

Пр. бр. :	26. III. 1981		
Орг. ј. д.	Бр. ј.	Г.	В. бр. ј.
03	180/2		

UNIVERZITET U NOVOM SADU  
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

20 186

NEKE KLASSE SEMIGRUPA

(Doktorska disertacija)

ОСНОВНА ОРГАНИЗАЦИЈА УДРУЖЕНОГ РАДА  
ЗА МАТЕМАТИКУ, МЕХАНИКУ И АСТРОНОМИЈУ  
Б И Б Л И О Т Е К А

Б р о ј: Јокић. 110/1  
Д а т у м: 16.06.1981.

Siniša Dj. Crvenković

NOVI SAD

1981.



S A D R Ź A J

UVOD .....	i
GLAVA I	
ELEMENTARNI POJMOVI I KARAKTERIZACIJE SEMIGRUPA IZ NEKIH KLASA SEMIGRUPA .....	1
GLAVA II	
(m,n)*-ANTI-INVERZNE SEMIGRUPE	
1. Definicija i neke osobine (m,n)*-anti- -inverznih semigrupa .....	22
2. Neke dekompozicije semigrupa iz klase $S_{m,n}^*$ .....	25
3. Ideali (m,n)*-anti-inverznih semigrupa .....	35
GLAVA III	
BAZISNE KLASSE NEKIH KLASA SEMIGRUPA	
1. Algoritam za odredjivanje bazisne klase (m,n)*-anti-inverznih semigrupa .....	46
2. Primeri .....	56
3. $QS_{m,n}^*$ i $QS_{m,n}$ semigrupe .....	66
4. Bazisne klase semigrupa čije sve prave podsemigrupe zadovoljavaju neki zakon .....	71

GLAVA IV

PODALGEBRE POLUMREŽA

1. Jedna karakterizacija podalgebri polumreža .....	76
2. Neki specijalni slučajevi .....	85
LITERATURA .....	88

## UVOD

Teorija semigrupa razvija se kao samostalna oblast savremene algebre.

Predmet izučavanja teorije semigrupa su razne klase semigrupa tj. semigrupe koje zadovoljavaju dati uslov.

U ovom radu razmatramo semigrupe iz nekih podklasa klase regularnih semigrupa. Pojam regularnosti, koji je uveo J. von Neumann [31] za prstene, su Thierrin i Bagner preneli u teoriju semigrupa što se pokazalo značajnim za razvoj teorije semigrupa uopšte.

Ovde se posebno ispituje jedna podklasa klase kompletno regularnih semigrupa tzv. klasa  $(m,n)^*$ -anti-inverznih semigrupa. Ova klasa obuhvata klasu anti-inverznih semigrupa [1] .

Pojam bazisne klase, neke klase semigrupa, uveo je E.C. Ляпин [25]. U radu odredjujemo bazisne klase za razne klase semigrupa.

Značajnu klasu semigrupa čine polumreže. P.M. Cohn [9] i Ю. Ребане su 1965. godine pokazali da je svaka algebra podalgebra neke semigrupe. U Glavi IV opisujemo klasu algebri koje su podalgebre polumreža.

U Glavi I su navedeni elementarni pojmovi o semigrupama, grupama, algebrama, idealima, kongruencijama, itd. Dati

su dokazi nekih teorema koje se koriste u radu. Ovaj materijal uzet je iz [7] i [22]. Takođe, dat je dokaz G. Čupone za teoremu Cohn-Рeбaнe.

U Glavi II ispituju se  $(m,n)^*$ -anti-inverzne semigrupe. Materijal ove glave preuzet je iz [6], [11] i [12]. U tački 2. date su neke dekompozicije  $(m,n)^*$ -anti-inverznih semigrupa. Teorema 2.3. glavni je rezultat ove glave. Green-ove relacije razmatraju se u tački 3. Dobija se niz karakterizacija semigrupa iz klase  $S_{m,n}^*$ . Na kraju Glave II navedena su tvrdjenja čiji dokazi su izostavljeni jer su slični dokazima teorema u [2].

U Glavi III ispituju se bazisne klase raznih klasa semigrupa. Dat je algoritam kojim određujemo bazisnu klasu bilo koje klase  $(m,n)^*$ -anti-inverznih semigrupa. Primeri bazisnih klasa za razne  $S_{m,n}^*$  semigrupe dati su u tački 2. Materijal za tačke 1. i 2. uzet je iz [12]. U tački 3. razmatraju se  $QS_{m,n}^*$  ( $QS_{m,n}$ ) semigrupe tj. semigrupe čije sve prave podsemigrupe pripadaju klasi  $S_{m,n}^*$  ( $S_{m,n}$ ). Teoremom 3.1. data je karakterizacija semigrupa klase  $QS_{m,n}^*$  ( $QS_{m,n}$ ). Problem egzistencije bazisne klase semigrupa čije sve prave podsemigrupe zadovoljavaju uslov oblika  $(\forall x)(\exists y)\phi(x,y)$  rešen je u tački 4. Na kraju 4. dato je nekoliko primera. Materijal iz tačaka 3. i 4. ovde je prvi put izložen.

U Glavi IV opisane su podalgebre polumreža. Potreban i dovoljan uslov da neka algebra bude podalgebra polumreže dat je u tački 1. Lema 1.3. je ključna lema u dokazu teoreme 1.1.

Dokaz ove leme izvodi se koristeći pojam transformacije [ ]. U tački 2. navedeni su neki specijalni slučajevi koji su neposredna posledica teoreme 1.1. Materijal za ovu glavu uzet je iz [18].

Literatura koja je korišćena u ovom radu navedena je na kraju i čine je 44 bibliografske jedinice.

Dr Stojan Bogdanović svojim idejama i savetima pomogao mi je pri izradi ovog rada zbog čega mu dugujem trajnu zahvalnost.

Akademik profesor Горџи Чупона velikodušno je pristao na saradnju sa autorom ovog rada. Zahvaljujem se profesoru Čuponi što je prihvatio moju saradnju i omogućio mi da rezultate zajedničkog rada izložim u Glavi IV.

Profesor Svetozar Milić prihvatio se da bude mentor pri izradi ove disertacije. Imam prijatnu dužnost da se zahvalim profesoru Miliću za nesebičnu pažnju koju posvećuje mom radu.

GLAVA I

ELEMENTARNI POJMOVI I KARAKTERIZACIJE  
SEMIGRUPA IZ NEKIH KLASA SEMIGRUPA



1.

1.1. Binarna operacija na skupu  $S$  je svako preslikavanje skupa  $S \times S$  u  $S$ , gde je  $S \times S$  skup svih uređenih parova elemenata iz  $S$ . Sliku elemenata  $(a, b)$  iz  $S \times S$  u skupu  $S$  označavaćemo sa  $ab$ .

1.2. Grupoid je uređena dvojka  $(S, \cdot)$  nepraznog skupa  $S$  i binarne operacije " $\cdot$ " definisane na  $S$ . Pišemo  $S$  umesto  $(S, \cdot)$ .

1.3. Binarna operacija " $\cdot$ " na grupoidu  $S$  je asocijativna ako je ispunjeno

$$(\forall a, b, c \in S) (a(bc) = (ab)c).$$

1.4. Semigrupa je grupoid  $(S, \cdot)$  pri čemu je operacija " $\cdot$ " asocijativna. Dalje ćemo kraće pisati " $S$  je semigrupa". Podgrupoid semigrupe  $S$  je podsemigrupa.

1.5. Ako postoji element  $e$  u semigrupi  $S$  takav da je

$$(\forall x \in S) xe = ex = x,$$

onda  $e$  zovemo jedinica semigrupe  $S$  i kažemo da je  $S$  semigrupa sa jedinicom. Ako semigrupa  $S$  nema jedinicu onda možemo dodati element  $1$  skupu  $S$ . Definišimo

$$(\forall s \in S) 1s = s1 = s$$

$1 \cdot 1 = 1$ .  $S \cup \{1\}$  postaje semigrupa sa jedinicom. Označavaćemo  $S^1$  semigrupu definisanu na sledeći način

$$S^1 = \begin{cases} S & \text{ako je } S \text{ semigrupa sa jedinicom} \\ S \cup \{1\} & \text{ako } S \text{ nema jedinicu.} \end{cases}$$

1.6. Ako semigrupa  $S$ , sa najmanje dva elementa, sadrži element  $0$  takav da je

$$(\forall x \in S) x0 = 0x = 0,$$

onda element  $0$  nazivamo nula semigrupe  $S$ . Analogno prethodnom definišemo

$$S^0 = \begin{cases} S & \text{ako } S \text{ ima nulu} \\ S \cup \{0\} & \text{ako } S \text{ nema nulu.} \end{cases}$$

1.7. Semigrupa  $S$  je komutativna ako

$$(\forall x, y \in S) xy = yx$$

1.8. Grupa je semigrupa  $S$  sa osobinom

$$(\forall x \in S) (xS = S \wedge Sx = S).$$

Podgrupa semigrupe  $S$  je podsemigrupa od  $S$  koja je grupa.

1.9. Element  $x$  semigrupe  $S$  je idempotent ako je  $x^2 = x$ .

1.10. Semigrupa  $S$  je generisana svojim podskupom  $A$  ako je svaki element iz  $S$  jednak proizvodu nekih elemenata iz  $A$ . Semigrupa generisana jedno-elementnim podskupom naziva se monogena semigrupa. Monogenu semigrupu generisanu skupom  $\{a\}$  označavaćemo sa  $\langle a \rangle$ . Ako je u semigrupi  $\langle a \rangle$ :  $a^m = a^{m+r}$  onda  $m$  nazivamo indeks a  $r$  period semigrupe  $\langle a \rangle$ . Neka je

$m$  indeks i  $r$  period semigrupe  $\langle a \rangle$  tada je

$$\langle a \rangle = \{a, a^2, \dots, a^{m+r-1}\}$$

i  $|\langle a \rangle| = m+r-1$ . Kažemo da je element  $a$  konačnog reda.

Podskup  $K_a = \{a^m, a^{m+1}, \dots, a^{m+r-1}\}$  od  $\langle a \rangle$  je podgrupa od  $\langle a \rangle$ .

Monogena semigrupa koja je grupa naziva se ciklička grupa pa je  $K_a$  ciklička grupa reda  $r$ . Lako se pokazuje (Howie [22]) da je  $K_a = \langle a^{m+g} \rangle$  gde je  $g \in \mathbb{N}$  takav da

$$0 \leq g \leq r-1 \quad \text{i} \quad m+g \equiv 1 \pmod{r}.$$

Ako izaberemo  $z$  takvo da je

$$0 \leq z \leq r-1 \quad \text{i} \quad m+z \equiv 0 \pmod{r}$$

onda imamo da je  $a^{m+z}$  idempotent odnosno jedinica grupe  $K_a$ .

1.11. Semigrupa  $S$  je periodička ako su svi njeni elementi konačnog reda.

1.12. Element  $a$  semigrupe  $S$  je regularan ako je

$$a = axa$$

za neko  $x \in S$ . Semigrupa  $S$  je regularna ako je svaki element iz  $S$  regularan.

Pojam regularnosti prvi je uveo J. von Neumann (On regular rings, Proc.Nat.Acad. USA, 22(1936), 707-713) za elemente prstena. U teoriji semigrupa regularne semigrupa, pod nazivom demi-groups inversif, su prvi put razmatrane od strane G. Thierrin-a (Sur une condition nécessaire et suffisante pour qu'un semigroupe soit un groupe, C.R.Acad.Sci., Paris, 232 (1951), 376-378.

1.13. Semigrupa  $S$  je kompletno regularna ako

$$(\forall a \in S) (\exists x \in S) (a = axa \wedge ax = xa)$$

1.14. Označimo sa  $E$  skup idempotenata semigrupe  $S$ . Regularna semigrupa  $S$  je ortodoksna ako je  $E$  podsemigrupa od  $S$ . Ortogrupa je kompletno regularna ortodoksna semigrupa.

1.15. Neka je  $a$  element semigrupe  $S$ . Element  $x$  iz  $S$  je inverzan za  $a$  ako je

$$a = axa \quad i \quad x = xax.$$

Inverzna semigrupa je regularna semigrupa u kojoj svaki element ima jedinstven inverzni element.

Pojam inverzne semigrupe prvi put se javlja u radovima B.B. Вагнера (Обобщенные группы, ДАН, СССР, 84(1952), 1119-1122) i G. Thierrin-a (Sur les éléments inversif et les éléments unitaires d'un demi-groupe inversif, C.R.Acad.Sci., Paris, 234(1952), 33-34).

1.16. Semigrupa  $S$  je intra-regularna ako

$$(\forall x \in S) (\exists a, b \in S) (x = ax^2b).$$

Semigrupa  $S$  je levo regularna ako

$$(\forall a \in S) (\exists x \in S) (a = xa^2).$$

Semigrupa  $S$  je desno regularna ako

$$(\forall a \in S) (\exists x \in S) (a = a^2x).$$

Ove pojmove uveo je R. Croisot (Demi-groupes inversif et demi-groupes réunion de demi-groupes simples, Ann.Sci. Ecole Nor. Sup.(3), 70(1953), 361-379).

1.17. Semigrupa  $S$  je anti-inverzna ako

$$(\forall x \in S) (\exists y \in S) (xyx = y \wedge yxy = x).$$

Pojam anti-inverzne semigrupe uveli su S. Milić, S. Bogdanović i V. Pavlović u radu: Anti-inverse semigroups, Publ.Inst.Math. Belgrade, 24(38) 1978. Između ostalog dokazana je sledeća teorema

Teorema. Neka je  $S$  semigrupa. Tada

$$S \in A \leftrightarrow (\forall x \in S) (\exists y \in S) (x^2 = y^2 \wedge yx = x^3y \wedge x^5 = x),$$

gde je sa  $A$  označena klasa anti-inverznih semigrupa.

1.18. Semigrupa  $S$  je  $(m,n)$ -anti-inverzna ako

$$(\forall x \in S) (\exists y \in S) (x^m = y^m = (xy)^m \wedge x^n = x).$$

$(m,n)$ -anti-inverzne semigrupe uveli su S. Milić i S. Bogdanović u radu: On a class of anti-inverse semigroups, Publ.Inst.Math., Beograd, 25(39), 1979, 95-100.  $(m,n)$ -anti-inverzne semigrupe označavamo sa  $S_{m,n}$ . U istom radu dat je algoritam kojim se utvrđuje da li semigrupe iz klase  $S_{m,n}$ , gde su  $m$  i  $n$  proizvoljni brojevi, pripadaju klasi  $A$ -anti-inverznih semigrupa.

1.19. Semigrupa  $S$  je  $(m,n)^*$ -anti-inverzna ako

$$(\forall x \in S) (\exists y \in S) (x^m = y^m \wedge yx = x^{m+1}y \wedge x^n = x).$$

$(m,n)^*$ -anti-inverzne semigrupe uvedene su u radu [6]. U ovom radu, između ostalog, razmatramo i  $(m,n)^*$ -anti-inverzne semigrupe.

1.20. Semigrupa u kojoj su svi elementi idempotentni naziva se bend. Komutativni bend je polumreža. Semigrupa  $S$  je  $Y$  polumreža semigrupa  $S_\alpha$  ako postoji preslikavanje  $\phi$  semigrupe  $S$  na polumrežu  $Y$  takvo da je

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b) \quad \text{i} \quad S_\alpha = \phi^{-1}(\alpha),$$

za svako  $a, b \in S$  i svako  $\alpha \in Y$ . Označimo sa  $E_S$  skup svih idempotentata semigrupe  $S$  u kome je definisana relacija

$$e \leq f \leftrightarrow e = ef = fe.$$

Važi sledeća teorema

Teorema. Neka je  $S$  regularna semigrupa. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni

- (i)  $E_S$  je podsemigrupa od  $S$ .
- (ii) Za bilo koje  $a, b \in S$  i njihove inverzne elemente  $a', b'$  važi da je  $b'a'$  inverzan element elementu  $ab$ .
- (iii) Za svako  $a, b, x, y \in S$ ,  $a = axa$  i  $b = byb$  implicira  $ab = abyxab$ .
- (iv) Inverzan element svakog idempotentata je idempotent.

1.21. E.S. Ljapin je u [25] dao sledeću definiciju.

Definicija. Neka su  $M, N, P$  tri klase semigrupa, pri čemu je  $M \subset N \subset P$ . Klasa  $M$  je bazisna klasa za klasu  $N$  u odnosu na  $P$  ako je ispunjeno

- a) Svaka semigrupa iz  $N$  se može predstaviti kao unija svojih podsemigrupa koje su iz klase  $M$ .
- b) Svaka semigrupa iz  $P$  koja se može predstaviti kao unija svojih podsemigrupa koje su iz klase  $M$  je iz klase  $N$ .
- c) Nijedna podklasa  $M'$  klase  $M$  ne zadovoljava uslov a).

2.

2.1. Podsemigrupa  $I$  semigrupe  $S$  je njen levi (desni) ideal ako je  $SI \subset I$  ( $IS \subset I$ ).

Podsemigrupa  $I$  semigrupe  $S$  je dvostrani ideal ako je istovremeno levi i desni ideal od  $S$ .

Ako je  $A$  neprazan podskup semigrupe  $S$ , tada presek svih levih ideala od  $S$ , koji sadrže  $A$ , je levi ideal koji sadrži  $A$ . Za taj ideal kažemo da je levi ideal generisan skupom  $A$ . Slično imamo za desni, odnosno dvostrani ideal. Levi (desni, dvostrani) ideal semigrupe  $S$  generisan skupom  $A$  je oblika

$$A \cup SA \quad (A \cup AS, A \cup SA \cup AS \cup SAS).$$

Ako je  $A$  jednočlan skup, tada levi glavni ideal, u oznaci  $L(a)$ , je oblika

$$L(a) = a \cup Sa.$$

Analogno, desni glavni ideal je oblika

$$R(a) = a \cup aS.$$

Dvostrani glavni ideal je

$$J(a) = a \cup Sa \cup aS \cup Sas.$$

Značajnu karakterizaciju regularnih semigrupa pomoću ideala dao je K. Iseki [23].

Označimo sa  $\mathcal{U}$  skup svih levih ideala semigrupe  $S$

i sa  $V$  skup svih desnih ideala semigrupe  $S$ .

Teorema. Neka je  $S$  semigrupa. Tada je  $S$  regularna semigrupa ako i samo ako

$$(\forall R \in V) (\forall L \in U) (R \cap L = RL),$$

gde smo sa  $R$  i  $L$  označili proizvoljan desni ideal iz  $V$ , odnosno proizvoljan levi ideal iz  $U$ .

Dokaz. Neka je  $S$  regularna semigrupa. Tada za proizvoljan  $R \in V$  je  $RS \subseteq R$ , pa je

$$(1) \quad RL \subseteq RS \subseteq R.$$

Slično, za proizvoljan  $L \in U$  je

$$(2) \quad RL \subseteq SL \subseteq L.$$

Iz (1) i (2) imamo

$$RL \subseteq R \cap L.$$

Neka je sada  $a \in R \cap L$ , tada  $a \in R$  i  $a = a(xa)$  za neko  $x \in S$ , jer je  $S$  regularna semigrupa. Kako  $xa \in L$ , to je  $a \in RL$ . Sledi da je

$$R \cap L \subseteq RL$$

tj.

$$R \cap L = RL.$$

Obratno, za proizvoljno  $a \in S$  imamo

$$\begin{aligned} a \in R(a) \cap L(a) &= R(a)L(a) = (a \cup aS)(a \cup Sa) = \\ &= a^2 \cup aSa \cup aS^2a = a^2 \cup aSa, \end{aligned}$$

pa je  $a = a^2$  ili  $a \in aSa$ . Dakle,  $S$  je regularna semigrupa.



Posledica. U regularnoj semigrupi  $S$  je

$$(\forall L \in U) (L = SL),$$

$$(\forall R \in V) (R = RS),$$

$$S^2 = S.$$

U regularnoj semigrupi  $S$  je

$$L(a) = Sa, \quad R(a) = aS, \quad J(a) = SaS.$$

Zaista,

$$L(a) = SL(a) = S(a \cup Sa) = Sa \cup SSa = Sa.$$

Slično se dokazuje da je  $R(a) = aS$  i  $J(a) = SaS$ .

Primedba. Jedno uopštenje teoreme K. Iseki-a dao je S. Bogdanović u [ 3 ].

Dvostrani ideal  $I$  semigrupe  $S$  nazivaćemo ideal semigrupe  $S$ .

Podsemigrupa  $B$  semigrupe  $S$  jeste biideal ako je

$$BSB \subseteq B.$$

Podsemigrupa  $A \neq \emptyset$  semigrupe  $S$  jeste kvaziideal ako je

$$AS \cap SA \subseteq A.$$

Preslikavanje  $f$  semigrupe  $S$  u semigrupu  $T$  je homomorfizam ako je  $(af)(bf) = (ab)f$ , za svako  $a, b \in S$ . Ako je  $f$  preslikavanje "na", onda  $T$  nazivamo homomorfnom slikom od  $S$ . Ako je  $f$  1-1 i "na" onda  $f$  nazivamo izomorfizmom.

