FAKULTET
ORGANIZACIONIH
NAUKA

Beograd

KOLEKTIV
AUTORA

ZBIRKA ZADATAKA IZ MATEMATIKE II

1972. GODINA

A u t o r i:

Dragan Trifunović, stručni saradnik FON-a
Zoran Šami, asistent
Vladimir Savić, asistent
Žarko Mijajlović, asistent
Zoran Vukmanović, asistent
Nada Djuranović, asistent
Šćepan Ušćumlić, asistent
Gradimir Milovanović, asistent

Glavni recenzent:

Dr Djuro Kurepa, redovni profesor Univerziteta

Recenzenti:

Dr Časlav Djaja, docent Univerziteta
Dr Momčilo Ušćumlić, docent Univerziteta
Dr Milenko Nikolić, docent FON-a
Dr Dobrilo Tošić, docent Univerziteta

Glavni i odgovorni urednik

Borivoje Lečić

Tehnički urednik

Želimir Buruš

Prekucavanje materijala

Dragoslava Mitić-Vranjkić

Ucrtavanje simbola i znakova

Vojislava Andrić

Štampa: "SAVREMENA ORGANIZACIJA" - Izdavačko grafički sektor
Beograd, Jevrejska br. 16

Dragan TRIFUNOVIĆ

DIFERENCIJALNE JEDNAČINE PRVOGA REDA

Neka je y nepoznata funkcija nezavisno promenljive x, a y' njen izvod po x, onda se jednačina

$$F(x,y,y') = 0, \qquad (1)$$

gde je $F(x,y,y')$ izvesna funkcija od x, y i y' zove diferencijalna jednačina (DFJ) prvoga reda. DFJ (1) može biti u različitim oblicima, na primer,

$$y' = f(x,y) \; ; \qquad f(x,y)dx - dy - dy = 0 \, .$$

Svaka funkcija $y = \varphi(x)$ definisana i diferencijabilna u intervalu (a,b), koja identički zadovoljava jednačinu (1) $\forall x \in (a,b)$ tj. $[F\ x, \varphi(x), \varphi'(x)] = 0, \quad \forall x \in (a,b)$ zove se rešenje jednačine (1).

Napišimo jednačinu 1 u obliku

$$y' = f(x,y), \qquad (2)$$

koja može imati beskonačno mnogo rešenja. Sva rešenja sa izvesnim izuzetkom mogu se izraziti jednom formulom $\psi(x,y,c) = 0$, koja sadrži proizvoljnu konstantu C i koja predstavlja opšti integral DFJ (2).

Funkcija

$$y = \varphi(x,C) \qquad (3)$$

neprekidno diferencijabilna po x i neprekidna po proizvoljnoj konstanti C, predstavljaće opšte rešenje jednačine (2) u oblasti D promenljivih x i y, ako jednačina (3) odredjuje vrednost konstante C za svaki par $(x,y) \in D$, tj. $C = \Psi(x,y)$ i ako zamena vrednosti C u jednačini $y' = \varphi'_x(x,C)$ dovodi do DFJ (2) u oblasti D, tj. $y' = \varphi'_x[x, \Psi(x,y)] \equiv f(x,y)$.

Rešenje, odnosno integral DFJ (2), dobijeno iz opšteg rešenja, dajući proizvoljnoj konstanti C odredjenu brojnu vrednost, uključujući tu ponekad i $\pm\infty$ zove se <u>partikularno rešenje</u>, odnosno <u>partikularni integral</u> jednačine (2). Geometrijski, partikularni integral DFJ (2) predstavlja integralnu krivu, sadržanu u familiji integralnih krivih, datih njenim opštim integralom.

Kada je data neka DFJ, postavljaju se dva osnovna pitanja: prvo, da li ona uopšte ima rešenja; drugo, ako ima rešenja kakva su i koja su. Nećemo se upuštati u razmatranje tih opštih pitanja, već samo izneti nekoliko prostijih DFJ prvog reda, koje se mogu lako rešiti, u prvom redu pomoću integriranja (rešavanje kvadraturama).

<u>Rastavljanje promenljivih</u>. Ako se DFJ (2) može svesti na oblik

$$\varphi(y)dy = \psi(x)dx \tag{4}$$

kaže se da su promenljive rastavljene, te je opšti integral

$$\int \varphi(y)dy = \int \psi(x)dx + C$$

<u>Homogena jednačina.</u> DFJ oblika

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{5}$$

zove se homogena čiji je stepen homogeniteta nula. Za rešavanje ove DFJ koristi se smena $y = u(x)x$ gde je $u(x)$ nova nepoznata funkcija. Iz smene imamo da je

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u ,$$

te jednačina (5) postaje $\frac{dx}{x} = \frac{du}{f(u)-u}$, gde su promenljive razdvojene, te je

$$x = C\, e^{\int \frac{du}{f(u)-u}}$$

gde se, posle integracije, treba smenom $y = ux$ vratiti na prvobitnu funkciju y.

Na homogenu jednačinu može se svesti i jednačina oblika:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + C}{a_1x + b_1y + C_1}\right) \tag{6}$$

gde su: a, b, C, a_1, b_1, C_1 konstante. Da bi se ova jednačina svela na homogenu jednačinu, treba izvršiti smenu

$$x = X + \alpha \; ; \quad y = Y + \beta \tag{7}$$

gde su α i β za sad neodredjene konstante. Jednačina (6) posle smene postaje

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX + bY + a\alpha + b\beta + C}{a_1X + b_1Y + a_1\alpha + b_1\beta + C_1}\right).$$

Ako se konstante α i β izaberu tako, da je

$$a\alpha + b\beta + C = 0 \tag{8}$$
$$a_1\alpha + b_1\beta + C_1 = 0$$

onda gornja jednačina postaje homogena.

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX + bY}{a_1X + b_1Y}\right),$$

za koju smo videli kako se integrali. Sistem (8) imaće rešenja, ako je

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Ako je, pak, ova determinanta jednaka nuli, tj. ako je

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = k$$

tada jednačina (6) postaje

$$\frac{dy}{dx} = f\left[\frac{k(a_1x + b_1y) + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right]$$ koja se integrali smenom

$$u = a_1x + b_1y \; ; \quad \frac{du}{dx} = a_1 + b_1\frac{dy}{dx}$$ i ova jednačina postaje

$$\frac{1}{b_1}\cdot\frac{du}{dx} - \frac{a_1}{b_1} = f\left(\frac{ku + c}{u + c_1}\right)$$

gde se promenljive mogu razdvojiti.

<u>Linearna jednačina.</u> DFJ linearna, po nepoznatoj funkciji i njenom izvodu, zove se linearna jednačina. To je jednačina obli-

Rešenje. Data DFJ razdvaja promenljive. Medjutim, ovde ćemo pokazati njenu integraciju prihvatajući Bernulijev oblik. Imamo da je

$$\frac{y'}{y^3}+\frac{2}{y^2}=3 \quad \text{što smenom postaje} \quad (z=y^{-2})\ ; \quad z'-4z=-6.$$

Kako je opšte rešenje homogenog dela ove jednačine $z=C_1e^{4x}$ to varijacijom konstante imamo $\frac{dz}{dx}=\frac{dC_1}{dx}e^{4x}+4C_1e^{4x}$, što posle smene u DFJ daje $C_1=C+\frac{3}{2}e^{-4x}$, te je opšti integral date DFJ $y^2=\dfrac{2}{3+2Ce^{4x}}$.

Kako su početni uslovi $y(0)=1$, to nalazimo da je $C=-1/2$, te integralna kriva koja prolazi kroz tačku $A(0,1)$ glasi:

$$y^2=\frac{2}{3-e^{4x}}.$$

4. Naći krivu liniju kod koje tangenta u svakoj tački seče na ordinatnoj osi odsečak proporcionalan kvadratu apscise. Medju ovakvim krivim linijama odrediti onu koja za $x=0$ ima ekstremum.

Rešenje. Iz uslova zadatka $n=kx^2$ nalazimo da DFJ glasi $y'-\frac{1}{x}y=-kx$. Opšti integral ove DFJ ima oblik $y=Cx-kx^2$; C-integraciona konstanta. Kako je $y'=C-2kx=0$, to za uslov $x=0$ imamo da je $C=0$, te je $y=-kx^2$.

5. Smenom $y=u(x)V(x)$ rešiti linearnu DFJ $y'+3xy=6x$.

Rešenje. Kako je $y=uv$, to je $y'=u'v+uv'$, te DFJ postaje $uv'+(u'+3xu)V=6x$.

Uvodimo da je $\frac{du}{dx}+3xu=0$, te je $u(x)=e^{-\frac{3}{2}x^2}$. Iz DFJ $u\frac{dV}{dx}=6x$ nalazimo funkciju $V(x)$, $V(x)=C+3e^{\frac{3}{2}x^2}$, te je opšti integral date linearne DFJ

$$y=u(x)V(x)=e^{-\frac{3}{2}x^2}\left(C+3e^{\frac{3}{2}x^2}\right)=3+Ce^{-\frac{3}{2}x^2}.$$

6. Data je funkcija $y=ke^{2x}$, gde je k konstanta. Odrediti k tako da data funkcija zadovoljava uslov $y'+4y=3e^{2x}$, a zatim rešiti ovu jednačinu.

Rešenje. Kako je $y=ke^{2x}$; $y'=2ke^{2x}$ to smenom u DFJ nalazimo da je $k=1/2$. Za rešenje date DFJ uvodimo smenu $y=y_1+z=\frac{1}{2}e^{2x}+z$, te imamo da je $y_1'+z'+4y_1+4z=3e^{2x}$, odakle je $z'+4z=0$. Kako je iz ove DFJ $z=e^{-4x}$, to opšti integral date DFJ je $y=\frac{1}{2}e^{2x}+e^{-4x}$.

7. Rešiti DFJ $y'+\lambda_1 y=\lambda a e^{-\lambda x}$; $\lambda_1, a, \lambda=$ const. metodom varijacije konstante. Specijalno odrediti ono rešenje DFJ koje za $x=0$ ima vrednost y_0.

Rešenje. Opšti integral homogene jednačine $y'+\lambda_1 y=0$, glasi $y=C_1e^{-\lambda_1 x}$. Varijacijom konstante C_1 nalazimo da je $C_1=C+\frac{\lambda a}{\lambda_1-\lambda}e^{(\lambda_1-\lambda)x}$, te opšti integral date DFJ glasi $y=Ce^{-\lambda_1 x}+\frac{\lambda a}{\lambda_1-\lambda}e^{-\lambda x}$. Za uslove $y(0)=y_0$ nalazimo da je integraciona konstanta $C=y_0-\frac{\lambda a}{\lambda_1-\lambda}$, te je partikularno rešenje $y=y_0e^{-\lambda_1 x}+\frac{\lambda a}{\lambda_1-\lambda}\left(e^{-\lambda x}-e^{-\lambda_1 x}\right)$.

8. Naći krivu liniju kod koje je odstojanje svake tačke od početka koordinatnog sistema jednako odsečku koji tangenta u toj tački čini na ordinatnoj osi.

Rešenje. Prema uslovu zadatka nalazimo da je DFJ $xy'=y-\sqrt{x^2+y^2}$, te je opšta integralna kriva u parametarskom obliku $y=xu$; $u+\sqrt{1+u^2}=Cx$.

9. Odrediti parametar k da funkcija $y=x^k$ bude partikularno rešenje diferencijalne jednačine (DFJ) $6x^2y''+5xy'-2y=0$.

Rešenje. Kako je $y=y_1=x^k$ partikularno rešenje, to je $6x^2y_1''+5xy_1'-2y_1=0$, odakle se dobija $6k^2-k-2=0$, te je $k = 2/3$ i $k = -1/2$. Pokazati da se uopštena DFJ $nx^2 y_1'' + (n-1)xy_1' - (n-4)y_1 = 0$ uvek svodi na jednačinu oblika $nk^2 - k - (n-4) = 0$ za $\forall n \in N$ i $n > 5$.

10. Naći onu primitivnu funkciju funkcije $f(x) = e^{x-1}$ koja prolazi kroz tačku$(1,0)$.

Rešenje. Ako primitivnu funkciju obeležimo sa $F(x)$, tada je po definiciji $F'(x) = f(x)$, te je

$F(x) = \int f(x)dx + C$, odnosno $F(x) = e^{x-1} + C$, $c = \text{const.}$

Kako je $F(1) = 0$, to je $C = -1$ i primitivna funkcija glasi $F(x) = e^{x-1} - 1$.

11. Neka je $y = ax^s$ modelujuća funkcija jedne prirodne pojave, gde su a i s proizvoljni parametri. Pokazati da odgovarajuća DFJ te pojave ima oblik

$$(*) \qquad xyy'' + yy' - xy'^2 = 0 .$$

Rešenje. Iz sistema jednačina: $y = ax^s$; $y' = asx^{s-1}$; $y'' = as(s-1)x^{s-2}$ eliminacijom parametara a i s dobija se DFJ $(*)$.

12. Naći DFJ čiji je opšti integral $y = Ce^{\varphi(x)}$.

Rešenje.Postupiti kao u prethodnom zadatku. Imamo da je DFJ : $y' - y\varphi'(x) = 0$.

13. Metodom razdvajanja promenljivih rešiti DFJ $y'\sqrt{x} + y = a$; pritom $a \in R$.

Rešenje. Iz date jednačine nalazimo $\dfrac{dy}{a-y} = \dfrac{dx}{\sqrt{x}}$, odakle je $y = a + Ce^{-2\sqrt{x}}$.

14. Metodom razdvajanja promenljivih rešiti DFJ $xy' = y(1+x\cos x)$.

Rešenje. $y = Cxe^{\sin x}$.

15. Rešiti DFJ $xy'\ln x - y\ln y = 0$.

Rešenje. Postupak je sledeći: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y\ln y}{x\ln x}$; $\dfrac{dy}{y\ln y} = \dfrac{dx}{x\ln x}$,

$\ln(\ln y) = \ln(\ln x) + \ln C$, $\ln y = C\ln x$;

$y = x^C$, (C - integraciona konstanta).

16. Rešiti DFJ $(1+x^2)y' = 1 + y^2$.

Rešenje. Iz jednačine je $\dfrac{dy}{1+y^2} = \dfrac{dx}{1+x^2}$ ili

$\mathrm{arctg}\, y = \mathrm{arctg}\, x + C$, odakle je $y = (\mathrm{tg}\; \mathrm{arctg}\, x + C)$, te je opšte rešenje $y = \dfrac{x + C_1}{1 - C_1 x}$, $C_1 = \mathrm{tg}\, c$ (integraciona konst).

17. Naći ono rešenje DFJ $yy' = 2x$ koje prolazi kroz tačku $M(1,1)$.

Rešenje. Razdvajanjem promenljivih nalazimo opšte rešenje: $ydy = 2xdx$; $y^2 = 2x^2 + C$. Kako $y(1) = 1$, to je $C = -1$ te partikularno rešenje glasi $y^2 = 2x^2 - 1$.

18. Data je DFJ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{ax + 5}{(x-2)^2(x-1)^3}$ gde je a parametar. Integralne krive ove DFJ čine familiju sa dva parametra: a i C, gde je C integraciona konstanta. Odrediti onu od integralnih krivih koja je algebarska i ima za asimptotu pravu $y = 0$.

Rešenje. $y = \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

19. Rešiti DFJ $x(1-x^2)y' + \left[(1+a)x^2 - a\right] y = 0$ gde je $a \in R$.

Rešenje. Kako je $\dfrac{dy}{y} = -\dfrac{(1+a)x^2-a}{x(1-x^2)}dx$, to je

$\ln y = \ln C - \int \dfrac{(1-a)x^2 - a}{x(1-x^2)}dx$, odnosno $y = C x^a \sqrt{x^2 - 1}$.

20. Naći partikularno rešenje DFJ $3y'(x^2-1) - 2xy = 0$ za početne uslove $y(3) = 2$.

Rešenje. Opšte rešenje dobija se sledećim postupkom:

$\dfrac{3dy}{y} = \dfrac{2x}{x^2-1}dx$; $3\ln y = \ln(x^2-1) + \ln C$; $y^3 = C(x^2 - 1)$.

Za uslov $y(3) = 2$ imamo da je $2^3 = C(3^2 - 1)$, te je $C = 1$ i partikularno re[illegible]ie glasi $y^3 = x^2 - 1$.

21. Koja funkcija ima osobinu, da je $\forall x \in R : y' = y$?

Rešenje. $y = f(x) = C\,e^{x}$, C – integraciona konst.

22. Rešiti sledeće DFJ:

a/ $\dfrac{x}{y} = \dfrac{y'}{x+1}$; b/ $7x + xy + y'(y + xy) = 0$;

c/ $xy' - y\ln y = 0$; d/ $2yx^2y' = 1 + x^2$.

Rešenje. a/ $y^2 = \frac{2}{3}x^3 + x^2 + C$; ...

23. Naći opšti i partikularni integral sledećih DFJ kod kojih su dati početni uslovi :

a/ $2\sqrt{x}dy = ydx$, za $y(4) = 1$.

b/ $xydx + \sqrt{1 - x^2}dy = 0$, za $y(0) = 1$.

c/ $e^{y}(y' + 1) = 1$, za $y(\pi/2) = \ln 2$.

d/ $y'\,\mathrm{snix} = y\ln y$, za $y(\pi/2) = 1$.

Rešenje. Na primer c/ Opšti integral dobija se na sledeći način:

$$y' = \frac{1 - e^{y}}{e^{y}} \quad ; \quad \frac{e^{y}dy}{1-e^{y}} = dx$$

$$\ln C - \ln(1-e^{y}) = x , \qquad y = \ln(1 - Ce^{-x}).$$

Partikularni integral glasi $y = \ln\left(1 - e^{\frac{\pi}{2} - x}\right)$.

24. Odrediti funkciju $y = y(x)$ koja zadovoljava uslove

$(x - y)y' = y$; $y(1) = -1$.

Rešenje. Kako se data jednačina može napisati i u obliku

$\left(1 - \frac{y}{x}\right) y' = \frac{y}{x}$, to smenom $y = xu(x)$ ona postaje

$$\frac{(1-u)}{u^2}\,du = \frac{dx}{x} \text{ , odnosno } u = \frac{1}{cx}\,e^{-1/u} .$$

Odavde je opšte rešenje date DFJ $y = \frac{1}{C}\,e^{-x/y}$.

Iz datog uslova nalazimo da je $C = -e$ te tražena funkcija ima oblik $y = -e^{-\frac{x+y}{y}}$.

25. Rešiti sledeće homogene DFJ :

a/ $y' = \dfrac{2xy}{x^2-y^2}$; b/ $y' = \dfrac{y^3 - 3x^2y}{x^3 - 3xy^2}$

c/ $xy'^2 - 2yy' + x = 0$

Rešenje. a/ $x^2 + y^2 - Cy = 0$ i $y = 0$;
b/ $xy^3 - x^3y = C$; c/ $2Cy = x^2 + C^2$ i $y = \pm x$.

26. Rešiti sledeću DFJ: $x + y + (y-x)y' = 0$.

Rešenje. Kako je data DFJ homogenog oblika $y' = \dfrac{1 + y/x}{1 - y/x}$, to smenom $y = xu\ x$ ona postaje $xu' = \dfrac{1 + u^2}{1 - u}$. Odavde je $\mathrm{arctg}\,u = \ln Cx\sqrt{1+u^2}$, te je opšte rešenje $y = x\,\mathrm{tg}\left(\ln C\sqrt{x^2+y^2}\right)$.

27. Rešiti homogene DFJ

a/ $xyy' = \sqrt{x^4 - y^4}$; b/ $y' = \dfrac{x^2 + y^2}{xy}$;

c/ $xy' = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Rešenje. Na primer b/ Smenom $y = xu(x)$ jednačina se svodi na DFJ, koja razdvaja promenljive $xu' = \frac{1}{u}$, te je $u^2 = 2\ln CX$, odnosno $y^2 = 2x^2\ln Cx$.

28. Proveriti opšte integrale sledećih homogenih DFJ

a/ $xy' - y - \sqrt{x^2+y^2} = 0$; $2Cy = x^2 - C^2$

b/ $xyy'-y^2 = (x+y)^2e^{-y/x}$; $(x+y)\ln Cx = xe^{y/x}$.

c/ $x - y\cos\frac{y}{x} + xy'\cos\frac{y}{x} = 0$; $\sin\frac{y}{x} = \ln\frac{C}{x}$.

d/ $1 + e^{x/y} + e^{x/y}\left(1 - \frac{x}{y}\right)y' = 0$; $x + ye^{x/y} = C$.

e/ $x(y-x)y' - y^2 = 0$; $y = C\exp\left(\frac{y}{x}\right)$.

f/ $xy' = y\left(1+\ln y - \ln x\right)$; $y = x\exp(Cx)$.

29. Rešiti sledeću homogenu DFJ $y' = \dfrac{2x + 3y + 1}{3x + 4y + 1}$.

Rešenje. Za smenu $x = X + \alpha$ i $y = Y + \beta$ imamo da je

$$\frac{dY}{dX} = -\frac{2X + 3Y + 2\alpha + 3\beta + 1}{3X + 4Y + 3\alpha + 4\beta + 1} .$$

Da bi ova DFJ bila homogena, potrebno je i dovoljno da je $2\alpha + 3\beta + 1 = 0$; $3\alpha + 4\beta + 1 = 0$, odakle imamo da je $\alpha = 1$ i $\beta = -1$. Poslednja DFJ postaje

$\dfrac{dY}{dx} = -\dfrac{2X + 3Y}{3X + 4Y}$. Ako se stavi $u = Y/X$, biće $Y' = u + Xu'$, te je

$Xu' = -2\,\dfrac{1+3u+2u^2}{3+4u}$. Odavde je $1 + 3u + 2u^2 = C/X^2$. Ako se vratimo na stare promenljive $Y/X = u$; $x = X + 1$; $y = Y - 1$, imamo da je $X^2 + 3XY + 2Y^2 = C$, odnosno

$(x-1)^2 + 3(x-1)(y+1) + 2(y+1)^2 = C$, tj. $x^3 + 3xy + 2y^2 - x + y = C$.

30. Odrediti opšte rešenje DFJ: $3y - 7x + 7 = (3x - 7y - 3)y'$.

<u>Rešenje</u>. Postupiti kao u prethodnom zadatku. Ovde je $\alpha = 1$ i $\beta = 0$, a opšti integral $(y-x+1)^2(y+x-1)^5 = \text{const.}$

31. Rešiti DFJ: $(2x + 4y + 3)y' = x + 2y + 1$.

<u>Rešenje</u>. Kako su ovde odgovarajući koeficijenti proporcionalni $2 : 1 = 4 : 2$, to za smenu sve jednačine uvodimo $u = x + 2y$, te ona postaje

$u' = \dfrac{4u + 5}{2u + 3}$, $(u' = 1 + 2y')$. Odavde je

$\frac{1}{2}u + \frac{1}{8}\ln|4u + 5| = x + c$, tj. $4x + 8y + 5 = Ke^{4x-8y}$,

gde je K integraciona konstanta.

32. Dokazati da DFJ $(x + 2y + 1)y' = 2x + 4y + 3$ ima za opšti integral

$e^{10y - 20x} = C\,(5x + 10a + 7)^2$, gde je C integraciona konstanta.

33. Dokazati da DFJ $\dfrac{dy}{dx} = \left(\dfrac{x - y - 1}{2x - 2y + 1}\right)^2$ ima za opšti integral $8y - 2x - \ln(x-y) + 9\ln(x-y+2) = C$.

34. Pod kojim uslovom Bernulijeva DFJ $y' + f(x)y + \varphi(x)y^s = 0$ postaje linearna DFJ i DFJ koja razdvaja promenljive?

<u>Rešenje</u>. $s = 0$, DFJ je linearna ;
$s = 1$, DFJ razdvaja promenljive.

35. Primenom obrasca rešiti sledeću linearnu DFJ

$xy' - y + \ln x = 0$.

<u>Rešenje</u>. Za jednačinu $y' - \frac{1}{x}y + \frac{\ln x}{x} = 0$ imamo direktno da je opšti integral $y = e^{\int\frac{dx}{x}}\left(C - \int\frac{\ln x}{x}\,e^{-\int\frac{dx}{x}}dx\right)$,

odnosno $y = 1 + cx + \ln x$.

36. Pokazati da DFJ $y' + y\cos x - \sin x\cos x = 0$ ima opšti integral $y = Ce^{-\sin x} + \sin x - 1$.

37. Proveriti opšte integrale sledećih DFJ:

a/ $y' - \dfrac{y}{\sin x} - \cos x + 1 = 0$;	$y = \sin x + C\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.
b/ $(1-x^2)y' + 2xy - 4x = 0$;	$y = 2 + C(1-x^2)$.
c/ $y - (x + y^3e^y)y' = 0$;	$x = y(y-1)e^y + Cy$.
d/ $y' + y\operatorname{tg}x - \sin 2x = 0$;	$y = C\cos x - 2\cos^2 x$.

<u>L i t e r a t u r a</u>

[1]	M.P.Ušćumlić – P.M. Miličić	Zbirka zadataka iz više matematike I, Beograd, 1963
[2]	T. Pejović	Diferencijalne jednačine, Beograd, 1962
[3]	D.S.Mitrinović	Matematika II u obliku metodičke zbirke zadataka sa rešenjima, Beograd, 1967.

Zoran ŠAMI

LINEARNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE VIŠEG REDA

Jednačina $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+\dots+a_{n-1}(x)y'+$

$$+ a_n(x)y = f(x) \qquad (1)$$

jeste linearna diferencijalna jednačina n-tog reda. Jednačinu(1) zovemo homogenom ako je $f(x) = 0$ a nehomogenom ako je $f(x)\neq 0$.

Opšte rešenje jednačine (1) dato je sa

$$Y = y + y_o, \qquad (2)$$

gde je y opšte rešenje pripadne homogene jednačine

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+a_2(x)y^{(n-2)}+\dots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0, \qquad (3)$$

a y_o partikularno rešenje jednačine 1 .

Opšte rešenje homogene jednačine (3) dato je sa

$$y = C_1y_1+C_2y_2+\dots+C_ny_n, \qquad (4)$$

gde su y_i, $i=1,2,\dots n$, partikularna linearno nezavisna rešenja jednačine (3), a C_i, $i=1,2,\dots n$, proizvoljne konstante.

Nehomogenu jednačinu (1) možemo uvek rešiti ako znamo da rešimo pripadnu homogenu jednačinu (3). Ovu, opet, u opštem slučaju ne možemo da rešimo.

Ako su u jednačini (3) (ili (1) koeficijenti $ai(x)$, $i=1,2,\dots n$ konstante, takvu jednačinu zovemo linearnom homogenom (ili nehomogenom) diferencijalnom jednačinom sa konstantnim koeficijentima.

Neka je $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+a_2y^{(n-2)}+\dots+a_ny^{(n)}=0$ (5)

linearna diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima. Jednačini (5) pridružimo algebarsku jednačinu

$$\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}+\dots+a_n=0, \qquad (6)$$

tzv. karakterističnu jednačinu jednačine (5). Zavisno od toga kakvi su koreni jednačine (6), razlikujemo više slučajeva.

1° Svi koreni $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ jednačine (6) su realni i medjusobno različiti. Tada su

$$y_1=e^{\lambda_1 x};\ y_2=e^{\lambda_2 x},\ \dots\ y_n=e^{\lambda_n x} \qquad (7)$$

n linearno nezavisnih partikularnih rešenja diferencijalne jednačine (5). Samim tim imamo prema (4) i opšte rešenje diferencijalne jednačine (5).

2° Svi koreni jednačine (6) različiti su, ali medju njima ima i kompleksnih. Realnim korenima odgovaraju rešenja kao u (7). Ako je $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$ par konjugovano kompleksnih korena jednačine (6), tada su

$$y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x; \qquad y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x \qquad (8)$$

partikularna rešenja diferencijalne jednačine (5).

3° Jednačina (6) ima i višestrukih korena. Ako je λ_1 realni k-tostruki koren jednačine (6), tada su

$$y_1=e^{\lambda_1 x};\quad y_2=xe^{\lambda_1 x};\quad y_3=x^2e^{\lambda_1 x},\dots y_k=x^{k-1}e^{\lambda_1 x} \qquad (9)$$

k partikularnih rešenja diferencijalne jednačine (5). Takodje, ako je $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$ par k-tostrukih konjugovano kompleksnih korena jednačine (6), tada su

$$y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x;\quad y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x;\quad y_3=xe^{\alpha x}\cos\beta x;$$
$$y_4=xe^{\alpha x}\sin\beta x,\dots\quad y_{2k-1}=x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x;$$
$$y_{2k}=x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x \qquad (10)$$

2k partikularnih rešenja diferencijalne jednačine (5).

U specijalnom slučaju za n=2, tj. u slučaju diferencijalne jednačine

$$y''+a_1y'+a_2y=0 \qquad (11)$$

pripadna karakteristična jednačina glasi

$$\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0. \qquad (12)$$

Tada za $\lambda_{1,2}\in R$, $\lambda_1\neq\lambda_2$, partikularna rešenja su $y_1=e^{\lambda_1 x}$; $y_2=e^{\lambda_2 x}$; za $\lambda_1=\lambda_2\in R$, partikularna rešenja su $y_1=e^{\lambda_1 x}$; $y_2=xe^{\lambda_1 x}$; za $\lambda_{1,2}=\alpha\pm i\beta$, partikularna rešenja su $y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x$; $y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Opšte rešenje dobijamo prema (4) sa

$$y=C_1y_1+C_2y_2 \qquad (13)$$

Za nehomogenu jednačinu sa konstantnim koeficijentima

$$y''+a_1y'+a_2y=f(x) \qquad (14)$$

treba prema (2) odrediti partikularno rešenje y_0 da bi pomoću njega našli opšte. To je moguće ako je funkcija f(x) specijalnog oblika.

1° Ako je $f(x)=P(x)e^{\alpha x}$ (P(x)-polinom) i α nije koren pripadne karakteristične jednačine, tada je

$$y_0=e^{\alpha x}Q(x), \qquad (15)$$

gde je Q(x) polinom istog stepena kao i P(x) i čije koeficijente odredjujemo iz uslova da y_0 bude rešenje jednačine (14).

2° Ako je $f(x)=P(x)e^{\alpha x}$ i α jeste k-tostruki koren karakteristične jednačine, tada je

$$y_0=x^ke^{\alpha x}Q(x). \qquad (16)$$

3° Ako je $f(x)=e^{\alpha x}\left[A(x)\cdot\cos\beta x+B(x)\sin\beta x\right]$, gde je m, stepen bar jednog od polinoma A(x) i B(x) jednak m, a $\alpha\pm i\beta$ nisu koreni karakteristične jednačine, tada je

$$y_0=e^{\alpha x}\left[\bar{A}(x)\cos\beta x+\bar{B}(x)\sin\beta x\right], \qquad (17)$$

gde su A(x) i B(x) polinomi stepena ne većeg od m.

4° Ako je $f(x)=e^{\alpha x}\left[A(x)\cos\beta x+B(x)\sin\beta x\right]$, gde je stepen bar jednog od polinoma A(x) i B(x) jednak m, a $\alpha\pm i\beta$ jeste k-tostruki koren karakteristične jednačine, tada je

$$y_0=x^ke^{\alpha x}\left[\bar{A}(x)\cos\beta x+\bar{B}(x)\sin\beta x\right], \qquad (18)$$

gde su $\bar{A}(x)$ i $\bar{B}(x)$ polinomi stepena ne većeg od m.

Jednačinu (14) možemo rešiti metodom varijacije konstanata, bez obzira na oblik funkcije $f(x)$, čak nije važno da li su koeficijenti a_1 i a_2 konstante, ukoliko poznajemo dva linearno nezavisna, partikularna rešenja y_1 i y_2 pripadne homogene jednačine. Opšte rešenje jednačine (14) je

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2. \tag{19}$$

Rešenjem sistema

$$\begin{aligned} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 &= 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' &= f(x) \end{aligned} \tag{20}$$

dobija se

$$C_1'(x) = D_1(x); \qquad C_2'(x) = D_2(x) \tag{21}$$

pa se integraljenjem

$$C_1(x) = \int D_1(x)dx; \qquad C_2(x) = \int D_2(x)dx \tag{22}$$

odredjuju funkcije $C_1(x)$ i $C_2(x)$, koje se zamenjuju u (19).

Ako je y_1 partikularno rešenje diferencijalne jednačine

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \tag{23}$$

tada je

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2}\, dx \tag{24}$$

takodje partikularno rešenje jednačine (23), i pri tom su y_1 i y_2 linearno nezavisna rešenja.

3.1. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y'' - 5y' + 4y = 0$.

Rešenje. Karakteristična jednačina date homogene linearne diferencijalne jednačine jeste

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0. \tag{1}$$

Iz (1) sledi $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 4$, pa su

$$y_1 = e^x; \quad y_2 = e^{4x} \tag{2}$$

dva partikularna linearno nezavisna rešenja date diferencijalne jednačine. Iz (2) dobijamo traženo opšte rešenje

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{4x}.$$

3.2. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y'' - y' - 2y = 0.$$

Rešenje. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$.

3.3. Data je diferencijalna jednačina $y''' + y'' - 17y' + 15y = 0$.

1° Naći opšti integral date jednačine.

2° Odrediti ono partikularno (posebno) rešenje, koje zadovoljava početne uslove: $y = y' = y'' = 1$ za $x = 0$.

Rešenje.

1° Imamo: $\lambda^3 + \lambda^2 - 17\lambda + 15 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda^2 + 2\lambda - 15) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \lambda_1 = 1;\ \lambda_2 = 3;\ \lambda_3 = -5 \Rightarrow y_1 = e^x;\ y_2 = e^{3x};\ y_3 = e^{-5x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + C_3 e^{-5x}. \tag{1}$$

2° Diferenciranjem jednakosti (1) dobijamo

$$y' = C_1 e^x + 3C_2 e^{3x} - 5C_3 e^{-5x} \tag{2}$$

$$y'' = C_1 e^x + 9C_2 e^{3x} + 25C_3 e^{-5x}. \tag{3}$$

Iz (1), (2) i (3), uzimajući u obzir date početne uslove, dobijamo

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 + C_3 &= 1; \\ C_1 + 3C_2 - 5C_3 &= 1, \\ C_1 + 9C_2 + 25C_3 &= 1. \end{aligned} \tag{4}$$

Rešenjem sistema jednačina 4 izlazi $C_1 = 1$; $C_2 = C_3 = 0$, pa je traženo partikularno rešenje $y = e^x$.

3.4. Data je diferencijalna jednačina

$$y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0.$$

1° Naći opšte rešenje date jednačine.

2° Odrediti partikularno rešenje koje zadovoljava početne uslove: $y = 1$; $y' = -3$; $y'' = 9$ za $x = 0$.

Rezultat. 1° $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{-3x}$;

2° $y = e^{-3x}$.

3.5. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y^{IV} - 13y'' + 36y = 0$.

Uputstvo. Pripadna karakteristična jednačina rešava se smenom $\lambda^2 = t$. Rezultat je:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{3x} + C_4 e^{-3x}.$$

3.6. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Rešenje. Imamo $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 2$.

Kako je $\lambda = 1$ dvostruko rešenje karakteristične jednačine, to su

$$y_1 = e^{2x}; \quad y_2 = x e^{2x}$$

dva partikularna, linearna nezavisna rešenja date diferencijalne jednačine, pa je

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} = (C_1 + C_2 x) e^{2x}$$

traženo opšte rešenje.

3.7. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y'' + 6y' + 9y = 0.$$

Rezultat. $y = (C_1 + C_2 x)\, e^{-3x}$.

3.8. Odrediti jednačinu krive $y = y(x)$ koja zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$$

prolazi kroz tačke $(0,0)$ i $(1, e^2)$ i u tački, čija je apscisa $x = 0$, ima tangentu čiji je koeficijent smera $k = 1$.

Rešenje. Nadjimo prvo skup svih krivih koje zadovoljavaju datu diferencijalnu jednačinu. Drugim rečima, nadjimo opšte rešenje date jednačine. Imamo:

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = 0 \Rightarrow (\lambda - 2)^3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_1 = e^{2x}; \quad y_2 = x e^{2x}; \quad y_3 = x^2 e^{2x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) e^{2x}. \qquad (1)$$

Kako tražena kriva prolazi kroz tačke $(0,0)$ i $(1, e^2)$, to njena jednačina mora biti zadovoljena za $x = 0$; $y = 0$ i $x = 1$; $y = e^2$, pa iz (1) dobijamo

$$C_1 = 0, \qquad (2)$$

$$C_1 + C_2 + C_3 = 1. \qquad (3)$$

Koeficijent smera tangente na krivu $y = y(x)$ u tački čija je apscisa x_1 jeste y', pa iz uslova zadatka sledi: $y'(0) = 1$.

Dobijamo $y' = \left[2C_1 + C_2 + 2(C_2 + C_3)x + 2C_3 x^2\right] e^{2x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 1 = y'(0) = 2C_1 + C_2. \qquad (4)$$

Rešavanjem sistema jednačina (2), (3) i (4) dobijamo

$$C_1 = C_3 = 0; \quad C_2 = 1 \Rightarrow y = x e^{2x}.$$

3.9. Data je diferencijalna jednačina $y''' - 3y' + 2y = 0$.

1° Naći opšte rešenje date jednačine.

2° Odrediti partikularno rešenje koje zadovoljava početne uslove: $y = y' = y'' = 1$ za $x = 0$.

Rezultat. 1° $y = (C_1 + C_2 x) e^{x} + C_3 e^{-2x}$;

2° $y = e^{x}$.

3.10. Naći opšti integral diferencijalne jednačine

$$y^{IV} - 4y''' + 3y'' + 4y' - 4y = 0.$$

Rešenje. Imamo

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda^2 - 4\lambda + 4) - (\lambda^2 - 4 + 4) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\lambda^2 - 1)(\lambda - 2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1; \ \lambda_2 = -1; \ \lambda_3 = \lambda_4 = 2.$$

Kako su $\lambda = 1$ i $\lambda = -1$ jednostruka, a $\lambda = 2$ dvostruko rešenje karakteristične jednačine, to su

$$y_1 = e^{x}; \quad y_2 = e^{-x}; \quad y_3 = e^{2x}; \quad y_4 = x e^{2x}$$

četiri partikularna linearno nezavisna rešenja date linearne diferencijalne jednačine, pa je

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + (C_3 + C_4 x) e^{2x}$$

traženi opšti integral date jednačine.

3.11. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y^{IV} - 8y'' + 16y = 0.$$

Rezultat. $y = (C_1 + C_2 x) e^{2x} + (C_3 + C_4 x) e^{-2x}$.

3.12. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y'' + 2y' + 2y = 0$.

Rešenje. Imamo $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1 + i;\ \lambda_2 = -1 - i \Rightarrow$

$\Rightarrow y_1 = e^{-x}\cos x;\ y_2 = e^{-x}\sin x \Rightarrow$

$\Rightarrow y = C_1 e^{-x}\cos x + C_2 e^{-x}\sin x = (C_1\cos x + C_2\sin x) e^{-x}$.

3.13. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y'' + 4y = 0$.

Rezultat. $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$.

3.14. Odrediti partikularno rešenje diferencijalne jednačine $y''' + 8y = 0$, koje zadovoljava početne uslove: $y = 0$; $y' = \sqrt{3}$; $y'' = 2\sqrt{3}$ za $x = 0$.

Rešenje. Nadjimo prvo opšte rešenje date jednačine. Imamo $\lambda^3 + 8 = 0 \Rightarrow (\lambda + 2)(\lambda^2 - 2\lambda + 4) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2;\ \lambda_2 = 1 + i\sqrt{3};$

$\lambda_3 = 1 - i\sqrt{3} \Rightarrow y_1 = e^{-2x};\ y_2 = e^{x}\cos(\sqrt{3}x);\ y_3 = e^{x}\sin(\sqrt{3}x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow y = C_1 e^{-2x} + \left[C_2\cos(\sqrt{3}x) + C_3\sin(\sqrt{3}x)\right] e^{x}. \qquad (1)$$

Diferenciranjem jednakosti (1) dobijamo

$$y' = -2C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x}\left[\cos(\sqrt{3}x) - \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}x)\right] + C_3 e^{x}\left[\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}x) + \sin(\sqrt{3}x)\right]; \qquad (2)$$

$$y'' = 4C_1 e^{-2x} 2C_2 e^{x}\left[\cos(\sqrt{3}x) + \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}x)\right] + 2C_3 e^{x}\left[\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}x) - \sin(\sqrt{3}x)\right]. \qquad (3)$$

Iz (1), (2) i (3), uzimajući u obzir date početne vrednosti,

imamo

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 0, \\ -2C_1 + C_2 + \sqrt{3}C_3 &= \sqrt{3}, \\ 4C_1 - 2C_2 + 2\sqrt{3}C_3 &= 2\sqrt{3}. \end{aligned} \qquad (6)$$

Rešavanjem sistema (6) dobijamo $C_1 = C_2 = 0$; $C_3 = 1$.

Stavljajući dobijene vrednosti za C_1, C_2, C_3 u (1), dobijamo traženo rešenje

$$y = e^{x}\sin(\sqrt{3}x).$$

3.15. Data je diferencijalna jednačina $y''' + y'' + y' + y = 0$.

1° Odrediti opšte rešenje date jednačine.

2° Naći partikularno rešenje koje zadovoljava početne uslove: $y = y'' = 0$; $y' = 1$ za $x = 0$.

Rezultat. 1° $y = C_1 e^{-x} + C_2\cos x + C_3\sin x$; 2° $y = \sin x$.

3.16. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y^{IV} + 10y'' + 9y = 0$.

Rezultat. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + C_3\cos 3x + C_4\sin 3x$.

3.17. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y'' - y = x^2 - x + 1$.

Rešenje. Imamo $y'' - y = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0$ $\lambda_{1,2} = \pm 1 \Rightarrow y_1 = e^{x}$,

$y_2 = e^{-x} \Rightarrow y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$.

Partikularno rešenje date diferencijalne jednačine tražićemo u obliku: $y_o = P_m(x) e^{\alpha x}$. Kako je u našem slučaju: $\alpha = 0$ (i pritom α nije koren karakteristične jednačine), $m = 2$, to dobijamo

$y_o = ax^2 + bx + c \Rightarrow y_o' = 2ax + b \Rightarrow y_o'' = 2a \Rightarrow$

$\Rightarrow 2a - (ax^2 + bx + c) = x^2 - x + 1 \Rightarrow -ax^2 - bx + (2a - c) =$

$= x^2 - x + 1 \Rightarrow -a = 1,\ -b = -1,\ 2a - c = 1 \Rightarrow a = -1,\ b = 1,$

$C = -1 \Rightarrow y_o = -x^2 + x - 3$.

Traženo opšte rešenje date linearno nehomogene jednačine jeste zbir opšteg rešenja pripadne linearne homogene jednačine i partikularnog rešenja nehomogene jednačine, tj.

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + (-x^2 + x - 3).$$

3.18. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y''+5y'+6y = 3.$$

Rezultat.

$$y = \frac{1}{2} + C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x}.$$

3.19. Naći posebno rešenje diferencijalne jednačine $y''-y = x$, koje zadovoljava početne uslove: $y = 1$; $y' = -1$ za $x = 0$.

Rezultat. $y = -x + \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})$.

3.20. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y''-2y'+y = 4e^{x}$.

Rešenje. Imamo $y''-2y'+y = 0 \Rightarrow \lambda^2-2\lambda+1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow y_1 = e^{x}$; $y_2 = xe^{x} \Rightarrow y = C_1 e^{x} + C_2 x e^{x}$.

Slobodni član, $4e^{x}$ date nehomogene linearne diferencijalne jednačine je oblika: $P_m(x)e^{\alpha x}$, gde je $m = 0$; $\alpha = 1$ a α je koren (dvostruki) karakteristične jednačine. Dakle, partikularno rešenje date jednačine tražićemo u obliku: $y_0 = x^2 \cdot a e^{x}$. Dobijamo

$y_0 = ax^2 e^{x} \Rightarrow y' = a e^{x}(2x+x^2) \Rightarrow y'' = ae^{x}(2+4x+x^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow ae^{x}(2+4x+x^2) - 2ae^{x}(2x+x^2) + ax^2e^{x} = 4e^{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow y_0 = 2x^2e^{x}$.

Konačno, traženo opšte rešenje je

$y = C_1e^{x} + C_2xe^{x} + 2x^2e^{x} = (C_1+C_2x+2x^2)e^{x}$.

3.21. Odrediti opšti integral diferencijalne jednačine

$$y'' - y = 4e^{x}.$$

Uputstvo. Partikularno rešenje tražiti u obliku: $y_0 = axe^{x}$. Rezultat je: $y = 2xe^{x} + C_1e^{x} + C_2e^{-x}$.

3.22. Naći partikularno rešenje diferencijalne jednačine $y'' + 4y' + 4y = 3e^{-2x}$ koje zadovoljava početne uslove: $y = y' = 0$ za $x = 0$.

Rezultat. $y = \frac{3}{2}x^2e^{-2x}$.

3.23. Rešiti diferencijalnu jednačinu: $y'' - y = e^{x}x\sin x$.

Rešenje. Imamo $y''-y = 0 \Rightarrow \lambda^2-1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow y_1 = e^{x}$; $y_2 = e^{-x} \Rightarrow y = C_1e^{x} + C_2e^{-x}$.

Slobodni član $xe^{x}\sin x$, date diferencijalne jednačine je oblika: $A_m(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + B_m(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$, gde je $A_m(x) = 0$; $m = 1$; $\alpha = \beta = 1$, a $\alpha \pm i\beta$ nisu koreni karakteristične jednačine. Dakle, partikularno rešenje date jednačine tražimo u obliku: $y_0 = \left[(ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x\right]e^{x}$. Dobijamo $y_0 = \left[(ax+b)\cos x+(cx+d)\sin x\right]e^{x} \Rightarrow y_0' = (ax+cx+a+b+d)\cos x + \left.+(-ax+cx+c+d-b)\sin x\right]e^{x} \Rightarrow y_0'' = \left[2(cx+a+c+d)\cos x + \right.$ $\left.+ 2(-a-b+c-ax)\sin x\right]e^{x} \Rightarrow \left[2(cx+a+c+d)\cos x+2(-ax-a-b+c)\sin x\right]e^{x} -$ $-\left[(ax+b)\cos x+(cx+d)\sin x\right]e^{x} = e^{x}x\sin x \Rightarrow \left[(2c-a)x+2a-b+2c+2d\right]$ $\cos x + \left[(-2a-c)x-2a-2b+2c-d\right]\sin x = x\sin x \Rightarrow 2c-a=0$; $2a-b+2c+2d = 0$; $-2a-c = 1$; $-2a-2b+2c-d = 0 \Rightarrow a = -\frac{2}{5}$; $b = -\frac{2}{25}$; $c = -\frac{1}{5}$; $d = \frac{14}{25} \Rightarrow y_0 = -\frac{1}{25}\left[(10x+2)\cos x + \right.$ $\left.+(5x-14)\sin x\right]e^{x}$. Konačno, traženo opšte rešenje date diferencijalne jednačine je

$$y = C_1e^{x}+C_2e^{-x} - \frac{1}{25}\left[2(5x+1)\cos x+(5x-14)\sin x\right]e^{x}.$$

3.24. Naći opšti integral diferencijalne jednačine

$$y'' - y' + y = -13\sin 2x.$$

Rezultat. $y = 3\sin 2x - 2\cos 2x + e^{\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

3.25. Rešiti diferencijalnu jednačinu: $y''-y = 2\sin x - 4\cos x$.

Uputstvo. Partikularno rešenje date diferencijalne jednačine treba tražiti u obliku: $y_0 = a\cos x + b\sin x$. Rezultat je: $y = -\sin x + 2\cos x + C_1e^{x} + C_2e^{-x}$.

3.26. Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$y'' - 4y = e^{x}\left[(-4x+4)\cos x - (2x+6)\sin x\right].$$

Uputstvo. Partikularno rešenje date diferencijalne jednačine treba tražiti u obliku: $y_0 = e^{x}\left[(ax+b)\cos x + (cx+d)\sin x\right]$. Rezultat je: $y = e^{x}(x\cos x + \sin x) + C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$.

3.27. Data je diferencijalna jednačina $y''+y = x\cos x$.

1° Naći opšte rešenje date jednačine.

2° Odrediti ono partikularno rešenje, koje zadovoljava početne uslove: $y=0$; $y'=\frac{1}{6}$ za $x=0$.

Rešenje. 1° Imamo $y''+y=0 \Rightarrow \lambda^2+1=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=\pm i \Rightarrow$

$\Rightarrow y_1=\cos x$; $y_2=\sin x \Rightarrow y=C_1\cos x+C_2\sin x$.

Slobodni član, $x\cos x$, date jednačine je oblika:

$A_m(x)e^{\alpha x}\cos x + B_m(x)e^{\alpha x}\sin x$, gde je $B_m(x)=0$; $m=1$; $\alpha=0$;

a $\alpha\pm i$ jesu koreni karakteristične jednačine. Dakle, partikularno rešenje date jednačine tražićemo u obliku:

$y_0=x[(ax+b)\cos x+(cx+d)\sin x]$. Dobijamo

$$y_0=x[(ax+b)\cos x+(cx+d)\sin x] \Rightarrow y_0'=[cx^2+(2a+d)x+b]\cos x +$$
$$+[-ax^2+(-b+c)x+d]\sin x \Rightarrow y_0''=[-ax^2+(3c-b)x+2a+2d]\cos x +$$
$$+[-cx^2-(4a+d)x-2b+c]\sin x \Rightarrow [-ax^2+(3c-b)x+2a+2d]\cos x +$$
$$+[-cx^2-(4a+d)x-2b+c]\sin x+(ax^2+bx)\cos x+(cx^2+dx)\sin x =$$
$$= x\cos x \Rightarrow (3cx+2a+2d)\cos x+(-4ax-2b+c)\sin x = x\cos x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3x=1;\ 2a+2d=0;\ -4a=0;\ -2b+c=0 \Rightarrow a=0;\ b=\frac{1}{6};$$
$$c=\frac{1}{3};\ d=0 \Rightarrow y_0=\frac{x}{6}(\cos x+2x\sin x).$$

Konačno, opšte rešenje date jednačine je

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{x}{6}(\cos x+2x\sin x). \qquad (1)$$

2° Iz (1) sledi $y'=-C_1\sin x+C_2\cos x+\frac{1}{6}(\cos x+2x\sin x)+$

$$+\frac{x}{6}(-\sin x+2\sin x+2x\cos x) \qquad 2$$

Uzimajući u obzir početne uslove, (1) i (2) dobijamo

$$C_1=0,\quad C_2=0 \Rightarrow y=\frac{x}{6}(\cos x+2x\sin x).$$

3.28. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y''+y=2\sin x+4x\cos x$$

Rezultat. $y=x^2\sin x+C_1\cos x+C_2\sin x$.

3.29. Odrediti jednačinu krive koja zadovoljava diferencijalnu jednačinu $y''+4y=\sin 2x$ i u tački $O(o,o)$ ima tangentu paralelnu x osi.

Uputstvo. Treba naći partikularno rešenje date diferencijalne jednačine, koje zadovoljava početne uslove: $y(o)=0$; $y'(o)=0$. Rezultat je: $y=-\frac{1}{4}x\cos 2x+\frac{1}{8}\sin 2x$.

3.30. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y''-2y'+2y=e^x x\sin x$.

Uputstvo. Partikularno rešenje date diferencijalne jednačine treba tražiti u obliku: $y_0=xe^x[(ax+b)\cos x+(cx+d)\sin x]$.
Rezultat je: $y=\frac{1}{4}xe^x(-x\cos x+\sin x)+e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)$.

3.31. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y''+y=\sin x$.

Uputstvo. Partikularno rešenje date diferencijalne jednačine treba tražiti u obliku: $y_0=x(a\cos x+b\sin x)$. Rezultat je: $y=-\frac{x}{2}\cos x+C_1\cos x+C_2\sin x$.

3.32. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y''+9y=2\cos 3x-5\sin 3x.$$

Uputstvo. Partikularno rešenje date diferencijalne jednačine treba tražiti u obliku: $y_0=x(a\cos 3x+b\sin 3x)$. Rezultat je: $y=\frac{x}{6}(5\cos 3x+2\sin 3x)+C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$.

3.33. Naći opšti integral diferencijalne jednačine $y''+4y=\frac{1}{\cos 2x}$.

Rešenje. Imamo $y''+4y=0 \Rightarrow \lambda^2+4=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=\pm 2i \Rightarrow$

$\Rightarrow y_1=\cos 2x$, $y_2=\sin 2x$.

