispunjen. Zbog stroge nejednakosti $D_0 < |D_{01}|$ ovaj slucaj ne lezi na granici stabilnosti i nejavlja se kritickim. Lema je dokazana.

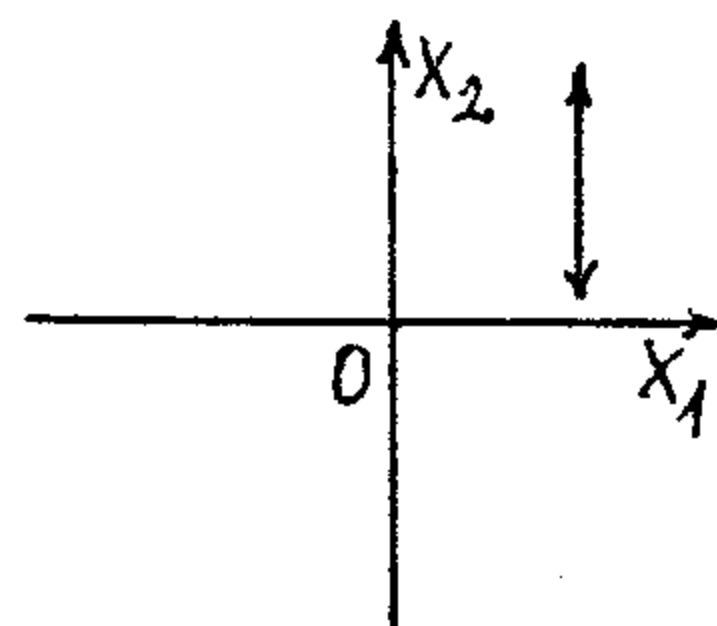
Prebrojimo kriticke slucaje, kada je u jednom kvadrantu $\dot{X}_1 = 0$, a u drugom $\dot{X}_2 = 0$.

Neka je (0.4) neispunjeno, (0.7) je ispunjeno. Tada je u (0.6) jednakost (u jednoj ili u dve formule).

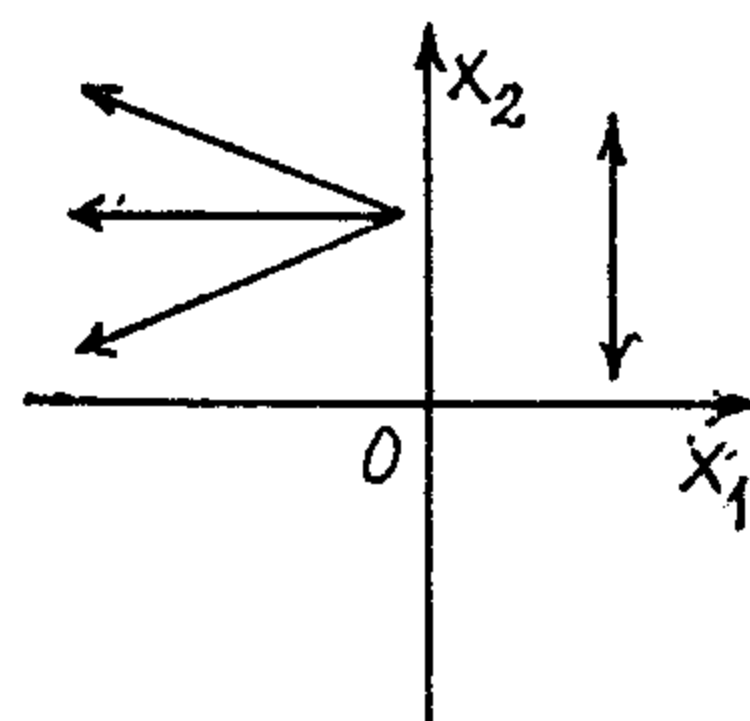
Ako je u jednoj formuli (0.6) jednakost (ako bi znak $<$, to je stabilno) - ovo je razmatrano u §3 ili nejavlja se kritickim slucajem po lemi 4.1. Ako je u dve formule (0.6) jednakost i pri tome $b_0 \neq 0, f_0 \neq 0$, to je ovo u lemi 4.2. Iz (0.6), $b_0 = |a_0| - |c_0| > 0, f_0 = |d_0| - |e_0| > 0$.

Neka je u prvom kvadrantu $\dot{X}_1 = 0$ (sl.4.10), Kako je $b_0 = |a_0| - |c_0| > 0, u_1 = a_0 + b_0 + c_0 = 0$, to odavde sledi $u_2 = a_0 - b_0 + c_0 < 0$ (sl.4.11), tj. dobija se nestabilnost.

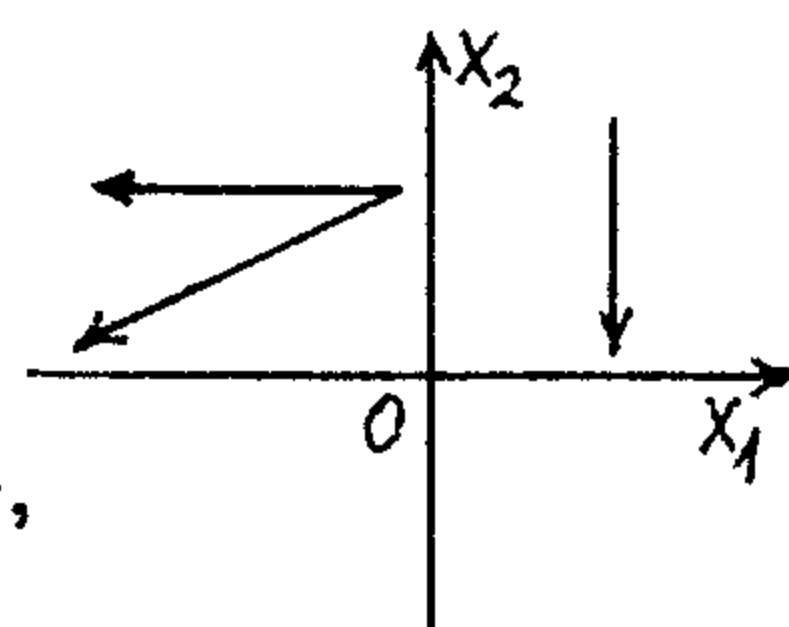
a) Kako je $f_0 > 0, v_2 = d_0 - e_0 + f_0 \leq 0, v_1 = d_0 + e_0 + f_0 < 0$ (sl.4.12), to je $v_3 = d_0 - e_0 - f_0 < 0$ i $v_4 = d_0 + e_0 - f_0 < 0$ (sl.4.13). Ovaj slucaj se svodi u lemi 4.3, 1) slucaja zamenom X_2 na $-X_2$.



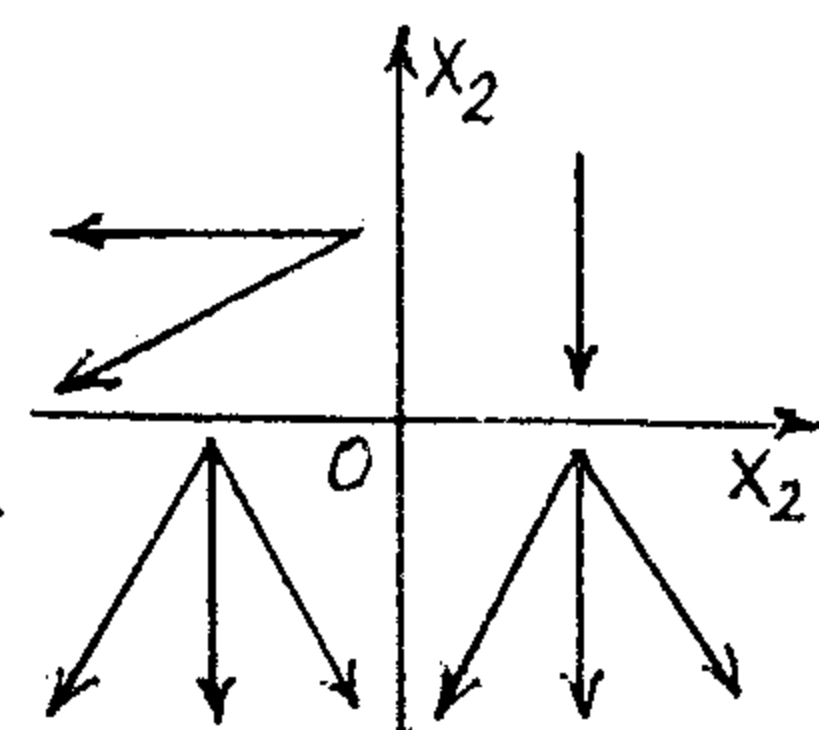
Sl.4.10



Sl.4.11



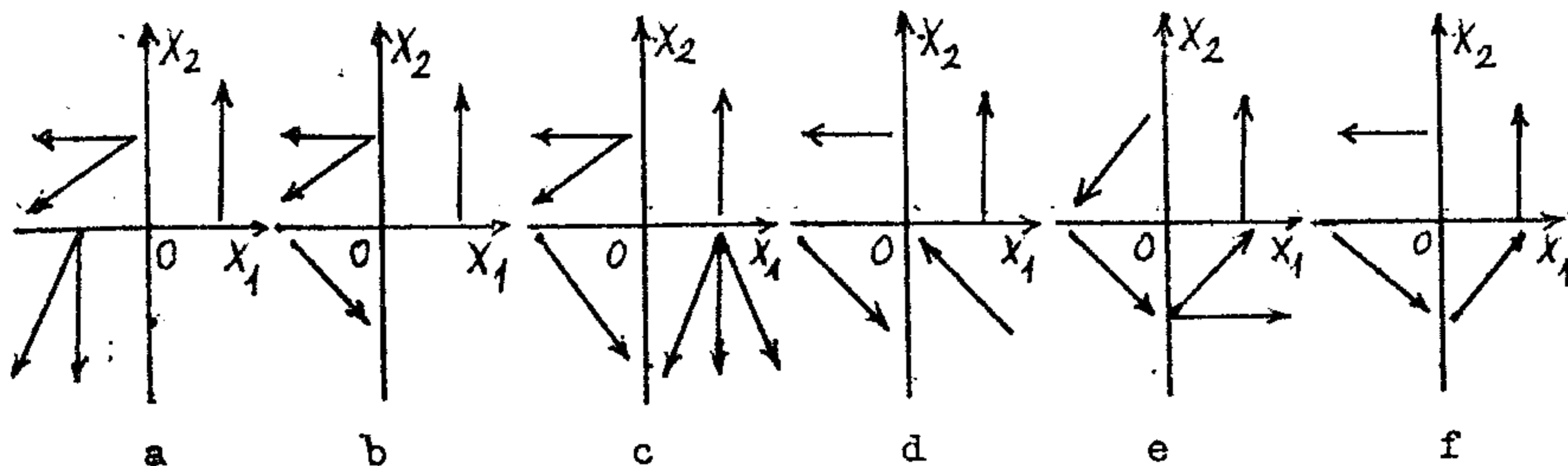
Sl.4.12



Sl.4.13

Dakle, u oblasti $X_2 < 0$ imamo $V = -X_2$. Ova je funkcija Četajeva [15] i $\frac{dV}{dt} = -\dot{X}_2 \cong \text{const} > 0$, što je nestabilnost i nekritički slučaj.

b) S druge strane, lako je viditi, da su mogući još takvi smerovi vektora brzina u kvadrantima: (sl.4.14a - 4.14f).



Sl.4.14

Zaista, slučaji 4.14a,b,c su nestabilni, 4.14d je nemoguć ($b_0 < 0$ i $b_0 > 0$), 4.14e treba ispitivati i 4.14f -analogno predhodnom slučaju.

Osim slučaja, razmatranog u lemi 4.2, moguć je još slučaj, kada je u jednom kvadrantu vektor brzine paralelan jednoj osi, a u drugom - drugoj osi. Ako su pri tome ispunjeni (0.6) i (0.7) (a (0.4) je neispunjeno), to je saglasno [13] tačka (0,0) asimptotska stabilna. Pošto se asimptotska stabilnost očuva se pri malim promenama koeficijenata, to je ovaj slučaj nekritički.

Razmotrimo slučaj, kada (0.7) je ispunjeno, i jedno iz nejednakosti (0.6) zamenjuje se na jednakost. Neka je ispunjeno (3.4). Iz odeljka b) dokaza leme 4.1 sledi, da u ovom slučaju kada je ispunjeno (0.7) imamo $b_0 \neq 0$ i, znači, $b_0 > 0$. Iz jednakosti (3.4) sledi, da je u jednom kvadrantu $\dot{X}_1 = 0$. Neka je u prvom kvadrantu $\dot{X}_1 = 0$, tj.

$$a_0 + b_0 + c_0 = 0.$$

Više je bio razmotren slučaj $f_0 > 0$. Ako je $f_0 = 0$, to ne može da bude $\dot{X}_2 = 0$ samo u jednom kvadrantu (tada je u drugom i trećem kvadrantu $\dot{X}_2 = d_0 - e_0$, u prvom i četvrtom kvadrantu $\dot{X}_2 = d_0 + e_0$).

Ostaje da se razmatra slučaj $f_0 < 0$.

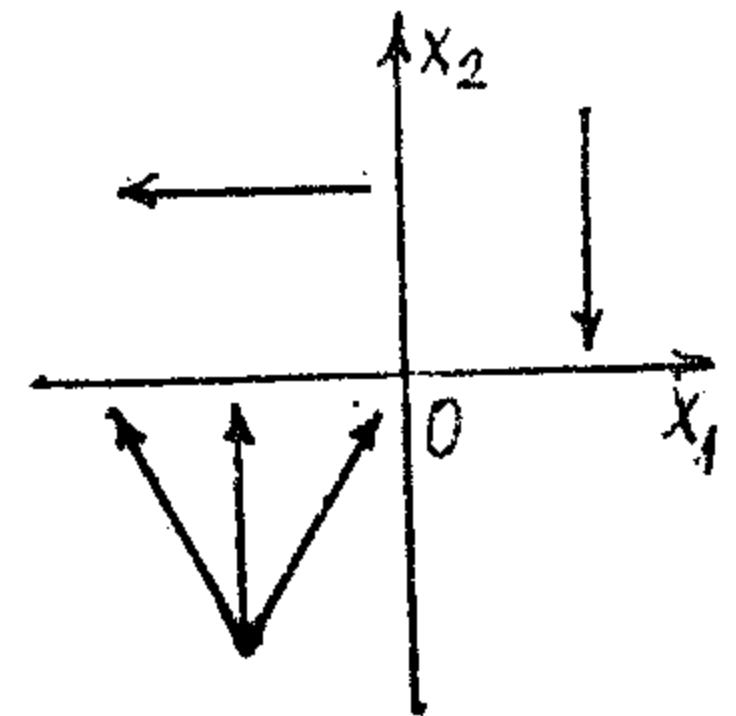
1) Neka je $f_0 < 0$. Znači, u trećem kvadrantu je $\dot{X}_2 > 0$ (sl.4.15). Primenjujući analogna rasuđivanja kao za dokaz leme 3.5, dobijamo da nula-rešenje zadovoljava sve uslove nestabilnosti.

Ako je u drugom i trećem kvadrantu $\dot{X}_1 < 0$, to je $a_0 < b_0$, (sl.4.16), i u oblasti $X_1 < 0$, $V = -X_1$. Zato, na osnovu teoreme Četajeva [15], ovaj slučaj je nestabilan i nekritički.

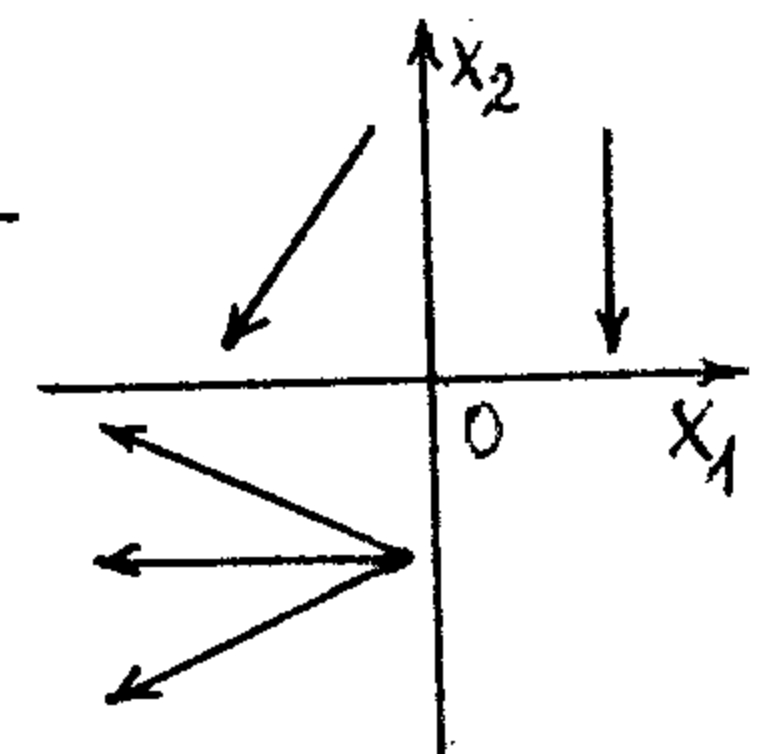
Ako je u drugom kvadrantu $\dot{X}_1 < 0$, a u trećem $\dot{X}_1 > 0$, to je $c_0 < 0$. Tada je u četvrtom kvadrantu $\dot{X}_1 = a_0 + b_0 - c_0 = -2c_0 > 0$ (sl.4.17).

Ako pri ovim uslovima, u prvom kvadrantu imamo $\dot{X}_1 = 0$, $\dot{X}_2 < 0$, a u četvrtom $\dot{X}_1 > 0$, tada imamo $f_0 \leq 0$, a kretanje po OX_1 ($X_1 > 0$), saglasno formuli (2.1), $\dot{X}_1 = (D_{01} - D_0) / f_0 > 0$ i, znači, rešenje je nestabilno.

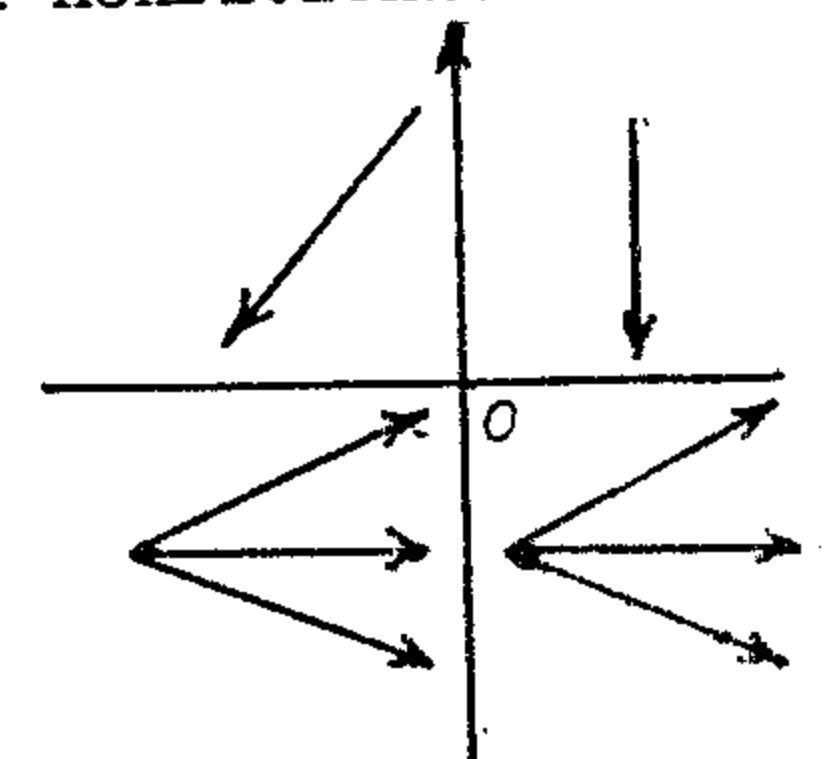
2) Bilo je: $b_0 > 0$, $f_0 < 0$ (vd.sl.4.11), tada je u četvrtom kvadrantu $\dot{X}_2 > 0$ (sl.4.18).



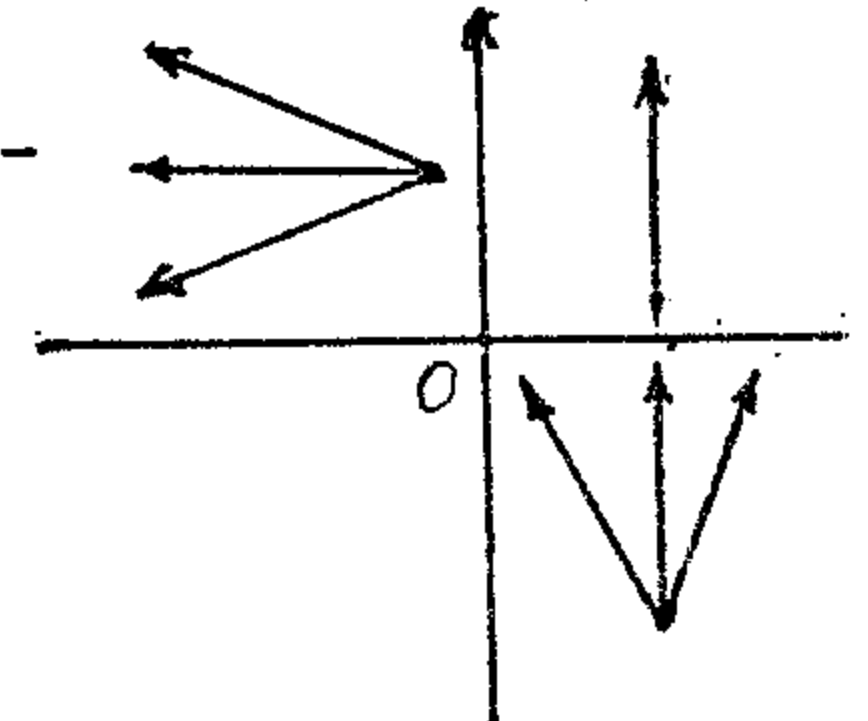
sl.4.15



sl.4.16

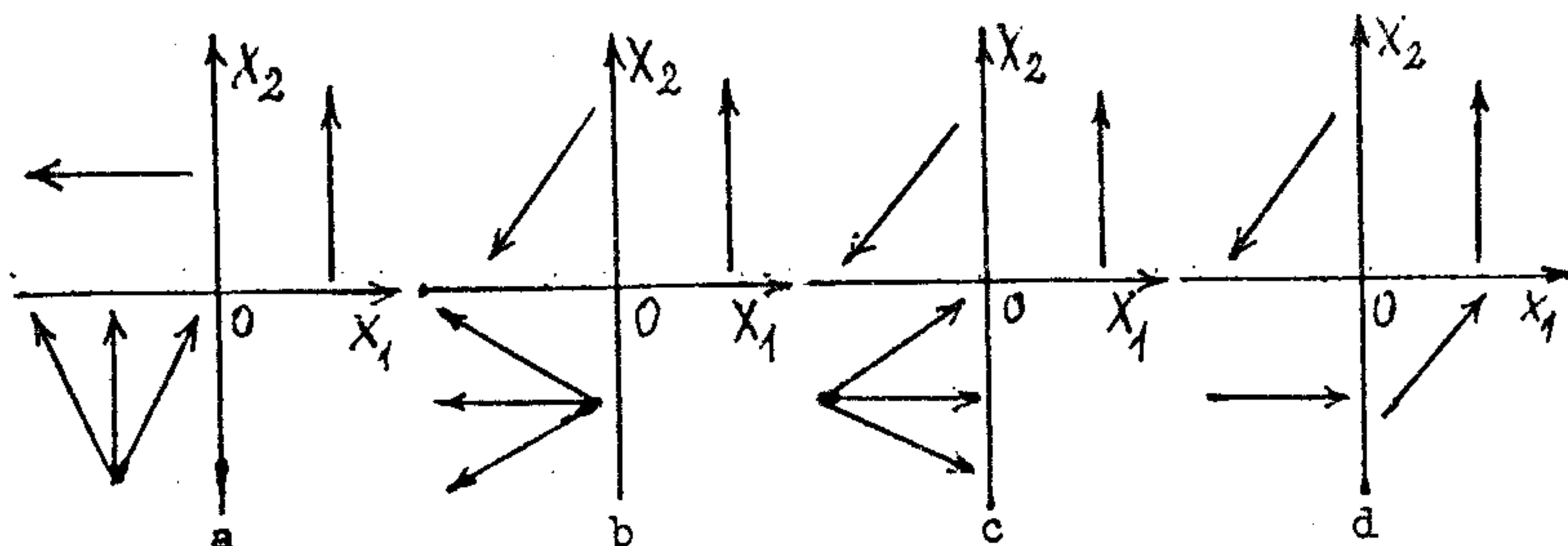


sl.4.17



sl.4.18

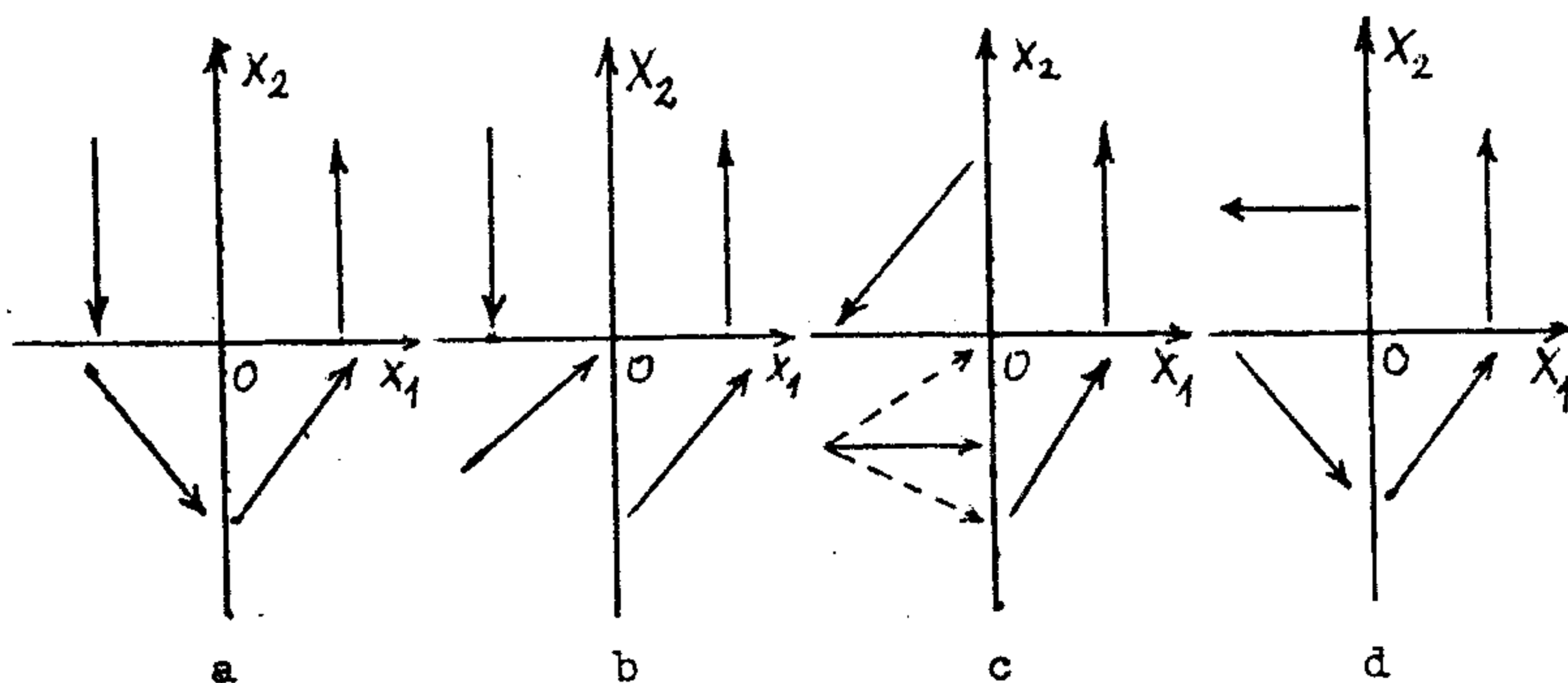
Oдавде dobijamo sledeće slučajeve: (sl.4.19a-4.19d).



