Ratko Tošić

Doktorska teza

# PRILOG TEORIJI BOOLEOVIH ALGEBRI

S A D R Ž A J

# 0. UVOD

0.0. Ovaj rad sastoji se iz sledećih delova:

0. Uvod
1. Osnovni pojmovi
2. Neke osobine Booleovih funkcija koje čuvaju konstante nad konačnim Booleovim algebrama
3. Neke osobime monotonih Booleovih funkcija nad konačnim Booleovim algebrama
4. Primena monotonih Booleovih funkcija u istražnoj teoriji
5. Neki nerešeni problemi i moguće generalizacije
6. Bibliografija

0.1. U prvom poglavlju date su definicije osnovnih pojmova iz oblasti Booleove algebre i teorije Booleovih funkcija. Zatim su navedeni bez dokaza, rezultati koji predstavljaju osnovni fond znanja iz tih oblasti i sa kojima se dalje operiše u ovom radu.

U delu koji se odnosi na Booleove funkcije date su definicije Booleovih funkcija, prostih Booleovih funkcija i logičkih funkcija. Definicije potiču od Rudeanua ([59]), koji je, ustvari, prvi počeo da pravi razliku između pojmova Booleove funkcije i proste Booleove funkcije u [57]. Posebno je istaknuta uloga funkcija nad dvo-elementnom Booleovom algebrom, koje su ovde definisane kao logičke funkcije, takođe prema Rudeanuu (truth functions). U ovom radu to je bilo i nužno, s obzirom da se u 2. i 3. poglavlju koristi vektorski model konačnih Booleovih algebri tj komponentna reprezentacija Booleovih funkcija, naime, Booleove funkcije nad konačnom Booleovom algebrom koja ima q atoma predstavljaju se kao uređene q-torke logičkih funkcija.

0.2. U drugom poglavlju se, korišćenjem komponentne reprezentacije, dokazuju neke osobine Booleovih funkcija koje čuvaju konstante nad konačnim Booleovim algebrama. Pokazuje se da sama činjenica da su $f(0,0,\ldots,0)$ i $f(1,1,\ldots,1)$ uporedivi u odnosu na relaciju $\leqslant$ povlači interesantne posledice za Booleovu funkciju $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Na osnovu dokazanih teorema, dobija se niz posledica, koje se odnose na broj Booleovih funkcija koje čuvaju sve elemente intervala, na broj prostih Booleovih funkcija i na njihovu klasifikaciju.

0.3. U trećem poglavlju dokazuju se neke osobine monotonih Booleovih funkcija. Data su uopštenja nekih teorema, koje su za slučaj jedne promenljive, dokazali Scognamiglio i Andreoli. Pokazano je, takođe, da se korišćenjem komponentne reprezentacije, mogu olakšati dokazi nekih već poznatih teorema.

Posebno su, za logičke monotone funkcije, definisani neki novi pojmovi: profil, nivo, homogenost, odgovarajuća matrica itd. Dokazane su neke osobine tih funkcija a dobijene su i posledice koje se odnose na broj homogenih monotonih logičkih funkcija.

0.4. U četvrtom poglavlju pokazano je da su monotone logičke funkcije prirodno sredstvo za tretiranje nekih problema istražne teorije, jedne relativno nove oblasti teorije informacije.

Najopštiji problem toga tipa svodi se na problem identifikacije homogene monotone logičke funkcije datog profila, proveravajući vrednost te funkcije za pojedine kombinacije vrednosti promenljivih. Nađena su optimalna ili skoro optimalna rešenja za neke profile. Pokazano je, takođe, da su monotone logičke funkcije prirodno sredstvo za uopštavanje tih problema.

0.5. U petom poglavlju navedeni su neki nerešeni problemi i moguće generalizacije. Ukazuje se na moguća dalja korišćenja monotonih a možda i nekih drugih klasa Booleovih funkcija, a takođe i Booleovih matrica u formulisanju i rešavanju problema istražne teorije.

0.6. Bibliografija koja je data u šestom poglavlju obuhvata literaturu koja je korišćena, u većoj ili manjoj meri, pri izradi ovog rada.

*

* *

Sa posebnim zadovoljstvom želim da izrazim svoju zahvalnost profesoru Dr Đuri Kurepi pod čijim je rukovodstvom rađena ova teza, koji mi je pružio podstrek u radu i pomogao svojim ogromnim znanjem i iskustvom.

# 1. OSNOVNI POJMOVI

1.0. U ovom delu definišu se ukratko osnovni pojmovi i izlažu rezultati koji predstavljaju osnovni fond znanja sa kojim operišemo u ovom radu.

## 1.1. Booleove algebre

Pod Booleovom algebrom podrazumevamo sistem $\langle B, \vee, \cdot, ', 0, 1 \rangle$, gde je B skup, $\vee : B \times B \rightarrow B$ i $\cdot : B \times B \rightarrow B$ su dve binarne operacije na skupu B koje nazivamo redom disjunkcija i konjunkcija, $' : B \rightarrow B$ je unarna operacija na skupu B koju nazivamo negacija ili komplement, dok su 0 i 1 dva međusobno različita elementa skupa B, pri čemu su zadovoljeni sledeći uslovi, za proizvoljne elemente x, y, z iz skupa B (u daljem izlaganju pišemo najčešće xy umesto $x \cdot y$):

(1.1′) $x \vee y = y \vee x$

(1.1″) $xy = yx$

(1.2′) $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$

(1.2″) $(xy)z = x(yz)$

(1.3′) $x \vee xy = x$

(1.3″) $x(x \vee y) = x$

(1.4′) $x \vee yz = (x \vee y)(x \vee z)$

(1.4″) $x(y \vee z) = xy \vee xz$

(1.5′) $x \vee 1 = 1$

(1.5″) $x \cdot 0 = 0$

(1.6′) $x \vee x' = 1$

(1.6″) $xx' = 0$

Dakle, disjunkcija i konjunkcija su komutativne ((1.1′) i (1.1′′)), asocijativne ((1.2′) i (1.2′′)) i zadovoljavaju zakone apsorpcije ((1.3′) i (1.3′′)); drugim rečima, $\langle B, V, \cdot \rangle$ je mreža. Ta mreža je distributivna ((1.4′) i (1.4′′)), ima nulu i jedinicu ((1.5′′) i (1.5′)) i komplementirana je ((1.6′) i (1.6′′)). S obzirom na to Booleova algebra može se definisati i kao komplementirana distributivna mreža. U daljem izlaganju, preciziramo Booleovu algebru sa kojom radimo na taj način što preciziramo skup B.

Najprostija Booleova algebra, poznata kao dvo-elementna Booleova algebra, dobija se na sledeći način: uzima se skup $B = B_2 = \{0,1\}$, gde su 0 i 1 konvencionalne oznake za dva različita elementa proizvoljne prirode a operacije $V$, $\cdot$ i $'$ definišu se pomoću sledećih tablica 1.1 - 1.3:

| V | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

Tabl. 1.1.

| · | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |

Tabl. 1.2.

| x | 0 | 1 |
|---|---|---|
| x′ | 1 | 0 |

Tabl. 1.3.

Osobine (1.1′), (1.1′′),..., (1.6′′) lako se dokazuju direktnom verifikacijom pomoću gornjih tablica.

Dvo-elementna Booleova algebra ima važnu ulogu kako u opštoj teoriji Booleovih algebri tako i u primenama na praktične probleme. Ustvari, mnogi teoretski rezultati poslednjih godina inspirisani su primenama dvo-elementne Booleove algebre u teoriji električnih kola. O primenama na razne druge probleme može se videti u [19] i [59].

Proizvoljna Booleova algebre $\langle B, V, \cdot, ', 0, 1 \rangle$ ima još i sledeće osobine, za proizvoljne x i y iz skupa B:

(1.7′) $x \vee x = x$

(1.7″) $x \cdot x = x$

(1.8′) $x \vee 0 = x$

(1.8″) $x \cdot 1 = x$

(1.9′) $x \vee y = 0$ ako i samo ako je $x = y = 0$

(1.9″) $xy = 1$ ako i samo ako je $x = y = 1$

(1.1o′) $(x \vee y)' = x'y'$

(1.1o″) $(xy)' = x' \vee y'$

(1.11) $x'' = x$

(1.12′) $x \vee x'y = x \vee y$

(1.12″) $x(x' \vee y) = xy$

Identiteti (1.1o′) i (1.1o″) su De Morganovi zakoni, (1.11) je zakon dvojne negacije, (1.12′) i (1.12″) mogli bi nazvati zakonima Booleove apsorpcije.

U proizvoljnoj Booleovoj algebri B uvodi se binarna relacija $\leqslant$ ("manje ili jednako") na sledeći način: za $x,y \in B$, $x \leqslant y$ važi ako i samo ako je $x \vee y = y$. Relacija $\geqslant$ ("veće ili jednako") definiše se pomoću $\leqslant$ : za $x,y \in B$, $x \geqslant y$ važi ako i samo ako je $y \leqslant x$.

Najvažnije osobine relacije $\leqslant$ su sledeće :

(1.13) $x \leqslant x$

(1.14) $x \leqslant y$ i $y \leqslant x$ povlači $x = y$

(1.15) $x \leqslant y$ i $y \leqslant z$ povlači $x \leqslant z$

(1.16′) $x \leqslant x \vee y$ i $y \leqslant x \vee y$

(1.16″) $xy \leqslant x$ i $xy \leqslant y$

(1.17′) $x \leqslant z$ i $y \leqslant z$ povlači $x \vee y \leqslant z$

(1.17″) $t \leqslant x$ i $t \leqslant y$ povlači $t \leqslant xy$

(1.18′) $x \leq z$ i $y \leq z$ ako i samo ako je $x \vee y \leq z$

(1.18″) $t \leq x$ i $t \leq y$ ako i samo ako je $t \leq xy$

(1.19′) $x \leq y$ povlači $x \vee z \leq y \vee z$

(1.19″) $x \leq y$ povlači $xz \leq yz$

(1.2o′) $0 \leq x$

(1.2o″) $x \leq 1$

(1.21′) $x \leq y$ ako i samo ako je $x \vee y = y$

(1.21″) $x \leq y$ ako i samo ako je $xy = x$

(1.22′) $x \leq y$ ako i samo ako je $x' \vee y = 1$

(1.22″) $x \leq y$ ako i samo ako je $xy' = 0$

(1.23′) $x = y$ ako i samo ako je $(x' \vee y)(x \vee y') = 1$

(1.23″) $x = y$ ako i samo ako je $xy' \vee x'y = 0$

Refleksivnost (1.13), antisimetričnost (1.14) i tranzitivnost (1.15) izražavaju činjenicu da je $\leq$ relacija delimičnog uređenja. Osobine (1.16′) i (1.17′) ((1.16″)) i (1.17″)) kazuju da je $x \vee y$ najmanje gornje ograničenje ($xy$ najveće donje ograničenje) od x i y. Osobine (1.2o′) i (1.2o″) izražavaju činjenicu da je 0 prvi tj najmanji a 1 poslednji tj najveći element skupa B.

Sledeća metateorema, poznata kao princip dualiteta takođe važi za proizvoljnu Booleovu algebru: Neka je neko svojstvo Booleove algebre izraženo pomoću operacija $\vee, \cdot, '$, konstanti 0 i 1 i relacija $\leq$ i $\geq$. Tada "dualno" svojstvo dobijeno iz ovoga zamenom $\vee$ sa $\cdot$, 0 sa 1, i $\leq$ sa $\geq$, takođe važi u istoj Booleovoj algebri.

Sledeće osobine važe samo u dvo-elementnoj Booleovoj algebri:

(1.24′) $x \vee y = 1$ ako i samo ako je $x = 1$ ili $y = 1$

(1.24′′) $xy = 0$ ako i samo ako je $x = 0$ ili $y = 0$

Za elemente x i y Booleove algebre, relacija $x < y$ važi ako i samo ako je $x \leq y$ i $x \neq y$. Relacija $x > y$ važi ako i samo ako je $y < x$. $<$ ("manje od") je relacija striktnog delimičnog uređenja, tj za proizvoljne elemente x, y i z Booleove algebre važi:

(1.25) $x \not< x$

(1.26) $x < y$ povlači $y \not< x$

(1.27) $x < y$ i $y < z$ povlači $x < z$

Princip dualiteta može se dopuniti tako da uključuje i dualne relacije $<$ i $>$.

Uobičajeni algebarski pojmovi podalgebre, homomorfizma itd mogu se posmatrati i u teoriji Booleovih algebri.

Neka je $\langle B, \vee, \cdot, ', 0, 1 \rangle$ Booleova algebra i $B_0$ podskup od B; ako je $\langle B_0, \vee, \cdot, ', 0, 1 \rangle$ takođe Booleova algebra, kažemo onda da je $B_0$ podalgebra algebre B. To znači da $B_0$ ima sledeće osobine: sadrži elemente 0 i 1, i sa svakim x i y sadrži i $x \vee y$, $xy$ i $x'$.

Neka su $\langle B, \vee, \cdot, ', 0, 1 \rangle$ i $\langle B^*, \cup, \circ, ^{\backprime}, 0^*, 1^* \rangle$ dve Booleove algebre. Za preslikavanje $h: B \to B$ kažemo da je homomorfizam ako je $h(0) = 0^*$, $h(1) = 1^*$ i za proizvoljne x i y iz B:

$h(x \vee y) = h(x) \cup h(y)$, $h(x \cdot y) = h(x) \circ h(y)$, $h(x') = (h(x))^{\backprime}$.

Ako je još i $B = B^*$, onda je h endomorfizam. Ako je h bijektivno preslikavanje, kažemo da je to izomorfizam, algebre B i B su izomorfne algebre . Ako je i u tom slučaju $B = B^*$, onda h nazivamo <u>automorfizmom</u>.

U proizvoljnoj Booleovoj algebri $\langle B, \vee, \cdot, ', 0, 1\rangle$ skup $\{0,1\}$ čini podalgebru (preciznije: $\langle \{0,1\}, \vee, \cdot, ', 0, 1\rangle$ je podalgebra).

Neka je $\langle B, \vee, \cdot, ', 0, 1\rangle$ Booleova algebra i a i b elementi iz B takvi da je $a \leq b$. <u>Interval</u> ili <u>segment</u> je skup

(1.28) $\quad [a,b] = \{x: x \in B,\ a \leq x \leq b\}$

Ako za proizvoljno x iz $[a,b]$ definišemo

(1.29) $\quad x^{*} = a \vee bx'$

tada je $\langle [a,b], \vee, \cdot, ^{*}, a, b\rangle$ Booleova algebra.

<u>Ideal</u> Booleove algebre B je neprazan podskup I skupa B takav da za proizvoljne elemente x i y iz B važi:

(1.30) $\quad x \in I$ i $y \in I$ povlači $x \vee y \in I$

(1.31) $\quad x \in I$ i $y \leq x$ povlači $y \in I$

Dualan pojam idealu je <u>filtar</u>.

Element $p \neq 0$ Booleove algebre B naziva se <u>atom</u> ako ne postoji element x te algebre takav da je $0 < x < p$.

U svakoj Booleovoj algebri B sledeći iskazi su ekvivalentni za proizvoljno p iz B:

(i) p je atom

(ii) za svako x iz B, $x \leq p$ povlači $x = 0$ ili $x = p$

(iii) za svako x iz B, $px = \begin{cases} p, & \text{ako je } p \leq x \\ 0, & \text{ako je } p \not\leq x \end{cases}$

Ako su p i q različiti atomi Booleove algebre B, onda je $pq = 0$.

Za Booleovu algebru B kažemo da je <u>atomarna</u>, ako za svako x iz B, različito od 0, postoji atom $p \leq x$.

Poznato je da je svaka konačna Booleova algebra atomarna a postoje i beskonačne atomarne Booleove algebre (videti u [62]).

Neka je S podskup Booleove algebre B. <u>Najmanjim gornjim ograničenjem</u> skupa S nazivamo element z iz B, takav da je:

(j) $x \leq z$, za svako x iz S

(jj) za $y \in B$, ako je $x \leq y$ za svako x iz S, onda je $z \leq y$.

Dualno, <u>najveće donje ograničenje</u> skupa S je element t iz B takav da je:

(j′) $t \leq x$, za svako x iz S

(j″) za $y \in B$, ako je $y \leq x$ za svako x iz S, onda je $y \leq t$.

Ukoliko najmanje gornje ograničenje (najveće donje ograničenje) skupa S postoji, označavaćemo ga sa

$$\bigvee_{x \in S} x \quad (\text{sa} \quad \bigwedge_{x \in S} x).$$

Poznato je da je najmanje gornje ograničenje (najveće donje ograničenje), ukoliko postoji, jedinstveno. Za konačan skup $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, ti elementi uvek postoje i oni su, respektivno:

(1.32′) $$\bigvee_{i=1}^{m} x_i = x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_m$$

(1.32″) $$\bigwedge_{i=1}^{m} x_i = x_1 x_2 \ldots x_m$$

Primetimo, da je:

(1.33') $$\bigvee_{x\in\emptyset} x = \bigwedge_{x\in B} x = 0$$

(1.33'') $$\bigwedge_{x\in\emptyset} x = \bigvee_{x\in B} x = 1 .$$

Neka je A skup atoma Booleove algebre $\langle B,\vee,\circ,',0,1\rangle$ i

(1.34) $$\widetilde{\pi}(x) = \{p:\ p\in A \ \text{ i } \ p\leq x\} ,$$

tada je

(1.35) $$x = \bigvee_{p\in\widetilde{\pi}(x)} p .$$

U svakoj atomarnoj Booleovoj algebri je:

(1.36) $$1 = \bigvee_{p\in A} p .$$

Za svaki atom p atomarne Booleove algebre važi:

(1.37) $$p' = \bigvee_{q\in A\setminus\{p\}} q .$$

Za konačne Booleove algebre važi <u>teorema reprezentacije</u>, preciznije: Neka je A skup svih atoma konačne Booleove algebre B. Preslikavanje $\widetilde{\pi}: B \to P(A)$, koje svakom elementu x iz B pridružuje skup $\widetilde{\pi}(x)$ dat sa (1.34) je izomorfizam između B i P(A).

Posledice koje se odnose na broj elemenata konačnih Booleovih algebri su sledeće:

(i) konačna Booleova algebra ima $2^n$ elemenata, gde je n broj njenih atoma.

(ii) za svaki prirodan broj n, sve Booleove algebre sa $2^n$ elemenata su međusobno izomorfne.

Poslednja osobina opravdava upotrebu oznake $B_{2^n}$ za Booleove algebre sa $2^n$ elemenata.

## 1.2. Booleove funkcije

Booleova funkcija je funkcija sa argumentima i vrednostima u Booleovoj algebri B, takva da može da se izrazi pomoću promenljivih i konstanti iz B uz upotrebu osnovnih operacija $\vee$, $\cdot$ i $'$ Booleove algebre B. Radi preciznosti dajemo sledeće definicije:

Definicija 1.1 (Rudeanu [59]). Booleove funkcije od n promenljivih (BFn) nad Booleovom algebrom $\langle B, \vee, \cdot, ', 0, 1\rangle$ određene su sledećim pravilima:

(0) Za svako $a \in B$, funkcija konstanta $f: B^n \to B$ definisana sa

$$(1.38) \qquad f_a(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a \qquad (\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in B)$$

je BFn.

(1) Za svako $i = 1, 2, \ldots, n$, projekcija $e_i: B^n \to B$ definisana sa

$$(1.39) \qquad e_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i \qquad (\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in B)$$

je BFn.