2.2. Neka je  $S$  semigrupa. Relacija  $R$  skupa  $S$  je levo saglasna sa operacijom semigrupe  $S$  ako

$$(\forall s, t, a \in S) ((s, t) \in R \Rightarrow (as, at) \in R),$$

i desno saglasna ako

$$(\forall s, t, a \in S) ((s, t) \in R \Rightarrow (sa, ta) \in R).$$

Relacija  $R$  skupa  $S$  je saglasna sa operacijom semigrupe  $S$  ako

$$(\forall s, t, s', t' \in S) (((s, s') \in R \wedge (t, t') \in R) \Rightarrow (st, s't') \in R).$$

Levo (desno) saglasna relacija ekvivalencije naziva se leva (desna) kongruencija. Saglasna relacija ekvivalencije zove se kongruencija.

Propozicija 2.2. Relacija  $\rho$  semigrupe  $S$  je kongruencija ako i samo ako je leva i desna kongruencija.

Dokaz. (+) Ako je  $\rho$  leva i desna kongruencija onda iz  $(s, s'), (t, t') \in \rho$  sledi  $(st, s't) \in \rho$  i  $(s't, s't') \in \rho$  zbog leve i desne saglasnosti. Iz tranzitivnosti  $\rho$  sledi da je  $(st, s't') \in \rho$  pa je  $\rho$  kongruencija.

(+). Neka je  $\rho$  kongruencija. Ako  $(s, t) \in \rho$  i  $a \in S$  onda  $(a, a) \in \rho$  zbog refleksivnosti pa je  $(as, at) \in \rho$  i  $(sa, ta) \in \rho$  tj.  $\rho$  je leva i desna kongruencija.

Neka je  $\rho$  kongruencija semigrupe  $S$ . Skup klasa ekvivalencije relacije  $\rho$ , u oznaci  $S/\rho$ , nazivamo skup količnik. Preslikavanje  $a \rightarrow a\rho$ , gde je  $a\rho$  klasa ekvivalencije elementa  $a$ , je prirodni homomorfizam od  $S$  na  $S/\rho$ , pri

čemu je u  $S/\rho$  operacija definisana na sledeći način

$$(a\rho)(b\rho) = (ab)\rho, \text{ za } a\rho, b\rho \in S/\rho.$$

Neka je  $I$  ideal semigrupe  $S$ . Relacija  $\rho_I$  na  $S$  definisana na sledeći način

$$a\rho_I b \iff a = b \vee a, b \in I$$

je Rees-ova kongruencija [39]. Količnik semigrupu  $S/\rho_I$  označavamo sa  $S/I$ . Klase ekvivalencije su ideal  $I$  i jednočlani skupovi  $\{a\}$ , u slučaju kada  $a \in S \setminus I$ .

2.3. J. A. Green je 1951. svojim radom "On the structure of semigroups", Ann. of Math., 54, 163-172., dao studiju fundamentalnu za razvoj teorije semigrupa. U ovom radu Green je definisao izvesne relacije ekvivalencije na semigrupi koristeći pojam glavnog ideala semigrupe.

Relacije  $L, R, J, H, D$  definisane na semigrupi  $S$  na sledeći način

$$(1) \quad aLb \iff L(a) = L(b)$$

$$(2) \quad aRb \iff R(a) = R(b)$$

$$(3) \quad aJb \iff J(a) = J(b)$$

$$(4) \quad H = R \cap L$$

$$(5) \quad D = R \cdot L - \text{ najmanja ekvivalencija koja sadrži } R \text{ i } L,$$

su relacije ekvivalencije i nazivaju se Green-ovim ekvivalencijama.

Na osnovu 2.1. imamo da u regularnoj semigrupi  $S$  važi

$$(i) \quad aLb \iff Sa = Sb$$

- (ii)  $aRb \Leftrightarrow aS = bS$   
(iii)  $aJb \Leftrightarrow SaS = SbS$

Neka je  $S$  semigrupa. Tada je

$$\begin{aligned} aIb &\Leftrightarrow S^1a = S^1b, \\ aRb &\Leftrightarrow aS^1 = bS^1, \\ aJb &\Leftrightarrow S^1aS^1 = S^1bS^1. \end{aligned}$$

$S^1aS^1 = S^1bS^1$  ako i samo ako postoje  $x, y, u, v \in S^1$  takvi da je  $xay = b$  i  $ubv = a$ . Neposredno imamo da je  $L \subseteq J$  i  $R \subseteq J$  pa sledi da je  $D \subseteq J$ . U komutativnim semigrupama imamo  $L = R = H = J = D$ .

Propozicija. Ako je  $S$  periodička semigrupa onda je  $D = J$ .

Dokaz. Neka je  $a, b \in S$  i  $aJb$ . Tada postoje  $x, y, u, v \in S^1$  takvi da je

$$(*) \quad xay = b \quad \text{i} \quad ubv = a.$$

Pokažimo da postoji  $c \in S$  takvo da je  $alc$  i  $cRb$ .

Iz (\*) imamo

$$\begin{aligned} a &= (ux)a(yv) = (ux)^2a(yv)^2 = (ux)^3a(yv)^3 = \dots, \\ b &= (xu)b(vy) = (xu)^2b(vy)^2 = (xu)^3b(vy)^3 = \dots \end{aligned}$$

Kako je  $S$  periodička semigrupa na osnovu 1.10 možemo naći  $m$  takvo da je  $(ux)^m$  idempotent.

Ako stavimo  $c = xa$  imamo

$$a = (ux)^m a (yv)^m = (ux)^m (ux)^m a (yv)^m = (ux)^m a = (ux)^{m-1} uc,$$

pa je  $alc$ . Takođe,  $cy = xay = b$  i možemo naći  $n$  takvo da je  $(vy)^n$  idempotent. Imamo

$$\begin{aligned} c &= xa = x(ux)^{n+1}a(yv)^{n+1} = (xu)^{n+1}xay(vy)^n v = \\ &= (xu)^{n+1}b(vy)^{2n} v = (xu)^{n+1}b(vy)^{n+1}(vy)^{n-1} v = \\ &= b(vy)^{n-1} v \end{aligned}$$

pa je  $cRb$ .

Za svako  $a \in S$  definišimo preslikavanje  $\rho_a : S^1 \rightarrow S^1$  na sledeći način

$$x\rho_a = xa, \quad x \in S^1$$

Preslikavanje  $\rho_a$  nazivamo desna translacija. Analogno definišemo preslikavanje  $\lambda_a : S^1 \rightarrow S^1$  kao

$$x\lambda_a = ax, \quad x \in S^1$$

i nazivamo ga leva translacija.

Svaka  $\mathcal{D}$  klasa neke semigrupe je unija  $L$  i  $R$  klasa. Presek  $L$ -klase i  $R$ -klase je ili prazan skup ili je  $H$ -klasa. Po definiciji imamo

$$a\mathcal{D}b \iff R_a \cap L_b \neq \emptyset \iff L_a \cap R_b \neq \emptyset.$$

Prema tome, pogodno je svaku  $\mathcal{D}$ -klasu posmatrati kao kvadrat podeljen na vrste i kolone tako da svaka vrsta predstavlja  $R$ -klasu, svaka kolona  $L$ -klasu i svaki presečni kvadrat  $H$ -klasu. Ako je  $D$  proizvoljna  $\mathcal{D}$ -klasa semigrupe  $S$  i  $a, b \in D$  su takvi da je  $aRb$ , onda po definiciji postoje  $s, s' \in S^1$  takvi da je

$$as = b \quad \text{i} \quad bs' = a.$$

Desna translacija  $\rho_s : S \rightarrow S$  preslikava  $a$  u  $b$ .  $\rho_s$  preslikava  $L_a$  u  $L_b$  jer ako  $x \in L_a$  onda  $x s$  po definiciji relacije  $L$  ( $L$  je desna kongruencija) pa je  $x \rho_s \in L_{as} = L_b$ . Lako se pokazuje da  $\rho_{s'}$  preslikava  $L_b$  u  $L_a$ .  $\rho_s \rho_{s'}$  preslikava  $L_a$  u  $L_a$  pa imamo za bilo koje  $x = ua \in L_a$

$$x \rho_s \rho_{s'} = u a s s' = u b s' = u a = x.$$

Sledi da je  $\rho_s \rho_{s'}$  identično preslikavanje na  $L_a$ . Slično pokazujemo da je  $\rho_{s'} \rho_s$  identično preslikavanje na  $L_b$  pa vidimo da su  $\rho_s|L_a$  i  $\rho_{s'}|L_b$  uzajamno inverzne bijekcije  $L_a$  na  $L_b$  i  $L_b$  na  $L_a$ . Ako  $x \in L_a$  onda element  $y = x \rho_s$  iz  $L_b$  ima svojstvo da je  $y = x s$  i  $y s' = x$ . Prema tome  $y R x$  pa preslikavanje  $\rho_s$  očuvava  $R$ -klase.  $\rho_s$  preslikava svaku  $H$ -klasu u  $L_a$  1-1 na odgovarajuću (tj.  $R$ -ekvivalentnu)  $H$ -klasu u  $L_b$ . Slično važi i za  $\rho_{s'}$ . Na taj način dokazali smo sledeće:

Lema 2.3. (Green-ova lema). Neka su  $a, b$   $R$ -ekvivalentni elementi semigrupe  $S$  i neka su  $s, s' \in S^+$  takvi da je  $as = b$ ,  $bs' = a$ . Tada su  $\rho_s|L_a$ ,  $\rho_{s'}|L_b$  uzajamno inverzne bijekcije  $L_a$  na  $L_b$  odnosno  $L_b$  na  $L_a$  koje očuvavaju  $R$ -klase.

Lema 2.4. (Green-ova lema). Neka su  $a, b$   $L$ -ekvivalentni elementi semigrupe  $S$  i neka su  $t, t' \in S^+$  takvi da je  $ta = b$  i  $t'b = a$ . Tada su leve translacije  $\lambda_t|R_a$ ,  $\lambda_{t'}|R_b$  uzajamno inverzna preslikavanja (bijekcije)  $R_a$  na  $R_b$  odnosno  $R_b$  na  $R_a$  i očuvavaju  $L$ -klase.

Kombinacijom ovih lema dobijamo:

Lema 2.5. Ako su  $a, b$   $\mathcal{D}$ -ekvivalentni elementi u semigrupi  $S$ , onda  $|H_a| = |H_b|$ .

Dokaz. Ako je  $c$  takav da je  $aRc$ ,  $cLb$  i  $s, t, s', t' \in S^1$  takvi da je  $as = c$ ,  $cs' = a$ ,  $tc = b$ ,  $t'b = c$ , onda na osnovu Green-ovih lema  $\rho_s|_{H_a}$  je bijekcija na  $H_c$  i  $\lambda_{t'}|_{H_c}$  je bijekcija na  $H_b$ . Prema tome  $\rho_s \lambda_{t'} : y \mapsto t'ys$  je bijekcija  $H_a$  na  $H_b$  (sa inverznim preslikavanjem  $\lambda_t, \rho_{s'} : y \mapsto t'ys$ ) pa sledi  $|H_a| = |H_b|$ .

Kao specijalan slučaj dobijamo

Lema 2.6. Ako  $x, y \in S$  i  $xy \in H_x$  onda  $\rho_y|_{H_x}$  je bijekcija  $H_x$  na  $H_x$ . Ako  $xy \in H_y$  onda je  $\lambda_x|_{H_y}$  bijekcija  $H_y$  na  $H_y$ .

Sada imamo

Teorema 2.7. (Green-ova teorema). Ako je  $H$   $H$ -klasa semigrupe  $S$  onda je ili  $H^2 \cap H = \emptyset$  ili  $H^2 = H$  i  $H$  je podgrupa od  $S$ .

Dokaz. Neka je  $H^2 \cap H \neq \emptyset$  tako da postoje  $a, b \in H$  takvi da je  $ab \in H$ . Prema prethodnoj lemi  $\rho_b$  i  $\lambda_a$  su bijekcije  $H$  na  $H$ . Sledi da  $hb \in H$  i  $ah \in H$  za svako  $h \in H$ . Prema prethodnoj lemi sledi da su  $\rho_h$  i  $\lambda_h$  bijekcije  $H$  na  $H$  pa je  $Hh = hH = H$  za svako  $h \in H$  tj.  $H^2 = H$  pa je  $H$  grupa.

Posledica. Ako je  $e$  idempotent semigrupe  $S$ , onda je  $H_e$  podgrupa od  $S$ . Svaka  $H$ -klasa nema više od jednog idempotenta.

Propozicija 2.8. Ako je  $a$  regularan element semigrupe  $S$  onda je svaki element klase  $D_a$  regularan.

Dokaz. Ako  $b \in D_a$  onda  $alc, cRb$  za neko  $c \in S$ , pa postoje  $u, v, z, t \in S^1$  takvi da je

$$ua = c, \quad vc = a, \quad cz = b, \quad bt = c.$$

Ako je  $x$  takvo da je  $axa = a$ , onda je

$$b(txv)b = cxvcz = uaxaz = uaz = cz = b,$$

pa je  $b$  regularan element.

Prorozicija 2.9. U regularnoj  $D$ -klasi svaka  $L$ -klasa i svaka  $R$ -klasa sadrže bar jedan idempotent.

Dokaz. Ako je  $a$  element regularne  $D$ -klase  $D$  u semigrupi  $S$ , i ako  $x \in S$  tako da je  $axa = a$ , onda je  $xa$  idempotent i  $aLx$ . Slično,  $ax$  je idempotent u  $aRax$ .

Propozicija 2.10. Svaki idempotent  $e$  u semigrupi  $S$  je leva jedinica za  $R_e$  i desna jedinica za  $L_e$ .

Dokaz. Ako  $a \in R_e$  onda  $a = ex$  za neko  $x \in S^1$  pa je  $ea = e(ex) = e^2x = ex = a$ . Slično  $be = b$  za svako  $b \in L_e$ .



3.

3.1. Neka je  $A$  proizvoljan skup, tada sa  $A^n$  označavamo skup svih uredjenih  $n$ -torki  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , gde je  $a_i \in A$ . Svako preslikavanje  $\omega$  skupa  $A^n$  u  $A$  nazivamo  $n$ -arna operacija (ili operacija dužine  $n$ ) u  $A$ . Ako se  $n$ -torka  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A^n$  sa  $\omega$  preslika u  $b \in A$ , pišemo

$$b = \omega(a_1, a_2, \dots, a_n), \text{ odnosno } b = \omega a_1 a_2 \dots a_n.$$

Svaki fiksni element iz  $A$  nazivamo nularna operacija u  $A$ . Svaku  $n$ -arnu operaciju  $\omega$  nazivamo: unarna, binarna, ternarna ako je  $n$ : 1, 2, 3 respektivno. Svaka unarna operacija u  $A$  je transformacija na  $A$ , tj. preslikavanje  $A$  u  $A$ . Neka je  $\Omega$  neki skup operacija u skupu  $A$ . Par  $(A, \Omega)$  nazivamo algebra. Skup  $A$  nazivamo nosač algebre a za  $\Omega$  kažemo da je tip algebre. Skup  $n$ -arnih operacija koje pripadaju  $\Omega$  označavamo sa  $\Omega(n)$ . Neka je  $A$  dati skup i neka svakom operatoru  $\omega \in \Omega(n)$  odgovara  $n$ -arna operacija  $\omega_A$  na  $A$ , tada na skupu  $A$  imamo algebru  $(A, \Omega_A)$  tipa  $\Omega$ .

Neka su  $(A, \Omega_A)$  i  $(B, \Omega_B)$  algebre istog tipa  $\Omega$ . Za preslikavanje  $\phi : A \rightarrow B$  kažemo da je homomorfizam algebre  $(A, \Omega_A)$  u algebru  $(B, \Omega_B)$  ako važi

$$(\forall \omega \in \Omega(n) \subseteq \Omega) (\forall a_1, \dots, a_n \in A) \phi(\omega_A a_1 \dots a_n) = \omega_B \phi(a_1) \dots \phi(a_n).$$

Podskup  $B$  skupa  $A$  nazivamo podalgebra od  $(A, \Omega)$  ako važi

$$\Omega_0 \in B,$$

$$(\forall \omega \in \Omega(n), b_1, \dots, b_n \in B) \omega b_1 \dots b_n \in B.$$

Neka je  $\mathcal{T}$  klasa algebri tipa  $\Omega$ ,  $(A, \Omega) \in \mathcal{T}$  i  $B$  generatorni skup za  $(A, \Omega)$ . Za  $(A, \Omega)$  kažemo da je slobodno generisana sa  $B$  u klasi  $\mathcal{T}$ , ako važi sledeći uslov:

(i) Za svaku algebru  $(A', \Omega) \in \mathcal{T}$  i svako preslikavanje  $\lambda : B \mapsto A'$  postoji homomorfizam  $\phi : A \mapsto A'$  koji je proširenje preslikavanja  $\lambda$ .

3.2. Neka je  $A = (A, \Omega)$  algebra,  $S$  semigrupa i  $\omega \mapsto \bar{\omega}$  preslikavanje  $\Omega$  u  $S$  takvo da je  $A \subseteq S$  i

$$\omega(a_1, \dots, a_n) = \bar{\omega} a_1 \dots a_n$$

za svaki  $n$ -arni operator  $\omega \in \Omega$  i  $a_1, \dots, a_n \in A$ .  $A = (A, \Omega)$  nazivamo podalgebra semigrupe  $S$ .

Teorema (Cohn-Рубанс) Svaka algebra jeste podalgebra neke semigrupe.

Dokaz. (G. Čupona) Neka je  $\Omega' = \Omega \setminus \Omega_0$  i svakom elementu  $\omega \in \Omega'$  pridružimo simbol  $\bar{\omega}$  na sledeći način

$$\omega \neq \tau \rightarrow \bar{\omega} = \bar{\tau}, \quad \{\bar{\omega} \mid \omega \in \Omega'\} \cap A = \emptyset.$$

Formirajmo semigrupu  $F$  koja je slobodno generisana sa  $B = A \cup D$ , gde je  $D = \{\bar{\omega} \mid \omega \in \Omega \setminus \Omega_0\}$ . Pored toga  $F$  se sastoji od svih konačnih nizova  $u = b_1 b_2 \dots b_k$  gde je  $b_i \in B$ . Za  $u \in F$  kažemo da je reducibilan element u  $F$  ako ima oblik:

$$(1) \quad u = b_1 \dots b_{i-1} \bar{\omega} a \dots a_n b_{i+n+1} \dots b_k,$$

gde  $\omega \in \Omega(n)$  i  $a_1, \dots, a_n \in A$ . U protivnom, za  $u$  kažemo da je reduciran element iz  $F$ . Označimo sa  $S$  skup svih reduciranih elemenata iz  $F$ . Jasno je da

$$A \cup D \subseteq F.$$

Definišimo preslikavanje  $\phi : F \rightarrow F$  na sledeći način

$$u \in S \Rightarrow \phi(u) = u.$$

Ako  $u \in F \setminus S$  tada  $u$  predstavljamo u obliku (1) pri čemu za  $i = 1$   $u$  ima oblik

$$(1') \quad u = \bar{\omega} a_1 \dots a_n b_{n+2} \dots b_k,$$

ili je  $v = b_1 \dots b_{i-1}$  reduciran. Tada je

$$\phi(u) = b_1 \dots b_{i-1} a b_{i+n+1} \dots b_k,$$

gde je  $a = \omega(a_1, \dots, a_n)$  u  $(A, \Omega)$ . Iz definicije  $\phi$  jasno je da  $\phi(u) = u \Leftrightarrow u \in S$  i da ako  $u \in F \setminus S$ , onda  $\phi(u) \neq u$  i  $\phi(u)$  ima manju dužinu od  $u$  (dužina od  $u$  je  $k$ , ako je  $u = b_1 \dots b_k$ , gde  $b_1, \dots, b_k \in B$ ). Pored toga, za svako  $u \in F$  postoji  $p \in \mathbb{N}$ , takav da  $\phi^p(u) \in S$  i tada imamo  $\phi^{p+1}(u) = \phi^p(u)$ . U tom slučaju stavljamo  $\psi(u) = \phi^p(u)$ . Pored toga,  $\psi(u) \in S$ , za svako  $u \in F$ , tj.  $\psi$  je preslikavanje  $F$  u  $S$ . Pokažimo da je

$$(2) \quad (\forall u, v \in F) \psi(uv) = \psi(\phi(u)v) = \psi(\psi(u)v).$$

Imajući u vidu da je (2) očigledno tačno za  $u \in S$ , pretpostavićemo da je  $u$  reducibilan. Tada, po definiciji  $\phi$  sledi da je  $\phi(\phi(u)v) = \phi^2(uv)$ . Pretpostavimo da je  $\psi(uv) = \phi^p(uv)$ ,  $\psi(u) = \phi^q(u)$ .