Sl.4.19

Slučaj 4.19a je nestabilan i nekritički - analogno po lemi 3.5, 4.19b je nestabilan (vd.sl.4.16), u 4.19c vektor je $\dot{X}_2 > 0$ samo u trećem kvadrantu (sl.4.19d), $b_0 > 0$, tj. ostaje da se ispita samo slučaj na slici 4.19d.

Dakle, očigledno, u §4 ostaju da se ispitaju samo takvi kritički slučajevi drugog reda predstavljeni na slikama 4.20:



Sl.4.20

Lema 4.4. Neka su ispunjeni uslovi (3.7),

$$(4.1) \quad b_0 = 0, \quad a_0 + c_0 = 0, \quad e_0 > |d_0 + f_0|,$$

$$(4.2) \quad a_2 - b_2 + c_2 > 0,$$

to trajektorija iz prvog i drugog kvadranta pada na osu $OX_2 (X_2 > 0)$.

Ako je ispunjeno nejednakost

$$(4.3) \quad b_2(d_0 + f_0) - e_0(a_2 + c_2) < 0,$$

to nula-rešenje sistema (0.1) biće nestabilno.

Ako je leva strana (4.3) pozitivna, tada na osu OX_2 ($0 < X_2 < \eta$) imamo $\dot{X}_1 = 0, \dot{X}_2 < 0$.

Dokaz. Po uslovima leme, na $X_1 = 0, X_2 > 0$ imamo

$$\begin{cases} a + b + c = a_0 + b_0 + c_0 + (a_2 + b_2 + c_2)X_2 + o(X_2^2) < 0, \\ a - b + c = a_0 - b_0 + c_0 + (a_2 - b_2 + c_2)X_2 + o(X_2^2) > 0, \end{cases}$$

odnosno $b = b_0 + b_2 X_2 + o(X_2^2)$; kako je $b_0 = 0$, a iz (3.7) i (4.2) $b_2 < 0$, to pri dovoljno malom $X_2 > 0$,

$$(4.4) \quad b = b_2 X_2 + o(X_2^2) < 0.$$

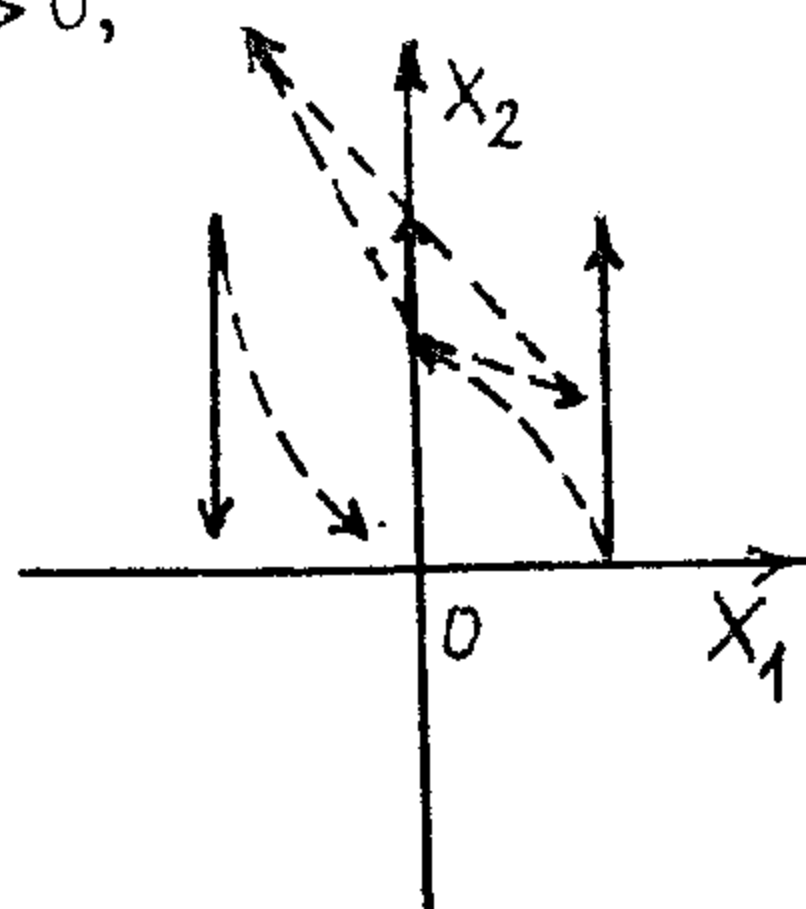
U našim pretpostavkama, saglasno (2.2), imamo

$$\begin{aligned} D + D_2 &= \begin{vmatrix} b_0 + b_2 X_2 + o(X_2^2) & a_0 + c_0 + (a_2 + c_2)X_2 + o(X_2^2) \\ e_0 + e_2 X_2 + o(X_2^2) & d_0 + f_0 + (d_2 + f_2)X_2 + o(X_2^2) \end{vmatrix} = \\ &= [b_2(d_0 + f_0) - e_0(a_2 + c_2)] + o(X_2^2). \end{aligned}$$

Razmotrimo dva slučaja:

1) Ako je $b_2(d_0 + f_0) - e_0(a_2 + c_2) > 0$,
to je saglasno (4.4) $\dot{X}_2 > 0$ - pri do-
voljno malom X_2 , što znači da je
nula-rešenje nestabilno (sl.4.21).

2) Ako je $b_2(d_0 + f_0) -$
 $- e_0(a_2 + c_2) > 0$, to, pri $X_2 -$
dovoljno malom, imamo $\dot{X}_2 < 0$.



Sl.4.21

Lema 4.5. Neka su ispunjeni uslovi

$$(4.5) \quad a_0 - b_0 + c_0 = 0, \quad q_0 = d_0 - e_0 + f_0 < 0, \quad p_2 = a_2 - b_2 + c_2 < 0.$$

Tada trajektorija sistema (0.1), izlazeći iz tačke $(0, X_{02})$,
gde je $0 < X_{02} < \eta$, η - dovoljno malo, pada na poluosu
 $X_1 < 0, X_2 = 0$ u tački

$$(4.6) \quad X_1(t_1 + T) = -\frac{p_2}{2q_0} X_{02}^2 + o(X_{02}^3) = X_{-01},$$

gde je $t = t_1 + T$, $T > 0$.

Dokaz. Iskoristimo uslove (4.1). Tada sistem (0.1)
može se napisati u sledećem obliku:

$$(4.7) \quad \begin{cases} \dot{X}_1 = p_1 X_1 + p_2 X_2 + o(X_1^2 + X_2^2), \\ \dot{X}_2 = q_0 + q_1 X_1 + q_2 X_2 + o(X_1^2 + X_2^2), \end{cases}$$

gde su p_1, \dots, q_2 - konstante, koje se izražavaju po-
moću a_j, \dots, f_j ($j = 0, 1, 2$).

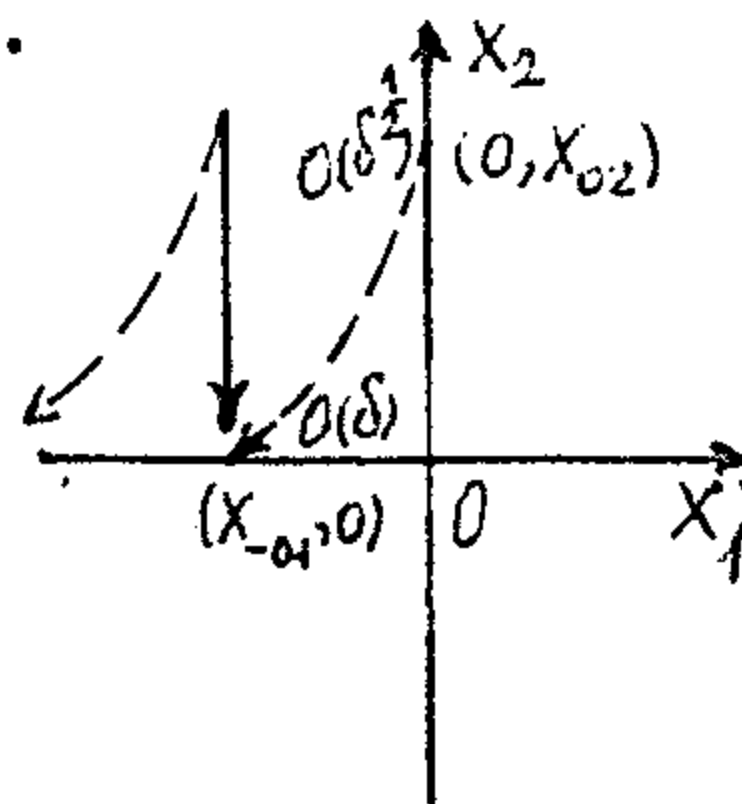
Dobijamo analogno (3.9):

$$(4.8) \quad \begin{cases} X_1(t_1 + T) = p_2 (X_{02} T + q_0 \frac{T^2}{2}) + o(X_{02}^3), \\ X_2(t_1 + T) = X_{02} + q_0 T + q_2 (X_{02} T + q_0 \frac{T^2}{2}) + o(X_{02}^3), \end{cases}$$

gde je $0 \leq T \leq T_1$, $T_1 = O(X_{02}) = O(\delta^{\frac{1}{2}})$.

Kako su $p_2 < 0$, $q_0 < 0$, $q_2 < 0$,
to X_1 i X_2 opadaju i trajektorija
sistema pada na osu $X_2 = 0$, $X_1 < 0$.

Nađimo tačku preseka trajekto-
rije (4.8) sa osom OX_1 . Iz druge
jednačine (4.8) imamo analogno (3.11):



Sl.4.22

$$(4.9) \quad T = -\frac{X_{02}}{q_0} - \frac{3q_2}{4q_0^2} X_{02}^2 + O(X_{02}^3) = T_1.$$

Zatim, postavljajući (4.9) u prvoj jednačini (4.8),
dobijamo (4.6) (vd.sl.4.22). Otud tvrđenje leme.

Lema 4.6. Ako su u sistemu (0.3) ispunjeni uslovi
(3.16) i

$$(4.10) \quad a_0 - b_0 - c_0 \leq 0, \quad d_0 - e_0 - f_0 \geq 0,$$

to je nula-rešenje sistema (0.1) nestabilno.

Dokaz. U razmatranom slučaju, iz (3.16), (4.10) je
 $f_0 \leq 0$ ($c_0 < 0$), to pri $-\delta_2 < X_1 < 0$, $X_2 = 0$, δ_2 - dovolj-
no malo, imamo $f = f_0 + O(X_1)$ i analogno rasuđivanjem
kao u dokazu leme 3.7, dobijamo

$$D_1 - D = \begin{vmatrix} a - b & c \\ d - e & f \end{vmatrix} = f_0 (a_0 - b_0) - (d_0 - e_0) c_0 + O(X_1);$$

kako je $c_0 < 0$, $d_0 - e_0 \geq f_0$, to

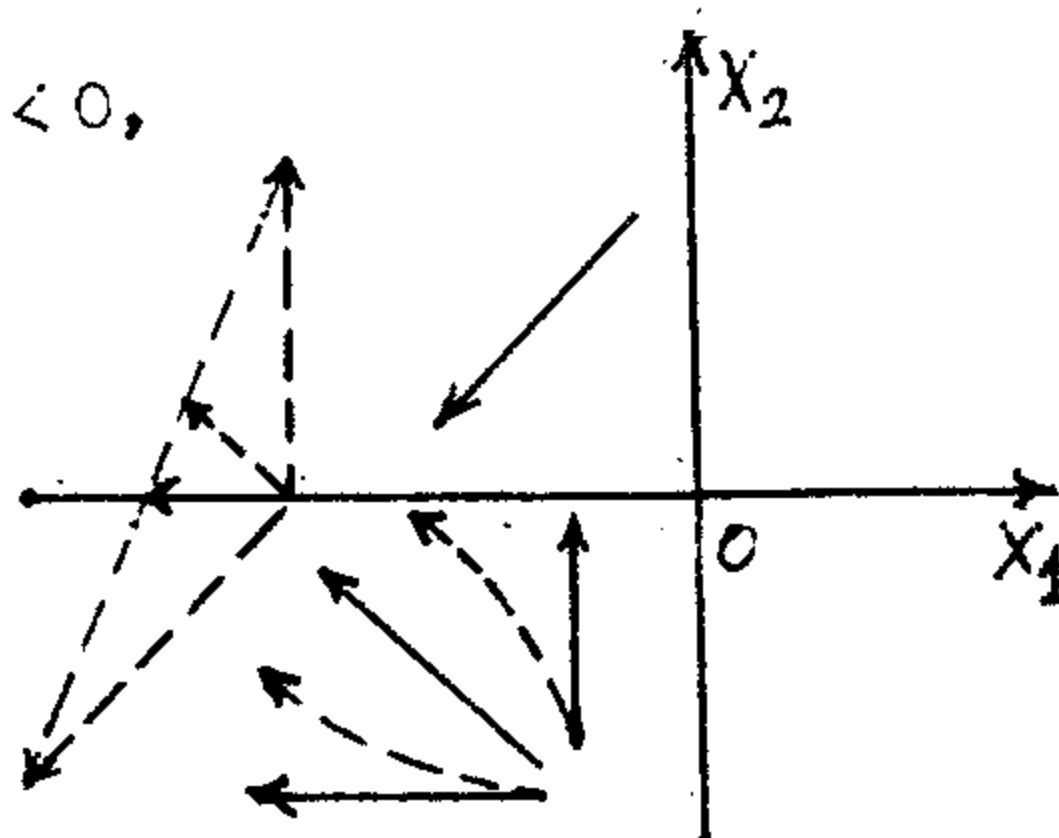
$$D_1 - D \geq f_0 (a_0 - b_0 + c_0) + O(X_1) > 0,$$

i na osu OX_1 ($X_1 < 0$) na osnovu (2.1) dobićemo

$$\dot{X}_1 = (D_1 - D) / f < \text{const} < 0,$$

što je uslov nestabilnosti
(sl.4.23).

To je i trebalo
dokazati.



Sl.4.23

Lema 4.7. Neka su za sistem (0.3) ispunjeni uslovi
(3.16) i

$$(4.11) \quad a_0 - b_0 - c_0 = k_0 > 0, \quad d_0 - e_0 - f_0 = 0.$$

Tada u slučaju $d_1 - e_1 - f_1 = g_1 < 0$ rešenja po osi $X_2 = 0$,
 $X_1 < 0$ ulaze u koordinatni početak, a pri

$$(4.12) \quad d_1 - e_1 - f_1 = g_1 > 0,$$

prelaze iz drugog u treći kvadrant, a zatim na poluosu
 $X_1 = 0, X_2 < 0$ (sl. 4.24).

Dokaz. U trećem kvadrantu
pri $X_2 = 0$ imamo

$$\dot{X}_2 = g_1 X_1 + o(X_1^2).$$

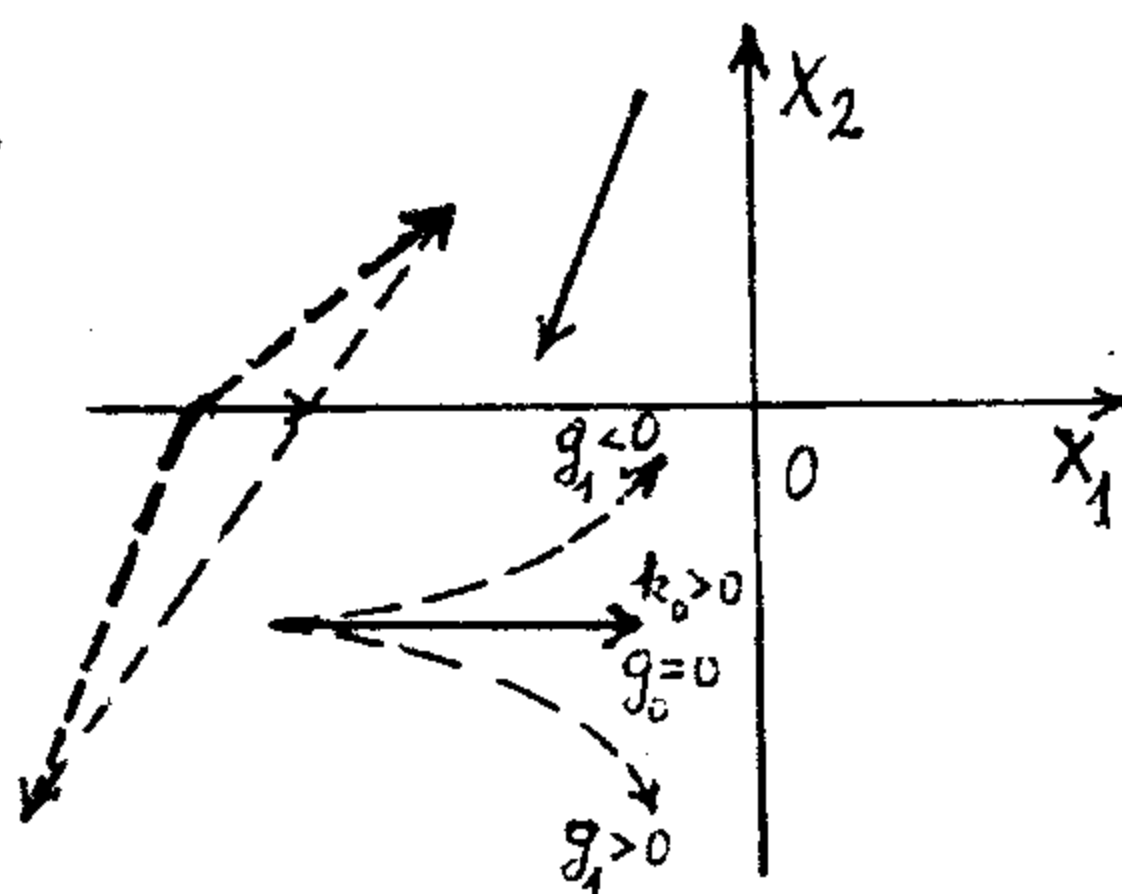
U slučaju $g_1 < 0$, neka
rešenja iz trećeg kvad-
ranta saglasno lemi 4.2

padaju na osu $X_2 = 0, X_1 < 0$

i produžavaju kretanja po njoj u pravcu tačke (0,0), po-

što je $\dot{X}_1 = (D_1 - D) / f = \dots + o(X_1^2) > 0$, a u slučaju

$g_1 > 0$, tada u trećem kvadrantu je



Sl.4.24

$$\dot{X}_2 = (d_1 - e_1 - f_1)X_1 + o(X_1^2) = g_1 X_1 + o(X_1^2) < 0,$$

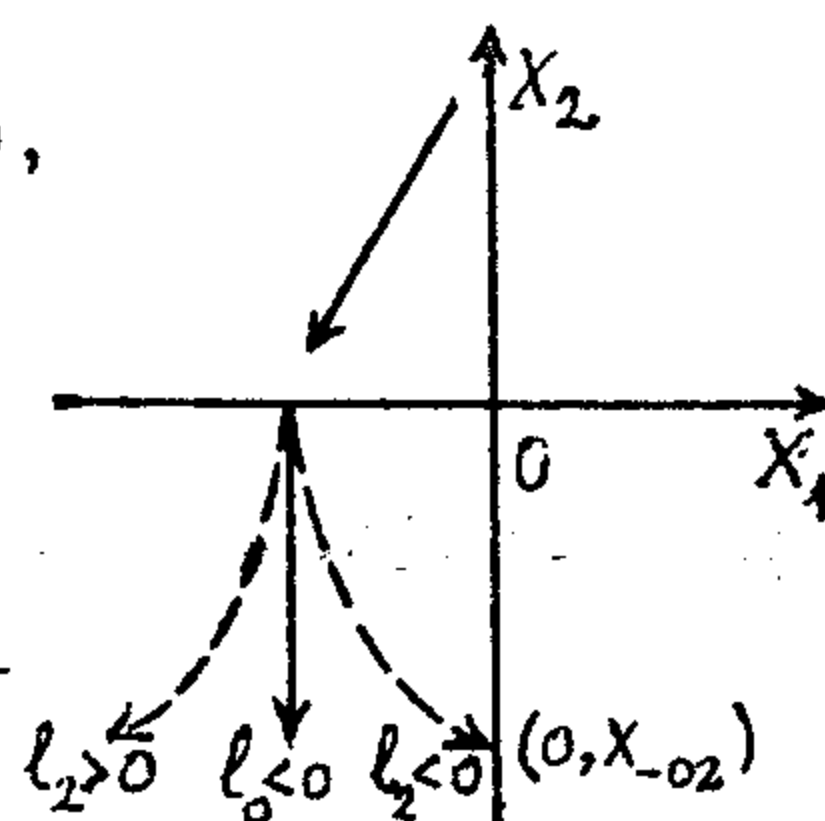
što znači da rešenja prelaze iz drugog kvadranta u treći kvadrant i analogno leme 4.5 padaju na poluosu $X_1 = 0$, $X_2 < 0$. Lema je dokazana.

Lema 4.8. Neka su ispunjeni uslovi $b_0 \geq 0$, $a_0 - c_0 \geq 0$, $|f_1| < -(d_0 - e_0)$. Tada pri $a_2 - b_2 - c_2 = l_2 < 0$, rešenja prelaze iz drugog kvadranta u treći kvadrant i padaju na osu OX_2 ($X_2 < 0$) u tački

$$(4.13) \quad X_{-02} = -\sqrt{-\frac{2X_{-01}l_0}{l_2}} + o(X_{-01}),$$

gde je $l_0 = d_0 - e_0 - f_0 < 0$.

Ako je pak $l_2 > 0$, to je trivijalno rešenje sistema uvek nestabilno (sl.4.25).



Sl.4.25

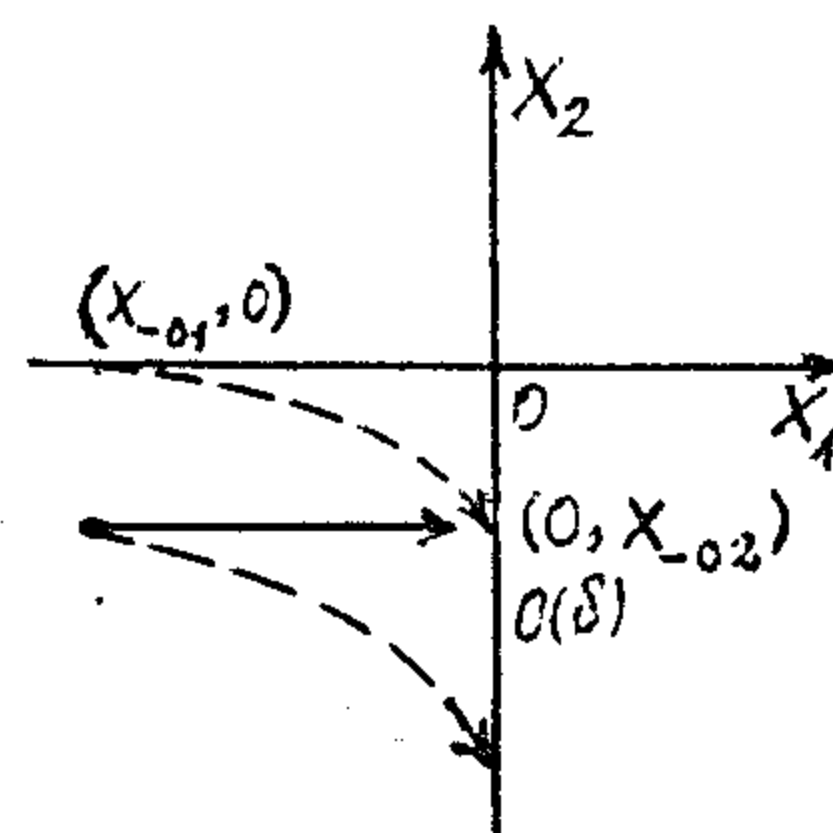
Dokaže se analogno lemi 3.4.