Opšte rešenje date diferencijalne jednačine odredićemo metodom varijacije konstanata, tj. tražićemo ga u obliku

$$y=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2.$$

Imamo:
$$C_1'(x)\cos 2x+C_2'(x)\sin 2x=0,$$
$$-2C_1'(x)\sin 2x+2C_2'(x)\cos 2x=\frac{1}{\cos 2x}. \qquad (1)$$

Iz (1) sledi

$$C_1'(x)=-\frac{1}{2}\mathrm{tg}\,2x;\quad C_2'(x)=\frac{1}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C_1(x)=-\frac{1}{2}\int \mathrm{tg}\,2x\,dx=\frac{1}{4}\ln|\cos 2x|+D_1;$$
$$C_2(x)=\frac{1}{2}\int dx=\frac{x}{2}+D_2.$$

Dobijamo

$$y=\left(\frac{1}{4}\ln|\cos 2x|+D_1\right)\cos 2x+\left(\frac{x}{2}+D_2\right)\sin 2x =$$
$$=\frac{1}{4}\cos 2x\ln|\cos 2x|+\frac{1}{2}x\sin 2x+D_1\cos 2x+D_2\sin 2x.$$

3.34. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$y''-2y'+y = \frac{e^x}{x}.$$

Rezultat. $y = xe^x(\ln|x|-1) + e^x(D_1+D_2x)$.

3.35. Data je diferencijalna jednačina

$$y''-2y'+y = \frac{x^2+2x+2}{x^3}.$$

1° Naći opšte rešenje date jednačine.

2° Odrediti ono partikularno rešenje, koje zadovoljava početne uslove: $y(1)=1$, $y'(-1) = -1$.

Rešenje.

1° Imamo $y''-2y'+y=0 \Rightarrow \lambda^2-2\lambda+1=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow y_1 = e^x;\ y_2 = xe^e$.

Primenom metode varijacije konstanata dobijamo

$$\left.\begin{aligned} &C_1'(x)e^x + C_2'(x)xe^x = 0\\ &C_1'(x)e^x + C_2'(x)(x+1)e^x = \frac{x^2+2x+2}{x^3}\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1'(x) = -\frac{x^2+2x+2}{x^2}e^{-x};\quad C_2'(x) = \frac{x^2+2x+2}{x^3}e^{-x} \Rightarrow$$

$$= C_1(x) = -\int\frac{x^2+2x+2}{x^2}e^{-x}dx,\quad C_2(x) = \int\frac{x^2+2x+2}{x^3}e^{-x}dx.$$

Poslednja dva integrala odredićemo metodom parcijalne integracije. Imamo:

$$C_1(x) = -\int e^{-x}dx-2\int\frac{e^{-x}}{x}dx-2\int\frac{e^{-x}}{x^2}dx =$$

$$= e^{-x}+2\frac{e^{-x}}{x}+2\int\frac{e^{-x}}{x^2}dx-2\int\frac{e^{-x}}{x^2}dx+D_1=e^{-x}(1+\frac{2}{x})+D_1.$$

$$C_2(x) = \int\frac{e^{-x}}{x}dx+2\int\frac{e^{-x}}{x^2}dx+2\int\frac{e^{-x}}{x^3}dx =$$

$$= -\frac{e^{-x}}{x}-\int\frac{e^{-x}}{x^2}dx+2\int\frac{e^{-x}}{x^2}dx+2\int\frac{e^{-x}}{x^3}dx =$$

$$= -\frac{e^{-x}}{x}+\int\frac{e^{-x}}{x^2}dx+2\int\frac{e^{-x}}{x^3}dx = -\frac{e^{-x}}{x}-\frac{e^{-x}}{x^2}-2\int\frac{e^{-x}}{x^3}dx +$$

$$+2\int\frac{e^{-x}}{x^3}dx + D_2 = -\frac{e^{-x}}{x}(1+\frac{1}{x})+D_2.$$

Konačno dobijamo

$$y = \left[e^{-x}(1+\frac{2}{x})+D_1\right]e^x + \left[-\frac{e^{-x}}{x}(1+\frac{1}{x})+D_2\right]xe^x =$$

$$= 1+\frac{2}{x}+D_1e^x-1-\frac{1}{x}+D_2xe^x = \frac{1}{x}+e^x(D_1+D_2x).$$

2° Imamo: $y' = -\frac{1}{x^2}+e^x(D_1+D_2+D_2x)$,

$y(1) = 1 \Rightarrow 1 = 1+e(D_1+D_2) \Rightarrow D_1+D_2 = 0$,

$y'(-1) = -1 \Rightarrow -1 = -1+e^{-1}D_1 \Rightarrow D_1 = 0$.

Dobijamo: $D_1 = D_2 = 0$, pa je $y = \frac{1}{x}$ traženo partikularno rešenje.

3.36. Naći ono partikularno rešenje diferencijalne jednačine

$$y''-y = 4\sqrt{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}},$$

koje zadovoljava početne uslove: $y(0) = 0$, $y'(1) = -2$.

Rezultat. $y = -4\sqrt{x}$.

3.37. Odrediti ono partikularno rešenje diferencijalne jednačine

$y''+y = -\frac{1}{\sin 2x\sqrt{\sin 2x}}$, koje zadovoljava početne uslove:

$y(0) = 0;\ y''(\frac{\pi}{4}) = -2$.

Rezultat. $y = \sqrt{\sin 2x}$.

3.38. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y'''+y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$.

Rezultat. $y = \frac{1}{\cos x}+\cos x\ln|\cos x|+\sin x(x-\mathrm{tg}x)+D_1+D_2\cos x + D_3\sin x$.

3.39. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$(1-x^2)y''-xy'+\frac{1}{4}y = 0,$$

ako je poznato da je $y_1 = \sqrt{1+x}$ jedno njeno partikularno rešenje.

Rešenje. Drugo partikularno rešenje date diferencijalne jednačine biće

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a\ x\, dx}}{y_1^2}\, dx,$$

odnosno

$$y_2 = \sqrt{1+x} \int \frac{e^{-\int \frac{-x}{1-x^2} dx}}{1+x} dx = \sqrt{1+x} \int \frac{e^{-\frac{1}{2}\ln 1-x^2}}{1+x}\, dx =$$

$$= \sqrt{1+x} \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1+x} \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\ \frac{dx}{(1+x)^2}.$$

Uvodjenjem zamene $\frac{1-x}{1+x} = t^2 \Rightarrow \frac{dx}{(1+x)^2} = -\, tdt$, poslednji integral postaje $y_2 = \sqrt{1+x} \int -dt = \sqrt{1+x}\,(-t+c) =$

$$= \sqrt{1+x}\left(-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C\right) = -\sqrt{1-x} + C\sqrt{1+x}.$$

Pošto smo tražili samo partikularno rešenje možemo staviti $C = 0$, pa je $y_2 = -\sqrt{1-x}$.

Sledi: $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1\sqrt{1+x} - C_2\sqrt{1-x}$ je traženo opšte rešenje.

3.40. Data je diferencijalna jednačina

$$(\sin x - \cos x)y'' - 2\sin x \cdot y' + (\cos x + \sin x)y = 0.$$

Naći opšte rešenje date diferencijalne jednačine, ako je $y_1 = e^x$ jedno njeno partikularno rešenje.

Rezultat. $y = C_1 e^x + C_2 \sin x$.

3.41. Data je diferencijalna jednačina

$$(\cos x + \sin x)y'' - 2\cos x \cdot y' + (\cos x - \sin x)y = 0.$$

1° Ako je $y_1 = \cos x$ jedan njen partikularni integral, naći opšti integral date jednačine.

2° Odrediti ono partikularno rešenje date jednačine, koje zadovoljava početne uslove: $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$.

Rezultat. 1° $y = C_1\cos x + C_2 e^x$; 2° $y = e^x - \cos x$.

3.42. Data je diferencijalna jednačina $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$.

1° Ako je $y_1 = \frac{\sin x}{x}$ jedan njen partikularni integral, naći opšti integral date diferencijalne jednačine.

2° Odrediti ono partikularno rešenje date jednačine, koje zadovoljava početne uslove: $y(\frac{\pi}{2}) = 0$; $y'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{\pi}$.

Rezultat. 1° $y = C_1\frac{\sin x}{x} + C_2\frac{\cos x}{x}$; 2° $y = \frac{\cos x}{2x}$.

3.43. Data je diferencijalna jednačina

$$x^2(2\ln x - 1)y'' - x(2\ln x + 1)y' + 4y = 0.$$

1° Ako je $y_1 = x^2$ jedan njen partikularni integral, naći opšte rešenje date diferencijalne jednačine.

2° Odrediti ono partikularno rešenje date jednačine, koje zadovoljava početne uslove: $y(1) = 0$; $y'(1) = 3$.

Rezultat. 1° $y = C_1 x^2 + C_2\ln x$; 2° $y = 3\ln x$.

3.44. Data je diferencijalna jednačina $(x-1)y'' - (x+1)y' + 2y = 0$.

1° Odrediti konstante a,b,c tako da $y_1 = ax^2 + bx + c$ bude rešenje date jednačine.

2° Rešiti datu jednačinu.

Rešenje. 1° Imamo: $y_1 = ax^2 + bx + c \Rightarrow y' = 2ax + b \Rightarrow y'' = 2a \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-1)2a - (x+1)(2ax+b) + 2(ax^2+bx+c) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow bx - 2a + 2c = 0 \Rightarrow b = 0,\ a = c.$

Uzmimo $a = c = 1$, pa je $y_1 = x^2+1$ jedno partikularno rešenje date jednačine.

2° Imamo:

$$y_2 = (x^2+1)\int \frac{e^{-\int -\frac{x+1}{x-1}dx}}{(x^2+1)^2}\, dx = (x^2+1)\int \frac{e^{x+2\ln(x-1)}}{x^2+1}\, dx =$$

$$= (x^2+1)\int \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}\, dx = (x^2+1)\left[\int \frac{e^x}{x^2+1}\, dx - \int \frac{2xe^x dx}{(x^2+1)^2}\right] =$$

$$= (x^2+1)\left[\frac{e^x}{x^2+1} + \int \frac{2e^x x dx}{(x^2+1)^2} - \int \frac{2xe^x}{(x^2+1)^2}\, dx\right] = e^x.$$

Dobijamo da je $y = C_1(x^2+1) + C_2e^x$, traženo opšte rešenje date diferencijalne jednačine.

3.45. Data je diferencijalna jednačina $(x^2-3x)y''+(6-x^2)y'+(3x-6)y = 0$.

1° Odrediti konstante a,b,c tako da $y_1 = x^3+ax^2+bx+c$ bude partikularno rešenje date jednačine.

2° Rešiti datu jednačinu.

Rezultat. 1° $a = b = c = 0$; 2° $y = C_1x^3 + C_2e^x$.

3.46. Data je diferencijalna jednačina $x^2y''+4xy'+2y = 0$.

1° Odrediti konstante a,b,c tako da $y_1 = ax+b+\frac{c}{x}$ bude rešenje date jednačine.

2° Naći opšte rešenje date jednačine.

Rešenje. 1° $y_1=ax+b+\frac{c}{x} \Rightarrow y_1'=a-\frac{c}{x^2} \Rightarrow y_1'' = \frac{2c}{x^3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2y_1'' + 4xy_1' + 2y_1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2\frac{2c}{x^3} + 4x(a-\frac{c}{x^2})+2(ax+b+\frac{c}{x}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6ax+2b = 0 \Rightarrow a = b = 0 \Rightarrow y_1 = \frac{1}{x}.$$

2°

$$y_2 = y_1\int\frac{e^{-\int a(x)dx}}{y_1^2}dx = \frac{1}{x}\int\frac{e^{-\int\frac{4}{x}dx}}{\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \frac{1}{x}\int x^2e^{-4\ln x}dx = \frac{1}{x}\int\frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}.$$

Dobijamo da je $y = C_1y_1+C_2y_2 = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2}$ opšte rešenje date jednačine.

3.47. Data je diferencijalna jednačina $x^2y''-xy'+y = 0$.

1° Odrediti konstante a,b tako da $y_1=ax+b$ bude rešenje date jednačine.

2° Naći opšte rešenje date jednačine.

Rezultat. 1° $a = 1$, $b = 0$; 2° $y = C_1x+C_2x\ln x$.

3.48. Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$x(x-1)^2y''+x(x-1)y'-y = 0,$$

ako data jednačina ima jedno partikularno rešenje oblika: $y_1 = \frac{ax}{x-1}$, gde je a konstanta koju treba odrediti.

Rešenje. Odredimo konstantu a tako da $y_1 = \frac{ax}{x-1}$ bude rešenje date jednačine. Imamo:

$$y_1 = \frac{ax}{x-1} \Rightarrow y_1' = \frac{-a}{(x-1)^2} \Rightarrow y_1'' = \frac{2a}{(x-1)^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(x-1)^2y_1''+x(x-1)y_1'-y_1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(x-1)^2\frac{2x}{(x-1)^3} + x(x-1)\frac{-a}{(x-1)^2} - \frac{ax}{x-1} = 0 \Rightarrow$$

$$= \frac{2ax}{x-1} - \frac{ax}{x-1} - \frac{ax}{x-1} = 0 \Rightarrow \text{a je proizvoljno.}$$

Dakle, možemo uzeti $a = 1$, pa je $y_1 = \frac{x}{x-1}$ jedno partikularno rešenje date jednačine. Dalje imamo

$$y_2 = \frac{x}{x-1}\int\frac{e^{\int\frac{dx}{x-1}}}{(\frac{x}{x-1})^2}dx = \frac{x}{x-1}\int\frac{x-1}{x^2}dx = \frac{x}{x-1}(\ln x+\frac{1}{x}) =$$

$$= \frac{x}{x-1}\ln x + \frac{1}{x-1}.$$

Traženo opšte rešenje je

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1\frac{x}{x-1} + C_2\left(\frac{x}{x-1}\ln x + \frac{1}{x-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{x-1}\left(C_2x+C_2x\ln x + C_2\right).$$

3.49. Data je diferencijalna jednačina $x(x-1)y''+(1+x)y'-y = 0$.

1° Odrediti konstantu a tako da $y_1 = \frac{a}{x-1}$ bude rešenje date jednačine.

2° Rešiti datu jednačinu.

Rezultat. $1^\circ a=1$; 2° $y = \frac{C_1+C_2x^2}{1-x}$.

3.50. Naći opšte rešenje jednačine $y''+(1-x)y'+y = 1$, ako su poznata njena dva partikularna rešenja: $y_1=1$; $y_2=x$.

Rešenje. Ako su y_1 i y_2 dva partikularna rešenja diferencijalne jednačine $y''+a(x)y'+b(x)y = f(x)$, tada je

$$y_1'' + a(x)y_1' + b(x)y_1 = f(x), \qquad (1)$$

$$y_2'' + a(x)y_2' + b(x)y_2 = f(x). \qquad (2)$$

Iz (1) i (2) sledi: $y_2''-y_1'' + a(x)(y_2'-y_1')+b(x)(y_2-y_1) = 0$, tj. $(y_2-y_1)''+a(x)(y_2-y_1)'+b(x)(y_2-y_1) = 0$, što znači da je y_2-y_1 partikularno rešenje pripadne homogene diferencijalne jednačine.

U našem slučaju imamo

$$y''+(1-x)y'+y = 0; \qquad Y_1 = y_2-y_1 = x-1 \Rightarrow$$

$$Y_2 = (x-1)\int_{x_0}^{x} \frac{e^{\frac{1}{2}(x-1)^2}}{(x-1)^2}\,dx \Rightarrow$$

$$y = C_1Y_1+C_2Y_2 = (x-1)\left[C_1+C_2\int_{x_0}^{x}\frac{e^{\frac{1}{2}(x-1)^2}}{(x-1)^2}\,dx\right].$$

Kako je $y_1 = 1$ partikularno rešenje date nehomogene jednačine, to je traženo opšte rešenje date jednačine

$$y = 1+(x-1)\left[C_1+C_2\int_{x_0}^{x}\frac{e^{\frac{1}{2}(x-1)^2}}{(x-1)^2}\,dx\right].$$

3.51. Data je diferencijalna jednačina $4xy''+2y'-y = 0$.

1^o Odrediti rešenje date jednačine u obliku potencijalnog reda

2^o Sumirati dobijeni red.

Rešenje: 1^o Neka je $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$. Imamo

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1} \Rightarrow \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}+2\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} 4n(n-1)a_nx^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty} 2na_nx^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 4(n+1)na_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 4(n+1)n\,a_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left[4(n+1)na_{n+1}+2(n+1)a_{n+1}-a_n\right]x^n = 0 \rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(n+1)na_{n+1}+2(n+1)a_{n+1}-a_n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(2n+1)(n+1)a_{n+1} = a_n \Rightarrow a_{n+1} = \frac{a_n}{2(n+1)(2n+1)} =$$

$$= \frac{a_n}{(2n+2)(2n+1)}.$$

Dobijamo

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{[2(n-1)+2][2(n-1)+1]} = \frac{a_{n-1}}{2n(2n-1)},$$

$$a_{n-1} = \frac{a_{n-2}}{(2n-2)(2n-3)},$$

....

$$a_3 = \frac{a_2}{6.5}; \qquad a_2 = \frac{a_1}{4.3}; \qquad a_1 = \frac{a_0}{2.1}.$$

Zaključujemo:

$$a_n = \frac{a_0}{2n(2n-1)(2n-2)\ldots 5.4.4.2.1} = \frac{a_0}{(2n)!}$$

Traženo rešenje je $y = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_0}{(2n)!}x^n = a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!}$.

2^o Dobijamo

$$y = a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n)!} = a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!} = a_0e^{\sqrt{x}}.$$

3.52. Naći opšte rešenje u obliku reda, diferencijalne jednačine $(1-x^2)y''-4xy'-2y = 0$.

Rešenje. Imamo:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \Rightarrow \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} a_nnx^{n-1} \Rightarrow \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}-4x\sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}-2\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 4na_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 4na_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 4na_n - 2a_n\right] x^n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n+2)(n+1)a_{n+2} - (n^2+3n+2)a_n = 0 \Rightarrow$$

$$=(n+2)(n+1)a_{n+2} = (n+2)(n+1)a_n \Rightarrow a_{n+2} = a_n$$

Očigledno je $a_{2k} = a_{2k-2} = a_{2k-4} = \dots = a_6 = a_4 = a_2 = a_0$,

$a_{2k+1} = a_{2k-1} = a_{2k-3} = \dots = a_5 = a_3 = a_1$.

Dobijamo

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_0 x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_1 x^{2k+1} = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k+1} .$$

Primetimo da se dobijemo rešenje može napisati u obliku

$$y = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} + a_1 x \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} = (a_0+a_1x)\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} =$$

$$=(a_0+a_1x)\sum_{k=0}^{\infty}(x^2)^k = (a_0+a_1x)\cdot\frac{1}{1-x^2} = \frac{a_0+a_1x}{1-x^2} .$$

3.53. Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $y'' + 2xy' + 4y = 0$ u obliku potencijalnog reda.

Rezultat. $y = a_0 + a_0 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k}{(2k-1)!!} x^{2k} + a_1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} x^{2k+1}.$

3.54. Za kakve vrednosti parametara p i q sva rešenja diferencijalne jednačine $y''+py'+qy = 0$ teže ka nuli kad $x \to +\infty$?

Rešenje. Zavisno od vrednosti parametara p i q opšte rešenje date diferencijalne jednačine je jednog od oblika

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \qquad (1)$$

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_2 x} = e^{\lambda_1 x}(C_1+C_2x) \qquad (2)$$

$$y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+\sin\beta x). \qquad (3)$$

Da bi sva rešenja date diferencijalne jednačine težila nuli kad $x \to +\infty$ mora biti

$$\lim_{x\to\infty} y = 0, \qquad (4)$$

gde je y opšte rešenje date jednačine.

Ako je ispunjeno (1), da bi važilo (4) mora biti:
$\lambda_1 < 0$; $\lambda_2 < 0$.

Ako je ispunjeno (2), da bi važilo (4) mora biti $\lambda_1 < 0$.

Ako je ispunjeno (3), da bi važilo (4) mora biti:
$\alpha < 0$, tj. $(\alpha+i\beta)+(\alpha-i\beta) < 0$; $(\alpha+i\beta)(\alpha-i\beta) = \alpha^2+\beta^2 > 0$.

Sledi: da bi bio ispunjen uslov (4), za zbir i proizvod rešenja, pripadne karakteristične jednačine

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

mora da važi: $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$, $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, tj. $-p < 0$, $q > 0$ ili $p > 0$; $q > 0$.

Uslov (5) je i potreban i dovoljan da bi sva rešenja date diferencijalne jednačine težila nuli, kad $x \to +\infty$.

3.55. Za kakve vrednosti parametara p i q su sva rešenja diferencijalne jednačine $y'' + py' + qy = 0$ ograničena za $x \geq 0$.

Rešenje. Zavisno od vrednosti parametara p i q opšte rešenje date diferencijalne jednačine je jednog od oblika

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} \qquad (1)$$

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} x = e^{\lambda_1 x}(C_1+C_2x), \qquad (2)$$

$$y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x). \qquad (3)$$

Da bi za $x \geq 0$ sva rešenja date diferencijalne jednačine bila ograničena, mora biti: $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 \leq 0$ (ako važi (1)); $\lambda_1 < 0$ (ako važi (2)); $\alpha \leq 0$ (ako važi (3)).

Sledi

$$\lambda_1 + \lambda_2 \leq 0; \quad \lambda_1 \lambda_2 \geq 0$$

i pritom znak jednakosti ne važi istovremeno (tj. ne može biti $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$). Iz pripadne karakteristične jednačine dobijamo traženi uslov

$$p \geqslant 0; \quad q \geqslant 0; \quad p^2 + q^2 \neq 0.$$

3.56. Materijalna tačka mase 1 gr. odbija se od centra pod dejstvom sile koja je proporcionalna njenom rastojanju od tog centra (koeficijent proporcionalnosti je 4). Otpor sredine proporcionalan je brzini kretanja (koeficijent proporcionalnosti je 3). U početku kretanja rastojanje od centra je 1 cm, a brzina je 0. Naći zakon kretanja.

Rešenje. Prema uslovima zadatka sila F, kojom se materijalna tačka odbija od centra, proporcionalna je rastojanju s tačke od centra, pa je

$$F = 4s. \tag{1}$$

Sila F daje materijalnoj tački akcelraciju a, i takodje savladjuje silu otpora sredine F_1, tj.

$$F = ma + F_1. \tag{2}$$

Kako je

$$a = \frac{d^2s}{dt^2}; \quad F_1 = 3v = 3\frac{ds}{dt}, \tag{3}$$

to iz (1), (2) i (3) dobijamo

$$m\frac{d^2s}{dt^2} + 3\frac{ds}{dt} = 4s. \tag{4}$$

Stavljajući $m = 1$ u (4) dobijamo homogenu linearnu diferencijalnu jednačinu sa konstantnim koeficijentima

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 3\frac{ds}{dt} - 4s = 0. \tag{5}$$

Rešenje jednačine (5) je

$$S = C_1e^t + C_2e^{-4t}, \tag{6}$$

gde su C_1 i C_2 konstante koje ćemo odrediti iz početnih uslova zadatka: $s = 1$; $v = \frac{ds}{dt} = 0$ za $t = 0$.

Imamo

$$1 = C_1+C_2; \quad 0 = C_1-4C_2 \Rightarrow C_1 = \frac{4}{5}; \quad C_2 = \frac{1}{5} \Rightarrow$$

$$s = \frac{1}{5}(4e^t + e^{-4t}).$$

SISTEMI DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

Normalni sistem od dve diferencijalne jednačine ima oblik

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y,z), \qquad \frac{dz}{dx} = g(x,y,z), \tag{1}$$

gde su y i z nepoznate funkcije nezavisno promenljive x. Sistem (1) može se napisati i u tzv. simetričnoj formi

$$\frac{dy}{f(x,y,z)} = \frac{dz}{g(x,y,z)} = \frac{dx}{1} \tag{2}$$

Opšte rešenje sistema (1) (ili (2)) jeste oblika

$$y = \varphi_1(x,C_1,C_2), \qquad z = \varphi_2(x,C_1,C_2) \tag{3}$$

gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante.

Opšti integral datog sistema je skup dva tzv. prva integrala

$$\psi_1(x,y,z) = C_1. \qquad \psi_2(x,y,z) = C_2.$$

Rešiti dati sistem znači naći opšte rešenje ili opšti integral.

Mnogi normalni sistemi od dve diferencijalne jednačine mogu se rešiti svodjenjem datog sistema (1) na jednu diferencijalnu jednačinu drugog reda. To se postiže diferenciranjem jedne od datih jednačina sistema (1) i eliminisanjem druge nepoznate funkcije i njenog izvoda. Neki se, pak, sistemi lakše rešavaju tako, da ih napišemo u obliku (2), pa im onda odredimo oba prva integrala, a samim tim i opšti integral.

4.1. Naći opšte rešenje sistema diferencijalnih jednačina

$$y' = -z; \qquad z' = y.$$

Rešenje. Zadatak ćemo rešiti svodjenjem datog sistema diferencijalnih jednačina na jednu diferencijalnu jednačinu višeg reda. Diferenciranjem prve jednačine dobijamo

$$y'' = -z'. \tag{1}$$

Kako je $z' = y$, to iz (1) sledi $y'' = -y \Rightarrow y'' + y = 0$.

Imamo

$$\lambda^2+1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \Rightarrow y_1 = \cos x, \Rightarrow y_2 = \sin x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

$$z = -y' = -(C_1\cos x + C_2\sin x)' = C_1\sin x - C_2\cos x.$$

4.2. Naći opšte rešenje sistema diferencijalnih jednačina

$$y' = z; \quad z' = y.$$

Rezultat.

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x}; \quad z = C_1e^x - C_2e^{-x}.$$

4.3. Naći opšte rešenje sistema diferencijalnih jednačina

$$y' = -z + \sin x; \quad z' = y - \cos x.$$

Rezultat.

$$y = -C_1\sin x + C_2\cos x + x\sin x, \quad z = C_1\cos x + C_2\sin x - x\cos x.$$

4.4. Dat je sistem diferencijalnih jednačina

$$y' = 1 - \frac{1}{z}; \quad z' = \frac{1}{y-x}.$$

1° Naći opšte rešenje datog sistema.

2° Odrediti ono rešenje, koje zadovoljava početne uslove: $y = -1;\ z = 1,$ za $x = 0$.

Rešenje. 1° Imamo

$$z'' = \left(\frac{1}{y-x}\right)' = -\frac{1}{(y-x)^2}(y'-1) = -z'^2\left(-\frac{1}{z}\right) = \frac{z'^2}{z}.$$

Sledi

$$\frac{z''}{z'} = \frac{z'}{z} \Rightarrow \int\frac{z''}{z'}\,dx = \int\frac{z'}{z}\,dx \Rightarrow \ln z' = \ln z + \ln C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln z' = \ln C_1 z \Rightarrow z' = C_1 z \Rightarrow \frac{z'}{z} = C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\frac{z'}{z}\,dx = \int C_1\,dx \Rightarrow \ln z = C_1x + \ln C_2 \Rightarrow z = C_2e^{C_1x}.$$

Kako je $y - x = \frac{1}{z}, \Rightarrow y = x + \frac{1}{z}$, to dobijamo

$$y = x + \frac{1}{C_1C_2e^{C_1x}} = x + \frac{1}{C_1C_2}e^{-C_1x}.$$

2° Dobijamo $-1 = \frac{1}{C_1C_2}, \quad 1 = C_2 \Rightarrow C_1 = -1 \Rightarrow$

$$y = x - e^x, \quad z = e^{-x}.$$

4.5. Dat je sistem diferencijalnih jednačina $y' = z;\ z' = \frac{z^2}{y}$.

1° Naći opšte rešenje datog sistema.

2° Odrediti ono rešenje koje zadovoljava početne uslove: $y = z = 1$ za $x = 0$.

Rezultat. 1° $y = C_2e^{C_1x}$; $z = C_1C_2e^{C_1x}$; 2° $y = z = e^x$.

4.6. Dat je sistem diferencijalnih jednačina: $y' = 1-z;\ z' = y$.

1° Naći opšte rešenje datog sistema.

2° Odrediti ono rešenje koje zadovoljava početne uslove: $y = z = 0$ za $x = 0$.

Rezultat. $y = -C_1\sin x + C_2\cos x;\ z = 1 + C_1\cos x + C_2\sin x;$

2° $y = \sin x;\ z = 1 - \cos x.$

4.7. Naći opšte rešenje sistema diferencijalnih jednačina $y' = y+z,\ z' = -10y - z.$

Rezultat. $y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x;\ z = (-C_1+3C_2)\cos 3x - (3C_1+C_2)\sin 3x.$

4.8. Naći opšte rešenje sistema diferencijalnih jednačina

$$y' = y+z, \quad z' = \left(-\frac{2}{x^2} + \frac{2}{x} - 1\right)y + \left(\frac{2}{x} - 1\right)z$$

Rezultat. $y = C_1x + C_2x^2,\ z = C_1(1-x) + C_2x(2-x).$

4.9. Naći opšte rešenje sistema diferencijalnih jednačina $y' = x+z,\ z' = z^2+2xz+x^2-1.$

Uputstvo. Diferenciranjem prve jednačine, uzimajući u obzir da je $z' = (x+z)^2-1 = y'^2-1$, sistem se svodi na diferencijalnu jednačinu $y'' = y'$. Rezultat je:

$$y = -\ln|C_1-x| + C_2, \quad z = \frac{1}{C_1-x} - x.$$

4.10. Naći opšti integral sistema diferencijalnih jednačina

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

Rešenje. Imamo $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln x = \ln y - \ln C_1 \Rightarrow C_1 x = y \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = C_1. \tag{1}$$

Takodje je $\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln z = \ln x + \ln C_2 \Rightarrow z = C_2 x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{z}{x} = C_2. \tag{2}$$

Sa (1) i (2) dati su prvi integrali datog sistema. Traženi opšti integral jeste

$$\left.\begin{aligned} \frac{y}{x} &= C_1 \\ \frac{z}{x} &= C_2. \end{aligned}\right\}$$

4.11. Naći opšti integral sistema diferencijalnih jednačina

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{z}.$$

Rezultat. $y = C_1, \quad \frac{z}{x} = C_2.$

4.12. Naći opšti integral sistema diferencijalnih jednačina

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{dz}{\frac{1}{2}}.$$

Rezultat. $\sqrt{y} - \sqrt{x} = C_1; \quad z - \sqrt{x} = C_2.$

4.13. Naći opšti integral sistema diferencijalnih jednačina

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{x+y}.$$

Rešenje. Imamo $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln x = \ln y - \ln C_1 \Rightarrow C_1 x = y \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = C_1.$$

Sabiranjem prve dve proporcije dobijamo $\frac{dx+dy}{x+y} = \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{x+y}$, odnosno $\frac{d(x+y)}{x+y} = \frac{dz}{x+y} \Rightarrow d(x+y) = dz \Rightarrow x+y-z = C_2.$

4.14. Naći opšti integral sistema diferencijalnih jednačina

$$\frac{dx}{\cos y} = \frac{dy}{\cos x} = \frac{dz}{\cos x \cos y}.$$

Rezultat. $\sin x - \sin y = C_1; \quad \sin x - z = C_2.$

4.15. Naći opšti integral sistema diferencijalnih jednačina

$$\frac{dx}{(z-y)^2} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{y}.$$

Rezultat. $y^2 - z^2 = C_1, \quad 2x+(y-z)^2 = C_2.$

Vladimir SAVIĆ

PARCIJALNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE
- PRVOG REDA -

Uvod

1° 1 Jednačina oblika

$$F\left(X_1,X_2,\ldots,X_n,Z,\frac{\partial Z}{\partial x_1},\ldots\frac{\partial^k Z}{\partial x_1^k},\frac{\partial Z}{\partial x_2},\frac{\partial^2 Z}{\partial x_1\partial x_2},\ldots\frac{\partial^k Z}{\partial x_2^k},\frac{\partial Z}{\partial x_n},\ldots\frac{\partial^k Z}{\partial x_n^k}\right)=0 \quad (1)$$

gde je $Z = Z\,(X_1,X_2,\ldots X_n)$ (2)

nepoznata funkcija, zove se parcijalna diferencijalna jednačina k-tog reda.

Red najvišeg parcijalnog izvoda, koji ulazi u sastav jednačine (1), naziva se red jednačine (1).

Ako je nepoznata funkcija $z = z(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, onda opšti oblik parcijalne jednačine prvog reda

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ z,\ p_1,p_2,\ldots,p_n) = 0, \quad (3)$$

gde je $p_i = \frac{\partial Z}{\partial x_i}$, $i = 1,2,\ldots n.$

Jednostavnosti radi, dalje izlaganje odnosiće se na funkciju

$$z = z\,(x,y) \quad (4)$$

Za funkciju (4) jednačine (3) postaje

$$F(x,y,z,p,q) = 0 \quad (3_1)$$

gde je $p = \frac{\partial Z}{\partial x}$; $q = \frac{\partial Z}{\partial y}$.

Nehomogena linearna jednačina prvog reda ima oblik

$$P(x,y,z)\frac{\partial Z}{\partial x} + Q(x,y,z)\frac{\partial Z}{\partial y} = R(x,y,z) \quad (5)$$

Homogena linearna jednačina prvog reda ima oblik

$$P(x,y)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0. \qquad (6)$$

Svaka funkcija $z = z(x,y)$ koja zadovoljava jednačinu (3_1) zove se <u>partikularno rešenje (integral)</u> te jednačine.

Opšte rešenje jednačine (6) ima oblik

$$Z = F[\psi(x,y)] \qquad (7)$$

gde je $\psi(x,y) = C$ prvi integral obične diferencijalne jednačine.

$$\frac{dx}{P(x,y)} = \frac{dy}{Q(x,y)} \qquad (8)$$

a F proizvoljna neprekidno diferencijabilna funkcija

Opšte rešenje jednačine (5) ima oblik

$$F[\psi_1(x,y,z);\ \psi_2(x,y,z)] = 0 \qquad (9)$$

gde su $\psi_i(x,y,z) = C_i$ $(i = 1,2)$, prvi integrali sistema običnih diferencijalnih jednačina

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)} \qquad (10)$$

a F je proizvoljno neprekidno diferencijabilna funkcija.

Za jednačine (5) i (6) Cauchy-ev problem sastoji se u nalaženju partikularnog rešenja

$$Z = f(x,y) \qquad (11)$$

koje zadovoljava početni uslov

$$Z = \varphi(Y) \quad \text{za } X = X_0. \qquad (12)$$

Za jednačinu (5) traženo partikularno rešenje (11) ima oblik: $Z = \varphi\{W[\psi(X,Y)]\}$, pri čemu je $Y = W(\bar\psi)$ rešenje jednačine $\psi(X_0,Y) = \bar\psi$.

Za jednačimu (6) traženo partikularno rešenje (11) ima oblik: $W_2[\psi_1(X,Y,Z),\psi_2(X,Y,Z)] = \varphi\{W_1[\psi_1(X,Y,Z),\psi_2(X,Y,Z)]\}$ pri čemu je $y = W_1(\bar\psi_1,\psi_2)$; $Z = W_2(\bar\psi_1,\bar\psi_2)$ rešenje sistema

$$\psi_1(X_0,Y,Z) = \bar\psi_1 \ ; \ \psi_2 = (X_0,Y,Z) = \bar\psi_2 .$$

Problem koji se sastoji u tome da se nadje partikularno rešenje jednačine (5) koje predstavlja integralnu površ koja sadrži krivu $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$, rešava se na sledeći način:

Prvo se nadju dva nezavisna prva integrala $\psi_1(x,y,z) = C_1$; $\psi_2(x,y,z) = C_2$ sistema (10) u kojima se x,y,z zamene redom sa $x(t)$; $y(t)$; $z(t)$. Tako se dobiju dve jednačine $\psi_1(t) = \bar\psi_1$; $\psi_2(t) = \bar\psi_2$.

Eliminacijom parametra t iz poslednje dve jednačine dobija se relacija $F(\bar\psi_1, \bar\psi_2) = 0$, koja posle zamene $\bar\psi_1$ i $\bar\psi_2$ redom sa $\psi_1(x,y,z)$, i $\psi_2(x,y,z)$ postaje $F[\psi_1(x,y,z), \psi_2(x,y,z)] = 0$.

Poslednja jednačina jeste traženo partikularno rešenje jednačine (5). Slično se postupa ako se umesto jednačine (5) posmatra jednačina (6).

1° 2. <u>Pfaff-ova jednačina</u>

Izraz oblika $\sum_{i=1}^{n} X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_i$ gde su X_i, $(i = 1,2,\ldots,n)$ date funkcije promenljivih x_i, $(i = 1,2,\ldots,n)$, zove se Pfaff-ova diferencijalna forma promenljivih x_i, $i = 1,2\ldots n$, a jednačina oblika $\sum_{i=1}^{n} X_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,dx_i = 0$ zove se Pfaff-ova diferencijalna jednačina promenljivih x_i $(i = 1,2,\ldots,n)$.

Ograničićemo se na jednačinu oblika

$$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = 0 \qquad (1)$$

Jednačina (1) je integrabilna ako i samo ako je

$$P\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + Q\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + R\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0 \qquad (2)$$

Ako je zadovoljen uslov 2 moguća su dva slučaja. Kada je

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \qquad (3)$$

onda je leva strana jednačine (1) totalni diferencijal neke funkcije $U(x,y,z)$ i njeno rešenje dobija se po formuli

$$U(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(x,y,z)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y,z)dy + \int_{z_0}^{z} R(x_0,y_0,z)dz = C \qquad (4)$$

Ako uslov (3) nije ispunjen postupa se ovako: uzima se da je u jednačini (1) jedna promenljiva, recimo z-konstanta, pa se reši obična diferencijalna jednačina

$$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy = 0, \tag{4}$$

gde je Z parametar. Rešenje jednačine (4) je oblika $U(x,y,z) = C(z)$, gde je $C(z)$ u opštem slučaju funkcija parametra z, koja se odredjuje, tako da je

$$\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \left[\frac{\partial U}{\partial z} - C'(z)\right]dz = 0 \tag{5}$$

Uporedjujući jednačinu (1) i uslov (5) dobija se

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{P} = \frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{Q} = \frac{\frac{\partial U}{\partial z} - C'(z)}{R}.$$

Funkcija $c(z)$ odredjuje se iz jednačine

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{P} = \frac{\frac{\partial U}{\partial z} - C'(z)}{R} \tag{6}$$

koja zbog uslova (2) zavisi samo od Z, $c'(Z)$ i $U(x,y,z) = C(z)$.

1°.3. Metoda Lagrange-Charpit-a

Neka je data jednačina

$$F(x,y,z,p,q) = 0 \tag{1}$$

Skup rešenja te jednačine, koji se javljaju u obliku $V(x,y,z,C_1,C_2) = 0$, gde su C_1 i C_2 proizvoljne, medju sobom nezavisne konstante, zove se potpuni integral jednačine (1).

Potpuni integral jednačine (1) dobija se metodom Lagrange-Charpit-a na sledeći način:

Prvo se sastavi sistem običnih diferencijalnih jednačina u simetričnom obliku

$$\frac{dx}{F'p} = \frac{dy}{F'q} = \frac{dz}{pF'_p + qF'q} = \frac{dp}{-(F'_x + pF'z)} = \frac{dq}{-(F'_y + qF'z)} \tag{2}$$

zatim se nadje njegov prvi integral $\phi(x,y,z,p,q) = C_1$, (C_1=const) i sistem jednačina $F(x,y,z,p,q) = 0$; $\phi(x,y,z,p,q) = C_1$; reši po p i q ; $p = A(x,y,z,C_1)$; $q = B(x,y,z,C_1)$.

Rešenje $Z = V(x,y,C_1,C_2)$ Pfaff-ove jednačine $dz = A(x,y,z,C_1)dx + B(x,y,z,C_1)dy$, koja zadovoljava uslov integrabilnosti (tako je odredjena funkcija $\phi(x,y,z,p,q) = C_1$), jeste potpuni integral jednačine (1). Osim potpunog integrala $V(x,y,z,C_1,C_2) = 0$ jednačina (1) ima i druge vrste rešenja.

Eliminacijom parametra C_1 i c_2, kada je to moguće, iz sistema jednačina

$$V(x,y,z,C_1,C_2) = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial C_1} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial C_2} = 0$$

dobija se sitularno rešenje $F_1(x,y,z) = 0$ jednačine (1), koje geometrijski predstavlja obvojnicu integralnih površina $V(x,y,z,C_1,C_2) = 0$ koje zavise od dva parametra.

Ako izmedju parametra C_1 i C_2 postoji proizvoljna veza $C_2 = \Upsilon(C_1)$, gde je φ proizvoljna diferencijabilna funkcija, onda skup jednačina $V(x,y,z,C_1\varphi(C_1)) = 0$, $\frac{\partial V}{\partial C_1} + \frac{\partial V}{\partial \varphi}\varphi'(C_1) = 0$

predstavlja opšti integral jednačine (1).

Geometrijski, to je obvojnica skupa integralnih površi, koje zavise od jednog parametra i jedne proizvoljne funkcije.

Cachy-ev problem za jednačinu $F(x,y,z,p,q) = 0$, čiji je potpuni integral $z = V(x,y,C_1,C_2)$, sastoji se u nalaženju partikularnog integrala $z = f(x,y)$ koji predstavlja integralnu površ koja sadrži krivu $x = x_o$; $z = \alpha(y)$.

Pri rešavanju Cachy-evog zadatka moguća su dva slučaja:

a/ Ako su uslovima $V(x_o,y,C_1,C_2) = \alpha(y)$; $V'y(x_o,y,C_1,C_2) = \alpha'(y)$ veličine C_1 i C_2 odredjene kao konstante, zamena njihovih vrednosti u potpunom integralu $z = V(x,y,C_1,C_2)$ daje traženo partikularno rešenje $z = f(x,y)$.

b/ Ako su uslovima $V(x_o,y,C_1,C_2) = \alpha(y)$; $V'y(x_o,y,C_1,C_2) = \alpha'(y)$ veličine C_1 i C_2 odredjene kao funkcije od y $Ci = Ci(y)$, $(i=1,2)$, znači da izmedju tih veličina postoji odredjena funkcionalna zavisnost $C_2 = A(C_1)$, koja se dobija kada se y eliminiše iz relacije $Ci = Ci(y), (i=1,2.)$, i tada traženo partikularno rešenje (Cauchy-ev integral) dobija iz opšteg rešenja:

$z = V(x,y,C_1,C_2)$, $\frac{\partial V}{\partial C_1} + \frac{\partial V}{\partial \varphi}\varphi'(C_1) = 0$, gde umesto proizvoljne funkcije $\varphi(C_1)$ treba staviti funkciju $A(C_1)$ i eliminisati parametar C_1.

Potpuni integral jednačine (1) dobija se bez teškoća u sledećim slučajevima

1/ Ako je $F(p,q) = 0$, stavljanjem $p = C_1$, gde je C_1 proizvoljna konstanta, dobija se $F(C_1,q) = 0$, odakle je $q = f(C_1)$, $dz = pdx + qdy = C_1 dx + f(C_1)\,dy$. Prema tome, potpuni integral je oblika

$$z = C_1 x + f(C_1)\,y + C_2.$$

2/ Ako je $F(x,p,q) = 0$, stavlja se $q = C_1$ i dobija $F(x,p,C_1) = 0$, tj. $p = f(x,C_1)$, $dz = f(x,C_1)dx + C_1 dy$, te je potpuni integral

$$z = \int f(x,C_1)\,dx + C_1 y + C_2.$$

Ako je $F(y,p,q)$ stavlja se $p = C_1$ i dalje je postupak nalaženja potpunog integrala sličan gornjem.

3/ Ako je $F(z,p,q) = 0$, onda se stavlja $p = C_1 q$, odakle je $F(z,C_1,q,q) = 0$, tj. $q = f(C_1,z)$, te je potpuni integral

$$\int \frac{z}{f(C_1,z)}\,dz = C_1 x + y + C_2.$$

4/ Ako se jednačina $F(x,y,p,q) = 0$ može napisati u obliku $\varphi(x,p) = \Psi(y,q)$, onda se stavlja $\Upsilon(x,p) = \Psi(y,q) = C_1$ gde je C_1 proizvoljna konstanta i rešavanjem po p i q, kada je to moguće, dobija redom $p = \varphi_1(x,C_1)$, $q = \Psi_1(y,C_1)$, $dz = pdx + qdy = \varphi_1(x_1C_1)\,dx + \Psi_1(y,C_1)\,dy$, $\quad z = \int \varphi_1(x,C_1)\,dx + \int \Psi_1(x,y)\,dy + C_2$.

Ako su poznata dva nezavisna prva integrala $Fi(x,y,z,p,q) = Ci$, $(i = 1,2)$ sistema (2), koji odgovara jednačini $F(x,y,z,p,q) = 0$ i ako je ispunjen uslov

$$\text{(I)}\quad D\left(\frac{F_1F_2}{p,x}\right) - D\left(\frac{F_1F_2}{q,y}\right) = 0$$

onda se, kada je to moguće, potpuni integral jednačine $F(x,y,z,p,q) = 0$ dobija eliminacijom p i q iz jednačina $F(x,y,z,p,q) = 0$, $\;Fi(x,y,z,p,q) = C_i$, $(i=1,2)$.

1. Data je jednačina $xp + yq = 0$ (1)

a/ Naći opšte rešenje jednačine (1);

b/ Naći rešenje koje zadovoljava početni uslov $z = y^2 e^y$ za $x = 1$;

c/ Izmedju funkcija koje zadovoljavaju jednačinu (1) naći one koje zadovoljavaju i jednačinu

$$p^2 + q^2 = \frac{a^2 y^4}{(x^2+y^2)^3}$$

__Rešenje.__ a/ Jednačina $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$ koja odgovara jednačini (1) razdvaja promenljive. Njeno rešenje je $\frac{x}{y} = C$, a opšte rešenje jednačine (1) je $z = F\left(\frac{x}{y}\right)$.

b/ Kako je $\frac{x}{y} = \Psi(x,y)$, to je $\frac{1}{y} = \bar{\Psi}$, odnosno $y = \frac{1}{\Psi}$

Traženo rešenje je $z = \frac{1}{\Psi^2} e^{\frac{1}{\Psi}}$, tj. $z = \frac{y^2}{x^2} e^{\frac{y}{x}}$

c/ Stavimo $\frac{x}{y} = t$. Kako je

$$p = \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = F'_t \cdot \frac{1}{y};\quad q = \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y} = F'_t \cdot \frac{-x}{y^2},$$

to je $p^2 + q^2 = (F'_t)^2 \cdot \left(\frac{1}{y^2} + \frac{x^2}{y^4}\right) = (F'_t)^2\,\frac{x^2+y^2}{y^4} = \frac{a^2y^4}{(x^2+y^2)^3}$;

odnosno $\left(F'_t\right)^2 = \frac{a^2y^8}{(x^2+y^2)^4} = \frac{a^2}{(t^2+1)^4}$, Dakle je,

$$F(t) = \pm a\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \pm \frac{at}{2(t^2+1)} \pm \frac{a}{2}\,\mathrm{arctg}\,t + C, \text{ tj.}$$

$$z = F\left(\frac{x}{y}\right) = \pm \frac{axy}{x^2+y^2} \pm \frac{a}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{y} + C.$$

2. Naći opšte rešenje jednačine $-x^2\frac{\partial u}{\partial x} + (xy - 2z^2)\frac{\partial u}{\partial y} + xz\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ i Cauchy-eve integrale koji odgovaraju početnim uslovima:

a/ $u = -y$; $x = 1$; b/ $u = e^x + xy + 1$; $z = 1$,

__Rešenje.__ Datoj jednačini odgovara sistem $\frac{dx}{-x^2} = \frac{dy}{xy-2z^2} = \frac{dz}{xz}$.

Iz $\frac{dx}{-x^2} = \frac{dz}{xz}$ sleduje $\frac{dx}{-x} = \frac{dz}{z}$, odnosno $xz = C_1$. Kako je

$\frac{ydx + xdy}{-x^2y + x^2y - 2xz^2} = \frac{dz}{xz}$, to je $d(xy + z^2) = 0$, odnosno

$xy + z^2 = C_2$.

a/ Rešavajući sistem $Z = \bar{\Psi}_1$; $Y + \bar{\Psi}_1^2 = \bar{\Psi}_2$ po Y i Z dobija se $Y = \bar{\Psi}_2 - \bar{\Psi}_1^2$; $Z = \bar{\Psi}_1$.

Traženo rešenje glasi: $U = -\Psi_2 + \Psi_1^2 = (x^2-1)z^2 - xy$.

b/ Rešavajući sistem $x = \bar{\Psi}_1$; $yx + 1 = \bar{\Psi}_2$ po x i y dobija se $x = \bar{\Psi}_1$; $y = \frac{\bar{\Psi}_2 - 1}{\bar{\Psi}_1}$. Traženo rešenje glasi:

$$U = e^{\Psi_1} + \Psi_1 \frac{\Psi_2 - 1}{\Psi_1} + 1 = e^{xz} + xy + z^2.$$

3. Naći jednačinu površi (S) koja je normalna na sferu $x^2+y^2+z^2 = ax$ i sadrži pravu $y = x$; $z = b$.

Rešenje. Neka je $z = z(x,y)$ jednačina površi (S). Vektor normalan na površ (S) je $\vec{N}\{p, q, -1\}$. Neka je $\vec{N}_1\{p_1, q_1, -1\}$ vektor normalan na sferu $x^2+y^2+z^2 = ax$. Kako su vektori $\vec{N}$ i $\vec{N}_1$ prema uslovu zadatka medjusobno normalni, to je njihov skalarni proizvod jednak nuli, tj. $pp_1 + qq_1 + 1 = 0$.

Pošto je $p_1 = \frac{y^2 + z^2 - x^2}{2zx}$, $q_1 = -\frac{y}{z}$, skalarni proizvod $\vec{N} \cdot \vec{N}_1 = 0$ postaje $\frac{y^2 + z^2 - x^2}{2xz} p - \frac{y}{z} q + 1 = 0$, pa je odgovarajuća parcijalna jednačina $\frac{y^2 + z^2 - x^2}{2x} p - yq = -z$. Iz sistema $\frac{2x\,dx}{y^2 + z^2 - x^2} = \frac{dy}{-y} = \frac{dz}{-z}$ dobija se $\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$, odnosno $\frac{y}{z} = C_1$ kao i $\frac{2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz}{-(x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{dz}{-z}$, tj.

$\frac{d(x^2 + y^2 + z^2)}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{dz}{z}$ i najzad $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{z} = C_2$. Opšte rešenje je $F\left(\frac{y}{z} ; \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z}\right) = 0$.

Za $z = b$, prvi integrali postaju $\frac{y}{b} = \bar{\Psi}_1$ $\frac{x^2 + y^2 + b^2}{b} = \bar{\Psi}_2$.

Odatle je $y = b\bar{\Psi}_1$, $x = \pm\sqrt{b\bar{\Psi}_2 - b^2\Psi_1^2 - b^2}$. Smenjujući nadjene vrednosti za x i y u izraz $y = x$, posle sredjivanja, dobijamo $z(x^2 + y^2 + z^2) = (2y^2 + z^2)\,b$.

4. $z\,dx + x^2\,dy + y^3\,dz = 0$

Rešenje. Kako je $\begin{vmatrix} z & x^2 & y^3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & x^2 & y^3 \end{vmatrix} = 3y^2z + x^2 + 2xy^3 \neq 0$

to data Pfaff-ova jednačina nije integrabilna.

5. $(e^{xy}y + \sin 2x)dx + (e^{xy}x - 2yz)dy - y^2dz = 0$

Rešenje. Uslov intergrabilnosti je zadovoljen i pri tome je $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, te je rešenje date parcijalne jednačine dato obrascem $\int_{x_0}^{x} P(x,y,z)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y,z)dy + \int_{z_0}^{z} R(x_0,y_0,z)dz = C$ koji sada daje

$$\int_0^x (e^{xy}y + \sin 2x)dx - 2z\int_0^y y\,dy + \int_0^z 0\,dz = C, \text{ tj.}$$

$$e^{xy} + \sin^2 x - y^2 z = 0.$$

6. $(2x^2y+1)dx + x^3dy + x\,\mathrm{tg}\,z\,dz = 0$

Rešenje. Ako se stavi $z = \mathrm{const}$, onda zbog $dz = 0$ data parcijalna jednačina postaje obična diferencijalna jednačina $(2x^2y+1)dx + x^3dy = 0$ čije je rešenje (vidi uvod) $x^2y + \ln|x| = C(z)$. Dalje, redom sleduje

$$\frac{2xy + \frac{1}{x}}{2x^2y+1} = \frac{-c'(z)}{x\,\mathrm{tg}\,z};$$

$c'(z) = -\mathrm{tg}\,z$; $c(z) = \ln|\cos z| + c$; $x^2y + \ln\left|\frac{x}{\cos z}\right| = C$.