Tada imamo

$$\psi(uv) = \phi(\psi(uv)) = \phi^{p+1}(uv) = \phi^p(\phi(uv)) = \phi^p(\phi(u)v),$$

tj.  $\psi(uv) = \phi(\phi(u)v)$ . Sledi da je

$$\psi(uv) = \psi(\phi(u)v) = \psi(\phi^2(u)v) = \dots = \psi(\phi^q(u)v) = \psi(\psi(u)v),$$

čime završavamo dokaz za (2).

Pokazaćemo da je

$$(3) \quad (\forall u, v \in F) \psi(uv) = \psi(u\psi(v)).$$

U ovom slučaju, takodje, pretpostavimo da  $v \in F \setminus S$ , budući da za  $v \in S$  tvrdjenje sledi neposredno. Dokaz dajemo indukcijom u odnosu na dužinu od  $v$ .

Ako je  $v = \bar{\omega}a_1 \dots a_n$ , gde je  $a = \omega(a_1, \dots, a_n)$  u  $(A, \Omega)$ , onda  $\psi(v) = \phi(a) = a$  pa imamo

$$\begin{aligned} \psi(uv) &= \psi(\psi(u)v) = \psi(\phi(\psi(u)v)) = \psi(\psi(u)\phi(v)) = \\ &= \psi(\psi(u)a) = \psi(ua) = \psi(u\psi(v)). \end{aligned}$$

Pretpostavimo da je  $v = v_1v_2$  gde je  $v_1$  ili  $v_2$  reducibilan niz. Tada, ako se ima u vidu induktivna pretpostavka, dobijamo

$$\begin{aligned} \psi(uv) &= \psi(uv_1v_2) = \psi(\psi(uv_1)v_2) = \psi(\psi(uv_1)\psi(v_2)) = \\ &= \psi(\psi(u\psi(v_1))\psi(v_2)) = \psi(u\psi(v_1)\psi(v_2)) = \\ &= \psi(u\psi(\psi(v_1)\psi(v_2))) = \psi(u\psi(v_1v_2)), \end{aligned}$$

čime završavamo dokaz za (3).

Definišimo operaciju  $*$  u  $S$  sa:

$$u*v = \psi(uv).$$

Ako imamo u vidu (2) i (3) dobijamo

$$\begin{aligned} (u*v)*w &= \psi(\psi(uv)w) = \psi(uvw) = \psi(u\psi(vw)) = \\ &= u*(v*w), \end{aligned}$$

tj.  $(S,*)$  je semigrupa. Ako  $\bar{\omega} \in D$ ,  $a_1, \dots, a_n \in A$  i  $\omega(a_1, \dots, a_n) = a$  u  $(A, \Omega)$  onda imamo

$$\bar{\omega}*a_1*\dots*a_n = \psi(\bar{\omega}a_1\dots a_n) = a = \omega(a_1, \dots, a_n),$$

tj. dobijamo da je  $(S,*)$  polugrupa sa traženim osobinama.

Ю.Н. Рабане је у раду: О представлени универсалних алгебра в коммутативних полугруппах, Сиб.Мат.Жур., Том VII, N<sup>o</sup> 4, 1966, dokazao sledeću teoremu

Teorema. (Ю. Рабане) Potreban i dovoljan uslov da algebra  $(A, \Omega)$  bude podalgebra komutativne semigrupe jeste da u  $(A, \Omega)$  važi identitet:

$$\begin{aligned} &\phi(x_1, \dots, x_{i-1}, \omega(x_i, \dots, x_{i+n-1}), x_{i+n}, \dots, x_{n+m-1}) = \\ &= \omega(x_{j_1}, \dots, x_{j_{k-1}}, \phi(x_{j_k}, \dots, x_{j_{k+m-1}}), x_{j_{k+m}}, \dots, x_{j_{n+m-1}}) \end{aligned}$$

gde su  $\omega \in \Omega(n)$ ,  $\phi \in \Omega(m)$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq k \leq n$ , a  $\pi = (j_1 j_2 \dots j_{n+m-1})$  proizvoljna permutacija skupa  $\{1, 2, \dots, n+m-1\}$ .

U Glavi IV ispitujemo podalgebre polumreža.

GLAVA II

$(m, n)^*$  - ANTI-INVERZNE SEMIGRUPE

### 1. DEFINICIJA I NEKE OSOBINE $(m,n)^*$ -ANTI- -INVERZNIH SEMIGRUPA

U ovoj tački dajemo definiciju i neke karakterizacije semigrupa iz klase  $S_{m,n}^*$ .

Klasa  $S_{m,n}^*$  nastala je kao jedno od mogućih uopštenja klase  $A$ , anti-inverznih semigrupa. U radu [1] dokazana je sledeća

Teorema 1.1. Neka je  $S$  semigrupa. Tada

$$s \in A \leftrightarrow (\forall x \in S) (\exists y \in S) (x^2 = y^2 \wedge yx = x^3y \wedge x^5 = x).$$

Ako sa  $S_{m,n}^*$  označimo klasu semigrupa koja zadovoljava uslov

$$(1) \quad (\forall x) (\exists y) (x^m = y^m \wedge yx = x^{m+1}y \wedge x^n = x)$$

tj.

$$s \in S_{m,n}^* \leftrightarrow (\forall x \in S) (\exists y \in S) (x^m = y^m \wedge yx = x^{m+1}y \wedge x^n = x)$$

onda neposredno sledi da je

$$A = S_{2,5}^*$$

Semigrupa

	a	b
a	a	b
b	b	b

pripada svim klasama  $S_{m,n}^*$  za proizvoljne  $m,n$ .

Neka je  $s \in S_{m,n}^*$  i  $x \in S$ . Tada za  $y$ , čija egzistencija sledi iz definicije klase  $S_{m,n}^*$ , kažemo da je  $(m,n)^*$ -anti-inverzan za  $x$ . Za semigrupe iz klase  $S_{m,n}^*$  kažemo da su  $(m,n)^*$ -anti-inverzne.

Lema 1.1. Neka je  $B$  klasa svih bendova. Tada je  $S_{1,n}^* = B$ .

Dokaz. Uslov (1) za  $m = 1$  glasi

$$(\forall x) (\exists y) (x = y \wedge yx = x^2 y \wedge x^n = x)$$

pa imamo

$$x^2 = x^3, \quad x^n = x$$

tj.

$$x^2 = x.$$

Svaki bend je anti-inverzna semigrupa pa imamo da je

$$S_{1,n}^* \subset A.$$

U daljim razmatranjima klase  $S_{m,n}^*$  pretpostavljamo da je  $n > 1$ .

Lema 1,2. Neka je  $s \in S_{m,n}^*$ . Tada

$$(\forall x \in S) (\forall k \in \mathbb{N}) (\exists t \in \mathbb{N}) (x^k = x^t \wedge n > t).$$

Dokaz. Sledi neposredno.

Lema 1.3.

$$S_{m,2}^* = B.$$

Dokaz. Za  $n = 2$  uslov (1) glasi



$$(\forall x) (\exists y) (x^m = y^m \wedge yx = x^{m+1}y \wedge x^2 = x).$$

sledi

$$x^2 = x,$$

pa je

$$S_{m,2}^* = B$$

Lema 1.4. Ako je  $n > 1$  onda je  $S_{n,n}^* = B$ .

Dokaz. Neka je  $n = m > 1$ , tada uslov (1) glasi

$$(\forall x) (\exists y) (x^m = y^m \wedge yx = x^{m+1}y \wedge x^m = x)$$

odakle imamo

$$x = y \wedge yx = x^2y \wedge x^m = x$$

tj.

$$x^2 = x.$$

Na osnovu leme 1.2. sledi da se ispitivanje semigrupa iz klase  $S_{m,n}^*$  za  $m > n > 1$  svodi na ispitivanje semigrupa iz klase  $S_{m_1,n}^*$  gde je  $n > m_1$ .

U daljim razmatranjima pretpostavljamo da je

$$n > m.$$

2. NEKE DEKOMPOZICIJE SEMIGRUPA IZ KLAŠE  $S_{m,n}^*$

Ovde dokazujemo osnovne teoreme kojima se karakteri-  
šu semigrupe iz klase  $S_{m,n}^*$ .

Lema 2.1. Neka je  $x \in S$  i  $s \in S_{m,n}^*$ . Tada je  $x^{n-1}$   
idempotent u  $S$ .

Dokaz. Neposredno imamo

$$(x^{n-1})^2 = x^{2n-2} = x^n x^{n-2} = x^{n-1}.$$

Lema 2.2.  $(m,n)^*$ -anti-inverzni elementi semigrupe  
 $S$  imaju istu jedinicu.

Dokaz. Neka je  $y$   $(m,n)^*$ -anti-inverzan za  $x$ . Ozna-  
čimo sa  $e_x$  sopstvenu jedinicu elementa  $x$ . Tada, koristeći  
lemu 2.1. imamo da je

$$e_x = x^{n-1} = (x^{n-1})^m = (x^m)^{n-1} = (y^m)^{n-1} = (y^{n-1})^m = y^{n-1} = e_y.$$

Označimo sa  $M_a^*$  skup svih elemenata semigrupe  $S$  koji su  
 $(m,n)^*$ -anti-inverzni sa  $a \in S$ . Dalje, neka je  $P$  neprazan  
podskup od  $S$ . Označimo sa  $[P]$  podsemigrupu semigrupe  $S$  ge-  
nerisanu skupom  $P$ .

Teorema 2.1. Neka je  $S \in S_{m,n}^*$ . Tada je za svako  
 $a \in S$  i svaki  $B_a^* \subseteq M_a^*$

$$GB_a^* = [a \cup B_a^*]$$

grupa.

Dokaz. Dovoljno je da svaka od jednačina  $cx = b$  i  $yc = b$  ima rešenje po  $x$ , odnosno  $y$ , u  $GB_a^*$ . Zaista, elementi  $c$  i  $b$  su oblika

$$c = c_1 c_2 \dots c_k, \quad b = b_1 b_2 \dots b_s \quad (c_i, b_j \in a \cup B_a^*).$$

Koristeći lemu 2.2. neposredno imamo da je rešenje jednačine  $cx = b$

$$x = c_k^{n-2} c_{k-1}^{n-2} \dots c_1^{n-2} b_1 b_2 \dots b_s.$$

Slično za drugu jednačinu.

Posledica 2.1. Neka je  $S$  semigrupa. Tada

$$S \in S_{m,n}^* \Rightarrow S = \bigcup_{a \in S} GB_a^*.$$

Teorema 2.2. Neka je  $S \in S_{m,n}^*$ . Tada

$$GB_a^* \in S_{m,n}^*$$

ako i samo ako

$(\forall \alpha \in \bar{N}) (\forall b \in [B_a^*]) (\exists \beta \in \bar{N}) (\exists c \in [B_a^*]) (a^\beta c (m,n)^*$ -anti-inverzan za  $a^\alpha b$ )  $(\bar{N} = N \cup \{0\})$ .

Dokaz.  $(\rightarrow) GB_a^* \in S_{m,n}^*$ . Tada  $a^\alpha b \in GB_a^*$ , gde je  $\alpha$  proizvoljan element skupa  $\bar{N}$  i  $b$  proizvoljan element semigrupe  $[B_a^*]$ . Na osnovu definicije klase  $S_{m,n}^*$  sledi da postoji  $y \in GB_a^*$   $(m,n)^*$ -anti-inverzno za  $a^\alpha b$ . Iz  $y \in GB_a^*$  sledi da je

$$y = a^{\gamma_1} b^{\alpha_1} a^{\gamma_2} b^{\alpha_2} \dots a^{\gamma_k} \quad (\gamma_j, \alpha_j \in \bar{N}, j=1, \dots, k).$$

Iz uslova (1) sledi

$$a^p b_{i_j}^q = a^{p(m+1)^q} b_{i_j}^q \quad (j=1, \dots, k)$$

pa postoje  $\beta \in \bar{N}$  i  $c \in [B_a^*]$  takvi da je  $a^\beta c$   $(m,n)^*$ -anti-inverzno za  $a^\alpha b$ .

(+) Neka je  $x \in GB_a^*$ . Na osnovu predhodnog sledi da je  $x = a^\alpha b$  za neko  $\alpha \in \bar{N}$  i neko  $b \in [B_a^*]$ . Kako za svako  $a^\alpha b$  postoji  $(m,n)^*$ -anti-inverzan element  $a^\beta c$  sledi da  $GB_a^* \in S_{m,n}^*$ .

Lema 2.3. Neka je  $S \in S_{m,n}^*$ . Tada

$$(\forall x \in S) (x^{m^2} = e_x).$$

Dokaz. Neka je  $S \in S_{m,n}^*$  i neka je  $y \in S$   $(m,n)^*$ -anti-inverzno za  $x \in S$ . Tada iz (1) i teoreme 2.1. imamo

$$yxy^{-1} = x^{m+1}.$$

Stepenovanjem ove jednakosti sa  $m$  dobijamo

$$yx^m y^{-1} = x^{(m+1)m}$$

tj.

$$x^m = x^{m^2+m}$$

odnosno

$$x^{m^2} = e_x.$$

Lema 2.4. Neka je  $y$   $(m,n)^*$ -anti-inverzno za  $x$  u semigrupi  $S \in S_{m,n}^*$ . Tada je proizvoljan element grupe  $\{x, y\}$  oblika

$$x^s y^t,$$

gde je  $s, t \in \mathbb{N}$ ,  $n > s \geq 0$ ,  $m > t \geq 0$  ( $x^0 \stackrel{\text{def}}{=} e_x$ ).

Dokaz. Na osnovu (1) sledi da je

$$(2.1) \quad yx = xy^{m+1}.$$

Iz (2.1) imamo

$$(2.2) \quad y^l x = y^{l-1} xy^{m+1} = y^{l-2} xy^{2(m+1)} = \dots = xy^{l(m+1)}.$$

Iz (2.2) imamo

$$y^l x^2 = y^l xx = xy^{l(m+1)} x = x^2 y^{l(m+1)(m+1)} = x^2 y^{l(m+1)^2}.$$

Analogno dobijamo

$$y^l x^k = x^k y^{l(m+1)^k}.$$

Na osnovu leme 1.2. imamo da se  $k$  redukuje po  $n$ , a broj  $l(m+1)^k$  po  $m$  i  $n$ .

Posledica 2.2. Grupa  $[(x, y)]$  je konačna.

Teorema 2.3. Neka je  $S$  semigrupa. Tada

$$S \in S_{m, n}^* \iff (\forall x \in S)(\exists y \in S)([(x, y)] \in S_{m, n}^*).$$

Dokaz. (+). Na osnovu teoreme 2.1. imamo da je  $[(x, y)]$  grupa. Neka je  $x^s y^t$  proizvoljan element ove grupe. Dokažimo da je tada

$$(x^s y^t)^n = x^{m \left( \frac{m(m+1)}{2} st + s + t \right)}.$$

zaista,

$$(x^s y^t)^m = x^s y^t \dots y^t x^s y^t x^s y^t$$

pa je

$$(x^s y^t)^m = x^s y^t \dots y^t x^{2s} y^{t(m+1)s} y^t$$

tj.

$$(x^s y^t)^m = x^s y^t \dots x^{3s} y^{t(m+1)2s} y^{t(m+1)s} y^t.$$

Nastavljajući dolazimo do

$$(x^s y^t)^m = x^{ms} y^{t(m+1)^{(m-1)s}} y^{t(m+1)^{(m-2)s}} \dots y^{t(m+1)^s} y^t.$$

Na osnovu leme 2.3. imamo

$$(x^s y^t)^m = x^{ms} y^{mt \left( \frac{m(m-1)}{2} s + 1 \right)}$$

Kako je

$$x^m = y^m$$

imamo

$$(x^s y^t)^m = x^{m \left( \frac{m(m-1)}{2} st + s + t \right)}$$

Kako  $s \in S_{m,n}^*$ , grupa  $[(x,y)] \in S_{m,n}^*$  ako i samo ako jednačine

$$(x^s y^t)^m = \alpha^m$$

(2.3)

$$\alpha x^s y^t = (x^s y^t)^{m+1} \alpha,$$

$x^s y^t$  je proizvoljan element  $[(x,y)]$ , imaju rešenja po  $\alpha$  u grupi  $[(x,y)]$ .

Ako postoji takvo  $\alpha$ , onda je

$$\alpha = x^k y^l$$

za neke  $k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Sistem jednačina (2.3) postaje

$$(2.4) \quad (x^s y^t)^m = (x^k y^l)^m$$

$$x^k y^l x^s y^t = (x^s y^t)^{m+1} x^k y^l,$$

pa je rešenje (2.3) rešenje (2.4) i obratno.

Sistem (2.4) ekvivalentan je sa sistemom

$$(2.5) \quad x^{m \left( \frac{m(m-1)}{2} (st-kl) + s+t-k-l \right)} = e$$

$$x^{m \left( \frac{m(m-1)}{2} st + s+t-ls+kt \right)} = e$$

Rešenje po  $k$  i  $l$  sistema (2.5) nalazimo koristeći lemu 2.3. tj.

$$x^{m^2} = e$$

za svako  $x \in S$ .

Ako je  $m$  neparan broj, za  $k$  i  $l$  možemo uzeti

$$k = s - 1$$

odnosno

$$l = t + 1$$

pa je

$$a = x^{s-1} y^{t+1}$$

rešenje sistema (2.5), tj. sistema (2.4).

Neka je  $m$  paran broj. Razlikujemo tri slučaja:

1°

a)  $m = 4q$

s-parno (uključujući  $s = 0$ )

t-parno (uključujući  $t = 0$ )

Tada je

$$\alpha = x^{s-1+\frac{m}{2}} y^{t+1}$$

rešenje sistema (2.4) što se neposredno proverava.

b)  $m = 4q + 2$

s-parno (uključujući  $s = 0$ )

t-parno (uključujući  $t = 0$ ).

U tom slučaju

$$\alpha = x^{s-1+\frac{m}{2}} y^{t+1+\frac{m}{2}}$$

je rešenje sistema (2.4).

2°

s-neparno

t-neparno

Za  $\alpha$  možemo uzeti

$$\alpha = x^{s-1} y^{t+1-\frac{m}{2}}$$

3°

$$\alpha = x^{s-1} y^{t+1}$$

je rešenje sistema (2.4) u ostalim slučajevima.

Kako je

$$\alpha^n = \alpha,$$

sledi da su  $\alpha$  i  $x^s y^t$   $(m, n)^*$ -anti-inverzni.



Na osnovu dokazanog sledi da je

$$[(x, y)] \in S_{m, n}^*$$

Obratno, neposredno sledi.

Posledica 2.3. Neka je  $S$  semigrupa. Tada  $s \in S_{m, n}^*$  ako i samo ako  $S$  je unija grupa iz  $S_{m, n}^*$ .

Posledica 2.4. Neka je  $G$  grupa. Tada

$$G \in S_{m, n}^* \iff (\forall x \in G) (\exists y \in G) ([x, y]) \in S_{m, n}^*$$

Teorema 2.4. Označimo sa  $|G|$  red grupe  $G$ . Tada

$$(\forall k \in \mathbb{N}) (|G| = k \implies G \in S_{k, k+1}^*)$$

Dokaz. Neka je  $G$  grupa reda  $k \in \mathbb{N}$ . Tada, na osnovu poznate teoreme iz teorije grupa, sledi

$$(2.6) \quad x^k = e$$

za svako  $x \in G$ . Na osnovu (2.6) imamo da je

$$(2.7) \quad x^{k+1} = x.$$

Iz (2.6) i (2.7) sledi da je

$$x^k = e^k = e,$$

$$ex = x^{k+1}e = x$$

i

$$x^{k+1} = x$$

pa je

$$G \in S_{k, k+1}^*$$

Posledica 2.5. Neka je  $G$  konačna grupa. Tada postoji bar jedna klasa semigrupa  $S_{m,n}^*$  takva da je  $G \in S_{m,n}^*$ .

Označimo sa  $I_m$  skup ostataka po modulu  $m$ , gde je  $m$  prost broj. Neka je

$$I_m[x] = \{p(x) \mid p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, a_i \in I_m, n \in \mathbb{N}\}$$

Za proizvoljne  $p(x), q(x) \in I_m[x]$  je

$$\begin{aligned} p(x) \oplus q(x) &= (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) \oplus (b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m) = \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + a_nx^n \quad \text{za } n > m. \end{aligned}$$

$I_m[x]$  je grupa u odnosu na operaciju " $\oplus$ ". Kako je  $mp(x) = 0$  za svako  $p(x) \in I_m[x]$ , sledi

$$I_m[x] \in S_{m,m+1}^*$$

Ovaj primer pokazuje da ne važi obrat teoreme 4.