Sada možemo formulisati rezultate analogno rezultatima izvedenim u lemama 3.4 i 4.5.

Lema 4.9. Neka su ispunjeni uslovi (4.11), (4.12). Tada trajektorija sistema (0.1), polazeći od tačke $(X_{-01}, 0)$, pada na osu $X_1 = 0$, $X_2 < 0$ u tački

$$(4.14) \quad X_{-02} = -\frac{g_1}{2k_0} X_{-01}^2 + o(X_{-01}^3)$$

(sl. 4.26).



Sl.4.26

Lema 4.10. Neka su ispunjeni uslovi

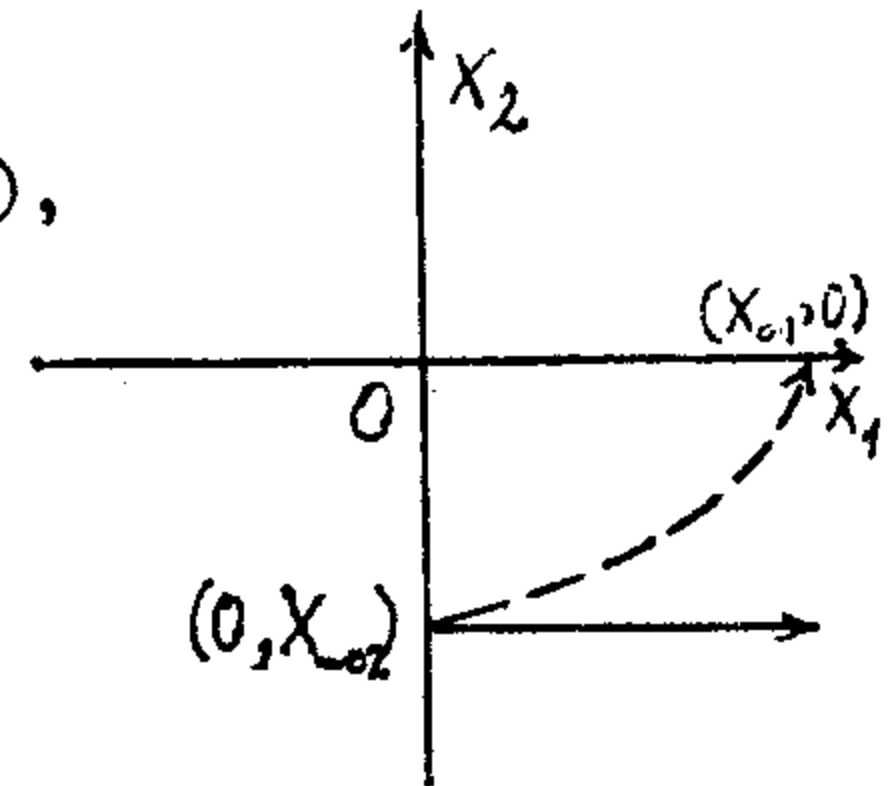
$$a_0 + b_0 - c_0 = u_4 > 0, d_0 + e_0 - f_0 = V_4 = 0, d_1 + e_1 - f_1 = \tau_1 > 0.$$

Tada trajektorija sistema (0.1), polazeći od tačke $(0, X_{-02})$, pada na osu abscis $X_2 = 0, X_1 > 0$ u tački

$$(4.15) \quad X_{c1} = \sqrt{-\frac{2X_{-02}u_4}{\tau_1}} + o(X_{-02}),$$

(sl.4.27).

U zaključku izvodimo teoremu, koja znatno uopštava uslove egzistencije dati u teoremi 3.2.



Sl.4.27

Teorema 4.1. Neka su ispunjeni jedan od uslova 1)-3):

$$1) \quad 0 < -a_0 - c_0 = b_0 < a_0 - c_0, a_2 + b_2 + c_2 < 0, \\ -e_0 \leq d_0 - f_0 < e_0, e_0 > |d_0 + f_0|,$$

(u sva tri slučaja je $d_1 + e_1 - f_1 > 0$, pri $e_0 = f_0 - d_0$)¹⁾;

$$2) \quad 0 < -a_0 - c_0 = b_0 = a_0 - c_0, a_2 < -|b_2 + c_2|, \\ -e_0 \leq d_0 - f_0 < e_0, e_0 > |d_0 + f_0|;$$

$$3) \quad a_0 = -c_0 > 0, b_0 = 0, a_2 + c_2 < -|b_2|, \\ -e_0 = d_0 - f_0 < e_0, e_0 > |d_0 + f_0|.$$

Tada je položaj ravnoteže $(0,0)$ sistema (0.1) nestabilan.

1) Pri ovim uslovima slučaji 1)-3) su određeni trima jednakostima, pa je kritički slučaj trećeg reda.

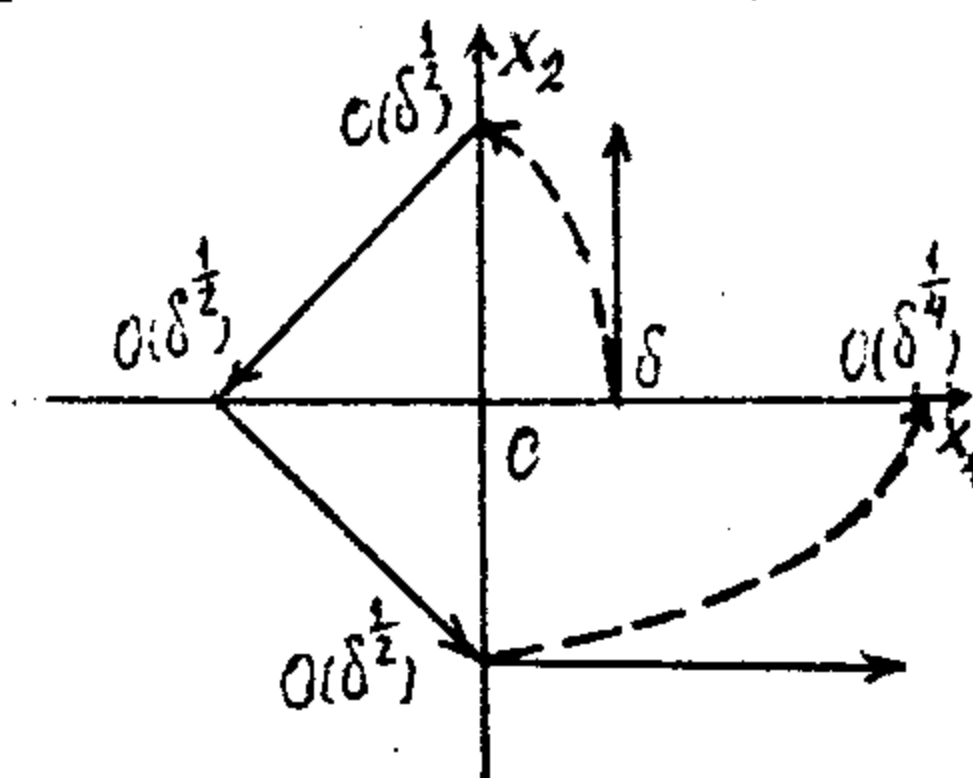
Dokaz. Po uslovima teoreme, saglasno: 1) teoreme 3.2 i leme 4.10, 2) lema 3.4, 3.6a, 4.8 i 4.10, 3) lema 3.4, 4.5, 3.6b i 4.10, postoji trajektorija, izlazeći iz tačke $(0, 0)$, i preseca koordinatne poluose u tačkama (navedimo ukratko):

1) $(0, X_{02}), (X_{-01}, 0),$

$(0, X_{02}), (X_{01}, 0),$ gde su

$$X_{02} = o(\delta^{\frac{1}{2}}), \quad X_{-01} = o(\delta^{\frac{1}{2}}),$$

$$X_{-02} = o(\delta^{\frac{1}{2}}), \quad X_{01} = c\delta^{\frac{1}{4}} + o(\delta^{\frac{1}{2}}).$$

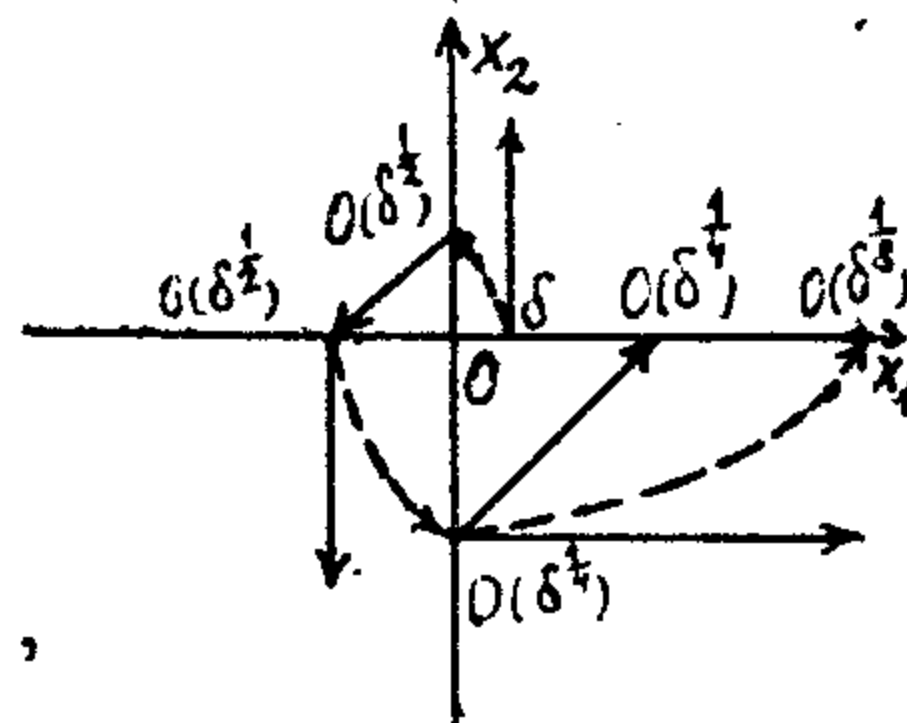


Sl.4.28

Oдавде pri dovoljno malom $\delta : X_{01} > 2\delta$, i rešenje se udaljava od koordinatnog početka, tj. rešenje sistema je nestabilno (sl.4.28).

2) $X_{02} = o(\delta^{\frac{1}{2}}), \quad X_{-01} = o(\delta^{\frac{1}{2}}),$

$$X_{-02} = o(\delta^{\frac{1}{4}}), \quad X_{01} = c\delta^{\frac{1}{4}} + o(\delta^{\frac{1}{2}}),$$

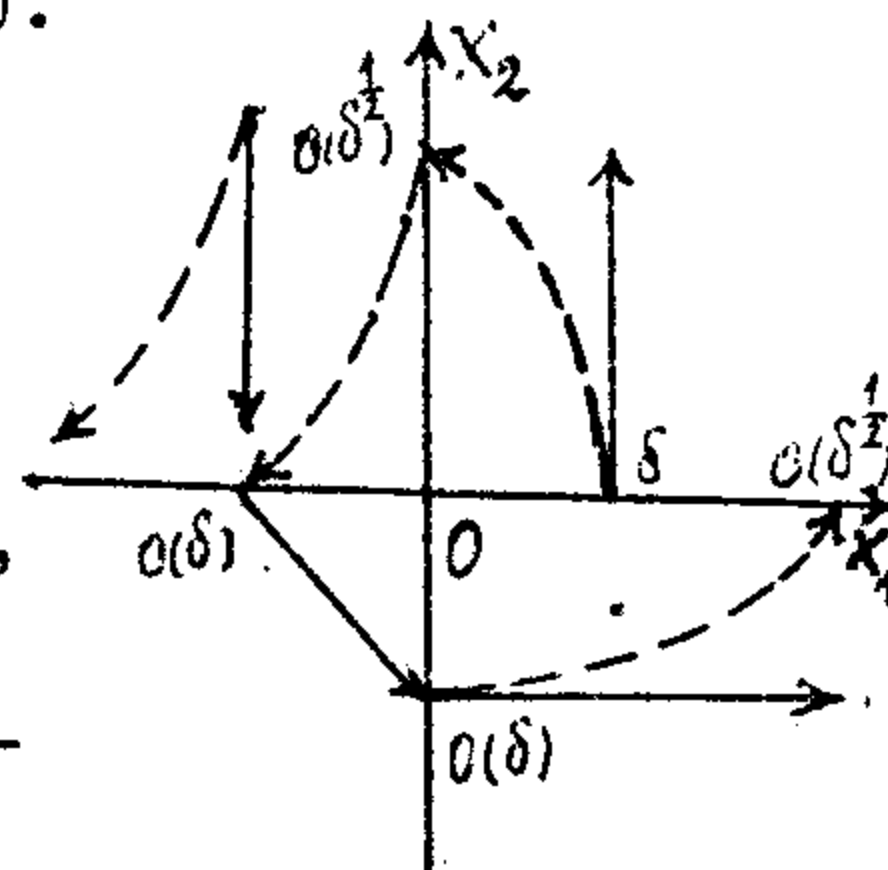


Sl.2.29

tj. $X_{01} = 2\delta$. Znači, rešenja $X_1 \equiv 0, X_2 \equiv 0$ su uvek nestabilna (sl.4.29).

3) $X_{02} = o(\delta^{\frac{1}{2}}), \quad X_{-01} = o(\delta),$

$$X_{-02} = o(\delta^{\frac{1}{2}}), \quad X_{01} = c\delta^{\frac{1}{2}} + o(\delta),$$



to je $X_{01} = 2\delta$, tj. trajektorija ponovo pada na poluosu $X_2 = 0, X_1 > 0$

(sl.4.30). Na osnovu $X_{01} > 2\delta$, to je

Sl.4.30

rešenje sistema i u ovom slučaju uvek nestabilno.

Teorema je potpuno dokazana.

Teorema 4.2. Neka su ispunjeni uslovi

$$0 < -a_0 - c_0 = b_0 < a_0 - c_0, \quad -e_0 < d_0 - f_0 = e_0,$$

$$e_0 > |d_0 + f_0|, \quad a_2 + b_2 + c_2 < \nu, \quad d_1 - e_1 - f_1 > 0.$$

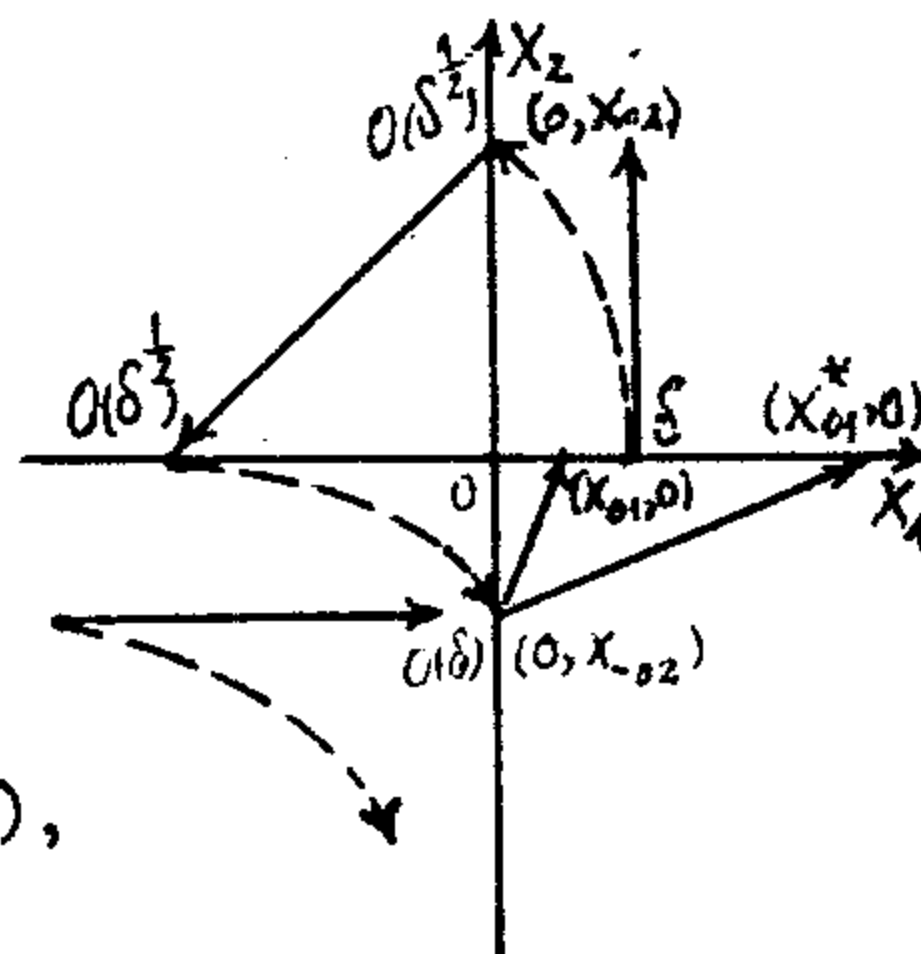
Razmotrimo izraz

$$M = - \frac{u_4 g_1}{v_4 k_0} \left(\frac{u_2}{v_2} \right)^2 \cdot \frac{\beta_0}{\alpha_2},$$

(označavanja vd. formule (3.6), (3.7), (3.16), (3.20), (4.11), (4.12)); M je uvek pozitivno.

To tada nula-rešenje sistema (0.1) je stabilno, ako je $M < 1$, a nestabilno ako je $M > 1$.

Dokaz. Ponavljajući dokaze lema 3.4, 3.6 i 4.9, ustanovićemo, da trajektorija, na osnovu uslova teoreme, počevši od tačke $(\delta, 0)$, posle obhoda koordinatnog početka, kroz tačke $(0, X_{\delta 2})$, $(X_{-\delta 1}, 0)$, $(0, X_{-\delta 2})$, ponovo pada na pozitivni deo ose abscise, ili u tački $(X_{\delta 1}, 0)$, ili $(X_{\delta 1}^*, 0)$ (sl.4.31).



Sl.4.31

Koristeći jednakosti (3.8), (3.17), (3.21), (4.14), posle zamene (4.14) u (3.21), nalazimo

$$(4.16) \quad X_{\delta 1} = \frac{u_4}{v_4} \cdot \frac{g_1}{2k_0} X_{-\delta 1}^2 + O(X_{-\delta 1}^3);$$

zatim, postavljajući (3.17) u (4.16), dobićemo

$$(4.17) \quad X_{01} = \frac{u_4}{V_4} \cdot \frac{g_1}{2k_0} \left(\frac{u_2}{V_2} \right)^2 \cdot X_{02}^2 + o(X_{02}^3),$$

i, najzad, (3.8) u (4.17), dobijamo

$$(4.18) \quad X_{01} = - \frac{u_4}{V_4} \cdot \frac{g_1}{2k_0} \left(\frac{u_2}{V_2} \right)^2 \cdot \frac{\beta_0}{\alpha_2} \delta + o(\delta^{\frac{3}{2}}) = M\delta + o(\delta^{\frac{3}{2}}).$$

Isto tako kao i na kraju dokaza teoreme 1.1, u proizvoljnoj maloj okolini δ , pri $M < 1$ ($M > 1$) važi nejednakost $0 < X_{01} < \delta$ (odgovarajuće, $X_{01}^* > \delta$), pa je nula-rešenje stabilno (nestabilno). Teoreme je dokazana.

Sledeća teorema može se razmotriti kao analogno teoremi 4.2.

Teorema 4.3. Neka su ispunjeni uslovi

$$a_0 = -c_0 > 0, \quad b_0 = 0, \quad a_2 + c_2 < -|b_2|,$$

$$-e_0 < d_0 - f_0 < e_0, \quad e_0 > |d_0 + f_0|.$$

Razmotrimo izraz

$$N = \frac{u_4}{V_4} \cdot \frac{u_3}{V_3} \cdot \frac{p_2}{g_0} \cdot \frac{\beta_0}{\alpha_2},$$

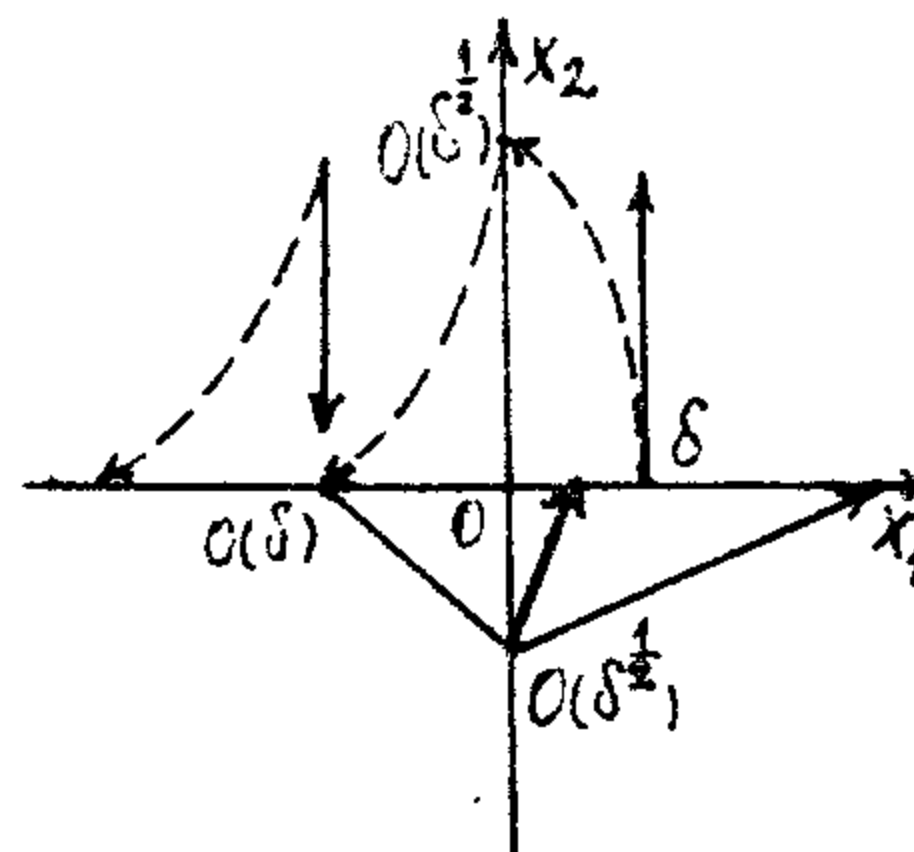
(označavanja vd. formule (3.6), (3.7), (3.18), (3.20), (4.5)); N je uvek pozitivno.

To tada nula-rešenje sistema (0.1) pri $N < 1$ je stabilno, a pri $N > 1$ je nestabilno.

Dokaz. Ova teorema dokazuje se analogno predašnjoj teoremi. Zaista, dovoljan uslov sledi od lema 3.4, 3.6, 4.5, tj. na osnovu formula (3.8), (3.19), (3.21), (4.6), dobijamo

$$(4.19) \quad X_{01} = \frac{u_4}{V_4} \cdot \frac{u_3}{V_3} \cdot \frac{p_2}{g_0} \cdot \frac{\beta_0}{\alpha_2} \delta + o(\delta^{\frac{3}{2}}) = N\delta + o(\delta^{\frac{3}{2}}).$$

Kao što se vidi iz ove formule, analogno (4.18), pri $N < 1$, trivijalno rešenje sistema je asimptotski stabilno, a pri $N > 1$ je asimptotski nestabilno (sl.4.32), što je i trebalo dokazati.



Sl.4.32

Teorema 4.4. Pri uslovima

$$0 < -a_0 - c_0 = b_0 < a_0 - c_0, \quad |d_0 + f_0| < e_0 = d_0 - e_0,$$

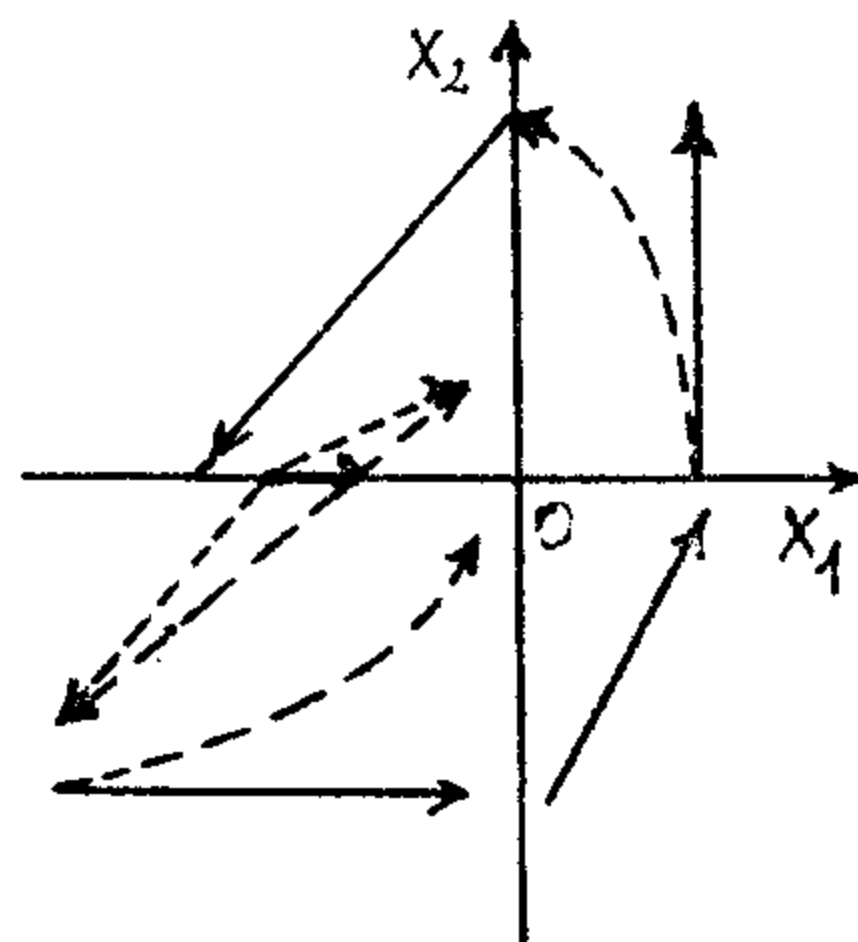
$$a_2 + b_2 + c_2 < 0, \quad d_1 - e_1 - f_1 < 0,$$

to položaj ravnoteže $(0,0)$ sistema (0.1) uvek je stabilan.