(2) Ako su $f, g: B^n \to B$ BFn, onda su funkcije $f \vee g$, $fg$, $f'$: $B^n \to B$ definisane sa

$$(1.40) \qquad (f \vee g)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$(\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in B)$$

$$(1.41) \qquad (fg)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$(\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in B)$$

i

$$(1.42) \quad f'(x_1,x_2,\dots,x_n) = (f(x_1,x_2,\dots,x_n))'$$
$$(\forall x_1,x_2,\dots,x_n \in B)$$

takođe BFn.

(3) BFn mogu se dobiti samo pomoću konačnog broja primena pravila (0),(1) i (2) ove definicije.

Pravilom (2) definisane su tri operacije između Booleovih funkcija; radi jednostavnosti one su označene istim simbolima kao disjunkcija, konjunkcija i negacija u Booleovoj algebri B. Opravdanje za ovo je sledeća poznata osobina Booleovih funkcija:

Neka je $\langle B,\vee,\cdot,',0,1\rangle$ Booleova algebra. Skup svih Booleovih funkcija $f\colon B^n \to B$ je Booleova algebra u odnosu na operacije (1.4o), (1.41) i (1.42); nula i jedinica te algebre su funkcije konstante 0 i 1 respektivno.

<u>Definicija 1.2</u> (Rudeanu [59]). Proste Booleove funkcije od n promenljivih (PBFn) nad Booleovom algebrom $\langle B,\vee,\cdot,',0,1\rangle$ određene su sledećim pravilima:

(1') Za svako $i = 1,2,\dots,n$, projekcija (1.39) je PBFn.

(2') Ako su $f,g\colon B^n \to B$ PBFn, onda su funkcije (1.4o), (1.41) i (1.42) takođe PBFn.

(3') PBFn mogu se dobiti samo pomoću konačnog broja primena pravila (1') i (2') ove definicije.

Primetimo da za svako $m \geq n$, svaka Booleova funkcija $f$ od n promenljivih može da se posmatra kao restrikcija na $B^n$ Booleove funkcije od m promenljivih koja može biti napisana u istom obliku kao funkcija f.

Neki autori daju pojmu "Booleova funkcija" značenje iz definicije 1.2. Međutim, proste Booleove funkcije imaju neke osobine zbog kojih je korisno praviti razliku između pojmova Booleove funkcije i proste Booleove funkcije. Tu razliku je prvi istakao Rudeanu u [57], gde je za proste Booleove funkcije upotrebljen termin "Booleove funkcije u užem smislu".

Za svaku Booleovu algebru $B \neq B_2$ postoje funkcije $f\colon B^n \to B$ koje nisu Booleove. Booleove funkcije su okarakterisane osobinom da se mogu napisati u tzv kanonskoj disjunktivnoj formi a takođe i u kanonskoj konjunktivnoj formi. Da bi to objasnili, potrebno je uvesti neke nove pojmove. Pre svega preciziramo notaciju koju ćemo koristiti.

Mala slova latinske ili grčke azbuke označavaju elemente Booleove algebre. Mala latinska slova sa kraja azbuke: $x, y, z, \ldots$ eventualno sa indeksima, mogu takođe, da označavaju promenljive. Mala grčka slova sa početka azbuke, eventualno sa indeksima, uvek označavaju elemente 0 ili 1. Vektori čije su komponente konstante ili promenljive Booleove algebre označavaju se odgovarajućim velikim slovima. Tako npr:

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \tag{1.43}$$
$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \qquad B = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$$

Dalje, za $x \in B$ stavljamo

$$x' = x^0, \qquad x = x^1 \tag{1.44}$$

i proširujemo tu notaciju na vektore: za $X \in B^n$, $A \in \{0,1\}^n \subseteq B^n$, stavljamo:

(1.45) $X^A = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$ , $\sim X^A = x_1^{\alpha_1} \vee x_2^{\alpha_2} \vee \ldots \vee x_n^{\alpha_n}$

Za familiju $\{a_A\}_{A \in \{0,1\}^n}$ od $2^n$ elemenata $a_A$ iz B

(1.46') $\bigvee_A a_A X^A$

i

(1.46'') $\bigwedge_A (a_A \vee \sim X^A)$

označavaju da je disjunkcija odnosno konjunkcija uzeta preko svih $2^n$ elementarnih vektora tj vektora čije su sve komponente 0 ili 1.

Osnovna pravila računanja data su sledećim relacijama koje važe za $X \in B^n$; $A \in \{0,1\}^n \subseteq B^n$; $a_A$, $b_A \in B$:

(1.47) $\bigvee_A X^A = 1$

(1.48) $X^A X^B = 0$ za $A, B \in \{0,1\}^n$ , $A \neq B$

(1.49) $(\bigvee_A a_A X^A) \vee (\bigvee_A b_A X^A) = \bigvee_A (a_A \vee b_A) X^A$

(1.5o) $(\bigvee_A a_A X^A)(\bigvee_A b_A X^A) = \bigvee_A a_A b_A X^A$

(1.51) $(\bigvee_A a_A X^A)' = \bigvee_A a_A' X^A$

(1.52) $\alpha^\beta = \begin{cases} 1 & \text{ako je } \alpha = \beta \\ 0 & \text{ako je } \alpha \neq \beta \end{cases}$ za $\alpha, \beta \in \{0,1\}$

i opštije

$$(1.53) \qquad A^B = \begin{cases} 1 & \text{ako je } A = B \\ 0 & \text{ako je } A \neq B \end{cases} \qquad \text{za } A,B \in \{0,1\}^n$$

Sada možemo citirati sledeću teoremu kojom su okarakterisane Booleove funkcije (Rudeanu [59]):

Teorema 1.1. Funkcija $f: B^n \to B$ je Booleova ako i samo ako može da se napiše u kanonskoj disjunktivnoj formi

$$(1.54') \qquad f(X) = \bigvee_A f(A)X^A$$

ili, ekvivalentno, ako i samo ako može da se napiše u kanonskoj konjunktivnoj formi

$$(1.54'') \qquad f(X) = \bigwedge_A (f(A')\vee \sim X^A) \ .$$

Iz gornje teoreme sledi da je Booleova funkcija određena svojim vrednostima na elementarnim vektorima a takođe i činjenica da vrednosti Booleove funkcije $f: B^n \to B$ zadovoljavaju uslov:

$$(1.55) \qquad \bigwedge_A f(A) \leq f(X) \leq \bigvee_A f(A) \ .$$

Ustvari, važi da je oblast vrednosti Booleove funkcije $f$ interval $\left[\bigwedge_A f(A), \bigvee_A f(A)\right]$ .

Za karakterizaciju prostih Booleovih funkcija služi sledeća teorema (Rudeanu [59]):

Teorema 1.2. Neka je $\langle B, \vee, \cdot, ', 0, 1\rangle$ Booleova algebra, $n$ prirodan broj i $f: B^n \to B$. Tada su sledeći iskazi ekvivalentni:

(i) $f$ je prosta Booleova funkcija

(ii) f je Booleova funkcija i $f(A) \in \{0,1\}$, za svako $A \in \{0,1\}^n$

(iii) ili je $f(X) = 0$ za svako $X$ iz $B^n$ ili $f$ može da se napiše u obliku

$$(1.56') \qquad f(X) = \bigvee_{f(A)=1} X^A$$

gde $\bigvee_{f(A)=1}$ označava da se disjunkcija uzima po svim $A$ iz $\{0,1\}^n$ za koje je $f(A) = 1$.

(iv) ili je $f(X) = 1$ za svako $X$ iz $B^n$ ili $f$ može da se napiše u obliku

$$(1.56'') \qquad f(X) = \bigwedge_{f(A')=0} \sim X^A$$

gde $\bigwedge_{f(A')=0}$ označava da se konjunkcija uzima po svim $A$ iz $\{0,1\}^n$ za koje je $f(A') = 0$.

Iz predhodne teoreme sledi da je konstantna funkcija $f_a$: $B^n \to B$ prosta Booleova funkcija ako i samo ako je $a = 0$ ili $a = 1$.

Na osnovu teorema 1.1 i 1.2 mogu se izvući zaključci o broju BFn i PBFn nad Booleovom algebrom $\langle B, \vee, \cdot, ', 0, 1 \rangle$. Naime, ako je $/B/$ broj elemenata Booleove algebre, onda ima $/B/^{2^n}$ Booleovih funkcija $f$: $B^n \to B$, među kojima $2^{2^n}$ prostih Booleovih funkcija.

Teoreme 1.1 i 1.2 mogu se proširiti na sledeći način:

<u>Teorema 1.3</u>. Neka je $\langle B, \vee, \cdot, ', 0, 1 \rangle$ Booleova algebra i $n$ prirodan broj. Funkcija $f$: $B^n \to B$ je Booleova ako i samo ako može da se napiše u disjunktivnoj formi tj

$$(1.57') \qquad f = a_1 f_1 \vee a_2 f_2 \vee \ldots \vee a_m f_m \vee f_{m+1} \vee \ldots \vee f_p ,$$

gde su $a_1, a_2, \ldots, a_m$ konstante iz B $(0 \leq m \leq p)$, a $f_1, f_2, \ldots, f_p$ su različite funkcije od kojih se svaka može napisati u obliku elementarne konjunkcije tj u obliku

$$(1.58'j) \qquad f_j = x_{j_1}^{\alpha_{j_1}} x_{j_2}^{\alpha_{j_2}} \ldots x_{j_{r(j)}}^{\alpha_{j_{r(j)}}} \qquad (j = 1, 2, \ldots p),$$

pri čemu su $j_1, j_2, \ldots, j_{r(j)}$ različiti indeksi iz skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ a $\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \ldots, \alpha_{j_{r(j)}}$ su elementi iz $\{0, 1\}$.

Pojam disjunktivne forme koji figuriše u gornjoj teoremi je uopštenje klasičnog pojma disjunktivne forme koja ne dopušta pojavljivanje konstanata.

Teorema 1.4'. Neka je $\langle B, \vee, \cdot, ', 0, 1 \rangle$ Booleova algebra i n prirodan broj. Funkcija $f: B^n \to B$ je prosta Booleova funkcija ako i samo ako može da se napiše u disjunktivnoj formi slobodnoj od konstanata tj

$$(1.59') \qquad f = f_1 \vee f_2 \vee \ldots \vee f_p ,$$

gde su $f_1, f_2, \ldots, f_p$ različite funkcije od kojih se svaka može napisati u obliku elementarne konjunkcije (1.58'j).

Koncept disjunktivne forme slobodne od konstanata koji figuriše u gornjoj teoremi, ustvari je klasični koncept disjunktivne forme.

Sledeće dve teoreme su dualne teoremama 1.3 i 1.4.

Teorema 1.3'. Neka je $\langle B, \vee, \cdot, ', 0, 1 \rangle$ Booleova algebra i n prirodan broj. Funkcija $f: B^n \to B$ je Booleova ako i samo ako može da se napiše u konjunktivnoj formi tj

(1.57'') $\quad f = (a_1 \vee f_1)\ldots(a_m \vee f_m) f_{m+1}\ldots f_p$ ,

gde su $a_1,\ldots,a_m$ konstante iz B $(0 \leq m \leq p)$, a $f_1,\ldots,f_p$ su različite funkcije od kojih se svaka može napisati u obliku elementarne disjunkcije tj u obliku

(1.58'.j) $\quad f_j = x_{j_1}^{\alpha_{j_1}} \vee x_{j_2}^{\alpha_{j_2}} \vee \ldots \vee x_{j_{r(j)}}^{\alpha_{j_{r(j)}}}$ $\quad (j = 1,\ldots,$

pri čemu su $j_1,\ldots,j_{r(j)}$ različiti indeksi iz skupa $\{1,2,\ldots,n\}$ , a $\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2},\ldots, \alpha_{j_{r(j)}}$ su elementi iz $\{0,1\}$.

Teorema 1.4'') Neka je $\langle B, \vee, \cdot, ', 0, 1\rangle$ Booleova algebra i n prirodan broj. Funkcija $f: B^n \rightarrow B$ je prosta Booleova funkcija ako i samo ako može da se napiše u konjunktivnoj formi slobodnoj od konstanata tj

(1.59'') $\quad f = f_1 f_2 \ldots f_p$ ,

gde su $f_1, f_2,\ldots,f_p$ različite funkcije od kojih se svaka može napisati u obliku elementarne disjunkcije (1.58'.j).

Napomenimo da se izraz

(1.60') $\quad x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} = X^A$

naziva potpuna elementarna konjunkcija ili konstituenta jedinice ili minterm, a njemu dualan izraz

(1.60'') $\quad x_1^{\alpha_1} \vee x_2^{\alpha_2} \vee \ldots \vee x_n^{\alpha_n} = \sim X^A$

potpuna elementarna disjunkcija ili konstituenta nule ili maksterm.

U svakom od tih izraza, svaka promenljiva pojavljuje se tačno jedamput, sa znakom negacije ili bez njega.

Već smo istakli poseban značaj dvo-elementne Booleove algebre u teoriji automata i teoriji kontaktno-relejnih mreža (switching theory). Čudno je, kako primećuje Rudeanu u [59], da mnogi od tih teoretičara pod Booleovom algebrom podrazumevaju upravo dvo-elementnu Booleovu algebru, iako je to samo jedna od Booleovih algebri i to najprostija. Slična zabuna nastaje i kad su u pitanju Booleove funkcije. Zbog toga je korisno posebno definisati funkcije nad dvo-elementnom Booleovom algebrom kao specijalan slučaj Booleovih funkcija.

Definicija 1.3. Neka je $B_2 = \{0,1\}$ dvo-elementna Booleova algebra. Za svaki prirodan broj n, svaku funkciju $f\colon B^n \to B$ nazivamo logičkom funkcijom od n promenljivih.

Poznato je da je svaka logička funkcija istovremeno i prosta Booleova funkcija. Ustvari, važi sledeća teorema:

Teorema 1.5. Za svaku Booleovu algebru $\langle B, \vee, \cdot, ', 0, 1\rangle$, sledeća tri iskaza su ekvivalentna:

(i) $\langle B, \vee, \cdot, ', 0, 1\rangle$ je dvo-elementna Booleova algebra

(ii) Za svaki prirodan broj n, svaka funkcija $f\colon B^n \to B$ je prosta Booleova funkcija.

(iii) Za svaki prirodan broj n, svaka funkcija $f\colon B^n \to B$ je Booleova funkcija.

O primeni logičkih funkcija u strukturnoj teoriji automata, teoriji kontaktno-relejnih mreža itd postoji obimna literatura (videti [1], [16], [17], [32], [50], [59], [69], [70] itd).

## 1.3. Vektorski model konačnih Booleovih algebri

Često je pogodno ispitivati osobine Booleovih algebri u modelima. Za konačne Booleove algebre naročito pogodan model je tzv B-modul definisan u [46] (Metelka). To je razlog što ćemo dalja razmatranja uglavnom vršiti u izomorfnoj reprezentaciji Booleove algebre - B-modulu.

Definicija 1.4. Svaki element Descartesovog proizvoda $B_2^q = \{0,1\}^q$ nazivamo q-dimenzionalnim B-vektorom (binarnim vektorom, kratko - vektorom) nad $B_2$ i označavamo ga simbolom $a = (a^1, a^2, \ldots, a^q)$, gde je $a^i \in B_2$, za $i=1,2,\ldots,q$. Elemente $a^i$ $(i=1,2,\ldots,q)$ nazivamo koordinatama ili komponentama B-vektora a. Skup $B_2^q = \{0,1\}^q$ svih q-dimenzionalnih B-vektora nazivamo q-dimenzionalnim B-modulom nad $B_2$. Kažemo da je B-vektor $a = (a^1, a^2, \ldots, a^q)$ jednak B-vektoru $b = (b^1, b^2, \ldots, b^q)$ ako i samo ako je $a^i = b^i$, za svaki $i = 1,2,\ldots,q$. Pod disjunkcijom vektora a i b, u oznaci $a \vee b$, podrazumevamo vektor $c = (c^1, c^2, \ldots, c^q)$, gde je $c^i = a^i \vee b^i$ (tablica 1.1), za svako $i = 1,2,\ldots,q$. Pod konjunkcijom vektora a i b, u oznaci ab, podrazumevamo vektor $d = (d^1, d^2, \ldots, d^q)$, gde je $d^i = a^i b^i$ (tablica 1.2), za svako $i = 1,2,\ldots,q$. Negacija ili komplement vektora $a = (a^1, a^2, \ldots, a^q)$ je vektor $a' = (a^{1'}, a^{2'}, \ldots, a^{q'})$ (tablica 1.3).

Poznato je (videti [46]) da je svaka Booleova algebra koja ima $2^q$ elemenata izomorfna q-dimenzionalnom B-modulu sa operacijama kao što su gore definisane. Ulogu jedinice u B-modulu ima vektor $\mathbf{1} = (1,1,\ldots,1)$ a ulogu nule vektor $0 = (0,0,\ldots,0)$. Upotrebili smo iste oznake za jedinicu i nulu B-modula: $\mathbf{1}$ i $0$ što neće dovesti do zabune jer će se iz konteksta videti o kojim elementima je reč. Radi jednostavnosti, ubuduće modul $B_2^q$ nazivamo prosto Booleovom algebrom.

Definicija 1.5. Operacija množenja vektora $a \in B_2^q$ sa elementom $\alpha$ iz $B_2$ data je pravilom

$$(1.61) \qquad \alpha \cdot a = a \cdot \alpha = \begin{cases} 0 & \text{za } \alpha = 0 \\ a & \text{za } \alpha = 1 \end{cases}.$$

Osobine ovog množenja ispitivao je Metelka u [46].

Sada je moguće uvesti u $B_2^q$ pojam linearne kombinacije.

Definicija 1.6. Vektor $c \in B_2^q$ je linearna kombinacija vektora $a_j \in B_2^q$, $j = 1,2,\ldots,s$, ako i samo ako postoje $\alpha_j \in B_2$, $j = 1,2,\ldots,s$, takvi da je

$$c = \alpha_1 \cdot a_1 \vee \alpha_2 \cdot a_2 \vee \ldots \vee \alpha_s \cdot a_s = \bigvee_{j=1}^{s} \alpha_j a_j$$

Vektori $\Delta_k = (\delta_{k1}, \delta_{k2}, \ldots, \delta_{kq})$ čine bazu B-modula $B_2^q$, prema [46], to je i jedina baza u $B_2^q$.

Za konačnu Booleovu algebru $B_2^q = \langle B_2^q, \vee, \cdot, ', 0, 1 \rangle$ vektori $\Delta_k = (\delta_{k1}, \delta_{k2}, \ldots, \delta_{kq})$ $(k = 1,2,\ldots,q)$ su njeni atomi. Proizvoljan element te algebre može se predstaviti u obliku

$$(1.62) \qquad a = \bigvee_{k=1}^{q} \Delta_k a^k$$

gde je

$$(1.63) \qquad a^k = \begin{cases} 1 & \text{ako je } a \geqslant \Delta_k \\ 0 & \text{ako je } a \ngeqslant \Delta_k \end{cases}$$

Lako se pokazuje da važe sledeće relacije:

(1.64) $$a \vee b = \bigvee_{k=1}^{q} \Delta_k (a^k \vee b^k)$$

(1.65) $$ab = \bigvee_{k=1}^{q} \Delta_k (a^k b^k)$$

(1.66) $$a' = \bigvee_{k=1}^{q} \Delta_k (a^{k'}) \, .$$

Dalje, važi za $a, b \in B_2^q$ :

(1.67) $a \leq b$ ako i samo ako je $a^k \leq b^k$ za svako $k = 1, 2, \ldots, q$.