7. Naći potpuni integral jednačine $z = pq$ i njena partikularna rešenja koja zadovoljavaju uslove

a/ $x = 0$, $z = y$; b/ $x = 0$, $z = y^2$.

Rešenje. Jedan prvi integral odgovarajućeg sistema običnih diferencijalnih jednačina za jednačinu $z = pq$ je $p = C_1q$. Sistem jednačina $z = pq$; $p = C_1q$; po p i q ima rešenje

$p = \sqrt{C_1 q}$, $q = \sqrt{\frac{z}{C_1}}$, te se iz $dz = \sqrt{C_1 z}\,dx + \sqrt{\frac{z}{C_1}}\,y$ dobija potpuni integral $2\sqrt{z} = \sqrt{C_1}x + \frac{y}{\sqrt{C_1}} + C_2$ date jednačine.

a/ Iz sistema jednačina $2\sqrt{y} = \frac{y}{\sqrt{C_1}} + C_2$; $\frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{C_1}}$ dobija se $C_1 = y$; $C_2 = \sqrt{y}$ te je $C_2 = \sqrt{C_1}$. Eliminacija parametra C_1 iz sistema $2\sqrt{z} - \sqrt{C_1}x + \frac{y}{\sqrt{C_1}} + \sqrt{C_1}$;

$0 = \frac{x}{2\sqrt{C_1}} - \frac{y}{2C_1\sqrt{C_1}} + \frac{1}{2\sqrt{C_1}}$ dovodi do traženog Cauchy-evog integrala $z = (x+1)y$.

b/ Iz sistema jednačine $2y = \frac{y}{\sqrt{C_1}} + C_2$, $2 = \frac{1}{\sqrt{C_1}}$ dobija se $C_1 = \frac{1}{4}$; $C_2 = 0$. Zamenom ovih vrednosti u jednačinu $2\sqrt{Z} = \sqrt{C_1}x + \frac{y}{\sqrt{C_1}} + C_2$ i sredjivanjem dobija se traženi Cauchy-ev integral $16Z = (x+4y)^2$.

Zadaci za vežbu

Naći opšte rešenje i odgovarajući partikularni integral sledećih jednačina

1. $xyp - 2y^2q = x$; $x = a$; $2a^2yz = a^3 + 3$.
Rezultat. $F(yx^2x^3 - 2x^2yz) = 0$; $2x^2yz = x^3 + 3$.

2. $(y + xz)p + (x+yz)q = 1-z^2$; $z = 3$, $e^{2(x+y)} = \sin 4(x-y)$.
Rezultat. $F\left[(x+y)(z-1),(x-y)(z+1)\right] = 0$;
$e^{(x+y)(z-1)} = \sin(x-y)(z+1)$.

3. $xzp + yzq = -xy$; $xy = a^2$, $z = b$.
Rezultat. $F\left(\frac{x}{y}, xy + z^2\right) = 0$; $xy + z^2 = a^2 + b^2$.

4. $xp + yq = 7z$; $x = 1$, $z = \arcsin y$.
Rezultat. $z = x^7 f\left(\frac{y}{x}\right)$; $z = x^7 \arcsin \frac{y}{x}$.

5. $(z-y)^2\frac{\partial u}{\partial x} + z\frac{\partial u}{\partial y} + y\frac{\partial u}{\partial z} = 0$, $x = 0$, $u = 2y(y-z)$.
Rezultat.
$U = F\left[y^2 - z^2, 2x + (z-y)^2\right]$; $u = 2\left[y(y-z) + x\right]$.

6. $xp - yq = 0$, $x = 1$, $z = y^2$.
Rezultat. $z = F(x\cdot y)$; $z = x^2y^2$.

7. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = u$; $x = a$, $u = k(y^3+z^3)a^2$.
Rezultat. $F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \frac{u}{x}\right) = 0$; $x^2u = k\left(y^3 + z^3\right)a^2$.

8. Naći jednačinu površi (S) koja je normalna na površ $xy = za$ i sadrži krug $x^2 + y^2 = b^2$, $z = 0$.
Rezultat. Parcijalna jednačina glasi $yzp + xzq = -xy$. Opšti integral je $F(x^2-y^2, x^2+z^2) = 0$. Traženi Cauchy-ev integral je $x^2 + y^2 + 2z^2 = b^2 + 2c^2$.

9. Naći jednačinu cilindrične površi (S) čije su generatrise paralelne vektoru $\vec{v} = \{1,2,3\}$, a direktrisa je data jednačinama $x + y + z = 1$; $(x-1)^2 + y^2 = a^2$.
Rezultat. Parcijalna jednačina glasi $\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} + 3\frac{\partial u}{\partial z} = 0$.
Opšti integral je $u = F(2x-y; 3x-z)$. Parametarske jednačine direktrise su $x = a\cos t + 1$, $y = a\sin t$, $z = -a\cos t - a\sin t$.
Traženi Cauchy-ev integral je
$(5x - y - z - 5)^2 + 4(2y - x - z + 1)^2 = 36a^2$.

Rešiti sledeće jednačine

10. $2(y+z+1)dx - (x+z+2)dy + (2y-x+z)dz = 0$.
Rezultat. $2x(y+z+1) - y(z+2) + \frac{z^2}{2} = 0$.

11. $yzdx + (xz - yz^3)dy - 2xydz = 0$.
Rezultat. Ako se stavi $y = const$, onda se zbog $dy = 0$ dobija $yzdx = 2xydz$, odnosno $\ln x - \ln z^2 = \ln\varphi(y)$ tj.
$\frac{x}{z^2} = \varphi(y)$. Iz proporcije

$$\frac{\frac{1}{z^2}}{yz} = \frac{\frac{-2x}{z^3}}{-2xy} = \frac{-\varphi'(y)}{xz - yz^3}$$ sleduje $1 - \frac{\frac{x}{z^2}}{y} = \varphi'(y)$ ili zbog

$\frac{x}{z^2} = \varphi'(y)$; $1 - \frac{\varphi(y)}{y} = \varphi'(y)$, $\varphi'(y) + \frac{1}{y}\varphi(y) = 1$ te je

$\varphi(y) = \frac{c}{y} + \frac{y}{2}$, odnosno $\frac{c}{y} + \frac{y}{2} = \frac{x}{z^2}$, što predstavlja

rešenje date jednačine.

12. $z^2y^2dx + z^2x^2dy - x^2y^2dz = 0$

Rezultat. Posle deljenja sa $x^2y^2z^2$ data jednačina postaje

$\frac{dx}{x^2} + \frac{dy}{y^2} - \frac{dz}{z^2} = 0$ odakle je $d\left(-\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 0$, te je

$-\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = C$ rešenje.

13. $(e^x z^2 + e^y - \sin x)dx + e^y x dy + 2ze^x dz = 0.$

Rezultat. Kako je $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$, rešenje se dobija po poznatoj formuli (vidi uvod) i glasi: $e^x z^2 + e^y x + \cos x = C$.

Naći potpune integrale sledećih jednačina

14. $p\ln q = K$.

Rezultat. Iz sistema $p\ln q = K$, $p = C_1$ dobija se redom $q = e^{\frac{K}{C_1}}$; $dz = C_1dx + e^{\frac{K}{C_1}}dy$; $z = C_1x + e^{\frac{K}{C_1}}y + C_2$.

15. $p^2 + q^2 = m^2$

Rezultat. Stavljajući $p = C_1$ iz date jednačine dobijamo $q = \pm\sqrt{m^2 - C_1^2}$, te je $dz = C_1dx \pm \sqrt{m^2 - C_1^2}\,dy$, odnosno $z = C_1x \pm \sqrt{m^2 - C_1^2}\,y + C_2$.

16. $p^2 - 3pq + q^2 = 4z$.

Rezultat. Stavljajući $p = C_1q$ iz date jednačine dobijamo

$q = \pm\frac{2\sqrt{z}}{\sqrt{C_1^2 - 3C_1 + 1}}$ te je $\frac{dz}{2\sqrt{z}} = \frac{\pm C_1}{\sqrt{C_1^2 - 3C_1 + 1}}dx \pm$

$\pm\frac{1}{\sqrt{C_1^2 - 3C_1 + 1}}dy$, odnosno $\pm\sqrt{(C_1^2 - 3C_1 + 1)z} = C_1x + y + C_2$.

17. $ap + bq = 1 + z^2$

Rezultat. Radeći kao u prethodnom zadatku dobijamo

$$z = \operatorname{tg}\left(\frac{C_1x + y}{aC_1 + b} + C_2\right).$$

18. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = x^2 + y^2$.

Rezultat. Iz $\frac{1}{p} - x^2 = y^2 - \frac{1}{q} = C$, dobija se $p = \frac{1}{C_1 + x^2}$,

$q = \frac{-1}{C_1 - y^2}$ te je $dz = \frac{dx}{C_1 + x^2} - \frac{dy}{C_1 - y^2}$, odnosno

$$z = \frac{1}{\sqrt{C_1}}\left\{\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{C_1}} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{C_1} + y}{\sqrt{C_1} - y}\right|\right\} + C_2.$$

PARCIJALNE DIFERENCIJALNE JEDNAČINE
- DRUGOG REDA -

1° Za funkciju $z = z(x,y)$ opšti oblik parcijalne jednačine drugog reda glasi:

$$F(x,y,z,p,q,r,s,t) = 0, \tag{1}$$

gde je

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial p}{\partial x}; \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}; \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial q}{\partial y}.$$

Ako se u (1) r,s,t, javljaju samo na prvom stepenu jednačina je linearna, u ostalim slučajevima je nelinearna.

Za funkciju $z = z(x,y)$ opšti oblik parcijalne jednačine drugog reda linearne po r,s,t, je: $Ar + 2Bs + Ct + D = 0$, gde su A,B,C funkcije od x,y, a D funkcija od z,x,y,p,q. Specijalno, koeficijenti A,B,C,D mogu biti konstante. Opšti integral jednačine (1) je funkcija $z = z(x,y)$ koja sadrži dve proizvoljne funkcije čija eliminacija daje jednačinu (1).

Potpuni integral jednačine (1) je funkcija $z = z(x,y)$ koja sadrži pet proizvoljnih konstanata čija eliminacija daje jednačinu (1).

Navedimo nekoliko primera.

Opšti integral jednačine (1) može biti u obliku dve jednačine u kojima se javljaju dve proizvoljne funkcije od promenljivog parametra.

Diferenciranjem x, odnosno po y eliminisati proizvoljne funkcije, odnosno konstante, iz sledećih funkcija.

1. $zf(y+ax)+\varphi(y-ax)$.

Rešenje. Diferenciranjem po x, odnosno po y daje redom

$p = af' - a\varphi'$; $q = f' + \varphi'$; $r = a^2f'' + a^2\varphi''$;

$s = af'' - a\varphi''$; $t = f'' + \varphi''$.

Iz date jednačine i ovih pet jednačina treba eliminisati $f, \varphi, f', \varphi', f'', \varphi''$. Kako je $\frac{r}{t} = \frac{a^2(f''+\varphi'')}{f''+\varphi''} = a^2$, to parcijalna jednačina, čiji je opšti integral funkcija $z = f(y+ax)+\varphi(y-ax)$, glasi $r - a^2t = 0$.

2. $z = C_1x + C_2y + C_3x^2 + C_4xy + \frac{C_3}{a^2}y^2 + C_5$, gde su C_i

($i=1,2,3,4,5.$) proizvoljne konstante, a a^2 stalni koeficijent.

Rešenje. Diferenciranje po x i y daje redom:

$p = C_1 + 2C_3x + C_4y$; $q = C_2+C_4x+ 2\frac{C_3}{a^2}y$; $r = 2C_0$;

$s = C_3$; $t = 2\frac{C_3}{a^2}$. Kako je $r:t = 2C_3 : \frac{2C_3}{a^2} = a^2$, to je

$r - a^2t = 0$ parcijalna jednačina čiji je potpuni integral data funkcija.

U sledećim zadacima, postupajući kao dosad eliminacijom proizvoljnih funkcija, odnosno konstanata, doći do parcijalne jednačine za datu funkciju.

1. $Z = C_1 + C_2x + C_3y + C_4(x^2 + y^2) + C_5xy$.

Rezultat. $r - t = 0$.

2. $Z = f(x+y) + \varphi(x-y)$.

Rezultat $r - t = 0$.

3. $Z = f(x+y)\cdot\varphi(x-y)$.

Rezultat. $p^2 - q^2 = (r-t)z$.

4. $z = \sqrt{\frac{x}{y}}\, f(x\cdot y) + \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Rezultat. $x^2r - y^2t - 2yq = 0$.

5. $z = f(y-x-\cos x)+\varphi(y+x-\cos x)$.

Rezultat. $r - 2s\sin x - t\cos^2x - q\cos x = 0$.

6. $z = xf(x+y)+\varphi(x+y)$.

Rezultat. $r = 2s - t$.

7. $z = f(x^2+y^2)+\varphi(x+y)$.

Rezultat. $ry = \frac{p-q}{x-y}(x+y)+s(x+y)-tx$.

8. $z = e^{xy}\left[\varphi_1(x)\sin xy + \varphi_2(x)\cos xy\right]$.

Rezultat. $t - 2xq - 2x^2z = 0$.

9. $z = f(3x-y) + \varphi(x+y)$.

Rezultat. $r + 2s - 3t = 0$.

10. $z = -\frac{5}{24}x^4 + \frac{1}{6}x^3y + f(3x+y)+\varphi(2x+y)$.

Rezultat. $r - 5s + 6t = xy$.

2^0. Integracija parcijalnih diferencijalnih jednačina drugog reda svodjenjem na obične diferencijalne jednačine.

Parcijalne jednačine (1)

$F(x,y,z,p,r) = 0$ (2)

$\phi(x,y,z,q,t) = 0$

mogu se integraliti kao obične diferencijalne jednačine. Jednačina (1) sadrži samo izvode $\frac{\partial z}{\partial x}$ i $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ te se y može smatrati kao konstanta, a jednačina (2) samo izvode $\frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ te se x može smatrati kao konstanta.

Zbog toga opšti integral jednačine (1) sadrži proizvoljne funkcije od y, a jednačine (2) proizvoljne funkcije od x.

1. Naći rešenje jednačine $xt+(z-xq)(3^x-\ln x) = q$, koja zadovoljava početne uslove

$z(x;1) = \frac{1}{x} + x^2 e^{\frac{1}{x}}$; $z'_y(x;1) = \frac{3^x - \ln x}{x} + xe^{\frac{1}{x}}$.

Rešenje. Data jednačina može se napisati u obliku

$$t - \left(3^x - \ln x + \frac{1}{x}\right) q + \frac{3^x - \ln x}{x} z = 0,$$ i zato

njena karakteristična jednačina glasi:

$\lambda^2 - \left(3^x - \ln x + \frac{1}{x}\right)\lambda + \frac{3^x \ln x}{x} = 0$. Njena rešenja su $\lambda_1 = a^x - \ln x$; $\lambda_2 = \frac{1}{x}$. Opšte rešenje date jednačine je: $z = \varphi_1(x)\frac{e^{3x}}{x^y} + \varphi_2(x)\cdot e^{\frac{y}{x}}$.

Rešavajući sistem

$z(x;1) \equiv \varphi_1(x)\frac{e^{3x}}{y} + \varphi_2(x)e^{\frac{1}{x}} \equiv \frac{1}{x} + x^2 e^{\frac{1}{x}}$

$z'_y(x;1) \equiv \varphi_1(x)e^{3x}\frac{3^x \ln x}{x} + \varphi_2(x)\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \equiv \frac{3^x - \ln x}{x} + xe^{\frac{1}{x}}$.

dobija se $\varphi_1(x) = e^{-3x}$; $\varphi_2(x) = x^2$ te je traženo partikularno rešenje $z(x,y) = e^{3x}\cdot\frac{y-1}{x^y} + x^2 e^{\frac{y}{x}}$.

2. Naći opšte rešenje jednačine $s+2xyp = 0$.

Rešenje. Data jednačina se, uzimajući x za konstantu, može napisati u obliku $\frac{dp}{dy} + xyp = 0$, te je

$P(x,y) = \varphi_1(x)e^{-xyz}$, odnosno $z(x,y) = \int \varphi_1(x)e^{-xy^2}dx + \varphi_2(y)$

što predstavlja opšte rešenje date jednačine.

Naći opšte rešenje sledećih jednačina:

1. $t + (z\ln x - 2q)\ln x + z\ln^2(\sin x) = 0$.

Rezultat.

$z(x;y) = x^y\{\varphi_1(x)\sin[y\ln(\sin x)] + \varphi_2(x)\cos[y\ln(\sin x)]\}$.

2. $x^2r + 3xp + 5zy = 0$.

Rezultat. $Z(x;y) = \frac{1}{x}[\varphi_1(y)\cos(2\ln x) + \varphi_2(y)\sin(2\ln x)]$.

3. $x^2r + 2xp - 6z = 0$.

Rezultat. $Z(x;y) = \varphi_1(x)\cdot x^2 + \frac{\varphi_2(y)}{x^3}$.

4. $4y^2t + z = 0$.

Rezultat. $Z(x;y) = y^{\frac{1}{2}}[\varphi_1(x) + \varphi_2(x)\ln y]$.

5. $t - 6xq + 10x^2z = 0$.

Rezultat. $Z(x;y) = e^{3xy}[\varphi_1(x)\cos xy + \varphi_2(x)\sin xy]$.

6. $xs - 3py^2 - 0$.

Rezultat. $z = \int \varphi_1(x)e^{\frac{y^3}{x}}dx + \varphi_2(y)$.

7. $(y-x^2)s+p = 0$.

Rezultat. $z = \int \frac{\varphi_1(x)}{y-x^2}dx + \varphi_2(y)$.

8. $sx\ln x - q = 0$.

Rezultat. $z = \frac{1}{\ln x}\int \varphi_1(y)dy + \varphi_2(x)$.

9. $s\sin x - 2q\cos x = 0$.

Rezultat. $z = (\sin^2 x)\int \varphi_1(y)dy + \varphi_2(x)$.

3°. Integracija parcijalnih diferencijalnih jednačina drugog reda svodjenjem na parcijalne diferencijalne jednačine prvog reda

To su jednačine oblika

$F(x,y,p,r,s) = 0$ i $\Phi(x,y,q,s,t) = 0$.

1. $xr + s = 0$.

Rešenje. Data jednačina može se napisati u obliku

$$x\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

Sistem običnih diferencijalnih jednačina u simetričnom obliku, koji odgovara datoj jednačini, je $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{1}$, a njegovo rešenje je $C = xe^{-y}$, te je $p = f'(x \cdot e^{-y})$, odnosno

$$z = \int f'(xe^{-y})dx + \varphi(y) = e^{y}\int f'(xe^{-y})d(xe^{-y}) +$$
$$+ \varphi(y) = e^{y}f(xe^{-y}) + \varphi(y).$$

2. $2sy + t = 0$. Data jednačina može se pisati i ovako:

$2\frac{\partial q}{\partial x}y + \frac{\partial q}{\partial y} = 0$. Odgovarajući sistem $\frac{dx}{2y} = \frac{dy}{1}$ ima rešenje $x - y^2 = C$, te je $q = f(x-y^2)$, odakle je $z = \int f(x-y^2)dy + \varphi(x)$.

Zadaci

1. $xr\cos y - s\sin y = 0$.

   Rezultat. $z = \frac{f(x\sin y)}{\sin y} + \varphi(y)$.

2. $xr - 2ys = 0$.

   Rezultat. $z = \int f(x^2y)dx + \varphi(y)$.

3. Naći opšte rešenje jednačine $r - 2s = pu$ i partikularno rešenje koje zadovoljava uslove

   $z(x;\, 0) = \frac{e^{3x}}{3}$, $z'_y(0;\, y) = \frac{e^y}{3} + \cos y$.

   Rezultat.

   $z = \int e^x f(2x+y)dx + \varphi(y)$; $z = \frac{e^{3x+y}}{3} + \sin y$.

4°. Integracija parcijalnih jednačina drugog reda svodjenjem na tačan izvod

Ako se parcijalna jednačina drugog reda može napisati kao tačan izvod, onda se lako integrali.

Primer. Rešiti jednačinu $xrq = (q+xs)(p-1)$.

Rešenje. Data jednačina može se napisati u obliku

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\frac{p-1}{q}\right) = \frac{1}{x}$, odakle je $\frac{p-1}{q} = \frac{x}{\varphi'(y)}$ odnosno $\frac{p}{x} - \frac{q}{\varphi'(y)} = \frac{1}{x}$.

Iz sistema $xdx = -\varphi'(y)dy = xdz$ sleduje $z - x = C_1$, $\frac{x^2}{2} + \varphi(y) = C_2$

tj. $z = x + f\left(\frac{x^2}{2} + \varphi(y)\right)$.

Primer Rešiti jednačinu $r + s = p$

Rešenje. Data jednačina može se pisati u obliku

$\frac{\partial}{\partial x}(p + q - z) = 0$, te je $p + q = z + \varphi(y)$, odakle je

$dx = dy = \frac{dz}{z+\varphi(y)}$.

Prvi integrali ovog sistema su $x - y = C_1$;

$z = e^y\left[C_2 + \int e^{-y}\varphi(y)dy\right]$. Opšti integral date jednačine je

$z = f(x-y)e^y + e^y\int\frac{\varphi(y)}{e^y}dy$, jer je $C_2 = f(C_1)$.

Zadaci

Rešiti jednačine

1. $sz = (p - x^2)q$.

   Rezultat. $z = e^{\int\varphi(x)dx}\left\{\psi(y) + \int x^2 e^{-\int\varphi(x)dx}dx\right\}$.

2. $3p^2rq - 2s(p^3 + 2) = 0$.

   Rezultat. Opšti integral dat je sistemom jednačina

   $z = Cx \pm \sqrt{C^3 + 2}\;\varphi(y) + f(C)$,

   $0 = x \pm \frac{3C^2}{2\sqrt{C^3 + 2}}\varphi(y) + f'(C)$.

3. $2ry = q + x\varphi$

   Rezultat. $z = F\int\frac{\varphi(y)dy}{\sqrt{C_1 - 2y^2}} + f(x^2+2y^2)$.

   Opšti integral dat je sistemom jednačina

   $z = \pm\sqrt{1 + C^2}\;\varphi(x) + Cy + f(C)$,

   $0 = \pm\frac{C\varphi(x)}{\sqrt{1+C^2}} + y + f'(C)$.

5°. Integracija parcijalnih diferencijalnih jednačina drugog reda grupisanjem članova

Ova metoda slična je prethodnoj. U datoj jednačini prethodno se grupišu pojedini članovi da se dobiju tačni izvodi po x i y, a zatim se uvode smene, koje svode datu jednačinu na parcijalnu jednačinu prvog reda.

Primer 1.

Rešiti jednačinu $r - a^2t = 0$. To je jednačina žice koja treperi.

Rešenje. Može se pisati redom: $r - as + as - a^2t = 0$

$$\frac{\partial}{\partial x}(p - aq) + a\frac{\partial}{\partial y}(p - aq) = 0; \quad p - aq = U$$

$\frac{\partial U}{\partial x} + a\frac{\partial U}{\partial y} = 0$. Opšte rešenje poslednje parcijalne jednačine prvog reda je $u = f(y-ax)$, te je $p - aq = f(y-ax)$, odakle je $dx = -\frac{dy}{a} = \frac{dz}{f(y-ax)}$. Jedan prvi integral ovog sistema je $y + ax = C_1$ što se $dx = \frac{dz}{f(y-ax)}$ daje $dx = \frac{dz}{f(C_1-2ax)}$, tj. $z = \int f(C_1-2ax)dx + C_2 = \varphi(C_1-2ax) + C_2$. Kako je $C_2 = \psi(C_1)$, opšti integral date jednačine glasi

$$z = \varphi(y-ax) + \psi(y+ax).$$

Rešiti sledeće zadatke:

1. $x^2r + 2xys + y^2t = 0$.

Rezultat. Smena $U = xp+yq \cdot z = f\left(\frac{y}{x}\right)y + \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

2. $r + 14s + 49t = x - y$.

Rezultat. Smena $U = p + 7q$

$$Z(x;\ y) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2y + xf(7x - y) + \varphi(7x-y).$$

3. $r + 4s + 4t = x + y$.

Rezultat. Smena $U = p + 2q$

$$Z(x;\ y) = -\frac{x^3}{2} + \frac{1}{2}x^2y + xf(2x-y) + \varphi(2x-y).$$

4. $r + y = t + x$.

Rezultat. Smena $U = p + q$

$$z = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \cdot y + \frac{1}{2}\varphi_1(x+y) + \varphi_2(x-y).$$

Linearna jednačina $Ar + 2Bs + Ct + D = 0$, sa konstantnim koeficijentima A, B, C, D može se rešiti grupisanjem članova. To će biti prikazano na sledećem primeru.

Primer

Rešiti jednačinu $3r-5s+2t+4 = 0$.

Rešenje. Stavljajući da je $-(m_1+m_2) = \frac{-5}{3}$, $m_1 \cdot m_2 = \frac{2}{3}$ dobija se

$$r - (m_1+m_2)s + m_1 \cdot m_2 t + \frac{4}{3} = 0. \qquad (1)$$

Brojevi $m_{1,2}$ su rešenja kvadratne jednačine $m^2 - \frac{5}{3}m + \frac{2}{3} = 0$, odnosno $3m^2 - 5m + 2 = 0$. Njihove vrednosti su $m_1 = 1$, $m_2 = \frac{2}{3}$. (1) može se pisati u obliku $(r-m_1s) - m_2(s-m_1t) + \frac{4}{3} = 0$, odnosno $(r-s) - \frac{2}{3}(s-t) + 4 = 0$ ili $3(r-s) - 2(s-t) + 4 = 0$, tj.

$3\frac{\partial(p-q)}{\partial x} - 2\frac{\partial(p-q)}{\partial y} = -4$, a posle smene $U = p-q$ i ovako

$3\frac{\partial U}{\partial x} - 2\frac{\partial U}{\partial y} = -4$ što predstavlja parcijalnu jednačinu prvog reda po $U = U(x,y)$.

Prvi integrali poslednje jednačine su $2x+3y=C_1$ i $U + \frac{4}{3}x = C_2$, što sleduje iz sistema $\frac{dx}{3} = \frac{dy}{2} = \frac{d}{4}$. Dakle, opšte rešenje jednačine $3\frac{\partial U}{\partial x} - 2\frac{\partial U}{\partial y} = -4$ je $U = -\frac{4}{3} + f(2x+3y)$. Sada treba rešiti jednačinu $p - q = -\frac{4}{3}x + f(3x+3y)$.

Jedan prvi integral sistema

$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-1} = \frac{dz}{-\frac{4}{3}x + f(2x+3y)}$ je $x+y = C'$, što zajedno sa

$\frac{dx}{1} = \frac{dz}{-\frac{4}{3}x + f(2x+3y)}$ daje $\frac{dx}{1} = \frac{dz}{-\frac{4}{3}x + f(3C'-x)}$, odakle

se dobija $z = -\frac{2}{3}x^2 + \varphi(3C' - x) + C''$, što zbog $C'' = \psi(C')$

daje opšte rešenje $z = -\frac{2}{3}x^2 + \varphi(2x+3y) + \psi(x+y)$ polazne jednačine.

Zadatak

Rešiti jednačinu $2r + 5t + 2t = 7$.

Rezultat.

$$z = \frac{7}{4}x^2 + \frac{1}{3}\varphi(2x-y) + \psi(x-2y).$$

Žarko MIJAJLOVIĆ

SKE

DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

Neka je x_n opšti član realnog niza.

1° Operator konačne razlike Δ definisan je sa: $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$. Operator translacije E definisan je sa: $Ex_n = x_{n+1}$.

Zadaci: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14.

2° Diferencijske jednačine po nepoznatom nizu x_n su jednačine oblika $F(n, x_n, \Delta x_n, \Delta^2 x_n, \dots, \Delta^k x_n) = 0$ odnosno $G(n, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k}) = 0$. Za niz x_n kažemo da je <u>rešenje</u> ako zadovoljava odgovarajuću jednačinu.

3° Za rešavanje diferencijske jednačine oblika $\Delta^k x_n = a_n$ videti zadatke: 13, 15, 23, 24.

4° Diferencijsku jednačinu oblika $x_{n+1} = a_n x_n + b_n$ zovemo linearnom jednačinom prvog reda. Opšte rešenje je $x_n = a_0 a_1 \cdots a_{n-1}(x_0 + b_0/a_0 + b_1/(a_0 a_1) + \dots + b_n/(a_0 a_1 \cdots a_{n-1}))$. Zadaci: 28, 29, 30, 32.

5° Diferencijsku jednačinu $ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n = 0$, gde su a, b, c realne konstante, zovemo homogenom diferencijskom jednačinom drugog reda. Kvadratnu jednačinu $az^2 + bz + c = 0$ zovemo pridruženom karakterističnom jednačinom. Neka su u i v rešenja karakteristične jednačine. Tada je opšte rešenje oblika:

(i) $u \neq v$ $\quad x_n = c_1 u^n + c_2 v^n$, c_1, c_2 su proizvoljne realne konstante.

(ii) $u = v$ $\quad x_n = c_1 u^n + c_2 n v^n$. Zadaci: od 36 do 47.

1. Neka je $x_n = c$ za $n = 1,2,\ldots$ Naći Δx_n.

<u>Rešenje</u>. $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n = c - c = 0.$

2. Za nizove: a) $x_n = 2^n$; b) $x_n = a^n$, $a \neq 1$; naći Δx_n i Ex_n.

<u>Rešenje</u>.

a) $\Delta x_n = 2^{n+1} - 2^n = 2\cdot 2^n - 2^n = 2^n;$ $\quad Ex_n = x_{n+1} = 2^{n+1}$

b) $\Delta x_n = a^{n+1} - a^n = a^n(a-1);$ $\quad Ex_n = a^{n+1}$.

3. Za niz $x_n^{k} = n(n-1)\ldots(n-k+1)$ naći Δx_n.

<u>Rešenje</u>. $\Delta x_n^{k} = x_{n+1}^{k} - x_n^{k} = (n+1)n\ldots(n+1-k+1) - n(n-1)\ldots$
$\ldots(n-k+1) = n(n-1)\ldots(n-k+2)[n+1-(n-k+1)] = n(n-1)\ldots$
$\ldots(n-k+2)k = kx_{n+1}^{k-1}$. Otuda je $\Delta x_n = k\cdot x_{n+1}^{k}$.
Često se izraz $n(n-1)\ldots(n-k+1)$ obeležava sa $n^{(k)}$. Tada je $\Delta n^{(k)} = k\cdot n^{(k-1)}$. Primetimo da slična formula važi za izvod funkcije $f(x) = x^k$: $Df(x) = Dx^k = k\cdot x^{k-1}$.

4. Dokazati da su operatori Δ i E medjusobno komutativni.

<u>Rešenje</u>. Treba da se pokaže da je $\Delta E = E\Delta$, tj. da je za svaki niz x_n: $\Delta E x_n = E\Delta x_n$. Zaista $\Delta E x_n = \Delta x_{n+1} = x_{n+2} - x_{n+1} = E(x_{n+1} - x_n) = E\Delta x_n$, pa onda važi jednakost $\Delta E = E\Delta$.

5. Dokazati da je $E = 1 + \Delta$.

<u>Rešenje</u>. Prema definiciji operatora E, $Ex_n = x_{n+1}$ i prema definiciji operatora $1 + \Delta$ je $(1+\Delta)x_n = 1\cdot x_n + \Delta x_n = x_n + (x_{n+1} - x_n) = x_{n+1}$. Otuda $Ex_n = (1+\Delta)x_n$ za proizvoljni niz realnih brojeva, što znači da je $E = 1 + \Delta$.

6. Dokazati da je $\Delta = E-1$.

<u>Rešenje</u>. Ova jednakost može se dokazati na sličan način kao u zadatku 5. Medjutim, ako koristimo već dokazanu jednakost $E = \Delta + 1$, neposredno dobijamo $\Delta = E-1$.

7. Dokazati da je $\Delta^2 = E^2 - 2E + 1$.

<u>Rešenje</u>. $\Delta^2 = \Delta\cdot\Delta = (E-1)(E-1) = E^2 - E\cdot 1 - 1\cdot E + 1^2 = E^2 - 2E + 1.$

Proveriti i neposredno gornju jednakost, tj. da je za svaki niz x_n: $\Delta^2 x_n = (E^2 - 2E + 1)x_n$.

8. Dokazati da je za proizvoljna dva niza x_n i y_n:

a) $\Delta(c_1 x_n + c_2 y_n) = c_1 \Delta x_n + c_2 \Delta y_n$,

b) $E(c_1 x_n + c_2 y_n) = c_1 Ex_n + c_2 Ey_n$.

<u>Rešenje</u>.

a) $\Delta(c_1 x_n + c_2 y_n) = c_1 x_{n+1} + c_2 y_{n+1} - (c_1 x_n + c_2 y_n) =$
$= c_1(x_{n+1} - x_n) + c_2(y_{n+1} - y_n) = c_1 \Delta x_n + c_2 \Delta y_n$.

b) $E(c_1 x_n + c_2 y_n) = c_1 x_{n+1} + c_2 y_{n+1} = c_1 Ex_n + c_2 Ey_n$.

Zbog gornjih osobina, operatore Δ i E nazivamo <u>linearnim</u>.

9. Izraziti operator: a) Δ preko $E, E^2, \ldots, E^k$; b) E^k preko $\Delta, \Delta^2, \ldots, \Delta^k$.

<u>Rešenje.</u> a) Prema zadatku 6. $\Delta = E-1$. Primenjujući binomnu formulu imamo: $\Delta^k = (E-1)^k = \sum_{r=0}^{k}(-1)^{k-r}\binom{k}{r}E^r = (-1)^k + (-1)^{k-1}kE + (-1)^{k-2}\cdot\frac{k(k-1)}{2}\cdot E^2 + \ldots\, E^k$.

b) Slično kao pod a) nalazimo da je $E^k = \sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}\Delta^r$.

10. Dokazati da je a) $y_0 = \sum_{r=0}^{k}(-1)^{k-r}\binom{k}{r}y_r$; b) $y_k = \sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}\Delta^r y_0$.

<u>Rešenje</u>: Prema zadatku 9. imamo da je

a) $\Delta^k y_0 = \sum_{K=0}^{r}(-1)^{k-r}\binom{k}{r}E^r y_0 = \sum_{K=0}^{r}(-1)^{k-r}\binom{k}{r}y_r$;

b) $y_k = E^k y_0 = \sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}\Delta^2 y_0$.

11. Za niz $x_n = an+b$ naći Δx_n; $\Delta^2 x_n$; $\Delta^3 x_n, \ldots, \Delta^k x_n$.

<u>Rešenje</u>. $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n = a(n+1) + b - (an+b) = a$;

$\Delta^2 x_n = \Delta(\Delta x_n) = \Delta a = a - a = 0$;

$\Delta^2 x_n = \Delta(\Delta^2 x_n) = \Delta 0 = 0$.

Primetimo, da ako je $\Delta^k x_n = 0$, da je onda i $\Delta^{k+1} x_n = 0$, te je u našem slučaju, pošto je $\Delta^3 x_n = 0$; $\Delta^4 x_n = 0$; $\Delta^5 x_n = 0, \ldots$.

12. Dokazati da je $\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = x_n - x_0$.

<u>Rešenje</u>. $\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \Delta x_0 + \Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_{n-1} =$

$= (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \ldots + (x_n - x_o) =$

$= x_n - x_0$.

Primetimo da je prethodna formula analogna formuli integralnog računa: $\int_{t_0}^{t_n} x(t)dt = x(t_n) - x(t_0)$.

13. Za dati niz a_k, $k = 0,1,2,\ldots$ rešiti diferencijsku jednačinu $\Delta x_k = a_k$.

<u>Rešenje</u>. Prema zadatku 12. imamo da je $\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$ odnosno $x_n - x_0 = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$. Otuda je $x_n = x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a_k$. Primetimo da x_0 može biti bilo koji realan broj. Gornji proces dobijanja rešenja x_n naziva se konačnom integracijom.

14. Dokazati da je $\sum_{i=0}^{n-1} u_i \Delta v_i = u_n v_n - u_0 v_0 - \sum_{i=0}^{n-1} v_{i+1} \Delta u_i$.

<u>Rešenje</u>. Kako je $u_i \Delta v_i = u_i(v_{i+1} - v_i) = u_i v_{i+1} - u_i v_i =$

$= u_{i+1} v_{i+1} - u_i v_i - v_{i+1}(u_{i+1} - u_i) = (u_i v_i) - v_{i+1} \Delta u_i$, to onda imamo $\sum_{i=0}^{n-1} u_i \Delta v_i = \sum_{i=0}^{n-1} [\Delta(u_i v_i) - v_{i+1} \Delta u_i] = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta(u_i v_i) -$

$- \sum_{i=0}^{n-1} v_{i+1} \Delta u_i = u_n v_n - u_0 v_0 - \sum_{i=0}^{n-1} v_{i+1} \Delta u_i$. Primetimo da je prethodna formula analogna rezultatu iz integralnog računa: $\int_{t_0}^{t_n} u(t)dv(t) = u(t_n)v(t_n) - u(t_0)v(t_0) - \int_{t_0}^{t_n} v(t)du(t)$.

Prema prethodnim zadacima vidimo da je operator analogan [illegible] diferenciranja D, a sumiranje Σ integraljenju $\int$ [illegible].

15. Rešiti diferencijsku jednačinu $\Delta^2 x_r = a_r$; $r = 0,1,2,\ldots$.

<u>Rešenje</u>. $\sum_{r=0}^{k-1} \Delta^2 x_r = \sum_{r=0}^{k-1} a_r$. Dalje $\sum_{r=0}^{k-1} \Delta^2 x_r = \sum_{r=0}^{k-1} \Delta(\Delta x_r) =$

$= \Delta x_k - \Delta x_0 = \Delta x_k - c_0$ (sa c_0 smo označili Δx_0).

Otuda je $\Delta x_k = c_0 + \sum_{r=0}^{k-1} a_r$. Ako još jednom primenimo sumiranje dobijamo $\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} (c_0 + \sum_{r=0}^{k-1} a_r) = \sum_{k=0}^{n-1} c_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{r=0}^{k-1} a_r =$

$= nc_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{r=0}^{k-1} a_r$, te je $x_n - x_0 = nc_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{r=0}^{k-1} a_r$. Ako označimo sa c_1 broj x_0 imamo $x_n = c_1 + nc_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{r=0}^{k-1} a_r = c_1 + nc_0 + a_0 +$

$+ (a_0 + a_1) + (a_0 + a_1 + a_2) + \ldots + (a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-2})$. Ovde smo uzeli da je $\sum_{r=0}^{-1} a_r \overset{\text{def.}}{=} 0$. Primetimo da smo gornje rešenje mogli da napišemo u obliku: $x_n = c_1 + nc_0 + (n-1)a_0 + (n-2)a_1 + \ldots + 2a_{n-3} + a_{n-2}$.

Na sličan način, uzastopnom primenom konačnog integraljenja rešili bismo i jednačinu $\Delta^k x_n = a_n$.

16. Nači sledeće zbirove

a) $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}$; b) $\sum_{r=0}^{n-1} a^r = 1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1}$;

c) $\sum_{r=0}^{n-1} r^{(k)}$; d) $\sum_{r=0}^{n-1} r$.

<u>Rešenje</u>. a) Prema zadatku 2. $\Delta 2^k = 2^k$. Otuda je $\sum_{k=0}^{n-1} \Delta 2^k = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k$ pa prema zadatku 12. dobija se $\sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n - 2^0 =$
$= 2^n - 1$.

b) $\Delta a^k = (a-1)a^k$; $\sum_{k=0}^{n-1} \Delta a^k = \sum_{k=0}^{n-1} (a-1)a^k = (a-1)\sum_{k=0}^{n-1} a^k$.
Kako je $\sum_{k=0}^{n-1} \Delta a^k = a^n - a^0 = a^n - 1$, to je $\sum_{k=0}^{n-1} a^k = \frac{a^n - 1}{a - 1}$.

c) $\Delta r^{(k+1)} = (k+1)r^k$; $\sum_{r=0}^{n-1} \Delta r^{(k+1)} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) r^{(k)} = (k+1) \sum_{r=0}^{n-1} r^{(k)}$.
Otuda je, zbog $\sum_{k=0}^{n-1} \Delta r^{(k)} = n^{k+1} - 0^{k+1} = n^{k+1}$, $\sum_{r=0}^{n-1} r^{(k)} = \frac{n^{(k+1)}}{k+1}$.

d) Koristiti $\Delta k^2 = 2k + 1$; $\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n^2 - n}{2}$.

17. Dokazati da je $\sum_{k=0}^{n-1} (ax_k + by_k) = a \sum_{k=0}^{n-1} x_k + b \sum_{k=0}^{n-1} y_k$.

18. Naći zbirove:

a) $\sum_{k=0}^{n-1} \cos(kx + x/2)$; b) $\sum_{k=0}^{n-1} \sin(kx + x/2)$; c) $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)}$.

<u>Rešenje</u>. a) $\Delta \sin(kx) = 2\sin(x/2)\cos(kx + x/2)$; $\sum_{k=0}^{n-1} \cos(kx + x/2) = \frac{\sin(nx)}{2\sin(x/2)}$; b) $\Delta \cos(kx) = -2\sin(x/2)\sin(kx + x/2)$,
$\sum_{k=0}^{n-1} \sin(kx + x/2) = \frac{1 - \cos(nx)}{2\sin(x/2)}$; c) $\Delta 1/k = -\frac{1}{k(k+1)}$,
$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n-1} -\Delta 1/k = 1 - 1/n$.

19. Primenom operatora konačne razlike izračunati

a) $\sum_{k=0}^{n-1} ka^k$; b) $\sum_{k=0}^{\infty} ka^k$, $|a|<1$; c) $\sum_{k=0}^{n-1} k^2a^k$; d) $\sum_{k=0}^{\infty} k^2a^k$, $|a|<1$.

Rešenje. Ovde ćemo primeniti formulu iz zadatka 14.

a) Izaberimo $u_k=k$, $\Delta v_k=a^k$. Tada je $v_k = \frac{a^k}{a-1}$, $(a\neq 1)$ jedino moguće rešenje za v_k. Otuda je $\sum_{k=0}^{n-1} ka^k = \sum_{k=0}^{n-1} k\,\Delta a^k/(a-1) =$ $0\; na^n/(a-1) - 0a^0/(a-1) - \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1}/(a-1)\,\Delta k = na^n/(a-1) -$ $- \frac{a}{a-1}\sum_{k=0}^{n-1} a^k = na^n/(a-1) - a\frac{a^n-1}{(a-1)^2}$.

b) Ako pustimo da $n\to\infty$ dobija se $\sum_{k=0}^{\infty} ka^k = a/(a-1)^2$.

c) Na sličan način kao pod a) ako dvaput primenimo konačnu integraciju, dobija se $\sum_{k=0}^{n-1} k^2a^k = \frac{n^2a^n}{a-1} - \frac{2a}{a-1}\left(\frac{na^n}{a-1} + \frac{a(1-a^n)}{(1-a)^2}\right) - \frac{a}{a-1}\cdot\frac{1-a^n}{1-a}$.

d) $\sum_{k=0}^{\infty} k^2a^k = \frac{a+a^2}{(1-a)^3}$.

20. Pokazati da se n^k može izraziti preko $n^{(1)}, n^{(2)}, \ldots, n^{(k)}$.

Rešenje. $n^1 = n = n^{(1)}$, $n^{(2)} + n^{(1)} = n(n-1) + n = n^2$, $n^{(3)} + 3n^{(2)} + n^{(1)} = n(n-1)(n-2)+3n(n-1)+n = n^3$ itd. U opštem slučaju biće $n^k = s_1^k n^{(1)} + s_2^k n^{(2)} + \ldots + s_k^k\cdot n^{(k)} = \sum_{r=1}^{k} s_r^k\cdot n^{(r)}$. Brojevi s_r^k nazivaju se Stirlingovim brojevima druge vrste (Stirlingovi brojevi prve vrste S_i^k dobijaju se u razvoju $n^{(k)}$ po $n, n^2, \ldots, n^k$: $n^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} S_i^k n^i$). Može se pokazati da su s_k^n jednoznačno odredjeni.

21. Dokazati da brojevi s_k^n zadovoljavaju sledeću diferencijsku jednačinu: $s_i^{k+1} = s_{i-1}^k + is_i^k$ za $i=2,\ldots,n$.

Rešenje: Imamo da je $n^k = s_1^k n^{(1)} + \ldots + s_k^k n^{(k)}$. Množenjem sa n dobijamo $n^{k+1} = ns_1^k n^{(1)} + \ldots + ns_k^k n^{(k)}$. S druge strane je $n\cdot n^{(i)} = (n-i)n^{(i)} + in^{(i)}$ pa je $n^{k+1} = s_1^k\left(n^{(2)} + n^{(1)}\right) + \ldots + s_k^k\left(n^{(k+1)} + kn^{(k)}\right)$. Medjutim, $n^{k+1} = s_1^{k+1}n^{(1)} + s_2^{k+1}n^{(2)} + \ldots + s_{k+1}^{k+1}n^{(k+1)}$ te uporedjivanjem dobijamo

$$s_i^{k+1} = s_{i-1}^k + is_i^k \quad \text{za } i = 2, \ldots, k.$$

22. Naći prvih nekoliko Stirlingovih brojeva druge vrste, koristeći formulu iz zadatka 21.

Rešenje. Pre svega, može se neposredno pokazati da je $s_1^n = s_n^n = 1$ za $n = 1,2,3,\ldots$. Iz formule $s_k^{n+1} = s_{k-1}^n + ks_k^n$ dobijamo, na primer, ove brojeve

$s_2^3 = s_1^2 + 2s_2^2 = 1+2\cdot 1 = 3$;

$s_2^4 = s_1^3 + 2s_2^3 = 1+2\cdot 3 = 7$; $s_3^4 = s_2^3 + 3s_3^3 = 3 + 3\cdot 1 = 6$;

$s_2^5 = s_1^4 + 2s_2^4 = 1+2\cdot 7 = 15$ itd.

Tako dobijamo sledeću tablicu

n\k	1	2	3	4	5	6	7
1	1						
2	1	1					
3	1	3	1				
4	1	7	6	1			
5	1	15	25	10	1		
6	1	31	90	65	15	1	
7	1	63	301	350	140	21	1

23. Rešiti diferencijsku jednačinu $\Delta x_k = k^2$.

Rešenje. Iz tablice (zadatak 22) nalazimo da je $k^2 = k^{(1)} + k^{(2)}$ odakle je $\Delta x_k = k^{(1)} + k^{(2)}$. Dalje $\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1}\left(k^{(1)} + k^{(2)}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} k^{(1)} + \sum_{k=0}^{n-1} k^{(2)}$. Prema zadatku 16.c. važi formula $\sum_{r=0}^{n-1} r^{(k)} = \frac{n^{(k+1)}}{k+1}$. Otuda $x_n - x_0 = n^{(2)}/2 + n^{(3)}/3$ odnosno $x_n = c_0 + n(n-1)/2 + n(n-1)(n-2)/3 = c_0 + n(n-1)(2n-1)/6$.

Primedba. Na potpuno analogan način može se rešavati diferencijska jednačina $\Delta^k x_n = P_n$, gde je $P_n = a_0 + a_1n + a_2n^2 + \ldots + a_rn^r$.

24. Rešiti diferencijsku jednačinu $\Delta^2 x_k = k^2+3k+6$ tako da rešenje x_n zadovoljava početne uslove $x_o = 0$, $\Delta x_o = 0$.

Rešenje. $k^2+3k+6 = k^{(1)} + k^{(2)} + 3k^{(1)} + 6$, odakle je $\sum_{k=0}^{n-1} \Delta^2 x_k = \sum_{k=0}^{n-1} (k^{(2)} + 4k^{(1)} + 6) = \sum_{k=0}^{n-1} k^{(2)} + 4\sum_{k=0}^{n-1} k^{(1)} + \sum_{k=0}^{n-1} 6$. Otuda je

$$\Delta x_n = \Delta x_o + n^{(3)}/3 + 4\cdot n^{(2)}/2 + 6n = n^{(3)}/3 + 2n^{(2)} + 6n.$$

Još jednom primenom operatora sumiranja dobijamo $x_n = \frac{n^{(4)}}{12} + \frac{2n^{(3)}}{3} + \frac{3n^{(2)}}{}$.

25. Rešiti diferencijsku jednačinu $\Delta x_k = k^3 + 2^k + 1$.

Rešenje. $x_n = c_o + n + (n(n-1)/2)^2 + 2n$.

26. Izračunati zbir $S_k(n) = 1^k + 2^k + \dots n^k$.

Rešenje. $\Delta S_k(n) = S_k(n+1) - S_k(n) = n^k = s_1^k n^{(1)} + s_2^k n^{(2)} + \dots + s_k^k n^{(k)}$. Otuda je $S_k(n) - S_k(0) = \sum_{m=0}^{n-1} [s_1^k m^{(1)} + s_2^k m^{(2)} + \dots + s_m^k n^{(k)}]$. Pošto je $S_k(0) = 0$, to je $S_k(n) = s_1^k n^{(2)}/2 + s_2^k n^{(3)}/3 + \dots + s_k^k n^{(k+1)}/(k+1)$.

27. Rešiti diferencijsku jednačinu $x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = a^n$.

Rešenje. Kako je $x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = \Delta^2 x_n$, zadata jednačina ekvivalentna je sa $\Delta^2 x_n = a^n$. Otuda je $x_n = c_o + c_1 n + a^n/(a-1)^2$.

28. Rešiti diferencijsku jednačinu $x_{n+1} = (n-1)x_n + 2n$ rekurzivnom metodom, ako je dat početan uslov $x_o = 0$.

Rešenje. $x_o = 0$. Primenjujući datu rekurzivnu formulu nalazimo:

$x_1 = (1-1)x_o + 2\cdot 1 = 2$; $x_4 = (4-1)x_3 + 2\cdot 4 = 54+8 = 62$;

$x_2 = (2-1)x_1 + 2\cdot 2 = 2+4 = 6$; $x_5 = (5-1)x_4 + 2\cdot 5 = 248+10 = 258$,

$x_3 = (3-1)x_2 + 2\cdot 3 = 12+6 = 18$; itd.

Primetimo, da bismo izračunali vrednost x_n, morali smo da izračunamo sve vrednosti $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$. Zbog toga kažemo da x_n računamo rekurzivno.

29. Za date nizove a_n, b_n rešiti diferencijsku jednačinu $y_{n+1} = a_n y_n + b_n$ sa početnim uslovom $y_o = \alpha$ (Ova diferencijska jednačina naziva se linearnom diferencijskom jednačinom prvog reda).

Rešenje. Nalazimo da je:

$y_1 = a_o y_o + b_o = a_o\alpha + b_o$

$y_2 = a_1 y_1 + b_1 = a_o a_1 \alpha + a_1 b_o + b_1$

$y_3 = a_2 y_2 + b_2 = a_o a_1 a_2 \alpha + a_1 a_2 b_o + a_2 b_1 + b_2$

. . . .

Ako sa c_n označimo proizvod $a_o a_1 \dots a_n$ za $n=0,1,2,\dots$ nalazimo da je $y_n = a_o a_1 a_2 \dots a_{n-1}\alpha + a_1 a_2 \dots a_{n-1} b_o + a_2 \dots a_{n-1} b_1 + \dots + a_{n-1} b_{n-2} + b_{n-1} = c_{n-1}\alpha + \frac{c_{n-1}}{c_o} b_o + \frac{c_{n-1}}{c_1} b_1 + \frac{c_{n-1}}{c_2} b_2 + \dots + \frac{c_{n-1}}{c_{n-2}} b_{n-2} + \frac{c_{n-1}}{c_{n-1}} b_{n-1}$ odakle je

$$y_n = c_{n-1}\left(\alpha + \frac{b_o}{c_o} + \frac{b_1}{c_1} + \dots + \frac{b_{n-1}}{c_{n-1}}\right) = c_{n-1}\left(\alpha + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{c_k}\right)$$

za $n = 1,2,\dots$

30. Rešiti diferencijsku jednačinu $y_{n+1} = xy_n + b_{n+1}$ gde je $y_o = b_o$.

Rešenje. Prema prethodnom zadatku rešenje je oblika

$$y_n = c_{n-1}\left(y_o + \frac{b_1}{c_o} + \frac{b_2}{c_1} + \dots + \frac{b_n}{c_{n-1}}\right),$$ gde je $c_n = \underbrace{xx\dots x}_{n+1} = x^{n+1}$

te je $y_n = x^n\left(b_o + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \dots + \frac{b_n}{x^n}\right) = b_o x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \dots + b_n$, što znači da je n-ti član niza polinom sa koeficijentima $b_o, b_1, \dots, b_n$.