Dokaz. Po uslovima teoreme imamo $f_0 < 0$, a na OX_1 pri malom $X_1 < 0$, $X_2 = 0$, $f_0 < 0$ i

$$D_1 - D = f_0(a_0 - b_0 - c_0) + x_1[f_0(a_1 - b_1 - c_1) + f_1(a_0 - b_0) - e_0(d_1 - c_1)] + o(x_1^2) < 0,$$

zato što prvi član je negativan, a pri malom X_1 , on je veći od svih ostalih. Prema tome, po (2.1), $\dot{X}_1 > 0$, i kretanje po OX_1 ($X_1 < 0$) usmereno je ka strani tačke nula (sl.4.33). Dalja obrazloženja privode se kao u dokazu teoremi 3.1.



Sl.4.33

Teorema je dokazana.

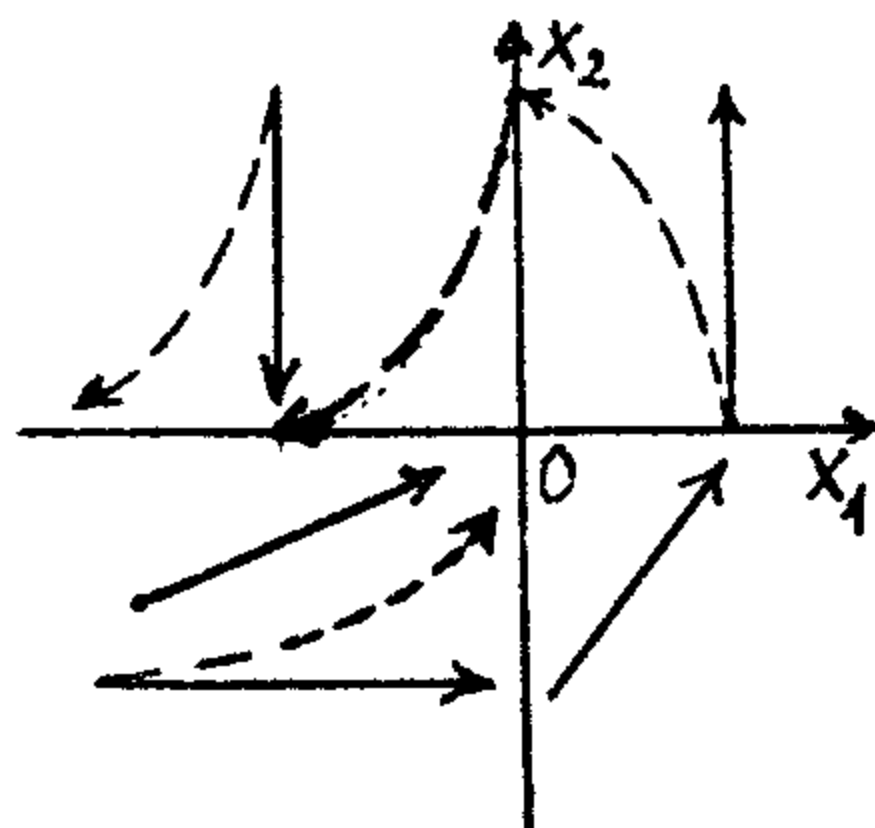
Teorema 4.5. Neka su ispunjeni uslovi

$$0 = -a_0 - c_0 = b_0 < a_0 - c_0, \quad a_2 + c_2 < -|b_2|,$$

$$|d_0 + f_0| < e_0 \leq d_0 - f_0, \quad d_1 - e_1 - f_1 < 0.$$

Tada je nula-rešenje sistema (0.1) uvek stabilno.

Dokaz. Izvođenjem tih istih obrazloženja, što i pri dokazu teoreme 4.4, dobijamo po uslovima teoreme, što pri malom $X_1 < 0$, $X_2 = 0$ imamo $\dot{f}_0 < 0$ i



Sl.4.34

$$D_1 - D = -c_0(d_0 - e_0 + f_0) + \\ + X_1 [f_0(a_1 - b_1) - c_0(d_1 - e_1 + f_1) - c_1(d_0 - e_0)] + o(X_1^2) < 0,$$

i, znači, $\dot{X}_1 > 0$, tj. rešenje je stabilno (sl.4.34), što i dokazuje naglašenu teoremu.

Može se razmotriti neki kritički slučajevi trećeg reda sa ovom istom metodom.

Teorema 4.6. Pri uslovima

$$b_0 = 0, \quad a_0 = -c_0 > 0, \quad -e_0 < d_0 - f_0 = e_0,$$

$$e_0 > |d_0 + f_0|, \quad a_2 + c_2 < -|b_2|, \quad a_1 - b_1 - c_1 > 0,$$

to nula-rešenje sistema (0.1) je stabilno.

Dokaz. Dovoljan dokaz sledi iz lema 3.4, 3.6c), 4.5 i 4.9. Na osnovu ovih lema, analogno teoremi 4.1, dobijamo tačku preseka trajektorije sa poluosama (pišemo

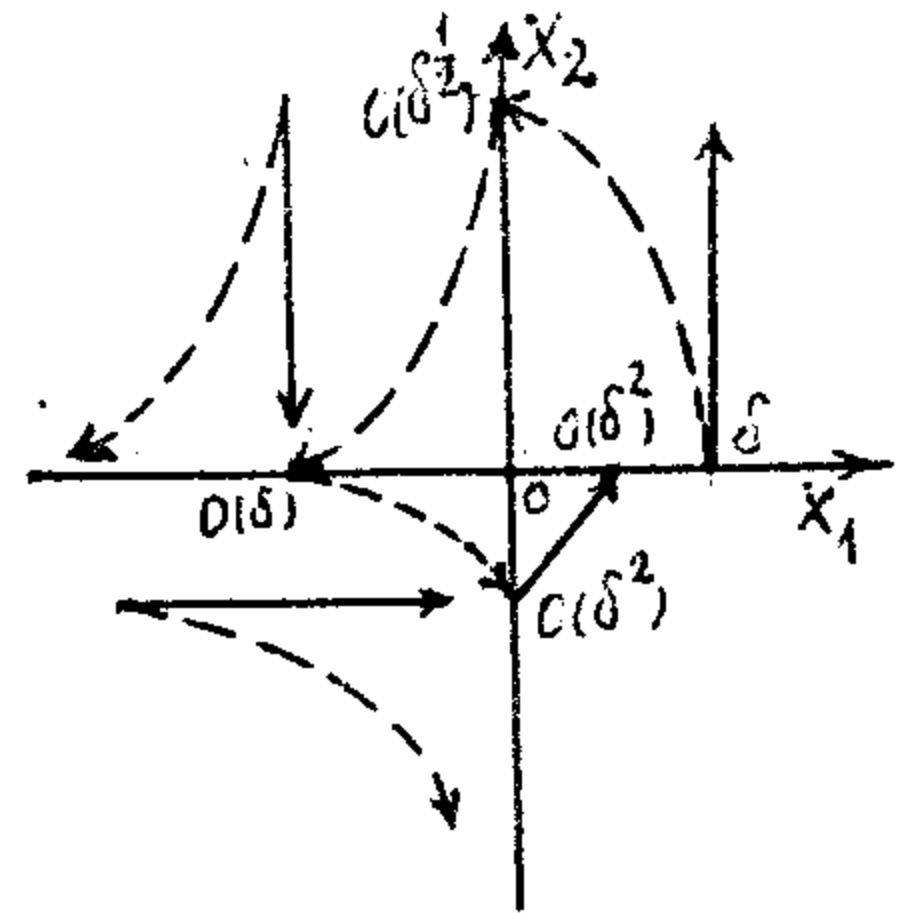
takođe kratko):

$$X_{02} = o(\delta^{\frac{1}{2}}), \quad X_{-01} = o(\delta),$$

$$X_{-02} = o(\delta^2), \quad X_{01} = o(\delta^2);$$

to pri maloj δ , važi nejednakost $X_{01} < \frac{1}{2}\delta$.

Dakle, rešenje $X_1 \equiv 0, X_2 \equiv 0$ je stabilno (sl.4.35).



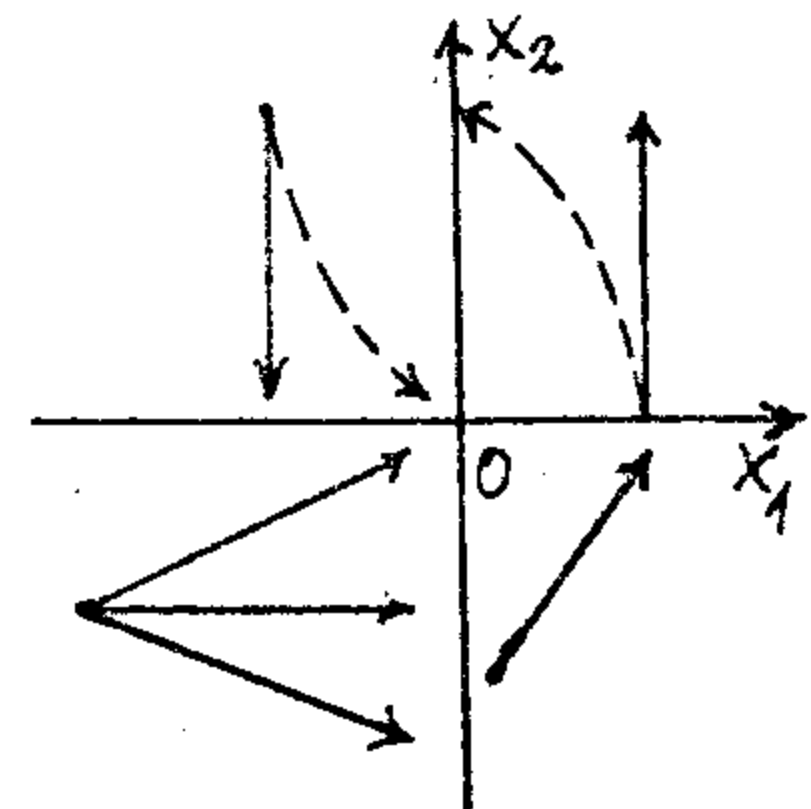
Sl.4.35

Teorema 4.7. Neka su ispunjeni uslovi (3.7), (4.1), (4.2) i $a_0 - b_0 - c_0 > 0, d_0 + e_0 - f_0 > 0$. Tada pri ispunjenju uslova (4.3), nula-rešenje je nestabilno. Ako je leva strana (4.3) pozitivna, to nula-rešenje je stabilno.

Dokaz. Pri uslovima (4.3) nula-rešenje je nestabilno po lemi 4.4.

Neka je leva strana (4.3) pozitivna. Pri uslovu $a_0 - b_0 - c_0 > 0$, rešenja iz trećeg kvadranta ili padaju na osu $OX_1 (X_1 < 0)$ i idu po njoj u pravcu $(0,0)$ analogno lemi 4.7, ili na $OX_2 (X_2 < 0)$ i prelaze u četvrti kvadrant, padajući po lemi 3.6 na osu $OX_1 (X_1 > 0)$. Dalje po lemi 3.4 padaju na osu $OX_2 (X_2 > 0)$. Na osnovu leme 4.4, pri pozitivnoj levoj strani (4.3)

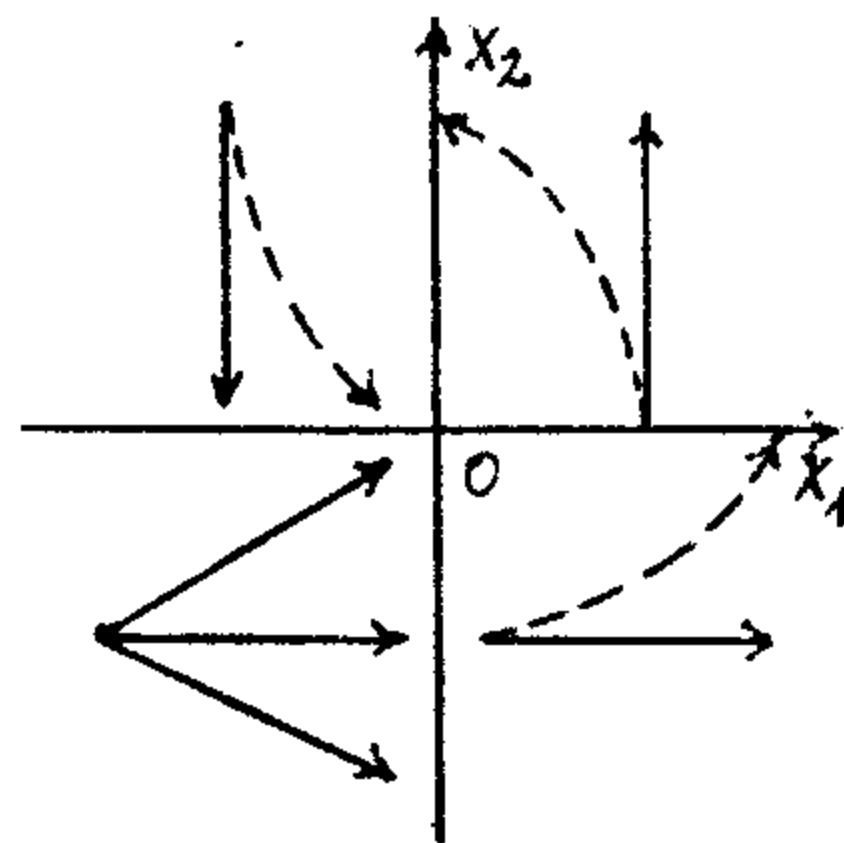
za rešenja po osi $OX_2 (X_2 > 0)$ imamo $\dot{X}_2 < 0$. Znači, sva rešenja ulaze u tačku $(0,0)$. Analognim obrazloženjem dokaza teoreme 3.1, dobijamo da je nula-rešenje sistema stabilno (sl.4.36).



Sl.4.36

Teorema je dokazana.

Teorema 4.8. Neka su ispunjeni svi uslovi teoreme 4.7, osim $d_0 + e_0 - f_0 > 0$ koja se zamenjuje jednakosću, i neka je $d_1 + e_1 - f_1 = \lambda_1 > 0$. Tada je nula-rešenje stabilno ili nestabilno, u zavisnosti od znaka leve strane (4.3), kao u teoremi 4.7.



Sl.4.37

Dokaz. Dokazuje se analogno teoremi 4.7, samo umesto leme 3.6 koristi se lema 4.10 (sl.4.37).

5. Slučaj, kada u jednom kvadrantu vektor je paralelan osi i na jednoj poluosi je položaj ravnoteže.

Prebrojavši kritičke slučajeve, kada je u jednom kvadrantu vektor paralelan osi i na jednoj poluosi je položaj ravnoteže, takođe kao u §§ 3, 4, mi vidimo da neki slučajevi isto tako svode se ka drugim obrtajem koordinata. Pri ovome ostaju samo kritički slučajevi drugog reda, predstavljeni na slikama 5.1, 5.2.

Teorema 5.1. Pri uslovima

$$a_2 + b_2 + c_2 < 0, \quad 0 < -a_0 - c_0 = b_0 < a_0 - c_0,$$

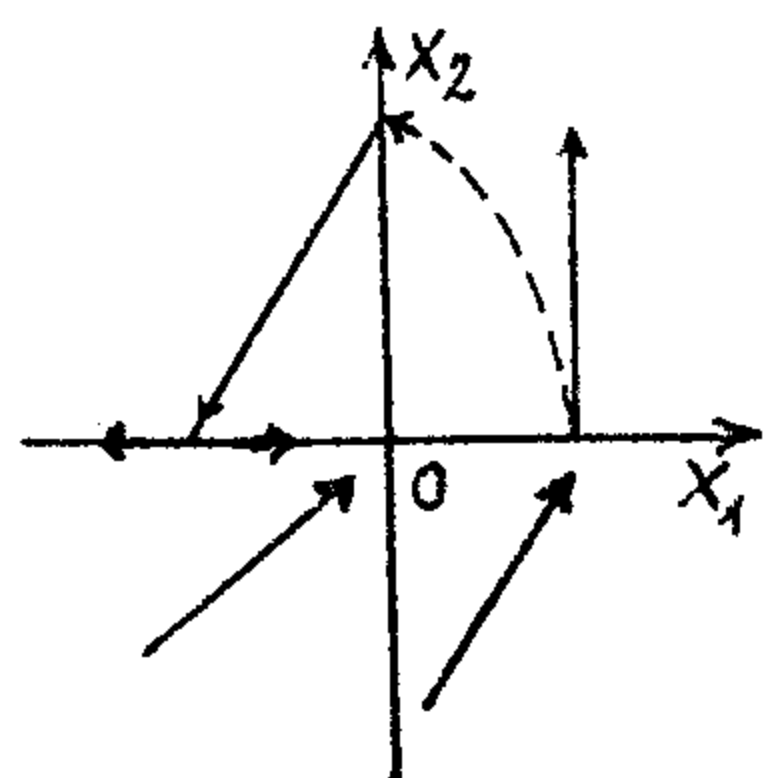
$$|d_0 + f_0| < e_0 < d_0 - f_0, \quad \Delta_0 = D_{01} - D_0 < 0 \quad (\Delta_0 > 0),$$

položaj ravnoteže sistema (0.1) je stabilan (nestabilan).

Ako je pak $\Delta_0 = 0$, to pri $\Delta_1 > 0$, $X_1 \equiv 0$, $X_2 \equiv 0$ su stabilna, a pri $\Delta_1 < 0$ - nestabilna, gde je

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_0 - b_0 & c_1 \\ d_0 - e_0 & f_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 - b_1 & c_0 \\ d_1 - e_1 & f_0 \end{vmatrix}.$$

Dokaz. Iz drugog i trećeg kvadranta rešenje pada na OX_1 (sl.5.1). Pri $\Delta_0 < 0$ ispunjeni su uslovi teoreme 3.1. Znači, rešenje je stabilno.



Sl.5.1

U slučaju $\Delta_0 > 0$ na osi OX_1 ($X_1 < 0$, X_1 - malo), na osnovu (2.1), imamo $\dot{X}_1 = -\text{const} < 0$. Znači, postoje rešenja, izlazeći iz tačke 0 i idući po negativnoj osi OX_1 , tj, tačka 0 je asimptotski nestabilna.

Ostaje da se dokaže, da pri $\Delta_0 = 0$, $\Delta_1 > 0$ ($\Delta_1 < 0$) sistema je stabilna (nestabilna). Za ovo na osi OX_1 pri malom $X_1 < 0$, $X_2 = 0$, sastavimo po uslovima teoreme formulu, saglasno (2.1),

$$\dot{X}_1 = \frac{1}{f} \left| \begin{array}{cc} a_0 + (a_1 - b_1)X_1 + o(X_1^2) & c_0 + c_1X_1 + o(X_1^2) \\ d_0 + (d_1 - e_1)X_1 + o(X_1^2) & f_0 + f_1X_1 + o(X_1^2) \end{array} \right|,$$

ili, zadovoljavajući to nužnim svojstvom,

$$\dot{X}_1 = \frac{1}{f} (D_{01} - D_0) + \frac{X_1}{f} \left(\left| \begin{array}{cc} a_0 - b_1 & c_1 \\ d_0 - e_1 & f_1 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} a_1 - b_1 & c_0 \\ d_1 - e_1 & f_0 \end{array} \right| \right) + o(X_1^2),$$

ili koristeći označavanja Δ_0 , Δ_1 ,

$$(5.1) \quad \dot{X}_1 = \frac{1}{f} \Delta_0 + \frac{X_1}{f} \Delta_1 + o(X_1^2).$$

Iz uslova teoreme imamo $f_0 < 0$, a pri malom $X_1 < 0$ imamo $f < 0$; zatim, kako je $\Delta_0 = 0$, to pri $\Delta_1 > 0$ u (5.1) $\dot{X}_1 > 0$, tj. kretanje po OX_1 ($X_1 < 0$) usmereno je ka strani tačke nula. Stabilnost se dokazuje kao u teoremi 3.1.

Ali kada je $\Delta_1 < 0$, tada je $\dot{X}_1 < 0$, tj. rešenje udaljava se od koordinatnog početka, pa je $(0,0)$ nestabilna. Teorema je dokazana.

Teorema 5.2. Rešenje $X_1 \equiv 0, X_2 \equiv 0$ sistema (0.1), pri uslovima

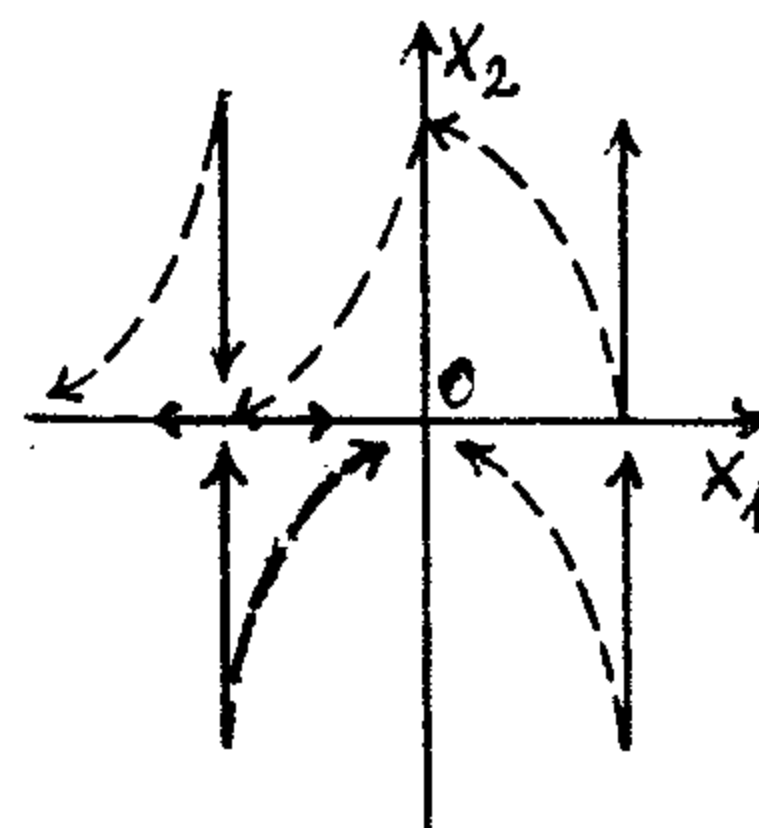
$$a_0 = b_0 = c_0 = 0, \quad |d_0 - f_0| < e_0 < d_0 - f_0,$$

$$a_2 - c_2 < b_2 < -|a_2 + c_2|,$$

biće stabilno (nestabilno), ako je determinanta

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 - b_1 & c_1 \\ d_0 - e_0 & f_0 \end{vmatrix}$$

pozitivna (negativna).



Sl.5.2

Dokaz. Na osnovu uslova teoreme i (0.2), pri $X_2 = 0, X_1 < 0$, saglasno (2.1), kao u teoremi 5.1, dobijamo $D_1 - D = X_1 \Delta + O(X_1^2)$, $\Delta = f_0(a_1 - b_1) - c_1(d_0 - e_0)$ i $f = f_0 + f_1 X_1 + O(X_1^2) < 0$; to tada na osi $OX_1 (X_1 < 0)$, X_1 - malo, pri $\Delta > 0, D_1 - D < 0$ i $\dot{X}_1 > 0$, a pri $\Delta < 0, D_1 - D > 0$ i $\dot{X}_1 < 0$. Iz ovih ocena i sledi traženi rezultat (sl.5.2).

6. Slučaj, kada se u jednom kvadrantu za sistem (0.3) sve tačke javljaju položajem ravnoteže

Razmotrimo kritički slučaj, kada samo u jednom kvadrantu imamo položaj ravnoteže, tj. $\dot{X}_1 = \dot{X}_2 = 0$.

Pokažimo, da u ovom slučaju u dvema nejednakosima (0.7) biće jednakost.

Lema 6.1. Ako je samo u jednom kvadrantu $\dot{X}_1 = \dot{X}_2 = 0$, tada je $|D_{o_1}| = |D_{o_2}| = |D_o|$ (*).

Dokaz. Pomoću obrtanja osa možemo učiniti, da u prvom kvadrantu bude $\dot{X}_1 = 0, \dot{X}_2 = 0$. Neka je samo u prvom kvadrantu $\dot{X}_1 = a_o + b_o + c_o = 0, \dot{X}_2 = d_o + e_o + f_o = 0$. Tada će biti $D_{o_1} + D_o = 0, D_{o_2} + D_o = 0$, dakle, $|D_{o_1}| = |D_{o_2}| = |D_o|$, što je i trebalo dokazati.

Tvrđenje obratno lemi 6.1 bilo bi ne tačno. U § 7 biće razmotreni drugi slučajevi, mogući pri ispunjenju jednakosti (*).