U daljem izlaganju posmatramo isključivo Booleove funkcije nad konačnom Booleovom algebrom $B_2^q$ sa $2^q$ elemenata te umesto $B_2^q$ pišemo prosto $B$.

# 2. NEKE OSOBINE BOOLEOVIH FUNKCIJA KOJE ČUVAJU KONSTANTE NAD KONAČNIM BOOLEOVIM ALGEBRAMA

## 2.1. Komponentno predstavljanje Booleovih funkcija

U ovom odeljku posmatramo konačnu Booleovu algebru sa $2^q$ elemenata tj sa q atoma. Ustvari, koristimo izomorfnu reprezentaciju takve Booleove algebre - B-modul, opisan u 1. poglavlju. U daljem izlaganju, umesto $B_2^q$ pišemo prosto B.

Lema 2.1. Za svaku Booleovu funkciju $f\colon B^n \to B$, važi:

$$f(X) = \bigvee_{k=1}^{q} \Delta_k f^k(X^k) \tag{2.1}$$

gde je $f^k\colon B_2^n \to B_2$ logička funkcija takva da je za svako X iz $B^n$

$$f^k(X^k) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } f(X) \geqslant \Delta_k \\ 0, & \text{ako je } f(X) \ngeqslant \Delta_k \end{cases} \tag{2.2}$$

Dokaz. Prema (1.62), tvrđenje važi za konstante i projekcije. S obzirom na (1.64), (1.65) i (1.66) i tačke (2) i (3) definicije 1.1, tvrđenje važi za svaku BFn.

U skladu sa (2.1), svaku Booleovu funkciju nad Booleovom algebrom B možemo predstaviti u obliku uređene q-torke logičkih funkcija

$$f = (f^1, f^2, \ldots, f^q) \tag{2.3}$$

i taj niz nazivamo komponentnom reprezentacijom funkcije f, dok su logičke funkcije $f^1, f^2, \ldots, f^q$ njene komponente.

Sledeća lema služi za karakterizaciju komponentnih reprezentacija prostih Booleovih funkcija:

Lema 2.2. Booleova funkcija $f: B^n \to B$ je prosta ako i samo ako su sve njene komponente međusobno jednake logičke funkcije tj ako i samo ako je $f^1 = f^2 = \ldots = f^q$, i u tom slučaju je analitički izraz te proste Booleove funkcije identičan analitičkom izrazu bilo koje njene komponente.

Dokaz. Primetimo prvo, da su komponente proizvoljnog elementarnog vektora A Booleove algebre B međusobno jednake tj $A^1 = A^2 = \ldots A^q = A^*$.

Predpostavimo da je f prosta Booleova funkcija algebre B. Tada je, prema teoremi 1.2

$$f(A) \in \{0,1\}, \quad \text{za svako } A \text{ iz } \{0,1\}^n,$$

tj

$$f(A) = \bigvee_{k=1}^{q} \Delta_k f^k(A^k) = \bigvee_{k=1}^{q} \Delta_k f^k(A\ ) =$$

$$= (f^1(A^*), \ldots, f^k(A^*))$$

te, u zavisnosti od toga da li je $f(A) = 0$ ili $f(A) = 1$ biće ili

$$f^1(A^*) = \ldots = f^q(A^*) = 0$$

ili

$$f^1(A^*) = \ldots = f^q(A^*) = 1,$$

tj za svako A iz $B_2^n$:

$$f^1(A^*) = f^2(A^*) = \dots = f^q(A^*) .$$

Obrnuto, neka je $f^1 = f^2 = \dots = f^q = f$ .

Tada je, za proizvoljno $A^*$ iz $B_2^n$

$$f(A) = (f^*(A^*), f^*(A^*), \dots, f^*(A^*))$$

tj ili $f(A) = (0,0,\dots,0) = 0$, ili $f(1) = (1,1,\dots,1) = 1$, te prema teoremi 1.2, sledi da je f prosta Booleova funkcija.

## 2.2. Booleove funkcije koje čuvaju konstante

Definicija 2.1. Za Booleovu funkciju $f: B^n \to B$ kažemo da čuva konstantu a $(a \in B)$ ako i samo ako je $f(a,a,\dots,a) = a$.

U dvoelementnoj Booleovoj algebri tj u algebri logike, koja je interesantna za teoriju automata, funkcije koje čuvaju konstante su od posebnog značaja (Pospelov [50], Vavilov i Portnoj [70], Gluškov [16] i [17], Jablonskij [24] ). Tamo se, naime, posmatraju dve klase funkcija:

$$T_0 = \{f(x_1,\dots,x_n): f(0,\dots,0) = 0\}$$

i

$$T_1 = \{f(x_1,\dots,x_n): f(1,\dots,1) = 1\}.$$

Svaka od tih klasa sadrži $2^{2^n} - 1$ funkcija i obe klase su zatvorene u tom smislu da se supstitucijama funkcija iz klase $T_i$, $(i = 0,1)$, mogu dobiti samo funkcije koje pripadaju toj istoj klasi. Dalje, obe klase su skoro kompletni skupovi funkcija, tj skup $T_i$, $(i = 0,1)$, nije funkcijski kompletan ali dodajući tome skupu proizvoljnu logičku funkciju izvan $T_i$ dobija se funkcijski kompletan skup tj skup funkcija iz kojih se supstitucijama mogu generisati sve logičke funkcije.

Lema 2.3. Booleova funkcija $f: B^n \to B$ čuva konstantu $a$, $(a \in B)$, ako i samo ako za svako $k=1,2,\ldots,q$, logička funkcija $f^k: B_2^n \to B_2$ čuva konstantu $a^k$ $(a^k \in \{0,1\})$.

Dokaz. Neka je $f(a,a,\ldots,a) = a$, za neko $a$ iz $B$. Tada je

$$\bigvee_{k=1}^{q} \Delta_k \, f^k(a^1,a^2,\ldots,a^q) = \bigvee_{k=1}^{q} \Delta_k \, a^k$$

tj, s obzirom na definiciju jednakosti u B-modulu:

$$f^k(a^k,a^k,\ldots,a^k) = a^k \,, \quad \text{za svako} \quad k = 1,2,\ldots,q.$$

Obrnuto, neka je, za svako $k = 1,2,\ldots,q$:

$$f^k(a^k,a^k,\ldots,a^k) = a^k.$$

Tada je

$$f(a,a,\ldots,a) = \bigvee_{k=1}^{q} \Delta_k \, f^k(a^k,a^k,\ldots,a^k) =$$

$$= \bigvee_{k=1}^{q} \Delta_k \, a^k = a \,.$$

Lema 2.3 omogućava da se osobine Booleovih funkcija nad konačnim Booleovim algebrama koje čuvaju konstante dokazuju koristeći njihovu komponentnu reprezentaciju tj koristeći osobine logičkih funkcija koje čuvaju konstante.

Teorema 2.1. Neka Booleova funkcija $f: B^n \to B$ zadovoljava uslov

(2.4) $\qquad f(0,\ldots,0) \leq f(1,\ldots,1)$ .

Tada je $f(c,\ldots,c) = c$ ako i samo ako je

$$(2.5) \qquad f(0,\ldots,0) \leq c \leq f(1,\ldots,1) .$$

Dokaz. Neka je $a = f(0,\ldots,0) \leq f(1,\ldots,1) = b$, tj za svako $k = 1,2,\ldots,q$: $a^k \leq b^k$. Neka je, dalje, $a \leq c \leq b$, tj za svako $k = 1,2,\ldots,q$: $a^k \leq c^k \leq b^k$ odnosno

$$(2.5^k) \qquad f^k(0,\ldots,0) \leq c^k \leq f(1,\ldots,1) .$$

Relacija $(2.5^k)$ isključuje mogućnost: $f^k(0,\ldots,0) = 1$ i $f^k(1,\ldots,1) = 0$ istovremeno, za bilo koje $k = 1,2,\ldots,q$. Preostaju tri mogućnosti:

(a) $f^k(0,\ldots,0) = 0$ (a′)

$f^k(1,\ldots,1) = 0$ (a″)

U ovom slučaju je $c^k = 0$, te s obzirom na (a′):

$$f^k(c^k,\ldots,c^k) = c^k .$$

(b) $f^k(0,\ldots,0) = 1$ (b′)

$f^k(1,\ldots,1) = 1$ (b″)

U ovom slučaju je $c^k = 1$, te s obzirom na (b″):

$$f^k(c^k,\ldots,c^k) = c^k .$$

(c) $f^k(0,\ldots,0) = 0$ (c′)

$f^k(1,\ldots,1) = 1$ (c″)

Ovde postoje dve mogućnosti:

(i) $c^k = 0$, u kom slučaju je, s obzirom na $(c')$:

$$f^k(c^k,\ldots,c^k) = c^k$$

(ii) $c^k = 1$, u kom slučaju je, s obzirom na $(c'')$, takođe:

$$f^k(c^k,\ldots,c^k) = c^k \, .$$

Dakle, u svakom slučaju je $f^k(c^k,\ldots,c^k) = c^k$, za svako $k = 1,2,\ldots,q$, te na osnovu leme 2.3, sledi:

$$f(c,\ldots,c) = c \, .$$

Obrnuto, neka je $f(c,\ldots,c) = c$, za neko c iz B. Tada je, za svako $k = 1,2,\ldots,q$: $f^k(c^k,\ldots,c^k) = c^k$, te s obzirom da je $f^k(0,\ldots,0) \leq f^k(1,\ldots,1)$, važi:

$$(2.5^k) \qquad f^k(0,\ldots,0) \leq c^k \leq f^k(1,\ldots,1)$$

za svako $k = 1,2,\ldots,q$, odakle je, na osnovu (1.67):

$$(2.5) \qquad f(0,\ldots,0) \leq c \leq f(1,\ldots,1)$$

i ovim je dokaz teoreme završen.

<u>Teorema 2.2</u>. Da bi Booleova funkcija $f: B^n \to B$ čuvala barem jednu konstantu potrebno je i dovoljno da je

$$(2.5) \qquad f(0,\ldots,0) \leq f(1,\ldots,1) \quad .$$

<u>Dokaz</u>. Da je uslov dovoljan sledi na osnovu teoreme 2.1. Pokazaćemo sada da je uslov i potreban.

Predpostavimo da za neko c iz B važi: $f(c,\ldots,c) = c$. Tada je, na osnovu leme 2.3, za svako $k = 1,2,\ldots,q$:

$$(2.6^k) \qquad f^k(c^k,\ldots,c^k) = c^k.$$

Sada postoje dve mogućnosti:

(i) $c^k = 0$, odakle s obzirom na $(2.6^k)$, sledi: $f^k(0,\ldots,0) = 0$ pa bez obzira na vrednost $f^k(1,\ldots,1)$, važi:

$$(2.5^k) \qquad f^k(0,\ldots,0) \leq c^k \leq f^k(1,\ldots,1) .$$

(ii) $c^k = 1$, odakle soobzirom na $(2.6^k)$, sledi: $f^k(1,\ldots,1) = 1$ pa bez obzira na vrednost $f^k(0,\ldots,0)$, važi $(2.5^k)$.

Kako $(2.5^k)$ važi za svako $k = 1,2,\ldots,q$, važi i:

$$(2.5) \qquad f(0,\ldots,0) \leq c \leq f(1,\ldots,1)$$

odakle sledi (2.4), čime je dokaz završen.

Što se tiče međusobnog odnosa elemenata $f(0,\ldots,0)$ i $f(1,\ldots,1)$, postoje još dve mogućnosti: oni su neuporedivi ili je $f(0,\ldots,0) \geq f(1,\ldots,1)$. U ovom drugom slučaju važi sledeća teorema:

<u>Teorema 2.3.</u> Za Booleovu funkciju $f\colon B^n \to B$ sledeća dva iskaza su ekvivalentna:

$$(2.6) \qquad f(0,\ldots,0) \geq f(1,\ldots,1)$$

$$(2.7) \qquad f(c,\ldots,c) = f(1,\ldots,1) \vee c' f(0,\ldots,0), \quad \text{za svako } c \text{ iz } B.$$

<u>Dokaz.</u> Neka je tačno (2.6). To znači da je, za svako $k = 1,2,\ldots,q$:

$$(2.6^k) \qquad f^k(0,\ldots,0) \geq f^k(1,\ldots,1).$$

Odavde sledi relacija

$$(2.7^k) \qquad f^k(c^k,\ldots,c^k) = f^k(1,\ldots,1) \vee c^{k\prime} f^k(0,\ldots,0)$$

jer se, za $c^k = 0$, ona svodi na

$$(2.7^k_0) \qquad f^k(0,\ldots,0) = f^k(1,\ldots,1) \vee f^k(0,\ldots,0),$$

što je tačno, s obzirom na $(2.6^k)$, a za $c^k = 1$, na identitet

$$(2.7^k_1) \qquad f^k(1,\ldots,1) = f^k(1,\ldots,1) .$$

Kako $(2.7^k)$ važi za svako $k = 1,2,\ldots,q$, to je tačno i (2.7).

Obrnuto, neka je tačno (2.7), za svako $c$ iz $B$. Specijalno, za $c = 0$, dobije se

$$(2.7_0) \qquad f(0,\ldots,0) = f(1,\ldots,1) \vee f(0,\ldots,0)$$

što je ekvivalentno sa (2.6).

Navodimo neke posledice predhodne tri teoreme:

<u>Posledica 1</u>. Booleova funkcija $f\colon B^n \to B$ čuva sve konstante (tj važi $f(a,\ldots,a) = a$, za svako $a$ iz $B$) ako i samo ako čuva konstante 0 i 1 (tj ako i samo ako je $f(0,\ldots,0) = 0$ i $f(1,\ldots,1) = 1$).

<u>Posledica 2</u>. Potreban i dovoljan uslov da Booleova funkcija $f\colon B^n \to B$ čuva tačno jednu konstantu $a$ jeste da važi: $f(0,\ldots,0) = f(1,\ldots,1) = a$.

<u>Posledica 3</u>. Potreban i dovoljan uslov da Booleova funkcija $f\colon B^n \to B$ ne čuva ni jednu konstantu jeste da je $f(0,\ldots,0) \not\leq f(1,\ldots,1)$.

Posledica 4. Da bi za Booleovu funkciju $f\colon B^n \to B$ i za svako $a$ iz $B$ bilo $f(a,\dots,a) = a'$ potrebno je i dovoljno da je $f(0,\dots,0) = 1$ i $f(1,\dots,1) = 0$.

Posledica 5. Neka je $\langle B,\vee,\cdot,{}',0,1\rangle$ konačna Booleova algebra sa $2^q$ elemenata. Tada nad ovom algebrom postoji tačno:

$3^q \cdot 2^{q(2^n - 2)}$ Booleovih funkcija od $n$ promenljivih koje čuvaju barem jednu konstantu (jer postoji $3\cdot 2^{2^n - 2}$ logičkih funkcija kod kojih je $f(0,\dots,0)$ $f(1,\dots,1)$);

$2^{q(2^n - 2)}(2^{2q} - 3^q)$ Booleovih funkcija od $n$ promenljivih koje ne čuvaju ni jednu konstantu;

$2^{q(2^n - 2)}$ Booleovih funkcija od $n$ promenljivih koje čuvaju sve konstante datog intervala i samo njih (ovde je interesantno da taj broj ne zavisi od veličine intervala, npr isti je broj funkcija koje čuvaju jednu određenu konstantu i samo nju i funkcija koje čuvaju sve konstante Booleove algebre kao i funkcija koje čuvaju sve konstante nekog datog intervala sa $2^m$ elemenata $(0 \leq m \leq q)$ i samo njih);

$\frac{q!}{m!(q-m)!} \cdot 2^{q(2^n - 1) - m}$ Booleovih funkcija od $n$ promenljivih koje čuvaju tačno $2^m$ konstanata $(0 \leq m \leq q)$.

Ako broj $r$ nije potencija broja 2, onda ne postoji Booleova funkcija koja čuva tačno $r$ konstanata.

Posledica 6. Svaka prosta Booleova funkcija $f\colon B^n \to B$ pripada jednoj i samo jednoj od sledeće četiri klase:

$K_{oo}$ - klasa funkcija koje čuvaju samo konstantu 0. Potreban i dovoljan uslov da prosta Booleova funkcija pripada ovoj klasi jeste: $f(0,\ldots,0) = f(1,\ldots,1) = 0$.

$K_{o1}$ - klasa funkcija koje čuvaju sve konstante. Potreban i dovoljan uslov da prosta Booleova funkcija pripada ovoj klasi je: $f(0,\ldots,0) = 0$ i $f(1,\ldots,1) = 1$.

$K_{1o}$ - klasa funkcija koje ne čuvaju ni jednu konstantu. Potreban i dovoljan uslov da prosta Booleova funkcija pripada ovoj klasi je: $f(0,\ldots,0) = 1$ i $f(1,\ldots,1) = 0$.

$K_{11}$ - klasa funkcija koje čuvaju samo konstantu 1. Potreban i dovoljan uslov da prosta Booleova funkcija pripada ovoj klasi je: $f(0,\ldots,0) = f(1,\ldots,1) = 1$.

Svaka od četiri gore navedene klase sadrži po $2^{2^n} - 2$ funkcija.

# 3. NEKE OSOBINE MONOTONIH BOOLEOVIH FUNKCIJA NAD KONAČNIM BOOLEOVIM ALGEBRAMA

## 3.1. Monotone Booleove funkcije

Definicija 3.1. Za Booleovu funkciju $f: B^n \to B$ kažemo da je izotona (antitona) u odnosu na promenljivu $x_i$ ako $b_i \le c_i$ povlači

$$f(x_1,\dots,x_{i-1},b_i,x_{i+1},\dots,x_n) \le f(x_1,\dots,x_{i-1},c_i,x_{i+1},\dots,x_n)$$

$$(f(x_1,\dots,x_{i-1},b_i,x_{i+1},\dots,x_n) \ge f(x_1,\dots,x_{i-1},c_i,x_{i+1},\dots,x_n)).$$

Za funkciju koja je bilo izotona bilo antitona u odnosu na promenljivu $x_i$, kažemo da je monotona u odnosu na tu promenljivu. Funkciju koja je izotona (antitona, monotona) u odnosu na sve svoje promenljive nazivamo izotonom (antitonom, monotonom).

U dvo-elementnoj Booleovoj algebri tj u algebri logike, monotone funkcije su od posebnog značaja. Klasa monotonih logičkih funkcija M zatvorena je tj supstitucijama monotonih logičkih funkcija mogu se dobiti opet samo monotone logičke funkcije. Dalje, M je funkcijski skoro kompletan tj on nije funkcijski kompletan ali dodajući mu proizvoljnu nemonotonu logičku funkciju dobija se funkcijski kompletan skup tj takav skup funkcija iz kojih se supstitucijama mogu generisati sve logičke funkcije.

Sledeća lema omogućava da se osobine monotonih Booleovih funkcija nad proizvoljnom konačnom Booleovom algebrom ispituju pomoću monotonih logičkih funkcija.

<u>Lema 3.1</u>. Booleova funkcija $f\colon B^n \to B$ je monotona ako i samo ako su sve njene komponente $f^k\colon B_2^n \to B_2$ monotone logičke funkcije $(k = 1,2,\ldots,q)$.

<u>Dokaz</u>. Dajemo dokaz za izotone Booleove funkcije. Dokaz za antitone funkcije je potpuno analogan (što je slučaj sa svim teoremama ovog poglavlja).

(i) Uslov je potreban. Predpostavimo da je funkcija $f$ izotona tj da $X \leq Y$ $(X,Y \in B^n)$ povlači $f(X) \leq f(Y)$.