Primedba- Rekurentna formula $y_{n+1} = xy_n + b_{n+1}$ omogućava brže računanje vrednosti polinoma $b_o x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n$ u tački x nego na uobičajeni način, jer se na taj način izvršava manji broj računskih operacija (Koliko?). Zbog toga često se koristi za pravljenje algoritma pomoću kojeg računar izračunava vrednost polinoma u datoj tački.

31. Pokazati da se linearna jednačina prvog reda može svesti na jednačinu oblika $\Delta x_n = \beta_n$.

Rešenje. Ako se u jednačini $y_{n+1} = a_n y_n + b_n$ izvrši smena $x'_n = \frac{y_n}{c_n}$, gde je $c_n = a_o a_1 \dots a_n$, i sa β_n označimo $\frac{b_n}{c_n}$ dobija se smenom u jednačini: $c_{n+1}x'_{n+1} = a_n c_n x'_n + \beta_n c_n$. Kako je $c_{n+1} = a_{n+1}c_n$ to je onda $a_{n+1}x_{n+1} = a_n x'_n + \beta_n$. Ako ovde smenimo $x_n = a_n x'_n$ dobija se $x_{n+1} = x_n + \beta_n$ odnosno $\Delta x_n = \beta_n$. Primetimo da je onda $x_n = \frac{a_n}{c_n} - y_n = \frac{y_n}{c_{n-1}}$ $n=1,2,\dots$

32. Rešiti diferencijsku jednačinu $y_{n+1} = \cos\frac{x}{2}\, n y_n + \sin 2x$, $y_o = 2\alpha$.

Rešenje. Ovde je $a_n = \cos\frac{x}{2^n}$; $b_n = \sin 2x$ te je

$$c_n = a_o a_1 \dots a_n = \cos x \cos\frac{x}{2}\dots\cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin 2x}{2^{n+1}\sin\frac{x}{2^n}}.$$ Pošto je

$$y_{n+1} = c_n\left(y_o + \sum_{k=0}^{n}\frac{b_k}{c_k}\right) \text{ imamo } y_{n+1} = \frac{\sin 2x}{2^{n+1}\sin\frac{x}{2^n}}\left(2\alpha + \sum_{k=0}^{n}\frac{\sin 2x}{\frac{\sin 2x}{2^{k+1}\sin\frac{x}{2^k}}}\right),$$

imamo $$y_{n+1} = \frac{\sin 2x}{2^n \sin\frac{x}{2^n}}\left(\alpha + \sum_{k=0}^{n} 2^k \sin\frac{x}{2^k}\right).$$

→33. Izračunati determinantu $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ -1 & x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}$

Rešenje. Razvijajući determinantu D_n po poslednjoj koloni dobijamo $D_n = xD_{n-1} + n$ uz uslov $D_1 = 1$. To je diferencijska jednačina prvog reda, te nalazimo njeno rešenje

$$D_n = x^{n-1}\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + \dots + \frac{n}{x^{n-1}}\right) = x^{n-1} + 2x^{n-2} + \dots + n$$

(videti zadatak 30).

Pokazati da je $x^{n-1} + 2x^{n-2} + \dots + n = \frac{n+1}{1-x} + \frac{x^{n+1}-1}{(x-1)^2}$, tj.

$$D_n = \frac{n+1}{1-x} + \frac{x^{n+1}-1}{(x-1)^2}.$$

34. Izračunati determinantu $D_n = \begin{vmatrix} a_o & a_1 & a_2 \dots & a_{n-1} & a_n \\ -y_1 & x_1 & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & -y_2 & x_2 \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \dots & -y_n & x_n \end{vmatrix}$

Naći D_n ako je $x_n = y_n$, $n \in N$.

Rešenje. Kao u prethodnom zadatku, razvijajući po poslednjoj koloni, nalazimo da D_n zadovoljava diferencijsku jednačinu $D_n = x_n D_{n-1} + a_n y_1 y_2 \dots y_n$. Otuda je $D_n = x_1 x_2 \dots x_n\left(a_o + a_1\frac{y_1}{x_1} + \dots + a_n\frac{y_1 \dots y_n}{x_1 \dots x_n}\right)$. Ako je $x_n = y_n$ za $n = 1,2,\dots$ onda je $D_n = x_1 x_2 \dots x_n(a_o + a_1 + \dots + a_n)$.

35. Dokazati da funkcija $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$ $(x > 0)$ zadovoljava diferencijsku jednačinu $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Koliko je $\Gamma(n)$ ako je $n \in N$.

Rešenje. $$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty e^{-t}t^x dt = -\int_0^\infty t^x de^{-t} = -\left(t^x e^{-t}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-t}dt^x\right) = x\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt = x\Gamma(x).$$

Ako je $n \in N$, tada je $\Gamma(n) = (n-1)!$. Dokazati koristeći navedenu rekurentnu formulu.

Navedimo da funkcija $\Gamma(x)$ koja je rešenje proste diferencijske jednačine $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ ne zadovoljava nikakvu algebarsku diferencijalnu jednačinu sa polinomnim koeficijentima (teorema Heldera).

36. Neka je u rešenju kvadratne jednačine $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$ $(\alpha \neq 0)$. Dokazati da je niz $x_n = u^n$ onda rešenje diferencij-

ske jednačine $\alpha x_{n+2} + \beta x_{n+1} + \gamma x_n = 0$.

Rešenje. Kako je $x_n = u^n$ imamo: $\alpha x_{n+2} + \beta x_{n+1} + \gamma x_n =$

$$= \alpha u^{n+2} + \beta u^{n+1} + \gamma u^n = u^n(\alpha u^2 + \beta u + \gamma) = u^n \cdot 0 = 0,$$

jer je po pretpostavci $\alpha u^2 + \beta u + \gamma = 0$.

37. Neka su x_n i y_n dva partikularna rešenja diferencijske jednačine $\alpha x_{n+2} + \beta x_{n+1} + \gamma x_n = 0$. Dokazati da je onda i niz $z_n = c_1 x_n + c_2 y_n$ rešenje iste diferencijske jednačine.

Rešenje. $\alpha z_{n+2} + \beta z_{n+1} + \gamma z_n = \alpha(c_1 x_{n+2} + c_2 y_{n+2}) +$

$$+ \beta(c_1 x_{n+1} + c_2 y_{n+1}) + \gamma(c_1 x_n + c_2 y_n) = c_1(\alpha x_{n+2} +$$

$$+ \beta x_{n+1} + \gamma x_n) + c_2(\alpha y_{n+2} + \beta y_{n+1} + \gamma y_n) =$$

$= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0$, jer su nizovi x_n i y_n po pretpostavci rešenja date diferencijske jednačine.

38. Neka je data diferencijska jednačina $AX_{n+2} + BX_{n+1} + CX_n = c_n$ i neka je x_n rešenje homogene diferencijske jednačine $AX_{n+2} + BX_{n+1} + CX_n = 0$, a niz y_n partikularno rešenje jednačine $AX_{n+2} + BX_{n+1} + CX_n = c_n$. Dokazati da je onda niz $z_n = x_n + y_n$ rešenje date diferencijske jednačine.

Rešenje. $Az_{n+2} + Bz_{n+1} + Cz_n = A(x_{n+2} + y_{n+2}) + B(x_{n+1} +$

$$+ y_{n+1}) + C(x_n + y_n) = Ax_{n+2} + Bx_{n+1} + Cx_n + Ay_{n+2} + By_{n+1} +$$

$$+ Cy_n = 0 + c_n = c_n.$$

39. Dokazati da je operator $L = AE^2 + BE + C$ linearan, tj. da je za svaka dva niza x_n i y_n i za $c_1, c_2 \in R$ ispunjeno $L(c_1 x_n + c_2 y_n) = c_1 L x_n + c_2 L y_n$.

Uputstvo. Videti rešenje zadatka 37.

40. Uopštiti zadatke 36, 37 i 38, tj. posmatrati diferencijsku jednačinu $A_0 X_{n+m} + A_1 X_{n+m-1} + \dots + A_m X_n = 0$ odnosno $A_0 X_{n+m} + A_1 X_{n+m-1} + \dots A_m X_n = c_n$ i dokazati tvrdjenja slična u navedenim zadacima.

41. Niz x_n zadovoljava rekurentnu formulu $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$. Rešiti tu diferencijsku jednačinu.

Rešenje. Pridruženi karakteristični polinom je $z^2 - z - 1$. Nule tog polinoma su $u = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $v = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Tada je opšte rešenje $x_n = c_1 u^n + c_2 v^n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Ovaj niz nazivamo Fibronačijevim.

42. U prethodnom zadatku odrediti c_1 i c_2 ako je $x_0 = 0$, $x_1 = 1$.

Rešenje. Iz jednakosti $x_0 = c_1 u^0 + c_2 v^0$ i $x_1 = c_1 u + c_2 v$ dobijamo ovaj sistem jednačina: $c_1 + c_2 = 0$; $c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$; čija su rešenja $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Tada je Fibronačijev niz oblika $x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n -$

$$- \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Dokazati da su u ovom slučaju sve vrednosti niza x_n prirodni brojevi.

43. Rešiti diferencijsku jednačinu $x_{n+2} - 2Ax_{n+1} + x_n = 0$ i diskutovati rešenja za razne vrednosti parametra $A \in R$.

Rešenje. Pridružena karakteristična jednačina je $z^2 - 2Az + 1 = 0$. 1° $|A| > 1$. Tada su rešenja navedene kvadratne jednačine $u = A + \sqrt{A^2-1}$, $v = A - \sqrt{A^2-1}$. Rešenje diferencijske jednačine je oblika $x_n = c_1(A + \sqrt{A^2-1})^n + c_2(A - \sqrt{A^2-1})^n$. 2° $A = 1$. Tada diferencijska jednačina dobija oblik $x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0$, odnosno $\Delta^2 x_n = 0$. Otuda je $x_n = c_1 + nc_2$. Primetimo da smo rešenje mogli da napišemo i u obliku $x_n = x_0 + n\Delta x_0$. 3° $A = -1$. Tada imamo $x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n = 0$. Ako izvršimo smenu $x_n = (-1)^n y_n$, dobijamo

$(-1)^{n+2}y_{n+2} + 2(-1)^{n+1}y_{n+1} + (-1)^n y_n = 0$, odnosno $y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = 0$, tj. $\Delta^2 y_n = 0$. Ova jednačina je prethodnog tipa, pa je $y_n = c_1 + c_2 n$. Otuda je $x_n = (-1)^n(c_1 + nc_2)$.

Ovaj slučaj mogli smo da rešimo i na drugi način. Ako rešavamo karakterističnu jednačinu $z^2 + 2z + 1 = 0$, imamo jedan dvostruki koren $v = -1$. Tada će jedno partikularno rešenje biti $z_n = v^n = (-1)^n$. Lako se može proveriti da će drugo partikularno rešenje biti oblika $z_n' = nv^n = n(-1)^n$, te je onda opšte rešenje $x_n = c_1(-1)^n + c_2 n(-1)^n$, što je isti rezultat kao malopre.

4^0 $|A|<1$. U ovom slučaju možemo staviti $A = \cos\theta$. (zašto?), te naša diferencijska jednačina postaje $x_{n+2} - 2\cos\theta x_{n+1} + x_n = 0$. Rešenja karakteristične jednačine $z^2 - 2\cos\theta z + 1 = 0$ su: $u = \cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta - 1} = \cos\theta + i\sin\theta$; $v = \cos\theta - \sqrt{\cos^2\theta - 1} = \cos\theta - i\sin\theta$. Tada je opšte rešenje $x_n = c_1 u^n + c_2 v^n = c_1(\cos\theta + i\sin\theta)^n + c_2(\cos\theta - i\sin\theta)^n$. Ako primenimo Moavrov obrazac, dobijamo $x_n = c_1(\cos n\theta + i\sin n\theta) + c_2(\cos n\theta - i\sin n\theta) = a_1\cos n\theta + a_2 \sin n\theta$, gde je $a_1 = c_1 + c_2$; $a_2 = i(c_1 - c_2)$.

44. Rešiti diferencijsku jednačinu $x_{n+1} = Ax_n + B$, $A, B \in R$.

Rešenje. I. $A \neq 1$. Potražimo partikularno rešenje u obliku $y_n = c$. Otuda je $c = Ac + B$, odakle $c = B/(1-A)$. Znači, $y_n = B/(1-A)$ je jedno partikularno rešenje. Karakteristična jednačina homogenog dela je $v - A = 0$, odakle $v = A$. Otuda je opšte rešenje $x_n = c_0 A^n + B/(1-A)$. II. $A = 1$. Tada se jednačina svodi na $\Delta x_n = B$, odakle $x_n = c_0 + nB$.

45. Naći determinantu:
$$\begin{vmatrix} 2A & B & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ C & 2A & B & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & C & 2A & B & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & C & 2A \end{vmatrix}$$

Rešenje. Označimo sa D_n determinantu reda n. Lako se vidi da je $D_1 = 2A$; $D_2 = 4A^2 - BC$. Navedene uslove možemo da smatramo za početne. Ako razvijemo determinantu D_{n+2} po prvoj

vrsti (ili koloni), dobićemo ovu rekurentnu formulu $D_{n+2} = 2AD_{n+1} - BCD_n$. To je linearna homogena diferencijska jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima. Karakteristična jednačina je $z^2 - 2Az + BC = 0$. Tada je D_n oblika:

I. $A^2 > BC$; $D_n = c_1(A - \sqrt{A^2 - BC})^n + c_2(A + \sqrt{A^2 - BC})^n$.

II. $A^2 = BC$; $D_n = c_1 A^n + c_2 A^n n$.

III. $A^2 < BC$; $D_n = c_1(A - i\sqrt{BC - A^2})^n + c_2(A + i\sqrt{BC - A^2})^n$.

Konstante c_1 i c_2 odredjujemo iz početnih uslova.

46. Naći determinantu
$$D_n = \begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2\cos\theta \end{vmatrix}$$

Rešenje. Prema prethodnom zadatku rešenje je oblika $D_n = c_1 u^n + c_2 v^n$ gde su u i v rešenja karakteristične jednačine $z^2 - 2\cos\theta \cdot z + 1 = 0$, tj. $u = \cos\theta + i\sin\theta$; $v = \cos\theta - i\sin\theta$. Otuda je $D_n = a\cos n\theta + b\sin n\theta$, sa početnim uslovima $D_1 = 2\cos\theta$; $D_2 = 4\cos^2\theta - 1$. Odatle je $a = 1$; $b = \cos\theta/\sin\theta$. Tada je $D_n = \cos n\theta + \mathrm{ctg}\theta \sin n\theta = \sin(n+1)\theta/\sin\theta$.

47. Rešiti granični problem $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0$; $x_0 = 7$; $x_5 = 13$.

Rešenje: I. način: Preko karakteristične jednačine $z^2 - 5z + 6 = 0$ neposredno nalazimo opšte rešenje $x_n = a2^n + b3^n$. Iz uslova $x_0 = 7$; $x_5 = 13$ dobijamo ovaj sistem jednačina $a + b = 7$; $32a + 243b = 13$ odakle je $a = 8$; $b = -1$, tj. $x_n = 8 \cdot 2^n - 3^n$.

II način. Ako nas interesuju samo rešenja od x_0 do x_5 možemo raditi na sledeći način. Iz rekurentne formule pri uslovu $x_0 = 7$; $x_5 = 13$ dobijamo ovaj sistem linearnih jednačina:

$$\begin{aligned} x_2 - 5x_1 &= -42 \quad (= -6x_0) \\ x_3 - 5x_2 + 6x_1 &= 0 \\ x_4 - 5x_3 + 6x_2 &= 0 \\ -5x_4 + 6x_3 &= -13 \quad (= -x_5) \end{aligned}$$

Odavde dobijamo ova rešenja: $x_1 = 13$; $x_2 = 23$; $x_3 = 37$; $x_4 = 47$.

Primedba. Ovaj drugi način opštiji je od prvog, jer se može primeniti na proizvoljnu linearnu (sa funkcionalnim koeficijentima) diferencijsku jednačinu sa graničnim uslovima. Ova metoda naročito se koristi u rešavanju graničnog problema kod diferencijskih jednačina.

48. Pokazati da se sistem diferencijskih jednačina $X_{n+1} = A_1X_n + B_1Y_n$ može svesti na jednu diferencijsku jednačinu $Y_{n+1} = A_2X_n + B_2Y_n$ drugog reda.

Rešenje. Eliminacijom Y_n iz navedenih jednačina dobija se $B_2X_{n+1} - B_1Y_{n+1} = A_1B_2 - A_2B_1$. Iz prve jednačine dobija se $X_{n+2} = A_1X_{n+1} + B_1Y_{n+1}$, sabiranjem sa prethodnom jednakošću dobija se $X_{n+2} = (A_1+B_2)X_{n+1} - (A_1B_2 - A_2B_1)X_n$.

49. Rešiti sistem diferencijskih jednačina $x_{n+1} = x_n+y_n$; $y_{n+1} = x_n - y_n$.

Rešenje. Prema prethodnom zadatku, x_n zadovoljava $x_{n+2} = (A_1+B_2)x_{n+1} - (A_1B_2-A_2B_1)x_n = 2x_n$, tj. $x_{n+2} = 2x_n$. Karakteristična jednačina je $z^2 = 2$, odakle je $x_n = c_1(\sqrt{2})^n + c_2(-1)^n(\sqrt{2})^n$. Iz prve jednačine sistema imamo $y_n = x_{n+1} - x_n$, odakle je posle sredjivanja $y_n = (\sqrt{2})^n\left(c_1(\sqrt{2}-1) - c_2(\sqrt{2}+1)(-1)^n\right)$.

50. Rešiti diferencijsku jednačinu $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2x_n+1}$. Koliki je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ ako je $x_0 > 0$?

Rešenje. Uvedimo smenu $x_n = y_n/z_n$. Tada rekurentna formula prelazi u $x_{n+1} = \dfrac{y_n}{2y_n+z_n} = \dfrac{y_{n+1}}{z_{n+1}}$. Izaberimo ovaj sistem diferencijskih jednačina $y_{n+1} = y_n$; $z_{n+1} = 2y_n + z_n$. Iz prve jednačine neposredno dobijamo $y_n = c$, gde je c proizvoljna konstanta. Zamenom dobijene vrednosti za y_n u drugoj jednačini dobijamo $z_{n+1} = z_n + 2c$. Odavde neposredno $z_n = a+2nc$, gde je i a proizvoljna konstanta. Odavde nalazimo $x_n =$

$= y_n/z_n = \dfrac{c}{2c+a+2nc} = \dfrac{1}{\frac{2c+a}{c} + 2n} = \dfrac{1}{b+2n}$ gde je $b = \dfrac{2c+a}{c}$. Zamenom u dobijenoj formuli $n = 0$ imamo $b = 1/x_0$, odakle $x_n = \dfrac{1}{1/x_0 + 2n}$. Očigledno $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

51. Dokazati da binomni koeficijenti $C_{n,k} = \binom{n}{k}$ zadovoljavaju rekurentnu formulu $C_{n+1,k} = C_{n,k-1} + C_{n,k}$.

52. Rešiti diferencijsku jednačinu $x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = 0$.

Rešenje. $x_n = (\sqrt{2})^n(c_1\cos n\pi/4 + c_2 \cdot \sin n\pi/4)$.

53. Razviti u red funkciju $f(x) = 1/(1+x+x^2)$ u tački $x = 0$.

Rešenje. Pokazati da koeficijenti a_n u razvoju $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ zadovoljavaju početne uslove $a_0 = 1$; $a_1 = -1$, i sledeću rekurentnu formulu $a_{n+2} + a_{n+1} + a_n = 0$.

Jovan VUKMIROVIĆ

INTEGRALNE JEDNAČINE

Pod integralnom jednačinom podrazumevamo jednačinu u kojoj se nepoznata funkcija pojavljuje /bar na jednom mestu/ pod znakom integrala i to na stvaran, a ne samo na prividan način.

Linearna integralna jednačina je oblika $a(x)\varphi(x)+b(x)=\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\,dt$ gde su $a(x)$; $b(x)$; $K(x,t)$ poznate funkcije, a $\varphi(x)$ nepoznata. $a(x)$ i $b(x)$ su pritom definisane nad intervalom $[a,b]$, a $K(x,t)$ nad kvadratom $[a,b]\times[a,b]$.

Jednačinu $\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K(x,t)\varphi(t)\,dt$ gde su $f(x)$, $K(x,t)$ poznate funkcije, $\varphi(x)$ nepoznata i λ realan parametar nazivamo linearnom Volterinom integralnom jednačinom druge vrste. Ako je $f(x)\not\equiv 0$ jednačina će biti nehomogena, a ako je $f(x)\equiv 0$ homogena.

Jednačina $\int_a^x K(x,t)\varphi(t)\,dt=f(x)$ je Volterina integralna jednačina prve vrste.

Pod linearnom integralnom jednačinom Fredholma druge vrste podrazumevamo jednačinu oblika $\varphi(x)-\lambda\int_a^b k(x,t)\varphi(t)\,dt=f(x)$ koja će biti homogena u slučaju da je $f(t)\equiv 0$.

Jednačina $\int_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt=f(x)$ je jednačina Fredholma prve vrste.

Funkciju $K(x,t)$ nazivamo jezgrom integralne jednačine, uz predpostavku da je $K(x,t)$ neprekidna funkcija nad oblasti definisanosti $[a,b]\times[a,b]$, ili ima konačno mnogo tačaka prekida i

$$\left|\int_a^b\int_a^b |K(x,t)|^2\,dx\,dt\right|<+\infty$$

Pod rešenjem integralne jednačine podrazumevamo svaku funkciju $\varphi(x)$ za koju je jednačina identički zadovoljena.

Rešenje jednačine $\frac{dy}{dx} = \int_0^x f(t)\,dt$ je

$$y = \int_0^x (x-t)\, f(t)\,dt + C,$$

Takodje, važi uopštena jednakost

$$\underbrace{\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \ldots \int_{x_0}^{x}}_{n} f(x)\,dx = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}\, f(t)\,dt$$

kada postoje integrali sa leve i desne strane jednakosti.
Ako su $f(x)$ i $k(x,t)$ neprekidne funkcije u svojim domenima i $|k(x,t)| \leqslant M$, gde je M neka konstanta jednačina $\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_{x_0}^{x} k(x,t)\,\varphi(t)\,dt$ ima jedinstveno rešenje, koje se može predstaviti u obliku $\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_{x_0}^{x} R(x,t;\lambda) f(t)\,dt$, gde je $R(x,t;\lambda)$ funkcija koja se naziva rezolventom date integralne jednačine i pritom je

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n K_{n+1}(x,t);\ K_1(x,t) = K_2(x,t);\ K_{n+1}(x,t) = \int_t^x K(x,u)\, K_n(u,t)\,du.$$

Ako je $f(x)$ neprekidna funkcija na intervalu $[0,a]$, jezgro $K(x,t)$ neprekidno za $0 \leqslant x \leqslant a;\ 0 \leqslant t \leqslant x$ i $\varphi_0(x)$ neprekidna funkcija za $x \in [0,a]$, niz $\{\varphi_n(x)\}$ funkcija definisan za $n = 1,2,3\ldots$ rekurentnom formulom $\varphi_n(x) = f(x) + \lambda\int_0^x K(x,t)\,\varphi_{n-1}(t)\,dt$ konvergiraće rešenju integralne jednačine

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_0^x K(x,t)\,\varphi(t)\,dt.$$

Ako je $f(x)$ neprekidna funkcija na intervalu $[a,b]$, jezgro $K(x,t)$ neprekidno za $x \in [a,b];\ t \in [a,b]$ jednačina $\varphi(x) - \lambda\int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\,dt = f(x)$ ima za

$|\lambda| < \frac{1}{\sqrt{\int_a^b\int_a^b K^2(x,t)\,dx\,dt}}$ rešenje $\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^b R(x,t;\lambda)\cdot f(t)\,dt$, gde je

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(x,t)\,\lambda^{n-1},\ \text{a}$$

$$K_n(x,t) = \int_a^b K(x,z)\, K_{n-1}(z,t)\,dz \text{ i } K_1(x,t) = K(x,t).$$

Za jezgro $K(x,t)$ kažemo da je degenerisano ako je oblika

$$K(x,t) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, b_i(t).$$

Značenje parametra $\lambda \neq 0$ za koje homogena integralna jednačina Fredholma druge vrste $\varphi(x) - \lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)\,dt = 0$ ima netrivijalno rešenje ($\varphi(x) \not\equiv 0$) nazivamo karakterističnim brojem jednačine, a netrivijalno rešenje te jednačine sopstvenom funkcijom koja odgovara toj karakterističnoj vrednosti λ.

Fredholmova alternativa.

1. Homogene jednačine

$$\varphi(x) = \lambda\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)\int_a^b \beta_i(t)\,\varphi(t)\,dt \qquad (1)$$

$$\varphi^*(x) = \lambda\sum_{i=1}^{n}\beta_i(x)\int_a^b \alpha_i(t)\,\varphi^*(t)\,dt \qquad (2)$$

imaju jednak broj nezavisnih rešenja, ili samo trivijalna rešenja.

2. Ako jednačine (1) i (2) imaju samo trivijalna rešenja, onda nehomogena jednačina

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x)\int_a^b \beta_i(t)\,\varphi(t)\,dt$$

ima tačno jedno rešenje.

3. Ako homogene jednačine imaju netrivijalna rešenja, onda odgovarajuća nehomogena jednačina ima rešenja samo

ako je ispunjen uslov

$$\int_a^b \varphi_i^*(t)\, f(t)\, dt = 0,$$ tj. ako je $f(t)$ ortogonalna funkcija sa karakterističnim funkcijama φ_i^* homogene jednačine (2).

1. Proveriti da li su funkcije $\varphi_1(x) = xe^x$, $\varphi_2(x) = x$ rešenja integralnih jednačina

$$\varphi(x) = xe^x - \frac{x^2}{2} + \int_0^x e^{-t}\varphi(t)\, dt \qquad (1)$$

$$\varphi(x) = x - 3x^2 - 2x^3 + 6\int_0^x (t+1)\,\varphi(t)\, dt \qquad (2)$$

Kakvog su tipa jednačine (1) i (2)?

<u>Rešenje</u> $\int_0^x e^{-t}\varphi_1(t)\, dt = \int_0^x e^{-t}\, t\, e^t\, dt = \int_0^x t\, dt = \frac{x^2}{2}$

biće $x\, e^x - \frac{x^2}{2} + \int_0^x e^{-t}\varphi(t)\, dt = x\, e^x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} =$

$$= x\, e^x = \varphi_1(x).$$

$\varphi_1(x)$ je rešenje jednačine (1). $\int_0^x (t+1)\varphi_2(t)\, dt =$

$$= \int_0^\infty (t+1)\, t\, dt = \int_0^x (t^2+t)\, dt = \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^x = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2},$$

pa je $\varphi_2(x) = x \equiv x - 3x^2 - 2x^3 + 6\int_0^x (t+1)\cdot t\cdot dt$,

što znači da je $\varphi_2(x)$ rešenje jednačine (2).

Dokažimo sad da $\varphi_1(x)$ nije rešenje jednačine (2), niti $\varphi_2(x)$ rešenje jednačine (1).

$$\int_0^x e^{-t}\varphi_2(t)\, dt = \int_0^x e^{-t}\cdot t\cdot dt = (-e^{-t}t - e^{-t})\Big|_0^x = -e^{-x}x - e^{-x}$$

$$x\cdot e^x - \frac{x^2}{2} + \int_0^x e^{-t}\varphi_2(t)\, dt = x\, e^x - \frac{x^2}{2} - x\, e^{-x} - e^{-x} \not\equiv x.$$

$$\int_0^x (t+1)\,\varphi_1(t)\, dt = \int_0^x (t+1)t\, e^t dt = \int_0^x (t^2e^t + t\, e^t)dt =$$

$$= \int_0^x t^2e^t dt + \int_0^x t\, e^t\, dt.$$

Parcijalnom integracijom, stavljajući $t^2 = u$; $e^t dt = dv$, nalazimo da je $\int_0^x t^2e^t dt = (t^2\cdot e^t)\Big|_0^x - \int_0^x 2t\cdot e^t dt.$

Biće $\int_0^x t^2e^t dt + \int_0^x t\, e^t\, dt = x^2e^x - \int_0^x t\, e^t dt =$

$$= x^2e^x - (t\, e^t - e^t)\Big|_0^x = x^2e^x - x\, e^x + e^x.$$

$$x - 3x^2 - 2x^3 + 6\int_0^x (t+1)\,\varphi_1(t)\, dt = x - 3x^2 - 2x^3 + 6x^2e^x + 6x\, e^x +$$

$$+ 6\, e^x \not\equiv x\, e^x.$$

Pritom pretpostavljamo da je $0 \leq x \leq b$, $0 < b$. Dovoljno je uzeti da je $x = 0$, pa će leva strana biti jednaka 6 a desna 0, što dokazuje neidentičnost.

Jednačine (1) i (2) su Volterine jednačine druge vrste.

2. Rešiti integralnu jednačinu $\varphi(x) = -x^2 + 6x + 2 + \int_0^x (2x-3t)\cdot \varphi(t)\cdot dt$ svodeći je na diferencijalnu jednačinu.

<u>Rešenje</u> $\int_0^x (2x - 3t)\,\varphi(t)$ je moguće predstaviti u obliku

$$\int_0^x (3x-3t)\,\varphi(t)\, dt - \int_0^x x\,\varphi(t)\, dt = 3\int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\, dt - x\int_0^x \varphi(t)dt.$$

Uvedimo oznaku $\int_0^x (x-t)\,\varphi(t)dt = y$. Biće

$$\int_0^x \varphi(t)dt = \left[\int_0^x (x-t)\varphi(t)dt\right]_x = \frac{dy}{dx} = y', \varphi(x) = y'' \text{ i zato}$$

će biti moguće datu integralnu jednačinu pisati u obliku

$y'' = -x^2 + 6x + 2 + 3y - xy$, odnosno $y'' + xy' - 3y = -x^2 + 6x + 2$.

Zadatak se sad sastoji u tome da se nadje partikularno rešenje y ove diferencijalne jednačine, tako da je

$$y'(0) = \int_0^x \varphi(t)\, dt\Big|^{x=0} = 0;\ y(0) = 0.$$

Potražimo rešenje u obliku reda. Uzimajući u obzir da je $y'(o) = y(o) = o$ možemo odmah pisati

$$y = a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots;$$

$$y' = 2a_2x^2 + 3a_3x^2 + \dots + n\,a_nx^{n-1} + \dots;$$

$$y'' = 2a_2 + 6a_3x + \dots + n(n-1)\,a_nx^{n-1} + \dots;$$

$$y'' + xy' - 3y = 2a_2 + 3\cdot 2a_3x + [4\cdot 3a_n + 2a_2 - 3a_2]x^2 +$$

$$+[5\cdot 4a_5 + 3a_3 - 3a_3]x^3 + \dots + [(n+1)(n+2) + na_n - 3a_n]x^n + \dots$$

$$+ \dots = 2 + 6x - x^2.$$

Izjednačimo koeficijente uz iste stepene x-a.

$2a_2 = 2;\ 3\cdot 2a_3 = 6;\ (4\cdot 3a_4 + 2a_2 - 3\cdot a_2) = -1, \dots$

Koeficijenti će biti $a_2 = 1;\ a_3 = 1;\ a_4 = o, \dots a_n = o$, rešenje diferencijalne jednačine je

$$y = x^2 + x^3.\ y' = 2x + 3x^2;\ y'' = \varphi(x) = 2 + 6x.$$

Traženo rešenje integralne jednačine je $\varphi(x) = 2 + 6x$.

3. Rešiti jednuačinu $\varphi(x) = e^x + \frac{1}{2}\int_0^x \varphi(t)\,dt$ nalaženjem rezolvente.

Rešenje $K_1(x,t) = K(x,t) = 1;\ K_2(x,t) = \int_t^x K(x,u)K_1(u,t)\,du$

$= \int_t^x 1.1\,du = = x-t;\ K_3(x,t) = \int_0^x 1.(u-t)du = \frac{(x-t)^2}{2}, \dots,$

$K_n(x,t) = \int_0^x \frac{1\cdot(u-t)^{n-2}}{(n-2)!}du = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$,

$$R(x,t;\lambda) = R(x\ t;\ \tfrac{1}{2}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-t)^n}{2^n\cdot n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x-t}{2}\right)^n}{n!}$$

Iz teorije funkcionalnih redova poznato je da se funkcija e^x može predstaviti u obliku reda $e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$. Specijalno, ako umesto x stavimo $\frac{x-t}{2}$, dobijamo

$R(x,t;\lambda) = e^{\frac{x-t}{2}}$, $\varphi(x) = e^x + \frac{1}{2}\int_0^x e^{\frac{x-t}{2}}\cdot e^t\,dt$, $\varphi(x) =$

$= e^x + \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\int_0^x e^{\frac{t}{2}}\,dt = 2\,e^x.$

Napomena: Ova jednačina mogla se na jednostavniji način rešiti uvodjenjem smene $\int_0^x \varphi(t)\,dt = y$. Bilo bi $\varphi(x) = y' = e^x + \frac{1}{2}y$. Time bi rešavanje date integralne jednačine bilo svedeno na rešavanje nehomogene linearne diferencijalne jednačine $y' - \frac{1}{2}y = e^x$.

4. Rešiti integralnu jednačinu $\varphi(x) = \frac{x^2}{2} + x - \int_0^x \varphi(t)dt$ primenjujući postupak postupnih približavanja (sukcesivnih aproksimacija)

Rešenje. Neka je $\varphi_0(x) = 1$. Biće $\varphi_1(x) = \frac{x^2}{2} + x - \int_0^x 1\,dt = \frac{x^2}{2}$, $\varphi_2(x) = \frac{x^2}{2} + x - \int_0^x \frac{t^2}{2}dt =$

$= -\frac{x^3}{3!} + \frac{x^2}{2} + x$, $\varphi_3(x) = \frac{x^4}{4!} - \frac{x^3}{3!} + x, \dots$ može se naslutiti da je $\varphi(x) =$

$$=(-1)^{n+1}\left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{x^n}{n!}\right] + x.$$

Dokažimo matematičkom indukcijom tačnost poslednje jednakosti

$$x^2 + x - \int_0^x\left\{(-1)^{n+1}\left[\frac{t^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{t^n}{n!}\right] + t\right\}dt =$$

$$= x^2 + x + (-1)^{n+2}\frac{x^{n+2}}{(n+2)!} - (-1)^{n+2}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} - x =$$

$$= x + (-1)^{n+2}\left[\frac{x^{n+2}}{(n+2)!} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right].$$

Iz izvedene jednakosti zaključujemo da će pod pretpostavkom da je

$$\varphi_n(x) = (-1)^{n+1}\left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{x^n}{n!}\right] + x \text{ biti } \varphi_{n+1}(x) =$$

$$= (-1)^{n+2}\left[\frac{x^{n+2}}{(n+2)!} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right] + x$$ što je trebalo i dokazati.

5. a. Proveriti da li je $\varphi(x) = \cos x$ rešenje integralne jednačine $\varphi(x) = 1 - \int_0^x (x-t)\varphi(t)\,dt$.

b. Odrediti niz funkcija $\varphi_n(x)$ za datu jednačinu ako je $\varphi_0(x) \equiv 0$.

c. Na osnovu rezultata pod a. i b. predstaviti funkciju $\cos x$ Taylorovim redom u tački $x_0 = 0$.

Rešenje a. $1 - \int_0^x (x-t)\cos t\,dt = 1 - \left[x \sin t - t \cos t - \cos t\right]\Big|_0^x = \cos x.$

b. $\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_2(x) = 1 - \int_0^x (x-t)dt =$

$$= 1 - \frac{x^2}{2},\ \varphi_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}, \ldots$$

Pretpostavimo da je $\varphi_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2(n-1)}}{(2n-2)!}$. $1 - \int_0^x (x-t)\left[\varphi_n(t)\right] dt = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots$

$$\ldots + (-1)^{n+2}\frac{x^{2n}}{(2n)!} = \varphi_{n+1}(x).$$

c.
S obzirom da su ispunjeni uslovi jedinstvenosti rešenja za bilo kakav interval $[0,a]$, $a > 0$ i s obzirom da su funkcije $\cos x$ i $\varphi(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \ldots$ parne funkcije, zaključujemo da za svaki realan broj x važi jednakost:

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$ Taylorov razvoj funkcije $\cos x$.

6. Svesti integralnu jednačinu Voltera prve vrste $\int_0^x K(x,t)\varphi(t)\,dt = f(x)$ na jednačinu druge vrste

$K(x,t)$, $\frac{\partial K(x,t)}{\partial x}$, $f(x)$, $f''(x)$, su neprekidne funkcije i $K(x,x) \neq 0$ na nekom intervalu $[0,a]$.

Rešiti jednačinu $\int_0^x \cos(x,t)\varphi(t)\,dt = x$.

Rešenje. Diferencirajmo obe strane jednačine

$\int_0^x K(x,t)\varphi(t)\,dt = f(x)$, izlazi $K(x,x)\varphi(x) + \int_0^x \frac{\partial K(x,t)}{\partial x}\varphi(t)$ $= f'(t)$; podelimo obe strane poslednje jednakosti sa $K(x,x)$.

$$\varphi(x) + \int_0^x \frac{\partial K(x,t)}{\partial x}\cdot\frac{1}{K(x,x)}\varphi(t)\,dt = \frac{f'(t)}{K(x,x)}$$ u jednačini

$\int_0^x \cos(x-t)\varphi(t)\,dt$ je $K(x,t) = \cos(x-t)$, $f(x) = x$,

$\frac{\partial K(x,t)}{\partial x} = -\sin(x-t)$, $K(x,x) = 1$, $f'(t) = 1$,

$\varphi(x) + \int_0^x \left[-\sin(x-t)\,\varphi(t)\right]dt = 1$, $\varphi(x) = 1 + \int_0^x \sin(x-t)\varphi(t)d$

Jedan od načina da se reši ova jednačina, s obzirom da je jezgro funkcije razlike $x - t$, je nalaženje odgovarajuće jednačine primenom Laplasovih transformacija. Takodje do rešenja $\varphi(x)$ može doći diferenciranjem jednačine:

$$\varphi'(x) = \int_0^x \frac{\partial}{\partial x}\left[\sin(x-t)\varphi(t)\right]dt + \sin(x-x)\varphi(x),$$

$$\varphi'(x) = \int_0^x \cos(x-t)\varphi(t)\,dt,\ \varphi''(x) = \int_0^x \frac{\partial}{\partial x}\left[\cos(x-t)\varphi(t)\right]dt +$$

$$+ \cos(x-x)\varphi(x),\ \varphi''(x) = -\int_0^x \sin(x-t)\varphi(t)dt + \varphi(x);$$

$$\varphi''(x) = 1 - \varphi(x) + \varphi(x);\ \varphi''(x) = 1;\ \varphi'(x) = x+C;$$

$$\varphi(x) = \frac{x^2}{2} + Cx + D.$$

Odredimo konstante C i D.

$\varphi'(0)^2 = 0$; $\varphi(0) = 1$ pa je $C = 0$; $D = 1$, $\varphi(x) = \frac{x^2}{2} + 1$

7. Rešiti jednačinu $\int_0^x (x-t)^2 \varphi(t)dt = x^3$

<u>Rešenje</u>. Podelimo obe strane sa $2!$

$$\frac{1}{(3-1)!}\int_0^x (x-t)^{3-1}\varphi(t)\,dt = \frac{x^3}{2},$$

$\int_0^x dx \int_0^x dx \int_0^x \varphi(x)\,dx = \frac{x^3}{2}$ što znači da je

$\varphi(x) = \left(\frac{x^3}{2}\right)''' = 3.$

8. Ispitati za koje vrednosti parametra λ se može odrediti rezolventa jednačine $\varphi(x) - \lambda\int_0^x \varphi(t)\,dt$ i kada jednačina ima rešenja.

<u>Rešenje</u>. $\int_0^1\int_0^1 1\,dx\,dt = 1$. Za $|\lambda| < 1$ je red

$R(x,t;\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(x,t)\lambda^{n-1}$ konvergentan. $K_2(x,t) = \int_0^1 K(x,z)\,K_1(z,t)\,dz = \int_0^1 1.1\,dz = 1, \ldots, K_n(x,t) = 1$ za svaki prirodan broj n.

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} = \frac{1}{1-\lambda};\ f(x) = 1;$$

$$\varphi(x) = 1 + \lambda\int_0^1 \frac{1}{1-\lambda}\cdot 1\,dt = \frac{1}{1-\lambda}.$$

Time je metodom nalaženja rezolvente rešena jednačina za $|\lambda| < 1$. Da li jednačina ima rešenja za $|\lambda| \geq 1$, treba ispitati na drugi način. S obzirom da jezgro $K(x,t)$ ove jednačine ne zavisi od x možemo pisati $\int_0^1 \varphi(t)dt = C$. C je konstanta u odnosu na x i t. Ako postoji rešenje $\varphi(x)$, mora biti $\varphi(x) - \lambda C = 1$; $\varphi(x) = 1 + \lambda C$.

Ispitajmo sada za koju vrednost C je $\varphi(x)$ rešenje.

$1 + \lambda C - \lambda\int_0^1 (1+\lambda C)dt = 1$; $1 + \lambda C - \lambda - \lambda^2 C = 1$; $(\lambda - \lambda^2)C = \lambda$.

Za $0 \neq \lambda \neq 1$ je $C = \frac{1}{1-\lambda}$. $\varphi(x) = 1 + \lambda C = \frac{1}{1-\lambda}$ je rešenje, što neposredno proveravamo za $\lambda \neq 1$. Ako je $\lambda = 1$, jednačina nema rešenja, jer se za $\lambda = 1$ $(\lambda - \lambda^2)\,C = \lambda$ svodi na $0 = 1$ nezavisno od toga kakvo je C.

9. Naći rezolvente Fredholmovih integralnih jednačina:

a) $\varphi(x) = f_1(x) + \lambda\int_{-1}^1 xt\,\varphi(t)\,dt$,

b) $\varphi(x) = f_2(x) + \lambda\int_{-1}^1 x^2t^2\varphi(t)\,dt$,

c) $\varphi(x) = f_3(x) + \lambda\int_{-1}^1 (xt + x^2t^2)\,\varphi(t)\,dt$.

<u>Rešenje</u>. a) $K(x,t) = xt$; $a = -1$; $b = 1$,

$K_2(x,t) = \int_{-1}^1 (xz)(zt)\,dt = \frac{2}{3}xt = \frac{2}{3}K_1(x,t)$, $K_3(x,t) = \int_{-1}^1 (xz)(3zt)dz = \left(\frac{2}{3}\right)^2 K_1(x,t), \ldots, K_n(x,t) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} xt, \ldots$

$$R(x,t;\lambda_1) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\cdot xt\cdot\lambda^{n-1} = \frac{3\,xt}{3-2\lambda}.$$

b) $K_2(x,t) = \int_{-1}^1 x^2z^2\,z^2t^2dz = \frac{2}{5}x^2t^2 = \frac{2}{5}K_1(x,t)$. Biće

$K_n(x,t) = \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\cdot x^2t^2$, $R(x,t;\lambda) = \frac{5\,x^2t^2}{5-2\lambda}$.

c) $\int_{-1}^1 (xz)\cdot(z^2t^2) = 0$

pa su jezgra xt i x^2t^2 uzajamno ortogonalna. Kao posledica ortogonalnosti biće rezolventa treće jednačine jednaka zbiru rezolvenata prve dve jednačine $\frac{3\,xt}{3-2\lambda}$ i $\frac{5\,x^2t^2}{5-2\lambda}$ što nije teško proveriti.

10. Rešiti jednačinu $\varphi(x) - 3\int_0^1 (t^2+1)\,\varphi(t)\,dt = 2x+1.$

Rešenje. Pretpostavimo da je funkcija ψ rešenje ove jednačine. Biće $\int_a^b (t^2+1)\,\psi(t)\,dt$ konstantan broj. Označimo ga sa C. Taj broj za sada ne znamo, jer još ne znamo funkciju ψ, medjutim, iz pretpostavke da je ψ rešenje, nalazimo da je

$$\psi(x) - 3C = 2x+1, \quad \psi(x) = 3C + 2x+1.$$

Funkciju $\psi(x)$ smo time odredili do na konstantu. Zamenimo dobijeni izraz za ψ u jednačinu: $3C + 2x+1 -$

$$-3\int_0^1 (t^2+1)(3C+2t+1)\,dt = 2x+1,$$

$$C = \int_0^1 (3C + 3t^2C + 2t^3 + t^2 + 2t + 1)\,dt, \quad C = -\frac{17}{6},$$

$$\psi(x) = -\frac{14}{3} + 2x.$$

11. Uvodjenjem konstante rešiti nelienarnu integralnu jednačinu

$$\varphi(x) = \int_0^1 x^2t^2\varphi^3(t)\,dt.$$

Rešenje. $\int_0^1 t^2\varphi^3(t) = C;\ \varphi(x) = x^2C;\ x^2C =$

$$= \int_0^1 x^2\cdot t^2\cdot t^6\cdot C^3\,dt;\ 9x^2C = x^2C^3;\ C_1 = 0;\ C_2 = 3;\ C_3 = -3.$$

Jednačina će imati 3 rešenja:

$$\varphi_1(x) = 0; \quad \varphi_2(x) = 3x^2; \quad \varphi_3(x) = -3x^2.$$

12. Dokazati da integralna jednačina

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 a(x)\,a(t)(1+\varphi^2(t))\,dt$$

$\left(a(x) > 0 \text{ za sve } x \in [0,1]\right)$ nema realnih rešenja ako je

$$\int_0^1 a^2(x)\,dx > 1.$$

Dokaz 1. Pretpostavimo suprotno, da postoji neka funkcija $\psi(x)$ koja je rešenje. Bilo bi

$$\psi(x) = \frac{1}{2}a(x)\int_0^1 a(t)\left(1+\psi^2(t)\right)dt = \frac{1}{2}a(x)\,C,$$

$$\frac{1}{2}a(x)\,C = \frac{1}{2}a(x)\int_0^1 a(t)\left(1+\frac{a^2(t)C^2}{4}\right)dt,$$

$$C = \int_0^1 a(t)\left(1+\frac{a^2(t)C^2}{4}\right)dt,$$

odavde je $C^2\int_0^1 a^3(t)\,dt - 4C + 4\int_0^1 a(t)\,dt = 0.$

Diskriminanta jednačine je $D = 16\left(1-\int_0^1 a^3(t)\,dt \cdot \int_0^1 a(t)\,dt\right).$

Prema Hölderovoj nejednakosti koja glasi

$$\int_a^b |x(t)y(t)|\,dt \le \left(\int_a^b |x(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |y(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}},$$

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ dobijamo specijalno za $a = 0;\ b = 1;\ p = 2;$ $q = 2;\ x(t) = a(t)\sqrt{a(t)};\ y = \sqrt{a(t)}$

$$\int_0^1 a^2(t)\,dt \le \left(a^3(t)\,dt\right)^{1/2}\left(\int_0^1 a(t)\,dt\right)^{1/2}$$

s obzirom da je $\int_0^1 a^2(t)\,dt > 1$ biće i $\int_0^1 a^3(t)\,dt\ \cdot$ $\int_0^1 a(t)\,dt > 1$, i zato $D<0$; koreni $C_{1,2}$ će biti kompleksni, a data integralna jednačina neće imati realnih rešenja.

Dokaz 2. Na osnovu nejednakosti za aritmetičku i geometrijsku sredinu je

$\frac{1+\varphi^2(t)}{2} \ge \varphi(t)\ \ (\ge 0)$, pa možemo pisati $\frac{1+\varphi^2(t)}{2} =$ $= S(t)\,\varphi(t)$ i pritom će biti $S(t) \ge 1$ za svako $t \in [0,1]$. Sada polaznu jednačinu možemo predstaviti u obliku $\varphi(x) = \int_0^1 a(x)\,a(t)\,S(t)\,\varphi(t)\,dt$,

$\varphi(x) = a(x)\int_0^1 a(t)\,S(t)\,\varphi(t)\,dt = a(x)\,M$,

$a(x)\,M = a(x)\int_0^1 a(t)S(t)\,a(t)\,M\,dt$.

Po pretpostavci je $a(x)\neq 0$ pa bi bilo

$1 = \int_0^1 a^2(t)\,S(t)\,dt \geqslant \int_0^1 a^2(t)\,dt > 1.$

U sledećim zadacima treba odrediti rešenja jednačina. Rezultati su navedeni u zagradama.

$\varphi(x) = e^x + \int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\,dt.$ $\quad(\varphi(x) = e^{2x}).$

$\varphi(x) = 1+x^2 + \int_0^x \frac{1+x^2}{1+t^2}\varphi(t)\,dt.$ $\quad(\varphi(x) = e^x(1+x^2)).$

$\varphi(x) = 1 - \int_0^x (x-t)\,\varphi(t)\,dt.$ $\quad(\varphi(x) = \cos x).$

$\varphi(x) = x+1 - \int_0^x \varphi(t)\,dt.$ $\quad(\varphi(x) = 1).$

$\varphi(x) = 2x+2 - \int_0^x \varphi(t)\,dt.$ $\quad(\varphi(x) = 2).$

$\varphi(x) = 2x^2+2 - \int_0^x x\,\varphi(t)\,dt.$ $\quad(\varphi(x) = 2).$

$\varphi(x) = x + \int_0^x \sin(x-t)\,\varphi(t)\,dt.$ $\quad(\varphi(x) = x + \frac{x^3}{6}).$

$\varphi(x) = \cos x + \int_0^x \varphi(t)\,dt.$ $\quad(\varphi(x) = e^x + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)).$

$\int_0^x (x-t)^2\varphi(t)\,dt = x^3.$ $\quad(\varphi(x) = 3).$

$\varphi(x) - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\varphi(t)\,dt = 2x - \pi.$ $\quad(\varphi(x) = \frac{\pi^2}{\pi-1}\sin^2 x + 2x - \pi).$

$\varphi(x) = 2\int_0^1 xt\,\varphi^3(t)\,dt.$ $\quad(\varphi_1(x) = 0,\ \varphi_{2,3}(x) = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}\,x).$

$\varphi(x) = \int_0^1 \frac{x\,t}{1+\varphi^2(t)}\,dt.$ $\quad$(Nema rešenja).

$\varphi(x) = \lambda\int_0^1 (2xt - 4x^2)\,\varphi(t)\,dt.$ $\quad(\lambda_1 = \lambda_2 = -3;\ \varphi(x) = C_1x + C_2x^2).$

LITERATURA:

M.L.Krasnov, A.I. Kiselev, G.I.Makarenko: INTEGRALNIE URAVNENIJA, Moskva 1968.

Petrovskij, I.G.Lekcii po teorii integralnih uravnenii, Moskva, 1965.

Nada DJURANOVIĆ

LAPLASOVA TRANSFORMACIJA

DEFINICIJA: Funkcija $F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt$ naziva se Laplasovom transformacijom funkcije $f(t)$, pri čemu je $f(t)$ integrabilne funkcije za svako $t \in [0, +\infty)$. Funkcija $F(p)$ zove se slikom, a funkcija $f(t)$ originalom. Koristi se oznaka $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$ ili $f(t) \to F(p)$.

Osnovne osobine Laplasove transformacije

1. Linearnost: $C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) \to C_1 F_1(p) + C_2 F_2(p)$.

2. Pravilo sličnosti: $f(at) \to \frac{1}{a} F(\frac{p}{a})$.

3. Pravilo pomeranja: $f(t-a) \to e^{-ap} F(p)$;

   $f(t+a) \to e^{ap}\left[F(p) - \int_0^a e^{-pt} f(t)\, dt;\right]$; $a > 0$.