Razmotrimo sve slučajeve, kada u ostalim kvadrantima nema položaja ravnoteže. Kako u prvom kvadrantu Q_1 , po lemi 6.1, imamo $\dot{X}_1 = u_1 = 0, \dot{X}_2 = v_1 = 0$, gde su $u_1 = a_o + b_o + c_o, v_1 = d_o + e_o + f_o$, to u Q_1 biramo ne nula približenja, već prvo približenje, tj. linearni sistem sa konstantnim koeficijentima,

$$(6.1) \quad \frac{dx_1}{dt} = \alpha X_1 + \beta X_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = \gamma X_1 + \delta X_2,$$

a u ostalim kvadrantima - nula približenja (0.3). Sistem (6.1) napišimo u vektorskoj formi

$$(6.1') \quad \dot{X} = AX, \quad X \in \mathbb{R}^2,$$

pri čemu $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ - linearni operator, s matricom $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$.

Sistem (6.1) možemo razmatrati u svojstvu prvog približenja za sistemu

$$(6.2) \quad \begin{cases} \dot{X}_1 = \alpha X_1 + \beta X_2 + o(X_1^2 + X_2^2), \\ \dot{X}_2 = \gamma X_1 + \delta X_2 + o(X_1^2 + X_2^2), \end{cases}$$

saglasno [9, §30] u slučaju $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$, u okolini koordinatnog početka rasprostiranje trajektorije sistema (6.2) je jednaka, tj. ako u jednom od ovih sistema imali bi trajektorije ulazeći u $(0,0)$ po smeru ugaonog koeficijenta k , onda je i za drugi takođe (s tim istim k). Drugim rečima, pri dopunjavanju $O(x_1^2 + x_2^2)$ u sistemu (6.1) ne menja se tip rasprostiranja trajektorija u \mathcal{Q}_1 .

Slučaj kada (6.1) ima rešenje idući po osi Ox_1 ili Ox_2 , iako je kritički slučaj više od drugog reda, mićemo ga razmatrati u ovom paragrafu.

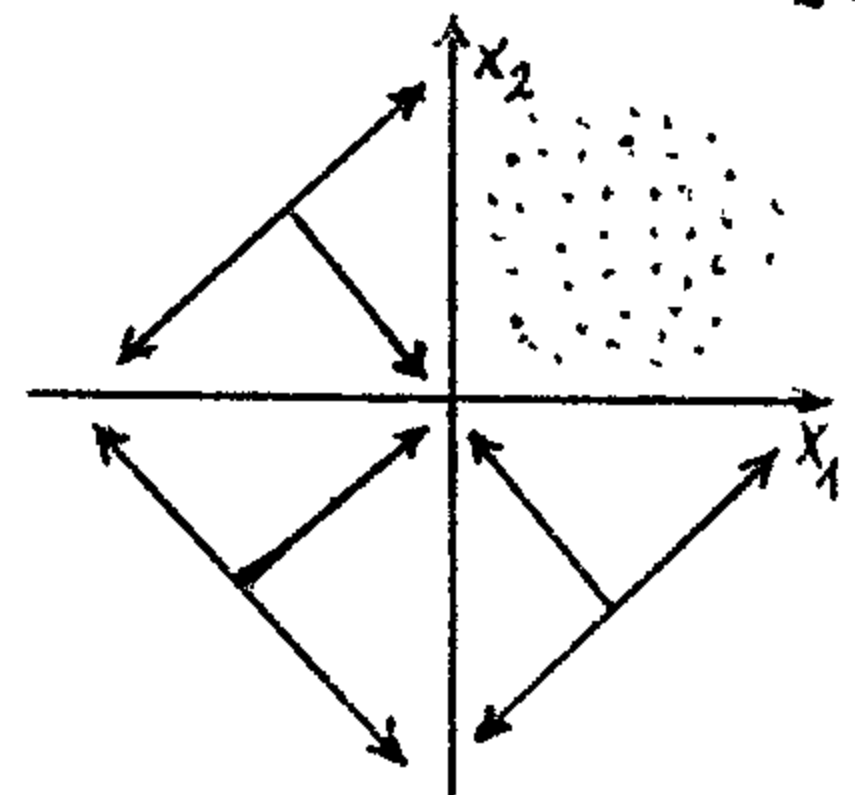
Razmotrimo skup trajektorija sistema.

Stoga, u \mathcal{Q}_1 imamo prvo približenje (6.1) i (6.2), a u ostalim kvadrantima (0.3), tj. u drugom kvadrantu - \mathcal{Q}_2 , $\dot{x}_1 = u_2, \dot{x}_2 = v_2$, u trećem - \mathcal{Q}_3 , $\dot{x}_1 = u_3, \dot{x}_2 = v_3$, i u četvrtom - \mathcal{Q}_4 , $\dot{x}_1 = u_4, \dot{x}_2 = v_4$. Neophodno je: $u_1 + u_3 = u_2 + u_4, v_1 + v_3 = v_2 + v_4$, gde su $u_2 = a_0 - b_0 + c_0, v_2 = d_0 - e_0 + f_0, u_3 = a_0 - b_0 - c_0, v_3 = d_0 - e_0 - f_0, u_4 = a_0 + b_0 - c_0, v_4 = d_0 + e_0 - f_0$.

6.1. Rasprostiranje trajektorija u $\mathcal{Q}_2, \mathcal{Q}_3, \mathcal{Q}_4$

U sledećim lemmama 6.2-6.8 pokazaćemo različite mogućnosti smerova vektora (\dot{x}_1, \dot{x}_2) za jednačinu (0.3) u $\mathcal{Q}_2, \mathcal{Q}_3, \mathcal{Q}_4$, u tom vremenu kada je u $\mathcal{Q}_1, \dot{x}_1 = 0, \dot{x}_2 = 0$ (sl.6.1).

Slučaji: 1) $\dot{x}_1 = u_2 < 0, \dot{x}_2 = v_2 > 0$ u \mathcal{Q}_2 , 2) $\dot{x}_1 = u_3 < 0, \dot{x}_2 = v_3 < 0$ u \mathcal{Q}_3 , i 3) $\dot{x}_1 = u_4 > 0, \dot{x}_2 = v_4 < 0$ u \mathcal{Q}_4 , očigledno su nestabilne, pa se u lemmama 6.2-6.8



Sl.6.1

ne razmatraju.

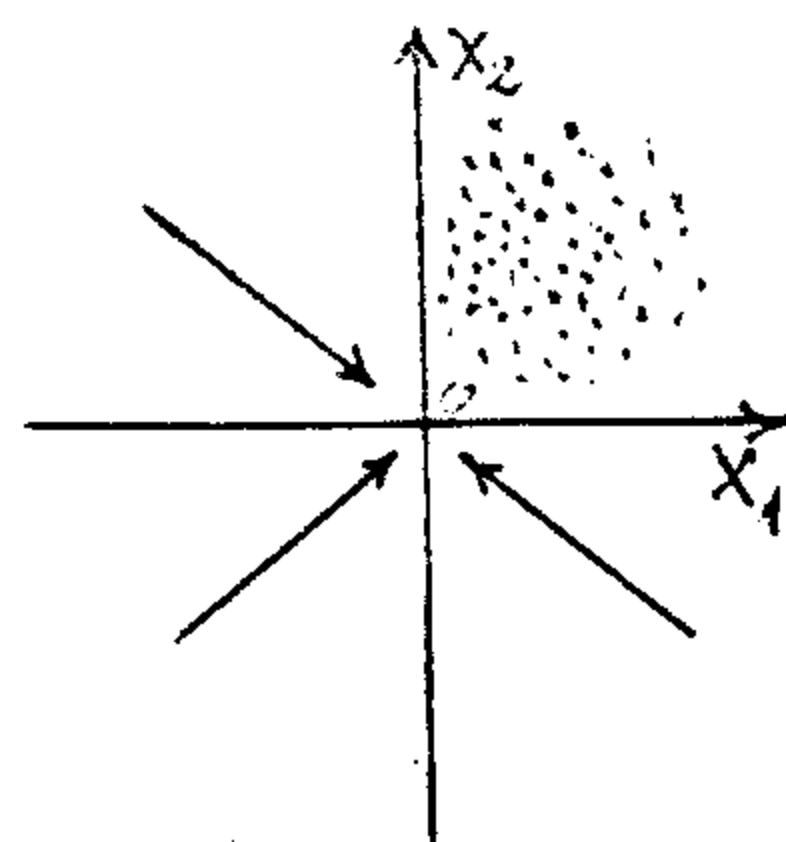
Lema 6.2. Ako su

$$(6.3) \quad -a_0 - c_0 = b_0 < a_0 - c_0,$$

$$(6.4) \quad b_0 < -|a_0 - c_0|,$$

$$(6.5) \quad -d_0 - e_0 = f_0 < d_0 + e_0,$$

$$(6.6) \quad f_0 < -|d_0 - e_0|,$$



Sl.6.2

to 1) u \mathcal{Q}_1 , $\dot{X}_1 = 0$, $\dot{X}_2 = 0$, u \mathcal{Q}_2 , $X_1 > 0$, $X_2 < 0$, u \mathcal{Q}_3 , $X_1 > 0$, $\dot{X}_2 > 0$ i u \mathcal{Q}_4 , $X_1 < 0$, $\dot{X}_2 > 0$; 2) na poluosi OX_1 ($X_1 < 0$) imamo $\dot{X}_1 > 0$, a na OX_2 ($X_2 < 0$) imamo $\dot{X}_2 > 0$.

Dokaz. 1) Ako važe relacije (6.3)-(6.6), tada je očevidno na osnovu (6.3), (6.5) u \mathcal{Q}_1 imamo $\dot{X}_1 = a_0 + b_0 + c_0 = 0$, $\dot{X}_2 = d_0 + e_0 + f_0 = 0$; u \mathcal{Q}_2 , $\dot{X}_1 = a_0 - b_0 + c_0 > 0$, $\dot{X}_2 = d_0 - e_0 + f_0 > 0$, na osnovu (6.3), (6.6); u \mathcal{Q}_3 , $\dot{X}_1 = a_0 - b_0 - c_0 > 0$, $\dot{X}_2 = d_0 - e_0 - f_0 > 0$, na osnovu (6.4), (6.6) i u \mathcal{Q}_4 , saglasno (6.4), (6.5), imamo $\dot{X}_1 = a_0 + b_0 - c_0 > 0$, $\dot{X}_2 = d_0 + e_0 - f_0 > 0$; 2) Pokažimo sada, da je, na osnovu sistema (0.3), kretanje po poluosama OX_1 ($X_1 < 0$), OX_2 ($X_2 < 0$) usmereno ka koordinatnom početku (0,0), tj. odredimo \dot{X}_1 , \dot{X}_2 . Primenom formule (2.1), dobijamo, da na poluosi OX_1 ($X_1 < 0$), $\dot{X}_1 = (D_{01} - D_0)/f_0 = a_0 - b_0 + \theta c_0 > 0$, gde je $|\theta| \leq 1$, a na poluosi OX_2 ($X_2 < 0$), na osnovu (2.2), $\dot{X}_2 = (D_{02} - D_0)/b_0 = d_0 + \theta e_0 - f_0 > 0$ (sl.6.2).

Samim tim tvrđenje je dokazano.

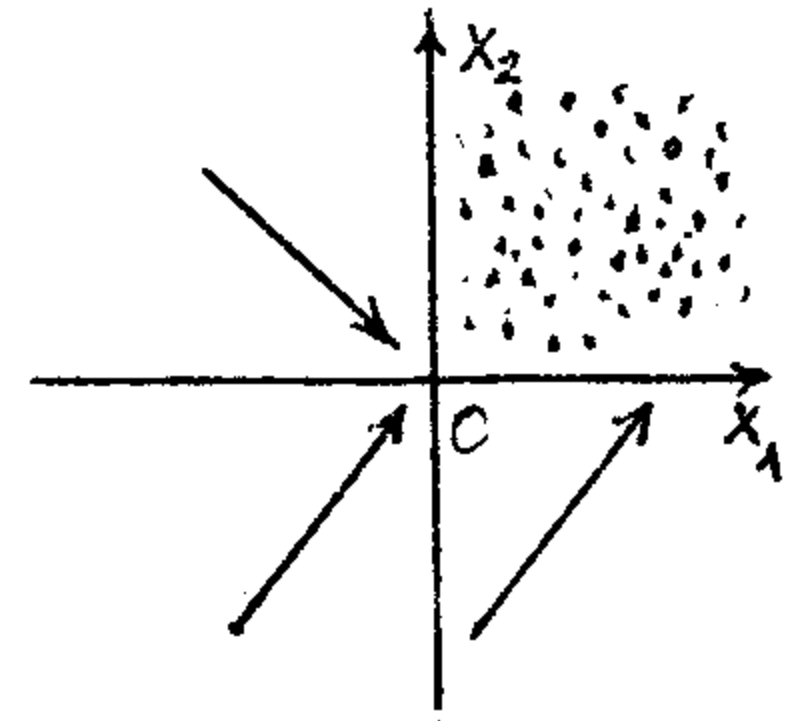
Sledeći rezultati, leme 6.3-6.8, dokazuju se analognom metodom.

Lema 6.3. Ako su ispunjeni uslovi (6.3), (6.5),

(6.6) i

$$(6.7) \quad c_0 - a_0 < b_0 < a_0 - c_0,$$

tada je 1) u Q_1 , $\dot{X}_1 = 0$, $\dot{X}_2 = 0$,
u Q_2 , $\dot{X}_1 > 0$, $\dot{X}_2 < 0$, u Q_3 i Q_4 ,
 $\dot{X}_1 > 0$, $\dot{X}_2 > 0$; 2) na poluosi OX_1
($X_1 < 0$) imamo $\dot{X}_1 > 0$ (sl.6.3).



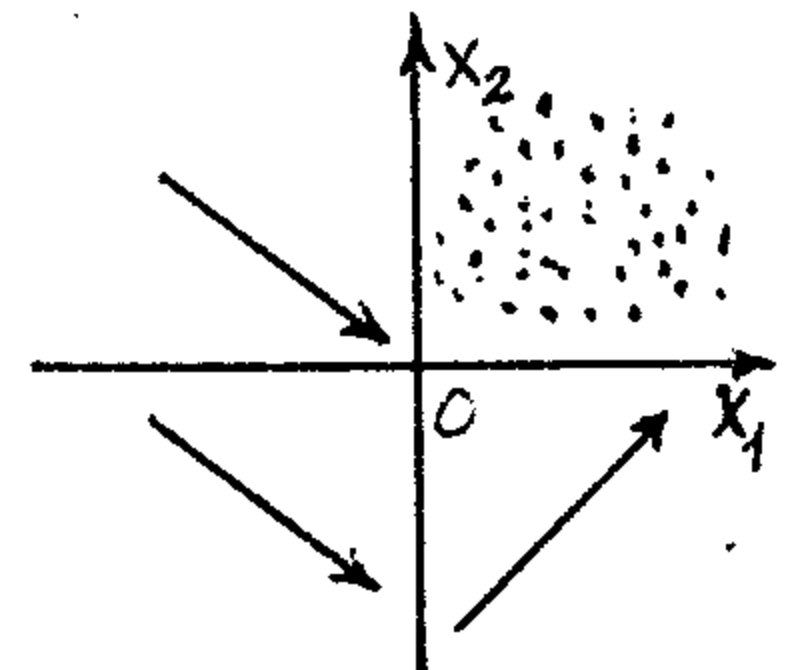
Sl.6.3

Lema 6.4. Neka su ispunjeni uslovi (6.3), (6.5),

(6.7) i

$$(6.8) \quad d_0 - e_0 < f_0 < e_0 - d_0,$$

to u Q_1 , $\dot{X}_1 = 0$, $\dot{X}_2 = 0$, u Q_2 ,
i Q_3 , $\dot{X}_1 > 0$, $\dot{X}_2 < 0$, u Q_4 ,
 $\dot{X}_1 > 0$, $\dot{X}_2 > 0$ (sl.6.4).

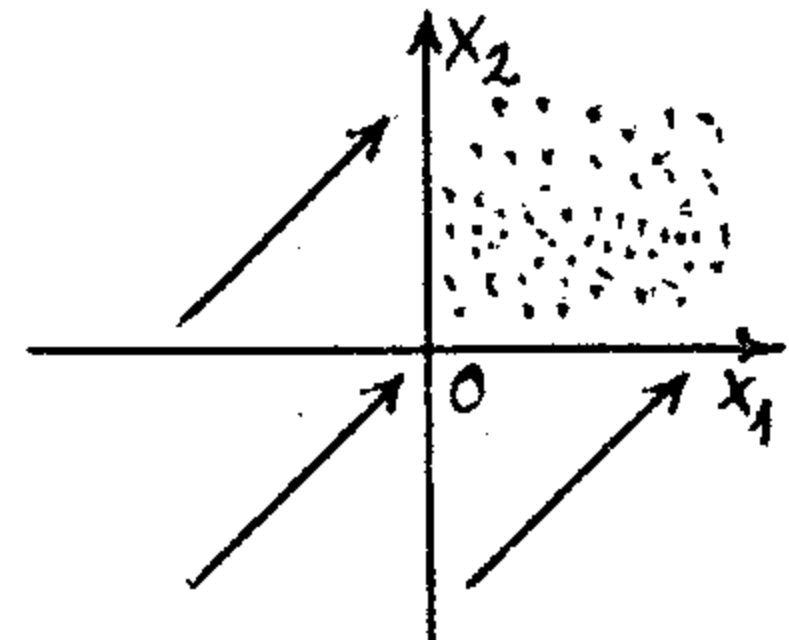


Sl.6.4

Lema 6.5. Pri uslovima (6.3), (6.5), (6.7) i

$$(6.9) \quad e_0 - d_0 < f_0 < d_0 - e_0,$$

imamo u Q_1 , $\dot{X}_1 = 0$, $\dot{X}_2 = 0$, u
 Q_2 , Q_3 i Q_4 , $\dot{X}_1 > 0$, $\dot{X}_2 > 0$
(sl.6.5)



Sl.6.5

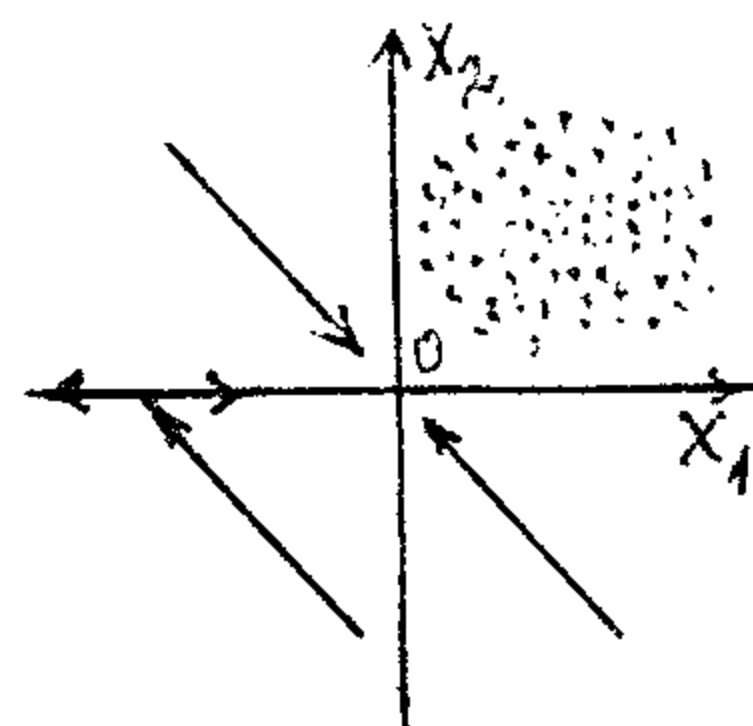
Lema 6.6. Ako pri ispunjenju uslova (6.3), (6.5),

(6.6), imamo

$$(6.10) \quad a_0 - c_0 < b_0 < c_0 - a_0,$$

tada je 1) u Q_1 , $\dot{X}_1 = 0$, $\dot{X}_2 = 0$, u Q_2 , $\dot{X}_1 > 0$, $\dot{X}_2 < 0$, u Q_3
i Q_4 , $\dot{X}_1 < 0$, $\dot{X}_2 > 0$; 2) na poluosi OX_1 ($X_1 < 0$) imamo $\dot{X}_1 > 0$,
ako je $D_{01} < D_0$, i $\dot{X}_1 < 0$, ako je $D_{01} > D_0$.

Dokaz. 1) Dokazuje se analogno tvrđenju 1) leme 6.2; 2) Brzina kretanja po poluosi OX_1 ($X_1 < 0$) jednaka je $\dot{X}_1 = (D_{01} - D_0)/f_0 > 0$, ako je $D_{01} - D_0 < 0$, a $\dot{X}_1 < 0$, ako je $D_{01} - D_0 > 0$, pošto je $f_0 < 0$ na osnovu (6.6) (sl.6.6).



Sl.6.6

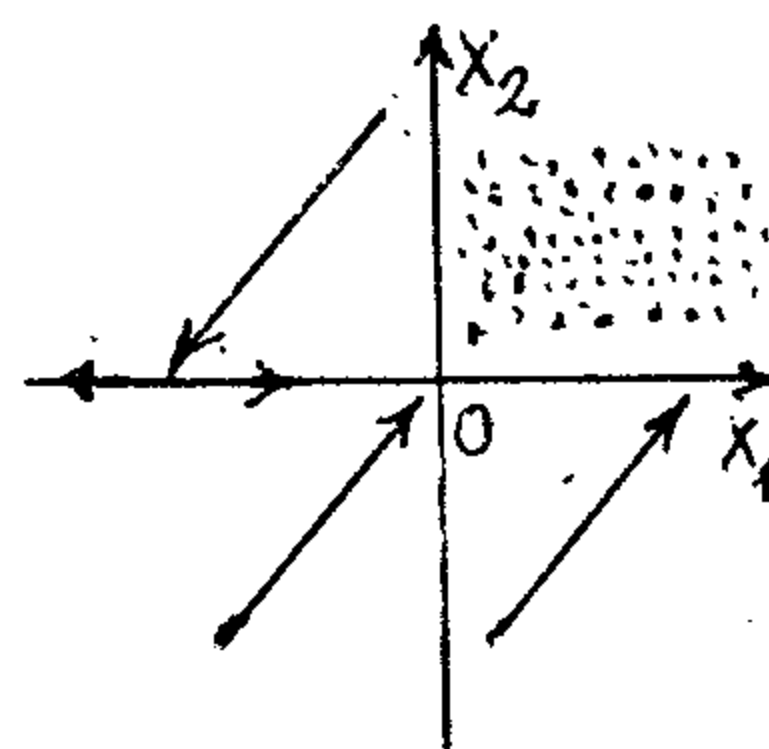
Analogno leme 6.6, dokazuje se sledeća lema.

Lema 6.7. 1) Ako su ispunjeni uslovi (6.5), (6.6), (6.7) i

$$(6.11) \quad -a_0 - c_0 = b_0 > a_0 + c_0,$$

to u $\mathcal{Q}_1, \dot{X}_1 = \dot{X}_2 = 0$, u $\mathcal{Q}_2, \dot{X}_1 < 0, X_2 < 0$, u \mathcal{Q}_3 i $\mathcal{Q}_4, \dot{X}_1 > 0, \dot{X}_2 > 0$;

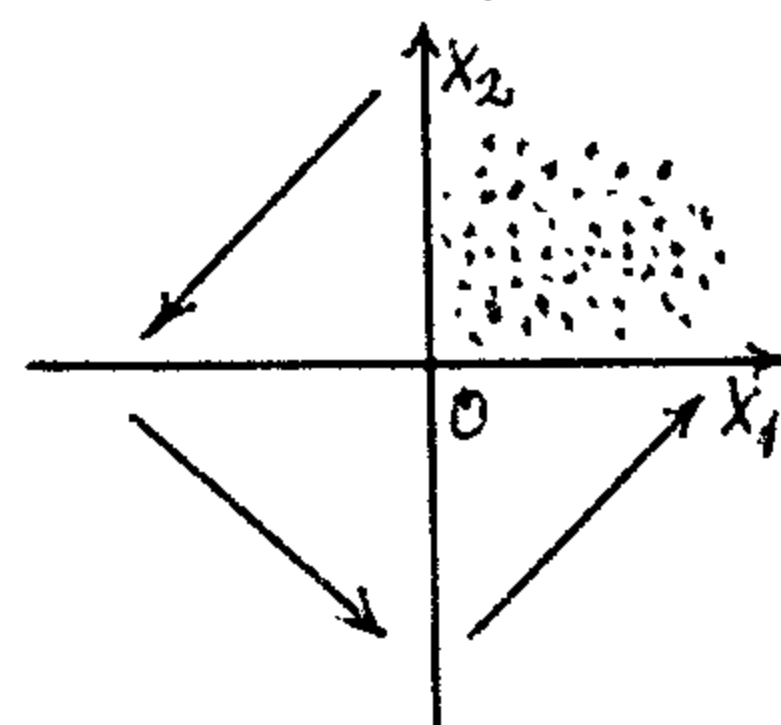
2) važi tvrđenje odeljka 2) leme 6.6 (sl.6.7).



Sl.6.7

Lema 6.8. Neka su ispunjeni uslovi (6.5), (6.7), (6.8), (6.11).

Tada je u $\mathcal{Q}_1, \dot{X}_1 = \dot{X}_2 = 0$, u $\mathcal{Q}_2, \dot{X}_1 < 0, \dot{X}_2 < 0$, u $\mathcal{Q}_3, \dot{X}_1 > 0, \dot{X}_2 < 0$, u $\mathcal{Q}_4, \dot{X}_1 > 0, \dot{X}_2 > 0$ (sl.6.8).



Sl.6.8

Mogući su takođe slučajevi, simetrični slučajevima, razmotrenim u lemama 6.3, 6.4, 6.5-6.8. Oni se dobijaju iz ovih lema zamenu X_1 na X_2 , a X_2 na X_1 .