Propozicija 2.1. Neka je  $S$  semigrupa i  $S \in S_{m,mq+r}^*$  ( $m, q, r \in \mathbb{N}$ ).

Tada

$$x^{(r-1)^2} = e_x,$$

gde  $e_x$  označava sopstvenu jedinicu elementa  $x$ .

Dokaz. Neka je  $S$  semigrupa iz  $S_{m,mq+r}^*$  i neka je  $y$   $(m,n)^*$ -anti-inverzan za  $x$  u  $S$ . Prema teoremi 2.1. sledi da je  $\{x, y\}$  grupa. Lema 2.3. daje  $(\forall x \in S) x^{m^2} = e_x$ . Iz  $x^{mq+r} = x$  stepenovanjem sa  $m$  dobijamo

$$x^{mr} = x^m$$

odakle sledi da je

$$x^{mq+r} = x^{mrq+r} = x^{mrq+r+r^2-r^2} = x^{(mq+r)r-r^2+r} = x^{2r-r^2} = x$$

tj.

$$x^{(r-1)^2} = e_x.$$

Propozicija 2.2. Neka je  $S$  semigrupa. Tada

$$s \in S_{m, mq+3}^* \rightarrow s \in A.$$

Dokaz. Na osnovu propozicije 2.1. i leme 2.3. sledi da

$$x^{m^2} = x^{(3-1)^2} = e_x.$$

1° Za  $m$  neparno imamo da je  $(4, m^2) = 1$  pa je  $x^{(4, m^2)} = x = e_x$  tj.  $S$  je bend.

2° Za  $m = 4k (k \in \mathbb{N})$ , koristeći  $x^4 = e_x$ , imamo  $x^{mq+3} = x^{4kq+3} = x^3 = x$

pa  $s \in A$ .

3° Za  $m = 4k+2 (k \in \mathbb{N})$  imamo  $x^m = x^2 = y^2$  tj.  $yx = x^3y$  pa prema teoremi 1.1. sledi da  $s \in A$ .

Posledica 2.6. Za  $m \equiv 2 \pmod{4}$  i  $q$  neparno imamo

$$S_{m, mq+3}^* = A.$$

Dokaz. Na osnovu prepozicije 2.2. sledi da je

$$S_{m, mq+3}^* \subset A.$$

Neka je  $s \in A$ . Tada je  $x^2 = y^2$  pa imamo

$$(x^2)^{2k+1} = (y^2)^{2k+1}$$

tj.

$$x^m = y^m$$

gde je  $m = 4k+2$ . Kako je  $x^4 = e_x$  sledi da je

$$x^m = x^{4k+2} = x^2$$

tj.

$$x^{m+1} = x^3.$$

Neka je  $q = 2t+1$ . Tada je

$$x^n = x^{(4k+2)(2t+1)+3} = x^5 = x$$

pa važi uslov (1) tj.  $s \in S_{m, mq+3}^*$  odnosno

$$S_{m, mq+3}^* = A.$$

### 3. IDEALI $(m, n)^*$ -ANTI-INVERZNIH SEMIGRUPA

Dajemo neke karakterizacije semigrupa iz klase  $S_{m, n}^*$  pomoću ideala semigrupe.

Lema 3.1. Neka je  $S$  semigrupa i  $I$  ideal od  $S$  (levi, desni), tada

$$s \in S_{m, n}^* \rightarrow I \in S_{m, n}^*.$$

Dokaz. Neka je  $s \in S_{m, n}^*$  i  $I$  ideal od  $S$ . Ako  $x \in I$ , onda  $x^m \in I$ . Kako za  $x \in I$  postoji  $y \in S$  da je

$x^m = y^m$ , sledi  $y^m \in I$  pa, obzirom da je  $n > m$ ,

$$y^n \in I, \quad \text{tj.} \quad y \in I.$$

Lema 3.2. Neka je  $S$  semigrupa. Tada  $s \in S_{m,n}^*$  ako i samo ako svaki ideal  $I \in S_{m,n}^*$  i za svako  $x \in S \setminus I$  postoji  $y \in S \setminus I$  da važi uslov (1).

Dokaz. Sledi neposredno.

Lema 3.3. Neka je  $y$   $(m,n)^*$ -anti-inverzno za  $x$  u semigrupi  $S \in S_{m,n}^*$ . Tada

$$L(x) = L(y)$$

$$R(x) = R(y)$$

$$H(x) = H(y)$$

i

$$J(x) = J(y).$$

Dokaz. Kako je  $S \in S_{m,n}^*$  levo regularna semigrupa, onda na osnovu poznate teoreme iz [7] sledi

$$L(x) = L(x^2) \quad x \in S,$$

pa imamo

$$L(x) = L(x^m).$$

Iz  $x^m = y^m$  sledi  $L(x) = L(y)$ .

Slično dokazujemo da je  $R(x) = R(y)$ ,  $H(x) = H(y)$ ,

$J(x) = J(y)$ .

Lema 3.4. Neka je  $S$  semigrupa. Tada

$$S \in S_{m,n}^* \leftrightarrow (\forall a \in S) (L_a \in S_{m,n}^*),$$

$$S \in S_{m,n}^* \leftrightarrow (\forall a \in S) (R_a \in S_{m,n}^*).$$

Dokaz. Neka je  $S \in S_{m,n}^*$  i  $L_a$  proizvoljna  $L$ -klasa. Kako je  $S$  levo regularna to je, na osnovu poznate teoreme iz [7],  $L_a$  podsemigrupa semigrupe  $S$ . Za  $x \in L_a$  postoji  $(m,n)^*$ -anti-inverzan  $y \in S$  pa je, na osnovu leme 3.3.,

$$(3.1) \quad L(x) = L(y).$$

Kako je i

$$(3.2) \quad L(x) = L(a),$$

iz (3.1) i (3.2) sledi

$$L(y) = L(a)$$

tj.  $y \in L_a$ .

Obrat sledi neposredno.

Lema 3.5. Neka je  $S$  semigrupa. Tada

$$S \in S_{m,n}^* \leftrightarrow (\forall a \in S) (H_a \in S_{m,n}^*).$$

Dokaz.  $H = L \cap R$  pa na osnovu leme 3.4. tvrdjenje neposredno sledi.

Teorema 3.1. Neka je  $S$  semigrupa. Tada  $S \in S_{m,n}^*$  ako i samo ako  $S$  jeste levo regularna i svaki njen levi ideal je iz  $S_{m,n}^*$ .

Dokaz. Neka je  $s \in S_{m,n}^*$ , tada je  $S$  levo regularna i svaki njen levi ideal je iz  $S_{m,n}^*$  (lema 3.1.).

Obratno, neka je  $S$  levo regularna semigrupa. Tada proizvoljna  $l$ -klasa  $L_a$  semigrupe  $S$  je podsemigrupa od  $S$  (lema 3.4.). Kako je

$$L_a \subseteq L(a) \in S_{m,n}^*$$

za  $x \in L_a$  postoji  $(m,n)^*$ -anti-inverzan  $y \in L(a)$ .

Teorema 3.2. Neka je  $S$  semigrupa i  $I$  njen dvostrani ideal. Tada

$$s \in S_{m,n}^* \leftrightarrow (\forall I) (I \in S_{m,n}^* \wedge s/I \in S_{m,n}^*).$$

Dokaz. Neka  $s \in S_{m,n}^*$ . Tada na osnovu leme 3.1. i činjenice da je homomorfna slika semigrupe iz  $S_{m,n}^*$  semigrupa iz  $S_{m,n}^*$ , sledi tvrdjenje.

Obratno, neka je proizvoljan ideal  $I$  semigrupe  $S$  iz  $S_{m,n}^*$  i neka  $s/I \in S_{m,n}^*$ . Tada razlikujemo dva slučaja:

1° Ako  $x \in I$ , onda  $x$  ima  $(m,n)^*$ -anti-inverzan element  $y \in I$ .

2° Ako  $x \in S \setminus I$ , tada  $x^m \in S \setminus I$ . Za  $x \in S \setminus I$  postoji  $xf \in S/I$  gde je  $f$  prirodni homomorfizam. Za  $xf$  postoji  $(m,n)^*$ -anti-inverzan element  $yf$  iz  $S/I$ , pa je

$$(a) \quad (xf)^m = (yf)^m, \quad (yf)(xf) = (xf)^{m+1}(yf), \quad (xf)^n = (xf).$$

$y \notin I$  pa iz (a) imamo

$$(b) \quad x^m f = y^m f, \quad (yx)f = (x^{m+1}y)f, \quad x^n f = xf.$$

Kako je  $f$  izomorfizam na  $S \setminus I$ , to iz (b) dobijamo

$$x^m = y^m, \quad yx = x^{m+1}y, \quad x^n = x. \text{ Sledi } s \in S_{m,n}^*.$$

Na osnovu Leme 3.3. neposredno se dokazuje

Lema 3.6. Neka je  $S$  semigrupa. Tada

$$s \in S_{m,n}^* \leftrightarrow (\forall a \in s) (J_a \in S_{m,n}^*).$$

Na osnovu propozicije 2.3., Glava I, imamo

$$s \in S_{m,n}^* \rightarrow J = \mathcal{D}.$$

Označimo sa  $D_a$   $\mathcal{D}$ -klasuu elementa  $a$  iz  $S$ . Na osnovu leme 3.6.

imamo

$$(*) \quad s \in S_{m,n}^* \leftrightarrow (\forall a \in s) (D_a \in S_{m,n}^*).$$

Lema 3.7. Neka je  $S$  semigrupa sa dva idempotenta.

Tada

$$s \in S_{m,n}^* \rightarrow s \text{ je ortodoksna semigrupa.}$$

Dokaz. Ako  $s \in S_{m,n}^*$  onda je  $s$  unija disjunktnih

grupa. Kako  $s$  ima dva idempotenta sledi da postoje grupe  $G_1$

i  $G_2$  takve da je  $s = G_1 \cup G_2$  i  $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ . Neka su

$e_1 \in G_1$  i  $e_2 \in G_2$  jedinični elementi grupe  $G_1$  i  $G_2$ . Ako

je  $e_1 e_2 = x$ ,  $x \in G_1$  onda

$$e_1 (e_1 e_2) = e_1 e_2 = x = (e_1 e_2) e_2 = x e_2$$

tj.

$$x e_2 = x.$$

$$x (e_1 e_2) = x x = x^2 = (x e_1) e_2 = x e_2 = x$$

pa je  $x = e_1$ . Analogno za  $e_1 e_2 = y$ ,  $y \in G_2$ .



Lema 3.8. ([34]) Ako je  $S$  polumreža regularnih semigrupa  $S_\alpha$  takvih da je  $E_{S_\alpha}$  podsemigrupa od  $S_\alpha$ , onda je  $E_S$  podsemigrupa od  $S$ .

Dokaz. Ako  $a \in S_\alpha$  i  $x \in S_\beta$  je inverzan za  $a$ , onda  $a = axa$  implicira  $\alpha \leq \beta$  i  $x = xax$  implicira  $\beta \leq \alpha$  pa je  $\alpha = \beta$ . Prema tome, ako  $e \in E_{S_\alpha}$  i  $x$  je inverzan za  $e$ , onda  $x \in S_\alpha$  pa na osnovu teoreme 1.20, Glava I, sledi da je  $x$  idempotent. Ista teorema implicira da je onda  $E_S$  podsemigrupa od  $S$ .

Lema 3.9. Neka je  $S$  semigrupa sa tri idempotenta. Tada

$S \in S_{m,n}^* \rightarrow S$  je ortodoksna semigrupa.

Dokaz. Ako je  $D = S \times S$  onda je  $D = L$  ili  $D = R$  pa je svaki idempotent desna, odnosno leva, jedinica semigrupe  $S$ . Ako je  $D = H$  onda na osnovu leme 3.8. sledi tvrdjenje. Neka su  $e_1, e_2, e_3$  idempotenti semigrupe  $S$  i neka je, na primer,  $D_{e_1} = D_{e_2} \neq D_{e_3}$ . Na osnovu leme 3.7.  $D_{e_1}$  je ortodoksna semigrupa pa iz ove činjenice i leme 3.8. sledi tvrdjenje.

Teorema 3.3. Neka je  $S$  semigrupa iz  $S_{m,n}^*$ . Tada

$S$  je ortogrupa  $\leftrightarrow (\forall a \in S) D_a$  je ortogrupa.

Dokaz. (+) Neka je  $S$  ortogrupa.  $S \in S_{m,n}^*$  pa je svaka podsemigrupa od  $S$  ortodoksna. Prema (\*) sledi da je  $D_a$  ortogrupa za svako  $a \in S$ .

(+) Sledi na osnovu leme 3.8. i teoreme 4.6.

str. 170 u [7].

Za svako  $m, n \in \mathbb{N}$  klasa  $S_{m,n}^*$  nije klasa ortodoksnih semigrupa. Na primer, semigrupa data tablicom

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	1	2	5	6	6	5
2	2	1	2	1	6	5	5	6
3	3	4	3	4	8	7	7	8
4	4	3	4	3	7	8	8	7
5	1	2	2	1	5	6	5	6
6	2	1	1	2	6	5	6	5
7	4	3	3	4	7	8	7	8
8	3	4	4	3	8	7	8	7

je iz klase  $S_{2,5}^*$  tj. anti-inverzna ali nije ortodoksna.

Teorema 3.4. Neka je  $S$  semigrupa iz  $S_{m,n}^*$ . Tada su sledeći uslovi ekvivalentni

- (i)  $S$  je unija disjunktne grupa iz  $S_{m,n}^*$  generisanih sa dva  $(m,n)^*$ -anti-inverzna elementa.
- (ii) Svaka  $H$ -klasa je grupa generisana sa dva  $(m,n)^*$ -anti-inverzna elementa.

Dokaz. (i)  $\rightarrow$  (ii). Prema lemi 3.5. i činjenici da je  $S$  kompletno regularna semigrupa sledi da je svaka  $H$ -klasa grupa iz  $S_{m,n}^*$ .  $S$  je unija grupa pa sledi da svaka grupa ove unije pripada jednoj i samo jednoj  $H$ -klasi. Ove grupe su disjunktne, pa sledi da je svaka grupa jednaka svojoj  $H$ -klasi.

(ii)  $\rightarrow$  (i). Sledi neposredno.

Teorema 3.5. Neka je  $B$  skup svih bi-ideala semigrupe  $S$ . Tada

$$S \in S_{m,n}^* \leftrightarrow (\forall B \in B) B \in S_{m,n}^*.$$

Dokaz. (+) Neka je  $S \in S_{m,n}^*$  i neka je  $B$  proizvoljan bi-ideal od  $S$ . Tada

$$SBS \subseteq B.$$

Ako  $x \in B$  onda postoji  $y$  takvo da je  $x^m = y^m \in B$ . Za  $n = m + 1$  imamo

$$y^{m+1} = y = y^{2m+1}$$

tj.

$$y^m y^m y = y$$

pa sledi

$$y \in B \quad \text{tj.} \quad B \in S_{m,n}^*.$$

Za  $n > m + 1$  imamo

$$y^{n-m-1} y^m y = y$$

pa

$$y \in B \quad \text{tj.} \quad B \in S_{m,n}^*.$$

(+) Sledi iz činjenice da je  $SSS \subseteq S$ .

Posledica. Neka je  $B$  skup svih bi-ideala semigrupe  $S$ . Tada

$$S \in A \leftrightarrow (\forall B \in B) B \in A.$$

Teorema 3.6. Neka je  $Q$  skup svih kvazi-ideala semigrupe  $S$ . Tada

$$S \in S_{m,n}^* \leftrightarrow (\forall Q \in Q) Q \in S_{m,n}^*.$$

Dokaz. (+) Neka je  $s \in S_{m,n}^*$  i  $Q$  proizvoljan kvazi-ideal od  $S$ . Tada

$$Qs \cap sQ \subseteq Q.$$

Ako  $x \in Q$  onda

$$x^m = y^m \in Q.$$

$$y = y^n = y^m y^{n-m} = y^{n-m} y^m$$

pa

$$y \in y^m s \cap s y^m$$

tj.

$$y \in Q \quad \text{odnosno} \quad Q \in S_{m,n}^*.$$

$$(+)$$
 sledi iz  $ss \cap ss \subseteq s$ .

Posledica. Neka je  $Q$  skup svih kvazi-ideala semigrupe  $S$ . Tada

$$s \in A \leftrightarrow (\forall Q \in Q) Q \in S_{m,n}^*.$$

Navodimo neke karakterizacije semigrupa iz klase  $S_{m,n}^*$  bez dokaza. Dokazi su analogni dokazima sličnih tvrdjenja u [2], [7]

Teorema 3.7. Neka je  $S$  semigrupa. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

- (i)  $s \in S_{m,n}^*$
- (ii) Svaka  $L$ -klasa semigrupe  $S$  je levo prosta podsemigrupa iz klase  $S_{m,n}^*$
- (iii)  $S$  je unija disjunktih levo prostih podsemigrupa iz klase  $S_{m,n}^*$ .

Teorema 3.8. Neka je  $S$  semigrupa. Tada

$s \in S_{m,n}^* \leftrightarrow S$  je levo regularna i svaki levi ideal je iz  $S_{m,n}^*$ .

Teorema 3.9. Neka je  $S$  inverzna semigrupa. Tada

$s \in S_{m,n}^* \leftrightarrow S$  je polumreža (disjunktih) podgrupa iz  $S_{m,n}^*$ .

Teorema 3.10. Neka je  $S$  semigrupa. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni

- (i)  $s \in S_{m,n}^*$
- (ii)  $S$  je regularna, levo regularna i svaki desni ideal od  $S$  je u klasi  $S_{m,n}^*$
- (iii)  $S$  je regularna, desno regularna i svaki levi ideal od  $S$  je u  $S_{m,n}^*$ .

Ako  $s \in S_{m,n}^*$  onda je  $S$  intr-regularna semigrupa pa je  $J$  kongruencija semigrupe  $S$ . Na osnovu leme 3. [7] sledi da su  $J$ -klase ekvivalencije proste podsemigrupe.

Teorema 3.11. Neka je  $S$  semigrupa. Tada

$s \in S_{m,n}^* \leftrightarrow S$  je intra-regularna semigrupa i svaki ideal od  $S$  je iz  $S_{m,n}^*$ .

Teorema 3.12. Neka je  $S$  semigrupa. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni

- (i)  $s \in S_{m,n}^*$
- (ii) Svaka  $J$ -klasa  $J_a$  semigrupe  $S$  je iz  $S_{m,n}^*$
- (iii)  $S$  je unija (disjunktih) prostih podsemigrupa iz  $S_{m,n}^*$
- (iv)  $S$  je unija kompletno prostih podsemigrupa iz  $S_{m,n}^*$

Teorema 3.13. Neka je  $S$  semigrupa. Tada  
 $S \in S_{m,n}^* \leftrightarrow S$  je polumreža kompletno prostih pod-  
semigrupa iz  $S_{m,n}^*$ .

G L A V A    I I I

BAZISNE KLASE NEKIH KLASA SEMIGRUPA

1. ALGORITAM ZA ODREĐIVANJE BAZISNE KLAŠE  
(m,n)\*-ANTI-INVERZNIH SEMIGRUPA

Neposredna posledica teoreme 2.3. dokazane u Glavi II jeste postojanje bazisne klase za klasu  $S_{m,n}^*$  u odnosu na klasu svih semigrupa.

Neka je  $P$  klasa svih semigrupa i  $N = S_{m,n}^*$ . Prema lemi 2.4. i teoremi 2.3. u Glavi II sledi da je svaka semigrupa  $S \in S_{m,n}^*$  unija konačnih grupa generisanih sa dva elementa koji su (m,n)\*-anti-inverzni.

Ako za klasu  $M$  uzmemo sve grupe generisane sa dva (m,n)\*-anti-inverzna elementa, koje se ne mogu predstaviti kao unija svojih pravih podgrupa iz  $S_{m,n}^*$ , onda je  $M$  bazisna klasa za  $S_{m,n}^*$  u odnosu na klasu svih semigrupa.