Ako je sada $X^k \leq Y^k$, za svako $k = 1,2,\ldots,q$, onda je $X \leq Y$ (zbog (1.67)) tj $f(X) \leq f(Y)$ (na osnovu predpostavke), što povlači, opet na osnovu (1.67), $f^k(X^k) \leq f^k(Y^k)$, za svako $k = 1,2,\ldots,q$.

(ii) Uslov je dovoljan. Predpostavimo da, za svako $k = 1,2,\ldots,q$, $X^k \leq Y^k$ povlači $f^k(X^k) \leq f^k(Y^k)$. Tada $X \leq Y$ povlači (na osnovu (1.67)) $X^k \leq Y^k$ za svako $k = 1,2,\ldots,q$, tj $f^k(X^k) \leq f^k(Y^k)$ po predpostavci, odakle, opet na osnovu (1.67) sledi $f(X) \leq f(Y)$.

Na osnovu leme 3.1, može se dobiti procena o broju monotonih Booleovih funkcija nad konačnom Booleovom algebrom sa $2^q$ elemenata.

<u>Posledica 1</u>. Broj izotonih Booleovih funkcija od jedne promenljive jednak je $3^q$.

Naime, na toliko načina mogu se od tri izotone logičke funkcije od jedne promenljive $(0, x, 1)$ formirati različite reprezentacije Booleovih funkcija od jedne promenljive nad algebrom $B_2^q$.

Broj izotonih Booleovih funkcija od dve promenljive jednak je $6^q$ .

Posledica 2. Broj izotonih Booleovih funkcija od n promenljivih $N(n)$ zadovoljava uslov:

$$(3.1) \qquad 2^{q^{\binom{n}{[\frac{n}{2}]}}} \leq N(n) \leq 3^{q^{\binom{n}{[\frac{n}{2}]}}}$$

Sledi na osnovu leme 3.1 i ocena Gilberta [15] i Hansela [20] za monotone logičke funkcije.

Sledeća teorema je uopštenje jedne teoreme koju je dokazao Scognamiglio (1960, [61]) ali samo za Booleove funkcije od jedne promenljive.

Teorema 3.1 Domen vrednosti izotone Booleove funkcije $f : B^n \to B$ je interval $[f(0,\dots,0),f(1,\dots,1)]$ i poklapa se sa skupom svih onih elemenata a iz B za koje je $f(a,\dots,a) = a$ .

Dokaz. Kako je funkcija f izotona, to je, za svako $X = (x_1,\dots,x_n)$ iz $B^n$

$$(3.2) \qquad f(0,\dots,0) \leq f(x_1,\dots,x_n) \leq f(1,\dots,1).$$

S druge strane, prema teoremi 2.1 je $f(a,\dots,a) = a$ za svako a iz intervala $[f(0,\dots,0),f(1,\dots,1)]$, čime je teorema dokazana.

Navodimo sada jednu poznatu teoremu o monotonim Booleovim funkcijama:

Teorema 3.2. Booleova funkcija $f: B^n \to B$ je izotona ako i samo ako se može jednoznačno napisati u obliku

$$(3.3) \qquad f(x_1,\dots,x_n) = b_0 \bigvee_{m=1}^{n} \bigvee_{i_1,\dots,i_m}^{1,\dots,n} b_{i_1\dots i_m} x_{i_1}\dots x_{i_m}$$

gde $\bigvee_{i_1,\dots,i_m}^{1,\dots,n}$ označava da se disjunkcija uzima preko svih $\binom{n}{m}$ podskupova $\{i_1,\dots,i_m\}$ od m različitih indeksa iz skupa $\{1,\dots,n\}$ i gde je $b_0 \leq b_{i_1\dots i_m} \leq b_{j_1\dots j_r}$ kad god je $\{i_1,\dots,i_m\} \leq \{j_1,\dots,j_r\} \leq \{1,\dots,n\}$; naime, $b_0 = f(0,\dots,0)$ i $b_{i_1\dots i_m} = f(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, gde je

$$\alpha_{i_1} = \dots = \alpha_{i_m} = 1\,,\ \alpha_k = 0 \quad \text{za} \quad k \notin \{i_1,\dots,i_m\}\ .$$

Dokaz ove teoreme za Booleove funkcije nad proizvoljnom Booleovom algebrom može se naći npr u [59]. Međutim, dokaz gornje teoreme za logičke funkcije je skoro trivijalan a onda, na osnovu leme 3.1, koristeći komponentnu reprezentaciju, lako se vidi da je tvrđenje tačno za Booleove funkcije nad svakom konačnom Booleovom algebrom.

Pre nego što formulišemo sledeću teoremu, dajemo jednu definiciju, koja potiče od Lyngholma i Yourgraua ([41]):

<u>Definicija 3.2</u>. Svakoj Booleovoj funkciji $f\colon B^n \to B$, za svako $i = 1,2,\dots,n$, pridružujemo sledeće funkcije:

$$(3.4) \qquad f_i^1(x_1,\dots,x_n) = f(x_1,\dots,x_n)$$

$$(3.5) \qquad f_i^{p+1}(x_1,\dots,x_n) = f(x_1,\dots,x_{i-1}, f_i^p(x_1,\dots,x_n),\dots,x_n)$$

za $p = 1,2,3,\dots$

Andreoli je dokazao u [2] da je za svaku Booleovu funkciju $f : B \to B$, funkcija $f(f(x))$ izotona Booleova funkcija. U sledećoj teoremi dajemo jedno uopštenje toga njegovog rezultata na funkcije od n promenljivih.

Teorema 3.3. Za svaku Booleovu funkciju $f: B^n \to B$, funkcija

$$(3.6) \qquad (\ldots((f(x_1,\ldots,x_n))_1^2)_2^2\ldots)_n^2$$

je izotona Booleova funkcija.

Dokaz. Dokazaćemo, ustvari, da je za svako $m = 1,2,\ldots,n$, funkcija

$$(3.7) \qquad (\ldots((f(x_1,\ldots,x_n))_1^2)_2^2\ \ldots)_m^2$$

izotona u odnosu na promenljive $x_1,x_2,\ldots,x_m$.

Za $m = 1$, posmatramo funkciju

$$(3.8) \qquad g_1(x_1,\ldots,x_n) = (f(x_1,\ldots,x_n))_1^n$$

$$= f(f(x_1,\ldots,x_n),x_2,\ldots,x_n).$$

Primenjujući na (3.8) poznati identitet

$$(3.9) \qquad f(x_1,\ldots,x_n) = x_1 f(1,x_2,\ldots,x_n) \vee x_1' f(0,x_2,\ldots,x_n)$$

imamo:

$$g_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) = f(x_1,\ldots,x_n)f(1,x_2,\ldots,x_n) \vee$$

$$\vee\ f'(x_1,\ldots,x_n)f(0,x_2,\ldots,x_n)$$

i razvijajući dalje $f(x_1,\ldots,x_n)$ i $f'(x_1,\ldots,x_n)$ na osnovu (3.9):

$$g_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) =$$

$$= (x_1 f(1,x_2,\ldots,x_n) \vee x_1' f(0,x_2,\ldots,x_n)) f(1,x_2,\ldots,x_n) \vee$$

$$\vee (x_1 f'(1,x_2,\ldots,x_n) \vee x_1' f'(0,x_2,\ldots,x_n)) f(0,x_2,\ldots,x_n)$$

$$= x_1 f(1,x_2,\ldots,x_n) \vee x_1' f(0,x_2,\ldots,x_n) f(1,x_2,\ldots,x_n) \vee$$

$$\vee x_1 f'(1,x_2,\ldots,x_n) f(0,x_2,\ldots,x_n) \vee$$

$$\vee x_1' f'(0,x_2,\ldots,x_n) f(0,x_2,\ldots,x_n)$$

$$= x_1(f(1,x_2,\ldots,x_n) \vee f'(1,x_2,\ldots,x_n) f(0,x_2,\ldots,x_n)) \vee$$

$$\vee x_1'(f(0,x_2,\ldots,x_n) f(1,x_2,\ldots,x_n) \vee$$

$$\vee f'(0,x_2,\ldots,x_n) f(0,x_2,\ldots,x_n))$$

$$= x_1(f(0,x_2,\ldots,x_n) \vee f(1,x_2,\ldots,x_n)) \vee$$

$$\vee x_1' f(0,x_2,\ldots,x_n) f(1,x_2,\ldots,x_n).$$

Imajući u vidu da je uvek

$$f(0,x_2,\ldots,x_n) f(1,x_2,\ldots,x_n) \leq f(0,x_2,\ldots,x_n) \vee f(1,x_2,\ldots,x_n),$$

to je na osnovu teoreme 3.2, funkcija

$$x_1'(f(0,x_2,\ldots,x_n) f(1,x_2,\ldots,x_n)) \vee$$

$$\vee x_1(f(0,x_2,\ldots,x_n) \vee f(1,x_2,\ldots,x_n)) =$$

$$= g_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) = (f(x_1,x_2,\ldots,x_n))_1^2$$

izotona u odnosu na promenljivu $x_1$.

Predpostavimo sada da je funkcija

$$(3.1o) \quad g_r(x1,x_2,\ldots,x_n) = (\ldots((f(x_1,x_2,\ldots,x_n))_1^2\ldots)_{r-1}^2)_r^2$$

izotona u odnosu na promenljive $x_1,x_2,\ldots,x_r$, i posmatrajmo funkciju

$$(3.11) \quad g_{r+1}(x_1,x_2,\ldots,x_n) =$$

$$= (\ldots((f(x_1,x_2,\ldots,x_n))_1^2\ldots)_r^2)_{r+1}^2$$

$$= (g_r(x_1,x_2,\ldots,x_n))_{r+1}^2$$

$$= g_r(x_1,\ldots,x_r,g_r(x_1,\ldots,x_n),x_{r+1},\ldots,x_n).$$

Da je funkcija (3.11) izotona po promenljivoj $x_{r+1}$, sledi na osnovu teoreme 3.2, s obzirom da je

$$g_{r+1}(x_1,\ldots,x_r,x_{r+1},x_{r+2},\ldots,x_n) =$$

$$= x'_{r+1}g_r(x_1,\ldots,x_r,0,x_{r+2},\ldots,x_n)g_r(x_1,\ldots,x_r,1,x_{r+2},\ldots,x_n) \vee$$

$$\vee\, x_{r+1}(g_r(x_1,\ldots,x_r,0,x_{r+2},\ldots,x_n) \vee g_r(x_1,\ldots,x_r,1,x_{r+2},\ldots,x_n))$$

i da je uvek

$$g_r(x_1,\ldots,x_r,0,x_{r+2},\ldots,x_n)g_r(x_1,\ldots,x_r,1,x_{r+2},\ldots,x_n) \leqslant$$

$$\leqslant g_r(x_1,\ldots,x_r,0,x_{r+2},\ldots,x_n) \vee g_r(x_1,\ldots,x_r,1,x_{r+2},\ldots,x_n).$$

Izotonost funkcije (3.11) u odnosu na promenljive $x_1, x_2, \ldots, x_r$, sledi na osnovu činjenice da je ta funkcija dobijena supstitucijama iz funkcija koje su, takođe, izotone u odnosu na te iste promenljive (naime, funkcija $g_r$ je, po predpostavci indukcije, izotona u odnosu na promenljive $x_1, x_2, \ldots, x_r$, a i svaka promenljiva (projekcija) je izotona funkcija.

Ovim je dokaz teoreme završen.

Teorema 3.4. Booleova funkcija $f: B^n \to B$ je izotona ako i samo ako je

$$(3.12) \quad f(x_1,\ldots,x_n) = (\ldots((f(x_1,\ldots,x_n))_1^2)_2^2\ldots)_n^2 .$$

Komentar. Poznat je specijalan slučaj ove teoreme za Booleove funkcije od jedne promenljive; umesto (3.12) tada figuriše

$$(3.13) \quad f(x) = f(f(x))$$

i ovu relaciju su, u vezi sa izotonijom Booleovih funkcija od jedne promenljive, ispitivali E. Schröder [60] i G. Andreoli [2].

Dokaz. Da je uslov potreban, sledi na osnovu Teoreme 3.3. Dokazaćemo sada da je uslov i dovoljan. S obzirom na relacije (1.62) - (1.66) i leme 2.1 i 3.1, dovoljno je dati dokaz za logičke funkcije.

Neka je logička funkcija $f^k: B_2^n \to B_2$ izotona. Posmatramo minimalnu disjunktivnu kanonsku formu (MDKF) te funkcije. Iz teorije logičkih funkcija poznato je da se u MDKF izotone logičke funkcije nijedna promenljiva ne pojavljuje sa znakom negacije. To znači da se , za svako $i = 1,2,\dots,n$, MDKF funkcije $f^k(x_1,x_2,\dots,x_n)$ može napisati u obliku

$$(3.14) \qquad x_i P_{i1} \vee x_i P_{i2} \vee \dots \vee x_i P_{im_i} \vee Q_{i1} \vee Q_{i2} \vee \dots \vee Q_{ir_i}$$

gde su $P_{i1}, P_{i2}, \dots, P_{im_i}, Q_{i1}, Q_{i2}, \dots, Q_{ir_i}$ elementarne konjunkcije od kojih ni jedna ne sadrži faktor $x_i$ (nije isključeno da je neki od skupova $\{P_{i1}, P_{i2}, \dots, P_{im_i}\}$ i $\{Q_{i1}, Q_{i2}, \dots, Q_{ir_i}\}$ prazan).

Izdvajajući promenljivu $x_i$, MDKF funkcije $f^k$ može se transformisati u oblik

$$(3.15) \qquad f^k(x_1,\dots,x_n) = x_1\left(\bigvee_{s=1}^{m_1} P_{1s}\right) \vee \left(\bigvee_{t=1}^{r_1} Q_{1t}\right)$$

Supstituirajući umesto promenljive $x_i$ ceo izraz koji određuje MDKF funkcije $f^k$, imamo:

$$(f^k(x_1,\dots,x_n))_1^2 = f^k(f^k(x_1,\dots,x_n),x_2,\dots,x_n) =$$

$$= \left(x_1 \left(\bigvee_{s=1}^{m_1} P_{1s}\right) \vee \left(\bigvee_{t=1}^{r_1} Q_{1t}\right)\right) \left(\bigvee_{s=1}^{m_1} P_{1s}\right) \vee \left(\bigvee_{t=1}^{r_1} Q_{1t}\right) =$$

$$= x_1\Big(\bigvee_{s=1}^{m_1} P_{1s}\Big)\vee\Big(\bigvee_{t=1}^{r_1} Q_{1t}\Big)\Big(\bigvee_{s=1}^{m_1} P_{1s}\Big)\vee$$

$$\vee\Big(\bigvee_{t=1}^{r_1} Q_{1t}\Big)$$

$$= x_1\Big(\bigvee_{s=1}^{m_1} P_{1s}\Big)\vee\Big(\bigvee_{t=1}^{r_1} Q_{1t}\Big)\ ,$$

tj funkcija $(f^k)_1^2$ ima analitički izraz identičan sa MDKF funkcije $f^k$, dakle, te dve funkcije imaju istu MDKF, što znači da su međusobno jednake.

Iterirajući gornji postupak, dobijamo:

$$(3.16)\qquad f^k = (f^k)_1^2 = ((f^k)_1^2)_2^2 = \ldots = (\ldots((f^k)_1^2)_2^2\ldots)_n^2\ ,$$

za svako $k = 1,2,\ldots,q$. Dakle, važi (3.12), čime je dokaz završen.

## 3.2. Monotone logičke funkcije

U okviru ovog paragrafa posmatraćemo isključivo dvoelementnu Booleovu algebru i monotone Booleove funkcije nad tom algebrom, dakle, monotone logičke funkcije. Rezultati će biti korišćeni i u sledećem poglavlju. Elemente skupa $B_2^n$ tj uređene n-torke nula i jedinica nazivaćemo n-dimenzionalnim binarnim vektorima ili kratko vektorima

Definicija 3.3. Za n-dimenzionalni binarni vektor $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ i minterm $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_m}$ kažemo da su odgovarajući jedan drugom ako je $\alpha_{i_1} = \alpha_{i_2} = \ldots = \alpha_{i_m} = 1$

i $\alpha_j = 0$ za svako $j \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$.

U skupu $B_2^n$ može se posmatrati relacija $\subseteq$ definisana na sledeći način:

(3.17) $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \subseteq (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ ako i samo ako je $\alpha_i \leq \beta_i$ za svako $i = 1, 2, \ldots, n$.

Lako je videti da je to relacija delimičnog uređenja u skupu n-dimenzionalnih binarnih vektora.

<u>Lema 3.2.</u> Ako su $P$ i $Q$ mintermi odgovarajući redom vektorima $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ i $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, onda $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \subseteq (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ povlači $P \geq Q$.

<u>Dokaz.</u> Neka je $\alpha_{i_1} = \ldots = \alpha_{i_m} = 1$ i $\alpha_j = 0$ za $j \notin \{i_1, \ldots, i_m\}$. Tada je $P = x_{i_1} \ldots x_{i_m}$.

Na osnovu (3.17) je $\beta_{i_1} = \ldots = \beta_{i_m} = \beta_{i_{m+1}} = \ldots = \beta_{i_r} = 1$, $(r \geq 0)$, dakle, $Q = x_{i_1} \ldots x_{i_m} x_{i_{m+1}} \ldots x_{i_r} = PR$, gde je $R = x_{i_{m+1}} \ldots x_{i_r}$ (za $r=0$; $R = 1$), te zbog $PR \leq P$, sledi da je $Q \leq P$.

Matricu čiji su svi elementi nule i jedinice tj elementi iz $B_2$ nazivamo <u>binarnom</u> ili <u>Booleovom matricom</u>.

<u>Definicija 3.4.</u> Za Booleovu matricu kažemo da je <u>M-matrica</u> ako i samo ako među vektor-vrstama te matrice nema međusobno uporedivih vektora u odnosu na relaciju (3.17).

Sa $L_f$ obeležavaćemo broj minterma u MDKF monotone logičke funkcije f tj <u>dužinu</u> MDKF te funkcije.

<u>Definicija 3.5.</u> Za Booleovu matricu $F$ reda $L_f \cdot n$ i monotonu logičku funkciju $f: B_2^n \to B_2$ kažemo da <u>odgovaraju jedna drugoj</u> odnosno da su <u>međusobno odgovarajuće</u> ako i samo ako su vrste matrice $F$ n-dimenzionalni binarni vektori koji odgovaraju redom mintermima MDKF funkcije $f$.

<u>Teorema 3.5.</u> Odgovarajuća matrica svake monotone logičke funkcije je neka M-matrica i obrnuto, svaka Booleova M-matrica je odgovarajuća matrica neke monotone logičke funkcije.

<u>Dokaz.</u> Neka je $f: B_2^n \to B_2$ monotona logička funkcija. Ukoliko bi za neke dve vrste njoj odgovarajuće matrice bilo $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leq (\beta_1, \dots, \beta_n)$ to bi značilo da njima odgovarajući minterm $P$ i $Q$, na osnovu leme 3.2, zadovoljavaju uslov $P \geqslant Q$; s druge strane minterm $P$ i $Q$ su uključeni u MDKF funkcije $f$ a to je kontradikcija. Naime, nijedna disjunktivna kanonska forma koja uključuje minterme $P$ i $Q$ takve da je $P \geqslant Q$ ne može biti minimalna jer se može dalje minimizirati korišćenjem jednakosti: $P \vee Q = P$ koja je ekvivalentna sa: $P \geqslant Q$. Dakle, odgovarajuća matrica funkcije $f$ ne sadrži ni jedan par uporedivih vrsta, što znači da je to M-matrica.