6.2. Ispitivanje trajektorija u \mathcal{Q}_1

Da bi objasnili, imali u \mathcal{Q}_1 rešenja ulaznih u koor-

dinamni početak ili izlaznih iz njega, rešimo pitanje o tome, imali sopstvenih vektora u \mathcal{Q}_1 , tj. s ugaonim koeficijentom $0 < k < \infty$, i koliko ih biće i kakvog tipa dobijaju se pri ovome singularne tačke.

Za ispitivanje sopstvenih vektora u \mathcal{Q}_1 , neophodno je naći ugaone koeficijente $\frac{dx_2}{dt} = \frac{x_2}{x_1} = k$ isključenih smerova sistema (6.1) iz jednačine

$$(6.12) \quad \beta k^2 + (\alpha - \delta)k - \gamma = 0.$$

Za ispitivanje položaja ravnoteže sistema (6.1) neophodno je sastaviti karakterističnu jednačinu

$$(6.13) \quad \det|A - \lambda E| = 0,$$

i naći njene korene $\lambda = \frac{1}{2}(\alpha + \delta \pm \sqrt{\Delta})$, gde su

$$\Delta = (\alpha + \delta)^2 - 4(\alpha\delta - \beta\gamma) = (\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma,$$

$$(6.13') \quad \lambda_1 + \lambda_2 = \alpha + \delta, \quad \lambda_1 \lambda_2 = \alpha\delta - \beta\gamma.$$

Napomena 6.1. U slučaju $\alpha\delta = \beta\gamma$ imamo $\lambda_1 \lambda_2 = 0$, tj. ima se nula koren. Ovaj je kritički slučaj više drugog reda i ne ispituje se.

6.2.1. U \mathcal{Q}_1 ili na granici \mathcal{Q}_1 je jedan sopstveni vektor

Ako u (6.12) imamo $\beta\gamma > 0$, tada je $k_1 k_2 < 0$; neka je k_1 - veći koren, tada je $k_2 < 0 < k_1$, tj. u \mathcal{Q}_1 je jedan sopstveni vektor.

Kako je $\beta\gamma > 0$, to $\Delta > 0$ i λ_1, λ_2 su različiti i realni. Odredimo kakvog je znaka λ kada je $0 < k_1 < \infty$. Znači:

- 1) Za svako $\beta > 0$ imamo

$$k_1 = \frac{1}{2\beta}(\delta - \alpha + \sqrt{\Delta}),$$

$$\lambda_1 = \alpha + \beta k_1 = \frac{1}{2}(\alpha + \delta + \sqrt{\Delta}).$$

a) Ako je $\alpha + \delta > 0$, tada je $\lambda_1 > 0$, - nestabilnost;

b) Ako su $\beta\gamma > \alpha\delta$, $\alpha + \delta \leq 0$, tada su $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$;

c) Ako su $\alpha + \delta < 0$, $\beta\gamma < \alpha\delta$, tada su $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$;

2) Pri $\beta < 0$ imamo

$$k_1 = \frac{1}{2\beta}(\delta - \alpha - \sqrt{\Delta}),$$

$$\lambda_1 = \alpha + \beta k_1 = \frac{1}{2}(\alpha + \delta - \sqrt{\Delta}).$$

a) Ako je $\alpha + \delta < 0$, tada je $\lambda_1 < 0$;

b) Ako su $\alpha + \delta \geq 0$, $\beta\gamma \geq \alpha\delta$, tada su $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 \geq 0$;

c) Ako su $\alpha + \delta > 0$, $\beta\gamma < \alpha\delta$, tada su $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$,

- nestabilnost:

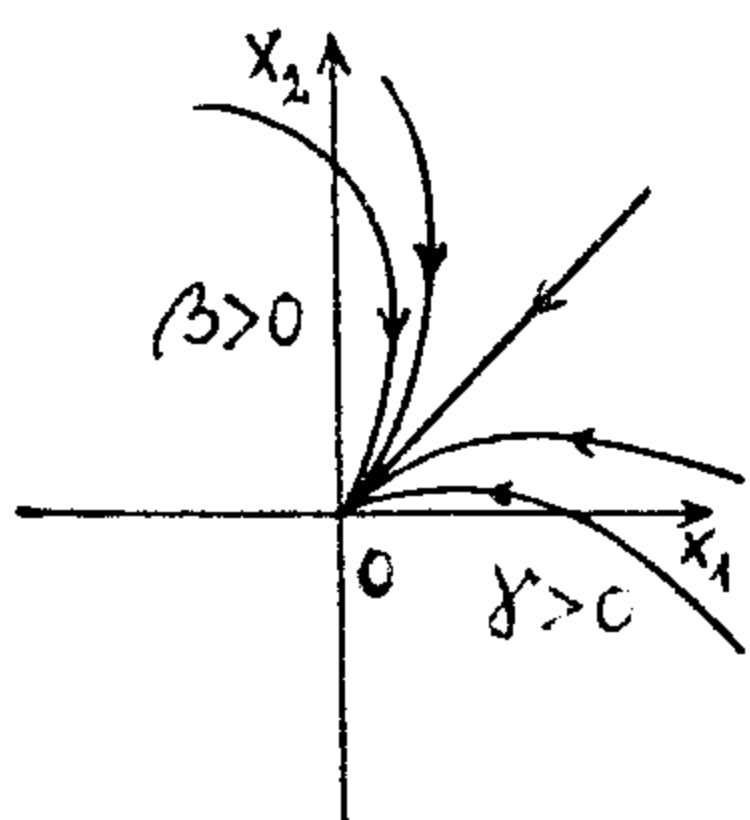
3) Ako je $\alpha < 0$, $\gamma = 0$, tada je jedan sopstveni vektor usmeren po osi OX_1 , $k_1 = 0$, $\lambda_1 = \alpha < 0$. Drugi vektor neće biti u \mathcal{Q}_1 , ako je $k_2 < 0$. Znači, $k_1 + k_2 < 0$, $(\alpha - \delta)\beta > 0$.

4) Ako je $\beta = 0$, $\delta < 0$, tada je jedan sopstveni vektor usmeren po osi OX_2 , $k_1 = 0$, $\lambda_1 = \delta < 0$. Drugi vektor neće biti u \mathcal{Q}_1 , ako je $k_2 < 0$. To znači da je $k_1 + k_2 < 0$, $(\alpha - \delta)\gamma < 0$.

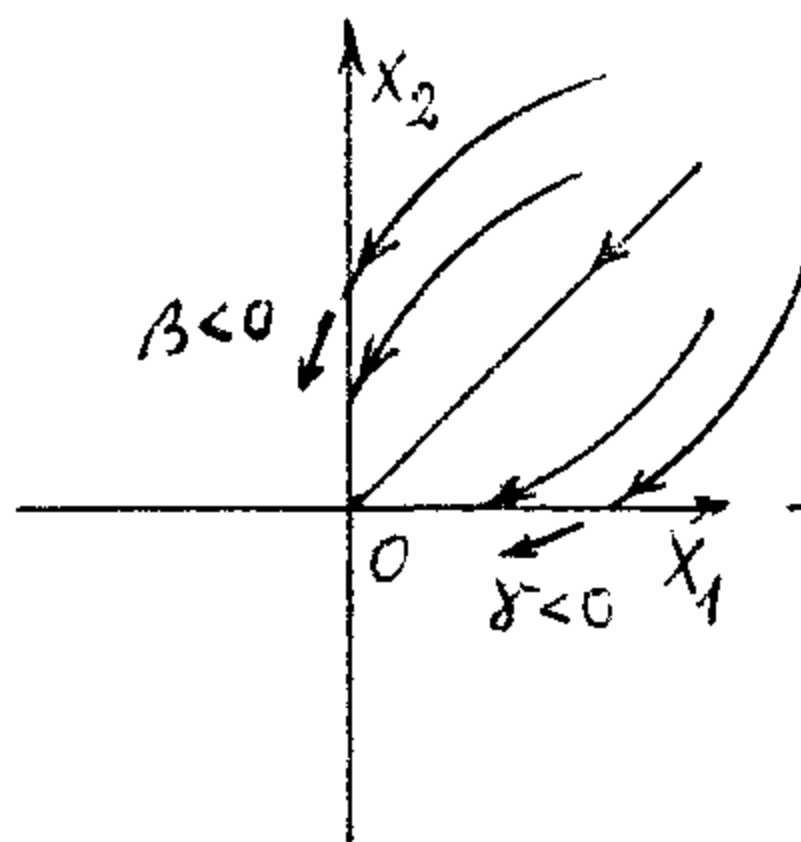
Dakle, u sledećim slučajevima za sopstvenog vektora $\lambda_1 < 0$ u \mathcal{Q}_1 , imamo

a) Ako su $0 \leq \beta\gamma < \alpha\delta$, $\alpha + \delta < 0$, tada su $\lambda_1 < 0$,

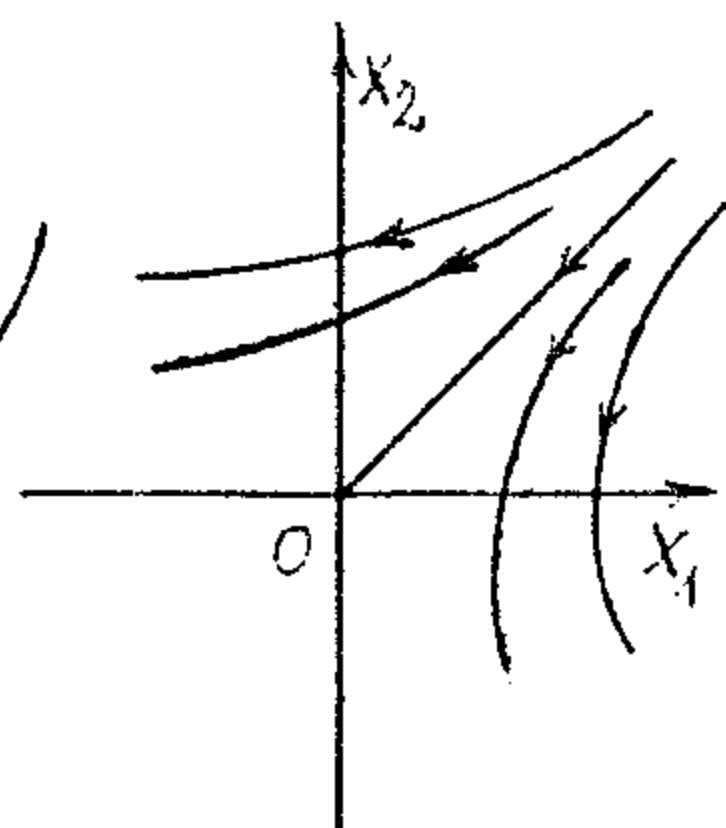
$\lambda_2 < 0$, - stabilni čvorovi (sl.6.9, 6.10);



Sl.6.9



Sl.6.10



Sl.6.11

b) Ako su $\beta \leq 0$, $\gamma \leq 0$, $\beta\gamma \geq \alpha\delta$, to je sedlo (sl.6.11);

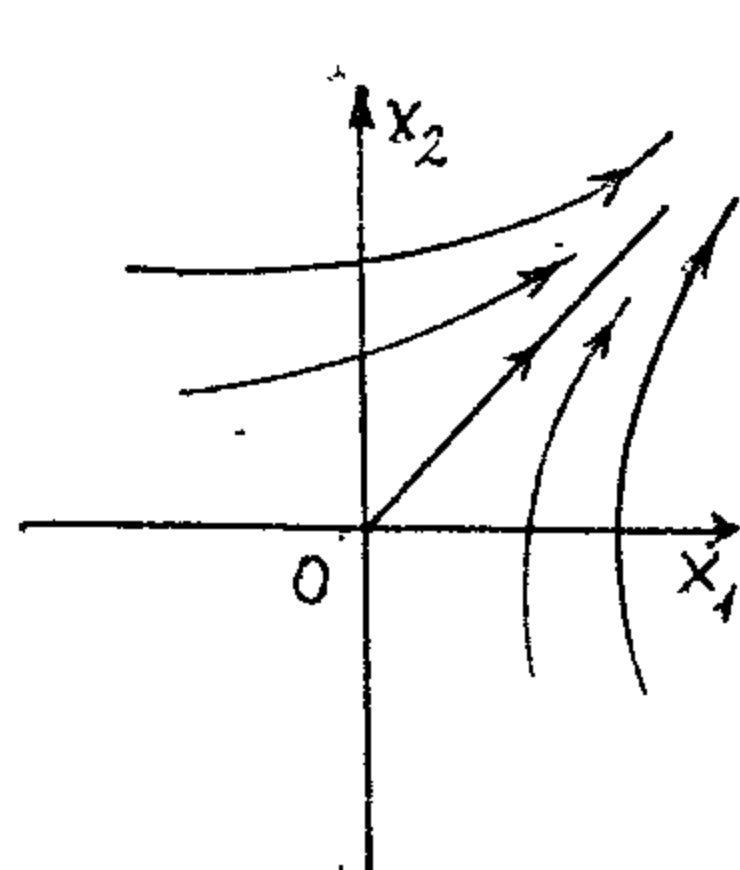
c) $\alpha < 0$, $\gamma = 0$, $(\alpha - \delta)\beta > 0$;

d) $\beta = 0$, $\delta < 0$, $(\alpha - \delta)\gamma < 0$.

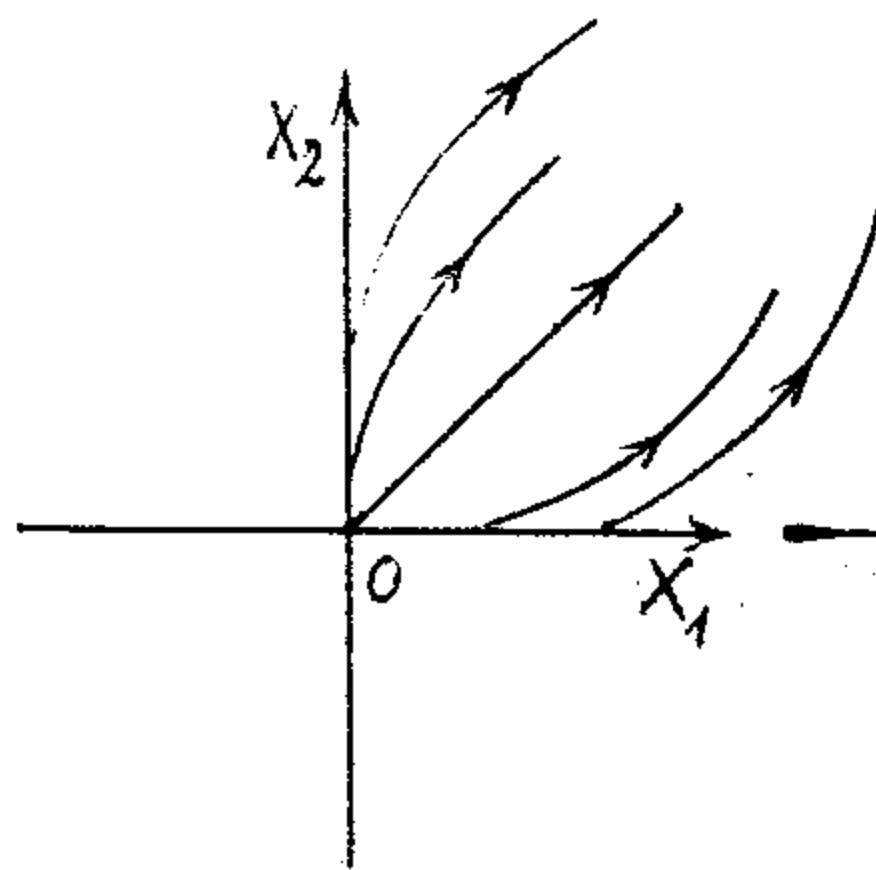
U sledećim slučajevima za sopstvenog vektora $\lambda_1 > 0$ u \mathcal{Q}_1 imamo

a) U slučaju $\beta > 0$, $\gamma > 0$, $\beta\gamma > \alpha\delta$, to je sedlo (sl.6.12);

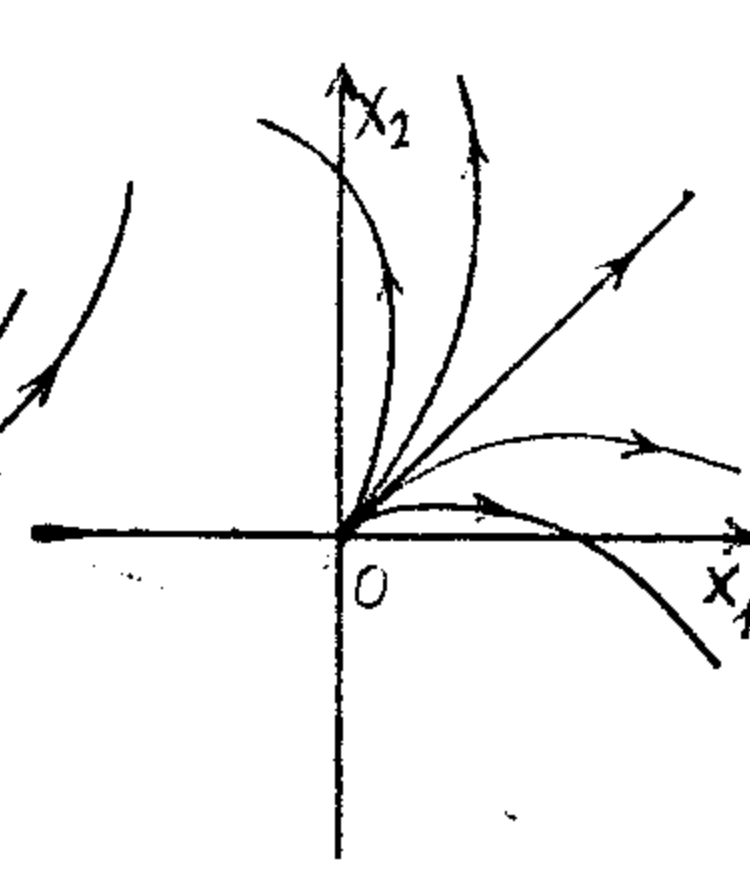
b) Ako su $0 \leq \beta\gamma < \alpha\delta$, $\alpha + \delta > 0$, tada su $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, - nestabilni čvorovi (sl.6.13, 6.14).



Sl.6.12



Sl.6.13



Sl.6.14

Odredimo sada uslove na koeficijentima sistema (6.1), kada trajektorije iz Q_1 prelaze u ostale kvadrante i obratno. Na osi OX_2 , pri $X_1 = 0, X_2 > 0$, iz (6.1) dobijamo

$$(6.14) \quad \operatorname{sgn} \dot{X}_1 = \operatorname{sgn} \beta.$$

Iz (6.14) sledi, da pri $\beta < 0$ trajektorije sistema (6.2) kroz poluosu $OX_2 (X_2 > 0)$ izlaze iz Q_1 a ulaze u Q_2 , a pri $\beta > 0$ - iz Q_2 u Q_1 .

Analogno na OX_1 , pri $X_2 = 0, X_1 > 0$, iz (6.1) dobijamo

$$(6.15) \quad \operatorname{sgn} \dot{X}_2 = \operatorname{sgn} \gamma.$$

Jasno, što pri $\gamma < 0$ trajektorije sistema (6.2) kroz poluosu $OX_1 (X_1 > 0)$ izlaze iz Q_1 a ulaze u Q_4 , a ako je $\gamma > 0$, to - iz Q_4 u Q_1 .

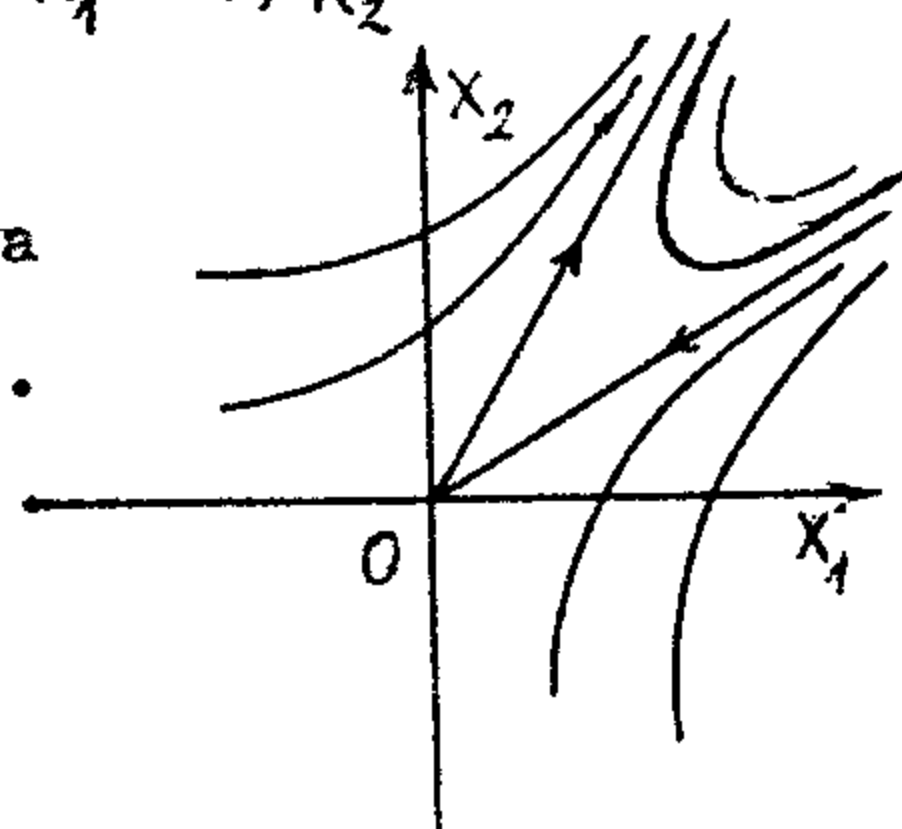
6.2.2. Dva sopstvena vektora u Q_1 ili na granici Q_1

Ako u (6.12) imamo $\Delta > 0, \beta\gamma \leq 0, \beta(\delta - \alpha) \geq 0, \gamma(\delta - \alpha) \leq 0$, onda je $0 \leq k_1 \leq \infty, 0 \leq k_2 \leq \infty$, tj. oba sopstvena vektora su u Q_1 ili na njenoj granici, takvi, da

- 1) Ako je $\gamma = 0, \beta(\delta - \alpha) > 0$, tada je $k_1 = 0, k_2 > 0$;
- 2) Ako je $\beta = 0, \gamma(\delta - \alpha) < 0$, tada je $k_1 > 0, k_2 = \infty$;
- 3) Ako je $\beta = 0, \gamma = 0$, tada je $k_1 = 0, k_2 = \infty$.

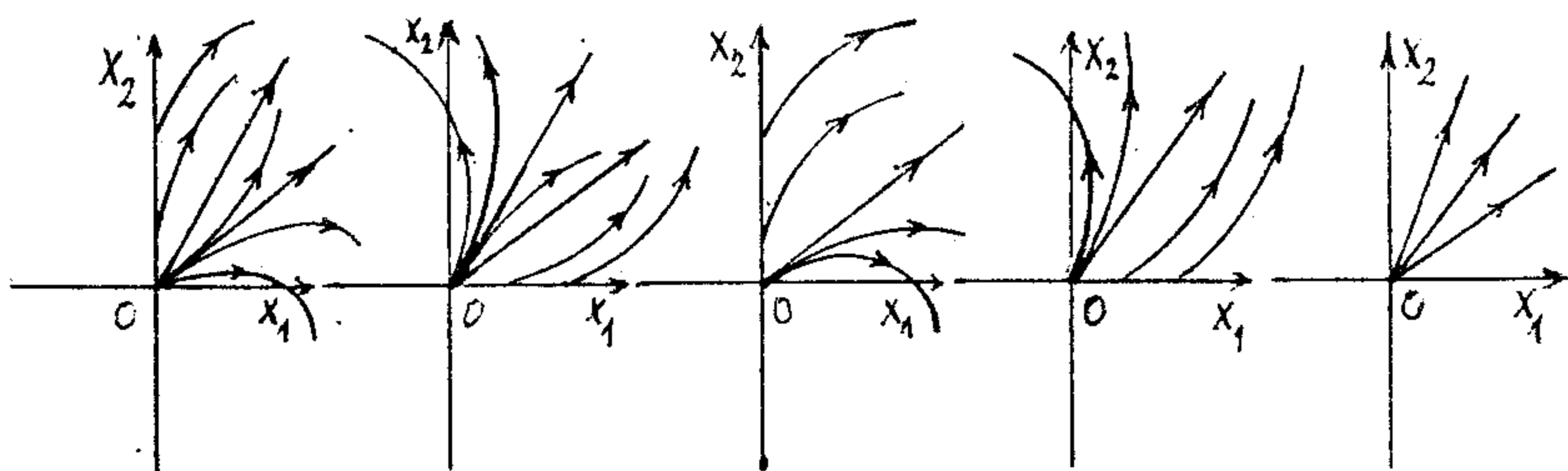
U slučaju $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}(\alpha + \delta)$, $0 < (\alpha - \delta)^2 / 4 = -\beta\gamma, \alpha + \delta > 0$, - dva sopstvena vektora se poklapaju u Q_1 .