Neka je  $S$  semigrupa iz  $S_{m,n}^*$ . Ako je  $x \in S$  i

$$x^m = x^{n-1} = e_x,$$

onda  $x$  generiše cikličnu grupu reda  $m$  u kojoj je svaki element (m,n)\*-anti-inverzan sam sebi. Ako je

$$x^m \neq e_x,$$

onda postoji najmanje jedan element  $y \in S$  takav da je

$$x^m = y^m, \quad yx = x^{m+1}y.$$

$$y \neq x^k$$



za svako  $k \in \mathbb{N}$  jer iz

$$x^k x = x^{m+1} x^k$$

sledi

$$x^m = e_x.$$

Grupa  $[\{x, y\}]$  je konačna i pripada  $S_{m, n}^*$ . Neka su

$\alpha, \beta \in [\{x, y\}]$   $(m, n)^*$ -anti-inverzni elementi.

$$\alpha = x^s y^t \quad (s, t \in \mathbb{N} \cup \{0\}, 0 \leq s < n, 0 \leq t < m)$$

i

$$\beta = x^k y^l \quad (k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}, 0 \leq k < n, 0 \leq l < m).$$

Neka je  $\mathbb{Z}$  skup celih brojeva. Sa  $|a|$  označavaćemo apsolutnu vrednost elementa  $a \in \mathbb{Z}$ .

$$[\{\alpha, \beta\}] = [\{x, y\}] \leftrightarrow \exists A, B, C, D \in \mathbb{Z}, (x^s y^t)^A (x^k y^l)^B = x \wedge (x^s y^t)^C (x^k y^l)^D = y.$$

Neka je  $q \in \mathbb{Z}$  i  $q < 0$ . Tada

$$x^q = x^{(n-2)|q|} = x^\epsilon, \quad \epsilon \in \mathbb{N}.$$

$$xy^\epsilon = x^{m+1} yx^{\epsilon-1} = x^{m+1} x^{m+1} yx^{\epsilon-2} = \dots = x^{\epsilon(m+1)} y$$

tj.

$$yx^\epsilon = x^\epsilon yx^{m\epsilon} = x^\epsilon yy^{m\epsilon}$$

pa imamo

$$xy^q = x^q yx^{mq} = x^q yy^{mq}.$$

Neka je  $p \in \mathbb{Z}$  i  $p < 0$ . Tada

$$y^p = y^{(n-2)|p|} = y^\xi \quad (\xi \in \mathbb{N}).$$

$$y^2 x^\epsilon = yyx^\epsilon = yx^\epsilon yy^{m\epsilon} = x^\epsilon yyy^{m\epsilon} y^{m\epsilon} = x^\epsilon y^2 y^{2m\epsilon}.$$

Analogno dobijamo

$$y^\xi x^\epsilon = x^\epsilon y^\xi y^{m\xi\epsilon} = x^\epsilon y^\xi x^{m\xi\epsilon}$$

pa je

$$y^p x^q = x^q y^p x^{mpq} = x^q y^p y^{mpq}$$

Neka je  $A \in \mathbb{Z}$  i  $A < 0$ . Tada

$$(x^s y^t)^A = (x^s y^t)^{(n-2)|A|} = (x^s y^t)^M \quad ((n-2)|A| = M)$$

gde su  $s, t, M \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Kako je

$$x^A = x^{(n-2)|A|} = x^M$$

sledi

$$(x^s y^t)^A = (x^s y^t)^M \leftrightarrow x^A = x^M$$

i

$$(x^s y^t)^A = (x^s y^t)^M \leftrightarrow y^A = y^M.$$

$$\begin{aligned}
(x^s y^t)^M &= x^s y^t \dots x^s y^t x^s y^t = \\
&= x^s y^t \dots x^s x^s y^t y^{mst} y^t = x^s y^t \dots x^s y^t x^{2s} y^{2t} y^{mst} = \\
&= x^s y^t \dots x^s x^{2s} y^t y^{m2st} y^{2t} y^{mst} = x^s y^t \dots x^{3s} y^{3t} y^{2mst+mst} = \\
&\dots\dots\dots \\
&= x^{Ms} y^{Mt} y^{mst(1+2+\dots+(M-1))} = \\
&= x^{Ms} y^{Mt} y^{mst} y^{2mst} \dots y^{mst(M-1)} = \\
&= x^{As} y^{At} y^{mst} y^{2mst} \dots y^{mst(A-1)} = \\
&= x^{As} y^{At} y^{\frac{A(A-1)}{2}st} = x^{As} y^{At} x^{\frac{A(A-1)}{2}st}.
\end{aligned}$$

ikličke grupe

$$H = \{e, x, x, \dots, x^{n-2}\}$$

$$K = \{e, y, y, \dots, y^{n-2}\}$$

su podgrupe grupe  $[\{x, y\}]$ . Presek

$$P = H \cap K = \{x^\tau, x^{2\tau}, \dots, x^{r\tau} = e\} = \{y^\lambda, y^{2\lambda}, \dots, y^{r\lambda} = e\}, \tau, \lambda \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

odredjuje broj elemenata grupe  $[\{x, y\}]$ .

$$(x^s y^t)^A (x^k y^l)^B = x$$

ako i samo ako je

$$(*) \quad x^{As} y^{At} y^{m \frac{A(A-1)}{2} st} x^{Bk} y^{Bl} y^{m \frac{B(B-1)}{2} kl} = x$$

Jednakost (\*) je ekvivalentna sa

$$(**) \quad x^{As} y^{At} x^{Bk} y^{Bl} y^{m \left( \frac{A(A-1)}{2} st + \frac{B(B-1)}{2} kl \right)} = x.$$

Jednakost (\*\*) ekvivalentna je sa

$$x^{As} x^{Bk} y^{At} y^{mABkt} y^{Bl} y^{m \frac{A(A-1)}{2} st + \frac{B(B-1)}{2} kl} = x$$

tj.

$$(***) \quad x^{As+Bk} y^{At+Bl+ABmkt+m \frac{A(A-1)}{2} st + m \frac{B(B-1)}{2} kl} = x.$$

Iz (\*\*\*) dobijamo ekvivalentnu jednakost

$$(a) \quad x^{As+Bk-1} = y^{-\left( At+Bl+m \frac{A(A-1)}{2} st + m \frac{B(B-1)}{2} kl + ABmkt \right)}$$

Jednakost (a) važi ako i samo ako postoje  $q_\tau, q_\lambda \in \mathbb{Z}$ . takvi da je

$$As + Bk - 1 = q_\tau \tau$$

$$-\left( At + Bl + m \frac{A(A-1)}{2} st + m \frac{B(B-1)}{2} kl + ABmkt \right) = q_\lambda \lambda$$

i

$$x^{q_\tau \tau} = y^{q_\lambda \lambda}.$$

Pretpostavimo da je

$$(1.1) \quad x^\tau = y^{q^\lambda}, \quad q \in \{1, 2, \dots, r\}.$$

Neka su  $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}$ . Tada

$$y^{p_1^\lambda} = y^{p_2^\lambda} \implies p_1 \equiv p_2 \pmod{r}.$$

Iz (1.1) imamo

$$x^{q^\tau} = y^{q^\tau q^\lambda}$$

pa sledi da je

$$(1.2) \quad y^{q^\tau q^\lambda} = y^{q^\lambda^\lambda}.$$

Iz (1.2) imamo

$$x^{q^\tau} = y^{q^\lambda^\lambda}$$

ako i samo ako je

$$q^\tau q \equiv q^\lambda \pmod{r}.$$

Označimo sa

$$C_i = \{a \mid a \equiv i \pmod{p}, a \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{N}, i \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\}\}$$

klasu kongruencije po modulu  $p$  elementa  $i$ . Za ceo broj  $q^\tau$  važi jedna i samo jedna kongruencija

$$q^\tau \equiv 0 \pmod{r}, q^\tau \equiv 1 \pmod{r}, \dots, q^\tau \equiv r-1 \pmod{r}.$$

$q^\tau \in C_i$  ako i samo ako je

$$q^\tau = 1 + Jr$$

za neko  $J \in \mathbb{Z}$ . Na taj način nalaženje  $A, B, q^\tau$ , u Diofantovoj jednačini

$$As + Bk - 1 = q^\tau,$$

svodimo na nalaženje rešenja Diofantove jednačine

$$(i) \quad As + Bk + Jr\tau = 1 + i\tau$$

po  $A, B$  i  $J$ .

Jednačina (i) ima rešenje po  $A, B$  i  $J$  ako i samo ako je

$$(s, k, r\tau) \mid (1 + i\tau)$$

za dato  $i \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ .

Prema poznatoj teoremi, iz teorije brojeva, rešenje jednačine (i) zavisi od dva parametra koji prolaze skupom celih brojeva tj.

$$A = A(\varepsilon, \eta)$$

$$B = B(\varepsilon, \eta)$$

$$J = J(\varepsilon, \eta)$$

Uzimajući za  $\varepsilon, \eta$  različite vrednosti iz skupa  $Z$  imamo da  $A, B$  prolaze raznim klasama kongruencije po modulu  $2r\lambda$ . Broj  $A(\varepsilon, \eta)$  pripada  $C_j$  klasi kongruencije po modulu  $2r\lambda$  ako i samo ako Diofantova jednačina

$$(ii) \quad A(\varepsilon, \eta) + 2r\lambda\omega = j$$

ima rešenje po  $\varepsilon, \eta, \omega \in Z$ . Ako jednačina (ii) ima rešenje po  $\varepsilon, \eta, \omega$ , onda rešenje zavisi od najviše dva parametra  $\varepsilon_1, \eta_1 \in Z$  tj.

$$\varepsilon = \varepsilon(\varepsilon_1, \eta_1)$$

$$\eta = \eta(\varepsilon_1, \eta_1)$$

$$\omega = \omega(\varepsilon_1, \eta_1) .$$

U tom slučaju  $B(\varepsilon(\varepsilon_1, \eta_1), \eta(\varepsilon_1, \eta_1))$  pripada  $C_g$  klasi kongruencije po modulu  $2r\lambda$  ako i samo ako Diofantova jednačina

$$(iii) \quad B(\varepsilon(\varepsilon_1, \eta_1), \eta(\varepsilon_1, \eta_1)) + 2r\lambda\delta = g$$

ima rešenje po  $\varepsilon_1, \eta_1, \delta, \in \mathbb{Z}$ .

Iz

$$- (At + Bl + m\frac{A(A-1)}{2}st + m\frac{B(B-1)}{2}kl + ABmkt) = q_\lambda^\lambda$$

imamo

$$- (2At + 2Bl + mA(A-1)st + mB(B-1)kl + 2ABmkt) = q_\lambda^{2\lambda}.$$

$q_\lambda$  pripada klasi  $C_h$  ostataka po modulu  $r$  ako i samo ako je

$$-(2At + 2Bl + mA(A-1)st + mB(B-1)kl + 2ABmkt) = (h + rz)2\lambda$$

gde  $z \in \mathbb{Z}$  tj. ako i samo ako

$$- (2At + 2Bl + mA(A-1)st + mB(B-1)kl + 2ABmkt) \in C_{2h\lambda}$$

gde je  $C_{2h\lambda}$  klasa ostataka po modulu  $2r\lambda$ .

Na osnovu prethodnog sledi da postoje  $A, B \in \mathbb{Z}$  takvi da je

$$(x^s y^t)^A (x^k y^l)^B = x$$

ako i samo ako za svako nadjeno  $q_r$  iz  $q_r q \in C_h$

( $h \in \{0, 1, \dots, r-1\}$ ) sledi da

$$- (2At + 2Bl + mA(a-1)st + mB(B-1)kl + 2ABmkt) \in C_{2h\lambda}$$

( $2h\lambda \in \{0, 1, \dots, 2r\lambda-1\}$ )

tj.

$$q_r q \equiv q_\lambda \pmod{r}.$$

Analogno proveravamo da li postoje  $C, D \in \mathbb{Z}$  takvi da je

$$(x^s y^t)^C (x^k y^l)^D = y.$$

Neka je data linearna Diofantova jednačina oblika

$$(\square) \quad a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = c, \quad a_1, a_2, a_3, c \in \mathbb{Z} \quad \text{i} \quad a_1a_2a_3 \neq 0.$$

Jednačina  $(\square)$ , kao što je poznato, ima rešenje ako i samo ako je

$$(\circ) \quad (a_1, a_2, a_3) | c.$$

Rešenje jednačine  $(\square)$  nalazimo na sledeći način:

$$x_2 = \alpha u + \beta n$$

$$x_3 = \gamma u + \delta n$$

gde su  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}$  takvi da je

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 1$$

Ako uzmemo

$$\beta = \frac{a_3}{(a_2, a_3)}, \quad \delta = \frac{-a_2}{(a_2, a_3)}$$

onda je  $(\beta, \delta) = 1$  pa možemo uvek naći  $\alpha$  i  $\gamma$  takve da je

$$\delta\alpha - \beta\gamma = 1.$$

Jednačina  $(\square)$  svodi se na jednačinu

$$a_1x_1 + (a_2\alpha + a_3\gamma)u = c$$

sa dve nepoznate  $x_1$  i  $u$ .

Kako je

$$a_2\alpha + a_3\gamma = - (a_2, a_3)\delta\alpha + (a_2, a_3)\beta\gamma = - (a_2, a_3)$$

jednačina  $(\square)$  svodi se na jednačinu

$$(\triangle) \quad a_1x_1 - (a_2, a_3)u = c.$$

Kako rešenje linearne Diofantove jednačine sa dve nepoznate zavisi od jednog parametra, koji prolazi skupom  $Z$ , imamo da je

$$x_1 = x_1(\epsilon)$$

$$u = u(\epsilon)$$

tj.

$$x_1 = x_1(\epsilon)$$

$$x_2 = \alpha u(\epsilon) + \beta(\epsilon)$$

$$x_3 = \gamma u(\epsilon) + \delta(\epsilon) .$$

Na primer, jednačina

$$5x - 2y - 4z = 1$$

ima rešenje

$$x = 1 - 2\epsilon$$

$$y = -2 + 5\epsilon - 2\eta$$

$$z = 2 - 5\epsilon + 2\eta .$$

Iz prethodnog vidimo da, u jednačini (i),  $A$  zavisi samo od jednog parametra  $\epsilon$ .

Algoritam za nalaženje celih brojeva  $A$  i  $B$  takvih da je

$$(x^s y^t)^A (x^k y^l)^B = x$$

može se podeliti na tri dela.

PRVI KORAK. Ako Diofantova jednačina (i) nema rešenje po  $A, B$  i  $J$  onda je grupa  $[(x^s y^t, x^k y^l)]$  prava podgrupa grupe  $[(x, y)]$ . Ako jednačina (i) ima rešenje, određujemo, za dato  $i$ , klasu ostatka po modulu  $r$  broja  $q, q$ .



DRUGI KORAK. Jednačina (ii) ima rešenje za bar jedno  $j \in \{0, 1, \dots, 2r\lambda - 1\}$  jer  $A(\varepsilon, n) = A(\varepsilon)$  mora pripadati za razne  $\varepsilon$  bar jednoj od klasa ostatka po modulu  $2r\lambda$ . Za svako rešenje jednačine (ii) (kada menjamo  $j$ ) utvrđujemo kojoj klasi ostatka po modulu  $2r\lambda$  pripada  $B = B(\varepsilon(\varepsilon_1), n(\varepsilon_1))$  tj. kada  $g$  prolazi skupom  $\{0, 1, \dots, 2r\lambda - 1\}$  ispitujemo da li (iii) ima rešenje. Kao što je rečeno za ovo je dovoljno ispitati da li važi uslov (O).

TREĆI KORAK. Pošto smo našli sve klase ostatka po modulu  $2r\lambda$ , kojima istovremeno mogu pripadati  $A$  i  $B$ , pod uslovom da jednačina (i) ima rešenje, određujemo klasu ostatka po modulu  $2r\lambda$  za izraz

$$(\nabla) \quad - (2At + 2Bl + mA(A-1)st + mB(B-1)kl + 2ABmkt).$$

Umesto brojeva koji figurišu u izrazu  $(\nabla)$  unosimo njihove klase ostataka po modulu  $2r\lambda$  i na taj način ispitujemo kojoj klasi pripada izraz  $(\nabla)$ . Prema prethodnom, izraz  $(\nabla)$  pripada klasi  $C_{2h\lambda}$  ostataka po modulu  $2r\lambda$  ako i samo ako  $q_\lambda$  pripada klasi  $C_h$  ostataka po modulu  $r$ . Ako brojevi  $q_r, q$  i  $q_\lambda$  nemaju istu klasu ostataka po modulu  $r$  tj. ako nije  $q_r, q \equiv q_\lambda \pmod{r}$ , onda je grupa  $[(x^s y^t, x^k y^l)]$  prava podgrupa grupe  $[(x, y)]$ .

Analogno proveravamo da li postoje  $C, D \in \mathbb{Z}$  takvi da je

$$(x^s y^t)^C (x^k y^l)^D = y.$$

## 2. PRIMERI

Pokažimo na nekoliko primera primenu gornjeg algoritma. Kod efektivnog nalaženja grupa koje pripadaju bazisnoj klasi date klase  $S_{m,n}^*$  polazimo od elementa  $x$ , odnosno  $y$ . Za generator  $x$  nalazimo sve  $(m,n)^*$ -anti-inverzne elemente u grupi  $[(x,y)]$ . Ako  $x$  sa svim svojim  $(m,n)^*$ -anti-inverznim elementima generiše celu grupu  $[(x,y)]$ , onda  $[(x,y)]$  pripada bazisnoj klasi klase  $S_{m,n}^*$ . Analogno radimo sa  $y$ .

2.1. Posmatrajmo klasu  $S_{4,9}^*$ . Tada je

$$H = \{e, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7\}$$

$$K = \{e, y, y^2, y^3, y^4, y^5, y^6, y^7\}.$$

Neka je  $H \cap K = \{e, x^4\}$  tj.  $\tau = \lambda = 4$ . Grupa  $[(x,y)]$  ima 32 elementa.  $x^4 y^3$  je  $(4,9)^*$ -anti-inverzan za  $x$ .

$$x^4 y^3 = y^7$$

pa je

$$(x^4 y^3)^4 = (y^7)^4 = y^{28} = y^{24} y^4 = y^4 = x^4 .$$

$$y^7 x = x y^7 y^4 = x y^7 y^4 = x y^7 x^4 = x^5 y^7 .$$

$$x^C (x^4 y^3)^D = y$$

za  $C = 4$  i  $D = 3$  jer

$$x^4 (x^4 y^3)^3 = x^4 (y^7)^3 = y^4 y^{21} = y^{25} = y^{24} y = y .$$

$x^{-4} \in [(x, x^4 y^3)]$  pa  $x^{-4} x^4 y^3 \in [(x, x^4 y^3)]$  tj.  $y^3 \in [(x, x^4 y^3)]$ .

$(y^3)^3 = y^9 = y \in [(x, x^4y^3)]$  pa je jasno (i bez nalaženja C i D) da je

$$[(x, y)] = [(x, y^7)] .$$

Ako je  $(4, 9)^*$ -anti-inverzan element za  $x$  oblika  $x^s y^2$  ( $s \geq 0$ ), onda je

$$x^s y^2 x = x^{4+1} x^s y^2 = x^{4+s+1} y^2 .$$

Kako je

$$x^s y^2 x = x^s x y^2 y^{4 \cdot 2 \cdot s} = x^{s+1} y^2$$

sledi

$$x^{4+s+1} y^2 = x^{s+1} y^2$$

pa je posle skraćivanja

$$x^4 = e$$

što je suprotno pretpostavci. Na osnovu ovoga zaključujemo da element  $x$  sa svakim svojim  $(4, 9)^*$ -anti-inverznim elementom generiše celu grupu  $[(x, y)]$ . Sledi da grupa  $G_{32}$  od 32 elementa generisana sa  $x$  i  $y$ , pripada bazisnoj klasi klase  $S_{4,9}^*$ .

Neka je, dalje,  $P = H \cap K = \{e, x^2, x^4, x^6\} = \{e, y^2, y^4, y^6\}$ . Tada grupa  $[(x, y)]$  ima 16 elemenata. Slično prethodnom pokazuje se da  $x$  sa svakim svojim  $(4, 9)^*$ -anti-inverznim elementom generiše celu grupu  $[(x, y)]$  pa grupa  $G_{16}$  (postoji samo jedna) pripada bazisnoj klasi.

Ako je  $P = H \cap K = H = K$  sledi da je  $x = y^k$  ( $k \in \{1, 2, \dots, 7\}$ ) pa imamo da je  $x^4 = e$  tj. ciklička grupa  $C_4$  pripada bazisnoj klasi. Kako je  $(4, 8) = 4$  sledi da je i ciklička grupa  $C_2$  element bazisne klase.