Obrnuto, neka je $F$ Booleova M-matrica reda $r \cdot n$. Formiramo odgovarajući minterm svakog vektora-vrste. Tada je disjunkcija svih tih minterma MDKF neke logičke funkcije jer zbog neuporedivosti odgovarajućih vektora, neuporedivi su međusobno i svi minterm te disjunktivne kanonske forme, što znači da se ona ne može dalje skraćivati primenom zakona apsorpcije. Kako ta MDKF ne sadrži negirane promenljive, ona je MDKF neke monotone logičke funkcije.

Ovim je dokaz teoreme završen.

Definicija 3.5. Za binarni n-dimenzionalni vektor kažemo da ima nivo k ili da je k-tog nivoa ako i samo ako među njegovim komponentama ima tačno k jedinica.

Definicija 3.6. Pod profilom monotone logičke funkcije $f : B_2^n \to B_2$ podrazumevamo niz od $L_f$ nenegativnih celih brojeva uređenih po veličini, u oznaci $]z_1, z_2, \ldots, z_{L_f}[$, gde su $z_1, z_2, \ldots, z_{L_f}$, redom nivoi vektora odgovarajućih mintermima MDKF funkcije f. Brojevi $z_1, z_2, \ldots, z_{L_f}$ su komponente profila.

Primeri: Profil monotone logičke funkcije $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_2x_3 \vee x_2x_4 \vee x_1$ je $]1,2,2[$. Istog profila su i monotone logičke funkcije $g(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_3 \vee x_3x_4 \vee x_2$, $h(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = x_2 \vee x_1x_4 \vee x_5x_4$ itd. Projekcije i samo one imaju profil $]1[$. Prirodno je uzeti da konstanta 0 ima profil dužine nula a profil konstante 1 je $]0[$.

Ako dve Booleove matrice smatramo ekvivalentnim ukoliko se jedna iz druge mogu dobiti nekom permutacijom vrsta, onda, na osnovu teoreme 3.5, sledi da se između skupa svih monotonih logičkih funkcija $f: B_2^n \to B_2$ i skupa svih neekvivalentnih Booleovih M-matrica može uspostaviti obostrano jednoznačna korespondencija, tj ta dva skupa su iste kardinalnosti. Tako se, umesto o profilu monotone funkcije, može govoriti o profilu njoj odgovarajuće M- matrice.

Definicija 3.7. Ako su sve komponente profila monotone logičke funkcije $f: B_2^n \to B_2$ jednake istom broju k, kažemo da je f homogena monotona funkcija k-tog nivoa.

Kao posledice teoreme 3.5, dobijaju se sledeća tvrđenja o broju homogenih logičkih funkcija:

Posledica 1. Broj homogenih logičkih funkcija $f: B_2^n \rightarrow B_2$ k-tog nivoa jednak je $2^{\binom{n}{k}}$.

Naime, ima $\binom{n}{k}$ različitih n-dimenzionalnih vektora k-tog nivoa i među njima nema uporedivih, tj bilo kojih k različitih binarnih vektora k-tog nivoa, $1 \leq k \leq \binom{n}{k}$, uzeti kao vrste Boole-ove matrice obrazuju M-matricu.

Posledica 2. Ukupan broj homogenih monotonih logičkih funkcija od n promenljivih jednak je $\sum_{k=0}^{n} 2^{\binom{n}{k}}$.

Taj broj je veći od minorante za broj monotonih logičkih funkcija - $2^{\binom{n}{[\frac{n}{2}]}}$, koju je dao Hansel u [2o].

# 4. PRIMENA MONOTONIH BOOLEOVIH FUNKCIJA U ISTRAŽNOJ TEORIJI

## 4.1. Istražna teorija

Istražna teorija (search theory, teorija poiska, théorie des questionnaires) je relativno nova grana teorije informacije. Njoj je danas posvećena prilično obimna literatura; posebno treba pomenuti monografiju [49] Picarda i ekspozitorni članak Parhomenka [48].

Tipičan problem istražne teorije je sledeći:

(P) Identifikovati nepoznati element (ili više njih) iz konačnog skupa $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, testirajući neke podskupove skupa X tj ispitujući da li oni sadrže nepoznati element ili ne. Pritom, postupak identifikacije mora biti optimalan s obzirom na neki utvrđeni kriterijum.

Problem se može posmatrati i sa gledišta detekcije neispravnosti odnosno dijagnosticiranja nekog sistema tj otkrivanja neispravnih delova toga sistema.

Postoji mnogo praktičnih problema toga tipa. Prvi od njih koji je najviše obrađivan i najčešće citiran u literaturi (ako ostavimo po strani mnogobrojne zadatke zabavnog karaktera kao one o neispravnim novčićima itd koji spadaju u matematički folklor) je sledeći (Dorfman [12], 1943. i Sterrett [67], 1957.):

Wassermanov test velikog uzorka ljudi: X je skup ljudi. Test se sastoji iz dva dela:

(i) Uzorak krvi uzima se od svakog čoveka.

(ii) Uzorci krvi podvrgavaju se laboratorijskoj analizi koja ukazuje na prisustvo odnosno odsustvo određenog antigena. Prisustvo antigena je pouzdan indikator infekcije. Umesto da podvrgavamo analizi svaki uzorak krvi posebno, može se anali-zi podvrći mešavina više uzoraka i na taj način ustanoviti da li se u određenom podskupu nalazi barem jedan inficiran čovek ili ne.

Pred sličnim problemom nalazi se lekar kad treba da iz konačnog skupa oboljenja identifikuje ono od koga pati njegov pacijent; TV-mehaničar čiji je zadatak da testirajući pojedine blokove neispravnog aparata pronađe kvar tj neispravan deo; kriminalistički inspektor koji iz konačnog skupa sumnjivih lica treba, raznim metodama, da otkrije jedinog (predpostavimo da je samo jedan) krivca; hemičar koji iz konačnog skupa raznih hemikalija treba da izdvoji onu koja u smeši sa određenom hemikalijom proizvodi određenu reakciju.

Obično se o traženom tj nepoznatom elementu govori kao o neispravnom (defective) a o svakom podskupu skupa X koji sadrži barem jedan neispravan element kao o neispravnom skupu.

Svaki podskup A skupa X možemo smatrati testom, podrazumevajući pritom da raspolažemo načinom (postupkom) da za svaki podskup A utvrdimo da li je neispravan ili ne.

Jasno je, onda, da je sve neispravne elemente skupa X moguće identifikovati na taj način što ćemo testirati pojedinačno svaki element skupa X. Međutim, ta strategija "element po element" nije u opštem slučaju optimalna s obzirom na usvojeni kriterijum optimalnosti.

Problemi istražne teorije, pored zajedničkih crta, mogu da se razlikuju u mnogim stvarima. Najvažnije su:

(A) Broj neispravnih elemenata. Tu postoje ove mogućnosti:

(a) Unapred je poznat broj neispravnih elemenata ili granice u kojima se taj broj kreće.

(b) Svaki element može da bude neispravan pri čemu su verovatnoće neispravnosti za pojedine elemente u opštem slučaju različite.

U slučaju (Aa), zbog nedostatka bilo kakve dopunske informacije o mogućem rezultatu testiranja, može se smatrati da su svi mogući ishodi jednako verovatni i ta verovatnoća je unapred poznata.

Primer: Ako je u skupu $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ tačno k neispravnih elemenata, onda je za svaki podskup A skupa X, za koji je $|A| = k$, verovatnoća da je on skup svih neispravnih elemenata iz X, jednaka $\frac{1}{\binom{n}{k}}$.

(B) Skup koji se testira može da:

(a) zavisi od rezultata predhodnih testova,

(b) ne zavisi od rezultata predhodnih testova.

Drugi slučaj obično nastupa kad istraživač (osoba odnosno mašina koja vrši testiranje) poseduje dovoljno veliku memoriju. Mi ćemo se baviti upravo ovim slučajem.

(C) Kriterijum optimalnosti. Naš cilj može da bude:

(a) minimizacija prosečnog broja testova,

(b) minimizacija maksimalnog broja testova.

Prvi slučaj (problemi tipa (Ca)) je više statističkog karaktera i on je do sada pretežno izučavan. Najviše su se ovim problemima bavili Sobel ( [63], [64], [65], [66] ), Groll ( [66]), Kumar ([33], [34]), Nebenzahl ([47]), Dorfman ([12]), Katona ([27], [28]), Picard ([49]), Renyi ([53], [54], [55], [56]), Cesari ([9]), Hu ([22]), Knuth ([31]), Tucker ([22]) i drugi.

Svi ti radovi odnose se, uglavnom, na probleme tipa (Ca) tj ispituju se strategije za identifikaciju neispravnih elemenata sa što manjim prosečnim brojem testova. Međutim, samo u vrlo specijalnim slučajevima postignuti su zadovoljavajući rezultati tj nađene procedure sa zaista najmanjim mogućim prosečnim brojem testova.

U ovom radu bavimo se problemima tipa (Cb) koji su više kombinatornog karaktera. Jedan opštiji problem može se formulisati na sledeći način:

(P′) U skupu $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ima tačno m neispravnih elemenata. Naći optimalnu strategiju za identifikaciju svih neispravnih elemenata.

Preciziraćemo prvo pojam strategije.

Neka je $A_1$ prvi test ($A_1$ je neki podskup skupa X iz (P′)) $A_j(e_1, e_2, \ldots, e_{j-1})$, $(1 < j \leq k;\ e_1, e_2, \ldots, e_{j-1} \in \{0,1\})$, je j-ti test pod uslovom da su rezultati predhodnih testova redom $e_1$, $e_2, \ldots, e_{j-1}$ ($e_r = 1$ znači: skup $A_r(e_1, \ldots, e_{r-1})$ je neispravan; $e_r = 0$ znači: skup $A_r(e_1, \ldots, e_{r-1})$ je ispravan).

Ako $A_{k+1}(e_1, \ldots, e_k)$ nije definisan, ali $A_k(e_1, \ldots, e_{k-1})$ jeste, onda rezultati $e_1, e_2, \ldots, e_k$, zajedno sa podskupovima

$$(4.1) \quad A_1,\ A_2(e_1),\ A_3(e_1,e_2),\ldots,\ A_k(e_1,e_2,\ldots,e_{k-1})$$

jednoznačno određuju skup svih neispravnih elemenata iz X.

Definicija 4.1. Familiju podskupova (4.1) nazivamo strategijom.

Rezultat testiranja je jedan od $\binom{n}{m}$ m-članih podskupova skupa X. Obeležimo te podskupove sa $B_i$ ($i = 1,2,\ldots,\binom{n}{m}$).

Ako fiksiramo jedan $B_i$, tada je niz $e_1(i)$, $e_2(i),\ldots,$ $e_{k_i}(i)$ rezultata pojedinačnih testova jednoznačno određen ($A_{k_i+1}(e_1(i),\ldots,e_{k_i}(i))$ nije definisan). Broj neophodnih testova za identifikaciju $B_i$, ukoliko je to skup svih neispravnih elemenata je $k_i$.

Prema kriterijumu (Cb), potrebno je minimizirati izraz:

$$(4.2) \qquad \max_{i=1}^{\binom{n}{m}} k_i$$

nad svim mogućim strategijama (4.1), tj ako sa S obeležimo skup svih strategija (4.1), onda treba naći:

$$(4.3) \quad L_m = \min_{S} \max_{i=1}^{\binom{n}{m}} k_i .$$

Primetimo, da na ovaj način mi pridružujemo svakom mogućem ishodu testirenja $B_i$ jedan niz nula i jedinica: $e_1(i),\ldots,e_{k_i}(i)$. To pridruživanje je kod, na jeziku teorije informacije. Sam niz je kodna reč. Ovaj niz ima prostu osobinu: ne postoje različiti i i j takvi da je $k_j \geqslant k_i$ i istovremeno $e_1(i) = e_1(j),\ \ldots\ ,\ e_{k_i}(i) = e_{k_i}(j)$.

Drugim rečima, nijedna kodna reč nije početak neke druge. Kažemo da je to prefiksni kod. S druge strane radi se o binarnom kodu. S obzirom na to i na uspostavljeno preslikavanje, veličina (4.2) mora da zadovoljava uslov:

$$(4.4) \qquad \max_{i=1}^{\binom{n}{m}} k_i \geqslant \log_2 \binom{n}{m}$$

odakle sledi i

$$(4.5) \qquad L_m \geqslant \log_2 \binom{n}{m}$$

tj: Optimalna strategija (optimalna u smislu (Cb)) za problem (P') mora da sadrži barem $\left[\log_2 ( \binom{n}{m} - 1)\right] + 1$ testova, za $n > 1$, $m < n$.

Jasno je, da se svaka strategija može predstaviti u obliku binarnog drveta (o drvetima videti Kurepa [38], [39] ), čija je celularnost jednaka broju mogućih ishoda testiranja. U konkretnom slučaju, za problem (P'), celularnost drveta je $\binom{n}{m}$ a anticelularnost je $\max_{i=1}^{\binom{n}{m}} k_i$. Svakom maksimalnom lancu pridružen je jedan mogući ishod odnosno njegova kodna reč. Nazivaćemo to drvo <u>istražnim drvetom</u>.

Sad se problem nalaženja optimalne strategije svodi na to da se između svih istražnih drveta za dati problem odredi ono koje ima najmanju anticelularnost.

## 4.2. Primena monotonih Booleovih funkcija u istražnoj teoriji

Neispravnost, koja je razmatrana u predhodnoj tački, ima ovo očigledno ali bitno svojstvo:

Ako neki skup sadrži barem jedan neispravan element, onda i svaki njegov nadskup sadrži barem jedan neispravan element tj svaki nadskup neispravnog skupa je neispravan skup.

Navedeno svojstvo nam i omogućava da u tretiranju problema istražne teorije koristimo monotone Booleove funkcije.

Neka je $P(X)$ partitivni skup skupa $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Booleova algebra $\langle P(X), \cup, \cap, ^-, \emptyset, X \rangle$, gde su $\cup$, $\cap$ i $^-$, redom operacije unije, preseka i komplementa u odnosu na skup X, izomorfna je Booleovoj algebri $\langle B_2^n, \vee, \cdot, ', 0, 1 \rangle$ iz tačke 1.3 (sa n umesto q), gde smo sa 0 i 1 označili kratko binarne vektore $(0,0,\ldots,0)$ i $(1,1,\ldots,1)$ iz $B_2^n$. Relaciji $\leq$ u algebri $B_2^n$, odgovara u tom izomorfizmu relacija sadržavanja skupova $\subseteq$ u algebri $P(X)$. Jednočlanim podskupovima skupa X kao atomima algebre $P(X)$ odgovaraju u tom izomorfizmu atomi $\Delta_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ algebre $B_2^n$ tj binarni vektiri među čijim komponentama je tačno jedna jedinica.

Skup svih neispravnih podskupova skupa X može se posmatrati kao unarna relacija skupa $P(X)$. Obeležimo tu relaciju s. Ona ima sledeću osobinu:

$$(4.6) \qquad A_1 \in D \text{ i } A_1 \subseteq A_2 \implies A_2 \in D$$

Neka su $\overline{B_1}$ i $\overline{B_2}$ binarni vektori koji u posmatranom izomorfizmu odgovaraju skupovima $A_1$ i $A_2$ i f izomorfna slika unarne relacije D. Tada je f unarna relacija skupa $B_2^n$, za koju važi:

(4.7) $\overline{B}_1 \in f$ i $\overline{B}_1 \leq \overline{B}_2 \Longrightarrow \overline{B}_2 \in f$

Pisaćemo $f(\overline{B}) = 1$ ako je $\overline{B} \in f$, odnosno $f(\overline{B}) = 0$ ako $\overline{B} \notin f$. Unarna relacija f skupa $B_2^n$ može se sada posmatrati kao preslikavanje $f: B_2^n \rightarrow B_2$, tj kao logička funkcija od n promenljivih, koja na osnovu (4.7), zadovoljava uslov:

(4.8) $f(x_1,x_2,\ldots,x_n) = 1$ i $(x_1,x_2,\ldots,x_n) \leq (y_1,y_2,\ldots,y_n)$

$$\Longrightarrow f(y_1,y_2,\ldots,y_n) = 1$$

dakle, ta funkcija je monotona.

Sada se problem (P′) može prevesti na jezik monotonih logičkih funkcija, tako da glasi:

(P′′) Naći optimalnu strategiju za identifikaciju monotone logičke funkcije 1. nivoa ako je poznat njen profil.

Poznavanje profila funkcije $f: B_2^n \rightarrow B_2$, ovde se svodi na poznavanje dužine profila, tj na poznavanje broja $L_f$, pošto su sve komponente profila jedinice. Identifikacija funkcije $f: B_2^n \rightarrow B_2$, ekvivalentna je identifikaciji njoj odgovarajuće M-matrice.

Pod testovima ovde podrazumevamo n-dimenzionalne binarne vektore tj elemente skupa $B_2^n$, pri čemu se predpostavlja da za svaki binarni vektor $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ iz $B_2^n$ znamo odrediti vrednost $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, tj raspolažemo postupkom (mehanizmo za izračunavanje vrednosti funkcije $f\colon B_2^n \to B_2$, za proizvoljnu kombinaciju vrednosti njenih promenljivih.

Definicija 4.1. može se preformulisati na sledeći način:

Definicija 4.2. Strategija je familija matrica

$$\begin{bmatrix} \overline{B}_1 \\ \overline{B}_2(e_1) \\ \overline{B}_3(e_1,e_2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \overline{B}_k(e_1,e_2,\ldots,e_{k-1}) \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

gde je $\overline{B}_1 = (b_1^1,\ldots,b_n^1)$ prvi test,

$\overline{B}_j(e_1,\ldots,e_{j-1}) = (b_1^j,\ldots,b_n^j)(e_1,\ldots,e_{j-1})$,

$(1 < j \leq k;\ e_1,\ldots,e_{j-1} \in \{0,1\})$, je j-ti test pod uslovom da su rezultati predhodnih testova $e_1,\ldots,e_{j-1}$, tj pod uslovom da je:

$$f(b_1^1,\ldots,b_n^1) = e_1 ,$$

$$f(b_1^2,\ldots,b_n^2) = e_2 ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f(b_1^{j-1},\ldots,b_n^{j-1}) = e_{j-1} ,$$

da $B_{k+1}$ nije definisan i da testovi $B_1$, $B_2(e_1)$, $B_3(e_1,e_2)$, $\ldots$, $B_k(e_1,e_2,\ldots,e_{k-1})$, svojim rezultatima $e_1, e_2,\ldots, e_k$, jednoznačno određuju nepoznatu monotonu logičku funkciju $f\colon B_2^n \to B_2$, odnosno njoj odgovarajuću M-matricu.

Za najjednostavniji profil homogene monotone funkcije 1. nivoa tj za profil $]1[$, dobija se specijalan slučaj problema (P''):

($P^1$) Naći optimalnu strategiju za identifikaciju nepoznate projekcije $f(x_1,\dots,x_n) = x_i$ .

Naime, jedine monotone logičke funkcije sa profilom $]1[$ su projekcije.

Ovaj slučaj je jednostavan i poznat i u drugim interpretacijama. Ovde ga rešavamo radi potpunosti jer se on pojavljuje kao pomoćni rezultat u drugim, složenijim slučajevima. Rešenje problema ($P^1$) daje sledeća teorema:

<u>Teorema 4.1.</u> Optimalna strategija za identifikaciju projekcije $f(x_1,\dots,x_n) = x_i$ je matrica sa

$$(4.1o) \qquad \left[\log_2(n-1)\right] + 1$$

vrsta, za $n \geqslant 2$.