4. Ako u (6.13') imamo $0 > \gamma\beta > \alpha\delta, \beta(\delta - \alpha) > 0$, tada je $\lambda_1\lambda_2 < 0$ i rešenje sistema je nestabilna (sedlo, vd. sl. 6.15);



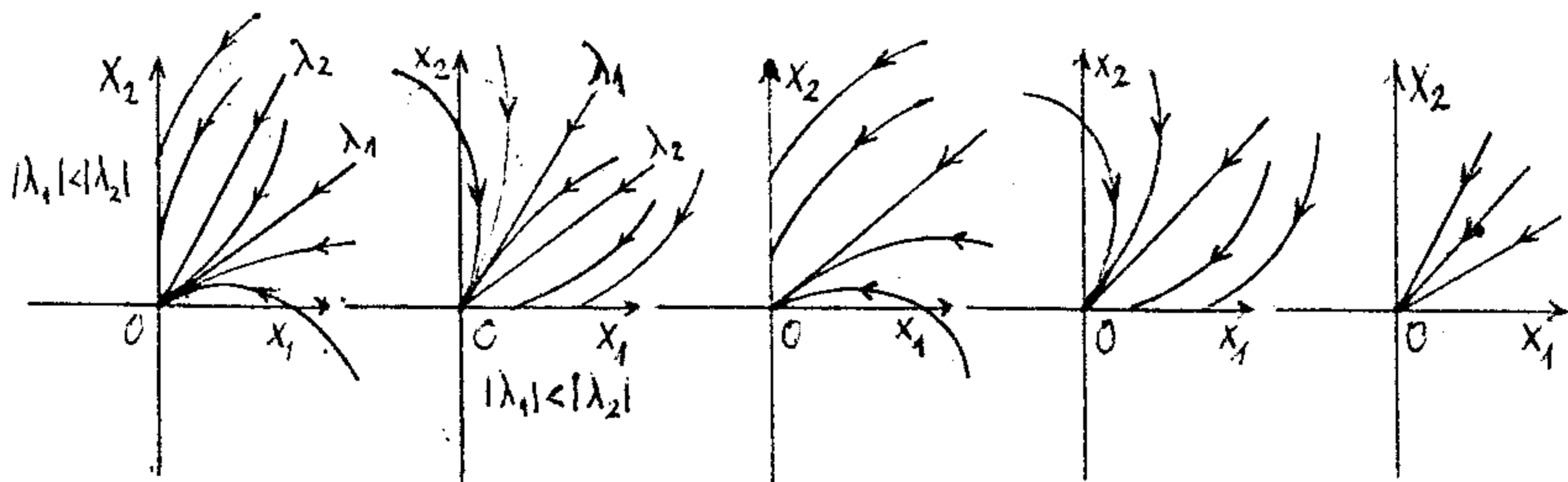
Sl.6.15

5) Ako je $\Delta \geq 0$, $\beta\gamma \leq 0$, $\beta(\delta - \alpha) \geq 0$, $\gamma(\delta - \alpha) \leq 0$, tada je $0 \leq k_1 \leq \infty$, $0 \leq k_2 \leq \infty$, a ako je $\beta\gamma < \alpha\delta$, $\alpha + \delta > 0$, to $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, - nestabilni čvorovi (sl.6.16-6.20).



Sl.6.16 Sl.6.17 Sl.6.18 Sl.6.19 Sl.6.20

6) Ako je $\beta\gamma \leq 0$, $\beta(\delta - \alpha) \geq 0$, $\gamma(\delta - \alpha) \leq 0$, tada je $0 \leq k_1 \leq \infty$, $0 \leq k_2 \leq \infty$, a ako je $(\alpha - \delta)^2 / 4 \geq \beta\gamma < \alpha\delta$, $\alpha + \delta < 0$, to $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, - stabilni čvorovi (sl.6.21-6.25).



Sl.6.21 Sl.6.22 Sl.6.23 Sl.6.24 Sl.6.25

6.2.3. U \mathcal{Q}_1 nema sopstvenih vektora, tj. u \mathcal{Q}_1 nema trajektorija ulazeći u $(0,0)$

Do ovog slučaja dolazimo, ako su koreni jednačine (6.13) ili kompleksni $\lambda = \mu \pm i\nu$, $\nu \neq 0$, ili realni, ali u \mathcal{Q}_1 nema sopstvenih vektora.

- 1) Neka je $\Delta < 0$, tada su koreni λ_1, λ_2 kompleksni;
 2) Ako je $\Delta \geq 0$, tada su λ_1, λ_2 - realni.

Pri uslovima u (6.12) $\beta\gamma < 0, \beta(\alpha - \delta) > 0$, imamo $k_1 < 0, k_2 < 0$ i u \mathcal{Q}_1 nema sopstvenih vektora.

Uslove 1) i 2) možemo objediniti u jedno:

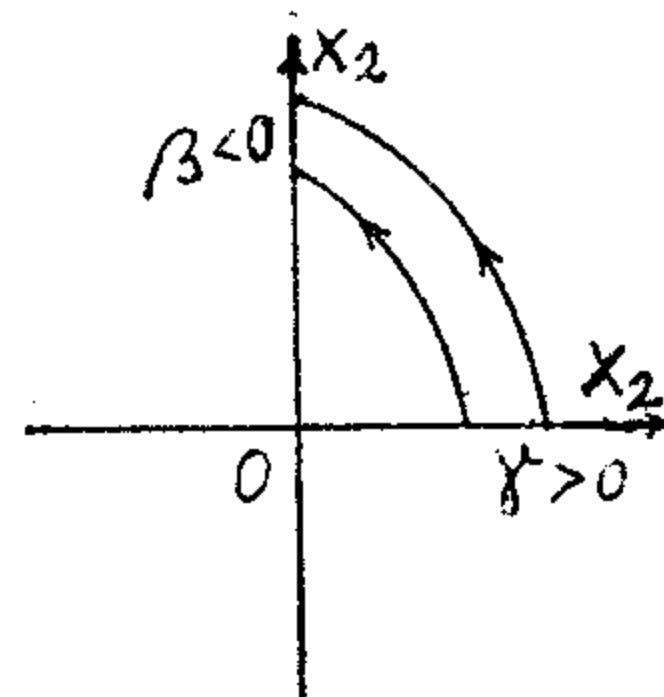
$$\beta\gamma < 0, (\delta - \alpha) \operatorname{sgn} \beta < 2\sqrt{-\beta\gamma}.$$

- 3) U slučajevima 1) i 2) kretanje u \mathcal{Q}_1 proizilazi od osi OX_1 ka osi OX_2 (sl.6.26), ako je $\beta < 0, \gamma > 0$, i od OX_2 ka OX_1 (sl.6.27), ako je $\beta > 0, \gamma < 0$. Ovo sledi iz (6.14) i (6.15).

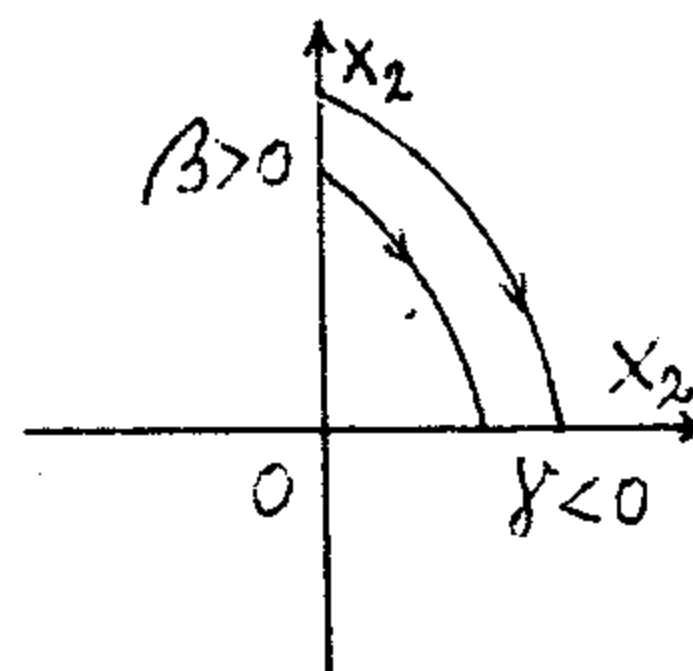
Objedinjavajući rezultate odeljka 6.2.1-6.2.3 dobijamo dve leme.

Lema 6.9. Neka je ispunjen jedan od uslova: 1) $\beta\gamma < \alpha\delta, \alpha + \delta < 0$; 2) $\beta < 0, \gamma < 0, \beta\gamma \geq \alpha\delta$; 3) $\alpha < 0, \gamma = 0, (\alpha - \delta)\beta > 0$; 4) $\beta = 0, \delta < 0, (\alpha - \delta)\gamma < 0$; 5) $\beta\gamma < 0, (\delta - \alpha) \operatorname{sgn} \beta < 2\sqrt{-\beta\gamma}$. Tada u \mathcal{Q}_1 i na njenoj granici nema sopstvenih vektora operatora A za kojih je $\lambda \geq 0$. U ovim slučajevima trajektorije sistema (6.1) i (6.2) u \mathcal{Q}_1 rasprostranjeni tako, kao na slikama 6.9-6.11, 6.21-6.27.

Lema 6.10. Neka je ispunjen jedan od uslova: 1) $\beta > 0, \gamma > 0, \beta\gamma > \alpha\delta$; 2) $\alpha + \delta > 0, 0 \leq \beta\gamma < \alpha\delta$;



S1.6.26



S1.6.27

3) $0 > \gamma\beta > \alpha\delta$, $\beta(\delta - \alpha) > 0$; 4) $\beta\gamma < 0$,

$(\delta - \alpha) \operatorname{sign} \beta > 2\sqrt{-\beta\gamma}$, $\alpha + \delta > 0$. Tada je u \mathcal{Q}_1 sopstveni vektor operatora A, za kojeg $\lambda > 0$. Pri ovim uslovima ima trajektorije, izlazeći iz tačke (0,0) u \mathcal{Q}_1 . Pri svakom rasprostiranjju trajektorija u ostale kvadrante položaj ravnoteže (0,0) je nestabilno (vd. sl.6.12-6.15, 6.16-6.20).

6.3. Ispitivanje stabilnosti

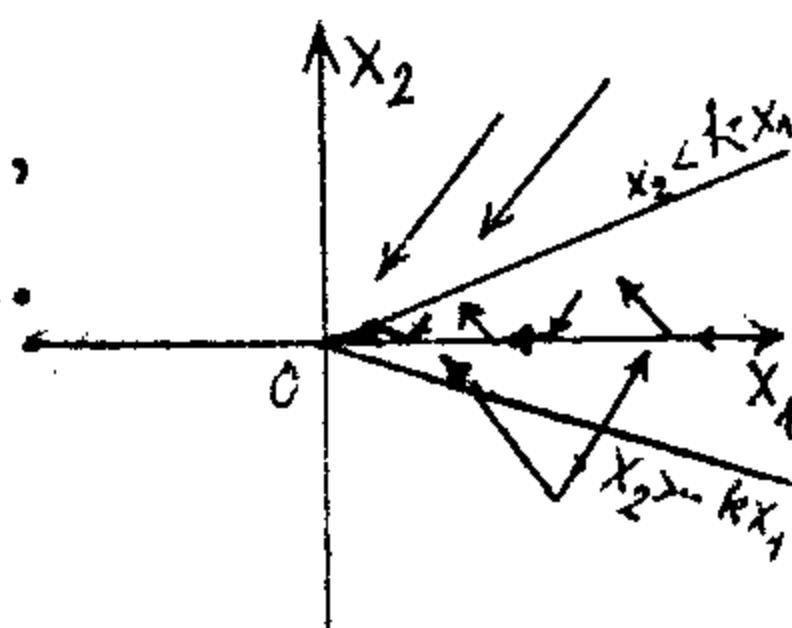
Rezultati odeljka 6.2 dozvoljavaju ispitivanje stabilnosti sistema (0.1) pri uslovu $u_1 = 0$, $v_1 = 0$. U slučaju kada matrica A ima sopstvene vektore po osi OX_1 i OX_2 u zavisnosti od članova beskonačno malo višeg reda (6.2) mogući su slučajevi, kada rešenja iz \mathcal{Q}_1 u okolini tačke (0,0) mnogo puta padaju na osu OX_1 ili OX_2 i silaze s nje (sl.6.28, 6.29). Da bi razmatrili ove slučajeve nezavisno od ovih činjenica, konstruišemo funkciju A. M. Ljapunova.

Razmotrimo u početku slučaj, kada je sopstveni vektor usmeren po osi OX_1 .

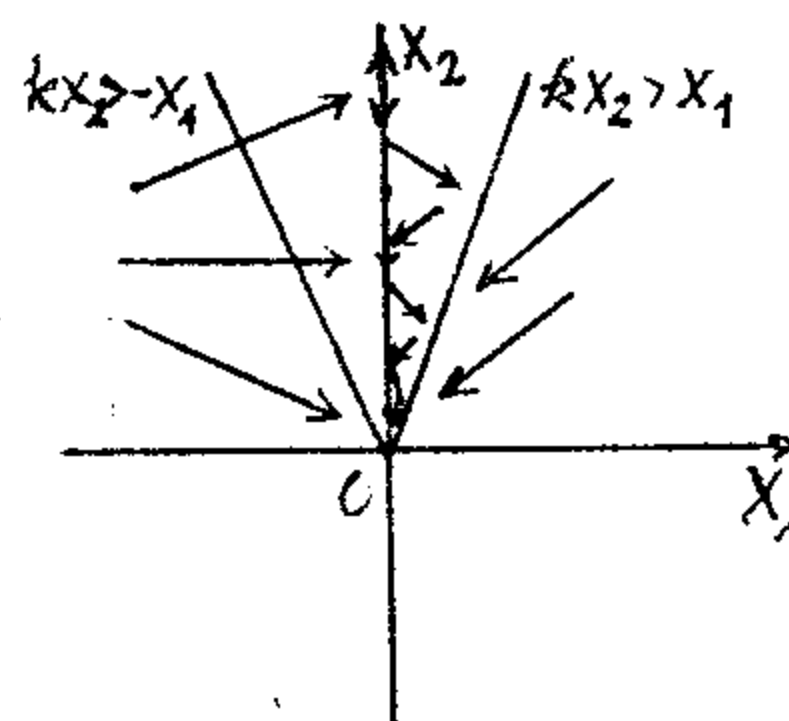
Uporedo sa sistemom (6.2) u oblasti \mathcal{Q}_1 , razmotrimo u svojstvu prvog približenja sistem

$$(6.16) \begin{cases} \dot{X}_1 = u_4 + o(|X_1| + |X_2|), \\ \dot{X}_2 = v_4 + o(|X_1| + |X_2|), \end{cases}$$

u \mathcal{Q}_4 , gde su $v_4 > 0$, u_4 - konstante.



Sl.6.28



Sl.6.29

1) Ako je $\gamma = 0$, tada ima se sopstveni vektor po osi OX_1 sa sopstvenom vrednošću α . Pretpostavimo da je $\alpha < 0$ (može se ispitivati samo u slučaju kada je $\alpha < 0$, jer kada je $\alpha > 0$ neće biti stabilno). Kako na osi OX_1 ($X_1 > 0$, $X_2 = +0$, tj. u \mathcal{Q}_1) $\text{sgn} \dot{X}_2$ zavisi od znaka ostatka člana u jednačini (6.2), konstruišemo funkciju Ljapunova, da bi dobili uslove stabilnosti nezavisno od znaka \dot{X}_2 .

Lema 6.11. Rešenje sistema (6.2), (6.16), gde su $\alpha < 0$, $\gamma = 0$, $V_4 > 0$, padajući u \mathcal{Q}_1 i \mathcal{Q}_4 u okolini tačke nula ulazi u ovu tačku (ako rešenje ne pada na osu OX_2).

Dokaz. Konstruišemo za sisteme (6.2), (6.16) funkciju Ljapunova u obliku linearne forme

$$(6.17) \quad V = S_1 X_1 + S_2 X_2,$$

gde je $S_1 > 0$, u okolini pozitivnoj poluosi abscise

$$(6.18) \quad |X_2| \leq k X_1, \quad (k > 0).$$

Odaberimo S_2 i k takve, da bi $V > 0$ u oblasti (6.18).

Postavimo (6.18) u (6.17) dobijamo

$$(S_1 + |S_2| k) X_1 \geq V \geq (S_1 - |S_2| k) X_1.$$

Da bi $V \geq 0$, dovoljno je da $S_1 - |S_2| k \geq 0$, tj.

$$(6.19) \quad -\frac{1}{k} \leq \frac{S_2}{S_1} \leq \frac{1}{k}.$$

Birajući sada izvod funkcije V , na osnovu sistema (6.2), (6.16), imamo

$$1^\circ \quad \dot{V} = \alpha S_1 X_1 + X_2 (S_1 \beta + S_2 \delta) + o(X_1^2 + X_2^2),$$

u oblasti $0 < X_2 < k X_1$;

$$2^{\circ} \dot{V} = S_1 u_4 + S_2 v_4 + O(|x_1| + |x_2|),$$

u oblasti $-kx_1 < x_2 < 0$.

U 1° uslovi (6.19) i

$$\alpha S_1 x_1 + x_2(S_1 \beta + S_2 \delta) < S_1 x_1 \left[\alpha + k(|\beta| + \frac{|S_2 \delta|}{S_1}) \right] < 0,$$

tj.

$$(6.20) \quad 0 < k < -\alpha / (|\beta| + \frac{|S_2 \delta|}{S_1}),$$

daju znaknegativnosti \dot{V} u Q_1 u okolini tačke $(0,0)$, Zatim odaberimo S_1 i S_2 , pri kojim $\dot{V} < 0$ u 2° . Dobijamo

$$(6.21) \quad \frac{S_2}{S_1} = -\frac{u_4}{v_4}.$$

Sistemi nejednakosti (6.19), (6.21) imaju rešenja u odnosu na $\frac{S_2}{S_1}$, ako pri $u_4 \leq 0$ uzima se bilo koje $k > 0$, a pri $u_4 > 0$ uzima se $0 < k < \frac{v_4}{u_4}$. U rezultatu pri

$$0 < k < \min \left\{ \frac{v_4}{u_4}, \frac{-\alpha}{|\beta| + \frac{|S_2 \delta|}{S_1}} \right\},$$

postoje $S_1 > 0$ i S_2 , zadovoljavajući (6.19), (6.20), (6.21). To znači, postoji funkcija Ljapunova u oblasti (6.18) pri $|x_1| + |x_2| < \epsilon$.

Za rešenja po osi $0x_1$ ($0 < x_1 < \epsilon$) imamo saglasno

$$(2.1) \quad \dot{X}_1 = (D_1 + D) / f. \text{ Izražavajući } D, D_1 \text{ i } f \text{ po (0.2)}$$

i koristeći tome, što u §6, a naime na osnovu (6.2),

$$a_1 + b_1 + c_1 = \alpha, \quad d_1 + e_1 + f_1 = \gamma = 0, \text{ dobijamo } \dot{X}_1 = dX_1 + O(X_1^2) < 0. \text{ A ovo i znači, da izvod } \dot{V}, \text{ u (6.17) je ne-}$$

gativnog znaka. Sa ovim lema je dokazana.

2) Analogno, ako je $\beta = 0$, tada je sopstveni vektor matrice A po osi OX_2 sa negativnom sopstvenom vrednošću δ (i ovde, moguće je samo u slučaju $\delta < 0$, jer u protivnom neće biti stabilno). U ovom slučaju razmatra se sistem (6.2) u \mathcal{G}_1 i sistema

$$(6.22) \quad \dot{X}_1 = u_2 + o(|X_1| + |X_2|), \quad \dot{X}_2 = V_2 + o(|X_1| + |X_2|),$$

u \mathcal{G}_2 , gde su $u_2 > 0$, V_2 - konstante.

Lema 6.12. Rešenje sistema (6.2), (6.22), gde su $\beta = 0$, $\delta < 0$, $u_2 > 0$, padajući u \mathcal{G}_1 i \mathcal{G}_2 u okolini tačke nula, ulazi u ovu tačku (ako rešenje ne pada na OX_1).

Dokaz se izvodi analogno dokazu leme 6.11 (vd. sl. 6.29).

Sistem (6.22), u slučaju $u_2 < 0$, $V_2 < 0$ označimo (6.22').

Lema 6.13. Ako u lemi 6.12, uslove $u_2 > 0$ zamene sa uslovima $u_2 < 0$, $V_2 < 0$, to rešenje, padajući u \mathcal{G}_1 i \mathcal{G}_2 u okolini koordinatnog početka, ulazi u tačku $(0,0)$ ili izlazi iz oblasti $\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$ na osu OX_1 .

Dokaz. Funkcija Ljapunova $V = X_2 > 0$ u oblasti $|kX_1| < X_2 < \varepsilon$. Nejednakost $\dot{V} < 0$ u oblasti \mathcal{G}_2 sledi iz (6.22'), a u oblasti $0 < kX_1 < X_2$, na osnovu (6.2) $\dot{V} < 0$, ako se odabere $k > \frac{|Y|}{-\delta} > 0$, ($-\delta > 0$). Iz nejednakosti $\dot{V} > 0$, $\dot{V} < 0$ sledi tvrđenje leme.

Teorema 6.1. Neka koeficijenti a_0, b_0, \dots, f_0 sistema (0.3) zadovoljavaju uslove bilo iz kojih lema 6.2 - 6.8. Osim toga: a) u slučajevima lema 6.6, 6.7 treba da bi $D_{01} - D_0 < 0$ (D_0 i D_{01} , vd. u (2.1)); b) u slučaju $b_0 \beta \geq 0$ neka je ispunjena nejednakost

$$(6.23) \quad \frac{b_0 \delta - e_0 \beta}{b_0} < 0;$$

c) u slučaju $\gamma f \geq 0$ neka je

$$(6.24) \quad \frac{f_0 \alpha - c_0 \gamma}{f_0} < 0.$$

Neka $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zadovoljavaju jedan od uslova 1)-5) leme 6.9. Ako pri ovome oni zadovoljavaju uslove 5), a a_0, b_0, \dots, f_0 - uslove leme 6.8, onda treba, da bi $\beta > 0, \gamma < 0$. Tada je nula-rešenje sistema (0.1) asimptotski stabilno.

Ako je pak neispunjen bar jedan od uslova a), b), c) (umesto nejednakosti < 0 važi nejednakost > 0), ili ako $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zadovoljavaju uslove leme 6.10 ili je ispunjen bar jedan od uslova 1), 2), 3) § 6.1, tada je nula-rešenje nestabilno.

Dokaz. Pri ispunjenju uslova teoreme svaka trajektorija u okolini koordinatnog početka na kraju-krajeva ostaje u jednom i tom istom kvadrantu ili na jednoj iz poluosa.

Ako ona ostaje u Q_2, Q_3 ili Q_4 , to saglasno lema 6.2-6.7 ona ulazi u tačku (0,0). Ako ona ostaje na poluosi $OX_1 (X_1 < 0)$, to pri uslovu a) ona ulazi u tačku (0,0) na osnovu lema 6.6 i 6.7. Ako ona ostaje na poluosi $OX_2 (X_2 > 0)$ ili $OX_1 (X_1 > 0)$, to smer kretanja po tim poluosama određuje se analogno (2.1), (2.2). Kako je u § 6 $a_0 + b_0 + c_0 = 0, d_0 + e_0 + f_0 = 0$, u slučaju $b_0 \beta > 0$ imamo $a_0 - b_0 + c_0 < 0$. Tada imamo kretanje po osi $OX_2 (X_2 > 0)$ sa brzinom (vd.(2.2)) $\dot{X}_2 = (D + D_2)/b$. Izražavajući D, D_2

i \dot{X}_2 saglasno (0.2) i koristeći time, što u § 6 $a_1 + b_1 + c_1 = \alpha$, $a_2 + b_2 + c_2 = \beta$, $d_1 + e_1 + f_1 = \gamma$, $d_2 + e_2 + f_2 = \delta$, dobijamo

$$\dot{X}_2 = \frac{(b_0 \delta - e_0 \beta)}{f_0} X_2 + o(X_2^2).$$

Pri uslovu (6.23) imamo $\dot{X}_2 < 0$, -pri malom X_2 , tj. kretanje po OX_2 je usmereno ka strani tačke $(0,0)$.

Potpuno analogno na osi $X_2 = 0$, $X_1 > 0$ dobijamo (vd. (2.1))

$$\dot{X}_1 = \frac{(f_0 \alpha - c_0 \beta)}{f_0} X_1 + o(X_1^2),$$

i pri uslovu (6.24) imamo $\dot{X}_1 < 0$, -pri malom X_1 , tj. kretanje je stabilno.

U slučaju $\beta = 0$ ili $\gamma = 0$ važe tvrđenja lema 6.11 - 6.13.

Pri ispunjenju uslova leme 6.8 po lemi 3.6 trajektorija sistema (0.1) izlazeći iz tačke poluose $OX_2 (X_2 > 0)$ pada na poluose $OX_1 (X_1 < 0)$, $OX_2 (X_2 < 0)$, $OX_1 (X_1 > 0)$. Saglasno (6.14), (6.15) ili po lemi 6.11 pri $\gamma \geq 0$ trajektorija ulaze u Q_1 , a pri $\beta \geq 0$ iz Q_2 takođe u Q_1 i one ulaze u tačku $(0,0)$ u smerove sopstvenih vektora po lemi 6.9 ili 6.12, 6.13. Pri $\beta \geq 0$, $\gamma \leq 0$ trajektorija ili pada na osu $OX_1 (X_1 > 0)$ i na osnovu (6.24) ulazi u $(0,0)$, ili ostaje u Q_1 i saglasno lemi 6.9 ulazi u $(0,0)$ (vd., napr., bilo od kojih kombinacija slika prikazani u lemi 6.9 sa slikama 6.2-6.8, osim slučaja 6.26 sa 6.8, koji se razmatra u teoremi 6.2).

Ako neispunjen bar jedan od uslova a), b), c) - to, napr., u slučaju a), rešenje po poluosi $OX_1 (X_1 < 0)$ je

nestabilno, jer je $D_{e_1} > D_0$, $f_0 < 0$, tj. $\dot{X}_1 < 0$. Ako χ , β , γ , δ zadovoljavaju uslove leme 6.10, to u Q_1 postoje rešenja po smerovima sopstvenih vektora od tačke $(0,0)$ (vd., napr., sl. 6.12-6.20), tj. rešenje je nestabilno. Teorema je dokazana.