4. Pravilo prigušivanja: $e^{-at} f(t) \to F(p+a)$.

5. Pravilo diferenciranja: $f'(t) \to pF(p) - f(0)$;

   $f''(t) \to p^2 F(p) - pf(0) - f'(0)$

   $f'''(t) \to p^3 F(p) - p^2 f(0) - pf'(0) - f''(0)$;

   $f^{(n)}(t) \to p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) \ldots -$

   $- p f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$, i obrnuto;

$- t f(t) \to F'(p)$; $t^2 f(t) \to F''(p)$; $- t^3 f(t) \to F'''(p)$;

$(-1)^n t^n f(t) \to F^{(n)}(p)$.

6. Pravilo integracije: $\int_0^t f(t)\,dt \to \frac{1}{p} F(p)$;

$\frac{f(t)}{t} \to \int_p^\infty F(p)\,dp.$

7. Pravilo proizvoda: Funkcija $f(t) = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau)\,d\tau =$
$= f_1(t) * f_2(t)$ naziva se konvolucijom funkcija $f_1(t)$ i $f_2(t)$; $f(t) \to F_1(p)\,F_2(p)$.

Tablica Laplasovih transformacija osnovnih funkcija:

$f(t)$	$\mathcal{Z}\{f(t)\}$	$f(t)$	$\mathcal{Z}\{f(t)\}$
1	$\frac{1}{p}$	$e^{at}\sin bt$	$\frac{b}{(p-a)^2+b^2}$
t	$\frac{1}{p^2}$	$e^{at}\cos bt$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+b^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
$\sin at$	$\frac{a}{p^2+a^2}$	sh at	$\frac{a}{p^2-a^2}$
$\cos at$	$\frac{p}{p^2+a^2}$	chat	$\frac{p}{p^2-a^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$		

gde je ch $at = \frac{e^{at}+e^{-at}}{2}$; sh $at = \frac{e^{at}-e^{-at}}{2}$.

I. Naći Laplasovu transformaciju funkcije originala:

Primer 1. $f(t) = 2\,t^3 e^{-4t} + 3t - 2 + 2\sin 3t + 4\,\mathrm{sh}\,2t$.

Rešenje. Laplasova transformacija daće:

$$F(p) = \mathcal{Z}\{f(t)\} = 2\mathcal{Z}\{t^3 e^{-4t}\} + 3\,\mathcal{Z}\{t\} - 2\mathcal{Z}\{1\} + 2\mathcal{Z}\{\sin 3t\} + 4\,\mathcal{Z}\{\mathrm{sh}\,2t\},$$

II. Naći original-funkcije za zadate Laplasove transformacije:

Primer 2. $F(p) = \frac{2p-3}{p^2-4p+7}$

Rešenje. Na prvom koraku transformišemo ovaj izraz za $f(p)$:

$$F(p) = \frac{2p-3}{p^2-4p+7} = \frac{2(p-2)+1}{(p-2)^2+3} = 2\,\frac{p-2}{(p-2)^2+3} + \frac{1}{(p-2)^2+3} =$$

$$= 2\,\frac{p-2}{(p-2)^2+(\sqrt{3})^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\;\frac{\sqrt{3}}{(p-2)^2+(\sqrt{3})^2}.$$

U tablici osnovnih funkcija nalazimo inverznu Laplasovu transformaciju:

$$f(t) = 2\,\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{p-2}{(p-2)^2+(\sqrt{3})^2}\right\} + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{3}}{(p-2)^2+(\sqrt{3})^2}\right\}$$

$$f(t) = 2\,e^{2t}\cos\sqrt{3}\,t + \frac{1}{\sqrt{3}}\,e^{2t}\sin\sqrt{3}\,t =$$

$$= e^{2t}\left(2\cos\sqrt{3}\,t + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}\,t\right).$$

Primer 3. $F(p) = \frac{p+5}{p^2(p+1)^2}$.

Rešenje. Pošto je izraz za $F(p)$ pravi razlomak, možemo ga napisati u obliku

$$F(p) = \frac{p+5}{p^2(p+1)^2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p+1} + \frac{D}{(p+1)^2}.$$

Koeficijente A,B,C i D odredićemo metodom neodredjenih koeficijenata:

$$\frac{p+5}{p^2(p+1)^2} = \frac{Ap(p+1)^2+B(p+1)^2+C\,p^2(p+1)+Dp^2}{p^2(p+1)^2} =$$

$$= \frac{A(p^3+2p^2+p)+B(p^2+2p+1)+C(p^3+p^2)+Dp^2}{p^2(p+1)^2};$$

Dobili smo znači, razvoj sa A = -9; B = 5; C = 9; D = 4:

$$F(p) = \frac{p+5}{p^2(p+1)^2} = \frac{-9}{p} + \frac{5}{p^2} + \frac{9}{p+1} + \frac{4}{(p+1)^2}.$$

Iz tablice osnovnih funkcija nalazimo inverznu Laplasovu transformaciju, odnosno traženi original:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(p)\right\} = -9\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} + 5\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2}\right\} + 9\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p+1}\right\} + 4\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p+1)^2}\right\};$$

$$f(t) = -9 + 5t + 9e^{-t} + 4\,t\,e^{-t}.$$

Primer 4. $F(p) = \dfrac{1}{(p^2+w^2)^2}$.

Rešenje. Napišimo F(p) u obliku:

$$F(p) = \frac{1}{(p^2+w^2)^2} = \frac{1}{p^2+w^2} \cdot \frac{1}{p^2+w^2}.$$

Ovo je proizvod dveju Laplasovih slika čiji su originali funkcije $y = \frac{1}{w}\sin w\,t$. Na osnovu pravila proizvoda inverzna Laplasova slika biće:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{F(p)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2+w^2}\cdot\frac{1}{p^2+w^2}\right\} =$$

$$= \int \frac{1}{w^2}\sin w\tau \sin w(t-\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2w^2}\int\left\{\cos w(2\tau-t) - \cos wt\right\}d\tau = \frac{1}{2w^3}(\sin wt - wt\cos wt).$$

Primenom Laplasovih transformacija rešavanje diferencijalnih i integralnih jednačina svodi se na rešavanje algebarskih jednačina i nalaženje original-funkcije f(t), odnosno inverzne Laplasove transformacije.

III. Linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima $y + ay = q(x)$; $a = \text{const}$.

Primenom Laplasove transformacije na levu i desnu stranu jednačine dobijamo uz oznaku: $Y(p) = \mathcal{L}\left\{y(x)\right\}$; $Q(p) = \mathcal{L}\left\{q(x)\right\}$

$\mathcal{L}\left\{y'\right\} + a\,\mathcal{L}\left\{y\right\} = \mathcal{L}\left\{q(x)\right\}$; $p\,Y(p) - y(o) + a\,Y(p) = Q(p)$;

$$Y(p) = \frac{y(o)}{p+a} + \frac{Q(p)}{p+a}.$$

Sada treba naći original funkciju y(x) čija je slika Y(p), odnosno treba naći inverznu Laplasovu transformaciju $\mathcal{L}^{-1}\left\{Y(p)\right\}$.

Primer 5. Primenom Laplasove transformacije rešiti jednačinu: $y' + 3y = e^{-2x}$, $y(o) = o$.

Rešenje. Primenom Laplasove transformacije na levu i desnu stranu jednačine dobijamo:

$$\mathcal{L}\left\{y'\right\} + 3\,\mathcal{L}\left\{y\right\} = \mathcal{L}\left\{e^{-2x}\right\}.$$

Sada koristimo pravilo diferenciranja $\mathcal{L}\{y'\} = pY(p) - y(o) = pY(p)$, a u tablici nalazimo $\mathcal{L}\left\{e^{-at}\right\} = \frac{1}{p+a}$. Imamo:

$$pY(p) + 3Y(p) = \frac{1}{p+2};\quad Y(p) = \frac{1}{(p+2)(p+3)}.$$

Razlomak $\dfrac{1}{(p+2)(p+3)}$ napišimo u obliku:

$$\frac{1}{(p+2)(p+3)} = \frac{A_1}{p+2} + \frac{A_2}{p+3} = \frac{p(A_1+A_2)+3A_1+2A_2}{(p+2)(p+3)},$$

a koeficijente A_1 i A_2 odredimo metodom neodredjenih koeficijenata: $A_1 = 1$; $A_2 = -1$.

Dakle, dobili smo razvoj:

$$Y(p) = \frac{1}{p+2} - \frac{1}{p+3}.$$

Original funkciju y(x) nalazimo primenom inverzne Laplasove transformacije:

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{Y(p)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p+2} - \frac{1}{p+3}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p+2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p+3}\right\};$$

$$y(x) = e^{-2x} - e^{-3x}.$$

Ovo je traženo partikularno rešenje naše diferencijalne jednačine koje zadovoljava početni uslov $y(o) = o$.

Primer 6. Primenom Laplasove transformacije naći rešenje jednačine $y'' + 2y' + 5y = \sin x;\ x = o;\ y(o) = 1;\ y'(o) = 2$.

Rešenje. $\mathcal{L}\{y''\} + 2\mathcal{L}\{y'\} + 5\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\sin x\}$.

$$p^2Y(p) - p - 2 + 2\{pY(p) - 1\} + 5Y(p) = \frac{1}{p^2+1};$$

$$Y(p) = \frac{p+4}{p^2+2p+5} + \frac{1}{(p^2+1)(p^2+2p+5)}.$$

Razlomak $\frac{1}{(p^2+1)(p^2+2p+5)}$ napišimo u obliku:

$$\frac{1}{(p^2+1)(p^2+2p+5)} = \frac{Ap+B}{p^2+1} + \frac{Cp+D}{p^2+2p+5}.$$

Koeficijente A,B,C i D odredjujemo kao i ranije metodom neodredjenih koeficijenata i dobijamo:

$A = -\frac{1}{1o};\ B = \frac{1}{5};\ C = \frac{1}{1o};\ D = o.$

Znači, dobili smo:

$$\frac{1}{(p^2+1)(p^2+2p+5)} = \frac{-\frac{1}{1o}p + \frac{1}{5}}{p^2+1} + \frac{\frac{1}{1o}p}{p^2+2p+5} = -\frac{1}{1o}\cdot\frac{p-2}{p^2+1} + \frac{1}{1o}\,\frac{p}{p^2+2p+5}.$$

Sada sredimo ceo izraz za $y(p)$:

$$Y(p) = \frac{p+4}{p^2+2p+5} + \frac{1}{1o}\,\frac{p}{p^2+2p+5} - \frac{1}{1o}\,\frac{p-2}{p^2+1} = \frac{\frac{11}{1o}p+4}{p^2+2p+5} - \frac{1}{1o}\,\frac{p-2}{p^2+1};$$

$$Y(p) = \frac{11}{1o}\,\frac{p}{p^2+2p+5} + \frac{4}{p^2+2p+5} - \frac{1}{1o}\,\frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{5}\,\frac{1}{p^2+1};$$

$$Y(p) = \frac{11}{1o}\,\frac{p+1-1}{(p+1)^2+4} + \frac{4}{(p+1)^2+4} - \frac{1}{1o}\,\frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{5}\,\frac{1}{p^2+1} =$$

$$\frac{11}{1o}\,\frac{p+1}{(p+1)^2+2^2} + \frac{29}{1o}\,\frac{1}{(p+1)^2+2^2} - \frac{1}{1o}\,\frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{5}\,\frac{1}{p^2+1}.$$

Inverzna Laplasova slika, odnosno rešenje naše jednačine glasiće:

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(p)\} = \frac{11}{1o}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p+1}{(p+1)^2+2^2}\right\} + \frac{29}{1o}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p+1)^2+2^2}\right\} - \frac{1}{1o}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{p^2+1}\right\} + \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2+1}\right\};$$

$$y(x) = \frac{11}{1o}e^{-x}\cos 2x + \frac{1}{2}\cdot\frac{29}{1o}e^{-x}\sin 2x - \frac{1}{1o}\cos x + \frac{1}{5}\sin x.$$

Primer 7. Primenom Laplasove transformacije naći rešenje jednačine:

$$y''' + y = 1;\ y(o) = y''(o) = o.$$

Rešenje. $\mathcal{L}\{y'''\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{1\};\quad p^3Y(p) + Y(p) = \frac{1}{p};$

$$Y(p) = \frac{1}{p(p^3+1)}.$$

Napišimo razlomak $\frac{1}{p(p^3+1)}$ u obliku:

$$\frac{1}{p(p^3+1)} = \frac{1}{p(p+1)(p^2-p+1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{Cp+D}{p^2-p+1}.$$

Koeficijente A,B,C i D nalazimo metodom neodredjenih koeficijenata, odakle; $A=1;\ B = -\frac{1}{3};\ C = -\frac{2}{3};\ D = \frac{1}{3}.$

Dakle, dobili smo razvoj:

$$Y(p) = \frac{1}{p(p^3+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{p+1} + \frac{1}{3}\,\frac{-2p+1}{p^2-p+1} =$$

$$= \frac{1}{p} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{p+1} - \frac{2}{3}\,\frac{p}{(p-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{(p-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{1}{p} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{p+1} - \frac{2}{3}\,\frac{p-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{(p-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{(p-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} =$$

$$= \frac{1}{p} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{p+1} - \frac{2}{3}\,\frac{p-\frac{1}{2}}{(p-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}.$$

Odavde, primenom inverzne Laplasove transformacije dobijamo traženo partikularno rešenje:

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} - \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p+1}\right\} - \frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p-\frac{1}{2}}{(p-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\right\}$$

Konsultovanjem tablice konačno nalazimo:

$$y(x) = 1 - \frac{1}{3}e^{-x} - \frac{2}{3}e^{\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

IV. Sistemi linearnih diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima

Primer 8. Primenom Laplasove transformacije naći rešenja sistema

$$x + y' + 2y = \sin t;$$

$$x' - 2x - 4y = \cos t; \quad x(o) = y(o) = o.$$

Rešenje. Nadjimo Laplasovu transformaciju prve i druge jednačine:

$$\mathcal{L}\{x\} + \mathcal{L}\{y'\} + 2\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\sin t\}$$

$$\mathcal{L}\{x'\} - 2\mathcal{L}\{x\} - 4\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\cos t\}$$

Imajući u vidu početne uslove, dobijamo uz oznake:

$$x(p)\ \mathcal{L}\{x\} \ ; \ Y(p) = \mathcal{L}\{y\};$$

$$x(p) + (p+2)Y(p) = \frac{1}{p^2+1};$$

$$(p-2)\,X(p) - 4\,Y(p) = \frac{p}{p^2+1}.$$

Sada rešavamo ovaj algebarski sistem po nepoznatim $X(p)$ i $Y(p)$ i dobijamo:

$$X(p) = \frac{p(p+2)+4}{p^2(p^2+1)}; \quad Y(p) = -\frac{2}{p^2(p^2+1)}.$$

Izraze za $X(p)$ i $Y(p)$ prikazaćemo u obliku zbira razlomaka, na isti način metodom neodredjenih koeficijenata kao i dosad:

$$\frac{p(p+2)+4}{p^2(p^2+1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{Cp+D}{p^2+1}$$

Dobijamo: $A = 2$; $B = 4$; $C = -2$; $D = -3$.

$$\text{Dakle, } X(p) = \frac{p(p+2)+4}{p^2(p^2+1)} = \frac{2}{p} + \frac{4}{p^2} - \frac{2p+3}{p^2+1} =$$

$$= \frac{2}{p} + \frac{4}{p^2} - 2\frac{p}{p^2+1} - 3\frac{1}{p^2+1}.$$

Primenom inverzne Laplasove transformacije nalazimo nepoznatu funkciju $x(t)$:

$$x(t) = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} + 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2}\right\} - 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{p^2+1}\right\} - 3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2+1}\right\}$$

$$X(t) = 2 + 4t - 2\cos t - 3\sin t.$$

Na isti način dobijamo sledeći izraz za $Y(p)$:

$$Y(p) = -\frac{2}{p^2(p^2+1)} = -\frac{2}{p^2} + \frac{2}{p^2+1}.$$

Odavde izračunavamo nepoznatu funkciju $y(t)$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{2}{r^2} + \frac{2}{p^2+1}\right\} =$$

$$= -2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2}\right\} + 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2+1}\right\}$$

$$y(t) = -2t + 2\sin t.$$

Primer 9. Primenom Laplasove transformacije naći rešenje sistema

$$x'' + y = 1;$$

$$y'' + x = o; \quad x(o) = y(o) = x'(o) = y'(o) = o.$$

Rešenje. Nalazimo Laplasovu transformaciju obe jednačine:

$$\mathcal{L}\{x''\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{1\};$$

$$\mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{x\} = o.$$

Odavde, imajući u vidu zadate uslove, uz oznaku $X(p) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ i $Y(p) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ dobijamo:

$$p^2X(p) + Y(p) = \frac{1}{p},$$

$$p^2Y(p) + X(p) = 0.$$

Sada rešavamo ovaj algebarski sistem po nepoznatim $X(p)$ i $Y(p)$ i dobijamo:

$$Y(p) = \frac{1}{p(1-p4)};\ X(p) = -\frac{p}{1-p4}.$$

Nadalje imamo:

$$\frac{1}{p(1-p^4)} = \frac{1}{p(1-p^2)(1+p^2)} = \frac{1}{p(1-p)(1+p)(1+p^2)} =$$

$$= \frac{A}{p} + \frac{B}{1+p} + \frac{C}{1-p} + \frac{Dp+E}{1+p^2}.$$

Odavde: $A=1;\ B= -\frac{1}{4};\ C = \frac{1}{4};\ D = -\frac{1}{2};\ E = 0.$

Dakle za $Y(p)$ dobili smo ovaj izraz:

$$Y(p) = \frac{1}{p(1-p^4)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{4}\frac{1}{1+p} + \frac{1}{4}\ \frac{1}{1-p}\ \frac{p}{1+p^2}.$$

Odavde je nepoznata funkcija $y(t)$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} - \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{1+p}\right\} - \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{-1+p}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{1+p^2}\right\};$$

$$y(t) = 1 - \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{4}e^{t} - \frac{1}{2}\cos t.$$

Analogno za $X(p)$ dobijamo:

$$X(p) = \frac{-p}{1-p^4} = -\frac{1}{4}\frac{1}{1-p} + \frac{1}{4}\frac{1}{1+p} - \frac{1}{2}\frac{p}{p^2+1}.$$

$$X(t) = \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p-1}\right\} + \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p+1}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{p^2+1}\right\}.$$

$$X(t) = \frac{1}{4}e^{t} + \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}\cos t.$$

V. Linearne diferencijalne jednačine sa promenljivim koeficijentim

Kada su koeficijenti linearne jednačine polinomi po nezavisnoj promenljivoj, Laplasova transformacija može da dovede do jednostavnije jednačine. Kod ovakvih diferencijalnih jednačina koristi se pravilo:

$$\mathcal{L}\left\{t\, f(t)\right\} = -F'(p) \qquad (*)$$

Primer 10. Primenom Laplasove transformacije naći rešenje jednačine:

$$y'' + ty' - y = 0;\quad y(0) = 0;\ y'(0) = 1.$$

Rešenje. Neka je $Y(p) = \mathcal{L}\{y(t)\}$. Tada je:

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} = pY(p) - y(0) = pY(p).$$

Koristeći vezu (*) dobijamo:

$$\mathcal{L}\{ty'(t)\} = -\frac{d}{dp}\left\{pY(p)\right\} = -Y(p) - pY'(p).$$

Nadalje imamo:

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} = p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - 1.$$

Primenjujemo Laplasovu transformaciju na našu jednačinu:

$$p^2Y(p) - 1 - Y(p) - pY'(p) - Y(p) = 0;\ Y'(p) + \left(\frac{2}{p} - p\right)Y(p) = -\frac{1}{p}.$$

$$pY'(p) - Y(p)(2-p^2) = 1.$$

Ovo je linearna diferencijalna jednačina prvog reda po nepoznatoj funkciji $Y(p)$, a njeno rešenje lako nalazimo po poznatom obrazcu:

$$Y(p) = e^{\int\left(p-\frac{2}{p}\right)dp}\left(C - \int\frac{1}{2}e^{\int\left(\frac{2}{p}-p\right)dp}dp\right) = \frac{1}{p^2} + \frac{Ce^{\frac{p^2}{2}}}{p^2}.$$

Zbog $\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{p^2}$ početnoj vrednosti nezavisno promenljive $t = 0$ odgovara vrednost $p \to \infty$. Za $C = 0$, kada $p \to \infty$ $Y(p) \to 0$.

Znači, treba naći inverznu Laplasovu sliku funkcije $Y(p) = \frac{1}{p^2}$.

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{Y(p)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2}\right\} = t.$$

Funkcija $y(t) = t$ jeste traženo partikularno rešenje naše jednačine.

VI. Integralne i integro-diferencijalne jednačine

Dok se kod integralnih jednačina nepoznata funkcija javlja pod znakom integrala, kod integro-diferencijalnih jednačina nepoznata funkcija se javlja i pod znakom integrala i pod znakom izvoda.

Laplasova transformacija se može primeniti na integralne jednačine Volterovog tipa pri čemu se koristi Laplasova slika konvolucije dveju funkcija:

$$F_1(p) = \mathcal{L}\left\{f_1(t)\right\}, \quad F_2(p) = \mathcal{L}\left\{f_2(t)\right\}$$

$$\mathcal{L}\left\{f_1(t) * f_2(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f_1(t-\tau)\, f_2(\tau)\, d\tau\right\} = F_1(p)\, F_2(p).$$

Primer 11. Primenom Laplasove transformacije naći rešenje integralne jednačine: $\sin^2 x = \int_0^x \sin(x-t)\, a(t)\, dt$.

Rešenje. Koristimo trigonometrijski identitet $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ pa jednačina dobija oblik:

$$\frac{1-\cos 2x}{2} = \int_0^x \sin(x-t)a(t)\, dt.$$

Pošto je na desnoj strani konvolucija funkcija $\sin x$ i nepoznate funkcije $a(x)$ imamo:

$$\frac{1}{2}\mathcal{L}\{1\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}\{\cos 2x\} = \mathcal{L}\{\sin x\}\,\mathcal{L}\{a(t)\}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\,\frac{p}{p^2+4} = \frac{1}{1+p^2}\, A(p);$$

$$A(p) = \frac{2(1+p^2)}{p(p^2+4)} = 2\,\frac{p^2+4-3}{p(p^2+4)} = 2\,\frac{1}{2} - 6\,\frac{1}{p(p^2+4)} = \frac{2}{p} - \frac{6}{4}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2+4}\right).$$

Odavde primenom inverzne Laplasove transformacije dobijamo:

$$a(x) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{p} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+4}\right)\right\} =$$

$$= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} - \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} + \frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p}{p^2+4}\right\}.$$

Konačno, traženo rešenje integralne jednačine glasi:

$$a(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos 2x.$$

Primer 12. Primenom Laplasove transformacije rešiti integro-diferencijalnu jednačinu:

$$x^5 = \int_0^x \left(-x^2+2x\,t - t^2+2x\,t - 2t^2\right)a(t)dt.$$

Rešenje. Najpre, napišimo jednačinu u sredjenijem obliku, pogodnom za primenu Laplasove transformacije:

$$x^5 = -\int_0^x (x-t)^2 a(t)\, dt + 2\int_0^x (x-t)t\, a(t)\, dt.$$

Sada primenimo Laplasovu transformaciju:

$$\mathcal{L}\left\{x^5\right\} = -\mathcal{L}\left\{\int_0^x (x-t)^2 a(t)dt\right\} + 2\mathcal{L}\left\{\int_0^x (x-t)t\, a(t)\, dt\right\}.$$

Koristimo Laplasovu transformaciju konvolucije, kao i pravilo $\mathcal{L}\left\{t\, a(t)\right\} = -A'(p)$:

$$\frac{5!}{p^6} = -\frac{2}{p^3}A(p) + 2\,\frac{1}{p^2}\left(-A'(p)\right);$$

$$A'(p) + \frac{1}{p}A(p) = -\frac{60}{p^4}.$$

Dobili smo linearnu diferencijalnu jednačinu prvog reda po nepoznatoj funkciji $A(p)$, a njeno rešenje lako nalazimo:

$$A(p) = e^{-\int\frac{dp}{p}}\left(C - 60\int \frac{1}{p^4}\, e^{\int\frac{dp}{p}} dp\right) = \frac{C}{p} + \frac{30}{p^3}.$$

Sada primenjujemo inverznu Laplasovu transformaciju:

$$a(x) = Ƶ^{-1}\left\{ A(p) \right\} = Ƶ^{-1}\left\{ \frac{C}{p} + \frac{30}{p^3} \right\} =$$
$$= C\,Ƶ^{-1}\left\{ \frac{1}{p} \right\} + 15\,Ƶ^{-1}\left\{ \frac{2}{p^3} \right\}.$$

Odavde dobijamo: $a(x) = C + 15\,x^2$.

Z A D A C I

Naći Laplasove slike funkcija-originala:

1. $f(t) = \cos^2(wt)$; $f(t) = \frac{1+\cos 2wt}{2}$;
$F(p) = \frac{1}{2p} + \frac{1}{2}\,\frac{p}{p^2+4w^2}$.

2. $f(t) = \cos 2t \sin 3t$; $f(t) = \frac{1}{2}(\sin 5t + \sin t)$;
$F(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{25}{p^2+25} + \frac{1}{p^2+1}\right)$).

Naći original-funkcije za zadate Laplasove slike:

3. $F(p) = \frac{1}{p^2+2p}$; ($F(p) = \frac{1}{(p+1)^2-1}$; $f(t) = e^{-t}\sin t$).

4. $F(p) = \frac{a-b}{(p-a)(p-b)}$; $(a>b,\ p>a)$; ($f(t) = e^{at}-e^{bt}$).

5. $F(p) = \frac{5p+3}{(p-1)(p^2+2p+5)}$

$$\left(F(p) = \frac{5p+3}{(p-1)(p^2+2p+5)} = \frac{A}{p-1} + \frac{Mp+N}{p^2+2p+5} = \frac{1}{p-1} - \frac{p-2}{(p+1)^2+4} =\right.$$
$$\left.= \frac{1}{p-1} - \frac{p+1}{(p+1)^2+4} + \frac{3}{(p+1)^2+4};\ f(t) = e^t - e^{-t}\left(\cos 2t - \frac{3}{2}\sin 2t\right)\right).$$

Rešiti primenom Laplasove transformacije sledeće diferencijalne jednačine:

6. $y' + y = x$
$\left(y(x) = \left[y(0) + 1\right]e^{-x} + x - 1\right)$.

7. $y'' - 2ay' + (a^2+b^2)y = 0$; $x = 0$; $y = y_0$; $y' = y_0'$.
$\left(y(x) = \frac{e^{ax}}{b}\left[y_0 b \cos b_x - (y_0' - a\,y_0)\sin bx\right]\right)$.

8. $y'' - 3y' + 2y = e^{5x}$; $x = 0$; $y=1$; $y'=2$.
$\left(y(x) = \frac{1}{12}e^{5x} + \frac{1}{4}e^{x} - \frac{4}{3}e^{2x}\right)$.

9. $y'' + m^2 y = a\cos nx$; $x=0$; $y=y_0$; $y' = y_0'$.
$\left(y(x) = \frac{a}{m^2-n^2}(\cos nx - \cos mx) + y_0\cos nx + \frac{y_0}{m}\cos mx\right)$.

10. $y''' + y = \frac{1}{2}x^2e^x$; $x=0$; $y=y'=y''=0$.
$\left(y(x) = \frac{1}{4}(x^2-3x+\frac{3}{2})e^x - \frac{1}{24}e^{-x} - \frac{1}{3}\left[\cos\frac{x\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right]e^{\frac{1}{2}x}\right)$.

11. $y^{IV} + y''' = 3e^{-x}$; $x=0$; $y=y'=y'''=y^{IV}=0$.
$\left(y(x) = 3x-3+\frac{3}{2}(\cos x - \sin x + e^{-x})\right)$.

12. $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0$; $x=0$; $y = 0$.
$\left(y(x) = C\,x^2e^x\right)$.

Naći primenom Laplasove transformacije rešenje sistema:

13. $\left.\begin{array}{l} x'' - y'' + y' - x = e^t - 2 \\ 2x'' - y'' - 2x' + y = -t \end{array}\right\}$ $t=0$; $x=x'=y=y'=0$.
$x(t) = 1-e^t+t\,e^t$; $y(t) = -t + t\,e^t$).

14. $\left.\begin{array}{l} x'+2x+2y = 10\,e^{2t} \\ y'-2x+y = 7\,e^{2t} \end{array}\right\}$ $x(0)=1$; $y'6o) = 3$.
$\left(x(t) = e^{2t};\ y(t) = 3\,e^{2t}\right)$

15. $\left.\begin{array}{l} x' = y - z \\ y' = x + y \\ z = x + z \end{array}\right\}$ $x(0) = 1$; $y(0) = 2$; $z(0) = 3$.
$\left(x(t) = 2-e^t;\ y(t) = -2+4e^t-t\,e^t;\ z(t) = -2+5e^t-t\,e^t\right)$

Rešiti primenom Laplasove transformacije sledeće integralne i integro-diferencijalne jednačine:

16. $y(x) = ax + \int_0^x \sin(x-t)\, y(t)dt; \quad \left(y(x) = a(x + \frac{1}{6}x^3)\right).$

17. $x^n = \int_0^x \operatorname{ch}(x-t)\, a(t)\, dt; \quad \left(a(x) = n\, x^{n-1} - \frac{1}{n+1} x^{n+2}\right).$

18. $y(x) = a \sin x + \int_0^x \sin(x-t) y(t)\, dt; \quad (y(x) = ax).$

19. $a(x) = f(x) + h\int_0^x \sin b(x-t)\, a(t)\, dt; \qquad b > h$

$$\left(a(x) = f(x) + \frac{hb}{\sqrt{b(b-h)}} \int_0^x \sin \sqrt{b(b-h)}\,(x-t)\, f(t)\, dt\right).$$

LITERATURA

1. Piskunov: Differencialjnoe i integraljnoe isčislenije (tom 2); Moskva 1946.

2. Tadija Pejović: Diferencijalne jednačine - egzistencija rešenja, Beograd 1965 g.

3. V.F.Ževeržev, L.A.Kaljnickij, N.A.Sapogov: Specijaljnij kurs višej matematiki dlja vtuzov, Moskva 197o,

Šćepan UŠĆUMLIĆ

VARIJACIONI RAČUN

Neka je M skup funkcija $y = y(x)$ sa datim uslovima. Funkcija $v(y)$ definisana na M sa vrednostima u skupu R realnih brojeva zove se **f u n k c i o n a l** nad M.

Ispitivanje ekstremuma funkcionala koji je zadan pomoću integrala je problem varijacionog računa. Funkcije $y = y(x)$ skupa M mogu zadovoljavati različite uslove i mogu biti od proizvoljnog broja promenljivih n. Zavisno od toga imamo različite probleme varijacionog računa. Pre nego budemo neke od njih naveli daćemo sledeće osnovne pojmove:

1. Skup svih tačaka oblika $\left(y_1(x), y_2(x), \ldots y_n(x)\right)$, gde su $y_i(x)$ $(i = 1,2,\ldots n)$ funkcije koje zadovoljavaju neke uslove, zove se <u>funkcionalni prostor</u>.

2. Prostor svih neprekidnih funkcija na nekom segmentu (a,b) zove se <u>prostor C</u>. U njemu se rastojanje definiše na sledeći način:
$$\rho(y,z) = \max_{a \leq x \leq b} |y(x) - Z(x)|$$

3. Prostor svih neprekidnih funkcija koje imaju neprekidne i prve izvode zove se <u>prostor C_1</u>. Rastojanje je definisano sa
$$\rho(y,z) = \max_{a \leq x \leq b} \left\{|y(x) - Z(x)|\, ;\, |y'(x) - Z'(x)|\right\}$$

4. Kažemo da funkcional $v(y)$ ima <u>ekstremum</u> za $y = y_0(x)$ ako razlika $v(y) - v(y_0)$ ima stalan znak u okolini krive $y = y_0(x)$. Ako su funkcije $y = y(x)$ u okolini krive $y_0(x)$ elementi prostora C_1 govorimo o <u>slabom ekstremumu</u>. Ako su funkcije $y = y(x)$ u okolini krive $y_0(x)$ elementi prostora C govorimo o <u>jakom</u> ekstremumu. Razmatraćemo sledeće probleme varijacionog računa

1. Neka data funkcija $y = f(x,y,y')$ ima neprekidne parcijalne izvode po x, y i y' u oblasti $a \leq x \leq b$; $y_1 \leq y \leq y_2$. Kazaćemo da funkcional

$$v(y) = \int_a^b f(x,y,y')\,dx \qquad (1)$$

ima slabi minimum(maksimum) na funkciji $y_0(x)$ako iz $|y(x) - y_0(x)| + |y'(x) - y_0'(x)| < \varepsilon$; $(a \leq x \leq b, \varepsilon > 0)$ sledi

$v(y) - v(y_0) \geq 0$; $\quad (v(y) - v(y_0) \leq 0)$.

Funkcional (1) ima jaki minimum (maksimum) za funkciju $y_0(x)$ ako iz $|y(x) - y_0(x)| < \varepsilon$ $(a \leq x \leq b, \varepsilon > 0)$ sledi $v(y) - v(y_0) \geq 0$, $(v(y) - v(y_0) \leq 0)$. Naglasimo da su funkcije koje imaju slabi minimum (maksimum) elementi prostora C_1, a sa jakim minimumom (maksimumom) elementi prostora C. Svaki jaki ekstremum je i slabi ekstremum.

Potreban uslov da funkcija v(y), definisan da funkcional definisan sa (1) pod uslovima $y(a) = A$; $y(b) = B$ ima ekstremum, jeste da funkcija $y = y(x)$ zadovoljava sledeću Euler-Lagrangeovu jednačinu.

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \qquad (2)$$

Kriva koja zadovoljava jednačinu (2) zove se ekstremala integrala v(y).

Dovoljan uslov da funkcional (1) ima ekstremum jeste da je

a/ Za slabi minimum: (1) $\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$, Euler-Lagrangeova jednačina $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{d}{dx}\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y'}\right) u - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\,u'\right) = 0$, Jakobijev uslov, (2) gde je: $u = \frac{\partial y}{\partial c}$, a $y = y(x,c)$ ekstremala koja zadovoljava uslov $y(a) = A$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} > 0, \quad \text{za } y \text{ i } y' \text{ na ekstremali} \qquad (3)$$

b/ Za jaki minimum: (1) i (2) iz (A) i umesto uslova (3) da je

$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \geq 0$ za tačke bliske ekstremali, uz to da treba da postoji $\frac{\partial^3 f}{\partial y'^3}$.

Dovoljni uslovi za slabi i jaki maksimum su takodje (1) i (2) dok

u uslovu (3) treba umesto znaka > znak < .

2. Potreban uslov da funkcional

$$v(y) = \int_a^b f(x,y,y',\ldots,y^{(n)})\,dx \qquad (3)$$

ima ekstremum za $y = y(x)$ pod uslovima $y(a) = A_0$, $y'(a) = A_1, \ldots, y^{(n-1)}_{(a)} = A_{n-1}$; $y(b) = B_0$, $y'(b) = B_1, \ldots, y^{(n-1)}_{(b)} = B_{n-1}$, jeste da $y = y(x)$ zadovoljava jednačinu

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial y''} - \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} = 0 .$$

3. Potreban uslov da funkcional

$$v(y_1,y_2,\ldots,y_n) = \int_a^b f(x,y_1,y_2,\ldots,y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\,dx \qquad (4)$$

Za zadane granične uslove po svim funkcijama $y_1(a) = A_1, \ldots\ldots y_n(a) = A_n$; $y_1(b) = B_1, \ldots y_n(b) = B_n$, ima ekstremum jeste da je $\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_i'} = 0$, $(i = 1,2,\ldots,n)$.

4. Potreban uslov da funkcional

$$v[z(x,y)] = \iint_D f\left[x,y,z(x,y), \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right] dx\,dy \qquad (5)$$

ima ekstremum za $z = z(x,y)$, (funkcija $z = z(x,y)$ ima odredjene vrednosti na konturi oblasti D), jeste da funkcija f zadovoljava jednačinu $\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial q} = 0$ gde je $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$.

Analogne uslove imamo ako je $z = z(x_1,x_2,\ldots x_n)$ funkcija od n promenljivih.

5. Potreban uslov za funkcional

$$v(y) = \int_a^b f(x,y,y')\,dx \qquad (6)$$

gde su $(a, \varphi(a))$ i $(b, \varphi(b))$ pokretne tačke na krivama $y = \varphi(x)$ i $y = \psi(x)$ ima ekstremum za $y = y(x)$ jeste da funkcija $y = y(x)$

zadovoljava uslove $\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$, Euler-Lagrangeova jednačina

$$\left.\begin{aligned} & f+(\varphi'-y')\frac{\partial f}{\partial y'}\Big|_{x=b}=0 \\ & f+(\varphi'-y')\frac{\partial f}{\partial y'}\Big|_{x=a}=0 \end{aligned}\right\} \text{ uslov transferzalnosti.}$$

U slučaju kada je donja granica a constanta, onda otpada druga jednačina u uslovu transferzalnosti, a ako je gornja granica b constantna, otpada prva jednačina.

6. Uslovni ekstremumi. Potreban uslov da funkcional

$$v(y_1,y_2,\dots,y_n) = \int_a^b f(x,y_1,y_2,\dots y_n,y_1', y_2',\dots,y_n')dx \quad (7)$$

gde su $y_i = y_i(x)$ $(i = 1,2,\dots n)$ nepoznate funkcije koje zadovoljavaju granične uslove $y_i(a) = A_i$, $y_i(b) = B_i$ $(i = 1,2,\dots,n)$ i uslove

$$\varphi_k(x,y_1,\dots,y_k) = 0 \ (k = 1,\dots,m;\ m < n), \quad (8)$$

dostiže ekstremum jeste

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \\ \varphi_k = 0 \end{cases} \quad (9)$$

gde je $F = f + \sum_{k=1}^{m}\lambda_k(x)\varphi_k$ λ_k funkcija koju treba odrediti iz uslova (9).

U slučaju da su uslovi (8) dati u obliku

$$\int_a^b \varphi_k(x,y_1,y_2,\dots y_n, y_1',\dots,y_n')\,dx = i_k \ (k=1,\dots,n) \quad (8')$$

gde su i_k konstante, dobijamo tzv. izoperimetrijski problem. Uslovi (8') zovu se izoperimetrijski uslovi. Potreban uslov da integral (7) pod uslovima (8') ima ekstremum, jeste da funkcija y_i zadovoljavaju jednačine

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} + \sum_{k=1}^{m}\lambda_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i'} + \sum_{k=1}^{m}\lambda_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_i'}\right) = 0$$

gde su λ_k konstante koje se odredjuju zajedno sa 2n integracionih konstanti iz 2n graničnih uslova i m izoperimetrijskih uslova.

7. Potreban uslov da funkcional

$$v[x(t),y(t)] = \int_{t_0}^{t_1} f(x,y,\dot x,\dot y)\,dt \quad (10)$$

gde je f homogena funkcija prvog stepena homogenosti u odnosu na $\dot x$ i $\dot y$ ima ekstremum za krivu c: $x = \dot x(t)$, $y = y(t)$, $(t_0 \le t \le t_1)$ jeste da je

$$\frac{d}{dt}f_{\dot x} - f_x = 0, \quad \frac{d}{dt}f_{\dot y} - f_y = 0. \quad (11)$$

Može se pokazati da je jedna od navedenih jednačina (11) posledica druge.

1. Analizirati sledeće specijalne slučajeve Euler-Lagrangeove jednačine (2):

1^0 $f = f(x,y)$; 2^0 $f = \varphi(x,y)+y'\psi(x,y)$;

3^0 $f = f(x,y')$; 4^0 $f = f(y')$; 5^0 $f = f(y,y')$.

Da li u tim slučajevima uvek postoji ekstremum integrala(1).

Rešenje.

1. U ovom slučaju podintegralna funkcija ne zavisi od y', pa je $\partial f/\partial y' = 0$. Stoga Eulerova jednačina glasi $\partial f/\partial y = 0$. Ovo nije diferencijalna jednačina i u opštem slučaju se ne može zahtevati da ona zadovoljava granične uslove $y(a) = A$, $y(b) = B$. Dakle, u opštem slučaju ne postoji ekstremum osim kada kriva $y = y(x)$ prolazi kroz granične tačke.

2. Eulerova jednačina usled $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} + y'\frac{\partial\psi}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y'} = \psi(x,y)$;

$\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}y'$, dobija oblik $\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0$. Stoga izraz $\varphi(x,y)dx + \psi(x,y)dy = 0$ predstavlja totalni diferencijal, usled čega funkcional $v(y) = \int_a^b[\varphi(x,y)+y'\psi(x,y)]dx = \int_a^b\varphi(x,y)dx+\psi(x,y)dy$ predstavlja integral totalnog diferencijala. Pošto njegova vrednost ne zavisi od njegove putanje integracije on je konstanta, pa je pitanje o ekstremumu očigledno.

3. Podintegralna funkcija ne zavisi od y, pa je $\partial f/\partial y = 0$. Eulerova jednačina glasi $\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$. Odmah nalazimo prvi

integral $\partial f / \partial y' = c_1$.

4. Podintegralna funkcija $f = f(y')$ u ovom slučaju zavisi samo od y'. Stoga je $\partial f / \partial y = 0$, pa Eulerova jednačina glasi

$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$, tj. $\frac{\partial f}{\partial y'} = c_1$. Leva strana poslednje jednakosti zavisi samo od y'. Dakle, $\varphi(y') = c$, pa stoga $y' = c_1$ i $y = c_1 x + c_2$. Ekstremale su prave linije.

5. Eulerova jednačina glasi: $\frac{\partial f(y,y')}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f(y,y')}{\partial y'} =$

$= \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y'}y' - \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}y'' = 0.$ Ako ovu jednačinu pomnožimo sa y', dobijamo $\left(\frac{\partial f}{\partial y} - y'\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y'} - \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}y''\right)y' =$

$= \frac{\partial f}{\partial y}y' - \frac{\partial f}{\partial y'}y'' - y'\frac{\partial f}{\partial y'} - y'^2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y'} - y'y''\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} = \frac{d}{dx}\left(f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0,$

Na osnovu toga je $f - y'\frac{\partial f}{\partial y'} = c_1$. Dakle, Eulerova jednačina svela se na diferencijalnu jednačinu prvog reda, koja eksplicitno ne zavisi od x, pa rešenje možemo naći putem rešavanja po y', uvodjenja parametra i razdvajanjem promenljivih.

2. Naći najkraće rastojanje izmedju tačaka $A(x_0, y_0)$ i $B(x_1, y_1)$ u ravni $x\,O\,y$.

Rešenje. Rešenje ovog problema sastoji se u nalaženju krive linije koja prolazi tačkama A i B a čija je dužina luka najmanja. Dužina luka tražene krive linije izmedju tačaka A i B glasi:

$$s = \int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

Znači da treba tražiti minimum integrala $s = \int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}dx$. Podintegralna funkcija $f(y') = \sqrt{1+y'^2}$ je funkcija samo od y', pa je $\partial f/\partial y = 0$ i Eulerova jednačina glasi:

$y''/(1+y'^2)^{3/2} = 0$ odakle je $y'' = 0$. Tražena ekstremalna kriva, čija je dužina luka najkraća izmedju tačaka A i B, jeste prava linija $y = c_1 x + c_2$. Potrebno je odrediti još da ova prava prolazi kroz tačke A i B.

Kako je $\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} > 0$ i pošto je zadovoljena Jacobijeva jednačina

na dobijenoj ekstremali, to razmatrani integral ima zaista minimum.

3. Naći ekstremum integrala $I = \int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y^\alpha}dx$,

gde je α proizvoljna realna konstanta, a funkcija $y > 0$.

Rešenje. Podintegralna funkcija $f = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y^\alpha}$ ne zavisi od x. Eulerova jednačina, usled

$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{1}{y^\alpha}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$ prema tački 5^0 zadatka (1) glasi $\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y^\alpha} - \frac{y'^2}{y^\alpha\sqrt{1+y'^2}} = C$ ili $\frac{1}{y^\alpha\sqrt{1+y'^2}} = C$; odnosno $y^\alpha\sqrt{1+y'^2} = C_1$, $\left(C_1 = \frac{1}{C}\right)$.

Prvi integrali poslednje diferencijalne jednačine zavise od realnog parametra α. Razmatraćemo specijalne slučajeve ako je $\alpha = 0$ i $\alpha = -1$.

a/ Ako je $\alpha = 0$, Eulerova jednačina glasi $\sqrt{1+y'^2} = c_1$ ili $y' = \sqrt{c_1^2 - 1} = D_1$, odakle je $y = D_1 x + D_2$. Dakle, ekstremale su prave linije.

b/ Ako je $\alpha = -1$ razmatrani integral (*) postaje $I = \int_a^b y\sqrt{1+y'^2}dx = \int_a^b y\,ds$ koji pomnožen sa 2π daje najmanju obrtnu površinu koja ekstremala izmedju tačaka A i B opiše, obrćući se oko x-ose. Eulerova jednačina glasi $y = 1/c_1\sqrt{1+y'^2}$; integracija ove daje $y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x-C_2}{c}} + e^{-\frac{x-C_2}{c}}\right)$, gde treba odrediti C i C_2 da ekstremala prolazi kroz tačke A i B.

4. Naći krive na kojima funkcional

$$v(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(y'^2 - y^2)\,dx; \quad y(0) = 0; \quad y\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 1$$

dostiže ekstremum.

Rešenje. Kako podintegralna funkcija $f = y'^2 - y^2$ ne zavisi od x, Eulerova jednačina glasi: $y'^2 - y^2 - 2y'^2 = \bar{c}$ ili

$y' = \sqrt{\bar{c}^2 - y^2}$, $\quad \frac{dy}{\sqrt{\bar{c}^2 - y^2}} = dx$, $\arcsin\frac{y}{\bar{c}} = x + \bar{C}_2$, $\quad \frac{y}{\bar{c}} = \sin(x + \bar{C}_2)$.

Ako iskoristimo adicionu teoremu za funkciju $y = \sin x$, dobijamo konačno da je $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Iz datih graničnih uslova dobijamo da je $C_1 = 0$; $C_2 = 1$, pa razmatrani funkcional dostiže ekstremum samo za krivu $y = \sin x$.

5. Naći krive na kojima funkcional $v[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 - 12xy)\,dx$; $y(0)=0$, $y(1)=1$ dostiže ekstremum.

Rešenje. Eulerova jednačina usled

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 12x; \quad \frac{\partial f}{\partial y'} = 2y'; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y'} = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} = 2,$$

glasi $y'' - 6x = 0$. Ponavljajući integraciju dva puta nalazimo njeno opšte rešenje $y = x^3 + c_1 x + c_2$. Koristeći granične uslove dobijamo da je $c_1 = 0$; $c_2 = 0$. Stoga razmatrani funkcional dostiže ekstremum samo za krivu $y = x^3$.

6. Naći ekstremale sledećih integrala:

$$\int_0^x \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}\,dx; \quad y(x_0) = y_0; \quad y(x_1) = y_1.$$

Rešenje. Podintegralna funkcija $f(y,y') = \dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{y}$ ne zavisi od x. Stoga prema zadatku (1) Eulerova jednačina glasi

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} - \frac{y'^2}{y\sqrt{1+y'^2}} = \bar{C}_1.$$

Iz poslednje jednakosti sledi: $1 + y'^2 - y'^2 = \bar{C}_1 y \sqrt{1+y'^2}$;

$$\frac{1}{\bar{C}_1 y} = \sqrt{1+y'^2}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-\bar{C}_1^2 y^2}}{\bar{C}_1 y}; \quad \frac{\bar{C}_1 y}{\sqrt{1-\bar{C}_1^2 y^2}}\,dy = dx.$$

Integracijom poslednje jednačine nalazimo da je $(1/\bar{c}1)\sqrt{1-c_1^2 y^2} = x + c_2$, ili $(x+c_2)^2 + y^2 = c_1^2$. U zadnjoj jednakosti potrebno je odrediti još konstante c_1 i c_2 iz uslova $y(x_1) = y_1$ i $y(x_2) = y_2$.

7. $$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{(1+y'^2)y}\,dx.$$

Rešenje. Eulerova jednačina je oblika $f - y'\,\partial f/\partial y' = c_1$ jer podintegralna funkcija ne zavisi od x.

Usled $\dfrac{\partial f}{\partial y'} = \dfrac{yy'}{\sqrt{y(1+y'^2)}}$; ona glasi $\sqrt{y(1+y'^2)} - y'\dfrac{yy'}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = C_1$.

Iz poslednje jednakosti redom sledi da je:

$$y(1+y'^2) - yy'^2 = C_1\sqrt{y(1+y'^2)}; \quad yy' + y - yy' = C_1\sqrt{y(1+y'^2)};$$

$$y = C_1\sqrt{y(1+y'^2)}; \quad \frac{y^2}{C_1^2} = y + yy'^2;$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y - C_1^2}}{C_1}; \quad \frac{dy}{\sqrt{y - C_1^2}} = \frac{dx}{C_1}.$$

Integracijom poslednje jednakosti nalazimo da je $y = c_1^2 + (1/2c_1\, x + c_2)^2$. Dakle, ekstremale su parabole.

8. $v[y(x)] = \int_0^1 (xy + y^2 - 2y^2 y')\,dx$; $y(0) = 1$, $y(1) = 2$.

Rešenje. Podintegralna funkcija zavisi linearno od y', tj. $f = \varphi(x,y) + y'\psi(x,y)$. Prema rešenju zadatka (1), Eulerova jednačina glasi $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} - \dfrac{\partial \psi}{\partial x} = 0$, ili konkretno u ovom slučaju usled $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = x + 2y$ i $\dfrac{\partial \psi}{\partial x} = 0$; $x + 2y = 0$. Poslednja jednačina nije diferencijalna, a početni uslovi nisu zadovoljeni, te ne postoji nijedna funkcija iz klase neprekidnih funkcija za koju razmatrani funkcional ima ekstremum.

9. $v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (y^2 + y'^2 - 2y \sin x)\,dx$.

Rešenje. Eulerova jednačina glasi, $y'' - y = -\sin x$. Njeno opšte rešenje je $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \left(\frac{1}{2}\right)\sin x$.

Poslednje krive su ekstremale za razmatrani funkcional.

10. $\int_0^1 (y^2 + y'^2 + 2ye^x)\,dx$; $y(0) = 0$, $y(1) = \frac{e}{2}$.

Rešenje. Opšti integral Eulerove jednačine $y - y = e^x$, glasi $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + 1/2\, xe^x$. Na osnovu graničnih uslova tražena ekstremala ima jednačinu $y = \left(\frac{1}{2}\right) xe^x$.

11. $\int_{x_0}^{x_1}(xy'+y'^2)\,dx.$

<u>Rezultat</u>. Ekstremale su krive $y = -\frac{x^2}{4} + c_1x + c_2$.

12. $\int_{x_0}^{x_1}(y'^2+2yy'-16y^2)\,dx.$

<u>Rezultat.</u> $y = c_1\sin(4x+c_2)$.

Odrediti ekstremale funkcionala.

13. $v[y(x)] = \int_{-1}^{1}(x^2y'^2+12y^2)\,dx; \quad y(-1)=1, \quad y(1)=1.$

<u>Rešenje</u>. Usled, $\frac{\partial f}{\partial y}=24y$; $\frac{\partial f}{\partial y'}=2x^2y'$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y'}=4xy'$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y'}=0$;

$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}=2x^2$. Eulerova jednačina glasi; $x^2y'' + 2xy' - 12y = 0$. Njeni partikularni integrali odredjuju se u obliku $y = x^r$. Redom nalazimo da je $y' = r\cdot x^{r-1}$ i $y'' = r(r-1)x^{r-2}$, pa Eulerova jednačina glasi: $x^r\left[r(r-1) + 2r - 12\right] = 0$.

Iz poslednje jednačine nalazimo da je $r_1 = 3$, a $r_2 = -4$ pa su ekstremale krive $y = c_1x^3 + c_2x^{-4}$. Iz graničnih uslova dobijamo da je $c_1 = 1$ a $c_2 = 0$. Dakle, funkcional dostiže ekstremum za krivu $y = x^3$. Za ispitivanje o kome se ekstremum radi koristili smo Jacobijevu jednačinu, koja u opštem slučaju glasi:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\frac{d}{dx}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y'}\right)u-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}u'\right)=0;$$

gde je $u = \frac{\partial y}{\partial c}$; a $y = y(x,c)$ ekstremala koja zadovoljava uslov $y(a) = A$. Jacobijeva jednačina, usled $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=24$;

$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y'}=0$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}=2x^2$; $y(x,c)=x^3+cx^{-4}$; $u=\frac{\partial y(x,c)}{\partial c}=x^{-4}$;

$u'=-4x^{-5}$; $u''=20x^{-6}$; $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\cdot u'\right)=4xu'+2x^2u''$,

glasi $24u - 4xu' - 2x^2u'' = 0$ ili $x^2u'' + 2xu' - 12u = 0$. Zamenom izraza za u, u' i u'' u poslednjoj jednakosti, lako izračunavamo da je ona zadovoljena. Pošto je $\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} = 2x^2 \geqslant 0$

zaključujemo da razmatrani funkcional ima jaki minimum.