Prema tome, grupe  $G_{32}, G_{16}, C_4, C_2, \{e\}$  čine bazisnu klasu klase  $S_{4,9}^*$  tj.

$$M = \{\{e\}, C_2, C_4, G_{16}, G_{32}\} .$$

2.2. Posmatrajmo sada klasu  $S_{6,13}^*$ .

$$H = \{e, x, x^2, \dots, x^{11}\}$$

1

$$K = \{e, y, y^2, \dots, y^{11}\} .$$

Ako je  $P = H \cap K = \{e, x^6\} = \{e, y^6\}$ , onda imamo grupu  $G_{72}$  od 72 elementa. Pokazaćemo da  $G_{72} = [\{x, y\}]$  ne pripada bazisnoj klasi klase  $S_{6,13}^*$ . Elementi

$$x^2y^2, x^4y^2, x^6y^2, x^8y^2, x^{10}y^2, x^2y^4, x^4y^4, x^6y^4, x^8y^4, x^{10}y^4$$

su reda 6 i sami sebi  $(6,13)^*$ -anti-inverzni pa pripadaju grupi  $C_6 \in S_{6,13}^*$  koja je u bazisnoj klasi klase  $S_{6,13}^*$ . Za element  $x^5y$   $(6,13)^*$ -anti-inverzni element je  $x^{10}y^5$  zbog

$$(x^5y)^6 = x^5 \cdot 6y^6x^{\frac{6 \cdot 5}{2} \cdot 5 \cdot 1} = x^6x^6(x^6)^{45} = x^{18} = x^6,$$

$$(x^{10}y^5)^6 = x^{10} \cdot 6y^5 \cdot 6x^{\frac{6 \cdot 5}{2} \cdot 10 \cdot 5} = y^6 = x^6,$$

$$x^{10}y^5x^5y = x^{10}x^5y^5x^{6 \cdot 5 \cdot 5}y = x^{21}y^6 = x^{27} = x^3,$$

$$(x^5y)^7x^{10}y^5 = x^6x^5yx^{10}y^5 = x^{11}x^{10}yx^{6 \cdot 10 \cdot 1}y^5 = x^{21}y^6 = x^{27} = x^3.$$

Kako je

$$(x^5y)^{10} = (x^{10}y^5)^2 = x^2y^4,$$

$$(x^5y)^6 = (x^{10}y^5)^6 = x^6,$$

sledi da je

$$(x^5 y)^2 = (x^{10} y^5)^{10} ,$$

$$(x^5 y)^4 = (x^{10} y^5)^8 ,$$

$$(x^5 y)^8 = (x^{10} y^5)^4 ,$$

pa je grupa  $[(x^5 y, x^{10} y^5)]$  izomorfna sa grupom  $G_{24} \in S_{6,13}^*$  generisanom sa 2  $(6,13)^*$ -anti-inverzna elementa tj.

$$[(x^5 y, x^{10} y^5)] \neq G_{72} .$$

Elementi ove grupe su

$$x^5 y, x^{10} y^5, xy^5, x^4 y^5, x^{11} y, x^7 y^5, x^2 y, xy^2, x^7 y^2, x^8 y, x^{11} y^4, x^3, e \\ x^5 y^4, x^6, y^3, x^9 y^3, x^8 y^4, x^3 y^3, x^6 y^3, x^9, x^4 y^2, x^2 y^4, x^{10} y^2 .$$

$y^3$  je  $(6,13)^*$ -anti-inverzno za  $x$  pa  $[(x, y^3)] \in S_{6,13}^*$ .

$[(x, y^3)] \neq G_{72}$  i elementi ove grupe su

$$e, x, x^2, \dots, x^{11}, y^3, xy^3, \dots, x^{11} y^3 .$$

Za  $x^3$   $(6,13)^*$ -anti-inverzan element je  $y$  i  $[(x^3, y)] \neq G_{72}$

$e, y, y^2, y^3, y^4, y^5, x^3 y, x^3 y^2, x^3 y^4, x^3 y^5, x^6 y, x^6 y^5, x^9 y, x^9 y^2, x^9 y^4, xy^5$  su elementi grupe  $[(x^3, y)]$ .

Za  $xy$   $(6,13)^*$ -anti-inverzan element je  $y^3$ . Poka-  
žimo, koristeći prethodna razmatranja, da je

$$[(xy, y^3)] \neq G_{72} .$$

$$(xy)^A (y^3)^B = x$$

ako i samo ako

$$A - 1 = 6q_r ,$$

$$-(A + 3B + 6 \frac{A(A-1)}{2}) = 6q_\lambda$$

i

$$x^{6q_\tau} = y^{6q_\lambda}$$

gde je  $s = 1$ ,  $t = 1$ ,  $k = 0$ ,  $l = 3$ ,  $r = 2$ ,  $\tau = 6$ ,  
 $\lambda = 6$ ,  $q = 1$ .

Sistem je ekvivalentan sa

$$A + 12J = 1$$

$$(I) \quad -(2A + 6B + 6A(A-1)) \in C_0 \quad (0 \in \{0, 1, \dots, 23\})$$
$$x^{6q_\tau} = y^{6q_\lambda}$$

odnosno

$$A + 12J = 7$$

$$(II) \quad -(2A + 6B + 6A(A-1)) \in C_{12} \quad (12 \in \{0, 1, \dots, 23\})$$
$$x^{6q_\tau} = y^{6q_\lambda}.$$

Iz sistema (I) imamo

$$A = 13 + 12\epsilon$$

pa kao jednačinu (ii) dobijamo

$$(13 + 12\epsilon) + 24\omega = j, \quad j \in \{0, 1, \dots, 23\}.$$

Kako je  $(12, 24) = 12$  jedine mogućnosti su da  $A$  pripada klasama  $C_1$  i  $C_{13}$  po modulu 24. Ako  $A \in C_1$  izraz  $-(2A + 6B + 6A(A-1))$  se transformiše u

$$-(2 + 6B) = -2 - 12B.$$

Kako je

$$22 \equiv -2 \pmod{24}$$

$$12 \equiv -12 \pmod{24}$$

imamo da je

$$22 + 12B \equiv - (2 + 6B) \pmod{24}.$$

$22 + 12B \in C_0$ , za  $B$  iz proizvoljne klase ostataka po modulu 24, ako i samo ako jednačina

$$22 + 12B = 24J$$

ima rešenje po  $B$  i  $J$ . Kako je  $(12, 24) = 12$  i  $12 \nmid 22$  sledi da za  $A \in C_1$

$$-(2A + 6B + 6A(A-1)) \notin C_0$$

ni za jedno  $B$ .

Neka je  $A \in C_{13}$ . Tada izraz  $-(2A + 6B + 6A(A-1))$  postaje kongruentan izrazu  $-(26 + 6B + 0)$ .

$$-(26 + 6B) \equiv -(2 + 6B) \equiv 22 + 12B \pmod{24}.$$

Kao i u prethodnom slučaju imamo da

$$-(2A + 6B + 6A(A-1)) \notin C_0.$$

Iz sistema (II) imamo

$$A = 91 + 12\epsilon$$

pa jednačina (ii) postaje

$$(91 + 12\epsilon) + 24\omega = j, \quad j \in \{0, 1, \dots, 23\}.$$

Na osnovu ovoga imamo da  $A$  može pripadati klasama  $C_7$  i  $C_{19}$ .

Ako  $A \in C_7$  izraz  $-(2A + 6B + 6A(A-1))$  je kongruentan sa  $22 + 12B$  pa imamo Diofantovu jednačinu

$$22 + 12B = 12 + 24J$$

koja zbog  $12 \nmid 10$  nema rešenja. Ako  $A \in C_{19}$  izraz

$-(2A + 6B + 6A(A-1))$  je kongruentan sa izrazom  $22 + 12B$  pa ne pripada klasi  $C_{12}$  ni za jedno  $B$ . Na osnovu prethodnog zaključujemo da je  $[(xy, y)]$  prava podgrupa grupe  $G_{72}$ .

$$\text{Neka je } P = H \cap K = \{e, x^3, x^6, x^9\} = \{e, y^3, y^6, y^9\}.$$

Tada imamo  $x^6 = e$  što sledi iz  $yx = x^7y$  tj.  $x = y^{-1}x^7y$ .

Ako je  $P = H \cap K = \{e, x^2, x^4, x^6, x^8, x^{10}\}$  dobija se, kao što je rečeno, grupa  $G_{24} = [(x, y)]$  od 24 elementa.

$$G_{24} = \{e, x, x^2, \dots, x^{11}, y, xy, \dots, x^{11}y\}$$

pa je jasno da  $x$  ne pripada ni jednoj pravoj podgrupi grupe  $G_{24}$ .

Ako je  $P = H \cap K = \{e, x^2\} = \{e, y^2\}$  imamo grupu od osam elemenata  $G_8 = [(x, y)]$ . Lako se pokazuje da je  $G_8$  Kvaternionska grupa. Na osnovu gornjeg razmatranja zaključujemo da bazisnu klasu  $M$  klase  $S_{6,13}^*$  čine grupe  $\{e\}, C_2, C_6, G_8, G_{24}$  tj.

$$M = \{\{e\}, C_2, C_6, G_8, G_{24}\}$$

2.3. Posmatrajmo sada klasu  $S_{6,9}^*$ .

$$H = \{e, x, \dots, x^7\}$$

$$K = \{e, y, \dots, y^7\}$$

Ako je  $P = H \cap K = \{e, x^6\} = \{e, y^6\}$  onda je

$$x^{12} = e$$

tj.

$$x^4 = e$$

pa imamo

$$H \cap K = \{e, x^2\} = \{e, y^2\}.$$



U tom slučaju, grupa  $[\{x,y\}]$  je Kvaternionska grupa.

Naka je  $H \cap K = \{e, x^2, x^4, x^6\} = \{e, y^2, y^4, y^6\}$ . Na osnovu leme 2.3. u Glavi II imamo da je  $x^36 = e$ . Sledi da je

$$x^4 = e,$$

pa je  $H \cap K = \{e, x^2\} = \{e, y^2\}$  pa ponovo imamo Kvaternionsku grupu.

Ako je  $H \cap K = \{e\}$  tj.  $x^2 = e$ , onda dobijamo da je  $[\{x,y\}]$  Klajnova grupa koja je unija cikličnih grupa reda 2 i  $C_2 \in S_{6,9}^*$ . Prema tome, bazisnu klasu  $M$ , klase  $S_{6,9}^*$  čine grupe  $e, C_2, G_8$  tj.

$$M = \{e, C_2, G_8\}.$$

Na osnovu prethodnog imamo sledeću posledicu

Posledica. (S. Bogdanović [2]) Klasa  $M$  je Bazisna klasa, u smislu Ljapina, za klasu  $A$  u odnosu na klasu svih semigrupa.

Dokaz. Prema posledici 2.6. u II imamo  $S_{6,9}^* = A$ .

Kod nalaženja grupa iz bazisne klase  $S_{m,n}^*$  možemo postupiti na sledeći način

Neka je  $\alpha \in [\{x,y\}]$  i  $\beta$  njemu  $(m,n)^*$ -anti-inverzan element.  $[\{\alpha,\beta\}]$  je podgrupa grupe  $[\{x,y\}]$  i  $[\{\alpha,\beta\}] \in S_{m,n}^*$ . Ako je

$$H = \{e, x, x^2, \dots, x^{n-2}\}$$

i

$$K = \{e, y, y^2, \dots, y^{n-2}\}$$

onda

$$P = H \cap K = \{x^r, x^{2r}, \dots, x^{r^r} = e\} = \{y^\lambda, y^{2\lambda}, \dots, y^{r\lambda} = e\}$$

odredjuje broj elemenata grupa  $[{x,y}]$ . Neka je

$$H' = \{e, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-2}\}$$

i

$$K' = \{e, \beta, \beta^2, \dots, \beta^{n-2}\} .$$

Ako je  $H'$  izomorfno sa  $H$  tj. ako su svi stepeni od  $\alpha$  različiti i  $K'$  izomorfno sa  $K$ , onda je

$$[{\alpha, \beta}] = [{x,y}] .$$

Ako  $H'$  nije izomorfno sa  $H$  ili  $K'$  nije izomorfno sa  $K$ , onda je grupa  $[{\alpha, \beta}]$  prava podgrupa grupe  $[{x,y}]$ . Pretpostavlja se, naravno, da  $P$  ima definitivan oblik tj. da smo izvršili sva moguća uprošćavanja. Pokažimo ovo na primeru klase  $S_{6,13}^*$ .

Imali smo da je  $[{xy, y^3}] \in S_{6,13}^*$ .

$$(xy)^2 = x^8y^2$$

$$(xy)^3 = x^9y^3$$

$$(xy)^4 = x^4y^4$$

$$(xy)^5 = x^5y^5$$

$$(xy)^6 = x^6$$

$$(xy)^7 = x^7y$$

$$(xy)^8 = x^2y^2$$

$$(xy)^9 = x^3y^3$$

$$(xy)^{10} = x^{10}y^4$$

$$(xy)^{11} = x^{11}y^5$$

pa je  $H'$  izomorfno sa  $H$ .  $K' = \{e, y^3, y^6, y^9\}$  pa je jasno da je grupa  $[\{xy, y^3\}]$  prava podgrupa grupe  $G_{72}$ . Na taj način moguće je ispitati da li proizvoljna grupa  $[\{x, y\}] \in S_{m,n}^*$  pripada bazisnoj klasi  $M$  klase  $S_{m,n}^*$ .

Ako je u proizvoljnoj klasi  $S_{m,n}^*$   $H' = H$  i  $K' = K$  pokažimo da je tada  $[\{x, y\}] = [\{\alpha, \beta\}]$ .

Neka je

$$P = \{x^\tau, x^{2\tau}, \dots, x^{r\tau} = e\} = \{y^\lambda, y^{2\lambda}, \dots, y^{r\lambda} = e\}.$$

Preslikavanje  $f: [\{x, y\}] \rightarrow [\{\alpha, \beta\}]$  dato sa

$$f(x^s y^t) = \alpha^s \beta^t \quad (0 \leq s < n, \quad 0 \leq t < m)$$

je traženi izomorfizam.

$$\begin{aligned} f((x^s y^t)(x^k y^l)) &= f(x^s x^k x^{mkt} y^t y^l) = \\ &= f(x^{s+k+mkt} y^{t+l}) = \alpha^{s+k+mkt} \beta^{t+l} = (\alpha^s \beta^t)(\alpha^k \beta^l) \end{aligned}$$

pa je  $f$  homomorfizam. Ako je  $\alpha^p \beta^q \in [\{\alpha, \beta\}]$ , onda je

$$f(x^p y^q) = \alpha^p \beta^q$$

pa je  $f$  preslikavanje "na". Pokažimo da je  $f$  1-1. Neka je

$$f(x^s y^t) = \alpha^s \beta^t$$

i

$$f(x^k y^l) = \alpha^k \beta^l$$

tj.

(s)

$$\alpha^s \beta^t = \alpha^k \beta^l$$

Iz (s) sledi

(t)

$$\alpha^{s-k} = \beta^{l-t}.$$

Neka je  $\lambda_0$  najmanji ceo broj takav da je  $\beta^{\lambda_0} \in P'$ . Sledi da je  $1 < \lambda_0$  i  $t < \lambda_0$ . Ako je  $1-t > 0$  onda je

$$1-t < \lambda_0 - t < \lambda_0 \text{ pa, pošto iz (t) sledi da}$$

$$\beta^{1-t} \in P',$$

sledi da je

$$\beta^{1-t} = e$$

tj.

$$\beta^1 = \beta^t.$$

Iz (s) neposredno imamo

$$\alpha^s = \alpha^k$$

pa je  $s = k$  i  $1 = t$  odnosno  $f$  je izomorfizam.

Koristeći prethodna razmatranja možemo zaključiti da ako postoji grupa  $\{(x,y)\} \in S_{m,n}^*$  reda  $k$  onda postoji samo jedna takva grupa.

### 3. $QS_{m,n}^*$ I $QS_{m,n}$ SEMIGRUPE

U ovoj tački dajemo jednu karakterizaciju semigrupa iz klase  $QS_{m,n}^*$ , odnosno  $QS_{m,n}$ .

Definicija. Neka je  $S$  semigrupa.

$S \in QS_{m,n}^* (QS_{m,n}) \leftrightarrow$  Svaka prava podsemigrupa semigrupe  $S$  pripada  $S_{m,n}^* (S_{m,n})$ .

Teorema. Neka je  $S$  semigrupa.

$s \in QS_{m,n}^* (QS_{m,n}) \leftrightarrow$  Važi jedan i samo jedan od uslova:

$$1^\circ (\forall a \in S) \quad a = a^{(m,n-1)+1} \quad ((m,n-1) \text{ je NZD})$$

$$2^\circ S \text{ je ciklička grupa } |S| = p^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{N}, p\text{-prost}),$$

$$p^{\alpha-1} \mid (m,n-1) \text{ i } p^\alpha \nmid (m,n-1)$$

$$3^\circ S \text{ je monogena semigrupa indeksa } 2 \text{ i}$$

$$r \mid (m,n-1) \quad (r \text{ je period semigrupe } S).$$

Dokaz. Neka  $s \in QS_{m,n}^* (QS_{m,n})$  i neka je  $x \in S$ .

Ako  $S$  nije monogena  $\langle x \rangle \in S_{m,n}^* (S_{m,n})$ , gde  $\langle x \rangle$  označava monogenu semigrupu generisanu sa  $x$ .

Sledi

$$x^n = x \text{ i } (x^\epsilon)^m = x^m \text{ i } x^\epsilon x = x^{m+1} x^\epsilon \quad (\epsilon \in \mathbb{N})$$

$$(x^n = x \text{ i } (x^\epsilon)^m = x^m = (x^\epsilon x)^m)$$

tj.  $\{x, x^\epsilon\}$  čine grupu pa je

$$x^m = e_x = x^{n-1}.$$

Sledi

$$x^{(m,n-1)} = e_x$$

tj.

$$x^{(m,n-1)+1} = x.$$

Ako je  $S$  monogena tj.  $S = \langle x \rangle$  onda važi

(1)  $S$  je ciklička grupa

ili

(2)  $S$  je monogena semigrupa.

Razmotrimo (1).

Neka je  $|S| = p_{i_1}^{\alpha_1} p_{i_2}^{\alpha_2} \dots p_{i_k}^{\alpha_k}$ . Tada je  $\langle a^{p_{i_j}} \rangle$  podgrupa od  $S$  ( $j=1, \dots, k$ ).

Sledi  $\langle a^{p_{i_j}} \rangle \in S_{m,n}^*(S_{m,n})$  pa je

$$a^{p_{i_1}^{(m,n-1)}} = a^{p_{i_2}^{(m,n-1)}} = \dots = a^{p_{i_k}^{(m,n-1)}} = e.$$

Označimo sa  $a^{(m,n-1)} = b$ . Tada je

$$b^{p_{i_1}} = b^{p_{i_2}} = e.$$

Sledi

$$b^{(p_{i_1}, p_{i_2})} = e.$$

Kako je

$$(p_{i_1}, p_{i_2}) = 1$$

Sledi da je

$$a^{(m,n-1)} = e$$

odnosno  $|S| \mid (m,n-1)$  tj. važi  $1^0$ .

Ako je  $|S| = p^\alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{N}$ ,  $p$ -prost) onda je  $\langle a^p \rangle$  podgrupa od  $S$  pa je

$$\langle a^p \rangle \in S_{m,n}^*(S_{m,n}).$$

Sledi da je

$$(a^p)^{(m,n-1)} = (a^p)^{p^{\alpha-1}} = e.$$

Za  $\alpha = 1$  i  $p \nmid (m,n-1)$   $2^0$  neposredno sledi.

Za  $\alpha > 1$  imamo

$$a^{p^{(m,n-1), p^{\alpha-1}}} = e.$$

$(m,n-1) \geq p^{\alpha-1}$  (u protivnom  $|S| < p^\alpha$ ).

Neka je  $((m, n-1), p^{\alpha-1}) = p^{\beta}$  i  $\beta < \alpha-1$ . Sledi da je

$$(a^p)^{p^{\beta}} = e$$

pa je  $|S| < p^{\alpha}$ .

Na osnovu prethodnog sledi

$$p^{\alpha-1} \mid (m, n-1).$$

Ako je  $S = \langle a \rangle$  monogena semigrupa tj. važi (2), onda je  $S$  konačna (u protivnom  $S \notin QS_{m,n}^* (QS_{m,n})$ ).

$S = \{a, a^2, \dots, a^{\bar{m}+r-1}\}$  tj.

$$a^{\bar{m}} = a^{\bar{m}+r} \quad (\bar{m} - \text{indeks i } r - \text{period, } \bar{m} > 1)$$

$K_a = \{a^{\bar{m}}, a^{\bar{m}+1}, \dots, a^{\bar{m}+r-1}\}$  je grupa.

$K_{a^2} = K_a \cup \{a^{\bar{m}-1}\}$  je podsemigrupa od  $S$  i nije regularna ( $S^2 \neq S$ ) pa  $K_a \notin S_{m,n}^*$   $\bar{m} > 3$ .

Sledi  $\bar{m} = 2$  tj.

$$a^2 = a^{2+r}.$$

$K_a$  je ciklička grupa reda  $r$  generisana elementom  $a^{m+g}$  gde je  $0 \leq g \leq r-1$  i  $m+g \equiv 1 \pmod{r}$  (Howie [22] str. 9).

Sledi

$$K_a = \langle a^{2+g} \rangle.$$

$2+g \equiv 1 \pmod{r}$  pa je  $g+1 = kr$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) tj.

$$g = kr - 1$$

$kr-1 \leq r-1$  pa je  $k = 1$  tj.  $g = r-1$ .