<u>Dokaz</u>. Gornjem tvrđenju je, očigledno, ekvivalentno sledeće:

Neka je, za $k \geqslant 1$: $2^{k-1} < n \leq 2^k$. Tada postoji strategija sa $k$ vrsta (tj strategija čija matrica ima $k$ vrsta) za identifikaciju promenljive (projekcije) $f(x_1,\dots,x_n) = x_i$ dok strategija sa manje od $k$ vrsta za takvu identifikaciju ne postoji.

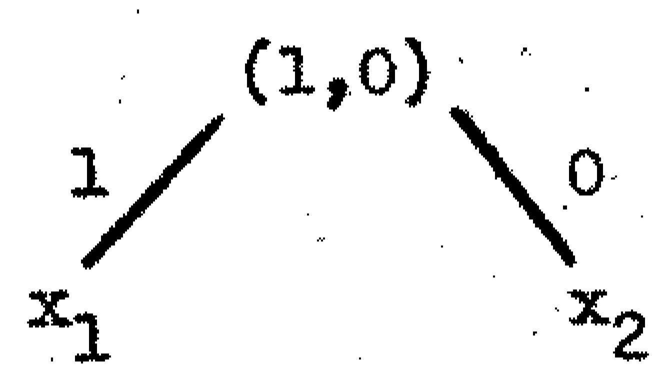
Pre svega, primetimo da zbog monotonosti projekcije važi:

$$(4.11) \qquad f(b_1,\ldots,b_n) = e \quad i \quad b_i \neq e \implies f(x_1,\ldots,x_n) \neq x_i.$$

Dakle, svakim testom eliminiše se izvestan broj projekcija, nakon čega se tražena funkcija može posmatrati kao restrikcija na manji broj promenljivih, tj kao funkcija $f\colon B_2^r \to \bar{B}_2$ $(r < n)$.

Za $k = 1$, jedino za $n = 2$ je zadovoljen uslov: $2^0 < n \leq 2^1$. Treba, dakle, jednim testom identifikovati nepoznatu projekciju $f(x_1,x_2) = x_i$.

Testiramo vektor $(1,0)$. Ako je $f(1,0) = 1$, onda je na osnovu (4.11): $f(x_1,x_2) = x_1$; ako je $f(1,0) = 0$, onda je, takođe, na osnovu (4.11): $f(x_1,x_2) = x_2$. Dakle, ovde se strategija sastoji iz samo jednog testa $(1,0)$, ili u obliku istražnog drveta:




Obeležimo gornju strategiju sa $S_2^1$.

Predpostavimo da tvrđenje teoreme važi za $k = 1, 2, \ldots,$ Posmatrajmo slučaj: $2^m < n \leq 2^{m+1}$, tj treba naći strategiju za identifikaciju nepoznate projekcije $f(x_1,\ldots,x_n) = x_i$.

Za prvi test uzimamo vektor $(1,\ldots,1,0,\ldots,0)$, kod koga su prvih $2^m$ komponenata jedinice a preostale komponente su nule. Neka takvih ima $p$, jasno je da je $p \leq 2^m$. Ako je $f(1,\ldots,1,0,\ldots,0) = 1$, onda je tražena projekcija jedna od $x_i$, gde je $i$ jedan od brojeva: $1, 2,\ldots, 2^m$, što sledi na osnovu (4.11). Po predpostavci indukcije, postoji strategija

$S^1_{2^m}$, čija matrica ima $m$ vrsta, za identifikaciju nepoznate projekcije $g(x_1,\dots,x_{2^m}) = f(x_1,\dots,x_{2^m},0,\dots,0) = x_i$. Ako je, međutim, $f(1,\dots,1,0,\dots,0) = 0$, onda je, na osnovu (4.11), indeks nepoznate projekcije $x_i$, jedan od brojeva: $2^m+1$, $2^m+2$, $\dots$, $2^m+p=n$. Po predpostavci indukcije, postoji strategija $S^1_p$ sa najviše m vrsta (zbog $p \leqslant 2^m$), za identifikaciju nepoznate projekcije $h(x_{2^m+1},\dots,x_{2^m+p}) = f(0,\dots,0,x_{2^m+1},\dots,x_{2^m+p}) = x_i$. Dakle, u svakom slučaju, nepoznata projekcija, posmatrana kao funkcija od $n$ promenljivih ( $2^m < n \leqslant 2^{m+1}$), može se identifikovati sa $m+1$ testova, tj odgovarajuća strategija $S^1_n$ ima $m+1$ vrsta.

Gornji dokaz je konstruktivan, naime on omogućava da se i efektivno konstruiše odgovarajuća strategija. Za $k=1$ $(n=2)$, predstavili smo odgovarajuću strategiju $S^1_2$ u obliku istražnog drveta. Predpostavimo da su u obliku istražnog drveta predstavljene strategije $S^1_n$, za svako $n \leqslant 2^m$. Tada se, za svako $n$ koje zadovoljava uslov: $2^m < n \leqslant 2^{m+1}$, tj za svako $n$ oblika $n = 2^m + p$ $(p \leqslant 2^m)$, odgovarajuća strategija $S^1_{2^m+p}$ može predstaviti u obliku istražnog drveta, po sledećoj shemi:

$$(1,\dots,1,0,\dots,0)$$

$$\overset{1}{\swarrow} \qquad\qquad \overset{0}{\searrow}$$

$$S^1_{2^m}\,(1,\dots,2^m)\,[m] \qquad\qquad S^1_p\,(2^m+1,\dots,2^m+p)\,[\leq m]$$

gde smo u okruglim zagradama iza oznake strategije, naveli indekse projekcija među kojima se traži nepoznata a u srednj zagradama maksimalan broj testova koji zahteva ta strategija odnosno anticelularnost njoj odgovarajućeg istražnog drveta.

Dakle, konstruisali smo strategiju $S_n^1$ koja ima $k$ vrsta, ako je $2^{k-1} < n \leq 2^k$. Njoj odgovarajuće istražno drvo je binarno drvo, čija je celularnost $n$ a anticelularnost $k$.

Da je ta strategija optimalna, sledi na osnovu činjenice da binarno drvo čija je anticelularnost $k-1$ ne može imati celularnost veću od $2^{k-1}$, dakle, ne postoji strategija sa manje od $k$ vrsta za identifikaciju nepoznate projekcije $x_i = f(x_1, \ldots, x_n)$, za $n > 2^{k-1}$.

Ovim je dokaz teoreme 4.1 završen.

Sam proces traženja funkcije $f(x_1, \ldots, x_n) = x_i$, može se predstaviti u matričnom obliku na sledeći način:

Znajući da je za $2^{k-1} < n \leq 2^k$, potrebno najviše $k$ testova, formiramo pravougaonu tablicu reda $(k+1) \cdot n$. Prvih $k$ vrsta određuju matricu reda $k \cdot n$; u dodatnoj, $k+1$. vrsti upisujemo nulu na r-tom mestu kad ustanovimo da je nepoznata funkcija različita od $x_r$ (smatramo da je svakoj koloni matrice pridružena jedna projekcija - i-toj koloni pridružena je projekcija $x_i$). U jednoj koloni, sa desne strane matrice, pored svake vrste ispisujemo vrednost nepoznate funkcije na tom vektoru-vrsti, kao rezultat testiranja toga vektora.

Kao prvi test tj kao prvu vrstu matrice, upisujemo binarni vektor $(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$, kod koga su prvih $2^{k-1}$ komponenata jedinice a ostale su nule. Radi jednostavnosti upisujemo redom samo komponente, bez zagrada i zareza. Ako je vrednost funkcije na tom vektoru jednaka $e$, onda uzimamo da je u svim nižim vrstama matrice $b_i^j = 0$ $(j=2,3,\ldots,k)$, kad god je $b_i^1 \neq e$; u tom slučaju, takođe, upisujemo nulu na i-tom mestu dodatne, k+1. vrste. Preostala prazna mesta obrazuju, takođe, pravougaonu tablicu reda $k\cdot(n-2^{k-1})$, na koju primenjujemo isti postupak kao sa predhodnom i taj postupak iteriramo sve dok u poslednjoj, dodatnoj vrsti sva mesta izuzev jednog ne budu ispunjena nulama. Na preostalo prazno mesto upisujemo jedinicu i ako je ta jedinica na i-tom mestu, onda je tražena funkcija $f(x_1,\ldots,x_n) = x_i$.

Primer: $n = 7$, $k = 3$.

Prvi test:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| | | | | | | |
| | | | | | | |

Rezultat prvog testa i drugi test:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | |
| 0 | 0 | 0 | 0 | | | | |
| 0 | 0 | 0 | 0 | | | | |

Rezultat drugog testa i treći test:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | |

Dakle, kao tražena funkcija identifikovana je projekcija $f(x_1,\dots,x_7) = x_6$ .

Jasno je, da je za neke moguće ishode, ukoliko je $n<2^k$, dovoljno i manje od $k$ testova. U predhodnom primeru, ako je i rezultat drugog testa - 0, onda je nepoznata funkcija identifikovana već posle drugog testa - to je funkcija $f(x_1,\dots,x_7) = x_7$ .

Videli smo da svaka strategija indukuje neki prefiksni kod. U našem slučaju to je bijekcija između skupa homogenih monotonih logičkih funkcija datog profila i nekog podskupa skupa konačnih nizova nula i jedinica, dakle, u pitanju je binarni kod.

Gornji postupak nam omogućava da jednostavno odredimo to preslikavanje. Npr. strategija $S_7^1$ iz navedenog primera indukuje sledeći kod:

$x_1 \leftrightarrow 111$ $\qquad$ $x_2 \leftrightarrow 110$

$x_3 \leftrightarrow 101$ $\qquad$ $x_4 \leftrightarrow 100$

$x_5 \leftrightarrow 011$ $\qquad$ $x_6 \leftrightarrow 010$

$x_7 \leftrightarrow 00$

Kao što se i iz primera može videti to je prefiksni kod jer nijedna kodna reč nije početak neke druge.

Sledeći, dosta složeniji slučaj predstavlja profil $]1,1[$. Taj profil imaju sve monotone logičke funkcije $f: B_2^n \to B_2$, oblika $f(x_1,\dots,x_n) = x_i \vee x_j$ $(i,j = 1,2,\dots,n;\ i \neq j)$. Odgovarajući problem, kao specijalan slučaj problema $(P'')$, glasi.

($P^2$) Naći optimalnu strategiju za identifikaciju nepoznate monotone logičke funkcije $f: B_2^n \to B_2$, ako je poznato da je njen profil $]1,1[$.

Problem tipa (Ca), analogan gornjem, razmatrao je Sobel u [65], gde je data optimalna strategija u smislu minimizacije prosečnog broja testova, za beskonačno mnogo vrednosti od $n$. Naš problem je tipa (Cb) tj naš cilj je da minimiziramo maksimalan broj testova. Sledeća teorema odnosi se na taj problem.

<u>Teorema 4.2.</u> Neka je

$$t_k = F_{\left[\frac{k}{2}\right]} + 2^{\left[\frac{k}{2}\right]} + (1 + (-1)^{k+1}) \cdot 2^{\frac{k-5}{2}} \qquad (k = 2,3,\dots) \tag{4.12}$$

gde je $F_j$ j-ti član Fibonaccijevog niza

$$F_1 = 1,\ F_2 = 1;\quad F_j = F_{j-1} + F_{j-2} \qquad (j = 3,4,\dots). \tag{4.13}$$

Tada je optimalna strategija za identifikaciju nepoznate monotone logičke funkcije $f: B_2^{t_k} \to B_2$, profila $]1,1[$, ona koja dopušta najviše $k$ testova tj nepoznata funkcija se uvek može identifikovati sa najviše $k$ testova dok identifikacija sa manje od $k$ testova nije uvek moguća.

<u>Dokaz.</u> Niz (4.12) može se napisati u obliku

$$(4.14)\qquad \begin{aligned} t_{2m} &= F_m + 2^m \\ t_{2m+1} &= F_m + 2^m + 2^{m-1} \end{aligned} \qquad (m = 1,2,\ldots)$$

Da je strategija sa $k$ testova, ukoliko postoji, optimalna, sledi na osnovu relacije

$$(4.15)\qquad \binom{t_k}{2} > 2^{k-1} \qquad (k = 2,3,\ldots)$$

koja se lako proverava.

Naime, postoji $\binom{t_k}{2}$ mogućih ishoda testiranja, jer postoji toliko različitih monotonih logičkih funkcija $f\colon B_2^{t_k} \to B_2$ sa profilom $]1,1[$. Taj broj je istovremeno jednak i celularnosti odgovarajućeg istražnog drveta, a kako je to binarno drvo, njegova anticelularnost, s obzirom na (4.15), mora biti veća od $2^{k-1}$.

Pokazaćemo sada, da strategija sa najviše $k$ testova, za identifikaciju funkcije $f\colon B_2^{t_k} \to B_2$, profila $]1,1[$, uvek postoji.

Predhodno, navodimo neke relacije, koje se lako proveravaju:

$$(4.16)\qquad F_m \leq 2^{m-2} \qquad (m = 2,3,\ldots)$$

$$(4.17)\qquad 2^m \leq t_{2m} \qquad (m = 1,2,\ldots)$$

$$(4.18)\qquad t_{2m-4} \leq 2^{m-1} \qquad (m = 4,5,\ldots)$$

$$(4.19)\qquad t_{2m-1} \leq 2^m \leq t_{2m} \qquad (m = 2,3,\ldots)$$

(4.2o) $$t_{2m+1} = t_{2m} + 2^{m-1} \qquad (m = 1,2,\ldots)$$

(4.21) $$t_{2m} = t_{2m-1} + t_{2m-4} \qquad (m = 3,4,\ldots)$$

Za prva tri člana niza (4.12): $t_2 = 3$, $t_3 = 4$, $t_4 = 5$, optimalne strategije date su sledećim matricama:

(4.22) $$S^2_{t_2} = S^2_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(4.23) $$S^2_{t_3} = S^2_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(4.24) $$S^2_{t_4} = S^2_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

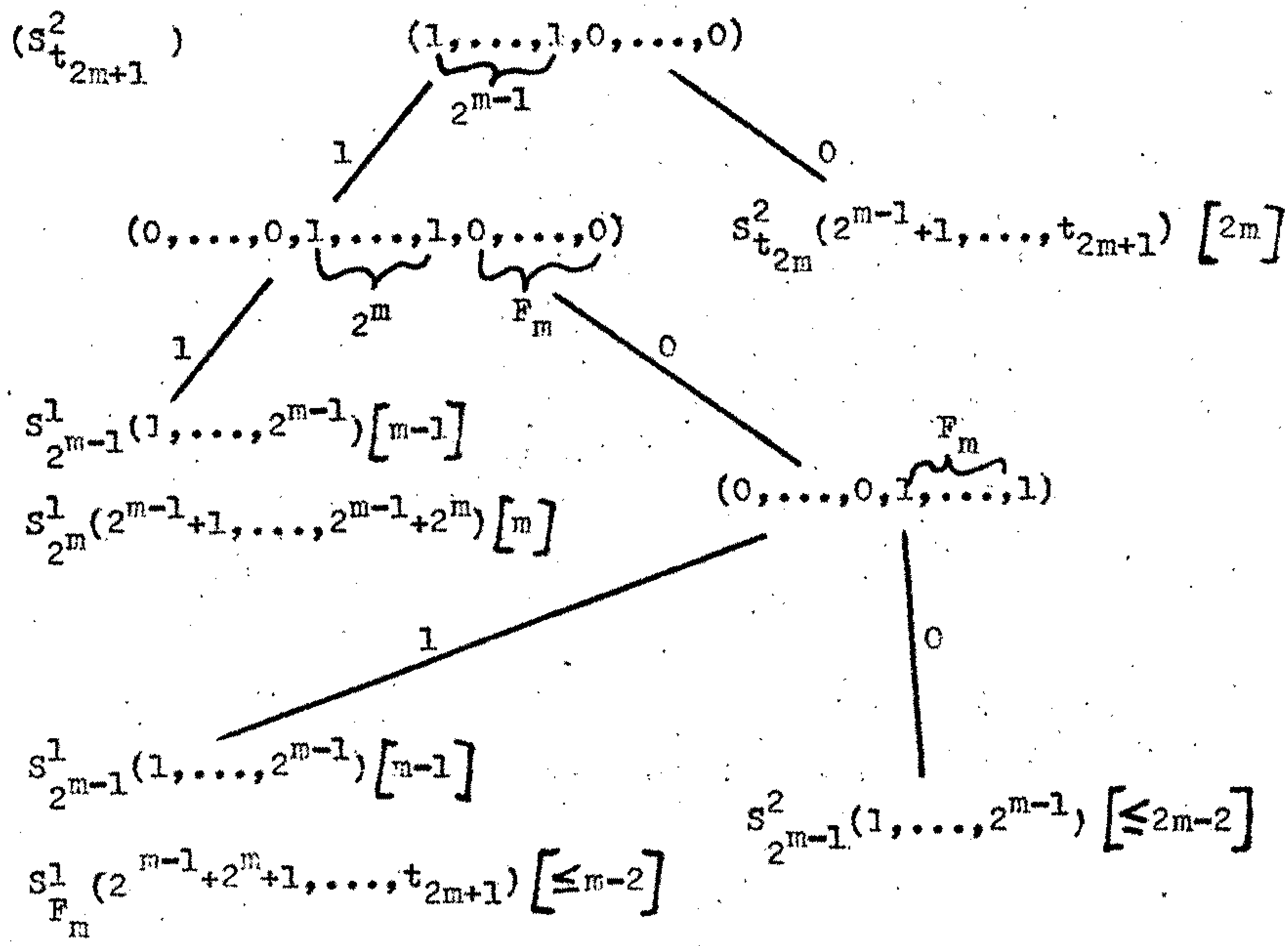
Kao što se vidi, u ovim strategijama su testovi međusobno nezavisni, tj nijedan test ne zavisi od rezultata predhodnih testova; čak je i redosled testova proizvoljan.

Primer: Neka su rezultati testova po osnovu strategije $S^2_5$ , dati sledećom tablicom:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{array}$$

To znači, da je $f(0,1,0,0,0) = 1$ i $f(0,0,0,1,0) = 1$, na osnovu čega se nepoznata funkcija $f\colon B_2^5 \to B_2$, profila $]1,1[$, identifikuje kao funkcija $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = x_2 \vee x_4$. Niz rezultata testova 0101 koji vodi identifikaciji te funkcije je kodna reč te funkcije na osnovu koda indukovanog strategijom $S_5^2$; funkciji $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = x_2 \vee x_5$ npr. odgovara u tom kodu kodna reč 0100 itd.