14. $v[y(x)] = \int_1 y'(1+x^2y')\,dx; \quad y(1)=1, \quad y(2)=4.$

<u>Rešenje</u>. Eulerova jednačina usled $f = y' + x^2y'^2$;

$\frac{\partial f}{\partial y'} = 1 + 2x^2y'$; $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 4xy'$;

$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y'} = 0$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} = 2x^2$, glasi $2y' + xy'' = 0$. Njen opšti integral je $y = c_1/x + c_2$. Iz zadanih graničnih uslova nalazimo da je $c_1 = -6$ i $c_2 = 7$. Dakle, razmatrani funkcional dostiže ekstremum za krivu $y = -6/x + 7$. Lako proveravamo da je zadovoljen Jacobijev uslov gde je: $y(x,c) = -6/x + c$. Pošto je $\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} = 2x^2 > 0$, razmatrani integral ima slabi minimum.

15. $v[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{4}}(4y^2-y'^2+8y)\,dx; \quad y(0)=-1, \quad y(\frac{\pi}{4})=0.$

<u>Rešenje</u>. Eulerova jednačina glasi: $y'' + 4y = -4$. Njen opšti integral glasi: $y = c_1\cos2x + c_2\sin2x-1$. Iz graničnih uslova dobijamo da je $y = \sin2x-1$ tražena ekstremala. Jacobijeva jednačina za $y(x,c) = c\sin2x-1$ je zadovoljena. Pošto je $\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} = -2 < 0$, razmatrani integral dostiže maksimalnu vrednost na krivoj $y = \sin2x-1$.

16. $v[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{4}}(y^2-y'^2+6y\sin 2x)\,dx; \quad y(0)=0, \quad y=\left(\frac{\pi}{4}\right)=1.$

<u>Rezultat.</u> Ima jak maksimum za $y = \sin2x$.

17. $v[y(x)] = \int_1^2(xy'^4-2yy'^3)\,dx; \quad y(0)=0, \quad y(1)=0.$

<u>Rezultat.</u> Funkcional dostiže slabi minimum za $y = 0$.

18. $v[y(x)] = \int_1^3(12xy+y'^2)\,dx; \quad y(1)=0, \quad y(3)=26.$

Rezultat. Funkcional dostiže jaki minimum za $y = x^3 - 1$.

19. Naći funkciju za koju funkcional $v[y(x)] = \int_0^1 (1+y''^2)dx$; $y(0)=0$, $y'(0)=1$, $y(1)=1$, $y'(1)=1$, ima ekstremum.

Rešenje. Eulerova jednačina u ovom slučaju, pošto podintegralna funkcija sadrži izvod drugog reda, glasi

$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial y''} = 0$, konkretno usled $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$; $\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$; čiji je oblik $\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial y''} = 0$; ili $\frac{d^2}{dx^2} y'' = 0$ ili $y''' = 0$. Opšte rešenje poslednje jednačine je: $y = c_1x^3 + c_2x^2 + c_3x + c_4$. Koristeći granične uslove dobićemo da je: $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 1$ i $c_4 = 0$. Dakle, razmatrani funkcional dostiže ekstremum samo za $y = x$.

20. Odrediti ekstremum funkcionala: $v[y(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y''^2 - y^2 + x^2)dx$, koji zadovoljava uslove da je $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

Rešenje. Eulerova jednačina usled $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$; $\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$; $\frac{\partial f}{\partial y''} = 2y''$, glasi da je $-2y + \frac{d^2}{dx^2}(2y'') = 0$ ili $y^{IV} - y = 0$. Njeno opšte rešenje je $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3\cos x + c_4\sin x$. Korišćenjem graničnih uslova nalazimo da je $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = 1$, $c_4 = 0$. Prema tome, integral ima ekstremum za krivu $y = \cos x$.

21. Naći funkciju za koju funkcional $J(y) = \int_0^1 (2xy + y'''^2)dx$; $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$; $y(1) = \frac{1}{7!}$; $y'(1) = \frac{1}{6!}$; $y''(1) = \frac{1}{5!}$ dostiže ekstremum.

Rešenje. Kako je za ovaj slučaj

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x$; $\frac{\partial f}{\partial y'} = 0$; $\frac{\partial f}{\partial y''} = 0$; $\frac{\partial f}{\partial y'''} = 2y'''$,
Eulerova jednačina glasi: $2x - \frac{d^3}{dx^3}(y''') = 0$, ili $y^{VI} - x = 0$. Njen opšti integral glasi: $y = x^7/7! + c_1x^5 + c_2x^4 + c_3x^3 + c_4x^2 + c_5x + c_6$. Na osnovu graničnih uslova dobijamo da je $c_k = 0$ (gde je $k = 1,2,\ldots 6$). Dakle, tražena ekstremala je kriva $y = x^7/7!$

22. Naći ekstremale funkcionala $v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (16y^2 - y''^2 + x^2)dx$.

Rešenje. Funkcional ima ekstremum za krive $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + c_3\cos 2x + c_4\sin 2x$.

23. Ispitati ekstremale funkcionala:
$v[y(x), z(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y'^2 + z'^2 + 2yz)dx$; $y(0)=0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$; $z(0)=0$, $z\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$.

Rešenje. Eulerove jednačine u ovom slučaju usled, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2z$, $\frac{\partial f}{\partial y'} = 2y'$, $\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 2y''$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 2y$, $\frac{\partial f}{\partial z'} = 2z'$, $\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial z'} = 2z''$, glase: $z - y'' = 0$, $y - z'' = 0$.

Ako drugu jednačinu dva puta diferenciramo, dobijamo umesto navedenog sledeći sistem jednačina

$$(*) \qquad z - y'' = 0, \quad y'' - z^{IV} = 0.$$

Eliminacijom iz poslednjih y, y' i y'' dobija se jednačina $z^{IV} - z = 0$ čiji je opšti integral $z = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3\cos x + c_4\sin x$. Pošto je $z'' = c_1e^x + c_2e^{-x} - c_3\cos x - c_4\sin x$ iz druge jednačine sistema (*), sledi da je $y = c_1e^x + c_2e^{-x} - c_3\cos x - c_4\sin x$. Iz graničnih uslova dobijamo da je $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, $c_4 = -1$. Ekstremala za koju se postiže ekstremum ima jednačine $y = \sin x$ i $z = -\sin x$.

24. Naći ekstremale funkcionala $v[y(x), z(x)] = \int_{x_0}^{x_1} (2yz - 2y^2 + y'^2 - z'^2)dx$.

Rešenje. Ekstremale su krive $y = (c_1x + c_2)\cos x + (c_3x + c_4)\sin x$; $z = 2y + y''$.

25. Pokazati da je najkraće rastojanje izmedju dve tačke $A(x_0, y_0, z_0)$ $B(x_1, y_1, z_1)$ u prostoru prava linija.

Rešenje. Dužina luka krive u prostoru izmedju datih tačaka računa se pomoću obrasca

$$J = \int_{x_0}^{x_1} ds = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2+z'^2}\, dx .$$

Dakle, potrebno je ispitati ekstremum navedenog funkcionala (*) Eulerove jednačine glase $y' = c_1 \, 1+x'^2 + z'^2$ a $z' = c_2 \, 1+y'^2 + z'^2$, odakle je $y = c_2 z + c_3$. Poslednja jednačina zajedno sa jednačinom $y' = c_1 1+y'^2 + z'^2$ da je $z = c_4 x + c_5$. Konačno iz jednačina $y = c_2 z + z_3$, i $z = e_4 x + c_5$ treba odrediti konstante da prava prolazi kroz tačke A i B.

Integracijom poslednje jednačine dobijamo traženu familiju ekstremala $(x-c_1)^2 + y^2 = c_2^2$.

26. Iz uslova $y(0) = 0$ dobijamo da je $c_1 = c_2 = c$, tako da je $x^2 + y^2 - cx = 0$ specijalna familija ekstremala. Uslov transferzalnosti glasi:

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} + (\varphi' - y') \frac{y'}{y\sqrt{1+y'^2}} = 0 , \text{ ili } 1+y'\varphi' = 0, \; y' = -\frac{1}{\varphi'(x)} .$$

Pošto je: $\varphi(x) = \sqrt{9-(x-9)^2}$, to je $\varphi'(x) = \frac{9-x}{\sqrt{18x-x^2-72}}$.

Dakle, nagib za y' glasi $y' = \frac{\sqrt{18x-x^2-72}}{x-9}$, granična tačka x_1 leži na ekstremali, pa mora biti ispunjen uslov da je $9-(x_1-9)^2 = cx_1 - x_1^2$ i istovremeno $\frac{c_1-2x_1}{2\sqrt{cx_1-x_1^2}} = \frac{\sqrt{18x_1-x_1^2-72}}{x_1-9}$.

Iz poslednje dve jednačine nalazimo da je $x_1 = 36/5$, a $c = 8$, te tražena ekstremala ima jednačinu $y = 8x - x^2$ ili $x^2 + y^2 = 8x$.

27. Naći funkciju za koju se može postići ekstremna funkcionala

$$v[y(x)] = \int_0^{\pi/4} (y^2 - y'^2)\, dx ; \quad y(0) = 0,$$

ako je druga granična tačka pokretna na pravoj $x = \frac{\pi}{4}$.

Rešenje. Jednačina tražene ekstremale glasi: $y = 0$.

28. Odrediti ekstremum funkcionala

$$v[y(x)] = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}\, dx ; \quad y(0) = 0, \quad y_1 = x_1 - 5 .$$

Rešenje. Prema rešenju zadatka (6) ekstremale su krive $(x + c_2)^2 + y^2 = c_1^2$. Iz prvog graničnog uslova sledi da je $c_1 = c_2 = c$, pa su ekstremale krive $(x+c)^2 + y^2 = c^2$. Uslov transferzalnosti glasi $1 + y_1' = 0$. Diferenciranjem jednačine ekstremala za tačku $(x_1 y_1)$ dobija se $y_1' = -(x_1+c)/y_1$. Tražene vrednosti x_1, y_1, c odredićemo iz jednačina $(x_1 + c)^2 + y_1^2 = c^2$, $y_1 = x_1 - 5$, $1-(x_1+c)/y_1 = 0$. Ekstremum se postiže duž kružnih lukova $y = \sqrt{10x - x^2}$ ili $y = -\sqrt{10x - x^2}$.

29. Naći ekstremalu izoperimetrijskog problema

$$v[y,z] = \int_0^1 (y'^2 + z'^2 - 4xz' - 4z)\, dx ; \; y(0)=0, \; y(1)=1, \; z(0)=0, \; z(1)=1,$$

pri uslovu $\int_0^1 (y'^2 - xy' - z'^2)\, dx = 2$.

Rešenje. Usled toga što je $F = y'^2 + z'^2 - 4xz' - 4z + \lambda(y'^2 - xy' - z'^2)$ $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y'} = 2y' + 2\lambda y' - \lambda x$, $\frac{\partial F}{\partial z'} = 2z' - 4x - 2\lambda z'$, Eulerove jednačine glase: $\frac{d}{dx}\left(2y' + 2\lambda y' - \lambda x\right) = 0$, i $4 + \frac{d}{dx}\left(2z' - 4x - 2\lambda z'\right) = 0$.

Stoga je $2y' + 2\lambda y' - \lambda x = c_1$ i $(1-\lambda)z' = c_2$.

Rešavanjem poslednjeg sistema diferencijalnih jednačina nalazimo da je $y = \frac{c_1}{2(1+\lambda)} x + \frac{\lambda}{4(1+\lambda)} x^2 + c_3$ i $z = \frac{c_2}{1-\lambda} x + c_4$.

Iz graničnih uslova sledi: $c_1 = \frac{4+3\lambda}{2}$, $c_2 = 1-\lambda$, $c_3 = c_4 = 0$,

pa je $y = \frac{4+3\lambda}{4(1+\lambda)} x + \frac{\lambda}{4(1+\lambda)} x^2$ i $z = x$.

Diferenciranjem poslednjih jednačina i zamenjivanjem u podintegralnu funkciju izoperimetrijskog problema dobija se jednačina

$$\int_0^1 \frac{4\lambda(\lambda+2)x^2 + 4(4+3\lambda)x + 7\lambda^2 + 8\lambda}{16(1+\lambda)^2}\, dx = -2$$

iz koje odredjujemo veličinu λ. Rešavanjem poslednje jednačine nalazimo da je $\lambda_1 = -10/11$ i $\lambda_2 = -12/11$, pa jednačine traženih ekstremala $y = -5/2\, x^2 + 7/2x$ $z = x$ ili $y = -2x + 3x^2$ i $z = x$.

Može se pokazati da druga kriva ne realizuje ni maksimum ni minimum, već samo prava.

30. Naći ekstremale izoperimetrijskog problema $J=\int_{x_0}^{x_1} y'^2 dx$, pri uslovu $\int_{x_0}^{x_1} y dx = a$, $(a - const.)$.

Rešenje. Ekstremale su krive

$$y = \lambda \frac{x^2}{4} + C_1 x + C_2 ,$$

gde c_1, c_2 i λ treba odrediti iz graničnih i izoperimetrijskih uslova.

Literatura

[1] P.Miličić i M.Uščumlić — Zbirka zadataka iz više matematikeII, I izdanje, Gradjevinska knjiga,Beograd, 1971.

[2] S.Fempl — Varijacioni račun, Zavod za izdavanje udžbenika SRS,Beograd,1969.

[3] ВАРИЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ИНТЕГРАЛНЫЕ УРАВНЕНИЯ. - Л.Я. ЦЛАФ - МОСКВА 1970.

[4] Л.Э. ЭЛЬСГОЛЬЦ - ВАРИАЦИОНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ МОСКВА 1958.

NUMERIČKA ANALIZA

Gradimir MILOVANOVIĆ

U V O D

U različitim oblastima savremene nauke i tehnike postavljaju se problemi koji se klasičnim matematičkim metodama ne mogu rešiti ili je njihovo rešavanje suviše glomazno, iz razloga što se zahteva brojčani rezultat. Na primer, dokazano je /Vanšel; Abel/ da su algebarske jednačine u opštem slučaju rešive samo kada je stepen $n \leq 4$. Medjutim, u praksi se vrlo često sreće problem rešavanja jednačina visokog stepena. Takodje, često se javlja i problem rešavanja sistema linearnih algebarskih jednačina sa stotinu, pa i hiljadu nepoznatih ili, pak, rešavanje diferencijalnih jednačina koje se ne mogu integraliti pomoću elementarnih funkcija.

Za rešavanje ovih problema i njima sličnim razvijena je posebna oblast matematike tzv. numerička matematika. Zadatak numeričke matematike je razrada numeričkih metoda koje su pogodne sa stanovišta primene savremenih računskih sredstava /na primer, elektronski cifarski računar/. Kako računske mašine najčešće izvode samo četiri osnovne aritmetičke operacije, to numeričke metode moraju biti takve, da se svode na niz takvih operacija.

Pri rešavanju nekog problema potrebno je izabrati pogodan algoritam /postupak o izvršavanju odredjenih operacija/, koji najbrže dovodi do željenog rezultata. Ovo je naročito važno kod primene savremenih elektronskih računskih mašina, s obzirom na cenu mašinskog vremena. Izbor najracionalnijeg algoritma za rešavanje numeričkog zadatka predstavlja vrlo složen problem, koji teorijski još uvek nije rešen.

U poslednje vreme uspešno se razvija oblast - teorija programiranja, čiji je zadatak priprema i sastavljanje programa prema izabranom algoritmu za mašinu, u cilju rešavanja konkretnog zadatka.

I. OPERACIJE SA PRIBLIŽNIM VELIČINAMA

Početni podaci zadatka dobijaju se često eksperimentalnim putem, pa je njihova tačnost ograničena. Dalje, u procesu računanja radi se sa iracionalnim brojevima / e , π, $\sqrt{3}$ / koji se uzimaju približno sa odredjenim brojem cifarskih mesta. Numeričke metode, koje se najčešće koriste, daju samo približne vrednosti, a i zaokrugljivanje medjurezultata u procesu računanja dovodi do akumulacije greške.

Kod izvodjenja operacija sa približnim veličinama postavljaju se sledeći zadaci:

1. Oceniti tačnost rezultata kada je poznata tačnost početnih podataka i obrnuto. Na osnovu zadate tačnosti rezultata treba odrediti kakvu tačnost treba da imaju početni podaci.

2. Uskladiti tačnost početnih podataka ako su neki od njih zadati suviše grubo, da bi se izbegao izlišan numerički rad.

3. U procesu računanja održati tačnost medjurezultata, kako bi se došlo do konačnog rezultata sa željenom tačnošću.

Kod zaokrugljivanja brojeva treba znati sledeća pravila:

a/ Ako je zadnja cifra u broju koju odbacujemo manja od pet, onda se ona briše, a cifra ispred nje se ne menja.

b/ Ako je ova cifra veća od pet, ona se briše, a cifra ispred nje se uvećava za jedan.

c/ Ako je zadnja cifra pet, onda se posle njenog eliminisanja ide na to da nova zadnja cifra bude parna, tj. ako je parna ne menja se, a ako nije uvećava se za jedan.

<u>Primer 1</u>. Sukcesivno zaokrugljivanje broja $\pi = 3,1415926535..$ daje sledeći niz brojeva: 3,141592654; 3,14159265 ; 3,1415926 ; 3,141593 ; 3,14159 ; 3,1416 ; 3,142 ; 3,14 ; 3,1 i 3 .

<u>Klasifikacija grešaka</u>

Greške se mogu javiti u tri oblika i to kao:

1. greške zaokrugljivanja
2. neotklonjive greške
3. greške metode.

Greške zaokrugljivanja čine se u toku procesa računanja zaokrugljivanjem medjurezultata.

Ako se početni podaci ne znaju tačno, već su poznate izvesne oblasti u kojima se oni nalaze /oblasti neodredjenosti/, kao rezultat računanja dobiće se takodje neka oblast u kojoj se rešenje nalazi, bez obzira što su sva računanja tačna /bez zaokrugljivanja/. Gran..e ove oblasti odredjuju granice greške koja se naziva neotklonjivom greškom.

Kako se u numeričkoj matematici obično postavljeni problem zamenjuje drugim koji je lakši za računanje, javlja se tzv. greška metode.

Zbir navedenih grešaka čini totalnu grešku.

<u>Primer 2</u>. Uzmimo tzv. slabo uslovljeni sistem linearnih algebarskih jednačina

$$\begin{aligned} 121734\, x_1 + 169217\, x_2 + 176624\, x_3 + 166662\, x_4 &= 634237 , \\ 169217\, x_1 + 235222\, x_2 + 245505\, x_3 + 231653\, x_4 &= 881597 , \\ 176624\, x_1 + 245505\, x_2 + 256423\, x_3 + 242029\, x_4 &= 920581 , \\ 166662\, x_1 + 231653\, x_2 + 242029\, x_3 + 228474\, x_4 &= 868818 . \end{aligned} \qquad (1)$$

Tačna rešenja ovog sistema su $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$. Medjutim, ako slobodni članovi u sistemu (1) nisu tačni, već variraju samo za ± 1 i recimo budu: $b_1 = 634238$; $b_2 = 881596$; $b_3 = 920580$; $b_4 = 868819$, rešenja sistema (1) su: $x_1 = 130214370$; $x_2 = 78645876$; $x_3 = -32701403$; $x_4 = 19395881$.

Ovaj primer pokazuje da i male promene u početnim podacima mogu izazvati ogromne promene u rešenju, bez obzira što se sve operacije izvode tačno.

Primer 3. Kao primer za grešku metode navodimo izračunavanje integrala

$$\int_a^b f(x)dx \, . \tag{2}$$

Razlikovaćemo dva slučaja.

1. Funkciju $f(x)$ možemo zameniti algebarskim polinomom $P(x)$ koji je na odsečku $[a,b]$ i ravnomerno aproksimiran sa potrebnom tačnošću, pa onda umesto integrala (2) tražimo integral

$$\int_a^b P(x)dx \, ,$$

čije je izračunavanje veoma prosto.

2. Umesto izračunavanja integrala (2) moguće je na osnovu definicije integrala izračunati konačnu sumu

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i \, ,$$

koja će biti približno jednaka vrednosti integrala (2).

Očigledno je da je u oba slučaja učinjena greška metode, jer je rešavan zadatak različit od postavljenog. U daljem izlaganju zadržaćemo se na neotklonjivoj grešci.

Neotklonjiva greška

Uvodimo sledeće oznake: tačne vrednosti veličina označavaćemo slovima $x, y, z, \ldots,$ a približne vrednosti sa x^*, y^*, z^*, ...

Pod apsolutnom greškom Δx približnog broja x^*, podrazumeva se $\Delta x = |x - x^*|$.

Medjutim, najčešće se tačna vrednost x ne zna, pa se uvodi pojam granice apsolutne greške približnog broja, pod kojim se podrazumeva svaki broj, ne manji od apsolutne greške tog broja. Ako je Δ_x granica apsolutne greške približnog broja x^*, važiće:

$\Delta x = |x - x^*| \leq \Delta_x$, odakle sleduje:

$$x^* - \Delta_x \leq x \leq x^* + \Delta_x \, . \tag{3}$$

Primer 4. Odrediti granicu apsolutne greške broja $a = 3{,}14$ koji zamenjuje broj π . Ovde se može postaviti nejednakost $3{,}14 \leq \pi \leq 3{,}15$, tj. $|a - \pi| \leq 0{,}01$, odakle sledi da je $\Delta_a = 0{,}01$.

Kako apsolutna greška nedovoljno karakteriše tačnost merenja ili izračunavanja, uvodi se tzv. relativna greška ε kao

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{|x|} \quad ; \qquad \text{ili} \qquad \varepsilon \approx \frac{\Delta x}{|x^*|} \, .$$

Isto tako, uvodi se pojam granice relativne greške ε_x, kao

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{|x^*|} \, .$$

Nejednakost (3) može se sada zapisati u obliku

$$x^*(1 - \varepsilon_x) \leq x \leq x^*(1 + \varepsilon_x) \, . \tag{4}$$

Primer 5. Veličina R odredjena je približno iz nekog eksperimenta kao $R^* = 29{,}25$, pri čemu je granica relativne greške 1‰. Naći granice izmedju kojih se nalazi veličina R.

Kako je $\varepsilon_R = 0{,}001$, korišćenjem (4) dobijamo: $29{,}22 \leq R \leq 29{,}28$.

Neka je potrebno izračunati vrednost funkcije:

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

i neka su Δx_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ apsolutne greške argumenata funkcije. Pokazuje se da je apsolutna greška funkcije Δu

$$\Delta u \leq \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \Delta x_i \tag{5}$$

a takodje i granica apsolutne greške

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \Delta x_i \tag{6}$$

Analogno se dobija i za relativnu grešku

$$\varepsilon \leq \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{u} \right| \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \log f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \right| \Delta x_i \, , \tag{7}$$

Odnosno

$$\mathcal{E}_u=\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\log u\right|\Delta x_i \qquad (8)$$

Iz formula (5),(6),(7) i(8) dobija se za neke specijalne slučajeve sledeće:

1. Ako je $u = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ imamo:

$\Delta u \leq \Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n$,

$\Delta_u = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n$;

$\mathcal{E} \cong \frac{\Delta u}{|u^*|}$, dok se za $\mathcal{E}_u$ može pokazati da vredi nejednakost: $\mathcal{E}_u \leq \max(\mathcal{E}x_1, \mathcal{E}x_2, \dots, \mathcal{E}x_n)$.

2. Ako je $u = x_1 - x_2$ imamo: $\Delta_u = \Delta x_1 + \Delta x_2$; $\mathcal{E}_u = \frac{\Delta u}{|u|}$, odakle se primećuje da izračunavanje bliskih brojeva dovodi do tzv. gubljenja velikog broja sigurnih cifara($\mathcal{E}_u$ je veliko) .

Primer 6. Naći razliku: $u = \sqrt{2,01} - \sqrt{2}$ sa tri značajne cifre. Kako je: $\sqrt{2,01} = 1,41774469 \dots$; $\sqrt{2} = 1,41421356 \dots$ dobija se $u = 0,00353 = 3,53 \cdot 10^{-3}$.

Medjutim, ovaj rezultat može se dobiti sa manjim računanjem ako se izraz za u napiše u obliku

$$u = \frac{0,01}{\sqrt{2,01}+\sqrt{2}}$$

i uzmu vrednosti korena sa tri značajne cifre, tj.

$$u = \frac{0,01}{1,42 + 1,41} = \frac{0,01}{2,83} = 3,53 \cdot 10^{-3} .$$

3. Ako je $u = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots x_n$, logaritmovanjem za osnovu e, dobija se $\log u = \log x_1 + \log x_2 + \dots + \log x_n$, pa je

$$\left|\frac{\Delta u}{u}\right| \leq \left|\frac{\Delta x_1}{x_1}\right| + \left|\frac{\Delta x_2}{x_2}\right| + \dots + \left|\frac{\Delta x_n}{x_n}\right| ; \quad \mathcal{E} \leq \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \dots + \mathcal{E}_n ,$$

gde je $\mathcal{E}_i$ relativna greška za x_i. Dalje je:
$\mathcal{E}_u = \mathcal{E}x_1 + \mathcal{E}x_2 + \dots + \mathcal{E}x_n$.

4. Ako je $u = \frac{x}{y}$ dobija se $\log u = \log x - \log y$, pa je

$$\left|\frac{\Delta u}{u}\right| \leq \left|\frac{\Delta x}{x}\right| + \left|\frac{\Delta y}{y}\right| \quad \text{i} \quad \delta_u = \delta_x + \delta_y .$$

Primer 7. Strane provougaonika su a = 5 m. i b = 200 m. Kolika je dopustiva granica apsolutne greške pri merenju ovih strana / ista za obe strane/, da bi površina pravougaonika bila odredjena sa granicom apsolutne greške $\Delta_p = 1\ m^2$?

Kako je $P = a \cdot b$, imamo redom $\Delta P \cong a \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a$;
$\Delta_p = a\ \Delta_b + b\ \Delta_a$, pa je zbog $\Delta_a = \Delta_b$.

$$\Delta_a = \Delta_b = \frac{\Delta p}{a+b} = \frac{1}{205} \cong 5\ mm.$$

SREDNJE KVADRATNE GREŠKE

Kod merenja fizičkih veličina razlikujemo sistematske i slučajne greške.

Sistematske greške potiču od grešaka koje unose instrumenti, a zatim tu spadaju i lične greške.

Sistematske greške mogu se obično ili eliminisati ili učiniti dovoljno malim.

Slučajne greške nastaju usled promena stanja nekih faktora čiji se uticaj smatra beznačajnim i nije uzet u eksperimentu ili su, pak, ti faktori nepoznati.

Razmotrićemo slučajne greške. Neka su rezultati merenja veličine x

$$x_1 , x_2 , \dots , x_n .$$

Kako svi ovi rezultati nisu ravnopravni, pretpostavićemo da se svakom rezultatu x_i može dodeliti realan broj p_i sa osobinama

$$0 \leq p_i \leq 1 \qquad \text{i} \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,$$

a koji predstavlja verovatnoću pojave tog rezultata.

Veličinu x nalazimo iz izraza

$$x = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i ,$$

koji je u teoriji verovatnoće poznat kao matematičko očekivanje.

Srednje kvadratna greška merenja σ karakteriše se relacijom

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i (x - x_i)^2 .$$

Pošto se merenja fizičkih veličina vrše na različite načine, to svakom načinu odgovara odredjeni skup rezultata merenja i odredjena veličina σ, pa se svakom merenju može pripisati težina

$$\frac{k}{\sigma^2} ,$$

gde je K - konstantna veličina za sve načine merenja veličine x.

U teoriji grešaka postoje i druge klasifikacije i procene grešaka, od kojih je najvažnija statistička metoda ocene grešaka.

Gradimir MILOVANOVIĆ

INTERPOLACIJA FUNKCIJA

Ako su vrednosti funkcije f za neki konačan skup vrednosti argumenta x zadate tablično, zadatak interpolacije je formiranje funkcije φ, dovoljno jednostavne za računanje, koja u datim tačkama x_i ima vrednosti $f(x_i)$ $(i=0,1,2,\ldots,n)$, a u ostalim tačkama odsečka (a,b) koji pripada oblasti definisanosti funkcije f, približno predstavlja funkciju f. Tačke x_i nazivaju se čvorovima interpolacije.

Interpolaciona funkcija φ najčešće se obrazuje u obliku algebarskog polinoma, eksponencijalnih funkcija ili trigonometrijskih funkcija, i u svim slučajevima može da se zapiše u obliku

$$\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x), \qquad (1)$$

gde su funkcije φ_i $(i=0,1,2,\ldots,n)$ linearno nezavisne.

<u>Lagrange-ov interpolacioni polinom</u>. Za funkcije φ_i $(i=0,1,\ldots,n)$ uzima se niz funkcija $1, x, x^2, \ldots, x^n$, a Lagrange-ov interpolacioni polinom ima oblik

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} f(x_i) \qquad (2)$$

<u>Aitken-ova interpolaciona shema</u>. Kada nije potreban opšti izraz za $L_n(x)$, već samo njegova vrednost za neku vrednost x, koristi se Aitken-ova shema, koja se sastoji u uzastopnoj primeni sledećih izraza:

$$L_{0,1}(x) = \frac{1}{x_1-x_0} \begin{vmatrix} f(x_0) & x_0 - x \\ f(x_1) & x_1 - x \end{vmatrix} , \qquad (3)$$

. . . .

$$L_{0,1,2,\ldots,n}(x) = \frac{1}{x_n - x_0} \begin{vmatrix} L_{0,1,\ldots,n-1}(x) & x_0 - x \\ L_{1,2,\ldots,n}(x) & x_n - x \end{vmatrix} .$$

Newton-ova interpolaciona formula. - predstavlja izmenjeni oblik Lagrange-ove formule. U slučaju nejednakih razmaka njen oblik je:

$$P_n(x) = f(x_0) + (x-x_0) f(x_{0,1}) + (x-x_0)(x-x_1) f(x_{0,1,2}) + \ldots$$

$$\ldots + (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}) f(x_{0,1,2,\ldots,n}),$$ gde se podeljene razlike izračunavaju iz formule

$$f(x_{i,i+1,i+2,\ldots,i+k}) = \frac{f(x_{i+1,i+2,\ldots,i+k}) - f(x_{i,i+1,\ldots,i+k-1})}{x_{i+k} - x_i} .$$

Ako su date vrednosti argumenta x: $x_0, x_0 + h, x_0+2h, \ldots, x_0+nh$, i odgovarajuće vrednosti funkcije $f(x)$: $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$, Newton-ova formula ima oblik:

$$P_n(x) = y_0 + \frac{x - x_0}{h} \Delta y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2!h^2} \Delta^2 y_0 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})}{n!h^n} \Delta^n y_0 , \qquad (4)$$

gde je $\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i \quad (\Delta^0 y_1 = y_1)$ konačna razlika k-tog reda.

Prony-eva interpolacija. - izvodi se za slučaj ekvidistantnih čvorova, a interpolaciona funkcija

$$\varphi(x) = C_1 \varphi_1(x) + C_2 \varphi_2(x) + \ldots + C_n \varphi_n(x)$$ odredjuje se na osnovu korena karakteristične jednačine

$$a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots + a_{n-1} p^{n-1} + p^n = 0 . \qquad (5)$$

Koeficijente jednačine (5) odredjujemo iz sistema jednačina:

$$a_0 f(x_0) + a_1 f(x_1) + \ldots + a_{n-1} f(x_{n-1}) = - f(x_n) ,$$

$$a_0 f(x_1) + a_1 f(x_2) + \ldots + a_{n-1} f(x_n) = -f(x_{n+1}) ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad 6$$

$$a_0 f(x_{n-1}) + a_1 f(x_n) + \ldots + a_{n-1} f(x_{2n-2}) = -f(x_{2n-1}) .$$

Ako je razmak izmedju susednih čvorova jednak jedinici, imamo da:

a/ jednostrukom realnom korenu jednačine (5) $p=p_i$ odgovara funkcija $\varphi_i(x) = p_i^x$;

b/ višestrukom realnom korenu p_k reda r odgovara funkcija:

$$p_k^x , \; x p_k^x , \; \ldots , \; x^{r-1} p_k^x ;$$

c/ paru konjugovano-kompleksnih korena $\alpha \pm i\beta$ odgovaraju funkcije

$$(\alpha^2 + \beta^2)^{x/2} \cos\theta x \quad i \; (\alpha^2 + \beta^2)^{x/2} \sin\theta x \qquad (\theta \; \mathrm{arctg}\frac{\beta}{\alpha}).$$

Po odredjivanju funkcija φ_i konstante $C_i (i=1,2,\ldots,n)$ odredjujemo iz uslova da interpolaciona funkcija prolazi kroz n interpolacionih čvorova, proizvoljno odabranih iz skupa zadatih (ukupno 2n).

Interpolacija periodičnih funkcija pomoću trigonometrijskih polinoma. Periodična funkcija f, sa periodom 2π, može se interpolirati trigonometrijskim polinomom, čiji su članovi iz skupa funkcija: 1, cosx, sinx, cos2x, sin2x, ..., cosnx, sinnx.

Ako su poznate vrednosti funkcije f u tačkama $x_i (i=0,1,2,\ldots,2n)$, interpolacioni polinom ima oblik

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{2n} f(x_i) \frac{\sin\frac{x-x_0}{2} \cdot \sin\frac{x-x_1}{2} \ldots \sin\frac{x-x_{i-1}}{2} \cdot \sin\frac{x-x_{i+1}}{2} \ldots}{\sin\frac{x_i-x_0}{2} \cdot \sin\frac{x_i-x_1}{2} \ldots \sin\frac{x_i-x_{i-1}}{2} \sin\frac{x_i-x_{i+1}}{2} \ldots}$$

$$\frac{\ldots \sin\frac{x-x_{2n}}{2}}{\ldots \sin\frac{x_i-x_{2n}}{2}} . \qquad (7)$$

Inverzna interpolacija. Odredjivanje vrednosti argumenta na osnovu zadate vrednosti funkcije vrši se metodama inverzne interpolacije. Ako je zadata funkcija monotona, inverzna interpolacija realizuje se zamenom funkcije argumentom i argumenta funkcijom, pa se tada primenjuje interpolacija. Medjutim, ako funkcija nije monotona, ovaj način je neprimenljiv. U ovom slučaju funkcija f zamenjuje se interpolacionom funkcijom φ, a zatim znajući vrednost funkcije (y_o) rešava se jednačina: $\varphi(x) = y_o$.

Z a d a c i

1. Formirati Lagrange-ov interpolacioni polinom na osnovu sledećih podataka:

x_i	-1	0	1	3	5
$f(x_i)$	-2	1	2	0	-2

Rešenje. Smenom datih vrednosti u formuli (2) dobija se

$$L_4(x) = (-2)\frac{(x-0)(x-1)(x-3)(x-5)}{(-1-0)(-1-1)(-1-3)(-1-5)} + 1\frac{(x+1)(x-1)(x-3)(x-5)}{(0+1)(0-1)(0-3)(0-5)} +$$

$$+ 2\frac{(x+1)(x-0)(x-3)(x-5)}{(1+1)(1-0)(1-3)(1-5)} + 0\frac{(x+1)(x-0)(x-1)(x-5)}{(3+1)(3-0)(3-1)(3-5)} +$$

$$+(-2)\frac{(x+1)(x-0)(x-1)(x-3)}{(5+1)(5-0)(5-1)(5-3)}, \text{ odnosno}$$

$$L_4(x) = \frac{1}{120}(x^4 + 7x^3 - 121x^2 + 233x + 120).$$

2. Formirati Lagrange-ov interpolacioni polinom na osnovu sledećih podataka

x	0	2	3	5
f(x)	1	3	2	5

Rešenje. U ovom slučaju je

$$L_3(x) = 1\frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(-2)(-3)(-5)} + 3\frac{x(x-3)(x-5)}{2(2-3)(2-5)} + 2\frac{x(x-2)(x-5)}{3(3-2)(3-5)} +$$

$$+ 5\frac{x(x-2)(x-3)}{5(5-2)(5-3)}, \text{ odnosno}$$

$$L_3(x) = \frac{3}{10}x^3 + \frac{13}{6}x^2 + \frac{62}{16}x + 1.$$

3. Formirati Lagrange-ov interpolacioni polinom na osnovu sledećih podataka:

x	0	1,5	3,4	6,8
y	1,45	3,14	4,65	4,11

Rezultat. $L_3(x) = -0{,}0205x^3 - 0{,}02x^2 + 2{,}73x + 1{,}45$.

4. Uzeti tri vrednosti funkcije $f(x)$: $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ u blizini njenog maksimuma ili minimuma. Naći približno vrednost x za koju funkcija ima tu ekstremnu vrednost.

Rešenje. Na osnovu vrednosti funkcije u blizini ekstremuma formiraćemo Lagrange-ov interpolacioni polinom drugog stepena:

$$L_2(x) = f(a)\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + f(b)\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + f(c)\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

i tražimo tačku u kojoj on ima ekstremnu vrednost. Imamo redom:

$$\frac{dL_2(x)}{dx} = \frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}\left[(x-c)+(x-b)\right] + \frac{f(b)}{(b-a)(b-c)}\left[(x-c)+(x-a)\right] +$$

$$+ \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}\left[(x-b)+(x-a)\right] = 0,$$

$$2x\left[\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-a)(b-c)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}\right] = \frac{(b+c)f(a)}{(a-b)(a-b)} +$$

$$+\frac{(c+a)f(b)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(a+b)f(c)}{(c-a)(c-b)}.$$

Rešavanjem zadnje jednačine dobija se tražena vrednost za x:

$$x = \frac{(b^2-c^2)f(a) + (c^2-a^2)f(b) + (a^2-b^2)f(c)}{2\left[(b-c)f(a) + (c-a)f(b) + (a-b)f(c)\right]}.$$

5. Pomoću vrednosti funkcije $y = e^x$ u tačkama

$x_o = 0{,}40$; $y_o = 1{,}4918$; $x_1 = 0{,}42$; $y_1 = 1{,}5220$,

naći Aitken-ovom shemom vrednost e^x za $x = 0{,}411$.

Rešenje. Korišćenjem formule (3) nalazimo

$$L_{0,1}(0,411) = \frac{1}{0,42-0,40}\begin{vmatrix} 1,4918 & -0,011 \\ 1,5220 & 0,009 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1,4918\cdot 0,009 + 1,5220\cdot 0,011}{0,02} = 1,5084 \,.$$

6. Na osnovu vrednosti funkcije $y = f(x)$, koje su date u tabeli, naći vrednost $f(13,3)$ korišćenjem kvadratne interpolacije po shemi Aitkena.

x	13,00	13,05	13,10	13,15	13,20
f(x)	1,499362	1,501061	1,502923	1,504942	1,507111

Rešenje. Uzećemo $x_o = 13,10$, pa je redom

$$L_{0,1}(13,3) = \frac{1}{0,05}\begin{vmatrix} 1,502923 & -0,03 \\ 1,504942 & 0,02 \end{vmatrix} = 1,504134 \,,$$

$$L_{1,2}(13,3) = \frac{1}{0,05}\begin{vmatrix} 1,504942 & 0,02 \\ 1,507111 & 0,07 \end{vmatrix} = 1,504074 \,,$$

$$L_{0,1,2}(13,3) = \frac{1}{x_2-x_o}\begin{vmatrix} L_{0,1}(13,3) & x_o - 13,3 \\ L_{1,2}(13,3) & x_o - 13,3 \end{vmatrix} = 1,504116 \,.$$

Dakle, korišćenjem kvadratne interpolacije dobija se $f(13,3) = 1,504116$.

7. Aitken-ovom metodom, naći $f(27)$ na osnovu sledećih podataka:

i	0	1	2	3
x_i	14	17	31	35
$f(x_i)$	68,7	64,0	44,0	39,1

Rešenje. Aitken-ovom metodom nalazimo redom:

$$L_{0,1}(27) = \frac{1}{17-14}\begin{vmatrix} 68,7 & 14-27 \\ 64,0 & 17-27 \end{vmatrix} = 48,33 \,,$$

$$L_{1,2}(27) = \frac{1}{31-17}\begin{vmatrix} 64,0 & 17,27 \\ 44,0 & 31-27 \end{vmatrix} = 49,72 \,,$$

$$L_{2,3}(27) = \frac{1}{35-31}\begin{vmatrix} 44,0 & 31-27 \\ 39,1 & 35-27 \end{vmatrix} = 48,90 \,,$$

$$L_{0,1,2}(27) = \frac{1}{x_2-x_o}\begin{vmatrix} L_{0,1}(27) & x_o-27 \\ L_{1,2}(27) & x_2-27 \end{vmatrix} = \frac{1}{17}\begin{vmatrix} 48,33 & -13 \\ 49,72 & 4 \end{vmatrix} = 49,39 \,,$$

$$L_{1,2,3}(27) = \frac{1}{x_3-x_1}\begin{vmatrix} L_{1,2}(27) & x_1-27 \\ L_{2,3}(27) & x_3-27 \end{vmatrix} = \frac{1}{18}\begin{vmatrix} 49,72 & -10 \\ 48,90 & 8 \end{vmatrix} = 49,26 \,,$$

$$L_{0,1,2,3}(27) = \frac{1}{x_3-x_o}\begin{vmatrix} L_{0,1,2}(27) & x_o-27 \\ L_{1,2,3}(27) & x_3-27 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{21}\begin{vmatrix} 49,39 & -13 \\ 49,26 & 8 \end{vmatrix} = 49,31 \,.$$

Dakle, dobija se $f(27) = L_{0,1,2,3}(27) = 49,31$.

8. Odrediti Newton-ov interpolacioni polinom za funkciju čije su vrednosti date u tabeli:

x	0	1	3	4	6
f(x)	-5	-6	106	399	2269

Rešenje. Newton-ov interpolacioni polinom za nejednake razmake ima oblik:

$$P_n(x) = f(x_0) + (x-x_0)\,f(x_{0,1}) + (x-x_0)(x-x_1)\,f(x_{0,1,2}) + \dots$$

$$\dots + (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})\,f(x_{0,1,\dots,n}) \,. \qquad (8)$$

Podeljene razlike koje se javljaju u polinomu (8) odredjujemo iz formule:

$$f(x_{i,i+1,i+2,\dots,i+k}) = \frac{f(x_{i+1,i+2,\dots,i+k}) - f(x_{i,i+1,\dots,i+k-1})}{x_{i+k} - x_i}$$

Rezultati su sredjeni u narednoj tabeli.

i	x_i	$f(x_i)$	$f(x_{i,i+1})$	$f(x_{i,i+1,i+2})$	$f(x_{i,i+1,i+2,i+3})$	$f(x_{i,\dots i+4})$
0	0	-5				
			-1			
1	1	-6		19		
			56		15	
2	3	106		79		2
			293		27	
3	4	399		214		
			935			
4	6	2269				

Newton-ov interpolacioni polinom u ovom slučaju glasi:

$$P_4(x) = -5 + (x-0)\,{-1} + (x-0)(x-1)\,19 + (x-0)(x-1)(x-3)\cdot 15 +$$
$$+ (x-0)(x-1)(x-3)(x-4)\cdot 2 \,, \text{ odnosno}$$
$$P_4(x) = 2x^4 - x^3 - 3x^2 + x - 5 \,.$$

9. Odrediti Newton-ov interpolacioni polinom za funkciju čije su vrednosti date u tabeli:

x	0	0,5	1	1,5
y	2	1,875	3	6,125

Rešenje. Newton-ova interpolaciona formula za jednake razmake u ovom slučaju je

$$P_3(x) = y_0 + \frac{x-x_0}{h}\Delta y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!h^2}\Delta^2 y_0 +$$
$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{3!h^3}\Delta^3 y_0 \,,$$

gde je $h = 0{,}5$, dok su konačne razlike date u tabeli:

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
0	0,0	2,000			
			-0,125		
1	0,5	1,875		1,25	
			1,125		0,75
2	1,0	3,000		2,00	
			3,125		
3	1,5	6,125			

iz koje nalazimo:

$$P_3(x) = 2 + \frac{x}{0{,}5}(-0{,}125) + \frac{x(x-0{,}5)}{2\cdot 0{,}25}\cdot 1{,}25 + \frac{x(x-0{,}5)(x-1)}{6\cdot 0{,}125}\,0{,}75 \,,$$

odnosno $P_3(x) = x^3 + x^2 - x + 2$.

10. Primenom Newton-ove formule za interpolaciju izračunati $\sin 6^\circ$ na osnovu vrednosti $\sin 5^\circ$, $\sin 7^\circ$, $\sin 9^\circ$, $\sin 11^\circ$, $\sin 13^\circ$ i $\sin 15^\circ$.

Rešenje. Tablica razlika, u koju su unešene samo značajne cifre razlika, je:

x	$\sin x$	y	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
5°	0,087156				
		34713			
7°	0,121869		-148		
		34565		-42	
9°	0,156434		-190		-1
		34375		-43	
11°	0,190809		-233		2
		34142		-41	
13°	0,224951		-274		
		33868			
15°	0,258819				

S obzirom da su korišćene približne vrednosti funkcije $\sin x$ razlike četvrtog i viših redova menjaju se nepravilno, pa ćemo se na računu zadržati na razlikama trećeg reda koje su skoro konstantne.

Uvodjenjem smene $t = \dfrac{x - x_0}{h}$ u formulu (4) ona dobija oblik:

$$P_n(x_0+ht) = y_0 + t\,\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 +$$

$$+ \dots + \frac{t(t-1)\dots[t-(n-1)]}{n!} \Delta^n y_0 .$$

U našem slučaju imamo $n = 3$; $x_0 = 5^0$; $h = 2^0$; $t = \frac{6^0-5^0}{2^0} =$ $= 0,5$, pa je:

$$P_3(6^0) = 0,087156 + 0,5\cdot 0,034713 + \frac{0,5(-0,5)}{2}(-0,000148) +$$
$$+ \frac{0,5(-0,5)(-1,5)}{6}(0,000042) = 0,104528 .$$

Dakle, dobili smo: $\sin 6^0 = 0,104528$.

11. Na osnovu zadatih vrednosti funkcije

x	-3	-1	0	1
y	-5,5	0,5	-2,5	-1,5

naći onu vrednost x, za koju je $y = 1,5$.

Rešenje. Pošto funkcija nije monotona, mora se naći interpolacioni polinom

$$L_3(x) = (-5,5)\frac{(x+1)(x-0)(x-1)}{(-3+1)(-3-0)(-3-1)} + 0,5\frac{(x+3)(x-0)(x-1)}{(-1+3)(-1-0)(-1-1)} +$$
$$+(-2,5)\frac{(x+3)(x+1)(x-1)}{(0+3)(0+1)(0-1)} + (-1,5)\frac{(x+3)(x+1)(x-0)}{(1+3)(1+1)(1-0)} .$$

Sredjivanjem dobija se:

$$L_3(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 2,5 .$$

Sada treba rešiti jednačinu $L_3(x) = 1,5$ tj. $x^3 + 2x^2 - 2x - 4 = 0$, koja se može faktorisati u obliku $(x+2)(x^2 - 2) = 0$, odakle se dobijaju sledeće vrednosti $x = -2$ i $x = \pm\sqrt{2}$.

12. Na osnovu datih vrednosti funkcije

x	1	2	2,5	3
y	-6	-1	5,625	16

naći onu vrednost x, za koju je $y = 0$.

Rešenje. Na osnovu vrednosti funkcije iz tabele zaključujemo da je ona monotona, pa primenjujemo inverznu interpolaciju:

$$L_3(y) = 1\cdot\frac{(y+1)(y-5,625)(y-16)}{(-5)(-11,625)(-22)} + 2\frac{(y+6)(y-16)(y-5,625)}{5(-17)(-6,625)} +$$
$$+ 2,5\cdot\frac{(y+6)(y+1)(y-16)}{11,625\cdot 6,625(-10,375)} + 3\cdot\frac{(y+6)(y+1)(y-5,625)}{22\cdot 17\cdot 10,375} .$$

Za $y = 0$, dobija se: $x = L_3(0) = 2,122$.

13. Funkciju $f(x)$ zadatu tablično

x	0	1	2	3	4	5
f(x)	18	9	3	-3	-12	-28,5

interpolirati eksponencijalnim funkcijama.

Rešenje. Pošto su zadate šest vrednosti funkcije, interpolaciju vršimo funkcijom

$$\varphi(x) = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + C_3\varphi_3(x) , \qquad (9)$$

gde funkcije $\varphi_i(x)$ $(i=1,2,3)$ odredjujemo na osnovu korena karakteristične jednačine:

$$a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + p^3 = 0 . \qquad (10)$$

Koeficijenti jednačine (10) odredjuju se iz sistema jednačina (6) koji u ovom slučaju glasi:

$$18a_0 + 9a_1 + 3a_2 = 3 ; \quad 9a_0 + 3a_1 - 3a_2 = 12 ;$$
$$3a_0 - 3a_1 - 12a_2 = 28,5 .$$

Rešenja ovog sistema su: $a_0 = -1$ i $a_1 = -a_2 = 3,5$, pa jednačina:

$p^3 - 3,5p^2 + 3,5p - 1 = 0$, koja može da se napiše u faktorizovanom obliku: $(p-1)(p^2 - 2,5p + 1) = 0$, ima rešenja: $p_1 = 2$; $p_2 = 0,5$ i $p_3 = 1$.

Funkcija (9) ima sada oblik: $\varphi(x) = C_1 2^x + C_2\cdot 0,5^x + C_3$,

gde konstante C_i $(i=1,2,3)$ odredjujemo iz uslova da ona prolazi kroz bilo koje tri tačke iz skupa zadatih tačaka, na primer:

$$\text{za } x = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 + C_3 = 18 ;$$
$$\text{za } x = 1 \Rightarrow 2C_1 + 0{,}5C_2 + C_3 = 9 ;$$
$$\text{za } x = 2 \Rightarrow 4C_1 + 0{,}25C_2 + C_3 = 3 .$$

Rešavanjem ovog sistema dobija se: $C_1 = -1$; $C_2 = 16$ i $C_3 = 3$, pa je

$$\varphi(x) = -2^x + 16\, 2^{-x} + 3 \quad \text{ili} \quad \varphi(x) = -e^{\alpha x} + 16e^{-\alpha x} + 3 ,$$

gde je $\alpha = \log_e 2 = 0{,}69315$.

14. Prony-evom metodom interpolirati pomoću eksponencijalnih funkcija, funkciju čije su vrednosti date u tabeli:

k	0	1	2	3	4	5	6	7
x_k	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
f(k)	8	2	4	0	-3	-5	-7,75	-10,375

<u>Rešenje.</u> Smenom $\frac{x - x_o}{h} = k$, gde je $x_o = 0$ i $h = 0{,}5$, interval $[0;\ 3{,}5]$ preslikava se na interval $[0;\ 7]$, pa ćemo nadalje raditi sa argumentom k.