Sledi

$$K_a = \langle a^{r+1} \rangle.$$

Dalje je

$$\langle a^{r+1} \rangle \in S_{m,n}^*(S_{m,n})$$

pa je

$$(a^{r+1})^{(m,n-1)} = (a^{r+1})^r = e.$$

Sledi da je

$$((m,n-1), r) = r$$

tj.

$$r \mid (m,n-1).$$

(+) Ako važi 1<sup>o</sup>, sledi da je  $a^{(m,n-1)}$  jedinica za  $a$ .

Neka je  $m = k_1(m,n-1)$  i  $n-1 = k_2(m,n-1)$  ( $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ ).

Tada imamo

$$a^m = e_a = a^{n-1}$$

pa je

$$a^m = a^m, \quad aa = a^{m+1}a, \quad a^n = a$$

$$(a^m = a^m = e_x = a^m a^m = (aa)^m, \quad a^n = a)$$

Iz prethodnog sledi da je svaki element semigrupe  $S$  sam sebi

$(m,n)^*$ -anti-inverzan  $((m,n))$  pa  $s \in S_{m,n}^*(S_{m,n})$  i svaka podsemigrupa od  $S$  pripada  $S_{m,n}^*(S_{m,n})$ .

Neka važi uslov 2<sup>o</sup>. Tada je

$$\langle a^{p^\beta} \rangle \in S_{m,n}^*(S_{m,n})$$

jer je

$$(a^{p^\beta})^{(m,n-1)} = (a^p)^m = e \quad (1 \leq \beta \leq \alpha)$$

pa svaka podgrupa od  $S$  pripada  $S_{m,n}^*(S_{m,n})$  tj.

$$s \in QS_{m,n}^*(QS_{m,n}).$$



3° Podsemigrupe od  $S$  su  $K_a$  i podgrupe od  $K_a$ .  
Kako je  $r \mid (m, n-1)$  sledi da je

$$(a^{r+1})^{(m, n-1)} = e$$

pa imamo da je svaki element sam sebi  $(m, n)^*$ -anti-inverzan i  
svaka podgrupa pripada  $S_{m, n}^*(S_{m, n})$ . Sledi

$$s \in QS_{m, n}^*(QS_{m, n}).$$

POSLEDICA 1.  $QS_{m, n}^* = QS_{m, n}$ .

POSLEDICA 2. (S. Bogdanović [5]). Semigrupa  $S$  je  
QA semigrupa ako i samo ako važi jedan od uslova

- 1°  $(\forall a \in S) \quad a^3 = a$
- 2°  $S$  je ciklička grupa prostog reda
- 3°  $S$  je ciklička grupa reda 4
- 4°  $S$  je monogena semigrupa indeksa 2 i perioda 1
- 5°  $S$  je monogena semigrupa indeksa 2 i perioda 2.

#### 4. BAZISNE KLASE SEMIGRUPA ČIJE SVE PRAVE POD- SEMIGRUPE ZADOVOLJAVAJU NEKI ZAKON

Neka je  $\phi(x, y)$  formula u jeziku  $L = \{\cdot\}$ .

Definicija 4.1. Neka je  $S$  semigrupa.

$$s \in S_\phi \iff (\forall x \in S) (\exists y \in S) \phi(x, y).$$

Teorema 4.1. Neka je  $S$  semigrupa. Tada su sledeća  
dva tvrdjenja ekvivalentna:

- (i)  $QS_\phi$  ima bazisnu klasu u odnosu na klasu svih semigrupa,  
(ii)  $QS_\phi \subseteq S_\phi$ .

Dokaz. (+).  $QS_\phi$  ima bazisnu klasu u odnosu na klasu svih semigrupa. Ako nije  $QS_\phi \subseteq S_\phi$  onda postoji semigrupa  $s \in QS_\phi$  i  $s \notin S_\phi$ . Semigrupa

$$s^\circ = s \cup \{0\}$$

jeste unija semigrupa iz  $QS_\phi$  ali  $s^\circ \notin QS_\phi$  pa sledi da  $QS_\phi$  nema bazisnu klasu, obzirom da ne važi tačka b) definicije bazisne klase.

$$(+)$$

$QS_\phi \subseteq S_\phi$ .  
Neka skup  $M$  čine sve monogene semigrupe koje su iz  $QS_\phi$ . Svaka ciklička grupa prostog reda pripada  $QS_\phi$  pa  $M$  nije prazan skup.

Ako  $s \in QS_\phi$  onda je  $s = \bigcup_{x \in S} \langle x \rangle$ . Svaka prava podsemigrupa od  $\langle x \rangle$  jeste podsemigrupa od  $s$  pa je  $\langle x \rangle \in QS_\phi$ .

Neka je  $s = \bigcup_{\alpha \in I} \langle x \rangle_\alpha$  i  $\langle x \rangle_\alpha \in M$ . Ako je  $s_1$  prava podsemigrupa od  $s$  tada iz  $a \in s_1$  sledi  $a \in \langle x \rangle_{\alpha_0}$  ( $\alpha_0 \in I$ ). Ako je

$$\langle a \rangle = \langle x \rangle_{\alpha_0}, \quad QS_\phi \subseteq S_\phi,$$

onda  $\langle a \rangle \in S_\phi$  tj. postoji  $b$  takvo da važi  $\phi(a, b)$ . Ako je  $\langle a \rangle$  prava podsemigrupa od  $\langle x \rangle_{\alpha_0}$  onda  $\langle a \rangle \in S_\phi$  pa postoji  $b \in \langle a \rangle$  takvo da važi  $\phi(a, b)$ . Na osnovu prethodnog sledi da  $s_1 \in S_\phi$  pa  $s \in QS_\phi$ .

Nijedna semigrupa iz  $M$  ne može se predstaviti kao unija pravih podsemigrupa iz  $QS_\phi$  pa je  $M$  najmanja klasa.

Definicija 4.2.  $S \in \mathcal{S} \leftrightarrow S$  je regularna (kompletno, levo, desno, intra)

Propozicija 4.1.  $S \in \mathcal{QS} \leftrightarrow$  Važi jedan i samo jedan od uslova

1°  $S$  je monogena indeksa 2

2°  $(\exists n \geq 2) x^n = x.$

Dokaz. Sledi neposredno.

Definicija 4.3.  $S \in \mathcal{S} \leftrightarrow (\forall x) (\exists y) xy = y$   
( $yx = y, xy = yx = y$ )

Propozicija 4.2.  $S \in \mathcal{QS} \leftrightarrow$  Važi jedan i samo jedan od uslova

1°  $S$  je ciklička grupa prostog reda

2°  $x^{m+1} = x^m$  za neko  $m \in \mathbb{N}.$

Dokaz. (+) Sledi neposredno.

(+) Ako je  $S$  monogena semigrupa tada

$S$  je grupa  $\rightarrow S$  je prostog reda.

Ako je  $S$  semigrupa sledi da je  $K_a = \{a^m\}$ , trivijalna grupa, pa sledi 2°.

Ako  $S$  nije monogena i  $x \in S$  sledi da je  $\langle x \rangle$  podsemigrupa od  $S$  i  $x$  ima nulu u  $\langle x \rangle$ . Kako važi sledeće

$\langle x \rangle$  ima nulu (levu, desnu)  $\leftrightarrow x^{m+1} = x^m$

sledi tvrdjenje.

PRIMERI:

1° Neka je  $S \in \mathcal{S} \leftrightarrow (\forall x \in S) (\exists y \in S) (xy = y^2)$ . Tada je  $\mathcal{S}$  klasa svih semigrupa pa je  $\mathcal{S} = \mathcal{QS}$ . Iz teoreme 4.1. sledi da klasa svih semigrupa ima bazisnu klasu (klasa

svih monogenih semigrupa)

2° Neka je klasa  $S$  klasa svih regularnih (kompletno, levo, desno, intra). Monogena semigrupa

$\langle a \rangle = \{a, a^2, \dots, a^{r+1}\}$  tj. semigrupa u kojoj važi  $a^2 = a^{2+r}$  pripada klasi  $QS$  ali  $\langle a \rangle \not\subseteq S$  pa  $QS$  nema bazisnu klasu.

3° Neka je klasa  $S$  klasa inverznih semigrupa. Iz prethodnog sledi da klasa  $QS = QI$  nema bazisnu klasu.

4° Neka je klasa  $S$  klasa  $S_{m,n}^*$ . Iz definicije klase  $S_{m,n}^*$  sledi  $x^{n-1} = e_x$ . Neka je  $p$  prost broj takav da je  $p > n-1$ . Tada  $c_p \notin S$  i  $c_p \in QS$ . sledi da  $QS_{m,n}^*$  nema bazisnu klasu.

5° Klasa  $QS_{m,n}$  takodje nema bazisnu klasu (slično prethodnom)

6°  $s \in S \leftrightarrow (\forall x \in S) (\exists y \in S) (xy = y \wedge (\exists z \in S) (xz = y))$ .  $QS$  nema bazisnu klasu (sledí iz primera 2°).  $S$  je klasa grupa.

7°  $s \in S \leftrightarrow (\forall x \in S) (\exists y \in S) (x^2 = xyx)$ .  $QS$  ima bazisnu klasu. Neka  $s \in QS$ . Ako je  $S$  monogena onda je  $S$  ili ciklička grupa ili je  $S$  monogena indeksa 2 i perioda 3. Ako  $S$  nije monogena onda je  $S = \bigcup_{x \in S} \langle x \rangle$  i  $\langle x \rangle \triangleleft S$  pa je  $\langle x \rangle$  ili ciklička grupa ili je  $x^2 = x^3$ . Sledi da je  $s \in QS \rightarrow s \in S$ . Na osnovu teoreme 4.1. sledi da  $QS$  ima bazisnu klasu.

PRIMEDBA. Neka je  $S$  proizvoljna klasa semigrupa i neka je semigrupa  $A = \bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha$ ,  $S_\alpha \in S$ . Tada

$A \notin S \rightarrow S$  nema bazisnu klasu.

Neka je  $G$  klasa svih grupa i neka je  $C_n$  proizvoljna ciklička grupa. Tada je  $C_n^0 = C_n \cup \{0\}$  ( $\{0\}, C_n \in G$ ) i  $C_n^0 \notin G$ .

Sledi da klasa svih grupa nema bazisnu klasu u odnosu na klasu svih semigrupa.

GLAVA IV

PODALGEBRE POLUMREZA

## 1. JEDNA KARAKTERIZACIJA PODALGEBRI POLUMREŽA

U ovoj tački dajemo opis klase podalgebri polumreža.

Teorema 1.1. Algebra  $A = (A, \Omega)$  je podalgebra neke polumreže ako i samo ako zadovoljava sledeći uslov:

(\*) Za svaki par terma  $t_1$  i  $t_2$ , sa jednakim skupovima simbola,  $t_1 = t_2$  je identitet u  $A$ .

Dokaz. (+) Jasno je da svaka podalgebra polumreže zadovoljava uslov (\*).

(+) Pretpostavimo da algebra  $A = (A, \Omega)$  zadovoljava uslov (\*). Dokazaćemo da se ova algebra može potopiti u polumrežu. Uočimo da se opštost razmatranja ne smanjuje ako pretpostavimo sledeće:

- (i)  $A$  i  $\Omega$  su disjunktni skupovi;
- (ii) Različiti operatori iz  $\Omega$  definišu različite operacije u  $A$ ;
- (iii)  $\Omega$  ne sadrži 0-arne operatore, tako da su operatori tj. elementi  $\Omega$ , operacije u  $A$ .

Neka je  $K = A \cup \Omega$ , neka je  $M$  familija konačnih podskupova skupa  $K$  (uključujući i prazan skup)  $M$  je polumreža u odnosu na običnu operaciju unije skupova. Ako je  $x \in K$  onda ćemo smatrati da je  $x = \{x\}$  tako da dobijamo  $K \subseteq M$ , pa možemo smatrati da je  $M$  slobodna polumreža sa jedinicom i bazom  $K$ .

U  $M$  uvodimo relaciju "susedstva" na sledeći način. Ako su  $S, T \in M$  takvi da je

$$S = S' \cup a, \quad T = S' \cup \{\omega, a_1, \dots, a_n\},$$

gde je  $a = \omega(a_1, \dots, a_n)$  u algebri  $A$ , onda kažemo da su  $(S, T)$  i  $(T, S)$  parovi susednih elemenata iz  $M$  generisani operacijom  $\omega$ .

Ako postoji niz  $S_0, S_1, \dots, S_p$  takav da je  $S = S_0$ ,  $T = S_p$ ,  $p \geq 0$  i  $(S_{i-1}, S_i)$  par susednih elemenata iz  $M$  za svako  $i \in \{1, \dots, p\}$ , onda kažemo da su  $S, T$  ekvivalentni i to označavamo sa  $S \sim T$ .

Jasno je da je  $\sim$  kongruencija polumreže  $M$ , kao i da je

$$(1.1) \quad a = \omega(a_1, \dots, a_n) (u A) \Rightarrow a \sim \{\omega, a_1, \dots, a_n\}.$$

Dokazaćemo da važi implikacija

$$(1.2) \quad a, b \in A \Rightarrow (a \sim b \Rightarrow a = b),$$

iz čega, zbog (1.1), dolazimo do zaključka da je algebra podalgebra polumreže  $P = M/\sim$ .

Izvršićemo odgovarajuću pripremu, sa ciljem da dokažemo tvrdjenje (1.2).

Prvo, svakom elementu  $S \in M$  pridružimo njegovu "vrednost"  $[S]$  na sledeći način. Ako je jedan od skupova  $S_\Omega = S \cap \Omega$ ,  $S_A = S \cap A$  prazan, onda stavljamo

$$[S] = S.$$

Neka su skupovi

$$S_\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_r\}, \quad S_A = \{a_1, \dots, a_s\}$$

neprazni. Ako su sve operacije iz  $S_\Omega$  unarne onda stavljamo

$$[S] = \{b_1, \dots, b_s\},$$



gde je

$$b_v = \omega_1 \dots \omega_r(a_v), \quad \text{za } v = 1, \dots, s.$$

I na kraju, pretpostavimo da je bar jedna operacija iz  $S_\Omega$ , na primer  $\omega_r$ , neunarna. Tada postoje prirodni brojevi  $i$  i  $j$  takvi da je

$$\omega_1 \dots \omega_r^i(a_1^j, \dots, a_n)$$

osmišljen "proizvod" u algebri  $A$ . Ako je  $a$  vrednost tog proizvoda onda stavljamo

$$[S] = a.$$

Iz uslova (\*) sledi da  $[S]$  ne zavisi od izbora četvorke  $\omega_r, a, i, j$ .

Radi jednostavnosti, umesto  $[S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k]$  ćemo pisati  $[S_1, S_2, \dots, S_k]$ .

Iz definicije transformacije  $[\ ]$ , kao i iz uslova (\*), lako se dobija da su tačne sledeće leme.

Lema 1.1.  $[[S]] = [S]$ , za svako  $S \in M$ .

Dokaz. Ako je  $S$  prazna reč onda je  $[S] = \emptyset$  pa tvrdjenje neposredno sledi. Ako je jedan od skupova  $S_\Omega, S_A$  prazan,  $[S] = S$  pa sledi tvrdjenje. Neka su skupovi

$$S_\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_r\}, \quad S_A = \{a_1, \dots, a_s\}$$

neprazni. Ako su sve operacije iz  $S_\Omega$  unarne onda je

$$[[S]] = [b_1, \dots, b_s] = \{b_1, \dots, b_s\} = [S],$$

gde je  $b_v = \omega_1 \dots \omega_r(a_v)$ , za  $v = 1, \dots, s$ . Ako je bar jedna operacija iz  $S_\Omega$ , na primer  $\omega_r$ , neunarna onda je

$$[S] = a,$$

gde je  $a = \omega_1 \dots \omega_r^i(a_1^j, \dots, a_n)$  za neke  $i, j \in \mathbb{N}$ .

Kako je  $[a] = a$  sledi tvrdjenje.

Lema 1.2. Ako je  $S_A = T_A = \emptyset$ , onda je  
 $[S, T, U] = [S, [T, U]]$

za svako  $U \in M$ .

Dokaz. Za  $S = \emptyset$ , ovo je posledica leme 1.1., a za  $U_A = \emptyset$  tvrdjenje sledi iz definicije transformacije  $[ ]$ . Ako su sve operacije iz  $S \cup T \cup U$  unarne tvrdjenje sledi neposredno. Ako  $U_A \neq \emptyset$ , ako  $S \cup T \cup U$  sadrži bar jednu neunarnu operaciju onda tačnost tvrdjenja sledi iz uslova (\*) i definicije transformacije  $[ ]$ . Neka je, na primer

$S = \{f_1, \dots, f_k\}$ ,  $T = \{g_1, \dots, g_l\}$ ,  $U = \{h_1, \dots, h_m, a_1, \dots, a_s\}$   
 i neka su operacije  $f_1, g_1$  neunarne. Tada je

$$[T, U] = g_1^i \dots g_l^j h_1 \dots h_m (a_1^j, \dots, a_s) = c, \quad c \in A,$$

$$[S, [T, U]] = f_1^{j'} \dots f_k^{j'} (c^{j'}).$$

$$[S, T, U] = f_1^{i''} \dots f_k^{j''} g_1 \dots g_l h_1 \dots h_m (a_1^{j''}, \dots, a_s) =$$

$$= f_1^{i''} \dots f_k^{j''} ((g_1^i \dots g_l^j h_1 \dots h_m (a_1^j, \dots, a_s))^{j'}) =$$

$$= f_1^{i''} \dots f_k^{j''} (c^{j'}) = [S, [T, U]].$$

Lema 1.3. Neka je u  $A$  tačna jednakost  
 $a = \omega(a_1, \dots, a_n)$  i neka je  $[S, a] \in A$ . Tada je tačna jednakost

$$[S, a] = [S, \{\omega, a_1, \dots, a_n\}].$$

Dokaz. Uočimo prvo da je

$$\omega(a^n) = \omega((\omega(a_1, \dots, a_n))^n) = \omega(a_1, \dots, a_n) = a.$$

Moguća su sledeća dva slučaja

(I)  $a \in S$

(II)  $a \notin S$ .

Posmatraćemo prvo slučaj (I).

Neka je  $S = \{\omega_1, \dots, \omega_r, b_1, \dots, b_s, a\}$  gde je  $r \geq 0, s \geq 0$  i  $a \neq b_\lambda, \lambda = 1, \dots, s$ .

Ako je  $r \geq 1$  i ako neka operacija, na primer  $\omega_r$ , nije unarna, onda za podesno izabrane pozitivne brojeve  $i, j$  ( $j \geq 2$ ) imamo

$$\begin{aligned} [S, a] &= [S] = \omega_1 \dots \omega_r^i (b_1, \dots, b_s, a^j) = \\ &= \omega_1 \dots \omega_r^i (b_1, \dots, b_s, \omega(a_1, \dots, a_n), a^{j-1}) = \\ &= [S, \{\omega, a_1, \dots, a_n\}]. \end{aligned}$$

Pretpostavimo da je  $r \geq 1$  i da su sve operacije  $\omega_1, \dots, \omega_r$  unarne. Tada imamo

$$[S, a] = \{\omega_1 \dots \omega_r(b_1), \dots, \omega_1 \dots \omega_r(b_s), \dots, \omega_1 \dots \omega_r(a)\}.$$

Iz pretpostavke da je  $[S, a] \in A$  dobijamo

$$\omega_1 \dots \omega_r(b_1) = \dots = \omega_1 \dots \omega_r(b_s) = \omega_1 \dots \omega_r(a) = c, c \in A.$$

Neka je i  $\omega$  unarna operacija, tj  $n = 1$ . U ovom slučaju imamo

$$[S, \{\omega, a_1\}] = \{\omega(c), \omega\omega_1 \dots \omega_r(a_1)\}.$$

Treba pokazati da je  $c = \omega(c) = \omega\omega_1 \dots \omega_r(a_1)$ .

$$\omega\omega_1 \dots \omega_r(a_1) = \omega_1 \dots \omega_r(\omega(a_1)) = \omega_1 \dots \omega_r(a) = c,$$

pa sledi

$$\omega(c) = \omega\omega_1 \dots \omega_r(a) = \omega_1 \dots \omega_r(\omega(a)) = \omega_1 \dots \omega_r(a) = c$$

Pretpostavimo da je  $n > 1$ . U ovom slučaju imamo

$$[S, \{\omega, a_1, \dots, a_n\}] = \omega_1 \dots \omega_r \omega^i (b_1, \dots, b_s, a^j, a_1, \dots, a_n) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \omega_1 \dots \omega_r \omega^i (b_1, \dots, b_s, a^{j+n-1}, \omega(a_1, \dots, a_n)) = \\
 &= \omega_1 \dots \omega_r \omega^i (b_1, \dots, b_s, a^{j+n}) = \\
 &= \omega^i (\omega_1 \dots \omega_r (b_1), \dots, \omega_1 \dots \omega_r (b_s), (\omega_1 \dots \omega_r (a))^{j+n}) = \\
 &= \omega^i (c^{s+j+n}) = \omega(c^n) = \\
 &= \omega((\omega_1 \dots \omega_r (a))^n) = \omega_1 \dots \omega_r (\omega(a^n)) = \\
 &= \omega_1 \dots \omega_r (a) = c = [S, a].
 \end{aligned}$$

Preostaje slučaj kada je  $r = 0$ , tj.  $S = \{b_1, \dots, b_s, a\}$ .