Predpostavimo sada, da je tvrđenje teoreme tačno za sve prirodne brojeve $k$ veće od 2 a manje od nekog neparnog broja $2m+1$, tj da su nađene optimalne strategije $S_{t_k}^2$ $(2 \leq k \leq 2m)$. Tada se optimalne strategije $S_{t_{2m+1}}^2$ i $S_{t_{2(m+1)}}^2$ mogu dobiti prema sledećim shemama:



$(S^2_{t_{2m+2}})$

$(\underbrace{1,\ldots,1}_{t_{2m-2}},0,\ldots,0)$

1   0

$(\underbrace{0,\ldots,0}_{t_{2m-2}},\underbrace{1,\ldots,1}_{2^m},0,\ldots,0)$   $S^2_{t_{2m+1}}(t_{2m-2}+1,\ldots,t_{2m+2})\ [2m+1]$

1   0

$S^1_{t_{2m-2}}(1,\ldots,t_{2m-2})\ [\leq m]$

$S^1_{2^m}(t_{2m-2}+1,\ldots,t_{2m-2}+2^m)[m]$

$(0,\ldots,0,\overbrace{1,\ldots,1}^{2^{m-1}},\overbrace{0,\ldots,0}^{F_m})$

1   0

$S^1_{t_{2m-2}}(1,\ldots,t_{2m-2})\ [\leq m]$

$S^1_{2^{m-1}}(t_{2m-2}+2^m+1,\ldots,t_{2m-2}+2^m+2^{m-1})\ [m-1]$

$(0,\ldots,0,\overbrace{1,\ldots,1}^{F_m})$

1   0

$S^1_{t_{2m-2}}(1,\ldots,t_{2m-2})\ [\leq m]$

$S^1_{F_m}(t_{2m+2}-F_m+1,\ldots,t_{2m+2})\ [\leq m-2]$

$S^2_{t_{2m-2}}(1,\ldots,t_{2m-2})\ [2m-2]$

Prema shemi za strategiju $S^2_{t_{2m+1}}$, prvi test je binarni vektor $(1,\ldots,1,0,\ldots,0)$ kod koga su prvih $2^{m-1}$ komponenata jedinice a ostale su nule. Ako je na tom vektoru vrednost testirane funkcije jednaka $0$, onda je za tu funkciju, koja ima oblik $f(x_1,\ldots,x_{t_{2m+1}}) = x_i \vee x_j$, uvek: $i,j \neq 1, 2,\ldots, 2^{m-1}$, te preostaje da se indeksi $i,j$ traže među preostalih $t_{2m}$ brojeva: $2^{m-1}+1,\ldots, t_{2m+1}$; za to po predpostavci ~~ind~~ postoji strategija $S^2_{t_{2m}}$ sa najviše $2m$ testova. Ukoliko je rezultat prvog testa $-$ 1, onda testiramo redom vektore

$$(\underbrace{0,\ldots,0}_{2^{m-1}},\underbrace{1,\ldots,1}_{2^m},0,\ldots,0),\ (0,\ldots,0,\underbrace{1,\ldots,1}_{F_m}),$$

sve dok na nekom od njih ne dobijemo pozitivan rezultat (vrednost $-$ 1), u kom slučaju se dalje traženje svodi na uzastopnu primenu dve nezavisne strategije: $S^1_{2^{m-1}}$ i $S^1_{2^m}$ odnosno $S^1_{2^{m-1}}$ i $S^1_{F_m}$, zavisno od toga koji od predhodna dva testa daje pozitivan rezultat. Ako je, međutim, na oba ta vektora vrednost funkcije jednaka nuli, onda to znači da oba indeksa ($i$ i $j$) treba tražiti među brojevima: $1, 2, \ldots, 2^{m-1}$; za to po predpostavci indukcije postoji strategija $S^2_{2^{m-1}}$ sa najviše $2m-2$ testova, na osnovu (4.17).

Dakle, u svakom slučaju, dovoljno je $2m+1$ testova za identifikaciju nepoznate funkcije $f(x_1,\ldots,x_{t_{2m+1}}) = x_i \vee x_j$.

Analogno, sa sheme za strategiju $S^2_{t_{2m+2}}$, vidi se da ona omogućava da se nepoznata funkcija $f(x_1,\ldots,x_{t_{2m+2}}) = x_i \vee x_j$, identifikuje primenom najviše $2m+2$ testova.

Ovim je, matematičkom indukcijom, teorema 4.2 dokazana.

Dokaz teoreme 4.2 je konstruktivan i omogućava i efektivno nalaženje optimalne strategije $S_n^2$ za svako $n$ koje se može napisati u obliku (4.12). Naime, strategije za prva tri člana niza (4.12) su date sa (4.22), (4.23) i (4.24) a koristeći sheme $(S^2_{t_{2m+1}})$ i $(S^2_{t_{2m+2}})$ naizmenično, dobijaju se rekurzivno strategije za svaki član niza (4.12). Prema teoremi 4.2, sve su one optimalne.

Primer: $t_7 = t_{2\cdot 3+1} = F_3 + 2^3 + 2^2 = 2 + 8 + 4 = 14.$

Navodimo postupak identifikacije funkcije $f(x_1,\ldots,x_{14}) = x_i \vee x_j$, primenom strategije $S^2_{14}$:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $x_9$ | $x_{10}$ | $x_{11}$ | $x_{12}$ | $x_{13}$ | $x_{14}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | |

U dve dodatne vrste tablice, dobijene su jedinice u kolonama koje odgovaraju promenljivim $x_6$ i $x_{12}$ respektivno. Dakle, kodna reč 0101101, kao niz rezultata testova, vodi identifikaciji funkcije $f(x_1,\ldots,x_{14}) = x_6 \vee x_{12}$ .

U sledećoj tablici navodimo prvih nekoliko članova niza (4.12):

| k | $t_k$ | k | $t_k$ | k | $t_k$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 11 | 53 | 2o | 1o79 |
| 3 | 4 | 12 | 72 | 21 | 1591 |
| 4 | 5 | 13 | 1o4 | 22 | 2137 |
| 5 | 7 | 14 | 141 | 23 | 3161 |
| 6 | 1o | 15 | 2o5 | 24 | 424o |
| 7 | 14 | 16 | 277 | 25 | 6288 |
| 8 | 19 | 17 | 4o5 | 26 | 8425 |
| 9 | 27 | 18 | 546 | 27 | 12521 |
| 1o | 37 | 19 | 8o2 | 28 | 16761 |

Za prirodne brojeve koji nisu članovi niza (4.12), mogu se izvući sledeći zaključi:

Ako broj $n$ zadovoljava uslov

(4.25) $$t_{k-1} < n < t_k ,$$

onda postoji strategija $S_n^2$ sa najviše $k$ testova; to je neznatno modifikovana strategija $S_{t_k}^2$ (zbog desne nejednakosti (4.25)). S druge strane, na osnovu levog dela nejednakosti (4.25), maksimalan broj testova optimalne strategije za identifikaciju funkcije $f(x_1,\dots,x_n) = x_i \vee x_j$ , ne može biti manji od $k-1$. Dakle, ukoliko strategija $S_n^2$ nije optimalna, onda je maksimalan broj testova te strategije samo za 1 veći od maksimalnog broja testova optimalne strategije za isti problem. Prema tome, kao posledicu teoreme 4.2, možemo formulisati sledeće tvrđenje:

<u>Posledica</u>. Strategija $S_n^2$ , konstruisana prema dokazu teoreme 4.2, je ili optimalna ili <u>skoro optimalna</u> tj dopušta najviše jedan test više od optimalne strategije.

Sledeći korak u pravcu uopštavanja, bio bi problem identifikacije homogene logičke funkcije 1. nivoa $f: B_2^n \to B_2$, čija dužina profila nije veća od nekog datog broja $m$, tj

$(P^{\leq m})$ Naći optimalnu strategiju za identifikaciju nepoznate monotone logičke funkcije 1. nivoa $f: B_2^n \to B_2$, ako je poznato da je $L_f \leq m$.

Sledeće dve teoreme odnose se na taj problem.

<u>Teorema 4.3.</u> Optimalna strategija za problem $(P^{\leq m})$, svodi se na strategiju "element po element", ukoliko je $m \geq \left[\frac{n}{2}\right]$, tj u tom slučaju ne postoji bolji postupak od sistematskog testiranja svih atoma tj binarnih vektora $\Delta_k$ $(k = 1,2,\ldots,n)$.

<u>Dokaz</u>. Za $n = 3$, tvrđenje se lako verifikuje.

Za $n > 3$, broj mogućih ishoda (celularnost istražnog drveta) je

$$(4.26)\qquad \binom{n}{o} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{m}$$

jer je to broj monotonih logičkih funkcija koje zadovoljavaju uslove iz $(P^{\leq m})$.

Taj broj je veći od $2^{n-1}$, za $m \geq \left[\frac{n}{2}\right]$, a za parno $n$ i u slučaju $m = \left[\frac{n}{2}\right]$, što znači da ne postoji odgovarajuća strategija sa manje od $n$ testova.

Za $n$ neparno, važi

$$(4.27)\qquad \binom{n}{o} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]} = 2^{n-1} .$$

Da ni u ovom slučaju ne postoji strategija sa $n-1$ testova, izlazi na osnovu sledećeg razmatranja:

Da bi takva strategija postojala potrebno je da je broj mogućih ishoda za slučaj negativnog rezultata prvog testa jednak broju mogućih ishoda za slučaj pozitivnog rezultata i taj broj bi morao biti $2^{n-2}$.

Međutim, u slučaju negativnog rezultata testa $(\underbrace{1,\dots,1}_{K},0,\dots,0)$, broj mogućih ishoda nakon toga je

$$\binom{n-k}{0} + \binom{n-k}{1} + \dots + \binom{n-k}{\left[\frac{n}{2}\right]} \tag{4.28}$$

a taj broj je veći od $2^{n-2}$, za $k < \left[\frac{n}{2}\right] + 1$, a manji od $2^{n-2}$, za $k > \left[\frac{n}{2}\right] + 1$.

Ovim je dokaz teoreme 4.3 završen.

Rešenje problema $(P^{\leq 2})$ daje sledeća teorema:

Teorema 4.4. Neka je $t_k$ opšti član niza (4.12) i

$$t'_k = \begin{cases} t_k - 1, & \text{za } k = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \\ t_k & , \text{za } k > 9 \end{cases} \tag{4.29}$$

i neka je $f: B_2^{t'_k} \to B_2$ nepoznata monotona logička funkcija 1. nivoa čiji profil nema dužinu veću od 2.

Tada je optimalna strategija za identifikaciju te funkcije ona, koja dopušta najviše $k$ testova tj nepoznata funkcija se uvek može identifikovati sa najviše $k$ testova, dok identifikacija sa manje od $k$ testova nije uvek moguća.

Dokaz. Predpostavimo da smo tvrđenje dokazali za $k = 2, 3, 4, 5, \dots, 11, 12$. Obeležimo sa $S^{\leq 2}_{t'_k}$ optimalnu strategiju za identifikaciju funkcije $f: B_2^{t'_k} \to B_2$, sa gore navedenim osobinama. Za $k > 9$, s obzirom na (4.29), upotrebljavaćemo oznaku $S^{\leq 2}_{t_k}$. Imamo da je $t'_{10} = t_{10}$, $t'_{11} = t_{11}$, $t'_{12} = t_{12}$ i sada se shema za

$S^{\leq 2}_{t_{2m+1}}$, za $m \geq 6$, može dobiti iz sheme za $S^2_{t_{2m+1}}$, kad se u ovoj poslednjoj svuda umesto $S^2_i$ stavi $S^{\leq 2}_i$. Kako se na taj način dobija i $S^{\leq 2}_{13}$, to su ispunjeni uslovi za primenu potpune indukcije na konstrukciju sheme $S^{\leq 2}_{t_{2m+2}}$, za $m \geq 6$, tj ta shema se dobija iz sheme za $S^2_{t_{2m+2}}$, kad se u ovoj poslednjoj svuda izvrši zamena $S^2_i$ sa $S^{\leq 2}_i$.

Preostaje još da se daju dokazi za $k = 2, 3, \ldots, 12$. Za $t'_2 = 2$, $t'_3 = 3$, $t'_4 = 4$, dokaz sledi na osnovu teoreme 4.3, i u ovim slučajevima su optimalne strategije "element po element". Za sledećih osam članova niza, dokaz dajemo tako što efektivno konstruišemo odgovarajuće strategije. One su date sledećim shemama:

$(S^{\leq 2}_{t'_5} = S^{\leq 2}_6)$

$$\begin{array}{lcl}
 & (1,1,0,0,0,0) \xrightarrow{\;0\;} & S^{\leq 2}_{t'_4} = S^{\leq 2}_4 \ [4] \\
 & \Big\downarrow 1 & \\
S^1_2\ [1],\ S^1_4\ [2] \xleftarrow{\;1\;} & (0,0,1,1,1,1) \xrightarrow{\;0\;} & S^{\leq 2}_{t'_2} = S^{\leq 2}_2 \ [2]
\end{array}$$

$(S^{\leq 2}_{t'_6} = S^{\leq 2}_9)$

$$\begin{array}{lcl}
 & (1,1,1,0,0,0,0,0,0) \xrightarrow{\;0\;} & S^{\leq 2}_{t'_5} = S^{\leq 2}_6 \ [5] \\
 & \Big\downarrow 1 & \\
S^1_3\ [2],\ S^1_4\ [2] \xleftarrow{\;1\;} & (0,0,0,1,1,1,1,0,0) & \\
 & \Big\downarrow 0 & \\
 & (0,0,0,0,0,0,0,1,1) \xrightarrow{\;1\;} & S^1_3\ [2],\ S^1_2\ [1] \\
 & \Big\downarrow 0 & \\
 & S^{\leq 2}_3\ [3] &
\end{array}$$

$(S^{\leq 2}_{t'_7} = S^{\leq 2}_{13})$

$$\begin{array}{lcl}
 & (1,1,1,1,0,\ldots,0) \xrightarrow{\;0\;} & S^{\leq 2}_{t'_6} = S^{\leq 2}_9 \ [6] \\
 & \Big\downarrow 1 & \\
S^1_4\ [2],\ S^1_8\ [3] \xleftarrow{\;1\;} & (0,0,0,0,1,\ldots,1,0) \xrightarrow{\;0\;} & S^{\leq 2}_5 \ [5]
\end{array}$$

$(s^{\le 2}_{t_8} = s^{\le 2}_{18})$

$(1,1,1,1,1,1,0,\ldots,0) \xrightarrow{0} s^{\le 2}_{12}$ [7]

$\downarrow 1$

$s^1_6$ [3], $s^1_8$ [3] $\xleftarrow{1} (0,0,0,0,0,0,1,\ldots,1,0,0,0,0)$

$\downarrow 0$

$s^{\le 2}_6$ [5] $\xleftarrow{0} (0,\ldots,0,1,1,1,1) \xrightarrow{1} s^1_6$ [3], $s^1_4$ [2]

$(s^{\le 2}_{t_9} = s^{\le 2}_{26})$

$(\overbrace{1,\ldots,1}^{8},0,\ldots,0) \xrightarrow{0} s^{\le 2}_{18}$ [8]

$\downarrow 1$

$s^1_8$ [3], $s^1_{16}$ [4] $\xleftarrow{1} (\underbrace{0,\ldots,0}_{8},\underbrace{1,\ldots,1}_{16},0,0) \xrightarrow{0} s^{\le 2}_{10}$ [7]

$(s^{\le 2}_{t_{10}} = s^{\le 2}_{37})$

$(\underbrace{1,\ldots,1}_{11},0,\ldots,0) \xrightarrow{0} s^{\le 2}_{26}$ [9]

$\downarrow 1$

$s^1_{11}$ [4], $s^1_{16}$ [4] $\xleftarrow{1} (\underbrace{0,\ldots,0}_{11},\underbrace{1,\ldots,1}_{16},0,\ldots,0)$

$\downarrow 0$

$(\underbrace{0,\ldots,0}_{27},\underbrace{1,\ldots,1}_{8},0,0) \xrightarrow{0} s^{\le 2}_{13}$ [7]

$\downarrow 1$

$s^1_{11}$ [4], $s^1_8$ [3]

$(S^{\le 2}_{t_{11}} = S^{\le 2}_{53})$

$$\begin{tikzcd}
& (\overbrace{1,\dots,1}^{16},0,\dots,0) \arrow[r, dash, "0"] \arrow[d, dash, "1"] & S^{\le 2}_{37}\ [10] \\
\begin{matrix} S^{1}_{16}\ [4] \\ S^{1}_{32}\ [4] \end{matrix} \arrow[r, dash, "1"] & (\underbrace{0,\dots,0}_{16},\underbrace{1,\dots,1}_{32},0,\dots,0) \arrow[d, dash, "0"] & \\
& S^{\le 2}_{21}\ [9] &
\end{tikzcd}$$

$(S^{\le 2}_{t_{12}} = S^{\le 2}_{72})$

$$\begin{tikzcd}
& (\underbrace{1,\dots,1}_{19},\underbrace{0,\dots,0}_{53}) \arrow[r, dash, "0"] \arrow[d, dash, "1"] & S^{\le 2}_{53}\ [11] \\
\begin{matrix} S^{1}_{19}\ [5] \\ S^{1}_{32}\ [5] \end{matrix} \arrow[r, dash, "1"] & (\underbrace{0,\dots,0}_{19},\underbrace{1,\dots,1}_{32},\underbrace{0,\dots,0}_{21}) \arrow[d, dash, "0"] & \\
\begin{matrix} S^{1}_{19}\ [5] \\ S^{1}_{16}\ [5] \end{matrix} \arrow[r, dash, "1"] & (\underbrace{0,\dots,0}_{51},\underbrace{1,\dots,1}_{16},\underbrace{0,\dots,0}_{5}) \arrow[d, dash, "0"] & \\
& S^{\le 2}_{24}\ [9] &
\end{tikzcd}$$

Kao i u slučaju teoreme 4.2, i ovde možemo zaključiti, da se za svaki prirodan broj $n$, može naći optimalna ili skoro optimalna strategija za problem $(P^{\le 2})$.

Sledeći korak u pravcu uopštavanja bio bi da se posmatraju homogene monotone logičke funkcije višeg nivoa. Najjednostavniji slučaj homogene funkcije višeg nivoa, profil ]2[, odgovara vrlo interesantnom problemu, koji se iz problema ($P^2$) dobije kad se postave ograničenja na izbor testova. Naime, jasno je da testiranje jediničnih vektora (atoma) ne pruža istraživaču nikakvu informaciju, jer je unapred jasno da je vrednost funkcije $f(x_1,\ldots,x_n) = x_i x_j$ na tom vektoru jednaka 0. Drugim rečima, ima smisla testirati samo one vektore koji među svojim komponentama imaju barem dve jedinice. Ovaj uslov ima vrlo prirodno značenje, naime, moguće je da su u pitanju neispravnosti koje se akumuliraju i koje se mogu registrovati samo onda kad u testiranom skupu postoje barem dva neispravna elementa, tj kad neispravnim smatramo skup koji sadrži barem dva elementa. Ako se još predpostavi da indeksi $i$ i $j$ uzimaju vrednosti iz dva disjunktna podskupa skupa $\{1,2,\ldots,n\}$, onda se dobija sledeća modifikacija problema ($P^2$):

($P^{2'}$) Naći optimalnu strategiju za identifikaciju nepoznate logičke funkcije

$$f(x_1,\ldots,x_{m+p}) = x_i x_j \tag{4.30}$$

koja zadovoljava uslove

$$\begin{aligned} f(x_1,\ldots,x_m,1,\ldots,1) &= x_i \\ f(1,\ldots,1,x_{m+1},\ldots,x_{m+p}) &= x_j \,. \end{aligned} \tag{4.31}$$

U vezi sa ovim poslednjim problemom, postavljamo sledeću hipotezu:

($H_1$) Optimalna strategija za identifikaciju funkcije (4.30), koja zadovoljava uslove (4.31), je ona koja u svakom slučaju omogućava identifikaciju uz najviše $k$ testova, gde je $k$ najmanji broj za koji važi:

(4.32) $\quad mp \leq 2^k$.

Može se pokazati da je hipoteza $(H_1)$ logička posledica sledeće hipoteze:

$(H_2)$ Za svaku konačnu Booleovu matricu, među čijim elementima ima tačno $n$ jedinica, postoji barem jedna njena podmatrica među čijim elementima ima ne manje od $q$ i ne više od $2^{k-1}$ jedinica, gde je

(4.34) $\quad k = [\log_2(n-1)] + 1 \quad ; \quad q = n - 2^{k-1}$ .