S obzirom da je zadato osam tačaka, interpolaciona funkcija ima oblik:

$$\varphi(k) = \sum_{i=1}^{4} C_i \varphi_i(k) \tag{11}$$

gde se funkcije $\varphi_i\,(i=1,2,3,4)$ odredjuju na osnovu korena karakteristične jednačine

$$a_o + a_1p + a_2p^2 + a_3p^3 + p^4 = 0. \tag{12}$$

Koeficijenti jednačine (12) odredjujemo iz sistema jednačina:

$$a_of(0) + a_1f(1) + a_2f(2) + a_3f(3) = -f(4) ;$$
$$a_of(1) + a_1f(2) + a_2f(3) + a_3f(4) = -f(5) ;$$
$$a_of(2) + a_1f(3) + a_2f(4) + a_3f(5) = -f(6) ;$$
$$a_o f(3) + a_1f(4) + a_2f(5) + a_3f(6) = -f(7) ; \quad \text{tj.}$$

$$8a_o + 2a_1 + 4a_2 + 0\cdot a_3 = 3 ;$$
$$2a_o + 4a_1 + 0a_2 - 3\cdot a_3 = 5 ;$$
$$4a_2 + 0a_1 - 3a_2 - 5\cdot a_3 = 7{,}75 ; \tag{13}$$
$$0a_o - 3a_1 - 5a_2 - 7{,}75a_3 = 10{,}375 .$$

Sistem (13) ima rešenja: $a_o = 0{,}25$; $a_1 = 0$; $a_2 = 0{,}25$ i $a_3 = -1{,}5$, pa jednačina (12): $p^4 - 1{,}5p^3 + 0{,}25p^2 + 0{,}25 = 0$, koja može da se napiše u faktorizovanom obliku $(p-1)^2(p^2 + 0{,}5p + 0{,}25) = 0$, ima korene:

$$p_1 = p_2 = 1; \quad p_3 = \frac{1}{4}(-1 + i\sqrt{3}) ; \quad p_4 = \frac{1}{4}(-1 - i\sqrt{3}) .$$

Funkcija (11) ima oblik:

$$\varphi(k) = (C_1 + C_2k)p_1^k + |p_3|^k\left[C_3\cos(k\arg p_3) + C_4\sin(k\arg p_3)\right] ,$$

odnosno: $\varphi(k) = C_1 + C_2k + 2^{-k}\left(C_3\cos\frac{2\pi k}{3} + C_4\sin\frac{2\pi k}{3}\right)$,

jer je $p_3 = \frac{1}{4}\sqrt{1+3} = \frac{1}{2}$ i $\arg p_3 = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{-1} = \frac{2\pi}{3}$.

Konstante $C_i\,(i=1,2,3,4)$ odredjujemo iz uslova da funkcija $\varphi(k)$ prolazi kroz bilo koje četiri zadate tačke, na primer:

$$\text{za } k = 0 \Longrightarrow C_1 + C_3 = 8 ,$$
$$\text{za } k = 1 \Longrightarrow C_1 + C_2 + \frac{1}{2}\left[C_3\left(-\frac{1}{2}\right) + C_4\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = 2 ,$$
$$\text{za } k = 3 \Longrightarrow C_1 + 3C_2 + \frac{1}{8}C_3 = 0 ,$$
$$\text{za } k = 6 \Longrightarrow C_1 + 6C_2 + \frac{1}{64}C_3 = -\frac{31}{4} .$$

Rešavanjem dobijenog sistema imamo:

$C_1 = \frac{376}{49}$; $C_2 = -\frac{18}{7}$; $C_3 = \frac{16}{49}$ i $C_4 = -\frac{592}{49\sqrt{3}}$, pa je

$$\varphi(k) = \frac{376}{49} - \frac{18}{7}k + 2^{-k}\left(\frac{16}{49}\cos\frac{2\pi k}{3} - \frac{592}{49\sqrt{3}}\sin\frac{2\pi k}{3}\right) \text{, odnosno}$$

$$\varphi(k) = \frac{2}{49}\left[188 - 63k + 8\cdot 2^{-k}\left(\cos\frac{2\pi k}{3} - \frac{37}{\sqrt{3}}\sin\frac{2\pi k}{3}\right)\right] .$$

Vraćanjem na staru promenljivu (smena $k = 2x$) dobija se tražena interpolaciona funkcija

$$\Psi(x) = \frac{4}{49}\left[94 - 63x + 4\cdot 4^{-x}\left(\cos\frac{2\pi x}{3} - \frac{37}{\sqrt{3}}\sin\frac{2\pi x}{3}\right)\right] .$$

15. Trigonometrijskim polinomom drugog reda interpolirati funkciju čije su vrednosti zadate u tabeli:

x	0	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
$f(x)$	2	0,5	0	2	0

<u>Rešenje</u>. Primenom formule (7) imamo

$$T_2(x) = 2\,\frac{\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6})\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4})\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2})\sin(\frac{x}{2}-\frac{3\pi}{4})}{\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{3\pi}{4}} +$$

$$+\,0,5\,\frac{\sin\frac{x}{2}\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4})\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2})\sin(\frac{x}{2}-\frac{3\pi}{4})}{\sin\frac{\pi}{6}\sin(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4})\sin(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2})\sin(\frac{\pi}{6}-\frac{3\pi}{4})} +$$

$$+\,2\,\frac{\sin\frac{x}{2}\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6})\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4})\sin(\frac{x}{2}-\frac{3\pi}{4})}{\sin\frac{\pi}{2}\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6})\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{4})}.$$

Sredjivanjem dobijamo

$$T_2(x) = 2\,\frac{\frac{1}{16}(1 + 2\cos x + \cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x)}{\frac{1}{4}} + 0,5\,\frac{-\frac{1}{8}\sin 2x}{-\frac{\sqrt{3}}{16}} +$$

$$+\,2\,\frac{\frac{1}{16}(-\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\cos x - \sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x)}{-\frac{\sqrt{3}}{4}},$$

odnosno $T_2(x) = 1 + \cos 2x$.

Gradimir MILOVANOVIĆ

APROKSIMACIJA FUNKCIJA

Aproksimacija funkcija vrši se iz dva razloga:

1. Ako je neka funkcija $f(x)$ složena za izračunavanje, onda se ona zamenjuje nekom funkcijom $\varphi(x)$ jednostavnijom za računanje;

2. Ako imamo skup vrednosti dobijen merenjima, potrebno je odrediti funkciju $\varphi(x)$, koja odražava zakonitost pojave na osnovu koje se taj skup dobija.

U praksi se najčešće koristi tzv. srednjekvadratna aproksimacija. Kao mera bliskosti funkcije $f(x)$ i funkcije $\varphi(x)$, kojom se aproksimira funkcija $f(x)$ na segmentu $[a,b]$, uzima se veličina

$$\delta = \left\{\int_a^b p(x)\left[f(x) - \varphi(x)\right]^2 dx\right\}^{1/2}$$ ili za diskretne vrednosti

$$\delta = \left\{\sum_{i=1}^{n} p(x_i)\left[f(x_i) - (x_i)\right]^2\right\}^{1/2},$$ gde je $p(x)$ - zadata

nenegativna funkcija, koja se naziva težinom.

U aproksimativnoj funkciji φ pretpostavljaju se izvesni parametri $a_i (i=0,1,2,\ldots,m)$, tj. $\varphi(x) = \varphi(x;\ a_o, a_1, \ldots, a_n)$, pa je veličina δ funkcija parametra $a_i (i=0,1,\ldots,m)$, koju treba minimizirati.

Umesto veličine δ češće se koristi njen kvadrat $R = \delta^2$, i naziva se funkcijom kvadrata greške.

Iz egzistencije minimuma funkcije R, koja je nesumnjiva, sledi da parametri $a_i (i=0,1,\ldots,m)$ zadovoljavaju sledeći sistem jednačina

$$\frac{\partial R}{\partial a_i} = 0 \qquad (i = 0,1,2,\dots,m) . \tag{1}$$

Rešavanjem sistema (1) dobijaju se nepoznati parametri $a_i (i=0,1,2,\dots,m)$. Ovaj postupak zove se metoda najmanjih kvadrata.

Ako je $\varphi(x)$ algebarski polinom m-tog stepena $\varphi(x) = P_m(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m$, potrebno je da preodredjen sistem uslovnih jednačina $P_m(x_i) = f(x_i)$; $(i = 1,2,\dots,n)$, bude zadovoljen sa minimalnom srednjekvadratnom greškom, pa sistem (1) dobija oblik:

$$a_o\int_a^b p(x)dx + a_1\int_a^b xp(x)dx + \dots + a_m\int_a^b x^m p(x)dx = \int_a^b p(x)f(x)dx ,$$

$$a_o\int_a^b xp(x)dx + a_1\int_a^b x^2 p(x)dx + \dots + a_m\int_a^b x^{m+1}p(x)dx = \int_a^b xp(x)f(x)dx ,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \tag{2}$$

$$a_o\int_a^b x^m p(x)dx + a_1\int_a^b x^{m+1}p(x)dx + \dots + a_m\int_a^b x^{2m}p(x)dx = \int_a^b x^m p(x)f(x)dx$$

ili za diskretne vrednosti, gde je $p(x_i) = p_i$ i $f(x_i) = y_i (i=1,2,\dots,n)$

$$a_o\sum_{i=1}^n p_i + a_1\sum_{i=1}^n p_i x_i + \dots + a_m\sum_{i=1}^n p_i x_i^m = \sum_{i=1}^n p_i y_i ,$$

$$a_o\sum_{i=1}^n p_i x_i + a_1\sum_{i=1}^n p_i x_i^2 + \dots + a_m\sum_{i=1}^n p_i x_i^{m+1} = \sum_{i=1}^n p_i y_i x_i .$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \tag{3}$$

$$a_o\sum_{i=1}^n p_i x_i^m + a_1\sum_{i=1}^n p_i x_i^{m+1} + \dots + a_m\sum_{i=1}^n p_i x_i^{2m} = \sum_{i=1}^n p_i y_i x_i^m .$$

Sistem (2) odnosno (3) naziva se sistem normalnih jednačina, iz koga se odredjuju parametri $a_i (i=0,1,\dots,m)$.

Ako rezultati merenja, kao što ćemo ubuduće pretpostaviti

radi lakšeg izračunavanja, imaju istu tačnost, funkcija težine je $p(x) = 1$.

Ako je potrebno funkciju $f(x)$ aproksimirati funkcijom

$$\varphi(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \dots + C_m e^{r_m x} \tag{4}$$

može se primeniti tzv. Prony-eva eksponencijalna aproksimacija, pod uslovom da su poznate vrednosti funkcije $f(x)$ u $(n \geqslant 2m)$ tačaka, koje su ekvidistantne.

Ako je $x_k - x_{k-1} = h = \text{const}$, parametre $r_i (i=1,2,\dots,m)$ odredjujemo iz relacije $r_i = \frac{1}{h}\log_e s_i$, gde su s_i $(i=1,2,\dots,m)$ koreni karakteristične jednačine

$$a_o + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_{m-1}s^{m-1} + s^m = 0 . \tag{5}$$

Koeficijenti karakteristične jednačine odredjuju se iz sistema uslovnih jednačina

$$a_o f(x_1) + a_1 f(x_2) + \dots + a_{m-1} f(x_m) = -f(x_{m+1}) ;$$

$$a_o f(x_2) + a_1 f(x_3) + \dots + a_{m-1} f(x_{m+1}) = -f(x_{m+2}) ;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \tag{6}$$

$$a_o f(x_{n-m}) + a_1 f(x_{n-m+1}) + \dots + a_{m-1} f(x_{n-1}) = -f(x_n)$$

metodom najmanjih kvadrata.

Parametre $C_i (i=1,2,\dots,m)$ odredjujemo, kada su poznati parametri $r_i (i=1,2,\dots,m)$, takodje metodom najmanjih kvadrata iz sistema:

$$C_1 e^{r_1 x_i} + C_2 e^{r_2 x_i} + \dots + C_m e^{r_m x_i} = f(x_i) \tag{7}$$

$$(i = 1,2,\dots,n).$$

Z a d a c i

1. Metodom najmanjih kvadrata rešiti sistem jednačina:
   $x + y = 3{,}0$; $x + 3y = 7{,}0$; $2x - y = 0{,}2$; $3x + y = 5{,}0$.

   Rešenje. Preodredjen sistem linearnih jednačina:

   $$b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1m}x_m = c_1 ;$$

   $$b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \dots + b_{2m}x_m = c_2 ;$$

. . . .

$$b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \dots + b_{nm}x_m = c_n$$

može se približno rešiti metodom najmanjih kvadrata, tj. iz uslova da funkcija greške

$$R = \sum_{k=1}^{n} \left[c_k - \sum_{i=1}^{m} b_{ki}x_i\right]^2$$

ima minimum. Iz egzistencije minimuma funkcije R, imamo da promenljive $x_i\,(i=1,2,\dots,m)$ zadovoljavaju sistem linearnih jednačina

$$\frac{\partial R}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1,2,\dots,m .$$

Poslednji sistem, koji se naziva normalni sistem jednačina, može da se napiše i u obliku:

$$\frac{\partial R}{\partial x_j} = -2\sum_{k=1}^{n}\left[c_k - \sum_{i=1}^{m} b_{ki}x_i\right] b_{kj} = 0, \text{ ili}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{ki}b_{kj}\right)x_i = \sum_{k=1}^{n} b_{kj}c_k \quad (j = 1,2,\dots,m).$$

Iz zadatog sistema jednačina dobija se normalni sistem jednačina

$a_{11}x + a_{12}y = d_1$; $a_{21}x + a_{22}y = d_2$, gde su:

$a_{11} = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 15$; $a_{12}=a_{21}=1\cdot2+3\cdot1-1\cdot2+1\cdot3 = 5$;

$a_{22} = 1^2 + 3^2 + (-1)^2 + 1^2 = 12$;

$d_1 = 3\cdot1 + 7\cdot1 + 0{,}2\cdot2 + 5\cdot3 = 25{,}4$ i

$d_2 = 3\cdot1 + 7\cdot3 - 0{,}2\cdot1 + 5\cdot1 = 28{,}8$.

Rešenja ovog sistema su:

$$x = \frac{d_1a_{22} - d_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} = \frac{25{,}4\cdot12 - 28{,}8\cdot5}{15\cdot12 - 5\cdot5} = 1{,}0374 ,$$

$$y = \frac{d_2a_{11} - d_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} = \frac{28{,}8\cdot15 - 25{,}4\cdot5}{15\cdot12 - 5\cdot5} = 1{,}9677 .$$

2. Promenljive veličine x i y zadovoljavaju linearnu jednačinu: $y = ax + b$, gde koeficijente a i b treba odrediti.

Koristeći rezultate merenja za veličine x i y koji su sredjeni u tabeli

x_i	1,1	1,9	4,2	6,1
y_i	2,5	3,2	4,5	6,0

naći metodom najmanjih kvadrata najverovatnije vrednosti koeficijenata a i b.

Rešenje. Najverovatnije vrednosti koeficijenata a i b odredjujemo metodom najmanjih kvadrata, tj. da suma kvadrata grešaka

$$R = \sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)^2$$

bude minimalna.

Iz egzistencije minimuma funkcije R nalazimo redom

$$\frac{\partial R}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i) = 0 ;$$

$$\frac{\partial R}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)x_i = 0 ;$$ tj. dolazimo do sistema jednačina

$$n\cdot b + \sum_{i=1}^{n} x_i\cdot a = \sum_{i=1}^{n} y_i ,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\cdot b + \sum_{i=1}^{n} x_i^2\cdot a = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i . \qquad (8)$$

Kako je

$\sum_{i=1}^{n} x_i = 13{,}3$, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 59{,}67$, $\sum_{i=1}^{n} y_i = 16{,}2$ i

$\sum_{i=1}^{n} x_iy_i = 64{,}33$ sistem (8) je $4b + 13{,}3\,a = 16{,}2$;

$13,3b + 59,67a = 64,33$.

Njegovo rešenje je: $a = \frac{41,86}{61,79} = 0,677$; $b = \frac{111,065}{61,79} = 1,797$.

Minimalna srednje kvadratna greška u ovom slučaju je:

$$R_{min} = (2,54 - 2,5)^2 + (3,08 - 3,2)^2 + (4,64 - 4,5)^2 +$$

$$+ (5,93 - 6,0)^2 \ ; \quad \text{odnosno} \quad R_{min} \cong 0,04 \ .$$

3. Za funkciju $f(x) = \sin \pi x$ na odsečku $[-1,+1]$ naći medju polinomima stepena, ne višeg od trećeg, onaj polinom koji daje najbolju aproksimaciju po metodi najmanjih kvadrata, ako se koriste vrednosti funkcije u tačkama:

$x_1 = -1$; $x_2 = -0,5$; $x_3 = 0$; $x_4 = 0,5$ i $x_5 = 1$.

Rešenje. Približni polinom je $P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, gde se koeficijenti $a_i\,(i=0,1,2,3)$ odredjuju iz preodredjenog sistema uslovnih jednačina:

$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 0$; $a_0 - 0,5a_1 + 0,25a_2 - 0,125a_3 = -1$;

$a_0 = 0$; $a_0 + 0,5a_1 + 0,25a_2 + 0,125a_3 = 1$;

$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$; metodom najmanjih kvadrata.

Sistem normalnih jednačina oblika (3), na osnovu podataka koji su sredjeni u tabeli, je

$5a_0 + 2,5a_2 = 0$; $2,5a_1 + 2,125a_3 = 1$; $2,5a_0 + 2,125a_2 = 0$;

$2,125a_0 + 2,03125a_3 = 0,25$.

i	1	2	3	4	5	Σ
x_i	-1	-0,5	0	0,5	1	0
$f(x_i)$	0	-1	0	1	0	0
x_i^2	1	0,25	0	0,25	1	2,5
x_i^3	-1	-0,125	0	0,125	1	0
x_i^4	1	0,0625	0	0,0625	1	2,125
x_i^5	-1	-0,03125	0	0,03125	1	0
x_i^6	1	0,015625	0	0,015625	1	2,03125

$x_i f(x_i)$	0	0,5	0	0,5	0	1
$x_i^2 f(x_i)$	0	-0,25	0	0,25	0	0
$x_i^3 f(x_i)$	0	0,125	0	0,125	0	0,25

Rešenje ovog sistema je: $a_0 = a_2 = 0$; $a_1 = -a_3 = \frac{8}{3}$, pa je traženi polinom: $P_3(x) = \frac{8}{3}(x - x^3)$.

4. Koristeći rezultate merenja promenljivih veličina x i y, koji su sredjeni u tabeli

x_i	4,48	4,98	5,60	6,11	6,62	7,42
y_i	4,15	1,95	1,31	1,03	0,74	0,63

odrediti parametre a i b u funkciji

$$y = \frac{1}{ax + b} \ , \tag{9}$$

tako da ona najbolje aproksimira u smislu najmanjih kvadrata zavosnist izmedju promenljivih x i y.

Rešenje. Uvodjenjem smene $z = \frac{1}{y}$ (9) svodi se na oblik

$z = ax + b$. Prema (3) iz jednačina

$$n\cdot b + \sum_{i=1}^{n} x_i\cdot a = \sum_{i=1}^{n} z_i \ ,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\cdot b + \sum_{i=1}^{n} x_i^2\cdot a = \sum_{i=1}^{n} x_i z_i \ , \ \text{tj.}$$

$6b + 35$; $21a = 5,426$; $35,21b + 212$; $44a = 34,564$;

odredjujemo parametre a i b:

$$a = \frac{D_a}{D} = \frac{16,334}{34,9} \cong 0,468 \ , \quad b = \frac{D_b}{D} = \frac{-64,299}{34,9} \cong -1,843 \ .$$

Funkcija koja aproksimira zavisnost izmedju promenljivih x i y sa minimalnom srednjom kvadratnom greškom

$R_{min} = \sum_{i=1}^{n} \Delta y_i^2 = 5,75\cdot 10^{-2}$ je

$$y = \frac{1}{0{,}468x - 1{,}843}\ .$$

Sva izračunavanja su sredjena u narednoj tabeli, gde se u poslednjoj vrsti daje relativna greška $\delta[\%]$.

i	1	2	3	4	5	6	$\sum$
x_i	4,48	4,98	5,60	6,11	6,62	7,42	35,21
x_i^2	20,07	24,80	31,36	37,33	43,82	55,06	212,44
y_i	4,15	1,95	1,31	1,03	0,74	0,63	
$1/y_i$	0,241	0,513	0,763	0,971	1,351	1,587	5,426
x_i/y_i	1,079	2,554	4,275	5,932	8,946	11,778	34,564
$y(x_i)$	3,94	2,05	1,29	0,98	0,73	0,61	
Δy_i	0,21	-0,10	0,02	0,05	0,01	0,02	
Δy_i^2	4,41	1,00	0,04	0,25	0,01	0,04	5,75
$\delta[\%]$	5,33	-4,88	1,55	5,08	1,70	2,66	

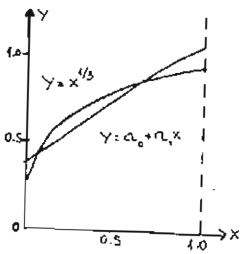
5. Aproksimirati funkciju $f(x) = x^{1/3}$ na odsečku $x\in[0,1]$ pomoću linearne funkcije $y = a_0 + a_1x$ metodom najmanjih kvadrata.

Rešenje. Konstante a_0 i a_1 odredićemo iz uslova da integral kvadrata greške

$$I = \int_a^b \left(f(x) - a_0 - a_1x\right)^2 dx$$

na segmentu $x\in[a,b]$ bude minimalan. Iz

$$\frac{\partial I}{\partial a_0} = -2\int_a^b \left(f(x) - a_0 - a_1x\right)dx = 0,$$



sl. 1.

$$\frac{\partial I}{\partial a_1} = -2\int_a^b x\left(f(x) - a_0 - a_1x\right)dx = 0,$$ dobija se sistem jednačina:

$$a_0\int_a^b dx + a_1\int_a^b xdx = \int_a^b f(x)dx\ ,$$
$$a_0\int_a^b xdx + a_1\int_a^b x^2dx = \int_a^b xf(x)dx\ . \qquad (10)$$

Kako $a=0$; $b=1$ i $f(x) = x^{1/3}$ imamo $\int_0^1 x^{1/3}dx = \frac{3}{4}$ i

$\int_0^1 x\cdot x^{1/3}dx = \frac{3}{7}$, pa je sistem (10):

$a_0 + \frac{1}{2}a_1 = \frac{3}{4}$; $\frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{3}a_1 = \frac{3}{7}$; odnosno $4a_0 + 2a_1 = 3$;

$21a_0 + 14a_1 = 18.$

Rešenje ovog sistema je: $a_0 = \dfrac{3\cdot 14 - 2\cdot 18}{4\cdot 14 - 2\cdot 21} = \dfrac{3}{7}$,

$a_1 = \dfrac{4\cdot 18 - 21\cdot 3}{14} = \dfrac{9}{14}$. Tražena prava je $y = \frac{3}{7} + \frac{9}{14}x$.

6. Metodom najmanjih kvadrata naći aproksimativne polinome stepena $m = 1,2,3$ i 4 za funkciju

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

na osnovu njenih vrednosti u tačkama $x = 0,1,2,3,4,5,6,7$ i 8.

Rešenje. Vrednosti funkcije $f(x)$ u datim tačkama su:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x_i)$	1	0,5	0,3333	0,25	0,2	0,1666	0,1428	0,125	0,1111

Da bismo odredili aproksimacioni polinom m-tog stepena $P_m(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$, polazimo od skupa jednačina:

$$P_m(x_i) = f(x_i) \qquad (i = 1,2,\ldots,n), \tag{11}$$

gde je u našem slučaju $n = 9$, a $m = 1,2,3$ i 4.

Preodredjen skup jednačina po nepoznatim a_i $(i = 0,1,2,\ldots,m)$ rešićemo približno metodom najmanjih kvadrata, tj. iz uslova da funkcija

$$R = \sum_{i=1}^{n} \left(P_m(x_i) - f(x_i)\right)^2$$

ima minimum. Iz uslova $\frac{\partial R}{\partial a_i} = 0$ $(i=0,1,\ldots,m)$ dobija se normalni sistem jednačina oblika (3), čijim se rešavanjem dobijaju koeficijenti a_i $(i = 0,1,\ldots,m)$.

Sada će se posebno analizirati svi slučajevi.

1^o Za $m = 1$ imamo $P_1(x) = a_o + a_1 x$. Odgovarajući sistem normalnih jednačina je: $9a_o + 36a_1 = 2{,}8289$; $36a_o + 204a_1 = 6{,}1710$; čije je rešenje: $a_o = 0{,}65731$ i $a_1 = -0{,}085747$. Aproksimacioni polinom je: $P_1(x) = 0{,}65731 - 0{,}085747x$.

2^o Za $m = 2$ koeficijenti polinoma $P_2(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2$ odredjuju se iz sistema jednačina:

$9a_o + 36a_1 + 204a_2 = 2{,}8289$; $36a_o + 204a_1 + 1296a_2 = 6{,}1710$;

$204a_o + 1296a_1 + 8772a_2 = 29{,}8280$.

Rešenje je: $a_o = 0{,}86533$; $a_1 = -0{,}26404$; $a_2 = 0{,}022286$.

3^o Za $m = 3$ odgovarajući sistem jednačina je:

$9a_o + 36a_1 + 204a_2 + 1296a_3 = 2{,}8289$;

$36a_o + 204a_1 + 1296a_2 + 8772a_3 = 6{,}1710$;

$204a_o + 1296a_1 + 8772a_2 + 61776a_3 = 29{,}828$;

$1296a_o + 8772a_1 + 61776a_2 + 446960a_3 = 147{,}17$.

Rešavanjem ovog sistema dobijaju se koeficijenti a_i $(i = 0,1,2,3)$ pa je:

$P_3(x) = 0{,}95857 - 0{,}46495x + 0{,}088887x^2 - 0{,}00555x^3$.

4^o Za $m = 4$ imamo $P_4(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$. Rešavanjem odgovarajućeg sistema dobijaju se sledeće vrednosti koeficijenata: $a_o = 0{,}99031$; $a_1 = -0{,}62972$; $a_2 = 0{,}19413$; $a_3 = -0{,}026713$; $a_4 = 0{,}13227 \cdot 10^{-2}$.

7. Poznato je da neka veličina J zavisi od vremena t na sledeći način

$$J = be^{pt} . \tag{12}$$

Merenja veličine J izvršena sa istom tačnošću, daju sledeću tablicu zavisnosti J od t:

t	0	1	2	3
J	2,012	1,213	0,741	0,450

Naći vrednosti parametara b i p u relaciji (12)

a/ logaritmovanjem i primenom metode najmanjih kvadrata;

b/ eksponencijalnom aproksimacijom.

<u>Rešenje.</u>

a/ Ako se (12) logaritmuje za osnovu e, dobija se:

$\log J = \log b + pt$.

Iz egzistencije minimuma funkcije greške

$$R = \sum_{i=1}^{n} (\log b + pt_i - \log J_i)^2 ,$$ dobija se sistem jednačina

$$\log b \cdot n + p \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i = \sum_{i=1}^{n} \log J_i ,$$

$$\log b \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i + p \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i^2 = \sum_{i=1}^{n} t_i \log J_i , \text{ odnosno}$$

$4 \cdot \log b + 6 \cdot p = -0{,}2060$; $6 \cdot \log b + 14 \cdot p = -2{,}8019$;

čije je rešenje: $\log b = 0{,}69635$; $p = -0{,}499$. Dakle, traženi parametri su:

$b = e^{0{,}69635} = 2{,}006$ i $p = -0{,}499$.

b/ Kako su poznate vrednosti funkcije J u ekvidistantnim tačkama, za odredjivanje koeficijente b i p može se primeniti Prony-eva eksponencijalna aproksimacija.

S obzirom da se aproksimacija vrši samo sa jednim eksponencijalnim članom, to će karakteristična jednačina biti linearna

$$a_o + s = 0 , \qquad (13)$$

gde koeficijent a_o odredjujemo, shodno (6), iz sistema:

$a_oJ_1 = - J_2$; $a_oJ_2 = - J_3$; $a_oJ_3 = - J_4$ po metodi najmanjih kvadrata, pa je

$$a_o = - \frac{\sum_{i=1}^{3} J_iJ_{i+1}}{\sum_{i=1}^{3} J_i^2} = - \frac{3,6728}{6,0686} = - 0,60522 .$$

Koren jednačine (13) je $s = - a_o = 0,60522$, pa je:

$p = \log_e s = - 0,502$. Parametar b odredjujemo iz sistema:

$b \cdot e^{pt_i} = J_i \quad (i = 1,2,\ldots,4)$, metodom najmanjih kvadrata.

Kako je $\exp(pt_i) = \exp(\log_e s \cdot t_i) = s^{t_i}$ imamo

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{4} J_i e^{pt_i}}{\sum_{i=1}^{4} e^{2pt_i}} = \frac{\sum_{i=1}^{4} J_i s^{t_i}}{\sum_{i=1}^{4} s^{2t_i}} = \frac{3,1173}{1,5496} = 2,012.$$

Dakle, funkcionalna zavisnost (12) je:

$$J = 2,012\ e^{-0,502t} .$$

8. Naći vrednost konstanata a,b,c koje približno zadovoljavaju jednačinu

$$f(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} ,$$

za vrednost promenljive x iz intervala $[p,q]$, gde je $f(x)$

jedna data funkcija.

Rešenje. Iz egzistencije minimuma funkcije greške

$$R = \int_p^q \left[a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} - f(x)\right]^2 dx ,$$

dolazi se do sistema jednačina:

$$a \int_p^q dx + b \int_p^q \frac{dx}{x} + c \int_p^q \frac{dx}{x^2} = \int_p^q f(x)dx ,$$

$$a \int_p^q \frac{dx}{x} + b \int_p^q \frac{dx}{x^2} + c \int_p^q \frac{dx}{x^3} = \int_p^q \frac{f(x)}{x} dx ,$$

$$a \int_p^q \frac{dx}{x^2} + b \int_p^q \frac{dx}{x^3} + c \int_p^q \frac{dx}{x^4} = \int_p^q \frac{f(x)}{x^2} dx ,$$

čijim se rešavanjem dobijaju tražene vrednosti za a, b i c.

9. Metodom najmanjih kvadrata rešiti sistem jednačina:

$x - y + 2z = 3$; $3x + 2y - 5z = 5$; $4x + y + 4z = 21$; $-x + 3y + 3z = 14$.

Rezultat. $x = 2,470$; $y = 3,551$; $z = 1,916$.

10. Sledeći podaci pročitani su iz jednog grafikona koji pokazuje uzrast sina kad je dat očev uzrast, označeni sa S incha, odnosno F incha:

S	65,7	66,8	67,2	69,3	69,8	70,5	70,9
F	62	64	65	69	70	71	72

Ako su S i F u linearnoj vezi $S = a + bF$, odrediti metodom najmanjih kvadrata najverovatnije vrednosti za konstante a i b.

Rešenje. $S = 33,351 + 0,522\ F$.

11. Metodom najmanjih kvadrata naći aproksimativne polinome prvog i trećeg stepena za podatke sredjene u tabeli:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	-1,00	1,47	2,89	3,14	3,24	4,04	5,72	7,66	8,99

<u>Rezultat</u>. $P_1(x) = -0,32 + 1,08x$, $P_3(x) = -0,73 + 2,38x - 0,49x^2 + 0,043x^3$.

12. Metodom najmanjih kvadrata aproksimirati funkciju $f(x) = \cos x$ na odsečku $x \in [-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}]$ pomoću polinoma drugog stepena.

<u>Rezultat</u>. $a_0 = \frac{3}{\pi}\left(\frac{20}{\pi^2} - 1\right)$; $a_1 = 0$; $a_2 = -\frac{60}{\pi^3}\left(\frac{12}{\pi^2} - 1\right)$.

13. Naći polinom drugog stepena $P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ koji najbolje aproksimira u smislu najmanjih kvadrata, funkciju čije su vrednosti za ekvidistantne vrednosti argumenta x sredjene u tabeli:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	0,5	0,1	0,4	0,9	1,7	3,4	6,1	9,8

<u>Rezultat</u>.

$a_0 = 1,178$; $a_1 = 1,249$; $a_2 = 0,321$.

Nada DJURANOVIĆ

ALGEBARSKE JEDNAČINE

Poznato je da se rešenja algebarskih jednačina prvog, drugog, trećeg i četvrtog stepena dobijaju iz koeficijenata jednačina pomoću konačnog broja algebarskih operacija (tj. pomoću konačnog broja sabiranja, oduzimanja, množenja, deljenja, stepenovanja sa 1/2, 1/3, 1/4). Dakle, jednačine stepena $\leqslant 4$ možemo algebarski rešiti primenom obrazaca.

Medjutim, kako je algebarskim načinom rešavanja obuhvaćen vrlo uzak skup jednačina, veoma je važno upoznati se i sa drugim metodama rešavanja kako algebarskih, tako i transcendentnih jednačina. Najvažnije su sledeće tri metode:

1. grafičke; 2. numeričke; 3. nomografske.

Kod grafičkih metoda rešenja svake konkretne jednačine dobijaju se crtanjem grafika. Ove metode koriste se kada treba samo grubo odrediti rešenje, ili kao priprema za tačnije rešavanje numeričkim metodama.

Numeričke ili računske metode su najkorisnije, jer daju visok stepen tačnosti. Kod ovih metoda rad je uglavnom aritmetički.

Nomografske metode su mešovite i to: numeričko-grafičke metode. Vrlo su korisne, jer se kod njih priprema jedan grafik jednom za uvek da služi za široku klasu slučajeva, tako da se može upotrebiti uvek ponovo sa raznim numeričkim podacima.

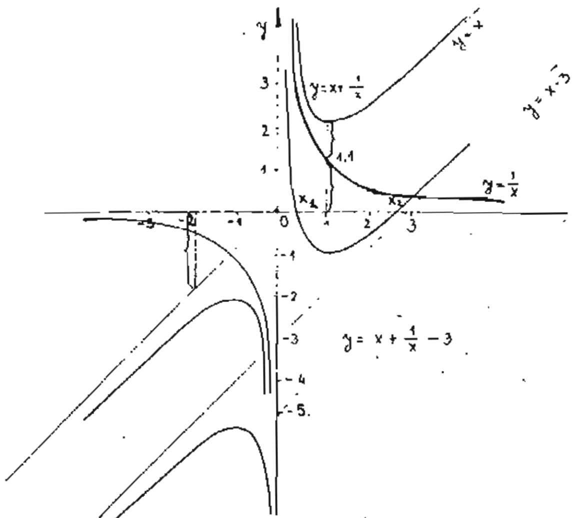
GRAFIČKE METODE

1. Realne korene jednačine (algebarske ili transcendentne) $f(x) = o$ možemo približno odrediti kao apscise presečnih tačaka grafika funkcije $y = f(x)$ i apscisne ose x.

PRIMER 1. Grafički rešiti jednačinu $x + \frac{1}{x} - 3 = o$.

Rešenje. Evo kako ćemo jednostavno elementarnim putem dobiti grafik funkcije $f(x) = x + \frac{1}{x} - 3$.

Na slici je prikazano dobijanje grafika funkcije $x + \frac{1}{x}$; u svakoj tački x vršimo sabiranje odgovarajućih ordinata funkcija x i $\frac{1}{x}$. Grafik funkcije $x + \frac{1}{x} - 3$ dobija se iz grafika funkcije $x + \frac{1}{x}$ umanjivanjem svake ordinate za 3, odnosno translacijom (paralelnim pomakom) celog grafika u negativnom pravcu y-ose za dužinu 3.

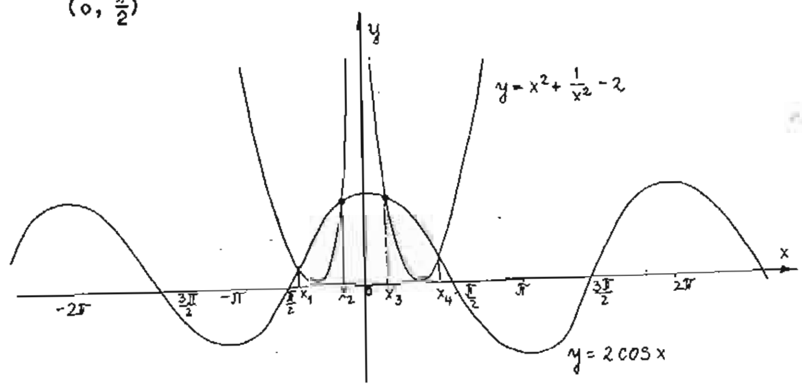


Na slici vidimo da kriva naše funkcije $f(x) = x + \frac{1}{x} - 3$ preseca x-osu približno u tačkama: $x_1 \approx 0.4$ i $x_2 \approx 2.6$. Znači, naša jednačina ima dva realna korena.

Primedba. Uporediti dobijena rešenja sa rešenjima kvadratne jednačine $x^2 - 3x + 1 = o$.

PRIMER 2. Grafički rešiti jednačinu $2 \cos x = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2$.

Rešenje. Nacrtaćemo grafike funkcija $y = 2 \cos x$ i $y = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2$. (ovog poslednjeg pomoću sabiranja ordinata funkcija x^2, $\frac{1}{x^2}$ i -2). Sa slike vidimo da dve krive $y = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2$ i $y = 2 \cos x$ imaju četiri presečne tačke, a jednačina četiri rešenja x_1, x_2, x_3 i x_4, koja se nalaze u intervalima $(-\frac{\pi}{2}, o)$ i $(o, \frac{\pi}{2})$

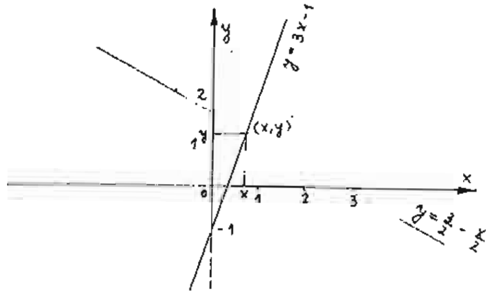


Često je pogodno jednačinu $f(x) = o$ napisati u obliku $a(x) = b(x)$, pa je u takvom obliku na prethodno pisani način rešavati.

PRIMER 3. Rešiti grafički jednačine $x + 2y = 3$; $3x-y = 1$.

Rešenje. Napišimo jednačine u obliku: $y = \frac{3}{2} - \frac{x}{2}$;

$y = 3x - 1$.



Na slici vidimo da su koordinate presečne tačke naših pravih: $x \approx 0.7$ i $y \approx 1.1$. Dakle, traženo zajedničko rešenje je: $x \approx 0.7$; $y \approx 1.1$.

Z A D A C I

Grafičkom metodom naći približna rešanja sledećih jednačina:

1. $e^x - 3x = 0$; 2. $2x - 3 \sin x + 5 = 0$; 3. $x^3 - 10x + 1 = 0$; 4. $x^3 + 2x + 7.8 = 0$; 5. $x \log x = 1$; 6. $x^2 - e^x + 2 = 0$; 7. $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$; 8. $4x - y = 1$, $3x - 2y = 3$; 9. $x^3 - 4x^2 + 3x - 2 = 0$; $(x_1 \approx -1,65)$; $(x_1 \approx 2.5)$.

NUMERIČKE METODE

1. Metod uzastopnog polovljenja intervala

Neka je data jednačina (algebarska ili transcendentna): $f(x) = 0$.

Potražimo takve vrednosti $x = a$ i $x = b$ da je znak funkcije na krajevima intervala $[a,b]$ različit, tj. da vredni $f(a)f(b) < 0$. Grafički znači da se kriva $y = f(x)$ nalazi i ispod i iznad x-ose na intervalu $[a,b]$. Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna na intervalu $[a,b]$, kriva $y = f(x)$ će seći x-osu u nekoj tački $\in [a,b]$.

Tu tačku ξ, nulu funkcije $f(x)$, odnosno rešenje jednačine $f(x) = 0$ naći ćemo (približno) uzastopnim polovljenjem intervala $[a,b]$ na sledeći način: nadjemo $x = \frac{a+b}{2}$, polovinu intervala $[a,b]$. Ako je $f(\frac{a+b}{2}) = 0$, odabiramo onu od polovina intervala: $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ ili $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ na čijim krajevima funkcija ima suprotne znake i isti postupak ponavljamo na novom, suženom intervalu.

Ovaj metod koristi se za grubo nalaženje korena, jer se za dobijanje veće tačnosti mora izvršiti veliki broj računanja. Metod se lako realizuje na elektronskim računskim mašinama.

PRIMER 4. Metodom polovljenja intervala naći jedan realan koren jednačine: $x^3 + 2x^2 - x - 1 = 0$.

Rešenje. Potražimo interval $[a,b]$ u kojem funkcija $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 1$ menja znak:

$x = 0$; $f(0) = -1 < 0$;

$x = 1$; $f(1) = 1 > 0$.

Znači, koren ξ pripada intervalu $[0,1]$. Nadjimo vrednost $f(x)$ u $x = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$, tj. u polovini intervala $[0,1]$:

$$f(\tfrac{1}{2}) = (\tfrac{1}{2})^3 + 2.\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{7}{8} = -0{,}875 < 0.$$

Kako je na krajevima intervala $\left[\frac{1}{2},1\right]$ znak funkcije $f(x)$ različit: $f(1) > 0$, $f(\frac{1}{2}) < 0$, tj. $f(\frac{1}{2})\ f(1) < 0$, nastavljamo sa polovljenjem intervala $\left[\frac{1}{2},1\right]$:

$$x = \frac{\frac{1}{2}+1}{2} = \frac{3}{4} = 0.75;$$

$$f(\tfrac{3}{4}) = (\tfrac{3}{4})^3 + 2(\tfrac{3}{4})^2 - \frac{3}{4} - 1 = \frac{27}{64} + 2\,\frac{9}{16} - \frac{7}{4} = -\frac{13}{64} =$$

$$= -0.2031 < 0.$$

Zbog $f(1) > 0$ i $f(\frac{3}{4}) < 0$, polovimo dalje interval $\left[\frac{3}{4},1\right]$

$$x = \frac{\frac{3}{4}+1}{2} = \frac{7}{8} = 0.875;$$

$$f(\tfrac{7}{8}) = (\tfrac{7}{8})^3 + 2(\tfrac{7}{8})^2 - \frac{7}{8} - 1 = \frac{343}{512} + 2\,\frac{49}{64} - \frac{15}{8} =$$

$$= \frac{167}{512} = 0.3262 > 0.$$

Kako je $f(\frac{3}{4})\ f(\frac{7}{8}) < 0$, nastavljamo sa polovljenjem intervala $\left[\frac{3}{4},\ \frac{7}{8}\right]$:

$$x = \frac{\frac{3}{4}+\frac{7}{8}}{2} = \frac{13}{16} = 0.8125;$$

$$f(\tfrac{13}{16}) = (\tfrac{13}{16})^3 + 2(\tfrac{13}{16})^2 - \frac{13}{16} - 1 = \frac{2197}{4096} + 2\,\frac{169}{256} - \frac{29}{16} =$$

$$= \frac{181}{4096} = 0.0442.$$

Dobili smo sledeći niz približnih rešenja:

$$x_0 = \frac{1}{2} = 0.5;\quad x_1 = \frac{3}{4} = 0.75;\quad x_2 = \frac{7}{8} = 0.875;$$

$$x_3 = \frac{13}{16} = 0.8125;\quad \xi \approx 0.8.$$

Znači, za $x = 0{,}8125$ vrednost funkcije je približno 0.04, odnosno kažemo da je $f(0.8125) = 0$ sa tačnošću od $\varepsilon = \frac{1}{2}\,10^{-1}$. Drugim rečima, u vrednosti $x = 0.8125$ jedino za prvu cifru možemo reći da je sigurna, tj. da je $\xi \approx 0.8$ koren jednačine.

Z A D A C I

Metodom uzastopnog polovljenja intervala naći rešenja sledećih jednačina:

1. $x^3 - 9x + 1 = 0$
2. $x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0$, $(\xi = 0.867)$.

METOD ITERACIJE

Jednačinu $f(x) = 0$, gde je $f(x)$ neprekidna funkcija, napišemo u obliku: $x = \varphi(x)$.

Zatim grafički ili pogadjanjem odredimo interval $[a,b]$ u kome se nalazi jedan realni koren i iz tog intervala izaberemo proizvoljnu vrednost $x = x_0$ kao približnu vrednost korena. Nove približne vrednosti dobijamo na sledeći način:

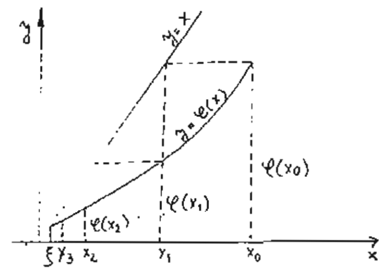
$$x_1 = \varphi(x_0);\ x_2 = \varphi(x_1); \dots\ x_n = \varphi(x_{n-1}),\quad (n = 1,2,\dots).$$

Tako smo dobili niz približnih rešenja $x_0, x_1, x_2, \dots x_n$ koji konvergira ka rešenju naše jednačine

$$\xi = \lim_{n\to\infty} x_n = \varphi(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}) = \varphi(\xi)$$

ako je:

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1, \text{ kada } x \in [a,b].$$



Ukoliko je broj q manji, utoliko se niz približnih vrednosti brže približava rešenju.

Ako je zahtev zadatka da se nadje rešenje sa tačnošću ε, onda se zaustavljamo na onom koraku n za koji je ispunjena nejednakost

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$$

i odgovaramo da je $\xi = x_n$ traženo rešenje sa tačnošću ε.

PRIMER 5. Naći realan koren jednačine $2x - \log x = 7$ metodom iteracije, s tačnošću do tri značajne cifre, tj. $\varepsilon = 10^{-3}$.

Rešenje. Prvenstveno odredimo interval $[a,b]$ u kome se nalazi koren ξ. To ćemo učiniti na dva načina:

a) Pogadjanjem: $f(x) \equiv 2x - \log x - 7$.

$f(3) = 6 - \log 3 - 7 < 0$;

$f(4) = 8 - \log 4 - 7 > 0$ $\Rightarrow f(3)f(4)<0$

Znači, koren $\xi \in [3,4]$.

Napišimo sada jednačinu u obliku pogodnom za primenu metoda iteracije: $x = \frac{1}{2}(\log x+7) = \frac{1}{2}\log x + 3.5$.

Ovde je funkcija $\varphi(x) = \frac{1}{2}\log x + 3.5$. Ispitajmo da li će iteracioni proces konvergirati za ovako odredjenu funkciju $\varphi(x)$, tj. da li je zadovoljen uslov $|\varphi'(x)| < 1$ za $x \in [3,4]$.

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2}\,\frac{\log e}{x} = \frac{0.43429}{2x}.$$

Kako $x \in [3,4]$ tj. $3 < x < 4$, biće $\frac{1}{3} > \frac{1}{x} > \frac{1}{4}$, pa imamo:

$$|\varphi'(x)| = \frac{1}{2}\left|\frac{0.43429}{x}\right| = \frac{1}{2}\,\frac{0.43429}{3} < \frac{1}{2}\,\frac{0.43429}{3} = 0.07238 < 0.08 < 0.1$$

Imamo da je $q = 0{,}1$, a kako je to mala vrednost, možemo očekivati brzo približavanje rešenju ξ.

Za početnu vrednost x_0 možemo uzeti proizvoljnu vrednost iz intervala $[3,4]$. Uzmimo, na primer: $x_0 = 3.2$.

$$x_1 = \varphi(x_0) = \varphi(3.2) = \tfrac{1}{2}\log 3.2 + 3.5 = \tfrac{1}{2}\,0.50515 + 3.5 = 3.75258;$$

$$x_2 = \varphi(x_1) = \varphi(3.75258) = \tfrac{1}{2}\log 3.75258 + 3.5 = \tfrac{1}{2}\,0.57426 + 3.5 = 3.78916;$$

$$x_3 = \varphi(x_2) = \varphi(3.78716) = \tfrac{1}{2}\log 3.78716 + 3.5 = \tfrac{1}{2}\,0.57832 + 3.5 = 3.78916;$$

$$x_4 = \varphi(x_3) = \varphi(3.78916) = \tfrac{1}{2}\log 3.78916 + 3.5 = \tfrac{1}{2}\,0.57854 + 3.5 = 3.78927.$$

Dakle, dobili smo ovaj niz približnih rešenja:

$x_0 = 3.20000$; $x_1 = 3.75258$; $x_2 = 3.78716$; $x_3 = 3.78916$;

$x_4 = 3.78927$.

U x_3 i x_4 ponavljaju se prve četiri cifre. Proverimo da li je zadovoljena tačnost od $\varepsilon = 10^{-3}$:

$$|x_4 - x_3| = |3.78927 - 3.78916| = |0.00011| = 0.00011 = 0.1 \cdot 10^{-3} < 10^{-3}.$$

Znači, odredili smo približno rešenje ξ sa tačnošću od tri značajne cifre: $\xi = 3.789$.

Z A D A C I

Metodom iteracije naći rešenja sledećih jednačina sa tačnošću $\varepsilon = 10^{-3}$.

1. $x + \log x = 0.5$; $(x_{10} = \xi = 0.672)$.

2. $2 - x = \ln x$; $(x_{11} = \xi = 1.557)$.

(Uputstvo: koristiti vezu
$$\ln x = \frac{\log x}{\log e} = \frac{\log x}{0.43429}).$$

3. $x^3 - 2.625\, x^2 + 5.25x - 2.5 = 0$; $(x_5 = \xi = 0.625)$.

4. $(x-1)^2 - e^{-x} = 0$; $(x_6 = \xi = 1.478)$.

5. $x - \sin x = 0.25$; $(x_5 = \xi = 1.172)$.

6. $x^8 - 15\, x^5 + 24\, x - 5 = 0$; $(x_4 = \xi = 0.208)$.

7. $x^5 - x - 0.2 = 0$; $(x_4 = \xi = 1.045)$.

8. $e^x + 0.1\, x + 2 = 0$;

9. $x^4 - 2\, x^3 + x - 1 = 0$;

METOD SEČICE (Regula falsi)

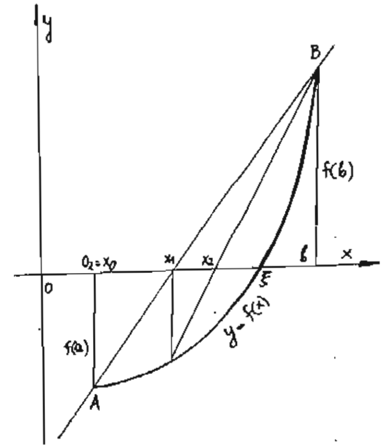
Neka je $f(x) = 0$ data jednačina. Nalazimo (probijanjem ili grafički) dve vrednosti a i b blizu korena jednačine, takve da su $f(a)$ i $f(b)$ suprotnog znaka, tj. da važi $f(a)\, f(b) < 0$. Metod sečice (sekante) sastoji se u tome (vidi sliku) da se odsečak sečice $\overline{AB}$ smatra aproksimacijom luka $\widehat{AB}$ krive $y = f(x)$; presečna tačka x_1 odsečka $\overline{AB}$ i x-ose smatra se približnom vrednosti $\xi \in [a,b]$.

Jednačina sečice (tj. prave koja prolazi kroz tačke $A = (a, f(a))$ i $B = (b, f(b))$ glasi:
$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}\,(x-a). \qquad (*)$$

Presek $(x_1, 0)$ sečice sa x-osom dobija se stavljanjem $y = 0$ u izraz $(*)$: $x_1 = a - \dfrac{f(a)}{f(b)-f(a)}\,(b-a)$, odnosno stavljajući $a = x_0$ dobijamo:
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f(b)-f(x_0)}\,(b-x_0),$$

i analogno, nastavljajući ovaj iteracioni proces:
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}\,(b - x_n), \quad (n = 0,1,\ldots).$$

Dobili smo niz približnih vrednosti $x_0, x_1, \ldots x_n$ koji konvergira ka korenu jednačine ξ ako $f''(x)$ ima konstantan znak na intervalu $[a,b]$.



PRIMEDBA Sa $x = b$ obeležavamo onaj kraj intervala $[a,b]$ za koji se znak funkcije $f(x)$ poklapa sa znakom njenog drugog izvora $f''(x)$.

PRIMER 6. Metodom sečice naći pozitivan koren jednačine $f(x) = x^3 - 0.2\, x^2 - 0.2x - 1.2 = 0$, s tačnošću do $\varepsilon = 0.02$.

Rešenje. Prvo odredimo interval $[a,b]$ za koren ξ :
$$\begin{aligned} f(1) &= -\,0.6 < 0, \\ f(2) &= 5.6 > 0, \end{aligned} \implies \xi \in [1,2]$$

Kako je $f(1.5) = 1.425 > 0$, možemo uzeti uži interval $[1, 1.5]$. Ovde je $x_0 = a = 1$, a $b = 1.5$. Na osnovu obrasca dobijamo:
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f(b)-f(x_0)}\,(b-x_0) = 1 + \frac{0.6}{1.425+0.6}\, 0.5 = 1.15;$$
$$f(x_1) = f(1.15) = -\,0.173;$$
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(b)-f(x_1)}\,(b-x_1) = 1.15 + \frac{0.173}{1.425+0.173}\, 0.35 =$$
$$= 1.15 + 0.040 = 1.190;$$
$$f(x_2) = f(1.190) = -\,0.036;$$
$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f(b)-f(x_2)}\,(b-x_2) = 1.190 + \frac{0.036}{1.425 + 0.036}\, 0.31 =$$

$= 1.19o + o{,}oo8 = 1.198;$

$f(x_3) = f(1.198) = -\ o.oo72.$

Dobili smo ovaj niz približnih rešenja:

$x_o = a = 1;\ x_1 = 1.15;\ x_2 = 1.19o;\ x_3 = 1.198.$

Kako je $|x_3 - x_2| = |1.198 - 1.19o| = o.oo8 = o.8.1o^{-3} < o.o2$, koren jednačine jeste $\xi = 1.2o$ (jer je zadata tačnost na dve značajne cifre).