U sledećoj teoremi razmatra se slučaj kada se trajektorija obrće oko koordinatnog početka.

Teorema 6.2. Neka su ispunjeni uslovi leme 6.8 i uslovi 1) ili 2) u § 6.2.3 i osim toga $\beta < 0$, $\gamma > 0$. Tada je nula-rešenje sistema (0.1) $X_1 = 0$, $X_2 = 0$ stabilno, ako je $\sigma \Omega < 1$, a nestabilno, ako je $\sigma \Omega > 1$, gde su

$$(6.25) \quad \sigma = - \frac{u_2 V_3 l l_4}{V_2 l l_3 V_4},$$

(u_i, V_i ($i = 2, 3, 4$) - određuju se iz (3.16), (3.18), (3.20)),

$$(6.26) \quad \Omega = \begin{cases} - \frac{1}{\beta} \left[\frac{(\lambda_1 - \alpha)^{\lambda_1}}{(\lambda_2 - \alpha)^{\lambda_2}} \right]^{\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}}, & \text{pri } \Delta > 0, \\ \frac{\alpha - \delta}{2\beta} e^{\frac{\alpha + \delta}{\delta - \alpha}}, & \text{u slučaju } \Delta = 0, \\ \frac{\chi}{\beta v} e^{\frac{m}{v}(\bar{u} - \Psi)} \cdot \sin \Psi, & \text{ako je } \Delta < 0, \end{cases}$$

$$\chi = - (m - \alpha)^2 - v^2 < 0, \quad w = \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha - m}{v}\right)^2},$$

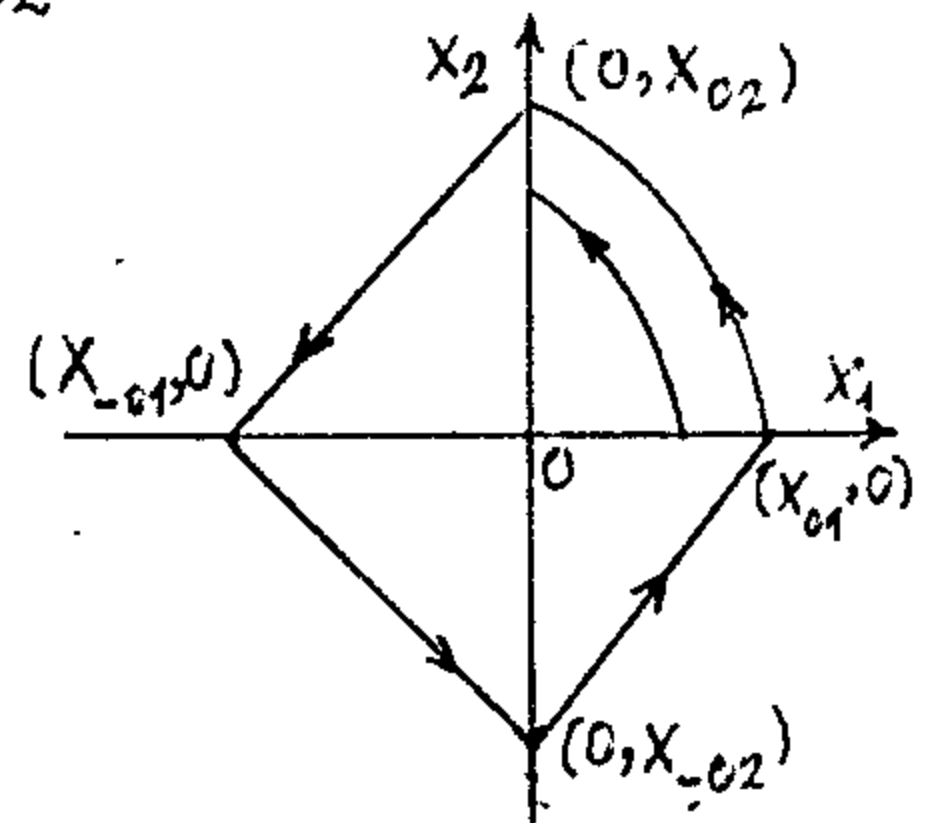
$$\cos \Psi = \frac{\alpha - m}{w}, \quad \sin \Psi = \frac{1}{w} > 0, \quad 0 < \Psi < \bar{u}.$$

Dokaz. Neka je za određivanje $(0, X_{e2})$ -početna tačka

trajektoriji sistema (0.1), gde je $0 < X_{02} < \xi$, ξ - dovoljno malo. Razmotrimo rešenje, izlazeći iz tačke $(0, X_{02})$. Po lemi 3.6 rešenje pada: na poluosu OX_1 ($X_1 < 0$) u tačku (3.17), na poluosu OX_2 ($X_2 < 0$) u tačku (3.19), zatim na poluosu OX_1 ($X_1 > 0$) u tačku (3.21), tj. tačku $(X_{01}, 0)$, gde je

$$(6.27) \quad X_{01} = - \frac{u_2 v_3 u_4}{v_2 u_3 v_4} X_{02} + o(X_{02}^2).$$

Dalje trajektorije prelaze u \mathcal{Q}_1 , pošto je $\gamma > 0$ (sl.6.30). Po uslovima teoreme, u \mathcal{Q}_1 rešenja zadovoljavaju sistemu (6.2).



Sl.6.30

Razmotrimo u početku slučaj, kada sopstvene vrednosti λ_1, λ_2

operatora A su realne i različite. Rešenje sistema (6.2) pri početnih uslova $X_1(0) = X_{01}, X_2(0) = 0$, i kada je $0 \leq t \leq t_1 = o(X_{01})$, može se napisati u obliku

$$(6.28) \quad \begin{cases} X_1 = \frac{X_{01}}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[(\lambda_1 - \alpha) e^{\lambda_2 t} + (\lambda_2 - \alpha) e^{\lambda_1 t} \right] + o(X_{01}^2), \\ X_2 = \frac{X_{01} (\lambda_1 - \alpha) (\lambda_2 - \alpha)}{\beta (\lambda_1 - \lambda_2)} (e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}) + o(X_{01}^2). \end{cases}$$

Ovde je $\lambda_1 = \frac{1}{2}(\alpha + \delta + \sqrt{\Delta}) > \frac{1}{2}(\alpha + \delta)$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}(\alpha - \delta - \sqrt{\Delta}) < \frac{1}{2}(\alpha + \delta)$. Stoga je $\lambda_1 > \lambda_2$. Kako je $\beta\gamma < 0$ i u slučaju 2) § 6.2.3 $\alpha < \delta$, to $\Delta = (\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma < (\alpha - \delta)^2$; $\sqrt{\Delta} < \delta - \alpha$; $\lambda_1 < \delta$, $\lambda_2 < \alpha$. To znači, $\alpha < \lambda_2 < \lambda_1 < \delta$.

Vrednost momenta t susreta trajektorije sa osom

$O X_2 (X_2 > 0)$, javlja se korenom jednačine

$$X_{01} \left(\frac{\lambda_1 - \alpha}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t} - \frac{\lambda_2 - \alpha}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} \right) + o(X_{01}^2) = 0,$$

odakle je

$$(6.29) \quad t = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \frac{\lambda_1 - \alpha}{\lambda_2 - \alpha} + o(X_{01}) = t_1.$$

Postavimo (6.29) u drugoj jednačini (6.28) dobijamo

$$X_2(t_1) = \Omega X_{01} + o(X_{01}^2),$$

i, uzimajući u obzir relaciju (6.27), imamo

$$X_2(t_1) = \sigma \Omega X_{02} + o(X_{02}^2),$$

gde su $\sigma > 0$, $\Omega > 0$ - definisani u formulaciji teoreme, u (6.25), (6.26).

Kao na kraju dokaza teoreme 1.1, dobijamo, da pri $\sigma \Omega < 1$ tačka $(0,0)$ je stabilna, a pri $\sigma \Omega > 1$ - nestabilna.

Neka se sada sistem (6.2) promeni tako, da λ_2 približava ka λ_1 . Tada $e^{\lambda_2 t}$ približava se ka $e^{\lambda_1 t}$ i kada je $\lambda_2 = \lambda_1$, ravan se degeneriše u pravu. Ovaj slučaj možemo dobiti iz upravo razmotrenog slučaja graničnim prelazom $\lambda_2 \rightarrow \lambda_1$. Pri ovome iz (6.26) u slučaju $\Delta > 0$, dobijamo (6.26) u slučaju $\Delta = 0$, uzimajući u obzir, da je sada $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}(\alpha + \delta)$. (U slučaju $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, vd. napomenu 6.1).

Razmotrimo slučaj, kada su sopstvene vrednosti λ_1 , λ_2 konjugovane kompleksne $\lambda_{1/2} = \mu \pm i\nu$, gde su $\mu \in \mathbb{R}$,

$\nu > 0$. U ovom slučaju iz (6.28) dobijamo

$$(6.30) \quad \begin{cases} X_1(t) = X_{01} e^{\mu t} \left(\cos \nu t + \frac{\alpha - \mu}{\nu} \sin \nu t \right) + o(X_{01}^2), \\ X_2(t) = \frac{X_{01}}{\beta} \cdot \frac{\mathcal{K}}{\nu} e^{\mu t} \sin \nu t + o(X_{01}^2), \end{cases}$$

gde je \mathcal{K} - konstanta odgovarajućoj (6.26).

Analogno (6.29), nalazimo

$$X_{01} e^{\mu t} \left(\cos \nu t + \frac{\alpha - \mu}{\nu} \sin \nu t \right) + o(X_{01}^2) = 0,$$

ili prigodnom obliku

$$(6.31) \quad W \sin(\nu t + \psi) + o(X_{01}) = 0,$$

gde su W , $\cos \psi$, $\sin \psi$, ψ - dati u (6.26). Kako je potrebno naći najmanje $t > 0$, zadovoljavajući (6.31), to

$$(6.32) \quad t = \frac{\bar{u} - \psi}{\nu} + o(X_{01}) = t_1^*.$$

Postavljajući (6.32) u drugoj iz jednačina (6.30), dobijamo

$$X_2(t_1^*) = \Omega X_{01} + o(X_{01}^2),$$

gde sada Ω označava (6.26) kada je $\Delta < 0$. Odavde saglasno (6.27), u rezultatu dobijamo

$$X_2(t_1^*) = \sigma \Omega X_{02} + o(X_{02}^2),$$

i, dakle, teorema je dokazana.

7. Na dvema osama položaj ravnoteže

1) Neka na suprotnim poluosama $X_1 < 0$, $X_1 > 0$ imamo položaj ravnoteže (na $X_2 < 0$, $X_2 > 0$, razmatra se analogno). Tada, iz formule (2.1) na osi OX_1 , $\dot{X}_1 = (D_{e_1} \pm D_o)/f_o$, pa je $D_{o_1} + D_o = 0$, $D_{o_1} - D_o = 0$, odnosno $D_o = 0$, $D_{o_1} = 0$.

a) Razmotrimo slučaj, kada je $D_{e_2} \neq 0$, tj.

$$\begin{vmatrix} b_o & c_o \\ e_o & f_o \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_o & c_o \\ d_o & f_o \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} b_o & a_o \\ e_o & d_o \end{vmatrix} \neq 0.$$

Oдавде sledi,

$$\begin{pmatrix} b_o \\ e_o \end{pmatrix} \text{kol.} \begin{pmatrix} c_o \\ f_o \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_o \\ d_o \end{pmatrix} \text{kol.} \begin{pmatrix} c_o \\ f_o \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_o \\ e_o \end{pmatrix} \text{ne kol.} \begin{pmatrix} a_o \\ d_o \end{pmatrix},$$

što je moguće tada i samo tada, kada je $\begin{pmatrix} c_o \\ f_o \end{pmatrix} = 0$. Međutim, na OX_1 nema položaj ravnoteže. Pretpostavimo suprotno. Neka se $(X_1, 0)$ -javlja u položaju ravnoteže, tj. u ovoj tački

$$\dot{X}_1 = a_o + b_o \operatorname{sgn} X_1 = 0, \quad \dot{X}_2 = d_o + e_o \operatorname{sgn} X_1 = 0.$$

U prvom slučaju, neka je $X_1 > 0$. Tada je $a_o = -b_o$, $d_o = -e_o$, i $D_{o_2} = 0$. Ovo i daje traženu protivrečnost. To znači, slučaj $D_{o_2} \neq 0$ je nemoguć.

b) Razmotrimo kada je $D_{o_2} = 0$.

Lema 7.1. Ako je $D_o = D_{o_1} = D_{o_2} = 0$ (D_o, D_{o_1}, D_{o_2} -vd. formule (2.1), (2.2)), tada su svi vektori brzina paralelni jednoj pravoj.

Dokaz. Iz uslova leme sledi, da je

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ d_0 & e_0 & f_0 \end{vmatrix} \text{ rang} \leq 1,$$

to znači, vrste su proporcionalne: $d_0 = k a_0$, $e_0 = k b_0$, $f_0 = k c_0$. Zamenom ove vrednosti u (0.3) dobijamo $\frac{dx_2}{dx_1} = k$. Stoga, trajektorije su paralelne pravama sa ugaonim koeficijentom k ili su tačke. Slučaj, kada su u jednom od kvadranta trajektorije - tačke, razmotren u § 6. Ovim je dokaz završen.

Teorema 7.1. Neka su ispunjeni uslovi (6.6), (6.10),

$$(7.1) \quad f_0 < -|d_0 + e_0|,$$

$$(7.2) \quad -a_0 - c_0 < b_0 < a_0 + c_0,$$

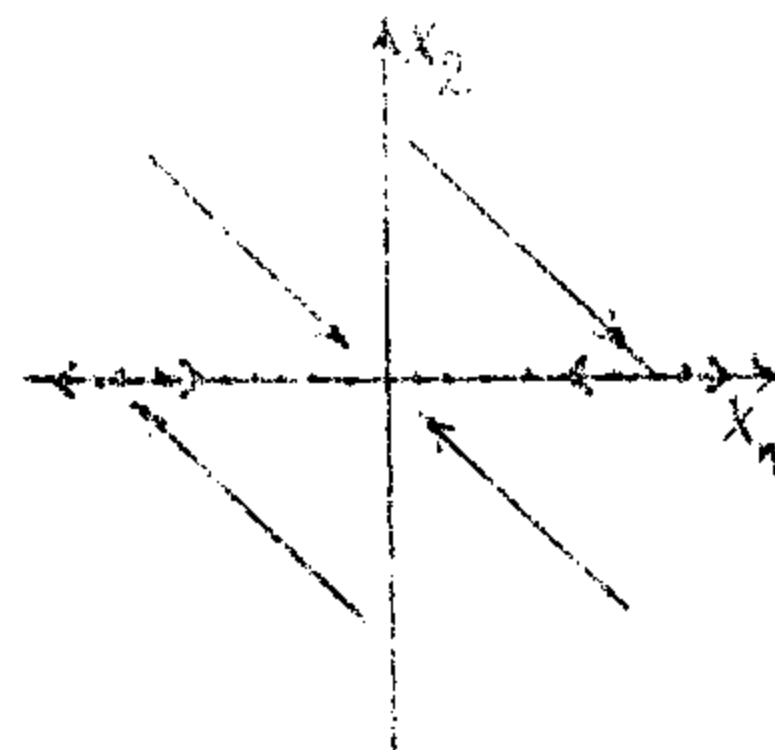
i $D_0 = 0$, $D_{01} = 0$. Tada pri $\Delta_{+1} > 0$, $\Delta_{-1} > 0$, nula-rešenje sistema (0.1) je stabilno, a pri $\Delta_{+1} < 0$, ili $\Delta_{-1} < 0$ - nestabilno. Ovde Δ_{+1} , Δ_{-1} iste su, što i u teoremi 2.1.

Dokaz (vd. § 2.1). Iz uslova teoreme izlazi, da ima kretanje po OX_1 sa brzinom $\dot{X}_1 = (D_1 \pm D)/f$. Izražavajući D , D_1 i f saglasno (0.2), po redosledu dobijamo: a) pri $X_2 = 0$, $X_1 > 0$,

$$\dot{X}_1 = \frac{X_1 \Delta_{+1}}{f_0 + f_1 X_1 + o(X_1^2)} + o(X_1^2);$$

kako je $f_0 < 0$, X_1 - dovoljno malo, to pri $\Delta_{+1} > 0$ imamo $\dot{X}_1 < 0$, a pri $\Delta_{+1} < 0$, $\dot{X}_1 > 0$; b) pri $X_2 = 0$, $X_1 < 0$,

$$\dot{X}_1 = \frac{X_1 \Delta_{-1}}{\frac{f}{f_0} + \frac{f}{f_1} X_1 + O(X_1^2)} + O(X_1^2);$$



ako je $\Delta_{-1} > 0$, tada je $\dot{X}_1 > 0$, a pri $\Delta_{-1} < 0$, to $\dot{X}_1 < 0$ (sl.7.1).

Teorema je dokazana.

Sl.7.1

2) Neka na susednim poluosama $X_1 > 0$ i $X_2 > 0$ imamo položaj ravnoteže (na ostale susedne poluose, razmatra se analogno). Iz formula (2.1), (2.2) izlazi, da je

$$(7.3) \quad D_{01} + D_0 = 0, \quad D_{02} + D_0 = 0,$$

odakle je

$$(7.4) \quad |D_0| = |D_{01}| = |D_{02}|.$$

Lema 7.2. Ako je ispunjeno (7.4), tada je ili $D_0 = 0$, ili sve tačke jednog kvadranta javljaju se u položaju ravnoteže sistema (0.3).

Dokaz. Iz (7.4) sledi, da je $D_{01} = D_0$ ili $D_{01} = -D_0$; takođe $D_{02} = D_0$ ili $D_{02} = -D_0$. Neka je ispunjeno, napr., (7.3) (drugi slučaj razmatraju se analogno). Tada

$$\begin{vmatrix} a_0 + b_0 & c_0 \\ d_0 + e_0 & f_0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} b_0 & a_0 + c_0 \\ e_0 & d_0 + f_0 \end{vmatrix} = 0,$$

ili

$$(7.5) \quad \begin{vmatrix} a_0 + b_0 + c_0 & c_0 \\ d_0 + e_0 + f_0 & f_0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} b_0 & a_0 + b_0 + c_0 \\ e_0 & d_0 + e_0 + f_0 \end{vmatrix} = 0.$$

a) U slučaju $a_0 + b_0 + c_0 = 0$, $d_0 + e_0 + f_0 = 0$ u Q_1 imamo $\dot{X}_1 = 0$, $\dot{X}_2 = 0$, tj. sve tačke Q_1 su u položajima ravnoteže. Ovaj slučaj je bio razmotren u §6.

b) Neka je sada,

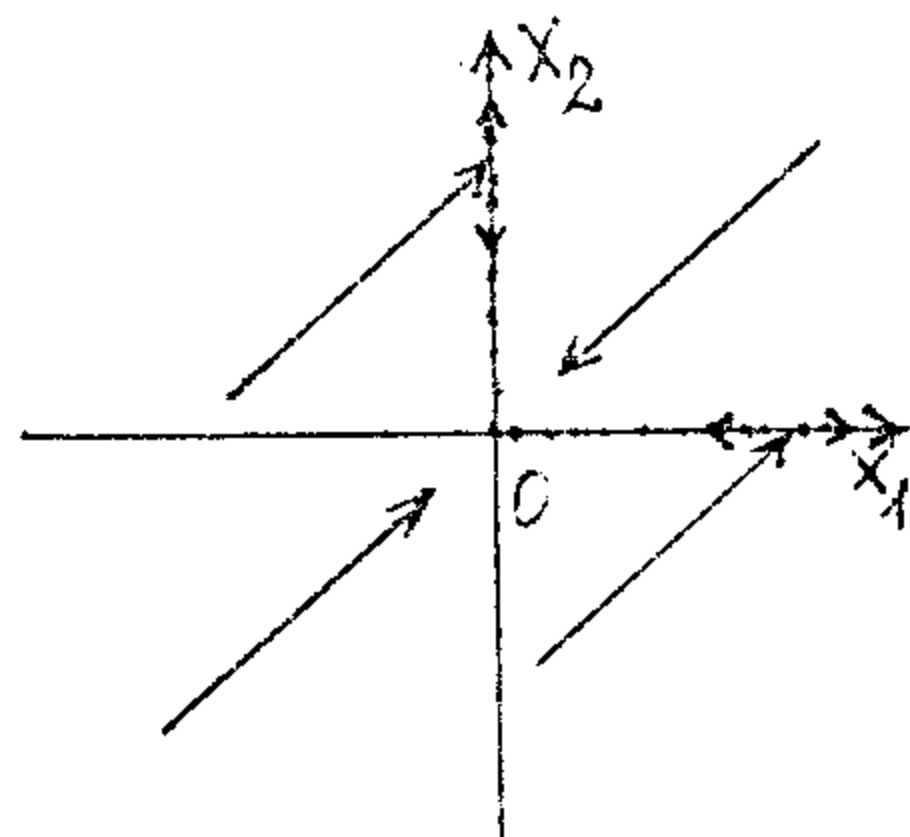
$$V = \begin{pmatrix} a_0 + b_0 + c_0 \\ d_0 + e_0 + f_0 \end{pmatrix} \neq 0,$$

tada iz (7.5) sledi da je $\begin{pmatrix} c_0 \\ f_0 \end{pmatrix}$ kol. vek. $V \neq 0$, i $\begin{pmatrix} b_0 \\ e_0 \end{pmatrix}$ je takođe kol. vek. $V \neq 0$. To znači, $\begin{pmatrix} b_0 \\ e_0 \end{pmatrix}$ je kol. $\begin{pmatrix} c_0 \\ f_0 \end{pmatrix}$ i $D_0 = \begin{vmatrix} b_0 & c_0 \\ e_0 & f_0 \end{vmatrix} = 0$. Tada iz (7.3) sledi, da je i $D_{01} = 0$, $D_{02} = 0$. Ovaj slučaj je razmotren u lemi 7.1. Na taj način, lema je dokazana.

Teorema 7.2. Neka su ispunjeni uslovi (6.7), (6.9), (7.1) i $b_0 < -|a_0 + c_0|$. Tada pri $\Delta_{+1} > 0$, $\Delta_{+2} > 0$ nula-rešenje sistema (0.1) je stabilno, a pri $\Delta_{+1} < 0$ ili $\Delta_{+2} < 0$ - nestabilno; Δ_{+1}, Δ_{+2} vd. u teoremi 2.1.

Dokazuje se analogno teoremi 7.1 (sl.7.2).

Slučaji kada položaj ravnoteže imaju na bilo koje dve druge poluose (suprotne ili susedne), svodi se ka razmotrenom slučaju zamenom promenljivih.



Sl.7.2

LITERATURA

- [1]. Барбашин Е. А., Введение в теорию устойчивости движения, "Наука", Москва, 1967.
- [2]. Беллман Р., Stability theory of differential equations - New York, 1954.
- [3]. Барбашин Е. А. и Алимов Ю. И., - Известия вузов, Математика, 1962, № 1, стр. 3 - 13.
- [4]. Гелиг А. Х., Комарницкая О. И., Абсолютная устойчивость нелинейных с неединственным положением равновесия в критических случаях, Автоматика и телемеханика, № 8, 1966.
- [5]. Демидович Б. П., Лекции по математической теории устойчивости, "Наука", Москва, 1967.
- [6]. Малкин И. Г., Теория устойчивости движения, М - Л., 1952.
- [7]. Меркин Д. Р., Достаточные условия асимптотической устойчивости одной нелинейной системы, Уч. гос. пед. ин-та им. Герцена, 125, 1966; 141, 1958.
- [8]. -, Введение в теорию устойчивости движения, "Наука", Москва, 1976.
- [9]. Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения, "Наука", Москва, 1970.

- [10]. Успехи математических наук, т. XXXII выпуск 1
193, 1977.
- [11]. Уткин В. И., Скользящие режимы и их применения
в системах с переменной структурой, "Наука", Мос-
ква, 1974.
- [12]. Филиппов А. Ф., Математический сборник т.
51, № 1, 1960, стр. 99 - 128.
- [13]. -, Исследование системы дифференциальных уравнений
с двумя пересекающимися линиями разрыва, Вестник МГУ,
серия математика и механика, 1979, № 6.
- [14]. Худов В. Ф., Механика твердого тела, 1969,
№ 4, стр. 23 - 29.
- [15]. Четаев Н. Г., Устойчивость движения, Гестехиз-
дат, 1955.
-

SADRŽAJ

Uvod 2

G L A V A I. ISPITIVANJE STABILNOSTI SISTEMA

U KRITICKIM SLUCAJEVIMA PRVOG REDA

1. Ispitivanje stabilnosti u prvom
kritičkom slučaju 6

2. Ispitivanje stabilnosti u drugom
kritičkom slučaju 10

3. Ispitivanje stabilnosti u trećem
kritičkom slučaju 13

G L A V A II. ISPITIVANJE STABILNOSTI SISTEMA

U KRITICKIM SLUCAJEVIMA DRUGOG REDA

4. Slučaj, kada u dva kvadranta vektor
je paralelan osi 27

5. Slučaj, kada u jednom kvadrantu
vektor je paralelan osi i na jednoj
poluosi je položaj ravnoteže. 49

6. Slučaj, kada se u jednom kvadrantu
za sistem (0.3) sve tačke javljaju
položajem ravnoteže 51

6.1. Rasprostiranje trajektorija u Q_2 ,	
Q_3, Q_4	53
6.2. Ispitivanje trajektorija u Q_1 .	56
6.2.1. U Q_1 ili na granici Q_1 je jedan sopstveni vektor	57
6.2.2. Dva sopstvena vektora u Q_1 ili na granici Q_1	60
6.2.3. U Q_1 nema sopstvenih vektora, tj. u Q_1 nema trajektorija ulazeći u $(0,0)$	61
6.3. Ispitivanje stabilnosti	63
7. Na dvema osama položaj ravnoteže	73
LITERATURA	77