Iz  $[S, a] = [S] = c, c \in A$ , sledi da je  $S = a$ .

Sada imamo

$$\begin{aligned}
 [S, \{\omega, a_1, \dots, a_n\}] &= [\{a, \omega, a_1, \dots, a_n\}] = \omega(a^{n-1}, \omega(a_1, \dots, a_n)) = \\
 &= \omega(a^n) = a = [S, a]
 \end{aligned}$$

za  $n > 1$  i

$$\begin{aligned}
 [S, \{\omega, a_1\}] &= [\{\omega, a, a_1\}] = \{\omega(a), \omega(a_1)\} = \{a, a\} = a = \\
 &= [S, a]
 \end{aligned}$$

za  $n = 1$ .

Time smo ispitali slučaj (I). Preostaje nam slučaj (II). Neka je

$$S = \{\omega_1, \dots, \omega_r, b_1, \dots, b_s\}$$

gde je  $r \geq 0, s \geq 0, b_\lambda \neq a$  ( $\lambda = 1, \dots, s$ ).

Neka je  $r \geq 1$ .

Ako je na primer  $\omega_r$ , neunarna operacija onda, za podesno izabrane prirodne brojeve  $i, j$  imamo

$$\begin{aligned} [S, a] &= \omega_1 \dots \omega_r^i(b_1, \dots, b_s, a^j) = \\ &= \omega_1 \dots \omega_r^i(b_1, \dots, b_s, (\omega(a_1, \dots, a_n))^j) = \\ &= [S, \{\omega, a_1, \dots, a_n\}]. \end{aligned}$$

Ako su sve operacije  $\omega_1, \dots, \omega_r$  unarne onda je

$$[S, a] = \{\omega_1 \dots \omega_r(b_1), \dots, \omega_1 \dots \omega_r(b_s), \omega_1 \dots \omega_r(a)\}$$

pri čemu je

$$c = \omega_1 \dots \omega_r(b_1) = \dots = \omega_1 \dots \omega_r(b_s) = \omega_1 \dots \omega_r(a).$$

Ako je  $n = 1$  onda

$$[S, \{\omega, a_1\}] = \{\omega(c), \omega_1 \dots \omega_r(a_1)\} = \{\omega(c), c\}.$$

Iz  $c = \omega_1 \dots \omega_r(a)$  sledi  $\omega(c) = \omega_1 \dots \omega_r \omega(a) = \omega_1 \dots \omega_r(a) = c$ .

Prema tome, imamo

$$[S, a] = c = [S, \{\omega, a_1\}].$$

Za  $n > 1$  imamo

$$\begin{aligned} [S, \{\omega, a_1, \dots, a_n\}] &= \omega_1 \dots \omega_r \omega^i(b_1, \dots, b_s, a_1^j, \dots, a_n) = \\ &= \omega^i(\omega_1 \dots \omega_r(b_1), \dots, \omega_1 \dots \omega_r(b_s), a_1^j, \dots, a_n) = \\ &= \omega^i(c^s, a_1^j, \dots, a_n) = \\ &= \omega^i(c^s, (\omega(a_1, \dots, a_n))^k) = \\ &= \omega^i(c^s, a^k) = \omega_1 \dots \omega_r(\omega(a^n)) = \\ &= \omega_1 \dots \omega_r(a) = c = [S, a], \end{aligned}$$

za  $s > 1$ . Ako je  $s = 0$  tj.  $S = \{\omega_1, \dots, \omega_r\}$ , onda je

$$\begin{aligned} [S, \{\omega, a_1, \dots, a_n\}] &= \omega_1 \dots \omega_r(\omega(a_1, \dots, a_n)) = \omega_1 \dots \omega_r(a) = c = \\ &= [S, a]. \end{aligned}$$

Preostaje slučaj  $r = 0$ . Sada je  $[S, a] \in A$  moguće ako je  $S \neq \emptyset$ , tj.  $[S, a] = [a] = a$ .

Imamo

$$[S, (\omega, a_1, \dots, a_n)] = [(\omega, a_1, \dots, a_n)] = \omega(a_1, \dots, a_n) = a = [S, a].$$

Time je završen dokaz leme 1.3.

Dokazaćemo sledeću lemu iz koje će neposredno slediti da je tvrdjenje (1.2) tačno

Lema 1.4. Neka je  $a = S_0, S_1, \dots, S_p$  niz elemenata iz  $M$  takav da je  $p \geq 0$  i za svako  $i \in \{1, 2, \dots, p\}$  par  $(S_{i-1}, S_i)$  jeste par susednih elemenata generisan operacijom  $\omega_i$ . Tada je

$$a = [\omega_v, a] = [\omega_1, \dots, \omega_p, S_v]$$

za svako  $v \in \{1, 2, \dots, p\}$ .

Dokaz. Za  $p = 0$  tvrdjenje neposredno sledi. Pretpostavimo da je

$$a = [\omega_v, a] = [\omega_1, \dots, \omega_q, S_v]$$

za svako  $v \in \{1, 2, \dots, q\}$ , gde je  $0 \leq q < p$ . Označimo  $\omega_{q+1}$  sa  $\omega$ . Tada je

$$(I) \quad S_q = S \cup b, \quad S_{q+1} = S \cup \{\omega, b_1, \dots, b_n\}$$

ili

$$(II) \quad S_q = S \cup \{\omega, b_1, \dots, b_n\}, \quad S_{q+1} = S \cup b,$$

gde je  $b = \omega(b_1, \dots, b_n)$  u algebri  $A$ .

U prvom slučaju imamo

$$[\omega, a] = [\omega, [\omega_1, \dots, \omega_q, S_q]] =$$

$$\begin{aligned}
 &= [\omega, \omega_1, \dots, \omega_q, S^{\sim}, b] = \\
 &= [\omega, \omega_1, \dots, \omega_q, S^{\sim}, \omega, b_1, \dots, b_n] = \\
 &= [\omega_1, \dots, \omega_q, S^{\sim}, \omega, b_1, \dots, b_n] = \\
 &= [\omega_1, \dots, \omega_q, S^{\sim}, b] = [\omega_1, \dots, \omega_q, S_q] = a \\
 [\omega_1, \dots, \omega_q, \omega, S_v] &= [\omega, \omega_1, \dots, \omega_q, S_v] = \\
 &= [\omega, [\omega_1, \dots, \omega_q, S_v]] = \\
 &= [\omega, a] = a,
 \end{aligned}$$

za svako  $v \in \{1, \dots, q\}$ . Isto tako

$$\begin{aligned}
 [\omega_1, \dots, \omega_q, \omega, S_{q+1}] &= [\omega_1, \dots, \omega_q, \omega, S^{\sim}, \omega, b_1, \dots, b_n] = \\
 &= [\omega_1, \dots, \omega_q, S^{\sim}, \omega, b_1, \dots, b_n] = \\
 &= [\omega_1, \dots, \omega_q, S^{\sim}, b] = \\
 &= [\omega_1, \dots, \omega_q, S_q] = a.
 \end{aligned}$$

Preostaje nam slučaj (II).

Uočimo da u ovom slučaju imamo  $\omega \in \{\omega_1, \dots, \omega_q\}$ , pa prema tome potrebno je dokazati samo jednakost

$$[\omega_1, \dots, \omega_q, S_{q+1}] = a,$$

koja se dobija kao posledica leme 1.3. i transformacije [ ].

Ako  $\{\omega_1, \dots, \omega_q\} \cup S_{q+1}$  sadrži bar jednu neunarnu operaciju onda je  $[\omega_1, \dots, \omega_q, S_{q+1}] \in A$  pa je

$$\begin{aligned}
 [\omega_1, \dots, \omega_q, S_{q+1}] &= [\omega_1, \dots, \omega_q, S^{\sim}, b] = [\omega_1, \dots, \omega_q, S^{\sim}, \omega, b_1, \dots, b_n] = \\
 &= [\omega_1, \dots, \omega_q, S_q] = a.
 \end{aligned}$$

Neka su sve operacije iz  $\{\omega_1, \dots, \omega_q\} \cup S_q$  unarne

i neka je  $S' = \{\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_k}, a_1, \dots, a_s\}, \omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_k} \in \{\omega_1, \dots, \omega_q\}$ .

Iz  $[\omega_1, \dots, \omega_q, S_q] = a$  sledi da je

$$\omega_1 \dots \omega_q \omega_{i_1} \dots \omega_{i_k} (a_1) = \dots = \omega_1 \dots \omega_q \omega_{i_1} \dots \omega_{i_k} (a_s) = \omega_1 \dots \omega_q \omega_{i_1} \dots \omega_{i_k} (b_1) =$$

Tada je

$$[\omega_1, \dots, \omega_q, S_{q+1}] = \{\omega_1 \dots \omega_q \omega_{i_1} \dots \omega_{i_k} (a_1), \dots, \omega_1 \dots \omega_q \omega_{i_1} \dots \omega_{i_k} (a_s), \omega_1 \dots \omega_q \omega_{i_1} \dots \omega_{i_k} (b)\}.$$

$$\text{Kako je } \omega_1 \dots \omega_q \omega_{i_1} \dots \omega_{i_k} (b) = \omega_1 \dots \omega_q \omega_{i_1} \dots \omega_{i_k} (\omega(b_1)) =$$

$$= \omega_1 \dots \omega_q \omega_{i_1} \dots \omega_{i_k} (b_1) = a \quad (\omega \in \{\omega_1, \dots, \omega_q\}) \text{ sledi da je}$$

$$[\omega_1, \dots, \omega_q, S_{q+1}] = [\omega_1, \dots, \omega_q, S_q] = a.$$

Time je kompletiran dokaz leme 1.4.

Sada se implikacija (1.2) jednostavno dokazuje

Naime, ako je  $a, b \in A$  i  $a \sim b$ , onda postoji niz

$$a = S_0, S_1, \dots, S_p = b$$

takav da je par  $(S_{i-1}, S_i)$  par susednih elemenata iz  $M$  za svako  $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ . Ako je  $p = 0$ , onda  $a = S_0 = b$ . Neka je  $p \geq 1$  i neka je par  $(S_{i-1}, S_i)$  generisan operacijom  $\omega_i$ .

Na osnovu leme 1.4. imamo da je

$$[\omega_1, a] = [\omega_2, a] = \dots = [\omega_p, a] = [\omega_1, \dots, \omega_p, b] = a.$$

Ako posmatramo niz  $b = S_p, \dots, S_1, S_0 = a$  imamo da je

$$b = [\omega_1, \dots, \omega_p, a] = [\omega_1, \dots, [\omega_p, a]] = [\omega_1, \dots, \omega_{p-1}, a] = \dots = [\omega_1, a] = a$$

Time je dokaz kompletiran.



## 2. NEKI SPECIJALNI SLUČAJEVI

Ovde dajemo neke specijalne slučajeve koji neposredno slede iz teoreme 1.1.

2.1. Ako  $\Omega$  ne sadrži unarne operatore i svakom  $n$ -arnom operatoru  $\omega \in \Omega$  opredelimo binarni operator  $\omega'$  na sledeći način

$$\omega'(x, y) = \omega(x^{n-1}, y),$$

onda imamo algebru  $(A, \Omega')$  sa binarnim operacijama, koja zadovoljava uslov (\*) ako i samo ako algebra  $(A, \Omega)$  zadovoljava isti uslov. Takođe, imamo da je

$$\omega(x_1, \dots, x_n) = \omega'^{n-1}(x_1, \dots, x_n).$$

2.2. Algebru  $(A, \Omega)$  nazivamo  $\Omega$ -polumreža ako postoji polumreža  $P$  takva da je  $A \subseteq P$  i

$$(1') \quad \omega(a_1, \dots, a_n) = a_1 \dots a_n$$

za svaki  $n$ -arni operator  $\omega \in \Omega$  i  $a_1, \dots, a_n \in A$ . Lako se dokazuje da je  $(A, \Omega)$   $\Omega$ -polumreža ako i samo ako je zadovoljen sledeći uslov:

(\*) Za svaki par terma  $t_1, t_2$ , sa istim skupom promenljivih,  $t_1 = t_2$  je identitet u  $(A, \Omega)$ .

Očigledno, uslov (\*) je potreban.

Ako (\*) važi u  $(A, \Omega)$  onda svi operatori, iste arnosti  $n$ , definišu jednake  $n$ -arne operacije, tako da možemo uzeti da za svako  $n$  postoji najviše jedna operacija u  $\Omega$ . Ako

postoji unarna operacija  $\omega \in \Omega$  imamo da je  $\omega(x) = x$  za svako  $x \in A$ . Neka je  $\omega$  n-arna operacija u  $\Omega$  ( $n \geq 2$ ), i neka je  $\cdot$  binarna operacija definisana sa

$$x \cdot y = \omega(x^{n-1}, y).$$

Tada dobijamo polumrežu  $(A, \cdot)$  takvu da je

$$\rho(x_1, \dots, x_m) = x_1 \dots x_m$$

za svaku m-arnu operaciju  $\rho \in \Omega$ .

2.3. Algebra  $A$  zadovoljava uslov (\*) ako i samo ako važe sledeći identiteti u algebri  $A$ :

$$3.1. \quad \omega x_1 \dots x_n = \omega x_{i_1} \dots x_{i_n};$$

$$3.2. \quad \omega \rho x_1 \dots x_m = \rho \omega x_1 \dots x_m;$$

$$3.3. \quad \omega \rho x_1 \dots x_m = \omega x_1 \dots x_{i-1} \rho x_{i+1} \dots x_m;$$

$$3.4. \quad \omega_1^{r_1} \dots \omega_p^{r_p} x_1^{\alpha_1} \dots x_q^{\alpha_q} = \omega_1^{s_1} \dots \omega_p^{s_p} x_1^{\beta_1} \dots x_q^{\beta_q}.$$

$A$  zadovoljava (\*) ako zadovoljava sve identitete 3.1, 3.2, 3.3 i 3.4' gde je

$$3.4' \quad \omega_1^{r_1} \dots \omega_r^{r_r} x_1^{\alpha_1} \dots x_q^{\alpha_q} = \rho_1^{s_1} \dots \rho_s^{s_s} x_1^{\beta_1} \dots x_q^{\beta_q}$$

( $\omega, \rho, \omega_v, \rho_v$  su proizvoljni elementi  $\Omega$ ;  $i_1, \dots, i_n$  je proizvoljna permutacija  $1, \dots, n$  i  $n, m, r_v, s_v, \alpha_v, \beta_v$  su pozitivni brojevi takvi da su obe strane odgovarajućih identiteta  $\Omega$ -termi).

LITERATURA

- [1] S. Bogdanović, S. Milić, V. Pavlović, *Anti-inverse semigroups*, Pub.Inst.Math. Beograd, 24(38)1978, 19-28.
- [2] S. Bogdanović, *On anti-inverse semigroups*, Publ.Inst. Math. Beograd, 25(39),1979, 25-31.
- [3] S. Bogdanović, *Prilog teoriji regularnih semigrupa*, Doktorska disertacija, Novi Sad, 1980.
- [4] S. Bogdanović, *Sur les demi-groupes dans lesquels sous-demi-groupes propres sont idempotents I*, Mathematics seminar notes, Kobe University (u štampi).
- [5] S. Bogdanović, *Sur les demi-groupes dans lesquels sous-demi-groupes propres sont idempotents II*, Matematički vesnik, Beograd (u štampi).
- [6] S. Bogdanović, S. Crvenković, *On some classes of semigroups*, Zbornik radova PMF Novi Sad, 8(1978), 69-77.
- [7] A.H. Clifford, *Semigroups admitting relative inverses*, Ann. of Math., 42(1941), 1037-1049.
- [8] A.H. Clifford, G.B. Preston, *The algebraic theory of semigroups*, Vol. I, 1964, Vol. II (in Russian) Moscow.
- [9] P.M. Cohn, *Universal algebra*, New York, 1965.
- [10] R. Croisot, *Demi-groupes inversifs et demi-groupes réunions de demi-groupes simples*, Ann.Sci. Ecole Norm. Sup (3), 70(1953), 361-379.
- [11] S. Crvenković, *O jednoj klasi regularnih semigrupa*, (magistarski rad), Beograd, 1978.
- [12] S. Crvenković, *On some properties of a class of the completely regular semigroups*, Zbornik radova PMF Novi Sad, br. 9, 1979, 153-160.

- [13] S. Crvenković, *Basis class of one class of semi-groups*, Algebraic conference, Skopje, 1980.
- [14] Г. Чупона, За теоремата на Кон-Рабане, Год.Збор. ПМФ, Скопје, Књига 20(1970) А.
- [15] Г. Чупона, Б. Трпеновски, Предавање по алгебра, Скопје 1973.
- [16] Г. Чупона, С. Марковски, Сместување на универзални алгебри, Год.Збор. ПМФ, Скопје, Књига 25-26 (1975/76) А.
- [17] Г. Чупона, Подалгебри на полугрупи, Билтен на Друшт. на мат. и физ. од СР Македонија, Књига XIX.
- [18] G. Čupona, G. Vojvodić, S. Crvenković, *Subalgebras of semilattices*, Zbornik radova PMF Novi Sad, br. 10, 1980, (u štampi).
- [19] P. Dubreil, *Théorie des groupes*, Dunod, 1972, Paris.
- [20] J.A. Green, *On the structure of semigroups*, Ann. of Math., 54(1951), 163-172.
- [21] M. Hall, *The theory of groups*, (на руском), Москва 1962.
- [22] J.M. Howie, *An Introduction to semigroups Theory*, Acad. Press, 1976.
- [23] K. Iséki, *A characterisation of regular semigroup*, Proc. Japon Acad., 32(1956), 676-677.
- [24] K. Iséki, *Contribution to the Theory of semigroups I*, Proc. Japon Acad., 32(1956), 174-175.
- [25] Е.С. Ляпин, Полугруппы, ФМ Москва, 1960.
- [26] С. Марковски, Подалгебри на группоиди, Докторска дисертација, Скопје 1980.
- [27] S. Milić, S. Bogdanović, *On a class of anti-inverse semigroups*, Publ.Inst.Math., Beograd, 29(39), 1979, 95-100.
- [28] S. Milić, *O n-anti-inverznim semigrupama*, Zbornik radova PMF Novi Sad, br. 9, 1979.
- [29] S. Milić, *On some classes of semigroups*, Algebraic conference, Skopje 1980.

- [30] W.D. Munn, R. Penrose, *A note on inverse semigroups*, Proc. Cambridge Phil.Soc., 51(1955), 396-399.
- [31] J. von Neumann, *On regular rings*, Proc.Math.Acad.Sci. USA, 22(1936), 707-713.
- [32] T.E. Nordahl, *Commutative semigroups whose proper subsemigroups are power joined*, Semigroup Forum, Vol. 6 (1973), 35-41.
- [33] M. Petrich, *The maximal semilattice decomposition of a semigroup*, Math.Zeitsch., 85(1964), 68-82.
- [34] M. Petrich, *Introduction to semigroups*, Merrill Publ. Company, 1973.
- [35] M. Petrich, *Lectures in semigroups*, Akad. Verlag, Berlin, 1977.
- [36] M. Petrich, *Structure of regular semigroups*, Cahiers Math., Montpellier, 1977.
- [37] S. Prešić, M. Prešić, *On the embedding of  $\Omega$ -algebras in groupoids*, Publ. de l'inst.Math., 21(35), 1977, Beograd.
- [38] Ю.Н. Ребане, *О представлении универсальных алгебр в коммутативных полугруппах*, Сиб.Мат. Журнал, VII, No. 4, 1966.
- [39] D. Rees, *On semigroups*, Cambridge Phil.Soc., 36(1940), 387-400.
- [40] G. Thierrin, *Sur une condition necessaire et suffisante pour qu'un semigroupe soit un groupe*, C.R.Acad. Sci. Paris, 232(1951), 376-378.
- [41] G. Thierrin, *Sur les éléments unitaires d'un demi-groupe inversif*, C.R.Acad.Sci., Paris, 234(1952), 33-34.
- [42] ———, *Sur quelques propriétés de certaines classes de demi-groupes*, C.R.Acad.Sci., Paris, 239(1954), 1335-1337.
- [43] ———, *Contribution a la théorie des équivalences dans les demi-groupes*, Bull.Soc.Math., France, 83(1955), 103-159.
- [44] В.В. Вагнер, *Обобщенные группы*, ДАН, СССР, 84(1952), 1119-1122.