Z A D A C I

Metodom regula falsi naći rešenja sledećih jednačina:

1. $x^3 - 2x - 5 = o$; 2. $x^2 - \sin \pi x = o$; 3. $2x^4 - x + 1 = o$.

METOD TANGENTE (Newton-Raphsonova metoda)

Data je jednačina $f(x) = o$.

Prvo odredimo interval $[a,b]$ koji sadrži koren ξ, dakle važi relacija $f(a)\,f(b) < o$, pri čemu u tački a imamo $f(a)f''(a) > o$. Metoda tangente sastoji se u tome da se luk $\widehat{AB}$ krive $y = f(x)$ (vidi sliku) zameni tangentom u tački $A = (a, f(a))$; presečna tačka (x_1, o) tangente i x-ose daje približnu vrednost x_1 korena ξ.

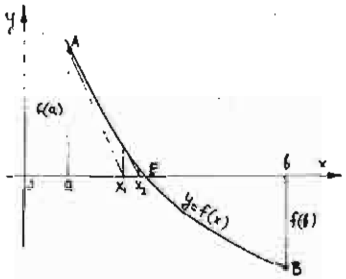
Jednačina tangente u tački $(a, f(a))$ glasi

$y - f(a) = f'(a)(x-a).$

Presek tangente x_1 sa x-osom dobija se stavljanjem $y = o$:

$-f(a) = f'(a)(x_1 - a)$, odnosno stavivši $a = x_o$:

$$x_1 = x_o - \frac{f(x_o)}{f'(x_o)}$$



a time je upravo definisan ovaj iteracioni proces:

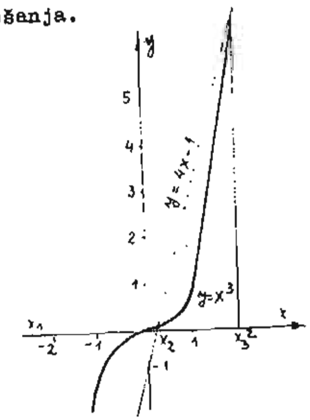
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\quad (n = o,1,2,\ldots).$$

Ovaj niz približnih rešenja $x_o, x_1, \ldots$ konvergira ka rešenju ξ naše jednačine.

PRIMER 7. Metodom Newton-Raphsona rešiti jednačinu

$$f(x) = x^3 - 4x + 1 = o.$$

Rešenje. Odredimo grafički na slici intervale u kojima se nalaze realna rešenja.



Jednačina ima tri realna korena: $x_1 \in (-3,-2)$, $x_2 \in (o,1)$; $x_3 \in (1,2)$.

$f'(x) = 3x^2 - 4$; $f''(x) = 6x$;

$f(-3) = -14 < o$; $f''(-3) = -18 < o$

Kako je $f(-3)f''(-3) > o$, uzećemo $x_o = -3$.

$$x_1 = x_o - \frac{f(x_o)}{f'(x_o)} = -3 - \frac{-14}{23} =$$

$$= 3 + o.695 = -\ 2.3o5;$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -2.3o5 - \frac{f(-2.3o5)}{f'(-2.3o5)} = -2.o38$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = -2.o38 - \frac{f(-2.o38)}{f'(-2.o38)} = -\ 2.116;$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = -\ 2.116 - \frac{f(-2.116)}{f'(-2.116)} = -\ 2.116$$

Dobili smo niz približnih rešenja: $x_o = -3$; $x_1 = -2.3o5$; $x_2 = -2.o38$; $x_3 = -2.116$; $x_4 = -2.116$.

Kako je došlo do poklapanja rešenja x_3 i x_4, $\xi = -2.116$ i to je tačno rešenje, jer $f(\xi) = 0$.

Na isti način dobićemo za interval $[0,1]$:

$x_0 = 0$; $x_1 = 0.25$; $x_2 = 0.2541$; $x_3 = 0.2541$ koje je tačno rešenje.

Analogno, za interval $[1,2]$ dobijamo: $x_0 = 1$; $x_1 = 1.875$; $x_2 = 1,863 = x_3$, pa je $\xi = 1.863$ tačno rešenje.

Z A D A C I

Metodom tangente rešiti sledeće jednačine:

1. $x^3-2x-5 = 0$; $(\xi = x_3 = 2.09455)$.
2. $x \log x = 4.77724$; $(\xi = x_2 = 6.08911)$.
3. $\log x - 0.05\, x = 0$; $(\xi = x_3 = 29.353)$.
4. $\operatorname{tg} x = x$; $(\xi = x_2 = 4.49343)$.
5. $x^3 - 7x^2 + 5x - 35 = 0$.

SISTEMI LINEARNIH ALGEBARSKIH JEDNAČINA

Gaus-Sajdlova metoda (Gauss-Seidel)

Kada je broj nepoznatih veliki koristi se Gaus-Sajdlova metoda. To je približna iterativna metoda u kojoj se polazi od nekih početnih, grubih vrednosti za nepoznate, koje se zatim u svakoj iteraciji postepeno popravljaju. Proces popravljanja nastavlja se tako dugo, dok nas stepen tačnosti ne zadovolji.

Neka je dat sistem: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_1$; $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = a_2$; $a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = a_3$.

Pretpostavlja se da je matrica sistema nesingularna i da su joj dijagonalni elementi po modulu dominantni u odnosu na ostale elemente. Rešimo sistem po dijagonalnim elementima:

$$a_{11}x_1 = a_1-a_{12}x_2-a_{13}x_3, \qquad x_1=b_1-b_{12}x_2-b_{13}x_3,$$

$$a_{22}x_2=a_2-a_{21}x_1-a_{23}x_3, \quad \Rightarrow \quad x_2=b_2-b_{21}x_1-b_{23}x_3, \quad \text{gde je: } b_{ij}=\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, b_i=\frac{a_i}{a_{ii}}$$

$$a_{33}x_3 = a_3-a_{31}x_1-a_{32}x_2 \qquad x_3=b_3-b_{31}x_1-b_{32}x_2 \quad (i,j = 1,2,3).$$

Pošto smo pretpostavili da su elementi sa dijagonale a_{ii} znatno veći od ostalih, možemo u jednačinama zanemariti članove koji sadrže elemente a_{ij}, $i \neq j$ i d[illegible] vakvu prvu aproksimaciju za x_j, $j = 1,2,3$:

$$x_1^{(0)} = b_1; \; x_2^{(0)} = b_2; \; x_3^{(0)} = b_3.$$

Poboljšane vrednosti $x_j^{(1)}$ dobijamo u sledećem iterativnom koraku na sledeći način: $x_1^{(1)} = b_1-b_{12}x_2^{(0)} - b_{13}x_3^{(0)}$; $x_2^{(1)} = b_2-b_{21}x_1^{(1)}-b_{23}x_3^{(0)}$; $x_3^{(1)} = b_3-b_{31}x_1^{(1)} - b_{32}x_2^{(1)}$.

Na R+1-koraku računaćemo po ovakvom obrascu:

$x_1^{(k+1)} = b_1-b_{12}x_2^{(k)} - b_{13}x_3^{(k)}$; $x_2^{(k+1)} = b_2-b_{21}x_1^{(k+1)} - b_{23}x_3^{(k)}$; $x_3^{(k+1)} = b_3-b_{31}x_1^{(k+1)} - b_{32}x_2^{(k+1)}$, $R = 0,1,2\ldots$

Napominjemo da se prva aproksimacija može proizvoljno uzeti kao i kod iterativnog rešavanja jednačina.

PRIMER 8. Metodom Gaus-Sajdla rešiti sistem: $x_1-0.1\, x_2 + 0.2\, x_3 = 1.4$; $0.2\, x_1+x_2-0.1\, x_3 = 1.9$; $0.1\, x_1-0.2\, x_2+x_3 = 2.7$.

<u>Rešenje</u>. Na ovaj sistem možemo primeniti metod Gaus-Sajdla, jer je matrica sistema nesingularna (determinanta sistema je različita od nule) i dijagonalni elementi znatno su veći od ostalih.

Napišimo ovaj sistem u obliku pogodnom za iteraciju:

$x_1 = 1.4+0.1\, x_2-0.2\, x_3$; $x_2 = 1.9 - 0.2\, x_1 + 0.1\, x_3$; $x_3 = 2.7 - 0.1\, x_1 + 0.2\, x_2$.

Uzmimo za prvu aproksimaciju vrednosti $x_1^{(0)} = 1.4$; $x_2^{(0)} = 0$; $x_3^{(0)} = 0$.

Primenom Gaus-Sajdlova procesa dobijamo nove poboljšane vrednosti:

$x_1^{(1)} = 1.4 + 0,1x_2^{(0)} - 0.2\, x_3^{(0)} = 1.4+0.1.0 - 0.2.0 = 1,4,$

$x_2^{(1)} = 1.9 - 0.2x_1^{(1)} + 0,1\, x_3^{(0)} = 1.9-0.2.1.4 + 0.1.0 = 1,62,$

$x_3^{(1)} = 2.7 - 0.1\, x_1^{(1)} + 0.2\, x_2^{(1)} = 2.7-0,1.1.4 + 0.2.1.62 = 2.884;$

$x_1^{(2)} = 1.4+0.1\, x_2^{(1)} - 0,2x_3^{(1)} = 1.4+0.1.1.62-0.2.2.884 = 0,9852,$

$x_2^{(2)} = 1.9-0.2x_1^{(2)}+0.1x_3^{(1)} = 1.9-0.2.0.9852+0.1.2.884 = 1.99136,$

$x_3^{(2)} = 2.7-0.1x_1^{(2)}+0.2x_2^{(2)} = 2.7-0.1.0.9852+0.2.1.9914 = 2.99976,$

$x_1^{(3)} = 1.4+0,1x_2^{(2)} - 0.2x_3^{(2)} = 1.4+0.1.1.9914-0.2.2.998 = 0.99918,$

$x_2^{(3)} = 1.9-0.2x_1^{(3)}+0.1x_3^{(2)} = 1.9-0.2.0.9992+0.1.2.9998 = 2.00014,$

$x_3^{(3)} = 2.7-0.1\, x_1^{(3)}+0.2x_2^{(3)} = 2.7-0.1.0.9992+0.2.2.0001 = 3.00010,$

$x_1^{(4)} = 1.4+0.1x_2^{(3)}-0,2x_3^{(3)} = 1.4+0,1.2.0001-0.2.3.0001 = 0.99999,$

$x_2^{(4)} = 1.9-0.2x_1^{(4)}+0.1x_3^{(3)} = 1.9-0.2.1.0000+0.1.3.0001 = 2.00001,$

$x_3^{(4)} = 2.7-0,1x_1^{(4)}+0,2x_2^{(4)} = 2.7-0.1.10000+0.2.2.0000 = 3.00000,$

$x_1^{(5)} = 1.4+0,1x_2^{(4)}-0,2x_3^{(4)} = 1.4+0,1.2.000-0.2.3.0000 = 1.0000,$

$x_2^{(5)} = 1.9-0,2x_1^{(5)}+0,1x_3^{(4)} = 1.9-0.2.10000+0.1.3,0000 = 2.0000,$

$x_3^{(5)} = 2.7-0.1x_1^{(5)}+0.2x_2^{(5)} = 2.7-0.1.1.000+0.2.2.0000 = 3.0000.$

Na petom iteracionom koraku dobili smo rešenja $x_1^{(5)} = 1$; $x_2^{(5)} = 2$; $x_3^{(5)} = 3$, a to su i tačna rešenja sistema, u šta se lako uveravamo stavljanjem ovih vrednosti u sistem.

Ove poboljšane vrednosti možemo skupiti u jednu tablicu:

R	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	1.4000	0.0000	0.0000
1	1.4000	1.6200	2.8840
2	0.9852	1.9914	2.9998
3	0.9992	2.0001	3.0001
4	1.0000	2.0000	3.0000
5	1.0000	2.0000	3.0000

PRIMER 9. Gaus-Sajdlovom metodom rešiti sistem:

$x_1-0.1x_2+0.2x_3+0.1x_4 = 0.6;\quad -0.1x_1+1.2x_2-0.1x_3-0.1x_4 = 0.3;$
$0.2x_1-0.1x_2+1.5x_3+0.2x_4 = 1.2;\quad 0.1x_1-0.1x_2+0.2x_3+1.0x_4 = 0.4.$

Rešenje. Matrica sistema je nesingularna, dijagonalni elementi su dominantni, pa možemo primeniti Gaus-Sajdlovu metodu. Napišimo sistem u obliku pogodnom za iteraciju: $x_1 = 0.6+0.1x_2-0.2x_3-0.1x_4$; $1.2\, x_2 = 0.3+0.1x_1+0.1x_3+0.1x_4$; $1.5x_3 = 1.2-0.2x_1+0.1x_2-0.2\, x_4$; $x_4 = 0.4-0.1\, x_1 + 0.1\, x_2 - 0.2\, x_3$.

Uzmimo za prvu aproksimaciju: $x_1^{(0)} = 0.6$, $x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = x_4^{(0)} = 0$.

$x_1^{(1)} = 0.6 + 0.1\, x_2^{(0)} - 0.2\, x_3^{(0)} - 0.1\, x_4^{(0)} = 0.6+0.1.0-0.2.0-0.1.0 = 0.6,$

$1.2.\, x_2^{(1)} = 0.3+0.1\, x_1^{(1)} + 0.1\, x_3^{(0)} + 0.1\, x_4^{(0)} = -0.3+0.1.0.6 + 0.1.0 + 0.1 . 0 = 0.24,$

$x_2^{(1)} = -\dfrac{0.24}{1.2} = -0.20,$

$1.5\, x_3^{(1)} = 1.2-0.2\, x_1^{(1)} + 0.1\, x_2^{(1)} - 0.2\, x_4^{(0)} = 1.2-0.2.0.6 + 0.1\,(-0.20) - 0.2.0 = 1.06,$

$x_3^{(1)} = \dfrac{1.06}{1.5} = 0.70667,$

$$x_4^{(1)} = 0.4 - 0.1\, x_1^{(1)} + 0.1\, x_2^{(1)} - 0.2\, x_3^{(1)} =$$

$$= 0.4 - 0.1 \cdot 0.6 - 0.1 \cdot 0.2 - 0.2 - 0.2 \cdot 0.70667 = 0.17867.$$

Na isti način računali bismo $x_j^{(2)}, x_j^{(3)}, \ldots$ $(j = 1,2,3,4)$. Dobijene rezultate možemo sredjeno da upisujemo u tablicu:

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$
0	0.60000	0	0	0
1	0.60000	−0.20000	0.70667	0.17867
2	0.42080	−0.14116	0.71066	0.20167
3	0.42356	−0.13867	0.70739	0.20230
4	0.424425	−0.138824	0.707182	0.202240
5	0.424457	−0.138843	0.707184	0.202232
6	0.424456	−0.138844	0.707185	0.202233
7	0.424456	−0.138844	0.707185	0.202233

Vrednosti $x_j^{(5)}$ i $x_j^{(6)}$ razlikuju se samo u 6-toj decimali, a da se $x_j^{(6)}$ i $x_j^{(7)}$ poklepaju u svih šest decimalnih mesta, što znači da smo našli rešenja sa tačnošću do 10^{-6}: $x_1 = 0.424456$; $x_2 = 0.138844$; $x_3 = 0.707185$; $x_4 = 0.202233$.

Z A D A C I

Gaus-Slajdlovom metodom rešiti sledeće linerane sisteme algebarskih jednačina:

1. $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= -3, \\ 4x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 16, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= -6. \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -2. \end{pmatrix}$$

2. $$\begin{aligned} 5x_1 - x_2 + 6x_3 + 2x_4 &= -13.38 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_4 &= -8.56 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 &= -3.54 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 18.14 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} x_1 = 2.68 \\ x_2 = -3.42 \\ x_3 = -1.94 \\ x_4 = 4.12 \end{pmatrix}$$

3. $$\begin{aligned} 7.9x_1 + 5.6x_2 + 5.7x_3 - 7.2x_4 &= 6.68 \\ 8.5x_1 - 4.8x_2 + 0.8x_3 + 3.5x_4 &= 9.95 \\ 4.3x_1 + 4.2x_2 - 3.2x_3 + 9.3x_4 &= 8.6 \\ 3.2x_1 - 1.4x_2 - 8.9x_3 + 3.3x_4 &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} x_1 = 0.96710 \\ x_2 = 0.12480 \\ x_3 = 0.42630 \\ x_4 = 0.56790 \end{pmatrix}$$

PREODREDJENI LINEARNI SISTEMI

To su sistemi kod kojih je broj jednačina veći od broja nepoznatih i u opštem slučaju jednačine nisu strogo saglasne medju sobom.

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + \ldots + f_1t &= n_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z + \ldots + f_2t &= n_2, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ a_sx + b_sy + c_sz + \ldots + f_st &= n_s. \end{aligned}$$

Ovi sistemi rešavaju se tako što se nalazi onaj skup vrednosti za nepoznate $x, s, \ldots, t$ koji najpribližnije zadovoljava sve jednačine sistema, odnosno koji čini veličine E_i, $i = 1,2,\ldots,s$,

$$\begin{aligned} E_1 &= a_1x + b_1y + c_1z + \ldots + f_1t - n_1, \\ E_2 &= a_2x + b_2y + c_2z + \ldots + f_2t - n_2, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ E_s &= a_sx + b_sy + c_sz + \ldots + f_st - n_s, \end{aligned}$$

koje zovemo greškama, što manjim. Potrebno je odrediti E_i da budu što manje, jer su E_i upravo odstupanja od nule.

Metoda najmanjih kvadrata, koja traži da je zbir $\sum_{i=1}^{s} E_i^2 = E_1^2 + \ldots + E_s^2$ minimalan, odredjuje onaj skup rešenja

L I T E R A T U R A

1. B.P.Demidović i I.A.Maron: Osnovi vičislitelnoj matematiki, Moskva, 197o
2. E.Whittaker i G.Robinson: Tečaj numeričke matematike, Beograd 1948.
3. Dr.ing.Vlatko Brčić: Tehnika računanja, Beograd 1961
4. Dr.Djuro Kurepa: Viša algebra II, Beograd 1971
5. Dr.Vladimir Vranić: O nomografiji, Zagreb 1925.

Žarko MIJAJLOVIĆ

PRIBLIŽNE METODE REŠAVANJA DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

ANALITIČKE METODE

I. Integracija pomoću redova

1. Rešiti diferencijalnu jednačinu $(x+1)y'' - xy' - y = 2x$ sa početnim uslovom $y(o) = 1$, $y'(o) = o$.

Rešenje.1.način: Rešenje date diferencijalne jednačine tražićemo u obliku reda $y = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$. U krugu konvergencije važiće:

$y' = \sum_{n=1}^{\infty} nA_n x^{n-1}$, $y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)A_n x^{n-2}$. Pošto je po pretpostavci y rešenje, važiće $(x+1)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\,A_n x^{n-2} - x\sum_{n=1}^{\infty} n\,A_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = 2x$. Otuda je:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\,A_n x^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)A_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} nA_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = 2x.$$

Kako je $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)A_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\,nA_{n+1}x^n$,

$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)A_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)\,A_{n+2}x^n = 2A_2 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)A_{n+2}x^n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = A_o + \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^n$ dobijamo

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nA_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)\,A_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} nA_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^n + 2A_2 - A_o = 2x.$$ Otuda je:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+1)nA_{n+1}x^n + (n+2)(n+1)A_{n+2}x^n - nA_nx^n - A_nx^n\right] +$$
$$+ 2A_2 - A_0 = 2x.$$

Sredjivanjem se dobija:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+2)A_{n+2} + nA_{n+1} - A_n\right](n+1)x^n + 2A_2 - A_0 = 2x.$$

Uporedjivanjem leve i desne strane dobija se:

$2A_2 - A_0 = 0$, $2(3A_3 + A_2 - A_1) = 2$ i $(n+2)A_{n+2} + nA_{n+1} - A_n = 0$ za $n \geqslant 2$.

Iz uslova $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ i $y = \sum_{n=0}^{\infty} A_nx^n = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots$, $y' = A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + \ldots$ dobijamo $A_0 = y(0)$, $A_1 = y'(0)$, odakle je $A_0 = 1$, $A_1 = 0$.

Kako je $2A_2 - A_0 = 0$ imamo $A_2 = 1/2$, a iz $3A_3 + A_2 - A_1 = 1$ dobijamo $A_3 = 1/6$.

Rekurentnu formulu $(n+2)A_{n+2} + nA_{n+1} - A_n = 0$ možemo zapisati u obliku $A_{n+2} = \frac{A_n - nA_{n+1}}{n+2}$. Stavljajući redom $n = 2,3,4,\ldots$, dobija se $A_4 = 1/24$, $A_5 = 1/120, \ldots$, Otuda je $y = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + \ldots = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \ldots$

Svaku od funkcija $y_n = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_nx^n$ možemo uzeti za približno rešenje, naprimer

$y_3 = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^3$.

Sve dobijene rezultate možemo pretstaviti u obliku tabele:

n	A_n	y_n
0	1	1
1	0	1
2	1/2	$1 + \frac{1}{2}x^2$
3	1/6	$1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$
4	1/24	$1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$
5	1/120	$1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5$
6	1/720	$1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6$

II način. Ako na jednačinu $(x+1)y'' - xy' - y = 2x$ primenimo operator diferenciranja D^n, dobija se za $n \geqslant 2$

$D^n[(x+1)y''] - D^n(xy') - D^ny = D^n2x$. Prema Lajbnicovoj formuli $D^n(uv) = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}D^r u D^{n-r}v$ imamo

$D^n[(x+1)y''] = (x+1)y^{(n+2)} + ny^{(n+1)}$, $D^n(xy') = xy^{(n+1)} + ny^{(n)}$. (Ovde je $D^ny = y^{(n)}$)

Otuda je $(x+1)y^{(n+2)} + ny^{(n+1)} - xy^{(n+1)} - ny^{(n)} - y^{(n)} = 0$,

pošto je $D^nx = x^{(n)} = 0$ za $n \geqslant 2$. Neka je $a_n = y^{(n)}(0)$. Kada u poslednju jednačinu zamenimo $x = 0$, dobija se

$y^{(n+2)}(0) + ny^{(n+1)}(0) - (n+1)y^{(n)}(0) = 0$ odakle je

$a_{n+2} + na_{n+1} - (n+1)a_n = 0$. Prema Maklorenovoj formuli

$y = \sum_{n=0}^{\infty} y^{(n)}0/n!.x^n$ onda je $y = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$. Iz početnih uslova nalazimo $a_0 = 1$, $a_1 = 0$. Da bismo našli a_3, diferencirajmo datu jednačinu samo jednom i stavimo $x = 0$. Tada dobijamo $a_2 + a_3 - 2a_1 = 2$, odakle je $a_3 = 1$. Dalje, ako rekurentnu formulu $a_{n+2} + na_{n+1} - (n+1)a_n = 0$ napišemo u obliku $a_{n+2} = (n+1)a_n - na_{n+1}$ i zamenjujemo redom $n = 2,3,4,\ldots$ dobija se $a_4 = 1$, $a_5 = 1$, $a_6 = 1, \ldots$.

Prema tome, rešenje je oblika $y = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots$

Primedba: Može se pokazati da niz $a_n = 1$ zadovoljava diferencijsku jednačinu $a_{n+2} = (n+1)a_n - na_n$, te je rešenje $y = 1 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$ odakle je $y = e^x - x$. Inače, opšte rešenje je oblika:

$$y = c_1e^x + c_2e^x\int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1}\,dt - x.$$

2. Rešiti jednačinu $y'' - xy' - y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

<u>**Rezultat**</u>: $y = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2.4\ldots 2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n . n!}$.

3. Rešiti jednačinu $(x^2+1)\, y'' + xy' + 2xy = 0$,
$y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.

<u>**Rezultat**</u>. $y = 2 + 3x - 7x^3/6 - x^4/2 + 21x^5/40 + \ldots$.

4. Rešiti jednačinu $xy'' + y' + 2y = 0$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 4$.

<u>Uputstvo</u>. Tražiti rešenje u obliku Tejlorovog reda
$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}(x-1)^n$ gde je $a_n = y^{(n)}(1)$. Primenjujući operator D^n na datu jednačinu, zamenjujući dobijeni rezultat $x=1$, pokazati da niz a_n zadovoljava za svaki prirodni broj n diferencijsku jednačinu $a_{n+2} + (n+1)\, a_{n+1} + 2a_n = 0$.
a_0 i a_1 odrediti iz početnih uslova ($a_0 = 2$, $a_1 = 4$). Rešenje je:

$$y = 2 + 4(x-1) - 4(x-1)^2 + 4(x-1)^3/3 - (x-1)^4/3 + 2(x-1)^5/15 + \ldots$$

5. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y' = x^2 + y^2$ sa početnim uslovima a) $y(0) = 1$; b) $y(0) = 0$.

<u>**Rešenje**</u>. Nepoznatu funkciju ćemo tražiti u obliku Maklorenovog reda
$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$, $a_n = y^{(n)}(0)$. Iz jednačine $y' = x^2 + y^2$ primenom izvoda dobija se:

$y' = x^2 + y^2$; $y'' = 2x + 2yy'$; $y''' = 2 + 2y'^2 + 2yy''$; $y^{IV} = 6y'y'' + 2yy'''$;
$y^{V} = 2yy^{IV} + 8y'y''' + 6(y'')^2$.

Iz uslova $a_n = y^{(n)}(0)$ nalazimo:

a. $a_0 = y(0) = 1$,
$a_1 = y'(0) = 0^2 + 1^2 = 1$,

$a_2 = y''(0) = 2.0 + 2y(0)y'(0) = 2a_0 a_1 = 2$,
$a_3 = y'''(0) = 2 + 2y'^2(0) + 2y(0)y''(0) = 2 + 2a_1^2 + 2a_0 a_2 = 8$.

Slično nalazimo $a_4 = 28$; $a_5 = 144$. Otuda je

$$y = 1 + x + \frac{2}{2!} x^2 + \frac{8}{3!} x^3 + \frac{28}{4!} x^4 + \frac{144}{5!} x^5 + \ldots$$

Funkciju $\hat{y} = 1 + x + x^2 + \frac{4}{3} x^3 + \frac{7}{6} x^4 + \frac{77}{60} x^5$ možemo uzeti za približno rešenje.

Pokazati da je za $n \geq 3$ $a_{n+1} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a_r a_{n-r}$ (koristiti Lajbnicovu formulu).

II. <u>Picard-ova metoda</u> (metoda sukcesivnih aproksimacija)

6. Rešiti diferencijalnu jednačinu sa početnim uslovom:
$y' = x + y$, $y(0) = 1$.

<u>Rešenje</u>. Za jednačinu $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ iteraciona formula je
$y_{n+1} = y_0 \int_{x_0}^{x} f(x, y_n)\, dx$. Da bi se ova formula mogla primeniti, dovoljno je da je funkcija (od dve promenljive) $f(x,y)$ neprekidna i da je parcijalni izvod $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ ograničen u nekoj okolini tačke (x_0, y_0) .
Kako je u našem slučaju $f(x,y) = x+y$, to je $f(x,y)$ očigledno neprekidna.

Sa druge strane $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 1$, te je izvod ograničen. Iteraciona formula postaje $y_{n+1} = 1 + \int_{x_0}^{x} (x + y_n)\, dx$, $y_0 = 1$.

Stavljajući $n = 0$ dobija se $y_1 = 1 + \int_0^x (x+1)\, dx = 1 + x + x^2/2$.

Za $n = 1,2,3,\ldots$ dobija se:

$$y_2 = 1 + \int_0^x (x + y_1)\, dx = 1 + \int_0^x (x + 1 + x + \tfrac{1}{2} x^2)\, dx = 1 + x + x^2 + \tfrac{1}{6} x^3$$
$$y_3 = 1 + \int_0^x (x + y_2)\, dx = 1 + \int_0^x (x + 1 + x^2 + \tfrac{1}{6} x^3)\, dx = 1 + x + x^2 + \tfrac{1}{3} x^2 + \tfrac{1}{24} x^4$$
$$y_4 = 1 + \int_0^x (x + y_3)\, dx = 1 + \int_0^x (x + 1 + x + x^2 + \tfrac{1}{3} x^3 + \tfrac{1}{24} x^4)\, dx =$$

9. Euler-ovom metodom rešiti diferencijalnu jednačinu $y' = 2x+y$ sa početnim uslovom $y(0) = 1$.

Rešenje. Kao što znamo, ova metoda daje samo konačan skup vrednosti nepoznate funkcije y. Te vrednosti računamo preko rekurentne formule $y_{n+1} = y_n + hf(x_n,y_n)$, gde su x_0 i $y_0 = y(x_0)$ zadate početne vrednosti. Konstanta h predstavlja korak procesa i x_{n+1} odredjujemo iz $x_{n+1} = h + x_n$.

Rešimo zadatak za dva koraka a) $h = 0.2$; b) $h = 0.1$. U našem slučaju je $f(x,y) = 2x + y$. Prema tome, imamo:

a. 1° $x_1 = x_0+h = 0.2$, $f(x_0,y_0) = f(0,1) = 1.000$,
$y_1 = y_0+hf(x_0,y_0) = 1.000+0.2(1.000) = 1.200$,

2° $x_2 = x_1+h = 0.4$, $f(x_1,y_1) = f(0.2,1.200) = 1.600$,
$y_2 = y_1+hf(x_1,y_1) = 1.200+0.2(1.600) = 1.520$,

3° $x_3 = x_2+h = 0.6$, $f(x_2,y_2) = f(0.4,1.520) = 2.320$
$y_3 = y_2+hf(x_2,y_2) = 1.520+0.2(2.320) = 1.984$,

4° $x_4 = x_3+h = 0.8$ $f(x_3,y_3) = f(0.6,1.984) = 3.184$,
$y_4 = y_3+hf(x_3,y_3) = 1.984+0.2(3.184) = 2.621$,

5° $x_5 = x_4+h = 0.8$, $f(x_4,y_4) = f(0.8,2.621) = 4.221$,
$y_5 = y_4+hf(x_4,y_4) = 2.621+0.2(4.221) = 3.465$.

Primetimo da smo pronašli približne vrednosti funkcije y, na tri decimale, u tačkama iz skupa $\{0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0\}$

b. U slučaju $h = 0.1$ radimo na sličan način. Naprimer:

1° $x_1 = x_0+h = 0.1$, $f(x_0,y_0) = f(0.1) = 1.000$,
$y_1 = y_0+hf(x_0,y_0 = 1.000+0.1(1.000) = 1.100$

2° $x_2 = x_1+h = 0.2$, $f(x_1,y_1) = f(0.1, 1.100) = 1.300$,
$y_2 = y_1+hf(x_1,y_1) = 1.100+0.1(1.300) = 1.230$.

Slično bismo radili dok ne bismo pronašli vrednost y_{10}. Te podatke možemo prikazati u obliku sledeće tabele:

n	x_n	$h = 0.2$	$h = 0.1$	y (prava vrednost u tački x_n)
0	0.0	1.000	1.000	1.000
1	0.1		1.100	1.116
2	0.2	1.200	1.230	1.264
3	0.3		1.393	1.450
4	0.4	1.520	1.592	1.675
5	0.5		1.831	1.946
6	0.6	1.984	2.114	2.266
7	0.7		2.445	2.641
8	0.8	2.621	2.830	3.076
9	0.9		3.273	3.579
10	1.0	3.465	3.780	4.155

U poslednjoj koloni vrednosti za y računali smo preko pravog rešenja $y = 3e^x-2x-2$, zadate diferencijalne jednačine.

Greške metode možemo prikazati u obliku tabele:

x_n	greška $h=0.2$	greška $h = 0.1$
0.2	0.064	0.034
0.4	0.155	0.083
0.6	0.282	0.152
0.8	0.455	0.246
1.0	0.690	0.375

Primetimo, da ako je korak h manji, to su onda dobijene vrednosti tačnije. Inače, greška je $\Delta_h = y_n - y(x_n)$, gde je y_n vrednost dobijena Euler-ovim algoritmom.

Primedba: Pored ove metode upotrebljava se i modifikovana (poboljšana) Euler-ova metoda. Postupak bi izgledao ovako. Nadje se prva aproksimacija $y_1^{(1)}$ za $y(x_1)$ iz formule $y_1^{(1)} = y_0+hf(x_0,y_0)$. Druga aproksimacija $y_1^{(2)}$ za $y(x_1)$ nalazi se iz formule:

$$y_1^{(2)} = y_0+h\,\frac{f(x_0,y_0)+f(x_1,y_1^{(1)})}{2}$$

Analogno će biti $y_1^{(3)} = y_0+h\,\frac{f(x_0,y_0)+h\,f(x_1,y_1^{(2)})}{2}$

U opštem slučaju k-te aproksimacija za $y(x_1)$ nalazi se iz rekurentne formule

$$y_1^{(k)} = y_0+h\,\frac{f(x_0,y_0)+h\,f(x_1,y_1^{(k-1)})}{2}$$

. Postupak se nastavlja sve dok se ne poklope na željenom broju cifara $y_1^{(k-1)}$ i $y_1^{(k)}$. U tom slučaju $y_1^{(k)}$ uzimamo za y_1, za "najbolju" aproksimaciju vrednosti $y(x_1)$. Tada računamo $x_2 = x_1+h$ i ponovo ponavljamo prethodnu proceduru:

$$y_2^{(1)} = y_1 + h\,f(x_1,y_1)$$

$$y_2^{(2)} = y_1 + h\,\frac{f(x_1,y_1)+f(x_2,y_2^{(1)})}{2}$$

$$y_2^{(3)} = y_1 + h\,\frac{f(x_1,y_1)+f(x_2,y_2^{(2)})}{2},\ldots$$

dok se ne poklope na željenom broju cifara $y_2^{(k-1)}$ i $y_2^{(k)}$. U tom slučaju $y_2^{(k)}$ uzimamo za y_2. y_3, y_4, itd. računamo na analogan način.

Primenimo ovu metodu na prethodnu jednačinu da bismo izračunali $y(0.2)$ i $y(0.4)$ sa korakom $h = 0.2$. Imamo (računajući na tri decimale) :

$$y_1^{(1)} = y_0+h\,f(x_0,y_0) = 1.000+0.2(1.000) = 1.200,$$

$$y_1^{(2)} = y_0+h\,\frac{f(x_0,y_0)+f(x_1,y_1^{(1)})}{2} = 1.000+0.2\,\frac{1.000+1.600}{2} = 1.260,$$

$$y_1^{(3)} = y_0+h\,\frac{f(x_0,y_0)+f(x_1,y_1^{(2)})}{2} = 1.000+0.2\,\frac{1.000+1.660}{2} = 1.266,$$

$$y_1^{(4)} = y_0+h\,\frac{f(x_0,y_0)+f(x_1,y_1^{(3)})}{2} = 1.000+0.2\,\frac{1.000+1.660}{2} = 1.267,$$

$$y_1^{(5)} = y_0+h\,\frac{f(x_0,y_0)+f(x_1,y_1^{(4)})}{2} = 1.000+0.2\,\frac{1.000+1.667}{2} = 1.267.$$

Vidimo da je $y_1^{(4)} = y_1^{(5)}$ te je $y_1 = 1.267$ vrednost u tački $x_1 = 0.2$.

Dalje je $x_2 = x_1+h = 0.4$. Otuda imamo

$$y_2^{(1)} = y_1+h\,f(x_1,y_1) = 1.267+0.2(1.667) = 1.600,$$

$$y_2^{(2)} = y_1+h\,\frac{f(x_1,y_1)+f(x_2,y_2^{(1)})}{2} = 1.267+\frac{1.667+2.474}{2} = 1.681.$$

Analogno bismo našli $y_2^{(3)}$, $y_2^{(4)}$, $y_2^{(5)}$. Kako je $y_2^{(4)} = y_2^{(5)} = 1.682$, to je $y_2 = 1.682$. Uporedimo rezultate dobijene na ovaj način sa osnovnom Euler-ovom metodom:

x_n	Tačna vrednost na 3 decimale	Osnovna E.metoda y_n	Osnovna E.metoda greška	Modifikovana E.metoda y_n	Modifikovana E.metoda greška
0.2	1.264	1.230	0.034	1.267	0.003
0.4	1.675	1.592	0.083	1.682	0.007

Vidimo da je modifikovana Euler-ova metoda tačnija od osnovne; medjutim, ona zahteva i mnogo više računanja. Koju ćemo upotrebiti, zavisi od toga da li tražimo veću ili manju tačnost.

10. Euler-ovom metodom rešiti jednačinu $y' = 2xy$, $x = 0$, $y = 1$ sa korakom $h = 0.05$ u intervalu $[0, 0.8]$ na dve decimale.

<u>Rezultat.</u>

x_n	0.0	0.05	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80
y_n	1.00	1.00	1.01	1.04	1.09	1.18	1.27	1.44	1.61	1.90

<u>Metoda Runge-Kutta</u>

11. Metodom Runge-Kutta odrediti $y(0.81)$, ako y zadovoljava diferencijalnu jednačinu $y' = \sqrt{x+y}$ i $y_0 = 0.41$ za $x_0 = 0.4$.

Rešenje. Za diferencijalnu jednačinu $y' = f(x,y)$, ako znamo $y(x)$, tada $y(x+h)$ računamo preko sledećih formula:

$$k_1 = hf(x,y),$$
$$k_2 = hf(x+h/2,\ y+k_1/2),$$
$$k_3 = hf(x+h/2,\ y+k_2/2),$$
$$k_4 = hf(x+h,\ y+k_3),$$
$$k = (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6,$$
$$y(x+h) = y(x) + k.$$

U našem slučaju biće $f(x,y) = \sqrt{x+y}$ i $h = x-x_o = 0.81-0.41 = 0.4$, te je

$$k_1 = h\ f(x_o,y_o) = 0.4\sqrt{0.81} = 0.36,$$
$$k_2 = h\ f(x_o+h/2,\ y_o + k_1/2) = 0.4\sqrt{1.19} = 0.43635,$$
$$k_3 = h\ f(x_o+h/2,\ y_o+k_2/2) = 0.4\sqrt{1.22817} = 0.44329,$$
$$k_4 = h\ f(x_o+h,\ y_o+k_3) = 0.4\sqrt{1.65329} = 0.51432,$$
$$k = (k_1+2k_2 + 2k_3 + k_4)/6 = 0.43893,$$
$$y = y_o + k = 0.84893.$$

12. Rešiti diferencijalnu jednačinu $y' = xy^{1/3}$, $y(1) = 1$ metodom Runge-Kutta sa korakom $h = 0.1$, na pet decimala.

Rezultat. Vrednosti su dobijene na računaru. Sledeća tablica prikazuje svaku desetu vrednost:

x	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
y	1.00000	2.82846	7.02113	14.69710	26.99998

13. Metodom Runge-Kutta rešiti diferencijalnu jednačinu $y'' + 2xy' - 4y = 0$; $x_o = 0$; $y_o = 0.2$; $y' = 0.5$.

Rešenje. Data diferencijalna jednačina drugog reda ekvivalentna je sledećem sistemu diferencijalnih

jednačina prvog reda:

$y' = z$; $z' = 4y - 2xz$; $x_o = 0$; $y_o = 0.2$; $z_o = 0.5$.

Ovde smo u stvari uveli novu promenljivu $z = y'$, i nju smo stavljali na mesto y' gde god se y' pojavljivalo u zadatoj jednačini. Za sistem diferencijalnih jednačina prvog reda $y' = f(x,y,z)$; $z' = g(x,y,z)$ koriste se slične aproksimacione formule Runge-Kutta, kao i za jednu jednačinu

$$k_1 = hf(x_o,y_o,z_o), \qquad t_1 = hg(x_o,y_o,z_o);$$
$$k_2 = hf(x_o+h/2,y_o+k_1/2,z_o+t_1/2); \quad t_2 = hg(x_o+h/2,y_o+k_1/2,z_o+t_1/2);$$
$$k_3 = hf(x_o+h/2,y_o+k_2/2,z_o+t_2/2); \quad t_3 = hg(x_o+h/2,y_o+k_2/2,z_o+t_2/2);$$
$$k_4 = hf(x+h,y_o+k_3,z_o+t_3); \qquad t_4 = hg(x_o+h,y_o+k_3,z_o+t_3);$$
$$k = (k_1+2k_2+2k_3+k_4)/6; \qquad t = (t_1+2t_2+2t_3+t_4)/6;$$
$$y(x_o+h) \doteq k + y_o; \qquad z(x_o+h) \doteq t + z_o.$$

U našem slučaju je $f(x,y,z) = z$; $g(x,y,z) = 4y - 2xz$. Izaberimo korak $h = 0.1$. Tada je, prema prethodnim formulama,

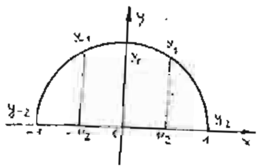
$$k_1 = 0.05000, \qquad t_1 = 0.08000,$$
$$k_2 = 0.05400, \qquad t_2 = 0.08460,$$
$$k_3 = 0.05423, \qquad t_3 = 0.08538,$$
$$k_4 = 0.058538, \qquad t_4 = 0.08992,$$
$$k = 0.054166, \qquad t = 0.08498,$$
$$y(x_o+h) = y(0.1) \doteq 0.25417, \qquad z(x_o+h) = z(0.1) \doteq 0.58498.$$

Primetimo, da smo tražili samo vrednost y, te nismo morali da računamo z i t_3. Ako bismo hteli da izračunamo $y(0.2)$, tada bismo izabrali $x_o = 0.1$, za y_o i z_o uzeli da bi nevodobijene vrednosti $y_o = 0.25417$ i $z_o = 0.58498$, korak $h = 0.1$. Dalje, proces računanja bi tekao kao malopre.

Granični problem (konturni problem)

14. Metodom konačnih razlika naći rešenje graničnog problema $y'' + (1+x^2)y = -1$; $y(-1) = y(1) = 0$.

Rešenje. Za čvorove izaberimo $x_{-2} = -1$; $x_{-1} = -1/2$; $x_0 = 0$; $x_1 = 1/2$; $x_2 = 1$. Zbog simetričnosti jednačine i graničnih uslova, biće i rešenje simetrično u odnosu na x-osu, tj. $y(x) = y(-x)$, te je $y_{-2} = y_2 = 0$; $y_{-1} = y_1$. (Simetričnost izlazi iz toga što funkcija $y(-x)$ zadovoljava datu diferencijalnu jednačinu(proveriti!) a takodje i granične uslove).



Aproksimacije za $y'(x_i)$ i $y''(x_i)$ date su sa

$y'(x_i) \doteq (y_{i+1} - y_{i-1})/2h$

$y''(x_i) \doteq (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})/h^2$

Ovde je $y_i = y(x_i)$.

Izaberimo korak $h = 1/2$.

Zamenjujući te formule u datu jednačinu za $x_0 = 0$ imamo:

$\frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{1/4} + y_0 = -1$. Analogno za $x = 1/2$ imamo $\frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{1/4} + (1+1/4)y_1 = -1$.

Koristeći granični uslov $y_2 = y_{-2} = 0$ i simetričnost rešenja, zbog čega je $y_1 = y_{-1}$, imamo ovaj sistem linearnih jednačina:

$-7y_0 + 8y_1 = -1$; $4y_0 - 6.75y_1 = -1$, odakle je $y_0 = 0.967$, $y_1 = 0.721$, a otuda i $y_{-1} = 0.721$.

15. Rešiti granični problem $y'' = y + x$; $y(0) = y(1) = 0$.

Rešenje. Izaberimo korak $h = 0.2$. Tada ćemo naći rešenje u tačkama 0.2, 0.4, 0.6, 0.8. Koristeći formule iz prethodnog zadatka dobijamo ovaj sistem jednačina:

$25y_2 - 51y_1 = 0.2$; Ovde je $y_i = y(x_i)$, $y_0 = y(0)$,

$25y_3 - 51y_2 + 25y_1 = 0.4$; $y_5 = y(1)$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$

$25y_4 - 51y_3 + 25y_2 = 0.6$; $x_3 = 0.6$; $x_4 = 0.8$.

$-51y_4 + 25y_3 = 0.8$.

Rešenje navedenog sistema linearnih jednačina predstavlja rešenje približno postavljenog graničnog problema.

16. Rešiti granični problem $y'' - 2xy' - 2y = -4x$, $y'(0) - y(0) = 0$, $y(1) = 3.718$.

Rešenje. Izabraćemo korak $h = 0.25$ što znači da ćemo računati vrednosti $y_i = y(x_i)$ u tačkama $x_1 = 0.25$, $x_2 = 0.5$, $x_3 = 0.75$.

Koristeći aproksimacione formule za prvi i drugi izvod (videti zadatak 14.) imamo ovaj niz jednačina:

(1) $\frac{y_2-2y_1+y_0}{0.25^2} - 2\cdot 0.25\,\frac{y_2-y_0}{2\cdot 0.25} - 2y_1 = -4\cdot 0.25$,

(2) $\frac{y_3-2y_2+y_1}{0.25^2} - 2\cdot 0.5\,\frac{y_3-y_1}{2\cdot 0.25} - 2y_2 = -4\cdot 0.5$,

(3) $\frac{y_4-2y_3+y_2}{0.25^2} - 2\cdot 0.75\,\frac{y_4-y_2}{2\cdot 0.25} - 2y_3 = -4\cdot 0.75$.

Iz prvog graničnog uslova imamo $y_0 - y_0' = 0$. Kako je ovaj granični problem sa graničnim uslovima oblika $ay(x_0) + by'(x_0) = A$; $a_1y(x_n) + b_1y'(x_n) = B$; ($x_0$ i x_n su redom početna i krajnja tačka), to se onda koriste aproksimacione formule za $y'(x_0) = y_0'$ i $y'(x_n) = y_n'$:

$y_0' = \frac{-y_2+4y_1-3y_0}{2h}$; $\quad y_n' = \frac{3y_n-4y_{n-1}+y_n}{2h}$.

U našem slučaju je $a = 1$; $b = -1$; $A = 0$; $a_1 = 1$; $b_1 = 0$; $B = 3.718$. Otuda postavljamo jednačinu:

(4) $y_o - (-y_2+4y_1-3y_o)/(2.\ o.25) = o.$

Formulu $y'_n = \dfrac{3y_n-4y_{n-1}+y_n}{2h}$ nema potrebe da koristimo, jer se u drugom graničnom uslovu date jednačine ne pojavljuje $y'(1)$.

Sredjivanjem, dobija se ovaj sistem linearnih jednačina:

$$\begin{aligned}
17y_o - 34y_1 + 15y_2 \qquad\qquad &= -1,\\
18y_1 - 34y_2 + 14y_3 \qquad &= -2,\\
19y_2 - 34y_3 + 13y_4 &= -3,\\
7y_o - 8y_1 - 2y_2 \qquad\qquad &= o.
\end{aligned}$$

Primetimo da je $y_4 = 3.718$ (drugi granični uslov). Rešenja su $y_o = o.9889$; $y_1 = 1.3118$; $y_2 = 1.7859$; $y_3 = 2.5o77$.

Parcijalne diferencijalne jednačine

17. Naći približno rešenje parcijalne diferencijalne jednačine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = o,$$

koja na krugu $x^2 + y^2 = 16$, zadovoljava uslov $u(x,y) = x^2y^2$.

Rešenje. Zadatak ćemo rešiti metodom mreža.

Nad datom oblašću G konstruiše se kvadratna mreža sa korakom h. Tada za Laplasovu jednačinu $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = o$ za približno rešenje koristi rekurentna formula $u(x,y) = \frac{1}{4}\, u(x-h,y) + u(x+h,y) + u(x,y+h) + u(x,y-h))$, ili u drugom obliku $u_{ij} = \frac{1}{4}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1})$, $u_{i,j} = u(x_i,y_j)$, gde su tačke $M(x_i,y_i)$ čvorovi mreže.

Onda iz navedene rekurentne formule i graničnog uslova odredjujemo sistem linearnih algebarskih jednačina, čije rešenje jeste i približno rešenje odgovarajuće parcijalne jednačine.

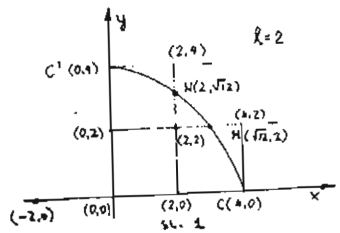
U našem slučaju data oblast G je odredjena krugom K: $x^2+y^2 = 16$, a granični uslov je $u(x,y|_K = x^2y^2$ (oznaka $u(x,y)|_K = x^2y^2$ znači činjeniou $M(x,y)\in K \to u(x,y) = x^2y^2$).

Pošto je rešenje simetrično (videti zadatak 14.), to ćemo posmatrati samo četvrtinu kruga u prvom kvadrantu. Zbog simetričnosti funkcije $u(x,y)$ važiće:

(1) $u(x,y) = u(x,-y) = u(-x,y) = u(-x,-y) = u(y,x).$

1° Izaberimo mrežu sa korakom $h = 2$ (sl. 1) . Čvorovi mreže (u prvom kvadrantu) su tačke sa koordinatama (o,o), $(o,2)$, $(o,4)$, $(2,o)$, $(2,2)$, $(2,4)$, $(4,o)$, $(4,2)$.

Ovde je $x_o = o$; $x_1 = 2$; $x_2 = 4$; $y_o = o$; $y_1 = 2$; $y_2 = 4$.



sl. 1

Uzimamo da je $u_{12} = u(x_1,y_2) = u(2,4) \doteq u(N) = u(2,\sqrt{12}) = 2^2(\sqrt{12})^2 = 48$ i slično $u_{21} = u(4,2) \doteq u(M) = 48$. Očigledno je $u_{o,2} = u(C) = u(o,4) = o$, $u_{2,o} = u(C') = o$ i $u_{o,1} = u(o,2) = u(2,o) = u_{1,o}$.

Postavimo sada ostale jednačine:

$$\begin{aligned}
u_{o,o} &= (u_{-1,o} + u_{1,o} + u_{o,-1} + u_{o,1})/4,\\
u_{1,o} &= (u_{o,o} + u_{2,o} + u_{1,1} + u_{1,-1})/4, \qquad (2)\\
u_{1,1} &= (u_{o,1} + u_{2,1} + u_{1,o} + u_{1,2})/4
\end{aligned}$$

Označimo $a = u_{o,o}$; $b = u_{o,1}$; $c = u_{1,1}$. Tada zbog uslova (1) važi

$b = u_{o,1} = u_{1,o} = u_{-1,o} = u_{o,-1}$, $c = u_{1,1} = u_{1,-1}$.

Otuda se sistem (2) redukuje na:

$a = \frac{1}{4} 4b, \; b = (a+2b+c)/4, \; c = (2b+48+48)/4.$

Rešenja navedenog sistema su $a = 24;\; b = 24;\; c = 36.$

2° Ako bismo želeli više vrednosti funkcije $u(x,y)$, onda se izabere gušća mreža sa korakom, naprimer, $h = 1$ (videti sl.2). Prema sl.2 je $u(A) = u(A') \doteq 15$, $u(B) = u(B') \doteq 48$, $u(C) = 63$.

Slično kao malopre, uvodeći analogne oznake, postavljamo sistem linearnih jednačina

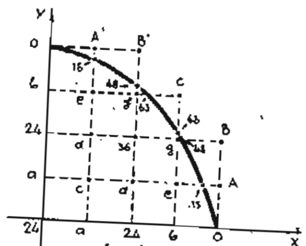
$e = (c+36+48+24)/4,$ $\quad f = (48+e+63+36)/4,$

$b = (e+e+c+24)/4,$ $\quad c = (24+24+24+36)/4,$

$d = (e+c+24+36)/4,$ $\quad a = (24+24+c+c)/4.$

Rešavanjem, dobija se $a = 26;\; b = 20;\; c = 27;\; d = 28;\; e = 27;\; f = 44.$

Primetimo da smo u ovom slučaju koristili vrednosti dobijene u 1°.



SL. 2.

L I T E R A T U R A

1. B.P.Demidovič, I.A.Maron, E.E.Šuvalov: "Čislennie metodii analiza", Moskva, 1967

2. Frank Ayres: "Differential equations", Schaum's outline series.

3. Francis Scheid: "Numerical analysis", Schaum's outline series.

4. Shepley L.Ross: "Differential equations", Blaisdell publishing Company, 1965.

Sadržaj Strana