__Teorema 4.5.__ $(H_2) \Longrightarrow (H_1)$

__Dokaz.__ **Uslovi (4.34) znače, ustvari, da je: $n = 2^{k-1} + q$ $(1 \leq q \leq 2^{k-1})$.**

Neka je tačno $(H_2)$ i neka nepoznata funkcija (4.3o) zadovoljava uslove (4.31). Postoji mp različitih funkcija sa tom osobinom. Svaka od njih može se okarakterisati jednom Booleovom matricom formata $m \cdot p$, koja među svojim elementima ima tačno jednu jedinicu, tako da je funkciji $x_s x_{m+r}$ $(1 \leq s \leq m,$ $1 \leq r \leq p)$ __pridružena__ obostrano jednoznačno matrica koja ima jedinicu u preseku s-te vrste i r-te kolone. Nepoznata funkcija je identifikovana ako je identifikovana njoj pridružena matrica.

Kao što smo napomenuli, imaju smisla samo oni testovi koji među svojim komponentama imaju barem dve jedinice, i to barem jednu među prvih $m$ kompomenata i barem jednu među preostalim komponentama.

Svakom testu $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_{m+1}, \ldots, \beta_{m+p})$ pridružena je obostrano jednoznačno jedna podmatrica Booleove matrice $M$ formata $m \cdot p$, i to tako da je i-ta kolona matrice M uključena u tu podmatricu ako i samo ako je $\alpha_i = 1$, i j-ta kolona ako i samo ako je $\beta_{m+j} = 1$.

Ako je rezultat nekog testa pozitivan, onda su svi elementi matrice pridružene nepoznatoj funkciji, koji nisu uključeni u podmatricu pridruženu tome testu, jednaki nuli. Ako je rezultat testa negativan, onda su jednaki nuli svi oni elementi koji su uključeni u podmatricu pridruženu testu.

Sada se postupak identifikacije nepoznate funkcije (4.3o), koja zadovoljava uslove (4.31) i (4.32), sastoji u sledećem:

Polazimo od Booleove matrice H, formata $m \cdot p$, čiji su svi elementi jedinice. Neka je $mp = n = 2^{k-1} + q, (1 \leq q \leq 2^{k-1})$. Uočimo neku podmatricu matrice H, koja ima najmanje $q$ a najviše $2^{k-1}$ elemenata (svi su oni jedinice). Ta podmatrica postoji na osnovu hipoteze $(H_2)$. Za prvi test uzimamo test pridružen toj podmatrici. Ako je rezultat toga testa negativan, onda sve elemente njemu pridružene podmatrice izjednačavamo sa nulom; ukoliko je rezultat testa pozitivan, to radimo sa elementima matrice H koji nisu uključeni u uočenu podmatricu. Na taj način se matrica H transformiše u matricu $H_1$ istog formata, ali koja ima najviše $2^{k-1}$ jedinica; ustvari, broj jedinica matrice $H_1$ jednak je $n_1 = 2^{k_1-1} + q_1$, $(1 \leq q_1 \leq 2^{k_1-1})$, gde je $k_1 < k$, dakle: $n_1 \leq 2^{k-1}$.

Na osnovu hipoteze $(H_2)$, sada se može naći test, nakon kojega se matrica $H_1$ transformiše u matricu $H_2$, sa $n_2$ jedinica, pri čemu je: $n_2 \leq 2^{k-2}$.

Ovim putem, dobija se niz matrica

$$(4.35) \qquad H, H_1, H_2, \ldots$$

formata $m \cdot p$, sa $n, n_1, n_2, \ldots$ jedinica respektivno, pri čemu je $n_i \leq 2^{k-i}$, tj za neko $t \leq k$, dobiće se matrica $H_t$, za koju je $n_t = 1$. Ta matrica biće karakteristična matrica nepoznate funkcije.

Ovim je dokaz teoreme 4.5 završen.

Mogućnost efektivnog nalaženja podmatrice iz hipoteze $(H_2)$ povlači mogućnost nalaženja optimalne strategije za identifikaciju funkcije (4.3o). Naravno, ukoliko takva matrica postoji, ona se može i naći, u krajnjem slučaju sistematskim ispitivanjem svih podmatrica.

## 5. NEKI NEREŠENI PROBLEMI I MOGUĆE GENERALIZACIJE

Na kraju, ukazaćemo na neke nerešene probleme i moguće generalizacije.

Kao prvo, nameće se pitanje ispitivanja i nekih drugih klasa Booleovih funkcija, korišćenjem komponentne reprezentacije (npr. simetričnih i Shefferovih funkcija). Rudeanu u [59] ukazuje i na mogućnost da se sa tog aspekta priđe i problemu rešavanja Booleovih jednačina.

Interesantno je i pitanje broja kako svih monotonih Booleovih funkcija od n promenljivih, tako i pojedinih klasa monotonih funkcija. Taj problem je već odavno predmet ispitivanja mnogih autora ali još uvek ostaje nerešen. U ovom radu je iskorišćen pojam profila za određivanje broja homogenih monotonih funkcija. Interesantno bi bilo odrediti kardinalnost skupova monotonih funkcija pojedinih profila.

Mnoštvo problema javlja se u vezi sa primenom monotonih Booleovih funkcija u istražnoj teoriji.

U dokazu teoreme 4.2, dat je postupak za nalaženje optimalne ili skoro optimalne strategije $S_n^2$, za svaki prirodan broj n veći od 2. Prirodno se nameće pitanje o mogućnosti nalaženja optimalne strategije, za svaki prirodan broj veći od 2.

Obeležimo sa $s_k$ najveći prirodan broj n, za koji postoji optimalna strategija $S_n^2$, sa maksimalnim brojem testova k. Ukoliko bi znali, u principu, naći optimalnu strategiju

$S^2_{s_k}$ , za proizvoljan član toga niza, onda bi, u principu, znali da nađemo i optimalnu strategiju $S^2_n$ , za svaki prirodan broj $n$.

Ostaje otvoreno pitanje i samog nalaženja formule za opšti član niza $s_k$ . Jasno je, da važi:

(5.1) $$t_k \leq s_k$$

za svaki prirodan broj $k$. Od interesa bi bilo i nalaženje svakog niza $r_k$, koji bi što bolje aproksimirao niz $s_k$, tj takvog, da je, za svako $k$, $r_k \leq s_k$, a da je pritom razlika

(5.2) $$s_k - r_k$$

što manja.

Predpostavljamo, da je, počev od nekog $k$, $s_k > t_k$, iako to nije bilo moguće dokazati u ovom radu. Detaljnom analizom, moglo se utvrditi da je $s_k = t_k$, do $k = 9$, zaključno. Za $k > 9$, pitanje ostaje otvoreno jer nalaženje svakog daljeg člana niza $s_k$ zahteva komplikovane proračune.

Analogna pitanja mogu se postaviti i u vezi sa problemom $(P^{\leq 2})$. Ako sa $s'_k$ obeležimo najveći prirodan broj $n$ za koji postoji optimalna strategija $S^{\leq 2}_n$, onda se postavlja problem nalaženja opšteg člana toga niza ili barem što više njegovih početnih članova.

Nizovi $t_k$ i $t'_k$ iz teorema 4.2 odnosno 4.4, poklapaju se počev od $k = 10$. Jasno je da je $s'_k \leq s_k$; pitanje da li se nizovi $s'_k$ i $s_k$ poklapaju, počev od nekog $k$, međutim, ostaje otvoreno.

U vezi sa teoremom 4.3, postavlja se problem da se odredi, za dato n, najmanje m, za koje tvrđenje teoreme još uvek ostaje na snazi.

Problem ($P^{2'}$) može se modificirati tako da se izostave uslovi (4.31). I dalje ostaju na snazi izvesna ograničenja na izbor testova, tj svaki test mora među svojim komponentama da ima barem dve jedinice.

Dalje uopštavanje sastojalo bi se u posmatranju funkcija raznih nivoa i dužine profila a zatim i nehomogenih monotonih funkcija.

Svaki profil monotone logičke funkcije obuhvata kao specijalne slučajeve mnoštvo problema istražne teorije. Dakle, monotone logičke funkcije predstavljaju prirodno sredstvo za uopštavanje problema istražne teorije.

Bilo bi korisno ispitati i mogućnost primene nekih drugih klasa Booleovih funkcija u rešavanju problema istražne teorije. Primena monotonih funkcija ne pomaže npr. u slučaju neispravnosti koje se mogu potirati, tj kod kojih neispravnost nekog skupa ne povlači obavezno neispravnost svakog njegovog nadskupa (npr. dva neispravna predmeta, jedan lakša a drugi teži ne čine uvek neispravan skup, u smislu ukupne težine).

Jasno je, da prilaz problemima istražne teorije sa stanovišta Booleovih funkcija, ne mora uvek biti najbolji, međutim, po našem mišljenju on ima izvesne prednosti sa gledišta upotrebe računara. Da bi donekle ilustrovali ovu tvrdnju, pomenućemo još jedan pristup istražnoj teoriji, karakterističan za Picarda [49] , Jagloma [25] i Parhomenka [48] .

Niz testova koji omogućava identifikaciju objekta koji nas interesuje, može se shvatiti kao upitnik (questionnaire, voprosnik), svaki test je pitanje a rezultat testa odgovor. Zadatak se onda, sastoji u tome da se nađe takva procedura "postavljanja pitanja", koja omogućava da do potrebne informacije dođemo uz najkraći mogući niz pitanja.

Po našem mišljenju, taj proces se može posmatrati kao dijalog dva subjekta A i B (to mogu biti ljudi ili mašine), pri čemu A postavlja pitanja a B daje odgovore (prećutno smo predpostavljali da B uvek daje tačne odgovore, mada je, u principu, moguće posmatrati i slučaj kada osoba koja daje odgovore ne govori uvek istinu, odnosno mašina, opet usled svoje sopstvene neispravnosti, ne daje uvek tačne odgovore). Naravno da A pri postavljanju pitanja uzima u obzir odgovore na predhodna pitanja (za to je potrebno da A poseduje dovoljno veliku memoriju), inače ne bi bio u pitanju dijalog i ceo spisak pitanja mogao bi biti dat odjednom.

Prema našem prilazu, svako pitanje je neki niz nula i jedinica, što se može, po potrebi, interpretirati i kao broj napisan u binarnom sistemu, a svakim odgovorom se daje vrednost jedne logičke funkcije na binarnom vektoru koji odgovara tome broju. Kako su moderni računari, po svojoj strukturi, najviše prilagođeni upravo binarnom brojnom sistemu i logičkim operacijama, nije isključeno da bi ovaj pristup mogao voditi, u budućnosti, dubljoj formalizaciji istražne teorije i samim tim široj upotrebi računara u rešavanju problema iz te oblasti. Smatramo da je u ovom radu napravljen izvestan korak u tom pravcu.

## 7. BIBLIOGRAFIJA


1. Adám, A: Truth functions, Akademiai Kiadó, Budapest 1968.
2. Andreoli, G: Formazioni algebrice booleane monotone, Ricerca (Napoli), 1 (1961), 1-9.
3. Arnold, B. H: Logic and Boolean algebras, Englewood Cliffs, 1962.
4. Berge, C: Théorie des graphes et ses applications, Dunod, Paris 1958.
5. Birkgof, G: Teorija struktur, IL, Moskva 1952.
6. Campbell, L. L: Note on the connection between search theory and coding theory, Proc. of the Colloq. on Information theory, ed. by A. Rényi, Janos Bolyai Math. Soc., Budapest 1968.
7. Carter, F. L. Jr: Group testing in binomial and multinomial situations, Technical Report No 3, Dept of Statistics, Blacksburg, Va, 196o.
8. Carvallo, M: Principes et applications de l' analyse booleene, Gauthier-Villars, Paris 1965.
9. Cesari, Y: Questionnaire, codage et tris, Institute Blaise Pascal, Paris 1968.
1o. Dertouzos, M: Porogovaja logika, izd. "Mir", Moskva 1967.
11. Devidé, V: Matematička logika I (klasična logika sudova), Beograd 1964.
12. Dorfman, R: The detection of defective members of large populations, Ann. Math. Statist. 14 (1943), 436-44o.
13. Gilezan, K: Méthode à résoudre des relations dont les résolutions appartiennent à un ensemble fini, Publ. Inst. Math.(Beograd), 1o(24), 197o, 21-23.

14. Gilezan, K. i Latinović, B: Bulova algebra i primene, Beograd, 1977.

15. Gilbert, N. E: Lattice theoretic properties of frontal switching functions, J. Math. and Phys. 33 (1954), 57-67.

16. Gluškov, V. M: Sintez cifrovyh avtomatov, Moskva 1962.

17. Gluškov, V. M: Uvod u kibernetiku, Beograd 1967.

18. Halmos, P. R: Lectures on Boolean algebras, New York 1963.

19. Hammer, P. L. and Rudeanu, S: Boolean methods in operations research and related areas, Springer Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1968.

2o. Hansel, J: O čisle monotonnyh bulevyh funkcij n peremennyh, Kibernetičeskij sbornik, vyp. 5 (1968), 53-57.

21. Hohn, F. E: Applied Boolean algebra, Macmillan, New York 196o.

22. Hu, T. C. and Tucker, A. C: Optimum binary search trees, Combinatorial Math. and its Appl., Univ. of North Carolina, Chapel Hill, N. C. 197o.

23. Jablonskij, S. V., Gavrilov, V. B., Kudrjavcev, V. B: Funkcii algebry logiki i klassy Posta, izd. "Nauka", Moskva 1966.

24. Jablonskij, S. V: Funkcional'nye postroenija v k-značnoj logike, Trudy matematičeskogo instituta im. V. A. Steklova, t. 51, Leningrad 1958, 5-142.

25. Jaglom, A. M. i Jaglom, I. M: Verojatnost i informacija, izd. "Nauka", Moskva 1973.

26. Jamnik, R: Elementi teorije informacije, Mladinska knjiga, Ljubljana 1964.

27. Katona, G: On separating systems of a finite set, J. Combinatorial Theory 1 (1966), 174-194.

28. Katona, G: Combinatorial search problems. Lectures held at the Department for automation and information, Udine 1972, Springer-Verlag, Wien/New York 1972.

29. Kemeny, J. G., Snell, J. L., Thompson, G. L: Introduction to finite mathematics, Englewood Cliffs, New York, Prentice-Hall 1957.

3o. Kislicin, S. S: Sovremennoe sostojanie teorii poiska, Uspehi matematičeskih nauk 17, No 1 (1962), 243-244.

31. Knuth, D. E: Optimal binary search trees, Acta Informatika 1 (1971), 14-25.

32. Kobrinskij, N. E., Trahtenbrot, B. A: Vvedenie v teoriu konečnih avtomatov, Fizmatgiz, Moskva 1962.

33. Kumar, S: A group testing problem, Ann. Math. Statist. 36 (1965), 727-728.

34. Kumar, S: Group testing to classify all units in a trinomial sample, Studia Sci. Math. Hungar. 5 (197o), 229-247.

35. Kuntzmann, J: Algébre de Boole, Dunod, Paris 1965.

36. Kuntzmann, J: Buleva algebra i konečnye avtomati,Moskva 1969.

37. Kurepa, Đ: Ensembles ordonnés et ramifiés. Thése, Paris 1935. Publ. Math. Belgrade 4 (1935), 1-138.

38. Kurepa, Đ: Teorija skupova, Zagreb 1951.

39. Kurepa, Đ: O tri osnovna suda u teoriji skupova i njihovoj konjunkciji, Matematička biblioteka, 25 (1963), 23-28.

4o. Kurepa, Đ: Viša algebra - knjiga I i II, Zagreb 1965.

41. Lyngholm, C. and Yourgrau, W: A double-iteration property of Boolean functions, Notre Dame J. Formal Logic 1 (196o), 111-114.

42. Mc Cluskey, E. J. Jr: Minimization of Boolean functions, Bell System Tech. J. 35 (1956), 1417-1444.

43. Mc Cluskey, E. J. Jr; Bartee, T. C: A survey of switching circuit theory, Mc Graw-Hill, New York 1962.

44. Mc Kinsey, J. C. C: On Boolean functions of many variables, Trans. Amer. Math. Soc. 4o (1936), 343-362.

45. Mc Kinsey, J. C. C: Boolean functions and points, Duke Math. J. 2 (1936), 465-471.

46. Metelka Josef: Vektorielles Modell der endlichen Booleschen Algebren, Acta Universitatis Palackiane Olomoucensis, Tom 21, 1966.

47. Nebenzahl, E: Binomial group testing with two different success parameters, Studia Sci. Math. Hungar. 1o (1975), 61-72.

48. Parhomenko, P. P: Teorija voprosnikov, Avtomatika i telemehanika, No 4 (197o), 14o-159.

49. Picard, C: Théorie des questionnaires, Gauthier-Villars, Paris 1965.

5o. Pospelov, D. A: Logičeskie metody analiza i sinteza shem, Moskva 1968.

51. Parezanović, N: Računske mašine i programiranje, Beograd, 1976.

52. Prešić, S: Elementi matematičke logike, Beograd, 1968.

53. Renyi, A: On random generating elements of a finite Boolean algebra, Acta Sci. Math. (Szeged), 22 (1961), 75-81.

54. Renyi, A: Statistical laws of accumulation of information, Bull. Inst. Internat. Stat. 39 (1962), 311-316.

55. Renyi, A: On the theory of random search, Bull. Amer. Math. Soc. 71 (1965), 8o9-828.

56. Renyi, A: Lectures on the theory of search, Mimeo series No 6oo. 7. Dept of Stat. Univ. of North Carolina, Chapel Hill, 1969.

57. Rudeanu, S: On the definition of Boolean algebras by means of binary operations, Rev. Math. Pures Appl. 6 (1961), 171-183.

58. Rudeanu, S: Axiomele laticelor si ale algebrelor booleene, Editura Academiei RPR, Bucuresti 1963.

59. Rudeanu, S: Boolean functions and equations, North-Holland Publ. Co., Amsterdam/London 1974.

6o. Schröder, E: Vorlesungen über die Algebra der Logik (Leipzig, vol. 1 (189o), vol. 2 (1891), vol. 3 (19o5)); Reprint, Chelsea, Bronx NY 1966.

61. Scognamiglio, G: Elementi uniti ed antiuniti delle funzioni monovalenti algebriche di Boole, Giorn. Mat. Battaglini 88 (196o), 135-154.

62. Sikorski, R: Boolean algebras, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1967.

63. Sobel, M: Group testing to classify efficiently all defectives in a binomial sample. Prilog u Information and Decision Processes, ed. by Robert E. Machol, Mc Graw-Hill, 196o, 127-161.

64. Sobel, M: Optimal group testing, Technical Report No 72, Stanford Univ., Stanford, Calif., 1964.

65. Sobel, M: Binomial and hypergeometric group testing, Studia Sci. Math. Hungar. 3 (1968), 19-42.

66. Sobel, M. and Groll, P. A: Group testing to eliminate efficiently all defectives in a binomial sample, Bell System Tech. J. 38 (1959), 1179-1252.

67. Sterrett, A: On the detection of defective members of large populations, Ann. Math. Statist. 28 (1957), 1o33.

68. Tošić, R: S-bases of propositional algebra, Publ. Inst. Math., t. 14(28), 1973, 139-148.

69. Vavilov, E. N., Jegorov, B. M., Lancev, V. S., Tocenko, V. G: Sintez shem na porogovyh elementah, Moskva 197o.

7o. Vavilov, E. N., Portnoj, G. P: Sintez shem elektronyh cifrovyh mašin, Moskva 1963.

71. Vladimirov, D. A: Bulevy algebry, izd. "Nauka", Moskva 1969.

# R E G I S T A R